UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE FILOSOFICHE**

**TESI DI DOTTORATO XXVI CICLO**

**IN**

**FILOSOFIA DELLA SCIENZA**

# IL RECUPERO DELL'EVIDENZA NELLA CONSIDERAZIONE FENOMENOLOGICA DELLA MATEMATICA DI KURT GÖDEL

**TUTOR**

**Ch.mo Prof.**

**Nicola Grana**

**DOTTORANDA**

**Dott. Maria Concetta Rosati**

## *Il recupero dell'evidenza nella considerazione fenomenologia della matematica di Kurt Gödel*

*LA SITUAZIONE DI GÖDEL*



*LEIBNIZ, GÖDEL, HUSSERL*



RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

## *INTRODUZIONE*

Kurt Gödel è massimamente conosciuto per i suoi contributi alla logica ed, in particolare, per i risultati di incompletezza raggiunti già nel 1930, quando li comunica privatamente a Carnap, Feigl e Waismann[1], ma che rende pubblici nel 1932 con la sua *Habilitationsschrift*. Copiosa è la letteratura a riguardo, che mette a rischio la portata delle conclusioni e delle conseguenti riflessioni gödeliane, restituendo una figura banalizzata dalla connotazione di pensatore eversivo[2]. Scopo dell'elaborato è dunque il tentativo di ripensare la figura di Gödel e, considerando tutta la parabola del suo pensiero, restituire il suo operato alla dimensione che ad esso spetta, trattando, in ultimo, di questioni genuinamente filosofiche, come lui stesso le apostrofa.

La pubblicazione dei suoi risultati suonava come una seconda cesura, dopo quella segnata da Russell nel 1902 dalla scoperta del paradosso della classe universale nel sistema a scopo fondazionale ideato da Frege. I due momenti sono entrambi di rottura delle precedenti pretese epistemologiche, delle *rotture epistemologiche* appunto e, dunque, sono risultati limitativi, che ridimensionano il campo di azione della logica che comprende e fonda la matematica, nel caso di Russell,

[1] Il problema della completezza per il calcolo dei predicati del primo ordine era stato posto da Hibert e Ackermann nel 1928, Gödel lo risolve già nel 1929.

[2] Yourgrau P., A world without Time: the forgotten Legacy of Gödel and Einsteinm, Allen Lane London 2005 [trad. it. Un mondo senza tempo: leredità dimenticata di Gödel e Einstein, Il Saggiatore, Milano 2006.

e, nel caso di Gödel, della logica di impianto formalista, considerata da Hilbert risolutiva a soddisfare l'esigenza di rigore che emergeva, fra i matematici, a ridosso della grande evoluzione nel campo dell'analisi in senso fondazionale. Entrambi i momenti inducono ad un impegno nuovo nella considerazione della matematica come scienza, come conoscenza. Di tale nuova esigenza si fanno carico sia Russell, che apporta modifiche sostanziali lungo i suoi sviluppi della posizione fregeana, e lo stesso Gödel che, impegnato nella trattazione di argomenti prettamente logici e matematici, si farà carico dei precipitati filosofici di essi che, dalle conseguenze dei suoi risultati per la considerazione della scienza matematica, si estendono fino ad un ripensamento filosofico del soggetto che fa matematica e che direttamente tratta con oggetti matematici.

Gödel accompagna da sempre il suo impegno nella logica e nella matematica all'interesse per la filosofia: è nel 1922 che si impegna per la prima volta nello studio di Kant e la prima testimonianza del suo studio di Leibniz la riscontriamo nel *Nachlass*, in cui è stato individuato un formulario, per la richiesta alla biblioteca dei volumi su Leibniz, del 1929[3]. Gödel in una replica dell'*Intervista Grandjean*[4], sottopostagli nel 1974 da Burke Gradjean, afferma di aver studiato Leibniz, che aveva impresso una forte influenza sul suo pensiero, fra il 1943 e il 1946 circa[5]. E' infatti di questi anni l'impegno più significativo nell'attività filosofica, durante la considerazione del Problema del Continuo, sul quale rende nota una prima conclusione in un saggio del 1947. Questa versione sarà rivista ed ampliata più volte, a ratifica di nuovi punti di vista, di ulteriori evidenze emerse nella considerazione del Problema, quale problema fondante della matematica. In questi saggi sono le

---

[3] *GN* folder 5/54, 050173, si veda van Atten M. e Kennedy J., *On the philosophical development of Kurt Gödel*, «The bulletin of symbolic logik», vol.9, n.4, dec.2003.

[4] Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass., MIT press 1987, pp. 16-25.

[5] Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1987, p.19.

influenze già solo linguistiche della fenomenologia husserliana, laddove si riferisce alla conoscenza degli oggetti matematici come fondata su una *presa* diretta di essi. Sono considerati, infatti, quelli di maggiore pregnanza filosofica, quelli dai quali, meglio e più chiaramente, si evince la considerazione della matematica, che Gödel conservava.

In particolare l'ultima versione, quella del 1967, dichiara la definitiva adesione di Gödel alla considerazione platonista e realista della conoscenza matematica. Una tale decisa adesione al platonismo matematico era stata, in definitiva, resa possibile dallo studio della fenomenologia di Husserl, che frequenta dal 1959 e che non esita ad abbracciare nello stesso anno, proprio perché consentirebbe l'accettazione della posizione platonista e realista anche ad una mente critica. Gödel, infatti, è considerato, con René Thom, fra i più autorevoli e spassionati esponenti della concezione platonista della matematica[6], ma non per questo i suoi rapporti con essa sono da considerarsi non problematici, ingenui come fa Charles Chihara[7], a sua volta criticato per la scarsa comprensione delle analisi della percezione compiute da Gödel. Nell'intervista del 1974 ammette di avere abbracciato tale concezione già nel 1925, quando forte era l'interesse per gli sviluppi del formalismo, ai tempi dei suoi studi a Vienna, e di conservarla da allora. Mantiene ferma la sua posizione, nonostante si formi in un ambiente, quello dell'*empirismo logico*, che sostiene una concezione sintattica e dunque convenzionalista della matematica, diametralmente opposta alla considerazione gödeliana. Dall'empirismo logico, comunque, mutua argomenti e problematiche, che Gödel sempre cerca di piegare al proprio obiettivo: sostenere l'esistenza degli oggetti della matematica come indipendenti da qualsiasi costruzione e convenzione.

[6] Davis Ph. J. e Hersch R., *The mathematical expierence, Birkhäuser, Boston 1980*, p. 318 [trad.it. *L'esperienza matematica*, Edizioni di comunità, Milano 1984].
[7] James E.P., *The problem of mathematical Existence*, in «Philosophical Books», vol. XXIII, n.3/1992, pp. 129-138.

Gödel da platonista convinto cercherà lungo tutta la sua vita, di logico, di matematico e di filosofo della matematica, una giustificazione della sua posizione. Il platonismo è da annoverare tra le varie considerazioni della matematica e dei suoi oggetti, che finiscono per piegare logica e matematica ai propri obiettivi palesando il loro procedere in senso *riduzionistico*. Il *platonismo* è, delle considerazioni della matematica, quella più diffusa fra i matematici stessi, che, prevenuti rispetto alle questioni filosofiche, anche se da considerarsi del tipo di quelle più tradizionali in filosofia, difficilmente colgono pure l'importanza dei contributi matematici dell'operato di Gödel, che si aggirerebbe solo al di sopra delle teorie, nella *metamatematica*.

La teoria della conoscenza, fatta risalire tradizionalmente a Platone e che trova applicazione in filosofia della matematica, ammette, come ipotesi di partenza, che gli esseri umani siano dotati di conoscenze matematiche anche molto vaste e prende forma nel tentativo di fare fronte alle questioni metodologiche, poste dalla riflessione su tale scienza. Il richiamo del termine platonismo a Platone evoca una somiglianza di posizioni che è, però, soltanto relativa: per Platone esistono due domini di entità, quello della realtà e quello dell'apparenza e gli oggetti matematici appartengono al primo, al dominio della realtà, al mondo delle Idee. Proprio la domanda sull'esistenza degli oggetti matematici, in aggiunta alle Idee, costituisce una delle questioni più controverse[8]. Caratteristica comune del platonismo antico e contemporaneo è l'affermazione che numeri e figure geometriche siano entità perfette, dunque eterne ed immutabili, che esistono indipendentemente dal pensiero umano. Dai libri *VI e VII* della *Repubblica* si evince la problematica relativa alla diversità delle Idee della morale dalle Idee matematiche, che può ben essere intesa come differenza non di livello o di pregnanza ontologica, quanto di

[8] Wedberg A., *Plato's Philosophy of mathematics*, Stockolm, Alqvist & Wiksell, 1955, p.10-11.

natura fra due classi di Idee[9]. Se i numeri hanno delle immagini sensibili, le collezioni, lo stesso non può dirsi per l'altra classe di entità; ciò conferisce alla matematica il ruolo di canale privilegiato per la conoscenza del mondo intellegibile attraverso quello sensibile, fino a rivestire la cruciale funzione di intermediario epistemologico, che ci insegna ad andare in profondità nella conoscenza del sensibile elevandoci al di sopra di esso, al di là dell'opinione. Con questo non si vuole affermare essere il mondo delle Idee una generalizzazione di quello sensibile; ciò porrebbe le Idee matematiche alla mercé del pensiero umano e, infatti, caratteristica del platonismo è proprio riconoscerle come indipendenti e tentarne una giustificazione in quanto tali. Come le collezioni sensibili possano partecipare della conoscenza delle Idee e come sia possibile che tali entità numeriche si rivelino utili alla "gestione" degli oggetti sensibili; come gli enunciati matematici dall'aspetto descrittivo possano descrivere quanto non è visto nel senso letterale del termine, e come, descrivendo le Idee, venga indirettamente descritto anche il mondo, sono questioni che rimangono aperte per Platone, nonché per il platonismo contemporaneo. Per Platone l'Idea della molteplicità è dedotta logicamente dall'apprensione di principi di base, quali l'Uno, ma questo è appreso improvvisamente, è intuito *(Simposio, 210°).* Si tratta di un'intuizione diretta o che perviene indirettamente da un processo, di astrazione? Il discorso filosofico che si articola intorno a questi quesiti si presenta ancora e di nuovo come il discorso sui fondamenti di tale scienza.

La matematica e la considerazione, che di essa si mantiene, hanno subito notevoli trasformazioni nei secoli eppure si pone sempre e di nuovo la questione della possibilità stessa della matematica come scienza e di quali ne siano i caratteri peculiari. La filosofia della

---

[9] Conford F.M., *Mathematics and Dialectic in The 'Republic VI-VII'* (1965), in R.E. Allen, *Studie's Plato.s Methaphysic*, London, Routledge & Kegan Paul, 1965, pp. 61-95.

matematica, dunque, dalla consapevolezza tutta nuova che la scienza in questione non sia un sapere monolitico, si avvia alla ricerca normativa di quel complesso di condizioni, almeno di quelle imprescindibili, grazie alle quali è possibile compiere affermazioni corrette. Assume, inoltre, un carattere descrittivo, nel tentativo di porre in modo esplicito quali siano le condizioni perché certe affermazioni possano o meno essere dette matematiche. L'interesse speculativo, dunque, ritorna prepotentemente in relazione ad un chiarimento metodologico che renda conto di come sia possibile parlare di certi contenuti, soprattutto se *astratti* ossia non attingibili con la sensazione e non giustificabili per via della teoria causale della conoscenza, sulla cui base sono state poste le più rinomate critiche al platonismo matematico, ma che, in definitiva, non possono considerarsi conclusive[10].

Il platonismo in filosofia della matematica, rifacendosi all'analisi classica della teoria della conoscenza di impronta platonica, ammette l'ipotesi di partenza che gli esseri umani siano dotati di conoscenze matematiche anche molto vaste e che si possa avere conoscenza solo se il soggetto *S* crede che *p* sia vero e che, nel crederlo, si pienamente giustificato. La filosofia della matematica si assume, dunque, un impegno ontologico indagando sull'esistenza degli oggetti matematici, descrivendone le loro relazioni. Secondo l'interpretazione *standard* della verità di un enunciato, un enunciato è vero solo se si riferisce accuratamente alle proprietà degli oggetti descritti nell'enunciato ed alle loro reciproche relazioni. L'ammissione dell'esistenza di oggetti astratti porta con sé una controparte epistemologica, se possibile, ancora più problematica: come possiamo conoscere oggetti astratti e come possiamo giustificare tale conoscenza? Se il realismo di Platone concerne gli universali, proprietà e relazioni, i platonisti contemporanei

---

[10] Si veda Bernacerraf P., *What Numbers Could Not Be*, «Philosophical Review», 1965/74, pp. 47-73, per l'obiezione di carattere ontologico e Bernacerraf P., *Mathematical Truth*, «The Journal of Philosophy», 1973/70, 19, pp.661-679.

lo riferiscono ad una matematica che tratta di individui matematici, numeri insiemi e funzioni. Non siamo noi, infatti, a creare o inventare l'esistenza e le caratteristiche fondamentali delle entità matematiche oggetto di studio della matematica, che possiamo o meno cogliere e, in questo ultimo caso, sono descritte nel modo corretto in proposizioni vere. Torna qui il parallelismo fra la scienza matematica e quella fisica: la matematica conosce oggetti che non creiamo, così come accade per il mondo fisico che, pure non creiamo, ma in cui da subito ci troviamo. Maddy colloca il platonismo nel realismo, identificando la posizione metafisica del realismo con il carattere metodologico del platonismo, pur non essendo l'identificazione così scontata[11]. Pure Russell, in effetti, nel delineare la sua epistemologia pone in parallelo la matematica con la fisica, rivelando l'istanza realista che anima il suo pensiero senza però soddisfare del tutto le esigenze di una posizione platonista. Se Maddy identifica la posizione metafisica del realismo col carattere metodologico del platonismo, Parsons mantiene il realismo, quale posizione metafisica, ben distinto dall'accezione metodologica del platonismo[12]. Così l'esistenza degli oggetti matematici è indipendente da ogni operazione cognitiva ed i fatti, che li riguardano, sono indipendenti dalla mente umana e dalla possibilità di verifica concreta o di principio. Tali oggetti costituiscono dunque totalità ben definite e, per questo, è ammesso l'uso della legge del terzo escluso, in polemica con la direzione epistemologica indicata da Parsons quale antagonista del platonismo, l'intuizionismo o costruttivismo, che pone la costruzione da parte della mente dei suoi propri oggetti quale unico possibile fondamento della matematica. Parlare di totalità vuol dire parlare di insiemi di oggetti, per cui la connessione fra platonismo e teoria degli insiemi avviene con una certa naturalezza, tanto che Gödel

[11] Maddy P., *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1990, pp. 20-21.
[12] Parsons C., *Foundation of Mathematics* in P. Edwards, *Encyclopedia of Philosophy*, New York, Macmillian, 1967, vol.5, pp. 188-213, p. 201.

dichiara naturale, inevitabile, l'accettazione di essa e pragmaticamente non esclude che in futuro se ne possano dare perfezionamenti, presentandosi in un sistema sempre che ammette anche un'inifinità di assiomi. Per un platonista infatti non costituisce un problema appellarsi a totalità a cui la stessa entità da definire appartiene, tale circolarità non risulta viziosa perché totalità e circolarità esistono indipendentemente dal nostro fare riferimento ad esse. Ammettere e salvare definizioni che fanno appello a totalità e metodi di questo genere, che ci rendono *definizioni impredicative,* vuol dire salvare ampie parti della matematica e per questo se ne riconosce la circolarità come reale piuttosto che come viziosa, indice della limitatezza delle risorse epistemiche al momento disponibili piuttosto che della matematica. Appellandosi a totalità infinite, che rimandano infinitamente dal *definiens* al *definiendum*, di proprietà non si fa altro che ovviare alla difficoltà di doversi riferire ad ognuna delle innumerevoli proprietà esistenti.

Il platonismo di Gödel si costituisce nelle critiche che muove alle posizioni antagoniste, che comunque sa di non essere riuscito del tutto a scardinare, come non è riuscito a fondare il platonismo degli oggetti matematici. La possibilità che intravede nella fenomenologia, di uscire da un impasse che lo costringe sulla sua posizione, senza che ne riesca a dare conto, darà un'impronta del tutto nuova alla sua posizione platonista. Lo scritto intende smentire la totale sprovvedutezza del suo tentativo con la fenomenologia husserliana, che proprio perché voluto dall'esercizio della matematica meglio potrebbe riuscire a guardarsi da mosse soggettivistiche come, invece, rilevano i logici Dreben e Goldfarb[13]. Sebbene Gödel avesse cominciato lo studio di Husserl a fine anni Cinquanta, i suoi approcci con la fenomenologia incominciano

[13] Goldfarb W., *On Gödel's Philosophy*, Asl, Helsinki, 20 luglio 1990, relazione svolta per la «Association for Symbolic Logic», relazione inedita dattiloscritta, citata in Youngrau P., *A word without Time: The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein*, Allen Lane, London 2005 [trad. it. *Un mondo senza tempo: l'eredità dimenticata di Gödel e Einstein*, Il Saggiatore, Milano 2006, p.178].

durante la sua formazione a Vienna, il fondatore del *Wiener Kreis* Schlick aveva discusso e criticato il lavoro di Husserl nel suo *Allgemeine Erkenntnislehre* del 1918[14]; contemporaneamente Felix Kaufmann praticava la fenomenologia oltre ad essere personalmente vicino ad Husserl e lo stesso Carnap aveva studiato con Husserl fra il 1924 e il 1925[15]. La fenomenologia era entrata anche nel contesto prettamente matematico, da cui tra l'altro traeva origine, della conferenza di Könisberg del settembre 1930, in cui Brouwer, lo studente più importante, vi presentava il punto di vista intuizionistico e vi spiegava i concetti di proposizione e di prova nei termini dei concetti husserliani di intenzione e riempimento. Gödel avrebbe poi letto la versione del discorso pubblicata da Heyting[16], stendendone una recensione[17]. Incontra ancora la fenomenologia in *Zur Logik der Modalitäten* di O. Becker[18] del 1930, di cui pure pubblica una recensione[19]. Il 7 maggio del 1935 Husserl aveva tenuto una conferenza a Vienna che, vista la

---

[14] Husserl aveva criticato la discussione di Schlick nell'*Introduzione* alla seconda edizione delle *Logische Untersuchungen*, *I: Prolegomena zur reinen Logik*, Max Niemeyer, Halle 1900 e *Logische Untersuchungen, II: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie des Erkenntnis*, Max Niemeyer, Halle 1900 ; in *Gesammelte Werke*, Husserliana, a cura dell'Husserl Archive (Leuven) sulla base del *Nachlass*, Martinus Bijhoff, The Hague; poi Kluver Dordrecht 1950, vol. 18 e 19, pp. 535-336[trad.it. Piana G. (a cura di) *Ricerche Logiche*, vol.1 e 2, Prolegomeni a una logica pura, Il Saggiatore, Milano 1968]; Schlick M., replicava nella seconda edizione della *Erkenntnislehre 2*, Springer, Berlin 1925, pp.127-128 n.3.

[15] Schumann K., *Husserl-Chronik. Denk- und Lebensweg Edmund Husserls*, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1977, p.281.

[16] Heyting A.*, Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik in Erkenntnis,* 2/1931, pp. 106-115 [trad. it. Di Rosso Mario*, La fondazione intuizionista della matematica,* in L. Wittgenstein*, Osservazioni filosofiche,* Einaudi, Torino 1976, pp. 295-303.

[17] Gödel K., *Collected Works I: Publications 1929-1936*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford pp.247-248 [trad.it. Gödel K., *Opere* vol.1, a cura di Edoardo Ballo, Silvio Bozzi, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Bollati Borinhieri, Torino 2002, p. 178-180].

[18] Becker O., *Zur Logik der Modalitäten*, «Jahrbuch für Philosophie un phänomenologische Forschung», vol. XI/1930, pp. 497-548.

[19] Gödel K., *Collected Works I*, op. cit., pp.216-217 [trad.it. Gödel K., *Opere* vol.1, op. cit., p.155.

grande partecipazione, gli viene chiesto di replicare il 10 maggio[20]. Wang ci informa che Gödel era a Vienna in quel periodo, ma che non fu presente alle conferenze, essendo il suo interessamento a Husserl sopraggiunto soltanto più tardi[21]. Del luglio di quello stesso anno è, però, la richiesta di Gödel presso la biblioteca delle *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins* di Husserl[22], la cui conferenza evidentemente lo aveva incuriosito. Nonostante questi contatti non da subito Gödel si sente vicino alla fenomenologia, da cui indipendentemente elabora e mantiene le proprie posizioni in filosofia della matematica.

"Posso dire che il mio realismo concettuale, che mantengo dal 1925 circa, in nessun modo è dovuto alla fenomenologia. Ho un'alta considerazione di Husserl, ma feci la conoscenza dei suoi scritti solo molti anni dopo essere emigrato negli Stati Uniti"[23].L'avvicinamento di Gödel alla fenomenologia è dovuto all'interpretazione della stessa quale metodo. Secondo Gödel, come rileva Wang, tale metodo "avrebbe giocato un ruolo importante nella realizzazione del suo scopo"[24], ossia nella giustificazione del platonismo matematico[25].

Il platonismo, che Gödel trova possa soddisfare una mente critica, è il platonismo che coglie i frutti del metodo husserliano, per configurarsi come platonismo trascendental fenomenologico. L'elaborazione di esso tiene presente le esigenze delle intuizioni leibniziane, non nascoste da Gödel anche quando sorprendenti, e che finiscono per

---

[20] Edmund e Malvine Husserl all'ex studente di Husserl Roman Ingarden, il 10 luglio 1935 in Husserl E., *Briefwechsel*, Kluver, Dordrecht 1999, III, p.302.

[21] Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel*, op. cit., pp. 97-98.

[22] Husserl E., *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins, in* «Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung», vol. IX/1928, pp. VIII-X e 367-498.

[23] GN depliant 1/167, 012359.

[24] Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel*, op. cit., p. 221.

[25] Ivi, nello stesso scritto Wang prima ammette di non essere riuscito ad individuare le specifiche influenze della fenomenologia sul pensiero di Gödel, ma più oltre ammette che negli scritti posteriori al 1959 sono evidenti le tracce del pensiero di Husserl, anche se in misura limitata, pur non adducendone alcun esempio (ibidem, p. 61).

calibrarsi alle possibilità offerte dal metodo trascendentale fenomenologico, lungi dall'essere interpretate come sprovvedutezze prekantiane, contro quanto dice Dreben[26]. Il recupero degli oggetti della matematica arriva a maturare nella convinzione di un recupero della metafisica, che parallelamente recuperi le ragioni della matematica.

Nel descrivere in termini filosofici lo sviluppo dello studio sui fondamenti della matematica, Gödel organizza uno schema generale in cui specifiche *Weltanschungen* filosofiche vengono poste in una scala a seconda della loro affinità con la metafisica. Più lontano da quest'ultima sono scetticismo, positivismo, empirismo, pessimismo, le direzioni dello *Spirito del tempo*; all'opposto sono idealismo, teologia, spiritualismo, apriorismo. Gödel sostiene essere la verità nel mezzo e, andando contro lo *Spirito del tempo*, si oppone fortemente ad un allontanamento dalla metafisica e, poiché secondo i suoi teoremi, la verità della matematica non può essere assicurata da un sistema di assiomi e regole formali, non vuole rinunciare a due aspetti "assai desiderabili da soddisfare e che si raccomandano in larga misura da soli: precisamente, da una parte assicurare alla matematica la certezza della sua conoscenza, e dall'altra mantenere la fiducia che per domande che la ragione si pone in modo molto chiaro, la ragione stessa può trovare risposte"[27]. Kreisel[28] sostiene che, in una confidenza, Gödel avrebbe ammesso di elaborare tali distinzioni proprio mentre leggeva Husserl e, nel *Britannica Article,* è rintracciabile un passaggio che suggerirebbe la distinzione. Scopo di Gödel è ottenere la certezza della matematica non con la manipolazione di

---

[26] A Gödel erano note le dispute Kant- Eberhard. Eberharhd in una serri di scritti del 1789 aveva sostenuto che tutto quanto di valore ci fosse nella *Critica della ragion pura* di Kant era già stato pronunciato da Leibniz.

[27] Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961/?),* in *Opere*, vol. 3, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, e Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2006, pp. 336-341, p. 339.

[28] Kreisel G., *Mathematical logic*, in *Lectures on modern mathematics*, a cura di Saaty, Wiley, New York 1965.

simboli, ma con una maggiore chiarezza dei concetti astratti, cosa permessa proprio dalla fenomenologia che mantiene un saldo riferimento al *dato*. Proprio questo riferimento al *dato* pur nella manipolazione di oggetti astratti salverebbe il realismo, perché quello che fa la differenza fra un punto di vista idealistico ed uno realistico è che aspetti della cruda esperienza, dell'esperienza matematica sono la fonte di essi[29]. La fenomenologia trascendentale non è dunque intesa quale alternativa ad una considerazione dell'esperienza degli oggetti matematici, oggetti astratti o anche concetti. In essa Gödel riscontra una filosofia idealistica che non nega il significato obiettivo del pensiero. Sostiene essere la riflessione sul soggetto un modo del tutto plausibile per la realizzazione della metafisica corretta, anche sulla scorta del suo bagaglio leibniziano, per cui attraverso la conoscenza delle verità necessarie e della loro astrazione dai fatti meramente sensibili, che ci eleviamo a quegli atti riflessivi che ci abilitano a pensare all'essere e alla sostanza, al semplice ed al complesso, all'immateriale e a dio stesso, tanto da affermare direttamente a Wang che "se conosci tutto su te stesso, saprai tutto quanto abbia interesse filosofico"[30]. Gödel doveva avere in mente le parole leibniziane dei *Nouveaux Essais*, I, §21 "L'osservazione dell'essenza delle cose non è altro che l'osservazione dell'essenza del nostro spirito". Leibniz costituisce per Gödel un costante punto di riferimento e fonte di ispirazione, così come Husserl finisce per confessare al suo studente Mahnke "ich selbst bin eigentlich Monadologe", ma biasima Leibniz per non aver dato sviluppo a tale intuizione in direzione di una scienza[31]. Così Gödel conosceva molto bene gli sviluppi di pensiero che esplicitamente facevano riferimento a Leibniz: "Baumgarten (1714-

[29] Kreisel G., *Mathematical logic*, op. cit., p. 190.
[30] GN depliant 1/209 013184.
[31] "Er ist selbst ja durchaus ein Schauer, nur daß leider überall due teoretische Einzelanalyse und Einzelausführung fehlt, ohne die Geschautes eben nicht zur Wissenschat warden kann". Husserl a Mahnke, 5 gennaio 1917 Husserl E., *Briefwechsel*, Kluver, Dordrecht 1999., III, pp.407-408.

1762) è migliore di Wolff (1679-1754)”[32], facendo, evidentemente, riferimento al fatto che il filosofo leibniziano Wolff e la sua scuola avevano sottovalutato l’importanza della monadologia nel suo senso originale, riponendola nel dimenticatoio. Eccezione fu proprio Gottlieb Baumgarten che tentò di ripristinarla e svilupparla[33]. Le due interpretazioni della monadologia che ne seguirono, l’una che considerava la monadologia come fuorviante e, nella migliore delle ipotesi, come una poetica, e l’altra, che la considerava tentativo di vera metafisica, godettero di forza disuguale. Gödel e Husserl la consideravano tentativo di vera metafisica. Nelle sue conferenze del 1923*, Erste Phylosophie*, sosteneva: “Leibniz, nella sua brillante intuizione di una teoria delle monadi intendeva che tutto, in ultima analisi, può essere ridotto a monadi […] può darsi che alla fine una prospettiva del mondo fondata semplicemente da una filosofia trascendentale richieda precisamente una tale interpretazione”[34] (nota 59, auf deutsch). Alla fine delle stesse conferenze sostiene: “così la fenomenologia conduce alla monadologia che Leibniz in un colpo di genio ha anticipato”.

L’ultima parte dell’elaborato si cimenta proprio con le considerazioni in merito alla *monadologia* espresse dai due pensatori, cercando di delinearne affinità e differenze a riprova dell’accuratezza delle affermazioni di Gödel, che cogliere non ingenuamente le esigenze dovute a evidenze matematiche. Le evidenze date nei teoremi di Gödel trovano spesso argomentazioni che, ingenuamente, arrivano a

---

[32] *A logical Journey. From Gödel to philosophy,* MIT Press, Cambridge (mass.), 1996, p.170.

[33] Bell J., *Herman Weyl’s later philosophical views: His divergence from Husserl*, in «Proceedings of Ottawa 2000 Conference on Husserl and the Science», University of Ottawa Press, 2000.

[34] “Leibniz meinte in seinem genialen Aperçu einer Monadenlehre: nach seinem letzen wahren Sein reduzierte sich alles Seiende auf Monaden […]. Es konnte am Ende sein, daß eine traszendental-philosophisch begründete Weltbetrachtung gerade eine solche oder ahnliche Interpretation als schlechtsinnige Notwendigkeit forderte”*, Erste Philosphie (1923/1924). Erster Teil: kritische Ideengeschichte*, Husserliana, vol.II, Martinus Nijhoff, Den Haag 1956, pp. 71-72.

conclusioni scorrette, come avviene traendone la prova dell’irriducibilità del procedere della mente ad un procedimento meccanico. Gödel, ancora una volta, non cade in questa ingenuità nella considerazione della monade come irriducibile alla macchina. Piuttosto una tale irriducibilità, procedendo oltre Leibniz mediante la fenomenologia, è dovuta alla possibilità della mente di cogliere le essenze, gli oggetti astratti o concetti, così come il metodo fenomenologico, nel suo procedere, rende chiaro.

## *L'EVIDENZA MATEMATICA FINO A GÖDEL*

### *Dalla vecchia alla nuova assiomatica*

La matematica è stata da sempre, sin dai tempi di Euclide, identificata con il metodo assiomatico, nonostante nella pratica tale identificazione, celebrata come canonica, venisse spesso offuscata, non rispettata o apertamente contestata. Ed in effetti il ruolo del metodo assiomatico emerge ancora prepotentemente nella matematica di fine Ottocento e del Novecento esponendo la sua natura a non poche forzature. Nell'Ottocento la matematica astratta esplodeva come sviluppo naturale dell'attività matematica e si rivelava di grande utilità nelle applicazioni fisiche[35]. Le teorie, come gli spazi astratti, la topologia o i problemi ai limiti dell'analisi, si stimolavano a vicenda in una crescita feconda e coerente, tanto da essere per lungo tempo considerata paradigma di scienza rigorosa, il luogo in cui il rigore logico è applicato massimamente grazie alle particolari semplicità e astrattezza delle strutture degli oggetti di cui tratta; l'astrattezza costituisce la particolarità degli oggetti matematici. Questa matematica, però, non era sistemata in un quadro generale soddisfacente e aperte rimanevano le questioni su quale fosse la natura delle astrazioni e sulla loro curiosa utilità per la creazione di teorie dal risvolto applicativo, dunque, per essa, premeva sempre di

[35] La distribuzione, gli spazi di Hilbert a infinite dimensioni, la geometria algebrica o differenziale, come strumento di primaria importanza nei modelli cosmologici.

più la questione dei fondamenti come questione legittimante il fare matematico.
Le scienze matematiche erano considerate essenzialmente scienze dal carattere contenutistico, che trattano di particolari e specifici oggetti e che, al pari di tutte le altre scienze, su di essi enunciano affermazioni vere. Queste affermazioni sono vere in base al requisito di *evidenza*, essa o ci è data immediatamente, almeno per un numero molto ristretto di proposizioni semplici, dunque immediatamente evidenti, oppure da dimostrazioni di evidenza ossia dalla riduzione di proposizioni non immediatamente evidenti proprio a quelle che, invece, lo sono. In questo modo la verità delle affermazioni è solidamente e universalmente garantita ed il complesso di teorie, che costituisce la matematica, ha quel rigore logico che caratterizza fortemente la struttura epistemologica della disciplina. Questo quadro della tradizione era stato confermato da Kant, che lo innovava con la considerazione della matematica come sapere di tipo «sintetico a priori»[36]. In questo modo sottraeva la scienza all'accusa di essere un sapere meramente tautologico e alla riduttiva considerazione convenzionalista di essa, quale frutto di un accordo fra parlanti, come già Vico e Hume sostenevano. La matematica è per Kant un sapere pieno e autentico, è la scienza di un certo campo di «dati», dunque, è un sapere oggettivo, che in quanto tale ci permette di conoscere qualcosa di nuovo. Ciò è possibile perché si fonda su «intuizioni», anche se dal peculiare carattere di intuizioni pure dello spazio e del

[36] Kant, anche se conferma il pensiero di molti matematici e filosofi, considerando le proposizioni aritmetiche come verità necessarie, le considera altresì sintetiche, creando dal nulla una nuova categoria in conflitto con le considerazione della tradizione razionalista di Leibniz e empirista di Hume. Per essi le verità della matematica pura sono giudizi analitici puri che, a differenza delle verità contingenti, non possono fornire alcuna conoscenza sul mondo fattuale. In quanto analitiche, le conoscenze matematiche concernono non dati dell'esperienza, ma solo concetti (dati concettuali) e per questo derivabili a priori.

tempo[37]. Per Kant quelle della matematica sono verità che producono in noi nuove conoscenze: in esse in alcun modo è possibile derivare il predicato dal soggetto proprio perché sintetiche. Che tipo di

[37] È possibile delineare sinteticamente la posizione kantiana attraverso tre coppie di nozioni: a priori e a posteriori, necessario e contingente, analitico e sintetico. La prima, che rimane inalterata fino alla letteratura filosofica contemporanea, si basa sulla giustificazione delle verità del particolare contenuto epistemico considerato, più che sull'apprendimento di esso. Un «dato» è conosciuto a priori se è possibile essere giustificati nell'accettarne la verità senza fare appello all'esperienza. In questo caso i termini che compongono l'enunciato, che asserisce il dato conosciuto, risultano sufficienti a giustificare la verità dello stesso, senza fare appello ad alcun fatto empirico. Le conoscenze a priori, infatti, sono quelle che non fanno in alcun modo appello all'esperienza e, dunque, non dipendono in alcun modo da essa, come Kant sostiene nella Prima Sezione dell'Introduzione alla *Critica della Ragion Pura*. Di contro le proposizioni a posteriori sono quelle ottenute tramite l'esperienza sensibile. La questione non risiede nel fatto che queste enunciano dati mentre le prime non lo fanno, piuttosto nella modalità di apprendimento di essi. Le seconde esprimono un apprendimento possibile solo a mezzo dell'esperienza sensibile; le prime consentono l'apprendimento di dati senza guardare direttamente ad essi, ma solo grazie ai termini in cui si esprime l'enunciato. La possibile derivazione empirica di alcune verità a priori è resa possibile dalla distinzione fra conoscenze a priori pure e non pure; queste ultime si occupano di concetti attingibili solo dall'esperienza, ma che possono essere esplicitati anche solo a mezzo dei termini che nell'enunciato ricorrono, come nel caso del concetto di cambiamento.
La seconda distinzione fra verità necessarie e contingenti entra proprio nel merito della natura delle verità matematiche e non in quello della loro giustificazione. Una verità è necessaria se è vera in tutti i mondi possibili mentre è contingente se è vera in almeno un mondo possibile. In termini meno controversi una verità è necessaria se è vera qualunque siano le caratteristiche del modo attuale e a prescindere da esso; una verità è contingente se è vera solo di fatto, quindi potrebbe essere anche falsa, se i fatti non le corrispondono (la prima definizione esposta fa riferimento alla definizione di verità elaborata da Kripke; la seconda alla definizione di verità classica come elaborata da Tarski). Necessità e universalità sono caratteristiche dei giudizi a priori e per esse basta guardare a tutte le proposizioni matematiche; queste ci insegnano che un certo dato non può essere altrimenti e non il modo in cui si è venuto a costituire. Sono caratteristiche costanti dei giudizi sintetici a priori interdipendenti anche se possono indipendentemente fungere da criteri per identificare i giudizi che sono tali.
La distinzione fra analitico e sintetico è quella che, nel corso delle elaborazioni filosofiche, soprattutto nell'ambito della filosofia del linguaggio, ha subito maggiori revisioni e sollevato numerosi dibattiti. Kant la caratterizza come il diverso rapporto intercorrente fra soggetto e predicato all'interno dell'enunciato. Negli enunciati sintetici il predicato aggiunge un contenuto informativo, nuovo, alla nozione del soggetto; in quelli analitici, invece, il predicato rende solo più esplicito quanto è già contenuto nella nozione del soggetto, apparendo come ridondante.

conoscenza risulta, dunque, essere la matematica? Secondo la teoria kantiana tutta la nostra conoscenza è resa possibile *trascendentalmente*, dalle forme a priori dell'intuizione sensibile del tempo e dello spazio. Queste forme rendono possibile, e condizionano, la conoscenza delle verità matematiche: le verità numeriche ci sono note perché contiamo oggetti sensibili localizzati in uno spazio e il nostro contare richiede un'estensione temporale. Lo spazio condiziona inoltre la conoscenza delle verità geometriche, dovendo appellarci a disegni, ad immagini reali o create *ad hoc* (immaginarie), dalle precise proprietà spaziali[38]. La matematica, allora, si configura come lo studio delle proprietà formali dell'intuizione che rendono possibili le nostre intuizioni sensibili. Nella concezione kantiana le verità matematiche rappresentano i modi in cui gli esseri umani percepiscono e organizzano concettualmente la propria apprensione del mondo sensibile; in questo modo le verità matematiche acquistano indipendenza, ma lo stesso non vale per gli oggetti della matematica, che non sono ancora del tutto indipendenti dai soggetti che li percepiscono. Alla concezione kantiana è, infatti, nonostante il riconoscimento per essa di un contenuto intuitivo ascrivibile una forma di *costruttivismo*.

Il superamento del dominio dell'intuizione è dovuto a Bolyai e Lobacevski, che portano a termine la rivoluzione della nuova assiomatica, avviata dagli algebristi. Il sistema assiomatico euclideo, infatti, come momento ulteriore di sistemazione di conoscenze intuitivamente apprese è per la geometria, sin dall'antichità, inficiato dal V postulato delle parallele, che risulta problematico proprio per la scarsa intuitività e spinge alla ricerca di una dimostrazione per esso a

---

[38] La filosofia kantiana della geometria fa dunque leva sull'intuizione a priori dello spazio euclideo. I successivi sviluppi della geometria hanno privato tale concezione di ogni plausibilità, ma più recenti contributi hanno messo in luce come tale conclusione sia azzardata. Si vedano: Körner, *The Philosophy of Mathematics*, Rowan and Littlefield, Totowa (NY), 1960, pp. 28-29 e Risjord, «The sensible Foundation for Mathematics: a defence of Kant's View», in *Studies in the History and Philosophy of Science*, 21, 1, 1990, pp. 123-143.

partire da proposizioni dello stesso sistema, al fine di sostituirlo con uno più evidente, più intuitivo. La via che avrebbe condotto alla scissione dei due requisiti di *correttezza logica* e *adeguatezza intuitiva* era stata intrapresa già nel 1733, quando il gesuita Gerolamo Saccheri[39], con un uso esteso della *consequentia mirabilis*, riconosceva un tipo di falsità che riposa non più nel contenuto intuitivo, quanto nella struttura formale del discorso, non trovando sufficiente che la catena delle deduzioni non euclidee faccia emergere teoremi inconciliabili con l'intuizione geometrica ordinaria e ritenendo, piuttosto, necessario che la dimostrazione di contraddizione sia di tipo formale. La contraddizione è dunque ammessa come condizione necessaria e sufficiente per la falsità in matematica, di contro la non contraddizione è ammessa quale assicurazione di verità. Al rigore logico non è più necessaria l'adeguatezza intuitiva e il concetto di verità per la matematica non è più legato al concorso di entrambi i requisiti e, proprio la presa d'atto di tale considerazione, condurrà alla formulazione delle geometrie non euclidee[40]. L'ampliamento di prospettiva riguardo alla geometria non risulta in tutta la sua problematicità fin tanto che le nuove geometrie non assurgono alla validità di quella euclidea ossia, fin tanto che, non sia raggiunta anche per esse una prova di non contraddittorietà, con l'elaborazione di un *modello*. Il primo a raggiungerlo è Eugenio Beltrami, presto seguito da Klein, Cayley e Poicaré. Prima di ciò la contraddizione nelle nuove

---

[39] Nel suo *Euclides ad omni naevo vindicatus* tenta, per la prima volta, una dimostrazione per assurdo del postulato. Assumendo fra le proposizioni una negazione del postulato, ne deduce una serie di teoremi che costituiscono il primo *corpus* di geometria non euclidea, sostenendo di aver ottenuto la cercata dimostrazione. Poiché la negazione del postulato euclideo implica una conseguenza falsa, o meglio ancora, una contraddizione, sostiene di aver dimostrato l'impossibilità di geometrie non euclidee, in cui, cioè, non vale il postulato delle parallele per un punto dato a una retta data in un piano (lo stesso genere di dimostrazione sarà utilizzata in analisi per la dimostrazione della validità dell'Ipotesi del Continuo, giungendo a conclusioni analoghe a quelle cui si era giunti per la geometria).

[40] La portata rivoluzionaria di tali conclusioni, però, renderà restii a compiere il passo definitivo anche personalità dalla grande considerazione ed influenza, come Gauss.

geometrie non era stata trovata e né si aveva l'assicurazione che non fosse possibile riscontrarvene. Il modello euclideo, quindi, pur non costituendo in sé una prova di non contraddittorietà, dimostrava che esse godono degli stessi requisiti della classica geometria euclidea e le innalzava ad un livello di pari validità. La situazione si faceva, se possibile, ancora più complessa: le tre diverse geometrie sono singolarmente non contraddittorie ma si contraddicono a vicenda. Ci forniscono, infatti, tre diverse definizioni di «retta» e ognuna esclude le altre due senza che sia fornito un valido motivo per ritenere l'una preferibile alle altre[41]. Quale di queste tre è la geometria vera? E quale è dunque la vera retta? Se identifichiamo la verità con la non contraddittorietà, non possiamo rispondere al quesito: tutte e tre sono non contraddittorie e tutte e tre sono vere in un unico ed identico modo. Se, però, in quanto vere in un unico ed identico modo, dovessimo accettarle tutte e tre, andremmo contro la concezione della verità, visto che le proposizioni su cui poggiano e le definizioni che forniscono si contraddicono a vicenda. La verità è infatti qui intesa come adeguazione fra il contenuto di significato di una proposizione e la struttura reale degli oggetti di cui tratta. La crisi poteva essere risolta in due modi: o ciascuna geometria tratta di enti diversi a essa peculiari, ma il bagaglio di nozioni sulla natura dei modelli non permetterà fino agli anni Trenta di abbracciare una simile soluzione, oppure, nessuna di esse tratta di oggetti veri e propri e dunque il problema della verità o della falsità per la geometria non può neanche essere posto. È questa

[41] Nella geometria euclidea esistono triangoli simili e non uguali, poiché è richiesto soltanto che la somma degli angoli interni sia pari a due triangoli retti. In questo contesto la retta ammette una sola parallela, che è infinitamente prolungabile. Invece, in un contesto in cui pure esistono triangoli simili e non uguali ma la cui somma degli angoli interni è minore di due retti e la cui area risulta proporzionale alla somma degli angoli interni, per la retta sono ammesse più parallele e due parallele ammettono una sola perpendicolare. Ancora: in un contesto in cui la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due angoli retti e, in cui, da un punto si possono condurre infinite perpendicolari ad una stessa retta, questa non è prolungabile all'infinito.

l'unica soluzione praticabile, seppure discutibile, che ci rende una concezione delle geometrie come delle teorie astratte che non trattano di oggetti, e le cui proposizioni costituiscono soltanto delle strutture costruttive linguistiche, né vere e né false. Klein si muoveva in questa direzione e la avvalorava mostrando come il passaggio da una geometria all'altra non consistesse in altro che nella scelta di uno o di un altro invariante nel gruppo di trasformazioni. Ciò mostrava il carattere essenzialmente astratto delle geometrie, ma ne esaltava altresì parentela e uguaglianza. Il passo ulteriore in questa direzione è compiuto da Hilbert che, nel 1899 in *Fondamenti della geometria*, presenta un'assiomatizzazione della geometria elementare. Dallo scritto emerge come la geometria sia un rigoroso costrutto assiomatico, in cui non si sottintende più per i termini primitivi, ossia per i costituenti fondamentali della teoria, nessun significato intuitivamente valido. Mediante gli assiomi essa descrive una serie di possibili connessioni logiche. I termini primitivi, come punto retta o piano, non designano nulla di preciso, ma possono diventare nomi per oggetti qualsiasi, purché in base a questi gli assiomi possano essere interpretati in modo da risultare veri. I termini, dunque si costituiscono come «definizioni implicite» per gli assiomi e, così come essi non significano nulla autonomamente, allo stesso modo tali assiomi non sono né veri né falsi, se non a seconda del tipo di interpretazione, ossia del sistema di concetti che invalida la teoria, che per essi viene offerta sugli infiniti universi di oggetti. Per Hilbert è questa un'importante possibilità, che, in effetti, gli permette di trovare interpretazioni per cui assiomi e termini risultano veri, tranne proprio l'assioma delle parallele, la cui indipendenza come indimostrabilità a partire da tutti gli altri giustifica, appunto, le geometrie non euclidee.

Hilbert partiva dall'idea generale per cui, in matematica, *esistenza* significa *coerenza* ossia non contraddizione. Riconducendo la coerenza di teorie più complesse alla coerenza di teorie meno complesse fino a quelle elementari come l'aritmetica, essendo questa non contraddittoria, tali saranno anche la geometria euclidea e quella non euclidea a essa ridotte, la conoscenza matematica allora non è altro che nuda attività deduttiva pura e semplice, vanificando ogni forma di conoscenza di carattere contenutistico, conoscenza vera e propria, la cui fonte sia l'intuizione. In sede matematica l'intuizione è ormai ridotta a occasione di suggerimento per la scelta di certi assiomi, senza costituire una giustificazione per essi. Se l'antica assiomatica trovava il suo caposaldo nell'evidenza e altro non era se non metodo per la sistemazione delle conoscenze intuitivamente acquisite, ogni riferimento ad essa è ora bandito dalla nuova assiomatica, che considera la matematica un sapere ipotetico deduttivo, un discorso che, poste certe premesse, ne ricava conseguenze a prescindere dal fatto che esistano o meno gli oggetti che inverino premesse e conseguenze. Il *rigore formale*, che consente un'esplicitazione ineccepibile del sapere geometrico, è ormai un costituente istitutivo e non più solo espositivo: gli assiomi non si limitano a consentire un'esplicitazione rigorosa degli enti geometrici, ma, attraverso una loro connessione logica, consentono l'edificazione di essi. Gli enti geometrici sono quanto di essi gli assiomi dicono di essere.

***L'insieme: un problematico oggetto per la matematica***

Proprio a partire dalla seconda metà dell'Ottocento emergeva chiaramente come ogni concetto matematico noto potesse essere ricostruito e quindi definito in termini di *insieme*. In questa fase, dell0'aritmetizzazione dell'analisi, attraverso costruzioni insiemistiche, o anche direttamente, era possibile ridurre ogni concetto noto ai numeri naturali, pure definibili insiemisticamente. Il concetto di insieme, dotato di una notevole versatilità come versione neutra di ogni altro concetto, rivelava dunque tutta la sua potenzialità. Se ad ogni concetto si associa la sua estensione, ossia l'insieme degli elementi che cadono sotto di esso, si ha a disposizione una versione estensionale di tutti i concetti senza affrontare la difficile questione della loro natura. La pretesa della teoria degli insiemi era quella di non fermarsi ad essere solo un comodo linguaggio e richiedeva che fossero fissati dei principi regolatori dell'operare ossia un insieme di assiomi da cui derivare conseguenze corrette, tenendo conto del fatto che, a ricoprire un ruolo essenziale in matematica, sono proprio gli insiemi infiniti non del tutto evidenti eppure necessari per la ricostruzione di altri concetti matematici. Le leggi valide per essi non coincidevano con le leggi valide per gli insiemi finiti, e alcune di quelle estrapolate dal finito non trovavano una lineare applicazione. Quale base di linguaggio, di concetti e di tecniche suscettibili di inerire a tutti i rami della matematica moderna, la teoria degli insiemi occupa, quindi, un posto centrale in seno alla matematica. In quanto linguaggio a essa ricorrono tutte le teorie matematiche, mettendone alla prova generalità e centralità. Mediante la teoria degli insiemi, infatti, così come era accaduto per la geometria analitica, è possibile dissolvere le specificità di ogni singola teoria matematica, rendendone possibile una riproduzione in termini insiemistici. Con essa è possibile realizzare la tendenza a generalizzazione e differenziazione, per la costruzione di teorie sempre nuove e sempre più specializzate, ma comunque riconducibili a pochi e semplici concetti. In questo modo le teorie matematiche non si disperdono più in una caotica molteplicità, ma risultano armonizzabili in punti di vista unificanti. La semplicità dei concetti della teoria degli insiemi è di carattere tecnicamente logico; consiste, infatti, nella loro *elementarietà*: questi *concetti primitivi* non sono scomponibili, né definibili mediante il ricorso ad altri concetti, tanto meno mediante composizione o scomposizione, consentendo di approcciare alla conoscenza matematica in un *senso non meramente calcolistico*. Essi soggiacciono a molte costruzioni concettuali, non meramente matematiche; sono, infatti, concetti di cui facciamo un uso inconsapevole ogni giorno e, proprio per questo, la loro elementarietà non è facilmente evidente e può emergere solo ad un livello molto elevato di astrazione, in cui si viene a delineare la generalità della struttura insiemistica.

Le ricerche sulla teoria degli insiemi si orientano in due direzioni: per un verso mirano a chiarire come tale teoria possa costituire un fondamento per tutta la matematica, mostrando come, per mezzo di essa, tutti i concetti siano riducibili al concetto di insieme; per l'altro si caratterizzano come ricerche di tipo contenutistico, che mirano a descrivere e definire gli oggetti veri e propri della matematica, gli insiemi, cui in definitiva tutti gli altri sono ricondotti. Quest'ultima direzione di ricerca vuole, dunque, indagare come la conoscenza matematica si costituisce intorno ai suoi oggetti, tenendo conto di quale sia il modo di fare matematica che si è disposti ad accettare come adeguato. L'estremizzazione di questo punto di vista intorno ai fattori di costruzione interna, che determinerebbero quali sono da considerarsi contenuti della matematica, sposta la ricerca su un piano normativo e si delinea come la ricerca del complesso di condizioni, in base alle quali un discorso può dirsi correttamente matematico, finendo con il costringere il discorso sui fondamenti entro elaborate tecniche di analisi, che smarriscono il loro originario punto di partenza e misconoscono il valore dell'aspetto speculativo del discorso sui fondamenti. L'indagine fondazionale, del resto, come la teoria degli insiemi presenta, una duplicità di orientamento per cui, da un lato, si presenta come un'indagine di tipo ontologico, che cerca e descrive gli oggetti propri della matematica, dall'altro mira a definire quale sia il modo di ottenere, a partire dall'universo degli oggetti matematici, conclusioni che possano dirsi altrettanto matematiche. In questo modo la conoscenza matematica non è soltanto, per via della particolarità dei suoi oggetti, lo spazio concesso al rigore logico, quanto, piuttosto, l'unica possibile espressione di esso. La matematica è intesa quale complesso di relazioni logicamente organizzate, costituenti una struttura.

***Le due anime della teoria degli insiemi***

La teoria degli insiemi nel suo tentativo fondazionale cerca "di tradurre le verità concernenti la natura o le proprietà fondamentali dei numeri naturali e reali in sistemi di assiomi che regolano il comportamento di particolari insiemi"[42] e, in quanto tale, risale a due linee di sviluppo che soltanto in un secondo momento confluiscono. La prima nasce dall'esigenza di fondazione del calcolo; gli infinitesimali vengono sostituiti dalla teoria dei limiti di Weierstrass, che si basa su una teoria dei numeri reali proprosta in forme diverse, ma entrambe totalmente insiemistiche, quelle di Dedekind e di Cantor. Il primo grazie all'uso di insiemi infiniti di numeri naturali chiarisce la nozione di continuità, definisce i reali e dimostra che essi sono continui. Cantor, invece, si avventura in una teoria degli insiemi infiniti, vicenda rivoluzionaria nella storia della matematica pura e delle idee. Egli, infatti, non si limita alla numerazione di insiemi infiniti, ma procede alla misurazione degli stessi, avviando tra l'altro la nascita della topologia e di altre branche della matematica del Novecento. La teoria degli insiemi di Cantor, dal carattere intuitivo, giunge ad una soddisfacente assiomatizzazione grazie ad Ernst Zermelo nel 1908, nel 1920 Thoralf Skolem e Abraham Fraenkel vi apporteranno significativi perfezionamenti. Con questa sistemazione assiomatica le antinomie, emerse dalla teoria intuitiva non erano riproducibili a partire dagli assiomi di esistenza degli insiemi, su cui vigeva un generale accordo. Adesso era possibile realizzare l'*aritmetizzazione* dell'analisi o soltanto definire la nozione di struttura, consentendo un'interpretazione semantica delle teorie[43].

---

[42] Garavaso P., *Filosofia della matematica*, Guerini Studio, Milano 2002.

[43] Per quest'ultima esigenza la teoria di Zermelo-Fraenkel era più che sufficiente e, a metà del secolo, si assiste alla grande sintesi di Bourbaki, lo strutturalismo matematico, che consiste nell'organizzazione della matematica come un sistema di teorie relative a vari tipi di strutture, per il trionfo del metodo assiomatico in versione semantica.

Nonostante gli stimoli dati dalla teoria degli insiemi, l'attività matematica continuava a ingenerare problemi di natura fondazionale per via della sua seconda natura, quella logica. Se Cantor ne aveva dato un'elaborazione matematica, Gottlob Frege ne fornisce una di natura logica, poi arricchita dalla nuova consapevolezza, derivata dalla scoperta da essa del paradosso della classe, da Bertrand Russell. Frege tentava di fornire una fondazione per l'aritmetica ordinaria da una prospettiva più filosofica. Scandalizzato dalla poca conoscenza dei concetti in uso nella matematica fra gli stessi matematici, vuole dimostrare che di fatto l'aritmetica è una branca della logica e per far questo, fa uso di estensioni di concetti, ossia di collezioni come insiemi infiniti. Frege nel 1879 con l'*Ideografia* inaugura un nuovo corso della logica matematica: presenta assiomi e regole per la combinazione degli assiomi a dimostrare i teoremi del calcolo proposizionale, rendendo, o meglio riducendo, l'aritmetica nella logica matematica, convinto che usando un linguaggio matematico artificiale, basato su una logica simbolica, si sarebbe raggiunto un perfetto rigore. Perché fosse possibile una fondazione logica della matematica e, nello specifico, un'elaborazione logica della teoria degli insiemi, si richiedeva una logica non solo deduttiva ma pure costitutiva, che potesse, cioè, definire i propri enti dimostrandone l'esistenza logica, ma proprio da questo punto emergevano i paradossi (1902). In questo modo, inoltre, la logica finiva per essere ridotta alla matematica teoria degli insiemi e non viceversa, come Frege propriamente auspicava. La situazione finì per complicarsi ulteriormente con i risultati di *Incompletezza*. La teoria, in effetti, non era soddisfacente neppure dal punto di vista assiomatico: per essa non si dava alcuna interpretazione se non quella intuitiva, mancava un certo «sistema di cose» ossia uno degli elementi dell'universo che si voleva determinare, un insieme appunto.

### *Gli oggetti dell'analisi*

L'insorgere dell'infinito in matematica, avvenuto con il calcolo infinitesimale, aveva condotto ad incentrare i dibattiti, più che sull'infinito stesso, sul suo inverso, l'*infinitesimo*. Su tale concetto si basa da sempre l'analisi[44], che, nonostante il suo dirompente sviluppo, lo lascia a livello di vaga nozione intutitiva e le operazioni con esso attendono ancora una sistemazione teorica[45]. L'*inifinitesimo*, come

[44] L'analisi si costituisce alla fine del Seicento e conosce sviluppi tecnici complessi e rigogliosi nel Settecento grazie anche alle autorevoli codificazioni dei trattati di Eulero e Lagrange.

[45] La considerazione dell'infinitesimo aveva permesso agli allievi di Galileo, nonostante l'avversione dei peripatetici con cui divampava la questione cosmologica e il dibattito sulla considerazione del continuo che li vede contrari all'atomismo, di fondare ad opera di Cavalieri (1598-1647) e di sviluppare per mano di Torricelli (1608-1647) la *geometria degli inidivisibili,* premessa al calcolo infinitesimale o differenziale. Gli allievi fanno uso proprio dell'infinito considerato come attuale, rifacendosi anche solo inconsapevolmente al metodo usato da Archimede per scoprire aree e volumi. Galileo stesso è critico riguardo alla geometria degli indivisibili come tecnica dimostrativa, ma, per le sue posizioni in fisica e in filosofia, ammette che sia possibile ridurre un continuo limitato in elementi indivisibili e primi dotati di estensione e per questo diversi dai quanti. Torricelli, che succederà a Galileo come matematico e filosofo naturale del Granduca di Toscana, mantiene di fronte alla questione dell'infinito attuale un atteggiamento puramente "pragmatico" riuscendo a raggiungere notevoli risultati: decompone figure in corde o sezioni piane parallele, ma soprattutto in archi di curva e calotte di superfici non intersecantisi, gli «indivisibili curvi». Ciò che mancava era però una posizione generale che ne desse una sicura fondazione logica, come faceva notare San Bonaventura. Questo passo decisivo sarà compiuto da Cavalieri, che riuscirà a dimostrare "l'egualità di sue figure piane e solide, quando i loro indivisibili curvi e diversi sono ugual", come scrive San Bonaventura a Torricelli e nel secondo libro del volume di Cavalieri troviamo il Teorema III- proposizione III che recita "figure piane hanno tra di loro il medesimo rapporto che hanno tutte le linee [*omnes lineae*] di esse prese con un riferimento qualunque; e figure solide hanno lo stesso rapporto che hanno tutti i piani [*omnes*] di esse presi rispetto ad un riferimento qualunque". Le *omnes lineae* rispetto ad una direzione sono tutte le corde della figura piana parallele quella direzione ; così gli omnia plana rispetto ad una data posizione sono tutte le sezioni piane del solido parallele alla posizione assegnata. Cavalieri, dunque, elabora proprio il metodo di Archimede, il cui atteggiamento era più proprio di Torricelli. Archimede, infatti, bada al risultato attribuendo valore euristico a e non dimostrativo al suo *metodo meccanico*, che gli consente di concepire in modo esplicito un'area (un volume) come somma o unione di tutte le sue linee (di tutti i suoi piani) tra di loro parallele. Al contrario Cavalieri attribuisce valore dimostrativo al suo metodo, pur non esplicitando se una figura dovesse essere o meno concepita come una unione di indivisibili paralleli. Quella del cavalieri era in effetti una

«quantità infinitamente piccola», risulta una nozione notevolmente imprecisa che, se all'inizio non provoca rilevanti difficoltà tecniche, genera però dubbi e dibattiti fra filosofi e matematici spinti da intenti speculativi. I dibattiti sul calcolo infinitesimale non si sono incentrati sull'infinito, ma sul suo inverso ossia l'infinitesimo e le operazioni fondamentali con esso ancora attendono una sistemazione. Nonostante l'utilità degli infinitesimi, l'atteggiamento immediato è stato quello di eliminarli, ad esempio con la considerazione del suo inverso, del concetto di *limite* per mezzo del quale viene considerata una suddivisione finita. Si compie, in relazione ad essa, un calcolo approssimato e quando il numero delle parti tende all'infinito, l'approssimazione diviene esattezza. Ciascuna parte è tanto piccola, infinitesima, da risultare evanescente. In effetti la rigorizzazione dell'Analisi, avviatasi nella seconda metà dell'Ottocento tenta una definizione non geometrica del continuo dei reali, complicando ulteriormente il quadro del sistema numerico. Gli infinitesimi, infatti dovrebbero rappresentare un insieme di numeri molto vicini allo zero, minori di ogni numero per quanto piccolo. L'evanescenza dell'infinitesimo e, quindi, la vaghezza del suo concetto cominciano ad essere sentite come un peso proprio all'inizio dell'Ottocento, quando vengono alla luce difficoltà crescenti all'interno della *teoria delle serie*, generando quell'esigenza di rigore a cui si sentono chiamati, e

---

convinzione filosofica che, pur trovando riscontro pratico, subiva l'avversione degli aristotelici che non ammettevano l'atomismo geometrico in virtù di quello fisico, la cui accettazione avrebbe condotto dritto al meccanicismo. Galileo, che è invece un convinto atomista, ribalta la posizione aristotelica: non potendosi fare a meno di ammettere la possibilità di dividere il continuo in quante parti dotate di estensione si vogliono, allora non può non essere pensato l'infinito attuale. Ad esso aveva contribuito pure John Wallis (1616-1703), autore dell'*Arithmetica Infinitorum* (1656), che precede immediatamente l'elaborazione del calcolo infinitesimale di Isaac Newton (1642-1727) e di Gottfried Willem Leibniz (1646-1710). I due presentano due metodi differenti proprio per le diverse aspettative che ognuno ripone in esso: per Newton la matematica serve a comprendere le leggi fisiche, potremmo dirlo un "positivista"; Leibniz pretende da esso una migliore esplicitazione delle sue posizioni filosofiche, essendo partito dall'esigenza di giustificare l'infinito attuale.

contribuiscono, tutti i matematici dell'epoca. Condurre una chiarificazione logica all'interno dell'analisi, consentirebbe un chiarimento critico delle precisazioni di carattere prettamente formale. Intorno al 1820 è Cauchy, che procede all'eliminazione dell'infinitesimo con una definizione del concetto di limite, svincolandolo del tutto da valenze intuitive di carattere geometrico e fisico. Grazie a questa definizione esplicita e formale, svincola l'analisi dalla dipendenza più o meno palese dalla meccanica e dalla fisica,  fornendo l'operazione cardine cui tutte le altre sono riconducibili. L'uso del concetto di limite, infatti, diviene la base da cui indistintamente ed esplicitamente si ergono le definizioni proprie dell'analisi, quelle di derivata, o di integrale, di somma di una serie, di continuità di una funzione. Nella sfera dell'analisi il vecchio concetto di infinitesimo è ormai sostituito da un concetto nuovo e di natura essenzialmente formale, da cui definire il vecchio. Sembrerebbe a questo punto che anche per l'analisi basti un concetto formale e che anche per essa non si dia un campo di oggetti specifici. Eppure l'*operazione di limite* trova il suo specifico ambito in cui sempre può essere eseguita in modo esaustivo, il campo dei numeri reali che poi verrà esteso a quello dei numeri complessi. L'analisi mantiene dunque un campo di oggetti, confermandosi quale disciplina contenutistica e rimanda all'esigenza di riformulazione dei teoremi che, espressi nel linguaggio dell'intuizione geometrica o di quella propriamente fisica, devono essere riferiti ai numeri reali e a operazioni eseguibili su di essi, mettendo in pratica uno dei sensi dell'*aritmetizzazione dell'analisi*. Aritmetizzare vuol dire ridurre il discorso, condotto dall'analisi, ai numeri e si rivela possibile solo a seguito di una forte revisione critica che, considerata la mole di lavoro da compiere, avviene in tempi rapidi. L'*aritmetizzazione* in effetti si spinge ancora più oltre nell'assumersi l'impegnativo compito di indagare e comprendere cosa sono i numeri, portando alla luce varie definizioni dei numeri reali a partire dai razionali e, tutte, individuano un numero reale con il ricorso ad un'infinità di razionali[46]. Una volta individuato cosa sono i numeri razionali si ha a disposizione un mezzo sufficiente a definire i numeri reali. Questi risultati si installano su ricerche pregresse, come quella sull'estensione dei campi numerici, che avevano già chiarito come si possa pervenire alla *costruzione* dei numeri razionali da quelli naturali. Essendo l'aritmetica la teoria dei numeri naturali, il tentativo di ridurre l'analisi alla sua base originaria, ai numeri naturali, non può che essere proteso a ridurre l'analisi all'aritmetica e, in questo senso, si parla, propriamente di *aritmetizzazione dell'analisi*. I numeri naturali vengono considerati la base intuitiva, indiscutibile, da cui procedere per la rigorosa costruzione di definizioni formali dei concetti impiegati nella teoria, riuscendo in quanto alla geometria non era stato possibile a meno di contraddizioni: compiere affermazioni univocamente vere intorno ai propri oggetti[47]. Era stato dimostrato, in effetti, che i numeri razionali sono costruiti, mentre quelli primitivi sono in ultima istanza i numeri naturali, base particolarmente sicura e intuitiva. Se alla geometria euclidea non era riuscito di definire univocamente i propri oggetti, all'analisi invece i propri oggetti non sfuggono. La questione però non è ancora risolta e assume ulteriore radicalità: l'orizzonte della ricerca è spostato in direzione della questione *su cosa siano i numeri naturali*. Il rimando all'infinito non è accettato da tutti i matematici ritenendo che ad un certo punto l'indagine si debba arrestare. È questo il caso di Kronecker che non immagina un punto di arrivo più sicuro dell'intuizione, non è dunque possibile immaginare una struttura matematica migliore di quella dei numeri naturali. E' convinto della primitività dei numeri naturali Peano, che ne elabora un'assiomatizzazione con cui non vuole fornire una vera e propria

[46] I tentativi cui ci si riferisce sono quelli del 1872 di Dedekind, Lipschitz, Cantor, Meray e Weierstrass che, appunto, propongono definizioni dei numeri reali a partire dai razionali.
[47] In questo clima spirituale va collocata l'affermazione di Kronecker "Dio ha fatto i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo".

fondazione, ma una descrizione pura, giungendo ad una caratterizzazione assiomatica di natura formale e, nella sostanza, coincide con quella di Dedekind. Questi, però, ritiene essere la logica la chiave per spiegare cosa siano i numeri naturali e, per questo, è considerato il padre del logicismo, ma in effetti non procede ad una deduzione logica del concetto di numero naturale a partire da nozioni di logica pura, come invece farà Frege. Dedekind conduce un'analisi logica lineare del concetto di numero naturale, utilizzando alcuni elementi di logica delle classi e fornendo un'assiomatizzazione dell'aritmetica di intento contenutistico. Frege, invece, in modo più radicale, ritenendo che il numero naturale si possa definire a partire dalla logica pura e semplice, tenta di dimostrare come nell'aritmetica non si dia concetto di peculiarità tale che non sia ricavabile col sostegno di definizioni esplicite a partire da concetti logici come quelli di classe e di relazione. Partendo da basi logiche e con metodi del tutto logici tenta una riedificazione dell'aritmetica per mostrare, contrariamente a quanto aveva tentato l'algebra, come la matematica derivi dalla logica. Procede allora ad una precisa ed esauriente esposizione delle regole deduttive che, eliminando ogni riferimento all'intuizione più o meno vaga, possano rendere chiaro se una proposizione è più o meno conseguenza immediata di certe proposizioni precedentemente ammesse. Frege si mette all'opera per individuare un sistema corretto e completo di regole logiche in base al quale controllare in maniera rigorosa tutte le dimostrazioni corrette della matematica. Nutre infatti  la ferma convinzione che le leggi logiche siano le leggi del corretto pensare ed argomentare, la cui esistenza e validità non dipendono da noi, che possiamo solo scoprirle. Il suo punto di vista è dunque consapevolmente contenutistico, descrittivo ed oggettivo e questo atteggiamento si riflette nel modo in cui considera la matematica: scienza di portata veritativa e di intenti oggettivi come la logica, di cui è, però, solo un ramo. La novità della sua posizione risiede piuttosto nell'aver considerato in modo del tutto nuovo l'antica questione dei rapporti fra matematica a logica, includendo la prima nella seconda[48].

[48] Nel rapporto fra logica e matematica possono distinguersi tre fasi: nel primo si fa ampio uso delle inferenze logiche corrette nei ragionamenti matematici e, quando necessario, è presa in prestito la terminologia elaborata dai logici per descrivere alcuni passaggi inferenziali la come nel caso della dimostrazione per assurdo; nel secondo è quello descritto in cui i matematici prendono consapevolezza del fatto chela loro definizione di teorema non è altro che la definizione d conseguenza logica della logica formale e i in cui, reciprocamente i logici si accorgono che la loro definizione di conseguenza logica non è altro che la definizione di teorema della matematica. Da questa consapevolezza si liberano molte energie in entrambe le discipline e la logica dispone di nuovi linguaggi simbolici e soprattutto di una semantica per essi, mutuata dalla matematica, dalle strutture matematiche, dando avvio ad un nuovo studio delle teorie e dei loro modelli, ossia delle interpretazioni che le soddisfano andando ben oltre il riconoscimento di quali siano le inferenze valide e quali no. La logica diventata a questo punto metalogica nella terza fase riversa i suoi risultati sulla matematica, con esiti dirompenti. Gran parte del lavoro sarà compiuto da Hilbert e dalla sua scuola.

## *GÖDEL NELLA MATEMATICA DEL SUO TEMPO*

### *Gödel e la matematica*

Il ripensamento del metodo assiomatico degli *Elementi* di Euclide, che era stato da sempre considerato il modello di organizzazione logica delle conoscenze e la cui funzione rimaneva subordinata alla conoscenza diretta, intuitiva o tattile, sia dei postulati sia delle figure, da costruire con riga e compasso, giustificava un nuovo modo di porsi della matematica nei confronti del suo oggetto. Con essa non si poteva più pensare di descrivere aspetti o proprietà della realtà sensibile e i teoremi dovevano trovare un'altra giustificazione. Le nuove teorie presentavano caratteri ancora più astratti di quelle della tradizione. I loro oggetti derivavano dall'astrazione da proprietà comuni a diversi campi di indagine, proprio come nel caso dell'algebra che, anziché considerare numeri, considera le operazioni sui numeri. Ad essere organizzate assiomaticamente non sono più le conoscenze dirette, ma le nuove teorie, organizzate mediante postulati o assiomi, riguardanti concetti primitivi e caratterizzati esclusivamente dalle mutue relazioni imposte dagli assiomi stessi, da cui i teoremi sono pensati, dedotti logicamente. Se la tradizione riteneva essere gli assiomi evidenti verità elementari di una realtà familiare, emergeva ora come fosse possibile concepire diversi sistemi di enti che realizzino legami o vincoli posti dagli assiomi. Sistemi assiomatici diventavano sistemi coordinati e conchiusi in sé, come sospesi in uno stato indefinibile. Per essi si davano diverse interpretazioni o modelli delle teorie; ne erano possibili, infatti, diverse realizzazioni più o meno concrete oppure li si interpretava in teorie classiche familiari, preferite perché storicamente garantite, o, ancora, se ne fornivano descrizioni non ontologicamente impegnative che utilizzavano parole neutre come «sistemi di cose»[49].

In effetti la matematica così come è intesa dalla tradizione è svanita in due direzioni diverse e complementari: la logica deduttiva e la logica costitutiva o teoria degli insiemi, da cui la divaricazione fra deduzione e semantica. Le conseguenze logiche degli assiomi sono gli enunciati veri in tutti i modelli degli assiomi, in tutte le loro interpretazioni. Condizione necessaria dell'impostazione deduttiva che desse valore alla rete di legami logici, era la non contraddittorietà ossia la garanzia che, derivando teoremi, non si sarebbe mai arrivati ad una contraddizione. Nel caso contrario la teoria avrebbe incluso qualsiasi enunciato come teorema, perché dal falso tutto può essere dedotto come vero (*ex falso quodlibet*).

Era accettabile altresì la possibilità di interpretazione in un dominio o in un'altra teoria consolidata e affidabile, in cui venissero definiti, senza alcun rimando all'infinito, i *modelli*: se la teoria ha un modello nella quale sono veri tutti i suoi assiomi, essa è non contraddittoria, ma la consistenza ontologica del modello dipende dall'accettabilità degli strumenti con cui lo si definisce. Inoltre, se il metodo assiomatico doveva recuperare la tradizionale credenza, che il mondo è scritto in linguaggio matematico e che le teorie matematiche trattino di oggetti ben definiti, allora le possibili interpretazioni non dovevano essere troppo diverse tra loro e ce ne sarebbe dovuta essere una sola. In questo caso la teoria sarebbe stata categorica, includendo la *completezza*, non essendosi ancora sviluppata la logica matematica. Seppure ciò non fosse stato possibile, come in effetti sembrava,

[49] Col diffondersi del linguaggio della teoria degli insiemi, i «sistemi» diventavano «insiemi» e sistemi erano chiamati da Dedekind gli insiemi.

essendo ogni interpretazione declinabile in altre, le varie interpretazioni dovevano fornire le stesse verità in modo che le loro differenze non risultassero matematicamente significative e, se qualcosa risultava vero in una di esse, doveva esserlo in tutte. Logicamente si invocava la *completezza* della teoria, almeno per quelle teorie costruite per parlare di concetti univocamente determinati e presenti all'intuizione o, comunque, fondamentali, come il concetto di numero naturale. Per esse si chiedeva che, per ogni enunciato possibile, o l'enunciato o la sua negazione fossero deducibili dagli assiomi. In questo modo la deducibilità assume quei due valori che fin ad allora erano stati della verità rispetto ad una struttura. *Correttezza* e *completezza* erano i due problemi ritenuti più urgenti ed erano studiati in riferimento a teorie di base come l'aritmetica, su cui poggiava tutta l'analisi con la definizione dei sistemi numerici, e alla cui non contraddittorietà molte erano riconducibili, come la geometria. Il programma di Hilbert voleva proprio soddisfare queste aspettative e non solo:

"La questione della non contraddittorietà per i numeri naturali e per gli insiemi non è una questione isolata, ma appartiene ad un grande ambito di questioni gnoseologiche fra le più difficili aventi tonalità specificamente matematiche: al fine di caratterizzare brevemente questo ambito di questioni, cito la questione delle risolubilità in linea di principio di ogni problema matematico, la questione della controllabilità a posteriori del risultato di una ricerca matematica, e inoltre la questione relativa ad un criterio di semplicità per le dimostrazioni matematiche, la questione del rapporto fra contenutisticità e formalismo in logica, e infine la questione della decidibilità di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni"[50].

---

[50] Hilbert D., *Axiomatisches Denken*, in «Mathematische Annalen», 78, 1917 (1918), pp. 146-156; [trad. it. *Il pensiero matematico*, in *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1985].

Il contesto in cui si colloca l'interesse di Hilbert è quello in cui la geometria, a seguito dello sviluppo della matematica numerica con l'analisi e l'algebra e con le scoperte delle geometrie non euclidee, aveva ceduto il suo ruolo centrale in matematica alla teoria dei numeri. La geometria rientrava nella matematica pura solo grazie all'analitica e sue legittimità e giustificazione dipendevano da quelle trovate per i numeri. Proprio sull'aritmetica, sui numeri interi, Hilbert aveva concentrato i suoi sforzi cercando di dimostrarne dall'esterno la coerenza e quindi l'esistenza, trattata in modo del tutto formalizzato. Il carattere contenutistico della matematica è annullato, non essendo riconosciuti per essa oggetti peculiari, che godono o meno di certe proprietà e su cui non è possibile compiere affermazioni matematiche necessariamente vere o false. Anche gli sviluppi dell'algebra accentuavano come il carattere essenziale della matematica fosse formalistico ed astratto, confermando la concezione per cui il metodo assiomatico pone o crea gli oggetti matematici, eliminando quel carattere significativamente contenutistico del sapere matematico e vanificando il ruolo dell'intuizione. Quel rigore di cui la matematica gode è ascritto proprio alla logica, che di essa entra a far parte come uno dei rami portanti[51].

---

[51] Nell'Ottocento anche nell'algebra si era fatta strada la stessa trasformazione della natura del metodo assiomatico. L'algebra, che era stata concepita come la teoria delle equazioni numeriche, viene messa in discussione da Ruffini ed Abel, che scoprono l'irresolubilità per radicali delle equazioni di grado superiore al quarto. Ciò comportava un calo di interesse per la disciplina, ma soprattutto emergevano nuovi e più complessi punti di vista. Galois studia le ragioni dell'irresolubilità delle equazioni di quarto grado all'interno della moderna algebra astratta: la teoria dei gruppi. Già fra il 1830 e 1847 nella scuola algebristi inglesi emerge un prospettiva innovatrice. Peacock nel sua *Trattato di algebra* osserva come l'autentica correttezza delle operazioni e dei calcoli, che si eseguono nella tradizionale algebra numerica, non risiede nel fatto che i numeri e le loro operazioni godono intrinsecamente di certe proprietà, ma nel rispetto di certe regole esplicite per l'uso dei segni di operazione. Le regole, dunque, definiscono la natura stessa delle operazioni e insiemi di regole diverse possono dare luogo ad algebre diverse, algebre chiamate simboliche e di pari legittimità rispetto alle tradizionali algebre numeriche. La moderna concezione dell'algebra astratta non è altro che lo sviluppo di questa idea. Per cui l'algebra è teoria di operazioni qualsiasi

La ricerca auspicata da Hilbert doveva avere l'esito di una ricerca matematica, che giunge a delle conclusioni per via di dimostrazioni. Di tale indagine doveva farsi carico adesso la *metamatematica,* quel settore che ha per oggetto la matematica e non direttamente i suoi enti, dominio della matematica stessa. La metamatematica infatti si sarebbe occupata di linguaggi e di dimostrazioni ed i suoi enti sarebbero stati di tipo logico e linguistico. Essa era stata ambito della logica, ma Hilbert le dà un nuovo volto consegnandola alla logica formale, che aveva costruito linguaggi simbolici completi e adeguati alla rappresentazione di ogni ragionamento matematico. Se prima di Hilbert si occupava dell'inferenza, ora tratta le teorie e la loro coerenza ossia l'esistenza. Le teorie, quando formalizzate, sono appunto scritte in linguaggi simbolici e tradotte in schemi simbolici vuoti di significato sui quali si può ragionare in modo combinatorio. Questi metodi sono del tutto garantiti, perché equivalenti a manipolazioni fisiche su oggetti, i simboli e loro strutturazioni in sequenze o altre strutture. Poiché una dimostrazione non è più attendibile in base alle assunzioni e alle regole che in essa si usano, per avere la certezza della non contraddittorietà, è necessario che assunzioni e regole godano di un'affidabilità maggiore di tutte le teorie alle quali si devono applicare. Inoltre questi metodi non volevano essere tanto problematici come quelli dell'aritmetica e per questo il programma di Hilbert è un programma finitista, che limita, se non esclude del tutto, l'uso dell'induzione, proprietà che discende dalla particolare struttura

---

esplicitamente definite su insiemi imprecisati di oggetti e, infatti, verranno teorizzate, ad esempio, l'algebra delle matrici da Cayley, quella dei quaternioni da Hamilton, quella dei vettori da Grassmann e Peano. Importante è l'algebra della logica preparata da De Morgan nel 1847 e realizzata da Boole nel 1854. L'importanza di tali teorizzazioni risiede nel fatto che l'algebra della logica rivela il carattere formale della deduzione logica realizzando quella possibilità, già intravista da Leibniz, di una traduzione dell'algebra in un effettivo «calcolo logico». Si assiste, inoltre, al primo inglobamento della logica nella matematica. L'algebra della logica è una fra le tante algebre possibili e la matematica, le cui teorie non sono altro che algebre particolari, inglobando tutti i tipi di algebra, ingloberà anche quella della logica.

infinita dei numeri naturali. A questo punto ciò che è essenziale per lo sviluppo della teoria logica è stabilire il rapporto tra la nozione di *conseguenza semantica* e quella di *conseguenza deduttiva*, nell'ingenua aspettativa che le due coincidano. La nozione di *conseguenza* era solamente implicita nella logica e nella matematica e lo era anche nella natura formale dei sillogismi,senza però che fosse contemplata di per sé, separatamente dalle singole inferenze valide. In effetti, così come accade per molti, se non tutti i termini teorici, non si poneva la necessità di considerarne una definizione oltre quella fornita implicitamente dalle applicazioni delle regole logiche. L'esigenza si fa sentire quando, per la semantica dei linguaggi logici, quindi in riferimento per essi alle interpretazioni, si pone la questione di trovare tecniche effettive per la scontata nozione. Deve essere chiarito quale sia il rapporto fra la conseguenza semantica e la derivabilità dalle regole[52]. Il teorema di Completezza di Gödel, che fa luce sulla proprietà di completezza del sistema logico, soddisfa questa esigenza mostrando come le usuali e precisabili regole logiche sono sufficienti ad ottenere, con il loro combinarsi in deduzioni finite, tutte le formule logicamente valide[53]. Gödel lo elabora nel 1929, dopo la lettura del testo di Hibert e Ackermann del 1928 *Grungzüge der theoretischen Logik*, quando cercava un argomento per la tesi. La completezza in generale si ottiene dimostrando che, dalla non contraddittorietà del sistema logico T, deriva l'esistenza di un modello di T (*Teorema dell'esistenza di un*

[52] In base alla concezione Hertz, che influenza fortemente Hilbert, per cui il significato dei concetti di base di una teoria dipende solo dalla loro coerenza, è necessario stabilire come gli assiomi, se non contraddittori, stabiliscano il significato dei concetti.

[53] Stabilendo la derivabilità formale di un sistema di regole logiche, leggendo $T \vdash \varphi$ come «$\varphi$ è derivabile da T» indichiamo l'esistenza di una derivazione di $\varphi$ da T o una successione di formule che sono elementi di T o ottenute da precedenti applicazioni di una regola logica, che terminano con $\varphi$. Per un'ampia classe di regole logiche, se è possibile la derivazione allora possiamo dire essere $\varphi$ conseguenza logica di T, che indica la correttezza logica o la validità del sistema. Inoltre: se $\varphi$ è conseguenza logica di T, allora esiste una dimostrazione di $\varphi$.

*modello*)[54]. Per esso la proprietà pura della completezza dell'insieme delle derivazioni consiste nell'esistenza di una struttura M in cui la teoria è soddisfatta. L'esistenza di questo è ottenuta dalle stesse leggi interne di funzionamento del formalismo.

Se il *Teorema di completezza* nella sua forma classica era ormai atteso, quasi previsto in ambiente matematico, la dimostrazione della sua versione equivalente che dimostra l'esistenza di un modello è del tutto dirompente e dal sapore metafisico, concludendo per l'esistenza dalla non contraddittorietà. Ciò autorizzava i matematici al rifiuto di ulteriori approfondimenti filosofici, mai del tutto apprezzati, se non rifiutati. Il teorema si rivela un valido strumento per la matematica, perché con esso è possibile la costruzione di strutture automaticamente, anche per le aritmetiche *non standard* ossia non isomorfe alla struttura dei numeri naturali. Inoltre poiché per *derivazione* si intende un numero finito di passi, allora la teoria T è non contraddittoria solo se ogni successione che le appartiene, ogni sottoinsieme, è non contraddittoria. Così se ogni sottoinsieme ha un modello, allora T che li contiene è non contraddittoria (*Teorema di compattezza*). Tra le teorie composte da un numero infinto di assiomi c'è anche l'aritmetica. Se aggiungiamo al linguaggio dell'aritmetica un nuovo simbolo di constante individuale *c* non interpretato, otteniamo un insieme di enunciati, che aggiungiamo come assiomi agli altri. Otteniamo, ammesso gli assiomi dell'aritmetica siano non contraddittori, un insieme infinito T con la proprietà che ogni suo sottoinsieme è finito e non contraddittorio. Supponiamo infatti che N, l'insieme dei numeri naturali, sia noto e sia il modello *standard* dell'aritmetica. Questo può essere soddisfatto in N se a *c* si assegna come interpretazione un

[54] Lo studio dei modelli si è imposto come necessario, lo si vede il caso della geometria, in quanto rende possibile la trattazione matematica di una teoria. Esso consiste nella dimostrazione di non contraddittorietà della teoria ed è l'esigenza primaria sentita per le teorie assiomatizzate, che, a sua volta, richiede modelli anche di un'altra teoria, da cui ritagliare modelli semantici. Si veda appendice in calce.

numero che sia maggiore di tutti gli *n* i cui numerali non compaiono nell'insieme prescelto. Secondo il Teorema di Compattezza, T ha un modello M che soddisfa tutti gli assiomi dell'aritmetica, ma esso non può essere N perché in esso dovrebbe esistere un elemento diverso da tutti gli *n* che appartengono a N. Il modello M è diverso e, anche se numerabile, è non isomorfo, altrimenti non si potrebbe assegnare un corrispondente a *c*. Poiché il Teorema di Completezza non è ristretto a teorie effettivamente assiomatizzabili, T potrebbe essere l'insieme di tutti gli enunciati veri in N. Esistono dunque modelli non isomorfi a N ma che soddisfano esattamente gli stessi enunciati, confermando che le nozioni di *categoricità* e *completezza* divergono. Il teorema di completezza di Gödel da una parte dà fondamento scientifico alla credenza di Hilbert, che la non contraddittorietà di un sistema implichi l'esistenza di enti che soddisfano quegli assiomi, ma dall'altra sanziona la caratteristica del metodo assiomatico della pluralità dei modelli, caratteristica positiva per i sostenitori ma negativa per i critici. Esso inoltre permette di dimostrare che nessuna teoria formulata in un linguaggio del primo ordine e che abbia un modello infinito può essere categorica.

Gödel dopo la tesi comincia a lavorare al programma di Hilbert vero e proprio, il cui scopo, di tipo *riduzionistico*, è quello di ridurre la non contraddittorietà dell'analisi a quella dell'aritmetica, essendo i numeri reali ridotti agli interi. Era il secondo problema di Hilbert posto alla conferenza di Parigi del 1900 che Gödel "risolve" con la scoperta del suo Teorema, per cui la consistenza dell'analisi non è dimostrabile, dunque entro una teoria assiomatica non è possibile derivare tutte le verità matematiche. Gödel lo scopre a proposito del sistema dei *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead[55], in cui è presentata una formalizzazione della teoria degli insiemi, la *Teoria dei Tipi*. Per

[55] Russell B. e Whitead A. N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, England 1910/13; seconda edizione, 1925–1927, [trad.it. parziale Parrini P. (a cura di), *Introduzione ai Principia Mathematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1977].

essa, in particolare, ci sono verità vere ma non dimostrabili. In tale dimostrazione riposa pure la differenza fra logica e matematica: per la prima il Teorema di completezza è dimostrato, per la seconda non lo è. L'aritmetica, infatti è ancora più potente della logica; nell'aritmetica elementare, con somma e moltiplicazione, non è possibile trovare un gruppo di assiomi, come quelli di Peano, da cui derivino tutte le proposizioni vere del sistema. Se ammettiamo che dagli assiomi non è possibile dedurre teoremi falsi, allora vi saranno verità aritmetiche non deducibili dagli assiomi.  Viene dunque data risposta pure al problema della completezza, posto da Hilbert nel 1928 al *Congresso di Bologna*: se le regole logiche a disposizione possano risolvere tutti i problemi. Nella versione perfezionata da John B. Rosser, il Primo teorema afferma che se l'aritmetica è non contraddittoria, allora esiste un enunciato che non è dimostrabile in essa, ma non lo è neppure la sua negazione, questo enunciato è allora *indecidibile* nell'aritmetica, che dunque è deduttivamente incompleta. Il Secondo teorema, invece, ricava dalla non contraddittorietà dell'aritmetica l'affermazione della propria non contraddittorietà nello stesso linguaggio aritmetico. Posto che se ne possa trovare un'espressione in esso, l'affermazione non è nella stessa dimostrabile né refutabile, facendo dell'aritmetica stessa un esempio di indecidibilità.

Gödel non è da subito del parere che questo risultato infici i metodi finitisti di Hilbert, perché essi potrebbero includere tecniche che non sono propriamente aritmetiche, ma in effetti la dimostrazione concepibile rientra proprio nell'aritmetica e dunque rompe le speranze hilbertiane e non solo. I teoremi infatti minano la certezza della non vacuità del lavoro matematico, mai venuta meno sul piano morale e storico. I teoremi, inoltre, minano anche la fiducia nella *ragione umana* di poter definire e dominare perfettamente i concetti fondamentali resi ben chiari dall'intuizione e che, invece, la comunità dei matematici si aspettava confermata dal programma di Hilbert, che però intende la non contraddittorietà era solo una delle possibili proprietà oggetto di studio della metamatematica[56]. I teoremi lasciavano campo libero ad una logica che solo in futuro si sarebbe sviluppata e di cui non si sospettavano neanche le potenzialità[57]. L'impressione che i teoremi suscitarono era dovuta anche al *procedimento mirabile* inaugurato da Gödel nella dimostrazione, che si svolge su due livelli, uno di calcolo duro, l'altro di argomentazione elegante, dei paradossi. In quel periodo di paradossi saltavano fuori sia dalla teoria dell'infinito, sia nella trattazione della *definibilità* e Gödel finirà per non considerarli affatto un problema per le singole teorie, sviluppandosi proprio ai confini di esse, laddove le teorie entrano in contatto. In particolare Gödel notava come paradossi del tipo del mentitore potevano essere ricavati in qualsiasi linguaggio capace di parlare di se stesso e, nel caso dell'aritmetica bisognava tradurre il metalinguaggio riferito all'aritmetica, in aritmetica. Proprio traducendo il metalinguaggio naturale in linguaggio aritmetico si sarebbe ottenuta quella coincidenza di linguaggio naturale e linguaggio aritmetico che rendeva possibile l'insorgere del paradosso. In realtà Gödel cercava una definizione aritmetica della verità delle proposizioni dell'analisi, della teoria dei numeri reali, che possono essere definiti come insiemi di

---

[56] La non contraddittorietà stava particolarmente a cuore a Hilbert non tanto per la sicurezza che avrebbe dovuto garantire, quanto per la giustificazione dell'infinito come elemento ideale e come metodo impuro, al pari di altri, come estensione conservativa della matematica finitista, in ciò consiste il programma di Hilbert. L'infinito sarebbe dunque un non esistente, un enunciato ideale che contiene quantificatori le cui variabili variano su insiemi infiniti, eppure utile e anzi indispensabile a una teoria armoniosa, elegante e soddisfacente, ma eliminabile nelle dimostrazioni di proprietà che non vi facessero riferimento e in particolare dalle affermazioni elementari sui numeri. Elementi ideali sono ammissibili soltanto nel caso in cui non sorgono contraddizioni nel precedente e più ristretto dominio. Da dimostrare era pure la proprietà di conservatività, per cui se un enunciato elementare è dimostrabile in una teoria con elementi ideali, allora è già dimostrabile in quella di base. In base a ciò è possibile ridimensionare l'effetto dei teoremi sul programma di Hilbert. Si veda Lolli G., *Da Euclide a Gödel,* Il Mulino, Bologna 2004, p.99-100.

[57] Ci riferiamo alla logica informatica sviluppatasi grazie alla codifica aritmetica dei fatti matalinguistici, resi in tal modo perfettamente dominabili nell'aritmetica come teoremi se sussistenti e refutati, ossia con prova di negazione, se non sussistenti.

naturali, per ottenere la dimostrazione della non contraddittorietà nell'aritmetica. Procede, allora, all'*aritmetizzazione del linguaggio* passo per passo: assegna numeri ai simboli dell'alfabeto aritmetico, poi alle espressioni, alle successioni di espressioni, e così via per passare poi a studiare gli insiemi, le relazioni e le operazioni sintattiche, che diventano, per effetto della codifica numerica, relazioni e operazioni fra numeri. Lungo la sua ricerca della definizione aritmetica della verità delle proposizioni dell'analisi, Gödel si accorse che il *concetto di vero* genera il Paradosso del Mentitore. Essendo infatti riuscito a costruire una formula, una frase aritmetica, che tradotta nel metalinguaggio suona: «questa frase non è dimostrabile nell'aritmetica o io non sono dimostrabile nell'aritmetica».

Quello che si evince dai teoremi è l'insufficienza di ogni formalismo matematico rispetto a questioni semantiche, che riguardano la verità, ma non quelle della matematica.

***Il continuo: un problema trasversale***

Tutti i tentativi di *aritmetizzazione* o comunque di ricerca di rigore per la matematica si muovono nel tentativo di emanciparne l'attività dall'intuizione e finiscono per condurre ad un ripiegamento di tale attività su se stessa. È il caso della geometria a cui Hilbert intendeva col suo lavoro restituire centralità: l'intuizione geometrica era stata ampiamente screditata e, a ciò, aveva contribuito lo studio delle funzioni che rivelava per esse patologie controllabili solo con la nuova intuizione insiemistica dell'infinito. Né Gauss né Kronecker la considerano matematica pura, trattando essa di grandezze continue e, infatti, scopo ulteriore di Hilbert era quello di chiarire il ruolo degli assiomi di continuità in geometria. La *continuità* era, infatti, al centro degli interessi sia per i fondamenti dell'analisi, sia per lo studio sulla natura dello spazio, e su come dovesse essere modellato. La geometria, nonostante sostenesse di trattare di grandezze continue, non era in grado di fornire un fondamento per la continuità che, quindi, veniva ricercato nelle definizioni aritmetiche del continuo. La definizione del continuo fornita da Dedekind nel 1872, supera la prima caratterizzazione aritmetica datane da Weierstrrass. Dedekind si ispira al carattere della continuità come *assenza di lacune*, per cui i numeri reali sono le partizioni dei razionali in due sezioni superiore e inferiore, fra cui deve esserci sempre un numero[58]. La definizione dei reali, che per Cantor sono successioni di razionali come diceva la concezione dei decimali illimitati, precede e innesca lo sviluppo rigoglioso della teoria degli insiemi e, insieme allo studio degli insiemi dei punti singolari delle funzioni, ne è il primo atto. Infatti quello che mancava era proprio la nozione di convergenza delle successioni e, soprattutto, una certa disinvoltura nel maneggiare l'infinito attuale. Con la formulazione di diverse proprietà degli insiemi infiniti di punti, il linguaggio insiemistico diventava sempre più utile e familiare nella trattazione della teoria delle funzioni. Il contributo di questo linguaggio, infatti si può parlare di teoria solo a partire dal 1920, con il completamento della prima assiomatizzazione di Zermelo del 1908 da parte di Freankel, quando si arriva ad una nozione insiemistica pura e all'isolamento di un sottoinsieme mediante una proprietà molto vicina al principio di comprensione da cui si definiscono gli insiemi, permetterà definizioni aritmetiche del continuo, aritmetiche in quanto si basano essenzialmente sui numeri razionali che, a loro volta, si definiscono come gli interi, i numeri naturali. Tali contributi non si distinguono ancora del tutto dalla logica e tutto l'edificio dei numeri finisce per poggiare sull'intuizione, tanto che il termine insieme è inteso come una nozione comune del sistema euclideo. In effetti la situazione è progredita perché molto è il nuovo sapere accumulato, ma per trovarsi

[58] In questo contesto, piuttosto che con la definizione delle operazioni algebriche, risulta di facile dimostrazione il teorema di Bolzano- Weierstrass per cui ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore.

dinanzi all'ulteriore domanda: cosa sono i numeri naturali?, e anche questa lacuna viene colmata e con un sistema di assiomi per essi.
La scoperta è stata corale, ma Dedekind ne ha fornito una sistemazione chiara e fruibile definendo la struttura dei naturali come il più piccolo insieme infinito. Dedekind provvede alla sistemazione del concetto fondamentale della teoria degli insiemi, il concetto di infinito che è definito direttamente, anziché indirettamente per mediazione del finito e, quindi, come non finito rischiando di cadere in un circolo vizioso, che conferirebbe ad un concetto tanto fondamentale solo una caratterizzazione negativa. Inoltre si definirebbe il finito presupponendo "numero naturale", pensando generalmente come finiti gli insiemi che si possono contare con i numeri naturali. Dedekind, invece riesce a prescindere dai numeri e sostiene essere un insieme infinito se esiste un'iniezione dell'insieme in sé, un'iniezione propria[59]. Dedekind chiama dunque infinito un sistema S che sia equipotente ad una sua parte propria, altrimenti si sta parlando di un insieme finito. Per definire i numeri è necessario partire dall'alto, dalla nozione più complessa per chiarire quelle più semplici. Anziché partire dalla generazione del singolo numero iniziale, che sia l'1 o lo 0 e dall'operazione del contare, si parte dal concetto più lontano, quello di infinito per arrivare a quello più familiare, quello di finito. Le descrizioni e le spiegazioni sono sempre più indirette e complesse del dato immediato ed è questo il modo di procedere che ha caratterizzato tutta la teoria dei fondamenti. Peano giunge agli stessi assiomi di Dedekind, ma non ne ha reso chiaro il procedimento con cui li raggiunge. Conosce inoltre Grassman e aveva recepito l'importanza

[59] Ad esempio, l'insieme dei numeri pari è *iniezione propria* dell'insieme dei numeri naturali, così tale proprietà è falsa per gli insiemi intuitivamente finiti e infatti la cardinalità di un insieme finito è la stessa indipendentemente dall'ordine in cui si conta. Dedekind fornisce un'assiomatizzazione dei numeri naturali : si richiede per l'insieme la *minimalità*, allora che un solo elemento lo 0 non è iniettivo, funzione detta «successore di» e ne deriva anche la validità del principio di induzione e la possibilità, conseguente delle definizioni per ricorsione. Sono questi gli assiomi dei numeri naturali.

delle definizioni per ricorsione di somma e prodotto e il fatto che fossero sufficienti a definire i numeri naturali e il principio di induzione. Se questi è un "assiomatizzatore", Dedekind pone la sua analisi e le sue definizioni nel tentativo di una trattazione degli insiemi, che chiama *sistemi*.

Quasi contemporaneamente, fra il 1874 e il 1897, Cantor perviene alla formulazione della teoria degli insiemi. In essa il numero viene definito con estrema generalità tanto dal punto di vista ordinale, quanto del punto di vista cardinale e, utilizzando esclusivamente nozioni di carattere insiemistico, compie il passo importante di svincolare il concetto di numero dall'atto del contare. In essa i numeri naturali si configurano come casi particolari dei numeri ordinali e cardinali, sono il caso finito di essi in una teoria che usa, ormai senza alcuna remora, il concetto di *infinito attuale*. Egli si avvale del nuovo atteggiamento nei riguardi dell'infinito inaugurato da Bolzano, che ne rivela la specifica caratterizzazione: pur non potendo nei riguardi dell'infinito arrivare alle medesime conclusioni che per il finito, di cui contiamo gli elementi per sapere se fra essi sussistono o meno certe relazioni, e infatti non possiamo per gli insiemi infiniti neanche finire di contare, non possiamo comunque escludere che fra di essi, proprio perché infiniti, possa sussistere una corrispondenza biunivoca degli elementi, senza che si incorra in paradossi. Cantor allora applica il concetto di *equipotenza* o equivalenza di due insiemi, dicendo ingenuamente essere due insiemi equipotenti quando l'uno ha tanti elementi quanti ne ha l'altro e, specificherà più tardi una volta notata la rilevanza della relazione di *buon ordinamento*, se e solo se è possibile porli in una relazione tale che ad ogni elemento dell'uno corrisponda uno e uno solo elemento dell'altro[60].

---

[60] G.Cantor ebbe l'ardire intellettuale di applicare la definizione *ingenua* di uguaglianza del numero cardinale di due insiemi anche al caso di insiemi infiniti, compiendo quel passo che non era stato osato da Galilei rispetto alle affermazioni di Cavalieri a alle applicazioni di Torricelli per la geometria degli indivisibili. La relazione equivalenza di due insiemi posta da Cantor è quella

Nel 1873 Cantor pone a Dedekind il problema se l'insieme R dei numeri reali possa essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme N dei numeri naturali, ma poi sostiene che tale corrispondenza non possa esistere. In una lettera del 1873, comunica al collega quanto vedeva ma non poteva credere, così dice a Dedekind circa la sua scoperta in una lettera del 1873: il fatto che un quadrato, come un cubo, ha tanti punti quanti ne ha un suo lato[61]. Cantor aveva scoperto che esiste una corrispondenza biunivoca fra i singoli numeri reali compresi fra 0 e 1 e le coppie ordinate, in cui la successione è decisiva e, infatti, (0,1) e (1,0) indicano gli estremi opposti, di numeri reali compresi fra 0 e 1 (nozione di buon ordinamento). Ciò che Cantor vede come un fatto ma a cui non può credere facilmente è che i punti di un quadrato sono tanti quanti i punti del suo lato. Alla coppia ordinata x,y di numeri reali compresi fra 0 e 1 si fa corrispondere il singolo numero reale *t*, e viceversa alla *t* facciamo corrispondere la coppia ordinata x, y, prendendo come cifre

---

che Galilei, ad esempio nelle *Nuove Scienze* individua fra quegli attributi (di maggioranza, di minorità ed egualità) che non convengono agli infiniti, dei quali non si può dire essere l'uno maggiore dell'altro, tra di essi non è lecita proporzione alcuna, perchè gli attributi di eguaglianza (equivalenza, equipotenza), minorità e di maggioranza non hanno luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. Nega che si possa ragionare sull'infinito con argomenti "concludenti necessariamente", al massimo con argomenti arbitrari e non–necessari. Galileo trova impossibile stabilire un'eguaglianza nei termini di una corrispondenza biunivoca, fra un segmento continuo e una sua parte propria, che contravviene all'affermazione che i quadrati (i numeri in sé medesimi moltiplicantesi) siano solo una parte di tutti i numeri naturali. L'ardire intellettuale che manca a Galileo è quello consistente nell'accettare che una tale corrispondenza sia valida anche fra la parte e il tutto cui appartiene.

[61] Ad un punto P di un quadrato possiamo assegnare le sue coordinate: i numeri, compresi tra 0 e 1, x dal lato verticale e y dal lato orizzontale. I quattro vertici del quadrato, procedendo in senso orario, hanno coordinate (0,0); (0,1); (1,1); (1,0). I numeri x e y indicano le distanze del punto, rispettivamente, dal lato verticale e dal lato orizzontale; sono misure di segmenti non maggiori del lato preso come metro, espresse in numeri compresi tra 0 e 1. I numeri razionali e non razionali (irrazionali) sono chiamati "numeri reali" e, precisamente, quelli compresi fra 0 e 1 che esprimono misure di segmenti non superiori al lato del quadrato *Q* preso come metro. Il numero razionale, *t* compreso fra 0 e 1, è un rapporto (*ratio*) fra due interi e, allora, da un certo *n* in poi le cifre o sono tutte zero o sono periodiche, ossia si ripetono in periodi uguali. Il numero *t* è irrazionale quando le infinite cifre non sono tutte zero da un punto in poi e non si ripetono in periodi.

della successione x, le cifre di indice dispari e, per la successione y, quelle di indice pari. I numeri pari come quelli dispari, allora, sono tanti quanti tutti i numeri interi o naturali e la corrispondenza fra interi e pari è biunivoca[62].

I passi condotti nel ragionamento ci mostrano come l'intero spazio contiene tanti punti quanto il più piccolo segmento, facendo risultare gli enti geometrici continui, senza che abbiano le stesse dimensioni, come equipotenti anche se non equidimensionali. L'ambiguità si annida nell'imprecisato aggettivo *uguale* che indica due concetti distinti nel riferirsi alla dimensione o al numero. Lo sgomento di Cantor è dovuto alla falsificazione della credenza in cui intuitivamente diamo che un ente geometrico di dimensione più grande contenga più elementi di una sua parte, un ente geometrico di dimensione più piccola, anche piccolissima. Inoltre, a quel tempo, non era stata data ancora, e forse non ce n'era stato motivo come da adesso in poi, una definizione precisa di dimensione e Cantor non poteva non stupirsi del fatto che *uguale per numero di elementi* indica un concetto di diverso che *uguale per dimensione*, così come Galileo rimane senza parole di fronte al fatto paradossale che l'uguaglianza per numero non implicava l'uguaglianza come identità nel caso del tutto e di una parte di un

[62] Lo stesso ragionamento è seguito nel caso di un cubo: a un punto P di un cubo di lato 1 corrisponde una terna ordinata di numeri reali x, y, z, dove z è la quota di p sopra la base e x e y sono le coordinate di proiezione di P sulla base. Tutte e tre le successioni (che a ogni passo saltano tre numeri) sono altrettanto infinite quanto la successione 1, 2, 3, … dei numeri naturali e equipotenti alla successione degli interi. Così come nel caso del quadrato, facciamo corrispondere alla terna ordinata x, y e z. (se x = 0, $a_1, a_4, a_7, a_{10}$, … e y = 0, $a_2, a_5, a_8, a_{11}$ ... e z = 0, $a_3, a_6, a_9, a_{12}$, … . Si noti che le tre successioni partono dai primi tre numeri dei naturali che procedono all'infinito (non possiamo mai arrivare a contare l'ultima cifra). Le successioni sono altrettanto infinite quanto la successione dei numeri naturali 1, 2, 3, cifre che indicano i punti di partenza delle tre. Sono quindi equipotenti alla successione degli interi. Ingrandendo a dismisura il cubo che arriva a occupare al limite l'intero spazio, qui il lato è una retta che contiene tanti punti quanto un segmento piccolo a piacere i cui punti sono tanti quanti quelli del lato del cubo ingrandito al limite dello spazio, pur avendo questi enti geometrici dimensione diversa, il segmento di uno, il quadrato di due, il cubo di tre (a indicare gli intervalli della successione con cui assegniamo una cifra al numero *t*).

insieme (infinito). E una parte è *non-infinito*, come aveva insegnato Dedekind. Cantor si avvia dunque a smontare la "falsa idea", che fa risalire a Kant", per cui il limite del finito sia l'assoluto". Oltre l'assoluto, l'infinito che non può che esistere come unico, non si può andare. Se chiamiamo numerabile ogni insieme i cui elementi, uno per uno, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con la successione infinita dei numeri naturali, allora secondo il ragionamento condotto più sopra le due successioni sono equipotenti, ossia hanno lo stesso numero cardinale infinito[63]. Il criterio seguito non è quello a cui siamo abituati e che procede considerando la grandezza, ma è un criterio di numerazione per corrispondenza biunivoca fra le frazioni irriducibili e i numeri naturali. Seguendolo possiamo allora numerare l'insieme di un'infinità numerabile di insiemi numerabili e la *corrispondenza biunivoca* si rivela essere il solo criterio con cui sia possibile numerare certi insiemi: non riusciremmo mai a numerare due insiemi infiniti dovendo contare prima l'uno e poi l'altro, ammesso che sia possibile. Procedere per diagonali, da sinistra a destra e dal basso verso l'alto, ci permette di raggiungere ogni possibile elemento di un insieme con un numero finito di passi consentendoci di numerare insiemi assai più grandi di quello con cui numeriamo, dell'insieme dei numeri interi. Il passo ulteriore e decisivo che compie Cantor è nell'osservare, quando formula il concetto di infinito non assoluto ma sempre accrescibile ossia di infinito attuale transfinito, che non ogni

[63] Il primo insieme che contiene la successione dei naturali come sua parte propria è numerabile, essendo la corrispondenza bidirezionale. Cantor opera delle estensioni per l'insieme Z dei numeri interi, positivi e negativi più lo zero, così come per l'insieme dei numeri razionali positivi, che pure risulta numerabile. Per il primo, l'insieme Z, la numerabilità risulta da un ordinamento diverso da quello "naturale", quello a cui siamo abituati e in cui gli elementi sono disposti in modo discreto, per cui fra due numeri consecutivi ($n$ e $n + 1$) non ce n'è nessun altro. Questo non vale per l'insieme di tutti i numeri razionali positivi dell'insieme $Q$ che nel suo ordinamento naturale, secondo grandezza, è denso: fra due numeri frazionari, per quanto vicini, ce ne sono infiniti maggiori del più piccolo e infiniti minori del più grande. Considerando solo le frazioni irriducibili organizzate in mucchi finiti, quelle la cui somma di nominatore e denominatore dia un numero naturale (metodo di Cauchy), allora otteniamo un criterio di numerazione anche per $Q$.

insieme infinito è numerabile[64]. Cantor dimostra che l'insieme dei punti di un segmento non è numerabile ossia che l'insieme dei numeri reali non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Il segmento è un continuo e potenza del continuo è il numero cardinale transfinito dei suoi elementi, superiore al numerabile. I continui, delle diverse dimensioni, abbiamo visto avere tutti la stessa potenza, quindi la potenza del continuo è il numero cardinale di un segmento, di una retta, di un quadrato, di un cubo e di tutto lo spazio a tre dimensioni. Ogni continuo *C* contiene sottoinsiemi di elementi che sono numerabili, *N*, e, se *C* ha potenza diversa dal suo sottoinsieme, allora essa sarà superiore ad *N*[65]. Cantor afferma e dimostra la possibilità di costruire insiemi di potenza sempre più alta senza mai giungere ad un insieme di potenza massima, ad un assoluto che è impensabile. Sappiamo infatti che l'insieme degli elementi di un segmento (del continuo) ha potenza superiore all'insieme del numerabile (L) con cui numeriamo, se il primo contiene una parte propria di potenza uguale a quella del secondo insieme; è quindi impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra i due. La dimostrazione del teorema generale è detta da Cantor di "grande semplicità"[66] e indica un primo metodo per costruire insiemi transfiniti di potenza via via crescente. Il metodo consiste nella ripetizione (iterazione) dell'operazione di passaggio da un insieme all'insieme delle sue parti e, partendo dal transfinito minimo, quello dei numeri

---

[64] Comunica tale concetto a Dedekind il 12 dicembre del 1873.

[65] La successione degli elementi non ha la potenza di *N*, essa ha infatti sempre un elemento fuori di *N* e il continuo risulta avere una potenza superiore a quella dei numeri naturali perché contando per coppie di elementi, quindi con una numerazione a base due, quella binaria più "naturale" per un calcolatore, servono solo i simboli 0 e 1, una coppia di coppie è già una quaterna e una coppia di quaterne è un ottetto e... con i soli due simboli di 0 e 1 riesco a scrivere, mantenendo la convenzione della posizione, tutti i numeri, come sono nella numerazione ordinaria, ma ci serve molto più spazio e questo non è affatto infinito.

[66] Come sostiene Gödel in La logica matematica di Russell, in *Opere* vol.2, a cura di Edoardo Ballo, Silvio Bozzi, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Bollati Borinhieri, Torino 2002, pp. 125-145, p. 130.

naturali, andiamo a costruire la scala di infiniti di potenza via via crescente[67]. Supposta per assurdo, la corrispondenza come possibile, passiamo a costruire una funzione caratteristica per l'insieme di partenza, che è però diversa da quelle per il suo sottoinsieme. La funzione caratteristica per l'insieme degli elementi del continuo non può esaurire gli elementi dell'insieme delle funzioni caratteristiche che possono assumere valore 1, essendo questo insieme più grande di quello degli elementi del continuo.

Una volta dato il metodo di costruzione per costruire insiemi transfiniti di potenza via via crescente, per cui partiamo dall'insieme dei naturali per costruire quello del continuo lineare e poi, sul continuo lineare, quello delle funzioni definite e via di seguito, la questione che si pone è se sia possibile fra due insiemi transfiniti così definiti, inserire un insieme potenza fra due elementi successivi della scala dei transfiniti così ottenuta, passando da un insieme al suo insieme potenza e, da questo, al suo insieme potenza e così via all'infinito. Il problema di una potenza intermedia si pone ad ogni passaggio da un insieme potenza all'altro, da un numero cardinale di un insieme a quello dell'insieme delle sue parti. Cantor non riuscendo a costruire un numero cardinale transfinito compreso tra la potenza del numerabile e la potenza del continuo, formula l'ipotesi *c*he il continuo sia la potenza immediatamente successiva al numerabile, nota come *Ipotesi del continuo*, ma che Cantor chiama *Teorema della due classi*. Prima che Cantor riuscisse a fornirne una dimostrazione trascorsero anni; nel 1878[68] la espose in dettaglio, affermando che ogni insieme più che

---

[67] Introducendo in un insieme qualsiasi le funzioni caratteristiche dei suoi sottoinsiemi, prendiamo il sottoinsieme I in cui essa funzione caratteristica ha valore 1 per gli elementi che appartengono all'insieme di partenza. Si vede subito come le funzioni caratteristiche dell'insieme degli elementi di un segmento sono tante quante le sue parti e, dunque, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme di partenza e l'insieme delle sue parti con funzione caratteristica di valore 1, suo sottoinsieme.

[68] Cantor G., *Ein Beitrag dur Mannigfaltigkeitslehre*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 1878, 84, pp.242-258, rist. in Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. *Mit*

numerabile di numeri reali può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti numeri reali, cioè che non esiste un numero cardinale strettamente compreso tra quello di N e quello di R. Questa la forma originale dell'ipotesi, poi detta *Ipotesi debole del continuo*. Nel 1883 Cantor aveva sviluppato la nozione di *buon ordine*, per cui ogni insieme può essere ben ordinato, riuscendo a dare una forma più elegante alla sua ipotesi, quella in ci l'ipotesi è più conosciuta, enunciata nel 1895 nella notazione con gli *aleph*: R ha la stessa potenza dell'insieme degli ordinali contabili[69]. Da ciò la formulazione dell'*Ipotesi generalizzata del continuo*: qualunque sia la potenza ottenuta nella prima scala dei transfiniti, non esistono potenze intermedie tra essa e quella successiva nella scala, la potenza relativa all'insieme delle parti di un insieme della potenza inizialmente assegnata. Come non c'è una potenza intermedia fra $n$ - 1 e $n$, così non ce ne sarebbe tra quella di un insieme infinito e la potenza delle sue parti, più grande. Dunque afferma che l'insieme di tutte le funzioni reali ha la terza potenza infinita. Una forma più generale non la discusse mai, forse perché non ne vedeva applicazioni, e nominata da Tarski per la prima volta da Haussdorff[70] e ricevette il nome di *Ipotesi generalizzata del continuo (GCH)* da Tarski. Nonostante le sue intense ricerche, Cantor non riuscì mai a dimostrare l'*Ipotesi del continuo (CH)*, ma dimostrò nel 1884 un caso particolare dell'ipotesi debole del continuo: ogni sottoinsieme più che numerabile chiuso di *R* ha la potenza di *R* e, per un breve periodo, in quell'anno credette di aver

*erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, a cura di Ernst Zermelo, Springer, Berlin; rist. in Olms, Hildescheim 1962 [trad.it. parziale in Gianni Rigamonti (a cura di), *La formazione della teoria degli insiemi*, Sansoni, Firenze 1992].

[69] Si vede dunque come l'*Ipotesi del Continuo* è equivalente alla congiunzione dell'*Ipotesi* debole *del continuo* e della proposizione che *R* può essere ben ordinato.

[70] Hausdorff F., *Grundzüge einer Theorie der geordneten Meengen*, in «Mathematiche Annalen», 65/1908, pp. 435-505, pp. 487-494.

dimostrato l'*Ipotesi del Continuo*, poi di averla refutata[71].

***Vicissitudini del Problema del continuo***

Nel 1904 durante una conferenza del convegno internazionale dei matematici ad Heidelberg, il matematico ungherese König[72], affermò di aver refutato l'*Ipotesi del continuo*, ma già il giorno successivo Zermelo trovava una lacuna nell'argomentazione, costringendo l'ungherese a rivedere la sua argomentazione per la pubblicazione del 1905. Le ricerche di Hausdorff condotte fra il 1906 e 1908 sulla cofinalità estendevano il risultato di König, ma non si poteva dire di più sulla cardinalità dei numeri reali, ammette Gödel nella prima versione, del 1947, di *Che cos'è l'ipotesi del continuo di Cantor?*. Bernstein sottolinea come una direzione di ricerca consistesse nell'estendere a classi sempre più ampie di sottoinsiemi di *R* il risultato di Cantor, che l'*Ipotesi del continuo* fosse valida per sottoinsiemi chiusi di *R*. A questo scopo la gerarchia usata fu quella di Borel introdotta nel 1898 e che Lebesque estese a livelli transfiniti. Young nel 1903 rafforzava il risultato di Cantor, mostrando che ogni sottoinsieme più che numerabile ha la potenza di *R*, e il risultato fu poi esteso proprio alla gerarchia boreliana. Nei successivi vent'anni i progressi sull'*Ipotesi del continuo* sono legati a Luzin e ai suoi allievi, come Alexandrov e Suslin, che costituivano la scuola moscovita dei teorici delle funzioni. Alexandrov raggiunse indipendentemente, nel 1916, lo stesso risultato di Hausdorff. Nel 1917 Luzin e Suslin estesero la gerarchia di Borel, proprio introducendo gli

[71] Moore G. H., *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence*, «Studies in the history of mathematics and physical sciences», 8/1982, Springer, New York, p. 43-44.

[72] Si veda la nota introduttiva di G.H. Moore a K.Gödel *Che cos'è il Problema del continuo di Cantor*, in Gödel, *Collected Works*, vol.2: *pubblications 1929-1936*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Haijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford [trad.it. Gödel, *Opere*, vol.2, a cura di Edoardo Ballo, Sivio Bozzi, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Bollati Borinhieri, Torino 2002].

insiemi analitici ottennero il primo livello della gerarchia proiettiva e Suslin dimostrò che l'*Ipotesi del continuo* vale proprio per questi insiemi analitici, in quanto un insieme analitico più che numerabile ha un sottoinsieme perfetto. Eppure, come nota Gödel[73], i progressi si fermano qui e infatti non era stato dimostrato che l'*Ipotesi del continuo* valesse per ogni insieme analitico. Luzin[74] in 1914 inaugurava invece un altro approccio, accolto e proseguito vigorosamente in Polonia da Sierpinski che dimostrava come molte proposizioni siano conseguenza dell'Ipotesi del continuo. Proprio assumendo *CH* gli insiemisti si resero conto della sua forza, che per altro permetteva loro di risolvere molti problemi aperti. Dal 1919 Sierpiński si fece carico di trovare le proposizioni equivalenti a *CH* e le raccolse in *Hypothèse du Continu* del 1934[75].

Il *Problema del continuo* e molti altri problemi matematici rimasti insoluti, tra cui il problema del Continuo, sarebbero stati risolti, sosteneva Hilbert nel 1925, dalla *Teoria della dimostrazione* da poco elaborata e che, avrebbe dato una fondazione alla matematica[76], ma l'affermazione fu accolta con molto scetticismo sia da Fraenkel[77] che da Luzin[78]. Questi vi ritornò sostenendo che esistevano più *Ipotesi del continuo*, che contraddicevano pure l'originale e che Luzin *sentiva*

---

[73] *Ibidem*, pp.182-183.

[74] In *Luzin N., Sur un problème de M. Baire, in «Comptes rendus hebdomadaires des séance de L'Académie des sciences, Paris», 158/1914, pp.1258-1261*.

[75] Sierpiński W., Hypothése du continu, in «Monografie Matematyczne», vol. 4, Garasiński, Warsaw 1934. Fonte delle conseguenze paradossali di *CH*, citato da Gödel in *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?*, 1947, in Gödel, *Opere*, vol.2, *op. cit*.

[76] Hilbert D., *Die logische Grundlagen der Mathematik*, in «Mathematische Annalen», 88/1923, pp. 151-165, p.151; rist. in Hilbert D., *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, vol.3, 1935, pp. 178-191; [trad.it. di V.M. Abbrusci, *I fondamenti logici della matematica*, in Casari E. (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*. *Scritti fondamentali di logica matematica*, Sansoni Firenze 1979, pp. 67-78].

[77] Fraenkel A., *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin 1928[3].

[78] Luzin N., *Sur les moies de la théorie des ensembles*, in «Atti del congresso internazionale dei matematici, Bologna 3-10 settembre 1928», Zanichelli, Bologna 1929, vol. 1, pp. 295-299.

*essere vere*! Gödel ritiene infatti che Luzin, come lui stesso, credeva che l'*Ipotesi del continuo* fosse falsa[79]. Luzin sperava che la *Teoria della dimostrazione* di Hilbert potesse decidere la situazione, nel senso di fornire una dimostrazione per la sua seconda Ipotesi del continuo, quella che appunto sentiva essere vera ma che contraddiceva l'originale[80]. La mancanza di dimostrazione come di refutazione avviò la considerazione che, probabilmente, quella del continuo fosse una proposizione *indecidibile* con la Teoria degli insiemi e, nel 1923, Skolem ne avanzò l'ipotesi[81]. In effetti durante gli anni Venti non si sapeva neanche se i modelli della teoria degli insiemi dovessero essere studiati nella logica del secondo ordine, come sostenevano Freankel[82] e Zermelo[83] o nella logica del primo ordine come proposto da Skolem[84]. Zermelo infatti in un rapporto non pubblicato della *Emergency Society of German Science*, sosteneva che *CH* risulta vera o falsa in tutti i

---

[79] Gödel K., *Che cos'è il Problema del continuo di Cantor?, op.cit.*

[80] Luzin N., *Sur les ensembles analytiques nuls*, in «Fundamenta mathematicae», 25/1935, pp. 109-131, pp. 129-131.

[81] Si veda Skolem T., *Einige Bemerkungen zur axiomathischen Begründung der Mengenlehre, in Matematikerkongressen I Helsigfors den 4-7 Juli 1922, den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelese*, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, pp. 217-232; rist. in Id., *Selected Work in logic*, (a cura di) Fenstad J.E., Universitetforlaget, Oslo 1970, pp. 137-152 [trad. It. di Cordeschi R., *Osservazione sulla fondazione assiomatica della teoria degli insiemi*, in Cellucci C. (a cura di), *Il paradiso di Cantor*, Laterza Bari 1978, pp. 157-176].

[82] Fraenkel A., *Der begriff 'definit' und die Unhabhänginkeit des Auswahlaxioms*, in «Sitzungsberichte der Preussisches Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse», 1922°, pp. 253-257, trad. ingl. di B. Woodward in van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Harvard University press, Cambridge (Mass.), 1967, pp. 284-289.

[83] Zermelo E., *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, in «Fundamenta mathematicae», 14/1929, pp. 183-198; e Id. *Über Grenzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Fundamenta mathematicae», 16/1930, pp. 29-47 [trad.it. di U. Volli, *Numeri di confine e domini di insiemi*, in Cellucci C., (a cura di) *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 175-196].

[84] Skolem T., *Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo; "Über die Definitheit in der Axiomatik", in «Fundamenta mathematicae», 15/1930, pp. 337-341; rist. in Selected Works, a cura di Jens Erik Fenstad, Universitetsforlaget, Oslo 1970.*

modelli e, comunque è decisa nel secondo ordine[85].

Alla luce dei *Teoremi di Incompletezza* di Gödel, quello che si poteva richiedere per enunciati come l'assioma di scelta e l'ipotesi generalizzata del continuo, formulata da Hausdorff nel 1908 e così chiamata da Tarski nel 1925, era la prova di non contraddittorietà solo relativa. Se la teoria è non contraddittoria, essa rimane tale anche con l'aggiunta dell'enunciato in questione e con la negazione di esso, essendo non decidibile nella teoria. Si tratta in questo caso dell'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel e riguardo a *AC* e a *CH* Gödel propone una soluzione nuova al problema con l'invenzione del concetto di *modello interno*. Con questo nuovo concetto Gödel sblocca le ricerche di un campo in cui non si sapeva come procedere e lo fa traendo ispirazione da tentativi falliti, di Hilbert, e da concetti logici, ideati dal filosofo Russell, estranei alla matematica. Con questo risultato Gödel apre nuove prospettive di ricerca prettamente matematica ma anche di approfondimenti filosofici, come lui stesso auspicava. La risolutiva nozione rende la relativizzazione della non contraddittorietà della teoria a cui si aggiunge un enunciato: in essa la validità della formula, che si ottiene restringendo ad ogni insieme i quantificatori in essa occorrenti, equivale alla validità della relativizzata all'insieme nell'universo.

Intorno al 1935 Gödel notava dunque come restringendo ogni livello della gerarchia cumulativa di Zermelo degli insiemi definibili al primo ordine a quelli ottenuti ai livelli precedenti, si sarebbe ottenuta una classe modello di *ZF* al primo ordine, in cui valgono alcune proposizioni molto importanti, tra cui che l'Assioma di scelta. L'operazione è

---

[85] Il rapporto è reso noto da Moore G. H., *Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory*, in «History and philosophy of logic», 1/1980, pp.95-137, p.134. Anche Kreisel, che non è al corrente degli studi di Zermelo, lo sostiene in *Comments on Mostowski 1967*, in Lakatos I., (a cura di) *Problems in the philosophy of mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science*, *London 1965*, vol.1, North-Holland, Amsterdam 1967, pp. 97-103, pp.99-100.

possibile attraverso l'innovativa scoperta di un modello interno alla teoria e il primo è quello degli assiomi costruibili. Con l'Assioma di fondazione si vuole escludere l'esistenza di atomi, ossia di oggetti diversi dall'insieme vuoto e anche catene scendenti infinite. La totalità ottenuta è costituita di una gerarchia per *iterazione* dell'operazione di insieme potenza su tutti gli ordinali. Considerando invece l'operazione che dà la famiglia dei sottoinsiemi definibili, allora diciamo un insieme definibile, se è l'insieme degli elementi che soddisfano una formula che ha parametri nell'insieme stesso. Da ciò si ottiene la gerarchia degli insiemi costruibili e da cui l'*assioma di costruibilità V=L*[86]. Essendo L modello interno della Teoria degli insiemi, rende valida *AC* in *ZF* e, nel 1937, dimostra essere valida per essa pure *GCH*[87]. Il primo annuncio dei suoi risultati è pubblicato da Gödel nel 1938[88]. Due altri annunci

[86] L'assioma di costruibilità ha conseguenze anche per la gerarchia proiettiva, la gerarchia dei sottoinsiemi di *R* ottenuta dagli insiemi boreliani iterando le operazioni di proiezione o immagine di funzione e di complemento. I primi livelli sono costituiti dagli insiemi analitici o proiezioni di boreliani, dai co-analitici, o complementari di analitici, dalle proiezioni dei complementari di analitici e così via. Gli insiemi boreliani, a loro volta si ottengono dalle operazioni di unione numerabile e complemento e di intersezione.

[87] Gödel esita a pubblicare il risultato di non contraddittorietà relativa di *CHG*, sperando di ottenere l'indipendenza anche per l'Assioma di scelta come spiega nella lettera a Menger del 1937, pubblicata nel volume degli inediti *Collected Works, vol. 5: Correspondece H-Z*, Oxford University Press, Oxford, 2003, p. 115 [trad. it. *Opere*, vol.5, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, e Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2009], anche se altrove sostiene di aver per quel tempo già ottenuta la dimostrazione nella *Vortrag Göttingen* del 1939, in Gödel K., *Collected Works, vol.3*: *Unpublished essays and lectures,* a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Haijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford 1995 [trad. it. *Conferenza [[a]] Göttingen*, in *Opere*, vol. 3, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, e Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2006].

[88] In *The consistency of the Axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, in «Proceedings of the National Academie of Science, USA» 24/1938, pp. 556, 557 [trad. it. *La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo*, in Gödel K. *Opere*, vol. 2, op. cit., pp. 28-29] il risultato di non contraddittorietà è affermato anche per l'esistenza di un insieme non misurabile tale che esso ed il suo complemento sono proiezioni di complemento di analitici di un insieme, nonché è affermato per l'insieme di reali complemento di un analitico che ha la cardinalità del continuo ma non contiene alcun sottoinsieme perfetto. Per queste proprietà della retta sarà data qualche criptica riga di dimostrazione solo nella monografia *Consistency*

con traccia di dimostrazione sono dati nel 1939[89]. Nell'ultimo, 1939°, non precisa la teoria ma ne estende la validità anche a quelle sia con che senza l'assioma di rimpiazzamento ed equivalenti[90]. I risultati sono presentati anche in due conferenze del 1939, l'una tenuta a Göttingen, l'altra alla Brown University. Queste sono state pubblicate negli inediti e si rivelano di notevole importanza per comprendere la parabola del pensiero di Gödel, in cui  afferma esplicitamente di trarre ispirazione da autori precedenti. Già nel suo primo annuncio del 1938 presenta brevemente la sua idea di *costruibile*, che significa essere nella *gerarchia ramificata dei tipi di Russell* ma estesa ad includere ordini transfiniti. Nel 1968, in una lettera a Hao Wang del 7 marzo, polemizzando contro il rifiuto dei metodi semantici, caratteristico del periodo della sua giovinezza, esplicita come la *Teoria ramificata dei tipi* debba essere usata in modo non costruttivo, quindi presupponendo gli ordinali transfiniti, e non in modo costruttivo come chi l'ha ideata. In effetti opera delle revisioni tali da produrre complete novità. Così se Hilbert in 1926 aveva tentato di dimostrare l'*Ipotesi del continuo* e quindi che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con gli ordinali numerabili, Gödel ritiene di aver allentato i vincoli che Hilbert si era posto, considerando definizioni strettamente costruttive (di funzioni numeriche) e iterazioni delle operazioni solo su ordinali

---

*of the Axiom of Choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, appunti di lezioni presi da George W. Brown, Princeton University Press, Princeton 1940 («Annales of mathematics studies», 3); rist. con aggiunta di osservazioni nel 1951 e con ulteriori nel 1966 [trad.it. In *The consistency of the Axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, in «Proceedings of the National Academie of Science, USA» 24/1938, pp. 556, 557 [trad. it. *La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo,* in Gödel K. *Opere*, vol. 2, op. cit., pp. 28-29in Gödel K., *Opere* vol.2, op.cit.]. L'argomento sarà poi ripreso dopo il 1950 da Navikov e Addison avviando la seconda fioritura della teoria degli insiemi.

[89] Ibidem.

[90] Ibidem, usa la lettera *M* per la classe dei costruibili e la definizione è quella di insiemi definibili predicativamente nei vari livelli della gerarchia *M*. La notazione cambierà poi in *L*, pare per «leggi». Da questo passo si evince come la non contraddittorietà dell'assioma di scelta si ottiene non direttamente, ma come risultato collaterale.

costruttivi. Gödel dunque ammette quantificatori anche nelle definizioni e ammette iterazioni per ogni ordinale, ottenendo una definizione di *costruibile* tale solo nel senso di *costruibile relativamente agli ordinali*. In effetti già la dimostrazione di non contraddittorietà relativa dell'Assioma di scelta del 1935 l'aveva ottenuta con riferimento a quella di Russell e Withehead dei *Principia Mathematica* oltre che con quella di *ZF* e di von Neumann. In seguito lavorerà con la sua variante della *teoria delle classi Gödel-Bernays*, *GB*, come fa già durante il semestre autunnale 1938-39 all'*Institute for Advanced Study*. Nella monografia curata da George W.Brown del 1940[91], che raccoglie anche il ciclo di lezioni, sono presenti dimostrazioni complete ma nella teoria delle classi *GB* e usando una diversa *definizione di costruibile*, che si ottiene iterando un numero finito di operazioni, corrispondenti a connettivi e quantificatori, senza alcun accenno alla nozione semantica di definibilità. Solo in seguito si è saputo che probabilmente Gödel aveva trovato l'indipendenza dell'Assioma di costruibilità. Lo comunica Alonso Church nel discorso di premiazione della medaglia Fields a P.Cohen, che rifiuta il premio, per la dimostrazione dell'indipendenza dell'Assioma di scelta e dell'Ipotesi del continuo del 1961. Nel 1967 Gödel commenta i suoi risultati in una lettera a Rautenberg dove conferma le affermazioni di Cohen e sostiene di poter ricostruire le sue dimostrazioni del 1942 sull'Assioma di costruibilità e forse anche per l'Assioma di scelta, ma smentisce di aver imboccato la strada giusta, quella di Cohen, per la dimostrazione dell'indipendenza dell'*Ipotesi del continuo*.

[91] Gödel K., *Consistency of the Axiom of Choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, op. cit.

***Il continuo: da problema matematico a questione filosofica.***

Il problema del continuo di Cantor è stato uno dei problemi con cui Gödel si è confrontato dal 1935 fino alla sua morte ed il contributo *Che cos'è l'ipotesi del continuo di Cantor?* è fra i più significativi, per delineare la posizione filosofica di Gödel. La prima versione del 1947 in particolare[92], anche se non contiene nuovi risultati tecnici, offre chiarimenti sulla teoria degli insiemi e su cosa avrebbe dovuto costituire una soluzione al problema e cercheremo di considerarlo proprio per i contributi che offre alla comprensione del fare matematica. L'articolo nasce dalla richiesta del redattore dell'«American mathematical monthly» Lester R.Ford, che scrive a Gödel nel 1945 chiedendogli un contributo alla serie di articoli a cui già altri avevano partecipato per chiarire alcuni aspetti e problemi della matematica, ne nasce l'unico articolo dal carattere espositivo che Gödel abbia pubblicato su un problema prettamente matematico, piuttosto che un contributo filosofico alla logica. In esso Gödel non discute quale sia la definizione di numero cardinale, accettando la definizione di uguaglianza fra numeri cardinali. Tale definizione è unica, se si accetta la richiesta minimale che ammesso due insiemi abbiano lo stesso numero cardinale, allora fra essi esiste una corrispondenza biunivoca. Il *Problema del continuo* è dunque introdotto come la questione di quanti punti esistono su una retta euclidea o, equivalentemente, come il problema di quanti insiemi di interi

[92] *L'articolo che cos'è il Problema del continuo di Cantor?,* in *Opere* vol.2, op. cit., pp. 180-192, è stato rivisto ed ampliato nel 1964, in *Opere* vol. 2, pp. 252-267, dovuto alla richiesta di Bernacerraf P. e Putnam H. di includere l'articolo e quello su Russell nel loro volume collettaneo *Philosophy of mathematics: Selected Readings,* Prentice-Hall – Blackwell, Englewood Cliffs (NJ) - Oxford 1964 . Già nel *Poscritto*, aggiunto quando l'articolo era stato dato ormai alle stampe, dà conto dei risultati di indipendenza, per esso riportati da Cohen. In questo Gödel da conto di tali risultati e ne prende atto, ribadendo l'interesse filosofico della questione e promuovendo, a riguardo, una ricerca in tal senso e, precisamente, in senso fenomenologico. Nel supplemento, aggiunto nel 1966 dichiara le sue considerazioni sul forcing di Cohen, prendendo però in conto solo quanto con esso non si riesca a fare: rispondere alla domanda se il problema di continuo sia vero meno.

esistono. Questo problema trova senso solo in una rappresentazione "naturale" dei numeri cardinali infiniti, che ci è fornita da Cantor nella sua rappresentazione con gli *aleph*; il problema è sensato, in quanto il numero cardinale di ogni insieme è un *aleph*. Gödel formula il problema del continuo nella domanda: quale *aleph* è il numero cardinale di *R*? ossia quanti elementi ha *R*? L'ipotesi di Cantor voleva essere proprio la risposta a questa domanda, ma Cantor aveva pure affermato di aver dimostrato *CH*, tanto che molti matematici negli anni Ottanta e Novanta dell'Ottocento avevano preso *CH* per vera. Gödel assumendo l'assioma di scelta[93] non distingueva fra l'Ipotesi debole e quella generalizzata del continuo, considerandole equivalenti. Studi successivi faranno emergere quanto sia necessaria una netta distinzione fra le due. In effetti Gödel evidenzia quanto poco si conosce sull'*Ipotesi del continuo*: si sa soltanto che gli insiemi analitici sono solo una esigua parte di tutti gli insiemi. Si conoscevano molte proposizioni che seguivano dall'ipotesi e molte erano altresì le proposizioni equivalenti. La mancanza di conoscenza riguardo alla cofinalità di 2 *aleph* con zero, il suo confine superiore, se sia accessibile o debolmente inaccessibile, se sia singolare o regolare, se sia possibile assegnare qualche cardinale come confine superiore di qualche prodotto infinito di cardinali maggiori di 1, e così via, era solo una parte della ignoranza circa i prodotti cardinali infiniti. Si conoscevano certi confini inferiori di prodotti infiniti, ma grandi e numerose erano le

[93] L'assioma di scelta già nel 1940 era stato dimostrato essere coerente con la teoria degli insiemi e auto evidente quanto gli altri assiomi, per la nozione di *insieme arbitrario*, e dimostrabile, per insiemi intesi come estensioni di proprietà definibili. Per gli insiemi costruibili e gli insiemi definibili in termini di ordinali si veda *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics* del 1946; prima pubblicazione in Davis M., (a cura di) *The undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsovable problems and computable functions*, Raven Press, Hewlett (NY) 1965, pp. 84-88 [trad. it. *Osservazioni al Convegno su problemi di matematica per il secondo centenario di Princeton*, in Cellucci C. (a cura di), *La filosofia della matematica*, op. cit., pp. 137-142 e come *Osservazioni svolte al Convegno del bicentenario di Princeton sui problemi della matematica*, in Gödel K., 2002, *Opere*, vol.2, op. cit.).

lacune nella conoscenza del continuo e del valore dell'ipotesi di Cantor. Il fatto che per *l'Ipotesi del continuo* non fossero state trovate dimostrazioni appropriate non è l'unica significativa mancanza, quanto piuttosto il fatto che il concetto di insieme richiedeva ancora una "analisi [concettuale] più approfondita … di quanto l'analisi non sia abituata a fare"[94]. Per questo Gödel inizia *un'analisi filosofica del concetto di insieme* e lo fa, contestando l'*intuizionismo* e poi i punti di vista semi-intuizionistici, come quelli di Poincaré e Weyl, che negando l'esistenza di enti matematici indipendenti dalla costruzione che di essi ne fa il soggetto conoscente, negano la Teoria degli insiemi, che invece pretende di descrivere un universo indipendente. Gödel sostiene essere fondazione propria per la teoria degli insiemi di Cantor, la teoria assiomatica degli insiemi, anche se inficiata dal *Paradosso della classe* semplificato da Russell. I paradossi per Gödel non costituiscono un problema irrisolvibile, soprattutto perché si esplicano ai limiti delle teorie, laddove entrano in contatto le interpretazioni, facendoli emergere quali problemi epistemologici e non solo logici e che contengono già nel loro porsi la soluzione. Gödel fa proprio il pensiero di Kant per cui: "ci sono scienze, la cui natura porta con sé, che ogni questione che vi si presenti, deve assolutamente poter ricevere una risposta da quel che si sa, poiché la risposta deve derivare dalla stessa fonte da cui deriva la questione"[95].

Il paradosso, infatti, non si verifica se la *nozione di insieme* non è più quella ingenua di Cantor, quanto la nozione iterata di *insieme di*, all'interno della gerarchia cumulativa dei tipi[96]. Gödel dunque ammette un insieme di *Urelemente*, come gli interi, quale base per l'edificazione della gerarchia cumulativa, che mutua da Zermelo 1930[97] e che

---

[94] Gödel K., *Opere* vol. 2, op. cit., p.183.

[95] Kant I., *La critica della ragion pura*, terza edizione di Gentile G., Lombardo Radice G., Laterza Bari 2005, p. 319.

[96] *Ibidem*, nota introduttiva di R.M. Solovay, p. 7.

[97] Zermelo E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Fundamenta mathematicae»,

innesta, vedremo, con la Teoria dei tipi di Russell. In questo modo supera il *realismo ingenuo* di Cantor, ammesso come problematico[98]. Osserva che se gli assiomi usuali della teoria degli insiemi sono coerenti, allora l'*Ipotesi del continuo* è sensata nella misura in cui è dimostrabile, o refutabile o indecidibile e, poiché aveva già escluso nel 1940[99] che fosse refutabile, doveva essere a suo parere indecidibile. Durante il 1942 aveva lavorato intensamente per stabilire l'indipendenza dell'ipotesi e nel 1923 Skolem pure aveva argomentato l'indipendenza di *CH*. Eppure, nonostante fosse quasi certamente indipendente da *ZF* al primo ordine, la dimostrazione della sua indipendenza non avrebbe comunque risolto il Problema.

"Soltanto qualcuno che (come gli intuizionisti) negasse che i concetti e gli assiomi della teoria classica degli insiemi abbiano alcun senso (o un qualunque senso ben definito) potrebbe ritenersi soddisfatto da una tale soluzione, non chiunque ritenga che essi descrivano una qualche realtà ben determinata. Perché in questa realtà la congettura di Cantor deve essere vera o falsa, e la sua indecidibilità dagli assiomi oggi noti può solo significare che questi assiomi non contengono una descrizione completa di detta realtà"[100].

Gödel come Zermelo sostiene che gli assiomi della Teoria degli insiemi non costituiscono un sistema in sé conchiuso, ma anzi il genuino concetto di insieme su cui sono basati ossia la gerarchia cumulativa, suggerisce che ne è possibile una loro estensione mediante nuovi

---

16/1930, pp. 29-47 [trad.it. di Volli U., *Numeri di confine e domini di insiemi*, in Cellucci C., (a cura di) *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 175-196].

[98] Putnam ritiene che Gödel, nonostante lo affermi come problematico, mantenga un realismo ingenuo, perché crede nei possibili. Si veda Al contrario vogliamo fare emergere come Gödel tenti di andare oltre tale realismo con specifiche nozioni, per mantenere quel realismo forte che solo offre quall'ampiezza di movimento che serve allo scienziato.

[99] Gödel K., *The consistency of the Axiom of choice and the generalized continuum hypothesis,* op. cit.

[100] Gödel K., *Che cos'è il problema del continuo di Cantor*, in *Opere* vol. 2, op. cit., p.185.

assiomi che asseriscono l'iterazione dell'operazione di "insieme di"[101]. Gödel con un procedimento per passi tenta un'assiomatizzazione del concetto di insieme. Nella gerarchia cumulativa si inizia con gli interi, poi si ripete l'operazione di passaggio all'insieme potenza, sugli ordinali finiti, fornendo un esempio di un procedimento generale per ottenere insiemi a partire da un insieme *A* e da un buon ordine *R* particolarizzato. Pertanto sollecitava i matematici a cercare nuovi assiomi dei grandi cardinali che fossero decisivi per *CH* e che avrebbero risolto problemi relativi alle equazioni diofantee indecidibili mediante gli assiomi usuali, tenendo in mente i Teoremi di Incompletezza. Nel momento in cui si era giunti a stabilire che tutti gli assiomi dei grandi cardinali noti non riuscivano a risolvere *CH*, in quanto coerenti con l'assioma di costruibilità, Gödel lanciava un eloquente appello che lascia intravedere la sua posizione rispetto agli oggetti della matematica "… Potrebbero esistere assiomi così ricchi di conseguenze verificabili, così illuminanti per un'intera disciplina, e che forniscono metodi così potenti per risolvere dati problemi (e addirittura per risolverli, nella misura del possibile, costruttivamente) che, del tutto indipendentemente dalla loro necessità intrinseca, essi dovrebbero essere assunti almeno nello stesso senso in cui si accetta una ben fondata teoria fisica"[102].

L'indecidibilità di *CH* è per Gödel dovuta ad almeno due ragioni: per prima cosa esistono due classi molto diverse che soddisfano gli assiomi usuali della teoria degli insiemi, quella degli insiemi costruibili e la classe degli "insiemi intesi come molteplicità arbitrarie"[103] e bisognava specificare assiomaticamente a quale delle due classi bisognava riferirsi

---

[101] Ibidem, p. 185-186.
[102] Ibidem,.
[103] Ibidem, p.187. Con la considerazione di determinati assiomi è dunque possibile per Gödel dominare anche le molteplicità arbitrarie, riprese da Herbrandt, considerate oggetti della matematica nella misura in cui soddisfano un sistema di assiomi. Ciò renderebbe in ultimo possibile assumere la nozione di insieme arbitrario infinito e l'insieme arbitrario infinito quale oggetto della matematica. Si veda Herbrandt J., *Ecrits logique*, a cura di van Heijenoort, Presses Universitaires de France, Paris 1968.

se si voleva decidere *CH*[104]. Avendo già verificato la coerenza solo relativa di *CH* con gli assiomi usuali, in quanto risulta vera nella classe dei costruibili, Gödel sostiene che da un assioma "in qualche senso direttamente opposto a questo [[assioma di costruibilità]] potrebbe forse essere derivata la negazione della congettura di Cantor"[105] ed infatti la sola negazione dell'assioma non sarebbe stata sufficiente allo scopo. Nella versione del 1964 dichiara esplicitamente di pensare ad un assioma di massimalità visto che l'assioma di costruibilità è un assioma minimale perché esprime l'insieme potenza di un insieme, quindi l'universo è quanto possibile piccolo. Questo assioma sarebbe stato l'analogo all'assioma di completezza di Hilbert per la geometria, che aveva caratterizzato la geometria euclidea, quindi i numeri reali, come struttura massimale che soddisfaceva gli altri assiomi. Gödel propone per la teoria degli insiemi che gli assiomi dei grandi cardinali siano considerati passi verso la massimalità e, più chiaramente dice a Ulam in una lettera[106], a proposito dell'assioma di von Neumann[107], per cui una classe S è una classe propria se e solo se è equipotente alla classe *V* di tutti gli insiemi. Inoltre Gödel trova *CH* essere indipendente perché implicava delle conseguenze paradossali e di queste fornisce alcuni esempi. All'obiezione per cui molte specie di insiemi ottenuti senza *CH* sono fortemente contro intuitivi, Gödel trovava questi

[104] Ibidem, alla nota 26 menziona soltanto la classe degli insiemi definibili in termini di ordinali e nella nota 20 gli insiemi costruibili. Così nella nota 21 della versione successiva dell'articolo, quella del 1964, Gödel si riferisce solo agli insiemi costruibili, ma in questi include pure quelli definibili in termini di ordinali

[105] Ibidem, p.188, nota 20.

[106] Ulam S. M., *John von Neumann, 1903-1957*, in «Bullettin of the American Mathematical society», 64, 3, pt.2 (supplemento di maggio), pp. 1-49, p.13.

[107] Von Neumann, *Eine axiomamatiesierung der Mengenlehre*, in «Journal für die reine und und angewandte Mathematik», 154/1925, pp. 219-240, rist. in Id. *Collected works*, vol.1: *Logic, theory of sets and quantum mechanics*, a cura di Taub A.H., Pergamon, New York – Oxford, 1961, pp. 34-56.

insiemi di punti implausibili perché controintuitivi e discordanti con la teoria degli insiemi usuale[108].

Stabilire l'indecidibilità di CH di Cantor non avrebbe risolto il *Problema del Continuo* essenzialmente per ragioni filosofiche, per l'ammissione di realtà degli oggetti per la matematica, che li descrive. È questa un'esplicita ammissione di *platonismo* che fa leva sullo stesso paragone posto nello scritto su Russell del 1944[109], in cui si dice altrettanto necessaria l'ammissione di una realtà sottostante "per ottenere un sistema soddisfacente di matematica" quanto l'assunzione della realtà degli oggetti fisici è necessaria "per una teoria soddisfacente delle nostre percezioni sensoriali". L'affermazione di questo punto di vista *platonista* dell'articolo del 1947 viene ripresa e rafforzata nella versione del 1964 sia nel corpo dell'articolo che con il supplemento, scritto a commento della dimostrazione di indipendenza di CH data da Cohen, da pubblicare nel volume collettaneo di Bernacerraf e Putnam[110]. In esso Gödel si descrive come uno "che considera gli oggetti matematici come esistenti indipendentemente dalle nostre costruzioni" e vi ricalca l'analogia con la fisica che aveva avviato nel 1947: "malgrado la loro distanza dall'esperienza sensoriale,

[108] Gödel K., *Opere*, vol. 2, op. cit., p. 192. Cohen non condivide questa affermazione e Martin D. A. in *Hilbert's first problem: The continuum hypothesis*, in Browder F. E., (a cura di) *Mathematical developments arising from Hibert problems*, «Proceedings of symposia in pure mathematics», 28, American Mathematical Society, Providence (RI) 1976, pp. 81-97, p.87, dichiara di non capire perché questi insiemi di punti risultino a Gödel implausibili. Probabilmente è proprio la negazione di quelle conseguenze paradossali di *CH* che Gödel intende essere le plausibili proposizioni che implicano la negazione di *CH* e se in *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics*, op. cit, si stupiva del fatto che un'altrettanto plausibile proposizione che implicasse *CH* non fosse stata trovata, egli la scoverà nel 1970, si veda *A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about ordersof growth*, in Id., *Collected works* vol.3, op. cit., pp. 422-423 [trad. it. *Una dimostrazione dell'ipotesi del continuo di Cantor da un assioma altamente plausibile circa gli ordinali di crescita*, in Id., *Opere*, vol. 3, op. cit, pp. 378-379]. Le sue prospettive a riguardo infatti cambiano.

[109] Id., *La logica matematica di Russell*, in Id., *Opere* vol. 2, op. cit., p.137.

[110] Bernacerraf P. e Putnam H. (a cura di), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Prentice-Hall – Blackwell, Englewood Cliffs (NJ) - Oxford 1964.

però, noi abbiamo qualcosa di analogo ad una percezione anche per gli oggetti insiemistici, come si vede dal fatto che ci si impongono come veri. Non vedo motivi per avere meno fiducia in questa sorta di percezione, cioè nell'intuizione matematica, che nella percezione sensoriale, che ci spinge a costruire teorie fisiche e ad attenderci che le percezioni sensoriali future vi si adegueranno e, inoltre, a credere che un problema oggi non decidibile abbia senso e possa essere deciso in futuro" [111].

***Empirismo allargato***

Gödel ricorre ripetutamente all'*intuizione* e alla *percezione*, almeno nominalmente. Egli ha l'impressione che i matematici siano prevenuti rispetto all'intuizione[112] con particolare riguardo ai logicisti e ai costruttivisti. L'intuizione è all'opera soprattutto in teoria degli insiemi e qui si configura come una forma di conoscenza razionale e non come una evasione dall'obbligo della spiegazione. La percezione razionale con cui cogliamo gli oggetti matematici e le loro relazioni è analoga all'intuizione sensibile e infatti entrambe sono soggette ad illusioni, entrambe sono vincolate o meglio direzionate, entrambe hanno una certa inesauribilità. Così come percepiamo oggetti sensibili da diverse angolazioni, allo stesso modo percepiamo oggetti matematici (concetti) differenti ma equivalenti. Cercare di comprendere o vedere più chiaramente un concetto, come nel caso del concetto di insieme, equivale a cercare di vedere in modo chiaro e preciso quanto ci risulta impreciso. Carattere peculiare degli oggetti matematici è l'astrattezza, ciò che ne rende più difficile afferrabilità e comprensione; dice Gödel "essi chiaramente non appartengono al mondo fisico, e anche la loro

[111] Gödel K., *Che cos'è l'ipotesi del continuo di Cantor? (1947)*, in Id., *Opere* vol. 2, op. cit. p.182.
[112] Wang H., *A logical Journey. From Gödel to philosophy, MIT press, Cambridge (mass.), 1996, p.169.*

connessione indiretta con l'esperienza fisica è molto debole (soprattutto per il fatto che i concetti insiemistici giocano solo un ruolo trascurabile nelle teorie fisiche contemporanee)" e proprio per questa caratteristica differenza degli oggetti matematici da quelli fisici, la percezione di essi è considerata un di un genere diverso, come percezione matematica. Nonostante questo essere remoti all'esperienza Gödel, individua una specie di percezione anche per gli oggetti della teoria degli insiemi, "come si vede dal fatto che i loro assiomi ci si impongono come veri". Questa specie di *percezione* ha carattere diverso da quella sensibile, è l'intuizione matematica, che ci induce a costruire su di essa le nostre teorie fisiche, e che ci consente la speranza che le nostre future percezioni sensoriali concordino con esse, consegnandoci la possibilità che questioni oggi non decidibili possano essere decise in futuro e rivelare il loro senso. Così la situazione di conflittualità in cui essi inducono, non è altro che l'analogo degli inganni dei sensi. L'intuizione matematica è una forma di conoscenza complessa che, posta in relazione con la percezione sensibile, permette di chiarire meglio pure la natura di questa, sorpassando la caratterizzazione che ne dà il neopositivismo e anticipando alcune delle idee che si svilupperanno a partire dagli anni Sessanta del Novecento, quelle di stampo post-positivistico[113]. L'intuizione matematica infatti non deve essere intesa come una facoltà che "ci dà la conoscenza immediata degli oggetti interessati. Al contrario, sembra che, come nel caso della fisica noi ci formiamo le nostre idee di quegli oggetti anche a partire da qualcos'altro, che è dato direttamente. Solo che questo qualcos'altro non è, o non è precipuamente, rappresentato dalle sensazioni". Che oltre alle sensazioni qualcos'altro sia *dato* "immediatamente segue (senza alcun

[113] Tale corrente di pensiero pur mantenendo la base dei principi del neopositivismo (l'osservazione empirica per la percezione della realtà), smonta la fede incondizionata nell'oggettività del dato, *mito del dato*, e nella neutralità del linguaggio conservativo. L'atto del conoscere resta condizionato dalle circostanze sociali e dal quadro teorico in cui si colloca.

riferimento alla matematica) dal fatto che persino le nostre idee relative agli oggetti fisici contengono costituenti che sono qualitativamente differenti dalle sensazioni o da mere combinazioni di sensazioni, ad esempio l'idea stessa di oggetto, mentre, d'altra parte, nel nostro pensiero noi non possiamo creare nessun elemento qualitativamente nuovo, ma solo riprodurre e combinare quelli che sono dati. È evidente che il *dato,* che soggiace alla matematica, è strettamente legato agli elementi astratti che sono contenuti nelle idee empiriche". Tanto meno *i dati* di questo secondo tipo, non potendo essere associati all'azione di certe cose sui nostri organi di senso, come vuole la teoria della conoscenza, sono allora qualcosa di prettamente soggettivo, come asserisce il *costruttivismo* e come asseriva Kant. Essi possono certo rappresentare un aspetto della realtà oggettiva, ma la loro presenza in noi deve essere dovuta ad un altro genere di relazione fra noi e la realtà. È proprio questa relazione che interessa a Gödel, che sottolinea come essa si esplichi continuamente, per la conoscenza matematica, proprio attraverso l'intuizione ed, infatti, essa non è considerata frutto di un senso ulteriore, ma quale costituente della ragione. Nella teoria degli insiemi, in particolare, i "ripetuti appelli all'intuizione matematica sono necessari non solo per avere risposte univoche alle questioni della Teoria degli insiemi transfiniti, ma anche per la soluzione di problemi delle teoria finitista dei numeri (del tipo della congettura di Goldbach), dove non è possibile dubitare della significatività e della non ambiguità dei concetti implicati. Questo segue dal fatto che per ogni sistema assiomatico ci sono sempre infinite proposizioni indecidibili di questo tipo"[114]. Per Gödel la sola esistenza di un'intuizione, sufficientemente chiara da produrre assiomi, è quanto basta a dare significato alla questione della verità o della falsità di certe proposizioni, quali *l'Ipotesi del continuo*, trascurando una precisa determinazione degli oggetti della matematica. E'

[114] Gödel K., *Supplemento a Che cos'è il problema del continuo di Cantor? (1964)*,op. cit.

interessato ad essi solo come presupposto per la conoscenza matematica oggettiva, per quell'insieme delle proposizioni matematiche vere e che tiene distinta dalla matematica soggettiva, l'insieme delle proposizioni dimostrabili. Solo gli oggetti matematici consentono una teoria soddisfacente di sistemi matematici come gli oggetti fisici e, analogamente, ne consentono delle nostre percezioni sensoriali. Le proposizioni che ne scaturiscono, infatti, non sono affatto interpretabili come proposizioni sui «dati» alla stregua di percezioni sensoriali[115], così come assumono il loro senso a prescindere da una dimostrazione di esse, che per altro non è possibile se non ne viene afferrato il senso. "È possibile infatti congetturare la verità di una proposizione universale (per esempio, che sarà in grado di verificare una certa proprietà per *qualsiasi* numero venga proposto) e allo stesso tempo congetturare che non esista alcuna dimostrazione di questo fatto. Non è difficile immaginare situazioni in cui entrambe queste congetture sarebbero ben fondate". Ciò che conta per Gödel è *l'accesso ad un fatto*, è appunto il *dato* dinanzi al quale si trova il matematico e che questi non può fare a meno di assumere, perché ne sente l'imposizione e la forza dei vincoli che come tali resistono. È il caso della teoria degli insiemi i cui assiomi "ci si impongono come veri" e la cui evidenza non può essere ignorata. Da queste osservazioni è già ravvisabile l'impatto dello studio della fenomenologia husserliana, che Gödel incaricherà di restituirci una scienza rigorosa, ma sulla base della chiarezza evidente degli oggetti di cui tratta. In essa riscontra una giustificazione nuova per le proprie considerazioni riguardo alla matematica ed alla scienza in generale, quale conoscenza di oggetti. Già nell'articolo del 1944 su Russell[116] Gödel tenta una giustificazione del *dato* della conoscenza, di quanto ci si impone, intendendo i concetti che ricorrono nelle teorie, per esempio gli insiemi, come

[115] Id., *Che cos'è il problema del continuo di Cantor? (1947)*, op. cit.
[116] Id., *La logica matematica di Russell*, ibidem, pp. 124-145.

postulati per spiegare i dati[117], tant'è che anche nella conoscenza dei fatti empirici ricorre qualcosa che ad essi non è riducibile, come il concetto di oggetto. Entrambi i tipi di oggetto quello strettamente empirico e quello astratto sono necessari e Gödel usa la riconosciuta necessità del primo, per porre quella secondo, dunque per rendere possibile un "sistema soddisfacente della matematica". avvia dunque un parallelismo fra i due tipi di dati, modo conosciuto con il termine di *parità epistemologica*. Di essa fa un ampio uso proprio nell'articolo su Russell, da cui attinge il parallelo fra la logica e l'epistemologia: entrambe hanno a che fare con il mondo[118]. La questione che si pone è come sia da intendere il parallelismo fra gli oggetti della matematica e gli oggetti fisici.

I *dati*, però, non sono riducibili alle percezioni sensoriali effettive, in base alle quali, "è impossibile" interpretare le proposizioni della matematica, quanto come classi nate dalla considerazione di una *pluralità di cose date*[119]; così i concetti devono essere interpretabili come la considerazione delle proprietà e delle relazioni fra le cose esistenti indipendentemente dal soggetto[120]. Un caso particolare della nozione di concetto è proprio la nozione di *proprietà degli insiemi*, riconosciuta fra le nozioni primitive della Teoria degli insiemi per via del ruolo che le classi vi giocano e per la generalizzazione rispetto ai predicati contenuti nell'Assioma di rimpiazzamento e di separazione. Così le classi sono per Gödel ciò che "nella formulazione di Zermelo

[117] M.Dummett, *Truth and other enigmas*, Duckworth, London 1978, [trad.it. di M.Santambrogio, *La verità ed altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano 1986 in particolare "verità", "Realismo" e "La verità del passato"].

[118] Russell B., *Introduction to mathematical philosophy*, Allen and Unwin, London-New York 1919, [trad. it. Introduzione alla filosofia matematica, Newton e Compton, Roma 1970 p.189].

[119] Gödel ammetterà poi l'ammissibilità in matematica di molteplicità arbitrarie o insieme arbitrariamente infinito; si veda Herbrandt J., *Ecrits logique*, op. cit.

[120] Gödel K., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p. 133.

compare come *definite Eigenschaften*"[121]. Gödel ha dunque una forte motivazione per aggiungere alla sua ontologia qualcosa come i concetti[122] e suo obiettivo è quello di elaborare una *Teoria dei concetti* come teoria impredicativa delle proprietà, basata sulla Teoria semplice dei tipi[123] ma più potente e, infatti, specificazioni non predicative di proposizioni non conducono di per sé ad assurdi. Una proposizione potrebbe anche implicare una totalità di proposizioni alla quale essa appartiene, contraddicendo la seconda delle tre forme del *Circolo vizioso*. Allo scopo di edificare una teoria dei concetti, resa possibile dalla teoria semplice dei tipi estesa ad ordini transfiniti, sostituisce le occorrenze delle funzioni proposizionali con i termini *classe* e *concetto* mettendo in pratica un'interpretazione estensionale della teoria che fa cadere la ramificazione e corregge la direzione imboccata da Russell, risalendo ad uno dei suoi stessi suggerimenti del 1908. L'interpretazione è resa possibile da uno dei due sensi di analitico[124] riscontrati per le proposizioni e, in particolare, dal secondo analizzato da Gödel. Per esso si dà che "una proposizione viene detta analitica se essa vale in base al senso dei concetti che occorrono in essa dove questo senso può essere anche indefinibile (ossia irriducibile a qualcosa di più fondamentale)"[125]. In questo modo ogni funzione proposizionale definisce un concetto e, se si esclude l'impegno riduzionistico di Frege, i concetti di Gödel somigliano molto agli oggetti

[121] Gödel K., *La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo con gli assiomi della teoria degli insiemi*, op. cit, in *Opere* vol.2, op. cit, p.37.
[122] Ibidem.
[123] Gödel K., La *logica matematica di Russell*, op. cit., p.135.
[124] In risposta alla questione se gli assiomi dei *Principia* siano o meno da considerarsi analitici, Gödel ritiene che essi non lo sono per l'indecidibilità dell'aritmetica: se si ammette la riduzione infinita con proposizioni intermedie di lunghezza infinita, come suggerito dalla teoria di Leibniz delle proposizioni contingenti, allora tutti gli assiomi dei *Principia* si possono dimostrare analitici, ma nel dimostrarlo si richiederebbe l'intera matematica; si veda Gödel K., *Alcuni problemi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche*, manoscritto della conferenza tenuta alla Brown University il 26 dicembre del 1951, in *Opere* vol.3, op. cit., pp. 268-286.
[125] Gödel K., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.144.

che Frege indica come significato di espressioni, che difficilmente si distinguono dalla estensioni.

Gödel non ha da offrire una teoria del concetto e per questo non resta altro che una nozione intuitiva[126]. La difficoltà consiste proprio nel fatto che "noi non percepiamo i concetti di concetto e di classe in modo sufficientemente distinto, come è mostrato dai paradossi"[127] e la via da percorrere non consiste nel riduzionismo di Russell, che di proposizioni ambigue che ammettono illegittimamente entità, fornisce definizioni contestuali esplicite, facendo un uso diverso del termine analitico. Quanto nel tentativo di "rendere più chiaro il senso dei termini classe e concetto e nel costruire una teoria coerente di classi e di concetti come entità esistenti oggettivamente"[128]. Ciò che occorre è un'ulteriore delucidazione dei concetti primitivi, che per il momento Gödel non può fare altro che sentire come veri, imponendosi come tale per la loro evidenza[129].

Gödel, comunque, sositiene che il logicismo non abbia esaurito tutte le sue potenzialità e considera la *Teoria semplice dei tipi* la migliore al momento disponibile per una Teoria dei concetti, ma ci si aspetta in futuro una teoria più adeguata, per la quale fornisce solo suggerimenti[130]. Trovando spunto nel fatto enigmatico che un concetto può essere assunto come "significante ovunque", Gödel ha in mente una *Teoria senza tipi* tranne che in certi punti, basandosi sull'idea di Russell che le funzioni proposizionali hanno un campo di significatività limitato. Il programma di costruzione di una Teoria senza tipi ha attratto molti logici e matematici, ma senza che si sia prevenuti ad alcun risultato. Gödel stesso non ha pubblicato altro a riguardo e, nonostante dagli appunti stenografici emerga che ci stesse lavorando,

---

[126] Ibidem, p. 134.
[127] Si veda la Nota Introduttiva di G. Boolos a Gödel K., *Alcuni problemi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche*, op. cit., p. 257.
[128] Ibidem, p.258.
[129] Gödel K., *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?* (1964), op. cit.
[130] Id., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.129-130, 143.

non ne conosciamo i risultati nè tornerà più sull'argomento. Solo nello scritto del 1964 si riscontra un riferimento a tale obiettivo, in un'osservazione critica della Teoria delle categorie: "lo spirito delle odierne discipline astratte della matematica, in particolare della teoria delle categorie, trascende questo concetto [iterativo] di insieme, come risulta evidente, ad esempio, dall'autoapplicatività delle categorie"[131]. Tale concetto non ingenuo di insieme è, in effetti, sullo sfondo di tutto l'articolo sul Problema del Continuo e con esso l'insieme risulta ottenuto per *applicazione iterata della formazione di insiemi di oggetti previamente dati*, a cominciare da certi oggetti ben definiti, gli interi, quanto di più vicino alla percezione. È questo il senso in cui cogliere l'affermazione della *naturalità* degli oggetti matematici come i concetti: essi sgorgano con naturalezza dalla percezione di certe datità indagate con ragione matematica. La fenomenologia husserliana gioca qui un ruolo importante come metodo per la chiarificazione del loro significato, che non può consistere semplicemente nel dare definizioni esplicite di certi concetti in termini di altri, come suggerisce Russell, quanto piuttosto in un riferimento a concetti solo se conclusivamente dati, quali concetti primitivi.

[131] Id., *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?* del 1947, op. cit, p. 256 , nota 12.

## *AFFERMAZIONI DI PLATONISMO*

### *Il circolo dei paradossi*

Nell'articolo del 44 su Russell Gödel fa un ampio uso della cosiddetta *parità epistemologica*, per avanzare la tesi della necessità degli oggetti matematici. L'articolo del 1944 La logica matematica di Russell[132], più che un contributo alla logica, si configura come critica al tentativo di Russell per la soluzione dei paradossi che emergevano nella Teoria degli insiemi**.** Costituisce la più robusta affermazione di realismo per la

[132] Una pagina sciolta degli estratti contiene alcune precisazioni stilistiche. L'articolo fu scritto per *The philosophy of Bertrand Russell*, volume della collana Biblioteca dei filosofi viventi, creata da P.A.Schlipp. Per la stessa collana Gödel contribuì con l'articolo su Einstein *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitatio*n, in «Reviews of modern physics», 21, pp. 447-450, [trad. it. *Un esempio di un nuovo tipo di soluzioni cosmologiche delle equazioni di campo gravitazionale di Einstein*, in Gödel K., *Opere* vol.2, op. cit., pp. 195-203. Vi avrebbe dovuto partecipare ancora con l'articolo, di cui però abbiamo solo abbozzi, su Carnap *Is mathematcs syntax of language?* [tra.it *La matematica è sintassi del linguaggio? *1953/1959-III* in *Opere* vol.3, pp. 298-319 e 1953/59-V in *Opere* vol.3, pp.320-326]. Non volle contribuire al volume su Popper. Il manoscritto, dopo le lettere di inizio lavori nel novembre 1942, fu avviato nel maggio 1943, ma molte furono le revisioni dell'autore e , quando Russsell avrebbe dovuto replicare, l'articolo non era ancora finito, dunque rimase senza replica. Gödel invitò Russell a rispondere e tentò di convincerlo della giustezza delle proprie critiche al suo lavoro, ma senza esito; Russell, come lui stesso si giustificò, non lavorava da troppo tempo, ben diciotto anni, a certi argomenti.

matematica e per i suoi oggetti dopo il[133], attraverso la presentazione critica delle soluzioni ed una loro valorizzazione.

Nell'*Appendice B* della seconda edizione dei *Principia* del 1925, Russell aveva proposto un tentativo di Teoria dei tipi che, nella nell'introduzione al 1937 dirà essere solo un "abbozzo". La soluzione ripresa era quella già trovata nel 1908, dunque, considerata soddisfacente e ritrattata nel Secondo Capitolo dei *Principia* intitolato *La teoria dei tipi logici*. In esso viene considerato, prima della pubblicazione del 1926[134] di Ramsey, come tutti i paradossi rilevanti risultino da una qualche sorta di Circolo vizioso[135], che si fonda sulla supposizione che la collezione di oggetti può contenere membri che possono essere definiti solo attraverso la collezione tutta, nella sua pienezza[136]. Per questo la Teoria semplice dei Tipi è il metodo con cui gli oggetti (o le espressioni simboliche) vengono sistemati in diversi tipi: individui, proposizioni individuali, relazioni fra individui, proprietà delle relazioni, che comportano un'analoga gerarchizzazione dell'estensione, divisa in livelli. Il Principio che viene individuato risulta essere un criterio di discrimine per le proposizioni dotate di senso e quelle non dotate di senso, o anche metafisiche, agendo quale criterio di insignificanza per le proposizioni in cui le variabili non appartengono al

[133] Altra affermazione di realismo per la matematica, ma più cauta, è quella di Bernays *Sur le platonisme dans la mathématique*, in «L'inseignement mathématique», 34/1935, pp.52-69; in Bernacerraf e Putnam (a cura di), *Philosophi of mathematics. Selected readings*, Prentice-Hall – Blackwell, Englewood Cliffs (NJ) - Oxford 1964, pp. 274-286.

[134] Ramsey F.P., *The foundations of mathematics*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», s.2, 25, pp.338-384; rist. in Id., *The foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, a cura di Braithwaite B.R., Kegan Paul, London 1931, pp. 1-61 [trad.it. Belli E., Nicoletti e Valente M., *I fondamenti della matematica ed altri scritti di logica*, Feltrinelli, Milano 1964].

[135] I paradossi considerati sono: Il paradosso del mentitore, quello di Russell e una versione di questo riguardo alle relazioni piuttosto che agli insiemi, il paradosso Burali-Forti del numero ordinale di tutti gli ordinali, il paradosso di Richard riguardo la definibilità dei numeri reali e le sue due varianti.

[136] Russell B. e Whitead A. N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, England 1910/13 seconda edizione, 1925–1927, [trad.it. parziale Parrini P. (a cura di), *Introduzione ai Principia Mathematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1977], p. 39.

tipo appropriato. Alla luce della Teoria dei tipi viene notevolmente approfondito il solco fra la forma logica e la forma grammaticale e ciò che è significante nella logica si allontana enormemente da ciò che lo è per il senso comune[137]. Con essa asserzioni del tipo “gli attributi sono relazioni”, appaiono prive di senso e costituiscono il prezzo da pagare perché siano sensate altre asserzioni del tipo “Io mento”. L’erroneità dei paradossi, seguendo il filo di Russell, sta nel fatto che si definiscono, o meglio si assumono tacitamente, delle totalità la cui esistenza comporterebbe quella di certi nuovi elementi della stessa totalità e, precisamente l’esistenza di elementi definibili solo in termini dell’intera totalità. Questo quanto era emerso dall’analisi condotta sui paradossi del tipo di quelli in cui incappava la Teoria degli insiemi di Cantor matematicamente e, logicamente, il sistema di Frege. Da qui la formulazione del principio che, proprio a partire dal rifiuto di *totalità illegittime* o meglio illegittimamente assunte, valesse da criterio di insignificanza permettendo l’individuazione di questo tipo di circolarità, che nasce da proprietà plausibili di atteggiamenti proposizionali e dei loro oggetti. In effetti, quando si prende sul serio i paradossi, potrebbe essere necessario ripensare i metodi comunemente accettati per affrontarli ed è questo cambiamento di metodo che interesserà il nostro, ma in un senso più radicale. Per evitare i pericoli del Circolo Vizioso sarebbe bene eliminare ogni *definizione impredicativa* dalla matematica, che vi giocano un ruolo troppo importante, tanto da

[137] In generale *teoria delle descrizioni* e *teoria dei tipi* mostrano per Russell l'indispensabilità dell'analisi logica per ogni discorso filosofico per non cadere in trappole grammaticali, molto ben dissimulate. Sul piano ontologico l'universo ontologico dei *Principia* lascia il posto ad un universo stratificato, nel testo *Logical Atomism* del 1924, alla cui base è plausibile postulare una sorta di atomi logici di quegli individui la cui caratteristica è di essere privi di complessità. Questi temi, fino alla considerazione più profonda sulla natura del linguaggio e sul rapporto fra logica e metafisica e fino al problema metafisico dell'esistenza di enti assolutamente semplici, saranno sviluppati da Wittgenstein nel *Tractatus Logico-Philosophicus* influenzando, a sua volta il successivo pensiero di Russell che per ora si fermava alla trattazione dei simboli di un linguaggio formale che stanno per oggetti di un singolo tipo anche se non sono semplici.

rischiare che ampie parti di essa sfuggano alla ricostruzione logica, l'unica che le possa inverare nell'ottica logicista. Per questo Russell, allora, si trova costretto ad incrementare la sua *Teoria dei tipi* con il logicamente controverso *Assioma di riducibilità*. L'assioma vuole che per ogni funzione proposizionale ne esista una predicativa, cioè che sia dell'ordine immediatamente successivo a quello del suo argomento, formalmente equivalente. Così qualsiasi espressione funzionale di ordine $\tau$ è estensionalemente equivalente, dunque riducibile, ad un'espressione funzionale di ordine $\sigma$, solo se $\sigma$ è di ordine inferiore a $\tau$. La *Teoria ramificata dei tipi* risultò, notoriamente, essere debole come strumento per eseguire il programma logicista che aveva ispirato il progetto. In particolare i numeri reali non possono essere localizzati in un solo tipo e risultano sparsi fuori, lungo una serie di ordini diversi. Inoltre sin da subito *l'Assioma di riducibilità* fu considerato un imbarazzo per il programma logicista, di formalizzare l'analisi come una dilazione definizionale della logica. Gli assiomi di un sistema di ispirazione logicista devono essere plausibili come assiomi della logica piuttosto che come assiomi della matematica o di un altro dominio di indagine. L'Assioma di riducibilità può essere motivato solo nelle condizioni di utilità delle sue conseguenza e finisce per essere motivato nello stesso modo in cui lo sarebbe un assioma non logico, "induttivamente" dice Gödel. È un Assioma posto *ad hoc* e ciò viola il Principio del circolo vizioso alla lettera e nello spirito, minandone la sua stessa motivazione[138]. Gödel si affida alla raffinata analisi dei paradossi epistemologici fornita da Ramsey, che rende chiaro come la Teoria semplice dei tipi sia sufficiente a risolvere anche i paradossi epistemologici, nonostante sia proprio l'insufficienza della Teoria dei tipi semplice rilevata da Russell per la soluzione dei paradossi epistemologici, del tipo del mentitore, a spingerlo alla formulazione della Teoria degli ordini. La forma diretta del Principio del circolo

[138] Si veda Quine W. Van Orman, *New foundations for mathematical logic*, in «Ameriacan Mathematical monthly», 44/1937, pp. 70-80.

vizioso viene implementata, allora, in modo che si assegnano diversi ordini, così chiamati i livelli della gerarchizzazione di un altro genere di entità, ossia dei predicati, quelle espressioni che, variabili incluse, indicano le classi. In questo modo un predicato di livello $\tau$ non può essere predicato di un termine $t$ del livello $\tau$. Le espressioni devono essere riformulate secondo il Principio, sono infatti ancora formule non ben formate. L'applicazione della *Teoria dei tipi*, la tipizzazione e "organizzazione" in livelli degli argomenti (possibili) di funzioni, portata avanti nell'*Appendice B* della edizione del '37 dei *Principia* conduce fino all'esclusione del Principio del circolo vizioso stesso quale meccanismo di discrimine. La *Teoria degli ordini*, la gerarchizzazione dell'estensione dei quantificatori, combinata con la Teoria dei tipi semplice porta alla formulazione della *Teoria dei tipi ramificata*. Se la Teoria dei tipi semplice introduce una gerarchizzazione ontologica degli insiemi, la Teoria dei tipi ramificata mira a restringere l'universo delle entità insiemistiche alle sole entità definibili "predicativamente", ossia senza il riferimento alla totalità alla quale appartengono. La complicazione è notevole e del tutto indipendente dalla Teoria degli ordini e dal Principio del circolo vizioso, virtualmente escluso[139], e "non ha nulla a che fare con esso" dice Gödel. I matematici trovano l'apparato degli ordini, bisognoso della riducibilità, come goffo inelegante ingombro e si fanno più responsabili dei filosofi della sua dismissione[140].

[139] In questo senso pure sono state proposte formalizzazioni come quella di A. Church, *Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski,* «Journal of Symbolic Logic», 41/ 1976, pp.747–760, e quella di Irving M. Copi, *The Theory of Logical Types.* Routledge and Kegan Paul, London, 1971.
[140] Wilhelm Ackerman così si pronuncia nella *Prefazione* a Hilbert and Ackermann, *Grundzuge der theoretischen Logik,* Springer-Verlag, Berlin, seconda ed., 1937.

***Critica al principio del circolo vizioso***

Nello scritto del 1944 *La logica matematica di Russell* Gödel propone una descrizione classica del pensiero del logicista, ne iscrive l'opera nel solco di pensiero di Frege e Peano avendo fatto pieno uso nei *Principia Mathematica* del nuovo metodo a cui i due, in diversa misura, avevano collaborato. Con esso Russell aveva effettivamente derivato ampie parti della matematica da un numero ristretto di concetti logici e di assiomi compiendo la prima presentazione comprensiva e approfondita di una logica matematica e della derivazione della matematica da essa. La logica matematica è una formulazione precisa e completa della logica formale e ha due aspetti molto diversi essendo una parte della matematica che tratta di classi, relazioni, combinazioni di simboli anziché di numeri, funzioni, figure geometriche, ecc; essendo però pure una scienza che precede tutte le altre, contenendo le idee e i principi che sottostanno a tutte.

Pur non volendo scendere in troppi dettagli sul formalismo o sul contenuto matematico dei *Principia*, diversamente da quanto fa Quine nel 1941[141], Gödel non può fare a meno di rilevare quanto l'opera di Russell e Whitehead compisse un vero passo indietro rispetto a Frege per la precisione formale della rappresentazione dei fondamenti, contenuti nei capitoli 1-21 dei *Principia*. L'opera manca di un'enunciazione precisa della sintassi del formalismo, omettendo definizioni sintattiche anche laddove sarebbero necessarie alla dimostrazione. Il caso è quello dei *simboli incompleti* che non sono introdotti con definizioni esplicite ma con regole, mediante cui parafrasare proposizioni che li contengono in proposizioni che non li contengono. Perché avvenga una traduzione univocamente determinata, obietta Gödel, e in che misura le regole si applichino

[141] Quine W. Van Orman, *Whitehead and the rise of modern logic*, in Schilipp (a cura di), *The philosophy of Alfred North Whitehead*, "Library of living philosophers", Northwestern University, Evaston (III.), Seconda Edizione Tudor, New York, 1941, pp. 125–16; rist. in Quine, *Selected logic papers*, Random House, New York 1966.

anche alle parafrasi, le nuove espressioni in cui i *simboli incompleti* sono rimpiazzati dalle loro definizioni, è necessario conoscere tutte le possibili espressioni, cioè tutto il panorama sintattico, ma che sia sintatticamente fornito. Le sostituzioni nei teoremi, corrispondenti alle definizioni, sono eseguite senza che ne sia dimostrata la regola di sostituzione dei simboli definiti con il loro *definiens*. Inoltre, applicando questa regola ad espressioni che contengono altri simboli definiti, l'ordine di eliminazione per questi è considerato indifferente pur non essendo ciò sempre vero[142]. Anche per questo il vero contributo, che Russell avrebbe apportato alla logica matematica, è di aver introdotto molte idee interessanti contenute principalmente nelle sue prime opere. Gödel si riferisce in particolare all'opera del 1906 *On Some Difficulties in the Thoery of Transfinite numbers and Order Types*[143] in cui faceva dei brevi cenni alla Teoria dei limitazione di grandezza e alla Teoria zig-zag[144], ma volge la sua attenzione al Principio del Circolo

[142] Gödel K., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p. 125.
[143] Russell B., *On Some Difficulties in the Thoery of Transfinite Numbers and Order types,* in «Proceedings of the London Mathematical Society», 2/1906, 4, pp. 29-53; rist. in *Essays in Anlysis*, a cura di Lackey D., Allen and Unwin, London [trad. it. *Saggi logico-filosofici*, Longanesi, Milano 1976, cap.7.
[144]La Teoria degli insiemi, sviluppata da Zermelo e Freankel nel 1908 e risistemata da T. Skolem nel 1922, può essere considerata un'elaborazione della teoria estensionale che fa dipendere l'esistenza di una classe dall'estensione della funzione proposizionale, che non deve però essere molto grande (limitazione di grandezza). Questo sistema assiomatico è scritto mediante un -linguaggio di primo ordine, un linguaggio formale che serve per gestire meccanicamente enunciati e ragionamenti che coinvolgono i connettivi logici, le relazioni e i quantificatori usati, però in riferimento solo a elementi dell'insieme e non a sottoinsiemi; presenta un numero infinito di assiomi essendo usato uno schema di assiomi, ossia una scrittura simbolica che rappresenta schematicamente delle regole di costruzione per un insieme di formule ben formate, anche infinito, da includere tra gli assiomi di una teoria del primo ordine. Se intento di Russell era quello di arrivare all'eliminazione delle classi, relativamente a queste, gli assiomi von Neumann – Bernays – Gödel aggiungono il concetto di classe a quello di insieme e in un sistema equivalente, nel senso che qualsiasi teorema riguardo agli insiemi che può essere provato in un sistema, può esserlo anche nell'altro. J. von Neumann, nel 1929, in *Über eine Wiedersruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre* del 1929, specifica cosa si intenda per "troppo grande" e quale sia la limitazione per l'estensione specificando che non troppo grande debba intendersi come non equivalente all'universo di tutte le cose.

Vizioso. Il Principio del Circolo Vizioso è formulato in due modi: la forma diretta e il suo contrario. La formulazione della prima recita: "ogni volta che un elemento implichi la totalità della collezione, lo stesso non deve essere uno di questa collezione". La forma indiretta, invece: "nessuna totalità può contenere elementi definibili solo in termini di questa totalità, o elementi che comportano o presuppongono questa totalità"[145]. Il Principio vuole dunque essere un criterio di insignificanza per tutte quelle proposizioni che, rimandando a queste totalità assunte in modo illegittimo, si riferiscono ad entità non esistenti. Qualsiasi dichiarazione su *tutte le proposizioni*, con *tutte* da intendere nel modo delle totalità *illegittime*, non può esprimere una proposizione perchè priva di significato, di denotato. Le proposizioni false indicano niente e non il falso, come per Frege[146]. Il Principio del

[145] Russell B. e Whitehead A.N., *Pricipia Mathematica*, op. cit., p.40.

[146] Frege era giunto a questa conclusione intendendola, però, in senso metafisico e rinverdendo la dottrina eleatica dell'Uno (si veda Frege G., *Über Sinn und Bedeutung,* in "Zeitschrift für Philosophie und philosphische Kritik", N.S., 100, pp.25-50, 1892, p.35; [trad. it. di Stefano Zecchi in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Gruppo Editoriale Fabbri, Bompiani, Sonzogno, Etas S.p.A., Milano 1985, pp. 9- 32]). Nelle diverse proposizioni analizziamo in altrettanti modi diversi il Vero, modi di espressione del Vero, la comune significazione di tutte le proposizioni vere. Noi analizziamo il Vero in modi diversi nelle diverse proposizioni, essendo il vero il nome usato per la significazione comune di tutte le espressioni vere. Il vero dunque dipende non solo dai suoi costituenti ma pure dal modo di espressione per essi, se veri o anche se falsi. Il correlato concettuale del fatto oggettivamente esistente (o 'il Vero') è distinto dalla *Bedeutung*, ed è il suo senso (*Sinn*). Che il vero sia un fatto possibile o meglio la possibilità di un fatto, che esisterebbe anche nel caso della proposizione falsa, è una conclusione rifiutata da Russell che non può ammettere cose "curiosamente umbratili" esistere realmente, anche se considerando il fatto, non ne considera l'altra componente, quella psicologica, detta da Gödel "significazione" e che corrisponde alla credenza. Secondo Russell ciò che corrisponde ad un enunciato nel mondo esterno è un fatto, ma ritenendo che la relazione fra un enunciato ed un fatto sia diversa da quella fra un nome e la cosa, non usa *significare* per riferirsi alla relazione fra un enunciato e il mondo esterno, preferendo, nei primi lavori, il termine *indicare* o *esprimere* o, ancora, la locuzione *essere un simbolo per*. Russell dunque compie una distinzione nel *bedeuten* di Frege, essendo questa la combinazione fra l'*indicare* e il *denotare*, che sta per la relazione fra un nome e la cosa. Se per Frege tutte proposizioni false hanno la stessa significazione, significano il falso, per Russell enunciati falsi indicano niente, poiché enunciati veri indicano fatti. Egli ritiene che la teoria di Frege si applicherebbe ad enunciati

circolo vizioso è problematico già a partire dalla sua formulazione, che non ha ricevuto ulteriori chiarificazioni, e tale si rivela in molti sensi. Gödel ne sottolinea l'ambiguità, potendo essere interpretato in modi che sono significativamente diversi. Affinché questo sia applicabile ai paradossi intensionali, occorre assumere che "ogni funzione proposizionale presuppone la totalità dei suoi valori"[147], dunque la totalità dei suoi argomenti. Se così non fosse il concetto "non predicabile di sé stesso" non presupporrebbe alcuna totalità degli oggetti a cui si riferisce, ossia il suo campo, non presentando quantificatori ossia i simboli che stanno per "esiste un oggetto" e per "tutti gli oggetti". In questo caso, non presupponendosi alcuna totalità, il Principio potrebbe ben essere applicato a sé stesso. Quello che ne

---

falsi che indicando tutti la stessa cosa, il nulla, mentre enunciati veri possono indicare parecchie cose diverse. Russell invece di far cadere il principio sulla significazione di espressioni composte, preferisce negare, anche se non esplicitamente, che una frase descrittiva denoti l'oggetto descritto. Essa infatti ha solo un senso contestuale. La necessità dell'indipendenza degli oggetti logici porta Frege a rifiutare che oggetti logici, quali i numeri, trovino senso e significato solo nei contesti in cui sono calati, negando loro indipendenza e ascrivendoli all'ambito di mere costruzioni umane. L'argomento sarà ripreso in seguito, in merito alla difficoltà di una concezione *costruttivistica* di oggetti logici e concetti. In un enunciato descrittivo non si asserisce qualcosa su un individuo, come Scott, ma si asserisce in un modo indiretto qualcosa sui concetti che occorrono in quella frase descrittiva. Russell, per sostenere la sua tesi, nota come una frase descrittiva può essere compresa anche se l'oggetto descritto non esiste e anche se non si ha alcuna conoscenza dell'oggetto descritto, mentre è impossibile capire un enunciato, quale mera combinazione di simboli, senza conoscere gli oggetti sui quali si asserisce qualcosa. Per Gödel, Russell ha soltanto aggirato il problema in senso logico sollevato dalla sconcertante conclusione di Frege, lasciando qualcosa di incompreso sullo sfondo (ed in effetti pure nella soluzione dei paradossi con la Teoria senza classi il problema è aggirato. Definendo in questo modo enunciati contenenti descrizioni Gödel trova preferibile la teoria russelliana per un aspetto puramente formale. Se Frege deve assumere un assioma per introdurre *il*, che sia analitico ma implicito, seguendo dal senso dei termini non definiti, la proposta di Russell evita nel sistema logico qualsiasi assioma relativo alla particella *il*, rendendone l'analiticità dei teoremi e mostrando come essi seguano dalla definizione esplicita del senso di enunciati contenenti *il*. Questo vantaggio ad un'analisi più attenta sussiste fintanto che le definizioni sono interpretate come mere abbreviazioni tipografiche, come entrambi fanno, e non come introducenti nomi per oggetti descritti dalle definizioni stesse.

[147] Russell B. e Whitehead A.N., *Principia Mathematica*, p.39.

risulta è uno speculare Principio del circolo vizioso per le forme proposizionali per cui "nulla che sia definito in termini di una funzione proposizionale può essere un possibile argomento per questa funzione"[148]. Il Principio del circolo vizioso si rivela dunque controproducente come criterio di insignificanza e, se applicato senza riserve, dovremmo eliminare esso stesso. D'altra parte, è mirabilmente ambizioso assurgendo a metodo per rilevare i paradossi logici e come tentativo di trovare, per essi, una soluzione unica e completa, tra cui una spiegazione degli errori da cui dipendono. Esso, inoltre motiva una teoria logica, formalizzata o meno, in cui una vasta selezione di paradossi può essere riprodotta ed esposta come formalmente corretta. Nella prima edizione dei *Principia*, sulla base di questo e di altri principi, l'assioma di riducibilità, l'assioma dell'infinito e l'assioma di scelta, si perviene a una *Teoria degli ordini* per cui una funzione proposizionale, che o contiene quantificatori riferentisi ad una funzione proposizionale di ordine *n* o che possa essere sensatamente affermata di una funzione proposizionale di ordine *n*, è almeno di ordine *n + 1* e, per questo ordine definito, devono essere sempre limitati il campo di significatività e il quantificatore. L'applicazione del principio è problematica pure allo stesso paradosso di Russell o paradosso intensionale della teoria degli insiemi, sia nella forma diretta che in quella indiretta. Per la prima dovremmo chiederci: l'affermazione dell'insieme di tutti gli insiemi, non appartenente a se stesso, implica la totalità di tutti gli insiemi? La questione viene a focalizzasi sul mezzo dell'implicazione. Così per la forma contraria di esso, ammesso che sia veramente tale, dovremmo chiederci se l'insieme di tutti gli insiemi sia definibile in termini di insieme di tutti gli insiemi, non essendo questo predicabile dell'insieme stesso. Essendo però possibile definire l'insieme di tutti gli insiemi con {x / x = x} la soluzione prospettata da

[148] É questa la presentazione che ce ne dà Gödel in *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.69; per l'originale a cui Gödel fa riferimento si veda Russell B. Whitehead A.N., ibidem, sez. 7, p. 47.

Russell è dunque discutibile. Il Principio del Circolo Vizioso ha lo scopo di rendere "$\{x / x = x\} \in \{x / x = x\}$" quale proposizione priva di senso e lo fa attraverso una forte restrizione. La sua adeguatezza è però dubbia e i lavori in Teoria degli insiemi mostrano come le violazioni sistematiche del principio non creino alcuna incoerenza rispetto alla Teoria degli insiemi *standard*[149].

Nella Seconda edizione dei *Principia* avviene un allargamento dei tipi di argomento e del loro numero, si opera quindi un'estensione del campo di argomenti che possono fungere in una funzione, tant'è che "in senso limitato" anche le funzioni di ordine superiore a quello del predicato stesso, quello del primo ordine, ossia anche le funzioni definite in termini di predicato, possono figurare come argomento di un predicato di funzioni. Il sistema dei *Principia* conduce dunque una caratterizzazione dei domini di entità, di proposizioni o funzioni proposizionali, nei cui termini il linguaggio deve essere interpretato. Sotto l'altro punto di vista esso è infatti un linguaggio formale in base a variabili tipizzate, intendendo per *tipizzazione* una classificazione gerarchica delle espressioni. Il Principio del circolo vizioso emerge, allora, come una restrizione sulle variabili, quale meccanismo del linguaggio, e ad esso interno, per esprimere affermazioni generali; è un vincolo globale sulla formazione di qualsiasi generalizzazione. Nel generare i tipi, però, il Principio si comporta in almeno due modi differenti, operando esso in base alle sue forme. L'applicazione della forma diretta è divenuto il metodo *standard* per evitare la formazione del paradosso in teoria degli insiemi, il paradosso di Russell.

In effetti egli riconosce il campo più importante dei contributi di Russell all'analisi dei concetti della logica formale essere quello relativo ai paradossi logici e alla loro soluzione. Nella sua analisi dei paradossi, a cui aveva condotto la teoria degli insiemi di Cantor, Russell aveva avuto

[149] Si veda a riguardo Aczel P., *Non-Well-Founded Sets*, Center for the Study of Language and Information, Standford, California, 1983; Barwise J. e Etchemendy J., *The Liar,* Oxford University Press, Oxford, 1987.

il merito sorprendente di averli liberati “da tutti i tecnicismi matematici, portando così alla luce il fatto sorprendente che le nostre intuizioni logiche (ossia le nostre intuizioni relative a nozioni quali verità, concetto, essere, classe, ecc.) sono auto contraddittorie”[150]. Il paradosso del mentitore, condotto con tale idea, rende come le proposizioni universali ed esistenziali finiscono per implicare la classe stessa degli oggetti a cui si riferiscono. Accettando questo assioma pure la funzione proposizionale esiste indipendentemente dall’argomento, “esiste come entità separata”, essendo astratta dalle proposizioni che ne sono state date precedentemente; così è considerata separatamente dalla combinazione di simboli che la esprime e di cui è piuttosto la nozione o il concetto da essa definito, i quali “non sono applicabili” alla stessa funzione proposizionale in cui compaiono, dando il via a paradossi nella loro forma intensionale in cui il concetto “non applicabile a se stesso” prende il posto della classe paradossale di Russell. La diretta alternativa sarebbe quella di considerare la funzione proposizionale non come un’entità separata, come quella proposizione i cui costituenti ne sono gli argomenti. Pure la coppia proposizione – argomento può essere considerata esistere separatamente e, essendo ancora un insieme, una relazione, è pur sempre un concetto di cui non potremmo fare altro che assumere (tacitamente) l’esistenza[151]. Russell dunque tenta l’eliminazione delle classi di cui nega l’esistenza, proprio con la Teoria senza classi, piuttosto che con quelle proposte nell’opera giovanile. Piuttosto che risolvere l’intepretazione delle classi, procede all’eliminazione delle proposizioni che denotano classi e che sono quindi fonte di ogni ambiguità e dei paradossi. Con la Teoria senza classi le espressioni numeriche, impiegate nella Teoria dei numeri, come classi di classi vengono parafrasate in modo tale che sia eliminato ogni riferimento alle classi, ma in questo modo finiscono per andare

---

[150] Gödel K., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.129 e ss.

[151] Viene qui anticipata la posizione “conclusiva” esposta in *Il problema del continuo in Cantor*, del 1964.

perdute ampie parti della matematica e, inoltre, il lavoro di risistemazione non è proprio dei più semplici soprattutto perché, tutto ciò di cui parla la matematica, non è altro che falsa astrazione e, più che chiederci cosa significhi il numero, dobbiamo chiederci quale sia il significato della proposizione in cui occorre. Russell infatti trova che per i termini matematici sono possibili solo definizioni contestuali e, dunque, per quelle espressioni che suggeriscono l'esistenze di entità di fatto non esistenti, si deve passare a definizioni contestuali, che ne esprimano lo stesso contenuto ma senza creare ambiguità. Per Russell infatti le definizioni sono strumenti privi di valenza ontologica; esse non asseriscono l'esistenza di oggetti e neppure possono negarla. Evita in questo modo una superflua moltiplicazione di entità me allo stesso tempo ne elimina di importanti, tanto da dover rinunciare quasi del tutto alla matematica, ai suoi oggetti peculiari.

Gödel riconosce a Russell "la spiccata tendenza a costruire la logica, finchè possibile, senza assumere l'esistenza oggettiva di entità quali classi e concetti"[152]. Le definizioni contestuali utilizzate da Russell nelle locuzioni dei *Principia* per la risoluzione, o meglio dissoluzione, delle classi, vengono interpretate come una riduzione delle classi ai concetti e per questa sua interpretazione Gödel intravede un realismo di fondo, che è quanto del suo pensiero maggiormente ammira, realismo che vuole affermare lungo tutto il saggio, la più robusta affermazione di platonismo matematico del Novecento.

Gödel ricorre al realismo ogni qual volta deve smontare le soluzioni russelliane, ascritte nell'ottica costruttivistica, che associa a quella nominalistica. Tant'è che, proprio nella critica al *Principio del circolo vizioso*, afferma esserne valida la formulazione più forte solo se le entità della cui totalità si parla "sono comprensioni" e infatti "se, tuttavia, si tratta di oggetti che esistono indipendentemente da nostre costruzioni, in fin dei conti non c'è niente di assurdo nell'esistenza di totalità contenenti elementi che possono essere descritti … solo

[152] Gödel K., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.136.

riferendosi a queste totalità"[153]. Questa forma del Principio per Gödel non è soddisfatta dalla matematica classica, né dal sistema dei Principia con Assioma di riducibilità, adducendo ciò a dimostrazione della falsità del Principio piuttosto che della falsità della matematica classica. Il punto di vista costruzionistico, dunque comprende per Gödel l'eliminabilità del riferimento ad oggetti come classi e proposizioni. Classi, proposizioni e concetti sono intesi da Gödel come oggetti reali, "esistenti indipendentemente dalla nostre definizioni e costruzioni"[154]. È importante sottolineare come Gödel intenda essere oggetti reali sì gli insiemi, che ci si impongono come veri nella loro sistemazione assiomatica, ma anche i concetti, come *le proprietà e le relazioni fra le cose esistenti indipendentemente da nostre definizioni e costruzioni*. Per queste affermazioni realiste sorgono quei problemi caratteristici di ogni forma di platonismo o realismo, tanto di carattere ontologico che epistemologico.

La forma di realismo affermata da Gödel può essere solo rintracciata nei suoi articoli, che Gödel usa come occasioni manifestare il proprio punto di vista, pur nella precisa ed attenta analisi di quelli altrui. Innanzitutto trova una motivazione di ordine pragmatico al proprio, ponendo il realismo nel contesto di problemi concreti e come motivante programmi di ricerca matematica, tanto che è accomunato con Russell nell'assunzione in logica di assiomi anche se non evidenti di per sé, purchè siano giustificati dal fatto che le loro conseguenze concordano con quanto viene riscontrato evidente nel corso dello sviluppo della disciplina, così come avviene in matematica [155].

[153] Ibidem, p. 132-133.
[154] Ivi.
[155] Ibidem, p.126.

***Critica al nominalismo***

Le tematiche russelliane nella critica di Gödel trovano il loro limite nel'impostazione di fondo del pensiero del logicista: il nominalismo, che Gödel confuta nella forma di convenzionalismo matematico e che ritiene essere, per una giusta comprensione della conoscenza matematica, più pericoloso dello psicologismo. Gödel opera, negli anni 1964 e 1972, una restrizione del termine "costruttivistivo" con precisazioni al saggio del 1944. Dichiara quindi si usare il termine in senso fortemente nominalistico, come emerge nella *Teoria senza classi* di Russell: il senso in cui è assunto è molto diverso da quello "intuizionisticamente ammissibile" e da quello della scuola di Hilbert. Infatti sia l'*intuizionismo* che il *formalismo* basano le loro costruzioni su un'intuizione che è "esattamente lo scopo di Russell eliminare", mirando alla formazione di un sistema di ordini (gerarchizzazione dei quantificatori) e consentendo l'assunzione solo di pochi e necessari termini primitivi, tra cui l'assioma dell'infinito.

Gödel ascrivendo il tentativo di Russell nel costruttivismo[156] riconosce per il suo sistema solo l'ottica intensionale in cui i suoi stessi principi non trovano soddisfazione ed, infatti, ha in mente una nozione di proprietà che rende possibile un'interpretazione che non soddisfa le ultime due forme del principio del circolo vizioso. Dall' Appendice A. *Estratto da *1946/49-A*, però, viene posto in questione quanto sostenuto in 1944: "la violazione della seconda forma è detta presentarsi perché la quantificazione universale su proposizioni di un dato tipo contiene queste proposizioni come costituenti il loro contenuto"[157]. Inoltre la quantificazione universale "non ha senso nello stesso modo in cui lo ha la congiunzione". Osserva inoltre: "neppure è auto contraddittorio che una parte propria possa essere identica (non

[156] Geymonat individua in questa interpretazione, che Gödel fornisce del lavoro di Russell, il limite per una corretta comprensione ed apprezzamento dei tentativi russelliani, si veda *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano 1970 – 1976, vol. IX, p. 176.

[157] Gödel K., *La* Appendice A. *Estratto da *1946/49-A*, op. cit., pp. 383-385.

semplicemente uguale) al tutto, come si vede nel caso di strutture in senso astratto"[158]. Sulla base di una *concezione insiemistica di strutture,* tale identità come opposta a *isomorfismo*, non sussiste anzi sarebbe autocontraddittoria se si assumesse *parte propria* nel suo senso ovvio di sovrastruttura, il cui dominio è sottoinsieme proprio del tutto. Gödel pensa nei termini di una nozione informale di struttura, secondo la quale strutture isomorfe in senso insiemistico sono la stessa struttura, ma è problematica la costruzione di teorie in cui l'uniformità equivalga all'identità[159].

Il *Principio del circolo vizioso* nella sua prima forma è applicabile solo se le totalità, implicate, sono delle nostre costruzioni, pur considerando "tutti" come "congiunzione infinita". E allora deve essere data una chiara definizione per la "costruzione", che non si riferisca a totalità a cui essa stessa appartiene e che induce ad assumerla illegittimamente fra le altre, prima ancora che sia stata definita. La contraddizione dipenderebbe da come la Teoria semplice dei Tipi viene interpretata. L'ammissione di totalità infinite, dovuta all'ammissione di "congiunzione infinita" che sta per "tutti", finisce per non essere un problema pure per Carnap, la cui soluzione si fonda sull'abbandono del progetto di provare per ciascun numero naturale n, che n goda di fatto della proprietà in questione, per accettare l'enunciato generale che asserisce che tutti i numeri naturali godono di quella proprietà, perché l'enunciato che lo asserisce è *tautologicamente* vero. La critica di Gödel mira all'ammissione, per le nostre sia pur costruzioni, di una esistenza indipendenti. Non incorreremmo infatti in contraddizione se oggetti esistenti indipendentemente dalle nostre costruzioni potessero essere descritti univocamente solo riferendosi alla totalità di cui sono

[158] Ivi.

[159] Per la costruzione di strutture come *n*-uple di un dominio, Gödel forza la distinzione fra isomorfismo ed identità come non fa invece la teoria delle categorie. Nel linguaggio della teoria delle categorie potremmo dire che un oggetto A è una parte propria di B se esiste un monomorfismo di A in B ma non un epimorfismo. In questo modo essa esclude l'identità ma non si trova un accordo con quanto dice Gödel.

elementi (univocamente caratterizzati). Per un platonista appellarsi ad una totalità, alla quale la stessa entità da definire appartiene, non costituisce una circolarità viziosa, perché entità e circolarità esistono indipendentemente dal nostro fare riferimento ad esse. Ammettere definizioni impredicative  è possibile se se ne riconosce la circolarità non come viziosa ma come reale, che non sta ad indicare altro se non la limitatezza delle risorse epistemiche e referenziali degli esseri umani al momento disponibili[160].

Il motivo del rifiuto di Gödel delle impostazioni di Russell, risiede nel suo *credo platonista* che riconosce l'esistenza indipendente degli oggetti matematici. Il costruttivismo che Parsons dichiara essere la forma direttamente opposta al platonismo[161], ammette al contrario oggetti che sono convenzionalemente posti e definiti e le proposizioni matematiche esprimerebbero solo certi aspetti di convenzioni linguistiche. La forma più semplice di esso consiste nell'idea che la verità delle proposizioni matematiche si fondi solo sulle definizioni dei termini che contiene e per Gödel significa che esiste un procedimento meccanico per la conversione di tutte le verità matematiche, senza alcuna falsità, in una tautologia esplicita *a=a*, rimpiazzando sistematicamente i termini con le loro definizioni. Questo tipo di metodo si conversione in ultimo consisterebbe in un procedimento di decisione per la verità matematica, che sappiamo però, proprio dai suoi Teoremi, non esistere. Al termine tautologia Gödel riconosce un senso ampio, non intendendo con esso un enunciato *vero – funzionale* valido, quanto piuttosto un "enunciato di cui si può dedurre la verità partendo da regole che fissano le condizioni in base alle quali gli enunciati sono veri o falsi"[162]. Tale pretesa convenzionalista, se vera, è priva di interesse in quanto in ogni deduzione valida, che mostri la

---

[160] Ramsey F. P., *The foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, op.cit.
[161] Parsons C., *Foundations of Mathematics,* op. cit., p. 201.
[162] Gödel K., *Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche (*1961)*, op. cit., p. 279.

verità di quegli enunciati, saranno stati assunti degli assiomi forti che non possono essere considerati in alcun modo essere delle regole, e dunque che siano sintattici. Ogni tentativo di dimostrare il carattere tautologico degli assiomi della matematica sarebbe una dimostrazione della loro coerenza, che per il suo *Secondo teorema*, non si può ottenere con mezzi più deboli degli assiomi stessi e, anche se per una dimostrazione di coerenza non sono necessari tutti gli assiomi, la certezza pratica è che, in essa, si dovranno utilizzare "certi concetti astratti", come *insieme* o *funzione* con dominio su interi ossia gli assiomi che li regolano. La sintassi, dunque, non può garantire razionalmente la nostra fiducia "precritica" nella coerenza della matematica classica e i concetti non possono essere considerati di natura sintattica. Nonostante sia possibile fondare nominalisticamente parti della teoria dei concetti astratti e, nonostante frammenti di aritmetica possano essere ridotti ad enunciati validi in senso vero-funzionale, non si dispone di una giustificazione sintattica dell'induzione matematica. Infine il punto di vista convenzionalista sostiene che le proposizioni, che noi crediamo esprimano fatti matematici, sono soltanto un vuoto fluire del linguaggio, del tutto indipendente dai fatti, dai dati, e dunque sono vuoti di contenuto. Ciò è smentito da alcuni specifici enunciati matematici e, proprio il caso dell'induzione, ci fa presente come sia possibile costruire facilmente sistemi in cui si assumono, come assiomi, enunciati empirici, nonostante i pregiudizi dei matematici di fronte ad essa.

Gödel iscrive la posizione di Russell nel costruttivismo o nominalismo e tutti gli argomenti russelliani si rivelano inconcludenti proprio per un tale atteggiamento di fondo, lo abbiamo visto col principio del circolo vizioso e con la teoria senza classi che riduce queste ultime a mere *façon de parler*. Eppure in essi Gödel intravede un grano di verità: "una proposizione matematica non dice nulla sulla realtà fisica o psichica che esiste nello spazio e nel tempo perché è già vera in base al significato dei termini che occorrono in essa, indipendentemente dal mondo delle cose reali”. I significati non sono opera dell’uomo, né convenzioni semantiche, ma sono concetti che “costituiscono una realtà oggettiva per proprio conto che noi non possiamo creare o cambiare ma solo percepire e descrivere”[163]. Per Gödel “una proposizione matematica, per quanto non dica nulla sulla realtà spazio temporale, può tuttavia avere un validissimo contenuto oggettivo, nella misura in cui dice qualcosa sulle relazioni fra concetti”[164]. Gödel pone dunque una differenza fra le verità analitiche, che considera vere “per la natura dei concetti che in esse occorrono”, e le verità tautologiche, quelle prive di contenuto o vere i  base alle nostre definizioni, e in essa riposa le differenza con il *Circolo di Vienna*. Solo tre mesi prima della conferenza Gibbs, nel 1951, era apparsa le critica di Quine al concetto di analisi, ma la critica che di esso fa Gödel risulta scomoda per più di un motivo e non solo in risposta al giudizio di Quine, che in ultima istanza considera non essere stato dimostrato che “vere in virtù del significato” isoli una classe significativa di verità. Innanzitutto c’è una difficoltà riguardo alla verità degli assiomi: sia nel caso in cui si sostenga che la Teoria di Cantor sui numeri transfiniti sia fantasia, sia nel caso in cui si sostenga che i teoremi usuali dell’aritmetica e dell’analisi siano indiscutibilmente veri, gli assiomi della Teoria degli insiemi mancano di quell’aspetto di verità ovvia che ci saremmo aspettati da assiomi caratterizzati come analitici. Inoltre solo l’Assioma di estensionalità, dell’assiomatizzazione di Zermelo Fraenkel, è quello di cui si può affermare appropriatamente che è vero in virtù del significato del termine *insieme*. Tale assioma viene spesso giustificato in base al fatto che il criterio di identità che fornisce per gli insiemi, cioè avere gli stessi elementi, è parte di ciò che si intende come insieme. Poiché Gödel intende *vero in base al significato* in un’accezione molto più ampia di

---

[163] Gödel K., *Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche *1951*, in *Opere* vol. 3, op. cit., pp. 268-286, p.283; è la relazione dell’intervento di Gödel alla conferenza in onore di Gibbs J.W.  e per questo detta *Gibbs Lectures.*
[164] Ibidem, p. 284.

*vero in accordo con le definizioni*, tanto da abbracciare tutti gli assiomi della Teoria degli insiemi, le domande poste da Quine si riaffacciano: come interpretare il concetto di *significato* che usa Gödel? Sostenendo che gli assiomi della teoria degli insiemi sono veri in *virtù del significato dei termini che contengono* cosa si dice al di là del fatto che sono veri? Rispondere che non è il significato di insieme ma la nozione del concetto di insieme ad essere fondamentale, lascia senza risposta l'altro quesito su cosa voglia dire che sono veri in virtù dei termini che contengono.

***Critica alla concezione sintattica della matematica***

La serietà dell'argomentazione del concetto di analitico e la possibilità, a certe condizioni, di riconoscere le proposizioni dell'aritmetica come analitiche, ha indotto interpretazioni del pensiero di Gödel in chiave neologicista [165] e a misconoscere il suo interesse per la fenomenologia[166]. Dall'empirismo logico, in effetti, mutua argomenti e questioni pressanti circa l'analisi della logica, ma allo scopo giustificare posizioni diametralmente opposte. Il confronto con le posizioni degli aderenti al *Wiener Kreis* è stato una costante del lavoro di Gödel ed in effetti sono questi i pensatori con cui condivide gli anni dei suoi studi giovanili, essendosi trasferito a Vienna subito dopo gli studi al liceo di Brünn[167]. Presso l'Università di Vienna è Moritz Schlick, professore

[165] Köhler sviluppa un'interpretazione positivistica delle considerazioni di Gödel, collocandole in un particolare tipi di convenzionalismo. Si veda Si vedano Buldt B.et al. (editors), *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbar. Band 2: Kompendium zum Werk*, öbv &htp, Wien 2002, pp. 34-386, in particolare la sezione 4.3.

[166] Hintikka J., On *Gödel's philosophical assumption,* in «Sinthèse», vol.114/1998, p.13-23.

[167] Cittadina dell'odierna Moravia, regione a popolazione mista, allora appartenente all'impero austro ungarico. Vi era nato nel 1906, da padre viennese e cattolico e da madre di formazione e professione luterana, che cercherà di infondere ai figli, giunta dalla Renania per le prospettive che vi si aprivano per l'industria tessile.

succeduto a Mach alla cattedra di Filosofia delle Scienze Induttive, a dare vita al *Circolo*, dando il via nel 1922 alla consuetudine di incontri settimanali, in cui vengono disegnate le linee di pensiero programmatiche. Gödel continuerà sempre a confrontarsi con questa impostazione, che costituirà il punto di riferimento critico nella delineazione del proprio pensiero. Del Circolo conosceva bene impostazione e rappresentanti, avendo preso parte agli incontri nel Caffè del centro di Vienna dal 1926 al 1928 regolarmente, per poi allontanarsene gradualmente senza perdere i contatti con alcuni dei partecipanti, come Carnap che con Neurath e Morris fisserà nell'*Enciclopedia della scienza unificata,* rimasta incompiuta, le linee fondamentali del neopositivismo, rese esplicite già nel 1928 nel manifesto del Circolo nella direzione di una *wissenschafliche Weltauffassung*, concezione scientifica del mondo[168].

[168] Il *Circolo* riesce ad aggregare parecchi intellettuali diversi per formazione, interessi e competenze come filosofi, sociologi, matematici, giuristi, chiamati a discutere i temi principali enunciati nel *Tractatus* di Wittgenstein del 1921, allo scopo di redigere l'*Enciclopedia internazionale della scienza unificata*. Le fasi del lavoro venivano rese note e procedevano attraverso la rivista *Erkenntins*, organo diretto del Circolo per la diffusione dell'empirismo logico o neopositivismo. L'impostazione del Circolo è caratterizzata da un rigoroso empirismo nella verifica degli enunciati sperimentali, dalla rivalutazione della logica formale applicata, dall'analisi del linguaggio scientifico e dalla considerazione della filosofia come semplice chiarificazione di esso. Il *Wiener Kreis* non era un fenomeno isolato ma soltanto uno dei centri di espressione di quell'orientamento di pensiero che caratterizza la prima metà del Novecento in Europa e la Seconda metà del Novecento negli USA, tanto da essere avvertito da Gödel, con una certa insofferenza, come lo *Spirito del tempo*, un'*ortodossia*. Sensazione che Goldfarb W. nella nota introduttiva alle versione dell'articolo su Carnap, marca come esagerata. Dello stesso orientamento erano, infatti, il Circolo di Berlino, il cui più significativo esponente è Reichenbach, il gruppo di Varsavia rappresentato da Tarski e il gruppo inglese rappresentato da Ayer. I lavori a Vienna procedono regolarmente ma solo fino al 1936, anno in cui Schlick viene a mancare, per poi riprendere ma solo fin quando l'incalzare degli eventi storici, che vedono l'Austria entrare nel circuito nazista, non vedono la dispersione degli intellettuali da Vienna. I lavori del gruppo però sono solo interrotti: varranno ripresi negli Stati Uniti dove sono accolti molti degli studiosi europei, tra cui lo stesso Gödel. La pubblicazione dell'*Enciclopedia,* infatti, prende avvio proprio a Chicago e già nel 1938 grazie alla collaborazione di Russell, Dewey e Bohr. Alla fase americana appartiene il tentativo di Neurath di sviluppare le idee del

Il gruppo fa propria la distinzione, posta da Wittgenstein, fra verità empiriche e verità come prodotto artificiale del sistema di rappresentazione, nonché il senso di analitico in correlazione alla nozione di tautologia[169]. Le verità come prodotto artificiale sono verità logiche, che pertengono ad un sistema di rappresentazione e non ad una qualche esperienza e, proprio per questo, sono prodotto artificiale di esso e valgono indipendentemente dai fatti del mondo, non hanno infatti contenuto. Di questo tipo sono, per gli empiristi logici, le verità della matematica e Hahn, che aveva tenuto delle lezioni di *Principia* di Whitehead Russell, afferma: "se sono riuscito a chiarire in qualche modo il ruolo della logica, posso ora trattare molto brevemente quello della matematica. Le proposizioni della matematica sono esattamente dello stesso tipo di quelle della logica: sono tautologiche, non dicono assolutamente nulla degli oggetti di cui vogliamo parlare, ma riguardano soltanto il modo in cui vogliamo parlare di essi"[170]. Carnap sviluppa questa idea in *Der logische Sintax der Sprache*[171] in cui mette in atto il superamento di un iniziale empirismo ristretto secondo cui ogni proposizione deve essere ridotta a proposizioni che concernono oggetti reali. Questa pretesa conduceva infatti a respingere la possibilità delle leggi scientifiche, valendo una legge per un numero:

---

Circolo fino al fisicalismo e quello di Feigl che le svilupperà fino al comportamentismo.

[169] Il concetto di tautologia è mutuato dal *Tractatus* di Wittgenstein del 1921 [trad.it. di Conte A.G., *Tractatus*, Einaudi, Torino 1964], per cui: La tautologia non ha condizioni di verità, poiché è incondizionatamente vera (4.461) essa come la contraddizione, pur non essendo immagine insensata (4.4611) appartenendo al simbolismo, non dice nulla della realtà del mondo e dunque è priva di senso non essendo in alcuna relazione concordanza, di rappresentazione con la realtà (4.462) e continua: infatti, quella ammette *ogni* possibile situazione; questa, *nessuna.* Nella tautologia le condizioni della concordanza con il mondo – le relazioni di rappresentazione – si annullano l'una l'altra, così che essa non sta in alcuna relazione di rappresentazione con la realtà).

[170] Hahn H., *Logik, Mathematik und Naturerkennen, Einheitswissenschaft*, 2, Gerold, Wien 1933, p.158.

[171] Carnap R., *Logische Sintax der Sprache*, Springer, Wien 1934 ; trad. ingl. di Smeanton M., *The logical sintax of language*, Kegan Paul, Trench, Trubner – Harcourt Brace, London – New York 1937 [tra. It. Di Pasquinello. *Sintassi logica del linguaggio*, Silva, Milano 1961].

infinito di casi certamente non verificabile del tutto. Con la rinuncia alla verificazione completa, Carnap riprende il principio di verificazione, ma lo ammorbidisce, riferendosi ad una verificazione di principio o ad una possibilità di verificazione e definisce qualsiasi proposizione, che non contraddica le leggi di natura, oggetto di sperimentazione possibile. In questo modo ammette la possibilità di una prova, che stabilisca la verità dell'enunciato, o di una conferma, che ne stabilisca l'asseribilità, anche se il problema del rapporto fra enunciati teorici ed enunciati empirici non era affatto risolto: se un sistema teorico è costituito da un calcolo, cioè da segni collegati mediante regole sintattiche e questi segni sono privi di significato, occorrerà allora un'interpretazione semantica che attribuisca ai segni un significato, ossia delle regole che riferiscano o colleghino i segni a delle proprietà degli oggetti osservabili. Concetto fondamentale dell'opera è infatti quello di *linguaggio*, *sistema di riferimento linguistico* nella terminologia più tarda, che fornisce le relazioni logiche di conseguenza e contraddittorietà tra proposizioni, prerequisiti per l'indagine logica e razionale. In quest'ottica Goldfarb propone una lettura più sofisticata dell'opera di Carnap, in cui non solo è ridimensionato l'*empirismo ristretto* ed è abbandonato il termine tautologia per le verità matematiche, ma anche l'adozione del *Principio di tolleranza*, per cui "nella logica non vi sono morali. Ognuno è libero di costruirsi la propria logica, cioè la propria forma di linguaggio, nel modo che vuole. Tutto ciò che si esige … è che egli stabilisca i suoi metodi e suggerisca regole sintattiche invece di ragionamenti filosofici". In questo modo il concetto di fatto empirico è reso dalla distinzione fra ciò che segue e ciò che non segue dalle regole del linguaggio (particolare), ma Gödel fa notare come manchi un discrimine per una distinzione ontologica fra linguaggi coerenti e linguaggi incoerenti. Goldfarb, che vorrebbe ridimensionare l'impatto della critica di Gödel che esageratamente considererebbe l'empirismo logico l'*ortodossia del tempo*, vede nel Principio di tolleranza la professione di pluralismo di Carnap grazie alla quale una tale distinzione risulterebbe superflua, non risultando più la riduzione della matematica a sintassi il mezzo per la sua giustificazione. Infatti è possibile ammettere un qualsiasi sistema, che sono tanti quante sono le logiche dell'inferenza e dell'indagine e, salvo questioni pragmatiche, è possibile pure ammetterne uno contraddittorio. La giustificazione di essi sarebbe un falso problema, essendo essa un concetto interno, trasformandosi nel problema di ciò che si può fare all'interno del sistema di riferimento, e a cui si può procedere soltanto una volta che siano date le relazioni per via del sistema di riferimento stesso. Ogni utente del sistema linguistico si impegna automaticamente, nel momento in cui adotta quel sistema, ad accettare quegli enunciati che hanno la portata di *verità quadro*, quali le verità della matematica che non riflettono o descrivono alcun dominio di fatti, ma che sono la conseguenza della decisione di adottare un sistema anziché un altro.

Gödel, che ben conosce l'empirismo logico e la sua genesi, restituisce le tematiche dell'empirismo logico al loro obiettivo fondazionale e identifica la prospettiva sintattica con l'affermazione che "l'intuizione matematica … può essere sostituita da convenzioni dell'uso di simboli"[172], senza comunque riuscire a fornire una riduzione epistemologica adeguata. La critica di Gödel alle posizioni dell'empirismo logico come elaborate da Carnap procedono dai suoi teoremi: in base al Primo nessun sistema deduttivo può generare tutte le verità matematiche, per cui la dipendenza della verità dal sistema di riferimento linguistico adottato non può essere intesa nel senso che le prime sono conseguenza del secondo, a meno che il concetto di conseguenza non sia quello del metalinguaggio e definibile solo con una matematica non banale[173]. La posizione di Carnap cade in una *petitio principi*: la matematica è ottenuta da regole sintattiche, ma solo se la si assume come data nel metalinguaggio, allora si realizza dalle

---

[172] Gödel K., *La matematica è sintassi del linguaggio? (*1953/1959 – V),* op. cit., p.320.

[173] Id., *La matematica è sintassi del linguaggio? (*1953/1959 III)*, op. cit., §15, p. 303.

regole sintattiche ma qualcosa le sfugge. “una regola relativa alla verità degli enunciati può essere detta sintattica solo se risulta chiaro dalla sua formulazione, o si può sapere in qualche modo in anticipo, che essa non implica la verità e la falsità di un enunciato ‘fattuale’ o ‘proposizione che esprime un fatto empirico’”[174]. Una regola per la verità degli enunciati è sintattica solo se risulta chiaro dalla formulazione stessa e ciò è possibile solo se la regola sintattica è coerente, altrimenti implicherà tutti gli enunciati e anche quelli fattuali. E se così fosse, allora non sarebbe una regola meramente sintattica dalla cui sola formulazione è possibile sapere in anticipo che essa non implica la verità o falsità di un fatto empirico. In base al Secondo teorema la regola sintattica può essere legittimata solo facendo appello ad una porzione di matematica non colta dalla regola in discussione ed è contraddetta l’affermazione che la matematica è risultato di regole sintattiche. Perché il progetto dell’accezione sintattica della matematica non si trasformi “direttamente nel percorso opposto … invece di giustificare gli assiomi della matematica riducendoli a regole sintattiche, quegli assiomi (o almeno una parte di essi) sono necessari per giustificare le regole sintattiche”[175], deve attenersi ad una sintassi finitaria. Carnap, invece, nonostante la difficoltà di ammettere l’esistenza di totalità infinite del tutto indipendenti dalla mente dell’uomo che deriva proprio dalle pretese logiciste e dalla necessità di costruire ogni struttura un passo per volta[176], finisce per ammettere l’introduzione di concetti non finitari[177] e riconosce che la sua definizione di verità per un linguaggio formale, che includa la matematica classica, necessita di mezzi che vanno ben

---

[174] Ibidem, § 11, p. 302.
[175] Ibidem, § 19, p. 305.
[176] Carnap R., *Die logizistische Grudlegung der Mathematik*, in «Erkenntnis», 2, pp.91-105; trad. ingl. di Putnam H. e Massey G.J. in Bernacerraf e H.Putnam, *Philosophy of mathematics*. *Selected readings*, op. cit. [trad.it. di Mario Rosso, *La fondazione logicista della matematica*, in L.Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche*, Einaudi Torino 1976, pp. 279-294].
[177] Carnap R., *Logische Sintax der Sprache*, op. cit., p.166, [trad. it. *Sintassi logica del linguaggio*, op. cit., p.221].

oltre ciò che è formalizzabile in quel linguaggio[178], ma ciò non vuol dire considerare platonisticamente la matematica. L'ammissione di definizioni impredicative e di metodi infinitari è possibile anche in assenza di una tale considerazione e la sua si fonda sull'abbandono del progetto di provare per ciascun numero naturale *n* che *n* goda di fatto della proprietà in questione, per accettare l'enunciato generale che asserisce che tutti i numeri godono di quella proprietà in quanto tautologicamente vero.

### ***Critica all'empirismo ristretto***

Gli empiristi logici avevano mutuato le loro idee da diverse fonti ed in particolare dalla filosofia della scienza empirico-positivista di Mach[179] e

[178] Ibidem, p.129, [trad. it. p.184]

[179] Ernst Mach (Moravia 1838 – Monaco 1916) fisico e filosofi austriaco che teine a Vienna corsi di fisica e fisiologia generale per medici, raccolti nel *Compendiun der Physik fur Mediziner* (1865), in cui si attesta il suo iniziale orientamento meccanicista. Altre memorie di questo periodo trattano di acustica e di ottica sia dal punto di vista fisico che fisiologico. Nel 1867 è chiamato alla cattedra di fisica Sperimentale all'Università di Praga dove studio il moto dei proiettili con velocità uguale o superiore a quella del suoni, conseguendo risultati importanti per lo svilupo dell'aerodinamica. Intanto svolge accurate indagini critico epistemologiche sui fondamenti della fisica. Nel 1883 dà alle stampe *Die mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, cui seguiranno *Die prinzipien der Wärmerlehre* (1896) e *Die analyse der Empfindungen und das Verhältnis des physischen zum Psychischen* (1900), opere che esercitano una profonda influenza sulla formazione del pensiero scientifico. Attraverso gli studi sulla sensazione, fonte di ogni conoscenza, respinge i postulati generali del meccanicismo e attua una profonda revisione dei concetti fondamentali della meccanica (massa, forza, azione e distanza, spazio e tempo) dimostrandone l'origine empirica contro la loro assolutezza. Prova, quindi, come la meccanica nel suo complesso sia del tutto inadeguata a sorreggere l'intero edificio della scienza. Il filo conduttore dello sviluppo scientifico è individuato, invece, nel principio di economia intorno a cui la scienza si sviluppa secondo linee che portano a principi, legami funzionali, sempre più semplici e ampi nella loro applicabilità. La sensazione è per Mach un dato non valicabile, da cui ogni conoscenza prende le mosse e intorno a cui torna alla ricerca di una verifica delle costruzioni concettuali.

Avenarius[180], esponenti dell'empiriocriticismo della fine del Diciannovesimo secolo. Esso si sviluppa all'interno del positivismo stesso di cui è critica e radicalizzazione, delineandosi come *empirismo critico* che, a differenza del *Positivismo*, vuole determinare i limiti di validità della scienza, operando una radicalizzazione del *Positivismo* stesso per volgere alcuni asserti di fondo dell'empirismo contro qualsiasi concettualizzazione che non si dichiari meramente strumentale rispetto all'esperienza. È inoltre *empirismo radicale*, facendo dell'esperienza pura e sgombra di qualsiasi elemento soggettivo, tessuto indistinto di sensazioni, la base di ogni conoscenza. I concetti scientifici si levano da questa base e non cogliendo la struttura ultima della realtà, non hanno valore assoluto, ma sono solo mezzi utili a rappresentare e ordinare la complessità dei fatti, che colti nella loro immediatezza, fuori da ogni sovrastruttura mitologica e formale, sciolgono la complessità e la semplificano. La scienza è dunque schematizzazione dei fatti medesimi. Il *Neopositivismo*, a differenza del Positivismo ottocentesco particolarmente attento alla

[180] Richard Avenarius (Parigi 1843 – Zurigo 1896). In Filosofia come pensiero del mondo secondo il <<minimo sforzo>> (1876) il professore di Zurigo espone nel principio del minimo sforzo una versione del principio di economia. In Critica dell'esperienza pura (1888-1890) dipana l'incompatibilità di esso con i dualismo soggetto-oggetto e pensiero- realtà postulati dalla metafisica tradizionale, nonché con l'idea spenceriana per cui processi evolutivi procedono versi un aumento di differenziazione ed eterogeneità. Per Avenarius i fenomeni tendono invece alla semplificazione e alla riduzione all'omogeneo. La conoscenza stessa è guidata da un principio di semplificazione che riduzione ad unità in vista di un migliore equilibrio fra organismo ed ambiente. Avenarius con queste opere anticipa le idee di Mach e Schuppe, influenzando le discussioni gnoseologiche della Francia del primo Novecento. viene sottolineato il valore economico- pratico della scienza e della conoscenza: i concetti attraverso cui le scienze descrivono la realtà non ne riproducono la struttura ultima, quindi non hanno valore di verità, ma sono strumenti di riorganizzazione dell'esperienza, la cui funzione è di migliorare l'esecuzione del compito adattivo, proprio dell'organismo umano. Reale in senso assoluto è solo lì esperienza pura, né soggettiva né oggettiva, né psichica né fisica, l'io stesso non è che un aggregato relativamente stabile di elementi di esperienza. Spetta alla filosofia recuperare l'esperienza pura attraverso la critica delle conoscenza intellettuali, filosofiche e scientifiche che la occultano: la filosofia è critica dell'esperienza, da cui il nome di empiriocriticismo, le astrazioni filosofiche sono l'ultima metafisica da cui l'esperienza è imprigionata.

scienza sperimentale, si leva da un *humus* prettamente teorico, quale quello della matematica e della fisica einsteiniana, pur mantenendo la dura e netta critica della metafisica, che considerano procedere in direzione opposta a quella dell'esperienza. Le sue fonti, logicista e positivista, erano state filtrate dal pensiero del *Tractatus* di Wittgenstein, che rinnegherà questa evoluzione del suo pensiero. Lo stesso Schlick prende in esame la relazione fra linguaggio e realtà notando come ogni processo conoscitivo avvenga nel linguaggio: non esiste conoscenza che non si presenti come enunciato linguistico. Con il linguaggio avviene la registrazione di dati di fatto e ogni singola registrazione di un dato dell'esperienza personale, precedente ad ogni elaborazione concettuale, si costituisce in *proposizioni protocollari* o *protocolli*. Questi costituiscono il punto di partenza indubitabile di ogni conoscenza, in quanto, senza alcuna aggiunta o manipolazione, esprimono fatti e il loro valore conoscitivo risiede proprio in ciò: nell'essere fondati su osservazioni empiriche. L'uso che di essi facciamo, assumendoli a punti di partenza per la conoscenza del reale, ha un valore prettamente ipotetico ed è per questo che necessita di una verifica nell'esperienza, la sola che possa renderlo valido. Il significato di una proposizione, infatti, dipende dall'espressione di un dato di fatto, o meglio dalla sua *verificabilità*. È questa che ci da la sicurezza, la gioia, di aver colto[181] nel segno. "Il senso di una proposizione è il metodo della sua verifica" e "stabilire il significato di una frase equivale a stabilire il modo in cui essa può venire verificata (o falsificata). Il significato di una proposizione è il metodo della sua verificazione"[182]. Il *Principio di verificazione* così enunciato ha lo scopo di permettere una netta distinzione fra un linguaggio rigoroso e non equivoco, il linguaggio scientifico che si spende nei soli asserti sensati, e un linguaggio che si spende in asserti insensati, quello della

---

[181] Schlick M., *Gesammelte Aufsätze 1926-1936*, Gerold, Wien 1938.
[182] Id., *Meaning and verification*, in «The philosophical review», XLV, 1936 [trad. it. in *La struttura logica del linguaggio*, a cura di Bonomi, Studi Bompiani, Sonzogno, 1985].

metafisica o che comunque non ha come fonte l'esperienza. Solo l'esperienza è scientificamente esprimibile e dunque sono sensate solo le proposizioni che esprimono le conoscenze delle scienze naturali ed esatte e non le questioni metafisiche; i valori etici, religiosi ed estetici sono inesprimibili e possono essere solo testimoniati con la vita, non argomentati teoreticamente.

La critica della filosofia metafisica procede sciogliendo di volta in volta, come solo il metodo analitico è in grado di fare, gli asserti metafisici in affermazioni prive di senso perché inverificabili e distinguendo, di volta in volta, il linguaggio sensato dal linguaggio insensato. In *La svolta della filosofia* del 1930, articolo pubblicato su «Erkenntnis», Schlick provvedeva a ridisegnare il ruolo della filosofia ed i suoi rapporti con la scienza. La filosofia è l'attività con cui chiarire il senso degli enunciati; essa non è in grado di stabilire cosa sia reale cosa no, ma può solo stabilire il significato dell'affermazione della realtà di qualcosa. La decisione della realtà o meno di un fatto spetta solo all'esperienza, cui si fa consuetamente appello nella vita quotidiana come nella scienza, che sostituisce alle rappresentazioni soggettive con segni di classi di oggetti caratterizzati da poche proprietà significative e rigorosamente definibili, i concetti che conferiscono valore a tale sapere a prezzo di una certezza sempre da rintracciare, nelle circostanze empiriche, ambito proprio dello scienziato. Al filosofo, piuttosto che interrogarsi su cosa mai possa essere una conoscenza certa, impossibile a raggiungersi, interessa invece il significato delle proposizioni, che conosciamo una volta saputo come procedere alla verificazione e la filosofia non può essere altro che una teoria della conoscenza, che analizza le teorie per individuarvi le proposizioni false, quelle che non hanno un riscontro nell'esperienza e da eliminare perché fonti di ambiguità, non essendo altro che proposizioni metafisiche che genererebbero solo pseudoproblemi.

Obiettivo della critica di Gödel è l'affermazione che le proposizioni della matematica siano prive di contenuto per via dell'identificazione, in ultima analisi, del contenuto con *contenuto empirico* e questo, per le scienze naturali, non è neppure ben fondato empiricamente[183]. Gli stessi positivisti ritengono che sia un compito non banale quello di ammettere che una proposizione sia priva di contenuto[184], anche se una proposizione non ha contenuto, si richiede pur sempre un fondamento epistemologico, che, sostiene Gödel se risiede aldilà di una pura riduzione, allora non si può assumere che dimostri essere la proposizione priva di contenuto. Quanto si otterrebbe consisterebbe, piuttosto, in una giustificazione della proposizione stessa e che non soddisfa la pretesa positivista. In *La sintassi logica del linguaggio* Carnap fornisce, per un linguaggio qualunque dato una definizione tecnica di contenuto[185]: non ha senso parlare di quale sia la definizione veramente corretta e, per vedere quale concetto rigorosamente definito rifletta in misura maggiore il concetto informale di contenuto, cerca una risposta di carattere pragmatico. Ciò che è in questione non è la realtà indipendente delle proposizioni che la costituiscono, quanto la costituzione effettiva di contenuto matematico. Con la nozione di intuizione estesa alla matematica Gödel ha dimostrato l'impossibilità di una considerazione tanto riduttiva di un contenuto per essa e, "se il contenuto immediato della matematica fosse solo un'apparenza erronea, dovremmo avere avuto la possibilità di costruire la matematica in modo soddisfacente, senza fare uso di questo 'pseudo' contenuto"[186], scopo di Göedel è quello di salvaguardare la ragione che se ponesse problemi insolubili sarebbe irrazionale e infatti Wang[187] fa notare come faccia proprio il rifiuto di Hilbert della possibilità per la ragione di porre domande prive di risposte e riconoscere, nello stesso

---

[183] Gödel K., *La matematica è sintassi del linguaggio? (* 1953/1959 III)*, op. cit., § 5, p. 300.
[184] Carnap R., *Die alte un die neue Logik*, in «Erkenntnis», 1, pp. 12-26.
[185] Id., *Der logische sintax der Sprache*, op. cit., p.175 [trad.it. *Sintassi logica del linguaggio*, op. cit., p.179].
[186] Gödel K., *La matematica è sintassi del linguaggio? (1953/1959 V)*, op. cit., p. 322.
[187] Wang H., *A logical Journey. From Gödel to philosophy,* pp. 324-326.

tempo, che solo la ragione possa rispondervi.

Per Gödel è importante tenere presente che gli enunciati empirici veri o falsi in base ai fatti del mondo, che leibnizianamente tiene ben distinti dai fatti di pensiero[188] sono prima dell'aggiunta della matematica nell'accezione convenzionalista. La matematica è aggiunta in base a convenzioni, ma senza influenzare i fatti empirici, dati in partenza, come sottolinea ancora pretestuosamente Goldafarb che tenta di ridimensionare le divergenza fra i due pensatori, ma per Gödel i dati della matematica sono percepiti razionalmente, con una percezione adeguata e, per questo, non ravvidibili nei fatti empirici, evitando di incorrere in una naturalizzazione dell'oggetto matematico. È questo il caso di Maddy che, pur sostenendo di cogliere la lezione di Gödel, procede nella realizzazione di un'interpretazione naturalistica della matematica, non tenendo conto delle considerazioni poco lusinghiere che Gödel fa sull'empirismo: "l'interpretazione empirica della matematica, vale a dire la concezione che i fatti matematici sono un tipo speciale di fatti fisici o psicologici, è troppo assurda per essere seriamente sostenuta"[189].

Gödel discute le conseguenze erronee dovute al fatto che la regola non soddisfi la conservatività, il tipo di ragionamento necessario per dimostrare la coerenza, e fa notare come anche un empirista logico ricorra, in favore della coerenza, ad una risposta fondata sull'evidenza empirica piuttosto che ad una dimostrazione matematica. L'opposizione all'empirismo logico si esprime più nettamente in *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?*, luogo in cui ribadirà il ruolo della ragione a partire da una specie particolare percezione, quella razionale, quasi a delineare un *empirismo razionale.* Se la matematica descrive oggetti indipendenti e reali, Gödel dichiara di non

---

[188] Tieszen R., *Gödel Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961)*, in «The Bullettin of Symbolic Logic», vol. 4, n.2, giugno, pp. 181-203, p.185.

[189] Gödel K., *Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche (*1951),* op. cit., p. 275.

comprendere l’avversione dei matematici per i metodi induttivi, evidentemente “dovuta al pregiudizio che gli oggetti matematici non hanno esistenza reale. Se la matematica descrive un mondo oggettivo … non c’è motivo perché non si debbano applicare in essa metodi induttivi”[190].

[190] Ibidem, p. 277.

## *LA SITUAZIONE DI GÖDEL*

### *Concezioni conflittuali*

Nell'articolo del 1951 *Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche*, Gödel asserisce di aver confutato il punto di vita nominalistico, che sostiene la matematica consistere solamente in convenzioni sintattiche e nelle loro conseguenze, e di avere adottato argomenti contro la più generale posizione per cui la matematica è una nostra creazione. Fra questi il primo fa leva sulla considerazione del regno matematico come un universo del illimitato, da cui l'inesauribilità della conoscenza matematica: il fatto di avere raggiunto una certa chiarezza sui fondamenti della matematica e sulle parti fondamentali di essa, non ci assicura una rigorosa chiarezza su tutta la matematica, sulle parti accidentali. Gödel ritiene essere razionalmente inaccettabile che, nel caso in cui fosse la mente dell'uomo a porre gli enti matematici, compresi operazioni, relazioni e proprietà, frutto di una libera scelta, che essi risultino poi essere problematici e che quindi ci si riservi di decidere a riguardo. È ciò quanto accade ad esempio con gli interi: per dimostrare certe proposizioni sugli interi dobbiamo usare il concetto di insieme degli interi, trovandoci a dover attuare una creazione ulteriore per stabilire quali proprietà abbiamo dato a quegli interi, che noi stessi abbiamo creato. Inoltre "se nella matematica esiste qualcosa di analogo alla creazione, allora l'azione di ogni teorema consisterebbe esattamente nel limitare la facoltà creativa"[191]. Nonostante questi argomenti Gödel ammette di non aver confutato tutte le alternative al platonismo: "per ammettere il realismo platonico queste teorie dovrebbero essere confutate una dopo l'altra e dovrebbe poi essere mostrato che esse esauriscono tutte le possibilità. Io non sono in grado, per ora, di fare questo". Così in una lettera a Schlipp del 3 febbraio 1959 commenta la sua incapacità nel portare a termine l'articolo *È la matematica sintassi del linguaggio?*, cominciato ben sei anni prima: "il fatto è che io ho completato molte versioni diverse, ma nessuna di esse mi soddisfa. È facile dichiarare argomenti pesanti ed impressionanti in favore del mio punto di vista, ma una delucidazione completa della situazione è risultata essere più difficile di quanto avessi creduto, indubbiamente in conseguenza del fatto che l'argomento è strettamente connesso, ed in parte identico, a uno dei problemi di base della filosofia, cioè alla questione della realtà obiettiva dei concetti e delle loro relazioni. D'altra parte a causa dei pregiudizi ampiamente sostenuti, potrebbe essere più un male che un bene pubblicare il lavoro a metà"[192]. Gödel quindi deve accontentarsi di una giustificazione solo parziale, in forma negativa, di argomenti contro punti di vista alternativi e, in forma positiva, di argomenti di plausibilità. Non riesce nel tentativo di fornire al platonismo un'adeguata giustificazione epistemologica. Di fronte all'interrogativo su come ci guadagniamo la conoscenza del regno matematico, Gödel "ha poco da dire se non che noi lo facciamo per mezzo della nostra facoltà dell'intuizione matematica, che chiama anche *ragione matematica* e qualche volta semplicemente *ragione* …", sottolinea Goldfarb in tono polemico, dichiarando il fallimento del suo tentativo di una elaborazione completa della situazione[193].

Ciò che manca è una chiara considerazione ontologica degli oggetti

[191] Ibidem, p.278.
[192] Gödel K., *Opere* vol.5, p.224.
[193] Goldfarb W., *Nota introduttiva a La matematica è sintassi del linguaggio?* (**1953/1959 III*), in *Opere* vol.3, op. cit., p. 323.

della matematica, per via del difetto epistemologico e dell*'ambiguità ontologica* in cui la posizione platonista incorre: nella misura in cui gli oggetti sono accessibili per mezzo dell'intuizione, lo *status* ontologico degli oggetti e la natura dell'intuizione si vincolano reciprocamente. Nel pronunciare i suoi argomenti, lo fa con la consapevolezza che essi non sono definitivi nella considerazione degli oggetti matematici come obiettivi e indipendenti dalla nostra libera scelta, dai nostri atti creativi e dal mondo fisico, prendendo le distanze, rispettivamente, da psicologismo, concettualismo aristotelico e platonismo. È qui resa esplicita quella indeterminatezza ontologica tipica degli argomenti fino al 1950, anni in cui la posizione di Gödel è in balia del conflitto derivante dal suo essere impegnato in due tesi che appaiono contrapposte: quelle di *realismo platonico* o *platonismo* e di *razionalismo*. Gödel non vuole abbandonare il realismo nonostante non riesca a trovare alcuna prova di validità per esso, non essendo possibile alcuna comprensione razionale del termine prova. Dalla lettera del '49 a Schlipp emerge come il progetto della *Gibbs Lecture*, in cui Gödel indaga le implicazioni filosofiche dei suoi Teoremi di incompletezza, si fosse arenato.

Così come il *realismo* è una convinzione profonda di Gödel, allo stesso modo in ogni fase del suo pensiero, in quasi tutte le sue conversazioni filosofiche e nei suoi scritti, emerge l'importanza del ruolo giocato dal *razionalismo*. Ancor più chiaramente nell'elenco, stilato nel 1960, dei quattordici punti che esprimono il suo punto di vista filosofico ribadisce le sue posizioni e le sue mete, come la sorprendente[194] affermazione della possibilità di realizzazione della *Characteristica universalis* di Leibniz. Tra essi il punto 3 recita "ci sono metodi sistematici per la soluzione di tutti i problemi, (anche arte, ecc); … 13. C'è una filosofia scientifica, esatta, e una teologia che trattano di concetti della massima

[194] Parsons C., *Nota Introduttiva* a *La logica matematica di Russell*, op. cit., p.152.

astrattezza"[195]. La fiducia nella ragione richiede che venga sviluppata, in merito al *platonismo*, una nozione filosofica di prova e che le proposizioni matematiche siano trattate in modo esatto tanto da intendere le conclusioni alla stregua di *risultati*, ma nella *Gibbs Lecture* avverte ancora l'impossibilità di procedere rigorosamente, in modo che le conclusioni tratte dalle proposizioni matematiche siano considerate risultati, e, infatti, avverte i lettori di come sia impossibile trarre queste implicazioni filosofiche dei suoi teoremi "con matematico rigore" a causa dell'ancora scarso sviluppo della filosofia in questa direzione[196], così come nel caso del concetto di insieme. Allo stesso modo in *La logica matematica di Russell* si legge: "come ci si può aspettare di risolvere sistematicamente problemi matematici mediante la mera analisi dei concetti in essa occorrenti, se finora la nostra analisi non è stata neppure sufficiente a stabilire gli assiomi?"[197]; questo sarà possibile solo dopo i "chiarimenti necessari dei concetti in questione". Emerge come Gödel *ragionamento* intenda, in questo momento, il *calcolo rigoroso* ed, infatti, a modello per l'argomentazione filosofica assume il procedere matematico, così come era stato per Leibniz, attendendo alla realizzazione della *carachteristica universalis*, quale Leibniz l'aveva concepita. Allo stesso modo per filosofia scientifica intende ancora una scienza deduttiva o dimostrativa, che sviluppa teoremi dalla pregnanza filosofica. Se paradigma per la scienza è lo *standard* matematico, come Gödel in questo momento suggerisce, allora le proposizioni filosofiche presenteranno o termini primitivi, del tipo del termine "insieme" per la matematica, o termini la cui definizione è stata fissata più o meno nel linguaggio durante il loro stesso uso, e, come le proposizioni matematiche sono collegate da trasparenti procedure di verificazione più che provabili, quelle filosofiche condurrebbero un'analisi concettuale, che porta a

---

[195] Wang H., *A logical Journey: From Gödel to Pjilosophy*, MIT Press, Cambridge MA 1996, pp. 315-316, trad. mia.
[196] Gödel K., *Opere*, vol.3, op. cit., pp. 311.
[197] Id., *La logica matematica di Russell*, op. cit., p. 145.

conclusioni attraverso un qualche mezzo inferenziale. La nozione filosofica che deve ancora essere sviluppata è proprio quella di prova, che renda conto di poter trattare le proposizioni filosofiche, le cui conclusioni conducono a risultati, in modo esatto.

Molto più tardi in *A logical journey*, ritratto che Wang stila del pensiero del logico, Gödel fissa come *desiderata* che le condizioni primitive siano semplici e poche in numero: "Il lavoro di Newton del 1687 dà inizio alla fisica, che ha bisogno solamente di termini primitivi molto semplici: massa, forza, legge. Io cerco una teoria simile per la filosofia o la metafisica. I metafisici credono possibile scoprire cos'è la realtà obiettiva; ci sono solamente poche entità primitive che causano l'esistenza delle altre entità"[198]. Così "la filosofia punta ad una teoria … In una teoria concetti ed assiomi devono essere combinati, ed i concetti devono essere precisi"[199].

La difficoltà nel realizzare il progetto di una filosofia come scienza rigorosa si trova proprio nello specificarne le *condizione primitive* la cui importanza si rende palese improvvisamente: "c'è un certo momento nella vita di un vero filosofo, in cui capisce, per la prima volta e direttamente, il sistema delle condizioni primitive e le loro relazioni. Questo è quello che deve essere accaduto ad Husserl …".

"I filosofi analitici cercano di rendere chiari i concetti definendoli col ricorso a termini primitivi, ma senza cercare di renderli chiari. Infatti erratamente prendono come primitivi termini come "rosso", ecc, mentre corretti termini primitivi sarebbero "oggetto", "relazione", "colore", "buono", ecc. "[200], commenta a Wang e Toledo all'inizio degli anni Settanta. Se nella fase pre-fenomenologica degli anni Cinquanta, Gödel non aveva ancora alcun metodo per definire quali fossero questi termini, né gli era evidente in cosa dovesse consistere una trattazione concettuale di essi, adesso intravede nella fenomenologia una via di

[198] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit, p.167.
[199] Ibidem, p. 306.
[200] S. Toledo, *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975,* 3/24/72, pp. 1-2, non pubblicato.

uscita e, nell'introduzione a questa conferenza, consegna il compito di una chiarificazione in merito al pensiero di Boolos, che però rigetta il razionalismo di Gödel e considera del tutto poco credibile, "meno del suo Platonismo", la possibilità di poter provare matematicamente, un giorno, la verità di alcune proposizioni in filosofia della matematica[201]. In effetti Gödel rivolgeva questo suo progetto ai soli suoi teoremi e le sue parole, riportate da Wang, lasciano emergere quell'evoluzione del suo pensiero che lo ha sollevato dalla fase di stallo degli anni Cinquanta, di cui la continua rielaborazione dello scritto su Carnap è emblematica: "la *Characteristica Universalis* voluta da Leibniz non esiste. Qualsiasi procedura sistematica per risolvere problemi di tutti i tipi, dovrebbe essere non meccanica"[202], che poi corregge a matita: "la *Characteristica Universalis* voluta da Leibniz non esiste, se interpretata come sistema formale". Gödel infatti dice a Carnap nel 1948 che, anche se un sistema non può essere completamente specifico, può comunque dare indicazioni sufficienti su ciò che deve essere fatto[203] e, dunque, il sistema è da considerare matematicamente rigoroso nella misura in cui dà indicazioni sufficienti.  Per questo Kreisel chiama quello di Gödel un *rigore informale*, mentre Boolos intende l'aspettativa di Gödel essere quella di una dimostrazione matematica, formale. In effetti Gödel solo negli anni successivi alla conferenza diviene consapevole di una nozione più profonda e meno rigida di razionalità avviandosi per la direzione di Husserl, che pure leva il suo pensiero da un *humus* matematico e il cui successivo percorso condivide negli anni in cui si avvia alla maturità, fino a farne proprio il *metodo*[204]. Questo metodo

[201] Gödel K., *La matematica è sintassi del linguaggio? (1953/1959- III)* , op. cit., pp. 303-304.
[202] *GN*, depliant 1/209, 013184, p.1
[203] Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, MA, 1996, p. 174
[204] La frase omessa dalla citazione è: "Hat überhaupt Philosophie einen Benstand an 'prinzipiellen' Grundlagen in dem echten Sinne, die also ihrem Wesen nach nur durch unmittelbar gebende Anschauung begründet werden können, so ist ein Streit,, der diese Betrifft, in seiner Entscheidung unabhängig von aller philosophiscen Wissenschaft, vondem Besitz ihrer Idee und ihres angeblich begründet Lehrgehaltes"; in *Ideen zu einer reinen Phänomenologie*

avrebbe permesso una chiarificazione di quelle questioni filosofiche che Gödel si era trovato di fronte: "la fenomenologia combinata un giorno o l'altro con la volontà di ricerca fondazionale ~~decide~~ chiarifica quelle domande in una maniera assolutamente convincente"[205].

***Rapporti con l'idealismo***

Il fallimento di Gödel sopraggiunto negli anni Cinquanta, di trovare una considerazione razionale del Platonismo è indice del fallimento della sua nozione di razionalità di fronte all'interesse per il ruolo della soggettività. Gödel deve in qualche modo colmare il divario fra la convinzione platonista e le argomentazione razionali che trova in suo sostegno, riconoscendo alla soggettività il ruolo di integrazione fra le due posizioni. Questo è il motivo della sua conversione alla fenomenologia.

A questo punto l'interesse per l'idealismo emerge come il naturale percorso delle esigenze dettate dalla sua riflessione, ma ancora nella *Conferenza Gibbs*. Nel 1951 Gödel, come nelle successive versioni dell'articolo sulla sintassi matematica, non fa cenno esplicito ad una

---

*und phänomenologischen Philosophie*, Erstes Buch, Husserliana, vol,III, Matinus Nijhoff, Den Haag 1950, p. 34 [trad. it. di Costa V. (a cura di) *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, Libro I, Introduzione generale alla fenomenologia pura, Introd. di Franzini E., Biblioteca Einaudi, Torino 2002, p. 34]. la fenomenologia non fornisce una teoria" è da intendere nel senso che le fenomenologia viene considerata innanzitutto un metodo per isolare quanto è dato intuitivamente. Nelle parole di Husserl: "Se la filosofia ha un patrimonio di fondamenti «di principio» nel senso autentico del termine, che cioè per la loro essenza possono essere stabiliti solo per mezzo di un'intuizione immediatamente offerente, una polemica concernente tali fondamenti è indipendente, nelle sue decisioni, da ogni scienza filosofica, dal possesso della sua idea e del suo contenuto dottrinale che si presume essere fondato". L'applicazione di questo metodo condurrà ai risultati esposti in *Cartesianisce Meditationen*, quali *metaphysiche Ergebnisse* (risultati metafisici). Si veda a riguardo Brainard M., *Belief and its naturalization: Husserl's system of phenomenology in Ideas I*, State University of New York Press, Albany, NY 2002.

[205] Gödel K., nota a se stesso-in depliant 6743, 060671.

simile virata e, anzi, mantiene l'empirismo quale ambito di ricerca di una soluzione alle problematiche poste dalla sua posizione, dicendo che le implicazioni filosofiche dei fatti matematici anzi favoriscono il punto di vista empiristico piuttosto che una spiegazione razionalistica o idealistica[206]. Una nota in calce, aggiunta poi, lascia intravvedere una certa indecisione sulla questione se sia preferibile l'empirismo o il razionalismo per la soluzione delle problematiche[207], questione che si rivela un falso problema alla luce della fenomenologia husserliana quale tentativo di conciliazione dei due atteggiamenti.

Porre un regno degli oggetti matematici indipendenti è ontologicamente problematico così come lo diventa la controparte epistemologica, che pone il problema di come il soggetto pensante possa ad esso avere accesso e, dunque, la questione del senso esatto della nozione di regno platonico si pone altresì come la questione del senso esatto della nozione di soggettività, essendo il platonismo conseguenza di una "metafisica corretta"[208]. In una lettera a Gotthard Günther sostiene essere la via per una metafisica corretta "la riflessione sul soggetto trattato nella filosofia idealistica (ovvero il suo secondo tema di pensiero), la distinzione dei livelli di riflessione, ecc., a me sembra molto interessante ed importante ... Comunque, non posso procedere con il rifiuto del significato obiettivo per il pensiero che è ad esso connesso, (anche se) in realtà ne è del tutto indipendente. Non credo che qualsiasi argomento kantiano o positivistico, o che le antinomie della teoria degli insiemi, o che la meccanica quantistica abbiano provato che il concetto di essere oggettivo (non importa se per cose o per entità astratte) sia privo di senso o contraddittorio[209]. Si

---

[206] Id., *La matematica è sintassi del linguaggio (*1953/1959)*, op. cit. p. 313.

[207] Beiser F., *German Idealism. The struggle against subjectvism*, 1781-1801, Harvard University Press, Cambridge, MA 2002; Ritter J. (a cura di), *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Schwabe, Basel 1971-?.

[208] Lettera a Ghünter G. del 1954, in *Collected Works* vol. 4: *correspondence H-Z*, op. cit., pp. 503-505, in opere, op. cit., pp. 282-308.

[209] Die in der idealist. Phil. Behandelte Reflexion auf das Subject (d.h. Ihr II Thema d. Denkes), die Untescheidung von Rflexionsstufen u.s.w. scheint mir

accontenta per ora di una nozione di razionalità non idealisticamente informata, dovendo ancora trovare una versione congeniale di idealismo.

Per ottenere chiarificazione rispetto alla considerazione che Gödel conserva dell'idealismo, nelle sue manifestazioni tradizionali e nell'accezione di valido strumento per la comprensione e la soluzione di problemi di filosofia della matematica, consideriamo una lettera inviatagli da Kreisel con cui gli recapita il suo contributo a Bertrand Russell, filosofo del secolo[210]. Nella lettera allegata alla versione dell'articolo Kreisel[211], facendo riferimento presumibilmente alle loro conversazioni, sostiene essere più importante per Gödel la distinzione fra idealismo oggettivo e idealismo soggettivo che la distinzione fra idealismo oggettivo e realismo, riferendosi al seguente passaggio: "c'è un'ampia distinzione tra i punti di vista per cui la matematica è puramente convenzionale, dipendendo da reazioni umane e incapace di spiegazioni a priori, il punto di vista che sostiene esserci qualcosa di *oggettivo* circa la matematica [...]. Sembrerebbe che ci siano distinzioni piuttosto basilari tra prospettive diverse del secondo genere, per esempio fra coloro che sottolineano gli aspetti obiettivi, esterni a noi, e

---

sehr interessant u. wichtig. Ich halte es sogar fur durchaus möglich, daß dies 'der' Weg zur richtigen Meta-physik ist. Die damit verbundene (in Wahrheit aber davon ganz unabhängige) Ablehnung der objektiven Bedeutung des Denkens kann ich aber nicht mitmachen. Ich glaube nicht, daß irgendein Kantsches oder positivistisches Argument oder die Antinomien d. Mengenl., oder die Quantenmechanik bewiesen hat, daß der Begriff des objektiven Seins (gleichgültig ob für Dinge oder abstrakte Wesenheiten) sinnlos oder wiederspruchsvoll ist. (nota in calce: Damit will ich natürlich nicht behaupten, daß schon das naïve Denken das objektive Sein in allen Punkten richtig erfaßt, wie die ontol. Metaphysik vielfach anzunehmen scheint).
Nella nota in calce Gödel dice chiaramente di non sostenere, come invece la metafisica ontologia suppone, che un procedere ingenuo del pensiero colga direttamente e correttamente l'essere obiettivo da ogni prospettiva; Gödel K., *Collected Works* vol.4: *Correspondece A-H*, a cura di Solomon Feferman S., Dawson J. W. Goldfarb W., Parsons C., Wilfried S., Clarendon Press, Oxford [trad. it. *Opere* vol.4,op. cit.] pp.503-505.

[210] Kreisel G., *Mathematical Logic: What had it done for the philosophy of mathematics? Bertrand Russell. Philosopher of the century*, editore R. Schoenman, George Allen and Unwin, London 1967, pp. 201- 272.

[211] GN depliant 01/87 011187.5.

quelli che non lo fanno. (Banalmente tutto ha un aspetto non esterno a noi semplicemente in virtù del fatto di essere percepito e compreso). Molto probabilmente che i metodi abbiano avuto bisogno di estendere gli assiomi noti dipende o meno dal fatto che gli oggetti matematici sono (primariamente) esterni a noi"[212]. Ed infatti è qui considerato come idealismo, la concezione che sostiene l'esistenza di un regno non fisico dell'ideale da cui dipende tutto quanto non appartiene ad esso, nell'accezione non solo compatibile con il realismo, ma che anzi lo richiede. Nell'idealismo soggettivo non c'è garanzia che quella che è una proprietà delle nostre menti caratterizzi anche ogni cosa fuori come realtà obiettiva. L'idealismo oggettivo d'altra parte concorda con il realismo ingenuo (*naïve*) nella misura in cui individua le forme fuori del soggetto e in questo senso le concepisce come aspetti della realtà obiettiva, lasciando spazio all'oggettività della matematica. Lo stesso si potrebbe dire per l'idealismo soggettivo (origine della distinzione), ma quello che Gödel ci tiene a sottolineare e sostenere è che gli oggetti della matematica non solo sono invarianti della nostra esperienza matematica, ma soprattutto che in nessun modo sono soggettivi bensì oggettivi e per questo, da sempre realista, cerca un idealismo che pur nella considerazione del soggetto non neghi la verità o il senso della nozione di esistenza obiettiva in cui siano inclusi gli oggetti astratti, naturalmente. Gödel considera il rifiuto dell'oggettività la *reductio ad absurdum* dell'idealismo e, nello specifico dell'idealismo kantiano, come esprime nell'articolo sulla teoria delle relatività del tardo 1940: "sfortunatamente, ogni qualvolta questo punto di vista fruttuoso della distinzione fra elementi soggettivi ed oggettivi della nostra conoscenza, qual è suggerito tanto incredibilmente dal paragone di Kant con il sistema copernicano, appare nella storia della scienza, c'è subito una tendenza ad esasperarlo nella direzione di un soggettivismo illimitato, per cui il suo oggetto è annullato. La tesi di Kant dell'inconoscibilità

[212] Gödel K., *Opere* vol.5, op. cit.

delle cose in se stesse, ne è un esempio"[213]. Varie sono le interpretazioni della cosa in se kantiana, esemplificando, se sia da considerarsi quale limite della nostra possibilità di conoscere o se sia da considerarsi un oggetto indipendente, come fa Gödel che finisce per identificare l'idealismo kantiano con l'idealismo dogmatico di Berkeley, perchè per entrambe le considerazioni non ci sono cose in sé stesse da conoscere, in quanto fuori dalla portata del nostro sistema conoscitivo o meglio perché in fin dei conti non esistono. La considerazione che ha di Kant subisce però un'evoluzione a seguito della lettura di Husserl, che considera quello di Kant il primo tentatico di vera fenomenologia, rimasto però *in nuce* per l'immaturità dei tempi. Alla fine del suo articolo del 1961 *Sul moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia* scrive: "D'altro canto proprio a causa della mancanza di chiarezza e della scorrettezza letterale di molte delle formulazioni di Kant, si sono sviluppate direzioni piuttosto divergenti dal suo pensiero – nessuna delle quali ha in realtà fatto giustizia del nucleo del pensiero kantiano. Questa esigenza di pensiero mi pare sia stata soddisfatta per la prima volta dalla fenomenologia, che proprio come intendeva Kant, evita i salti mortali dell'idealismo verso una nuova metafisica e del positivismo verso il rifiuto di tutta la metafisica"[214]. Il *salto mortale* dell'idealismo conduce ad un

[213] Gödel K,. *Collected Works vol.3, op.cit.*, pp.257-258. L'impasse è nota ed è posta già da Hegel: "ferner ist nun aber auch di kantische Obiektivität des Denkes insofern selbst nun wieder subjektiv, als nach Kant die Gendanken, obschon allgemeine und notwedige Bestimmungen, doch 'nur unsere' Gedanken und von dem, was das Ding 'an sich' ist, durch eine unübersteigbare Kluft unterschieden sind. Dagegen ist die währe Objektivität des Denkens diese, dass die Gedanken nicht bloss unsere Gedenken, sondern zugleich das Ansich der Dinge und des Gegenstädlischen überhaupt sind"; Hegel G.F.W. *Encyclopädie der philosophiscehn Wissenschaft in Grundnisse* (1830), editore G. J.P.J. Bolland, A.H. Adriani, Leiden 1906, Zusatz 2 § 41[trad. it. *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio*, traduzione prefazione e note di B. Croce, prefazione di Hegel tradotte da Nuzzo A., collana Boblioteca Universale Laterza, Bari 2009]. Lo stesso Hegel dunque introduceva la locuzione *idealismo soggettivo* per cogliere la posizione kantiana.

[214] Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961/?),* op. cit., p.341; *Collected Works,* op. cit., pp. 336-341.

soggettivismo illimitato, ad una considerazione ipertrofica del soggetto a cui non si giunge per via scientifica non essendo fondata sull'intuizione (in senso tecnico), come invece avviene nella filosofia kantiana e nelle fenomenologia husserliana. Così il rifiuto positivistico di ogni metafisica è motivato per Gödel dal misconoscimento di un percorso scientifico che conduca ad essa. Scopo non esplicito del salto mortale è, per Gödel, non di arrivare ad una metafisica nella forma dell'idealismo quanto piuttosto in quello della fede[215].

Il cambiamento nella considerazione di Kant è esplicitamente dovuto alla lettura di Husserl che consente a Gödel di superare la fase di inerzia del suo pensiero, durato fino al 1950 circa, superando pure le questioni tradizionalmente poste dalle diverse forma di idealismo. La via dell'idealismo kantiano è ora considerata la via corretta verso la metafisica e la fenomenologia non solo ne esplicita gli intenti autentici, ma nel realizza gli obiettivi e, in definitiva, risolve le questioni tradizionalmente legate all'idealismo. Husserl cinque decadi prima aveva dovuto affrontare gli stessi problemi e soprattutto ne aveva

---

"Andereseit haben aber eben wegen der Unklarheit und im wörtlichen Sinn Unrichtigkeit vieler Kantscher Formulierungen sich ganz entgegensetze philosophische Richtungen aus [dem]kantschen Denken entwickelt, von denen aber keine dem kantschen Denken in seinem Kern wirklich gerecht wurde. Dieser Forderung scheint mir erst die Phänomenologie zu genügen, welche ganz im Sinne Kants sowohl dieselben salto mortale des Idealismus in eine neue Methaphysik als auch die positivistiche Ablehnung jeder Metaphysik vermeidet".

[215] William Howard racconta la storia seguente risalente al 1972 o 1973: "poiché Gödel mi aveva ripetutamente chiesto di raccontargli delle mie esperienze durante la meditazione, allora supposi che avrebbe gradito imparare come praticare la M[editazione] T[rascendentale]. Mi disse però di non essere interessato perché "il fine del sistema Maharashi è annullare i pensieri, mentre la meta dell'idealismo tedesco è costruire un oggetto. Fece questa affermazione con una certa forza , tendendo la mano, il palmo e le dita verso l'alto, come se stesse afferrando qualcosa. Credo che Gödel intendesse che la sua meta consistesse nel mappare una struttura mentale. Tentai di spigargli che propriamente non era quello lo scopo della meditazione trascendentale, ma la sua mente era altrove". L'episodio riportato da Howard offre una conferma degli scopi di Gödel , pur non offrendo alcun chiarimento sufficiente sul modo di raggiungerli. Shell A.-Gellasch, *Reflections if my adviser: Stories of mathematics and mathematicians*, in *Mathematical Intelligence*, vol.25, n.1/2003, pp. 35-41.

trovato una soluzione. Nel 1915, un decennio dopo la svolta trascendentale, confessava: “mir ist den ganze deutsche Idealismus immer zum K … gewesen”[216] . Naturalmente aveva trovato anche il modo di apprezzarlo, riconoscendo, esplicitamente nel 1919, che gli idealisti pur mancando dell’atteggiamento necessario e dei metodi per conferire al loro lavoro un valore scientifico, guardavano nella giusta direzione: “anche se Kant e gli altri idealisti tedeschi difficilmente hanno qualcosa di soddisfacente e definibile da offrire a titolo di trattamento scientificamente rigoroso dei motivi di indagine che così tanto li muove, chiunque possa realmente seguire e capire questi motivi ed immergersi nel loro contenuto intuitivo, può essere sicuro che nei sistemi idealistici vengono in primo piano dimensioni completamente nuove dei problemi, i più radicali in filosofia. Solamente dalla loro chiarificazione e dallo sviluppo dello specifico metodo richiesto per loro, può la filosofia aprire la strada ai suoi finali e più alti fini”[217]. I problemi radicali che l’idealismo riesce a porre sono dovuti proprio alla rivoluzione copernicana operata da Kant, che non può che condurre alla nozione di soggettività trascendentale. Questi problemi legittimamente posti trovano soluzione solo attraverso la sua propria fenomenologia, quale metodo specifico per essi. Le più grandi intuizioni di Kant ”ci divengono completamente comprensibili soltanto nel momento in cui abbiamo ottenuto da un duro lavoro una consapevolezza completamente chiara della particolarità dell’ambito proprio della fenomenologia. Diviene poi evidente che il suo pensiero si

---

[216] Bohem R., *Vom Gesichtpunkt der Phänomenologie*, Matinus Nijhoff, Den Haag, 1968.
[217] Husserl E., *Aufsätze und Vorträge* (1911-1921), Husserliana, vol.XXV, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1987, p.309; “Mochten Kant und die weiteren Deutschen Idealisten für eine wissenschaftliche strenge Verarbeitung der sie machtvoll bewegenden Problemmotive auch wenig Befriedigendes und Haltbare bieten: die diese Motive wirklich nachzuverstehen und sich inrhen intuitive Gehalt einzuleben vermögen, sind dessen sicher, dass in den idealistischen Systemen völlig neue, und die allerradikalsten Problemdimensionen der Philosophie zutage drängen und dass erst mit ihrer Klärung und mit der Ausbildung der durch ihre Eigenart geforderten Methode der Philosophie ihre letzen und höchsten Ziele sich eröffnen”. Trad. mia.

muoveva proprio nella direzione di questo ambito, anche se ancora non era in grado di appropriarsene e di riconoscerlo come ambito di lavoro di una scienza rigorosa”[218].

Dalle note di Gödel è chiaro che ha letto i testi di Husserl nella serie di husserliana e fino al 1961 ne erano apparsi otto volumi e il terzo si componeva delle *Idee*, probabilmente il primo testo che avesse letto e in cui ha riscontrato la connotazione della fenomenologia come “la nostalgia segreta di ogni filosofia moderna…”[219]. Soprattutto ha potuto apprezzarvi la considerazione positiva del lavoro di Kant che gli ha poi permesso di cambiare la sua considerazione a riguardo. Gödel, inoltre, aveva letto il primo volume di *Erste Philophie*[220], apparsa nella husserliana del 1956, avendo scritto una nota al passo in cui la fenomenologia è descritta come il tentativo di inverare il significato il senso più profondo del filosofare di Kant[221] ed infatti Husserl nel Secondo volume della stessa, apparso nel 1959, riferendosi all'idealismo trascendentale, ritiene essere la fenomenologia “null'altro se non la prima forma severamente scientifica di questo idealismo”[222]. Gödel nello scritto del 1961 descrive la relazione Kant - Husserl in

---

[218] “Und erst recht erschaunt sie Kant, dessen größte Intuitionen uns erst ganz verständlivh warden, wenn wir uns das Eigentümliche des phänomenologichen Gebiets zur vollbewußten Klrheit erarbeitet haben. Es wird uns dann evident, dass Kants Geistesblick auf diesem Felde ruhte, obschon er es sich noch nicht zuzueignen und es als Arbeitsfeld einer eigenen strengen Wesenswissenschaft nicht zu erkennen vermöchte”; Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie, Erstes Buch*, op. cit., p.148 [trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica I*, op. cit.] e *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Erstes Buch*, Husserliana, vol.III/1, Matinus Nijhoff, Den Haag, 1976, p.133[trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, Libro I, op. cit.].

[219] “So begreift es sich, dass die Phänomenologie gleichsam die geheime Sehnsucht der ganzen neutzlichen Philosophie ist ”; ibidem

[220] Id*., Erste Philosphie (1923/1924). Erster Teil: kritische Ideengeschichte*, op. cit.

[221] “ein Versuch […], den tiefsten Sinn Kant'schen Pjilosophierens wahrzumachen”; *GN,* depliant 5/22.

[222] “die ganze Phänomenologie [ist] nichts als die erste streng wissenschaftliche Gestalt dieses Idealismus”, ibidem.

modo analogo e questo indica il suo interesse per l'idealismo trascendentale. Aveva studiato con molta attenzione la sezione *Kant und die philosophie des deutschen Idealismus,* di *Erste Philosophie.* Ciò che Gödel trova particolarmente criticabile nella metodologia degli idealisti tedeschi è che costruiscano sistemi prima di verificarne le basi, quei principi non sistematici ma che inaspettatamente conservano un grano di verità. Husserl sostiene che ogni conoscenza, per quanto astratti siano i suoi oggetti, debba comunque radicarsi nell'intuizione e non solo essere dedotta da principi estranei ad essa, assumendo l'affermazione di Kant "pensieri senza contenuto sono vuoti"[223] contro Kant stesso. Gödel conconda con Husserl, come emerge da una delle bozze di *From mathematics to Philosophy*: "One aspect of structural factualism i sto take the idea of reflection seriously. It seems ti follow that we should pay sufficient attention to the data on wich we are to reflect and not to philosophize over thin air"[224]. Gödel aggiuge in nota che Kant "trova le categ[orie] fuori dall'aria sottile e, riferito all'ultima riga scrive "Husserl". Incomincia,dunque, una critica di Kant basata su uno studio approfondito del suo pensiero, così come Husserl raccomandava[225]. Considerando l'ammontare del materiale del *Nachlass* si nota che Gödel studiava approfonditamente l'idealismo tedesco[226], soprattutto la prima parte di *Erste philosophie* a cui è stato fatto riferimento[227].

Gödel trova che gli idealisti, che comunque non conosceva direttamente, non siano in grado "di condurre delle buone idee in modo preciso ed in modo scientifico"[228]. La sua fiducia verso un

[223] "Gedanken ohne Inhalt sind leer"; Kant I., *La critica della ragion pura*, terza edizione di Gentile G., Lombardo Radice G., Laterza Bari 2005, A51/B75.

[224] Wang H., *From mathematics to philosophy*, Routledge and Kegane Paul, London 1974, *GN* box 20 , II Fassung, 1-30 ed introduzione p.6.

[225] Id., *A logicl Journey*, op. cit., p.171.

[226] *GN* depliants 5/16, 5/17, 5/18, 5/23.

[227] Nonostante Gödel non avesse conoscenza diretta di tale corpo di dottrine non vuol dire che la sua critica non fosse valida, così come commenta Boehm, in *Gesichtspunktder Phänomenolgie*, op. cit., p.50.

[228] Wang H., *A logical Journey*, op. cit., p.168.

idealismo trascendentale è affermata nell'abbozzo di una lettera a Gian-Carlo Rota del 1972[229], con cui replica alla revisione di questi, destinata alla *Scientific American*, de *La Crisi delle scienze europee e fenomenologia trascendentale*[230] di Husserl, che Gödel conosceva bene. Lo schizzo, che dovrebbe essere stato scritto nel periodo luglio-settembre 1972, presenta l'idealismo trascendentale di Husserl come quell'idealismo che condurrà ad una metafisica perfettamente consistente. Non c'è infatti ragione perché questa metafisica non debba essere obiettivamente vera, soprattutto per il fatto che essa elimina lo scetticismo dovuto all'inconoscibilità delle cose in se stesse e il soggettivismo sproporzionato, dovuto alla considerazione dell'oggetto come contingente alle caratteristiche della creatura umana.

### *Un recupero della metafisica*

Gödel scrive a Gühnter di volere il recupero della metafisica proprio nel senso ontologico del termine (trova cit, fra appunti) "quando io dico che si può (o dovrebbe) sviluppare una teoria delle classi intese come enti oggettivamente esistenti, io intendo davvero l'esistenza nel senso della matafisica ontologica, con il che tuttavia non volgio dire che gli insiemi astratti siano presenti in natura. Sembrano piuttosto formare un secondo piano di realtà, che si pone nei nostri confronti così oggettivamente e indipendente dal nostro pensiero come la natura"[231].

---

[229] Rota G.-C., *The remarks on Husserl and Phenomenology*, in *Phenomenology on Kant German Idealism, hermeneutics and logic*, ed. Wiegand O., Kluwer, Dordrecht 2000, pp. 89- 97.

[230] Husserl E., *Die Krisis der europäichen Wissenschaften und die trascendentale Phänomenologie*, Husserliana, vol. VI, martinus Nijhoff, Den Haag, 1959 [trad.it. *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, prefazione di Paci E., traduzione di Filippini E., il Saggiatore, Milano 2008.

[231] Wenn ich sage, daß man eine Theorie del Klassen als objektive existierender Gegenstände entwickeln kann (oder soll), so meine ich damit durchaus Existenz im Sinne der ontol. Metaphysik, womit ich aber nicht sagen will, daß die abstrakten Wesenheiten in der Natur vorhanden sind. Sie

Husserl offre dunque a Gödel una soluzione scientifica ad un problema ormai di vecchia data per lui: gettare un ponte fra le sue convinzioni realiste e quegli argomenti razionali, che era stato in grado di trovare a loro sostegno. Gödel ha bisogno di una considerazione razionale di come gli oggetti astratti ci siano accessibili, dunque di una considerazione della soggettività che integri razionalità, platonismo e, dunque, l'esperienza degli oggetti astratti. Attraverso la *nozione di correlazione* si connettono coscienza e razionalità, consapevolezza degli oggetti ed esistenza degli oggetti, essendo questa un predicato ottenuto dalla coscienza quando procede correttamente ossia motivata da un'evidenza di un qualche genere adeguata agli oggetti che sta investigando, ottenendo con ciò un'evidenza ulteriore. Al § 23 delle *Meditazioni cartesiane* sostiene: "Vernuft verweist auf Möglichkeiten der bewährung, und die letzlich auf das Evident-Machen und Evident-Haben"[232]. Mettendo in relazione l'esistenza della coscienza e la coscienza della ragione, la fenomenologia trascendentale stabilisce per transitività la connessione fra esistenza e ragione, proprio quanto mancava a Gödel della nozione di razionalità, che già dal 1950 lo aveva condotto ad una situazione di stallo. Che Gödel nello studio di Husserl cerchi una nozione più profonda di razionalità attraverso tale *indagine sulle essenze*, è confermato dalla bozza di lettera di Gödel del 1969 a Van Atten e Kennedy, in cui sostiene che "il suo interesse primario" dal 1959 – anno in cui cominciava lo studio di Husserl - al 1969 è stato "il problema della ragione e la preparazione filosofica per esso[233], notando come avrebbe potuto lavorare su questo problema dal punto di vista

scheinen vielmehr eine zweite Ebene der Realität zu bilden, die und aber ebenso obiektiv. u. von unserem Denken unabhängig gegenübersteht wie die Natur" Lettera a Ghünter G. del 1954, in *Collected Works* vol. 4: *correspondence H-Z*, op. cit., pp. 503-505 [tra. It. in *Opere*, op. cit., pp. 281-308].

[232] Husserl E., *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge*, Husserliana, vol.I, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1950, p. 92 [trad. it. di Costa F.., *Meditazioni Cartesiane con l'aggiunta dei discorsi parigini*, a cura di Cristin R., Bompiani, Milano 2002, p. 157].

[233] *GN* depliant 2/50, 020971.

dell'idealismo trascendentale opposto alla prima versione di fenomenologia di Husserl. Husserl stesso compiva questo passo dopo un difficile periodo di ripensamento, come confessa in note pubblicate postume "Ohne in allgemeinen Zügen mir über Sinn, Wesen, Methoden, Hauptgeschichtspunkte einer Kritik der Vernuft ins Klare zu kommen, ohne einen allgemeinen Entwurf für sie ausgedacht, entworfen, festgestellt und begründet zu haben, kann ich wahr und wahrhaftig nicht leben"[234]. Scrive così nel settembre del 1906 e la serie di conferenze tenute fra l'aprile e il maggio dell'anno successivo, segnano l'inizio della fenomenologia trascendentale operando una critica della ragione che mancava nelle *Logische Untersuchungen*, primo lavoro di Husserl.

L'autunno del 1909 è segnato per Husserl dalla scoperta del tempo assoluto come costituente il flusso della coscienza e, correlativamente, scopre l'assoluto stesso, giungendo ad una nozione del sé che nelle *Logische Untesuchungen* mancava. Riguardo a ciò, Gödel aveva sottolineato, nella sua copia delle *Logische Untersuchungen,* una ristampa del 1968 della seconda (B) edizione, non apparsa ancora nella serie Husserliana alcuni passaggi rilevanti. Prima del 1968 ha dovuto studiare una copia di un'altra edizione, e nella propria copia, la nota in calce a all'ultima riga del §4, è segnata da un grande punto di esclamazione sulla sinistra, e sottolineato come segue:

"Die sich in diesem Paragraphen schon aussprechende Opposition gegen die Lehre vom *reinen* Ich billigt der Verf., <u>wie aus</u> <u>den oben zitierten Ideen ersichtlich ist, nicht mehr.</u> (vgl. a.a.O., §57, S. 109; §80, S. 159.) [L'opposizione alla dottrina di un ego "puro", già espresso in questo paragrafo, è quella che l'autore <u>non approva più</u>, <u>così come</u> <u>è</u>

[234] Husserl E., *Persönlische Aufzeichnungen*. In *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. XVI, 1956, n.3, pp. 292-302, *Diary notes from the Nachlaß*, a cura di Biemel W., p.297.

chiaro dalle sue idee sopra citate [235].

Corrispondentemente, nella pagina precedente,

"Das phanomenologisch reduzierte Ich ist also nichts Eigenartiges, das fiber den mannigfaltigen Erlebnissen schwebte, sondern es ist einfach mit ihrer eigenen Verknüpfungseinheit identisch. [L'ego ridotto fenomenologicamente è nulla di strano, che galleggia sopra molte esperienze: è semplicemente identico con la propria unità interconnessa[236]" è contrassegnato da un grande punto interrogativo a margine.

Un passaggio di *Idee* che è sottolineato come segue:

"In den *Log. Unters.* vertrat ich in der Frage des reinen Ich eine Skepsis, die ich im Fortschritte meiner Studien nicht festhalten konnte. Die Kritik, die ich gegen Natorps gedankenvolle "Einleitung in die Psychologie" richtete (II, S. 340f.), ist also in einem Hauptpunkte nicht triftig[237].

In questo modo riusciva a completare alcuni dettagli della nozione della soggettività implicata dalla svolta trascendentale e Gödel faceva notare a Sue Toledo "la filosofia di Husserl è molto diversa prima del 1909 da ciò che è dopo il 1909. A questo punto fece una scoperta filosofica fondamentale, che cambiò la sua intera prospettiva filosofica e che si riflette anche nel suo stile di scrittura.  Egli stesso descrive questo come un tempo di crisi nella sua vita intellettuale e personale, entrambi

---

[235] Husserl E., *Logische Untersuchungen, I: Prolegomena zur reinen Logik*, op. cit., p. 542 n.1 [trad.it. Piana G. (a cura di) *Ricerche Logiche*, vol.1 e 2, *Prolegomeni a una logica pura*, Il Saggiatore, Milano 1968].

[236] Ibidem.

[237] Nelle *Logische Untersuchungen* ho sostenuto uno scetticismo rispetto alla domanda sull'Ego puro, che però non ho potuto più sostenere col procedere dei miei studi. La critica che ho diretto contro pensiero di Natorp della Einlritung in die Psychologie è, come solo ora vedo, non ben fondata in una delle sue principali affermazioni; da Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologische Philosophie*, op. cit. p. 138 [trad. it. Costa V. (a cura di), *Idee per una fenomenologia pura e una ed una filosofia fenomenologica*, op. cit.].

risolti dalla sua scoperta”[238]. Così in un commento a Wang: “ad un certo momento di questo periodo tutto divenne improvvisamente chiaro ad Husserl e giunse ad una certa conoscenza assoluta”[239]. Gödel in questi commenti si riferisce alle note di Husserl pubblicate postume, che di cui ha potuto usufruire grazie ad una biografia intellettuale e psicologica di Husserl di Wetz[240]. Coerentemente con l’alta opinione che Gödel conserva de *L’Idea di fenomenologia* di Husserl, trova che le pubblicazioni più importanti siano quelle successive alla svolta, come riporta Wang: “Gödel mi disse che i più importanti dei lavori pubblicati di Husserl sono *Idee* e *Meditazioni Cartesiane* (*Le conferenze di Parigi*). Il secondo è davvero il più vicino alla fenomenologia che indaga come giungiamo all’idea stessa[241]. Notando che la svolta di Husserl era correlata alla ripresa dei suoi precedenti studi sul concetto di tempo, Gödel suggerisce a Sue Toledo di riprendere proprio quelle[242] e citando il voluminoso manoscritto apparentemente andato perduto.  Gödel ha fatto altri simili commenti anche riguardo a manoscritti  di Leibniz, pure andati perduti, commenti che sono che sono stati additati ad una possibile instabilità mentale di Gödel. In questo caso, però, Gödel aveva

---

[238] del 24/3/72, p.1, trad. mia. Toledo S., *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975*, op.cit.,

[239] Wang H., *A logical Journey: from Gödel to philosophy*, op. cit., p. 169, trad. mia.

[240] Wetz F.J., *Edmund Husserl*, Campus, Frankfurt 1995.

[241] Wang H., *A logical Journey: from Gödel to philosophy*, op. cit., p. 164, trad. mia. Incidentalmente le *Conferenze di Parigi* e le *Meditazioni Cartesiane* non sono lo stesso lavoro; il secondo è una versione molto più elaborata del primo. Sono pubblicati insieme nella Husserliana come *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge* (1950), che Gödel possedeva. Gödel menzionò questo titolo a Wang e forse l’*und* è andato perso nel prendere appunti.

[242] Toledo S., *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975*, op.cit., 24/3/72 p.3; trad. mia. Gödel continua: “c’era un manoscritto di cinquecento pagine su questa ricerca (menzionato in una lettera ad Ingarden, con il quale Husserl desiderava pubblicare il contenuto del manoscritto). Questo manoscritto apparentemente è andato perduto, forse quando i lavori di Husserl furono portati a Lovanio nel 1940. È possibile che questo ed gli altri lavori furono rimossi”. Si veda anche Wang H., *A logical Journey: from Gödel to philosophy*, op. cit., p.320.

ragione e come prova indicava a Sue Toledo[243] l'asserzione dell'ex studente di Husserl Roman Ingarden[244].

***Quale fenomenologia?***

L'interesse di Gödel per la fenomenologia trascendentale era dovuto innanzitutto alla necessità di un metodo, non perché il pensiero di Husserl mancasse i suoi obiettivi, anzi, ma perché considerava la metodologia del pensiero husserliano come la parte più originale.

Viene infatti spesso rimarcato che Gödel si rivolge alla fenomenologia quale metodo per la chiarificazione di significati e concetti e che la consideri necessaria a giustificare assiomi della matematica ed, effettivamente, è proprio questo il motivo che adduce ne *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia,* in cui la fenomenologia viene intesa quale quel metodo, non per una definizione delle relazioni fondamentali, ossia degli assiomi che valgono per i concetti astratti, quanto piuttosto per una chiarificazione del senso di essi. Questo metodo consisterebbe "nel mettere a fuoco più nitidamente i concetti coinvolti dirigendo la nostra attenzione in un

[243] Ibidem, p.9.

[244] "Così nel 1927 Husserl mi propone di sistemare un grande fascio di manoscritti (probabilmente di 600-700 fogli) sulla costituzione originale di tempo che lui aveva scritto a Berau nel 1917 -1918. Mi diede mano completamente libera con la redazione del testo, la sua unica condizione era che il lavoro sarebbe dovuto essere pubblicato sotto i due nostri nomi. Comunque, io non potevo accettare la sua proposta, prima di tutto perché ero convinto che Husserl avrebbe fatto al tempo molto meglio il lavoro. A dire la verità, ora mi pento della mia decisione. Giudicando da quanto lui mi disse sul contesto del suo studio, certamente era il suo più profondo e forse il più importante lavoro [...] Come accadde, il lavoro non è stato edito del tutto, e quello che è peggio è che nessuno sembra sapere dove sia il manoscritto" ; da Ingarden R., *Edith Stein on her activity as an assistent of Edmund Husserl, in Philosophy and Phänomenological Research*, vol.23, 1962, pp. 155-175, p.157, n.4. A quanto pare Ingarden ignora che, dopo la proposta declinata di Husserl, il compito fu accettato dal suo assistente Eugen Fink, che comunque ci lavorò poco e nel 1969 diede il manoscritto all'Archivio di Husserl di Lovanio, pubblicato solo nel 2001 come *Die bernauer Manuskripte über das Zeitbewusstein*, Husserliana, vol XX/I, Kluwer, Dordrecht 2002.

modo determinato, precisamente sui nostri propri atti nell'uso di questi concetti, sulle nostre capacità di svolgere i nostri atti, ecc." La fenomenologia non è considerata una scienza alla stregua delle altre, essa è infatti una tecnica, una procedura, che dovrebbe produrre in noi un nuovo stati di coscienza, nel quale descriviamo in dettagli i nostri concetti base che usiamo nel nostro pensiero o affermiamo altri concetti fondamentali fin'ora a noi sconosciuti"[245]. Gödel non riconosce alcuna ragione per rigettarla, anzi ne adduce a suo favore, come in un paragone con lo sviluppo del bambino, ma che espone il pensiero del nostro al rischio della naturalizzazione, così come si è verificato in merito ad altre questioni[246]. A giustificare un punto di vista fondazionale sulla matematica, però, non è sufficiente l'analisi dei significati; piuttosto, per preferire un punto di vista fondazionale rispetto ad un altro, sarebbe necessario analizzare quali significati trovano riempimento; non si vuole sapere soltanto a cosa si riferiscono i termini, ma anche se ad essi corrisponde qualcosa nella realtà. Gödel intravvedeva nella fenomenologia la possibilità di una giustificazione per la matematica classica, ma altri come Becker e Weyl pretendevano da essa una giustificazione della matematica intuizionistica come di altre varianti del costruttivismo e, infatti, nella prefazione a *Das Kontinuum*[247] , Weyl si riferisce a *Idee I* di Husserl quale suo contesto filosofico, lo stesso che Gödel prende in considerazione ma per una fenomenologia a favore della matematica classica. Questa discrepanza delle interpretazioni fenomenologiche potrebbe essere risolta non solo con l'analisi di significati, ma con un'attenta analisi della teoria della costituzione e dell'evidenza[248]. La giustificazione della scelta di Gödel

[245] Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961),* op. cit., p.340.
[246] Ivi.
[247] Weil H., *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über di Grudlagen der Analysis,* Veit, Leipzig [trad. it. di Veit Riccioli A.B., *Il continuo*, Bibliopolis, Napoli 1977].
[248] Si veda Tieszen R., *Gödel on the intuition of concepts*, in «Sinthèse», vol.133/2002, n.3, pp. 363-391.

per la fenomenologia, piuttosto che per un altro impianto strutturale quale fondazione per la matematica, non risiede nel fatto che quest'ultimo non renda giustizia dei concetti della matematica classica[249]. Le argomentazioni degli intuizionisti a favore della revisione della matematica classica consistono nell'individuazione di significati "difettosi" che andrebbero sostituiti. In termini fenomenologici, l'intuizionista afferma che alcuni dei significati che giocano un importante ruolo nella matematica classica, non troveranno mai riferimento nella realtà, non condurranno mai al riempimento dell'intenzione, come si evince dalle due fasi della critica di Brouwer alla gerarchia di Cantor oltre la prima classe di numero[250]; nella prima analizza l'intenzionalità dello studio di Cantor, nella seconda, pur lasciando aperta la possibilità che la teoria di Cantor risultasse consistente, sostiene che a tali significati non possa corrispondere alcuna realtà matematica. Proprio a questo punto diviene rilevante la *tesi correlativa* dell'idealismo trascendentale di Husserl: sostenere che qualche cosa esiste, è sostenere che le intenzioni rivolte ad esso possono essere idealmente soddisfatte, e viceversa. L'essere, ciò che è (l'essente) è sempre aperto alla coscienza e, soltanto se si va oltre una mera analisi di significato e analizzando la possibilità di riempimento, si può distinguere il vero da quanto è meramente consistente. Dal punto di vista trascendental fenomenologico, dunque, le questioni riguardo l'ontologia della matematica non sono primariamente questioni concernenti il significato, ma riguardano la possibilità del riempimento delle intenzioni ossia concernono la questione di quali oggetti matematici possono essere costituiti con piena evidenza. La tesi della correlazione trova in Husserl la particolare accezione di correlazione di

---

[249] Id., Kurt *Gödel's path from the incompletenss Theorems (1931) to phenomenology (1961), «*The Bullettin of Simbolic Logic», vol.4/1998, n.2, pp. 181. 203, p. 200.

[250] Brouwer L.E.J., *Collected Works I. Philosophy and foundation of mathematics* (a cura di Heyting), North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1975 p. 80.

*noetico* e *noematico*, come correlazione fra la struttura degli atti (*noesis*) e la struttura degli oggetti intesi in sé stessi (*noemata*); essa si configura come relazione funzionale, o piuttosto relazioni funzionali, fra gli atti in cui un oggetto è intenzionato ed il modo in cui esso ci si presenta in quegli atti. Già nella conferenza del 1907, Husserl annunciava "le diverse correlazioni di base fra la conoscenza e la conoscenza obiettiva" come tema centrale della sua nuova metafisica e, infatti, una parte significativa di *Idee* I è dedicata a ad una particolareggiata analisi di esse[251]. Quando Gödel nel suo scritto del 1961 propone di estendere la nostra conoscenza dei concetti astratti, dirigendo l'attenzione dai concetti agli atti in cui noi li percepiamo[252], si riferisce proprio alla correlazione *noetico-noematico*, senza la quale non ci sarebbe alcuna ragione di supporre che, reindirizzando la nostra attenzione, si possa evincere qualcosa di nuovo sui concetti stessi. Gödel riscrive un passaggio del testo di Wang *From mathematics to philosophy* riguardo alla teoria degli insiemi, facendo notare come, a seguito di revisioni e sviluppi della teoria degli insiemi, si sia portati a dare inizio ad una analisi descrittiva del nostro pensiero, in parte subcosciente, circa la teroia degli insiemi e quindi delle idee obiettive che abbiamo in mente, quando usiamo il termine insieme[253]. Nella sua copia di *Idee I*, Gödel sottolinea i passaggi in cui Husserl critica le sue *Ricerche Logiche*, risalenti a quando ancora non aveva elaborato la correlazione *noetico-noematico*, che definisce il suo idealismo trascendentale. Gödel segna il paragrafo, in cui Husserl ribadisce

---

[251] Ci si riferisce al Capitolo IV della Sezione Terza di *Idee* vol.1 *Libro primo*, op. cit., p. 247-318.

[252] Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961),* op. cit., p.340.

[253] GN box 20: "The observations I this and the last paragraph are meant to be the about sets anf thereby of the objective ideas we have in mind when si veda Wang H.,we use the term set". Si veda *From mathematics to philosophy,* op. cit., p. 189. Riguardo alle discussioni che seguono nel testo circa la relazione fra le concezioni di Husserl e l'ontologia matematica, si veda van Atten M., *Gödel, mathematics, and possible worlds*, «Axiomathes», vol.12/2001, n.3-4, pp.355-363; Id., *Why Husserl should have been a strong revisionist in mathematics*, «Husserl Studies», vol. 18/2002, n.1, pp.1-18.

l'importanza della distinzione fra noetico e noematico[254], come "wichtig" al lato del paragrafo.

Dal momento che non è sufficiente considerare il metodo di analisi del significati, non si può spiegare pienamente la forma dell'interesse di Gödel per la fenomenologia, sottolinenandone il realismo degli oggetti astratti o concettuali, reso possibile dalla possibilità dell'intuizione categoriale e dell'intuizione delle essenze, che però certamente ne furono i costituenti essenziali[255]. Per spiegare la scelta di Gödel per lo Husserl trascendentalista, piuttosto che per la fenomenologia realista delle *Ricerche Logiche,* che pure ammette di apprezzare per le particolareggiate analisi, ma in cui realismo e intuizione sono solo presentati[256], risiede nel fatto che nella fenomenologia di Husserl "trovasse sviluppo quel metodo trascendentale con cui era possibile sistemare le sue proprie credenze nell'intuizione intellettuale e nella realtà dei concetti"[257]. Le credenze di Gödel erano condivise anche da quei discepoli di Husserl che però trovarono nel testo del 1907 una cesura, come i fenomenologici di Monaco o di Gottinga quali James Dabert, Adolf Reinach, Alexander Pfander e Hewdig (Conrd-) Martius, che scelsero piuttosto di sviluppare la struttura delle *Ricerche Logiche*, sostenendo di non riuscire a comprendere la svolta trascendentale di Husserl. Affermavano che una svolta verso una presunta soggettività trascendentale, significasse tenersi del tutto alla lontana dalle *cose*

---

[254] Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Erstes Buch, op. cit., p.330 [trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, Libro I, op. cit.]; così sottolinea la p. 315 dello stesso testo: "Dies ist die Einstellung dee "Log. Unters.". In wie erheblichem Maße auch die Natur der Sache daselbst eine Ausfürung noematischer Analysen erzwingt, so werden diese doch mehr als Indices für die parallelen noetischen Strukturen angesehen; der wesensmäßige Parallelismus der beiden Strukturen ist dort noch nicht zur Klarheit gekommen".

[255] Si veda la *Nota introduttiva* di Føllesdal D. a *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961)*, in *Opere* vol.3, pp. 327-335.

[256] Toledo S., *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975,* non pubblicato, 24/3/72, p.7.

[257] Wang H., *A logical Journey: from Gödel to philosophy*, op. cit., p.165.

*stesse* mancando del tutto lo scopo della fenomenologia. Come testimoniano i *memoranda* e le note ai fascicoli del GN 5/22 e 5/41, Gödel era sicuramente al corrente dei dibattiti che si consumavano fra i fenomenologi che volevano mantenersi realisti, ma considerava la svolta di Husserl una scelta per il meglio e, comunque, in vista dei suoi obiettivi. Gödel individua nell'anno 1909 il pieno compimento della svolta husserliana, quando Husserl scopre la nozione vera del sé. Dagli appunti di Gödel alla sua copia delle *Idee I* si evince come asseconda le autocritiche di Husserl alle sue *Ricerche Logiche*, in cui mancano la tesi della correlazione fra *noesis* e *noemata* ed una elaborata nozione del soggetto[258]. Con queste scoperte Husserl si abilita agli occhi di Gödel a cogliere le suggestioni di Leibniz e, infatti adottare l'alternativa presentata nelle *Ricerche Logiche*[259] avrebbe significato sacrificare l'impianto di pensiero leibniziano, che, da subito, aveva apprezzato e fatto proprio per sostenerlo lungo tutto il suo pensiero.

[258] Gödel legge e sottolinea molto le parti riguardanti l'evoluzione verso la nozione della correlazione fra noetico e noematico, della sua copia de Husserl E., *Krisis der europäischen Wissenschaften und die trascendentale Phänomenologie, eine enleitung in die phänomenologiche Philosophie*, «Husserliana, Gesammelte Wercke», vol. VI, Matinus Nijhoff, Den Hag, 1950 [trad.it. di Filippini E., *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, Il Saggiatore, Milano 2008].

[259] Husserl E., *Logische Untersuchungen I: Prolegomena zur reinen Logik*, Max Niemeyer, Halle; rist. in *Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke*, a cura dell'Husserl Archive (Leuven) sulla base del *Nachlass*, Matinus Nijhoff, The Hague; poi Kluwer Dodrecht, vol.18 [trad. it a cura di Piana G., *Ricerche Logiche*, vol. 1, *Prolegomeni ad una logica pura*, Il Saggiatore, Milano 1968]; Id., *Logische Untersuchungen II: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis*, Max Niemeyer; rist. in *Husserliana*, op. cit., vol.19 [tra.it. a cura di Piana G., *Ricerche logiche*, voll. 1 e 2, Il Saggiatore, Milano 1968].

***Critica ad Husserl***

E comunque Gödel non trova del tutto plausibile la rilevanza che Husserl conferisce alla soggettività[260]; non approva infatti l'asimmetria ontologica, dovuta al riconoscimento che l'oggettivo dipenda dal soggettivo. La critica di Gödel si evince da un commento riportato da Sue Toledo in 1972 riguardo *La logica formale e trascendentale*[261], apparsa fra le *Idee* e le *Meditazioni Cartesiane*, i due lavori che dice a Wang essere i più importanti. "L'analisi di Husserl del mondo obiettivo (ad esempio quella a p. 212 (sic)) è, in realtà, un soggettivismo universale e non l'analisi corretta dell'esistenza obiettiva. È piuttosto un'analisi del naturale modo di pensare l'esistenza obiettiva"[262]. In quelle pagine Husserl[263] spiega l'obiettività come legittimata per ognuno, nella misura in cui è condivisione intersoggettiva della conoscenza: "objektive, in jenem Sinn der für Jedermann daseienden, sich als wie sie ist in inter-subjektiver Erkenntnisgemeinschaft ausweisenden"[264]. La nozione di obiettività, dunque, si esaurisce nel massimo accordo intersoggettivo. Gödel trova invece che dovrebbe consistere in un *dato* e dunque oltre il mero soggettivo. Dice infatti a Wang: "quanto è soggettivo anche nell'accordo è diverso da quanto è obiettivo, nel senso che c'è una realtà al di fuori che corrisponde ad esso. Si dovrebbero distinguere questioni di principio da questioni pratiche: per le prime l'accordo non è di nessuna importanza"[265]. Bisogna pure notare che Husserl considera l'obiettività puramente nei

---

[260] Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel,* op. cit., p.122.

[261] Husserl E., *Formale und traszendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernuft*, Niemeyer Halle; rist. in *Husserliana,* op. cit., vol. 17 [trad. it. di Neri G.D., *Logica formale e trascendentale. Saggio di critica della ragione logica*, Laterza, Bari 1966].

[262] Toledo S., *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975,* non pubblicato, 24/3/72, p. 6.

[263] Husserl E., *Formale und traszendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernuft,* op. cit., p. 212.

[264] Ibidem, pp. 246-247.

[265] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit., p. 171.

termini della tesi della correlazione[266] e dalla lettura delle note di Gödel[267] è chiaro che conosceva bene il passaggio.

Un'altra critica riguarda un passo delle *Idee I* di Husserl, citato da Weyl nel suo articolo *Insight and reflection*[268], che Gödel aveva in parte sottolineato nella sua ristampa: "All real entities are entities of the intellect. Intellectual entities presuppose the existence of a consciousness which assigns them their meaning and which, in turn, exists absolutely and not as the result of assigned meaning" Gödel notava come la traduzione dal tedesco all'inglese di questo passaggio di inizio del § 55 delle *Idee I* non fosse particolarmente accurata. In tedesco si legge: "alle realen Einheiten sind *Einheinten des Sinnes*. Sinneseinheiten setzen (…) sinngebendes Bewusstseinvoraus, das seinerseits absolut und nicht selbst wieder durch Sinngebung ist"[269]. Nell'articolo originale di cui Gödel offre una traduzione in inglese, Weyl cita correttamente queste passo, che nella traduzione più corretta di F. Kersten recita: "All real unities are 'unities of sense'. Unities of sense presuppose […] a sense-bestowing consciusness wich, for its part, exists absolutely and not by virtue of another sense-bestowal" [270]. Gödel annota comunque, in riferimento alla citazione di Weyl, in Gabelsberger "falsch", che, a seguito del commento su rilevato esposto a Sue Toledo, non può riferirsi solo ad una traduzione poco soddisfacente del passo. Iso Kern nota come la tesi di Husserl di una

[266] Husserl E., *Formale und traszendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernuft,* op. cit., p. 233, 270.
[267] *GN* depliant 5/22, 050099.
[268] Weyl E., *Insight and reflection*, in *The spirit and uses of the mathematical sciences*, (a cura di Saaty A, e Weyl H.), McGraw-Hill, New York 1969, p. 292; traduzione dell'originale Tedesco in «Studia Philosophica», vol 15/1955, pp. 153-171, pp. 281-301; per un ulteriore approfondimento dei disaccordi fra Weyl e Husserl, si veda Bell J., *Herman Weyl's later philosophical views: His divergence from Husserl*, in «Proceedings of Ottawa 2000 Conference on Husserl and the Science», University of Ottawa Press, 2000.
[269] Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Erstes Buch, Husserliana, vol.III, op. cit., p.134.
[270] Husserl E., *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to phenomenological philosophy*, trad. ingl. di Kersten F., Kluwer, Dordrecht 1983, p. 128-129.

correlazione di essere e coscienza vuole rendere come ogni essere sia di principio accessibile ad ogni coscienza senza implicare che l'essere sia ontologicamente dipendente dalla coscienza[271]. Assentire ad una tale dipendenza è un passo ulteriore nel cammino di pensiero di Husserl e con esso "l'idea della costituzione è mutata da una chiarificazione delle strutture di senso, da una chiarificazione del senso dell'essere, alla fondazione della struttura dell'essere; da esplicazione diviene creazione"[272]; ma Gödel non era disposto a seguire Husserl in questa direzione e, per questo, si può sostenere che avrebbe preferito le concezioni de *L'idea di Fenomenologia* piuttosto che quelle esposte in *Idee I*[273].

In Husserl Gödel riconosce l'impianto di pensiero di matrice leibniziana: "Husserl ha usato, per giungere ai fondamenti, in un primo momento, la terminologia di Kant, poi quella di Leibniz ma per ottenere il ritratto del mondo"[274].

---

[271] Kern I., *Husserl und Kant*, Martinus Nijhoff, Den Haag 1964, p.280.

[272] Schutz A., *Collected Papers III*, a cura di Schutz I., Martinus Nijhoff, Den Haag 1966 p. 83, trad. mia.

[273] Van Atten M. e Kennedy J., *On the philosophical development of Kurt Gödel*, «The bulletin of symbolic logik», vol.9, n.4, dec.2003., p.454.

[274] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit., p.166, trad. mia.

## *LEIBNIZ, GÖDEL, HUSSERL*

### *Un'accettabile monadologia*

I filosofi per cui Gödel nutre ammirazione sono Platone, Lebniz e Husserl: "In his philosophy Goedel tried to combine and go beyond the main contribution of his three heroes: Plato, Leibniz, and Husserl. Leibniz had defined the ideal by giving a preliminary formulation of monadology. Husserl had supplied the method for attaining this ideal. Plato had proposed, in his rudimentary objectivism in mathematics, an approach that could serve as foundation for Husserl's method and, at the same time, make plausible for Gödel the crucial belief that we are indeed capable of perceiving the primitive concepts of methaphysics clearly enough to set up the axioms[275]". Così dichiara a Sue Toledo in 1972 essere la fenomenologia il tentativo di trovare termini primitivi: "Husserl never mentions that is goal for phenomenology is finally to come to an understanding e of the primitive terms themselves"[276] e continua sostenendo che il programma di Husserl consiste proprio nel tentativo di delineare l'intuizione, la presa, dei concetti, nonostante ci fossero altre e forse più comode vie[277].

Il metodo che Husserl fornisce è quello della riduzione fenomenologica

[275] Ibidem, p.289.

[276] Toledo S., *Notes on conversation with Gödel*, *1972-1975*, non pubblicato, 24/3/72, p.4.

[277] "Following Husserl's program with diligence could lead one finally to a grasping of the primitive terms (although there are other ways and perhaps quicker ways)" in ibidem,, 24/3/72, p.62.

o *epoché*, che include quanto Husserl chiama riduzione eidetica, posta per renderci chiara l'essenza dei fenomeni e senza di essa il progetto husserliano di una scienza rigorosa potrebbe facilmente confondersi con quelle posizioni da lui stesso criticate e rigettate pure da Gödel: naturalismo, obiettivismo, positivismo. Attraverso di esso, a sua volta reso possibile dal "rudimentale" obiettivismo posto da Platone per gli oggetti della matematica, si rende possibile afferrare i concetti o oggetti astratti e percepire abbastanza chiaramente i concetti primitivi della metafisica, tanto da stilare per essa un insieme di assiomi. "Phenomenology is not only approach. Another approach is to find a list of the main categories (e.g. causation, substace, action) and their interrelations, wich, however, are to be arrived at phenomenologically. The task must be done in the right manner"[278].

Per l'ultimo Husserl i concetti astratti di un dominio di pensiero sono intuiti o percepiti e chiarificati nell'intuizione eidetica o categoriale.

In una lettera a Rota del 1972, Gödel si riferisce esplicitamente all'*intuizione categoriale* di Husserl, all'intuizione dei termini primitivi.

Nelle argomentazioni husserliane Gödel trova il modo per mediare quel contrasto che, a lungo gli era pesato, fra realismo ed empirismo e che aveva gettato in una fase di stallo il suo pensiero. Husserl descrive infatti il metodo fenomenologico come una via per sviluppare e difendere un nuovo razionalismo scientifico che evita gli eccessi delle vecchie forme di razionalismo e aggira in un certo senso il misticismo le derive irrazionalistiche di certe assunzioni, Così in Husserl trova riscontro delle sue obiezioni alla critica kantiana del razionalismo, troppo serrata e che non rende l'effettivo conoscere matematico.

"Godel's own main aim in philosophy was to develop metaphysic – specifically, something like the monadology of Leibniz transformed into exact theory – with the help of phenomenology[279]". Così come leggiamo nell'articolo "Phenomenology" per l'*Encyclopedia Britannica*,

---

[278] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit., p.166.
[279] Ibidem, p.166.

scritto da Husserl nel 1928: "The ideal of the future is essentially that of phenomenologically based ("philosophical") sciences, in unitary relation to an absolute theory of monads" [280].

Gödel stesso non dice nulla su come una sua monadologia debba essere sviluppata con l'aiuto della fenomenologia e risulta difficile determinare quali elementi dell'originale monadologia di Leibniz prenderebbe a prestito e come rielaborarli attraverso la fenomenologia trascendentale. È possibile apprezzare le due monadolgogie indipendentemente l'una dall'altra, presentando esse importanti differenze: se quella leibniziana è soffusa di teologia, lo stesso non può dirsi per quella husserliana che anzi vuole una ragione nel pieno della sua autonomia e delle sue potenzialità conoscitive, che si estendono oltre l'esperienza sensibile. Al tempo del suo manoscritto sulla fenomenologia husserliana del 1961 Gödel ha ormai traslato la fondazione filosofica del proprio ottimismo razionalistico da Leibniz ed Hilbert a Husserl[281]. Esso non si basa più su una concezione meccanicistica della ragione e, conservando la concezione della mente come *monade*, fa leva sulla capacità di essa di una certa forma di ragione, tale da consentire l'elaborazione di un metodo sistematico non meccanico per la decisione delle questioni matematiche, sulla base della chiarificazione proveniente dall'intuizione dei concetti astratti coinvolti nei problemi stessi[282]. Il ricorso all'intuizione del significato e il fatto che il significato sia astratto è strettamente collegato alle conseguenze dei suoi teoremi.

Le idee circa Husserl e i chiarimenti a riguardo, che Gödel presenta nel manoscritto, sono compatibili con la credenza razionalistica in una

---

[280] Husserl E., *Phenomenology (drafts of the Encyclopedia Britannica Article)*, in *Psychological and trascendental phenomenology and the confrontation with Heidegger (1927-1931*), Kluwer, Dordrecht 1927-1928, pp. 83-194, pp. 191, 192.

[281] Tieszen R., *After Gödel: mechanism, reason and realism in the philosophy of mathematics,* «Phil. Math.», pp. 229-254.

[282] Tieszen R., *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

ragione che giunge alla chiarezza, all'esattezza, al rigore, caratteristiche che non vanno associate solo al calcolo meccanico. Nella pratica matematica sono molti gli esempi di chiarificazione di significato di concetti matematici, che non provengono da dimostrazioni o definizioni meccanicamente decidibili. Gödel torna con più vigore allo studio della fenomenomenologia proprio dopo l'insoddisfazione dovuta alla stesura del suo articolo su Carnap, quando sente più pressante l'esigenza di una sistemazione del quadro generale entro cui giustificare le sue fondamentali credenze: realismo del mondo concettuale, analogia fra i concetti della matematica e gli oggetti della fisica, possibilità e importanza dell'intuizione categoriale o della conoscenza concettuale e di ciò che chiama l'atteggiamento naïve o naturalistico. "Husserl's is a very important method a san entrance into philosophy, so as to finally arrive at some metaphysics. Transcendental phenomenology with *epoché* as its methodology is the investigation (without knowledge of scientific facts) af the cognitive process, so as to find out what really appears to be – to find the objective concepts"[283], da cui si evince ancora più fortemente che il maggior interesse di Gödel per il pensiero husserliano è rivolto proprio alla fenomenologia trascendentale per la riduzione fenomenologica (*epoché*). Questa consiste nel volgere lo sguardo dall'oggetto alla coscienza dell'oggetto. In genere poniamo noi stessi, volgendoci ad esperire direttamente gli oggetti di diversi domini, in un "atteggiamento naturalistico" e, nella riflessione, partecipiamo a questo volgerci, alla natura della coscienza dell'oggetto. La "riduzione eidetica" è coinvolta in questo volgimento dello sguardo, tanto che non ci occupiamo più di ciò che individuale, privato o soggettivo nella coscienza dell'oggetto. La coscienza d'esperienza dell'oggetto, non è intesa qui nella nozione comune di introspezione o *inner sense*; infatti tale coscienza associata all'epochè non riguarda l'azione di un uomo in particolare, ma la capacità dell'uomo di compiere una sorta di astrazione che si insedia nella

[283] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit., p.166.

coscienza umana, nel suo carattere universale. Una delle caratteristiche universali che in vari modi appartiene alla coscienza è l'intenzionalità.

"One foundamental discovery of introspection marks the true beginning of psychology. This discovery is that the basic form of consciousness distinguishes between an intentional object and our being pointed (directed) toward in some way (willing, feeling, cognized). There are various kinds of intentional object. There is nothing analogous in physics. This discovery marks the first division of phenomena between the psychological and the physical. Introspection [*epoché*] calls for learning how to direct attention in an unnatural way"[284].

Il concetto di intenzionalità è centrale nella psicologia e nella fenomenologia trascendentale, costituendo la peculiarità dell'essere della monade umana. Gödel parla della riflessione come mezzo dell'*epoché* atto a rendere chiaro la direzione dell'attenzione ed il suo, in questo caso, "modo non naturale". Tiene infatti presente direttamente i commenti di Husserl su come la pratica della riflessione fenomenologica sulla coscienza degli oggetti non sia la nostra naturale e diretta disposizione della mente, essendo noi più direttamente inclini ad un *atteggiamento naturale*.

Già nel 1917 Husserl iniziava a trovare connessioni della sua fenomenologia trascendentale con la monadologia di Leibniz, proseguendo il confronto nei suoi scritti lungo tutti gli anni Venti, fino ai primi anni Trenta del Novecento. Per scovare le somiglianze con le concezioni di Gödel è interessante notare le considerazioni su Platone Leibniz e Kant in alcuni dei lavori di Husserl come la *London Lecture* del 1922, *Erste Philosophie* (1923-1924) e *Cartesianische Meditazionen* (1931). Proprio in queste ultime troviamo cosa Husserl intendesse per monade: essa è "ego trascendentale nella sua piena concretezza"[285], l'ego trascendentale nella sua più ampia possibilità di conoscere e,

[284] Ibidem, p.169.
[285] Husserl, *Cartesianische Meditationen und pariser Vorträge*, op. cit., p. 67.

dunque, né la trascendentalità né la concretezza sono da intendere in un senso limitativo dell'ego. Piuttosto ogni monade si distingue da tutte le altre ma non per la capacità di comprensione, quanto per il suo rapporto alla concretezza, che ne rende l'individualità. Leibniz pone una certa varietà di monadi differenti, ma l'interesse di Husserl per i tipi di monadi è ristretto. Leibniz chiama anime razionali (spirito o mente) quelle monadi che sono capaci non solo di *percezione*, lo stato della monade che si rappresenta le cose esterne, ma anche di *appercezione*, la coscienza o la conoscenza riflessiva dello stato interno. Le anime con la ragione sono capaci di atti di riflessione, che per Leibniz rendono possibile la nostra conoscenza delle verità necessarie a priori. Se pensiamo alle monadi come "ego trascendentali nella loro piena concretezza", allora le monadi sono proprio i singoli individui considerati attraverso l'*epoché*. Nel riflettere sulla coscienza dell'oggetto, riflettiamo sul modo in cui gli oggetti ci appaiono nella coscienza, limitandoci alle apparenze, ossia ci limitiamo ai *phenomena* da cui la fenomenologia deriva il suo nome. Così facendo si sospendono o non si rendono note le affermazioni circa qualsiasi "presunta" realtà che si suppone nascosta dietro l'apparenza degli oggetti, includendo noi stessi fra gli oggetti della coscienza. Le *monadi* in senso husserliano devono essere intese di conseguenza. Tutto quanto devo fare con l'apparenza degli oggetti, con l'apparenza di me stesso inclusa e con qualsiasi affermazione legittima circa ciò che esiste o ciò che è reale, dovrà essere eretto su questa base, in accordo con l'evidenza nella nostra esperienza, che abbiamo nell'atto o che possiamo avere degli oggetti. Husserl ci tiene a tenere ben distinte la spiegazione fenomenologica e la "costituzione (costruzione) metafisica"[286], ponendo allo stesso tempo e in modo significativo la differenza fra la propria considerazione della monadologia e quella di Leibniz. La fenomenologia non è da includere nella metafisica *naïve* del prematuro progetto filosofico leibniziano; monadi, quali *ego*

[286] Ibidem, p. 150.

*trascendentalali nella loro piena concretezza* non sono oggetti metafisici in senso negativo. L'*epoché* sospende o mette tra parentesi le affermazioni circa qualsiasi presunta realtà, supposta nascosta dietro le apparenze stesse, incluse le anime o spiriti. Nella filosofia di Leibniz non c'è alcun metodo di sospensione; in quella di Husserl con l'*epoché* si vuole garantire alla filosofia un modo di procedere più sicuro. Non si tratta di un rifiuto radicale della metafisica o del positivismo. Tale punto di vista, invece, emerge proprio negli anni Venti contestualmente al *positivismo logico*, ma tentando di procedere fra l'empirismo radicale, e dunque lo scetticismo, e i discutibili aspetti del razionalismo tradizionale, per andare aldilà della preliminare formulazione della monadologia di Leibniz. Nel linguaggio che Gödel usa nel suo manoscritto su Husserl del 1961, la fenomenologia "tenta di evitare il salto mortale in una nuova metafisica", che condurrebbe solo ad una certa quantità di altri dubbiosi schemi metafisici[287].

In questo passaggio Husserl parla anche della costituzione intenzionale, il cui concetto di intenzionalità può forse essere visto come correlato alla considerazione di Leibniz della monade come *entelechia*[288]. Con ciò Leibniz intende che le monadi sono forze viventi attive, governate da leggi finalistiche, aprendo la strada, come invece il concetto di intenzionalità non fa, ad interpretazioni vitalistiche. Per Leibniz gli atti dell'anima si accordano alle leggi delle cause finali attraverso l'appetizione, i fini e i mezzi mentre gli atti del corpo si accordano con le leggi meccaniche: "[…] l'anima e il corpo seguono infatti ciascuno le proprie leggi, ma entrambi si accordano in virtù dell'*Armonia prestabilita* fra tutte le sostanza, le quali sono rappresentazione di un unico e medesimo universo"[289]. Offre dunque l'audace ipotesi

[287] Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961)*, op. cit., p.341.

[288] Si veda Tieszen R., *Monads and mathematics: Gödel and Husserl*, «Axiomathes», June 2011, p. 39.

[289] Leibniz G.W., *Principi della filosofia o monadologia. Principi razionali della natura e della grazia,* a cura di Cariati S., Bompiani, Milano 2001, §.78.

metafisica dell'*armonia prestabilita* riguardante ogni sostanza per spiegare l'unione di anima e corpo, dunque del regno delle cause finali e quello delle cause efficienti. Una volta accolta l'*epoché* fenomenologica e aderito alla struttura dell'evidenza e dell'intuizione come riempimento dell'intenzione, non siamo condotti ad alcuna spiegazione metafisica per l'unione e l'accordo di anima e corpo in una teoria dell'armonia prestabilita. Nondimeno ci sono alcune possibilità di intravvedere la divisione fra le spiegazioni secondo cause efficienti e quelle secondo cause finali, considerando l'intenzionalità come proprietà reale della nostra vita mentale non riducibile ad una nozione puramente naturalistica o fisica.

In un abbozzo dell'articolo per l'*Encyclopedia Britannica*, c'è un passaggio molto interessante perché molto vicino ad alcune osservazioni di Gödel su Husserl: "Remerkable consequences arise when one weights the significante of trascendental phenomenology. In its systematic development, it brings to realization the Leibnizian idea of a Universal Ontology as the systematic unity of all conceivable a priori sciences, but on a new foundation which overcomes "dogmatism" through the use of the trascendental phenomenological method. Phenomenology as the science of all conceivable transcendental phenomena and especially the synthetic total structures in wich alone they are concretely possible – those of the transcendental single subjects [monads bound to communities of subjects [monads] is *eo ipso* the a priori science of all conceivable beings [*Seienden*]. But [it is the science], the, not merely of the totality of objectively existing beings taken in an attitude of natural positivity, but rather of the being as such in full concretion, which produces its sense of being and its validity through the correlative intentional constitution. It also deals with the being of transcendental subjectivity itself, whose nature is to be demonstrably constituted transcendentally in and for itself. Accordingly, a phenomenology properly carried through is the truly universal ontology, as over against the only illusory all-embracing ontology in positivity – and precisely for this reason it overcomes the dogmatic one-sidedness and hence yhe unintelligibility of the latter, while at the same time it comprise within itself the truly legitimate content [of an ontology of positivity] as grounded originally in intentional constitution"[290].

La realizzazione dell'idea di Leibniz di un'unità sistematica di tutte le scienze a priori concepibili è qui trattata sulla base di una nuova fondazione, che superi il dogmatismo proprio con l'uso del metodo trascendentale fenomenologico. Sulla base dell'eidetica fenomenologica trascendentale la scienza che ne risulterebbe non è propriamente una scienza positiva, ma è la scienza delle monadi, le cui coscienze sono peculiarmente dotate di intenzionalità, per mezzo della quale internamente producono il senso dell'essere e dell'essere dei loro oggetti nella scienza attraverso atti fondati della coscienza, quali atti di riflessione, astrazione, formalizzazione e variazione immaginativa. Intendere gli oggetti nel senso dell'intenzionalità è significare gli oggetti in un certo modo. Husserl sostiene che su questa base si possa superare da una parte il dogmatismo delle scienze positive e fornire una corretta fondazione per le scienze, mostrando come hanno la loro origine nella costituzione trascendentale. Alcuni di questi temi sono ripetuti nelle note della *London Lecture,* "trascendental phenomenological subjectivity or monadologism as [is a ]necessary consequence of the trascendental phenomenological attitude. The knowledge that any objectivity is only one possibility for an absolute and concrete being: the being of a concretely full trascendental subjectivity. It is the only genuine "substance". The *ego* is what it is from its own fundamental meaning. the *ego* is in so far as it constitutes itself for itself as being. All other being is merely relative to the ego and

---

[290] Husserl E., *Phenomenology (drafts of the Encycolpedia Britannica Article*), op. cit., p.175.

is encompassed within the regulated intentionality of subjectivity"[291].

Qui Husserl sostiene che ogni obiettività, inclusa quella matematica e quella logica, è ciò che è, solo attraverso il significato intenzionale conferito dalla monade, unica sostanza "genuina". Husserl tiene il termine *sostanza* tra virgolette e, facendo notare come il suo senso sia modificato dall'*epoché*, afferma essere la monade una sostanza semplice, ma non più come qualcosa di reale dietro tutte le possibili apparenze. L'idea che nella scienza le monadi costituiscano il significato dell'essere degli oggetti, verso cui erano intenzionalmente dirette, in atti mentali e fondanti intesi da Leibniz interni alla riflessione, gioca un ruolo molto importante su come le idee di Husserl possano essere sviluppate in un'impostazione di pensiero difendibile e dunque sistemate per un'accettabile e non anacronistica *monadologia,* in una formulazione che integra le idee di Leibniz e Platone con la filosofia trascendentale. La fenomenologia trascendentale si configura allora come una Ontologia Universale unificazione di tutte le scienze a priori concepibili, che può trovare realizzazione unicamente in un metodo non dogmatico, il metodo fenomenologico. La fenomenologia come scienza è la scienza di tutti i fenomeni concreti e dunque la scienza a priori di ogni possibile esistenza. A tale universo degli a priori si riferisce ogni obiettività, quale sua origine trascendentale a cui ogni scienza, anche quella positiva non può non ricorrere. È in questo senso che Husserl ritiene che si possa restaurare la filosofia quale conoscenza nel senso platonico[292].

Il linguaggio qui usato mostra l'accordo di Gödel con il tentativo fenomenologico, il cui metodo fornisce la base per cui la *preliminare* formulazione della *monadologia* di Leibniz, avvalorata e realizzata su una nuova e non dogmatica base. Grazie ad esso possiamo rivelare il

[291] Id., *The London Lectures (syllabus of a course of four lectures*), in McCormick P. Elliston F. (a cura di), *Husserl: shorter works*, University of Notre Dame Press 1981, pp. 68-74, p.72.

[292] Husserl E., *Phenomenology (drafts of the Encycolpedia Britannica Article*), op. cit., pp. 191-194.

processo monadico, soggettivo, dal quale è stabilito l'a priori. "Leibniz believed in the ideal of seeing the primitive concepts clearly and distinctly. When Husserl affirmed our ability to 'intuit essences' ha had in mind something like what Leibniz believed"[293]. Husserl allo stesso modo ritiene che su questo terreno le scienze matematiche non possono essere attaccate dai paradossi, che appunto Gödel non ritiene siano un problema per esse.

Quanto Gödel si attenga all'originale monadologia di Leibniz non è del tutto chiaro, così come non sappiamo in che misura si sia attenuto alla fenomenologia trascendentale di Husserl. Se andasse nella direzione indicata da Husserl, allora riconoscerebbe alla filosofia la capacità di evolversi in una *scienza rigorosa*, universale ed a priori, sulla base del *metodo eidetico fenomenologico* (*epoché*) e sviluppando un nuovo tipo di monadologia. Questa sarebbe combinata con il riconoscimento dell'obiettività degli oggetti ideali astratti e dei concetti della matematica e della logica e la filosofia ammetterebbe e tenterebbe di coltivare entrambe le intuizioni categoriali, proprio per chiarificare il significato dei concetti primitivi di logica matematica e metafisica. È questa chiaramente una forma di razionalismo idealmente usato in connessione ai risultati tecnici di Gödel per ottenere la decisione di problemi aperti riguardanti la fondazione della matematica e della logica, inclusa la teoria superiore teoria degli insiemi, e per la prova di una fondazione delle scienze e della filosofia stessa.

È questo punto di vista opposto a positivismo logico, naturalismo, convenzionalismo ed empirismo circa la logica, la matematica e la filosofia; come lo è a soggettivismo, psicologismo e realismo aristotelico circa i concetti e gli oggetti della matematica, della logica e della filosofia, quanto sta dietro alla critica della concezione di Carnap, della matematica come sintassi del linguaggio, e alle sue obiezioni alle interpretazioni tendenti a sinistra nella considerazione della matematica, tra cui il formalismo hilbertiano circa la fondazine della

---

[293] *Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* op. cit., p. 168.

matematica, al fine di sostenere che la mente umana, monade, non è da identificarsi con la macchina di Turing.

La monade come *ego trascendentale nella sua piena concretezza*, che attraverso l'intenzionalità costituisce internamente i significati degli oggetti del mondo, nel caso della matematica (classica), della logica e delle altre scienze a priori, inclusa la stessa fenomenologia, costituisce internamente il significato dell'essere dei loro oggetti, essenze ed oggetti categoriali, come ideali ed astratti e razionalmente motivati in atti fondati di riflessione. In questo dominio l'*evidenza* è assunta sulla base dell'intuizione eidetica e categoriale e non dell'intuizione sensibile kantiana, anche se come in Kant concetti puri senza intuizione sono da ritenere vuoti. L'intuizione categoriale è richiesta per la conoscenza ed è la risorsa, la fonte, dell'evidenza per la matematica, per la logica e per le scienze eidetiche.

***Il platonismo di Gödel***

"Ma è la conoscenza delle verità necessarie ed eterne a differenziarci dai semplici animali, e a darci la ragione e le scienze, poiché ci eleva alla conoscenza di noi stessi e di Dio. In ciò consiste quel che in noi si chiama anima razionale o spirito"[294].

"È quindi mediate la conoscenza delle verità necessarie e mediante le loro astrazioni che siamo elevati agli atti riflessivi, i quali ci consentono appunto di pensare quel che si chiama Io, e di considerare tutto ciò che è in noi. Ed è così che, pensando noi stessi, si pensa l'Essere, la Sostanza e il Composto, L'Immateriale e Dio stesso: e ciò che in noi è limitato viene concepito come illimitato in Dio"[295].

Leibniz chiama *menti* le anime degli animali razionali ne *I principi della natura e della grazia basati sulla ragione*

[294] Leibniz G.W., *Monadologia*, op. cit., §.29.
[295] Ibidem, §.30.

"Queste anime sono capaci di compiere degli atti riflessivi e di pensare quel che si chiama *Io,* Sostanza, Anima, Spirito, in breve: le cose e la verità immateriale"[296].

Per Husserl la costituizione della matematica e della logica prendono posto attraverso differenti tipi di atti, alla base dell'intuizione eidetica o categoriale, fondati della riflessione e dell'astrazione. Il Platonismo di Gödel, in questo schema, rifletterebbe l'estensione per cui la monade costituisce razionalmente il significato dell'essere degli oggetti della logica e della matematica come astratti e indipendenti dalla mente umana o trascendenti. Data l'*epoché* ciò avrebbe la forma di un platonismo che Tieszen chiama *constituted platonism*[297], diverso dal platonismo matematico tradizionale che non è trascendental fenomenologico, idealistico. Platone certamente non parla di costituzione interna di significato da parte di "monadi" ed è impegnato, secondo Husserl, in una metafisica ingenua (*naïve*), così come gli altri matematici tradizionali e platonisti. Il platonismo *costituted* ha dovuto limitarsi alle apparenze ed ai fenomeni. Non si ha accesso ad una qualche realtà asserita, supposta nascondersi dietro ad ogni nostra possibile esperienza o esercizio di intuizione eidetica o categoriale. In questa *monadologia* la monade, come *ego trascendentale nella sua piena concretezza,* può essere combinata con una sorta di platonismo, *platonismo constituted*, circa la logica e la matematica (come non avviene in Leibniz e Kant) e con l'idea di una scienza universale, che, in qualche modo mantiene l'approccio trascendentale di Kant ma esteso alla logica, alla matematica e alla filosofia, evitando il dualismo kantiano di fenomeno e noumeno, la restrizione dell'intuizione e la serrata critica al razionalismo, concludenti in un certo scetticismo della conoscenza dell'ideale e dell'astratto (concetti). Gli elementi nel lavoro di Platone, Leibniz, Kant e Husserl arrivano sempre ad una posizione in

[296] Id., *Principi razionali della natura e della grazia*, in op. cit., p. 43.
[297] Tieszen R., *Mathematical realism and transcendental phenomenological idealism,* in Hartimo M. (a cura di), *Phenomenology and mathematics,* Springer, Berlin 2010.

cui la monade costituisce in una comunità di monadi, il significato dell'essere dei propri oggetti nella matematica e nella logica quali ideali e astratti e non mentali; esso acquisisce evidenza in questo dominio sulla bese dell'intuizione categoriale o *Wesenanalyse*. In accordo con Leibniz le monadi costituiscono internamente gli oggetti che sono e gli oggetti logici. È infatti rinomata la sua affermazione che le monadi non hanno finestre ossia non possono entrare in comunicazione fra di loro, interagire causalmente l'una con l'altra o con il mondo esterno. Tutti i loro atti sono interni. Per Leibniz non ci sono soggetti per le leggi causali, ma solo per le leggi finalistiche e, se facciamo un balzo dalle questioni leibniziane di fine Diciassettesimo secolo agli anni Venti del Ventesimo secolo, i cambiamenti sono stati inevitabili ed interessanti.
Le monadi di Husserl sono infatti *ego trascendentali nella loro piena concretezza* e, nel momento in cui ci impegniamo con l'*epoché,* ci apriamo ad un'analisi trascendentale degli ego nei termini di relazioni causali. Noi possiamo accettare l'interazione causale delle monadi con se stesse o con il mondo esterno solo nel momento in cui con l'*epoché* sospendiamo una tale spiegazione. La spiegazione causale sarà invece l'oggetto delle scienze naturali, inclusa la scienza naturale della psicologia, mentre l'*epoché* mira a ad aprire uno spazio per la descrizione fenomenologica pura e per l'analisi della coscienza o, meglio, di come le monadi costituiscono il significato dell'essere del mondo attraverso le loro attività intenzionali. Gli oggetti intenzionati, a cui è diretta la coscienza umana, non sono compresi nei termini della relazione causale con l'oggetto, ma ciò ha piuttosto la forma "la monade M significa (intende) x". Nel momento in cui accettiamo l'*epoché* allora ci impegniamo a trattare con fenomeni e a parlare in termini di apparenze, che come tali non sono quanto fungono da argomento per le scienze naturali. Con la riduzione fenomenologica, invece, ricorriamo alle apparenze o fenomeni per fornire una presentazione filosofica di come la coscienza del mondo naturale si renda possibile. L'*epoché* ci permette di focalizzarci sulle attività interne

alla monade tentando una reinterpretazione dell'affermazione di Leibniz.

La fenomenologia traghetta la monadologia nel Ventesimo secolo distillando le affermazioni di Leibniz e rendendo, la sua audace ipotesi un tentativo di analisi della coscienza umana, molto più accettabile dell'originale. La fenomenologia eidetica vuole indagare come le monadi costituiscano internamente il significato dell'essere del mondo, anche in riferimento alle connessioni causali. La monade M significherà che x causa y per certe categorie di oggetti x, y. Si può dire che conoscono che x causa particolari x e y, quando sia stata accettata l'evidenza della loro congettura causale. Le relazioni causali sono esse stesse costituite da una monade, in accordo con varie condizioni di evidenza. Le monadi infatti sono l'origine di ogni costituzione. Invece di essere derivate dall'esperienza dei sensi, come vorrebbe l'empirismo, le categorie di causa ed effetto, come relazione in una struttura formale, sono considerate come condizioni a priori per la possibilità dell'esperienza sensibile e per la scienza naturale. Nel § 57 della *Monadologia*, Leibniz sostiene che ciascuna monade ha il suo proprio punto di vista o prospettiva e aggiunge che proprio questo è il mezzo, per ottenere la maggiore varietà pur con il maggiore ordine possibile; è il mezzo per ottenere la maggiore perfezione possibile. Certamente Husserl sarebbe d'accordo nel riconoscere la coscienza umana come *prospettica*.

Leibniz sostiene pure che la monade rispecchia o riflette tutto dell'altro e Husserl cerca di fare luce su ciò in modo che con contraddica l'obiettività del significato del mondo, incluso quello della matematica. Ciascuna monade come *ego trascendentale* è presumibilmente "priva di finestre" ma data la costituzione obiettiva di significato, ciascuna rispecchia ognuna delle altre e, in questa intersoggettività, costituisce l'obiettività del mondo in un universo compossibile, armonioso, di monadi. La questione dell'intersoggettività e della stratificazione della costituzione di significato del mondo obiettivo sarà analizzata molto dettagliatamente da Husserl, ma anche da tutto il movimento fenomenologico. In molte delle sue opere Husserl presenta un'analisi di come la monade umana costituisce autonomamente la consapevolezza delle altre monadi. Una delle sue idee, senza scendere in troppi dettagli, è che ci sia una *funzione di appaiamento*, *paring function*[298], che rende possibile la percezione analogica delle altre monadi. Noi percepiamo la coscienza dell'altra monade letteralmente nel modo in cui percepiamo il corpo dell'altra monade. Per Husserl il corpo dell'altro è percepito nell'esperienza sensibile, ma per l'esperienza di un'altra mente si deve non solo avere esperienza dell'altro come un oggetto, ma anche come un soggetto di esperienza. Devo esperire di essere esperito come un soggetto da un altro, altrimenti non potrebbe esserci *riflessione* o *rispecchiamento*. Si suppone ciò essere possibile, perché nel mio proprio caso il mio *corpo vissuto* è accoppiato alla mia coscienza e, sulla base della percezione di simili corpi vissuti altrui, noi associamo la coscienza a quel corpo vissuto che esperiamo, la coscienza dell'altro non è letteralmente percepita, quanto analogicamente appercepita. Le monadi non hanno finestre, ma sono poste come aventi struttura interna caratterizzata dalla *funzione associativa* che rende possibile l'appercezione della coscienza delle altre monadi, che si *rispecchiano* l'una con l'altra e ciascuna dalla propria prospettiva.

### ***Monadi e filosofia della matematica***

Riguardo all'obiettività matematica e alla sua costituzione da parte delle monadi, Leibniz sostiene che le controversie non avranno mai fine, né sarà imposto il silenzio sulle divisioni a meno che il complicato ragionamento non venga al calcolo e le parole ai riferimenti della *characteristica universalis.* Nel caso di una disputa non ci resta, per

[298] Tieszen R., *Monads and mathematics: Gödel and Husserl,* op. cit., p.44.

risolvere la questione, che sederci e calcolare. Combinando le idee di Leibniz sulla *characteristica universalis* e il *calculus ratiocinator* con la sua monadologia, si arriva evidentemente a considerare che avremo in matematica una completa armonia tra le monadi, se ogni problema matematico da risolvere si riduce ad una questione di decidibilità meccanica, di calcolo, di computazione. Quanto il nostro non vuole. È questo il solo modo in cui possiamo eliminare i disaccordi e le divisioni in matematica e in logica. Idealmente l'obiettività matematica richiede una completa armonia fra le monadi, che è possibile quando il problema matematico è riducibile a calcolo della ragione. In linguaggio husserliano, ogni costituzione matematica da parte delle monadi sarebbe adattabile algoritmicamente[299]; dal punto di vista leibniziano è quanto di obiettività matematica è consentito alla monade limitata che noi siamo. Per Gödel la *characteristica universalis* voluta da Leibniz, se interpretata come sistema formale, non esiste. Ogni procedura sistematica per la soluzione di problemi di ogni sorta dovrebbe essere non meccanica e ritiene che i suoi teoremi dimostrino proprio che non può esserci alcun sistema formale in cui questo calcolo possa essere eseguito. L'alternativa, Gödel, la intravede nel metodo fenomenologico, che con la sua riduzione eidetica offre la possibilità di trovare un metodo sistematico e finito ma non-meccanico per la decisione di questione matematiche, sulla base della chiarificazione possibile a seguito dell'intuizione dei significati astratti o concetti associati ai termini implicati nei problemi. Per questa ragione Gödel parla, nel manoscritto su Husserl del 1961, di chiarificazione di significato e da essa dipenderà l'obiettività matematica, coadiuvata dalle stimolazioni provenienti dal rigore formale delle stesse formulazioni logiche e matematiche. La decidibiltà per conto della ragione umana deve rimanere distinta dalla decidibiltà sulla base del calcolo meccanico. L'armonia fra le monadi potrebbe anche avere un fondo di verità e in ultimo rimarrebbe come ideale della scienza che non può essere

[299] Ibidem.

abbandonato.

Nel §. 60 della *Monadologia* sostiene Leibniz: "[…] le monadi sono dunque limitate non nell'oggetto: esse tendono sì all'infinito, al tutto, ma confusamente, appunto perché sono limitate e differenziate a seconda del gradi di distinzione delle loro percezioni"[300].

Nel lavoro di Leibniz potrebbe essere intravista una sintesi[301] delle visioni aristotelica e platonica nel senso che segue: la mente umana giunge a conoscere i concetti astratti e gli oggetti, come per Aristotele, attraverso l'astrazione che è limitata, mentre tutti i concetti astratti o oggetti che esistono, come per il platonismo, "esistono già" nella mente di Dio e sono in questo senso indipendenti dalla mente umana[302]. In quanto perfetti, la conoscenza di essi da parte delle limitate monadi può giungere solo ad alcuni di quei concetti o oggetti astratti che esistono nella mente di Dio. Diversamente da Leibniz, Husserl non usa l'ipotesi della mente divina, che pure è posta fra parentesi con *l'epoché*, come supporto al realismo o platonismo, piuttosto ritiene che gli oggetti della matematica e della logica si costituiscono in atti fondanti. Le monadi razionali costituiscono l'indipendenza della mente e l'astrattezza degli oggetti matematici sulla base degli atti di riflessione, astrazione, formalizzazione, idealizzazione e variazione immaginativa.

È a questo genere di chiarificazione di significato che si farà ricorso nello spiegare la nostra conoscenza dell'infinito, quanto Gödel tenta nel suo scritto del 1964 sull'Ipotesi del continuo di Cantor[303]. In esso considera il lavoro di Husserl in riferimento alla Teoria degli insiemi di Cantor e all'intuizione matematica, essendo possibili come chiarisce nel testo, percezioni di tipo matematico, intuizioni. I problemi che essa pone, che vedono coinvolti concetti la cui sensatezza e non ambiguità sono evidenti ponendosi come veri, potranno ottenere in futuro

---

[300] Leibniz G.W., *Monadologia*, op. cit., §. 60.
[301] Tieszen R., *Monads and mathematics: Gödel and Husserl,* op. cit.
[302] Ibidem.
[303] Gödel K., *Che cos'è il problema del continuo di Cantor? (1964),* op. cit.

risposte non ambigue dagli ulteriori chiarimenti dell’intuizione. Questa non è da intendere come un’intuizione immediata degli oggetti interessati quanto mediata ed infatti le idee degli oggetti della fisica si formano anche sulla base di qualcos’altro dato direttamente. Le nostre idee riguardo agli oggetti fisici come a quelli astratti contengono costituenti qualitativamente differenti fra di loro. I *dati* che soggiacciono alle idee non possono essere da noi prodotti, ma sicuramente cercati e divenirci ogni volta più chiari nel procedere della ragione che si approssima alle cose, come da metodo husserliano.

***Monadologia e teoria della dimostrazione***

Dalle analisi del manoscritto del 1961, il problema con l’originale teoria della dimostrazione sta nel tentativo di combinare, in modo del tutto inaccettabili, la direzione di destra con quella di sinistra, compiuto in modo del tutto inattuabile. In esso si tenta di fare giustizia sia dell’empirismo che della visione di destra della matematica. In conformità con le idee prevalenti nel recente empirismo, è ammesso che la verità degli assiomi, da cui prende avvio la matematica, non possono essere giustificati o riconosciuti in alcun modo e, quindi, quanto se ne trae come conseguenze di essi, ha validità solamente in un senso ipotetico. La deduzione delle conseguenze è, in omaggio allo spirito del tempo, considerata mero gioco di simboli secondo regole, senza il supporto dell’intuizione. In conformità con la precedente filosofia della matematica dei razionalisti e, facendo affidamento all’istinto dei matematici, si sostiene che la prova della proposizione debba fornire sicure fondamenta per essa e che ogni questione formulata precisamente, come questione che esige una risposta negativa o affermativa (questione decidibile), deve trovare in matematica una risposta netta. Si afferma di provare che le inerenti e non fondate regole del gioco con simboli che di due affermazioni A e non A, solamente una può esattamente e sempre essere derivata. Un tale sistema è consistente se non entrambe possono essere derivate e se, disgiuntivamente, una sola può essere derivata, allora la questione matematica espressa da A può trovare una risposta chiara e netta. Per giustificare le asserzioni di consistenza e completezza, una certa parte della matematica deve essere riconosciuta come vera nel senso della vecchia visione di destra della filosofia. La parte in questione, nonostante sia molto meno opposta allo *Spirito del tempo*, che la innalza ad astrazione della teoria degli insiemi, è la parte che si riferisce solo ai concreti e finiti oggetti dello spazio, vale a dire la combinazione di simboli. È questo il finitismo hilbertiano. Nel programma di Hilbert si nota dunque un'interessante mistura di elementi di razionalismo e di elementi di empirismo. Gli elementi razionalistici da una parte la credenza nella decidibiltà di problemi matematici chiaramente formulati e l'esigenza che le dimostrazioni forniscano una sicura fondazione per le proposizioni dall'altra, CHE quali elementi di destra, sono traslati nel contesto di un sistema formale *empiricamente dato*. I sistemi formali dati empiricamente sono invece in totale accordo con lo spirito del tempo. Il passo successivo nello sviluppo giunge con i teoremi di incompletezza che rivelano impossibile salvare la più vecchia visione di destra degli aspetti della matematica, tanto che il formalismo si trova in accordo con lo Spirito del tempo.

Il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel dimostra che per la teoria formale T contenente abbastanza matematica da rendere possibile la numerazione di Gödel, se T è coerente, allora c'è un'affermazione GT, la proposizione di Gödel per T, tale che né GT né non GT è provabile in T. Per Hilbert la matematica finitista è supposta essere la matematica del concreto: le configurazioni dei sensi finiti (token) si danno a noi nello spazio e nel tempo nell'intuizione sensoriale immediata. Questi oggetti sono in un nesso causale[304]. Hilbert invoca la concezione kantiana

[304] Se ad essere coinvolti sono invece i "tipi di segno" allora essi assumono il carattere di quasi-concreto, seguendo Parsons.

dell'intuizionenon c'è inoltre bisogno di considerare il significato dei termini nel sistema assiomatico formale, per cui cerchiamo di fornire dimostrazioni finitiste di coerenza. Nei fatti si dovrebbe evitare ogni appello al significato e lavorare solo con la sintassi. Infatti, in riferimento al primo teorema di Incompletezza, per la matematica finitista F non abbiamo bisogno di decidere esattamente cosa sia la matematica finitista; può intendersi la matematica ricorsiva primitiva (PRA) o anche l'aritmetica di Peano (PA). In ogni caso F non potrà decidere la proposizione di Gödel per F, se F è consistente. Nondimeno GF è vera se F è consistente. Poiché F è la matematica degli oggetti spazio-temporali del concreto finito dati nello spazio e nel tempo, nell'intuizione sensibile, la nostra presa della verità di GF deve esserlo di qualcosa di astratto, infinitario, che non potrebbe essere un argomento dei segni nello spazio e nel tempo dell'immediata esperienza sensibile. Come, dunque, è possibile sapere che GF è vera se F è consistente? Sulla base della nostra monadologia l'affermazione sarebbe che, a condizione della possibilità della nostra conoscenza, è che ci siano monadi che "vedono" o intuiscono la verità di GF. Le monadi decidono GF in modo razionale, sulla base degli atti fondati di reflessione, in cui non intendono semplicemente ma intuiscono categorialmente la verità di GF. La conoscenza non richiede pura concettualizzazione ma intuizione, che è richiesta per l'obiettività e, dunque, deve essere coinvolta la forma dell'intuizione razionale. L'intuizione kantiana o anche quella hilbertiana non può essere sufficiente. L'evidenza è acquisita sulle basi dell'intuizione razionale. L'idea è che la monade umana decide queste proposizioni (finalisticamente indecidibili sulla base della capacità della ragione, non riducibile alla decidibilità meccanica nei sistemi formali. Secondo il Primo Teorema di Incompletezza c'è naturalmente una condizione per sapere se GF è vera: che F sia consistente.

Consideriamo ora il Secondo Teorema di Incompletezza: se una teoria T è consistente, dunque (CON) non è dimostrabile in T, "CON(T)" è una particolare dichiarazione formalizzata che asserisce la consistenza di T. Inoltre, si dia T=F. Le matematiche finitiste F non saranno in grado di dimostrare la consistenza di F se F è consistente. Ci sono, comunque, dimostrazioni di consistenza per F, supponendo F essere PRA, PA o una teoria più potente. Come è possibile ciò? Ancora sulla base della monadologia su delineata possiamo sostenere che la condizione di possibilità di tali dimostrazioni sia, che la monade umana può provare la consistenza di F sulla base della riflessione sull'astratto, sui concetti o oggetti infinitari. Tali concetti non sarebbero completamente disponibili nel sensibile o in ciò che Husserl chiama *intuizione semplice*. Se la conoscenza richiede solo mere concezioni o intenzioni di significato, ma anche intuizione, e se possiamo dire di sapere che F è consistente perché abbiamo per questo una prova, allora l'intuizione "categoriale" deve essere implicata. Per Gödel i Teoremi di Incompletezza mostrano che abbiamo bisogno di un'ampia nozione di intuizione, sebbene porti certe importanti analogie con l'ordinaria intuizione sensibile. Contrariamente alla posizioe di Hilbert, le dimostrazioni esigono un qualche oggetto ideale o astratto, che richiede intuizioni non derivanti semplicemente dalla riflessione sulle proprietà combinatoriali e spazio-temporali dei simboli. Si avrebbe bisogno, piuttosto, della riflessione sui significati e sui contenuti coinvolti. Se F è l'aritmetica di Peano, per esempio, la prova di consistenza nello stile di Gentzen svilupperà l'induzione transfinita su ordinali $<\varepsilon 0$, mentre una prova di consistenza nello stile dell'interpretazione *Dialectica*, richiederà funzioni ricorsive di tipo finito. La concezione della monade abbozzata consente la possibilità di trovare metodi sistematici e finiti ma non meccanici per la decisione di problemi matematici sulla base delle chiarificazioni da parte dell'intuizione dei concetti (significati dei termini) astratti coivolti nei problemi. La dimostrazione finitista non può fornire una sicura fondazione delle proposizioni matematiche, come Hilbert auspica, perché la consistenza di F non può essere provata usando F stesso. Dovremo, invece, fare affidamento sull'*intuizione razionale* della monade per una sicura fondazione. Il problema è che noi non possiamo accogliere l'ottimismo hilbertiano circa la decidibilità di problemi matematici chiaramente posti, né sostenere che una dimostrazione debba fornire un sicuro fondamento per una proposizione, una volta che queste idee sono state traslate nel programma i tipo formalista, supposto soddisfacente per l'empirismo. I due elementi razionalistici possono essere preservati piuttosto sulla base della dei una *monadologia fenomenologica*. Si potrebbe sostenere che i Teoremi di Incompletezza, nei fatti, permettono una sorta di chiarimento di significato, mostrandoci, ad esempio, che non devono essere sovrapposti due diversi concetti: il concetto di probabilità puramente formale e quello puramente formale di dimostrazione – certamente si può sostenere che ci mostrano il concetto puramente formale di dimostrazione non deve essere confuso con quello di prova come "ciò che fornisce l'evidenza", appartenendo la dimostrazione alla matematica soggettiva.

**Monadi e teoremi di incompletezza**

Le affermazioni di Gödel circa la natura della mente prendono tutte atto dei Teoremi di incompletezza e dei correlati risultati di indecidibilità, che non consentono una riduzione della mente a macchina finita. Tuttavia l'eccedere della mente rispetto ad una macchina finita del tipo di quella di Turing non deriva direttamente dal suo teorema di Incompletezza, come Lucas[305] e Penrose[306] tentano di argomentare. Esso, più che a tale evidenza, induce il ragionamento in

[305] Lucas J.R., *Mind, machines and Gödel*, in «Philosophy», vol. 36/1961, pp. 112-127.
[306] Penrose R., *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford 1989 [trad.it. *La nuova mente dell'imperatore*, Rizzoli, Milano 1992; Id., *Shadows of the Mind*, Oxford univerity Press, Oxford 1989 [trad. it. *Ombre sulla mente*, Mondadori, Milano 1994].

una proposizione disgiuntiva e, dunque, indecidibile: che lascia aperta la questione. Rimasta insoluta finisce per rimanere un articolo di fede.
Gli argomenti, che dall'incompletezza tentano di ricavare il carattere non meccanico della mente, consistono nel tentativo di trarre una contraddizione dalla considerazione meccanica della mente. Nel caso in cui la mente fosse una macchina, la contraddizione consisterebbe nel fatto di poter ricavare una proposizione del tipo "io non sono dimostrabile" relativa alla macchina, ma che tuttavia dovrebbe essere indecisa per la mente. Per costruire una tale proposizione dovrebbe essere possibile conoscere tutti gli assiomi e le regole della teoria rispetto alla quale si parla di dimostrabilità e nella discussione del secondo teorema di incompletezza, emerge una tale possibilità ma solo se si trascura il dettaglio della formalizzazione. Dalla *Gibbs Lecture* emerge come l'impossibilità dell'uomo di conoscere se stesso non deve essere confusa con la propria illimitatezza o inesauribilità.
Gödel più chiaramente sostiene che, se esiste una regola del procedere della mente e quindi dell'intuizione matematica, noi certamente non potremmo riconoscerla come tale e dimostrarla, né conoscere con certezza matematica che tutte le proposizioni che essa produce sono corrette[307]. Quello che possiamo fare è percepire la verità di una proposizione dopo l'altra, per un numero qualunque finito di esse, perciò il numero e la precisione dei termini astratti a noi disponibili ad ogni stadio, può essere finito ma tendere all'infinito nel corso dell'applicazione della regola meccanica stessa. In risposta all'argomento elaborato da Turing per provare che i procedimenti mentali non possono portare al di là delle procedure meccaniche, all'interno del dibattito sulla lunghezza e complessità delle dimostrazioni, Gödel non esclude la possibilità che il procedere della ragione matematica si risolva in un procedimento meccanico, che non

[307] Gödel K., *Alcune osservazioni sulla relazione fra la teoria della relatività e la filosofia kantiana*, in Opere, vol. 3, op. cit. pp. 195-224, tre versioni preparative dell'articolo; si veda Wang H., *From mathematics to philosophy*, op. cit, p. 324.

solo non possiamo riconoscere, ma di cui non dobbiamo escludere lo sviluppo. La mente nelle sue manifestazioni, infatti, non è statica ma dinamica e i termini astratti ci divengono più chiari man mano che ne facciamo uso. È per questo che va indagato il procedere della ragione secondo il metodo fenomenologico. Allora la mente umana come monade può anche sistematicamente usare l'intuizione per la decisione di problemi aperti nella teoria dei numeri, facendo leva sistematicamente sull'intuizione degli oggetti astratti, sul significato dei termini coinvolti. La mente umana come monade finita può conoscere gli oggetti astratti o concetti sulla base dell'intuizione categoriale o *Wesenschau* e dunque non è una macchina di Turing.

***RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI***

## *Bibliografia primaria*

Gödel K., *Collected Works vol.I: Publications 1929-1936*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford [trad.it., *Opere 1929-1936* vol.1, a cura di Edoardo Ballo, Silvio Bozzi, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Bollati Borinhieri, Torino 2002].

Gödel K., *Collected Works vol.2*: *pubblications 1938-1974*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford [trad.it., *Opere 1838-1974* vol.2, a cura di Edoardo Ballo, Silvio Bozzi, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Bollati Borinhieri, Torino 2002].

Gödel K., *Collected Works, vol.3*: *Unpublished essays and lectures*, a cura di Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H.Moore, Robert M. Solovay e Jean van Heijenoort, Oxford University Press, New York – Oxford 1995 [trad. it., *Opere*. *Saggi inediti e conferenze*, vol. 3, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, e Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2006].

Gödel K., *Collected Works vol.4: Correspondence A-H*, a cura di Solomon Feferman S., Dawson J. W. Goldfarb W., Parsons C., Wilfried S., Clarendon Press, Oxford 2003 [trad. it. *Opere*. *Corrispondenza A-G* vol.4, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2009].

Gödel K., *Collected Works vol. 5: Correspondece H-Z*, a cura di Solomon Feferman S., Dawson J. W. Goldfarb W., Parsons C., Wilfried S., Clarendon Press, Oxford 2003, p.115, [trad. it. *Opere. Corrispondenza H-G* vol.5, a cura di Edoardo Ballo, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, e Paolo Pagli, Bollati Boringhieri, Torino 2009].

Gödel K., *The consistency of the Axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, in «Proceedings of the National Academy of Science, USA» 24/1938, pp. 556-557, rist. con aggiunta di osservazioni nel 1951 e con ulteriori nel 1966 [trad. it. *La coerenza dell'assioma di* *scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo*, in Gödel K. *Opere*, vol. 2, op. cit., pp. 28-29.

Gödel K., *Vortrag Göttingen* del 1939, in Gödel K., *Collected Works* vol.3, op. cit, [trad. it. *Conferenza [[a]] Göttingen*, in *Opere*, vol. 3, op. cit., pp. 107-120].

Gödel K., *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, in «Reviews of modern physics», 21/1949, pp. 447-450, [trad. it. *Un esempio di un nuovo tipo di soluzioni cosmologiche delle equazioni di campo gravitazionale di Einstein*, in Gödel K., *Opere* vol.2, op. cit., pp. 195-203.

Gödel K., *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics del 1946*; prima pubblicazione in Davis M., (a cura di) The *undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsovable problems and computable functions*, Raven Press, Hewlett (NY) 1965, pp. 84-88 [trad. it. *Osservazioni al Convegno su problemi di matematica per il secondo centenario di Princeton*, in Cellucci C. (a cura di), *La filosofia della matematica*, op. cit., pp. 137-142 e come *Osservazioni svolte al Convegno del bicentenario di Princeton sui problemi della matematica*, in Gödel K., *Opere*, vol.2, op. cit.].

Gödel K., *Is mathemathics syntax of language?* [tra.it *La matematica è sintassi del linguaggio? *1953/1959-III*, *Opere* vol.3, op. cit., pp. 298-319 e *La matematica è sintassi del linguaggio? *1953/59-V*, *Opere* vol.3, op. cit., pp.320-326].

Gödel K., *A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about order of growth*, in Collected works vol.3, op. cit., pp. 422-423 [trad. it. *Una dimostrazione dell'ipotesi del continuo di Cantor da un assioma altamente plausibile circa gli ordinali di crescita*, in Id., Opere, vol. 3, op. cit, pp. 378-379].

Gödel K., *Alcuni problemi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche (*1951),* manoscritto della conferenza tenuta alla Brown University il 26 dicembre del 1951, in *Opere* vol.3, op. cit., pp. 268-286.

Gödel K., *Il moderno sviluppo dei fondamenti della matematica alla luce della filosofia (*1961/?)*, in *Opere* vol.3, op. cit., pp. 336-341.

Gödel K*., Lettera a Ghünter G. del 1954*, in *Collected Works* vol. 4, op. cit., pp. 503-505, in *Opere* vol.4, op. cit., pp. 282-308.

Gödel K., Recensione a Becker O., *Zur Logik der Modalitäten,* op. cit*.,* in *Opere* vol. 1, pp. 155-156.

Gödel K., Recensione di Heyting A., *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, op. cit., *Opere* vol. 1, op. cit., pp. 178-179.

Gödel K., recensione di Carnap *Die logizistische Grudlegung der Mathematik*, op. cit., in Opere vol.1, op. cit., pp. 176-177.

Gödel K., Recensione di Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik,* op. cit., in *Opere* vol. 1, op. cit., pp. 290-291.

Gödel K., *Un esempio di un nuovo tipo di soluzioni cosmologiche delle equazioni di campo gravitazionale di Einstein*, *Opere* vol.2, op. cit., pp. 195-203.

## *Bibliografia secondaria*


Abrusci V.M. (a cura di), *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1985.

Aczel P., *Non-Well-Founded Sets*, Center for the Study of Language and Information, Standford, California, 1983.

Ayer A. J., (a cura di), *Logical Positivism*, Free press, Glencoe (III.) 1959.

Arrigoni T., Il Platonismo di K. Gödel alla luce della fenomenologia di E. Husserl. Una breve analisi, in «Epistemologia», vol. XXV, n.2/2002.

Banfi A., *Galileo Galilei. Antologia*, La Nuova Italia, Firenze 1959.

Barwise J. e Etchemendy J., *The Liar,* Oxford University Press, Oxford, 1987.

Becker O., *Zur Logik der Modalitäten*, «Jahrbuch für Philosophie un phänomenologische Forschung», vol. XI/1930, pp. 497-548.

Beiser F., *German Idealism. The struggle against subjectvism*, 1781-1801, Harvard University Press, Cambridge, MA 2002.

Bell J., *Herman Weyl's later philosophical views: His divergence from Husserl*, in «Proceedings of Ottawa 2000 Conference on Husserl and the Science», University of Ottawa Press, 2000.

Bell D. e Vossenkhl W. (a cura di), *Wissenschaft un Subjectivität/Science and subjectivity*, Akademie Verlag, Berlin 1992.

Belli E., Nicoletti e Valente M., *I fondamenti della matematica ed altri scritti di logica*, Feltrinelli, Milano 1964].

Bellissima F., *Fonamenti di matematica*, Carocci, Roma 2008.

Bernacerraf P. e Putnam H. (a cura di), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Prentice-Hall – Blackwell, Englewood Cliffs (NJ) - Oxford 1964. N. 62

Bernacerraf P., *What Numbers Could Not Be*, «Philosophical Review», 1965/74, pp. 47-73

Bernacerraf P., *Mathematical Truth*, «The Journal of Philosophy», 1973/70, 19, pp.661-679. N. 10

Bernays P., *Sur le platonisme dans la mathématique*, in «L'inseignement mathématique», 34/1935, pp.52-69; in Bernacerraf e Putnam (a cura di), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, op. cit., pp. 274-286.

Boyer C.B., *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, Milano 2007.

Bohem R., *Vom Gesichtsunkt der Phänomenologie*, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1968.

Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, a cura di Bonomi, Studi Bompiani, Sonzogno, 1985].

Borges J.L., *Finzioni*, Einaudi, Torino 2011.

Brainard M., *Belief and its naturalization: Husserl's system of phenomenology in Ideas I*, State University of New York Press, Albany, NY 2002.

Browder F. E., (a cura di) *Mathematical developments arising from Hibert problems*, «Proceedings of symposia in pure mathematics», 28, American Mathematical Society, Providence (RI) 1976, pp. 81-97.

Brouwer L.E.J., *Collected Works I. Philosophy and foundation of mathematics* (a cura di Heyting), North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1975.

Buldt B.et al. (editors), *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbar. Band 2: Kompendium zum Werk*, öbv &htp, Wien 2002.

Cantor G., *Ein Beitrag der Mannigfaltigkeitslehre*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 1878, 84, pp.242-258, rist. in Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. *Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, op. cit.

Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, a cura di Ernst Zermelo, Springer, Berlin; rist. in Olms, Hildescheim 1962 [trad.it. parziale in Rigamonti G. (a cura di), *La formazione della teoria degli insiemi*, op. cit.].

Carnap R., *Die alte und die neue Logik*, in «Erkenntnis», 1, pp. 12-26.

Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik, «Monatshefte für mathematik un Physik»,* 41/1934, pp. 263-284.

Carnap R., *Die logizistische Grudlegung der Mathematik*, in «Erkenntnis», 2, pp.91-105; trad. ingl. di Putnam H. e Massey G.J. in Bernacerraf P. e Putnam H., *Philosophy of mathematics*. *Selected readings*, op. cit. [trad.it. di Rosso M., *La fondazione logicista della matematica*, in Wittgenstein L., *Osservazioni filosofiche*, Einaudi Torino 1976, pp. 279-294].

Carnap R., *Formalwissenschaft und Realwissenschaft*, in «Erkenntinis», 5/1995, pp. 30-37 [trad.it. *Scienze formali e scienze reali: classificazione enciclopedica*, in Pasquinelli A. (a cura di), *Il neoempirismo*, op. cit., pp. 533-540].

Carnap R., *Logische Sintax der Sprache*, Springer, Wien 1934 ; trad. ingl. di Smeanton M., *The logical sintax of language*, Kegan Paul, Trench, Trubner – Harcourt Brace, London – New York [trad. it. Di Pasquinello, *Sintassi logica del linguaggio*, Silva, Milano 1961].

Casari E. (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*. *Scritti fondamentali di logica matematica*, Sansoni, Firenze 1979.

Cellucci C., *Filosofia e matematica*, Laterza, Bari 2003.

Cellucci C. (a cura di), *Il paradiso di Cantor*, Laterza Bari 1978.

Cellucci C. (a cura di), *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari, 1967.

Cellucci C., *La filosofia della matematica del Novecento*, Biblioteca Essenziale Laterza, Bari 2007.

Cellucci C., *Le ragioni della logica*, Laterza, Bari 2008.

Chaitin G., *A Century of Controversy over the Foundations of Mathematics* [tr. it. *Un secolo di dispute sui fondamenti della* *matematica*, in Manca V. (a cura di), *Logica matematica*, Bollati-Boringhieri, Torino (2001), pp. 167-187.

Church A., *Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski, «*Journal of Symbolic Logic», 41/1976, pp.747–760.

Copi I.M., *The Theory of Logical Types,* Routledge and Kegan Paul*,* London, 1971.

Costa V., *Husserl*, Carocci, Roma 2009.

Costa V. e Cimino A., *Storia della fenomenologia*, Carocci, Roma 2012.

Conci D.A., *Logica e matematica nel problema dei fondamenti*, Celuc, Milano 1974.

Conford F.M., *Mathematics and Dialectic in The* '*Republic VI-VII*' (1965), in R.E. Allen, *Studie's Plato.s Methaphysic*, London, Routledge & Kegan Paul, 1965.

Davis M., (a cura di) *The undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsovable problems and computable functions*, Raven Press, Hewlett (NY) 1965.

Davis Ph. J. e Hersch R., *The mathematical expierence, Birkhäuser, Boston 1980* [trad.it. *L'esperienza matematica*, Edizioni di comunità, Milano 1984].

Donnici R., Husserl e Hume, Franco Angeli,Milano 1989.

Dummett M., *Truth and other enigmas*, Duckworth, London 1978, [trad.it. di Santambrogio M., *La verità ed altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano 1986 in particolare "verità", "Realismo" e "La verità del passato"].

Edwards P., *Encyclopedia of Philosophy*, vol. 5, Macmillian, New York 1967.

Feferman S., *Kurt Gödel. Convinction and caution*, in «Philosophia naturalis», 21/1984, pp. 546-562 [trad. it. Pagli P., *Kurt Gödel. Fede e cautela*, in Shanker S.G. (a cura di), *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, op. cit., pp. 119-142].

Fraenkel A., *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin 1928[3].

Fraenkel A., *Der begriff ‘definit’ und die Unhabhänginkeit des Auswahlaxioms*, in «Sitzungsberichte der Preussisches Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse», 1922°, pp. 253-257; trad. ingl. di B. Woodward in van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, op. cit., pp. 284-289.

Frege G., *Über Sinn und Bedeutung,* in “Zeitschrift für Philosophie und philosphische Kritik”, N.S., 100, pp.25-50, 1892, p.35; [trad. it. di Stefano Zecchi n A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, op. cit., pp. 9- 32]).

Garavaso P., *Filosofia della matematica*, Guerini Studio, Milano 2002.

Geymonat L., *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano 1970 – 1976, voll. VIII-IX.

Giusti E., *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, 1999.

Goldfarb W., *Nota introduttiva* a *La matematica è sintassi del linguaggio?* (*1953/1959 III), in *Opere* vol.3, op. cit.

Goldfarb W., *On Gödel’s Philosophy*, Asl, Helsinki, 20 luglio 1990, relazione svolta per la «Association for Symbolic Logic», relazione inedita dattiloscritta, citata in Youngrau P., *A word without Time: The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein,* Allen Lane, London 2005 [trad. it. *Un mondo senza tempo: l’eredità dimenticata di Gödel e Einstein*, Il Saggiatore, Milano 2006, p.178].

Goldfarb W. e Thomas R., *Carnap and the philosophy of mathematics*, 1992, in *Wissenschaft un Subjectivität/Science and subjectivity*, Akademie Verlag, Berlin 1992, pp. 61-78.

Grana N., Contraddizione e Incompletezza, Liguori, Napoli 1990.

Grana N., Ermeneutica della matematica, L’orientale editrice, Napoli2006.

Grana N., Epistemologia della matematica. Ontologia, Verità, Valutazioni, L’orientale editrice, Napoli 2001.

Hahn H., *Logik, Mathematik und Naturerkennen*, «Einheitswissenschaft» 2, Gerold, Wien 1933, p.158.

Hausdorff F., *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, in «Matehmatische Annalen», 1908/65, pp. 435-505.

Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Veit, Leipzig 1914.

Heyting A., *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, in «Erkenntnis», 2/1931, pp. 106-115 [trad. it. di Rosso M., *La fondazione intuizionista della matematica*, in L. Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche*, op. cit., pp. 295-303].

Hegel G.F.W. *Encyclopädie der philosophischen Wissenschaft in Grundnisse* (1830), editore G.J.P.J. Bolland, A.H. Adriani, Leiden 1906, Zusatz 2 [trad. it. *Enciclopedia delle scienze filsofiche in compendio*, traduzione prefazione e note di B. Croce, prefazione di Hegel tradotte da Nuzzo A., collana Boblioteca Universale Laterza, Bari 2009].

Herbrandt J., *Ecrits logique*, a cura di van Heijenoort, Presses Universitaires de France, Paris 1968.

Heyting A., *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematick in Erkenntnis, 2/1931, pp. 106-115 [*trad. it. di Rosso Mario, *La fondazione intuizionista della matematica,* in L. Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche,* Einaudi, Torino 1976, pp. 295-303.

Hilbert D., *Axiomatisches Denken*, in «Mathematische Annalen», 78, 1917 (1918), pp. 146-156; [trad. it. *Il pensiero matematico*, in *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1985].
Hilbert D., *Die logische Grundlagen der Mathematik*, in «Mathematische Annalen», 88/1923, pp. 151-165,; rist. in Hilbert D., *Gesammelte Abhandlungen*, op. cit., pp. 178-191; [trad.it. di V.M. Abbrusci, *I fondamenti logici della matematica*, in Casari E. (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*. *Scritti fondamentali di logica matematica*, op. cit., pp. 67-78].

Hilbert D., *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, vol.3, 1935.

Hibert D. e Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik,* Berlin, Springer 1928.

Hintikka J., *Knowledge and the know. Historical perspectives in epistemology*, Reidel, Dordrecht 1974

Hintikka J., *On Gödel's philosophical assumption,* in «Sinthèse», vol.114/1998, p.13-23.

Hofstadter D.R., Gödel, Herscher, Bach: un'eterna ghirlanda brillante, Adelphi, Milano 2009.

Husserl E., *Briefwechsel*, Kluver, Dordrecht 1999.

Husserl E., *Die bernauer Mauskripte über dass Zeitbewusstein*, Husserliana, vol XX/I, Kluwer, Dordrecht 2002.

Husserl E., *Cartesianische Meditationene und Pariser Vorträge*, Husserliana, vol.I, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1950, p. 92 [trad. it. di Costa F., *Mediatazioni cartesiane con l'aggiunta dei discorsi parigini* , a cura di Cristin R., Bompiani, Milano, 2002].

Husserl E., *Die Krisis der europäichen Wissenschaftenund die trascendentale Phänomenologie*, Husserliana, vlo. VI, martinus Nijhoff, Den Haag, 1959 [trad.it. *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, prefazione di Paci E., traduzione di Filippini E., il Saggiatore, Milano 2008.

Husserl E*., Erste Philosphie (1923/1924). Erster Teil: kritische Ideengeschichte*, Husserliana, vol.II, Martinus Nijhoff, Den Haag 1956.

Husserl E., *Formale und traszendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernuft*, Niemeyer Halle; rist. in *Husserliana,* op. cit., vol. 17 [trad. it. di Neri G.D., *Logica formale e trascendentale. Saggio di critica della ragione logica*, Laterza, Bari 1966].

Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Erstes Buch, Husserliana, vol.III, Martinus Nijhoff, Den Haag 1950 [trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, Libro I, Introduzione generale alla fenomenologia pura, Nuova edizione a cura di Costa V., Introd. di Franzini E., Biblioteca Einaudi, Torino 2002].

Husserl E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Erstes Buch*, Husserliana, vol.III/1, Matinus Nijhoff, Den Haag, 1976, p.133 [trad. it. *Idee per una fenomenologia pura e per una filosofia fenomenologica*, vol. I, Libro I, Introduzione generale alla fenomenologia pura, Nuova edizione a cura di Costa V., Introd. di Franzini E., Biblioteca Einaudi, Torino 2002] n.163

Husserl E., *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to phenomenological philosophy*, trad. ingl. di Kersten F., Kluwer, Dordrecht 1983.

Husserl E., *Krisis der europäischen Wissenschaften und die trascendentale Phänomenologie, eine enleitung in die phänomenologiche Philosophie*, «Husserliana, Gesammelte Wercke», vol. VI, Matinus Nijhoff, Den Hag, 1950 [trad.it. di Filippini E., *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, Il Saggiatore, Milano 2008].

Husserl, E., *Logische Untersuchungen*, *I: Prolegomena zur reinen Logik*, Max Niemeyer, Halle 1900 e *Logische Untersuchungen, II: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie des Erkenntnis*, Max Niemeyer, Halle 1900 ; in *Gesammelte Werke*, Husserliana, a cura dell'Husserl Archive (Leuven) sulla base del *Nachlass*, Martinus Bijhoff, The Hague; poi Kluver Dordrecht 1950, vol. 18 e 19 [trad.it. Piana G. (a cura di) *Ricerche Logiche*, vol.1 e 2, Prolegomeni a una logica pura, Il Saggiatore, Milano 1968].

Husserl E., *Philosophie als strenge Wissenschaft*, in *Aufsätze und Vorträge* (1911-1021), Martinus Nijhoff, pubblicato nel 1987, pp. 3-62 [trad. it. di Semerari G., *La filosofia come scienza rigorosa*, Laterza, Bari 2010].

Husserl E., *Persönlische Aufzeichnungen*. In *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. XVI, 1956, n.3, pp. 292-302, *Diary notes from the Nachlaß*, (a cura di) Biemel W.

Husserl E., *Phenomenology (drafts of the Encyclopedia Britannica Article)*, in *Psychological and trascendental phenomenology and the confrontation with Heidegger (1927-1931*), Kluwer, Dordrecht 1927-1928, pp. 83-194.

Husserl E., *The London Lectures (syllabus of a courseof four lectures*), in McCormick P. Elliston F. (a cura di), *Husserl: shorter works*, University of Notre Dame Press 1981, pp. 68-74.

Husserl E., *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins, in* «Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung», vol. IX/1928, pp. VIII-X e 367-498.

James E.P., *The problem of mathematical Existence*, in «Philosophical Books», vol. XXIII, n.3/1992, pp. 129-138.

Ingarden R., *Edith Stein on her activity as an assistent of Edmund Husserl, in Philosophy and Phänomenological Research*, vol.23, 1962, pp. 155-175.

Israel G., La natura degli oggetti matematici. Alla luce del pensiero di Husserl, Casa edistrice Marietti, Genova- Milano 2011.

Kant I., *La critica della ragion pura*, terza edizione di Gentile G., Lombardo Radice G., Laterza Bari 2005.

Kaufmann F., Linfinito in matematica, a cura di Albertazzi L., Luigi Reverdito Editore, Trento 1990.

Kern I., *Husserl und Kant*, Martinus Nijhoff, Den Haag 1964.

Körner, *The Philosophy of Mathematics*, Rowan and Littlefield, Totowa (NY), 1960.

Kreisel G., *Comments on Mostowski 1967*, in Lakatos I., (a cura di) *Problems in the philosophy of mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science*, *London 1965*, vol.1,op. cit. , pp. 97-103.

Kreisel G., *Mathematical Logic: What had it done for the philosophy of mathematics? Bertrand Russell. Philosopher of the century*, a cura di R. Schoenman, George Allen and Unwin, London 1967, pp. 201- 272.

Kreisel G., *Mathematical logic*, in *Lectures on modern mathematics*, a cura di Saaty, Wiley, New York 1965.

Lakatos I., (a cura di) *Problems in the philosophy of mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science*, *London 1965*, vol.1, North-Holland, Amsterdam 1967.

Lehman H., *Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Totowa (NY), Rowman and Liettlefield, 1979.

Leibniz G.W., *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, a cura di Cariati S., Bompiani, Milano 2011.

Leibniz G.W., *Principi della filosofia o monadologia. Principi razionali della natura e della grazia,* a cura di Cariati S., Bompiani, Milano 2001.

Lolli G., *Da Euclide a Gödel,* Il Mulino, Bologna 2004.

Lolli G., *Discorso sulla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 2011.

Lolli G., *Filosofia della matematica*, il Mulino, Bologna 2002.

Lolli G., *Incompletezza*, Il Mulino, Bologna 1992.

Lolli G., *Sotto il segno di Gödel*, il Mulino, Bologna 2007.

Lombardo Radice L., L'infinito, Editori Riuniti, Roma 2006.

Lucas J.R., *Mind, machines and Gödel*, in «Philosophy», vol. 36/1961, pp. 112-127.

Luzin N., *Sur un problème de M. Baire, in «Comptes rendus hebdomadaires des séance de L'Académie des sciences, Paris», 158/1914, pp.1258-1261.*

Luzin N., *Sur les ensembles analytiques nuls*, in «Fundamenta mathematicae», 25/1935, pp. 109-131, pp. 129-131.

Maddy P., *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1990.

Martin D. A., *Hilbert's first problem: The continuum hypothesis*, in Browder F. E., (a cura di) Mathematical developments arising from Hibert problems, op. cit., pp. 81-97.

McCormick P. Elliston F. (a cura di), *Husserl: shorter works*, University of Notre Dame Press 1981.

Moore G. H., *Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory*, in «History and philosophy of logic», 1/1980, pp.95-137, p.134.

Moore G. H., *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence*, «Studies in the histry of mathematics and physical sciences», 8/1982, Springer, New York.

Mugnai M., *Introduzione alla filosofia di Leibniz*, Einaudi, Torino 2001.

Nagel E. e Newman J.R., *Gödel's Proof*, New York University Press, New York 1958 [trad.it. Bainchi L. e Cerrito S., *La prova di Gödel*, Bollati Boringhieri, Torino 1992].

Parrini P. (a cura di), *Introduzione ai Principia Mathematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1977].

Parsons C., *Foundations of Mathematics* in Edwards P., Encyclopedia of Philosophy, Macmillian, New York 1967, vol.5, pp. 188-213.

Parsons C., Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's Thought, in «Bullettin of symbolic logic», vol.1 n.1/1995, pp. 44-74.

Patras F., Il pensiero matematico contemporaneo, Bollati Boringhieri, Torino 2001.

Pasquinelli A., *Il neoempirismo*, UTET, Torino, 1969.

Penrose R., *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford 1989 [trad.it. *La nuova mente dell'imperatore*, Rizzoli, Milano 1992;

Penrose R., *Shadows of the Mind*, Oxford univerity Press, Oxford 1989 [trad. it. *Ombre sulla mente*, Mondadori, Milano 1994].

Poggi S. (a cura di), Le leggi del pensiero fra logica, ontologia e psicologia, Edizioni Unicopli, Milano 2002.

Quine W. Van Orman, *New foundations for mathematical logic*, in «Ameriacan Mathematical monthly», 44/1937, pp. 70-80.

Quine W. Van Orman, *Whitehead and the rise of modern logic*, in Schilipp (a cura di), *The philosophy of Alfred North Whitehead*, "Library of living philosophers", Northwestern University, Evaston (Ill.), Seconda Edizione Tudor, New York, 1941, pp. 125–16; rist. in Quine, *Selected logic papers*, Random House, New York 1966.

Quine W. Van Orman, *Selected logic papers*, Random House, New York 1966.

Rainone A., *La riscoperta dell'empatia. Attribuzioni intenzionali e comprensione nella filosofia analitica*, Bibliopolis, Napoli 2005.

Ramsey F.P., *The foundations of mathematics*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», s.2, 25, pp.338-384; rist. in Id., *The foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, a cura di Braithwaite B.R., Kegan Paul, London 1931, pp. 1-61 [trad.it. Belli E., Nicoletti e Valente M., *I fondamenti della matematica ed altri scritti di logica*, op. cit.].

Resnik M., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca, Cornell University Press, 1980.

Risjord M., *The sensible Foundation for Mathematics: a defense of Kant's View*, in «Studies in the History and Philosophy of Science», 21, 1, 1990, pp. 123-143.

Rigamonti G. (a cura di), *La formazione della teoria degli insiemi*, Sansoni, Firenze 1992.

Ritter J. (a cura di), *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Schwabe, Basel 1971-?.

Rota G.-C., *The remarks on Husserl and Phenomenology*, in *Phenomenology on Kant German Idealism, hermeneutics and logic*, ed. Wiegand O., Kluwer, Dordrecht 2000, pp. 89- 97.

Rota G.-C., *Lezioni napoletane*, s cura di Palombi F., La città del sole, Napoli 1999.

Rota G.-C., *Pensieri discreti*, a cura di Palombi F., Garzanti, Milano 1993.

Russell B., *Logical Atomism*, in Muhiread H. (a cura di), *Contemporary Britisch Philosophy. Personal Statement*, prima serie, Allen and Unwin, London 1924; ristampato in *Logik and Knowledge. Essays 1901 – 1950*, a cura di R. C. Marsh, Allen and Uwin, London 1956; [trad. it. *Logica e conoscenza. Saggi 1901-1950*, Longanesi, Milano, 1951. Pp. 162-179].

Russell B. e Whitehead A.N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, England 1910/13; seconda edizione, 1925–1927, [trad.it. parziale Parrini P. (a cura di), *Introduzione ai Principia Mathematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1977].

Russell B., *Introduction to mathematical philosophy*, Allen and Unwin, London 1919, [trad. it. *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton e Compton, Roma 1970].

Santambrogio M., *La verità ed altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano 1986.

Schlick M., *Erkenntnislehre* 2, Spinger, Berlin 1925,

Schlick M., *Gesammelte Aufsätze 1926-1936*, Gerold, Wien 1938.

Schlick M., *Allegemeine Erkenntnislehere*, Springer, Berlin 1918.

Schumann K., *Husserl-Chronik. Denk- und Lebensweg Edmund Husserls*, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1977.

Schutz A., *Collected Papers III*, (a cura di Schutz I.), Martinus Nijhoff, Dn Haag 1966.n.217

Schutz A., *Meaning and verification*, in «The philosophical review», XLV, 1936.

Shanker S.G. (a cura di), *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, Muzzio, Padova 1991.

Shell A.-Gellasch, *Reflections if my adviser: Stories of mathematics and mathematicians*, in *Mathematical Intelligence*, vol.25, n.1/2003, pp. 35-41.

Sierpiński W., *Hypothése du continu*, in «Monografie Matematyczne», vol. 4, Garasiński, Warsaw 1934.

Sokolowski R., Intoduction to Phenomenology, Cambridge University Press, 2000 [trad. it. di Premoli De Marchi P., Introduzione alla fenomenologia, Edizioni Università della Santa Croce, Roma 2002].

Skolem T.*, Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo; "Über die Definitheit in der Axiomatik", in «Fundamenta mathematicae», 15/1930, pp. 337-341; rist. in Selected Works, a cura di Jens Erik Fenstad, Universitetsforlaget, Oslo 1970.*

Skolem T., *Einige Bemerkungen zur axiomathischen Begründung der Mengenlehre, in Matematikerkongressen I Helsigfors den 4-7 Juli 1922*, *den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelese*, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, pp. 217-232; rist. in Id., *Selected Work in logic*, (a cura di) Fenstad J.E., Universitetforlaget, Oslo 1970, pp. 137-152 [trad. It. di Cordeschi R., *Osservazione sulla fondazione assiomatica della teoria degli insiemi*, in Cellucci C. (a cura di), *Il paradiso di Cantor*, Laterza Bari 1978, pp. 157-176].

Skolem T.*, Selected Works in logic,* a cura di Jens Erik Fenstad, Universitetsforlaget, Oslo 1970*.*

Tieszen R., *Gödel Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961)*, in «The Bullettin of Symbolic Logic», vol. 4, n.2, giugno 1998, pp. 181-203, rist. in *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics,* op. cit.

Tieszen R., *Gödel on the intuition of concepts*, in «Sinthèse», vol.133/2002, n.3, pp. 363-391.

Tieszen R., *After Gödel: mechanism, reason and realism in the philosophy of mathematics,* «Phil. Math.», 2006, pp. 229-254; rist. in *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics* , op. cit.

Tieszen R., *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

Tieszen R., *Monads and mathematics: Gödel and Husserl*, «Axiomathes», June 2011.

Tieszen R., *Kurt Gödel and the phenomenology*, «Phil. Sci.», (59)2, 1992, pp.176-194. Rist. in *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics,* op. cit.

Tieszen R., *Mathematical realism and transcendental phenomenological idealism,* in Hartimo M. (a cura di), *Phenomenology and mathematics,* Springer, Berlin 2010.

Toledo S., *Notes on conversation with Gödel, 1972-1975,* non pubblicato.

Turing A.M., *Intelligenza meccanica*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

Ulam S. M., *John von Neumann, 1903-1957*, in «Bullettin of the American Mathematical society», 64, 3, pt.2 (supplemento di maggio), pp. 1-49.

Van Atten M., *Gödel, mathematics, and possible worlds*, «Axiomathes», vol.12/2001, n.3-4, pp.355-363.

Van Atten, *Why Husserl should have been a strong revisionist in mathematics*, «Husserl Studies», vol. 18/2002, n.1, pp.1-18.

Van Atten M. e Kennedy J., *On the philosophical development of Kurt Gödel*, «The bulletin of symbolic logik», vol.9, n.4, dec.2003.

Van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Harvard University press, Cambridge (Mass.), 1967.

D'Agostini F. e Vassallo N., *Storia della filosofia analitica*, Einaudi, Torino 2002.

Volli U., *Numeri di confine e domini di insiemi*, in Cellucci C., (a cura di) *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli 1978.

Von Neumann J., *Collected Works: Logic, Theory of set and quantum mechanics* vol. 1, a cura di Abraham H. Taub, Pergamon, New York – Oxford 1961.

Von Neumann J., *Über eine Wiederspruchfreheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 160/1929, pp.227-241; rist. in von Neumann, *Collected Works vol.1*, op. cit., pp.494-508.

Von Neumann, *Eine axiomamatiesierung der Mengenlehre*, in «Journal für die reine und und angewandte Mathematik», 154/1925, pp. 219-240, rist. in Id. *Collected works*, vol.1: *Logic, theory of sets and quantum mechanics*, a cura di Taub A.H., Pergamon, New York – Oxford, 1961, pp. 34-56.

*Wang H., A logical Journey. From Gödel to philosophy,* MIT Press, Cambridge (mass.), 1996, p.169.

Wang H., *Reflexions on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1987.

Wang H., *From mathematics to philosophy*, Routledge and Kegane Paul, London 1974.

Wedberg A., *Plato's Philosophy of mathematics*, Stockolm, Alqvist & Wiksell, 1955.

Weyl H., *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über di Grudlagen der Analysis,* Veit, Leipzig [trad. it. di Veit Riccioli A.B., *Il continuo*, Bibliopolis, Napoli 1977].

Weyl H., *Insight and reflection*, in *The spirit and uses of the mathematical sciences*, (a cura di Saaty A, e Weyl H.), McGraw-Hill, New York 1969; traduzione dell'originale Tedesco in «Studia Philosophica», vol 15/1955, pp. 153-171, pp. 281-301.

Wetz F.J., *Edmund Husserl*, Campus, Frankfurt 1995.

Wittgenstein L.*, Tractatus,* trad.it. di Conte A.G., Einaudi, Torino 1964.

Yourgrau P., *A world without Time: the forgotten Legacy of Gödel and Einstein*, Allen Lane, London 2005 [trad. it. *Un mondo senza tempo: leredità dimenticata di Gödel e Einstein*, Il Saggiatore, Milano 2006.

Zecchi S. e Bonomi A. (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Gruppo Editoriale Fabbri, Bompiani, Sonzogno, Etas S.p.A., Milano 1985.

Zermelo E., *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, in «Fundamenta mathematicae», 14/1929, pp. 183-198; e Id. *Über Grenzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Fundamenta mathematicae», 16/1930, pp. 29-47 [trad.it. di U. Volli, *Numeri di confine e domini di insiemi*, in Cellucci C., (a cura di) *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 175-196].

Zermelo E., *Über Grenzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Fundamenta mathematicae», 16/1930, pp. 29-47 [trad.it. di Volli U., *Numeri di confine e domini di insiemi*, in Cellucci C., (a cura di) *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 175-196].