Soluzioni elastiche per semispazi trasversalmente isotropi soggetti a pressioni verticali

Ferdinando Toraldo

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni, XVII ciclo

Dipartimento di Strutture per l'Ingegneria e l'Architettura
Università degli Studi di Napoli Federico II
Via Claudio, 21 - 80125 Napoli
e-mail: ferdinando.toraldo@unina.it

Marzo, 2015

Tutor:
Prof. L. Rosati

Coordinatore del corso:
Prof. L. Rosati

al gruppo di ricerca del Prof. Luciano Rosato
ed in particolare all'Ing. Francesco Marmo
per la preziosa collaborazione nello sviluppo della tesi

Premessa

Il presente lavoro di tesi si pone l'obbiettivo di derivare, per via analitica, la distribuzione degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni in un semispazio elastico trasversalmente isotropo soggetto a carichi verticali applicati sulla superficie del semispazio.

I tipi di carico analizzati sono: *(i)* carico concentrato; *(ii)* carico uniformemente distribuito; *(iii)* carico distribuito linearmente.

La soluzione relativa al caso del carico concentrato è ben nota in letteratura, sebbene sia presentata con diversi gradi di generalità e complessità [7].

Viceversa, la soluzione relativa al caso di carichi distribuiti, sia uniformi che variabili con legge lineare, è stata affrontata solo in casi eccezionali e, in ogni caso, è limitata ad una impronta di carico di forma rettangolare o circolare. Peraltro, anche in questi casi, le soluzioni presenti in letteratura [132] sono difficilmente applicabili a casi concreti e limitate a valori particolari dei parametri elastici, ad onta della estrema variabilità di questi ultimi in funzione dell'ampia casistica di applicazioni nelle quali il modello di un semispazio trasversalmente isotropo può essere applicato con successo.

Infatti tale modello trova applicazioni in campo *geotecnico*, per simulare il comportamento elastico di coltri di terreni ori-ginate da fenomeni di sedimentazione, nel campo dell'*ingegneria strutturale*, per modellare il comportamento elastico del legno e dei materiali composti di fibre di carbonio, nel campo della *micro-ingegneria*, per modellare il comportamento elastico dei materiali ceramici, l'alluminio, il cadmio o la grafite, e, infine, in campo *biomedico* per modellare il comportamento elastico del titanio e delle ossa.

A differenza dei casi finora presentati in letteratura la soluzione analitica derivata nel presente lavoro di tesi, in presenza di carichi distribuiti costanti o variabili con legge lineare, è relativa a impronte di carico di forma poligonale arbitraria. Pertanto la geometria della zona caricata Ω è descritta da una successione ordinata di vertici, di cui è sufficiente assegnare le coordinate in un sistema di riferimento cartesiano, che descrivono la frontiera $\partial\Omega$ del poligono seguendo un verso di percorrenza, ad esempio antiorario.

I campi elastici nel semispazio, ovvero spostamenti, deformazioni e tensioni, dovuti ad una distribuzione di carico costante o variabile linearmente, vengono ottenuti per integrazione, estesa al dominio Ω, della soluzione relativa al caso di carico concentrato.

Tali integrali possono contenere delle singolarità, quasi sempre eliminabili, in funzione della posizione relativa tra Ω e la verticale in corrispondenza della quale, ad una quota prefissata, si vuole valutare il valore del generico campo elastico.

Applicando una versione generalizzata del teorema di Gauss, già utilizzata con successo in [29], [30] e [109], è possibile trasformare i suddetti integrali di dominio in integrali monodimensionali estesi unicamente al contorno $\partial\Omega$. Inoltre, è possibile considerare in maniera rigorosa le eventuali singolarità degli integrali mediante dei fattori correttivi che tengono conto della posizione, rispetto a Ω, della verticale condotta per il punto in cui deve essere calcolata la soluzione elastica.

Avendo ipotizzato Ω di forma poligonale i suddetti integrali di linea vengono espressi come sommatorie, estese ai lati di $\partial\Omega$, di termini che dipendono unicamente dalle coordinate di $\partial\Omega$ oltre che, evidentemente, dei parametri che definiscono la legge di carico assegnata.

In tal modo è quindi possibile calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni in un punto arbitrario del semispazio attraverso espressioni analitiche di tipo algebrico. Esse sono state implementate in un codice MatLab, estendendo espressioni analoghe sviluppate nel caso di semispazi isotropi [30], in modo da produrre una estesa serie di abachi relativi a spostamenti e tensioni. Per consentire la loro applicazione alla più ampia classe di materiali, gli abachi sono stati derivati in funzione di tre rapporti dei moduli elastici E_h/E_v, G_{hh}/G_{hv} e ν_{hh}/ν_{hv} per ciascuno dei quali sono stati assunti quattro valori. Questi sono stati definiti esaminando i valori più comuni dei cinque parametri elastici in funzione dei quali viene espresso il legame costitutivo dei materiali trasversalmente isotropi.

Ulteriore elemento distintivo del presente lavoro di tesi rispetto alle formulazioni precedenti è l'approccio unitario con il quale viene affrontato il problema delle radici dell'equazione caratteristica, i cui valori entrano nella definizione dei potenziali in funzione dei quali vengono espresse le soluzioni elastiche relative al carico concentrato.

Infatti, in funzione dei valori dei parametri elastici, tali radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate. Nelle precedenti trattazioni veniva generalmente presentata la soluzione relativa al solo caso di radici reali e distinte. Solo in casi eccezionali [8] sono state presentate le soluzioni esplicite relative agli altri due casi anche se esse si presentano sensibilmente diverse da quelle relative al caso di radici reali e distinte.

Viceversa l'implementazione proposta, relativa solo a questo ultimo caso, restitusce altresì la soluzione relativa agli altri due. In particolare la soluzione di un problema isotropo, in corrispondenza del quale le soluzioni della equazione caratteristica sono coincidenti, viene correttamente riprodotta della soluzione più generale relativa al caso di materiale trasversalmente isotropo.

La tesi è organizzata in sette capitoli e due appendici; nello specifico gli argomenti trattati sono:

capitolo 1 - **Formulazione del problema**: in questo capitolo viene riproposta una sistesi dei principali contributi scientifici al problema della soluzione elastica di semispazi costituiti da materiali con comportamento trasversalmente isotropo. Nello specifico, oltre alle citazioni dell'amplia bibliografia disponibile, sono specificate, per ciascun autore, le tecniche di risoluzione utilizzate, i risultati determinabili con le soluzioni ottenute e i limiti di alcune delle trattazioni presenti in letteratura.

capitolo 2 - **Il legame costituitivo elastico trasversalmente isotropo**: in questo capitolo vengono riportate alcune delle espressioni del legame elastico trasversalmente isotropo. Inoltre, viene illustrato come tale legge costitutiva possa essere applicata ad una vasta gamma di materiali, utilizzati in diversi contesti, da quello geotecnico a quello biomedico.

capitolo 3 - **Trattazione di J. H. Michell**: in questo capitolo si presenta la trattazione della soluzione elastica per semispazi trasversalmente isotropi sviluppata da *John Henry Michell* nel 1900 e contenuta nell'articolo *The Stress in an Ælotropic Solid with an Infinite Plane Boundary* pubblicato sulla rivista *Proceedings of the London mathematical society* [91]. Nello specifico, l'approccio utilizzato dall'autore è il primo esempio, in ordine cronologico, di determinazione analitica della tensione verticale, dovuta ad un carico verticale concentrato, utilizzando la teoria del potenziale.

capitolo 4 - **Trattazione di A.J. Anyaegbunam**: in questo capitolo si presenta la trattazione della soluzione elastica per semispazi trasversalmente isotropi sviluppata da *Amaechi Jerome Anyaegbunam* nel 2012 e contenuta nell'articolo *Complete stresses and displacements in a cross-anisotropic halfspace due to a surface vertical point load* pubblicato sulla rivista *International Journal of Geomechanics* [7]. Nello specifico l'approccio utilizzato dall'autore deriva dalla formulazione originale di J. H. Michell ma la soluzione propone l'espressione completa degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni nel caso di carico verticale concentrato. Inoltre, vengono presentate in esplicito le soluzioni relative a soluzioni dell'equazione caratteristica costituite da radici reali distinte, reali coincidenti e complesse coniugate.

capitolo 5 - **Soluzione proposta**: questo capitolo rappresenta la parte principale del lavoro di tesi in cui viene presentata, utilizzando la teoria del potenziale, la soluzione proposta per la determinazione completa del campo di spostamenti, tensioni e deformazioni per diverse tipologie di carico verticale. In particolare si riporta, dapprima, la soluzione analitica relativa al caso del carico verticale concentrato e, successivamente, quella relativa al caso del carico distribuito, costante o variabile linearmente, su un'impronta di carico arbitraria. Si dimostra come, utilizzando una versione generalizzata del teorema di Gauss, il problema può essere espresso solo in funzione delle posizioni dei vertici dell'impronta di carico.

capitolo 6 - **Valutazione degli integrali di dominio**: in questo capitolo è contenuta la determinazione analitica dei singoli integrali di dominio utilizzati per la soluzione proposta. In particolare viene riportata la valutazione analitica di tutti gli integrali coinvolti nella trattazione e vengono esplicitate le metodologie con le quali sono state trattate le singolarità riscontrate.

capitolo 7 - **Risultati numerici**: in questo capitolo sono presentati i risultati numerici ottenuti applicando la soluzione analitica proposta. Inoltre, tali risultati, sono stati messi a confronto con quelli attualmente disponibili in letteratura, sviluppati da altri autori anche con metodologie differenti.

Infine, nelle due **appendici**, sono riportati gli abachi delle tensioni verticali e le tabelle degli spostamenti verticali in superficie relativi ad una vasta gamma di materiali reali. In particolare i risultati fanno riferimento al caso di carico distribuito costante applicato su un'impronta di carico di forma rettangolare (abachi tipo *Steinbrenner*, 1934) o circolare (abachi tipo *Foster e Ahlvin*, 1954). La caratterizzazione dei materiali è svolta in funzione di tre rapporti di anisotropia assunti pari a E_h/E_v (0,75; 1,00; 1,50 e 3,00), G_{hh}/G_{hv} (0,75; 1,00; 1,50 e 3,00) e ν_{hh}/ν_{hv} (-1,00; 0,00; 1,00; 2,00 e 3,00 - con valori di ν_{hv} pari a 0,10; 0,20 e 0,30). Gli abachi relativi alla impronta di carico rettangolare sono stati ottenuti per rapporti A/B tra i lati pari a 1,0; 1,5; 2,5 e 10, mentre quelli relativi al dominio circolare sono stati riportati per valori r/R pari a 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0, dove R rappresenta il raggio del cerchio di carico ed r il vettore posizione che individua la verticale a cui si riferiscono i risultati.

Indice

Capitolo 1

Formulazione del problema

Introduzione

In questo capitolo viene riproposta una sistesi dei principali contributi scientifici al problema della soluzione elastica di semispazi costituiti da materiali con comportamento trasversalmente isotropo. Nello specifico, oltre alle citazioni dell'amplia bibliografia disponibile, sono spe-cificate, per ciascun autore, le tecniche di risoluzione utilizzate, i risultati determinabili con le soluzioni ottenute e i limiti di alcune delle trattazioni presenti in letteratura.

1.1 Risultati presenti in letteratura

Negli anni, numerosi studi e attività di ricerca sperimentale, hanno dimostrato che i depositi naturali di argilla sottoposti a forse tettoniche sono essenzialmente mezzi trasversalmente isotropi poiché il materiale è caratterizzato da proprietà nel piano orizzontale differenti da quelle nel piano verticale [142], [141], [104], [13], [64], [112], [47], [10], [43], [44], [147] e [72].

Il fenomeno di anisotropia diventa particolarmente importante per i terreni sovraconsolidati, come ad esempio quelli costituiti da argilla tipo *London*; il caso estremo è invece rappresentato dai terreni scistosi e dalle ardesie.

Anche le sabbie mostrano una rigidezza trasversalmente isotropa. Tale comportamento nasce principalmente dalla influenza della gravità e dalla forma delle particelle durante il processo di deposizione, infatti numerose indagini sperimentali hanno mostrato che particelle di sabbia assumono una forte tendenza ad adottare un orientamento preferenziale nella la dimensione allineata al piano orizzontale [110], [12], [103] e [9].

La natura del comportamento trasversalmente isotropo dei suoli è generata dal processo di formazione delle terre per sedimentazione, quando questa avviene in una sola direzione, a seguito dei processi di consolidamento con le particelle di argilla che assumendo direzioni preferenziali di allineamento orizzontale nell'evoluzione del fenomeno [12], [48], [38] e [39].

Anche gli ammassi rocciosi mostrano comportamento trasversalmente isotropo per la presenza di presenza di discontinuità quali fratture, foliazioni e scistosità [22], [70], [42], [43], [44], [114] [81] e [140].

Altri lavori più recenti hanno confermato tali proprietà [2], [140], [66], [143], [128], [122] e [79]

Generalmente per le argille sovraconsolidate e le rocce, il rapporto dei moduli (modulo di elasticità orizzontale rispetto al modulo di elasticità verticale) è maggiore dell'unità, mentre per argille e sabbie normalmente consolidati, il rapporto dei modulo è minore dell'unità.

Per l'argilla fortemente sovraconsolidate (tipo *London*), il rapporto tra i moduli varia 1,35-2,37 [142].

Il comportamento trasversalmente isotropo dei geomateriali è dimostrato dal fatto che l'asse verticale è un asse di simmetria e il modulo normale a tale è essenzialmente lo stesso per tutte le direzioni orizzontali. É pratica comune modellare il sottosuolo come un materiale isotropo e pertanto applicare formule basata sulla teoria Boussinesq [15] per il calcolo dei campi si spostamenti, deformazioni e tensioni .

L'utilizzo di questa soluzione è diffuso ancora oggi, nonostante la consapevolezza già dal 1930 [117] che la soluzione di Boussinesq (1885) sovrastima i cedimenti in fondazione.

Westergaard nel 1938 sviluppò una teoria alternativa per determinare la distribuzione di spostamenti e tensioni per un semispazio orizzontalmente rigido che è stata molto utilizzata negli Stati Uniti poiché fornisce risultati realisticamente più bassi dei cedimenti, ma [6] hanno dimostrato che tali soluzioni non sono valide.

Per stimare in maniera più accurata i cedimenti in fondazione quindi bisogna opportunamente considerare il comportamento trasversalmente isotropo dei geomateriali (suoli e roccie) e, di conseguenza, sono state sviluppate numerose teorie per la determinazione della distribuzione degli spostamenti e delle tensioni all'interno di un semispazio.

Tuttavia, a causa di molteplici ragioni, la più importante delle quali legata alla complessità e l'incompletezza della maggior parte delle soluzioni esistenti e anche alla difficoltà di stabilire protocolli sperimentali di prove sui materiali per caratterizzare le costanti elastiche necessarie, queste teorie non vengono utilizzane per la determinazione dei cedimenti. Anche perché sono disponibili in letteratura i dati delle costanti elastiche relative a svariate tipologie di geomateriali [43], [44], [42], [69], [70], [38], [4], [58], [63], [84], [3], [80], [19] e [135].

Inoltre il lavoro [79] illustra come si possono stimate le proprietà anisotrope delle rocce.

Il razionale utilizzo di soluzioni elastiche per le tensioni e i cedimenti nei terreni è stata messa in discussione a causa della nota comportamento non lineare ed inelastico delle argille molli.

Tuttavia, è stato dimostrato da misure in-situ e analisi agli elementi finiti, che le tensioni dei materiali geomeccanici sono poco sensibili alle variazioni delle costanti elastiche [121], [123], [60], [94] e [122] e che il comportamento delle argille sovraconsolidate è sostanzialmente lineare per i carici di esercizio [146], [9], [10], [44] e [39]. In coclusione gli spostamenti sono più sensibili ai valori assunti delle proprietà elastiche del materiale [12], [96] e [39].

1.2 Soluzioni presenti in bibliografia

1.2.1 Caso del carico verticale concentrato

La soluzione per la determinazione del campo di spostamenti e tensioni in un semispazio costituito da un materiale trasversalmente isotropo sotto l'azione di un singolo carico concentrato verticale, applicato in superficie, è di fondamentale importanza poiché tale risultato può essere integrato per ottenere le soluzioni per diverse impronte di carichi distribuiti.

Una rassegna completa di soluzioni esistenti per questo problema è contenuta in [81], che però omette qualsiasi riferimento al lavoro di *Gerrard* e *Wardle* del 1973 [46].

Il problema è stato risolto in maniera non sistematica e incompleto anche da Michell nel 1900 [91] utilizzando due funzioni potenziali.

Lo stesso problema è stato risolto da numerosi altri ricercatori utilizzando vari metodi, in particolare: il *metodo delle funzioni potenziale* applicato in [75], [76], [34], [86], [35] e [83]; la *tecnica delle trasformazioni integrali* applicata in [46] e [81]; il *metodo delle variabili complesse* applicato in [118], [65] e [22].

Un passo necessario nel processo di soluzione è la valutazione della radici dell'equazione caratteristica. Praticamente tutte le soluzioni in letteratura sono sviluppate per il caso in cui le radici sono reali e distinte.

Le espressioni presenti sono incomplete sia per la determinazione del campo di tensioni che degli spostamenti, ad eccezione di [65], [83], e liao1998 e [145] elaborate nell'ipotesi, fortemente limitativa, che tutti i rapporti di Poisson siano pari a zero.

Solo la formulazione proposta da Gerrard e Wardle nel 1973 [46] restituisce completamente il campo delle tensioni e degli spostamenti per tutti i tipi di soluzione dell'equazione caratteristica.

Autore	Spazio	Tipo di carico	Soluzione
Michell	semispazio	verticale	spostamenti verticali in superficie e parzialmente le tensioni (inapplicabile per problemi al contorno)
Wolf	semispazio	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni (costanti elastiche semplificate)
Koning	semispazio	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni
Barden	semispazio	verticale	spostamenti verticali in superficie e tensioni lungo asse del carico
De Ureda *et al.*	semispazio	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni
Misra *et al.*	semispazio	verticale	spostamenti verticali in superficie e tensioni lungo l'asse del carico (costanti elastiche semplificate)
Misra *et al.*	semispazio	verticale	spostamenti verticali in superficie e tensioni lungo l'asse del carico (costanti elastiche semplificate)
Chowdhury	spazio semispazio	verticale verticale sepolto	tutti gli spostamenti e le tensioni (lungo l'asse del carico) tutti gli spostamenti e le tensioni (lungo l'asse del carico)
Pan	spazio	3D	tutti gli spostamenti e le tensioni
Kröener	semispazio	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni (dimensionalmente errata)
Willis	spazio	verticale	tutti gli spostamenti (poco manegevole e non accurata)
Lee	semispazio	verticale sepolto	tutte le tensioni (complicato)
Lekhnitskii	semispazio	verticale	tutte le tensioni (incompleto)
Elliot	spazio	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni (incompleto)
Shield	semispazio	verticale sepolto	tutti gli spostamenti e le tensioni in superificie
Eubanks *et al.*	semispazio	verticale	più complesso del metodo di Lekhnitskii
Lodge	semispazio	verticale	trasforma il problema in isotropo, inapplicabile per problemi al contorno in generale
Hata	semispazio	verticale	rideriva le soluzioni di Elliot e Lodge
Chen	spazio spazio	verticale orizzontale	tutti gli spostamenti e le tensioni tutti gli spostamenti
Pan & Chou	spazio	3D	tutti gli spostamenti e le tensioni
Pan & Chou	semispazio semispazio	verticale sepolto orizzontale sepolto	tutti gli spostamenti e le tensioni lungo l'asse del carico tutti gli spostamenti e parzialmente le tensioni (le funzioni potenziale sono lunghe)
Fabrikant	spazio semispazio	3D 3D	tutti gli spostamenti e parzialmente le tensioni tutti gli spostamenti e parzialmente le tensioni (soluzione delle tensioni tangenziali errata)
Lin	semispazio	verticale e orizzontale	tutti gli spostamenti e le tensioni
Hanson *et al.*	semispazio	sepolto, 3d	sono citate solo le funzioni potenziale
Sveklo	semispazio	verticale	tutti gli spostamenti
Sveklo	spazio semispazio	verticale verticale sepolto	tutti gli spostamenti tutti gli spostamenti

Tabella 1.1: Soluzioni presenti in letteratura per carico verticale concentrato

La tabella 1.1 riassume in maniera schematica quanto appena descritto, in particolare per ciascuna soluzioni presente in letteratura è riportato il nome dell'autore, il tipo di carico considerato e un annotazione sulla soluzione formulata.

1.2.2 Altri tipi di carico

Numerose altre soluzioni sono state proposte per tipi di carico diverso da quello concentrato e per posizioni del carico non solo sulla superficie del semispazio.

In particolare meritano un doveroso richiamo la soluzione di Gerrard del 1982 [45] che presenta la soluzione completa per carico posto all'interno del semispazio ad una profondità assegnata all'interno. Altre soluzioni per il caso del carico concentrato verticale e/o orizzontale sono state sviluppate in [81] relativamente al solo caso di radici reali e distinte dell'equazione caratteristica.

Soluzioni per carichi concentrati in superficie, con impronta di carico circolare,

Autore	Tipo di carico	Direzione del carico	Soluzione
Anon	carico di linea	verticale	tensioni
Urena *et al*.	di linea	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni
	di linea	orizzontale	tutte le tensioni
Lin *et al*.	di linea	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni
	di linea	orizzontale	tutti gli spostamenti e le tensioni
Anon	circolare	verticale	spostamenti verticali in superficie al centro e lungo il contorno, e tensioni verticali lungo l'asse del carico
Barden	circolare	verticale	tensioni verticali lungo l'asse del carico
Gerrard & Harrison	circolare	verticale	tutti gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni
Nayak	circolare	verticale	spostamenti verticali in superficie (alcune condizioni incomprensibili)
Hooper	circolare	verticale	spostamenti verticali in superficie
Misra & Sen	circolare	verticale	spostamenti verticali in superficie al centro e lungo il contorno, e tensioni verticali sotto il centro del carico
Chowdhury	circolare	verticale sepolto	tutti gli spostamenti in superficie
Hanson & Puja	circolare	3D	tutti gli spostamenti e le tensioni
Quinlan	parabolico	verticale	spostamenti verticali in superficie e tensioni verticali lungo l'asse del carico
Misra & Sen	parabolico	verticale	spostamenti verticali in superficie al centro e lungo il contorno, e tensioni verticali sotto il centro del carico
Gezetas	parabolico	verticale	tutti gli spostamenti in superficie e tutte le tenzioni sotto il centro del carico
Gezetas	parabolico	verticale	tutti gli spostamenti e le tensioni
Hasegawa & Watanabe	ad anello	verticale	spostamenti
Hansin & Wang	ad anello	sepolto 3D	tutti gli spostamenti e le tensioni
Sveklo	ellittico	verticale	spostamenti orizzontali
Gladwell	ellittico	verticale	spostamenti verticali in superificie
Lin *et al*.	rettangolare uniforme	verticale	spostamenti verticali in superificie e tutte le tensioni
	rettangolare uniforme	orizzontale	tutte le tensioni
Piquer *et al*.	rettangolare lineare infinito	verticale	tutte le tensioni
	rettangolare lineare infinito	orizzontale	tutte le tensioni
Moroto & Hasegawea	rettangolare lineare infinito	verticale	tensioni verticali (rapporto di Poisson=0)

Tabella 1.2: Soluzioni presenti in letteratura per altri tipi di carico

sono stati pubblicati in [41], [39], [40], [52] e [53] per i casi di carico uniforme, lineare e carichi secondo grado.

Diversi contributi hanno riguardato impronte di carico, applicate in superficie, di forma rettangolare o di sagoma arbitraria [140], [130], [139] e [149]. Mentre i problemi di carico sepolto distribuiti hanno ricevuto l'attenzione nei lavori [137], [131] e [133].

Inoltre, in [148], [135] e [99] viene proposta la soluzione per semispazio costituito da materiale trasversalmente isotropo a strati, mentre in [133], [132] e [139] sono ricavate le soluzioni per carico applicato in superficie o carico sepolto in un semispazio non omogeneo.

Infine sono presenti in letteratura anche le soluzioni in caso di superficie inclinata [134], [138], [129], e carichi laterali [126], [128] e [127]. Per la risoluzione di problemi ingegneristici sono proposti grafici delle tensioni e degli spostamenti in [135]e [136] relativi eslusivamente al caso di radici reali e distinte dell'equazione caratteristica.

La tabella 1.2 riassume in maniera schematica quanto appena descritto, in particolare per ciascuna soluzioni presente in letteratura è riportato il nome dell'autore, il tipo e la direzione del carico considerato e un annotazione sulla soluzione formulata.

Capitolo 2

Il legame costituitivo elastico trasversalmente isotropo

2.1 Legame costitutivo

Il legame costitutivo elastico trasversalmente isotropo può essere espresso in formulazione matriciale classica a partire dalla stessa espressione utilizzata per i materiali ortotropi e scritta in un sistema di riferimento (1,2,3). In particolare l'espressione della **matrice di deformabilità** può essere scritta in funzione delle seguenti costanti elastiche E_1; E_2; E_3; ν_{21}; ν_{31}; ν_{32}; ν_{12}; ν_{13}; ν_{23}; G_{23}; G_{31}; G_{12}. Dove E rappresenta il modulo di elasticità longitudinale, G il modulo di elasticità a taglio e ν il rapporto di Poisson.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

La **matrice di rigidezza** può essere ottenuta come l'inversa della matrice di deformabilità:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

I singoli termini della matrice assumono le seguenti espressioni:

$$C_{11} = \frac{E_1(-1+\nu_{23}\nu_{32})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{12} = -\frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{13} = -\frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{21} = -\frac{E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{22} = \frac{E_2(-1+\nu_{13}\nu_{31})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{23} = -\frac{E_2(\nu_{12}\nu_{31}+\nu_{32})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{31} = -\frac{E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{32} = -\frac{E_3(\nu_{13}\nu_{21}\nu_{23})}{-1+\nu_{12}(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})+\nu_{23}\nu_{32}+\nu_{13}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{44} = G_{23} \qquad C_{55} = G_{31} \qquad C_{66} = G_{12}$$

Le matrici di deformabilitò può essere riscritta in accordo con le ipotesi di simmetria del tensore:

$$\nu_{12} = \nu_{21}\frac{E_1}{E_2} \qquad \nu_{13} = \nu_{31}\frac{E_1}{E_3} \qquad \nu_{23} = \nu_{32}\frac{E_2}{E_3} \tag{2.3}$$

nella forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

La **matrice di rigidezza**, allo stesso modo, può essere ottenuta come l'inversa della matrice di deformabilità:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

In cui i singoli termini della matrice assumono i seguenti valori:

$$C_{11} = \frac{E_1 E_2(-E_3 + E_2 \nu_{32}^2)}{E_1 E_3\ \nu_{21}^2 + E_2^2\ \nu_{23}^2 + E_2(-E_3 + E_1 \nu_{31}(\nu_{31} + 2\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{12} = -\frac{E_1 E_2(E_3 \nu_{21} + E_2 \nu_{31}\nu_{32})}{E_1 E_3\ \nu_{21}^2 + E_2^2\ \nu_{23}^2 + E_2(-E_3 + E_1 \nu_{31}(\nu_{31} + 2\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{13} = -\frac{E_1 E_2 E_3(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{E_1 E_3\ \nu_{21}^2 + E_2^2\ \nu_{23}^2 + E_2(-E_3 + E_1 \nu_{31}(\nu_{31} + 2\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{22} = \frac{E_2^2(E_3 - E_1 \nu_{31}^2)}{E_1 E_3\ \nu_{21}^2 + E_2^2\ \nu_{23}^2 + E_2(-E_3 + E_1 \nu_{31}(\nu_{31} + 2\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{23} = \frac{E_2 E_3(E_1 \nu_{21}\nu_{31} + E_2 \nu_{32})}{E_1 E_3\ \nu_{21}^2 + E_2^2\ \nu_{23}^2 + E_2(-E_3 + E_1 \nu_{31}(\nu_{31} + 2\nu_{21}\nu_{32})}$$

$$C_{44} = G_{23} \qquad C_{55} = G_{31} \qquad C_{66} = G_{12}$$

Qunado si considera il legame costitutivo trasversalmente isotropo accade che:

$$E_1 = E_h \qquad E_2 = E_h \qquad E_3 = E_v \tag{2.6}$$

$$\nu_{21} = \nu_{hh} \qquad \nu_{31} = \nu_{hv} \qquad \nu_{32} = \nu_{hv} \tag{2.7}$$

$$G_{23} = G_{hv} \qquad G_{31} = G_{hv} \qquad G_{12} = G_{hh} = \frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})} \tag{2.8}$$

dove:

- E_v : modulo di elasticità longitudinale nella direzione orizzontale;
- E_h : modulo di elasticità longitudinale nella direzione verticale;
- G_{hv}: modulo di elasticità a taglio in direzione verticale;
- G_{hh}: modulo di elasticità a taglio nel piano orizzontale;
- ν_{hh}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni orizzontali sul piano orizzontale;
- ν_{hv}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni verticali sul piano orizzontale.

Fatte tali assunzioni l'espressione della **matrice di deformabilità** assume la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & \frac{1}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{hv}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{hv}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{hh}} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Infine nel caso di comportamento del materiale elastico lineare isotropo le costanti elastiche subiscono un'ulteriore semplificazione:

$$E_h = E_v = E \qquad \nu_{hh} = \nu_{hv} = \nu \qquad G_{hh} = G_{hv} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.10}$$

Fatte tali assunzioni l'espressione della **matrice di deformabilità** assume la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

La **matrice di rigidezza** può essere ottenuta come l'inversa della matrice di deformabilità:

$$\begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Infine ricordando l'espressione delle ocstanti di Lamè si ottiene:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.13}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

2.2 Esempi di materiali reali con legame costitutivo trasversalmente istoropo

Un materiale trasversalmente isotropo è caratterizzato da proprietà meccaniche che sono simmetriche attorno ad un asse normale ad un piano di isotropia.

Questo piano trasversale ha infiniti piani di simmetria e quindi, in questo piano, le proprietà del materiale sono uguali in tutte le direzioni. Per questo motivo tali materiali sono anche detti *materiali dotati di anisotropia polare*.

Questo tipo di materiale presenta **simmetria esagonale**, in modo che il numero di costanti indipendenti del tensore di elasticità sono ridotti a 5 come descritto nel paragrafo precedente.

Esempi di materiali trasversalmente isotropi si ritrovano sia in materiali di origine naturale che artificiale che trovano largo impiego sia nel campo dell'ingegneria strutturale, della geotecnica e dei materiali utlizzati in ingegneria biomedica.

Molti dei materiali che hanno questo tipo di comportamento elastico godono anche di proprietà piezoelettriche che derivano dalla specifica costituzione molecolare, come ad esempio i cosiddetti materiali *piezoceramici*.

Gran parte delle rocce esistenti in natura mostrano proprietà dei materiali trasversalmente isotropi, cioè mostrano un carattere direzionale dei parametri che ne definiscono il comportamento fisico e meccanico.

Tale comportamento si rileva sia a livello di grande scala, quando nell'ammasso roccioso sono presenti superfici geologiche di discontinuità (giunti, fratture, faglie, ecc.) o alternanze di strati di materiali diversi, sia a livello di piccola scala, quando la roccia componente l'ammasso stesso ha già, di per sè, a causa della sua struttura intrinseca (orientazione preferenziale dei cristalli, sistemi di micro-fessure), proprietà direzionali.

Tali proprietà sono proprie non solo di rocce scistose e stratificate, ma anche di rocce apparentemente isotrope, come alcuni graniti.

Il problema dell'anisotropia, che riguarda sia le caratteristiche di deformabilità che quelle di resistenza, è stato ampiamente studiato dal punto di vista teorico e dal punto di vista sperimentale.

Nelle tabelle che seguono sono riportati i valori usuali, per una vasta gamma di materiali, dalle cinque costanti elastiche per le quali si è determinato anche il valore dei rapporti di anisotropia definiti da E_h/E_v, G_{hh}/G_{hv} e ν_{hh}/ν_{hv} alla base dei quali sono stati poi definiti gli abachi e le tabelle per il calcolo delle tensioni e degli spostamenti in superifice contenuti nelle appendici alla Tesi.

Materiale	E_h	E_v	G_{hh}	G_{hv}	ν_{hh}	ν_{hv}	$\frac{E_h}{E_v}$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu hv}$
rocce scistose I	95.4	74.5	37.5	27.2	0.27	0.27	1.28	1.38	1.00
rocce scistose II	76.9	41.0	31.5	20.5	0.22	0.27	1.87	1.53	0.81
rocce scistose III	63.4	20.0	28.5	7.9	0.13	0.21	3.17	3.55	0.62
ardesia	121.3	58.9	50.9	15.1	0.19	0.11	2.05	3.37	1.72
argillite	51.8	32.2	21.7	13.3	0.19	0.18	1.60	1.63	1.05
arenaria di Loveland I	29.3	23.9	12.4	6.2	0.18	0.13	1.22	2.00	1.38
arenaria di Loveland II	33.5	44.6	15.5	19.1	0.08	0.13	0.75	0.81	0.61
argillite	59.1	59.1	24.2	14.9	0.22	0.10	1.00	1.62	2.20
argillite	68.3	51.4	28.45	21.0	0.20	0.16	1.32	1.35	1.25

Tabella 2.1: Costanti elastiche per alcuni terreni e rocce - Wang, C.D. *et al.* (1998)

Materiale	ν_{hh}	ν_{hv}	$\frac{G_{hv}}{E_v}$	$\frac{E_h}{E_v}$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu hv}$
argilla London fortemente sovraconsolidata (profondità 10m)	0.325	0.50	0.355	1.35	1.44	0.64
argilla London fortemente sovraconsolidata (profondità 15m)	0.205	0.50	0.41	1.59	1.60	0.41
argilla London fortemente sovraconsolidata (profondità > 15m)	0.08	0.50	0.46	1.80	1.81	0.16
argilla London fortemente sovraconsolidata (drenate)	0.00	0.19	0.553	2.00	1.80	0.00
argille caolitiche debolmente consolidate (non drenate)	0.375	0.50	0.364	1.25	1.25	0.75
argille illitiche normalmente consolidate (non drenate)	0.436	0.50	0.310	1.13	1.26	0.87
rocce scistose del Colorado	0.266	0.197	0.524	1.38	1.04	1.35
argilla di mare naturalmente consolidate (Champlain Canada)	0.20	0.35	0.187	0.62	1.38	1.57

Tabella 2.2: Costanti elastiche per alcuni terreni e rocce - Gazetas, G. *et al.* (1981)

Materiale	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	**Riferimento bibliografico**
Al_2O_3	460.2	174.7	127.4	509.5	126.9	Shi and Ramalingam (2001)
Barium-titanate	168.0	78.0	71.0	189.0	5.46	Uyaner et al. (2000)
Beryllium (Be)	292.3	26.7	14.0	336.4	162.5	Royer and Dieulesaint (2000)
Berea sandstone	21.17	4.34	3.84	17.34	13.97	Hart (2000)
Cadmium	116.0	79.0	41.0	50.9	19.6	Ahmad and Khan (2001)
Cadmium sulphide (CdS)	85.6	53.2	46.2	93.6	14.9	Royer and Dieulesaint (2000)
Carbon-fiber	20.0	9.98	6.45	235.0	24.0	Kriz and Stinchcomb (1979)
Ceramic PZT-4	139.0	78.0	74.0	115.0	25.6	Royer and Dieulesaint (2000)
Cobalt	307.0	165.0	103.0	358.1	75.3	Kuo and Keer (1992)
Composite (60 per cento Fiber)	13.6	7.0	5.47	144.0	6.01	Kriz and Stinchcomb (1979)
Concrete aged by chemical method, unsaturated	21.2	3.5	2.8	25.9	11.2	Panet et al. (2002)
Concrete aged by Freeze/thaw cycles, unsaturated	32.3	5.1	4.7	34.9	14.9	Panet et al. (2002)
E glass/epoxy	14.93	6.567	5.244	47.27	4.745	Behrens (1971)
GaS	157.0	33.0	15.0	36.0	8.0	Gardos (1990)
GaSe	103.0	29.0	12.0	34.0	9.0	Gardos (1990)
Gneiss rock (dry)	52.0	11.0	9.0	16.0	11.0	Bank (2002)
Gneiss rock (water-saturated)	99.0	46.0	45.0	78.0	15.0	Bank (2002)
Graphite	1060.0	180.0	15.0	37.0	0.35	Gardos (1990)
Graphite/epoxy	13.92	6.92	6.44	160.7	7.07	Sáez and Domínguez (2000)
Human femur compact bone	46.0	39.0	39.0	53.3	3.3	Reilly and Burstein (1975)
InSe	73.0	27.0	30.0	36.0	12.0	Gardos (1990)
Magnesium	59.7	26.2	21.7	61.7	16.4	Ahmad et al. (2002)
Mandible (cancellous bone)	0.299	0.070	0.124	0.954	0.115	Lin (2002)
Mandible (cortical bone)	17.45	6.79	10.18	27.38	5.9	Lin (2002)
MoS_2	238.0	-54.0	23.0	52.0	18.9	Gardos (1990)
$NbSe_2$	106.0	14.0	31.0	54.0	19.5	Gardos (1990)
Sapphire	496.8	163.6	110.9	498.1	147.4	Wachtman et al. (1960)
SiC	479.0	97.8	55.3	521.4	148.4	Martin (1972)
T650/950-1	10.90	5.46	5.40	133.2	4.25	Melo and Radford (2002)
TiB_2	0.69	0.41	0.32	0.44	0.25	Wang (2004)
Titanium (Ti)	162.4	92.0	69.0	180.7	46.7	Royer and Dieulesaint (2000)
Wet bovine dentine	37.0	16.6	8.7	39.0	5.7	Lees and Rollins (1972)
Wet bovine enamel	115.0	42.4	30.0	125.0	22.8	Lees and Rollins (1972)
Wet bovine femur	17.0	10.2	9.72	29.6	3.6	Reilly and Burstein (1975)
Wood (Douglas Fir)	4.07	2.69	0.24	6.89	0.49	Ritter (1992)
Zinc	158.35	31.51	47.44	61.6	40.0	Jain (1974)
Zinc oxide (ZnO)	209.7	121.1	105.1	210.9	42.5	Royer and Dieulesaint (2000)

Tabella 2.3: Coefficienti elastichi per alcuni materiali trasversalmente isotropi - Ding, H. *et al.* (2006)

Materiale	E_h	E_v	G_{hh}	G_{hv}	ν_{hh}	ν_{hv}	$\frac{E_h}{E_v}$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}}$
Al_2O_3	380.7	458.3	142.7	126.9	0.33	0.20	0.83	1.12	1.66
Barium-titanate	122.6	148.0	45.0	5.4	0.36	0.28	0.82	8.24	1.25
Beryllium (Be)	289.3	335.1	132.8	162.5	0.08	0.04	0.86	0.81	2.04
Berea sandstone	19.7	16.1	8.4	13.9	0.17	0.15	1.21	0.60	1.14
Cadmium	57.5	33.6	18.5	19.6	0.55	0.21	1.70	0.94	2.63
Cadmium sulphide (CdS)	48.0	62.8	16.2	14.9	0.48	0.33	0.76	1.08	1.45
Carbon-fiber	14.9	232.2	5.0	24.0	0.49	0.21	0.06	0.20	2.29
Ceramic PZT-4	81.2	64.5	30.5	25.6	0.33	0.34	1.25	1.19	0.97
Cobalt	211.3	313.1	71.0	75.3	0.48	0.21	0.67	0.94	2.23
Composite (60 per cento Fiber)	9.9	141.1	3.3	6.0	0.50	0.26	0.07	0.54	1.91
Concrete aged by chemical method, unsaturated	20.4	25.2	8.8	11.2	0.15	0.11	0.80	0.79	1.35
Concrete aged by Freeze/thaw cycles, unsaturated	31.0	33.7	13.6	14.9	0.14	0.12	0.92	0.91	1.12
E glass/epoxy	11.8	44.7	4.1	4.7	0.41	0.24	0.26	0.88	1.71
GaS	146.0	33.0	62.0	8.0	0.17	0.07	4.34	7.75	2.24
GaSe	92.5	31.8	37.0	9.0	0.25	0.09	2.90	4.11	2.75
Gneiss rock (dry)	46.1	13.4	20.5	11.0	0.12	0.14	3.43	1.86	0.88
Gneiss rock (water-saturated)	67.5	50.0	26.5	15.0	0.27	0.31	1.34	1.76	0.88
Graphite	1025.6	36.6	440.0	0.35	0.16	0.01	27.98	1257.14	13.54
Graphite/epoxy	10.4	156.7	3.5	7.0	0.48	0.30	0.06	0.49	1.57
Human femur compact bone	11.1	17.5	3.5	3.3	0.59	0.45	0.63	1.06	1.30
InSe	47.9	18.0	23.0	12.0	0.04	0.60	2.66	1.91	0.13
Magnesium	45.4	50.7	16.7	16.4	0.35	0.25	0.89	1.02	1.41
Mandible (cancellous bone)	0.2	0.9	0.1	0.1	0.19	0.33	0.31	1.00	0.56
Mandible (cortical bone)	13.0	18.8	5.3	5.9	0.21	0.41	0.69	0.90	0.52
MoS_2	209.7	46.2	146.0	18.9	-0.02	0.12	4.53	7.72	-2.25
$NbSe_2$	88.0	37.9	46.0	19.5	-0.04	0.25	2.31	2.35	-0.16
Sapphire	431.2	460.8	116.6	147.4	0.29	0.16	0.93	1.13	1.75
SiC	445.2	510.7	190.6	148.4	0.19	0.09	0.89	1.28	2.02
T650/950-1	8.1	129.6	2.7	4.2	0.49	0.33	0.06	0.64	1.48
TiB_2	0.3	0.2	0.1	0.2	0.38	0.29	1.53	0.56	1.33
Titanium (Ti)	104.3	143.2	35.2	46.7	0.48	0.27	0.72	0.75	1.77
Wet bovine dentine	28.9	36.1	10.2	5.7	0.41	0.16	0.79	1.78	2.57
Wet bovine enamel	96.3	113.5	36.3	22.8	0.32	0.19	0.84	1.59	1.71
Wet bovine femur	10.2	22.6	23.4	3.6	0.50	0.35	0.45	0.94	1.42
Wood (Douglas Fir)	2.3	6.8	0.7	0.5	0.66	0.03	0.33	1.40	18.59
Zinc	12.6	37.8	63.4	40.0	-0.04	0.24	3.20	1.58	-0.16
Zinc oxide (ZnO)	127.3	114.1	44.3	42.5	0.43	0.31	0.88	1.04	1.37

Tabella 2.4: Costanti elastiche per alcuni materiali trasversalmente isotropi

Capitolo 3

Trattazione di J. H. Michell

Introduzione

In questo capitolo si presenta la trattazione della soluzione elastica per semispazi trasversalmente isotropi sviluppata da **John Henry Michell** nel 1900 e contenuta nell'articolo *The Stress in an Ælotropic Solid with an Infinite Plane Boundary* pubblicato sulla rivista *Proceedings of the London mathematical society* [91].

La metodologia utilizzata è simile a quella contenuta nel libro di *Augustus Edward Hough Love* [88] relativa al caso di materiale isotropo, ed impiega la teoria del potenziale per ricavare le espressioni finali nel caso di materiali con comportamento elastico trasversalmente isotropo. Tale comportamento, come riportato dall'autore, è proprio di materiali caratterizzati da sistemi di cristalli esagonali.

La trattazione in questione si limita a determinare le espressioni delle tensioni verticali, all'interno del semispazio elastico trasversalmente isotropo, prodotte da un carico verticale puntiforme applicato nell'origine del sistema di riferimento. Nonstante ciò questo lavoro rappresenta il primo contributo scientifico che propone una soluzione del probelma elastico sfruttando la teoria del potenziale, nel caso di materiali caratterizzati da comportamento trasversalmente isotropo.

Di seguito si riporopone l'intera trattazione svolta da J. H. Michell mettendo in evidenza tutti i passaggi, a partire dell'espressione generale dell'equazione del moto fino ad arrivare ai risultati finali in termini di tensione.

Infine viene dimostrato come tale soluzione coincide con quella ottenuta da Boussinesq [15] quando il materiale diventa isotropo.

3.1 Equazioni di volume

3.1.1 Energia di deformazione

Per i solidi *omogenei* caratterizzati da un legame costitutivo textitelastico lineare trasversalmente isotropo, l'energia di deformazione può essere scritta attraverso la seguente espressione:

$$2W = A(e + f)^2 + 2F(e + f)g + Cg^2 + L(a^2 + b^2) + N(c^2 - 4ef) \tag{3.1}$$

dove:

$$A = C_{11} = \frac{E_h\left(1 - \frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2\right)}{(1 + \nu_{hh})\left(1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2\right)}$$

$$F = C_{13} = \frac{E_h\nu_{hv}}{1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2} \qquad C = C_{33} = \frac{E_v(1 - \nu_{hh})}{1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2}$$

$$L = C_{44} = G_{hv} \qquad N = C_{66} = G_{hh} = \frac{E_h}{2(1 + \nu_{hh})}$$

Questa relazione coincide con l'espressione (15) riportata in [88]. E il significato delle costanti elastiche, esplicitatente in forma classica, rappresentano rispettivamente:

- E_v : modulo di elasticità longitudinale nella direzione orizzontale;
- E_h : modulo di elasticità longitudinale nella direzione verticale;
- G_{hv}: modulo di elasticità a taglio in direzione verticale;
- G_{hh}: modulo di elasticità a taglio nel piano orizzontale;
- ν_{hh}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni orizzontali sul piano orizzontale;
- ν_{hv}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni verticali sul piano orizzontale.

3.1.2 Espressione delle tensioni

L'espressione delle singole componenti di tensione possono essere espresse, tenendo conto dei simboli definiti in §3.1.1, nella seguente formulazione:

$$P = A\theta + (F - A)g - 2Nf; \tag{3.2}$$

$$Q = A\theta + (F - A)g - 2Ne; \tag{3.3}$$

$$R = F\theta + (C - F)g; \tag{3.4}$$

$$S = La; \tag{3.5}$$

$$T = Lb; \tag{3.6}$$

$$N = Nc; \tag{3.7}$$

Avendo posto θ pari alla traccia del tensore delle deformazioni:

$$\theta = e + f + g; \tag{3.8}$$

I simboli utilizzati per indicare le tensioni possono essere esplicitati in forma classica attraverso le seguenti corrispondenze:

$$P = \sigma_x \qquad Q = \sigma_y \qquad R = \sigma_z \qquad S = \tau_{yz} \qquad T = \tau_{xz} \qquad U = \tau_{xy}$$

$$a = \gamma_{yz} = v_z + w_y \qquad b = \gamma_{xz} = u_z + w_z \qquad c = \gamma_{xy} = u_y + v_x$$

$$e = \epsilon_x = u_x \qquad f = \epsilon_y = v_y \qquad g = \epsilon_z = w_z$$

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = u_x + v_y + w_z$$

3.1.3 Equazioni del moto

Le equazioni del moto possono essere scritte nella notazione di Michell nella seguente maniera, dove il pedice indica l'operazione di derivazione:

$$P_x + U_y + T_z = \rho\ddot{u} - X \tag{3.9}$$

$$U_x + Q_y + S_z = \rho\ddot{v} - Y \tag{3.10}$$

$$T_x + S_y + R_z = \rho\ddot{w} - Z \tag{3.11}$$

Queste stesse equazioni del moto possono essere scritte con la notazione classica:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \ddot{u} - X \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v} - Y \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \ddot{w} - Z \tag{3.14}$$

Sostituendo l'espressione delle tensioni così come esplicitate da Michell si ottiene:

$$A\theta_x + (F - A)g_x - 2Nf_x + Nc_y + Lb_z = \rho \ddot{u} - X \tag{3.15}$$

$$A\theta_y + (F - A)g_y - 2Ne_y + Nc_x + La_z = \rho \ddot{v} - Y \tag{3.16}$$

$$F\theta_z + (C - F)g_z + L(b_x + a_y) = \rho \ddot{w} - Z \tag{3.17}$$

circa l'espressione $(b_x + a_y)$ è possibile esplicitare quanto segue:

$$(b_x + a_y) = (u_z + w_x)_x + (w_y + v_z)_y = \theta_z + \nabla^2 w - 2w_{zz} \tag{3.18}$$

tale relazione può essere riscritta in forma classica:

$$(b_x + a_y) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} (u_z + w_x)_x + (w_y + v_z)_y &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}; \end{aligned} \tag{3.20}$$

esplicitando la relazione di Michell si ottiene:

$$\begin{aligned} \theta_z + \nabla^2 w - 2w_{zz} &= \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Come si può notare i due risultati coincidono.

Data l'uguaglianza appena dimostrata possiamo scrivere la terza equazione del moto nel seguente forma:

$$(F + L)\theta_z + (C - F - 2L)w_{zz} + L\nabla^2 w = \rho\ddot{w} - Z \tag{3.21}$$

A questo punto bisogna dimostrare che:

$$c_{xy} - f_{xx} - e_{yy} = 0 \tag{3.22}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} c_{xy} - f_{xx} - e_{yy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\gamma_{xy} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\epsilon_y - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\epsilon_x = && (3.23)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = && (3.24)\\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 && (3.25) \end{aligned}$$

Inoltre per ottenere l'equazione (5) della trattazione di Michell bisogna effettuare le seguenti derivate parziali e succevvivamente farne la somma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[A\theta_x + (F - A)g_x - 2Nf_x + Nc_y + Lb_z\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho\ddot{u} - X\Big] \tag{3.26}$$

$$A\theta_{xx} + (F - A)g_{xx} - 2Nf_{xx} + Nc_{xy} + Lb_{xz} = \rho\ddot{u_x} - X_x \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[A\theta_y + (F - A)g_y - 2Ne_y + Nc_x + La_z\Big] = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\rho\ddot{v} - Y\Big] \tag{3.28}$$

$$A\theta_{yy} + (F - A)g_{yy} - 2Ne_{yy} + Nc_{xy} + La_{yz} = \rho\ddot{v_y} - Y_y \tag{3.29}$$

sommando:

$$A\theta_{xx}+A\theta_{yy}+(F-A)(g_{xx}-g_{yy})+2N(c_{xy}-f_{xx}-eyy)+L(b_{xz}+a_{yz}) = \rho(\ddot{u_x}+\ddot{v_y})-(X_x+Y_y) \tag{3.30}$$

sommando e sottraendo il termine $A\theta_{zz}$ e, successivamente, semplificando opportunamente si ottiene:

$$A\theta_{xx}+A\theta_{yy}+A\theta_{zz}-A\theta_{zz}+(F-A)(g_{xx}-g_{yy})+L(b_{xz}+a_{yz}) = \rho(\ddot{u_x}+\ddot{v_y})-(X_x+Y_y) \tag{3.31}$$

ricordando l'espressione (3.18) nella quale si ha $(b_x + a_y) = \theta_z + \nabla^2 w - 2w_{zz}$ l'espressione diventa:

$$A\nabla^2\theta - A\theta_{zz} + (F-A)(g_{xx} - g_{yy}) + L(\theta_{zx} + \nabla^2 w_z - 2w_{zzz}) = \rho(\ddot{u_x} + \ddot{v_y}) - (X_x + Y_y) \quad (3.32)$$

Ponendo $\Lambda = X_x + Y_y + Z_z$ si ottiene:

$$A\nabla^2\theta - A\theta_{zz} + (F-A)(g_{xx} - g_{yy}) + L(\theta_{zx} + \nabla^2 w_z - 2w_{zzz}) = \rho(\ddot{\theta} - \ddot{w_z}) - \Lambda + Z_z \quad (3.33)$$

$$(L-A)\theta_{zz} + A\nabla^2\theta + (F-A)(g_{xx} - g_{yy}) + L\nabla^2 w_z - 2Lw_{zzz} = \rho(\ddot{\theta} - \ddot{w_z}) - \Lambda + Z_z \quad (3.34)$$

$$(L-A)\theta_{zz} + A\nabla^2\theta + (F-A)\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial_{x^2}} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}\right) + L\nabla^2 w_z - 2Lw_{zzz} = \rho(\ddot{\theta} - \ddot{w_z}) - \Lambda + Z_z \quad (3.35)$$

sommando e sottraendo al primo termine $\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} = w_{zzz}$

$$(L-A\ )\ \theta_{zz} + A\nabla^2\theta + (F-A)\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial_{x^2}} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right) + \quad (3.36)$$
$$+ L\nabla^2 w_z - 2Lw_{zzz} = \rho(\ddot{\theta} - \ddot{w_z}) - \Lambda + Z_z$$

ricordando che $\nabla^2 w_z = \frac{\partial w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial w_z}{\partial z^2}$ si ottine la forma finale dell'equazione (5) di Michell:

$$(L-A)\theta_{zz} + A\nabla^2\theta + (F+L-A)\nabla^2 w_z - (F+2L-A)w_{zzz} = \rho(\ddot{\theta} - \ddot{w_z}) - \Lambda + Z_z \quad (3.37)$$

Passiamo quindi alla dimostrazione dell'equazione (6) di Michell. Per dimostrare tale equazione bisogna innanzitutto differenziare la (1) e la (2) di Michell rispettivamente rispetto ad y ed x e sottrarre le due espressioni:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[A\theta_x + (F-A)g_x - 2Nf_x + Nc_y + Lb_z\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\ddot{u} - X\right] \quad (3.38)$$

$$A\theta_{xy} + (F-A)g_{xy} - 2Nf_{xy} + Nc_{yy} + Lb_{yz} = \rho\ddot{u_y} - X_y \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A\theta_y + (F-A)g_y - 2Ne_y + Nc_x + La_z\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\ddot{v} - Y\right] \quad (3.40)$$

$$A\theta_{xy} + (F-A)g_{xy} - 2Ne_{xy} + Nc_{xx} + La_{xz} = \rho\ddot{v_x} - Y_x \quad (3.41)$$

Sottrando membro a membro dall'eq. (3.39) l'eq. (3.41) si ottiene:

$$-2Nf_{xy} + Nc_{yy} + Lb_{yz} + 2Ne_{xy} - Nc_{xx} - La_{xz} = \rho\ddot{u_y} - X_y - \rho\ddot{v_x} + Y_x \quad (3.42)$$

raccogliendo opportunamente in fattori otteniamo:

$$2N(-f_{xy} + e_{xy}) + N(c_{yy} - c_{xx}) + L(b_{yz} - a_{xz} = -\rho(\ddot{v_x} + \ddot{u_y}) + (Y_x - X_y) \quad (3.43)$$

ponendo:

$$2\varpi = v_x - u_y \qquad 2\Omega = Y_z - X_y \quad (3.44)$$

ed esaminando singolarmente i termini. In particolare il secondo termine diventa:

$$-\rho(\ddot{v_x} + \ddot{u_y}) + (Y_x - X_y) = -2\rho\ddot{\varpi} + 2\Omega \quad (3.45)$$

al primo termine invece i singoli contributi sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} 2N(-f_{xy} + e_{xy}) &= 2N\Big[\Big(-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)_{xy} + \Big(+\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_{xy}\Big] = \\ &= 2N\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\Big) = -2N\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\Big); \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} N(c_{yy} - c_{xx}) &= N\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)_{yy} - \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)_{xx}\Big] = \\ &= N\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\Big) = \\ &= N\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\Big) + N\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\Big); \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} L(b_{yz} - a_{xz}) &= L\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)_{yz} - \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)_{xz}\Big] = \\ &= L\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\Big) = L(u_y - v_x)_{zz} = -L(v_x - u_y)_{zz} \end{aligned} \quad (3.48)$$

raggruppando e semplificando i termini in N si ottiene:

$$-N\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\Big) - N\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\Big) \quad (3.49)$$

moltiplicando per -1 tutti i termini, sommando e sottraendo $N\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_x - u_y)$ si ottiene che la parte negativa può essere raggruppata con il termine L nella seguente espressione:

$$2(L - N)\varpi_{zz} \quad (3.50)$$

il termine positivo invece consente di scrivere:

$$N\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=2N\nabla^2\varpi \tag{3.51}$$

mettendo insieme le espressioni appena ricavate e semplificando i termini 2 si ottiene l'espressione finale dell eq.(6) di Michell:

$$(L-N)\varpi_{zz}+N\nabla^2\varpi=\rho\ddot{\varpi}-\Omega \tag{3.52}$$

Infine bisogna dimostrare la seguente identità:

$$c_x-2e_y=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_x-2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial x}-2\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial x}=2\varpi_x \tag{3.53}$$

$$c_y-2f_x=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y-2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x=\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial v_x}{\partial y}-2\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=-2\varpi_y \tag{3.54}$$

$$a_x-b_y=\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial v_x}{\partial z}+w_{xy}-\frac{\partial u_y}{\partial z}-w_{xy}=-2\varpi_z \tag{3.55}$$

3.2 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno possono essere scritte conoscendo le tensioni ovvero gli spostamenti all'interfaccia del semispazio. In particolare nel caso che sino note le tensioni è possibile procedere nella maniera descritta di seguito.

A partire dell'espressione delle tensioni:

$$R=F\theta+(C-F)g;$$

$$S=La;$$

$$T=Lb;$$

Se si ipotizza di conoscere il valore delle tre tensioni sulla superficie:

$$R=\sigma_z=F\theta+(C-F)g=R' \quad S=\tau_{yz}=La=S' \quad T=\tau_{xy}=Lb=T'; \tag{3.56}$$

derivando la seconda condizione rispetto ad x e la terza espressione rispetto ad y, sottraendo si ottiene l'eq.(10) di Michell:

$$L(a_x-b_y)=S'_{x'}-T'_{y'} \qquad 2L\varpi_z=S'_{x'}-T'_{y'} \tag{3.57}$$

con *(x';y')* coordinate del punto a quota *z=0* derivando la seconda condizione rispetto ad y e la terza espressione rispetto ad x e sommando si ottiene l'eq. (11) di Michell :

$$L(a_y + b_x) = S'_{y'} + T'_{x'} \tag{3.58}$$

sempre con *(x';y')* coordinate del punto a quota *z=0*. Sostituendo i risultati nella terza equazione del moto si ottiene:

$$F\theta_z + (C - F)g_z + L(b_x + a_y) = \rho\ddot{w} - Z \tag{3.59}$$

$$F\theta_z + (C - F)g_z = \rho\ddot{w} - Z - T'_{x'} - S'_{y'} \tag{3.60}$$

Ipotizzando, invece, di conoscere gli spostamenti in superficie, nelle tre direzioni, ed in particolare:

$$u = u' \qquad v = v' \qquad w = w' \tag{3.61}$$

si può facilmente osservare che:

$$2\varpi = v_x + u_y = v'_{x'} - u'_{y'} \tag{3.62}$$

$$\theta - w_z = u_x + v_y + w_z - w_z = u_x + v_y = u'_{x'} - v'_{y'} \tag{3.63}$$

$$w = w' \tag{3.64}$$

che sono le condizioni in superficie per questo caso rappresentate nell'eq.(12) di Michell.

3.3 Forma simmetrica delle equazioni di volume dell'equilibrio

Nel caso in cui le forze di volume siano nulle le equazioni di Michell si semplificano nelle due espressioni:

$$(F + L)\theta_z + (C - F - 2L)w_{zz} + L\nabla^2 w = 0 \tag{3.65}$$

$$(L - A)\theta_{zz} + A\nabla^2\theta - (F + 2L - A)w_{zzz} + (F + L - A)\nabla^2 w_z = 0 \tag{3.66}$$

derivando la prima espressione rispetto a z e moltiplicando un per costante p e, successivamente, sommando il risultato alla seconda espressione:

$$p(F + L)\theta_{zz} + p(C - F - 2L)w_{zzz} + pL\nabla^2 w_z = 0 \tag{3.67}$$

che sommata a:

$$(L-A)\theta_{zz} + A\nabla^2\theta - (F+2L-A)w_{zzz} + (F+L-A)\nabla^2 w_z = 0 \tag{3.68}$$

da come risultato:

$$\begin{aligned} p(F+L)\theta_{zz} + p(C-F-2L)w_{zzz} + pL\nabla^2 w_z + (L-A)\theta_{zz} + \\ A\nabla^2\theta - (F+2L-A)w_{zzz} + (F+L-A)\nabla^2 w_z = 0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

raccogliendo in fattori e ricordando che $\theta_{zzz} = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_z$ si ottiene il risultato dell'eq. di Michell:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Big[A\theta + (F+L-A+pL)w_z\Big] + \frac{d^2}{dz^2}\Big\{\Big[L-A+p(F+L)\Big]\theta + \\ \Big[p(C-F-2L)-(F+2L-A)\Big]w_z\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Adesso fissando la costante p di modo che:

$$\frac{F+L-A+pL}{A} = \frac{p(C-F-2L)-(F+2L-A)}{L-A+p(F+L)} = q \tag{3.71}$$

$$\gamma = \frac{L+p(F+L)}{A} \tag{3.72}$$

$$\gamma - 1 = \frac{L+p(F+L)}{A} - 1 = \frac{L-A+p(F+L)}{A} \tag{3.73}$$

L'equazione (3.76) può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Big[A\theta + (F+L-A+pL)w_z\Big] + \frac{d^2}{dz^2}\Big\{\Big[L-A+p(F+L)\Big]\theta + \\ \Big[p(C-F-2L)-(F+2L-A)\Big]w_z\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{3.74}$$

dividendo per $L-A+p(F+L)$ e moltiplicando per $\gamma - 1 = \dfrac{L-A+p(F+L)}{A}$ tutti i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\Big[\theta\frac{A}{L-A+p(F+L)}\frac{L-A+p(F+L)}{A} + \\ &+ \frac{(F+L-A+pL)}{L-A+p(F+L)}\frac{L-A+p(F+L)}{A}w_z\Big] + \\ &+ \frac{d^2}{dz^2}\Big\{\Big[\frac{L-A+p(F+L)}{L-A+p(F+L)}(\gamma-1)\Big]\theta + \\ &+ \Big[\frac{p(C-F-2L)-(F+2L-A)}{L-A+p(F+L)}(\gamma-1)\Big]w_z\Big\} = 0; \end{aligned} \tag{3.75}$$

Semplificando e introducendo le posizioni precedentemente indicate si ottiene:

$$\nabla^2\Big[\theta + qw_z\Big] + \frac{d^2}{dz^2}\Big[(\gamma - 1)\theta + q(\gamma - 1)w_z\Big] = 0 \tag{3.76}$$

$$\nabla^2\Big[\theta + qw_z\Big] + (\gamma - 1)\frac{d^2}{dz^2}\Big[\theta + qw_z\Big] = 0 \tag{3.77}$$

Infine mettendo in evidenza si trova la relazione di Michell:

$$\left[\nabla^2 + (\gamma - 1)\frac{d^2}{dz^2}\right]\Big[\theta + qw_z\Big] = 0 \tag{3.78}$$

Inoltre dalla definizione di q sviluppando i singoli prodotti si ottine:

$$\frac{F + L - A + pL}{A} = \frac{p(C - F - 2L) - (F + 2L - A)}{L - A + p(F + L)} \tag{3.79}$$

che generala la seguente equazione di secondo grado:

$$p^2L(F + L) + p[(F + L)^2 + L^2 - AC] + L(F + L) = 0 \tag{3.80}$$

in cui p_1 e p_2 ne rappresentano le soluzioni.

Tali soluzioni sono **reali** e **distinte** quando il determinante dell'equazione $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, con $a = c = L(F + L)$ e $b = [(F + L)^2 + L^2 - AC]$.

Questa condizione si verifica quando:

$$(F^2 - AC)[(F + 2L)^2 - AC] > 0 \tag{3.81}$$

Per la stabilità del materiale il termine $F^2 - AC$ deve risultare negativo, per questo è possibile scrivere anche che:

$$(F + 2L)^2 < AC \tag{3.82}$$

Le due soluzioni dell'equazione hanno le seguenti espressioni:

$$p_1 = \frac{L^2 + (F + L)^2 - AC + \sqrt{(F^2 - AC)[(F + 2L)^2 - AC)]}}{2L(F + L)} \tag{3.83}$$

$$p_2 = \frac{AC - L^2 - (F + L)^2 + \sqrt{(F^2 - AC)[(F + 2L)^2 - AC)]}}{2L(F + L)} \tag{3.84}$$

Nel seguito del lavoro l'autore continua la trattazione solo nell'ipotesi che tali radici p siano reali e distinte.

Con questo risultato è possibile riscrivere l'equazione del moto nella seguente maniera:

$$\left[\nabla^2 + (\gamma_1 - 1)\frac{d^2}{dz^2}\right]\left[\theta + q_1 w_z\right] = 0 \tag{3.85}$$

$$\left[\nabla^2 + (\gamma_2 - 1)\frac{d^2}{dz^2}\right]\left[\theta + q_2 w_z\right] = 0 \tag{3.86}$$

dati i valori di p_1 e p_2 è facilmente riscontrabile che:

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{[L + p_1(F + L)][L + p_2(F + L)]}{A^2} = \tag{3.87}$$

$$= \frac{L^2 + (F + L)^2 - [(F + L)^2 + L^2 - AC]}{A^2} = \tag{3.88}$$

$$= \frac{C}{A} \tag{3.89}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{2L^2 - [(F + L)^2 + L^2 - AC}{AL} = \tag{3.90}$$

$$= \frac{AC - F^2 - 2FL}{AL} \tag{3.91}$$

3.4 Soluzioni delle equazioni di Michell

Partendo dalle equazioni al contorno scritte in precedenza:

$$F\theta + (C - F)w_z = R' \tag{3.92}$$

$$F\theta_z + (C - F)w_{zz} = -T'_{x'} - S'_{y'} \tag{3.93}$$

dove R' T' S' rappresentano le risultanti delle tensioni applicate sulla superficie del semispazio in particolare:

$$R' = \sigma'_z \qquad S' = \tau'_{yz} \qquad T' = \tau'_{xz} \tag{3.94}$$

Le equazioni [3.92] e [3.93] possono essere scritte anche nel seguente modo:

$$\alpha(\theta + q_1 w_z) + \beta(\theta + q_2 w_z) = R' \tag{3.95}$$

$$\alpha\frac{d}{dz}(\theta + q_1 w_z) + \beta\frac{d}{dz}(\theta + q_2 w_z) = -T'_{x'} - S'_{y'} \tag{3.96}$$

dove:

$$\alpha + \beta = F \qquad \alpha q_1 + \beta q_2 = C - F \tag{3.97}$$

di modo che:

$$\alpha(q_1 - q_2) = C - F - q_2 F \qquad \beta(q_2 - q_1) = C - F - q_1 F \tag{3.98}$$

Ponendo quindi:

$$\theta + q_1 w_z = V_1 \qquad \theta + q_2 w_z = V_2 \tag{3.99}$$

bisogna trovare V_1 V_2 che rispettino le seguenti equazioni:

$$\frac{d^2 V_1}{dx^2} + \frac{d^2 V_1}{dy^2} + \gamma_1 \frac{d^2 V_1}{dz^2} = 0 \tag{3.100}$$

$$\frac{d^2 V_2}{dx^2} + \frac{d^2 V_2}{dy^2} + \gamma_2 \frac{d^2 V_2}{dz^2} = 0 \tag{3.101}$$

tenendo presente le condizioni al contorno:

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = R' \tag{3.102}$$

$$\alpha \frac{V_1}{dz} + \beta \frac{V_2}{dz} = -T'_{x'} - S'_{y'} \tag{3.103}$$

all'infinito le funzioni V_1 e V_2 scompaiono.
Premesso che:

$$r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \frac{z^2}{\gamma_1} \tag{3.104}$$

$$r_2^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \frac{z^2}{\gamma_2} \tag{3.105}$$

Le equazioni possono essere soddisfatte ponendo:

$$2\pi V_1 = H_1 \iint \frac{\mu}{r_1} dx' dy' - K_1 \frac{d}{dz} \iint \frac{\nu}{r_1} dx' dy' \tag{3.106}$$

$$2\pi V_2 = H_2 \iint \frac{\mu}{r_2} dx' dy' - K_2 \frac{d}{dz} \iint \frac{\nu}{r_2} dx' dy' \tag{3.107}$$

dove $\mu = \mu(x', y')$ e $\nu = \nu(x', y')$ sono funzioni da determinare.
Le precedenti equazioni per $z = 0$ forniscono:

$$2\pi V_1 = H_1 \iint \frac{\mu}{r} dx' dy' + \frac{2\pi K_1 \nu}{\sqrt{\gamma_1}} \tag{3.108}$$

$$2\pi V_2 = H_2 \iint \frac{\mu}{r} dx' dy' + \frac{2\pi K_2 \nu}{\sqrt{\gamma_2}} \tag{3.109}$$

$$2\pi\frac{V_1}{dz} = -\frac{2\pi H_1\nu}{\sqrt{\gamma_1}} + \frac{K_1}{\gamma_1}\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\Big)\iint \frac{\nu}{r}\,dx'dy' \tag{3.110}$$

$$2\pi\frac{V_2}{dz} = -\frac{2\pi H_2\mu}{\sqrt{\gamma_2}} + \frac{K_2}{\gamma_2}\Big(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\Big)\iint \frac{\nu}{r}\,dx'dy' \tag{3.111}$$

dove $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$

Quindi è possibile porre:

$$\alpha H_1 + \beta H_2 = 0 \tag{3.112}$$

$$\frac{\alpha H_1\mu}{\sqrt{\gamma_1}} + \frac{\beta H_2\mu}{\sqrt{\gamma_2}} = T'_{x'} + S \tag{3.113}$$

$$\frac{\alpha K_1\nu}{\sqrt{\gamma_1}} + \frac{\beta H_2\nu}{\sqrt{\gamma_2}} = R' \tag{3.114}$$

perciò:

$$\alpha H_1\mu = -\beta H_2\mu = \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2 - \gamma_1}}(T'_{x'} + S'_{y'}) \tag{3.115}$$

$$\frac{\alpha H_1\nu}{\gamma_1} = -\frac{\beta K_2\nu}{\gamma_2} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}R' \tag{3.116}$$

La soluzione necessaria per V_1 e V_2 è la seguente:

$$\begin{aligned}2\pi\alpha V_1 = {} & \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\iint (T'_{x'} + S'_{y'})\frac{1}{r_1}\,dx'dy' + \\ & + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\frac{d}{dz}\iint R'\frac{1}{r_1}\,dx'dy'\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{gathered}2\pi\beta V_2 = -\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}} - \\ \iint (T'_{x'} + S'_{y'})\frac{1}{r_2}\,dx'dy' - \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\frac{d}{dz}\iint R'\frac{1}{r_2}\,dx'dy'\end{gathered} \tag{3.118}$$

Integrando per parti le stesse equazioni possono essere scritte come:

$$\left.\begin{aligned}V_1 &= \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dX_1}{dz} \\ V_2 &= \frac{d\Phi_2}{dx} + \frac{d\Psi_2}{dy} + \frac{dX_2}{dz}\end{aligned}\right\}$$

dove:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}-\sqrt{\gamma_1}}\iint T'\frac{1}{r_1}\,dx'dy' \tag{3.119}$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}-\sqrt{\gamma_1}}\iint S'\frac{1}{r_1}\,dx'dy' \tag{3.120}$$

$$X_1 = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2}-\sqrt{\gamma_1}}\iint R'\frac{1}{r_1}\,dx'dy' \tag{3.121}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi\beta}\frac{\sqrt{\gamma_2\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2}}\iint T'\frac{1}{r_2}\,dx'dy' \tag{3.122}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\pi\beta}\frac{\sqrt{\gamma_2\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2}}\iint S'\frac{1}{r_2}\,dx'dy' \tag{3.123}$$

$$X_2 = \frac{1}{2\pi\beta}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2}}\iint R'\frac{1}{r_2}\,dx'dy' \tag{3.124}$$

Risolvendo il precedente sistema di equazioni per θ e w_z si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
&(q_2-q_1)\,\theta = q_2\left(\frac{d\Phi_1}{dx}+\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dX_1}{dz}\right)-q_1\left(\frac{d\Phi_2}{dx}+\frac{d\Psi_2}{dy}+\frac{dX_2}{dz}\right)\\
&(q_2-q_1)\,w_z = -\left(\frac{d\Phi_1}{dx}+\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dX_1}{dz}\right)+\left(\frac{d\Phi_2}{dx}+\frac{d\Psi_2}{dy}+\frac{dX_2}{dz}\right)\\
&R = F\theta+(C-F)w_z = \alpha\left(\frac{d\Phi_1}{dx}+\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dX_1}{dz}\right)+\beta\left(\frac{d\Phi_2}{dx}+\frac{d\Psi_2}{dy}+\frac{dX_2}{dz}\right)
\end{aligned}\right\}$$

Il valore di ϖ può essere trovato in maniera simile:

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\gamma_s\frac{d^2\varpi}{dz^2} = 0 \tag{3.125}$$

dove:

$$\gamma_s = \frac{L}{N} \tag{3.126}$$

e le condizioni al contorno sono:

$$2L\varpi = S'_{x'} - T'_{y'} \tag{3.127}$$

quindi:

$$4\pi\varpi = -\frac{1}{\sqrt{LN}}\iint (S'_{x'} - T'_{y'})\frac{1}{r_s}\,dx'dy' \tag{3.128}$$

dove $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \dfrac{z^2}{\gamma_s}$

Le equazioni possono essre scritte nella forma:

$$\Phi_s = -\frac{1}{2\pi\sqrt{LN}}\iint T'\frac{1}{r_s}\,dx'dy' \tag{3.129}$$

$$\Psi_s = -\frac{1}{2\pi\sqrt{LN}}\iint S'\frac{1}{r_s}\,dx'dy' \tag{3.130}$$

Per determinare u e v si hanno le equazioni:

$$(q_2 - q_1)(u_x + v_y) = (q_2 - q_1)(\theta - w_z) \tag{3.131}$$

$$= (1 + q_2)V_1 - (1 + q_1)V_2; \tag{3.132}$$

$$v_x - u_y = \frac{d\Psi_s}{dx} - \frac{d\Phi_s}{dy} \tag{3.133}$$

Di conseguenza:

$$(q_2-q_1)\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right) = (1+q_2)\frac{V_1}{dx}-(1+q_1)\frac{dV_2}{dx}-(q_2-q_1)\frac{d^2\Psi_s}{dxdy}+(q_2-q_1)\frac{d^2\Phi_s}{dy^2} \tag{3.134}$$

Adesso ponendo:

$$\Phi_1'' = \frac{1}{2\pi a}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_2}-\sqrt{\gamma_1}}\iint T'\left[\frac{z}{\sqrt{\gamma_1}}\log\left(\frac{z}{\sqrt{\gamma 1}}+r_1\right)-r_1\right]dx'dy' \tag{3.135}$$

cosicché:

$$\Phi_1'' = \gamma_1\frac{d^2\Phi_1''}{dz^2} = -\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\Phi_1 \tag{3.136}$$

Effettuando le sostituzioni nelle altre relazoini ed eliminando l'operatore $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2}\right)$, si osserva che:

$$\begin{aligned}(q_2 - q_1)u = &-(1 + q_2)\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi_1''}{dx}+\frac{d\Psi_1''}{dy}+\frac{dX_1''}{dz}\right)+\\ &+(1 + q_1)\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi_2''}{dx}+\frac{d\Psi_2''}{dy}+\frac{dX_2''}{dz}\right)+\\ &+(q_2 - q_1)\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi_s''}{dx}-\frac{d\Psi_s''}{dy}\right)\end{aligned} \tag{3.137}$$

questa rappresenta la soluzione dell'equazione e u scompare all'infinito. In maniera simile:

$$\begin{aligned}(q_2 - q_1)v = -(1+q_2)\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\Phi_1''}{dx} + \frac{d\Psi_1''}{dy} + \frac{dX_1''}{dz}\Big) + \\ + (1+q_1)\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\Phi_2''}{dx} + \frac{d\Psi_2''}{dy} + \frac{dX_2''}{dz}\Big) + \\ + (q_2 - q_1)\frac{d}{dy}\Big(\frac{d\Psi_s''}{dx} - \frac{d\Psi_s''}{dy}\Big)\end{aligned} \tag{3.138}$$

3.5 Depressione in superficie dovuta ad una pressione normale

Se nel definire le condizioni al contorno, in pratica il valore delle forze applicate in superficie si riducesse a:

$$R' = \sigma_z' \qquad S' = \tau_{yz}' = 0 \qquad T' = \tau_{xz}' = 0 \tag{3.139}$$

e di conseguenta anche: $\Phi_1 = \Psi_1 = \Phi_2 = \Psi_2 = 0$.
Si ha che:

$$\begin{aligned}(q_2 - q_1)w = -X_1 + X_2 = -\frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\iint R'\frac{1}{r_1}dx'dy' - \\ - \frac{1}{2\pi\beta}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\iint R'\frac{1}{r_2}dx'dy'\end{aligned} \tag{3.140}$$

Sulla superficie l'equazione precedente prende la forma di:

$$2\pi(q_2 - q_1)w = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}\Big(\frac{\gamma_1}{\alpha} + \frac{\gamma_2}{\beta}\Big)\iint R'\frac{1}{r}dx'dy' \tag{3.141}$$

la stessa equazione puo' essere scritta esplicitando le costanti in termini delle costanti elastiche:

$$w = \frac{\sqrt{A}}{2\pi\sqrt{L}}\frac{[(\sqrt{AC} + L)^2 - (F + L)^2]^{\frac{1}{2}}}{AC - F^2}\iint R'\frac{1}{r}dx'dy' \tag{3.142}$$

Per un carico concentrato di intensitá W si ottiene:

$$w = \frac{\sqrt{A}}{2\pi\sqrt{L}}\frac{[(\sqrt{AC} + L)^2 - (F + L)^2]^{\frac{1}{2}}}{AC - F^2}\frac{W}{r} \tag{3.143}$$

Per i corpi isotropi valgono le seguenti posizioni sulle costanti elastiche:

$$F = C_{13} = \lambda \qquad L = C_{44} = G_{hv} = \mu \qquad A = C = C_{11} = \lambda + 2\mu \tag{3.144}$$

La soluzione per materiale isotropo quindi diventa:

$$w = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \frac{W}{r} \tag{3.145}$$

che rappresenta le soluzione di Boussinesq's [15].

3.6 Soluzione per il caso di carico lineare

La seguete soluzione esamina il caso in cui la pressione è prodotta da una carico concentrato di intensità W trasmesso lungo il piano z.

Dalle proprietà di simmetria è sufficiente considerare le tensioni R,T applicate in $(x, 0, z)$, il carico inzia ad essere applicato nell'origine.

Quindi:

$$(q_2 - q_1)u_z = -\frac{1 + q_2}{\gamma_1} \frac{dX_1}{dx} + \frac{1 + q_1}{\gamma_2} \frac{dX_2}{dx} \tag{3.146}$$

e

$$(q_2 - q_1)w_x = -\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dx} \tag{3.147}$$

quindi

$$(q_2 - q_1)T = -L\frac{1 + q_2 + \gamma_1}{\gamma_1} \frac{dX_1}{dx} + L\frac{1 + q_1 + \gamma_2}{\gamma_2} \frac{dX_2}{dx} \tag{3.148}$$

anche

$$R = \alpha\frac{dX_1}{dz} + \beta\frac{dX_2}{dz} \tag{3.149}$$

questo mostra che:

$$\frac{1 + q_2 + \gamma_1}{(q_2 - q_1)\alpha} = -\frac{1 + q_1 + \gamma_2}{(q_2 - q_1)\beta} = -\frac{1}{L} \tag{3.150}$$

quindi:

$$T = \frac{\alpha}{\gamma_1} \frac{dX_1}{dx} + \frac{\beta}{\gamma_2} \frac{dX_2}{dx} \tag{3.151}$$

dove:

$$X_1 = -\frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}} + \frac{W}{r_1} \tag{3.152}$$

$$X_2 = -\frac{1}{2\pi\beta}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}} + \frac{W}{r_2} \tag{3.153}$$

e di conseguenza:

$$\frac{dX_1}{dx} = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}} + W\frac{x}{r_1^3} \tag{3.154}$$

$$\frac{dX_1}{dz} = \frac{1}{2\pi\alpha}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}} + W\frac{z}{r_1^3} \tag{3.155}$$

così:

$$T = \frac{Wx}{2\pi(\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1})}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \tag{3.156}$$

$$R = \frac{Wz}{2\pi(\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1})}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \tag{3.157}$$

dove:

$$\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1} = (\gamma_1 + \gamma_2 - 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2})^{\frac{1}{2}} \tag{3.158}$$

$$= \left(\frac{AC - F^2 - 2FL}{AL} - 2\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.159}$$

$$= \frac{(\sqrt{AC} - L)^2 - (F + L)^2}{\sqrt{AL}} \tag{3.160}$$

da ciò:

$$\frac{T}{R} = \frac{x}{z} \tag{3.161}$$

da questo consegue che la tensione attraverso il piano z é in ogni punto diretto radilamente dal punto di applicazione del carico. L'intensitá della tensione vale:

$$\frac{W}{2\pi}\frac{\sqrt{AL}r}{[(\sqrt{AC} - L^2 - (F + L)^2]^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \tag{3.162}$$

dove:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.163}$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\gamma_1} \tag{3.164}$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\gamma_2} \tag{3.165}$$

Passando al caso caso di materiale isotropo:

$$\gamma_1 = 1 + e_1 \qquad \gamma_2 = 1 + e_2 \tag{3.166}$$

dove $e_1$ved e_2 scompaiono.

Quindi:

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = \frac{3z^2}{2r^5}(e_1 - e_2) + \&c \tag{3.167}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2}} = \frac{2}{e_2 - e_1} + \&c \tag{3.168}$$

Quindi al contorno la tensione diventa:

$$\frac{3W}{2\pi}\frac{z^2}{r^4} \tag{3.169}$$

che rappresenta le soluzione di Boussinesq's [15].

Capitolo 4

Trattazione di A.J. Anyaegbunam

Introduzione

In questo capitolo si presenta la trattazione della soluzione elastica per semispazi trasversalmente isotropi sviluppata da **Amaechi Jerome Anyaegbunam** nel 2012 e contenuta nell'articolo *Complete stresses and displacements in a cross-anisotropic halfspace due to a surface vertical point load* pubblicato sulla rivista *International Journal of Geomechanics* [7]. La metodologia utilizzata è simile a quella di Michell [91], discussa nel capitolo precedente, ed impiega parimenti la teoria del potenziale per ricavare le espressioni finali nel caso di materiali con comportamento elastico trasversalmente isotropo. Tale comportamento, come riportato dall'autore, è proprio di molti materiali geomeccanici. La trattazione in questione fornisce le espressioni complete di tutti gli spostamente, delle deformazioni e delle tensioni all'interno del semispazio elastico trasversalmente isotropoappare prodotte da un carico verticale puntiforme applicato nell'origine del sistema di riferimento. Nonostante ciò essa risulta molto complessa da applicare, in particolare vengono definite un numero ingente di costanti da determinare a partire dei valori assunti dalle radici dell'equazione caratteristica. Nonstante ciò questo lavoro rappresenta, in ordine temporale, l'ultimo contributo scientifico che propone una soluzione del probelma elastico sfruttando la teoria del potenziale, nel caso di materiali caratterizzati da comportamento trasversalmente isotropo. Di seguito si riporopone l'intera trattazione svolta da A. J. Anyaegbunam mettendo in evidenza tutti i passaggi, a partire dell'espressione generale dell'equazione del moto fino ad arrivare ai risultati finali in termini di tensione.

4.1 Formulazione del problema

4.1.1 Espressione delle tensioni

Definizione delle componenti dello stato tensionale:

$$\sigma_x = A\epsilon_v + (F - A)\epsilon_z - 2N\epsilon_y \tag{4.1}$$

$$\sigma_y = A\epsilon_v + (F - A)\epsilon_z - 2N\epsilon_x \tag{4.2}$$

$$\sigma_z = F\epsilon_v + (C - F)\epsilon_z \tag{4.3}$$

$$\tau_{yz} = L\gamma_{yz} \tag{4.4}$$

$$\tau_{xz} = L\gamma_{xz} \tag{4.5}$$

$$\tau_{xy} = N\gamma_{xy} \tag{4.6}$$

4.1.2 Espressione delle deformazioni

Definizione delle componenti dello stato deformativo:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.7}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.8}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.9}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.10}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.11}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{4.12}$$

Definizione della deformazione volumetrica:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.13}$$

4.1.3 Costanti elastiche

Di seguito si riportano la definizione delle costanti elastiche utilizzate da Amaechi:

$$A = C_{11} = \frac{E_h\left(1 - \frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2\right)}{(1+\nu_{hh})\left(1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2\right)}$$

$$F = C_{13} = \frac{E_h \nu_{hv}}{1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2} \qquad C = C_{33} = \frac{E_v(1-\nu_{hh})}{1 - \nu_{hh} - 2\frac{E_h}{E_v}\nu_{hv}^2}$$

$$L = C_{44} = G_{hv} \qquad N = C_{66} = G_{hh} = \frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})}$$

Questa relazione coincide con l'espressione (15) riportata in [88]. E il significato delle costanti elastiche, esplicitatente in forma classica, rappresentano rispettivamente:

- E_v : modulo di elasticità longitudinale nella direzione orizzontale;
- E_h : modulo di elasticità longitudinale nella direzione verticale;
- G_{hv}: modulo di elasticità a taglio in direzione verticale;
- G_{hh}: modulo di elasticità a taglio nel piano orizzontale;
- ν_{hh}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni orizzontali sul piano orizzontale;
- ν_{hv}: rapporto di Poisson per gli effetti delle deformazioni verticali sul piano orizzontale.

4.2 Equazioni di equilibrio

Equazioni differenziali deell'equilibrio elastico espresse in termini delle tensioni:

Equilibrio dir. X

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{4.14}$$

Equilibrio dir. Y

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{4.15}$$

Equilibrio dir. Z

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{4.16}$$

4.2.1 Equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamenti

Equazioni dell'equilibrio elastico espresso in termini degli spostamenti:
Equilibrio dir. X

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{4.17}$$

Questa espressione può essere ottnuta con i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[A\epsilon_v + (F-A)\epsilon_z - 2N\epsilon_y\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[N\gamma_{xy}\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[L\gamma_{xz}\Big] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[A\epsilon_v + (F-A)\frac{\partial w}{\partial z} - 2N\frac{\partial v}{\partial y}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[N\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[L\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big] = 0$$

$$A\frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + (F-A)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2N\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + N\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big) + L\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\Big) = 0$$

Espressione finale:

$$A\frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + (F+L-A)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - N\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + L\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4.18}$$

Equilibrio dir. Y

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{4.19}$$

Questa espressione può essere ottnuta con i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[N\gamma_{xy}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[A\epsilon_v + (F-A)\epsilon_z - 2N\epsilon_x\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[L\gamma_{yz}\Big] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[N\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[A\epsilon_v + (F-A)\frac{\partial w}{\partial z} - 2N\frac{\partial u}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[L\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big] = 0$$

$$N\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+A\frac{\partial \epsilon_v}{\partial y}+(F-A)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-2N\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+L\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)=0$$

Espressione finale:

$$A\frac{\partial \epsilon_v}{\partial y}+(F+L-A)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-N\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \tag{4.20}$$

Equilibrio dir. Z

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}++\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \tag{4.21}$$

Questa espressione può essere ottnuta con i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[L\gamma_{xz}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[L\gamma_{yz}\Big]+\frac{\partial}{\partial z}\Big[F\epsilon_v+(C-F)\epsilon_z\Big]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[L\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[L\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[F\epsilon_v+(C-F)\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+L\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+F\frac{\partial \epsilon v}{\partial z}+(C-F)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+L\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+L\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F\frac{\partial \epsilon_v}{\partial z}+C\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-F\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

Sommando e sottraendo $2L\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ si ottiene:

$$(F+L)\frac{\partial \epsilon_v}{\partial z}+(C-F-2L)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+L\nabla^2 w=0 \tag{4.22}$$

dove viene definito l'Operatore di Laplace: $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

4.3 Esperessione degli spostamenti

Espressione degli spostamenti secondo Amaechi:

$$u=u_x=\frac{1}{(f_2-f_1)}\left(f_1\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x\partial z}-f_2\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x\partial z}\right) \tag{4.23}$$

$$v = u_y = \frac{1}{(f_2 - f_1)}\left(f_1 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y \partial z} - f_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial z}\right) \tag{4.24}$$

$$w = u_z = \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(f_2 - f_1)} \tag{4.25}$$

Da cui si può ricavare l'espressione della deformazione volumetrica:

$$\epsilon_v = \frac{1}{(f_2 - f_1)}\left[(f_2 - 1)\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right] \tag{4.26}$$

Verifica dell'espressione della deformazione volumetrica:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Espressione degli spostamenti:

$$u = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial z} - f_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial z}\right]$$

$$v = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y \partial z} - f_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial z}\right]$$

$$w = \frac{\phi_2 - \phi_1}{f_2 - f_1}$$

da cui l'espressione della deformazione ϵ_x risulta

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \phi^4}{\partial x^2}\right) - f_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \phi^3}{\partial x^2}\right)\right] \tag{4.27}$$

da cui l'espressione della deformazione ϵ_y risulta

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \phi^4}{\partial y^2}\right) - f_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \phi^3}{\partial y^2}\right)\right] \tag{4.28}$$

da cui l'espressione della deformazione ϵ_z risulta

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right] \tag{4.29}$$

sommanndo le tre espressioni delle tensioni e ricordando la proprietà dell'Operatore di Laplace: ∇^2:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z_1^2} = 0 \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi_4}{\partial y^2} + \frac{\partial\phi_4}{\partial z_2^2} = 0 \tag{4.31}$$

ovvero

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi_3}{\partial y^2} = -\frac{\partial\phi_3}{\partial z_1^2} \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial\phi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi_4}{\partial y^2} = -\frac{\partial\phi_4}{\partial z_2^2} \tag{4.33}$$

si ottiene l'espressione finale di Amaechi

$$\epsilon_v = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial^2\phi_4}{\partial z_2^2}\right) - f_2\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial^2\phi_3}{\partial z_2^2}\right)\right]$$

che ricordando $\phi_i = \frac{\partial^2\phi_{i+2}}{\partial z_i^2}$ per i=1,2 si può anche scrivere come fatto da Amaechi:

$$\epsilon_v = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right] \tag{4.34}$$

Sostituendo le espressioni degli spostamenti e dalla deformazione volumetrica nelle espressioni finali delle equazioni di equilibrio elastico si perviene ad una nuova espressione delle stesse equazioni come contenuto nelle relazioni (8a) e (8b) di Amaechi.

Spiegazione dell'eq. 8.a:

$$A\frac{\partial\epsilon_v}{\partial x} + \frac{(F + L - A)}{f_2 - f_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} - N\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + L\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{\partial\phi_1}{\partial x\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial\phi_2}{\partial x\partial z}\right] + \frac{(F + L - A)}{f_2 - f_1}\left[\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial z}\right] - \\
&-\frac{N}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial y^2\partial z} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial y^2\partial z}\right] + \frac{N}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial y^2\partial z} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial y^2\partial z}\right] + \\
&\qquad + \frac{L}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial z^3} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial z^3}\right] = 0
\end{aligned}$$

innanzitutto possiamo semplificare il denominatore $(f_2 - f_1)$ che compare in tutte le espressioni:

$$\begin{aligned}
&A\left[(f_2 - 1)\frac{\partial\phi_1}{\partial x\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial\phi_2}{\partial x\partial z}\right] + (F + L - A)\left[\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial z}\right] - \\
&-N\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial y^2\partial z} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial y^2\partial z}\right] + N\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial y^2\partial z} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial y^2\partial z}\right] + \\
&\qquad + L\left[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial z^3} - f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial z^3}\right] = 0
\end{aligned}$$

i due termini dipendenti da N sono uguali ed opposti:

$$A\Big[(f_2-1)\frac{\partial\phi_1}{\partial x\partial z}-(f_1-1)\frac{\partial\phi_2}{\partial x\partial z}\Big]+(F+L-A)\Big[\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial z}\Big]-$$
$$+L\Big[f_1\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial z^3}-f_2\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial z^3}\Big]=0$$

infine raccogliendo in fattori i primi due termini (che contengono A) si ottiene:

$$\Big[Af_2-(F+L)\Big]\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial z}-\Big[Af_1-(F+L)\Big]\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial z}+Lf_1\Big[\frac{\partial^4\phi_4}{\partial x\partial z^3}\Big]+Lf_1\Big[\frac{\partial^4\phi_3}{\partial x\partial z^3}\Big]=0$$

Spiegazione del'eq. 8.b:

$$(F+L)\frac{\partial\epsilon_v}{\partial z}+(C-F-2L)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+L\nabla^2 w=0$$

$$\frac{F+L}{f_2-f_1}\Big[(f_2-1)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}-(f_1-1)\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}\Big]+\frac{C-F-2L}{f_2-f_1}\Big[\frac{\phi_2^2}{\partial z^2}-\frac{\phi_1^2}{\partial z^2}\Big]+\frac{L}{f_2-f_1}\nabla^2(\phi_2-\phi_1)=0$$

innanzitutto possiamo semplificare il denominatore (f_2-f_1) che compare in tutte le espressioni:

$$(F+L)\Big[(f_2-1)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}-(f_1-1)\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}\Big]+(C-F-2L)\Big[\frac{\phi_2^2}{\partial z^2}-\frac{\phi_1^2}{\partial z^2}\Big]+L\nabla^2\phi_2-L\nabla^2\phi_1=0$$

semplificando i primi due termini dell'eequazione si ha per $\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}$:

$$\begin{aligned}(F+L)(f_2-1)-(C-F-2L)&=\\=Ff_2-F+Lf_2-L-C+F+2L&=\\=Ff_2+Lf_2-C+L&=\\=f_2(F+L)+L-C&;\end{aligned}$$

per $\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}$ invece:

$$\begin{aligned}(F+L)[-(f_1-1)]+(C-F-2L)&=\\-(Ff_1-F+Lf_1-L)+C-F-2L&=\\=-Ff_1-Lf_1+C-L&=\\=-[f_1(F+L)+L-C]&;\end{aligned}$$

l'espressione finale quindi diventa:

$$\Big[f_2(F+L)+L-C\Big]\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}-\Big[f_1(F+L)+L-C\Big]\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}+L\nabla^2\phi_2-L\nabla^2\phi_1=0$$

4.4 Proprietà del potenziale

Verifica delle proprietà del potenziale come Operatore di Laplace:

$$\phi_i = \frac{B_i}{R_i} \tag{4.35}$$

dove $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z_i^2}$

Utilizzando l'Operatore di Lapalce:

$$\nabla_i^2 \phi_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z_i{}^2}$$

effettuando le derivate singolarmente:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z_i^2}{(x^2 + y^2 + z_i^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = \frac{-x^2 + 2y^2 - z_i^2}{(x^2 + y^2 + z_i^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z_i{}^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2z_i^2}{(x^2 + y^2 + z_i^2)^{5/2}}$$

ed infine sommando risulta $\nabla_i^2 \phi_i = 0$. Lo stesso procedimento può essere svolto per il potenziale:

$$\phi_{i+2} = B_i[z_i Log(R_i + z_i) - R_i]$$

con $i = 1, 2$ ed $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z_i^2} = \sqrt{r + z_i^2}$

4.5 Soluzioni dell'equazione differenziale caratteristica

La soluzione proposta da Amaechi in definitiva dipende dal valore assunto dalle soluzioni della seguente equazione differenziale caratteristica:

$$ALk_i^4 - (AC - F^2 - 2FL)k_i^2 + LC = 0 \tag{4.36}$$

Tali soluzioni, nel caso di forza verticale concentrata in un punto, hanno la seguente espressione:

$$k_1 = \left(\frac{AC - F^2 - 2FL - D_3}{2AL}\right)^{1/2} \qquad k_2 = \left(\frac{AC - F^2 - 2FL + D_3}{2AL}\right)^{1/2} \tag{4.37}$$

dove D_3 rappresenza il determinanete dell'equazione caratteristica che vale:

$$D_3 = [(AC - F^2)(AC - (F + 2L)^2]^{1/2} \tag{4.38}$$

4.6 Determinazione delle costanti B_i

Le costanti B_i (i=1,2) possono essere determinate imponendo il soddisfacimento delle condizioni al contorno. In particolare:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{4.39}$$

Quindi

$$\sigma_z = F\epsilon_v + (C - F)\epsilon_z = F\epsilon_v + (C - F)\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.40}$$

$$\tau_{xz} = L\gamma_{xz} = L\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{4.41}$$

Esplicitando le condizioni al contorno in funzione delle espressioni degli spostamenti si ottiene:

$$\sigma_z = s_1\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + s_2\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \tag{4.42}$$

dove:

$$s_1 = \frac{Ff_2 - C}{f_2 - f_1} \qquad s_2 = \frac{C - Ff_1}{f_2 - f_1} \tag{4.43}$$

Inoltre:

$$\tau_{xz} = \frac{L}{(f_2 - f_1)}\left[\frac{f_1 + k_2^2}{k_2^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{f_2 + k_1^2}{k_1^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right] \tag{4.44}$$

e considerando che:

$$\frac{L(f_1 + k_2^2)}{s_2(f_2 - f_1)} = \frac{-L(f_2 + k_1^2)}{s_1(f_2 - f_1)} = 1 \tag{4.45}$$

da tale constatazione, facile da dimostrare, consente di scrivere:

$$\tau_{xz} = \frac{s_1}{k_1^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \frac{s_2}{k_2^2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z} \tag{4.46}$$

Sostituendo l'espressione del potenziale si ottiene:

$$\sigma_z = -z\left(\frac{B_1 s_1}{k_1^2 R_1^3} + \frac{B_2 s_2}{k_2^2 R_2^3}\right) \tag{4.47}$$

$$\tau_{xz} = -x\left(\frac{B_1 s_1}{k_1^2 R_1^3} + \frac{B_2 s_2}{k_2^2 R_2^3}\right) \tag{4.48}$$

L'espressione delle τ_{rz} e τ_{yz} possono essere ottenute sostituendo x con r o con y rispettivamente nell'espressione della τ_{xz}

La condizione di $\sigma_z = 0$ a $z = 0$ è automaticamente soddisfatta, mentre per $\tau_{xz} = 0$ a $z = 0$ è richiesto che:

$$\frac{B_2 s_2}{k_2^2} = -\frac{B_1 s_1}{k_1^2} \tag{4.49}$$

Infine le costanti B_i possono essere determinate imponendo l'equialibrio di un corpo cilindrico di raggio a ed altezza h attraverso la seguente espressione:

$$\int_0^z \tau_{rz}(a, z) 2\pi a dz + \int_0^a \sigma_z(r, z) 2\pi r dr = P \tag{4.50}$$

e per integrazione si ottiene l'espressione finale:

$$B_i = (-1)^{i-1} \frac{P k_i^2}{2\pi s_i (k_2 - k_1)} \tag{4.51}$$

Capitolo 5

Soluzione proposta

Introduzione

In questo capitolo si presenta la trattazione completa della soluzione elastica proposta per il problema della determinazione degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni all'interno di semispazi omogenei trasversalmente isotropi soggetti a carichi verticali. Utilizzando una versione generalizzata del teorema di Gauss e risultati recenti di teoria del potenziale [7], si esprimono spostamenti, deformazioni e tensioni in un punto arbitrario del semispazio in funzione del carico applicato e dei vettori posizione che definiscono la frontiera della regione caricata, assunta di forma poligonale. L'approccio proposto, che tiene correttamente conto delle singolarità che caratterizzano le espressioni dei campi di interesse, è stato validato mediante esempi numerici e confrontato con soluzioni esistenti derivate dalla letteratura scientifica specifica per questo argomento.

In un celebre lavoro [91] Michell ha determinato il campo di spostamenti e di tensioni in un semispazio elastico lineare, omogeneo e trasversalmente isotropo soggetto ad una forza verticale concentrata.

La soluzione è stata ottenuta riducendo il problema originale ad un problema di valori al contorno in teoria del potenziale. Supponendo che la superficie del semispazio sia soggetta unicamente a tensioni normali, il problema elastico è stato risolto determinando una singola funzione armonica con una intensità proporzionale alle tensioni normali applicate. La soluzione per una forza verticale concentrata è stata quindi ottenuta come caso particolare di un carico verticale.

Nonostante la grande quantità di letteratura sul tema, è in qualche modo sorprendente constatare che una soluzione analitica completa del problema di Michell sotto l'azione di carichi verticali agenti su domini di forma arbitraria non è ancora disponibile, tema che ha rappresentato l'obiettivo principale del presente lavoro di tesi.

Per soluzione analitica completa si intende una soluzione che fornisca spostamenti, deformazioni e tensioni in qualsiasi punto del semispazio soggetto a pressioni verticali che variano linearmente su domini di forma arbitraria e che, allo stesso tempo, tratti ampiamente le singolarità da cui possono essere affette le espressioni dei campi meccanici e il modo in cui esse sono eliminate, quando possibile.

Una soluzione di questo tipo è particolarmente utile, tra le diverse applicazioni, per risolvere problemi di contatto per domini complicati soggetti a legge di carico arbitrarie.

Per motivi di spazio le formule presentate nel presente elaborato di tesi fanno riferimento a distribuzioni di pressioni al massimo variabile linearmente ma l'approccio è sufficientemente generale da poter essere esteso in maniera diretta alle funzioni di carico di tipo polinomiale, come già evidenziato in [**?**] per la valutazione delle tensioni verticali.

La formulazione proposta è organizzata come segue. Le principali formule per la valutazione di spostamenti, deformazioni e tensioni sono espresse in notazione tensoriale a partire dalla soluzione di Anyaegbunam [7]. Tali relzioni dipendono da integrali 2D definiti sulla regione caricata, integrali la cui espressione è fornita per il caso di domini poligonali nel Capitolo 7. Successivamente viene affrontata la trasformazione analitica degli integrali 2D in integrali di linea, e quindi, in espressioni algebriche utili per una successiva implementazione.

Le suddette formule di integrazione sono ottenute utilizzando un classico risultato di teoria del potenziale, risultato adottato con successo in [24, 27, 25, 26, 28]; la relativa dimostrazione è riportata in appendice per completezza.

5.1 Definizione della funzione potenziale

Definiamo la seguente espressione della funzione potenziale riadattando la funzione potenziale di D'Urso e Marmo al caso di *semispazi trasversalmente isotropi*:

$$\psi_i = z_i \log\left(z_i + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z_i^2}\right) - \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z_i^2} \qquad i = 1,2 \tag{5.1}$$

dove:

$$\boldsymbol{\rho} = (x - x', y - y')^t \tag{5.2}$$

e

$$z_i = \frac{z}{k_i} \qquad i = 1,2 \tag{5.3}$$

le *derivate della funzione potenziale calcolate rispetto a* z_i assumono le seguenti espressioni:

$$\psi_i' = \frac{\partial\psi_i}{\partial z_i} = \log z_i + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z_i^2} \qquad i = 1,2 \tag{5.4}$$

$$\psi_i'' = \frac{\partial^2\psi_i}{\partial z_i^2} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z_i^2}} \qquad i = 1,2 \tag{5.5}$$

$$\psi_i''' = \frac{\partial^3\psi_i}{\partial z_i^3} = \frac{-z_i}{\left(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z_i^2\right)^{3/2}} \qquad i = 1,2 \tag{5.6}$$

Premesso che nella formulazione dei potenziali riportata nell'articolo di Amaechi compaiono le costanti:

$$B_1 = -P\frac{k_1^2}{2\pi s_1(k_2 - k_1)} \qquad B_2 = P\frac{k_2^2}{2\pi s_2(k_2 - k_1)} \tag{5.7}$$

e che tali espressioni dipendono dal valore del carico P e da altre costanti legate esclusivamente al valore delle costanti elastiche, possiamo mettere in evidenza la dipendenza dal carico, raggruppando tutte le altre costanti ottenendo le seguenti espressioni:

$$B_1 = PC_1 \qquad B_2 = PC_2 \tag{5.8}$$

dove:

$$C_1 = \frac{-k_1^2}{2\pi s_1(k_2 - k_1)} \qquad C_2 = \frac{k_2^2}{2\pi s_2(k_2 - k_1)} \tag{5.9}$$

5.2 Espressione dei potenziali con cambio di simbologia

L'espressione (14) della funzione potenziale dell'articolo di Amaechi diventa:

$$\phi_i = \frac{B_i}{R_i} = \frac{PC_1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z_i^2}} \qquad i = 1, 2 \tag{5.10}$$

ovvero:

$$\phi_i = PC_i \psi_i'' \qquad i = 1, 2 \tag{5.11}$$

L'espressione (15) della funzione potenziale dell'articolo di Amaechi diventa:

$$\begin{aligned} \phi_{i+2} &= B_i \left[z_i \log (R_i + z_i) - (R_i) \right] = \\ &= PC_i \left[z_i \log \left(z_i + \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z_i^2} \right) - \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z_i^2} \right] \qquad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{5.12}$$

ovvero:

$$\phi_{i+2} = PC_i \psi_i \qquad i = 1, 2 \tag{5.13}$$

5.3 Calcolo delle derivate della funzione potenziale

A questo punto è possibile effettuare le opportune operazioni di derivazione della funzione potenziale utili per la successiva formulazione degli spostamenti e delle tensioni. Tali *derivale sono calcolate rispetto a z*.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = PC_i \frac{\partial \psi_i''}{\partial z} = PC_i \left[\frac{\partial \psi_i''}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z} \right] = \frac{PC_i}{k_i} \psi_i''' \qquad i = 1, 2 \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial \phi_{i+2}}{\partial z} = PC_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = PC_i \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z} \right] = \frac{PC_i}{k_i} \psi_i' \qquad i = 1, 2 \tag{5.15}$$

5.4 Espressione degli spostamenti

Passiamo adesso a ricavare le espressioni degli *spostamenti* prodotti da un carico concentrato P.
Per gli *spostamenti orizzontali* (u, v) si ha che, a partire dalle espressioni dell'articolo di Amaechi:

$$u = \frac{1}{f_2 - f_1} \left[f_1 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial z} - f_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial z} \right] \tag{5.16}$$

$$v = \frac{1}{f_2 - f_1} \left[f_1 \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y \partial z} - f_2 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial z} \right] \tag{5.17}$$

Queste possono essere raggruppate in una sola scrittura:

$$\mathbf{u}_h^P = \begin{bmatrix} u^P \\ v^P \end{bmatrix} = \frac{P}{f_2 - f_1} \left[\frac{f_1 C_2}{k_2} \,\mathbf{grad}\left(\psi_2'\right) - \frac{f_2 C_1}{k_1} \,\mathbf{grad}\left(\psi_1'\right) \right] \tag{5.18}$$

Per gli **spostamenti verticali** w si ha che, a partire dall'espressione dell'articolo di Amaechi:

$$w = \frac{\phi_2 - \phi_1}{f_2 - f_1} \tag{5.19}$$

é possibile scrivere:

$$w^P = \frac{P}{f_2 - f_1} \left(C_2 \psi_2'' - C_1 \psi_1'' \right) \tag{5.20}$$

5.4.1 Espressione degli spostamenti: carico uniformemente distribuito

Queste espressioni possono essere scritte anche per il caso di *carico verticale uniformemente distribuito* e si ottiene:

$$\mathbf{u}_h^q = \begin{bmatrix} u^q \\ v^q \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{grad}\left(\psi_2'\right) dA - f_2 \frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{grad}\left(\psi_1'\right) dA\right] \tag{5.21}$$

$$w^q = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[C_2 \int_\Omega \psi_2'' dA - C_1 \int_\Omega \psi_1'' dA\right] \tag{5.22}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\mathbf{u}_h^q = \begin{bmatrix} u^q \\ v^q \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left(f_1 \frac{C_2}{k_2}\mathbf{s}_{\mathbf{g2}}' - f_2 \frac{C_1}{k_1}\mathbf{s}_{\mathbf{g1}}'\right) \tag{5.23}$$

$$w^q = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[C_2\, s_1'' - C_1\, s_2''\right] \tag{5.24}$$

5.4.2 Espressione degli spostamenti: carico distribuito lineare

Queste espressioni possono essere scritte anche per il caso di *carico verticale linearmente distribuito* che si ottiene a partire dalla seguente sostituzione:

$$P = \mathbf{q}_{1z} \cdot \boldsymbol{\rho} \tag{5.25}$$

il risultato finale è:

$$\mathbf{u}_h^{q_{1z}} = \begin{bmatrix} u^{q_{1z}} \\ v^{q_{1z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left(f_1 \frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_2' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA\, \mathbf{q}_{1z} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_1' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA\, \mathbf{q}_{1z}\right) \tag{5.26}$$

$$w^{q_{1z}} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[C_2 \int_\Omega \psi_2'' \boldsymbol{\rho} dA \cdot \mathbf{q}_{1z} - C_1 \int_\Omega \psi_1'' \boldsymbol{\rho} dA \cdot \mathbf{q}_{1z}\right] \tag{5.27}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\mathbf{u}_h^{q_{1z}} = \begin{bmatrix} u^{q_{1z}} \\ v^{q_{1z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left(f_1 \frac{C_2}{k_2}\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\rho\mathbf{2}} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\rho\mathbf{1}}\right) \tag{5.28}$$

$$w^{q_{1z}} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[C_2 \mathbf{s}''_{\mathbf{g}\rho\mathbf{2}} - C_1 \mathbf{s}''_{\mathbf{g}\rho\mathbf{1}}\right] \tag{5.29}$$

5.5 Espressione delle deformazioni

L'espressione del tensore delle deformazioni e´definito come:

$$\mathbf{E} = \left(\begin{array}{cc|c} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \hline \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h & \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z^t & \epsilon_y \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

Passiamo a ricavare le espressioni delle singole *deformazioni* prodotte da un carico concentrato P partendo dalle definizioni degli spostamenti.
In particolare si assumono le seguenti definizioni prt le componenti delle deformazioni:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.31}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5.32}$$

Definizione della deformazione volumetrica:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{5.33}$$

La deformazione volumetrica

$$\epsilon_v = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right] \tag{5.34}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_v = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{C_1}{k_1}\psi_1''' - (f_1 - 1)\frac{C_2}{k_2}\psi_2'''\right] \tag{5.35}$$

la deformazione lungo x

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi_4}{\partial z}\right) - f_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.36}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_x = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\frac{\partial^2\psi_2'}{\partial x^2} - f_2\frac{C_1}{k_1}\frac{\partial^2\psi_1'}{\partial x^2}\right] \tag{5.37}$$

la deformazione lungo y

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\phi_4}{\partial z}\right) - f_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.38}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_y = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\frac{\partial^2\psi_2'}{\partial y^2} - f_2\frac{C_1}{k_1}\frac{\partial^2\psi_1'}{\partial y^2}\right] \tag{5.39}$$

la deformazione lungo z

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[\frac{\partial\phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right] \tag{5.40}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_z = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[\frac{C_2}{k_2}\psi_2''' - \frac{C_1}{k_1}\psi_1'''\right] \tag{5.41}$$

lo scorrimento γ_{xy}

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right) + f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.42}$$

ovvero

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.43}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\gamma_{xy} = \frac{2P}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2} \frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x \partial y} - f_2 \frac{C_1}{k_1} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x \partial y}\right] \tag{5.44}$$

$$\mathbf{E}_h = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2}\mathbf{H}(\psi_2') - f_2 \frac{C_1}{k_1}\mathbf{H}(\psi_1')\right] \tag{5.45}$$

Per quanto riguarda gli scorrimenti nel piano essi possono essere espressi come derivate degli spostamenti in particolare:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{5.46}$$

svolgendo separatamente le derivate separatamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{P}{f_2 - f_1}\left[\frac{f_1 C_2}{k_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial z}\right) - \frac{f_2 C_1}{k_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial z}\right)\right] = \\ &= \frac{P}{f_2 - f_1}\left[\frac{f_1 C_2}{k_2^2} \frac{\partial \psi_2''}{\partial x} - \frac{f_2 C_1}{k_1^2} \frac{\partial \psi_1''}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{P}{f_2 - f_1}\left(C_2 \frac{\psi_2''}{\partial x} - C_1 \frac{\psi_1''}{\partial x}\right) \tag{5.48}$$

A questo punto è semplice raggruppare le due espressioni come:

$$\gamma_{xz} = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[C_2\left(1 + \frac{f_1}{k_2^2}\right)\frac{\psi_2''}{\partial x} - C_1\left(1 + \frac{f_2}{k_1^2}\right)\frac{\psi_1''}{\partial x}\right] \tag{5.49}$$

Effettuando le stesse operazioni per γ_{yz} si ottengono le derivate rispetto ad y dei potenziali ψ'' che a questo punto possono essere raggruppat einsieme alle precedenti nella seguente espressione unica:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[C_2\left(1 + \frac{f_1}{k_2^2}\right)\mathbf{grad}\psi_2'' - C_1\left(1 + \frac{f_2}{k_1^2}\right)\mathbf{grad}\psi_1''\right] \tag{5.50}$$

5.5.1 Espressione delle deformazioni: carico uniformemente distribuito

Lo stesso procedimento può essere applicato per il caso del carico uniformemente distribuito. In particolare:
la deformazione lungo x

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_2'}{\partial x^2}dA - f_2\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_1'}{\partial x^2}dA\right] \tag{5.51}$$

la deformazione lungo y

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_2'}{\partial y^2}dA - f_2\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_1'}{\partial y^2}dA\right] \tag{5.52}$$

lo scorrimento γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \frac{\partial^2\psi_2'}{\partial x\partial y}dA - f_2\frac{C_1}{k_1}\int_\omega \frac{\partial^2\psi_1'}{\partial x\partial y}dA\right] \tag{5.53}$$

Queste espressioni possono essere raggruppate in una sola espressione matriciale:

$$\mathbf{E}_h^q = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{H}\psi_2' dA - f_2\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{H}\psi_1' dA\right] \tag{5.54}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\mathbf{E}_h^q = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2}\mathbf{S}'_{H2} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\mathbf{S}'_{H1} \right] \tag{5.55}$$

la deformazione lungo z

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \psi_2''' dA - \frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \psi_1''' dA \right] \tag{5.56}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[\frac{C_2}{k_2}\mathbf{s}_2''' - \frac{C_1}{k_1}\mathbf{s}_1''' \right] \tag{5.57}$$

Gli scorrimenti nel piano orizzontale:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[C_2\left(1 + \frac{f_1}{k_2^2}\right)\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_2'' dA - C_1\left(1 + \frac{f_2}{k_1^2}\right)\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_1'' dA \right] \tag{5.58}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{q}{f_2 - f_1}\left[C_2\left(1 + \frac{f_1}{k_2^2}\right)\mathbf{s}_{2g}'' - C_1\left(1 + \frac{f_2}{k_1^2}\right)\mathbf{s}_{1g}'' \right] \tag{5.59}$$

5.5.2 Espressione delle deformazioni: carico distribuito lineare

Queste espressioni possono essere scritte anche per il caso di *carico verticale linearmente distribuito* che si ottiene a partire dalla seguente sostituzione:

$$P = \mathbf{q}_{1z} \cdot \boldsymbol{\rho} \tag{5.60}$$

il risultato finale è:

$$\mathbf{u}_h^{q_{1z}} = \begin{bmatrix} u^{q_{1z}} \\ v^{q_{1z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left(f_1 \frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_2' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA\, \mathbf{q}_{1z} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{grad}\psi_1' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA\, \mathbf{q}_{1z}\right) \tag{5.61}$$

$$w^{q_{1z}} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[C_2 \int_\Omega \psi_2'' \boldsymbol{\rho} dA \cdot \mathbf{q}_{1z} - C_1 \int_\Omega \psi_1'' \boldsymbol{\rho} dA \cdot \mathbf{q}_{1z}\right] \tag{5.62}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\mathbf{u}_h^{q_{1z}} = \begin{bmatrix} u^{q_{1z}} \\ v^{q_{1z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left(f_1 \frac{C_2}{k_2}\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\rho\mathbf{2}} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\rho\mathbf{1}}\right) \tag{5.63}$$

$$w^{q_{1z}} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[C_2 \mathbf{s}''_{\mathbf{g}\rho\mathbf{2}} - C_1 \mathbf{s}''_{\mathbf{g}\rho\mathbf{1}}\right] \tag{5.64}$$

5.6 Espressione delle tensioni

Passiamo infine a ricavare le espressioni delle *tensioni* prodotte da un carico concentrato P.
Per la *tensione veritcale* σ_z si ha che, a partire dall'espressione dell'articolo di Amaechi:

$$\sigma_z = s_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + s_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \tag{5.65}$$

nella nuova simbologia diventa:

$$\sigma_z^P = P\left[s_1 \frac{C_1}{k_1}\psi_1''' + s_2 \frac{C_2}{k_2}\psi_2'''\right] \tag{5.66}$$

Per la τ_{xz} si ha che, a partire dall'espressione dell'articolo di Amaechi:

$$\tau_{xz} = \frac{s_1}{k_1^2}\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{s_2}{k_2^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \tag{5.67}$$

nella nuova simbologia diventa:

$$\tau_{xz}^P = P\left[s_1\frac{C_1}{k_1^3}\psi_1''' + s_2\frac{C_2}{k_2^3}\psi_2'''\right] \tag{5.68}$$

Per la determinazione delle *componenti dello stato tensionali del piano* del bisogna predeterminare le espressioni delle deformazioni. In paticolare:

La deformazione volumetrica

$$\epsilon_v = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - (f_1 - 1)\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right] \tag{5.69}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_v = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[(f_2 - 1)\frac{C_1}{k_1}\psi_1''' - (f_1 - 1)\frac{C_2}{k_2}\psi_2'''\right] \tag{5.70}$$

la deformazione lungo x

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.71}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_x = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{C_2}{k_2}\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x^2} - f_2\frac{C_1}{k_1}\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x^2}\right] \tag{5.72}$$

la deformazione lungo y

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.73}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_y = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2}\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial y^2} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y^2}\right] \tag{5.74}$$

la deformazione lungo z

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{f_2 - f_1}\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right] \tag{5.75}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\epsilon_z = \frac{P}{f_2 - f_1}\left[\frac{C_2}{k_2}\psi_2''' - \frac{C_1}{k_1}\psi_1'''\right] \tag{5.76}$$

lo scorrimento γ_{xy}

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right) + f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.77}$$

ovvero

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial z}\right) - f_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\right)\right] \tag{5.78}$$

che nella nuova simbologia diventa:

$$\gamma_{xy} = \frac{2P}{f_2 - f_1}\left[f_1 \frac{C_2}{k_2}\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x \partial y} - f_2 \frac{C_1}{k_1}\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x \partial y}\right] \tag{5.79}$$

Dalle relazioni di Amaechi si ricavano le seguenti espressioni di σ_x, σ_y e τ_{xy}:

$$\sigma_x = A\epsilon_v + (F - A)\epsilon_z - 2N\epsilon_y \tag{5.80}$$

$$\sigma_y = A\epsilon_v + (F - A)\epsilon_z - 2N\epsilon_x \tag{5.81}$$

$$\tau_{xy} = N\gamma_{xy} \tag{5.82}$$

Queste possono essere raggruppate in una sola scrittura:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_h^P &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{P}{f_2 - f_1}\left\{ \left[\frac{C_1}{k_1}\left(Af_2 - F - 2Nf_2\right)\psi_1''' - \frac{C_2}{k_2}\left(Af_1 - F - 2Nf_1\right)\psi_2''' \right]\mathbf{I} + \right. \\ &\left. - \left(2Nf_2\frac{C_1}{k_1}\mathbf{H}(\psi_1') - 2Nf_1\frac{C_2}{k_2}\mathbf{H}(\psi_2') \right) \right\}\end{aligned} \tag{5.83}$$

5.6.1 Espressione delle tensioni: carico uniformemente distribuito

Le espressioni delle tensioni possono essere scritte anche per il caso di *carico verticale uniformemente distribuito* e si ottiene:

$$\sigma_z^q = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \psi_1''' dA + s_2\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \psi_2''' dA \right] \tag{5.84}$$

$$\tau_{xz}^q = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1^3}\int_\Omega \psi_1''' dA + s_2\frac{C_2}{k_2^3}\int_\Omega \psi_2''' dA \right] \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_h^q &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{q}{f_2 - f_1}\left\{ \left[\frac{C_1}{k_1}\left(Af_2 - F - 2Nf_2\right)\int_\Omega \psi_1''' dA - \frac{C_2}{k_2}\left(Af_1 - F - 2Nf_1\right)\int_\Omega \psi_2''' dA \right]\mathbf{I} + \right. \\ &\left. - \left(2Nf_2\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{H}(\psi_1')dA - 2Nf_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{H}(\psi_2')dA \right) \right\}\end{aligned} \tag{5.86}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\sigma_z^q = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1}s_1''' + s_2\frac{C_2}{k_2}s_2''' \right] \tag{5.87}$$

$$\tau_{xz}^{q} = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1^3}s_1''' + s_2\frac{C_2}{k_2^3}s_2'''\right] \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned} T_h^q &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{q}{f_2 - f_1}\left\{\left[\frac{C_1}{k_1}(Af_2 - F - 2Nf_2)\, s_1''' - \frac{C_2}{k_2}(Af_1 - F - 2Nf_1)\, s_2'''\right]\mathbf{I} + \right. \\ &\left. - \left(2Nf_2\frac{C_1}{k_1}\mathbf{S}'_{\mathbf{H_1}} - 2Nf_1\frac{C_2}{k_2}\mathbf{S}'_{\mathbf{H_2}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{5.89}$$

5.6.2 Espressione delle tensioni: carico distribuito linearmente

Le espressioni delle tensioni possono essere scritte anche per il caso di *carico verticale distribuito linearmente* e si ottiene considerando la seguente sostituzione:

$$P = \mathbf{q}_{1z} \cdot \boldsymbol{\rho} \tag{5.90}$$

si ottiene

$$\sigma_z^{q1z} = s_1\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \psi_1'''\boldsymbol{\rho}dA \cdot q_{1z} + s_2\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \psi_2'''\boldsymbol{\rho}dA \cdot q_{1z} \tag{5.91}$$

$$\tau_{xz}^{q1z} = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1^3}\int_\Omega \psi_1'''dA + s_2\frac{C_2}{k_2^3}\int_\Omega \psi_2'''dA\right] \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_h^{q1z} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{q}{f_2 - f_1}\left\{\left[\frac{C_1}{k_1}(Af_2 - F - 2Nf_2)\int_\Omega \psi_1'''\boldsymbol{\rho}dA \cdot q_{1z} + \right.\right. \\ &\left. - \frac{C_2}{k_2}(Af_1 - F - 2Nf_1)\int_\Omega \psi_2'''\boldsymbol{\rho}dA \cdot q_{1z}\right]\mathbf{I} + \\ &\left. - \left(2Nf_2\frac{C_1}{k_1}\int_\Omega \mathbf{H}(\psi_1') \otimes \boldsymbol{\rho}dAq_{1z} - 2Nf_1\frac{C_2}{k_2}\int_\Omega \mathbf{H}(\psi_2') \otimes \boldsymbol{\rho}dAq_{1z}\right)\right\} \end{aligned} \tag{5.93}$$

Gli integrali che compaiono nelle espressioni sono gia stati risolti nel lavoro di D'Urso e Marmo:

$$\sigma_z^{q1z} = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1}s_1''' + s_2\frac{C_2}{k_2}s_2'''\right] \tag{5.94}$$

$$\tau_{xz}^{q1z} = q\left[s_1\frac{C_1}{k_1^3}s_1''' + s_2\frac{C_2}{k_2^3}s_2'''\right] \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned} T_h^{q1z} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{q}{f_2 - f_1}\left\{\left[\frac{C_1}{k_1}(Af_2 - F - 2Nf_2)\, s_1''' - \frac{C_2}{k_2}(Af_1 - F - 2Nf_1)\, s_2'''\right]\mathbf{I} + \right. \\ &\left. - \left(2Nf_2\frac{C_1}{k_1}\mathbf{S}'_{\mathbf{H_1}} - 2Nf_1\frac{C_2}{k_2}\mathbf{S}'_{\mathbf{H_2}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{5.96}$$

5.7 Definizione delle costanti utilizzate da Amaechi

Per quanto riguarda le espressioni di k_1 e k_2 esse sono le soluzioni (solo per il caso in cui sono reali e distinte) dell'equazione caratterisitica e risultano funzioni esclusivamente delle costanti elastiche:

$$k_1 = \left(\frac{AC - F^2 - 2FL - D_3}{2AL}\right)^{1/2} \qquad k_2 = \left(\frac{AC - F^2 - 2FL + D_3}{2AL}\right)^{1/2} \tag{5.97}$$

dove D_3 rappresenza il determinanete dell'equazione di secondo grado e vale:

$$D_3 = [(AC - F^2)(AC - (F + 2L)^2]^{1/2} \tag{5.98}$$

Anche le costanti s_1, s_2 e f_1, f_2 dipendono esclusivamente dalla costanti elastiche ed in particolare:

$$f_1 = \frac{C - Lk_2^2}{F + L} \qquad f_2 = \frac{C - Lk_1^2}{F + L} \tag{5.99}$$

$$s_1 = \frac{Ff_2 - C}{f_2 - f_1} \qquad s_2 = \frac{C - Ff_1}{f_2 - f_1} \tag{5.100}$$

Capitolo 6

Valutazione degli integrali di dominio

Introduzione

Nel capitolo precedente sono stati introdotti i simboli s, $\mathbf{s}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbb{S}$ che denotano scalari, vettori, tensori del secondo e terzo ordine definiti dai seguenti integrali:

$$
\begin{aligned}
s'' &= \int_\Omega \phi''\, dA & \mathbf{s}''_{\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega \phi'' \boldsymbol{\rho}\, dA \\
s''' &= \int_\Omega \phi'''\, dA & \mathbf{s}'''_{\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega \phi''' \boldsymbol{\rho}\, dA \\
s^{iv} &= \int_\Omega z\, \phi^{iv}\, dA & \mathbf{s}^{iv}_{\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega z\, \phi^{iv} \boldsymbol{\rho}\, dA \\
\mathbf{s}'_{\mathbf{g}} &= \int_\Omega \mathbf{grad}\phi'\, dA & \mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega \mathbf{grad}\phi' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA \\
\mathbf{s}''_{\mathbf{g}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{grad}\phi''\, dA & \mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{grad}\phi'' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA \\
\mathbf{s}'''_{\mathbf{g}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{grad}\phi'''\, dA & \mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{grad}\phi''' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA \\
\mathbf{S}'_{\mathbf{H}} &= \int_\Omega \mathbf{H}(\phi')\, dA & \mathbb{S}'_{\mathbf{H}\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega \mathbf{H}(\phi') \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA \\
\mathbf{S}''_{\mathbf{H}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{H}(\phi'')\, dA & \mathbb{S}''_{\mathbf{H}\boldsymbol{\rho}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{H}(\phi'') \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

La dipendenza degli integrali da P è stata omessa per semplicità.

Integrale	s''	s'''	s^{iv}	$\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$	$\mathbf{s}''_{\mathbf{g}}$	$\mathbf{s}'''_{\mathbf{g}}$	$\mathbf{S}'_{\mathbf{H}}$	$\mathbf{S}''_{\mathbf{H}}$
Espressione algebrica	6.1.1	6.1.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	6.1.7	6.1.8
Valutazione analitica	6.2.1	6.2.2	6.2.3	6.2.4	6.2.5	6.2.6	6.2.7	6.2.8
Integrale	$\mathbf{s}''_{\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbf{s}'''_{\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbf{s}^{iv}_{\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\boldsymbol{\rho}}$	$\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\boldsymbol{\rho}}$
Espressione algebrica	6.1.9	6.1.10	6.1.11	6.1.12	6.1.13	6.1.14	6.1.15	6.1.16
Valutazione analitica	6.2.9	6.2.10	6.2.11	6.2.12	6.2.13	6.2.14	6.2.15	6.3

Tabella 6.1: Tabella sinottica che indica i paragrafi dove sono riportate l'espressione algebrica e la valutazione analitica degli integrali (6.1).

In questo capitolo si riportano le formule di integrazione degli integrali (6.1) cosicché possano essere prontamente implementate in un programma di calcolo. Ogni formula è inclusa in un paragrafo a parte, al fine di guidare il lettore interessato a trovare facilmente la corrispondente derivazione analitica, come indicato nella Tabella 6.1.

In realtà, a causa della grande quantità di passaggi analitici coinvolti nella trasformazione degli integrali, il lettore non particolarmente interessato ai dettagli matematici della trattazione può tranquillamente passare al paragrafo 6.2. Per questa ragione, si riporta nel paragrafo 6.1 le formule di integrazione in una forma che può essere utilmente implementata, anche tenendo conto delle singolarità che caratterizzano ogni espressione. Infatti tali singolarità sono direttamente correlate a quelle che riguardano le funzioni quando $z = 0$ e $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$.

6.1 Espressione algebrica degli integrali di dominio

In questo paragrafo si riportano le formule di integrazione degli integrali (6.1) cosicché possano essere prontamente implementate in un programma di calcolo. Ogni formula è inclusa in un sottoparagrafo a parte, al fine di guidare il lettore interessato di trovare facilmente la corrispondente derivazione analitica, come indicato nella Tabella 6.1.

Si supponga che la regione caricata Ω abbia una frontiera poligonale $\partial\Omega$, composta di n lati e vertici, orientata in senso antiorario. Il generico i-esimo lato di $\partial\Omega$ è identificato dai vertici i e $i+1$, dove $i = 1, ..., n$ e $n+1 = 1$; la posizione $(x'_i, y'_i)^t$ del vertice i è rappresentata dal vettore $\boldsymbol{\rho}_i = (x'_i - x,\ y'_i - y)^t$ che rappresenta la distanza tra lo i-esimo vertice di Ω e il punto $\bar{P} = (x, y, 0)^t$ che rappresenta la proiezione di P sulla superficie del semispazio.

Introducendo il vettore $\mathbf{l}_i = \boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i$ i seguenti parametri geometrici sono associati allo i-esimo lato di $\partial\Omega$:

$$
\begin{aligned}
a_i &= \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i = l_i^2 & \hat{\mathbf{l}}_i &= \mathbf{l}_i / |\mathbf{l}_i| \\
b_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{l}_i & \mathbf{P}_i &= \mathbf{I} - \hat{\mathbf{l}}_i \otimes \hat{\mathbf{l}}_i \\
c_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i & \mathbf{R}_{\rho i} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
c_{i+1} &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1} & \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} &= \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
d_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + z^2 & \mathbf{R}_{0i} &= \mathbf{R}_{\rho i} - \frac{b_i}{a_i}\mathbf{R}_{\mathbf{l}i} = \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
d_{i+1} &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1} + z^2 & \mathbb{R}_{\rho\rho i} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
e_i &= c_i - \frac{b_i^2}{a_i} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp)^2}{\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i} & \mathbb{R}_{\rho\mathbf{l}i} &= \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp + \mathbf{l}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
f_i &= d_i - \frac{b_i^2}{a_i} = \frac{(\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp)^2}{\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}_i} + z^2 & \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} &= \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
g_i &= \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \mathbf{l}_i & \mathbb{R}_{0i} &= \mathbb{R}_{\rho\rho i} - \frac{b_i}{a_i}\mathbb{R}_{\rho\mathbf{l}i} + \frac{b_i^2}{a_i^2}\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} \\
k_i &= |\boldsymbol{\rho}_{i+1}| / |\boldsymbol{\rho}_i| & &= \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{P}_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^\perp \\
r_i &= \boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp & \mathbb{R}_{1i} &= \mathbb{R}_{\rho\mathbf{l}i} - 2\frac{b_i}{a_i}\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

dove $(\cdot)^\perp$ denota la rotazione antioraria del vettore $(\cdot)$, quindi:

$$
\boldsymbol{\rho}_i^\perp = (x'_i - x,\ y'_i - y)^\perp = (y'_i - y,\ x - x'_i) \tag{6.3}
$$

Sono necessarie anche le quantità:

$$
\begin{aligned}
L_{1i} &= \log\left(\frac{\sqrt{a_i\, d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i\, d_i} + b_i}\right) & L_{2i} &= \log\left(z + \sqrt{d_i}\right) \\
L_{2i+1} &= \log\left(z + \sqrt{d_{i+1}}\right) & L_{3i} &= \log\left(\frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}}\right) \\
L_{4i} &= \log\left(\frac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z\, \sqrt{c_i}}\right) & L_{4i+1} &= \log\left(\frac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1} d_{i+1}}}{z\, \sqrt{c_{i+1}}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Nel calcolo dei logaritmi precedenti, deve essere posto particolare attenzione per evitare possibili singolarità. In particolare L_{1i} tende all'infinito quando $z = 0$ e risulta $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Similmente, se $z = 0$, i logaritmi L_{2i} e L_{2i+1} tendono all'infinito quando risulta $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$, rispettivamente. Inoltre, L_{4i} e L_{4i+1} sono singolari quando $z = 0$.

Tuttavia, tali singolarità sono inefficaci dal punto di vista computazionale poiché i logaritmi succitati sono sempre moltiplicati per quantitativi che diventano zero quando il logaritmo tende all'infinito. Essendo i logaritmi infinito di ordine infinitesimamente più basso, il loro prodotto è zero in modo che il calcolo del logaritmo possa essere saltato nei casi succitati.

Inoltre, si definiscono le seguenti quantità:

$$
\begin{aligned}
A_{1i} &= \arctan\left(\frac{g_i}{\sqrt{r_i^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b_i}{\sqrt{r_i^2}}\right) \\
A_{2i} &= \arctan\left(\frac{z\, g_i}{\sqrt{r_i^2 d_{i+1}}}\right) - \arctan\left(\frac{z\, b_i}{\sqrt{r_i^2 d_i}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

i cui argomenti diventano singolari quando $r_i = 0$, i.e. quando $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ sono paralleli o $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Similmente ai logaritmi in (6.4) il calcolo di A_{1i} e A_{2i} non è effettivamente richiesto quando $r_i = 0$ in quanto, nelle formule che verranno trattate nei prossimi paragrafi, sono moltiplicati per quantità che tendono a zero quando $r_i \to 0$.

Infine, si denoti con $\alpha(\mathbf{0})$ una quantità scalare che deve essere valutata se il punto $\bar{P}$ non appartiene alla regione caricata Ω. Come illustrato nel prossimo paragrafo $\alpha(\mathbf{0})$ tiene conto in modo coerente delle discontinuità dell'arco-tangente A_{1i} e A_{2i} quando $r_i = 0$.

La funzione α rappresenta la misura angolare, espressa in radianti, dell'intersezione tra Ω e un intorno circolare di $\bar{P}$, i.e. la singolarità $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, vedasi Figura A.1 per un'interpretazione geometrica di $\alpha(\mathbf{0})$. Un algoritmo generale per il calcolo $\alpha(\mathbf{0})$ può essere trovato incan be found in [31].

6.1.1 Espressione algebrica di s'' in (2.15)

Come spiegato nel paragrafo 6.2.1 si ha:

$$s'' = \sum_{i=1}^{n} I^{q}_{\bar{p}i} - z\,\alpha(\mathbf{0}) \qquad \text{dove} \qquad I^{q}_{\bar{p}i} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(r_i)\, z\, A_{2i} + \dfrac{r_i}{\sqrt{a_i}}\, L_{1i} & \text{if } r_i \neq 0 \\ 0 & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

in cui $\operatorname{sgn}(\cdot) = (\cdot)/|(\cdot)|$ denota la funzione signum.

6.1.2 Espressione algebrica di s''' in (2.15)

Come mostrato nel paragrafo 6.2.2 si ha:

$$s''' = \sum_{i=1}^{n} I_{\bar{p}qi} - \alpha(\mathbf{0}) \qquad \text{dove} \qquad I_{\bar{p}qi} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(r_i) A_{2i} & \text{if } r_i \neq 0 \\ 0 & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

6.1.3 Espressione algebrica di s^{iv} in (2.15)

Come mostrato nel paragrafo 6.2.3 la formula dell'integrale s^{iv} risulta:

$$s^{iv} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{r_i\, z\, g_i}{a_i f_i \sqrt{d_{i+1}}} - \frac{r_i\, z\, b_i}{a_i f_i \sqrt{d_i}} \right) \tag{6.8}$$

Quando $z = 0$ e sia $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ che $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$, il secondo o il primo addendo diventa nullo, rispettivamente, in quanto il numeratore è infinitesimo di ordine superiore rispetto al denominatore; quindi il loro calcolo si trascura per lo i-esimo lato.

6.1.4 Espressione algebrica di $\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$ in (2.15)

Come descritto nel paragrafo 6.2.4 la formula per il calcolo di $\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$ è:

$$\mathbf{s}'_{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}^{l}_{i} \tag{6.9}$$

dove:

$$\mathbf{i}_i^l = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}}\left[zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\ (A_{1i} - A_{2i}) + \dfrac{g_i L_{2i+1} - b_i L_{2i}}{\sqrt{a_i}}\right] & \text{if } r_i \neq 0 \\ \mathbf{l}_i^\perp \left(k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \dfrac{z}{\sqrt{c_i}} L_{3i} - k_i + 1\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp \left(L_{2i+1} + \dfrac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} L_{4i+1} - 1\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_i^\perp \left(L_{2i} + \dfrac{z}{\sqrt{c_i}} L_{4i} - 1\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.10}$$

Il calcolo dei logaritmi L_{4i} e L_{4i+1}, che risultano singolari se $z = 0$, può essere saltato in quanto $z\,L_{4i} \to 0$ e $z\,L_{4i+1} \to 0$.

6.1.5 Espressione algebrica di $\mathbf{s}_\mathbf{g}''$ in(2.15)

Come spiegato nel paragrafo 6.2.5, quando $z \neq 0$ l'integrale $\mathbf{s}_\mathbf{g}''$ si calcola come:

$$\mathbf{s}_\mathbf{g}'' = z \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} L_{1i} \tag{6.11}$$

mentre $\mathbf{s}_\mathbf{g}'' = \mathbf{0}$ quando $z = 0$.

6.1.6 Espressione algebrica di $\mathbf{s}_\mathbf{g}'''$ in (2.15)

Come dimostrato nel paragrafo 6.2.6 l'integrale $\mathbf{s}_\mathbf{g}'''$ si valuta come segue:

$$\mathbf{s}_\mathbf{g}''' = \sum_{i=1}^{n} \frac{z^2\, \mathbf{l}_i^\perp}{a_i f_i} \left(\frac{b_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}}\right) \tag{6.12}$$

mentre $\mathbf{s}_\mathbf{g}''' = \mathbf{0}$ if $z = 0$.

6.1.7 Espressione algebrica di $\mathbf{S}'_{\mathbf{H}}$ in (2.15)

In accordo con le derivazioni del paragrafo 6.2.7 si ha:

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} \mathbf{R}_{0i}\dfrac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\dfrac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i} & \text{if } r_i \neq 0 \\ \dfrac{\mathbf{R}_{\rho i}}{b_i}\log\left(\dfrac{z + \sqrt{d_{i+1}}}{z + \sqrt{d_i}}\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ \dfrac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{c_{i+1}}\log\left(\dfrac{z + \sqrt{d_{i+1}}}{2z}\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{c_i}\log\left(\dfrac{z + \sqrt{d_i}}{2z}\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.13}$$

L'integrale $\mathbf{S}'_{\mathbf{H}}$ è singolare quando $z = 0$ e sia $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ che $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Tale singolarità, già descritta da Love in [87] agli angoli di una regione di carico di forma rettangolare, è ineliminabile.

6.1.8 Espressione algebrica di $\mathbf{S}''_{\mathbf{H}}$ in (2.15)

Come illustrato nel paragrafo 6.2.8 la formula per il calcolo di $\mathbf{S}''_{\mathbf{H}}$ è:

$$\mathbf{S}''_{\mathbf{H}} = z\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbf{R}_{0i}}{a_i f_i}\left(\frac{b_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}}\right) + \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{1}{\sqrt{d_i}}\right)\right] \tag{6.14}$$

Quando $z = 0$ e $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$), il rapporto $z/\sqrt{d_i}$ ($z/\sqrt{d_{i+1}}$) è uguale ad 1.

6.1.9 Espressione algebrica di $\mathbf{s}''_{\rho}$ in (2.15)

Come spiegato nel paragrafo 6.2.9 risulta:

$$\mathbf{s}''_{\rho} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{2\,a_i}\left[(a_i + b_i)\sqrt{d_{i+1}} - b_i\sqrt{d_i} + \sqrt{a_i}\,f_i L_{1i}\right] \tag{6.15}$$

dove l'addendo $\sqrt{a_i}\,f_i L_{1i}$ è uguale a zero quando $z = 0$ e sia $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ che $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$.

6.1.10 Espressione algebrica di $\mathbf{s}'''_{\rho}$ in (2.15)

Come mostrato nel paragrafo 6.2.10:

$$\mathbf{s}'''_{\rho} = \mathbf{s}''_{\mathbf{g}} = z\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{\sqrt{a_i}}L_{1i} \tag{6.16}$$

Se $z = 0$ risulta $\mathbf{s}'''_{\rho} = \mathbf{0}$.

6.1.11 Espressione algebrica di $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv}$ in (2.15)

Come dimostrato nel paragrafo 6.2.11, se $z \neq 0$ si ha:

$$\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv} = z \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{\sqrt{a_i}} L_{1i} - \frac{z^2\, \mathbf{l}_i^{\perp}}{a_i f_i} \left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} \right) \right] \tag{6.17}$$

mentre $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv} = \mathbf{0}$ quando $z = 0$.

6.1.12 Espressione algebrica di $\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ in (2.15)

Come mostrato nel paragrafo 6.2.12 si ha:

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{I}_i^{lT} - \frac{\mathbf{I}}{2} \left(i_i^l + z I_{\bar{p}i}^q - z^2 \alpha(\mathbf{0}) - \frac{r_i}{2} \right) \right] \tag{6.18}$$

dove $\mathbf{I}_i^l$ si calcola come:

$$\mathbf{I}_i^l = \mathbf{R}_{0i} I_{i1}^l + \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{4a_i} I_{i2}^l \tag{6.19}$$

essendo:

$$I_{i1}^l = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a_i}} \Bigg[z L_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\, (A_{1i} - A_{2i}) + & \\ \qquad + \dfrac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \dfrac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i} \Bigg] & \text{if } r_i \neq 0 \\ k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \dfrac{z}{\sqrt{c_i}} L_{3i} - k_i + 1 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ L_{2i+1} + \dfrac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} L_{4i+1} - 1 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ L_{2i} + \dfrac{z}{\sqrt{c_i}} L_{4i} - 1 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.20}$$

e:

$$I_{i2}^l = \begin{cases} d_i - d_{i+1} + 2z \left(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i} \right) + 2c_{i+1} L_{2i+1} - 2c_i L_{2i} & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_{i+1} \neq \mathbf{0} \\ -d_{i+1} + 2z \sqrt{d_{i+1}} + 2c_{i+1} L_{2i+1} & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ d_i + 2z \sqrt{d_i} - 2c_i L_{2i} & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.21}$$

L'integrale $I^q_{\bar{p}i}$ nella formula (6.18) è dato dalla formula (6.6), e:

$$i^l_i = \begin{cases} \dfrac{r_i}{\sqrt{a_i}} \left[zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\ (A_{1i} - A_{2i}) + \dfrac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \dfrac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i} \right] & \text{if } r_i \neq 0 \\ 0 & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \tag{6.22}$$

6.1.13 Espressione algebrica di $\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\rho}$ in (2.15)

Come illustrato nel paragrafo 6.2.13 la formula per il calcolo di $\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\rho}$ è:

$$\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\rho} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbf{I}^T_{qi} - \mathbf{I} \left[z\, I^q_{\bar{p}i} - z^2\, \alpha(\mathbf{0}) \right] \right\} \tag{6.23}$$

dove:

$$\mathbf{I}_{qi} = \mathbf{R}_{0i} \frac{z\, L_{1i}}{\sqrt{a_i}} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\, z \frac{\sqrt{d_{i+1}} - \sqrt{d_i}}{a_i} \tag{6.24}$$

in cui il calcolo di L_{1i} si ignora quando $z = 0$. Infine, l'integrale $I^q_{\bar{p}i}$ in (6.23) si calcola come nella formula (6.6).

6.1.14 Espressione algebrica di $\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\rho}$ in (2.15)

In accordo con le derivazioni descritte nel paragrafo 6.2.14 si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\rho} &= -z\,\mathbf{S}''_{\mathbf{H}} - \mathbf{I}\, z\, s''' = \\ &= z \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathbf{R}_{0i}\, z}{a_i f_i} \left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}} \right) + \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\, z}{a_i} \left(\frac{1}{\sqrt{d_i}} - \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}} \right) + \right. \\ &\qquad \left. - \mathbf{I}\, \mathrm{sgn}(r_i) A_{2i} + \mathbf{I}\alpha(\mathbf{0}) \right] \end{aligned} \tag{6.25}$$

Se $r_i = 0$ l'addendo $\mathbf{I}\, \mathrm{sgn}(r_i) A_{2i}$ è uguale a zero, mentre $\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\rho} = \mathbf{0}$ se $z = 0$.

6.1.15 Espressione algebrica di $\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho}$ in (2.15)

Come illustrato nel paragrafo 6.2.15:

$$\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}^{T_{13}}_{vqi} - \mathbf{s}'_{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{I} \tag{6.26}$$

dove $\mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}}$ è la trasposta del seguente tensore del terzo ordine, in cui sono scambiate la prima e la terza componente:

$$\mathbb{I}_{vqi} = \begin{cases} \mathbb{R}_{0i}\dfrac{A_{1i}-A_{2i}}{|r_i|} + \mathbb{R}_{1i}\dfrac{L_{2i+1}-L_{2i}}{a_i} + \\ +\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\dfrac{\sqrt{a_i} - zL_{1i} + \sqrt{e_i}\,(A_{2i}-A_{1i})}{a_i^{3/2}} & \text{if } r_i \neq 0 \\ \dfrac{\mathbb{R}_{\rho\rho i}}{c_i}\left(k_i - 1 - \dfrac{z}{c_i}\,L_{3i}\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ \dfrac{\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}}{c_{i+1}}\left(1 - \dfrac{z}{c_{i+1}}\,L_{4i+1}\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}}{c_i}\left(\dfrac{z}{c_i}\,L_{4i} - 1\right) & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.27}$$

Inoltre, $\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$ è ottenuta dalle formule (6.9) e (6.10). Il calcolo di L_{1i}, L_{4i} e L_{4i+1} si iignora quando $z = 0$ in quanto $z\,L_{1i} = z\,L_{4i} = z\,L_{4i+1} = 0$ in questi casi.

6.1.16 Espressione algebrica di $\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho}$ in (2.15)

La formula derivata nel paragrafo 6.3 per il calcolo di $\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho}$ è:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho} = -\mathbf{s}''_{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{I} - z \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& \frac{\mathbb{R}_{0i}^{T_{13}}}{a_i f_i}\left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}}\right) + \frac{\mathbb{R}_{1i}^{T_{13}}}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}} - \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}}\right) + \\ & + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}^{T_{13}}\left(\frac{L_{1i}}{a_i^{3/2}} + \frac{b_i}{a_i^2\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{a_i^2\sqrt{d_{i+1}}}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{6.28}$$

dove $(\cdot)^{T_{13}}$ è la trasposta del terzo ordine $(\cdot)$ in cui sono scambiate la prima e la terza componente, mentre $\mathbf{s}''_{\mathbf{g}}$ è fornita da (6.11). Inoltre, se $z = 0$ e $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ risulta $z\,b_i/\sqrt{d_i} = 0$ e $z/\sqrt{d_i} = 1$. Analogamente, se $z = 0$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$, risulta $z\,g_i/\sqrt{d_{i+1}} = 0$ e $z/\sqrt{d_{i+1}} = 1$.

6.2 Valutazione analitica degli integrali di dominio

Le formule riportate nel precedente paragrafo mostarno che se la regione caricata Ω ha una frontiera poligonale $\partial\Omega$, è possibile derivare formule in forma chiusa per il calcolo degli integrali (6.1) per la valutazione dei campi di spostamento, deformazione e tensione all'interno del semispazio.

Tali integrali possono essere effettivamente calcolati esclusivamente in funzione dei vettori posizione $\boldsymbol{\rho}_i$ che raccolgono le coordinate degli n vertici di $\partial\Omega$.

Lo i-esimo lato di $\partial\Omega$, che ha gli estremi definiti dai vettori posizione $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$, ha la seguente espressione parametrica:

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \boldsymbol{\rho}_i + \lambda_i \mathbf{l}_i, \qquad 0 \le \lambda_i \le 1 \tag{6.29}$$

che vale anche per l'ultimo lato di $\partial\Omega$, essendo $\boldsymbol{\rho}_{n+1} = \boldsymbol{\rho}_1$.

Per valutare gli integrali (6.1) in modo più semplice, è utile impostare:

$$\lambda_i(t_i) = t_i - \frac{b_i}{a_i} \qquad t_{0i} = \frac{b_i}{a_i} = \frac{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{l}_i}{l_i^2} \qquad t_{1i} = 1 + \frac{b_i}{a_i} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \mathbf{l}_i}{l_i^2} \tag{6.30}$$

cosicché la formula (6.29) può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{\rho}[\lambda_i(t_i)] = \boldsymbol{\rho}_i + \left(t_i - \frac{b_i}{a_i}\right)\mathbf{l}_i, \qquad t_{0i} \le t_i \le t_{1i} \tag{6.31}$$

Di conseguenza, si anticipa l'espressione di alcuni prodotti, definiti sui lati di $\partial\Omega$, che verrano richiamati ripetutamente nel seguito:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = a_i t_i^2 + e_i \\
&\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2 = a_i t_i^2 + f_i \\
&\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i \, l_i = r_i \\
&\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i = \mathbf{R}_{0i} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} t_i \\
&\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i = \mathbb{R}_{0i} + \mathbb{R}_{1i} t_i + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} t_i^2
\end{aligned} \tag{6.32}$$

dove:

$$\boldsymbol{\nu}_i = \frac{(\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i)^\perp}{|\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i|} = \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{l_i} \tag{6.33}$$

è il versore uscente associato allo i-esimo lato di $\partial\Omega$.

6.2.1 Valutazione analitica di s'' in (2.15)

Ricordando $(\mathbf{??})_2$ e la definizione di s'' in (6.1) è necessario valutare l'integrale:

$$s'' = \int_\Omega \phi'' dA = \int_\Omega \frac{dA}{\sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2}} \tag{6.34}$$

A tal fine è utile considerare la seguente identità [24, 25]:

$$\operatorname{div}\left[\frac{\boldsymbol{\rho}\,\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right]=\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{grad}\,\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}+\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) \tag{6.35}$$

Essendo:

$$\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{grad}\,\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}=\phi'' \tag{6.36}$$

E' possibile esprimere l'integrale s'' come:

$$s''=\int_\Omega \operatorname{div}\left[\frac{\boldsymbol{\rho}\,\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right]dA-\int_\Omega\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right)dA \tag{6.37}$$

Il primo integrale al secondo membro della precedente equazione può essere riscritto come integrale di linea, esteso alla frontiera $\partial\Omega$ di Ω, impiegando il teorema di Gauss:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left[\frac{\boldsymbol{\rho}\,\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right]dA=\int_{\partial\Omega}\frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\,ds \tag{6.38}$$

Avendo assunto che $\partial\Omega$ è un poligono di n lati, il precedente integrale può essere riscritto come somma dei contributi di ogni lato:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\,ds&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)}\,l_i\,d\lambda_i=\\&=\sum_{i=1}^{n}I^q_{\bar{p}i}\end{aligned} \tag{6.39}$$

Adottando le formule (6.32) è possibile valutare l'integrale $I^q_{\bar{p}i}$ come:

$$\begin{aligned}I^q_{\bar{p}i}&=\int_0^1\frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)}\,l_i\,d\lambda_i=r_i\int_{t_{0i}}^{t_{1i}}\frac{\sqrt{a_it_i^2+f_i}}{a_it_i^2+e_i}dt_i=\\&=\frac{r_i}{\sqrt{a_i}}\left\{\frac{z}{\sqrt{e_i}}\arctan\left[\frac{z\,\sqrt{a_i}\,t_i}{\sqrt{(a_it_i^2+f_i)e_i}}\right]+\ln\left[a_it_i+\sqrt{a_i(a_it_i^2+f_i)}\right]\right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}}=\\&=\frac{r_i}{\sqrt{a_i}}\left(\frac{z\,A_{2i}}{\sqrt{e_i}}+L_{1i}\right)=\operatorname{sgn}(r_i)\,z\,A_{2i}+\frac{r_i}{\sqrt{a_i}}\,L_{1i}\end{aligned}$$

$$(6.40)$$

dove:

$$A_{2i} = \left\{ \arctan\left[\frac{z\sqrt{a_i}\,t_i}{\sqrt{(a_i t_i^2 + f_i)e_i}} \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \arctan\left(\frac{z\,g_i}{\sqrt{r_i^2 d_{i+1}}} \right) - \arctan\left(\frac{z\,b_i}{\sqrt{r_i^2 d_i}} \right) \quad (6.41)$$

e:

$$L_{1i} = \left\{ \log\left[\sqrt{a_i\left(a_i t_i^2 + f_i\right)} + a_i t_i \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \log\left(\frac{\sqrt{a_i\,d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i\,d_i} + b_i} \right) \quad (6.42)$$

Nota 6.2.1.1 *Per le applicazioni numeriche è utile discutere della validità delle formule (6.40), (6.41) e (6.42) per ogni valore di $\boldsymbol{\rho}_i$, $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ e z.*

Ricordando le definizioni (6.2)*, è semplice verificare che $a_i > 0$, $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$ e $d_{i+1} \geq 0$, gli argomenti di tutte le radici quadrate nelle formule (6.40), (6.41) e (6.42) sono non negative.*

L'argomento dell'arco-tangente in (6.41) tende all'infinito quando $r_i \to 0$, i.e. quando $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ sono paralleli o quando $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o quando $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Inoltre, quando $z \neq 0$, l'argomento del logaritmo in (6.42) *è sempre positivo in quanto può essere riscritto come:*

$$\frac{\sqrt{a_i\,d_{i+1}} + g_i}{\sqrt{a_i\,d_i} + b_i} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{i+1} + z^2} + \boldsymbol{\rho}_{i+1} \cdot \hat{\mathbf{l}}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + z^2} + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \hat{\mathbf{l}}_i} > 0 \quad (6.43)$$

dove $\hat{\mathbf{l}}_i$ è il versore diretto lungo lo i-esimo lato di $\partial\Omega$. Di conseguenza, il solo caso di singolarità per L_{1i} ricorre quando $z = 0$ e sia $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ che $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$.

In entrambi i casi, i.e. quando $r_i = 0$ o, più semplicemente, quando $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ sono paralleli o quando $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o quando $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$, A_{2i} e L_{1i} non è necessario calcolarli in quanto l'integranda in (6.40) *è funzione identicamente nulla. Per realizzare ciò è sufficiente valutare i prodotti (6.32) mediante le espressioni descritte in Tabella 6.2; sono stati ottenuti considerando che:*

i) Se $\boldsymbol{\rho}_i$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1}$ sono paralleli si può porre $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = k_i\boldsymbol{\rho}_i$ in modo che la formula (6.29) possa essere riscritta come $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \xi_i\boldsymbol{\rho}_i$, con $\xi_i = 1 + \lambda_i(k_i - 1)$ e $k_i = |\boldsymbol{\rho}_{i+1}|/|\boldsymbol{\rho}_i|$.

ii) Se $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} \neq \mathbf{0}$ la formula (6.29) diventa $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \lambda_i\boldsymbol{\rho}_{i+1}$.

iii) Se $\boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ la formula (6.29) può essere riscritta come $\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) = \eta_i\boldsymbol{\rho}_i$, dove $\eta_i = 1 - \lambda_i$.

	$\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$	$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$
	$1 \leq \xi_i \leq k_i$	$0 \leq \lambda_i \leq 1$	$0 \leq \eta_i \leq 1$
$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)$	$c_i \xi_i^2$	$c_{i+1} \lambda_i^2$	$c_i \eta_i^2$
$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2$	$c_i \xi_i^2 + z^2$	$c_{i+1} \lambda_i^2 + z^2$	$c_i \eta_i^2 + z^2$
$\boldsymbol{\nu}_i \, l_i = (\boldsymbol{\rho}_{i+1} - \boldsymbol{\rho}_i)^{\perp}$	$\mathbf{l}_i^{\perp} = (k_i - 1) \boldsymbol{\rho}_i^{\perp}$	$\boldsymbol{\rho}_{i+1}^{\perp}$	$\boldsymbol{\rho}_i^{\perp}$
$r_i = \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i \, l_i$	0	0	0

Tabella 6.2: Casi particolari delle formule (6.32).

Di conseguenza, adottando in (6.40) *i risultati riportati in Tabella 6.2 si ha sempre* $I^q_{\bar{p}i} = 0$*; quindi non è necessario valutare* A_{2i} *in* (6.41) *e* L_{1i} *in* (6.42) *quando* r_i *tende a* 0.

Il secondo integrale al secondo membro della formula (6.37) tiene conto della singolarità per $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ dell'argomento della divergenza al primo membro di (6.35). Di conseguenza, si invoca l'identità integrale [27, 25, 26]:

$$\int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) dA = \psi(\mathbf{0}) \alpha(\mathbf{0}) \tag{6.44}$$

dove ψ è una funzione scalare e α rappresenta una misura angolare, espressa in radianti, dell'intersezione tra Ω e un intorno circolare del punto di singolarità $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$. Un algoritmo generale per il calcolo $\alpha(\mathbf{0})$ può essere trovato in [31], mentre la dimostrazione della formula (6.44) è riportata in A.

Adottando la formula (6.44) si ha:

$$\int_{\Omega} \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2} \, \mathrm{div} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} \right) dA = z \, \alpha(\mathbf{0}) \tag{6.45}$$

e l'integrale s'' in (6.37) diventa infine:

$$s'' = \int_{\Omega} \phi'' \, dA = \sum_{i=1}^{n_v} I^q_{\bar{p}i} - z \, \alpha(\mathbf{0}) \tag{6.46}$$

dove $I^q_{\bar{p}i}$ è fornito dalla formula (6.40) a condizione che la sua valutazione possa essere ignorata quando $r_i = 0$.

6.2.2 Valutazione analitica di s''' in (2.15)

Richiamando (**??**)$_3$ e la definizione di s''' in (6.1) è necessario valutare l'integrale:

$$s''' = \int_\Omega \phi''' dA = \int_\Omega \frac{-z}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}} \tag{6.47}$$

A tale scopo si consideri la seguente espressione:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right] &= \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right)\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}+\\ &\quad+\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\cdot\mathbf{grad}\left[\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}\right]=\\ &= \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right)\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}-\frac{z}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{6.48}$$

Quindi l'integrale s''' puo essere espresso come:

$$s''' = \int_\Omega \operatorname{div}\left[\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right]dA - \int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right)\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}dA \tag{6.49}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente equazione e adottando la formula (6.44) per valutare il secondo integrale, la precedente formula diventa:

$$\begin{aligned} s''' &= \int_{\partial\Omega}\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}dA - \alpha(\mathbf{0}) =\\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i l_i d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)} - \alpha(\mathbf{0}) =\\ &= \sum_{i=1}^{n} I_{\bar{p}qi} - \alpha(\mathbf{0})\end{aligned} \tag{6.50}$$

dove, considerando (6.31), l'integrale $I_{\bar{p}qi}$ può essere valutato come:

$$\begin{aligned} I_{\bar{p}qi} &= \int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i l_i d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)} = r_i \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z\,dt_i}{(a_i t_i^2+e_i)\sqrt{a_i t_i^2+f_i}} =\\ &= \frac{r_i}{\sqrt{a_i e_i}}\left\{\arctan\left[\frac{\sqrt{a_i}\,z\,t_i}{\sqrt{(a_i t_i^2+f_i)e_i}}\right]\right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \operatorname{sgn}(r_i)A_{2i}\end{aligned}$$

(6.51)

e A_{2i} è previsto in (6.41).

Nota 6.2.2.1 *In virtù della Nota 6.2.1.1 non è necessario valutare* A_{2i} *quando* $r_i = 0$*, in quanto i risultati della Tabella 6.2 danno* $I_{\bar{p}qi} = 0$ *in un caso del genere.*

6.2.3 Valutazione analitica di s^{iv} in (2.15)

Richiamando (**??**) e la definizione di s^{iv} in (6.1) è necessario valutare l'integrale:

$$\begin{aligned} s^{iv} &= \int_\Omega z\,\phi^{iv} dA = \int_\Omega z \frac{2z^2 - \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{5/2}} dA = \\ &= \int_\Omega \frac{3z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{5/2}} dA + \int_\Omega \frac{-z}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}} dA = \\ &= \int_\Omega \frac{3z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{5/2}} dA + s''' \end{aligned} \tag{6.52}$$

dove l'espressione di s''' è fornita dalla formula (6.50).

Per valutare il primo integrale a secondo membro dell'equazione (6.52) si considera la seguente identità:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left[\frac{z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right] &= \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\cdot\mathbf{grad}\left[\frac{z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\right]+ \\ &+ \frac{z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) = \\ &= \frac{-3z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{5/2}} + \frac{z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) \end{aligned} \tag{6.53}$$

Quindi, integrando la precedente identità su Ω si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{3z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{5/2}} dA &= \int_\Omega \frac{z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) dA + \\ &- \int_\Omega \operatorname{div}\left[\frac{z^3\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}\,(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\right] dA = \\ &= \alpha(\mathbf{0}) - \int_{\partial\Omega} \frac{z^3\,\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}\,(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{6.54}$$

dove è stata impiegata la formula (6.44) e il teorema di Gauss.

L'ultimo integrale nella formula (6.54) può essere suddiviso nei diversi contributi associati a ogni lato di Ω:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{3z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{5/2}}dA &= \alpha(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{z^3\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i l_i\,d\lambda_i}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\,[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \\ &= \alpha(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^{n} I_{\bar{p}\hat{q}i}\end{aligned} \tag{6.55}$$

dove, se $\boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}I_{\bar{p}\hat{q}i} &= \int_0^1 \frac{z^3\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i l_i\,d\lambda_i}{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\,[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \\ &= \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z^3\,r_i\,dt_i}{(a_i t_i^2+e_i)(a_i t_i^2+f_i)^{3/2}} = \\ &= \left[\frac{r_i}{\sqrt{a_i e_i}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a_i}\,z\,t_i}{\sqrt{(a_i t_i^2+f_i)e_i}}\right) - \frac{r_i\,z\,t_i}{f_i\sqrt{a_i t_i^2+f_i}}\right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\ &= \mathrm{sgn} r_i A_{2i} - \frac{r_i\,z\,g_i}{a_i f_i\sqrt{d_{i+1}}} + \frac{r_i\,z\,b_i}{a_i f_i\sqrt{d_i}}\end{aligned} \tag{6.56}$$

e A_{2i} è fornito in (6.41).

Infine, sostituendo le formule (6.50) e (6.55) nella (6.52), si ha:

$$s^{iv} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{\bar{p}qi} - I_{\bar{p}\hat{q}i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i\,z\,g_i}{a_i f_i\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{r_i\,z\,b_i}{a_i f_i\sqrt{d_i}}\right) \tag{6.57}$$

dove $I_{\bar{p}qi}$ è fornito dalla formula (6.51) e $I_{\bar{p}\hat{q}i}$ by (6.56).

Nota 6.2.3.1 *Quando $z = 0$ e o $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$, rispettivamente il secondo o il primo addendo al secondo membro della precedente formula sono nulli, in quanto il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al denominatore; quindi si ignora la loro valutazione.*

6.2.4 Valutazione analitica di $\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$ in (2.15)

In accordo alla (**??**)$_1$ la formula per la valutazione di $\mathbf{s}'_{\mathbf{g}}$ in (6.1) può essere ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}'_{\mathbf{g}} &= \int_\Omega \mathbf{grad}\phi' dA = \int_{\partial\Omega} \phi' \boldsymbol{\nu}\, ds = \int_{\partial\Omega} \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right] \boldsymbol{\nu}\, ds = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}_i^l\end{aligned} \tag{6.58}$$

dove l'integrale $\mathbf{i}_i^l$ è dato da:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_i^l &= \int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i = \\ &= \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \mathbf{l}_i^\perp\, dt_i = \\ &= \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} \Bigg\{ z \log\left[\sqrt{a_i\left(a_i t_i^2 + f_i\right)} + a_i t_i\right] - \sqrt{a_i} t_i + \\ &\quad + \sqrt{e_i}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{e_i}}\, t_i\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{e_i}} \frac{t_i z}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}}\right)\right] + \\ &\quad + \sqrt{a_i} t_i \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right)\Bigg\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\ &= \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} \left[z L_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\ (A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}} L_{2i}\right]\end{aligned} \tag{6.59}$$

dove $L_{1i}, L_{2i}, L_{2i+1}, A_{1i}$ e A_{2i} sono definiti nelle formule (6.4) e (6.5).

Nota 6.2.4.1 *In virtù della Nota 6.2.1.1 è possibile valutare l'integrale* $\mathbf{i}_i^l$ *anche quando* $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$*, i.e. quando gli argomenti di* A_{1i} *e* A_{2i} *diventano singolari. Inoltre, se* $z = 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$*,* L_{1i} *diventa infinito. In aggiunta se* $z = 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *(*$\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$*) la quantità* L_{2i} *(*L_{2i+1}*) tende all'infinito.*

Tutte questi casi possono essere valutati adottando le formule di Tabella 6.2;

effettivamente se $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_i^l &= \int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i = \\
&= \int_1^{k_i} \log\left(z + \sqrt{c_i\xi_i^2 + z^2}\right) \mathbf{l}_i^\perp\, d\xi_i = \\
&= \mathbf{l}_i^\perp \left\{\xi_i \log\left(z + \sqrt{c_i\xi_i^2 + z^2}\right) + \frac{z}{\sqrt{c_i}} \log\left[c_i\xi_i + \sqrt{c_i(c_i\xi_i^2 + z^2)}\right] - \xi_i\right\}_1^{k_i} = \\
&= \mathbf{l}_i^\perp \left[k_i L_{2i+1} - L_{2i} + \frac{z}{\sqrt{c_i}} \log\left(\frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}}\right) - k_i + 1\right]
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Allo stesso modo, quando $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ *si ha:*

$$\mathbf{i}_i^l = \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_{i+1}^\perp \left[L_{2i+1} + \dfrac{z}{\sqrt{c_{i+1}}} \log\left(\dfrac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1}d_{i+1}}}{z\sqrt{c_{i+1}}}\right) - 1\right] & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_i^\perp \left[L_{2i} + \dfrac{z}{\sqrt{c_i}} \log\left(\dfrac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z\sqrt{c_i}}\right) - 1\right] & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.61}$$

Le formule precedenti possono essere applicate anche quando $z \to 0$ *in quanto* L_{2i} *e* L_{2i+1} *sono ben definite, mentre la valutazione del logaritmo al secondo membro può essere trascurata, essendo:*

$$\lim_{z\to 0} z \log\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \tag{6.62}$$

6.2.5 Valutazione analitica di $\mathbf{s}''_{\mathbf{g}}$ in(2.15)

In accordo alla (**??**)$_2$, la formula per la valutazione di $\mathbf{s}''_{\mathbf{g}}$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}''_{\mathbf{g}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{grad}\phi'' dA = \int_{\partial\Omega} z\, \phi'' \boldsymbol{\nu}\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{z\, \boldsymbol{\nu}\, ds}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}} = \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{z\, \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{i}_{qi}
\end{aligned} \tag{6.63}$$

dove $\mathbf{i}_{qi}$ è valutato come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{qi} &= \int_0^1 \frac{z\, \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \int_{t_{01}}^{t_{1i}} \frac{\mathbf{l}_i^\perp\, z\, dt_i}{\sqrt{a_i\, t_i^2 + f_i}} = \\
&= \frac{\mathbf{l}_i^\perp\, z}{\sqrt{a_i}} \left\{\log\left[\sqrt{a_i(a_i\, t_i^2 + f_i)} + a_i\, t_i\right]\right\}_{t_{01}}^{t_{1i}} = \frac{\mathbf{l}_i^\perp}{\sqrt{a_i}} z\, L_{1i}
\end{aligned} \tag{6.64}$$

dove sono state impiegate le quantità definite in (6.2) e (6.4).

Nota 6.2.5.1 *La formula precedente può essere applicata anche quando* $z \to 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. *Effettivamente in questi casi* L_{1i} *tende all'infinito ma* $z\,L_{1i} \to 0$ *in modo che il calcolo di* L_{1i} *possa essere trascurato.*

6.2.6 Valutazione analitica di $\mathbf{s}_{\mathbf{g}}'''$ in(2.15)

In accordo alla (**??**)$_3$, la formula per la valutazione di $\mathbf{s}_{\mathbf{g}}'''$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{g}}''' &= \int_{\Omega} z\,\mathbf{grad}\phi''' dA = \int_{\partial\Omega} z\,\phi''' \boldsymbol{\nu}\,ds = \int_{\partial\Omega} \frac{-z^2\,\boldsymbol{\nu}\,ds}{[\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2]^{3/2}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{-z^2\,\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \sum_{i=1}^{n} -\mathbf{i}_{\hat{q}i} \end{aligned} \tag{6.65}$$

dove $\mathbf{i}_{\hat{q}i}$ si valuta come:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\hat{q}i} &= \int_0^1 \frac{z^2\,\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z^2\,\mathbf{l}_i^{\perp}\,dt_i}{\left(a_i t_i^2 + f_i\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{z^2\,\mathbf{l}_i^{\perp}}{f_i}\left(\frac{t_i}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}}\right)_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \frac{z^2\,\mathbf{l}_i^{\perp}}{a_i f_i}\left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}}\right) \end{aligned} \tag{6.66}$$

Nota 6.2.6.1 *Entrambi gli addendi nella precedente formula diventano singolari quando* $z = 0$ *e o* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$*; comunque,entrambi tendono a zero dal momento che il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al denominatore.*

6.2.7 Valutazione analitica di $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}'$ in(2.15)

In accordo alla (**??**)$_1$, la formula per la valutazione di $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}'$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{H}}' &= \int_{\Omega} \mathbf{H}(\phi')dA = \int_{\Omega} \mathbf{grad}[\mathbf{grad}(\phi')]dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{grad}\phi' \otimes \boldsymbol{\nu} ds = \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu}\,ds}{\left(z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\right)\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{\left[z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\right]\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_{\nu q i} \end{aligned} \tag{6.67}$$

dove:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i}{\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \\
&= \mathbf{R}_{0i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} + \\
&\quad + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i \, dt_i}{\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \\
&= \mathbf{R}_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i}
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

in quanto la seguente formula integrale è pari a:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a_i e_i}} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{e_i}} \, t_i \right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{e_i}} \frac{t_i \, z}{\sqrt{(a_i t_i^2 + f_i)}} \right) \right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\
&= \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|}
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

e:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i \, dt_i}{\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \frac{1}{a_i} \left[\log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i} \right) \right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\
&= \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i}
\end{aligned}
\tag{6.70}
$$

Nota 6.2.7.1 *Sebbene la formula (6.68) sia indeterminata quando $r_i \to 0$, l'approccio indicato nelle note 6.2.1.1 e 6.2.4.1 può essere usato per valutare $\mathbf{I}_{vqi}$. In particolare, si adottano le formule della tabella 6.2 e si pone:*

$$
\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i = \begin{cases} \xi \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^{\perp} = \mathbf{R}_{\rho i} \xi_i & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ \lambda_i \boldsymbol{\rho}_{i+1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{i+1}^{\perp} = \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} \lambda_i & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ -\eta_i \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i^{\perp} = -\mathbf{R}_{\mathbf{l}i} \eta_i & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases}
\tag{6.71}
$$

Di conseguenza, quando $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$ *si ottiene:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i}{\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \\
&= \int_1^{k_i} \frac{\mathbf{R}_{\rho i} \, \xi_i \, d\xi_i}{(k_i - 1)\left(z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2}\right) \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2}} = \\
&= \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{(k_i - 1)\, c_i} \left[\log\left(z + \sqrt{c_i \xi_i^2 + z^2}\right)\right]_1^{k_i} = \\
&= \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{(k_i - 1)\, c_i} \log\left(\frac{z + \sqrt{c_i k_i^2 + z^2}}{z + \sqrt{c_i + z^2}}\right) = \frac{\mathbf{R}_{\rho i}}{b_i} \log\left(\frac{z + \sqrt{c_{i+1} + z^2}}{z + \sqrt{c_i + z^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

Similmente, quando $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ *si ha:*

$$
\mathbf{I}_{vqi} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{c_{i+1}} \log\left(\dfrac{z + \sqrt{c_{i+1} + z^2}}{2z}\right) & \text{se } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{c_i} \log\left(\dfrac{z + \sqrt{c_i + z^2}}{2z}\right) & \text{se } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases}
\tag{6.73}
$$

Si deve sottolineare che entrambe le soluzioni nella precedente formula tendono all'infinito quando $z \to 0$*; tale singolarità ricorre solo sulla superficie del semispazio, ai vertici della regione caricata. Ciò è stato già descritto da Love in [87], con riferimento agli angoli di una regione di carico di forma rettangolare e non è eliminabile.*

6.2.8 Valutazione analitica di $\mathbf{S}''_{\mathbf{H}}$ in (2.15)

Secondo (**??**)$_2$, la formula per la valutazione di $\mathbf{S}''_{\mathbf{H}}$ è ottenuta come segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}''_{\mathbf{H}} &= \int_\Omega z\, \mathbf{H}(\phi'') dA = \int_\Omega z\, \mathbf{grad}[\mathbf{grad}(\phi'')] dA = \int_{\partial\Omega} z\, \mathbf{grad}\phi'' \otimes \boldsymbol{\nu} ds = \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{-z\, \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\nu}\, ds}{(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}} = -\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{z\, \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2]^{3/2}} = -\sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{\hat{q}i}
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

Richiamando le formule (6.32) è possibile valutare $\mathbf{I}_{\hat{q}i}$ come:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\hat{q}i} &= \int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\, l_i d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \\
&= z\,\mathbf{R}_{0i}\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left(a_i t_i^2+f_i\right)^{3/2}} + z\,\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i\,dt_i}{\left(a_i t_i^2+f_i\right)^{3/2}} = \\
&= \frac{z\mathbf{R}_{0i}}{a_i f_i}\left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}}-\frac{b_i}{\sqrt{d_i}}\right)+\frac{z\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}}-\frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

dove sono state adottate le seguenti formule integrali:

$$
\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left(a_i t_i^2+f_i\right)^{3/2}} = \frac{1}{f_i}\left(\frac{t_i}{\sqrt{a_i t_i^2+f_i}}\right)_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \frac{1}{a_i f_i}\left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}}-\frac{b_i}{\sqrt{d_i}}\right) \tag{6.76}
$$

$$
\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i\,dt_i}{\left(a_i t_i^2+f_i\right)^{3/2}} = -\frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i t_i^2+f_i}}\right)_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}}-\frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}}\right) \tag{6.77}
$$

Nota 6.2.8.1 *Sebbene le frazioni nelle precedenti formule diventano singolari quando $z\to 0$ e o $\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1}=\mathbf{0}$, i rapporti $z/\sqrt{d_{i+1}}$ e $z/\sqrt{d_i}$ in (6.75) tendono a 1 in quanto sono infinitesimi dello stesso ordine.*

6.2.9 Valutazione analitica di $\mathbf{s}''_{\rho}$ in (2.15)

Secondo (**??**)$_2$, la formula per la valutazione di $\mathbf{s}''_{\rho}$ è ottenuta come segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}''_{\rho} &= \int_{\Omega}\phi''\boldsymbol{\rho}\,dA = \int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{\rho}\,dA}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}} = \int_{\Omega}\mathbf{grad}\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,dA = \\
&= \int_{\partial\Omega}\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\,\boldsymbol{\nu}\,ds = \sum_{i=1}^{n}\int_0^1\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{i}_i^q
\end{aligned}
\tag{6.78}
$$

dove $\mathbf{i}_i^q$ è calcolata come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_i^q &= \int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\,\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i = \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \mathbf{l}_i^{\perp}\,\sqrt{a_i t_i^2+f_i}\,dt_i = \\
&= \frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{2}\left\{t_i\sqrt{a_i t_i^2+f_i}+\frac{f_i}{\sqrt{a_i}}\log\left[a_i t_i+\sqrt{a_i\left(a_i t_i^2+f_i\right)}\right]\right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \qquad (6.79)\\
&= \frac{\mathbf{l}_i^{\perp}}{2\,a_i}\left[(a_i+b_i)\sqrt{d_{i+1}}-b_i\sqrt{d_i}+\sqrt{a_i}\,f_i L_{1i}\right]
\end{aligned}$$

Nota 6.2.9.1 *La quantità L_{1i} tende all'infinito quando $z = 0$ e o $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Comunque, in questi casi, $f_i \to 0$ in modo che il prodotto $f_i L_{1i} \to 0$ in quanto L_{1i} è un infinito di ordine arbitrariamente più basso.*

6.2.10 Valutazione analitica di $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}'''$ in (2.15)

Secondo (**??**)$_3$, la formula per la valutazione di $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}'''$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}''' &= \int_\Omega \phi'''\boldsymbol{\rho}\,dA = \int_\Omega \frac{-z\,\boldsymbol{\rho}\,dA}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}} = \int_\Omega \mathbf{grad}\left(\frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}}\right)dA = \\
&= \int_{\partial\Omega}\frac{z\,\boldsymbol{\nu}\,ds}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}} = \sum_{i=1}^n\int_0^1\frac{z\,\boldsymbol{\nu}_i l_i\,d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{i}_{qi}
\end{aligned} \qquad (6.80)$$

dove $\mathbf{i}_{qi}$ è calcolato nella formula (6.64). Di conseguenza si applicano le stesse considerazioni della Nota 6.2.5.1.

6.2.11 Valutazione analitica di $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv}$ in (2.15)

Secondo (**??**), la formula per la valutazione di $\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv}$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}^{iv} &= \int_\Omega z\phi^{iv}\boldsymbol{\rho}dA = \int_\Omega \frac{2z^3-z\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{5/2}}\boldsymbol{\rho}dA = \\
&= \int_\Omega\frac{3\,z^3\boldsymbol{\rho}\,dA}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{5/2}}+\int_\Omega\phi'''\boldsymbol{\rho}\,dA = \int_\Omega\mathbf{grad}\left[\frac{-z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\right]dA+\mathbf{s}_{\boldsymbol{\rho}}'''
\end{aligned} \qquad (6.81)$$

Dall'applicazione del teorema di Gauss all'integrale nella precedente equazione risulta:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{grad}\left[\frac{-z^3}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}}\right] dA &= \int_{\partial\Omega} \frac{-z^3\,\boldsymbol{\nu}\,ds}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2)^{3/2}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} -z \int_0^1 \frac{z^2\,\boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{(\boldsymbol{\rho}[\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} -z\mathbf{i}_{\hat{q}i}\end{aligned} \tag{6.82}$$

Infine, sostituendo la precedente equazione e la formula (6.80) nella (6.81) si ha:

$$\mathbf{s}^{iv}_{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{i}_{qi} - z\mathbf{i}_{\hat{q}i} \tag{6.83}$$

dove $\mathbf{i}_{qi}$ e $\mathbf{i}_{\hat{q}i}$ sono rispettivamente calcolati nelle formule (6.64) e (6.66).

6.2.12 Valutazione analitica di $\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ in (2.15)

Per la valutazione di $\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ è utile considerare la seguente identità:

$$\mathbf{grad}\,(\phi'\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{grad}\phi' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi'\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{grad}\phi' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi'\,\mathbf{I} \tag{6.84}$$

in modo che $\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ può essere riscritta come:

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \int_{\Omega} \mathbf{grad}\phi' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA = \left[\int_{\Omega} \mathbf{grad}\,(\phi'\boldsymbol{\rho})\; dA\right]^T - \mathbf{I}\int_{\Omega} \phi'\, dA \tag{6.85}$$

Richiamando (**??**)$_1$, il primo integrale al secondo membro della precente formulaè valutato come segue:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{grad}\,(\phi'\boldsymbol{\rho})\; dA &= \int_{\partial\Omega} \phi'\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu} ds = \int_{\partial\Omega} \log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\right)\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu} ds = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\right]\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}^l_i\end{aligned} \tag{6.86}$$

La valutazione di $\mathbf{I}_i^l$ è effettuata coem segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_i^l &= \int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i \\
&= \mathbf{R}_{0i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) dt_i + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) t_i \, dt_i
\end{aligned}
\tag{6.87}
$$

dove la formula (6.59) può essere adottata per la valutazioen del primo integrale e:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) t_i \, dt_i = \\
&= -\frac{1}{4a_i}\left[a_i t_i^2 + f_i - 2z\sqrt{a_i t_i^2 + f_i} - 2\left(a_i t_i^2 + e_i\right)\log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right)\right]_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\
&= \frac{d_i - d_{i+1} + 2z\left(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}\right) + 2c_{i+1}L_{2i+1} - 2c_i L_{2i}}{4a_i}
\end{aligned}
\tag{6.88}
$$

Quindi, si ottiene infine:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_i^l = \frac{\mathbf{R}_{0i}}{\sqrt{a_i}}&\left[zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\,(A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i}\right] + \\
&+ \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}}{4a_i}\left[d_i - d_{i+1} + 2z\left(\sqrt{d_{i+1}} + \sqrt{d_i}\right) + 2c_{i+1}L_{2i+1} - 2c_i L_{2i}\right]
\end{aligned}
\tag{6.89}
$$

Nota 6.2.12.1 *Come è già stato specificato nelle Note 6.2.1.1 e 6.2.4.1, le singolarità delle quantità* A_{1i}, A_{2i}, L_{1i}, L_{2i} *and* L_{2i+1} *possono essere dimostrate se* $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. *Nel primo caso il fattore della quantità* $\mathbf{R}_{0i}$ *nella* (6.89) *si modifica come nella* (6.60)*; inoltre, è rispettivamente uguale alla* $(6.61)_1$ *e* $(6.61)_2$ *se* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ *o* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$.

Nota 6.2.12.2 *La quantità* $L_{28} \to \infty$ *se* $z = 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$. *Tuttavia,* L_{2i} *è rapportata a* c_i *che tende anch'esso a zero. Quindi, essendo* L_{2i} *un infinito di ordine arbitrariamente più basso, il prodotto* $c_i L_{2i} \to 0$ *in modo che il loro calcolo possa essere trascurato se* $z = 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$. *Lo steswso ragionamento può essere esteso al prodotto* $c_{i+1}L_{2i+1}$ *quando* $z = 0$ *e* $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$.

Per valutare l'integrale di ϕ' in (6.85), si considera l'identità:

$$
\operatorname{div}\left[\boldsymbol{\rho}\log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right)\right] = 2\log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right) - \frac{z}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}} + 1 \tag{6.90}
$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi' \, dA &= \int_\Omega \log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right) dA = \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}\left[\boldsymbol{\rho}\log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right)\right] dA + \frac{z}{2}\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}} dA + \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega dA\end{aligned} \tag{6.91}$$

Applicando il teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente equazione si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}\left[\boldsymbol{\rho}\log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right)\right] dA &= \int_{\partial\Omega} \log\left(z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}\right)\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\nu} ds = \\ = \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] & \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} i_i^l\end{aligned} \tag{6.92}$$

dove i_i^l è calcolato come:

$$\begin{aligned}i_i^l &= \int_0^1 \log\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i = \\ &= r_i \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \log\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) dt_i = \\ &= \frac{r_i}{\sqrt{a_i}}\left[zL_{1i} - \sqrt{a_i} + \sqrt{e_i}\,(A_{1i} - A_{2i}) + \frac{g_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i+1} - \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}L_{2i}\right]\end{aligned} \tag{6.93}$$

dove il risultato nella formula (6.59) è stato applicato e si estendono le considerazioni della Nota 6.2.12.1.

Il secondo integrale nella formula (6.91) è pari a s'', già valutato precedentemente nel paragrafo 6.2.1, mentre l'ultimo integrale è calcolato mediante la ben nota formula per la valutazione dell'area dei poligoni:

$$\int_\Omega dA = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \tag{6.94}$$

Infine, sostituendo le formule (6.46), (6.86), (6.91)-(6.94) nella (6.85) si ottiene:

$$\mathbf{S}'_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{I}_i^{lT} - \frac{\mathbf{I}}{2}\left(i_i^l + zI_{\bar{p}i}^q - z^2\alpha(\mathbf{0}) - \frac{r_i}{2}\right)\right] \tag{6.95}$$

dove $\mathbf{I}_i^{lT}$ è la trasposta dell'espressione (6.89), i_i^l è valutata nella (6.93) e $I_{\bar{p}i}^q$ nella (6.40). In accordo alla Nota 6.2.1.1, $I_{\bar{p}i}^q = 0$ se $r_i \to 0$.

6.2.13 Valutazione analitica di $\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ in (2.15)

Per la valutazione di $\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ è utile considerare la seguente identità:

$$\mathbf{grad}\,(\phi''\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{grad}\phi'' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi''\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{grad}\phi'' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi''\,\mathbf{I} \tag{6.96}$$

in modo che $\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ diventa:

$$\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \int_\Omega z\,\mathbf{grad}\phi'' \otimes \boldsymbol{\rho}\,dA = \left[\int_\Omega z\,\mathbf{grad}\,(\phi''\boldsymbol{\rho})\;dA\right]^T - \mathbf{I}\int_\Omega z\,\phi''\,dA \tag{6.97}$$

Richiamando $(\mathbf{??})_2$ e applicando il teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente formula si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega z\,\mathbf{grad}\,(\phi''\boldsymbol{\rho})\;dA &= \int_{\partial\Omega} z\,\phi''\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu}ds = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{qi}\end{aligned} \tag{6.98}$$

dove la valutazione dell'integrale $\mathbf{I}_{qi}$ è ottenuta come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{qi} &= \int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}} = \\ &= \left(\mathbf{R}_{\rho i} - \frac{b_i}{a_i}\mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\right) z \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\,z \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i\,dt_i}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \\ &= \mathbf{R}_{0i}\frac{z\,L_{1i}}{\sqrt{a_i}} + \mathbf{R}_{\mathbf{l}i}\,z\frac{\sqrt{d_{i+1}} - \sqrt{d_i}}{a_i}\end{aligned} \tag{6.99}$$

e la formula (6.64) è stata adottata per il primo integrale; il secondo integrale è stato valutato come:

$$\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i\,dt_i}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \left(\frac{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}}{a_i}\right)_{t_{01}}^{t_{1i}} = \frac{\sqrt{d_{i+1}} - \sqrt{d_i}}{a_i} \tag{6.100}$$

Nota 6.2.13.1 *Come riportato nella Nota 6.2.5.1 la quantità $zL_{1i} \to 0$ quando $z \to 0$ e o $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1} \to \mathbf{0}$. Quindi si può omettere il calcolo di L_{1i} quando $z = 0$.*

L'ultimo integrale nell'equazione (6.97) è pari a s'' ed è stato già valutato precedentemente nel paragrafo 6.2.1. Sostituendo le formule (6.46) e (6.98) nell'equazione (6.97) si ha:

$$\mathbf{S}''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}^T_{qi} - \mathbf{I}\left[z\, I^q_{\bar{p}i} - z^2\, \alpha(\mathbf{0})\right] \tag{6.101}$$

dove $\mathbf{I}^T_{qi}$ è la trasposta dell'espressione (6.99) e $I^q_{\bar{p}i}$ è riportata nella (6.40) a condizione che la sua valutazione possa essere trascurata quando $r_i = 0$.

6.2.14 Valutazione analitica di $\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ in (2.15)

Per la valutazione di $\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ è utile considerare la seguente identità:

$$\mathbf{grad}\,(\phi'''\boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{grad}\phi''' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi'''\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{grad}\phi''' \otimes \boldsymbol{\rho})^T + \phi'''\,\mathbf{I} \tag{6.102}$$

in modo che $\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}$ diventa:

$$\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = \int_\Omega z\,\mathbf{grad}\phi''' \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA = \left[\int_\Omega z\,\mathbf{grad}\,(\phi'''\boldsymbol{\rho})\, dA\right]^T - \mathbf{I}\int_\Omega z\,\phi'''\, dA \tag{6.103}$$

Tenendo in considerazione la (**??**)$_3$ e applicando il teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente formula si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega z\,\mathbf{grad}\,(\phi'''\boldsymbol{\rho})\, dA = \int_{\partial\Omega} z\,\phi'''\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu} ds = \\ &\quad = -z\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2]^{3/2}} = -z\sum_{i=1}^{n}\mathbf{I}_{\hat{q}i} \end{aligned} \tag{6.104}$$

dove $\mathbf{I}_{\hat{q}i}$ è valutato come nella formula (6.75) con l'ulteriore condizione riportata nella Nota 6.2.8.1.

L'ultimo integrale nell'equazione (6.103) è pari a s''' ed è stato già valutato nel paragrafo 6.2.2. Sostituendo le formule (6.50) e (6.104) nell'equazione (6.103) si ha:

$$\mathbf{S}'''_{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}} = -z\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{I}_{\hat{q}i} + \mathbf{I}\left[I_{\bar{p}qi} - \alpha(\mathbf{0})\right]\right\} \tag{6.105}$$

dove $\mathbf{I}_{\hat{q}i}$ è dato da (6.75) e $I_{\bar{p}qi}$ da (6.51). In particolare $I_{\bar{p}qi} = 0$ quando $r_i = 0$.

6.2.15 Valutazione analitica di $\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho}$ in (2.15)

Differenziando il secondo membro della formula (6.84) la seguente identità può essere ottenuta:

$$\mathbf{H}(\phi'\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{H}(\phi')\otimes\boldsymbol{\rho}]^{T_{13}} + (\mathbf{I}\otimes\mathbf{grad}\phi')^{T_{23}} + \mathbf{I}\otimes\mathbf{grad}\phi' \tag{6.106}$$

dove l'apice T_{ab} è usato per indicare la trasposta che scambia gli indici di posizione a e b per il tensore di terzo ordine, ad esempio $(\mathbb{A}^{T_{13}})_{ijk} = (\mathbb{A})_{kji}$. Di conseguenza, l'integrale $\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho}$ può essere calcolato come:

$$\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho} = \int_\Omega \mathbf{H}(\phi')\otimes\boldsymbol{\rho}\,dA = \left[\int_\Omega \mathbf{H}(\phi'\boldsymbol{\rho})\,dA\right]^{T_{13}} - 2\int_\Omega \mathbf{grad}\phi'\,dA\otimes\mathbf{I} \tag{6.107}$$

L'applicazione del teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente formula fornisce, prendendo in considerazione la $(\mathbf{??})_1$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{H}(\phi'\boldsymbol{\rho})\,dA = \int_{\partial\Omega}\mathbf{grad}(\phi'\boldsymbol{\rho})\otimes\boldsymbol{\nu}\,ds = \\
&= \int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\rho}\otimes\boldsymbol{\nu}\,ds}{\left(z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\right)\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}} + \mathbf{I}\otimes\int_{\partial\Omega}\log\left(z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+z^2}\right)\boldsymbol{\nu}ds = \\
&= \sum_{i=1}^n\left\{\int_0^1\frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{\left[z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\right]\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}}+\right.\\
&\qquad\left.+\mathbf{I}\otimes\int_0^1\log\left[z+\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2}\right]\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^n\left(\mathbb{I}_{vqi}+\mathbf{I}\otimes\mathbf{i}_i^l\right)
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Il secondo integrale al secondo membro della formula (6.107) è valutato come nella formula (6.58), quindi:

$$\mathbb{S}'_{\mathbf{H}\rho} = \sum_{i=1}^n\left(\mathbb{I}_{vqi}^{T_{13}} - \mathbf{i}_i^l\otimes\mathbf{I}\right) \tag{6.109}$$

dove la seguente identità è stata applicata:

$$\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{i}_i^l\right)^{T_{13}} = \left[(\mathbf{I})_{ab}\left(\mathbf{i}_i^l\right)_c\right]^{T_{13}} = (\mathbf{I})_{cb}\left(\mathbf{i}_i^l\right)_a = \mathbf{i}_i^l\otimes\mathbf{I} \tag{6.110}$$

in cui è stata esplicitata la simmetria di **I**.

L'integrale $\mathbf{i}_i^l$ è fornito dalla formuloa (6.59) con l'ulteriore condizione espressa dalla nota 6.2.4.1.

Inoltre, $\mathbb{I}_{vqi}$ è valutata come segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i \, l_i \, d\lambda_i}{\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right] \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \cdot \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \\
&= \left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i} - \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho}\mathbf{l}i} + \frac{b_i^2}{a_i^2} \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} \right) \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{dt_i}{\left[z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} + \\
&\quad + \left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho}\mathbf{l}i} - 2 \frac{b_i}{a_i} \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} \right) \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i \, dt_i}{\left[z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} + \\
&\quad + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i^2 \, dt_i}{\left[z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right] \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \\
&= \mathbb{R}_{0i} \frac{A_{1i} - A_{2i}}{|r_i|} + \mathbb{R}_{1i} \frac{L_{2i+1} - L_{2i}}{a_i} + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i} \frac{\sqrt{a_i} - z L_{1i} + \sqrt{e_i}\,(A_{2i} - A_{1i})}{a_i^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

in cui i primi due integrali sono stati valutati rispettivamente mediante le formule (6.69) e (6.70), mentre il terzo integrale è dato da:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{t_i^2 \, dt_i}{\left(z + \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}\right) \sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} = \\
&= \frac{1}{a_i^{3/2}} \left\{ \sqrt{a_i}\, t_i - z \log\left[a_i t_i + \sqrt{a_i \left(a_i t_i^2 + f_i \right)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{f_i - z^2} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{f_i - z^2}} \frac{t_i z}{\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}} \right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{a_i}{f_i - z^2}}\, t_i \right) \right] \right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} = \\
&= \frac{\sqrt{a_i} - z L_{1i} + \sqrt{e_i}\,(A_{2i} - A_{1i})}{a_i^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{6.112}
$$

Nota 6.2.15.1 *Seguendo lo stesso approccio descritto nella Nota 6.2.1.1, 6.2.4.1 e 6.2.7.1, la formula* (6.111) *per* $\mathbb{I}_{vqi}$ *può essere appropriatamente modificata quando* *alcuni dei suoi addendi diventano indefiniti. Nello specifico, dai risultati della Tabella 6.2 si può porre:*

$$\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i\, l_i = \begin{cases} \xi^2 \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \mathbf{l}_i^{\perp} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i}\xi_i^2 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1} \\ \lambda^2 \boldsymbol{\rho}_{i+1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{i+1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{i+1}^{\perp} = \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\lambda_i^2 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ -\eta^2 \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i^{\perp} = \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\eta_i^2 & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.113}$$

Di conseguenza, quando $\boldsymbol{\rho}_i \parallel \boldsymbol{\rho}_{i+1}$, $\mathbb{I}_{vqi}$ diventa:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{vqi} &= \int_0^1 \frac{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{\left[z + \sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}\right]\sqrt{\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2}} = \\ &= \int_1^{k_i} \frac{\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i}\xi_i^2\, d\xi_i}{\left[z + \sqrt{c_i\xi_i^2 + z^2}\right]\sqrt{c_i\xi_i^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i}}{c_i}\left[\xi_i - \frac{z}{c_i}\log\left[c_i\xi_i + \sqrt{c_i(c_i\xi_i^2 + z^2)}\right]\right]_1^{k_i} = \\ &= \frac{\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i}}{c_i}\left[k_i - 1 - \frac{z}{c_i}\log\left(\frac{c_i k_i + \sqrt{c_i d_{i+1}}}{c_i + \sqrt{c_i d_i}}\right)\right] \end{aligned} \tag{6.114}$$

Allo stesso modo:

$$\mathbb{I}_{vqi} = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}}{c_{i+1}}\left[1 - \dfrac{z}{c_{i+1}}\log\left(\dfrac{c_{i+1} + \sqrt{c_{i+1}d_{i+1}}}{z\sqrt{c_{i+1}}}\right)\right] & \text{if } \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}}{c_i}\left[\dfrac{z}{c_i}\log\left(\dfrac{c_i + \sqrt{c_i d_i}}{z\sqrt{c_i}}\right) - 1\right] & \text{if } \boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{6.115}$$

Le formule precedenti possono essere applicate anche quando $z \to 0$ in quanto la valutazione dei logaritmi al secondo membro può essere trascurata, come descritto nella Nota 6.2.4.1 e nella formula (6.62).

6.3 Valutazione analitica di $\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho}$ in (2.15)

Differenziando il secondo membro della formula (6.96) la seguente identità può essere ottenuta:

$$\mathbf{H}(\phi''\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{H}(\phi'') \otimes \boldsymbol{\rho}]^{T_{13}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{grad}\phi'')^{T_{23}} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{grad}\phi'' \tag{6.116}$$

che può essere usata per la valutazione di $\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho} &= \int_{\Omega} z\, \mathbf{H}(\phi'') \otimes \boldsymbol{\rho}\, dA \\ &= \left[\int_{\Omega} z\, \mathbf{H}(\phi''\boldsymbol{\rho})\, dA\right]^{T_{13}} - 2\int_{\Omega} z\, \mathbf{grad}\phi''\, dA \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \tag{6.117}$$

Dall'applicazione del teorema di Gauss al primo integrale al secondo membro della precedente equazione si ha, tenendo in considerazione la (**??**)$_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z\, \mathbf{H}(\phi''\boldsymbol{\rho})\, dA &= \int_{\partial\Omega} z\, \mathbf{grad}(\phi''\boldsymbol{\rho}) \otimes \boldsymbol{\nu}\, ds = \\ &= -\int_{\partial\Omega} \frac{z\, \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\nu}}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}} ds + \mathbf{I} \otimes \int_{\partial\Omega} \frac{z\, \boldsymbol{\nu}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2}} ds \end{aligned} \tag{6.118}$$

dove:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{z\, \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\nu}}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + z^2)^{3/2}} ds = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{z\, \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\rho}(\lambda_i) \otimes \boldsymbol{\nu}_i\, l_i\, d\lambda_i}{(\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i) + z^2)^{3/2}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\hat{q}i} \tag{6.119}$$

Il secondo integrale al secoindo membro della formula (6.118) è stato valutato nel paragrafo 6.2.5 così come l'ultimo integrale al secondo membro della formua (6.117).

La sostituzione delle formule (6.63) e (6.119) nella (6.117) porta a:

$$\mathbb{S}''_{\mathbf{H}\rho} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{I}_{\hat{q}i}^{T_{13}} + \mathbf{i}_{qi} \otimes \mathbf{I}\right) \tag{6.120}$$

dove è stato posto $\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{i}_{qi}\right)^{T_{13}} = \mathbf{i}_{qi} \otimes \mathbf{I}$, similmente alla formula (6.110).

L'integrale $\mathbf{i}_{qi}$ è fornito nella formula (6.64) con l'ulteriore condizione riportata nella Nota 6.2.5.1.

Inoltre, $\mathbb{I}_{\hat{q}i}$ è dato da:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\hat{q}i} &= \int_0^1 \frac{z\,\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\otimes\boldsymbol{\nu}_i\,l_i\,d\lambda_i}{[\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)\cdot\boldsymbol{\rho}(\lambda_i)+z^2]^{3/2}} = \\
&= \left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho\rho}i} - \frac{b_i}{a_i}\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho}\mathbf{l}i} + \frac{b_i^2}{a_i^2}\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\right)\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z\,dt_i}{\left(a_i t_i^2 + f_i\right)^{3/2}} + \\
&\quad + \left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{\rho}\mathbf{l}i} - 2\frac{b_i}{a_i}\mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\right)\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z\,t_i\,dt_i}{\left(a_i t_i^2 + f_i\right)^{3/2}} + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z\,t_i^2\,dt_i}{\left(a_i t_i^2 + f_i\right)^{3/2}} = \\
&= \frac{z\,\mathbb{R}_{0i}}{a_i f_i}\left(\frac{g_i}{\sqrt{d_{i+1}}} - \frac{b_i}{\sqrt{d_i}}\right) + \frac{z\,\mathbb{R}_{1i}}{a_i}\left(\frac{1}{\sqrt{d_i}} - \frac{1}{\sqrt{d_{i+1}}}\right) + \\
&\quad + \mathbb{R}_{\mathbf{ll}i}\,z\left(\frac{L_{1i}}{a_i^{3/2}} + \frac{b_i}{a_i^2\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{a_i^2\sqrt{d_{i+1}}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.121}
$$

dove le formule (6.76) e (6.77) sono state usate per valutare i primi due integrali succitati.

Nota 6.3.0.2 *Se $z \to 0$ e $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ il prodotto $z\,b_i/\sqrt{d_i} \to 0$ e $z/\sqrt{d_i} \to 1$ in quanto z e $\sqrt{d_i}$ sono infinitesimi dello stesso ordine. Analogamente, se $z \to 0$ e $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$ il prodotto $z\,g_i/\sqrt{d_{i+1}} \to 0$ e $z/\sqrt{d_{i+1}} \to 1$.*

Infine, il terzo integrale nella (6.121) è dato da:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \frac{z\,t_i^2\,dt_i}{\left(a_i t_i^2 + f_i\right)^{3/2}} &= z\left\{\frac{1}{a_i^{3/2}}\log\left[a_i t_i + \sqrt{a_i\left(a_i t_i^2 + f_i\right)}\right] - \frac{t_i}{a_i\sqrt{a_i t_i^2 + f_i}}\right\}_{t_{0i}}^{t_{1i}} \\
&= z\left(\frac{L_{1i}}{a_i^{3/2}} + \frac{b_i}{a_i^2\sqrt{d_i}} - \frac{g_i}{a_i^2\sqrt{d_{i+1}}}\right)
\end{aligned}
\tag{6.122}
$$

Nota 6.3.0.3 *I termini in parentesi diventano singolari quando $z = 0$ e o $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{\rho}_{i+1} = \mathbf{0}$. Inoltre, come riportato nella Nota 6.2.8.1, quando $z \to 0$ il prodotto $z\,L_{1i} \to 0$ e i due termini addizionali tendono a 1. Quindi, l'integrale globalmente è zero.*

Capitolo 7

Risultati numerici

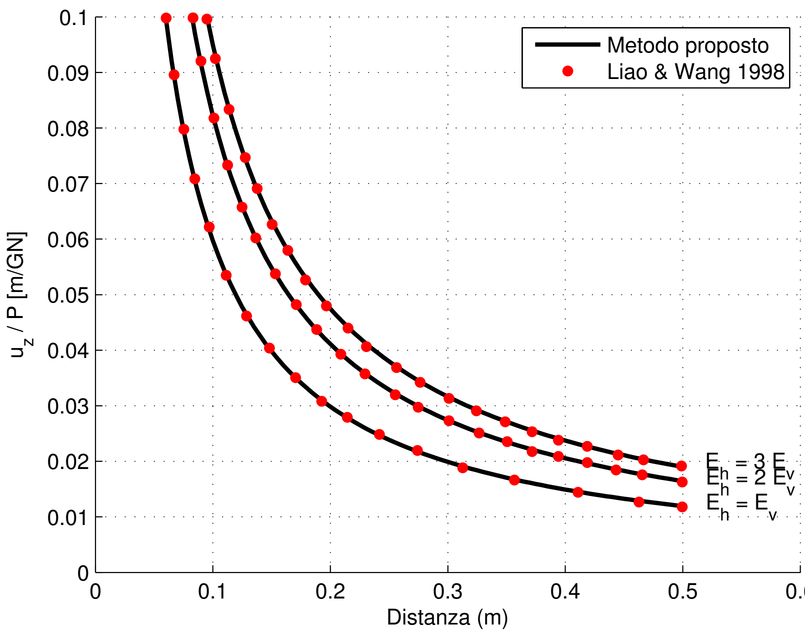
Introduzione

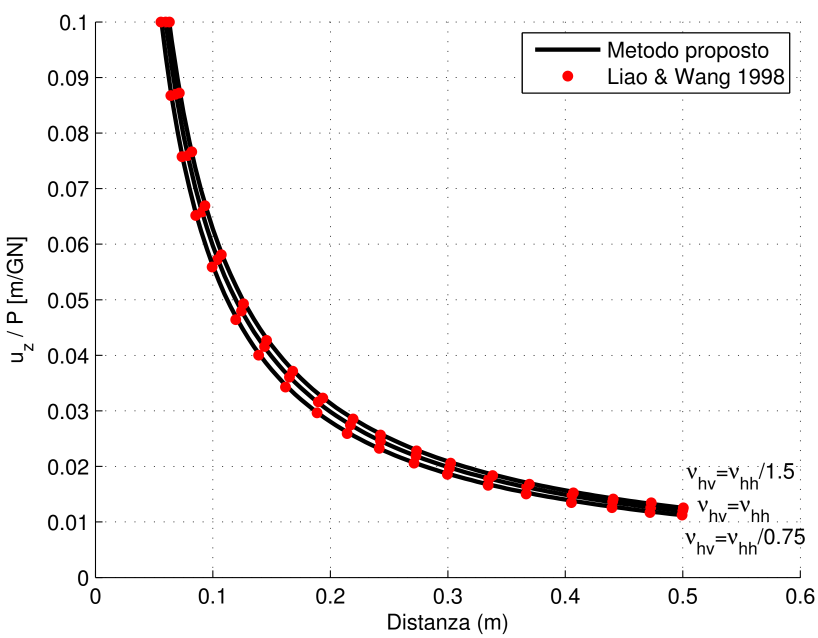
In questov capitolo di illustra il confronto dei risultati ottenuti con la formulazione proposta e alcuni di quelli presenti attualmente in bibliografia. In particolare la formulazione proposta è stata confrontata con i risultati determinati in **Liao, J.J.** e **Wang, C.D.** (1998) - *Elastic solutions for a transversely isotropic half-space subjected to a point load* [81], che considera un carico concentrato verticale applicato in superficie nell'origine del sistema di riferimento.

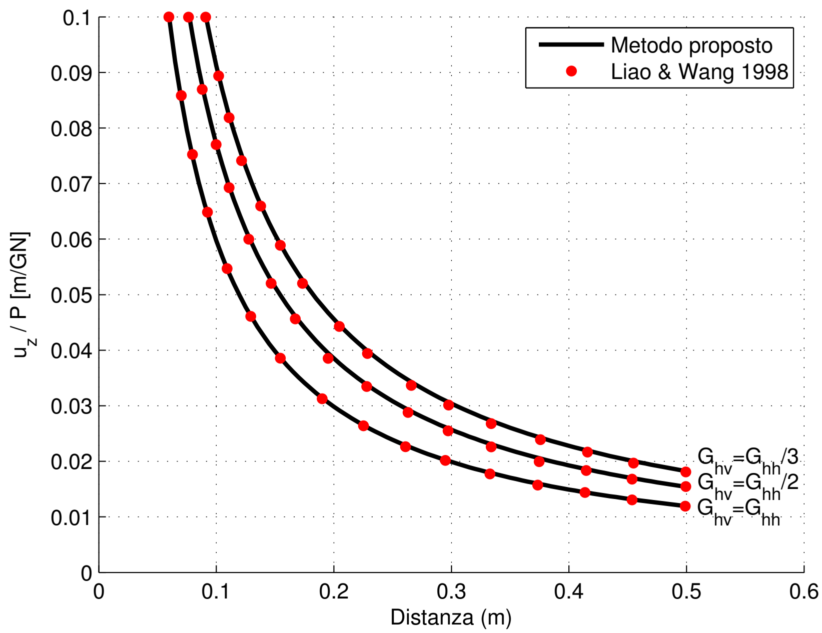
7.1 Confronti con altre soluzioni

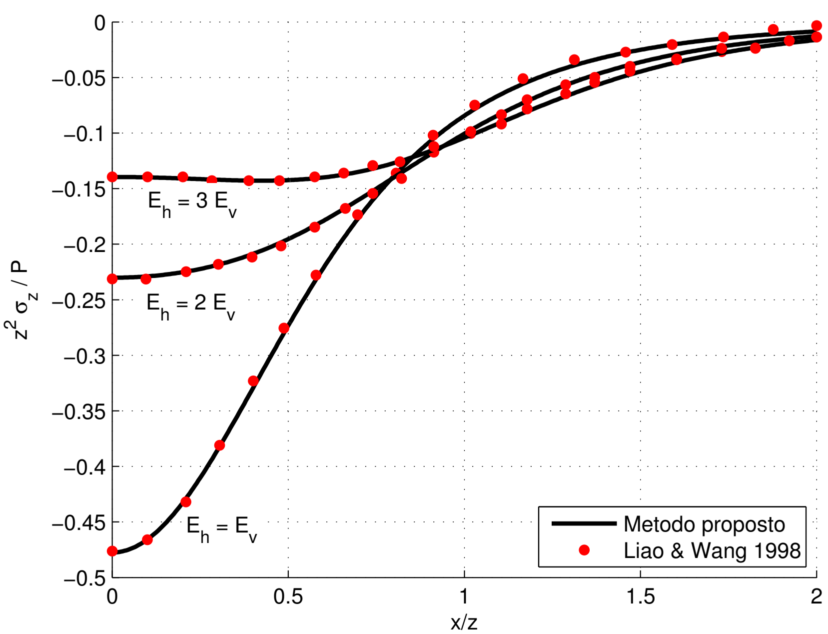
I grafici di seguito riportati mostrano il confronto dei risultati della soluzione proposta rispetto ad altre presenti in letteratura. In particolare i grafici si differenziano in relazione al valore assunto dalla costanti elastiche e i risultati ottenuti con la formulazione proposta sono indicati con la curva continua di colore nero mentre i risultati riportati in [81] sono rappresentati dai pallini rossi.

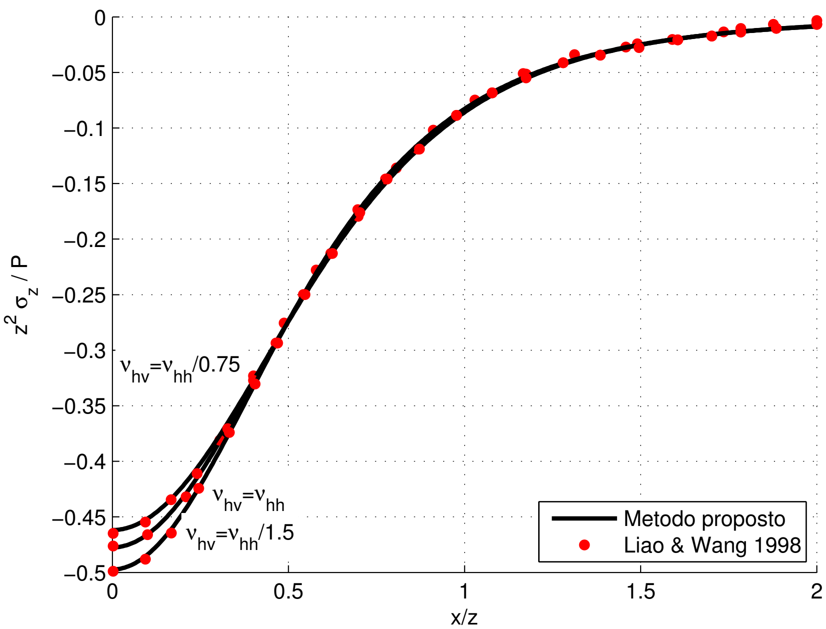
Dal confronto dei due andamenti è possibile constatare che la formulazione proposta riproduce fedelmente quanto riportato in [81].

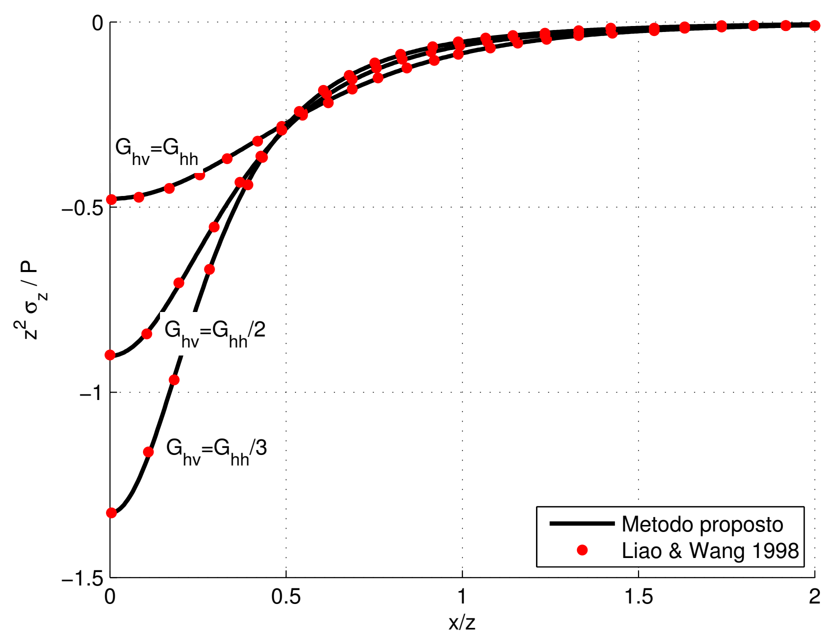

Metodo proposto
Liao & Wang 1998
u_z / P [m/GN]
Distanza (m)
E_h = 3 E_v
E_h = 2 E_v
E_h = E_v


Metodo proposto
Liao & Wang 1998
u_z / P [m/GN]
Distanza (m)
ν_hv=ν_hh/1.5
ν_hv=ν_hh
ν_hv=ν_hh/0.75


Metodo proposto
Liao & Wang 1998
u_z / P [m/GN]
Distanza (m)
G_hv=G_hh/3
G_hv=G_hh/2
G_hv=G_hh
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


z^2 σ_z / P
x/z
E_h = 3 E_v
E_h = 2 E_v
E_h = E_v
Metodo proposto
Liao & Wang 1998
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
−0.3
−0.35
−0.4
−0.45
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
−0.3
−0.35
−0.4
−0.45
−0.5
$z^2 \sigma_z / P$
0
0.5
1
1.5
2
x/z
$\nu_{hv}=\nu_{hh}/0.75$
$\nu_{hv}=\nu_{hh}$
$\nu_{hv}=\nu_{hh}/1.5$
Metodo proposto
Liao & Wang 1998


0
−0.5
−1
−1.5
$z^2 \sigma_z / P$
0
0.5
1
1.5
2
x/z
$G_{hv}=G_{hh}$
$G_{hv}=G_{hh}/2$
$G_{hv}=G_{hh}/3$
Metodo proposto
Liao & Wang 1998

Conclusioni

Nel lavoro di tesi sono state derivate le espressioni analitiche di spostamenti, deformazioni e tensioni prodotti in un punto arbitrario di un semispazio costituito da un materiale trasversalmente isotropo ed omogeneo da una pressione verticale variabile con legge costante o lineare applicata su una regione di forma poligonale arbitraria.

L'approccio illustrato nell'elaborato di tesi rappresenta un'estensione della classica soluzione di Michell ed è basata su una versione generalizzata del teorema di Gauss e su recenti risultati di teoria del potenziale.

Le formule di spostamenti, deformazioni e tensioni sono espresse come somma di quantità algebriche che dipendono esplicitamente dai vettori posizione dei vertici della regione, dalle proprietà del materiale del semispazio e dalla legge di carico.

Le formule cui si è pervenuti nell'elaborato di tesi sono state validate confrontando i risultati numerici ottenuti dalla loro implementazione in Matlab con quelli riportati in altre pubblicazioni e, successivamente, producento abachi e tabelle per una vasta a gamma di materiali caratterizzati da un legame costitutivo trasversalmente isotropo.

L'estensione dell'approccio proposto a leggi di carico più generali e, in particolare, al caso di carichi orizzontali, intesa come generalizzazione del problema classico di Cerruti [18], costituisce un possibile sviluppo futuro.

Appendice A

Dimostrazione della Formula (4.16)

Sebbene rappresenti una forma generalizzata di un noto risultato adottato nella teoria del potenziale, e.g. vedasi [61], è istruttivo fornire una dimostrazione della formula (6.44).

A tal fine si può valutare l'integrale (6.44) come:

$$\int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) dA = \int_{\Omega - C} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) dA + \int_{C} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) dA \tag{A.1}$$

dove C è l'intersezione fra Ω ed un intorno circolare del punto $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, vedasi anche Figura A.1. Di conseguenza, il primo integrale al secondo membro della precedente equazione è zero, in quanto la divergenza che compare nella funzione integranda è nulla su $\Omega - C$, i.e. quando $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$.

Al fine di valutare il secondo integrale, la divergenza è regolarizzata a $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ considerando l'identità:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + \varepsilon^2}\right) = \frac{2\varepsilon^2}{(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + \varepsilon^2)^2} \tag{A.2}$$

dove ε è un parametro scalare.

Quindi, l'ultimo integrale nell'equazione (A.1) può essere valutato come:

$$\int_{C} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right) dA = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C} \psi(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho} + \varepsilon^2}\right) dA \tag{A.3}$$

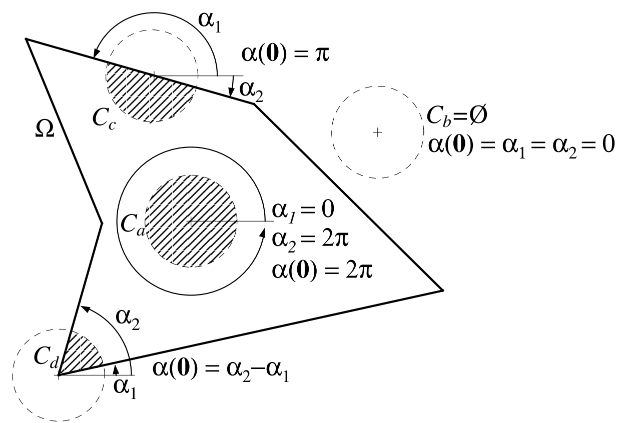


Figura A.1: Interpretazione Geometrica della correzione della singolarità $\alpha(\mathbf{0})$ nella (6.44) e associati valori corrispondenti alle quattro posizioni distinte del punto di singolarità $\mathbf{0}$ e dell'intersezione C tra Ω e un intorno circolare di $\mathbf{0}$: a) $\mathbf{0}$ appartenente all'interno di Ω; b) $\mathbf{0}$ esterno ad Ω; c) $\mathbf{0}$ su un lato di Ω; d) $\mathbf{0}$ al vertice di Ω.

Richiamando la formula (A.2), l'integrale nella precedente equazione può essere valutato in coordinate polari come segue:

$$\int_C \psi(\boldsymbol{\rho})\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+\varepsilon^2}\right)dA = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_0^R \psi(\boldsymbol{\rho})\frac{2\varepsilon^2 r}{\left(r^2+\varepsilon^2\right)^2}drd\alpha \tag{A.4}$$

dove R è il raggio dell'intorno circolare C.

Sostituendo lo sviluppo in serie di Taylor $\psi(\boldsymbol{\rho})$ troncato al secondo ordine:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \psi(\mathbf{0}) + \phi_{,x}|_{\mathbf{0}}\, r\cos\alpha + \phi_{,y}|_{\mathbf{0}}\, r\sin\alpha + O(r^2) \tag{A.5}$$

nella formula (A.4), segue:

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_0^R \psi(\boldsymbol{\rho})\frac{2\varepsilon^2 r}{(r^2+\varepsilon^2)^2} dr d\alpha = \\
&= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_0^R \left[\psi(\mathbf{0}) + O(r^2)\right]\frac{2\varepsilon^2 r}{(r^2+\varepsilon^2)^2} + \\
&\qquad\qquad + \left(\phi_{,x}|_{\mathbf{0}}\cos\alpha + \phi_{,y}|_{\mathbf{0}}\sin\alpha\right)\frac{2\varepsilon^2 r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}\, dr d\alpha = \\
&= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\mathbf{0})\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2+\varepsilon^2}\right) + O(\varepsilon^2) + \\
&\qquad + \left(\phi_{,x}|_{\mathbf{0}}\cos\alpha + \phi_{,y}|_{\mathbf{0}}\sin\alpha\right)\varepsilon\left[\arctan\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon R}{R^2+\varepsilon^2}\right] d\alpha = \\
&= \psi(\mathbf{0})\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{R^2+\varepsilon^2}\right)\alpha(\mathbf{0}) + O(\varepsilon^2)\alpha(\mathbf{0}) + \\
&\quad + \varepsilon\left[-\phi_{,x}|_{\mathbf{0}}\Delta\sin\alpha_{12} + \phi_{,y}|_{\mathbf{0}}\Delta\cos\alpha_{12}\right]\left[\arctan\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon R}{R^2+\varepsilon^2}\right]
\end{aligned} \tag{A.6}$$

dove:

$$\alpha(\mathbf{0}) = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \Delta\sin\alpha_{12} = \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \qquad \Delta\cos\alpha_{12} = \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \tag{A.7}$$

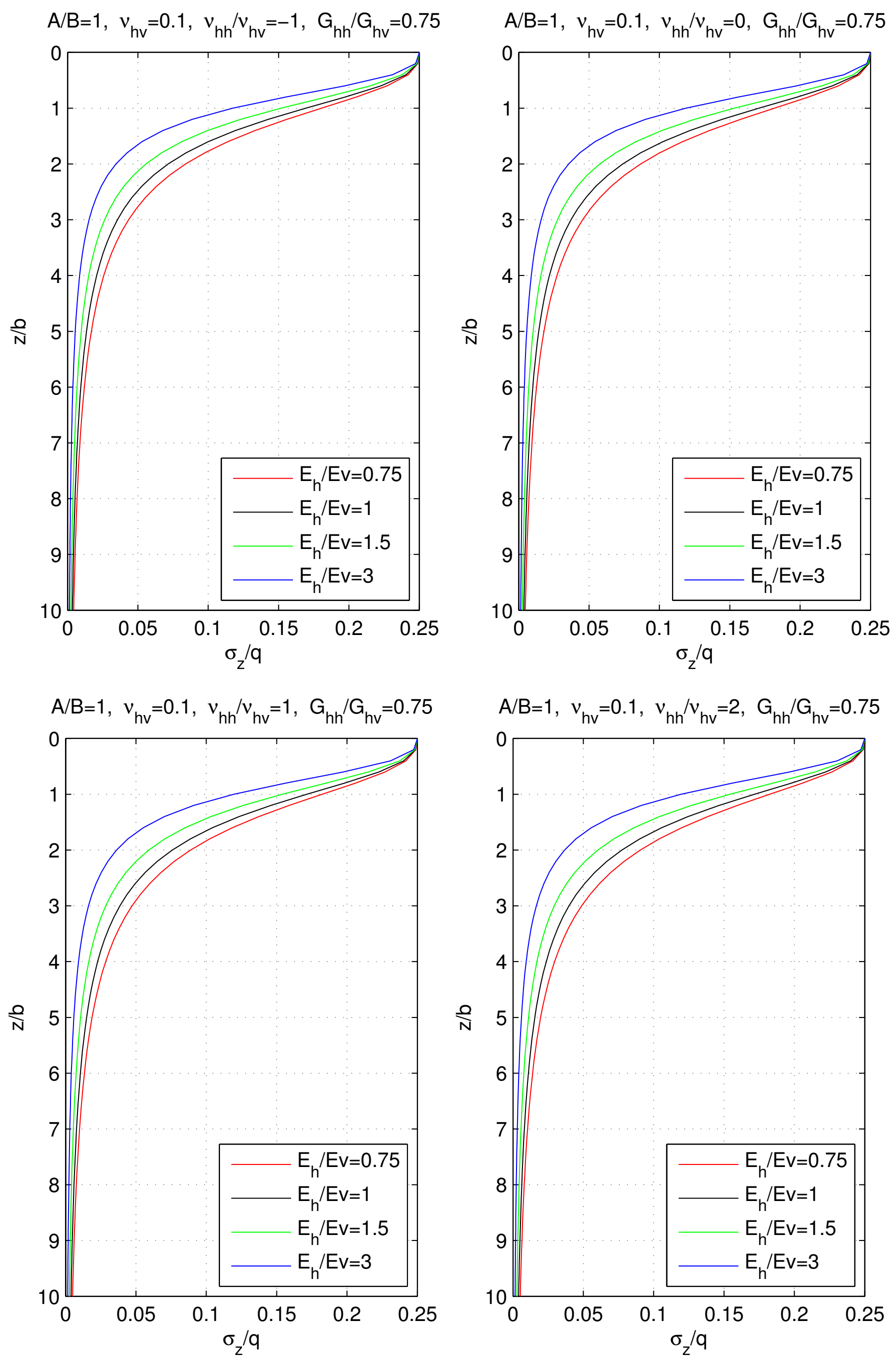
Infine, la sostituzione di (A.4) e (A.6) nella (A.3) fornisce:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_C \psi(\boldsymbol{\rho})\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}+\varepsilon^2}\right) dA = \psi(\mathbf{0})\alpha(\mathbf{0}) \tag{A.8}$$

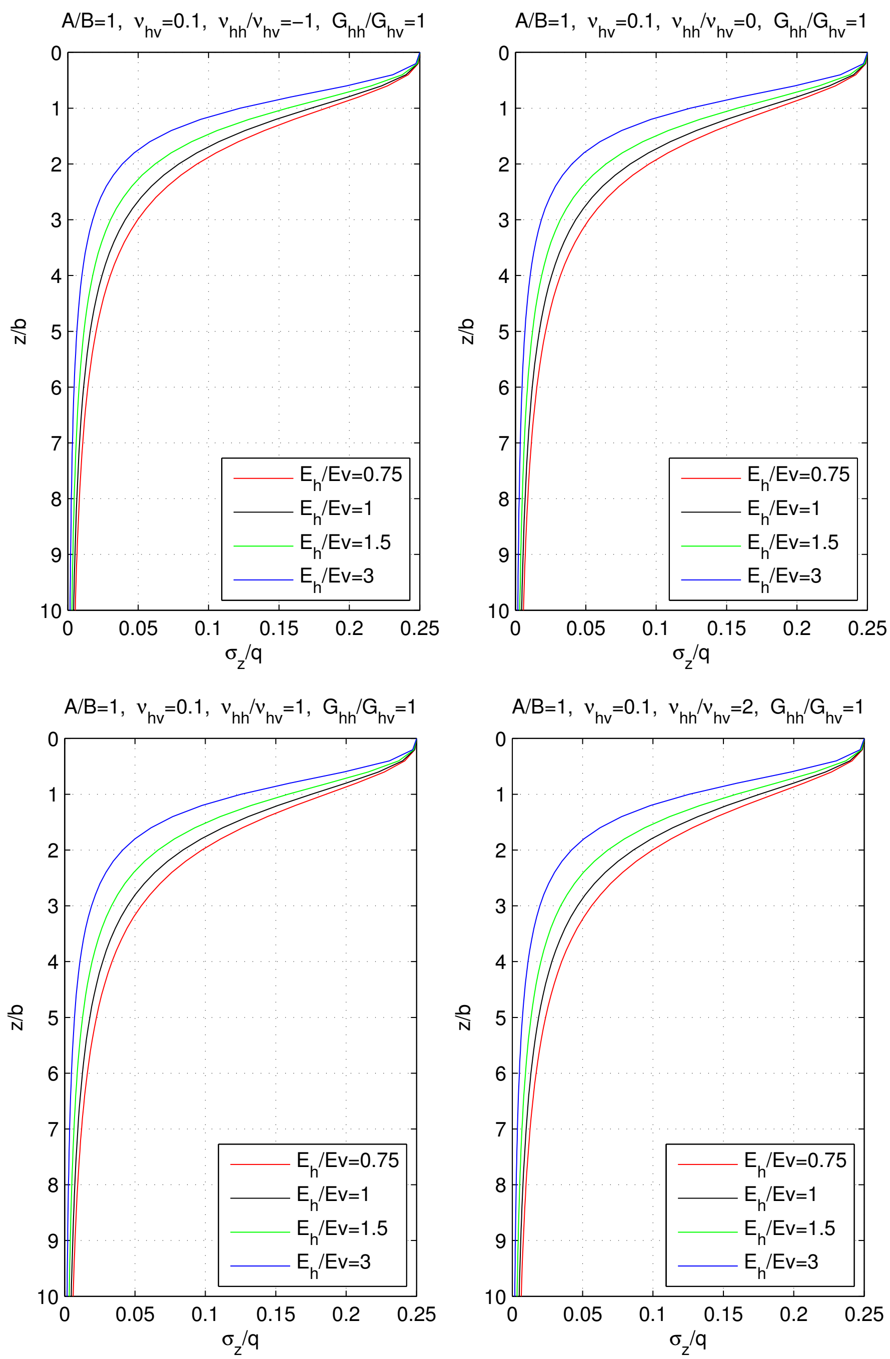
dunque la formula (6.44).

Appendice B

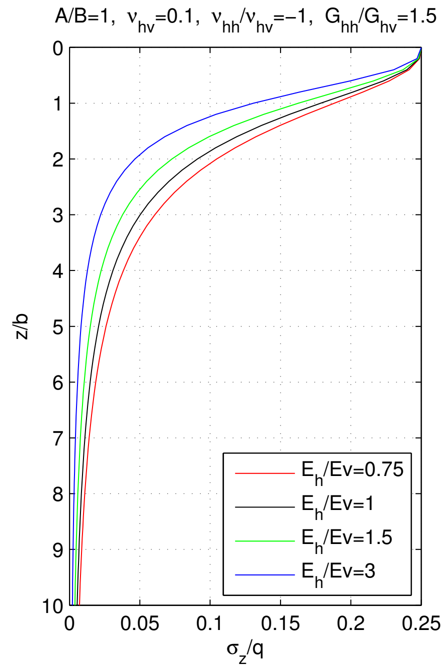
Abachi e tabelle per il caso del carico rettangolare

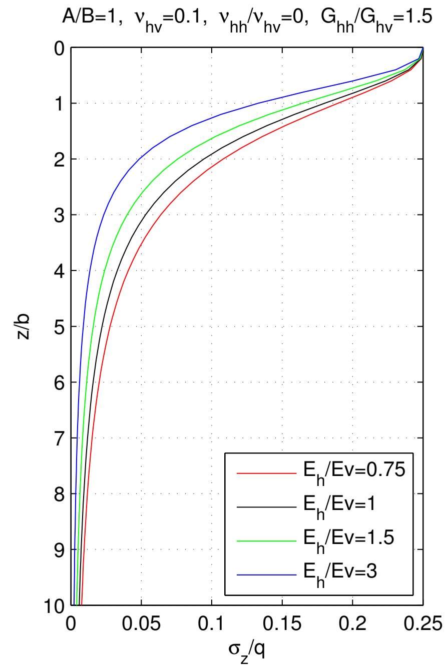


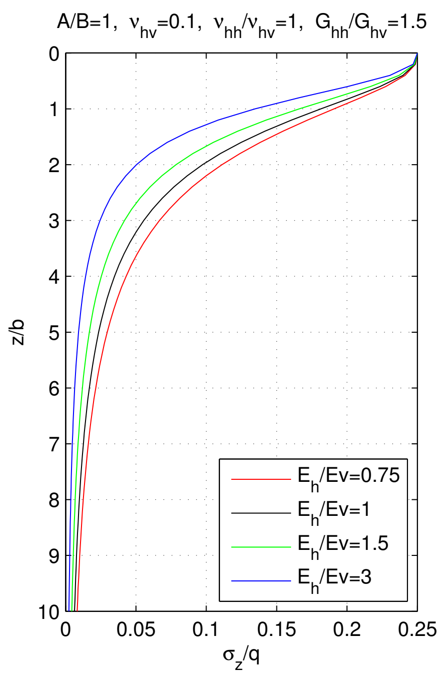
A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=0.75
A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=0.75
A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=0.75
A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=0.75
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

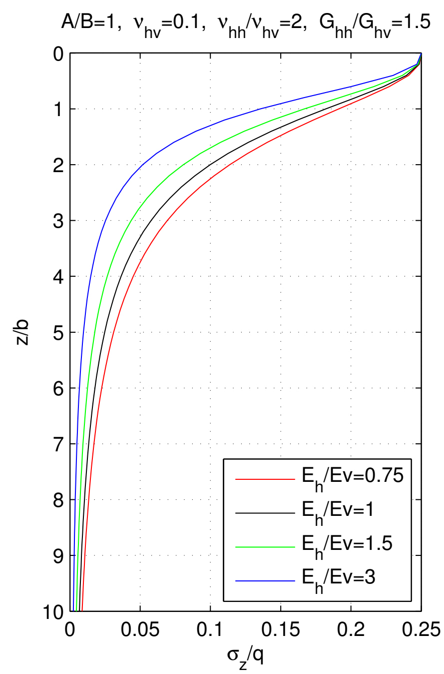


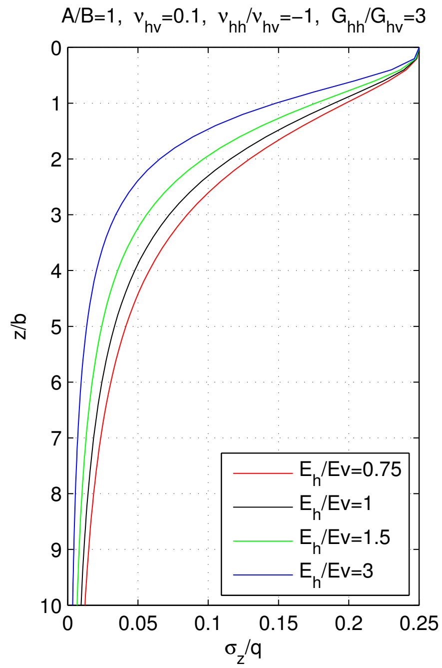
A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

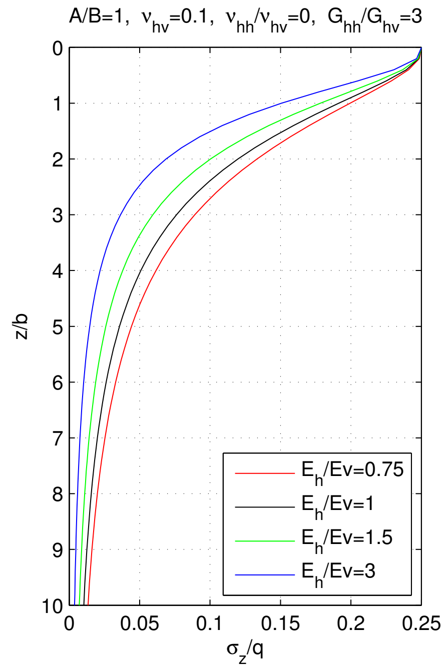

A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

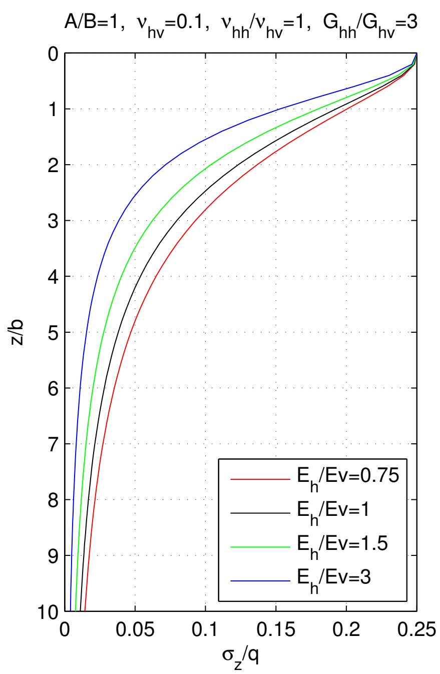

A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

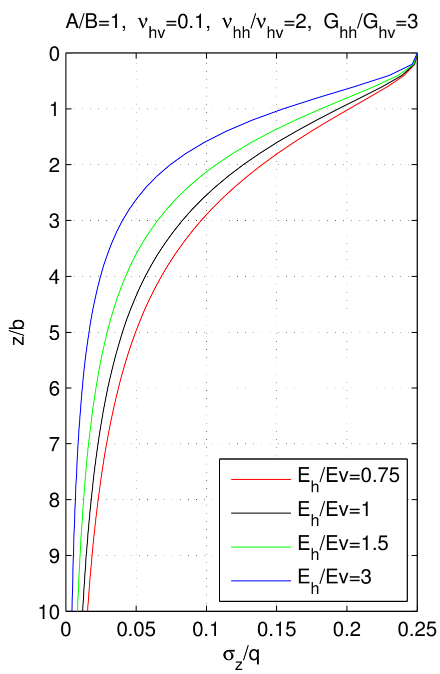

A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

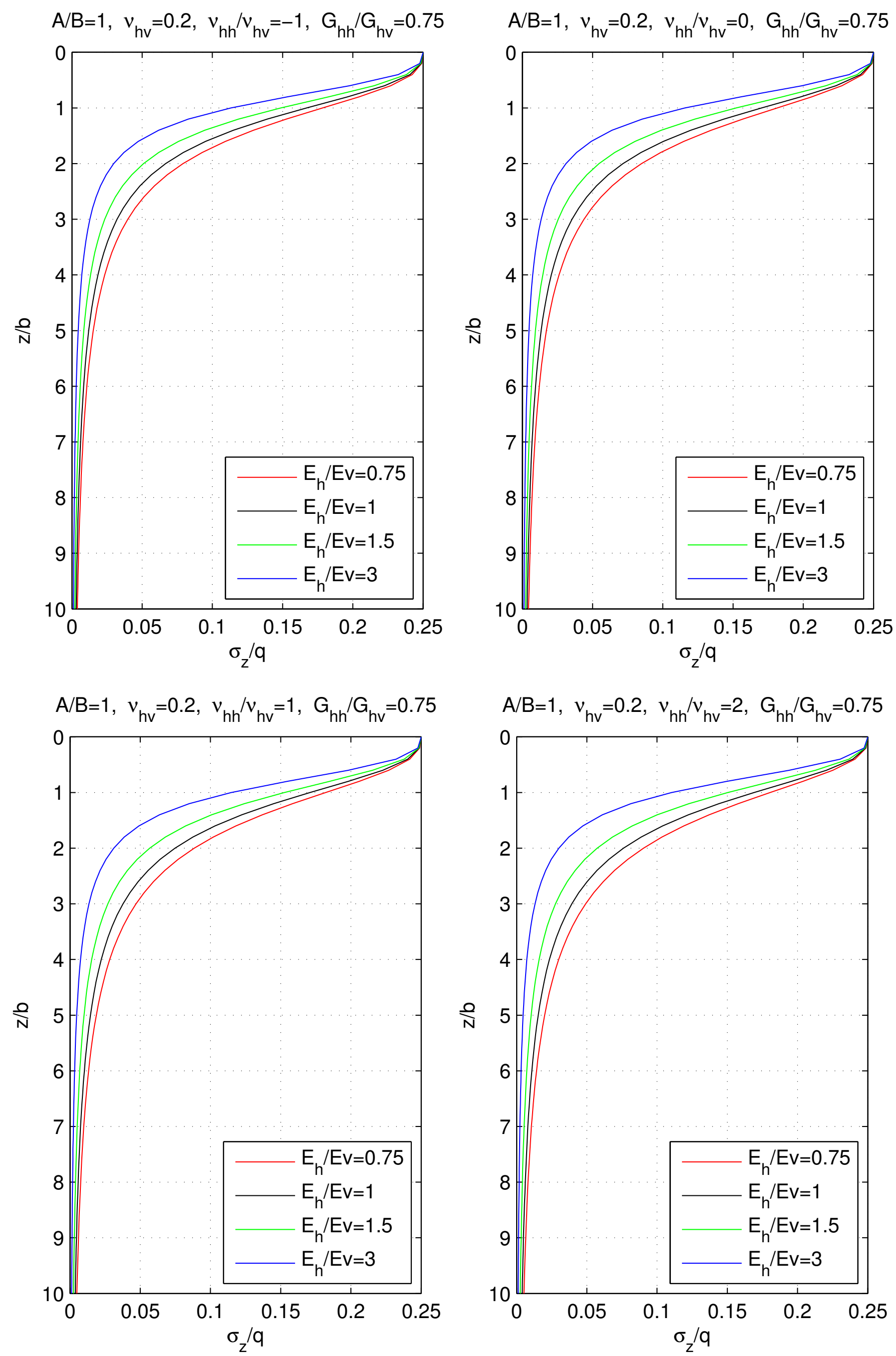

A/B=1, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

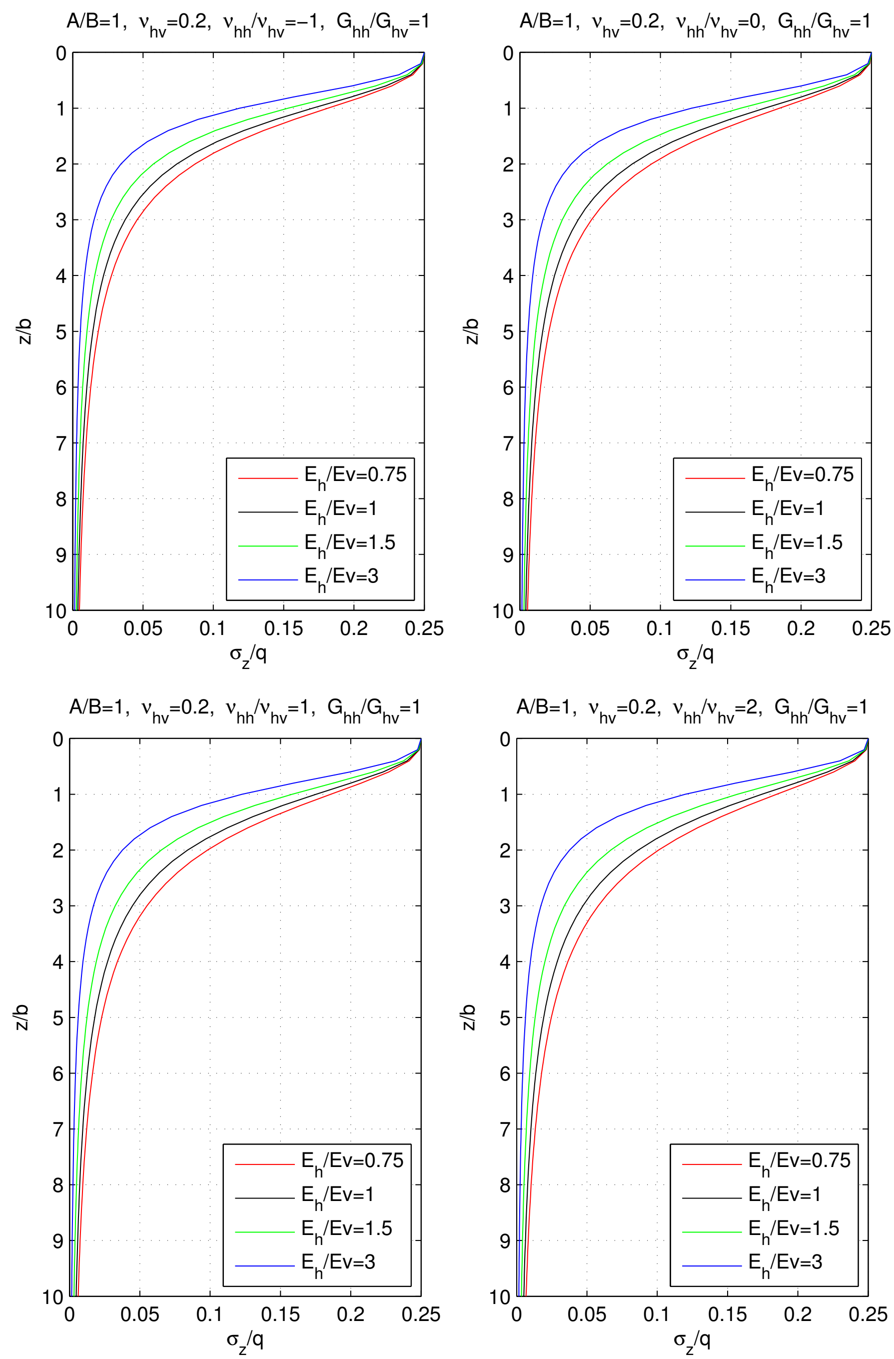

A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

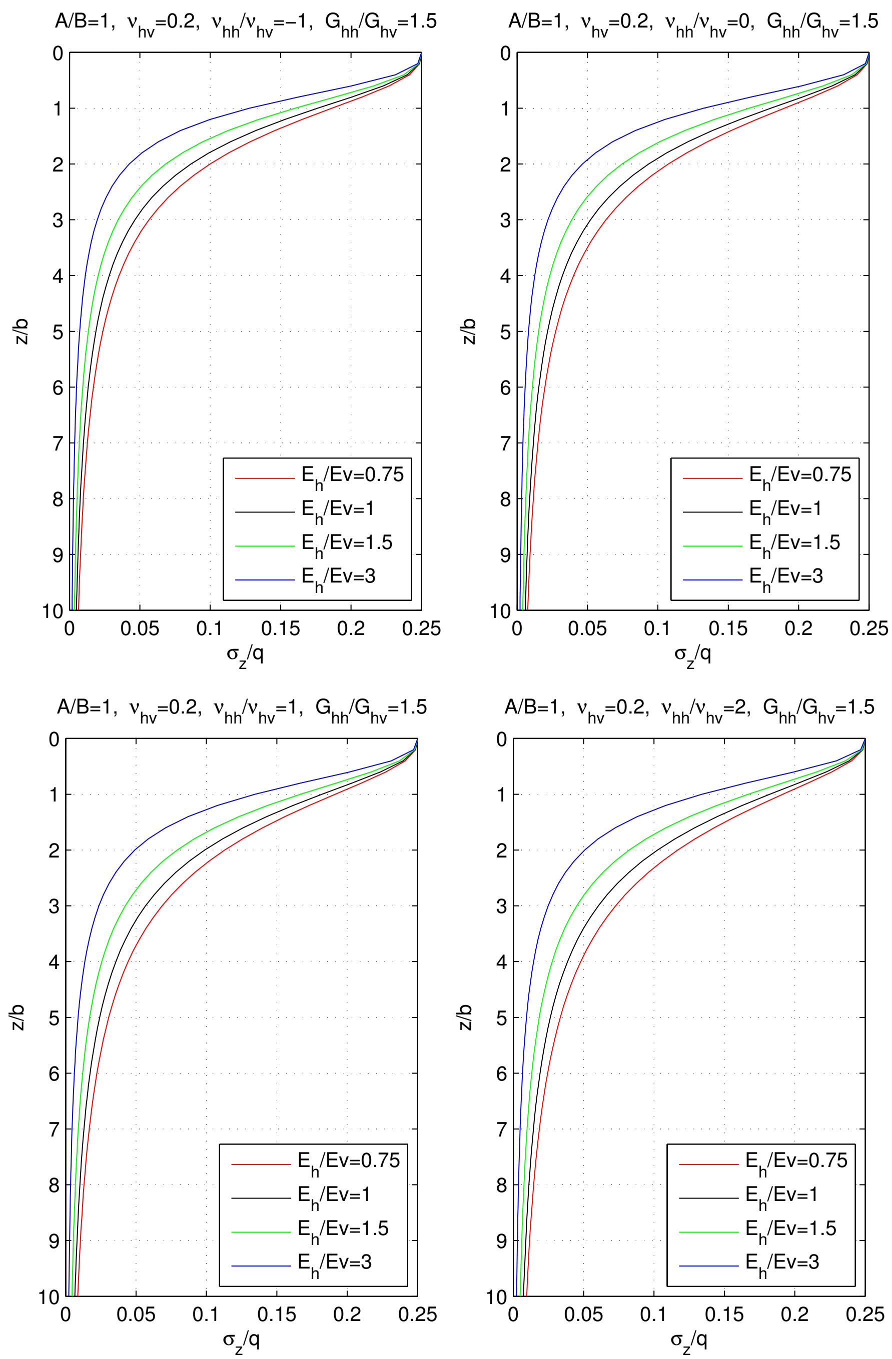

A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3


A/B=1, νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

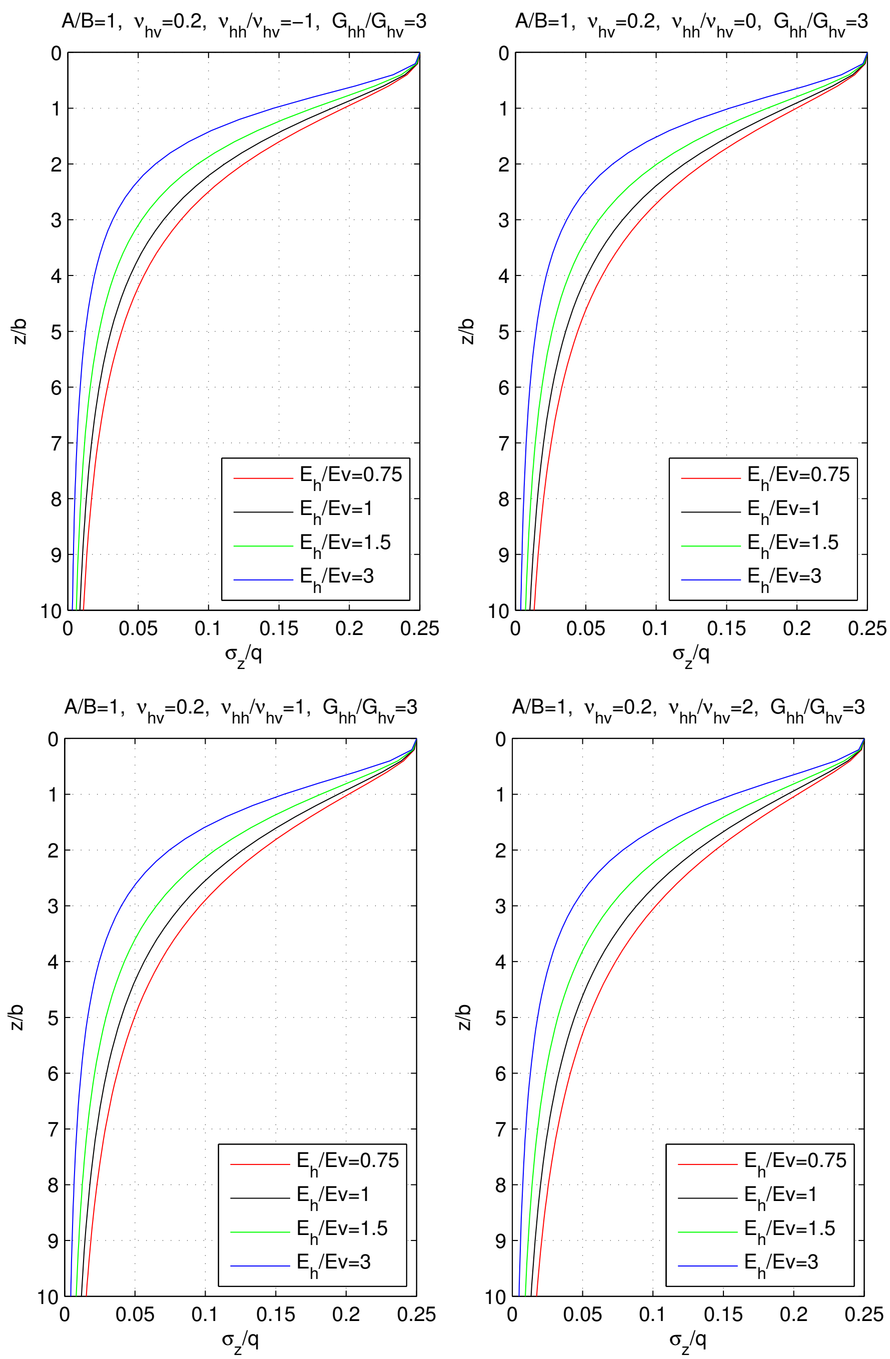


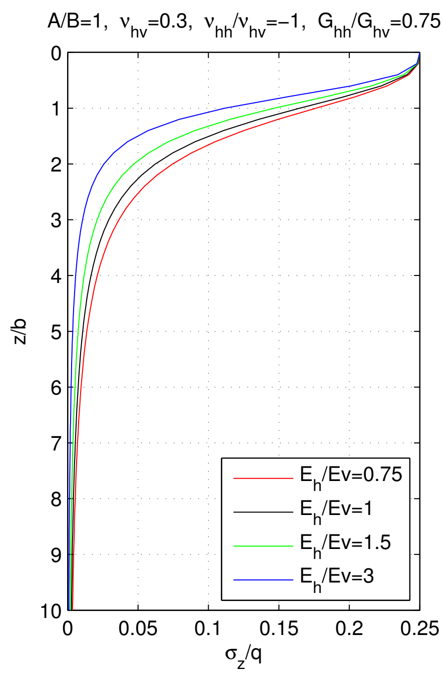
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

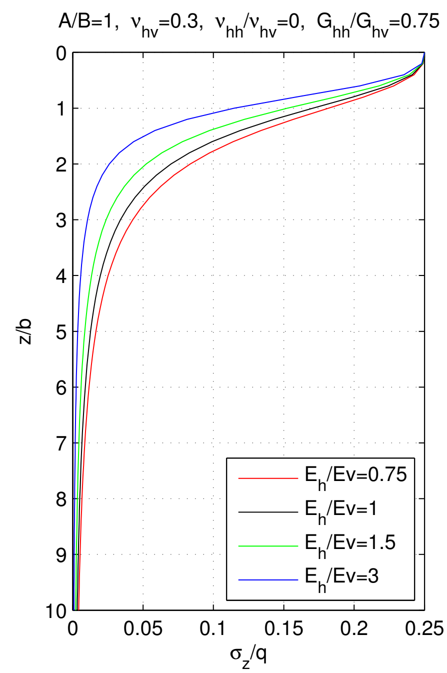

A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

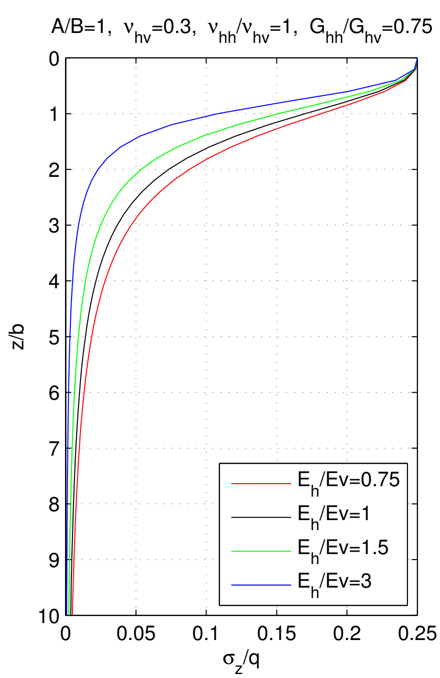


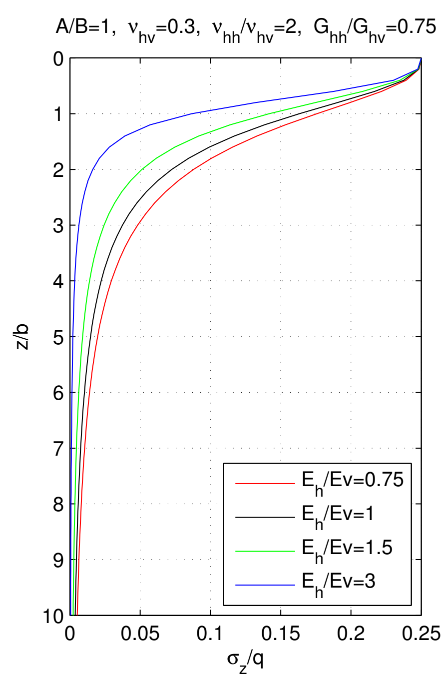
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

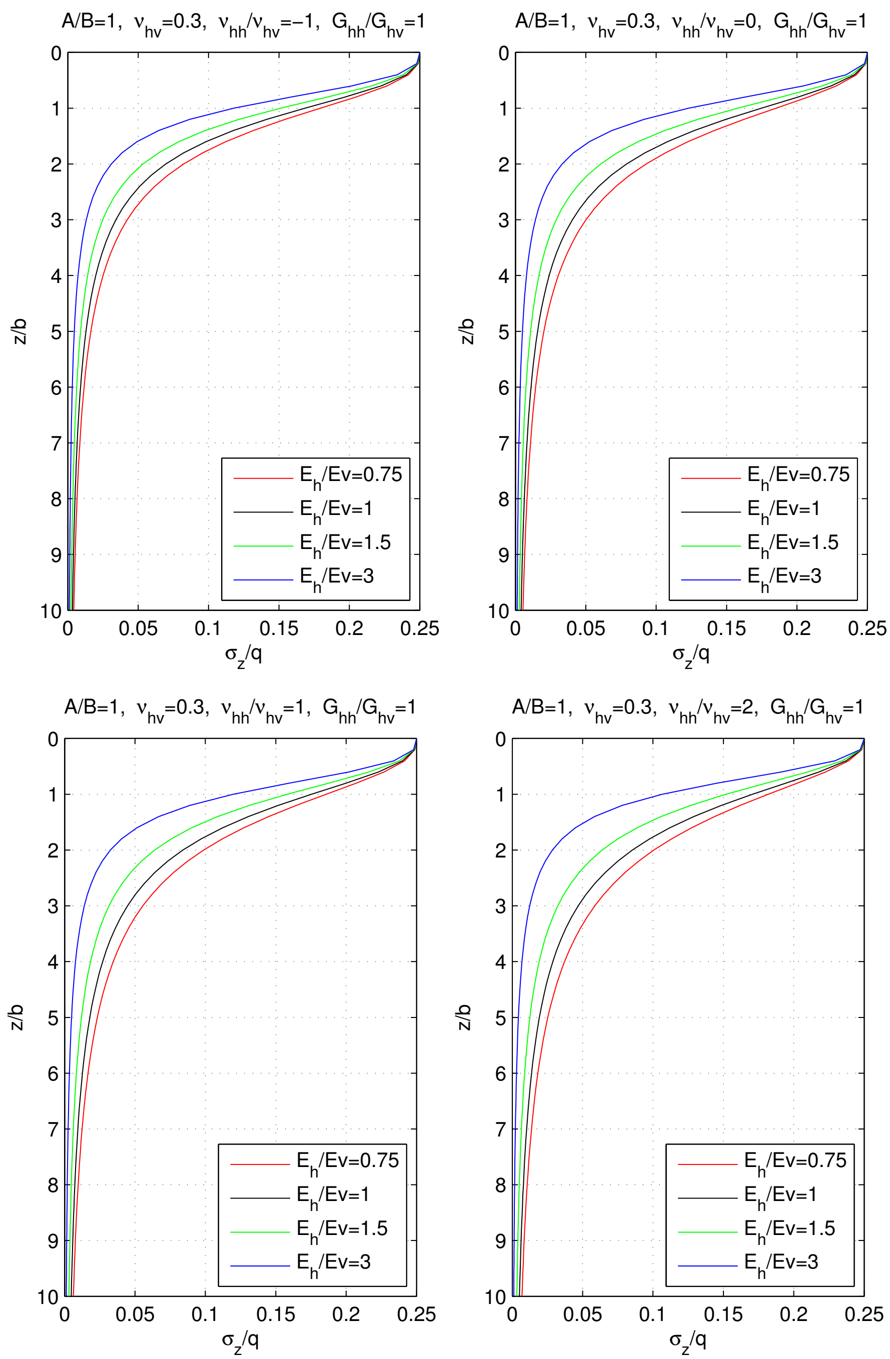

A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

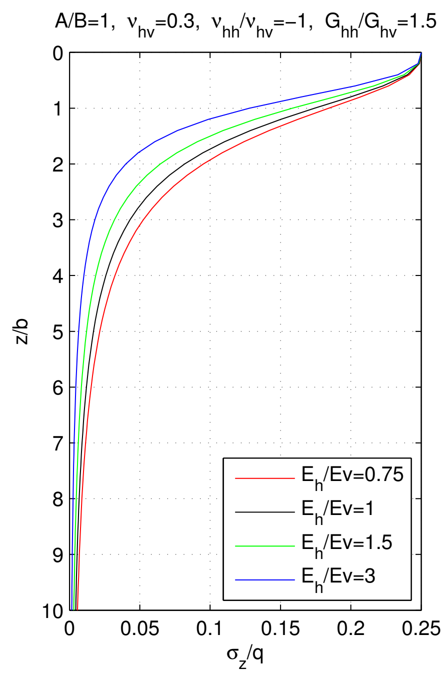

A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

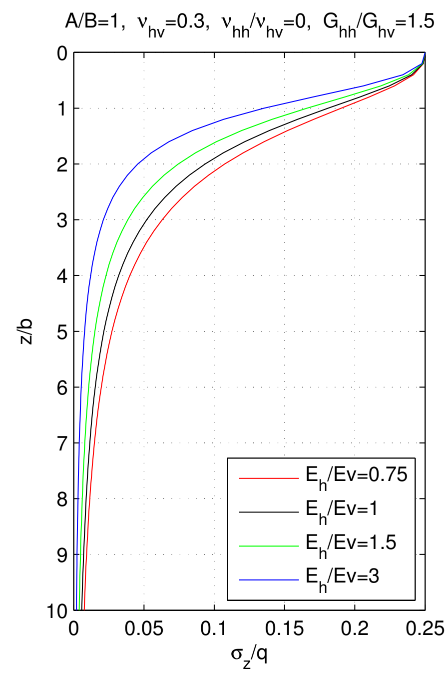

A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

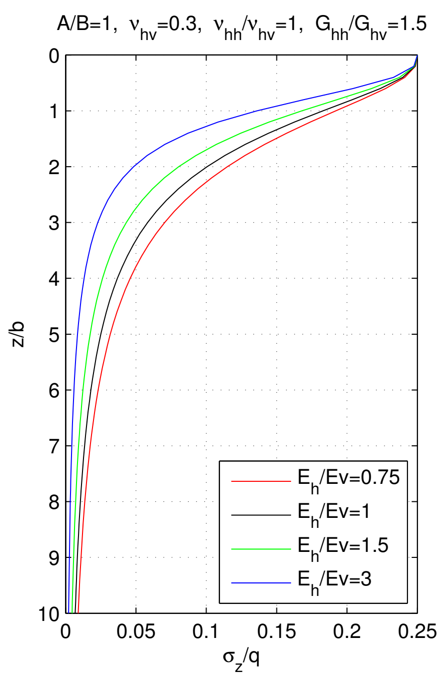

A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

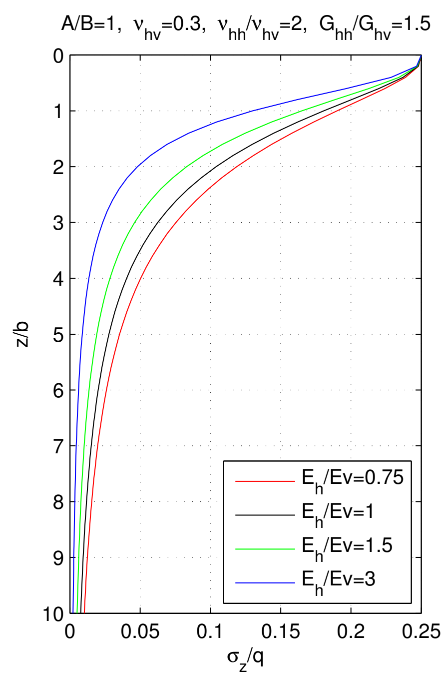


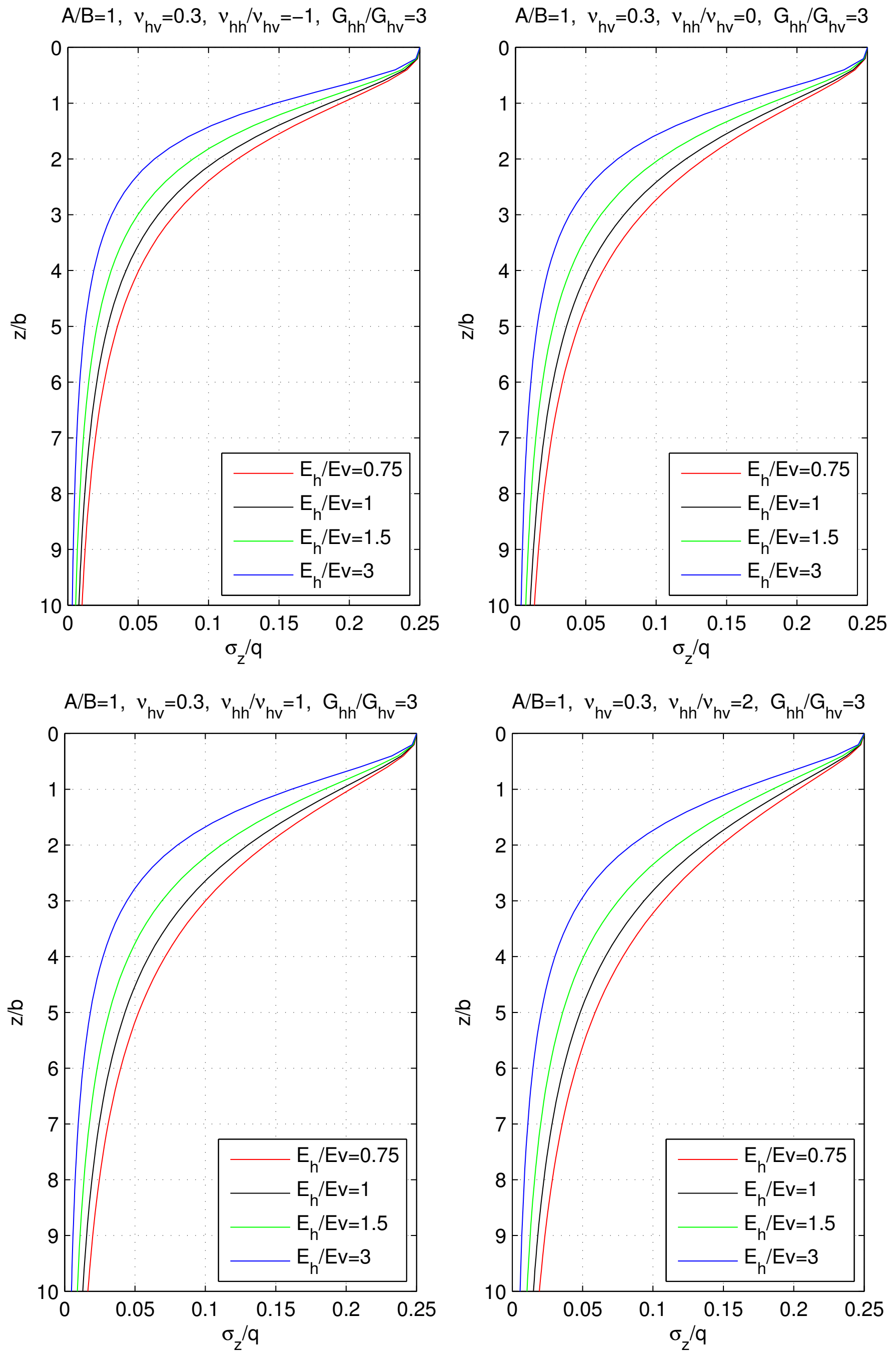
A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

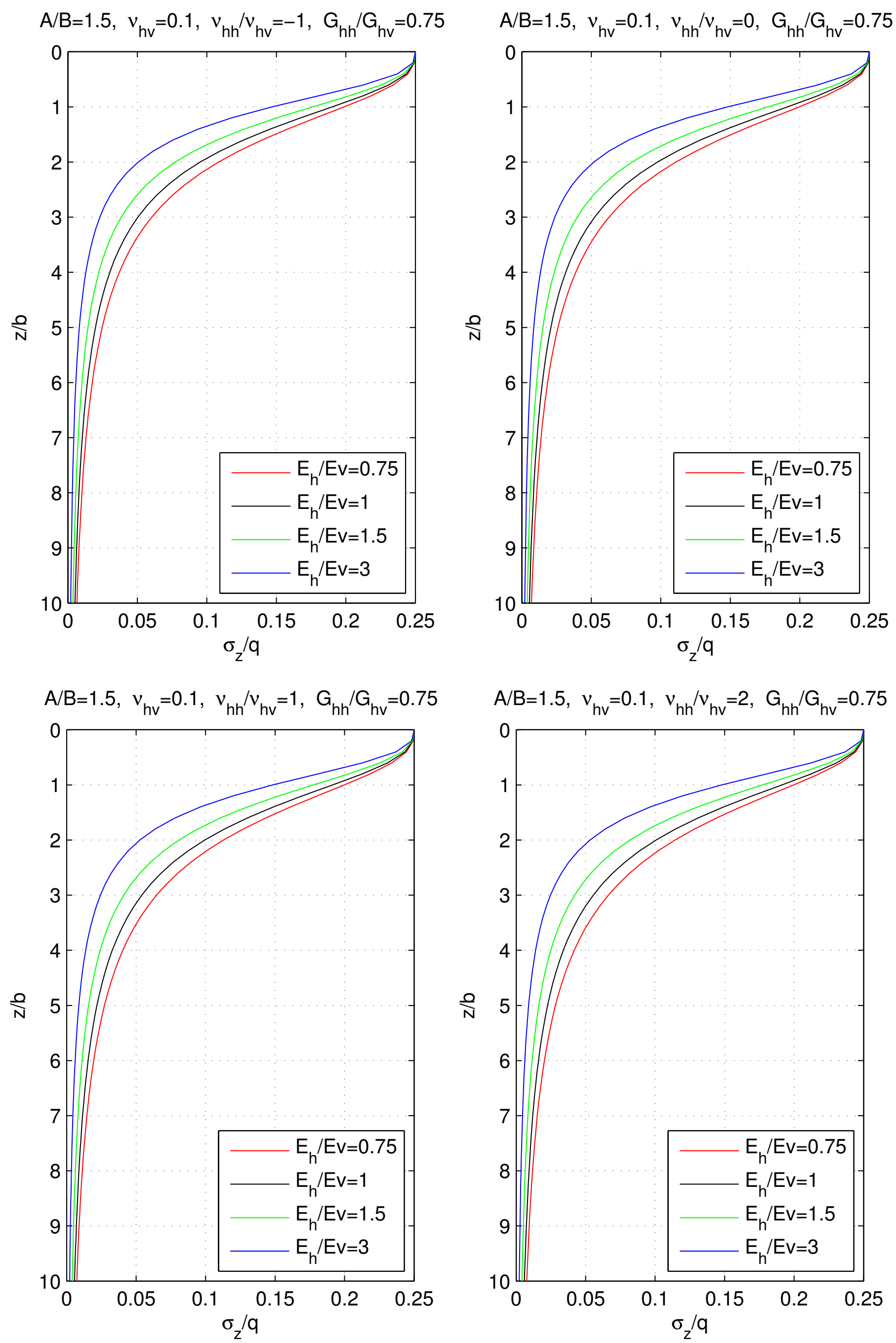

A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

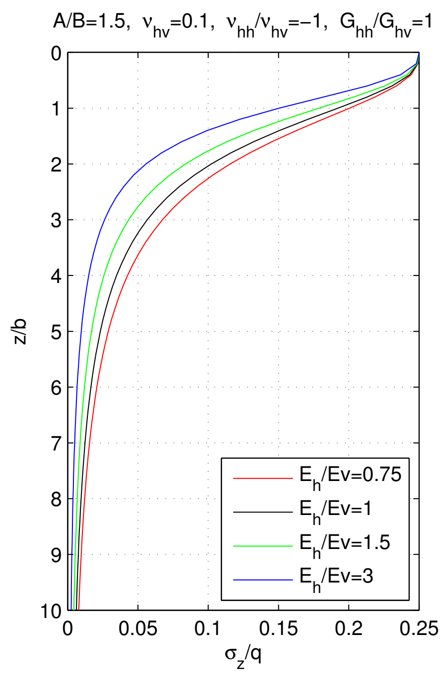

A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

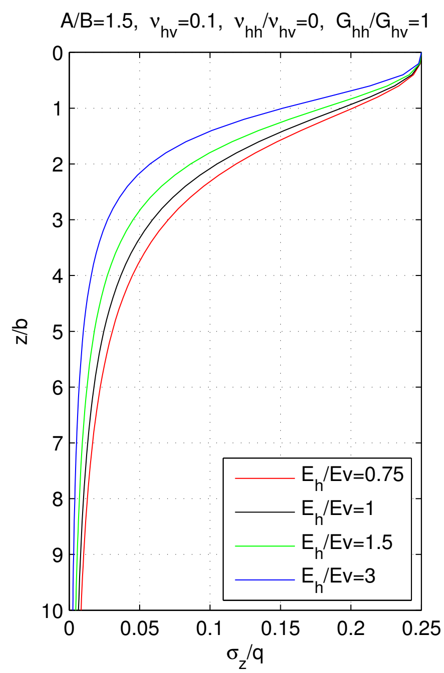

A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

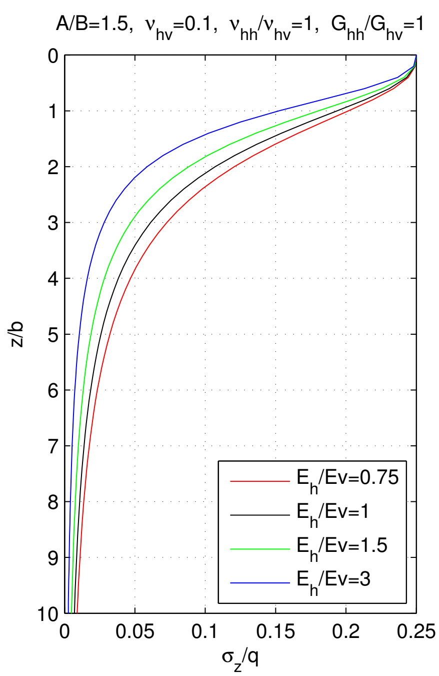

A/B=1, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

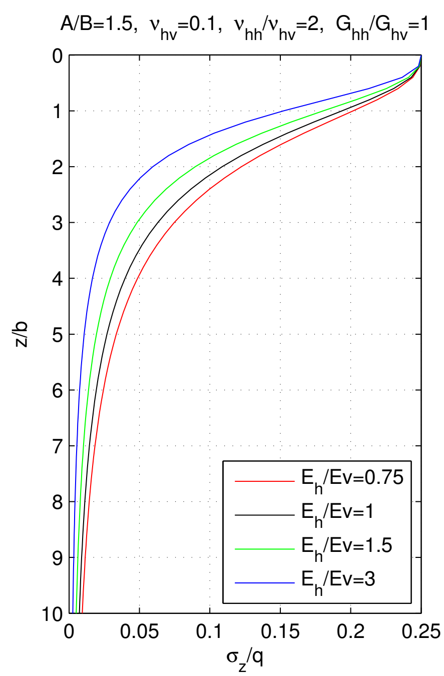

A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=3
A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=3
A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=3
A/B=1, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

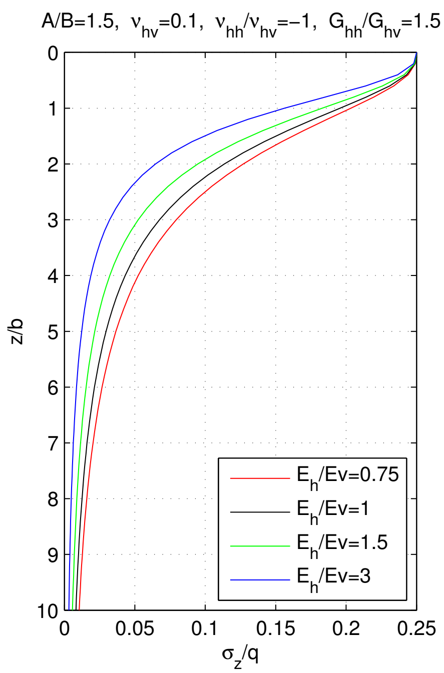

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

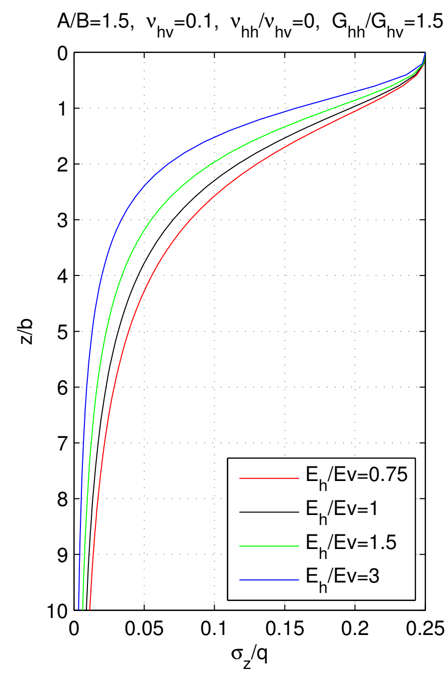

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

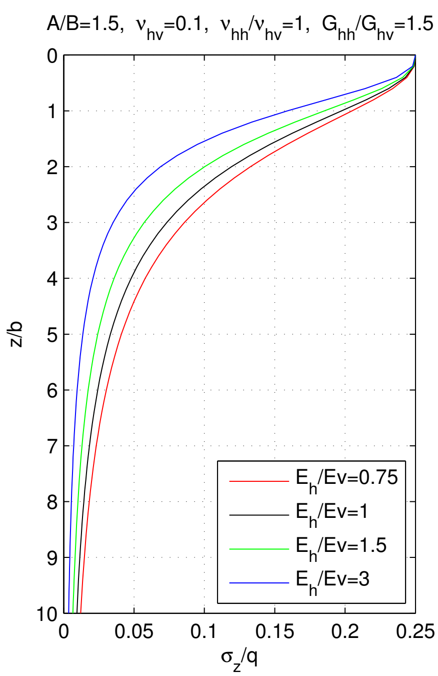

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

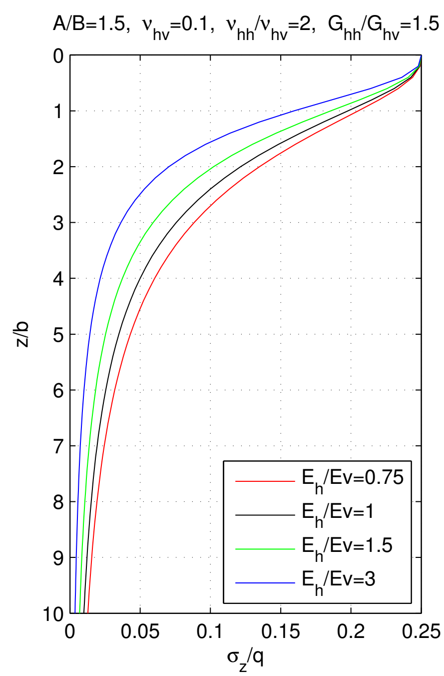

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

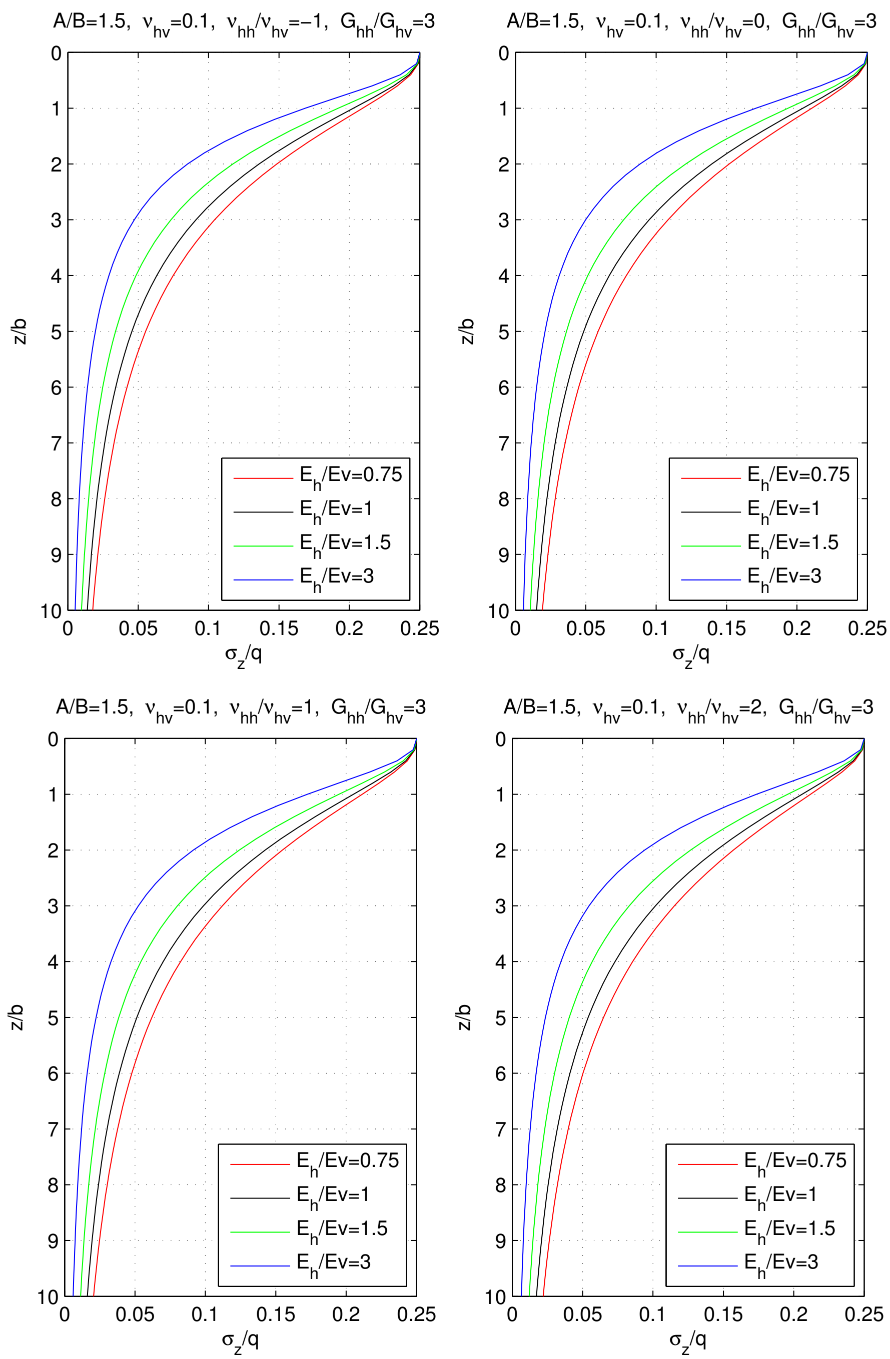

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

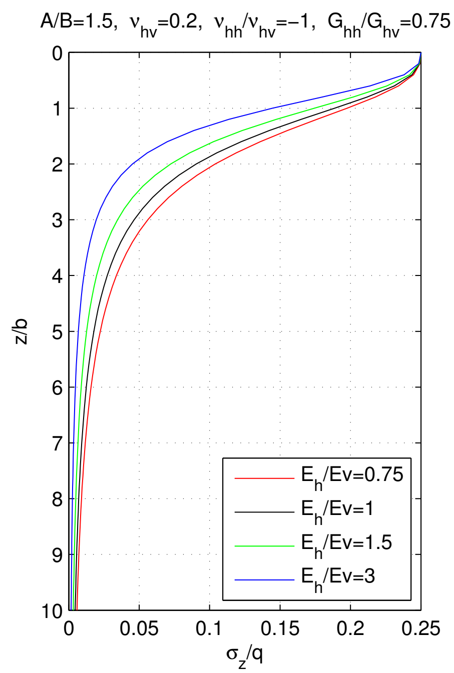

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

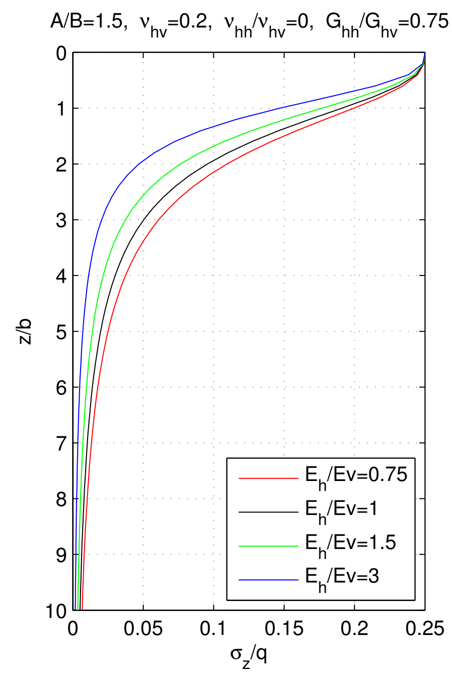

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

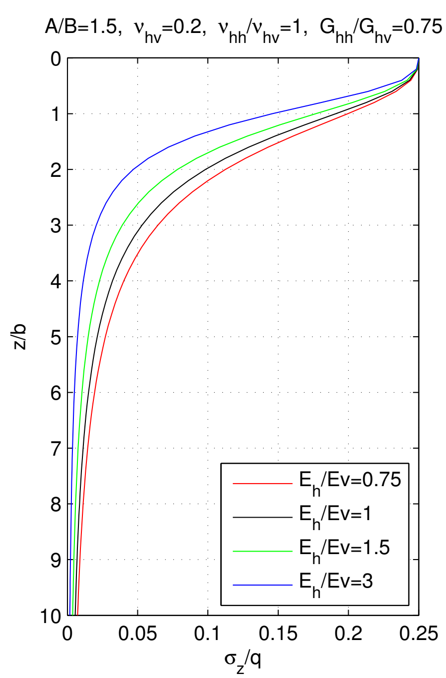

A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

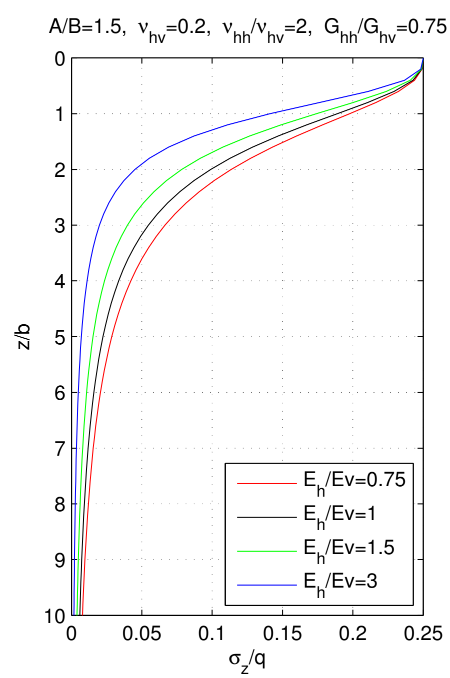


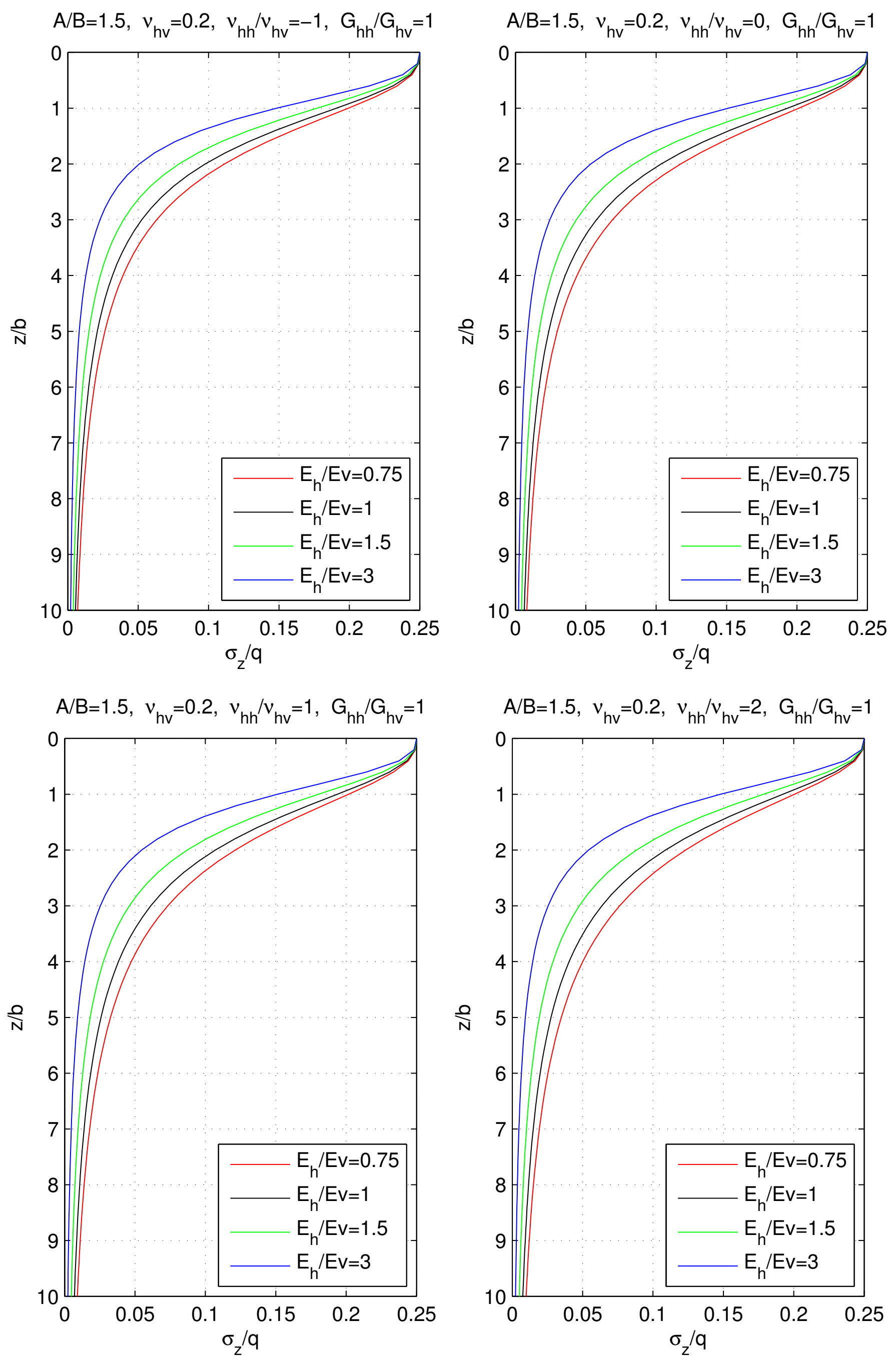
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=1.5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

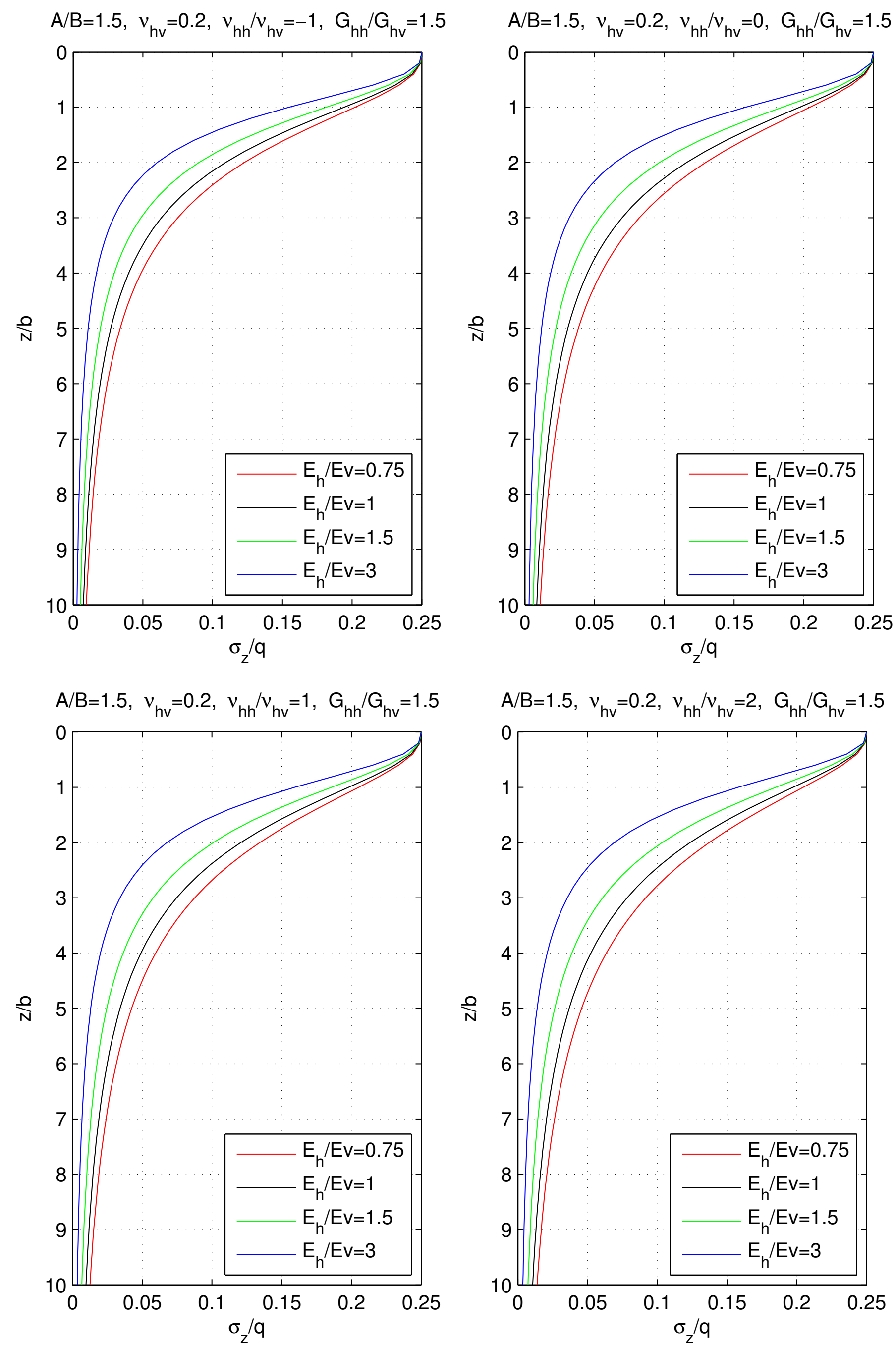

A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

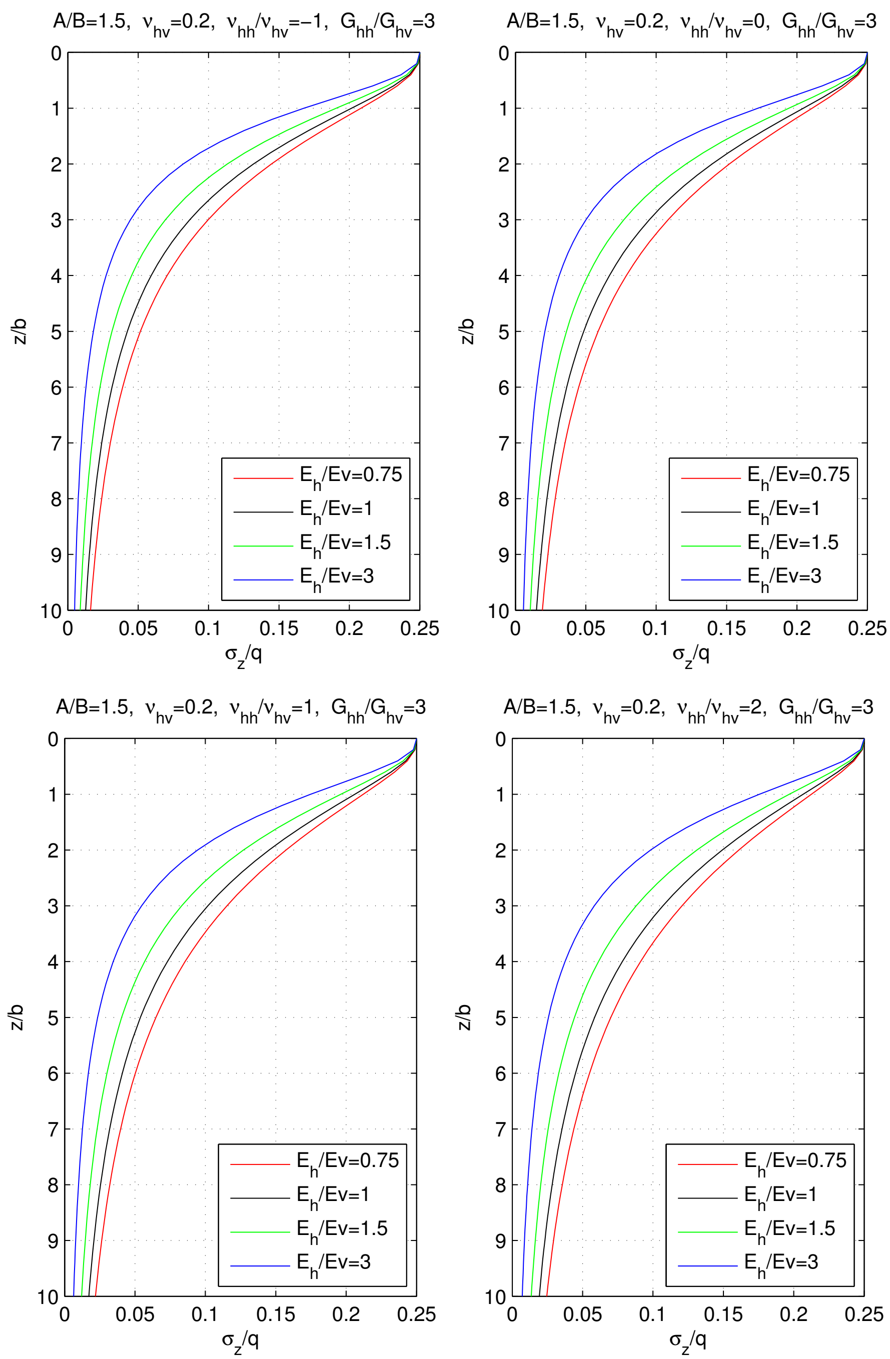

A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

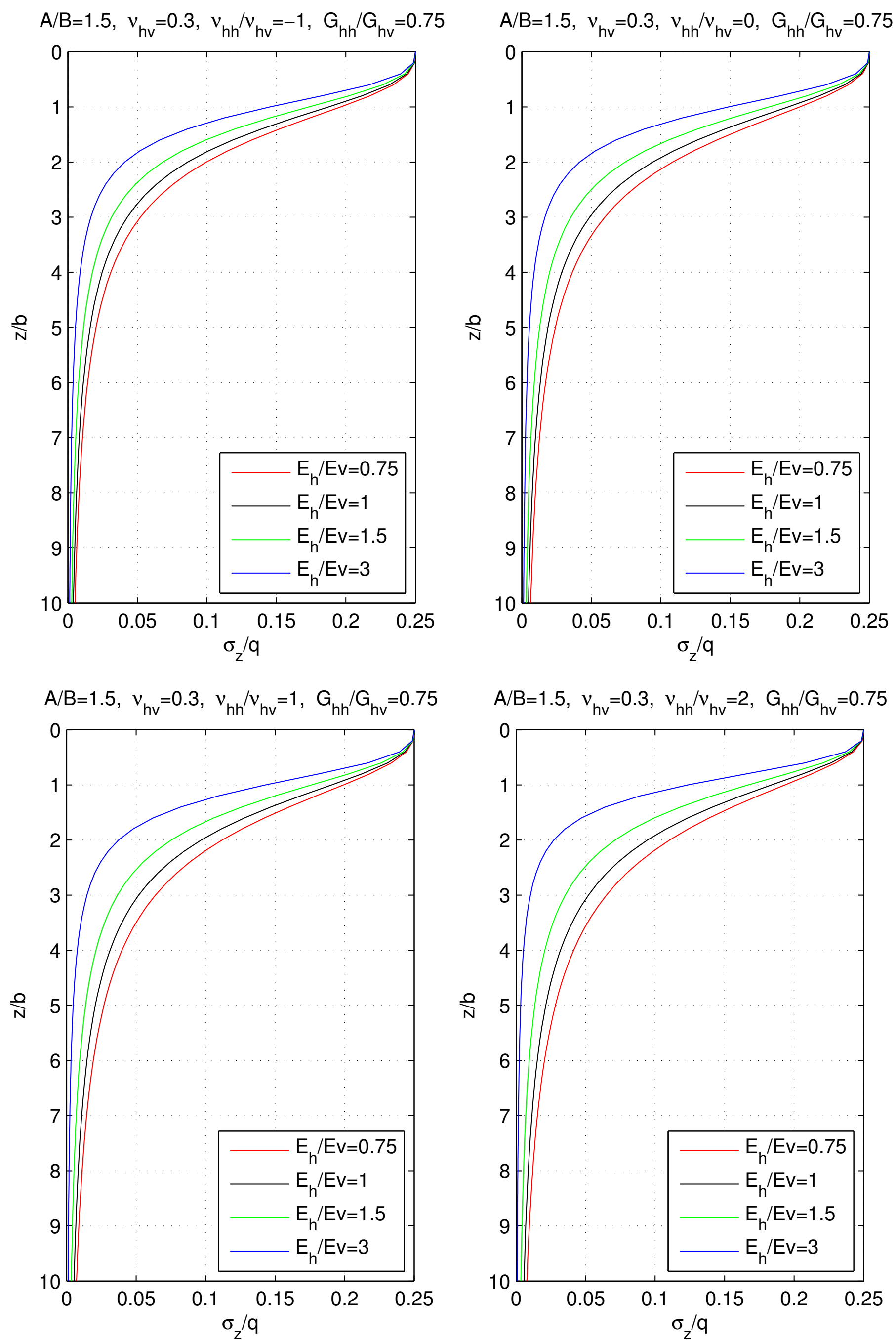

A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

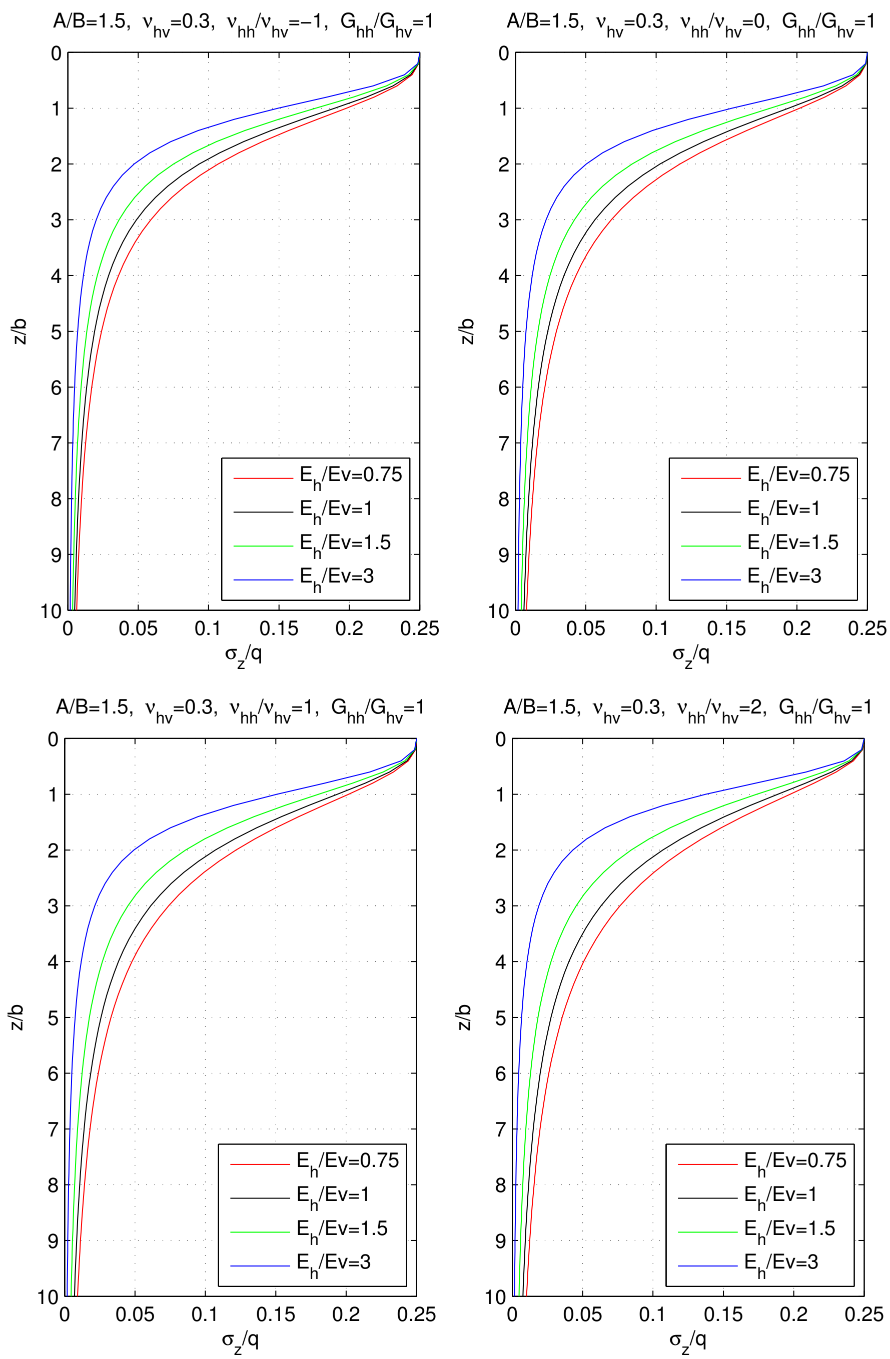

A/B=1.5, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1
A/B=1.5, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1
A/B=1.5, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1
A/B=1.5, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

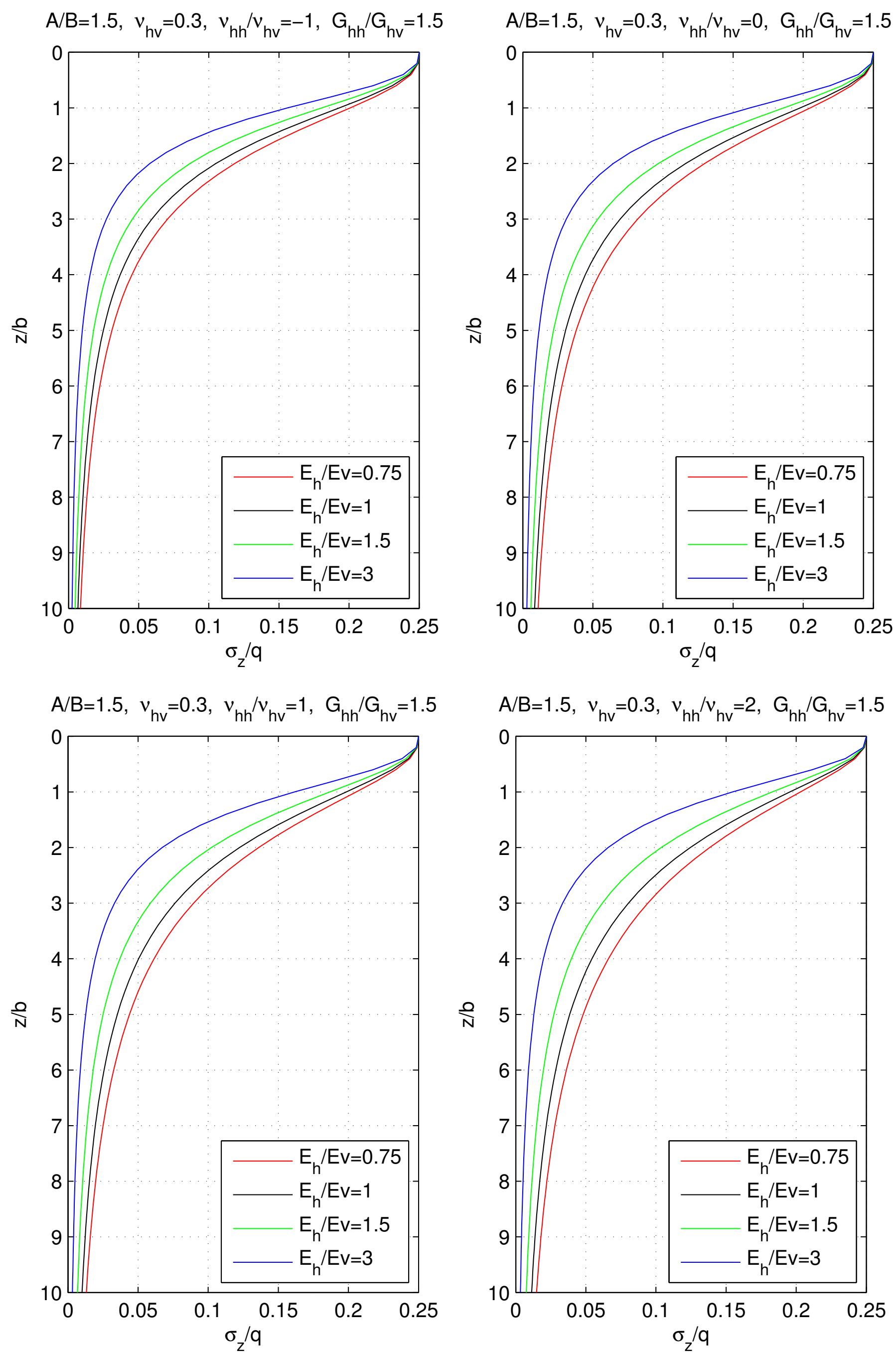


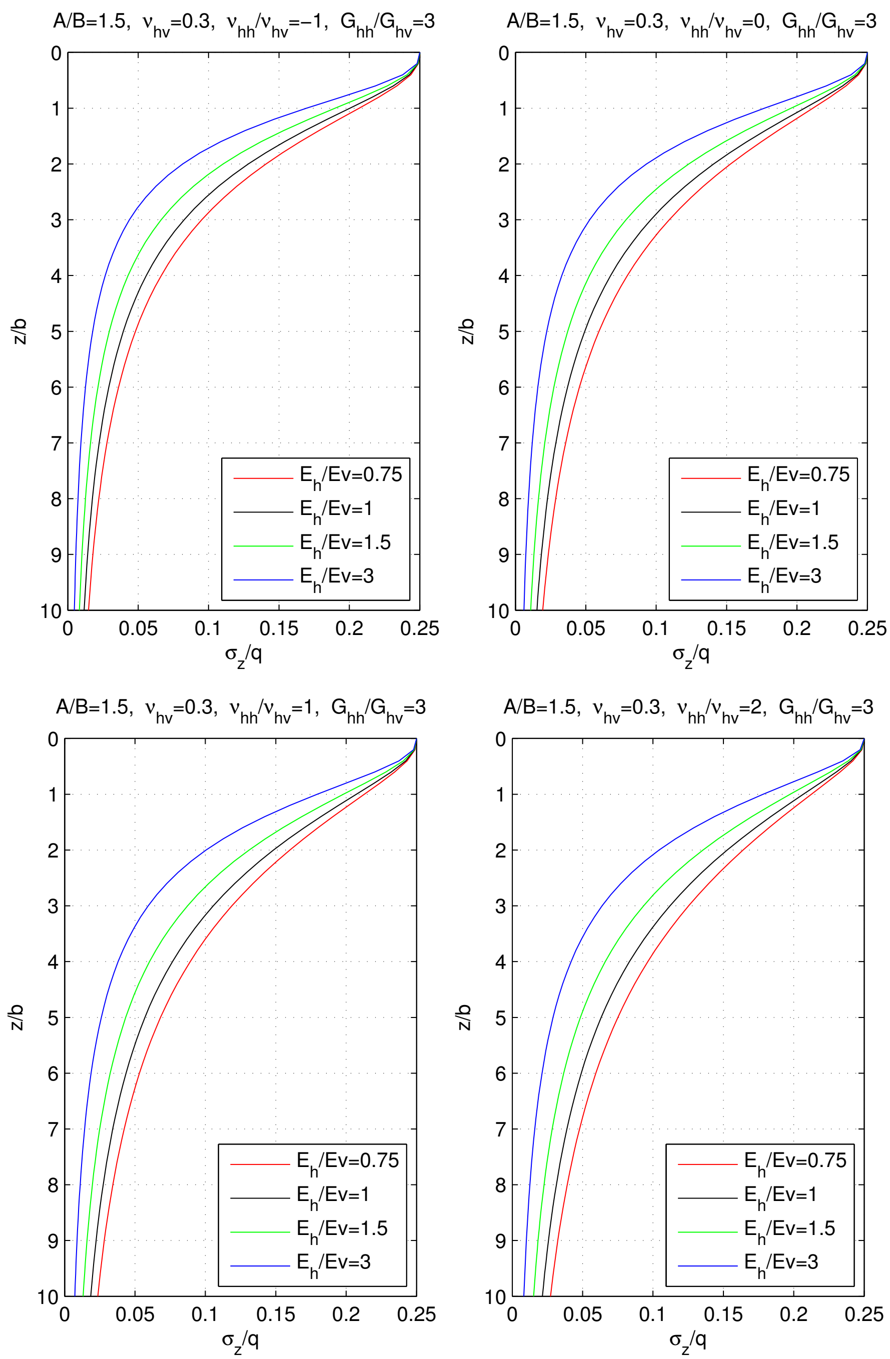
A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=1.5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

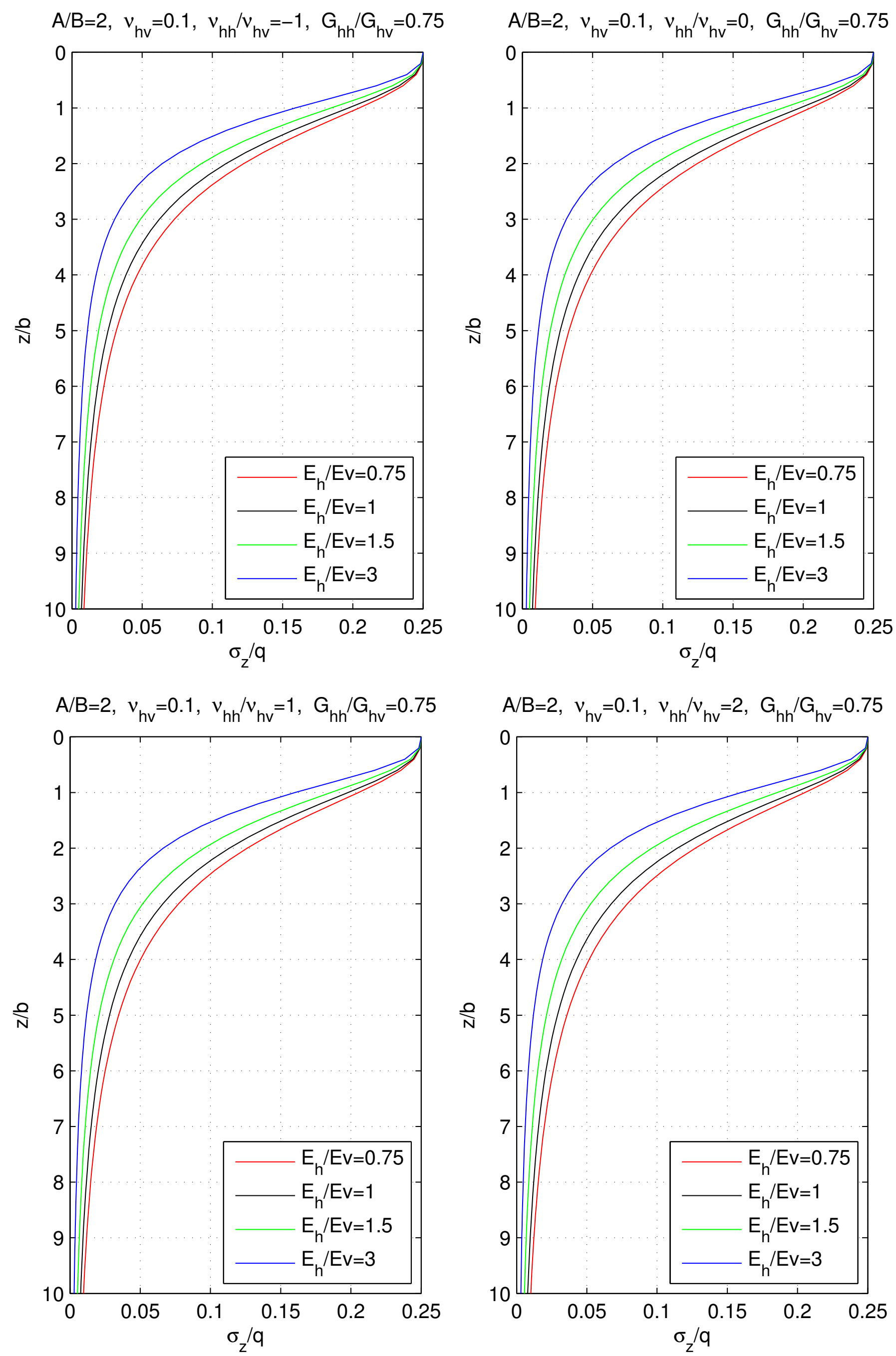

A/B=1.5, νhv=0.2, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.2, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.2, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.2, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3


A/B=1.5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=1.5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25

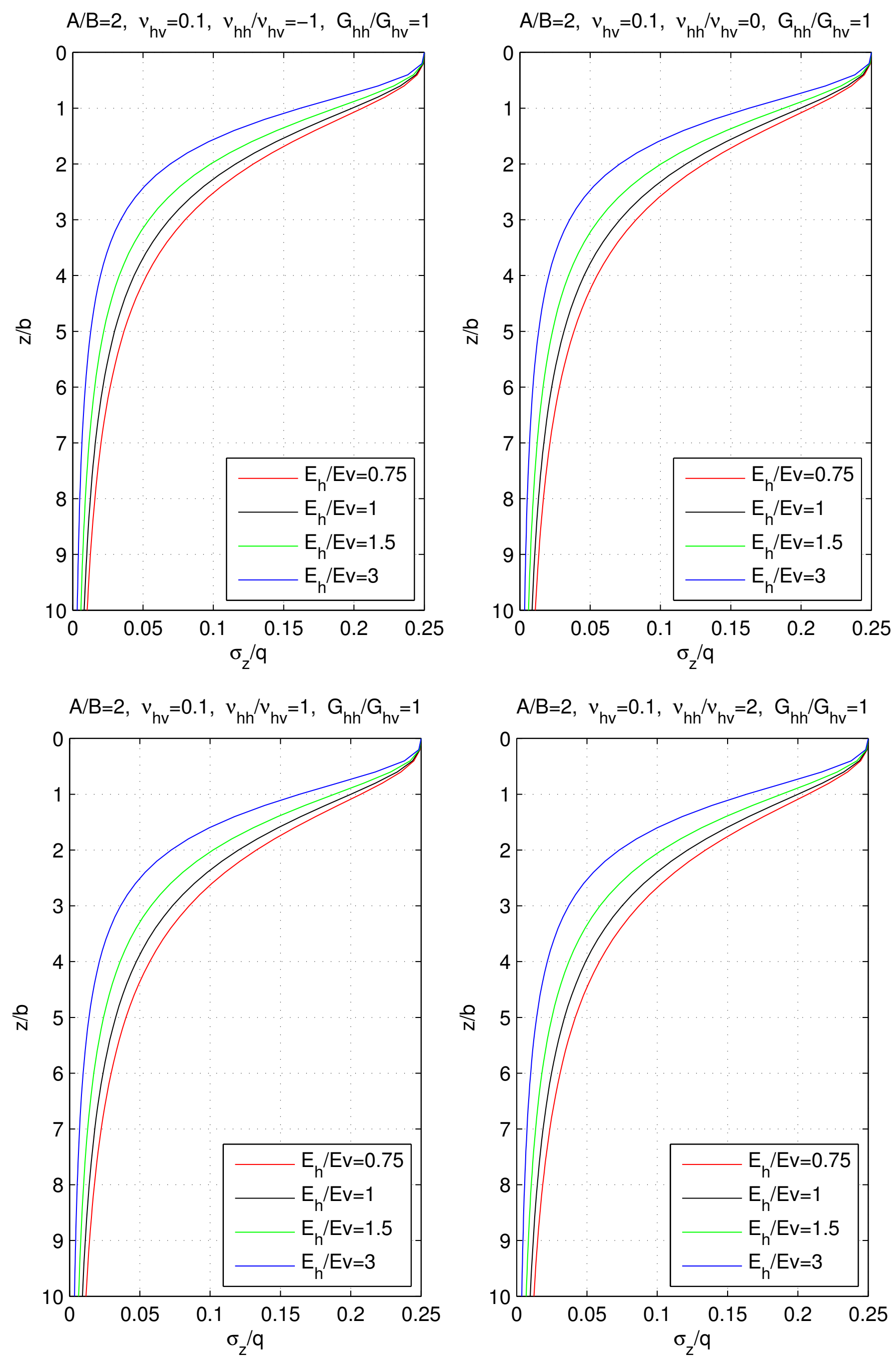

A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

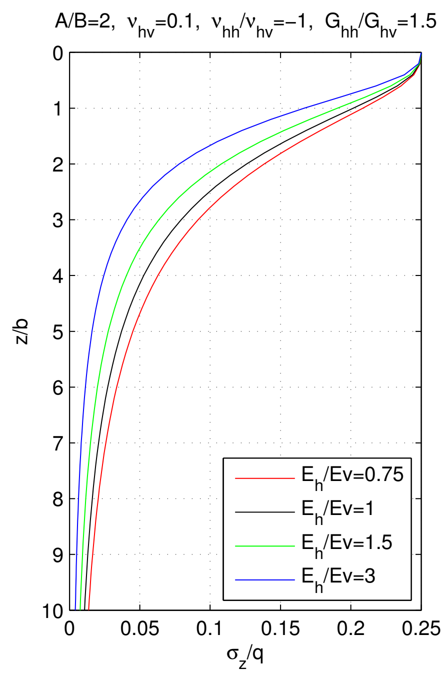

A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1.5
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1.5
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

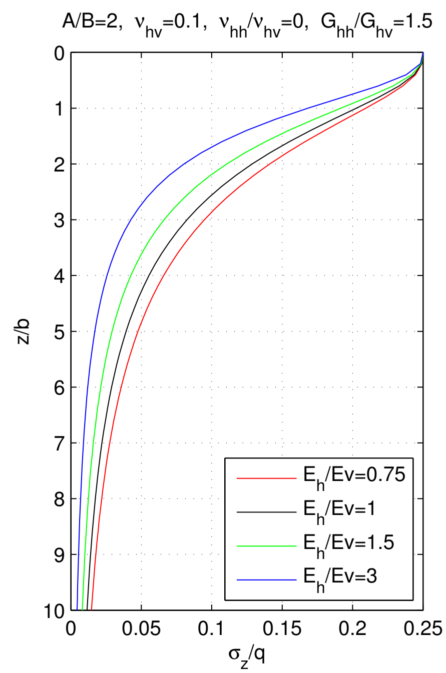

A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3
A/B=1.5, νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

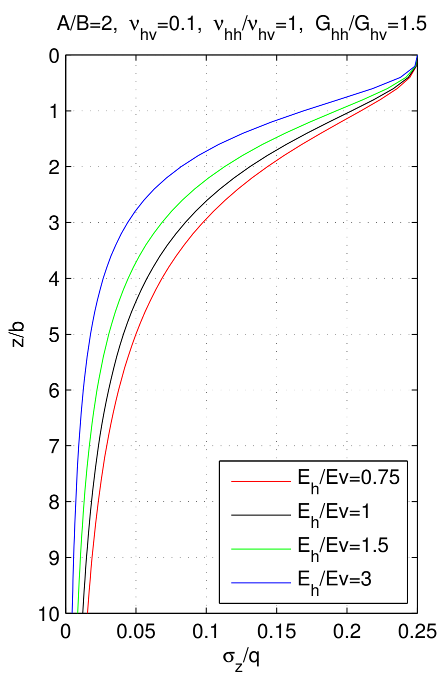


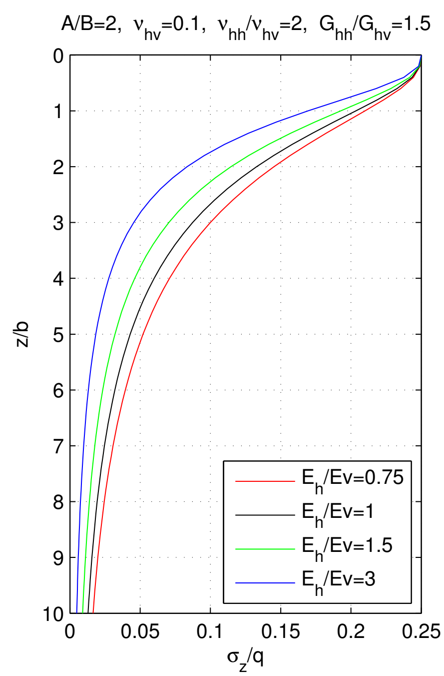
A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

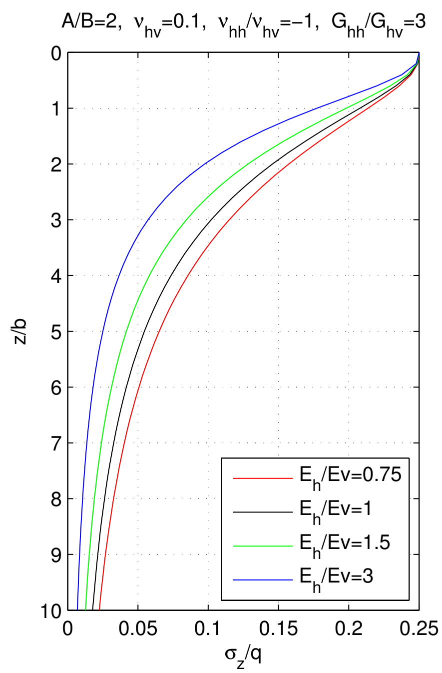

A/B=2, ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1
A/B=2, ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1
A/B=2, ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1
A/B=2, ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

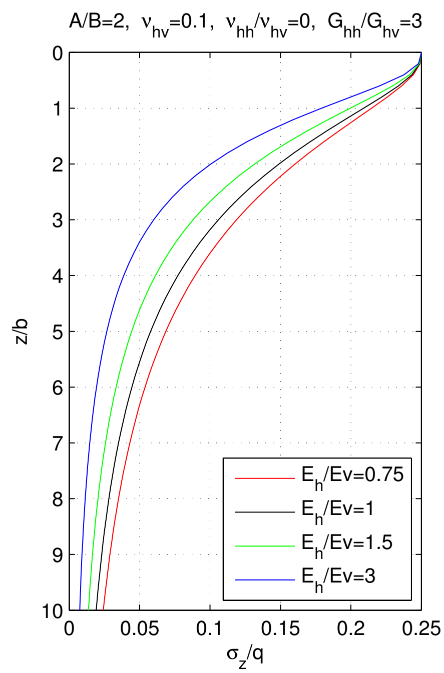

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

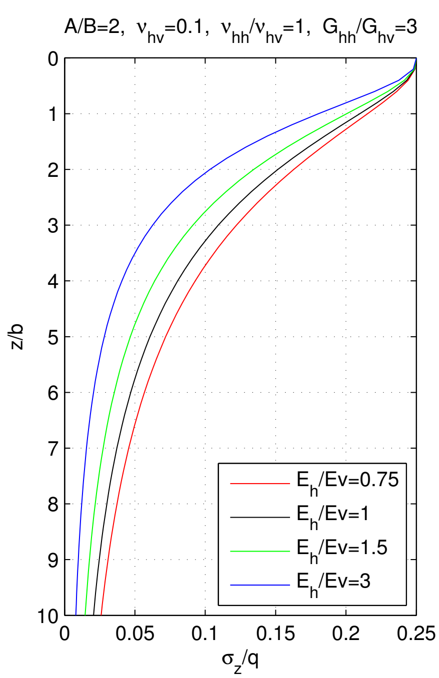

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

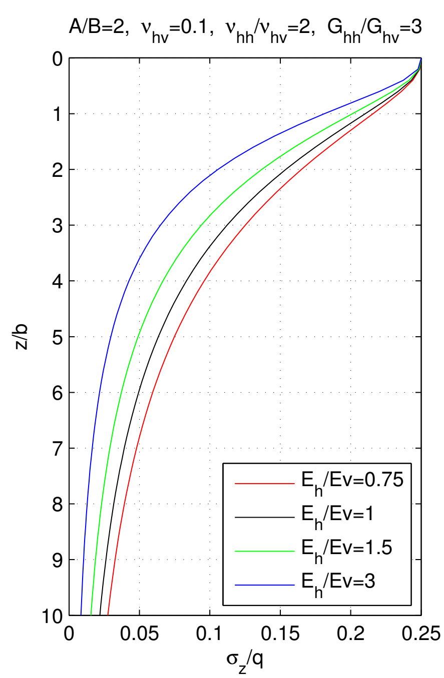

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

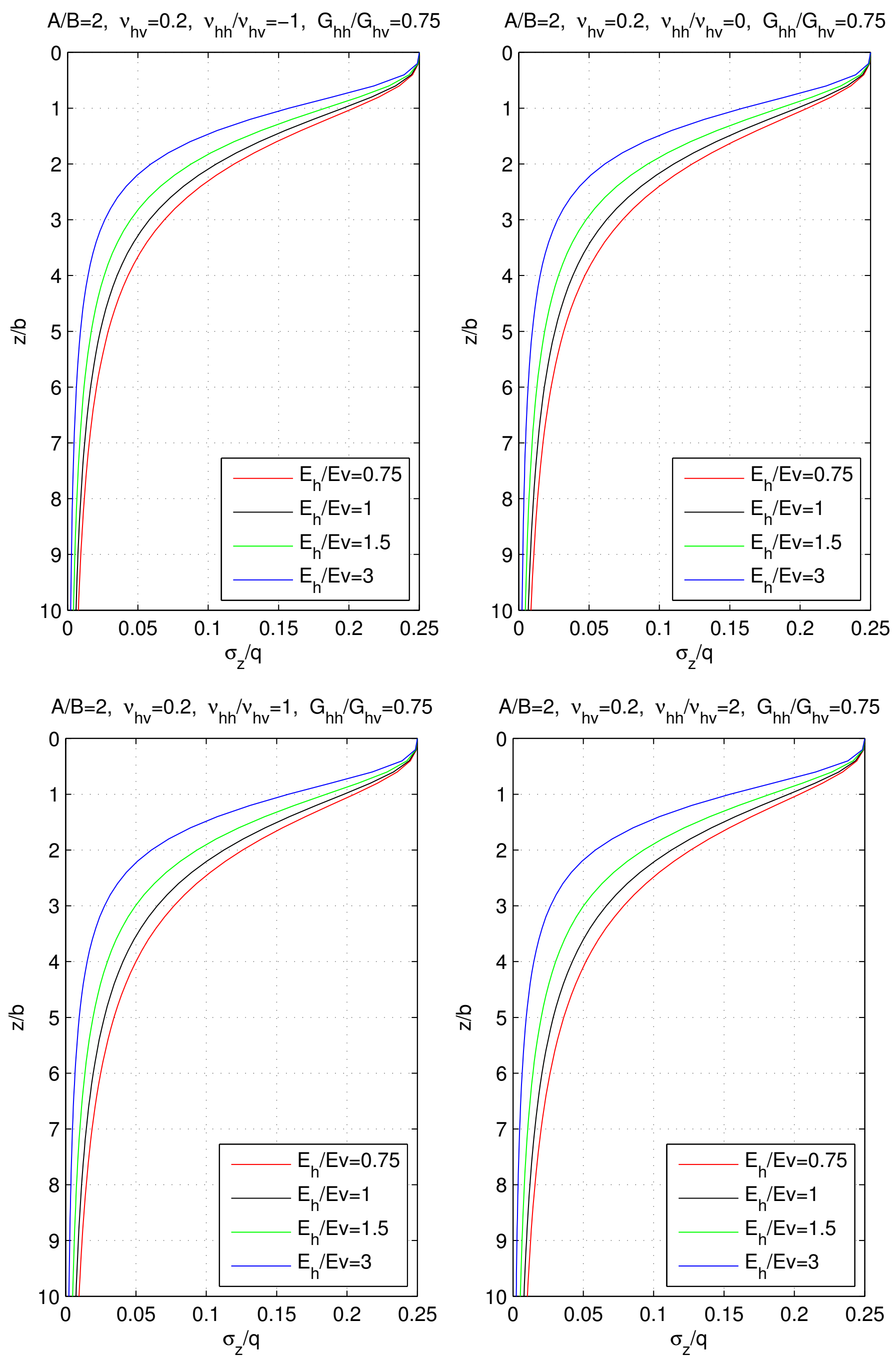

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

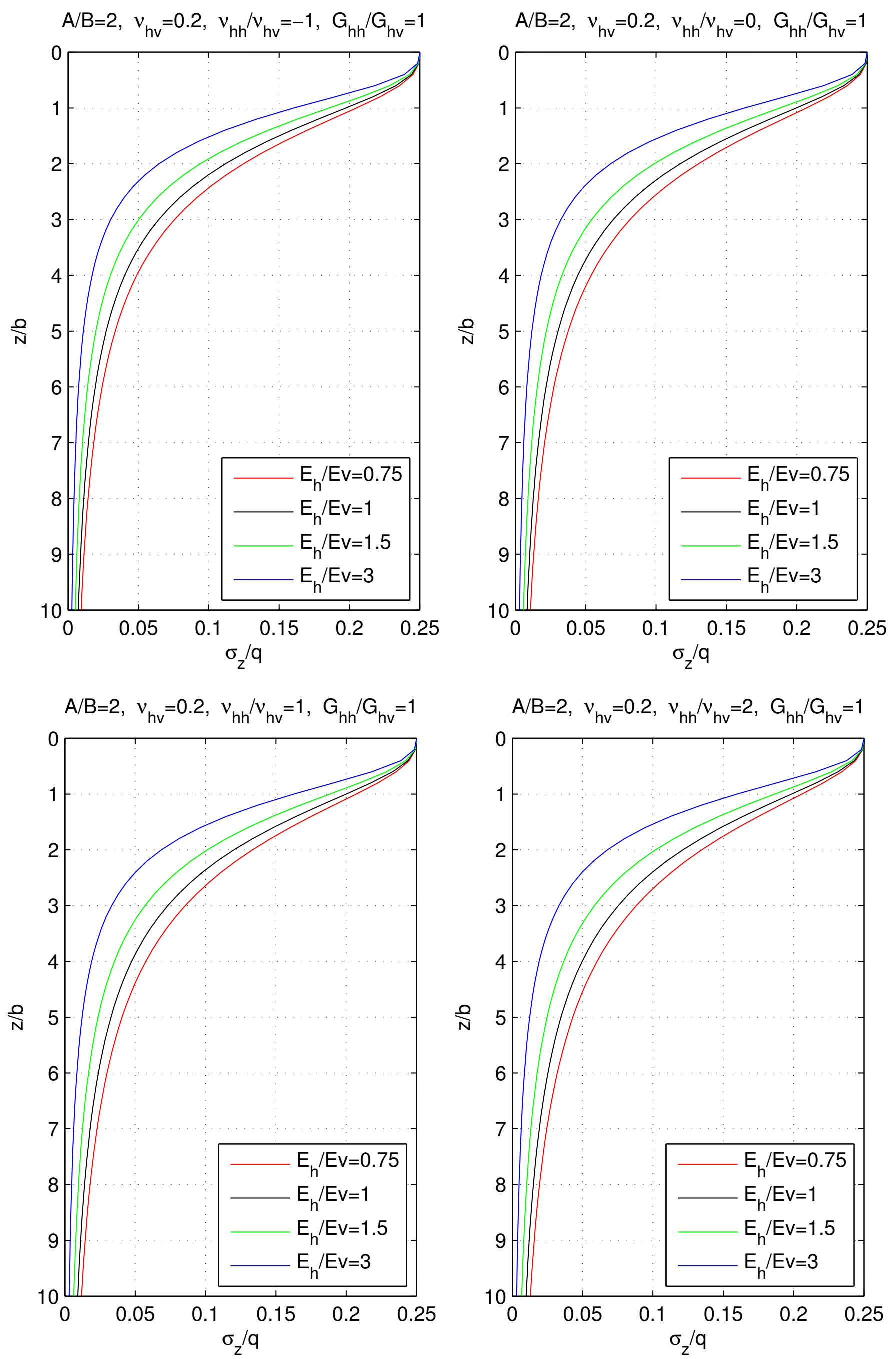

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

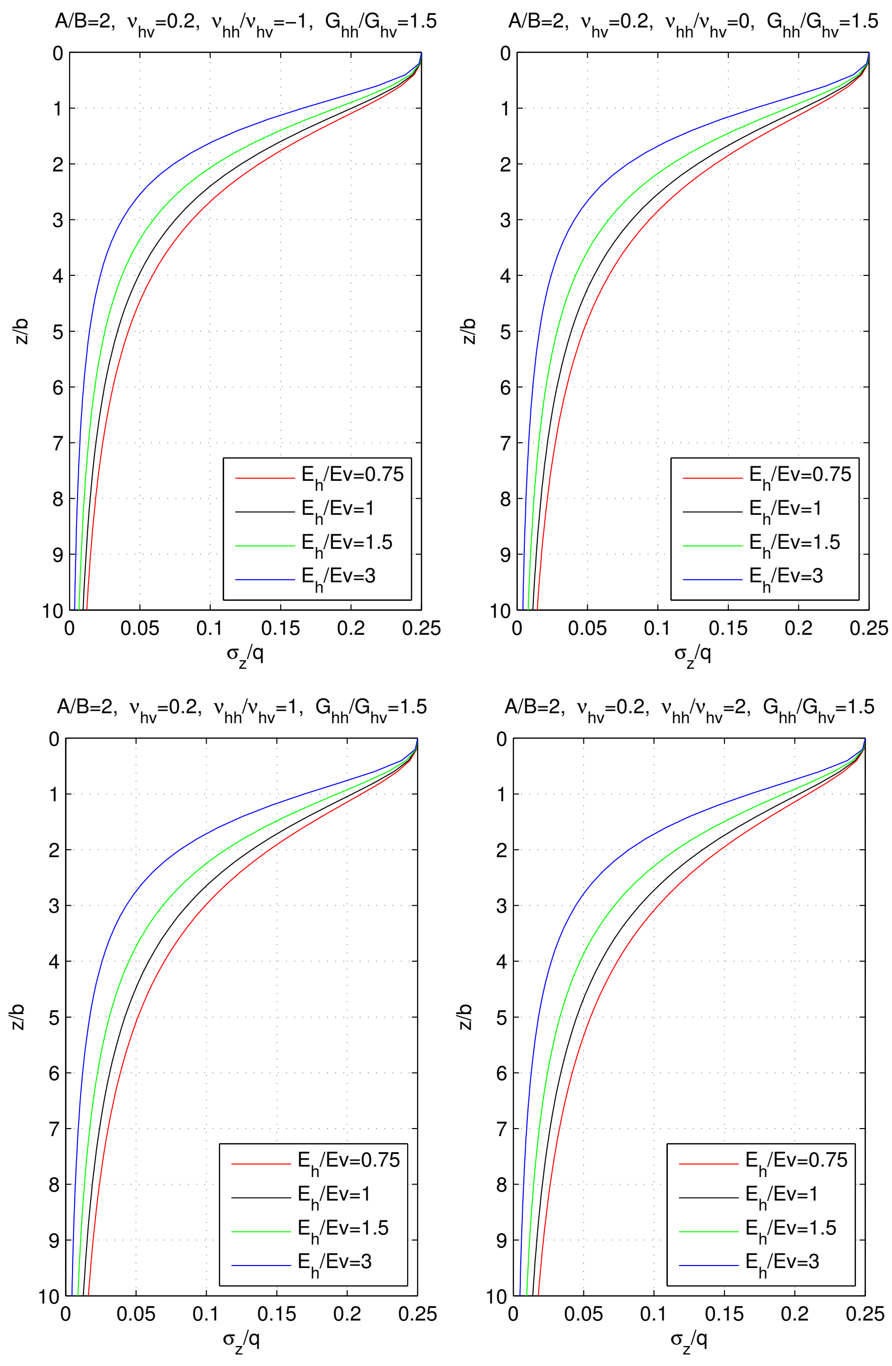

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

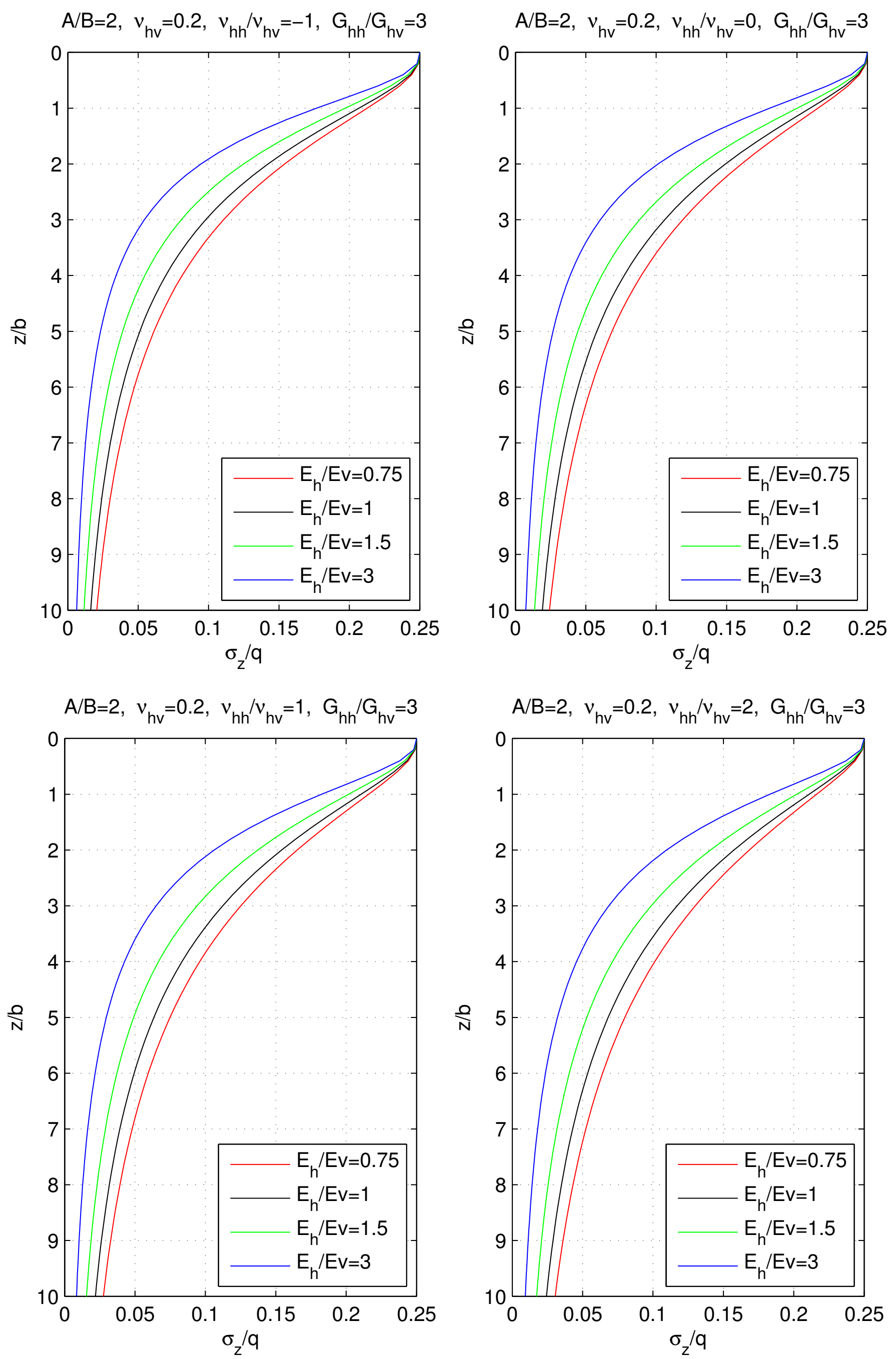

A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=2, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

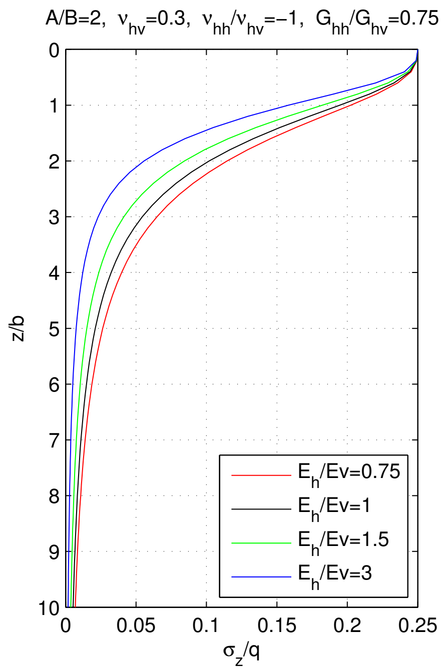

A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

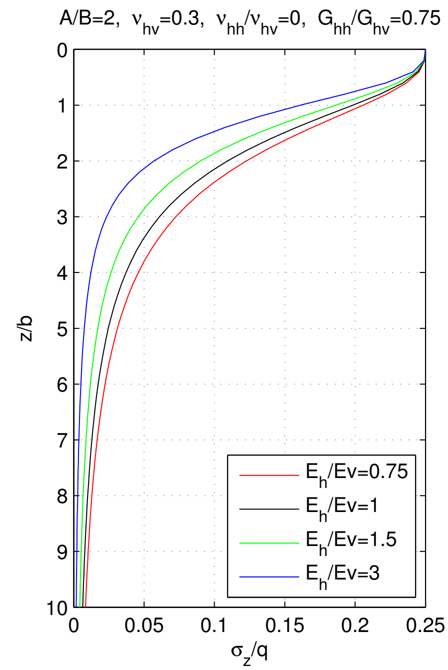

A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
A/B=2, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

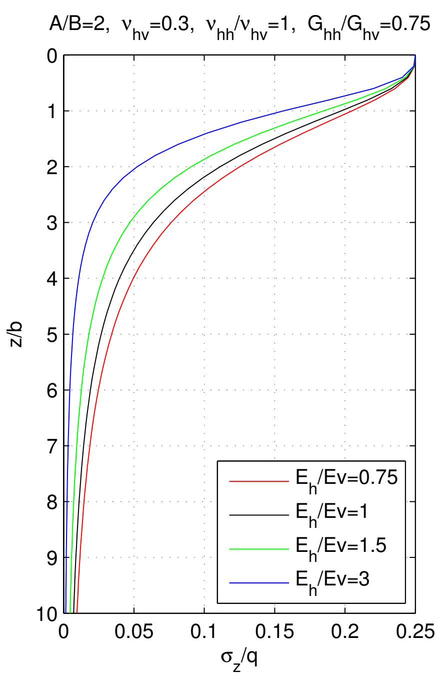

A/B=2, νhv=0.2, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.2, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.2, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.2, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1.5
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

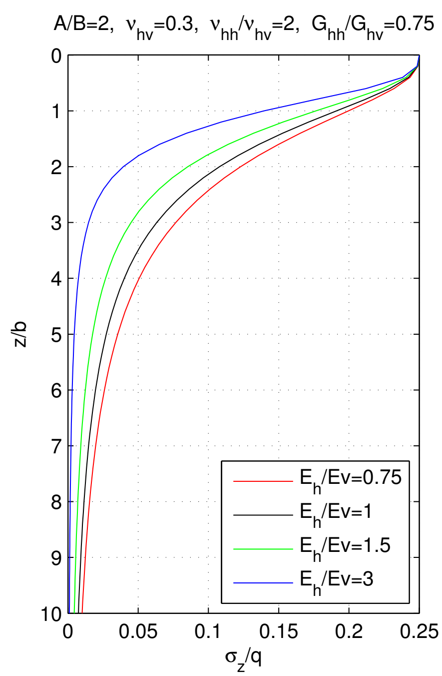


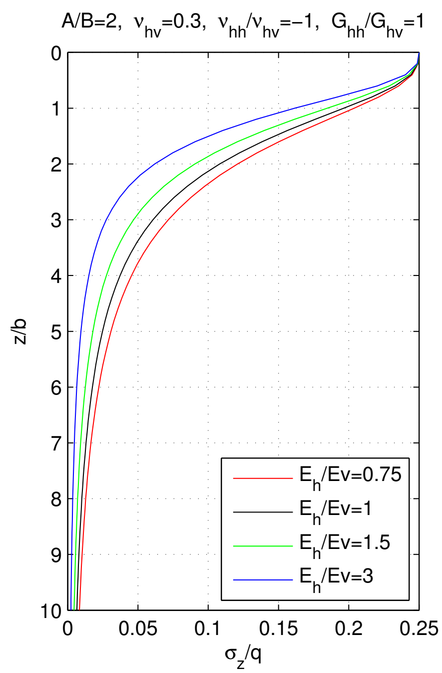
A/B=2, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=3
A/B=2, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=3
A/B=2, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=3
A/B=2, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=3
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

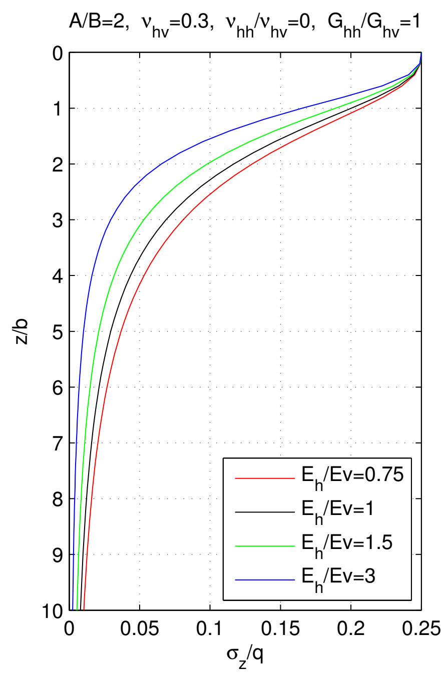

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

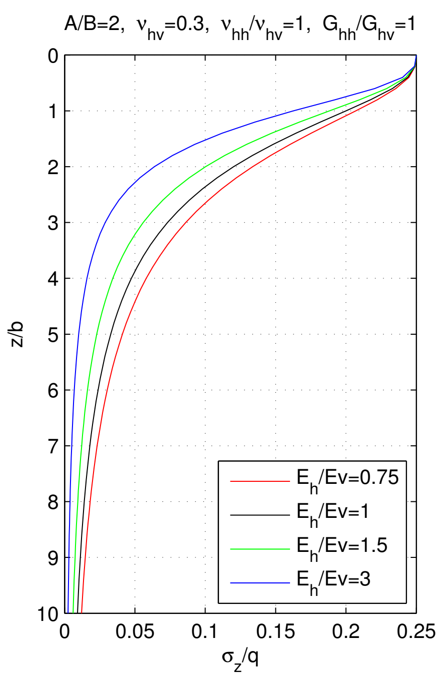

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

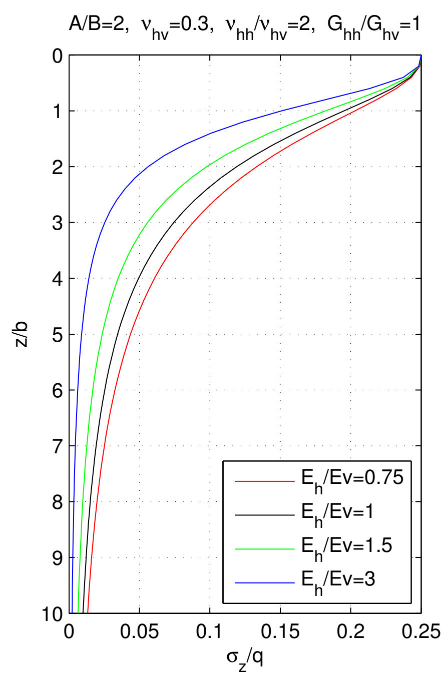

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

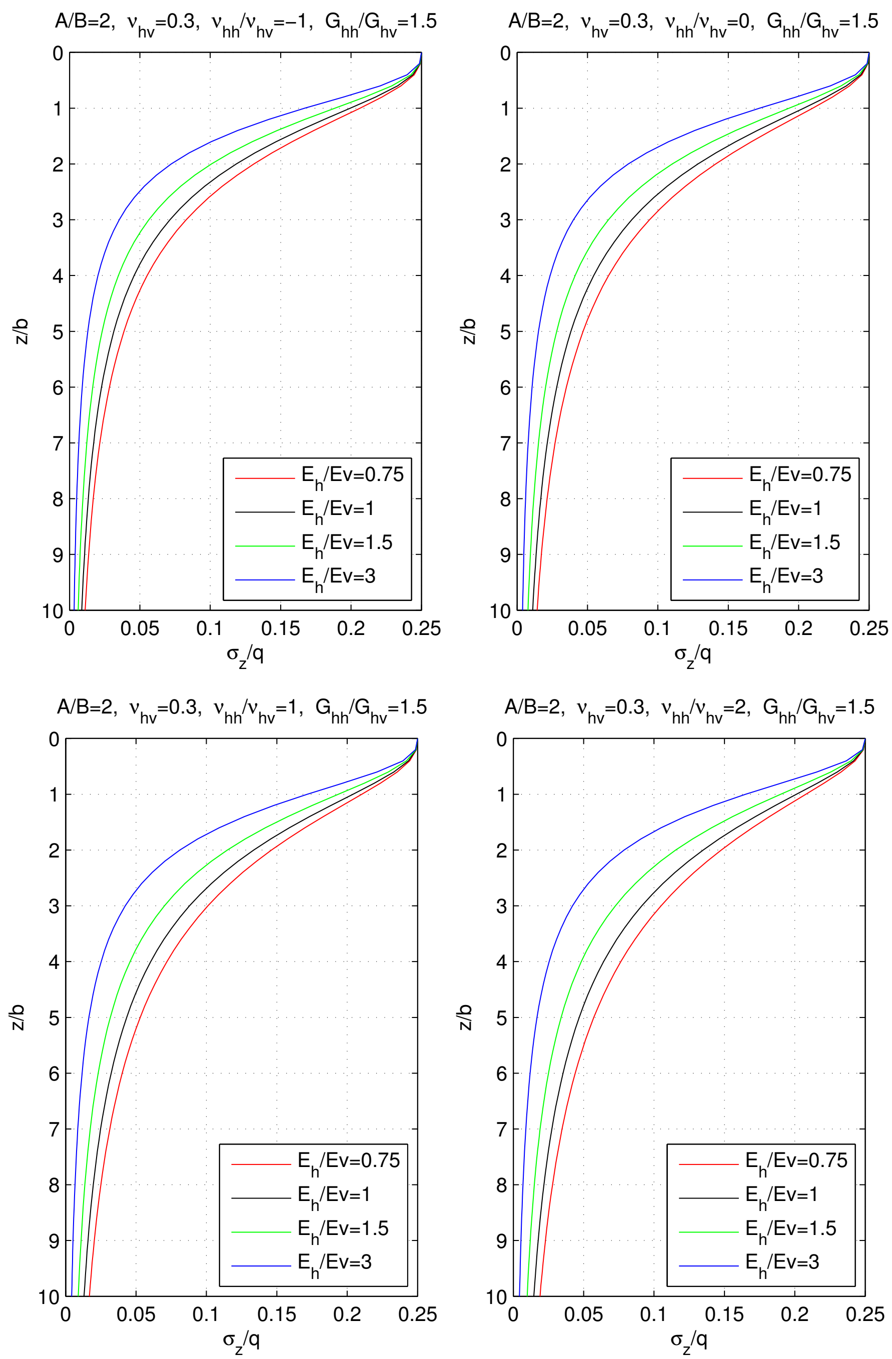

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

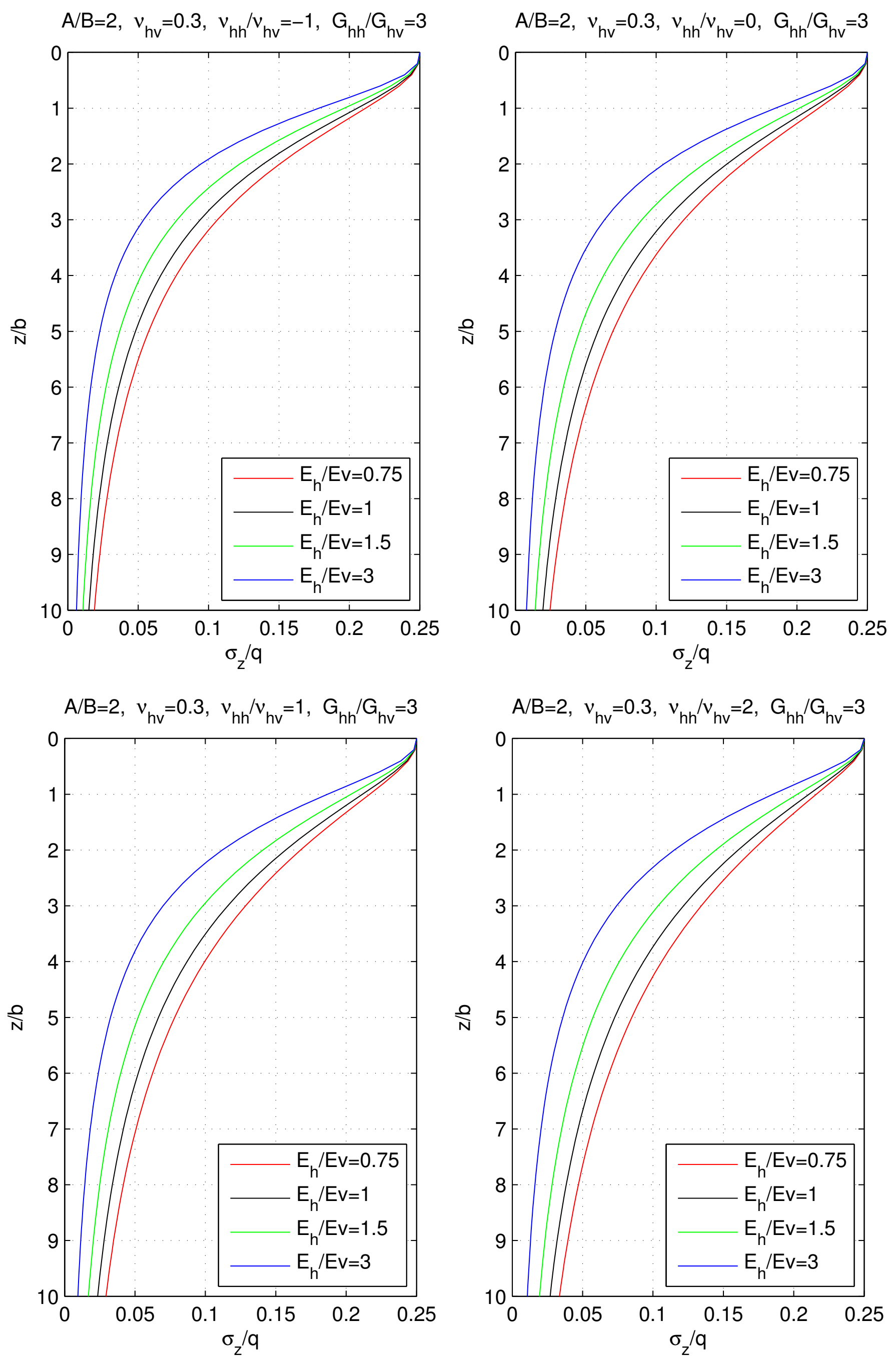

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

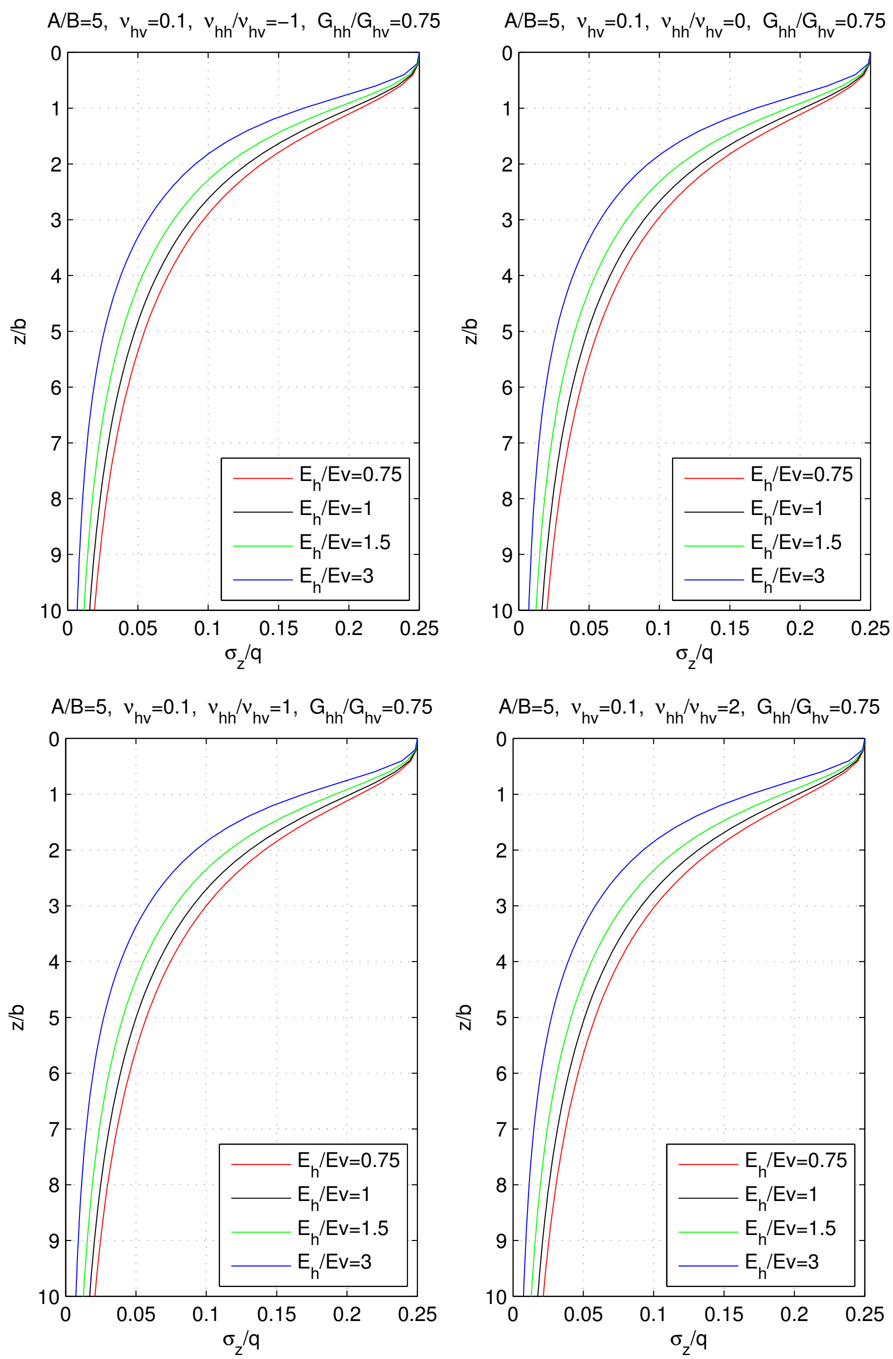

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

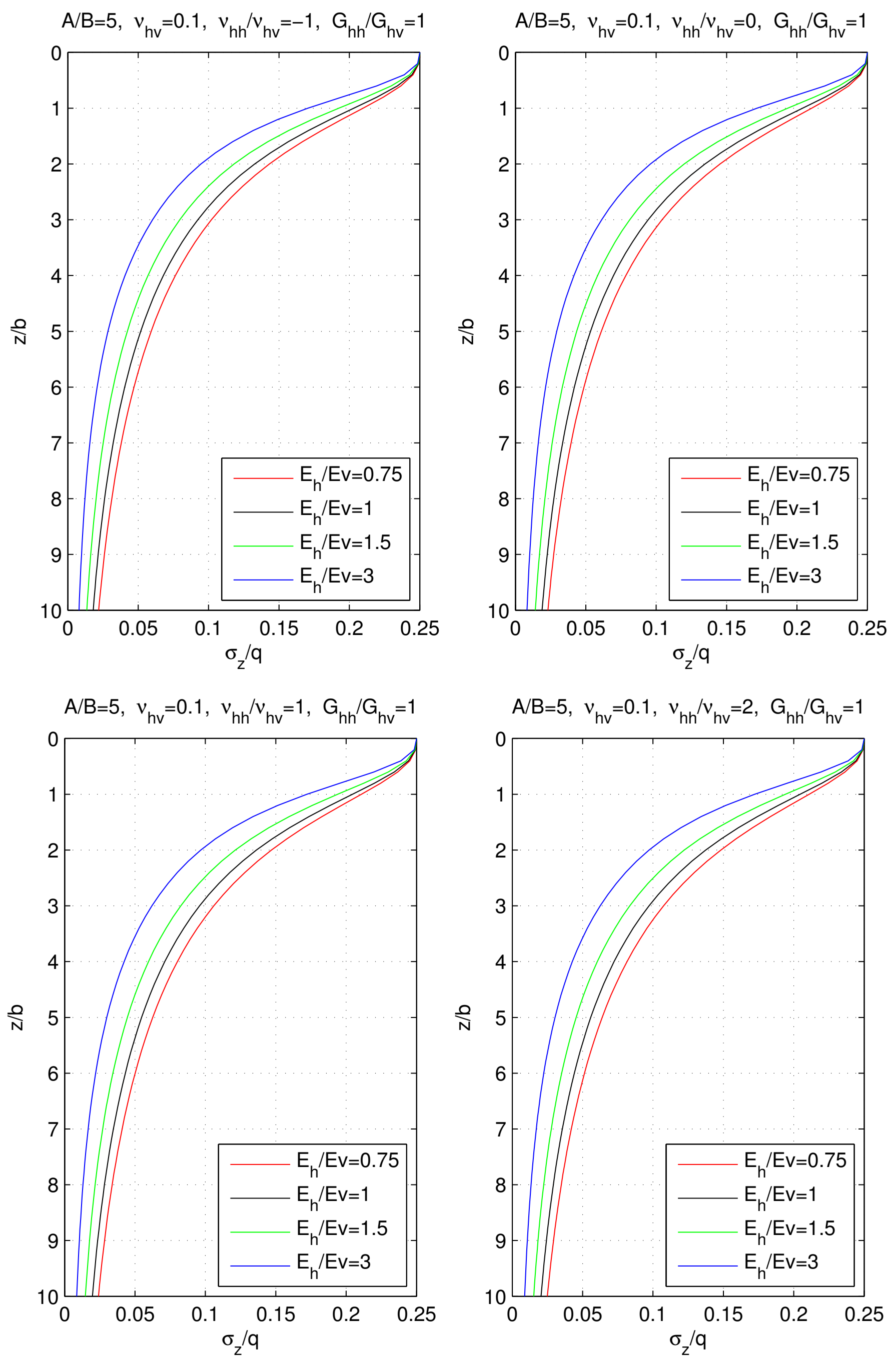

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

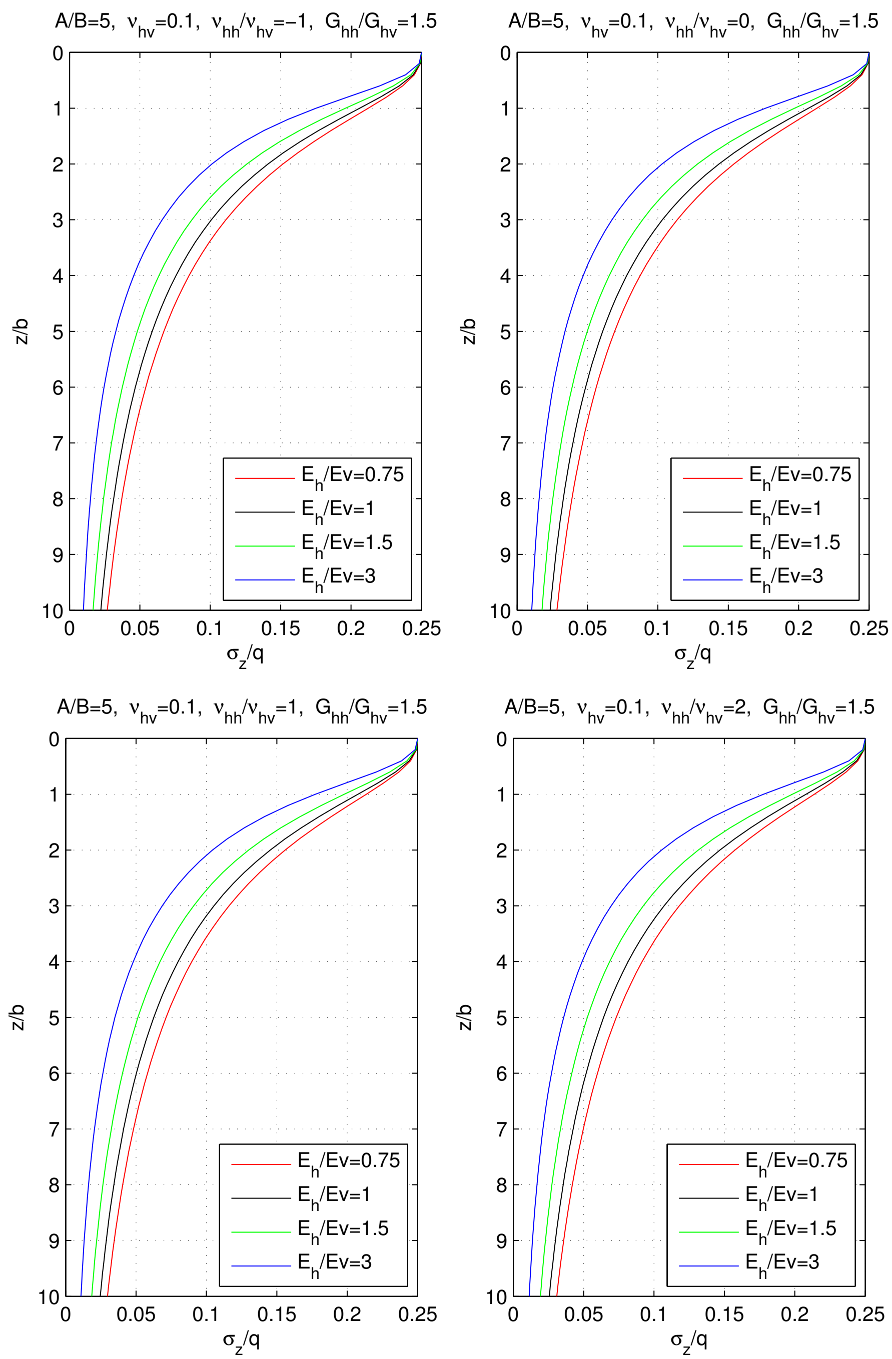

A/B=2, νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1.5
A/B=2, νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1.5
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3

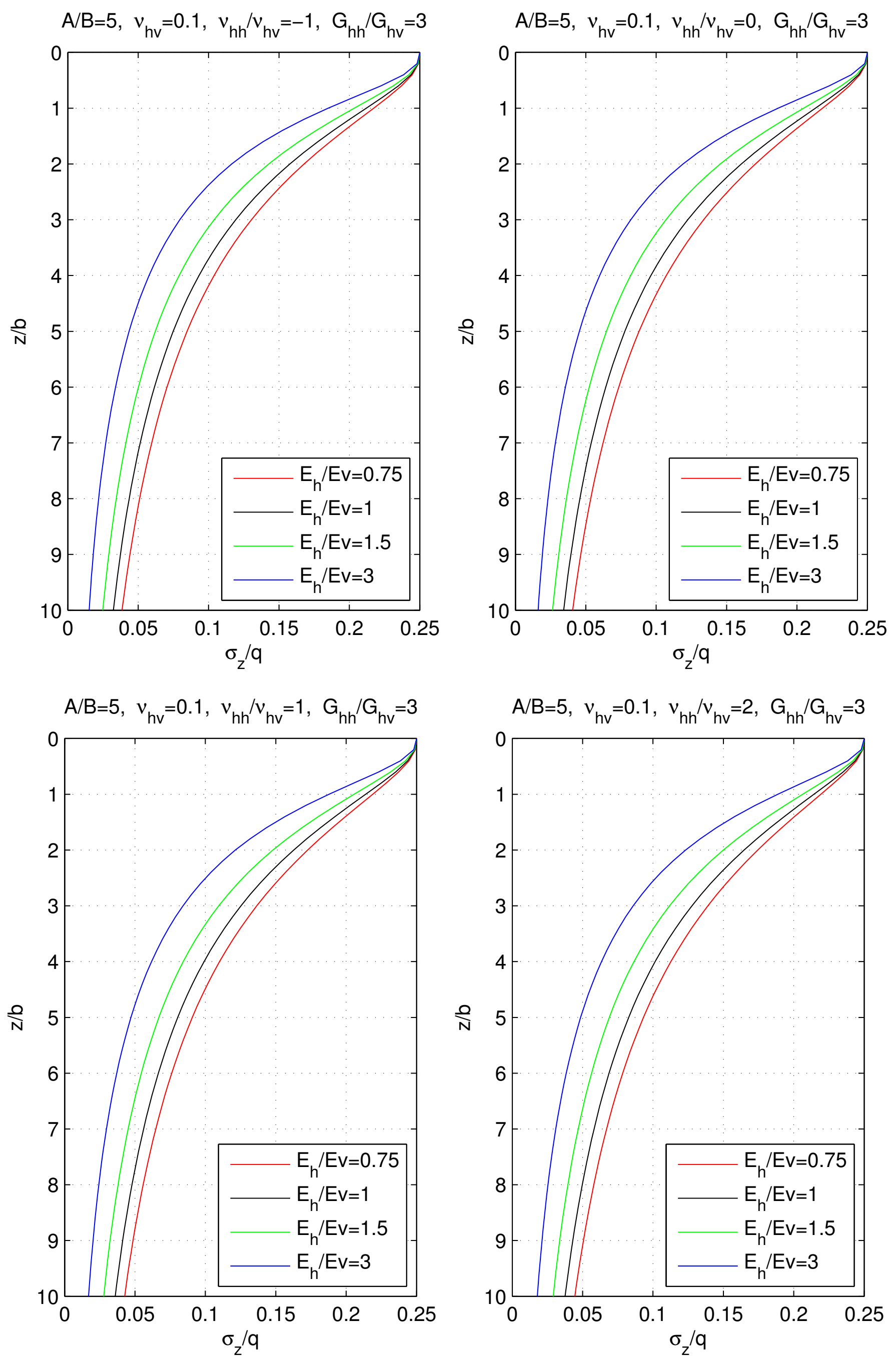

A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=2, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

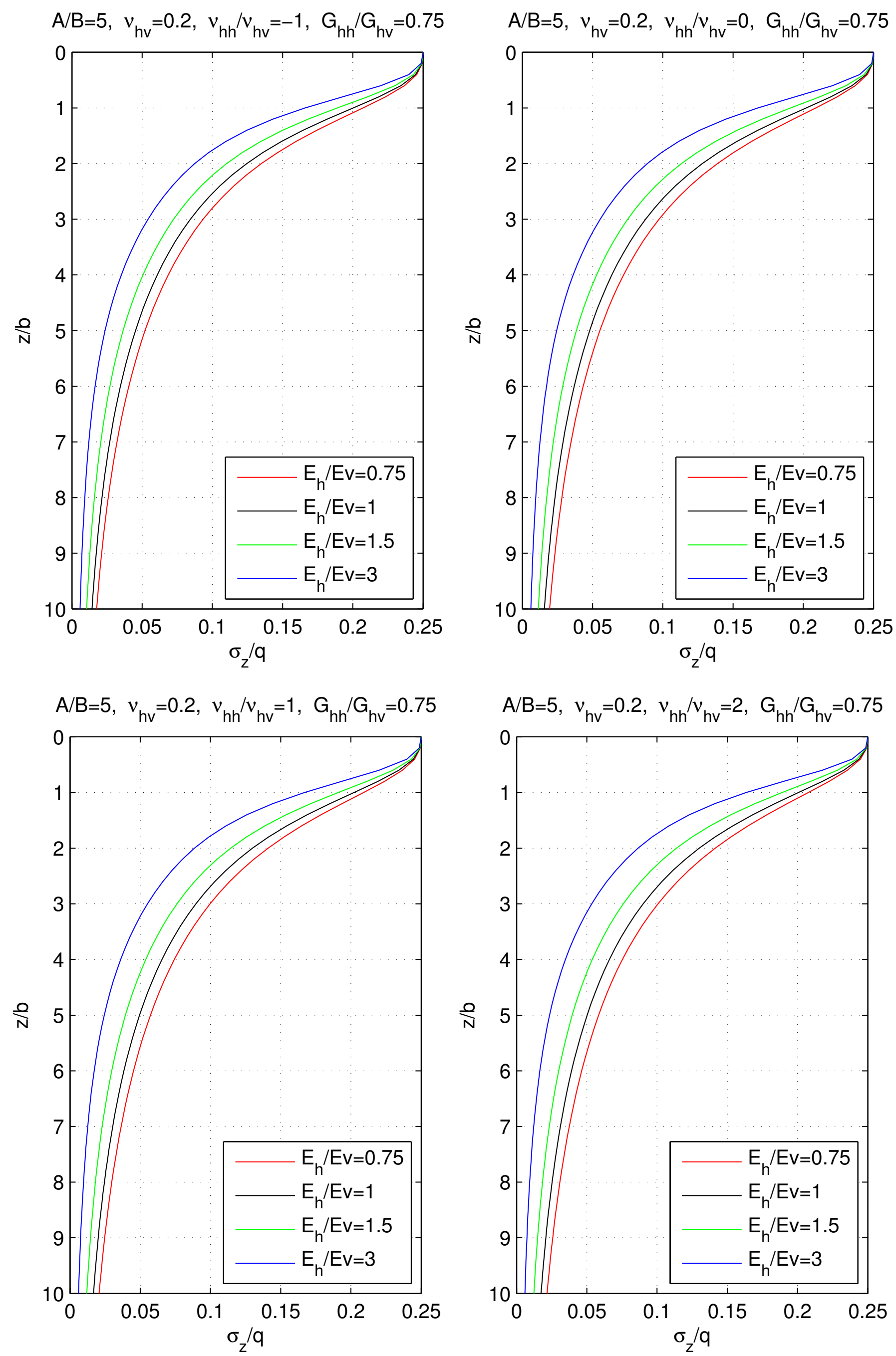

A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

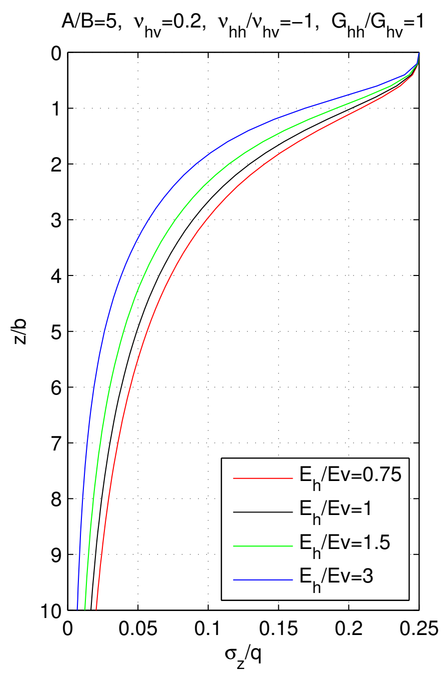


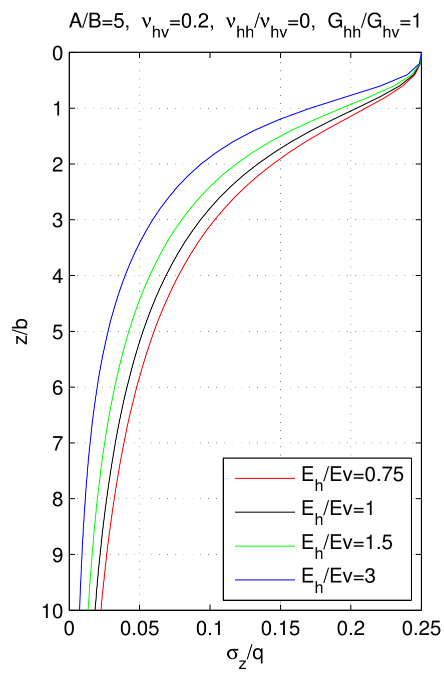
A/B=5, νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1
A/B=5, νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1
A/B=5, νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1
A/B=5, νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

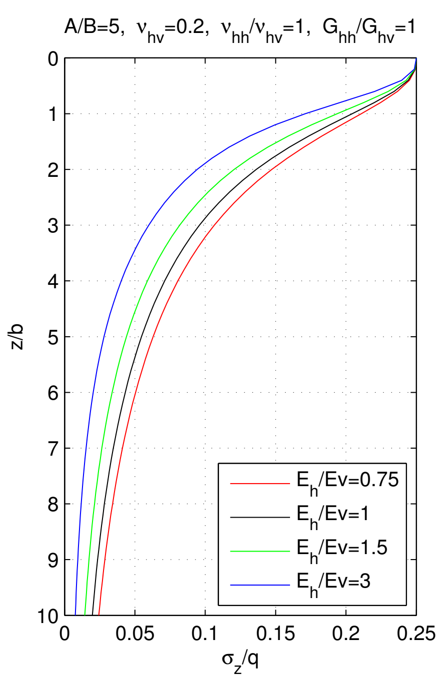

A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

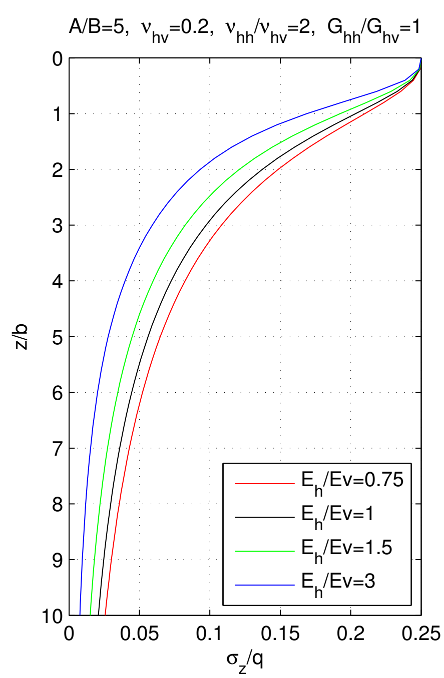

A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25

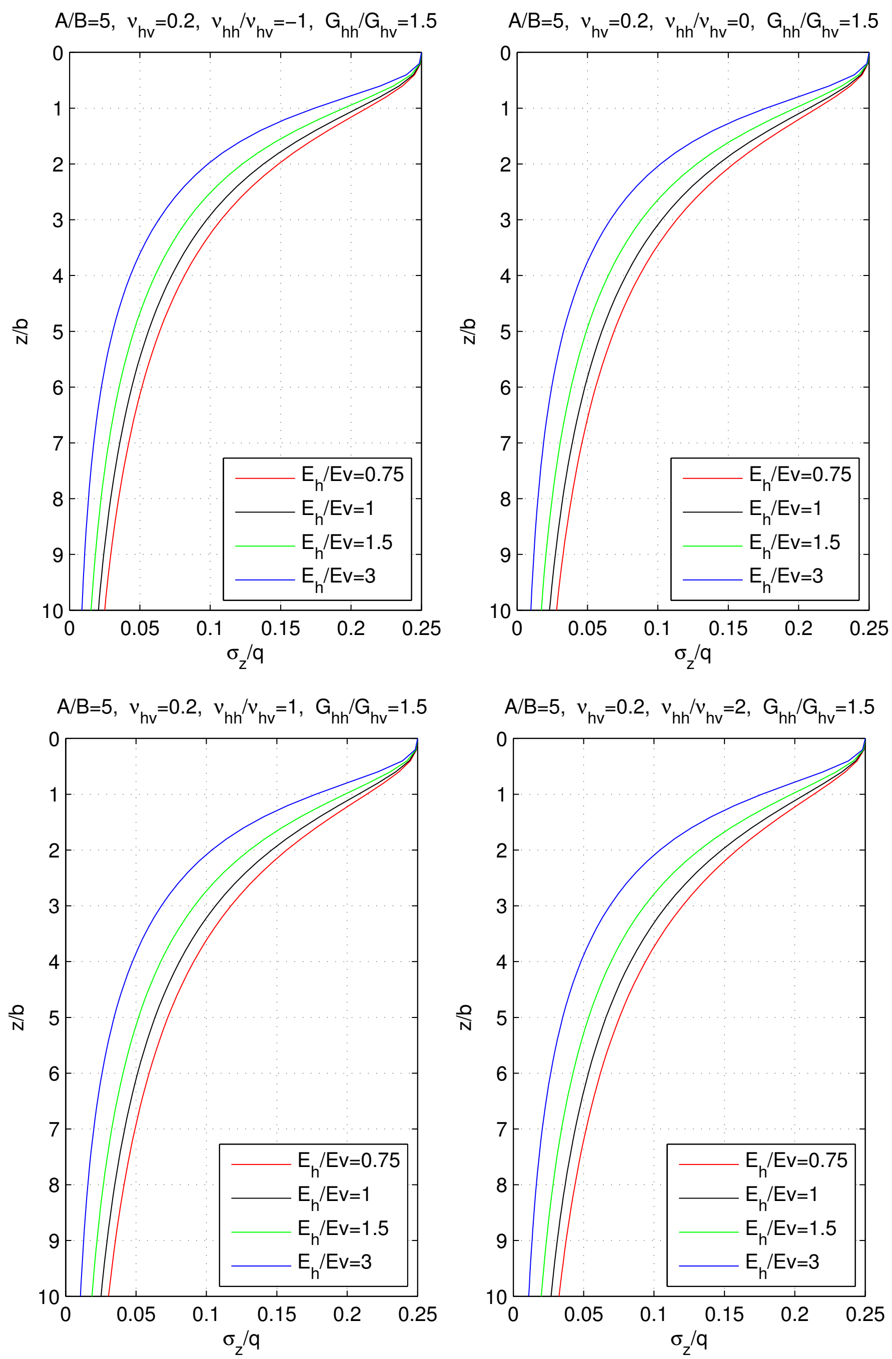

A/B=5, νhv=0.2, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=0.75
A/B=5, νhv=0.2, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=0.75
A/B=5, νhv=0.2, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=0.75
A/B=5, νhv=0.2, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=0.75
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25


A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

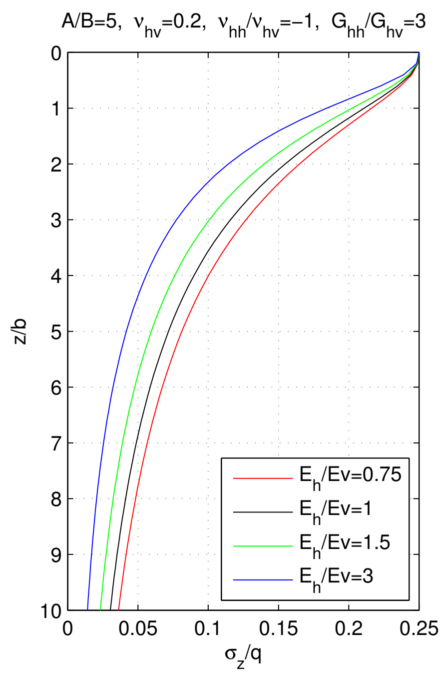

A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

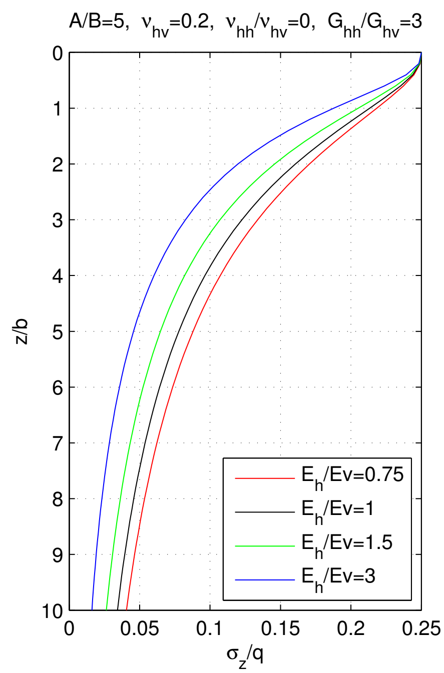

A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3



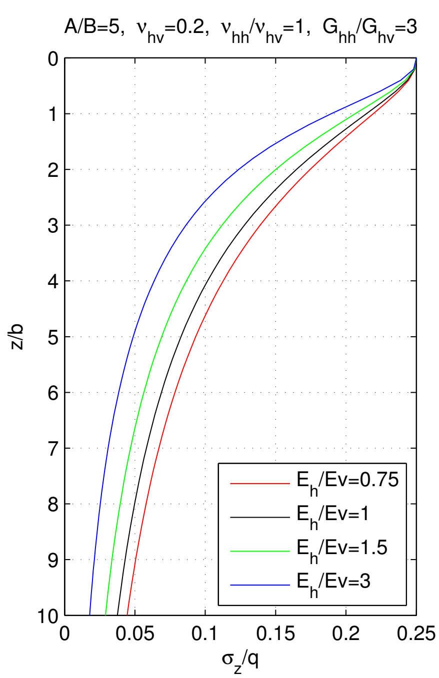
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3



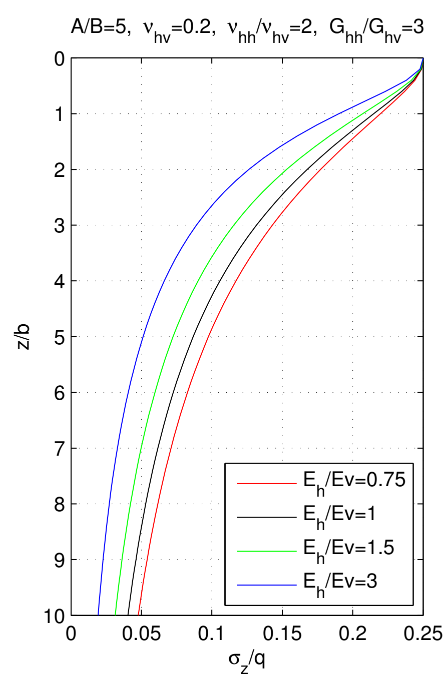
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3



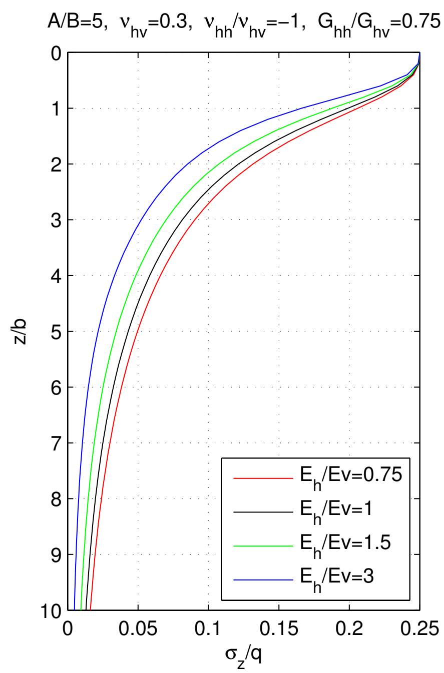
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

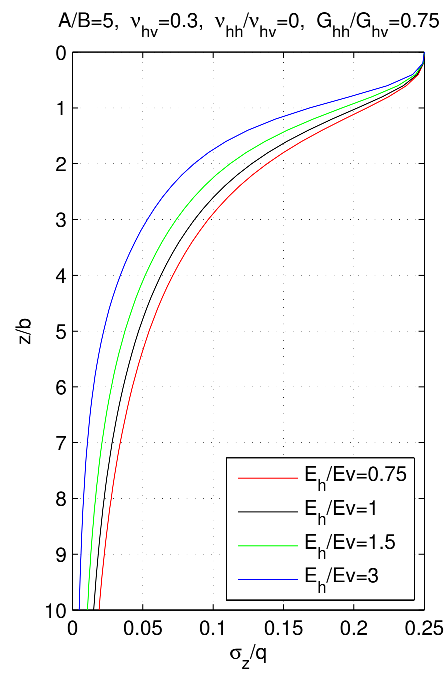


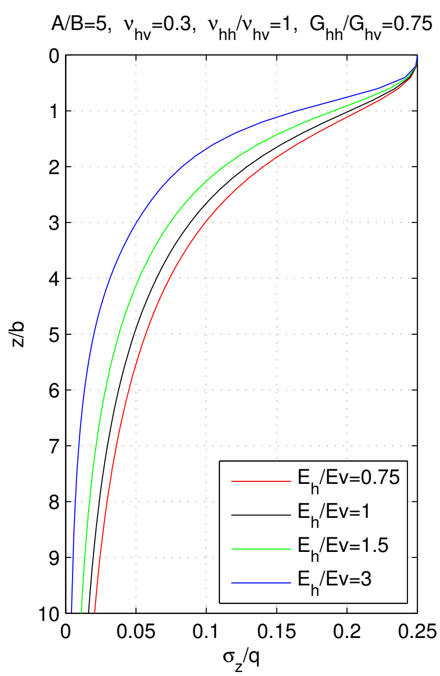
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

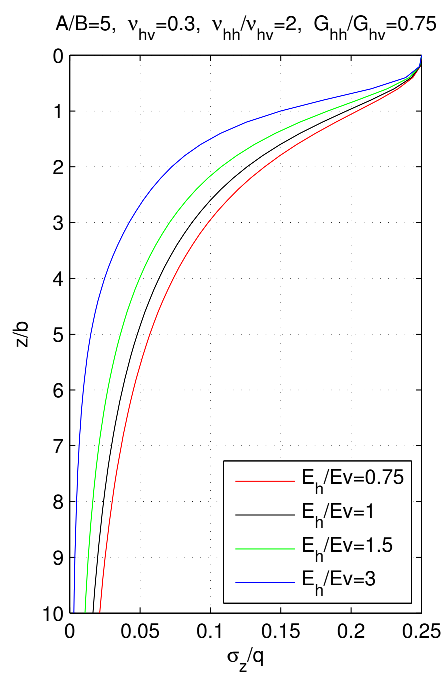


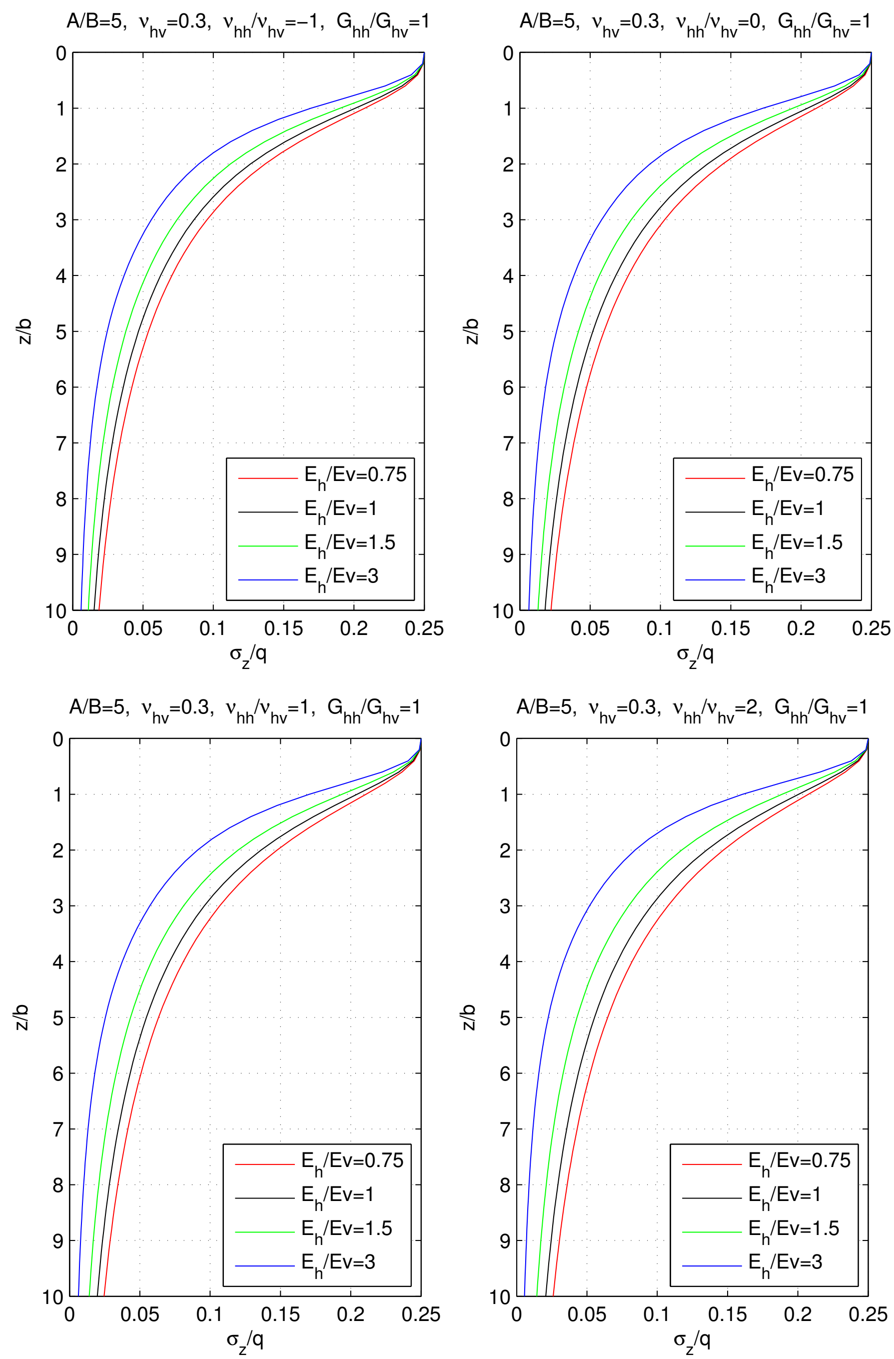
A/B=5, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

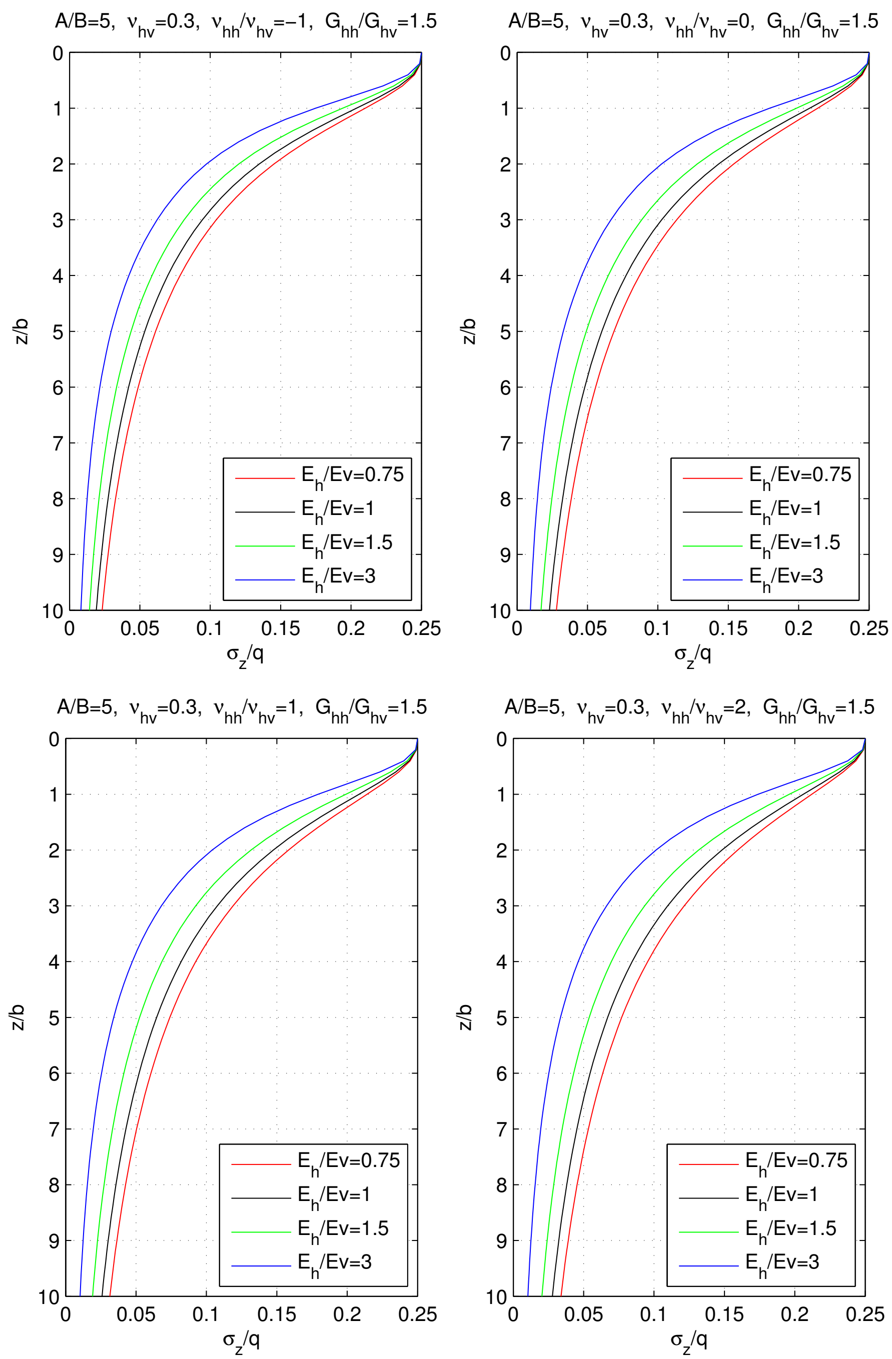

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

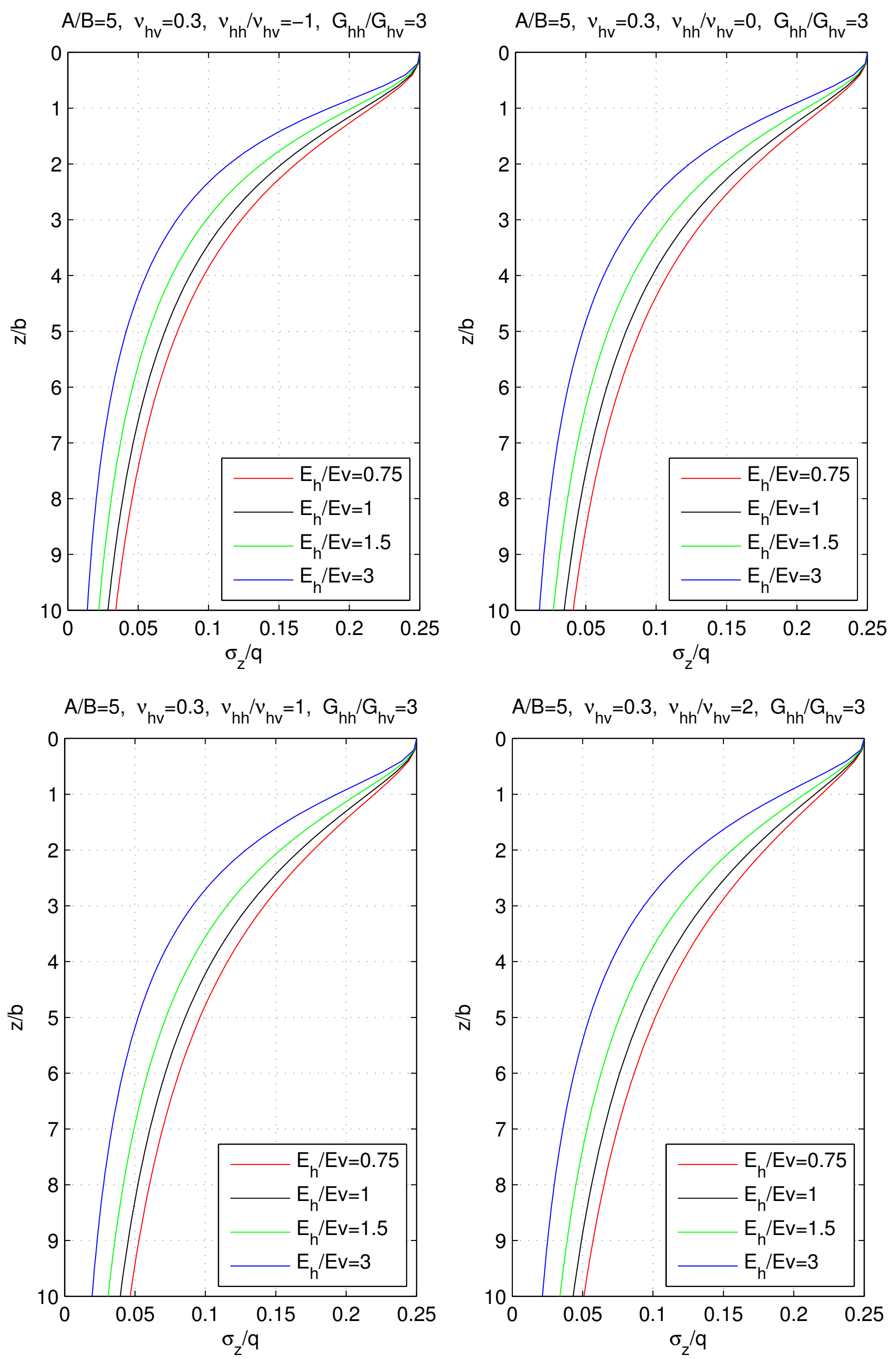

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

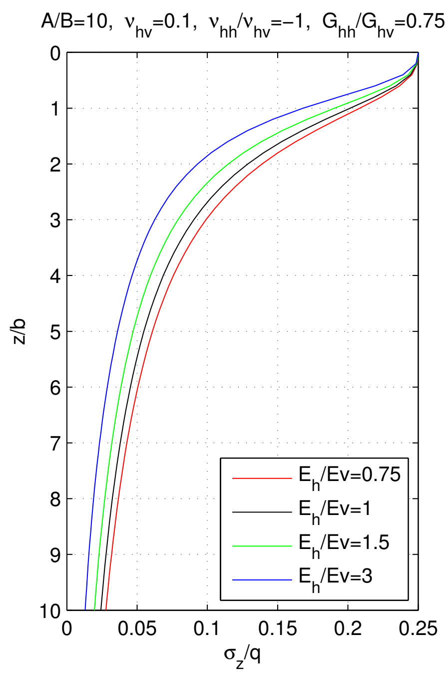

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

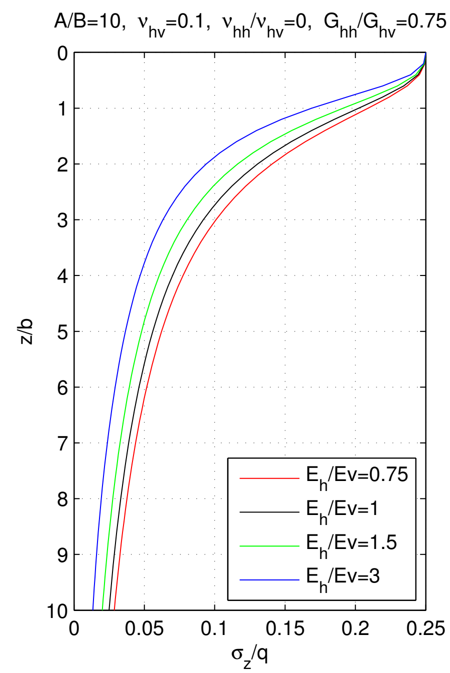

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

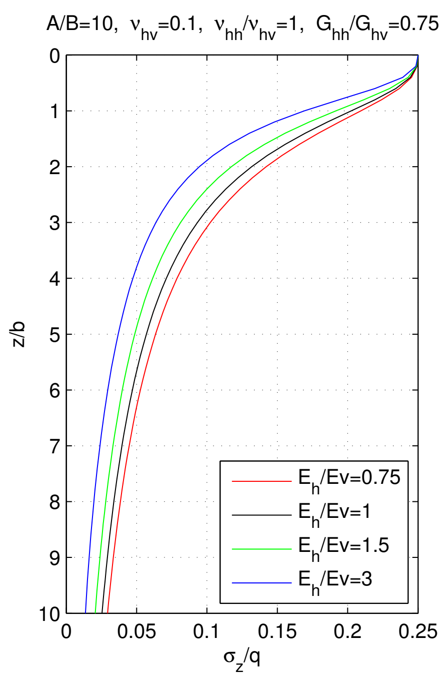

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

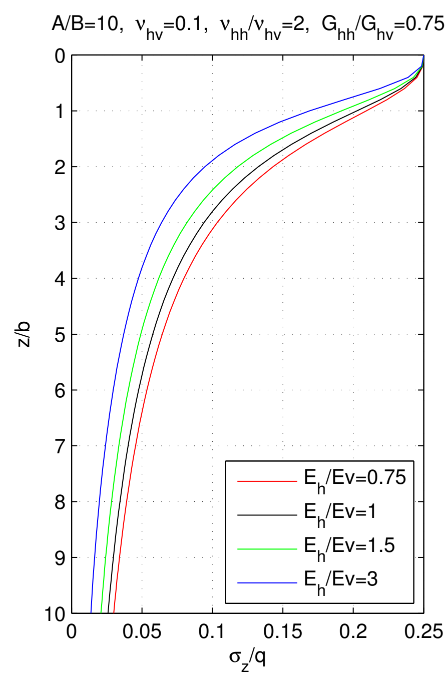

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

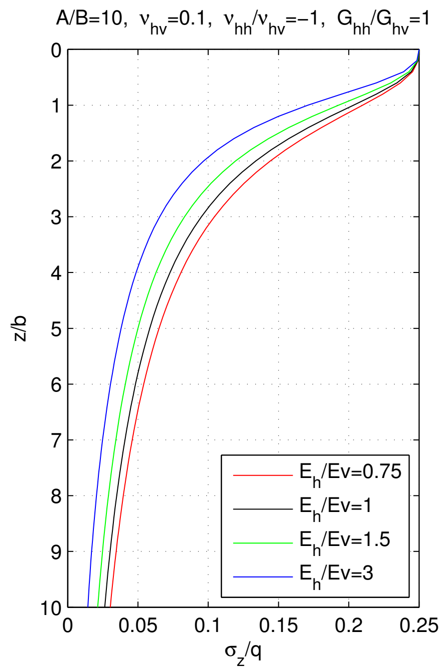

A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
A/B=5, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

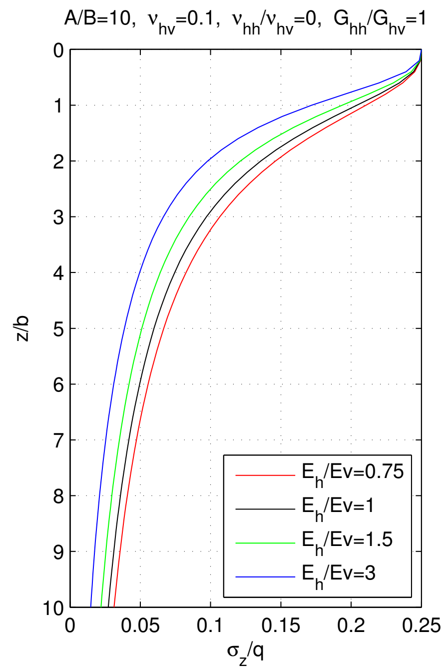

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

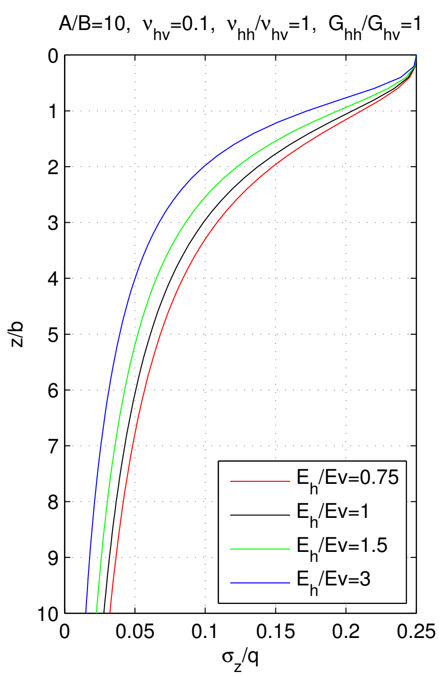

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

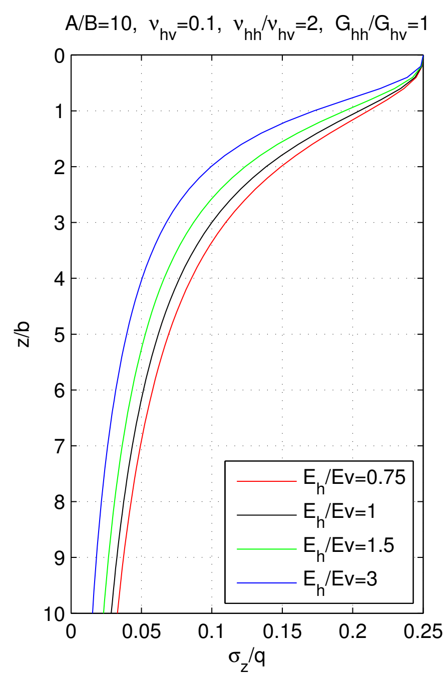

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

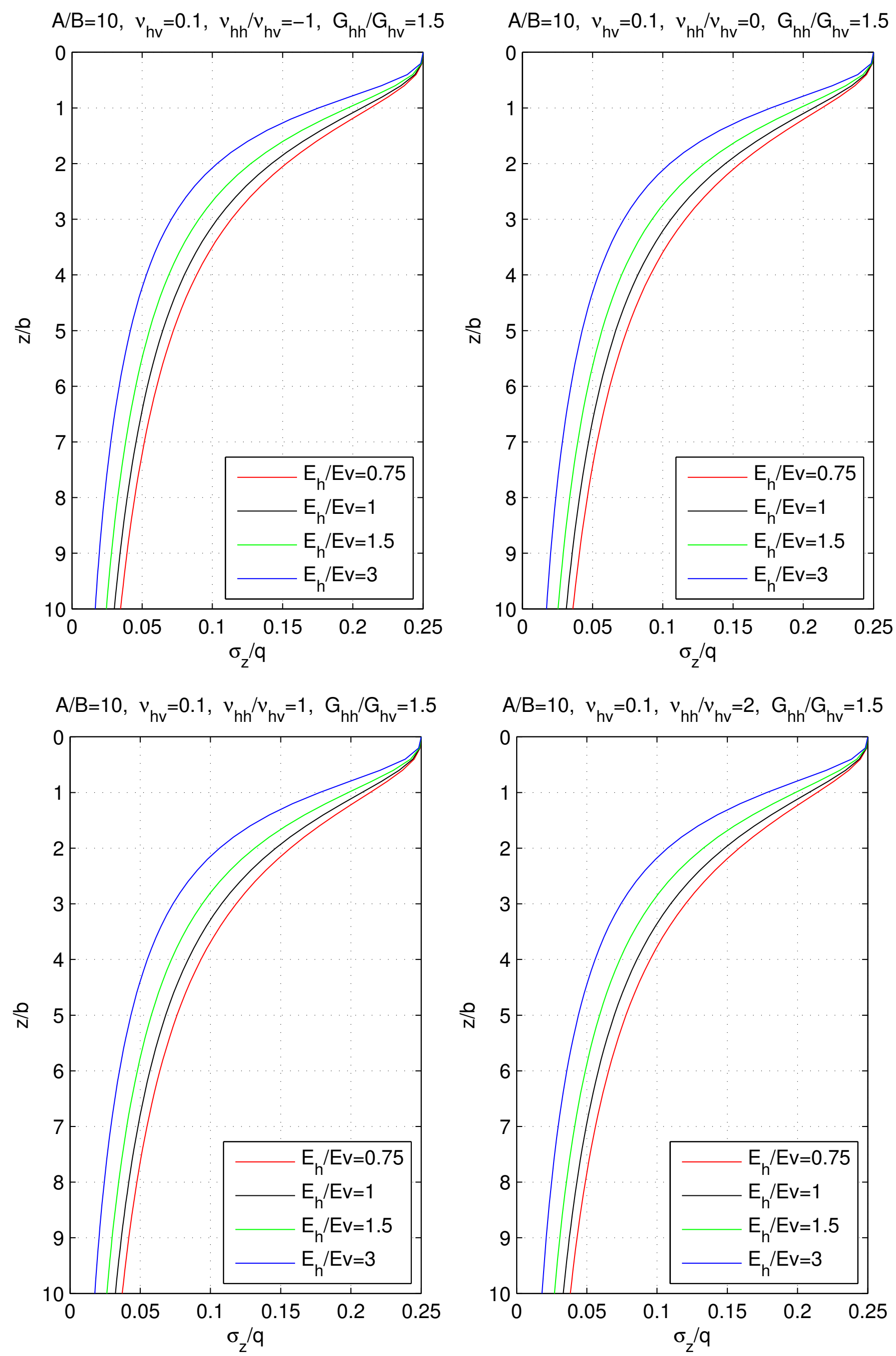

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

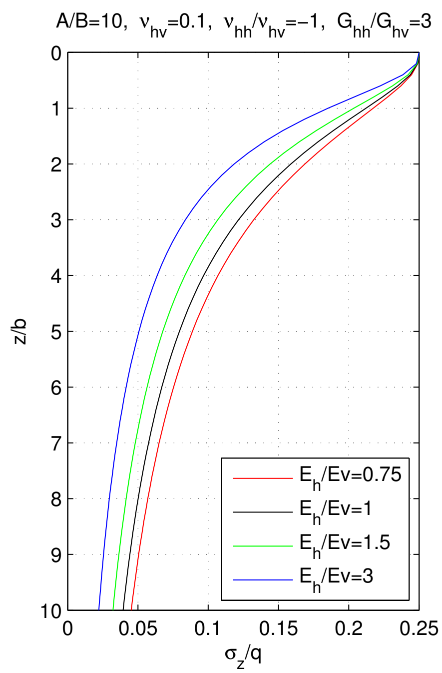

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

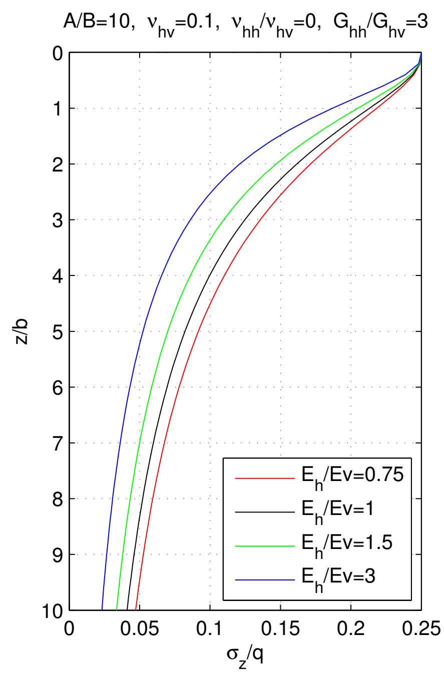

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

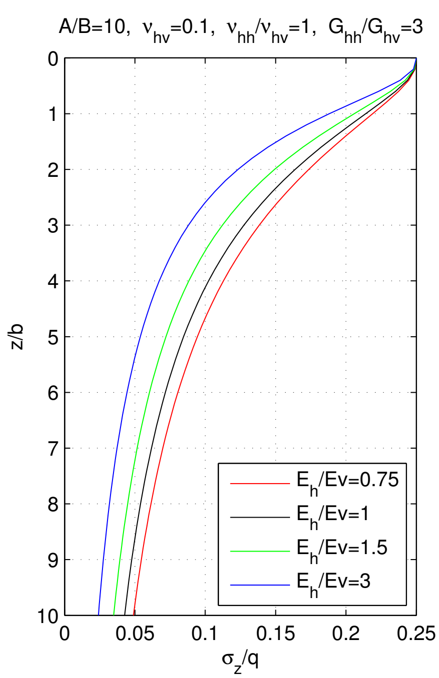

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

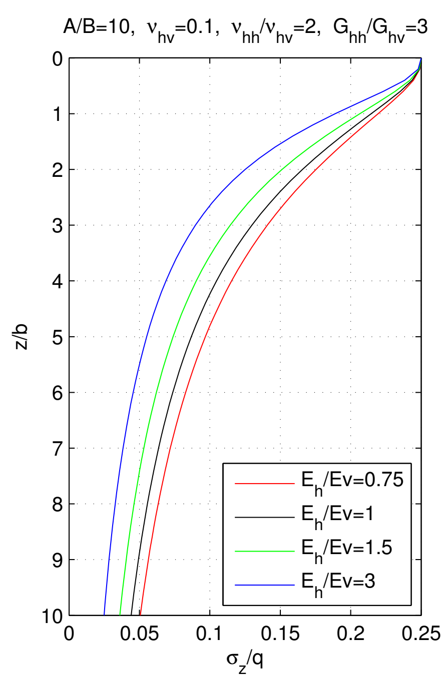

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

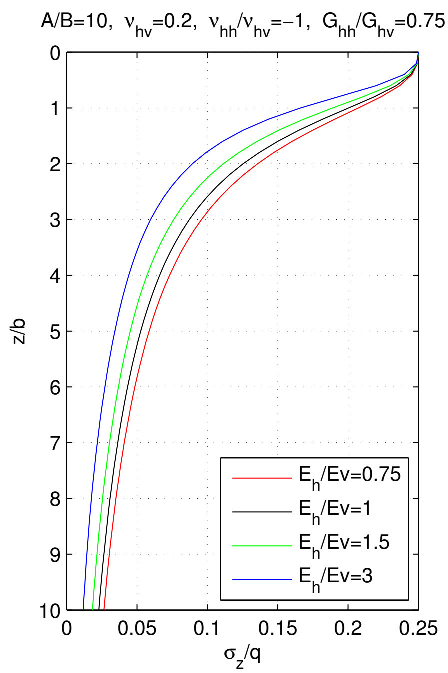

A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

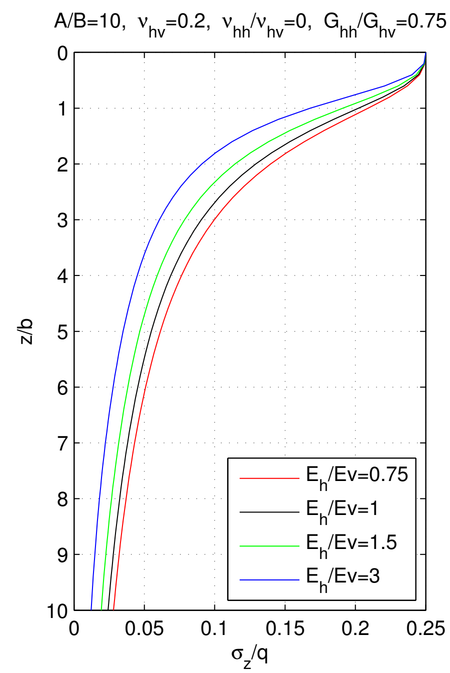

$A/B=10,\ \nu_{hv}=0.1,\ \nu_{hh}/\nu_{hv}=-1,\ G_{hh}/G_{hv}=3$
z/b
σ_z/q
$E_h/Ev=0.75$
$E_h/Ev=1$
$E_h/Ev=1.5$
$E_h/Ev=3$

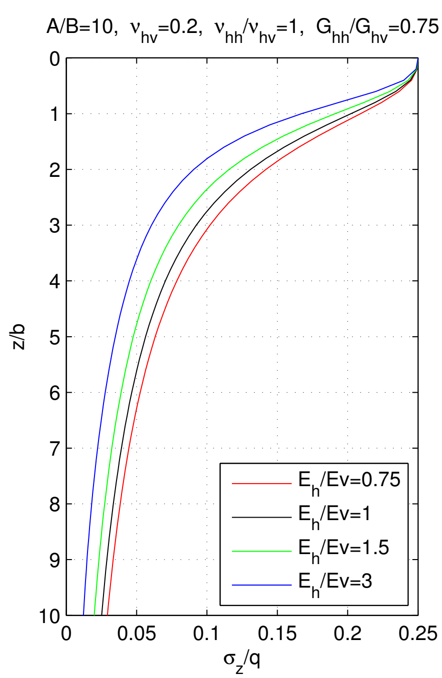

$A/B=10,\ \nu_{hv}=0.1,\ \nu_{hh}/\nu_{hv}=0,\ G_{hh}/G_{hv}=3$
z/b
σ_z/q
$E_h/Ev=0.75$
$E_h/Ev=1$
$E_h/Ev=1.5$
$E_h/Ev=3$

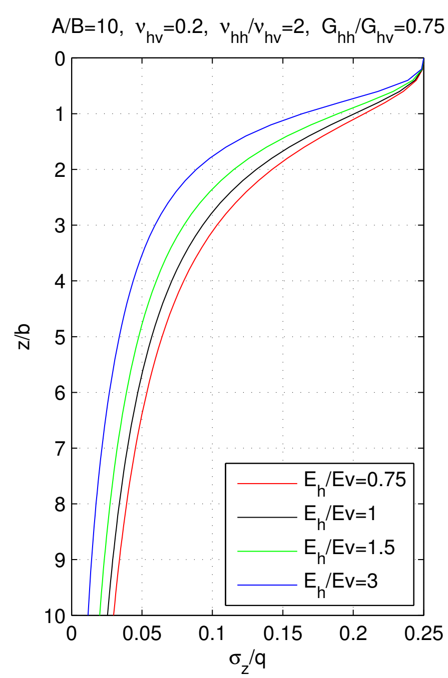

$A/B=10,\ \nu_{hv}=0.1,\ \nu_{hh}/\nu_{hv}=1,\ G_{hh}/G_{hv}=3$
z/b
σ_z/q
$E_h/Ev=0.75$
$E_h/Ev=1$
$E_h/Ev=1.5$
$E_h/Ev=3$

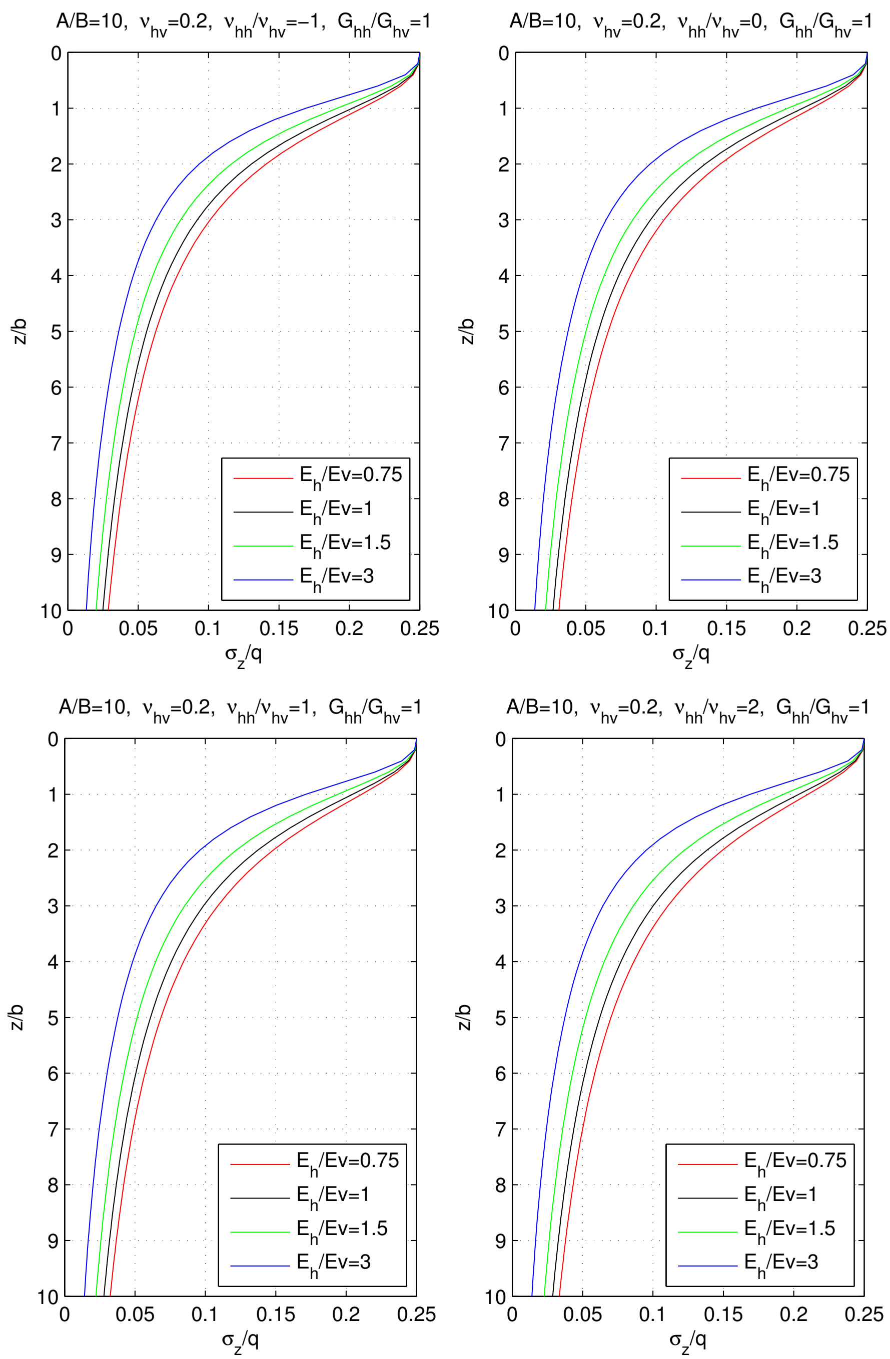

$A/B=10,\ \nu_{hv}=0.1,\ \nu_{hh}/\nu_{hv}=2,\ G_{hh}/G_{hv}=3$
z/b
σ_z/q
$E_h/Ev=0.75$
$E_h/Ev=1$
$E_h/Ev=1.5$
$E_h/Ev=3$


A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

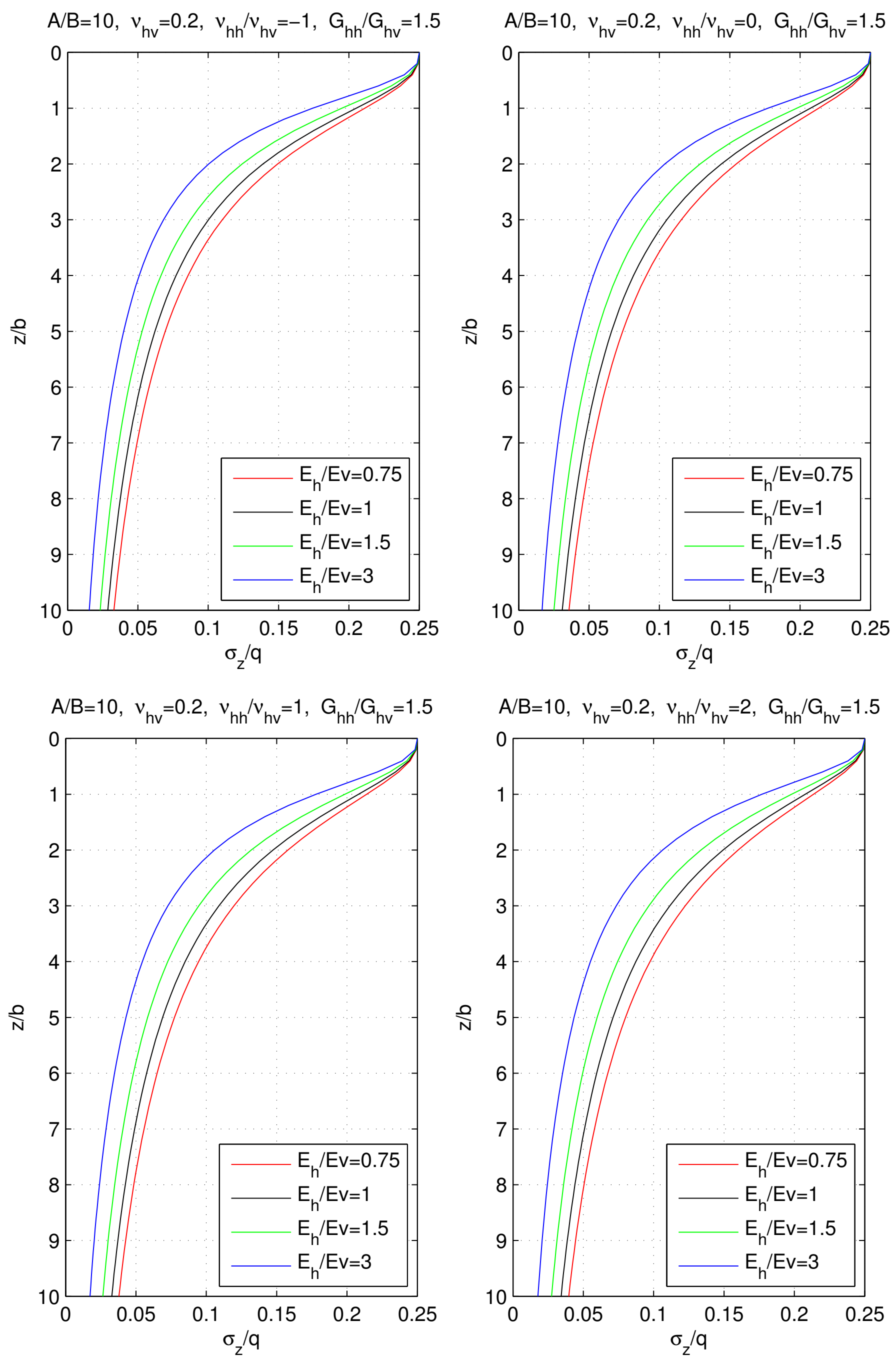

A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

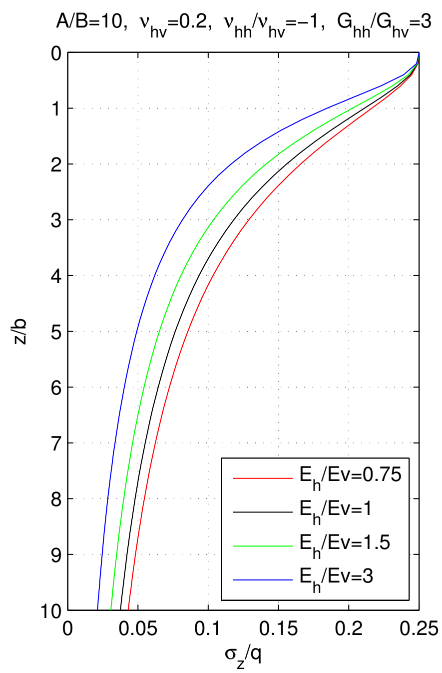

A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

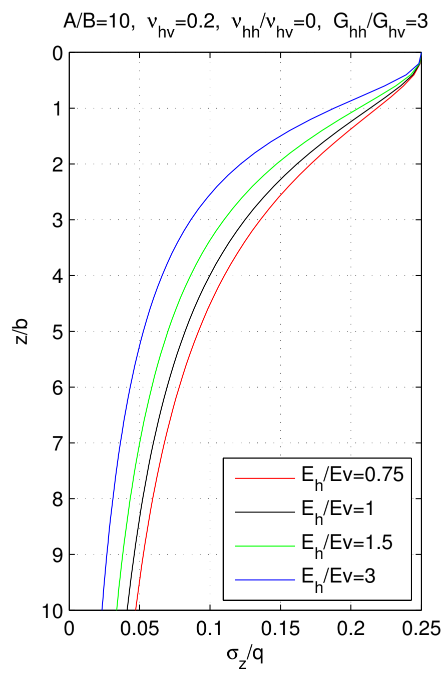

A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

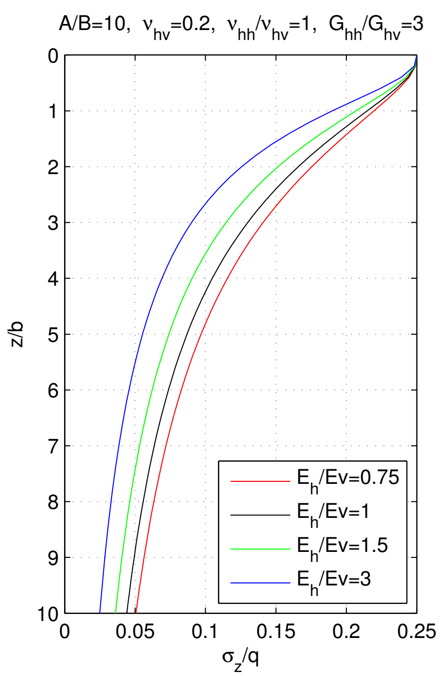


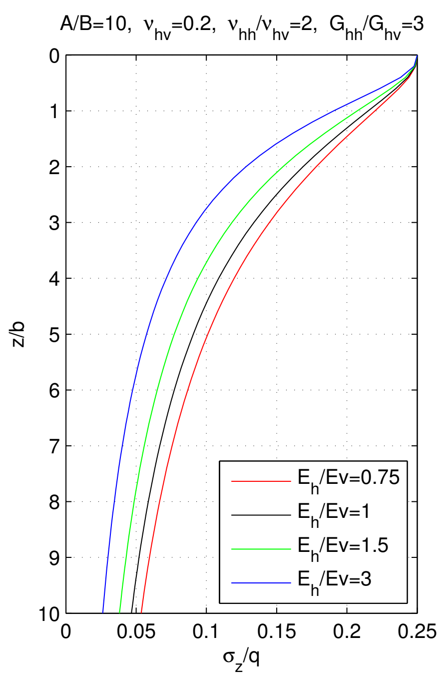
A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1
A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1
A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1
A/B=10, ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1
z/b
σ_z/q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

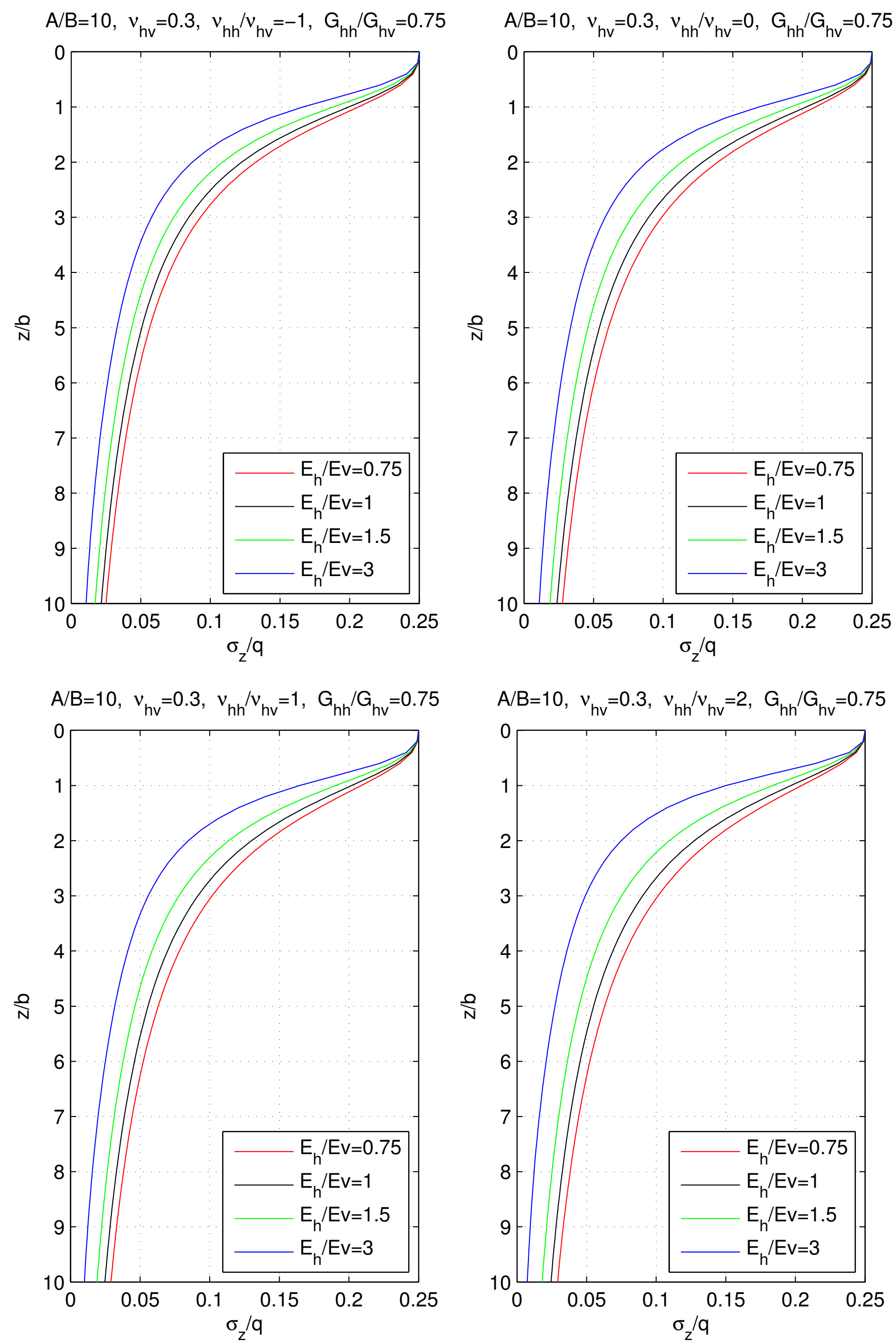

A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5
A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

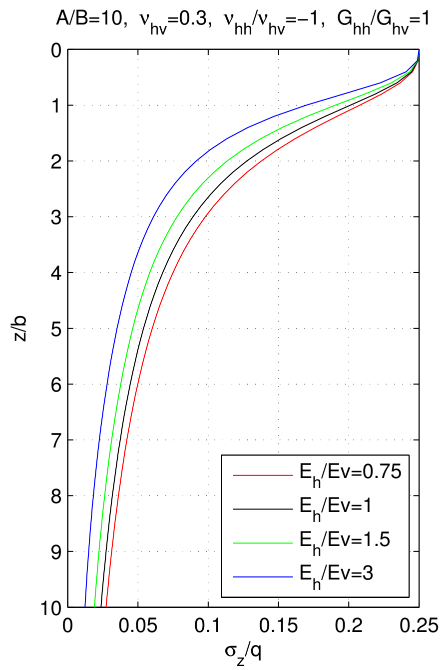

A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

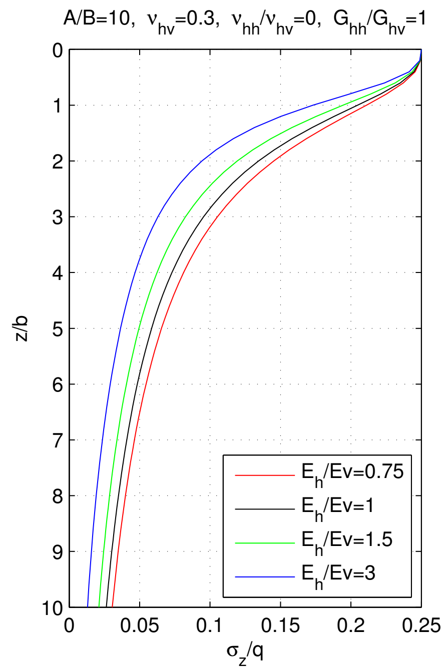

A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

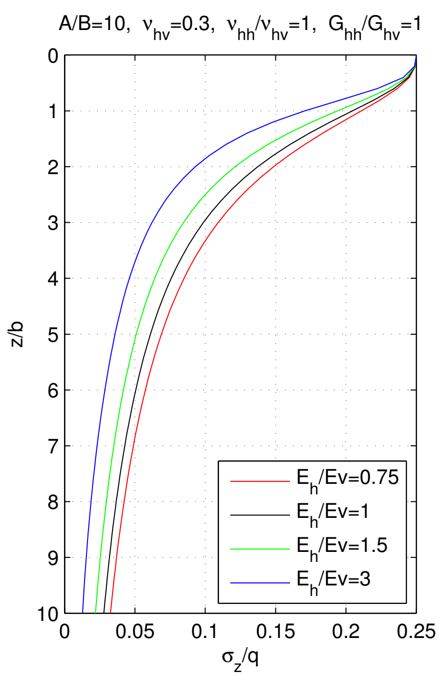

A/B=10, ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

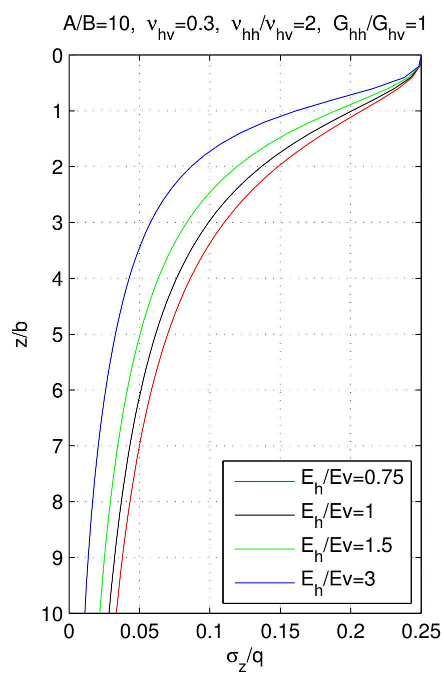


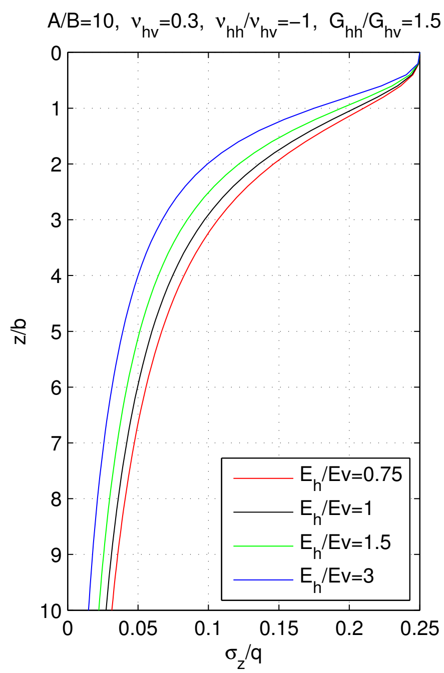
A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75
A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75
z/b
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

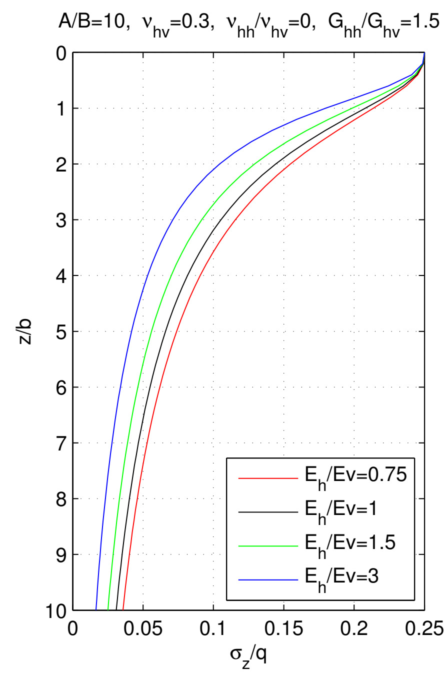

A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

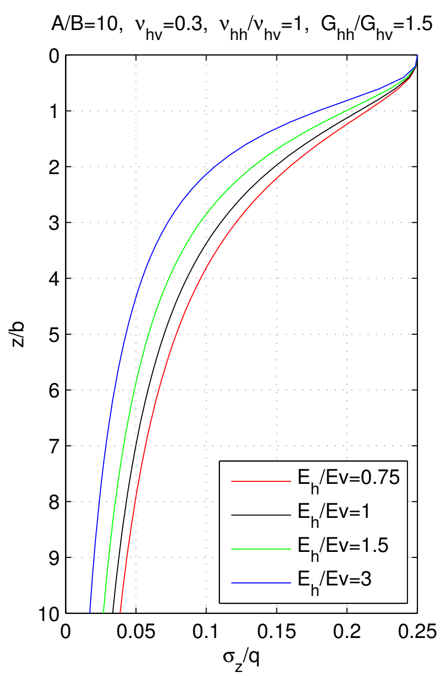

A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

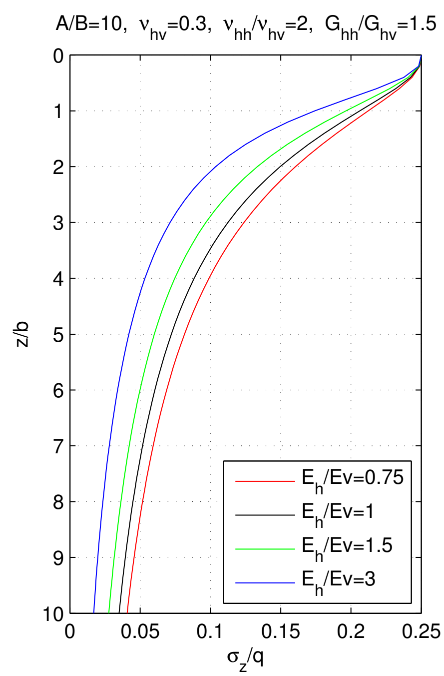

A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3

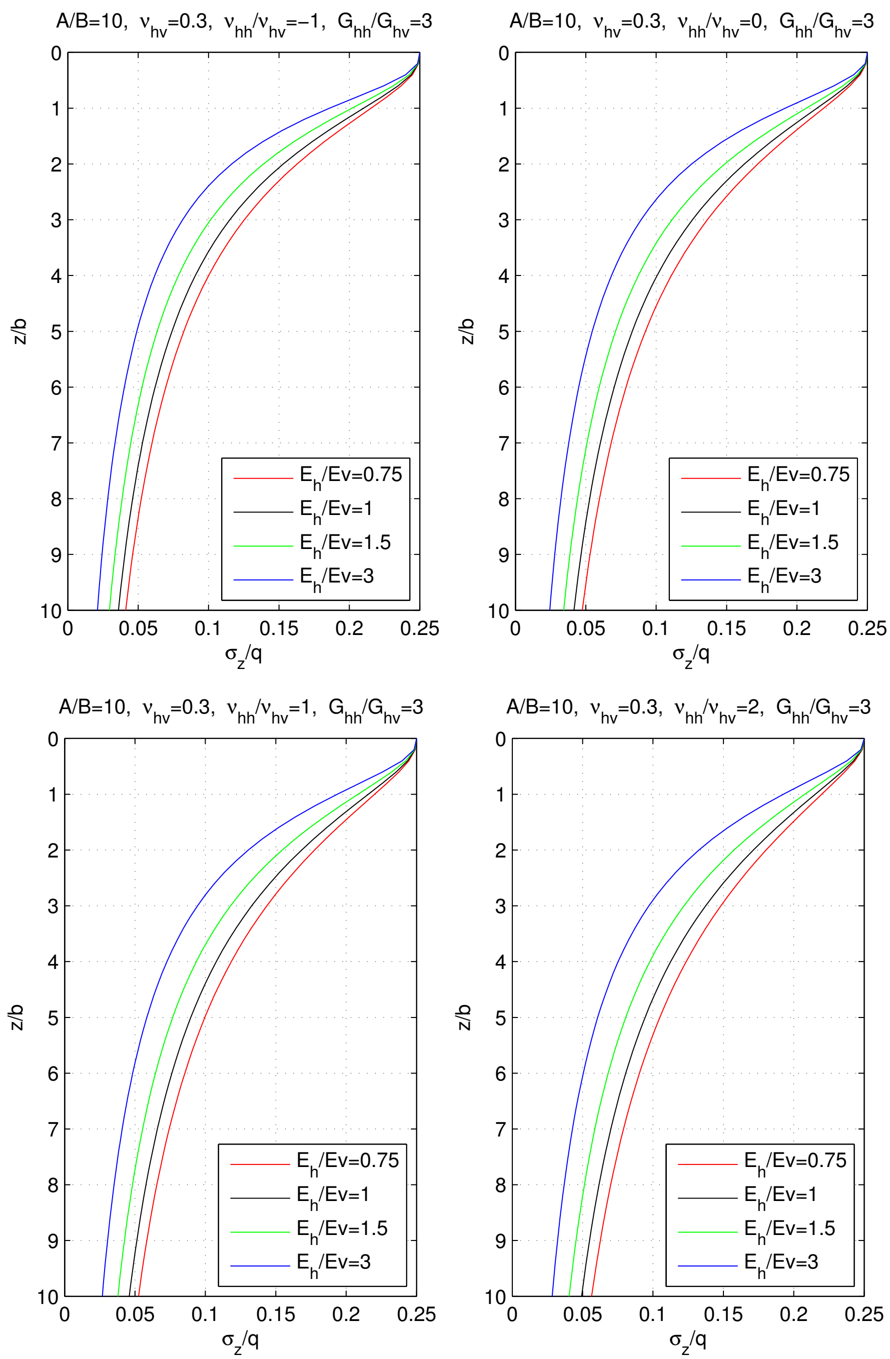

A/B=10, ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1
z/b
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
σ_z/q
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1.5
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1.5
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1.5
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1.5
z/b
σ_z/q
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
E_h/Ev=0.75
E_h/Ev=1
E_h/Ev=1.5
E_h/Ev=3


A/B=10, νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3
A/B=10, νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3
A/B=10, νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3
A/B=10, νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3
z/b
σz/q
Eh/Ev=0.75
Eh/Ev=1
Eh/Ev=1.5
Eh/Ev=3
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$A/B = 1$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{E_h}{E_v} = 0.75$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.55	0.57	0.58	0.59	0.52	0.54	0.56	0.57	0.48	0.52	0.54	0.54
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.59	0.61	0.62	0.64	0.55	0.59	0.61	0.63	0.51	0.56	0.59	0.61
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.67	0.69	0.71	0.73	0.62	0.67	0.71	0.74	0.57	0.64	0.69	0.73
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.85	0.89	0.92	0.95	0.79	0.87	0.93	0.98	0.73	0.84	0.93	1.00
$\frac{E_h}{E_v} = 1.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.49	0.51	0.51	0.52	0.46	0.48	0.49	0.50	0.42	0.45	0.46	0.46
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.53	0.54	0.56	0.57	0.49	0.52	0.54	0.55	0.45	0.49	0.51	0.52
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.59	0.61	0.63	0.64	0.55	0.59	0.62	0.64	0.50	0.55	0.59	0.62
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.75	0.78	0.81	0.83	0.69	0.75	0.81	0.85	0.63	0.72	0.79	0.85
$\frac{E_h}{E_v} = 1.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.42	0.43	0.44	0.44	0.39	0.40	0.41	0.41	0.34	0.36	0.37	0.35
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.45	0.46	0.47	0.48	0.41	0.43	0.44	0.45	0.37	0.39	0.40	0.40
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.50	0.51	0.53	0.54	0.46	0.48	0.51	0.52	0.41	0.45	0.47	0.48
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.62	0.65	0.67	0.69	0.57	0.62	0.66	0.69	0.51	0.58	0.63	0.67
$\frac{E_h}{E_v} = 3.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.33	0.33	0.33	0.34	0.28	0.29	0.29	0.28	0.22	0.23	0.22	0.19
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.34	0.35	0.35	0.36	0.30	0.31	0.31	0.31	0.24	0.25	0.24	0.23
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.38	0.38	0.39	0.40	0.33	0.34	0.35	0.36	0.26	0.28	0.29	0.29
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.46	0.47	0.49	0.50	0.40	0.43	0.45	0.47	0.33	0.37	0.40	0.42

Tabella B.1: Valori di $\frac{E_v w}{q}$ nel caso di A/B=1

$A/B = 1.5$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{E_h}{E_v}$ =0.75	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.67	0.68	0.70	0.71	0.63	0.66	0.68	0.69	0.58	0.62	0.65	0.66
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.72	0.74	0.76	0.77	0.67	0.71	0.74	0.77	0.62	0.68	0.72	0.74
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.81	0.83	0.86	0.88	0.75	0.81	0.85	0.89	0.70	0.78	0.84	0.88
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.03	1.07	1.11	1.15	0.96	1.05	1.12	1.19	0.88	1.02	1.12	1.21
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.60	0.61	0.62	0.63	0.56	0.58	0.60	0.61	0.51	0.54	0.56	0.56
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.64	0.66	0.67	0.68	0.59	0.63	0.65	0.67	0.54	0.59	0.62	0.63
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.72	0.74	0.76	0.78	0.66	0.71	0.75	0.77	0.60	0.67	0.72	0.75
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.90	0.94	0.97	1.01	0.84	0.91	0.98	1.03	0.76	0.87	0.96	1.03
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.50	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.51	0.52	0.53	0.54	0.47	0.49	0.50	0.50	0.41	0.44	0.44	0.43
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.55	0.56	0.57	0.58	0.50	0.52	0.54	0.55	0.44	0.47	0.49	0.49
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.60	0.62	0.64	0.65	0.55	0.59	0.61	0.63	0.49	0.54	0.57	0.59
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.75	0.78	0.81	0.83	0.69	0.75	0.80	0.84	0.62	0.70	0.76	0.81
$\frac{E_h}{E_v}$ =3.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.40	0.40	0.40	0.41	0.34	0.35	0.35	0.34	0.27	0.27	0.26	0.23
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.42	0.42	0.43	0.43	0.36	0.37	0.37	0.37	0.29	0.30	0.29	0.27
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.45	0.46	0.47	0.48	0.39	0.41	0.42	0.43	0.32	0.34	0.35	0.35
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.55	0.57	0.59	0.60	0.49	0.52	0.55	0.57	0.40	0.45	0.48	0.50

Tabella B.2: Valori di $\frac{E_v w}{q}$ nel caso di A/B=1.5

$A/B = 2$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{E_h}{E_v} = 0.75$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.75	0.77	0.79	0.80	0.71	0.74	0.77	0.78	0.65	0.70	0.73	0.74
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.81	0.83	0.85	0.87	0.76	0.80	0.84	0.86	0.70	0.77	0.81	0.83
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.91	0.94	0.97	0.99	0.85	0.91	0.96	1.01	0.78	0.88	0.94	0.99
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.16	1.21	1.26	1.30	1.09	1.18	1.27	1.34	1.00	1.15	1.26	1.36
$\frac{E_h}{E_v} = 1.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.68	0.69	0.70	0.71	0.63	0.66	0.67	0.68	0.57	0.61	0.63	0.63
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.72	0.74	0.76	0.77	0.67	0.71	0.74	0.75	0.61	0.66	0.70	0.71
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.81	0.83	0.86	0.88	0.75	0.80	0.84	0.87	0.68	0.76	0.81	0.84
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.02	1.06	1.10	1.14	0.95	1.03	1.10	1.16	0.86	0.99	1.08	1.16
$\frac{E_h}{E_v} = 1.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.58	0.59	0.60	0.61	0.53	0.55	0.56	0.56	0.47	0.49	0.50	0.48
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.62	0.63	0.64	0.65	0.56	0.59	0.61	0.62	0.50	0.53	0.55	0.55
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.68	0.70	0.72	0.73	0.62	0.66	0.69	0.71	0.55	0.61	0.64	0.66
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.85	0.88	0.91	0.94	0.78	0.84	0.90	0.94	0.70	0.79	0.86	0.92
$\frac{E_h}{E_v} = 3.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.45	0.45	0.46	0.46	0.38	0.39	0.39	0.38	0.31	0.31	0.29	0.26
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.47	0.48	0.48	0.49	0.41	0.42	0.42	0.42	0.32	0.34	0.33	0.31
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.51	0.52	0.53	0.54	0.45	0.47	0.48	0.49	0.36	0.38	0.39	0.39
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.62	0.65	0.66	0.68	0.55	0.59	0.62	0.64	0.45	0.50	0.54	0.57

Tabella B.3: Valori di $\frac{E_v w}{q}$ nel caso di A/B=2

$A/B = 2.5$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{E_h}{E_v}$ =0.75	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	1.04	1.06	1.08	1.10	0.97	1.02	1.05	1.08	0.90	0.97	1.01	1.02
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.11	1.14	1.17	1.20	1.04	1.10	1.15	1.19	0.96	1.05	1.11	1.15
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.25	1.29	1.33	1.37	1.17	1.25	1.32	1.38	1.08	1.20	1.30	1.36
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.60	1.66	1.73	1.78	1.49	1.63	1.74	1.85	1.37	1.57	1.74	1.87
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.93	0.95	0.97	0.98	0.86	0.90	0.93	0.94	0.79	0.84	0.87	0.86
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.99	1.02	1.04	1.06	0.92	0.97	1.01	1.03	0.84	0.91	0.96	0.97
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.11	1.14	1.18	1.21	1.03	1.10	1.16	1.20	0.94	1.04	1.11	1.16
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.40	1.46	1.51	1.56	1.30	1.42	1.51	1.60	1.19	1.36	1.49	1.60
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.50	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.80	0.81	0.82	0.83	0.73	0.75	0.77	0.77	0.64	0.68	0.69	0.67
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.85	0.87	0.88	0.90	0.77	0.81	0.83	0.85	0.69	0.73	0.76	0.76
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.94	0.96	0.99	1.01	0.86	0.91	0.95	0.98	0.76	0.84	0.88	0.91
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.17	1.21	1.26	1.29	1.07	1.16	1.23	1.30	0.96	1.08	1.18	1.26
$\frac{E_h}{E_v}$ =3.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.61	0.62	0.63	0.63	0.53	0.54	0.54	0.52	0.42	0.42	0.40	0.36
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.65	0.66	0.66	0.67	0.56	0.57	0.58	0.58	0.45	0.46	0.46	0.43
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.70	0.72	0.73	0.75	0.61	0.64	0.66	0.67	0.50	0.53	0.54	0.54
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.86	0.89	0.91	0.94	0.75	0.81	0.85	0.89	0.62	0.69	0.75	0.78

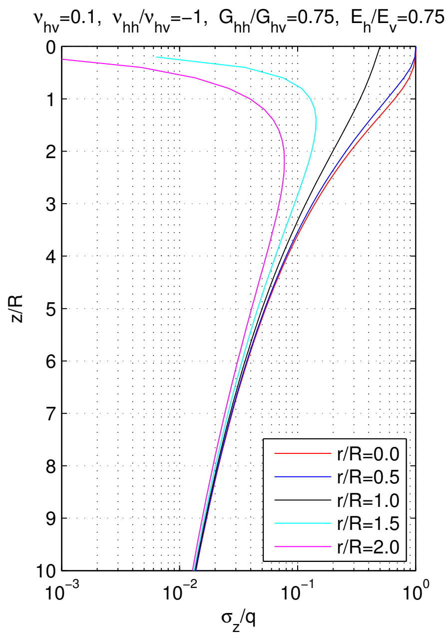
Tabella B.4: Valori di $\frac{E_v w}{q}$ nel caso di A/B=5

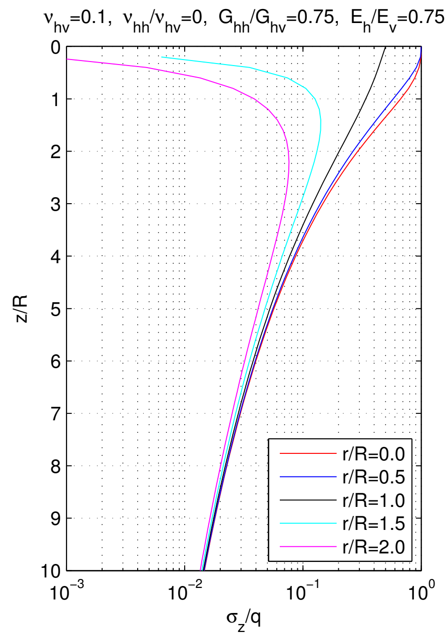
$A/B = 10$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{E_h}{E_v}$ =0.75	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	1.25	1.28	1.31	1.33	1.17	1.23	1.28	1.30	1.08	1.17	1.22	1.23
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.34	1.38	1.42	1.45	1.26	1.33	1.39	1.44	1.16	1.27	1.35	1.38
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.51	1.56	1.61	1.65	1.41	1.52	1.60	1.67	1.30	1.46	1.57	1.65
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.93	2.01	2.09	2.16	1.80	1.97	2.11	2.23	1.66	1.90	2.10	2.26
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	1.12	1.15	1.17	1.18	1.04	1.09	1.12	1.14	0.95	1.02	1.05	1.04
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.20	1.23	1.26	1.28	1.11	1.18	1.22	1.25	1.01	1.10	1.16	1.18
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.34	1.38	1.42	1.46	1.25	1.33	1.40	1.45	1.13	1.26	1.35	1.40
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.70	1.76	1.83	1.89	1.58	1.71	1.83	1.93	1.43	1.64	1.80	1.93
$\frac{E_h}{E_v}$ =1.50	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.96	0.98	1.00	1.01	0.88	0.91	0.93	0.93	0.78	0.82	0.83	0.81
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.02	1.05	1.07	1.08	0.93	0.98	1.01	1.02	0.83	0.89	0.92	0.91
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.13	1.17	1.20	1.22	1.04	1.10	1.15	1.18	0.92	1.01	1.07	1.10
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.41	1.47	1.52	1.56	1.30	1.40	1.49	1.57	1.16	1.31	1.43	1.52
$\frac{E_h}{E_v}$ =3.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.74	0.75	0.76	0.76	0.64	0.65	0.65	0.63	0.51	0.51	0.49	0.43
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.78	0.79	0.80	0.81	0.67	0.69	0.70	0.70	0.54	0.56	0.55	0.51
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.85	0.87	0.89	0.90	0.74	0.77	0.80	0.81	0.60	0.64	0.66	0.65
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.04	1.07	1.10	1.13	0.91	0.98	1.03	1.07	0.75	0.84	0.90	0.94

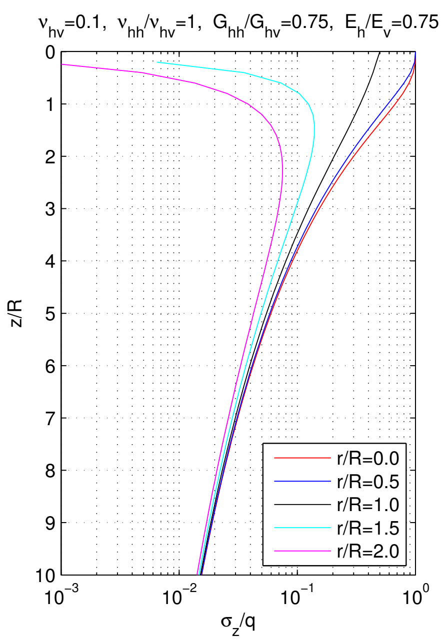
Tabella B.5: Valori di $\frac{E_v w}{q}$ nel caso di A/B=10

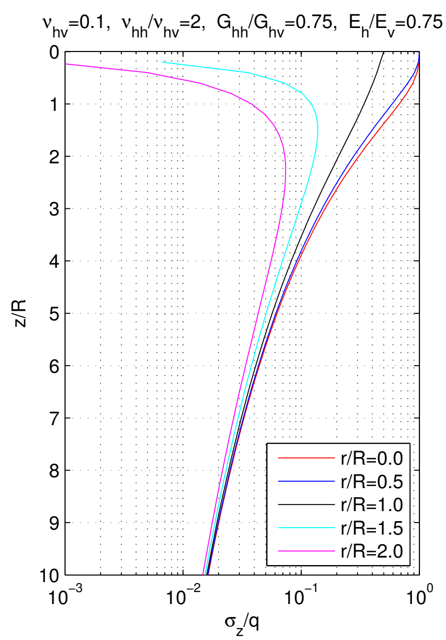
Appendice C

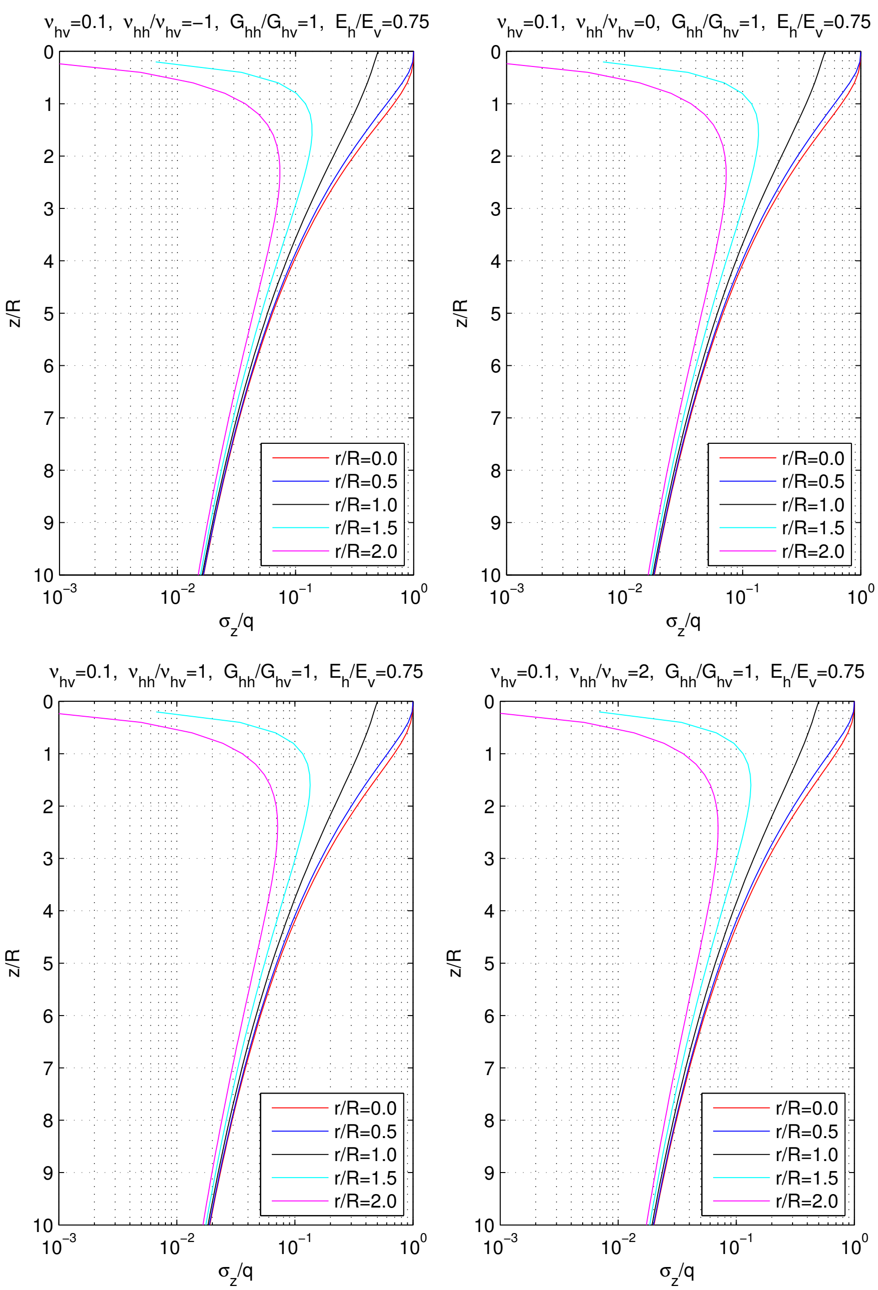
Abachi e tabelle per il caso del carico circolare

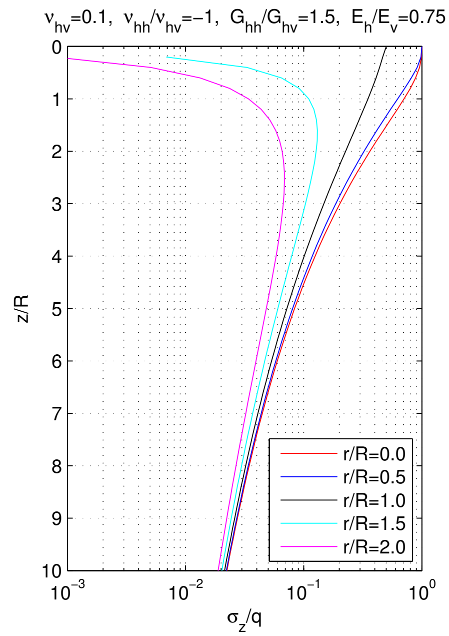

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

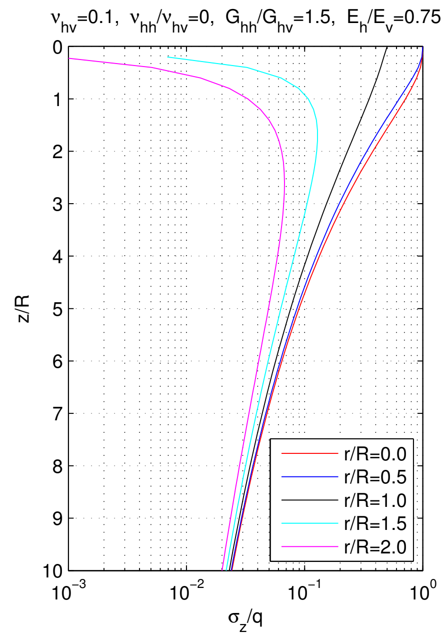

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

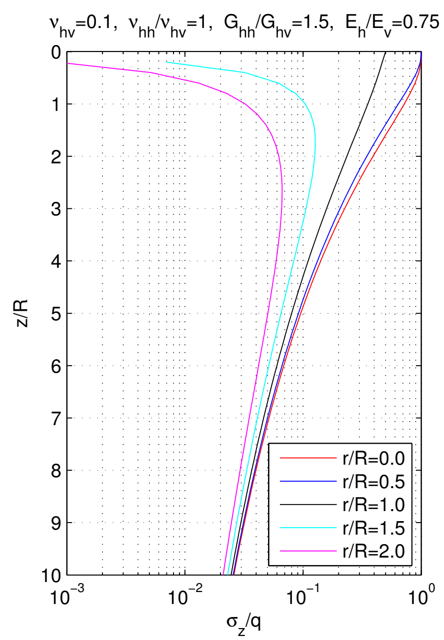

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

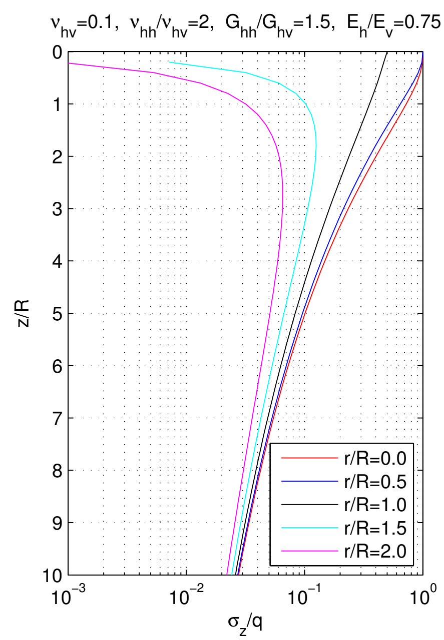

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

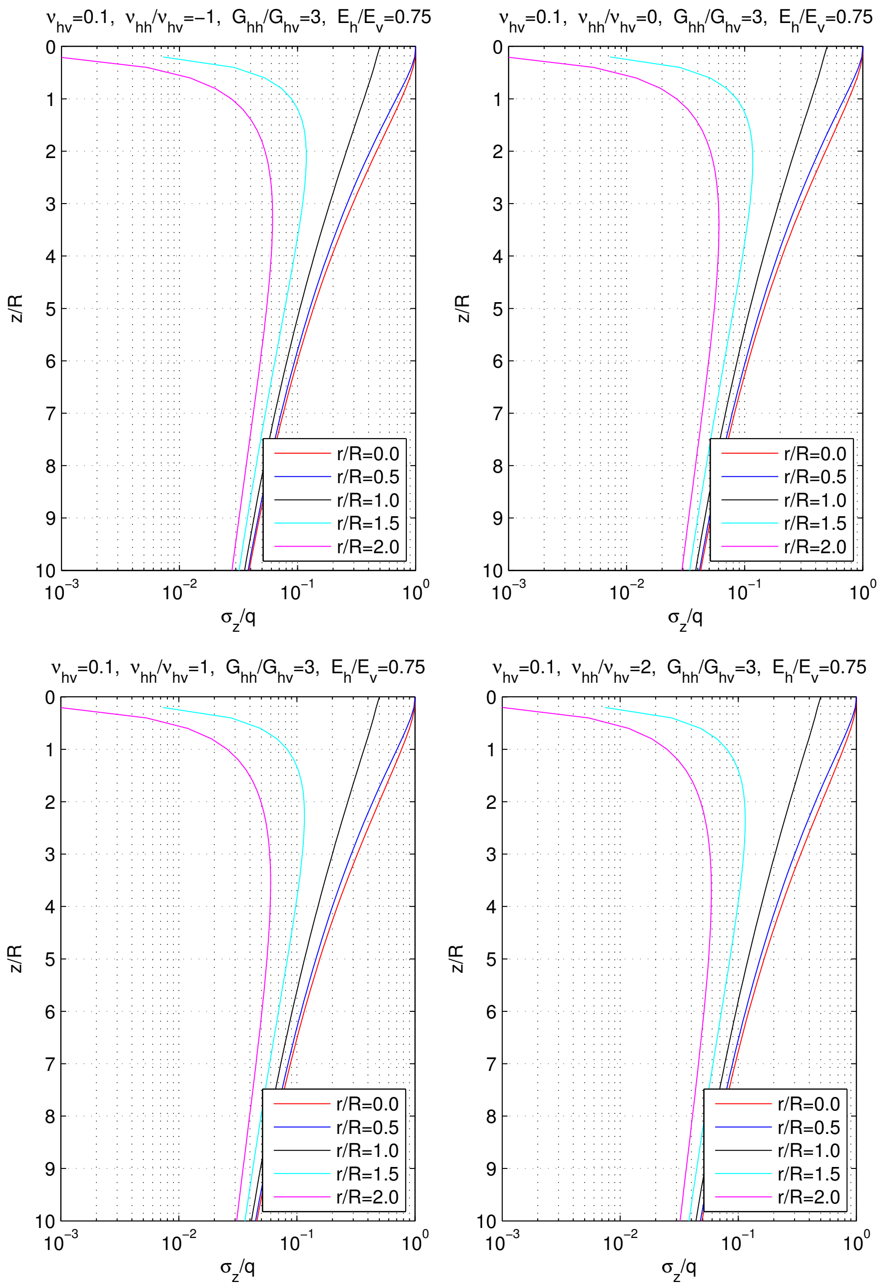

ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0
10^-3
10^-2
10^-1
10^0


ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

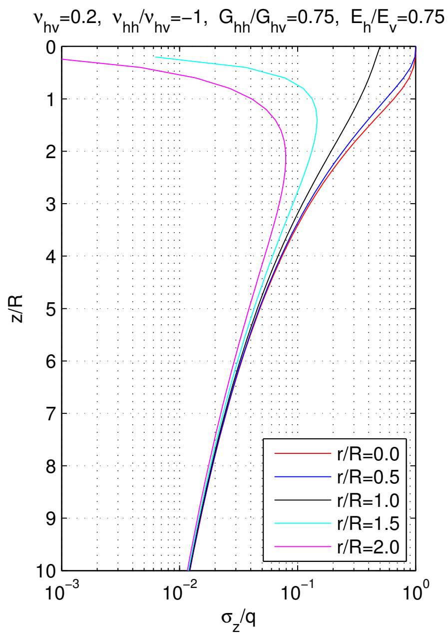

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

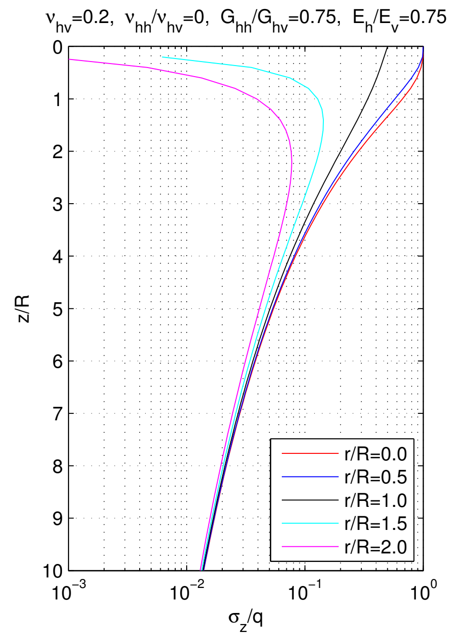

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

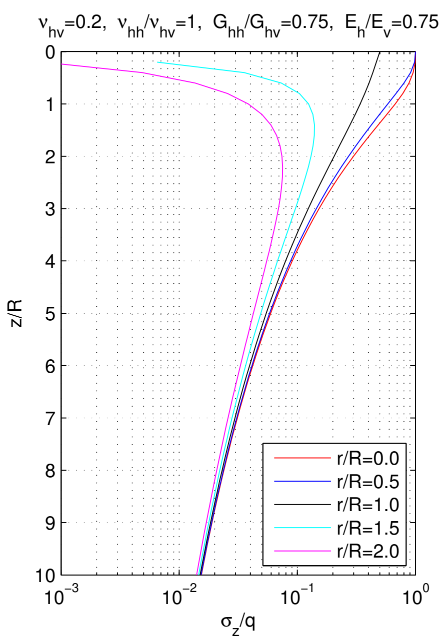

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

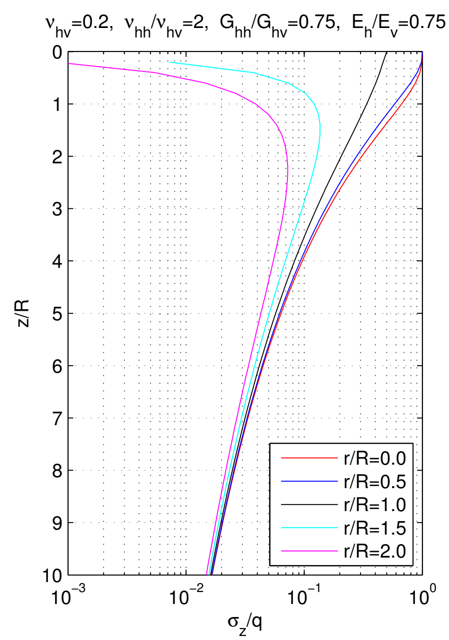


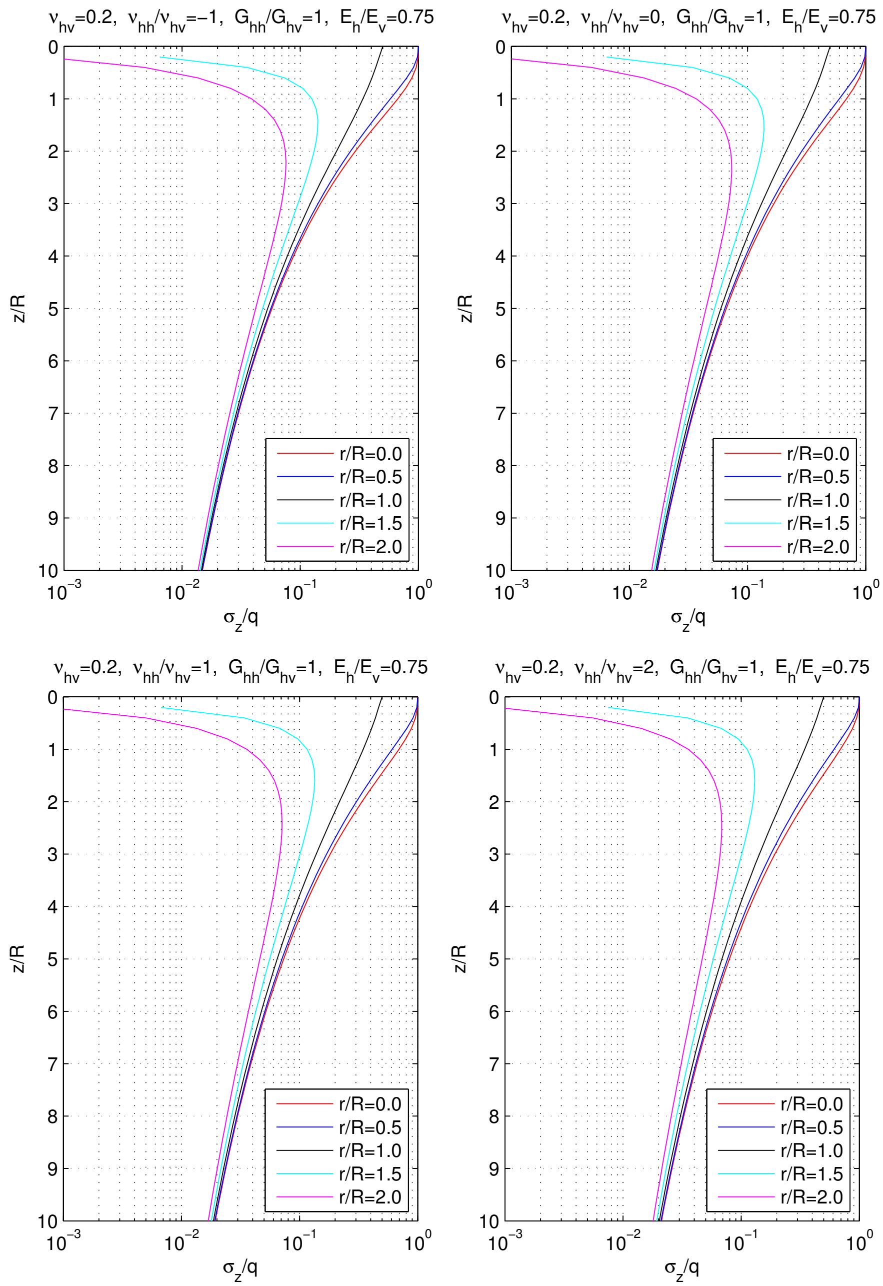
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

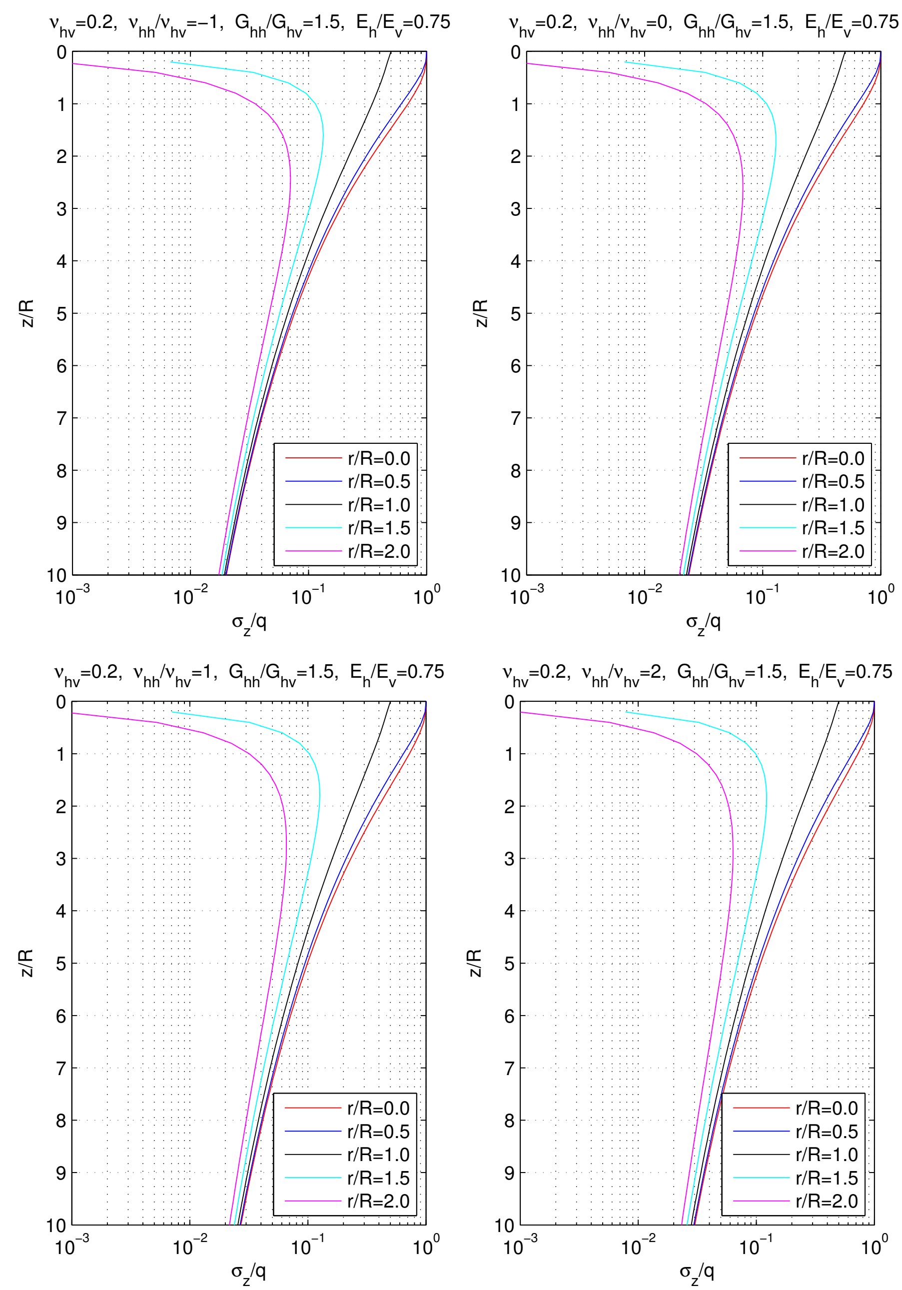

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

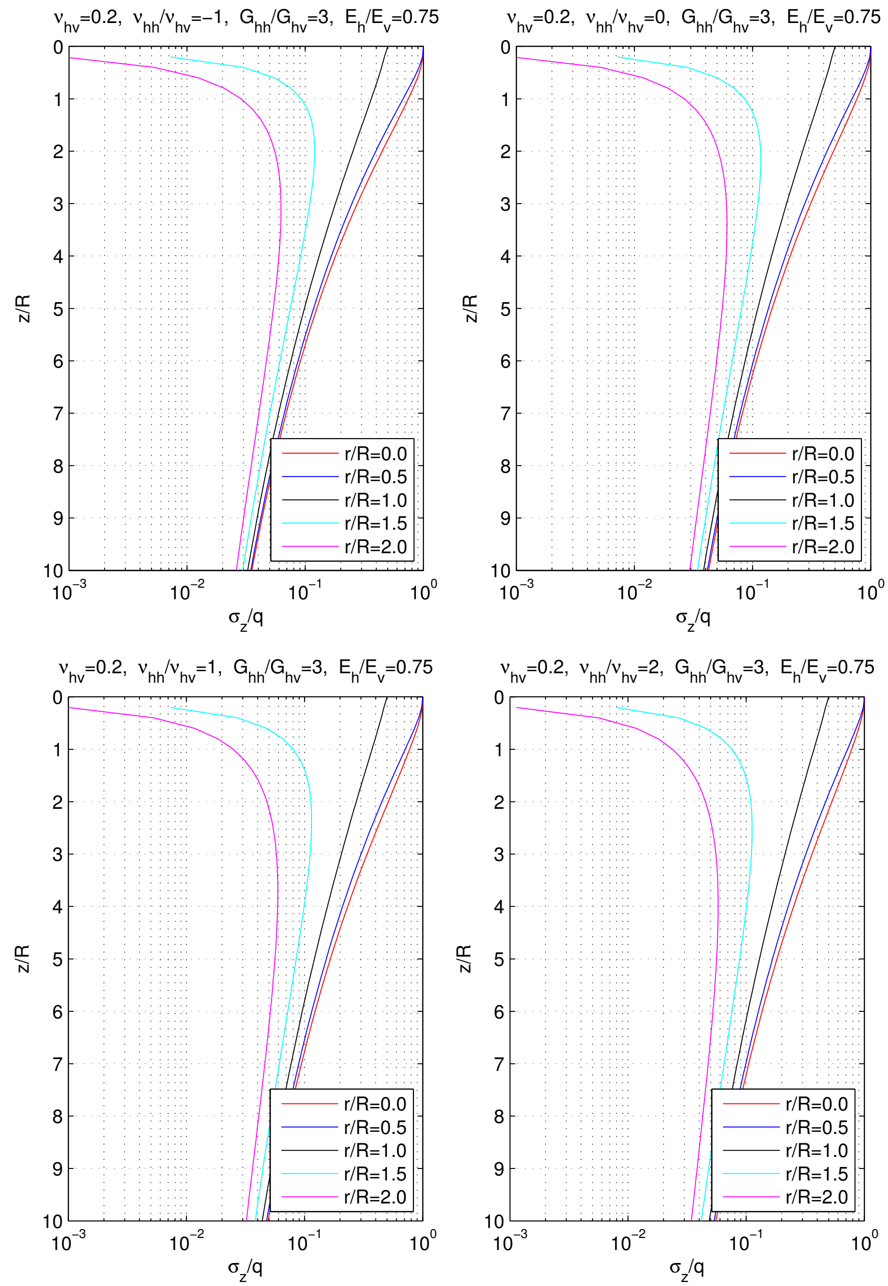

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

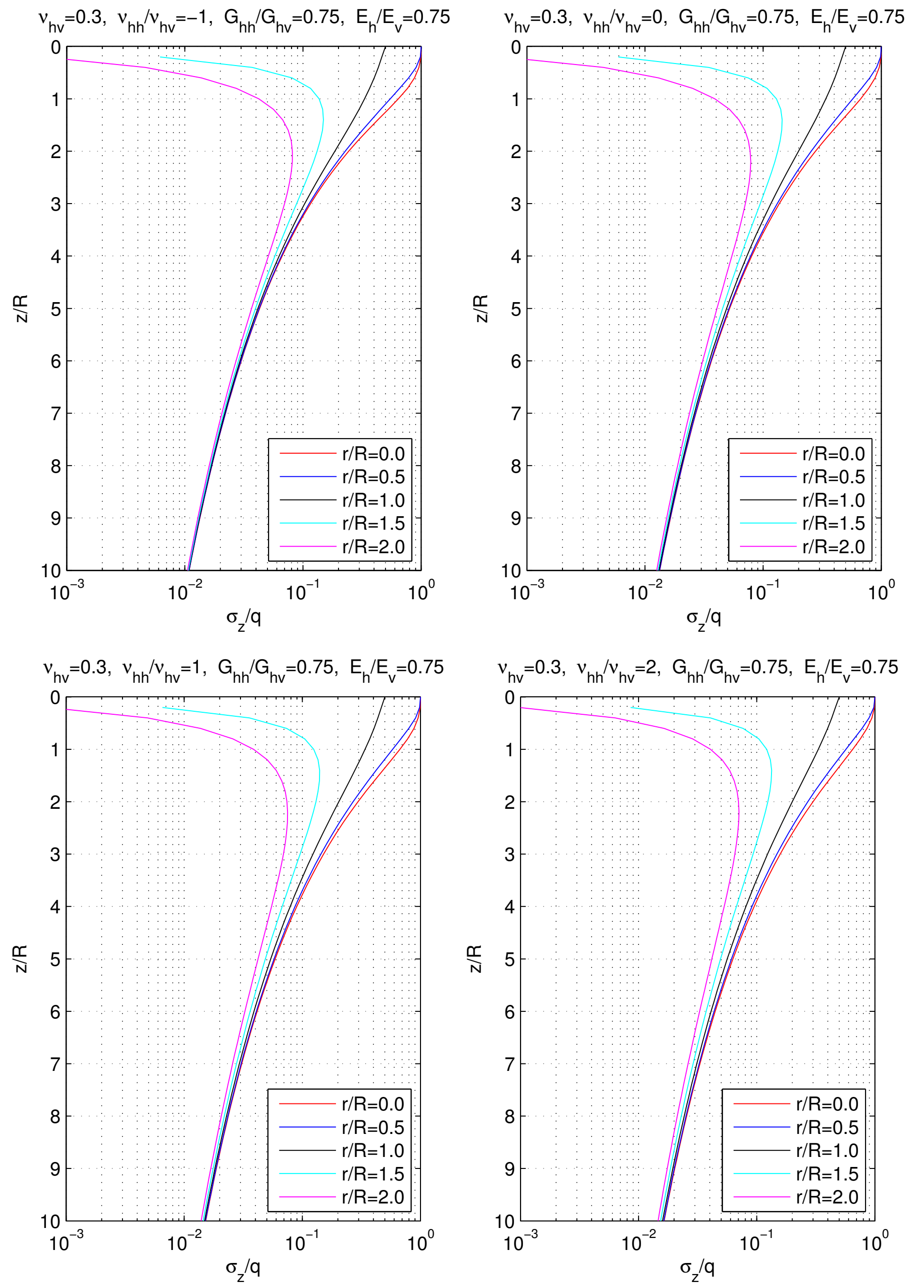

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



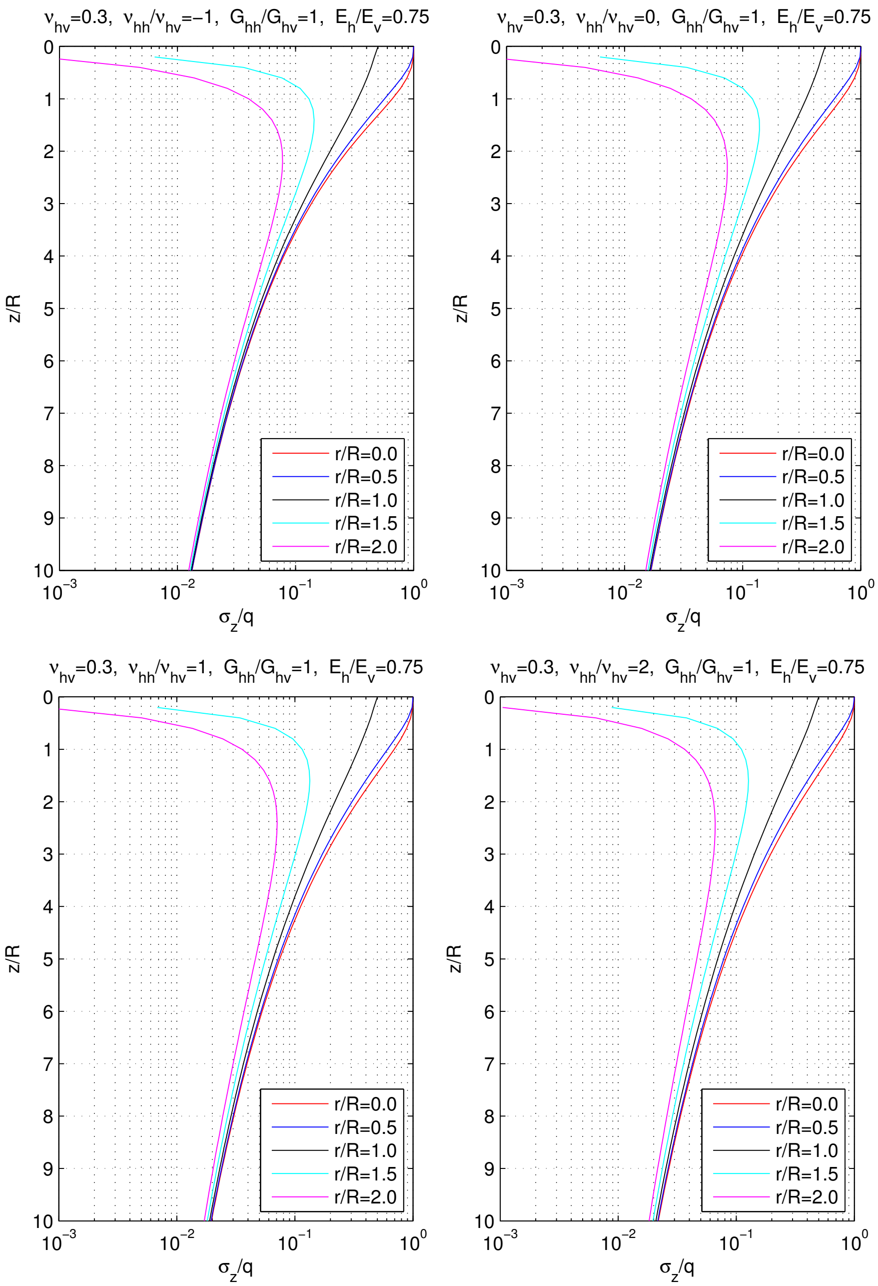
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



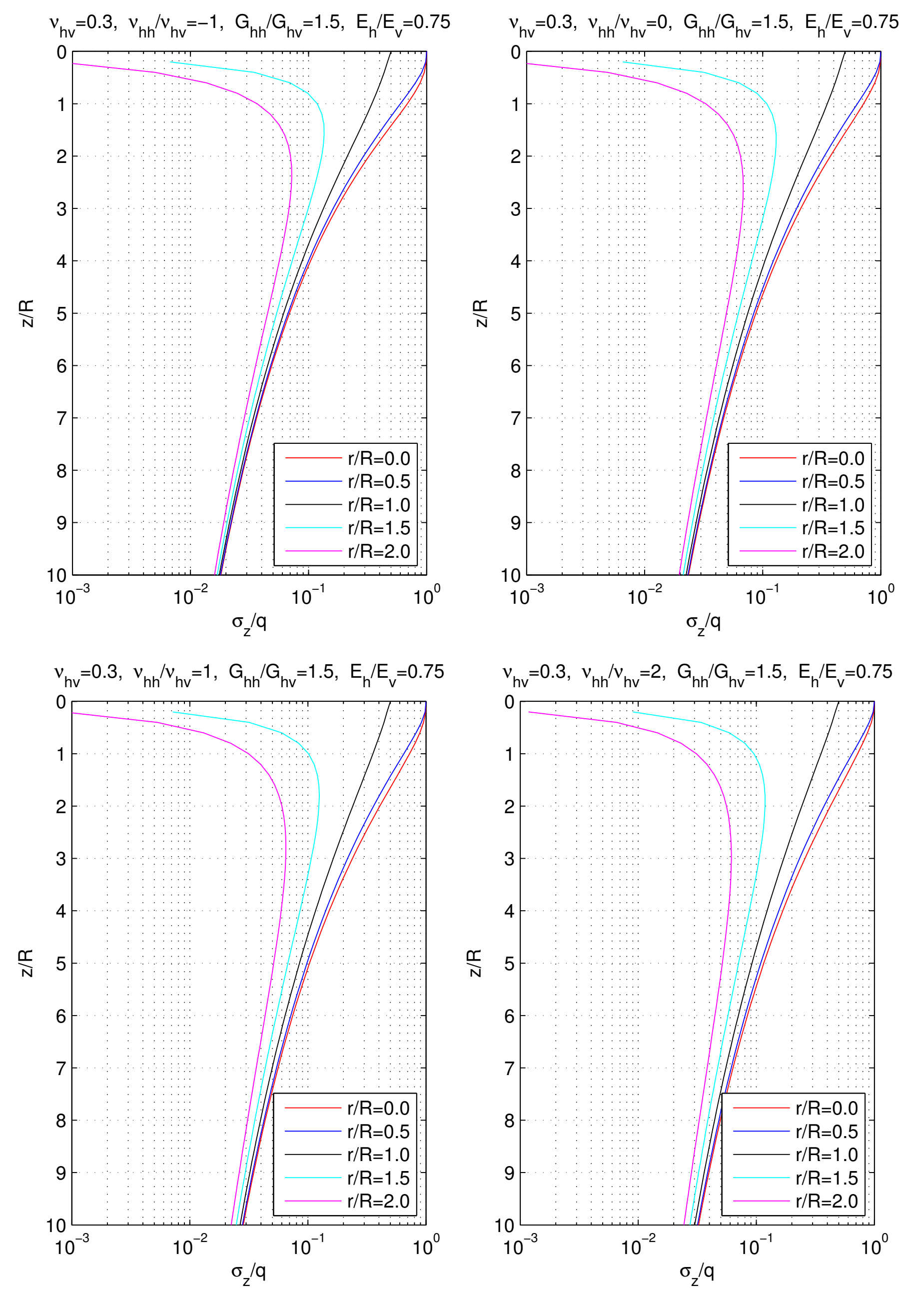
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

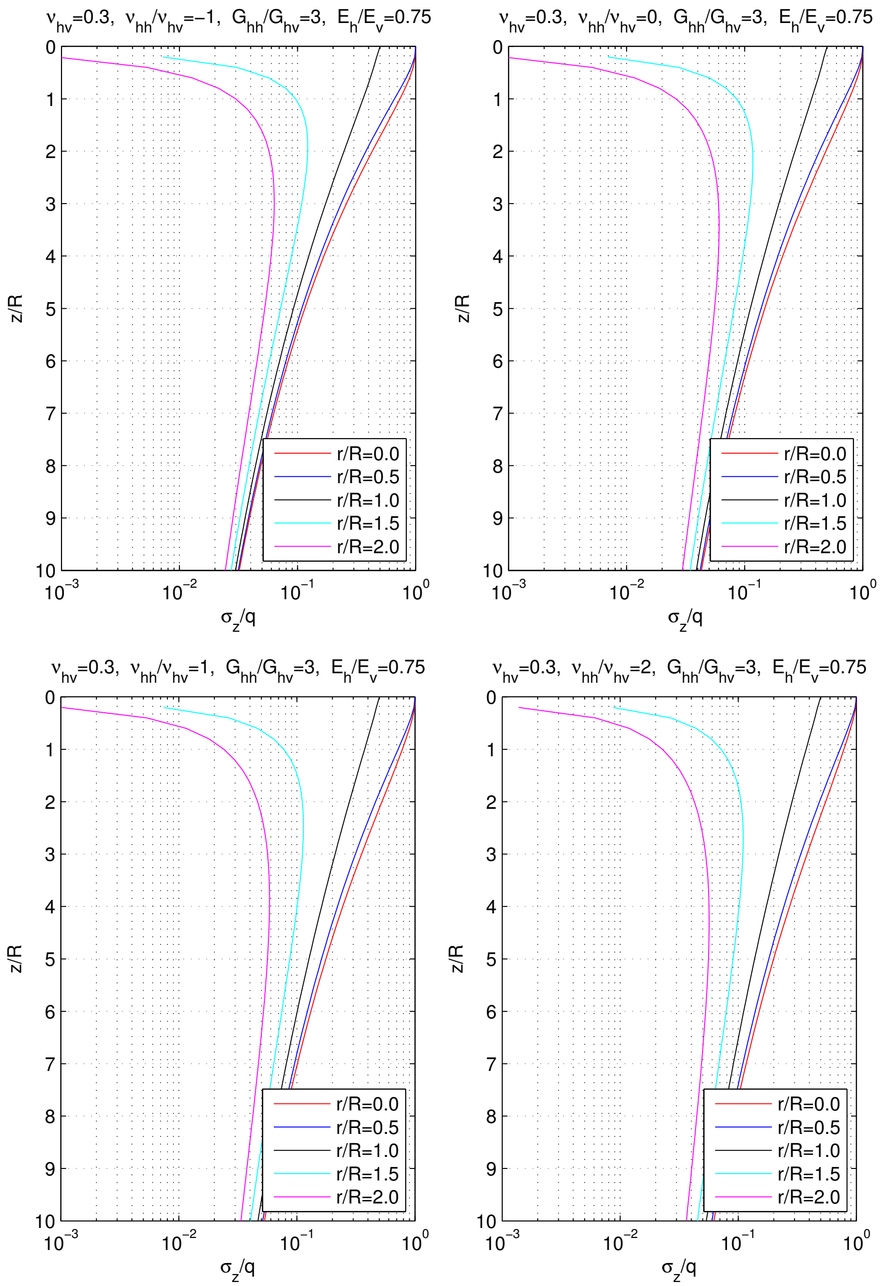


νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=0.75, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=0.75, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=0.75, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=0.75, Eh/Ev=0.75
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

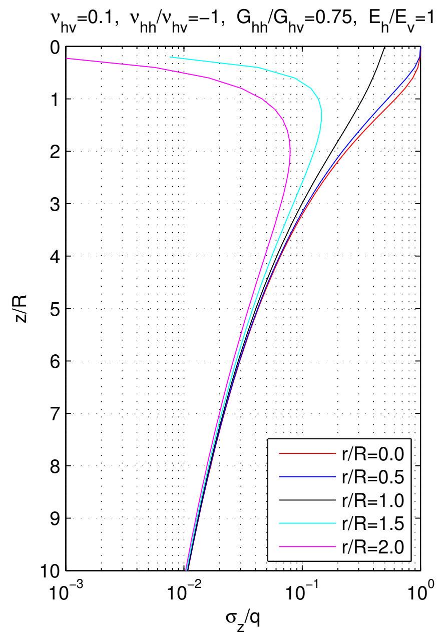


ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

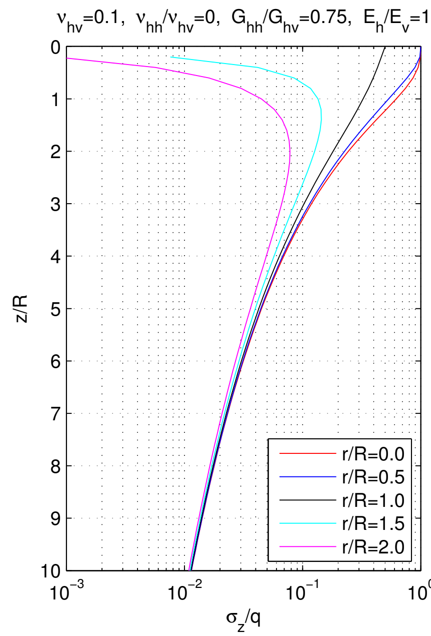

νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=0.75
νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=0.75
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



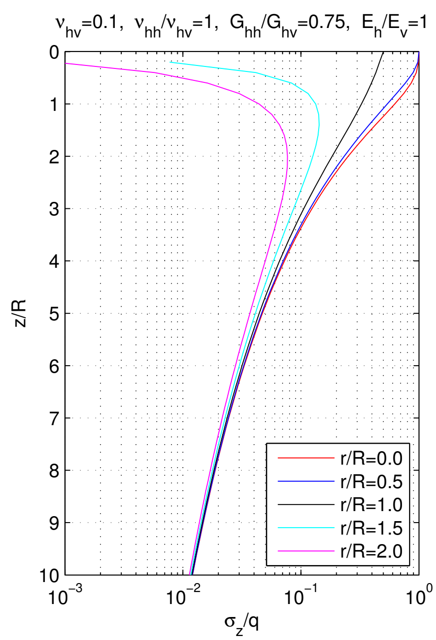
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=0.75
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



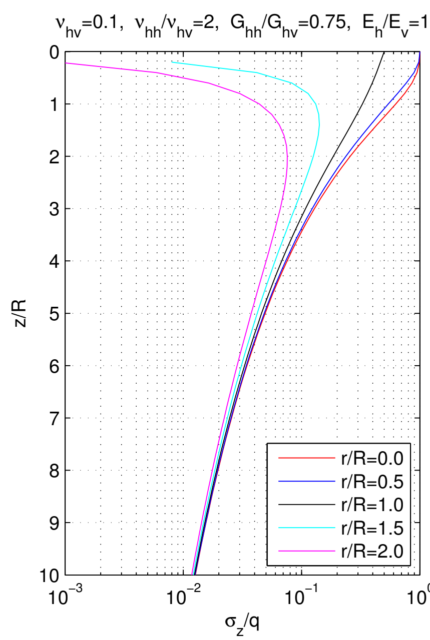
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



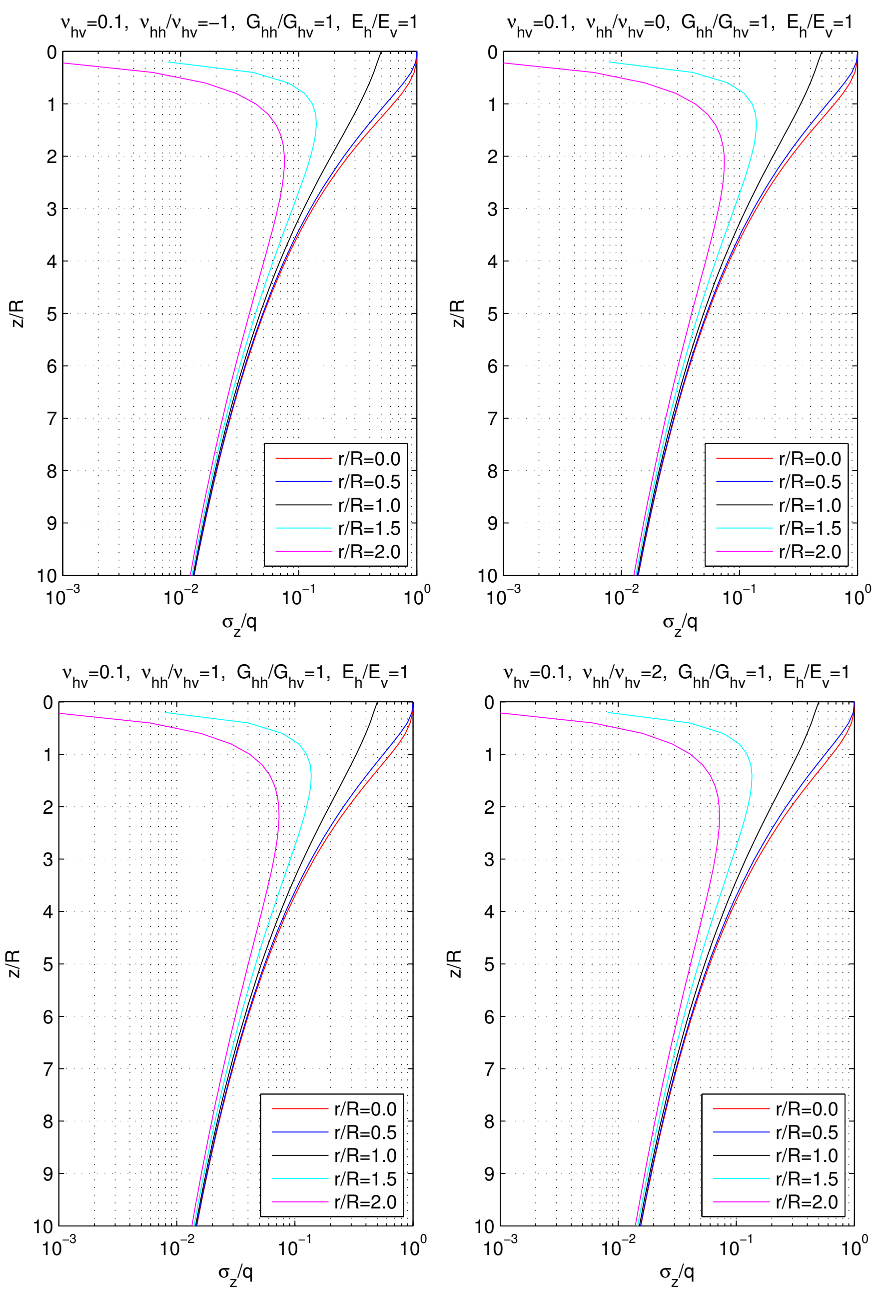
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



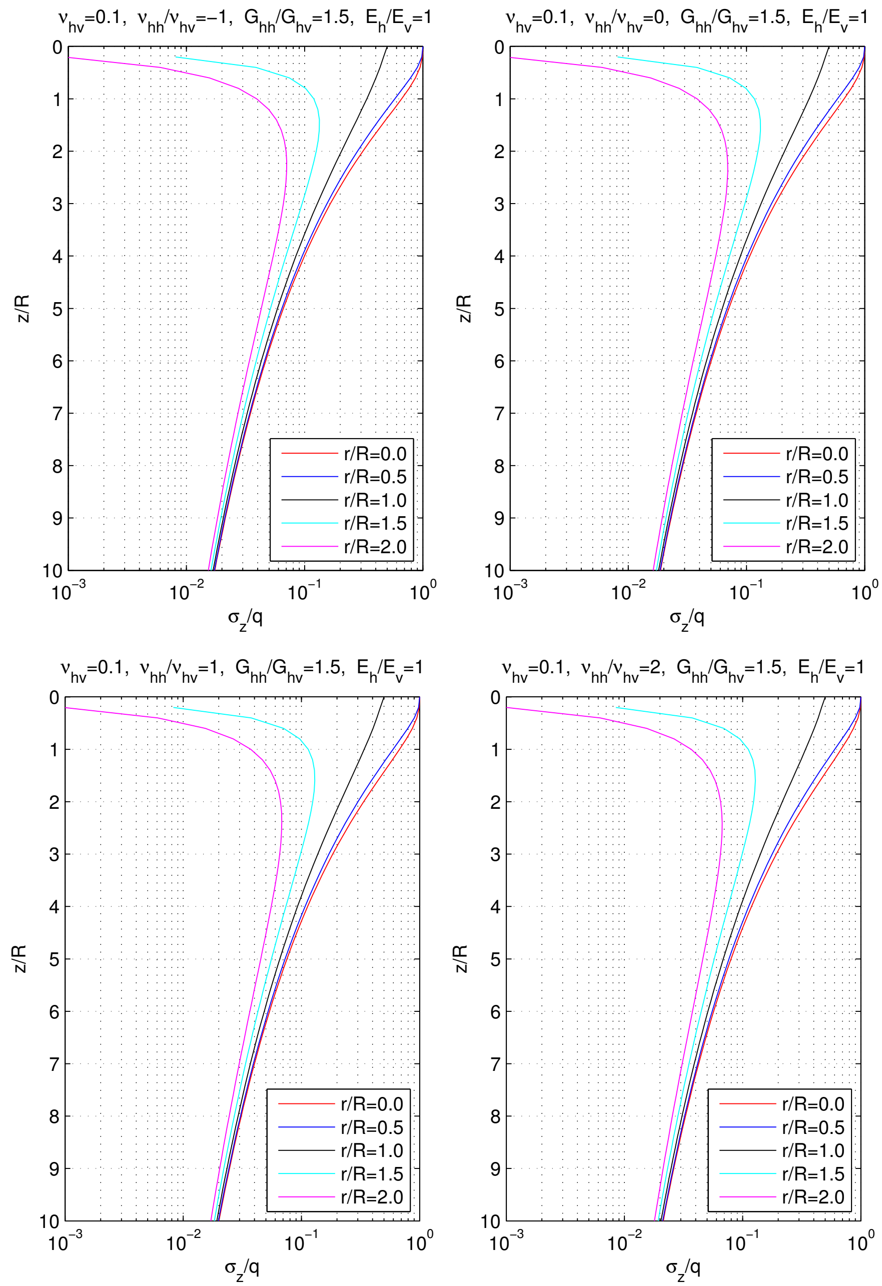
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



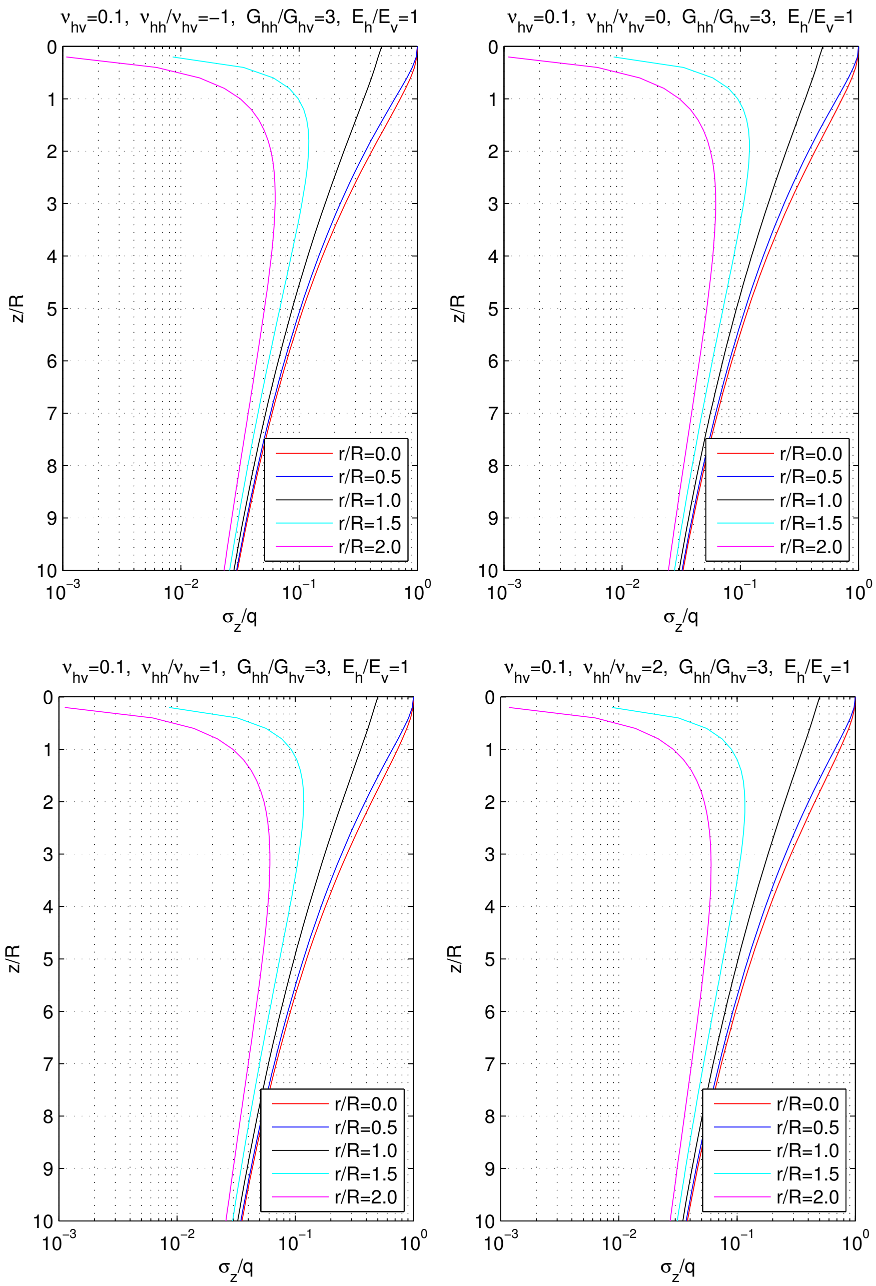
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

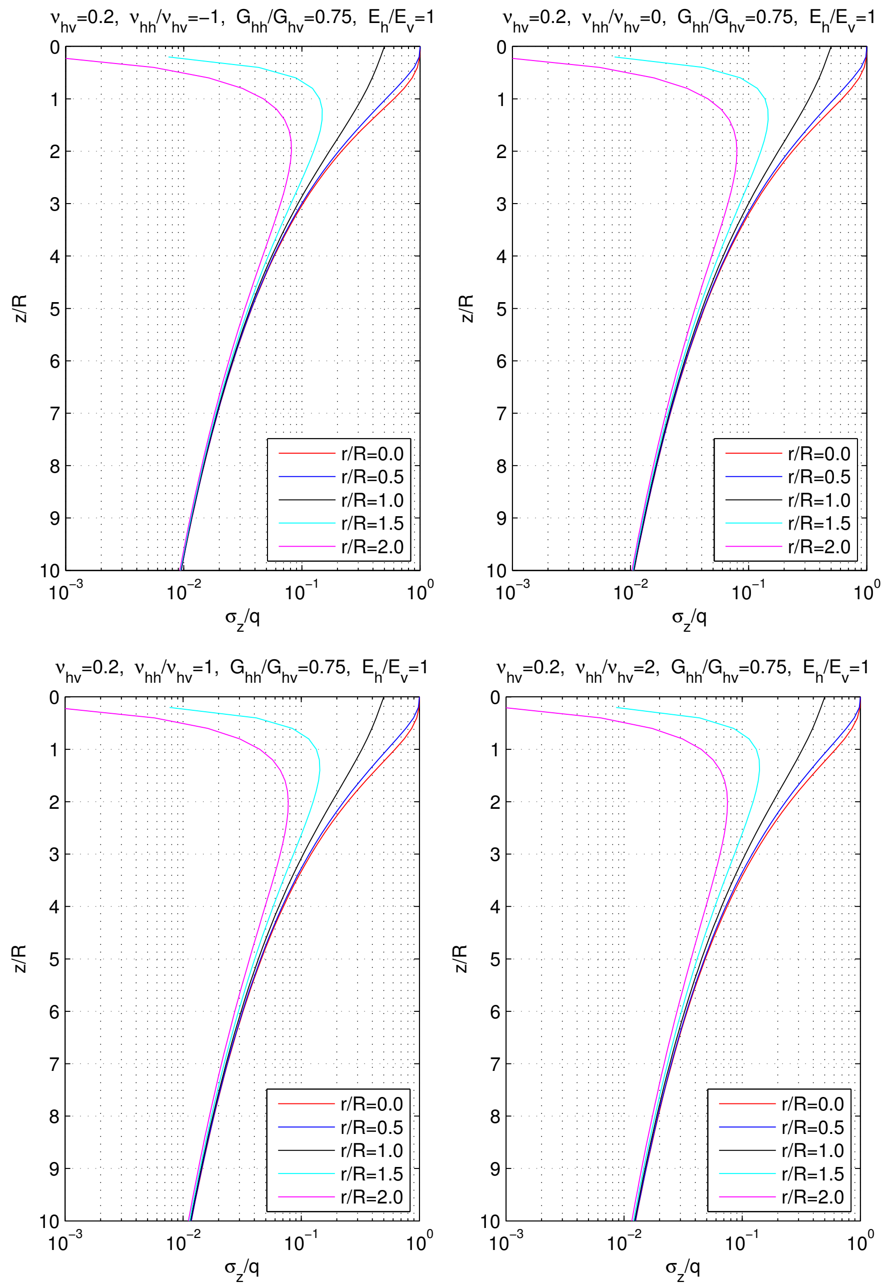


ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

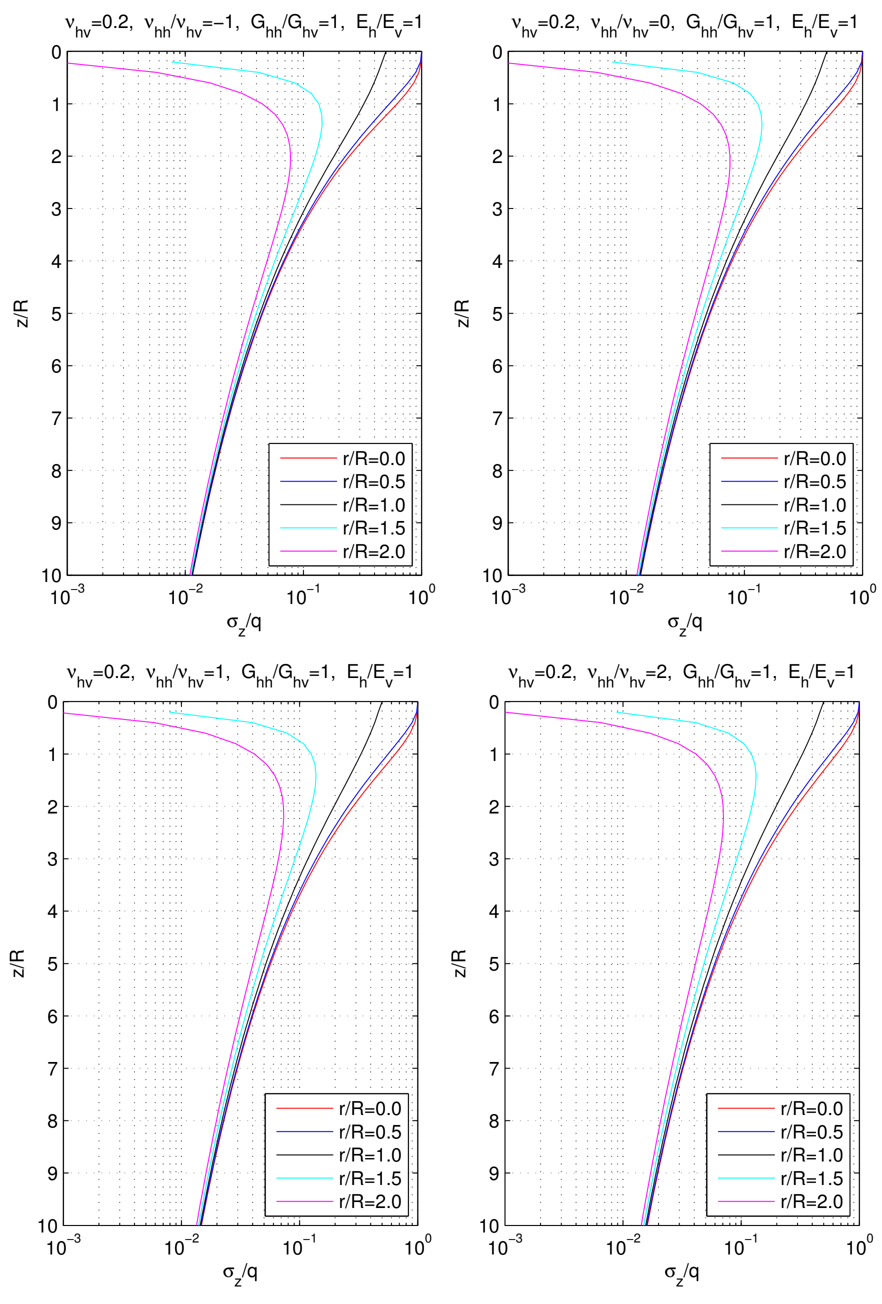


ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

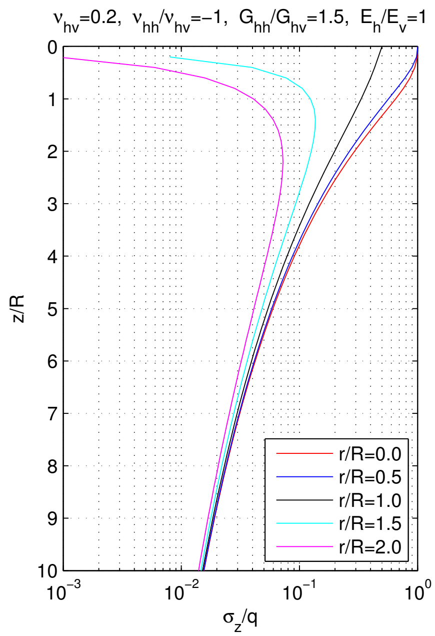

νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1
νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1
νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1
νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

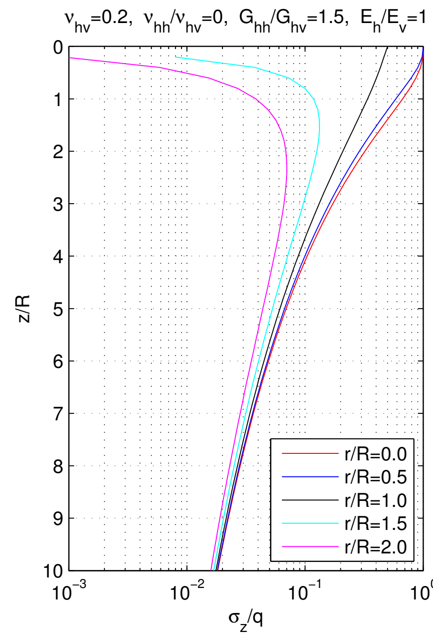


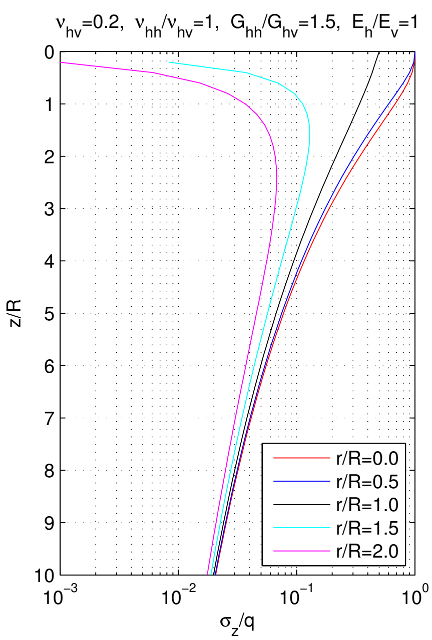
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

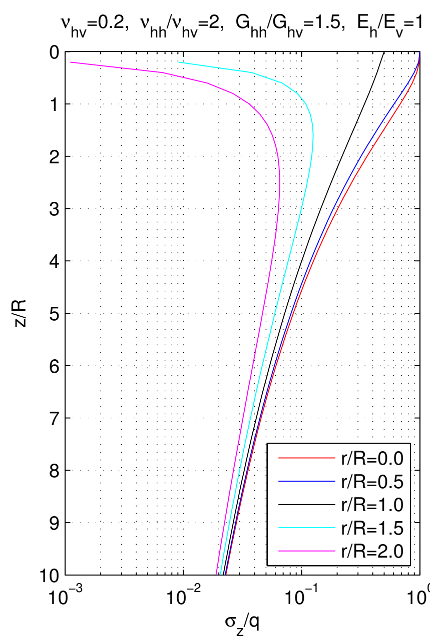


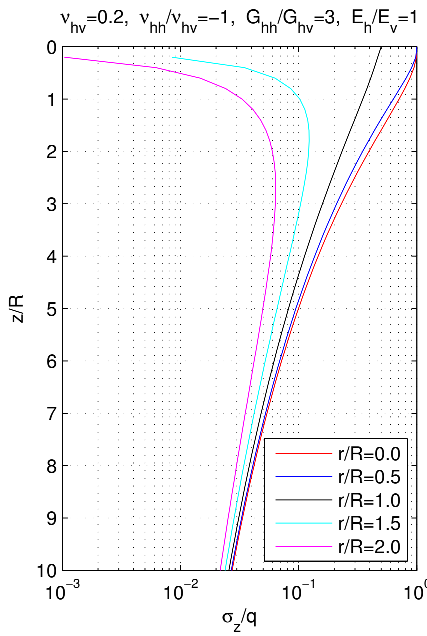
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=1
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

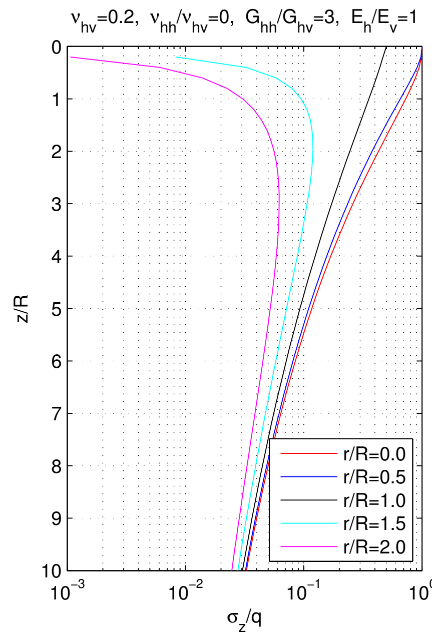

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

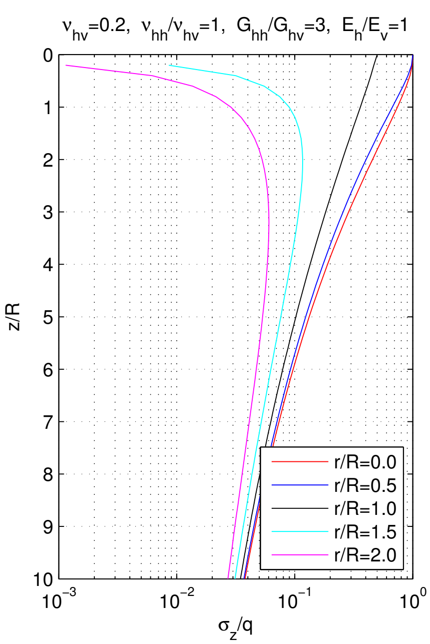

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

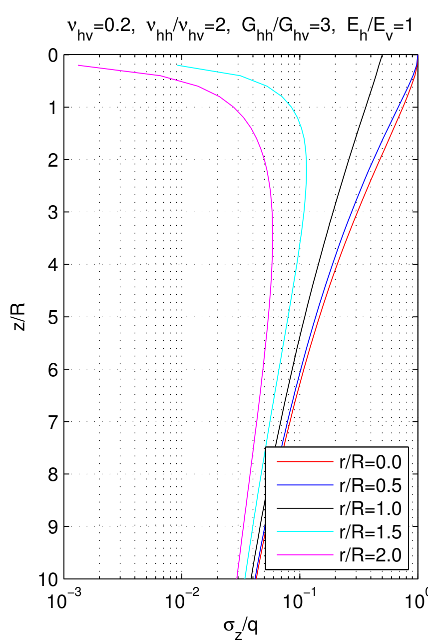

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

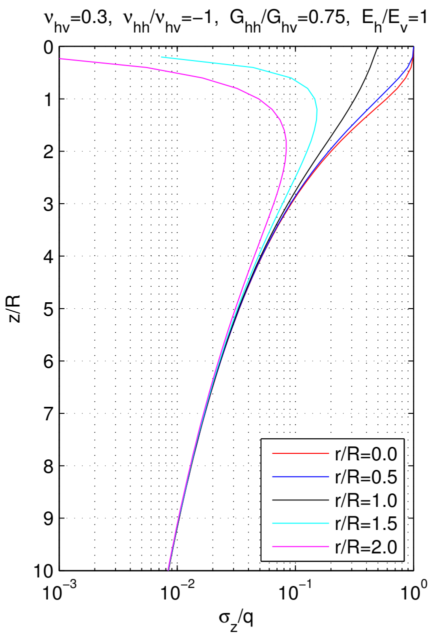

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

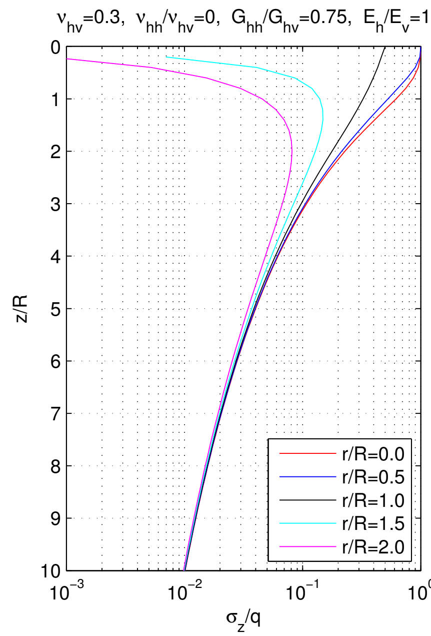

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

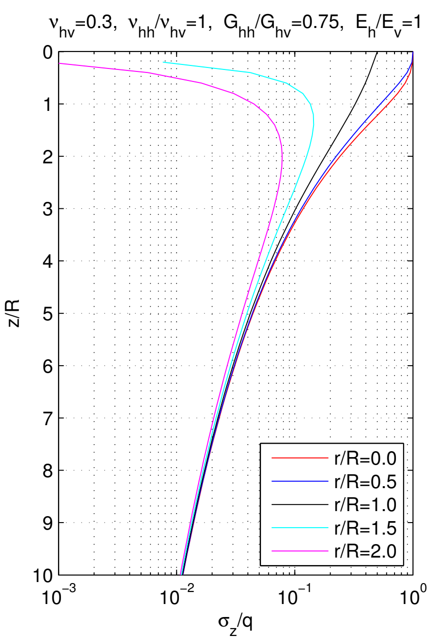

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

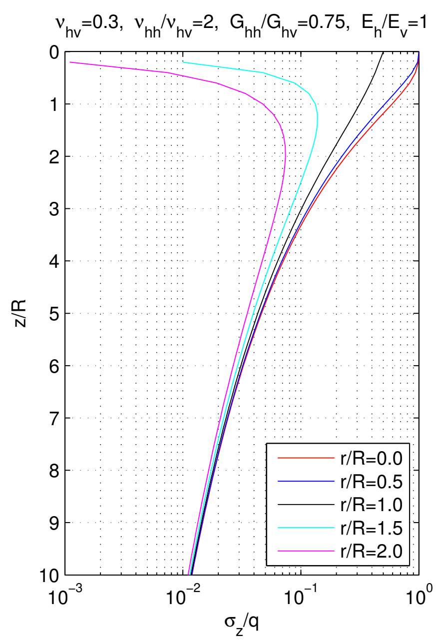

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

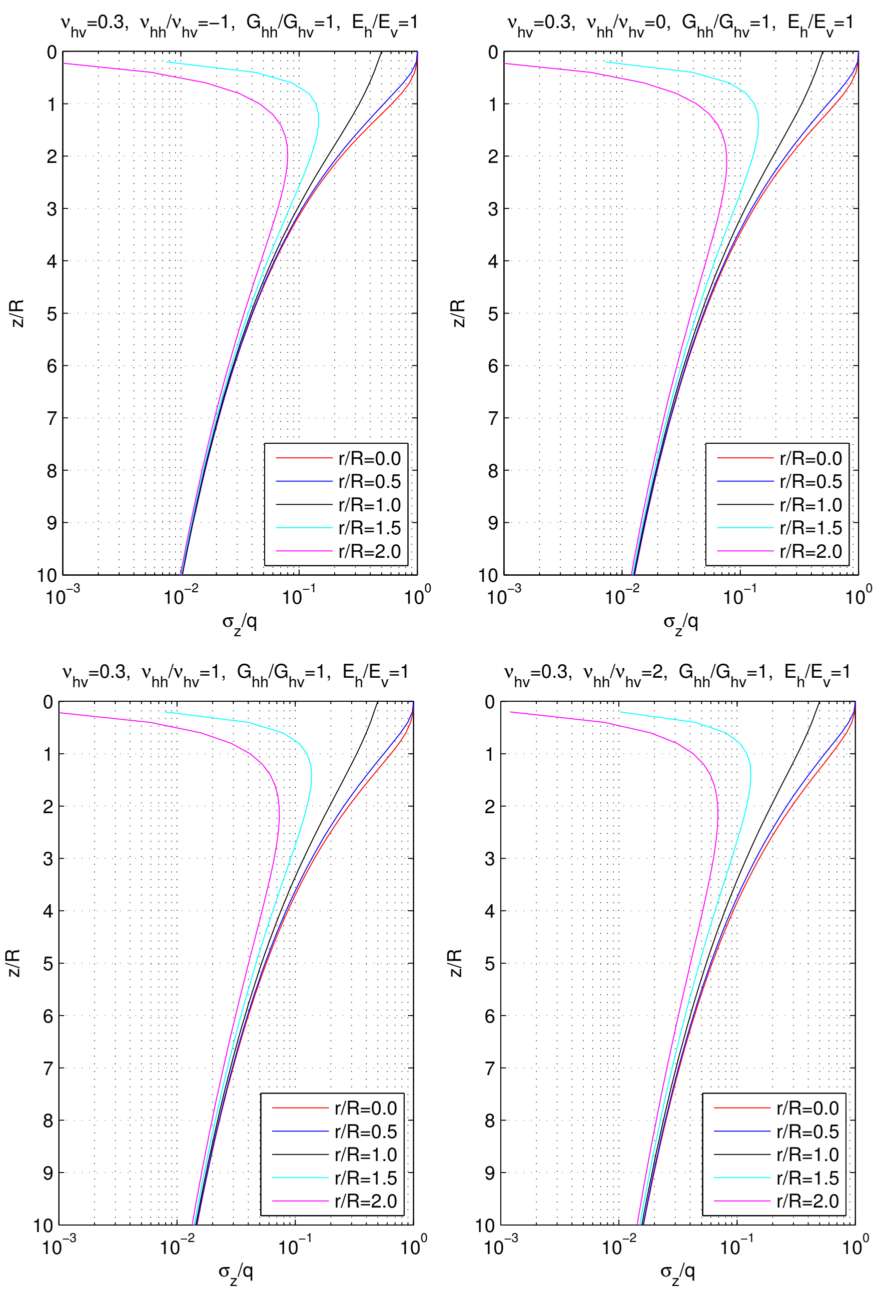

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

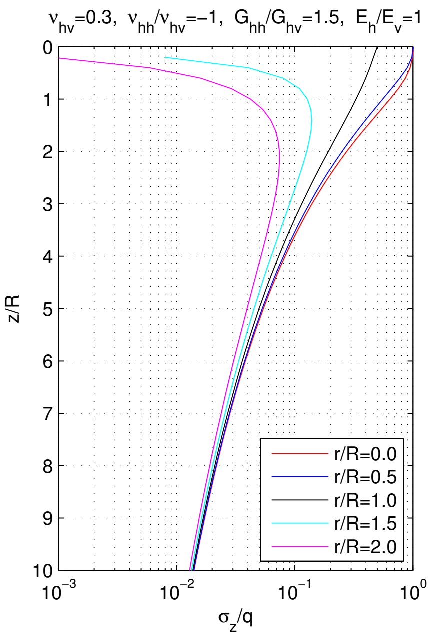

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

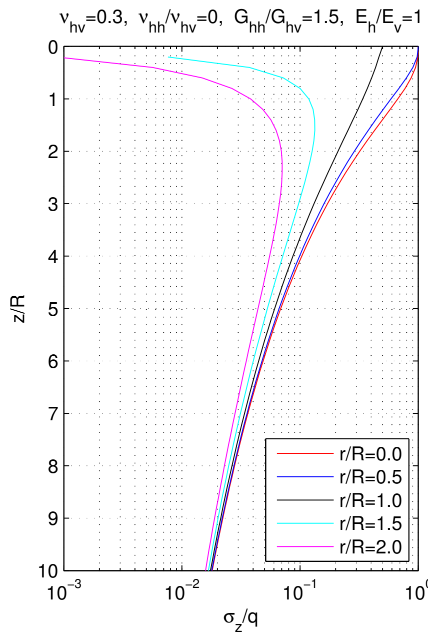

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

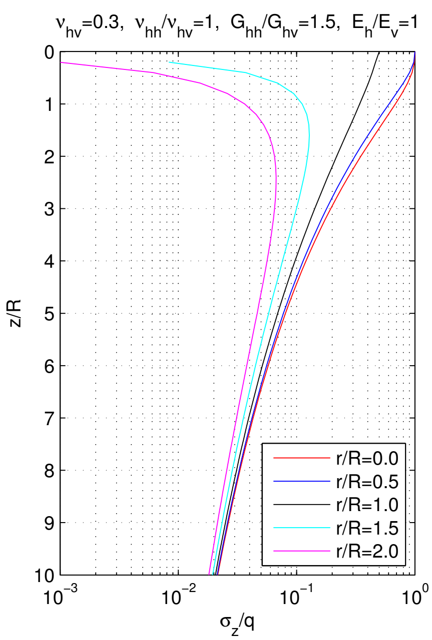

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

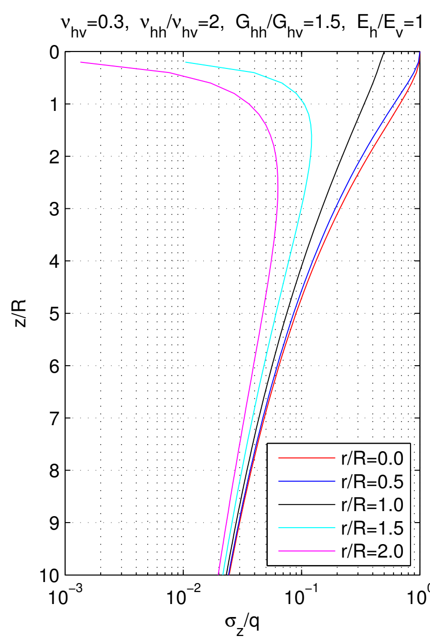


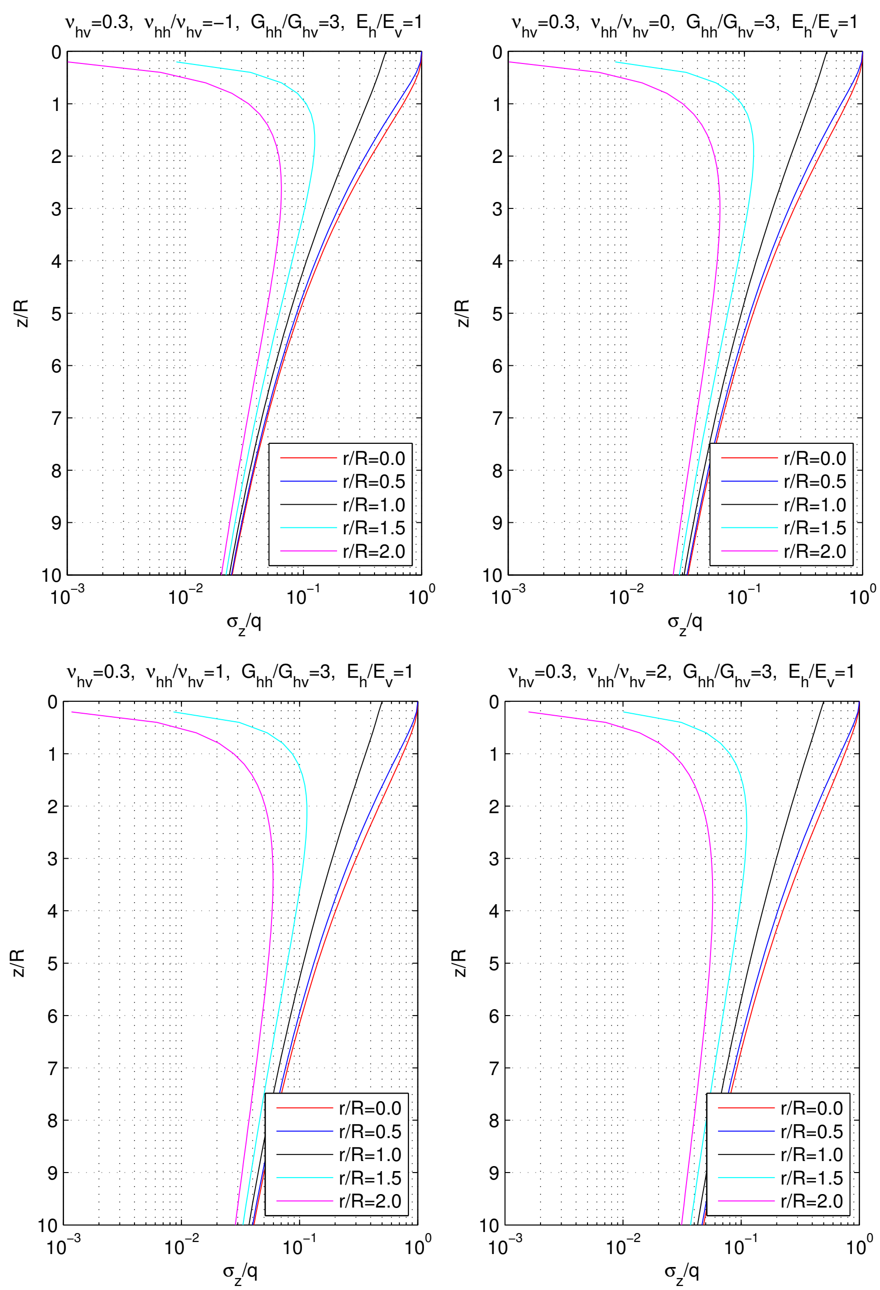
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

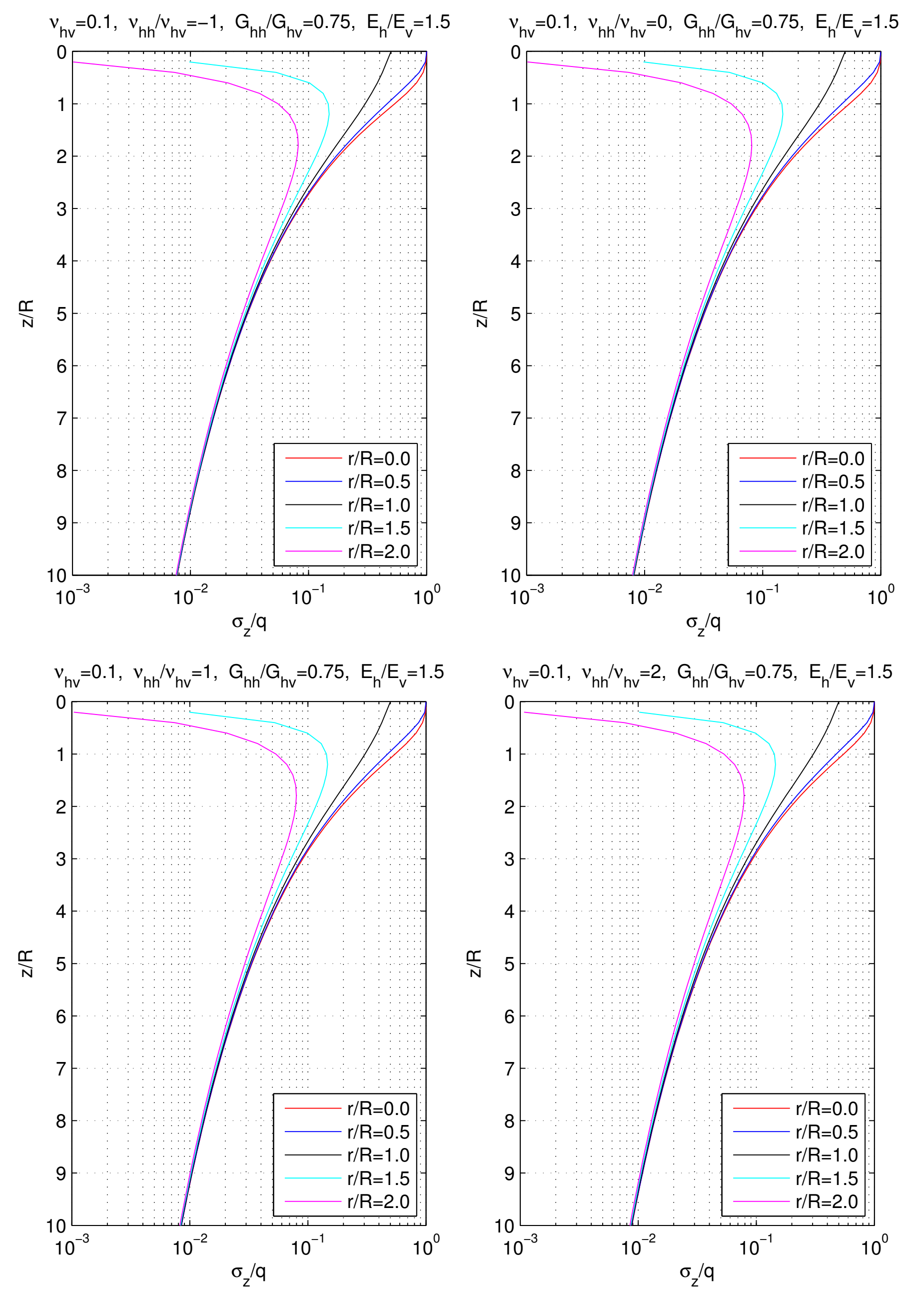

ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

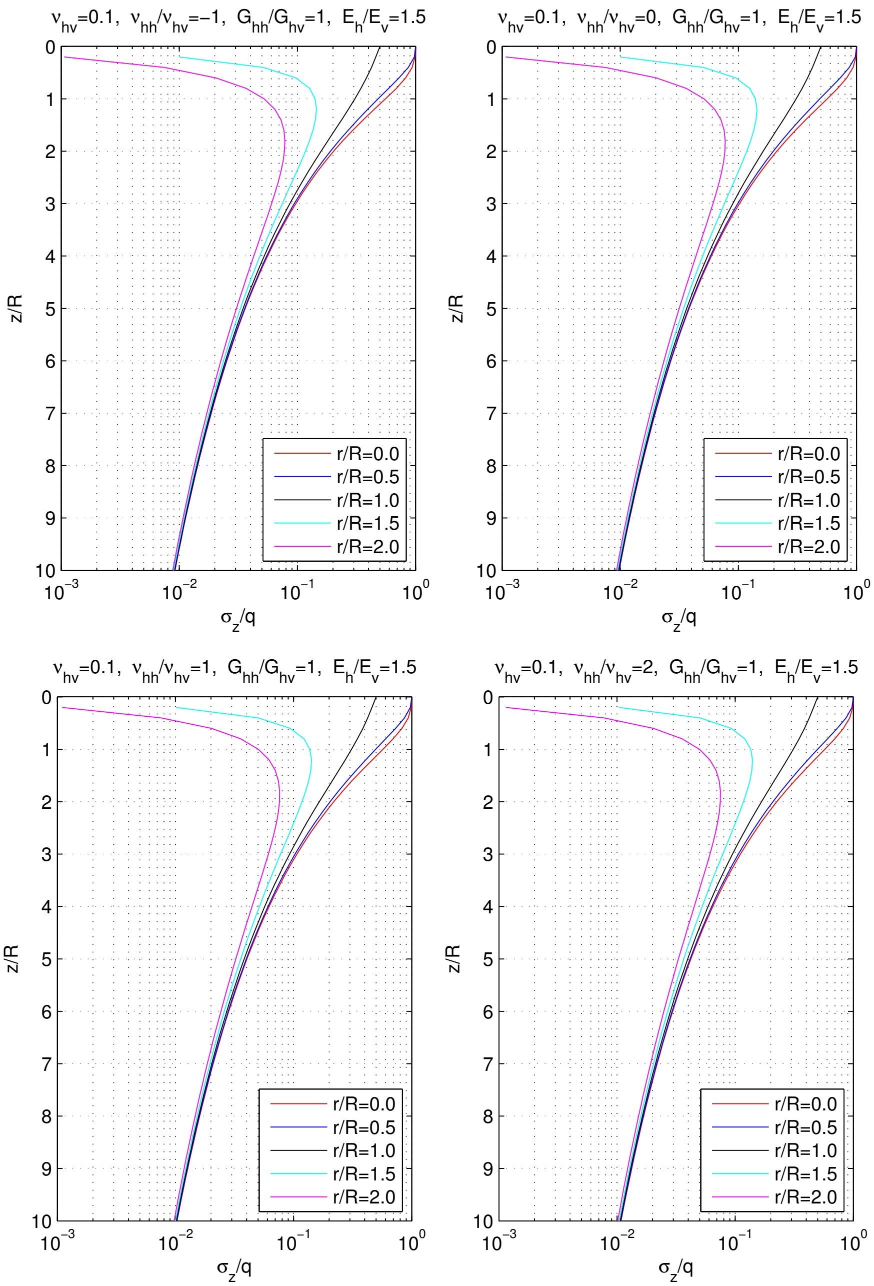

ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1.5, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



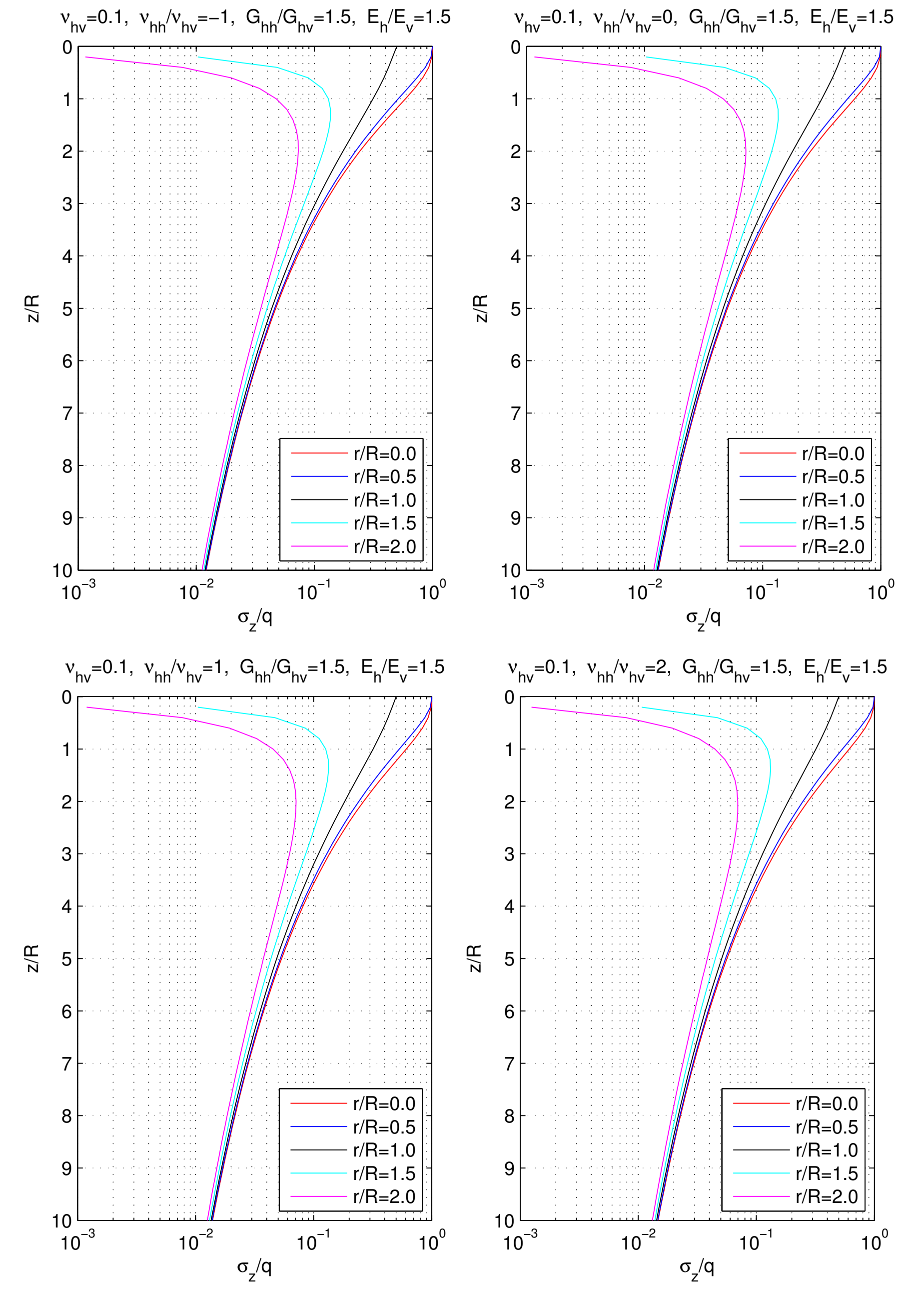
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1
z/R
σ_z/q
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

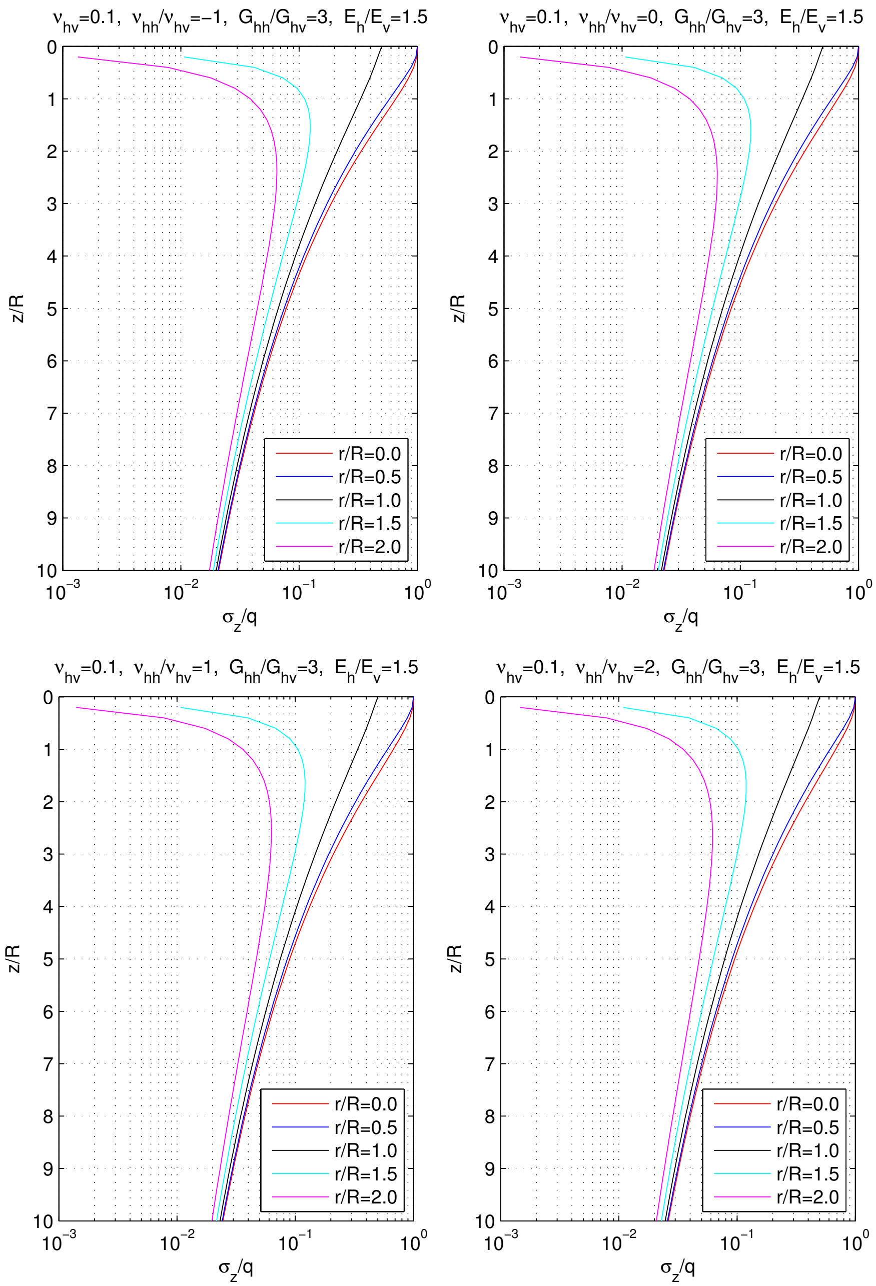


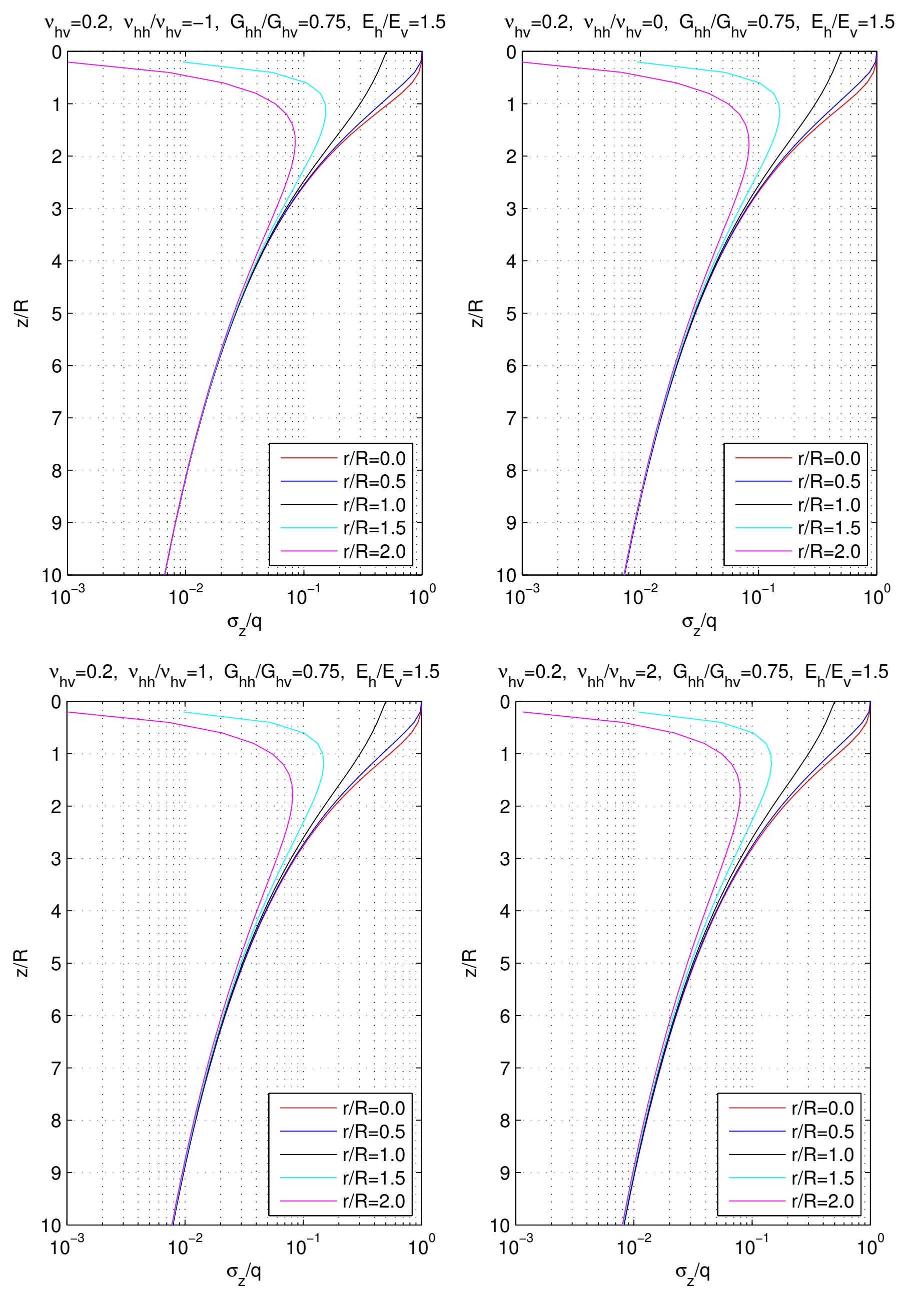
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



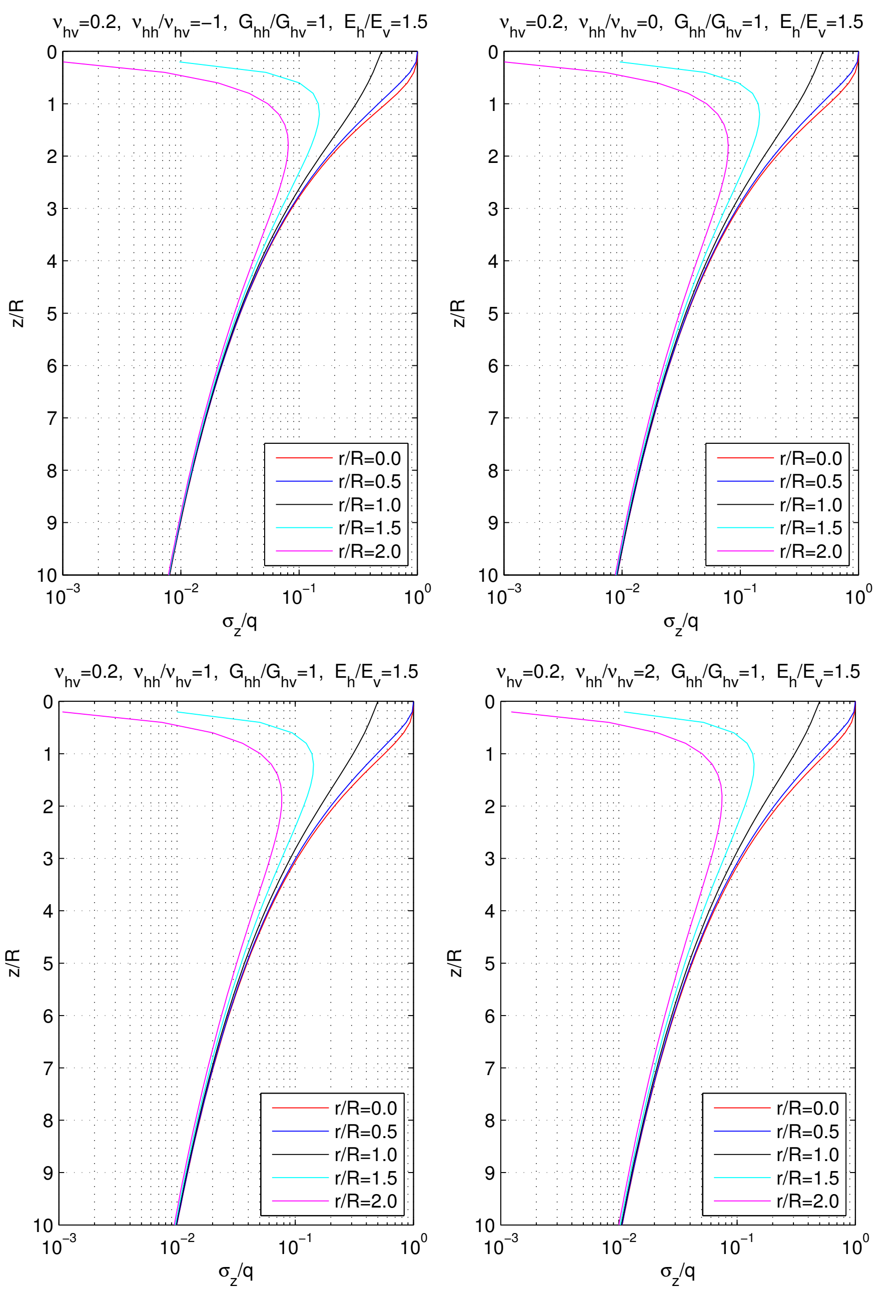
νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=1.5
νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=1.5
νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=1.5
νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=1.5
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

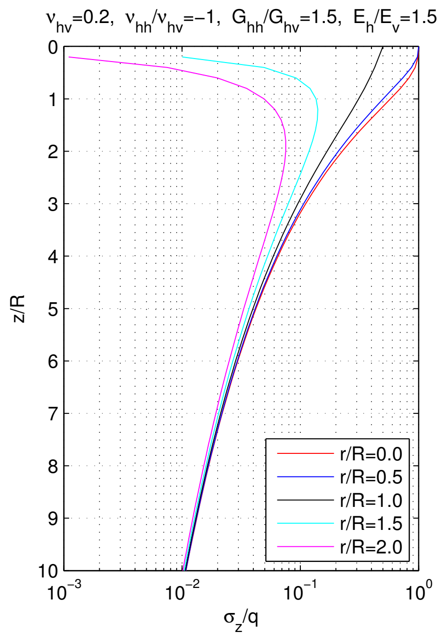

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

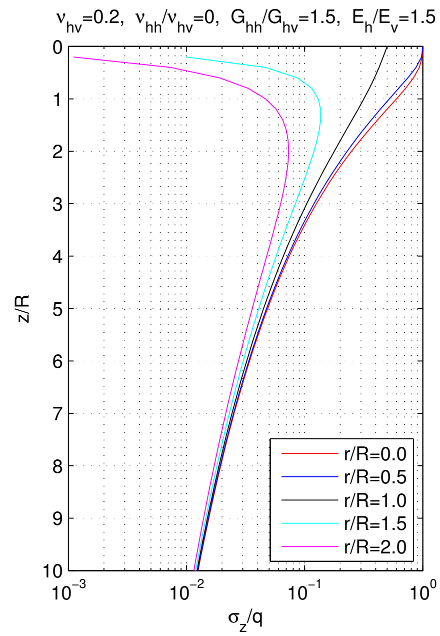

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

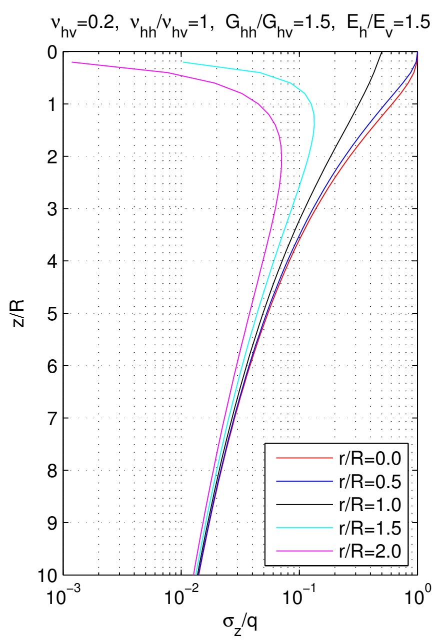


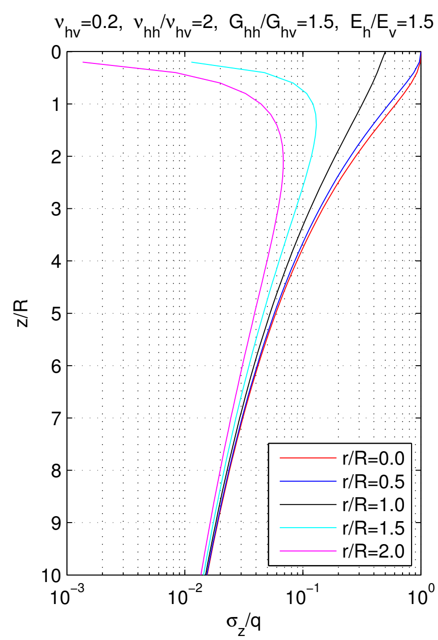
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.2, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

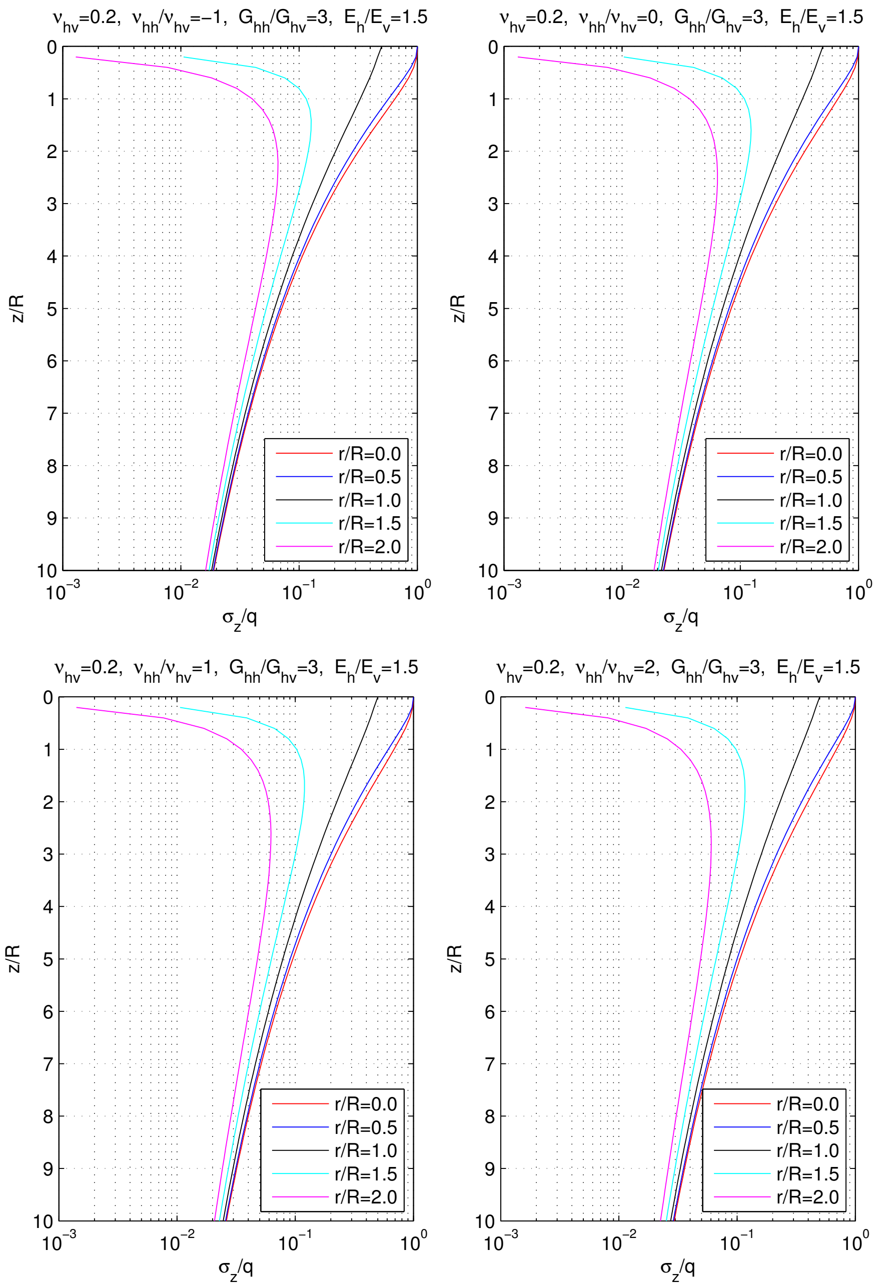

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


$\nu_{hv}=0.2$, $\nu_{hh}/\nu_{hv}=-1$, $G_{hh}/G_{hv}=1.5$, $E_h/E_v=1.5$
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

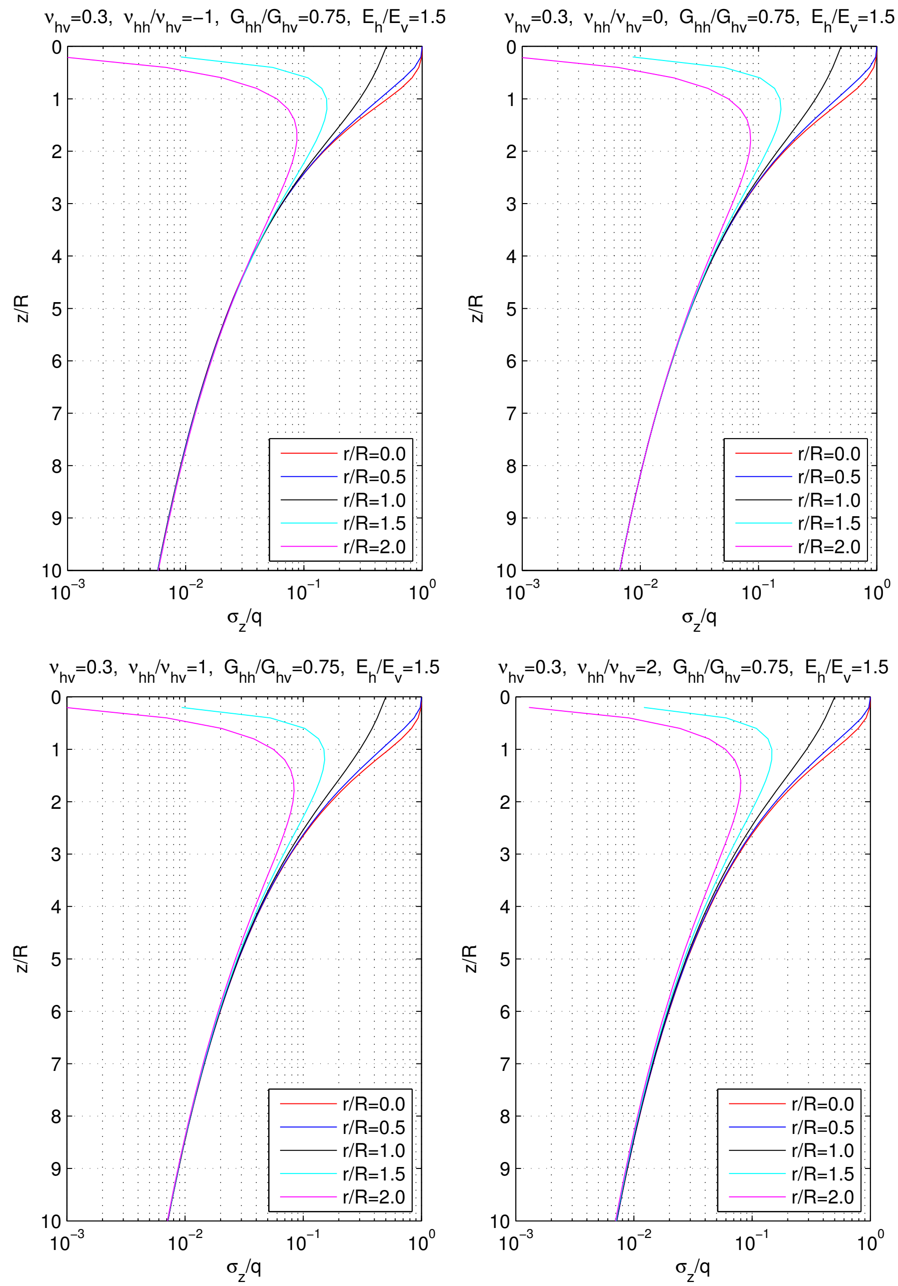

$\nu_{hv}=0.2$, $\nu_{hh}/\nu_{hv}=0$, $G_{hh}/G_{hv}=1.5$, $E_h/E_v=1.5$
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


$\nu_{hv}=0.2$, $\nu_{hh}/\nu_{hv}=1$, $G_{hh}/G_{hv}=1.5$, $E_h/E_v=1.5$
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

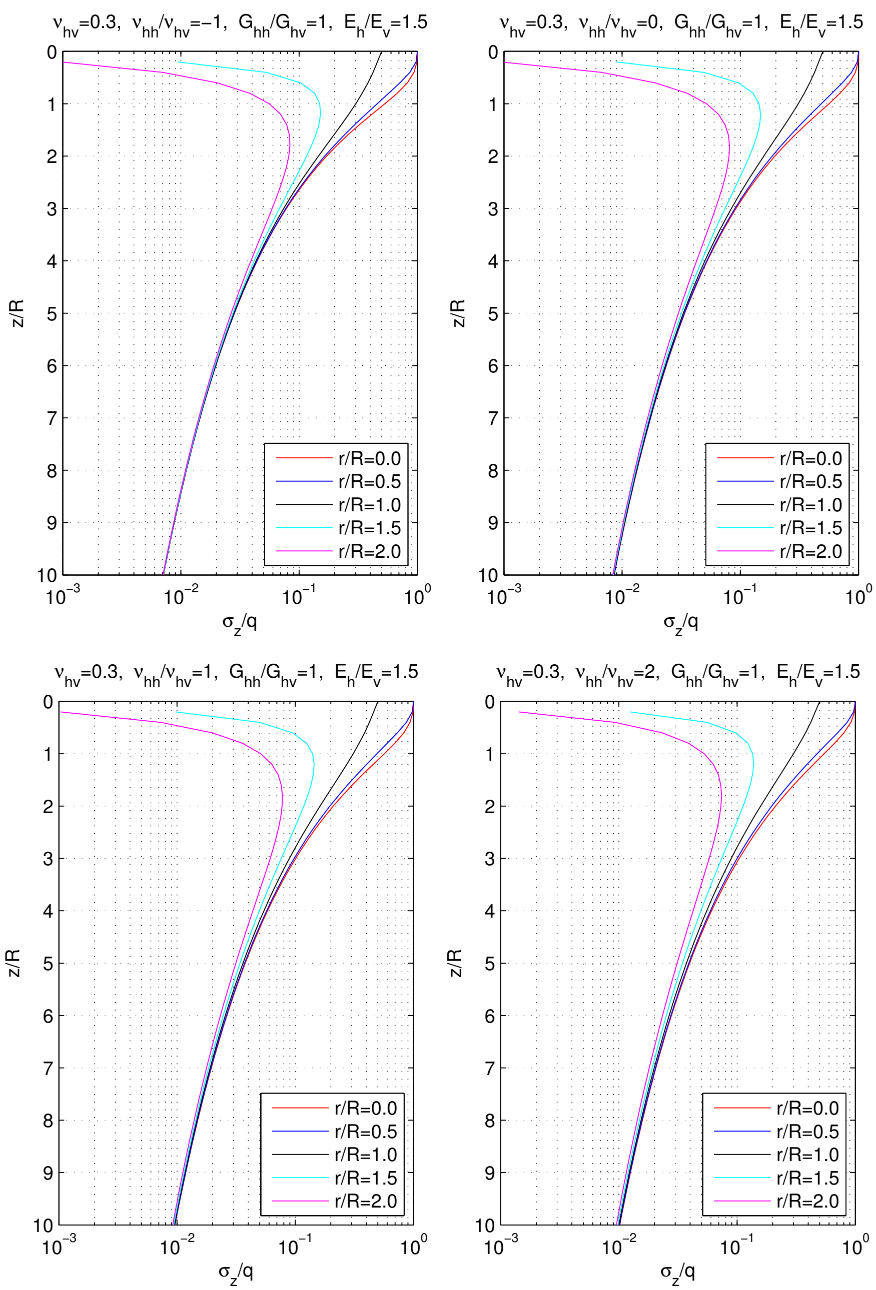

$\nu_{hv}=0.2$, $\nu_{hh}/\nu_{hv}=2$, $G_{hh}/G_{hv}=1.5$, $E_h/E_v=1.5$
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

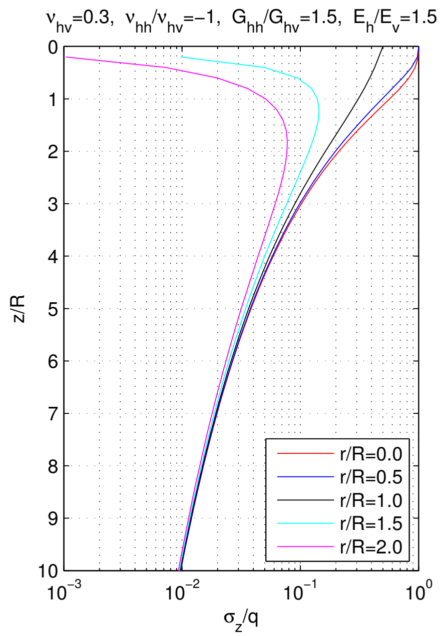


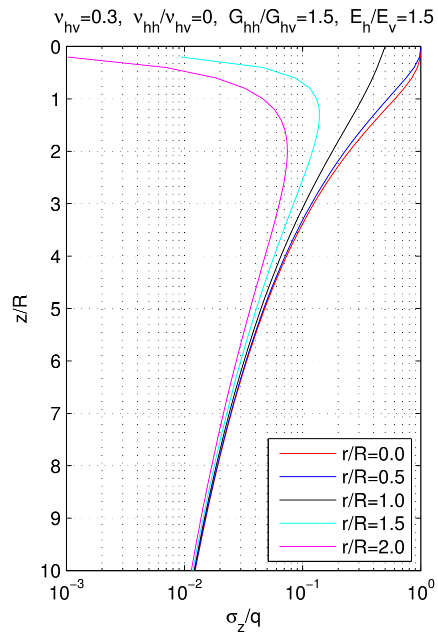
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

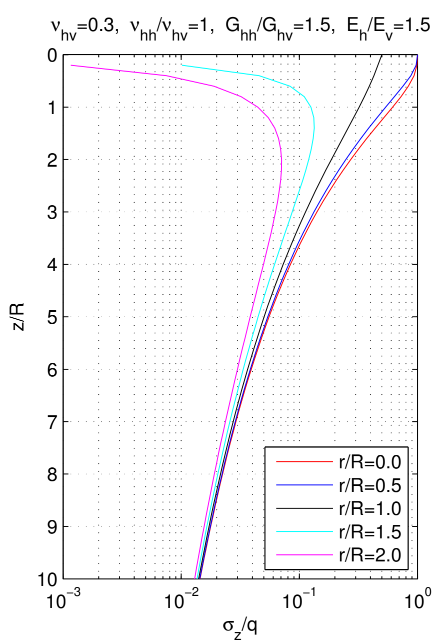


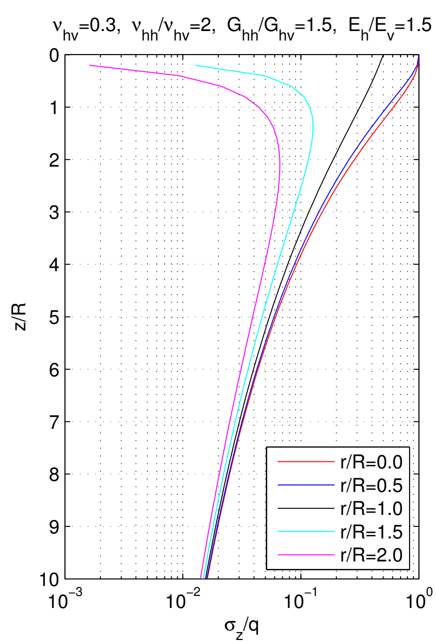
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=0.75, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

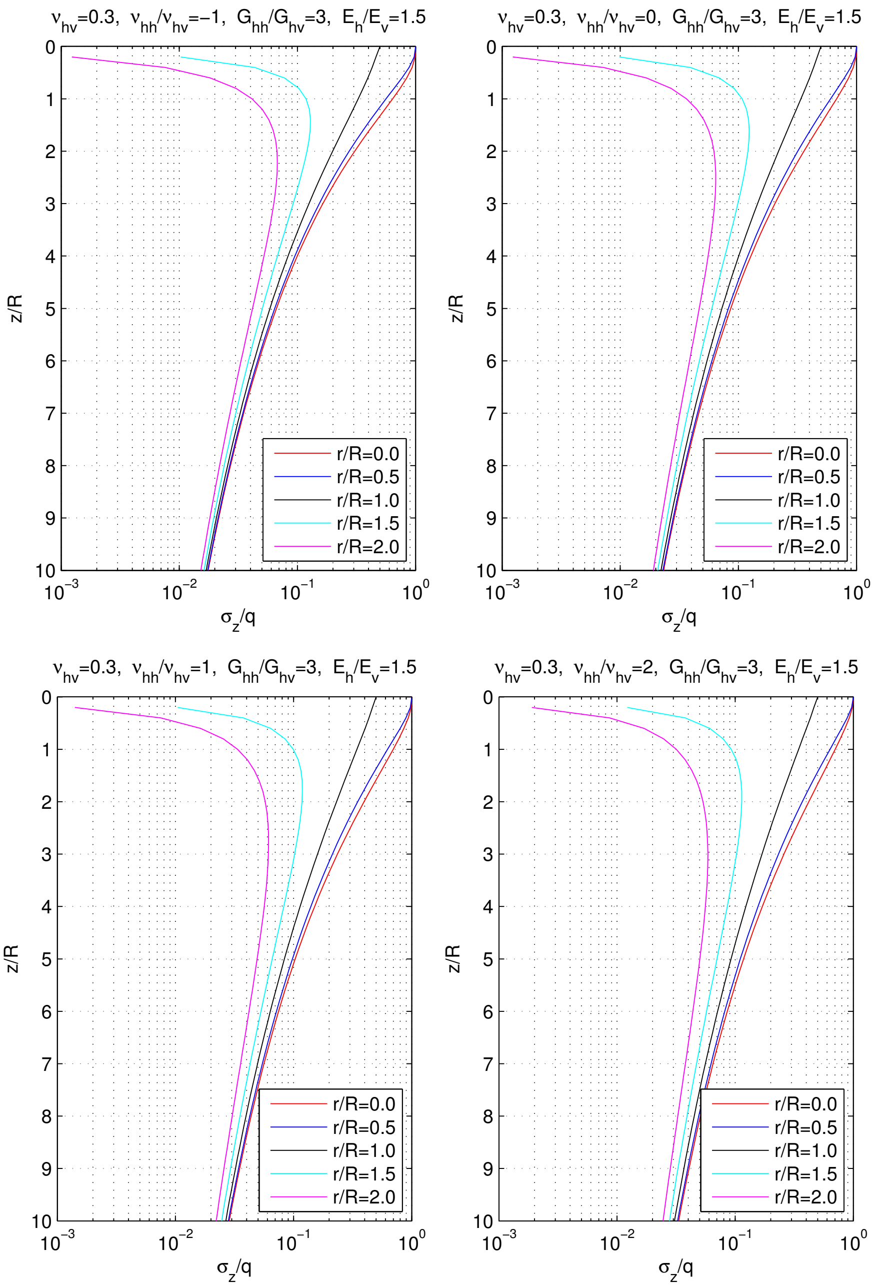

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

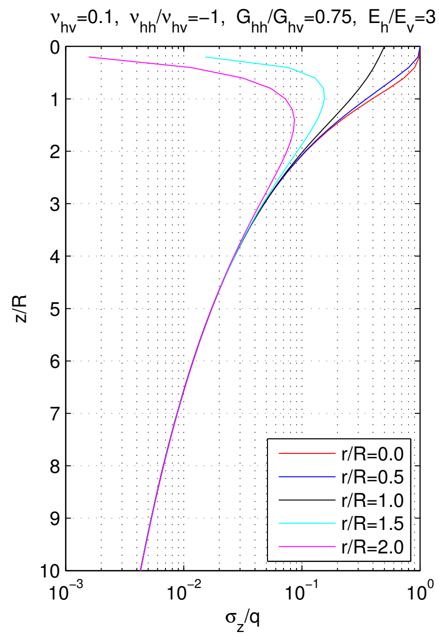

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

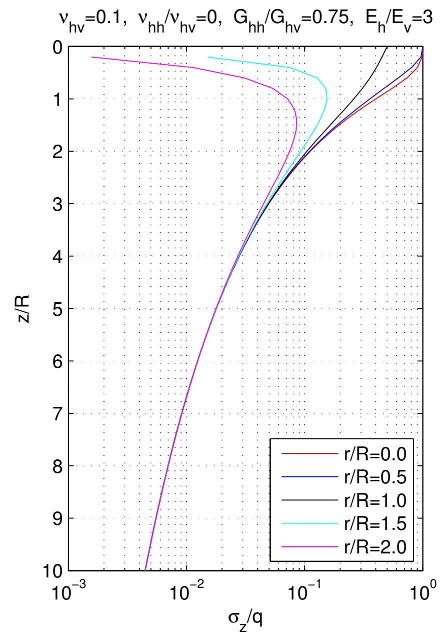

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

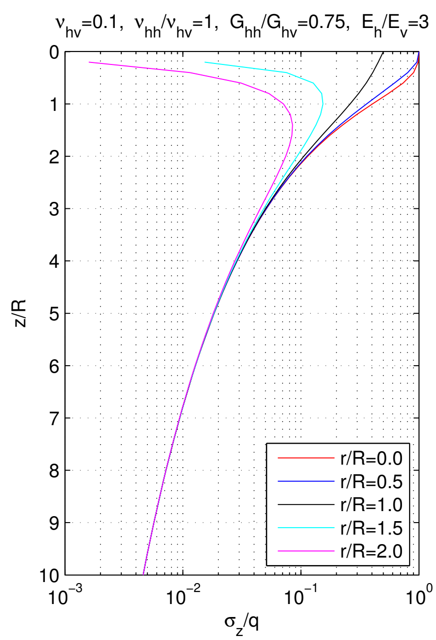

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

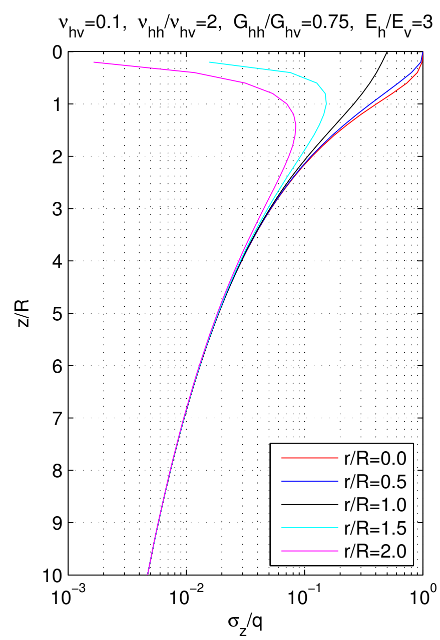

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=1.5
z/R
σ_z/q
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

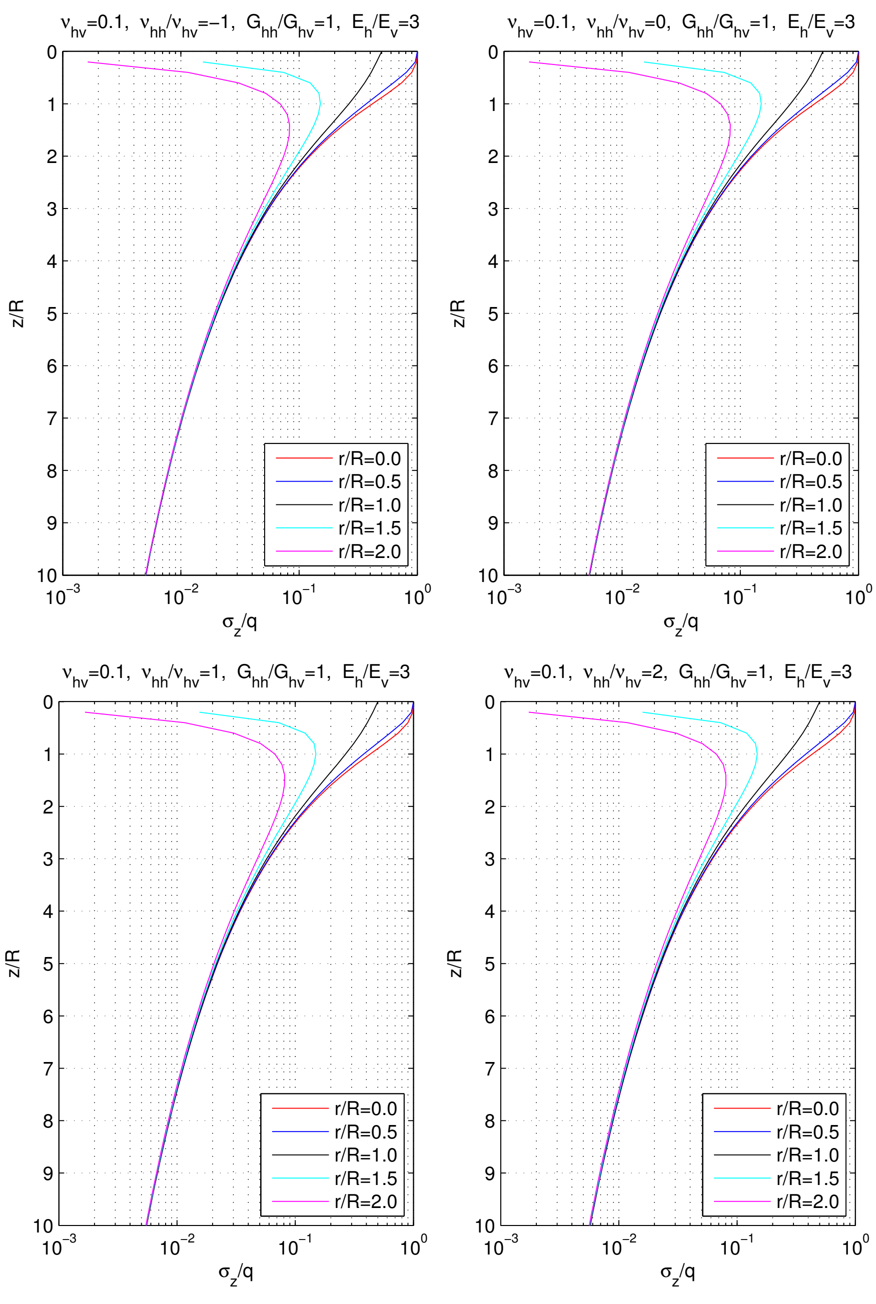

νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1.5
νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1.5
νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1.5
νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=3, Eh/Ev=1.5
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

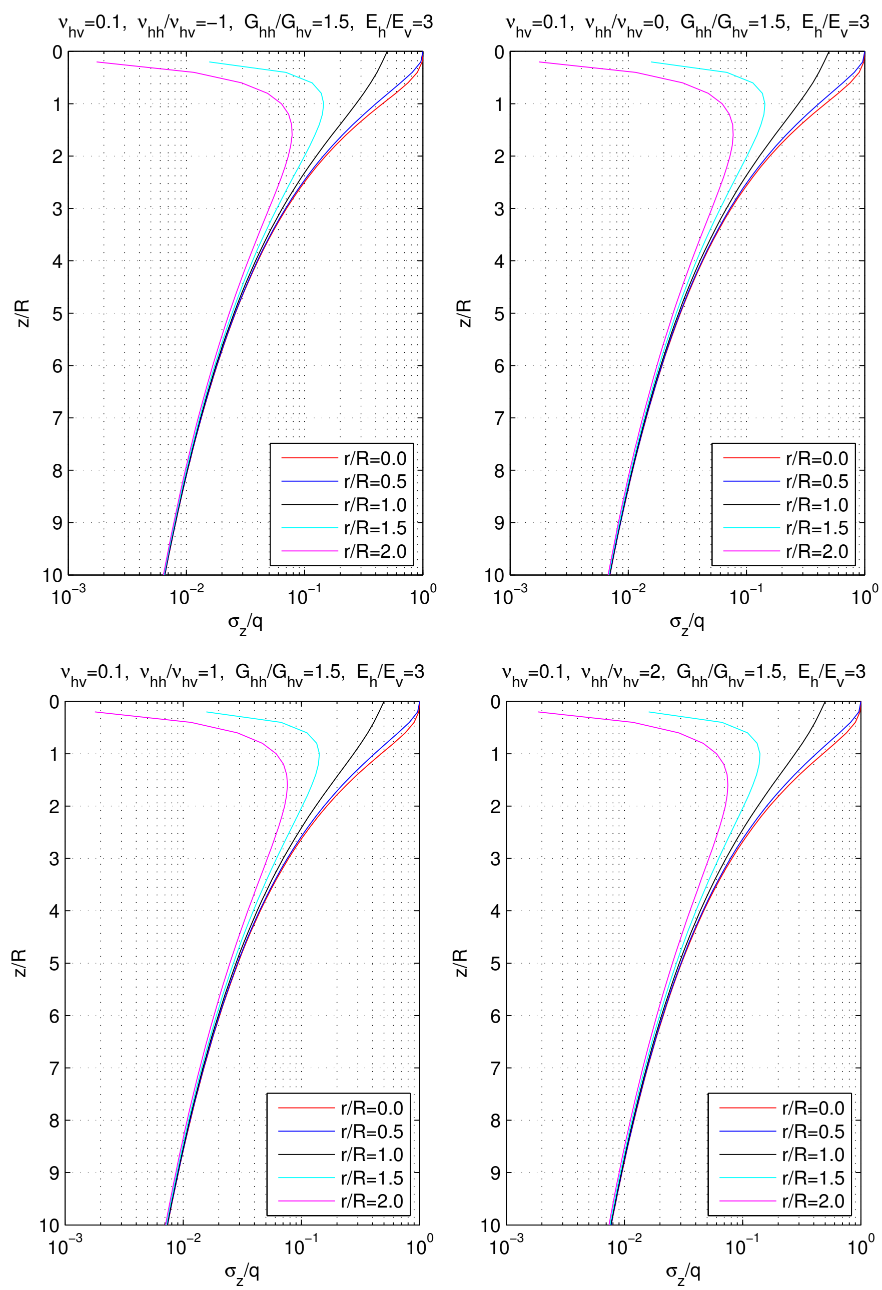

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

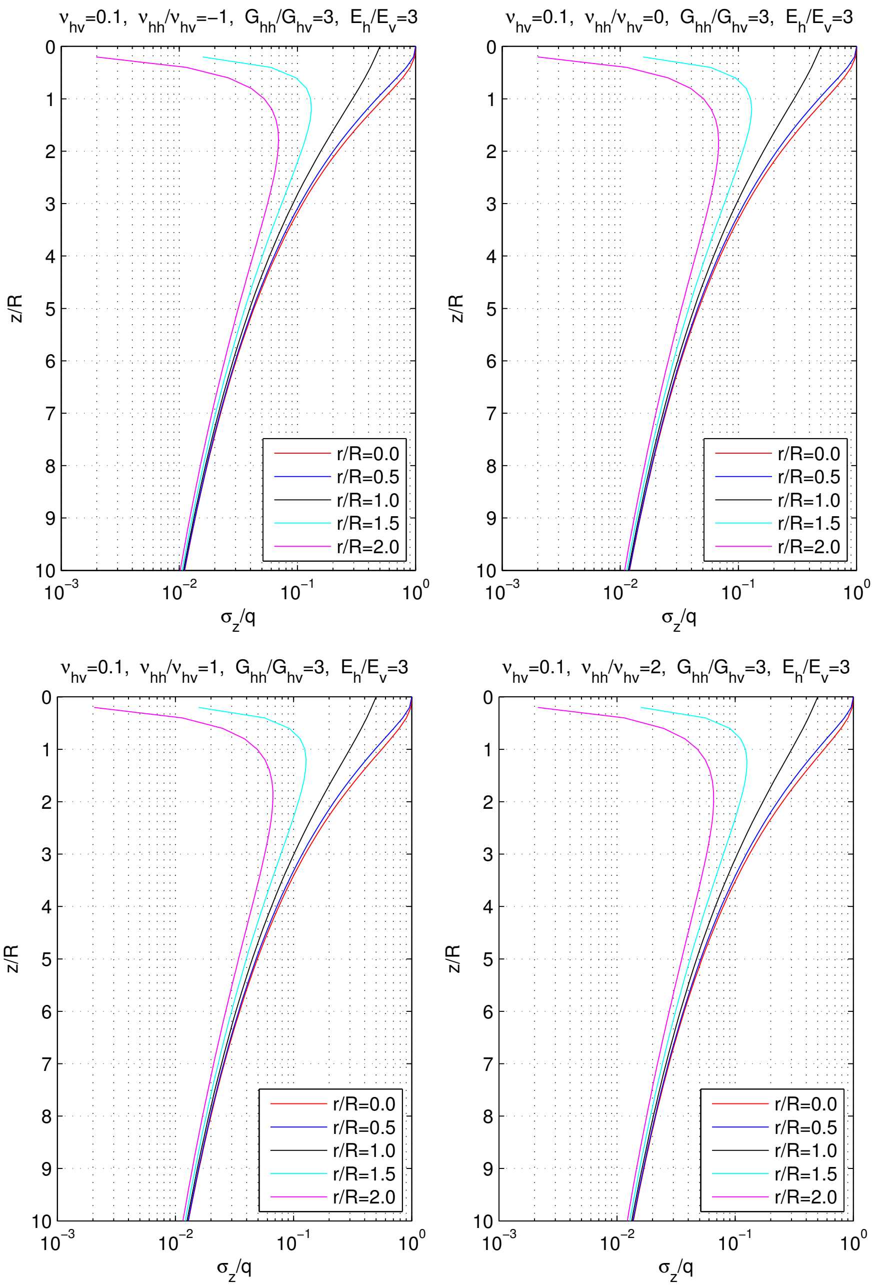

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

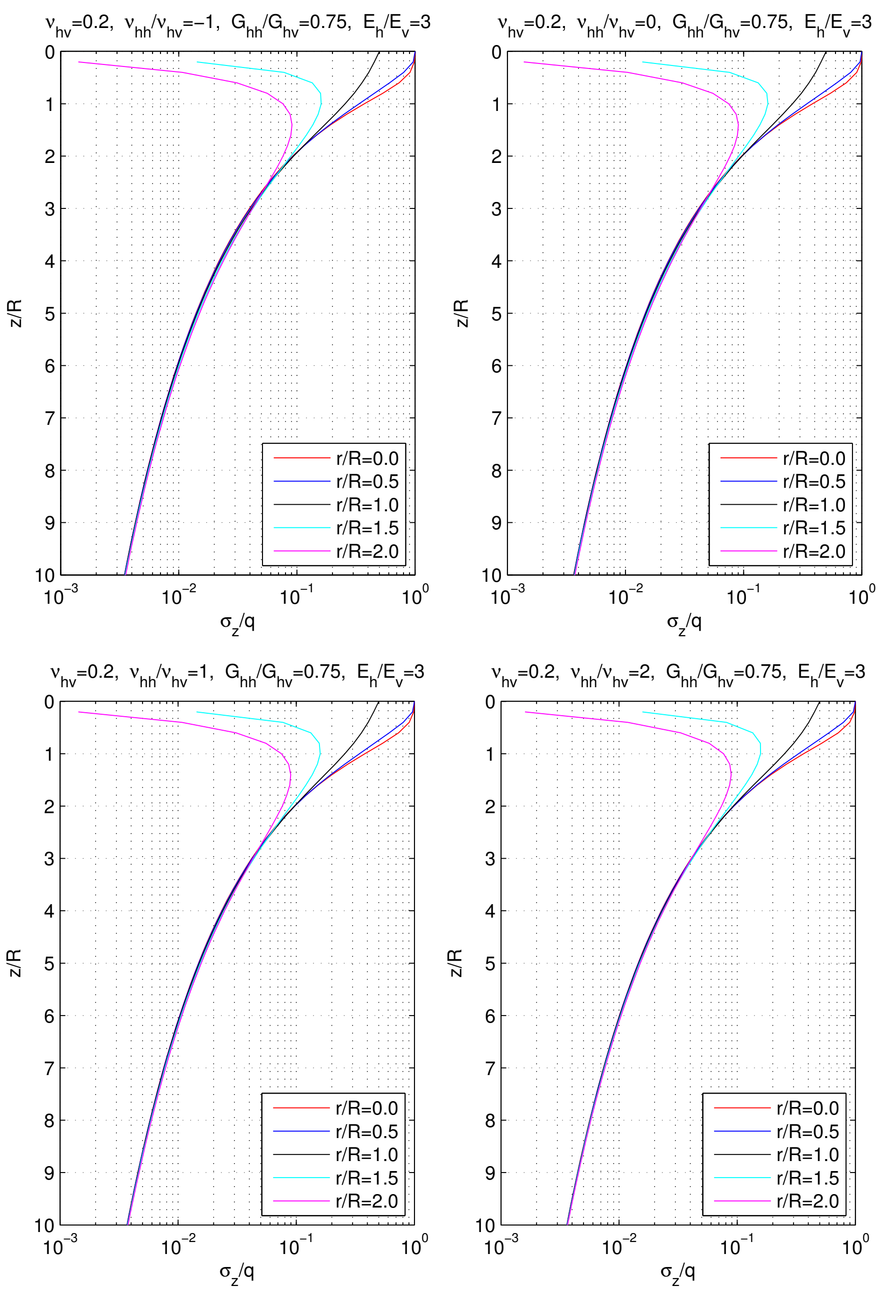

ν_{hv}=0.1, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=1, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

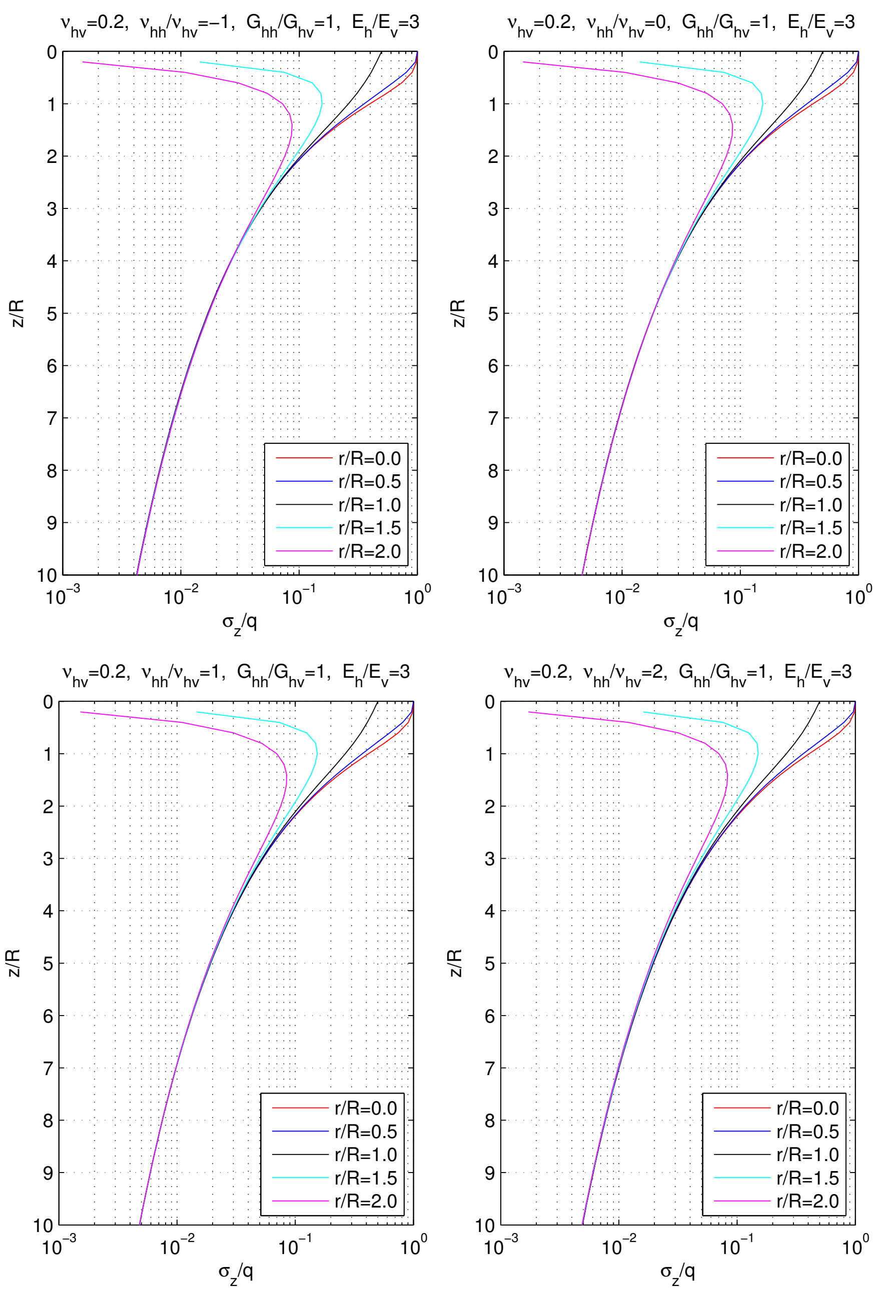


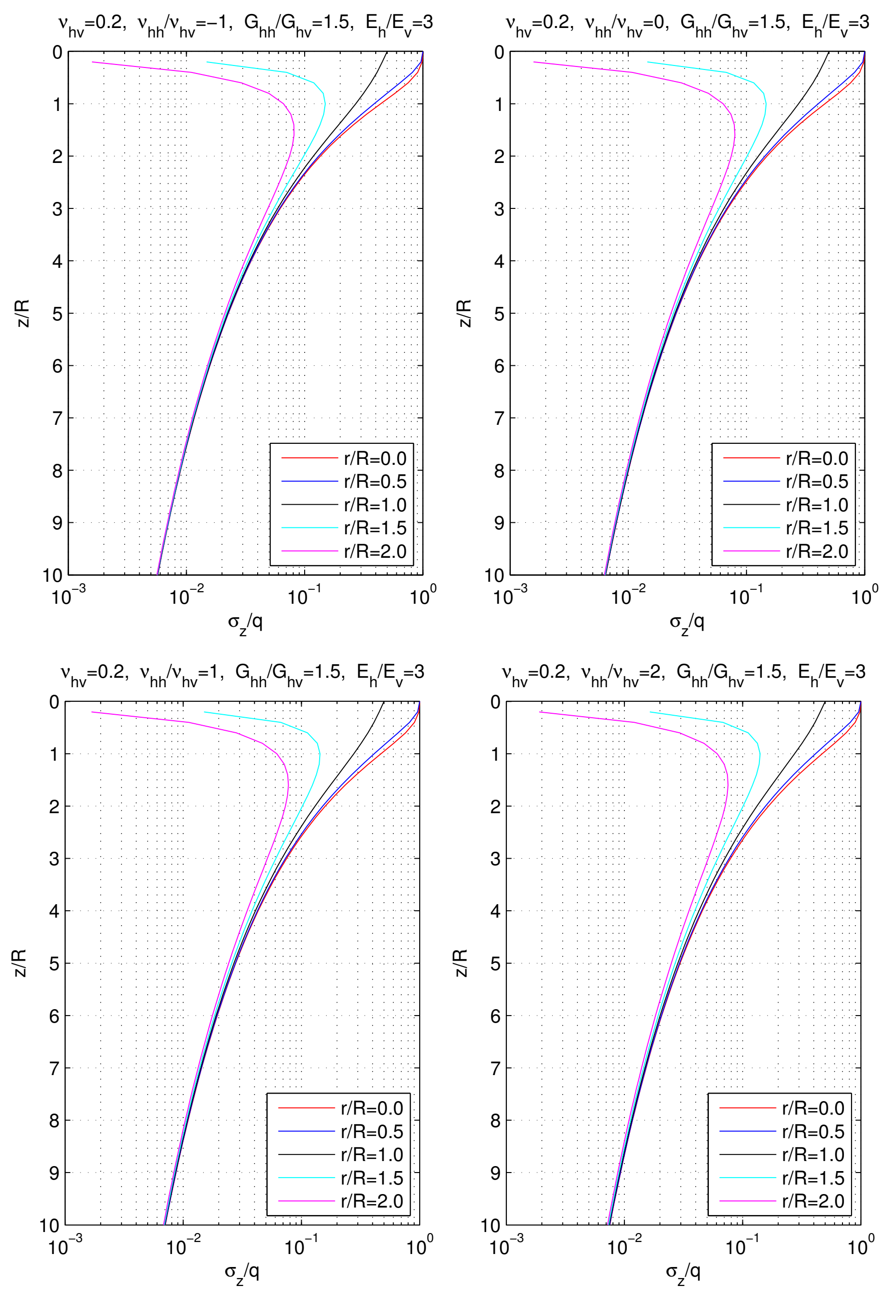
νhv=0.1, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=3
νhv=0.1, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=3
νhv=0.1, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=3
νhv=0.1, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1.5, Eh/Ev=3
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.1, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

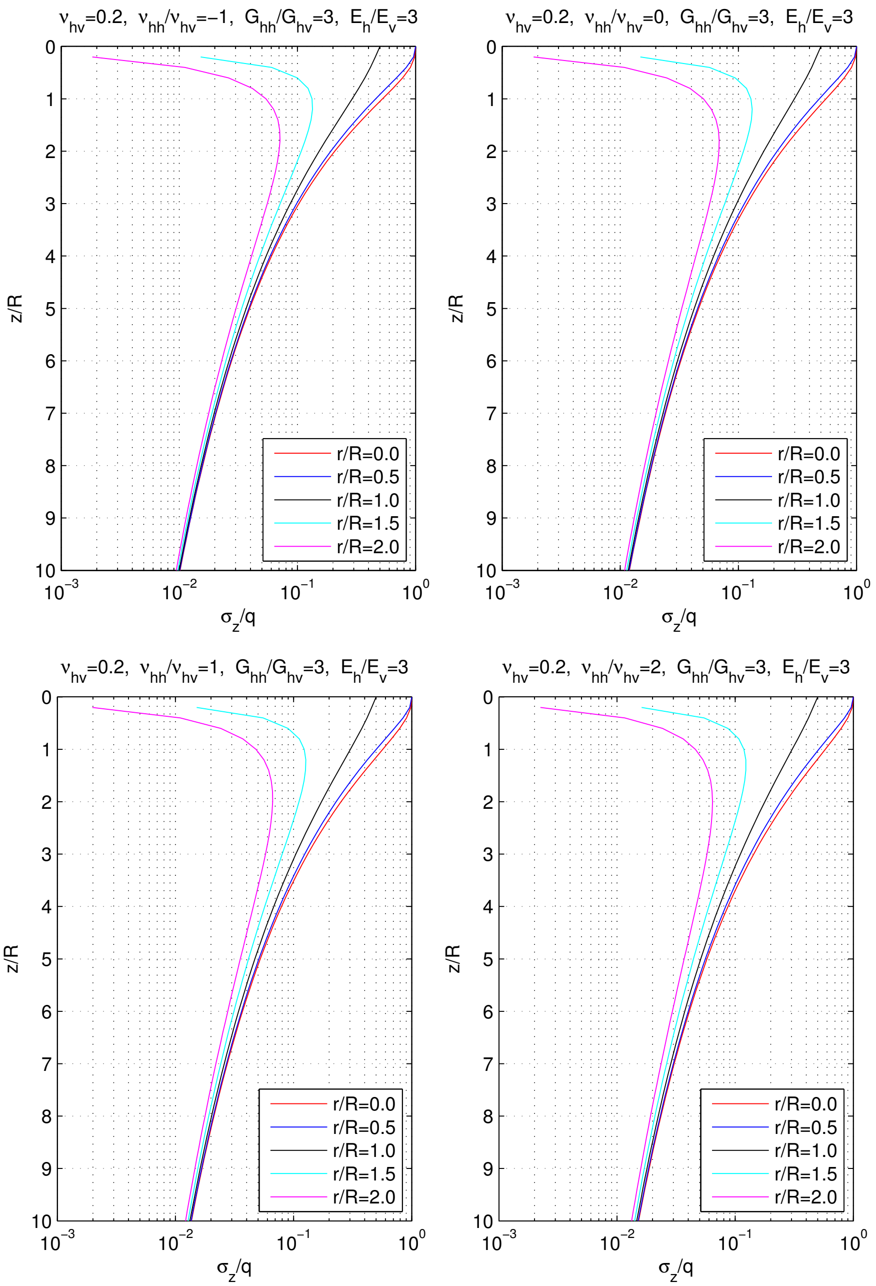


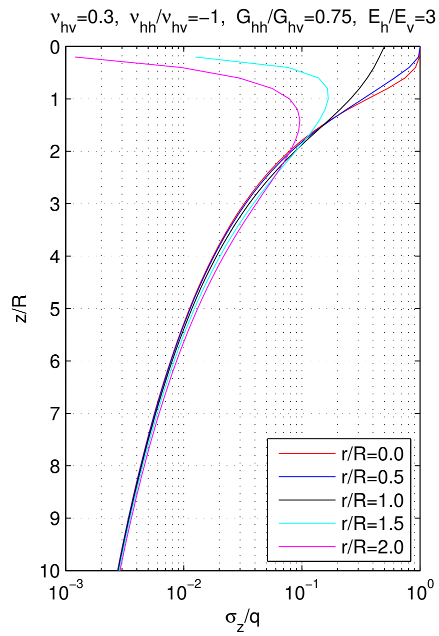
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

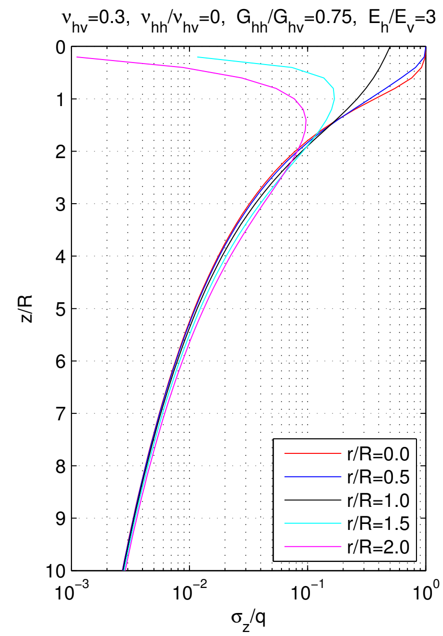

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

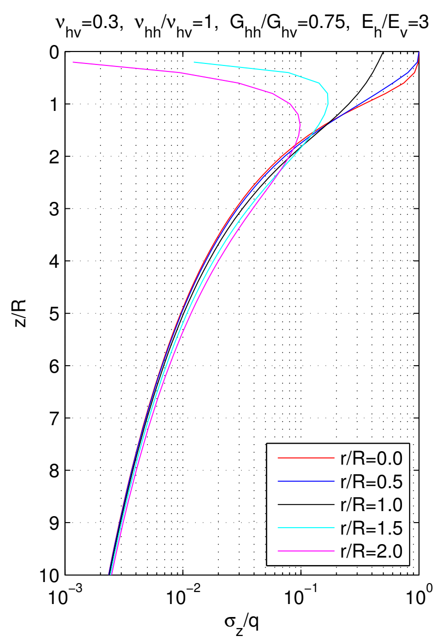


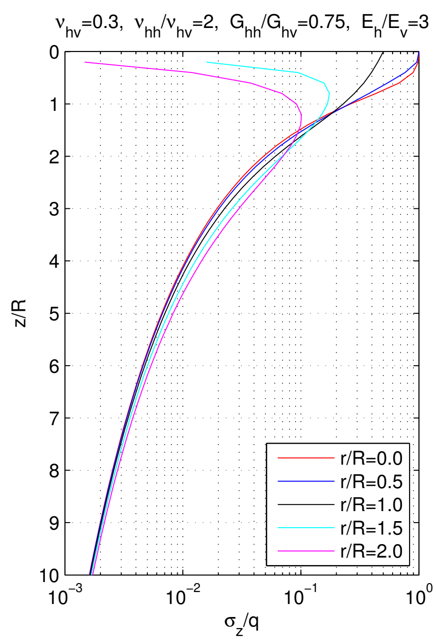
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

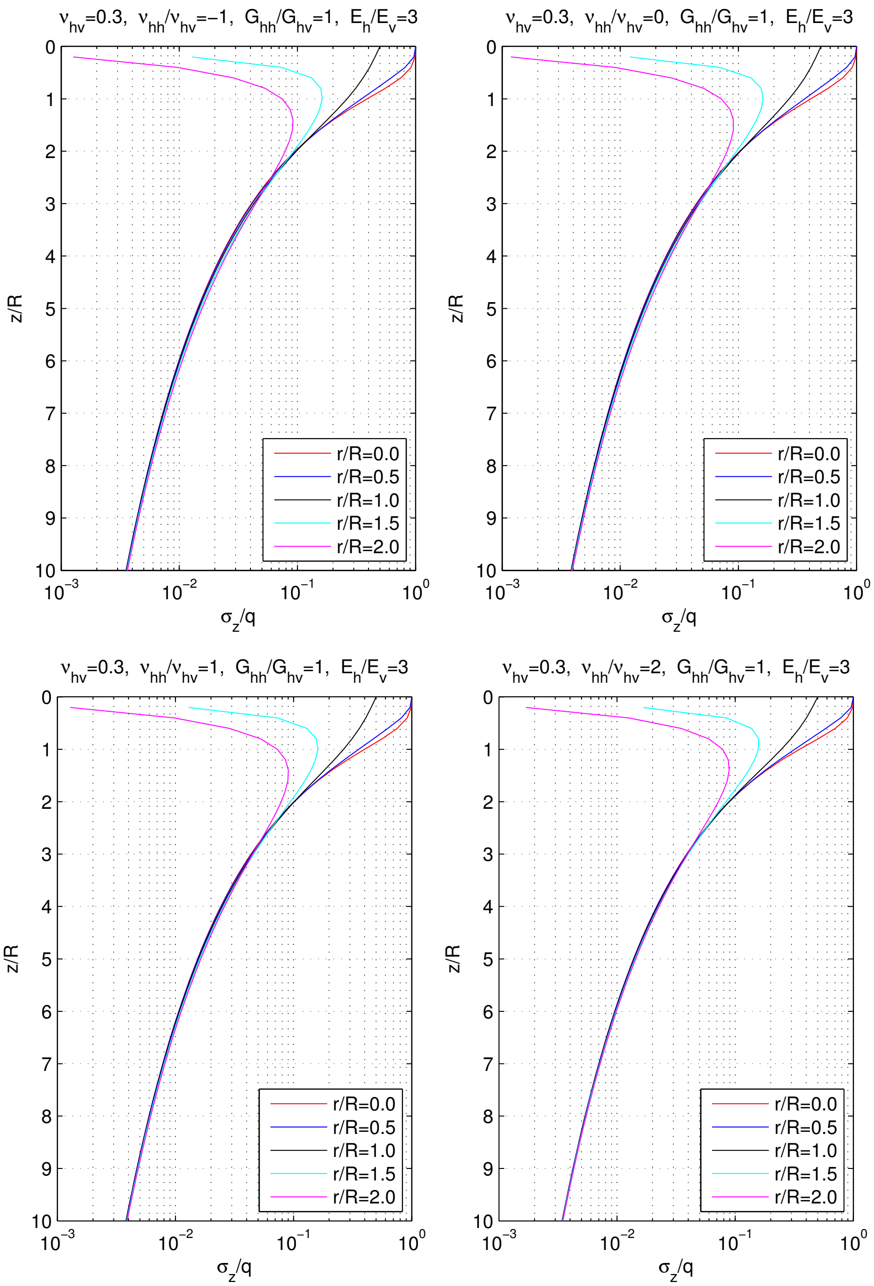

ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=3
ν_{hv}=0.2, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=3, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

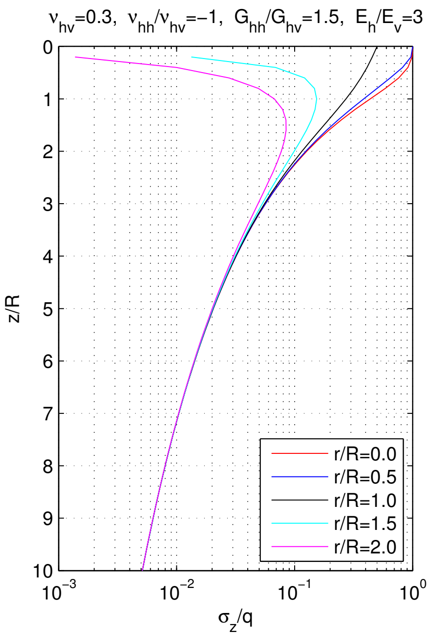

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

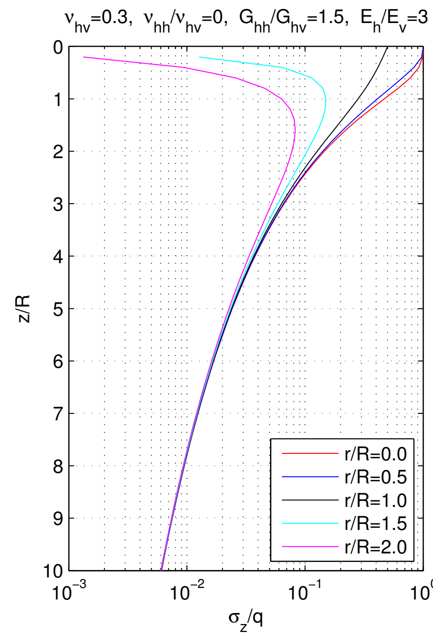

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

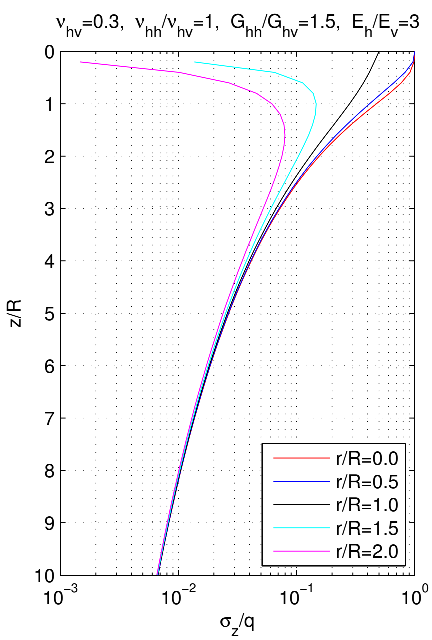

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

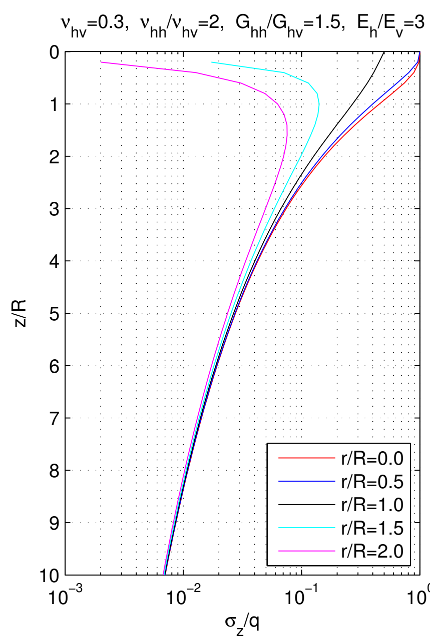

ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=0.75, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

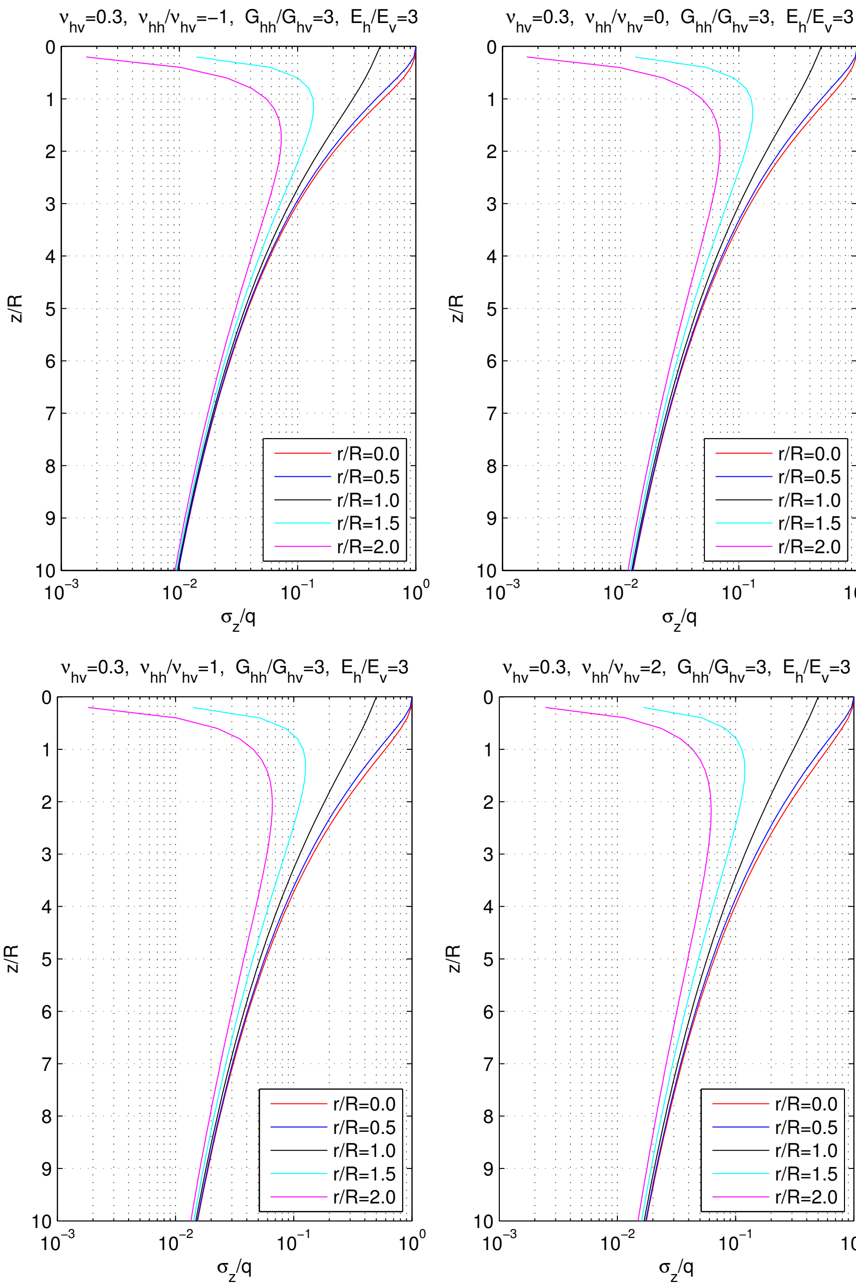

νhv=0.3, νhh/νhv=−1, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=3
νhv=0.3, νhh/νhv=0, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=3
νhv=0.3, νhh/νhv=1, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=3
νhv=0.3, νhh/νhv=2, Ghh/Ghv=1, Eh/Ev=3
z/R
σz/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=−1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=0, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=1, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0


ν_{hv}=0.3, ν_{hh}/ν_{hv}=2, G_{hh}/G_{hv}=1.5, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0



ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=−1, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=0, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=1, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
ν_hv=0.3, ν_hh/ν_hv=2, G_hh/G_hv=3, E_h/E_v=3
z/R
σ_z/q
r/R=0.0
r/R=0.5
r/R=1.0
r/R=1.5
r/R=2.0

$E_h/E_v = 0.75$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{r}{R} = 0.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	1.96	2.01	2.05	2.09	1.84	1.93	2.00	2.04	1.70	1.83	1.91	1.93
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	2.11	2.17	2.22	2.27	1.97	2.09	2.18	2.25	1.82	1.99	2.11	2.17
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	2.37	2.45	2.52	2.59	2.22	2.38	2.51	2.62	2.04	2.28	2.46	2.58
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	3.03	3.15	3.27	3.38	2.83	3.08	3.30	3.49	2.60	2.98	3.29	3.54
$\frac{r}{R} = 0.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	1.83	1.88	1.92	1.95	1.72	1.80	1.87	1.91	1.58	1.71	1.79	1.80
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	1.97	2.02	2.07	2.12	1.84	1.95	2.04	2.10	1.70	1.86	1.97	2.03
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	2.21	2.29	2.36	2.42	2.07	2.22	2.34	2.44	1.91	2.13	2.30	2.41
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	2.83	2.94	3.05	3.15	2.64	2.88	3.08	3.26	2.43	2.79	3.08	3.31
$\frac{r}{R} = 1.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	1.25	1.28	1.31	1.33	1.17	1.23	1.27	1.30	1.08	1.17	1.22	1.23
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	1.34	1.38	1.41	1.44	1.26	1.33	1.39	1.43	1.16	1.27	1.34	1.38
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	1.51	1.56	1.61	1.65	1.41	1.51	1.60	1.67	1.30	1.45	1.57	1.64
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.93	2.01	2.08	2.15	1.80	1.96	2.10	2.22	1.65	1.90	2.10	2.25
$\frac{r}{R} = 1.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.70	0.71	0.73	0.74	0.65	0.69	0.71	0.73	0.60	0.65	0.68	0.69
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.75	0.77	0.79	0.81	0.70	0.74	0.78	0.80	0.65	0.71	0.75	0.77
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.84	0.87	0.90	0.92	0.79	0.85	0.89	0.93	0.73	0.81	0.88	0.92
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.08	1.12	1.16	1.20	1.01	1.10	1.18	1.24	0.93	1.06	1.17	1.26
$\frac{r}{R} = 2.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.51	0.52	0.53	0.54	0.48	0.50	0.52	0.53	0.44	0.47	0.49	0.50
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.54	0.56	0.57	0.59	0.51	0.54	0.56	0.58	0.47	0.52	0.55	0.56
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.61	0.63	0.65	0.67	0.57	0.61	0.65	0.68	0.53	0.59	0.64	0.67
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.78	0.82	0.85	0.87	0.73	0.80	0.85	0.90	0.67	0.77	0.85	0.92

Tabella C.1: Valori di $w\,E_v/q$ nel caso di $E_h/E_v = 0.75$

$E_h/E_v = 1.00$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{r}{R}=0.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=0.75$	1.76	1.80	1.83	1.86	1.63	1.71	1.76	1.78	1.49	1.59	1.64	1.64
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.00$	1.88	1.93	1.98	2.01	1.75	1.84	1.92	1.96	1.59	1.73	1.82	1.84
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.50$	2.10	2.17	2.23	2.28	1.95	2.08	2.19	2.27	1.78	1.97	2.11	2.20
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=3.00$	2.66	2.76	2.86	2.96	2.47	2.68	2.87	3.03	2.25	2.57	2.82	3.02
$\frac{r}{R}=0.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=0.75$	1.64	1.68	1.71	1.73	1.53	1.60	1.64	1.66	1.39	1.49	1.53	1.53
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.00$	1.76	1.80	1.84	1.88	1.63	1.72	1.79	1.83	1.49	1.61	1.70	1.72
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.50$	1.96	2.03	2.08	2.13	1.82	1.95	2.05	2.12	1.66	1.84	1.97	2.05
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=3.00$	2.48	2.58	2.67	2.76	2.30	2.50	2.68	2.83	2.10	2.40	2.64	2.82
$\frac{r}{R}=1.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=0.75$	1.12	1.14	1.16	1.18	1.04	1.09	1.12	1.13	0.95	1.01	1.05	1.04
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.00$	1.20	1.23	1.26	1.28	1.11	1.17	1.22	1.25	1.01	1.10	1.16	1.17
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.50$	1.34	1.38	1.42	1.45	1.24	1.33	1.39	1.45	1.13	1.25	1.34	1.40
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=3.00$	1.69	1.76	1.82	1.88	1.57	1.71	1.82	1.92	1.43	1.63	1.80	1.92
$\frac{r}{R}=1.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=0.75$	0.63	0.64	0.65	0.66	0.58	0.61	0.62	0.63	0.53	0.57	0.58	0.58
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.00$	0.67	0.69	0.70	0.71	0.62	0.66	0.68	0.70	0.57	0.61	0.64	0.66
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.50$	0.75	0.77	0.79	0.81	0.69	0.74	0.78	0.81	0.63	0.70	0.75	0.78
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=3.00$	0.95	0.98	1.02	1.05	0.88	0.95	1.02	1.08	0.80	0.91	1.01	1.08
$\frac{r}{R}=2.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=0.75$	0.45	0.46	0.47	0.48	0.42	0.44	0.45	0.46	0.38	0.41	0.42	0.42
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.00$	0.49	0.50	0.51	0.52	0.45	0.48	0.49	0.51	0.41	0.45	0.47	0.48
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=1.50$	0.54	0.56	0.58	0.59	0.50	0.54	0.57	0.59	0.46	0.51	0.55	0.57
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}=3.00$	0.69	0.72	0.74	0.76	0.64	0.69	0.74	0.78	0.58	0.66	0.73	0.78

Tabella C.2: Valori di $w\,E_v/q$ nel caso di $E_h/E_v = 1.00$

$E_h/E_v = 1.50$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{r}{R}$ =0.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	1.51	1.54	1.56	1.58	1.38	1.43	1.46	1.46	1.22	1.28	1.30	1.26
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.60	1.64	1.67	1.70	1.46	1.53	1.58	1.60	1.30	1.39	1.44	1.43
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.78	1.83	1.87	1.91	1.63	1.72	1.80	1.85	1.44	1.58	1.67	1.72
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	2.22	2.30	2.38	2.45	2.03	2.20	2.34	2.46	1.81	2.05	2.24	2.39
$\frac{r}{R}$ =0.50	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	1.41	1.44	1.46	1.47	1.29	1.33	1.36	1.37	1.14	1.20	1.21	1.18
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.50	1.53	1.56	1.59	1.37	1.43	1.47	1.50	1.21	1.30	1.34	1.34
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.66	1.71	1.75	1.79	1.52	1.61	1.68	1.73	1.35	1.48	1.56	1.61
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	2.07	2.15	2.22	2.29	1.90	2.05	2.18	2.29	1.69	1.92	2.09	2.23
$\frac{r}{R}$ =1.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.96	0.98	0.99	1.00	0.88	0.91	0.93	0.93	0.78	0.82	0.83	0.80
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	0.93	0.97	1.00	1.02	0.83	0.88	0.91	0.91
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	1.13	1.16	1.19	1.22	1.03	1.10	1.14	1.18	0.92	1.01	1.07	1.09
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	1.41	1.46	1.51	1.56	1.29	1.40	1.49	1.56	1.15	1.31	1.43	1.52
$\frac{r}{R}$ =1.50	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.54	0.55	0.56	0.56	0.49	0.51	0.52	0.52	0.43	0.46	0.46	0.45
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.57	0.58	0.59	0.60	0.52	0.55	0.56	0.57	0.46	0.49	0.51	0.51
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.63	0.65	0.67	0.68	0.58	0.61	0.64	0.66	0.51	0.56	0.60	0.61
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.79	0.82	0.85	0.87	0.72	0.78	0.83	0.88	0.64	0.73	0.80	0.85
$\frac{r}{R}$ =2.00	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =0.75	0.39	0.40	0.40	0.41	0.36	0.37	0.38	0.38	0.31	0.33	0.34	0.33
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.00	0.41	0.42	0.43	0.44	0.38	0.40	0.41	0.41	0.34	0.36	0.37	0.37
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =1.50	0.46	0.47	0.48	0.49	0.42	0.45	0.47	0.48	0.37	0.41	0.43	0.45
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}}$ =3.00	0.57	0.60	0.62	0.63	0.53	0.57	0.61	0.64	0.47	0.53	0.58	0.62

Tabella C.3: Valori di $w\,E_v/q$ nel caso di $E_h/E_v = 1.50$

$E_h/E_v = 3.00$		$\nu_{hv} = 0.10$				$\nu_{hv} = 0.20$				$\nu_{hv} = 0.30$			
		$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = -1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 0$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 1$	$\frac{\nu_{hh}}{\nu_{hv}} = 2$
$\frac{r}{R} = 0.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	1.16	1.18	1.19	1.19	1.00	1.02	1.02	0.99	0.79	0.80	0.77	0.68
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	1.22	1.24	1.26	1.27	1.06	1.09	1.10	1.09	0.85	0.87	0.86	0.81
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	1.34	1.37	1.39	1.41	1.16	1.21	1.25	1.26	0.94	1.00	1.03	1.02
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.63	1.68	1.73	1.77	1.43	1.53	1.61	1.68	1.18	1.31	1.41	1.48
$\frac{r}{R} = 0.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	1.09	1.10	1.11	1.11	0.93	0.95	0.95	0.93	0.74	0.75	0.72	0.63
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	1.14	1.16	1.18	1.19	0.99	1.01	1.03	1.02	0.79	0.82	0.81	0.75
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	1.25	1.28	1.30	1.32	1.08	1.13	1.16	1.18	0.88	0.94	0.96	0.95
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.52	1.57	1.61	1.66	1.33	1.43	1.51	1.57	1.10	1.23	1.32	1.38
$\frac{r}{R} = 1.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.74	0.75	0.75	0.76	0.64	0.65	0.65	0.63	0.51	0.51	0.49	0.43
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.78	0.79	0.80	0.81	0.67	0.69	0.70	0.69	0.54	0.56	0.55	0.51
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.85	0.87	0.89	0.90	0.74	0.77	0.79	0.80	0.60	0.64	0.65	0.65
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	1.03	1.07	1.10	1.13	0.91	0.97	1.03	1.07	0.75	0.84	0.90	0.94
$\frac{r}{R} = 1.50$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.41	0.42	0.42	0.42	0.36	0.36	0.36	0.35	0.28	0.29	0.27	0.24
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.43	0.44	0.45	0.45	0.38	0.39	0.39	0.39	0.30	0.31	0.31	0.29
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.47	0.49	0.49	0.50	0.41	0.43	0.44	0.45	0.33	0.36	0.37	0.36
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.58	0.60	0.62	0.63	0.51	0.54	0.57	0.60	0.42	0.47	0.50	0.53
$\frac{r}{R} = 2.00$	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 0.75$	0.30	0.30	0.31	0.31	0.26	0.26	0.26	0.26	0.21	0.21	0.20	0.17
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.00$	0.32	0.32	0.33	0.33	0.27	0.28	0.28	0.28	0.22	0.23	0.22	0.21
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 1.50$	0.35	0.35	0.36	0.37	0.30	0.31	0.32	0.33	0.24	0.26	0.27	0.26
	$\frac{G_{hh}}{G_{hv}} = 3.00$	0.42	0.43	0.45	0.46	0.37	0.40	0.42	0.43	0.31	0.34	0.37	0.38

Tabella C.4: Valori di $w\,E_v/q$ nel caso di $E_h/E_v = 3.00$

Bibliografia

[1] F. Ahmad and A. Khan. Effect of rotation on wave propagation in transversely isotropic medium. *Mathematical Problems in Engineering*, 7:147–154, 2001.

[2] A.A. Al-Karni and M.A. Al-Shamrani. Study of the effect of soil anisotropy on slope stability using method of slices. *Comp. & Geotech.*, 26:83–103, 2003.

[3] B. Amadei. Importance of anisotropy when estimating and measuring in situ stresses in rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 33(3):293–325, 1996.

[4] B. Amadei, W. Savage, and H. Swolfsh. Gravitational stresses in anisotropic rock masses. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 24(1):5–14, 1987.

[5] Anon. De spanningsverdeling in enn homogeen anisotroop elastisch half medium. *L.G.M. Mededelingen*, 5(2):33–51, 1960.

[6] A.J. Anyaegbunam, N.N. Osadebe, and O. J. Eze-Uzomaka. Non-existence of solution for horizontally rigid halfspace. *Geotech. Geoenv. Engrg., ASCE*, 137(4):431– 434, 2011.

[7] Amaechi J Anyaegbunam. Complete stresses and displacements in a cross-anisotropic half-space caused by a surface vertical point load. *International Journal of Geomechanics*, 14(2):171–181, 2012.

[8] Amaechi J Anyaegbunam. Complete stresses and displacements in a cross-anisotropic half-space caused by a surface vertical point load. *International Journal of Geomechanics*, 14(2):171–181, 2012.

[9] J.R.F. Arthur and B.K. Menzies. Inherent anisotropy in sand. *Géotechnique*, 22:115–129, 1972.

[10] J.H. Atkinson. Anisotropic elastic deformation in laboratory tests on undisturbed London clay. *Géotechnique*, 25:357–374, 1975.

[11] C. G. Bank. *Seismic Measurements Using Ultrasound on Gneiss Samples*. PhD thesis, Vancouver: University of British Columbia, 2002.

[12] L. Barden. Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil. *Géotechnique*, 13:198–210, 1963.

[13] L. Barden. Influence of structure on deformation and failure in clay soil. *Géotechnique*, 22:159–163, 1972.

[14] E. Behrens. Elastic constants of fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents. *Journal of Applied Mechanics*, 38:1062–1065, 1971.

[15] J. Boussinesq. *Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et due mouvement des solides elastique*. Gauthier Villars, Paris, 1885.

[16] J. E. Bowles. *Foundation Analysis and Design*. McGraw-Hill, New York, 1996.

[17] G. F. Carrier. Propagation of waves in orthotropic media. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4:160–165, 1946.

[18] V. Cerruti. Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi. *Reale Accademia de' Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*, 3:13:81–122, 1882.

[19] C. S. Chen, E. Pan, and B. Amadei. Determination of deformability and tensile strength of anisotropic rock using Brazilian tests. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 35(1):43–61, 1998.

[20] W.T. Chen. On some problems in transversely isotropic elastic materials. *J. Appl. Mech.*, 33(6):347–355, 1966.

[21] K. L. Chowdhury. On the axisymmetric Mindlin's problem for a semi-space of granular material. *Acta Mech.*, 66:145–160, 1987.

[22] R. De Urena, J. S. Piquer, F. Muzas, and J. M. S. Saracho. Stress distribution in cross-anisotropic media. volume 1, pages 313–317. Proc. 1st Cong. Int. Soc. Rock Mech., 1966.

[23] J.C. Dooley. Discussion of L. Barden's stress and displacements in a cross-anisotropic soil. *Géotechnique*, 14(3):278–279, 1964.

[24] M. G. D'Urso. New expressions of the gravitational potential and its derivates for the prism. In *VII Hotine-Marussi International Symposium on Mathematical Geodesy*, pages 251–256, Springer-Verlag, Berlin, 2012. Sneeuw N., Novák P., Crespi M., Sansò F. (Eds.).

[25] M. G. D'Urso. On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities. *Journal of Geodesy*, 87(3):239–252, 2013.

[26] M. G. D'Urso. Some Remarks on the Computation of the Gravitational Potential of Masses with Linearly Varying Density. In *VIII Hotine-Marussi Symposium*, Rome, 2013. N. Sneeuw, P. Novák, M. Crespi, F. Sansò.

[27] M. G. D'Urso. Analytical computation of gravity effects for polyhedral bodies. *Journal of Geodesy*, 88:13–29, 2014.

[28] M. G. D'Urso. Gravity effects of polyhedral bodies with linearly varying density. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 120(4):349–372, 2014.

[29] M. G. D'Urso and F. Marmo. On a generalized Love's problem. *Computers & Geosciences*, 61:144–151, 2013.

[30] M. G. D'Urso and F. Marmo. Vertical stress distribution in isotropic half-spaces due to surface vertical loadings acting over polygonal domains. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 95(1):91–110, 2015.

[31] M. G. D'Urso and P. Russo. A new algorithm for point-in polygon test. *Survey Review*, 36(284):410–422, 2002.

[32] J. R. Dydo and H. R. Busby. Elasticity solutions for constant and linearly varying load applied to a rectangular surface patch on the elastic half-space. *Journal of Elasticity*, 38:153–163, 1995.

[33] H.A. Elliott. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 44(4):522–533, 1948.

[34] R.A. Eubanks and E. Sternberg. On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy. *J. Rational Mech. Anal.*, 3:89–101, 1954.

[35] V.I. Fabrikant. *Applications of Potential Theory in Mechanics: A Selection of New Results*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1989.

[36] V.I. Fabrikant. Contact problems for several transversely isotropic elastic layers bonded to an elastic half-space. *Z. Angew. Math. Mech.*, 91(3):214–246, 2011.

[37] M. N. Gardos. On the elastic constants of thin solid lubricant films. In D. Dowson, C.M. Taylor, and M. Godet, editors, *Mechanics of Coatings*, pages 3–13. Elsevier, Amsterdam, 1990.

[38] G. Gazetas. Strip foundations on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading. *Géotechnique*, 22(0):372–376, 1981.

[39] G. Gazetas. Axisymmetric parabolic loading of anisotropic halfspace. *J. Geotech. Engng. Div. ASCE*, 108(4):654–660, 1982.

[40] G. Gazetas. Stresses and displacements in cross-anisotropic soils. *J. Geotech. Engng. Div. ASCE*, 108(4):532–553, 1982.

[41] C. M. Gerrard and W. J. Harrison. Circular loads applied to a cross-anisotropic half space. Technical report, CSIRO (Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization) Aust. Div. App. Geomech, 1970.

[42] C.M. Gerrard. Discussion of L. Barden's stress and displacements in a cross-anisotropic soil. *Géotechnique*, 22(2):372–376, 1972.

[43] C.M. Gerrard. Background to mathematical modeling in geomechanics: The roles of fabric and stress history. *Proc. Int. Symp. on Numer. Meth., Karlsruhe*, 33:33–120, 1975.

[44] C.M. Gerrard. Background to mathematical modeling in geomechanics: The roles of fabric and stress history. In John Wiley, editor, *In Finite Elements in Geomechanics*, pages 33–120. New York, 1977.

[45] C.M. Gerrard. Point and circular loads applied within a cross-anosotropic elastic halfspace. *Appl. Math. Modelling*, 6:262–272, 1982.

[46] C.M. Gerrard and L.J. Wardle. Solutions for point loads and generalized circular loads applied to a cross anisotropic halfspace. Technical Report 13, CSIRO (Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization) Aust. Div. App. Geomech, Sydney, Australia, 1973.

[47] R.E. Gibson. The analytical method in soil mechanics. *Géotechnique*, 24:115–140, 1974.

[48] R.E. Gibson and G.C. Sills. Settlement of a strip load on a nonhomogeneous orthotropic incompressible elastic half Space. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 28:233–243, 1974.

[49] G.M.L. Gladwell. Polynomial solutions for an ellipse on an anisotropic elastic half-space. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 31(2):251–260, 1978.

[50] W. D. Guo. Subgrade modulus for laterally loaded piles. Stirling, U.K., 2001. Proc. 8th Int. Conf. on Civil and Structural Engineering Computing.

[51] M. T. Hanson and I. W. Puja. Love's circular patch problem revisited: closed form solutions for transverse isotropy. *Q. Appl. Math.*, 54(2):359–384, 1996.

[52] M.T. Hanson and I. W. Puja. Elastic subsurface stress analysis for circular foundation. I. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124(5):537–546, 1998.

[53] M.T. Hanson and I. W. Puja. Elastic subsurface stress analysis for circular foundation. II. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124(5):547–555, 1998.

[54] M.T. Hanson and Y. Wang. Concentrated ring loadings in a full space or half space: solutions for transverse isotropy and isotropy. *Int. J. Solids Struct.*, 34(44):1379–1418, 1997.

[55] D. J. Hart. *Laboratory Measurements of Poroelastic Constants and Flow Parameters and Some Associated Phenomena*. PhD thesis, Madison: University of Wisconsin-Madison., 2000.

[56] H. Hasegawa and K. Watanabe. Green's functions for axisymmetric surface force problems of an elastic half space with transverse isotropy. *Jap. Soc. Mech. Engng.*, 95(1):438–439, 1995.

[57] K.I. Hata. Some remarks on the three-dimensional problems concerned with the isotropic and anisotropic elastic solids. *Mem. Fac. Engng., Hokkaido Univ.*, 10(2):129, 1956.

[58] Morel E. Henry Y. H. Cuxac P. Homand, F. and E. Hammade. Characterization of the moduli of elasticity of an anisotropic rock using dynamic and static methods. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 30(5):527–535, 1993.

[59] J. A. Hooper. Elastic settlement of a circular raft in adhesive contact with a transversely isotropic medium. *Géotechnique*, 25(4):691–711, 1975.

[60] Y.H. Huang. Stresses and displacements in nonlinear soil media. *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, 94(1):1–19, 1993.

[61] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1999.

[62] R. K. Jain. Vibration of fluid-filled, orthotropic cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 37:379–384, 1974.

[63] J. Johnston and N. Christensen. Elastic constants and velocity surfaces of indurated anisotropic shales. *J. Geotech. Geoenv. Eng., ASCE*, 135(1):26–36, 1994.

[64] W. M. Kirkpatrick and I. A. Rennie. Directional properties of a consolidated kaolin. *Géotechnique*, 22:166–169, 1993.

[65] H. Koning. Stress distribution in a homogenous, anisotropic, elastic semi-infinite solid. volume 1, pages 335–338. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engng., 1957.

[66] M. Koskinea, R. Zentar, and M. Karstunen. Anisotropy of reconstituted Poko clay. pages 99–105, Rome, 2002. Proc. 8th Int. Symp. on Numer. Models in Geomech.

[67] R. D. Kriz and W. W. Stinchcomb. Elastic moduli of transversely isotropic graphite fibers and their composites. *Experimental Mechanics*, 19:41–49, 1979.

[68] E. Kröner. Das fundamentalintegral der anisotropen elastischen differentialgleichungen. *Zeitschrift für Physik*, 136:402–410, 1953.

[69] F. H. Kulhawy. Stress deformation properties of rock and rock discontinuities. *Engineering Geology*, 9(4):327–350, 1975.

[70] F. H. Kulhawy. Geomechanical model for rock foundation settlement. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 104:211–227, 1978.

[71] C. H. Kuo and L. M. Keer. Contact stress analysis of a layered transversely isotropic half-space. *Journal of Tribology*, 114:253–262, 1992.

[72] K.-M. Lee and R.K. Rowe. Deformation caused by surface loading and tunelling, the role of elastic anisotropy. *Géotechnique*, 39:125–140, 1989.

[73] N. G. Lee. Elastic Green's function for an infinite half-space of a hexagonal continuum with its basal plane as surface. *Int. J. Engng. Sci.*, 17:681–689, 1979.

[74] S. Lees and Jr. Rollins, F. R. Anisotropy in hard dental tissues. *Journal of Biomechanics*, 5:557–566, 1972.

[75] S. G. Lekhnitskii. Symmetrical deformation and torsion of a body of revolution with a special kind of anisotropy. *PMM*, 4(3):43–60, 1940.

[76] S. G.) Lekhnitskii. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-Day, San Francisco, 1963.

[77] J. Li and E. J. Berger. A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over triangular area. *Journal of Elasticity*, 63:137–151, 2001.

[78] R. Liang, K. Yang, and J. Nusairat. p-y criterion for rock mass. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 135(1):26–36, 2009.

[79] R. Y. Liang and E. S. Shatnawi. Estimating subgrade reaction modulus for transversely isotropic rock medium. *ASCE J. Geotech. Geoenv. Engrg., ASCE*, 136(8):1077–1085, 2010.

[80] J. J. Liao, T. Hu, and C. Chang. Determination of dynamic elastic constants of transversely isotropic rocks using a single cylindrical specimen. *International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences*, 34(5):837–849, 1997.

[81] J.J. Liao and C.D. Wang. Elastic solutions for a transversely isotropic half-space subjected to a point load. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 22:425–447, 1998.

[82] H. C. Lin. Three-Dimensional Finite Element Modeling and Stress Analysis of Mandible. Master's thesis, Tainan: National Cheung Kong University, 2002.

[83] W. Lin, C. H. Kuo, and L.M. Keer. Analysis of a transversely isotropic half space under normal and tangential loadings. *J. Tribology ASME*, 133(4):335–338, 1991.

[84] W. Liu and M. Novak. Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 23(11):1239–1257, 1994.

[85] T. Lo, K. B Coyner, and M. Toksöz. Experimental determination of elastic anisotropy of berea sandstone, chicopee shale, and chelmsford granite. *Geophysics*, 51(1):164–171, 1986.

[86] A.S. Lodge. The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 8(2):211–225, 1955.

[87] A. E. H. Love. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 228:377–420, 1929.

[88] A.E.H. Love. *The mathematical theory of elasticity*. 1927.

[89] R. M. Martin. Relation between elastic tensors of wurtzite and zinc-blende structure materials. *Physical Review*, B(6):4546–4553, 1972.

[90] J. D. D. Melo and D. W. Radford. Determination of the elastic constants of a transversely isotropic lamina using laminate coefficients of thermal expansion. *Journal of Composite Materials*, 36:1321–1329, 2002.

[91] J. H. Michell. Some elementary distributions of stress in three-dimensions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 32:23–35, 1900.

[92] J. H. Michell. The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. *Proc. London Math. Soc.*, 32:247–258, 1900.

[93] B. Misra and B. R. Sen. Stresses and displacements in granular materials due to surface load. *Int. J. Engng. Sci.*, 13:743–761, 1975.

[94] J. R. Morgan and C. M. Gerrard. Behavior of sands under surface loads. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 97(12):1675–1699, 1971.

[95] N. Moroto and A. Hasegawa. Anisotropic elastic stress formulae applicable to reinforced earth. *Soils Found.*, 30(1):172–178, 1990.

[96] M. Nayak. Elastic settlement of a cross-anisotropic medium under axisymmetric loading. *Soils Found.*, 13(2):83–90, 1973.

[97] M. Nayak and U.K. Chakrabarti. Settlement of rectangular foundations on overconsolidated clays. *Soils and Foundations*, 15(1):81–88, 1975.

[98] I.A. Okumura and H. Dohba. Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic elasticity problems in Cartesian coordinates. *JSME, Int. J., Series I, Solid Mech., Strength of Materials*, 32(3):331–336, 1989.

[99] E. Pan. Concentrated force in an infinite space of transversely isotropic material. *Acta Mech.*, 80:127–135, 1989.

[100] Y.C. Pan and T.W. Chou. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *J. Appl. Mech. ASME*, 43(12):608–612, 1976.

[101] Y.C. Pan and T.W. Chou. Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials. *Int. J. Engng. Sci.*, 17(0):545–551, 1979.

[102] M. Panet, C. Cheng, M. Deschamps, O. Poncelet, and B. Audoin. Microconcrete ageing ultrasonic identification. *Cement and Concrete Research*, 32:1831–1838, 2002.

[103] A. K. Parking, C.M. Gerrard, and D.R. Willoughby. Deformation of sand in hydrostatic compression. *J. Geotech. Engrg. Div.*, 94:336–340, 1975.

[104] DJ Pickering. Anisotropic elastic parameters for soil. *Geotechnique*, 20(3):271–276, 1970.

[105] J. S. Piquer, F. Muzas, R. D. Urena, and F Grajera. Foundations in cross-anisotropic ground. volume 1, Lisbon, 1966. Proc. 1st Cong. Int. Soc. Rock Mech.

[106] P. M. Quinlan. *Fourier Integral Approach to an Aelotropic Medium*. PhD thesis, California Institute of Technology, CA, 1949.

[107] D. T. Reilly and A. H. Burstein. The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *Journal of Biomechanics*, 8:391–405, 1975.

[108] M. A. Ritter. *Timber bridges design, construction, inspection and maintenance*. U.S. Forest Service Document, 1992.

[109] L. Rosati and F. Marmo. A closed form expression of the thermo-mechanical fields induced by a uniform heat source acting over an isotropic half-space. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 75:272–283, 2014.

[110] Peter W Rowe. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 269(1339):500–527, 1962.

[111] D. Royer and E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids I*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[112] A. S. Saada and C. Ou. Strain-stress relations and failure of anisotropic clays. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 99(12):1091–1111, 1973.

[113] A. Sàez and J. Domìnguez. Far field dynamic Green's functions for BEM in transversely isotropic solids. *Wave Motion*, 32:113–123, 2000.

[114] S.M. Sargand and booktitle=International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts volume=24 number=6 pages=365–370 year=1987 organization=Elsevier Hazen, G.A. Deformation behaviour of shales.

[115] Z. Shi and S. Ramalingam. Thermal and mechanical stresses in transversely isotropic coatings. *Surface and Coatings Technology*, 138:173–184, 2001.

[116] R.T. Shield. Notes on problems in hexagonal aeolotropic materials. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47:401–409, 1951.

[117] A.W. Skempton. Discussion on foundation of structures. pages 159–160, Paris, 1957. Proc. 5th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engng.

[118] V.A. Sveklo. Boussinesq type problems for the anisotropic half space. *PMM*, 28(5):908–913, 1964.

[119] V.A. Sveklo. Concentrated force in a transversely isotropic half space and in a composite space. *PMM*, 3(3):532–537, 1969.

[120] V.A. Sveklo. The action of a stamp on an elastic anisotropic half-space. *PMM*, 34(1):172–178, 1970.

[121] D. W. Taylor. Review of pressure distribution theories, earth pressure cell investigations and pressure distribution data. Technical report, U.S. Army Waterways Experiment Station, 1945.

[122] MA Tekinsoy, T Taşkıran, C Kayadelen, and T Baran. An approximation to the stress distribution analysis for anisotropic clayey soil. *Scientific Research and Essays*, 4(2):78–87, 2009.

[123] W. J. Turnbull, A. Maxwell, and R. G. Ahlvin. Stresses and deflections in homogeneous soil masses. volume 2, pages 337–346. Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engrg., 1961.

[124] M. Uyaner, A. Akdemir, S. Erim, and A. Avci. Plastic zones in a transversely isotropic solid cylinder containing a ring-shaped crack. *International Journal of Fracture*, 106:161–175, 2000.

[125] J. B. Wachtman, W. E. Jr., Tefft, D. G. Lam, Jr., and R. P. Stinchfield. Elastic constants of synthetic single crystal Corundum at room temperature. *Journal of Research of the National Bureau of Standards - A Physics and Chemistry*, 1(64):213–228, 1960.

[126] C. D. Wang. Lateral stress caused by horizontal and vertical surcharge strip loads on a cross-anisotropic backfill. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 29(14):1341–1361, 2005.

[127] C. D. Wang. Lateral force and centroid location caused by horizontal and vertical surcharge strip loads on a cross-anisotropic backfill. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(13):1443–1475, 2007.

[128] C. D. Wang. Lateral force induced by rectangular surcharge loads on a cross-anisotropic backfill. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(10):1259–1276, 2007.

[129] C. D. Wang, M. T. Chen, and T. C. Lee. Surface displacements due to batter piles driven in cross-anisotropic media. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 32(2):121–141, 2008.

[130] C. D. Wang and J. J. Liao. Elastic solutions for stresses in a transversely isotropic half-space subjected to three-dimensional buried parabolic rectangular loads. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 26(14):1449–1476, 2002.

[131] C. D. Wang and J. J. Liao. Elastic solutions of displacements for a transversely isotropic half-space subjected to three-dimensional buried parabolic rectangular loads. *International journal of solids and structures*, 39(18):4805–4824, 2002.

[132] C. D. Wang, E. Pan, C. S. Tzeng, F. Han, and J. J. Liao. Displacements and stresses due to a uniform vertical circular load in an inhomogeneous cross-anisotropic half-space. *International Journal of Geomechanics*, 6(1):1–10, 2006.

[133] C. D. Wang, C. S. Tzeng, E. Pan, and J. J. Liao. Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogenous transversely isotropic half-space. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 40:667–685, 2003.

[134] C. D. Wang, Z. Q. Ye, and Z. W. Ruan. Displacement and stress distributions under a uniform inclined rectangular load on a cross-anisotropic geomaterial. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 33(6):709–748, 2009.

[135] C.D. Wang and J. J. Liao. Stress influence charts for transversely isotropic rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 35(6):771–785, 1998.

[136] C.D. Wang and J. J. Liao. Computing displacements in transversely isotropic rocks using influence charts. *Rock mechanics and rock engineering*, 32(1):51–70, 1999.

[137] C.D. Wang and J. J. Liao. Elastic solutions for a transversely isotropic half-space subjected to buried asymmetric-loads. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(2):115–139, 1999.

[138] C.D. Wang, C.S. Tzeng, E. Pan, and J. J. Liao. Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogeneous transversely isotropic half-space. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40(5):667–685, 2003.

[139] L. T. Wang. Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in transversely isotropic elastic media. *Wave Motion*, 40:173–190, 2004.

[140] Y.H. Wang and journal=Computers and Geotechnics volume=28 number=1 pages=37–54 year=2001 publisher=Elsevier Cheung, Y.K. Plate on cross-anisotropic foundation analyzed by the finite element method.

[141] W.H. Ward, A. Marsland, and S.G. Samuels. Properties of the london clay at the ashford common shaft: in-situ and undrained strength tests. *Geotechnique*, 15(4):321–344, 1965.

[142] W.H. Ward, S. G. Samuels, and M. E. Butler. Further studies of the properties of london clay. *Geotechnique*, 9(2):33–58, 1959.

[143] Simon J Wheeler, Anu Näätänen, Minna Karstunen, and Matti Lojander. An anisotropic elastoplastic model for soft clays. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(2):403–418, 2003.

[144] J.R. Willis. The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 18(4):419–433, 1965.

[145] K. Wolf. Ausbreitung der kraft in der halbebene und in halbraum bei anisotropen material. *Z. Angew. Math. Mech.*, 15(5):249–254, 1935.

[146] C.P. Wroth. Some aspects of the elastic behaviour of an overconsolidated clay. pages 347–361, Cambridge, England, 1971. Proc. Roscoe Memorial Symp.

[147] R.N. Yong and V. Silvestri. Anisotropic behaviour of a sensitive clay. *Canadian geotechnical journal*, 16(2):335–350, 1979.

[148] Z. Q. Yue and R. Wang. Static solution for transversely isotropic elastic n-layered systems [j]. *Acta Scicentiarum Naturalum Universitis Pekinesis*, 24:11–202, 1988.

[149] Z.Q. Yue, H.T. Xiao, L.G. Tham, C.F. Lee, and J.H. Yin. Stresses and displacements of a transversely isotropic elastic halfspace due to rectangular loadings. *Engineering analysis with boundary elements*, 29(6):647–671, 2005.