UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Matematica e Applicazioni 'R. Caccioppoli'

Dottorato di ricerca in Scienze Matematiche

XXVI ciclo

I SOTTOGRUPPI NORMALI GENERALIZZATI NEI GRUPPI INFINITI

Tesi di Dottorato

di

Caterina Rainone

Introduzione

Un sottogruppo X di un gruppo G è detto normale se, per ogni $g \in G$, il laterale destro ed il laterale sinistro di X mediante g coincidono. Banalmente, se un sottogruppo X di un gruppo G è normale, allora coincide con la sua chiusura normale X^G e con il suo nocciolo X_G in G ed inoltre il suo normalizzante $N_G(X)$ in G coincide con tutto G.

Si dice che un sottogruppo X di G è almost normale, nearly normale o normale-per-finito se è finito, rispettivamente, l'indice del normalizzante $N_G(X)$ in G, l'indice $|X^G : X|$ di X nella propria chiusura normale in G oppure l'indice $|X : X_G|$ di X sul suo nocciolo in G.

Per un noto risultato di Dedekind, un gruppo non abeliano ha tutti i sottogruppi normali se e solo se è il prodotto diretto di un gruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni di ordine 8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di ordine 4.

Più in generale, l'imposizione di una delle generalizzazioni di normalità sopra definite a tutti i sottogruppi di un gruppo G ha una forte influenza sulla struttura di G. In un importante articolo del 1955, B. H. Neumann [21] caratterizzò i gruppi aventi tutti i sottogruppi almost normali e i gruppi con tutti i sottogruppi nearly normali. Assieme a J. Buckley, J. C. Lennox, H. Smith e J. Wiegold [3], Neumann studiò anche i gruppi localmente finiti in cui ogni sottogruppo ha indice finito sul suo nocciolo.

Il primo capitolo della tesi contiene le definizioni e i risultati preliminari indispensabili per una buona comprensione dei contenuti successivi.

Oggetto del secondo capitolo saranno i gruppi in cui ciascun sottogruppo è almost normale oppure nearly normale e riguarderà risultati contenuti nell'articolo *"Infinite groups with many generalized normal subgroups"* [15].

Nel terzo capitolo, infine, saranno trattati i gruppi in cui ciascun sottogruppo è nearly normale oppure normale-per-finito e conterrà risultati presenti nell'articolo *" Locally finite groups whose subgroups have finite normal oscillation"* [14].

Notazioni e terminologia sono quelle usuali in Teoria dei Gruppi; in particolare si fa riferimento a [23].

Desidero ringraziare il Prof. Francesco de Giovanni che in questi anni mi ha costantemente guidato e supportato nel lavoro di ricerca e nella stesura di questa tesi.

Inoltre, ringrazio la Prof.ssa C. Musella, la Dott.ssa M. De Falco, il Dott. A.

Russo e la Prof.ssa P. D'Aquino per la disponibilità che mi hanno sempre dimostrato.

Capitolo 1

Alcuni aspetti di Teoria dei Gruppi

1.1 FC-gruppi

Definizione 1.1.1. *Sia G un gruppo. Un elemento g di G si dice un FC-elemento se è dotato di un numero finito di coniugati in G o, equivalentemente, se l'indice $|G : C_G(g)|$ del centralizzante $C_G(g)$ in G è finito.*

Definizione 1.1.2. *L'insieme $C(G)$ costituito dagli FC-elementi di un gruppo G è detto FC-centro di G.*

Proposizione 1.1.1. *Sia G un gruppo. L'FC-centro $C(G)$ di G è un sottogruppo caratteristico.*

Dim: Banalmente l'elemento neutro di G appartiene a $C(G)$.

Siano x e y due elementi di $C(G)$. Allora l'indice $|G : C_G(x) \cap C_G(y)|$ è finito.

D'altra parte, vale certamente la seguente relazione

$$C_G(x) \cap C_G(y) \leq C_G\left(x^{-1}y\right),$$

quindi anche l'indice $|G : C_G(x^{-1}y)|$ è finito, ovvero l'elemento $x^{-1}y$ appartiene a $C(G)$.

Infine $C(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G in quanto ogni automorfismo di G manda FC-elementi in FC-elementi. □

Definizione 1.1.3. *Sia G un gruppo. La serie FC-centrale superiore di G è la serie normale ascendente $\{C_\alpha(G)\}_\alpha$ definita ponendo $C_0(G) = \{1\}$,*

$$C_{\alpha+1}(G)/C_\alpha(G) = C(G/C_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$C_\lambda(G) = \bigcup_{\beta<\lambda} C_\beta(G)$$

se λ è un ordinale limite.

Definizione 1.1.4. *Un gruppo G si dice un FC-gruppo se coincide con il suo FC-centro.*

Evidentemente, sottogruppi e quozienti di FC-gruppi sono a loro volta FC-gruppi, ma la classe degli FC-gruppi non è chiusa rispetto alle estensioni.

Basti pensare, ad esempio, al gruppo diedrale infinito $D_\infty = \langle a, x \rangle$ con a di ordine infinito e x di ordine 2; esso è estensione dell'FC-gruppo $\langle a \rangle$ mediante un gruppo abeliano finito, ma non è un FC-gruppo.

Banalmente, i gruppi abeliani ed i gruppi finiti sono FC-gruppi. Tuttavia, queste due classi non esauriscono tutti gli FC-gruppi. Ad esempio, il prodotto diretto di gruppi finiti è un FC-gruppo, ma non è detto che sia finito.

Ulteriori esempi di FC-gruppi sono forniti dai gruppi G il cui centro $Z(G)$ ha indice finito in G. Tuttavia, è sufficiente considerare l'FC-gruppo

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \times \cdots,$$

dove S_i denota il gruppo simmetrico di ordine i, per convincersi che i gruppi dotati di centro di indice finito non esauriscono tutti gli FC-gruppi.

In altre parole, se G è un gruppo avente centro di indice finito, allora G è un FC-gruppo, ma non vale, in generale, l'implicazione inversa.

Nel caso dei gruppi finitamente generati, tuttavia, vale il seguente

Teorema 1.1.1 (B.H. Neumann [21])**.** *Se G è un FC-gruppo finitamente generato, allora il quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dim: Per ipotesi, G è finitamente generato, quindi esiste un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_t\}$ di elementi di G tale che $G = \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$. Dato che G è un FC-gruppo, l'indice

$$|G : C_G(x_i)|$$

è finito per ogni $i = 1, \ldots, t$. Ma allora anche il centro

$$Z(G) = \bigcap_{i=1,\ldots,t} C_G(x_i)$$

ha indice finito in G. $\square$

Definizione 1.1.5. *Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due classi di gruppi. Un gruppo G è $\mathcal{X}$-per-$\mathcal{Y}$ se esiste un sottogruppo normale N di G tale che*

$$N \in \mathcal{X} \text{ e } G/N \in \mathcal{Y}.$$

Osservazione 1.1.1. *Sia G un FC-gruppo abeliano-per-finito. Allora il quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Infatti, sia A un sottogruppo abeliano di G avente indice finito in esso e sia

$$\{x_1, \ldots, x_t\}$$

un trasversale destro di A in G. L'intersezione

$$A \cap (\bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i))$$

è contenuta in $Z(G)$ ed ha banalmente indice finito in G. Pertanto anche l'indice $|G : Z(G)|$ è finito.

Il seguente risultato, noto come "Lemma di Dietzmann", fornisce un'utile caratterizzazione degli FC-gruppi periodici.

Lemma 1.1.1 (A.P. Dietzmann [10]). *Sia G un gruppo e sia*

$$X = \{x_1, \dots, x_t\}$$

un sottoinsieme di G costituito da elementi periodici aventi un numero finito di coniugati in G. Allora la chiusura normale

$$\langle x_1^g, \dots, x_t^g \mid g \in G\rangle = X^G$$

di X in G è finita.

Dim: Giacchè gli elementi di X appartengono all'FC-centro di G, si può supporre senza perdita di generalità che l'insieme

$$\{x_1, \dots, x_t\}$$

contenga tutti i coniugati di tutti i suoi elementi. Allora risulta

$$X^G = \langle x_1, \dots, x_t\rangle.$$

Sia a un qualsivoglia elemento non identico di X^G. Allora esistono opportuni interi $i_1, i_2, \dots, i_n$ appartenenti all'insieme $\{1, 2, \dots, t\}$ e opportuni interi relativi $k_1, k_2, \dots, k_n$ tali che

$$a = x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \cdots x_{i_n}^{k_n}.$$

Al fine di fissare univocamente un'espressione di a del tipo appena considerato, se ne scelga una $x_{j_1}^{h_1} x_{j_2}^{h_2} \cdots x_{j_m}^{h_m}$ di lunghezza minima m.

Sia $y_r = x_{j_r}^{h_r}$, per ogni $r = 1, \dots, m$. Se fosse $j_s = j_t$ per qualche $s < t \leq m$, allora sarebbe

$$(*) \quad a = y_1 \cdots y_{s-1}(y_s y_t) y_{s+1}^{y_t} \cdots y_{t-1}^{y_t} y_{t+1} \cdots y_m,$$

con $y_s y_t = x_{j_s}^{h_s + h_t}$. Ma allora la (*) sarebbe un'espressione di a di lunghezza minore di m, il che contraddirebbe l'ipotesi di minimalità fatta su m. Quanto detto assicura, quindi, che gli indici $j_1, j_2, \dots, j_m$ sono a due a due distinti. Con semplici calcoli è possibile provare che il numero di possibili scelte di a in X^G è al più pari a

$$t! \prod_{i=1}^{t} o(x_i).$$

Dato che gli elementi di X sono tutti periodici, la chiusura normale X^G è finita. □

Banalmente, ogni sottogruppo normale e finito di un gruppo G è contenuto nell'FC-centro di G. Da questa osservazione e dal Lemma di Dietzmann segue immediatamente che gli FC-gruppi periodici coincidono con i gruppi che possono essere ricoperti da una famiglia di sottogruppi normali finiti, ovvero segue la seguente caratterizzazione

Corollario 1.1.1. *Un gruppo periodico G è un FC-gruppo se e solo se ogni sua parte finita è contenuta in un sottogruppo normale e finito.*

Definizione 1.1.6. *Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi. Un gruppo G è detto localmente $\mathcal{X}$ se ogni parte finita di G è contenuta in un $\mathcal{X}$-sottogruppo di G.*

In particolare, se la classe gruppale $\mathcal{X}$ è chiusa per sottogruppi, allora un gruppo G è localmente $\mathcal{X}$ se e solo se ogni sottogruppo finitamente generato di G appartiene ad $\mathcal{X}$.

Teorema 1.1.2 (R. Baer [2])**.** *Sia G un FC-gruppo, allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è localmente finito.*

Dim: Per il Lemma 1.1.1 è sufficiente provare che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è periodico.
Sia x un elemento di G e sia $\{y_1, \ldots, y_t\}$ un trasversale destro del centralizzante $C_G(x)$ in G, con t intero non negativo pari all'indice $|G : C_G(x)|$. L'intersezione $C = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(y_i)$ è un sottogruppo di indice finito in G, quindi esiste un intero non negativo m tale che $x^m \in C$.
Tale elemento x^m permuta con x e con ciascun $y_i, i = 1, \ldots, t$. Da ciò segue che x^m appartiene a $Z(G)$. $\square$

Al fine di provare un celebre risultato di I. Schur che verrà in seguito ampiamente adoperato, va premesso il seguente Lemma:

Lemma 1.1.2. *Sia G un FC-gruppo finitamente generato, allora G contiene un sottogruppo A senza torsione, centrale e di indice finito. Inoltre il derivato G' di G è finito.*

Teorema 1.1.3 (I. Schur [26])**.** *Dato un gruppo G, se $G/Z(G)$ è finito, allora il derivato G' è finito.*

Dim: Per ipotesi esiste un sottogruppo finitamente generato N di G tale che $G = Z(G)\, N$.

Il sottogruppo N è normalizzato da se stesso e dal centro $Z(G)$, quindi è normale in G. Inoltre G è un FC-gruppo, dunque tale è anche N. Per il Lemma 1.1.2 N' è finito. A questo punto è sufficiente osservare che

$$G' = (NZ(G))' = [NZ(G), NZ(G)] = N',$$

e l'asserto risulta provato. $\square$

Dal Teorema di Schur seguono i seguenti risultati:

Corollario 1.1.2. *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è localmente finito. Allora anche il sottogruppo derivato G' di G è localmente finito.*

Dim: Sia X un sottoinsieme finito di G'. Dal momento che ogni elemento di X si scrive come prodotto di potenze di un numero finito di commutatori di G e dato che gli elementi di X sono in numero finito, allora esiste certamente un sottogruppo finitamente generato E di G tale che $X \subseteq E'$. Essendo finitamente generato, il quoziente $EZ(G)/Z(G)$ è finito, quindi tale è anche il gruppo $E/Z(E)$. Per il Teorema di Schur 1.1.3, E' è finito, dunque tale è anche il sottogruppo generato da X. □

Corollario 1.1.3 (B. H. Neumann [21])**.** *Sia G un FC-gruppo. Allora il derivato G' di G è localmente finito. In particolare, un FC-gruppo senza torsione è abeliano.*

Dim: L'asserto segue dal Teorema 1.1.2 e dal Corollario 1.1.2. □

Definizione 1.1.7. *Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice almost normale se ha soltanto un numero finito di coniugati in G o, equivalentemente, se il normalizzante $N_G(H)$ di H ha indice finito in G.*

Evidentemente, ogni sottogruppo normale di un gruppo G è anche almost normale e tutti i sottogruppi di un gruppo finito sono almost normali. La nozione di almost normalità può essere adoperata per dare una caratterizzazione degli FC-gruppi.

Lemma 1.1.3. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e solo se ogni suo sottogruppo ciclico è almost normale.*

Dim: Sia G un FC-gruppo. Per ogni $x \in G$ si ha

$$C_G(x) \leq N_G(\langle x \rangle),$$

quindi l'indice $|G : N_G(\langle x\rangle)|$ è finito e il sottogruppo $\langle x\rangle$ è almost normale in G.

Viceversa, si supponga che, per ogni $x \in G$, il sottogruppo $\langle x\rangle$ sia almost normale in G. Dato che il sottogruppo $\langle x\rangle$ è normale in $N_G(\langle x\rangle)$, il gruppo $N_G(\langle x\rangle)/C_G(x)$ è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di $\langle x\rangle$, e quindi è finito. Inoltre, l'indice $|G : N_G(\langle x\rangle)|$ è finito per ipotesi, dunque tale è anche l'indice $|G : C_G(x)|$ e l'asserto risulta provato. □

Definizione 1.1.8. *Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice nearly normale se ha indice finito nella sua chiusura normale H^G.*

Evidentemente, ogni sottogruppo normale di un gruppo G è anche nearly normale e tutti i sottogruppi di un gruppo finito sono nearly normali.

Anche i sottogruppi nearly normali possono essere adoperati per caratterizzare gli FC-gruppi. Si ha infatti:

Lemma 1.1.4. *Un gruppo G è un FC-gruppo se e solo se ogni suo sottogruppo ciclico è nearly normale.*

Dim: Sia G un FC-gruppo e sia x un qualsivoglia elemento di G. Dato che x ha solo un numero finito di coniugati in G, il sottogruppo normale $[x, G]$ è finitamente generato. Per il Corollario 1.1.3 G' è localmente finito, dunque il sottogruppo $[x, G]$ è finito. Allora, essendo

$$\langle x\rangle^G = \langle x\rangle[x, G],$$

l'indice $|\langle x\rangle^G : \langle x\rangle|$ è finito, ovvero il sottogruppo $\langle x\rangle$ è nearly normale in G. Viceversa, si supponga che, per ogni $x \in G$, il sottogruppo $\langle x\rangle$ sia nearly normale in G. Allora, per ogni $x \in G$, esiste un intero positivo n tale che il sottogruppo $(\langle x\rangle^G)^n$ sia contenuto in $\langle x\rangle$. Dato che il gruppo $\langle x\rangle^G/(\langle x\rangle^G)^n$ è finito, tale è anche il quoziente

$$G/C_G(\langle x\rangle^G/(\langle x\rangle^G)^n).$$

In particolare, il normalizzante $N_G(\langle x\rangle)$ ha indice finito in G, e quindi il sottogruppo ciclico $\langle x\rangle$ è almost normale in G. Per il Lemma 1.1.3 G è un FC-gruppo. $\square$

1.2 Classi di gruppi Localmente Nilpotenti

Dalla Definizione 1.1.6 segue che un gruppo G è localmente nilpotente se ogni suo sottogruppo finitamente generato è nilpotente.
Il 2-gruppo localmente diedrale, costituito dal prodotto semidiretto di un gruppo A di tipo 2^∞ e di un gruppo $\langle x\rangle$ di ordine due tale che $a^x = a^{-1}$ per ogni $a \in A$, è un esempio di gruppo localmente nilpotente e non-nilpotente.

Il seguente teorema costituisce una generalizzazione del Teorema di Fitting sul prodotto di due sottogruppi normali e nilpotenti al caso localmente nilpotente.

Teorema 1.2.1 (Hirsch-Plotkin (Teorema 12.1.2 [24])). *Siano H e K due sottogruppi normali e localmente nilpotenti di un gruppo G. Allora il prodotto $J = HK$ è localmente nilpotente.*

Dim: Sia $S = \langle h_1k_1, \ldots, h_mk_m \rangle$, con $h_1, \ldots, h_m \in H$ e $k_1, \ldots, k_m \in K$, un sottogruppo finitamente generato di J.

Chiaramente, posto $X = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ e $Y = \langle k_1, \ldots, k_m \rangle$, è sufficiente provare che il sottogruppo $Z = \langle X, Y \rangle$ è nilpotente.

Sia $C = \{[h_i, k_j] \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$. Allora, poiché H e K sono due sottogruppi normali di G, si ha che $C \leq H \cap K$. Pertanto il sottogruppo $\langle X, C \rangle$ è finitamente generato e nilpotente.

Dal momento che i gruppi nilpotenti finitamente generati verificano la condizione massimale sui sottogruppi, la chiusura normale C^X è finitamente generata, e quindi è nilpotente. Inoltre, C^X è contenuto nell'intersezione $H \cap K$, quindi il sottogruppo $\langle Y, C^X \rangle$ è contenuto in K. Allora $\langle Y, C^X \rangle$ è finitamente generato e nilpotente.

Ricordando che $[X, Y] = C^{XY}$, si ha che anche la chiusura normale

$$Y^X = \langle Y, [X, Y] \rangle = \langle Y, C^{XY} \rangle = \langle Y, C^X \rangle$$

è finitamente generata e nilpotente.

In modo analogo si può provare che X^Y è nilpotente. Pertanto, per il Teorema di Fitting, il sottogruppo

$$Z = \langle X, Y \rangle = X^Y Y^X$$

è nilpotente e l'asserto è provato. $\square$

Corollario 1.2.1. *Sia G un gruppo. Allora esiste un unico sottogruppo normale localmente nilpotente massimale di G (chiamato radicale di Hirsch-Plotkin) contenente tutti i sottogruppi normali e localmente nilpotenti di G.*

Dim: È facile verificare che l'unione di una catena di sottogruppi localmente nilpotenti è localmente nilpotente. Pertanto dal Lemma di Zorn segue che ogni sottogruppo normale e localmente nilpotente di G è contenuto in un sottogruppo normale e localmente nilpotente massimale.
Siano H e K due sottogruppi normali e localmente nilpotenti massimali di G. Allora per il Teorema 1.2.1 il prodotto HK è localmente nilpotente. Dalla massimalità di H e K segue che $H = K$. $\square$

Prima di introdurre due rilevanti classi di gruppi localmente nilpotenti (i gruppi di Baer e i gruppi di Fitting) è necessario ricordare alcune definizioni e risultati preliminari.

Lemma 1.2.1. *Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G tali che $H^K = H$. Allora*

$$(H^{G,n})^K = H^{G,n}$$

per ogni intero non-negativo n.

Definizione 1.2.1. *Sia G un gruppo. Si definisce serie ascendente di G ogni famiglia di sottogruppi di G $\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$, con β numero ordinale, tale che:*

(1) $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$ se $\alpha_1 \leq \alpha_2$;

(2) $H_0 = \{1\}$ e $G = \bigcup_{\alpha<\beta} H_\alpha$;

(3) H_α è un sottogruppo normale di $H_{\alpha+1}$;

(4) $H_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$ se λ è un ordinale limite.

Un sottogruppo H di G è detto ascendente se appartiene ad una serie ascendente di G.

Il prossimo risultato mostra che il radicale di Hirsch-Plotkin di un gruppo G contiene molto più dei sottogruppi normali localmente nilpotenti.

Teorema 1.2.2. *Sia G un gruppo. Allora il radicale di Hirsch-Plotkin di G contiene tutti i sottogruppi localmente nilpotenti e ascendenti di G.*

Definizione 1.2.2. *Sia G un gruppo. Un sottogruppo X di G è detto subnormale se appartiene ad una serie ascendente finita di G. La lunghezza minima fra le serie ascendenti finite di G contenenti X è detta difetto di subnormalità di X.*

In generale, il sottogruppo generato da due sottogruppi subnormali non è subnormale. Tuttavia, il seguente risultato mostra che se i due sottogruppi subnormali sono finitamente generati e nilpotenti, allora il sottogruppo da essi generato è ancora subnormale.

Lemma 1.2.2 (Baer, Teorema 12.2.6 [24])**.** *Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi finitamente generati, nilpotenti e subnormali di G. Allora il sottogruppo $J = \langle H, K \rangle$ è subnormale e nilpotente.*

Dim: Per il Teorema 1.2.2 H e K sono contenuti nel radicale di Hirsch-Plotkin R di G, quindi $J \leq R$. Per il Corollario 1.2.1 R è localmente nilpotente, dunque J è nilpotente. Resta da provare che J è subnormale in G.
Siano n un intero non negativo e $H_0, H_1, \ldots, H_n$ sottogruppi di G tali che

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_n = G.$$

Dato che J è nilpotente e finitamente generato, la chiusura normale H^J è generata da un numero finito di coniugati di H. Poiché ogni coniugato di H in G ha difetto di subnormalità $n-1$ in H^G, per induzione su n H^J è subnormale in H^G, e quindi anche in G. Sostituendo H con H^J, si può assumere, senza perdita di generalità, che H sia normale in J.
Per il Lemma 1.2.1 il sottogruppo K normalizza ogni termine della serie

$$G = H^{G,0} > H^{G,1} > \cdots > H^{G,n} = H.$$

Sia i un intero non-negativo minore strettamente di n. Dato che $H^{G,i+1}$ è un sottogruppo normale di $H^{G,i}K$ e K è subnormale in $H^{G,i}K$, anche

$H^{G,i+1}K$ è un sottogruppo subnormale di $H^{G,i}K$. Pertanto il sottogruppo $J = HK = H^{G,n}K$ è subnormale in $G = H^{G,0}K$. $\square$

È possibile, a questo punto, introdurre le seguenti classi di gruppi:

Definizione 1.2.3. *Sia G un gruppo. Si dice che G è un gruppo di Baer se ogni sottogruppo ciclico di G è subnormale.*

Definizione 1.2.4. *Un gruppo G è detto gruppo di Fitting se è il prodotto di sottogruppi normali e nilpotenti.*

Segue immediatamente dal Lemma 1.2.2 che ogni gruppo di Baer è localmente nilpotente e che un gruppo G è di Baer se e solo se tutti i suoi sottogruppi finitamente generati sono subnormali.

Se G è un gruppo di Fitting, allora dalla definizione segue che ogni elemento x di G è contenuto nel prodotto di un numero finito di sottogruppi normali e nilpotenti, e quindi è contenuto in un sottogruppo normale e nilpotente per il Teorema di Fitting. In particolare ogni gruppo di Fitting è un gruppo di Baer.

Capitolo 2

Gruppi con molti sottogruppi normali generalizzati

In un importante lavoro del 1955, B. H. Neumann [21] provò che tutti i sottogruppi di un gruppo G sono almost normali se e solo se il centro $Z(G)$ ha indice finito in G.

Nel 1959, I. I. Eremin [12] provò che è sufficiente che i normalizzanti dei soli sottogruppi abeliani di un gruppo G abbiano indice finito affinché G sia centrale-per-finito. Questo risultato suggeriva che il comportamento dei normalizzanti dei sottogruppi di un gruppo G avesse una forte influenza sulla struttura dell'intero gruppo. In effetti, nel 1980, Y. D. Polovickiĭ [22] provò che un gruppo G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani se e solo se ha centro di indice finito. Più recentemente sono stati studiati gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi aventi una data proprietà ([5] , [6], [7], [8], [9]).

Nello stesso articolo del 1955, Neumann trovò anche una caratterizzazione dei gruppi con tutti i sottogruppi nearly normali. Provò, infatti, che tutti i sottogruppi di un gruppo G hanno indice finito nella propria chiusura normale in G se e solo se il sottogruppo derivato G' di G è finito. Anche questo teorema fu, in seguito, generalizzato. Nel 1981, infatti, M. J. Tomkinson [27] provò che, anche in questo caso, è sufficiente imporre la nearly normalità solo ai sottogruppi abeliani affinché G' sia finito.

Sebbene, in generale, i concetti di sottogruppi almost normali e nearly normali non siano confrontabili, segue dai teoremi di Neumann sopra ricordati e dal teorema di Schur 1.1.3 che, se tutti i sottogruppi di G sono almost normali, allora essi sono anche tutti nearly normali.
In generale, se i soli sottogruppi infiniti di un gruppo G sono almost normali, non è detto che siano tutti anche nearly normali. Si consideri, ad esempio, il gruppo

$$G = \langle x \rangle \ltimes (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$$

prodotto semidiretto di un gruppo abeliano libero di rango 2 e di un gruppo ciclico $\langle x \rangle$ di ordine 3 tale che $a^x = b$ e $b^x = a^{-1}b^{-1}$. Sebbene tutti i sottogruppi infiniti di G siano almost normali, il sottogruppo $\langle a \rangle$ ha indice infinito nella sua chiusura normale.

I gruppi con tutti i sottogruppi infiniti almost normali sono stati completamente caratterizzati da L. A. Kurdachenko, S. S. Levishchenko e N. N. Semko [17]; mentre quelli con tutti i sottogruppi infiniti nearly normali sono stati completamente descritti da S. Franciosi e F. de Giovanni [13].

Scopo di questo capitolo è provare una generalizzazione del sopra citato teorema di Tomkinson al caso dei gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani che non sono nè almost normali nè nearly normali e studiare, inoltre, i gruppi in cui tutti i sottogruppi infiniti sono almost normali oppure nearly normali.

2.1 Sottogruppi abeliani

Lemma 2.1.1. *Sia G un FC-gruppo e sia X un sottogruppo almost normale di G. Allora X ha indice finito nella sua chiusura normale in G.*

Dim: Dal momento che l'indice $|G : N_G(X)|$ del normalizzante di X in G è finito, esiste un sottogruppo E finitamente generato di G tale che

$$G = \langle N_G(X), E\rangle.$$

Poiché anche la chiusura normale E^G di E in G è finitamente generata, il sottogruppo E può essere scelto normale in G. Dunque $G = N_G(X)E$ e quindi $X^G = X^E$.

Essendo un FC-gruppo finitamente generato, E è centrale-per-finito per il Teorema 1.1.1; in particolare E verifica la condizione massimale sui sottogruppi e, quindi, il suo sottogruppo $[X, E]$ è finitamente generato. D'altra parte, per il Corollario 1.1.3 il sottogruppo derivato G' di G è localmente finito, dunque $[X, E]$ è finito.

Pertanto X ha indice finito nella sua chiusura normale $X^G = X[X, E]$. $\square$

Allo scopo di provare una generalizzazione del già citato Teorema di Tomkinson, è necessario ricordare il seguente rilevante risultato di B. H. Neumann ([20])che vale, più in generale, per i gruppi ricoperti da laterali di sottogruppi

Lemma 2.1.2. *Sia* $G = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ *dove* $S_1, S_2, \cdots, S_n$ *sono sottogruppi di* G. *Dal tale ricoprimento di* G *è possibile omettere i sottogruppi* S_i *aventi indice infinito in* G.

Teorema 2.1.1. *Sia* G *un gruppo dotato di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi abeliani che non sono né almost normali né nearly normali in* G. *Allora il sottogruppo derivato* G' *di* G *è finito, e quindi tutti i sottogruppi di* G *sono nearly normali.*

Dim: Sia

$$\{N_G(X_1), \cdots, N_G(X_t)\}$$

l'insieme dei normalizzanti dei sottogruppi abeliani di G che non sono nè almost normali nè nearly normali in G.

Se x è un elemento di G non appartenente al suo FC-centro, allora per i Lemmi 1.1.3 e 1.1.4 risulta

$$N_G(\langle x \rangle) = N_G(X_i)$$

per qualche $i \leq t$; in particolare $x \in N_G(X_i)$, e quindi, denotando con C l'FC-centro di G, risulta

$$G = C \cup N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t).$$

Dato che l'indice di ciascun normalizzante $N_G(X_j)$ in G è infinito, segue dal Lemma 2.1.2 che $G = C$ è un FC-gruppo e l'insieme

$$N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t)$$

è contenuto propriamente in G. Sia g un elemento dell'insieme

$$G \setminus (N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t)).$$

Naturalmente, g normalizza tutti i sottogruppi del suo centralizzante $C_G(g)$, quindi ogni sottogruppo abeliano di $C_G(g)$ è almost normale oppure nearly normale in G. Segue dal Lemma 2.1.1 e dal Teorema di Tomkinson sui gruppi con tutti i sottogruppi abeliani nearly normali che il sottogruppo derivato $C_G(g)'$ è finito.

Dal momento che G è un FC-gruppo, l'indice $|G : C_G(g)|$ è finito, quindi G è (finito-per-abeliano)-per-finito. Poiché per l'osservazione 1.1.1 ogni FC-gruppo abeliano-per-finito è anche centrale-per-finito, per il Teorema di Schur 1.1.3 il sottogruppo derivato G' di G è finito. $\square$

Corollario 2.1.1. *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo abeliano è almost normale oppure nearly normale. Allora il sottogruppo derivato G' di G è finito, in particolare tutti i sottogruppi di G sono nearly normali.*

2.2 Sottogruppi infiniti di gruppi localmente finiti

Come ricordato nell'introduzione al capitolo, S. Franciosi e F. de Giovanni ([13]) hanno studiato i gruppi con tutti i sottogruppi infiniti nearly normali, provando il seguente teorema

Teorema 2.2.1. *Sia G un gruppo localmente finito oppure non periodico. Tutti i sottogruppi infiniti di G sono nearly normali se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:*

1) G' è finito;

2) G è estensione finita di un sottogruppo ciclico infinito;

3) G è estensione finita di un p-gruppo di Prüfer.

In particolare, il Teorema 2.2.1 mostra che se G è un gruppo localmente finito o non periodico in cui ogni sottogruppo infinito è nearly normale, allora o G' è finito (e quindi tutti i sottogruppi di G sono nearly normali) oppure tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali. Scopo di questo e del successivo paragrafo è provare una generalizzazione di questo risultato al caso di gruppi, rispettivamente localmente finiti e non periodici, con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono nè almost normali nè nearly normali.

Sebbene i concetti di sottogruppo almost normale e nearly normale non siano, in generale, confrontabili, il primo risultato del paragrafo precedente mostra che se un sottogruppo di un FC-gruppo G è almost normale, allora deve avere indice finito nella sua chiusura normale in G. Il seguente lemma prova che vale l'implicazione inversa nel caso di gruppi aventi rango di Prüfer finito.

Lemma 2.2.1. *Sia G un gruppo e sia X un sottogruppo nearly normale di G. Se X ha rango di Prüfer finito, allora è almost normale in G.*

Dim: Sia n l'indice di X nella sua chiusura normale in G. Allora il sottogruppo $(X^G)^{n!}$ è contenuto in X, e quindi il gruppo quoziente X^G/X_G ha esponente finito. Inoltre X^G/X_G è residualmente finito e ha rango di Prüfer finito, quindi segue da un importante risultato di A. Mann e D. Segal (Teorema A [18]) che X^G/X_G è localmente finito. D'altra parte, ogni sottogruppo abeliano di X^G/X_G è finito, quindi segue dal Teorema di Hall-Kulatilaka e Kargapolov (Teorema 14.3.7 [24])che lo stesso X^G/X_G è finito. Pertanto X è almost normale in G. $\square$

Lemma 2.2.2. *Sia G un gruppo e sia A un sottogruppo abeliano, infinito e normale di G avente indice finito in esso. Se A è il prodotto diretto di una famiglia di sottogruppi di ordine primo, allora esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tale che*

$$\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle^G = Dr_{n\in\mathbb{N}}\langle a_n\rangle^G.$$

Dim: Sia a_1 un elemento non identico di A e supponiamo di aver determinato per induzione degli elementi $a_1, \dots, a_n$ di A tali che

$$\langle a_1, \dots, a_n\rangle^G = \langle a_1\rangle^G \times \dots \times \langle a_n\rangle^G.$$

Dal momento che A è abeliano e ha indice finito in G, il centralizzante in G di ciascun a_i ha indice finito in G. Per il Lemma di Dietzmann 1.1.1 si ha quindi che il sottogruppo $\langle a_1, \dots, a_n\rangle^G$ è finito. Allora A contiene un sottogruppo B infinito tale che $A = \langle a_1, \dots, a_n\rangle^G \times B$.

Avendo indice finito in G, il nocciolo B_G di B in G è infinito. Se a_{n+1} è un elemento non identico di B_G, si ha

$$\langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\rangle^G = \langle a_1\rangle^G \times \dots \times \langle a_n\rangle^G \times \langle a_{n+1}\rangle^G$$

e il Lemma è dimostrato.

$\square$

Lemma 2.2.3. *Sia G un gruppo localmente finito e sia g un elemento di G tale che $X^g \neq X$ per ogni sottogruppo infinito X di G che non è nè almost normale nè nearly normale in G. Se g non appartiene all'FC-centro di G, allora tutti i sottogruppi abeliani $\langle g \rangle$-invarianti di G soddisfano la condizione minimale.*

Dim: Sia, per assurdo, A un sottogruppo abeliano $\langle g \rangle$-invariante di G che non soddisfa la condizione minimale. Allora lo zoccolo di A è infinito, quindi per il Lemma 2.2.2 esistono due sottogruppi A_1 e A_2 di A infiniti e $\langle g \rangle$-invarianti tali che

$$A_1 \cap A_2 = \langle A_1, A_2 \rangle \cap \langle g \rangle = \{1\};$$

in particolare risulta

$$\langle g, A_1 \rangle \cap \langle g, A_2 \rangle = \langle g \rangle.$$

Per ipotesi, ciascuno dei sottogruppi $\langle g, A_1 \rangle$ e $\langle g, A_2 \rangle$ è almost normale oppure nearly normale in G. Se fossero entrambi almost normali oppure entrambi nearly normali, tale sarebbe anche la loro intersezione $\langle g \rangle$, dunque g apparterrebbe all'FC-centro di G, contrariamente a quanto supposto per ipotesi. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\langle g, A_1 \rangle$ sia almost normale e $\langle g, A_2\rangle$ sia nearly normale in G. Allora il normalizzante $L = N_G(\langle g, A_1\rangle)$ ha indice finito in G, perciò esiste un sottogruppo finito E di G tale che $G = LE$.

D'altra parte, il sottogruppo $\langle g, A_2\rangle \cap L$ è nearly normale in L e quindi, essendo intersezione di sottogruppi nearly normali, anche

$$\langle g\rangle = \langle g, A_1\rangle \cap (\langle g, A_2\rangle \cap L)$$

ènearly normale in L. Da ciò segue che il sottogruppo $\langle g\rangle^L$ è finito. Pertanto anche la chiusura normale

$$\langle g\rangle^G = \langle g\rangle^{LE} = \langle \langle g\rangle^L, E\rangle$$

è finita. Dall'assurdo segue l'asserto. □

Corollario 2.2.1. *Sia G un gruppo localmente finito e sia g un elemento di G tale che $X^g \neq X$ per ogni sottogruppo infinito X di G che non è né almost normale né nearly normale in G. Se g ha infiniti coniugati in G, allora il suo centralizzante $C_G(g)$ è un gruppo di Černikov.*

Dim: Segue dal Lemma 2.2.3 che tutti i sottogruppi abeliani del centralizzante $C_G(g)$ soddisfano la condizione minimale. Pertanto $C_G(g)$ soddisfa la condizione minimale sui sottogruppi abeliani e, quindi, è un gruppo di Černikov per un rilevante risultato di Šunkov [25]. □

Per provare che i gruppi localmente finiti nelle nostre ipotesi sono "vicini" all'essere localmente risolubili, è necessario un risultato di B. Hartley [16] sui gruppi localmente finiti dotati di un automorfismo avente come ordine una potenza di primo con insieme dei punti fissi "piccolo".

Lemma 2.2.4. *Sia G un gruppo localmente finito e sia α un automorfismo di G avente come ordine una potenza di primo tale che l'insieme degli elementi di G fissati da α è un gruppo di Černikov. Allora G contiene un sottogruppo localmente risolubile di indice finito.*

Lemma 2.2.5. *Sia G un gruppo localmente finito avente solo un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né nearly normali. Allora G contiene un sottogruppo localmente risolubile di indice finito.*

Dim: Sia C l'FC-centro di G e sia

$$\{N_G(X_1), \cdots, N_G(X_t)\}$$

l'insieme dei normalizzanti dei sottogruppi infiniti di G che non sono né almost normali né nearly normali. Chiaramente l'indice di ciascun $N_G(X_i)$ è infinito, quindi, per il Lemma 2.1.2, o G è un FC-gruppo oppure l'insieme

$$C \cup N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t)$$

è contenuto propriamente in G.

Se G è un FC-gruppo, allora ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono né almost normali né nearly normali, pertanto il sottogruppo derivato G' di G è finito per il Teorema 2.1.1. In particolare, G è risolubile-per-finito per un rilevante risultato di P. Hall (Teorema 4.25 [23])

Sia, dunque, g un elemento appartenente all'insieme

$$G \setminus (C \cup N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t))$$

avente come ordine una potenza di primo. Per il Corollario 2.2.1,il centralizzante $C_G(g)$ è un gruppo di Černikov, pertanto il gruppo G contiene un sottogruppo localmente risolubile di indice finito per il Lemma 2.2.4.

□

Lemma 2.2.6. *Sia G un gruppo dotato di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né nearly normali. Allora G contiene un sottogruppo caratteristico M di indice finito tale che il normalizzante $N_M(X)$ è normale in M per ogni sottogruppo infinito X di M che non è né almost normale né nearly normale in G.*

Dim: Sia X un sottogruppo infinito di G che non è né almost normale né nearly normale. Dalle ipotesi segue che il normalizzante $N_G(X)$ ha un numero finito di immagini mediante automorfismi di G; in particolare il sottogruppo $N_G(X)$ ha un numero finito di coniugati in G, e perciò l'indice

$|G : N_G(N_G(X))|$ è finito. Da ciò segue che il sottogruppo caratteristico

$$M(X) = \bigcap_{\alpha \in AutG} N_G(N_G(X))^{\alpha}$$

ha indice finito in G. Sia $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti i sottogruppi infiniti di G che non sono né almost normali né nearly normali in G. Se X e Y sono elementi di $\mathcal{H}$ tali che $N_G(X) = N_G(Y)$, allora $M(X) = M(Y)$, e quindi anche il sottogruppo

$$M = \bigcap_{X \in \mathcal{H}} M(X)$$

è un sottogruppo caratteristico di indice finito di G. Sia X un sottogruppo infinito di M che non è né almost normale né nearly normale in G. Allora

$$M \leq M(X) \leq N_G(N_G(X)),$$

quindi il normalizzante $N_M(X) = N_G(X) \cap M$ è normale in M.

□

L'ultimo lemma propedeutico alla dimostrazione del teorema principale di questo paragrafo è il seguente risultato di D.I. Zaicev [29]:

Lemma 2.2.7. *Sia G un gruppo localmente risolubile e sia Γ un gruppo finito di automorfismi di G. Se tutti i sottogruppi abeliani Γ-invarianti di G soddisfano la condizione minimale, allora G è un gruppo di Černikov.*

Teorema 2.2.2. *Sia G un gruppo localmente finito con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né* *nearly normali. Allora o il sottogruppo derivato G' di G è finito oppure G è un gruppo di Černikov i cui sottogruppi infiniti sono almost normali.*

Dim: Se G è un FC-gruppo, allora per il Lemma di Dietzmann 1.1.1 ogni sottogruppo finito di G è nearly normale, dunque G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono né almost normali né nearly normali, e quindi G' è finito per il Teorema 2.1.1. Si supponga, perciò, che l'FC-centro C di G sia un sottogruppo proprio di G e sia

$$\{N_G(X_1), \cdots, N_G(X_t)\}$$

l'insieme di tutti i normalizzanti dei sottogruppi infiniti di G che non sono né almost normali né nearly normali. Dal Lemma 2.1.2 segue che l'insieme

$$C \cup N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t)$$

è contenuto propriamente in G, e quindi esiste certamente un elemento g appartenente all'insieme

$$G \setminus (C \cup N_G(X_1) \cup \cdots \cup N_G(X_t)).$$

Dal Lemma 2.2.3 segue che tutti i sottogruppi abeliani $\langle g \rangle$-invarianti di G soddisfano la condizione minimale. Per il Lemma 2.2.5 G contiene un sottogruppo H normale e localmente risolubile di indice finito, segue dunque dal Lemma 2.2.7 che H è un gruppo di Černikov, e quindi tale è anche G. Infine, per il Lemma 2.2.1, tutti i sottogruppi nearly normali di G sono almost normali, dunque G ha solo un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono almost normali.

Sia X un sottogruppo infinito di G e sia J il residuale finito di X. Dato che X è un gruppo di Černikov, l'indice $|X : J|$ è finito, quindi J è infinito. Pertanto il gruppo quoziente $N_G(J)/J$ ha solo un numero finito di normalizzanti di indice infinito. Ancora dal Lemma 2.1.2 segue che $N_G(J)/J$ è un FC-gruppo. Essendo anche finitamente generato, $N_G(J)/J$ è centrale-per-finito per il Teorema 1.1.1. Allora X è almost normale nel normalizzante $N_G(J)$, e quindi è almost normale anche in G dato che l'indice $|G : N_G(J)|$ è finito. Pertanto tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali. $\square$

2.3 Sottogruppi infiniti di gruppi non periodici

Come anticipato nell'introduzione al capitolo, Kurdachenko, Levishchenko e Semko hanno studiato i gruppi con tutti i sottogruppi infiniti nearly normali, provando in particolare che

Lemma 2.3.1. *Sia G un gruppo non periodico i cui sottogruppi infiniti sono almost normali. Allora o G è centrale-per-finito oppure contiene due sottogruppi normali N e A tali che $N \leq A$, N è finito, G/A ha ordine primo p e*

A/N è un gruppo abeliano libero di rango $p-1$ su cui G/A agisce in modo razionalmente irriducibile.

Teorema 2.3.1. *Sia G un gruppo non periodico in cui ogni sottogruppo infinito è almost normale oppure nearly normale. Allora il sottogruppo derivato G' di G è finito oppure tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali.*

Dim: Sia a un elemento di ordine infinito di G. Per ipotesi, il sottogruppo $\langle a\rangle$ è almost normale oppure nearly normale, in entrambi i casi segue che a appartiene all'FC-centro di G. In particolare, la chiusura normale $\langle a\rangle^G$ è un FC-gruppo finitamente generato, e dunque ha indice finito sul suo centro. D'altra parte, i sottogruppi del gruppo quoziente $G/\langle a\rangle^G$ sono tutti infiniti, quindi ogni sottogruppo di $G/\langle a\rangle^G$ è almost normale oppure nearly normale. Per il Corollario 2.1.1, il sottogruppo derivato di $G/\langle a\rangle^G$ è finito.
Dal momento che i gruppi $G/\langle a\rangle^G$ e $\langle a\rangle^G$ sono entrambi dotati di un sottogruppo normale e risolubile di indice finito, anche G è risolubile-per-finito.

Sia T il massimo sottogruppo normale di torsione di G e si supponga dapprima che T sia infinito. In questo caso, ogni sottogruppo di G/T è almost normale oppure nearly normale, e quindi $G'T/T$ è finito per il Corollario 2.1.1. Da ciò segue che il sottogruppo derivato G' di G è periodico e, perciò, che l'insieme degli elementi di ordine finito di G ne costituisce un sottogruppo. Allora G è generato dai suoi elementi aperiodici, e quindi è un FC-gruppo per la prima parte della dimostrazione. Dato che G ha tutti i sottogruppi almost normali oppure nearly normali, l'asserto segue dal Corollario 2.1.1.

Si supponga, pertanto, che che T sia finito. Se tutti i sottogruppi infiniti di G/T sono nearly normali, allora tali sono anche i sottogruppi infiniti di G; d'altra parte, se tutti i sottogruppi di G/T sono almost normali, per il Lemma 2.3.1 o il commutatore di G/T è finito oppure G ha rango di Prüfer finito. Nel primo caso, anche il sottogruppo derivato G' di G è finito, ovvero i sottogruppi di G sono tutti nearly normal; nel secondo caso tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali per il Lemma 2.2.1. Perciò è sufficiente provare che i sottogruppi infiniti di G/T sono o tutti almost normali o tutti nearly normali, ovvero si può supporre senza perdita di generalità che G sia privo di sottogruppi normali periodici non banali sostituendo G con G/T.

Sia H il radicale di Hirsch-Plotkin di G. Essendo senza torsione, H è contenuto nell'FC-centro di G, dunque i suoi sottogruppi sono almost normali oppure nearly normali. Dal Corollario 2.1.1 segue che H è abeliano (il sottogruppo derivato H' è finito, quindi è identico dato che H è senza torsione). Se h è un elemento non identico di H, l'indice $|\langle h\rangle^G : \langle h\rangle|$ è finito, quindi la chiusura normale $\langle h\rangle^G$ è un gruppo ciclico infinito e, perciò, $\langle h\rangle$ è normale in G. Pertanto tutti i sottogruppi ciclici di H sono normali in G. Ciò vuol dire che il gruppo quoziente $G/C_G(H)$ si immerge nel gruppo degli automorfismi potenza di H; in particolare $G/C_G(H)$ è finito dato che ogni gruppo abeliano senza torsione è dotato solo di due automorfismi potenza (Teorema 13.4.3 [24]).

Analogamente, denotato con S il massimo sottogruppo normale e risolubile di G, dato che $H \leq S$ e $C_S(H) = H$, si ha che il quoziente S/H è finito. Poiché G è risolubile-per-finito, l'indice $|G : S|$ è finito, quindi anche il gruppo quoziente G/H è finito.

Sia X un sottogruppo infinito di G. Allora, dato che i sottogruppi di H sono normali in G, $X \cap H$ è un sottogruppo normale non banale di G e ogni sottogruppo di $G/X \cap H$ è almost normale oppure nearly normale in G. Per il Corollario 2.1.1 ogni sottogruppo di $G/X \cap H$ è nearly normale, e quindi anche X ha indice finito nella sua chiusura normale in G.

Pertanto ogni sottogruppo infinito di G è nearly normale e il Teorema è dimostrato. $\square$

Il prossimo risultato descrive alcuni gruppi non periodici nel più generale caso in cui sono dotati di un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono nè almost normali nè nearly normali.

Teorema 2.3.2. *Sia G un gruppo non periodico tale che l'insieme degli elementi di G di ordine finito ne costituisce un sottogruppo. Se G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost norma-*

li né nearly normali, allora o tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali, oppure tutti i sottogruppi infiniti di G sono nearly normali.

Dim: Sia T il sottogruppo di G formato da tutti i suoi elementi di ordine finito e sia C l'FC-centro di G.
Si supponga per assurdo che l'asserto sia falso, allora, per il Teorema 2.3.1, il gruppo G deve contenere un sottogruppo infinito che non è né almost normale né nearly normale.
Sia

$$\{N_G(X_1), \ldots, N_G(X_t)\}$$

l'insieme di tutti i normalizzanti dei sottogruppi infiniti di G che non sono né almost normali né nearly normali. Allora

$$G = C \cup T \cup N_G(X_1) \cup \ldots \cup N_G(X_t).$$

Poiché i sottogruppi $T, N_G(X_1), \ldots, N_G(X_t)$ hanno indice infinito in G, segue dal Lemma 2.1.2 che $G = C$, e quindi tutti i suoi sottogruppi finiti sono almost normali. Allora G ha solo un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono né almost normali né nearly normali e quindi il sottogruppo derivato G' di G è finito per il Teorema 2.1.1. $\square$

Corollario 2.3.1. *Sia G un gruppo non periodico tale che l'insieme degli elementi di G di ordine finito ne costituisce un sottogruppo. Allora G ha un* *numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né nearly normali se e solo se G' è finito oppure G è estensione finita di un sottogruppo ciclico infinito.*

Dim: Se G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né nearly normali, segue dal Teorema 2.3.2 che o tutti i sottogruppi infiniti di G sono nearly normali oppure tutti i sottogruppi infiniti sono almost normali. Nel primo caso, l'asserto segue dal Teorema 2.2.1. Se tutti i sottogruppi infiniti di G sono almost normali, per il Lemma 2.3.1 si ha che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito (e quindi il sottogruppo derivato G' di G è finito per il Teorema di Schur 1.1.3), oppure G contiene due sottogruppi normali N e A tali che $N \leq A$, N è finito, G/A ha ordine un numero primo p, A/N è un gruppo abeliano libero di rango $p-1$ e ogni elemento di G/A agisce in modo razionalmente irriducibile su A/N. Nel secondo caso, poiché T è un sottogruppo di G, G/N è un gruppo senza torsione, perció A/N è un gruppo ciclico infinito e G è estensione finita di un gruppo ciclico infinito.

L'implicazione inversa è banale. $\square$

Corollario 2.3.2. *Sia G un gruppo non periodico contenente un sottogruppo normale, infinito e periodico. Se G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi infiniti che non sono né almost normali né nearly normali,* *allora l'insieme di tutti gli elementi di ordine finito di G ne costituisce un sottogruppo.*

Dim: Sia N un sottogruppo infinito, normale e periodico di G. Allora il gruppo quoziente G/N ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi che non sono né almost normali né nearly normali, quindi il suo sottogruppo derivato è finito per il Teorema 2.1.1. Da ció segue che il sottogruppo derivato G' di G è periodico, quindi l'insieme degli elementi di ordine finito di G ne costituisce un sottogruppo e l'asserto è dimostrato. $\square$

Capitolo 3

Gruppi localmente finiti i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita

Sia X un sottogruppo di un gruppo G. Si definisce *oscillazione normale* di X in G il numero cardinale

$$min\{|X : X_G|, |X^G : X|\}.$$

In particolare, X ha oscillazione normale finita in G se e solo se è nearly normale oppure è normale-per-finito.

Nel 1995, Neumann, assieme a Buckley, Lennox, Smith e Wiegold, provò che un gruppo localmente finito in cui ogni sottogruppo ha indice finito sul suo nocciolo in G contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. Come ricordato nel capitolo precedente, tutti i sottogruppi di un gruppo G sono nearly normali se e solo se il sottogruppo derivato G' di G è finito. Se il sottogrupo derivato G' di un gruppo G è finito, in generale non è detto che G sia abeliano-per-finito (come mostra l'esempio di un gruppo extraspeciale infinito). Tuttavia, per un ben noto Teorema di P. Hall ([23], Teorema 4.25), un gruppo finito-per-abeliano è dotato di un sottogruppo nilpotente di indice finito. Pertanto, sia nel caso in cui i sottogruppi di un gruppo G sono tutti nearly normali e sia nel caso in cui sono tutti finiti sul proprio nocciolo, G è nilpotente-per-finito.

Scopo di questo capitolo è provare che vale un risultato analogo per i gruppi localmente finiti i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. In particolare, il risultato sarà provato dapprima nel caso dei p-gruppi e poi nel caso dei gruppi contabili. Si proverà, infine, che se ogni sottogruppo contabile di un gruppo G è nilpotente-per-finito, allora tale è anche G; dunque non è restrittivo considerare solo il caso dei gruppi localmente finiti e contabili i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita.

3.1 p-gruppi

Al fine di provare che un p-gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita è nilpotente per finito è necessario premettere alcuni risultati preliminari.

Lemma 3.1.1. *Sia G un gruppo e sia X un sottogruppo nearly normale di G. Allora il gruppo X/X_G ha esponente finito.*

Dim: Sia n l'indice di X nella sua chiusura normale X^G in G e sia Y il nocciolo di X in X^G. Allora è ben noto che l'indice $|X^G : Y|$ di Y in X^G divide $n!$, e quindi il sottogruppo $(X^G)^{n!}$ è contenuto in X. Essendo un sottogruppo normale di G, $(X^G)^{n!}$ è contenuto nel nocciolo X_G, dunque X/X_G ha esponente finito. □

Lemma 3.1.2. *Sia G un gruppo e sia X un sottogruppo subnormale e nilpotente di G avente indice finito nella sua chiusura normale X^G in G. Allora X^G è nilpotente.*

Dim: Per ipotesi esiste un intero positivo t tale che X è uguale al t-esimo termine $X^{G,t}$ della serie delle chiusure normali di X in G. Se $t = 1$, allora X è normale in G e l'asserto segue banalmente. Sia, dunque, $t > 1$. Essendo nilpotente e normale in $K = H^{G,t-1}$, H è contenuto nel sottogruppo di Fitting di K. In particolare, K è un gruppo di Fitting e, pertanto, ogni sottogruppo finitamente generato di K è subnormale e nilpotente.

Dato che l'indice $|K : H|$ è finito, esiste un sottogruppo finitamente generato E di K tale che

$$K = HE.$$

Per il Teorema di Fitting, K è nilpotente. Procedendo in modo analogo si prova che ciascun $H^{G,i}$, con $i \in 1, 2, \ldots, t-1$, è nilpotente e l'asserto risulta, quindi, provato. □

Corollario 3.1.1. *Sia G un gruppo infinito e localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo normale, nilpotente e infinito.*

Dim: Per un ben noto Teorema di Hall-Kulatilaka e Kargapolov (Teorema 14.3.7 [24]), G contiene un sottogruppo abeliano infinito A. Chiaramente, si può supporre che il nocciolo A_G di A in G sia finito, e quindi che tale sia anche l'indice $|A^G : A|$. Dunque, indicato con B il nocciolo di A in A^G, l'indice $|A^G : B|$ è ancora finito; in particolare, B è un sottogruppo abeliano e subnormale di G.

Naturalmente, si può supporre che il nocciolo B_G sia finito, quindi anche l'indice $|B^G : B|$ è necessariamente finito. Dunque la chiusura normale B^G di B in G è nilpotente per il Lemma 3.1.2 e l'asserto è provato. □

Osservazione 3.1.1. Sia G un gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita e sia $\mathcal{L}$ l'insieme dei sottogruppi normali e G-iperabeliani di G. Per il Corollario 3.1.1, l'insieme $\mathcal{L}$ é non vuoto. Inoltre si prova facilmente che l'insieme $(\mathcal{L}, \subset)$ é induttivo, pertanto esiste in $\mathcal{L}$ un elemento massimale K.

Se il gruppo G/K fosse infinito, allora conterrebbe un sottogruppo A/K normale, nilpotente e infinito per il Corollario 3.1.1. Essendo G-iperabeliano, A apparterrebbe ad $\mathcal{L}$ e sarebbe contraddetta la massimalità di K. Pertanto il Corollario 3.1.1 garantisce che un gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita contiene un sottogruppo normale e iperabeliano di indice finito.

Lemma 3.1.3. *Sia G un gruppo di Baer i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G è risolubile.*

Dim: Sia X un sottogruppo di G. Dato che il quoziente G/X_G è un gruppo di Baer, se l'indice $|X : X_G|$ è finito, allora il sottogruppo X/X_G è subnormale in G/X_G, e quindi X è subnormale in G.

Se X è nearly normale in G, allora, denotato con Y il nocciolo di X in X^G, il sottogruppo X/Y è subnormale in X^G/Y; in particolare X è subnormale in G.

Pertanto tutti i sottogruppi di G sono subnormali, e quindi G è risolubile per un rilevante risultato di W. Möhres [19]. □

I seguenti tre lemmi forniscono informazioni sul comportamento dei termini della serie FC-centrale superiore dei gruppi con tutti i sottogruppi dotati di oscillazione normale finita.

Lemma 3.1.4. *Sia G un gruppo i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita e sia C l'FC-centro di G. Allora ogni sottogruppo di C è nearly normale in G; in particolare il sottogruppo derivato C' di C è finito.*

Dim: Sia X un sottogruppo di C. Se l'indice $|X : X_G|$ è finito, allora segue dal Lemma di Dietzmann 1.1.1 che il gruppo X^G/X_G è finito, e quindi X ha indice finito nella propria chiusura normale X^G in G. In particolare, ogni sottogruppo di C ha indice finito nella propria chiusura normale X^C in C, e dunque C' è finito per il Teorema di Neumann sui gruppi con tutti i sottogruppi nearly normali. □

In particolare, per il Lemma 3.1.4 un FC-gruppo i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita ha tutti i sottogruppi nearly normali. Dunque si può ben immaginare il ruolo cruciale svolto dai seguenti due risultati ai fini della dimostrazione del Teorema principale del paragrafo. Essi mostrano, infatti, che il primo e il secondo FC-centro di un p-gruppo i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita sono piuttosto "grandi".

Lemma 3.1.5. *Sia G un $p-$gruppo localmente finito in cui tutti i sottogruppi hanno oscillazione normale finita e sia A un sottogruppo normale e abeliano di G. Se A è il prodotto diretto di una famiglia di sottogruppi ciclici e si indica con C l'FC-centro di G, allora il gruppo quoziente $A/A \cap C$ è finito.*

Dim: Sia, per assurdo, $A/A \cap C$ infinito.

Se $A/A\cap C$ ha rango finito, allora è un gruppo di Černikov, pertanto possiede un sottogruppo $B/A \cap C$ normale, abeliano e isomorfo al gruppo C_{p^∞}.

Se B ha indice finito nella sua chiusura normale in G, allora per ogni $g \in G$, essendo

$$|B^g : B \cap B^g| = |BB^g : B| \leq |B^G : B|,$$

risulta

$$B^g = B \cap B^g,$$

e quindi B è normale in G. Sostituendo $A/A \cap C$ con il gruppo $B/A \cap C$, si può supporre senza perdita di generalit che $A/A \cap C$ sia isomorfo al gruppo C_{p^∞}.

Se il rango di $A/A \cap C$ è infinito, allora lo zoccolo di $A/A \cap C$ è infinito e normale in $G/A \cap C$. Sostituendo, eventualmente, $A/A \cap C$ col suo zoccolo, si può supporre senza perdita di generalità che $A/A \cap C$ abbia esponente p.

In entrambi i casi considerati, è possibile determinare due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tali che

$$\frac{AC}{C} = \langle a_1C\rangle \times \langle b_1C\rangle \times \langle a_2C\rangle \times \ldots \times \langle a_nC\rangle \times \langle b_nC\rangle \times \ldots,$$

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle \times \ldots$$

e

$$C < \langle C, a_1\rangle < \langle C, a_1, b_1\rangle < \langle C, a_1, b_1, a_2\rangle < \ldots < \langle C, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\rangle < \ldots.$$

Consideriamo una partizione

$$\{I_n |\ n \in \mathbb{N}\}$$

dell'insieme dei numeri naturali costituita da infiniti sottoinsiemi infiniti. Poniamo, per ogni $k, n \in \mathbb{N}$,

$$U_{k,n} = (Dr_{h\in I_k}\langle a_h\rangle) \times \langle b_n\rangle.$$

Dato che, per ogni intero positivo n, b_n ha infiniti coniugati in G, allora esiste al più un intero positivo m tale che $U_{m,n}$ è nearly normale in G. Infatti, se per qualche intero positivo n esistessero $r, s \in \mathbb{N}$ con $r \neq s$ tali che $U_{r,n}$ e $U_{s,n}$ sono entrambi nearly normali in G, allora tale sarebbe anche

$$\langle b_n\rangle = U_{s,n} \cap U_{r,n}.$$

Per ogni intero positivo n, sia quindi $k(n)$ un intero positivo tale che il nocciolo V_n di $U_{k(n),n}$ ha indice finito in $U_{k(n),n}$ e $k(m) \neq k(n)$ se $m \neq n$.

Sia

$$U = \langle U_{k(n),n} |\ n \in \mathbb{N}\rangle = Dr_{n\in\mathbb{N}} U_{k(n),n}.$$

Chiaramente, il gruppo

$$U_{k(n),n}C/C$$

è infinito, pertanto per ogni n il sottogruppo V_n non è contenuto in C.

Per ogni intero positivo n, sia y_n un elemento di V_n dotato di infiniti coniugati e sia $V = Dr_{n\in\mathbb{N}}\langle y_n\rangle$. Allora risulta $V \cap V_n = \langle y_n\rangle$. Dal momento che V_n è normale in G e che y_n ha ordine finito, esistono infiniti coniugati di y_n mediante elementi di G che non appartengono a V; in particolare, l'indice $|V^G : V|$ è infinito. Per ipotesi, dunque, V è normale-per-finito. Tuttavia, essendo il prodotto diretto di sottogruppi normali e finiti di G, il nocciolo V_G di V in G è contenuto in C, dunque anche l'indice $|V : V \cap C|$ è finito, e ciò costituisce un assurdo essendo $\frac{VC}{C} = \frac{AC}{C}$. □

Corollario 3.1.2. *Sia G un p-gruppo localmente finito in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita e sia A un sottogruppo normale e abeliano di G. Allora A è contenuto nel secondo FC-centro $C_2(G)$ di G.*

Dim: Sia a un elemento di A, allora la chiusura normale $\langle a\rangle^G$ è un gruppo abeliano di esponente finito e, perciò, è un prodotto diretto di sottogruppi ciclici. Denotato con C l'FC-centro di G, dal Lemma 3.1.5 segue che il gruppo quoziente

$$\frac{\langle a\rangle^G C}{C} \cong \frac{\langle a\rangle^G}{\langle a\rangle^G \cap C}$$

è finito. Essendo anche normale in G/C, $\frac{\langle a\rangle^G C}{C}$ è contenuto nell'FC-centro $C_2(G)/C$ di G/C. In particolare $a \in C_2(G)$ e l'asserto è provato. $\square$

Il seguente lemma, dovuto a C. Casolo [4], riguarda il comportamento dei gruppi aventi tutti i sottogruppi verificanti una generalizzazione della nearly normalità al caso di gruppi di automorfismi ed è propedeutico alle dimostrazioni dei risultati seguenti.

Lemma 3.1.6. *Sia A un p-gruppo abeliano ridotto, e $\Gamma \leq Aut(A)$ tale che $|H^\Gamma : H|$ è finito per ogni H sottogruppo di A. Allora esiste un sottogruppo finito N di A, Γ-invariante tale che $\Gamma = Paut_\Gamma(A/N)$.*

Lemma 3.1.7. *Sia G un p-gruppo e sia A un sottogruppo normale abeliano di G tale che l'indice $|X^G : X|$ è finito per ogni sottogruppo X di A. Allora A contiene un sottogruppo finito G-invariante B tale che il centralizzante $C_G(A/B)$ ha indice finito in G.*

Dim: Sia D il massimo sottogruppo divisibile di A. Allora $A = D \times R$ con R gruppo ridotto.

Sia P un sottogruppo di A isomorfo al gruppo C_{p^∞}. Per ipotesi, l'indice $|P^G : P|$ è finito, allora per ogni $g \in G$, essendo

$$|P^g : P \cap P^g| = |PP^g : P| \leq |P^G : P|,$$

si ha

$$P^g = P \cap P^g,$$

e quindi P è normale in G. Pertanto tutti i sottogruppi di D sono normali in G. In particolare, il quoziente $G/C_G(D)$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo degli automorfismi potenza di D, e quindi è finito.

Per ipotesi, l'indice $|R^G : R|$ è finito, quindi, essendo l'estensione finita di un gruppo ridotto, anche R^G è ridotto. Per il Lemma 3.1.6, R^G contiene un sottogruppo B G-invariante tale che tutti i sottogruppi di R^G/B sono normali in G/B. In particolare, il quoziente $G/C_G(R^G/B)$ è finito. Dunque l'intersezione

$$C_G(D) \cap C_G(R^G/B)$$

ha indice finito in G, inoltre è un sottogruppo del centralizzante $C_G(A/B)$, quindi anche l'indice $|G : C_G(A/B)|$ è finito e l'asserto è provato. □

Lemma 3.1.8. *Sia G un p-gruppo risolubile i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito.*

Dim: Sia, per assurdo, G un controesempio con lunghezza derivata minima k e sia C l'FC-centro di G.

Per il Lemma 3.1.4, ogni sottogruppo di C è nearly normale in G e, in particolare, il sottogruppo derivato C' di C è finito. Senza perdita di generalità, si può quindi supporre che C sia abeliano. Per il Lemma 3.1.7, esiste un sottogruppo E di G finito e G-invariante tale che C' è contenuto in E e il centralizzante $C_G(C/E)$ ha indice finito in G. Dato che ogni p-gruppo finito-per-nilpotente è nilpotente, se G/E contenesse un sottogruppo nilpotente di indice finito, allora G sarebbe nilpotente-per-finito. Dall'assurdo segue che anche il gruppo quoziente G/E è un controesempio minimale e il suo FC-centro è il gruppo C/E. Pertanto, sostituendo G con G/E, si può supporre che l'indice $|G : C_G(C)|$ sia finito.

Sia $A = G^{(k-1)}$ l'ultimo termine non identico della serie derivata di G. Per la minimalità di k, il gruppo quoziente G/A contiene un sottogruppo N/A nilpotente e di indice finito. Essendo un gruppo periodico e risolubile, G è localmente finito, quindi A è contenuto nel secondo FC-centro $C_2(G)$ di G per il Corollario 3.1.2. Per il Lemma 3.1.4, ogni sottogruppo di AC/C ha indice finito nella propria chiusura normale in G/C. Nuovamente per il Lemma 3.1.7, esiste un sottogruppo G-invariante B di AC contenente C tale che B/C è finito e il centralizzante $C_G(AC/B)$ ha indice finito in G.

Poichè B/C è finito e contenuto in $C_2(G)/C$, anche l'indice del centralizzante $C_G(B/C)$ in G è finito. Quindi l'intersezione

$$M = N \cap C_G(C) \cap C_G(B/C) \cap C_G(AC/B)$$

è un sottogruppo nilpotente di G di indice finito.

Da questa contraddizione segue l'asserto. □

Proposizione 3.1.1. *Sia G un p-gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito.*

Dim: Per il Lemma 3.1.8, è sufficiente provare che il gruppo G è risolubile. Sia F il sottogruppo di Fitting di G. Allora F è un gruppo di Baer, quindi è risolubile per il Lemma 3.1.3. Si supponga, per assurdo, che l'indice $|G : F|$ di F in G è infinito. Per il Corollario 3.1.1, G/F contiene un sottogruppo N/F normale, nilpotente e infinito.

Dato che N è risolubile, per il Lemma 3.1.8 esso è anche nilpotente-per-finito. Pertanto il sottogruppo di Fitting M di N è normale in G, è nilpotente e ha indice finito in N.

Questa contraddizione prova che F ha indice finito in G, dunque G è risolubile e l'asserto è provato. □

Corollario 3.1.3. *Sia G un gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Sia P un p-sottogruppo di Sylow di G. Allora G possiede un sottogruppo normale nilpotente N tale che il quoziente PN/N è finito.*

Dimostrazione. Il sottogruppo P è un p-gruppo localmente finito in cui tutti i sottogruppi hanno oscillazione normale finita e dunque per il Lemma 3.1.1,

P è nilpotente-per-finito. Il nocciolo di P in G è anch'esso nipotente-per-finito e sia $N = Fit(P_G)$. Allora N è un gruppo di Baer nilpotente-per-finito e dunque risulta nilpotente. Poichè $N ch P_G \trianglelefteq G$, segue che $N \trianglelefteq G$. Pertanto N è un sottogruppo nilpotente, normale in G e di indice finito in P^G.
Se P è normale-per-finito, allora N ha indice finito in P e dunque segue l'asserto; altrimenti se P è nearly normale in G, essendo P nilpotente-per-finito, segue che è tale anche la sua chiusura normale in G. Il sottogruppo di Fitting di P^G è un sottogruppo normale in G, nilpotente e tale che PN/N è finito. Pertanto l'asserto è vero anche in questo caso. □

3.2 Gruppi contabili

Definizione 3.2.1. *Sia G un gruppo periodico e sia $\pi(G)$ l'insieme di tutti i numeri primi p tale che G possiede elementi di ordine p. Si supponga che $\pi(G) = \omega_1 \cup \omega_2$, dove ω_1 e ω_2 sono sottoinsieme disgiunti di $\pi(G)$.*
Se U è un ω_1-sottogruppo di G e V è un ω_2-sottogruppo di G tali che $G = UV$, si dice che $G = UV$ è una (ω_1, ω_2)-decomposizione di G.

Per ogni insieme ω di numeri primi, sia $\omega^{'}$ il complemento di ω in P, cioé l'insieme dei numeri primi che non appartengono a ω.
Per un rilevante risultato di P.Hall, ogni gruppo finito risolubile possiede una $(\omega, \omega^{'})$-decomposizione per ogni insieme ω di numeri primi. In un lavoro

non pubblicato, questo risultato fu esteso da Schenkman al caso dei gruppi localmente finiti contabili. Qui di seguito ne viene fornita una dimostrazione.

Lemma 3.2.1. *Sia G un gruppo localmente risolubile, periodico e contabile e sia ω un sottoinsieme di $\pi(G)$. Allora $G = UV$, dove U è un ω-sottgruppo e V è un ω'-sottogruppo di G.*

Dim: il gruppo G è contabile e localmente finito, dunque è lecito considerare una catena ascendente di sottogruppi finiti di G

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < G_3 \ldots < G_n < \ldots$$

tali che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (G_n) = G.$$

Si ponga $U_0 = V_0 = 1$ e sia $G_n = U_n V_n$, per qualche $n \geq 0$, una (ω, ω')-decomposizione di G_n (certamente esistente dato che G_n é finito e risolubile). Consideriamo una (ω, ω')-decomposizione di G_{n+1}

$$G_{n+1} = A_{n+1} B_{n+1}.$$

Per il teorema di Hall esistono degli elementi x ed y appartenenti a G_{n+1} tali che: $U_n \leq A_{n+1}^x$ e $V_n \leq B_{n+1}^y$.

Inoltre $G_{n+1} = U_{n+1} V_{n+1}$, con $U_{n+1} = A_{n+1}^x$ e $V_{n+1} = B_{n+1}^y$ (Lemma 1.3.1 [1]). In questo modo risultano definite induttivamente due catene ascendenti rispettivamente di ω-sottogruppi e ω'-sottogruppi finiti di G:

$$1 = U_0 < U_1 < U_2 < U_3 \ldots < U_n < \ldots$$

$$1 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 \ldots < V_n < \ldots.$$

Siano

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (U_n)$$

e

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (V_n)$$

rispettivamente un ω-sottogruppo e un ω'-sottogruppo di G.

Pertanto $G = UV$ è una (ω, ω')-decomposizione di G e il lemma è provato.

□

Lemma 3.2.2. *Sia G un gruppo contabile e localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Sia ω l'insieme dei numeri primi p tali che G contiene un p-sottogruppo di Sylow G_p non-normale. Allora ω è finito.*

Dim: Per l'osservazione 3.1.1, G contiene un sottogruppo normale e iperabeliano H di indice finito. Chiaramente, è sufficiente provare l'asserto per H, e quindi si può supporre, senza perdita di generalità, che G sia iperabeliano. Si supponga, per assurdo, che ω sia infinito e si consideri la relazione d'equivalenza in ω definita ponendo, per ogni p e q appartenenti ad ω, $p \sim q$ se e solo se tutti i p-elementi di G permutano con tutti i q-elementi di G.

Sia ω_1 un sottoinsieme infinito di ω tale che $\omega \setminus \omega_1$ sia infinito e sia

$$\omega_2 = \pi(G) \setminus \omega_1.$$

Poiché G è iperabeliano, ogni suo sottogruppo contabile è iperabeliano (Corollario pag.47 [23]); essendo inoltre localmente finito, G è localmente risolubile.

Per il Lemma 3.2.1, esistono un ω_1-sottogruppo U e un ω_2-sottogruppo V di G tale che $G = UV$.

Per il Lemma 3.1.1, i gruppi U/U_G e V/V_G hanno esponente finito. Pertanto esistono dei primi distinti p e q appartenenti rispettivamente a ω_1 e a $\omega \setminus \omega_1$ tali che $p \sim q$, o equivalentemente tali che l'interderivato $[G_p, G_q] = 1$.

Applicando il teorema di Ramsey, si ottiene che ω contiene un sottoinsieme infinito ω^* tale che $[G_p, G_q] = 1$ per tutti i primi distinti p e q appartenenti ad ω^*.

Sia

$$K = \langle G_p \mid p \in \omega^* \rangle = Dr_{p \in \omega^*} G_p.$$

Poiché il gruppo quoziente K/K_G ha esponente finito, esiste un numero primo q appartenente a ω^* tale che G_q è contenuto in K_G. Segue che G_q è un sottogruppo normale di G. Tale contraddizione prova l'asserto. $\square$

Definizione 3.2.2. *Una classe gruppale $\mathcal{X}$ è riconoscibile contabilmente se contiene tutti i gruppi i cui sottogruppi contabili appartengono a $\mathcal{X}$.*

Lemma 3.2.3. *La classe dei gruppi dotati di un sottogruppo nilpotente di indice finito è riconoscibile contabilmente.*

Dim: Sia G un gruppo i cui sottogruppi contabili sono dotati di un sottogruppo nilpotente di indice finito e sia F il sottogruppo di Fitting di G. Tutti i sottogruppi contabili di F sono nilpotenti e pertanto, dato che la classe dei gruppi nilpotenti è riconoscibile contabilmente per un risultato di M.R. Dixon, M.J. Evans e H. Smith [11], F è nilpotente. Si supponga che G/F sia infinito e sia H/F un sottogruppo infinito contabile di G/F. Allora G contiene un sottogruppo contabile X tale che

$$H \leq XF \ \text{ e } \ (X \setminus F) \cap V = \emptyset,$$

dove V è il sottogruppo di Fitting di X (Corollario 2.3 [11]).

Siano h e k elementi di H. Poiché $H \leq XF$, esistono a, b elementi di F e x, y elementi di X tali che $h = ax$ e $k = yb$.

In particolare, se i laterali hF e kF sono distinti, allora xF è diverso da yF, quindi $x^{-1}y \notin F$. Dunque $x^{-1}y$ non può appartenere a V. Se così fosse, infatti, apparterrebbe anche all'intersezione $(V \cap (X \setminus F))$ e ciò sarebbe assurdo dato che è vuota. Pertanto i laterali xV e yV sono diversi e quindi il gruppo quoziente X/V è infinito. Tale contraddizione prova che G/F è finito, sicché G è nilpotente-per-finito. $\square$

Teorema 3.2.1. *Sia G un gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito.*

Dim. Per il Lemma 3.2.3 è sufficiente provare l'asserto nel caso in cui G sia un gruppo contabile.

Sia ω l'insieme di tutti i numeri primi p tali che G possiede un p-sottogruppo di Sylow non normale G_p. Allora ω è finito per il lemma 3.2.2.

Sia $\pi = \pi(G) \setminus \omega$ e, per ogni $q \in \pi$, sia G_q l'unico q-sottogruppo di Sylow di G.

Si consideri il seguente sottogruppo normale di G

$$K = Dr_{q\in\pi} G_q.$$

Poiché G è contabile e l'intersezione $\pi(K) \cap \pi(G/K)$ è vuota, K possiede un complemento in G, ovvero esiste un sottogruppo H di G tale che $G = HK$ e $H \cap K = 1$.

Sia π^* il sottoinsieme di π costituito da tutti i numeri primi q tali che G_q contiene un sottogruppo non-normale X_q e sia

$$X = Dr_{q\in\pi^*} X_q.$$

Il gruppo quoziente X/X_G ha esponente finito per il lemma 3.1.1, pertanto π^* deve essere finito. Per ogni $q \in \pi \setminus \pi^*$, G_q ha tutti i sottogruppi normali, quindi per il Teorema di Baer-Dedekind G_q è abeliano oppure è prodotto diretto di Q_8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di ordine 4. In particolare, per ogni q appartenente a $\pi \setminus \pi^*$ con $q \neq 2$, G_q è abeliano. D'altra parte, dalla Proposizione 3.1.1, segue che ogni sottogruppo di Sylow di G è nilpotente-per-finito, quindi K è nilpotente-per-finito e dunque il $Fit(K) = L$ è nilpotente e ha indice finito in K.

Poiché H è isomorfo al quoziente G/K, l'insieme dei primi $\pi(H) = \pi(G/K)$ è contenuto in $\pi(G) \setminus \pi(K)$, ma $\pi(K) = \pi(G) \setminus \omega$ e dunque $\pi(H)$ è finito.

Dal Corollario 3.1.3, esiste un sottogruppo N normale, nilpotente di G tale che tutti i sottogruppi di Sylow di HN/N sono finiti. Segue che HN/N è finito e dato che $|K : L|$ è finito, si ha che il sottogruppo LN ha indice finito in G. Pertanto LN è un sottogruppo normale, nilpotente e di indice finito in G e il teorema è provato. $\square$

Indice

Bibliografia

[1] B. Amberg, S. Franciosi, F. de Giovanni: "Products of Groups. *Clarendon Press*, Oxford (1992).

[2] R. Baer: "Finiteness properties of groups. *Duke Math. J.* 15 (1948), 1021–1032.

[3] J. Buckley, J. C. Lennox, B. H. Neumann, H. Smith, J. Wiegold : "Groups with all subgroups normal-by-finite. *J. Austral. Math. Soc. Ser.* A 59 (1995), 384–398.

[4] C. Casolo: "Groups with finite conjugacy classes of subnormal subgroups, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 81 (1989), 107–149.

[5] M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella : "Groups with finitely many normalizers of non-polycyclic subgroups, *Algebra Colloq.* 17 (2010) 203–210.

[6] F. De Mari, F. de Giovanni : "Groups with few normalizer subgroups, *Irish Math. Soc. Bull.* 56 (2005) 103–113.

[7] F. De Mari, F. de Giovanni : "Groups with finitely many normalizers of non-abelian subgroups, *Ricerche Mat.* 55 (2006) 311–317.

[8] F. De Mari, F. de Giovanni : "Groups with finitely many normalizers of subnormal subgroups, *J. Algebra* 304 (2006) 382–396.

[9] F. De Mari, F. de Giovanni : "Groups with finitely many normalizers of non-nilpotent subgroups, *Math. Proc. Roy. Irish Acad.* 107A (2007) 143–152.

[10] A.P. Dietzmann : "On p-groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 15 (1937) 71–76.

[11] M.R. Dixon, M.J. Evans, H. Smith : " Some countably recognizables classes of groups ", *J. Group Theory* 10 (2007), 641–653.

[12] I. I. Eremin : " Groups with finite classes of conjugate abelian subgroups ". *Mat. Sb.* 47 (1959), 45–54.

[13] S. Franciosi - F. de Giovanni: "Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups, *Proceedings of Groups* - Korea 1994, de Gruyter, Berlin (1995), 107–118.

[14] F. de Giovanni, M. Martusciello, C. Rainone: "Locally finite groups whose subgroups have finite normal oscillation, *Bull. Aust. Math. Soc.*

[15] F. de Giovanni, C. Rainone: "Infinite groups with many generalized normal subgroups, *International J. Group Theory* 1 (2012), 39–49.

[16] B. Hartley: "Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups, *J. London Math. Soc.* 37 (1988), 421–436.

[17] L.A. Kurdachenko, S.S. Levishchenko, N.N. Semko: "Groups with almost normal infinite subgroups, *Soviet Math. (izv. VUZ)* 27 (1983), 73–81.

[18] A. Mann, D. Segal: "Uniform finiteness conditions in residually finite groups, *Proc. London Math. Soc.* 61 (1990), 529–545.

[19] W. Möhres: "Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind, *Arch. Math. (Basel)* 54 (1990), 232–235.

[20] B. H. Neumann: "Groups covered by permutable subsets, *J. London Math. Soc.* 29 (1954), 236–248.

[21] B. H. Neumann: "Groups with finite classes of conjugate subgroups, *Math. Z.* 63 (1955), 76–96.

[22] Y. D. Polovickiĭ : "Groups with finite classes of conjugate infinite abelian subgroups, *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 24 (1980), 52–59.

[23] D.J.S. Robinson: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. *Springer*, Berlin (1972).

[24] D.J.S. Robinson: "A Course in the Theory of Groups. *Springer*, Berlin (1996).

[25] V.P. Šunkov: "On the minimality problem for locally finite groups, *Algebra and Logic* 9 (1970), 137–151.

[26] I. Schur: "Neuer Beweis eines Satzes uber endliche Gruppen, *Sitzber. Akad. Wiss. Berlin*, (1902), 1013–1019.

[27] M. J. Tomkinson: "On theorems of B. H. Neumann concerning FC-groups. *Rocky Mountain J. Math.*, 11 (1981), 47–58.

[28] M. J. Tomkinson: "FC-groups. *Pitman*, Boston (1984).

[29] D.I. Zaicev: "On solvable subgroups of locally solvable groups, *Soviet Math. Dokl. (SSSR)* 15 (1974), 342–345.