DOTTORATO DI RICERCA
in
SCIENZE COMPUTAZIONALI E INFORMATICHE
Ciclo XXVII

Consorzio tra Università di Catania, Università di Napoli Federico II,
Seconda Università di Napoli, Università di Salerno

SEDE AMMINISTRATIVA: Università di Napoli Federico II

CRISTINA MIRABELLA

Il problema dell'equilibrio finanziario con termine di memoria di tipo Markowitz e vincoli elastici

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

IL COORDINATORE
Prof.ssa Gioconda Moscariello
TUTOR
Prof.Antonino Maugeri
Prof.ssa Laura Scrimali

Autore:
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania
Viale Andrea Doria, 6
95125, Catania,
Italia

e-mail:
mirabella@dmi.unict.it

Indice

Prefazione

L'importanza dei concetti di disequazione variazionale e quasi-variazionale, e della relativa teoria, è ben nota e documentata nella letteratura scientifica. Ciò è dovuto essenzialmente alla grande quantità di loro applicazioni a svariati campi della matematica, quali, ad esempio, la teoria dei controlli, la meccanica, i problemi di complementarità, la teoria delle reti, la teoria dei giochi, ecc. In particolare, la teoria delle disequazioni variazionali ha fornito un forte stimolo per lo sviluppo di modelli e metodologie avanzate nel campo finanziario. Un problema di equilibrio finanziario, infatti, può essere descritto mediante una formulazione variazionale che caratterizza il problema stesso. In tal modo è possibile studiare il problema tenendo conto delle notevoli proprietà delle disequazioni variazionali, che permettono di dimostrare teoremi di esistenza, unicità e calcolo delle soluzioni. La disequazione variazionale che rappresenta un modello finanziario si ottiene prendendo in considerazione le condizioni di equilibrio relative al modello stesso. In particolare, in un'economia finanziaria costituita da m settori, per esempio banche, imprese, istituti finanziari, ed altri istituti finanziari, inclusi i governi statali e locali, indichiamo con i il generico settore, ed n strumenti finanziari, per esempio mutui, fondi comuni di investimento, depositi a risparmio, fondi di mercato monetario, ecc, indichiamo con j il generico strumento finanziario. Per ogni stettore i la distribuzione ottimale di equilibrio degli strumenti, sia come attivi che come passivi, si ottiene massimizzando il valore degli attivi e minimizzando il valore dei passivi, tenendo conto dell'influenza causata dall'avversione al rischio che, analiticamente, è rappresentata dalla cosidetta funzione di utilità. L'utilità di ciascun settore può essere definita come una funzione che rappresenta una previsione del valore del portafoglio, sia come attività che come passività. Il valore atteso del portafoglio può essere ben descritto da due caratteristiche: il valore medio atteso e l'incertezza da cui dipende tale valore. Con tali premesse, dunque, il valore atteso del portafoglio si suppone essere uguale al valore del portafoglio valutato nel periodo attuale. Invece, l'incertezza relativa ad ogni settore, ovvero la valutazione al rischio rispetto al valore atteso del portafoglio, si basa sulla matrice Q^i di varianza-covarianza che denota la valutazione del settore rispetto alla deviazione standard dei prezzi per ogni strumento. Quindi, se indichiamo con x_{ij} e y_{ij} rispettivamente gli attivi e i passivi del settore i relativamente allo strumento j, ne segue che un classico esempio di funzione di utilità è dato dall funzione di Markowitz, ovvero dalla funzione:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}^T \cdot Q^i \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

In particolare, ogni settore i cercherà di ottimizzare la composizione attuale degli strumenti come attivi e come passivi, in modo da minimizzare il rischio, cioè minimizzare la funzione e, allo stesso tempo, massimizzare i valori delle attività e minimizzare i valori delle passività.

I primi autori che svilupparono un modello di equilibrio finanziario con multi-settori e multi-strumenti utilizzando la teoria delle disequzioni variazionali furono Nagurney, Dong e Hughes ([60]). Questi risultati sono stati, successivamente, ampliati dalla stessa Nagurney in [61] e [62] introducendo funzioni più generali di utilità. In [34], gli autori utilizzano per la prima volta la metodologia dei sistemi dinamici priettati per sviluppare un modello finanziario a più strati, il cui insieme di punti stazionari coincide con l'insieme delle soluzioni della disequazione variazionale sviluppata in [61]. Recentemente in [4], [16], [17],[18], [27] sono stati studiati modelli più generali, che introducono la dipendenza dei dati dal tempo considerandoli in un intervallo di tempo $[0, T]$. In particolare, osserviamo che nell'articolo di Daniele [19] la dinamicità è studiata per mezzo di disequazioni variazionali di evoluzione e queste sono più che altro infinito che finito dimensionali ed, inoltre, la matrice di varianza-covarianza e i volumi finanziari sono adesso dipendenti dal tempo. Gli articoli di Daniele e Maugeri [30] e Daniele, Maugeri e Oettli [31] affrontano delle applicazioni relative ai problemi di equilibrio finanziario dipendenti dal tempo usando, per la prima volta, l'approccio presente in [19]. Atre informazioni utili e rilevanti relative i problemi finanziari e le disequazioni variazionali sono presenti in [33] e [75]. Nel momento in cui si è generalizzato il modello finanziario introducendo la dipendenza dal tempo, si è considerata una funzione di utilità dipendente dal tempo e generica $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ ([4], [6], [7], [8], [18], [27], [26]). Nella mia tesi, invece di utilizzare una funzione di utilità generica, considero una funzione di utilità che non dipende solo dalla funzione di utilità introdotta da Markowitz, ma dipende anche da un termine di memoria, che esprime l'influenza delle precedenti soluzioni di equilibrio finanziario nell'equilibrio attuale. Cerchiamo di chiarire meglio l'importanza dell'introduzione del termine di memoria (per maggiori dettagli vedi [67]). È stato per primo Boltzmann ([10]) che, studiando la teoria di un corpo elastico, ha dato una prima formulazione matematica ai fenomeni ereditari. Più tardi, Volterra ([76]) diede il suo contributo alla teoria dell'elasticità, con l'introduzione di alcuni coefficienti ereditari in forma di termini integrali nelle equazioni costitutive di un corpo elastico con memoria. Da quel momento in poi, sono stati studiati notevoli applicazioni in diversi campi, quali l'economia, la meccanica e l'ingegneria. Nel nostro caso, si introduce il termine integrale di memoria nella rete finanziaria, giungendo ad un raffinamento del modello. Infatti, includiamo esplicitamente il contributo di flussi dal tempo iniziale al tempo di osservazione t, che causa la presenza del termine memoria. Quindi, siamo in grado di analizzare come la soluzione di equilibrio attuale è influenzata da quella precedente. Questo è uno dei motivi per cui consideriamo un modello che evolve nel tempo.

Un altro fondamentale aspetto del mio lavoro è che l'ammontare degli investimenti come attivi e come passivi si assumono dipendenti della soluzione prevista, cioè si assume che i vincoli siano flessibili e adattivi. Questo obiettivo è raggiunto proprio supponendo che i vincoli di uguaglianza dipendano dalla soluzione attesa in modo medio. Si sceglie di fare tale supposizione allo scopo di prendere in considerazione il fatto che, quando si sceglie un investimento, si tiene conto delle previsioni di mercato. Tale situazione è molto realistica visto che nessuno investe senza avere un'idea del comportamento futuro del mercato. Poichè il nostro modello evolve nel tempo, certamente gli investitori non possono avere una valutazione istante per istante, ma una valutazione in media. Pertanto, si evince che imporre una dipendenza dal valore medio non è un requisito "ad hoc", ma quello che accade nella vita reale. In questo modo prendiamo in considerazione l'influenza, per mezzo del valore in media, della distribuzione di equilibrio attesa per gli attivi ed i passivi sugli investimenti relativi a tutti gli strumenti finanziari. Nella letteratura questo genere di vincoli sono chiamati "vincoli adattivi o elastici". Il modello finanziario può anche includere l'intervento politico in forma di imposizioni di prezzo massimo di mercato e di tasse. Inoltre, è possibile anche includere i costi di gestione direttamente nella funzione obiettivo di ogni settore. Con tutte queste premesse si giunge ad una formulazione quasi-variazionale del problema di equilibrio finanziario. Lo scopo della tesi è provare un teorema di esistenza per la disequazione quasi-variazionale relativa alla funzione di utilità di Markowittz con il termine di memoria. Inoltre, viene presentata la teoria della dualità applicata al nostro problema, con lo scopo di introdurre un indice di valutazione $E(t)$, che è molto utile per le procedure di valutazione finanziarie di mercato, e le variabili deficit e surplus. Illustriamo, poi, il risultato ottenuto e l'indice $E(t)$ attraverso esempi numerici di mercati finanziari con termine di memoria e insieme dei vincoli adattivi. Inoltre, effettuiamo un paragone tra un modello finanziario con memoria ed uno senza memoria e scopriremo che il secondo è una prima approssimazione del primo. Infatti la differenza delle soluzioni è data dal termine $d = c \cdot [e^{-t} - (1-t)]$. Certamente molti dei fenomeni esaminati sono affetti da un'incertezza intrinseca. Il modello studiato è deterministico e può essere esteso ad un modello finanziario stocastico dove l'uso della variabile tempo può essere sostituita da una variabile random. Qualche autore ha già presentato articoli in questo campo ([23], [24], [41]).
Concludiamo l'introduzione descrivendo la struttura della tesi. Nel Capitolo 1 richiamiamo la teoria delle disequazioni variazionali e quasi-variazionali ed, in particolare, i risultati relativi all'esistenza della soluzione, introduciamo la teoria della dualità infinito dimensionale e descriviamo il metodo diretto. Nel Capitolo 2 presentiamo il generico problema dell'equilibrio finanziario fornendo la formulazione variazionale e i risultati di esistenza e dualità. Nel Capitolo 3 introduciamo il problema dell'equilibrio finanziario con termine di memoria e vincoli elastici, di cui otteniamo la disquazione quasi-variazionale che caratterizza il modello e, soprattutto, un teorema che garantisce l'esistenza della soluzione; inoltre applichiamo la teoria infinito dimensionale al modello considerato. Nel Capitolo 4 utilizziamo i risultati ottenuti applicandoli ad un caso concreto, ovvero, tramite degli

esempi, studiati computazionalmente, si osserva che il modello senza termine di memoria è una prima approssimazione del modello con termine di memoria. Dedichiamo, infine, l'ultimo capitolo dell tesi per trarre le nostre conclusioni e osservazioni finali.

Capitolo 1

Concetti e risultati preliminari

1.1 Disequazioni variazionali

Sia E uno spazio riflessivo di Banach sui reali, sia $\mathbb{K} \subset E$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso, sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una mappa sullo spazio duale E^* dotato della topologia debole*.

Definizione 1.1.1. Si definisce disequazione variazionale definita da $\mathbb{K}$ ed A il problema di trovare un punto $u \in \mathbb{K}$ tale che

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K}, \tag{1.1.1}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la mappa di dualità tra E^* ed E.

$\square$

Esistono due approcci che ci forniscono dei risultati relativi all'esistenza delle soluzioni per una disequazione variazionale, cioè l'approccio con l'ipotesi di monotonia e l'approccio senza l'ipotesi di monotonia.

1.1.1 Approccio senza ipotesi di monotonia

Nei teoremi di esistenza presenti in letteratura sono richiesti diversi tipi di ipotesi relative la continuità. Nel 1968 H.Brezis ([11] e anche [12], [13]) introdusse una sorta di semicontinuità inferiore che chiamò "pseudomonotonia". La seguente definizione specifica il significato di pseudomonotonia rispetto alla topologia debole dello spazio di Banach riflessivo.

Definizione 1.1.2. Un funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *pseudomonotona nel senso di Brezis (B-pseudomonotona)* se e solo se

1. Per ogni successione debolmente convergente ad u (cioè $u_n \rightharpoonup u$) in $\mathbb{K}$ e tale che $\limsup_n \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$ risulta che:
$$\liminf_n \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle\,, \quad \forall\, v \in \mathbb{K}.$$

2. Per ogni $v \in \mathbb{K}$ la funzione $u \to \langle Au, u - v\rangle$ è limitata inferiormente su un sottoinsieme limitato di $\mathbb{K}$.

$\square$

Un altro tipo di semicontinuità inferiore è l' hemicontinuità nel senso di Ky Fan ([36], [37], [38]), che chiamiamo F-hemicontinuità per evitare confusione con un altro concetto che introdurremo nel seguito.

Definizione 1.1.3. Un funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *F-hemicontinua* se e solo se per ogni $v \in \mathbb{K}$ la funzione $u \to \langle Au, u - v\rangle$ è debolmente semicontinua inferiormente su $\mathbb{K}$.

$\square$

Ricordiamo, inoltre, anche le seguenti definizioni di continuità, che saranno utilizzate insieme ad alcune ipotesi di monotonia.

Definizione 1.1.4. Un funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *hemicontinua lungo i segmenti* se e solo la funzione
$$t \longmapsto \langle A\,(tu + (1-t)\,v)\,, w\rangle\,, \quad t \in [0,1]$$
è continua per ogni $u, v, w \in \mathbb{K}$.

$\square$

Definizione 1.1.5. Un funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *hemicontinua inferiormente lungo i segmenti* (vedi [31]) se e solo la funzione
$$\xi \longmapsto \langle A\xi, u - v\rangle$$
è inferiormente semicontinua per ogni $u, v \in \mathbb{K}$ sul segmento $[u, v]$.

$\square$

Nel caso finito dimensionale, è noto il seguente risultato di P. Hartmann e G. Stampacchia (vedi [46], [72]):

Teorema 1.1.1. *Supponiamo che $dimE < +\infty$ e che $\mathbb{K}$ sia convesso e compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione continua. Allora la disequazione variazionale (1.1.1) ammette soluzioni.*

□

I teoremi di esistenza nel caso infinito dimensionale con $\mathbb{K}$ debolmente compatto sono i seguenti:

Teorema 1.1.2. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un sottoinsieme di E non vuoto, convesso e debolmente compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione B-pseudomonotona. Allora la disequazione variazionale (1.1.1) ammette soluzioni (vedi [11]).*

□

Teorema 1.1.3. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un sottoinsieme di E non vuoto, convesso e debolmente compatto. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione F-hemicontinua. Allora la disequazione variazionale (1.1.1) ammette soluzioni (vedi [36], [37], [38]).*

□

Osserviamo che il Teorema 1.1.1 è una generalizzazione del Teorema 1.1.2 nel caso in cui $\dim E < +\infty$. Infatti, una funzione continua $A : \mathbb{K} \to E$ è anche B-pseudomonotona ed F-hemicontinua ma il viceversa, in generale, non vale, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.1.1. Fissiamo $a > 1$ e consideriamo la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1/x + a, & x \in]1/2a, 1[\\ -a, & x \in]0, 1/2a[\\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x)$ è F-hemicontinua su $[0, 1]$, ma non è continua. Il punto $x_0 = 1/a$ è soluzione della disequazione variazionale corrispondente alla funzione f e all'intervallo $[0, 1]$.

Un confronto tra la B-pseudomonotonia e la F-hemicontinuità è dato dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.1.1. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ un funzione F-hemicontinua, con $\mathbb{K}$ sottoinsieme di E chiuso e convesso. Allora A è B-paseudomonotona.*

□

Consideriamo, adesso, le disequazioni variazionali relative solamente al sottoinsieme chiuso e convesso $\mathbb{K}$ di E. I teoremi di esistenze relativi alla B-paseudomonotonia e alla F-hemicontinuità sono i seguenti.

Teorema 1.1.4. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione B-paseudomonotona e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Inoltre, supponiamo che esiste un punto $u_0 \in \mathbb{K}$ tale che*

$$\lim_{\|u\| \to \infty,\, u \in \mathbb{K}} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = +\infty \tag{1.1.2}$$

allora la (1.1.1) ammette soluzioni ([11]).

□

Teorema 1.1.5. *Sia* $A : \mathbb{K} \to E^*$ *una funzione F-hemicontinua e sia* $\mathbb{K}$ *non vuoto, chiuso e convesso. Inoltre, supponiamo che A soddisfi la seguente condizione:*

H1) *Esiste* $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ *non vuoto e debolmente compatto e* $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}$ *compatto, tali che per ogni* $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_1$ *esiste* $w \in \mathbb{K}_2$ *tale che*

$$\langle Av, v - w \rangle > 0$$

allora la (1.1.1) ammette soluzioni ([36], [38]).

□

È possibile confrontare l'ipotesi (1.1.2) del Teorema 1.1.4 con l'ipotesi H1) del Teorema 1.1.5. In particolare, vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.1.2. *La condizione (1.1.2) implica l'ipotesi H1).*

□

Possiamo fornire una variante del teorema 1.1.4 e del teorema 1.1.5 in cui la condizione (1.1.2) e l'ipotesi H1) sono sostituite dalla seguente condizione:

H2) Esiste $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tale che

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \ : \ \|v\| = R\}\,.$$

Abbiamo, quindi, il seguente risultato

Teorema 1.1.6. *Sia* $A : \mathbb{K} \to E^*$ *una funzione B-pseudomonotona o F-hemicontinua e sia* $\mathbb{K}$ *non vuoto, chiuso e convesso. Supponiamo, inoltre, che sia soddisfatta la condizione H2), allora la (1.1.1) ammette soluzioni.*

□

Osserviamo che la condizione 2. della definizione 1.1.2 di B-pseudomonotonia può essere sostituita dalla seguente ipotesi:

2'. A è continua su qualunque sottospazio finito dimensionale.

In particolare, Brezis, Nirenberg e Stampacchia ([14]) provarono il seguente Teorema.

Teorema 1.1.7. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione che verifichi le condizioni 1. e 2'. di B-pseudomonotonia e sia $\mathbb{K}$ non vuoto, chiuso e convesso. Supponiamo, inoltre, che esiste un sottoinsieme compatto L di $\mathbb{K}$ ed $u_0 \in L$ tale che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K} \setminus L$$

allora la (1.1.1) ammette soluzioni.

$\square$

Il seguente risultato è stato ottenuto da Ricceri (vedi [64]):

Teorema 1.1.8. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia non vuoto, chiuso e convesso, e che il suo interno relativo sia non vuoto. Supponiamo che $A : \mathbb{K} \to E^*$ sia una funzione debolmente continua*. Inoltre, siano $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ due sottoinsiemi di $\mathbb{K}$ non vuoti e compatti, con $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ finito dimensionale, tale che per ogni $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_1$ esiste un $w \in \mathbb{K}_2$ tale che*

$$\langle Av, v - w \rangle > 0$$

allora la (1.1.1) ammette soluzioni.

$\square$

Nel precedente Teorema la funzione A si suppone essere debolmente continua* e si richiede che l'interno relativo di $\mathbb{K}$ sia non vuoto. Queste ipotesi non possono essere rimosse come mostra un controesempio in [39] (vedi anche [73]). Tuttavia, in molte disequazioni variazionali infinito dimensionali relativi a problemi di equilibrio (vedi per esempio [22], [25], [29], [32], [42], [47], [48], [49], [56], [64]) l'interno relativo dell'insieme dei vincoli $\mathbb{K}$ è vuoto, mentre il quasi interno relativo è non vuoto.

1.1.2 Approccio con ipotesi di monotonia

L'approccio con l'ipotesi di monotonia è dovuto ad Hartmann e Stampacchia ([46] e [70]) che provarono il seguente teorema.

Teorema 1.1.9. *Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia $\mathbb{K}$ un sottoinsieme di E chiuso e convesso. Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione monotona e continua su un sottospazio finito dimensionale di $\mathbb{K}$ (alternativamente, sia $A : E \to E^*$ monotona ed hemicontinua lungo i segmenti). Allora, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione per la (1.1.1) è che esista una costante R tale che almeno una soluzione della disequazione variazionale*

$$u_R \in \mathbb{K}_R, \quad \langle Au_R, v - u_R \rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{K}_R$$

soddisfi la disequazione

$$\|u_R\| < R.$$

□

Ricordiamo la definizione di funzione monotona

Definizione 1.1.6. Una funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *monotona* se

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{K}. \tag{1.1.3}$$

□

Il motivo per cui nel Teorema 1.1.9 si richiedono le ipotesi che la funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ sia monotona e continua su un sottospazio finito dimensionale di $\mathbb{K}$ o ,alternativamente, che $A : E \to E^*$ sia monotona ed hemicontinua lungo i segmenti, riflette anche quì, il fatto che quando A è definita su tutto lo spazio E, se essa è monotona ed hemicontinua lungo i segmenti, essa è anche continua su un sottospazio finito dimensionale di $\mathbb{K}$. Il ruolo dell'ipotesi di monotonia è che, da

$$\langle Au, v - u\rangle \leq \langle Av, v - u\rangle \quad \forall\, u, v \in \mathbb{K}$$

è possibile ottenere il Lemma di Minty se A è hemicontinua lungo i segmenti su $\mathbb{K}$ e se $v_n \rightharpoonup u$ in $\mathbb{K}$, allora

$$0 \leq \liminf_n \langle Av_n, v_n - u\rangle\,, \quad \forall\, u \in \mathbb{K}.$$

È sorprendente come Brezis, Nirenberg e Stampacchia furono i primi a notare che nel Teorema 1.1.9, invece della monotonia di A è sufficiente richiedere che (vedi [14]):

$$\langle Au, u - v\rangle \leq 0 \text{ implica } \langle Av, v - u\rangle \geq 0 \;\; \forall\, u, v \in \mathbb{K}.$$

Allora Karamardian ha considerato un concetto più generale di monotonia, che è detta pseudomonotonia, ed è data dalla seguente definizione.

Definizione 1.1.7. Una funzione $A : \mathbb{K} \to E^*$ è detta *pseudomonotona nel senso di Karamardian (K-pseudomonotona)* se e solo se per ogni $u, v \in \mathbb{K}$

$$\langle Av, u - v\rangle \geq 0 \;\Rightarrow\; \langle Au, u - v\rangle \geq 0.$$

□

Gli autori in [50], usando la K-pseudomonotonia, mostrarono il seguente Teorema, come generalizzazione del Teorema 1.1.9

Teorema 1.1.10. *Sia $\mathbb{K}$ chiuso e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona che è continua su un sottospazio finito dimensionale di E. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) *la (1.1.1) ammette soluzioni.*

b) *la condizione H2) è soddisfatta, cioè esistono $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tali che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \ : \ \|v\| = R\}\,.$$

c) *Esiste un punto $u_0 \in \mathbb{K}$ tale che l'insieme*

$$\{v \in \mathbb{K} \ : \ \langle F(v), v - u_0 \rangle < 0\}$$

è limitato.

□

Nel Teorema 1.1.10 è richiesto che A sia continua su un sottospazio finito dimensionale di E contenuto in $\mathbb{K}$ e non si considera, invece, l'ipotesi alternativa in cui A è hemicontinua lungo i segmenti. Questo fatto è dovuto probabilmente alla mancanza di una corrispondenza tra l'ipotesi di K-pseudomonotonia ed hemicontinuità lungo i segmenti e l'ipotesi di continuità su un sottospazio finito dimensionale. D'altra parte, il Lemma di Minty rimane verificato come mostra il seguente Lemma ([55]).

Lemma 1.1.1. *Sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente hemicontinua lungo i segmenti. Allora $u \in \mathbb{K}$ è una soluzione per la (1.1.1) se e solo se u è soluzione della disequazione variazionale di Minty (MVIP)*

$$u \in \mathbb{K} \ : \ \langle Av, v - u \rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{K} \tag{1.1.4}$$

□

Tuttavia, il precedente Teorema può essere generalizzato supponendo che A sia inferiormente hemicontinua lungo i segmenti di $\mathbb{K}$, come afferma il seguente risultato.

Teorema 1.1.11. *Sia $\mathbb{K}$ chiuso e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to E^*$ una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente hemicontinua lungo i segmenti. Supponiamo che la condizione H2) sia soddisfatta, cioè esistono $u_0 \in \mathbb{K}$ e $R > \|u_0\|$ tali che*

$$\langle Av, v - u_0 \rangle > 0, \ \ \forall\, v \in \mathbb{K} \cap \{v \in E \ : \ \|v\| = R\}\,.$$

Allora la (1.1.1) ammette soluzioni.

□

Come conseguenza del precedente Teorema otteniamo un corollario che potrebbe essere considerato una generalizzazione del Teorema 1.1.9.

Corollario 1.1.1. *Se $\mathbb{K}$ è chiuso, convesso e limitato ed A è K-pseudomonotona ed inferiormente hemicontinua lungo i segmenti, allora la (1.1.1) ammette soluzioni.*

$\square$

Quindi, il Teorema 1.1.11 generalizza il Teorema 1.1.10 poichè A è inferiormente hemicontinua lungo i segmenti, invece, nel Teorema 1.1.10 è richiesto che A sia continua su un sottospazio finito dimensionale di E. D'altra parte una funzione K-pseudomonotona ed inferiormente hemicontinua in generale non è continua su uno spazion finito dimensionale, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.1.2. Fissiamo $a > 1$ e consideriamo la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} -1/x + a, & x \in]1/2a, 1[\\ -a, & x \in [0, 1/2a] \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

È semplice verificare che $f(x)$ è monotona, la funzione $\xi \to \langle f(\xi), u - v\rangle$ è inferiormente semicontinua per ogni $u, v \in [0, 1]$ sul segmento $[u, v]$, ma $f(x)$ non è continua.

$\square$

Per concludere, possiamo osservare che, in letteratura, esistono alcuni risultati che generalizzano la teoria sulle disequazione variazionali introdotta. In particolare, A. Domokos e J. Kolumbàn (vedi [35]) considerarono un approccio per la teoria delle disequazioni variazionali che include disequazioni variazionali definite su spazi di Banach non riflessivi. Un esempio dei risultati di esistenza ottenuti sotto tali ipotesi è il seguente Teorema.

Teorema 1.1.12. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, sia $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $F(\cdot, r)$ sia misurabile per ogni $r \in \mathbb{R}^n$, $F(\omega, \cdot)$ sia continua per ogni $\omega \in \Omega$, $F(\cdot, r)$ sia monotona non decrescente per ogni $r \in \mathbb{R}^n$, $F(\cdot, r) \in L^1(\Omega)$ per ogni $r \in \mathbb{R}^n$. Introduciamo l'operatore di Nemitski definito dalla F, cioè:*

$$T(f)(\omega) = F(\omega, f(\omega)),$$

definito da L^∞ a valori in L^1 continua, limitata e monotona. Sia $\mathbb{K} \subset L^\infty = (L^1(\Omega))^*$ un'insieme chiuso, convesso e limitato. Consideriamo la seguente disequazione variazionale:
Trovare $f_0 \in \mathbb{K}$ tale che

$$\langle f - f_0, T(f_0)\rangle = \int_\Omega F(\omega, f_0(\omega))(f(\omega) - f_0(\omega))d\omega \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathbb{K}. \tag{1.1.5}$$

Allora la (1.1.5) ammette soluzioni.

$\square$

1.2 Disequazioni quasi-variazionali

Nel nostro percorso intendiamo occuparci del problema dell'equilibrio finanziario nel caso in cui gli investimenti sono elastici o adattivi, cioè dipendono dalla media della soluzione di equilibrio stimanta. Per questo motivo, dobbiamo introdurre le disequazioni quasi-variazionali che ben si adattano a descrivere tale problema. Noi useremo il quadro di riferimento riportato di seguito, mentre per casi più generali rimandiamo ai lavori [71] e [74].

Definizione 1.2.1. Sia V uno spazio di Banach riflessivo il cui duale topologico, accoppiamento di dualità e la norma sono denotati, rispettivamente, con $V^1, \langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$. Sia $\mathbb{K} : V \to 2^V$ un'applicazione multivoca. Allora il problema

$$\textit{Trovare } x^* \in \mathbb{K}(x^*) \textit{ tale che } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{K}(x^*) \tag{1.2.1}$$

si chiama *disequazione quasi-variazionale.*

□

Per poter dare alcuni teoremi di esistenza per una disequazione quasi variazionale, è conveniente richiamare la definizione di *"Convergenza di insiemi nel senso di Mosco.*

Definizione 1.2.2. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert e $\mathbb{K} \subset V$ un insieme non vuoto, chiuso e convesso. Una successione di sottoinsiemi $\mathbb{K}_n$ non vuoti, chiusi e convessi converge a $\mathbb{K}$ nel senso di Mosco (vedi [59]) (in breve $\mathbb{K}_n \to \mathbb{K}$), se e solo se:

(i) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente ad x, con $x_n \in \mathbb{K}_n$ per n abbastanza grande, allora $x \in \mathbb{K}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{K}$ esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fortemente convergente ad x in V tale che $x_n \in \mathbb{K}_n$ per n abbastanza grande.

□

Possiamo parlare di convergenza nel senso di Mosco anche nel caso delle multifunzioni; la definizione diventa allora la seguente ([1]):

Definizione 1.2.3. Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert e $\mathbb{K} : V \to 2^V$ una multifunzione. Per ogni $x \in V$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente ad x (in breve $x_n \rightharpoonup x$), $\mathbb{K}(x_n)$ converge nel senso di Mosco a $\mathbb{K}(x)$, se e solo se:

(i) $\forall \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}(x_n)$ debolmente convergente ad $y \in \mathbb{K}(x)$;

(ii) $\forall y \in \mathbb{K}(x)$ esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}(x_n)$, per n abbastanza grande, fortemente convergente ad y.

□

Vale, dunque, il seguente recente teorema di esistenza ([1])

Teorema 1.2.1. *Sia V uno spazio di Banach riflessivo. Indichiamo con V', $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\|\cdot\|$ il duale, l'accoppiamento di dualità e la norma di V, rispettivamente. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(i) *$F : V \to V'$ hemicontinua lungo i segmenti e fortemente monotona.*

(ii) *F limitata e per ogni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in V tale che $x_n \to x$ e per ogni $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in V debolmente convergente ad y risulta*

$$\langle F(x), y - x\rangle \leq \underbrace{\liminf}_{n} \langle F(x_n), y_n - x_n\rangle .$$

(iii) *Data una multifunzione $K : V \to 2^V$ a valori non vuoti, chiusi e convessi. Per ogni $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ in V debolmente convergente ad x^*, $\mathbb{K}(x_n^*)$ converge nel senso di Mosco a $\mathbb{K}(x^*)$.*

Allora il problema

$$\langle F(x^*), x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{K}(x^*)$$

ammette almeno una soluzione.

□

Adesso presentiamo un altro Teorema di esistenza collegato con il precedente ma in un contesto che permette l'applicazione di tale risultato al problema dell'equilibrio finanziario con vincoli adattivi o elastici.
Diamo alcuni concetti preliminari.
Consideriamo uno spazio di Hilbert $L = L^2([0,\bar{t}], \mathbb{R}^n)$, dove $[0,\bar{t}]$, con $\bar{t} > 0$, è l'intervallo di tempo preso in considerazione. Lo spazio duale di L è denotato con L^*. Su $L\times L^*$definiamo la forma canonica bilineare nel seguente modo:

$$\langle\langle G, x\rangle\rangle = \int_0^{\bar{t}} \langle G(t), x(t)\rangle dt, \qquad G \in L^*, x \in L,$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo che $F : [0,\bar{t}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soddisfi la seguente condizione:

(C1) F sia misuabile in t per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e continua rispetto a v quasi ovunque in $[0,\bar{t}]$, ed

$$\exists\, \delta_1 \in L^2([0,\bar{t}]) \text{ tale che } \|F(t,v)\| \leq \delta_1(t) + \|v\| .$$

Sia $d : [0, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ tale che sia soddisfatta la seguente condizione:

(C2) $d(t, v)$ sia misuabile in t per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e continua rispetto a v quasi ovunque in $[0, \bar{t}]$, ed

$$\exists\, \delta_2 \in L^2([0, \bar{t}]) \text{ ed } \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tale che}$$

Consideriamo il seguente insieme

$$E = \{x \in L \;:\; \underline{x}_i(t) \le x_i(t) \le \overline{x}_i(t), q.o.in[0, \bar{t}], i = 1, \ldots, n\},$$

con $\underline{x}(t), \overline{x}(t) \in L^2([0, \bar{t}], \mathbb{R}^n)$ e $0 \le \underline{x}_i(t) \le \overline{x}_i(t)$ q.o in $[0, \bar{t}], i = 1, \ldots, n$. È semplice verificare che E sia un sottoinsieme di L chiuso, convesso e limitato.

Consideriamo la seguente disequazione quasi-variazionale

$$\langle\langle F(t, x^*), x - x^* \rangle\rangle \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}(x^*),$$

dove $K : E \to 2^E$ è una multifunzione definita come segue

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(x^*) \;=\; & \left\{ x \in E \;:\; \sum_{i=1}^{n} \phi_{ji} x_i(t) = d_j \left(t, \int_0^{\bar{t}} x^*(s) ds \right), \right. \\ & \left. q.o.\text{in } [0, \bar{t}], \phi_{ji} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, l \right\}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Osserviamo che i vincoli di uguaglianza dipendono dalla soluzione considerata in media. Infatti, in un quadro evolutivo, considerare la soluzione non istante per istante, ma in media rispetto all'intervallo di tempo, è più ragionevole e realistico. Inoltre, i vincoli sono ben definiti poichè ogni funzione quadrato integrabile su un intervallo limitato $[0, \bar{t}]$ è integrabile e vale l'ipotesi (C2).

Osservazione 1.2.1. La precedente formulazione generale include alcuni dei più comuni problemi quasi-variazionali. Per esempio, se $\underline{x}(t) = 0$ la (1.2.2) rappresenta l'insieme dei vincoli del problema dell'equilibrio del traffico con richiesta di traffico in presenza di congestione ([65]) e se $\overline{x}(t)$ è abbastanza grande e $\underline{x}(t) = 0$ è descritto il problema di equilibrio finanziario in situazioni molto generali ([66]).

□

Osservazione 1.2.2. Supponiamo che $\forall y \in E$, $0 \in \mathbb{K}(y)$. Questa condizione non è restrittiva. Infatti, poichè noi siamo interessati alle soluzioni $x^* \in \mathbb{K}(x^*)$, possiamo limitare la nostra attenzione ai punti $y \in \mathbb{K}(y)$. Quindi, se poniamo $\overline{\mathbb{K}}(y) = \mathbb{K}(y) - y$, per $y \in \mathbb{K}(y)$, allora $0 \in \overline{\mathbb{K}}(y)$.

□

In questo contesto, ispirato dal precedente Teorema 1.2.1, è stato provato il seguente Teorema ([69]).

Teorema 1.2.2. *Sia $F : [0, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e sia $d : [0, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ tali che soddisfino le condizioni (C1) e (C2), rispettivamente. Inoltre, supponiamo che $F(t, x)$ sia Fan-hemicontinua e fortemente monotona in x. Allora, il problema (1.2.1) ammette soluzioni.*

$\square$

Il Teorema 1.2.2 richiede ipotesi abbastanza restrittive come la forte monotonia. Nel lavoro [21] gli autori hanno dimostrato un teorema che attenua le ipotesi sulla forte monotonia nel caso della disequazione quasi-variazionale che descrive il problema di equilibrio finanziario nella forma più generale.

In particolare, osserviamo che la disequazione quasi-variazionale che governa il problema dell'equilibrio finanziario è la seguente

$$\text{Trovare } w^* \in \mathbb{K}(w^*) \text{ tale che}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^*(t) \right] \cdot [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] + \right. \\
+ &\left. \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^*(t)(1 + h_j(t)) \right] \cdot [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] \right\} dt + \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \left\{ (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1 + h_j(t)) y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \right\} \cdot [r_j(t) - r_j^*(t)] dt \geq 0, \\
&\qquad \forall w \in \mathbb{K}(w^*),
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}(w^*) \;=\; &\left\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in E : \; \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i \left(t, \int_0^T w^*(s)\, ds \right), \right. \\
&\left. \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i \left(t, \int_0^T w^*(s)\, ds \right) \text{ q.o. in } [0, T], i = 1, \ldots, m \right\},
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

ed

$$\begin{aligned}
E = \big\{ &w = (x(t), y(t), r(t)) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{2mn+n}) : \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \\
&\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \overline{y}(t), \; \underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t) \text{ q.o. in } [0, T] \big\}.
\end{aligned}$$

Il modello che porta a tale disequazione variazionale sarà affrontato nel Capitolo 3. Chiamiamo Hp. 1 le seguenti ipotesi:

Hp. 1:

- *La funzione di utilità* $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ *è definita su* $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *è misurabile in* t *ed è continua rispetto ad* x_i *e* y_i.
- $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_{ij}}$ *e* $\dfrac{\partial u_i}{\partial y_{ij}}$ *esistono e sono misurabili in* t *e continue rispetto ad* x_i *e* y_i.
- $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$, *e q.o. in* $[0,T]$*sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

$$|u_i(t,x,y)| \leq \alpha_i(t)\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2.5}$$

e

$$\Big|\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial x_{ij}}\Big| \leq \beta_{ij}(t)\|y\|, \quad \Big|\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial y_{ij}}\Big| \leq \gamma_{ij}(t)\|x\|, \tag{1.2.6}$$

dove α_i, β_{ij}, γ_{ij} *sono funzioni non negative di* $L^\infty([0,T])$.

- *La funzione* $u_i(t,x,y)$ *è concava.*
- $-\dfrac{\partial u_i(t, x_i(t), y_i(t))}{\partial x_{ij}}$ *e* $-\dfrac{\partial u_i(t, x_i(t), y_i(t))}{\partial y_{ij}}$ *sono funzioni strettamente monotone.*

Chiamiamo (α) le seguenti ipotesi:

(α_1): *le funzioni* s, l *sono funzioni di Carathéodory, ció significa che sono misurabili in* t *e continue rispetto alla seconda variabile*;

(α_2): *esistono* $\delta_1(t) \in L^2([0,T])$ *e* $c_1 \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\|s(t,x)\| \leq \delta_1(t) + c_1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^{mn};$$

(α_3): *esistono* $\delta_2(t) \in L^2([0,T])$ *e* $c_2 \in \mathbb{R}$ *tali che:*

$$\|l(t,x)\| \leq \delta_2(t) + c_2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} A(t,w) &= A(t, x(t), y(t), r(t)) \\ &= \Bigg(\left[-\frac{\partial u_i\left(t, x_i(t), y_i(t)\right)}{\partial x_{ij}} - r_j(t)\left(1 - \tau_{ij}(t)\right) \right]_{ij}, \\ &\quad \left[-\frac{\partial u_i\left(t, x_i(t), y_i(t)\right)}{\partial y_{ij}} + r_j(t)\left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left(1 + h_j(t)\right) \right]_{ij}, \\ &\quad \left[\sum_{i=1}^{m} \left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left[x_{ij}(t) - \left(1 + h_j(t)\right) y_{ij}(t)\right] + F_j(t) \right]_j \Bigg). \end{aligned}$$

allora la disequazione (1.2.3) diventa

$$\langle A(t, w^*), w - w^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{K}(w^*). \tag{1.2.7}$$

Vale, dunque, il seguente Teorema

Teorema 1.2.3. *Sia $A : [0, T] \times E \to L^2([0, T], \mathbb{R}^{2m+n})$ una funzione limitata, fortemente monotona in x e y, monotona in r e Fan-hemicontinuous e soddisfi le condizioni (Hp. 1) ed (α). Allora la disequazione (1.2.7) ammette soluzioni.*

□

Questo nuovo Teorema attenua le ipotesi di forte monotonia, in quanto rispetto alla variabile r è richiesta solo la monotonia.

1.3 Teoria della dualità infinito dimensionale

Dedichiamo questo paragrafo alla dualità Lagrangiana infinito dimensionale che recentemente ha avuto un grande impulso. Infatti, le condizioni, chiamate condizioni di "qualificazione, che valgono nel caso finito dimensionale per garantire la forte dualità, non sono valide nel caso infinito dimensionale.

Presentiamo la teoria della dualità per un problema convesso di ottimizzazione.

Sia X uno spazio reale normato, S un sottoinsieme non vuoto e convesso di X. Sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uno spazio reale normato parzialmente ordinato mediante il cono convesso C. Denotiamo con Y^* il duale topologico di Y e con $C^* = \{\lambda \in Y^* \, : \, \langle \lambda, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in C\}$ il cono duale di C. Sia $(Z, \|\cdot\|_Z)$ uno spazio reale normato ed indichiamo con Z^* il suo duale topologico. Siano $f : S \to \mathbb{R}$ e $g : S \to Y$ due funzioni convesse e sia $h : S \to Z$ una funzione lineare affine. Poniamo

$$\mathbb{K} = \{x \in S \, : \, g(x) \in -C, h(x) = 0_Z\}.$$

Consideriamo il problema

$$\min_{x \in \mathbb{K}} f(x) \tag{1.3.1}$$

che si chiamiamo "problema primale.
Consideriamo anche il problema

$$\max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle\}, \tag{1.3.2}$$

che prende il nome di "problema duale. In particolare, λ e μ sono i cosidetti *moltiplicatori di Lagrange* associati ai vincoli di segno e ai vincoli di uguaglianza, rispettivamente. Essi giocano un ruolo fondamentale per comprendere il comportamento dei problemi di equilibrio.

Ricordiamo che risulta sempre:

$$\min_{x\in\mathbb{K}} f(x) \geq \max_{\lambda\in C^*,\mu\in Z^*} \inf_{x\in S} \left\{ f(x) + \langle\lambda, g(x)\rangle + \langle\mu, h(x)\rangle \right\}. \tag{1.3.3}$$

Definizione 1.3.1. Si dice che vale la forte dualità tra il problema primale (1.3.1) e il problema duale (1.3.2) se anche il problema duale (1.3.2) è risolubile, cioè $\exists\ \hat{\lambda} \in C^*$, $\hat{\mu} \in Z^*$ punti di massimo e nella (1.3.3) vale l'uguale.

□

Per poter ottenere la forte dualità è necessario che valgono alcune condizioni chiamate "condizioni di qualificazione dei vincoli. Nel caso infinito dimensionale è stata introdotta una condizione chiamata "condizione S che risulta essere necessaria e sufficiente per la forte dualità. Per introdurla definiamo il concetto di cono tangente.

Definizione 1.3.2. Sia X uno spazio relae normato e C un suo sottoinsieme. Dato un elemento $x \in X$, l'insieme

$$T_C(x) = \Big\{ h \in X \ : \ h = \lim \lambda_n(x_n - x), \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in C\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_n = x \Big\}$$

si chiama *cono tangente a C nel punto x.*

□

Diamo, quindi, la definizione di "Ipotesi S.

Definizione 1.3.3. Diremo che l'Ipotesi S è verificata nel punto $x_0 \in \mathbb{K}$ se risulta

$$T_{\tilde{M}}(0, 0_Y, 0_Z) \cap (]-\infty, 0[\times \{0_Y\} \times \{0_Z\}) = \emptyset \tag{1.3.4}$$

dove

$$\tilde{M} = \left\{ (f(x) - f(x_0) + \alpha, g(x) + y, h(x)) : x \in S\mathbb{K}, \alpha \geq 0, y \in C \right\}.$$

□

Vale il seguente teorema di forte dualità.

Teorema 1.3.1. *Sotto le precedenti ipotesi su f, g, h e C se il problema (1.3.1) è risolubile e vale l'Ipotesi S per $x_0 \in \mathbb{K}$, allora anche il problema (1.3.2) è risolubile e i valori ottimali coincidono, cioè se $(x_0, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{K} \times C^* \times Z^*$ è la soluzione ottimale per problema (1.3.2) risulta*

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \min_{x\mathbb{K}} f(x) = f(x_0) + \langle\lambda^*, g(x_0)\rangle + \langle\mu^*, h(x_0)\rangle = \\ &= \max_{\lambda\in C^*,\mu\in Z^*} \inf_{x\in S} \left\{ f(x) + \langle\lambda, g(x)\rangle + \langle\mu, h(x)\rangle \right\}, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

e risulta, inoltre

$$\langle\lambda^*, g(x_0)\rangle = 0.$$

□

Richiamiamo, adesso, la definizione di funzione Lagrangiana.

Definizione 1.3.4. La funzione $L : S \times C^* \times Z^* \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle \quad \forall x \in S,\ \forall \lambda \in C^*,\ \forall \mu \in Z^*.$$

si chiama *Funzione Lagrangiana.*

□

Usando il funzionale Lagrangiano la tesi del Teorema 1.3.1 si può riscrivere nel seguente modo:

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{K}} f(x) = L(x_0, \lambda^*, \mu^*) = \max_{\lambda \in C^*, \mu \in Z^*} \inf_{x \in S} L(x, \lambda, \mu).$$

Per mezzo del Teorema 1.3.1 è possibile provare l'usuale relazione tra un punto sella del funzionale Lagrangiano e la soluzione del problema (1.3.1).

Teorema 1.3.2. *Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 1.3.1. Allora $x_0 \in \mathbb{K}$ è un punto di minimo per problema (1.3.1) se e solo se esiston $\overline{\lambda} \in C^*$ e $\overline{\mu} \in Z^*$ tali che $(x_0, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ è un punto sella del funzionale di Lagrange, cioè*

$$L(x_0, \lambda, \mu) \leq L(x_0, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad \forall x \in S,\ \forall \lambda \in C^*,\ \forall \mu \in Z^*,$$

ed inoltre, risulta

$$\langle \lambda^*, g(x_0) \rangle = 0$$

□

1.4 Metodo diretto

In questo paragrafo parleremo del *metodo diretto* che rappresenta uno dei metodi più utilizzati per calcolare la soluzione di una larga classe di disequazioni variazionali, inclusa anche la disequazione variazionale che esprime il problema dell'equilibrio finanziario.
Enunciamo il metodo in $\mathbb{R}^n$, notando che esso si può applicare anche ai problemi infinito dimensionali quando questi sono equivalenti a disequazioni variazionali finito dimensionali parametriche.
Sia data la funzione $C : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^m$. Consideriamo la seguente disequazione variazionale:

$$\text{Trovare } H \in \mathbb{K}, \quad \langle C(H), (F - H) \rangle \geq 0 \quad \forall F \in \mathbb{K} \tag{1.4.1}$$

dove

$$\langle C(H), (F - H) \rangle = \sum_{r=1}^{m} C_r(H)(F_r - H_r) \geq 0.$$

Sia

$$\mathbb{K} = \left\{ F \in \mathbb{R}^m : \sum_{r=1}^{m} \varphi_{ir} F_r = \rho_i,\ i = 1, \ldots, l,\ F_r \geq 0,\ r = 1, \ldots, m \right\}.$$

Si può facilmente dimostrare che l'insieme $\mathbb{K}$ è un'insieme non vuoto, chiuso, convesso e limitato. La matrice $\Phi = (\varphi_{ir})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ è formata da elementi 0 o 1 ed è tale che in ogni colonna c'è un unico elemento che vale 1 mentre tutti gli altri valgono 0. Possiamo, quindi, ricavare l componenti in funzone delle $m - l$ rimanenti e, supponendo che siano le prime l otteniamo

$$F_i = \rho_i - \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{ir} F_r \quad i = 1, \ldots, l, \quad F_r \geq 0\ r = 1, \ldots, m.$$

Tenendo conto di ciò, possiamo trasformare la disequazione variazionale (1.4.1) nel seguente problema:

$$\text{Trovare } \tilde{H} \in \tilde{\mathbb{K}} \text{ t.c } \left\langle \Gamma(\tilde{H}), (\tilde{F} - \tilde{H}) \right\rangle \geq 0 \quad \forall\, \tilde{F} \in \tilde{\mathbb{K}},$$

con

$$\tilde{\mathbb{K}} = \left\{ \tilde{F} = (F_{l+1}, \ldots, F_m)\ :\ F_r \geq 0, r = l+1, \ldots, m; \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{ir} F_r \leq \rho_i,\ i = 1, \ldots, l \right\}$$

$$\Gamma(\tilde{F}) = \left(\Gamma_{l+1}(\tilde{F}), \ldots, \Gamma_m(\tilde{F}) \right)$$

$$\Gamma_r(\tilde{F}) = \tilde{C}_r(\tilde{F}) - \sum_{i=1}^{l} \varphi_{ir} \tilde{C}_i(\tilde{F})$$

$$\tilde{C}_r(\tilde{F}) = C_r \left(\rho_1 - \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{lr} F_r, \ldots, \rho_l - \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{lr} F_r, F_{l+1}, \ldots, F_m \right).$$

Osserviamo che ogni $\tilde{H}_0 \in \tilde{\mathbb{K}}$ e tale che $\Gamma(\tilde{H}_0) = 0$, cioè ogni soluzione del sistema

$$\begin{cases} \Gamma(\tilde{H}_0) = 0 \\ \tilde{H}_0 \in \tilde{\mathbb{K}} \end{cases}$$

è una soluzione della disequazione variazionale. Invece, ogni altra soluzione della disequazione variazionale deve stare sulla frontiera $\partial\tilde{\mathbb{K}}$ di $\tilde{\mathbb{K}}$; infatti, se $\tilde{H}$ fosse un punto interno (osserviamo che l'interno di $\tilde{\mathbb{K}}$ non è vuoto), risulterebbe $\Gamma(\tilde{H}_0) = 0$.

Cerchiamo le eventuali soluzioni che giacciono sulla frontiera del $(m - l)$ dimensionali poliedro $\tilde{\mathbb{K}}$.

La frontiera dell'insieme $\tilde{\mathbb{K}}$ è costituita da *facce* che possono essere di due tipi. Le *facce del primo tipo* sono:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{K}}^s &= \tilde{\mathbb{K}} \cap \{F_s = 0\} = \Big\{\tilde{F}^{(s)} \in \mathbb{R}^{m-l-1} \;:\; F_r \geq 0, r = l+1, \ldots, m,\ r \neq s;\ F_s = 0; \\ &\sum_{r=l+1, r\neq s}^{m} \varphi_{ir} F_r \leq \rho_i,\ \ i = 1, \ldots, l\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

La disequazione variazionale nei punti di $\tilde{\mathbb{K}}^s$ diventa

$$\left\langle \Gamma^{(s)}(\tilde{H}^{(s)}), (\tilde{F}^{(s)} - \tilde{H}^{(s)}) \right\rangle = \sum_{r=l+1, r\neq s}^{m} \Gamma_r(\tilde{H}^{(s)})(F_r - H_r) \geq 0, \quad \forall\ \tilde{F}^{(s)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(s)}.$$

Per determinare la soluzione occorre, dunque, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Gamma^{(s)}(\tilde{H}^{(s)}) = 0 \\ \tilde{H}^{(s)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(s)}. \end{cases}$$

Se tale sistema non ammette soluzioni, allora, la soluzione della disequazione variazionale deve essere cercata su un'altra faccia del primo tipo, oppure del secondo tipo, oppure sulla frontiera delle facce. Se, invece, il sistema ammette soluzione, allora tale soluzione risolve anche la disequazione variazionale in tutto il convesso $\tilde{\mathbb{K}}$ se e solo se $\Gamma_s(\tilde{H}^{(s)}) > 0$. Se, infine, il sistema ammette soluzione ma questa soluzione non soddisfa la suddetta condizione, allora la soluzione deve essere cercata su altre facce o sulla frontiera delle facce.

Le *facce del secondo tipo* sono:

$$\tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)} = \tilde{\mathbb{K}} \cap \left\{ \sum_{r=l+1}^{m} \varphi_{i_1 r} F_r = \rho_{i_1} \right\} =$$

$$= \left\{ \tilde{F}^{(i_1)} \in \mathbb{R}^{m-l-1} \;:\; F_r \geq 0, r = l+1, \ldots, m, r \neq l_1; \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \varphi_{j_1 r} F_r \leq \rho_{i_1}\ ; \right.$$

$$\left. \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \varphi_{j_1 r} F_r \leq \rho_i,\ i = 1, \ldots, l, i \neq l_1 \right\}.$$

La disequazione variazionale nei punti di $\tilde{\mathbb{K}}^{i_1}$ diventa

$$\left\langle \Gamma^{(i_1)}(\tilde{H}^{(i_1)}), (\tilde{F}^{(i_1)} - \tilde{H}^{(i_1)}) \right\rangle = \sum_{r=l+1, r\neq l_1}^{m} \left[\Gamma_r(\tilde{H}^{(i_1)}) - \varphi_{i_1 r} \Gamma_{l_1}(\tilde{H}^{(i_1)}) \right] (F_r - H_r) \geq 0,$$

$$\forall\ \tilde{F}^{(i_1)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)}.$$

Per determinare la soluzione occorre, dunque, risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Gamma^{(i_1)}(\tilde{H}^{(i_1)}) = 0 \\ \tilde{H}^{(i_1)} \in \tilde{\mathbb{K}}^{(i_1)}. \end{cases}$$

Se tale sistema non ammette soluzioni, allora, la soluzione della disequazione variazionale deve essere cercata su un'altra faccia del secondo tipo, oppure del primo tipo, oppure sulla frontiera delle facce. Se, invece, il sistema ammette soluzione, allora tale soluzione risolve anche la disequazione variazionale in tutto il convesso $\tilde{\mathbb{K}}$ se e solo se $\Gamma_{l_1}(\tilde{H}^{(i_1)}) < 0$. Se, infine, il sistema ammette soluzione ma questa soluzione non soddisfa la suddetta condizione, allora la soluzione deve essere cercata su altre facce o sulla frontiera delle facce.

Capitolo 2

Problema dell'equilibrio finanziario

2.1 Modello

Dedichiamo questo paragrafo alla descrizione del modello relativo al problema di equilibrio finanziario.
Consideriamo un'economia finanziaria costituita da m settori, per esempio banche, imprese, attività domestiche, istituti finanziari, inclusi governi statali e locali, ecc; ed n strumenti finanziari, per esempio mutui, fondi comuni di investimento, depositi a risparmio, fondi di mercato monetario, ecc. Indichiamo con i il generico settore finanziario e con j il generico strumento finanziario. Supponiamo, inoltre, di lavorare nell'intervallo di tempo $[0, T]$. Denotiamo con $s_i(t)$ il volume finanziario complessivo come attivo al tempo t e relativo al settore i e denotiamo con $l_i(t)$ il volume finanziario complessiovo come passivo al tempo t e relativo al settore i. Pertanto, a differenza dei lavori precedenti ([16], [17], [18], [19], [27]), consideriamo dei mercati in cui le attività e le passività hanno differenti valori di investimento $s_i(t)$ e $l_i(t)$, rispettivamente. Poichè lavoriamo in presenza di rischio ed incertezza, i volumi d $s_i(t)$ e $l_i(t)$ detenuti da ciascun settore non possono essere considerati stabili e possono aumentare o diminuire al variare del tempo. Ad esempio, durante un periodo di crisi, un settore può decidere di non investire su strumenti finanziari, ma bensì sull'acquisto di beni come oro e argento. Indichiamo con $x_{ij}(t)$ la quantità dello strumento j al tempo t nel settore i come attivo e con $y_{ij}(t)$ la quantità dello strumento j al tempo t nel settore i come passivo. Raggruppiamo le attività e le passività relative a tutti i settori nelle matrici indicate come di seguito:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_i(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1j}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1}(t) & \dots & x_{ij}(t) & \dots & x_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}(t) & \dots & x_{mj}(t) & \dots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

e

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_i(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1j}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i1}(t) & \dots & y_{ij}(t) & \dots & y_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1}(t) & \dots & y_{mj}(t) & \dots & y_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Indichiamo il prezzo dello strumento j come attivo al tempo t con $r_j(t)$ e il prezzo dello strumento j come passivo al tempo t con $(1 + h_j(t))r_j(t)$, con h_j funzione non negativa definita in $[0, T]$ e appartenente a $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$. Osserviamo che

$$L^\infty([0, T], \mathbb{R}) = \{f : [0, T] \to \mathbb{R} \text{ misurabile}: \ \exists c \geq 0 \text{ tale che } |f(t)| \leq c, \text{ q.o. in } [0, T]\}$$

è dotato della norma

$$\|f(t)\|_{L^\infty([0,T],\mathbb{R})} = \inf \{c \geq 0 : \ |f(t)| \leq c, \text{ q.o. in } [0, T]\}.$$

Introduciamo il terminie $h_j(t)$ al fine di ottenere un modello che descriva realisticamente i mercati finanziari; infatti, nella realtà, i prezzi delle passività sono generalmente maggiori o uguali rispetto ai prezzi delle attività. Osserviamo, quindi, che tale modello è un miglioramento, sotto vari aspetti, dei precedenti modelli studiati ([16], [17], [18], [19], [27]).

Raggruppiamo i prezzi degli strumenti finanziari come attiviti nel vettore

$$r(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_i(t), \dots, r_n(t)]^T$$

e i prezzi degli strumenti finanziari come passivi nel vettore

$$(1+h(t))r(t) = [(1+h_1(t))r_1(t), (1+h_2(t))r_2(t), \dots, (1+h_i(t))r_i(t), \dots, (1+h_n(t))r_n(t)]^T.$$

Nel nostro modello i prezzi di ogni strumento appaiono come variabili incognite. Nell'ipotesi di competizione, ciascun settore si comporterà come se esso non ha alcuna influenza sui prezzi degli strumenti o sul comportamento degli altri settori, ma sulla quantità totale degli investimenti e delle passività di ciascun settore. Per esprimere le condizioni di equilibrio dipendenti dal tempo mediante una disequazione variazionale di evoluzione, abbiamo scelto uno spazio molto generale ovvero lo spazio di Lebesgue:

$$L^2([0, T], \mathbb{R}^p) = \left\{ f : [0, T] \to \mathbb{R}^p \text{ misurabile}: \ \int_0^T \|f(t)\|_p^2 dt < +\infty \right\},$$

con la norma

$$\|f\|_{L^2([0,T],\mathbb{R}^p)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_p^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pertanto, l'insieme dei flussi possibili come attivi e passivi, per ogni settore i, diventa

$$P_i = \Bigg\{ (x_i(t), y_i(t)) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{2n}) : \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t), \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t) \text{ q.o. in } [0,T],$$
$$x_i(t) \geq 0, \; y_i(t) \geq 0, \text{ q.o. in } [0,T] \Bigg\} \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

In tal modo l'insieme di tutte le attività e le passività possibili diventa

$$P = \Bigg\{ (x(t), y(t)) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{2mn}) : \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t), \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t),$$
$$\forall\, i = 1, \dots, m, \text{ q.o. in } [0,T], \quad x_i(t) \geq 0, \; y_i(t) \geq 0, \; \forall\, i = 1, \dots, m, \text{ q.o. in } [0,T] \Bigg\}.$$

Al fine di migliorare il modello di equilibrio finanziario competitivo descritto in [4], che rappresenta un approccio significativo ma ancora parziale rispetto al complesso problema di equilibrio finanziario, si considera la presenza degli interventi politici in condizioni di equilibrio finanziario inseriti sotto forma di tasse e controlli dei prezzi. In particolare, consideriamo una definizione più completa di prezzi di equilibrio $r(t)$, in base alla legge di domanda-offerta, imponendo che i prezzi di equilibrio varino tra un minimo e un massimo. A tale scopo, denotano il prezzo massimo associato allo strumento j con $\overline{r}_j$ e il prezzo minimo non negativo associato allo strumento j con $\underline{r}_j$; risulta $\overline{r}_j(t) > \underline{r}_j(t)$, q.o. in $[0,T]$. Il prezzo inferiore $\underline{r}_j(t)$ è determinato sulla base del tasso di interesse fissato dalla banca centrale, che tiene conto dell'inflazione dei prezzi. Ovviamente, il prezzo di equilibrio $r_j^*(t)$ non può essere più basso del prezzo minimo. Per quanto riguarda il prezzo superiore $\overline{r}_j(t)$, esso deriva dalla necessità finanziaria di controllare il debito nazionale che dipende dalla quantità di titoli pubblici e dall'andamento dell'inflazione. In dettaglio, il significato dei limiti inferiore e superiore sui prezzi è relativo al fatto che ad ogni investitore è garantito un prezzo minimo $\underline{r}_j$ per lo strumento j come attivo, mentre ogni investitore dovrà pagare un prezzo minimo $(1+h_j)\underline{r}_j$ per lo strumento j come passivo. Analogamente, ogni investitore non può ottenere da un bene attivo j un prezzo superiore a $\overline{r}_j$, mentre il prezzo dello strumento j come passivo non può superare il prezzo massimo $(1 + h_j)\overline{r}_j$.

Indichiamo la quota dell'aliquota fiscale applicata al settore i sullo strumento finanziario j con τ_{ij}. Supponiamo che le aliquote fiscali appartengono a $L^\infty([0,T], \mathbb{R})$. Pertanto, il governo in questo modello ha la flessibilità di riscuotere un'aliquota distinta nei diversi settori e per i diversi strumenti.

Raggruppiamo i prezzi superiori $\overline{r}_j(t)$ nel vettore colonna

$$\overline{r}_j(t) = [\overline{r}_1(t), \dots, \overline{r}_i(t), \dots, \overline{r}_n(t)]^T,$$

e i prezzi inferiori $\underline{r}_j(t)$ nel vettore colonna

$$\underline{r}_j(t) = [\underline{r}_1(t), \ldots, \underline{r}_i(t), \ldots, \underline{r}_n(t)]^T,$$

e le aliquote fiscali $\tau_{ij}(t)$ nella matrice

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} \tau_{11}(t) & \ldots & \tau_{1j}(t) & \ldots & \tau_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{i1}(t) & \ldots & \tau_{ij}(t) & \ldots & \tau_{in}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{m1}(t) & \ldots & \tau_{mj}(t) & \ldots & \tau_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

L'insieme dei prezzi relativi a tutti gli strumenti diventa:

$$\mathcal{R} = \{r \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n) : \ \underline{r}_j(t) \leq r_j(t) \leq \overline{r}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n, \text{ q.o. in } [0,T]\},$$

dove $\underline{r}_j(t)$ e $\overline{r}_j(t)$ appartengono all'insieme $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Al fine di determinare per ciascun settore i la distribuzione ottimale degli strumenti sia come attiviti che come passivi, si considera, come di consueto, l'influenza causata dall'avversione al rischio e il processo di ottimizzazione di ciascun settore nell'economia finanziaria, vale a dire la volontà di massimizzare il valore degli strumenti attivi, riducendo al minimo il valore di queli passivi. Un esempio di avversione al rischio è dato dalla ben nota funzione quadratica di Markowitz basata sulla matrice di varianza-covarianza che denota la valutazione del settore della deviazione standard dei prezzi per ogni strumento ([51], [52]). Nel nostro caso, tuttavia, la funzione utilità di Markowitz, o altre funzioni più generali, sono dipendenti dal tempo in modo da definire soluzioni che prendono in considerazione precedenti stati di equilibrio. Un modo per tener presenti nel modello soluzioni relative ad istanti precedenti è introdurre un termine memoria, come avviene in altri modelli deterministici([3], [43], [58]).

Pertanto, la funzione di utilità, per ogni settore i, sarà definita come segue

$$U_i(t, x_i(t), y_i(t), r(t)) = u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} r_j(t)(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)],$$

dove il termine $-u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ rappresenta una misura del rischio dell'agente finanziario e $r_j(t)(1 - \tau_{ij}(t))[x_i(t) - (1 + h_j(t))y_i(t)]$ rappresenta il valore della differenza tra le attività e le passività. Supponiamo che la funzione utilità del settore i, indicata con $U_i(t, x_i(t), y_i(t), r(t))$,sia definita in $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, sia misurabile rispetto a t e continua rispetto ad x_i e y_i. Supponiamo, poi, che $\partial u_i / \partial x_{ij}$ e $\partial u_i / \partial y_{ij}$ esitano, siano misurabili rispetto a t e continue rispetto ad x_i e y_i.

Inoltre, supponiamo che $\forall\ i = 1, \ldots, m$, $\forall\ j = 1, \ldots, n$, e q.o. in $[0,T]$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$|u_i(t, x, y)| \leq \alpha_i(t) \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.1}$$

e

$$\Big|\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial x_{ij}}\Big| \le \beta_{ij}(t)\|y\|, \quad \Big|\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial y_{ij}}\Big| \le \gamma_{ij}(t)\|x\|, \tag{2.1.2}$$

dove α_i, β_{ij}, γ_{ij} sono funzioni non negative di $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$. Infine, supponiamo che la funzione $u_i(t,x,y)$ sia concava. Ricordiamo che la funzione di utilità Markowitz verifica condizioni (2.1.1) e (2.1.2).

Al fine di determinare i prezzi di equilibrio, si stabilisce, come condizione di equilibrio, qualla che tiene conto, per ogni strumento j, dell'equilibrio del totale degli attivi, del totale dei passivi e della quota F_j, che rappresenta, più precisamente, le spese di gestione delle istituzioni finanziarie, ivi comprese eventuali dividendi, come in [4].

Quindi, le condizioni di equilibrio per il prezzo r_j dello strumento j sono le seguenti:

$$\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x^*_{ij}(t)-(1+h_j(t))y^*_{ij}(t)\right]+F_j(t)\begin{cases}\ge 0 & \text{se } r^*_j(t)=\underline{r}_j(t)\\ =0 & \text{se } \underline{r}_j(t)<r^*_j(t)<\overline{r}_j(t)\\ \le 0 & \text{se } r^*_j(t)=\overline{r}_j(t)\end{cases} \tag{2.1.3}$$

dove (x^*, y^*, r^*) è la soluzione di equilibrio per gli investimenti come attivi e come passivi e per i prezzi.
In particolare, se nell'economia vi è un eccesso di offerta di uno strumento j come attivito e dei costi F_j, allora il prezzo dello strumento j deve essere quello minimo $\underline{r}_j(t)$. Se il prezzo di uno strumento j è positivo, ma non coincide con quello massimo $\overline{r}_j(t)$, allora il mercato per tale strumento è in equilibrio. Infine, se nell'economia vi è un eccesso di domanda di uno strumento j come passivo e dei costi F_j, allora il prezzo deve coincidere con quello massimo $\overline{r}_j(t)$.

2.2 Formulazione Variazionale

Al fine di ottenere la formulazione variazionale del modello finanziario presentato nel precedente paragrafo, definiamo diverse, ma equivalenti, condizioni di equilibrio, ognuna delle quali è utile per esaltare particolari caratteristiche dell'equilibrio finanziario.

Definizione 2.2.1. Un vettore degli attivi, dei passivi e dei prezzi $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in P \times \mathcal{R}$ è di equilibrio per il modello finanziario dinamico se e solo se $\forall\ i = 1,\dots,m$, $\forall\ j = 1,\dots,n$, e q.o. in $[0,T]$, è soddisfatto il seguente sistema di disequazioni

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t) - \mu_i^{(1)*}(t) \ge 0, \tag{2.2.1}$$

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t))r^*_j(t) - \mu_i^{(2)*}(t) \ge 0, \tag{2.2.2}$$

ed equazioni

$$x^*_{ij}(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t) - \mu_i^{(1)*}(t)\Big] = 0, \tag{2.2.3}$$

$$y^*_{ij}(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t))r^*_j(t) - \mu_i^{(2)*}(t)\Big] = 0, \tag{2.2.4}$$

dove $\mu_i^{(1)*}(t)$, $\mu_i^{(2)*}(t) \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ sono i moltiplicatori di Lagrange, e verificano le condizioni (2.1.3) q.o. in $[0,T]$.

□

Analizziamo il significato delle precedenti condizioni. Allora, (2.2.1) e (2.2.3) sostengono che il volume finanziario x^*_{ij} investito nello strumento j come attivo è maggiore o uguale a zero se la j-esima componente $-\dfrac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t)$ è uguale a $\mu_i^{(1)*}(t)$; invece se $-\dfrac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t) > \mu_i^{(1)*}(t)$, allora $x^*_{ij}(t) = 0$. Analoghe considerazioni possono essere effettuate anche per il volume finanziario investito nello strumento j come passivo relativamente al significato della (2.2.2) e (2.2.4) .

Le funzioni $\mu_i^{(1)*}(t)$ e $\mu_i^{(2)*}(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati q.o. in $[0,T]$ ai vincoli $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - s_i(t) = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - l_i(t) = 0$, rispettivamente. I moltiplicatori di Lagrange non sono noti a priori, ma questo fatto non ha alcuna rilevanza poichè, come mostrato dal seguente teorema, la Definizione 2.2.1 è equivalente ad una disequazione variazionale in cui $\mu_i^{(1)*}(t)$ e $\mu_i^{(2)*}(t)$ non compaiono.

Teorema 2.2.1. *Un vettore $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in P \times \mathcal{R}$ è di equilibrio finanziario se e solo se è soddisfatta la seguente disequazione variazionale:*
Trovare $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in P \times \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\int_0^T \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n}\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*_i(t),y^*_i(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t)\Big] \times [x_{ij}(t) - x^*_{ij}(t)] + \\
&+\sum_{j=1}^{n}\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*_i(t),y^*_i(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))r^*_j(t)(1+h_j(t))\Big] \times [y_{ij}(t) - y^*_{ij}(t)]\Bigg\} dt + \\
&+\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \sum_{i=1}^{m}\Big\{(1-\tau_{ij}(t))\big[x^*_{ij}(t) - (1+h_j(t))y^*_{ij}(t)\big] + F_j(t)\Big\} \times \big[r_j(t) - r^*_j(t)\big] dt \geq 0, \\
&\qquad\qquad \forall (x(t), y(t), r(t)) \in P \times \mathcal{R}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

□

La dimostrazione del precedente Teorema, che fornisce una caratterizzazione variazionale per le soluzioni di equilibrio del modello, si ottiene in pochi passi.
Prima di tutto si dimostra che, per ogni prezzo fissato $r^*(t) \in \mathcal{R}$ soddisfacente la (2.1.3), le condizioni di equilibrio (2.2.1)–(2.2.4), sono equivalenti ad un relativo problema di massimo, che, a sua volta, è equivalente ad una prima disequazione variazionale, come mostra il seguente risultato:

Teorema 2.2.2. *$(x_i^*(t), y_i^*(t))$ è una soluzione del problema di massimo*

$$\max_{P_i} \int_0^T \Big\{ u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + (1 - \tau_i(t)) r^*(t) \times [x_i(t) - (1 + h(t)) y_i(t)] \Big\} dt, \quad \forall (x_i, y_i) \in P_i,$$

se e solo se è soluzione della disequazione variazionale

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{j=1}^n \Big[- \frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^*(t) \Big] \times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] dt \\ &+ \int_0^T \sum_{j=1}^n \Big[- \frac{\partial u_i(t, x_i^*(t), y_i^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t)) r_j^*(t)(1 + h_j(t)) \Big] \times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] dt \geq 0, \\ &\qquad \forall\, (x_i, y_i) \in P_i, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

per un dato $r^*(t) \in \mathcal{R}$ soddisfacente le condizioni (2.1.3).

□

Inoltre, per ogni fissato $(x^*(t), y^*(t)) \in P$ soddisfacente le condizioni (2.2.1)–(2.2.4), possiamo provare una caratterizzazione variazionale delle condizioni di equilibrio (2.1.3) in relazione ai prezzi degli strumenti, cioè vale quanto segue:

Teorema 2.2.3. *Le condizioni (2.1.3) sono equivalenti alla disequazione variazionale*

$$\sum_{j=1}^n \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1 + h_j(t)) y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \right\} \times \left[r_j(t) - r_j^*(t) \right] dt \geq 0, \quad \forall\, r \in \mathcal{R}, \tag{2.2.7}$$

per un dato $(x^*, y^*) \in P$ soddisfacente le condizioni (2.2.1)-(2.2.4).

□

Allora $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in P \times \mathcal{R}$ è di equilibrio finanziario se e solo se entrambe le disequazioni variazionali (2.2.6) e (2.2.7) sono soddisfatte e, quindi, si ottiene il Teorema 2.2.1 ([6]).

Osservazione 2.2.1. Vogliamo sottolineare esplicitamente che la nostra definizione relativa alle condizioni di equilibrio (Definizione 2.2.1) è equivalente alla definizione di equilibrio definita da un vettore $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in P \times \mathcal{R}$ soddisfacente

$$\max_{P_i} \int_0^T \Big\{ u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + (1 - \tau_i(t)) r^*(t) \times [x_i(t) - (1 + h(t)) y_i(t)] \Big\} dt, \quad \forall (x_i, y_i) \in P_i,$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1 + h_j(t)) y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{if } r_j^*(t) = \underline{r}_j(t) \\ = 0 & \text{if } \underline{r}_j(t) < r_j^*(t) < \overline{r}_j(t) \\ \leq 0 & \text{if } r_j^*(t) = \overline{r}_j(t). \end{cases}$$

□

2.3 Risultati Recenti: esistenza e dualità

Richiamiamo, adesso, alcuni importanti teoremi di esistenza ([57]), che abbiamo anche enunciato nel Capitolo 1. In particolare, ricordiamo che:

Teorema 2.3.1. *Sia $\mathbb{K} \subset X$ un sottoinsieme non vuoto, chiuso, limitato e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to X^*$ una funzione B-pseudomonotona o F-hemicontinua. Allora la disequazione variazionale*

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \tag{2.3.1}$$

ammette una soluzione.

□

Teorema 2.3.2. *Sia $\mathbb{K} \subset X$ un sottoinsieme non vuoto, chiuso, limitato e convesso e sia $A : \mathbb{K} \to X^*$ una funzione K-pseudomonotona ed hemicontinua inferiormente lungo i segmenti. Allora la disequazione variazionale* (2.3.1) *ammette soluzioni.*

□

Vogliamo applicare tali teoremi al nostro modello.
In particolare, nel nostro caso avremo:

$$v = \Big((x_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, (y_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, (r_j)_{j=1,\ldots,n} \Big); \quad A : L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n}) \to L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n}),$$

$$A(v) = \Bigg(\left[-\tfrac{\partial u_i(x,y)}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij})r_j \right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \left[-\tfrac{\partial u_i(x,y)}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij})(1+h_j)r_j \right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, \left[\sum_{i=1}^{m} (1-\tau_{ij}) \left(x_{ij} - (1+h_j)y_{ij} \right) \right]_{j=1,\ldots,n} \Bigg);$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= P \times \mathcal{R} = \Big\{ v \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n}) : x_i(t) \geq 0,\ y_i(t) \geq 0,\ \text{q.o. in } [0,T], \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) = s_i(t), \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) = l_i(t) \text{ q.o. in } [0,T], \forall\, i = 1,\ldots,m, \\ & \underline{r}_j(t) \leq r_j(t) \leq \overline{r}_j(t),\ \text{q.o. in } [0,T], \forall j = 1,\ldots,n \Big\}. \end{aligned}$$

Pertanto, la disequazione variazionale di evoluzione (2.2.5) diventa (2.3.1) e possiamo applicare i Teoremi 2.3.1 e 2.3.2, supponendo che $\mathbb{K}$ sia non vuoto, chiuso, convesso e limitato e, poi, che A sia B-pseudomonotona o F-hemicontina, oppure che A sia K-pseudomonotona ed hemicontinua inferiormente lungo i segmenti. Inoltre, ricordiamo che le condizioni (2.1.2) sono sufficienti per garantire che l'operatore A sia inferiormente semicontinuo lungo segmenti (vedi [40]).

Analizziamo, adesso, la dualità infinito dimensionale per il problema di equilibrio finanziario caratterizzato dalla disequazione variazionale (2.2.5). Il primo passo è quello di introdurre il funzionale Lagrangiano per il nostro modello generale. A tal fine, definiamo

$$\begin{aligned} f(x,y,r) &= \int_0^T \Bigg\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r_j^*(t) \right] \times [x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t))r_j^*(t) \right] \times [y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)] + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} (1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t))y_{ij}^*(t) \right] + F_j(t) \right] \times \left[r_j(t) - r_j^*(t) \right] \Bigg\} dt. \end{aligned}$$

Allora il funzionale Lagrangiano è

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(x,y,r,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\mu^{(1)},\mu^{(2)},\rho^{(1)},\rho^{(2)}) = f(x,y,r) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \lambda_{ij}^{(1)}(t)x_{ij}(t)\,dt + \\
&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \lambda_{ij}^{(2)}y_{ij}(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m}\int_0^T \mu_i^{(1)}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - s_i(t)\right)dt + \\
&-\sum_{i=1}^{m}\int_0^T \mu_i^{(2)}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - l_i(t)\right)dt + \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \rho_j^{(1)}(t)(\underline{r}_j(t) - r_j(t))\,dt + \\
&+\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \rho_j^{(2)}(t)(r_j(t) - \overline{r}_j(t))\,dt, \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

dove $(x,y,r) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})$, $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$, $\mu^{(1)},\mu^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\rho^{(1)},\rho^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$.

Ricordiamo che $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati, q.o. in $[0,T]$, relativi ai vincoli di disuguaglianza $x_i(t) \geq 0$, $y_i(t) \geq 0$, $r_j(t) - \underline{r}_j(t) \geq 0$, $\overline{r}_j(t) - r_j(t) \geq 0$, rispettivamente. Le funzioni $\mu^{(1)}(t)$ e $\mu^{(2)}(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati, q.o. in $[0,T]$, relativi ai vincoli di uguaglianza $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - s_i(t) = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - l_i(t) = 0$, rispettivamente.

In particolare, vale il seguente Teorema

Teorema 2.3.3. *Sia $(x^*,y^*,r^*) \in P \times \mathcal{R}$ soluzione della disequazione* (2.2.5) *e consideriamo il funzionale Lagrangiano associato* (2.3.2). *Allora, vale la forte dualità ed esistono $\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$, $\mu^{(1)*},\mu^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\rho^{(1)*},\rho^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ tali che $(x^*,y^*,r^*,\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*}, \mu^{(1)*}, \mu^{(2)*}, \rho^{(1)*},\rho^{(2)*})$ sia un punto sella della funzione Lagrangiana, cioè*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x^*,y^*,r^*,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\mu^{(1)},\mu^{(2)},\rho^{(1)},\rho^{(2)}) &\leq \mathcal{L}(x^*,y^*,r^*,\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*},\mu^{(1)*},\mu^{(2)*},\rho^{(1)*},\rho^{(2)*}) = 0 \\
&\leq \mathcal{L}(x,y,r,\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*},\mu^{(1)*},\mu^{(2)*},\rho^{(1)*},\rho^{(2)*})
\end{aligned}$$

$\forall (x,y,r) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})$, $\forall \lambda^{(1)},\lambda^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$, $\forall \mu^{(1)},\mu^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\forall \rho^{(1)},\rho^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ *e, q.o. in* $[0,T]$,

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial x_{ij}} - (1-\tau_{ij}(t))r_j^*(t) - \lambda_{ij}^{(1)*}(t) - \mu_i^{(1)*}(t) = 0,\ \forall i = 1,\dots,m,\ \forall j = 1\dots,n;$$

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*(t),y^*(t))}{\partial y_{ij}} + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t))r_j^*(t) - \lambda_{ij}^{(2)*}(t) - \mu_i^{(2)*}(t) = 0,\ \forall i = 1,\dots,m,\ \forall j = 1\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x^*_{ij}(t)-(1+h_j(t))y^*_{ij}(t)\right]+F_j(t)+\rho^{(2)*}_j(t)=\rho^{(1)*}_j(t),\quad \forall j=1,\dots,n;$$

$$\lambda^{(1)*}_{ij}(t)x^*_{ij}(t)=0,\ \ \lambda^{(2)*}_{ij}(t)y^*_{ij}(t)=0,\quad \forall i=1,\dots,m,\ \forall j=1,\dots,n$$

$$\mu^{(1)*}_i(t)\left(\sum_{j=1}^{n}x^*_{ij}(t)-s_i(t)\right)=0,\ \ \mu^{(2)*}_i(t)\left(\sum_{j=1}^{n}y^*_{ij}(t)-l_i(t)\right)=0,\quad \forall i=1,\dots,m$$

$$\rho^{(1)*}_j(t)(\underline{r}_j(t)-r^*_j(t))=0,\ \ \rho^{(2)*}_j(t)(r^*_j(t)-\overline{r}_j(t))=0,\quad \forall j=1,\dots,n.$$

□

Risulta essere rilevante effettuare un'analisi delle conseguenze dell'equilibrio finanziario sull'economia. É possibile giungere a delle conclusioni sulla valutazione delle soluzioni ottenute mediante delle formule finanziarie, vale a dire la Formula di Deficit, la Legge di Bilancio e la Formula delle Passivitá. Esse sono di grande importanza per l'analisi economica, sopratutto per quanto riguarda la teoria dei problemi di equilibrio in evoluzione rispetto al tempo (si veda, ad esempio, [2], [5], [15], [44] e [45]). Concentriamo, dunque, la nostra attenzione sulle formule che governano l'economia. In particolate, si ha:

(i) **Formula di Deficit**

$$\sum_{i=1}^{m}(1-\tau_{ij}(t))\left[x^*_{ij}(t)-(1+h_j(t))y^*_{ij}(t)\right]+F_j(t)+\rho^{(2)*}_j(t)=\rho^{(1)*}_j(t),$$
$$\forall j=1,\dots,n,$$

dove $\rho^{(1)*}_j(t)$ e $\rho^{(2)*}_j(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati ai limiti sui prezzi:

$$\rho^{(1)*}_j(t)(\underline{r}_j(t)-r^*_j(t))=0,\ \ \rho^{(2)*}_j(t)(r^*_j(t)-\overline{r}_j(t))=0,\quad \forall j=1,\dots,n.$$

Il significato di $\rho^{(1)*}_j(t)$ è che esso rappresenta il deficit per unità, invece $\rho^{(2)*}_j(t)$ è il surplus per unità.

(ii) **Legge di Bilancio**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}l_i(t) &= \sum_{i=1}^{m}s_i(t)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}(t)\left[x^*_{ij}(t)-y^*_{ij}(t)\right]-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1-\tau_{ij}(t))h_j(t)y^*_{ij}(t)+\\ &+\sum_{j=1}^{n}F_j(t)-\sum_{j=1}^{n}\rho^{(1)*}_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\rho^{(2)*}_j(t);\end{aligned}$$

(iii) **Formula delle Passivitá**
Supponendo che le tasse $\tau_{ij}(t)$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ abbiano un valore comune $\theta(t)$, e gli incrementi $h_j(t)$, $j=1,\dots,n$, abbiano un valore comune $i(t)$, oppure considerando semplicemente i valori medi, otteniamo, la Formula delle Passivitá:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i(t) = \frac{(1-\theta(t))\sum_{i=1}^{m} s_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))}.$$

Queste tre formule forniscono qualche informazione attuale dell'andamento dei mercati finanziari, ma sono anche in grado di offrire alcuni suggerimenti molto utili per il futuro dell'economia. Quindi, analizzando la soluzione di equilibrio finanziario è possibile trovare la giusta via da seguire per raggiungere un miglioramento dell'economia.

Ricordiamo che possiamo considerare il problema dell'equilibrio finanziario da due differenti punti di vista ([6] Sezione 7): il primo è "*il punto di vista dei settori*", in cui ogni settore cerca di massimizzare la propria l'utilità; e il secondo punto di vista, "*il punto di vista del Sistema*", che riguarda l'equilibrio del complessivo sistema, ossia il rispetto delle precedenti leggi introdotte. Ad esempio, dal punto di vista dei settori, $l_i(t)$ per $i=1,\dots,m$, sono passività, mentre per il sistema economico sono investimenti e, di conseguenza, la Formula delle Passività dal punto di vista del sistema, può essere chiamata "*Formula degli Investimenti*". Il punto di vista del Sistema coincide con il problema duale di Lagrange (il cosidetto "mercato ombra") in cui $\rho_j^{(1)}(t)$ e $\rho_j^{(2)}(t)$ sono i moltiplicatori duali, che rappresentano il deficit e il surplus per unità, relativamente allo strumento j. Formalmente, il problema duale è il seguente:
Tovare $(\rho^{(1)*}, \rho^{(2)*}) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{2n}_+)$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^T (\rho_j^{(1)}(t) - \rho_j^{(1)*}(t))(\underline{r}_j(t) - r_j^*(t))dt + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T (\rho_j^{(2)}(t) - \rho_j^{(2)*}(t))(r_j^*(t) - \overline{r}_j(t))dt \le 0,$$
$$\forall (\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{2n}_+).$$

Vale il seguente Teorema:

Teorema 2.3.4. *Sia* $(x^*, y^*, r^*) \in P \times \mathcal{R}$ *una soluzione di equilibrio dinamico della disequazione quasi-variazionale* (2.2.5), *allora la Legge di Bilancio*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} l_i(t) &= \sum_{i=1}^{m} s_i(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}(t)\left[x_{ij}^*(t) - y_{ij}^*(t)\right] - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(1-\tau_{ij}(t))h_j(t)y_{ij}^*(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} F_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) \qquad (2.3.3)\end{aligned}$$

è soddisfatta.

$\square$

Dalla Formula delle Passività possiamo ottenere l'indice $E(t)$ molto utile, sopratutto per la valutazione dell'economia, che, pertanto, prende il nome di "Indice di Evoluzione". In particolare, risulta

$$E(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} l_i(t)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)},$$

dove abbiamo posto

$$\tilde{s}_i(t) = \frac{s_i(t)}{1+i(t)}, \quad \tilde{F}_j(t) = \frac{F_j(t)}{1+i(t)-\theta(t)-\theta(t)i(t)}.$$

Inoltre, si ha anche:

$$\begin{aligned} E(t) = \quad 1 \quad & - \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)\right)} \\ & + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)\right)} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Possiamo osservare che se $E(t) \geq 1$ la valutazione dell'equilibrio finanziario è positiva, invece se $E(t) < 1$ la valutazione dell'equilibrio finanziario è negativa. Infatti, tenendo conto della (2.3.4) se $E(t) < 1$ allora $\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) < \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)$ e questo implica che la somma del defici supera la somma del surplus e, quindi, abbiamo un perdita. Se, invece, $E(t) \geq 1$ allora $\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) \geq \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)$ ovvero il surplus è positivo .

Capitolo 3

Problema dell'equilibrio finanziario con termine di memoria e vincoli elastici

Vogliamo, adesso, prendere in considerazione un'economia finanziaria nel caso in cui il volume finanziario complessivo degli investimenti come attivi e il volume finanziario complessivo degli investimenti come passivi si suppongono essere dipendenti dal tempo ed in funzione della soluzione attesa. Inoltre, volendo rendere ancora più realistico e concreto il modello introduciamo una funzione di utilità in cui la misura del rischio dipende da un termine di memoria, in modo da tener conto dell'influenza, nel modello, della situazione di equilibrio presente negli istanti precedenti a quello considerato.

3.1 Modello

Consideriamo un'economia finanziaria analoga a quella descritta nel Paragrafo 2 del Capitolo 2. Volendo esprimere una dipendenza dal tempo e dalla soluzione attesa dei volumi finanziari $s_i(t)$ e $l_i(t)$, relativi rispettivamente agli attivi e ai passivi, nel modello che stiamo considerando, avranno un'espressione differente rispetto al modello base. In particolare, se indichiamo la soluzione prevista cone $w^*(t)$, la soluzione in media sarà data da $\int_0^T w^*(s)ds$, quindi $s_i(t)$ sarà definito da $s_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right)$ ed $l_i(t)$ sarà definito da $l_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right)$. Facciamo tale ipotesi, al fine di tener conto del fatto che quando si sceglie di fare un investimento si prendono in considerazione le previsioni attese del mercato. Tale atteggiamento è decisamente realistico poichè nessuno investe senza avere prima un'idea del comportamento previsto in futuro. Visto che il nostro modello si evolve nel tempo, sicuramente gli investitori non possono avere una valutazione istante per istante, ma semplicemente una valutazione media. In questo modo stiamo prendendo in considerazione l'influenza, mediante il valore medio, della distribuzione di equilibrio prevista per le attività e le passività degli investimenti su tutti gli strumenti finanziari. In letteratura, questo tipo di vincoli sono chiamati *vincoli elastici o di adattamento.*

Per esprimere le condizioni di equilibrio dipendenti dal tempo mediante una disequazione variazionale di evoluzione, consideriamo il seguente spazio di Lebesgue:

$$L^2([0,T],\mathbb{R}^p) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R}^p \ \text{ misurabile:} \int_0^T \|f(t)\|_p^2 \, dt < +\infty \right\}$$

dove

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_p^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2([0,T],\mathbb{R}^p)} \, .$$

Per indicare la norma nello spazio di Hilbert $L^2([0,T],\mathbb{R}^p)$ utilizziamo il simbolo $\|f\|_{L^2}$ quando non vi è alcuna possibilità di confusione.

Come è noto, lo spazio duale di $L^2([0,T],\mathbb{R}^p)$ è sempre $L^2([0,T],\mathbb{R}^p)$. Possiamo, quindi, definire la forma bilineare canonica $L^2([0,T],\mathbb{R}^p) \times L^2([0,T],\mathbb{R}^p)$ nel seguente modo

$$\langle\langle G, f \rangle\rangle = \int_0^T \langle G(t), f(t) \rangle \, dt, \quad f, G \in L^2([0,T],\mathbb{R}^p),$$

dove $\langle G(t), f(t) \rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^p$.

Al fine di definire l'insieme dei vincoli, introduciamo il seguente insieme

$$E = \big\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n}) : x(t) \geq 0,$$

$$y(t) \geq 0, \ \underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t) \text{ q.o. in } [0,T] \big\} \, .$$

Si può facilmente veriricare che E è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato.
Se $\mathbb{K} : E \to 2^E$ è la multifunzione definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(w^*) \ = \ & \left\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in E : \ \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) = s_i \left(t, \int_0^T w^*(s) \, ds \right), \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n y_{ij}(t) = l_i \left(t, \int_0^T w^*(s) \, ds \right) \text{ q.o. in } [0,T], i = 1, \ldots, n \right\}, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

allora $\mathbb{K}(w^*)$ è l'insieme ammissibilie per ogni $w^* \in E$.

Al fine di determinare, per ogni settore i, la composizione ottimale degli strumenti sia come attivi che come passivi, si considera, l'influenza dell'avversione al rischio e la condizione di ottimizzazione di ciascun settore nell'economia finanziaria considerata, vale a dire, massimizzare il valore delle attività e minimizzare il valore delle passività. Quindi, la funzione obiettivo, per ogni settore i, assume la seguente forma:

$$U_i(t, x_i(t), y_i(t), r(t))$$
$$= u_i(t, x_i(t), y_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} r_j(t)(1 - \tau_{ij}(t))[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y_{ij}(t)],$$

dove il termine $-u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ rappresenta la misura del rischio ed $r_j(t)(1-\tau_{ij}(t))[x_i(t)-(1 + h_j(t))y_i(t)]$ rappresenta il valore della differenza tra gli attivi e i passivi. In particolare, invece di utilizzare una funzione di utilità generica come nel modello analizzato nel Capito 2, si considera una funzione di utilità di tipo Markowitz con termine di memoria, in modo da tener conto di come la soluzione di equilibrio attuale sia influenzata da quella precedente. Pertanto,la funzione di utilità $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$, pertanto, sarà del tipo:

$$u_i(t, x_i(t), y_i(t))$$
$$= \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix} dz. \tag{3.1.2}$$

In (3.1.2) il primo termine rappresenta la funzione di utilità introdotta da Markowitz in [51] e [52], invece la matrice Q^i è la matrice di varianza-covarianza che denota la valutazione del settore della deviazione standard dei prezzi per ogni strumento valutato in un certo momento che chiamiamo istante iniziale. Supponiamo che Q^i sia simmetrica e definita positiva. Il termine $\int_0^t \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix} dz$ è un termine di memoria che esprime l'influenza delle soluzioni di equilibrio precedenti.

Al fine di determinare i prezzi di equilibrio, si stabilisce la condizione di equilibrio che esprime l'equilibrio del totale delle attività, del totale delle passività e della quota delle spese di gestione per unità F_j impiegata per coprire le spese delle istituzioni finanziarie, comprese eventuali dividendi (come in [4], [6], [7]). Quindi, le condizioni di equilibrio per il prezzo r_j dello strumento j, solo le seguenti

$$\sum_{i=1}^{m}(1 - \tau_{ij}(t)) \left[x^*_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y^*_{ij}(t)\right] + F_j(t)$$
$$\begin{cases} \geq 0 & \text{se } r^*_j(t) = \underline{r}_j(t) \\ = 0 & \text{se } \underline{r}_j(t) < r^*_j(t) < \overline{r}_j(t) \\ \leq 0 & \text{se } r^*_j(t) = \overline{r}_j(t) \end{cases}. \tag{3.1.3}$$

In altre parole, analogamente a quanto già osservato nel capitolo precedente, i prezzi sono determinati tenendo conto della quantità dell'offerta e della domanda dello strumento j e del relativo costo.

3.2 Formulazione Variazionale

Al fine di ottenere la formulazione variazionale del modello finanziario definiamo diverse, ma equivalenti, condizioni di equilibrio, ognuna delle quali è utile per esaltare particolari caratteristiche dell'equilibrio. A tal fine, osserviamo che, con la semplice sostituzione $t - z = \tau$, il termine di memoria può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int_0^t \Big(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau)\Big)\, d\tau + \\ + \int_0^t \Big(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau)\Big)\, d\tau.$$

Pertanto, ne segue che:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial x_{ij}} &= 2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + \\ &+ \int_0^t \Big(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau)\Big) d\tau \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_i(t,x,y)}{\partial y_{ij}} &= 2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + \\ &+ \int_0^t \Big(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau)\Big) d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Possiamo, allora, dare le condizioni di equilibrio equivalenti.

Definizione 3.2.1. Un vettore degli attivi, dei passivi e dei prezzi $w^* = (x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in \mathbb{K}(w^*)$ è di equilibrio per il modello dinamico finanziario se e solo se $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, n$, e q.o. in $[0, T]$, è soddisfatto il sistema di disequazioni

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(1)*}(t) \geq 0, \tag{3.2.3}$$

$$-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t))(1 + h_j(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(2)*}(t) \geq 0, \tag{3.2.4}$$

ed equazioni

$$x_{ij}^*(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(1)^*}(t)\Big] = 0, \tag{3.2.5}$$

$$y_{ij}^*(t)\Big[-\frac{\partial u_i(t,x^*,y^*)}{\partial x_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t))(1 + h_j(t))r_j^*(t) - \mu_i^{(2)^*}(t)\Big] = 0, \tag{3.2.6}$$

dove $\mu_i^{(1)*}(t)$, $\mu_i^{(2)*}(t) \in L^2([0,T], \mathbb{R})$ sono i moltiplicatori di Lagrange, e verificano le condizioni (3.1.3) q.o. in $[0, T]$.

□

Cerchiamo di spiegare il significato della precedente definizione. Allora, (3.2.3) e (3.2.5) significano che il volume finanziario x^*_{ij} investito nello strumento j come attivo è maggiore o uguale a zero se la j-esima componente $-\dfrac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t)$ è uguale a $\mu_i^{(1)}(t)$, invece se $-\dfrac{\partial u_i(t, x^*, y^*)}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t) > \mu_i^{(1)}(t)$, allora $x^*_{ij}(t) = 0$. Analoghe osservazioni si possono effettuare per le passività, rispettivamente a (3.2.4) e (3.2.6).

Utilizzando la stessa tecnica, come in [4] e [6] (vedi Teorema 2.1), ovvero come abbiamo già approfondito nel Paragrafo 2.2 del Capitolo 2, è possibile dimostrare il seguente teorema che mostra l'equivalenza tra la definizione 3.2.1 e una disequazione quasi-variazionale in cui non compaiono i moltiplicatori di Lagrange.

Teorema 3.2.1. *Un vettore $(x^*, y^*, r^*) \in \mathbb{K}(w^*)$ è di equilibrio dinamico se e solo se è soddisfatta la seguente disequazione quasi-variazionale:*

Trovare $(x^*(t), y^*(t), r^*(t)) \in \mathbb{K}(w^*)$:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^{n} \Big[- \frac{\partial u_i(t, x^*_i(t), y^*_i(t))}{\partial x_{ij}} - (1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t) \Big] \times [x_{ij}(t) - x^*_{ij}(t)] + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \Big[- \frac{\partial u_i(t, x^*_i(t), y^*_i(t))}{\partial y_{ij}} + (1 - \tau_{ij}(t))r^*_j(t)(1 + h_j(t)) \Big] \times [y_{ij}(t) - y^*_{ij}(t)] \right\} dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \sum_{i=1}^{m} \left\{ (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x^*_{ij}(t) - (1 + h_j(t))y^*_{ij}(t) \right] + F_j(t) \right\} \times \left[r_j(t) - r^*_j(t) \right] dt \geq 0,$$
$$\forall (x, y, r) \in \mathbb{K}(w^*). \tag{3.2.7}$$

□

In particolare, la nostra disequazione quasi-variazionali, tenendo conto di (3.2.1) e

(3.2.2), diventa:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Bigg[2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^*(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^*(t) + \\
&+ \int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^*(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^*(\tau) \right) d\tau - (1-\tau_{ij}(t))\, r_j^*(t) \Bigg] \times \\
&\qquad \times \left[x_{ij}(t) - x_{ij}^*(t)\right] dt + \\
&+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Bigg[2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^*(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^*(t) + \\
&+ \int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^*(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^*(\tau) \right) d\tau + (1-\tau_{ij}(t))\, r_j^*(t)\,(1+h_j(t)) \Bigg] \times \\
&\qquad \times \left[y_{ij}(t) - y_{ij}^*(t)\right] dt + \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^m (1-\tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t))\, y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t) \right\} \times \\
&\qquad \times \left[r_j(t) - r_j^*(t)\right] dt \geq 0, \\
&\forall w = (x,y,r) \in \mathbb{K}(w^*) = \Bigg\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in E : \\
&\sum_{j=1}^n x_{ij}(t) = s_i\left(t, \int_0^T w^*(s)\, ds\right), \quad \sum_{j=1}^n y_{ij}(t) = l_i\left(t, \int_0^T w^*(s)\, ds\right) \\
&\qquad \text{q.o. in } [0,T], i = 1, \ldots, n \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

In forma compatta:

$$\langle\langle A(t,w^*), w - w^* \rangle\rangle \geq 0 \quad \forall w = (x,y,r) \in \mathbb{K}(w^*), \tag{3.2.9}$$

dove $A : [0,T] \times E \to L^2([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})$ è definita dalle seguenti componenti:

$$\begin{aligned} A(t,w) \quad = \quad & \Bigg(\Bigg[2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + \\ & + \int_0^t \Big(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) \Big) d\tau - (1 - \tau_{ij}(t))\, r_j(t) \Bigg]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \\ & \Bigg[2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + 2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + \int_0^t \Big(2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) + \\ & + 2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) \Big) d\tau + (1 - \tau_{ij}(t))\, r_j(t) \,(1 + h_j(t)) \Bigg]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \\ & \Bigg[\sum_{i=1}^m (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}(t) - (1 + h_j(t))\, y_{ij}(t)\right] + F_j(t) \Bigg]_{j=1,\dots,n} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Supponiamo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

CONDIZIONI ($\overline{\alpha}$):

$\overline{\alpha}_1$: Q^i è simmetrica e definita positiva;

$\overline{\alpha}_2$: $s_i(t,x)$ e $l_i(t,y)$ sono misurabili rispetto a t e continue rispetto alla seconda variabile;

$\overline{\alpha}_3$: esiste una funzione $\delta_1 \in L^2([0,T])$ e $c_1 \in \mathbb{R}^+$ tali che $|s_i(t,x)| \leq \delta_1(t) + c_1$;

$\overline{\alpha}_4$: esiste una funzione $\delta_2 \in L^2([0,T])$ e $c_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che $|l_i(t,y)| \leq \delta_2(t) + c_2$;

$\overline{\alpha}_5$: le funzioni $\tau_{ij}, h_j, F_j \in L^\infty([0,T])$ e $\tau_{ij} \in [\,0, 1\,)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Osserviamo che queste ipotesi sono abbastanza generali ma essenziali per giustificare la formulazione integrale. Il nostro obiettivo è quello di dimostrare una condizione di esistenza per la soluzione della disequazione variazionale che caratterizza il nostro modello finanziario. Affronteremo tale discorso nel successivo paragrafo.

3.3 Esistenza della soluzione

Vogliamo dimostra che una condizione che ci garantisce l'esistenza per la soluzione del problema finanziario è data dal seguente teorema:

Teorema 3.3.1. *Supponiamo che le condizioni ($\overline{\alpha}$) siano soddisfatte, allora la disequazione variazionale (3.2.7) ammette una soluzione.*

□

Al fine di dimostrare il Teorema 3.3.1, ricordiamo alcune definizioni ed un risultato di esistenza generale (vedi [21] e [69]).

Sia $F : [0, T] \times E \to \mathbb{R}^{2mn+n}$ una funzione tale che soddisfi la seguente condizione F:

CONDIZIONI F : F è misurabile in t $\forall w \in \mathbb{R}^{2mn+n}$, continua in w q.o. in $[0, T]$, ed esiste $\overline{\delta} \in L^2([0, T])$ tali che $\|F(t, w)\| \leq \overline{\delta}(t) + \|w\|$ q.o. in $[0, T]$, $w \in \mathbb{R}^{2mn+n}$.

Inoltre, supponiamo che siano soddisfatte le seguenti **IPOTESI** (α):

- *le funzioni s, l sono funzioni di Caratheodory, che vuol dire che sono misurabili in t e continue rispetto alla seconda variabile*;
- *esite $\delta_1(t) \in L^2([0, T])$ e $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\|s(t, x)\| \leq \delta_1(t) + c_1, \forall\, x \in \mathbb{R}^{mn};$$

- *esiste $\delta_2(t) \in L^2([0, T])$ e $c_2 \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\|l(t, y)\| \leq \delta_2(t) + c_2, \forall\, y \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Consideriamo ora la seguente disequazione variazionale

$$\text{Trovare } w^* \in \mathbb{K}(w^*) : \langle\langle F(t, w^*), w - w^* \rangle\rangle \geq 0 \quad \forall w = (x, y, r) \in \mathbb{K}(w^*), \tag{3.3.1}$$

dove $\mathbb{K}(w^*)$ è dato da (3.1.1).
Allora, vale il seguente teorema di esistenza (vedi [21] Teorema 2.2):

Teorema 3.3.2. *Sia $F : [0, T] \times E \to \mathbb{R}^{2mn+n}$ limitata, fortemente monotona in x e y, monotona in r, Fan-hemicontinua e soddisfacente le condizioni (F) e (α). Allora la disequazione variazionale (3.3.1) ammette una soluzione.*

Proviamo che il nostro operatore A soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 3.3.2.
Per prima cosa proviamo che $A(t, w)$ è fortemente monotona rispetto ad x e y e monotona rispetto ad r, cioè che

$$\langle\langle A(t, w_1) - A(t, w_2), w_1 - w_2 \rangle\rangle \geq \nu \left[\left\|x^1 - x^2\right\|_{L^2}^2 + \left\|y^1 - y^2\right\|_{L^2}^2 \right].$$

Si ha:

$$\langle\langle A(t, w_1) - A(t, w_2), w_1 - w_2 \rangle\rangle =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^1(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^1(t)\right) - \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^2(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^2(t)\right) \times$$

$$\times \left[x_{ij}^1(t) - x_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^1(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^1(\tau)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. - \int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^2(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^2(\tau)\right) d\tau \right) \times \left[x_{ij}^1(t) - x_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n - \left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left(r_j^1(t) - r_j^2(t)\right) \times \left[x_{ij}^1(t) - x_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^1(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^1(t)\right) - \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^2(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^2(t)\right) \times$$

$$\times \left[y_{ij}^1(t) - y_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^1(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^1(\tau)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. - \int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^2(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^2(\tau)\right) d\tau \right) \times \left[y_{ij}^1(t) - y_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left(1 + h_j(t)\right)\left(r_j^1(t) - r_j^2(t)\right) \times \left[y_{ij}^1(t) - y_{ij}^2(t)\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_0^T \left[\left(\sum_{j=1}^n \left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left[x_{ij}^1(t) - \left(1 + h_j(t)\right) y_{ij}^1(t)\right] + F_j(t) \right) + \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{j=1}^n \left(1 - \tau_{ij}(t)\right)\left[x_{ij}^2(t) - \left(1 + h_j(t)\right) y_{ij}^2(t)\right] + F_j(t) \right) \right] \times$$

$$\times \left[r_j^1(t) - r_j^2(t)\right] dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(t) - x_i^2(t)\right) \times \left[x_{ij}^1(t) - x_{ij}^2(t)\right]\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(t) - y_i^2(t)\right) \times \left[x_{ij}^1(t) - x_{ij}^2(t)\right]\right] dt +$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(t)-y_i^2(t)\right) \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(t)-x_i^2(t)\right) \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(\tau)-x_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[x_{ij}^1(t)-x_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(\tau)-y_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[x_{ij}^1(t)-x_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(\tau)-y_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(\tau)-x_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt \geq$$

$$\geq \nu \left[\left\|x^1-x^2\right\|_{L^2}^2 + \left\|y^1-y^2\right\|_{L^2}^2\right] +$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(\tau)-x_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[x_{ij}^1(t)-x_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(\tau)-y_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[x_{ij}^1(t)-x_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot \left(y_i^1(\tau)-y_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt+$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\int_0^t 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot \left(x_i^1(\tau)-x_i^2(\tau)\right) d\tau \times \left[y_{ij}^1(t)-y_{ij}^2(t)\right]\right] dt.$$

Poniamo, per $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$:

$$v_j^i(t) = \int_0^t \left(x_{ij}^1(\tau)-x_{ij}^2(\tau)\right) d\tau,$$

$$u_j^i(t) = \int_0^t \left(y_{ij}^1(\tau)-y_{ij}^2(\tau)\right) d\tau,$$

e denotiamo con $[Q_{hk}^i]_j^k$ il k-esimo elemento della j-esima colonna di Q_{hk}^i. Il termine di memoria può essere riscritto nel seguente modo:

$$2\sum_{i=1}^{m}\int_0^T\left[\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{11}^i\right]_j^k v_k^i(t)\cdot\frac{dv_j^i(t)}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{21}^i\right]_j^k u_k^i(t)\cdot\frac{dv_j^i(t)}{dt}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{22}^i\right]_j^k u_k^i(t)\cdot\frac{du_j^i(t)}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{12}^i\right]_j^k v_k^i(t)\cdot\frac{du_j^i(t)}{dt}\right]dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_0^T\left[\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{11}^i\right]_j^k\frac{dv_k^i(t)\cdot v_j^i(t)}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\left[Q_{21}^i\right]_j^k\frac{du_k^i(t)\cdot v_j^i(t)}{dt}+\right.$$

$$\left.+\left[Q_{22}^i\right]_j^k\frac{du_k^i(t)\cdot u_j^i(t)}{dt}+\left[Q_{12}^i\right]_j^k\frac{dv_k^i(t)\cdot u_j^i(t)}{dt}\right]dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\left[Q_{11}^i\right]_j^k v_k^i(T)\cdot v_j^i(T)+\left[Q_{21}^i\right]_j^k u_k^i(T)\cdot v_j^i(T)+\right.$$

$$\left.+\left[Q_{22}^i\right]_j^k u_k^i(T)\cdot u_j^i(T)+\left[Q_{12}^i\right]_j^k v_k^i(T)\cdot u_j^i(T)\right\}\geq$$

$$\geq\mu\left[\left(\int_0^T\left(x_{ij}^1(\tau)-x_{ij}^2(\tau)\right)d\tau\right)^2+\left(\int_0^T\left(y_{ij}^1(\tau)-y_{ij}^2(\tau)\right)d\tau\right)^2\right]\geq 0.$$

Quindi, risulta:

$$\langle\langle A(t,w_1)-A(t,w_2),w_1-w_2\rangle\rangle\geq\nu\left[\left\|x^1-x^2\right\|_{L^2}^2+\left\|y^1-y^2\right\|_{L^2}^2\right]+$$
$$+\mu\left[\left(\int_0^T\left(x_{ij}^1(\tau)-x_{ij}^2(\tau)\right)d\tau\right)^2+\left(\int_0^T\left(y_{ij}^1(\tau)-y_{ij}^2(\tau)\right)d\tau\right)^2\right]\geq$$
$$\geq\nu\left[\left\|x^1-x^2\right\|_{L^2}^2+\left\|y^1-y^2\right\|_{L^2}^2\right],$$

cioè abbiamo provato la forte monotonia rispetto a x e y e la monotonia rispetto ad r.

Proviamo, adesso, che $A(t,w)$ è Fan-hemicontinua, cioè:

$$\langle\langle A(t,w),w-\xi\rangle\rangle,\ \text{dove } \xi \text{ è fissato, è debolmente semicontinua inferiormente.}$$

Vogliamo provare che:

$$\liminf_n\langle\langle A(t,w_n),w_n-\xi\rangle\rangle\geq\langle\langle A(t,w),w-\xi\rangle\rangle,\quad\forall\{w_n\}:w_n\rightharpoonup w.$$

Si ha

$$\langle\langle A(t,w_n),w_n-\xi\rangle\rangle=$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t) + \int_0^t \big(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau) + \right.$$

$$\left. +2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau)\big) d\tau - (1 - \tau_{ij}(t))\, r_j^n(t) \right] \times \left[x_{ij}^n(t) - \xi_1\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t) + 2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t) + \int_0^t \big(2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau) + \right.$$

$$\left. +2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau)\big) d\tau + (1 - \tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\,(1 + h_j(t)) \right] \times \left[y_{ij}^n(t) - \xi_2\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^n (1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^n(t) - (1 + h_j(t))\, y_{ij}^n(t)\right] + F_j(t) \right\} \times \left[r_j^n(t) - \xi_3\right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[\left(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t \left(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau)\right) d\tau \right) \right] \times \left[x_{ij}^n(t) - \xi_1\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[\left(2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t) 2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t \left(2 \left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau) + 2 \left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau)\right) d\tau \right) \right] \times \left[y_{ij}^n(t) - \xi_2\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[(1 - \tau_{ij}(t))\, r_j^n(t) \xi_1 \right] dt - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[(1 - \tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\,(1 + h_j(t))\, \xi_2 \right] dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^T F_j(t) \left[r_j^n(t) - \xi_3\right] dt - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[(1 - \tau_{ij}(t)) \left[x_{ij}^n(t) - (1 + h_j(t))\, y_{ij}^n(t)\right] \xi_3 \right] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^T \left[\left(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t \left(2 \left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau) + 2 \left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau)\right) d\tau \right) \right] \times \left[x_{ij}^n(t) - \xi_1\right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[\left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau)\right) d\tau \right) \right] \times \left[y_{ij}^n(t) - \xi_2\right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[(1-\tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\xi_1 \right] dt - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[(1-\tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\,(1+h_j(t))\,\xi_2 \right] dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^T F_j(t)\left[r_j^n(t) - \xi_3\right] dt - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[(1-\tau_{ij}(t))\, x_{ij}^n(t)\xi_3 \right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[(1-\tau_{ij}(t))\,(1+h_j(t))\, y_{ij}^n(t)\xi_3 \right] dt.$$

Per la debole continuità:

- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T (1-\tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\xi_1 dt = \int_0^T (1-\tau_{ij}(t))\, r_j(t)\xi_1 dt,$
- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T -(1-\tau_{ij}(t))\, r_j^n(t)\,(1+h_j(t))\,\xi_2 dt = \int_0^T -(1-\tau_{ij}(t))\, r_j(t)\,(1+h_j(t))\,\xi_2 dt,$
- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T F_j(t) r_j^n(t) = \int_0^T F_j(t) r_j(t) dt,$
- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T -(1-\tau_{ij}(t))\, x_{ij}^n(t)\xi_3 = \int_0^T -(1-\tau_{ij}(t))\, x_{ij}(t)\xi_3 dt,$
- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T (1-\tau_{ij}(t))\,(1+h_j(t))\, y_{ij}^n(t)\xi_3 = \int_0^T (1-\tau_{ij}(t))\,(1+h_j(t))\, y_{ij}(t)\xi_3 dt.$

Le funzioni presenti nella nostra espressione sono funzioni continue rispetto a w in L^2 e per le ipotesi su Q sono funzioni convesse rispetto a w. Per il Teorema in cui si afferma che una funzione convessa e continua è anche debolmente semicontinua inferiormente, si ottiene:

$$\liminf_n \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[\left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(t)\right) \times \left[x_{ij}^n(t) - \xi_1\right] \right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \left[\int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i^n(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i^n(\tau)\right) d\tau \times \left[x_{ij}^n(t) - \xi_1\right] \right] dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\left(2\left[Q_{22}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}^{n}(t)+2\left[Q_{12}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}^{n}(t)\right)\times\left[y_{ij}^{n}(t)-\xi_{2}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\int_{0}^{t}\left(2\left[Q_{22}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}^{n}(\tau)+2\left[Q_{12}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}^{n}(\tau)\right)d\tau\times\left[y_{ij}^{n}(t)-\xi_{2}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,r_{j}^{n}(t)\xi_{1}\right]dt-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,r_{j}^{n}(t)\,(1+h_{j}(t))\,\xi_{2}\right]dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[F_{j}(t)\left[r_{j}^{n}(t)-\xi_{3}\right]\right]dt-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,x_{ij}^{n}(t)\xi_{3}\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,(1+h_{j}(t))\,y_{ij}^{n}(t)\xi_{3}\right]dt\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\left(2\left[Q_{11}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}(t)+2\left[Q_{21}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}(t)\right)\times\left[x_{ij}(t)-\xi_{1}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\int_{0}^{t}\left(2\left[Q_{11}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}(\tau)+2\left[Q_{21}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}(\tau)\right)d\tau\times\left[x_{ij}(t)-\xi_{1}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\left(2\left[Q_{22}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}(t)+2\left[Q_{12}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}(t)\right)\times\left[y_{ij}(t)-\xi_{2}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[\int_{0}^{t}\left(2\left[Q_{22}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot y_{i}(\tau)+2\left[Q_{12}^{i}\right]_{j}^{T}\cdot x_{i}(\tau)\right)d\tau\times\left[y_{ij}(t)-\xi_{2}\right]\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,r_{j}(t)\xi_{1}\right]dt-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,r_{j}(t)\,(1+h_{j}(t))\,\xi_{2}\right]dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[F_{j}(t)\left[r_{j}(t)-\xi_{3}\right]\right]dt-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,x_{ij}(t)\xi_{3}\right]dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\left[(1-\tau_{ij}(t))\,(1+h_{j}(t))\,y_{ij}(t)\xi_{3}\right]dt.$$

Allora l'operatore A, definito dalla (3.2.10), è Fan-hemicontinuo.
È semplice provare che A è limitato e, quindi, è provata l'esistenza delle soluzioni della disequazione quasi-variazionale (3.2.7).

3.4 Applicazione della teoria duale infinito dimensionale al problema generale di equilibrio finanziario

In questo paragrafo utilizzeremo alcuni noti risultati relativi alla teoria della dualità infinito dimensionale (vedi [6], [33], [54], [68]), applicandoli al problema di equilibrio finanziario espresso dalla disequazione variazionale (3.2.7). Il primo passo è quello di introdurre il funzionale Lagrangiano per il nostro modello. A tal fine, poniamo

$$f(x,y,r) = \langle\langle A(t,w^*), w - w^*\rangle\rangle.$$

Allora, il fuzionale di Lagrange è

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y,r,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\mu^{(1)},\mu^{(2)},\rho^{(1)},\rho^{(2)}) &= f(x,y,r) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \lambda_{ij}^{(1)}(t)x_{ij}(t)\,dt + \\ &- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \lambda_{ij}^{(2)} y_{ij}(t)\,dt - \sum_{i=1}^{m}\int_0^T \mu_i^{(1)}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - \hat{s}_i(t)\right)dt + \\ &- \sum_{i=1}^{m}\int_0^T \mu_i^{(2)}(t)\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - \hat{l}_i(t)\right)dt + \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \rho_j^{(1)}(t)(\underline{r}_j(t) - r_j(t))\,dt + \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \rho_j^{(2)}(t)(r_j(t) - \overline{r}_j(t))\,dt, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

dove $(x,y,r) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{2mn+n})$, $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$, $\mu^{(1)},\mu^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\rho^{(1)},\rho^{(2)} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ e

$$\hat{s}_i(t) = s_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right), \quad \hat{l}_i(t) = l_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right).$$

Ricordiamo che $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati, q.o. in $[0,T]$, ai vincoli di segno $x_i(t) \geq 0$, $y_i(t) \geq 0$, $r_j(t) - \underline{r}_j(t) \geq 0$, $\overline{r}_j(t) - r_j(t) \geq 0$, rispettivamente. Le funzioni $\mu^{(1)}(t)$ e $\mu^{(2)}(t)$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati, q.o. in $[0,T]$, ai vincoli di uguaglianza $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) - \hat{s}_i(t) = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t) - \hat{l}_i(t) = 0$, rispettivamente.

Nell'articolo [6] Sezione 6 è stato provato il seguente teorema:

Teorema 3.4.1. *Sia* $(x^*,y^*,r^*) \in P \times \mathcal{R}$ *una soluzione della disequazione variazionale* (3.2.7) *e consideriamo il funzionale di Lagrange associato* (3.4.1)*. Allora, vale la forte dualità ed esistono* $\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^{mn}_+)$, $\mu^{(1)*},\mu^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\rho^{(1)*},\rho^{(2)*} \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n_+)$ *tali che* $(x^*,y^*,r^*,\lambda^{(1)*},\lambda^{(2)*},\mu^{(1)*},\mu^{(2)*},\rho^{(1)*},\rho^{(2)*})$ *è un punto sella della funzione Lagrangiana, cioè*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x^*, y^*, r^*, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}) \\ &\leq \mathcal{L}(x^*, y^*, r^*, \lambda^{(1)*}, \lambda^{(2)*}, \mu^{(1)*}, \mu^{(2)*}, \rho^{(1)*}, \rho^{(2)*}) = 0 \\ &\leq \mathcal{L}(x, y, r, \lambda^{(1)*}, \lambda^{(2)*}, \mu^{(1)*}, \mu^{(2)*}, \rho^{(1)*}, \rho^{(2)*}) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$\forall(x,y,r) \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{2mn+n})$, $\forall\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \in L^2([0,T], \mathbb{R}^{mn}_+)$, $\forall\mu^{(1)}, \mu^{(2)} \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, $\forall\rho^{(1)}, \rho^{(2)} \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n_+)$ *e, q.o. in* $[0,T]$,

$$\begin{aligned} &-2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + \int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau)\right) d\tau + \\ &- (1-\tau_{ij}(t))\, r_j(t) - (1-\tau_{ij}(t)) r_j^*(t) - \lambda_{ij}^{(1)*}(t) - \mu_i^{(1)*}(t) = 0, \\ &\qquad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1 \ldots, n; \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

$$\begin{aligned} &-2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(t) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(t) + \int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau)\right) d\tau + \\ &+ (1-\tau_{ij}(t))\, r_j(t)\,(1+h_j(t)) + (1-\tau_{ij}(t))(1+h_j(t)) r_j^*(t) \lambda_{ij}^{(2)*}(t) - \mu_i^{(2)*}(t) = 0, \\ &\qquad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1 \ldots, n; \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m (1-\tau_{ij}(t))\left[x_{ij}^*(t) - (1+h_j(t)) y_{ij}^*(t)\right] + F_j(t) + \rho_j^{(2)*}(t) = \rho_j^{(1)*}(t), \\ &\qquad \forall j = 1, \ldots, n; \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$\lambda_{ij}^{(1)*}(t) x_{ij}^*(t) = 0, \quad \lambda_{ij}^{(2)*}(t) y_{ij}^*(t) = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.4.6}$$

$$\mu_i^{(1)*}(t)\left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^*(t) - \hat{s}_i(t)\right) = 0, \quad \mu_i^{(2)*}(t)\left(\sum_{j=1}^n y_{ij}^*(t) - \hat{l}_i(t)\right) = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\forall i = 1, \ldots, m$$

$$\rho_j^{(1)*}(t)(\underline{r}_j(t) - r_j^*(t)) = 0, \quad \rho_j^{(2)*}(t)(r_j^*(t) - \overline{r}_j(t)) = 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{3.4.8}$$

Questo Teorema è importante poichè permette di ottenere la Formula di Bilancio, cioè:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \hat{l}_i(t) \;=\; & \sum_{i=1}^m \hat{s}_i(t) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{ij}(t)\left[x_{ij}^*(t) - y_{ij}^*(t)\right] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (1-\tau_{ij}(t)) h_j(t) y_{ij}^*(t) + \\ & + \sum_{j=1}^n F_j(t) - \sum_{j=1}^n \rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^n \rho_j^{(2)*}(t). \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Supponiamo che le tasse $\tau_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ abbiano un valore comune $\theta(t)$, e gli incrementi $h_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, abbiano un valore comune $i(t)$, oppure si considerano semplicemente i valori medi. Si ottiene l'importante Formula delle Passività

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{l}_i(t) = \frac{(1-\theta(t))\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))}.$$

A partire dall Formula delle Passività possiamo ottenere l'indice $E(t)$, chiamato "Indice di Valutazione", che risulta essere fondamentale per la valutazione dell'economia:

$$E(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{l}_i(t)}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)}, \tag{3.4.10}$$

dove si pone

$$\tilde{s}_i(t) = \frac{\hat{s}_i(t)}{1+i(t)}, \quad \tilde{F}_j(t) = \frac{F_j(t)}{1+i(t)-\theta(t)-\theta(t)i(t)}.$$

In particolare, se l'Indice di Valutazione $E(t) \geq 1$, la valutazione dell'equilibrio finanziario è positiva, mentre se $E(t) < 1$, la valutazione dell'equilibrio finanziario è negativa. Infatti, risulta

$$\begin{aligned} E(t) &= 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)\right)} + \\ &\quad + \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t)}{(1-\theta(t))(1+i(t))\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)\right)}. \end{aligned}$$

Se $E(t) < 1$, vuol dire che $\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) < \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)$ e questo implica che la somma dei deficit supera la somma dei surplus e, quindi, troviamo una valutazione negativa. Invece, se $E(t) \geq 1$, allora $\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(2)*}(t) \geq \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(1)*}(t)$, ovvero il surplus è maggiore del deficit e, quindi, abbiamo una valutazione positiva dell'economia.

Capitolo 4

Esempi

4.1 Esempio con termine di memoria

Come abbiamo osservato in precedenza, nel nostro modello, consideriamo una funzione di utilità che è data dalla somma del termine memoria e della funzione quadratica ottenuta mediante la matrice di varianza-covarianza che denota la valutazione del settore della deviazione standard dei prezzi per ogni strumento. Consideriamo un'economia con due settori e due strumenti finanziari. Le matrici di varianza-covarianza dei due settori sono:

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nell'intervallo di tempo $[0,1]$, la funzione $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ è data da:

$$u_i(t, x_i(t), y_i(t)) = -\begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t-z) \\ y_i(t-z) \end{bmatrix} dz.$$

Scegliamo come insieme ammissibile per gli attivi, i passivi e i prezzi, l'insieme:

$$\mathbb{K}(w^*) = \Bigg\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in L^2([0,1], \mathbb{R}^{10}_+) :$$

$$x_{11}(t) + x_{12}(t) = \alpha \int_0^1 r_1^*(s)\, ds + \beta,\ x_{21}(t) + x_{22}(t) = \alpha \int_0^1 r_2^*(s)\, ds + \beta,$$

$$y_{11}(t) + y_{12}(t) = \gamma,\ y_{21}(t) + y_{22}(t) = \delta \text{ q.o. in } [0,1]$$

$$\text{e } 2t \le r_1(t) \le 3t,\ t \le r_2(t) \le \frac{3}{2} t \text{ q.o. in } [0,1] \Bigg\},$$

dove α, β, γ e δ sono parametri positivi appropriatamente fissati. Segue che la seguente disequazione quasi-variazionale (3.2.8) diventa il problema:
Trovare $w^* \in \mathbb{K}(w^*)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Bigg\{ \left[2(x^*_{11}(t) - 0.5y^*_{11}(t)) + \int_0^t 2(x^*_{11}(t) - 0.5y^*_{11}(t))d\tau - (1-\tau_{11}(t))\, r^*_1(t)\right] + \\
&\qquad (x_{11}(t) - x^*_{11}(t)) + \\
&+ \left[2x^*_{12}(t) + \int_0^t 2x^*_{12}(t)d\tau - (1-\tau_{12}(t))\, r^*_2(t)\right] (x_{12}(t) - x^*_{12}(t)) + \\
&+ \left[2x^*_{21}(t) + \int_0^t 2x^*_{21}(t)d\tau - (1-\tau_{21}(t))\, r^*_1(t)\right] (x_{21}(t) - x^*_{21}(t)) + \\
&+ \left[2(x^*_{22}(t) - 0.5y^*_{21}(t)) + \int_0^t 2(x^*_{22}(t) - 0.5y^*_{21}(t))d\tau - (1-\tau_{22}(t))\, r^*_2(t)\right] \times \\
&\qquad \times (x_{22}(t) - x^*_{22}(t)) + \\
&+ \left[2(y^*_{11}(t) - 0.5x^*_{11}(t)) + \int_0^t 2(y^*_{11}(t) - 0.5x^*_{11}(t))d\tau + (1-\tau_{11}(t))\, r^*_1(t)(1+h_1(t))\right] \times \\
&\qquad \times (y_{11}(t) - y^*_{11}(t)) + \\
&+ \left[2y^*_{12}(t) + \int_0^t 2y^*_{12}(t)d\tau + (1-\tau_{12}(t))\, r^*_2(t)(1+h_2(t))\right] (y_{12}(t) - y^*_{12}(t)) + \\
&+ \left[2(y^*_{21}(t) - 0.5x^*_{22}(t)) + \int_0^t 2(y^*_{21}(t) - 0.5x^*_{22}(t))d\tau + (1-\tau_{21}(t))\, r^*_1(t)(1+h_1(t))\right] \times \\
&\qquad \times (y_{21}(t) - y^*_{21}(t)) + \\
&+ \left[2y^*_{22}(t) + \int_0^t 2y^*_{22}(t)d\tau + (1-\tau_{22}(t))\, r^*_2(t)(1+h_2(t))\right] (y_{22}(t) - y^*_{22}(t)) + \\
&+ \Big\{ (1-\tau_{11}(t))\, [x^*_{11}(t) - (1+h_1(t))\, y^*_{11}(t)] + \\
&+ (1-\tau_{21}(t))\; [x^*_{21}(t) - (1+h_1(t))\, y^*_{21}(t)] + F_1(t) \Big\}\; (r_1(t) - r^*_1(t)) + \\
&+ \Big\{ (1-\tau_{12}(t))\, [x^*_{12}(t) - (1+h_2(t))\, y^*_{12}(t)] + \\
&+ (1-\tau_{22}(t))\; [x^*_{22}(t) - (1+h_2(t))\, y^*_{22}(t)] + F_2(t) \Big\}\; (r_2(t) - r^*_2(t)) \Bigg\} \mathrm{d}t \geq 0\,, \qquad (4.1.1) \\
&\qquad\qquad \forall w \in \mathbb{K}(w^*).
\end{aligned}$$

Per la legge di conservazione, abbiamo:

$$\begin{aligned}
x_{12}(t) &= \alpha \int_0^1 r^*_1(s)\,\mathrm{d}s - x_{11}(t) + \beta, & x_{21}(t) &= \alpha \int_0^1 r^*_2(s)\,\mathrm{d}s - x_{22}(t) + \beta, \\
y_{12}(t) &= -\,y_{11}(t) + \gamma, & y_{21}(t) &= -\,y_{22}(t) + \delta\,.
\end{aligned}$$

Così, risulta:

$$\int_0^1 \Bigg(\Bigg[4\,x_{11}^*(t)\;+\;4\int_0^t x_{11}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;y_{11}^*(t)\;-\;\int_0^t y_{11}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;2\,\alpha\int_0^1 r_1^*(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$-\,2\,\alpha\int_0^t\int_0^1 r_1^*(s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\;-2\beta-2\beta t-(1-\tau_{11}(t))r_1^*(t)+(1-\tau_{12}(t))r_2^*(t)\Bigg](x_{11}(t)-x_{11}^*(t))+$$

$$+\Bigg[4\,x_{22}^*(t)\;+\;4\int_0^t x_{22}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;+\;y_{22}^*(t)\;+\;\int_0^t y_{22}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;2\,\alpha\int_0^1 r_2^*(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$-\,2\,\alpha\int_0^t\int_0^1 r_2^*(s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\;-2\beta-2\beta t-\delta-\delta t+(1-\tau_{21}(t))r_1^*(t)-(1-\tau_{22}(t))r_2^*(t)\Bigg]\cdot$$

$$\cdot(x_{22}(t)-x_{22}^*(t))+$$

$$+\Bigg[4\,y_{11}^*(t)\;+\;4\int_0^t y_{11}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;x_{11}^*(t)-\;\int_0^t x_{11}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;2\,\gamma\;-\;2\,\gamma t+$$

$$+\,(1-\tau_{11}(t))\,r_1^*(t)\,(1+h_1(t))-(1-\tau_{12}(t))\,r_2^*(t)\,(1+h_2(t))\Bigg](y_{11}(t)-y_{11}^*(t))+$$

$$+\Bigg[4\,y_{22}^*(t)\;+\;4\int_0^t y_{22}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;+\;x_{22}^*(t)+\;\int_0^t x_{22}^*(t)\,\mathrm{d}\tau\;-\;2\,\delta\;-\;2\,\delta t+$$

$$-\,(1-\tau_{21}(t))\,r_1^*(t)\,(1+h_1(t))+(1-\tau_{22}(t))\,r_2^*(t)\,(1+h_2(t))\Bigg](y_{22}(t)-y_{22}^*(t))+$$

$$+\Bigg\{(1-\tau_{11}(t))[x_{11}^*(t)-(1+h_1(t))y_{11}^*(t)]+$$

$$+(1-\tau_{21}(t))\left[\alpha\int_0^1 r_2^*(s)\,\mathrm{d}s-x_{22}^*(t)+\beta-(1+h_1(t))(-y_{22}^*(t)+\delta)\right]+F_1(t)\Bigg\}\cdot$$

$$\cdot\,(r_1(t)-r_1^*(t))+$$

$$+\Bigg\{(1-\tau_{12}(t))\left[\alpha\int_0^1 r_1^*(s)\,\mathrm{d}s-x_{11}^*(t)+\beta-(1+h_2(t))(-y_{11}^*(t)+\gamma)\right]+$$

$$+\,(1-\tau_{22}(t))[x_{22}^*(t)-(1+h_2(t))y_{22}^*(t)]+F_2(t)\Bigg\}(r_2(t)-r_2^*(t))\;\Bigg)\mathrm{d}t\geq 0\,, \qquad (4.1.2)$$

per ogni $x_{11}(t),\ x_{22}(t),\ y_{11}(t),\ y_{22}(t),\ r_1(t),\ r_2(t)$ tale che

$$0\leq x_{11}(t)\leq\alpha\int_0^1 r_1^*(s)\,\mathrm{d}s+\beta,\quad 0\leq x_{22}(t)\leq\alpha\int_0^1 r_2^*(s)\,\mathrm{d}s+\beta,$$

$$0\leq y_{11}(t)\leq\gamma,\quad 0\leq y_{22}(t)\leq\delta,$$

$$2t\leq r_1(t)\leq 3t,\quad t\leq r_2(t)\leq\frac{3}{2}t.$$

Applicando il metodo diretto (vedi [19], [53]) e scegliendo $\tau_{ij} = \dfrac{1}{4}\ \forall i,\, j$ e $h_j = 1\ \forall j$, troviamo che la soluzione della disequazione variazionale (4.1.2) si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}
\Gamma_1 = 4\,x^*_{11}(t) \,+\, 4\displaystyle\int_0^t x^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau \,-\, y^*_{11}(t) \,-\, \int_0^t y^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau \,-\, 2\,\alpha\int_0^1 r^*_1(s)\,\mathrm{d}s +\\
\qquad -\,2\,\alpha\displaystyle\int_0^t\int_0^1 r^*_1(s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \,-2\beta - 2\beta t - \frac{3}{4}r^*_1 + \frac{3}{4}r^*_2(t) \,=\, 0\\
\Gamma_2 = 4\,x^*_{22}(t) \,+\, 4\displaystyle\int_0^t x^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau \,+\, y^*_{22}(t) \,+\, \int_0^t y^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau \,-\, 2\,\alpha\int_0^1 r^*_2(s)\,\mathrm{d}s +\\
\qquad -\,2\,\alpha\displaystyle\int_0^t\int_0^1 r^*_2(s)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \,-2\beta - 2\beta t - \delta - \delta t + \frac{3}{4}r^*_1 - \frac{3}{4}r^*_2(t) \,=\, 0\\
\Gamma_3 = 4\,y^*_{11}(t) + 4\displaystyle\int_0^t y^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - x^*_{11}(t) - \int_0^t x^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - 2\gamma - 2\gamma t + \frac{3}{2}r^*_1 - \frac{3}{2}r^*_2 = 0\\
\Gamma_4 = 4\,y^*_{22}(t) + 4\displaystyle\int_0^t y^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau + x^*_{22}(t) + \int_0^t x^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau - 2\delta - 2\delta t - \frac{3}{2}r^*_1 + \frac{3}{2}r^*_2 > 0\\
\Gamma_5 = \dfrac{3}{4}\left[x^*_{11}(t) - 2y^*_{11}(t)\right] + \dfrac{3}{4}\left[\alpha\displaystyle\int_0^1 r^*_2(s)\,\mathrm{d}s - x^*_{22} + \beta - 2(-y^*_{22} + \delta)\right] + F_1 > 0\\
\Gamma_6 = \dfrac{3}{4}\left[\alpha\displaystyle\int_0^1 r^*_1(s)\,\mathrm{d}s - x^*_{11} + \beta - 2(-y^*_{11} + \gamma)\right] + \dfrac{3}{4}\left[x^*_{22}(t) - 2y^*_{22}(t)\right] + F_2 > 0\,.
\end{cases}$$

Poichè $\Gamma_4 > 0$, $\Gamma_5 > 0$ e $\Gamma_6 > 0$, il metodo dirette assicura che

$$y^*_{22}(t) = 0, \qquad r^*_1(t) = \underline{r}_1(t) = 2t, \qquad r^*_2(t) = \underline{r}_2(t) = t.$$

Inoltre, poichè

$$\int_0^1 r^*_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = 1 \text{ e } \int_0^1 r^*_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

il sistema:

$$\begin{cases}
\Gamma_1 = 0 \iff 4x^*_{11}(t) + 4\displaystyle\int_0^t x^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - y^*_{11}(t) - \int_0^t y^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - 2\alpha - 2\alpha t - 2\beta - 2\beta t - \frac{3}{4}t = 0\\
\Gamma_2 = 0 \iff 4x^*_{22}(t) + 4\displaystyle\int_0^t x^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau + y^*_{22}(t) + \int_0^t y^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau - \alpha - \alpha t - 2\beta - 2\beta t - \delta - \delta t + \frac{3}{4}t = 0\\
\Gamma_3 = 0 \iff 4y^*_{11}(t) + 4\displaystyle\int_0^t y^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - x^*_{11}(t) - \int_0^t x^*_{11}(t)\,\mathrm{d}\tau - 2\gamma - 2\gamma t + \frac{3}{2}t = 0\\
\Gamma_4 > 0 \iff 4y^*_{22}(t) + 4\displaystyle\int_0^t y^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau + x^*_{22}(t) + \int_0^t x^*_{22}(t)\,\mathrm{d}\tau - 2\delta - 2\delta t - \frac{3}{2}t > 0
\end{cases}$$

diventa:

$$\begin{cases} y_{11}^*(t) = \dfrac{7}{20}\,e^{-t} + \dfrac{2}{15}\,(\alpha+\beta+4\gamma) - \dfrac{7}{20} \\ y_{22}^*(t) = 0 \\ x_{11}^*(t) = -\dfrac{1}{10}\,e^{-t} + \dfrac{8}{15}\left(\alpha+\beta+\dfrac{\gamma}{4}\right) + \dfrac{1}{10} \\ x_{22}^*(t) = \dfrac{3}{16}\,e^{-t} + \dfrac{1}{4}\,(\alpha+2\beta+\delta) - \dfrac{3}{16}. \end{cases}$$

Inoltre, $\Gamma_5 > 0$ e $\Gamma_6 > 0$ e ciò significa che:

$$F_1 > \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{31}{60}\alpha - \frac{23}{30}\beta + \frac{9}{4}\delta + \frac{14}{15}\gamma - \frac{79}{80}\right],$$

$$F_2 > \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{59}{60}\alpha - \frac{37}{30}\beta - \frac{1}{4}\delta + \frac{16}{15}\gamma + \frac{79}{80}\right].$$

Osserviamo che α, β, δ, γ devono soddisfare le seguenti condizioni in $[0,1]$:

$$0 \le x_{11}^*(t) \le \beta+\alpha, \qquad 0 \le y_{11}^*(t) \le \gamma,$$

$$0 \le x_{22}^*(t) \le \beta + \frac{1}{2}\alpha, \qquad 0 \le y_{22}^*(t) \le \delta.$$

Se scegliamo $\alpha = 15$, $\beta = 14$, $\delta = 1$, $\gamma = 11$ queste condizioni sono soddisfatte. Sostituendo tali valori nella soluzione di equilibrio, otteniamo q.o. in $t \in [0,1]$:

$$\begin{cases} x_{11}^*(t) &= -\dfrac{1}{10}\,e^{-t} + \dfrac{511}{30} \\ x_{22}^*(t) &= \dfrac{3}{16}\,e^{-t} + \dfrac{173}{16} \\ y_{11}^*(t) &= \dfrac{7}{20}\,e^{-t} + \dfrac{563}{60} \\ y_{22}^*(t) &= 0 \\ r_1^*(t) &= 2t \\ r_2^*(t) &= t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_{12}^*(t) &= \dfrac{1}{10}\,e^{-t} + \dfrac{359}{30} \\ x_{21}^*(t) &= -\dfrac{3}{16}\,e^{-t} + \dfrac{171}{16} \\ y_{12}^*(t) &= -\dfrac{7}{20}\,e^{-t} + \dfrac{97}{60} \\ y_{21}^*(t) &= 1. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Infine, le condizioni $\Gamma_5 > 0$ e $\Gamma_6 > 0$ diventano in $[0,1]$:

$$F_1 > \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{1669}{240}\right],$$

$$F_2 > \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{4691}{240}\right].$$

Dalla formula (3.4.5) e (3.4.8) sappiamo che:

$$\Gamma_5 + \rho_1^{(2)*}(t) = \rho_1^{(1)*}(t) \;\text{ e }\; \Gamma_6 + \rho_2^{(2)*}(t) = \rho_2^{(1)*}(t)$$

e

$$\rho_1^{(1)*}(t)(\underline{r}_1(t) - r_1^*(t)) = 0 \;\text{ e }\; \rho_1^{(2)*}(t)(r_1^*(t) - \overline{r}_1(t)) = 0,$$

$$\rho_2^{(1)*}(t)(\underline{r}_2(t) - r_2^*(t)) = 0 \;\text{ e }\; \rho_2^{(2)*}(t)(r_2^*(t) - \overline{r}_2(t)) = 0.$$

Poichè $r_1^*(t) = \underline{r}_1(t)$, otteniamo che $\rho_1^{(1)*}(t) > 0$ e $\rho_1^{(2)*}(t) = 0$; quindi:

$$\Gamma_5 = \rho_1^{(1)*}(t) > 0.$$

Analogamente, poichè $r_2^*(t) = \underline{r}_2(t)$, otteniamo che $\rho_2^{(1)*}(t) > 0$ e $\rho_2^{(2)*}(t) = 0$; quindi:

$$\Gamma_6 = \rho_2^{(1)*}(t) > 0.$$

Ma $\rho_1^{(1)*}(t)$ e $\rho_2^{(1)*}(t)$ sono le variabili relative al deficit e sono positive. Quindi l'economia si trova in una fase di regressione. La stessa conclusione si ottiene considerando l'indice di valutazione. Infatti, ponendo, q.o. in $[0,1]$:

$$F_1 = \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{1669}{240}\right] + \phi_1(t),$$

$$F_2 = \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}\,e^{-t} - \frac{4691}{240}\right] + \phi_2(t),$$

$$\phi_1(t), \phi_2(t) > 0 \text{ in } [0,1],$$

e ricordando che

$$E(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \hat{l}_i(t)}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{s}_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{F}_j(t)} \quad \text{con} \quad \tilde{F}_j(t) = \frac{F_j(t)}{1 + i(t) - \theta(t) - \theta(t)i(t)}\,,$$

da un semplice calcolo si ottiene

$$E(t) = \frac{12}{12 + \frac{2}{3}\,(\phi_1(t) + \phi_2(t))} < 1.$$

4.2 Esempio senza termine di memoria

Una cosa interessante da fare è un confronto con la soluzione dello stesso problema ma senza considerare il termine di memoria nella funzione di utilità. A tal fine, consideriamo le stesse matrici Q^1 e Q^2 e il termine $u_i(t, x_i(t), y_i(t))$ definito come segue: e data da:

$$u_i(t, x_i(t), y_i(t)) = -\begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}.$$

L'insieme dei vettori ammissibili degli attivi, dei passivi e dei prezzi è:

$$\mathbb{K}(w^*) = \Big\{ w = (x(t), y(t), r(t)) \in L^2([0,1], \mathbb{R}^{10}_+) :$$

$$x_{11}(t) + x_{12}(t) = \alpha \int_0^1 r_1^*(s)\, ds + \beta, \;\; x_{21}(t) + x_{22}(t) = \alpha \int_0^1 r_2^*(s)\, ds + \beta,$$

$$y_{11}(t) + y_{12}(t) = \gamma, \;\; y_{21}(t) + y_{22}(t) = \delta, \text{ q.o. in } [0,1]$$

$$\text{e } 2t \leq r_1(t) \leq 3t \text{ e } t \leq r_2(t) \leq \frac{3}{2} t \text{ q.o. in } [0,1] \Big\}$$

dove α, β e δ sono parametri positivi appropriatemente fissati. Segue che, in questo caso, la disequazione variazionale diventa il problema:
Trovare $w^* \in \mathbb{K}(w^*)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (& [2(x_{11}^*(t) - 0.5 y_{11}^*(t)) - (1 - \tau_{11}(t))\, r_1^*(t)]\ (x_{11}(t) - x_{11}^*(t)) + \\
& + [2x_{12}^*(t) - (1 - \tau_{12}(t))\, r_2^*(t)]\ (x_{12}(t) - x_{12}^*(t)) + \\
& + [2x_{21}^*(t) - (1 - \tau_{21}(t))\, r_1^*(t)]\ (x_{21}(t) - x_{21}^*(t)) + \\
& + [2(x_{22}^*(t) - 0.5 y_{21}^*(t)) - (1 - \tau_{22}(t))\, r_2^*(t)]\ (x_{22}(t) - x_{22}^*(t)) + \\
& + [2(y_{11}^*(t) - 0.5 x_{11}^*(t)) + (1 - \tau_{11}(t))\, r_1^*(t)(\, 1 + h_1(t))]\ (y_{11}(t) - y_{11}^*(t)) + \\
& + [2y_{12}^*(t) + (1 - \tau_{12}(t))\, r_2^*(t)(\, 1 + h_2(t))]\ (y_{12}(t) - y_{12}^*(t)) + \\
& + [2(y_{21}^*(t) - 0.5 x_{22}^*(t)) + (1 - \tau_{21}(t))\, r_1^*(t)(\, 1 + h_1(t))]\ (y_{21}(t) - y_{21}^*(t)) + \\
& + [2y_{22}^*(t) + (1 - \tau_{22}(t))\, r_2^*(t)(\, 1 + h_2(t))]\ (y_{22}(t) - y_{22}^*(t)) + \\
& + \{(1 - \tau_{11}(t))\, [x_{11}^*(t) - (1 + h_1(t))\, y_{11}^*(t)] + \\
& +(1 - \tau_{21}(t))\ [x_{21}^*(t) - (1 + h_1(t))\, y_{21}^*(t)] + F_1(t)\}\ (r_1(t) - r_1^*(t)) + \\
& + \{(1 - \tau_{12}(t))\, [x_{12}^*(t) - (1 + h_2(t))\, y_{12}^*(t)] + \\
& +(1 - \tau_{22}(t))\ [x_{22}^*(t) - (1 + h_2(t))\, y_{22}^*(t)] + F_2(t)\}\ (r_2(t) - r_2^*(t))\ )\, dt \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad \forall w \in \mathbb{K}(w^*).
\end{aligned}$$

Risolvendo il problema con la stessa tecnica (vedi [21]) e scegliendo $\tau_{ij} = \dfrac{1}{4}$ $\forall i$, j e $h_j = 1$ $\forall j$, troviamo che la soluzione è data da:

$$\begin{cases} r_1^*(t) = \underline{r}_1(t) = 2t \\ r_2^*(t) = \underline{r}_2(t) = t \\ y_{11}^*(t) = \dfrac{1}{15}(2\alpha + 2\beta + 8\gamma) - \dfrac{7}{20}t \\ y_{22}^*(t) = 0 \\ x_{11}^*(t) = \dfrac{1}{15}(8\alpha + 8\beta + 2\gamma) + \dfrac{1}{10}t \\ x_{22}^*(t) = \dfrac{1}{4}(\alpha + 2\beta + \delta) - \dfrac{3}{16}t. \end{cases}$$

Inoltre, da $\Gamma_5 > 0$ e $\Gamma_6 > 0$ segue:

$$F_1 > \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}t - \frac{31}{60}\alpha - \frac{23}{30}\beta + \frac{9}{4}\delta + \frac{14}{15}\gamma\right], \tag{4.2.1}$$

$$F_2 > \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}t - \frac{59}{60}\alpha - \frac{37}{30}\beta - \frac{1}{4}\delta + \frac{16}{15}\gamma\right], \tag{4.2.2}$$

purchè siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$0 \leq x_{11}^*(t) \leq \beta + \alpha \qquad 0 \leq y_{11}^*(t) \leq \gamma \tag{4.2.3}$$

$$0 \leq x_{22}^*(t) \leq \beta + \frac{1}{2}\alpha \qquad 0 \leq y_{22}^*(t) \leq \delta. \tag{4.2.4}$$

Scegliamo, come nell'esempio con termine di memoria, $\alpha = 15$, $\beta = 14$, $\delta = 1$, $\gamma = 11$, è semplice verificare che le condizioni (4.2.3), (4.2.4) sono soddisfatte e, sostituendo tali valori nella soluzione di equilibrio, si ottiene q.o. in $[0, 1]$:

$$\begin{cases} x_{11}^{**}(t) &=& \dfrac{254}{15} + \dfrac{1}{10}t, \\ x_{22}^{**}(t) &=& 11 - \dfrac{3}{16}t, \\ y_{11}^{**}(t) &=& \dfrac{146}{15} - \dfrac{7}{20}t, \\ y_{22}^{**}(t) &=& 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_{12}^{**}(t) &=& \dfrac{181}{15} - \dfrac{1}{10}t, \\ x_{21}^{**}(t) &=& \dfrac{21}{2} + \dfrac{3}{16}t, \\ y_{12}^{**}(t) &=& \dfrac{19}{15} + \dfrac{7}{20}t, \\ y_{21}^{**}(t) &=& 1. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Inoltre, sostituendo $\alpha = 15$, $\beta = 14$, $\delta = 1$, $\gamma = 11$ in (4.2.1) e (4.2.2), dalle condizioni $\Gamma_5 > 0$ e $\Gamma_6 > 0$, segue in $[0, 1]$:

$$F_1 > \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}t - \frac{179}{30}\right],$$

$$F_2 > \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}t - \frac{308}{15}\right].$$

Dalle (3.4.5) e (3.4.8) sappiamo che:

$$\Gamma_5 + \rho_1^{(2)*}(t) = \rho_1^{(1)*}(t) \text{ e } \Gamma_6 + \rho_2^{(2)*}(t) = \rho_2^{(1)*}(t)$$

e

$$\rho_1^{(1)*}(t)(\underline{r}_1(t) - r_1^*(t)) = 0 \text{ e } \rho_1^{(2)*}(t)(r_1^*(t) - \overline{r}_1(t)) = 0,$$

$$\rho_2^{(2)*}(t)(\underline{r}_2(t) - r_2^*(t)) = 0 \text{ e } \rho_2^{(2)*}(t)(r_2^*(t) - \overline{r}_2(t)) = 0.$$

Poichè $r_1^*(t) = \underline{r}_1(t)$, otteniamo $\rho_1^{(1)*}(t) > 0$ e $\rho_1^{(2)*}(t) = 0$; quindi:

$$\Gamma_5 = \rho_1^{(1)*}(t) > 0.$$

Analogamente, poichè $r_2^*(t) = \underline{r}_2(t)$, otteniamo $\rho_2^{(1)*}(t) > 0$ e $\rho_2^{(2)*}(t) = 0$; quindi:

$$\Gamma_6 = \rho_2^{(1)*}(t) > 0.$$

Ma $\rho_1^{(1)*}(t)$ e $\rho_2^{(1)*}(t)$ sono le variabili relative al deficit e sono positive. Quindi, l'economia si trova in una fase di regressione. La stessa conclusione si ottiene considerando l'Indice di Valutazione. Infatti, ponendo, q.o. in $[0,1]$:

$$F_1 = \frac{3}{4}\left[-\frac{79}{80}t - \frac{179}{30}\right] + \phi_1(t),$$

$$F_2 = \frac{3}{4}\left[\frac{79}{80}t - \frac{308}{15}\right] + \phi_2(t),$$

$$\phi_1(t), \phi_2(t) > 0 \text{ in } [0,1],$$,

in questo esempio, abbiamo

$$E(t) = \frac{12}{12 + \frac{2}{3}\left(\phi_1(t) + \phi_2(t)\right)} < 1.$$

4.3 Confronto tra i due esempi

Possiamo fare il confronto tra la soluzione del modello con termine di memoria e le soluzione senza termine di memoria. In particolare, si può osservare che entrambe le soluzioni

(4.1.3) e (4.2.5) sono le stesse quando $t = 0$. Invece, quando $t > 0$, le soluzioni (4.1.3) e (4.2.5) sono crescenti. Inoltre, possiamo calcolare la differenza tra le soluzioni:

$$\begin{aligned} d_1(t) &= x_{11}^{**}(t) - x_{11}^{*}(t) = \frac{1}{10}\left[e^{-t} - (1-t)\right], \\ d_2(t) &= x_{22}^{**}(t) - x_{22}^{*}(t) = \frac{3}{16}(1 - t - e^{-t}), \\ d_3(t) &= y_{11}^{**}(t) - y_{11}^{*}(t) = \frac{7}{20}(1 - t - e^{-t}). \end{aligned}$$

Si osserva, così, che le soluzioni del modello senza termine di memoria (4.2.5), sono una prima approssimazione delle soluzioni con termine di memoria (4.1.3).

Conclusioni

In questa tesi, abbiamo presentato un classico modello di equilibrio finanziario e, successivamente, un modello di equilibrio finanziario con termine di memoria e vincoli flessibili e adattivi che, come abbiamo avuto modo di osservare, rendono ancora più realistico il modello. In particolare, si considera una funzione di utilità in cui la misura del rischio, nella forma di Markowitz, dipende da un termine di memoria che esprime l'influenza dei precedenti equilibri finanziari; ovvero la funzione di utilità considerata è la seguente:

$$u_i(t, x_i(t), y_i(t)) =$$
$$= \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}^T Q^i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \left(2\left[Q_{11}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) + 2\left[Q_{21}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) \right) d\tau +$$
$$+ \int_0^t \left(2\left[Q_{22}^i\right]_j^T \cdot y_i(\tau) + 2\left[Q_{12}^i\right]_j^T \cdot x_i(\tau) \right) d\tau.$$

Nel modello presentato, la dipendenza dal termine di memoria è richiesta per poter prendere in considerazione anche l'influenza della distribuzione di equilibrio attesa per gli attivi e i passivi degli investimenti di tutti gli strumenti. In particolare, l'ammontare $s_i(t)$ degli investimenti come attività e l'ammontare $l_i(t)$ degli investimenti come passività sono dipendenti dal tempo e dalla soluzione attesa. Tale dipendenza viene espressa nel seguente modo:

$$s_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right) \quad \text{ed} \quad l_i\left(t, \int_0^T w^*(s)ds\right)$$

dove abbiamo indicato la soluzione prevista con $w^*(t)$ e, quindi, la soluzione in media sarà data da $\int_0^T w^*(s)ds$. Siamo, poi, giunti alla formulazione variazionale del problema nei due casi presentati e abbiamo analizzato i più recenti ed importanti risultati relativi all'esistenza della soluzione per una disequazione quasi-variazionale che caratterizza un modello finanziario. In particolare, nella tesi, abbiamo dimostrato un teorema di esistenza in ipotesi molto generali. Abbiamo anche richiamato i risultati di dualità ed, in particolare le formule che caratterizzano la valutazione del mercato finanziario, cioè la Formula di Deficit, la legge di Bilancio e la Formula delle Passività. A partire da tali leggi abbiamo ricavato l'indice di valutazione $E(t)$, che rappresenta uno strumento molto utile e significativo per valutare l'equilibrio finanziario e migliorare l'economia, e le variabili deficit e surplus. Abbiamo anche fatto vedere che le soluzioni di un modello finanziario senza termine di memoria sono una prima approssimazione delle soluzioni del problema con termine di memoria; infatti, la differenza delle soluzioni è data dal termine $d = c \cdot [e^{-t} - (1 - t)]$. Inoltre, abbiamo presentato alcuni esempi numerici, studiati computazionalmente, per i quali abbiamo ottenuto la soluzione di equilibrio mediante il metodo diretto. L'importanza della dimostrazione del teorema generale di esistenza per una disequazione variazionale è notevole poichè esso può essere applicato a molti altri problemi relativi all'economia, alla fisica, all'ingegneria e a tanti altri campi.

Bibliografia

[1] S. Adly, M.Bergounioux, M. Ait Mansour *Optimal control of a quasi variationa obstacle problem*, J. Glob. Optim. 47 (2010) 421-435.

[2] A. Barbagallo, *On the regularity of retarded equilibria in time-dependent traffic equilibrium problems*, Nonlinear Anal., 71,e2406–e2417, (2009)

[3] A. Barbagallo, R. Di Vincenzo, *Lipschitz continuity and duality for dynamic oligopolistic market equilibrium problem with memory term*, J. Math.Anal. Appl. 382, 231–247, (2011).

[4] A. Barbagallo, P. Daniele and A. Maugeri, *Variational formulation for a general dynamic financial equilibrium problem. Balance law and liability formula*, Nonlinear Anal. 75, 11041123, (2012).

[5] A. Barbagallo, A. Maugeri, *Duality theory for the dynamic oligopolistic market equilibrium problem*, Optim. 60, 29–52, (2011).

[6] A. Barbagallo, P. Daniele, S.Giuffrè and A. Maugeri, *Variational approach for a general financial equilibrium problem: the Deficit Formula,the Balance Law and the Liability Formula. A path to the economy recovery*, European J. of Oper. Res., 237, 231-244, (2014).

[7] A. Barbagallo, P. Daniele, M. Lorino, A. Maugeri, C. Mirabella, *Further Results for General Financial Equilibrium Problems via Variational Inequalities*, Journal of Mathematical Finance, 3 (2013), pp. 33-52.

[8] A. Barbagallo, P. Daniele, M. Lorino, A. Maugeri, C. Mirabella, *Recent results on a general financial equilibrium problem*,AIP Conference Proceedings, 2013, 1789-1792.

[9] A. Barbagallo, P. Daniele, M. Lorino, A. Maugeri, C. Mirabella, *A Variational Approach to the Evolutionary Financial Equilibrium Problem with Memory Terms and Adaptive Constraints*, Network Models in Economics and Finance, Kalyagin V.A., Pardalos P.M., Rassias T.M.Eds, Vol.100 (2014) pp.13-23.

[10] L. Boltzman, *Zur theorie der elastichen Nachwirkung*, Sitzber. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturw. Kl., 70 (II), 1874, 275-300.

[11] H. Brezis, *Èquations et inèquations non linèaires dans les espace vectoriel en dualitè*, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 115-175.

[12] H. Brezis, *Problèmes unilateraux*, J. Math. pures et appl. 51 (1972) 1-168.

[13] H. Brezis, *Inèquations variationelles associès a des opèratueurs d'èvolution*, (A. Ghizzetti ed.), Nato Summer school, Oderisi (1969) 249-264.

[14] H. Brezis, L.Nirenberg e G.Stampacchia *A remark on Ky Fan's minimax principle*, Boll. Unione Mat. Ital (4) 6 (1972) 293-300.

[15] M.-G. Cojocaru, P. Daniele, A. Nagurney, *Double-layered dynamics: a unified theory of projected dynamical systems and evolutionary variational inequalities*, European J. Oper. Res. 175, 494–507,(2006).

[16] P. Daniele, *Variational inequalities for evolutionary financial equilibrium*, in: A. Nagurney (Ed.),Innovations in Financial and Economic Networks, 84-108, (2003).

[17] P. Daniele, *Variational inequalities for general evolutionary financial equilibrium*, in: F. Giannessi,A. Maugeri (Eds.), Variational Analysis and Applications, Springer Verlag, 279299, (2003).

[18] P. Daniele, *Evolutionary Variational Inequalities Applied to Financial Equilibrium Problems in an Environment of Risk and Uncertainty*, Nonlinear Anal., 63, 16451653, (2005).

[19] P. Daniele, *Dynamic Networks and Evolutionary Variational Inequalities*, Edward Elgar Publishing, Chentelham, (2006).

[20] P. Daniele, *Evolutionary Variational Inequalities and Applications to Complex Dynamic Multilevel Models*, Transport. Res. Part E, 46, 855880, (2010), doi: 10.1016/j.tre.2010.03.005.

[21] P. Daniele, C. Ciarcià, *New existence theorems for quasi-variational inequalities and applications to financial models*, to appear in European J. Oper. Res.

[22] P. Daniele, S. Giuffrè, *General infinite dimensional duality and applications to evolutionary networks and equilibrium problems*, Optim. Lett. 1 (2007), 227-243.

[23] P. Daniele, S. Giuffrè, *Random Variational Inequalities and the Random Traffic Equilibrium Problem*, Jou. Optim. Th. Appl., 2014, DOI 10.1007/s10957-014-0655-y.

[24] P. Daniele, S. Giuffrè, A. Maugeri, *General traffic equilibrium problema with uncertainty and random variational inequalities*, Optimizationi in Science and Engineering: In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos, T.M. Rassias et al. (eds), New York, 2014, 89-96.

[25] P. Daniele, S.Giuffrè, G. Idone e A. Maugeri, *Infinite dimensional duality and applications*, Math. Ann. (2007), 221-239.

[26] P. Daniele, S. Giuffrè, M. Lorino, A. Maugeri, C. Mirabella, *Functional Inequalities and Analysis of Contagion in the Financial Networks*, Handbook of Functional Equations, T. M. Rassias Ed.

[27] P. Daniele, S. Giuffrè, S. Pia, *Competitive Financial Equilibrium Problems with Policy Interventions*, Journal of Industrial and Management Optimization, 1, n.1, 3952, (2005).

[28] P. Daniele, M. Lorino, C. Mirabella, *The financial equilibrium problem with a Markowitz-type memory term and adaptive constraints*, sottomesso a Journal of Optimization Theory and Applications.

[29] P. Daniele, A. Maugeri, *Variational inequalities and discrete and continuum models of network equilibrium problems*, Math. Comput. Modelling 35 (2002), 689-708.

[30] P. Daniele, A. Maugeri, *On Dynamical Equilibrium Problem and Variational Inequalities*, Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Model, F. Giannesi, A.Maugeri and P.Pardalos (eds), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2001, 59-69.

[31] P. Daniele, A. Maugeri e W. Oettli, *Time-Dependent Traffic Equilibria*, J.Optim Th.Appl. 103 No. 3 (1999), 543-555.

[32] M. B. Donato, A. Maugeri, M. Milasi, C. Vitanza, *Duality Theory for a dynamic Walrasian pure exchange economy*, Pacific Journal of Optimization 4 (2008), 537-547.

[33] M.B. Donato, M. Milasi, C. Vitanza, *Quasi-variational approach of a competitive economic equilibrium problem with utility function: Existence of equilibrium*,Math. Models Methods Appl. Sci. 18, 3 (2008), pp. 351-367.

[34] J. Dong, D. Zhang, A. Nagurney, *A projected dynamical systems model of general financial equilibrium with stability analysis*, Math. Comput. Modelling, 24, 35-44, (1996).

[35] A. Domokos, J. Kolumban, *Variational inequalities with operator solution*, J. Global Optim. 23 (2002), 99-110.

[36] K. Fan, *A minimax inequality and applications*, Inequalities, Vol. III (1972), 103-113, Ed. By O.Shisha, Academic Press, 1972.

[37] K. Fan, *Application of a theorem concerning sets with convex sections*, Maths. Ann. 163 (1966), 189-303.

[38] K. Fan, *Some properties of convex sets related to fix point theorems*, Maths. Ann. 266 (1984), 519-537.

[39] M. Frasca, A.Villani, *A property of infinite-dimensional Hilbert spaces*, J. Math. Anal. App. 139 (1989), 352-361.

[40] S. Fucik, A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier Sci. Publ. Co., New York, (1980).

[41] J.Gwinner, F.Raciti, *Random equilibrium problems on networks*, Mathematical and Computer Modelling 43, 7-8, 800- 891, 2006.

[42] F. Giannesi, A. Maugeri (Eds.), *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*, Erice 1994, Plenum Press, New York, 1995.

[43] S.Giuffrè, S.Pia, *Weighted Traffic Equilibrium Problem in Non Pivot Hilbert Spaces with Long Term Memory*, In: AIP Conference Proceedings Rodi, September 2010, vol. 1281, 282–285.

[44] S.Giuffrè, S.Pia, *Weighted traffic equilibrium problem in non pivot Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., 71, e2054–e2061, (2009).

[45] S. Giuffrè, G. Idone, S. Pia, *Some classes of projected dynamical systems in Banach spaces and variational inequalities*, J.Global Optim., 40, 119–128, (2008).

[46] P. Hartman, G. Stampacchia *On some nonlinear elliptic differentiala functional equations*, Acta Math. 115, (1966), 271-310.

[47] G. Idone, A. Maugeri, C. Vitanza, *Variational Inequalities and the elastic-plastic torsion problem*, J.Optim. Theory Appl. 117 (2003), 489-501.

[48] G. Idone, A. Maugeri, *Variational Inequalities and transport planning for an elastic and continuous model*, J.Ind.Manag.Optim. 1 (2005), 81-86.

[49] G. Idone, A. Maugeri, C. Vitanza, *Topics on Variational analysis and applications to equilibrium problems*, J.Global Optimization, 28 (2004), 339-346.

[50] B.T. Kien, J.C. Yao, N.D. Yen, *On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities*, J. Glob. Optim. 41 (2008), 135-145.

[51] H.M. Markowitz, *Portfolio selection*, Journal of Finance, 7, 77-91, (1952).

[52] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley & Sons, New York, (1959).

[53] A. Maugeri, *Convex Programming, variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem*, Applied Mathematics & Optimization, 16(1), pp. 169-185, (1987).

[54] A. Maugeri, D. Puglisi, *Non-Convex Strong Duality Via Subdifferential*, Numer. Funct. Anal. Optim., 35, 7-9 (2014), pp. 1095-1112.

[55] A. Maugeri, W. Oettli, D.Schlager, *A flexible form of Wardrop's principle for traffic equilibria with side constraints*, Rend. Circolo Matem. di Palermo 48 (1997), 185-193.

[56] A. Maugeri, F. Raciti, *On General Infinite Dimensional Complementary Problems*, Optimization Letters, Vol.2, n.1 (2008), 71-90.

[57] A. Maugeri, F. Raciti, *On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities*, J. Convex Anal., 16, 899-911, (2009).

[58] A. Maugeri, L. Scrimali, *Global Lipschitz continuity of solutions to parameterized variational inequalities*, Boll. Unione Mat. Italiana,(9) 2 , 45–69 (2009).

[59] U. Mosco, *Convergence of convex sets and solutions of variational inequalities*, Adv. Math., (1969) 3:510-585.

[60] A. Nagurney, J. Dong, M. Hughes, *Formulation and computation of general financial equilibrium*, Optim., 26, 339-354, (1992).

[61] A. Nagurney, *Variational inequalities in the analysis and computation of multi-sector, multi-instrument financial equilibria*, J. Econ. Dyn. Control, 18, 161-184, (1994).

[62] A. Nagurney, *Finance and variational inequalities*, Quant. Finance, 1, 309-317, (2001).

[63] A. Nagurney, S. Siokos, *Financial Networks: Statics and Dynamics*, Springer, Heidelberg, Germany, (1997).

[64] B. Ricceri, *Basic existence theorems for generalized variational and quasi variational inequalities*, Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems, Giannessi, F. and Maugeri A. Eds., Plenum Press, New York, (1995), 251-255.

[65] L.Scrimali, *Quasi-variational inequalities in trasportation networks*, Math. Models Methods Appl. Sci., 14 (2004), 1541-1560.

[66] L.Scrimali, *The financial equilibrium problem with implicit budget constraints*, Cent. Eur. J. Oper. Res., 16 (2008), 191-203.

[67] L. Scrimali, *Global Lipschitz continuity of solutions to parameterized variational inequalities*, Bollettino UMI, 9 (II), 2009, pp.45-69.

[68] L. Scrimali, *Infinite Dimensional Duality Theory Applied to Investment Strategies in Environmental Policy*, J. Optim. Theory Appl., 154, 1 (2012), pp. 258-277.

[69] L.Scrimali, *Evolutionary Quasi-Variational Inequalities and the Dynamic Multiclass Network Equilibrium Problem*, Numerical Function Analysis and Optimization, 35:7-9 (2014), 1225-1244.

[70] G.Stampacchia, *Formes bilinearis sur les ensembles convexes*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 258 (1964), 4413-4416.

[71] J. Steinbach, *A Variational inequality approach to free boundary problems with applications in mould filling*, International Series of Numerical Mathematics 136 (2002).

[72] J.L. Lions, G. Stampacchia *Variational Inequalities*, Comm. Pure and Appl. Math. 20, (1967), 493-519.

[73] N.D. Yen, *On problem of B.Ricceri on Variational Inequalities*, Fixed Point Theory and Apllications 5, (2003), 163-173.

[74] N.X. Tan, *Quasi-variational inequality in topological linear locally convex Hausdorff spaces*, Math. Nach. 122 (19852003), 231-245.

[75] C. Vitanza, M.B. Donato, M. Milasi, *Quasi-variational inequalities for a dynamic competitive economic equilibrium problem*, J. Inequal. Appl., (2009), DOI 10.1155/2009/519623.

[76] V. Volterra, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, Rend. Acc. Naz. Lincei, XVIII (2), 1909, 295-301.