DOTTORATO DI RICERCA
in
SCIENZE COMPUTAZIONALI E INFORMATICHE
Ciclo XXVII

Consorzio tra Università di Catania, Università di Napoli Federico II,
Seconda Università di Napoli, Università di Salerno

SEDE AMMINISTRATIVA: Università di Napoli Federico II

MARIAGRAZIA LORINO

STUDIO DELLE VARIABILI DEFICIT E SURPLUS DELL'EQUILIBRIO FINANZIARIO E ANALISI DEL CONTAGIO FINANZIARIO

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

IL COORDINATORE
Prof.ssa Gioconda Moscariello

Indirizzo dell'autore:
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania
Viale Andrea Doria, 6
95125, Catania,
Italia

E-mail dell'autore:
lorino@dmi.unict.it

Indice

Introduzione **i**

1 Disequazioni variazionali e teoria della dualità infinito-dimensionale **1**

1.1 Concetti preliminari . . . 1
1.2 Disequazioni variazionali . . . 3
1.2.1 Approccio senza ipotesi di monotonia . . . 3
1.2.2 Approccio con ipotesi di monotonia . . . 6
1.3 Teoria della dualità infinito dimensionale . . . 9
1.4 Metodo diretto . . . 12

2 Regolarità della soluzione nel problema dell'equilibrio finanziario **15**

2.1 Descrizione del modello . . . 15
2.1.1 Deficit Formula, Balance Law e Liability Formula . . . 22
2.1.2 L'Indice di Valutazione . . . 23
2.2 Risultati di continuità per le soluzioni di equilibrio finanziario . . . 24
2.3 Un risultato di Lipschitz continuità . . . 27
2.4 Alcuni esempi numerici . . . 29
2.4.1 Esempio 1 . . . 35
2.4.2 Esempio 2 . . . 40
2.4.3 Esempio 3 . . . 44

3 Il problema duale e le variabili deficit e surplus **47**

3.1 Continuità delle variabili deficit e surplus . . . 47
3.1.1 Dimostrazione del Teorema . . . 48
3.2 Metodo computazionale . . . 52
3.3 Analisi del contagio . . . 53

Conclusioni **55**

Bibliografia **59**

Introduzione

La vita scientifica della teoria delle Disequazioni Variazionali si è subito rivelata ricca di eventi e sorprese. Questa teoria si è sviluppata negli anni Settanta come un metodo innovativo ed efficace per risolvere una serie di problemi di equilibrio avanzati da fisici matematici come, per esempio, il problema di Signorini, il problema dell'ostacolo e il problema della torsione elasto-plastica. Non sappiamo ancora decidere chi, tra G. Fichera e G. Stampacchia, dev'essere considerato il fondatore di questa teoria, chi si è occupato per primo di Disequazioni Variazionali.

Dopo un intenso periodo di successi e di risultati fondamentali ottenuti per mezzo della Teoria delle Disequazioni Variazionali, forse a seguito della morte precoce di Stampacchia nel 1979, l'interesse per le Disequazioni Variazionali diminuì e sembrò che questa teoria non avesse più nulla da comunicare.

Al contrario, negli anni Ottanta, M.J. Smith e S. Dafermos provarono che il problema dell'equilibrio del traffico può essere formulato in termini di una Disequazione Variazionale finito-dimensionale e, inoltre, in questa maniera è possibile studiare esistenza, unicità e stabilità del problema dell'equilibrio del traffico e calcolarne le soluzioni.

A seguito di questo fatto, le ultime decadi hanno testimoniato un interesse eccezionale per le Disequazioni Variazionali ed un'enorme quantità di articoli e libri è stata dedicata a questo argomento. Svariati problemi provenienti dal mondo dell'economia, come il problema dei mercati economici spazialmente distribuiti, il problema dei mercati oligopolistici, il problema della migrazione, il problema dell'inquinamento e molti altri, sono stati formulati in termini di una Disequazione Variazionale finito-dimensionale e, per mezzo di questa teoria, sono stati risolti.

Alla fine degli anni Novanta, il problema dell'equilibrio del traffico con flussi sui percorsi ammissibili è stato formulato mediante una Disequazione Variazionale di evoluzione e sono stati dati teoremi di esistenza per la soluzione e procedure di calcolo. A partire da questo primo risultato, molti altri problemi con dati dipendenti dal tempo sono stati formulati in maniera analoga, fino ad arrivare a considerare un modello dipendente dal tempo costituito da più settori ognuno dei quali cerca di determinare il suo portfolio ottimale tenendo conto della disponibilità, dipendente dal tempo, degli strumenti finanziari. Anche se nella Teoria delle Disequazioni Variazionali un importante capitolo è costituito dalle disequazioni variazionali paraboliche o iperboliche, i modelli che descrivono i problemi sopra citati sono diversi dai precedenti e richiedono uno studio e un approfondimento appropriato

di alcuni aspetti dell'Analisi Variazionale. Tutti questi problemi hanno un elemento in comune: possono essere trattati come un problema di complementarietà generalizzato ed, inoltre, la loro formulazione mediante la disequazione variazionale di evoluzione può essere espressa in modo unitario.
Nella presente tesi ci occupiamo del problema dell'equilibrio finanziario in una formulazione generale. Per farlo, consideriamo un modello generale di equilibrio di flussi e prezzi che si evolve nel tempo. In particolare, forniamo le condizioni di equilibrio in senso dinamico, le esprimiamo in termini di una disequazione variazionale di evoluzione, diamo teoremi di esistenza e presentiamo una formulazione duale dell'equilibrio finanziario in cui compaiono le variabili lagrangiane $\rho_j^{*1}(t)$ e $\rho_j^{*2}(t)$, chiamate variabili 'deficit' e 'surplus'.
Queste variabili giocano un ruolo fondamentale per analizzare il modello e per ottenere suggerimenti per la gestione dell'economia mondiale, soprattutto attraverso l'utilizzo della Deficit Formula, della Balance Law e della Liability Formula.
D'altra parte, per mezzo di queste variabili lagrangiane, possiamo studiare le possibili insolvenze relative agli strumenti finanziari e analizzare, in termini di $\sum_{j=1}^n \rho_j^{(1)*}(t) - \sum_{j=1}^n \rho_j^{(2)*}(t)$, quando le insolvenze si propagano a tutto il sistema, producendo un 'contagio finanziario'.
Nella tesi consideriamo la regolarità delle soluzioni della disequazione variazionale di evoluzione che governa il modello finanziario. In particolare, siamo in grado di ottenere un risultato di continuità per la soluzione di equilibrio.
Vista l'importanza e la rilevanza delle variabili 'deficit' e 'surplus' $\rho_j^{*1}(t)$ e $\rho_j^{*2}(t)$ nello studio del problema dell'equilibrio finanziario, vogliamo verificare se esistono proprietà di regolarità per queste variabili lagrangiane. Questa è la parte principale delle tesi: siamo in grado di provare un risultato di continuità per le variabili 'deficit' e 'surplus' $\rho_j^{*1}(t)$ e $\rho_j^{*2}(t)$, sotto le stesse ipotesi che garantiscono la continuità della soluzione di equilibrio. Questo risultato di regolarità ci permette di applicare una procedura di calcolo in modo da calcolare la soluzione di equilibrio e, quindi, le variabili lagrangiane.
La tesi è strutturata come segue. Nel Capitolo 1 facciamo dei richiami sulle Disequazioni Variazionali e sulla Teoria della Dualità propedeutici ai capitoli seguenti. Nel Capitolo 2, presentiamo il modello nel dettaglio, insieme alle condizioni di equilibrio e alla loro formulazione mediante la disequazione variazionale di evoluzione; diamo dei risultati di continuità e di Lipschitz continuità per le soluzioni di equilibrio finanziario; riportiamo la formulazione duale in cui appaiono le variabili lagrangiane $\rho_j^{*1}(t)$ and $\rho_j^{*2}(t)$, attribuendo particolare risalto alla Deficit Formula, alla Balance Law, alla Liability Formula e all'Indice di Valutazione $E(t)$; forniamo alcuni esempi. Nel Capitolo 3, nucleo della tesi, illustriamo e dimostriamo il risultato principale della tesi; diamo una procedura computazionale per il calcolo della soluzione di equilibrio; spieghiamo l'importanza delle variabili 'deficit' e 'surplus' nel caso in cui si vuole analizzare il contagio finanziario. Infine, nell'ultimo capitolo delle Conclusioni, riassumiamo i risultati ottenuti.

Capitolo 1

Disequazioni variazionali e teoria della dualità infinito-dimensionale

1.1 Concetti preliminari

In questo primo paragrafo vogliamo presentare alcuni concetti che stanno alla base dell'Ottimizzazione e dell'Analisi Variazionale e che ci saranno utili nel seguito.

Siano X uno spazio vettoriale reale topologico, $\mathbb{K}$ un sottoinsieme di X e X^* lo spazio duale topologico di X.

Definizione 1.1.1. Una mappa $A : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è detta *semicontinua superiormente* se per ogni $v \in \mathbb{K}$,

$$\limsup_{u \to v} Au \leq Av.$$

Definizione 1.1.2. Una mappa $A : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è detta *semicontinua inferiormente* se per ogni $v \in \mathbb{K}$,

$$\liminf_{u \to v} Au \geq Av.$$

Definizione 1.1.3. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *monotona* su $\mathbb{K}$ se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$,

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0.$$

Definizione 1.1.4. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *strettamente monotona* su $\mathbb{K}$ se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$,

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0.$$

Definizione 1.1.5. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *fortemente monotona* su $\mathbb{K}$ se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$, $\exists \nu > 0$ tale che

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \nu \left\| u - v \right\|_{\mathbb{K}}^2 .$$

Definizione 1.1.6. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *pseudomonotona* se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$

$$\langle Au, u - v\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Av, u - v\rangle \leq 0.$$

Definizione 1.1.7. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *pseudomonotona nel senso di Karamardian (K-pseudomonotona)* se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$

$$\langle Av, u - v\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Au, u - v\rangle \geq 0.$$

Definizione 1.1.8. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *strettamente pseudomonotona* se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$, $u \neq v$

$$\langle Av, u - v\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Au, u - v\rangle > 0.$$

Definizione 1.1.9. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *pseudomonotona nel senso di Brezis (B-pseudomonotona)* se

1. Per ogni successione u_n debolmente convergente a u (in simboli $u_n \rightharpoonup u$) in $\mathbb{K}$ e tale che
$\limsup_n \langle Au_n, u_n - v\rangle \leq 0$, risulta che $\liminf_n \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{K}$.

2. Per ogni $v \in \mathbb{K}$ la funzione $u \to \langle Au, u - v\rangle$ è limitata inferiormente su un sottoinsieme limitato di $\mathbb{K}$.

Sia ora $\mathbb{K}$ un sottoinsieme convesso di X.

Definizione 1.1.10. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *emicontinua* se per ogni $v \in \mathbb{K}$ la funzione $u \to \langle Au, v - u\rangle$ è semicontinua superiormente su $\mathbb{K}$.

Definizione 1.1.11. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *emicontinua lungo i segmenti* se la funzione $\xi \to \langle A\xi, u - v\rangle$ è semicontinua superiormente sul segmento $[u, v]$, per ogni $u, v \in \mathbb{K}$.

Definizione 1.1.12. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *emicontinua inferiormente lungo i segmenti* se la funzione $\xi \to \langle A\xi, u - v\rangle$ è semicontinua inferiormente sul segmento $[u, v]$, per ogni $u, v \in \mathbb{K}$.

Definizione 1.1.13. Una mappa $A : \mathbb{K} \to X^*$ è detta *emicontinua nel senso di Fan (F-emicontinua)* se per ogni $v \in \mathbb{K}$ la funzione $u \to \langle Au, u - v\rangle$ è debolmente semicontinua inferiormente $\mathbb{K}$.

1.2 Disequazioni variazionali

Recentemente, molti problemi di Economia, Ingegneria, Fisica, Biologia e Ricerca Operativa vengono studiati attraverso uno strumento molto potente: le Disequazioni Variazionali. Per questi problemi, infatti, determinare le soluzioni di equilibrio equivale a trovare la soluzione di una opportuna disequazione variazionale finito o infinito dimensionale. Le disequazioni variazionali, inoltre, risultano essere strettamente correlate a molti problemi generali di Analisi Non Lineare, come problemi del punto fisso, di ottimizzazione e di complementarità. Questo è il motivo per cui la Teoria delle Disequazioni Variazionali ed i metodi risolutivi che ne derivano hanno compiuto, di recente, notevoli progressi.

Cominciamo a fornire la definizione di disequazione variazionale.

Definizione 1.2.1. Sia E uno spazio di Banach riflessivo sui reali, sia $\mathbb{K} \subset E$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso, sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una mappa sullo spazio duale E^* dotato della topologia debole*. Si dice Disequazione Variazionale definita da $\mathbb{K}$ ed A il problema di trovare un punto $u \in \mathbb{K}$ tale che

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K}, \tag{1.2.1}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la mappa di dualità tra E^* ed E.

$\square$

Esistono due approcci che ci forniscono dei risultati relativi all'esistenza delle soluzioni per una disequazione variazionale: l'approccio senza l'ipotesi di monotonia e l'approccio con l'ipotesi di monotonia. Ad essi sono dedicati i due seguenti sottoparagrafi.

1.2.1 Approccio senza ipotesi di monotonia

Richiamiamo i principali teoremi di esistenza presenti in letteratura che non richiedono alcuna ipotesi di monotonia ma in cui sono richieste ipotesi relative a diversi tipi di continuità introdotti nel paragrafo precedente.

Nel caso finito dimensionale, è noto il seguente risultato di P. Hartmann e G. Stampacchia:

Teorema 1.2.1. *Supponiamo che $dim E < +\infty$ e che $\mathbb{K}$ sia convesso e compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione continua. Allora la disequazione variazionale (1.2.1) ammette soluzioni.*

$\square$

I teoremi di esistenza nel caso infinito dimensionale con $\mathbb{K}$ debolmente compatto sono i seguenti:

Teorema 1.2.2. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un sottoinsieme di E non vuoto, convesso e debolmente compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione B-pseudomonotona. Allora la disequazione variazionale (1.2.1) ammette soluzioni.*

□

Teorema 1.2.3. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un sottoinsieme di E non vuoto, convesso e debolmente compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione F-emicontinua. Allora la disequazione variazionale (1.2.1) ammette soluzioni.*

□

Osserviamo che il Teorema 1.2.1 è una generalizzazione del Teorema 1.2.2 nel caso in cui $\dim E < +\infty$. Infatti, una funzione continua $A : \mathbb{K} \to E$ è anche B-pseudomonotona ed F-emicontinua ma il viceversa, in generale, non vale, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.2.1. Fissiamo $a > 1$ e consideriamo la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1/x + a, & x \in]1/2a, 1[\\ -a, & x \in]0, 1/2a[\\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ è F-emicontinua su $[0, 1]$, ma non è continua. Il punto $x_0 = 1/a$ è soluzione della disequazione variazionale corrispondente alla funzione f e all'intervallo $[0, 1]$.

Un confronto tra la B-pseudomonotonia e la F-hemicontinuità è dato dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.2.1. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ un funzione F-emicontinua, con $\mathbb{K}$ sottoinsieme di E chiuso e convesso. Allora A è B-paseudomonotona.*

□

Consideriamo, adesso, le disequazioni variazionali relative solamente al sottoinsieme chiuso e convesso $\mathbb{K}$ di E. I teoremi di esistenze relativi alla B-paseudomonotonia e alla F-hemicontinuità sono i seguenti.

Teorema 1.2.4. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione B-paseudomonotona e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Inoltre, supponiamo che esiste un punto $u_0 \in \mathbb{K}$ tale che*

$$\lim_{\|u\| \to \infty,\, u \in \mathbb{K}} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = +\infty \tag{1.2.2}$$

allora la (1.2.1) ammette soluzioni.

□

Teorema 1.2.5. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione F-emicontinua e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Inoltre, supponiamo che A soddisfi la seguente condizione:*

H1) *Esiste $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ non vuoto e debolmente compatto e $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}$ compatto, tali che per ogni $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_1$ esiste $w \in \mathbb{K}_2$ tale che*

$$\langle Av, v - w \rangle > 0$$

allora la (1.2.1) ammette soluzioni.

□

È possibile confrontare l'ipotesi (1.2.2) del Teorema 1.2.4 con l'ipotesi H1) del Teorema 1.2.5. In particolare, vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.2. *La condizione (1.2.2) implica l'ipotesi H1).*

□

Possiamo fornire una variante del teorema 1.2.4 e del teorema 1.2.5 in cui la condizione (1.2.2) e l'ipotesi H1) sono sostituite dalla seguente condizione:

H2) Esiste $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tale che

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \ : \ \|v\| = R\}\,.$$

Abbiamo, quindi, il seguente risultato

Teorema 1.2.6. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione B-pseudomonotona o F-emicontinua e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Supponiamo, inoltre, che sia soddisfatta la condizione H2), allora la (1.2.1) ammette soluzioni.*

□

Osserviamo che la condizione 2. della definizione 1.1.2 di B-pseudomonotonia può essere sostituita dalla seguente ipotesi:

2'. A è continua su qualunque sottospazio finito dimensionale.

In particolare, Brezis, Nirenberg e Stampacchia provarono il seguente teorema:

Teorema 1.2.7. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione che verifichi le condizioni 1. e 2'. di B-pseudomonotonia e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Supponiamo, inoltre, che esiste un sottoinsieme compatto L di $\mathbb{K}$ ed $u_0 \in L$ tale che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle \geq 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K} \setminus L$$

allora la (1.2.1) ammette soluzioni.

□

Il seguente risultato è stato ottenuto da Ricceri:

Teorema 1.2.8. *Supponiamo che* $\mathbb{K}$ *sia non vuoto, chiuso e convesso, e che il suo interno relativo sia non vuoto. Supponiamo che* $A : \mathbb{K} \to E^*$ *sia una funzione debolmente continua*. Inoltre, siano* $\mathbb{K}_1$*,* $\mathbb{K}_2$ *due sottoinsiemi di* $\mathbb{K}$ *non vuoti e compatti, con* $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$ *e* $\mathbb{K}_2$ *finito dimensionale, tale che per ogni* $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_1$ *esiste un* $w \in \mathbb{K}_2$ *tale che*

$$\langle Av, v - w \rangle > 0$$

allora la (1.2.1) ammette soluzioni.

□

Nel precedente teorema la funzione A si suppone essere debolmente continua* e si richiede che l'interno relativo di $\mathbb{K}$ sia non vuoto. Queste ipotesi non possono essere rimosse (esiste un controesempio che lo dimostra). Tuttavia, in molte disequazioni variazionali infinito dimensionali relative a problemi di equilibrio, l'interno relativo dell'insieme dei vincoli $\mathbb{K}$ è vuoto, mentre il quasi interno relativo è non vuoto.

1.2.2 Approccio con ipotesi di monotonia

L'approccio con ipotesi di monotonia è dovuto ad Hartmann e Stampacchia. In particolare, essi provarono il seguente teorema:

Teorema 1.2.9. *Sia* E *uno spazio di Banach riflessivo e sia* $\mathbb{K}$ *un sottoinsieme di* E *chiuso e convesso. Sia* $A : \mathbb{K} \to E^*$ *una funzione monotona e continua su un sottospazio finito dimensionale di* $\mathbb{K}$ *(alternativamente, sia* $A : E \to E^*$ *monotona ed emicontinua lungo i segmenti). Allora, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione per la (1.2.1) è che esista una costante* R *tale che almeno una soluzione della disequazione variazionale*

$$u_R \in \mathbb{K}_R, \ \ \langle Au_R, v - u_R \rangle \geq 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K}_R$$

soddisfi la disequazione

$$\|u_R\| < R.$$

□

Il motivo per cui nel Teorema 1.2.9 si richiede l'ipotesi che la funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ sia monotona e continua su un sottospazio finito dimensionale di $\mathbb{K}$ o, alternativamente, che $A : E \to E^*$ sia monotona ed emicontinua lungo i segmenti, riflette il fatto che, quando A è definita su tutto lo spazio E, se essa è monotona ed emicontinua lungo i segmenti, essa è anche continua su un sottospazio finito-dimensionale di $\mathbb{K}$. Il ruolo dell'ipotesi di monotonia è che, da

$$\langle Au, v - u \rangle \leq \langle Av, v - u \rangle \ \ \forall\, u, v \in \mathbb{K}$$

è possibile ottenere il Lemma di Minty: se A è emicontinua lungo i segmenti su $\mathbb{K}$ e se $v_n \rightharpoonup u$ in $\mathbb{K}$, allora

$$0 \leq \liminf_n \langle Av_n, v_n - u \rangle \,, \quad \forall\, u \in \mathbb{K}.$$

È sorprendente come Brezis, Nirenberg e Stampacchia furono i primi a notare che nel Teorema 1.2.9, invece della monotonia di A è sufficiente richiedere che:

$$\langle Au, u - v \rangle \leq 0 \text{ implica } \langle Av, v - u \rangle \geq 0 \;\; \forall\, u, v \in \mathbb{K}.$$

Quindi Karamardian considerò un concetto più generale di monotonia, la pseudomonotonia.
Usando la K-pseudomonotonia, fu possibile dimostrare il seguente teorema come generalizzazione del Teorema 1.2.9

Teorema 1.2.10. *Sia $\mathbb{K}$ chiuso e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona che è continua su un sottospazio finito dimensionale di E. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) *la (1.2.1) ammette soluzioni.*

b) *la condizione H2) è soddisfatta, cioè esistono $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tali che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \;\; \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \;:\; \|v\| = R\} \,.$$

c) *Esiste un punto $u_0 \in \mathbb{K}$ tale che l'insieme*

$$\{v \in \mathbb{K} \;:\; \langle F(v), v - u_0 \rangle < 0\}$$

è limitato.

□

Nel Teorema 1.2.10 è richiesto che A sia continua su un sottospazio finito dimensionale di E contenuto in $\mathbb{K}$ e non si considera, invece, l'ipotesi alternativa in cui A è emicontinua lungo i segmenti. Questo fatto è dovuto probabilmente alla mancanza di una corrispondenza tra l'ipotesi di K-pseudomonotonia ed emicontinuità lungo i segmenti e l'ipotesi di continuità su un sottospazio finito dimensionale. D'altra parte, il Lemma di Minty rimane verificato:

Lemma 1.2.1. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente emicontinua lungo i segmenti. Allora $u \in \mathbb{K}$ è una soluzione per la (1.2.1) se e solo se u è soluzione della disequazione variazionale di Minty (MVIP)*

$$u \in \mathbb{K} \;:\; \langle Av, v - u \rangle \geq 0 \; \forall v \in \mathbb{K} \tag{1.2.3}$$

□

Tuttavia, il precedente Teorema può essere generalizzato supponendo che A sia inferiormente emicontinua lungo i segmenti di $\mathbb{K}$, come afferma il seguente risultato:

Teorema 1.2.11. *Sia $\mathbb{K}$ chiuso e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente emicontinua lungo i segmenti. Supponiamo che la condizione H2) sia soddisfatta, cioè esistono $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tali che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \ : \ \|v\| = R\}\,.$$

Allora la (1.2.1) ammette soluzioni.

□

Come conseguenza del precedente Teorema otteniamo un corollario che potrebbe essere considerato una generalizzazione del Teorema 1.2.9.

Corollario 1.2.1. *Se $\mathbb{K}$ è chiuso, convesso e limitato ed A è K-pseudomonotona ed inferiormente emicontinua lungo i segmenti, allora la (1.2.1) ammette soluzioni.*

□

Quindi, il Teorema 1.2.11 generalizza il Teorema 1.2.10 poichè A è inferiormente emicontinua lungo i segmenti, invece, nel Teorema 1.2.10 è richiesto che A sia continua su un sottospazio finito dimensionale di E. D'altra parte una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente emicontinua in generale non è continua su uno spazio finito dimensionale, come mostra il seguente esempio:

Esempio 1.2.2. Fissiamo $a > 1$ e consideriamo la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1/x + a, & x \in]1/2a, 1[\\ -a, & x \in [0, 1/2a] \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

È semplice verificare che $f(x)$ è monotona, la funzione $\xi \to \langle f(\xi), u - v \rangle$ è inferiormente semicontinua per ogni $u, v \in [0, 1]$ sul segmento $[u, v]$, ma $f(x)$ non è continua.

□

Per concludere, possiamo osservare che, in letteratura, esistono alcuni risultati che generalizzano la teoria sulle disequazione variazionali introdotta. In particolare, A. Domokos e J. Kolumbàn considerarono un approccio per la teoria delle disequazioni variazionali che include disequazioni variazionali definite su spazi di Banach non riflessivi. Un esempio dei risultati di esistenza ottenuti sotto tali ipotesi è il seguente Teorema.

Teorema 1.2.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, sia $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(\cdot, r)$ sia misurabile per ogni $r \in \mathbb{R}^n$, $F(\omega, \cdot)$ sia continua per ogni $\omega \in \Omega$, $F(\cdot, r)$ sia monotona non decrescente per ogni $r \in \mathbb{R}^n$, $F(\cdot, r) \in L^1(\Omega)$ per ogni $r \in \mathbb{R}^n$. Introduciamo l'operatore di Nemitski definito dalla F, cioè:*

$$T(f)(\omega) = F(\omega, f(\omega)),$$

definito da L^∞ a valori in L^1 continua, limitata e monotona. Sia $\mathbb{K} \subset L^\infty = (L^1(\Omega))^*$ un'insieme chiuso, convesso e limitato. Consideriamo la seguente disequazione variazionale:
Trovare $f_0 \in \mathbb{K}$ tale che

$$\langle f - f_0, T(f_0) \rangle = \int_\Omega F(\omega, f_0(\omega))(f(\omega) - f_0(\omega))d\omega \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathbb{K}. \tag{1.2.4}$$

Allora la (1.2.4) ammette soluzioni.

□

1.3 Teoria della dualità infinito dimensionale

Dedichiamo questo paragrafo alla cosiddetta 'forte dualità', relativa ad un problema di ottimizzazione convessa ed al corrispondente problema duale di Lagrange. Sotto certe condizioni, infatti, questi due problemi ammettono lo stesso valore ottimale. Le variabili ottimali duali, nel problema duale, sono date dai cosiddetti moltiplicatori di Lagrange. La letteratura fornisce dei celebri risultati che assicurano l'esistenza dei suddetti moltiplicatori; tali risultati, per essere applicati, necessitano, tra le varie ipotesi, che il cono ordinante che determina i vincoli di segno del problema primale abbia interno non vuoto. Tuttavia, quando si lavora con spazi ad infinite dimensioni, l'interno dei coni ordinanti risulta essere quasi sempre vuoto. Per questo motivo, sono necessarie nuove condizioni che garantiscano l'esistenza dei moltiplicatori di Lagrange senza senza far ricorso all'ipotesi che l'interno del cono ordinante sia non vuoto. Da qui l'ultilità di questa teoria, in cui gioca un ruolo fondamentale la cosiddetta Ipotesi S.

Procediamo, dunque, nella presentazione della teoria della dualità.
Sia X uno spazio reale normato, S un sottoinsieme non vuoto e convesso di X. Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio reale normato parzialmente ordinato mediante il cono convesso C. Denotiamo con Y^* il duale topologico di Y e con $C^* = \{\lambda \in Y^* \,:\, \langle \lambda, y \rangle \geq 0 \;\; \forall y \in C\}$ il cono duale di C. Sia $(Z, \|\cdot\|_Z)$ uno spazio reale normato ed indichiamo con Z^* il suo duale topologico. Siano $f : S \to \mathbb{R}$ e $g : S \to Y$ due funzioni convesse e sia $h : S \to Z$ una funzione lineare affine. Poniamo

$$\mathbb{K} = \{x \in S \,:\, g(x) \in -C, h(x) = 0_Z\}.$$

Consideriamo il problema

$$\min_{x \in \mathbb{K}} f(x) \tag{1.3.1}$$

che chiamiamo 'problema primale'.
Consideriamo anche il problema

$$\max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle\}, \tag{1.3.2}$$

che prende il nome di 'problema duale'. In particolare, λ e μ sono i cosidetti *moltiplicatori di Lagrange* associati ai vincoli di segno e ai vincoli di uguaglianza, rispettivamente. Essi giocano un ruolo fondamentale per comprendere il comportamento dei problemi di equilibrio.

Ricordiamo che risulta sempre:

$$\min_{x \in \mathbb{K}} f(x) \geq \max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle\}. \tag{1.3.3}$$

Definizione 1.3.1. Si dice che vale la forte dualità tra il problema primale (1.3.1) e il problema duale (3.1.4) se anche il problema duale (3.1.4) è risolubile, cioè $\exists\ \hat{\lambda} \in C^*$, $\hat{\mu} \in Z^*$ punti di massimo e nella (1.3.3) vale l'uguale.

□

Per poter ottenere la forte dualità è necessario che valgono alcune condizioni. Nel caso infinito dimensionale è stata introdotta una condizione chiamata 'Ipotesi S' che risulta essere necessaria e sufficiente per la forte dualità. Per introdurla definiamo il concetto di cono tangente.

Definizione 1.3.2. Sia X uno spazio relae normato e C un suo sottoinsieme. Dato un elemento $x \in X$, l'insieme

$$T_C(x) = \left\{ h \in X \ : \ h = \lim \lambda_n(x_n - x), \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in C\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \to \infty} x_n = x \right\}$$

si chiama *cono tangente a C nel punto x.*

□

Diamo, quindi, la definizione di 'Ipotesi S'.

Definizione 1.3.3. Diremo che l'Ipotesi S è verificata nel punto $x_0 \in \mathbb{K}$ se risulta

$$T_{\tilde{M}}(0, 0_Y, 0_Z) \cap (] - \infty, 0[\times \{0_Y\} \times \{0_Z\}) = \emptyset \tag{1.3.4}$$

dove

$$\tilde{M} = \{(f(x) - f(x_0) + \alpha, g(x) + y, h(x)) : x \in S\mathbb{K}, \alpha \geq 0, y \in C\}.$$

□

Vale il seguente teorema di forte dualità.

Teorema 1.3.1. *Sotto le precedenti ipotesi su f, g, h e C se il problema (1.3.1) è risolubile e vale l'Ipotesi S per $x_0 \in \mathbb{K}$, allora anche il problema (3.1.4) è risolubile e i valori ottimali coincidono, cioè se $(x_0, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{K} \times C^* \times Z^*$ è la soluzione ottimale per problema (3.1.4) risulta*

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \min_{x\mathbb{K}} f(x) = f(x_0) + \langle \lambda^*, g(x_0) \rangle + \langle \mu^*, h(x_0) \rangle = \\ &= \max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} \{ f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle \}, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

e risulta, inoltre

$$\langle \lambda^*, g(x_0) \rangle = 0.$$

□

Richiamiamo, adesso, la definizione di funzione Lagrangiana.

Definizione 1.3.4. La funzione $L : S \times C^* \times Z^* \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle \quad \forall x \in S,\ \forall \lambda \in C^*,\ \forall \mu \in Z^*.$$

si chiama *Funzione Lagrangiana.*

□

Usando il funzionale Lagrangiano la tesi del Teorema 1.3.1 si può riscrivere nel seguente modo:

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{K}} f(x) = L(x_0, \lambda^*, \mu^*) = \max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} L(x, \lambda, \mu).$$

Per mezzo del Teorema 1.3.1 è possibile provare l'usuale relazione tra un punto sella del funzionale Lagrangiano e la soluzione del problema (1.3.1).

Teorema 1.3.2. *Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 1.3.1. Allora $x_0 \in \mathbb{K}$ è un punto di minimo per problema (1.3.1) se e solo se esiston $\overline{\lambda} \in C^*$ e $\overline{\mu} \in Z^*$ tali che $(x_0, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ è un punto sella del funzionale di Lagrange, cioè*

$$L(x_0, \lambda, \mu) \leq L(x_0, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad \forall x \in S,\ \forall \lambda \in C^*,\ \forall \mu \in Z^*,$$

ed inoltre, risulta

$$\langle \lambda^*, g(x_0) \rangle = 0$$

□

1.4 Metodo diretto

In questo paragrafo parleremo del *metodo diretto* che rappresenta uno dei metodi più utilizzati per calcolare la soluzione di una larga classe di disequazioni variazionali, inclusa anche la disequazione variazionale che esprime il problema dell'equilibrio finanziario.
Enunciamo il metodo in $\mathbb{R}^n$, notando che esso si può applicare anche ai problemi infinito dimensionali quando questi sono equivalenti a disequazioni variazionali finito dimensionali parametriche.
Sia data la funzione $C : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^m$. Consideriamo la seguente disequazione variazionale:

$$H \in \mathbb{K}, \;\; \langle C(H)(F-H) \rangle \geq 0 \quad \forall F \in \mathbb{K} \tag{1.4.1}$$

dove

$$\langle C(H)(F-H) \rangle = \sum_{r=1}^{m} C_r(H)(F_r - H_r) \geq 0.$$

Sia

$$\mathbb{K} = \left\{ F \in \mathbb{R}^m : \sum_{r=1}^{m} \varphi_{ir} F_r = \rho_i, \; i = 1, \dots, l, \; F_r \geq 0, \; r = 1, \dots, m \right\}.$$

Si può facilmente dimostrare che l'insieme $\mathbb{K}$ è un'insieme non vuoto, chiuso, convesso e limitato. La matrice $\Phi = (\varphi_{ir})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ è formata da elementi 0 o 1 ed è tale che in ogni colonna c'è un unico elemento che vale 1 mentre tutti gli altri valgono 0. Possiamo, quindi, ricavare l componenti in funzone delle $m-l$ rimanenti e, supponendo che siano le prime l otteniamo

$$F_i = \rho_i - \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{ir} F_r \quad i = 1, \dots, l, \;\; F_r \geq 0 \; r = 1, \dots, m.$$

Tenendo conto di ciò, possiamo trasformare la disequazione variazionale (1.4.1) nel seguente problema:

$$\text{Trovare } \tilde{H} \in \tilde{\mathbb{K}} \;\text{ t.c } \; \left\langle \Gamma(\tilde{H})(\tilde{F} - \tilde{H}) \right\rangle \geq 0 \quad \forall \, \tilde{F} \in \tilde{\mathbb{K}},$$

con

$$\tilde{\mathbb{K}} = \left\{ \tilde{F} = (F_{l+1}, \dots, F_m) \; : \; F_r \geq 0, r = l+1, \dots, m; \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{ir} F_r \leq \rho_i, \; i = 1, \dots, l \right\}$$

$$\Gamma(\tilde{F}) = \left(\Gamma_{l+1}(\tilde{F}), \dots, \Gamma_m(\tilde{F}) \right)$$

$$\Gamma_r(\tilde{F}) = \tilde{C}_r(\tilde{F}) - \sum_{i=1}^{l} \varphi_{ir} \tilde{C}_i(\tilde{F})$$

$$\tilde{C}_r(\tilde{F}) = C_r\left(\rho_1 - \sum_{r=l+1}^{m}\varphi_{lr}F_r, \ldots, \rho_l - \sum_{r=l+1}^{m}\varphi_{lr}F_r, F_{l+1}, \ldots, F_m\right).$$

Osserviamo che ogni $\tilde{H}_0 \in \tilde{\mathbb{K}}$ e tale che $\Gamma(\tilde{H}_0) = 0$, cioè ogni soluzione del sistema

$$\begin{cases} \Gamma(\tilde{H}_0) = 0 \\ \tilde{H}_0 \in \tilde{\mathbb{K}} \end{cases}$$

è una soluzione della disequazione variazionale. Invece, ogni altra soluzione della disequazione variazionale deve stare sulla frontiera $\partial\tilde{\mathbb{K}}$ di $\tilde{\mathbb{K}}$; infatti, se $\tilde{H}$ fosse un punto interno (osserviamo che l'interno di $\tilde{\mathbb{K}}$ non è vuoto), risulterebbe $\Gamma(\tilde{H}_0) = 0$.

Cerchiamo le eventuali soluzioni che giacciono sulla frontiera del $(m-l)$ dimensionali poliedro $\tilde{\mathbb{K}}$.

La frontiera dell'insieme $\tilde{\mathbb{K}}$ è costituita da *facce* che possono essere di due tipi.
Le *facce del primo tipo* sono:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}}^s \;=\; & \tilde{\mathbb{K}} \cap \{F_s = 0\} = \Big\{\tilde{F}^{(s)} \in \mathbb{R}^{m-l-1} \;:\; F_r \geq 0, r = l+1, \ldots, m,\; r \neq s;\; F_s = 0; \\ & \sum_{r=l+1, r\neq s}^{m} \varphi_{ir}F_r \leq \rho_i,\;\; i = 1, \ldots, l\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

La disequazione variazionale nei punti di $\tilde{\mathbb{K}}^s$ diventa

$$\left\langle \Gamma^{(s)}(\tilde{H}^{(s)})(\tilde{F}^{(s)} - \tilde{H}^{(s)})\right\rangle = \sum_{r=l+1, r\neq s}^{m} \Gamma_r(\tilde{H}^{(s)})(F_r - H_r) \geq 0, \quad \forall\, \tilde{F}^{(s)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(s)}.$$

Per determinare la soluzione occorre, dunque, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Gamma^{(s)}(\tilde{H}^{(s)}) = 0 \\ \tilde{H}^{(s)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(s)}. \end{cases}$$

Se tale sistema non ammette soluzioni, allora, la soluzione della disequazione variazionale deve essere cercata su un'altra faccia del primo tipo, oppure del secondo tipo, oppure sulla frontiera delle facce. Se, invece, il sistema ammette soluzione, allora tale soluzione risolve anche la disequazione variazionale in tutto il convesso $\tilde{\mathbb{K}}$ se e solo se $\Gamma_s(\tilde{H}^{(s)}) > 0$. Se, infine, il sistema ammette soluzione ma questa soluzione non soddisfa la suddetta condizione, allora la soluzione deve essere cercata su altre facce o sulla frontiera delle facce.

Le *facce del secondo tipo* sono:

$$\tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)} = \tilde{\mathbb{K}} \cap \left\{\sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{i_1 r}F_r = \rho_{i_1}\right\} =$$

$$= \left\{ \tilde{F}^{(i_1)} \in \mathbb{R}^{m-l-1} \ : \ F_r \geq 0, r = l+1, \dots, m, r \neq l_1; \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \varphi_{j_1 r} F_r \leq \rho_{i_1} \ ; \right.$$

$$\left. \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \varphi_{j_1 r} F_r \leq \rho_i, \ i = 1, \dots, l, i \neq l_1 \right\}.$$

La disequazione variazionale nei punti di $\tilde{\mathbb{K}}^{i_1}$ diventa

$$\left\langle \Gamma^{(i_1)}(\tilde{H}^{(i_1)})(\tilde{F}^{(i_1)} - \tilde{H}^{(i_1)}) \right\rangle = \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \left[\Gamma_r(\tilde{H}^{(i_1)}) - \varphi_{i_1 r} \Gamma_{l_1}(\tilde{H}^{(i_1)}) \right] (F_r - H_r) \geq 0,$$

$$\forall \ \tilde{F}^{(i_1)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)}.$$

Per determinare la soluzione occorre, dunque, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Gamma^{(i_1)}(\tilde{H}^{(i_1)}) = 0 \\ \tilde{H}^{(i_1)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)}. \end{cases}$$

Se tale sistema non ammette soluzioni, allora, la soluzione della disequazione variazionale deve essere cercata su un'altra faccia del secondo tipo, oppure del primo tipo, oppure sulla frontiera delle facce. Se, invece, il sistema ammette soluzione, allora tale soluzione risolve anche la disequazione variazionale in tutto il convesso $\tilde{\mathbb{K}}$ se e solo se $\Gamma_{l_1}(\tilde{H}^{(i_1)}) < 0$. Se, infine, il sistema ammette soluzione ma questa soluzione non soddisfa la suddetta condizione, allora la soluzione deve essere cercata su altre facce o sulla frontiera delle facce.

Capitolo 2

Regolarità della soluzione nel problema dell'equilibrio finanziario

2.1 Descrizione del modello

In questo paragrafo vogliamo descrivere il modello con cui intendiamo lavorare. Si tratta di un modello generale di equilibrio di flussi e prezzi e supporremo che esso si evolva nel tempo. Le condizioni di equilibrio saranno considerate in senso dinamico e descriveremo la formulazione variazionale che le governa.

Consideriamo, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, una struttura economica costituita da m settori, denotando un generico settore con i, e da n strumenti, denotando un generico strumento con j.

Indichiamo con $s_i(t)$ il volume finanziario totale posseduto dal settore i all'istante t come 'attività'. Analogamente, sia $l_i(t)$ il volume finanziario totale posseduto dal settore i all'istante t come 'passività'. Osserviamo, dunque, che, a differenza di lavori precedenti, permettiamo che i mercati di attività e passività abbiano differenti investimenti, $s_i(t)$ e $l_i(t)$ rispettivamente.

Dal momento che stiamo lavorando in presenza di prospettive di rischio e incertezza, i volumi posseduti da ogni settore non possono essere considerati stabili rispetto al tempo e potrebbero diminuire o aumentare a seconda di condizioni economiche sfavorevoli o favorevoli. All'istante t, denotiamo con $x_{ij}(t)$ la quantità di strumento j posseduto come attività dal settore i. Analogamente, indichiamo con $y_{ij}(t)$ la quantità di strumento j posseduto come passività dal settore i.

Le attività e le passività di tutti i settori sono raggruppati nelle seguenti matrici:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_i(t) \\ \dots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1j}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1}(t) & \dots & x_{ij}(t) & \dots & x_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & \dots & x_{mj}(t) & \dots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

e

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_i(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1j}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i1}(t) & \dots & y_{ij}(t) & \dots & y_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1}(t) & \dots & y_{mj}(t) & \dots & y_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Denotiamo con $r_j(t)$ il prezzo dello strumento j posseduto come attività e con $(1 + h_j(t))r_j(t)$ il prezzo dello strumento j posseduto come passività, essendo h una funzione non negativa definita in $[0, T]$ ed appartenente a $L^\infty([0, T])$. Osserviamo che introduciamo il termine $h_j(t)$ perchè in genere i prezzi dei passivi sono maggiori o uguali rispetto a quelli degli attivi; si tratta, quindi, di un tentativo di descrivere in modo più realistico il comportamento dei mercati finanziari.
Raggruppiamo i prezzi degli strumenti posseduti come attività nel vettore $r(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_i(t), \dots, r_n(t)]^T$ e, analogamente, i prezzi degli strumenti posseduti come passività nel vettore $(1 + h(t))r(t) = [(1 + h_1(t))r_1(t), (1 + h_2(t))r_2(t), \dots, (1 + h_i(t))r_i(t), \dots, (1 + h_n(t))r_n(t)]^T$.
Nel nostro problema i prezzi di ogni strumento appaiono come variabili sconosciute. Sotto l'ipotesi di una perfetta competizione, ogni settore si comporterà come se esso non ha influenza sui prezzi degli strumenti o sul comportamento degli altri settori.

Volendo esprimere le condizioni di equilibrio dipendenti dal tempo per mezzo di una disequazione variazionale di evoluzione, scegliamo come spazio funzionale lo spazio di Lebesgue $L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$. Quindi, per ogni settore $i = 1, \dots, m$, l'insieme ammissibile di attivi e passivi è

$$\begin{aligned} P_i \;=\; & \Bigg\{ (x_i, y_i) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{2n}) : \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t), \text{ q.o. in } [0, T], \\ & \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t) \text{ q.o. in } [0, T], \; x_i(t) \geq 0, \\ & y_i(t) \geq 0, \text{ q.o. in } [0, T] \Bigg\}, \end{aligned}$$

mentre l'insieme dei prezzi ammissibili degli strumenti è

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = \{r \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n): \quad & \underline{r}_j(t) \le r_j(t) \le \overline{r}_j(t),\\ & j = 1,\dots,n, \text{ q.o. in } [0,T]\}.\end{aligned}$$

Per ottenere un modello dell'equilibrio finanziario più realistico, consideriamo la possibilità di interventi politici, sotto forma di tasse e di controlli sui prezzi.
A tal fine, indichiamo con $\overline{r}_j$ il prezzo massimo associato allo strumento j e con $\underline{r}_j$ il prezzo minimo non negativo anch'esso associato allo strumento j, con $\overline{r}_j(t) > \underline{r}_j(t)$, q.o. in $[0,T]$.
Il significato del vincolo $\underline{r}_j(t) \le r_j(t)$ q.o. in $[0,T]$ è che ad ogni investitore è garantito un prezzo minimo $\underline{r}_j$ per gli attivi relativi allo strumento j, mentre ogni investitore è tenuto a pagare per i passivi non meno del prezzo minimo $(1+h_j)\underline{r}_j$.
Analogamente, ogni investitore non può ottenere per una attività un prezzo maggiore di $\overline{r}_j$ e come passività il prezzo non può superare il prezzo massimo $(1+h_j)\overline{r}_j$.
Raggruppiamo i prezzi massimi $\overline{r}_j$ dei vari strumenti nel vettore colonna $\overline{r}(t) = [\overline{r}_1(t),\dots,\overline{r}_i(t),\dots,\overline{r}_n(t)]^T$ e, allo stesso modo, i prezzi minimi $\underline{r}_j$ nel vettore colonna $\underline{r}(t) = [\underline{r}_1(t),\dots,\underline{r}_i(t),\dots,\underline{r}_n(t)]^T$.

Denotiamo con τ_{ij} l'aliquota fiscale applicata al settore i sullo strumento finanziario j. Supponiamo che tali tasse appartengono a $L^\infty([0,T])$ e possono assumere valori nell'intervallo $[0,1)$. Osserviamo che, in questo modello, il governo ha la flessibilità di prelievo di una aliquota fiscale diversa sia per i settori che per gli strumenti.
Raggruppiamo le tasse τ_{ij} nella seguente matrice:

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_{11}(t) & \dots & \tau_{1j}(t) & \dots & \tau_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{i1}(t) & \dots & \tau_{ij}(t) & \dots & \tau_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{m1}(t) & \dots & \tau_{mj}(t) & \dots & \tau_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Al fine di determinare, per ogni settore i, la giusta combinazione di strumenti posseduti come attività e come passività, teniamo conto dell'avversione al rischio e del processo di ottimizzazione di ciascun settore nell'economia finanziaria, ovvero del desiderio di massimizzare il valore degli attivi detenuti e di ridurre al minimo il valore dei passivi. Introduciamo, quindi, per ogni settore i, la funzione utilità $U_i(t, x_i(t), y_i(t), r(t))$ nel modo seguente:

$$U_i(t,x_i(t),y_i(t),r(t)) = u_i(t,x_i(t),y_i(t)) + \sum_{j=1}^n r_j(t)(1-\tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1+h_j(t))y_{ij}(t)], \tag{2.1.1}$$

dove il termine $-u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ rappresenta una misura del rischio dell'agente finanziario e $r_j(t)(1-\tau_{ij}(t))[x_i(t)-(1+h_j(t))y_i(t)]$ rapprensenta il valore della differenza tra gli attivi detenuti e il valore dei passivi. Supponiamo che la funzione utilità $U_i(t, x_i(t), y_i(t))$ sia definita in $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, sia misurabile in t e continua rispetto x_i e y_i. Ipotizziamo che le derivate parziali $\partial u_i/\partial x_{ij}$ e $\partial u_i/\partial y_{ij}$ esistono, sono misurabili in t e continue rispetto x_i e y_i. Inoltre, richiediamo che, $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$, e q.o. in $[0, T]$ siano soddisfatte le seguenti condizioni di crescita:

$$|u_i(t, x, y)| \leq \alpha_i(t)\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.2}$$

e

$$\Big|\frac{\partial u_i(t, x, y)}{\partial x_{ij}}\Big| \leq \beta_{ij}(t)\|y\|, \quad \Big|\frac{\partial u_i(t, x, y)}{\partial y_{ij}}\Big| \leq \gamma_{ij}(t)\|x\|, \tag{2.1.3}$$

dove α_i, β_{ij}, γ_{ij} sono funzioni non negative dello spazio $L^\infty([0, T])$.
Infine, supponiamo che la funzione $u_i(t, x, y)$ sia concava.

Al fine di determinare i prezzi di equilibrio, stabiliamo la condizione che esprime l'equilibrio tra la totalità degli attivi, la totalità dei passivi e la parte di transazione di denaro per unità $F_j(t)$ impiegata per coprire le spese delle istituzioni finanziarie. In particolare, la condizione di equilibrio per il prezzo r_j dello strumento j è la seguente:

$$\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t)-(1+h_j(t))y_{ij}^*(t)\right]+F_j(t)$$
$$\begin{cases} \geq 0 & \text{if } r_j^*(t) = \underline{r}_j(t) \\ = 0 & \text{if } \underline{r}_j(t) < r_j^*(t) < \overline{r}_j(t) \\ \leq 0 & \text{if } r_j^*(t) = \overline{r}_j(t) \end{cases} . \tag{2.1.4}$$

In altre parole, i prezzi sono determinati tenendo conto della disponibilità di uno strumento, della sua domanda e degli oneri F_j: se vi è, nell'economia, in un certo istante, un eccesso di offerta di uno strumento come attività e delle spese F_j, allora il suo prezzo deve essere il prezzo minimo; se il prezzo di uno strumento è maggiore di $\underline{r}_j(t)$ ma non è massimo, allora tale strumento non ha mercato; infine, se vi è, nell'economia, in un certo istante, un eccesso di domanda di uno strumento come passività e delle spese F_j, allora il suo prezzo deve essere il prezzo massimo.

Adesso vogliamo fornire delle condizioni di equilibrio tra loro diverse ma equivalenti, ognuna delle quali è utile per illustrare particolari caratteristiche dell'equilibrio.

Definizione 2.1.1. Un vettore di attivi, passivi e prezzi degli strumenti $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in \prod_{i=1}^{m} P_i \times \mathcal{R}$ è di equilibrio per il modello finanziario dinamico se e solo se $\forall i = 1, \ldots, m$,

$\forall j = 1, \ldots, n$, e q.o. in $[0, T]$, esso soddisfa il seguente sistema di disequazioni:

$$-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(1)*}(t) \geq 0, \tag{2.1.5}$$

$$-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t))(1 + h_j(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(2)*}(t) \geq 0, \tag{2.1.6}$$

ed equazioni:

$$x_{ij}^*(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(1)^*}(t)\Big] = 0, \tag{2.1.7}$$

$$y_{ij}^*(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t))(1 + h_j(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(2)^*}(t)\Big] = 0, \tag{2.1.8}$$

dove $\mu_i^{(1)*}(t)$, $\mu_i^{(2)*}(t) \in L^2([0, T])$ sono funzioni lagrangiane e verificano le condizioni (2.1.4) q.o. in $[0, T]$.

Spieghiamo il significato di queste condizioni. Ad ogni coppia di volumi finanziari s_i e l_i posseduti dal settore i, decidiamo di associare le funzioni $\mu_i^{(1)}(t), \mu_i^{(2)}(t)$ legate, rispettivamente, alle attività ed alle passività e che rappresentano 'la disutilità di equilibrio' per unità del settore i. Quindi, (2.1.5) e (2.1.7) significano che il volume finanziario x_{ij}^* investito nello strumento j come attività è maggiore o uguale a zero se la j-esima componente $-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t)$ della disutilità è uguale a $\mu_i^{(1)}(t)$, mentre se $-\frac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t) > \mu_i^{(1)}(t)$, allora $x_{ij}^*(t) = 0$. Un discorso del tutto analogo vale per le passività.

Le funzioni $\mu_i^{(1)}(t)$ e $\mu_i^{(2)}(t)$ sono funzioni lagrangiane associate q.o. in $[0, T]$ ai vincoli $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - s_i(t) = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - l_i(t) = 0$, rispettivamente. Esse sono sconosciute a priori ma questo non ha conseguenze negative dal momento che la Definizione 2.1.1 è equivalente ad una disequazione variazionale in cui $\mu_i^{(1)}(t)$ e $\mu_i^{(2)}(t)$ non compaiono, come si evince dal seguente teorema:

Teorema 2.1.1. *Un vettore $(x^*, y^*, r^*) \in \prod_{i=1}^{m} P_i \times \mathcal{R}$ è di equilibrio dinamico finanziario se e solo se esso soddisfa la seguente disequazione variazionale:*

$$\textit{Trovare } (x^*, y^*, r^*) \in \prod_{i=1}^{m} P_i \times \mathcal{R} \textit{ tale che}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{T} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t) \right] \times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t)(1+h_j(t)) \right] \times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] \right\} dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{T} \sum_{i=1}^{m} \left\{ (1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \right\} \times \left[r_j(t) - r_j^*(t) \right] dt \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\forall (x, y, r) \in \prod_{i=1}^{m} P_i \times \mathcal{R}, \tag{2.1.9}
$$

Osservazione 2.1.1. Poniamo l'attenzione sul fatto che la prima parte della disequazione variazionale (2.1.9) rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per la minimizzazione del rischio della (2.1.1) e per la massimizzazione del guadagno, mentre la seconda parte della (2.1.9) non è altro che una condizione necessaria e sufficiente che traduce l'equilibrio dei prezzi descritto dalla (2.1.4).

Osservazione 2.1.2. Vediamo di trovare un modo compatto, che ci accompagnerà negli enunciati dei principali teoremi che dimostreremo, di scrivere la disequazione variazionale (2.1.9). Poniamo, per semplicità:

$$
v = (x, y, r) = \left((x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, (y_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, (r_j)_{j=1,\dots,n} \right).
$$

Consideriamo, inoltre,

$$
A : L^2([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n}) \to L^2([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})
$$

definita nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
A(t, v) \quad = \Bigg(& \left[-\frac{\partial u_i(t, x, y)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t)) r_j(t) \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \\
& \left[-\frac{\partial u_i(t, x, y)}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t)) r_j(t) \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \\
& \left[\sum_{i=1}^{m} (1-\tau_{ij}(t)) \left(x_{ij}(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}(t) \right) \right]_{j=1,\dots,n} \Bigg)
\end{aligned} \tag{2.1.10}
$$

e sia

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \;=\; & \Big\{ v=(x,y,r)\in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n}):\\ & x(t)\geq 0,\ y(t)\geq 0,\ \text{q.o. in } [0,T],\\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t)=s_i(t), \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t)=l_i(t),\\ & \text{q.o. in } [0,T],\ \forall i=1,\ldots,m,\\ & \underline{r}(t)\leq r(t)\leq \overline{r}(t),\ \text{q.o. in } [0,T]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Fatte tutte queste premesse, la disequazione variazionale (2.1.9) si traduce nel problema:

$$\text{Trovare} \quad v^*=(x^*,y^*,r^*)\in\mathbb{K}:\ \langle A(t,v^*),v-v^*\rangle\geq 0,\ \forall v\in\mathbb{K}.$$

Richiamiamo adesso il seguente risultato sui moltiplicatori di Lagrange che ci sarà utile nel seguito:

Teorema 2.1.2. *Sia* $(x^*,y^*,r^*)\in\prod_{i=1}^{m}P_i\times L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ *una soluzione della disequazione variazionale (2.1.9). Allora esistono* $\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*}\in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+),\mu^{(1)*},\mu^{(2)*}\in L^2([0,T],\mathbb{R}^m_+)$, $\rho^{(1)*},\rho^{(2)*}\in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ *tali che q.o. in* $[0,T]$,

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial x_{ij}}-(1-\tau_{ij}(t))r_j^*(t)-\lambda_{ij}^{(1)*}(t)-\mu_i^{(1)*}(t)=0,\\ &\quad\forall\, i=1,\ldots,m,\ \forall\, j=1,\ldots,n,\\ &-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial y_{ij}}+(1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t))r_j^*(t)-\lambda_{ij}^{(2)*}(t)-\mu_i^{(2)*}(t)=0,\\ &\quad\forall\, i=1,\ldots,m,\ \forall\, j=1,\ldots,n,\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t)-(1+h_j(t))y_{ij}^*(t)\right]+F_j(t)+\rho_j^{(2)*}(t)=\rho_j^{(1)*}(t),\\ &\quad\forall\, j=1,\ldots,n,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_{ij}^{(1)*}(t)x_{ij}^*(t)=0,\\ &\lambda_{ij}^{(2)*}(t)y_{ij}^*(t)=0,\end{aligned}\right.\quad \forall\, i=1,\ldots,m,\ \forall\, j=1,\ldots,n, \tag{2.1.13}$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_i^{(1)*}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*(t) - s_i(t)\right) = 0, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, i = 1,\ldots,m, \\
&\mu_i^{(2)*}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*(t) - l_i(t)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_j^{(1)*}(t)\left(\underline{r}_j(t) - r_j^*(t)\right) = 0, \\
& \qquad\qquad\qquad \forall\, j = 1,\ldots,n, \\
&\rho_j^{(2)*}(t)\left(r_j^*(t) - \bar{r}_j(t)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.15}
$$

Infine, vogliamo concludere questo paragrafo richiamando tre importanti formule e un particolare indice che ci saranno molto utili nel seguito.

2.1.1 Deficit Formula, Balance Law e Liability Formula

Di seguito riportiamo tre formule di grande utilità per qualsiasi tipo di problema di equilibrio che, come nel nostro caso, si evolve nel tempo.

Deficit Formula

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t))y_{ij}^*(t)\right] \\
&\quad + F_j(t) + \rho_j^{(2)*}(t) = \rho_j^{(1)*}(t), \quad \forall j = 1,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{2.1.16}
$$

dove $\rho_j^{(1)*}(t)$ e $\rho_j^{(2)*}(t)$ sono le variabili lagrangiane associate ai vincoli $\underline{r}_j(t)$ e $\overline{r}_j(t)$ sui prezzi:

$$
\begin{aligned}
&\rho_j^{(1)*}(t)(\underline{r}_j(t) - r_j^*(t)) = 0, \\
& \qquad\qquad\qquad \forall j = 1,\ldots,n. \\
&\rho_j^{(2)*}(t)(r_j^*(t) - \overline{r}_j(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.17}
$$

Osserviamo, dunque, che $\rho_j^{(1)*}(t)$ rappresenta il deficit per unità mentre $\rho_j^{(2)*}(t)$ non è altro che il surplus positivo per unità.

Balance law

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} l_i(t) = &\sum_{i=1}^{m} s_i(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}(t)\left[x_{ij}^*(t) - y_{ij}^*(t)\right] \\
&- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1-\tau_{ij}(t))h_j(t)y_{ij}^*(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} F_j(t) - \sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(2)*}(t).
\end{aligned} \tag{2.1.18}
$$

Liability formula

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} l_i(t) = \frac{1}{(1-\theta(t))(1+i(t))} \Bigg\{ & (1-\theta(t)) \sum_{i=1}^{m} s_i(t) \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^{n} F_j(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) \Bigg\},\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

dove $\theta(t)$ e $i(t)$ sono le medie di $\tau_{ij}(t)$ e $h_j(t)$, cioè:

$$\theta(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}(t)}{mn}$$

e

$$i(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} h_j(t)}{n},$$

rispettivamente. Tali formule, di estremo interesse per l'economia mondiale, sono state fornite in lavori precedenti insieme ad alcuni suggerimenti per il conseguimento dell'equilibrio finanziario e per trovare la giusta strada al fine di raggiungere un miglioramento dell'economia. Riportiamo questi suggerimenti:

Proposizione 2.1.1. *Quando i prezzi sono minimi, cioè quando essi coincidono con il vincolo inferiore, l'economia collassa.*

Proposizione 2.1.2. *Prezzi minimi implicano l'incremento del debito pubblico.*

Proposizione 2.1.3. *Prezzi minimi producono una recessione economica. Non vi è alcun incentivo agli sforzi economici.*

Proposizione 2.1.4. *Anche se può sembrare scioccante, lo sviluppo dell'economia e dell' occupazione deriva da un aumento dei prezzi.*

2.1.2 L'Indice di Valutazione

Un altro semplice e utile strumento per la valutazione di una qualsiasi economia è il cosiddetto 'Indice di Valutazione'. Esso si denota con $E(t)$ e si definisce nel modo seguente:

$$E(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} l_i(t)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)},$$

con

$$\tilde{s}_i(t) = \frac{s_i(t)}{1+i(t)}, \quad \tilde{F}_j(t) = \frac{F_j(t)}{1+i(t)-\theta(t)-\theta(t)i(t)}.$$

Sottolineamo che se $E(t)$ è maggiore o uguale a 1 la valutazione dell'equilibrio finanziario è positiva (meglio se $E(t)$ è prossimo a 1), mentre se $E(t)$ è minore di 1 allora la valutazione dell'equilibrio finanziario è negativa.

2.2 Risultati di continuità per le soluzioni di equilibrio finanziario

Al fine di mostrare il risultato di continuità valido per il problema dell'equilibrio finanziario, prima di tutto, ricordiamo la nota proprietà di convergenza nel senso di a K. Kuratowski.

Definizione 2.2.1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di X. Diciamo che $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al sottoinsieme $K \subseteq X$ nel senso di Kuratwoski, e scriviamo brevemente $K_n \to K$, se sono verificate le due seguenti condizioni:

(K1) per ogni $x \in K$ esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente fortemente a x in X tale che x_n appartiene K_n per n sufficientemente grande;

(K2) per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente debolmente a x in X tale che x_n appartiene a K_n per n sufficientemente grande, allora il limite x appartiene a K.

Proviamo adesso che l'insieme dei vettori ammissibili soddisfa la proprietà di convergenza di un insieme nel senso di Kuratowski.

Proposizione 2.2.1. *Siano $s \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$, $l \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$, $\underline{r}, \overline{r} \in C^0([0,T], \mathbb{R}^n_+)$ e sia $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,T]$ una successione tale che $t_k \to t \in [0,T]$ quando $k \to +\infty$. Allora la successione di insiemi*

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(t_k) = \Big\{ & v(t_k) = (x(t_k), y(t_k), r(t_k)) \in \mathbb{R}^{2mn+n} : \\ & x_{ij}(t_k) \geq 0,\ y_{ij}(t_k) \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t_k) = s_i(t_k), \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t_k) = l_i(t_k),\ \forall i = 1, \ldots, m, \\ & \underline{r}_j(t_k) \leq r_j(t_k) \leq \overline{r}_j(t_k),\ \forall j = 1, \ldots, n \Big\},\ \forall k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

converge a

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(t) = \Big\{ & v(t) = (x(t), y(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{2mn+n} : \\ & x_{ij}(t) \geq 0,\ y_{ij}(t) \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t),\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t),\ \forall i = 1, \ldots, m, \\ & \underline{r}_j(t) \leq r_j(t) \leq \overline{r}_j(t),\ \forall j = 1, \ldots, n \Big\},\end{aligned}$$

nel senso di Kuratowski, quando $k \to +\infty$.

Dimostrazione. Per provare che la successione $\{\mathbb{K}(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbb{K}(t)$ nel senso di Kuratowski, basta dimostrare che le codizioni (K1) e (K2) sono verificate per ogni successione $\{t_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, T]$ tale che $t_k \to t \in [0, T]$, quando $k \to +\infty$.
Fissiamo $v(t) = (x(t), y(t), r(t)) \in \mathbb{K}(t)$ e consideriamo una successione $\{v(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(x(t_k), y(t_k), r(t_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$, tale che $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}x_{ij}(t_k) &= x_{ij}(t) + \frac{s_i(t_k) - s_i(t)}{n}, \\ y_{ij}(t_k) &= y_{ij}(t) + \frac{l_j(t_k) - l_j(t)}{n},\end{aligned}$$

e $\forall j = 1, \ldots, n$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$r_j(t_k) = \underline{r}_j(t_k) + \min\{r_j(t) - \underline{r}_j(t), \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)\}.$$

Verifichiamo che $v(t_k) \in \mathbb{K}(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tenendo presente che

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} x_{ij}(t_k) &= \lim_{k\to+\infty} \left(x_{ij}(t) + \frac{s_i(t_k) - s_i(t)}{n} \right) = x_{ij}(t) \geq 0, \\ \lim_{k\to+\infty} y_{ij}(t_k) &= \lim_{k\to+\infty} \left(y_{ij}(t) + \frac{l_j(t_k) - l_j(t)}{m} \right) = y_{ij}(t) \geq 0,\end{aligned}$$

esistono due indici ν_1 e ν_2 tali che, per $k > \nu_1$, si ha

$$x_{ij}(t_k) \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n,$$

e, per $k > \nu_2$, si ottiene

$$y_{ij}(t_k) \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Poichè $\min\{r_j(t) - \underline{r}_j(t), \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)\} \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, risulta $r_j(t_k) \geq \underline{r}_j(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$; essendo, inoltre, $\min\{r_j(t) - \underline{r}_j(t), \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)\} \leq \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $r_j(t_k) \leq \overline{r}_j(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Infine,

$$\lim_{k\to+\infty} r_j(t_k) = \lim_{k\to+\infty} \left[\underline{r}_j(t_k) + \min\{r_j(t) - \underline{r}_j(t), \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)\} \right] = r_j(t),$$
$$\forall j = 1, \ldots, n.$$

A questo punto possiamo considerare una successione $\{v(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che per $k > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$x_{ij}(t_k) = x_{ij}(t) + \frac{s_i(t_k) - s_i(t)}{n},$$

$$y_{ij}(t_k) = y_{ij}(t) + \frac{l_j(t_k) - l_j(t)}{m},$$

$$r_j(t_k) = \underline{r}_j(t_k) + \min\{r_j(t) - \underline{r}_j(t), \overline{r}_j(t_k) - \underline{r}_j(t_k)\},$$

e per $k < \nu$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$,

$$v(t_k) = P_{\mathbb{K}(t_k)} v(t),$$

dove $P_{\mathbb{K}(t_k)}(\cdot)$ denota la proiezione di Hilbert su $\mathbb{K}(t_k)$.
Si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} v(t_n) = v(t)$ e per $n > \nu$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left[x_{ij}(t) + \frac{s_i(t_k) - s_i(t)}{n} \right] = s_i(t_k), \\
\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left[y_{ij}(t) + \frac{l_i(t_k) - l_i(t)}{n} \right] = l_i(t_k).
\end{aligned}$$

Quindi, la prima condizione (K1) è stata provata.
Per dimostrare la seconda, fissiamo ad arbitrio una successione $\{v(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $v(t_n) = (x(t_n), y(t_n), r(t_n)) \in \mathbb{K}(t_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tale che $x(t_n) \to x(t)$ in $\mathbb{R}^{mn}$, $y(t_n) \to y(t)$ in $\mathbb{R}^{mn}$, $r(t_n) \to r(t)$ in $\mathbb{R}^n$. Vogliamo provare che $v(t) = (x(t), y(t), r(t)) \in \mathbb{K}(t)$. Poichè $v(t_n) = (x(t_n), y(t_n), r(t_n)) \in \mathbb{K}(t_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$x(t_n) \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.1}$$
$$y(t_n) \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.2}$$
$$\underline{r}(t_n) \leq r(t_n) \leq \overline{r}(t_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.3}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ in (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3), si ottiene

$$\begin{aligned}
x(t) &\geq 0, \\
y(t) &\geq 0, \\
\underline{r}(t) \leq r(t) &\leq \overline{r}(t).
\end{aligned}$$

Pertanto, $v(t) \in \mathbb{K}(t)$. Anche (K2) risulta così provata. □

Risulta utile ricordare che la disequazione variazionale (2.1.9) può essere riscritta nella forma parametrizzata equivalente:

$$\langle A(t, v^*(t)), v - v^*(t)\rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{K}(t), t \in [0, T], \tag{2.2.4}$$

dove l'insieme dei vincoli $\mathbb{K}(t)$, $t \in [0, T]$, è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso, convesso e non vuoto, $A : [0, T] \times \mathbb{R}^{2mn+n} \to \mathbb{R}^{2mn+n}$ è una mappa e $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.
Sfruttando il risultato generale di continuità per le soluzioni delle disequazioni variazionali parametriche negli spazi di Banach riflessivi e la Proposizione 2.2.1, possiamo ottenere il seguente teorema:

Teorema 2.2.1. *Siano $s \in C^0([0, T], \mathbb{R}^m)$, let $l \in C^0([0, T], \mathbb{R}^m)$, $\underline{r}, \overline{r} \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n_+)$ e sia $A \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{2mn+n})$ una mappa fortemente monotona, cioè esiste $\alpha > 0$ tale che, per $t \in [0, T]$,*

$$\langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2\rangle \geq \alpha\|v_1 - v_2\|^2, \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2mn+n}.$$

Sotto queste ipotesi, la disequazione variazionale (2.1.9) *ammette un'unica soluzione continua.*

2.3 Un risultato di Lipschitz continuità

Lo scopo di questo paragrafo è fornire un risultato di Lipschitz continuità per la soluzione di equilibrio finanziario. Per questa ragione, richiamiamo un risultato generale per le soluzioni della disequazione variazionale (2.2.4).

Teorema 2.3.1. *Sia A fortemente monotona, Lipschitz continua rispetto a v, Lipschitz continua rispetto a t e supponiamo che esiste $\kappa > 0$ tale che, per $t_1, t_2 \in [0, T]$,*

$$\|P_{\mathbb{K}(t_1)}(z) - P_{\mathbb{K}(t_2)}(z)\| \leq \kappa|t_1 - t_2|, \ \forall z \in \mathbb{R}^{2mn+n},$$

dove $P_{\mathbb{K}(t)}(z) = \arg\min_{v \in \mathbb{K}(t)} \|z - v\|$, $t \in [0, T]$, denota la proiezione sull'insieme $\mathbb{K}(t)$. Allora l'unica soluzione $v^*(t)$, $t \in [0, T]$, della disequazione variazionale (2.2.4) *è Lipschitz continua in $[0, T]$, cioè, se $t_1 \neq t_2$, vale la seguente stima:*

$$\frac{\|v^*(t_2) - v^*(t_1)\|}{|t_2 - t_1|} \leq \gamma\left(\|v^*\|^2_{C^0([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})} + \sup_{\substack{t_1, t_2 \in [0,T] \\ t_1 \neq t_2}} \left\|\frac{P_{\mathbb{K}(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}(t_1)}(z)}{t_2 - t_1}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3.1}$$

dove $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, M, T, L)$.

Poniamo, per semplicità,

$$L = \sup_{\substack{t_1,t_2\in[0,T]\\ t_1\neq t_2}} \left\| \frac{P_{\mathbb{K}(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}(t_1)}(z)}{t_2 - t_1} \right\|.$$

Prima di applicare il risultato precedente al nostro problema dinamico di equilibrio finanziario, è necessario stimare il tasso di variazione delle proiezioni sull'insieme $[\mathcal{P}_{\mathbb{K}}]$ dei vincoli dipendenti dal tempo che descrive il problema. Risulta utile notare che $\mathbb{K}(t)$ può essere riscritto come prodotto cartesiano dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_1(t) = \ & \Big\{ x(t) \in \mathbb{R}^{mn} : \\ & x_{ij}(t) \geq 0, \forall i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t),\ \forall i = 1,\dots,m \Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_2(t) = \ & \Big\{ y(t) \in \mathbb{R}^{mn} : \\ & y_{ij}(t) \geq 0,\ \forall i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \\ & \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t),\ \forall i = 1,\dots,m \Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_3(t) = \ & \Big\{ r(t) \in \mathbb{R}^{n} : \\ & \underline{r}_j(t) \leq r_j(t) \leq \overline{r}_j(t),\ \forall j = 1,\dots,n \Big\},\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbb{K}(t) = \mathbb{K}_1(t) \times \mathbb{K}_2(t) \times \mathbb{K}_3(t).$$

Supponendo che $s_i(t)$, con $t \in [0,T]$, sia Lipschitz continua con costante di lipschitzianità L_i^1, per $i = 1,\dots,m$, allora risulta

$$\|P_{\mathbb{K}_1(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}_1(t_1)}(z)\| \leq \sqrt{n} \sum_{i=1}^{m} L_i^1 |t_1 - t_2|. \tag{2.3.2}$$

Inoltre, sotto l'ipotesi che $l_i(t)$, $t \in [0,T]$, sia Lipschitz continua con costante di lipschitzianità L_i^2, per $i = 1,\dots,m$, abbiamo

$$\|P_{\mathbb{K}_2(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}_2(t_1)}(z)\| \leq \sqrt{n} \sum_{i=1}^{m} L_i^2 |t_1 - t_2|. \tag{2.3.3}$$

Ipotizzando che $\underline{r}_j(t)$ e $\overline{r}_j(t)$, $t \in [0,T]$, sono Lipschitz continue con costanti di lipschitzianità $\underline{L}_j^3$ e $\overline{L}_j^3$, rispettivamente, per $j = 1, \dots, n$, possiamo provare che

$$\|P_{\mathbb{K}_3(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}_3(t_1)}(z)\| \leq L^3|t_1 - t_2|, \tag{2.3.4}$$

dove $L^3 = \max_{j=1,\dots,n}(\overline{L}_j^3 + \underline{L}_j^3)$.

Possiamo concludere che

Proposizione 2.3.1. *Siano $t_1, t_2 \in [0,T]$; $s, l : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ due funzioni Lipschitz continue e $\underline{r}, \overline{r} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ anch'esse funzioni Lipschitz continue. Sia z un punto arbitrario di $\mathbb{R}^{mn}$. Allora risulta*

$$\|P_{\mathbb{K}(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}(t_1)}(z)\| \leq L|t_2 - t_1|,$$

dove L è la costante positiva analoga a quella della (2.3.1).

Come conseguenza, risulta

$$\frac{\|P_{\mathbb{K}(t_2)}(z) - P_{\mathbb{K}(t_1)}(z)\|}{|t_2 - t_1|} \leq L.$$

Dunque, applicando il Teorema 2.3.1, otteniamo il seguente risultato:

Teorema 2.3.2. *Sia $A \in C^0([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})$ fortemente monotona (con costante α), Lipschitz continua rispetto x (con costante β), Lipschitz continua rispetto a t (con costante M); siano $s, l : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ due funzioni Lipschitz continue e siano $\underline{r}, \overline{r} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ anch'esse funzioni Lipschitz continue. Allora l'unica soluzione di equilibrio finanziario $v^* = (x^*, y^*, r^*)$ è Lipschitz continua in $[0,T]$. Inoltre, se $t_1 \neq t_2$, vale la seguente stima:*

$$\frac{\|v^*(t_2) - v^*(t_1)\|^2}{|t_2 - t_1|^2} \leq \gamma\big(\|v^*\|^2_{C^0([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})} + L^2\big),$$

dove $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, M, T, L)$.

2.4 Alcuni esempi numerici

In questo paragrafo vogliamo studiare alcuni esempi numerici in cui consideriamo come funzione avversione al rischio quella suggerita da H.M. Markowitz, che esprime in ogni istante $t \in [0,T]$ l'avversione al rischio per mezzo delle matrici varianza-covarianza che indicano la valutazione da parte di ogni settore della deviazione standard dei prezzi per ogni strumento. Vedremo che le soluzioni degli esempi sono regolari e illustreremo l'impatto delle componenti del modello sull'equilibrio finanziario, soprattutto per quel che riguarda F_1, F_2, il deficit ed il surplus.

Consideriamo un'economia composta da due settori e da due strumenti finanziari, come mostrato nella Figura 1.

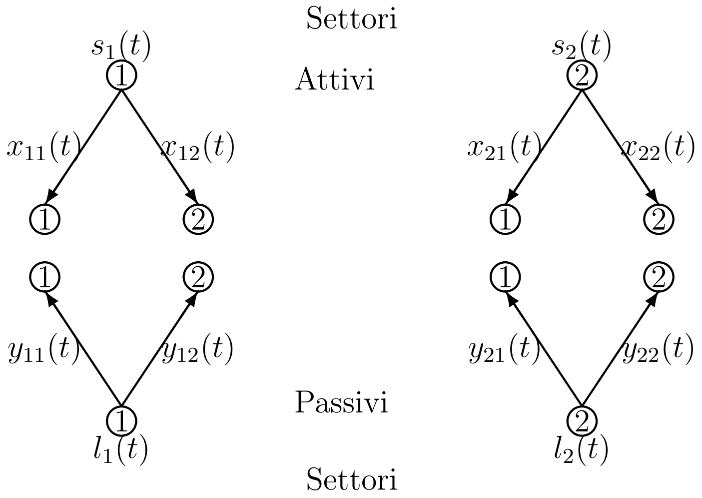

Fig. 1 *Una rete composta da due settori e da due strumenti finanziari*

Osserviamo che una tale scelta non è restrittiva perchè possiamo considerare una qualsiasi economia, anche più complessa, come iterazione di quella analizzata in questo importante esempio.

Supponiamo che le matrici varianza-covarianza dei due settori siano le seguenti:

$$Q^1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q^2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5t & 0 \\ 0 & -0.5t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scegliamo come insieme ammissibile

$$\begin{aligned}
\mathbb{K} \;=\; & \Big\{(x_{11}(t), x_{12}(t), x_{21}(t), x_{22}(t), y_{11}(t), y_{12}(t), \\
& y_{21}(t), y_{22}(t), r_1(t), r_2(t)) \in L^2([0,1], \mathbb{R}^{10}) : \\
& x_{11}(t) + x_{12}(t) = 3t + 1, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& x_{21}(t) + x_{22}(t) = t + 4, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& y_{11}(t) + y_{12}(t) = t + 2, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& y_{21}(t) + y_{22}(t) = t + 3, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& x_{11}(t), x_{12}(t), x_{21}(t), x_{22}(t) \geq 0, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& y_{11}(t), y_{12}(t), y_{21}(t), y_{22}(t) \geq 0, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& 0 \leq r_1(t) \leq 4t + 3, \quad \text{q.o. in } [0,1], \\
& 0 \leq r_2(t) \leq 7t + 8, \quad \text{q.o. in } [0,1]\Big\}.
\end{aligned}$$

La disequazione variazionale

$$\begin{aligned}
\int_0^1 & \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Big[2\Big((Q^i_{(11)j}(t))^T \cdot x^*_i(t) + (Q^i_{(21)j}(t))^T \cdot y^*_i(t)\Big) \\
& -(1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t)\Big] \times [x_{ij}(t) - x^*_{ij}(t)] \\
& + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Big[2\Big((Q^i_{(12)j}(t))^T \cdot x^*_i(t) + (Q^i_{(22)j}(t))^T \cdot y^*_i(t)\Big) \\
& +(1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t)(1 + h_j(t))\Big] \times [y_{ij}(t) - y^*_{ij}(t)] \\
& + \sum_{j=1}^{2} \Big[\sum_{i=1}^{2}(1 - \tau_{ij}(t))\Big(x^*_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y^*_{ij}(t)\Big) \\
& +F_j(t)\Big] \times [r_j(t) - r^*_j(t)]dt \geq 0, \\
& \qquad \forall (x, y, r) \in \mathbb{K},
\end{aligned}$$

che esprime le condizioni dell'equilibrio finanziario, diventa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 & \Big\{ \big[2x_{11}^*(t) - ty_{11}^*(t) - (1-\tau_{11}(t))r_1^*(t)\big]\big(x_{11}(t) - x_{11}^*(t)\big) \\
& +\big[2x_{12}^*(t) - (1-\tau_{12}(t))r_2^*(t)\big]\big(x_{12}(t) - x_{12}^*(t)\big) \\
& +\big[2x_{21}^*(t) - (1-\tau_{21}(t))r_1^*(t)\big]\big(x_{21}(t) - x_{21}^*(t)\big) \\
& +\big[2x_{22}^*(t) - ty_{21}^*(t) - (1-\tau_{22}(t))r_2^*(t)\big]\big(x_{22}(t) - x_{22}^*(t)\big) \\
& +\big[2y_{11}^*(t) - tx_{11}^*(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{11}(t))r_1^*(t)\big] \\
& \big(y_{11}(t) - y_{11}^*(t)\big) + \big[2y_{12}^*(t) + (1+h_2(t))(1-\tau_{12}(t)) \\
& r_2^*(t)\big]\big(y_{12}(t) - y_{12}^*(t)\big) + \big[2y_{21}^*(t) - tx_{22}^*(t) \\
& +(1+h_1(t))(1-\tau_{21}(t))r_1^*(t)\big]\big(y_{21}(t) - y_{21}^*(t)\big) \\
& +\big[2y_{22}^*(t) + (1+h_2(t))(1-\tau_{22}(t))r_2^*(t)\big] \\
& \big(y_{22}(t) - y_{22}^*(t)\big) + \big[(1-\tau_{11}(t))x_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t)) \\
& x_{21}^*(t) - (1+h_1(t))[(1-\tau_{11}(t))y_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t)) \\
& y_{21}^*(t)] + F_1(t)\big]\big(r_1(t) - r_1^*(t)\big) + \big[(1-\tau_{12}(t))x_{12}^*(t) \\
& +(1-\tau_{22}(t))x_{22}^*(t) - (1+h_2(t))[(1-\tau_{12}(t))y_{12}^*(t) \\
& +(1-\tau_{22}(t))y_{22}^*(t)] + F_2(t)\big]\big(r_2(t) - r_2^*(t)\big)\Big\} dt \geq 0, \\
& \qquad \forall (x,y,r) \in \mathbb{K}.
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Utilizzando il metodo diretto per trovare la soluzione, ricaviamo dall'insieme convesso $\mathbb{K}$ dei vincoli alcune variabili in funzione delle altre, ottenendo q.o. in $[0,1]$:

$$\begin{array}{ll}
x_{12}(t) = 3t + 1 - x_{11}(t), & x_{22}(t) = t + 4 - x_{21}(t), \\
y_{12}(t) = t + 2 - y_{11}(t), & y_{22}(t) = t + 3 - y_{21}(t).
\end{array}$$

Quindi, ponendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{K}} = & \Big\{ (x_{11}, x_{21}, y_{11}, y_{21}, r_1, r_2) \in L^2\left([0,1], \mathbb{R}^6\right) : \\
& 0 \leq x_{11}(t) \leq 3t+1,\ 0 \leq x_{21}(t) \leq t+4, \ \text{ q.o. in } [0,1] \\
& 0 \leq y_{11}(t) \leq t+2, \quad 0 \leq y_{21}(t) \leq t+3, \ \text{ q.o. in } [0,1] \\
& 0 \leq r_1(t) \leq 4t+3,\ 0 \leq r_2(t) \leq 7t+8, \ \text{ q.o. in } [0,1] \Big\},
\end{aligned}$$

la disequazione variazionale (2.4.1) può essere espressa nella forma equivalente

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big\{ \big[4x_{11}^*(t) - ty_{11}^*(t) - (1-\tau_{11}(t))r_1^*(t) + (1-\tau_{12}(t))r_2^*(t) \\
&-6t-2\big]\,(x_{11}(t) - x_{11}^*(t)) + \big[4x_{21}^*(t) + ty_{21}^*(t) - (1 \\
&-\tau_{21}(t))r_1^*(t) + (1-\tau_{22}(t))r_2^*(t) - 2t - 8\big]\,(x_{21}(t) - x_{21}^*(t)) \\
&+\big[4y_{11}^*(t) - tx_{11}^*(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{11}(t))r_1^*(t) \\
&-(1+h_2(t))(1-\tau_{12}(t))r_2^*(t) - 2t - 4\big]\,(y_{11}(t) - y_{11}^*(t)) \\
&+\big[tx_{21}^*(t) + 4y_{21}^*(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{21}(t))r_1^*(t) - (1 \\
&+h_2(t))(1-\tau_{22}(t))r_2^*(t) - t^2 - 6t - 6\big]\,(y_{21}(t) - y_{21}^*(t)) \\
&+\big[(1-\tau_{11}(t))x_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t))x_{21}^*(t) - (1+h_1(t)) \\
&((1-\tau_{11}(t))y_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t))y_{21}^*(t)) + F_1(t)\big] \\
&(r_1(t) - r_1^*(t)) + \big[-(1-\tau_{12}(t))x_{11}^*(t) - (1-\tau_{22}(t))x_{21}^*(t) \\
&+(1+h_2(t))((1-\tau_{12}(t))y_{11}^*(t) + (1-\tau_{22}(t))y_{21}^*(t)) \\
&+(1-\tau_{12}(t))(3t+1-(1+h_2(t))(t+2)) + (1-\tau_{22}(t)) \\
&\big[t+4-(1+h_2(t))(t+3)\big] + F_2(t)\big]\,(r_2(t) - r_2^*(t))\Big\}dt \geq 0, \\
&\qquad \forall (x,y,r) \in \tilde{\mathbb{K}}.
\end{aligned}
$$

Siano

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= 4x_{11}^*(t) - ty_{11}^*(t) - (1-\tau_{11}(t))r_1^*(t) + (1-\tau_{12}(t)) \\
&\quad r_2^*(t) - 6t - 2, \\
\Gamma_2 &= 4x_{21}^*(t) + ty_{21}^*(t) - (1-\tau_{21}(t))r_1^*(t) + (1-\tau_{22}(t)) \\
&\quad r_2^*(t) - 2t - 8, \\
\Gamma_3 &= 4y_{11}^*(t) - tx_{11}^*(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{11}(t))r_1^*(t) \\
&\quad -(1+h_2(t))(1-\tau_{12}(t))r_2^*(t) - 2t - 4, \\
\Gamma_4 &= tx_{21}^*(t) + 4y_{21}^*(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{21}(t))r_1^*(t) \\
&\quad -(1+h_2(t))(1-\tau_{22}(t))r_2^*(t) - t^2 - 6t - 6, \\
\Gamma_5 &= (1-\tau_{11}(t))x_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t))x_{21}^*(t) - (1+h_1(t)) \\
&\quad ((1-\tau_{11}(t))y_{11}^*(t) + (1-\tau_{21}(t))y_{21}^*(t)) + F_1(t), \\
\Gamma_6 &= -(1-\tau_{12}(t))x_{11}^*(t) - (1-\tau_{22}(t))x_{21}^*(t) + (1+h_2(t)) \\
&\quad ((1-\tau_{12}(t))y_{11}^*(t) + (1-\tau_{22}(t))y_{21}^*(t)) \\
&\quad +(1-\tau_{12}(t))(3t+1-(1+h_2(t))(t+2)) \\
&\quad +(1-\tau_{22}(t))(t+4-(1+h_2(t))(t+3)) + F_2(t).
\end{aligned}
$$

Come suggerisce il primo passo del metodo diretto, cerchiamo soluzioni che soddisfino il sistema

$$\begin{cases} \Gamma_1 &= 4x^*_{11}(t) - ty^*_{11}(t) - (1-\tau_{11}(t))r^*_1(t) \\ & \quad +(1-\tau_{12}(t))r^*_2(t) - 6t - 2 = 0, \\ \Gamma_2 &= 4x^*_{21}(t) + ty^*_{21}(t) - (1-\tau_{21}(t))r^*_1(t) + (1-\tau_{22}(t)) \\ & \quad r^*_2(t) - 2t - 8 = 0, \\ \Gamma_3 &= 4y^*_{11}(t) - tx^*_{11}(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{11}(t))r^*_1(t) \\ & \quad -(1+h_2(t))(1-\tau_{12}(t))r^*_2(t) - 2t - 4 = 0, \\ \Gamma_4 &= tx^*_{21}(t) + 4y^*_{21}(t) + (1+h_1(t))(1-\tau_{21}(t))r^*_1(t) \\ & \quad -(1+h_2(t))(1-\tau_{22}(t))r^*_2(t) - t^2 - 6t - 6 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo le variabili x_{ij} e y_{ij} in funzione di τ_{ij}, r_j e h_j, cioè

$$\begin{cases} x^*_{11}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2 + 28t + 8 + r_1(t)(1-\tau_{11}(t))[4-t \\ \quad (1+h_1(t))] + r_2(t)(1-\tau_{12}(t))[-4+t(1+h_2(t))]\Big\}, \\ x^*_{12}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-3t^3 - 3t^2 + 20t + 8 - r_1(t)(1-\tau_{11}(t))[4 \\ \quad -t(1+h_1(t))] - r_2(t)(1-\tau_{12}(t))[-4+t(1+h_2(t))]\Big\}, \\ x^*_{21}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3 - 6t^2 + 2t + 32 + r_1(t)(1-\tau_{21}(t))[4 \\ \quad +t(1+h_1(t))] - r_2(t)(1-\tau_{22}(t))[4+t(1+h_2(t))]\Big\}, \\ x^*_{22}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2 + 14t + 32 - r_1(t)(1-\tau_{21}(t))[4+t \\ \quad (1+h_1(t))] + r_2(t)(1-\tau_{22}(t))[4+t(1+h_2(t))]\Big\}, \\ y^*_{11}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{6t^2 + 10t + 16 + r_1(t)(1-\tau_{11}(t))[t-4 \\ \quad (1+h_1(t))] - r_2(t)(1-\tau_{12}(t))[t-4(1+h_2(t))]\Big\}, \\ y^*_{12}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3 - 8t^2 + 6t + 16 - r_1(t)(1-\tau_{11}(t))[t \\ \quad -4(1+h_1(t))] + r_2(t)(1-\tau_{12}(t))[t-4(1+h_2(t))]\Big\}, \\ y^*_{21}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2 + 16t + 24 - r_1(t)(1-\tau_{21}(t))[t+4 \\ \quad (1+h_1(t))] + r_2(t)(1-\tau_{22}(t))[t+4(1+h_2(t))]\Big\}, \\ y^*_{22}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3 - 5t^2 + 24 + r_1(t)(1-\tau_{21}(t))[t+4 \\ \quad (1+h_1(t))] + r_2(t)(1-\tau_{22}(t))[t+4(1+h_2(t))]\Big\}. \end{cases}$$

Per semplicità, supponiamo
$$h_1(t) = 2t, \qquad h_2(t) = t.$$

A seguito di questa sostituzione, le nostre variabili diventano

$$
\begin{cases}
x^*_{11}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2+28t+8+r_1(t)(1-\tau_{11}(t)) \\
\qquad (4-t-2t^2)+r_2(t)(1-\tau_{12}(t))(t^2+t-4)\Big\}, \\
x^*_{12}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-3t^3-3t^2+20t+8-r_1(t)(1-\tau_{11}(t)) \\
\qquad (4-t-2t^2)-r_2(t)(1-\tau_{12}(t))(t^2+t-4), \\
x^*_{21}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3-6t^2+2t+32+r_1(t)(1-\tau_{21}(t)) \\
\qquad (2t^2+t+4)+r_2(t)(1-\tau_{22}(t))(-t^2-t-4)\Big\}, \\
x^*_{22}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2+14t+32-r_1(t)(1-\tau_{21}(t)) \\
\qquad (2t^2+t+4)-r_2(t)(1-\tau_{22}(t))(-t^2-t-4)\Big\}, \\
y^*_{11}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{6t^2+10t+16+r_1(t)(1-\tau_{11}(t)) \\
\qquad (-7t-4)+r_2(t)(1-\tau_{12}(t))(3t+4)\Big\}, \\
y^*_{12}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3-8t^2+6t+16-r_1(t)(1-\tau_{11}(t)) \\
\qquad (-7t-4)-r_2(t)(1-\tau_{12}(t))(3t+4)\Big\}, \\
y^*_{21}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{2t^2+16t+24-r_1(t)(1-\tau_{21}(t)) \\
\qquad (-9t-4)+r_2(t)(1-\tau_{22}(t))(5t+4)\Big\}, \\
y^*_{22}(t) = \dfrac{1}{16-t^2}\Big\{-t^3-5t^2+24-r_1(t)(1-\tau_{21}(t)) \\
\qquad (-9t-4)-r_2(t)(1-\tau_{22}(t))(5t+4)\Big\}.
\end{cases}
$$

Nei seguenti sottoparagrafi, studieremo vari esempi di equilibrio finanziario per cui il deficit ($\rho_j^{(1)*}$) ed il surplus ($\rho_j^{(2)*}$) sono diversi da zero in certi intervalli di tempo. Questi esempi dipendono dalla scelta di appropriati valori per i dati.

2.4.1 Esempio 1

Nel primo esempio, consideriamo valori di τ_{ij} tali che

$$
\begin{aligned}
&\max\left\{\frac{22t^2+27t-4}{(4t+3)(7t+4)}, \frac{5t^3+7t^2+7t-4}{(4t+3)(2t^2+t-4)}\right\} \le \tau_{11}(t) \\
&\quad \le \min\left\{\frac{8t^3+8t^2-41t-20}{(4t+3)(2t^2+t-4)}, \frac{-t^3+20t^2+43t+28}{(4t+3)(7t+4)}\right\}, \\
&\max\left\{\frac{8t^3+8t^2+5t-20}{(4t+3)(2t^2+t+4)}, \frac{34t^2+27t-12}{(4t+3)(9t+4)}\right\} \le \tau_{21}(t) \\
&\quad \le \min\left\{\frac{7t^3+4t^2+21t+44}{(4t+3)(2t^2+t+4)}, \frac{-t^3+31t^2+43t+36}{(4t+3)(9t+4)}\right\},
\end{aligned}
$$

come mostrano la Figura 2 e la Figura 3.

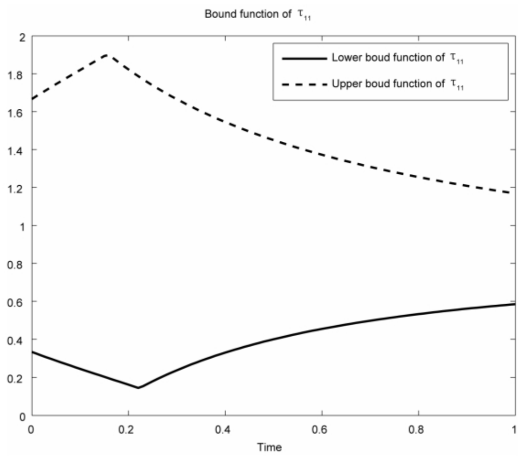

Fig. 2 *Grafico delle limitazioni di* τ_{11}.

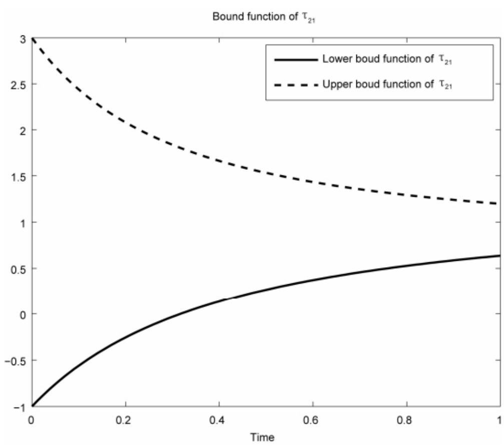

Fig. 3 *Grafico delle limitazioni di* τ_{21}.

In particolare, supponiamo che

$$\tau_{11}(t) = \frac{t+1}{2}, \quad \tau_{12}(t) = 3t,$$

$$\tau_{21}(t) = t, \quad \tau_{22}(t) = \frac{5t+1}{2}.$$

In questa situazione, esistono $t_1 \in]0.650, 0.652[$ e $t_2 \in]0.975, 0.977[$, tali che il vettore

$$\begin{cases} x_{11}^*(t) = \dfrac{8t^4 + 2t^3 - 19t^2 + 57t + 28}{2(16 - t^2)}, \\ x_{12}^*(t) = \dfrac{-8t^4 - 8t^3 + 17t^2 + 39t + 4}{2(16 - t^2)}, \\ x_{21}^*(t) = \dfrac{-8t^4 - 3t^3 - 15t^2 + 9t + 44}{16 - t^2}, \\ x_{22}^*(t) = \dfrac{8t^4 + 2t^3 + 11t^2 + 7t + 20}{16 - t^2}, \\ y_{11}^*(t) = \dfrac{28t^3 + 21t^2 - 5t + 20}{2(16 - t^2)}, \\ y_{12}^*(t) = \dfrac{-30t^3 - 25t^2 + 37t + 44}{2(16 - t^2)}, \\ y_{21}^*(t) = \dfrac{36t^3 + 9t^2 - 15t + 12}{16 - t^2}, \\ y_{22}^*(t) = \dfrac{-37t^3 - 12t^2 + 31t + 36}{16 - t^2}, \\ r_1^*(t) = 4t + 3, \\ r_2^*(t) = 0, \end{cases}$$

è soluzione della disequazione variazionale nell'intervallo $]t_1, t_2[$, poichè x_{ij}^*, y_{ij}^* soddisfano i vincoli e

$$\Gamma_5 = \frac{184t^5 - 36t^4 - 145t^3 - 14t^2 - 57t + 68}{2(16 - t^2)} + F_1(t) < 0,$$
$$\Gamma_6 = \frac{-291t^5 - 329t^4 + 123t^3 + 423t^2 + 98t - 56}{2(16 - t^2)} + F_2(t) > 0,$$

per $F_1(t)$ sufficientemente piccola e per una qualsiasi $F_2(t)$ non negativa. Infatti, se consideriamo

$$\gamma_5 = \frac{184t^5 - 36t^4 - 145t^3 - 14t^2 - 57t + 68}{2(16 - t^2)},$$
$$\gamma_6 = \frac{-291t^5 - 329t^4 + 123t^3 + 423t^2 + 98t - 56}{2(16 - t^2)},$$

otteniamo che esse sono negativa e positiva rispettivamente, come si può vedere nella Figura 4, dove sono rappresentati i grafici dei loro numeratori.

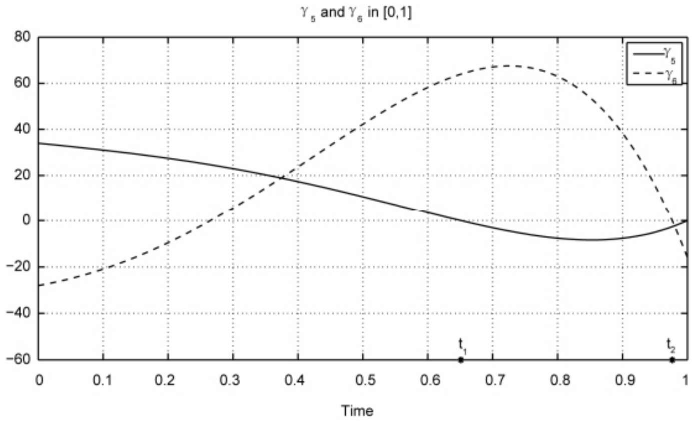

Fig. 4 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0, 1]$.

Ricordiamo che, in virtù del Teorema 2.1.2, $\forall j = 1, 2$, sono soddisfatte le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \rho_j^{(1)*}(t)(\underline{r}_j(t) - r_j^*(t)) = 0, \\ \rho_j^{(2)*}(t)(r_j^*(t) - \overline{r}_j(t)) = 0; \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t) + \rho_j^{(2)*}(t) = \rho_j^{(1)*}(t). \tag{2.4.3}$$

Tenendo conto che, nel nostro caso,

$$r_1^*(t) = 4t + 3 = \overline{r}_1(t),$$

$$r_2^*(t) = 0 = \underline{r}_2(t),$$

dalla (2.4.2), otteniamo

$$\rho_1^{(1)*}(t) = 0, \quad \rho_1^{(2)*}(t) \geq 0,$$
$$\rho_2^{(1)*}(t) \geq 0, \quad \rho_2^{(2)*}(t) = 0.$$

Analogamente, dalla (2.4.3), otteniamo

$$\rho_1^{(2)*}(t) = -\Gamma_5 > 0,$$

$$\rho_2^{(1)*}(t) = \Gamma_6 > 0,$$

a patto che $F_1(t)$ sia sufficientemente piccola e per qualsiasi $F_2(t)$ non negativa.

L'importanza di questo esempio risiede nel fatto che, nell'intervallo $]\,t_1, t_2\,[$, per $F_1(t)$ sufficientemente piccolo, il prezzo r_1^* è massimo e il mercato finanziario ha un surplus pari a

$$\rho_1^{(2)*}(t)\overline{r}_1(t) = -\Gamma_5\overline{r}_1(t) =$$
$$= \frac{-736t^6 - 408t^5 + 688t^4 + 491t^3 + 270t^2 - 101t - 204}{2(16 - t^2)} - F_1(t)(4t + 3).$$

Invece, per lo strumento $j = 2$, abbiamo un prezzo minimo e il deficit è dato da

$$\rho_2^{(1)*}(t)\, \underline{r}_2(t) = \Gamma_6\, \underline{r}_2(t) = 0.$$

Calcoliamo adesso l'Indice di Valutazione per questo problema finanziario.
Poichè

$$\theta(t) = \frac{7t+1}{4}, \quad i(t) = \frac{3}{2}t,$$

$$\sum_{i=1}^{2} l_i(t) = 2t + 5, \quad \sum_{i=1}^{m} s_i(t) = 4t + 5,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \tilde{s}_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} s_i(t)}{1 + i(t)} = \frac{2(4t+5)}{2+3t},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{F}_j(t) = \frac{\sum_{j=1}^{2} F_j(t)}{(1+i(t))(1-\theta(t))} = \frac{8(F_1(t)+F_2(t))}{(3-7t)(2+3t)},$$

l'Indice di Valutazione è dato da

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2t+5}{\dfrac{2(4t+5)}{2+3t} + \dfrac{8(F_1(t)+F_2(t))}{(3-7t)(2+3t)}} = \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{8(F_1(t)+F_2(t)) - t(6t+11)(3-7t)}{(3-7t)(2t+5)(2+3t)}}. \end{aligned}$$

Nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{7}\right[$, se

$$8(F_1(t) + F_2(t)) \leq t(6t+11)(3-7t)$$

l'economia ha una valutazione positiva. Una situazione analoga accade se

$$8(F_1(t) + F_2(t)) \geq t(6t+11)(3-7t)$$

nell'intervallo $\left]\frac{3}{7}, 1\right]$ (dove $3 - 7t < 0$).

2.4.2 Esempio 2

Adesso prendiamo in esame il caso in cui i valori di τ_{ij} sono tali che

$$\begin{aligned} &\max\left\{\frac{7t^3+17t^2+8t-24}{(7t+8)(t^2+t-4)}, \frac{t^3+29t^2+46t+16}{(7t+8)(3t+4)}\right\} \le \tau_{12}(t) \\ &\quad \le \min\left\{\frac{10t^3+18t^2-40t-40}{(7t+8)(t^2+t-4)}, \frac{27t^2+62t+48}{(7t+8)(3t+4)}\right\}, \\ &\max\left\{\frac{8t^3+21t^2+34t}{(7t+8)(t^2+t+4)}, \frac{t^3+40t^2+68t+8}{(7t+8)(5t+4)}\right\} \le \tau_{22}(t) \\ &\quad \le \min\left\{\frac{7t^3+17t^2+50t+64}{(7t+8)(t^2+t+4)}, \frac{37t^2+84t+56}{(7t+8)(5t+4)}\right\}, \end{aligned}$$

come mostrano la Figura 5 e la Figura 6.

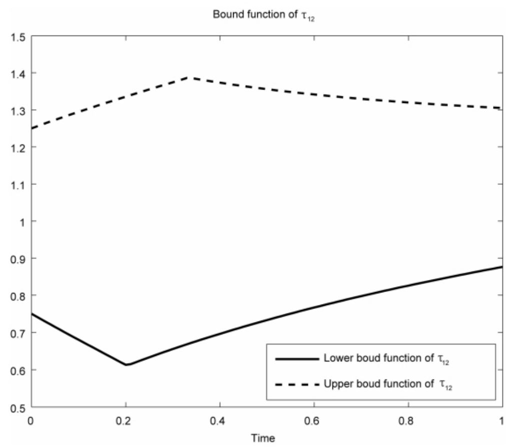

Fig. 5 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0,1]$.

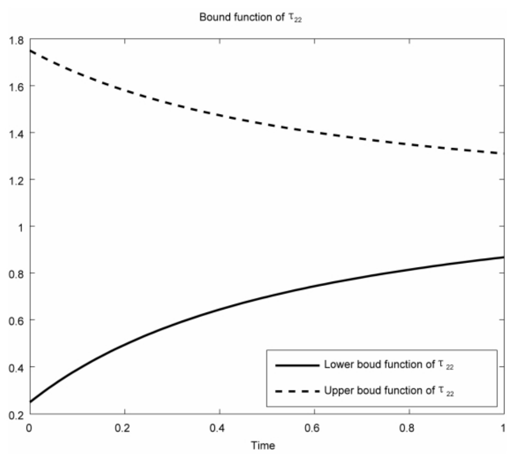

Fig. 6 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0,1]$.

In particolare, supponiamo che

$$\tau_{11}(t) = 3t, \quad \tau_{12}(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{6}{5},$$
$$\tau_{21}(t) = t, \quad \tau_{22}(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{6}{5}.$$

In questo caso, esistono $t_3 \in]0.946, 0.948[$ e $t_4 \in]0.997, 0.999[$, tali che il vettore

$$\begin{cases} x^*_{11}(t) = \dfrac{7t^4 + 8t^3 - 25t^2 + 128t + 72}{5(16 - t^2)}, \\ x^*_{12}(t) = \dfrac{-7t^4 - 23t^3 + 20t^2 + 112t + 8}{5(16 - t^2)}, \\ x^*_{21}(t) = \dfrac{-7t^4 - 13t^3 - 51t^2 + 14t + 192}{5(16 - t^2)}, \\ x^*_{22}(t) = \dfrac{7t^4 + 8t^3 + 31t^2 + 66t + 128}{5(16 - t^2)}, \\ y^*_{11}(t) = \dfrac{21t^3 + 61t^2 + 30t + 48}{5(16 - t^2)}, \\ y^*_{12}(t) = \dfrac{-26t^3 - 71t^2 + 50t + 62}{5(16 - t^2)}, \\ y^*_{21}(t) = \dfrac{35t^3 + 43t^2 + 44t + 88}{5(16 - t^2)}, \\ y^*_{22}(t) = \dfrac{-40t^3 - 58t^2 + 36t + 152}{5(16 - t^2)}, \\ r^*_1(t) = 0, \\ r^*_2(t) = 7t + 8, \end{cases}$$

è soluzione della disequazione variazionale nell'intervallo $]t_3, t_4[$, poichè x^*_{ij}, y^*_{ij} soddisfano i vincoli e

$$\Gamma_5 = \frac{182t^5 + 427t^4 + 351t^3 - 128t^2 - 380t + 128}{5(16 - t^2)} + F_1(t) > 0,$$
$$\Gamma_6 = \frac{66t^5 + 114t^4 - 86t^3 - 266t^2 + 44t + 128}{25(16 - t^2)} + F_2(t) < 0,$$

per ogni $F_1(t)$ non negativa e per $F_2(t)$ sufficientemente piccola. Infatti, se consideriamo

$$\gamma_5 = \frac{182t^5 + 427t^4 + 351t^3 - 128t^2 - 380t + 128}{5(16 - t^2)},$$
$$\gamma_6 = \frac{66t^5 + 114t^4 - 86t^3 - 266t^2 + 44t + 128}{25(16 - t^2)},$$

otteniamo che esse sono positiva e negativa, rispettivamente, come si può evincere dalla Figura 7 e dalla Figura 8, dove sono rappresentati in dettaglio i grafici dei numeratori.

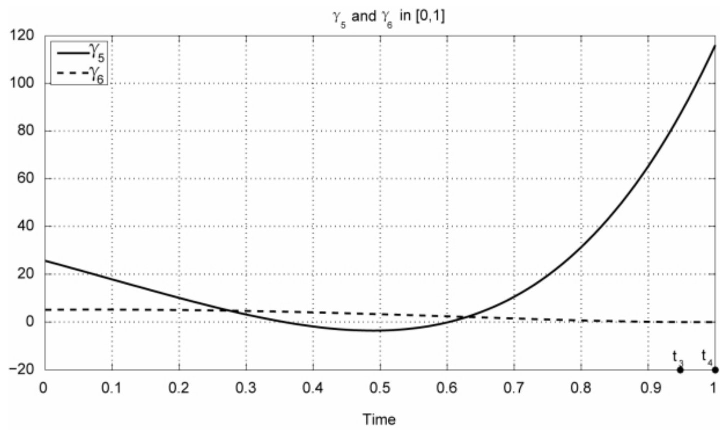

Fig. 7 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0,1]$.

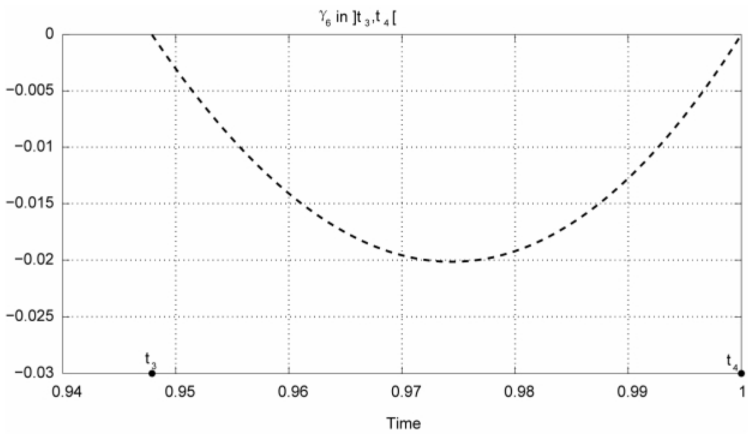

Fig. 8 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0,1]$.

Se ricordiamo che, in questo caso,

$$r_1^*(t) = 0 = \underline{r}_1(t),$$

$$r_2^*(t) = 7t + 8 = \overline{r}_2(t),$$

dalla (2.4.2), otteniamo

$$\rho_1^{(1)*}(t) \geq 0, \quad \rho_1^{(2)*}(t) = 0,$$
$$\rho_2^{(1)*}(t) = 0, \quad \rho_2^{(2)*}(t) \geq 0.$$

Quindi, dalla (2.4.3), segue

$$\rho_1^{(1)*}(t) = \Gamma_5 > 0,$$
$$\rho_2^{(2)*}(t) = -\Gamma_6 > 0,$$

se $F_2(t)$ è sufficientemente piccola e per ogni $F_1(t)$ non negativa.

In questa situazione, possiamo affermare che, nell'intervallo $]\,t_3, t_4\,[$, abbiamo un prezzo minimo per lo strumento $j = 1$, e il deficit è dato da

$$\rho_1^{(1)*}(t)\,\underline{r}_1(t) = \Gamma_5\,\underline{r}_1(t) = 0.$$

Invece, per $F_2(t)$ sufficientemente piccolo, il prezzo r_2^* è massimo e il mercato finanziario ha un surplus dato da

$$\rho_2^{(2)*}(t)\overline{r}_2(t) = -\Gamma_6\,\overline{r}_2(t) =$$
$$= \frac{-462t^6 - 605t^5 + 514t^4 + 2550t^3 + 1820t^2 - 1248t - 1024}{25(16 - t^2)} - F_2(t)(7t + 8).$$

Adesso procediamo al calcolo dell'Indice di Valutazione.
Si ha

$$\theta(t) = \frac{9t + 6}{10}, \quad i(t) = \frac{3}{2}t,$$

$$\sum_{i=1}^{2} l_i(t) = 2t + 5, \quad \sum_{i=1}^{m} s_i(t) = 4t + 5,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \tilde{s}_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} s_i(t)}{1 + i(t)} = \frac{2(4t + 5)}{2 + 3t},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{F}_j(t) = \frac{\sum_{j=1}^{2} F_j(t)}{(1 + i(t))(1 - \theta(t))} = \frac{20(F_1(t) + F_2(t))}{(4 - 9t)(2 + 3t)}.$$

L'Indice di Valutazione è quindi

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2t + 5}{\dfrac{2(4t + 5)}{2 + 3t} + \dfrac{20(F_1(t) + F_2(t))}{(4 - 9t)(2 + 3t)}} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{20(F_1(t) + F_2(t)) - t(6t + 11)(4 - 9t)}{(4 - 9t)(2 + 3t)(2t + 5)}}. \end{aligned}$$

Ne segue che, nell'intervallo $\left[0, \frac{4}{9}\right[$, se

$$20(F_1(t) + F_2(t)) \leq t(6t + 11)(4 - 9t),$$

l'economia ha una valutazione positiva. Lo stesso accade se

$$20(F_1(t) + F_2(t)) \geq t(6t + 11)(4 - 9t)$$

nell'intervallo $\left]\frac{4}{9}, 1\right]$ (dove $4 - 9t < 0$).
Questo esempio mostra come sia possibile ottenere informazioni utili dall'indice $E(t)$ che, per essere determinato, richiede soltanto dei semplici calcoli.

2.4.3 Esempio 3

Adesso vogliamo studiare un altro esempio in cui supponiamo

$$\tau_{11}(t) = 3t, \quad \tau_{12}(t) = -t + 1,$$

$$\tau_{21}(t) = t, \quad \tau_{22}(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}.$$

Sotto queste ipotesi, esistono $t_5 \in]0,638; 0,640[$ e $t_6 \in]0,997; 0,999[$, tali che il vettore

$$\begin{cases} x^*_{11}(t) = \dfrac{2t^2 + 28t + 8}{16 - t^2}, \\ x^*_{12}(t) = \dfrac{-3t^3 - 3t^2 + 20t + 8}{16 - t^2}, \\ x^*_{21}(t) = \dfrac{-t^3 - 6t^2 + 2t + 32}{16 - t^2}, \\ x^*_{22}(t) = \dfrac{2t^2 + 14t + 32}{16 - t^2}, \\ y^*_{11}(t) = \dfrac{6t^2 + 10t + 16}{16 - t^2}, \\ y^*_{12}(t) = \dfrac{-t^3 - 8t^2 + 6t + 16}{16 - t^2}, \\ y^*_{21}(t) = \dfrac{2t^2 + 16t + 24}{16 - t^2}, \\ y^*_{22}(t) = \dfrac{-t^3 - 5t^2 + 24}{16 - t^2}, \\ r^*_1(t) = 0, \\ r^*_2(t) = 0, \end{cases}$$

è soluzione della disequazione variazionale nell'intervallo $]t_5, t_6[$, poichè x^*_{ij}, y^*_{ij} soddisfano i vincoli e

$$\Gamma_5 = \frac{41t^4 + 95t^3 + 40t^2 - 60t}{16 - t^2} + F_1(t) > 0,$$
$$\Gamma_6 = \frac{3t^5 + 19t^4 + 11t^3 - 7t^2 - 18t + 8}{2(16 - t^2)} + F_2(t) > 0,$$

per $F_1(t)$ e $F_2(t)$ non negative. Infatti, se consideriamo

$$\gamma_5 = \frac{41t^4 + 95t^3 + 40t^2 - 60t}{16 - t^2},$$
$$\gamma_6 = \frac{3t^5 + 19t^4 + 11t^3 - 7t^2 - 18t + 8}{2(16 - t^2)},$$

otteniamo che sono entrambe positive e questo è ben visibile dalla Figure 9 in cui sono rappresentati i grafici dei numeratori.

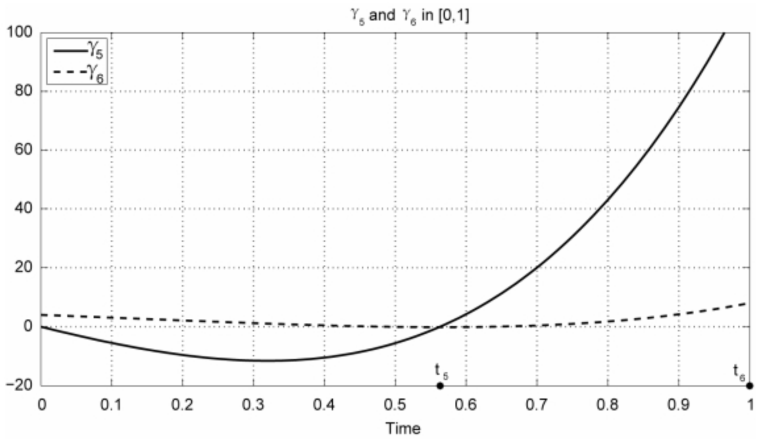

Fig. 9 γ_5 *e* γ_6 *in* $[0,1]$.

Osserviamo che, nel nostro caso,

$$r_1^*(t) = 0 = \underline{r}_1(t),$$

$$r_2^*(t) = 0 = \underline{r}_2(t),$$

perciò, dalla (2.4.2), segue che

$$\rho_1^{(1)*}(t) \geq 0, \quad \rho_1^{(2)*}(t) = 0,$$

$$\rho_2^{(1)*}(t) \geq 0, \quad \rho_2^{(2)*}(t) = 0.$$

Quindi, dalla (2.4.3), otteniamo

$$\rho_1^{(1)*}(t) = \Gamma_5 > 0,$$

$$\rho_2^{(1)*}(t) = \Gamma_6 > 0,$$

per ogni $F_1(t)$ e $F_2(t)$ non negative.
Come conseguenza del significato di $\rho_j^{(i)*}$, nell'intervallo $]\,t_5, t_6\,[$, abbiamo prezzi minimi per entrambi gli strumenti e il deficit è dato, rispettivamente, da

$$\rho_1^{(1)*}(t)\,\underline{r}_1(t) = \Gamma_5\,\underline{r}_1(t) = 0,$$
$$\rho_2^{(2)*}(t)\,\underline{r}_2(t) = \Gamma_6\,\underline{r}_1(t) = 0.$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'Indice di Valutazione, abbiamo

$$\theta(t) = \frac{5t+3}{8}, \quad i(t) = \frac{3}{2}t,$$

$$\sum_{i=1}^{2} l_i(t) = 2t+5, \quad \sum_{i=1}^{m} s_i(t) = 4t+5,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \tilde{s}_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^{2} s_i(t)}{1+i(t)} = \frac{2(4t+5)}{2+3t},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{F}_j(t) = \frac{\sum_{j=1}^{2} F_j(t)}{(1+i(t))(1-\theta(t))} = \frac{16(F_1(t)+F_2(t))}{5(1-t)(2+3t)}.$$

Ne segue che l'Indice di Valutazione è

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2t+5}{\dfrac{2(4t+5)}{2+3t} + \dfrac{16(F_1(t)+F_2(t))}{5(1-t)(2+3t)}} = \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{16(F_1(t)+F_2(t)) - \frac{1}{6}t(6t+11)(1-t)}{5(1-t)(2+3t)(2t+5)}}. \end{aligned}$$

Pertanto, nell'intervallo $[0, 1[$, se

$$16(F_1(t)+F_2(t)) \leq \frac{1}{6}t(6t+11)(1-t)$$

l'economia ha una valutazione positiva, tenendo conto che $1-t<0$.

Capitolo 3

Il problema duale e le variabili deficit e surplus

3.1 Continuità delle variabili deficit e surplus

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il mercato finanziario oggetto del nostro studio e abbiamo visto che in esso appaiono le variabili lagrangiane $\rho_j^{(1)*}(t)$ e $\rho_j^{(2)*}(t)$ associate alle condizioni sui prezzi. Queste variabili rappresentano, rispettivamente, il deficit e il surplus per unità e costituiscono uno strumento molto importante per analizzare il modello finanziario. Per questo motivo, vogliamo provare il seguente risultato di regolarità per $\rho_j^{(1)*}(t)$ e $\rho_j^{(2)*}(t)$, che costituisce il risultato principale della tesi.

Intanto, per comodità, poniamo

$$F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]^T,$$

$$P = \prod_{i=1}^{m} P_i.$$

Vogliamo provare il seguente teorema:

Teorema 3.1.1. *Sia $A \in C^0([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})$ fortemente monotona rispetto a x e y, monotona rispetto a r, cioè esiste α tale che, se $t \in [0,T]$,*

$$\langle\langle A(t,\nu_1) - A(t,\nu_2), \nu_1 - \nu_2 \rangle\rangle \geq \alpha(\|x_1 - x_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2), \tag{3.1.1}$$

$\forall \nu_1 = (x_1, y_1, r_1)$, $\nu_2 = (x_2, y_2, r_2) \in \mathbb{R}^{2mn+n}$.

Supponiamo che $\underline{r}(t)$, $\overline{r}(t)$, $h(t)$, $F(t) \in C^0([0,T], \mathbb{R}^n_+)$, $\tau(t) \in C^0([0,T], \mathbb{R}^{mn})$ e $s, l \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$, soddisfino la seguente Ipotesi (β):

- *esistono* $\delta_1(t) \in L^2([0,T])$ *e* $c_1 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$\|s(t)\| \leq \delta_1(t) + c_1;$$

- *esistono* $\delta_2(t) \in L^2([0,T])$ *e* $c_2 \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$\|l(t)\| \leq \delta_2(t) + c_2.$$

Allora le variabili lagrangiane $\rho^{(1)*}(t)$ *e* $\rho^{(2)*}(t)$*, che rappresentano il deficit e il surplus per unità, rispettivamente, sono entrambe continue.*

3.1.1 Dimostrazione del Teorema

Per provare la regolarità delle variabili deficit e surplus, prendiamo come punto di partenza il Teorema 2.2.1, che assicura la continuità della soluzione di equilibrio solo se l'operatore A, definito in (2.1.10), è fortemente monotono rispetto a (x, y, r). Richiamiamo tale teorema

Teorema 3.1.2. *Sia* $A \in C^0([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})$ *fortemente monotono. Siano* $s, l \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$, $\underline{r}(t)$, $\overline{r}(t) \in C^0([0,T], \mathbb{R}^n_+)$*. Allora la disequazione variazionale (2.1.9) ammette un'unica soluzione continua.*

Osserviamo che l'operatore A del problema dell'equilibrio finanziario (si veda 2.1.10) è fortemente monotono rispetto alle variabili x e y, ma soltanto monotono rispetto a r. Allora il Teorema 3.1.2 non può essere applicato direttamente. Siamo comunque in grado, sotto le ipotesi del Teorema 3.1.1, di provare l'esistenza di una soluzione di equilibrio continua.

A questo scopo, consideriamo la disequazione variazionale (2.1.9):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{n} \Big[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t) \Big] \times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{n} \Big[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t)(1+h_j(t)) \Big] \times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] \right\} dt \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \left\{ (1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \right\} \times \left[r_j(t) - r_j^*(t) \right] dt \geq 0, \\
&\quad \forall (x, y, r) \in P \times \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Possiamo affermare con certezza che la (2.1.9) ammette soluzione.

Adesso vogliamo provare che, supponendo che $\underline{r}(t)$ e $\overline{r}(t)$ siano funzioni continue, possiamo determinare soluzioni continue per la (2.1.9).
Quindi, sia $(x^*(t), y^*(t), r^*(t))$ una soluzione di (2.1.9). Ponendo, nella (2.1.9), $x_{ij} = x_{ij}^*$ e $y_{ij} = y_{ij}^*$, segue che il prezzo di equilibrio $r^*(t)$ verifica la disequazione variazionale:
Trovare $r^* \in R$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \left\{(1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t)\right\} \times \left[r_j(t) - r_j^*(t)\right] dt \geq 0, \tag{3.1.2}$$

$\forall r \in R$.
Osserviamo che, è possibile provare che la disequazione variazionale (3.1.2) è equivalente alle condizioni (2.1.4).
Definiamo ora, per $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \overline{E}_j &= \left\{t \in [0,T] : r_j^*(t) = \overline{r}_j(t)\right\}; \\ \underline{E}_j &= \left\{t \in [0,T] : r_j^*(t) = \underline{r}_j(t)\right\}; \\ E_j^* &= \left\{t \in [0,T] : \underline{r}_j(t) < r_j^*(t) < \overline{r}_j(t)\right\}. \end{aligned}$$

Dal momento che stiamo supponendo che $\underline{r}(t)$ e $\overline{r}(t)$ sono funzioni continue, ogni funzione continua $r^{**}(t) = (r_1^{**}(t), \ldots, r_n^{**}(t))$, uguale a $r_j^*(t)$ in $\overline{E}_j$ e $\underline{E}_j$ e, invece, $\underline{r}_j(t) < r_j^{**}(t) < \overline{r}_j(t)$ in E_j^*, verifica ancora la disequazione variazionale (3.1.2), poichè in E_j^* il coefficiente $\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t)$ è uguale a zero come conseguenza della (2.1.4). Ne segue che $r^{**}(t)$ verifica la condizione (2.1.4).

D'altra parte, scegliendo nella (2.1.9) $r_j = r_j^*$, $(x^*(t), y^*(t))$ verifica la disequazione variazionale:
Trovare $(x^*, y^*) \in P$ tale che

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t)\right] \right. \\ &\times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t)(1+h_j(t))\right] \\ &\left. \times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] \right\} dt \geq 0, \qquad \forall (x,y) \in P. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Si può provare che la disequazione variazionale (3.1.3) è equivalente alle condizioni (2.1.5)-(2.1.8).

Inoltre, è possibile dimostrare l'equivalenza tra il problema (3.1.3) e il problema di ottimizzazione

$$\max_P \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} r_j^*(t) \left\{(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)]\right\})dt. \tag{3.1.4}$$

Se (x^*, y^*) è soluzione del problema (3.1.4), allora è soluzione anche del problema

$$\max_P \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} r_j^*(t) \left\{(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)] + F_j(t)\right\})dt. \tag{3.1.5}$$

Poichè r^{**} coincide con r^* in $\overline{E}_j$ e in $\underline{E}_j$ e, in E_j^*, invece, il coefficiente $\sum_{i=1}^{m} r_j^{**}(t) \left\{(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)] + F_j\right\}$ è uguale a zero, ne segue che (x^*, y^*) è ancora soluzione di

$$\max_P \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} r_j^{**}(t) \left\{(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)] + F_j\right\})dt. \tag{3.1.6}$$

Allora, per le uguaglianze già citate, $(x^*(t), y^*(t))$ verifica

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \int_0^T \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} \Big[- \frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^{**}(t) \Big] \\
&\times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \Big[- \frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^{**}(t)(1 + h_j(t)) \Big] \\
&\times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] \Bigg\} dt \geq 0, \qquad \forall (x, y) \in P.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

L'operatore (3.1.7) è strettamente monotono rispetto a (x, y) e, quindi, in virtù del Teorema 3.1.2, l'unica soluzione $(x^*(t), y^*(t))$ è continua.

Pertanto, possiamo concludere che la soluzione $(x^*(t), y^*(t), r^{**}(t))$ è continua e permette di generalizzare il Teorema 3.1.1 a operatori che sono fortemente monotoni rispetto a (x, y) e soltanto monotoni rispetto a r.

Sottolineamo che $(x^*(t), y^*(t))$ è unica e non dipende dal prezzo di equilibrio $r^{**}(t)$.

Adesso siamo in grado di provare il nostro risultato principale, il Teorema 3.1.1.

Fissato ad arbitrio $j = 1, \dots, n$, poniamo:

$$I_{1,j}^{+} = \{t \in [0,T]: \ \rho_j^{(1)*}(t) > 0\}$$

$$I_{1,j}^{0} = \{t \in [0,T]: \ \rho_j^{(1)*}(t) = 0\}.$$

Dalla Deficit Formula (2.1.16) segue che, $\forall j = 1, \dots, n$,

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t))y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t) = \rho_j^{(1)*}(t) - \rho_j^{(2)*}(t).$$

$\rho_j^{(1)*}(t)$ è una funzione continua in $I_{1,j}^{+}$. Infatti, in $I_{1,j}^{+}$, dalle (2.1.15) segue che $\rho_j^{(2)*}(t) = 0$ e quindi, dalla Deficit Formula (2.1.16), in $I_{1,j}^{+}$ si ha

$$\rho_j^{(1)*}(t) = B_j(t) = \sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t))y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t), \tag{3.1.8}$$

cioè, $\rho_j^{(1)*}(t)$ è somma di funzioni continue.

Sottolineamo che la continuità di $\rho_j^{(1)*}(t)$ in $I_{1,j}^{+}$ implica che $I_{1,j}^{+}$ è un insieme aperto.

Nell'interno dell'insieme chiuso $I_{1,j}^{0}$, $\rho_j^{(1)*}(t)$ è una funzione continua, dal momento che in questo insieme $\rho_j^{(1)*} \equiv 0$.

Esaminiamo la continuità di $\rho_j^{(1)*}(t)$ in $\partial I_{1,j}^{+} = \partial I_{1,j}^{0}$. Sia $t_0 \in \partial I_{1,j}^{0}$ e proviamo la continuità di $\rho_j^{(1)*}(t)$ in t_0. Poichè $\partial I_{1,j}^{0} \subseteq I_{1,j}^{0}$, si ha $\rho_j^{(1)*}(t_0) = 0$. Dalla continuità di $B_j(t)$, segue che

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{0}}} B_j(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{0}}} (-\rho_j^{(2)*}(t)) = B_j(t_0)$$

e

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{+}}} B_j(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{+}}} \rho_j^{(1)*}(t) = B_j(t_0).$$

Possiamo quindi concludere che

$$B_j(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{+}}} \rho_j^{(1)*}(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_{1,j}^{0}}} (-\rho_j^{(2)*}(t)),$$

e tendendo conto della non negatività di $\rho_j^{(1)*}(t)$ e $\rho_j^{(2)*}(t)$, dev'essere necessariamente $B_j(t_0) = 0$. Questo significa che

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in I^+_{1,j}}} \rho_j^{(1)*}(t) = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in I^0_{1,j}}} \rho_j^{(1)*}(t) = 0 = \rho_j^{(1)*}(t_0).$$

In modo del tutto analogo è possibile provare la continuità di $\rho_j^{(2)*}(t)$ in $[0,T]$. Abbiamo così ottenuto la tesi.

3.2 Metodo computazionale

In questo paragrafo vogliamo fornire una procedura che permetta di calcolare numericamente le variabili deficit e surplus. Per prima cosa, è opportuno ricordare che, come abbiamo già osservato nel Capitolo 2, la disequazione variazionale (2.1.9) è equivalente al problema: Trovare $\nu^* \in \mathcal{K} = P \times \mathcal{R}$ tale che

$$\langle A(t,\nu^*(t)), \nu(t) - \nu^*(t)\rangle \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathcal{K}, \quad q.o.\ in\ [0,T]. \tag{3.2.1}$$

Come abbiamo già visto nel paragrafo precedente, possiamo costruire una soluzione di equilibrio della (3.2.1) continua. Per esempio, possiamo trovare una soluzione continua $r^{**}(t)$ che soddisfi la (2.1.4) nel modo seguente

$$r_j^{**}(t) = \begin{cases} \underline{r}_j(t) & t \in \overline{E}_j \\ \underline{r}_j(t_1) + \frac{\overline{r}_j(t_2) - \underline{r}_j(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_1) & t \in E_j^* \\ \overline{r}_j(t) & t \in \underline{E}_j, \end{cases}$$

(potendo essere $\overline{E}_j$ o $\underline{E}_j$, eventualmente, vuoto).
Allora, se $\nu^* = (x^*, y^*, r^{**})$ è la soluzione di equilibrio continua costruita, essa soddisfa:

$$\langle A(t,\nu^*(t)), \nu(t) - \nu^*(t)\rangle \geq 0 \quad \forall t \in\ [0,T]. \tag{3.2.2}$$

Consideriamo adesso una successione di partizioni π_n di $[0,T]$, tali che:

$$\pi_n = (t_n^0, t_n^1, \ldots, t_n^{N_n}), \quad 0 = t_n^0 < t_n^1 < \ldots < t_n^{N_n} = T$$

e

$$\delta_n = \max\{t_n^k - t_n^{k-1} :\ k = 1, \ldots, N_n\}$$

con $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Quindi, per ogni valore t_n^{k-1}, consideriamo la disequazione variazionale

$$\langle A(t_n^{k-1}, \nu^*(t_n^{k-1})), \nu - \nu^*(t_n^{k-1})\rangle \geq 0 \quad \forall \nu \in\ \mathcal{K}(t_n^{k-1}) \tag{3.2.3}$$

dove

$$\mathcal{K}(t_n^{k-1}) = \Bigg\{ \nu = (x, y, r) \in \mathbb{R}^{2mn+n} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i(t_n^{k-1}),$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = l_i(t_n^{k-1}),\ x_i \geq 0,\ y_i \geq 0,\ \forall\ i = 1, \dots, m,$$
$$\underline{r}_j(t_n^{k-1}) \leq r_j \leq \overline{r}_j(t_n^{k-1}),\ j = 1, \dots, n \Bigg\}.$$

Usando i metodi a noi ben noti per le disequazioni variazionali finito-dimensionali, possiamo costruire una funzione di interpolazione $\nu_n(t)$ tale che

$$\lim_{n} \|\nu_n(t) - \nu^*(t)\|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})} = 0.$$

Una volta ottenuta la soluzione di equilibrio, possiamo ottenere le variabili surplus e deficit dalla Deficit Formula (2.1.16) e dalle (2.1.15). Infatti, se $r_j^{**}(t) = \underline{r}_j(t)$, dalle (2.1.15) segue $\rho_j^{(2)*}(t) = 0$ e noi possiamo calcolare $\rho_j^{(1)*}(t)$ dalla (2.1.16). Analogamente, se $r_j^{**}(t) = \overline{r}_j(t)$, dalle (2.1.15) segue $\rho_j^{(1)*}(t) = 0$ e noi possiamo calcolare $\rho_j^{(2)*}(t)$ dalla (2.1.16). Infine, se $\underline{r}_j(t) < r_j^{**}(t) < \overline{r}_j(t)$ dalla (2.1.16) segue $\rho_j^{(1)*}(t) = \rho_j^{(2)*}(t) = 0$.

3.3 Analisi del contagio

Dalla Liability Formula (2.1.19) è possibile ricavare l'Indice di Valutazione $E(t)$, che noi abbiamo già richiamato nel Capitolo 2:

$$E(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i(t)}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)},$$

dove l'insieme

$$\tilde{s}_i(t) = \frac{s_i(t)}{1 + i(t)}, \quad \tilde{F}_j(t) = \frac{F_j(t)}{1 + i(t) - \theta(t) - \theta(t) i(t)}.$$

Avevamo osservato che se $E(t)$ è maggiore o uguale a 1 (meglio se $E(t)$ è vicino ad 1), la valutazione dell'equilibrio finanziario è positiva; invece se $E(t)$ è minore di 1, la valutazione dell'equilibrio finanziario è negativa. Cerchiamo di dare una spiegazione a ciò.

Dalla Liability Formula otteniamo

$$E(t)=1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(1)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{s}_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\tilde{F}_j(t)\right)} + \frac{\sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(2)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{s}_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\tilde{F}_j(t)\right)} \tag{3.3.1}$$

Questo nuovo modo di scrivere l'espressione dell'indice ci consente di fare delle considerazioni. Si può osservare che, se

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(1)*}(t) > \sum_{j=1}^{n}\rho_j^{(2)*}(t), \tag{3.3.2}$$

il bilancio di tutte le entità finanziarie è negativo, la totalità del deficit supera la somma di tutto il surplus, appare un contagio negativo e l'insolvenza di singole entità si propaga attraverso l'intero sistema. È sufficiente che solo un deficit $\rho_j^{(1)*}(t)$ sia grande per ottenere un bilancio negativo per tutto il sistema, anche se gli altri $\rho_j^{(2)*}(t)$ sono positivi.
Quando la condizione (3.3.2) è verificata, otteniamo $E(t) \leq 1$ e, quindi, anche l'indice $E(t)$ è un importante indicatore del fatto che avviene il contagio finanziario.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo preso in esame il problema dell'equilibrio finanziario con flussi e prezzi che variano al trascorrere del tempo, considerando la formulazione duale lagrangiana del modello. Abbiamo studiato la regolarità delle soluzioni della disequazione variazionale di evoluzione che governa tale modello finanziario. In particolare, abbiamo ottenuto risultati di continuità per la soluzione di equilibrio. La parte centrale della tesi, sfruttando i suddetti risultati, è stata dedicata a considerazioni sul fenomeno del contagio finanziario e alla dimostrazione di un risultato di continuità anche per le variabili lagrangiane deficit e surplus. Questo importante risultato di regolarità ci ha permesso, infine, di ottenere una procedura di calcolo in modo da determinare la soluzione di equilibrio e, quindi, le variabili lagrangiane deficit e surplus.

Bibliografia

[1] A. Barbagallo, P. Daniele, A. Maugeri, *Variational formulation for a general dynamic financial equilibrium problem. Balance law and liability formula*, Nonlinear Anal., 75 (2012), pp. 1104–1123.

[2] A. Barbagallo, P. Daniele, S. Giuffrè, A. Maugeri, *Varational approach for a general financial equilibrium problem: the Deficit formula, the Balance law and the Liability formula. A path to the economy recover*, submitted.

[3] A. Barbagallo, *Degenerate time-dependent variational inequalities with applications to traffic equilibrium problems*, Comput. Methods Appl. Math., 6 (2006), pp. 117–133.

[4] A. Barbagallo, *Regularity results for time-dependent variational and quasi-variational inequalities and application to calculation of dynamic traffic network*, Math. Models Methods Appl. Sci., 17 (2007), pp. 277-304.

[5] A. Barbagallo, *Regularity results for evolutionary nonlinear variational and quasi-variational inequalities with applications to dynamic equilibrium problems*, J. Global Optim., 40 (2008), pp. 29–39.

[6] A. Barbagallo, *Existence and regularity of solutions to nonlinear degenerate evolutionary variational inequalities with applications to traffic equilibrium problem*, Appl. Math. Compt., 208 (2009), pp. 1–13.

[7] A. Barbagallo, *On the regularity of retarded equilibria in time-dependent traffic equilibrium problems*, Nonlinear Anal., 71 (2009), pp. e2406–e2417.

[8] P. Daniele, S. Giuffrè, *General Infinite Dimensional Duality and Applications to Evolutionary Network Equilibrium Problems*, Optim. Lett., 1 (2007), pp. 227–243.

[9] P. Daniele, S. Giuffré, A. Maugeri, *Remarks on General Infinite Dimensional Duality with Cone and Equality Constraints*, Communications in Applied Analysis, 13 (2009), pp. 567–578.

[10] P. Daniele, S. Giuffrè, G. Idone, A. Maugeri, *Infinite Dimensional Duality and Applications*, Math. Ann., 339 (2007), pp. 221–239.

[11] A. Maugeri, F. Raciti, *Remarks on Infinite Dimensional Duality*, J. Global Optim., 46 (2010), pp. 581–588.

[12] M.B. Donato, M. Milasi, C. Vitanza, *Dynamic Walriasian price equilibrium problem: evolutionary variational approach with sensitivity analysis*, Optim. Lett., 2 (2008), pp. 113–126.

[13] M.B. Donato, M. Milasi, C. Vitanza, *Quasi-variational approach of a competitive economic equilibrium problem with utility function: existence of equilibrium*, Math. Model Methods Appl. Sci., 18 (2008), pp. 351–367.

[14] M.B. Donato, A. Maugeri, M. Milasi, C. Vitanza, *Duality theory for a dynamic Walrasian pure exchange economy*, Pac. J. Optim., 4 (2008), pp. 537–547.

[15] M. B. Donato, M. Milasi, C. Vitanza, *A new contribution to a dynamic competitive equilibrium problem*, Appl. Math. Lett., 23 (2010), pp. 148–151.

[16] A. Barbagallo, M.-G. Cojocaru, *Dynamic equilibrium formulation of oligopolistic market problem*, Math. Comput. Model., 49 (2009), pp. 966–976.

[17] A. Barbagallo, A. Maugeri, *Duality theory for the dynamic oligopolistic market equilibrium problem*, Optim., 60 (2011), pp. 29–52.

[18] S. Giuffrè, S. Pia, *Weighted traffic equilibrium problem in non pivot Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), e2054–e2061.

[19] A. Barbagallo, S. Pia, *Weighted variational inequalities in non-pivot Hilbert spaces with applications*, Comput. Optim. Appl., 48 (2011), pp. 487–514.

[20] S. Giuffrè, G. Idone, S. Pia, *Some classes of projected dynamical systems in Banach spaces and variational inequalities*, J. Global Optim., 40 (2008), 119–128.

[21] A. Maugeri, *Convex programming, variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem*, Appl. Math. Optim., 16 (1987), pp. 169–185.

[22] P. Daniele, *Variational inequalities for evolutionary financial equilibrium*, in Innovations in Financial and Economic Networks, A. Nagurney, ed., 2003, pp. 84–108.

[23] P. Daniele, *Variational inequalities for general evolutionary financial equilibrium*, in Variational Analysis and Applications, F. Giannessi, A. Maugeri, eds., Springer Verlag, 2003, pp. 279–299.

[24] P. Daniele, *Evolutionary Variational Inequalities Applied to Financial Equilibrium Problems in an Environment of Risk and Uncertainty*, Nonlinear Anal., 63 (2005), pp. 1645–1653.

[25] P. Daniele, *Dynamic Networks and Evolutionary Variational Inequalities*, Edward Elgar Publishing, Chentelham, 2006.

[26] P. Daniele, *Evolutionary Variational Inequalities and Applications to Complex Dynamic Multi-level Models*, Transport. Res. Part E, 46 (2010), pp. 855–880, doi: 10.1016/j.tre.2010.03.005.

[27] P. Daniele, S. Giuffrè, S. Pia, *Competitive Financial Equilibrium Problems with Policy Interventions*, J. Ind. Manag. Optim., 1 (2005), pp. 39–52.

[28] K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[29] A. Barbagallo, M.-G. Cojocaru, *Continuity of solutions for parametric variational inequalities in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., 351 (2009), pp. 707–720.

[30] A. Maugeri, L. Scrimali, *Global Lipschitz continuity of solutions to parameterized variational inequalities*, Boll. Unione Mat. Italiana, 2 (2009), pp. 45–69.

[31] A. Barbagallo, R. Di Vincenzo, *Lipschitz continuity and duality for dynamic oligopolistic market equilibrium problem with memory term*, J. Math. Anal. Appl., 382 (2011), pp. 231–247.

[32] P. Daniele, S. Giuffè, M. Lorino, A Maugeri, C. Mirabella, *Functional Inequalities and Analysis of Contagion in the Financial Networks*, to appear in Handbook of Functional Equations and Functional Inequalities (Th. M. Rassias, Editor), Springer, 2014.

[33] P. Daniele, S. Giuffè, M. Lorino,*Functional Inequalities, Regularity and Computation of the Deficit and Surplus Variables in the Financial Equilibrium Problem*, sottomesso.

[34] A. Barbagallo, P. Daniele, M. Lorino, A. Maugeri and C. Mirabella, *Further results for general financial equilibrium problems via variational inequalities* Journal of Mathematical Finance, 2013, 3, 33-52.

[35] H. M. Markowitz, *Portfolio selection*, J. Finance, 7 (1952), pp. 77–91.

[36] H. M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, New York, 1959.