UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Matematica e Applicazioni 'R. Caccioppoli'

Dottorato di ricerca in Scienze Matematiche

XXVI ciclo

GRUPPI CON CONDIZIONI DI NORMALITA' SU SISTEMI DI SOTTOGRUPPI

Tesi di Dottorato

di

Maria Martusciello

Indice

Introduzione

La struttura dei gruppi in cui ogni sottogruppo $è$ normale, detti gruppi di Dedekind $è$ ben nota. Un classico risultato di Baer-Dedekind [2], mostra che i gruppi non abeliani con tale propriet$à$ sono esattamente i gruppi che si decompongono nel prodotto diretto di Q_8 (gruppo dei quaternioni di ordine 8) e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di ordine 4.

$È$ rilevante richiedere che un gruppo G abbia tutti i sottogruppi normali, cos$ì$ come pu$ò$ essere richiedere che l'insieme dei sottogruppi non-normali sia "piccolo". Nella seconda met$à$ del secolo scorso, gruppi per i quali l'insieme dei sottogrupi non-normali $è$ in qualche senso piccolo, sono stati studiati in molte situazioni differenti. In particolare alcuni autori hanno studiato gruppi in cui ogni sottogruppo non-normale soddisfa una certa propriet$à$ $\mathcal{X}$, per diverse scelte di $\mathcal{X}$.

Romalis e Sesekin presero in considerazione i gruppi in cui tutti i sottogruppi non-normali sono abeliani, detti gruppi metahamiltoniani ([23], [25]); mentre

Bruno e Phillips in [5], descrivono i gruppi in cui ogni sottogruppo $\grave{e}$ normale oppure localmente nilpotente. In seguito, Franciosi, de Giovanni e Newell considerano gruppi i cui sottogruppi non-normali soddisfano certe restrizioni sul rango [16].

Altrettanto forte, $\grave{e}$ l'imposizione ai sottogruppi di un gruppo G, di condizioni di normalit$\grave{a}$ generalizzata, infatti tale imposizione ha una forte influenza sulla struttura del gruppo stesso.

Nel primo capitolo di questa tesi, si riportano alcune definizioni e risultati di teoria dei gruppi con lo scopo di rendere pi$\grave{u}$ agevole la comprensione dei risultati successivi. Il secondo capitolo $\grave{e}$ dedicato allo studio dei gruppi in cui ogni sottogruppo non-normale $\grave{e}$ supersolubile. Un gruppo G, si dice supersolubile se possiede una serie normale finita a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali $\{1\}$ e G stesso. Si fornisce una completa descrizione di tali gruppi.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice nearly normale in G se ha indice finito nella sua chiusura normale H^G in G; mentre diremo che H $\grave{e}$ normale-per-finito se H/H_G $\grave{e}$ finito, dove H_G $\grave{e}$ il nocciolo di H in G. Se H $\grave{e}$ un sottogruppo normale di un gruppo G, allora $H = H_G = H^G$ segue allora che H $\grave{e}$ nearly normale in G e normale-per-finito. Pertanto tali sottogruppi sono sottogruppi normali generalizzati.

B.H. Neumann [19], ha descritto i gruppi in cui tutti i sottogruppi sono nearly normali, mentre Buckley, Lennox, Newmann, Smith e Wiegold, hanno studiato i gruppi localmente finiti in cui ogni sottogruppo *è* normale-per-finito [6]. Nel terzo capitolo si studiano i gruppi in cui ogni sottogruppo *è* nearly normale oppure normale-per-finito. Notazioni e terminologia sono quelle usuali in Teoria dei Gruppi; in particolare si fa riferimento a [20].

Desidero ringraziare il Prof. Francesco de Giovanni, la Prof.ssa C. Musella e la Dott.ssa M. De Falco, che in questi anni mi hanno costantemente guidato nel lavoro di ricerca e nella stesura di questa tesi.

Capitolo 1

Condizioni di catena in Teoria dei Gruppi

In questo capitolo verranno esposti alcuni concetti di teoria dei gruppi, in particolare ricordiamo una delle più importanti classi di gruppi risolubili infiniti, i gruppi policiclici. Una sezione è dedicata ai gruppi supersolubili ed una ai gruppi minimax.

1.1 Gruppi Policiclici

Per descrivere i gruppi policiclici, premettiamo alcune nozioni fondamentali.

Lemma 1.1.1. *Sia* $(S, \leq)$ *un insieme ordinato. Allora sono equivalenti:*

(i) Ogni parte non vuota di S *è dotata di qualche elemento massimale.*

(ii) Per ogni successione crescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di S esiste un numero intero positivo m tale che $x_n = x_m$ per ogni $n \geq m$.

Definizione 1. *Un gruppo G verifica la condizione massimale sui sottogruppi se l'insieme ordinato $(\mathcal{L}(G), \leq)$ verifica una delle condizioni equivalenti del lemma 1.1.1.*

Osserviamo che se un gruppo G verifica la condizione massimale sui sottogruppi, anche i sottogruppi e i quozienti di G godono della stessa proprietà. Inoltre si ha:

Lemma 1.1.2. *Sia G un gruppo, e sia N un sottogruppo normale di G. Se N e G/N verificano la condizione massimale sui sottogruppi, anche G verifica la condizione massimale sui sottogruppi.*

Lemma 1.1.3. *Un gruppo G verifica la condizione massimale sui sottogruppi se e soltanto se ogni suo sottogruppo è finitamente generato.*

É chiaro che se G verifica la condizione massimale sui sottogruppi, allora G è finitamente generato, ma il viceversa non è vero in generale. Tuttavia, aggiungendo l'ipotesi di abelianità al gruppo G si ha:

Lemma 1.1.4. *Sia G un gruppo abeliano, allora G verifica la condizione massimale sui sottogruppi se e solo se è finitamente generato.*

G.

Definizione 2. *Un gruppo G si dice* ***policiclico*** *se è dotato di una serie finita a fattori ciclici contenenti i sottogruppi banali $\{1\}$ e G.*

Il prossimo teorema caratterizza i gruppi policiclici.

Teorema 1.1.1. *Un gruppo G è policiclico se e soltanto se è risolubile e verifica la condizone massimale sui sottogruppi.*

Dal teorema precedente segue in particolare che ogni gruppo risolubile finito è policiclico, mentre risulta ovvio dalla definizione che un gruppo policiclico periodico è finito. La classe dei gruppi policiclici è chiusa per sottogruppi e per quozienti, cioè sottogruppi e quozienti di gruppi policiclici sono policiclici. Inoltre se un gruppo G contiene un sottogruppo N normale policiclico tale che il gruppo quoziente G/N è policiclico allora G è policiclico. Si osservi infine che ogni gruppo abeliano finitamente generato è prodotto diretto di un numero finito di sottogruppi ciclici e quindi è policiclico. Più in generale si ha:

Lemma 1.1.5. *Sia G un gruppo nilpotente e finitamente generato. Allora G è policiclico.*

Lemma 1.1.6. *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e sia H un sottogruppo di G. Allora H è intersezione di sottogruppi di indice finito di G.*

Più in generale, per i gruppi policiclici si ha il seguente teorema dovuto a A.I. Mal'cev:

Teorema 1.1.2. *(A.I. Mal'cev) Sia G un gruppo policiclico. Allora ogni sottogruppo di G è intersezione di sottogruppi di indice finito.*

Teorema 1.1.3. *(K.A. Hirsch) Sia G un gruppo policiclico. Se ogni quoziente finito di G è nilpotente, allora anche G è nilpotente.*

Il teorema precedente è stato migliorato da D.J.S. Robinson, il quale ha provato che un gruppo risolubile finitamente generato che abbia tutti i quozienti finiti nilpotenti è anch'esso nilpotente.

1.2 Gruppi supersolubili

Oggetto di questa sezione è la classe dei gruppi supersolubili con le relative proprietà.

Definizione 3. *Un gruppo G si dice* ***supersolubile*** *se è dotato di una serie normale finita a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali $\{1\}$ e G.*

Ovviamente, sottogruppi e quozienti di un gruppo supersolubile sono ancora supersolubili; invece se M è un sottogruppo normale e supersolubile di un gruppo G e tale che G/M è un gruppo supersolubile, allora non è detto che G sia supersolubile. Pertanto si ha la seguente definizione:

Definizione 4. *Un sottogruppo M di un gruppo G è detto **supersolubilmente immerso** in G se possiede una serie finita G-invariante a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali.*

Esistono gruppi risolubili finiti che non sono supersolubili, basti pensare al gruppo alterno A_4, mentre S_3 è un esempio di gruppo supersolubile non nilpotente. Inoltre ogni gruppo supersolubile è policiclico ed ogni gruppo abeliano finitamente generato è supersolubile. Più in generale si ha:

Lemma 1.2.1. *Sia G un gruppo nilpotente finitamente generato. Allora G è supersolubile.*

Prima di enunciare il prossimo risultato premettiamo le seguenti definizioni:

Definizione 5. *Un sottogruppo L di un gruppo G, è detto* **normale minimale** *in G, se è un sottogruppo normale di G, non identico ed è privo di sottogruppi propri, normali e non banali di G.*

Definizione 6. *Sia G un gruppo. Siano H e K sottogruppi normali di G tali che $K \leq H$. Il fattore H/K è detto fattore principale di G se H/K è normale minimale in G/K.*

Teorema 1.2.1. *Sia G un gruppo supersolubile. Allora ogni fattore principale di G ha ordine primo.*

Dim. Sia H/K un fattore principale di G. Allora H/K *è* un sottogruppo normale minimale del gruppo supersolubile G/K, sicchè senza ledere le generalitá si può supporre che $K = \{1\}$. Dunque
H *è* un sottogruppo normale minimale di G. Sia

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_t = G$$

una serie normale finita di G a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali $\{1\}$ e G. Poichè $H \cap G_n = H \cap G = H \neq \{1\}$, *è* lecito considerare il minimo numero intero positivo $i \leq t$ tale che $H \cap G_i \neq 1$. Consideriamo il termine G_{i-1}; per la minimalitá di i si ha che $H \cap G_{i-1} = \{1\}$.
D'altra parte $H \cap G_i = H$, e quindi H *è* contenuto in G_i. Dunque $H = H/H \cap G_{i-1} \simeq HG_{i-1}/G_{i-1}$. Sicchè H *è* isomorfo ad un sottogruppo di G_i/G_{i-1}, e quindi *è* ciclico. Poichè ogni sottogruppo di un gruppo ciclico *è* caratteristico, si ha che H ha ordine primo. Pertanto l'asserto *è* provato. □

Definizione 7. *Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi e sia G un gruppo. L'$\mathcal{X}$-residuale, di G è l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G tale che i rispettivi gruppi quozienti in G sono $\mathcal{X}$-gruppi; tale sottogruppo si denota con $\varrho^*_{\mathcal{X}}(G)$.*

L'$\mathcal{X}$-residuale di G *è* un sottogruppo caratteristico di G. Per esempio, se $\mathcal{X} = \mathcal{F}$, la classe dei gruppi finiti, $\varrho^*_{\mathcal{F}}(G)$ *è* il residuale finito di G, cioè l'intersezione dei sottogruppi normali di G di indice finito in G.

Definizione 8. *Un gruppo G è detto* ***residualmente finito*** *se il suo residuale finito è identico.*

Osserviamo che $G/\varrho^*_{\mathcal{F}}(G)$ non è detto che sia finito. Infatti, in generale il gruppo quoziente $G/\varrho^*_{\mathcal{X}}(G)$ non appartiene alla classe $\mathcal{X}$.
Il caso di maggior interesse si verifica quando $G/\varrho^*_{\mathcal{X}}(G)$ è un $\mathcal{X}$-gruppo, e in tal caso G possiede un unico sottogruppo minimo tale che il corrispondente gruppo quoziente appartiene alla classe $\mathcal{X}$. Consideriamo $\mathcal{X}$ la classe dei gruppi supersolubili. Si ha:

Definizione 9. *Sia G un gruppo. Si definisce* ***residuale supersolubile*** *di G, M, l'intersezione di tutti i sottogruppi normali L di G tali che G/L è un gruppo supersolubile.*

Consideriamo un gruppo finito G e sia M il residuale supersolubile di G. Allora il gruppo quoziente G/M è un gruppo supersolubile finito e questo è il più grande quoziente supersolubile finito di G.

Definizione 10. *Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi. Un sottogruppo E di un gruppo G è chiamato $\mathcal{X}$-massimale in G se :*

(a) $E \in \mathcal{X}$;

(b) *se* $E \leq V \leq G$ *e* $V \in \mathcal{X}$, *allora* $E = V$

Definizione 11. *Sia $\mathcal{X}$ una classe di gruppi. Un sottogruppo E di un gruppo finito G, è detto $\mathcal{X}$-proiettore di G se:*

$$EN/N \text{ è un sottogruppo } \mathcal{X}-\text{massimale di } G/N, \text{per ogni sottogruppo } N \triangleleft G$$

Sia $\mathcal{X}$ la classe dei gruppi supersolubili. Allora si ha:

Definizione 12. *Un sottogruppo E di un gruppo finito G è detto proiettore supersolubile di G se:*

$$EN/N \text{ è un sottogruppo supersolubile massimale di } G/N, \text{per ogni sottogruppo } N \triangleleft G$$

Il prossimo risultato mostra il comportamento del sottogruppo di Fitting di un gruppo supersolubile. Pertanto ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 13. *Sia G un gruppo. Il sottogruppo di Fitting di G è il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi normali e nilpotenti di G.*

Teorema 1.2.2. *Sia G un gruppo supersolubile. Allora il sottogruppo di Fitting F di G è nilpotente, e G/F è un gruppo abeliano finito.*

Dim. Il gruppo G è supersolubile e quindi policiclico e pertanto verifica la condizione massimale sui sottogruppi. Dal lemma 1.1.3 il sottogruppo di Fitting F di G è finitamente generato, e quindi è il prodotto di un numero finito di sottogruppi normali e nilpotenti. Per il teorema di Fitting segue che F è nilpotente.

Sia

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_t = G$$

una serie normale e finita di G a fattori ciclici contenente i sottogruppi banali $\{1\}$ e G. Qualunque sia il numero $i \leq t$, sia C_i/G_{i-1} il centralizzante di G_i/G_{i-1} in G/G_{i-1}. Allora C_i è un sottogruppo normale di G e G/C_i è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo di automorfismi del gruppo ciclico G_i/G_{i-1}, dunque G/C_i è un gruppo abeliano finito.

Pertanto l'intersezione

$$C = \bigcap_{i=1}^{t}(C_i)$$

è un sottogruppo normale di G e G/C èun gruppo abeliano finito. D'altra parte risulta:

$$[C \cap G_i, C] \leq C \cap G_{i-1}$$

per ogni numero intero positivo $i \leq t$. Segue dunque che la serie:

$$\{1\} = C \cap G_0 < C \cap G_1 < C \cap G_2 < C \cap G_3 < \ldots < C \cap G_t = C$$

è una serie centrale di C. Pertanto C è un sottogruppo normale nilpotente di G, cosicchè $C \leq F$ e G/F è un gruppo abeliano finito. □

Il teorema 1.1.3 afferma che un gruppo policiclico è nilpotente se ha i quozienti finiti nilpotenti. Il corrispondente risultato per la supersolubilità è stato ottenuto da R.Baer come mostra il seguente teorema:

Teorema 1.2.3. *(R. Baer) Un gruppo policiclico è supersolubile se ha tutti i quozienti finiti supersolubili.*

A differenza del teorema 1.1.3, il teorema di *Baer* non si estende ai gruppi risolubili e finitamente generati. Infatti l'esempio seguente mostra quanto appena detto.

Esempio 1. *Sia A il sottogruppo abeliano del gruppo additivo dei razionali, costituito da tutte le frazioni con denominatore potenza di 2:*

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0 \right\}.$$

Consideriamo il gruppo quoziente $A/Z = \left\{ \frac{m}{2^n} + Z, m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0 \right\}$, tale gruppo non verifica la condizione massimale sui sottogruppi e pertanto A non può verificare la condizione massimale. Poichè A è abeliano, allora per il lemma 1.1.4 A è un gruppo non finitamente generato.

Consideriamo la seguente applicazione

$$x : a \in A \longmapsto 2a \in A,$$

x è un automorfismo di A. Sia $G = A \ltimes \langle x \rangle$, il prodotto semidiretto di A con il sottogruppo $\langle x \rangle$ generato da x. Allora G è un gruppo risolubile finitamente generato a quozienti finiti supersolubili ma non è supersolubile.

1.3 Gruppi minimax

Diamo ora la definizione di condizione minimale sui sottogruppi e dei cenni sui gruppi che la verificano.

Lemma 1.3.1. *Sia* $(S, \leq)$ *un insieme ordinato. Allora sono equivalenti:*

(i) Ogni parte non vuota di S *è dotata di qualche elemento minimale.*

(ii) Per ogni successione decrescente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *di elementi di* S *esiste un numero intero positivo* m *tale che* $x_n = x_m$ *per ogni* $n \geq m$*.*

Definizione 14. *Un gruppo* G *verifica la condizione minimale sui sottogruppi se l'insieme ordinato* $(\mathcal{L}(G), \leq)$ *dei sottogruppi di* G *verifica una delle condizioni equivalenti del lemma 1.3.1.*

Osserviamo che se un gruppo G verifica la condizione minimale sui sottogruppi, anche i sottogruppi e i quozienti di G godono della stessa proprietà. Inoltre si ha:

Lemma 1.3.2. *Sia* G *un gruppo, e sia* N *un sottogruppo normale di* G*. Se* N *e* G/N *verificano la condizione minimale sui sottogruppi, anche* G *verifica la condizione minimale sui sottogruppi.*

Definizione 15. *Un gruppo* G *è detto di* Černikov *se verifica la condizione minimale sui sottogruppi, e inoltre contiene un sottogruppo abeliano di indice finito.*

Un gruppo finito *è* un gruppo di *Č*ernikov e il p-gruppo di Pr*ü*fer $Z(p^\infty)$ *è* un gruppo di *Č*ernikov infinito. Il seguente teorema descrive la struttura dei gruppi di *Č*ernikov.

Teorema 1.3.1. *Un gruppo G è di Černikov se esoltanto se possiede un sottogruppo normale abeliano di indice finito che sia prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer.*

Teorema 1.3.2. *(S.N. Černikov) Se G è un gruppo risolubile verificante la condizione minimale sui sottogruppi, allora G è di Černikov.*

Un gruppo G è chiamato *gruppo minimax* se possiede una serie minimax, cioè una serie di lunghezza finita i cui fattori soddisfano la condizione massimale oppure la condizione minimale sui sottogruppi. L'essere minimax esprime una condizione finitaria che generalizza sia quella massimale che quella minimale. La classe dei gruppi minimax è chiusa per sottogruppi, per quozienti e per estensione.
Un esempio di gruppo abeliano minimax è il gruppo $\mathbb{Q}_\pi$ dei numeri razionali i cui denominatori sono π-numeri, dove π *è* un insieme finito di primi; infatti $\mathbb{Z}$ soddisfa la condizione massimale e il fattore $\mathbb{Q}_\pi/\mathbb{Z}$ soddisfa la condizione minimale. *È* chiaro che un gruppo abeliano minimax ha rango finito. I gruppi risolubili minimax furono studiati da Baer, Robinson e Začev. Poichè ogni gruppo policiclico e ogni gruppo di *Č*ernikov ha rango finito, segue che ogni

gruppo risolubile minimax ha rango finito([20], Parte 1 lemma 1.44).

La stuttura dei gruppi risolubili-per-finito minimax è stata descritta da Robinson [[20], Parte 2, capitolo 10]; infatti si ha:

Teorema 1.3.3. *Sia G un gruppo risolubile-per-finito minimax. Sia J il residuale finito di G e F/J il sottogruppo di Fitting di G/J.allora:*

a) J è il massimo sottogruppo divisibile di G ed è prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer;

b) F/J è nilpotente;

c) G/F è un gruppo finitamente generato e abeliano-per-finito.

Ovviamente, ogni gruppo periodico minimax soddisfa la condizione minimale sui sottogruppi, e pertanto ogni gruppo di Černikov è un gruppo periodico risolubile-per-finito minimax e viceversa.

Capitolo 2

Gruppi con tutti i sottogruppi non-normali supersolubili

Questo capitolo è dedicato a descrivere i gruppi in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile. I risultati riportati di seguito sono presenti in "*Groups with non-normal subgroups are supersoluble*" [10] . Lo scopo è fornire una caratterizzazione di tali gruppi nel caso localmente graduato. Ricordiamo che un gruppo G si dice ***localmente graduato*** se ogni sottogruppo non-banale finitamente generato di G possiede un sottogruppo proprio di indice finito. In particolare, ogni gruppo (risolubile-per-finito) è localmente graduato. A tal scopo, si considerano gruppi finiti e gruppi policiclici in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile. Come conseguenza della descrizione dei gruppi in cui ogni sottogruppo non-normle è supersolubile, si hanno alcune informazioni sui gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-supersolubili.

2.1 Gruppi Finiti

Nello studio dei gruppi i cui sottogruppi non-normali sono supersolubili, gioca un ruolo importante la classe dei gruppi finiti in cui ogni sottogruppo è subnormale oppure supersolubile. Chiameremo tali gruppi SS-gruppi. Ricordiamo che un sottogruppo H di un gruppo G si dice *subnormale* in G se esiste una serie finita di G contenente H e G. La struttura degli SS-gruppi è stata descritta completamente da Ballester-Bolinches e Cossey ([4], teorema 1). Riportiamo nel lemma seguente una delle condizioni necessarie del teorema 1 citato sopra.

Lemma 2.1.1. *Sia G un SS-gruppo non-supersolubile. Allora il residuale supersolubile M di G è un p-gruppo per qualche primo p; $\dfrac{M}{M'}$ è un fattore principale di G, e M è abeliano oppure un p-gruppo speciale.*
Inoltre, se E è il proiettore supersolubile di G, allora $G = ME$, $E \cap M = M'$ e il centralizzante di $\dfrac{M}{M'}$ in $E, C_E\left(\dfrac{M}{M'}\right)$, è privo di fattori principali complementati non centrali di G.

Ricordiamo che se H e K sono sottogruppi normali di un gruppo G e

$H \leq K$, allora G agisce per coniugio su H/K e il nucleo di tale azione è:

$$C_G(H/K) = \{x \in G | [H, x] \leq K\},$$

cosicchè il gruppo quoziente $G/C_G(H/K)$ è isomorfo ad un gruppo di automorfismi indotto da G in H/K.

Definizione 16. *Sia A un gruppo di automorfismi di un gruppo abeliano G. Diremo che A* **agisce irriducibilmente** *su G se G è privo di sottogruppi propri non banali A-invarianti.*

Iniziamo lo studio dei gruppi in cui ogni sottogruppo è normale oppure supersolubile. Il teorema seguente fornisce una caratterizzazione di tali gruppi nel caso finito.

Teorema 2.1.1. *Sia G un gruppo finito non-supersolubile e sia M il residuale supersolubile di G. Allora ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

(i) G è un SS-gruppo;

(ii) Se E è il proiettore supersolubile di G, allora ogni sottogruppo H di E contenente il sottogruppo derivato , M', di M e tale che $H/C_H(M/M')$ agisce irriducibilmente su M/M' è normale in E.

Dim. Supponiamo che ogni sottogruppo di G non-supersolubile *è* normale, allora chiaramente ogni sottogruppo non-supersolubile di G *è* subnormale e dunque vale la condizione (i), cio*è* G *è* un SS-gruppo.

Sia E il proiettore supersolubile di G e sia H un sottogruppo di G tale che $M' \leq H \leq E$ e H agisce irriducibilmente su M/M'. Per il lemma 2.1.1, M *è* abeliano oppure un p-gruppo speciale e quindi M *è* nilpotente. Allora il quoziente M/M' non pu*ò* essere ciclico, infatti se M/M' fosse ciclico, essendo G/M supersolubile risulterebbe G/M' supersolubile. Dato che M *è* il pi*ù* piccolo sottogruppo di G tale che G/M *è* supersolubile, l'unica possibilit*à* sarebbe M uguale ad M', ma ci*ò* contraddice la nilpotenza di M. Poich*è* H agisce irriducibilmente su M/M', M/M' *è* normale minimale in HM/M' e dunque HM non pu*ò* essere supersolubile altrimenti M/M' avrebbe ordine primo per il teorema 1.2.1 e dunque sarebbe ciclico. Pertanto HM *è* un sottogruppo normale di G e quindi il sottogruppo $HM \cap E$ *è* normale in E. Per la legge di Dedekind si ha che $HM \cap E = H(M \cap E)$, ma $M \cap E = M'$ e dunque $HM \cap E = HM'$ e poich*è* $M' \leq H$ segue che $HM \cap E = H$. Pertanto H *è* normale in E. Viceversa, supponiamo che G verifichi le condizioni dell'asserto e proviamo che ogni sottogruppo non-supersolubile di G *è* normale in G.

A tal scopo, sia K un sottogruppo di G non-supersolubile. Sia J il residuale supersolubile di K. Allora J *è* contenuto nel residuale supersolubile, M, di

G; infatti sia L un sottogruppo normale di G tale che G/L è supersolubile. Allora l'intersezione $K \cap L$ é un sottogruppo normale di K tale che $K/K \cap L \simeq KL/L$ é un sottogruppo di G/L e come tale è supersolubile. Dunque J è contenuto in $K \cap L$ e quindi in L. Per l'arbitrarietà di L, segue che J è contenuto in ogni sottogruppo normale di G a quoziente supersolubile, cosicchè $J \leq M$.

Poichè G verifica la condizione (i), M/M' è normale minimale in G/M' per il lemma 2.1.1. Osserviamo che M/M' è irriducibile come K-modulo oppure i fattori di composizione di M/M' come K-modulo sono unidimensionali (si veda [2], la proprietà (*) nella dimostrazione del Teorema 1). Poichè M' ècontenuto nel $C = C_E\left(\frac{M}{M'}\right)$ e C è l'ipercentro supersolubile di$G$, i fattori di composizione di M/M' come K-modulo non possono essere unidimensionali. Pertanto M/M' è irriducibile come K-modulo.

Il sottogruppo $JM^{'}$ è un sottogruppo di M contenente M', K-invariante e poichè K agisce irriducibilmente su M/M', si ha che $JM' = M'$ oppure $JM' = M$. Nel primo caso si ottiene J ciclico e dunque K supersolubile. Quindi necessariamente $JM' = M$. Dato che M è un gruppo nilpotente finito, M' è contenuto nel sottogruppo di Frattini di M e pertanto $J = M$. Dunque K contiene M cosicchè $K = K \cap G = K \cap ME = M(K \cap E)$.

Per provare che K è normale in G, è sufficiente mostrare che $K \cap E$ é normale in E. Poichè $M' = M \cap E \leq K \cap E \leq E$, per la condizione (ii), è sufficiente provare che $(K \cap E)/C_H(M/M')$ agisce irriducibilmente su M/M'. Ma ciò è vero perchè M/M' è irriducibile come K -modulo. Segue che $K \cap E$ è normale in E, e quindi K è normale in G. Pertanto G ha tutti i sottogruppi non-normali supersolubili. □

2.2 Gruppi policiclici

In questa sezione verrà data una caratterizzazione dei gruppi policiclici in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile. Inoltre, se G è un gruppo poiciclico,molte proprietà gruppali possono essere dedotte per G dal comportamento delle sue immagini omomorfe finite (si veda il teorema 1.1.3, capitolo 1).

La proposizione seguente mostra che nei gruppi policiclici la proprietà i possedere sottogruppi non-normali supersolubili può essere dedotta dal comportamento delle sue immagini omomorfe finite.

Lemma 2.2.1. *Sia G un gruppo policiclico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) Ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile;

(ii) Ogni sottogruppo di indice finito in G è normale oppure supersolubile;

(iii) In ogni immagine omomorfa finita di G, ogni sottogruppo non-normale è supersolubile.

Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile, ovviamente lo è anche ogni sottogruppo non-normale di indice finito di G.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sia N un sottogruppo normale di G e G/N un'immagine omomorfa finita di G.
Sia H/N un sottogruppo non-normale di G/N. Ci proponiamo di mostrare che H/N è supersolubile. H è un sottogruppo non-normale di indice finito di G e quindi per la (ii) H è supersolubile. Poichè la classe dei gruppi supersolubili è chiusa per quozienti si ha l'asserto.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia H un sottogruppo non-normale di G. Poichè G è policiclico, per il teorema 1.1.2,

$$H = \bigcap_{\forall i} K_i,$$

con $|G : K_i|$ finito. Poichè H è non-normale in G, esiste un indice i tale che K_i è non-normale in G.
Pertanto K_i è un sottogruppo non-normale di indice finito di G, e quindi per ipotesi K_i è supersolubile. Segue H supersolubile e quindi vale la (i).
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sia H un sottogruppo non-normale di indice finito di G.
Consideriamo un'immagine omomorfa finita di H che denotiamo con H/L.
Sia $N = L_G$ il nocciolo di L in G. Chiaramente il quoziente H/N è un

sottgoruppo non-normale di G/N e per la (iii) è supersolubile. Segue che H/L è supersolubile. Pertanto si è provato che ogni immagine omomorfa finita di H è supersolubile. Allora per il teorema di Baer (1.2.3, capitolo 1) si ha che H è supersolubile ottenendo così la condizione (ii). □

Lemma 2.2.2. *Sia G un gruppo policiclico non-supersolubile in cui ogni sottogruppo non-supersolubile è normale. Allora G possiede un sottogruppo T normale, nilpotente, senza torsione e tale che il gruppo quoziente G/T è un gruppo finito non-supersolubile.*

Dim. Poichè i gruppi di Dedekind sono localmente supersolubili, G possiede necessariamente un sottogruppo non normale. Inoltre dato che G è policiclico per il teorema 1.1.2 esiste un sottogruppo K non-normale di G di indice finito. Dunque G è supersolubile-per-finito, infatti il nocciolo di K in G,K_G è un sottogruppo normale di G supersolubile e tale che G/K_G è finito.

Per il teorema 1.2.2 il sottogruppo di Fitting, L, di K_G è nilpotente e ha indice finito in K_G. Allora L è un sottogruppo normale, nilpotente di indice finito di G.

Poichè G è policiclico e non-supersolubile, per il teorema di Baer (1.2.3) esiste un'immagine omomorfa finita di G non supersolubile che denotiamo con G/N. Consideriamo il sottogruppo $L \cap N$; tale sottogruppo è normale in G, nilpotente e poichè è intersezione di sottogruppi di indice finito in G, ha indice finito in G. Inoltre G in quanto policiclico verifica la condizione massimale sui sottogruppi e pertanto $L \cap N$ è finitamente generato (lemma 1.1.4, capitolo 1) e dunque senza torsione. In particolare il gruppo quoziente $G/L \cap N$ è non supersolubile. Segue allora che il sottogruppo $T = L \cap N$ soddisfa la condizione richiesta, e il lemma è provato. $\square$

Combinando i due lemmi precedenti, possiamo concludere il caso policiclico che costituisce un passo fondamentale per descrivere i gruppi localmente graduati in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile.

Teorema 2.2.1. *Sia G un gruppo policiclico non-supersolubile. Allora ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

(i) Il residuale supersolubile M di G è un p-gruppo per qualche primo p;

(ii) Esiste un sottogruppo supersolubile E di G tale che

$$G = ME \text{ e } E \cap M = M';$$

(iii) M/M' è un fattore principale di G e M è abeliano oppure un p-gruppo speciale;

(iv) Se $C = C_E(M/M')$ allora C è supersolubilmente immerso in G ed è privo di fattori principali complementati non-centrali di G;

(v) *G/C èun SS-gruppo;*

(vi) *Se H è un sottogruppo tale che $M' \leq H \leq E$ e $H/C_H(M/M')$ agisce irriducibilmente su M/M', allora H è normale in E.*

Dim. Supponiamo che ogni sottogruppo di G non-normale *è* supersolubile. Dal lemma 2.2.2 segue che G possiede un sottogruppo T normale, nilpotente e senza torsione e tale che G/T *è* un gruppo finito non-supersolubile. D'altra parte per il lemma 2.2.1 G/T ha tutti i sottogruppi normali o supersolubili e dunque *è* un SS-gruppo.

Per il lemma 2.1.1 si ha:

$$\frac{G}{T} = \left(\frac{\overline{M}}{T}\right)\left(\frac{E}{T}\right),$$

dove $\dfrac{\overline{M}}{T}$ e $\dfrac{E}{T}$ sono rispettivamente il residuale e il proiettore supersolubile di $\dfrac{G}{T}$.

Inoltre $\dfrac{\overline{M}}{T}$ *è* un p-gruppo per qualche primo p.

Sia q un primo tale che non divide l'ordine di G/T. Per ogni intero positivo n, consideriamo il gruppo finito G/T^{q^n} dove T^{q^n} *è* un sottogruppo caratteristico di T e dunque normale in G. Poichè G/T^{q^n} *è* estensione dei gruppi finiti T/T^{q^n} e G/T, risulta anch'esso finito. D'altra parte poichè G/T *è* un quoziente non-supersolubile di G/T^{q^n} segue che G/T^{q^n} *è* un gruppo non-supersolubile ed inoltre ha tutti i sottogruppi normali o supersolubili. Pertanto G/T^{q^n} *è* un SS-gruppo e riapplicando il lemma 2.1.1, per ogni intero positivo n si ha:

$$\frac{G}{T^{q^n}} = \left(\frac{M_n}{T^{q^n}}\right)\left(\frac{E_n}{T^{q^n}}\right),$$

con $\dfrac{M_n}{T^{q^n}}$ e $\dfrac{E_n}{T^{q^n}}$ rispettivamente il residuale e il proiettore supersolubile di G/T^{q^n}. In particolare $\dfrac{M_n}{T^{q^n}}$ è un gruppo primario. Per ogni n il quoziente M_n/T^{q^n} è contenuto in $\overline{M}/T^{q^n}$; infatti $\overline{M}/T^{q^n}$ è un sottogruppo normale di G/T^{q^n} tale che $\dfrac{G/T^{q^n}}{\overline{M}/T^{q^n}} \simeq G/\overline{M}$ è supersolubile. Dunque poichè M_n/T^{q^n} è il residuale supersolubile di G/T^{q^n} segue che M_n/T^{q^n} è contenuto in $\overline{M}/T^{q^n}$ e pertanto $M_n \leq \overline{M}$ cosicchè $M_n/\left(M_n \cap T\right)$ è un p-gruppo non banale e quindi M_n/T^{q^n} è anch'esso un p-gruppo; segue che $M_n \cap T = T^{q^n}$.

Sia M il residuale supersolubile di G. Poichè M_n è un sottogruppo normale di G tale che $\dfrac{G}{M_n} \simeq \dfrac{G/T^{q^n}}{M_n/T^{q^n}}$ è supersolubile si ha che per ogni n intero positivo, M è contenuto in M_n.

Segue che $M \leq \bigcap_{n\geq 1} M_n$ da cui si ottiene:

$$M \cap T \leq \bigcap_{n\geq 1} M_n \cap T = \bigcap_{n\geq 1} \left(M_n \cap T\right) = \bigcap_{n\geq 1} T^{q^n} = 1^{1}$$

Pertanto si ha che $M = \dfrac{M}{M \cap T} \simeq \dfrac{MT}{T} \leq \dfrac{\overline{M}}{T}$ e quindi M è un p-gruppo finito, e dunque vala la condizione (i).

Proviamo la condizione (ii). Poichè M è privo di sottogruppi propri G-invarianti con gruppo quoziente ciclico, esiste un sottogruppo E di G tale

[1] Il sottogruppo T é un q-gruppo residualmente finito.

che $G = ME$ e $E \cap M = M'$ (si veda [21], teorema 4.1). Il sottogruppo E di G è supersolubile perchè altrimenti sarebbe normale in G, così come ogni sottogruppo di G contenente E e dunque il gruppo quoziente G/E sarebbe un gruppo di Dedekind. In particolare $\dfrac{G}{E} = \dfrac{ME}{E} \simeq \dfrac{M}{M \cap E}$ e dunque esso è un gruppo di Dedekind finito e quindi supersolubile, segue allora che M è contenuto in E e che quindi $M = M'$ contro la nilpotenza di M. Dunque E deve essere necessariamente supersolubile e quindi vale la condizione (ii).

Proviamo che il quoziente M/M' è un fattore principale di G e che M è abeliano oppure un p-gruppo speciale.

A tal scopo sia N un sottgruppo normale di indice finito di G tale che G/N è un gruppo non-supersolubile e $M \cap N = 1$.

Il quoziente G/N è un SS-gruppo e per il lemma 2.1.1 il suo residuale supersolubile MN/N è un p-gruppo speciale oppure un gruppo abeliano, con $\dfrac{MN/N}{M'N/N} \simeq \dfrac{MN}{M'N}$ fattore principale di G/N. Segue che M/M' è un fattore principale di G e M è p-gruppo speciale oppure un gruppo abeliano e pertanto vale la condizione (iii).

Proviamo che il centralizzante $C = C_E(M/M')$ è supersolubilmente immerso in G ed è privo di fattori principali complementati non centrali.

Sia x un elemento di C, allora il laterale xN è un elemento del centralizzante $C_{\frac{EN}{N}}(MN/M'N)$. Per ([14], [8, IV 6.14]), si ha che , $Z_U(G/N) =$

$C_{\frac{EN}{N}}(MN/N)$, dove $Z_U(G/N)$ è l'ipercentro supersolubile di G/N. Inoltre da ([14], [8,V 2.4 e 4.2]) e dal fatto che MN/N è nilpotente si ottiene che $C_{\frac{EN}{N}}(MN/M'N) = Z_U(G/N)$ e dunque $C_{\frac{EN}{N}}(MN/M'N) = C_{\frac{EN}{N}}(MN/N)$. Pertanto l'interderivato $[x, M] \leq M \cap N = 1$, quindi l'elemento x appartiene al centralizzante in E di M. Segue che $C = C_E(M/M') = C_E(M)$. In particolare C è supersolubilmente immerso in G.

Supponiamo per assurdo che C possiede un fattore principale complementato non-centrale di G. Denotiamo quest'ultimo con U/V con $U \leq C$ e sia Y/V il suo complemento in G/V.

Osserviamo che il gruppo quoziente G/C è non-supersolubile perchè altrimenti essendo C supersolubilmente immerso in G, si avrebbe G supersolubile. Da ciè segue che Y/V è non-supersolubile e dunque è normale in G/V. Pertanto $G/V = Y/V \times U/V$ e quindi il sottogruppo U/V é contenuto nel centro di G/V. Tale contraddizione prova la condizione (iv).

La condizione (v) è ovvia; infatti se H/C è un sottogruppo non-subnormale di G/C, allora H è un sottogruppo non-normale di G e quindi è supersolubile e poichè la classe dei gruppi supersolubili è chiusa per quozienti si ottiene H/C supersolubile. Dunque G/C è un SS-gruppo.

Mostriamo la condizione (vi). Sia H un sottogruppo di G tale $M' \leq H \leq E$ e $H/C_H(M/M')$ agisce irriducibilmente su M/M'. Allora il sottogruppo $K = MH$ non può essere supersolubile e dunque è normale in G. Osservando che

$$H = H \cap G = H \cap ME = MH \cap E = K \cap E$$

segue che H è normale in E. Dunque vale la condizione (vi).

Viceversa supponiamo che valgono le condizioni $(i)-(vi)$. Per il lemma 2.2.1, è sufficiente provare che in ogni immagine omomorfa finita di G i sottogruppi non supersolubili sono normali. Sia G/N un'immagine omomorfa finita non-supersolubile di G. Poichè M/M' è un fattore principale di G, il sottogruppo $M'(M \cap N)$ è uguale ad M' oppure ad M.

Se $M'(M \cap N) = M$ allora essendo $M'(M \cap N) = M \cap M'N$ si ha che M è contenuto in $M'N$ e dunque una contraddizione in quanto poichè M' è supersolubilmente immerso in G, il quoziente $G/M'N$ non può essere supersolubile. Pertanto necessariamente $M'(M \cap N) = M'$ da cui segue che $M' \cap N = M \cap N$. Poichè il sottogruppo $M \cap (EN)$ è normale in G e $M' \leq M \cap (EN) < M$, si ottiene che $M \cap (EN) = M'$.

D'altra parte $MN \cap EN = N(M \cap EN)$. Dunque si ha:

$MN/N \cap EN/N = (MN \cap EN)/N = (M \cap EN)N/N = M'N/N$.

Consideriamo il laterale xN appartenente al gruppo $C_{\frac{EN}{N}}(MN/M'N)$, allora per definizione di centralizzante $[xN, M] \leq M'N$; da cui segue che

$[x, M] \leq M'N \cap M$, ma $M'N \cap M = M'(N \cap M) = M'(N \cap M') = M'$ e dunque $[x, M] \leq M'$ cioè $x \in C$ e quindi $xN \in (CN)/N$. Pertanto

$(CN)/N = C_{\frac{EN}{N}}(MN/M'N)$ è privo di fattori principali complementati non-centrali. Per quanto detto il gruppo $G/N = (MN/N)(EN/N)$ soddisfa la condizione (i) di ([4] Teorema 1).

Il gruppo G/CN è un quoziente di G/C e quindi il gruppo G/N verifica una delle condizioni $(ii) - (iv)$ di ([4] Teorema 1) , sicchè è un SS-gruppo.

Posto $G/N = \overline{G}$, mostriamo che per ogni $\overline{K}$ tale che $\overline{M}' \leq \overline{K} \leq \overline{E}$ e $\overline{K}/C_{\overline{K}}(\overline{M}/\overline{M}')$ agisce irriducibilmente su $\overline{M}/\overline{M}'$, allora $\overline{K}$ è normale in $\overline{E}$.

Posto $H = K \cap E$, proviamo che $H/C_H(M/M')$ agisce irriducibilmente su M/M'. A tale scopo, sia X un sottogruppo di G H-invariante e tale che $M' \leq X \leq M$, allora $M'N \leq XN \leq MN$ e poichè X è $K \cap E$-invariante, XN risulta $(K \cap E)N$-invariante e dunque K-invariante. Pertanto si ha che $XN = M'N$ oppure $XN = MN$. Nel primo caso si ha:

$X = X \cap M'N = M'(X \cap N) = M'$. Nell'altro caso si ha:

$X = X(M' \cap N) = X(M \cap N) = M \cap (XN) = M \cap (MN) = M$. Segue quindi che il sottogruppo $H = K \cap E$ è normale in E per la condizione (vi) del teorema. Si ottiene cosí che $K = N(K \cap E)$ è normale in EN cioè $\overline{K}$ è normale in $\overline{E}$. Per il teorema 2.1.1,$G/N = \overline{G}$ ha tutti i sottogruppi non-normali supersolubili e pertanto il teorema è provato. $\square$

2.3 Gruppi localmente graduati

Lemma 2.3.1. *Sia G un gruppo localmente graduato in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile. Allora G è risolubile.*

Dim. Osserviamo che se G è supersolubile oppure non è supersolubile ma ha tutti i sottogruppi propri supersolubili, allora G è risolubile ([15] teorema 3.1).

Pertanto supponiamo che esiste un sottogruppo H di G che non sia supersolubile, allora H è necessariamente normale in G.

Dato che H non è supersolubile, ogni sottogruppo che lo contiene è normale in G. Dunque il gruppo quoziente G/H ha tutti i sottogruppi normali e pertanto è un gruppo di Dedekind. Poichè i gruppi di Dedekind sono metabeliani, il derivato secondo di G, G'', è contenuto in H. Dunque otteniamo che ogni sottogruppo proprio di G'' è supersolubile [2]

Dunque G'' è risolubile (si veda [15], teorema 3.1]), cosicchè G è risolubile. □

Osserviamo che se G è un gruppo in cui ogni sottogruppo è normale oppure supersolubile, allora G ha tutti i sottogruppi normali oppure policiclici. Pertanto risulta importante conoscere la struttura di questi gruppi.

I gruppi in cui ogni sottogruppo non-normale è policiclico sono stati studiati da Franciosi, de Giovanni e Newell, i quali in *"Groups with polycyclic non-*

[2] tutti i sottogruppi che non sono supersolubili contengono G''.

normal subgroups" ([16]) danno una completa classificazione di tali gruppi che riportiamo di seguito.

Chiaramente, un gruppo periodico in cui ogni sottogruppo non-normale è policiclico, ha tutti i sottogruppi infiniti normali e tali gruppi sono stati caratterizzati da Černikov ([8]).

Teorema 2.3.1. *(S. Franciosi, F. de Giovanni, M. Newell [16]) Sia G un gruppo localmente graduato. Allora ogni sottogruppo non-normale di G è policiclico se e solo se G soddisfa una delle seguenti condizioni:*

(i) *G è un gruppo di Dedekind;*

(ii) *G è policiclico;*

(iii) *G è estensione di un gruppo di Prüfer per un gruppo finito di Dedekind;*

(iv) *G è un gruppo risolubile minimax il cui residuale finito J è un gruppo di tipo p^∞ per qualche primo p e contiene G'. Inoltre ogni sottogruppo abeliano di G è in Min-per-Max;*

(v) *$G = M \times E$, con $M \simeq Q_2$ (il gruppo additivo dei numeri razionali i cui denominatori sono potenza di due) ed E gruppo Hamiltoniano finito;*

(vi) *G è policiclico-per-finito e contiene un sottogruppo normale minimale non risolubile N tale che G/N è un gruppo di Dedekind. In particolare, il sottogruppo derivato G' di G è finito.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo localmente graduato non-Dedekendiano, in cui ogni sottoruppo non-normale è policiclico. Se G è periodico, allora tutti i suoi sottogruppi infiniti sono normali e dunque G è estensione di un gruppo di Prüfer per un gruppo finito di Dedekind e pertanto G soddisfa la condizione (iii).

Supponiamo che G sia policiclico-per-finito. Poichè ogni sottogruppo non-normale di G è policiclico, segue che G ha tutti i sottogruppi non-normali risolubili con rango sezionale finito abeliano. Dunque applicando il teorema 2.7 di [16], si ha che G é risolubile con rango sezionale finito abeliano e dunque policiclico, oppure G ha rango sezionale finito abeliano e possiede un sottogruppo finito, normale minimale, non risolubile e tale che il gruppo quoziente G/N sia un gruppo di Dedekind. Pertanto G soddisfa la condizione (ii) o la (vi) dell'asserto.

Dunque possiamo supporre che G sia non periodico e non policiclico-per-finito; segue dal lemma 2.11 di [16] che G è metabeliano. Chiaramente possiamo supporre che G sia non dedekendiano e quindi per il corollario 2.10 di [16] si ottiene G è un gruppo minimax. In particolare tutti i sottogruppi periodici di G sono gruppi di Černikov.

Supponiamo che G' sia non finitamente generato e sia H un sottogruppo di indice finito di G'. Allora H è non finitamente generato e quindi è normale in G; infatti se H non fosse normale, allora sarebbe policiclico, quindi a condizione massimale e dunque finitamente generato contrariamente a quanto detto sopra. Pertanto ogni sottogruppo di G contenente H è normale in G e quindi il gruppo quoziente G/H è di Dedekind. Segue che G'/H ha ordine al più 2, cosicchè, denotato con R il residuale finito di G', quest'ultimo ha indice al più 2 in G'. Pertanto R è privo di sottogruppi propri di indice finito e dunque è divisibile. Inoltre ogni sottogruppo proprio di R è finitamente generato cosicchè R è un gruppo di Prüfer per qualche primo p.

Se $R \neq G'$, allora il gruppo quoziente G/R è un gruppo non abeliano con tutti i sottogruppi normali e quindi è Hamiltoniano; cosicchè G è periodico. Pertanto $R = G'$.

Sia J il residuale finito di G, poichè G è un gruppo minimax segue che J è prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer ed è il massimo sottogruppo divisibile di G. Pertanto J è un gruppo abeliano, periodico e divisibile e $J = G' \times J_1$, con J_1 sottogruppo divisibile. Se $J_1 \neq \{1\}$, allora J_1 è normale in G, infatti se J_1 non fosse normale in G, allora J_1 sarebbe policiclico e quindi finito essendo periodico, ma ciò è una contraddizione in quanto J_1 è divisibile. Dunque G/J_1 è un gruppo di Dedekind e quindi $G'J_1/J_1$ è finito, ma $G'J_1/J_1 \simeq G'/J_1 \cap G' = G'$, si ottiene una contraddizione in quanto G' è infinito. Allora necessariamente $J_1 = \{1\}$ ottenendo così $G' = J$ e quindi il residuale finito di G, J, è un gruppo di tipo p^∞ per qualche primo p.

Proviamo che ogni sottogruppo abeliano di G è Min-per-Max. A tale scopo, sia A un sottogruppo abeliano di G. Allora $A = A_1 \times A_2$, con A_1 gruppo di $\check{C}$ernikov e A_2 un gruppo senza torsione. Se il sottogruppo A_2 non è finitamente generato, allora è normale in G e il gruppo quoziente G/A_2 è di Dedekind. Allora $G' \leq A_2$, ma A_2 è senza torsione e G' è un gruppo periodico dunque A_2 deve essere finitamente generato. Pertanto A_2 verifica la condizione massimale sui sottogruppi ed inoltre essendo A_1 un gruppo di $\check{C}$ernikov, segue che A è Min-per-Max. Dunque vale la condizione (iv) dell'asserto.

Supponiamo che G' sia finitamente generato. Il quoziente G/G' non è finitamente generato ed essendo G' residualmente finito, esiste una collezione

$$\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}}$$

di sottogruppi G-invarianti di indice finito in G' tale che

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} K_i = \{1\}.$$

Per ogni $i \in \mathcal{I}$, il gruppo quoziente $\overline{G}_i = G/K_i$ è un gruppo minimax con il sottogruppo derivato $\overline{G}'$ finito. Allora $\overline{G}_i/Z(\overline{G}_i)$ è finito da cui segue che $Z(\overline{G}_i)$ è non finitamente generato. Inoltre poichè $Z(\overline{G}_i)$ è non policiclico, il gruppo quoziente $\overline{G}_i/Z(\overline{G}_i)$ è un gruppo di Dedekind finito e dunque nilpotente. Allora per ogni $i \in \mathcal{I}$, $\overline{G}_i$ è nilpotente di classe al più tre, cosicchè G è nilpotente.

Sia T il sottogruppo di torsione di G. Sia G' infinito, allora anche il gruppo quoziente G/T ha il derivato infinito. Dunque G/T non è un gruppo di Dedekind e pertanto esiste un sottogruppo H con $T \leq H \leq G$ e non normale in G; segue che H è policiclico e dunque T èun gruppo policiclico periodico e dunque finito. Allora G è residualmente finito. Inoltre ogni immagine omomorfa finita di G è un gruppo di Dedekind e così G' ha esponente due. Tale contraddizione prova che il derivato di G è finito e pertanto $G/Z(G)$ è finito. Poichè G è un gruppo minimax, esiste un sottogruppo U periodico e un sottogruppo V senza torsione tale che

$$Z(G) = U \times V$$

. Supponiamo che V sia non finitamente generato, allora G/V ha tutti i sottogruppi normali e non è abeliano. Pertanto G/V è Hamiltoniano e G' ha ordine due.

Se $V^2 \neq V$, allora per ogni $n \in \mathcal{N}$ $\quad V^{2n+1} \neq V^{2n}$, cosicchè G/V^8 non è Hamiltoniano, allora è abeliano, ma tale contraddizione prova che $V = V^2$. Dunque V contiene un sottogruppo W tale che V/W è isomorfo al duogruppo $\mathcal{Z}(2^\infty)$.

Chiaramente G/W non è un gruppo di Dedekind, esiste un sottogruppo H/W non normale in G/W; dunque H è non normale in G e quindi policiclico. Allora il sottogruppo W è policiclico e dunque finitamente generato. Segue dal lemma 2.12 di ([16]) che V è isomorfo a Q_2.

Assumiamo che U è infinito e sia U_0 il residuale finito di U. Poichè G/V è hamiltoniano, segue che U non può possedere sottogruppi di tipo 2^∞; cosicchè $U_0 \cap G' = \{1\}$ e il gruppo non periodico G/U_0 risulta essere hamiltoniano, ma ciò è una contraddizione e pertanto U è finito. Allora T è anch'esso finito e

$$G/G' = L/G' \times T/G',$$

con L/G' senza torsione. Poichè G è estensione finita di un duo-gruppo divisibile, segue che L/G' è anch'esso un duo-gruppo divisibile, cosi L è abeliano e $L = M \times G'$, per qualche sottogruppo M duo-divisibile e senza torsione.

Dunque $G = LT = MG'T = MT$ e $M \cap T = \{1\}$; inoltre M è normale in G, in quanto non può essere policiclico e dunque $G = M \times T$ con T finito e hamiltoniano.

Lo stesso argomento mostra che il gruppo abeliano M è isomorfo a Q_2 e pertanto G soddisfa la condizione (v).

Infine , supponiamo che V è finitamente generato e cosicchè T è un gruppo di Černikov infinito e G è Min-per-Max.

Sia P un sottogruppo di Prüfer di G. Allora P è normale in G e il gruppo non periodico G/P è abeliano e dunque G' è contenuto in P. Segue che il residuale finito di G è un gruppo di Prüfer e pertanto G soddisfa la condizione (iv).

Viceversa, è sufficiente provare che, se G soddisfa una delle condizioni (iv) e (v), allora ogni sottogruppo non normale di G è policiclico.

Sia X un sottogruppo di G che non è policiclico. Supponiamo che G soddisfa la condizione (iv). Se G' non è contenuto in X, l'intersezione $X \cap G'$ è finito cosicchè X' è finito e dunque $X/Z(X)$ è finito. Allora $Z(X)$ è Min-per-Max e non è finitamente generato; il residuale finito J di G è un sottogruppo del centro di G, ma poichè G' è contenuto in J, ciò è una contraddizione. Pertanto $G' \leq X$ e X è normale in G.

Supponiamo che G soddisfa la condizione (v). Allora $X \cap M$ è un gruppo non finitamente generato, e quindi il quoziente $M/(M \cap X)$ è un gruppo abeliano finito di ordine dispari.

Segue che il quoziente $G/(X \cap M)$ è hamiltoniano e pertanto X è normale in G.

$\square$

Proviamo il risultato principale, che fornisce una descrizione dei gruppi localmente graduati in cui ogni sottogruppo non-normale è supersolubile.

Teorema 2.3.2. *Sia G un gruppo localmente graduato. Allora ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile se e solo se G verifica una delle seguenti condizioni:*

(i) *G è un gruppo di Dedekind;*

(ii) *G è un gruppo policiclico in cui ogni sottogruppo non-supersolubile è normale;*

(iii) *G possiede un sottogruppo di Prufer,J, tale che il gruppo quoziente G/J è un gruppo di Dedekind finito;*

(iv) *G è un gruppo risolubile minimax il cui residuale finito J, è di tipo p^∞ contiene G'; in particolare ogni sottogruppo abeliano di G è in Min-per-Max;*

(v) *$G = M \times E$, con $M \simeq Q_2$(il gruppo additivo dei numeri razionali i cui denominatori sono potenza di due) ed E un gruppo Hamiltoniano finito.*

Dim. Supponiamo che ogni sottogruppo non-supersolubile di G è normale. Allora G ha tutti i sottogruppi normali o policiclici, sicchè verifica le condizioni del teorema 2.3.1. Poichè G è risolubile per il lemma 2.3.1, G sicuramente non verifica la condizione (vi) del teorema 2.3.1 e pertanto verifica una delle condizioni $(i)-(v)$ dell'asserto.

Viceversa, mostriamo che se G verifica una delle condizioni $(iii)-(v)$, allora ogni sottogruppo non-normale di G è supersolubile. A tale scopo sia X un sottogruppo di G non-normale.

Supponiamo che G verifichi la condizione (iii). Allora esiste un sottogruppo J normale di G tale che $J \simeq Z_{p^\infty}$ e $G/J \simeq D$ con D gruppo di Dedekind finito. Per il teorema 2.3.1 il sottogruppo X è policiclico e quindi verifica la condizione massimale sui sottogruppi per il teorema 1.1.1. Consideriamo il sottogruppo $X \cap J$; poichè X verifica la condizione massimale sui sottogruppi, $X \cap J$ è finitamente generato per il lemma 1.1.3. Inoltre $X \cap J$ è un sottogruppo finitamente generato di J ed essendo J localmente ciclico, segue che $X \cap J$ è ciclico. D'altra parte il gruppo G/J essendo un gruppo finito di Dedekind è supersolubile e quindi il quoziente $X/X \cap J \simeq XJ/J$ è supersolubile. Segue allora che X è supersolubile.

Supponiamo che G verifichi la condizione (iv). Per il teorema 2.3.1 il sottogruppo X è policiclico. Poichè G' è contenuto nel residuale finito J di G, segue che il gruppo G/J è abeliano. Da ciò segue che $X/X \cap J \simeq XJ/J$ è supersolubile ed essendo $X \cap J$ ciclico segue X supersolubile. Infine supponiamo che G verifica la condizione (v).Per il teorema 2.3.1 il sottogruppo X è policiclico. Il gruppo G/M è supersolubile. Da ciò segue che $X/X \cap M \simeq XM/M$

è supersolubile ed essendo $X \cap M$ ciclico segue X supersolubile.

$\square$

Romalis e Sesekin, ([23], [25]) hanno provato che i gruppi localmente graduati metahamiltoniani hanno il sottogruppo derivato finito.
Questo risultato è stato recentemente esteso al caso dei gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-abeliani (si veda [11]).
Sono stati studiati gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi con una data proprietà $\mathcal{X}$ per diverse scelte di $\mathcal{X}$. In particolare, M. De Falco, F. de Giovanni. e C. Musella considerano gruppi localmente graduati con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-policiclici provando il seguente risultato che per la dimostrazione si rimanda a [9].

Teorema 2.3.3. *Sia G un gruppo localmente graduato non-policiclico con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-policiclici. Allora il sottogruppo derivato G' di G è un gruppo di Cernikov e la sua parte divisibile è un gruppo primario.*

Di seguito, studiamo il problema corrispondente per la supersolubilità.

Corollario 1. *Sia G un gruppo localmente graduato con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-supersolubili. Allora si verifica una delle seguenti condizioni:*

(i) G è policiclico e il suo residuale supersolubile è finito;

(ii) Il sottogruppo derivato di G è un gruppo di Cernikov e la sua parte divisibile è un gruppo primario.

Dim. Poichè G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi non-policiclici, per il teorema 2.3.3 G è policiclico oppure soddisfa la condizione (ii). Pertanto supponiamo che G sia policiclico. Al fine di provare che il residuale supersolubile M di G è finito e che quindi vale la condizione (i), sia per assurdo M infinito. Consideriamo un controesempio G con un numero minimo k di normalizzanti propri di sottogruppi non-supersolubili e procediamo per induzione su k. Se $k = 0$, l'asserto è ovvio. Dunque sia $k > 0$ e siano $N_G(X_1), \ldots, N_G(X_k)$ i normalizzanti propri di sottogruppi non-supersolubili. Possiamo supporre, senza ledere le generalità, che G sia privo di sottogruppi normali periodici non banali.

Per ogni $i = 1. \ldots, k$, il sottogruppo $N_G(X_i)$ possiede meno di k normalizzanti propri di sottogruppi non-policiclici e quindi per ipotesi induttiva, il residuale supersolubile M_i di $N_G(X_i)$ è finito. D'altra parte il sottogruppo $N_G(X_i)$ ha un numero finito di coniugati in G, sicchè la classe di coniugio di M_i è finita e quindi la chiusura normale di M_i in G è finita. Segue che $M_i = \{1\}$ e quindi $N_G(X_i)$ è supersolubile. Tale contraddizione prova il corollario. $\square$

Capitolo 3

Gruppi localmente finiti i cui sottogruppi hanno un'oscillazione normale finita

Un famoso risultato di Neumann ([19]), assicura che tutti i sottogruppi di un gruppo G sono nearly normale in G se e solo se il sottogruppo derivato G' di G *è* finito.

Buckley, Lennox, Newmann, Smith e Wiegold, provano che un gruppo G localmente finito in cui ogni sottogruppo *è* normale-per-finito, *è* abeliano-per-finito ([6]). Osserviamo che l'esistenza dei gruppi extraspeciali mostra che un gruppo con il derivato finito non necessariamente *è* abeliano-per-finito.

D'altra parte, poichè un gruppo G finito-per-abeliano é nilpotente-per-finito, segue da entrambi i teoremi citati sopra che G possiede un sottogruppo nilpotente di indice finito.

Lo scopo di questo capitolo è provare un risultato analogo per i gruppi localmente finiti in cui ogni sottogruppo è nearly normale oppure normale-per-finito. Ricordiamo che un sottogruppo X di un gruppo G è detto nearly normale in G se ha indice finito nella sua chiusura normale, H^G, in G; mentre X si dice normale-per-finito se ha indice finito sul suo nocciolo, H_G, in G.

Sia X un sottogruppo di un gruppo G. Definiamo ***oscillazione normale*** di X in G il numero cardinale

$$min \left\{|X : X_G|, |X^G : X|\right\}.$$

Chiaramente X è normale in G se e solo se ha oscillazione normale uguale ad 1. Inoltre, X ha oscillazione normale finita in G se e solo se X ha indice finito nella sua chiusura normale X^G oppure se è finito sul suo nocciolo X_G; in particolare, sottogruppi finiti e sottogruppi di indice finito hanno oscillazione normale finita. Nella prima sezione di questo capitolo verrà esaminato il caso dei p-gruppi locamente finiti in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita; nella seconda sezione verranno presi in considerazione i gruppi contabili e vedremo che sarà sufficiente provare l'asserto del teorema principale per questa classe di gruppi.

I risultati riportati in questo capitolo sono presenti in "*Locally finite groups whose subgroups have finite normal oscillation*" *[17]*

3.1 p-gruppi localmente finiti

In questa sezione mostremo il risultato principale nel caso di un p-gruppo localmente finito:

Teorema 3.1.1. *Sia G un p-gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito.*

Prima di procedere con la dimostrazione di tale risultato, è necessario premettere i prossimi risultati.

Ricordiamo che il ***radicale di Baer*** *di un gruppo G è il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi subnormali abeliani di G, e G è detto gruppo di* Baer *se coincide con il suo radicale di Baer, o in maniera equivalente se tutti i suoi sottogruppi finitamente generati sono subnormali. Osserviamo che ogni gruppo di Baer è localmente nilpotente.*

Lemma 3.1.1. *Sia G un gruppo e sia X un sottogruppo subnormale, nilpotente e nearly normale di G. Allora la chiusura normale di X in G è nilpotente.*

Dim. La chiusura normale di X in G, X^G, è un gruppo di Baer ed in particolare tutti i suoi sottogruppi finitamente generati sono subnormali. Sia $Y = X_{X^G}$, allora essendo X nearly normale in G, l'indice $|X^G : Y|$ è finito. Pertanto esiste un sottogruppo finitamente generato E di X^Gtale che

$X^G = YE$. Poichè X^G è un gruppo di Baer segue che il sottogruppo E è nilpotente e subnormale. Dunque X^G è prodotto di due sottogruppi nilpotenti, di cui uno è subnormale e l'altro normale, e pertanto dal teorema di Fitting, X^G è nilpotente. $\square$

Come conseguenza del precedente lemma, si ha il seguente:

Corollario 2. *Sia G un gruppo infinito e localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo normale, nilpotente e infinito.*

Dim. Per il Teorema di Hall-Kulatilaka e Kargapolov ([20], teorema 3.43), G contiene un sottogruppo abeliano infinito A. Chiaramente, si può supporre che il nocciolo A_G di A in G sia finito, perchè altrimenti A_G sarebbe il sottogruppo cercato. Segue quindi che l'indice $|A^G : A|$ è finito. Sia B il nocciolo di A in A^G, allora l'indice $|A^G : B|$ è ancora finito; in particolare, B è un sottogruppo abeliano e subnormale di G.

Chiaramente possiamo supporre che il nocciolo B_G sia finito, e quindi anche l'indice $|B^G : B|$ è necessariamente finito. Dunque il sottogruppo B è subnormale, nilpotente e nearly normale in G e pertanto per il lemma 3.1.1, la chiusura normale B^G di B in G è nilpotente e l'asserto è provato. $\square$

Lemma 3.1.2. *Sia G un gruppo di Baer i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G è risolubile.*

Dim. Sia X un sottogruppo di G. Se X è normale-per-finito, poichè il quoziente G/X_G è un gruppo di Baer, allora il sottogruppo X/X_G è subnormale in G/X_G, e quindi X è subnormale in G.
Se, invece, $|X^G : X|$ è finito, allora denotato con Y il nocciolo di X in X^G, il sottogruppo X/Y è subnormale in X^G/Y; in particolare X è subnormale in G.
Pertanto tutti i sottogruppi di G sono subnormali, e quindi per un rilevante risultato di W. Möhres,[18], G è risolubile. □

Nello studio dei gruppi in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita, gioca un ruolo importante la classe degli FC-gruppi, gruppi con classi di coniugio finite. Pertanto è necessario ricordare alcuni aspetti di tale classe di gruppi.

3.1.1 FC-gruppi

Definizione 17. *Un elemento x di un gruppo G si dice* ***FC-elemento*** *se:*

$$|G : C_G\,(x)\,| < \infty,$$

o equivalentemente se la classe di coniugio di x, $[x]_{C_G}$, è finita.

Proposizione 1. *Sia G un gruppo, l'insieme*

$$F = F(G) = \{x \in G \mid x \textit{ possiede un numero finito di coniugati in } G\}$$

è un sottogruppo caratteristico di G.

Dim. L'elemento $1 \in F$. Siano $x, y \in F$ allora si ha:

$$|G : C_G(x) \cap C_G(y)| < \infty.$$

Sicuramente vale la seguente relazione: $C_G(x) \cap C_G(y) \leq C_G(x^{-1}y)$, allora l'indice in G del $C_G(x^{-1}y)$ è finito, allora $x^{-1}y \in F$, e pertanto $F \leq G$.

Proviamo che $FchG$.

Sia $\alpha \in Aut(G)$, e $g \in G$, allora verifichiamo che:

$$C_G(g^\alpha) = C_G(g)^\alpha.$$

Proviamo la doppia inclusione;

Sia $x \in C_G(g^\alpha)$ allora $xg^\alpha = g^\alpha x$.

Sia $y \in G$ tale che $x = y^\alpha$, si ha:

$$xg^\alpha = y^\alpha g^\alpha = (yg)^\alpha,$$

e

$$g^\alpha x = g^\alpha y^\alpha = (gy)^\alpha,$$

ma $xg^\alpha = g^\alpha x, e$ poichè α è iniettivo si ha:

$$yg = gy,$$

pertanto $y \in C_G(g)$, quindi $x = y^\alpha \in C_G(g)^\alpha$, allora

$$C_G(g^\alpha) \subseteq C_G(g)^\alpha.$$

Viceversa:

Sia $y \in C_G(g)^\alpha$, allora esiste un elemento $x \in C_G(g)$ tale che $y = x^\alpha$ e

$$yg^\alpha = x^\alpha g^\alpha = (xg)^\alpha = (gx)^\alpha = g^\alpha x^\alpha = g^\alpha x^\alpha = g^\alpha y$$

allora $y \in C_G(g^\alpha)$, quindi vale anche l'altra inclusione $C_G(g)^\alpha \subseteq C_G(g^\alpha)$.

Dunque si ottiene l'uguaglianza e quindi l'asserto. □

Definizione 18. *Il sottogruppo F è detto* **FC-centro** *di G .*

Definizione 19. *Sia G un gruppo. La serie FC-centrale superiore di G è la serie normale ascendente $\{F_\alpha(G)\}_\alpha$ definita ponendo $F_0(G) = \{1\}$,*

$$F_{\alpha+1}(G)/F_\alpha(G) = F(G/F_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$F_\lambda(G) = \bigcup_{\beta<\lambda} F_\beta(G)$$

se λ è un ordinale limite.

Definizione 20. *Un gruppo G si dice* **FC-gruppo** *se coincide con il suo FC-centro, cioè se ogni elemento di G ha soltanto un numero finito di coniugati.*

Osservazione 1. *Il centro di un gruppo G, $Z(G)$, è contenuto nell'FC-centro, F, di G. Infatti, se $x \in G$ e x è un elemento centrale, allora $G = C_G(x)$, quindi $|G : C_G(x)| = |G : G| = 1$ e pertanto è finito. In conclusione un elemento centrale è un FC-elemento.*

Gli FC-gruppi sono stati introdotti da R. Baer, e studiati da numerosi autori tra i quali ricordiamo, P. Hall, B.H Neumann e più recentemente L.A Kurdachenko e M.J. Tomkinson.
La classe degli FC-gruppi è chiusa per sottogruppi e per quozienti invece non è chiusa rispetto alle estensioni. I gruppi abeliani e i gruppi finiti sono FC-gruppi, e la teoria degli FC-gruppi si è sviluppata nel tentativo di cercare proprietà comuni a tali classi di gruppi.
Appartengono alla classe degli FC-gruppi, i gruppi il cui centro ha indice finito e i gruppi con il sottogruppo derivato finito. Infatti:

Proposizione 2. *Se $G/Z(G)$ è finito, allora G è un FC-gruppo.*

Proposizione 3. *Se G è un gruppo con il suo sottogruppo derivato finito, allora G è un FC-gruppo.*

Osserviamo che se G è un FC-gruppo, non è detto che abbia il centro di indice finito; infatti basti pensare ai p-gruppi extraspeciali, gruppi infiniti in cui il centro e il sottogruppo derivato coincidono ed hanno ordine p. La considerazione di tali gruppi ci fa capire che non tutti i gruppi che sono FC-gruppi hanno il centro di indice finito.
Tuttavia, se consideriamo i gruppi finitamente generati si ha il seguente risultato.

Proposizione 4. *Se G è un FC-gruppo finitamente generato, allora $G/Z(G)$ è finito.*

Come osservato sopra, la classe dei gruppi con il centro di indice finito e la classe dei gruppi con il derivato finito sono due sottoclassi naturali e non banali della classe degli FC-gruppi. Un famoso risultato ottenuto da I. Schur nel 1902 prova che queste due classi sono confrontabili.

Lemma 3.1.3. *Sia G un FC-gruppo finitamente generato, allora G contiene un sottogruppo A senza torsione, centrale e di indice finito. Inoltre il derivato G' di G è finito.*

Teorema 3.1.2. ***(Schur)*** *Dato un gruppo G, se $G/Z(G)$ è finito, allora il derivato G' è finito .*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un sottogruppo finitamente generato N di G tale che $G = Z(G)N$.

Poicè N è normalizzato da se stesso e dal $Z(G)$ segue che N è normale in G.

Inoltre G è un FC-gruppo per la proposizione 2; di conseguenza anche N è un FC-gruppo e per il lemma 3.1.3 N' è finito.

Allora $G' = (NZ(G))' = [NZ(G), NZ(G)] = N'$, ma N' è finito quindi G' è finito. □

Il prossimo risultato occupa un ruolo fondamentale nella teoria degli FC-gruppi ed è noto come lemma di A.P. Dietzmann:

Lemma 3.1.4. *(Dietzmann) Sia G un gruppo, X un sottoinsieme finito di G, costituito da elementi periodici, ciascuno dei quali ha un numero finito di coniugati in G, allora:*

$$\langle x^g | x \in X, g \in G \rangle = X^G$$

è finito.

Dimostrazione. Sia $X = \{x_1, \cdots, x_t\}$ un sottoinsieme finito di G, i cui elementi rispettano le ipotesi del lemma. Sia

$$C = \left(\bigcap_{i=1}^{t} C_G\left(x_i\right) \right)_G .$$

Ovviamente $C \leq C_G(x_i)$, $\forall i \leq t$, per cui per ogni elemento g appartenente G,

$$C = C^g \leq C_G(x_i)^g = C_G(x_i^g),$$

dunque C centralizza i coniugati di ciascun x_i. Allora $C \cap X^G \leq Z(X^G)$ è un sottogruppo centrale di X^G.

Inoltre per ogni i, il $C_G(x_i)$ ha indice finito in G, allora l'intersezione $\bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i)$ ha indice finto in G, e di conseguenza anche C.

Otteniamo così:

$$\frac{X^G}{Z(X^G)} \cong \frac{X^G/C \cap X^G}{Z(X^G)/C \cap X^G}$$

$$\text{ma} \qquad \frac{X^G}{C \cap X^G} \cong \frac{X^G C}{C} \leq \frac{G}{C},$$

dove l'ultimo quoziente è finito, per cui $X^G/Z(X^G)$ è finito.

Per il teorema di Schur (teorema 3.1.2) $(X^G)'$ è finito.

Inoltre $X^G/(X^G)'$ è abeliano e finitamente generato, in quanto X^G è finitamente generato.

Indichiamo la torsione di $X^G/(X^G)'$ con la notazione $T/(X^G)'$; essa è finita in quanto torsione di un gruppo abeliano finitamente generato. Quindi T è finito.

Osserviamo adesso che

$$\frac{X^G/(X^G)'}{T/(X^G)'} \cong \frac{X^G}{T}$$

è senza torsione, e poichè per ipotesi ogni x_i^g è periodico, allora $X^G/T = \{1\}$, dunque $X^G = T$ e X^G è finito, come volevasi dimostrare. □

Il comportamento della serie FC-centrale superiore (definizione 19), di un gruppo in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita occupa un ruolo centrale in questo contesto, come mostrano i tre prossimi risultati.

Lemma 3.1.5. *Sia G un gruppo i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita e sia F l'FC-centro di G. Allora ogni sottogruppo di F è nearly normale in G; in particolare il sottogruppo derivato F' di F è finito.*

Dim. Sia X un sottogruppo di F. Se l'indice $|X : X_G|$ è finito, allora segue dal Lemma di Dietzmann 3.1.4 che il gruppo X^G/X_G è finito, e quindi X è nearly normale in G. In particolare, ogni sottogruppo di F ha indice finito nella propria chiusura normale X^F in F, e dunque F' è finito per il Teorema di Neumann [19]. $\square$

Lemma 3.1.6. *Sia G un p-gruppo localmente finito in cui tutti i sottogruppi hanno oscillazione normale finita e sia A un sottogruppo normale e abeliano di G. Se A è prodotto diretto di una famiglia di sottogruppi ciclici allora il gruppo quoziente $A/A \cap F$ è finito, dove F è l'FC-centro di G.*

Dim. Supponiamo per assurdo che $A/A \cap F$ sia infinito.

Se $A/A \cap F$ ha rango finito, allora è un gruppo di Černikov, pertanto possiede un sottogruppo $B/A \cap F$ normale, abeliano e isomorfo al gruppo Z_{p^∞}. Se B è nearly normale in G, allora, essendo per ogni $g \in G$

$$|B^g : B \cap B^g| = |BB^g : B| \leq |B^G : B|$$

, risulta

$$B^g = B \cap B^g$$

per ogni $g \in G$, e quindi B è normale in G. Sostituendo $A/A \cap F$ con il gruppo $B/A \cap F$, si può supporre senza ledere le generalità che $A/A \cap F$ sia isomorfo al gruppo Z_{p^∞}.

Se il rango di $A/A \cap F$ è infinito, allora lo zoccolo di $A/A \cap F$ è infinito e normale in $G/A \cap F$. Sostituendo, eventualmente, $A/A \cap F$ col suo zoccolo, si può supporre senza ledere le generalità che $A/A \cap F$ ha esponente p.

In entrambi i casi considerati sopra, esistono due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tali che

$$\frac{AF}{F} = \langle a_1F\rangle \times \langle b_1F\rangle \times \langle a_2F\rangle \times \ldots \times \langle a_nF\rangle \times \langle b_nF\rangle \times \ldots,$$

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle \times \ldots$$

e

$$F < \langle F, a_1\rangle < \langle F, a_1, b_1\rangle < \langle F, a_1, b_1, a_2\rangle < \ldots < \langle F, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\rangle < \ldots.$$

Consideriamo una partizione

$$\{I_n |\ n \in \mathbb{N}\}$$

dell'insieme dei numeri naturali costituita da infiniti sottoinsiemi infiniti. Per ogni k, n interi positivi, poniamo

$$U_{k,n} = (Dr_{h\in I_k}\langle a_h\rangle) \times \langle b_n\rangle.$$

Infatti, Se per qualche intero positivo n esistessero $r, s \in \mathbb{N}$ con $r \neq s$ tali che $U_{r,n}$ e $U_{s,n}$ sono entrambi nearly normale in G, allora tale sarebbe anche

$$\langle b_n\rangle = U_{s,n} \cap U_{r,n},$$

ma ciò non può verificarsi poichè, per ogni intero positivo n, b_n ha infiniti coniugati in G. Allora esiste al più un intero positivo m tale che $U_{m,n}$ è nearly normale in G.

Per ogni intero positivo n, sia quindi $k(n)$ un intero positivo tale che $V_n = (U_{k(n),n})_G$ di ha indice finito in $U_{k(n),n}$ e $k(m) \neq k(n)$ se $m \neq n$.

Allora

$$U = \langle U_{k(n),n} | \, n \in \mathbb{N} \rangle = Dr_{n \in N} U_{k(n),n}.$$

Ovviamente, il gruppo

$$U_{k(n),n}F/F$$

è infinito, pertanto per ogni n il sottogruppo V_n non è contenuto in C.

Per ogni intero positivo n, sia y_n un elemento di V_n dotato di infiniti coniugati e poniamo $V = Dr_{n \in \mathbb{N}} \langle y_n \rangle$. Allora $V \cap V_n = \langle y_n \rangle$. Dal momento che V_n è normale in G e che y_n ha ordine finito, esistono infiniti coniugati di y_n mediante elementi di G che non appartengono a V; in particolare, l'indice $|V^G : V|$ è infinito. Per ipotesi, dunque, V è normale-per-finito. Tuttavia, essendo il prodotto diretto di sottogruppi normali e finiti di G, il nocciolo V_G di V in G è contenuto in F, dunque anche l'indice $|V : V \cap F|$ è finito, ma si è giunti ad una contraddizione in quanto $VF/F = AF/F$. $\square$

Corollario 3. *Sia G un p-gruppo localmente finito in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita e sia A un sottogruppo normale e abeliano di G. Allora A è contenuto nel secondo FC-centro $F_2(G)$ di G.*

Dim. Sia a un elemento di A, allora la chiusura normale $\langle a \rangle^G$ è un gruppo abeliano di esponente finito e, dunque è prodotto diretto di sottogruppi ciclici.

Denotato con F l'FC-centro di G, per il lemma 3.1.6 si ha che il gruppo quoziente

$$\frac{\langle a\rangle^G F}{F} \cong \frac{\langle a\rangle^G}{\langle a\rangle^G \cap F}$$

è finito. Essendo anche normale in G/F, $\langle a\rangle^G F/F \leq FC(G/F)$, ma l'FC-centro di G/F è $F_2(G)/F$. Per l'arbitrarietà di a, segue che $AF/F \leq F_2(G)/F$ e pertanto l'asserto è provato. □

Ricordiamo che

Definizione 21. *Dato un gruppo G, si definisce* automorfismo potenza *di G, un automorfismo α che fissa tutti i sottogruppi di G, ossia tale che*

$$H^\alpha = H \quad ,\forall H \leq G$$

Si osservi che se α è un automorfismo potenza di G, $\forall x \in G$, l'immagine di x mediante l'automorfismo è un elemento di $\langle x\rangle$.

Eppure non sempre un automorfismo che mandi ogni elemento in una sua potenza,è un automorfismo potenza, basti pensare ad un gruppo G isomorfo al gruppo additivo dei razionali, in tal caso l'applicazione α che manda ogni elemento di G nel suo quadrato,è un automorfismo, ma non un automorfismo potenza, infatti nessun sottogruppo ciclico,non identico di G,è fissato da α. Sia G un gruppo e Γ un gruppo di operatori su G.

Consideriamo un sottogruppo H di G; poniamo $H^\Gamma = \langle H^\alpha; \alpha \in \Gamma\rangle$ e $H_\Gamma =$

$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} H^\alpha$. *Osserviamo che se* $\Gamma = G$, *allora* H^G *e* H_G *sono, rispettivamente, la chiusura normale e il nocciolo di* H *in* G.

Definizione 22. *Definiamo*

$$Paut_\Gamma(G) = \{\alpha \in \Gamma; H^\alpha = H; \text{ per ogni } H \leq G\}$$

Indichiamo l'insieme degli automorfismi potenza di un gruppo G, *con la terminologia* $PAutG$, *dunque*

$$Paut(G) = \{\alpha \in Aut(G); H^\alpha = H; \text{ per ogni } H \leq G\}.$$

$PAutG$ *è un sottogruppo normale e abeliano di* $Aut(G)$ *e se* G *è abeliano* $Paut(G) \leq Z(Aut(G))$. *In [7], C. Casolo, considera un gruppo di automorfismi* Γ *di un gruppo abeliano* A, *tale che* $|H^\Gamma : H|$ *è finito per ogni* H *sottogruppo di* A *e fornisce una descrizione generale a partire da alcuni casi particolari. Ricordiamo nel seguente lemma, che verrà utilizzato in seguito, il caso in cui* A *è un* p*-gruppo abeliano ridotto. Per la dimostrazione si rimanda a [7].*

Lemma 3.1.7. *Sia* A *un* p*-gruppo abeliano ridotto, e* $\Gamma \leq Aut(A)$ *tale che* $|H^\Gamma : H|$ *è finito per ogni* H *sottogruppo di* A. *Allora esiste un sottogruppo finito* N *di* A, Γ*-invariante tale che* $\Gamma = Paut_\Gamma(A/N)$.

Lemma 3.1.8. *Sia* G *un* p*-gruppo e sia* A *un sottogruppo normale abeliano di* G *tale che l'indice* $|X^G : X|$ *è finito per ogni sottogruppo* X *di* A. *Allora*

A possiede un sottogruppo finito G-invariante B tale che il centralizzante $C_G(A/B)$ ha indice finito in G.

Dim. Sia $A = D \times R$ con, D ed R, rispettivamente, il massimo sottogruppo divisibile di A e il gruppo ridotto.

Sia P un sottogruppo di A isomorfo al gruppo Z_{p^∞}. Per ipotesi, P è nearly normale in G, allora l'indice $|P^g : P \cap P^g|$ è finito e poichè P^g è privo di sottogruppi propri di indice finito, si ha che per ogni $g \in G$,

$$P^g = P \cap P^g,$$

e quindi P è normale in G.

Segue che tutti i sottogruppi di D sono normali in G, in particolare, il quoziente $G/C_G(D)$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo degli automorfismi potenza di D, e quindi è finito.

Inoltre essendo R un sottogruppo di A, l'indice $|R^G : R|$ è finito, quindi R^G è ridotto in quanto estensione finita di un gruppo ridotto. R^G contiene un sottogruppo finito B G-invariante tale che tutti i sottogruppi di R^G/B sono normali in G/B per il lemma 3.1.7.

In particolare, il quoziente $G/C_G(R^G/B)$ è finito. Dunque l'intersezione

$$C_G(D) \cap C_G(R^G/B)$$

ha indice finito in G e poichè è contenuta nel centralizzante $C_G(A/B)$, si ha che $|G : C_G(A/B)|$ è finito e pertanto il lemma è provato. □

Lemma 3.1.9. *Sia G un p-gruppo risolubile i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito.*

Dim. Assumiamo l'asserto falso e scegliamo un controesempio G con lunghezza derivata minima k. Sia F l'FC-centro di G.

Per il Lemma 3.1.5, il sottogruppo derivato F' di F è finito. Rimpiazzando G con G/F', possiamo supporre che F' è identico e quindi F abeliano. Per il Lemma 3.1.8, esiste un sottogruppo E di G finito e G-invariante tale che F' è contenuto in E e il centralizzante $C_G(F/E)$ ha indice finito in G. poichè ogni p-gruppo finito-per-nilpotente è nilpotente, segue che il gruppo quoziente G/E è un controesempio minimale e il suo FC-centro è il gruppo F/E. Infatti se G/E contenesse un sottogruppo nilpotente di indice finito, allora G sarebbe nilpotente-per-finito. Pertanto, sostituendo G con G/E, si può supporre che l'indice $|G : C_G(F)|$ sia finito.

Consideriamo $A = G^{(k-1)}$ l'ultimo termine non identico della serie derivata di G. Per la minimalità di k, il gruppo quoziente G/A contiene un sottogruppo N/A nilpotente e di indice finito. Poichè G è un gruppo periodico e risolubile, G è localmente finito, quindi A è contenuto nel secondo FC-centro $F_2(G)$ di G per il Corollario 3. Dal Lemma 3.1.5, ogni sottogruppo di AF/F ha indice finito nella propria chiusura normale in G/F. Inoltre, per il Lemma 3.1.8, esiste un sottogruppo G-invariante B di AF contenente F tale che B/F è finito e il centralizzante $C_G(AF/B)$ ha indice finito in G.

Poichè B/F è finito e contenuto in $F_2(G)/F$, anche l'indice del centralizzante $C_G(B/F)$ in G è finito. Quindi l'intersezione

$$M = N \cap C_G(F) \cap C_G(B/F) \cap C_G(AF/B)$$

è un sottogruppo nilpotente di G di indice finito.

Da questa contraddizione segue l'asserto. $\square$

Dimostriamo il teorema 3.1.1:

Dim. Per il Lemma 3.1.9, è sufficiente provare che il gruppo G è risolubile.

Sia F il sottogruppo di Fitting di G. Allora F è un gruppo di Baer, quindi è risolubile per il Lemma 3.1.2. Supponiamo per assurdo, che l'indice $|G : F|$ di F in G è infinito. Dal Corollario 2, G/F contiene un sottogruppo N/F normale, nilpotente e infinito.

Poichè N/F è nilpotente e F è risolubile segue che N è risolubile, e dunque per il Lemma 3.1.9 è anche nilpotente-per-finito. Pertanto il sottogruppo di Fitting M di N è normale in G, è nilpotente e ha indice finito in N.

Questa contraddizione prova che F ha indice finito in G, dunque G è risolubile e pertanto il lemma è provato. $\square$

3.2 Gruppi contabili

In questa sezione proveremo il risultato principale restringendo la nostra attenzione ai gruppi contabili in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita.

Definizione 23. *Una classe gruppale $\mathcal{X}$ è detta riconoscibile contabilmente se contiene tutti i gruppi i cui sottogruppi contabili appartengono ad $\mathcal{X}$.*

È noto che molte classi di gruppi sono riconoscibili contabilmente, ad esempio R. Baer prova che la classe dei gruppi nilpotenti è riconoscibile contabilmente. come conseguenza del risultato di M.R. Dixon, M.J. Evans e H. Smith [12], proveremo che la classe dei gruppi che contengono un sottogruppo normale, nilpotente e di indice finito è riconoscibile contabilmente. Tale risultato verrà usato nella dimostrazione del teorema principale, al fine di restringere l'attenzione alla classe dei gruppi contabili.

Lemma 3.2.1. *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo contabile è nilpotente-per-finito. Allora G è nilpotente-per-finito.*

Dim. Sia G un gruppo i cui sottogruppi contabili sono nilpotenti-per-finito. Proviamo che G è nilpotente-per-finito. Sia F il sottogruppo di Fitting di G. Tutti i sottogruppi contabili di F sono nilpotenti e poichè la classe dei gruppi nilpotenti è riconoscibile contabilmente, segue che il Fitting di G è nilpotente.

Supponiamo per assurdo che il gruppo quoziente G/F sia infinito. Sia H/F un sottogruppo infinito contabile di G/F. Allora G contiene un sottogruppo contabile X tale che

$$H \leq XF \;\text{ e }\; (X \setminus F) \cap V = \emptyset,$$

dove V è il sottgoruppo di Fitting di X (si veda [6] corollario 2.3).

Siano h e k elementi di H. Poichè $H \leq XF$, $h = ax$ e $k = yb$ con x, y elementi di X e a, b elementi di F.

In particolare, se hF è diverso da kF, allora xF è diverso da yF per cui $x^{-1}y \notin F$. Segue che $x^{-1}y \notin V$. Infatti se $x^{-1}y \in V$ allora

$x^{-1}y \in (V \cap (X \setminus F))$, ma tale intersezione è vuota. Pertanto i laterali xV e yV sono diversi e quindi il gruppo quoziente X/V è infinito. Tale contraddizione prova che G/F è finito, sicchè G è nilpotente-per-finito. $\square$

Sia G un gruppo periodico. Denotiamo con $\pi(G)$ l'insieme di tutti i numeri primi p tale che G possiede elementi di ordine p. Sia $\pi(G) = \omega_1 \cup \omega_2$ dove $\omega_1 \cup \omega_2$ sono sottoinsieme disgiunti di $\pi(G)$

Definizione 24. *Sia U un ω_1-sottogruppo di G e V è un ω_2-sottogruppo di G tali che $G = UV$, diremo allora che $G = UV$ è una (ω_1, ω_2)-decomposizione di G.*

Per ogni insieme ω di numeri primi, denotiamo con ω' il complemento di ω in P, ciò l'insieme dei numeri primi che non appartengono a ω.

Un famoso teorema di P.Hall, afferma che ogni gruppo finito risolubile possiede una $(\omega, \omega^{'})$-decomposizione per ogni insieme ω di numeri primi.

In un lavoro non pubblicato, questo risultato f esteso da Schenkman al caso dei gruppi localmente finiti contabili. Di seguito presentiamo una dimostrazione di tale risultato.

Lemma 3.2.2. *Sia G un gruppo localmente risolubile, periodico e contabile. Sia ω un sottoinsieme di $\pi(G)$. Allora $G = UV$, dove U è un ω-sottgruppo e V è un $\omega^{'}$-sottogruppo di G.*

Dim. G è un gruppo contabile e localmente finito e dunque è lecito considerare una catena ascendente di sottogruppi finiti di G:

$$1 = G_0 < G_1 < G_2 < G_3 \ldots < G_n < \ldots$$

tali che

$$\bigcup_{n \in N_0} (G_n) = G.$$

Poniamo $U_0 = V_0 = 1$ e per qualche $n \leq 0$, una $(\omega, \omega^{'})$-decomposizione di G_n

$$G_n = U_n V_n,$$

la quale esiste in quanto G_n è finito e risolubile.

Consideriamo una $(\omega, \omega^{'})$-decomposizione di G_{n+1}

$$G_{n+1} = A_{n+1} B_{n+1}.$$

Per il teorema di Hall esiste un x ed un y appartenenti a G_{n+1} tali che: $U_n \leq A^x_{n+1}$ e $V_n \leq B^y_{n+1}$. Inoltre $G_{n+1} = U_{n+1}V_{n+1}$, con $U_{n+1} = A^x_{n+1}$ e $V_{n+1} = B^y_{n+1}$ (si veda lemma 1.3.1 di [1]). In questo modo abbiamo definito induttivamente due catene ascendenti rispettivamente di ω-sottogruppi e ω'-sottogruppi finiti di G:

$$1 = U_0 < U_1 < U_2 < U_3 \ldots < U_n < \ldots$$

$$1 = V_0 < V_1 < V_2 < V_3 \ldots < V_n < \ldots.$$

Siano

$$U = \bigcup_{n \in N_0} U_n$$

e

$$V = \bigcup_{n \in N_0} V_n$$

rispettivamente un ω-sottogruppo e un ω'-sottogruppo di G. Pertanto

$$G = UV$$

é una (ω, ω')-decomposizione di G e dunque il lemma é provato. $\square$

Lemma 3.2.3. *Sia G un gruppo contabile localmente finito in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita. Allora G ha un unico p-sottogruppo di Sylow per tutti tranne al più un numero finito di primi p.*

Dim. Per il corollario 2, G possiede un sottogruppo normale, nilpotente e infinito.

Sia $\mathcal{L} = \{H \trianglelefteq G \ \mid \ H \ \text{ é G-iperabeliano}\}$, allora $\mathcal{L}$ *è* non vuoto e l'insieme $(\mathcal{L}, \subset)$ *è* induttivo. Pertanto esiste in $\mathcal{L}$ un elemento massimale che denotiamo con K.

Se G/K *è* finito, allora G *è* iperabeliano-per-finito. Invece se $G/K = \overline{G}$ *è* infinito, allora per il corollario 2, $\overline{G}$ contiene un sottogruppo $\overline{A} = A/K$ normale, nilpotente e infinito. Allora A *è* G-iperabeliano e dunque appartiene ad $\mathcal{L}$, ma ci*ò* contraddice la massimalit*à* di $\mathcal{L}$. Dunque G *è* iperabeliano-per-finito e pertanto sia H un sottogruppo iperabeliano di indice finito.

È sufficiente provare l'asserto per H e quindi possiamo supporre che G sia iperabeliano.

Sia ω l'insieme dei numeri primi p tale che G contiene un p-sottogruppo di Sylow G_p non-normale. Proviamo che ω *è* finito. Assumiamo per contraddizione che ω sia infinito.

Per ogni coppia di numeri primi $\{p, q\}$ appartenente ad ω, definiamo la seguente relazione d'equivalenza:

$$p \sim q \Leftrightarrow \text{tutti i p-elementi di G permutano con tutti i q-elementi di G.}$$

Consideriamo un sottoinsieme infinito ω_1 di ω, tale che $\omega \setminus \omega_1$ sia infinito e poniamo $\omega_2 = \pi(G) \setminus \omega_1$. Osserviamo che G *è* localmente risolubile ([20]).

Per il lemma 3.2.2, esistono un ω_1-sottgruppo U e un ω_2-sottogruppo V G tale che $G = UV$.

Il gruppo quoziente U/U_G ha esponente finito; infatti se U/U_G è normale-per-finito allora U/U_G è finito e quindi ha ovviamente esponente finito.

Invece se U/U_G è nearly normale in G, detto n l'indice di U nella sua chiusura normale U^G in G, allora il nocciolo di U in U^G, che denotiamo con Y, ha indice finito in U^G ed inoltre divide $n!$. Dunque il sottogruppo $(U^G)^{n!}$ è contenuto in U ed essendo un sottogruppo normale di G, $(U^G)^{n!}$ è contenuto nel nocciolo U_G. Pertanto U/U_G ha esponente finito. Analogamente anche il gruppo V/V_G ha esponente finito. Pertanto esistono dei primi distinti p e q appartenenti rispettivamente a ω_1 e a $\omega \backslash \omega_1$ tali che $p \sim q$, o equivalentemente tali che l'interderivato $[G_p, G_q] = 1$.

Applicando il teorema di Ramsey, si ottiene che ω contiene un sottoinsieme infinito ω^* tale che $[G_p, G_q] = 1$ per tutti i primi distinti p e q appartenenti ad ω^*.

Sia

$$K = \langle G_p | p \in \omega^* \rangle = Dr_{p \in \omega^*} G_p.$$

Poichè il gruppo quoziente K/K_G ha esponente finito, esiste un numero primo q appartenente a ω^* tale che G_q è contenuto in K_G. Segue che G_q è un sottogruppo normale di G. Tale contraddizione prova l'asserto. $\square$

Corollario 4. *Sia G un gruppo localmente finito i cui sottogruppi hanno oscillazione normale finita. Sia P un p-sottogruppo di Sylow di G. Allora G possiede un sottogruppo normale nilpotente N tale che il quoziente PN/N è finito.*

Dimostrazione. Il sottogruppo P è un p-gruppo localmente finito in cui tutti i sottogruppi hanno oscillazione normale finita e dunque per il lemma 3.1.1,P è nilpotente-per-finito. Il nocciolo di P in G è anch'esso nipotente-per-finito e sia $N = Fit(P_G)$. Allora N è un gruppo di Baer nilpotente-per-finito e dunque risulta nilpotente. Poichè $NchP_G \trianglelefteq G$, segue che $N \trianglelefteq G$. Pertanto N è un sottogruppo nilpotente, normale in G e di indice finito in P^G.
Se P è normale-per-finito, allora N ha indice finito in P e dunque segue l'asserto; altrimenti se P è nearly normale in G, essendo P nilpotente-per-finito, segue che è tale anche la sua chiusura normale in G. Il sottogruppo di Fitting di P^G è un sottogruppo normale in G, nilpotente e tale che PN/N è finito. Pertanto l'asserto è vero anche in questo caso. □

Siamo, ora, in grado di provare il risultato principale:

Teorema 3.2.1. *Sia G un gruppo localmente finito in cui ogni sottogruppo ha oscillazione normale finita. Allora G contiene un sottogruppo normale, nilpotente di indice finito.*

Dim. Dal 3.2.1 è sufficiente provare l'asserto nel caso in cui G sia un gruppo contabile.

Sia ω l'insieme di tutti i numeri primi p tali che G possiede un p-sottogruppo di Sylow non normale G_p. Allora ω è finito per il lemma 3.2.3.

Sia $\pi = \pi(G) \setminus \omega$ e per ogni $q \in \pi$, sia G_q l'unico q-sottogruppo di Sylow di G.

Consideriamo il seguente sottogruppo normale di G

$$K = Dr_{q \in \pi} G_q.$$

Poichè G è contabile e $\pi(K) \cap \pi(G/K) = \emptyset$, K possiede un complemento in G; pertanto esiste un sottogruppo H di G tale che $G = HK$ e $H \cap K = 1$.

Sia π^* un sottoinsieme di π, costituito da tutti i numeri primi q tali che G_q contiene un sottogruppo non-normale X_q. Poniamo

$$X = Dr_{q \in \pi^*} X_q.$$

Il gruppo quoziente X/X_G ha esponente finito per il lemma 2.1.1, cosicchè π^* deve essere finito. Per ogni $q \in \pi \setminus \pi^*$, G_q ha tutti i sottogruppi normali. Per il teorema di Baer-Dedekind [22], G_q è abeliano oppure è prodotto diretto di Q_8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di ordine 4.

Se q appartiene a $\pi \setminus \pi^*$ e $q \neq 2$, allora G_q è abeliano e quindi è abeliano per tutti tranne al più un numero finito di primi $q \in \pi$. D'altra parte, dal teorema 3.1.1, segue che ogni sottogruppo di Sylow di G è nilpotente-per-finito, quindi K è nilpotente-per-finito e dunque il $Fit(K) = L$ è nilpotente e ha indice finito in K.

Poichè $H \simeq G/K$, si ha che l'insieme dei primi $\pi(H) = \pi(G/K) \leq \pi(G) \setminus \pi(K)$, ma $\pi(K) = \pi(G) \setminus \omega$ e dunque $\pi(H)$ è finito.

Dal corollario 4, esiste un sottogruppo N normale, nilpotente di G tale che tutti i sottogruppi di Sylow di HN/N sono finiti. Segue che HN/N è finito e dato che $|K : L|$ è finito, si ha che il sottogruppo LN ha indice finito in G. Pertanto LN è un sottogruppo normale, nilpotente e di indice finito in G e dunque il teorema è provato. $\square$

Bibliografia

[1] B. Amberg, S. Franciosi, F. de Giovanni : "Productus of groups, Clarendon Press, Oxford *(1992)*

[2] R. Baer: "Abzählbar gruppentheoretische Eigenschaften, Math. Z. *79 (1962), 344–363.*

[3] R. Baer: "Überauflösbare Gruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *23 (1957), 11–28.*

[4] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey: "Finite groups with subgroups supersoluble or subnormal, J. Algebra *321 (2009), 2042–2052.*

[5] B. Bruno, R.E. Phillips: "Groups with restricted non-normal subgroups, Math. Z *176 (1981), 199-221*

[6] J. Buckley, J. C. Lennox, B.H. Neumann, H. Smith, J. Wiegold: "Groups with all subgroups normal-by-finite, J. Austral. Math. Soc. Ser. A *59 (1995, 384–398).*

[7] *C. Casolo: "Groups with finite conjugacy classes of subnormal subgroups,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *81 (1989), 107–149.*

[8] *S.N. Černikov: "Groups with given properties of system of infinite subgroups,* Ukrain. Math. J. *19 (1967) 715-731.*

[9] *M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella: "Groups with finitely many normalizers of non-polycyclic subgroups,* Algebra Colloq. *17 (2010), 203–210.*

[10] *M. De Falco, M. Martusciello, C. Musella : "Groups with Supersoluble Non-normal Subgroups,* Algebra Colloq. .

[11] *F. De Mari, F. de Giovanni : "Groups with finitely many normalizers of non-abelian subgroups,* Ricerche Mat. *55 (2006) 311–317.*

[12] *M.R. Dixon: "Sylow Theory, Formation and Fitting Classes in Locally Finite Groups,* World Scientific, Singapore *(1994)*

[13] *M.R. Dixon, M.J. Evans, H. Smith: "Some countably recognizable classes of groups,* J. Group Theory *10 (2007), 641–653.*

[14] *K. Doerk, T. Hawkes: "Finite Soluble Groups.* de Gruyter*, Berlin, New York (1992).*

[15] *S. Franciosi, F. de Giovanni: "Groups with many supersoluble subgroups,* Ricerche Mat. *40 (1991), 321-333.*

[16] *S. Franciosi, F. de Giovanni, M.L. Newell: "Groups with polycyclic non-normal subgroups,* Algebra Colloq. *7 (2000), 33–42.*

[17] *F. de Giovanni, M. Martusciello, C. Rainone "Locally finite groups whose subgroups have finite normal oscillation,* Bull. Aust: Math: Soc. (First published on line 2013)*, 1–9.*

[18] *W. Möhres: "Auflösbarkeit von Gruppen, deren untergruppen alle subnormal sind,* Arch. Math. (Basel) *54 (1990), 232–235.*

[19] *B.H. Neumann: "Groups with finite classes of conjugate subgroups,* Math. Z. *63 (1955), 76–96.*

[20] *D.J.S. Robinson: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups.* Springer*, Berlin (1972).*

[21] *D.J.S. Robinson: "Homology and cohomology of locally supersoluble groups.* Proc. Camb. Phil. Soc. *102 (1986), 233–250.*

[22] *D.J.S. Robinson: "A Course in the Theory of Groups.* Springer*, Berlin (1996).*

[23] G.M. Romalis, N.F. Sesekin "Metahamiltonian groups, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. *5 (1966) 101–106.*

[24] G.M. Romalis, N.F. Sesekin "Metahamiltonian groups II, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. *6 (1968) 52–58.*

[25] G.M. Romalis, N.F. Sesekin "Metahamiltonian groups III, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. *(1969/1970) 195–199.*