Università degli Studi di Napoli “Federico II”

DIPARTIMENTO DI STUDI UMANISTICI

Dottorato di Ricerca in
Filologia classica, cristiana e medioevale-umanistica, greca e latina
afferente alla
Scuola di Dottorato in
Scienze dell’Antichità e Filologico-Letterarie
Ciclo XXVIII

La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano: edizione critica, traduzione e commento delle *Distinctiones* I-III

Tutor e Coordinatore:
Ch.mo Prof. Giuseppe Germano

Dottoranda:
Nicoletta Rozza

ANNO ACCADEMICO
2014-2015

A mia nonna

Indice generale.

Bibliografia

Fonti primarie

Abraham bar Hiyya ha-Nasi,	*Hibbūr ha-Meshīhah ve-ha-Tishboret*, in CURTZE 1902.
Abraham ibn Ezra,	*Sefer ha-Middot*, in LÉVY-BURNETT 2006.
Abū Bakr,	*Liber Mensurationum*, in BUSARD 1968[1].
Abū Kāmil,	*Kitāb al-Jabr*, in LORCH 1993; SESIANO 1993.
Ahmad ibn Yūsuf,	*De arcubus similibus*, in BUSARD-VAN KONINGSVELD 1973; *De proportione et proportionalitate*, in SCHRADER 1961.
Al-Baghdādī,	*Kitāb qismat al-misāhāt*, in COMMANDINO 1570.
Al-Khwārizmī,	*Kitāb al-Jabr wa l-muqābala*, in KARPINSKI 1915; HUGHES 1986, 1989; KAUNZNER 1986.
Ps. al-Khwārizmī,	*Kitāb al-jam ʻwal tafriq bi hisāb al-Hind*, in ALLARD 1992; BURNETT 2013.
Anon.,	*Liber Aderameti*, in BUSARD 1969, pp. 171-4.
Anon.,	*Liber augmenti et diminutionis*, in LIBRI 1838, pp. 304-372.
Anon.,	*Liber Saydi Abuothmi*, in BUSARD 1969, pp. 169-171.
Archimedes,	*De mensura circuli*, in CLAGETT 1964, pp. 1-222.
Ps. Archimedes,	*De curvis superficiebus*, in CLAGETT 1964, pp. 433-557.
Banū Mūsā,	*Kitāb maʿrefat mesāḥat al-aškāl al-basīṭa wa'l-korīya*, in CLAGETT 1964, pp. 223-367.
Ps. Boethius,	*Geometria*, in FOLKERTS 1970.

Euclides,	*Elementi*, in Heiberg 1883-1916; Busard 1967, 1968^2, 1972, 1977, 1983$^{1-2}$, 1987, 2001 Busard-Folkerts 1992.
Fibonacci,	*Liber Abaci*, in Boncompagni 1857^1, Germano 2013, Carotenuto 2014^2.
Fibonacci,	*Flos*, in Boncompagni 1862^2 .
Fibonacci,	*Epistula ad Magistrum Theodorum*, in Boncompagni 1862^3.
Fibonacci,	*Liber Quadratorum*, in Boncompagni 1862^4.
Gerbertus,	*Geometria*, in Bubnov 1899, pp. 46-97.
Ps. Gerbertus,	*Geometria Incerti Auctoris*, in Bubnov 1899, pp. 310-369.
Gromatici Veteres,	*Corpus Agrimensorum Romanorum*, in Lachmann 1849; Thulin 1913.
Hugo de Sancto Victore,	*Practica Geometriae*, in Baron 1966.
Johannes Hispaniensis,	*Liber Mahameleth*, in Sesiano 2014.
Muhammad ibn Abd al-Bāqī,	*In decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, in Curtze 1899.
Tholomeus,	*Almagesto*, in Haskins-Putnam Lockwood 1910; Kunitzsch 1974, 1990, 1991, 1992.

Fonti Secondarie

A

Aïssani-Valérian 2003^1: Aïssani D. – Valérian D., *I rapporti tra Pisa e Béjaïa (Bugia) in età medievale: un contributo essenziale alla costruzione della mediterraneità*, in Tangheroni M., *Pisa e il mediterraneo. Uomini, merci, idee dagli Etruschi ai Medici*, Milano 2003, pp. 235-244.

Aïssani-Valérian 2003^2: Aïssani D. – Valérian D., *Mathématiques, commerce et société à Béjaïa (Bugia) au moment de séjour de Leonardo Fibonacci (XIIe-XIIIe siècle)*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XXIII, 2, 2003, pp. 9-31.

ALLARD 1991: Allard A., *La Diffusion en Occident des Premières Oeuvres Latines Issues de l'*Arithmétique *Perdue d'Al-Khwārizmī*, in «Journal for the History of Arabic Science» IX, 1991, pp. 101-105.

ALLARD 1992: Allard A., *Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi. Le calcul Indien (*Algorismus*). Histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle*, Paris 1992.

ALLARD 1996: Allard A., *The influence of Arabic mathematics in medieval West*, in Rashed R., *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, London 1996, pp. 512-555.

AMBROSETTI 2008: Ambrosetti N., *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'Europa medievale*, Milano 2008.

ANDRES 1782: Andres J., *Dell'origine, de' progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura*, vol. I, Parma 1782.

ARCHIBALD 1915: Archibald R.C., *Euclid's Book on Division of Figures (περὶ διαιρέσεων βιβλίον). With a Restoration Based on Woepcke's text and on the* Practica Geometriae *of Leonardo Pisano*, Cambridge 1915.

ARRIGHI 1966: Arrighi G., *La pratica di geometria: volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino, cittadino pisano, dal codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze*, Pisa 1966.

ARRIGHI 1970: Arrighi G., *La fortuna di Leonardo Pisano alla corte di Federico II*, in AA.VV., *Dante e la cultura sveva. Atti del Convegno di studi, Melfi, 2-5 novembre 1969*, Firenze 1970, pp. 17-31.

B

BARON 1966: Baron R., *Hugonis de Sancto Victore opera propaedeutica. Practica geometriae, De grammatica, Epitome Dindimi in philosophiam*, Notre Dame 1966.

BALDI 1707: Baldi B., *Cronica de' matematici*, Urbino 1707.

BERGGREN 1986: Berggren J.L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York, 1986.

BIRKENMAJER 1935: Birkenmajer A., *Eine wiedergefundene Übersetzung Gerhards von Cremona*, in Lang A. – Lechner J. – Schmaus M., *Aus der*

Geisteswelt des Mittelalters. Studien und Texte. Martin Grabmann zur Vollendung des 60. Lebensjahres von Freunden und Schülern gewidmet, vol. I, Münster 1935, pp. 472-481.

BJÖRNBO 1902: Björnbo A.A., *Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen*, in «Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen» XIV, 1902.

BONAINI 1857: Bonaini F., *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci, novamente scoperta*, in «Giornale Storico degli Archivi Toscani» I, 4, 1857, pp. 239-46.

BONCOMPAGNI 1840: Boncompagni B.L., *Biografia di Giuseppe Calandrelli scritta da D. Baldassarre Boncompagni Ludovisi de' principi di Piombino*, in «Giornale arcadico di scienze, lettere e arti» LXXXII, 1840, pp. 149-158.

BONCOMPAGNI 1846: Boncompagni B.L., *Intorno ad alcuni avanzamenti della fisica in Italia nei secoli XVI e XVII*, in «Giornale arcadico di scienze, lettere e arti» CIX, 1846, pp. 3-48.

BONCOMPAGNI 1850-51[1]: Boncompagni B.L., *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo*, in «Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei» IV, 1850-51, pp. 247-286.

BONCOMPAGNI 1850-51[2]: Boncompagni B.L., *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo decimosecondo, e di Gherardo da Sabbioneta, astronomo del secolo decimoterzo*, in «Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei» IV, 1850-51, pp. 387-493.

BONCOMPAGNI 1851: Boncompagni B.L., *Della vita e delle opere di Guido Bonatti, astrologo e astronomo del secolo decimoterzo*, Roma 1851.

BONCOMPAGNI 1852: Boncompagni B.L., *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni*, Roma 1852.

BONCOMPAGNI 1854: Boncompagni B.L., *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, Roma 1854.

BONCOMPAGNI 1856: Boncompagni B.L., *Opuscoli di Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassarre Boncompagni secondo la lezione di un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano*, Firenze 1856.

BONCOMPAGNI 1857[1]: Boncompagni B.L., *Il* Liber Abbaci *di Leonardo Pisano pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I. 2616, Badia Fiorentina, n° 73,* in Boncompagni B.L., *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, vol. I, Roma 1857.

BONCOMPAGNI 1857[2]: Boncompagni B.L., *Trattati d'aritmetica pubblicati da Baldassarre Boncompagni, I, Algoritmi de numero Indorum; II, Ioannis Hispalensis liber Algoritmi de practica arismetice*, Roma 1857.

BONCOMPAGNI 1862[1]: Boncompagni B.L., *La* Practica Geometriae *di Leonardo Pisano secondo la lezione del codice Urbinate n° 292 della Biblioteca Vaticana*, in Boncompagni B.L., *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo,* vol. II, Roma 1862, pp. 1-224.

BONCOMPAGNI 1862[2]: Boncompagni B.L., *Opuscoli di Leonardo Pisano secondo un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75. Parte superiore*, in Boncompagni B.L., *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo,* vol. II, Roma 1862, pp. 227-247.

BONCOMPAGNI 1862[3]: Boncompagni B.L., *Opuscoli di Leonardo Pisano secondo un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75. Parte superiore,* in Boncompagni B.L., *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo,* vol. II, Roma 1862, pp. 247-252.

BONCOMPAGNI 1862[4]: Boncompagni B.L., *Opuscoli di Leonardo Pisano secondo un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E.75. Parte superiore*, in Boncompagni B.L., *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo,* vol. II, Roma 1862, pp. 253-283.

BORDONE-SERGI 2009: Bordone R. – Sergi G., *Dieci secoli di medioevo*, Torino 2009.

BORTOLOTTI 1936: Bortolotti E, *L'algebra nella Storia e nella Preistoria della Scienza*, in «Osiris» I, 1936, pp. 184-230.

BOTTAZZINI 2002: Bottazzini U., *Boncompagni, Baldassarre Ludovisi*, in Dauben J.W. – Scriba C.J., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, Basel 2002, pp. 368-372.

BRUNETTI 2000: Brunetti G., *Il frammento inedito «Resplendiente stella de albur» di Giacomino Pugliese e la poesia italiana delle origini*, Tubingen 2000.

BRÜHL 1994: Brühl C., *L'itinerario italiano dell'imperatore: 1220-1250*, trad. a cura di Arena M.P., in Toubert P. – Paravicini Bagliani A., *Federico II e le città italiane*, Palermo 1994 pp. 34-47.

BUBNOV 1899: Bubnov N., *Gerberti postea Silvestri II Papa. Opera mathematica: (972-1003)*, Berlin 1899.

BURNETT 1997: Burnett Ch., *The Latin and Arabic influences on the vocabulary concerning demonstrative argument in the version's of Euclid's* Elements *associated with Adelard of Bath*, in Hamesse J., *Aux origines du lexique philosophique européen: l'influence de la* latinitas, Louvain-La-Neuve 1997, pp. 117-135.

BURNETT 2002: Burnett Ch., *Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century, with Special Reference to the "Eastern Forms"*, in Dolde-Samplonius Y. – Dauben J.W. –Folkerts M. – van Dalen B., *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas*, Stuttgart 2002, pp. 237-288.

BURNETT 2006: Burnett Ch., *The Semantics of Indian Numerals in Arabic, Greek and Latin*, in «Journal of Indian Philosophy» XXXIV, 2006, pp. 15-30.

BURNETT 2013: Burnett Ch., *The geometry of the* Liber Ysagogarum Alchorismi, in «Sudhoffs Archiv» XCVII, 2, 2013, pp. 143-173.

BUSARD 1967: Busard H.L.L., *The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?): books I-VI*, in «Janus» LIV, 1967, pp. 1-140.

BUSARD 1968[1]: Busard H.L.L., *L'algèbre au Moyen Âge: Le* Liber mensurationum *d'Abu Bekr*, in «Journal des Savants» 1968, pp. 65-125.

BUSARD 1968[2]: Busard H.L.L., *The translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?) / edited with an introduction*, Leiden 1968.

BUSARD 1969: Busard H.L.L., *Die Vermessungstraktate* Liber Saydi Abuothmi *und* Liber Aderamati, in «Janus» LVI, 1969, pp. 161-174.

BUSARD 1977: Busard H.L.L., *The translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?)*: books VII-XII, Amsterdam 1977.

BUSARD 1983[1]: Busard H.L.L., *The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascriberd to Adelard of Bath: books I-VIII and books X.36-XV.2*, Toronto 1983.

BUSARD 1983[2]: Busard H.L.L., *The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona*, Leiden 1983.

BUSARD 1987: Busard H.L.L., *The mediaeval latin translation of Euclid's* Elements *made directly from the Greek*, Stuttgart 1987.

BUSARD 1998: Busard H.L.L., *Über den Lateinischen Euklid in Mittelalter*, in «Arabic Sciences and Philosophy» VIII, 1998, pp. 97-129.

BUSARD 2001: Busard H.L.L., *Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's Elements*, the so-called Adelard III Version, voll. I-II, Stuttgart 2001.

BUSARD-VAN KONINGSVELD 1973: Busard H.L.L. – van Koningsveld P.S., *Der* Liber de Arcubus Similibus *des Ahmed Ibn Jusuf*, in «Annals of Science» XXX, 4, 1973, pp. 381-406.

BUSARD-FOLKERTS 1992: Busard H.L.L. – Folkerts M., *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*, voll. I-II, Basel/Boston/Berlin 1992.

BUSSOTTI 2008: Bussotti P., *Problems and methods at the origin of the Theory of Numbers*, Napoli, 2008.

C

CAIANIELLO 2012[1]: Caianiello E., *La vita e l'opera di Leonardo Pisano*, in Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 59-85.

CAIANIELLO 2012[2]: Caianiello E., *Appendice I / Michele Scoto, Domenico Ispano, Giovanni da Palermo e Teodoro d'Antiochia: intellettuali della corte di Federico II*, in Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 107-114.

CAIANIELLO 2013: Caianiello E., *Les sources des textes d'abaque italiens du XIVe siècle: les échos d'un débat en cours*, in «Reti Medievali Rivista» XIV, 2, 2013, pp. 189-209.

CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012: Germano G. – Carotenuto C. – Caianiello E., *Appendice II: Edizione critica, traduzione e commento dell'Epistola di dedica a Michele Scoto e del Prologo autobiografico del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano*, in Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 126-138.

CANESTRELLI 2014: Canestrelli A., *Leonardo Pisano, Fibonacci*, 2014 (e-Book).

CAPPELLI 1983: Cappelli A., *Cronologia, cronografia e calendario perpetuo*, Milano, 1983.

CAROTENUTO 2012: Carotenuto C., *Tradurre il* Liber Abaci *di Leonardo Pisano*, in Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 88-102.

CAROTENUTO 2013: Carotenuto C., *Observations on selected variants of Fibonacci's* Liber Abaci, in «Reti Medievali Rivista» XIV, 2, 2013, pp. 175-188.

CAROTENUTO 2014^1: Carotenuto C., *Prassi retorico-linguistica del* Liber Abaci *di Leonardo il Pisano*, in Grisolia R. – Matino G., *Arte della parola e parole della scienza. Tecniche della comunicazione letteraria nel mondo antico*, Napoli 2014, pp. 25-44.

CAROTENUTO 2014^2: Carotenuto C., *I capitoli V-VII del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci: edizione critica, traduzione e commento*, Napoli 2014 (tesi di dottorato).

CAROTENUTO-GERMANO 2012: Germano G. – Carotenuto C. – Caianiello E., *Appendice II: Edizione critica, traduzione e commento dell'Epistola di dedica a Michele Scoto e del Prologo autobiografico del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano*, in E Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di*

Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, in Grisolia R. –Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 121-125.

CLAGETT 1964: Clagett M., *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. I: *The arabo-latin tradition*, Madison 1964.

COMMANDINO 1570: Commandino F., *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino ascriptus*, Pesaro 1570.

COSSALI 1797-1799: Cossali P., *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, Parma 1797-1799.

CROMBIE 1994: Crombie A.C., *Intuizioni storiche della scienza medievale*, trad. a cura di La Mattina A., in Toubert P. – Paravicini Bagliani A., *Federico II e le città italiane*, Palermo 1994, pp. 15-24.

CURTZE 1899: Curtze M., *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, in Heiberg I.L. – Menge H., *Euclidis Opera omnia, Supplementum*, Leipzig 1899, pp. 252-384.

CURTZE 1902: Curtze M., *Der* Liber Embadorum *des Savasorda* i*n der Übersetzung des Plato von Tivoli*, in Curtze M., *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, XII), Leipzig 1902, pp. 1-183.

D

DEL CENTINA-FIOCCA 2010: Del Centina A. – Fiocca A., *Guglielmo Libri matematico e storico della matematica: l'irresistibile ascesa dall'Ateneo pisano all'Institut de France*, Firenze 2010.

DEVLIN 2013: Devlin K., *I numeri magici di Fibonacci: l'avventurosa* scoperta *che cambiò la storia della matematica*, Milano 2013.

DIDEROT-D'ALEMBERT 1770: Diderot D. – d'Alembert J.B., *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vol. II, Paris 1770.

F

FAVARO 1883: Favaro A., *Notizie storico-critiche sulla divisione delle aree*, in «Memoria del Reale Instituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti» XXII, 1883, pp. 129-154.

FEOLA 2008: Feola F., *Gli esordi della geometria in volgare. Un volgarizzamento trecentesco della* Practica Geometriae *di Leonardo Pisano*, Firenze 2008.

FOLKERTS 1970: Folkerts M., *"Boethius" Geometrie II: Ein Mathematisches Lehrbuch Des Mittelalters*, Wiesbaden 1970.

FOLKERTS 1989: Folkerts M., *Euclid in Medieval Europe*, Winnipeg 1989.

FOLKERTS 2001[1]: Folkerts M., *Early Texts on Hindu-Arabic Calculation*, in «Science in Context» XIV, 1-2, 2001, pp. 13-38.

FOLKERTS 2001[2]: Folkerts M., *La matematica nell'Europa latina*, in Folkerts M. - Lorch R.P. - Tihon A., *La scienza bizantina e latina: la nascita di una scienza europea. Le discipline matematiche*, in AA.VV., *Storia della Scienza* IV, Roma 2001, pp. 313-323.

FOLKERTS 2003: Folkerts M., *The Importance of the Latin Middle Ages for the Development of Mathematics*, in Folkerts M., *Essays on Early Medieval Mathematics*, Aldershot 2003, pp. 1-23.

FOLKERTS 2004: Folkerts M., *Leonardo Fibonacci's knowledge of Euclid's* Elements *and of other mathematical textes*, in «Bollettino di storia delle scienze matematiche» XXIV, 1, 2004, pp. 93-113.

FOLKERTS 2006: Folkerts M., *Euclid in medieval Europe*, in Folkerts M., *The Development of Mathematics in Medieval Europe: The Arabs, Euclid, Regiomontanus*, Aldershot 2006.

FOLKERTS-SMEUR 1976[1]: Folkerts M. – Smeur A.J.E.M., *A treatise on the squaring of the circle by Franco of Liège, of about 1050, pars 1*, in «Archives Internationales d'Histoire des Sciences» XXVI, 98, 1976, pp. 59-105.

FOLKERTS-SMEUR 1976[2]: Folkerts M. – Smeur A.J.E.M., *A treatise on the squaring of the circle by Franco of Liège, of about 1050, pars 2*, in «Archives internationales d'histoire des sciences XXVI, 99, 1976, pp. 225-253.

FOLLINI 1816: Follini V., *Storia fiorentina di Ricordano Malispini col seguito di Giacotto Malispini dalla edificazione di Firenze sino all'anno 1286*, Firenze 1816.

FRANCI 1988[1]: Franci R., *L'insegnamento della matematica in Italia nel Tre-Quattrocento*, in «Archimede» IV, 1988, pp. 182-194.

FRANCI 1988[2]: Franci R., *Pietro Cossali storico dell'algebra*, in AA.VV., *Atti del convegno Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia" Modena 16-17 marzo 1987*, Modena 1988, pp. 199-217.

FRANCI 1994: Franci R., *Pietro Cossali storico delle matematiche*, in AA.VV., *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento: atti del terzo Seminario di storia delle scienze e delle tecniche nell'Ottocento veneto: Venezia, 22 e 23 novembre 1991*, Venezia 1994, pp. 273-286.

FRANCI 2002: Franci R., *Il* Liber Abaci *di Leonardo Fibonacci 1202-2002*, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», VIII, Vol. V-A – La Matematica nella Società e nella Cultura, II, 2002, pp. 293-328.

FRIED 1996 (1993): Fried J., *Il mercante e la scienza: sul rapporto tra sapere ed economia nel Medioevo*, tit. or. *Kunst und Kommerz. Über das Zusammenwirken von Wissenschaft und Wirtschaft im Mittelalter vornehmlich am Beispiel der Kaufleute und Handelsmessen* (München 1993), Milano 1996.

G

GAVAGNA 2013: Gavagna V., *Leonardo Fibonacci*, in AA.VV., *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Il contributo italiano alla storia del pensiero*, Roma 2012, pp. 192-195.

GERMANO 2012: Germano G., *Introduzione*, in Burattini E. – Caianiello E. – Carotenuto C. – Germano G. – Sauro L., *Per un'edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino G., *Forme e modi delle lingue e dei testi tecnici antichi*, Napoli 2012, pp. 55-138: 55-59.

GERMANO 2013: Germano G., *New Editorial Perspectives on Fibonacci's* Liber Abaci, in «Reti Medievali Rivista» XIV, 2, 2013, pp. 157-173.

GIOVÈ MARCHIOLI-GRANATA 2010: Giovè Marchioli N. – Granata L., *I manoscritti medievali delle province di Belluno e Rovigo*, Firenze 2010.

GRIMALDI 1790: Grimaldi G., *Leonardo Fibonacci*, in Fabroni A., *Memorie istoriche di più uomini illustri pisani*, vol. I, Pisa 1790, pp. 161-220.

GRUPE 2012: Grupe D., *The 'Thābit-Version' of Ptolemy's Almagest in MS Dresden Db.871*, in «Suhayl» XI, 2012, pp. 147-153.

GUGLIELMINI 1813: Guglielmini G.B., *Elogio di Lionardo Pisano recitato nella grand'aula della regia Università di Bologna nel giorno 12. novembre 1812. dal professore G.B. Guglielmini elettore del Collegio de' dotti, cavaliere della Corona di ferro, e membro del Regio Istituto,* Bologna 1813.

H

HASKINS-PUTNAM LOCKWOOD 1910: Haskins C.H. – Putnam Lockwood D., *The Sicilian Translators of the Twelfth Century and the First Latin Version of Ptolemy's Almagest*, in «Harvard Studies in Classical Philology» XXI, 1910, pp. 75-102.

HASKINS 1998 (1927): Haskins C.H., *La rinascita del XII secolo*, tit. or. *The Renaissance of the Twelfth Century* (Cambridge 1927), Bologna 1998.

HAYASHI 2008: Hayashi T., *Bakhshali Manuscript*, in Selin H., *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*, New York 2008, pp. 1252-1259.

HEIBERG 1883-1916: Heiberg J.L., *Euclidis Opera Omnia*, Lipsiae 1883-1916.

HØYRUP 1995: Høyrup J., *Linee Larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XV, 1995, pp. 3-14.

HØYRUP 2007: Høyrup J., *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italien Abbacus Culture*, Basel-Boston-Berlin 2007.

HUGHES 1986: Hughes B., *Gerard of Cremona's translation of Al-Khwārizmī's* Al-Jabr*: a critical edition*, in «Mediaeval Studies» XLVIII, 1986, pp. 211-263.

HUGHES 1989: Hughes B., *Robert of Chester's Latin translation of al-Khwārizmī's* al-Jabr*: A new critical edition*, Stuttgart 1989.

HUGHES 1996: Hughes B., *Arabic Algebra. Victim of Religious and Intellectual Animus*, in Folkerts M., *Mathematische Probleme im Mittelalter: der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden 1996, pp. 197-220.

HUGHES 2004: Hughes B., *Fibonacci, teacher of algebra: An analysis of Chapter 15.3 of* Liber Abbaci, in «Mediaeval Studies» LXVI, 1, 2004, pp. 313-361.

HUGHES 2008: Hughes B., *Fibonacci's* De Practica Geometrie, New York 2008.

HUNGER PARSHALL 1988: Hunger Parshall K., *The Art of Algebra from Al-Khwārizmī to Viète: A Study in the Natural Selection of Ideas*, in «History of Science» XXVI, 1988, pp. 129-164.

J

JACQUEMARD 2000: Jacquemard C., *Recherches sur la composition et la transmission de la Geometria Incerti Auctoris*, in Callebat L. – Desbordes O., *Science antique, science médiévale (Autour d'Avranches BM 235), Actes du colloque International, Mont-Saint-Michel, 4-7 septembre 1998*, Zürich-New York 2000, 81-119.

JONES 1977: Jones C.W. et al., *Bedae Venerabilis Opera Didascalica*, in A.A.V.V., *Corpus Christianorum Series Latina*, 123B, Turnhout 1977.

JUNGE 1936: Junge G., *Das Fragment der lateinischen Übersetzung des Pappus-Kommentars zum 10. Buch Euklids*, in Neugebauer O. - Stenzel J. - Toeplitz O., *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B (Studien)*, Vol. III, Berlin 1936, pp. 1-17.

K

KARPINSKI 1915: Karpinski L.C., *Robert of Chester's Latin Translation of the* Algebra *of al-Khowarizmi, with An Introduction, Critical Notes and an English Version*, in Kelsey F.W. – Sanders H.A., *University of Michigan Studies: Humanistic Series*, vol. XI, *Contributions to the History of Science*, part. I, New York 1915, pp. 1-164.

KAUNZNER 1986: Kaunzner W., *Die lateinische* Algebra *in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher MS Admont 612*, in Hamann G., *Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographic*, Wien 1986, pp. 47-89.

KIESEWETTER 2005: Kiesewetter A., *Itinerario di Federico II*, in A.A.V.V., *Enciclopedia Federiciana*, vol. II, Roma 2005, pp. 100-114.

KLANGE ADDABBO 2014: Klange Addabbo B., *Storia di un manoscritto duecentesco: L IV 20 della Biblioteca Comunale degli Intronati di Siena (Fibonacci* Liber Abaci*)*, in AA.VV., *Libri miniati per la Chiesa, per la citta, per la corte in Europa: lavori in corso (Atti del Convegno Internazionale, Università di Padova – Museo Diocesano di Padova – Biblioteca Capitolare di Padova, 2-4 dicembre 2010)*, Padova 2014, pp. 115-122.

KNORR 1989: Knorr W.R., *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston 1989.

KÖLZER 1994: Kölzer T., *Magna imperialis curia*, trad. a cura di Arena M.P., in Paravicini Bagliani A., *Federico II e il mondo mediterraneo*, Palermo 1994, pp. 65-83.

KRAUSE 1936: Krause M., *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Nasr Mansūr b. Alī b. Irāq*, Berlin 1936.

KUNITZSCH 1974: Kunitzsch P., *Der Almagest. Die Syntaxis mathematica des Claudius Ptolomaeus in arabisch-lateinischer Überlieferung*, Wiesbaden 1974.

KUNITZSCH 1990: Kunitzsch P., *Claudius Ptolomäus. Der Sternkatalog des Almagest. Die arabisch-mittelalterliche Tradition*, vol. II, *Die lateinische Übersetzung Gerhards von C.*, Wiesbaden 1990.

KUNITZSCH 1991: Kunitzsch P., *Gerhard als Übersetzer des Almagest*, in Forstner M., *Festgabe für Hans Rudolf Singer*, Frankfurt 1991, pp. 347-358.

KUNITZSCH 1992: Kunitzsch P., *Gerard's translations of astronomical texts, especially the Almagest*, in Pizzamiglio P., *Gerardo da Cremona* (*Annali della Biblioteca statale e della Libreria civica di Cremona* XLI), Cremona 1992, pp. 71-84.

L

LACHMANN 1849: Bluhme F. – Lachmann K. – Rudorff A.A.F. – Mommsen Th. – Bursian E., *Die Schriften der römischen Feldmesser: Gromatici veteres*, Berlin 1849.

LÉVY-BURNETT 2006: Lévy T. – Burnett Ch., Sefer ha-Middot*: A Mid-Twelfth-Century Text on Arithmetic and Geometry Attributed to Abraham Ibn Ezra*, in «Aleph» VI, 2006, pp. 57-238.

LIBRI 1838: Libri G., *Histoire des sciences des mathématiques en Italie*, vol. II, Paris 1838.

LORCH 1993: Lorch R.P., *Abū Kāmil on the pentagon and decagon*, in Folkerts M. –Hogendijk J.P., Vestigia Mathematica*. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam 1993, pp. 215-252.

LORCH 1996: Lorch R.P., *The Transmsission of Theodosius'* Sphaerica, in Folkerts M.*, Mathematische Probleme im Mittelalter: der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden 1996, pp. 159-183.

LORCH 2001[1]: Lorch R.P., *Greek-Arabic-Latin: The Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages*, in «Science in Context» XIV, 12, 2001, pp. 313-331.

LORCH 2001[2]: Lorch R.P., *La trasmissione e la rielaborazione dei trattati archimedei*, in M. Folkerts, Lorch R.P. - Tihon A., *La scienza bizantina e latina: la nascita di una scienza europea. Le discipline matematiche*, in AA.VV., Treccani: *Storia della Scienza* IV, Roma 2001, pp. 323-329.

LUZZATI 1965: Luzzati M., *Note di metrologia pisana*, Livorno, 1965.

M

MACCAGNI 1988: Maccagni C., *Leonardo Fibonacci e il rinnovamento delle matematiche*, in AA.VV., *L' Italia ed i paesi mediterranei: vie di comunicazione e scambi commerciali e culturali al tempo delle repubbliche marinare. Atti del Convegno internazionale di studi: Pisa, 6-7 giugno 1987*, Pisa 1988, pp. 91-113.

MARACCHIA 2005: Maracchia S., *Storia dell'algebra*, Napoli 2005.

MAZZATINTI 1899: Mazzatinti G., *Inventari dei manoscritti delle Biblioteche d'Italia*, vol. IX, Forlì 1899.

MAZZOTTI 2000: Mazzotti M., *For science and for the Pope-king: writing the history of the exact sciences in nineteenth-century Rome*, in «The British Journal for the History of Science» XXXIII 3, 2000, pp. 257-282.

MILANESI 1867: Milanesi G., *Documento inedito e sconosciuto intorno a Lionardo Fibonacci*, in «Giornale arcadico di scienze, lettere, ed arti» CXCVIII, 53, 1867, pp. 81-88.

MILLÀS VALLICROSA 1943: Millàs Vallicrosa J.M., *La aportacion astronomica de Pedro Alfonso*, in «Sefarad» III, 1943, pp. 65-105.

MOMMSEN-KRÜGER 1911: Mommsen Th. - Krüger P., *Corpus Iuris Civilis*, Berlin 1911.

MORELLI TIMPANARO 2001: Morelli Timpanaro M.A., *Il cavalier Giovanni Giraldi, Firenze 1712-1753 e la sua famiglia*, Firenze 2001.

MOYON 2002: Moyon M., *Understanding a Mediæval Algorith: a few examples in Arab and Latin geometrical traditions of Measurement*, in «Oberwolfach Report» IV, 2002, pp. 157-161.

MOYON 2008: Moyon M., *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage: contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Lille 2008 (tesi di dottorato).

MOYON 2009: Moyon M., *La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie*, in Escofier J.P. – Hamon G., *Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, Rennes 2009, pp. 71-86.

MOYON 2011: Moyon M., *Le* De Superficierum Divisionibus Liber *d'al-Baghdâdî et ses prolongements en Europe*, in Bouzari M. – Guergour Y., *Actes du 9e colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 12-14 mai 2007)*, Alger 2011, pp. 159-201.

MOYON 2012[1]: Moyon M., *Algèbre &* Practica geometriæ *en Occident médiéval latin: Abū Bakr, Fibonacci et Jean de Murs*, in Rommevaux S. - Spiesser M. - Massa Esteve M.R., *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris, 2012, pp. 33-65.

MOYON 2012[2]: Moyon M., *Diviser un triangle au Moyen Âge: l'exemple des géométries pratiques latines*, in Barbin E., *Les mathématiques éclairées par l'histoire, Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris 2012, pp. 73-90.

MOYON 2013: Moyon M., *La géométrie de la mesure en Pays d'Islam et ses prolongements en Europe latine (IXe-XIIIe siècles)*, in AA.VV., *Mesure et*

Histoire Médiévale. Actes du XLIIIe congrès de la SHMESP, Paris 2013, pp. 269-280.

MOYON-SPIESSER 2015: Moyon M. – Spiesser M., *L'arithmétique des fractions dans l'œuvre de Fibonacci: fondements & usages*, in «Archive for History of Exact Sciences» LXIX, 4, 2015, pp. 391-427.

MOUTIER-GHERARDI DRAGOMANNI 1823: Moutier I. – Gherardi Dragomanni F., *Cronica di Giovanni Villani a miglior lezione ridotta coll'aiuto de' testi a penna*, vol. I, Firenze 1823.

MUCCILLO 1997: Muccillo M., *Fibonacci Leonardo*, in AA.VV., *Dizionario biografico degli italiani* XLVII, Roma 1997, pp. 359-363.

MURDOCH 1966: Murdoch J.E., *Euclides Graeco-Latinus: A Hitherto Unknown Medieval Latin Translation of the Elements Made Directly from the Greek*, in «Harvard Studies in Classical Philology» LXXI, 1966, pp. 249-302.

N

NAGL 1889: Nagl A., *Über eine Algorismusschrift des 12. Jh. und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendland*, in «Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung» XXXIV, 1889, 161-170.

NAPOLITANI 2007: Napolitani P.D., *Il Rinascimento italiano*, in Bartocci C. – Oddifreddi O.D., *La matematica*, vol. I, Torino 2007, pp. 237-282.

NICOLAI 2010: Nicolai E., *La tradizione greco-latina e arabo-latina del I libro dell'Almagesto. Saggio di analisi e traduzione*, Padova 2010 (tesi di dottorato).

O

OAKS-ALKHATEEB 2005: Oaks J.A. – Alkhateeb H.M., *Mal, enunciations, and prehistory of Arabic algebra*, in «Historia Mathematica» XXXV, 2005, pp. 400-425.

OMONT 1888: Omont H., *Catalogue général des manuscrits des bibliothèques publiques de France*, vol. II, Paris 1888, pp. 1-171.

P

PEPE 2002: Pepe L., *La riscoperta di Leonardo Pisano*, in Giusti E. – Franci R., *Un ponte sul Mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*, Firenze 2002, pp. 161-175.

PERGOLA 2009: Pergola R., Ex arabico in latinum*: traduzioni scientifiche e traduttori nell'occidente medievale*, in «Studi di Glottodidattica» III, 2009, pp. 74-105.

PICHOT 1993: Pichot A., *La nascita della scienza: Mesopotamia, Egitto, Grecia antica*, Bari 1993.

PICUTTI 1979: Picutti E., *Il Libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel Codice Palatino 557 della Biblioteca Nazionale di Firenze*, in «Physis. Rivista internazionale di storia della scienza» XXI, 1979, pp. 195-339.

PICUTTI 1983: Picutti E., *Il* Flos d*i Leonardo Pisano dal codice E.75. P. sup della Biblioteca Ambrosiana di Milano. Traduzione e commenti*, in «Physis. Rivista internazionale di storia della scienza» XXV, 1983, pp. 293-387.

PIRENNE 1929: Pirenne H., *L'instruction des marchands au moyen âge*, in «Extrait des Annales d'histoire économique et sociale», 1929, pp. 13-28.

PLAZA PICÓN - GONZÁLEZ MARRERO 2006: Plaza Picón F.M. – González Marrero J.A., De computo uel loquela digitorum. *Beda y el cómputo digital*, in «Faventia» XXVIII, 1-2, 2006, pp. 115-123.

PORTA 1991: Porta G., *Nuova cronica / Giovanni Villani*, Parma 1991.

R

RASHED 1994: Rashed R., *Fibonacci et les mathématiques arabes*, in «Micrologus» II, 1994, pp. 145-160.

RASHED 2003: Rashed R., *Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XXIII, 2, 2003, pp. 55-73.

RIVOLO-SIMI 1998: Rivolo M.T. – Simi A., *Il calcolo delle radici quadrate e cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli*, in «Archive for History of Exact Sciences» LII, 1998, pp. 161-193.

ROZZA 2015[1]: Rozza N., *Osservazioni sul lessico della radice quadrata nella* Pratica Geometrie *di Leonardo Pisano*, in «Bollettino di Studi Latini» XLV, 1, 2015, pp. 76-91.

ROZZA 2015[2]: Rozza N., *La tradizione manoscritta della* Pratica Geometrie *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, e la sua lettera di dedica al* magister Dominicus, in «SPOLIA. Journal of medieval studies», *Filologia e letteratura latina medievale e umanistica*, 2015, pp. 85-118.

ROZZA 2016: Rozza N., *Un brano inedito della* Pratica Geometrie *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, in Grisolia R. – Matino M., *Il modello e la sua ricezione. Testi greci e latini*, Napoli 2016 (in corso di stampa).

RUYSSCHAERT 1959: Ruysschaert J., *Codices Vaticani Latini, Codices 11414-11709*, vol. XXVI, Roma 1959.

S

SAPORI 1997: Sapori A., *La cultura del mercante medievale italiano*, in Airaldi G., *Gli orizzonti aperti. Profili del mercante medievale*, Torino, 1997, pp. 139-173.

SCHRADER 1961: Schrader M.W.R., *The* Epistola de Proportione et Proportionalitate *of Ametus Filius Iosephi*, Madison 1961 (tesi di dottorato).

SCHULTHESS 2011: Schulthess P., *Distinguere, distinctio*, in Atucha I. – Calma D. – König Pralong C. – Zavattero I., *Mots médiévaux offerts à Ruedi Imbach*, Porto-Turnhout 2011, pp. 221-232.

SESIANO 1993: Sesiano J., *La version latine médiévale de l'*Algèbre *d'Abū Kāmil*, in Folkerts M. – Hogendijk J.P., *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam 1993, pp. 315-452.

SESIANO 2014: Sesiano J., *The* Liber mahameleth*: a XII century mathematical treatise*, Cham 2014.

SIGLER 1987: Sigler L.E., *The Book of Squares of Leonardo Pisano Fibonacci*, Orlando 1987.

SIGLER 2002: Sigler L.E., *Fibonacci's* Liber Abaci*: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York, 2002.

SIMI 2004: Simi A., *L'eredità della* Practica Geometriae *di Leonardo Pisano nella geometria del Basso Medioevo e del primo Rinascimento*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XXIV, 1, 2004, pp. 9-41.

STÜRNER 2009: Stürner W., *Federico II e l'apogeo dell'Impero*, Roma 2009.

T

TANNERY 1911: Tannery P., *Adelard of Bath*, in «English Historical Review» XXVI, 1911, pp. 491-498.

TARGIONI TOZZETTI 1768: Targioni Tozzetti G., *Relazioni di alcuni viaggi fatti in diverse parti della Toscana per osservare le produzioni naturali, e gli antichi monumenti di essa*, vol. II, Firenze 1768.

THULIN 1913: Thulin C.O., *Corpus Agrimensorum Romanorum*, Leipzig 1913.

TIRABOSCHI 1806: Tiraboschi G., *Storia della letteratura italiana dall'anno 1183 fino all'anno 1300*, vol. IV, Firenze 1806.

TONEATTO 1982: Toneatto L., *Note sulla tradizione del* Corpus agrimensorum Romanorum *I. Contenuti e struttura dell'*Ars gromatica *di* Gisemundus *(IX sec.)*, in «Mélanges de l'Ecole française de Rome. Moyen-Age, Temps modernes» XCIV, 1, 1982, pp. 191-313.

TRAVAINI 1998: Travaini L., *Un sistema di conto poco conosciuto: la "mano del quattro"*, in «Revue numismatique» VI, 153, 1998, pp. 327-334.

U

ULIVI 2011: Ulivi E., *Su Leonardo Fibonacci e sui maestri d'abaco pisani dei secoli XIII-XV*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche» XXXI, 2, 2011, pp. 247-288.

V

VER EECKE 1952: Ver Eecke P., *Léonard de Pise. Le livre des nombres carrés, traduit pour la première fois du latin médiéval en français, avec une introduction et des notes*, Bruges, 1952.

VOGEL 1963: Vogel K., *Mohammed ibn Mūsā Alchwarizm's* Algorithmus. *Das früheste Lehrbuchzum Rechnen mit Indischer Ziffern*, Aalen 1963.

Y

YOUSHKEVITCH 1976: Youshkevitch A.P., *Les mathematiques arabes, VIIIe-XVe siecle*, Paris 1976.

Z

ZACCARIA 1754: Zaccaria F.A., *Excursus litterarii per Italiam ab anno 1742 ad annum 1752*, vol. I, Venezia 1754.

Lessici, Glossari, Dizionari, Manuali

DU CANGE DU FRESNE 1883-87 (1678): Du Cange du Fresne Ch., *Glossarium mediae et infimae latinitatis*, Paris 1883-87 (Paris 1678).

FORCELLINI 1965 (1864): Forcellini E., *Lexicon Totius Latinitatis*, a.c. di Furlanetto G., Corradini F., Perin G., Bologna-Padova 1965 (Padova 1864-1926).

GEORGHES-CALONGHI 1966: Georghes K.E. – Calonghi F., *Dizionario della lingua latina: latino-italiano, italiano-latino*, a.c. di O. Badellino, Torino 1966.

NIERMEYER 1976: Niermeyer J.F., *Mediae Latinitatis Lexicon Minus. Lexique latin médiéval - Français/Anglais. A medieval latin - french/english dictonary*, Leiden 1976.

NORBERG 1974 (1968): Norberg D., *Manuale di latino medievale*, tit. or. *Manuel pratique de latin médiéval* (Paris 1968), Firenze 1974.

STOTZ 2013 (1996): Stotz P., *Il latino nel medioevo. Guida allo studio di un'identità linguistica europea*, tit. or. *Handbuch zur lateinischen Sprache des Mittelalters* (München 1996), Firenze 2013.

SUDHOFF 1914-15: Sudhoff K., *Die kurze Vita und das Verzeichnis der Arbeiten Gerhards von C.*, in «Archiv für Geschichte der Medizin» VII, 2-3, 1914-15, pp. 73-82.

Th.l.L: Saur K.G., *Thesaurus Linguae Latinae*, München 2006.

VÄÄNÄNEN 2003 (1981): Väänänen V., *Introduzione al latino volgare*, tit. or. *Introduction au latin vulgaire* (Paris 1981), Bologna 2003.

«La professione del ricercatore deve tornare alla sua tradizione di ricerca per l'amore di scoprire nuove verità. Poiché in tutte le direzioni siamo circondati dall'ignoto e la vocazione dell'uomo di scienza è di spostare in avanti le frontiere della nostra conoscenza in tutte le direzioni, non solo in quelle che promettono più immediati compensi o applausi».

E. Fermi

Introduzione.

Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, rappresenta senza dubbio una delle personalità più note ed apprezzate del mondo occidentale. La sua fama è per lo più legata alla celeberrima serie numerica che da lui prende il nome, sebbene egli fu soprattutto un grande divulgatore scientifico che, con i suoi scritti, giocò un ruolo di primaria importanza non soltanto nella storia delle scienze, ma anche in quella più generale della cultura stessa. Nonostante ciò, né la *Pratica Geometrie*, oggetto del presente lavoro, né gli altri suoi scritti hanno ricevuto le cure editoriali degne della loro rilevanza.

Per quanto riguarda la *Pratica Geometrie*, poderoso trattato sulla pratica della geometria diviso in otto distinzioni, il principale veicolo della sua diffusione è rappresentato a tutt'oggi dalla sua prima ed unica edizione a stampa, cioè dalla sua *editio princeps* curata dallo storico della matematica Baldassarre Ludovisi Boncompagni, principe di Piombino, che nel 1862 ne ha pubblicato il testo latino secondo la lezione del solo ms. Urb. Lat. 292, attualmente custodito presso la Biblioteca Apostolica Vaticana (BONCOMPAGNI 1862[1]). L'operazione compiuta dal Boncompagni ha fatto sì che un ampio pubblico di storici della scienza e, più in generale, di interessati avesse per la prima volta libero accesso a questo trattato. Tra questi una menzione particolare merita lo studioso americano Barnabas Hughes che, nel 2008, ha realizzato la prima traduzione in una lingua moderna di cultura dell'opera, fondandosi sull'edizione ottocentesca del Boncompagni (HUGHES 2008). A differenza però di quest'ultimo, il quale mostra di conoscere soltanto nove manoscritti (BONCOMPAGNI 1854, p. 96, n. 1), Hughes fornisce un elenco di quattordici esemplari, pubblicando di fatto la prima lista completa dei testimoni noti dell'opera (HUGHES 2008, pp. 399-400). Tuttavia neppure Hughes ha intrapreso la strada dell'edizione critica ma, affidandosi all'antiquata edizione del Boncompagni, ha di fatto contribuito alla diffusione dei contenuti del trattato fibonacciano secondo le lezioni tramandate dall'unica fonte manoscritta tenuta presente dal principe. Purtroppo questo codice non è né migliore, né più vicino all'originale d'autore degli altri esemplari che tramandano l'opera, ma al contrario in alcuni casi è addirittura portatore di lezioni di dubbia autenticità. Tale consapevolezza è emersa grazie all'indagine che ho condotto sui testimoni, sui quali ho operato la collazione del testo latino dell'epistola di dedica, dell'introduzione e delle prime tre distinzioni, secondo le modalità che chiarirò in seguito. Ho inoltre stabilito il testo critico delle parti esaminate, corredandolo di un sistema di note che fungono da apparato critico positivo, di una traduzione in lingua italiana, che vuole essere un sussidio alla comprensione di un testo non sempre trasparente nei suoi contenuti, e di un apparato di fonti e luoghi paralleli, necessari alla collocazione dell'opera in un *milieu* culturale non sempre facile da chiarire.

«Se i nostri Maggiori avessero avuta la medesima premura, che noi abbiamo, di consegnare alla storia le vite dei Letterati, saremmo senza dubbio più informati dei progressi delle Scienze e delle Arti, e delle scoperte d'ogni età; istoria molto più interessante di quella di molti Conquistatori, che non apportarono al genere umano se non che calamità e disordini. Eppur costoro, anche mentre vissero, ottennero il tributo della lode; sorte, che rare volte toccò agli Uomini dotti, perché questi fin che respirano o son criticati, o son dimenticati, o son confusi nella turba».

A. Fabroni

La vita, le opere e la fortuna di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci

«Uno dei più illustri matematici italiani del secolo decimoterzo fu Leonardo Pisano, detto Fibonacci». Con queste parole, il grande storico della matematica Baldassarre Ludovisi Boncompagni dava inizio alla sua celebre monografia sulla vita e l'opera di una delle più importanti personalità culturali che il mondo occidentale abbia mai conosciuto[1]. Così accurate e precise furono le notizie fornite dallo studioso, che ancora oggi le sue ricerche destano ammirazione tra i moderni e costituiscono, di fatto, un punto di riferimento fondamentale per coloro che, a più livelli, desiderino indagare l'affascinante storia della cultura matematica occidentale[2]. In questa storia, Leonardo Pisano ha senza

---

[1] BONCOMPAGNI 1852, p. 5.

[2] Baldassarre Ludovisi Boncompagni, principe di Piombino, nacque nel 1821 da una ricca e nobile famiglia romana, che annoverava tra i suoi antenati il celebre Ugo Boncompagni, papa nel 1572 col nome di Gregorio XIII. Condusse i suoi studi sotto la guida del matematico Abbé Barnaba Tortolini e dell'astronomo gesuita Ignazio Calandrelli. A partire dal 1840, iniziò a collaborare con il *Giornale arcadico di scienze, lettere e arti*, presso il quale pubblicò una biografia di Giuseppe Calandrelli (BONCOMPAGNI 1840) e, tempo dopo, il celeberrimo saggio dedicato alla Storia della Fisica in Italia a cavallo tra il XVI e il XVII secolo, nel quale, sulla scorta di Francesco Bacone, definiva la storia delle scienze «l'occhio della storia del mondo» (BONCOMPAGNI 1846). Intorno al 1850 cominciò a focalizzare i suoi interessi sulla storia della trasmissione del sapere matematico dal mondo arabo all'Europa cristiana, pubblicando approfonditi saggi su importanti traduttori e matematici attivi tra il XII e il XIII secolo, come ad esempio Guido Bonatti (BONCOMPAGNI 1851), Platone Tiburtino (BONCOMPAGNI 1850-51[1]), Gherardo da Cremona e Gherardo da Sabbioneta (BONCOMPAGNI 1850-51[2]), e curando le prime edizioni di due importanti trattati di matematica di XII e XIII secolo (BONCOMPAGNI 1857[2]). In questi anni pubblicò anche i primi lavori su Leonardo Pisano (BONCOMPAGNI 1852, 1854 e 1856), cui fecero seguito le *editiones principes* dei suoi scritti: il *Liber Abaci* (BONCOMPAGNI 1857[1]), la *Pratica Geometrie* (BONCOMPAGNI 1862[1]), il *Flos*

dubbio giocato un ruolo determinante, direi quasi fondante, come si vedrà in seguito, eppure la sua importanza non gli fu subito riconosciuta dai contemporanei. Nonostante, infatti, la portata a dir poco rivoluzionaria dei suoi insegnamenti, nelle università continuò per lungo tempo ad essere praticata una matematica di tradizione boeziana, sicché i suoi scritti presero a diffondersi, con considerevole ritardo, soltanto un secolo dopo la loro pubblicazione, per lo più tramite adattamenti in volgare operati all'interno degli ambienti mercantili[3]. È forse per questo motivo che le notizie relative alla sua vita e alla sua formazione sono quanto mai scarse e incerte[4].

Gli anni della formazione.

Leonardo Fibonacci nacque probabilmente a Pisa intorno al 1170, da una ricca famiglia appartenente al ceto mercantile[5]. Dopo aver condotto i primi studi

---

con l'*Epistola ad Magistrum Theodorum* (BONCOMPAGNI 1862[2] e 1862[3]), e il *Liber Quadratorum* (BONCOMPAGNI 1862[4]). L'importanza di Baldassarre Boncompagni si riflette anche in certe sue iniziative editoriali di grande generosità, tra le quali merita una menzione particolare la fondazione, intorno al 1850, della *Tipografia delle scienze matematiche e fisiche*, presso la quale furono pubblicati numerosi saggi di interesse storico e scientifico. Per ulteriori notizie su questo personaggio, rimando al fondamentale contributo di MAZZOTTI 2000 e all'annessa bibliografia, nonché alla scheda bibliografica a cura di BOTTAZZINI 2002.

[3] Come ha rilevato FEOLA 2008, p. 25: «ci vorrà più di un secolo perché la nuova matematica presentata da Leonardo si affermi definitivamente. Sarà la classe mercantile, alla quale pure Leonardo apparteneva, a mettere a frutto la parte più pratica del suo lavoro, attraverso un'opera di adattamento che ha nel volgare la sua lingua d'elezione. Nasceranno così i libri d'abaco, scritti per lo più in mercantesca, che diventeranno, insieme alle scuole d'abaco, uno dei perni dell'addestramento professionale del mercante».

[4] La maggior parte delle notizie relative alla vita di Leonardo Pisano è desumibile dalla dedica e dal prologo del *Liber Abaci*, di cui GERMANO 2013 ha fornito l'edizione critica e la traduzione in lingua inglese. Di essi esiste, inoltre, una traduzione in lingua italiana a cura di CAROTENUTO-GERMANO 2012, nonché un utile e dettagliato commento a cura di CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012. Per un'approfondita disamina della fortuna e della diffusione del prologo, rimando infine all'interessante contributo di CAROTENUTO 2013, pp. 176-178.

[5] AMBROSETTI 2008, p. 218, FEOLA 2008, p. 21, e BUSSOTTI 2008, p. 43, fissano intorno al 1170 l'anno di nascita del matematico, mentre GAVAGNA 2013, p. 192, CAIANIELLO 2012[1], p. 59, e AÏSSANI-VALÉRIAN 2003[2], p. 11, n. 8, propongono come ipotesi il decennio compreso tra il 1170 e il 1180. Come rileva CAROTENUTO 2014[2], p. 8: «il fatto che fosse chiamato "il Pisano" lascerebbe supporre che Leonardo sia nato a Pisa. In realtà non siamo del tutto sicuri del luogo di nascita, ma neppure dell'anno che deve situarsi intorno al 1170. In ogni caso se non nacque a Pisa, anche se questa è l'ipotesi più probabile, in questa città trascorse la maggior parte della sua infanzia e il fatto di essere vissuto in una città commerciale e dagli orizzonti cosmopoliti sarà di non poco peso nell'impostazione dei suoi studi».

presso una scuola d'abaco pisana[6], intorno al 1185 raggiunse il padre, Guglielmo dei Bonacci[7], presso la città di Béjaïa (Bugia), in Algeria, dove l'uomo esercitava la professione di *publicus scriba pro Pisanis mercatoribus*[8]. La città godeva di una posizione privilegiata, posta com'era nel Maghreb centrale, e rappresentava, già tra la fine dell'XI e l'inizio del XII secolo, un centro di grandissima rilevanza non soltanto economica, ma anche politica e culturale. Nella seconda metà del XII secolo si verificò un proficuo incremento dei traffici commerciali con il nord del Mediterraneo, che continuò con successo fino ai primi decenni del secolo successivo. Ben presto la città raggiunse un elevato livello culturale e scientifico, soprattutto in ambito matematico, costituendo una tappa obbligata per quanti volevano completare il proprio percorso formativo[9]. A Béjaïa il giovanissimo Leonardo entrò per la prima volta in contatto con il sistema posizionale impiegato dagli Arabi per scrivere i numeri, i quali lo avevano a loro volta appreso dagli Indiani, nonché con le tecniche di calcolo in uso nei paesi islamici[10]. In seguito, il

---

[6] L'ipotesi è stata avanzata da FRANCI 2002, p. 296, e da AMBROSETTI 2008, p. 218, e ripresa poi da CAROTENUTO 2014[2], p. 10. Per notizie sull'educazione dei mercanti, rimando al contributo di SAPORI 1997, pp. 150-155, che a sua volta si rifà a PIRENNE 1929.

[7] Dal momento che il cognome "Fibonacci" deriva da una contrazione di *filius Bonaccii* (LIBRI 1838, pp. 20-21, n. 1), in passato alcuni studiosi hanno erroneamente creduto che il padre di Leonardo si chiamasse Bonaccio, o Bonacci, e che da lui il matematico traesse il nome (GRIMALDI 1790, p. 163). Grazie, però, alle notizie contenute nella *Cronica* di Giovanni Villani, si è potuto comprendere che durante il Medioevo molti cognomi si formarono a partire dal nome di un illustre antenato, rispetto al quale i discendenti venivano genericamente chiamati *filii* (PORTA 1991; MOUTIER-GHERARDI DRAGOMANNI 1823). Oggi sappiamo che il padre di Leonardo si chiamava Guglielmo, e che Bonaccio era perciò il nome di un avo (CAROTENUTO 2014[2], p. 8; CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-60; ULIVI 2011, p. 248; MILANESI 1867, p. 87).

[8] La più recente biografia di Leonardo Pisano è stata allestita da CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-65, alla quale rimanda CAROTENUTO 2014[2], pp. 8-13. Molto utili sono, inoltre, le notizie fornite da GAVAGNA 2013, pp. 192-3, ULIVI 2011, pp. 247-254, AMBROSETTI 2008, pp. 218-232, FRANCI 2002, pp. 293-307, FEOLA 2008, pp. 20-27, BUSSOTTI 2008, pp. 43-61, e MUCCILLO 1997, pp. 359-60.

[9] Sull'importanza non solo economica, ma anche scientifica e culturale di questa città: AÏSSANI-VALÉRIAN 2003[1], pp. 237-239, e 2003[2], pp. 9-21; AMBROSETTI 2008, pp. 217-218; FEOLA 2008, p. 21; CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012, pp. 134-135.

[10] Come rileva BURNETT 2006, pp. 15-16: «Indian mathematics and astronomy were introduced into the Arabic world, most conspicuously in a celebrated mission to the court of the caliph al-Mansur in Baghdad in 771 A.D. which included a set of astronomical tables. This, or another set of Indian astronomical tables – by Brahmagupta – was revised or translated by Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. The same al-Khwarizmi wrote (ca. 825 A.D.) a text on computation with Indian numerals called *kitab al-hisab al-hindi* and another text on addition and substraction, *kitab al-jam' wa'l-tafriq*, neither of which survive in Arabic, but both of which, presumably, described the use of Indian numerals. The earliest extant Arabic work on Indian arithmetic is the *kitab al-fusul fi'l-hisab al-hindi* of Abu'l-Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uklidisi (the "Euclid-man"),

giovane condusse una serie di viaggi in vari paesi del Mediterraneo, come l'Egitto, la Siria, la Grecia, la Sicilia e la Provenza, dove ebbe l'opportunità di frequentare altre scuole e di esercitare l'attività commerciale[11]. È assai probabile che, nel corso della sua permanenza a Béjaïa e in altre città del Mediterraneo, Fibonacci abbia appreso non soltanto la matematica, ma anche la lingua araba. Ad oggi l'ipotesi non è affatto dimostrabile, dal momento che all'interno dei suoi scritti non si rileva nulla in tal senso, eppure alcuni studiosi si sono spinti al punto da ritenere assolutamente certo il fatto che Leonardo fosse in grado di leggere l'arabo. È il caso di Barnabas Hughes, il quale, partendo dalla constatazione che il matematico pisano sembri utilizzare, come fonte per i suoi scritti, certe porzioni degli *Elementi* di Euclide non riconducibili alle traduzioni latine che ci sono pervenute, suggerisce la possibilità che l'autore stesso abbia tradotto dall'arabo al latino le citazioni degli *Elementi* che ha riportato all'interno delle sue opere[12]. In realtà noi non conosciamo con precisione tutte le risorse che erano a disposizione del Pisano, perché, come opportunamente rileva André Allard, attualmente non possediamo l'elenco completo delle opere che furono tradotte dall'arabo al latino nel corso del XII secolo[13]. Per questo motivo, nonostante la logica suggerisca che Fibonacci abbia avuto una qualche conoscenza della lingua araba, se non altro per la lunga frequentazione che ha avuto del mondo islamico, non è però possibile stabilire con assoluta sicurezza né se, né quanto egli sia stato effettivamente in grado di comprendere i testi matematici redatti in questa lingua[14].

---

composed in Damascus in 952–953 A.D. and surviving in a unique manuscript written over two centuries later, in 1186».

[11] Fibonacci, *Liber Abaci, Prologus* 2, p. 171 (Germano): *ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit et intellexi ad illam, quod quicquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis causa postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum*.

[12] HUGHES 2008, p. xix: «I suggest this: in the course of his studies somewhere sometime Fibonacci had access to an Arabic *Elements*. From this he translated into Latin at least the propositions of all fifteen Books, to provide himself with a *vademecum* of Euclid's *Elements*».

[13] Così ALLARD 1996, p. 551, n. 114: «so far we have no trace of many of the numerous Latin translations of Arabic works completed during the twelfth century». A LORCH 2001[1] e a PERGOLA 2009 si deve una disamina dei principali traduttori e delle traduzioni medievali, realizzate in Occidente tra il XII e il XIII secolo.

[14] Alcuni studiosi sono del parere che Fibonacci abbia ignorato tutta la produzione aritmetica ed algebrica dei secoli successivi al X (RASHED 1994, p. 150, e 2003, p. 55; HUGHES 1996; CAIANIELLO 2012[1], p. 71); altri, invece, ritengono che il matematico abbia avuto la possibilità di consultare almeno l'opera di al-Karaji, vissuto tra il 953-1029 (HUNGER PARSHALL 1988; FRANCI 2002), ma non quella di al-Kayyam, vissuto tra il 1044 e il 1131 (HUGHES 1996; MARACCHIA

Il rientro in Italia.

Al rientro dai suoi viaggi, Fibonacci si dedicò alla composizione di una serie di scritti di argomento matematico. L'autore dovette la sua fama innanzitutto al *Liber Abaci*, poderoso trattato di aritmetica in quindici capitoli, edito una prima volta nel 1202 e una seconda volta nel 1228[15]. A dispetto del titolo, il *Liber Abaci* non aveva nulla a che fare con l'antico strumento da cui pure traeva il nome, ma verteva più in generale sull'innovativo sistema di calcolo aritmetico in uso presso i paesi islamici, che prevedeva l'utilizzo delle cifre indo-arabe[16]. L'opera, che ci è pervenuta soltanto nella seconda edizione, si apriva con un'epistola di dedica a Michele Scoto, noto filosofo ed astrologo della corte di Federico II di Svevia, cui faceva seguito un prologo di tipo autobiografico[17]. Venivano poi affrontate questioni di aritmetica non solo teorica, ma anche pratica[18]: i capitoli 1-7 erano dedicati alla presentazione del nuovo sistema di numerazione e delle operazioni aritmetiche ad esso associate; i capitoli 8-11 vertevano su problemi di carattere puramente commerciale (calcolo dei prezzi delle merci, dei guadagni, dei tassi di cambio tra monete diverse, e così via); i capitoli 12-13 presentavano le cosiddette *questiones erratice*, problemi di vario tipo che recavano più di un metodo di risoluzione; i capitoli 14-15, infine, analizzavano questioni inerenti le matematiche teoriche (numeri irrazionali, elementi di geometria, teoria delle

---

2005). Per ulteriori notizie: AMBROSETTI 2008, pp. 225-227; HUGHES 2008, pp. xviii-xx; CAROTENUTO 2014[2], pp. 14-18.

[15] L'edizione critica dei capitoli V-VII del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano è stata recentemente allestita da CAROTENUTO 2014[2], pp. 63-360, che di essi ha anche fornito un'utile traduzione in lingua italiana. La medesima CAROTENUTO 2014[2], pp. 361-574, ha inoltre operato la prima traduzione in lingua italiana dei capitoli VIII-XII dell'opera. Come opportunamente rileva GERMANO 2012, p. 55, non esiste ancora un'edizione critica del *Liber Abaci* nella sua interezza, sicché, per le parti non ancora esaminate dalla Carotenuto, bisognerà accontentarsi dell'*editio princeps* di BONCOMPAGNI 1857[1], che di questo trattato fornì la trascrizione diplomatica di un unico codice, conservato a Firenze sotto la dicitura di Conv. Soppr. C. 1. 2616. Su questa antiquata edizione, si basa la traduzione in lingua inglese operata dal SIGLER 2002, che ha avuto l'indiscutibile merito di rendere l'opera fruibile da parte di un vasto pubblico di interessati. Di recente è stata pubblicata l'edizione critica dell'epistola di dedica e del prologo (GERMANO 2013).

[16] Come chiarisce AMBROSETTI 2008, p. 220: «l'opera è interessante fin dal titolo: come si vede, la parola abaco ha perso gradualmente, ma inesorabilmente il suo significato di strumento di calcolo per assumere quello di "aritmetica basata sull'uso delle figure indiane"». Sull'argomento si veda anche FRANCI 2002, p. 308; CAIANIELLO 2012[1], pp. 66-67; CAROTENUTO 2014[2], p. 14.

[17] Per notizie su Michele Scoto, rimando a CAIANIELLO 2012[2], pp. 109-112.

[18] La natura, per così dire, ibrida del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, è stata messa in luce da CAROTENUTO 2014[2], pp. 19-22.

proporzioni, algebra di 2° grado)[19]. A onor del vero, Fibonacci non fu né il primo, né il solo europeo ad essere entrato in contatto con la numerazione indo-araba e ad averla impiegata all'interno dei suoi scritti. Il suo utilizzo, infatti, è attestato già per l'anno 976 nell'appendice al libro III delle *Origines* di Isidoro, nel cosiddetto Codex Vigilianus 1 (Ms. lat. d.I.2), allestito all'interno del monastero di Albelda (Asturia) dal monaco Vigila, e oggi conservato presso la Biblioteca san Lorenzo del Escorial con la segnatura di MS Escorial d.I.2 (Albelda MS). Nove anni prima, il grande matematico Gerberto d'Aurillac, futuro papa Silvestro II, si era recato ancora *adulescens* a Vich, in Catalogna, per studiare matematica, e in quell'occasione era entrato in contatto con le cifre indo-arabe[20]. A lui si deve l'introduzione in Occidente di un nuovo tipo di abaco, denominato *abacus geometricalis* o *mensa Pythagorae,* il cui funzionamento si basava proprio sull'utilizzo di queste cifre, e che era destinato ad essere ampiamente utilizzato nell'insegnamento universitario, almeno fino alla fine del XII secolo, senza però mai sostituirsi del tutto alla tradizionale matematica boeziana[21]. Nel frattempo, già a partire dal XII secolo nuovi testi avevano cominciato a diffondersi in Europa attraverso l'Italia meridionale, la Spagna e i regni crociati: si tratta per lo più di opere scientifiche tradotte dall'arabo al latino, oltre che dal greco al latino[22], la cui circolazione determinò la grandiosa rinascita culturale, che Charles Haskins ha enfaticamente definito nei termini di un "rinascimento scientifico"[23]. Per quel che

---

[19] Un'approfondita disamina dei contenuti del *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci è stata realizzata da CAIANIELLO 2012[1], pp. 65-72. Molto utili anche le notizie fornite da AMBROSETTI 2008, pp. 220-227, e da FRANCI 2002, pp. 308-317.

[20] BURNETT 2006, p. 17; AMBROSETTI 2008, pp. 95-96.

[21] La notizia ci è nota dalla biografia gerbertiana di Richerus, edita da BUBNOV 1899, pp. 376-381. Richerus, *Confectio Abaci*, pp. 380-381 (Bubnov): *in geometria vero non minor in docendo labor expensus est. Cujus introductioni abacum, id est tabulam dimensionibus aptam, opere scutarii effecit. Cujus longitudini in XXVII partibus diductae novem numero notas omnem numerum significantes disposuit. Ad quarum etiam similitudinem mille corneos effecit caracteres, qui per XXVII abaci partes mutuati, cujusque numeri multipliationem sive divisionem designarent: tanto compendio numerorum multitudinem dividentes vel multiplicantes, ut pre nimia numerositate potius intelligi, quam verbis valerent ostendi. Quorum scientiam qui ad plenum scire desiderat, legat ejus librum, quem scribit ad Constantinum grammaticum. Ibi enim haec satis habundanterque tractata inveniet.*

[22] Il fenomeno è stato analiticamente descritto da AMBROSETTI 2008, pp. 95-112. Molto utile, sull'argomento, anche i contributi di LORCH 2001[1] e di PERGOLA 2009.

[23] HASKINS 1998 (1927), p. 257: «In nessun altro campo è evidente la rinascita del XII secolo come in quello scientifico. Ancora nel 1100 la cultura scientifica dell'Europa occidentale era limitata ai compendi di Isidoro e Beda e a pochi frammenti della cultura latina. Nel 1200, o poco dopo, l'Europa aveva assorbito la scienza naturale e la filosofia degli arabi e buona parte della

concerne, nello specifico, la diffusione in Occidente della numerazione indo-araba e delle tecniche di calcolo ad essa associate, un nuovo e importante impulso fu dato dalla circolazione nel XII secolo dei cosiddetti *Algorismi*, scritti di aritmetica fondati sul sistema di numerazione indo-araba, che traevano il loro nome dal matematico persiano al-Khwārizmī, vissuto nel IX secolo[24]. Come ha evidenziato Raffaella Franci, in Occidente gli *Algorismi* circolarono in una forma assai limitata, mentre il trattato di Leonardo ebbe una risonanza molto più ampia (FRANCI 2002, p. 320). In questo senso, il principale contributo del matematico pisano consistette non tanto nell'introduzione del calcolo indo-arabo in Europa, quanto piuttosto nella sua divulgazione. Fu in effetti grazie al *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, se in Europa si affermò definitivamente il sistema di numerazione indo-arabo che noi oggi adoperiamo[25].

Tra il 1219 e il 1221 Fibonacci pubblicò il suo libro di geometria, la *Pratica Geometrie*[26]. L'opera si apriva con un'epistola di dedica all'amico e maestro Domenico, probabilmente Domenico Ispano, importante personaggio della corte fridericiana di cui, però, si hanno pochissime notizie[27]. All'epistola

---

cultura greca. I cento anni che seguirono, o meglio gli anni che vanno dal 1125 in avanti, furono segnati dalla scoperta di Euclide e di Tolomeo, della matematica e dell'astronomia degli arabi, della medicina di Galeno, d'Ippocrate e di Avicenna, della scienza enciclopedica di Aristotele. Non è tutto: al nuovo atteggiamento sperimentale che caratterizza il secolo contribuirono il contatto con l'alchimia greca ed araba, la scoperta dell'astrologia degli arabi. Si può quindi ormai propriamente parlare di un rinascimento scientifico, anche se non è possibile qui, come per la letteratura, limitarlo al XII secolo».

[24] Risalgono al XII secolo i quattro *Algorismi* più antichi che conosciamo: il *Dixit Algorizmi*, il *Liber Ysagogarum Alchorismi*, il *Liber Alchorismi* e il *Liber Pulveris*. Essi nascono come adattamenti latini del *Kitab al-hisab al-hindi* di al-Khwārizmī, trattato di aritmetica che non ci è pervenuto nell'originale arabo, e sono stati editi da ALLARD 1992. Per notizie sulla complessa tradizione manoscritta di questi testi: ALLARD 1991; FOLKERTS 2001[1]; AMBROSETTI 2008, pp. 197-214.

[25] BURNETT 2002, p. 15: «the most momentous development in the history of pre-modern mathematics is the shift from using roman numerals to using Indian numerals and the "Indian way" of doing arithmetic that the use of these numerals entailed».

[26] La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano è stata edita a stampa da BONCOMPAGNI 1862[1], che di essa ha pubblicato la trascrizione fedele di un manoscritto di XV secolo, attualmente conservato presso la Biblioteca Apostolica Vaticana con la segnatura Urb. Lat. 292. Di questa trascrizione, HUGHES 2008 ha fornito un'utile traduzione in lingua inglese, che ha contribuito in maniera considerevole alla diffusione dell'opera in epoca recente. Attualmente, manca ancora un'edizione critica moderna della *Pratica Geometrie* che tenga conto delle lezioni di tutti i manoscritti che la tramandano. In compenso, l'edizione critica dell'epistola di dedica è stata da me pubblicata insieme a una sua traduzione in lingua italiana e a un commento (ROZZA 2015[2]).

[27] Domenico Ispano fu traduttore alla scuola di Toledo, retore e grammatico. Utili notizie su questo personaggio sono state già fornite da ARRIGHI 1970, pp. 20-21; CAIANIELLO 2012[2], p. 112; CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012, pp. 130-131.

seguiva una sezione introduttiva nella quale erano elencate alcune definizioni tratte dagli *Elementi* di Euclide[28] e in cui venivano introdotte e spiegate le unità di misura che erano in vigore nella Pisa del Duecento[29]. L'autore, poi, discuteva in otto *distinctiones*, ovvero in otto sezioni, i vari argomenti di cui si componeva il manuale[30]: si andava dal calcolo delle aree delle figure piane (I e III) all'estrazione delle radici quadrate (II) e cubiche (V), dalla divisione delle superfici regolari (IV) al calcolo dei volumi di diversi solidi (VI), da problemi di determinazione di altezze e distanze (VII) ad altre "sottigliezze geometriche" di carattere puramente teorico (VIII)[31]. Accanto a numerose questioni di tipo pratico, che ricordano da vicino il *modus operandi* sia del matematico andaluso Abū Bakr (X secolo)[32], sia del matematico greco Erone di Alessandria (II secolo)[33], la *Pratica Geometrie* presenta anche dettagliate dimostrazioni geometriche, che rimandano alle opere di Euclide e di Archimede[34]. Una simile tensione tra istanze teoriche e finalità pratiche aveva permeato anche il *Liber Abaci*, come si è visto, e

---

[28] Alla difficile domanda su quale versione degli *Elementi* di Euclide dovette essere nota al matematico pisano, fornisce un'esauriente risposta FOLKERTS 2004, pp. 106-112, il quale dimostra, con argomenti assolutamente convincenti, che di Euclide «Leonardo knew and used the direct translation of the *Elements* which was made in Sicily after 1160. He also knew a compendium of Books 14 and 15 which is transmitted together with the Greek-Latin direct translation; and it is not impossible that Leonardo himself compiled this text. Further, he was acquainted with another Euclid text which followed the Arabic order of propositions as shown by the translations of Adelard, Hermann and Gerard» (*ivi*, pp. 112-113).

[29] Per un utile elenco delle unità di misura che erano in vigore a Pisa nel XIII secolo, rimando a LUZZATI 1965, Appendice 3.

[30] Come ho già chiarito in un mio articolo (ROZZA 2015[1], p. 82, n. 34), e in accordo con FOLKERTS 2004, p. 98, traduco *distinctio* con "sezione", non con "capitolo", come invece propone CAIANIELLO 2012[1], p. 74. Non è possibile, infatti, intendere *distinctio* come sinonimo di *capitulum*, perché di *capitula* Fibonacci aveva già parlato a proposito del *Liber Abaci*, p. 170 (Germano), per cui ritengo che, se l'autore avesse inteso dividere la *Pratica Geometrie* in *capitula*, probabilmente lo avrebbe fatto. È possibile, però, intendere il termine anche col significato di *Erklärung*, "spiegazione", come propone il BIRKENMAJER 1935, p. 474, n. 8, o come termine tecnico della filosofia aristotelica (SCHULTHESS 2011).

[31] Per un'approfondita disamina dei singoli argomenti trattati nella *Pratica Geometrie*: SIMI 2004, pp. 9-13; FOLKERTS 2004, pp. 98-104; AMBROSETTI 2008, pp. 227-229.

[32] Abū Bakr fu autore, nel X secolo, del *Liber Mensurationum*, opera che non ci è pervenuta nell'originale arabo, è che è stata edita da BUSARD 1968[1].

[33] Erone di Alessandria fu autore, nel II secolo, dei *Metrica*, un'opera in tre libri concernente la geometria pratica (SIMI 2004, p. 12, n. 11).

[34] Come rileva AMBROSETTI 2008, p. 90, che a sua volta cita BERGGREN 1986: «tutta la matematica greca era nota nel mondo islamico, da Euclide ad Archimede ad Erone e, più tardi, a Diofanto: l'approccio geometrico di questi autori era tenuto in altissima considerazione dagli scienziati musulmani».

rappresentava di fatto un tratto distintivo della mentalità scientifica del Fibonacci[35].

Nel 1225 Leonardo compose il *Liber Quadratorum*, il suo libro di algebra avanzata e di teoria dei numeri, e lo dedicò all'imperatore Federico II di Hohenstaufen[36]. L'opera si fondava sostanzialmente sulla discussione di due quesiti. Il primo di questi fu posto da Giovanni da Palermo, e consisteva nel rinvenire un numero quadrato tale che, aumentato o diminuito di cinque, desse come risultato un numero quadrato. Il secondo quesito fu posto da Teodoro di Antiochia, e consisteva nel determinare tre numeri la cui somma, addizionata al quadrato del primo, desse come risultato un numero quadrato; se poi a questo nuovo numero veniva addizionato il quadrato del secondo numero, si doveva ottenere ancora come risultato un numero quadrato; se, infine, a quest'ultimo numero veniva addizionato il quadrato del terzo, il risultato doveva essere ancora una volta un numero quadrato (equazioni pitagoriche)[37]. Molto interessante è l'epistola con cui l'autore dedicò l'opera al sovrano, dalla quale si apprende che fu proprio il maestro Domenico, ossia il destinatario della *Pratica Geometrie*, ad aver presentato il matematico all'imperatore[38]:

> Quando il maestro Domenico mi condusse da Pisa a presentarmi ai piedi di Vostra Altezza, Principe Gloriosissimo Signore Federico, il maestro Giovanni da Palermo mi si fece incontro per propormi il seguente quesito, attinente non meno alla geometria che all'aritmetica: trovare un numero quadrato tale che, addizionato o diminuito di 5, desse sempre come risultato un numero quadrato. Riflettendo sulla soluzione di tale questione dopo che l'avevo già trovata, mi resi conto del fatto che la soluzione stessa aveva origine da molte caratteristiche proprie dei quadrati e dei

[35] Come sostiene SIMI 2004, p. 11, il livello della trattazione della *Pratica Geometrie* risulta essere assai elevato: l'unico vero elemento di "praticità" che è possibile riscontrare, consiste nella scelta di esporre la materia secondo un approccio per problemi. In effetti, nella lettera con la quale dedica l'opera all'amico Domenico, Fibonacci scrive di aver pubblicato per lui un'opera "già da lungo tempo iniziata", pensata per offrire ai lettori nozioni di geometria non solo pratica, ma anche teorica: Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 2.

[36] Secondo il parere di alcuni studiosi, l'opera rappresenta il capolavoro assoluto del Fibonacci (CANESTRELLI 2014; DEVLIN 2013).

[37] Come chiarisce CAIANIELLO 2012[1], p. 76: «In simboli i due problemi si possono rappresentare nel modo seguente: 1. Trovare un quadrato x^2 tale che: $x^2 + 5 = y^2$; $x^2 - 5 = z^2$. 2. Risolvere simultaneamente le seguenti equazioni: $x + y + z + x^2 = u^2$; $x + y + z + x^2 + y^2 = v^2$; $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2$». Per un approfondito esame dei contenuti del *Liber Quadratorum*: AMBROSETTI 2008, pp. 228-230.

[38] Il *Liber Quadratorum* è stato pubblicato da BONCOMPAGNI 1862[4]. Dell'opera esiste una traduzione in lingua francese a cura di VER EECKE 1952, e una traduzione in lingua inglese a cura di SIGLER 1987.

> numeri quadrati. Recentemente, poi, con le discussioni affrontate a Pisa e anche di altri che facevano ritorno dalla Curia Imperiale mi è sembrato di poter comprendere che Vostra Altezza e Maestà si degna di leggere il libro che ho composto sull'aritmetica, e che talvolta piace a Voi ascoltare le sottigliezze che pertengono alla geometria e all'aritmetica. Ritornando con la mente alla già menzionata questione che mi fu proposta dal Vostro filosofo nella Vostra Curia, da quella trassi spunto e iniziai a comporre in Vostro onore l'opera che qui fa seguito, la quale volli chiamare *Liber Quadratorum*, e chiedo che siate paziente e indulgente, se in esso vi è contenuto qualcosa di più o di meno del giusto o del necessario, dal momento che ricordare ogni cosa e non sbagliare in nulla è tipico del divino, non dell'umano agire e che nessun uomo è infallibile e in tutto e per tutto cauto[39].

A questo proposito si rende necessaria una breve digressione. I manoscritti che tramandano il *Liber Quadratorum* concordano tutti nel riportare, come anno di composizione dell'opera, il 1225: ciò significa che Fibonacci dovette conoscere Federico II prima di questa data[40]. Per quanto riguarda, invece, il luogo in cui dovette svolgersi tale incontro, dalla lettera con cui l'autore dedica l'opera al sovrano si può stabilire soltanto che l'episodio si verificò presso la *Imperialis Curia*, la corte itinerante di Federico II[41]. A differenza, infatti, di quanto sostiene

---

[39] Fibonacci, *Liber Quadratorum*, p. 253 (Boncompagni): *cum magister Dominicus pedibus Celsitudinis Vestre, Princeps Gloriosissime Domine F<rederice>, me Pisis duceret presentandum, occurrens magister Johannes Panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem: ut invenirem numerum quadratum, cui quinque additis vel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur. Super cuius questionis solutione a me iam inventa considerans, vidi quod habebat originem solutio ipsa ex multis que quadratis et inter quadratos numeros accidunt. Nuper autem cum relationibus Pisis positis et aliorum reddeuntium ab Imperiali Curia intellexerim quod dignatur Vestra Sublimitas Maiestas legere super librum quem composui de numero, et quod placet Vobis audire aliquotiens subtilitates ad geometriam et numerum contingentes. Rememorans in Vestra Curia et a Vestro phylosopho suprascriptam mihi propositam questionem, ab ea sumpsi materiam et opus incepi ad Vestrum honorem condere infrascriptum, quod vocari librum volui quadratorum, veniam postulans patienter, si quid in eodem plus vel minus iusto vel necessario continetur, cum omnium habere memoriam, et in nullo peccare sit divinitatis potius quam humanitatis et nemo sit vitio carens et undique circumspectus*. La traduzione e la punteggiatura sono di chi scrive.

[40] I due manoscritti che ci tramandano il *Liber Quadratorum* recano entrambi la data del 1225: «del *Liber Quadratorum* ci sono giunti, a quanto ne sappiamo, due manoscritti e negli *incipit* di entrambi è indicato l'anno 1225 come data di composizione: Milano, Biblioteca Ambrosiana, ms. E. 75 sup. [...]; Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Urb. 291 [...]»: CAIANIELLO 2012[1], pp. 82-83, n. 79. A onor del vero, il calendario che era in vigore a Pisa differiva da quello delle altre città d'Italia per il fatto che il primo giorno dell'anno coincideva non con il 1 gennaio, bensì con il 25 marzo dell'anno precedente rispetto al computo odierno (CAIANIELLO 2012[1], pp. 80-81): ciò significa che se il *Liber quadratorum* è stato composto tra il 1 gennaio e il 24 marzo 1225 (data pisana), allora la sua data corrisponderà senz'altro al 1225 secondo il computo odierno; se invece l'opera è stata composta durante il periodo compreso tra il 25 marzo e il 31 dicembre 1225 (data pisana), allora la sua data in stile odierno dovrà essere ridotta di un anno, ovvero corrisponderà al 1224 (CAIANIELLO 2012[1], p. 82).

[41] Per ulteriori notizie sulla *Imperialis Curia*, cfr. KÖLZER 1994.

il Boncompagni, nella dedica del *Liber Quadratorum* Fibonacci afferma di aver incontrato a Pisa soltanto il maestro Domenico e che da qui, poi, i due si sarebbero spostati in un'altra, non ben definita località, dove il matematico sarebbe stato presentato all'imperatore[42]. Fibonacci afferma che il maestro lo avrebbe condotto a corte da Pisa, e non a Pisa, come erroneamente pensava il Boncompagni: all'interno della frase *cum magister Dominicus pedibus Celsitudinis Vestre, Princeps Gloriosissime Domine F<rederice>, me Pisis duceret presentandum*, infatti, *Pisis*, non può essere ablativo di stato in luogo, perché è posto in dipendenza del verbo *duco*, non del verbo *praesento*. Ne consegue che, stando alle notizie riportate dal *Liber Quadratorum*, l'incontro tra il matematico e l'imperatore non può essere avvenuto propriamente a Pisa, ma deve essere avvenuto altrove[43].

Quel che è certo, è che Fibonacci fu ammesso alla presenza di Federico II, e sarebbe stato il *magister Dominicus* a condurcelo: il ricordo di questo evento deve essere stato particolarmente caro all'autore[44], che ne parla, infatti, non soltanto nell'epistola con cui dedica il *Liber Quadratorum* al sovrano, ma anche in un altro breve opuscolo, il *Flos*, raccolta di studi di varia natura dedicata al

[42] BONCOMPAGNI 1854, pp. 104-105: «il professore Giovanni Battista Guglielmini dice: "alloggiò (l'imperatore Federico II) in Fucecchio tra Capraia e Pisa, Lionardo allora si lasciò condur a corte dal grato amico Domenico, che volle farlo conoscere a Federico", pare che supponga che Leonardo Pisano sia stato presentato in Fucecchio all'imperatore Federico II da maestro Domenico. Ora è certo che questa presentazione fu fatta in Pisa, e non già in Fucecchio; giacché Leonardo Pisano stesso ciò attesta nella dedicatoria del suo *Liber Quadratorum* al medesimo Federico».

[43] Non è semplice ricostruire gli spostamenti di Federico II all'interno della penisola, perché dei cosiddetti "libri delle spese", preziosi documenti che forniscono indicazioni precise circa gli itinerari di Federico II, è andato tutto perduto, mentre degli atti della cancelleria possediamo soltanto le notizie relative agli anni 1239-49 (KIESEWETTER 2005, pp. 100 e ss). Tuttavia, grazie alla ricostruzione degli itinerari fridericiani operata da BRUNETTI 2000, pp. 193-198, possiamo farci un'idea della frequenza con cui il sovrano si spostava da un luogo all'altro della penisola: nel 1220 l'imperatore rientra in Italia meridionale; nel 1222 incontra il papa a Veroli e, qualche mese dopo, assedia la città di Alcamo (17 giugno-18 agosto); nell'aprile-marzo del 1223 lo troviamo impegnato nell'assedio della città di Celano, ma già a partire da novembre, e per circa 7 mesi, si ferma stabilmente a Catania; nel giugno del 1224 è Siracusa, ma trascorre l'estate di quell'anno e il mese di dicembre a Palermo; infine, nel corso del 1225 si sposta freneticamente da Palermo a Foggia, da Nicastro a Brindisi e a Troia. Si tratta ovviamente di dati parziali e incompleti, che non escludono la possibilità che Federico II abbia visitato i dintorni di Pisa prima del 1225. Sugli spostamenti dell'imperatore, si veda anche il fondamentale contributo di BRÜHL 1994.

[44] AMBROSETTI 2008, p. 231: «uno degli eventi più significativi della vita di Fibonacci fu indubbiamente l'incontro con l'imperatore Federico II».

cardinale Raniero Capocci di Viterbo[45]. L'opera ci è pervenuta attraverso il codice E. 75 Sup. della Biblioteca Ambrosiana di Milano, che ce ne tramanda il testo senza l'indicazione dell'anno di composizione[46]. Alla lettera con cui Fibonacci dedica l'opera al cardinale, segue, nel *Flos*, una seconda epistola, questa volta indirizzata a Federico II, in cui l'autore afferma di avere discusso, a Pisa, di alcune questioni matematiche insieme al maestro Giovanni da Palermo[47]:

> Quando alla presenza di vostra Maestà, Principe Gloriosissimo Federico, il maestro Giovanni da Palermo, Vostro filosofo, discusse con me a Pisa di molte questioni inerenti i numeri e tra queste mi propose due quesiti non meno pertinenti alla geometria che all'aritmetica, di questi il primo consistette nell'individuare un certo numero quadrato tale che, aggiungendogli o togliendogli il numero cinque, desse come risultato un numero quadrato. Il numero quadrato che, come ho riferito al medesimo maestro Giovanni, ho calcolato, è questo: $\frac{1}{144}\,\frac{2}{3}\,11$. La radice di tale numero è pari a $\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}\,3$[48]. Se a questo numero quadrato si aggiunge 5, si otterrà $\frac{1}{144}\,\frac{2}{3}$ 16, che è un numero quadrato. La radice di tale numero è pari a $\frac{1}{12}\,4$[49]. Allo stesso modo, se dal medesimo numero quadrato si sottrae 5, si otterrà $\frac{1}{144}\,\frac{2}{3}\,6$, il quale è anch'esso un numero quadrato. La sua radice è pari a $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}\,2$[50]. Dopo aver a lungo pensato donde si ricavasse la soluzione di tale questione, trovai che essa aveva origine da molte caratteristiche proprie dei numeri quadrati e dei rapporti che intercorrono tra essi: perciò, traendo spunto da qui, ho iniziato a comporre un libretto a gloria di Vostra Altezza e Maestà, libretto che ho intitolato *I quadrati*, nel quale saranno contenute discussioni e dimostrazioni, soluzioni geometriche della

---

[45] Il testo latino del *Flos* è stato pubblicato da BONCOMPAGNI 1862[2]. Di questo trattatello esiste anche un'utile traduzione in lingua italiana e un commento a cura di PICUTTI 1983.

[46] Si tratta di un codice pergamenaceo databile al XV secolo. Rimando a PICUTTI 1983, pp. 294-296, per una descrizione dettagliata di questo manoscritto.

[47] AMBROSETTI 2008, p. 231: «Arrighi [...] nota comunque che nell'opera sono presenti una Epistola a maestro Teodoro [...], la lettera dedicatoria al Capocci, alcune parti indirizzate all'imperatore ed altre ancora al cardinale e ne conclude che l'opera potrebbe essere una "miscellanea di varie scritture composte per vari personaggi" poi integrate in un solo testo, senza revisione delle "dediche", il che potrebbe anche far nascere il dubbio che non sia stato il matematico pisano a predisporre la raccolta».

[48] Il numero rinvenuto da Fibonacci corrisponde, nella forma grafica in uso ai nostri giorni, alla frazione $\frac{1681}{144}$, che si ottiene dall'addizione di $11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144}$. La sua radice è pari a $\frac{41}{12}$, e si ottiene sommando $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

[49] Il numero rinvenuto da Fibonacci corrisponde, nella forma grafica in uso ai nostri giorni, alla frazione $\frac{2401}{144}$, ed è equivalente al risultato dell'addizione di $16 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144}$. La sua radice è pari a $\frac{49}{12}$, e si ottiene sommando $4 + \frac{1}{12}$.

[50] Il numero rinvenuto da Fibonacci corrisponde, nella forma grafica in uso ai nostri giorni, alla frazione $\frac{961}{144}$, e la sua radice è pari a $\frac{31}{12}$.

> predetta questione e soluzioni di molte altre questioni. Vostra Immensità lo potrà avere, se sarà stato gradito a Vostra Altezza[51].

Relativamente al luogo in cui si sarebbe svolto l'incontro tra Fibonacci e l'imperatore – Pisa in questo caso, e una non meglio specificata località raggiunta da Pisa nel caso precedente – sembrerebbe, dunque, che le due epistole siano tra loro in contraddizione.

Ettore Picutti avanza l'ipotesi che il matematico abbia conosciuto per la prima volta Federico II nel 1220, quando cioè il sovrano rientrava in Italia dalla Germania[52]; altri studiosi, invece, collocano il loro incontro a Pisa e lo datano al 1226, anno in cui Federico II, in seguito al fallimento della Dieta di Cremona, decise di fermarsi nei pressi della città durante il suo viaggio di ritorno[53]. Ciò che spinge alcuni studiosi a ritenere che tale episodio si sia verificato nel 1226, è il fatto che non esisterebbero documenti ad attestare un soggiorno dell'imperatore

---

[51] Fibonacci, *Flos*, p. 227 (Boncompagni): *Cum coram Maiestate Vestra, Gloriosissime Princeps Frederice, magister Johannes Panormitanus, phylosophus Vester, Pisis mecum multa de numeris contulisset, inter que duas questiones, que non minus ad geometriam quam ad numerum pertinent, proposuit, quarum prima fuit ut inveniretur quadratus numerus aliquis, cui addito vel diminuto quinario numero, egrediatur quadratus numerus. Quem quadratum numerum, ut eidem magistro Iohanni retuli, inveni esse hunc numerum: undecim et duas tertias et centesimam quadragesimam quartam unius. Cuius numeri radix est ternarius et quarta et sexta unius. Cui quadrato numero si addantur quinque, provenient XVI, et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus est quadratus. Cuius radix est quatuor et una duodemima. Item si auferantur V ab eodem quadrato numero, remanebunt VI et due tertie et una centesima quadragesima quarta, qui numerus etiam quadratus est. Cuius radix est duo et tertia et quarta unius. Et cum diutius cogitassem unde oriebatur predicte questionis solutio, inveni ipsam habere originem ex multis accidentibus, que accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros: quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad Vestre Maiestatis Celsitudinis gloriam, quem libellum quadratorum intitulavi, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predicte, et multarum aliarum questionum solutiones; quem habere poterit Vestra Immensitas, si Celsitudini Vestre placuerit*. La traduzione e la punteggiatura sono di chi scrive. Si avverte il lettore che la lezione *inter que* (*quae*) è una congettura sempre di chi scrive sulla lezione *interque* presente nel codice ambrosiano.

[52] Lo studioso, però, avverte con una nota che «la notizia del passaggio e della permanenza per alcuni giorni a Pisa nel 1220 è del Roncioni, rigettata dal Bonaini in quanto non confermata da altri storici» (PICUTTI 1979, p. 199, n. 1). È comunque interessante rilevare che la questione dibattuta da Fibonacci e Giovanni da Palermo dinanzi a Federico II era stata già parzialmente affrontata nell'ottava distinzione della *Pratica Geometrie*: cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 216 (Boncompagni): *proponitur invenire aliquis quadratus numerus, cui si addatur 5, proveniat inde quadratus numerus*.

[53] Di questo parere sono RASHED 1994, pp. 145 e ss.; FRANCI 2002, p. 299; AMBROSETTI 2008, p. 231; ULIVI 2011, p. 249; CAIANIELLO 2012^1, p. 65.

nei pressi della città prima di questa data[54]. Tuttavia l'ipotesi che questo evento si sia verificato nel 1226 contrasta con la cronologia di composizione del *Liber Quadratorum* che riconduce all'anno precedente. Per questo motivo, si è giunti perfino a ritenere errata la cronologia fissata dai manoscritti per il *Liber Quadratorum* e ad ipotizzare l'anno 1226 come *terminus post quem* per la sua composizione[55]. In altre parole, si è finito per credere che la datazione al 1225 del *Liber Quadratorum* possa essere errata, perché mal si concilierebbe con l'ipotesi secondo cui l'incontro tra Federico II e Fibonacci sarebbe avvenuto a Pisa nel 1226.

In realtà, la documentazione addotta per una tale ricostruzione dimostra soltanto che nel 1226 Federico II si trovava nei pressi di Pisa, ma non ci dice nulla circa il periodo precedente[56]. D'altra parte, ricostruire gli spostamenti dell'imperatore dentro e fuori la penisola è impresa tutt'altro che semplice, perché buona parte dei documenti è andata distrutta: se dunque non siamo informati di un'eventuale presenza del sovrano nei pressi di Pisa prima del 1225, ciò potrebbe dipendere dal fatto che i documenti relativi al suo passaggio potrebbero essere andati perduti. Ciò che possiamo desumere dai documenti in nostro possesso, infatti, è che la cronologia di composizione del *Liber Quadratorum* debba esser collocata nel 1225 e che quella del *Flos* debba esser collocata in data di poco precedente, visto che nella lettera a Federico si fa qui riferimento ad una composizione già iniziata, ma non completata del *Liber Quadratorum*[57]. Per

[54] CAIANIELLO 2012[1], p. 84: «anche la critica più recente, tra cui Wolfgang Stürner, sembra dare per acquisito che Federico II non si recò a Pisa prima del 1226 e in seguito ci ritornasse solo alla fine del 1239: alla luce di ciò sembra essere confermata, dunque, la conclusione che la cronologia di consueto attribuita al *Liber Quadratorum* deve essere errata». La studiosa fa qui riferimento a STÜRNER 2009, p. 787. L'ipotesi è stata avanzata anche da MACCAGNI 1988, e ripresa da ULIVI 2011, p. 249.

[55] CAIANIELLO 2012[1], p. 82: «la datazione del *Liber Quadratorum* risulta in ogni caso particolarmente controversa, come è stato già accennato in precedenza, e merita un discorso a parte, in quanto essa, così come risulta fissata, determina una palese discordanza tra la data della visita dell'imperatore Federico II a Pisa, che avvenne, in occasione di un suo viaggio fatto in Nord Italia per tentare di ricomporre le ostilità dei comuni lombardi nel luglio del 1226, e la data di composizione indicata nell'*incipit* dell'opera nelle sue fonti manoscritte (1225)».

[56] Rimando a CAIANIELLO 2012[1], p. 82, n. 78, per la documentazione relativa al passaggio di Federico II nelle immediate vicinanze della città di Pisa nel 1226.

[57] Fibonacci, *Flos*, p. 227 (Boncompagni): *quare hinc sumens materiam, libellum incepi componere ad Vestre Maiestatis Celsitudinis gloriam, quem libellum quadratorum intitulavi, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predicte, et multarum aliarum questionum solutiones*. Di diverso parere è invece PICUTTI 1983, p. 295, che ritiene che quest'opera sia successiva al completamento del *Liber Quadratorum*.

quanto riguarda, invece, il luogo in cui dovrebbe essersi svolto l'incontro tra l'imperatore e il sovrano, possiamo soltanto prendere atto del fatto che il *Flos* colloca l'evento a Pisa, mentre il *Liber Quadratorum* in una località non ben definita verso la quale il Fibonacci si sarebbe spostato insieme con Domenico Ispano a partire da Pisa. A mio avviso è possibile sanare questa aporia ipotizzando che tale incontro, così come ricordato nel *Liber Quadratorum*, non si sia verificato propriamente in città, ma nelle sue immediate vicinanze[58]. Quanto alla sua cronologia, poi, mi sembra abbastanza logico che esso debba essere arretrato ad un momento precedente la composizione del *Flos*, che è di poco antecedente il *Liber Quadratorum* (che da quell'incontro – a detta del suo autore – trasse la sua ragione di esistere).

Fibonacci compose anche l'*Epistola ad magistrum Theodorum*, astrologo di corte di Federico II, che ci è pervenuta senza l'indicazione dell'anno di composizione: essa presenta la risoluzione di alcuni problemi matematici, ed è oggi unanimamente considerata la dedica del *Liber Abaci* nell'edizione del 1228[59]. Da recenti studi è emerso che il matematico pisano avrebbe anche redatto alcune opere che però non ci sono pervenute: un libro di aritmetica commerciale dal titolo *De minore guisa*[60], un commentario al X libro degli *Elementi* di Euclide[61], ma anche un trattato dal titolo *Regula Baracti*[62] e, infine, un'opera dal titolo *Ars Astrologie*, alla quale l'autore sembra fare riferimento all'interno della *Pratica Geometrie*[63].

[58] Già il GUGLIELMINI 1813, p. 76, pensava che Fibonacci fosse «uscito di Pisa per visitare Federico II», ma al momento non è possibile stabilire di quanto il matematico si sia allontanato dalla città.

[59] Così AMBROSETTI 2008, p. 220. L'epistola è stata pubblicata da BONCOMPAGNI 1862[3]. Per notizie sul suo contenuto, FRANCI 2002, p. 300, CAIANIELLO 2012[1].

[60] GAVAGNA 2013, p. 193: «Il titolo *Liber abaci*, estrapolato dall'*incipit* che si trova in alcuni codici, non rinvia alle tavolette in uso fin dai tempi dei Romani o comunque a un generico strumento di calcolo, ma rimanda, secondo un significato più ampio e diffuso nel Medioevo, al complesso delle tecniche aritmetiche necessarie per eseguire le operazioni elementari. Nei riferimenti intratestuali, tuttavia, Fibonacci cita quest'opera come *Liber de numero* o *Liber maior de numero*, verosimilmente in contrapposizione al proprio *Liber minor de numero*, che non ci è pervenuto».

[61] La felice scoperta rappresenta il frutto delle ricerche condotte da Raffaella Franci sul codice Palatino 573, conservato presso la Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Cfr. FRANCI 2002, pp. 302-302.

[62] Un riferimento a questo scritto compare all'interno della *Distinctio* III, I, 5 (27.2).

[63] L'esistenza di questo scritto è stata finora ignorata. Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie*, *Distinctio* III, IV (17.7): *Notandum quia in semicirculo* abc *recta* be *vocatur sinus rectus utriusque*

Dopo il 1228, anno della seconda edizione del *Liber Abaci*, non si sa quasi più nulla della vita di Leonardo Pisano: l'unica eccezione al silenzio delle fonti è costituita da una delibera datata al 1241, dalla quale risulta che il Comune di Pisa assegnò al matematico un compenso di 20 lire all'anno per i suoi meriti[64]. Il documento attesta altresì che Fibonacci veniva comunemente chiamato Bigollo, epiteto che per la verità si trova usato anche nell'*incipit* del *Flos*[65], e che è stato a lungo ritenuto un nomignolo offensivo[66], mentre in realtà significherebbe "bilingue", secondo un'ipotesi di Francesco Bonaini, oppure "viaggiatore", come invece ritiene Gaetano Milanesi[67]. In mancanza di altra documentazione, il 1241 costituisce il *terminus post quem* per la data di morte di Leonardo Pisano.

L'eredità culturale.

Ciò che meraviglia lo studioso che intenda avvicinarsi alla figura di Leonardo Pisano e, più in generale, agli scritti di questo geniale scienziato, è il

---

arcus ab *et* bc*; et recta* ae *vocatur sinus versus arcus* ab*; et recta* ec *vocatur sinus versus arcus* bc, *ut in* Arte Astrologie *reperitur: his itaque demonstratis reddeamus ad causam.*

[64] La delibera è stata pubblicata dal BONAINI 1857, p. 241: *Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferuntur; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratie, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre xx denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti constitutione firmamus*.

[65] Fibonacci, *Flos*, p. 227 (Boncompagni): *Incipit Flos Leonardi Bigolli Pisani* etc.

[66] Di questa opinione era Giovanni Battista Guglielmini, il quale riteneva che l'epiteto gli derivasse dalla invidiosa ignoranza dei suoi concittadini: «Lionardo intanto lungi dal far pompa di ingegno e di sapere, nascondeva le sue invenzioni in silenzio ''' fralle indiane, fralle arabe, fralle greche dottrine; e per tale savio avvedimento si tolse ai colpi della invidiosa ignoranza, che tacque, ma il commercio di que' giorni, che intento al solo guadagno piangeva il tempo delle scienze donato, alzò voce ingratissima contro di lui, e d'un nome lo caricò» (GUGLIELMINI 1813, p. 35). Di identico parere era BONCOMPAGNI 1852, p. 16, che faceva derivare l'epiteto da "bighellone" (sciocco, scimunito).

[67] Secondo l'opinione di Francesco Bonaini, l'epiteto deriverebbe dal latino tardo *biglosus*, «denominazione acquistatasi per la cognizione che dovette avere della lingua degli Arabi, per la dimora fatta in Bugìa, e per il conversare scientifico che egli ebbe con essi. Di fatti nel basso latino indicavasi colui che avesse familiari due lingue colla voce *biglosus*» (BONAINI 1857, p. 243). Secondo Gaetano Milanesi, invece, in un primo momento il termine avrebbe indicato la trottola, da cui poi il significato metaforico di "viaggiatore": «così come il Bigollo mosso dalla sferza dei fanciulli romani andava attorno movendosi con rapidi giri; così, presa la similitudine da questo arnese, fu chiamato Bigollo colui che andava peregrinando da un luogo all'altro» (MILANESI 1867, p. 84). Molto utili sull'argomento anche i contributi di FRANCI 2002, pp. 301-302, e di CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-61.

fatto che le sue opere non abbiano goduto della fama e dell'accoglienza che esse invece meritavano. Dopo, infatti, un certo successo iniziale, forse da imputare alla loro ricezione all'interno del vivace ambiente culturale che ruotava intorno alla persona di Federico II, gli scritti di Fibonacci conobbero un lento ed inarrestabile declino[68]. Alcuni studiosi attribuiscono la scarsa fortuna dell'autore al fatto che egli abbia redatto le sue opere in latino: il progressivo abbandono di questa lingua a favore del volgare, infatti, avrebbe scoraggiato la lettura dei manuali del Fibonacci da parte di quegli "uomini nuovi" che poco o nulla avevano a che spartire con i lambiccati ambienti delle Università e delle Scuole ecclesiastiche[69]. Quella del latino rappresentava, però, l'unica opzione possibile per Leonardo: nel Duecento, infatti, le sperimentazioni letterarie in lingua volgare erano appena iniziate, ed erano per lo più legate all'innovativa produzione poetica della corte di Federico II, non certamente a quella tecnico-scientifica; inoltre il matematico intendeva raggiungere, con i suoi scritti, non soltanto i mercanti e gli artigiani, ma anche, e direi soprattutto, i maggiori rappresentanti della cultura del tempo. Non ci dimentichiamo, infatti, che il *Liber Abaci* era stato composto per il filosofo Michele Scoto, la *Pratica Geometrie* per il *magister* Domenico, il *Liber Quadratorum* per l'imperatore in persona, e il *Flos* per il cardinale Raniero Capocci di Viterbo. Sappiamo però che nel 1299 la città di Firenze emanò un decreto con il quale proibiva ai mercanti l'uso delle cifre arabe, se non accompagnate dalla loro espressione in lettere[70]. Questo fatto mi induce a credere che le opere del Fibonacci non riscossero il successo che meritavano, non perché erano state redatte in latino, ma piuttosto a causa di in una certa ingiustificata

---

[68] Cfr. SIMI 2004, p. 13, n. 15. HØYRUP 2007, pp. 30-44, è arrivato addirittura a sostenere che gli scritti del Fibonacci non abbiano influenzato nessuna delle opere vernacolari successive, mentre altri studiosi propendono per una posizione più moderata (cfr., ad esempio, CAIANIELLO 2013, pp. 208-209)

[69] Di questo parere è, ad esempio, SIMI 2004, p. 13: «in tempi in cui ormai alla corte imperiale si poetava in volgare, le opere di Leonardo Pisano furono composte in latino, senza dubbio per garantire ad esse una maggiore fama e diffusione. Tuttavia la scelta di tale lingua, unitamente al grande spessore teorico dell'opera, se oggi contribuisce a conferire ad essa un pregio considerevole, all'epoca finì al contrario per costituire un limite che causò un offuscamento assai rapido del successo. Infatti in breve tempo il latino cadde in disuso e molti degli argomenti trattati nelle opere del Pisano si rivelarono troppo elevati rispetto agli scopi pratici di coloro che si avvicinavano alla matematica».

[70] Ringrazio il Prof. Roberto Delle Donne per avermi aiutato a rintracciare la seguente bibliografia: NAPOLITANI 2007; FRIED 1996 (1993); NAGL 1889.

diffidenza dei contemporanei nei confronti di tutto ciò che poteva risultare innovativo.

Nonostante il nome e l'opera di Leonardo Pisano fossero destinati ad essere presto dimenticati, già a partire dalla fine del XIII secolo si assistette alla produzione di numerosi testi in volgare ispirati alle sue opere, di cui si presenta qui una breve rassegna[71]. Particolarmente importante, se non altro per la vicinanza cronologica con la *Pratica Geometrie*, è il trattato intitolato *Arte de la Geometria*, compilato intorno al 1290 da un maestro umbro e tramandato all'interno del codice Riccardiano 2404 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, alle carte 139r-178v[72]. Il manoscritto riporta, però, anche un trattato di aritmetica intitolato *Livero dell'Abbecho*, il quale occupa le carte 1r-136v[73].

In effetti, non è affatto raro imbattersi in opere di aritmetica in volgare contenenti un capitolo o una sezione dedicati a questioni geometriche, mentre molto più rari sono gli scritti in volgare di argomento interamente geometrico[74]. Uno di essi è rappresentato dal codice Chigiano M.V.104 della Biblioteca Apostolica Vaticana, nel quale si trova il più antico compendio in volgare della *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano[75]. Esso reca il titolo fuorviante di *Savasorra, idest libro de gemetria*: il compilatore di questo testo, infatti, non ha riconosciuto in Fibonacci la sua fonte, ma ha creduto erroneamente che si trattasse del famoso Savasorda autore, come si vedrà in seguito, di un libro di geometria

---

[71] La maggior parte delle notizie relative alla fortuna di Leonardo Pisano e alla trasmissione delle sue opere, è frutto degli studi condotti da FRANCI 2002, pp. 303-307; PEPE 2002; SIMI 2004, pp. 13-40; AMBROSETTI 2008, p. 232; FEOLA 2008, pp. 7-27; ULIVI 2011; CAIANIELLO 2012[1], pp. 84-85 e CAIANIELLO 2013.

[72] Apprendo da SIMI 2004, p. 19, che si tratta di compendio in sei capitoli del trattato di geometria di Fibonacci, di cui l'autore riprende i problemi relativi al cerchio, ai solidi, ai triangoli e al calcolo delle aree dei terreni.

[73] SIMI 2004, p. 19, n. 26: «Vincenzo Nannucci, nel XIX secolo, dopo un primo studio, svolto per conto di B. Boncompagni, giunse alla conclusione che i due trattati del cod. Ricc. 2404 costituivano la più antica volgarizzazione delle due opere fondamentali del Fibonacci».

[74] SIMI 2004, p. 18, individua, però, quattro trattati quattrocenteschi dal contenuto interamente geometrico: il primo di essi, databile intorno al 1430, è tramandato all'interno del ms. 205. I della Biblioteca Universitaria di Bologna col titolo di *Geometria, vulgarmente arte de mexura*, di autore anonimo; il secondo, databile intorno al 1460, è tramandato dal ms. L. IV. 18 della Biblioteca Comunale di Siena col titolo di *Trattato di geometria pratica*, di autore anonimo; il terzo, databile intorno al 1460, è tramandato dal ms. Palatino 577 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze col titolo di *Trattato di praticha di geometria*, di autore anonimo; il quarto, databile intorno al 1460, è tramandato all'interno del ms. Moreni 130 della Biblioteca Riccardiana di Firenze col titolo di *Regole di geometria pratica*, il cui autore è identificabile in Orbetano da Montepulciano.

[75] L'opera è stata edita da FEOLA 2008.

tradotto in latino da Platone da Tivoli. Di questo volgarizzamento esiste, inoltre, un testimone più tardo e molto scorretto, il codice Riccardiano 2186, che fu allestito a Pisa nel 1441 da Cristofano di Gherardo di Dino[76].

Intorno al 1450 fu stilata la *Praticha d'Arismetricha*, di autore anonimo, la quale ci risulta tramandata dal codice Ottoboniano latino 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana. In essa l'autore dichiara di avere tradotto il testo del *Liber Abaci* di Leonardo[77], ma il codice presenta anche una sezione di geometria contenente *excerpta* delle *distinctiones* IV e VIII della *Pratica Geometrie*[78].

Nel 1463 il maestro Benedetto da Firenze realizzava la sua *Praticha d'Arismetricha*, che presentava la traduzione di molte parti del *Liber Abaci* e quella integrale del *Liber Quadratorum*[79]. Al maestro Benedetto si deve, inoltre, un volgarizzamento del *Liber Quadratorum* di Leonardo Pisano, tramandato all'interno del ms. Palatino 557 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze e databile intorno al 1464[80].

Infine, il codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze tramanda un'opera dal titolo *Trattato di praticha di geometria*, di autore anonimo. Essa si presenta come una compilazione di più autori diversi, non solo Leonardo Pisano ma anche Antonio de' Mazzinghi, Giovanni di Bartolo, Lorenzo di Biagio, maestro Luca di Matteo, Domenicho d'Agostino il Vaiaio, Gratia de' Castellani[81]. Il suo valore fu tale da indurre Luca Pacioli a riprodurlo all'interno della sua *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, la quale fu pubblicata a Venezia nel 1494[82].

Nonostante questo successo iniziale, le opere del matematico pisano erano presto destinate cadere nell'oblio, tant'è che gli studi condotti da Luigi Pepe dimostrano che già Niccolò Tartaglia e Girolamo Cardano avevano una

[76] Tale volgarizzamento è stato pubblicato da ARRIGHI 1966.
[77] FRANCI 2002, p. 303.
[78] La notizia si trova riportata in HUGHES 2008, p. 400, n. 13.
[79] Come segnala FRANCI 2002, p. 304, n. 9, il testimone più completo di questo trattato è conservato nella Biblioteca Comunale degli Intronati di Siena con la segnatura L. IV. 21. All'interno della *Praticha d'Arismetricha* si fa inoltre riferimento a un'opera di geometria, che però non ci è pervenuta (SIMI 2004, p. 37).
[80] L'opera è stata edita da PICUTTI 1979.
[81] Cfr. SIMI 2004, pp. 38-39, nn. 54-57; FRANCI 1988[1].
[82] Come rileva CAIANIELLO 2012[1], p. 85: «Fra' Luca Pacioli ebbe il merito, in particolare, di fare conoscere un'opera quasi sconosciuta di Leonardo, quella sui numeri quadrati. Egli insisteva sul problema dei numeri congruenti, che non aveva ricevuto, secondo lui, una soluzione generale, malgrado gli sforzi di Leonardo».

conoscenza piuttosto sbiadita della sua vita e dei suoi scritti [83]. Federico Commandino possedeva un codice della *Pratica Geometrie* che intendeva pubblicare, ma purtroppo morì prima di riuscire nel suo intento[84]. Il suo allievo, Bernardino Baldi, collocava erroneamente Fibonacci nel Quattrocento, e lo stesso errore fu per lungo tempo commesso anche da altri studiosi[85]. Come dimostra Luigi Pepe, spetterà a Francesco Antonio Zaccaria il merito di aver per la prima volta datato correttamente l'epoca in cui visse e operò il matematico pisano[86].

Alla fine del diciottesimo secolo, lo storico della matematica Pietro Cossali rinvenne alcuni manoscritti contenenti il *Liber Abaci* che gli permisero di giungere alla medesima datazione precedentemente proposta dallo Zaccaria[87]. Parallelamente, Giovanni Battista Guglielmini conduceva le sue ricerche sulla *Pratica Geometrie*, di cui possedeva un manoscritto[88]. Nel 1838 Guglielmo Libri diede per la prima volta alle stampe un'edizione parziale del *Liber Abaci*, riguardante la dedica, il prologo e l'indice dei capitoli dell'opera, nonché tutto il capitolo quindicesimo[89]. Il merito della vera e propria scoperta delle opere di Leonardo Pisano, però, va sicuramente ascritta al principe Baldassarre Ludovisi Boncompagni, che non solo ritrovò il testo latino del *Liber Quadratorum*, del *Flos* e dell'*Epistola ad magistrum Theodorum*, ma li pubblicò anche, insieme al *Liber*

---

[83] «Niccolò Tartaglia conobbe solo quanto si può leggere nella *Summa* di Pacioli. Gerolamo Cardano nel suo libro *De Consolatione* collocava Leonardo "paucis ante annis" rispetto a Luca; qualche anno dopo esaminò direttamente un codice di Leonardo a Venezia e si corresse "jamdiu ante fratrem Lucam", ma chiamava anche Leonardo "Pisaurensis"»: PEPE 2002, p. 161. Cfr. anche GAVAGNA 2013, p. 195.

[84] La *Cronica* del Balbi fu pubblicata postuma nel 1707: «Compose anco un nobilissimo Libro Geometrico, il quale si conserva manoscritto nella Libreria Feltria d'Urbino, il quale Federico Commandino era per pubblicare, se non fosse stato prevenuto dalla morte» (BALDI 1707, pp. 471-472).

[85] Da PEPE 2002 apprendo che errori nella determinazione della cronologia di Leonardo Pisano si riscontrano, ad esempio, nell'Enciclopedia Diderot e d'Alembert, in cui si legge che: «Luc Paciolo, ou Lucas à Burgo, cordelier, est le premier en Europe qui ait écrit sur ce sujet: son livre, écrit en italien, fut imprimé à Venise en 1494. Il étoit, dit-on, disciple d'un Léonard de Pise et de quelques autres dont il avoit appris cette méthode, mais nousn'avons aucun de leurs écrits» (DIDEROT-D'ALEMBERT 1770, p. 107)

[86] PEPE 2002 segnala, inoltre, che la corretta datazione di ZACCARIA 1754 venne ripresa, pochi anni dopo, all'interno degli studi di TARGIONI TOZZETTI 1768, ANDRES 1782, GRIMALDI 1790, e TIRABOSCHI 1806.

[87] Studi su Pietro Cossali sono stati condotti da FRANCI 1988[2] e 1994.

[88] GUGLIELMINI 1813, p. 36: «"Incipit practica Geometriae composita a Leonardo Pisano Bigollo Filiorum", così parla il titolo, che sta scritto a rossi caratteri in fronte al Codice mio».

[89] LIBRI 1838, pp. 287-290 e pp. 307-476. Per ulteriori notizie su questo storico, cfr. DEL CENTINA – FIOCCA 2010.

Abaci e alla *Pratica Geometrie*, tra il 1854 e il 1862, restituendo così all'umanità il nome e le opere di questo illustre matematico, per troppo tempo a lungo ingiustamente dimenticato[90].

[90] La prima edizione del *Liber Quadratorum*, del *Flos* e dell'*Epistola* comparve in BONCOMPAGNI 1854. In seguito, furono pubblicati il *Liber Abaci* (BONCOMPAGNI 1857[1]), la *Pratica Geometrie* (BONCOMPAGNI 1862[1]), nonchè la seconda edizione del *Flos* (BONCOMPAGNI 1862[2]), dell'*Epistola* (BONCOMPAGNI 1862[3]), e del *Liber Quadratorum* (BONCOMPAGNI 1862[4]).

> «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».
>
> *G. Galilei*

La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano.

La nozione di "geometria pratica" o, per meglio dire, di "pratica della geometria", compare per la prima volta con Ugo di San Vittore, autore, nel XII secolo, di un'opera dal titolo *Practica Geometriae*[1]. In essa, il vittorino definisce la *geometriae practica* la disciplina che *quibusdam instrumentis agitur et ex aliis alia proportionaliter coniciendo diiudicat*[2]. L'autore, infatti, privilegia senza dubbio l'utilizzo dello strumento per i suoi calcoli, e in particolar modo dell'astrolabio, che impiega per misurare le altezze e le distanze. Fibonacci, invece, nonostante abbia dato alla sua opera lo stesso titolo che Ugo di San Vittore, un secolo prima, aveva dato alla sua, ha della "pratica della geometria" una concezione completamente diversa, che non prevede affatto l'uso obbligatorio di uno strumento di calcolo. All'amico Domenico scrive di aver pubblicato per lui un'opera "già da lungo tempo iniziata", pensata per offrire ai lettori nozioni di geometria non solo teorica, ma anche pratica[3]: ne consegue che, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe da un manuale sulla "pratica della geometria", ogni questione viene qui introdotta e spiegata facendo un largo uso della dimostrazione teorica, sicché, come opportunamente rileva Annalisa Simi, l'unico vero elemento di praticità che è possibile riscontrare, consiste nella scelta di esporre la materia

---

[1] L'opera è stata edita da BARON 1966.

[2] Hugonis de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 16 (Baron): *Theorica siquidem est que spatia et interualla dimensionum rationabilium sola rationis speculatione uestigat practica uero est que quibusdam instrumentis agitur et ex aliis alia proportionaliter coniciendo diiudicat*.

[3] La lettera recita, infatti: *opus iam dudum inceptum tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometrica et hi qui secundum vulgarem consuetudinem – quasi laicali more – in dimensionibus voluerint operari, super octo huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inveniam documentum* (Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 2).

non secondo lo schema euclideo-archimedeo, ma secondo un approccio per problemi[4].

Struttura e argomento.

Fibonacci pubblicò la *Pratica Geometrie* tra il 1219 e il 1221, dopo averci lavorato per lungo tempo[5], e la dedicò all'amico Domenico, il quale lo introdusse alla corte di Federico II di Hohenstaufen. L'opera è divisa in otto *distinctiones*, ossia in otto sezioni, precedute dalla dedica al *magister Dominicus* e da una breve introduzione[6]. Tale introduzione si divide in due parti: la prima parte consiste in un elenco di citazioni tratte per lo più dal primo libro degli *Elementi* di Euclide, di cui vengono riprese le definizioni, gli assiomi, i postulati e alcune proposizioni; la seconda parte, invece, è incentrata sulle unità di misura lineari e areali in uso a Pisa nel Trecento. La prima distinzione, richiamando numerose proposizioni del secondo libro degli *Elementi*, insegna come calcolare l'area dei quadrati e dei rettangoli, per poi passare a illustrare alcuni teoremi necessari alla comprensione dei contenuti della seconda sezione. La seconda distinzione è incentrata sul calcolo delle radici quadrate, di cui il matematico presenta una spiegazione non solo di tipo aritmetico, ma anche di tipo geometrico. La terza distinzione verte sul calcolo dell'area di vari tipi di superfici: triangoli, rettangoli, rombi, romboidi, trapezi, quadrangoli concavi, pentagoni e cerchi. Molti dei problemi affrontati in questa parte sono riconducibili a equazioni quadratiche, ma l'autore illustra anche alcune tecniche pratiche utili ai geometri misuratori, le quali prevedono l'utilizzo dell'archipendolo per il calcolo delle superfici non piane. Fibonacci, inoltre, non trascura il calcolo delle corde di un cerchio, per il quale attinge esplicitamente all'*Almagesto* di Tolomeo, e mostra come approssimare il valore di π utilizzando

[4] SIMI 2004, p. 11.

[5] Nell'epistola di dedica, infatti, l'autore afferma di avere iniziato la composizione dell'opera già da molto tempo: Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 2: *opus iam dudum inceptum taliter tui gratia edidi*. La cronologia di questo testo risulta essere piuttosto incerta, dal momento che alcuni manoscritti riportano come anno di composizione il 1220, mentre altri riportano il 1221. In base al calendario che era in uso a Pisa nel Duecento, però, l'anno 1220 corrisponde al nostro 1219/20, mentre l'anno 1221 corrisponde, sempre secondo il computo odierno, al 1220/21. La questione sarà esaminata più approfonditamente più avanti.

[6] L'opera è stata pubblicata per la prima volta BONCOMPAGNI 1862[1]. In questa edizione, la lettera di dedica si trova a p. 1; l'introduzione copre le pp. 1-5; la prima sezione copre le pp. 5-18; la seconda sezione copre le pp. 18-30; la terza sezione copre le pp. 30-110; la quarta sezione copre le pp. 110-148; la quinta sezione copre le pp. 148-158; la sesta sezione copre le pp. 158-202; la settima sezione copre le pp. 202-206; l'ottava sezione copre le pp. 207-224.

il metodo di Archimede. La quarta distinzione è dedicata alla divisione delle superfici mediante segmenti. Dei problemi risolti dal matematico, quattordici riguardano i triangoli, otto i parallelogrammi, tredici i trapezi e sei i quadrilateri di altro genere, due i pentagoni regolari e dodici i cerchi e i semicerchi[7]. La quinta distinzione verte sul calcolo delle radici cubiche. A tale scopo, Fibonacci illustra un sistema geometrico che consiste nel rinvenire due proporzioni tra due quantità date, e che veniva utilizzato nel mondo antico per i problemi legati alla duplicazione di un cubo[8]. La sesta distinzione insegna come calcolare il volume di vari tipi di solidi: poliedri a facce parallele, piramidi e tronchi di piramide, sfere e poliedri regolari. La settima distinzione ha carattere eminentemente pratico: qui il Pisano mostra come si determinino le distanze e le altezze basandosi sulla similitudine dei triangoli e ricorrendo all'utilizzo del quadrante. L'ottava distinzione verte, infine, su alcune "sottigliezze geometriche": di esse, alcune riguardano il pentagono e il decagono, mentre altre riguardano la determinazione della misura dei lati di alcuni rettangoli inscritti all'interno di triangoli equilateri.

Le fonti.

Ricostruire la lista delle fonti utilizzate da Leonardo per la stesura della *Pratica Geometrie* è impresa non facile. L'autore, infatti, non sempre ci informa dei modelli a cui farebbe riferimento, ma quando lo fa, solitamente rimanda alle fonti greche che doveva aver avuto a disposizione e che leggeva in traduzione, mentre, il più delle volte, non cita né quelle ebraiche né quelle arabe, che pure conosceva ed utilizzava.

Gli studi condotti da Menso Folkerts dimostrano che gli *Elementi* di Euclide costituiscono l'opera maggiormente citata da Fibonacci all'interno della *Pratica Geometrie*[9]. Il fatto che il matematico pisano spesso mostri di conoscere non soltanto gli enunciati, ma anche le dimostrazioni dei singoli teoremi citati, dimostra che la conoscenza che egli aveva avuto di questo testo andava ben oltre

---

[7] Questa ripartizione è stata proposta da SIMI 2004, p. 10.

[8] Come rileva FOLKERTS 2004, p. 102, Fibonacci illustra tre diversi sistemi di risoluzione di una radice cubica: il primo sistema corrisponde alla soluzione comunemente attribuita ad Archita, la quale si trova espressa all'interno della proposizione 16 dei *Verba filiorum* dei fratelli Banū Mūsā; il secondo sistema corrisponde alla soluzione attribuita a Filone di Bisanzio; il terzo sistema, infine, si trova espresso all'interno della proposizione 17 dei *Verba filiorum* dei Banū Mūsā.

[9] FOLKERTS 2004, pp. 98-104.

la traduzione in latino operata da Boezio[10]. In effetti nel corso del XII secolo furono apprestate tre traduzioni dall'arabo al latino degli *Elementi* di Euclide: la prima traduzione, conosciuta anche come "Versione I", fu realizzata da Adelardo di Bath intorno al 1120[11]; la seconda traduzione fu messa a punto da Ermanno di Carinzia, attivo tra il 1138 e il 1143[12]; la terza traduzione, infine, fu operata da Gerardo da Cremona nella seconda metà del XII secolo[13]. Accanto a queste tre traduzioni, si conoscono due importanti rielaborazioni della metà e della fine del XII secolo: una è conosciuta come "Versione II", perché inizialmente era stata attribuita ad Adelardo di Bath, mentre oggi sappiamo essere stata realizzata da Roberto di Chester[14]; l'altra è conosciuta come "Versione III", e fu probabilmente realizzata da Johannes di Tinemue, che operò a sua volta una rielaborazione della "Versione II"[15]. La critica è ormai certa del fatto che Fibonacci abbia conosciuto e utilizzato qualcuna di queste traduzioni dall'arabo: in particolare, sembra assodato che il matematico si sia servito di una traduzione latina che seguisse l'ordine delle proposizioni presentato all'interno dei lavori di Adelardo di Bath, Ermanno di

---

[10] Come ho già chiarito ROZZA 2015[1], p. 79, già alla fine del VI secolo si conoscevano soltanto i primi cinque libri degli *Elementi* di Euclide, ma senza le dimostrazioni. La questione è stata dettagliatamente esaminata da TONEATTO 1982, p. 192, il quale sostiene che «se possiamo ammettere che la sua traduzione [*sc.* di Boezio] si estendesse per tutti i tredici libri dell'originale, già dal VI secolo di fatto riscontriamo una certa diffusione solo dei primi cinque (e senza le dimostrazioni)». Le poche dimostrazioni sopravvissute riguardano soltanto le prime tre proposizioni del libro I: così sostiene FOLKERTS 2003, p. 3: «there are proofs only for the first three propositions of book 1 and these are found only in one group of excerpts».

[11] Il testo critico della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide ad opera di Adelardo di Bath è stato edito da BUSARD 1983[1].

[12] Il testo critico dei primi quattro libri della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide ad opera di Ermanno di Carinzia è stato edito da BUSARD 1967 e successivamente da BUSARD 1968[2]. I libri VII-IX sono stati pubblicati dal medesimo editore, in *Janus* LIX, 1972, pp. 125-187; infine, i libri VII-XII sono stati editi da BUSARD 1977.

[13] Il testo critico della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide ad opera di Gerardo da Cremona è stato edito da BUSARD 1983[2].

[14] Il testo critico della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide ad opera di Roberto di Chester è stato edito da BUSARD-FOLKERTS 1992. Come dimostrato da BURNETT 1997, Roberto di Chester fu sicuramente responsabile della parte relativa agli enunciati, mentre le dimostrazioni furono introdotte da qualcun altro in un secondo momento.

[15] Il testo critico della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide ad opera di Johannes di Tinemue è stato edito da BUSARD 2001.

Carinzia e Gerardo da Cremona[16]. Tuttavia, sembrerebbe che questa non fosse l'unica fonte utilizzata[17].

Negli anni 1961 e 1962, John Murdoch scoprì due manoscritti contenenti una traduzione in latino degli *Elementi* di Euclide risalente alla seconda metà del XII secolo e allestita, a partire da un esemplare greco, presso la corte normanna di Sicilia[18]. Uno di essi, il ms. Paris, BnF Lat. 7373, ff. 2r-175v, si data al XIII secolo, mentre l'altro, il ms. Firenze, BNC, Conv. Soppr. C I 448, si data al XIV secolo (MURDOCH 1966). A differenza del codice fiorentino, il quale tramanda un testo incompleto che si interrompe alla proposizione 48 del X libro, l'esemplare parigino sembra riportare un testo completo, sebbene tra la fine del XIII e l'inizio del XV libro non presenti, come ci si aspetterebbe, il libro XIV propriamente detto, ma rechi piuttosto una versione compendiata dei libri XIV-XV[19]. Grazie alla meticolosa indagine condotta da Menso Folkerts, oggi possiamo affermare con sicurezza che Fibonacci conobbe ed utilizzò proprio questa traduzione dal greco al latino (FOLKERTS 2004). È altresì probabile che sia stato lo stesso matematico pisano a realizzare il compendio dei libri XIV-XV tramandato all'interno dei ff. 167v-172v dell'esemplare parigino, ma purtroppo non sono stati ancora individuati elementi assolutamente probanti di questa attribuzione[20].

---

[16] FOLKERTS 2004, p. 113: «he was acquainted with another Euclid text which followed the Arabic order of the propositions as shown by the translation of Adelard, Hermann and Gerard».

[17] Si fa qui menzione soltanto delle traduzioni e delle rielaborazioni del testo di Euclide che Fibonacci avrebbe potuto conoscere ed utilizzare, in quanto anteriori alla pubblicazione della *Pratica Geometrie*. Per una disamina approfondita della complessa fortuna degli *Elementi* di Euclide nell'Europa medievale, resta fondamentale il contributo di FOLKERTS 2006, pp. 101 ss. Ancora utile, inoltre, sono i contributi di FOLKERTS 1989 e 2001[2], nonché di BUSARD 1998.

[18] Come ricorda BUSARD 1987, p. 1: «the most important meeting-point of Greek and Latin culture in the twelfth century was the Norman kingdom of Southern Italy and Sicily. Long a part of the Byzantine Empire (until the fall of Syracuse in 878) this region still retained Greek traditions and a numerous Greek-speaking population. It passed under the control of Islam for nearly two hundred years until 1060, when a Norman adventurer captured Messina and was so successful in establishing his power that by 1090 the island became a Norman kingdom in which Greek, Latin, and Arabic civilization live side by side in peace and toleration. These three languages were in current use in the royal charters and registers, as well as in many-tongued Palermo, so that knowledge of more than one of them was a necessity for the officials of the royal court. The production of translations was inevitable in such a cosmopolitan atmosphere, and it was directly encouraged by the Sicilians kings, from Roger to Frederick II and Manfred, as a part of their efforts to foster learning».

[19] L'edizione critica della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide realizzata a partire da un esemplare greco, è stata pubblicata da BUSARD 1987.

[20] L'ipotesi è stata avanzata per la prima volta da BUSARD 1987, pp. 112-113.

Da riferimenti interni alla *Pratica Geometrie*, risulta che Fibonacci abbia conosciuto e utilizzato anche il *Liber Divisionum* di Euclide, opera che purtroppo non ci è pervenuta nell'originale greco[21]. Il trattato è stato inizialmente tradotto dal greco all'arabo ad opera di Ṯhabit ibn Qurra[22]. In seguito, Gerardo da Cremona operò di esso una traduzione dall'arabo al latino, che però allo stato attuale delle ricerche risulta essere dispersa[23].

Oltre agli scritti di Euclide, Fibonacci conobbe ed utilizzò anche altri importanti testi di geometria greca, resi accessibili attraverso le traduzioni operate dall'arabo. Tra questi spiccano gli scritti di Archimede, del quale erano senz'altro noti, per lo meno all'epoca del Pisano, il trattato *De mensura circuli* e l'opera spuria *De curvis superficiebus*[24]. Il *De mensura circuli* fu tradotto dall'arabo al latino due volte nel XII secolo: la prima traduzione fu realizzata da Platone di Tivoli tra il 1135 e il 1145, e ci è stata tramandata da tre manoscritti, dei quali uno soltanto è di età medievale[25]; la seconda traduzione è stata operata da Gerardo da Cremona sicuramente prima del 1187, ed è riportata all'interno di più di venti esemplari manoscritti[26]. Essa costituì senz'altro il modello per ulteriori rielaborazioni, ovvero parafrasi, sia della Preposizione I, sia della II, sia anche della III[27]. Per quanto riguarda, poi, il *De curvis superficiebus*, del quale sopravvivono ben venti copie manoscritte, esso fu probabilmente realizzato da Johannes de Tinemue come una rielaborazione del primo libro del trattato

---

[21] Ancora utile sull'argomento, benché datato, è il contributo di FAVARO 1883.

[22] AMBROSETTI 2008, p. 40: «Thabit ibn Qurra. Famoso per i suoi studi matematici e per un teorema che porta il suo nome, guidò importanti e numerosi progetti di traduzione in arabo su incarico dei califfi della dinastia abbaside. Egli non solo tradusse molti testi, tra cui quelli di Apollonio, Tolomeo, Euclide e Archimede, ma compose anche un grande numero di opere originali, che spaziavano dalla matematica all'astronomia, all'etica, alla filosofia, alla fisica, alla medicina, alla biografia di filosofi greci».

[23] Numero 19 dell'elenco SUDHOFF 1914-15.

[24] Si fa qui menzione soltanto delle traduzioni e delle rielaborazioni delle opere di Archimede che Fibonacci avrebbe potuto conoscere ed utilizzare, in quanto precedenti la pubblicazione della *Pratica Geometrie*. Per ulteriori notizie, rimando alla fondamentale edizione critica di CLAGETT 1964, nonché ai contributi di KNORR 1989 (con particolare riferimento alle pp. 595-615), FOLKERTS 2001[2], e di LORCH 2001[1] e 2001[2].

[25] Il manoscritto è conservato presso la Biblioteca Nazionale di Parigi sotto la dicitura Fonds Latin 11246 (CLAGETT 1964, p. xxiv).

[26] Le edizioni critiche delle traduzioni operate da Platone di Tivoli e Gerardo da Cremona, sono state edite da CLAGETT 1964, pp. 1-58.

[27] Tali rielaborazioni sono state edite da CLAGETT 1964, pp. 59-222.

archimedeo *Sulla sfera e sul cilindro*, di cui rappresentava il testimone più significativo in età medievale[28].

Leonardo dichiara esplicitamente di conoscere ed utilizzare l'*Almagesto* di Tolemeo, il quale effettivamente circolò durante il Medioevo in varie traduzioni sia latine sia arabe[29]. Già intorno al 1150 Ermanno di Carinzia aveva dato di quest'opera una prima traduzione in lingua latina a partire da un antigrafo greco[30]; a questa fece seguito il cosiddetto *Almagesto di Dresda*, traduzione in lingua latina attribuita all'arabo cristiano 'Abd al-Masīḥ, il quale a sua volta si era probabilmente servito di un antigrafo in lingua araba, e non in lingua greca, come invece alcuni studiosi avevano ipotizzato[31]. Dal greco all'arabo sono, invece, le traduzioni eseguite dai matematici al-Ḥağğāğ ibn Yūsuf ibn Maṭar, Isḥāq ibn Ḥunayn e Ṯābit ibn Qurra, le quali furono utilizzate da Gerardo da Cremona per la sua traduzione in lingua latina databile intorno agli anni 1150-1180[32].

Tra le fonti ebraiche che Fibonacci doveva aver avuto a disposizione, un ruolo di particolare rilevanza è rivestito dall'opera geometrica di Abraham bar Hiyya ha-Nasi, matematico spagnolo vissuto nel XI secolo e meglio conosciuto col nome di Savasorda[33]. Gli studi condotti da Maximilian Curtze hanno permesso di individuare, all'interno della *Pratica Geometrie*, circa ottanta occorrenze del suo *Hibbūr ha-Meshīhah ve-ha-Tishboret* o, per meglio dire, della traduzione latina che di essa aveva dato Platone di Tivoli intorno al 1145[34]. Fibonacci si servì di questo testo principalmente per la stesura dell'introduzione, della prima e della terza distinzione della sua *Pratica Geometrie*. È altresì probabile, ma non certo,

[28] L'edizione critica di questo testo è stata pubblicata da CLAGETT 1964, pp. 433-557. Come chiarisce l'editore (*ivi*, p. 439): «it was inspired throughout by the techniques and conclusions found in the Book I of the *De sphaera et cylindro* and *De mensura circuli*», e pertanto non rappresenta una traduzione latina dell'opera di Archimede, ma soltanto una sua rielaborazione.

[29] Le notizie qui riportate sono state raccolte e discusse da NICOLAI 2010, alla quale rimando.

[30] L'edizione critica della traduzione latina dell'*Almagesto* operata da Ermanno di Carinzia è stata pubblicata da HASKINS- PUTNAM LOCKWOOD 1910.

[31] Il cosidetto *Almagesto di Dresda* è stato tramandato dal solo ms. Dresden, Db. 87, di XIV secolo. Come affermato da GRUPE 2012, p. 148, n. 6, argomento della sua dissertazione dottorale è l'edizione critica di questo manoscritto.

[32] La traduzione dell'*Almagesto* ad opera di Gerardo da Cremona è stata oggetto di studio da parte del KUNITZSCH (1974, 1990, 1991, 1992).

[33] Come rileva AMBROSETTI 2008, p. 109: «Savasorda trascorse la sua vita per lo più a Barcellona, nonostante fosse in contatto con altre comunità ebraiche nella Francia meridionale; con l'intento di divulgare la scienza araba, offrendo agli Ebrei testi che permettessero loro di istruirsi nei vari campi del sapere, scrisse opere di cosmografia, astronomia e geometria».

[34] Questa traduzione, nota col titolo latino di *Liber Embadorum*, è stata edita da CURTZE 1902.

che il Pisano abbia avuto accesso gli scritti di Abraham ibn Ezra, e in particolare al *Sefer ha-Middot*, testo di aritmetica e geometria tradotto dall'ebraico al latino intorno nel XII secolo[35].

Sappiamo, infine, che durante la sua permanenza a Béjaïa (Bugia) e in altre regioni del Mediterraneo, il nostro matematico ebbe la possibilità di entrare in contatto con numerosi testi arabi, alcuni dei quali furono da lui utilizzati durante la stesura del suo scritto di geometria. Barnabas Hughes sostiene che l'autore si sia formato sui testi di al-Khwārizmī, al-Karāji, ibn al-Yāsamin e Abū Kāmil, ma non tralascia di menzionare, tra i suoi possibili modelli, anche gli scritti di Abū Bakr, di Aḥmad ibn Yūsuf, dei fratelli Banū Mūsā e, infine, l'*Istikmāl* di Yūsuf al-Mu'aman ibn Hūd, opera miscellanea che comprendeva estratti degli *Elementi* di Euclide, dell'*Almagesto* di Tolemeo, del commentario di Eutocio agli scritti di Archimede, e di altri trattati archimedei[36].

Sicuramente Fibonacci conobbe ed utilizzò l'opera aritmetica di al-Khwārizmī dal titolo *Kitāb al-jam 'wal tafriq bi hisāb al-Hind*, o almeno qualcuno dei quattro adattamenti latini che di questo testo furono realizzati nel corso del XII secolo[37]: il *Dixit Algorizmi*, opera di incerta attribuzione che, probabilmente, nacque come riadattamento di una traduzione latina (oggi perduta) dell'originale arabo[38]; il *Liber Ysagogarum Alchorismi*, attribuito da alcuni ad Adelardo di Bath, da altri a Petrus Alfonsi[39]; il *Liber Alchorismi*, forse da

[35] L'edizione critica di questo testo è stata curata da LÉVY-BURNETT 2006.

[36] HUGHES 2008, pp. xxi-xxvi. Purtroppo non sono in grado di valutare le affermazioni di Hughes relativamente agli scritti in lingua araba di cui non si conoscono le traduzioni in lingua latina. Per le opere, invece, che sono state tradotte in latino, si vedano le pagine che seguono del presente capitolo.

[37] Le quattro opere sono state edite da ALLARD 1992. Per notizie sulla tradizione manoscritta, cfr. ALLARD 1991, pp. 101-105.

[38] L'opera è stata edita da BONCOMPAGNI 1857[2], VOGEL 1963, e YOUSHKEVITCH 1976. A queste edizione fece, quindi, seguito quella di ALLARD 1992, pp. 1-22. Il *Dixit Algorizmi* circolò ampiamente nel XII secolo. Come rileva AMBROSETTI 2008, p. 197, molti studiosi ritengono che si tratti di una traduzione diretta dell'originale arabo; non di questo parere è FOLKERTS 2008, p. 17, il quale parla di *reworking*: «unfortunately, no manuscript of the original Latin text is known. All that we have is a reworking, which begins with *Dixit Algorizmi* [...]. Of greater influence than DA [sc. *Dixit Algorizmi*] were three redactions, all made in twelfth century: the *Liber Ysagogarum Alchorismi* (LY), the *Liber Alchorismi* (LA) and the *Liber Pulveris*».

[39] Come emerge dall'indagine di AMBROSETTI 2008, p. 200, gli studiosi sono incerti sulla paternità dell'opera: secondo TANNERY 1911, l'opera è da attribuire ad Adelardo di Bath; secondo invece MILLÀS VALLICROSA 1943, l'opera è stata composta da Petrus Alfonsi. La "sezione geometrica" del *Liber Ysagogarum* è stata edita da BURNETT 2013.

attribuire a Giovanni da Siviglia[40]; il *Liber Pulveris*, che probabilmente conteneva anche parti originali[41]. Non è invece scontato il fatto che possa aver avuto a disposizione il libro di algebra dello stesso autore, dal titolo *Kitāb al-Jabr wa l-muqābala*, perché, come sostiene HUGHES 2008, p. xxi, l'opera non circolava all'interno del Maghreb negli anni in cui Fibonacci risiedeva in questa regione. A mio avviso, però, lo scetticismo dello studioso è alquanto ingiustificato perché, pur volendo ammettere che il matematico pisano non abbia mai conosciuto la versione araba di questo trattato, cosa però abbastanza difficile da dimostrare, non c'è motivo di pensare che non possa aver avuto accesso almeno a una delle due traduzioni latine che di essa furono realizzate nel corso del XII secolo[42].

Alcuni fattori suggeriscono la possibilità che l'autore abbia conosciuto il *Liber Mensurationum* di Abū Bakr e che lo abbia utilizzato nel corso della stesura della prima, della terza e della quarta distinzione della *Pratica Geometrie*[43]. L'opera, che non ci è pervenuta nell'originale arabo, presenta una serie di problemi di geometria risolti mediante l'ausilio di procedimenti algebrici, da cui il Pisano potrebbe aver tratto ispirazione.

Altro scritto che ha indubbiamente ispirato il nostro matematico, non solo per la stesura della *Pratica Geometrie* ma anche per quella del *Liber Abaci*, è il *Kitāb al-Jabr* di Abū Kāmil, che fu tradotto in latino ad opera di anonimi[44]. Alcune citazioni di questo trattato compaiono all'interno del *Liber Mahameleth*,

---

[40] L'attribuzione è molto incerta. AMBROSETTI 2008, pp. 201-202: «Allard [...] afferma che potrebbe trattarsi di tale Johannes de Toledo (Hispanus), membro del capitolo di Toledo e collaboratore di Avendauth, contemporaneo o di poco posteriore a Gundissalinus; in seguito Johannes sarebbe diventato arcidiacono di Cuéllar e, nel 1212-1213, vescovo di Albarracín-Ségorbe, poco prima della morte, nel 1215 [...]. Il confronto tra la data di elaborazione del trattato (1143) e la data di morte di Johannes Hispanus (1215) suscita però qualche perplessità sull'identificazione, nonostante si possa attribuire a longevità la distanza fra la stesura dell'opera e la morte».

[41] Il *Liber Pulveris* è stato edito da ALLARD 1992, pp. 62-224. Si tratta di un testo di estremo interesse che, pur coincidendo in parte con il *Liber Alchorismi*, presenta anche parti originali. Come rileva AMBROSETTI 2008, p. 202, in passato il *Liber Pulveris* era ritenuto un semplice rimaneggiamento del *Liber Alchorismi*, mentre oggi si ritiene comunemente che esso rappresenti una «versione più sintetica e forse più antica, derivata dalla stessa fonte latina».

[42] La traduzione latina dell'*al-Jabr* di al-Khwārizmī realizzata da Roberto di Chester è stata edita da HUGHES 1989 e, prima di lui, da KARPINSKI 1915, mentre quella realizzata da Gerardo da Cremona è stata edita da HUGHES 1986. Di XIII secolo è, infine, la traduzione in latino di Guglielmo de Lunis (o de Luna o Lunensis), edita da KAUNZNER 1986.

[43] L'opera è stata edita dal BUSARD 1968[1] e commentata matematicamente da MOYON 2008, pp. 165-250.

[44] L'edizione critica della prima e della terza parte dell'*Algebra* di Abū Kāmil è stata pubblicata da SESIANO 1993, mentre l'edizione critica della seconda parte è stata pubblicata da LORCH 1993.

un'opera di algebra scarsamente nota, compilata in Spagna intorno al 1150 da Giovanni di Siviglia[45]. Entrambe le opere sono state tramandate all'interno del ms. 7377A, oggi custodito presso la Biblioteca Nazionale di Parigi, il quale contiene anche altri scritti che il Pisano potrebbe aver conosciuto e utilizzato: il *Liber Saydi Abuothmi* e il *Liber Aderameti*, entrambi editi da BUSARD 1969; il *Liber augmenti et diminutionis* di autore anonimo, edito da LIBRI 1838, pp. 304-372; il commentario di Muhammad ibn Abd al-Bāqī al libro X degli *Elementi* di Euclide, edito da CURTZE 1899; infine, il commentario di Pappo al libro X degli *Elementi*, probabilmente tradotto in latino da Gerardo da Cremona, ed edito da JUNGE 1936.

Tra le opere più interessanti che Fibonacci aveva a disposizione, una menzione particolare merita il *Kitāb maʿrefat mesāḥat al-aškāl al-basīṭa wa'l-korīya* dei fratelli Banū Mūsā, che potrebbe aver conosciuto probabilmente nella traduzione latina operata da Gerardo da Cremona col titolo di *Verba filiorum*, ovvero *Liber de geometria*[46]. L'opera si fondava sulla prima e la terza proposizione del *De mensura circuli* di Archimede, ma riportava anche diverse proposizioni riconducibili al *De sphaera et cylindro*, nonché la celebre dimostrazione della formula di Erone del calcolo dell'area di un triangolo, la quale si ritrova anche nella terza distinzione della *Pratica Geometrie*[47].

Fibonacci ebbe forse accesso anche alle opere di Aḥmad ibn Yūsuf, autore nel X secolo di uno scritto dal titolo *De arcubus similibus* e di un trattato dal titolo *De proportione et proportionalitate*, entrambi noti al mondo latino grazie alle traduzioni operate da Gerardo da Cremona[48]. È inoltre possibile che abbia avuto a disposizione anche una copia dello scritto di al-Baghdādī dal titolo *Kitāb qismat al-misāhāt*, il quale fu tradotto in latino col titolo di *Liber divisionum tractatus*[49].

---

[45] Per l'edizione critica del *Liber Mahameleth*, rimando a SESIANO 2014.

[46] L'edizione critica della traduzione latina dei Banū Mūsā è stata pubblicata da CLAGETT 1964, pp. 223-367.

[47] Cfr. FOLKERTS 2004, pp. 101-103. Come chiarisce LORCH 2001[1], p. 316, sia l'opera di Menelao che quella di Teodosio furono tradotte dall'arabo al latino ad opera di Gerardo da Cremona. Lo studioso rimanda, in particolare, agli studi condotti da BJÖRNBO 1902, KRAUSE 1936 e LORCH 1996.

[48] Il *De arcubus similibus* è stato edito da BUSARD-VAN KONINGSVELD 1973, mentre il *De proportione et proportionalitate* è stato edito da SCHRADER 1961.

[49] L'*editio princeps* di questo testo si deve al COMMANDINO 1570. Senza dubbio, il più importante contributo sull'argomento è stato realizzato da ARCHIBALD 1915, il quale dedica le pp. 10-13 del

Il lessico.

Il più importante e significativo studio della lingua e dello stile di Leonardo Pisano è stato condotto da Concetta Carotenuto, la quale ha individuato, all'interno del *Liber Abaci*, la presenza di ben sei caratteristiche retoriche-linguistiche tipiche del dettato fibonacciano: si va dalla frequenza del congiuntivo prescrittivo-esortativo, all'alternanza tra la seconda persona singolare e la prima persona plurale; dalla peculiare struttura sintattica del calcolo, che prevede l'imperativo dell'operazione e il futuro del risultato, alla grande varietà nella costruzione dei verbi, in particolare di quelli della moltiplicazione; dall'uso dei preverbi, del resto tipicamente medievale, alle ambiguità di un lessico tecnico che nel Duecento era ancora in formazione[50]. Per quanto riguarda il latino tecnico della matematica, in particolare, è stato osservato che all'interno del *Liber Abaci* l'autore, più che coniare termini nuovi, di solito si attiene ai linguaggi settoriali e al lessico della quotidianità, di cui non di rado risemantizza i vocaboli[51]. È, questa, un'operazione molto interessante, la quale testimonia l'enorme vitalità non soltanto della lingua di Fibonacci, ma più in generale del latino medievale che, ancora nel Duecento, era in grado di adattarsi alle esigenze più disparate della comunicazione dotta[52].

Per quanto riguarda la *Pratica Geometrie*, l'autore si mostra dipendente più dai linguaggi settoriali che dal lessico della quotidianità, e ciò non sorprende: trattando, infatti, di geometria, Fibonacci ha avuto a disposizione numerosi di testi

---

suo studio ai rapporti tra quest'opera e la *Pratica Geometrie*. Di recente, l'opera è stata analizzata matematicamente da MOYON 2011.

[50] CAROTENUTO 2014[1] e 2012.

[51] CAROTENUTO 2012, p. 38: «Ma bisogna altresì considerare il fatto che ogni "lingua speciale" non solo possiede dei termini che le appartengono specificamente, ma tende anche a risemantizzare – cioè dare un nuovo significato – ad alcune voci della lingua generale di cui rappresenta una sottocategoria».

[52] Come opportunamente osserva NORBERG 1974 (1968), p. 110: «Si è spesso discussa la questione di sapere se il latino del medioevo è una lingua morta o viva o semiviva, discussione in realtà poco fruttuosa. Una lingua non è un organismo che nasce, cresce, invecchia e muore. È un mezzo di comunicazione fra gli uomini che può funzionare bene o male». Molto utile, sull'argomento, anche STOTZ 2013 (1996).

di grande autorevolezza, non solo di origine occidentale ma anche di origine orientale, come si è visto, e dai quali non può né vuole prescindere[53].

Così, ad esempio, la scelta del termine *distinctio* in luogo di *capitulum* per indicare le otto ripartizioni in cui è stato diviso il trattato di geometria[54], si rivela dipendente non soltanto dal lessico della filosofia aristotelica (SCHULTHESS 2011), ma anche da quello gromatico, in cui *distinctio* indica la divisione, ovvero la spartizione, di un terreno agricolo[55]. In effetti, è tipico della mentalità medievale, almeno fino al XII secolo, l'impiego di termini che appartengono al lessico dell'agrimensura per indicare gli enti astratti della matematica. Prima del XII secolo, infatti, erano pochi gli scritti di matematica e di geometria che circolavano in Occidente: sebbene Boezio avesse tradotto gli *Elementa* di Euclide, già alla fine del VI secolo del matematico greco erano conosciuti soltanto i primi cinque libri, ma senza le dimostrazioni[56]. Diversamente, invece, gli scritti degli *agrimensores* circolavano, già nel V secolo, in una raccolta nota come *Corpus agrimensorum Romanorum*[57]. In mancanza di testi più specifici, è molto probabile che questa raccolta venisse utilizzata per l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria agli studenti del *quadrivium*. Essa, infatti, comprendeva non soltanto testi di argomento legale o religioso, che pure erano la maggioranza, ma anche scritti di geometria teorica elementare, elenchi di misure e problemi di geometria pratica[58].

Altro termine che si incontra con una certa frequenza all'interno del trattato di geometria è *campus*, il quale viene utilizzato dal Fibonacci sia con il significato specifico di "terreno", sia con quello generico di "superficie piana"[59].

---

[53] Ho già affrontato la questione in un mio articolo riguardante il lessico della radice quadrata (ROZZA 2015[1]), mentre qui prenderò in esame più in generale la situazione linguistica dell'intera opera.

[54] Ma il BIRKENMAJER 1935, p. 474, n. 8, propone di tradurre questo termine con *Erklärung*, "spiegazione".

[55] Frontin. *Grom.* p. 38: *agrorum finis qui aut loci natura aut terminorum distinctione firmatus est.*

[56] TONEATTO 1982, p. 192: «se possiamo ammettere che la sua traduzione si estendesse per tutti i tredici libri dell'originale, già dal VI secolo di fatto riscontriamo una certa diffusione solo dei primi cinque (e senza le dimostrazioni)». Le poche dimostrazioni sopravvissute riguardano soltanto le prime tre proposizioni del libro I (FOLKERTS 2003, p. 3).

[57] Il *corpus* è stato edito da LACHMANN 1849, e da THULIN 1913.

[58] FOLKERTS 2003, p. 2: «these treatises were mostly on legal and religious matters, but some of the writers, above all Balbus and also Epaphroditus and Vitruvius Rufus, also give geometrical procedures».

[59] La prima distinzione comincia con la frase *si volueris metiri campum quadrilaterum equilaterum et equiangulum*, in cui il termine *campus* può essere inteso con entrambi i significati di terreno agricolo e di generica superficie piana.

Per la sua natura ambigua, dotata cioè sia di valore concreto che di valore astratto, il termine sembrerebbe essere particolarmente indicato all'interno di un'opera che, come si è detto, voleva essere non solo teorica, ma anche pratica. Tale scelta, però, lungi dall'essere legata a motivazioni puramente stilistiche e retoriche, è piuttosto indicativa del fatto che, nel medioevo, la geometria veniva abitualmente intesa come la scienza della misurazione dei terreni[60]. Tale concezione si riflette all'interno del trattato geometrico del Fibonacci e, talvolta, ne rende piuttosto difficoltosa l'interpretazione. Così, ad esempio, in *Distinctio* I, 3 (5), si legge:

> Se vuoi moltiplicare 28 pertiche, 1 piede e 7 once per 53 pertiche, 5 piedi e 12 once, moltiplica prima 28 pertiche e 1 piede per 53 pertiche e 5 piedi: il risultato sarà di 22 stariori, 11 panori, 11 soldi e 5 denari. In secondo luogo, moltiplica le 7 once, che corrispondono a 2 denari più $\frac{1}{3}$, per le 53 pertiche, ma prima per 48, ossia per 4 soldi, e poi per 5 denari: il risultato sarà pari a 10 soldi e 3 denari più $\frac{2}{3}$. Allo stesso modo, moltiplica le 12 once, corrispondenti a 4 denari, per 28 pertiche, ma prima per 24, ossia per 2 soldi, e poi per 4: il risultato sarà pari a 9 soldi e 4 denari. Dopo aver fatto ciò, moltiplica le 7 once per 5 piedi, e le 12 once per 1 piede: il risultato sarà pari alla sesta parte di 47 once, ossia a 2 denari più $\frac{11}{18}$. Moltiplica quindi le 7 once per le 12 once: il risultato sarà di $\frac{84}{324}$ di un denaro, che però non è necessario riportare, perché non corrisponde neppure ad un'oncia. Infine, addiziona tutti questi risultati, e otterrai in totale 23 stariori, 14 soldi e 9 denari[61].

Si tratta di calcolare l'area di un rettangolo la cui base misura 28 pertiche, 1 piede e 7 once, e la cui altezza misura 53 pertiche, 5 piedi e 12 once. Al fine di semplificare i calcoli, l'autore scompone le 53 pertiche dell'altezza nella somma di 48 più 5: il problema, però, è che, in base al suo ragionamento, 48 e 5 sarebbero denari, non pertiche. Allo stesso modo, più avanti, Fibonacci scompone le 28

[60] Gerb. *Geometria*, p. 49 (Bubnov): *haec vero disciplina, ut simplicibus loquar, a terrae mensura graecum nomen accepit.*

[61] Fibonacci, *Pratica Geometrie*, *Distinctio* I, 3 (5): *Si vis multiplicare perticas 28 et pedem 1 et uncias 7 per perticas 53 et pedes 5 et uncias 12, multiplica primum perticas 28 et pedem 1 per perticas 53 et pedes 5: erunt stariora 22 et panora 11 et soldi 11 et denarii 5. Deinde multiplica uncias 7, scilicet denarios* $\frac{1}{3}$ *2, per perticas 53, tamen primum per 48, scilicet per soldos 4, et postea per denarios 5: erunt soldi 10 et denarii* $\frac{2}{3}$ *3. Item multiplica uncias 12, scilicet denarios 4, per perticas 28, primum quidem per 24, scilicet per soldos 2, et postea per 4: erunt soldi 9 et denarii 4. Post hec multiplica uncias 7 per pedes 5, et uncias 12 per pedem 1: erunt sexte unius unciarum 47, scilicet denarii* $\frac{11}{18}$ *2. Et multiplica uncias 7 per uncias 12: erunt* $\frac{84}{324}$ *unius denarii, de quibus mentio facienda non est, cum non sint uncia 1. Adde ergo reliquas multiplicationes in unum, reddent pro tota summa stariora 23 et soldos 14 et denarios 9.*

pertiche della base nella somma di 24 più 4, e anche in questo caso 24 e 4 sembrerebbero essere denari, invece che pertiche. Ciò è evidente dal fatto che, spiega il Pisano, 48 e 24 equivalgono, rispettivamente, a 4 e a 2 soldi: un soldo, infatti, è pari a 12 denari, perciò 2 soldi corrispondono a 24 denari, e ovviamente 4 soldi corrispondono a 48 denari[62]. Un denaro, però, è un'unità di misura ben diversa dalla pertica: se infatti 48 denari corrispondono senza alcun dubbio a 4 soldi, come si è detto, 48 pertiche equivalgono invece 144 soldi; allo stesso modo, 24 denari corrispondono a 2 soldi, mentre 24 pertiche corrispondono a 72 soldi[63]. Per questo motivo, almeno a una prima lettura del passo, la scomposizione di 53 pertiche nella somma di 48 più 5 denari, così come quella di 28 pertiche nella somma di 24 più 4 denari, sembrerebbe non aver alcun senso. Quello che il lettore moderno non deve dimenticare, però, è che il rettangolo qui preso in esame non è una figura geometrica astratta, ma è una superficie reale, quale può essere, ad esempio, la superficie di un terreno o di una casa[64]. Perciò i lati di questa figura non sono "lunghezze senza larghezza"[65], come siamo abituati a immaginare, ma sono "linee larghe", per usare la felice espressione di Jens Høyrup, ovvero linee «portatrici di una larghezza virtuale di una unità» (HØYRUP 1995, p. 3). In altre parole, l'area di una superficie rettangolare avente 53 pertiche di altezza per 7 once di base equivale alla somma delle aree di sette strisce rettangolari più piccole, ciascuna delle quali misura di 53 pertiche di altezza e 1 oncia di base. Ora, Fibonacci sostiene che il prodotto di pertiche per once dia un risultato che si esprime in once superficiali, e che un'oncia superficiale corrisponda alla terza parte di un denaro[66]. Pertanto, una striscia che misuri 53 pertiche di altezza e 1 oncia di base, sarebbe dotata di un'area pari a 53 once superficiali, ovvero a $\frac{53}{3}$ di denaro, i quali, a loro volta, equivalgono proprio a 4 soldi e 5 denari. Lo stesso procedimento può essere applicato anche al secondo caso, quello cioè delle 28

[62] Un piede, infatti, corrisponde a mezzo soldo (Fibonacci, *Introductoria* 2, 10), quindi un soldo equivale a due piedi. Ma un piede corrisponde a 6 denari (Fibonacci, *Introductoria* 2, 4), quindi un soldo equivale a 12 denari.

[63] Una pertica, infatti, corrisponde a tre soldi, ovvero a 36 denari (Fibonacci, *Introductoria* 2, 4).

[64] Fibonacci, *Introductoria* 2, 7: *Mensurantur quidem agri et spatia domorum cum perticis et pedibus et unciis [linealibus]; sed camporum embada colliguntur in starioris et panoris et soldis et denariis, vel in partes unius panori. Domorum quoque spatia colliguntur in scalis et in partibus scale et in soldis et denariis*.

[65] Si tratta di una definizione di matrice euclidea, la quale si ritrova anche all'interno del trattato di Fibonacci (*Introductoria* 1, 2).

[66] Fibonacci, *Introductoria* 2, 11.

pertiche che vengono scomposte nella somma di 24 più 4 denari. L'area di una superfice rettangolare che misuri 28 pertiche di base e 12 once di altezza è pari, infatti, alla somma delle aree di dodici strisce rettangolari più piccole, ciascuna delle quali misura 28 once superficiali, ossia $\frac{1}{3}$ di 28 denari che, a loro volta, corrispondono proprio a 2 soldi e 4 denari.

L'uomo moderno, abituato com'è a una sola definizione di linea, quella cioè di "lunghezza senza larghezza", può facilmente commettere l'errore di ritenere questo procedimento insensato, ovvero sbagliato. In realtà, però, esso è perfettamente lecito, perché il rettangolo qui preso in esame è composto da linee dotate di larghezza e, quindi, di superficie. È probabile che proprio l'esistenza di questo tipo di linee (le linee-striscia, secondo la definizione di Høyrup) abbia indotto Euclide ad aggiungere la qualifica di ἀπλατές alla sua definizione[67]. Chiaramente, va da sé che una simile concezione ha senso soltanto all'interno di un sistema culturale in cui la geometria viene concepita con uno scopo pratico, legato cioè alla misurazione di superfici reali, e non astratte: tale è la geometria di Fibonacci, in cui si opera appunto con i *campi*, ovvero con superfici che, all'occorrenza, possono essere intese sia come concrete, sia come astratte[68].

Un discorso per certi versi simile può essere fatto anche a proposito del termine *census*, che in Fibonacci ricorre a indicare l'incognita x^2 non soltanto all'interno del *Liber Abaci*, ma anche all'interno della *Pratica Geometrie*[69]. Il termine si trova già largamente impiegato come traduzione dell'arabo *mal* all'interno delle numerose fonti arabo-latine di cui il Pisano disponeva[70]. Esso, ad

---

67 HØYRUP 1995, p. 12: «resta possibile che la delimitazione "senza larghezza" sia stata dapprima intesa come demarcazione rispetto all'idea della linea-striscia».

68 HØYRUP 1995, p. 13: «ogni pensiero matematico che funziona comporta entro di sé una gamma di ambiguità. Nella geometria euclidea, per esempio, un quadrato è una figura (una σχῆμα – *Elementi* I, def. 25) […]. Ma un quadrato può anche essere uguale a una o più altre figure (per esempio *Elementi* II, prop. 14), ed è dunque ridotto da questo punto di vista alla sua area. In un discorso matematico determinato, queste ambiguità concettuali restano di regola nascoste, contenute nello spazio delle operazioni da cui dipendono i concetti e di cui parla la terminologia: se un quadrato è tagliato da una diagonale, si tratta ovviamente della figura; se è detto cinque volte un altro si tratta dell'area. Questa assenza di pedanteria contribuisce all'efficienza del pensiero».

69 Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 353: *Radix enim quidem cuiuslibet numeri est numerus qui, cum in se multiplicatur, facit ipsum numerum, ut 3 que sunt radix de 9*; Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, II, 1, 1 (2.1): *Sunt enim numeri et fractiones eorum, aut radices quadratorum, aut quadrati, aut numeri simplices. Quando numeri in se multiplicantur, radices dicuntur facti ex multiplicatione quadrati, seu census appellantur*.

70 *Census*, infatti, corrisponde alla traduzione latina del termine arabo *mal*, che indicherebbe la "somma di denaro". Cfr. OAKS-ALKHATEEB 2005, p. 403: «the words *mal, jidhr*, and *dirham* were

esempio, ricorre non soltanto all'interno della traduzione latina dell'*al-Jabr* di al-Khwārizmī operata da Gerardo da Cremona, ma anche nell'anonima traduzione latina dell'*al-Jabr* di Abū Kāmil, nonché all'interno del *Liber Mahameleth*[71]. Nel latino del linguaggio gromatico, *census* ricorre ad indicare il complesso delle proprietà censibili, di qualsiasi natura, anche pecuniaria, mentre in Ulpiano esso acquisisce talvolta il significato specifico di fondo, terreno agricolo, proprietà di un terreno e di tutto ciò che si trova su quel terreno[72]. Ciò suggerisce un possibile valore di *census* come di "superficie", o per meglio dire di "area superficiale" di una figura quadrata, accostamento che invano cercheremmo nei lessici[73]. Come per *campus*, quindi, anche per *census* dobbiamo pensare a un termine ambiguo, il quale può essere inteso sia col valore astratto di x^2, sia col valore concreto di superficie censibile e, quindi, suscettibile di misurazione.

Come già evidenziato dalla Carotenuto, il linguaggio della matematica di cui fa uso Leonardo Pisano non è affatto inteso come insieme di segni in cui significante e significato siano in rapporto biunivoco di 1:1 (CAROTENUTO 2014[1], p. 26). In altre parole, tradurre Fibonacci spesso significa imbattersi in casi in cui a un solo significante sono associati più significati diversi e, viceversa, a un solo significato corrispondano più significanti. Un esempio emblematico di tale

adopted into Arabic mathematics from everyday language. The quotidian meaning of *mal* is wealth, property, treasure, capital, sum of money, or possession. *Jidhr* means root, stem, or base, while *dirham* was the standard denomination of silver coin». Molto utile, sull'argomento, anche il contributo di RIVOLO-SIMI 1998.

[71] Al-Khwārizmī, *al-Jabr*, p. 234 (Hughes): *Census autem qui radicibus equatur est ac si dicas: census equatur quinque radicibus. Radix ergo census est quinque. Et census est vigintiquinque*; Abū Kāmil *al-Jabr*, p. 325 (Sesiano): *census autem qui radicibus equantur est sicut si dicas: census equatur 5 radicibus suis. Cuius expositio est quod census equalis est quincuplo radicum eius. Et radix census erit semper sicut numerus radicum quibus census equalis existit. Que est in hac questione 5, et census est 25. Qui est sicut 5 radices eius*; Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 447 (Sesiano): *radix census, que est duo. Igitur census est quatuor*.

[72] Ulp. *Dig*. 50, 15, 4pr (Mommsen-Krüger): *forma censuali cavetur, ut agri sic in censum referantur. Nomen fundi cuiusque: et in qua civitate et in quo pago sit: et quos duos vicinos proximos habeat. Et arvum, quod in decem annos proximos satum erit, quot iugerum sit: vinea quot vites habeat: olivae quot iugerum et quot arbores habeant: pratum, quod intra decem annos proximos sectum erit, quot iugerum: pascua quot iugerum esse videantur: item silvae caeduae. Omnia ipse qui defert aestimet*.

[73] Nella *pars tertia* del capitolo XV del *Liber Abaci* l'autore, ispirandosi probabilmente alla traduzione latina dell'*al-Jabr* di al-Khwārizmī, si dedica alla risoluzione di alcune questioni algebriche. Fibonacci, in particolare, inizia questo terzo paragrafo con le definizioni algebriche di *radix, quadratus* e *numerus simplex,* che potrebbe aver mutuato dalla fonte araba. Interessante è, a mio avviso, la definizione di *quadratus, qui census dicitur* che compare in *Liber Abaci*, pp. 406-407, in cui è resa esplicita la sovrapponibilità del concetto di *census* con quello di *quadratus*. Per un'ulteriore disamina di questi termini, cfr. HUGHES 2004, pp. 328-332.

ambiguità è costituito dal termine *regula*, la cui resa in italiano risulta essere piuttosto problematica. Il termine ricorre talvolta a indicare la scomposizione in fattori non primi del denominatore di una frazione, come ad esempio all'interno della *Distinctio* I, 3 (9), dove si legge, a proposito della frazione $\frac{1}{324}$, che la *regula de 324 est* $\frac{1\ \ 0}{18\ \ 18}$. In seguito all'indagine condotta dalla Carotenuto, è emerso che *regula* ricorre con questo significato anche all'interno del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, dove spesso compare in alternanza con un altro termine, *compositio*, dal significato identico[74]. Ci troviamo, quindi, di fronte ad uno di quei casi in cui a un solo significato sembrano corrispondere più significanti.

Ma c'è dell'altro. Già la studiosa rilevava che il termine, accanto al valore di "scomposizione in fattori non primi", spesso assume, all'interno del *Liber Abaci*, anche un altro significato, quello cioè di "regola", ossia di "norma codificata"[75]. Allo stesso modo, è possibile incontrare *regula* con questo secondo significato anche all'interno della *Pratica Geometrie*, che del *Liber Abaci* rappresenta la naturale continuazione[76]. In questa accezione, però, il termine compare non soltanto all'interno delle opere di origine occidentale che il Pisano avrebbe avuto a disposizione, ma anche in quegli scritti che dall'arabo erano stati tradotti in latino nel corso del XII secolo[77]. Ciò significa che il Fibonacci avrebbe attinto questo termine direttamente dal latino tecnico dei testi matematici, dove lo incontrava col significato generico di "procedimento", "norma codificata", e che in un secondo momento lo avrebbe sottoposto a risemantizzazione, da cui il valore specifico di "scomposizione in fattori non primi del denominatore di una frazione".

---

[74] Così, ad esempio, in Fibonacci, *Liber Abaci* V, p. 116 (Carotenuto): *Et sic habebit regulam, idest compositionem cuiuslibet imparis numeri*. A tal proposito, si consideri CAROTENUTO 2014[2], p. 68: «Mi sembra infatti probabile che le *compositiones* di un numero indichino le "composizioni" di un numero, ovvero l'insieme dei fattori in cui esso può essere scomposto, si è tradotto pertanto "scomposizione in fattori" - ma non in "fattori primi" perché talora Fibonacci considera come "componente" di un numero anche l'8».

[75] CAROTENUTO 2014[2], pp. 67-68.

[76] Così, ad esempio, in Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, II, 2, 1 (1.6): *area ominium rumborum colligitur ex multiplicatione unius diametri in dimidio alterius, et hec est regula universalis in ipsis.*

[77] Gerberto d'Aurillac utilizzava il termine con questa accezione: cfr. Gerberti, *Geometria*, p. 87 (Bubnov): *erit regula embadi inveniendi*. Allo stesso modo, nel *Liber Mensurationum* di Abū Bakr ricorre insistentemente il sintagma *regula sciendi*, come ad esempio in Abū Bakr, *Liber Mensurationum* p. 116 (Busard): *Regula vero sciendi aream eius est*.

A differenza, però, del *Liber Abaci*, in cui *regula* sembrerebbe acquisire soltanto questi due significati, per la *Pratica Geometrie* la situazione si complica ulteriormente, dal momento che qui il termine ricorre anche in una terza accezione, quella cioè di "tipologia di equazione". Per fare un esempio, all'interno della *Distinctio* III, II, 1, 1 (2.3) l'autore introduce *tres regule simplices totidemque composite*:

> Da questi tre enti [*sc.* x^2, x e la costante] derivano tre equazioni semplici e tre equazioni composte. Le equazioni sono semplici quando, all'interno dei quesiti di aritmetica o di geometria, si rinviene che una somma di radici equivale a una somma di quadrati, ovvero a numeri quadrati; oppure quando parti di un quadrato sono pari a una radice, o a un numero; oppure quando un numero è uguale a una somma di radici o di quadrati. Viceversa, le equazioni sono invece composte quando si rinviene che una radice equivale a una somma di un quadrato e di un numero; oppure quando un quadrato equivale a una somma di una radice e di un numero; oppure quando un numero equivale a una somma di una radice e di un quadrato[78].

In questo passo Fibonacci sta discutendo di sei diverse tipologie di equazione di secondo grado (*regule*, appunto). Di queste, tre sono dette "semplici", e tre sono dette "composte". Un'equazione è di tipo semplice quando uno dei tre elementi di cui è cui è composta (x^2, x, costante) è pari a zero, ovvero quando si configura come un'uguaglianza tra due soli termini. Il primo tipo di equazione semplice è tale per cui a un generico valore dell'incognita x corrisponde un certo valore dell'incognita x^2, oppure una costante; il secondo tipo di equazione semplice è tale per cui una certa frazione di x^2 corrisponde a un certo valore di x, oppure a una costante; il terzo tipo di equazione, infine, è tale per cui una costante equivale a un certo valore di x, oppure di x^2. Viceversa, l'equazione si dice composta quando nessuno dei termini di cui è costituita è pari a zero. Il primo tipo di equazione composta è tale per cui, a un certo valore dell'incognita x corrisponde una somma di x^2 e di una costante; il secondo tipo di equazione composta è tale per cui un certo valore di x^2 è uguale a una somma di x e di una

[78] Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, II, 1, 1 (2.3): *Nam ex his tribus essentiis tres regule simplices, totidemque composite proveniunt. Simplices enim sunt quando, in questionibus arithmetricis vel geometricis, inveniuntur radices equari quadratis, vel numero quadrati; vel partes unius quadrati equari radicibus, vel numero; vel cum numerus equatur radicibus, vel quadratis. Et econverso, composite quidem sunt quando inveniuntur radices equari quadratis et numero; vel quadrati radicibus et numero; aut numerus radicibus et censibus*.

costante; il terzo tipo di equazione composta, infine, è tale per cui a una certa costante corrisponde una somma di x^2 e di x.

La fonte di Leonardo sembrerebbe essere rappresentata, in questa particolare circostanza, dall'*al-Jabr* di al-Khwārizmī o, per meglio dire, dalla traduzione latina che di essa aveva dato Gerardo da Cremona nel XII secolo[79]. All'interno di quest'opera, infatti, il matematico arabo distingue tra *tres modi simplices* e *tres modi compositi* per l'equazione di secondo grado, e tali *modi* corrispondono esattamente alle *regule* di cui parla il Pisano[80]. A differenza di quest'ultimo, però, Gerardo da Cremona adopera qui il termine *regula* per indicare la "procedura" di risoluzione di tali equazioni, non la loro tipologia, per la quale, invece, sceglie di utilizzare il termine più appropriato *modus*[81]. È possibile, allora, che il Fibonacci non abbia consultato direttamente la sua fonte ma che, al contrario, abbia fatto affidamento sui suoi ricordi personali, oppure su vecchi appunti di scuola. Ciò spiegherebbe l'origine di questa divergenza tra lui e il Cremonese, e giustificherebbe la scelta, compiuta dal nostro, di utilizzare *regula* con significato improprio[82].

In conclusione, il linguaggio matematico del Fibonacci si mostra dipendente non soltanto dal lessico settoriale dell'agrimensura, ma anche dai manuali arabo-latini che ha avuto a disposizione negli anni della sua formazione. In molti casi l'autore tende a risemantizzare i termini della lingua latina in modo da conferire loro valore sia concreto che astratto, affinché possano meglio adattarsi nel contesto di un'opera che, a dispetto del titolo, vuole essere sia pratica che teorica. I casi di risemantizzazione lessicale presenti all'interno del trattato

[79] La traduzione operata da Roberto di Chester, invece, non sembra essere stata tenuta presente dal Pisano.

[80] Al-Khwārizmī, *al-Jabr*, pp. 233-236 (Hughes).

[81] Così, ad esempio, in al-Khwārizmī, *al-Jabr*, p. 234 (Hughes): *Census autem et radices que numero equantur sunt sicut si dicas: 'census et decem radices equantur triginta novem dragmis'. Cuius hec est significatio: ex quo censu cui additur equale decem radicum eius aggregatur totum quod est triginta novem. Cuius regula est ut medies radices que in hac questione sunt quinque. Multiplica igitur eas in se et fiunt ex eis viginti quinque. Quos triginta novem adde, et erunt sexaginta quattuor. Cuius radicem accipias que est octo. Deinde minue ex ea medietatem radicum que est quinque. Remanet igitur tres qui est radix census. Et census est novem*.

[82] Non sarebbe, questo, l'unico caso in cui Leonardo utilizzi un termine con significato improprio. Nell'epistola con cui dedica la *Pratica Geometrie* all'amico Domenico, ad esempio, il nostro matematico utilizza il termine *embadum* ora col significato proprio di "area", ora col significato improprio di "volume". Cfr. Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 8.

sono, per la verità, piuttosto numerosi, e saranno esaminati singolarmente man mano che emergeranno nel corso della traduzione.

> «Nulla riesce più fastidioso del cipiglio aggrottato del critico che, pretenzioso *homunculus*, voglia con sentenze di condanna quasi prendersi la rivincita nei confronti dell'artista: il quale, anche se non grande, spesso ha sul piano culturale un'importanza ben più marcata di quella del suo postumo censore».
>
> *L. Alfonsi*

La tradizione manoscritta della *Pratica Geometrie*.

La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano è stata edita a stampa nel 1862 dal grande storico della matematica Baldassarre Ludovisi Boncompagni, che operò la trascrizione fedele di un codice di XV secolo, attualmente custodito presso la Biblioteca Apostolica Vaticana con la segnatura Urb. Lat. 292[1]. Tale edizione ha avuto il merito di aver reso l'opera disponibile a un vasto pubblico di interessati, salvandola dall'oblio nella quale si trovava ingiustamente confinata. Nello stesso tempo, però, l'operazione compiuta dallo storico ha comportato la diffusione di questo trattato in una forma spesso fuorviante, nella misura in cui esso veniva tramandato da uno solo dei numerosi manoscritti che ci sono pervenuti. L'edizione ottocentesca del Boncompagni, infatti, risulta essere del tutto inaffidabile sotto il rispetto dell'attuale metodologia filologica, perché consiste nella trascrizione diplomatica di un unico codice, a fronte di una tradizione manoscritta che annovera ben tredici esemplari.

Diversi fattori potrebbero motivare la resistenza finora mostrata dai filologi nei confronti di questo trattato: l'opera, da molti considerata di secondaria importanza rispetto al più celebre *Liber Abaci*[2], in realtà è tutt'altro che uno scritto minore, visto che si estende per ben 224 pagine (secondo l'edizione del Boncompagni). Essa, come si è detto, ci è stata tramandata da tredici esemplari

---

[1] L'edizione a stampa del principe Boncompagni rappresenta, attualmente, l'unico veicolo di diffusione del testo latino della *Pratica Geometrie* (BONCOMPAGNI 1862[1]). Essa sarà indicata con *b* all'interno dello *stemma codicum* più oltre riportato.

[2] L'*editio princeps* del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano è stata pubblicata da BONCOMPAGNI 1857[1]. Di quest'opera è stata recentemente realizzata un'edizione critica dell'epistola di dedica e del prologo a cura di GERMANO 2013, che di essi fornisce anche una traduzione in lingua inglese, mentre per la traduzione in lingua italiana e il commento della lettera e del prologo, rimando a CAROTENUTO-GERMANO 2012 e a CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012. Esiste, inoltre, un'edizione critica dei capitoli V-VII del *Liber Abaci* basata sulla collazione di otto testimoni e a cura CAROTENUTO 2014[2].

manoscritti, ciascuno dei quali dotato di più di centocinquanta, talora più di duecento fogli, cosa che ne rende la collazione estremamente lenta e faticosa. A ciò si aggiungono le tipiche difficoltà di un testo tecnico, la cui comprensione richiede conoscenze non solo di geometria, ma anche di storia della matematica tra Antichità e Medioevo, e che per questo motivo è stato a lungo di esclusiva competenza dei matematici e degli storici della scienza[3]. Tutto ciò ha generato una situazione tale per cui, chi oggi desideri accostarsi alle opere di una delle più note e apprezzate personalità dell'Occidente, deve accontentarsi di edizioni pubblicate circa centocinquant'anni fa[4]. Così, quando nel 2008 Barnabas Hughes ha pubblicato la sua traduzione in lingua americana della *Pratica Geometrie* (HUGHES 2008), ha potuto disporre soltanto delle lezioni riportate all'interno ms. Urb. Lat. 292, ovvero della trascrizione diplomatica che di essa aveva dato il Boncompagni nel 1862. Nonostante perciò l'operazione compiuta dallo studioso americano presenti degli indiscutibili meriti, primo fra tutti quello di aver reso l'opera fruibile da parte di un vasto pubblico di interessati, essa risulta essere inevitabilmente inaffidabile sotto il rispetto dell'attuale metodologia filologica, perché si fonda sulle lezioni di un unico testimone.

I testimoni manoscritti.

La tradizione manoscritta della *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano annovera i seguenti esemplari[5]:

---

[3] Per una disamina approfondita delle personalità più significative del pensiero aritmetico e algebrico tra Medioevo e Umanesimo, AMBROSETTI 2008.

[4] Come rileva CAROTENUTO 2014², p. 2: «non stupisce allora se all'estero - non certo in Italia dove nonostante tutto le scuole di filologia e gli studi classici sono più rigorosi - si sia deciso di trascurare il lavoro filologico sui testi di Fibonacci e di approntare, saltando a pié pari la collazione dei manoscritti, le prime traduzioni in lingua moderna di opere che pure interessavano agli storici della matematica, tanto è vero che è su pressione di questo settore di studi se oggi anche in Italia la filologia si sta impegnando seriamente per mettere a punto un'edizione critica delle opere del grande studioso Pisano sulla quale possa basarsi, finalmente, una traduzione scientificamente valida delle stesse».

[5] Di tali codici fornisce per la prima volta l'elenco completo HUGHES 2008, pp. 399-400**,** che di alcuni di essi presenta anche una breve descrizione (*ivi*, pp. xxvii-xxviii). Tuttavia le informazioni fornite dallo studioso sono talvolta parziali e incomplete, pertanto ho ritenuto utile fornire a mia volta una breve descrizione dei singoli testimoni. Per quanto riguarda le informazioni fornite da Hughes sui rapporti di parentela di questi manoscritti (o per lo meno di quelli da lui esaminati), esse sono totalmente inattendibili: Hughes, infatti, ritiene che questi esemplari appartengano alla stessa famiglia del ms. Urb. Lat. 292, e che alcuni di essi ne siano addirittura "discendenti": in realtà, dall'indagine da me condotta è emersa una situazione tale, per cui nessun manoscritto risulti essere copia diretta dell'Urb. Lat. 292. Inoltre, come si vedrà più avanti, non tutti i manoscritti che

(C): BELLUNO, Biblioteca Capitolare Lolliniana, ms. 36, cartaceo, XV secolo, ff. 2r-161v.

Il manoscritto contiene un testo solo parzialmente completo, in quanto si interrompe al f. 161v con la frase *venient cubita* $\frac{1}{4}$ *68 pro altitudine oq*, che corrisponde a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 206 (Boncompagni). Il foglio 1r riporta le seguenti informazioni: «questo codice servì agli studi, che per la edizione sulla contenuta opera di Leonardo Pisano fece l'insigne Matematico L. Baldassarre de' principi Boncompagni di Piombino, il quale fu dato a fidanza dal sottoscritto bibliotecario della Lolliniana, e il quale alla Lolliniana e al sottoscritto medesimo regalò in benemerenza un esemplare dell'opera qui contenuta e d'alcune altre opere ed operette matematiche da lui in questo e negli anni addietro pubblicate. Belluno, 18 Luglio 1862. Giovanni De Donà»[6].

(O_1): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Ottob. Lat. 1545, cartaceo, XVII secolo, ff. 1r-341v.

Il testo del codice O_1 si interrompe alla fine della terza distinzione con la frase *quare huic distinctioni* che corrisponde a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 110 (Boncompagni). Sul foglio di guardia sono riportate le seguenti informazioni: *Leonardi Pisani Practica Geometriae: tomus primus. Unus ex codicibus bibliothecae altempsianae a Paulo Quinto manu regia excerptis nunc vero a Ioanne Angelo ab Altaemps duce proprijs sumptibus fidelissime ex originalibus transumptus ut bibliotheca praedicta tanto honore iam decorata non careret*[7].

tramandano l'opera appartengono alla stessa famiglia da cui discende questo esemplare. Un elenco parziale dei testimoni della *Pratica Geometrie* è stato fornito anche da SIMI 2004, p. 9, n. 1-4, che però omette di menzionare tre esemplari e cita, a mio avviso impropriamente, il codice Vat. Lat. 4606, miscellaneo di XIV secolo che riporta, ai ff. 109r-121v, un *Tractatus super practicam geometrie* non del Fibonacci, ma di un certo P. de R. Civis Januensis, per il quale cfr. il catalogo online della Biblioteca Apostolica Vaticana all'indirizzo
http://www.mss.vatlib.it/gui/console?service=shortDetail&id=4312. Oltre ai manoscritti qui elencati, esiste infine un'ulteriore copia della *Pratica Geometrie* appartenuta a Pietro Isolani di Bologna e attualmente non ancora reperita (SIMI 2004, p. 9; BONCOMPAGNI 1854, p. 96, n. 1). Un ringraziamento davvero particolare va al Prof. Giuseppe Germano e alla Prof.ssa Antonietta Iacono, per avermi aiutato a fissare la cronologia di questi esemplari.

[6] Il codice è stato recentemente recensito da GIOVÈ MARCHIOLI-GRANATA 2010, p. 54.

[7] Come rileva HUGHES 2008, p. xxviii, il codice si data al XVII secolo.

(O_2): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Ottob. Lat. 1546, cartaceo, XVII secolo, ff. 1r-375v.

Il codice O_2 riprende la trattazione nel medesimo punto in cui si interrompe l'esemplare O_1 (cfr. *supra*): da ciò e da altri caratteri, sembra evidente che O_1 e O_2 provengano dallo smembramento dello stesso manoscritto in due volumi, entrambi databili su base paleografica al XVII secolo[8].

(V): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Urb. Lat. 259, cartaceo, secolo, ff. 1r-174v.

Il codice tramanda il testo della *Pratica Geometrie* in forma di compendio, ma presenta anche numerose integrazioni attribuibili all'attività di una mano cronologicamente successiva. Come risulta dal catalogo online della Biblioteca Apostolica Vaticana[9], il manoscritto si data al XVII secolo. Non concordo con HUGHES 2008, p. xxviii, nel ritenere che questo esemplare sia una copia del codice parigino BN 10258: come chiarirò più avanti, infatti, ritengo che l'esemplare vaticano non dipenda da quello parigino né per il testo di impianto né per le integrazioni marginali che riporta·

(B): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Urb. Lat. 292, membranaceo, XV secolo, ff. 1r-146r.

Si tratta del codice utilizzato dal Boncompagni per la sua *editio princeps*, nonché di uno degli esemplari più completi e meglio conservati di tutta la tradizione. Nel riquadro della capolettera del f. 1r è raffigurato il Fibonacci nell'atto di contare con la mano sinistra e di reggere un libro con la destra[10].

(D): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Vat. Lat. 4962, cartaceo, XVI secolo, ff. 1r-163v.

Come si apprende dalle notizie riportate sul f. 1r, il codice proviene dalla biblioteca del cardinale Guglielmo Sirleto (1515-1585). Lo stato di conservazione non è ottimo perché l'inchiostro si è infiltrato nelle fibre della carta e ne ha reso la

---

[8] Il codice è stato descritto da HUGHES 2008, p. xxviii.

[9] Il Catalogo della Biblioteca Apostolica Vaticana è consultabile online all'indirizzo consultabile all'indirizzo http://www.mss.vatlib.it/gui/console?service=shortDetail&id=35228

[10] Per una sintetica descrizione, cfr. il catalogo online della Biblioteca Vaticana all'indirizzo http://www.mss.vatlib.it/gui/console?service=shortDetail&id=35229.

lettura piuttosto difficoltosa. Fortunatamente, però, il manoscritto non è del tutto illeggibile, come invece sostiene Hughes[11].

(E): CITTÀ DEL VATICANO, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Vat. Lat. 11589, cartaceo, XVI secolo, ff. 1r-185v.

Si tratta di un esemplare ricco di note a margine e aggiunte attribuibili a più mani. HUGHES 2008, p. xxviii, conta la presenza di ben quattro mani. Nel margine inferiore del f. 129v compare la scritta capovolta *Incipit Tractatus Iordani quam transtulit A. Thebit*[12].

(L): FIRENZE, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. misc. II III 22, cartaceo, XV secolo, ff. 2r-241v.

Trattasi di un manoscritto miscellaneo di ff. 287 datato da MAZZATINTI 1899, p. 150, al XVI secolo, ma che a mio avviso è possibile datare, su base paleografica, al XV secolo. Nel riquadro della capolettera del f. 2r, è rappresentata la figura di Fibonacci nell'atto di reggere un libro e un compasso, mentre nel margine inferiore della stessa pagina è raffigurato lo stemma del primo proprietario del manoscritto, purtroppo non ancora identificato. Dalle notizie riportate nel foglio di guardia, risulta che il codice fu acquistato dal cavaliere fiorentino Giovanni Giraldi, famoso per la sua biblioteca personale e per l'essere il destinatario delle sette lettere sul lume perpetuo di Raimondo di Sangro, principe di San Severo (MORELLI TIMPANARO 2001). Il testo si interrompe al f. 241v con la frase *venient cubita* $\frac{1}{4}$ *68 pro altitudine oq*, corrispondente a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 206 (Boncompagni). I ff. 242r-267v sono bianchi, mentre i ff. 268r-282r riportano il *Prohemium quadrantis secundum usum modernorum incipit* di Johannes Anglicus[13].

(M): FIRENZE, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. II III 23, cartaceo, XVI secolo, ff. 1r-191v.

---

[11] A mio avviso, l'esemplare può essere datato su base paleografica al XVI secolo, ma HUGHES 2008, pp. xxvii-xxviii, ne propone la datazione al XV secolo.

[12] RUYSSCHAERT 1959, pp. 349-350.

[13] Questo codice non deve essere confuso con il Magliabechiano Cl. XI, num. 22, manoscritto oggi siglato II III 25, conservato presso la Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze e contenente vari scritti, tra cui il *Liber Abaci* di Leonardo Pisano.

Esemplare splendidamente conservato, noto anche come Magliabechiano Cl. XI, num. 23. Presenta numerose omissioni che fanno pensare ad un'attività di compendio[14].

(F): FIRENZE, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. misc. II III 24, membranaceo, XIV secolo, ff. 1r-147v, (acefalo).

Il manoscritto è noto anche come Magliabechiano Cl. XI, num. 117. Si tratta di un miscellaneo di ff. 303 contenente non solo la *Pratica Geometrie*, ma anche numerose altre opere di interesse scientifico[15]. Per ciò che ci riguarda, esso risulta acefalo, sicché il testo inizia al f. 1r con la frase *duarum linearum equalium et equidistantium*, corrispondente a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 2 (Boncompagni), ossia mancano l'epistola di dedica e parte dell'Introduzione. La numerazione è stata segnata dopo la caduta della originaria carta iniziale.

(P): PARIS, Bibliothèque nationale de France, ms. Lat. 7223, cartaceo, XV secolo, ff. 1r-188r.

Il manoscritto contiene un testo solo parzialmente completo, in quanto si interrompe al f. 161v con la frase *venient cubita* $\frac{1}{4}$ *68 pro altitudine oq*, che corrisponde a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 206 (Boncompagni)[16].

(N): PARIS, Bibliothèque nationale de France, ms. Lat. 10258, cartaceo, XVII secolo, ff. 1r-175r.

Manoscritto ricco di omissioni che fanno pensare ad un'attività di compendio. Sono state identificate, però, altre tre mani che integrano alcuni aspetti del testo in momenti cronologicamente diversi[17].

(W): PARIS, Bibliothèque nationale de France, ms. NAL 1207, cartaceo, XIX secolo, ff. 1v-509v.

---

[14] MAZZATINTI 1899, p. 150.

[15] Per l'elenco completo delle opere riportate all'interno del codice fiorentino, MAZZATINTI 1899, pp. 150-151

[16] Per un'ulteriore descrizione dell'esemplare, rimando al catalogo online della Biblioteca Nazionale di Parigi: http://archivesetmanuscrits.bnf.fr/ead.html?id=FRBNFEAD000066409.

[17] Il codice è stato descritto anche da HUGHES 2008, p. xxvii. Per altre notizie, rimando al catalogo online della Biblioteca Nazionale di Parigi, all'indirizzo: http://archivesetmanuscrits.bnf.fr/ead.html?id=FRBNFEAD000071993.

Si tratta di un esemplare *descriptus* dal ms. Urb. Lat. 259. In base, infatti, alle informazioni fornite dal catalogo online della Biblioteca Nazionale di Parigi, sembrerebbe che si tratti di una «copie moderne du ms. Urb. 259, laquelle a appartenu à Woepcke»[18].

(S): PRINCETON, Scheide Collection, ms. 32, cartaceo, XV secolo, ff. 8r-204r.

Si tratta di un manoscritto cartaceo *in folio* datato, sul foglio di guardia, al XVI secolo ma che, a mio avviso, è possibile datare su base paleografica al XV secolo. La carta reca la caratteristica filigrana a "Testa di Toro". Il testo riportato è incompleto perché si interrompe al f. 204r con la frase *cuius radix que est 40 est altitudo arboris ab*, che corrisponde a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 204 (Boncompagni)[19].

I rapporti stemmatici.

Ho personalmente esaminato buona parte di questi esemplari per un'ampia porzione della *Pratica Geometrie*. In particolare, per quanto riguarda la lettera di dedica, l'introduzione e la prima distinzione dell'opera, ho collazionato tutti i testimoni disponibili, mentre per quanto riguarda la seconda e la terza distinzione, ho esaminato i codici BSMNFCPL. Grazie a questa indagine, ho potuto rilevare alcune particolarità della tradizione manoscritta che mi hanno consentito di giungere ad una prima proposta di definizione dei rapporti stemmatici.

I codici che ci restituiscono l'opera sembrano essere tutti indipendenti l'uno dall'altro: fa eccezione W, che è esplicitamente dichiarato come copia di V e che, per questo motivo, non è utile alla costituzione del testo critico, se non eventualmente nel caso di qualche felice congettura.

Sulla base della collazione dell'*incipit* dell'opera in tutti i testimoni disponibili, ho potuto rilevare lezioni congiuntive e separative che dimostrano l'esistenza di due distinte famiglie di manoscritti. In particolare, ho riscontrato che i codici BSDEMVNO_1 riportano tutti la titolazione *Incipit Pratica Geometrie*

[18] Il catalogo online della Biblioteca Nazionale di Parigi è accessibile all'indirizzo http://archivesetmanuscrits.bnf.fr/ead.html?id=FRBNFEAD000069583).

[19] Il codice è stato descritto da HUGHES 2008, p. xxvii. Ringrazio il Dr. Paul Needham per avermi fornito utili informazioni su questo esemplare.

composita a Leonardo Pisano de filiis Bonaccii anno MCCXX[20], a differenza dei codici CPL che invece tramandano la titolazione *Incipit Pratica Geometrie composita a Leonardo Bigollosie filio Bonaccii Pisano in anno MCCXXI*. Per quanto riguarda l'epistola di dedica, inoltre, dalla collazione di tutti i testimoni noti sono emerse alcune varianti che confermano l'esistenza di una tradizione bipartita: tra esse, la più rilevante consiste senza dubbio nella formula conclusiva della lettera, che risulta essere *ad hec*[21] *igitur secundum ingenii mei capacitatem perficienda tue correctionis aggressus fiducia hoc opus curavi tuo magisterio destinare, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur* nei manoscritti BSDEMVNO$_1$, mentre risulta essere *ad hec igitur perficienda, tue correctionis congressus fiducia, hoc opus cure magisterioque tuo demandandum duxi, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur* nei manoscritti CPL. Le varianti or ora rilevate non possono essere ricondotte a un'origine poligenetica ma, al contrario, rimandano a due distinte versioni dell'epistola, ciascuna delle quali doveva risultare in un antigrafo perduto: indicherò con α l'antigrafo comune dei manoscritti BSDEMVNO$_1$O$_2$W; indicherò, invece, con β l'antigrafo comune dei manoscritti CPL.

Per quel che concerne il codice F, esso è acefalo, manca cioè sia dell'epistola di dedica sia di parte dell'introduzione: per tale ragione non si può immediatamente stabilire a quale delle due famiglie di codici l'esemplare appartenga, ma è necessario condurre su di esso un'indagine più approfondita[22]. Dalla collazione di questo manoscritto con gli altri esemplari disponibili, è emerso che all'interno della *Distinctio* I, 3 (7), esso riporta due volte una generica notazione *vacat*, in riferimento, la prima volta, alla frase *quia cum multiplicamus pedes in pedes, egrediuntur ex multiplicatione denarii, ut dictum est*, e, la seconda volta, alla frase *secundum quod docuimus in multiplicationibus duarum figurarum contra duas in Libro Maioris Guise Abbaci*. La stessa notazione è presente anche nel codice L che, al pari di F, la riferisce alle stesse due frasi. In entrambi gli

[20] Il codice S riporta la lezione *Incipit Pratica Geometrie composita a Leonardo de filiis Bonacci Pisano anno MCCXX*, ovvero inverte *Pisano de filiis Bonacci* in *de filiis Bonaccii Pisano*. La stessa mano aggiunge poi, in un momento successivo a quello della copia, un'unità all'anno di composizione dell'opera, determinando la lezione finale *MCCXXI*.

[21] Tutti i manoscritti riportano qui la lezione *hec* ad eccezione di S, che riporta la variante poligenetica *hoc*.

[22] Il codice inizia al f. 1r con la frase *duarum linearum equalium et equidistantium*, corrispondente a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 2 (Boncompagni).

esemplari questa nota viene inserita in tmesi, col primo elemento *va-* posto all'inizio di ambo le frasi e il secondo elemento *-cat* posto alla fine. Nel codice F, però, le due parti del termine sono graficamente disposte in un quadratino all'interno del rigo di scrittura, mentre nel codice L esse sono poste in parentesi e collocate non all'interno del rigo di scrittura, ma al di sopra della prima e dell'ultima parola. Tale strategia mi induce a credere che essa dovesse essere riprodotta allo stesso modo anche in un antigrafo comune ad F e ad L: è possibile, allora, che il codice F discenda da un testimone perduto appartenente al ramo β della tradizione[23]. Tuttavia a differenza dei codici CPL, i quali si interrompono tutti alla settima distinzione con la frase *venient cubita* $\frac{1}{4}$ *68 pro altitudine oq* (corrispondente a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 206 Boncompagni), l'esemplare F prosegue fino a comprendere l'ottava distinzione nella sua interezza[24]. Sulla base di ciò, mi sembra di poter dimostrare che β dovesse inizialmente esibire il testo completo della *Pratica Geometrie* e che, solo successivamente, probabilmente a causa di un guasto meccanico, avesse perso i suoi ultimi fogli. In altre parole, ritengo che il copista di F abbia attinto il suo testo dal codice β prima che in esso si verificasse la perdita degli ultimi fogli, mentre i copisti di C, P ed L abbiano attinto il loro dal medesimo codice già privato della parte finale dell'opera. Indicherò con β_1 l'antigrafo dei codici CPL, in cui risulta essersi già verificata la perdita degli ultimi fogli.

Alcune lezioni di F, però, suscitano perplessità: in *Distinctio* I, 3 (8), ad esempio, tutti i manoscritti che discendono da α riportano la lezione errata *pertice 64 sunt panora 11 et soldi 9*, mentre il codice S, i codici CPL e la prima mano di

[23] A mio avviso, è impossibile che L abbia qui aggiunto la nota *vacat* per influsso di F. Dall'indagine da me condotta sui due testimoni, infatti, non è emerso nulla che faccia pensare a un'influenza di F su questo manoscritto. A riprova di ciò, si potrebbe addurre il fatto che il copista di L, nel margine destro del f. 61r, scrive la nota *vacat. Sicut inveni scriptum in exemplari et cancellatum. Sic conscripsi et cancellavi prout inveni: ad cautellam*, a proposito di un'ampia porzione di testo che viene qui riportata per fedeltà di copia tal quale era presente anche nell'esemplare di riferimento, in cui doveva essere stata poi cancellata. Dato che tale porzione non era presente in F, è evidente che L attinge il suo testo da un antigrafo comune, ma a differenza del copista di L, il quale, per fedeltà, ha copiato il suo esemplare tal quale era, il copista di F è stato a tratti più "critico".

[24] Ma nel codice L, al f. 241v seguono numerosi fogli bianchi.

F riportano la lezione corretta *pertice 64 sunt panora 11 et soldi* $\frac{1}{2}$ *10*[25]: ebbene, in F troviamo la lezione corretta $\frac{1}{2}$ *10* del testo di impianto, sostituita poi con *9*, ossia con la lezione errata comune a tutti i discendenti di α. È probabile, allora, che il copista di F, dopo aver attinto la lezione corretta $\frac{1}{2}$ *10* da β, l'abbia modificata in *9* forse in seguito a un confronto operato su un apografo di α[26].

Un'altra caratteristica problematica del testo esibito da F è rappresentata dal fatto che, alla fine della *pars quarta* della terza distinzione, i codici C (ff. 80v-81r), P (ff. 98r-98v) ed L (ff. 127r-127v) riportano un'ampia sezione che, invece, manca del tutto in F e negli altri esemplari della famiglia α che tramandano l'opera: si tratta di un ampio brano corredato di figure, in cui Fibonacci introduce e dimostra i teoremi 20 e 21 del terzo libro degli *Elementi* di Euclide:

> ***Distinctio* III, IV, 44:** In circulis, ut in vigesimo theoremate tertii libri habetur, angulus qui ad centrum duplus est eius qui ad periferiam, si eandem basim habuerint anguli. In circulo quidem *abgd* sit ad centrum angulus *beg* super basim *bg*, et ad periferiam sit angulus *bag*: dico angulum *beg* duplum esse angulum *bag*. A puncto quidem *a* per *e* centrum ducatur recta *aez*: erit quidem trigoni *aeb* unum latus eductum quod est *ae*, quare angulus qui sub *bez* equalis est duobus interioribus et oppositis qui sub *eba* et *bae*. Sed anguli qui sub *eba* et *bae* dupli sunt eius qui sub *bae*, cum sint sibi invicem equales. Est enim trigonum *aeb* equicrurium equalia habens latera *ea* et *eb*: ergo angulus qui sub *bez* duplus est eius qui sub *bae*. Similiter ostendetur angulum *gez* duplum esse eius qui sub *gaz*, quare totus angulus *beg* duplus est totius anguli *bag*. Rursus protraham rectam *be* in punctum *d* et copulabo *dg* rectam et ostendam angulum *beg* duplum esse angulo *bdg*, quoniam latera *ed* et *eg* sibi invicem sunt equalia. Quare anguli *edg* et *egd* dupli sunt angulo *edg*. Est enim angulus *beg* equalis duobus angulis qui sub *egd* et *edg*: ergo angulus qui sub *beg* qui est ad centrum duplus est angulo *edg* qui est ad periferiam. Similiter ostendetur angulum *geb* duplum esse angulo *gcb*, quod probabitur per quedam sequentia eiusdem libri hoc modo. Adiaceat rursus idem circulus *abgd* et protrahamus in eo angulum aliquem cadentem in arcu *dac*; et sit angulus *gcb* et ad centrum fit angulus *beg*. Et accipiam in arcu *dg* fortuitu punctus *i* et copulabo rectas *bi* et *ig*. Dico siquidem angulum *beg* duplum esse angulo *big*, quod sic probatur. Quoniam in circulo abgd due recte *bi* et *ge* sese invicem secant super punctum *t*, erit multiplicatio *bt* in *ti* equalis multiplicationi *gt* in *tc*, ut in trigesimo quinto theoremate eiusdem libri habetur; quare recte *bt*, *tc*, *cg*, *ti*, sibi invicem proportionales sunt. Est enim ut *bt* ad *tc* ita *gt* ad *ti*. Et quoniam trigona *btc* et *gti* habent unum angulum *btc* equalem uni angulo qui sub *gti*, et circa equales angulos

[25] Si tenga presente che un panoro corrisponde a 5,5 pertiche: perciò 64 pertiche equivalgono a 11 panori più 3,5 pertiche (*Introductoria* 2, 5). Ma una pertica equivale a 3 soldi: quindi 3,5 pertiche equivalgono a 10 soldi e mezzo (*Introductoria* 2, 3 e 2, 10).

[26] Non ritengo possibile, invece, che il copista di F abbia calcolato *ope ingenii* la lezione $\frac{1}{2}$ *10* perché, in tal caso, non avrebbe avuto nessun motivo valido per sostituire questo risultato con uno errato.

> latera proportionalia, erunt utraque trigona *btc* et *gti* equiangula et similia, quare angulus *tig* equalis est angulo *tcb*. Sed angulus *beg* ostensus est duplus esse angulo *bcg*, quare et angulus *beg* duplus est angulo *big*, quod oportebat ostendere. Et ex hoc concluditur manifeste quod anguli qui in eadem sectione circulorum sibi invicem sunt equales[27].

Mi sembra molto rilevante, però, il fatto che il copista di L aggiunga la parola *vacat* nel margine destro del f. 127v: tale aggiunta suggerisce l'ipotesi che questa porzione di testo sia stata sì, presente in β, ma con una configurazione tale da indurre il copista a non ritenerla parte integrante del dettato. È però anche possibile che il brano sia stato introdotto dall'autore in un momento cronologicamente successivo a quello del primo allestimento di questo antigrafo: in tal caso, la copia F sarebbe stata redatta a partire da un discendente di β che non presentava, o non presentava ancora, tutte le lezioni che l'avrebbero poi caratterizzata (e che appunto si ritrovano negli altri tre discendenti).

Nutro alcuni dubbi anche su quella che potrebbe essere la reale collocazione del codice S perché, oltre alle lezioni di α, sembrerebbe presentare

[27] «Come si afferma in Euc. III. 20, all'interno dei cerchi, l'angolo che sta al centro misura il doppio di quello che sta alla circonferenza che insiste sullo stesso arco. All'interno del cerchio *abgd*, sia dunque dato l'angolo al centro *beg* che insiste sull'arco *bg*, e sia dato l'angolo alla circonferenza *bag*: dico che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bag*. Si conduca, dunque, dal punto *a* attraverso il centro *e*, il segmento *aez*: uno dei lati del triangolo *aeb* sarà dunque in comune, ossia *ae*, perciò l'angolo *bez* è uguale alla somma dei due angoli interni e opposti *eba* e *bae*. Ma la somma degli angoli *eba* e *bae* è pari al doppio dell'angolo *bae*, dal momento che essi sono uguali tra loro. Infatti il triangolo *aeb* è isoscele perché ha uguali i lati *ea* ed *eb*: dunque l'angolo *bez* è doppio dell'angolo *bae*. Allo stesso modo si dimostrerà che l'angolo *gez* è doppio dell'angolo *gaz*, per cui l'intero angolo *beg* è doppio dell'intero angolo *bag*. Protrarrò di nuovo il segmento *be* fino al punto *d* e traccerò il segmento *dg*, e dimostrerò che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bdg*, perché i lati *ed* e *eg* sono tra loro uguali. Ne consegue che la somma degli angoli *edg* e *egd* è pari al doppio dell'angolo *edg*. L'angolo *beg* è infatti uguale alla somma degli angoli *egd* e *edg*: dunque l'angolo al centro *beg* è doppio dell'angolo alla circonferenza *edg*. Allo stesso modo si dimostrerà che l'angolo *geb* è doppio dell'angolo *gcb*, come si chiarirà qui di seguito. Si tracci di nuovo lo stesso cerchio *abgd* e protraiamo in esso un angolo che giaccia sul lato *dc*; sia dato così l'angolo *gcb* e si fissi l'angolo al centro *beg*. Sull'arco *dg* fisserò un punto *i* a caso e traccerò i segmenti *bi* e *ig*. Dico che senza dubbio l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *big*, come così si dimostra. Dal momento che nel cerchio *abgd* i due segmenti *bi* e *ge* si intersecano a vicenda nel punto *t*, il prodotto di *bt* per *ti* sarà uguale al prodotto di *gt* per *tc*, come si afferma in Euc. III, 35; perciò i segmenti *bt*, *tc*, *cg* e *ti* sono in proporzione tra loro. Infatti come *bt* sta a *tc* così *gt* sta a *ti*. Dal momento che i triangoli *btc* e *gti* hanno l'angolo *btc* uguale all'angolo *gti*, e in proporzione tra loro i lati che sottendono angoli uguali, i triangoli *btc* e *gti* saranno tra loro simili ed equiangoli, per cui l'angolo *tig* è uguale all'angolo *tcb*. Ma è stato visto che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bcg*, perciò anche l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *big*, come volevasi dimostrare. Da ciò evidentemente si conclude che gli angoli che si trovano nello stesso settore della circonferenza sono tra loro uguali». Ho già discusso di questa scoperta in un articolo recentemente pubblicato (ROZZA 2016).

anche alcune lezioni proprie di β. Per quanto riguarda l'*incipit* dell'opera, infatti, la prima mano di S riporta, coerentemente con tutti i discendenti di α, il 1220 (*MCCXX*) come anno di composizione: successivamente, però, il copista aggiunge un'unità e scrive 1221 (*MCCXXI*), che è lezione che accomuna tutti i discendenti di β[28].

Per quanto riguarda il testo della lettera di dedica, mi sembra che nel complesso il codice S si mostri coerente con quanto riportato dagli esemplari del ramo α, salvo però due punti in cui sono registrate alcune lezioni che appartengono soltanto ai manoscritti che discendono da β. Il codice, infatti, riporta nel testo di impianto l'attacco *Rogasti me* tipico dei discendenti di β, in luogo del più semplice *Rogasti* che è attestato, invece, in tutti i discendenti di α. Poche righe più avanti, a proposito dei vari argomenti che compongono il trattato, il codice S riferisce che la sesta distinzione verte sul calcolo dei volumi dei corpi dotati di *longitudine, latitudine et altitudine sive profunditate*, mentre tutti gli altri esemplari che tramandano la lettera riportano la lezione *longitudine, latitudine et profunditate*: fa eccezione soltanto uno dei discendenti del ramo β, il codice C, il quale registra, al pari di S, la lezione *longitudine, latitudine et altitudine sive profunditate*, ma la attribuisce erroneamente all'argomento della terza distinzione. Il fatto che questa particolare lezione non sia presente in nessuno dei numerosi testimoni che discendono da α, ma sia invece in un codice che discende da β, mi induce a sospettare che il copista di S (o del suo antigrafo) si sia servito di un esemplare che recasse al suo interno sia le lezioni di α sia quelle di β.

In generale, comunque, il codice S presenta le stesse lezioni che ho riscontrato nei discendenti di α, sebbene in alcuni punti riporti anche delle lezioni che invece sono riscontrabili soltanto negli apografi di β. Trovo particolarmente significativo, ad esempio, il fatto che all'interno della *Distinctio* I, 3 (7) il codice S ometta le frasi *quia – est* e *secundum – Abbaci* che, come già detto, in F e in L

[28] Probabilmente l'aggiunta di un'unità *I* all'anno *MCCXX* non è da attribuirsi all'attività di un revisore, ma al contrario è da attribuirsi al medesimo copista che ha vergato il testo di impianto: nel codice S, infatti, si legge *MCCXX:I*, con la cifra *I* posta leggermente fuori dal margine. Il copista ha utilizzato lo stesso inchiostro rosso sia per l'anno sia per l'aggiunta, mentre per il testo dell'epistola ha impiegato un inchiostro di colore diverso. È possibile riscontrare l'attività di un secondo revisore per tutto il testo dell'epistola di dedica: sono infatti presenti alcune note a margine che, però, sono state vergate da un'altra mano (più o meno contemporanea) utilizzando un inchiostro nero molto più scuro rispetto a quello utilizzato per la realizzazione del testo di impianto.

sono invece delimitate dalla notazione *vacat* (cfr. *supra*). Nella *Distinctio* I, 3 (13.6), a proposito della tecnica di moltiplicazione a crocetta tra frazioni, tutti i discendenti di α e il codice F riportano la lezione corretta *accipe fractiones unciarum superiorum de perticis inferioribus*, mentre il codice S concorda con i codici CPL nel riportare la lezione errata *accipe fractiones unciarum superiorum de perticis superioribus*. Tale errore si potrebbe spiegare con la presenza di un originario *subterioribus*, vale a dire di una *lectio difficilior* che in F e negli apografi di α sarebbe stata sostituita dalla più semplice lezione *inferioribus*, mentre in S e in CPL avrebbe dato origine ad un vero e proprio errore. Subito dopo, infatti, il testimone S, unitamente alla prima mano di B e alla seconda mano di N, concorda con gli apografi di β nel riportare la lezione *et fractiones unciarum subteriorum de perticis superioribus*, contro la seconda mano di B, che corregge deliberatamente *subteriorum* in *inferiorum*, e tutti gli altri manoscritti che, invece, riportano la lezione errata *stariorum* in luogo di *subteriorum*[29]. All'interno della *Distinctio* II, 3 (4.3), tutti gli apografi di α, ad eccezione di S, riportano la lezione *habebis similiter propositum* a conclusione del paragrafo sull'addizione tra radici quadrate, mentre il codice S e gli apografi di β tramandano la lezione *habebis similiter optatum*. Infine, in *Distinctio* III, I, 2, tutti i manoscritti che discendono da α riportano, come titolo del secondo paragrafo della terza distinzione, la lezione *Incipit differentia secunda*, mentre il codice S concorda con gli apografi di β nel riportare la lezione *Incipit differentia secunda de mensuratione trigonorum oxigoniorum* (omettendo, però, il termine *oxigoniorum*)[30]. In conclusione, ritengo che il codice S discenda dal ramo α della tradizione manoscritta, ma che in certi punti esibisca alcune lezioni del ramo β.

Dei codici che appartengono alla famiglia α, quattro sembrerebbero discendere da un antigrafo comune che chiamerò γ: si tratta dei codici MVNW, i quali tramandano il testo della *Pratica Geometrie* in una forma compendiata. In altre parole, questi esemplari riportano una versione dell'opera fortemente sintetizzata, in cui, cioè, vengono omesse intere frasi: essi restituiscono, così, un

---

[29] Per il testo completo dell'operazione matematica qui svolta, cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie*, *Distinctio* I, 3 (13.6): *Potes enim aliter de fractionibus unciarum facere, videlicet in principio, antequam incipias multiplicare. Accipe fractiones unciarum superiorum de perticis subterioribus, et fractiones unciarum subteriorum de perticis superioribus.*

[30] Come chiarirò più avanti, la terza mano del codice N aggiunge nel margine sinistro la medesima lezione *Incipit differentia secunda de mensuratione trigonorum oxigoniorum* presente in β.

testo coerente dal punto di vista sintattico, ma non sempre corretto nei contenuti[31]. Eliminato il codice W, il quale è esplicitamente *descriptus* da V, per quanto riguarda il testo di impianto i tre manoscritti MVN sono praticamente gemelli, senza tuttavia essere del tutto identici: sebbene, infatti, il codice M sia di poco più antico rispetto a V e N, esso non può essere considerato l'antigrafo di nessuno dei due, perché in un punto presenta l'omissione di una lezione che, invece, risulta regolarmente riportata nel testo di impianto sia del manoscritto vaticano, sia di quello parigino: all'interno, infatti, della *Distinctio* I, 2 (9), i codici V e N accolgono nel testo di impianto la lezione *et sic habebis in summa stariora 55 et panora 4 et soldos 9* contro tutti gli altri manoscritti, che invece tramandano *et sic habebis pro quesita multiplicatione stariora 55 et panora 4 et soldos* 9, e contro il codice M, che invece la omette del tutto[32].

Ora, mentre l'esemplare M risulta essere quasi totalmente privo di *marginalia*, V ed N presentano un interessante apparato di note marginali. Per quel che concerne il codice V, in esso si riscontra la presenza di una mano cronologicamente successiva a quella che ha vergato il testo di impianto, che reintegra, nei margini, le lezioni che risultano essere state oggetto di compendio, ma essa si ferma alla fine della prima distinzione, sicché, a partire dalla seconda, il codice non presenta integrazioni marginali. N, invece, appare riccamente integrato, per tutta la sua estensione, da abbondanti note attribuibili a mani cronologicamente successive a quella che ha vergato il testo di impianto, le quali reintegrano, nei margini, le lezioni che nel testo di impianto risultano essere state

[31] L'attività di compendio che si registra nei codici MVNW consiste, essenzialmente, in una sintesi ragionata del testo di partenza della *Pratica Geometrie* secondo la lezione del ramo α. I quattro esemplari rivelano, nel testo di impianto, le medesime scelte di compendio, ed è per questo motivo che ipotizzo la discendenza da un unico antigrafo. Per fare un esempio, in *Distinctio* I, 3 (9.1), tutti i testimoni riportano, come risultato della moltiplicazione di 11 once per 12 once, il valore di $\frac{132}{324}$ denari, perché 11 once per 12 once danno come risultato 132 once, che corrispondono a $\frac{132}{324}$ denari. Tutti i codici che tramandano l'opera spiegano questa equivalenza tra once e denari dicendo che *ex uncia multiplicata in unciam provenit* $\frac{1}{324}$ *unius denarii*, mentre i manoscritti MVNW omettono questa lezione, probabilmente perché non strettamente essenziale alla comprensibilità della trattazione. Del rapporto di equivalenza tra once e denari, infatti, l'autore aveva già parlato, precedentemente, nell'Introduzione alla *Pratica Geometrie.*

[32] La seconda mano di N, poi, espunge la lezione *in summa* e aggiunge, nel margine destro, la frase *pro quesita multiplicatione*.

oggetto di compendio[33]. È probabile che le varie mani, che si sono avvicendate nel tempo su questo manoscritto, abbiano attinto le loro integrazioni da esemplari diversi. Ciò spiegherebbe, a mio avviso, l'origine talvolta problematica delle note marginali di N, le quali in alcuni casi sembrano dipendere dal ramo α della tradizione, mentre in altri casi rivelano una discendenza da β.

Per fare un esempio, nei margini del f. 1r del codice N, contenente l'epistola di dedica, non compare alcuna integrazione che sia estranea ad α. In *Distinctio* III, I, 2, però, il codice N, riporta nel testo di impianto la lezione *Incipit differentia secunda* tipica dei discendenti di α, mentre una mano cronologicamente successiva aggiunge, nel margine sinistro, la lezione *Incipit differentia secunda de mensuratione trigonorum oxigoniorum*, che è comune ai soli discendenti di β e al codice S.

All'interno della *Distinctio* III, I, 3 (13.3), infine, a proposito del triangolo *abg* tutti i discendenti di α riportano per il lato *bg* una lunghezza di 7 unità, mentre gli apografi di β e il codice S riportano per errore una lunghezza di 11 unità: il codice N registra, nel testo di impianto, la lezione *7* comune ai discendenti di α, ma una mano cronologicamente successiva interviene espungendo *7* e aggiungendo, nel margine sinistro, la lezione errata *11*, che invece è comune ai codici FCPL[34].

Dall'esame che ho condotto sui due testimoni M e V, è risultato che la seconda mano di V aggiunge, nei margini del testo della prima distinzione, le stesse lezioni integrate da N, utilizzando gli stessi espedienti grafici e commettendo, talvolta, gli stessi errori: all'interno della *Distinctio* I, 3 (9), ad esempio, la seconda mano di V, al pari della seconda mano di N, commette l'errore di aggiungere, nel margine inferiore, una porzione di testo che in realtà era già presente nel testo di impianto e che, dunque, non necessitava di essere integrata: si tratta della lezione *servabis 7 in manu, et fractiones servabis in tabula vel in corde. Et multiplicabis uncias 11 in pedes 5, et uncias 12 in pedes 4 in*

[33] Ho attualmente individuato tre mani, le quali in momenti diversi intervengono sul codice per apportare correzioni e aggiunte marginali: N^2 interviene sui ff. 1r-22v, mentre N^3 interviene sui ff. 23r-31v e N^4, infine, interviene sul manoscritto a partire dal f. 32r.

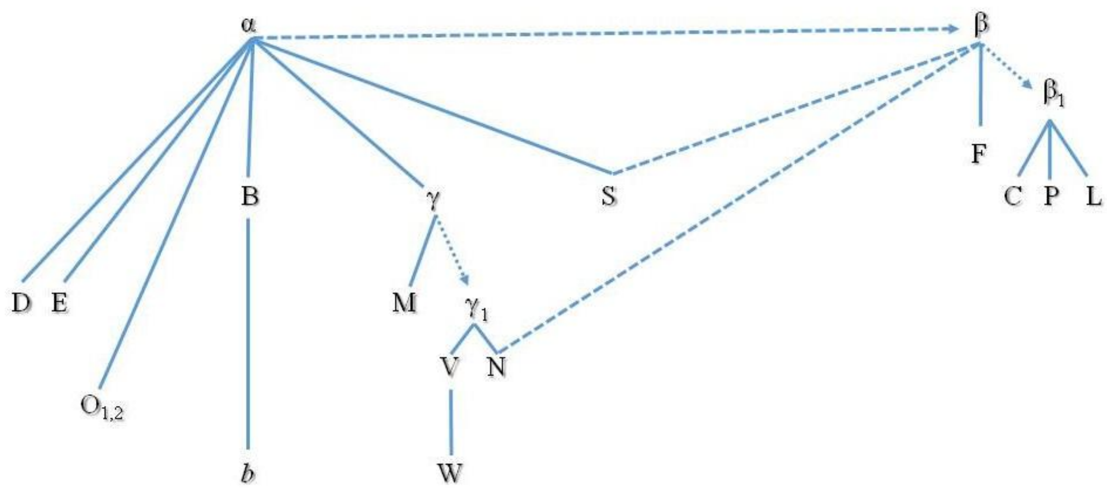
[34] Dal momento che poco più avanti in questo passo tutti i testimoni concordano nel riportare l'espressione *bg, scilicet 7*, la lezione di α è da preferire rispetto a quella di β. Per questo motivo la mano che nel codice N ha cambiato il valore 7 nel valore 11 non può aver agito *ope ingenii* ma, piuttosto, deve aver trovato tale valore in un esemplare che aveva a disposizione.

cruce. Et addes has duas multiplicationes cum 7 servatis: erunt 110, que sunt $\frac{me}{18}$ *unius denarii* che, in entrambi gli esemplari, risulta essere integrata nel margine inferiore del f. 8r. Nel codice V, però, questa integrazione è stata poi rimossa, in modo piuttosto antiestetico, attraverso la sovrapposizione di quattro linee oblique. Dato che tale cancellazione non risulta essere in N, questo rappresenta uno dei motivi per i quali escludo la possibilità che il codice parigino dipenda dall'urbinate per le sue integrazioni.

A mio avviso, dunque, è possibile che le comuni note a margine presenti in V e in N, cioè almeno fino alla fine della prima distinzione, provengano da una fase di γ più avanzata rispetto a quella cui aveva attinto il codice M. Dato che, infatti, il codice M non presenta integrazioni marginali, mi sembra plausibile che il suo copista abbia tratto la sua copia da γ, quando tale esemplare non presentava ancora nessuna integrazione. Relativamente a V e ad N, invece, le integrazioni al testo base della prima distinzione, per quanto siano state apposte da mani cronologicamente successive a quelle che hanno vergato il testo di impianto, sembrano attingere da una fonte comune, utilizzando gli stessi espedienti grafici e, cosa ben più importante, commettendo gli stessi errori. Tale fonte comune mi pare che si possa identificare con una fase rivista di γ, che potremmo chiamare γ_1: essa deve aver funto da antigrafo delle note marginali presenti nei codici V ed N, almeno fino alla conclusione della prima distinzione. A partire dalla seconda distinzione, invece, la questione si fa più incerta, perché il fatto di non sapere con sicurezza cos'era contenuto in γ, ed in particolare nella sua fase γ_1, non permette di stabilire se le integrazioni di N provengano tutte da un unico codice o, piuttosto, derivino dal confronto operato su esemplari differenti. Tuttavia, il fatto che su N agiscano più mani, suggerisce l'ipotesi che il codice sia appartenuto a diversi proprietari i quali, in momenti cronologicamente differenti, avrebbero integrato le lezioni, che in N risultavano omesse o compendiate, servendosi a tale scopo di diversi manoscritti, almeno uno dei quali proveniente dal ramo β della tradizione, oppure contaminato[35].

[35] Non si può escludere, però, la possibilità che il codice γ_1 presentasse note marginali per una porzione più ampia, se non addirittura per tutta la sua estensione, e che, per una ragione qualsiasi, la seconda mano di V si sia fermata alla fine della prima distinzione. Purtroppo è attualmente possibile ricostruire il testo di γ_1 soltanto sulla base del consenso di V ed N, vale a dire fino alla fine della prima distinzione. In questa porzione, i due manoscritti non presentano elementi probanti di un'avvenuta contaminazione: l'unico indizio che ho potuto rilevare, infatti, è in

In conclusione, la rappresentazione stemmatica di quelli che potrebbero essere i rapporti tra i manoscritti che tramandano la *Pratica Geometrie*, così come risulta da questa mia prima indagine, potrebbe essere la seguente:



Da quanto emerge dalle argomentazioni precedenti, tutta la tradizione manoscritta sembra fare capo due esemplari α e β, i quali differiscono tra loro principalmente per la lettera di dedica, ma anche per poche altre differenze riscontrabili all'interno dell'opera.

Da α discendono, indipendentemente l'uno dall'altro, la maggior parte dei manoscritti noti, ovvero: il codice B, da cui è stata tratta l'edizione a stampa del Boncompagni (*b*); l'esemplare ibrido S, il quale talvolta esibisce le lezioni di β; il testimone D, dalla lettura piuttosto difficoltosa; il codice E, che si presenta con numerose aggiunte attribuibili a più mani; i due ottoboniani O_1 e O_2, i quali nascono dalla scissione di un unico codice in due volumi; infine, la copia perduta γ, la quale doveva riportare una versione compendiata dell'opera. Da γ, poi, discendono, i codici MVNW, i quali concordano tra loro nell'esibire le medesime scelte di compendio all'interno del testo di impianto: di questi, i testimoni MVN

Distinctio I, 3 (14), dove l'autore spiega in che modo debba essere eseguita la moltiplicazione di 13 pertiche e 2 piedi per 21 pertiche e 3 piedi. Nel moltiplicare i 2 piedi per i 3 piedi, il matematico ottiene un risultato di 6 piedi, che corrispondono a una pertica: a questo punto, la prima mano di V e la prima mano di N concordano con i discendenti di α nel riportare, all'interno del testo di impianto, la lezione *retines itaque ipsum 1 in manu*, mentre la seconda mano di V e la seconda mano di N aggiungono, nel margine, la lezione *retinens itaque ipsum 1 in manu*, che è comune ai discendenti di β. È evidente che tale annotazione marginale, essendo di origine poligenetica, non può essere utilizzata come prova del fatto che γ_1 sia stato contaminato: pertanto, per il codice V e per l'antigrafo γ_1 non vi sono elementi sufficienti a stabilire se vi sia stata, o meno, contaminazione.

sono indipendenti tra loro, mentre il testimone W nasce come copia diretta di V. Per quanto riguarda i codici V ed N, in essi sono state riscontrate numerose note marginali atte a reintegrare le lezioni che nel testo di impianto sono state oggetto di compendio. La concordanza non solo in lezioni, ma anche in errori di queste integrazioni, lascia intendere che esse siano state attinte da una fase rivista di γ, qui indicata con γ_1. A differenza però di V, che appare integrato soltanto fino alla conclusione della prima distinzione, N presenta note marginali per tutta la sua estensione: di queste, alcune sembrano dipendere dal ramo α della tradizione, mentre altre sembrano dipendere dal ramo β. A mio avviso, è plausibile che nel tempo siano stati operati più confronti del codice N su esemplari diversi, almeno uno dei quali proveniente dal ramo β della tradizione.

Da β discendono, indipendentemente l'uno dall'altro, i codici FCPL, dei quali il più antico, F, non sempre esibisce le stesse lezioni dei codici CPL, ma in alcuni punti sembra essere influenzato da α. A differenza, infatti, dei codici CPL, i quali si interrompono tutti alla settima distinzione con la frase *venient cubita* $\frac{1}{4}$ *68 pro altitudine oq* (corrispondente a Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 206 Boncompagni), l'esemplare F prosegue fino a comprendere l'ottava distinzione nella sua interezza. Sulla base di ciò, è probabile che β abbia inizialmente esibito il testo completo della *Pratica Geometrie* e che, in un momento cronologicamente successivo, abbia perso i suoi ultimi fogli forse a causa di un guasto meccanico. Altro caso in cui F diverge dai codici CPL è rappresentato dalla presenza, in questi ultimi, di un ampio brano corredato di figure che, invece, manca del tutto in F e negli esemplari che discendono da α. All'interno dello *stemma codicum* si indica con β_1 l'antigrafo dei codici CPL, in cui risulta essersi già verificata la perdita totale degli ultimi fogli e l'inserimento di detto brano.

Il problema dell'archetipo.

In passato ho ipotizzato che nessuno dei testimoni noti della *Pratica Geometrie* potesse essere copia diretta dell'originale autografo dell'autore: la presenza di alcuni errori che non mi sembravano autoriali, infatti, mi induceva a credere che questi codici discendessero da un archetipo φ collocabile tra l'originale e le copie che ci sono pervenute (ROZZA 2015[2]). L'esempio più significativo era costituito da un brano della *Distinctio* I, 3 (17.2), che in tutti gli esemplari da me collazionati reca un errore di calcolo: l'autore sta qui spiegando come si moltiplichino tra loro a crocetta le seguenti due misure lineari, espresse in pertiche e nei suoi sottomultipli: 16 pertiche, 1 piede e 10 once, per 43 pertiche e 14 once e mezzo, che corrispondono, nell'espressione grafica in uso a quell'epoca, a $\frac{2\ 3\ 1}{6\ 6\ 6}$ 16 pertiche per $\frac{5\ 4\ 0}{6\ 6\ 6}$ 43 pertiche [36] . Nell'eseguire l'operazione di moltiplicazione a crocetta secondo il metodo già discusso nel *Liber Abaci* [37] , l'autore, dopo aver moltiplicato 2 e 5 prima tra loro e poi progressivamente per tutte le altre cifre, passava a moltiplicare anche 3 e 4 secondo lo stesso criterio[38]. La tecnica illustrata prevedeva che, in seguito alle moltiplicazioni prima di 3 per 4, poi di 3 per 0 e, infine, di 4 per 1, venissero eseguite le moltiplicazioni di 3 per 43 e di 4 per 16; in realtà, però, tutti i testimoni riportano la lezione *multiplicabis 4 per 43*, che non ha senso[39]. Dal momento che i manoscritti presentano, in questo punto, il medesimo guasto, in passato ho ipotizzato che l'errore fosse da attribuire ad un archetipo, dal quale sarebbe discesa tutta la tradizione manoscritta dell'opera[40].

In realtà, la lezione *multiplicabis 4 per 43*, per quanto errata, potrebbe essere autoriale. È plausibile, infatti, che l'autore abbia eseguito i suoi calcoli a

[36] Il numero $\frac{2\,3\,1}{6\,6\,6}$ 16, che corrisponde esattamente a 16 pertiche, 1 piede e 10 once, va letto da destra verso sinistra secondo il seguente criterio: 16 sono le pertiche da moltiplicare, mentre le tre cifre poste al di sopra della linea di frazione equivalgono alla conversione, in pertiche, di 1 piede e 10 once. Una pertica, infatti, equivale a sei piedi, mentre un piede corrisponde a tre once. Pertanto, il piede qui moltiplicato corrisponde a $\frac{1}{6}$ della pertica, mentre le 10 once equivalgono a 3 piedi e $\frac{1}{3}$, ossia a $\frac{3}{6}$ della pertica e $\frac{2}{6}$. Il numero $\frac{5\,4\,0}{6\,6\,6}$ 43 corrisponde esattamente a 43 pertiche e 14 once e mezzo e va letto anch'esso da destra verso sinistra secondo lo stesso procedimento. Per ulteriori notizie sull'utilizzo delle frazioni nell'opera di Fibonacci, rimando al recente contributo di MOYON-SPESSIER 2015.

[37] Nel capitolo del *Liber Abaci* dedicato alla moltiplicazione, Leonardo Pisano illustra in che modo sia possibile moltiplicare tra loro diverse quantità (Fibonacci, *Liber Abaci*, pp. 7-22: 19). Molto utile, sull'argomento, il recente contributo di CAROTENUTO 2013, pp. 185-186.

[38] È lo stesso Fibonacci a parlare di "cifre" a proposito delle pertiche, dei piedi e delle once: cfr. *Distinctio* I, 3 (11.1): *et sic studeas semper cum zefiris supplere gradus laterum multiplicantium, ut quot sunt gradus in uno latere, tot sint in alio. Dicimus enim primum gradum uncias, secundum pedes, tertium perticas*, in cui il termine *gradus* indica esattamente il valore della cifra (ROZZA 2015[1], pp. 88-90).

[39] La lezione corretta è senza dubbio *multiplicabis 3 per 43*.

[40] Fa eccezione solo O_1, che riporta la lezione *multiplicabis 1 per 43*. È evidente che qui il copista, per sua distrazione o perché tenta di correggere la lezione guasta presente nel suo antigrafo, commette a sua volta un errore, in quanto la lezione *unum* non è assolutamente corretta. Tale errore si spiega, a mio avviso, col fatto che il sistema di moltiplicazione a crocetta preveda, a un certo punto, che la cifra 1 venga moltiplicata per 43: ciò avviene, infatti, più avanti nel testo della *Pratica Geometrie*, quando si dice *deinde multiplicabis 1 per 43 et 0 per 16* (cfr. ROZZA 2015[2]).

parte e che, all'atto di riportare in bella copia il procedimento matematico, abbia commesso un errore di distrazione, registrando *4* in luogo di *3*. D'altra parte, nella *Pratica Geometrie* non mancano casi in cui Fibonacci sembri incappare in qualche banale svista, per quanto ciò avvenga piuttosto di rado. Uno dei casi più interessanti è rappresentato dal passo riportato all'interno della *Distinctio* I, 3 (2), dove l'autore spiega in che modo si calcoli l'area di un rettangolo la cui base misura 12 pertiche e 1 piede, e la cui altezza misura 25 pertiche e 2 piedi:

> Se vuoi moltiplicare 12 pertiche e 1 piede per 25 pertiche e 2 piedi, moltiplica prima 12 pertiche per 25 pertiche: il risultato sarà pari a 54 panori e 9 soldi. Trattieni poi i panori nella mano destra (*retineas panora in manu dextra*) e i soldi nella mano sinistra. Moltiplica ora l'un piede per le 25 pertiche: il risultato sarà pari a 12 soldi e mezzo, che devi aggiungere ai 9 soldi di prima: si avranno 21 soldi, da conservare nella mano sinistra, e 6 denari, da tenere con i piedi[41].

L'espressione *retinere in manu* viene usata dal matematico per indicare l'operazione di trattenere un dato numerico mediante l'ausilio delle mani. Nonostante il Venerabile Beda sia stato il primo a fornire una descrizione dettagliata di questo procedimento, esso risale già a Plauto[42]. Nel primo capitolo del *De temporum ratione*, dal titolo *Tractatus de computo, vel loquela per gestum digitorum*, Beda non solo spiegava al lettore in che modo fosse possibile contare con le mani, ma introduceva anche un'importante novità, ossia l'applicazione di questa tecnica al calcolo del tempo[43]: a partire da questo momento, il metodo entrò a far parte degli *argumenta* di epoca carolingia e venne, infine, utilizzato nei secoli XI e XII per il computo ecclesiastico[44]. Trattandosi di una tecnica particolarmente versatile, non era insolito che venisse adoperata anche per eseguire calcoli economici, o comunque con finalità pratiche: lo stesso Fibonacci

---

[41] Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* I, 3 (2.1): *Si vis multiplicare perticas 12 et pedem 1 per perticas 25 et pedes 2, multiplica primum perticas 12 per perticas 25: erunt panora 54 et soldi 9. Retineas panora in manu dextra et soldos in manu sinistra. Deinde multiplica pedem 1 per perticas 25: erunt soldi* $\frac{1}{2}$ *12, quos adde cum soldis 9, erunt in manu sinistra soldi 21, et cum pedibus retineas denarios 6, qui super sunt super illos soldos 21.*

[42] Come indicato da PLAZA PICÓN-GONZÁLEZ MARRERO 2006, pp. 116-118, tracce di questo sistema sono presenti nella letteratura latina già a partire da Plaut. *Mil*. 2, 251.

[43] Il *De temporum ratione* è stato edito da JONES 1977. Il manoscritto 3055 della Bibliothèque Municipale di Rouen, conosciuto anche come ms. Leber 1157 (XIII secolo), riporta ai ff. 3v/4r una raffigurazione del sistema di computo digitale secondo Beda il Venerabile. L'immagine è stata pubblicata da TRAVAINI 1998, p. 332. Il manoscritto è stato recensito da OMONT 1888, p. 79.

[44] PLAZA PICÓN - GONZÁLEZ MARRERO 2006, p. 120.

ne parlava diffusamente all'interno del *Liber Abaci*, e ciò fa pensare che nel XIII secolo il sistema veniva ancora ampiamente utilizzato[45]. Dal passo preso in esame, però, risulta chiaro che nel Medioevo era possibile far di conto non solo attraverso gli arti superiori, ma anche attraverso gli arti inferiori, i piedi:

> I segni dei piedi sono i seguenti: la posizione della punta del piede sinistro sulla punta del piede destro indica 1; la posizione della punta del piede sinistro sul collo del piede destro indica 2; il tacco del calcagno del piede destro con la punta del piede sinistro indica 3; la posizione del piede sinistro dopo il destro, insieme alla punta del piede destro dalla parte esterna con la punta del sinistro, indica 4; la punta del piede sinistro col collo del piede destro indica 5. Gli altri cinque segni si ottengono nel medesimo ordine col piede destro che tocca il sinistro. L'undicesimo segno si ottiene ponendo il calcagno del piede destro sul collo del piede sinistro. Non abbiamo bisogno di più segni, dal momento che 12 denari equivalgono a un soldo, il quale soldo si conserva con la mano sinistra. Dei segni delle mani non occorre dir nulla, giacché li conoscono tutti coloro che conoscono l'Abbaco[46].

L'utilizzo dei piedi, al pari di quello delle mani, costituiva sicuramente un valido sistema per memorizzare i dati durante l'esecuzione di vari calcoli, e in particolare di calcoli economici. È evidente che attraverso la posizione dei piedi venivano memorizzate le quantità più piccole, costituite dai denari, e che per questo motivo non erano necessarie più di undici posizioni, perché dodici denari equivalevano appunto a un soldo, *qui soldus retinetur in manu sinistra.* Il Pisano

[45] Fibonacci descrive il procedimento all'interno del *Liber Abaci*, p. 5. Uno dei testimoni più antichi di quest'opera è il manoscritto I. 72 Sup. della Biblioteca Ambrosiana di Milano (XIII secolo), il quale tramanda l'opera nella sua interezza, ma non presenta l'Epistola di dedica a Michele Scoto. Precedono la copia, su due fogli con numerazione autonoma, accurati disegni a colori che riproducono la tecnica di rappresentazione delle cifre sulle dita della mano (cfr. CAIANIELLO 2012, p. 87). Altro esemplare del *Liber Abaci* che reca una raffigurazione del sistema di computo digitale è il manoscritto L.IV.20 della Biblioteca degli Intronati di Siena (XIII-XIV secolo). L'immagine, che occupa il f. 3r del codice, è stata pubblicata a colori da FRANCI 2002, p. 312. Per ulteriori informazioni sul manoscritto, rimando a CAIANIELLO 2012, p. 88, e a KLANGE ADDABBO 2014. Aggiungo, inoltre, che alcuni documenti provano che nei secoli XIV e XV si faceva ancora uso di questo sistema: cfr. TRAVAINI 1998, p. 331.

[46] Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* I, 3 (2.2): *Signa vero pedum sunt hec: positio puncte pedis sinistri super punctam dextri signat 1; positio puncte sinistri super floccam dextri 2; tactus calcanei dextri cum puncta pedis sinistri 3; ducere pedem sinistrum post dextrum, et tangere punctam pedis dextri ab exteriori parte cum puncta sinistri: 4; ab eadem parte tangere cum puncta pedis sinistri nodum sive floccam dextri: 5. Alia quinque signa sunt per ordinem eodem modo cum pede dextro tangendo sinistrum. Undecimum vero signum est, cum ponitur calcaneum pedis dextri super floccam pedis sinistri. Pluribus signis non indigemus, cum denarii 12 faciant unum soldum, qui soldus retinetur in manu sinistra. De signis manuum nil dicendum est, cum ipsa sciant omnes qui sciunt Abbacum.*

elenca perciò soltanto undici posizioni, ma lascia intendere che ne siano esistite altre che, però, non riteneva necessario menzionare.

Dopo aver illustrato in che modo sia possibile "tenere" con i piedi un dato numerico, Fibonacci ritorna sull'esercizio per completare la sua spiegazione:

> Ritorniamo dunque alla nostra spiegazione: moltiplicherai 2 piedi per 12 pertiche: il risultato sarà pari a 12 soldi, i quali, sommati ai 21 soldi e mezzo conservati, danno i totale 33 soldi e mezzo. Allo stesso modo moltiplicherai 1 piede per 2 piedi: il risultato sarà di 2 denari, che devi aggiungere ai 6 denari che sono tenuti attraverso i piedi: si otterrà 8 denari, che devi ancora conservare attraverso i piedi. In questo modo avremo in totale 54 panori, 33 soldi e 8 denari, ovvero 4 stariori, 8 panori e 8 denari quale risultato della moltiplicazione richiesta[47],

e subito salta all'occhio un'evidente anomalia. Prima della digressione sui *signa pedum*, l'autore aveva sommato 12 soldi e mezzo a 9 soldi, ottenendo un risultato di 21 soldi e mezzo, corrispondenti a 21 soldi e 6 denari[48]. Dopo la digressione, Leonardo ha ripreso la spiegazione da dove l'aveva interrotta: sembra, però, che in un primo momento abbia dimenticato di aver convertito il mezzo soldo in denari (motivo per il quale si era soffermato sui *signa pedum*!), tant'è che lo addiziona, insieme con i 21 soldi che sta ancora trattenendo con la mano sinistra, ai 12 soldi che ha appena ottenuto moltiplicando 2 piedi per 12 pertiche, pervenendo a un risultato di 33 soldi e mezzo. Nel passaggio successivo si sarebbe ricordato, in qualche modo, che quel mezzo soldo che si è portato dietro nell'addizione, in realtà lo aveva precedentemente convertito in denari: perciò lo addiziona, già convertito, ai 2 denari che ha appena ottenuto moltiplicando 1 piede per 2 piedi, pervenendo a un risultato di 8 denari. Da questo esempio si evince che, in alcune circostanze, Fibonacci può commettere degli errori di distrazione: ne consegue, perciò, che l'esistenza di un archetipo φ da cui discendano le copie α

[47] Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* I, 3 (2.3): *Unde revertamur ad propositum: multiplicabis iterum pedes 2 per perticas 12: erunt soldi 12, quibus additis cum soldis* $\frac{1}{2}$ *21 servatis, faciunt soldos* $\frac{1}{2}$ *33. Item multiplicabis pedem 1 in pedes 2: erunt denarii 2, quos adde cum denariis 6 qui servantur in pedibus: erunt denarii 8, quos serva iterum cum pedibus. Et sic habebimus panora 54 et soldos 33 et denarios 8, scilicet stariora 4 et panora 8 et denarios 8 pro quesita multiplicatione.*

[48] Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* I, 3 (2.1): *erunt soldi* $\frac{1}{2}$ *12, quos adde cum soldis 9, erunt in manu sinistra soldi 21, et cum pedibus retineas denarios 6, qui super sunt super illos soldos 21.*

e β può essere solo ipotizzata, ma non confermata, per lo meno non sulla base delle contraddizioni talvolta riscontrabili all'interno del testo.

> «La formazione e il decadimento dei più vasti imperi che furono nel mondo dai remoti tempi fino ai dì nostri, i gloriosi fatti delle più illustri nazioni antiche e moderne, i mutamenti d'usi, di costumi, d'istituzioni, sono cose utilissime a sapersi e degnissime delle considerazioni d'un filosofo. Tuttavia non meno importante è il ben conoscere lo stato degli scientifici studi in diversi tempi e in diverse contrade; giacché, secondo il sapientissimo detto di Bacone, la storia delle scienze è l'occhio della storia del mondo».
>
> *B.L. Boncompagni*

Verso un'edizione critica della *Pratica Geometrie*.

Quando, nel 1862, Baldassarre Boncompagni diede alle stampe quella che a buon diritto può essere definita l'*editio princeps* della *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano, di fatto egli pubblicò la lezione del codice Urb. Lat. 292, attualmente custodito a Roma presso la Biblioteca Apostolica Vaticana. L'esemplare, come si è detto, appartiene al ramo α della tradizione, dal quale discende la maggior parte dei testimoni a noi noti. Esistono, però, alcuni codici che tramandano una versione dell'opera a tratti divergente da quella riportata all'interno degli apografi di α. Questi testimoni discendono senza alcun dubbio da un ramo alternativo della tradizione manoscritta, da me indicato con β. Ora, se ipotizziamo l'esistenza di un archetipo φ da collocarsi tra l'originale e le copie che ci sono pervenute, viene da sè che al suo interno dovevano essere riportate sia le lezioni del ramo α, sia quelle del ramo β. Lo *status* della tradizione manoscritta non contraddice questa possibilità, tuttavia le differenze tra il testo esibito dagli apografi di α e quello esibito dagli apografi di β sono così nette, che mi sembra difficile che esse dipendano da un antigrafo che le contenesse tutte[1]. Ritengo, invece, assai più probabile che la copia α sia discesa direttamente dalla prima stesura dell'opera, e che su questo testo, in un momento successivo, l'autore abbia apposto alcune importanti modifiche, documentate dagli apografi di β. In altre parole, se eliminamo il problema dell'archetipo ed accettiamo come autoriali sia le lezioni di α sia quelle di β, diventa possibile ipotizzare che i due rami coincidano con due diversi momenti della stesura della *Pratica Geometrie*, per cui

[1] L'unico esemplare, tra quelli che ci sono pervenuti, che rechi traccia nell'epistola di dedica di entrambe le versioni, è il codice S.

a una prima redazione dell'opera, identificabile con la fase α, potrebbe essere subentrata una fase β nella quale l'autore avrebbe introdotto all'interno del testo alcune importanti innovazioni. Per quanto, però, a tramandarci l'ultimo stadio per noi documentabile dell'evoluzione redazionale della *Pratica Geometrie* sia, come si è detto, il ramo β, non direi che l'edizione critica di questo testo possa essere correttamente su di esso fondata. Oltre al dato che alcune lezioni di β sono palesemente corrotte, c'è da dire che, in certi casi, l'intera tradizione manoscritta concorda nel riportare dei veri e propri errori[2]. Alla luce di ciò, ho motivo di credere che il Fibonacci sia intervenuto sul testo di β solo desultoriamente, senza cioè il preciso intento di curare una nuova edizione riveduta e corretta del suo trattato. Ne consegue che, talvolta, le lezioni esibite dai discendenti di questa famiglia necessitano di essere sanate, o per congettura o con l'ausilio degli altri codici[3].

Il problema della cronologia.

Una delle questioni più dibattute dagli studiosi consiste nel fatto che le divergenze tra i codici, che ho ricondotto ai due rami α e β della tradizione manoscritta, non permettono di stabilire con sicurezza quale ne sia effettivamente stato l'anno di composizione: stando, infatti, alle lezioni dei manoscritti che discendono da α, l'opera fu composta nel 1220; stando, invece, alle lezioni dei testimoni che dipendono da β, l'opera fu composta nel 1221. La datazione è resa ancora più incerta dal fatto che il calendario che era in uso a Pisa nel Duecento era

[2] Per fare qualche esempio, all'interno dell'epistola di dedica i discendenti di α riportano, a proposito dell'argomento della terza distinzione, la lezione corretta *Tertia de inventione embadorum omnium camporum cuiuscumque forme*, mentre gli apografi di β riportano la lezione errata *Tertia de inventione embadorum omnium corporum cuiuscumque forme que continentur tribus dimensionibus, scilicet longitudine et latitudine sive profunditate*, che non ha senso, dal momento che la terza distinzione verte sul calcolo dell'area delle superfici piane, non sul volume dei solidi (Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 5). Un altro caso abbastanza significativo di come non sempre le lezioni di β siano da preferire a quelle di α, è rappresentato dal passo riportato all'interno della *Distinctio* III, I, 3 (13.3) in cui, a proposito del triangolo *abg*, tutti i discendenti di α, con la sola eccezione del codice S, riportano per il lato *bg* una lunghezza di 7 unità, mentre il codice S concorda con gli apografi di β nel riportare una lunghezza di 11 unità. Il codice N esibisce, nel testo di impianto, la lezione *7* comune ai discendenti di α, ma una mano cronologicamente successiva interviene espungendo *7* e aggiungendo *11* nel margine sinistro. Dal momento che, però, poco più avanti tutti i testimoni concordano nel riportare l'espressione *bg, scilicet 7*, ritengo che in questo caso la lezione di α sia da preferire a quella di β.

[3] Non sempre l'*emendatio ope codicum* è possibile, al contrario, in molti casi l'editore si trova costretto a fare affidamento esclusivamente sul proprio acume e sulla conoscenza dell'*usus scribendi* dell'autore.

molto diverso rispetto a quello in uso presso altre città italiane[4]. Come ha infatti già rilevato Eva Caianiello, «se la data era in stile pisano e compresa fra il 25 marzo ed il 31 dicembre, allora la data corrispondente in stile odierno deve essere ridotta di un anno. Viceversa, se la data, espressa in stile odierno, era compresa fra il 25 marzo ed il 31 dicembre, allora, la sua corrispondente in stile pisano deve essere aumentata di un anno» (CAIANIELLO 2012[1], p. 81). In altre parole, se accogliamo come autentica la lezione tramandata dai discendenti di α, l'anno di composizione dell'opera oscillerà tra il 1219 e il 1220 secondo il calendario pisano; se, viceversa, accogliamo come autentica la lezione riportata dai discendenti di β, sempre secondo quel calendario l'anno di composizione oscillerà tra il 1220 e il 1221[5].

Le divergenze tra le famiglie α e β vanno, però, ben al di là della mera indicazione dell'anno di pubblicazione dell'opera[6]. I due rami, infatti, sembrano non solo tramandare due diverse intestazioni dell'opera, ma perfino due distinte versioni dell'epistola di dedica[7]:

---

[4] Ritengo altamente probabile che il matematico si sia servito del calendario che era in vigore a Pisa nel Duecento per la datazione della *Pratica Geometrie*. Nella sezione introduttiva che segue immediatamente l'epistola, infatti, Fibonacci mostra di avere un'attenzione particolare per la città di Pisa, in quanto decide di spiegare soltanto le unità di misura che erano qui in vigore, pur accennando all'esistenza di altri sistemi di misura.

[5] In base al calendario fiorentino, invece, l'anno di composizione dell'opera oscillerebbe tra il 1220 e il 1221 se accogliamo la lezione dei discendenti di α; oscillerebbe, invece, tra il 1221 e il 1222 se accogliamo la lezione contenuta in β. Per le caratteristiche del calendario pisano e di quello fiorentino, rimando a CAIANIELLO 2012[1], pp. 80-81, che a sua volta cita il contributo ancora utile di CAPPELLI 1983, pp. 8 e ss. Cfr. anche ULIVI 2011, pp. 250-252.

[6] Elisabetta Ulivi ipotizza che il motivo per cui, all'interno della tradizione manoscritta, la cronologia della *Pratica Geometrie* oscilli tra il 1220 e il 1221, possa essere dovuto al fatto che un copista fiorentino abbia deliberatamente modificato l'anno 1221 che leggeva nel suo esemplare di riferimento, per adattarlo alle necessità del calendario di cui faceva uso (ULIVI 2011, p. 251, n. 3). A mio avviso, tale ipotesi non può essere accolta, perché le divergenze tra i due rami α e β della tradizione manoscritta non riguardano soltanto l'anno di pubblicazione dell'opera, ma tutto il testo dell'epistola di dedica.

[7] Qui di seguito sono riportate le due distinte redazioni dell'epistola, così come sono state da me ricostruite sulla base delle lezioni dei manoscritti la tramandano, e in funzione dello *stemma codicum* proposto.

Ramo α

INCIPIT PRATICA GEOMETRIE COMPOSITA A LEONARDO PISANO ANNO MCCXX

Rogasti amice Dominice et Reverende Magister ut tibi librum in Pratica Geometrie conscriberem. Igitur, amicitia tua coactus, tuis precibus condescendens, opus iam dudum inceptum taliter tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometricas et hi qui secundum vulgarem consuetudinem – quasi laicali more – in dimensionibus voluerint operari, super octo huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inveniant documentum. Quarum prima est qualiter latitudines camporum quatuor equales angulos habentium in eorum longitudines triplici modo multiplicentur. Secunda est de quibusdam regulis geometricis et de inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putavi. Tertia de inventione embadorum omnium camporum cuiuscumque forme. Quarta de divisione omnium camporum inter consortes. Quinta de radicibus cubicis inveniendis. Sexta de inventione embadorum omnium corporum cuiuscumque figure que continentur tribus dimensionibus scilicet longitudine, latitudine et profunditate. Septima de inventione longitudinum planitierum et inventione altitudinum rerum elevatarum. Octava de quibusdam subtilitatibus geometricis. Tamen antequam ad harum distinctionum perveniam doctrinam, quedam introductoria necessaria preponenda esse putavi. Ad hec igitur secundum ingenii mei capacitatem perficienda, tue correctionis aggressus fiducia, hoc opus curavi tuo magisterio destinare, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur.

Ramo β

INCIPIT PRATICA GEOMETRIE COMPOSITA A LEONARDO BIGOLLOSIE FILIO BONACCII PISANO IN ANNO MCCXXI

Rogasti me amice Dominice et Reverende Magister ut tibi librum in Pratica Geometrie conscriberm. Igitur, amicitia tua coactus, tuis precibus condescendens, opus iam dudum inceptum taliter tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometricas et hi qui secundum vulgarem consuetudinem – quasi laicali more – in dimensionibus voluerint operari, super octo huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inveniant documentum. Quarum prima est qualiter latitudines camporum quatuor equales angulos habentium in eorum longitudines triplici modo multiplicentur. Secunda est de quibusdam regulis geometricis et de inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putavi. Tertia de inventione embadorum omnium camporum cuiuscumque forme que continentur tribus dimensionibus scilicet longitudine et latitudine sive profunditate. Quarta de divisione omnium camporum inter consortes. Quinta de radicibus cubicis inveniendis. Sexta de inventione embadorum omnium corporum cuiuscumque figure. Septima de inventione longitudinum planitierum et inventione altitudinum rerum elevatarum. Octava de quibusdam subtilitatibus geometricis. Sed antequam ad harum distinctionum perveniam doctrinam, quedam introductoria et necessaria preponenda esse putavi. Ad hec igitur perficienda, tue correctionis congressus fiducia, hoc opus cure magisterioque tuo demandandum duxi, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur.

Come si vede, una delle varianti più significative è costituita dalla conclusione dell'epistola, che nei discendenti di α risulta essere *ad hec igitur secundum ingenii mei capacitatem perficienda, tue correctionis aggressus fiducia, hoc opus curavi tuo magisterio destinare, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur*, mentre nei discendenti di β risulta essere *ad hec igitur perficienda, tue correctionis congressus fiducia, hoc opus cure magisterioque tuo* *demandandum duxi, ut que in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur*. A mio avviso, le divergenze tra il testo esibito dagli apografi di α e quello riportato dagli apografi di β non hanno origine poligenetica, ma rappresentano, come ho già detto, il frutto della volontà dell'autore, il quale, in un momento successivo a quello della prima stesura della lettera, sarebbe intervenuto sull'epistola per apportare alcune modifiche.

Un brano inedito.

Alla fine della *pars quarta* della terza distinzione, corrispondente a p. 107 dell'edizione di Boncompagni[8], il ms. 36 della Biblioteca Lolliniana di Belluno, il ms. Lat. 7223 della Biblioteca Nazionale di Parigi e, infine, il ms. II III 22 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze riportano, rispettivamente ai ff. 80v-81r, 98r-98v, 127r-127v, un ampio brano corredato di figure, al cui interno Fibonacci introduce e dimostra i teoremi n°20 e n°21 del terzo libro degli *Elementi* di Euclide.

Come ho già detto, è ormai accertato che il Pisano abbia conosciuto e utilizzato qualcuna delle traduzioni che, nel corso del XII secolo, furono operate dall'arabo al latino degli *Elementi*[9]: in particolare, sembra assodato che il matematico si sia servito di una traduzione latina che seguisse l'ordine delle proposizioni presentato all'interno dei lavori di Adelardo di Bath, Ermanno di Carinzia e Gerardo da Cremona[10]. Tuttavia, sembrerebbe che questa non fosse l'unica fonte utilizzata[11].

Negli anni 1961 e 1962, John Murdoch scoprì due manoscritti contenenti una traduzione in latino degli *Elementi* di Euclide risalente alla seconda metà del XII secolo e allestita, a partire da un esemplare greco, presso la corte normanna di

---

[8] La terza distinzione, dedicata al calcolo dell'area delle figure piane, è organizzata in cinque parti: *in prima quarum mensurabimus triangulos; in secunda quadrilateros; in tertia multilateros, qui ex rectis lineis constant; in quarta circulos, et eorum portiones, et obliquas figuras insuper, et commixtas ex rectis et curvis lineis; in quinta mensurabimus ipsos campos, qui in ascensione montium iacent*: Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 30 (Boncompagni).

[9] Nel corso del XII secolo furono apprestate tre traduzioni dall'arabo al latino degli *Elementi* di Euclide: la prima traduzione, conosciuta anche come "Versione I", fu realizzata da Adelardo di Bath intorno al 1120 (BUSARD 1983[1]); la seconda traduzione fu messa a punto da Ermanno di Carinzia, attivo tra il 1138 e il 1143 (BUSARD 1967, 1968[2], 1972, 1977); la terza traduzione, infine, fu operata da Gerardo da Cremona nella seconda metà del XII secolo (BUSARD 1983[2]). Accanto a queste tre traduzioni, si conoscono due importanti rielaborazioni della metà e della fine del XII secolo: la prima di esse è conosciuta come "Versione II", perché inizialmente era stata attribuita ad Adelardo di Bath, mentre oggi sappiamo essere stata realizzata da Roberto di Chester (BUSARD-FOLKERTS 1992); la seconda di esse, invece, è conosciuta come "Versione III", e fu probabilmente realizzata da Johannes di Tinemue, che operò a sua volta una rielaborazione della "Versione II" (BUSARD 2001).

[10] FOLKERTS 2004, p. 113: «he was acquainted with another Euclid text which followed the Arabic order of the propositions as shown by the translation of Adelard, Hermann and Gerard».

[11] Si fa qui menzione soltanto delle traduzioni e delle rielaborazioni del testo di Euclide che Fibonacci avrebbe potuto conoscere ed utilizzare, in quanto precedenti alla pubblicazione della *Pratica Geometrie*. Per una disamina approfondita della complessa fortuna degli *Elementi* di Euclide nell'Europa medievale, resta fondamentale il contributo di FOLKERTS 2006, pp. 101 ss. Ancora utile, inoltre, sono i contributi di FOLKERTS 1989 e 2001[2], nonché di BUSARD 1998.

Sicilia[12]. Uno di essi, il ms. Paris, BnF Lat. 7373, ff. 2r-175v, si data al XIII secolo, mentre l'altro, il ms. Firenze, BNC, Conv. Soppr. C I 448, si data al XIV secolo (MURDOCH 1966). A differenza del codice fiorentino, il quale tramanda un testo incompleto che si interrompe alla proposizione 48 del X libro, l'esemplare parigino sembra riportare un testo completo, sebbene tra la fine del XIII e l'inizio del XV libro non presenti, come ci si aspetterebbe, il libro XIV propriamente detto, ma rechi piuttosto una versione compendiata dei libri XIV-XV[13]. Grazie alla meticolosa indagine condotta da Menso Folkerts, oggi possiamo affermare con sicurezza che Fibonacci conobbe ed utilizzò proprio questa traduzione dal greco al latino (FOLKERTS 2004). È altresì probabile che sia stato lo stesso matematico pisano a realizzare il compendio dei libri XIV-XV tramandato all'interno dei ff. 167v-172v dell'esemplare parigino, ma purtroppo non sono stati ancora individuati elementi assolutamente probanti di questa attribuzione[14].

Per quel che concerne, nello specifico, i teoremi 20 e 21 del terzo libro, essi non sono attestati all'interno delle traduzioni arabo-latine operate da Adelardo, da Ermanno e da Gerardo: ciò significa che Fibonacci non ha attinto, per questa parte, a nessuna fonte che potesse essere ricollegata ai tre traduttori. Bisognerà, allora, stabilire se il matematico abbia utilizzato proprio la traduzione greco-latina che è stata realizzata in Sicilia e, eventualmente, in che misura ne sia stato debitore[15].

---

[12] Come ricorda BUSARD 1987, p. 1: «the most important meeting-point of Greek and Latin culture in the twelfth century was the Norman kingdom of Southern Italy and Sicily. Long a part of the Byzantine Empire (until the fall of Syracuse in 878) this region still retained Greek traditions and a numerous Greek-speaking population. It passed under the control of Islam for nearly two hundred years until 1060, when a Norman adventurer captured Messina and was so successful in establishing his power that by 1090 the island became a Norman kingdom in which Greek, Latin, and Arabic civilization live side by side in peace and toleration. These three languages were in current use in the royal charters and registers, as well as in many-tongued Palermo, so that knowledge of more than one of them was a necessity for the officials of the royal court. The production of translations was inevitable in such a cosmopolitan atmosphere, and it was directly encouraged by the Sicilians kings, from Roger to Frederick II and Manfred, as a part of their efforts to foster learning».

[13] L'edizione critica della traduzione latina degli *Elementi* di Euclide realizzata a partire da un esemplare greco, è stata pubblicata da BUSARD 1987.

[14] L'ipotesi è stata avanzata per la prima volta da BUSARD 1987, pp. 112-113.

[15] In riferimento alla terza distinzione della *Pratica Geometrie*, Folkerts ha già rilevato la presenza di numerose citazioni tratte direttamente dall'Euclide greco-latino e, nella fattispecie, dai libri I-III, VI, XII-XIV. Del libro III degli *Elementi*, in particolare, lo studioso ha dimostrato che Fibonacci ha citato il teorema n°27 avendo a disposizione, come testo di riferimento, proprio questa

Per quanto riguarda il teorema III, 20, in base al quale all'interno di un cerchio l'angolo al centro misura il doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco[16], Fibonacci ricalca *verbum de verbo* la stessa definizione presente all'interno dell'Euclide greco-latino. Naturalmente, trattandosi di una dimostrazione geometrica, non è insolito riscontrare una certa conservatività, specie nella formulazione delle definizioni:

Euc. gr.-Lat. III, 20 (Busard p. 81, righi 11-12): In circulo qui ad centrum angulus duplus est eius qui ad periferiam quando eandem periferiam basim habuerint anguli.

Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, IV, (44.1): In circulis, ut in vigesimo theoremate tertii libri habetur, angulus qui ad centrum duplus est eius qui ad periferiam, si eandem basim habuerint anguli.

Il primo passo verso la dimostrazione consiste nel disegnare un cerchio di centro *e*, e nel fissare sulla circonferenza i punti *a*, *b* e *g*, in modo tale che l'angolo al centro *beg* e l'angolo alla circonferenza *bag* insistano entrambi sullo stesso arco *bg*. Il raggio *ae* viene poi prolungato nel punto *z* dividendo, in questo modo, sia l'angolo al centro *beg* sia l'angolo alla circonferenza *bag* in due parti uguali. A tal proposito, non passa inosservata la scelta, compiuta da Leonardo, di utilizzare la stessa terminologia adottata da chi ha tradotto dal greco gli *Elementi*[17]: a mio parere, una simile corrispondenza potrebbe non essere del tutto casuale[18].

Euc. gr.-Lat. III, 20 (Busard p. 81, righi 13-15): Esto circulus *a b g* et ad centrum quidem ipsius angulus esto qui sub *b e g*, ad periferiam vero qui sub *b a g*. Habeant autem eandem periferiam basim *b g*. Dico quoniam duplus est qui sub *b e g* angulus eius qui sub *b a g*.

Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, IV, (44.2): In circulo quidem *abgd* sit ad centrum angulus *beg* super basim *bg*, et ad periferiam sit angulus *bag*: dico angulum *beg* duplum esse angulum *bag*.

---

traduzione: pertanto, esiste la concreta possibilità che il matematico abbia utilizzato questa fonte anche in relazione ai teoremi n°20-21 (FOLKERTS 2004, p. 111).

[16] Euc. III, 20 (Heiberg): Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. Si fa qui riferimento all'edizione di HEIBERG 1883-1916.

[17] L'ipotesi che questa traduzione sia stata allestita da più di una persona, si trova esposta in BUSARD 1987, pp. 1-5.

[18] FOLKERTS 2004, p. 110: «it is not always clear in which places Leonardo reproduces the exact wording of the text he had before him and in which he expresses the content of with his own words. In the majority of cases he appears to paraphrase the text; in no case have I found a definite agreement between Leonardo's text and that of an Arabic-based version. But on the other hand there are several places where Leonardo's wording is very similar to the direct translation from the Greek; in some cases the agreement is so exact that it is not merely probable, but certain, that he knew and used this translation».

All'interno della traduzione greco-latina degli *Elementi* di Euclide, la dimostrazione propriamente detta del teorema avviene in sette passaggi: (1) in primo luogo, si stabilisce che il segmento *ae* e il segmento *eb* sono tra loro uguali, dal momento che ambedue coincidono con i raggi del cerchio *abg*: pertanto, il triangolo *aeb* è isoscele; (2) ne consegue che i due angoli alla base del triangolo *aeb*, ossia l'angolo *eab* e l'angolo *eba*, sono tra loro uguali[19]; (3) la loro somma equivale, perciò, al doppio di uno dei due angoli, ad esempio dell'angolo *eab*; (4) l'angolo esterno *bez* è uguale alla somma degli angoli *eab* e *eba*[20]: (5) per questo motivo, l'angolo *bez* equivale al doppio dell'angolo *eab*; (6) lo stesso procedimento deve essere ripetuto per dimostrare che l'angolo al centro *zeg* è doppio dell'angolo alla circonferenza *eag*: (7) si evince da ciò che l'angolo al centro *bae* è doppio dell'angolo alla circonferenza *bag*. Per quel che concerne, invece, la dimostrazione che Fibonacci dà del teorema all'interno della *Pratica Geometrie*, risulta immediatamente evidente che il Pisano, nonostante utilizzi la stessa procedura sopra illustrata, dispone i vari passaggi seguendo un ordine diverso rispetto a quello utilizzato dall'Euclide greco-latino: innanzitutto, il matematico afferma che (4) l'angolo esterno *bez* è uguale alla somma dei due angoli interni *bae* e *eba*; (3) tuttavia, la somma di questi angoli è pari al doppio della misura dell'angolo *bae*, (2) dal momento che essi sono uguali tra loro; (1) tale uguaglianza è garantita dal fatto che il triangolo *aeb* è isoscele, in quanto ha i lati *ae* ed *eb* uguali; (5) in ragione di ciò, l'angolo *bez* equivale al doppio dell'angolo *eab*; (6) lo stesso procedimento deve essere poi ripetuto per dimostrare che l'angolo al centro *zeg* è doppio dell'angolo alla circonferenza *eag*: (7) da ciò si evince che l'angolo al centro *bae* è doppio dell'angolo alla circonferenza *bag*.

[19] Ciò è vero sulla base del quinto teorema del primo libro degli *Elementi*, che stabilisce che gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono tra loro uguali: Euc. I, 5 (Heiberg): Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

[20] Ciò è vero sulla base del teorema n°32 del primo libro degli *Elementi*, che stabilisce che, in un dato triangolo, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli opposti interni: Euc. I, 32 (Heiberg): Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Euc. gr.-Lat. III, 20 (Busard p. 81, righi 16-21): Copulata enim recta *a e* protrahatur in punctum *z*. Quoniam ergo equalis est recta *e a* recte *e b*, equalis et angulus qui sub *e a b* ei qui sub *e b a*. Anguli ergo qui sub *e a b* et *e b a* eius qui sub *e a b* dupli sunt. Equalis autem qui sub *b e z* eis qui sub *e a b* et *e b a*. Et ille ergo qui sub *b e z* eius qui sub *e a b* est duplus. Propter eadem ergo et qui sub *z e g* eius qui sub *e a g* est duplus. Totus ergo qui sub *b e g* tocius qui sub *b a g* est duplus.

Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, IV, (44.3-4): A puncto quidem *a* per *e* centrum ducatur recta *aez*: erit quidem trigoni *aeb* unum latus eductum quod est *ae*, quare angulus qui sub *bez* equalis est duobus interioribus et oppositis qui sub *eba* et *bae*. Sed anguli qui sub *eba* et *bae* dupli sunt eius qui sub *bae*, cum sint sibi invicem equales. Est enim trigonum *aeb* equicrurium equalia habens latera *ea* et *eb*: ergo angulus qui sub *bez* duplus est eius qui sub *bae*. Similiter ostendetur angulum *gez* duplum esse eius qui sub *gaz*, quare totus angulus *beg* duplus est totius anguli *bag*.

L'Euclide greco-latino completa la dimostrazione prolungando il segmento *de* nel punto *i*, posto sull'arco di circonferenza *ba*, e verificando poi che l'angolo al centro *ieg* misuri il doppio dell'angolo alla circonferenza *idg*, che insiste sul medesimo arco *ig*. Fibonacci, invece, protrae il segmento *be* nel punto *d* e traccia il segmento *dg*; sulla base di quanto precedentemente illustrato, poi, dimostra che l'angolo al centro *beg* misura il doppio dell'angolo alla circonferenza *edg* e dell'angolo alla circonferenza *bcg*[21].

Euc. gr.-Lat. III, 20 (Busard p. 82, righi 1-4): Inclinetur ergo rursum. Sitque angulus alter qui sub *b d g* et copulata recta *d e* emittatur in punctum *i*. Similiter ergo ostendemus quoniam duplus est qui sub *i e g* angulus eius qui sub *e d g* quorum qui sub *i e b* duplus est eius qui sub *e d b*. Reliquus ergo qui sub *b e g* duplus est eius qui sub *b d g*. In circulo ergo angulus qui ad centrum etc.

Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, IV, (44.5-6): Rursus protraham rectam *be* in punctum *d* et copulabo *dg* rectam et ostendam angulum *beg* duplum esse angulo *bdg*, quoniam latera *ed* et *eg* sibi invicem sunt equalia. Quare anguli *edg* et *egd* dupli sunt angulo *edg*. Est enim angulus *beg* equalis duobus angulis qui sub *egd* et *edg*: ergo angulus qui sub *beg* qui est ad centrum duplus est angulo *edg* qui est ad periferiam. Similiter ostendetur angulum *geb* duplum esse angulo *gcb*, quod probabitur per quedam sequentia eiusdem libri hoc modo.

Ciò detto, si passa ad una nuova dimostrazione. Il matematico pisano fissa un punto *c* all'interno dell'arco di circonferenza *bd* e, così facendo, dimostra che l'angolo al centro *beg* misura il doppio dell'angolo alla circonferenza *bcg*; successivamente, poi, fissa un secondo punto *i* all'interno dell'arco di circonferenza *dg*, in posizione cioè ben diversa rispetto a quella stabilita

[21] Euc. gr.-Lat. III, 20 (p. 82 Busard): *reliquus ergo qui sub* b e g *duplus est eius qui sub* b d g; Fibonacci, *Pratica Geometrie*, *Distinctio* III, IV (44.5): *angulus qui sub* beg *qui est ad centrum duplus est angulo* edg *qui est ad periferiam.*

dall'Euclide greco-latino, e dopo aver tracciato i segmenti *bi* e *ig*, dimostra che l'angolo al centro *beg* è doppio anche dell'angolo alla circonferenza *big*. Come risulta evidente dal confronto operato sull'Euclide greco-latino, l'autore sta di fatto introducendo il teorema III, 21 degli *Elementi* di Euclide, in base al quale «gli angoli che si trovano nello stesso segmento circolare sono uguali tra loro»[22]. A differenza, però, dell'Euclide greco-latino, Leonardo dimostra il teorema apparentemente senza utilizzare nessuna fonte diretta. Euclide, infatti, sostiene che i due angoli alla circonferenza *bad* e *bed*, che insistono sullo stesso arco *bd*, sono uguali tra loro perché misurano entrambi la metà dell'angolo al centro *bzd*, che insiste sullo stesso arco. Fibonacci, invece, partendo dalla circostanza che, all'interno del medesimo cerchio *abgd* finora utilizzato, i due segmenti *bi* e *ge* precedentemente costruiti si intersecano in un punto identificato con *t*, rileva, sulla base del teorema n°35 del libro III degli *Elementi*, che i segmenti *bt*, *tc*, *cg* e *ti* sono in proporzione tra loro[23]. Da ciò desume che i due angoli opposti al vertice *btc* e *gti* sono uguali e, poiché i triangoli *btc* e *gti* così costruiti sono simili ed equiangoli, anche gli angoli alla base *tig* e *tcb* sono uguali. Inoltre, poiché l'angolo al centro *beg* misura il doppio degli angoli alla circonferenza *tig* e *tcb* che insistono sul medesimo arco *bg*, anche gli angoli *tgi* e *tbc* sono tra loro uguali.

Euc. gr.-Lat. III, 21: (Busard p. 82): In circulo anguli qui in eadem sectione equales sibi invicem sunt. Esto circulus *abgd* et in eadem sectione *baed* anguli sint qui sub *bad*, *bed*. Dico quoniam anguli qui sub *bad*, *bed* equales sibi invicem sunt. Sumatur enim circuli *abgd* centrum sitque *z* et copulentur recte *bz*, *zd*. Et quoniam angulus quidem qui sub *bzd* ad centrum est, qui vero sub *bad* ad periferiam et habent eandem periferiam basim *bd*, angulus ergo qui sub *bzd* duplus est eius qui sub *bad*. Propter eadem ergo ei qui sub *bzd* eius qui sub *bed* duplus est. Equalis ergo qui sub *bad* ei qui sub *bed*. In circulo ergo anguli qui etc. Quod oportet ostendere.

Fibonacci, *Pratica Geometrie, Distinctio* III, IV, (44.7-11): Adiaceat rursus idem circulus *abgd* et protrahamus in eo angulum aliquem cadentem in arcu *dac*; et sit angulus *gcb* et ad centrum fit angulus *beg*. Et accipiam in arcu *dg* fortuitu punctus *i* et copulabo rectas *bi* et *ig*. Dico siquidem angulum *beg* duplum esse angulo *big*, quod sic probatur. Quoniam in circulo *abgd* due recte *bi* et *ge* sese invicem secant super punctum *t*, erit multiplicatio *bt* in *ti* equalis multiplicationi *gt* in *tc*, ut in trigesimo quinto theoremate eiusdem libri habetur; quare recte *bt*, *tc*, *cg*, *ti*, sibi invicem proportionales sunt. Est enim ut *bt* ad *tc* ita *gt* ad *ti*. Et quoniam trigona *btc* et *gti* habent unum angulum *btc* equalem uni angulo qui sub *gti*, et circa equales angulos latera proportionalia, erunt utraque trigona *btc* et *gti* equiangula et similia, quare

[22] Euc. III, 21 (Heiberg): Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

[23] Euc. III, 35 (Heiberg): Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

angulus *tig* equalis est angulo *tcb*. Sed angulus *beg* ostensus est duplus esse angulo *bcg*, quare et angulus *beg* duplus est angulo *big*, quod oportebat ostendere. Et ex hoc concluditur manifeste quod anguli qui in eadem sectione circulorum sibi invicem sunt equales.

In conclusione, grazie all'attività di collazione condotta sui testimoni noti della *Pratica Geometrie*, è emersa l'esistenza di un ampio brano in cui l'autore introduce e dimostra i teoremi III, 20 e III, 21 degli *Elementi* di Euclide: per la dimostrazione del teorema III, 20, l'autore potrebbe aver avuto a disposizione la traduzione latina degli *Elementi* di Euclide operata direttamente dal greco, ma in tal caso la sua fedeltà al modello non sarebbe stata del tutto incondizionata; per la dimostrazione del teorema III, 21, invece, è probabile che il matematico si sia servito di più testi, dal momento che la sua argomentazione non è direttamente riconducibile a nessuna fonte conosciuta del testo latino di Euclide.

Oltre alla questione puramente tecnica dell'utilizzazione delle fonti da parte del Fibonacci, un'altra domanda piuttosto urgente potrebbe essere quella del perché tale dimostrazione non trovi luogo in tutta la tradizione dell'opera, ma soltanto in tre dei suoi testimoni. Di essi, il ms. fiorentino II III 22 riporta in margine al brano in questione la nota *vacat*, la quale suggerisce l'ipotesi che questa porzione di testo sia stata, sì, presente in β, ma che abbia qui avuto una configurazione tale da poter indurre il copista a non ritenerla parte integrante del dettato[24]. Questa nota marginale potrebbe spiegare per quale motivo soltanto tre, dei quattro codici della famiglia β, tramandino questo brano: è possibile, infatti, che il quarto apografo di β, il ms. fiorentino II III 24, abbia omesso di riportare questo passo perché nell'antigrafo poteva risultare poco chiaramente inserito nel corpo del testo di impianto, oppure assente. La nota *vacat* potrebbe essere ricondotta o alla volontà di un copista di segnalare che, nel suo antigrafo, il brano doveva essere presente non all'interno dello specchio di scrittura, bensì in uno dei margini; oppure al confronto, operato dallo stesso, tra le lezioni del suo modello e quelle di un altro testimone, non sappiamo se conservato o perduto, ma

[24] Più sopra, ovvero nel margine destro del f. 61r, il copista di L aveva già scritto la nota: *vacat. Sicut inveni scriptum in exemplari et cancellatum. Sic conscripsi et cancellavi prout inveni: ad cautellam*, a proposito di un'ampia porzione di testo che viene qui riportata per fedeltà di copia tal quale era presente anche nell'esemplare di riferimento, in cui doveva essere stata poi cancellata.

probabilmente appartenente alla famiglia α, in cui questo brano doveva risultare assente.

Nota critica al testo.

La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano sembra dunque aver conosciuto una duplice fase redazionale: la prima, risalente al periodo 1219-20, è stata tramandata dai discendenti del ramo α della tradizione manoscritta; la seconda, risalente al periodo 1220-21, è stata invece tramandata dagli apografi di β[25]. Come ho già detto, ho collazionato dell'*Epistola di Dedica*, dell'*Introduzione* e della *Prima Distinzione* tutti i testimoni che ci sono pervenuti; ho invece collazionato della *Seconda* e della *Terza Distinzione* i testimoni a mio avviso più rappresentativi, ossia BSMNFCPL. Alla luce di quanto emerso da questa prima indagine, ho ritenuto opportuno costituire il testo critico della *Pratica Geometrie* secondo la lezione degli apografi di β, che sembrano configurarsi come testimoni di una revisione autoriale del testo del trattato rispetto a come esso appare negli apografi di α, avendo però sempre cura di emendare di volta in volta, *ope ingenii* oppure *ope codicum*, le corruttele di cui questi esemplari si fanno talvolta portatori.

a) Esempi di lezioni del ramo β da preferire alle lezioni del ramo α.

In *Introductoria* 1,21 i codici CPL del ramo β, unitamente al codice S del ramo α, riportano la lezione *anguli qui* permutatim *sunt sibi invicem equantur*, a fronte degli altri discendenti di α, i quali tramandano la lezione *permutati* in luogo di *permutatim*[26]. Anche se la lezione *permutati* non rappresenta propriamente un errore, ma potrebbe essere autoriale, la scelta di *permutatim* in luogo di *permutati* sembra essere propria di un ripensamento dell'autore. Anche nel passo seguente, ovvero in *Introductoria* 1,22, si legge infatti *angulus* aiz *ei qui* permutatim *iacet scilicet angulo* izd *equatur* nei testimoni che discendono da β e nel codice S, mentre si legge *permutati* in luogo di *permutatim* negli altri manoscritti. Si tratta di un caso analogo al precedente, ma con la differenza che in questa circostanza la

[25] Si tenga però a mente che il codice N, pur appartenendo al ramo α della tradizione, presenta alcune aggiunte marginali che, come si è detto, in alcuni casi sembrano dipendere dal ramo α, mentre in altri casi rivelano una dipendenza da β.

[26] Si ricordi che il codice F è acefalo e che il suo testo inizia a *Introductoria* 1,32.

lezione *permutati* non sembra giustificarsi grammaticalmente: si tratterebbe dunque di un errore, piuttosto che una variante redazionale.

In *Introductoria* 1,23 i testimoni SCPL riportano la lezione *multa enim sunt que oportet scire eos, qui in mensuratione et divisione* camporum *secundum subtilitates geometricas procedere volunt*, che si configura come corretta, mentre gli altri codici recano la lezione *corporum* in luogo di *camporum*, che invece si configura come corrotta (F ci è giunto privo di questa parte). Il termine *campus* rimanda infatti alle generiche superfici piane, sia di tipo astratto che di tipo concreto, come si è detto, mentre il termine *corpus* indica di norma le superfici solide. Per questo motivo, la lezione presente in α non può essere accolta.

In *Introductoria* 2,5, il codice S e i codici CPL della famiglia β si riferiscono al contado pisano nei termini di un Arciepiscopato, contro F e contro tutti gli altri testimoni, che invece ne parlano nei termini di un Episcopato[27]. Ora, è noto che ai tempi di Fibonacci Pisa era sicuramente un Arciepiscopato, e che anzi lo era già dal 1088, anno in cui Dagoberto (ovvero Daiberto Lanfranchi) fu nominato primo arcivescovo della città[28]. Pertanto, anche in questo caso è preferibile a mio avviso accogliere la lezione tramandata dai testimoni CPL.

In un passo particolarmente significativo della *Distinctio* I, 3 (8.1), perché determinante ai fini della costituzione dello *stemma codicum*, i codici FCPL del ramo β riportano la lezione *pertice 64 sunt panora 11 et soldi* $\frac{1}{2}$ *10* che si configura come corretta, mentre i discendenti di α riportano la lezione *pertice 64 sunt panora 11 et soldi 9* che invece è indiscutibilmente errata[29].

b) *Esempi di lezioni del ramo β emendate* ope codicum.

Nonostante le lezioni degli apografi di β siano dunque da preferire a tutte le altre perché, come si è detto, riflettono uno stadio evolutivo dell'opera imputabile a una serie di interventi operati dall'autore su una redazione

---

[27] *Introductoria* 2,5: *Sexaginta nempe et sex pertice quadrate faciunt mensuram quandam que vocatur stariorum, ad quam venduntur et emuntur agri in Archiepiscopatu pisano.*

[28] Per ulteriori notizie, cfr. BORDONE-SERGI 2009, pp. 402 e ss.

[29] Si tenga presente che un panoro corrisponde a 5,5 pertiche: perciò 64 pertiche equivalgono a 11 panori più 3,5 pertiche (*Introductoria* 2,5). Ma una pertica equivale a 3 soldi: quindi 3,5 pertiche equivalgono a 10 soldi e mezzo (*Introductoria* 2,3 e 2,10). Nel codice F, però, tale lezione $\frac{1}{2}$ *10* è stata espunta e, al suo posto, è stata registrata la lezione *9*: è allora possibile che il copista di questo esemplare, dopo aver attinto la lezione da un apografo di β, abbia successivamente operato confronti con un esemplare che afferiva al ramo α della tradizione.

precedente, talvolta esse appaiono inconfutabilmente corrotte e, pertanto, devono essere emendate, tenendo conto, ove possibile, delle lezioni tramandate dagli altri testimoni.

All'interno dell'epistola di dedica, i codici CPL della famiglia β concordano tra loro nell'attribuire erroneamente alla terza distinzione l'argomento della sesta, che verte sul calcolo dei volumi; essi, inoltre, attribuiscono alla sesta distinzione l'argomento della terza, che invece verte sul calcolo delle aree delle superfici piane[30]: in questo caso, perciò, ho deciso di lasciare nel testo la lezione tramandata dai discendenti di α, dal momento che quella tramandata dagli apografi di β è evidentemente corrotta.

All'interno della *Distinctio* I, 3 (8.2), l'autore moltiplica 19 pertiche per 33 pertiche, pervenendo a un risultato di 9 stariori e mezzo[31]. Tutti i discendenti di α e il codice F riportano, in questo punto, la lezione *19* che sembra essere corretta, mentre i codici CPL concordano tra loro nel riportare la lezione *15*, che invece sembra essere corrotta. La mano che, nel codice L, ha in un primo momento registrato la lezione *15*, ha successivamente cambiato questo valore in *19*, non sappiamo se di sua iniziativa o piuttosto per influsso di un esemplare di raffronto[32].

All'interno della *Distinctio* I, 3 (16.1) viene spiegato come moltiplicare 15 pertiche, 3 piedi e 12 once, per 42 pertiche, 2 piedi e 15 once[33]. L'autore, prima di operare, decide di convertire le once in piedi e i piedi in pertiche. Dal momento che 18 once corrispondono a un piede, è chiaro che 12 once corrispondono a quattro sesti di un piede, mentre 15 once corrispondono a cinque sesti di un piede. Un piede, invece, corrisponde a un sesto della pertica, per cui tre piedi corrispondono a tre sesti di pertica, e due piedi corrispondono a due sesti di

[30] *Incipit Pratica Geometrie* 5 e 8.

[31] *Distinctio* I, 3 (8.2): *perticas 19 in perticas 33 faciunt stariora* $\frac{1}{2}$ *9.*

[32] Dal prodotto di 19 pertiche per 33 pertiche si ottengono 676 pertiche, che corrispondono 9 stariori e mezzo. Uno starioro, infatti, equivale a 66 pertiche. Cfr. *Introductoria* 2,5: *Sexaginta nempe et sex pertice quadrate faciunt mensuram quandam que vocatur stariorum*.

[33] *Distinctio* I, 3 (17.1): *Item si vis multiplicare perticas 15 et pedes 3 et uncias 12 per perticas 42 et pedes 2 et uncias 15, oportet ut uncias redigas in sextis unius pedis, scilicet in sextis sexte unius pertice. Et quoniam uncie 18 faciunt pedem 1, ergo uncie 3 faciunt* $\frac{1}{6}$ *pedis, quare uncie 12 sunt* $\frac{4}{6}$ *unius pedis. Quas sextas pone in una virga post* $\frac{3}{6}$. *Propter eadem ergo pro unciis 15 pones* $\frac{5}{6}$ *post* $\frac{2}{6}$ *sub alia virga, et habebis perticas* $\frac{4\ 3}{6\ 6}$ *15 ad multiplicandum in perticas* $\frac{5\ 2}{6\ 6}$ *42.*

pertica[34]. Ne consegue che 15 pertiche, 3 piedi e 12 once equivalgono, nella forma grafica in uso a quel tempo, all'espressione $\frac{4\ 3}{6\ 6}$ 15, mentre 42 pertiche, 2 piedi e 15 once corrispondono a $\frac{5\ 2}{6\ 6}$ 42. Ora, tutti i discendenti di α e il codice F concordano nel riportare l'espressione *habebis perticas* $\frac{4\ \ 3}{6\ \ 6}$ *15 ad multiplicandum in perticas* $\frac{5\ \ 2}{6\ \ 6}$ *42*, contro i codici C ed L, che invece riportano la lezione *habebis perticas* $\frac{4\ \ 2}{6\ \ 6}$ *15 ad multiplicandum in perticas* $\frac{5\ \ 2}{6\ \ 6}$ *42* che si configura come errata, e contro il codice P, che in luogo di $\frac{4\ \ 3}{6\ \ 6}$ presenta la lezione $\frac{5\ \ 2}{6\ \ 6}$. A mio avviso, è possible che l'errore comune a CPL, ovvero il *2* a numeratore in luogo del *3*, dipenda da un errore proprio di β, in cui il *3* presente sulla linea di frazione sarebbe stato confuso con un *2*. Trovandosi dinanzi a questa lezione, il copista del codice P potrebbe essere stato indotto a sostituire di sua iniziativa la lezione *5* alla lezione *4* presente sulla linea di frazione, forse per influsso del secondo termine della moltiplicazione, ovvero del numero $\frac{5\ \ 2}{6\ \ 6}$, e determinando in questo modo un ulteriore errore.

Ho accolto la lezione dei discendenti di α contro quella dei discendenti di β anche a proposito del caso di *Distinctio* I, 3 (17.1), dove l'autore spiega come moltiplicare 16 pertiche, 1 piede e 10 once, per 43 pertiche e 14 once e mezzo[35]. Dopo aver rappresentato questi valori secondo la forma grafica in uso ai suoi tempi, ossia $\frac{2\ \ 3\ \ 1}{6\ \ 6\ \ 6}$ 16 per il primo fattore della moltiplicazione, e $\frac{5\ \ 4\ \ 0}{6\ \ 6\ \ 6}$ 43 per il secondo fattore, l'autore prescrive di allungare una linea di frazione e di scrivere sei volte 6 a denominatore, seguiti da un 11 e da un altro 6. A questo punto, tutti i

---

[34] *Introductoria* 2,3: *pertica pisana linealis sex linealibus pedibus constat; pes vero linealis decem et octo unciis linealibus constat.*

[35] *Distinctio* I, 3 (18.1): *Rursus si vis multiplicare perticas 16 et pedem 1 et uncias 10 per perticas 43 et uncias* $\frac{1}{2}$ *14, rediges uncias in sextas unius pedis: erunt sexte* $\frac{1}{3}$ *3. De qua tertia fac sextas: erunt due sexte: et sic habes in superiori latere perticas* $\frac{2\ \ 3\ \ 1}{6\ \ 6\ \ 6}$ *16. Possumus aliter facere sextas unius pedis de unciis 10: quoniam uncie 10 sunt* $\frac{10}{18}$ *unius pedis, ergo uncie 10 sunt* $\frac{20}{36}$ *pedis, quare si diviserimus 20 per regulam de 36, exibunt* $\frac{2\ \ 3}{6\ \ 6}$ *unius pedis, ut diximus. Similiter duplicabis uncias* $\frac{1}{2}$ *14: erunt* $\frac{29}{36}$ *unius pedis. Et sic habes in subteriori latere perticas* $\frac{5\ \ 4\ \ 0}{6\ \ 6\ \ 6}$ *43, ut hic ostendimus. Et pone sexties 6 sub una virgula, post* $\frac{1\ \ 0}{11\ \ 6}$, *sic:* $\frac{}{6\,6\,6\,6\,6\,6\,11\,6}$. *Et multiplicabis numeros, qui sunt super virgulas, et integros, qui sunt ante virgulas, ad modum quatuor figurarum, in antea procedendo.*

discendenti di α e il codice F riportano la lezione : $\frac{}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$, mentre i codici CPL e, nel margine, una seconda mano di S diversa da quella che ne ha vergato il testo di impianto, riportano la lezione $\frac{4\ 0\ 3\ 5\ 5\ 1\ 8\ 3}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$ 10. Tale lezione coincide con il risultato esatto della moltiplicazione, e meriterebbe senz'alcun dubbio di essere accolta nel testo di impianto, se non fosse che lì dov'è posta risulta essere un po' prematura: l'autore, infatti, spiegherà tutti i passaggi per ottenere questo risultato appena *dopo* aver tracciato la linea di frazione, ossia nella seconda parte dell'esercizio[36]. Pertanto ritengo che in questo caso la lezione degli apografi di α sia da preferire a quella dei discendenti di β.

Per quel che concerne la *Seconda Distinzione*, è plausibile che tutta una porzione iniziale di questa sezione sia stata gravemente corrotta in β e che, per questo motivo, non sia possibile accogliere le lezioni dei suoi apografi almeno fino a *Distinctio* II, 1, 2 (4). Per quel che concerne la titolatura, ad esempio, gli apografi di α e il codice F riportano la lezione *Distinctio secunda. Incipit capitulum de inventione radicum*, che accolgo nel testo di impianto, mentre i codici CPL riportano la lezione *Incipit distinctio secunda de inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putatur*, in cui l'espressione *in tantum – putatur* rimanda al paragrafo quarto dell'Epistola di Dedica[37]. È allora possibile che questa lezione sia stata determinata da una nota in margine presente in β, la quale a sua volta potrebbe essere stata posta dal copista che ne ha vergato il testo di base, piuttosto che dall'autore stesso.

Per quanto riguarda la titolatura della *Distinctio Tertia*, gli apografi del ramo α, unitamente al codice F, riportano la lezione *Incipit distinctio tertia in mensuratione omnium camporum* che ho deciso di accogliere nel testo di

[36] *Distinctio* I, 3 (18.2): *Verbi gratia: multiplicabis 2 per 5, qui sunt super primo 6, et divides per primum 6. Deinde 2 per 4, et 5 per 3, et divides per secundum 6. Post hec 2 per 0, et 5 per 1, et 3 per 4, et divides per tertium 6. Et 2 per 43, et 5 per 16, et 3 per 0, et 4 per 1, et divides per quartum 6. Et habebis super dictas quatuor sextas partes tantum unius denarii. Deinde multiplicabis 3 per 43, et 4 per 16, et 1 per 0, et divides per quintum 6. Et habebis super ipsum denarius. Deinde multiplicabis 1 per 43, et 0 per 16, et divide per sextum 6. Et habebis super ipsum* $\frac{1}{2}$ *6 soldos. Ad ultimum multiplicabis perticas 16 per perticas 43, et divides per* $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$*: et habebis super 11 triplos soldos, et super 6 dupla panora, et ante virgulam stariora.*

[37] *Incipit Pratica Geometrie* 4: *Secunda* [sc. *Distinctio*] *est de quibusdam regulis geometricis et de inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putavi.*

impianto, mentre i codici CPL recano, accanto al titolo *Incipit – camporum*, il sottotitolo *Incipit pars prima tertie distinctionis de mensuratione triangulorum*. Tale sottotitolo non è del tutto inopportuno, e infatti ricorre, pochi righi più avanti, anche all'interno dei codici BSMNF, dove svolge la funzione di titolo della prima delle cinque parti della terza distinzione, quella cioè concernente il calcolo dell'area del triangolo. Per questa ragione ho voluto conservare la lezione tramandata dai discendenti di α e dal codice F, preferendola a quella dei codici CPL[38].

Infine all'interno della *Distinctio* III, I, 3 (13.3), a proposito del triangolo *abg*, tutti i discendenti di α registrano per il lato *bg* una lunghezza di 7 unità, mentre gli apografi di β e il codice S riportano per errore una lunghezza di 11 unità: il codice N registra, nel testo di impianto, la lezione *7* comune ai discendenti di α, ma una mano cronologicamente successiva interviene espungendo *7* e aggiungendo, nel margine sinistro, la lezione *11*, che invece è comune ai codici SFCPL. Poco più avanti, in questo stesso passo, tutti i testimoni concordano nel riportare l'espressione *bg, scilicet 7*: per questo motivo, la lezione presente in α è qui da preferire a quella presente in β e nel codice S[39].

c) *Esempi di lezioni del ramo β emendate* ope ingenii.

In alcuni casi non è stato possibile emendare le lezioni tramandate dagli apografi di β *ope codicum*, ma si è optato per una *emendatio ope ingenii*. Ad esempio, in *Distinctio* I, 3 (13.6) l'autore spiega come moltiplicare 32 pertiche più 14 once e tre quarti per 17 pertiche più 9 once e mezzo. In primo luogo occorre riportare questi numeri su un foglio di calcolo, avendo cura di scrivere sulla linea superiore 32 pertiche e 14 once più $\frac{3}{4}$, e sulla linea inferiore 17 pertiche e 9 once e

---

[38] Un caso simile si riscontra anche in *Distinctio* III, I, 3 (9.3), dove i codici CPL impropriamente collocano il titolo *Modus vulgaris quo uti debent agrimensores, et est sufficiens in mensuratione omnium trigonorum* di *Distinctio* III, I, 4, mentre in realtà esso deve essere collocato più avanti, ovvero alla fine di *Distinctio* III, I, 3 (16.2), cosa che fanno i codici BSMNF.

[39] L'errore presente in FCPL si può spiegare ipotizzando che in β, o più probabilmente nel suo antigrafo, la lezione *7* sia stata espressa in forma romana (*VII*) e che successivamente, in seguito a un guasto meccanico, sia stata cambiata in *II*. Il copista di β, però, non ha inteso questa lezione *II* come espressione in forma romana del numero *2*, ma ha ritenuto che fosse *11*. La presenza del medesimo errore in S conferma l'ipotesi che il codice discenda da un esemplare che conteneva sia le lezioni di α sia quelle di β, ma al momento non so dire se tale esemplare sia stato contaminato o se, piuttosto, esso rappresenti una fase redazionale dell'opera da collocarsi cronologicamente tra la fase α e la fase β.

mezzo. Si procede, quindi, con la cosiddetta moltiplicazione a crocetta, che consiste nel moltiplicare 32 per $\frac{1}{2}$ e 17 per $\frac{3}{4}$, nel sommare i risultati ottenuti, e nell'aggiungere infine il prodotto di 9 per 32 e, naturalmente, quello di 17 per 14[40]. Ora, all'interno della frase *accipe fractiones unciarum superiorum de perticis* subterioribus*, et fractiones unciarum subteriorum de perticis superioribus,* la lezione *subterioribus* è una mia congettura: i codici BDEMVNWO$_1$F riportano, infatti, la lezione *inferioribus*, che è ugualmente corretta da un punto di vista logico-matematico, mentre i codici SCPL riportano la lezione *superioribus*, che è invece errata. Tale errore si potrebbe spiegare con la presenza di un originario *subterioribus*, vale a dire di una *lectio difficilior* che in F e negli apografi di α sarebbe stata sostituita dalla più semplice lezione *inferioribus*, mentre in S e in CPL avrebbe dato origine ad un vero e proprio errore. Poco oltre, infatti, il testimone S, unitamente alla prima mano di B e alla seconda mano di N, concorda con gli apografi di β nel riportare la lezione *et fractiones unciarum subteriorum*, contro la seconda mano di B, che corregge deliberatamente *subteriorum* in *inferiorum*, e contro tutti gli altri manoscritti che, invece, riportano la lezione errata *stariorum* in luogo di *subteriorum.*

In *Distinctio* II, 1 (1.1) si legge: *cum autem per geometricales regulas campos mensurare volumus, oportet nos in quibusdam dimensionibus radices* quorumcumque *numerorum invenire*, in cui la lezione *quorumcumque* non è tradita dai manoscritti, ma è il frutto di una congettura. Il codice F, unitamente ai codici BM e alla prima mano di N, riporta infatti la lezione *quinque*, che non ha senso, dal momento che Fibonacci introduce esempi di estrazione di radici quadrate di numeri dotati anche di più di cinque cifre. Il codice S, unitamente ai codici CPL, riporta la lezione *quandoque*, che ugualmente non ha senso. Una seconda mano di N diversa da quella che ne ha vergato il testo di impianto, ha infine aggiunto nel margine la lezione *quorundam*, che mi sembra una congettura

[40] *Distinctio* I, 3 (13.6): *Potes enim aliter de fractionibus unciarum facere, videlicet in principio, antequam incipias multiplicare. Accipe fractiones unciarum superiorum de perticis subterioribus, et fractiones unciarum subteriorum de perticis superioribus, ut in hac multiplicatione. Pro uncia* $\frac{1}{2}$, *que est in superioribus unciis, accipe medietatem de 32, et pro* $\frac{3}{4}$, *que sunt in unciis inferioribus, accipe* $\frac{3}{4}$ *de 17 in cruce: erunt 16 et* $\frac{3}{4}$ *12, hoc est uncie* $\frac{3}{4}$ *28, que sunt fere denarii 10, quos serva. Et delebis ipsas fractiones unciarum de multiplicatione, et multiplicabis tantum perticas 17 et pedes 4 et uncias 9 per perticas 32 et pedes 5 et uncias 14, et super summam adde denarios 10 servatos.*

modellata su *quibusdam* e, dunque, non autoriale. Propongo dunque *quorumcumque*, non solo perché il suo significato ben si adatta al contesto, ma anche perché mi sembra che possa giustificare, su base paleografica, gli errori *quinque* e *quandoque* presenti nei testimoni noti[41].

Molto interessante è anche il caso di *Distinctio* III, I, 2 (7.2), in cui gli esemplari B ed F recano la lezione *protracta est basis* bc *equidistans recte* fg, contro i codici SMNCPL che recano la lezione *protracta est basis* bc *equidistans recta* fg (ma il codice M e la prima mano di N innovano registrando *est basis protracta*). È plausibile che Fibonacci abbia inizialmente concepito questo breve periodo in modo da far concordare al nominativo *basis* il participio *equidistans*, seguito dal dativo *recte*; in un secondo momento, però, l'autore sarebbe intervenuto sul testo con delle modifiche, rendendo il segmento *fg* soggetto della frase, e facendo concordare con esso il participio. È molto probabile che Fibonacci abbia anche sostituito alla lezione iniziale *basis* il più opportuno dativo *basi*, che però non si ritrova nei manoscritti ed è una mia congettura, determinando la lezione finale *protracta est basi* bc *equidistans recta* fg. Tale lezione ha senso non solo da un punto di vista sintattico, ma anche, e direi soprattutto, logico-matematico: l'autore spiega, infatti, che questo segmento *fg* interseca i lati del *ab* e *ac* del triangolo *abc* nei punti *h* e *i*, e ciò è perfettamente coerente con la figura geometrica associata[42].

d) Esempi di lectiones singulares *che si configurano come congetture valide ad emendare corruttele del testo di impianto.*

A fronte di una tradizione manoscritta anche ampiamente concorde, in certi casi si è preferito tenere conto di *lectiones singulares* ed accoglierle nel testo di impianto, in quanto si configurano quali congetture valide ad emendare corruttele del testo. Un esempio particolarmente significativo è costituito da un passo della *Distinctio* II, 2, che verte sulla moltiplicazione tra radici quadrate. I manoscritti CPL ne omettono completamente il titolo, mentre i codici BSMNF

[41] Ringrazio il Prof. Giovanni Polara per avermi suggerito questa congettura durante un seminario da me tenuto su queste questioni presso l'Università di Napoli "Federico II".

[42] Ma lo sarebbe anche in assenza di una figura geometrica, dal momento che la base *bc* è tangente ai lati *ab* e *ac* nei punti *b* e *c*, non certamente nei punti *h* e *i*, e dunque non può fungere da soggetto della frase. Cfr. *Distinctio* III, I, 2 (7.2): *protracta est basi* bc *equidistans recta* fg, *que secat rectas* ab *et* ac *in duo equalia in punctis* h *et* i, *secundum quod in geometria declaratur.*

riportano il titolo *De multiplicatione radicum*, che è sicuramente autoriale. Tuttavia i codici BMNF recano tale titolatura in una posizione più arretrata rispetto al reale inizio di questa seconda parte, ovvero alla fine di *Distinctio* II, 1 (15.3). In questi esemplari, la lezione *De multiplicatione radicum* è dunque seguita da quello che ho indicato come paragrafo 15.4: *nunc autem ostendamus qualiter radices numerorum per radices multiplicentur, et qualiter insimul addantur, quomodo minores de maioribus extrahantur, etiam et quo ordine inter se dividantur*, il quale però a mio avviso rappresenta la logica conclusione della prima parte, quella cioè inerente l'estrazione delle radici quadrate, piuttosto che l'inizio della seconda parte, concernente la moltiplicazione fra radici. Molto opportunamente il copista del codice S riporta la titolatura in questione esattamente dopo il paragrafo 15.4, facendo iniziare la seconda parte di questa distinzione con le parole *cum autem volueris multiplicare radicem.* Tale seconda parte, infatti, si occupa esclusivamente della moltiplicazione tra radici, mentre alla terza parte è affidato il calcolo delle addizioni, alla quarta parte quello delle sottrazioni e, infine, alla quinta parte è affidato il calcolo delle divisioni. Alla luce di ciò, si è deciso in questo caso di accettare la lezione del codice S, contro tutti gli altri esemplari della tradizione manoscritta.

e) Un caso particolarmente problematico di emendatio.

Un'ultima questione che merita di essere esaminata riguarda una certa abitudine del Fibonacci di alternare, senza fare particolari differenze, la persona, il modo e il tempo di alcune forme verbali. Consideriamo il caso di *Distinctio* III, III, 1 (3): *similiter cum possibile fuerit de exagono, scilicet ex figura que habet sex latera, facies duo quadrilatera, quorum unumquodque habeat duo latera equidistantia; vel* faciat *inde unum quadrilaterum, quod habeat duo latera sibi invicem equidistantia, et duo trigona: et sic* studeat *in reliquis figuris multilateribus operari*. In questo brano compaiono due lezioni anomale: di esse la prima, ossia *faciat*, è tramandata da tutti i testimoni che sono a noi giunti; la seconda, ovvero *studeat*, è tramandata dai soli codici SFCPL e dalla quarta mano di N, contro tutti gli altri testimoni, che invece recano la lezione *studeas*[43].

[43] L'indagine è stata qui condotta non soltanto sui codici che, come ho precedentemente dichiarato, sono stati impiegati per la collazione della terza distinzione, ma anche sugli esemplari temporaneamente messi da parte, ovvero sulla totalità della tradizione manoscritta nota. Tengo

Nonostante la lezione *studeas* si giustifichi grammaticalmente e sembrerebbe meritare di essere accolta nel testo di impianto, essa potrebbe non essere autoriale. La presenza, infatti, di una *variatio* non solo di persona, ma anche di modo e tempo (*facies* / *faciat*), dimostra che tali anomalie sono originali, e mi induce a credere che tutti i discendenti di α, con la sola eccezione del codice S, abbiano normalizzato, facendosi però scappare qualche caso. Alla luce di ciò, ritengo assai probabile che l'uso linguistico dell'autore preveda l'alternanza di due forme diverse tra loro, ma usate senza particolari differenze di significato, come garantisce il polisindeto *facies…vel faciat*: una è quella del cosiddetto "tu generico", già in uso presso i classici, mentre l'altro è un innovativo impersonale con la terza persona singolare dell'attivo anche in verbi transitivi, e comunque dove l'età classica avrebbe richiesto la desinenza *–tur* del passivo[44].

Principali criteri editoriali

Per quanto riguarda la veste editoriale dell'opera, ho adottato le seguenti strategie: in vista di una meno ostica e più immediata fruibilità del testo, ho in primo luogo conformato alla pratica moderna un certo numero di caratteristiche ortografiche e la punteggiatura. Allo stesso scopo, ho optato per una ripartizione del testo in unità compositive con l'aggiunta di paragrafi, rendendo così più agevole individuare l'esatta corrispondenza tra il testo critico e la traduzione in lingua italiana, e in vista di una futura edizione critica dell'opera.

Per quanto concerne la veste ortografica, ho tacitamente operato tutta una serie di piccoli interventi sul testo, di cui non ho dato alcun riscontro all'interno dell'apparato critico: ho sciolto, in particolare, le abbreviazioni e i compendi tachigrafici presenti all'interno dei manoscritti; ho normalizzato l'uso alquanto capriccioso delle lettere maiuscole e delle minuscole; ho adottato la grafia *v* in luogo di *u* con valore consonantico, e di *ii* in luogo di *ij*; ho generalmente mantenuto la grafia medievale *e* in luogo dei dittonghi *ae* ed *oe*, ma ho ripristinato, salvo alcune eccezioni, la consonante *t* davanti alla vocale *i* anche nei

---

comunque a precisare che ho consultato i manoscritti in fotoriproduzione, e che a questa prima ispezione seguirà una seconda verifica che verrà condotta direttamente sugli esemplari.

[44] Sento ancora una volta il dovere di ringraziare il Prof. Giovanni Polara per avermi proposto questa interpretazione.

casi in cui alcuni testimoni presentavano la consonante *c*; ho conservato qualche isolato caso di improprietà nell'uso delle doppie, se in presenza di una tradizione manoscritta concorde[45]; data, infine, l'inafferrabilità e la capricciosa oscillazione delle forme *ct* / *tt* / *t* all'interno dei codici, testimoniata ad esempio dall'alternanza delle forme *practica* / *pratica*, e *recta* / *retta*, ho optato per la conservazione del gruppo *ct* ogni volta che la tradizione manoscritta si è rivelata concorde, mentre ho adottato le grafie *tt* e *t* in tutti gli altri casi[46].

Quanto alla punteggiatura, la modernizzazione da me introdotta, secondo un criterio quasi universalmente adottato nell'edizione dei testi medievali, mira a consentire una più immediata snodatura logico-sintattica del testo secondo la nostra attuale sensibilità di lettura, ma tiene in debito conto anche le indicazioni, tutt'altro che irrazionali, presenti nei testimoni della tradizione.

La scansione in paragrafi, infine, che ho stabilito soprattutto in vista di una rapida e non ambigua citazione, ha pure lo scopo di segnalare l'esatta corrispondenza tra il testo latino, le note in apparato e, naturalmente, la traduzione in lingua italiana da me proposta.

Il testo, criticamente stabilito secondo i principi sopra specificati, è corredato di note che fungono da apparato critico positivo atto a registrare tutte le varianti della tradizione manoscritta emerse dall'attività di collazione. Per quanto riguarda le sigle poste all'interno dell'apparato, in particolare, si adoperano apici numerati per indicare le diverse mani che agiscono sullo stesso manoscritto, mentre si adoperano apici con lettere per le correzioni apposte su di un codice dalla stessa mano che ne ha vergato il testo di impianto. Dal momento che, però, non ho potuto evitare di intervenire anche con degli emendamenti o delle integrazioni congetturali, laddove il testo tràdito esibisse evidenti scorrettezze dovuti alla distrazione o alla negligenza dei copisti, ho raccolto tra parentesi uncinate (< >) le mie integrazioni e tra parentesi quadre ([ ]) le mie espunzioni. Le

[45] È il caso dell'avverbio *communiter*, che ricorre in tutti i testimoni della *Pratica Geometrie* nella forma *comuniter*.

[46] Così, ad esempio, nel titolo dell'opera compare la forma *Practica* all'interno dei codici più recenti (MVNWO), mentre negli esemplari più antichi si rinviene la forma *Pratica*. Parallelalemente, però, tutti i testimoni concordano nel riportare la forma *distinctio*, che viene pertanto conservata anche all'interno della presente edizione.

immagini, che si accompagnano al testo latino offrendo un valido sussidio alla sua interpretazione, sono state liberamente tratte dalla *princeps* del Boncompagni.

Per quanto riguarda la traduzione in lingua italiana, essa si prefigge lo scopo di fornire un sussidio alla fruizione di un testo non sempre trasparente nei suoi contenuti, ma rappresenta anche il prodotto di un lungo lavoro di riflessione e di interpretazione applicatosi su vari livelli. A conclusione di ciascuna delle distinzioni qui pubblicate, ho infine posto un'*Appendice* atta ad ospitare le fonti e i luoghi paralleli da me individuati.

«A conversare con gli uomini del passato accade quasi lo stesso che col viaggiare».

Cartesio

L'Epistola di Dedica

L'epistola con cui Leonardo Pisano dedica la *Pratica Geometrie* all'amico e maestro Domenico ci è stata tramandata da tutti i codici noti, con la sola eccezione di F, che ci è giunto acefalo. Di essa i manoscritti sembrano attestare due diverse versioni, in quanto il testo tramandato dagli apografi di α non sempre coincide con quello tramandato dai discendenti di β.

Per quanto riguarda l'*incipit* generale della lettera, i testimoni che discendono da α riportano tutti la dicitura *de filiis Bonaccii*, mentre gli apografi di β tramandano *filio Bonaccii*[1]. Ora, giacché il cognome "Fibonacci" deriva proprio da una contrazione di *filius Bonaccii* [2], in passato alcuni studiosi hanno erroneamente creduto che il padre di Leonardo si chiamasse Bonaccio, o Bonacci, e che da lui il matematico traesse il nome[3]. Grazie, però, alle notizie contenute nella *Cronica* di Giovanni Villani, si è potuto comprendere che durante il Medioevo molti cognomi si formarono a partire dal nome di un illustre antenato, rispetto al quale i discendenti venivano genericamente chiamati *filii*[4]. Oggi sappiamo che il padre di Leonardo si chiamava Guglielmo, e che Bonaccio era perciò il nome di un avo[5].

Quanto alla lezione *Bigollosie* che compare a proposito del nome dell'autore in alcuni manoscritti, e specificamente in quelli che discendono da β,

---

[1] Rimando al fondamentale contributo di BONCOMPAGNI 1852, pp. 8-12 per una disamina approfondita degli studi condotti sul cognome Fibonacci. Molto utile, sull'argomento, anche il contributo di FRANCI 2002, pp. 301-302, e di CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-61.

[2] LIBRI 1838, pp. 20-21, n. 1.

[3] Di questo parere era Don Gabriele Grimaldi, il quale sosteneva che «non per altra cagione adunque Leonardo il cognome porta di Fibonacci, se non pel nome del Padre, che Bonacci, o Bonaccio appellavasi» (GRIMALDI 1790, p. 163).

[4] La *Cronica* di Giovanni Villani è stata pubblicata a Firenze nel 1823 da Ignazio Moutier e Francesco Gherardi Dragomanni: «*filii* Giovanni, *filii* Guineldi, e *filii* Ridolfi: queste casate dipoi si dissero Figiovanni, Figuidelfi, e Firidolfi; anzi, anche prima de' tempi del Villani così si dicevano da alcuni, come si raccoglie dalle storie di Ricordano Malespini» (MOUTIER-GHERARDI DRAGOMANNI 1823, p. 291). Si fa qui riferimento all'opera di Ricordano Malispini pubblicata da Vincenzo Follini (FOLLINI 1816).

[5] Come rilevato da CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-60, il nome del padre di Leonardo Pisano compare in un atto notarile del 1226 pubblicato per la prima volta da MILANESI 1867, p. 87.

ritengo che essa non debba essere emendata in *Bigollosius*, come implicitamente suggeriva Francesco Bonaini, ma che piuttosto debba essere intesa come un errore di matrice paleografica fondato su una probabile lezione originale di *Bigollo sive*[6]. *Bigollus,* infatti, è un epiteto attestato al genitivo sia nell'*incipit* del *Flos*[7], sia in una delibera del Comune di Pisa datata al 1241[8]. Esso è stato a lungo ritenuto un nomignolo offensivo[9], mentre in realtà significherebbe "bilingue", secondo un'ipotesi del Bonaini, oppure "viaggiatore", come invece ritiene Gaetano Milanesi[10].

Piuttosto oscuro, infine, è il personaggio a cui Fibonacci indirizza l'opera con la lettera di dedica: il maestro Domenico. Alcuni studiosi lo identificano con Domenico Ispano, traduttore della scuola di Toledo, retore e grammatico[11]. Di lui si sa che era un *magister*, «appellativo che si dava a chi trasmetteva il suo insegnamento attraverso una scuola»[12], e che era amico di Guido Bonatti, celebre

---

[6] Francesco Bonaini, invece, pensava erroneamente all'esistenza di un epiteto *Bigollosius*: «Leonardo [...] nei codici delle sue opere si trova appellato variamente, *Leonardus filius Bonaccii*, *Leonardo ex filiis*, e *de filiis Bonaccii*, *Leonardus Bigollosius filius Bonaccii*...» (BONAINI 1857, p. 242).

[7] L'opera è stata pubblicata da BONCOMPAGNI 1862[2]. Cfr., in particolare, p. 227: *Incipit Flos Leonardi Bigolli Pisani* etc.

[8] Il testo della delibera è stato pubblicato per la prima volta dal BONAINI 1857, p. 241: *Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli* etc.

[9] Di questa opinione era Giovanni Battista Guglielmini, il quale riteneva che l'epiteto gli derivasse dalla invidiosa ignoranza dei suoi concittadini: «Lionardo intanto lungi dal far pompa di ingegno e di sapere, nascondeva le sue invenzioni in silenzio '' fralle indiane, fralle arabe, fralle greche dottrine; e per tale savio avvedimento si tolse ai colpi della invidiosa ignoranza, che tacque, ma il commercio di que' giorni, che intento al solo guadagno piangeva il tempo delle scienze donato, alzò voce ingratissima contro di lui, e d'un nome lo caricò» (GUGLIELMINI 1812, p. 35). Di identico parere era BONCOMPAGNI 1852, p. 16, che faceva derivare l'epiteto da "bighellone" (sciocco, scimunito).

[10] Secondo l'opinione di Francesco Bonaini, l'epiteto deriverebbe dal latino tardo *biglosus*, «denominazione acquistatasi per la cognizione che dovette avere della lingua degli Arabi, per la dimora fatta in Bugìa, e per il conversare scientifico che egli ebbe con essi. Di fatti nel basso latino indicavasi colui che avesse familiari due lingue colla voce *biglosus*» (BONAINI 1857, p. 243). Secondo Gaetano Milanesi, invece, in un primo momento il termine avrebbe indicato la trottola, da cui poi il significato metaforico di "viaggiatore": «così come il Bigollo mosso dalla sferza dei fanciulli romani andava attorno movendosi con rapidi giri; così, presa la similitudine da questo arnese, fu chiamato Bigollo colui che andava peregrinando da un luogo all'altro» (MILANESI 1867, p. 84). Molto utili sull'argomento anche i contributi di FRANCI 2002, pp. 301-302, e di CAIANIELLO 2012[1], pp. 59-61.

[11] Tutti i manoscritti concordano nel riportare come destinatario dell'opera il *magister Dominicus*, ad eccezione di M e della prima mano di V e N, che tramandano una versione compendiata del testo.

[12] CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012, p. 127.

astronomo della corte fridericiana, che lo cita in un elenco di personaggi illustri del tempo[13]. Come ha ipotizzato Raffaella Franci, è molto probabile che il maestro Domenico facesse parte della corte imperiale di Federico II di Hohenstaufen[14]: nel *Liber Quadratorum*, infatti, Leonardo riferisce che fu proprio il *magister Dominicus* a presentarlo all'Imperatore, e aggiunge che in quella circostanza il maestro Giovanni da Palermo gli propose il quesito che avrebbe poi ispirato la composizione del trattato[15]. All'amico Domenico, Fibonacci scrive di aver pubblicato per lui un'opera "già da lungo tempo iniziata", pensata per offrire ai lettori nozioni di geometria non solo teorica, ma anche pratica[16]. Ciò significa che, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe da un manuale sulla "pratica della geometria", ogni questione viene qui introdotta e spiegata facendo un largo uso della dimostrazione teorica, sicché, come ha rilevato Annalisa Simi, l'unico vero elemento di "praticità" che è possibile riscontrare, consiste nella scelta di esporre la materia non secondo lo schema euclideo-archimedeo, ma secondo un approccio per problemi (SIMI 2004, p. 11). La natura sia teorica che pratica del trattato si riscontra, in effetti, già a partire dall'introduzione, la quale consiste in un elenco di definizioni euclidee, cui fa seguito la definizione delle misure lineari e superficiali in uso a Pisa nel Duecento, non senza alcune indicazioni pratiche per il loro corretto utilizzo. L'opera si suddivide, poi, in otto *distinctiones*, delle quali la lettera di dedica fornisce una sorta di indice: si va dal calcolo delle aree delle figure piane (I e III) all'estrazione delle radici quadrate (II) e cubiche (V), dalla

---

[13] Domenico Ispano fu traduttore alla scuola di Toledo, retore e grammatico: per notizie su questo personaggio, rimando ai fondamentali contributi di ARRIGHI 1970, pp. 20-21, di CAIANIELLO 2012[2], p. 112, e di CAIANIELLO-CAROTENUTO 2012, pp. 130-131. Per quanto riguarda, invece, il Bonatti, cfr. BONCOMPAGNI 1854, p. 97, n. 1: «Guido Bonatti celebre astrologo ed astronomo del secolo decimoterzo nella sua opera intitolata *De Astronomia tractatus decem* scrive: *illi autem qui fuerunt in tempore meo sicut fuit Hugo Abalugant, Beneguardinus Davidbam, Ioannes Papiensis, Dominicus Hispanus, Michael Scotus, Stephanus Francigena, Girardus de Sabdoneto Cremonensis et multi alii*».

[14] FRANCI 2002, p. 298: «la figura di Maestro Domenico è pressoché ignota agli storici. Egli tuttavia è il protagonista dell'altro grande evento nella vita di Leonardo, la sua presentazione all'imperatore Federico II. Questa circostanza suggerisce l'ipotesi che facesse parte della corte imperiale».

[15] Di questa questione si è già discusso nel capitolo dedicato alla vita e alla fortuna di Leonardo Pisano: cfr. *Il rientro in Italia*, in *La vita, le opere e la fortuna di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*.

[16] La lettera recita, infatti: *opus iam dudum inceptum tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometrica et hi qui secundum vulgarem consuetudinem – quasi laicali more – in dimensionibus voluerint operari, super octo huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inveniam documentum*.

divisione delle superfici regolari (IV) al calcolo dei volumi di diversi solidi (VI), da problemi di determinazione di altezze e distanze (VII) ad altre "sottigliezze geometriche" di carattere puramente teorico (VIII)[17]. Infine la lettera si conclude con la richiesta, rivolta al destinatario, di apportare sul testo tutte le modifiche necessarie. L'invito rappresenta, per Fibonacci, non soltanto un pretesto per lodare la *sapientia* del maestro, ma anche un'occasione per esprimere tutto l'affetto e la fiducia che egli nutre nei confronti dell'amico.

[17] Come ho già chiarito in un mio articolo (ROZZA 2015[1], p. 82, n. 34), e in accordo con FOLKERTS 2004, p. 98, traduco *distinctio* con "sezione", non con "capitolo", come invece propone CAIANIELLO 2012[1], p. 74. Non è possibile, infatti, intendere *distinctio* come sinonimo di *capitulum*, perché di *capitula* Fibonacci aveva già parlato a proposito del *Liber Abaci*, p. 170 (Germano), per cui ritengo che, se l'autore avesse inteso dividere la *Pratica Geometrie* in *capitula*, probabilmente lo avrebbe fatto. È possibile, però, intendere il termine anche col significato di *Erklärung*, "spiegazione", come propone il BIRKENMAJER 1935, p. 474, n. 8, o come termine tecnico della filosofia aristotelica (SCHULTHESS 2011).

TESTO CRITICO

INCIPIT PRATICA GEOMETRIE COMPOSITA A LEONARDO BIGOLLO SIVE FILIO BONACCII PISANO[1] IN ANNO[2] MCCXXI[3]

<1> Rogasti me[4] Amice Dominice[5] et Reverende Magister ut tibi librum in pratica geometrie conscriberem. **<2>** Igitur, amicitia tua coactus, tuis precibus condescendens, opus iam dudum inceptum taliter[6] tui gratia edidi, ut hi qui secundum demonstrationes geometricas et [7] hi qui secundum vulgarem consuetudinem – quasi laicali more – in dimensionibus voluerint operari, super octo huius artis distinctiones, que inferius explicantur, perfectum inveniant documentum.

<**3**> Quarum[8] prima est qualiter latitudines camporum quatuor equales angulos habentium in eorum longitudines[9] triplici modo multiplicentur[10]. **<4>** Secunda |[O_1, f. 2v] est de quibusdam regulis geometricis et de[11] inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putavi[12]. **<5>** Tertia[13] de inventione[14] embadorum omnium camporum cuiuscumque forme[15]. **<6>** Quarta de divisione omnium camporum inter consortes[16]. **<7>** Quinta de radicibus cubicis inveniendis[17]. **<8>** Sexta de inventione embadorum[18] omnium corporum[19]

---

[1] a Leonardo Bigollosie filio Bonaccii Pisano C P L] a Leonardo Pisano de filiis Bonaccii B E M V N O_1, a Leonardo de filiis Bonaccii Pisano S, *spatium vacuum reliquit* D

[2] in anno C P L] anno B S E M V N O_1, *spatium vacuum reliquit* D

[3] MCCXXI S^b C P L] MCCXX B S^a E M V N O_1, *spatium vacuum reliquit* D

[4] Rogasti me S C P L] Rogasti B D E M V N O_1

[5] Dominice B S D E V^2 N^2 O_1 C P L] *om.* M V^1 N^1

[6] taliter B S^2 D E M V N O_1 C P L] *om.* S^1

[7] demonstrationes – et B D E M V N O_1 C P L] *om.* S

[8] quarum B S D E M^b V N^2 O_1 C P L] quare M^a N^1

[9] longitudines B S D E^b M V N O_1 C P L] latitudines E^a

[10] distinctio 1 *in mg. dx. scr.* P L

[11] de B D E M V N O_1 C P L] *om.* S

[12] distinctio 2 *in mg. dx. scr.* P L

[13] distinctio 3 *in mg. dx. scr.* P L

[14] inventione B S D V^2 O_1 C P L] ratione E M V^1 N

[15] forme B S D E M V N] forme que continentur tribus dimensionibus scilicet longitudine et latitudine sive profunditate C P L (et altitudine, sive profunditate C), *om.* O_1 *cf. supra, p. 105*

[16] distinctio 4 *in mg. dx. scr.* P L

[17] distinctio 5 *in mg. dx. scr.* P

[18] embadorum B D E M V N O_1 C P L] omnium embadorum S

cuiuscumque[20] figure que continentur tribus dimensionibus scilicet longitudine, latitudine et profunditate[21]. **<9>** Septima de inventione longitudinum[22] planitierum et[23] inventione altitudinum[24] rerum |[L, f. 2v] elevatarum. **<10>** Octava de quibusdam subtilitatibus geometricis.

<11> Sed[25] antequam ad harum distinctionum perveniam doctrinam[26], quedam introductoria et[27] necessaria preponenda esse putavi. **<12>** Ad hec[28] igitur[29] per|[O_1, f. 3r]ficienda, tue correctionis congressus[30] fiducia, hoc opus cure magisterioque tuo demandandum duxi[31], ut que |[P, f. 1v] in eo fuerint emendanda tua sapientia corrigantur[32].

---

[19] corporum B S^2 D E^2 M V N C P L] camporum S^1 E^1 O_1
[20] forme – cuiuscumque B S D E M V N C P L] *om.* O_1
[21] que – profunditate B S D E M V N O_1 (latitudine et B D E M V N O_1, latitudine et altitudine sive S)] *om.* C P L
[22] longitudinum B D E M V N O_1 C P L] longitudinis S
[23] et B S D E M V N C P L] et de O_1
[24] altitudinum B S D E V^2 N^2 O_1 C P L] *om.* M V^1 N^1
[25] sed C P L] tamen B S D E M V N O_1
[26] perveniam doctrinam B S D E M V O_1 C P L] doctrinam perveniam N
[27] et C P L] *deest* B S D E M V N O_1
[28] hec B D E M V N O_1 C P L] hoc S
[29] igitur C P L] igitur secundum ingenii mei capacitatem B S^b D E M V N O_1 (secundum *om.* S^a)
[30] congressus C P L] aggressus B S D E M V N O_1
[31] cure magisterioque tuo demandandum duxi C P L] curavi tuo magisterio destinare B S D E M V N O_1
[32] corrigantur B S D E M O_1 C P L] corrigantur. Vale V N

TRADUZIONE

La *Pratica Geometrie* composta da Leonardo Bigollo o dei Bonacci, Pisano, nell’anno 1221

<1> Domenico, Amico e Reverendo Maestro, mi hai chiesto di redigere per te un trattato sulla pratica della geometria; **<2>** perciò, obbligato dalla tua amicizia, cedendo alle tue preghiere, ho pubblicato per amor tuo un’opera già da lungo tempo iniziata, di tal fatta che chi volesse compiere operazioni nell’ambito delle misure secondo le dimostrazioni geometriche e chi volesse farlo secondo la consuetudine ordinaria – l’abitudine del volgo, per così dire – potesse trovare un insegnamento compiuto sulle otto sezioni di quest’arte, che più sotto sono illustrate.

<3> La prima di queste riguarda come si moltiplica la larghezza delle superfici aventi quattro angoli uguali per la loro lunghezza in tre modi; **<4>** la seconda si occupa di alcune regole geometriche e della estrazione di radici quadrate nella misura in cui ho ritenuto fosse necessario a chi volesse fare operazioni solo attraverso metodi geometrici; **<5>** la terza riguarda la determinazione del calcolo delle aree di tutte le superfici di qualunque forma; **<6>** la quarta riguarda la spartizione di ogni tipo di superficie tra persone che ne condividono equamente il diritto; **<7>** la quinta verte sull’estrazione delle radici cubiche; **<8>** la sesta verte sul calcolo dei volumi di tutti i corpi di qualunque figura che sia contenuta in tre dimensioni, ovvero lunghezza, larghezza e profondità; **<9>** la settima riguarda la determinazione della lunghezza dei piani e dell’altezza di oggetti elevati; **<10>** l’ottava riguarda alcune sottigliezze geometriche.

<11> Ma, prima di arrivare ai contenuti dottrinari di queste sezioni, ho ritenuto che dovessero essere anteposte alcune definizioni introduttive e necessarie. **<12>** Dovendo portare a termine tale proposito, io, che ho cominciato confidando nelle tue correzioni, ho ritenuto di dover demandare quest’opera alla tua cura e al tuo magistero, affinché ciò che in essa sia da correggere, sia corretto dalla tua sapienza.

APPENDICE

Appendice delle fonti e dei luoghi paralleli

<1>

Guido Bonati, *De Astronomia Tractatus*, p. 98 (Boncompagni): illi autem qui fuerunt in tempore meo sicut fuit Hugo Abalugant, Beneguardinus Davidbam, Ioannes Papiensis, Dominicus Hispanus, Michael Scotus, Stephanus Francigena , Girardus de Sabdoneto Cremonensis et multi alii; **Fibonacci, *Liber Quadratorum*, p. 253 (Boncompagni)**: cum Magister Dominicus pedibus celsitudinis vestre, princeps gloriosissime domine Federice, me Pisis duceret presentandum, occurrens Magister Johannes panormitanus, questionem mihi proposuit infrascriptam, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinentem; ut invenirem numerum quadratum, cui quinque additis vel diminutis, semper inde quadratus numerus oriretur.

<2>

Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, pp. 16-17 (Baron): his breviter praelibatis, deinceps considerandum est quod omnis geometrica disciplina aut theorica est, id est speculativa, aut practica, id est activa. Theorica siquidem est quae spacia et intervalla dimensionum rationabilium sola rationis speculatione vestigat, practica vero est quae quibusdam instrumentis agitur et ex aliis alia proportionaliter coniciendo diiudicat. Huic practicae tria videntur genera attributa, hoc est altimetria, planimetria, cosmimetria, in quibus tamen omnibus maxime linearum dimensionem vestigat.

<4>

Balb. *Grom*. p. 96 (Lachmann): ducis longitudinem per latitudinem: facit embadon; **Gerbertus, *Geometria*, p. 65 (Bubnov)**: spatium autem sive planities planarum figurarum lineis circumsepta embadum a Graecis appellatur, quod a nostris interpretatum area nuncupatur.

<5>

Ps. Gerbertus, *GIA*, pp. 345-6 (Bubnov): omnis autem tetragonum aequa latera habens unum latus in se multiplicat et ea semel multiplicatione aream suam implet. Pentagonus, qui aequis continetur lateribus, ter multiplicationem unius lateris in se expostulat, et ex illius summa multiplicationis semel aream diducere et reliqui medietatem sumere. Exagonus quater lateris multiplicationem expostulat, et ex summa multiplicationis bis aream diducere, reliqui medietatem sumere. Eptagonus quinquies, aream ter. Octogonus sexies, aream quater. Enneagonus septies, aream quinquies. Et ceteri ad hanc consequentiam.

<8>

Balb. *Grom*. pp. 96-97 (Lachmann): mensurae aguntur generibus tribus, per longitudinem et latitudinem et altitudinem. Hoc est rectum planum solidum**; Macr. *Somn*. 1, 5, 9 (Willis):** hoc loco admonendi sumus, quod omne corpus longitudinis latitudinis et altitudinis dimensionibus constat**; Mart. Cap. 6, 721 (p. 376 Kopp):** haec de planis dixisse sufficiat. Nunc de solidis, quae στερεά dicimus, videamus. Στερεόν schema, quod longitudine latitudine altitudine constat, cuius extremum superficies est, ut in planis linea; **Boeth. *Categ*. 2, 202D (Migne):** omne enim corpus ut sit, tribus dimensionibus constat: longitudine, latitudine, altitudine; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 147 (Folkerts):** geometricae autem artis mensuralis speculatio trinae dimensionis id est longitudinis latitudinis crassitudinis consideratione colligitur et ut enucleatius resolvatur recto plano solido que dinoscitur; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 147 (Folkerts):** solidum etiam est quod Graeci stereon vocant nos autem quadratos pedes quod longitudinem et latitudinem crassitudinem que habere comprobatur ut aedificiorum pilarum pyramidum que nec non etiam materiae lapidum alia que multa ut subiectae notant formulae; **Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 15 (Baron):** omnium dimensionum tria genera sunt: longitudo, latitudo, altitudo; **Gerbertus, *Geometria*, p. 52 (Bubnov):** solidum corpus est quidquid tribus intervallis seu dimensionibus porrigitur, id est quidquid longitudine, latitudine altitudineque distenditur.

> «Nel nostro caso la sola conoscenza della verità non è sufficiente; al contrario tale conoscenza va rinnovata di continuo, con sforzo incessante, se non si vuole che vada perduta. È come una statua di marmo che si erge nel deserto e sia continuamente minacciata di seppellimento dai movimenti delle sabbie»
>
> *A. Einstein*

Le Questioni Introduttive

All'epistola con la quale Fibonacci dedica la *Pratica Geometrie* all'amico Domenico, segue una breve sezione introduttiva che è possibile dividere in due parti: nella prima parte l'autore elenca una serie di definizioni, assiomi e postulati tratti per lo più dal libro I degli *Elementi* di Euclide[1]; nella seconda parte, invece, il matematico introduce una serie di unità di misura in uso a Pisa nel Duecento, fornendo utili indicazioni sul loro corretto utilizzo.

È solo grazie alla *Pratica Geometrie* che è possibile ricostruire il seguente sistema di misure superficiali in uso a Pisa nel XIII secolo: l'oncia superficiale costituisce l'unità minima di riferimento; il denaro corrisponde a tre once; il piede corrisponde a sei denari; il soldo corrisponde a due piedi; la pertica equivale a tre soldi; la scala equivale a quattro pertiche; il panoro equivale a cinque pertiche e mezzo; lo starioro corrisponde a dodici panori; il modioro equivale a ventiquattro stariori[2].

Come opportunamente rileva Barnabas Hughes, Fibonacci calcola l'area di diverse figure geometriche secondo la maniera medievale, servendosi cioè di "strisce rettangolari"[3]. Tali "strisce" non sono lunghezze senza larghezza[4], come siamo abituati a immaginare, ma sono "linee larghe", per usare la felice espressione di Jens Høyrup, ovvero linee «portatrici di una larghezza virtuale di una unità»[5]. Il lettore moderno che intenda comprenderea pieno il procedimento di calcolo illustrato dal matematico, dovrà ricordare sempre che un ipotetico

---

[1] FOLKERTS 2004, p. 98.

[2] Per ulteriori notizie sul sistema computazione in uso a Pisa nel Duecento, cfr. LUZZATI 1965.

[3] HUGHES 2008, p. 2: «Here we need be cautious, because areas are computed by rectangular strips, a bilateral requirement made clear only in an Italian translation».

[4] Si tratta di una definizione di matrice euclidea, la quale si ritrova anche all'interno del trattato di Fibonacci (*Introductoria* 1, 2).

[5] HØYRUP 1995, p. 3.

rettangolo della misura di una pertica di base per una pertica di altezza, avrà un'area che si esprimerà in pertiche quadrate[6], mentre il medesimo rettangolo della misura di una pertica di base per un panoro di altezza (o viceversa), avrà un'area che si esprimerà direttamente in panori[7]. Lo stesso discorso vale anche per i sottomultipli della pertica: un ipotetico rettangolo della misura di una pertica di base per un piede di altezza (o viceversa), avrà un'area che si esprimerà in piedi, mentre il medesimo rettangolo della misura di una pertica di base per un'oncia di altezza (o viceversa), avrà un'area che si esprimerà in once[8]. Infine, l'area di un dato rettangolo della misura di un piede di base per un piede di altezza, si esprimerà in denari[9]. Ne consegue che lo stesso rettangolo di un piede per base per un sottomultiplo del piede in altezza, ovvero per un'oncia, avrà un'area che si esprimerà in sottomultipli del denaro[10].

[6] *Introductoria* 2, 8.
[7] *Introductoria* 2, 9.
[8] *Introductoria* 2, 10-11.
[9] *Introductoria* 2, 12.
[10] Nella fattispecie, in diciottesimi di denaro: cfr. *Introductoria* 2, 13.

TESTO CRITICO

|[VN, f. 1v]

INCIPIT DE PUNCTO

PRO INTRODUCTIONE ARTIS GEOMETRICE[1]

<1>

<1> |[S, f. 8v] Punctus est id[2] quod nullam habet dimensionem idest quod non potest |[M, f. 1v] dividi[3].

<2> Linea est longitudo carens latitudine, |[C, f. 2v] cuius termini sunt duo puncta[4].

<3> Recta linea est que de puncto ad punctum recte[5] protrahitur[6].

<4> Superficies quidem est que latitudinem et longitudinem tantum habet, |[E, f. 1v] cuius termini |[D, f. 1v] sunt[7] linee[8].

<5> Et est plana cum undique infra suos terminos super rectas lineas dilatatur.

<6> Planus vero angulus est inclinatio duarum linearum sese in plano tangentium cum non iaceant[9] in directo.

<7> Et est rectilineus cum linee con|[O_1, f. 3v]tinentes angulum sunt recte.

<8> Cumque[10] linea recta super lineam rectam steterit feceritque circa se[11] duos angulos sibi invicem equales, dicitur rectus uterque angulus et linea stans super ea cui superstat[12] cathetus sive perpendicularis appellatur[13].

<9> Amplus vero vel obtusus angulus est qui maior est recto.

<10> Acutus namque qui minor recto invenitur.

<11> Et terminus est finis rei.

---

[1] Incipit de puncto pro introductione artis geometrice C P L] Incipiunt introductoria B E^2 M V N, *om. et spatium vacuum reliquit* D, *om.* S E^1 O_1.
[2] id B D E M V N O_1 C P L] ille S
[3] Punctus / Linea *in mg. dx. scr.* C
[4] termini sunt duo puncta C P L] termini puncta sunt B S D E M V N O_1 (sunt *om.* S)
[5] recte B S D E M V N O_1 (rectae M N)] recta C L, certa P
[6] protrahitur B S D E M O_1 C P L] protrahatur V N
[7] sunt B S E^2 M V N C P L] est D E^1 O_1
[8] linee B S E M V N C P L] linea D O_1
[9] iaceant B S D E O_1 C P L] iaceantur M V N^1, iaciant N^2
[10] cumque B S D E M V N C P L] cum O_1
[11] circa se B S D E M V N C P L] inter se O_1
[12] dicitur – superstat B S D E M V N C P L] *om.* O_1
[13] appellatur B S D E M O_1 C P L] dicitur V N

<12> Figura quidem est[14] que sub |[B, f. 1v] uno vel pluribus terminis iacet.

<13> Figura quidem rectilinea est que a rectis lineis circundatur: trilatere quippe figure sunt que sub tribus rectis lineis continentur; quadrilatere vero[15] sunt |[L, f. 3r] que quatuor rectis lineis ambiuntur; multilatere autem figure sunt que[16] sub pluribus quam quatuor lateribus comprehenduntur.

<14> Circulus enim[17] est quedam plana figura[18] sub una linea contenta: que linea vocatur circumferens[19] |[O_1, f. 4r] vel periferia, infra quem[20] est punctus a quo omnes recte protracte ad circumferentem lineam[21] sibi invicem sunt equales.

<15> Punctus vero ille centrum circuli appellatur.

<16> Cumque per centrum aliqua recta protracta fuerit et terminata in utraque parte periferie, |[*b*, p. 2] illa recta diameter circuli nuncupatur, |[P, f. 2r] que dividit circulum in duas equas portiones.

<17> Quarum unaqueque semicirculus dicitur.

<18> Portio vero circuli est figura que continetur sub circuli periferia et recta linea sive maior vel minor[22] sit semicirculo.

<19> |[S, f. 9r] Sector vero circuli est quedam plana figura contenta sub duabus rectis a centro ad periferiam deductis, |[M, f. 2r] et arcu periferie ab ipsis rectis comprehenso.

<20> Recte linee que in eadem super|[N, f. 2r]ficie sunt, |[O_1, f. 4v] et ab utraque parte in infinitum protracte, et[23] numquam sibi invicem concurrunt, dicuntur equidistantes.

<21> In quibus si aliqua recta inci|[C, f. 3r]derit faciet duos angulos interiores |[V, f. 2r] ab una[24] parte rectos, aut duobus rectis equales, et exterior

[14] quidem est B D E M V N O_1 C P L] est quidem S
[15] vero B S D E M N^2 C P L] quero V, *non legitur* N^1
[16] quatuor – que B S D E M V N C P L] *om.* O_1
[17] enim B S D E M V N C P L] vero O_1
[18] plana figura B D E M V N O_1 C P L] figura plana S
[19] circumferens B S D E^2 N^2 O_1 C P L] circumferentia E^2 M V N^1
[20] quem B D N^2 C P L] quam S E M V N^1, que O_1
[21] circumferentem lineam B S D E M V^1 N C P L] circumferentiam V^2, circumferentiam lineam O_1
[22] vel minor B S D E V N O_1 C P L] *non legitur* M
[23] et B S D E M V N O_1] *om.* C P L
[24] una B S D E O_1 C P L] utraque M V N

angulus est equalis[25] interiori an|[E, f. 2r]gulo sibi opposito, et anguli qui permutatim[26] sunt sibi invicem equantur.

<22> Ut si in duabus lineis equidistantibus *ab* et[27] *gd* incidat quedam recta *ez*, anguli quidem *biz* et *izd*[28] aut recti sunt aut duobus equales rectis[29]. Illud idem est ex angulis *aiz* et[30] *izg*. Et[31] exterior angulus *eib* interiori sibi opposito *izd*[32] est equalis, et angulus *aiz* ei qui permutatim[33] iacet scilicet[34] angulo *izd* equatur: adhuc ergo |[O_1, f. 5r] et angulus *biz* angulo *izg* |[D, f. 2r] est equalis ut in Geometria ostenditur[35].

<23> |[L, f. 3v] Multa enim sunt que oportet scire eos, qui in mensuratione et divisione camporum[36] secundum subtilitates geometricas[37] procedere volunt, que in Euclide aperte monstrantur. Ex quibus sunt hec:

<24> super datam rectam et terminatam, constituere trigonum equilaterum[38],

<25> et datum[39] angulum, vel lineam, in duo equa secare.

<26> Et super datam rectam, a puncto dato in ipsa, cathetum erigere[40].

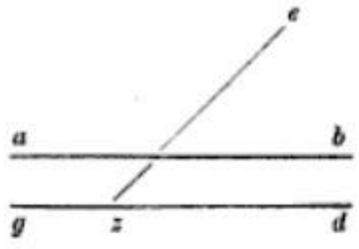
<27> Et super datam rectam, a dato puncto[41] quod non sit in ipsa, cathetum ducere[42].

<28> Et recta |[P, f. 2v] super rectam duos angulos facit circa se duobus rectis equales[43].

<29> |[O_1, f. 5v] Et cum due recte se invicem secant duo anguli, qui sunt[44] a vertice oppositi, sibi[45] invicem sunt equales[46].

---

[25] est equalis B S D E O_1 C P L] equalis est M V N
[26] permutatim S C P L] permutati B D E M V N O_1
[27] et B S D E O_1 C P L] per M V N
[28] biz et izd B S D E V^2 N^2 O_1 C P L] bizd M V^1 N^1
[29] equales rectis B D E M O_1 C P L] rectis equales S V N (aequales N)
[30] et B S D E V O_1 C P L] per M N
[31] et B S D E V N O_1 C P L] *spatium vacuum reliquit* M
[32] izd B S D E M V N^2 O_1 C P L] ezd N^1
[33] permutatim S C P L] permutati B D E M V N O_1
[34] scilicet B S E M V N O_1 C P L] *non legitur* D
[35] 24 primi elementi *in mg. sn. scr.* V
[36] camporum S C P L] corporum B D E M V N O_1
[37] subtilitates geometricas] subtilitatem geometricam B S D M V N O_1 C P L
[38] <...> primi elementi *in mg. sn. scr.* V
[39] datum B S D E M V N O_1 C^2] datur in C^1 P L
[40] et – erigere B S^b D E M V N O_1 C P L (9-10 primi *in mg. sn. scr.* V)] *om.* S^a
[41] in ipsa – puncto B S D E M V^2 O_1 C P L (dato *om.* O_1)] *om.* V^1 N
[42] 11-12 *in mg. sn. scr.* V
[43] 13 *in mg. sn. scr.* V



<30> Et cum in duabus rectis recta incidit, et facit ab una parte duos angulos interiores minores[47] duobus rectis, si, ab ipsa parte a qua anguli sunt minores duobus rectis[48], ipse recte linee fuerint[49] protracte, sibi invicem concurrent[50].

<31> Et si in terminis |[F, f. 1r] duarum[51] linearum equalium et equidistantium due recte copulate fuerint, |[S, f. 9v] ipse sibi invicem equales et equi|[B, f. 2r]distantes erunt[52].

<32> Et ad datam rectam, atque[53] in ipsa punctum datum, dato angulo |[M, f. 2v] rectilineo, equalem angulum rectilineum constituere[54].

<33> Et, per datum punctum, date recte[55], equidistantem rectam lineam ducere[56].

<34> Et trigona et paralilogramina super equas bases vel super eandem basem inter easdem equidistantes constituta, sibi invicem equalia sunt, scilicet[57] |[O_1, f. 6r] trigonum trigono[58] et paralilogramum paralilogramo[59].

<35> Et[60] paralilogramum duplum est trigono[61].

---

44 sunt a vertice B S D E V^2 N^2 O_1 C P L] sunt aut a vertice M V^1 N^1
45 sibi B S D E^2 M V N O_1 C P L] *non legitur* E^1
46 15 *in mg. sn. scr.* V
47 minores B S D E^2 M V N O_1 C P L] *om.* E^1
48 si ab ipsa - rectis B S V^2 N^2 C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
49 fuerint B S D E V^2 N^2 O_1 C P L] *om.* M V^1 N^1
50 scilicet postulatum quod <...> demonstratum *in mg. sn. scr.* V
51 si in terminis S C P L] in duarum E^2, cum duarum M V N, *deest* B D E^1 O_1,
52 33 primi *in mg. sn. scr.* V
53 atque S C P L] ad quod B D E^1 O_1 F, ad quodlibet E^2 M V N
54 23 primi elementi *scr. in mg. sn*. V
55 date recte B D E V N^2 O_1 F C P L] datis rectis M N^1
56 31 primi *scr. in mg. sn.* V
57 scilicet B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
58 trigono B S D E M N^2 O_1 F C P L] trigona V N^1
59 35-36-37-38 primi elementi *in mg. sn. scr.* V
60 et S D E^2 M V^1 N^1 C P L] etiam B E^1 V^2 N^2 O_1 F
61 41 primi *in mg. sn. scr.* V

<36> Dicitur enim paralilogramum figura que habet latera oppo|[C, f. 3v]sita equalia et equidistantia, cuius anguli oppositi sibi invicem sunt equales, |[L, f. 4r] et diameter[62] secat ipsum in duo similia trigona et equalia[63].

<37> Et[64] si aliquod latus |[N, f. 2v] trigoni ab aliqua parte protrahatur, tunc faciet unum angulum extra ipsum trigonum qui erit equalis duobus angulis sibi oppositis infra trigonum |[E, f. 2v] existentibus, et[65] tres anguli cuius|[V, f. 2v]libet trigoni duobus rectis equantur.

<38> Et[66] eidem equalia et alternis[67] equalia sunt.

<39> Et[68] si equalibus equalia apponantur, tota sunt equalia.

<40> Et si ab equalibus equalia auferantur[69], que relinquuntur sunt equalia[70].

<41> Et si[71] inequalibus equalia apponantur, tota sunt inequalia[72].

<42>|[P, f. 3r] Et si ab inequalibus equalia auferantur, reliqua sunt inequalia[73].

<43> Et eiusdem dupla [|O_1, f. 6v] equa sibi invicem sunt.

<44> Et eiusdem dimidia alternis[74] equalia sunt[75].

<45> Et[76] super se invicem coaptata sibi invicem equalia[77] sunt[78].

<46> Et totum sua parte maius est.

<47> Et due recte spatium non continent[79].

<48> Sine his omnibus et sine radicum inventione ipsi, qui secundum vulgarem modum procedere voluerint[80], |[*b*, p. 3] cum his que ostendam inferius convenienti loco poterunt sufficienter procedere.

---

[62] diameter S C P L] diameter etiam B D E M V N O_1 F
[63] 34 primi *in mg. sn. scr.* V
[64] et S E^1 M V^1 N^1 C P L] etiam B C D E^2 V^2 N^2 O_1 F
[65] et B S D N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V N^1
[66] et B S D E M N^2 O_1 F C P L] atque V N^1
[67] et alternis B S D E^1 O_1 F C P L] inter se E^2 M V N
[68] et B S O_1 F C P L] *om.* D E M V N
[69] auferantur B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[70] et si – equalia B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[71] si B S D E N^2 C P L] si ab F, *om.* M V N^1 O_1
[72] inequalia. Et si B S D E N^2 F C P L] *om.* M V N^1 O_1
[73] et si inequalia – inequalia B S D E V^2 N^2 F C P L] *om.* M V^1 N^1 O_1
[74] alternis B S D E^1 M N O_1 F C P L] inter se E^2, *om.* V
[75] sunt B S D E O_1 F C P L] inter se sunt M V N
[76] et B S M N F C P L] *om.* D V E O_1
[77] equalia B S D E M V N O_1 F C] coaptata equalia P L
[78] equalia sunt B D E M V N O_1 F C P L] esse equalia S
[79] axioma primum, 2^m, 3^m, 5^m, 7^m, 8^m, 9^m, 12^m *in mg. dx. scr.* V

<2>

<1> His ita[81] determinatis, cum quibus mensuris mensurentur agri breviter proposui explicare[82]. |[S, f. 10r] Quidam enim mensurare consueverunt agros cum mensuris cubitalibus vel ulnis aut cum passibus; alii cum perticis sive cum alio quolibet mensurabili instrumento. Quelibet tamen[83] suprascriptarum |[D, f. 2v - O_1, f. 7r] mensurarum intelligenda est quandoque linealis quandoque superficialis.

<2> Linealis est que sola longitudine constat, superficialis que[84] tantum |[M, f. 3r] habet in longitudine[85] quantum[86] in latitudine[87], et in se ipsa quadrata existens ex[88] quatuor rectis constat angulis[89]. Ex his superficialibus mensuris, quidam in multiplicando colligunt quandam quantitatem |[L, f. 4v] quam vocant iugerum, vel aripennium, sive carrucam, sive tornaturam, vel[90] culturam, vel[91] alias quantitates que aliis censentur vocabulis.

<3> Ego vero, secundum pisanorum consuetudinem incedere volens[92], a pertica sumam initium. Pertica pisana linealis[93] sex linealibus pedibus constat; pes vero linealis decem et octo unciis[94] linealibus constat. Pertica quoque quadrata, scilicet |[O_1, f. 7v] superfi|[C, f. 4r]cialis, sex pedibus superficialibus constat. Habet enim pes superficialis unam perticam in longitudine et sextam[95] pertice in latitudine[96]. Uncia vero superficialis habet unam perticam in longitudine et octavam decimam partem[97] pedis in latitudine, quare superficialis pes est sexta |[F,

---

[80] voluerint cum B D E M V N O_1 F C P L] voluerint nequaquam poterunt. Scilicet cum predictis et cum S
[81] ita B S D E O_1 F C P L] itaque M V N
[82] proposui explicare B S D E O_1 F C P L] explicare proposui M V N
[83] tamen B D E M V N O_1 F C P L] cum S
[84] que B S D E O_1 F C P L] est que M V N
[85] habet in longitudine B S D E O_1 F C P L] in longitudine habet M V N
[86] quantum B D E M V N O_1 F C P L] quam S
[87] mensura linealis / mensura superficialis *in mg. sn. scr.* C
[88] ex M N C P L] et B S D E V O_1 F
[89] rectis constat angulis B S D E M O_1 F C P L] constat rectis angulis V N
[90] vel B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[91] vel B S D E V^2 O_1 F C P L] sive M V^1 N
[92] consuetudinem – volens C P L] incedere volens consuetudinem B S D E V^2 N^2 O_1 F (procedere S), intendere volens consuetudinem M V^1 N_1
[93] pertica pisana linealis *in mg. sn. scr.* C
[94] unciis S C P L] punctis B D E M V N O_1 F, forte unciis *in mg. dx. scr.* E, *in mg. sn. scr.* M
[95] sextam B^1 S D E^2 M V N O_1 F C P L] sextam partem B^2, *om.* E^1
[96] et – latitudine B S D E^2 M V N O_1 F C P L] *om.* E^1
[97] partem pedis B^1 S D E M V N O_1 F C P L] partem longitudinis pedis B^2

f. 1v] pars[98] superficialis pertice, et[99] uncia superficialis est octava decima[100] pars |[P, f. 3v] superficialis pedis vel centesima octava pars super|[B, f. 2v]ficialis pertice.

<**4**> Item superficialis pertica continet in se denarios 36 de mensura, et ita contingunt unicuique pedi denarii sex, et uncia superficialis est tertia pars denarii. Denarius quoque |[E, f. 3r] habet unum pedem in longitudine et unum in lat|[V, f. 3r]itudine |[N, f. 3r]. Et ita denarius quadratus |[O_1, f. 8r] ex quatuor rectis constat angulis, et sic denarius est trigesima sexta pars totius pertice superficialis.

<**5**> Quatuor quidem pertice superficiales faciunt quandam mensuram que vocatur scala. Quinque[101] enim superficiales pertice et semis faciunt |[S, f. 10v] unum panorum. Sexaginta nempe et sex pertice quadrate faciunt mensuram quandam que vocatur stariorum, ad quam[102] venduntur et emuntur agri in Archiepiscopatu[103] pisano.

<**6**> Et[104] ad quam mensuram colligere embada, hoc est areas camporum, monstrabo, et[105] ex suprascripto vero starioro multiplicato, |[L, f. 5r] colligitur quedam alia summa, sive quantitas, que vocatur modiorum. Est enim modiorum id quod continet in se stariora |[O_1, f. 8v] 24. Item scale 16 et semis sunt stariorum unum, et scala una est undecima pars de duabus tertiis stariori[106], vel est scala soldi 12 de mensura. Rursus panora 12 sunt stariorum |[M, f. 3v] unum, quare panorum est duodecima pars stariori. Et est panorum soldi 16 et semis, et stariorum est soldi 198.

<**7**> Mensurantur quidem agri et spatia domorum cum perticis et pedibus et unciis [linealibus], sed camporum embada colliguntur in starioris |[D, f. 3r] et panoris et soldis et denariis, vel in partes unius panori. Domorum quoque spatia colliguntur in scalis et in partibus scale et in soldis et denariis.

<**8**> His ita explicatis, ostendendum est quid ex multiplicatione perticarum et suarum[107] partium in suprascriptis mensuris[108] |[O_1, f. 9r] eveniat. Quicquid enim

---

[98] superficialis – pars B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
[99] et S] *om.* B D E M V N O_1 F C P L
[100] octava decima B S D E O_1 F C P L] decima octava M V N
[101] quinque B S D E M V N O_1 F C] cumque P L
[102] ad quam B S F C P L] ad quod D E M V N O_1
[103] Archiepiscopatu S C P L] Episcopatu B D E M V N O_1 F
[104] et B^b S F C P L] *deest* B^a D E M V N O_1
[105] et S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
[106] stariori vel B S D E M V N O_1 C P L] stariorum unum vel F
[107] et suarum B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
[108] suprascriptis mensuris B S D E M V N O_1 C P L] suprascriptas mensuras F

multiplicatur in [109] perticam vel perticas, illud [110] idem procedit ex ipsa multiplicatione[111], ut |[C, f. 4v] si pertica vel pertice multiplicentur in perticas, quicquid ex multiplicatione |[P, f. 4r] colligitur pertice erunt. Verbi gratia[112]: tres[113] pertice[114] in novem perticas multiplicate faciunt perticas 27.

<9> Et si pertica vel pertice multiplicantur in panora, vel panora in perticas, quicquid ex multiplicatione consurgit[115], erunt panora. Verbi gratia: tres pertice multiplicate in novem panora[116], vel novem panora in tres |[*b*, p. 4] perticas, faciunt panora 27. Et ita intelligendum est de multiplicatione perticarum in scalas et stariora et modiora, vel ex multiplicatione scalarum et stariorum et modiorum in perticas.

<10> |[S, f. 11r] Rursus pedes multiplicati |[L, f. 5v] in perticas, vel pertice in pedes, |[O_1, f. 9v] erunt pedes, sive medii soldi. Verbi gratia: tres pedes multiplicati |[E, f. 3v] in perticas novem, vel novem pertice in pedes tres, erunt pedes 27, scilicet[117] soldi 13, et[118] $\frac{1}{2}$ de mensura.

<11> Item uncie multiplicate in perticas, vel pertice multipli|[V, f. 3v]cate in uncias, faciunt uncias, vel tertias unius denari. Verbi gratia: uncie quatuor multiplicate in per|[N, f. 3v]ticas novem, vel econtra, surgunt in uncias 36, hoc est in denariis 12 mensure.

<12> Adhuc pedes multiplicati in pedes surgunt in denarios. Verbi gratia: pedes tres |[F, f. 2r] multiplicati in pedes quinque surgunt in denarios 15.

<13> Iterum[119] pedes multiplicati in uncias faciunt octavas decimas unius denarii, et uncie multiplicate in uncias faciunt octavas decimas |[O_1, f. 10r] partes |[B, f. 3r] octave decime partis unius denarii, scilicet tricentesimas vigesimas quartas unius denarii[120].

---

[109] in B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] per M V^1 N^1
[110] illud B S D E M V N F C P L] illud enim O_1
[111] ex ipsa multiplicatione B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[112] multiplicentur – gratia B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
[113] tres B S M N F C P L] *om.* D V E O_1
[114] pertice B S V N^2 O_1 F C P L] *om.* D E M N^1
[115] consurgit B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] surgit V^1 N^1
[116] vel panora – novem panora B S D^b E M V N O_1 F C P L] *om.* D^a
[117] scilicet B V^2 N^2 O_1 F C P L] sive S, *om.* D E M V^1 N^1
[118] et B D E O_1 F P L] *om.* S M V N C
[119] iterum B N^2 O_1 F C P L] item S D E M V N^1
[120] et uncie – denarii B S^b D E M V N O_1 F C P L] *om.* S^a

<14> Et nota quia[121] semper mensure que multiplicantur sunt lineales, et que colliguntur ex multiplicatione earum sunt superficiales.

<15> Nec non sciendum est, quod pertice 100 superficiales sunt stariorum unum et dimidium et insuper pertica |[M, f. 4r] 1, et[122] centenarium scalarum sunt stariora 6 et insuper scala[123] 1, et centenarium panororum[124] sunt stariora $\frac{1}{3}$ 8.

<16> Item quia[125] soldi $\frac{1}{2}$ 16 sunt panorum unum, ergo soldi 33 sunt panora 2; et soldi $\frac{1}{2}$ 49 sunt panora 3; et soldi 66 sunt panora 4; et soldi $\frac{1}{2}$ 82 sunt panora 5[126]; et soldi 99 sunt panora 6. Item scale $\frac{1}{2}$ 5 sunt panora 4; et scale 11 sunt panora 8.

<17> |[P, f. 4v] Et nota quia[127] ideo facimus mentionem |[O_1, f. 10v] de scalis, quia quidam utuntur[128] colligere mensuras terrarum in scalis; et de ipsis scalis faciunt stariora et[129] panora. Unde nos relinquimus in hoc opere laborem de ipsis scalis; et docebimus colligere mensuram |[L, f. 6r] terrarum per stariora, et per panora, et per soldos, et per denarios.

<18> Unde dicendum |[D, f. 3v] est quod pertice $\frac{1}{2}$ 5 multiplicate in perticas quotlibet, tot panora ex multiplicatione eveniunt[130], quot fuerint ille pertice in quas pertice $\frac{1}{2}$ 5 multiplicate |[S, f. 11v] fuerint. Quare pertice 11 multiplicate in perticas quotlibet reddunt tot panora bis, quot ille pertice sunt. Quare per|[E, f. 4r]tice[131] $\frac{1}{2}$ 16 multiplicate in perticas quotlibet reddunt tanta panora ter[132]; et pertice 22 quater |[O_1, f. 11r] tanta; et pertice $\frac{1}{2}$ 27 quinquies tanta; et pertice 33

[121] quia B S N^2 F C P L] quod D E M V N^1 O_1
[122] et B S D E M V N F] scilicet C P L, *om.* O_1
[123] et – scala B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[124] panororum B S V^2 N^2 O_1 F C P L] panorum D E M V^1 N^1
[125] quia B S D N^2 O_1 F C P L] quare E M N^1, *non legitur* V
[126] 5 B S V N F C P L] 4 D E M O_1
[127] quia B S F C P L] quod D O_1, quare E M V N
[128] utuntur B S D E M V^1 N O_1 F C P L] solent V^2
[129] stariora et C P L] *desunt* B S D E M V N O_1 F
[130] eveniunt B S D E M V^1 N O_1 F C P L] reddunt V^2
[131] sunt quare pertice B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[132] tanta panora ter B D E M V N O_1 F] ter tanta panora S, *om.* C P L

sexies tanta; et pertice $\frac{1}{2}$ 38 septies tanta; et pertice 44 octies tanta; et pertice $\frac{1}{2}$ 49 novies tanta; et pertice 55 decies tanta[133]; et pertice $\frac{1}{2}$ 60 undecies tanta.

<**19**> Similiter et si pertice 66 multiplicate sint[134] in perticas quotlibet, duodecies tanta panora egrediuntur ex multiplicatione illarum perticarum, in quas pertice 66 multiplicate fuerint, hoc ||[V, f. 4r] est tot stariora, quot fuerint ille pertice. Propter quod et pertice 132 multiplicate in perticas quotlibet faciunt bis tanta stari||[N, f. 4r]ora; et sic intelligas de similibus. Et hoc est[135] quod diximus superius de panoris et sta||[O_1, f. 11v]rioris et modioris multiplicatis in perticas, quia[136] illud idem est multiplicare perticas 22 in perticas 3, quod panora 4 in perticas 3. Est[137] enim illud idem multiplicare perticas 132 in perticas quotlibet, quod multiplicare stariora 2 in easdem perticas.

<**20**> Et notandum[138] quod pertica una in latitudine, et $\frac{1}{2}$ 5 in longitudine ||[M, f. 4v] est panorum unum; et pertica una in latitudine, et duplum de perticis $\frac{1}{2}$ 5 in longitudine est duplum unius panori; et sic intelligas de triplo, et quadruplo et de alio quovis multiplice perticarum ||[L, f. 6v] $\frac{1}{2}$ 5, quod fuerit in longitudine, et pertica una in latitudine.

<**21**> Item pertica una in latitudine et pertice 66 ||[O_1, f. 12r] in longitudine est stariorum ||[F, f. 2v – C, f. 5v] unum; quare ||[*b*, p. 5] pertice due in capite, et pertice 66[139] in[140] longitudine ||[P, f. 5r] sunt stariora 2; et pertice 3 in capite, et pertice 66 in longo sunt stariora 3; et sic intelligatur in similibus.

<**22**> Rursus duplum de pertica una in capite, et dimidium perticarum 66 in longum est unum stariorum; et triplum unius pertice in capite, et tertium de perticis 66 ||[S, f. 12r] in longum est similiter stariorum unum: et hoc intelligas ||[B, f. 3v] de alio[141] quovis multiplice unius pertice, si fuerint[142] in capite, et ex eadem parte de perticis 66, si fuerint in longum.

---

[133] et pertiche 44 – decies tanta B S D^b E M V N O_1 F C P L] *om.* D^a
[134] 66 multiplicate sint B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[135] est B S V^2 N^2 F] *om.* D E M V^1 N^1 O_1 C P L
[136] quia B S D V^2 O_1 F C P L] quare E M N, que V^1
[137] est B D E M V N O_1 F C P L] et est S
[138] notandum B S D E M N^2 O_1 F C P L] notandum est V N^1
[139] in longitudine – 66 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[140] in B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[141] de alio B S V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1
[142] in capite – pertice B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

<23> Unde si queratur, cum pertice 6 fuerint in capite alicuius campi quadrati, quot pertice erunt in longo ipsius, ut[143] perficiatur stariorum[144], tunc[145] quia[146] 6 est sexcuplum de pertica una, sextum de perticis 66, scilicet 11, acci|[E, f. 4v]pies, et habebis[147] longitudinem ipsius[148] agri. Item si in capite fuerint per|[D, f. 4r]tice 7, perficietur[149] stariorum si in longitudine[150] habue|[O_1, f. 12v]ris septimam de perticis 66. Que ita accipitur: primum accipie $\frac{1}{7}$ [151] de perticis 63[152]: egredientur pertice 9, et de perticis tribus que restant a 63 usque in 66, fac pedes: erunt pedes 18. Quos divide per 7, exibunt pedes 2, et restant pedes[153] 4 dividendi: ex quibus fac uncias, erunt uncie 72, quas divide per 7, exibunt uncie $\frac{2}{7}$ 10. Et sic habemus perticas 9 et pedes 2, et uncias $\frac{2}{7}$ 10 pro $\frac{1}{7}$[154] perticarum 66. Sunt enim[155] hec[156] valde utilia, ut[157] in suo demonstrabitur loco.

[143] ut B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] et E V^1 M, *om.* N^1
[144] stariorum B S D E N^2 O_1 F C P L] stariorum unum M V N^1
[145] tunc B S D E M V N O_1 F C P L] unum S
[146] quia B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] quare E M V^1 N^1
[147] et habebis B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V^1 N^1
[148] ipsius B S D E M V N O_1 F C P L] illius S
[149] perficietur B S V^2 N^2 O_1 F C P L] *non legitur* D, perficiatur M V^1 N^1
[150] longitudine S V^2 N^2 F C P L] longum B D E M V^1 N^1 O_1
[151] de perticis 66 - $\frac{1}{7}$ S C P L] *desunt* B D E M V N O_1 F
[152] 63 B S D E M V^1 N F C P L] 66 V^2
[153] 18 – pedes B S D E M V N O_1 F^b C P L] *om.* F^a
[154] pro $\frac{1}{7}$ B S D E O_1 F C] per $\frac{1}{7}$ M V N, *om.* P L
[155] enim B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[156] hec B S D M V N O_1 F C P L] *om.* E
[157] ut B S D M V N O_1 F C L] et P

TRADUZIONE

Il punto, ovvero
Introduzione alla Geometria

<1>

<1> Il punto è l’ente geometrico che non ha dimensione, vale a dire che non può essere diviso.

<2> La linea è una lunghezza priva di larghezza, i cui estremi sono due punti.

<3> La linea retta è quella linea che si estende dritta da punto a punto[1].

<4> La superficie è l’ente geometrico dotato soltanto di lunghezza e di larghezza, e i cui estremi sono linee[2].

<5> Essa è piana quando viene protratta tra i suoi estremi su linee rette.

<6> L’angolo piano è l’inclinazione di due linee che si toccano su un piano e che non giacciono sulla stessa retta.

<7> L’angolo è retto quando le linee che lo contengono sono rette.

---

[1] La *recta linea* non corrisponde a ciò che noi intendiamo per “retta” ma è, piuttosto, la generica linea dritta, la linea cioè che non è curva e che non si spezza. Il significato di *recta* coincide con il nostro solo quando la linea viene protratta all’infinito; se, invece, l’autore specifica che la *recta* è *terminata* da punti (*termini* o *extrema*), il suo significato non può che coincidere con quello di “segmento”.

[2] Nel lessico della *Pratica Geometrie* si definisce talvolta *linea* il lato di una generica superficie piana, come ad esempio in *Introductoria* 1,4: *superficies quidem est que latitudinem et longitudinem tantum habet, cuius termini sunt linee*. Così anche Euc. Ὅροι 6 (Heiberg):᾽Επιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί; Balb. *Grom*. p. 99 (Lachmann): *summitas est secundum geometricam appellationem quae longitudinem et latitudinem tantum modo habet, summitatis fines lineae*; Ps. Boeth. *Geom*. p. 113 (Folkerts): *superficiei autem fines lineae sunt*; Hugo *Practica*. p. 187 (Baron): *superficies est cum cuilibet date linee alia linea una uel plures in latere adiunguntur et latitudinem explicant*; Gerb. *Geometria* p. 53 (Bubnov): *superficiei vero extremitas sive terminus linea, seu graece gramma est*. Si definisce, invece, *linea recta* il segmento o, al più, il lato di una figura geometrica regolare, come ad esempio in *Introductoria* 1,3: *recta linea est que de puncto ad punctum recte protrahitur*. È possibile riscontrare la stessa definizione anche in altri autori: Euc. Ὅροι 4 (Heiberg): Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται; Balb. *Grom*. pp. 98-9 (Lachmann): *ordinatae rectae lineae sunt quae in eadem planitia positae et eiectae in utramque partem in infinitum non concurrunt*; Ps. Boeth. *Geom*. p. 113 (Folkerts): *recta linea est quae aequaliter in suis protenditur punctis*; Sav. *Liber Embadorum* p. 10: *recta vero linea est, quae ponitur super quorumlibet pensatam oppositionem ad invicem*.

<8> Quando una linea retta giace su un’altra linea retta e forma due angoli tra loro uguali, si definisce retto ciascuno dei due angoli, mentre la linea che giace sull’altra si definisce cateto, oppure perpendicolare.

<9> L’angolo ampio, ovvero ottuso, è maggiore dell’angolo retto.

<10> Invece l’angolo acuto è minore dell’angolo retto.

<11> Estremo è il limite dell’oggetto.

<12> La figura geometrica è quella che giace sotto uno o più estremi.

<13> Si dice rettilinea la figura compresa da linee rette: trilatere sono senz’altro le figure dotate di tre linee rette; quadrilatere sono invece quelle dotate di quattro linee rette; multilatere sono, infine, quelle dotate di più di quattro lati.

<14> Il cerchio è una figura piana contenuta in una sola linea: questa linea si chiama circonferenza o periferia, e al suo interno vi è un punto dal quale tutti i segmenti che vengono tracciati verso la circonferenza sono tra loro uguali.

<15> Si definisce quel punto centro del cerchio.

<16> Un segmento qualsiasi passante per il centro e tangente la circonferenza in due punti, viene definito diametro del cerchio, e divide il cerchio in due parti uguali.

<17> Ciascuna di queste parti viene definita semicerchio.

<18> La porzione del cerchio è invece la figura geometrica che è compresa tra la circonferenza del cerchio e il segmento sottostante, ed essa è maggiore o minore del semicerchio.

<19> Il settore circolare è una figura piana racchiusa da due linee rette condotte dal centro alla periferia, e dall’arco di circonferenza tra esse compreso.

<20> Le rette che giacciono sulla stessa superficie e si estendono da ambo le parti all’infinito senza incontrarsi mai, sono dette parallele.

<21> La retta che le intersechi, formerà da una parte due coniugati interni retti, o tali che la loro somma sia pari alla somma di due angoli retti; l’angolo corrispondente esterno è uguale all’angolo opposto interno; gli angoli alterni sono tra loro uguali.

<22> Se tra due parallele *ab* e *gd* cade un segmento *ez*, gli angoli *biz* e *izd* o sono retti, o sono tali che la loro somma sia pari alla somma di due angoli retti. Lo stesso vale a proposito degli angoli *aiz* e *izg*. L’angolo esterno *eib* è uguale all’angolo opposto interno *izd*, e l’angolo *aiz* è uguale a quello alterno, vale a dire all'angolo *izd*. L'angolo *biz* è poi uguale all'angolo *izg*, come si mostra in Geometria.

<23> È necessario che conoscano molte nozioni coloro che, relativamente alle operazioni di misurazione e di divisione delle superfici, intendano procedere secondo le sottigliezze geometriche che sono chiaramente indicate da Euclide. Tra queste vi sono le seguenti:

<24> data una retta limitata, costruire su di essa un triangolo equilatero;

<25> e dato un angolo, o un segmento, dividerlo in due parti.

<26> Su di una retta data, a partire da un punto fissato su di essa, erigere una perpendicolare.

<27> Su di una retta data, a partire da un punto fissato all'esterno di essa, condurre una perpendicolare.

<28> La linea retta che giace su di un'altra linea retta, forma due angoli la cui somma è pari alla somma di due angoli retti.

<29> Quando due rette si intersecano, i due angoli che sono opposti al vertice sono uguali tra loro.

<30> Quando una retta, cadendo tra due rette, forma da una parte due angoli interni minori di 180°, allora le due rette, se saranno protratte dal lato in cui la somma dei due angoli è minore di 180°, si incontreranno.

<31> Se poi tra gli estremi di due segmenti uguali ed equidistanti vengono tracciate due rette, queste saranno tra loro uguali ed equidistanti.

<32> Data una retta e fissato un punto su di essa, dato poi un angolo retto, costruire un altro angolo retto uguale.

<33> Data una retta passante per un punto fissato, condurre una parallela.

<34> Triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa base o che siano costruiti sulla stessa base tra le medesime rette equidistanti, sono tra loro uguali, ovvero il triangolo è uguale al triangolo e il parallelogramma è uguale al parallelogramma.

<35> Il parallelogramma è doppio del triangolo.

<36> Si definisce parallelogramma la figura geometrica fornita di lati opposti uguali ed equidistanti, i cui angoli opposti sono tra loro uguali, e che una diagonale[3] divide in due triangoli simili ed uguali.

<37> Se poi un lato qualsiasi del triangolo viene protratto da una parte, esso formerà un angolo esterno al triangolo che sarà pari alla somma dei due angoli opposti interni. La somma degli angoli di ogni tipo di triangolo è pari a 180°.

<38> Enti che siano uguali a un terzo, sono uguali tra loro.

<39> Se a enti uguali si aggiungono enti uguali, si ottengono enti uguali.

<40> Se da enti uguali si sottraggono enti uguali, si ottengono enti uguali.

<41> Se a enti non uguali si aggiungono enti uguali, si ottengono enti non uguali.

<42> Se da enti non uguali si sottraggono enti uguali, si ottengono enti non uguali.

<43> Il doppio di enti uguali produce enti uguali tra loro.

<44> Le metà di enti uguali sono a loro volta uguali tra loro.

<45> Enti che sono sovrapponibili tra loro sono anche uguali.

<46> Il tutto è più grande della sua parte.

<47> Due rette non individuano un piano.

<48> Senza tutte queste nozioni e senza il calcolo delle radici, coloro che vogliono operare in Geometria secondo la consuetudine del volgo, potranno procedere in modo sufficientemente adatto attraverso gli strumenti che indicherò qui di seguito.

<2>

<1> Dopo aver così definito questi concetti, ho inteso spiegare in breve in che modo si operino calcoli mediante unità di misura. Alcuni erano soliti misurare i terreni servendosi di cubiti, ossia avambracci, oppure di passi; altri con pertiche o con qualsiasi altro strumento di misura. Ora, di tutte queste unità di misura occorre capire quando sono lineari e quando, invece, sono superficiali.

[3] In latino, per *diameter* (o *diametros*) si intende la generica *linea recta* che divide una figura in due parti uguali.

<**2**> Lineare è la misura dotata soltanto di lunghezza, superficiale quella che si estende tanto in lunghezza quanto in larghezza e che, essendo in se stessa quadrata, consta di quattro angoli retti. Da queste unità, taluni moltiplicando ottengono una certa quantità che chiamano iugero, o aripennio, o carruca, o tornatura, o cultura, o altre quantità che vengono indicate con altri vocaboli.

<**3**> Io, invece, volendo procedere nella trattazione secondo la consuetudine pisana, partirò dalla pertica. La pertica pisana lineare equivale a 6 piedi lineari; il piede lineare, invece, equivale a 18 once lineari. Anche la pertica quadrata, ovvero superficiale, equivale a 6 piedi superficiali. Il piede superficiale, infatti, misura 1 pertica in lunghezza e $\frac{1}{6}$ in larghezza. L'oncia superficiale misura 1 pertica in lunghezza e $\frac{1}{18}$ in larghezza, sicché il piede superficiale corrisponde alla sesta parte della pertica superficiale, e l'oncia superficiale è la diciottesima parte del piede superficiale, ossia $\frac{1}{108}$ della pertica superficiale.

<**4**> Allo stesso modo, la pertica superficiale equivale a 36 denari, pertanto 1 piede superficiale vale 6 denari, mentre un'oncia superficiale corrisponde alla terza parte di un denaro. Anche il denaro misura un piede in lunghezza e un piede in larghezza. Parimenti, poi, il denaro quadrato consta di quattro angoli retti, e corrisponde alla trentaseiesima parte di una pertica superficiale.

<**5**> Quattro pertiche superficiali formano un'unità di misura che si chiama scala. Cinque pertiche superficiali e mezzo fanno un panoro. Sessantasei pertiche quadrate fanno precisamente un'unità di misura che si chiama starioro, alla quale si vendono e si comprano i terreni nell'Arcivescovato pisano.

<**6**> Ora mostrerò in che modo si calcolino le aree delle superfici: in verità, dalla moltiplicazione del suddetto starioro si ottiene un'altra unità di misura, o quantità, che si chiama modioro. Il modioro equivale a 24 stariori. Ora, 16 scale e mezzo equivalgono a uno starioro, mentre una scala corrisponde all'undicesima parte di $\frac{2}{3}$ di uno starioro, oppure a 12 soldi. Ancora, 12 panori equivalgono a un starioro, dunque un panoro corrisponde alla dodicesima parte di uno starioro. Infine, un panoro equivale a 16 soldi e mezzo, e uno starioro equivale a 198 soldi.

<**7**> I terreni e gli ambienti delle case si misurano in pertiche, piedi e once, mentre le aree delle superfici agricole si calcolano in stariori, panori, soldi e

denari, ovvero nei sottomultipli del panoro. Anche gli ambienti delle case si possono misurare in scale e relativi sottomultipli, in soldi e in denari.

<8> Dopo aver chiarito tali cose, bisogna ora mostrare quali risultati si ottengono dalla moltiplicazione delle pertiche, e delle sue frazioni, per le unità di misura di cui sopra. L’unità di misura che viene moltiplicata per una o più pertiche, coincide col risultato della medesima moltiplicazione, il che vuol dire che se si moltiplicano una o più pertiche verranno per altre pertiche, ciò che risulta dalla moltiplicazione sarà espresso in pertiche. Esempio: 3 pertiche per 9 pertiche fanno 27 pertiche.

<9> Se invece una o più pertiche vengono moltiplicate per panori, o viceversa, qualsiasi cosa risulti da questa operazione si esprime in panori. Esempio: 3 pertiche per 9 panori, o 9 panori per 3 pertiche, danno come risultato 27 panori. Così si deve intendere quando si moltiplichino pertiche per scale, per stariori e per modiori, o viceversa.

<10> Ancora, piedi per pertiche, o pertiche per piedi, daranno un risultato che si esprime in piedi, ossia in mezzi soldi. Esempio: 3 piedi per 9 pertiche, o 9 pertiche per 3 piedi, danno come risultato 27 piedi, vale a dire 13 soldi e mezzo.

<11> Allo stesso modo, once per pertiche, o pertiche per once, danno un risultato che si esprime in once, le quali corrispondono alla terza parte di un denaro. Esempio: 4 once per 9 pertiche, o viceversa, fanno 36 once, ossia a 12 denari.

<**12>** Inoltre piedi per piedi danno un risultato che si esprime in denari. Esempio: 3 piedi per 5 piedi fanno 15 denari.

<13> Di nuovo, piedi per once danno come risultato $\frac{1}{18}$ di denaro, mentre once per once danno come risultato la diciottesima parte di $\frac{1}{18}$ di denaro, vale a dire $\frac{1}{324}$ di denaro.

<14> Tieni presente che le unità di misura che qui vengono moltiplicate sono sempre lineari, mentre quelle che risultano dalla loro moltiplicazione sono sempre superficiali.

<15> Né bisogna ignorare che 100 pertiche superficiali equivalgono a uno starioro e mezzo più 1 pertica, che 100 scale equivalgono a 6 stariori più 1 scala, e che 100 panori equivalgono a 8 stariori e $\frac{1}{3}$.

<16> Dal momento che 16 soldi e mezzo equivalgono a 1 panoro, allora 33 soldi equivalgono a 2 panori; 49 soldi e mezzo equivalgono a 3 panori; 66 soldi equivalgono a 4 panori; 82 soldi e mezzo equivalgono a 5 panori; 99 soldi equivalgono a 6 panori. Allo stesso modo, 5 scale e mezzo equivalgono a 4 panori; 11 scale equivalgono a 8 panori.

<17> Tieni presente che, se faccio menzione delle scale, è soltanto perché alcuni sono soliti servirsene per le misurazioni dei terreni, in quanto ricavano panori dalle scale. Pertanto, in questa trattazione, evito di parlare di scale, e mi concentro su come si misurino i terreni utilizzando stariori, panori, soldi e denari.

<18> Bisogna innanzitutto dire che moltiplicando 5 pertiche e mezzo per quante pertiche si vuole, si ottengono tanti panori quante sono le pertiche per le quali siano state moltiplicate le 5 pertiche e mezzo. Ne consegue che, moltiplicando 11 pertiche per quante pertiche si vuole, si ottengono due volte altrettanti panori. Perciò, moltiplicando 16 pertiche e mezzo per quante pertiche si vuole, si ottengono tre volte altrettanti panori; moltiplicando 22 pertiche quattro volte tanto; e 27 pertiche e mezzo cinque volte tanto; e 33 pertiche sei volte tanto; e 38 pertiche e mezzo sette volte tanto; e 44 pertiche otto volte tanto; e 49 pertiche e mezzo nove volte tanto; e 55 pertiche dieci volte tanto; e 60 pertiche e mezzo undici volte tanto.

<19> Allo stesso modo, se vengono 66 pertiche per quante pertiche si vuole, si ottengono dodici volte tanti panori quante sono le pertiche per le quali siano state moltiplicate le 66 pertiche, vale a dire tanti stariori quante sono quelle pertiche. Per questo motivo, moltiplicando 132 pertiche per quante pertiche si vuole, si ottengono due volte altrettanti stariori; e via dicendo. Ed è quello che ho detto prima a proposito della moltiplicazione di panori, stariori e modiori per pertiche, perché moltiplicare 22 pertiche per 3 pertiche è lo stesso che moltiplicare 4 panori per 3 pertiche. Infatti moltiplicare 132 pertiche per quante pertiche si vuole, è lo stesso che moltiplicare 2 stariori per lo stesso numero di pertiche.

<20> Tieni presente che 1 panoro misura 1 pertica in larghezza e 5 pertiche e mezzo in lunghezza; 2 panori misurano 1 pertica in larghezza e due volte 5 pertiche e mezzo in lunghezza; e via dicendo per tre volte, quattro volte e qualsiasi altro multiplo di 5 pertiche e mezzo in lunghezza e 1 pertica in larghezza[4].

<21> Parimenti, 1 starioro misura 1 pertica in larghezza e 66 pertiche in lunghezza; 2 stariori misurano 2 pertiche di base[5] e 66 pertiche in lunghezza; 3 stariori misurano 3 pertiche di base e 66 pertiche in lunghezza, e via discorrendo.

<22> Ancora, 1 starioro misura 2 pertiche di base e la metà di 66 pertiche in lunghezza; allo stesso modo, 1 starioro misura 3 pertiche di base e la terza parte di 66 pertiche in lunghezza; e così via per ogni altro multiplo della pertica, se siano nella base, e altrettante frazioni di 66 pertiche, se siano in lunghezza.

<23> Se a questo punto ci si chiede: in una generica superficie dotata di quattro lati, la cui base misuri 6 pertiche, di quante pertiche dovrà essere la lunghezza, per ottenere un'area pari a 1 starioro? Poiché 6 è sei volte una pertica, prenderai la sesta parte di 66 pertiche, ossia 11, e avrai la lunghezza di questa superficie. Allo stesso modo, qualora vi sia una figura la cui base misuri 7 pertiche, la sua area sarà pari a uno starioro se in lunghezza prenderai la settima parte di 66 pertiche. Tale lunghezza si ottiene in questo modo: per prima cosa, prendi la settima parte di 63 pertiche: otterrai 9 pertiche, e delle 3 pertiche che rimangono, fa' piedi: il risultato sarà di 18 piedi. Dividili per 7: otterrai 2 piedi, col resto di 4. Converti il resto in once: il risultato sarà di 72 once che, diviso 7, daranno come esito 10 once e $\frac{2}{7}$. E così abbiamo 9 pertiche, 2 piedi e 10 once e $\frac{2}{7}$

[4] Per Fibonacci, un rettangolo non è semplicemente una figura geometrica astratta, ma è una superficie reale, quale può essere, ad esempio, la superficie di un terreno o di una casa. Perciò i lati di questa figura non sempre sono "lunghezze senza larghezza", come siamo abituati a immaginare (cfr. *Introductoria* 1, 2), ma sono "linee larghe", per usare la felice espressione di Jens Høyrup, ovvero linee «portatrici di una larghezza virtuale di una unità» (HØYRUP 1995, p. 3).

[5] Il termine *caput* indica la base del rettangolo e, pertanto, andrà sempre tradotto con questo significato. Esso è presente in realtà anche in Abraham Ibn Ezra, matematico ed erudito vissuto a cavallo tra l'XI e il XII secolo e autore di un libro di aritmetica e geometria, di cui possediamo sia la versione ebraica sia la traduzione latina: Abraham Ibn Ezra, *Sefer ha-Middot* pp. 220-221: *figura quarta cum capite ampio et lateribus equalibus. Caput constat ex 4 et omnia latera 10 et septima 16. Minue caput de septima; remanent 12, et accipe quadratum medietatis et minue de quadrato unius lateris, et accipe ra<dicem> residui, que est 8, et tanta est columna; quam si multiplicas super medietatem septime cum medietate capitis, habes aream*. Come si vede, in Abraham Ibn Ezra *caput* ricorre a indicare la base minore di un trapezio isoscele, e non di un rettangolo. Concordo pienamente con l'opinione di LÉVY – BURNETT 2006, p. 139, n. 210, per i quali «the term translated as "top" (*roš*/*caput*), which literally means "head", gives a 'concrete' impression of the figure, with the two parallel sides arranged horizontally and only the two non-parallel sides described as "sides"».

per la settima parte di 66 pertiche. Sono, queste, nozioni molto utili, come si vedrà a tempo debito.

APPENDICE

Appendice delle fonti e dei luoghi paralleli

Nips. ***Grom*****. p. 295 (Migne = Vitr.** ***Geom*****. p. 549)**: mensurarum genera sunt tria, rectum planum solidum. Rectum est cuius longitudinem tantum modo metimur. Planum est cuius longitudinem et latitudinem metimur. Solidum est cuius longitudinem et latitudinem et crassitudinem metimur; **Boeth.** ***Categ.*** **2, 204^{D} (Migne)**: punctum quidem partium lineae intelligitur communis terminus linea vero superficiei, superficies autem solidi corporis; **Boeth.** ***Categ.*** **4, p. 285^{A} (Migne):** Elementa vero ait, quos terminos appellamus, id est ubi, quid punctum sit, quid linea, quid figura, praedicitur. His enim cognitis et fideliter animo apprehensis, postea omnes geometriae descriptiones fiunt, quae problemata et theoremata nuncupatur; **Gerbertus,** ***Geometria*****, p. 51 (Bubnov)**: Artis huius initia et quasi elementa videntur: punctum, linea, superficies, atque soliditas; **Gerbertus,** ***Geometria*****, p. 54 (Bubnov)**: sed haec, videlicet, tres: punctum, linea et superficies in rerum natura subsistere nequeunt praeter corpora, mente tamen intelliguntur incorporalia et quasi praeter corpora esse suum habentia.

<1>

<1> Euc. Ὅροι (Heiberg): 1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν; **Balb.** ***Grom*****. p. 97 (Lachmann)**: signum est cuius pars nulla est; **Mart. Cap. 6, 708 (Willis)**: punctum vero est, cuius pars nihil est, quae si duo fuerint, linea interiacente iungutur; **Boeth.** ***Categ.*** **2, 204^{C-D} (Migne):** punctum, id est quoddam pervissimum quod in partes dividi secarique non possit; **Ps. Boeth.** ***Geom*****. p. 113 (Folkerts)**: principium autem mensurae punctum vocatur. Punctum est cuius pars nulla est; **Gerbertus,** ***Geometria*****, p. 54 (Bubnov)**: punctum est parvissimum et indivisibile signum, quod graece symion dicitur**; Ps. al-Khwārizmī,** ***Liber Ysagogarum*****, p. 148 (Burnett):** punctum est quod parte caret; **Abraham bar Hiyya,** ***Liber Embadorum*****, p. 10 (Curtze)**: punctus est, cuius nulla pars est; **Abraham Ibn Ezra,** ***Sefer ha-Middot*****, p. 211 (Lévy-Burnett)**: punctus est in animo, non in figura. Inter duo puncta est linea, hec est longitudo. Inter duo lineas est amplitudo, hec est superficies. Si tantumdem ponis supra, est profundum, hoc est corpus.

<2> Euc. Ὅροι (Heiberg): 2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. **3**. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα; **Balb.** ***Grom*****. p. 98 (Lachmann)**: linea est longitudo sine latitudine. Linea autem fines signa; **Mart. Cap. 6, 708 (Willis)**: linea vero est, quam γραμμήν vocamus, sine latitudine longitudo; **Boeth.** ***Categ*****. 2, 204^{C}:** si quis enim dividat lineam, quae est longitudo sine latitudine, duas in utraque divisione lineas facit […]. Lineae enim termini puncta sunt; **Ps. Boeth.** ***Geom*****. p. 113 (Folkerts)**: linea vero sine latitudine longitudo est. Lineae vero fines puncta sunt; **Hugo de Sancto Victore,** ***Practica Geometriae*****, p. 15 (Baron)**: linea est cum a quolibet dato puncto ad quodlibet datum punctum porrectio fit; **Gerbertus,** ***Geometria*****, p. 53 (Bubnov)**: lineae autem principium et extremitatem punctum determinat; **Gerbertus,** ***Geometria*****, p. 54 (Bubnov)**: linea est longitudo sine latitudine; **Ps. al-Khwārizmī,** ***Liber Ysagogarum*****, p. 148 (Burnett):** punctum est principium lineae. Linea est longitudo sine latitudine; **Abraham bar Hiyya,** ***Liber Embadorum*****, p. 10 (Curtze):** linea est latitudine carens longitudo.

<3> Euc. Ὅροι (Heiberg): 4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ἑαυτῆς σημείοις κεῖται; **Balb.** ***Grom*****. pp. 98-9 (Lachmann)**: ordinatae rectae lineae sunt quae in eadem planitia positae et eiectae in utramque partem in infinitum non concurrunt; **Mart. Cap. 6, 709 (Willis)**: linearum aliae directae sunt quas εὐθείας dico; **Ps. Boeth.** ***Geom*****. p. 113 (Folkerts)**: recta linea est quae aequaliter in suis protenditur punctis; **Ps. al-Khwārizmī,** ***Liber Ysagogarum*****, p. 150 (Burnett):** ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere; **Abraham bar Hiyya,** ***Liber Embadorum*****, p. 10 (Curtze):** recta vero linea est, quae ponitur super quorumlibet pensatam oppositionem ad invicem.

<4> Euc. Ὅροι (Heiberg): 5. ᾽Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. **6.**᾽Επιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί; **Balb.** ***Grom*****. p. 99 (Lachmann):** summitas est secundum geometricam appellationem quae longitudinem et latitudinem tantum modo habet, summitatis fines lineae; **Boeth.** ***Categ*****. 2, 204^{D} (Migne):** superficies quoque, quae est latitudo sine altitudine, communem terminum habet in partibus, lineam, corpus vero solidum, superficiem; **Macr.** ***Somn*****. 1, 5, 7 (Willis)**: haec superficies, sicut est corporum terminus, ita...; **Macr.** ***Somn*****. 1, 5, 9 (Willis):** planities vero, quam Graeci ἐπιφάνειαν vocant; **Mart. Cap. 6, 709 (Willis)**: superficies est, quae longitudinem et latitudinem tantum habet, profunditate deseritur, ut est color in corpore. Hanc ἐπιφάνειαν Graeci dixere, et ut dixi eius termini lineae sunt; **Ps. Boeth.** ***Geom*****. p. 113** (**Folkerts)**: superficies vero est quod longitudine latitudineque censetur. Superficiei autem fines lineae sunt;

Banū Mūsā, *Liber Trium Fratrum*, p. 116 (Curtze): proprietas communis omni superficiei est, quod est habens longitudinem et latitudinem tantum; **Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 16 (Baron)**: superficies est cum cuilibet date linee alia linea una uel plures in latere adiunguntur et latitudinem explicant; **Gerbertus, *Geometria*, p. 53 (Bubnov)**: superficiei apud nos nomen accepit, graece autem epiphaniae. Quae [...] tantum longitudine latitudineque contenta se dilatet. [...] Superficiei vero extremitas sive terminus linea, seu graece gramma est; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 148 (Burnett):** est autem superficie quod longitudine ac latitudine continetur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 10 (Curtze):** superficies <est>, quod longitudine latitudineque tantum continetur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** termini autem superficiei sunt lineae.

<5> Euc. Ὅροι (Heiberg): 7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται; **Balb. *Grom*. p. 99 (Lachmann)**: plana summitas est quae aequaliter rectis lineis est posita; **Cassiod. *Art.* 6, 1213 (Migne)**: planae figurae sunt, quae longitudine et latitudine continentur; **Mart. Cap. 6, 709 (Willis)**: superficies est, quae longitudinem et latitudinem tantum habet, profunditate deseritur, ut est color in corpore. Hanc ἐπιφάνειαν Graeci dixere, et ut dixi eius termini lineae sunt, sive plana sit sive sinuosa; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 113 (Folkerts)**: plana superficies dicitur quae aequaliter in rectis suis lineis continetur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 64 (Bubnov)**: figurae planae dicuntur, quae profunditate, id est altitudine, carentes in longitudine tantum latitudineque considerantur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** plana superficies est, quae super quantumlibet rectarum linearum oppositionem ad invicem dilatatur.

<6> Euc. Ὅροι (Heiberg): 8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴἐπ᾽εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις; **Balb. *Grom.* p. 103 (Lachmann)**: planus angulus est in planitia duarum linearum adtingentium, sed et non in rectum positarum, alterius ad alteram inclinatio. Solidus angulus est...; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: planus autem fit angulus in planitie duabus lineis sese invicem tangentibus et non unam facentibus ad alterutram inclinationem; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: planus angulus est duarum linearum in plano invicem sese tangentium et non in directo iacentium ad alterutram conclusio; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 65-6 (Bubnov)**: est autem planus angulus duarum linearum in planitie e diverso ductarum ad unum punctum coadiunatio. Sive aliter: angulus est spatium, quod sub duabus lineis se invicem tangentibus continetur; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 152 (Burnett):** in figuris fiunt anguli, quorum 3 sunt species; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** angulus vero planus est duarum linearum quarumlibet sese in plano tangentium et minime in directum iacentium ad alterutrum inclinatio.

<7> Euc. Ὅροι (Heiberg): 9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία; **Balb. *Grom*. p. 100 (Lachmann)**: rectus angulus est euthygrammos, id est ex rectis lineis comprehensus; **Ps. Cens. fr. 7, 2 (Sallmann):** euthygrammoe formae sunt quae rectis lineis continentur; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: quando autem aeque intra se tenent angulum lineae et directae fuerint, directilineus dicitur angulus et Graece εὐθύγραμμος; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: quando autem quae angulum continent lineae rectae sunt tunc rectilineus angulus nominatur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 67 (Bubnov)**: et hi quidem anguli, ex rectis scilicet facti, euthygrammi Graece, rectilinei possunt Latine appellari; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** cumque rectae lineae fuerint, quae angulum continent, angulus ille rectilineus appellatur.

<8> Euc. Ὅροι (Heiberg): 10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ἣν ἐφέστηκεν; **Balb. *Grom*. p. 100 (Lachmann)**: rectus angulus est euthygrammos, id est ex rectis lineis comprehensus, qui Latine normalis appellatur; quotiens autem recta super recta linea stans ex ordine angulos pares fecerit, et singuli anguli recti sunt, et stans perpendicularis eius lineae, super quam insistit, est; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: quando autem directa is super directam iacentem stans dextra levaque angulos aequales fecerit, directus uterque est angulus, et illa superstans perpendicularis dicitur, sed Graece κάθετος; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: cum vero recta linea super rectam lineam stans circum se aequos sibi invicem fecerit angulos rectus est uterque aequalium angulorum et linea super rectam lineam stans perpendicularis dicitur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 66 (Bubnov)**: rectus, qui et normalis dicitur, hoc modo fit, si rectam lineam iacentem altera stans erecta contigat et ex utraque sui parte equos angulos faciat; **Abraham**

bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze): cum linea recta super lineam rectam erigitur, feceritque duos angulos circum se sibi invicem aequales, rectus angulus eorum uterque nuncupabitus, et ipsa linea erecta super lineam rectam cathetus appellabitur.

<9> Euc. Ὅροι (Heiberg): 11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς; **Balb. *Grom*. p. 101 (Lachmann)**: ebes angulus est plus normalis, hoc est excedens recti anguli positionem; **Nips. *Grom*. p. 296 (Lachmann)**: angulorum genera sunt trea, rectus acutus hebes. Rectus est qui normaliter constitutus est, acutus est qui minor est recto, hebes est qui maior est recto; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: angulus maior directo obtusus dicitur; **Mart. Cap. 6, 717 (Willis)**: angulorum natura triplex est. Nam aut iustus est aut angustus aut latus. Iustus est qui directus et semper idem, angustus autem acutus est et semper mobilis, latus vero obtusus mobilisque similiter; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: obtusus angulus maior recto est; **Gerbertus, *Geometria*, p. 66 (Bubnov)**: hebes autem qui et plus normalis vel obtusus dicitur angulus; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** obtusus autem est angulus, qui recto maior existit.

<10> Euc. Ὅροι (Heiberg): 12. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς; **Balb. *Grom*. p. 101 (Lachmann)**: acutus angulus est conpressor recto; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: minor directo acutus [sc. angulus dicitur]; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: acutus autem angulus recto minor est; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 66-7 (Bubnov)**: acutus angulus est, qui, meonesiam imitans et infra rectum subsistens, identidem quantitate indiffinita usque in lineam directam coarctari valet; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** acutus vero, qui recto minor perhibetur.

<11> Euc. Ὅροι (Heiberg): 13. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας; **Balb. *Grom*. p. 98 (Lachmann)**: extremitas est quo usque uni cuique possidendi ius concessum est, aut quo usque quisque suum servat; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: definitio est res, quae alicuius est terminus; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: terminus vero quod cuiusque est finis; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** et terminis est finis rei.

<12> Euc. Ὅροι (Heiberg): 14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον; **Balb. *Grom*. p. 104 (Lachmann):** forma est quae sub aliquo aut aliquibus finibus continetur; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: forma est res, quae ex aliquo vel aliquibus terminis continetur; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: figura est quae sub aliquo vel aliquibus terminis continetur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 64**: figura, quae Graece schema vocatur, est spatium certis terminis inclusum; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)**: figura quidem est, qui sub uno vel pluribus terminis continetur.

<13> Euc. Ὅροι (Heiberg): 19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα; **Balb. *Grom*. pp. 105-6 (Lachmann)**: trilatera forma est trium laterum totidemque angulorum. [...] Quadrilatera forma est quattuor laterum totidemque angulorum ex quattuor lineis comprehensa [...]. Plurilatera forma est quae plus quam quattuor lineis comprehensa est [...]; **Ps. Cens. fr. 7, 2 (Sallmann):** trigonum trilaterum, <tetragonum> quod quattuor, multilaterum quod pluribus; **Mart. Cap. 6, 711 (Willis)**: lineae tres directae diversa positione faciunt trigonum, quattuor tetragonum, multae polygonum. Et hae planae figurae dicuntur; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts)**: rectilineae figurae sunt quae sub rectis lineis continentur.Trilatera quidem figura est quae sub tribus rectis lineis continetur quadrilatera autem quae sub quattuor.Finitima vero linea mensuralis est quae aut pro aliqua observationum aut aliquo terminorum observatur.Multilatera itaque figura est quae sub pluribus quam quattuor lateribus continetur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)**: figurae rectilineae sunt, quae a rectis lineis includuntur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)**: quippe trilaterae figurae, quae sub tribus rectis lineis continentur, quadrilaterae vero, quae quatuor rectis lineis ambiuntur; multilaterae autem figurae sunt, quae sub pluribus quam quatuor lineis comprehenduntur.

<14> Euc. Ὅροι (Heiberg): 15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν; **Balb. *Grom*. p. 104 (Lachmann)**: circulus autem est plana forma ab una linea comprehensa, ad quam ab uno signo intra formam posito omnes accedentes rectae lineae sunt inter se pares; **Ps. Cens. fr. 7, 1 (Sallmann):** circulus est figura plana una linea conprehensa, <quae circuitus vocatur,> in quem e medio omnes lineae inter se pares sunt; **Mart. Cap. 6, 710-1 (Willis)**: circulus est figura planaris, quae una linea continetur. Hanc linea περιφέρεια appellatur, ad quam ex una nota intra circulum posita omnes directae ductae lineae aequales sunt; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 114 (Folkerts)**: circulus vero est figura quaedam plana et circumducta et sub una linea contenta ad quam a puncto quod intra figuram positum est omnes quae incidunt rectae lineae sibi invicem sunt aequales; **Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 19 (Baron)**: circulum autem in quem uisionis radius ex omni parte procurrens terminatur ubi et ipsa sicut dictum est spera celestis cum terre superficie quasi uniri cernitur orizontem appellant id est limitatorem eo quod in ipsum uisio extensa limitetur et quodammodo ultra prohibeatur extendi; **Gerbertus, *Geometria*, p. 64 (Bubnov)**: figurae planae dicuntur, quae profunditate, id est altitudine, carentes in longitudine tantum latitudineque considerantur. Hae vero, si rationabiliter proponuntur, aut rectis lineis, quae Graece euthyae dicuntur, determinantur et angulatae sunt, appellanturque euthygrammae; aut curvis circumferentibus lineis, quas Graeci ciclica sive elycoydas sive campellas vocant, includuntur, et rotundae sive oblungae sunt, et campylogrammae nominantur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Baron)**: circulus autem est, quaedam plana figura sub uno termino contenta, infra quem est punctus, a quo omnes rectae lineae, quae egrediuntur usque ad lineam circumferentem, sunt aequales.

<15> Euc. Ὅροι (Heiberg): 16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται; **Balb. *Grom*. p. 107 (Lachmann)**: ex data recta linea ducere posito signo <…> relato in utramque parte circino, aequali punctorum diastemate; **Ps. Cens. fr. 7, 1 (Sallmann):** centron est nota circuli medii; **Mart. Cap. 6, 711 (Willis)**: punctum autem est circuli media nota; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts):** hoc vero punctum centrum circuli nominatur; **Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 16 (Willis)**: ad omnem partem medium constat et unum, quod, si omnes lineas ab ipso puncto in omnem partem exeuntes extrinsecus circumferentia excipiat, fit centrum circuli ipsum punctum; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)** : hic autem punctus centrum circuli vocatur.

<16> Euc. Ὅροι (Heiberg): 17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον; **Ps. Cens. fr. 7, 2 (Sallmann):** diametron est recta linea per centron inmissa et in utramque partem secans circulum; **Mart. Cap. 6, 711 (Willis):** diametros est directa linea quedam per punctum supra dictum ducta, quae orbem aequalibus partibus dividit; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts)**: diametrus autem circuli est quaedam recta linea per centrum ducta et ab utraque parte in circumferentia circuli terminata, quae in duas partes aequas circulum dividit; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)**: circuli diametrum est linea recta per circuli centrum ducta et ex utraque parte in ipsius circumferentia terminata, in duo aequalia circulum secans.

<17> Euc. Ὅροι (Heiberg): 18. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν; **Ps. Cens. fr. 7, 2 (Sallmann):** hemicyclium circuli dimidium; **Mart. Cap. 6, 711 (Willis):** hemicyclium est figura, quae diametro et peripheria media, quam eadem diametros distinguit, continetur; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts)**: semicirculus vero est figura plana quae sub diametro et ea quam diametrus apprehendit circumferentia continetur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** semicirculus est quaedam plana figura sub diametro et arcu a diametro comprehenso contenta.

<18> Ps. Boeth. *Geom*. p. 119 (Folkerts): portio circuli est figura quae sub recta linea et circuli circumferentia continetur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze):** portio vero circuli est figura, quae sub recta linea et circumferentia circuli continetur, sive minor seu maior sit medietate.

<19> Ps. Boeth. *Geom*. p. 119 (Folkerts): sector circuli est figura quae sub duabus a centro ductis lineis, et sub circumferentia, quae ab eisdem comprehenditur continetur.

<20> Euc. Ὅροι (Heiberg): 23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις; **Ps. Cens. fr. 7, 5 (Sallmann):** parallelae lineae sunt quae in eadem planitie positae numquam inter se contingunt; **Mart. Cap. 6, 712 (Willis):** parallelae sunt directae lineae, quae in eadem planitie constitutae atque productae in infinitum nulla parte in se incidunt; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 116 (Folkerts)**: parallelae id est alternae rectae lineae nuncupantur quae in eadem plana superficie collocatae atque utrimque productae in neutra parte concurrunt; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 69-70 (Bubnov)**: duae rectae lineae aequali a se invicem spatio inductione sua distante set in infinitum ductae, numquam invicem concurrentes, parallelae, id est aeque distantes dicuntur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 14 (Curtze)**: rectae lineae, quae in eadem plana superficie positae et ex utraque parte ad infinitum protractae in neutra partium concurrerint, subalternae dicuntur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** si duas igitur rectas lineas <aequales et> aequidistantes aliae duae rectae lineae ad easdem partes ab earum terminis protractae coniunxerint, eas aequidistantes et aequales esse necesse est.

<21> Euc. I, 29 (Heiberg): Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 124 (Folkerts)**: si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et ex adverso angulo constituto reddat aequalem rectas lineas aequales subalternas esse conveniet; **Gerbertus, *Geometria*, p. 69 (Bubnov)**: intuendum etiam est, quod rectae lineae iacenti si recta una, quae perpendicularis dicitur, erecta superstet, ubi iacentem tangit, ex utraque sui parte rectum angulum efficiet hoc modo. Si vero ad alterutram partem linea superstans inclinetur, in illa, ad quam inclinatur, parte interiorem, id est acutum efficit angulum, in altera vero exteriorem, id est ebete, ita tamen, ut hi duo anguli, interior scilicet et exterior, duobus rectis sint aequales.

<24> Euc. I, 1 (Heiberg): Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι; **Ps. Cens. fr. 7, 3 (Sallmann):** triangulum aequilaterum quod paribus trinis lateribus, isosceles quod duo tantum latera paria habet, scalenon quod tria latera inaequalia habet, orthogonium quod habet rectum angulum, amblygonium quod habet [idem] angulum hebetem, oxygonium quod omnes tres acutos angulos habet; **Mart. Cap. 6, 712 (Willis)**: τρίπλευρος tres habet formas, nam trigonus est aut ἰσόπλευρος, quod latine equilaterum dicitur, quod tribus paribus lineis lateribus concurrit; aut...; **Mart. Cap. 6, 724 (Willis)**: quem ad modum potest super datam directam terminatam lineam trigonum aequilaterum constitui?; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts):** aequilaterum igitur triangulum est quod tribus aequis lateribus continetur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 73 (Bubnov)**: habent etiam idem trigoni quaedam alia quoque tria ad discretionem sui vocabula. Alius enim isopleuros, alius isosceles, alius scalenos dicitur. Isopleuros est, qui omnibus aequalibus continetur lateribus. Isos quippe aequus, pleuros latus dicitur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze)**: figurarum igitur, quae sub tribus rectis lineis continentur, sunt triangulae figurae, quarum sunt trianguli aequilateri, et sunt, quorum tria latera sunt ad invicem aequalia.

<25> Euc. I, 9 (Heiberg): Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν. **I 10**: Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 121 (Folkerts)**: in triangulo datam rectam lineam terminatam in duas aequales dividere partes.

<26> Euc. I, 11 (Heiberg): Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 120 (Folkerts)**: ad datum punctum datae rectae lineae aequalem rectam lineam collocare.

<27> Euc. I, 12 (Heiberg): Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 121 (Folkerts):** supra datam vero rectam lineam infinitam ab dato puncto quod ei non inest perpendicularem rectam lineam ducere oportet.

<28> Euc. I, 13 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 114 (Folkerts)**: cum vero recta linea super rectam lineam stans circum se aequos sibi invicem fecerit angulos rectus est uterque aequalium angulorum et linea super rectam lineam stans perpendicularis dicitur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 69 (Bubnov)**: intuendum etiam est, quod rectae lineae iacenti si recta una, quae perpendicularis dicitur, erecta superstet, ubi iacentem tangit, ex utraque sui parte rectum angulum efficiet.

<29> Euc. I, 15 (Heiberg): Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 122 (Folkerts):** si duae rectae lineae sese dividant ad verticem angulos sibi invicem facient aequos; **Gerbertus, *Geometria*, p. 69 (Bubnov)**: si duae rectae lineae sese invicem per alterutram ductae secent, aut quatuor rectos efficiunt angulos, aut duos exteriores totidemque interiores ex adverso sibi invicem aequos reddunt, qui tamen quatuor rectis angulis sunt aequales.

<30> Euc. Αἰτήματα: 5. (Heiberg): Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸςκαὶἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες; **Mart. Cap. 6, 722 (Willis)**: et si in duas directas lineas directa linea incidat, intus et eadem parte duos angulos duobus rectis minores faciat, ex illa parte qua sunt minores duobus rectis directas lineas convenire; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 124 (Folkerts)**: si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores duos angulos et in eadem parte duobus rectis fecerit minores, rectas lineas in infinitum productas ad eas partes in quibus duo interiores anguli duobus rectis minores sunt, concurrere iubet; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 14 (Curtze)**: vero est, ut, si qua recta linea super duas rectas lineas ceciderit, feceritque duos angulos interiores minores duobus rectis, illae rectae lineae ab ea parte, in qua sunt duo anguli minores duobus rectis, ad infinitum protractae concurrent.

<31> Euc. I, 33 (Heiberg): Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 125 (Folkerts)**: quae aequas et alternas rectas lineas ad easdem partes rectae lineae coniungunt ipsae quoque alternae sunt et aequales.

<32> Euc. I, 23 (Heiberg): Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 123 (Folkerts)**: ad datam rectam lineam et datum in ea punctum dato rectilineo angulo aequales rectilineo angulos collocare necesse est.

<33> Euc. I, 31 (Heiberg): Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν; **Mart. Cap. 6, 722 (Willis)**: ab omni signo ab omne signum directam lineam ducere; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 124 (Folkerts)**: per datum punctum datae rectae lineae alteram rectam lineam designare necesse est.

<34> Euc. I, 35 (Heiberg): Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. **I, 36**: Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. **I, 37**: Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. **I, 38**: Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. **I, 39**: Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 125 (Folkerts)**: omnia parallelogramma quae in eisdem basibus et in eisdem alternis lineis fuerint constituta, sibi invicem probantur aequalia; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 125 (Folkerts)**: nam parallelogramma in basibus aequalibus et in eisdem alternis lineis constituta aequalia esse necesse est; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 125 (Folkerts)**: aequa sibi sunt cuncta triangula quae in aequis basibus et in eisdem alternis lineis fuerint constituta; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 125 (Folkerts)**: aequa triangula quae in eadem basi et in eadem parte fuerint constituta in eisdem quoque alternis lineis esse pronuntianda sunt; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 125** (**Folkerts)**: aequa triangula in aequis atque in directum positis basibus constituta et in eisdem partibus et in eisdem quoque alternis lineis esse necesse est; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** omnes item trianguli, qui super eadem base ad easdem partes et in eisdem alternis lineis conformantur, sunt aequales ad invicem; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** Si autem in aequis basibus ad easdem partes et in eisdem alterias lineis collocantur, similiter erunt ad invicem aequales; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** item omnes parallelogrammae superficies super eandem basem in eadem parte et inter easdem lineas aequidistantes constitutae sibi invicem sunt aequales; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** si autem in aequis basibus in eadem parte et in eisdem subalternis lineis discriptae fuerint, eas similiter ad invicem aequales esse necesse est; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** si trianguli parallelogrammaeque superficies eiusdem altitudinis exstiterint, erunt eorum sibi consimilium ad invicem proportio sicut basis unius ad basem alterius.

<35> Euc. I, 41 (Heiberg): Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου; **Ps. Boeth. *Geom*. p.**

126 (Folkerts): si parallelogrammum triangulum que in eadem basi atque in eisdem alternis lineis fuerint constituta parallelogrammum triangulo duplex esse conveniet; **Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometriae*, p. 18-9 (Baron):** quadratum vero, quod basi per kathetum multiplicate describitur, semper duplum esse contingit triangulo ipso quod sub basi et katheto atque hypotenusa continetur; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 156 (Burnett):** si parallelogrammum triangulumque in eadem basi et eisdem alternis lineis fuerint, parallelogrammum duplum trigono esse necesse est.

<36> Euc. I, 34 (Heiberg): Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

<37> Euc. I, 32 (Heiberg): Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν; **Boeth. *Categ*. 2, p. 229[B] (Migne):** scimus enim triangulum tres interiores angulos duobus rectis angulis aequos habere; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 125 (Folkerts)**: omnium triangulorum exterior angulus duobus interius et ex adverso constitutis angulis est aequalis interiores vero anguli tres duobus rectis angulis sunt aequales.

<38> Euc. Κοιναὶ ἔννοιαι (Heiberg): 1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα; **Ps. Cens. fr. 8, 2 (Sallmann):** et quae isdem paria sunt, et inter se paria sunt; **Mart. Cap. 6, 723 (Willis):** quae eidem aequalia sunt, et invicem sibi aequalia sunt; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 14 (Curtze):** res aequales uni eidem sibi invicem sunt aequales; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 150 (Burnett):** eidem aequalia et inter se aequalia esse.

<39> Euc. Κοιναὶ ἔννοιαι (Heiberg): 2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα; **Ps. Cens. fr. 8, 2 (Sallmann):** Si paribus paria adiecta fuerint, omnia paria erunt, et si paribus paria dempta; **Mart. Cap. 6, 723 (Willis):** et si aequalibus aequalia addas, tota aequalia esse; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 118 (Folkerts)**: et si aequalibus aequalia addantur, tota quoque aequalia sunt; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 14 (Curtze):** si aequalibus addantur aequalia, fient etiam ipsa tota aequalia.

<40> Euc. Κοιναὶ ἔννοιαι (Heiberg): 3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα; **Mart. Cap. 6, 723 (Willis):** et si aequalibus aequalia adimas, aequalia sunt reliqua; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 118 (Folkerts)**: et si ab aequalibus aequalia auferantur, quae relinquuntur aequalia sunt; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 150 (Burnett):** ab aequalibus aequalia dempta, vel idem vel commune, aequalia remanere, et econverso; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze):** et si ex aequalibus aequalia censeris, quae remanent, aequalia sunt

<41> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze): si inaequalibus aequalia addantur, quae reddunt, inaequalia sunt.

<42> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze): si de inaequalibus abstrahuntur aequalia, residua quoque fient aequalia.

<43> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze): ea, quae uni et eidem sunt dupla, sibi invicem sunt aequalia.

<44> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze): quae uni et eidem sub dupla fuerint, ipsa item aequalia sunt.

<45> Euc. Κοιναὶ ἔννοιαι (Heiberg): 7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 152 (Burnett):** omnia sibi convenienta aequalia esse; aequalia eidem comparata, aut aeque maiora aut aeque minora aut aequalia esse; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze):** illa, quorum unus non excedit alterum, si superponatur alteri alterum, erunt aequalia.

<46> Euc. Κοιναὶ ἔννοιαι (Heiberg): 5. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν]; **8.** Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν]; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 152 (Burnett)**: omnem totum sua parte maius; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze):** omne totum sua parte maius existit.

<47> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 16 (Curtze): duae rectae lineae superficiem non continebunt.

<2>

<2> Anon., *Grom*. pp. 339-40 (Lachmann); **Balb. *Grom*. p. 94 (Lachmann)**: mensurarum appellationes quibus utimur sunt duodecim: digitus, uncia, palmus, sextans, pes, cubitus, gradus, passus, decempeda, actus, stadium, miliarum; **Mart. Cap. 6, 708 (Willis)**: verum primae apud me formandarum schematum partes duae: una quae dicitur planaris, quam ἐπίπεδον Graece soleo memorare, alia solida, quam στερεόν dicimus; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 145 (Folkerts)**: prisci igitur sophismatis cautissimi dispectores duodecim mensurarum genera constituerunt quibus cum vellent formarum agrorum que emetirentur areas quorum haec sunt nomina miliarium stadium actus decempeda quae eadem et pertica passus gradus cubitus pes semipes palmus uncia digitus; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 147 (Folkerts)**: planum est quod a Graecis dicitur epipedon a nobis autem constrati pedes quod per longitudinem latitudinem que consideratur ut agrorum planities et aedificiorum areae absque tectoriis operibus et laquearibus ac tabulatis et his similibus ut subiecta formula docet; **Ps. Gerbertus, *GIA*, p. 337 (Bubnov):** mensurarum appellationes, quibus utimur, sunt hae: digitus, uncia, palmus, sexta, que et dodrans appellatur, pes, laterculus, cubitus, gradus, passus, decempeda, quae et pertica appellatur, quasi portica a portando, clima, actus, qui et aripennis digitur, iugerum, centuria, stadium milliarium; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 53-4**: mensurarum autem vocabula ab antiquis inventa, et in usum posterorum hactenus reservata, ferme haec sunt: digitus, uncia, palmus, sexta, que et dodrans, pes, laterculus, cubitus, gradus, passus, pertica, quae et decempeda, actus minimus, clima, porca, actus quadratus, qui et agripennus seu aripennus, iugerum, seu iuger vel iugus, centuria, stadium, milliarium, leva; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 150 (Burnett):** set antequam de figuris loquamur, mensurarum quaedam quibus utuntur nomina ponenda sunt, quae sunt hoc modo: digitur, uncia, palmus, semipes, pes, cubitus, gradus, passus, decempeda, agripennis, stadium, miliarum; **Iohannis de Sacro Bosco, *Tractatus de Arte Numerandi*, p. 20 (Boncompagni):** numerus linearis est qui consideratur tamen penes processus, non habitu respectu ad ductionem numeri in numero, et dicitur linearis, quia unicum tantum habet numerum, sicut linea unicam habet dimensionem, longitudinem sine latitudine. Numerus superficialis est qui resultat ex ductu numeri in numerum, et dicitur superficialis quia habet duos numeros denotantes sive mensurantes ipsum, sicut superficies duas habet divisiones; scilicet, longitudinem et latitudinem.

<3> Balb. *Grom*. p. 97 (Lachmann): planum est, quod Graeci epipedon appellant, nos constratos pedes, in quo longitudinem et latitudinem habemus […] solidum est quod Greci stereon appellant, nos quadratos pedes appellamus; **Nips. *Grom.* p. 296 (Lachmann):** longitudinem per latitudinem, effectum per altitudinem: erunt pedes quadrati; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 146 (Folkerts)**: Pes etiam porrectus dicitur ubi tantum pedalis mensura in longo pernoscitur.Constratus autem pes ille diiudicatur in quo longitudo latitudo que consideratur.Quadratus vero pes habetur ubi trinae dimensionis consideratio in aequalitate censetur; **Gerbertus, *Geometria*, p. 56 (Lachmann):** Linearis pes est, per quem lineas vel longitudinem aliquam metimur nihil interim de altitudine vel latitudine curantes […]. Constratus est sive planus, per quem superficies sive planities, seu area lineis circumsepta mensuratus, et est in longitudine et latitudine aequalis et quadratus, sed altitudine carens […]. Solidus autem est longitudine, latitudine altitudineque aequaliter distensus et quadrates, per quem solida metiuntur corpora, formam videlicet cubi […].

> «Anche quando certe conoscenze matematiche si sono obliate del tutto, rimane saldo l'abito del rettamente ragionare, il gusto per le dimostrazioni eleganti, il disinteresse e l'indipendenza nel giudicare, il pensiero logico disciplinato, lo spirito scientifico acuito, la precisione dell'espressione, la saldezza dei convincimenti, il senso del vero».
>
> *G. A. Colozza*

La Prima Distinzione

Nonostante Fibonacci annunci, nell'epistola di dedica, di volersi occupare del calcolo dell'area di quadrati e rettangoli in tre modi[1], di fatto la Prima Distinzione si struttura in due parti, non in tre. La prima di esse concerne la risoluzione di problemi di determinazione dell'area di superfici rettangole, reali o astratte che siano[2]. La lunghezza dei lati di tali figure viene sempre espressa in pertiche, piedi ed once lineari, sicché la risoluzione dei vari quesiti proposti non può prescindere dalla conoscenza preliminare di queste unità di misura e delle proprietà ad esse associate[3]. L'espressione numerica di tali quantità avviene mediante l'utilizzo di frazioni a linea continua, che l'autore aveva già illustrato nel quarto paragrafo del quinto capitolo del *Liber Abaci*, quello concernente le divisioni[4]. Si tratta di una linea di frazione allungata sulla quale vengono posizionati due o più numeratori, e al di sotto della quale vengono collocati due o più denominatori. Come rileva la CAROTENUTO 2014[2], p. 67, essa «rappresenta la scrittura sintetica di un algoritmo più complesso». Per fare un esempio, il numero $\frac{2\ 3\ 1}{6\ 6\ 6}$ 16, che corrisponde esattamente a 16 pertiche, 1 piede e 10 once, va letto da destra verso sinistra secondo il seguente criterio: 16 sono le pertiche, mentre le tre cifre poste al di sopra della linea di frazione equivalgono alla conversione, in pertiche, di 1 piede e 10 once. Una pertica, infatti, equivale a sei piedi, mentre un

---

[1] Fibonacci, *Incipit Pratica Geometrie*, 3: *prima est qualiter latitudines camporum quatuor equales angulos habentium in eorum longitudines* triplici modo *multiplicentur*.

[2] La prima distinzione comincia con la frase *si volueris metiri campum quadrilaterum equilaterum et equiangulum,* in cui il termine *campus* può essere inteso con entrambi i significati di terreno agricolo e di generica superficie piana.

[3] Esse vengono esaustivamente discusse dall'autore nell'*Introduzione* all'opera.

[4] L'edizione critica del quinto capitolo del *Liber Abaci* è stata recentemente pubblicata da CAROTENUTO 2014[2], pp. 65-139, che di esso fornisce anche un'utile traduzione in lingua italiana (*ivi*, pp. 141-191).

piede corrisponde a tre once. Pertanto, il piede qui moltiplicato corrisponde a $\frac{1}{6}$ della pertica, mentre le 10 once equivalgono a 3 piedi e $\frac{1}{3}$, ossia a $\frac{3}{6}$ della pertica e $\frac{2}{6}$[5]. È noto che l'area di un rettangolo si calcola attraverso la moltiplicazione di un lato per il lato ad esso adiacente: ne consegue che i problemi posti all'interno di questa distinzione si risolvono attraverso una moltiplicazione fra numeri misti, vale a dire fra numeri che hanno una parte intera e una frazionaria. Il tema era stato già affrontato da Fibonacci all'interno del sesto capitolo del *Liber Abaci*, quello appunto dedicato alla moltiplicazione[6]: per questo motivo, egli non torna sull'argomento, ma procede direttamente al calcolo delle aree, utilizzando la tecnica della moltiplicazione a crocetta[7]. La seconda parte di questa distinzione consiste in un elenco di teoremi tratti dagli *Elementi* di Euclide e che, a detta dell'autore, sono necessari alla comprensione di quanto sarà poi esposto all'interno della Seconda Distinzione[8].

---

[5] Per ulteriori notizie sull'utilizzo delle frazioni nell'opera di Fibonacci, rimando al recente contributo di MOYON-SPESSIER 2015.

[6] L'edizione critica del sesto capitolo del *Liber Abaci* è stata curata da CAROTENUTO 2014[2], pp. 193-244, che di esso ha fornito anche una traduzione in lingua italiana (*ivi*, pp. 245-272).

[7] Come giustamente rileva HUGHES 2008, p. 12, il modo migliore per comprendere il sistema di moltiplicazione attuato da Fibonacci è quello di prendere in esame uno dei problemi analizzati nell'opera. Lo studioso considera il caso di *Distinctio* I, 3 (4): «Se vuoi moltiplicare 26 pertiche e 4 piedi per 43 pertiche e 5 piedi, moltiplica prima le 26 pertiche per le 43 pertiche: il risultato è di 16 stariori, 11 panori e 4 soldi e mezzo. Moltiplica poi i 4 piedi, ossia i 2 soldi, per le 43 pertiche: il risultato sarà di 86 soldi, che corrispondono a 5 panori e 3 soldi e mezzo. Moltiplica poi 5 piedi, che corrispondono a 2 soldi e mezzo, per le 26 pertiche: il risultato sarà di 65 soldi. Allo stesso modo moltiplica 4 piedi per 5 piedi: il risultato sarà di 20 denari. La somma di queste quattro moltiplicazioni dà in totale 17 stariori, 8 panori, 8 soldi e 8 denari». Come si vede, la tecnica di moltiplicazione a crocetta consiste nel moltiplicare ciascuna quantità di un lato per ciascuna quantità dell'altro, e nel sommare infine i risultati ottenuti.

[8] *Distinctio* I, 4 (1.2): *ut ea, que in hac Secunda Distinctione promisimus, plenarie demonstrentur, quedam huic operi necessaria dignum duximus preponenda*.

TESTO CRITICO

<I>

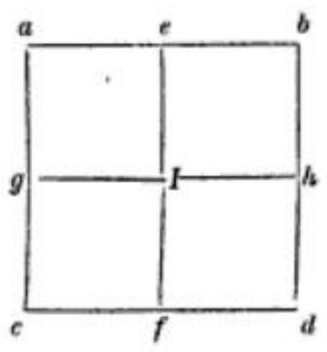
|[VN, f. 4v] INCIPIT DISTINCTIO PRIMA

De multiplicatione latitudinum camporum quadratorum rectos angulos habentium in eorum longitudines[1], in quibus multiplicationibus |[L, f. 7r] eorum embada continentur

<1>

< In modo primo>

<1> Si volueris metiri campum quadrilaterum |[O_1, f. 13r] equilaterum et equiangulum *abcd* habentem in singulis lateribus perticas 2, dico quod eius area est illud quod colligitur ex multiplicatione lateris *ac* in latus *ab* si|[M, f. 5r]bi contiguum, scilicet 2 perticarum in 2: et sic est eius embadum perticarum 4 superficialium[2].



[1] longitudines S C P L] longitudine B D E M V N O_1 F
[2] superficialium B D E M V N O_1 F C P L] superficialium quod sic probatur S

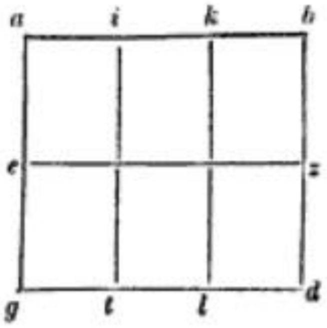
<2.1> Dividantur autem linee *ab* et[3] *cd* in duo equalia super puncta *e f*, et protrahatur linea *ef*. Item dividantur linee *ac* et[4] *bd* in duo equalia supra[5] puncta |[S, f. 12v] *g h*, et protrahatur linea *gh*. Et sic erit divisum quadrilaterum |[P, f. 5v] *abcd* in quatuor quadrata equalia et orthogonia, quorum unumquodque |[O_1, f. 13v] habet in singulis lateribus perticam 1: et sic sunt pertice 4 superficiales in toto embado quadrilateri *acdb*[6]. **<2.2>** Est enim *ae* recta equalis et equidistans recte *cf*: quare recta *ef* est |[C, f. 6r] equalis et equidistans linee *ac*, et *ef* est equidistans et equalis[7] linee *bd*, cum ei sit[8] equidistans et equalis linea[9] *ac*[10]. Similiter enim invenietur linea *gh* equidistans et equalis[11] utrique linee[12] *ab* et *cd*. Et quoniam linea *ef* equidistans est linee *ac*, et linea *ae* linee *cf*, angulus ergo *aef*[13] angulo *acf* sibi opposito est equalis: rectus[14] quidem qui sub *acf*, rectus vero qui sub *aef*[15]. Propter eadem ergo ostenditur[16] rectus angulus *efc*, cum sit equalis recto angulo *cae*, quare ortho|[O_1, f. 14r]gonium est quadri|[E, f. 5r]laterum *eacf*. Et continet in se 2 perticas |[F, f. 3r] quadratas, quarum una est *eagi*[17] quadrilaterum, et alia est |[L, f. 7v] *igcf*[18]. Ostenditur enim per supradicta omnes angulos esse rectos qui ad *i*, nec non et[19] angulos qui ad *g* et ad *h*. Nam superficies *ec* continet |[D, f. 4v] dimidium superficiei *bc*, quare et superficies *ec* superficiei[20] *ed* est equalis[21]: ergo totius superficiei *a<bc>d*[22] embadum est 4 perticarum, ut prediximus.

<2>

---

[3] et B S D E M O_1 F C P L] *om.* V N
[4] et B S D E M O_1 F C P L] *om.* V N
[5] supra C P L] super B S D E M V N O_1 F
[6] acdb B D E V^2 N^2 O_1 F C P L] abcd S M V^1 N^1
[7] equidistans et equalis S V^1 F P L] equalis et equidistans B D E M V^2 N O_1 C
[8] ei sit B S D V^2 N^2 F C P L] et sit E M O_1, et sic V^1 N^1
[9] linea S M V N F C P L] linee B D E, *om.* O_1
[10] ac B S D E V N^2 F C P L] ef M N^1, *om.* O_1
[11] linea ac – equalis B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[12] linee C P L] linee scilicet B S D E M V N O_1 F
[13] aef C] ef B S D E M V N O_1 F P L
[14] rectus B S D E M^b V^2 N^2 O_1 F C P L] rursus M^a V^1 N^1
[15] aef C] ef B S D E M V N O_1 F P L
[16] ostenditur S D E M V N^1 C P L] ostendetur B N^2 O_1 F
[17] eagi B S D E^2 O_1 F C P L] aegi E^1 M V N
[18] igcf B S D O_1 F C] igef P L, eigcf E, gicf M V N
[19] et B S D O_1 F C P L] ad E, *om.* M V N
[20] ec superficiei B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[21] est equalis ergo B S D E M O_1 F C P L] est equalis ec ergo V N
[22] ad B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1

<1.1> Item sit quadrilaterum longum[23] rectiangulum *abgd* in cuius capita opposita, scilicet in *ag* et *bd*, sint[24] pertice 2, et[25] in unoquoque reliquorum laterum sint pertice 3: **<1.2>** dico quod eius[26] embadum est perticarum |[O_1, f. 14v] 6, quod colligitur ex multiplica|[V, f. 5r]tione unius capitis in unum laterum, scilicet de 2 in 3.



<2.1> Ad hec itaque demonstranda, dividatur |[N, f. 5r] recta |[B, f. 4r] *ag* et *bd* in duo equalia |[*b*, p. 6] super puncta *e z*, et copuletur recta *ez*[27]. Et dividatur utraque |[S, f. 13r] rectarum *ab* et *gd* in tria equalia super puncta *i t* et *k l*[28], et copulentur recte *it* et *kl*[29]. **<2.2>**Tunc ostendetur[30], per supradicti[31] |[M, f. 5v] quadrati doctrinam, totum quadrilaterum *abgd* in sex quadrilatera equalia et orthogonia esse divisum, quorum unumquodque continet in singulis lateribus perticam 1. Denique his per demonstrationes ostensis, qualiter latitudines dictorum camporum |[P, f. 6r] per longitudinem multiplicari |[O_1, f. 15r] debeant ostendam[32].

<3.1> Si volueris[33] multiplicare perticas 7 in latitudine[34] per perticas 23 in longitudine[35], multiplica primum perticas 7[36] per perticas 22, scilicet per panora 4:

---

[23] longum B S D E M V N O_1 C P L] *om.* F
[24] sint B S V^2 N^2 O_1 F C P L] sunt D E M V^1 N^1
[25] et B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1
[26] quod eius B S D V^2 N^2 O_1 F C P L (eius *om.* V N)] etiam E M V^1 N^1
[27] et copuletur recta ez B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1
[28] it et kl B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] itkl M V^1 N^1
[29] it et kl B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] itkl E M V^1 N^1
[30] ostendetur B S D E M N^2 O_1 F P L] ostenditur V N^1 C
[31] supradicti B D E M V N O_1 F C P L] suprascripti S
[32] ostendam S C P L] ostendamus B D E M V N O_1 F
[33] volueris] voluerimus B S D E M V N O_1 F C P L
[34] latitudine C P L] latitudinem B S D E V^2 N^2 O_1 F, *om.* M V^1 N^1
[35] longitudine S C L] longitudinem B D E V^2 N^2 O_1 F P, *om.* M V^1 N^1
[36] in latitudine – perticas 7 B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1

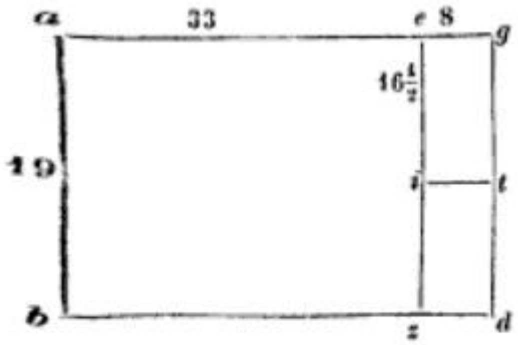
egredientur[37] inde[38] panora 28 suprascripta ratione. **<3.2>** Deinde multiplica unam perticam, que remanet de 23, per 7: erunt pertice quadrate 7. Ex quibus pertice $\frac{1}{2}$ 5 sunt panorum unum, et pertica $\frac{1}{2}$ 1 que remanet est soldi[39] $\frac{1}{2}$ 4. Et sic habemus in summa |[L, f. 8r] panora 29 et soldos $\frac{1}{2}$ 4 mensure, hoc est stariora 2, et panora 5, et soldos $\frac{1}{2}$ 4.

<4.1> |[C, f. 6v] Item si volueris multiplicare perticas 13 per perticas 31, multiplica primum perticas 11, scilicet panora 2, per perticas 31: erunt[40] panora 62, scilicet duplum de 31. |[O_1, f. 15v] **<4.2>** Deinde perticas |[E, f. 5v] 2, que remanent ex ipsis perticis 13, multiplica per perticas 31: erunt pertice 62 quadrate, que sunt panora 11 et denarii 18. Que adde cum panoris 62 inventis: erunt panora 73 et denarii 18. Que divide per 12 ideo, quia[41] stariorum est panora 12, exibunt stariora 6 et panorum 1 et denarii 18 mensure.

<5.1> Item si volueris multiplicare perticas 19 per perticas 41, multiplica primum perticas 19 per perticas 33: erunt media stariora[42] 19, scilicet stariora $\frac{1}{2}$ 9[43]. Deinde multiplica 8, que remanent de 41, per perticas $\frac{1}{2}$ 16[44]: erunt |[S, f. 13v] panora 24, quibus additis cum starioris $\frac{1}{2}$ 9, |[O_1, f. 16r] erunt stariora $\frac{1}{2}$ 11. **<5.2>** Item, quia[45] remanent pertice $\frac{1}{2}$ 2, extractis perticis $\frac{1}{2}$ 16 de perticis 19, multiplicabis ipsas perticas $\frac{1}{2}$ 2 iterum per suprascriptas perticas 8: erunt pertice 20[46] superficiales[47]. Ex quibus |[D, f. 5r] pertice $\frac{1}{2}$ 16 sunt panora 3, et relique pertice $\frac{1}{2}$ 3 sunt soldi $\frac{1}{2}$ 10. Quibus panoris 3 et soldis $\frac{1}{2}$ 10 additis cum starioris $\frac{1}{2}$ 11, faciunt in summa stariora 11 et panora 9 et soldos $\frac{1}{2}$ 10.

---

[37] egredientur B D E M V N O_1 F C P L] et egredientur S
[38] inde B S D F C P L] in E M V N O_1
[39] $\frac{1}{2}$ 5 – soldi B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[40] erunt B S D E M V N O_1 F C L] et erunt P
[41] quia B S D O_1 F C P L] quare E M, quoniam V N
[42] media stariora B S D O_1 F C P L] stariora media E M V N
[43] $\frac{1}{2}$ 9 B S D E M V N F C P L] $\frac{1}{2}$ 9 sic stariora O_1
[44] per B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[45] quia B S D N^2 O_1 F C P L] quare E M, quoniam V N^1
[46] 20 B D E M V N^1 C P L] 20 et S N^2 F, *om.* O_1
[47] perticas – superficiales B S D E M V N F C P L] *om.* O_1



<6.1> |[F, f. 3v] Cuius multiplicationis causam[48] volo demonstrationibus declarare. |[VN, f. 5v] Esto quadrilaterum longum *abgd* continens in unoquoque capite, que sunt *ab* et *gd*, |[M, f. 6r] perticas 19, et in unoquoque longiorum laterum, que sunt *ag* et *bd*, perticas 41. **<6.2>** Accipiatur ex latere |[L, f. 8v] *ag* |[P, f. 6v] linea *ae* constans ex perticis |[O_1, f. 16v] 33: remanebit linea *eg* perticarum 8. Similiter ex linea *bd* accipiatur linea *bz* equalis linee *ae*, et copuletur recta *ez*: eritque *ez* perticarum 19, cum sit equalis et equidistans utrique linee *ab* et *gd*. Et *zd* quidem[49] est equalis linee *eg*, scilicet perticis 8. **<6.3>** Rursus ex lineis *ez* et *gd* accipiantur recte *ei*[50] et *gt*, quarum unaqueque sit[51] perticarum $\frac{1}{2}$ 16, et copuletur recta *it*: eritque linea *it* equalis utrique linee *eg* et *zd*. Cumque ex lineis *ez* et *gd*[52] auferantur[53] linee *ei* et *gt*, quarum unaqueque[54] |[B, f. 4v] est perticarum $\frac{1}{2}$ 16[55], remanebit unaqueque rectarum *iz* et *td* perticarum $\frac{1}{2}$ 2. **<6.4>** Cum[56] itaque[57] multiplicavimus[58] superius perticas 19 |[E, f. 6r] in 33, tunc habui|[C, f. 7r]mus embadum quadrilateri *<e>a<b>z*, et remansit nobis quadrilaterum *ezdg* |[O_1, f. 17r] ex toto quadrilatero *abgd*. Et fuit area quadrilateri *eabz* stariora $\frac{1}{2}$ 9. **<6.5>** Deinde cum multiplicavimus 8[59] in[60] perticas $\frac{1}{2}$ 16, scilicet in panora 3, habuimus stariora

[48] causam B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[49] quidem B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[50] perticis – ei B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[51] sit B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] est V^1 N^1
[52] cumque – gd B S D E M V^2 N^2 F C P L] *om.* V^1 N^1 O_1
[53] auferantur B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* V^1 N^1
[54] unaqueque B S D E M V^2 N^2 F C P L] *om.* V^1 N^1, unaqueque rectarum O_1
[55] et copuletur – $\frac{1}{2}$ 16 B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L (est – $\frac{1}{2}$ 16 *om.* O_1)] *om.* V^1 N^1
[56] cum B S D E V^2 N^2 F C P L] *om.* M V^1 N^1 O_1
[57] est – itaque B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[58] multiplicavimus B S D E M V N F C P L] replicavimus O_1
[59] 8 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[60] in B S D E M V N O_1 F] *om.* C P L

2 pro embado quadrilateri *eitg*. Rursus, cum multiplicavimus perticas $\frac{1}{2}$ 2 in perticas 8, tunc ha|[S, f. 14r]buimus perticas 20 quadratas, scilicet panora 3 et soldos $\frac{1}{2}$ 10 mensure pro embado quadrilateri[61] *izdt*. Nam tria quadrilatera *<e>a<b>z* et *e<i>t<g>* et *<i>tz<d>* toti quadrilatero *abgd* equantur, et hoc voluimus demonstrare.

<7.1> Item si |[*b*, p. 7] vis multiplicare perticas 25 per[62] perticas 52, multiplica primum perticas 22 |[O_1, f. 17v] ex ipsis perticis 25, scilicet panora 4, per perticas 52: erunt tertie unius stariori <per perticas> 52, propter panora 4 que sunt tertia pars unius stariori. Sunt enim tertie 52 stariororum[63] stariora $\frac{1}{3}$ 17. Deinde per|[L, f. 9r]ticas 3, que remanent a[64] 22 usque in 25, multiplica per perticas $\frac{1}{2}$ 49 ex illis perticis 52, scilicet per panora 9: erunt panora 27. Quibus additis cum starioris $\frac{1}{3}$ 17, reddunt[65] stariora 19 et panora 7. Post hoc, multiplica ipsas perticas 3 per perticas $\frac{1}{2}$ 2, que sunt a $\frac{1}{2}$ 49 usque in 52: erunt pertice $\frac{1}{2}$ 7, scilicet panorum 1[66] |[M, f. 6v] et soldi 6. Et sic habebis in summa stariora 19 et panora 8 et soldos 6. **<7.2>** Vel aliter |[P, f. 7r – O_1, f. 18r] multiplica 25 per 52: erunt pertice 1300, que sunt stariora 13 cum totidem mediis starioris, et insuper |[D, f. 5v] pertice 13, scilicet stariora 19 et panora 8 et soldi 6, ut predixi[67].

<8> |[V, f. 6r] Item si vis multiplicare perticas 31 per perticas[68] 69, multiplica primum perticas 31 per perticas 66, scilicet per[69] stariorum 1: erunt stariora 31. Item multiplica 3, que rema|[N, f. 6r]nent a 66 usque in[70] 69, per perticas 31: erunt pertice 93, que sunt panora 17 minus denariis 18. Et sic |[F, f. 4r] habemus in summa stariora 32 et panora 5, minus denariis 18.

<9> Item si vis multiplicare perticas 43 per perticas 85, multiplica primum perticas 43 per perticas $\frac{1}{2}$ 82, scilicet |[O_1, f. 18v] per panora 15: erunt panora

[61] quadrilateri B S D O_1 F C P L] quadrilatero E M V N
[62] per B S D N^2 O_1 F C P L] in E M V N^1
[63] stariororum] stariori B S D E M V N O_1 F P L, *om.* C
[64] a B S D E M V N F C P L] de O_1
[65] reddunt C P L] reddent B S D E M V N O_1 F
[66] panorum 1 B S D E M V N F C P L] panora 31 O_1
[67] predixi B D E M V N O_1 F C P L] prediximus S
[68] 31 per perticas B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[69] per B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[70] a 66 usque in B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

quindecies 43, scilicet stariora 43 |[E, f. 6v] cum totidem quartis, hoc est stariora $\frac{3}{4}$ 53. |[S, f. 14v] Deinde multiplica perticas $\frac{1}{2}$ 2, que remanent a[71] $\frac{1}{2}$ 82 usque in 85, per perticas 43[72]. Tamen multiplicabis[73] primum ipsas perticas $\frac{1}{2}$ 2 per perticas 33, scilicet per panora 6: erunt panora 15, |[C, f. 7v] que adde[74] cum starioris $\frac{3}{4}$ 53, erunt stariora 55. Et[75] multiplicabis iterum ipsas perticas[76] $\frac{1}{2}$ 2 per perticas 10, que remanent a 33 usque in 43: erunt pertice 25, que sunt panora 4 et soldi 9. Et sic habebis pro quesita multiplicatione[77] stariora 55 et panora 4 et soldos 9[78].

<10.1> |[L, f. 9v] Item si vis muliplicare perticas 54 per perticas 113, |[O_1, f. 19 r] multiplica primum perticas 54[79] per perticas 110, scilicet per panora 20: erunt panora 1080, quibus divisis per 12 reddunt stariora 90. Deinde multiplicabis perticas 3, que remanent a 110 usque in 113, per perticas 54, hoc est per panora 9 et perticas $\frac{1}{2}$ 4: erunt panora 27 et pertice $\frac{1}{2}$ 13, hoc est panora 29 et soldi $\frac{1}{2}$ 7, quibus additis cum starioris 90, faciunt sta|[B, f. 5r]riora 92 et panora 5 et soldos $\frac{1}{2}$ 7.

<11> Item si vis multiplicare perticas 72 per perticas 149, multiplica primum perticas 66 per perticas 149: erunt stariora 149. Deinde multiplica perticas 6, que remanent a 66 usque in 72, per perticas 149, tamen primum per perticas 132, scilicet per stariora 2, et postea per perticas 17, que[80] remanent a 132 usque in 149: erunt stariora 12 et |[P, f. 7v] pertice 102, hoc est stariora 13 et panora 6 et |[M, f. 7r] soldi 9, quibus additis cum starioris 149, faciunt stariora 162 et panora 6 et soldos 9[81].

<3>

---

[71] a D M V N O_1] ab B S E F C P L
[72] 43 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[73] multiplicabis B S D E M V^2 N^2 O_1 F P C L] multiplicas V^1 N^1
[74] adde B S D E V^2 N^2 F C P L] *om.* M V^1 N^1 O_1
[75] et B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[76] perticas B S D F C P L] *om.* E M V N O_1
[77] pro quesita multiplicatione B S D E N^2 O_1 F C P L] in summa V N^1, *om.* M
[78] et sic – soldos 9 B S D E V N O_1 F C P L] *om.* M
[79] 54 B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[80] que B S D E M V N^1 C P L] *om.* O_1 F, *del.* N^2
[81] hoc est – soldos 9 B S D E M V N F C P L] per eorum proceditur inferius per infinita O_1

<1.1> Nunc satis dictum est de multiplicatione perticarum integrarum in[82] integras[83], modo de multiplicatione earumdem cum pedibus dicere volumus, et quia[84] cum multiplicetur pes in perticas quotlibet, ut dictum est, |[S, f. 15r] veniunt tot medii soldi quot sunt ille pertice. **<1.2>** Si duo |[V, f. 6v] pedes multiplicantur in perticas, venient tot soldi, quot sunt ille pertice[85]; **<1.3>** et si pedes 3 multiplicantur in perticas, veniunt tot soldi quot sunt pertice, et insuper |[D, f. 6r – O_1, f. 19v] totidem |[N, f. 6v] dimidii soldi; **<1.4>** et si pedes 4 multiplicantur in perticas, venient[86] duplicati soldi; **<1.5>** et ex pedibus 5 mul|[L, f. 10r]tiplicatis in perticas veniunt item duplicati soldi ipsarum perticarum, |[E, f. 7r] et insuper totidem dimidii. **<1.6>** Et ex multiplicatione pedum in pedes veniunt denarii, ut supra diximus.

<2.1> Si vis multiplicare perticas 12 et pedem 1 per perticas 25 et pedes 2, multiplica |[*b*, p. 8] primum perticas 12 per perticas 25: erunt panora 54 et soldi 9. Retineas panora in manu dextra |[F, f. 4v] et soldos in manu |[C, f. 8r] sinistra. Deinde multiplica pedem 1 per perticas 25: erunt soldi $\frac{1}{2}$ 12, quos adde cum |[O_1, f. 20r] soldis 9: erunt in manu sinistra soldi 21, et cum pedibus retineas denarios 6, qui super sunt super illos soldos[87] 21. **<2.2>** Signa vero pedum sunt hec[88]: positio puncte pedis sinistri super punctam dextri signat 1; positio puncte[89] sinistri super floccam dextri 2; tactus calcanei dextri[90] cum puncta pedis sinistri 3; ducere pedem[91] sinistrum post dextrum, et tangere punctam pedis dextri ab exteriori parte cum puncta sinistri: 4; ab eadem parte tangere cum puncta pedis sinistri nodum sive floccam dextri: 5. Alia quinque signa sunt per ordinem eodem[92] modo cum pede dextro |[O_1, f. 20v] tangendo sinistrum. Undecimum vero signum est, cum ponitur calcaneum pedis dextri super floccam pedis sinistri. Pluribus signis non

[82] integrarum B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[83] in integras B S D V^2 N^2 F] in integros C P L, *om.* E M V^1 N^1 O_1
[84] quia B S D N^2 O_1 F C P L] quare E, quoniam M V N^1
[85] si duo – pertice B S D E M V N F C P L (venient B D E M V N F C L, veniunt S P)] *om.* O_1
[86] venient B D E M V N F C L] veniunt S O_1 P
[87] soldos B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[88] numeratio pedum usque in undecim *in mg. dx. scr.* B, *in mg. sn. scr.* F; signa ad ostendendum numerum pedum *in mg. dx. scr.* L
[89] puncte B S D E M N^2 O_1 F C P L] puncte pedis V N^1
[90] dextri B S D V^2 N^2 F C P L] *om.* E M V^1 N^1 O_1
[91] pedem B S D E M V N O_1 F C L] pedum P
[92] eodem modo B S D E M N^2 O_1 F C P L] eodem quoque modo V N^1

indigemus, cum denarii 12 faciant[93] unum soldum, qui soldus retinetur in manu sinistra. De signis manuum nil ‖[M, f. 7v] dicendum est, cum[94] ‖[P, f. 8r] ipsa sciant omnes ‖[S, f. 15v] qui sciunt Abbacum. <**2.3**> Unde revertamur ad propositum: multiplicabis iterum pedes 2 per perticas 12: erunt soldi 12, quibus additis cum ‖[L, f. 10v] soldis $\frac{1}{2}$ 21 servatis, faciunt soldos $\frac{1}{2}$ 33. Item multiplicabis pedem 1 in pedes 2: erunt denarii 2, quos adde cum denariis 6 qui servantur in pedibus: erunt denarii 8[95], quos serva iterum cum pedibus. Et sic habebimus panora 54 et soldos 33 ‖[O_1, f. 21r] et denarios 8, scilicet stariora 4 et panora 8 et denarios 8 pro quesita multiplicatione.

pertice	pedes
17	3
28	4

<**3.1**> ‖[E, f. 7v] Item si vis multiplicare perticas 17 et pedes 2 per perticas 36 et pedes 3, ‖[V, f. 7r] multiplica primum perticas 17 per perticas 36: erunt stariora 9 et panora 3 et soldi $\frac{1}{2}$ 4. Retineas stariora in corde, panora retineas in manu dextra, soldos[96] in ‖[B, f. 5v] sinistra, denarios in pedibus. <**3.2**> Super que omnia adde multiplicationem de pedibus 2 in perticas 36, scilicet sol‖[N, f. 7r]dos 36, et multiplicationem de pedibus 3 in perticas 17, scilicet soldos $\frac{1}{2}$ 25, et multiplicationem de pedibus 3 in pedes 2, scilicet denarios 6. Et quotiens excreverint tibi soldi in manu sinistra, fac ex eis panora quotienscumque poteris. Et sic habebis in summa stariora 9 et panora 7 ‖[O_1, f. 21v] et denarios 6.

<**4.1**> Item si vis multi‖[D, f. 6v]plicare perticas 26 et pedes 4 per perticas 43 et pedes 5, multiplica primum perticas 26 per perticas 43, que sunt ‖[C, f. 8v] stariora 16 et panora 11 et soldi $\frac{1}{2}$ 4. Item multiplica pedes 4, scilicet soldos 2, per perticas 43: erunt soldi 86, scilicet panora 5, et soldi $\frac{1}{2}$ 3. <**4.2**> Item multiplica pedes 5, scilicet soldos $\frac{1}{2}$ 2, per perticas 26: erunt soldi 65. Item multiplica pedes

93 faciant F C P L] faciunt B S D E M V N O_1
94 cum B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V^1 N^1
95 quos – 8 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
96 soldos B S O_1 F C P L] soldos 3 D E M V N

4 per pedes 5: erunt denarii 20. Quibus quatuor multiplicationibus in unum coniunctis, faciunt in summa stariora 17 et panora 8 et soldos 8 et denarios 8.

<5.1> |[S, f. 16r] Si vis multiplicare perticas 28 et pedem 1 et uncias 7 per perticas 53 et pedes 5 et uncias 12, multiplica primum perticas 28 et[97] pedem 1 per perticas |[L, f. 11r – O_1, f. 22r] 53 et pedes 5: erunt stari|[F, f. 5r]ora 22 et panora 11 et soldi 11 et denarii 5. **<5.2>** Deinde multiplica uncias 7, scilicet denarios $\frac{1}{3}$ 2, per[98] perticas 53, tamen primum per 48, scilicet per soldos 4, et postea | [P, f. 8v – M, f. 8r] per denarios 5: erunt soldi 10 et denarii $\frac{2}{3}$ 3. **<5.3>** Item multiplica uncias 12, scilicet denarios 4, per perticas 28: primum quidem[99] per 24, scilicet per soldos 2, et postea per 4: erunt soldi 9 et denarii 4. **<5.4>** Post hec[100] multiplica uncias 7 per pedes 5[101], et uncias 12 per pedem 1: erunt sexte unius unciarum[102] 47, scilicet denarii $\frac{11}{18}$ 2. Et multiplica uncias 7 per uncias 12: erunt $\frac{84}{324}$ unius denarii, de quibus mentio facienda non est, cum non sint uncia[103] 1. Adde ergo reliquas |[E, f. 8r] multiplicationes in unum: reddent pro[104] tota summa stariora 23 et soldos 14 et denarios 9.

<6.1> Item si vis multiplicare perticas 37 et pedes |[N, f. 7v] 2 et uncias $\frac{1}{3}$ 5 per perticas 67 et pedes 4 et uncias $\frac{1}{4}$ 10, multiplica primum perticas 37 et |[*b*, p. 9] pedes 2 et un|[V, f. 7v]cias 5 per perticas 67 et pedes 4 et uncie 10: erunt stariora 38 et panora 4 et soldi 8 et denarii 5 et parum amplius. **<6.2>** Super que adde multiplicationem de tertia unius uncie[105] in perticas 67 et pedes 4 et uncias $\frac{1}{4}$ 10, scilicet parum amplius de unciis $\frac{1}{2}$ 22. **<6.3>** Et addes etiam[106] multiplicationem de[107] quarta unius uncie in perticas 37 |[O_1, f. 23r] et pedes 2 et uncias $\frac{1}{3}$ 5, scilicet

---

[97] et B S D E M N^2 O_1 F C P L] in N^1
[98] per B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[99] quidem B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] quod E M V^1 N^1
[100] hec F C P L] hoc B S D E M V N O_1
[101] per – 1 B S D E M V N O_1 C P L] per pedes 5 et uncias 12 per – 1 F
[102] unciarum] uncie B S D E V M N O_1 F C P L
[103] uncia B S D N^2 F C P L] uncie E M V^1 N^1 O_1, denarium V^2
[104] pro B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] per E M V^1 N^1
[105] uncie B S D V^2 N^2 F C P L] uncie et E M V^1 N^1, *om.* O_1
[106] etiam B S N^2 F C P L] et E M, *om.* D V N^1 O_1
[107] tertia – de B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

parum minus de unciis $\frac{1}{3}$ 9: erunt in summa stariora 38 et panora 4 et soldi[108] 9 et denarii 5 parum minus. Et sic crebro studio utendo suprascriptis multiplicationibus poteris habere notitiam similium.

<7.1> Si volueris multiplicare perticas 17 et pedes 3 in perticas 28 et pedes 4, collocabis pedes |[L, f. 11v] lateris longio|[S, f. 16v]ris sub pedibus lateris brevioris, et perticas sub perticis. Scilicet pedes 4 sub pedibus 3. Et post ipsos pedes, pones[109] perticas 28 sub perticis 17 |[D, f. 7r] versus sinistram retro, ut hic ostenditur. **<7.2>** Et multiplicabis pedes 3 per pedes 4: erunt denarii 12, quia cum multiplicamus[110] pedes in pedes, egrediuntur ex multiplica|[C, f. 9r]tione |[O_1, f. 23v] denarii, ut dictum est[111]. Serva ergo, pro illis denariis 12, soldum 1 in manu sinistra. **<7.3>** Et multiplicabis pedes 3 per perticas |[B, f. 6r] 28, et pedes 4 per perticas 17 in cruce, secundum quod docuimus[112] in multiplicationibus duarum figurarum contra |[M, f. 8v] duas in Libro Maioris |[P, f. 9r] Guise[113] Abbaci[114]. Sed[115] dimidiabis has[116] multiplicationes multiplicando[117], hoc est multiplicabis[118] dimidium pedum 3 in 28 vel dimidium de 28 in 3. Similiter[119] multiplicabis dimidium pedum 4 per 17, vel dimidium de[120] 17 per 4[121]. **<7.4>** Et hoc facies, quia[122] ex multiplicato pede in perticam, egreditur inde[123] pes, scilicet medietas unius soldi, quare[124] |[E, f. 8 v] multiplicatio pedum 3 in dimidium[125] perticarum[126] 28, scilicet in 14, faciunt soldos 42. Quos adde |[O_1, f. 24r] cum soldo 1[127] servato[128]

---

[108] unciis – soldi B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[109] pones S F C P L] pone B D E M V N O_1
[110] multiplicamus B S D N^2 O_1 F C P L] multiplicavimus E M, multiplicabimus V N^1
[111] quia cum – est B D E M V N O_1 C P] <va> quia cum – est <cat> F L, *om.* S
[112] docuimus C P L] docui B D E M V N O_1 F, *om.* S
[113] guise B D E M V N F C P L] *om.* S O_1
[114] secundum quod – abbaci B D E M V N C P] <va> secundum quod – abbaci <cat> F L, *om.* S
[115] sed B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1
[116] has B S D E M V N^2 F C P L] *om.* N^1 O_1
[117] multiplicando B S E N^2 F C P L] *om.* D M V N^1 O_1
[118] multiplicabis B S D E M V N O_1 F C] dimidiabis P L
[119] similiter B S E M V N O_1 F C P L] scilicet D
[120] de B S D E M V N] *om.* O_1 F C P L
[121] sed – 4 B S D E M V N F C P L] multiplicabis ac dimidiabis hoc est multiplicabis dimidium pedum 3 in 28 in 3 scilicet multiplicabis in pedum 3 in 28 vel dimidiabis de 17 in 4 O_1
[122] quia B S D V N O_1 F C P L] quare E M
[123] inde B S D V^2 N^2 F C P L] in E M V^1 N^1 O_1
[124] quare B S D V^2 N^2 O_1 F C L] quia E M V^1 N^1 P
[125] dimidium B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] medium E M V^1 N^1
[126] perticarum B S D E M V N O_1 F C L] per perticarum P
[127] 1 B S D V^2 N^2 F C P L] *om.* E M V^1 N^1 O_1

in manu, erunt soldi 43 in eadem manu. Et multiplicatio medietatis pedum 4 in perticas 17 facit soldos 34, quibus additis cum soldis |[F, f. 5v] 43 faciunt soldos 77. Ex quibus facies panora: erunt panora 4 et soldi 11. Servabis[129] quidem panora[130] in manu dextra, et soldos[131] in sinistra; post hec, multiplicabis perticas 17 per perticas 28 per[132] demonstratum modum, quia de multiplicatione perticarum in perticas satis subtiliter dictum est[133] superius. Et habebis in summa[134] stariora 7 et panora 7 |[V, f. 8r] et soldos 3 et denarios 6[135].

pertice	pedes
19	0
41	4

<8.1> Et si volueris multiplicare tantum perticas 19 in perticas 41 et pedes 4, collocabis |[O_1, f. 24v] perticas 41 sub perticis |[L, f. 12r] 19, et in loco pedum ante 19 pones zefirum, et sub ipso ante perticas 41 pones pedes 4, ut hic[136] ostenditur. **<8.2>** Et multiplicabis zefirum per pedes 4: faciet[137] zefirum. Et zefirum per dimidium de 41 faciet iterum zefirum. Et[138] medietatem de pedibus 4[139] in 19 faciunt soldi[140] 38, qui sunt panora 2 in manu dextra et soldi 5 in sinistra. Et perticas 19[141] in |[S, f. 17r] perticas 33 faciunt stariora $\frac{1}{2}$ 9. Et sic habes[142] |[N, f. 8r] in corde stariora[143] 9, et in manu dextra panora 8, et in sinistra soldos 5. Et multiplicabis perticas 8[144], que sunt a 33 usque in 41[145], in perticas 19, scilicet in

---

128 servato B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] conservato E M V^1 N^1
129 servabis S C P L] serva B D E M V N F
130 panora S V^2 C P L] bis panora B D E M V^1 O_1 F, panora bis N
131 soldos B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* V^1 N^1
132 per B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
133 dictum est B S D N^2 O_1 F C P L] demonstratum est E M V N^1
134 in summa B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
135 6 B D E M V N O_1 F C P L] 6 in summa S
136 hic B S D N^2 F C P L] *om.* E M V N^1 O_1
137 faciet B S D F C L] faciunt E M V N P, *om.* O_1
138 et S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
139 et – 4 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
140 soldi B S D E M V N O_1 F C P L] *om.* C
141 19 B S D E M V N O_1 F L^b] 15 C P L^a
142 habes S F C P L] habebis B D E M V N O_1
143 stariora B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
144 et in sinistra – 8 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
145 in 41 B S D E M V O_1 F C P L] *om.* N

11, et in 8: facient[146] panora 16 et perticas 64. Que pertice 64 sunt panora 11 et soldi $\frac{1}{2}$ 10[147]: et sic capiunt |[P, f. 9v] in summa stariora 12[148] minus denariis 12[149].

pertice	pedes	unc.
20	4	11
46	5	12

<9.1> Item si volueris multiplicare perticas 20 et pedes 4 et[150] uncias[151] 11 in perticas 46 et pedes 5[152] et uncias 12, collocabis perticas sub perticis, et pedes sub pedibus, et uncias[153] sub unciis, ut hic |[O_1, f. 25r] osten|[M, f. 9r]ditur. Et multiplicabis ad modum multiplicationum trium figurarum contra tres: et erunt uncie in loco prime figure, scilicet in loco unitatum; et pedes in loco secunde, scilicet de|[D, f. 7v]cenarum; et pertice in loco tertie, scilicet centenariorum. **<9.2>** Quare multiplicabis uncias 11 per uncias 12: faciunt $\frac{132}{324}$ unius denarii, quia ex uncia multiplicata in unciam, provenit $\frac{1}{324}$ unius denarii[154]. Nam regula de 324[155] est|[E, f. 9r] $\frac{1\ \ 0}{18\ \ 18}$, quare si 132 diviserimus per primum 18 qui[156] est sub |[*b*, p. 10] virgula, |[C, f. 9v] exibunt $\frac{1}{3}$ 7. Vel sextam unciarum 12 multiplica |[O_1, f. 25v] per 11, et quod provenerit divide per sextam de 18: exibunt similiter $\frac{1}{3}$ 7, que sunt $\frac{\mathrm{me}}{18}$ unius denarii. **<9.3>** Servabis 7 in manu, et fractiones servabis in tabula vel in corde. Et multiplicabis uncias 11 in pedes 5[157], et uncias 12 in pedes 4 in cruce. Et addes[158] has duas multiplicationes cum 7 servatis: |[L, f. 12v] erunt 110, que sunt $\frac{\mathrm{me}}{18}$

[146] facient B D E M V N O_1 F C L] faciunt S P
[147] $\frac{1}{2}$ 10 S F^a C P L] 9 B D E M V N O_1 F^b
[148] stariora 12 minus B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] stariora 12 panora 2 et soldi 9 minus V^1 N^1
[149] 12 B S D E O_1 F C P L] *om.* M V N
[150] et B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[151] uncias B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[152] 5 B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* V^1 N^1
[153] 12 – uncias B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[154] quia – denarii B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1
[155] 324 B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] 334 E V^1 M, 33 N^1
[156] qui B S O_1 F C P L] quod D E M V N
[157] 5 B S D E M V^2 O_1 F C P L] *om.* V^2 N
[158] addes S C P L] adde B D E M V N O_1 F

unius denarii[159], quia ex multiplicatione unciarum in pedes egrediuntur[160] $\frac{me}{18}$ unius denarii, quare divisis $\frac{1}{3}$ 110 per 18, faciunt denarios 6 et $\frac{1\ \ 2}{3\ \ 18}$. **<9.4>** Servabis denarios 6[161] in manu, et[162] fractiones in tabula[163] vel in corde. Super quos addes multiplicationem ‖[B, f. 6v] tertie partis unciarum 11 in perticas 46[164], vel tertiam partem de perticis 46 in 11 ‖[O_1, f. 26r], quia multiplicatio uncie in perticam facit $\frac{1}{3}$ unius denarii: erunt denarii $\frac{2}{3}$ 174, qui sunt soldi ‖[S, f. 17v] 14 et denarii ‖[V, f. 8v] $\frac{2}{3}$ 6. Super quos adde iterum multiplicationem tertie partis unciarum 12 in perticas 20, et multiplicationem de pedibus 4 in pedes 5: erunt[165] in summa soldi 22 et denarii $\frac{2}{3}$ 10. Addes ‖[P, f. 10r] $\frac{2}{3}$ unius denarii cum $\frac{1\ \ 2}{3\ \ 18}$ servatis: faciunt $\frac{1\ \ 14}{3\ \ 18}$ unius denarii. Et de soldis 22 et denariis 10 servabis ‖[F, f. 6r] in manu dextra panorum 1, et in sinistra soldos 6, et in pedibus denarios 4. Super que addes multiplicationem medietatum[166] pedum in perticas in cruce, et perticarum in perticas, ut in antecedentibus fecimus. Et habebis in summa stariora 14 et panora 9 et soldos 4 et denarios $\frac{1\ \ 14}{3\ \ 18}$ 4[167].

pertice	pedes	unc.
21.	0.	0
47.	2.	10

<10.1> ‖[N, f. 8v] Rursus si vis multiplicare perticas 21 per perticas 47 et pedes 2 et uncias 10, collocabis uncias 10[168] sub zefiro, et pedes 2 sub alio zefiro, et perticas 47 sub perticis 21, ut hic ostenditur. **<10.2>** Et multiplicabis uncias per

---

159 servabis 7 in manu, et fractiones servabis in tabula vel in corde. Et multiplicabis uncias 11 in pedes 5, et uncias 12 in pedes 4 in cruce. Et addes has duas multiplicationes cum 7 servatis: erunt 110, que sunt $\frac{me}{18}$ unius denarii *in mg. inf. scr.* $V^2 N^2$

160 egrediuntur S C P L] egredientur B D E M V N O_1 F

161 6 B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V^1 N^1

162 et B S D E M V N^2 F C P L] *om.* N^1 O_1

163 fractiones in tabula B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

164 11 in perticas 46 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

165 4 – erunt B S D V^2 N^2 F C P L] *om.* E M V^1 N^1 O_1

166 medietatum B S D E M V N^2 F C P L] medietatem V N^1, *om.* O_1

167 4 in pedes – $\frac{1\ 3}{4\ 18}$ 4 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

168 collocabis – 10 B S V^2 N^2 F C P L] *om.* D E M V^1 N^1 O_1

uncias, scilicet zefirum per 10: facit zefirum, quod relin‖[M, f. 9v]ques[169]. Et multiplicabis[170] 0 per 2, et 10 per 0 in cruce: faciunt zefirum, quod relinques iterum. ‖[O_1, f. 26v] Et multiplicabis zefirum, quod est in loco unciarum, per $\frac{1}{3}$ de perticis 47, et 10 per $\frac{1}{3}$ de 21[171], et zefirum, quod est[172] in loco pedum, per pedes 2: facient soldos 5 et denarios 10. Et multiplicabis zefirum, quod est in loco pedum[173], per $\frac{1}{2}$ de perticis 47, et $\frac{1}{2}$ 2 pedum in perticas[174] 2l: faciunt ‖[E, f. 9v] soldos 21. Et sic habes soldos[175] 26 et denarios 10, hoc est panorum unum et soldos 10 et denarios 4. Super quos ‖[L, f. 13r] adde multiplicationem de perticis 21 in perticas 47, et habebis pro summa quesite multiplicationis stariora 15 et panorum 1 et soldum 1 et[176] denarios 4 mensure.

pertice	pedes	unc.
13.	0.	11
28.	0.	14

<11.1> Et ‖[D, f. 8r] sic studeas semper cum zefiris supplere gradus laterum multiplicantium, ut[177] quot sunt gradus in uno latere, tot sint[178] in alio. Dicimus enim primum gradum uncias, secundum pedes, tertium perticas. **<11.2>** ‖[O_1, f. 27r] Verbi gratia: volumus multiplicare perticas ‖[C, f. 10r] 13 et[179] uncias 11 per perticas 28 et uncias 14. Collocabis perticas sub perticis in tertio gradu, et uncias sub unciis in primo. Et suppleatur ‖[S, f. 18r] secundus gradus, ponendo zefira[180] inter uncias et pedes[181], scilicet[182] in secundo gradu, ut hic ostenditur. Et

[169] *hic incipit secunda manus* E
[170] et multiplicabis B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[171] $\frac{1}{3}$ de 21 B S D M V F C P L] $\frac{1}{3}$ de perticis 21 N, *om.* O_1
[172] est B S D E M V N^2 F C P L] *om.* N^1 O_1
[173] pedes 2 – pedum B S D E M V N^1 F C P L] *om.* O_1, non erat in vet. libro *in mg. sn. scr.* N^2
[174] 47 et 10 – perticas B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[175] 21 – soldos B S D V^2 N^2 F C P L] *om.* E M V^1 N^1 O_1
[176] et B S D V^2 N^2 F C P L] pro E M V^1 N^1 O_1
[177] ut B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] et V^1 N^1
[178] sint C P L] sunt B S D E M V N O_1 F
[179] et B S D V N^2 O_1 F C P L] *om.* E M N^1
[180] zefira B S V N^2 O_1 F C P L] zefiro D E M N^1
[181] pedes B S D E N^2 O_1 F C P L] perticas M V N^1

multiplicabis numeros, |[P, f. 10v] secundum quod docuimus, et habebis in summa stariora 5 et panora 7 et denarios $\frac{5}{9}\frac{14}{18}$ 1.

pertice	pedes	unc.
14	2	0
31	0	15

<12.1> Item volumus multiplicare perticas 14 et pedes 2 in perticas 31 et |[V, f. 9r] uncias 15. Scribes[183] eos sic. Et multiplicabis zefirum unciarum per uncias |[O_1, f. 27v] 15: faciet 0, quo 0 diviso per 18 facit[184] iterum 0. Quod relinques, cum nihil sit, et multiplicabis 0 unciarum per 0 pedum, et uncias 15 per pedes 2: faciunt 30 quibus, divisis per 18, facit[185] denarios[186] $\frac{2}{3}$ 1. **<12.2>** Et multiplicabis $\frac{1}{3}$ de zefiro unciarum per perticas 31, et $\frac{1}{3}$ unciarum 15 per perticas 14, et pedes 2 per 0 pedum. Et addes cum denario $\frac{2}{3}$ 1, et facient soldos 6 minus $\frac{1}{3}$ unius denarii. Et multiplicabis dimidium pedum 2 per perticas 31, et dimidium zefiri per perticas 14, et addes cum soldis 6 servatis: facient soldos 37 |[N, f. 9r] minus $\frac{1}{3}$ unius denarii, qui sunt panora 2 et soldi 4 minus $\frac{1}{3}$ unius denarii. **<12.3>** Et de perticis 14 accipe perticas 11, et mul|[*b*, p. 11]tiplica eas[187] per perticas 31: erunt pano|[M, f. 10r]ra 62. |[L, f. 13v] Et multiplicabis perticas 3, que remanserunt de perticis 14, per perticas 31, primum per 22, et postea per 9, vel in una multiplicatione per 31: erunt panora 16 et soldi 15. |[B, f. 7r] Et[188] habebis in summa stariora 6 et |[F, f. 6v] panora 9 et soldos 2 et denarios $\frac{2}{3}$ 5 mensure[189].

182 scilicet B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] 8 E, *om.* M V^1 N^1
183 scribes B S D N^2 O_1 F C P L] scribe E M V N^1
184 facit B S D E F C P L] faciet M V N O_1
185 facit B S D E M V N O_1 F C L] faciunt P
186 denarios E M V N] denarium B D O_1 F C P L, denarii S
187 eas B D E M V N] eos S F C P L, *om.* O_1
188 et B S D V^2 N^2 F C P L] *om.* E M V^1 N^1 O_1
189 qui sunt panora 2 – mensure B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

pertice	pedes	unc.
17	4	$\frac{1}{2}$ 9
32	5	$\frac{3}{4}$ 14

<13.1> Rursus si vis multiplicare perticas 17 et pedes 4 et uncias $\frac{1}{2}$ 9 per perticas 32 et pedes 5 et uncias $\frac{3}{4}$ 14, collocabis perticas sub perticis, et pedes sub pedibus, et uncias sub unciis. **<13.2>** Multiplicabisque uncias $\frac{1}{2}$ 9 per uncias[190] $\frac{3}{4}$ 14, sic: primum 9 per 14 faciunt 126, super que adde medietatem |[O_1, f. 28r] de 14, et $\frac{3}{4}$ de 9 in cruce: faciunt plus de 139, quibus, divisis per 18, veniunt plus de 7. Que 7 serva in manu. Et multiplicabis in cruce uncias $\frac{1}{2}$ 9 per |[S, f. 18v] pedes 5, et uncias $\frac{3}{4}$ 14 per pedes |[E, f. 10r] 4. Et adde cum 7 servatis[191]: erunt plus de 113, que divide per 18: erunt denarii $\frac{1}{3}$ 6. Et multiplicabis $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ 9, scilicet $\frac{1}{6}$ 3 per perticas |[P, f. 11r] 32: erunt denarii $\frac{1}{3}$ 101. Quibus additis cum denariis $\frac{1}{3}$ 6 servatis, facient[192] soldos 9 minus $\frac{1}{3}$ unius denarii[193]. Super quos adde multiplicationem tertie partis de unciis $\frac{3}{4}$ 14 in 17, vel econtra. Quam multiplicationem |[D, f. 8v] sic facies[194]: de $\frac{3}{4}$ 14[195] accipe 12, cuius $\frac{1}{3}$ in[196] |[O_1, f. 28v] integrum est 4. Que 4 multiplica per perticas[197] 17: erunt denarii 68. Post hec, ex $\frac{3}{4}$ 2 accipe 2, et multiplica eas per 17: erunt uncie 34. Ex quibus fac denarios, scilicet[198] |[C, f. 10v] divide eas per 3: erunt denarii $\frac{1}{3}$ 11. Et sic habes denarios $\frac{1}{3}$ 79. Post[199] hec accipe $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ que[200] |[V, f. 9v] restant: erit[201] $\frac{1}{4}$. Quod multiplica per 17: erunt denarii $\frac{1}{4}$ 4[202].

---

[190] et pedes 5 – per uncias B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[191] servatis S C P L] servatis et B D E M V N O_1 F
[192] facient B S D O_1 F] faciunt E M V N, *om.* C P L
[193] unius denari B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[194] in 17 – facies B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* M V^1 N^1
[195] de $\frac{3}{4}$ 14 B^2 S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* B^1 M V^1 N^1
[196] in B S D E V^2 N^2 F C P L] *om.* M V^1 N^1 O_1
[197] perticas B S D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[198] scilicet B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[199] post B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] postea E M V^1 N^1
[200] que B S D O_1 F C P L] qui E M V N

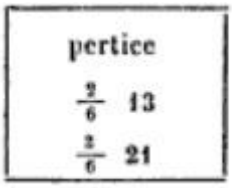
Et sic habes denarios $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83 pro multiplicatione de $\frac{1}{3}$ unciarum $\frac{3}{4}$ 14 in 17. **<13.3>** Vel aliter accipe $\frac{1}{3}$ de 17, quod est $\frac{2}{3}$ 5, et multiplica eas[203] per $\frac{3}{4}$ 14, sic[204]: 5 per 14 faciunt denarios 70, et $\frac{2}{3}$ de 14 sunt denarii $\frac{1}{3}$ 9, et $\frac{3}{4}$ de 5 sunt denarii $\frac{3}{4}$ 3, et $\frac{2}{3}$ |[L, f. 14r] de $\frac{3}{4}$ sunt $\frac{1}{2}$ unius denarii[205]. |[O_1, f. 29r] Et sic habes denarios $\frac{7}{12}$ 83 ut supra. **<13.4>** Vel aliter: super $\frac{3}{4}$ 14 adde $\frac{1}{4}$: erunt 15. Cuius $\frac{1}{3}$ accipe, quod est 5, et multiplica per 17: erunt[206] denarii 85. Et ex ipso[207] $\frac{1}{4}$ quem iunxisti, accipe tertiam partem: erit $\frac{1}{12}$. Quam partem accipe de 17, que est[208] denarius[209] $\frac{5}{12}$ 1, quem extrahe de 85: remanent, ut diximus[210], denarii |[N, f. 9v] $\frac{7}{12}$ 83. **<13.5>** Et sic studeas in similibus |[M, f. 10v] procedere melius quod[211] tibi videbitur, secundum numerum unciarum. Additis ergo denariis 83 cum soldis 9, minus $\frac{1}{3}$ unius denarii, faciunt soldos 16, minus $\frac{3}{4}$ unius denarii. Cum quibus adde[212] multiplicationem pedum in pedes, scilicet[213] |[O_1, f. 29v] 4 in 5[214]: erunt soldi 17 et denarii $\frac{1}{4}$ 7. Super quos adde[215], ut supra, multiplicationem medietatis pedum per perticas[216] in cruce, et perticarum in perticas, et habebis in summa stariora 8 et panora 10 et soldos 7 et denarium[217] $\frac{1}{4}$ 1 mensure[218].

<14.1> Potes enim aliter de fractionibus unciarum facere, videlicet in principio, antequam incipias multiplicare. Accipe frac|[S, f. 19r]tiones unciarum

---

[201] erit B D N^2 O_1 F C P L] erunt S E M V N^1
[202] 4 B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[203] eas S C P L] ea B D E M V N O_1 F
[204] sic B S D M V^1 N^1 O_1 C P L] scilicet V^2 N^2 F
[205] denarii B S D E M V N O_1 F] *om.* C P L
[206] erunt B S D E M V N O_1 F] quod erunt C P L
[207] ipso B D E M V N O_1 F] ipsa S C P L
[208] est B C S D^b O_1 F P L] sunt E M V N, *om.* D^a
[209] denarius B S D O_1 F C P L] denarii E M V N
[210] diximus S C P L] prediximus B D E M V N O_1 F
[211] quod B S D E M V N F C P L] quam O_1
[212] adde B^2 S D E M V N O_1 F C P L] *om.* B^1
[213] scilicet B S D E M V N O_1 F C] *spatium vacuum reliquerunt* P L
[214] 5 S C P L] 5 erunt denarii 20 B D E M V N O_1 F
[215] adde B D E M V N O_1 F C] addes S P L
[216] pedum per perticas B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[217] denarium F C P L] denarios B D E M V N O_1, denarii S
[218] mensure C P L] *deest* B S D E M V N O_1 F

superiorum de perticis subterioribus[219], et fractiones unciarum subteriorum[220] de perticis superioribus[221], ut[222] in hac multiplicatione. **<14.2>** Pro[223] uncia $\frac{1}{2}$, que est in superioribus unciis, acci‖[O_1, f. 30r]pe medietatem de 32, et pro $\frac{3}{4}$, que sunt in unciis inferioribus, accipe $\frac{3}{4}$ de 17 in cruce: erunt 16 et $\frac{3}{4}$ 12, hoc est[224] uncie $\frac{3}{4}$ 28, que sunt fere denarii 10, quos serva. Et ‖[P, f. 11v] delebis ipsas fractiones unciarum de multiplicatione, et multiplicabis tantum perticas 17 et pedes 4 et uncias 9 per perticas 32 ‖[F, f. 7r] et pedes 5 et uncias 14, et super summam adde denarios 10 servatos.



<15.1> Si volueris multiplicare perticas 13 et[225] pedes 2 per perticas 21 et pedes 3, cum pes sit $\frac{1}{6}$ unius pertice, pone tot sextas post perticas, quot sunt pedes ‖[O_1, f. 30v] positi cum ipsis ‖[L, f. 14v] perticis, et habebis ‖[B, f. 7v] perticas $\frac{2}{6}$ 13 ad multiplicandum per perticas $\frac{3}{6}$ 21. Pone sextas sub sextis, et perticas sub perticis, ut hic ostenditur. Et pones[226] ex parte 6 ‖[V, f. 10r] bis sub una virga, et nihil super eos[227], sic[228]: $\frac{\quad}{6\;6}$. Et multipli‖[D, f. 9r]cabis pedes 2 per 3, qui sunt super ambobus 6: erunt[229] 6[230], que[231] divide per ‖[*b*, p. 12] primum 6, qui est ex parte sinistra sub virga quam ‖[C, f. 11r] modo posuimus: exibit 1, remanet 0. Retinens[232] itaque[233]

---

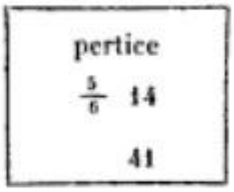
[219] subterioribus] inferioribus B D E M V N O_1 F, superioribus S C P L
[220] subteriorum B^1 S N^2 F C P L] inferiorum B^2, stariorum D E M V N^1 O_1
[221] et fractiones – superioribus B S D E M V N O_1 F^b C P L] *om.* F^a
[222] ut B S E M V N O_1 F C L] et D P
[223] pro B S D O_1 F C P L] per E M V N
[224] est B S D E M V N O_1 F P L] *om.* C
[225] et B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[226] pones B S D O_1 F C P L] pone E M V N
[227] eos S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
[228] sic B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[229] erunt B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] etiam E M V^1 N^1
[230] erunt 6 B^2 S D E M V N O_1 F C P L] *om.* B^1
[231] que E M V N O_1 C P L] quem B D F, quam S
[232] retinens V^2 N^2 F C P L] retines B S D E M V^1 N^1 O_1
[233] itaque B S D E M V N F C P L] ergo O_1

1[234] in ‖[E, f. 10v] manu, et remanens[235] 0, pone[236] super ipsum[237] $\frac{\ }{6\ 6}$. Et multiplicabis 2, que sunt[238] super 6, per 21, et 3, que sunt super alium 6, per 13 in cruce. ‖[O_1, f. 31 r] Et addes[239] multiplicationem eorum cum 1 servato: erunt 82, que divide per alium 6: exibunt pertice 13 et remanent[240] 4. Pone 4[241] super ipsum 6, sic: $\frac{0\ \ 4}{6\ \ 6}$, et 13 serva in manu. Super que[242] adde multiplicationem perticarum 13 in perticas 21: erunt pertice 286, ‖[M, f. 11r] quas divide per $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$, scilicet per regulam perticarum stariori, ‖[N, f. 10r] exibunt[243] $\frac{0\ \ 2}{11\ 6}$ 4. Copula hanc virgulam[244] cum prima, et habebis[245] $\frac{0\ \ 4\ \ 0\ \ 2}{6\ \ 6\ 11\ 6}$ 4[246]. **<15.2>** Scias quia cum ita feceris: quicquid extra virgulam comprehenditur, sunt stariora; et super 6, qui[247] est in capite virgule post integros[248], sunt[249] ‖[O_1, f. 31v] dupla panora; et super 11[250] sunt pertice, et intelligas[251] unamquamque ipsarum[252] esse soldos 3; et super aliis duobus 6 sunt denarii, quos accipies[253] sic[254]: multiplicabis ‖[S, f. 19v] figuram, que est super 6, per alium 6 qui est post ipsum, et addes figuram, que fuerit super ipsum 6. **<15.3>** Verbi gratia: pro 4, que sunt extra virgulam, habemus stariora 4; et pro 2, que sunt super 6, habemus panora 4; et pro 4, que sunt[255] super alium 6, habemus soldos 2,

---

[234] 1 N^1 C P L] ipsum 1 B S D E M N^2 O_1 F
[235] remanens B D E M V N O_1 F C P L] remanet S
[236] pone B S D E M V N O_1 F C L] pones P
[237] super ipsum B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[238] sunt B S D E M V N O_1 F C] est P L
[239] addes B S D E M V N F C P L] adde O_1
[240] remanent B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[241] pone 4 B S D E M V N O_1 F P L] *om.* C
[242] que B D E M V N O_1] quem S F C P L
[243] exibunt B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[244] virgulam B^2 S O_1 F C P L] virgam B^1 D E M V N
[245] et habebis B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[246] $\frac{0\ \ 4\ \ 0\ \ 2}{6\ \ 6\ 11\ 6}$ C P L] $\frac{0}{6}\frac{4}{6}\frac{0}{11}\frac{2}{6}$ B S D O_1, $\frac{0\,4}{6\,6}\frac{0}{11}\frac{2}{6}$ E M V N, $\frac{0\,4}{6\,6}\frac{0}{11}\frac{3}{6}$ F
[247] qui B S D E M V N F] quod O_1, que C P L
[248] integros S D F C P L] integrum B E M V N O_1
[249] sunt B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] est E M V^1 N^1
[250] 11 B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] 15 E M V^1 N^1
[251] intelligas E M V N^1 C P L] intelliges B S D N^2 O_1 F
[252] ipsarum B S D E^b N^2 O_1 F C P L] *om.* E^a M V N^1
[253] accipies B S D E M V N O_1 F C L] accipias P
[254] sic B S D E M N^2 O_1 F C P L] si V N^1
[255] sunt B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] est E M V^1 N^1

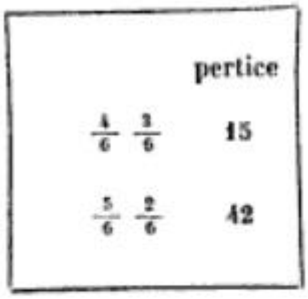
quia multiplicatio de 4 in 6, et addito zefiro, qui[256] est super ipsum 6, surgit in denariis 24.



<16.1> |[L, f. 15r] Item si vis multiplicare perticas 14 et pedes 5 per perticas 41, pone 41 sub 14[257], et |[P, f. 12r] $\frac{0}{6}$ sub[258] $\frac{5}{6}$, sic. Et scias quia |[O_1, f. 32r] ideo posuimus $\frac{0}{6}$ post 41, ut equiparentur fractiones subteriores[259] cum fractionibus superioribus. Et pone $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 6\ \ 11\ \ 6}$[260] ex parte. **<16.2>** Et multiplicabis 5, qui[261] est super 6, per 0 quod est super alium[262] 6: faciet 0, quare pones 0 super primum 6. Et multiplicabis in cruce 5 per 41 et 0 per 14: faciunt 205, que divide per sequentem 6: exibunt 34 et remanet 1. Pone 1 super[263] 6, et 34 serva in manu. Super que[264] adde multiplicationem de 14 in 41: faciunt 608, que divide per[265] $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$[266] que restant in virgula divisionis: remanebunt[267] 3 super 11 et |[O_1, f. 32v] 1 super 6 et 9 extra virgulam, ut in questione ostenditur. Notantur enim in ipsa summa stariora 9 et panora[268] 2 et soldi 9 et denarii 6 mensure[269].

---

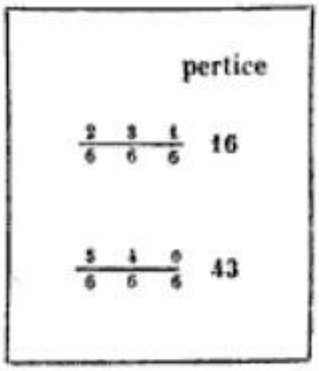
[256] qui C P L] quod B S D E M V N O_1 F
[257] pone 41 sub 14 et S C P L] sub 14 pone 41 et B V^2, sub 14 N^2 F, *om.* D E M V^1 N^1 O_1
[258] sub B S D N^2 O_1 F C P L] super E M V N^1
[259] subteriores B S D E M V^1 N O_1 F C P L] inferiores V^2
[260] $\frac{1\,0\,0\,0}{6\,6\,11\,6}$ B S D C P L] $\frac{1\,0}{6\,6}\frac{0\,0}{11\,6}$ E M V N O_1 F
[261] qui B S E M V N O_1 F C P L] quod D
[262] alium B S D E M V N O_1] aliud F C P L
[263] super B S D E M V N O_1 F C] super ipsum P L
[264] que] quem B S D E M V N O_1 F C P L
[265] per B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[266] $\frac{1\,0}{11\,6}$ B S N O_1 C P L] $\frac{1}{11}\frac{0}{6}$ D E M V F
[267] remanebunt B S D E M V N O_1 F C L] remanebint P
[268] 9 et panora S V C P L] *deest* B D E M N O_1 F
[269] $\frac{0\,1\ \ 3\,1}{6\,6\,11\,6}$ 9 *in mg. sn. scr.* SP, *in mg. dx. scr.* L



<17.1> |[V, f. 10v] Item si vis multiplicare perticas 15 et pedes 3 et uncias 12 per perticas 42 et[270] pedes 2 et uncias 15, oportet ut uncias redigas in sextis unius pedis, scilicet in sextis sexte unius pertice. Et quoniam uncie 18 faciunt pedem 1, ergo uncie 3 faciunt $\frac{1}{6}$ pedis, quare uncie |[C, f. 11v] 12 sunt $\frac{4}{6}$ unius pedis. Quas sextas pone in una virga post $\frac{3}{6}$. Propter eadem ergo pro unciis 15 |[D, f. 9v] pones $\frac{5}{6}$ post |[O_1, f. 33r] $\frac{2}{6}$ sub alia virga, et habebis perticas $\frac{4\;\;3}{6\;\;6}$ 15[271] ad multiplicandum in perticas $\frac{5\;\;2}{6\;\;6}$ 42, ut hic ostenditur. Post hec[272], protrahe virgulam ex parte, sub qua[273] |[M, f. 11v] pone[274] per ordinem quatuor |[F, f. 7v] senarios, et $\frac{1\;\;0}{11\;\;6}$ cum ipsis, sic: $\frac{\qquad}{6\;6\;6\;6\;11\;6}$. **<17.2>** Et multiplicabis 4 per 5, qui sunt super primis sextis, |[B, f. 8r] et divide per primum 6 virgule servate: exibunt 3, | [L, f. 15v – N, f. 10v] et remanent 2[275] super |[S, f. 20r] ipsum 6. Et multiplicabis in cruce 4 per 2, et 5 per 3, que sunt super |[E, f. 11r] virgis[276], et addes[277] cum 3 servatis: erunt 26, que divide per secundum 6: exibunt 4, et remanent |[O_1, f. 33v] 2 super ipsum 6. Et multiplicabis 4 per 42, et 5 per 15, et 3 per 2, multiplicando videlicet in antea, sicut multiplicamus tres figuras contra[278] tres retrocedendo. Et addes cum 4 servatis: erunt 253, que divide per tertium 6, exibunt 42, et remanet 1 super ipsum 6[279]. Super 42 vero addes multiplicationem de 3 in 42, et de 2 in 15 in cruce: facient[280] 198, que divide per quartum 6: exibunt 33, et remanet 0 super ipsum 6.

[270] et B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[271] $\frac{4\,3}{6\,6}$ 15 B S D E M V N O_1 F] $\frac{4\,2}{6\,6}$ C L, $\frac{5\,2}{6\,6}$ 15 P
[272] hec B D O_1 C P L] hoc S E M V N F
[273] qua B S D O_1 C P L] quam E M N F
[274] pone B S D E M V N F C P L] pones O_1
[275] 2 B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V^1 N^1
[276] virgis B S D E M O_1 F C P L] virgulis V N
[277] addes B S D E M V N F C P L] adde O_1
[278] contra B S D E N^2 F C P L] per M V N^1, *om.* O_1
[279] et multiplicabis – ipsum 6 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[280] facient B S D E O_1 F C P L] faciunt M V N

Et super |[P, f. 12v] 33 adde multiplicationem de 15 in 42: erunt pertice 663; quas divide per 11, exibunt 60, et remanent 3 super ipsum 11. Deinde divide 60 per 6, qui restant in capite virgule: exibunt 10 ante virgulam, et 0 super ipsum 6. **<17.3>** Et sic habes in | [*b*, p. 13] summa stariora 10 et soldos 9 et denarium[281] $\frac{1\ \ 2\ \ 2}{6\ \ 6\ \ 6}$ mensure, quia[282] super primos[283] |[O_1, f. 34r] duos[284] senarios habemus partes[285] unius denarii, et super alios duos 6 habemus denarios, et super 11 habemus perticas, scilicet triplos soldos, et super[286] 6 qui est in capite virgule habemus dupla panora.



<18.1> Rursus si vis multiplicare perticas 16 et pedem 1 et uncias 10 per perticas 43 et uncias $\frac{1}{2}$ 14, rediges[287] uncias in sextas unius pedis: erunt sexte $\frac{1}{3}$ 3. De qua tertia fac sextas: erunt due sexte: et sic habes[288] in superiori latere perticas $\frac{2\ \ 3\ \ 1}{6\ \ 6\ \ 6}$ 16. Possumus aliter facere sextas unius pedis de unciis 10: quoniam un|[V, f. 11r]cie 10 sunt $\frac{10}{18}$ unius pedis, ergo uncie 10 sunt $\frac{20}{36}$ pedis, quare[289] si diviserimus 20 per regulam de 36, exibunt $\frac{2\ \ 3}{6\ \ 6}$ |[L, f. 16r] unius pedis, ut diximus. Similiter duplicabis[290] uncias $\frac{1}{2}$ 14[291]: erunt $\frac{29}{36}$ |[C, f. 12r] unius pedis. Et sic habes in

[281] denarium B S D O_1 F C P L] denarios E M V N
[282] quia B S D O_1 F C P L] quare E M V N
[283] primos B S D E O_1 F C P L] *om.* M V N
[284] primos duos B D E M V N O_1 F C P L] duos primos S, *om.* M V N
[285] partes S C P L] partem B D E M V N O_1 F
[286] super B S D E M V N O_1 F] sic per C P L
[287] rediges B S D E M V N O_1 F P L] redige C
[288] habes B D E M V N O_1 F C L] habemus S, habebis P
[289] quare B S D F C L] quia E M V N, *om.* O_1 P
[290] duplicabis D^b E M^b V C P L] duplabis B S N^2 F, multiplicabis M^a N^1, *om.* D^a O_1
[291] et uncias $\frac{1}{2}$ 14 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

subteriori latere perticas $\frac{5\ 4\ 0}{6\ 6\ 6}$ 43, ut hic ostendimus[292]. Et pone sexties 6 sub una virgula[293], post $\frac{1\ 0}{11\ 6}$[294], sic: $\frac{}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$[295]. Et multiplicabis numeros, qui sunt super virgulas, et integros, |[S, f. 20 v – O_1, f. 34v] qui sunt ante virgulas, ad modum quatuor figurarum, in antea |[M, f. 12r] procedendo. **<18.2>** Verbi gratia: multiplicabis 2 per 5, qui sunt super primo 6, et divides per primum 6. Deinde 2 per 4, et 5 per 3, et divides per secundum 6. Post hec 2[296] per 0, et 5 per 1, et 3 per 4, et divides per tertium 6. |[D, f. 10r] Et 2 per 43, et 5 per 16, et 3 per 0, et 4 per 1, et divides per quartum 6. Et habebis super[297] |[N, f. 11r] dictas quatuor sextas partes tantum unius denarii. Deinde multiplicabis 3[298] per 43, et 4 per 16, et 1 per 0, et divides per quintum 6. Et habebis super ipsum denarius. Deinde multiplicabis 1 per 43, et 0 per 16, et divide[299] per sextum[300] 6. |[O_1, f. 35r] Et habebis super ipsum $\frac{1}{2}$ 6 soldos[301]. Ad ultimum[302] multiplicabis perticas 16 per perticas 43, et divides per $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$: et hab|[P, f. 13r]ebis super 11 triplos soldos, et super 6 dupla panora, et ante virgulam stariora.

<19.1> Et sic cum sextis sextarum pedis possumus procedere in infinitum, redigendo fractiones unciarum, que posite in multiplicationibus fuerint in sextis sextarum, si in ipsis ipse fractiones cadere potuerint: et si numerus sextarum unius lateris fuerit minus numero sextarum alterius, supplebis eas cum zefiris super ipsas sextas, hoc est si due sexte sunt[303] in uno latere, |[L, f. 16v – O_1, f. 35v] et due sint in alio, et si tres tres, et deinceps. **<19.2>** |[B, f. 8v] Et si fractiones unciarum minime in sextis sextarum reducere poteris, nequaquam per hunc modum cum[304]

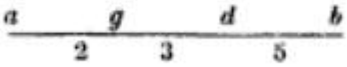
[292] $\frac{2\ 3\ 1}{6\ 6\ 6}$ - ostendimus B S D E M V N F C P L (ostendimus B D E M V N F L, ostenditur S C P)] *om.* O_1
[293] virgula S C P L] virga B D E M V N O_1 F
[294] $\frac{1\ 0}{11\ 6}$ B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[295] $\frac{}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$ B S^1 D E M V N O_1 F] $\frac{4\ 0\ 3\ 5\ 5\ 1\ 8\ 3}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$ 10 S^2 C P L
[296] 2 B S D O_1 F C P L] *om.* E M V N
[297] super S E M V N C P L] supra B D O_1 F
[298] 3] 4 B S D E M V N F C P L, 1 O_1
[299] divides B D E M V N] divide S F C P L, *om.* O_1
[300] sextum B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[301] et – soldos B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[302] ad ultimum B S D E O_1 F C P L] denique M V N
[303] sunt B S D E O_1 F C P L] fuerint M V N
[304] cum B S D E M V N F C P L] per O_1

ipsis fractionibus operari poteris, sed derelinques[305] ipsas fractiones, et multiplicabis residuum de ipsis fractionibus, que in sextis sextarum cadere non possunt, et[306] ex ipsis operaberis[307], secundum quod[308] superius diximus.

<4>

|[F, f. 9r] In modo secundo[309]

<1.1> |[E, f. 11v] Potes[310] enim, per[311] superscriptam[312] moltiplicandi doctrinam reperire modum multiplicandi[313] in aliis regionibus, secundum |[O_1, f. 36r] diversitates mensurarum ipsarum. **<1.2>** |[V, f. 11v] Et[314] ut ea, que in hac secunda distinctione promisimus[315], plenarie[316] demonstrentur, quedam huic operi necessaria dignum duximus preponenda[317].



<2.1> Videlicet |[S, f. 21r] *si numerus aliquis dividatur in quantaslibet*[318] *partes, et multiplicabitur* |[M, f. 12v] *unaqueque pars*[319] *per totum numerum, summa illarum multiplicationum equabitur quadrato totius numeri*, scilicet multiplicationi ipsius[320] numeri in se ipsa[321]. **<2.2>** Ut si numerus *ab* dividatur in quantaslibet portiones, que sint *ag*, *gd*, *db*, dico |[O_1, f. 36v] quod si mul|[C, f. 12v]tiplicabitur *ag* in *ab*, et *gd* in *ab*, et adhuc *db* in *ab*, erunt ipse multiplicationes in unum coniuncte equales multiplicationi totius numeri *ab* in se ipsam[322].

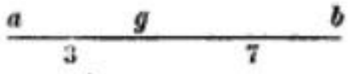
[305] derelinques S C P L] derelinquas B D E M V N O_1 F
[306] et B S E M V N O_1 F C P L] *om.* D
[307] operaberis B S D E M O_1 F C P L] operabis V N
[308] quod B S D O_1 F C P L] quod in E M V N
[309] In modo secundo B S D E N^2 O_1 F C P L] In modo secundo. et. e. M V N^1
[310] potes B S D E M V N F C P L] postea O_1
[311] per S C P L] per modum B D E M V N O_1 F
[312] superscriptam S C P L] suprascriptum B D E M V N O_1 F
[313] multiplicandi B S D E M^b V N O_1 F C P L] multiplicandi doctrinam M^a
[314] et B S D N^2 O_1 F C P L] *om.* E M V N^1
[315] promisimus B S D N^2 O_1 F C P L] per mensuris E M V N^1
[316] plenarie B S D N^2 O_1 F C P L] plenariis E M N^1
[317] preponenda B S D E M N^2 O_1 F C P L] perponenda V N^1
[318] quantaslibet B S D N^2 O_1 F C P L] quaslibet E M V N^1
[319] multiplicabitur unaqueque pars B S D E M V N F C P L] unaqueque pars multiplicabitur O_1
[320] ipsius B S D N^2 O_1 F C P L] totius E M V N^1
[321] ipsa C P L] *deest* B S D E M V N O_1 F
[322] ipsam C P L] qui sic probatur S, *deest* B D E M V N O_1 F

Quotiens enim unitas est in portione *ag*, totiens numerus *ab* procreabitur ex multiplicatione *ag* in *ab*. Similiter vero[323] quotiens unitas est in *gd*, totiens numerus *ab* procreabitur ex multiplicatione *gd*[324] in *ab*. Propter eadem ergo quotiens unitas est[325] |[*b*, p. 14] in[326] numero *db*, totiens oritur numerus *ab* ex multiplicatione *db* in to|[N, f. 11v]tum *ab*, |[P, f. 13v] quare quotiens unitas est in numero *ab*, scilicet |[O_1, f. 37r] in portionibus *ag*, *gd* et *db*, totiens coad|[L, f. 17r]unabitur numerus |[D, f. 10v] *ab* ex multiplicationibus *ag* et *gd* et *db* in *ab*[327]. Verum quotiens unitas est in *ab*, totiens numerus *ab* surgit ex multiplicatione *ab* in se ipsam[328], quare summa multiplicationum *ag* et *gd* et *db* in *ab* equatur multiplicationi *ab* in se ipsam[329], quod oportebat ostendere. **<2.3>** Nam ut hec clarius videantur, esto recta *ab* 10 ulnarum, et portio *ag* sit 2, *gd* vero 3[330], *db* quoque 5. Si autem multiplicentur 2 in 10, et 3 in 10, et 5 in 10 – hoc est[331] *ag* et[332]*gd* et *db* |[O_1, f. 37v] in totam *ab* – et coniungantur[333] multiplicationes in unum numerum, 100 ex [334] earum congregatione procreabuntur que equantur multiplicationi de 10 in 10[335].

<3.1> Item *si recta linea dividatur in quan*|[E, f. 12r]*taslibet*[336] *portiones, et unaqueque multiplicabitur per aliam quamlibet lineam, omnes multiplicationes, in unum* |[S, f. 21v] *coniuncte, equabuntur*[337] *multiplicationi totius linee divise in aliam lineam*[338]. **<3.2>** Quod ostendamus cum numeris. Sit linea 10 ulnarum divisa in 2 et 3 et 5, |[O_1, f. 38r] et alia quelibet linea sit 12 ulnarum. Siquidem si multiplicentur 2[339] et 3 et 5[340] in 12, et iungantur eorum multiplicationes in unum, nimirum[341] equabuntur multiplicationi de 10 in |[M, f. 13r] 12, scilicet 120[342].

---

[323] vero C P L] *deest* B S D E M V N O_1 F
[324] totiens – gd B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[325] est S F C P L] *deest* B D E M V N O_1
[326] in B S D E M V N F C P L] omni O_1
[327] totiens – ab B S D E M V^2 N^2 O_1 F C P L] *om.* V^1 N^1
[328] ipsam C P L] *deest* B S D E M V N O_1 F
[329] ipsam C P L] *deest* B S D E M V N O_1 F] se
[330] 3 B S D O_1 F C P L] 3 et E M V N
[331] est B S D E M O_1 F C P L] *om.* V N
[332] et B S D E N O_1 F C P L] *om.* M V
[333] coniungantur B S D E N^2 O_1 F C P L] iungantur M V N^1
[334] ex B S D V^2 N^2 O_1 F C P L] et E M V^1 N^1
[335] 10 B D E M V N O_1 F C P L] 10 hoc est de ab in se S
[336] quantaslibet B S D E V^2 N^2 O_1 F C P L] quaslibet V N^1
[337] equabuntur B S D E M N^2 O_1 F C P L] equantur V N^1
[338] aliam lineam B S D E V N O_1 F C P L] alias lineas M
[339] 2 B S D E M V^2 N^2 F C P L] 12 V^1 N^1, *om.* O_1

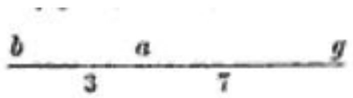


<4.1> Rursus *si recta linea*[343] *dividatur ubilibet in duas portiones, erit multiplicatio unius* ‖[V, f. 12r] *portionis in se cum multiplicatione eiusdem portionis*[344] *in aliam, equalis multiplicationi eiusdem portionis*[345] *in totam lineam*. **<4.2>** Ut si linea *ab* dividatur super punctum *g*, erit multiplicatio *ag* in se cum *ag* in *gb* ‖[L, f. 17v] equalis multiplicationi *ag* in totam *ab*. Adiaceat[346] itaque quedam recta *d* equalis recte *ag*[347]: erit multiplicatio linee *d* in *ag* et in *gb* equalis multiplicationi *d*[348] in totam *ab*[349]. Verum multiplicatio *d* in *ag* est sicut multiplicatio *ag*[350] in se ‖[F, f. 9v] ipsam, cum[351] recta ‖[O_1, f. 38v] *d* sit equalis recte *ag*[352]. ‖[B, f. 9r] Et multiplicatio recte *d* in *gb* est sicut multiplicatio ‖[P, f. 14r] recte *ag* in rectam *gb*, quare multiplicatio *ag* in se cum *ag* in *gb*[353] equatur multiplicationi *ag* in *ab*, ut opor‖[C, f. 13r]tebat ostendere. **<4.3>** Vel si hec[354] cum numeris demonstrare[355] volumus, sit *ag* 3 et *gb*[356] 7: quare tota *ab* erit 10. Multiplicatio quidem *ag* in se – scilicet de 3 in 3 – cum multiplicatione de 3 in 7 – scilicet de *ag* in *gb* – surgunt in 30, que equantur multiplicationi *ag* in *ab*, scilicet de 3[357] in 10, ut dictum est.

---

[340] et alia – 5 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[341] nimirum B D E O_1 F C P L] numerum M V N, *om.* S
[342] 120 B S D E M V N O_1 C P L] *spatium vacuum reliquit* F
[343] linea S V N C P L] *om.* B D E M O_1 F
[344] portionis B S D E M V N O_1 F L] prime portionis C P
[345] in aliam – portionis B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[346] adiaceat B S D E M V^1 N F C P L] exponatur V^2, *om.* O_1
[347] ag D E M V N^1 C P L] ag et B S N^2 F, *om.* O_1
[348] d B S D E M V N F C L] bd P, *om.* O_1
[349] adiaceat – ab B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[350] ag B D E M V N O_1 F C P L] *om.* S
[351] cum B D E M V N O_1 F C P L] ut S
[352] ag B S D E M O_1 F C P L] dg V N
[353] cum ag in gb B S D E M V N O_1 F^b C P L] *om.* F^a
[354] hec C P L] hoc B S D E M V N O_1 F
[355] demonstrare B S D E N^2 F C P L] ostendere M V N^1, demonstratur O_1
[356] gb S F C P L] bg B D E M V N O_1
[357] que – 3 B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

<5.1> Adhuc |[N, f. 12r] *si recta linea dividatur ut accidit*[358] *in duas portiones,* |[O_1, f. 39r] *erunt duo quadrati*[359] *utriusque portionis cum* |[S, f. 22r – E, f. 12v] *duplo multiplicationis*[360] *unius portionis in aliam*[361]*, equales*[362] *quadrato, scilicet multiplicationi totius linee in se*[363]. **<5.2>** Ut si linea *ag* dividatur in duas portiones, que sunt *ab* et *bg*, dico quod multiplicatio *ab* in se cum |[D, f. 11r] multiplicatione *bg* in se et cum duplo multiplicationis *ab* in *bg*, equatur multiplicationi totius *ag* in se ipsam. Quoniam linea *ag* divisa est in duo in puncto *b*, erit multiplicatio *ab* in se cum *ab* in *bg*, sicut multiplicatio *ab* in tota *ag*. Similiter ergo[364] et multiplicatio |[O_1, f. 39v] *bg* in se cum multiplicatione *gb* in *ba* est sicut multiplicatio[365] *gb*[366] in[367] totam *ga*[368]: ergo multiplicatio *ab* in se cum *bg* in se et cum duplo multiplicationis *ab* in *bg* equantur duabus multiplicationibus, |[L, f. 18r] que sunt *ab* in *ag*, et *bg* in *ag*. Verum multiplicatio *ab* in *ag* cum *bg* in *ag* equatur multiplicationi *ag* in se, quare |[M, f. 13v] quadratum *ab* cum quadrato *bg* et cum duplo multiplicationis *ab* |[O_1, f. 40r] in *bg*, equatur quadrato linee *ag*, quod oportebat ostendere[369]. **<5.3>** Quod etiam demonstrabimus[370] cum numeris. Sit linea *ab* 3 et *bg* 7: quare tota linea *ag* erit 10[371]. Unde si acceperimus quadratum linee *ab* – scilicet 9 – et quadra|[V, f. 12v]tum |[*b*, p. 15] *bg* – scilicet 49 – et duplum *ab* in *bg*[372] equabuntur 100, scilicet multiplicationi *ag* in se ipsam.

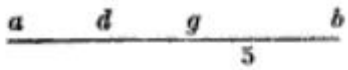


<6.1> Iterum *si recta linea dividatur ubilibet in duas portiones, erit duplum multipli*|[O_1, f. 40v]*cationis unius portionis in totam lineam* |[P, f. 14v] *cum*

---

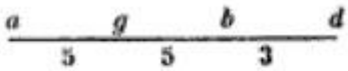
[358] accidit S C P L] accidat B D E M V N O_1 F
[359] quadrati B S N^2 O_1 F C P L] quadrata D E M V N^1 O_1
[360] multiplicationis B S N^2 F C P L] *om.* D E M V N^1 O_1
[361] cum duplo – aliam B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[362] equales B S D N^2 O_1 F C L] equalis P, equalia E M V N
[363] quadrato – in se B S D E N^2 O_1 F C P L] quadrato scilicet totius multiplicationi in se M, quadrato totius linee scilicet totius multiplicationi in se V N^1
[364] ergo S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
[365] multiplicatio B S D E M V N O_1 F C L] *om.* P
[366] gb B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[367] in B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[368] ga B S D E M O_1 F C P L] ag V N
[369] oportebat ostendere B S D E O_1 F C P L] ostendere oportebat M V N
[370] etiam demonstrabimus B D E M V N O_1 F C P L] demonstrabimus etiam S
[371] 10 B S D E O_1 F C P L] *om.* M V N
[372] bg B S D E M O_1 F C P L] bg scilicet 42 V N

quadrato alterius portionis, equale duobus quadratis, scilicet quadrato totius linee, et quadrato ipsius portionis, que multiplicatur[373] *bis in totam lineam*. **<6.2>** Ut si linea *bg* dividatur ubilibet super punctum *a*, dico quod duplum multiplicationis *ab* in *bg*[374] cum quadrato linee *ag* |[S, f. 22v] equatur duobus quadratis |[E, f. 13r] linearum *bg* et *ba*. Quoniam linea *bg* divisa est in duo super punctum *a*, erit multiplicatio *ba* in se cum *ba* in *ag* sicut multi|[O_1, f. 41r]plicatio *ba* in *bg*, quare in duplo[375] multiplicationis *ba* in *bg* est[376] bis quadratus linee *ba*, et bis multi|[F, f. 10r]plicatio *ba* in *ag*. Verum semel quadratus *ba* cum quadrato *ag* et[377] cum[378] duplo multiplicationis *ba* in |[C, f. 13v] *ag* equatur quadrato totius linee *bg*, quare duo quadrati linee *ba* cum quadrato linee *ag*, et cum |[N, f. 12v] duplo multiplicationis linee *ba*[379] in *ag* equatur duobus quadratis |[L, f. 18v] linearum *bg* et *ba*. Sed duo quadrati linee *ba* <et *ag*> cum duplo multiplicationis *ba* in *ag* ostensi sunt equales duplo multiplicationis linee *ba* in totam lineam[380] *bg*. Propter |[O_1, f. 41v] quod duplum[381] multiplicationis linee *ba* in totam lineam[382] *bg* cum quadrato linee[383] *ag* equatur duobus quadratis linearum *bg* et *ba*, quod oportebat ostendere. **<6.3>** Quod idem ostendamus cum numeris[384]. Sit tota linea *bg* 10. De qua, sit portio *ba* 3 et portio *ag* 7: duplum quidem |[B, f. 9v] multiplicatio|[D, f. 11v]nis *ba* in *bg* – scilicet de[385] 3 in 10[386] – cum multiplicatione linee *ag* in se – que surgit in 49 – nimirum in 109 ascendunt, que equantur multiplicationi linee *bg* |[M, f. 14r] in se, scilicet 100, et linee *ab* in se, scilicet 9.



[373] multiplicatur B S D E M N^2 O_1 F C P L] multiplicabitur V N^1
[374] in bg B S D M V N F C P L] *om.* D E O_1
[375] duplo B S D E M V N O_1 F] in duo C P L (in *om.* P)
[376] est B S D N^2 O_1 F C P L] et E M V N^1
[377] et S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
[378] cum B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[379] cum – ba B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[380] lineam B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[381] duplum B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[382] lineam B D E M V N F] *om.* S O_1 C P L
[383] ba – linee B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[384] ostendamus cum numeris B S D E O_1 F C P L] cum numeris ostendamus M V N
[385] de B S D E O_1 F C P L] *non legitur* M, *om.* V N
[386] de 3 in 10 B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M

<7.1> *Si recta linea dividatur in duo equalia et totidem inequalia, erit multiplicatio inequalium portionum* |[O_1, f. 42r] *scilicet unius in aliam, cum quadrato linee que iacet inter utramque sectionem equalis quadrato dimidie linee divise*. **<7.2>** Ut si linea *ab* dividatur in duo equalia super punctum *g* et inequalia |[V, f. 13r] super *d*, |[P, f. 15r] dico quod multiplicatio *ad* in *db* cum quadrato linee *dg*, equatur quadrato linee *ag*. **<7.3>** Quoniam linea *db* |[S, f. 23r] divisa est ubilibet super[387] punctum *g*, cui adiacet quedam alia[388] recta *ad*, erit multiplicatio *ad* in *db* equalis duabus multiplicationibus linee *ad*[389] in *bg* et in *gd*. Verum linee *bg* equalis iacet linea *ga*, quare multiplicatio |[O_1, f. 42v] linee *ad* in lineam[390] *ag* et[391] in lineam *gd* est sicut multiplicatio linee *ad* in lineam *db*. **<7.4>** Rursus quoniam linea *ag* divisa est ubilibet in duo super |[L, f. 19r] punctum *d*[392], erit multiplicatio portionum *ad* et *gd* in *ag* sicut multiplicatio *ag* in se. Sed *dg* in *ag* equatur quadrato *dg* et multiplicationi *ad* in *dg*: ergo multiplicatio *ad* in *ag* cum *ad* in *dg* et cum quadrato linee *dg*, equatur multiplicationi *ag* in se. Invenimus autem superius *ad* in *ag* cum *dg* in *da* |[E, f. 13v] equari multiplicationi *ad* in *db*, quare *ad* in *db* cum quadrato *dg* equatur |[O_1, f. 43r] quadrato linee *ag*, quod oportebat ostendere. **<7.5>** Quod etiam ostendamus cum numeris: sit linea *ab* 10 ulnarum divisa in 5 et 5 super punctum *g*, et in 3 et in 7 super punctum *d*. Erit tunc multiplicatio *ad* in *db* – scilicet de 3 |[C, f. 14r] in 7 – cum quadrato *dg*, equalis multiplicationi *ag* in se, scilicet de 5 in 5.



<8.1> |[N, f. 13r] *Si recta*[393] *linea dividatur in duo equalia et adiungatur ei, in directo, quedam alia linea cuiuslibet longitudinis, erit multiplicatio totius linee – que fit ex prima linea et ex adiuncta – in lineam adiunctam cum quadrato* |[F, f. 10v] *dimidie linee divise, equalis quadrato linee, que fit ex dimidio prime linee*[394] *et ex* |[O_1, f. 43v] *adiuncta*. **<8.2>** Ut si linea *ab* dividatur in duo equalia super

[387] super B S E O_1 F C P L] et super D, et per M V N^1, per N^2
[388] quedam alia B S D E M O_1 F C P L] alia quedam V N
[389] ad S F C P L] ab B D E M V N O_1
[390] ad in lineam B S D E O_1 F C P L] *om.* M V N
[391] et B S D E O_1 F C P L] *om.* M V N
[392] punctum d C P L] d punctum B S D E M V N O_1 F
[393] si recta linea B S D O_1 F C P L] si linea recta E M V N
[394] divise – linee B S D E M V N F C P L] *om.* O_1

punctum *g*, et adiungatur ‖[*b*, p. 16] ei in ‖[M, f. 14v] directo alia quedam linea *bd* cuiusvis longitudinis, dico quod multiplicatio[395] linee *ad* in *bd*, hoc est *bd* in *ad*, cum quadrato linee *gb* vel *ga*, equatur ‖[S, f. 23v] quadrato linee *gd*. **<8.3>** Quoniam linea *ad* ‖[P, f. 15v] divisa est[396] ubilibet super ‖[D, f. 12r] puncta *g* et *b*, erit multiplicatio *bd* in totam *ad* equalis summe trium multiplicationum, que sunt *bd* in *ag*[397], in *gb*, ‖[L, f. 19v] et in *bd*. Sed quia linea *ag* est equalis linee *bg*, equa est ergo[398] multiplicatio linee *bd* in *ag* multiplicationi *bd* in *gb*, ‖[V, f. 13v] quare due multiplicationes *bd* in *ag*[399], et *bd* in ‖[O_1, f. 44r] *gb*[400] summam constituunt, que est dupla multiplicationis *bd* in *gb*. Quare quadratus linee *bd* cum duplo multiplicationis ‖[B, f. 10r] *bd* in *gb* equatur multiplicationi linee *bd* in totam *ad*, comuniter accipiatur quadratum linee *gb*, erunt duo quadrati linearum *bd* et *bg* cum duplo multiplicationis *bd* in *bg* equales summe, que fit ex multiplicatione linee *bd* in *ad* et ex quadrato linee *bg*. Sed duo quadrati linearum *bd* et[401] *bg* cum duplo *bd* in *bg* equatur quadrato linee *gd*, quare et multiplicatio ‖[O_1, f. 44v] linee *bd* in *ad* cum quadrato linee[402] *bg* equalis erit quadrato linee *gd*, quod oportebat ostendere. **<8.4>** Quod etiam ostendatur cum numeris: sit linea *ab* 10 divisa in duo equalia, scilicet in 5 et 5 super punctum *g*, cui addatur in directo linea *bd* trium ulnarum: erit tota linea[403] *ad* 13, et *gd* 8. ‖[E, f. 14r] Multiplicatio quidem *bd* in *ad* – scilicet de 3 in 13 – cum quadrato linee *gb* – scilicet cum 25 – surgit in 64, scilicet in quadrato linee *gd*[404].

<9.1> *Si recta linea dividatur in equalia et in*[405] *inequalia, qui ab inequalibus totius portionibus quadrati dupli sunt eius qui a dimidia*[406]*, et*[407] *eius*

[395] linea – multiplicatio B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[396] est B S D E M V N^1 O_1] *del.* N^2, *om.* F C P L
[397] ag B S D O_1 F C P L] ag et E M V N
[398] equa est ergo B S D O_1 F C P L] est ergo equa E M V N
[399] ag B S D V N F C P L] agb E M O_1
[400] et bd in gb B S E N^2 O_1 F C P L (in *om.* N^2, et bd in *om.* O_1)] *om.* D M V N^1
[401] et B S D O_1 F C P L] *om.* E M V N
[402] ad – linee B S E O_1 F C P L] *om.* D M V N
[403] linea B S D E M V N O_1 F P L] *om.* C
[404] scilicet – gd B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[405] in B D N^2 O_1 F C P L] in duo S, *om.* E M V N^1
[406] a dimidia S M V N] a dimidias B D E, dimidia O_1, ad dimidias F C P L
[407] et B S D E M V N O_1 F C] *om.* P L

qui ab ea, que est inter |[O_1, f. 45r] *sectiones quadrati*. **<9.2>** Ut si linea *gd* divisa fuerit in[408] equalia super punctum *a* et in[409] inequalia super punctum *b*, dico quod quadrati por|[N, f. 13v]tionum *gb* et *bd* dupli sunt duorum quadratorum linearum |[S, f. 24r] *da* et *ab*. **<9.3>** |[L, f. 20r] Quoniam linea *ag* divisa |[C, f. 14v] est in duo super punctum *b*, erunt[410] duo[411] quadrati linearum *gb* et *ba* cum duplo multiplicationis *ab* in *bg* equalis quadrato linee *ga*, hoc est quadrato linee[412] |[M, f. 15r] *ad*. Verum quadratus linee *ba* cum semel *ba* in *bg* est sicut *ba* in *ga*, quare quadratus *bg* cum |[P, f. 16r] *ba* in *ag* et cum *ba* in[413] *bg* equatur quadrato linee *ad*. **<9.4>** Comuniter adiaceat quadratus linee |[O_1, f. 45v] *ba*: erunt duo quadrati *gb* et *ba* cum *ba* in *ga* et cum *ba* in *bg* equales quadratis linee *ad* et linee *ab*. Sed quadratus linee *ba* cum *ab* in *bg* est sicut *ba* in *ga*: ergo quadratus *gb* cum duplo *ba* in *ga* equatur duobus quadratis linearum *da* et *ab*, quare quadratus linee *da* cum qua|[V, f. 14r]drato linee *ab* superabundat quadratum linee |[F, f. 11r] *gb* in duplo multiplicationis linee *ba* in *ga*, hoc est *ba* in *ad*. |[D, f. 12v] **<9.5>** Item quoniam linea *bd* divisa est in duo super punctum *a*, quadrati linearum *da* et *ab* cum |[O_1, f. 46r] duplo *ba* in *ad* equantur tetragono, scilicet quadrato linee *bd*: ergo tetragonum *bd* superabundat tetragona *da* et *ab* in duplo multiplicationis *ba* in *ad*. Ergo quantum tetragona *da* et *ab* superabundant tetragonum *bg*, tantum superabundatur a tetragono *bd*, quare tetragona *gb* et *bd* dupla sunt quadratis *da* et *ab*, quod oportebat ostendere. **<9.6>** Que etiam[414] ostendamus in numeris. Sit linea *gd* 10 in 5 et in 5[415] divisa super[416] *a*, et[417] in 3 et 7 super *b*: erit tetragonum |[L, f. 20v] *gb* 9 et *bd* 49, que insimul iuncta surgunt in 58[418], hoc est in duplum quadratorum *da* et *ab*, quia quadratus *da* est 25 et *ab* est[419] 4.

[408] in B D E M V N O_1 F C P L] in duo S
[409] in B D E M V N O_1 F C P L] in duo S
[410] b erunt B S D E V N F C P L] *non legitur* M, *om.* O_1
[411] super – duo B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[412] ga – linee B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[413] ag – in B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[414] etiam B S D N F C P L] et E V M, *om.* O_1
[415] et in 5 B S D E F C P L] *om.* M V N O_1
[416] super B D E M V N O_1 F C P L] super punctum S
[417] etiam – et B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[418] 58 B S D E M V N O_1 F C] 45 P L
[419] est S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F

<10.1> ‖[S, f. 24v] Item *si recta linea* ‖[O_1, f. 46v] *dividatur in duo equalia, cui addatur in directo quedam alia linea, erit tetragonum totius linee effecte cum tetragono linee adiuncte duplum eius, quod fit a media linea divisa, et eius quod fit a media*[420] *et ab*[421] *adiuncta*. **<10.2>** Ut ‖[*b*, p. 17] si linea *ab* in duo equalia divisa fuerit super *g* et apponatur ei in directo linea ‖[B, f. 10v] *bd*, ‖[E, f. 14v] dico quod tetragonum linee *ad* cum tetragono linee *bd* duplum est tetragono linee *ag* et linee *gd*. **<10.3>** Quoniam linea *ad* in duo utlibet divisa est super *b*, erit itaque quadratus linee *ad*[422] cum quadrato linee[423] *bd*[424] equalis quadrato *ab* et duplo *bd* in *ad*. Sed du‖[O_1, f. 47r]plum *bd* in *ad* ‖[C, f. 15r] est sicut duo quadrati ‖[P, f. 16v] linee ‖[N, f. 14r] *bd* cum duplo *bd* in *ba*: ergo tetragonum *ab* cum duobus quadratis linee *bd* et cum duplo *bd* in *ab* equatur quadratis linearum ‖[M, f. 15v] *ad* et *bd*. Verum multiplicatio *bd* in *ab*[425] dupla est multiplicationi *bd* in *gb*. Cum dimidia sit *bg* ex[426] *ab*, quare duplum *bd* in *ab* est[427] quadruplum ex *bd* in *gb*, ergo tetragonum *ab* cum duobus quadratis linee *bd* et cum quadruplo *bd* in *gb* equatur duobus quadratis linearum *ad* et *bd*. Sed[428] tetragonum linee *ab* quadruplum est tetragoni, quod a media[429] *ab* describitur, ‖[V, f. 14v] scilicet a linea *gb*. Ergo quadruplum ‖[O_1, f. 47v] tetragoni[430] *gb* cum duobus tetragonis linee *bd* et cum quadruplo multiplicationis *bd* in *gb* equatur duobus quadratis linearum *ad* et *bd*.

<11.1> ‖[L, f. 21r] Rursus quoniam linea *gd* in duo divisa est super *b*, erunt duo quadrati portionum *gb* et *bd* cum duplo *bd* in *bg* equales quadrato linee *gd*, quare duplum quadrati linee *gb* cum duobus quadratis linee *bd* et cum quadruplo *bd* in *gb* erit duplum quadrati ‖[D, f. 13r] linee *gd*[431]. **<11.2>** Reliquum[432] vero duplum quadrati[433] linee *gb* ‖[S, f. 25r] duplum est quadrati linee *ga*: ergo quadruplum ‖[O_1, f. 48r] quadrati linee *gb* et duo quadrati linee *bd* cum quadruplo

---

[420] linea divisa – a media B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[421] ab B S D O_1 F C P L] *om.* E M V N
[422] ad B S N^2 O_1 F C P L] *om.* D, bd E^b, bf E^a M V N^1
[423] cum – linee B S N^2 F C P L] *om.* E D M V N^1 O_1
[424] bd B S D E N^2 O_1 F C P L] *om.* M V N^1
[425] equantur – ab B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[426] ex B S D E M N^2 O_1 F C P L] in V N^1
[427] est B S D E O_1 F C P L] et M V N
[428] sed B S D E M V N O_1 F] si C P L
[429] a media B S E N^2 O_1 F C P L] de media D M V N^1
[430] quadruplum tetragoni B S D E M V N F C P L] tetragoni quadruplum O_1
[431] cum - gd B S^2 D E M V N O_1 F C P L] *om.* S^1
[432] reliquum B D E M V N O_1 F] reliquod S C P L
[433] quadrati B S E M V N F C P L] *om.* D O_1

bd in *gb* dupli sunt[434] tetragonorum portionum *ab* et *bd*. Sed quadruplum quadrati linee *gb* et duo quadrati linee *bd* cum quadruplo *bd* in *gb* ostensi ‖[F, f. 11v] sunt equales duobus quadratis linearum *ad* et *bd*, quare et quadrati linearum *ad* et *bd* dupli sunt quadratorum portionum *ag* et *gb*, quod oportebat ostendere. **<11.3>** Que etiam ostendamus cum numeris[435]. Sit linea *ab* 10 divisa super punctum *g* in 5 et 5[436], cui addatur in directo linea *bd* trium ulnarum: erit tota *ad* 13 et *gd* 8. Quadratus quidem ‖[O_1, f. 48v] linee *ad* est 169 et *bd* est 9. Qui insimul iuncti surgunt in 178, scilicet in duplo de 89, que sunt summa quadratorum *ag* et *gd*, scilicet de 25 et 64. **<11.4>** Quoniam [437] superfluum videtur nostris [438] demonstrationibus demonstrare ‖[E, f. 15r] omnia que Euclides suis[439] ‖[N, f. 14v] ostensionibus assig‖[P, f. 17r]navit, idcirco quedam ex ipsius libro huic operi necessaria sine demonstratione proponere procuramus.

<12.1> *Si tres numeri, vel tres quantitates, proportionales fuerint, ita quod sicut* ‖[L, f. 21v] *primus numerus*[440] *fuerit ad secundum,* ‖[O_1, f. 49r] *ita secundus sit ad tertium*[441]*: tunc multiplicatio primi numeri in tertium equatur quadrato secundi numeri, scilicet mul*‖[C, f. 15v]*tiplicationi eius in se*. **<12.2>** Exempli causa: sunt 4 et ‖[M, f. 16r] 6 et 9 in una ‖[V, f. 15r] proportione[442], quia[443] sicut 4 sunt ad 6, ita 6 sunt ad 9[444], vel sicut 9 sunt ad 6[445], ita 6 sunt ad 4[446]: quare multiplicatio de 4 in 9 surgit in multiplicatione de 6 in 6. Unde quando ex tribus datis numeris multiplicatio primi in tertium facit quadratum secundi numeri, tunc illi tres numeri continue proportionales sunt.

<13.1> ‖[S, f. 25v] Item *cum quatuor numeri proportionales*[447] *sunt,* ‖[O_1, f. 49r] *fueritque sicut primus ad secundum, ita tertius ad quartum: tunc* ‖[B, f. 11r] *multiplicatio primi in quartum equatur multiplicationi secundi in tertium.* **<13.2>**

---

[434] sunt B S E M V N F C P L] *om.* D O_1
[435] ostendamus cum numeris B S D E M O_1 F C P L] cum numeris ostendamus V N
[436] et 5 B S D N^2 F C P L] *om.* E M V N^1 O_1
[437] quoniam B D E M V N O_1 F L] et quoniam S C P
[438] nostris B S D E N^2 F C P L] numeris M V N^1 O_1
[439] suis S N^2 C P L] super B D E M V N^1 O_1 F
[440] primus numerus B S D E O_1 F C P L] numerus primus M V N
[441] tertium B S D E V N O_1 F C P L] *non legitur* M
[442] proportione B S D E M V N O_1 F C] portione P L
[443] quia B S D N^2 O_1 F C P L] quare E M V N^1
[444] 6 ita – ad 9 B S M V N F C P L] *om.* D E O_1
[445] vel – ad 6 B S F C P L] *om.* D E M V N O_1
[446] ita 6 – 4 B S D E N^2 O_1 F C P L] *om.* M V N^1
[447] proportionales S M V N O_1 F C P L] proportiones B D E

Verbi gratia: sicuti primus numerus 6 est ad secundum 8, ita tertius 9 est[448] ad quartum 12. Erit quidem multiplicatio de 6[449] in 12 equalis multiplicationi de 8 in 9. Surgit enim utraque multiplicatio in 72. Ex hoc enim[450] comprehenditur, quod cum multiplicatio primi numeri in quartum est equalis multiplicationi secundi in tertium. Tunc illi quatuor ‖[O_1, f. 50r] numeri proportionales sunt, in ipsa videlicet proportione, in qua[451] ‖[*b*, p. 18] primus est ad secundum, in eadem est tertius ad quartum.

<14.1> *Et notandum est*[452] *cum aliquis numerus dividitur*[453] *per aliquem numerum, si illud quod ex divisione evenerit*[454] *multiplicabitur per divisorem*[455], *nimirum divisus numerus*[456] *ex ipsa redibit multiplicatione*. **<14.2>** Ut si 20 dividantur[457] per 4, exibunt 5; et ex multiplicatione ‖[D, f. 13v] igitur de 4 in 5, rediit divisus numerus 20.

<15.1> *Si autem ex tribus numeris proportionalibus duo erunt noti, scilicet*[458] ‖[O_1, f. 50v] *primus et secundus, et tertius ignotus erit: quadratum secundi numeri per primum numerum divide, et quod ex divisione evenerit, erit tertius numerus*. **<15.2>** Verbi gratia: sit primus numerus 4, secundus 6, et tertium ignoramus. Quadratum de 6, scilicet 36, per 4, scilicet per primum numerum, dividemus: ‖[P, f. 17v] exibunt 9 pro tertio numero[459]. Quare ‖[L, f. 22r] si exeuntem 9 per divisorem 4 multiplicaverimus, redibunt ‖[N, f. 15 r] 36, scilicet divisum numerum. **<15.3>** Ergo cum ex multiplicatione primi numeri in tertium ‖[O_1, f. 51r] egreditur quadratum secundi numeri, ‖[E, f. 15v] tunc illi tres numeri proportionales sunt. Est ergo sicut 4 ad 6, ita 6 ad[460] 9. Nam si ignoraverimus primum numerum, ‖[S, f. 26r] dividemus eun‖[M, f. 16v]dem 36 per tertium 9[461], et[462] egreditur primus 4.

---

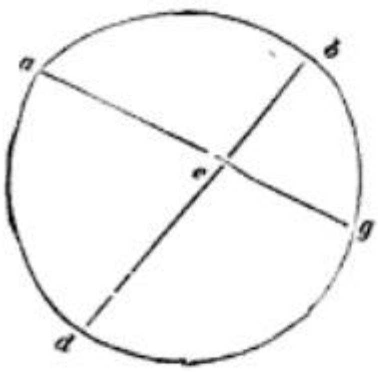
[448] est B S D E V N O_1 F C P L] *om.* M
[449] 6 B S D E M V N O_1 F C] 4 P L
[450] enim O_1 C P L] vero B S D E M V N F
[451] in qua B S D E M V N F C P L] *om.* O_1
[452] est S C P L] *deest* B D E M V N O_1 F
[453] dividitur B D E M V N F C L] dividatur S, dividetur O_1 P
[454] evenerit *posuerunt inter cruces* P L
[455] divisorem B D E M V N^2 O_1 F C P L] divisionem S N^1
[456] numerus B S D E M V O_1 F C P L] *om.* N
[457] dividantur B S D O_1 F C P L] dividuntur E M V N
[458] scilicet B S D E O_1 F C P L] videlicet M V N
[459] 9 pro tertio numero B S D E M V N F C P L] pro tertio numero 9 O_1
[460] 6 – ad B S M V N F C P L] *om.* D E O_1
[461] tertium 9 B S D E M O_1 F C P L] 9 tertium V N
[462] et B S N^2 F C P L] *om.* D E M V N^1 O_1

Et si ignoraverimus secundum numerum, multiplicabimus primum per tertium[463], scilicet 4 per 9: exibunt 36, quorum radix, |[V, f. 15v] que est[464] 6[465], est[466] |[F, f. 12r] secundus numerus.

<16.1> Item *sit*[467] *sicut primus numerus* a *ad secundum* b*, ita tertius* g *sit ad quartum* d. **<16.2>** Quoniam multipli|[O_1, f. 51v]catio primi in quartum, scilicet *a* in *d*, est equalis multiplicationi *b* in *g*, scilicet secundi numeri in tertium, si noti fuerint *a* et *b* et *g*, fueritque *d* ignotus, multiplicationem itaque ex *b* in *g* dividemus[468] per *a*[469] et[470] egredietur *d*. Et si eadem multiplicatio, scilicet de *b* in *g*, dividatur per *d*, egredietur *a*[471]. Propter eadem ergo si multiplicatio de *a* in *d* dividatur per *b*, egredietur *g*; et si divisa fuerit per *g*, |[C, f. 16r] egredietur *b*. **<16.3>** Verbi gratia: sit *a* 4 et *b* 6 et *g* 8 et *d* 12: si multiplicatio *b* |[O_1, f. 52r] in *g*, scilicet 48, dividatur per *a*, scilicet per 4, egredietur *d*, scilicet 12, que 48 si per 12 divisa fuerint, scilicet per quartum numerum, egredietur 4, scilicet primus numerus. Simili quoque modo si[472] multiplicationem[473] primi numeri in quartum, scilicet de 4 in 12 – hoc est 48 – diviserimus per secundum numerum, scilicet per 6, egredietur[474] 8 pro tertio numero. Que etiam 48 divisa per tertium numerum, scilicet per 8, egreditur[475] numerus secundus.

---

[463] primum per tertium B S D E V N O_1 F C P L] per tertium primum M
[464] que est B S D E N^2 O_1 F C P L] *om.* M V N^1
[465] 6 B S D E M O_1 F C P L] 6 scilicet V N
[466] est B S D E N^2 O_1 F C P L] *om.* M N^1
[467] sit B D O_1 F C P L] si S E M V N
[468] dividemus B D E N^2 O_1 F C P L] dividamus S, dividatur M V N^1
[469] a B S D E M V N^2 O_1 F C P L] *om.* N^1
[470] et B S D E N^2 F C P L] *om.* M V N^1 O_1
[471] et – egreditur a B S D E N^2 F C P L] *om.* M V N^1 O_1
[472] si B S D V N O_1 F C P L] sit E M
[473] multiplicationem B S D N^2 O_1 F C P L] multiplicatio E M V N^1
[474] egredietur B S D E M O_1 F C P L] egreditur V N
[475] 8 – egreditur B S D E M V N F C P L] *om.* O_1



<17.1> His itaque memorie commendatis[476], dicendum est: *cum in circulo due* |[O_1, f. 52v] *recte se invicem secant, erit multiplicatio unius portionis unius linee in alteram sui*[477] *partem equalis multiplicationi unius* |[L, f. 22v] *portionis alterius linee in suum residuum*. **<17.2>** Ut si in circulo *abgd* due recte *ag* et *bd* se invicem secaverint[478] super punctum *e*[479], multiplicatio quidem[480] *ae* in *eg* equatur multiplicationi *be* in *ed*, ut[481] in Euclide ostenditur. |[S, f. 26v] Nunc vero ad radices numerorum inveniendas veniamus.

<Explicit Distinctio Prima>

---

[476] commendatis B S D E N^2 O_1 F C P L] mandatis M V N^1
[477] sui B S D E N^2 O_1 F C P L] suam M V N^1
[478] secaverint B S D O_1 F C P L] secaverunt E M V N
[479] e B S D E M V N^2 O_1 F C P L] est N^1
[480] quidem B S D N^2 O_1 F C P L] quedam E M V N^1
[481] ut S D V N C P L] *om.* B E M O_1 F

TRADUZIONE

<I>

PRIMA DISTINZIONE

La moltiplicazione delle basi per le altezze delle superfici quadrate dotate di angoli retti, il cui risultato corrisponde alla loro area

<1>

<Metodo I>

<1> Se volessi calcolare le dimensioni di una figura quadrangolare, equilatera ed equiangola *abcd* che misura 2 pertiche per lato, dico che l'area di questa figura si calcola attraverso il prodotto del lato *ac* per il lato *ab* ad esso adiacente, vale a dire di 2 pertiche per 2: dunque l'area di questa figura misura 4 pertiche superficiali.

<2.1> Si dividano allora i lati *ab* e *cd* in due segmenti uguali nei punti *e* ed *f*, e si tracci la linea *ef*[1]. Allo stesso modo si dividano i lati *ac* e *bd* in due segmenti uguali nei punti *g* e *h*, e si tracci la linea *gh*: il quadrilatero *abcd* sarà stato così diviso in quattro quadrati uguali ed ortogonali, ciascuno dei quali misura una pertica per lato: in questo modo, tutta l'area del quadrilatero *acdb* misura 4 pertiche superficiali. **<2.2>** Il segmento[2] *ae* è infatti equidistante ed uguale rispetto al segmento *cf*: perciò il segmento *ef* è equidistante ed uguale al lato *ac*, ed *ef* è uguale ed equidistante al lato *bd*, dal momento che il lato *ac* è equidistante e uguale al lato *bd*. Allo stesso modo, si riscontrerà che il lato *gh* è equidistante e uguale sia al lato *ab* sia al lato *cd*. E poiché il lato *ef* è equidistante al lato *ac*, e il lato *ae* è equidistante al lato *cf*, allora l'angolo *aef* è uguale all'angolo al vertice opposto *acf*: retto è senza dubbio l'angolo *acf*, retto è in verità l'angolo *aef*. Attraverso le stesse procedure si mostra, allora, che l'angolo *efc* è retto, essendo

[1] Talvolta in Fibonacci il termine *linea* può indicare il lato di una figura piana. Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 1,4: *superficies quidem est que latitudinem et longitudinem tantum habet, cuius termini sunt linee*.

[2] Traduco con "segmento" il termine *recta*. Nel latino di Fibonacci, infatti, r*ecta linea est que de puncto ad punctum recte protrahitur* (Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 1,3).

uguale all'angolo *cae*, che è retto. Ciò significa che il quadrilatero *eacf* è regolare. La sua superficie misura 2 pertiche quadrate: di queste, una pertica corrisponde alla superficie quadrilatera *eagi*, mentre l'altra corrisponde alla misura della superficie di *igcf*. Si vede infatti, in base alle cose dette sopra, che sono retti tutti gli angoli sottesi ad *i*, a *g* e ad *h*. Infatti l'area della superficie *ec* corrisponde alla metà dell'area della superficie *bc*, perciò la superficie *ec* è uguale alla superficie *ed*: allora l'area di tutta la superficie di *abcd* misura 4 pertiche, come abbiamo detto prima.

<2>

<1.1> Sia dato il rettangolo *abgd* avente le basi, che sono *ag* e *bd*, della misura di 2 pertiche, e le altezze della misura di 3 pertiche[3]. **<1.2>** Dico che la sua area misura 6 pertiche, e che essa si calcola attraverso il prodotto di una delle basi per una delle altezze, ovvero di 2 per 3.

<2.1> A dimostrazione di ciò, si dividano i segmenti[4] *ag* e *bd* in due parti uguali nei punti *e* e *z*, e si tracci il segmento *ez*. Si divida poi ciascuno dei segmenti *ab* e *gd* in tre parti uguali sui punti *i*, *t* e *k*, *l* e si traccino i segmenti *it* e *kl*. **<2.2>** Si vedrà allora che, in base alla stessa regola che ho enunciato prima a proposito del quadrato, tutto il quadrilatero *abgd* è stato diviso in sei quadrilateri uguali ed ortogonali, di ciascuno dei quali l'area è pari a una pertica. Dimostrate tali cose, indicherò ora in che modo le basi di queste superfici debbano essere moltiplicate per l'altezza.

[3] Nella prima distinzione, *caput* ricorre sempre a indicare la base del rettangolo considerato, e pertanto sarà sempre tradotto con questo significato. Il termine ricorre anche in Abraham Ibn Ezra, *Sefer ha-Middot*, pp. 220-221 (Lévy-Burnett), dove denota la base minore di un trapezio isoscele: *figura quarta cum capite ampio et lateribus equalibus. Caput constat ex 4 et omnia latera 10 et septima 16. Minue caput de septima; remanent 12, et accipe quadratum medietatis et minue de quadrato unius lateris, et accipe ra<dicem> residui, que est 8, et tanta est columna; quam si multiplicas super medietatem septime cum medietate capitis, habes aream*. Cfr. LÉVY - BURNETT 2006, p. 139 n. 210: «the term translated as 'top' (*roš*/*caput*), which literally means 'head', gives a 'concrete' impression of the figure, with the two parallel sides arranged horizontally and only the two non-parallel sides described as 'sides'».

[4] La traduzione non è letterale perché il testo latino così recita: *dividatur recta* ag *et* bd, in cui il sostantivo *recta* si riferisce sia ad *ag* che a *bg*.

<3.1> Se volessi[5] moltiplicare 7 pertiche di base per 23 pertiche di altezza, moltiplica prima le 7 pertiche per 22 pertiche, vale a dire per 4 panori: da questa operazione si otterrà un risultato pari a 28 panori, per il motivo che ho detto prima[6]. **<3.2>** Quindi moltiplica la pertica che è rimasta delle 23 di prima per 7: il risultato sarà di 7 pertiche quadrate. Di queste 7 pertiche, 5 pertiche e mezzo corrispondono a 1 panoro[7], e la pertica e mezzo che rimane equivale a 4 soldi e mezzo[8]. E così abbiamo in totale 29 panori e 4 soldi e mezzo di misura, ovvero 2 stariori, 5 panori e 4 soldi e mezzo.

<4.1> Se volessi moltiplicare 13 pertiche per 31 pertiche, moltiplica prima 11 pertiche, vale a dire 2 panori, per 31 pertiche: il risultato sarà di 62 panori, che sono il doppio di 31. **<4.2>** Moltiplica poi, per 31 pertiche, le 2 pertiche che sono rimaste di quelle 13: il risultato sarà di 62 pertiche quadrate, che corrispondono a 11 panori e 18 denari. Aggiungili ai 62 panori che hai trovato prima: faranno 73 panori e 18 denari. Dividili per 12: dal momento che uno starioro corrisponde a 12 panori[9], il risultato sarà di 6 stariori, 1 panoro e 18 denari di misura.

<5.1> Se volessi moltiplicare 19 pertiche per 41 pertiche, moltiplica prima 19 pertiche per 33 pertiche: il risultato sarà di 19 mezzi stariori, ossia 9 stariori e mezzo. Poi moltiplica le 8 pertiche, che rimangono delle 41 di prima, per 16 pertiche e mezzo: il risultato sarà di 24 panori, i quali sommati ai 9 stariori e mezzo di prima, daranno come risultato 11 stariori e mezzo. **<5.2>** Dal momento che, tolte 16 pertiche e mezzo da 19 pertiche, rimangono 2 pertiche e mezzo, moltiplicherai di nuovo queste 2 pertiche e mezzo per le sopracitate 8 pertiche: il risultato sarà di 20 pertiche superficiali. Di queste, 16 pertiche e mezzo equivalgono a 3 panori, e le restanti 3 pertiche e mezzo equivalgono a 10 soldi e

[5] Nonostante *voluerimus* sia lezione tradita da tutti i manoscritti, ritengo che essa vada emendata in *volueris*, per motivazioni legate alla sintassi.

[6] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2, 8: *si pertica vel pertice multiplicantur in panora, vel panora in perticas, quicquid ex multiplicatione consurgit, erunt panora*.

[7] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2,5: *quinque enim superficiales pertice et semis faciunt unum panorum*.

[8] Una pertica equivale a 3 soldi, cfr. ad esempio Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2, 5: *quatuor quidem pertice superficiales faciunt quandam mensuram que vocatur scala* [...] vel *est scala soldi 12 de mensura*.

[9] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2, 6: *panora 12 sunt stariorum 1*.

mezzo. Aggiungendo questi 3 panori e 10 soldi e mezzo agli 11 stariori e mezzo di prima, fanno in totale[10] 11 stariori, 9 panori e 10 soldi e mezzo.

<6.1> Voglio chiarire attraverso delle dimostrazioni quale sia l'origine di questa moltiplicazione. Sarà dato il rettangolo *abgd* avente le basi, che sono *ab* e *gd*, ciascuna della lunghezza di 19 pertiche, e le altezze, che sono *ag* e *bd*, ciascuna della lunghezza di 41 pertiche. **<6.2>** Si consideri, dal lato *ag*, il lato *ae* di 33 pertiche: rimarrà il lato *eg* di 8 pertiche. Allo stesso modo si consideri, dal lato *bd*, il lato *bz* uguale al lato *ae*, e si tracci il segmento *ez*. Dal momento che *ez* è uguale ed equidistante sia al lato *ab* sia al lato *gd*, esso misurerà 19 pertiche. Inoltre *zd* misura in lunghezza quanto il lato *eg*, ossia 8 pertiche. **<6.3>** Dai lati *ez* e *gd* si considerino infine i segmenti *ei* e *gt*, ciascuno della lunghezza di 16 pertiche e mezzo, e si tracci il segmento *it* uguale a entrambi i lati *eg* e *zd*. Giacché dai lati *ez* e *gd* vengono tolti i lati *ei* e *gt*, entrambi di 16 pertiche e mezzo, resteranno i due segmenti *iz* e *td* entrambi di 2 pertiche e mezzo. **<6.4>** Perciò quando prima abbiamo moltiplicato 19 pertiche per 33 pertiche, abbiamo ottenuto l'area del quadrilatero *az*. Di tutto il quadrilatero *abgd*, poi, a noi è rimasto il quadrilatero *ezdg*. L'area del quadrilatero *eabz* è stata di 9 stariori e mezzo. **<6.5>** Quando poi abbiamo moltiplicato 8 pertiche per 16 pertiche e mezzo, vale a dire per 3 panori, abbiamo ottenuto 2 stariori per l'area del quadrilatero *eitg*. Infine, quando abbiamo moltiplicato 2 pertiche e mezzo per 8 pertiche, abbiamo ottenuto 20 pertiche quadrate, ossia 3 panori e 10 soldi e mezzo per l'area del quadrilatero *izdt*. In conclusione, la somma dei tre quadrilateri *az*, *et* e *tz* equivale all'intero quadrilatero *abgd*, come volevasi dimostrare.

<7.1> Se vuoi moltiplicare 25 pertiche per 52 pertiche, moltiplica prima 22 su 25 pertiche, ovvero 4 panori, per 52 pertiche: il risultato sarà uguale al prodotto della terza parte di uno starioro per 52 pertiche, perché 4 panori corrispondono alla terza parte di uno starioro. La terza parte di 52 stariori corrisponde infatti a 17 stariori e $\frac{1}{3}$. Poi moltiplica le 3 pertiche, che rimangono delle 25 tolte 22[11], per 49

[10] Sul termine latino *summa* rimando a CAROTENUTO 2012, p. 95: «lo stesso termine latino *summa*, invece, che sta a significare genericamente il risultato di un'operazione, corrisponde al nostro termine 'somma', solo qualora ci si riferisca al risultato dell'addizione, ma corrisponde al nostro 'prodotto', nel caso in cui ci si riferisca al risultato della moltiplicazione».

[11] L'espressione *a 22 usque in 25* significa, letteralmente, «da 22 a 25», e indica l'operazione di sottrazione di 22 pertiche da 25 pertiche: cfr. Fibonacci, *Liber Abaci* p. 212 (Boncompagni): *quod*

pertiche e mezzo su 52 pertiche, vale a dire per 9 panori: il risultato sarà di 27 panori. Aggiunti questi panori ai 17 stariori e $\frac{1}{3}$ di prima, e il risultato sarà di 19 stariori e 7 panori. Dopo aver fatto ciò, moltiplica queste stesse 3 pertiche per le 2 pertiche e mezzo che rimangono delle 52 tolte 49 pertiche e mezzo: il risultato sarà di 7 pertiche e mezzo, ossia di 1 panoro e 6 soldi. E così hai in totale 19 stariori e 8 panori e 6 soldi. **<7.2>** Oppure moltiplica 25 pertiche per 52 pertiche: il risultato sarà di 1300 pertiche, che corrispondono a 13 stariori e ad altrettanti mezzi, con in più 13 pertiche, ovvero 19 stariori 8 panori e 6 soldi, come ho detto prima[12].

<8> Se vuoi moltiplicare 31 pertiche per 69 pertiche, moltiplica prima 31 pertiche per 66 pertiche, vale a dire per 1 starioro: il risultato sarà di 31 stariori. Moltiplica poi le 3 pertiche che rimangono delle 69 tolte 66, per 31 pertiche: il risultato sarà di 93 pertiche, che corrispondono a 17 panori meno 18 denari. In questo modo abbiamo in totale 32 stariori e 5 panori, meno 18 denari.

<9> Se vuoi moltiplicare 43 pertiche per 85 pertiche, moltiplica prima 43 pertiche per 82 pertiche e mezzo, ovvero per 15 panori: il risultato sarà di quindici volte 43 panori, vale a dire di 43 stariori e altrettanti quarti, cioè di 53 stariori e $\frac{3}{4}$. Poi moltiplica le 2 pertiche e mezzo che rimangono delle 85, tolte 82 pertiche e mezzo, per 43 pertiche. Tuttavia moltiplicherai prima queste 2 pertiche e mezzo per 33 pertiche, vale a dire per 6 panori: il risultato sarà di 15 panori, che addizionati ai 53 stariori e $\frac{3}{4}$ di prima, daranno come risultato 55 stariori. Moltiplicherai poi queste 2 pertiche e mezzo per le 10 pertiche che rimangono delle 43 tolte 33: il risultato sarà di 25 pertiche, che corrispondono a 4 panori e 9 soldi. In questo modo avrai, come risultato della moltiplicazione richiesta, 55 stariori, 4 panori e 9 soldi.

<10> Se vuoi moltiplicare 54 pertiche per 113 pertiche, moltiplica prima 54 pertiche per 110 pertiche, vale a dire per 20 panori: il risultato sarà di 1080 panori che, diviso 12, fanno 90 stariori. Moltiplicherai poi le 3 pertiche che rimangono, delle 113 tolte 110, per 54 pertiche, cioè per 9 panori e 4 pertiche e mezzo: il risultato sarà di 27 panori e 13 pertiche e mezzo, cioè di 29 panori e 7

---

est a 20 usque in 31, scilicet 11. Per esigenze di chiarezza, tradurrò sempre questa espressione con una perifrasi.

[12] Per la misura dello starioro, cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie*, *Introductoria* 2,5: *sexaginta nempe et sex pertice quadrate faciunt mensuram quandam que vocatur stariorum.*

soldi e mezzo che, addizionati ai 90 stariori di prima, fanno 92 stariori e 5 panori e 7 soldi e mezzo.

<11> Se vuoi moltiplicare 72 pertiche per 149 pertiche, moltiplica prima 66 pertiche per 149 pertiche: il risultato sarà di 149 stariori. Moltiplica poi le 6 pertiche che rimangono delle 72 tolte 66, per 149 pertiche, tuttavia prima per 132 pertiche, vale a dire per 2 stariori, e poi per le 17 pertiche che rimangono delle 149 tolte 132: il risultato sarà di 12 stariori e 102 pertiche, cioè di 13 stariori e 6 panori e 9 soldi, i quali sommati ai 149 stariori di prima, fanno 162 stariori, 6 panori e 9 soldi.

<3>

<1.1> Ora che è stato detto abbastanza a proposito della moltiplicazione di pertiche intere per pertiche intere, voglio parlare solo di come si moltiplichino le pertiche con i piedi: in particolare, quando si moltiplica un piede per un certo numero di pertiche, il risultato è pari a tanti mezzi soldi quante sono le pertiche moltiplicate, com'è stato già detto[13]. **<1.2>** Se dunque vengono moltiplicati 2 piedi per un certo numero pertiche, il risultato sarà di tanti mezzi soldi, quante sono le pertiche moltiplicate; se vengono moltiplicati 3 piedi per un certo numero di pertiche, il risultato è di tanti soldi quante sono le pertiche, più altrettanti mezzi soldi; se vengono moltiplicati 4 piedi per un certo numero pertiche, il risultato sarà in soldi due volte le pertiche moltiplicate; dalla moltiplicazione di 5 piedi per alcune pertiche, vengono fuori soldi due volte le pertiche moltiplicate, più altrettanti mezzi. Infine, dalla moltiplicazione di piedi per piedi vengono fuori denari, come ho detto prima.

<2.1> Se vuoi moltiplicare 12 pertiche e 1 piede per 25 pertiche e 2 piedi, moltiplica prima 12 pertiche per 25 pertiche: il risultato sarà pari a 54 panori e 9 soldi. Trattieni poi i panori nella mano destra e i soldi nella mano sinistra. Moltiplica ora 1 piede per 25 pertiche: il risultato sarà pari a 12 soldi e mezzo, che devi aggiungere ai 9 soldi di prima: si avranno in totale 21 soldi, da conservare nella mano sinistra, e 6 denari, da tenere con i piedi. **<2.2>** I segni dei piedi sono i seguenti: la posizione della punta del piede sinistro sulla punta del piede destro

[13] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2,10: *pedes multiplicati in perticas, vel pertice in pedes, erunt pedes, sive medii soldi.*

indica 1; la posizione della punta del piede sinistro sul collo del piede destro indica 2; il tacco del calcagno del piede destro con la punta del piede sinistro indica 3; la posizione del piede sinistro dopo il destro, insieme alla punta del piede destro dalla parte esterna con la punta del sinistro, indica 4; la punta del piede sinistro col collo del piede destro indica 5. Gli altri cinque segni si ottengono nel medesimo ordine col piede destro che tocca il sinistro. L'undicesimo segno si ottiene ponendo il calcagno del piede destro sul collo del piede sinistro. Non abbiamo bisogno di più segni, dal momento che 12 denari equivalgono a un soldo, il quale soldo si conserva con la mano sinistra. Dei segni delle mani non occorre dir nulla, giacché li conoscono tutti coloro che conoscono l'Abbaco[14]. **<2.3>** A questo punto possiamo tornare al nostro problema: moltiplicherai di nuovo 2 piedi per 12 pertiche: il risultato sarà di 12 soldi, i quali sommati ai 21 soldi e mezzo conservati, danno un risultato di 33 soldi e mezzo. Allo stesso modo moltiplicherai 1 piede per 2 piedi: il risultato sarà di 2 denari[15]. Addizionali ai 6 denari che conservi attraverso i piedi: il risultato sarà di 8 denari, vale a dire di 4 stariora, 8 panora e 8 denari.

<3.1> Se vuoi moltiplicare 17 pertiche e 2 piedi per 36 pertiche e 3 piedi, moltiplica prima 17 pertiche per 36 pertiche: il risultato sarà di 9 stariori, 3 panori e 4 soldi e mezzo. Tieni gli stariori a mente, e conserva i panori nella mano destra, i soldi nella sinistra, e i denari nei piedi. **<3.2>** A questi aggiungi il risultato del prodotto di 2 piedi per 36 pertiche, vale a dire 36 soldi, il risultato del prodotto di 3 piedi per 17 pertiche, vale a dire 25 soldi e mezzo, e il risultato del prodotto di 3 piedi per 2 piedi, vale a dire 6 denari. Ogni volta che i soldi nella mano sinistra aumentano di numero, convertili in panori per quanto ti è possibile. In questo modo otterrai in totale 9 stariori, 7 panori e 6 denari.

<**4.1**> Se vuoi moltiplicare 26 pertiche e 4 piedi per 43 pertiche e 5 piedi, moltiplica prima le 26 pertiche per le 43 pertiche: il risultato è di 16 stariori, 11 panori e 4 soldi e mezzo. Moltiplica poi i 4 piedi, ossia i 2 soldi, per le 43 pertiche: il risultato sarà di 86 soldi, che corrispondono a 5 panori e 3 soldi e mezzo. **<4.2>** Moltiplica poi 5 piedi, che corrispondono a 2 soldi e mezzo, per le 26 pertiche: il risultato sarà di 65 soldi. Allo stesso modo moltiplica 4 piedi per 5

[14] Fibonacci fa qui riferimento al *Liber Abaci*, p. 5 (Boncompagni).

[15] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2,12: *pedes multiplicati in pedes surgunt in denarios.*

piedi: il risultato sarà di 20 denari. La somma di queste quattro moltiplicazioni dà in totale 17 stariori, 8 panori, 8 soldi e 8 denari.

<5.1> Se vuoi moltiplicare 28 pertiche, 1 piede e 7 once per 53 pertiche, 5 piedi e 12 once, moltiplica prima le 28 pertiche e 1 piede per le 53 pertiche e 5 piedi: il risultato sarà di 22 stariori, 11 panori, 11 soldi e 5 denari. **<5.2>** Moltiplica quindi le 7 once, vale a dire i 2 denari e $\frac{1}{3}$, per le 53 pertiche, tuttavia fa' prima per 48, ossia per 4 soldi, e poi per 5 denari: il risultato sarà di 10 soldi e 3 denari e $\frac{2}{3}$. **<5.3>** Ora moltiplica le 12 once, vale a dire i 4 denari, per le 28 pertiche: ovviamente fa' prima per 24 pertiche, ossia per 2 soldi, e poi per 4: il risultato sarà di 9 soldi e 4 denari. **<5.4>** Dopo aver compiuto queste operazioni, moltiplica 7 once per 5 piedi, e 12 once per 1 piede: il risultato sarà di once $\frac{47}{6}$, che corrispondono a 2 denari e $\frac{11}{18}$. Moltiplica infine 7 once per 12 once: il risultato sarà di $\frac{84}{324}$ di denaro[16], di cui non è necessario fare menzione, perché equivale a meno di un'oncia. Addiziona ora tutte queste moltiplicazioni. il risultato sarà pari a 23 stariori, 14 soldi e 9 denari[17].

---

[16] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2,13: *uncie multiplicate in uncias faciunt octavas decimas partes octave decime partis unius denarii, scilicet tricentesimas vigesimas quartas unius denarii*.

[17] L'autore qui scompone 53 pertiche nella somma di 48 più 5: il problema però è che, in base al suo ragionamento, 48 e 5 sono denari, non pertiche. Allo stesso modo, più avanti, scompone 28 pertiche nella somma di 24 più 4: anche in questo caso, però, 24 e 4 sono denari, non pertiche. Ciò è evidente dal fatto che, spiega l'autore, 48 e 24 corrispondono rispettivamente a 4 e a 2 soldi: un soldo, infatti, equivale a 12 denari, perciò 4 soldi equivalgono a 48 denari, e 2 soldi equivalgono a 24 denari. Si tenga presente che una pertica è un'unità di misura ben diversa dal denaro: se infatti 48 denari corrispondono senza dubbio a 4 soldi, 48 pertiche equivalgono invece 144 soldi; allo stesso modo 24 denari corrispondono a 2 soldi, mentre 24 pertiche corrispondono a 72 soldi. Per quale motivo, allora, l'autore "sostituisce" le pertiche con i denari? A proposito della scomposizione delle 53 pertiche nella somma di 48 più 5 denari, dirò subito che non ci sono varianti nella tradizione manoscritta; del resto, non è affatto necessario ipotizzare un guasto dell'archetipo, perché i calcoli sono giusti, sia che si voglia moltiplicare 4 soldi e 5 denari per 2 denari e $\frac{1}{3}$, sia che si voglia procedere prima convertendo in pertiche le 7 once dell'altezza, e poi moltiplicandole per le 53 pertiche della base. Quello che il lettore moderno non deve dimenticare, però, è che questo rettangolo di pertiche per once non è una figura geometrica astratta, ma è una superficie reale, quale può essere, ad esempio, la superficie di un terreno o di una casa. Perciò i lati di questa figura non sono "lunghezze senza larghezza", come siamo abituati a immaginare, ma sono "linee larghe", per usare la felice espressione di Jens Høyrup, ovvero linee «portatrici di una larghezza virtuale di una unità» (HØYRUP 1955, p. 3). L'area di una superficie rettangolare avente 53 pertiche di base per 7 once di altezza equivale, perciò, alla somma delle aree di sette strisce rettangolari più piccole, ciascuna della misura di 53 pertiche di base e 1 oncia di altezza. Ora, Fibonacci sostiene che il prodotto di pertiche per once dia un risultato che si esprime in once

<6.1> Se vuoi moltiplicare 37 pertiche, 2 piedi e 5 once e $\frac{1}{3}$ per 67 pertiche, 4 piedi e 10 once e $\frac{1}{4}$, moltiplica prima le 37 pertiche, i 2 piedi e le 5 once per le 67 pertiche, i 4 piedi e le 10 once: il risultato sarà di 38 stariori, 4 panori, 8 soldi e 5 denari e poco più. **<6.2>** A ciò aggiungi il prodotto della terza parte di un'oncia per le 67 pertiche, i 4 piedi e le 10 once e $\frac{1}{4}$, vale a dire per poco più di 22 once e mezzo. **<6.3>** Aggiungi anche il prodotto della quarta parte di un'oncia per 37 pertiche, 2 piedi e 5 once e $\frac{1}{3}$, ossia per poco meno di 9 once e $\frac{1}{3}$: si otterrà in totale 38 stariori, 4 panori, 9 soldi e poco meno di 5 denari. Così, esercitandoti costantemente nello svolgimento di queste moltiplicazioni, potrai risolvere esercizi simili.

<7.1> Se volessi moltiplicare 17 pertiche e 3 piedi per 28 pertiche e 4 piedi, collocherai i piedi del lato più lungo sotto i piedi del lato più breve, e le pertiche del lato più lungo sotto le pertiche del lato più breve. Quindi colloca 4 piedi sotto 3 piedi. Dopo aver fatto questo, porrai le 28 pertiche sotto le 17 pertiche andando verso sinistra, in avanti[18], come mostrato in figura. **<7.2>** Moltiplicherai i 3 piedi per i 4 piedi: il risultato sarà di 12 denari, perché dalla moltiplicazione di piedi per piedi si ottengono denari, com'è stato detto[19]. In luogo di questi 12 denari, conserva un soldo nella mano sinistra. **<7.3>** Moltiplicherai ora i 3 piedi per le 28 pertiche, e i 4 piedi per le 17 pertiche a crocetta, secondo il metodo che ho già illustrato a proposito della moltiplicazione di due cifre nel libro sulla guida all'utilizzo del Grande Abbaco[20]. Ma, all'atto della moltiplicazione, dividerai questi prodotti... voglio dire che moltiplicherai la metà dei 3 piedi per le 28 pertiche, oppure la metà delle 28 pertiche per i 3 piedi. Ugualmente moltiplicherai la metà dei 4 piedi per le 17 pertiche, ovvero la metà delle 17 pertiche per i 4 piedi. **<7.4>** Farai ciò, perché il risultato della

---

superficiali, ovvero in terzi di denaro. Ciò significa che una striscia che misuri 53 pertiche di base e 1 oncia di altezza ha una superficie di 53 once superficiali, che corrispondono a loro volta ad altrettanti terzi di denaro. Detto ciò, è evidente che per Fibonacci parlare di $\frac{53}{3}$ di denaro sia lo stesso che parlare di $\frac{1}{3}$ di 53 denari i quali, a loro volta, equivalgono proprio a 4 soldi e 5 denari.

[18] In Fibonacci, le cifre si leggono secondo la maniera araba, ossia da destra verso sinistra. Per questo motivo, ciò che per lui è *retro*, per il lettore moderno deve essere inteso come *ante*.

[19] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2, 12: *pedes multiplicati in pedes surgunt in denarios*.

[20] Fibonacci fa qui riferimento al *Liber Abaci*, pp. 7 e seguenti.

moltiplicazione di un piede per una pertica si esprime in piedi, che corrispondono a loro volta a mezzi soldi. Perciò il prodotto di 3 piedi per la metà di 28 pertiche, ossia per 14 pertiche, dà come risultato 42 soldi. Ora, aggiungi questo risultato al soldo che conservi nella mano sinistra, e otterrai 43 soldi, che conserverai nella stessa mano. Il prodotto della metà di 4 piedi per 17 pertiche dà come risultato 34 soldi che, sommati ai 43 soldi conservati, fanno in totale 77 soldi. Li trasformerai in panori: il risultato sarà di 4 panori e 11 soldi. Conserverai i panori nella mano destra e i soldi nella sinistra; moltiplicherai, poi, le 17 pertiche per le 28 pertiche attraverso il sistema che ho già indicato, perché del prodotto di pertiche per pertiche è stato già detto abbastanza chiaramente. In questo modo avrai in totale 7 stariori, 7 panori, 3 soldi e 6 denari.

<8.1> Se volessi moltiplicare soltanto 19 pertiche per 41 pertiche e 4 piedi, collocherai le 41 pertiche sotto le 19 pertiche, e in luogo dei piedi, dopo le 19 pertiche, metterai 0, e sotto lo 0, prima delle 41 pertiche, segnerai i 4 piedi, così come indicato in figura. **<8.2>** Moltiplicherai lo 0 per i 4 piedi: il risultato sarà 0. Moltiplicherai poi 0 per la metà di 41 pertiche, e farà di nuovo 0. Il prodotto della metà di 4 piedi per 19 pertiche, poi, darà come risultato 38 soldi, che corrispondono a 2 panori, che tratterrai con la mano destra, e 5 soldi, che tratterrai con la mano sinistra. Infine, il prodotto di 19 pertiche per 33 pertiche darà come risultato 9 stariori e mezzo. In questo modo ottieni in totale 9 stariori, che terrai a mente, 9 panori, che terrai con la mano destra, e 5 soldi, che terrai con la mano sinistra. Moltiplicherai le 8 pertiche che rimangono delle 41 tolte 33, per le 19 pertiche, ma prima per 11 e poi per 8: il risultato sarà di 16 panori e 64 pertiche. Queste 64 pertiche corrispondono a loro volta a 11 panori e 9 soldi: pertanto, otterrai in totale 12 stariori meno 12 denari.

<9.1> Se volessi moltiplicare 20 pertiche, 4 piedi e 11 once per 46 pertiche, 5 piedi e 12 once, collocherai le pertiche sotto le pertiche, i piedi sotto i piedi e le once sotto le once, come mostrato in figura. Opererai poi, come se stessi moltiplicando un numero di tre cifre per un altro numero di tre cifre[21], e il risultato sarà di once in luogo della prima cifra, ovvero delle unità, piedi in luogo della seconda cifra, ovvero delle decine, e pertiche in luogo della terza cifra, ovvero delle centinaia. **<9.2>** Perciò moltiplicherai 11 once per 12 once: il risultato sarà

[21] Il metodo è stato descritto da Fibonacci in *Liber Abaci* p. 11.

di denari $\frac{132}{324}$, perché il prodotto di un'oncia per un'oncia dà come risultato $\frac{1}{324}$ di denaro[22]. Ma la scomposizione[23] di 324 è $\frac{1\quad 0}{18\quad 18}$: perciò, se avremo diviso 132 per il primo 18 che è scritto sotto la linea di frazione[24], il risultato sarà di 7 e $\frac{1}{3}$. Oppure moltiplica la sesta parte di 12 once per 11, e ciò che ne risulta dividilo per la sesta parte di 18: il risultato sarà ugualmente pari a 7 e $\frac{1}{3}$, che corrispondono ad altrettanti diciottesimi di denaro. **<9.3>** Terrai il 7 in mano, la frazione invece la

---

[22] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2,13: *uncie multiplicate in uncias faciunt octavas decimas partes octave decime partis unius denarii, scilicet tricentesimas vigesimas quartas unius denarii.*

[23] Il termine *regula* ricorre talvolta a indicare la scomposizione in fattori non primi del denominatore di una frazione, come ad esempio all'interno della *Distinctio* I, 3 (9.2), dove si legge, a proposito della frazione $\frac{1}{324}$, che la *regula de 324 est* $\frac{1\quad 0}{18\quad 18}$. In seguito all'indagine condotta da CAROTENUTO 2014[2], è emerso che *regula* ricorre con questo significato anche all'interno del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, dove spesso compare in alternanza con un altro termine, *compositio*, dal significato identico. Ci troviamo, quindi, di fronte ad uno di quei casi in cui a un solo significato sembrano corrispondere più significanti. Ma c'è dell'altro. Già la studiosa rilevava che il termine, accanto al valore di "scomposizione in fattori non primi", spesso assume, all'interno del *Liber Abaci*, anche un altro significato, quello cioè di "regola", ossia di "norma codificata" (CAROTENUTO 2014[2], pp. 67-68). Allo stesso modo, è possibile incontrare *regula* con questo secondo significato anche all'interno della *Pratica Geometrie*, che del *Liber Abaci* rappresenta la naturale continuazione (cfr. *Distinctio* III, II, 2, 1). In questa accezione, però, il termine compare non soltanto all'interno delle opere di origine occidentale che il Pisano avrebbe avuto a disposizione (cfr. Gerberti *Geometria* p. 87 (Bubnov)), ma anche in quegli scritti che dall'arabo erano stati tradotti in latino nel corso del XII secolo (cfr. Abū Bakr, *Liber Mensurationum* p. 116 (Busard)). Ciò significa che il Fibonacci avrebbe attinto questo termine direttamente dal latino tecnico dei testi matematici, dove lo incontrava col significato generico di "procedimento", "norma codificata", e che in un secondo momento lo avrebbe sottoposto a risemantizzazione, da cui il valore specifico di "scomposizione in fattori non primi del denominatore di una frazione". A differenza del *Liber Abaci*, però, in cui *regula* sembrerebbe acquisire "soltanto" questi due significati, per la *Pratica Geometrie* la situazione si complica ulteriormente, dal momento che qui il termine ricorre anche in una terza accezione, quella cioè di "tipologia di equazione" (cfr. *Distinctio* III, II, 1, 1). La fonte di Leonardo sembrerebbe essere rappresentata, in questa particolare circostanza, dall'*al-Jabr* di al-Khwārizmī o, per meglio dire, dalla traduzione latina che di essa aveva dato Gerardo da Cremona nel XII secolo. All'interno di quest'opera, infatti, il matematico arabo distingue tra *tres modi simplices* e *tres modi compositi* per l'equazione di secondo grado, e tali *modi* corrispondono esattamente alle *regule* di cui parla il Pisano (cfr. Al-Khwārizmī, *al-Jabr* pp. 233-236 (Hughes)). A differenza di quest'ultimo, però, Gerardo da Cremona adopera qui il termine *regula* per indicare la "procedura" di risoluzione di tali equazioni, non la loro tipologia, per la quale, invece, sceglie di utilizzare il termine più appropriato *modus*. È possibile, allora, che il Fibonacci non abbia consultato direttamente la sua fonte ma che, al contrario, abbia fatto affidamento sui suoi ricordi personali, oppure su vecchi appunti di scuola. Ciò spiegherebbe l'origine di questa divergenza tra lui e il Cremonese, e giustificherebbe la scelta, compiuta dal nostro, di utilizzare *regula* con significato improprio: essa, infatti, potrebbe essere il frutto di una svista oppure di una distrazione.

[24] Per il termine *virgula*, rimando a CAROTENUTO 2014[2], p. 40: «la linea di frazione è indicata indifferentemente come *virga* o *virgula*».

conserverai sulla tavola dell'abaco oppure a mente. Moltiplicherai poi le 11 once per i 5 piedi, e le 12 once per i 4 piedi, a crocetta. Aggiungerai il risultato di questi due prodotti al 7 che hai conservato: ottieni così 110, che corrisponde ad altrettanti diciottesimi di denaro, perché il risultato del prodotto di once per once si esprime in altrettanti diciottesimi di denaro. **<9.4>** Perciò, diviso 110 e $\frac{1}{3}$ per 18, fanno 6 denari e $\frac{1 \quad 2}{3 \quad 18}$. Conserverai i 6 denari in mano, e la frazione in tavola oppure a mente. A questi aggiungerai il prodotto della terza parte di 11 once per 46 pertiche, oppure la terza parte di 46 pertiche per 11 once, dal momento che il prodotto di once per pertiche dà come risultato $\frac{1}{3}$ di denaro[25]: il totale sarà di 174 denari e $\frac{2}{3}$, che corrispondono a 14 soldi e 6 denari e $\frac{2}{3}$. A questo, aggiungi il prodotto della terza parte di 12 once per 20 pertiche, nonché il prodotto di 4 piedi per 5 piedi: il totale sarà di 22 soldi e 10 denari e $\frac{2}{3}$. Aggiungerai i $\frac{2}{3}$ di denaro ai $\frac{1 \quad 2}{3 \quad 18}$ conservati: il risultato è di $\frac{1 \quad 14}{3 \quad 18}$ denari. Di questi 22 soldi e 10 denari, conserverai nella mano destra un panoro, nella sinistra 6 soldi, nei piedi 4 denari. Sommerai poi il risultato del prodotto della metà dei piedi per le pertiche a crocetta, e il risultato del prodotto delle pertiche per le pertiche, come abbiamo fatto prima. In questo modo, otterrai in totale 14 stariori, 9 panori, 4 soldi e 4 denari e $\frac{1 \quad 14}{3 \quad 18}$.

<10.1> Ancora, se vuoi moltiplicare 21 pertiche per 47 pertiche, 2 piedi e 10 once, collocherai le 10 once sotto lo 0, i 2 piedi sotto l'altro 0, e le 47 pertiche sotto le 21 pertiche, come mostrato in figura. **<10.2>** Moltiplicherai poi le once per le once, vale a dire 0 per 10: il risultato è 0, perciò lo tralascerai. Moltiplicherai quindi 0 per 2 e 10 per 0, a crocetta: il risultato è 0, e anche questo lo tralascerai. Moltiplicherai ancora lo 0 delle once per la terza parte delle 47 pertiche, e 10 per la terza parte di 21, e lo 0 dei piedi per i 2 piedi: il risultato sarà di 5 soldi e 10 denari. Infine, moltiplicherai lo 0 dei piedi per la metà di 47 pertiche, e la metà dei 2 piedi per le 21 pertiche: il risultato è di 21 soldi. Così facendo, ottieni in totale 26 soldi e 10 denari, che corrispondono a un panoro, 10

[25] Cfr. Fibonacci, *Pratica Geometrie, Introductoria* 2, 11: *item uncie multiplicate in perticas, vel pertice multiplicate in uncias, faciunt uncias, vel tertias unius denari.*

soldi e 4 denari. A questi aggiungi il prodotto di 21 pertiche per 47 pertiche, e avrai in totale 15 stariori, 1 panoro, 1 soldo e 4 denari di misura.

<11.1> Fa' sempre in modo di sopperire, con gli zeri, ai vari gradi dei lati che devono essere moltiplicati, affinché quanti sono i gradi di un lato, tanti siano i gradi dell'altro[26]. Diciamo infatti che le once corrispondono al primo grado, i piedi al secondo grado, e le pertiche al terzo grado. **<11.2>** Esempio: vogliamo moltiplicare 13 pertiche e 11 once per 28 pertiche e 14 once. Collocherai le pertiche sotto le pertiche al terzo grado, e le once sotto le once al primo. Sopperirai poi al secondo grado, ponendo lo 0 tra le pertiche e le once, appunto al secondo grado, come mostrato in figura. Moltiplicherai poi i numeri attraverso il procedimento che ho illustrato, e otterrai in totale 5 stariori, 7 panori e 1 denaro e $\frac{5\ \ 14}{9\ \ 18}$.

<12.1> Allo stesso modo, vogliamo moltiplicare 14 pertiche e 2 piedi per 31 pertiche e 15 once. Li scriverai così. Moltiplicherai poi lo 0 delle once per le 15 once: il risultato sarà 0, che diviso 18 fa di nuovo 0. Perciò lo tralascerai, perché non vale niente, e moltiplicherai lo 0 delle once per lo 0 dei piedi, e le 15 once per i 2 piedi: il risultato è di 30 once che, diviso 18, fanno 1 denaro e $\frac{2}{3}$. **<12.2>** Moltiplicherai poi la terza parte di 0 once per 31 pertiche, poi la terza parte di 15 once per 14 pertiche, poi ancora 2 piedi per 0 piedi. Aggiungerai il risultato al denaro e $\frac{2}{3}$ che hai messo da parte, e otterrai così 6 soldi meno $\frac{1}{3}$ di denaro. Moltiplicherai la metà di 2 piedi per 31 pertiche, e la metà di 0 per 14 pertiche, e aggiungerai il tutto ai 6 soldi che hai conservato: il risultato sarà di 37 soldi meno $\frac{1}{3}$ di denaro, che corrispondono a 2 panori e 4 soldi, meno $\frac{1}{3}$ di denaro. **<12.3>** Infine, delle 14 pertiche prendi 11 pertiche, e moltiplicale per 31 pertiche: il risultato sarà di 62 panori. Moltiplicherai poi le 3 pertiche, che rimangono delle 14 tolte 11, per 31 pertiche, tuttavia prima per 22 e poi per 19 pertiche, oppure,

[26] In Fibonacci *gradus* assume il significato di "valore della cifra" sia nel *Liber Abaci*, p. 2 (Boncompagni): *primus gradus in descriptione numerorum incipit a destera. Secundus vero versus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium, et quintus quartum, et semper sic versus sinistram gradus gradum sequitur*, sia anche nella *Pratica Geometrie*, ad esempio nella *Distinctio* II, 1, 2, 3: *et copulabis ipsa 10 cum 4 primi gradus: erunt 104*. Fibonacci parla dunque di *primus gradus* a proposito delle unità, di *secundus gradus* a proposito delle decine, di *tertius gradus* a proposito delle centinaia. Si è visto però che, nell'ambito delle operazioni che prevedono l'utilizzo di pertiche, piedi e once, le once corrispondono alle unità, i piedi alle decine e le pertiche alle centinaia.

con una sola moltiplicazione, per 31 pertiche. Il risultato sarà di 16 panori e 15 soldi. Alla fine avrai in totale 6 stariori, 9 panori, 2 soldi e 5 denari e $\frac{2}{3}$.

<**13.1**> Di nuovo, se vuoi moltiplicare 17 pertiche, 4 piedi e 9 once e mezzo per 32 pertiche, 5 piedi e 14 once e $\frac{3}{4}$, collocherai le pertiche sotto le pertiche, i piedi sotto i piedi e le once sotto le once. <**13.2**> Moltiplicherai poi le 9 once e mezzo per le 14 once e $\frac{3}{4}$, in questo modo: farai prima 9 per 14: il risultato è di 126, al quale devi aggiungere a crocetta la metà di 14, e $\frac{3}{4}$ di 9: si ottiene più di 139 che, diviso 18, corrisponde a più di 7. Conserva questo 7 in mano. Moltiplicherai poi a crocetta le 9 once e mezzo per i 5 piedi, e le 14 once e $\frac{3}{4}$ per i 4 piedi. Infine aggiungi il tutto al 7 che hai conservato: il risultato sarà superiore a 113, che diviso 18 farà in totale 6 denari e $\frac{1}{3}$. Moltiplicherai poi la terza parte di 9 e mezzo, vale a dire 3 e $\frac{1}{6}$, per 32 pertiche: il risultato sarà di 101 denari e $\frac{1}{3}$. Sommando questi denari ai 6 denari e $\frac{1}{3}$ conservati, il risultato sarà di 9 soldi meno $\frac{1}{3}$ di denaro. Aggiungi a questo il prodotto della terza parte di 14 once e $\frac{3}{4}$ per 17, oppure il contrario. Farai questa moltiplicazione in questo modo: dei 14 e $\frac{3}{4}$ prendi 12, e dal prodotto della terza parte di questo per uno è venuto fuori 4. Moltiplica 4 per 17 pertiche: il risultato sarà di 68 denari. Dopo aver fatto ciò, prendi 2 da 2 più $\frac{3}{4}$, e moltiplicalo per 17: il risultato sarà di 34 once. Converti le once in denari, ossia dividile per 3: il risultato sarà di 11 denari e $\frac{1}{3}$. Così facendo, ottieni in totale 79 denari e $\frac{1}{3}$. Dopo aver fatto queste cose, prendi $\frac{1}{3}$ dei $\frac{3}{4}$ che rimangono da moltiplicare: sarà $\frac{1}{4}$. Moltiplicalo per 17: il risultato sarà di 4 denari e $\frac{1}{4}$. In questo modo ottieni 83 denari e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ per il prodotto della terza parte di 14 once e $\frac{3}{4}$ per 17. <**13.3**> Oppure procedi in quest'altro modo: prendi la terza parte di 17, che corrisponde a 5 e $\frac{2}{3}$, e moltiplicala per 14 e $\frac{3}{4}$, procedendo così: 5 per 14 dà come risultato 70 denari; $\frac{2}{3}$ di 14 corrispondono a 9 denari e $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$ di 5 corrispondono a 3 denari e $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ sono pari a metà denaro. In questo modo ottieni in totale 83 denari e $\frac{7}{12}$, come nell'esempio precedente. <**13.4**> Oppure procedi in quest'altro

modo ancora: ai 14 e $\frac{3}{4}$ aggiungi $\frac{1}{4}$: il risultato sarà pari a 15. Prendi la terza parte, che è 5, e moltiplicala per 17: il risultato sarà di 85 denari. Poi, di questo $\frac{1}{4}$ che hai aggiunto prima, prendi la terza parte: il risultato sarà di $\frac{1}{12}$. Calcola $\frac{1}{12}$ di 17, che corrisponde a un denario e $\frac{5}{12}$, e sottrailo da 85: rimarranno, come abbiamo detto, 83 denari e $\frac{7}{12}$. **<13.5>** E così cerca sempre di procedere, in casi simili, secondo il sistema che ti sembrerà migliore, tenendo conto del numero delle once. Dopo aver dunque aggiunto 83 denari ai 9 soldi, meno la terza parte di 1 denaro, si ottengono 16 soldi, meno $\frac{3}{4}$ di denaro. A questi aggiungi il prodotto di piedi per piedi, vale a dire di 4 per 5: il risultato sarà di 17 soldi e 7 denari e $\frac{1}{4}$. Addiziona poi, come prima, il prodotto della metà dei piedi per le pertiche a crocetta, e delle pertiche per le pertiche, e avrai in totale 8 stariori, 10 panori, 7 soldi e 1 denaro e $\frac{1}{4}$.

<14.1> Per quanto riguarda le frazioni di once, puoi procedere anche in un altro modo, in principio, prima di iniziare a moltiplicare. Prendi le frazioni delle once di sopra dalle pertiche di sotto[27], e le frazioni delle once di sotto dalle pertiche di sopra, come in questa moltiplicazione. **<14.2>** In luogo della mezza oncia che è riportata nelle pertiche di sopra, prendi la metà di 32 pertiche, e in luogo della frazione $\frac{3}{4}$, che è segnata nelle once di sotto, prendi $\frac{3}{4}$ di 17 pertiche, a crocetta: il risultato sarà di 16 once più 12 once e $\frac{3}{4}$, ovvero di 28 once e $\frac{3}{4}$, che corrispondono a quasi 10 denari. Cancellerai poi queste frazioni di once dalla moltiplicazione, e moltiplicherai soltanto le 17 pertiche, i 4 piedi e le 9 once per le 32 pertiche, i 5 piedi e le 14 once. Per ultimo aggiungi i 10 denari che hai messo da parte.

[27] A proposito della tecnica di moltiplicazione a crocetta tra frazioni, tutti i discendenti di α e il codice F riportano la lezione corretta *accipe fractiones unciarum superiorum de perticis inferioribus*, mentre il codice S concorda con i codici CPL nel riportare la lezione errata *accipe fractiones unciarum superiorum de perticis superioribus*. Tale errore si potrebbe spiegare con la presenza di un originario *subterioribus*, vale a dire di una *lectio difficilior* che in F e negli apografi di α sarebbe stata sostituita dalla più semplice lezione *inferioribus*, mentre in S e in CPL avrebbe dato origine ad un vero e proprio errore. Subito dopo, infatti, il testimone S, unitamente alla prima mano di B e alla seconda mano di N, concorda con gli apografi di β nel riportare la lezione *et fractiones unciarum subteriorum de perticis superioribus*, contro la seconda mano di B, che corregge deliberatamente *subteriorum* in *inferiorum*, e tutti gli altri manoscritti che, invece, riportano la lezione errata *stariorum* in luogo di *subteriorum.*

<15.1> Se volessi moltiplicare 13 pertiche e 2 piedi per 21 pertiche e 3 piedi, essendo un piede equivalente alla sesta parte di una pertica, metti tanti sesti davanti alle pertiche, quanti sono i pedi che hai posto con queste pertiche, e in questo modo dovrai moltiplicare 13 pertiche e $\frac{2}{6}$ per 21 pertiche e $\frac{3}{6}$. Colloca i sesti sotto i sesti e le pertiche sotto le pertiche, come mostrato in figura. Scriverai, poi, due 6 da parte sotto la linea di frazione, e non scriverai niente sopra, in questo modo: $\frac{\quad}{6\ 6}$. Moltiplicherai, quindi, i 2 piedi per i 3 piedi che stanno su entrambi i 6: il risultato sarà di 6 piedi, che devi dividere per il primo 6 che sta a sinistra, sotto la linea di frazione che abbiamo posto: il risultato sarà 1, e il resto 0. Tratteieni perciò 1 con la mano, rimne 0, quindi scrivi 0 su questa frazione $\frac{\quad}{6\ 6}$. Moltiplicherai poi il 2 che sta sul 6, per le 21 pertiche, e il 3 che sta sull'altro 6, per le 13 pertiche, a crocetta. Aggiungerai il loro prodotto all'1 che stai tenendo con la mano: il risultato sarà di 82 che, diviso l'altro 6, darà come risultato finale 13 pertiche e il resto di 4. Scrivi 4 su questo 6, così: $\frac{0\ \ 4}{6\ \ 6}$, e trattieni 13 con la mano. A questo, aggiungi il prodotto delle 13 pertiche per le 21 pertiche: il risultato sarà di 286 pertiche che, divise per $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$, vale a dire per la scomposizione in fattori non primi di uno starioro, faranno in totale 4 stariori e $\frac{0\ \ 2}{11\ 6}$. Unisci questa linea di frazione con la prima, e otterrai come risultato 4 stariori e $\frac{0\ \ 4\ \ 0\ \ 2}{6\ 6\ 11\ 6}$. **<15.2>** Tu conosci la natura di un simile procedimento: il numero che sta al di fuori della linea di frazione è espresso in stariori; sul primo 6 che è all'inizio della linea di frazione, subito dopo il numero intero, stanno due volte panori; il valore che sta sull'undici è espresso in pertiche, e come saprai ogni pertica equivale a tre soldi; le quantità che stanno sugli ultimi due 6 sono espresse in denari, in questo modo: moltiplicherai la cifra che sta sul primo 6, per il 6 che sta dopo, e aggiungi la cifra che sta sul secondo 6. **<15.3>** Esempio: per il 4 che sta al di fuori della linea di frazione, bisognerà intendere 4 stariori; per il 2 che sta sul 6, bisognerà intendere 4 panori; in base al 4 che sta sull'altro 6, bisognerà intendere 2 soldi, perché il prodotto di 4 per 6, più 0, ammonta a 24 denari.

<16.1> Ugualmente, se vuoi moltiplicare 14 pertiche e 5 piedi per 41 pertiche, colloca 41 sotto 14 e $\frac{0}{6}$ sotto $\frac{5}{6}$, in questo modo. Già sai che abbiamo collocato $\frac{0}{6}$ sotto 41 per equilibrare le frazioni di sotto con le frazioni di sopra.

Infine, poni $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 6\ \ 11\ \ 6}$ da parte. **<16.2>** Moltiplicherai il 5 che sta sul 6, per lo 0 che sta sull'altro 6: il risultato sarà 0, per cui porrai 0 a nominatore del primo 6. Moltiplicherai, poi, a crocetta 5 per 41 e 0 per 4: fa 205, che diviso per il 6 che segue, dà come risultato 34 col resto di 1. Poni 1 a nominatore del 6, e trattieni il 34 con la mano. A questo valore aggiungi il prodotto di 14 per 41: il risultato è di 608 che, diviso per i $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$ che rimangono nella frazione, darà come resto 3 a numeratore di 11, 1 a numeratore di 6, e 9 che invece resta fuori la linea di frazione, come è indicato nel quesito. Il risultato di questo quesito corrisponde allora a 9 stariori, 2 panori, 9 soldi e 6 denari.

<17.1> Se vuoi moltiplicare 15 pertiche, 3 piedi e 12 once per 42 pertiche, 2 piedi e 15 once, è opportuno che tu riduca le once in sesti di piedi, vale a dire in sesti di sesti di pertiche. Dal momento che 18 once corrispondono a 1 piede, 3 once equivalgono a $\frac{1}{6}$ di piede, e quindi 12 once sono $\frac{4}{6}$ di un piede. Scrivi $\frac{4}{6}$ dopo $\frac{3}{6}$ su un'unica linea di frazione. Per la stessa ragione, in luogo di 5 once poni $\frac{5}{6}$ dopo $\frac{2}{6}$ sotto un'altra linea di frazione, ed otterrai $\frac{4\ \ 3}{6\ \ 6}$ 15 pertiche da moltiplicare per $\frac{5\ \ 2}{6\ \ 6}$ 42 pertiche, come è qui indicato. A questo punto, protrai la linea di frazione da una parte e, a denominatore, scrivi nell'ordine quattro 6 e $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$, così: $\frac{}{6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$. **<17.2>** Moltiplicherai ora il 4 per il 5 che sta a nominatore del primo 6, e dividerai il risultato per il primo 6 del denominatore: il totale sarà 3 col resto di $\frac{2}{6}$. Moltiplicherai poi a crocetta il 4 per il 2, e il 5 per il 3 che sta al nominatore, e aggiungerai il tutto al 3 che hai conservato: il risultato sarò pari a 253 che, diviso per il terzo 6 del denominatore, darà 42 col resto di $\frac{1}{6}$. Infine aggiungerai a 42 il prodotto di 3 per 42 e di 2 per 15 a crocetta: farà 198 che, diviso per il quarto 6, darà come risultato 33 col resto di $\frac{0}{6}$. Alle 33 pertiche aggiungerai il prodotto di 15 per 42: il risultato sarà di 663 pertiche che, diviso 11, daranno un risultato di 60, col resto di $\frac{3}{11}$. Dividi poi 60 per il 6 che è collocato all'inizio della linea di frazione: sarà 10, da porre alla fine della linea di frazione, più $\frac{0}{6}$. **<17.3>** Così procedendo, otterrai in totale 10 stariori, 9 soldi e $\frac{1\ \ 2\ \ 2}{6\ \ 6\ \ 6}$ denari: sui primi due 6 del denominatore avrai frazioni di un unico denaro, mentre sugli altri due 6 avrai denari interi; al nominatore di 11 avrai pertiche, vale a dire tre volte altrettanti soldi, e infine sul 6 che è in testa alla frazione avrai due volte altrettanti panori.

<18.1> Di nuovo, se vuoi moltiplicare 16 pertiche, 1 piede e 10 once per 43 pertiche e 14 once e mezzo, ridurrai le once in frazioni di sesti, e otterrai $\frac{3}{6}$ di once e $\frac{1}{3}$. Di questi terzi fa' sesti: il risultato sarà pari a $\frac{2}{6}$. Così facendo, avrai $\frac{2\ \ 3\ \ 1}{6\ \ 6\ \ 6}$ 16 pertiche sul lato superiore. Ma possiamo ottenere anche in un altro modo sesti di piede di 10 once: dal momento che 10 once corrispondono a $\frac{10}{18}$ di piede, esse equivalgono a $\frac{20}{36}$, per cui se avremo diviso 20 per la scomposizione in fattori identici di 36, otterremo $\frac{2\ \ 3}{6\ \ 6}$ di un piede, come abbiamo detto. Allo stesso modo, raddoppierai le 14 once e mezzo e il risultato sarà di $\frac{29}{36}$ del piede. Così facendo, sul lato inferiore otterrai $\frac{5\ \ 4\ \ 0}{6\ \ 6\ \ 6}$ 43 pertiche, come indichiamo qui. Metti sei 6 sotto una linea di frazione, dopo $\frac{1\ \ 0}{11\ \ 6}$, in questo modo: $\frac{}{6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 11\ 6}$. Moltiplicherai, poi, le cifre che stanno a numeratore e i numeri interi che stanno davanti alla linea di frazione, secondo il sistema che si utilizza per i numeri di quattro cifre, procedendo a scalare. **<18.2>** Esempio: moltiplicherai il 2 per il 5 sul primo 6, e dividerai il risultato per il primo 6; poi 2 per 4, e 5 per 3, e dividerai il risultato per il secondo 6; poi ancora 2 per 0, 5 per 1, 3 per 4, e dividerai il risultato per il terzo sei; quindi 2 per 43, 5 per 16, 3 per 0 e 4 per 1, e dividerai il risultato per il quarto 6. Otterrai così, sui primi quattro 6 del denominatore, frazioni di denaro. Continuerai, poi, moltiplicando 3 per 43, 4 per 16 e 1 per 0, dividerai il risultato per il quinto 6, e otterrai denari interi che dovrai segnare su questo sei. Ancora, moltiplicherai 1 per 43, e 0 per 16, dividerai il risultato per il sesto 6, e otterrai su questo sei soldi e mezzo. Infine, moltiplicherai 16 pertiche per 43 pertiche e dividerai il risultato per $\frac{1\ \ 0}{11\ 6}$. Otterrai in totale tripli soldi, che dovrai annotare su 11, e doppi panori, che dovrai segnare sul 6, mentre davanti alla linea di frazione scriverai stariori[28].

---

[28] L'operazione qui illustrata consiste nel moltiplicare $\frac{2\,3\,1}{6\,6\,6}$ 16 per $\frac{5\,4\,0}{6\,6\,6}$ 43, a scalare. Si tenga presente che 16 e 43 sono pertiche, 0 e 1 sono piedi, e il resto sono once. L'autore in primo luogo moltiplica le once per le once (2 per 5, 2 per 4, 3 per 5, 3 per 4) ottenendo un risultato che si esprime in frazioni di denaro (in particolare in $\frac{1}{324}$ di denaro, cfr. *Introductoria* 2, 13); poi moltiplica le once per i piedi (2 per 0, 3 per 0, 5 per 1, 4 per 1) ottenendo un risultato che si

<19.1> In questo modo, attraverso la riduzione in sesti di sesti di piede, possiamo procedere all'infinito, riducendo le frazioni delle once poste nella moltiplicazione in sesti di sesti di piede, per quanto possibile: e se il numero delle seste parti di un lato è minore rispetto al numero delle seste parti dell'altro, sopperirai a tale mancanza ponendo gli zeri a numeratore dei sesti, in modo che se vi siano due sesti in un lato, ve ne siano due anche nell'altro, se tre siano in un lato, tre siano anche dall'altro, e così via. **<19.2>** Qualora tu non dovessi affatto riuscire a ridurre le frazioni delle once in sesti della sesta parte del piede, allora in nessun modo potrai operare con queste frazioni, ma le metterai da parte, moltiplicherai quel che resta di queste frazioni che non sarai riuscito a convertire in sesti di sesti, e procederai secondo il metodo che ho descritto sopra.

<4>

Metodo II

<1.1> Attraverso il procedimento della moltiplicazione sopra riportato, puoi trovare il modo di operare moltiplicazioni anche in altre regioni, attraverso le diverse unità di misura che le caratterizzano. **<1.2>** A questo punto, per mostrare in modo più completo gli argomenti che ho promesso di illustrare nella seconda distinzione, ho ritenuto opportuno anticipare qui alcune questioni necessarie.

<2.1> *Se un numero qualsiasi viene diviso in quante parti si vuole, si moltiplica una ciascuna delle sue parti per il numero intero e si addizionano i risultati di queste moltiplicazioni, il risultato sarà uguale al quadrato del numero intero*, vale a dire al prodotto del numero intero per se stesso. **<2.2>** Se si divide il numero *ab* in quante parti si vuole, che diciamo sono *ag*, *gd* e *db*, dico che se si moltiplicherà *ag* per *ab*, et *gd* per *ab*, et infine *db* per *ab*, e si addizioneranno i risultati di queste moltiplicazioni, il totale di questa operazione sarà pari al totale del prodotto di *ab* per se stesso. Quante volte, infatti, l'unità è contenuta nel

---

esprime in frazioni di denaro (in particolare in $\frac{1}{18}$ di denaro, cfr. *Introductoria* 2, 13); quindi moltiplica le once per le pertiche (2 per 43, 3 per 43, 5 per 16, 4 per 16) ottenendo un risultato che si esprime in frazioni di denaro (in particolare in $\frac{1}{3}$ di denaro, cfr. *Introductoria* 2, 11). Fatto ciò, Fibonacci passa a moltipicare i piedi per i piedi (1 per 0) ottenendo un risultato che si esprime in denari (cfr. *Introductoria* 2, 11); quindi moltiplica i piedi per le pertiche (1 per 43, 16 per 0) ottenendo un risultato che si esprime in piedi, ossia in mezzi soldi (cfr. *Introductoria* 2, 10). Infine, l'autore moltiplica le pertiche per le pertiche, ottenendo un risultato che si esprime in pertiche (cfr. *Introductoria* 2, 8).

segmento *ag*, tante volte il numero *ab* risulterà dal prodotto di *ag* per *ab*. Allo stesso modo, però, quante volte l'unità è contenuta in *gd*, tante volte il numero *ab* verrà fuori dal prodotto di *gd* per *ab*. Per questo motivo, quante volte l'unità è contenuta nel numero *db*, tante volte il numero *ab* viene fuori dal prodotto di *db* per *ab*, per cui quante volte l'unità è contenuta nel numero *ab*, vale a dire nella somma delle sue parti *ag*, *gd* e *db*, tante volte esso risulterà dalla somma dei prodotti di *ag* per *ab*, *gd* per *ab* e *db* per *ab*. Infine, quante volte l'unità è contenuta in *ab*, tante volte essa viene fuori dal prodotto di *ab* per se stesso, e infatti la somma dei prodotti di *ag* per *ab*, *gd* per *ab* e *db* per *ab* è pari al prodotto di *ab* per se stesso, come volevasi dimostrare. **<2.3>** Affinché questo concetto risulti essere più chiaro, sarà dato il segmento *ab* della lunghezza di 10 ulne. Lo si divida nelle parti *ag* di 2 ulne, *gd* di 3 ulne e *db* di 5 ulne. Ora, se si moltiplicano 2 per 10, 3 per 10 e 5 per 10 – vale a dire *ag* per *ab*, *gd* per *ab* e *db* per *ab* – e si sommano i risultati di queste moltiplicazioni, il risultato di tutta questa operazione sarà 100, che è uguale al prodotto di 10 per 10.

<3.1> *Se un segmento viene diviso in quante parti si vuole, e ciascuna di esse viene moltiplicata per un altro segmento, la somma di queste moltiplicazioni sarà uguale al prodotto di tutto il segmento che è stato diviso per l'altro segmento.* **<3.2>** Dimostriamo questo assunto utilizzando numeri. Sia dato un segmento della misura di 10 ulne, diviso in 2, 3 e 5, e sia dato un altro segmento della misura di 12 ulne. Se si moltiplicano 2 per 12, 3 per 12 e 5 per 12, e si addizionano i risultati, il totale corrisponderà al prodotto di 10 per 12, vale a 120.

<4.1> Di nuovo, *se un segmento viene diviso dove capita in due parti, il prodotto di una delle parti per se stessa, più il prodotto della stessa parte per l'altra, sarà uguale al prodotto di questa parte per tutto il segmento.* **<4.2>** Se il segmento *ab* viene diviso nel punto *g* in due parti, il prodotto di *ag* per se stessa più *ag* per *gb* sarà uguale al prodotto di *ag* per tutta *ab*. Si tracci la retta *d* uguale al segmento *ag*: il prodotto di *d* per *ag* più il prodotto di *d* per *gb* sarà uguale al prodotto di *d* per l'intero segmento *ab*. In verità il prodotto di *d* per *ag* è uguale al prodotto di *ag* per se stesso, essendo *d* uguale ad *ag*. Il prodotto di *d* per *gb* è uguale al prodotto di *ag* per *gb*, perciò il prodotto di *ag* per se stesso più il prodotto di *ag* per *gb* è uguale al prodotto di *ag* per *ab*, come volevasi dimostrare. **<4.3>** Se si vuole dimostrare questo assunto attraverso i numeri, sia *ag* pari a 3 e *gb* pari a 7, per cui tutto il segmento *ab* misura 10. Senza dubbio, il prodotto di *ag* per se stesso – vale a dire di 3 per 3 – più il prodotto di 3 per 7 – vale a dire di *ag* per *gb* – ammonta a 30, che è uguale al prodotto di *ag* per *ab*, vale a dire di 3 per 10, com'è già stato detto.

<5.1> *Se un segmento viene diviso come capita in due parti, la somma del quadrato della prima parte con il quadrato della seconda e con il doppio prodotto della prima parte per la seconda sarà uguale al quadrato del segmento, vale a dire al prodotto di tutto il segmento per se stesso.* **<5.2>** Se il segmento *ag* viene diviso in due parti *ab* e *bg*, dico che il quadrato di *ab* più il quadrato di *bg* e più il doppio prodotto di *ab* per *bg* è uguale al prodotto di tutta *ag* per se stesso. Dal momento che il segmento *ag* è stato diviso in due sezioni nel punto *b*, il prodotto di *ab* per se stesso più il prodotto di *gb* per *ba* è uguale al prodotto di *gb* per l'intera *ga*. Allo stesso modo, dunque, anche il prodotto di *bg* per se stesso più il prodotto di *bg* per *ga* è uguale al prodotto di *gb* per tutta *ga*: dunque il quadrato di *ab* più il quadrato di *bg* e più il doppio prodotto di *ab* per *bg* è uguale alla somma di *ab* per *ag* e di *bg* per *ag*. Infine, il prodotto di *ab* per *ag* più il prodotto di *bg* per *ag* è uguale al prodotto di *ag* per se, perché il quadrato di *ab* con il quadrato di *bg* e col doppio prodotto di *ab* per *bg* è uguale al quadrato del segmento *ag*, come volevasi dimostrare. **<5.3>** Dimostriamo questa asserzione anche attraverso dei numeri. Siano dati i segmenti *ab* pari a 3 e *bg* pari a 7, per cui l'intero segmento *ag* misurerà 10: se sommeremo il quadrato di *ab* – vale a dire 9 – al quadrato di *bg* – vale a dire 49 – e al doppio prodotto di *ab* per *bg*, il risultato sarà uguale a 100, vale a dire al prodotto di *ag* per se stesso.

<6.1> Di nuovo, *se un segmento viene diviso dove capita in due parti, il doppio prodotto di una delle due parti per tutto il segmento, unito al quadrato dell'altra parte, sarà uguale alla somma del quadrato della prima parte con il quadrato della seconda parte (vale a dire al quadrato di tutto il segmento), più il quadrato della porzione che è moltiplicata per il doppio del segmento intero.* **<6.2>** Se si divide il segmento *bg* dove capita nel punto *a*, dico che il doppio prodotto di *ab* per *bg* più il quadrato di *ag* è uguale alla somma del quadrato di *bg* con il quadrato di *ba*. Dal momento che il segmento *bg* è stato diviso in due parti nel punto *a*, il prodotto di *ba* per se stessa sommato al prodotto di *ba* per *ag* è uguale al prodotto di *ba* per *bg*, per cui il doppio del prodotto di *ba* per *bg* è uguale a due volte il quadrato di *ba* e due volte il quadrato di *ba* per *ag*. Innanzitutto, il quadrato di *ba* più il quadrato di *ag* e più il doppio prodotto di *ba* per *ag* è uguale al quadrato di tutto il segmento *bg*, perché la somma del quadrato di *ba* con il quadrato di *ag* e con il doppio prodotto di *ba* per *ag* è uguale alla somma del quadrato di *bg* col quadrato di *ba*. Ma il quadrato di *ba* più il quadrato di *ag* e più il doppio prodotto di *ba* per *ag* si è visto che è uguale al doppio prodotto di *ba* per tutto il segmento *bg.* Per questo motivo, il doppio prodotto di *ba* per *bg* unito al quadrato di *ag* è uguale alla somma del quadrato di *bg* con il quadrato di *ba*, come volevasi dimostrare. **<6.3>** Dimostriamo la stessa cosa con i numeri. Sia data la linea *bg* pari a 10. Di essa, siano date le porzioni *ba* pari a 3 e *ag* pari a 7: il doppio prodotto di *ba* per *bg* – vale a dire di 3 per 10 – sommato al prodotto di *ag* per se stesso – che è 49 – ammonta senz'altro a 109, che è uguale al prodotto di *bg* per se stesso, vale a dire 100, più *ab* per se stessa, che è pari a 9.

<7.1> *Se si divide un segmento in due parti uguali e in due diverse, il prodotto delle parti diverse, o meglio il prodotto di una parte per l'altra, più il quadrato del segmento che giace tra entrambe le sezioni, sarà uguale al quadrato della metà del segmento che è stato diviso.* **<7.2>** Se il segmento *ab* viene diviso in due parti uguali nel punto *g* e in due parti diverse nel punto *d*, dico che il prodotto di *ad* per *db* più il quadrato di *dg* è uguale al quadrato di *ag*. **<7.3>** Dal momento che il segmento *db* è stato diviso come capita nel punto *g*, e che ad esso si aggiunge il segmento *ad* di una certa lunghezza, il prodotto di *ad* per *db* sarà uguale al prodotto di *ad* per *bg* più il prodotto di *ad* per *gd*. In verità, il segmento *bg* è uguale al segmento *ga*, per cui la somma di *ad* per *ag* più *ad* per *gd* è uguale al prodotto di *ad* per *db*. **<7.4>** Ancora, dal momento che il segmento *ag* è stato diviso in due parti nel punto *d*, la somma di *ad* per *ag* e di *gd* per *ag* è uguale al quadrato di *ag*. Ma il prodotto di *dg* per *ag* è uguale al quadrato di *dg* più il prodotto di *ad* per *dg*, dunque il prodotto di *ad* per *ag* più il prodotto *ad* per *dg* e più il quadrato di *dg* è uguale al quadrato di *ag*. Ma abbiamo visto prima che la somma di *ad* per *ag* più *dg* per *da* è uguale al prodotto di *ag* per *db*, pertanto il prodotto di *ad* per *db* più il quadrato di *dg* è uguale al quadrato di *ag*, come volevasi dimostrare. **<7.5>** Dimostriamo questo assunto anche attraverso numeri: sia dato il segmento *ab* pari a 10 ulne e sia esso diviso in 5 e 5 nel punto *g*, in 3 e 7 nel punto *d*. Il prodotto di *ad* per *db* – vale a dire di 3 per 7 – più il quadrato di *dg*, sarà allora uguale al prodotto di *ag* per se stesso, vale a dire di 5 per 5.

<8.1> *Se un segmento viene diviso in due parti uguali, e a una di queste si aggiunge, sulla direttrice, un'altra linea di una certa lunghezza, il prodotto di* *tutto il segmento così costituito per il segmento che è stato aggiunto, più il quadrato di mezzo segmento, sarà uguale al quadrato del segmento che risulta dalla somma della metà del primo segmento più la porzione che è stata aggiunta.* **<8.2>** Se il segmento *ab* viene diviso in due parti uguali nel punto *g*, e si aggiunge sulla direttrice un altro segmento *bd* di una certa lunghezza, dico che il prodotto di *ad* per *bd*, cioè di *bd* per *ad*, più il quadrato di *gb*, ovvero di *ga*, è uguale al quadrato del segmento *gd*. **<8.3>** Dal momento che la linea *ad* è stata casualmente divisa nei punti *g* e *b*, il prodotto di *bd* per tutta *ad* sarà uguale alla somma di tre moltiplicazioni, che sono *bd* per *ag*, *bd* per *gb* e *bd* per *bd*. Ma poiché la linea *ag* è uguale alla linea *bg*, il prodotto di *bd* per *ag* è uguale al prodotto di *bd* per *gb*, perché la somma delle due moltiplicazioni *bd* per *ag* e *bd* per *bg* dà come risultato il doppio del prodotto di *bd* per *gb*. Dal momento che la somma del quadrato del segmento *bd* con il doppio prodotto di *bd* per *gb* è uguale al prodotto di *bd* per *ad*, si calcoli, secondo la procedura, il quadrato di *gb*: la somma del quadrato di *bd* con il quadrato di *bg*, più il doppio prodotto di *bd* per *bg*, è uguale alla somma del prodotto di *bd* per *ad*, più il quadrato della linea *gb*. Ma la somma del quadrato di *bd* col quadrato di *bg* e col doppio prodotto di *bd* per *bg*, è uguale al quadrato di *gd*, per cui la somma del prodotto di *bd* per *ad* con il quadrato di *bg* è uguale a *gd* al quadrato, come volevasi dimostrare. **<8.4>** Dimostriamo ciò anche attraverso l'ausilio di numeri: sia data la linea *ab* pari a 10 e sia essa divisa in due parti uguali, cioè in 5 e 5, nel punto *g*; ad essa si aggiunga lungo la direttrice il segmento *bd* di 3 ulne: l'intera linea *ad* misurerà allora 13 ulne, e *gd* sarà pari a 8. Senza dubbio, il prodotto di *bd* per *ad* – vale a dire di 3 per 13 – più il quadrato di *gb* – vale a dire più 25 – è pari a 64, vale a dire al quadrato della linea *gd*.

<9.1> *Se un segmento viene diviso in due parti uguali e in due diverse, la somma dei quadrati delle parti diverse è pari al doppio della somma del quadrato della parte che ne costituisce la metà e di quella che corrisponde alla differenza tra le due parti.* **<9.2>** Così, se il segmento *gd* sarà stato diviso in due parti uguali nel punto *a* e in due parti diverse nel punto *b*, dico che la somma del quadrato di *gb* e del quadrato di *bd* corrisponde al doppio della somma del quadrato di *da* col quadrato di *ab*. **<9.3>** Dal momento che la linea *ag* è stata divisa in due parti nel punto *b*, il quadrato del segmento *gb* più il quadrato del segmento *ba* e più il doppio prodotto di *ab* per *bg* è uguale al quadrato del segmento *ga*, ovvero del quadrato di *ad*. In verità, il quadrato del segmento *ba* più al prodotto di *ba* per *bg* è uguale al prodotto di *ba* per *ga*, perché il quadrato di *bg* unito al prodotto di *ba* per *ag* e al prodotto di *ba* per *bg* è uguale al quadrato di *ag*. **<9.4>** Si tracci il quadrato del segmento *ba*: la somma del quadrato di *gb* e del quadrato di *ba* con il prodotto di *ba* per *ga* e il prodotto di *ba* per *bg*, sarà uguale alla somma del quadrato del segmento *ad* col quadrato del segmento *ab*. Ma la somma del quadrato del segmento *ba* con il prodotto di *ab* per *bg* è uguale al prodotto di *ba* per *ga*: dunque, il quadrato di *gb* più il doppio prodotto di *ba* per *ga* è uguale alla somma del quadrato di *da* con il quadrato di *ab*, per cui il quadrato di *da* più il quadrato di *ab* è maggiore del quadrato di *gb* per il doppio prodotto di *ba* per *ga*, cioè di *ba* per *ad*. **<9.5>** Allo stesso modo, dal momento che il segmento *bd* è stato diviso in due parti nel punto *a*, la somma del quadrato di *da* col quadrato di *ab* e col doppio prodotto di *ba* per *ad* è uguale al tetragono, ovvero al quadrato del lato *bd*: di conseguenza, il tetragono del lato *bd* è maggiore del tetragono del lato *da*, nonché del tetragono del lato *ab* per il doppio prodotto di *ba* per *ad*. Quanto più grandi sono i tetragoni dei lati *da* e *ab* rispetto al tetragono del lato *bg*, tanto più grande risulta essere il tetragono *bd* rispetto al tetratono *gb*, dal momento che la somma del tetragono *gb* con il tetragono *bd* è pari al doppio della somma dei quadrati dei lati *da* e *ab*, come volevasi dimostrare. **<9.6>** Dimostriamo tale assunto anche attraverso numeri. Sia dato il segmento *gd* pari a 10 e sia esso diviso nel punto *a* in 5 e 5, e nel punto *b* in 3 e 7: il tetragono *gb* sarà pari a 9, il tetragono *bd* sarà pari a 49, e la loro somma sarà pari a 58, vale a dire al doppio della somma del quadrato di *da* con il quadrato di *ab*, perché il quadrato di *da* è pari a 25 e il quadrato di *ab* è pari a 4.

<10.1> *Se un segmento viene diviso in due parti uguali, e a questo si aggiunge sulla direttrice un altro segmento, la somma del quadrato di tutto il segmento che è stato diviso più il quadrato della porzione che è stata aggiunta sarà pari al doppio del quadrato di metà segmento più quello dell'altra metà sommata alla porzione che è stata aggiunta.* **<10.2>** Così, se il segmento *ab* viene diviso in due parti uguali nel punto *g*, e si aggiunge sulla direttrice il segmento *bd*, dico che il quadrato della linea *ad* più il quadrato della linea *bd* è pari al doppio del quadrato della linea *ag* più il quadrato della linea *gd*. **<10.3>** Dal momento che il segmento *ad* è stato diviso a caso in due parti nel punto *b*, la somma del quadrato di *ad* con il quadrato di *bd* sarà uguale al quadrato di *ab* e al doppio prodotto di *bd* per *ad*. Ma il doppio prodotto di *bd* per *ad* è uguale alla somma del quadrato del segmento *bd* più il doppio prodotto di *bd* per *ba*: di conseguenza, il tetragono *ab* unito al doppio del quadrato di *bd* e al doppio prodotto di *bd* per *ab*, è pari al quadrato della somma di *ad* e *bd*. In verità, il prodotto di *bd* per *ab* è pari al doppio prodotto di *bd* per *bg*. Dal momento che *bg* è la metà di *ab*, perché il doppio di *bd* per *ab* è quattro volte il prodotto di *bg* per *gb*, allora il quadrato di *ab* con il doppio del quadrato di *bd* e con il quadruplo di *bd* per *gb* è pari a due volte la somma del quadrato di *ad* con il quadrato di *bd*. Ma il quadrato di lato *ab* è quattro volte il quadrato costruito sulla metà di *ab*, vale a dire di lato *gb*. Di conseguenza, il quadruplo del tetragono *gb* unito al doppio del quadrato di *bd* e al quadruplo del prodotto di *bd* per *gb* è uguale al doppio della somma del quadrato di *ad* più il quadrato di *bd*.

<11.1> Di nuovo, dal momento che il segmento *gd* è stato diviso in due parti nel punto *b*, la somma del quadrato della porzione *gb* più il quadrato della porzione *bd* e più il doppio prodotto di *bd* per *bg* sarà uguale al quadrato di *gd*, perchè il doppio del quadrato del segmento *gb* più due volte il quadrato di *bd* e più quattro volte il prodotto di *bd* per *gb* sarà pari al doppio del quadrato del segmento *gd*. **<11.2>** In verità, il doppio del quadrato del segmento *gb* è pari al doppio del quadrato del segmento *ga*: ne consegue che la somma del quadruplo del quadrato del segmento *gb* più due volte il quadrato del segmento *bd* e più il quadruplo di *bd* per *gb* è pari al doppio del quadrato di *ab* più il quadrato di *bd*. Ma si è visto che la somma del quadruplo del quadrato di *gb* più due volte il quadrato di *bd* e più il quadruplo del prodotto di *bd* per *gb* è uguale a due volte il quadrato della somma di *ad* e *bd*, dal momento che la somma del quadrato di *ad* più il quadrato di *bd* è pari al doppio della somma del quadrato di *ag* più di quello di *gb*, come volevasi dimostrare. **<11.3>** Dimostriamo ciò anche attraverso i numeri. Sia dato il segmento *ab* pari a 10, e sia esso diviso nel punto *g* in 5 e 5; si aggiunga poi sulla direttrice il segmento *bd* della lunghezza di 3 ulne: tutto il segmento *ad* misurerà 13, mentre *gd* misurerà 8. Il quadrato del segmento *ad* è allora pari 169 mentre il quadrato del segmento *bd* è pari a 9. La loro somma ammonta a 178, vale a dire al doppio di 89, che corrisponde a sua volta alla somma dei quadrati *ag* e *gd*, ossia di 25 e 64. **<11.4>** Dal momento che mi sembra superfluo esplicitare attraverso dimostrazioni geometriche tutti i teoremi che Euclide ha già illustrato nei suoi scritti, ho intenzione di soffermarmi soltanto sui teoremi del suo libro che ritengo necessari agli scopi di questo libro opera, senza però darne la dimostrazione.

<12.1> *Se tre numeri, o tre quantità, sono tra loro in proporzione, per cui come il primo numero sta al secondo, così il secondo sta al terzo: allora il prodotto del primo numero per il terzo è uguale al quadrato del secondo numero, vale a dire al prodotto del secondo numero per se stesso.* **<12.2>** Per fare un esempio: siano dati 4, 6 e 9 in proporzione tra loro, sicché come 4 sta a 6, così 6 sta a 9, oppure come 9 sta a 6, così 6 sta a 4: ne consegue che il prodotto di 4 per 9 è uguale al prodotto di 6 per 6. Perciò quando, dati tre numeri, il prodotto del primo per il terzo è pari al quadrato del secondo numero, allora i tre numeri sono in proporzione tra loro.

<13.1> *Quando quattro numeri sono in proporzione tra loro, il primo sta al secondo come il terzo al quarto: ciò significa che il prodotto del primo numero per il quarto è uguale al prodotto del secondo numero per il terzo.* **<13.2>** Esempio: come il primo numero 6 sta al secondo 8, così il terzo numero 9 sta al quarto 12. Da ciò si comprende che il prodotto del primo numero per il quarto è uguale al prodotto del secondo numero per il terzo. Pertanto i quattro numeri sono in proporzione tra loro, e il primo numero è in proporzione al secondo, come il terzo numero lo è rispetto al quarto.

<14.1> *Si tenga presente che quando un numero viene diviso per un altro numero, se il risultato della divisione viene moltiplicato per il divisore, da questa moltiplicazione si otterrà di nuovo il numero che era stato diviso.* **<14.2>** Così se si divide 20 per 4, il risultato sarà pari a 5; dunque, dalla moltiplicazione di 4 per 5 verrà fuori il numero 20 che prima era stato diviso.

<15.1> *Se invece di tre numeri in proporzione tra loro solo due saranno noti, vale a dire il primo e il secondo, e il terzo sarà ignoto: dividi il quadrato del secondo numero per il primo numero, e il risultato corrisponderà al terzo numero.* **<15.2>** Esempio: sia dato il primo numero pari a 4, il secondo pari a 6, e ignoriamo il terzo. Divideremo allora il quadrato di 6, vale a dire 36, per 4, vale a dire per il primo numero: il risultato sarà 9 e corrisponderà al terzo numero. Ne consegue che se moltiplicheremo il risultato di questa operazione, che è 9, per il divisore 4, tornerà 36, che è il numero che è stato diviso prima. **<15.3>** Dunque quando dalla moltiplicazione del primo numero per il terzo viene come risultato il quadrato del secondo numero, allora i tre numeri sono in proporzione tra loro. Ne consegue che come 4 sta a 6, così 6 sta a 9. Se poi ignoreremo il primo numero, divideremo 36 per il terzo numero 9, e il risultato è pari a 4, che corrisponde al primo numero. Se infine ignoreremo il secondo numero, moltiplicheremo il primo numero per il terzo, ossia 4 per 9: il risultato sarà pari a 36, la radice del quale, che è 6, corrisponde al secondo numero.

<16.1> *Come il primo numero* a *sta al secondo* b*, così il terzo* g *sta al quarto* d. **<16.2>** Dal momento che il prodotto del primo numero per il quarto, vale a dire di *a* per *d*, è uguale al prodotto di *b* per *g*, vale a dire del secondo numero per il terzo, se *a*, *b* e *g* siano noti e *d* invece ignoto, divideremo per *a* il risultato del prodotto di *b* per *g*, ed otterremo *d*. Se, poi, il medesimo risultato del prodotto di *b* per *g* viene diviso per *d*, otterremo *a*. Per questo motivo, dunque, se il prodotto di *a* per *d* viene diviso per *b*, il risultato sarà *g*; se invece viene diviso per *g*, il risultato sarà *b*. **<16.3>** Esempio: sia *a* pari a 4, *b* pari a 6, *g* pari a 8 e *d* pari a 12: se il prodotto di *b* per *g*, vale a dire 48, viene diviso per *a*, vale a dire per 4, il risultato sarà *d*, vale a dire 12, mentre se il medesimo 48 viene diviso per 12, vale a dire per il quarto numero, il risultato sarà 4, vale a dire il primo numero. Allo stesso modo, se il risultato del prodotto del primo numero per il quarto, vale a dire di 4 per 12 – che fa 48 – divideremo per il secondo numero, vale a dire per 6, il risultato sarà 8 che corrisponde al terzo numero. Infine, se 48 viene diviso per il terzo numero, vale a dire per 8, si otterrà come risultato il secondo numero.

<17.1> Dopo aver memorizzato queste nozioni, occorre affermare che: *quando, in un cerchio, due segmenti si intersecano tra loro, il prodotto di parte di un segmento per l'altra sua parte sarà uguale al prodotto di parte dell'altro segmento per quel che gli avanza.* **<17.2>** Così, se in un cerchio *abgd* due segmenti *ag* e *bd* si intersecano tra loro nel punto *e*, senza dubbio il prodotto di *ae* per *eg* è uguale al prodotto di *be* per *ed*, come si dimostra in Euclide. Ora, però, occupiamoci di come si debbano estrarre le radici quadrate.

Fine della Prima Distinzione.

APPENDICE

Appendice delle fonti e dei luoghi paralleli

<1>

<1> Ps. Gerbertus, *GIA*, pp. 345-6 (Bubnov): omnis autem tetragonum aequa latera habens unum latus in se multiplicat et ea semel multiplicatione aream suam implet; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 86 (Busard):** cum aliquis tibi dixerit: est quadratum equilaterum et orthogonium cuius quodque latus est decem, eius igitur area quanta est? Erit regula sciendi illud, ut multiplices unum latus eius in secundum et quod proveniet, erit area; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 28 (Curtze):** Primum igitur ipsius quadrati dimensiones ostendimus, quem aequilaterum et aequiangulum fore proponimus, quem etiam certam communem superficierum quarumlibet figurarum mensuram esse praediximus. Harum autem dimensionum modus est, ut prius cuiusque ipsorum laterum lineares mensuras invenias, inventasque in sui ipsius summam multiplices, indeque collectum embadum eiusdem quadrati fore non ambigas. Ad cuius similitudinem si quadratus equiangulus, cuius singula latera duas lineares ulnas contineant, describatur, eius embadum quatuor quadratas ulnas maiori quadrato consimiles continebit, eo quod, si binarium per binarium duxeris, quatuor efficies.

<2> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 28 (Curtze): Et ut liquidius hoc ad oculum deprehendas, esto quadratus *abcd* cuius unumquodque latus in duo equa dividatur, ut latus *ab* supra punctum *e*, latus vero *bc* supra punctum *f*, latus autem *cd* supra punctum *g*, latus quoque *da* supra punctum *k* secetur. Post hoc a puncto *e* ad punctum *g* lineam *eg*, a puncto vero *f* usque ad *h* lineam *fh* producemus. Dicimus igitur, hunc qua<dratum> in quatuor equa fore divisum, in quorum unoquoque ulna super ulnam continetur, omnesque maiori quadrato *abcd* adsimiliantur, et in unum collecti equantur, at ipsi sunt totius quadrati totum embadum; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 28 (Curtze):** horum quidem unumquemque maiori adsimilari diximus, <quia> eorundem singulorum latera lateribus maioris sunt comproportionalia: est enim eorum unumquodque latus lateris quadrati *abcd* medietas, et eorum omnes anguli illius anguli aequantur, sunt enim utrique omnes anguli recti invicem aequales. Et quia <pro>portio istorum quadratorum ad invicem est eadem, ipsi invicem sunt aequales, totique in unum collecti primum quadratum complent, et singuli unam ulnam in longitudine et alteram in latitudine suscipiunt. Hac igitur demonstratione quadratorum embada reperiuntur; **Abraham Ibn Ezra, *Sefer ha-Middot*, p. 215 (Lévy-Burnett):** figure quarte, id est quadrangulate, equalis in longo et lato.

<2>

<1> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, pp. 18-20 (Curtze): Item cum dicimus: cuiuslibet lineae in quamlibet etiam lineam multiplicatio, hoc significare volumus, ut quadrilaterum longum, cuius omnes anguli sunt recti, duoque latera aequidistantia uni illarum linearum, aliaque duo latera aequidistantia alteri linearum sicut aequalia constituamus; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, pp. 28-30 (Curtze):** at si parte altera longior fuerit, et eius embadum scire volueris, quodlibet eorum laterum in latus sibi contiguum <multiplicans embadum invenies. Ut in hac parte altera longiori, cuius unum latus 9 ulnas, aliud vero ei contiguum> 5 ulnas continet. Huius igitur embadum si nosse desideras, 9 in 5 multiplica, et 45 ulnas in eius embado procul dubio reperies; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 90 (Busard):** cuius exemplum est, ut sit quadratum altera parte longius, cuius unumquodque duorum laterum eius longiorum sit octo et unumquodque duorum breviorum sit sex, area igitur eius quanta est? Regula sciendi hoc <est>, ut multiplices unum laterum ipsius continencium rectum angulum in secundum et quod provenerit, est area ipsius quod est 48.

<3> Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 3 (Boncompagni): quinque enim superficiales pertice et semis faciunt 1 panorum. [...] Et si pertica vel pertice multiplicantur in panora, vel panora in perticas, quicquid ex multiplicatione consurgit, erunt panora.

<4> Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 3 (Boncompagni): quinque enim superficiales pertice et semis faciunt 1 panorum. [...] Et si pertica vel pertice multiplicantur in panora, vel panora in perticas, quicquid ex multiplicatione consurgit, erunt panora.

<6> Euc. II, 1 (Heiberg): Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

<7> Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 3 (Boncompagni): sexaginta nempe et sex pertice quadrate faciunt mensuram quandam que vocatur stariorum.

<3>

<1> Fibonacci, *Pratica Geometrie*, p. 4 (Boncompagni): pedes multiplicati in perticas, vel pertice in pedes, erunt pedes, sive medii soldi.

<2> Beda, *De temporum ratione* 1 (Jones): cum ergo dicis unum, minimum in laeua digitum inflectens, in medium palmae artum infiges. Cum dicit duo, secundum a minimo flexum, ibidem impones. Cum dicis tria, tertium similiter adflectes. Cum dicit quattuor, itidem minimum leuabis. Cum dicis quinque, secundum a minimo similiter eriges. Cum dicis sex, tertium nihilominus eleuabis, medio dumtaxat solo, qui medicus appellatur, in medium palmae fixo. Cum dicis septem, minimum solum, caeteris interim leuatis, super palmae radicem pones. Iuxta quem cum dicis octo, medicum. Cum dicis nouem, impudicem e regione compones. Cum dicis decem, unguem indicis in medio figes artu pollicis. Cum dicis decem, unguem indicis in medio figes artu pollicis. Cum dicis uiginti, summitatem pollicis inter medios indicis et impudicis artus immittes.Cum dicis triginta, ungues indicis et pollicis blando coniunges amplexu. Cum dicis quadraginta, interiora pollicis lateri uel dorso indicis superduces, ambobus dumtaxat erectis. Cum dicis quinquaginta, pollicem exteriore artu instar graecae literae gammae curuatum, ad palmam inclinabis. Cum dicis sexaginta, pollicem (ut supra) curuatum, indice circumflexo diligenter a fronte praecinges. Cum dicis septuaginta, indicem (ut supra) circumflexum pollice immisso superimplebis, ungue dumtaxat illius erecto trans medium indicis artum. Cum dicis octoginta, indicem (ut supra) circumflexum, pollice in longum tenso implebis, ungue uidelicet illius in medium indicis artum infixo. Cum dicis nonaginta, indicis inflexi unguem radici pollicis erecti infiges. Hactenus in laeua. Centum uero in dextera, quomodo decem in laeua facies. Ducenta in dextera, quomodo uiginti in laeua. Trecenta in dextera, quomodo triginta in laeua. Eodem modo et caetera usque ad dcccc. Item mille in dextera, quomodo unum in laeua. Duo millia in dextera, quomodo duo in laeua. Tria millia in dextera, quomodo tria in laeua. Et cetera usque ad nouem millia. Porro decem millia cum dicis, laeuam medio pectoris supinam appones, digitis tantum ad collum erectis. Viginti millia cum dicis, eandem pectori expansam late superpones. Triginta millia cum dicis, eadem prona, sed erecta, pollicem cartilagini medii pectoris immittes. Quadraginta millia cum dicis, eandem in umbilico erectam supinabis. Quinquaginta millia cum dicis, eiusdem pronae, sed erectae, pollicem umbilico impones. Sexaginta millia cum dicis, eadem prona femur laeuum desuper comprehendes. Septuaginta millia cum dicis, eandem supinam femori superpones. Octoginta millia cum dicis, eandem pronam femori superpones. Nonaginta millia cum dicis, eadem lumbos apprehendes, pollice ad inguina uerso. At uero centum millia et ducentum millia et caetera usque ad dcccc millia, eodem quo diximus ordine in dextera corporis parte complebis. Decies autem centena millia cum dicis, ambas sibi manus, insertis inuicem digitis implicabis; **Hrabanus Maurus, *De computo* 1, 6 (Stevens)**: discipulus: quomodo ergo numeri digitorum inflexionibus exprimuntur? Magister: igitur tres digiti in eadem manu a mille usque ad nouem milia continent numerum, id est auricularis, impudicus, et medicus. Item sinistra manus per artus diuersos corporis continet numerum a decimo milibus usque ad nonaginta milia. Et a contrario dextra manus continet numerum per iuncturas et dispositiones membrorum a centum milibus usque ad nongentos milia. Discipulus: haec ergo omnia precor ut speciatim mihi patefacias. Magister: cum ergo dicis unum, minimum in leua digitum inflectens in medium palmae artum infiges. Cum dicis duo, secundum a minimo flexum ibidem impones. Cum dicis tria, tertium similiter adflectes. Cum dicis quattuor, itidem minimum leuabis. Cum dicis quinque, secundum a minimo similiter eriges. Cum dicis sex, tertium nihilominus eleuabis medio dumtaxat solo, qui medicus appellatur, in medium palmae fixo. Cum dicis septem, minimum solum, ceteris interim leuatis super palmae radicem pones. Iuxta quem cum dicis octo, medicum. Cum dicis nouem, impudicem e regione compones. Cum dicis decem, unguem indicis in medio figes artu pollicis. Cum dicis uiginti, summitatem pollicis inter medios indicis et impudicis artus immittes. Cum dicis triginta, ungues indicis et pollicis blando coniunges amplexu. Cum dicis quadriginta, interiora pollicis lateri uel dorso indicis superduces, ambobus dumtaxat erectis. Cum dicis quinquaginta, pollicem exteriore artu instar grecae litterae gammae curuatum ad palmam inclinabis. Cum dicis sexaginta, pollicem ut supra curuatam, indice circumflexo diligenter a fronte precinges. Cum dicis septuaginta, indicem ut supra circumflexum pollice immisso superimplebis ungue dumtaxat illius erecto trans medium indicis artum. Cum dicis octoginta, indicem ut supra circumflexum pollice in longum tenso implebis ungue uidelicet illius in medium indicis artum infixo. Cum dicis nonaginta, indicis inflexi unguem radici pollici erecti infiges. Hactenus in leua. Centum uero in dextera quomodo decem in leua facies; ducenta in dextera quomodo uiginti in leua; trecenta in dextera, quomodo triginta in leua; eodem modo et cetera usque ad DCCCC. Item mille in dextera, quomodo unum in leua; duo milia in dextera, quomodo duo in leua; tria milia in dextera, quomodo tria in leua; et cetera usque ad nouem milia. Porro decem milia cum dicis, leuam medio pectoris supinam adpones, digitis tantum ad collum erectis; uiginti milia cum dicis, eandem pectori expansam late superpones; triginta milia cum dicis, eadem prona sed erecta pollicem cartillagini medii pectoris immittes; quadraginta milia cum dicis, eandem in umbilico erectam supinabis; quinquaginta milia cum dicis, eiusdem pronae sed erectae pollicem ubilico inpones; sexaginta milia cum dicis, eadem prona femur leuum desuper comprehendis; septuaginta milia cum dicis, eandem supinam femori superpones; octoginta milia cum dicis, eandem pronam femori superpones; nonaginta milia cum dicis, eadem lumbos adprehendes, pollice ad inguinem uerso. At uero centum milia et ducenta milia usque ad DCCCC milia, eodem quo diximus ordine, in dextera corporis parte complebis; **Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 5 (Boncompagni)**: predictis figuris earumque gradibus secundum materiam superius descriptam cum frequenti usu bene cognitis, opportet eos qui arte abbaci uti voluerint, ut subtiliores et ingeniores appareant, scire computum per figuram manuum, secundum magistrorum abbaci usum antiquitus sapientissime inventam. Que signa sunt hec. Curvatio auricularis digiti sinistre manus super medium vole 1 palme manus notat unum. Curvatio quidem eiusdem cum anulari similiter super mediam volam duo, cum quibus curvatur medius tria. Curvatio autem anularis et medis 4 super mediam volam. Curvatio vero medii tantum 5. Anularis 6. Positio quippe auricularis sursum super volam 7, super quem locum cum ponitur auricularis et anularis notantur 8: positio quidem eorumdem cum medio super eundem locum 9. Cum ab extremitate indicis et pollice fit circulus in nodo pollicis, denotant 10. Cum pollex et index sunt extensi et tangunt se 20. Cum ab extremitate eorumdem sit circulus 30. Cum ponitur pollex super indicem in exteriori parte indicis 40. Curvatio pollicis super principium indicis 50. Curvatio indicis super curvatum pollicem 60. Curvatio indicis super extremitatem extensi pollicis 70. Curvatio itaque indicis super virgulam extensi pollicis 80. Item curvatio totius indicis in se 90. Centenaria quoque et miliaria fiunt in dextera manu eodem ordine, scilicet signum unitatis facit 100 in dextera manu; binarii quidem 200; decenarii autem mille, et signum nonagesimum facit 9000, ut in sequenti pagina piettis (sic) manibus demonstratur. Componuntur itaque in manibus cum his signis omnes reliqui numeri qui sunt a decem usque in decem milia hoc modo: ex signo vigenarii, et ex signo ternarii componuntur 23; et ex signo trium milium et ex signo quingentarum componuntur in dextera manu tria milia quingenta, et sic intelligas in reliquis; **Bonaventura, *Sermones dominicales* 13, 10 (Bougerol)**: auricularis sive digitus parvus in palma positus sive reflexus significat unitatem. Sed medicus qui est iuxta digitum parvum in palma positus significat dualitatem cum auriculari. Medius vero qui est in medio digitorum eodem modo positus cum praedictis duobus significat trinitatem. Deinde secundum istum modum non est ultra procedere sed auricularis erectus medio et medico iacente significat quaternitatem.Iacente vero medio in palma auricularis et medicus erectus significat quinque. Medico autem iacente cum auriculari et medius erectus significat sex.Item auricularis extensus super palmam significat septem. Medicus eodem modo extensus significat octo. Sed medius similiter extensus significat novem. Index vero positus in medio pollice decem. Sed per coniunctionem rectam indicis ad pollicem numerus vigesimus significatur. Per amplexum vero mollem et coniunctionem sumitatum indicis et pollicis trigesimus numerus significatur per quem numerum satis congrue dominus meritum coniugatorum expressit propter illorum mollem amplexum et unionem carnalem. Index siquidem firmiter constrictus super pollicem in modum crucis numerum sexagesimum significat. Per quem numerum convenienter intelligitur meritum continentium quorum vita est restricta a voluptuosa delectatione carnis per superpositionem rationis ad sensualitatem propter voluntariam assumptionem crucis. Sed per numerum centesimum cuius computatio ratione perfectionis fit in dextera valde eleganter exprimitur meritum virginitatis ratione suae perfectionis quia virgines vitam angelicam et caelestem in quantum possunt ducunt.

<4>

<2> Euc. II, 1 (Heiberg): Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσα δηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμή του καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 127 (Folkerts)**: si sint duae rectae lineae quarum una quidem est indivisa altera vero quotlibet divisionibus secta quod sub duabus rectis lineis rectiangulum continetur aequum erit his quae sub ea quae indivisa est et unaquaque divisione rectiangula continentur.

<3> Euc. II, 2 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ; **ps. Boeth. *Geom*. p. 127 (Folkerts)**: si recta linea secetur quod sub tota et una portione rectiangulum continetur aequum est ei quod sub utraque portione rectiangulum clauditur et ei quadrato quod ad praedictam portionem describitur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 20 (Curtze):** si recta item linea in duo aequa secetur, cui alia in directum linea recta adiungatur, rectiangula superficies, quae sub totius cum adiuncta in adiunctam multiplicatione continetur, cum quadrato, qui a lineae dimidio describitur, quadrato a dimidio et ab adiuncta constanti aequatur. **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 20 (Curtze):** sit quidem linea 10 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 5 et 5, divisa, eique duo superadiungantur, et 12 efficiunt. Erit igitur multiplicatio 12 in duo cum multiplicatione 5 in se ipsum, <quod est primae lineae medietas, quadrato 7>, quod est primae lineae medietas cum additamento, <aequalis>.

<4> Euc. II, 3 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 127 (Folkerts):** si recta linea secetur utlibet quod describitur a tota quadratum aequum est his quae describuntur ab unaquaque portione quadratis et bis ei rectiangulo quod sub eisdem portionibus convenit.

<5> Euc. II, 4 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων ετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 127 (Folkerts)**: si recta linea per aequalia ac per inaequalia secetur quod sub inaequalibus totius sectionibus rectilineum continetur cum eo quadrato quod ab ea describitur quae inter utrasque est sectiones aequum est ei quadrato quod describitur ab ea quae constat ex adiecta atque dimidia.

<6> Euc. II, 7 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 128 (Folkerts)**: si recta linea per aequalia secetur ei que in directum quaedam linea recta iungatur quadratum quod describitur a tota cum addita et quadratum quod describitur ab ea quae addita est utraque quadrata pariter accepta ab eo quadrato quod describitur a dimidia et ab eo quadrato quod ab ea describitur quae ex dimidia adiecta que consistit utrisque quadratis pariter acceptis dupla esse necesse est; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 22 (Curtze):** item si recta linea in duo aequalia et totidem inaequalia secetur, qui a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione in se ipsas duo procreantur quadrati, duplo duorum quadratorum, qui sub dimidia et ea, quae est inter utrasque sectiones continetur, aequales fore perhibentur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 22 (Curtze):** Ut si linea 12 ulnarum per aequalia in 6 et 6 divisa et per inaequalia in 5 et 7 abscissa multiplicatio 7 in se ipsum et 5 in se ipsum 74 efficient. Duplum autem multiplicationis 6, quod est totius medietas, in se ipsum 72, et duplum multiplicationis unius, quod inter utrasque sectiones continetur, duo; duobus vero 72 superadditis 74 procreabuntur.

<7> Euc. II, 5 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ; **Ps. Boeth. *Geom.* p. 128 (Folkerts)**: si recta linea per aequalia dividatur alia vero ei in directum linea recta iungatur quod sub tota et ea quae adiecta est rectilineum continetur cum eo quod describitur a dimidio quadrato aequum est ei quadrato quod describitur ab ea quae constat ex adiecta atque dimidia; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 156 (Burnett):** si recta linea per aequalia et inaequalia secetur, quod fit a media aequum est ei quod fit ab inaequalibus inter se et ea quae sunt inter utrasque sectiones; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 20 (Curtze):** item si linea recta in duo aequalia et totidem inaequalia dividetur, que a totius lineae inaequalium portionum multiplicatione ad invicem rectiangula superficies efficitur, cum quadrato a linea, quae est inter utrasque sectiones, descripto, quadrato, qui a multiplicatione totius lineae dimidii in se ipsum formatur, aequabitur. **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum* p. 20 (Curtze):** sit igitur exempli causa quaedam linea 12 ulnarum in duo aequalia, quae sunt 6 et 6, et duo inaequalia, quae sunt 8 et 4, divisa; eritque multiplicatio 8 in 4, quae sunt partes inaequales, 32, multiplicatioque binarii, qui inter utrasque sectiones continetur, in se ipsum 4, quod totum, cum in unum redactum fuerit, numero 36, qui est medietatis totius lineae multiplicatio in se ipsam, aequatur.

<8> Euc. II, 6 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 128 (Folkerts):** si recta linea per aequalia ac per inaequalia secetur quadrata quae ab inaequalibus totius portionibus describuntur dupla sunt his quadratis quae fiunt a dimidia et ab ea quae inter utrasque est sectiones; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 158 (Burnett):** si recta linea per aequalia secetur, et alia in directo sibi iungatur, quod a tota composita in additam fit cum quadrato dimidiae, aequum est ei quod constat a dimida et addita iunctis.

<9> Euc. II, 9 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 128 (Folkerts)**: si recta linea per aequalia ac per inaequalia secetur quadrata quae ab inaequalibus totius portionibus describuntur dupla sunt his quadratis quae fiunt a dimidia et ab ea quae inter utrasque est sectiones; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 22 (Curtze):** item si recta linea in duo ubilibet abscindatur, quadratus, qui a totius in se ipsam multiplicatione colligitur, cum quadrato ab alterius portionis multiplicatione constituto aequus est duplo rectianguli, qui sub totius in praedictam portionem multiplicatione continetur, et eo quadrato, qui a relique portionis in se ipsam multiplicatione colligitur. Sit verbi gratia linea 12 ulnarum in 5 et 7 divisa, eritque multiplicatio 12 in se ipsum 144, multiplicatioque 5 in se ipsum 25, quod totum collectum 169 procreat. Hic autem numerus duplo multiplicationis 12 in 5 et multiplicationi 7 in se ipsum sequatur.

<10> Euc. II, 10 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 128 (Folkerts)**: si recta linea per aequalia secetur ei que in directum quaedam linea recta iungatur quadratum quod describitur a tota cum addita et quadratum quod describitur ab ea quae addita est utraque quadrata pariter accepta ab eo quadrato quod describitur a dimidia et ab eo quadrato quod ab ea describitur quae ex dimidia adiecta que consistit utrisque quadratis pariter acceptis dupla esse necesse est; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 22 (Curtze):** si recta linea in duo aequa divisa fuerit, cui quaedam recta linea in directum adiciatur, qui a tota cum adiuncta quadratus describitur, et qui sub illa, quae superadiuncta est, quadratus efficitur, utrique simul assumpti ei quadrato, qui a dimidia describitur, et ei quadrato qui efficitur ab ea, quae ex dimidia et adiuncta consistit, utrisque simul acceptis, dupli fore pronunciantur.

<12> Euc. VI, 17 (Heiberg): Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

<13> Euc. VII, 19 (Heiberg): Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσασρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσοντα.

<15> Ps. al-Khwāwirzmī, *Liber Alchorismi*, p. 176 (Allard): et omnis numerus habens radicem, ductus in numerum habentem radicem, procreat numerum habentem radicem, ut quatuor qui habet radicem si multiplicetur in novenarium, qui similiter habet radicem, procreantur inde 36, cuius radix senarius est: sexies enim sex 36 fiunt.

<17> Euc. III, 35 (Heiberg): Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 24 (Curtze):** item si duae rectae lineae se invicem intra circulum intersecant, rectiangula superficies, quae sub duabus earum partibus continetur, aequa est superficiei rectiangulae, quae sub duabus alterius lineae partibus collocatur; **Ps. al-Khwāwirzmī, *Liber Alchorismi*, pp. 218-9 (Allard):** de invenienda radice cum circulis: si autem cuiuslibet numeri integri cum fractionibus volueris invenire radicem, reduc eum per premissas regulas in ultimum genus suarum fractionum. Que si fuerint habentes radicem, invenies eam per premissam regulam, prepositis sibi quotlibet, sed tamen paribus circulis. Si autem non fuerint habentes radicem, reduc eas ad inferiores differentias habentes radicem, videlicet ad secunda, vel ad quarta; et sic per ordinem, ut predictum est. Quibus sic reductis, et prepositis illis quotlibet, sed paribus circulis, invenias radicem earum, pretermittendo semper differentias secundum medietatem prepositorum circulorum, sicut supra monstratum est. Inventa autem radix, considera quas habet fractiones, quas reducet ad sua altiora. Si enim fractiones, quarum radix erat invenienda, fuerint sexta, eorum radix erunt tercia. Si autem fuerint quarta, eorum radix erunt secunda. Et si fuerint secunda, eorum radix erunt minuta, que reducenda sunt ad gradus, sicut expositum est in precedentibus.

«L'acquisto di qualunque cognizione è sempre utile allo intelletto, perché potrà scacciare da sè le cose inutili, e riservare le buone. Perché nessuna cosa si può amare, né odiare, se prima non si ha cognizion di quella».

Leonardo da Vinci

La Seconda Distinzione

La Seconda Distinzione è dedicata al calcolo delle radici quadrate. Il tema era noto già nell'antichità ai Babilonesi[1], agli Indiani[2], ai Cinesi[3], ai Greci[4] e agli Arabi[5]. Esso, come sappiamo, è strettamente legato al problema della risoluzione delle equazioni di secondo grado e, in quanto tale, è un argomento tipico dei trattati di aritmetica e di algebra. Leonardo Pisano fornì un algoritmo per l'estrazione della radice quadrata nel quattordicesimo capitolo del *Liber Abaci*, in cui diede della radice quadrata una definizione di tipo aritmetico, intendendo per essa la funzione inversa della potenza. È probabile che l'autore abbia maturato questa definizione sui testi di algebra di origine araba, o attraverso la lettura in lingua originale di questi scritti, oppure servendosi di traduzioni e adattamenti in lingua latina. Non è un caso, infatti, che la definizione di radice quadrata presente nel *Liber Abaci*:

---

[1] Già in epoca babilonese si conosceva un'ottima approssimazione della radice quadrata di numeri irrazionali. In particolare la piccola tavoletta YBC 7289, oggi conservata all'interno della Collezione Babilonese dell'Università di Yale, fornisce un'approssimazione della $\sqrt{2}$ fino alla quinta cifra. È ancora ampiamente utile sull'argomento BORTOLOTTI 1936, pp. 213-224. Per una bibliografia più aggiornata, cfr. RIVOLO –SIMI 1998, pp. 161-193.

[2] È attualmente conservato presso la Bodleian Library dell'università inglese di Oxford il *Bakhshali*, un manoscritto matematico di origine pakistana databile tra il II sec. a.C. e il III sec. d.C. In esso si trova la formula per calcolare le radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti. Per una bibliografia sull'argomento rimando al contributo di HAYASHI 2008.

[3] È di origine cinese il primo documento che illustra un algoritmo per l'estrazione della radice quadrata. RIVOLO-SIMI 1998, p. 161: «l'illustrazione di una regola per estrarre la radice quadrata, per la prima volta, si trova apertamente nel quarto dei *Nove Capitoli sull'Arte Matematica* ('Chiu Chang Suan Shu') (206 a.C. – 221 d. C.); con essa le cifre della radice vengono determinate l'una dopo l'altra, con lo stesso metodo che si insegna attualmente a scuola, basato sulla relazione $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dimostrata geometricamente da Euclide».

[4] Di particolare rilievo, per i greci, fu la figura di Teone di Alessandria, il quale fornì un esempio di calcolo della radice quadrata di frazioni sessagesimali nel suo commento all'*Almagesto* di Tolomeo (RIVOLO –SIMI 1998, p. 161).

[5] Tra gli autori arabi maggiormente tenuti presente dal Fibonacci, una menzione particolare merita al-Khwārizmī. Cfr. ROZZA 2015[1].

> ***Liber Abaci*, p. 353 (Boncompagni):** Radix enim quidem cuiuslibet numeri est numerus qui, cum in se multiplicatur, facit ipsum numerum, ut 3 que sunt radix de 9,

ricorra in maniera molto simile anche negli adattamenti latini dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī operati nel corso XII secolo, ad esempio nel *Liber Alchorismi*:

> ***Liber Alchorismi* pp. 175-6 (Allard):** Radix autem cuiuslibet numeri est quilibet alius numerus qui, in se multiplicatus, reddit ipsum,

e nel *Liber Ysagogarum*:

> ***Liber Ysagogarum* p. 51 (Allard):** verumtamen radix, que in geometria latus dicitur, est cuiuslibet numeri numerus, qui in se ipsum ductus, ipsum efficiet, ut 3 novenarii,

in cui si riscontra il medesimo esempio del tre che è radice di nove.

Per quel che concerne la *Pratica Geometrie*, l'autore illustra con vari esempi in che modo si estragga la radice sorda, ossia la radice di un numero non quadrato, fino a otto cifre[6]. Particolarmente dettagliata è la descrizione da lui fornita dell'algoritmo per l'estrazione della radice di 864:

> ***Distinctio* II, 1 (2.3):** Item si vis invenire radicem de 864: pone 2 sub 6, cum 2 sint integra radix de 8, et 4 que remanent pone super 8. Deinde dupla ipsa 2: erunt 4, que pone sub 2, et per ipsa 4 divide 46, scilicet copulationem superflui tertie figure cum secunda: exibunt 11. Ex qua divisione possumus habere arbitrium sequentis ponende figure, que multiplicanda est per duplum prime figure posite et postea per se ipsam. Erit ipsa figura aut parum minus, aut totidem quantum ex ipsa divisione evenit, quod cognosces ex usu: quare ponemus arbitrio 9 sub prima figura, que sunt minus de 11 predictis. Et multiplicabis 9 per 4, scilicet per duplum inventi binari, et extrahes de 46 predictis, et ex remanentibus 10 pones 0 super 6 et 1 super 4. Et copulabis ipsa 10 cum 4 primi gradus: erunt 104. De quibus, extracta muliplicatione novenari in se ipso, remanent 23, que 23 sunt minus dupla radicis invente, <scilicet de 29>[7],

---

[6] Non si conosce la reale origine degli attributi *sorda* o *muta* con i quali, nel Medioevo, molti autori appellavano la radice irrazionale. Interessante è l'ipotesi di RIVOLO-SIMI 1998, p. 164, n. 8, in cui si afferma che «l'origine degli attributi *sorda* o *muta* [...] può verosimilmente essere la seguente: nella lingua greca i due attributi *senza rapporto* (quindi *irrazionale*) e *senza parola* (ossia *muto*) vengono tradotti rispettivamente con i due termini ἄλογος e ἄλαλος».

[7] «Se vuoi calcolare la radice di 864: posiziona 2 sotto al 6, perché 2 è la radice intera di 8, e il 4 che rimane posizionalo sopra l'8. Poi raddoppia 2: il risultato sarà 4. Posizionalo sotto al 2, poi dividi 46, che è il risultato dell'unione di quanto avanzato della terza cifra con la seconda, per questo 4: il risultato sarà di 11. Grazie a questa divisione, possiamo avere un'idea della cifra che bisogna porre dopo, la quale innanzitutto deve essere moltiplicata per il doppio della prima cifra

in cui sono particolarmente degni di interesse il verbo *copulo* e il sostantivo *copulatio* che da esso deriva. Essi non indicano l'atto di compiere un'addizione (o una qualsiasi delle classiche quattro operazioni); al contrario, col verbo *copulare* l'autore intende dire che queste cifre vanno lette insieme, come se si trattasse di un unico numero[8]. Il verbo *copulo* indica l'azione di legare insieme, di associare: pertanto la *copulatio* consiste in un'associazione, non solo di parole, ma anche di idee e di oggetti[9]. Nel linguaggio dell'artimetica, la *copulatio* consiste in un'associazione di numeri[10]: allo stesso modo, Fibonacci concepisce la *copulatio numerorum* come il risultato dell'accostamento di due cifre[11].

Dopo aver descritto il procedimento relativo all'estrazione della radice quadrata di un numero, Fibonacci illustra un sistema per verificare che il risultato dell'operazione sia giusto. Tale sistema consiste nel dividere sia la radice intera, sia il resto, per 7. Nell'esempio riportato di seguito l'autore, dopo aver calcolato che la radice di 12345 è pari a 111 col resto (ancora quadrato) di 24, procede alla seguente dimostrazione:

> ***Distinctio* II, 1 (4.3):** Verbi gratia: proba de 111 per 7 est 6, quia divisis 111 per 7 remanent 6, quibus in se multiplicatis, faciunt 36, quibus per 7 divisis remanet 1, quo addito cum proba de 24, que est 3, faciunt 4, scilicet probam de 12345, quia

---

che è stata posta, e poi deve essere moltiplicata per se stessa. Questa cifra sarà o di poco inferiore, o del tutto pari al risultato della divisione, come capirai con la pratica: a tale scopo, metteremo ad arbitrio 9 sotto la prima cifra, che è minore di 11. Moltiplicherai poi 9 per 4, vale a dire per il doppio del 2 che è stato trovato prima, e sottrarrai il risultato da 46: otterrai 10, e scriverai 0 sopra al 6 e 1 sopra al 4. Unirai quindi il 10 al 4 posto in prima posizione: otterrai 104. Sottratto da questo 104 il risultato del prodotto di 9 per se stesso, vi sarà 23 di resto, il quale resto è minore del doppio della radice che è stata trovata, che è 29». La traduzione e la punteggiatura sono di chi scrive. Per la dettagliata spiegazione dei vari passaggi di cui si compone questo algoritmo, rimando a HUGHES 2008, p. 36.

[8] Lo stesso significato è presente anche in Quintiliano, dove per *copulatio* si intende l'unione di due parole in sintagma. Cfr. Quint. *Inst*. 8, 3, 16: *et quod facit syllabarum, idem verborum quoque inter se copulatio, ut aliud alii iunctum melius sonet.*

[9] Tommaso d'Aquino intende per *copulatio* la *continuatio* tra due elementi naturali diversi. Cfr. Thomas Aquinas, *In Aristotelis libros Physicorum* 4, 8, 7: *et ideo his, scilicet aeri et aquae, cum sint duo distincta, inest tactus: sed cum ex utrisque fit unum, uno transeunte in naturam alterius, tunc fit copulatio, idest continuatio*.

[10] L'autore del *Liber Ysagogarum*, proposito dell'addizione, distingue nettamente i significati di *summa* e di *copulatio*. Cfr. *Liber Ysagogarum* p. 33 (Allard): *in duplatione quoque principium ab ultima sumentes inferiora superioribus copulemus in quibus si denarius excreverit superioribus congregetur*.

[11] Il capitolo V del *Liber Abaci*, dedicato alle divisioni, presenta un massiccio utilizzo di *copulatio* con questo significato.

> divisis 12345 per 7, remanent 4, et hoc volumus. Et secundum hunc modum probabis semper in inventione radicum[12].

Il termine *proba* indica, nella *Pratica Geometrie*, il resto della divisione di un numero o, meglio, il resto di una divisione che viene considerato in vista di una dimostrazione matematica. Il termine è, infatti, da mettere in relazione col verbo *probo* e, dunque, col sostantivo *probatio* che, nel latino classico, denota la dimostrazione. Nel *Liber Abaci*, però, il termine ricorre a proposito della prova del nove come sinonimo di *pensa* e, dunque, col significato di "resto di prova"[13]:

> ***Liber Abaci*, p. 92 (Carotenuto):** Que multiplicatio si recta est ita cognoscitur. Iungantur quidem figure que sunt in superioribus 37, scilicet 3 cum 7, erunt 10. De quibus dematur 9, remanebit 1 quod servetur. Eodemque modo colligantur figure de 37 inferioribus, et demantur inde 9, remanebit similiter 1. Multiplicetur, ergo, 1 quod remansit de superioribus 37 per 1 quod remansit de inferioribus, faciet 1, quod vocetur "pensa" vel "probatio", et servetur in tabula super ipsam multiplicationem, ut in tertia descriptione cernitur[14].

Altro termine degno di nota è *gradus*, che in Fibonacci assume il significato di "valore della cifra" non solo nella *Pratica Geometrie*[15], ma anche

[12] «Ad esempio, il resto di prova di 111 per 7 è 6 che, moltiplicato per se stesso, fa 36. Diviso 36 per 7, rimane 1 di resto, che aggiunto al resto di prova di 24, ossia a 3, dà in totale 4, vale a dire il resto di prova di 12345, perché 12345 diviso 7 dà come resto 4, e questo abbiamo inteso dimostrare. In base a questo procedimento, verificherai sempre i risultati ottenuti dalla estrazione delle radici». La traduzione e la punteggiatura sono di chi scrive.

[13] CAROTENUTO 2012, pp. 91-92: «si tratta del termine *pensa*, che compare piuttosto spesso a partire dal secondo capitolo del trattato e che in locuzioni quali *pensa per novenarium* sta ad indicare quel che nel moderno linguaggio tecnico definiamo come la "prova del nove", mentre, considerato nella sua utilizzazione assoluta, in altri contesti significa quel che noi definiamo semplicemente come "resto"». Si fa qui riferimento al testo pubblicato dalla medesima CAROTENUTO 2012, non essendo possibile fare riferimento all'edizione di BONCOMPAGNI 1857[1] che, come dimostrato dalla Carotenuto (ivi, 99-100), in questo punto riporta una lezione corrotta. Per il significato di pensa come "resto di prova" si veda pure il contributo di CAROTENUTO 2014[1].

[14] «Se questa moltiplicazione è corretta si capisce nel seguente modo. Si sommino le cifre che sono nel 37 superiore, cioè il 3 e il 7, risulterà 10. Da questo si elimini 9, rimarrà 1 che si deve riportare. Allo stesso modo si addizionino le cifre del 37 inferiore, e si elimini di lì 9, rimarrà similmente 1. Si moltiplichi, dunque, l'1 che è rimasto dal superiore 37 per l'1 che è rimasto dall'inferiore, si determinerà come risultato 1, che deve essere chiamato "resto di prova" o "verifica", e lo si riporti sulla tavoletta sopra la moltiplicazione stessa, come si vede nella terza figura». Traduzione a cura di CAROTENUTO 2012, p. 92.

[15] Si veda ad esempio il già citato brano della *Distinctio* II, 1 (2.3): *et copulabis ipsa 10 cum 4 primi gradus: erunt 104*.

nel *Liber Abaci*[16], dove si parla di *primus gradus* a proposito delle unità, di *secundus gradus* a proposito delle decine, di *tertius gradus* a proposito delle centinaia. Sorprendentemente, però, non esiste nessun altro autore antecedente il nostro per il quale *gradus* indichi il valore della cifra. Per quanto, ad esempio, nei quattro adattamenti latini dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī si parli del valore posizionale della cifra, in nessuno di essi mi sembra che tale valore venga indicato col termine *gradus*[17]. In geometria *gradus* indica una misura lineare, e ciò non sorprende[18]. Il termine è, infatti, da mettere in correlazione col verbo *gradior* che indica l'azione di spostarsi da un punto a un altro dello spazio fisico, come può essere ad esempio il percorrere una strada. Tale spostamento, ovviamente, non può che essere espresso attraverso una misura lineare, e tale misura è detta in latino *gradus*, "passo". Nella *Pratica Geometrie*, però, *gradus* non indica mai una misura lineare. Il termine ricorre qui ora col significato nuovo di "valore della cifra", come abbiamo visto, ora con quello di misura astronomica:

> ***Distinctio* II, 1 (8.2)**: Nam si fractiones, que cadunt de superfluo inventarum integrarum radicum, prope veritatem nosse desideras, considera utrum numerus ille cui radicem inveneris fuerit perticarum secundum geometriam, aut graduum secundum astronomiam. Quia in radicibus perticarum fractiones in pedibus, deinde in unciis et in partes unciarum reducere necesse est, in radicibus quoque graduum fractiones in minutis, et in secundis et in partibus secundorum reducende sunt[19].

---

[16] *Liber Abaci*, p. 2 (Boncompagni): *Primus gradus in descriptione numerorum incipit a destera. Secundus vero versus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium, et quintus quartum, et semper sic versus sinistram gradus gradum sequitur*.

[17] Così, ad esempio, nel *Liber Alchorismi* p. 68 (Allard): *constat ergo unumquemque limitem novem numeros continere: primum numeros unitatum, secundum decenorum, tercium centenorum, quartum millenorum, quintum decem millenorum, et similiter ceteros omnes siquidem per novenos terminos distinctos*. Cfr. anche *Dixit Algorizmi* p. 2 (Allard): *prima est differentia unitatum [...], secunda differentia decenorum [...], tercia differentia centenorum [...], quarta vero est differentia milium [...]*.

[18] Da Gerberto d'Aurillac, ad esempio, apprendiamo che il *gradus* equivale a diverse unità di misura. Cfr. *Geometria*, p. 59: *gradus recipit cubitos II, pedes III, sextas IV, palmos XII, uncias XXXVI, digitos XLVIII.*

[19] «Se desideri conoscere con un buon grado di approssimazione le radici delle frazioni che avanzano dal calcolo delle radici integre, valuta in primo luogo se il numero di cui vorrai trovare la radice, sarà espresso in pertiche secondo la geometria, o in gradi secondo l'astronomia. Dal momento che nelle radici di pertiche è necessario ridurre le frazioni in piedi, in once e in parti di once, anche nelle radici dei gradi si devono ridurre le frazioni in minuti, in secondi e in sottomultipli dei secondi». La traduzione è di chi scrive.

Il valore di *gradus* come misura astronomica non rappresenta una novità: esso ricorre per lo più in testi di astronomia per misurare il cammino che gli astri percorrono sul piano dell'eclittica, o dell'equatore celeste, in un certo lasso di tempo. La correlazione tra *gradus* e *gradior* suggerisce la possibilità di una sovrapposizione tra il *gradus* geometrico e il *gradus* astronomico, perché entrambi sono correlati al concetto di movimento. In astronomia, ovviamente, si lavora con gli angoli: un angolo giro misura 360°, di conseguenza un grado corrisponde a $\frac{1}{360}$ di circonferenza. La stretta relazione tra angoli e archi di circonferenza è alla base del funzionamento di uno dei più straordinari strumenti di misura medievali, l'astrolabio, che, nato per localizzare o calcolare la posizione dei corpi celesti, può essere però utilizzato anche per misurazioni geometriche, come mostra Ugo di San Vittore nella sua *Practica Geometriae*. Coerentemente con la sua idea di "pratica della geometria" – *quae quibusdam instrumentis agitur*[20] – Ugo di San Vittore privilegia per i suoi calcoli l'uso dell'astrolabio, di cui si serve sistematicamente: pertanto, egli è costretto ad utilizzare *gradus* col significato tecnico di misura astronomica, costituendo per noi un prezioso antecedente per l'utilizzo di *gradus* con significato astronomico nel contesto di un'opera di geometria. Nonostante, però, Fibonacci abbia dato alla propria opera lo stesso titolo che Ugo di San Vittore, un secolo prima, aveva dato alla sua, non mi sembra che il Pisano condivida col Vittorino la stessa definizione di "pratica della geometria": mentre, infatti, Ugo di San Vittore si serve sistematicamente dell'astrolabio per i suoi calcoli Fibonacci ricorre allo strumento soltanto in una fase avanzata del trattato, in particolare nella settima distinzione. In altre parole, a me sembra che Fibonacci utilizzi la parola *gradus* con lo stesso significato con cui la utilizza Ugo di San Vittore, ma non per le stesse motivazioni.

---

[20] Hugo de Sancto Victore, *Practica Geometrae*, pp. 16-17 (Baron): *his breviter praelibatis, deinceps considerandum est quod omnis geometrica disciplina aut theorica est, id est speculativa, aut practica, id est activa. Theorica siquidem est quae spacia et intervalla dimensionum rationabilium sola rationis speculatione vestigat, practica vero est quae quibusdam instrumentis agitur et ex aliis alia proportionaliter coniciendo diiudicat*.

Testo Critico

<II>

|[P, f. 18r] DISTINCTIO SECUNDA

<1>

|[B, f. 11v] Incipit capitulum de inventione radicum[1]

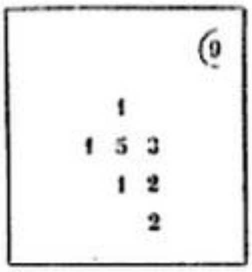
<1.1> Cum[2] autem per geometricales regulas campos mensurare volumus, oportet nos in quibusdam dimensionibus radices quorumcumque[3] numerorum invenire[4]: quare qualiter radices numerorum inveniantur, secundum quod in hoc opere sufficere videatur, presentialiter demonstrare curavi[5]. **<1.2>** |[M, f. 17r – N, f. 15v] *Est enim radix numeri latus alicuius quadrature, quia cum multiplicetur latus in se ipsum, perficitur embadum illius quadrature*, quare summa[6] multiplicationis lateris[7] recte dicitur quadratus, cum in se quadratam contineat superficiem. **<1.3>** Et est notandum, quia[8] una figura est radix numerorum unius figure, et duarum[9]; due |[*b*, p. 19] figure sunt radix trium figurarum, et quatuor; tres[10] figure sunt radix quinque figurarum, et sex[11]; quatuor figure sunt radix septem figurarum, et octo[12], et sic deinceps. **<1.4>** Radices autem quadratorum numerorum unius[13] figure et duarum oportet scire cordetenus, ut possimus[14] cum ipsis in inventione radicum plurium[15] figurarum subtilius procedere. Est enim unum radix de[16] 1[17], quia[18]

---

[1] distinctio secunda. Incipit – radicum B S M N F (capitulum *om.* S)] Incipit distinctio secunda de inventione quadratarum radicum in tantum quantum eis qui per rationes solummodo geometricas voluerint operari necessarium esse putatur C P L
[2] Distinctio secunda *in mg. sn. scr.* P
[3] quorumcumque] quinque B M N^1 F, quandoque S C P L, quorundam N^2
[4] invenire B S N F C P L] *non legitur* M
[5] curavi B S M N F] curavimus C P L
[6] quare summa B S N^2 F C P L] summe M N^1
[7] lateris B S N^2 F C P L] lateri M, laterum N^1
[8] quia B S F C P L] quare M N
[9] duarum B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[10] tres B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[11] et sex B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[12] quatuor – octo B S N^2 F C P L] et quinque figure sunt radix sex figurarum, et sex figure sunt radix septem figurarum et septem octo M N^1
[13] unius B S M F C P L] in unius N
[14] possimus B M N^2 F C P L] possumus S N^1
[15] plurium B S N^2 F C P L] plurimum M N^1
[16] de B S N^2 F C P L] *om.* M N^1

semel unum, unum facit[19]; et 2 sunt radix de 4; et 3 de 9; et 4 de 16; et 5 |[L, f. 23r] de 25; et 6 de 36; et 7 de 49; et 8 de 64; et 9 de 81; et 10 de 100. **<1.5>** Reliqui vero, qui sunt infra hos quadratos numeros, non habent radicem, sed possumus radices[20] ipsorum cum minutis quantum[21] necesse est per plures modos subtiliter appropinquare. Quod |[C, f. 16v] in suo demonstrabitur loco.

<2.1> Cum autem volueris invenire radicem[22] integram alicuius numeri trium figurarum, invenias primum radicem ultime figure, et pones eam sub secundo gradu, cum sci|[F, f. 12v]as duas figuras esse necessarias in radice trium figurarum. |[S, f. 27r] Et sic erit una sub secunda, et alia cadet sub[23] prima, et quod superaverit[24] ex ipsa tertia figura, pones super ipsam tertiam figuram. Et copulabis ipsum superfluum cum secunda figura, et pones aliam figuram sub prima, |[P, f. 18v] scilicet ante figuram que est posita sub secunda. Que multiplicata per duplum posite figure in radice, faciat[25] ita prope dicte copulationis, ut de superfluo quod inde superfuerit copulato cum prima figura possis extrahere multiplicationem[26] |[M, f. 18r] ipsius figure in se ipsam, et non remaneat inde ultra duplum radicis invente. Et si[27] de ultima figura nihil remanserit, intelliges |[M, f. 17v] evenire[28] de secunda figura hoc quod diximus de copulatione superflui tertie figure cum secunda.



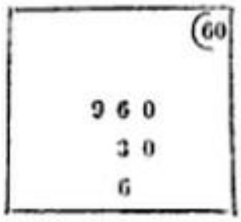
[17] 1 B S M N^2 F C P L] *om.* N^1
[18] quia B S N^2 F C P L] quare M N^1
[19] unum facit B S F C P L] facit unum M N
[20] radices M] radici B S N^2 F C P L, radicis N^1
[21] quantum B S M N^2 F C P L] invenire N^1
[22] radicem B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[23] sub B S M N^2 F C P L] super N^1
[24] superaverit B S N^2 F C P L] supervenerit M N^1
[25] faciat B M N] facias S F C P L
[26] multiplicationem B S M N F] multiplicationes C P L
[27] si B S N^2 F C P L] sic M N^1
[28] evenire B M N F C P L] invenire S

<2.2> Verbi gratia: volumus reperire[29] radicem de 153. Invenies radicem de 1 quod est in tertio gradu, que est 1; quod 1 pone sub 5, et ante ipsum 1 pone 2[30] sub 3. Quia[31] multiplicato 2 ||[N, f. 16r] in duplo radicis invente, scilicet in 2, faciunt 4, quibus extractis de 5, remanet 1 super ipsum 5. Quo 1 copulato cum 3 primi gradus, ||[L, f. 23v] facit 13. De quo possumus extrahere multiplicationem de 2 in se ipsum, et remanet inde[32] 9 que sunt minus duplo radicis invente, scilicet de 24. Ergo integra radix de 153 est 12 et remanent 9.

<2.3> Item si vis invenire radicem de 864: pone 2 sub 6, cum 2 sint integra radix de 8, et 4 que remanent ||[B, f. 12r] pone super 8. Deinde dupla ipsa 2: erunt 4, que pone sub 2, et per ipsa 4 divide 46, scilicet copulationem superflui tertie figure cum secunda: exibunt 11. Ex qua divisione possumus habere arbitrium sequentis ponende figure, que multiplicanda est per[33] duplum prime[34] figure posite et postea per se ipsam. Erit ipsa figura aut parum minus, aut totidem quantum ex ipsa divisione evenit[35], ||[S, f. 27v] quod cognosces ex usu: quare ponemus arbitrio 9 sub prima figura, que sunt minus de[36] 11 predictis. Et multiplicabis 9 per 4, scilicet per duplum inventi binari, et extrahes de 46 predictis, et ex remanentibus 10 pones 0 super 6 et 1 super 4. Et copulabis ipsa 10 cum 4 primi gradus: erunt 104. De quibus, extracta muliplicatione novenari in se ipso, remanent 23, que 23 sunt minus dupla radicis invente, <scilicet de 29>.

---

[29] reperire B M N F C P L] invenire S
[30] 2 B S N^{2} F C P L] *om.* M N^{1}
[31] quia B S N^{2} F C P L] quare M N^{1}
[32] inde B S F C P L] in M, *om.* N
[33] per B S M N^{2} F C P L] super N^{1}
[34] prime B S M^{b} N F C P L] secunde M^{a}
[35] evenit B M N F C P L] evenerit S
[36] de B S F C P L] *om.* M N

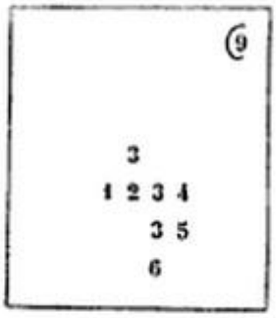


<2.4> ‖[C, f. 17r] Rursus si radicem de 960 invenire volueris, pone radicem de 9, ‖[P, f. 19r] scilicet 3, sub 6, et duplica[37] ipsa 3: erunt 6, que pones[38] sub ipso 3. Per que 6[39] oportet quamdam figuram multiplicare, que ponenda est ante 3 et ipsam multiplicationem de 6 superiore extrahere, et remaneat inde figura que copulata cum 0 [cum] fuerit[40]. Et[41] possis extrahere multiplicationem ipsius figure in se ipsam, et non remaneat inde[42] ultra duplum radicis invente. Eritque illa figura 0: quod 0 cum multiplicatum ‖[L, f. 24r] fuerit per 6 que fuerunt[43] dupla[44] de[45] 3[46], et ipsa multiplicatio extracta fuerit de 6, remanebunt[47] ‖[F, f. 13r] eadem ‖[*b*, p. 20] 6 que, cum copulate fuerint cum 0 quod est in primo gradu, faciunt 60. De quibus 60, cum extracta fuerit multiplicatio de 0 in se ipso, remanebunt 60, que sunt dupla[48] de 30, scilicet de radice inventa.

<3.1> Si autem volueris scire radicem numeri quatuor figurarum, invenias primum radicem duarum figurarum ultimarum, et superfluum copulabis cum remanentibus duabus figuris, et operabis secundum hoc quod diximus in tribus figuris.

---

[37] duplica B N^2 F C P L] dupla S M N^1
[38] pones B N F C L] pone S M P
[39] 6 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[40] copulata cum 0 cum fuerit C P L] cum fuerit copulata cum 0 B S M N F
[41] et B F] 2 C P L, *om.* S M N
[42] remaneat ultra B M N F] remaneat inde ultra S C P L
[43] fuerunt B F] fuerit S M N, fuit C P L
[44] dupla] duplum B S M N F C P L
[45] de B S M N F C L] *om.* P
[46] 3 B S N^2 F C P L] ipsius tribus M N^1
[47] remanebunt B M N F] remanebit S C P L
[48] dupla] duplum B S M N F C P L

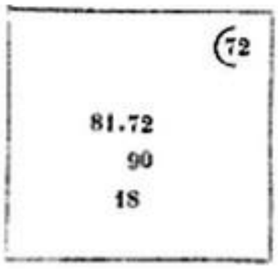


<3.2> Ad cuius |[N, f. 16v] rei evidentiam sint 1234, quibus volumus radicem invenire. Pones[49] sub 3 radicem ultimarum figurarum, |[S, f. 28r] scilicet de 12; que radix est 3, et remanentia 3 pones super 2 de 12. Et copulabis ipsa 3 cum sequentibus figuris: erunt 334. Et duplicabis radicem inventam: erunt 6, que pones sub 3, scilicet sub radice inventa. Et considera quot sunt multiplicationes que multiplicande sunt secundum hoc quod dictum est superius, et quot sunt figure in numero de quo debemus extrahere ipsas multiplicationes. Sunt enim multiplicationes due, quarum una est multiplicatio ponende figure per duplum radicis invente, scilicet per 6; alia multiplicatio est ipsius ponende figure in se ipsam. Has quidem[50] duas multiplicationes debemus extrahere de 334 et finire ultimam multiplicationem sub figura primi gradus. Ideo primam multiplicationem [51] oportet extrahere de copulatione duarum figurarum ultimarum[52], scilicet de 33. Et ex copulatione[53] superflui, et quaternari qui est in primo gradu, extrahes aliam. |[L, f. 24v] Quare pones 5 sub primo |[B, f. 12v] gradu, quia divisis[54] 33 per 6 reddunt 5; et mutliplicetur 5 per 6, et extrahatur ipsa multiplicatio, scilicet 30 de 33, et rema|[P, f. 19v]nebunt 3 in secundo gradu. Que 3 copula cum 4 primi gradus: faciunt 34, de quibus extrahes[55] multiplicationem de 5 in se ipsum[56]: remanent 9. Et sic habes 35 pro |[M, f. 18v] radice de 1234, et remanent 9.

[49] pones S M C P L] pone B N F
[50] quidem B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[51] multiplicationem B M N F C P L] *om.* S
[52] ultimarum figurarum S C P L] figurarum ultimarum B N^2 F, *om.* M N^1
[53] figurarum – copulatione B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[54] divisis B M N F C P L] divisimus S
[55] extrahes S F C P L] extrahe B M N
[56] ipsum B M N] ipsam F C P L (ipsa P), ipsos S

<3.3> Rursus si volueris invenire radicem de 6142, invenias radicem de 61, que sunt 7, et remanent 12. Pone 7 sub 4, et 12 |[C, f. 17v] pone super[57] 61. Et duplicabis 7 inventa: erunt 14. Pones 4 sub 7, et 1 post[58] ipsum septenarium; et intelligas copulationem remanentium 12 cum 42: que copulatio facit 1242, in quo numero sunt quatuor figure ex quibus sunt extrahende tres multiplicationes. Quarum prima est ponende figure per positum unum, et alia per 4 que sunt ante ipsum 1, et alia per se ipsam. Quas tres multiplicationes debemus[59] gradatim extrahere de quatuor dictis figuris, |[S, f. 28v] ita ut ultima multiplicatio cadat in primo gradu. Et quoniam numerus figurarum excedit numerum multiplicationum in una figura, pro ipsa una[60] figura oportet copulare ultimam figuram de 1242 cum sequente: erunt 12. De quo 12, extrahes[61] primam multiplicationem, et deinceps cadet secunda multiplicatio sub secundo[62] gradu, et ultima sub primo. Quare pones 8 ante posita 7, et multiplicabis 8 per 1[63] predictum, |[N, f. 17r] et extrahes de 12: remanebunt tibi 4, que[64] copulabis cum sequentibus 4, que sunt in |[F, f. 13v] secundo gradu: erunt 44. De quibus extrahes[65] multiplicationem de 8 in 4, que 4 sunt sub 7: remanent 12, que pone super 44. Et copulabis ipsa cum 2 |[L, f. 25r] primi gradus: erunt 122. De quibus extrahes 64, scilicet multiplicationem de 8 in se: remanent 58. Et sic habes 78 pro radice de 6142, et remanent 58.

[57] super B S N^2 F C P L] sub M N^1
[58] post B S N^1 F C P L] prius N^2
[59] debemus B S N^2 F C P L] debes M N^1
[60] una B S N^2 F C P L] ultima M N^1
[61] extrahes S N F C P L] extrahe B M
[62] secundo B S N^2 F C P L] primo M N^1
[63] per 1 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[64] que B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[65] extrahes S N F C P L] extrahe B M



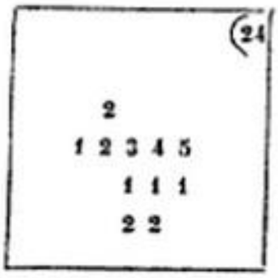
<3.4> Verum si radicem de 8172 reperire[66] volueris, radicem[67] de 81, scilicet 9, pone sub 7. Et de[68] duplo ipsius 9 pone 8 sub 9, et 1 post[69] ipsum versus sinistram. In quibus 1 et 8 oportet multiplicare ponendam figuram singulariter, et deinceps ipsam figuram in se ipsam[70]. Et sic sunt tres multiplicationes, que sunt extrahende gradatim de 72 que[71] remanent de 8172[72] post[73] inventionem radicis de 81[74]. Unde evidenter cognoscimus nullam post se cadere preter 0, cum deficiat gradus, ||[P, f. 20r] unde possit extrahi prima multiplicatio. Quia si ipsa[75] multiplicatio extrahatur de 7, oporteret[76] secundam ||[*b*, p. 21] extrahere de 2, et ||[M, f. 19r] sic non haberemus[77] unde extraheremus[78] tertiam multiplicationem. Vel aliter, quoniam primus gradus quemcumque gradum multiplicat, ipsum gradum surgit ex multiplicatione, quare ponenda figura, que cadit in primo gradu, multiplicata ||[S, f. 29r] in tertio gradu, scilicet in 1, facit tertium gradum. Qui gradus minime est in 72: ergo radix de 8172 est 90, et remanent 72.

<4.1> Et si volueris radicem alicui numero quinque figurarum invenire, invenies per premissam doctrinam radicem tribus ultimis figuris, et si inde[79] aliquid superfuerit, pones illum[80] superfluum super ipsum gradum, vel gradus ||[C, f. 18r] de quo, vel de quibus superfuerit. Et copulabis ipsum superfluum cum

---

[66] reperire B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[67] radicem B S N^2 F C P L] reperias radicem M N^1
[68] de B S N F C P L] *om.* M N
[69] post B S M N^1 F C P L] prius N^2
[70] in se ipsam B S F C P L] *om.* M N
[71] que B S N^2 F C P L] que 72 M N^1
[72] 8172 S N^2 F C P L] 81 B M N^1
[73] post B S M F C P L] *om.* N^1, prius N^2
[74] inventionem – 81 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[75] ipsa C P L] prima B S M N F
[76] oporteret S F C P L] oportet B M N
[77] haberemus S F C P L] habemus B M N
[78] extraheremus B S F C P L] extrahemus M N
[79] inde B S F C P L] in M N
[80] illum B F C P L] ipsum S, illud M N

duabus reliquis figuris, et pones duplum invente radicis sub ipsa radice[81]. similem gradum[82] sub simili gradu, ǀ[B, f. 13r] et per premissam notitiam[83] studebis ponere alia, figuram sub primo gradu, quia prima ǀ[L, f. 25v] figura in radice quinque figurarum cadit sub tertio gradu, cum tres figure sint radix numerorum quinque figurarum.

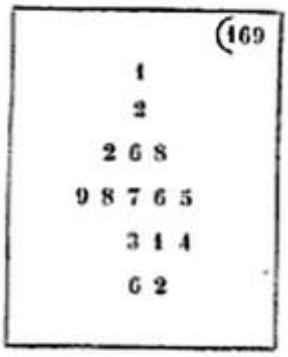


<4.2> Verbi gratia: volumus invenire radicem de 12345. Invenias quidem primum radicem[84] de 123, que est 11, et remanent[85] 2. Et cum inveneris ipsa 11, pones primam 1 de 11 sub 3, et aliam sub 4, et duplicabis ipsum 11: erunt 22, que pone sub 11, et 2 que remanserunt ǀ[N, f. 17v] pone super 3. Et copulabis ipsum 2 cum sequentibus figures: erunt 245, in quo numero sunt tres figure. Et multiplicationes que debent fieri[86] similiter tres, quare de singula figura[87] exit singula multiplicatio. Unde oportet ponere talem figuram ante posita 11, que cum multiplicata fuerit per primum binarium, postea per secundum, postea per se ipsam, possit prima multiplicatio exire de 2 que remanserunt super 3, et alia de 4, et alia de 5 que sunt in primo gradu. Eritque illa figura 1. Multiplicato quidem 1[88] per primum binarium[89], et extracta ipsa multiplicatione de duobus que sunt super 3, remanet nihil. Item multiplicato ǀ[S, f. 29v] ipso 1 per ǀ[P, f. 20v] sequentem binarium, et ǀ[L, f. 19v] extracto[90] de 4, remanent 2 super 4. Quibus 2, copulatis cum 5 primi gradus, faciunt 25. De quibus extracto 1, quod surgit ex

---

[81] radice B S N^2 F C P L] radice invente M, radice inventa N^1
[82] similem gradum B S N^2 F C P L] gradum similem M N^1
[83] notitiam B S N^2 F C P L] doctrinam M N^1
[84] quidem primum radicem B M^b F C P L] quidem radicem primum M^a, primum quidem radicem S N
[85] remanent B S F C P L] remanebit M N
[86] que debent fieri S C P L] quidem fiende erunt B M N^2 F, quedam fiende N^1
[87] de singula figura B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[88] 1 B S M F C P L] de 1 N
[89] binarium S N F C P L] binarium extracta B M
[90] extracto B S F C P L] exctracta M N

multiplicatione de 1[91] in se ipso, remanent 24. Et sic habes 111 pro radice de 12345, et remanent[92] 24. **<4.3>** Quod si rectum est, ita per qualem[93] vis probam cognoscitur: probam[94] de 111 in se ipsam[95] multiplica, et[96] ex ipsa multiplicatione probam accipe. Et super acceptam probam adde probam de 24. Et si ex hoc habueris <...>, scilicet probam de 12345, rectum est quod fecimus[97]. Verbi gratia: proba de 111 per 7 est 6, quia divisis 111 per 7 remanent |[F, f. 14r] 6, quibus in se multiplicatis, faciunt 36, quibus per 7 divisis remanet 1, quo |[L, f. 26r] addito cum proba de 24, que est 3, faciunt 4, scilicet probam de 12345, quia[98] divisis 12345 per 7[99], remanent[100] 4, et hoc volumus. Et secundum hunc modum probabis semper in[101] inventione radicum.

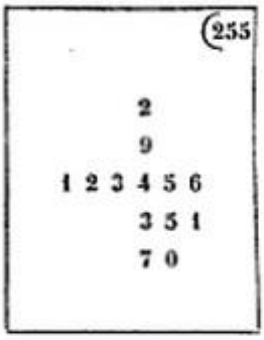


<4.4> Rursus si vis invenire radicem de 98765, invenias[102] radicem de 987, que est 31, et remanent 26. Pone 3 sub 7, et 1 sub 6, et remanentia[103] 26 pone super[104] 87, scilicet 2 super 8, et 6 super 7. Et copulabis 26 cum aliis duabus figuris, erunt 2665. Et duplicabis 31, et habebis 6 sub 3 et 2 sub 1. Et quia quatuor restant figure in numero, quas gradatim de|[F, f. 14v]bemus[105] delere per tres multiplicationes, que |[C, f. 18v] fieri debent cum figura ponenda ante 31, quarum

[91] de 1 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[92] et sic – remanent B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[93] qualem B S N^2 F C P L] equalem M N^1
[94] cognoscitur probam B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[95] ipsam B S F C P L] ipsa M N
[96] et B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[97] fecimus B M N F C P L] feceris S
[98] quia B S N^2 F C P L] quare M N^1
[99] per 7 B S M N^2 F C P L] *om.* N^1
[100] remanent B S F C P L] remanerit M N
[101] in B S F C P L] *om.* M N
[102] invenias S F C P L] invenies B M N
[103] et remanentia S C P L] remanentem B M N F
[104] super B S M N F C L] sub P
[105] debemus B M N F C P L] debes S

una erit per 6 et alia per 2 et alia per se ipsam. Oportet itaque, ut primam multiplicationem accipiamus de 26: quare divides 26 per 6, que sunt dupla[106] de 3 inventis in radice, et positis sub ipsis[107] 3, exibunt 4. Et ideo ponenda sunt 4 ante 31. Ponamus[108] ergo 4 ante 31[109], cum fieri possit. Et multiplicabis[110] ipsa 4 per 6, et extrahes de 26, et remanentia 2 pone super 6. Et copulabis ipsa cum 6, que sunt in secundo gradu: facient[111] 26, |[S, f. 30r] de quo numero |[N, f. 18r] extrahes multiplicationem de 4 in 2, |[*b*, p. 22] que posita sunt sub 1: remanent 18, videlicet |[P, f. 21r] 1 super 2 et 8 super 6[112]. Et copulabis ipsa 18 cum 5 primi gradus: erunt 185. De quibus |[B, f. 13v] extrahes multiplicationem de 4 in se ipsis: remanent 169. Et sic habes 314 pro radice de[113] 98765, et remanent 169.

<5.1> Et si volueris invenire[114] radicem alicui |[M, f. 20r] numero sex figurarum, invenias primum radicem quatuor ultimis figures, et residuum quod superfuerit, copulabis cum sequentibus |[L, f. 26v] duabus figuris. Et deinceps operabis ut supra.



<5.2> Verbi gratia: volumus reperire radicem de 123456. Invenies primum radicem de 1234, que est 35, et remanent 9. Et pone 35 sub 45, et 9 que remanent pone super 4. Et copulabis ipsa 9 cum 56: facient[115] 956. Et[116] duplicabis inventum[117] 35: erunt 70, de quibus pones[118] 0 sub 5, et 7 sub 3. Et quoniam

---

106 dupla] duplum B S M N F C P L
107 ipsis S C P L] *deest* B M N F
108 ponamus C P L] ponemus B M N F, *om.* S
109 ponemus – 31 B M N F C P L] *om.* S
110 multiplicabis B S N^2 F C P L] multiplicabimus M N^1
111 facient S F C P L] faciunt B M N
112 super 6 B S M N F C L] *om.* P
113 de B S F C P L] *om.* M N
114 invenire B S M N F C L] multiplicare P
115 facient S M N F C P L] faciunt B
116 et B S M N F C] *om.* P L
117 inventum B S N^2 F C P L] invicem M N^1
118 pones S M N^1 F C P L] pone B M N^2

figure sunt tres que restant, et multiplicationes sunt tres, quarum prima debet fieri per 7, secunda per[119] zefiro, tertia [exponenda figura] in se. Tunc scimus, quia[120] prima multiplicatio debet exire de 9: quare divide 9 per 7, exibit unum pro ponenda figura ante 35. Quo [121] 1 multiplicato per 7, et extracta ipsa multiplicatione de 9, remanent 2 super 9. Quibus copulatis cum 5, et inde extracta secunda multiplicatione, scilicet de 1 in zefiro, remanent 25. Quibus, copulatis cum sequente figura, faciunt 256, ex quibus extracta multiplicatione de 1 in se ipso, remanent 255. Et sic habemus 351 pro radice de 123456, et remanent 255.

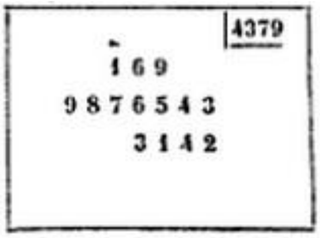
<5.3> Rursus si volueris invenire radicem de 987654, invenies primum radicem de[122] 9876, que est 99, et remanent 75: pone 99 sub 65 et 75 super 76. Et |[S, f. 30v] duplicabis[123] radicem inventam: erunt[124] 198. De quo numero pones 8 sub 9 que sunt in secundo gradu, et 9 sub 9, que[125] sunt[126] in tertio gradu, et 1 pones post[127] ipsa. Et copulabis 75 cum 54: erunt 7554, in quo numero sunt quatuor figure, quas debemus delere gradatim[128] per quatuor multiplicationes, quas facere |[P, f. 21v] debemus[129] cum ponenda figura, scilicet per tres figuras de 198 et per se ipsam. Quare |[C, f. 19r] primam multiplicationem oportet extrahere de 7 tantum: et |[L, f. 27r] sic cognoscimus ponendam figuram esse 3 ante 99. Quo 3 multiplicato per 1 de 198, et extracta ipsa multiplicatione de |[M, f. 20v] 7, remanent 4 super ipsis 7. |[N, f. 18v] Quibus copulatis cum 5 tertii gradus, faciunt 45. De quo

---

119 per S M N^1 C P] pro B N^2 F L
120 quia B S N^2 F C P L] quare M N^1
121 quo B M N F C P L] quare S
122 de B S M N F C] *om.* P L
123 duplicabis B S M N^2 F C P L] multiplicabis N^1
124 erunt B S N^2 F C P L] exeunt M N^1
125 in secundo – que B S M N F C L] *om.* P
126 sunt B S F C L] est M, *om.* N P
127 post B S M N^1 F C P L] prius N^2
128 debemus delere gradatim B S N^2 F C P L] gradatim delere debemus M N^1
129 facere debemus B S F C P L] debemus facere M N

extracta multiplicatione de 3 in 9 de 198[130], remanent 18 super quartum et tertium gradum. Quo 18 copulato cum 5, qui est in secundo gradu, faciunt 185. De quibus extracta multiplicatione de 3 in 8 de 198[131], remanent 161 super quartum et tertium[132] et[133] secundum gradum[134]. Quibus 161 copulatis cum 4 primi gradus, faciunt 1614. De quibus extracta multiplicatione de 3 in se, remanent 1605, et in radice habemus 993.

<6.1> Item si volueris invenire radicem alicuius numeri septem figurarum, invenias[135] primum radicem quinque figuris ultimis[136], et residuum, si fuerit, copulabis cum reliquis[137] duabus figuris. Et operaberis[138] ut supra.



<6.2> Verbi gratia: volumus invenire radicem de 9876543. Et quoniam radix septem[139] figurarum sunt quatuor figure, oportet ponere primam figuram radicis sub quarto gradu, |[B, f. 14r] et[140] sequentem figuram sub tertio et[141] aliam sub secundo. Quas tres figuras invenies inveniendo radicem quinque figurarum ultimarum[142], scilicet de 98765. Quorum radix est 314, et remanent 169 super quintum et quar|[S, f. 31r]tum et tertium gradum. Quibus 169 copulatis cum duabus reliquis figuris, scilicet cum 43, faciunt 16943. Deinde duplica inventa[143] 314, et habebis 8 sub 4 et 2 sub 1 et 6 sub 3. Per quas tres figuras multiplicanda est gradatim ponenda figura, et deinceps in se ipsam. **<6.3>** Et sic erunt quatuor multiplicationes, quas debemus extrahere gradatim de quinque figuris predictis,

---

[130] 198 B S N^2 F C P L] 45 M N^1
[131] 198 B S N^2 F C P L] 185 M N^1
[132] tertium B S F C P L] tertium gradum M N
[133] et B S F C P L] et super M N
[134] gradum B S F C P L] *om.* M N
[135] invenias B S F C P L] invenies M N
[136] figuris ultimis B S F C P L] ultimis figuris M N
[137] reliquis B F C P L] aliquibus S M N
[138] operaberis B S F C P L] operabis M N
[139] septem B S M^b N F C P L] sex M^a
[140] et B S F C P L] in M N
[141] et S F C P L] *deest* B M N
[142] ultimarum B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[143] inventa B S N^2 F C P L] *om.* M N^1

|[L, f. 27v] scilicet de 16943[144]. Quare prima multiplicatio extrahenda est de duabus ultimis figuris[145], scilicet |[*b*, p. 23] de 16, quare divides 16 per 6, qui primus multiplicandus est: exibunt 2. Quare pones 2 in primo gra|[P, f. 22r]du radicis, et multiplica ea per 6 de 628: erunt 12. Que extrahes de 16: remanent 4 super 6. Que copulabis cum 9: faciunt 49. De quibus extrahes multiplicationem de 2 in 2: remanent 45 super 49. Que copulabis cum 4 secundi gra|[M, f. 21r]dus: faciunt 454. De quibus extrahes multiplicationem de 2 in 8: remanent 438, scilicet 4 super quartum gradum et 3 super tertium et 8 super secundum. Et copulabis 438 cum 3 primi gradus: faciunt 4383, de quibus extrahes multiplicationem de 2 in se ipsis[146]: remanent 4379, que sunt minus duplo radicis invente. Et radix est 3142.

<7.1> |[C, f. 19v – N, f. 19r] Similiter si vis invenire radicem octo figurarum, invenies radicem sex figuris ultimis. Et copulabis residuum cum reliquis duabus figuris, ut dictum est. **<7.2>** Et sic cum his que dicta sunt possunt radices in infinitum quorum|[F, f. 15r]libet numerorum inveniri.

<8.1> Nam si scire desideras quot figure erunt in radice alicuius numeri multarum figurarum, considera si numerus figurarum ipsius numeri fuerit par, vel impar. Si fuerit par, dimidia[147] ipsum numerum, et quot unitates sunt in medietate, tot figure erunt in radice ipsius. Si vero fuerit impar, adde numero |[S, f. 31v] ipsorum unum[148], ut efficiatur numerus figurarum par. Et tunc quot unitates erunt in medietate numeri ipsarum[149], tot figure simililer erunt in radice. Et tunc incipies ponere primam figuram sub ipso gradu sub quo |[L, f. 28r] ceciderit. **<8.2>** Nam si fractiones, que cadunt de superfluo inventarum integrarum radicum, prope veritatem nosse desideras, considera utrum numerus ille cui radicem inveneris fuerit perticarum secundum geometriam, aut graduum secundum astronomiam. Quia in radicibus perticarum fractiones in pedibus, deinde in unciis et in partes unciarum reducere necesse est, in radicibus quoque graduum fractiones in minutis, et[150] in secundis et in partibus secundorum reducende sunt. **<8.3>** Est enim pertica, ut diximus, pedes 6, et pes est uncie 18, et uncia est $\frac{1}{18}$ pedis. Et pes est

---

[144] 16943 B S N[2] F C P L] 16443 M N[1]
[145] figuris B M N F C P L] *om.* S
[146] ipsis B S N[2] F C P L] ipsum M N[1]
[147] dimidia B S N[2] F C P L] dividam M N[1]
[148] unum B M N F C P L] unum et S
[149] ipsarum B F C P L] ipsorum S, imparum M N
[150] et B S F C P L] atque M N

sexta pertice, id est $\frac{1}{6}$[151], et[152] pertica tota est uncie 108. **<8.4>** |[P, f. 22v] Item gradus dividitur in minutis[153] 60, et minutum in secundis[154] 60, et secundum similiter in tertiis[155] 60, quare totus gradus est |[M, f. 21v] secunda 3600, et tertia 216000.

<9.1> |[B, f. 14v] Quibus ad memoriam reductis[156], cum volueris radicem alicui numero perticarum invenire, multiplica ipsas perticas per multiplicationem de 108 vicibus 108[157], hoc est per 11664. Et summe multiplicationis radicem invenias, et habebis numerum unciarum que sunt in radice quesita. Quibus unciis divisis per 18 reddunt pedes, qui sunt in illa radice. Quibus pedibus in 6 divisis, perticas reddunt [158]. **<9.2>** Verbi gratia: volumus invenire radicem de perticis 67. Multiplica 67 per 11664: erunt 781488, quibus invenias radicem, que est 884, et remanent 32. Que 32 divide per duplum de 884 vel dimidium de 32, scilicet 16, divide per |[N, f. 19v] 884. Exibit fere $\frac{1}{55}$: ergo radix de perticis 67 sunt |[L, f. 28v] uncie 884 et $\frac{1}{55}$. Quibus unciis divisis per 18, reddunt pedes 49, et remanent uncie 2. Et quibus pedibus 49 divisis per 6 red|[S, f. 32r]dunt perticas 8, et remanet[159] pes 1. Ergo radix de perticis 67 est pertice 8 et pes 1 et uncie 2 et $\frac{1}{55}$. Et sic studeas facere in omnibus similibus. **<9.3>** |[C, f. 20r] Et si volueris radicem numero graduum invenire, multiplica secunda unius gradus, scilicet 3600 in se ipsis: erunt 12960000. Per quem numerum multiplica gradus, quibus radicem invenire desideras. Et summe multiplicationis radicem invenias, et superfluum divide per duplum radicis invente, et habebis secunda, que fuerint in radice quesita. Quibus secundis divisis in 60 reddent[160] minuta; quibus minutis divisis in 60 reddent[161] gradus. Et sic habebis gradus et minuta et secunda et partes unius secundi, que fuerint |[*b*, p. 24] in radice quorumlibet graduum.

---

[151] id est $\frac{1}{6}$ C P L] *deest* B S M N F
[152] et S C P L] *deest* B M N F
[153] minutis B S F C P L] minuta M N
[154] secundis] secunda B S F C P L M N
[155] tertiis] tertia B S M N F C P L
[156] reductis B S M N^2 F C P L] mandatis N^1
[157] vicibus 108 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[158] perticas reddunt C P L] reddunt perticas B S M N F
[159] remanet M N C] remanent B S F P L
[160] reddent B F C P L] reddunt S M N
[161] reddent B M F C P L] reddunt S N

<10.1> Et si primum perticas, deinde pedes, post hoc[162] uncias, ad extre|[F, f. 15v]mum partes uncie que sunt in radice quarumlibet perticarum, gradatim invenire desideras, invenias primum radicem perticarum, ut dictum est. **<10.2>** Deinde de perticis, que remanserint, fac dimidios soldos, scilicet |[P, f. 23r] pedes. Et divide eos per duplum perticarum inventarum in radice, et habebis pedes, et[163] ex hoc quod[164] reman|[M, f. 22r]serit, fac denarios. Ex quibus extrahe multiplicationem pedum inventorum in se ipsos. Residuumque triplicabis[165], scilicet facies inde uncias, quas divides iterum per duplum perticarum et pedum inventorum in radice: et habebis perticas et pedes et uncias et partes uncie, que sunt in radice quotlibet[166] perticarum.

<11.1> |[L, f. 29r] Verbi gratia: volumus iterum radicem de perticis 67 invenire. Primum quidem radix[167] de perticis 67 sunt pertice 8 in[168] integrum, et remanent pertice 3 que sunt medii soldi, vel pedes 18, quibus divisis per duplum de 8, scilicet per[169] 16, egreditur pes 1, et remanent pedes 2, qui sunt denari 12. **<11.2>** Ex quibus extrahe multiplicationem |[S, f. 32v] unius pedis in se ipso, scilicet denarium 1, quia cum pes multiplicetur in pedem, facit denarium, ut dictum est: remanent[170] denari 11[171], quibus multiplicatis per 3 faciunt uncias 33. Quibus divisis per duplum |[N, f. 20r] de perticis 8 et pedem 1, scilicet per $\frac{1}{3}$ 16, veniunt uncie 2, et remanet $\frac{1}{3}$ unius uncie. **<11.3>** De qua $\frac{1}{3}$ si extraxerimus[172] multiplicationem inventarum duarum unciarum in se ipsis[173], remanebit[174] ex ipsa tertia uncie, quasi $\frac{1}{55}$ unius uncie, cum diviserimus ipsum superfluum per duplum radicis invente.

---

[162] hoc B S M N F C] hec P L
[163] et B S M N[2] F C P L] *om.* N[1]
[164] quod B S M F C P L] *om.* N
[165] triplicabis B M N F C P L] duplicabis S
[166] quotlibet C P L] quarumlibet B M N, quorumlibet S F
[167] radix B S M[b] F C P L] invenias radix M[a], invenias radicem N
[168] in B S N[2] F C P L] et M N[1]
[169] per B S M N F C L] *om.* P
[170] remanent B S N[2] F C P L] et remanent M N[1]
[171] 11 B S F C P L] 2 M N
[172] extraxerimus B S F C P L] extraxeris M N
[173] ipsis B S N[2] F C P L] ipsius M N[1]
[174] remanebit B S N[2] F C P L] remanebunt M N[1]

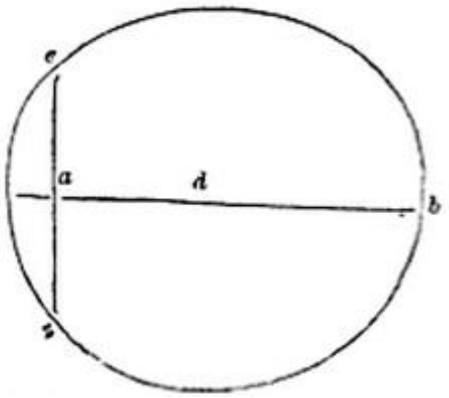
<12.1> Rursus[175] |[B, f. 15r] si volueris invenire per hunc modum radicem de perticis 111, accipe radicem integram ipsarum, scilicet 10, et duplica: erunt 20. Per quem divide pedes perticarum 11 superfluarum, scilicet 66: exibunt pedes 3, et remanent pedes 6 scilicet denari 36. **<12.2>** Ex quibus extractis denaris 9, qui procreantur ex multiplicatione pedum 3 in se, remanent denari 27. Quibus triplicatis, faciunt uncias[176] 81. Quibus divisis per duplum radicis invente, scilicet per 21, exibunt uncie $\frac{6}{7}3$, et non remanet inde[177] ali|[C, f. 20v]quid, unde possis extrahere multiplicationem unciarum inventarum in se ipsis. Quare pone aliquantulum minus de $\frac{6}{7}$ unius uncie. Et sic habebis perticas 10 et pedes 3 et uncias $\frac{5}{6}$ 3 pro radice de perticis 111. **<12.3>** Et nota ea que superius diximus de multiplicatione perticarum et pedum et unciarum |[P, f. 23v] in per|[M, f. 22v]ticas et pedes et uncias, |[L, f. 29v] et cognosces unde procedunt ea que facimus[178] in inventione pedum et unciarum in radicibus.

<13.1> Item si vis invenire radicem de perticis 1234, integra quidem radix ipsarum[179] est pertice 35, et remanent pertice 9, que pertice 9[180] sunt pedes 54. Per quos pedes 54[181], cum sint minus duplo radicis invente, scilicet de 70, cognoscimus in hac radice nequaquam cadere pedes[182], |[S, f. 33r] quare de pedibus 54 facies uncias: erunt uncie 972, quas divide per 70, exibunt uncie 13 et[183] $\frac{7}{8}$, et non remanet inde[184] unde extrahas multiplicationem de uncini $\frac{7}{8}$ 13 in se ipsas. Quare per $\frac{7}{8}$ pone minus, scilicet $\frac{6}{7}$, vel $\frac{5}{6}$[185], vel $\frac{4}{5}$, vel $\frac{3}{4}$, ad libitum, quia[186], ita faciendo, parum poteris deviare. **<13.2>** Et sic, secundum hunc modum, potes

---

[175] rursus B S M N F] rursum C P L
[176] uncias B M N F C P L] *om.* S
[177] inde B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[178] facimus B S N^2 F C P L] fecimus M N^1
[179] ipsarum B S N^2 F C P L] ipsa M N^1
[180] pertice 9 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[181] per – 54 B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[182] pedes B M N F] pedem S C P L
[183] et B S F C P L] *om.* M N
[184] inde B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[185] vel $\frac{5}{6}$ B S F C P L] *om.* M N
[186] quia B S N C P L] quare F

cuilibet numero perticarum, vel perticarum[187] et[188] pedum, etiam et perticarum et pedum et unciarum radicem subtiliter invenire.



<14.1> |[F, f. 16r] De fractionibus quidem graduum in minuta et secunda inveniendis in libro nostro Abaci satis aperte monstravimus. Vere quidem radices numerorum, qui[189] non sunt quadrati, in lineis haberi possunt, in numeris vero minime. **<14.2>** Est enim modus reperiendi radices in lineis, ut protrahas lineam illius quanti|[N, f. 20v]tatis, vel numeri cuius radicem |[*b*, p. 25] habere desideras, eique lineam unius unitatis superaddas, et in medio illius linee centrum figas, in spatio dimidie[190] linee circulum ducas. Et a puncto quod est inter unitatem et lineam, ad rectos angulos lineam[191] usque ad circulum protrahe. Et illa linea erit vera[192] radix quesiti numeri.

<15.1> Exempli causa: volumus radicem de[193] 67 invenire. |[L, f. 30r] Adiaceat quedam recta *ab*, que sit 67, cui addatur in directo unitas *ag*: erit tota *gb* 68. Dividaturque[194] *gb* in duo equalia super punctum *d*, et spatio *dg* vel *db* circulus circinetur *gebz*. Et protrahatur ad rectos angulos linea *ae*. Dico quod linea *ae*[195] vera radix est linee *ab*, scilicet de 67. **<15.2>** Protrahatur quidem recta *ea* in directo ad[196] punctum *z*. Et quoniam recta[197] *ba* stat super rectam *ez*, facit du|[M, f.

[187] vel perticarum B S F C P L] *om.* M N
[188] et B S F C P L] ut M N
[189] qui B S F C P L] et qui M N
[190] dimidie B M[a] N[2] F P] dimidii S M[b] N[2] C L
[191] lineam B S M N[1] F[b] C P L] et lineam N[2] F[a]
[192] vera B S M N F C L] utra P
[193] de M N C] *om.* B S F P L
[194] dividaturque B S N[2] F C P L] dividatur M N[1]
[195] dico – ae B S N[2] F P L] *om.* M N[1]
[196] ad B M N F C P L] usque ad S
[197] recta B S M N F] *om.* C P L

23r]os angulos aut[198] rectos, aut[199] duobus rectis equales. Rectus quidem qui sub *bae*, rectus quoque qui sub *baz*. **<15.3>** |[P, f. 24r] Et quoniam recta *ag* per centrum ducta secat quamdam rectam |[C, f. 21r] *ez* |[S, f. 33v] ad rectos angulos, ipsam rectam per equalia secare[200] necesse est. Equalis ergo recta[201] *ea* recte[202] *az*. Rursus quoniam in circulo *gebz* due recte, que sunt[203] *bg* et *ez*, se invicem secant supra[204] punctum *a*, erit multiplicatio *ba* in *ag* sicut |[B, f. 15v] multiplicatio *ea* in *az*. Sed multiplicatio *ae* in *az* est sicut multiplicatio *ea*[205] in se ipsam, quare multiplicatio *ba* in *ag* est sicut multiplicatio[206] *ae* in se[207]. Multiplicatio[208] quidem *ba* in *ag*, scilicet de 67 in 1, facit 67. Et multiplicatio vero ex[209] *ae* in se[210] facit similiter 67, et hoc[211] volumus[212]. **<15.4>** Nunc autem ostendamus qualiter radices numerorum per radices multiplicentur[213], et qualiter insimul addantur, quomodo minores de maioribus extrahantur, etiam et quo ordine inter se dividantur.

<2>

De multiplicatione radicum[214]

<1> Cum autem volueris multiplicare radicem de 16 per radicem de 25, cum 16 et 25 sint[215] quadrati numeri, accipe radices eorum, que sunt 4 et 5, et multiplica eas |[L, f. 30v] in simul: egredientur 20 pro quesita multiplicatione.

<2> Si vero radicem de 16 per radicem de 30 multiplicare vis, cum radix de 30 sit surda, multiplicabis 16 per 30: erunt 480, quibus invenies[216] radicem quam propius[217] poteris, et habebis summam dicte multiplicationis.

---

198 aut B S F C P L] *om.* M N
199 aut B M N F C P L] vel S
200 secare B S F C P L] secat M N
201 recta S M N F C P L] recte B
202 recte M N C P L] recta B F
203 sunt B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
204 supra B F C L] super S M N P
205 in az – ea B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
206 ba in ag est sicut multiplicatio B S M N F C L] *om.* P
207 se B S N^2 F C L] *om.* M P, az N^1
208 ae in se. Multiplicatio B S N F C L] *om.* M P
209 ex B S F C P L] *om.* M N
210 ae in se B S N^2 F C P L] ea et az M N^1
211 et hoc B S N^2 F C P L] ut M N^1
212 volumus S C P L] volumus. De multiplicatione radicum B M N F
213 multiplicentur B S F C P L] multiplicantur M, multiplicatur N
214 De multiplicatione radicum S] *om.* B M N F C P L (*cf. supra n.* 212)
215 cum 16 – sint B S N^2 F C P L] in decem et sex et 25 sunt M N^1

<3.1> ‖[N, f. 21r] Rursus, si volueris multiplicare radicem de 20 per radicem de 30, multiplica 20 per 30: erunt 600, quibus invenies radicem, et habebis propositum. Verbi gratia: sit *a* 20 et *b* 30, et *g* sit radix de 20, et *d* sit radix de 30. Multiplicato quidem *a* in *b* faciat *e*, scilicet 600, et multiplicato *g* in *d*[218] faciat ‖[S, f. 34r] *z*. Dico quoniam *z* radix est sexcentorum, scilicet ex[219] *e*. **<3.2>** Sed primo[220] dicendum est quod: *sicut aliquis numerus est ad aliquem numerum, ita est quodvis*[221] *multiplex unius ad idem multiplex alterius, et quevis pars unius ad eandem partem alterius*. **<3.3>** Quod probabimus[222] in 12 et 24: in qua enim proportione sunt ‖[M, f. 23v] 12 ad[223] 24, in eadem est duplum de 12 ad duplum de 24, et triplum ad triplum, et deinceps[224] quadruplum, et que secuntur multiplicia. Similiter in qua proportione sunt 12 ad 24, in eadem ‖[P, f. 24v] proportione est dimidium de 12 ad dimidium de 24, et tertium ad tertium[225], ‖[F, f. 16v] et deinceps. **<3.4>** His itaque demonstratis, revertamur ad propositum[226]. Quoniam numerus *g* radix est numeri *a*, scilicet de 20, ergo *g*, se ipsum multiplicans, *a* facit. Et *g* quidem *d* multiplicans, numerum *z* facit. Quam multiplex ergo ‖[L, f. 31r] est *z* ex *g*, tam multiplex est *z* ex *d*, quare sicut *g* est ad *d*, ita *a* est ad *z*. Rursus quoniam *d* radix est ex[227] *b*, scilicet de 30, cum *d* itaque se ipsum multiplicat, *b* facit. Sed *d* multiplicans *g*, *z* facit. Quam multiplex ergo[228] est[229] *z* ex *g*, tam multiplex est *b* ex *d*, quare sicut *g* est ad *d*, ita ‖[C, f. 21v] *z* ‖[*b*, p. 26] est ad *b*. Fuit itaque sicut *g* ad *d*, ita *a* ad *z*: per equale vero est sicut *a* ad *z*, ita *z* ad *b*, quare multiplicatio *a* in *b* est

---

216 invenies B F P L] invenias S M N C
217 propius B C P L] proprius M N F, proximus S
218 multiplicato – in d B S N^2 F C P L] et g multiplicans d M N^1
219 ex B S F C P L] de M N
220 primo B S N^2 F P L] primum M N^1 C
221 quodvis B F C P L] quod sicut S, quidvis M N
222 probabimus B S F C P L] probamus M N
223 ad B S F C P L] et M N
224 et deinceps B S N^2 F C P L] et sic deinceps M N^1
225 ad tertium B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
226 propositum C P L] proposita B S M N F
227 radix est ex B M N F C P L] *om.* S
228 ergo est B S M F C P L] ergo N^1, est ergo N^2
229 est B S M F C P L] *om.* N

sicut multiplicatio *z* in se. Sed multiplicatio *a* in *b* facit *e*, scilicet 600, et multiplicatio quidem de[230] *z* in se facit similiter *e*: ergo *z* radix est ex *e*, quod oportebat ostendere.

<4.1> Et notandum *cum numeri, quorum radices insimul multiplicantur, habent*[231] *inter se proportionem*[232]*, quadratorum numerorum eorum multiplicatio surgit in quadratum numerum: quare multiplicatio radicum ipsorum surgit in numerum rationabilem*. **<4.2>** Verbi gratia: volumus multiplicare radicem de 8 per radicem de 18. Quorum proportio est sicut 4 |[S, f. 34v] ad 9, scilicet sicut quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico quod multiplicatio de 8 in 18 |[N, f. 21v] surgit in |[B, f. 16r] quadratum numerum, scilicet in 144, quorum radix, que est 12, est summa multiplicationis radicis de 8 in radicem de 18. **<4.3>** Item si vis multiplicare 10 per radicem de 20, multiplica quadratum de 10[233] per 20: erunt 2000, quorum radix est summa dicte multiplicationis. Et nota quod id, quod provenit[234] ex multiplicatione de 10 in radicem de 20, est equale 10 radicibus de 20. Unde cum 10 radices de 20 volumus redigere in radicem unius numeri, tunc multi|[M, f. 24r]plicamus quadratum de 10 in 20, et habemus 2000, quorum radix est id quod aggregatur ex ipsis 10 radicibus.

<5.1> Et hoc idem intelligendum est de similibus. Unde, *si radicem alicuius numeri in plures radices alterius* |[P, f. 25r] *redigere vis, divide ipsum numerum per aliquem quadratum numerum,* |[L, f. 31v] *et quot unitates fuerint in radice ipsius quadrati numeri, tot radices venient exeuntis numeri ex divisione.* **<5.2>** Verbi gratia: vis reducere radicem de 1200 in plures radices alterius numeri[235]: divides 1200 per aliquem quadratum numerum, ut[236] dicamus per 16, et venient 75. Et accipe radicem de 16, que est 4: et tot radices de 75 habebis pro una radice de 1200. Et si diviserimus 1200 per 25, quorum radix est 5, habebimus 5 radices de 48 pro una radice de 1200. Et sic possumus radicem de 1200 in plures radices diversorum numerorum reducere.

Explicit de multiplicatione radicum.

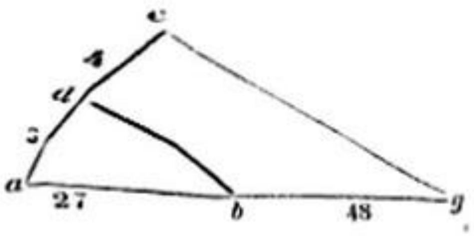
---

[230] de B S F C P L] *om.* M N
[231] habent B S F C P L] habeant M N
[232] proportionem B S M N F C] proportiones P L
[233] 10 C P L] 10 scilicet 100 B S M N F
[234] provenit B S F C P L] pervenit M N
[235] vis – numeri B S M N[2] F C P L] *om.* N[1]
[236] ut B S F C P L] et M N

<3>

Incipit de additione earundem[237]

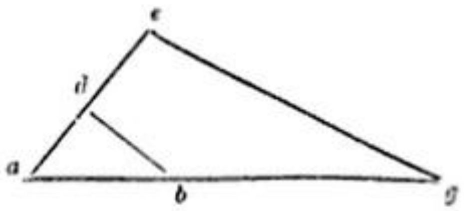
<1.1> Radices quidem numerorum quandoque cum radicibus ita iunguntur[238], ut summa iunctionis earum surgit in aliquem numerum ratiocinatum, vel[239] in radicem alicuius numeri; et quandoque non possunt coniungi, |[S, f. 35r] ut ex eorum coniunctione numerus aut radix[240] numeri egrediatur. **<1.2>** |[C, f. 22r] Cum autem radices quadratorum in unum coniungere volumus, tunc ex eorum coniunctione numerus procreatur: ut si radicem de 16 cum radice de 25 addere volumus, coadunabimus 4 et 5, scilicet radices de 16 et de 25: egredientur 9 pro quesita coniunctione. **<1.3>** Quando vero radices numerorum, inter se proportionem quadratorum habentium, coniungere volumus, tunc egreditur radix alicuius numeri ratiocinati. |[F, f. 17r] Unde qualiter addantur, dupliciter ostendamus.



<2.1> Volumus addere radicem de 27 cum radice de 48. Invenias quadratos, |[N, f. 22r] qui sunt in eorum proportione: |[L, f. 32r] eruntque 9 et 16. Quorum radices addas in unum: |[M, f. 24v] erunt 7. Que multiplica in se: erunt 49. Que triplica propter 27 et 48, que sunt triplum de 9 et de 16: erunt 147, quorum radix est summa predicte iunctionis. **<2.2>** Que regula probatur per proportiones similium triangulorum hoc modo: adiaceant in directo recte *ab* et *bg*, quarum *ab* sit radix de 27 et *bg* de 48. Et |[P, f. 25v] a puncto *a* angulum faciens, protrahatur recta *adde*[241]. Et *ad* sit 3 et *de* sit 4. Et copuletur *eg* |[*b*, p. 27] et *db*: est itaque quadratum linee *ab* triplum quadrati linee *ad*, et quadratum linee *bg* triplum

[237] explicit de multiplicatione radicum incipit de additione earundem C P L] de additione radicum B S M N, incipit de additione earundem explicit de multiplicatione radicum F
[238] iunguntur B S N^2 F C P L] iungantur M N^1
[239] vel S] aut B^2 M N^1, *om.* B^1 F C P L, *del.* N^2
[240] aut radix B S M N F] aut 4 radix C P L
[241] ad de B N^2 F P L] ad et de S, ad M N^1, ae C

quadrati linee[242] *de*. Ergo sicut *ab* recta est ad *ad*, ita recta *bg* ad *de*, quare recta *db* equidistans est[243] linee *eg*. Unde trigonum *adb* simile est trigono *aeg*: habent[244] angulum *a* |[B, f. 16v] comunem, et angulus *adb* angulo *aeg* et angulus *adb* angulo *age* sunt equales, scilicet exteriores interioribus. Est[245] ergo sicut quadratus[246] linee *ab* ad quadratum linee *ad*, ita quadratus[247] linee *ag* ad quadratum linee |[S, f. 35v] *ae*. Sed quadratus[248] linee *ab* quadrati[249] linee *ad* triplus est[250], quare quadratus linee *ag* quadrati linee[251] *ae* est similiter triplus. Sed quadratus[252] linee *ae* est 49, quare quadratus[253] linee *ag* est triplus, scilicet 147. Ergo ex coniunctione linearum *ab* et *bg* egreditur radix de 147, ut oportebat ostendere.

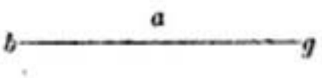


<3.1> Et nota quod *omnes radices numerorum proportiones habentium, inter se*[254] *possunt reduci ad radices*[255] *unius numeri, dividendo antecedentem* |[L, f. 32v] *numerum per antecedentem quadratum, et consequentem*[256] *per consequentem*[257]. **<3.2>** Verbi gratia: si vis reducere radices de 27 et de 48 in radices unius numeri, divides antecedentem numerum, |[C, f. 22v] scilicet 27, per antecedentem quadratum, scilicet per 9, et sequentem 48 per sequentem quadratum, scilicet per 16, et venient[258] 3 ex unaquaque divisione. Ergo quot

[242] ad – linee B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[243] est B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[244] habent B S N^2 F C P L] et habent M N^1
[245] est B S N^2 F C P L] *om.* M N^1
[246] quadratus B S N^2 F C P L] quadratum M N^1
[247] quadratus B S N^2 F C P L] quadratum M N^1
[248] quadratus B S N^2 F C P L] quadratum M N^1
[249] quadrati B S M N F] quadrato C P L
[250] triplus est B M F C P L] est triplus N, *om.* S
[251] ad – linee B M N F C P L] *om.* S
[252] quadratus B S N^2 F C P L] quadratum M N^1
[253] quadratus B S N^2 F C P L] quadratum M N^1
[254] inter se B S N^2 F C P L] quadratorum inter se M N^1
[255] radices B S N^2 F C P L] radicem M N^1
[256] consequentem B S M^a N^2 F C P L] sequentem M^b N1
[257] consequentem B S M^a N^2 F C P L] sequentem M^b N^1
[258] venient F C L] evenient B S M N, veniunt P

unitates sunt[259] in radice de 9, tot radices de 3 sunt in radice de 27, et quot unitates[260] sunt[261] in radice de 16[262], tot radices de 3 sunt in radice de 48. **<3.3>** Et sic pro una radice de 27 habentur tres radices de 3, et pro una radice[263] de 48 habentur quatuor radices de 3. Unde si eas aggregare volu|[M, f. 25r]mus, habebimus 7 radices de 3 pro earum aggregatione; quas si ad radicem unius numeri reducere vis, multiplica quadratum |[P, f. 26r] de 7 per 3, et eius quod provenerit radicem accipe. Et pro earum aggregatione habebis radicem de 147, ut supra.

<3.4> Aliter iungantur primum 27 cum 48: |[N, f. 22v] erunt 75. Et multiplicentur 27 per 48, et illius multiplicationis radicem duplica: erunt 72. Que cum 75 adde, et habebis similiter 147 pro quadrato dicte iunctionis. **<3.5>** Que etiam demonstrabimus per exemplum: adiaceat in directo recta *ab* recte *bg*, et sit *ab* radix de 27 et *bg* de 48: volumus itaque quantitatem scire totius linee *ag*. **<3.6>** Quoniam linea *ag* divisa |[S, f. 36r] est in duo super[264] punctum *b*, erunt duo quadrati[265] portionum *ab* et *bg* cum duplo multiplicationis *ab* in *bg* equales[266] quadrato totius linee *ag*. Sed quadrati[267] *ab* et *bg* sunt 27 et 48, scilicet 75, et |[L, f. 33r] multiplicatio linee *ab* in |[F, f. 17v] *bg* surgit in radicem multiplicationis de 27 in 48, scilicet in 36. Quorum duplum sunt 72, quibus additis cum 75, reddunt 147 pro quadrato linee *ag*, ut prediximus.



<4.1> Si autem volumus addere radicem de 20 cum radice de 30, quia 20 et 30 inter se proportionem non habent, sicut quadratus numerus ad quadratum

[259] ergo – sunt B S M N F C L] *om.* P
[260] unitates B S M N F C] *om.* P L
[261] sunt B M N F C P L] etiam sunt S
[262] 16 B N^1] 4 S N^2 F C P L, *non legitur* M
[263] de 27 – radice B S N^2 F C P L] *om.* N^1
[264] super B S N^2 F C P L] per M N^1
[265] quadrati B S F C P L] quadrata M N
[266] equales B S F C P L] equalia M N
[267] quadrati B S F C P L] quadrata M N

numerum, et hoc cognoscitur quia[268] multiplicatio de 20 in 30 surgit in numerum non habentem radicem, ideo summa iunctionis earum radicum non surgit in numerum, neque in radicem numeri. **<4.2>** Verbi gratia: sit recta *ba* radix de 20, et recta *ag* sit radix de 30. Erit quadratus[269] linee *ba* cum quadrato linee *ag* 50, et multiplicatio *ba* in *ag* surgit in radicem de 600, quare duplum multiplicationis *ba* in *ag* surgit in radicem quadrupli de 600, scilicet in radicem de 2400. Que cum radicem non habeant, scimus quod ex adiunctione predicta non possumus habere |[B, f. 17r] numerum aut radicem numeri, sed habemus pro eorum[270] coniunctione radicem numeri, et radicis, hoc est radicem de 50 et radicis de 2400. **<4.3>** Unde, ut inde habeamus illud quod possumus, inveni|[M, f. 25v]atur |[P, f. 26v] radix de 2400 quam proprius[271] potest: que est 49 minus $\frac{1}{98}$. Et addantur 50 supradictis: erunt 99 |[*b*, p. 28] minus $\frac{1}{98}$. Quibus invenies radicem, et habebis propositum. Vel invenias radicem de 20 et de 30 quam proprius[272] potes[273], et adde[274] eas insimul, et habebis similiter |[C, f. 23r] optatum[275] |[S, f. 36v].

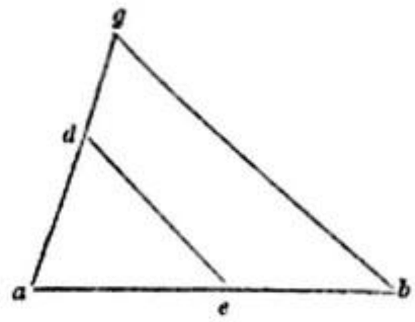
Explicit de addictione radicum inter se.

<4>

Incipit de extractione earundem[276]

<1> Si vero radicem quadrati numeri de radice quadrati |[S, f. 33v] numeri extra|[N, f. 23r]here volueris, ut radicem de 16 ex radice de 49, extrahes[277] radicem[278] de 16, scilicet 4, ex radice de 49, scilicet de 7: remanebunt 3 pro residuo dicte[279] extractionis.

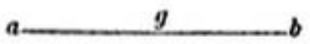
[268] quia B S N^2F C P L] quando M N^1
[269] quadratus B S F C P L] quadratum M N
[270] eorum S C P L] earum B M N F
[271] proprius M N F P L] propius B C, proximus S
[272] proprius S M N F P L] propius B C
[273] potes B S F C P L] potest M N
[274] adde B S M N F C L] addes N^2 P
[275] optatum S F C P L] propositum B M N
[276] explicit de addictione radicum inter se. Incipit de extractione earundem C P L] de extractione radicum B S M N, *om.* F
[277] extrahes B S N^3 F C P L] extrahas M N^1
[278] radicem B S N^3 F C P L] habes radicem M N^1
[279] dicte B S N^3 F C P L] *om.* M N^1



<2.1> Et si radicem de 45 ex radice de 125 extrahere vis, quia proportio eorum est proportio quadratorum, scilicet de 9 et de 25, extrahe radicem de 9 ex radice de 25, scilicet 3 de 5: remanent 2. Que multiplica per[280] se: erunt 4. Que multiplica per 5, propter 45 et 125 que sunt quincupla de 9 et de 25: exibunt 20, quorum radix est residuum dicte extractionis. <**2.2**> Verbi gratia: adiaceat recta *ab*, que sit[281] radix de 125. Et a puncto *a* protrahatur recta *ag* faciens angulum *bag*, et sit *ag* 5, scilicet radix de 25. Et auferatur ex *ag* recta *gd*, que sit 3: remanebit *da* 2[282]. Et per punctum *d* protrahatur recta *de* equidistans lateri *gb*. Et quoniam in trigono *agb* protracta est recta *de* equidistans lateri *bg*, erunt latera *ab* et *ag* proportionaliter secta in punctis *d e*, scilicet quod[283] est sicut *ae* ad *eb*, ita *ad* ad *dg*. **<2.3>** Coniunctim ergo, est sicut *ba* ad *be*, ita *ga* ad *gd*. Et si permutaverimus[284], erit sicut *ba* ad *ag*, ita *be* ad *gd*, quare est sicut quadratum lateris *ba* ad quadratum lateris[285]*ag*, ita quadratum linee *be* ad quadratum linee *gd*. Sed quadratum lateris *ba* est quincuplum quadrati lateris *ag*, quare et[286] quadratum recte *be* est[287]quincuplum quadrati[288] linee *gd*. Est enim 9 quadratum linee *gd*[289]: quare quadratum linee *be* est 45. Ergo linea *be* est radix de 45, quam volumus extra|[S, f. 37r]here ex *ab*, scilicet ex radice de 125, et invenire residuum, |[P, f. 27r – L, f. 34r] scilicet lineam *ae*. Cuius quadrati proportio est ad quadratum linee *ad*, sicut quadra|[M, f. 26r]tum linee *be* ad quadratum linee *gd*. Quare quadratum linee *ae* est quincuplum quadrati linee *ad*. Sed quadratum linee *ad* est 4, ergo

[280] per C P L] in B S M N F
[281] sit B S M F C P L] est N
[282] 2 B S F C P L] *om.* M N
[283] quod B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[284] permutaverimus B S F C L] mutaverimus M N^1, promutaverimus N^3, permutavimus P
[285] ba ad – lateris B S M N F C L] *om.* P
[286] et B S N^3 F L] est C P, *om.* M N
[287] est B S N^3 F L^b] est sicut C P L^a, *om.* M N
[288] lateris ag – quadrati B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[289] quadratum linee gd B S N^3 F C P L] *om.* M N^1

quadratum linee *ae*, scilicet[290] quesiti residui, est 20[291], et sic *ae* inventa est esse radix de 20, ut supra.



<**3.1**> Vel si radices de 45 et de 125 re|[F, f. 18r]duxerimus in radices de 5, habebimus pro radice de 45 tres radices de 5, et pro radice de[292] 125[293] habebimus 5[294] radices de[295] 5. Unde si de 5 radicibus de 5 auferantur tres radices de 5, remanebunt[296] 2 radices de 5, que sunt una radix de 20, ut inventum est. <**3.2**> Aliter adde 45 cum 125: erunt 170. De quibus extrahe[297] duplum radicis multiplicationis de 45 in 125, id est 150. Remanent 20 pro quadrato quesiti residui. <**3.3**> Ad |[N, f. 23v] cuius exemplum sit linea[298] *ab* |[C, f. 23v] radix de 125, de qua summatur[299] linea *bg*, que sit radix de 45: dico quod |[B, f. 17v] linea *ga* est radix de 20. Quoniam linea *ab* in duo[300] divisa est super punctum *g*, erunt duo quadrati[301] linearum *ab* et *gb* equales[302] quadrato *ag*, et duplo multiplicationis *gb* in *ab*. Sunt enim duo quadrati[303] *ab* et *gb* 170, quibus equantur[304] quadratus[305] linee *ag*, et duplum multiplicationis *bg* in *ba*. Sed *bg* in *ba* est radix multiplicationis de 45 in 125[306], scilicet 75. Que 75[307] duplicata faciunt 150, que extracta de 170, remanent 20 pro quadrato linee *ag*, quod oportebat ostendere.

[290] scilicet B S M N F] *om.* C P L
[291] scilicet – 20 B S M F C P L (scilicet *om.* C P L)] est 20 scilicet quesiti residui N
[292] de B S F C P L] *om.* M N
[293] habebimus – 125 B S N^{3} F C P L (de *om.* N)] *om.* M N^{1}
[294] 5 B S F C P L] *om.* M N
[295] de B S M F C P L] *om.* N
[296] remanebunt S C L] remanent B M N F, remanebit P
[297] extrahe S C P L] extrahes B M N F
[298] linea B S N^{3} F C P L] in linea M N^{1}
[299] summatur B S N] sumatur M F C P L
[300] duo B S N^{3} F C P L] *om.* M N^{1}
[301] quadrati B S F C P L] quadrata M N
[302] equales B S F C P L] equalia M N
[303] quadrati B S F C P L] quadrata M N
[304] equantur B S F C P L] equatur M N
[305] quadratus B S F C P L] quadratum M N
[306] 125 B S M N^{3} F C P L] 128 N^{1}
[307] que 75 B S N^{3} F C P L] *om.* M N^{1}

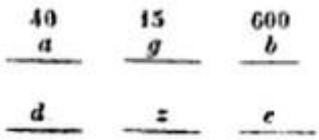
<4.1> |[S, f. 37v] Et si vis extrahere radicem de 20 ex radice de 30, quia 20 et 30 non sunt in proportione quadratorum |[L, f. 34v] numerorum, invenies radicem de 20 et de 30 quam proprius[308] potes. Et extrahe radicem de 20 de[309] radice de 30, et sic habebis residuum non ad plenum, sed fere. **<4.2>** Vel aliter adde 20 cum 30: erunt 50; et multiplica 20 per 30: erunt 600. De quibus accipe duas radices, scilicet duplum radicis |[P, f. 27v] eius, hoc est radicem quadrupli |[*b*, p. 29] de 600, que est fere 49 minus $\frac{1}{98}$. Et extrahe eam de 50, remanet $\frac{1}{98}$ 1. Cui invenias radicem, et habebis quesitum residuum, secundum[310] propinquitatem.

< Explicit de extractione radicum inter se>.

<5>

De divisione radicum inter se[311]

<1.1> Si vis dividere radicem de 600 per radicem de[312] 40, divide 600 per[313] 40[314]: exibunt 15. Quorum |[M, f. 26v] radix cadit ex divisione predicta.



<**1.2**> Verbi gratia: sit *a* 40, et *b* 600, et *g* 15. Et *d* sit radix ex *a*, et *e* ex *b*. Dividatur quidem *e* per *d*, scilicet radix de 600, per radicem de 40: egrediatur *z*: dico *z* esse radicem ex *g*, scilicet de 15. **<1.3>** Quoniam diviso *e* per *d* facit *z*, si *d* multiplicat *z*, facit *e*. Sed *d* se ipsum multiplicans facit *a*. Quam[315] multiplex ergo est *a* ex *d*, tam multiplex est *e* ex *z*, quare |[P, f. 28r] est sicut[316] *d* ad *z*, ita *a* ad *e*. Rursus *z* multiplicans *d* facit *e*, et *z* se ipsum multiplicans facit[317] *i*. Est ergo sicut

---

[308] proprius S M N F P L] propius B C
[309] de B S F C P L] ex M N
[310] secundum B S M N F C L] *om.* P
[311] de divisione radicum inter se C P L] de divisione radicum B M N^1, *om.* S F, *del.* N^3
[312] radicem de B N^3 F C P L] *om.* S M N^1
[313] divide 600 per B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[314] 40 B S F C P L] *om.* M N
[315] quam B S N^3 F C P L] quoniam M N^1
[316] est sicut B S F C P L] sicut est M N
[317] facit B M N F] faciat S C P L

d ad z, ita e ad i. Sed sicut d ad z, ita repertum est a ad e, quare est sicut[318] a ad e, ita e ad i. Sunt ergo a e i continue proportionales, quare multiplicatio a in i est sicut e in se. Sed multiplicatio e in se facit b, ergo a in i facit similiter b, scilicet 600[319]. Sed b divisa[320] per a venit g, ergo multiplicatio a per g facit b, et a multiplicato per i[321] facit b, quare |[L, f. 35r] numerus i |[N, f. 24r] equalis est numero g. |[S, f. 38r] Sed z se ipsum multiplicans i facit[322], quare ex multiplicatione z in se egredietur[323] similiter g. Ergo z radix est ex g, quod oportebat ostendere.

<**2.1**> Aliter d multiplicans z facit e, et e se ipsum multiplicans facit b. Ergo multiplicatio d in z multiplicata per e facit b. Item d se ipsum multiplicans a facit, et a multiplicans[324] g facit b. Ergo multiplicatio |[C, f. 24r] d in se, multiplicata per g, facit b, quare multiplicatio d in z, producta in e, equa est multiplicationi d in se producte in g. <**2.2**> Comuniter relinquatur multiplicatio d, remanebit multiplicatio z in e equa |[F, f. 18v] multiplicationi d in g. Quare est sicut d ad z, ita e ad g. Sed sicut d ad z, ita est e ad i: ergo e ad g et ad i eandem[325] proportionem habent[326], quare g equalis est i. Sed z radix est ex i, quare z radix erit ex g. Et si radicem de 40 per radicem de 600 dividere vis, divide 40 per 600[327]: exibit[328] $\frac{1}{15}$, cui invenias radicem, et habebis propositum.

<**3.1**> Sed qualiter radices fractionibus inveniantur[329] demonstrare procurabimus. Sed primum |[B, f. 18r] notandum est *cum inter se dividuntur*[330] *radices nu*|[M, f. 27r]*merorum quadratorum, vel eorum proportionem*[331] *habentium, tunc semper egreditur numerus rationalis*. <**3.2**> Verbi gratia: volumus[332] dividere radicem de 64 per radicem de 16: divisis 64 per 16[333], egrediuntur 4

---

318 est sicut B S F C P L] sicut est M N
319 scilicet 600 B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
320 divisa C P L] diviso B S M N F
321 et a – i B S M N^3 F C P L (a *om.* M)] et multiplicatio per i N^1
322 i facit B N F C P L] facit i S M
323 egredietur B S M F C P L] egreditur N
324 a facit et a multiplicans B S M N^3 F C P L] *om.* N^1
325 eandem B S M N F] eadem C P L
326 habent B S F C P L] habeat M, habet N
327 600 B S M N^1 F C P L] radicem 600 N^3
328 exibit B S F C P L] *om.* M N
329 inveniantur B S F C P L] inveniuntur M N
330 dividuntur B S F C P L] dividantur M N
331 proportionem B S M N F C L] proportionum P
332 volumus B S M N F] cum volumus C P L
333 divisis 64 per 16 B S F C P L] *om.* M N

quorum radix, scilicet 2, egreditur ex dicta divisione. Nam 8, que sunt radix de 64, divisis per radicem de 16, scilicet per 4, egrediuntur[334] similiter 2. <**3.3**> ‖[L, f. 35v] Et nota quia[335] illud idem egredietur[336] ex divisione radicum omnium numerorum habentium eandem[337] proportionem, quam habent 16 ad 64, ut si radicem de 80 per radicem de 20 ‖[S, f. 38v] dividere volumus, egredientur[338] 2 similiter ex dicta divisione.

<**4.1**> Si alicui fractioni vel fractionibus radicem invenire desideras, dupliciter tibi hoc facere demonstrabo[339]. <**4.2**> Primus modus est: ut ipsam partem vel partes accipias ex aliquo magno numero, et quot habueris, multiplica per ipsum numerum. Et summe multiplicationis radicem invenias, ipsamque[340] per[341] supradictum numerum divide, et sic habebis propositum. <**4.3**> Verbi gratia: volumus invenire radicem de $\frac{2}{3}$. Accipe $\frac{2}{3}$ ex aliquo magno numero: sitque numerus ille 60. Nam quanto maiorem numerum acceperis[342], tanto propius[343] vere radici[344] deveneris $\frac{2}{3}$ quidem de 60 sunt 40, quibus ‖[N, f. 24v] multiplicatis per 60 reddunt[345] 2400. Quorum radix, que est 49 minus ‖[*b*, p. 30] $\frac{1}{98}$, divide per 60, et habebis propositum. Nam si hoc in pedibus et unciis habere desideras, accipe $\frac{2}{3}$ ex unciis unius pertice, scilicet de 108: exibunt 72, quibus multiplicatis per 108, veniunt[346] 7776. Quibus accipias ‖[P, f. 28v] radicem, eritque $\frac{2}{11}$ 88. Et tot uncie sunt in radice de $\frac{2}{3}$ unius pertice. <**4.4**> Similiter si vis habere in[347] minutis et secundis radicem de $\frac{4}{5}$ unius gradus, accipe $\frac{4}{5}$ ex secundis unius gradus, scilicet ex 3600:

[334] egrediuntur B S F C P L] egreditur M N
[335] quia B F C P L] quare S, quod M N
[336] egredietur C P L] egreditur B S M N F
[337] eandem B S M F C P L] eadem N
[338] egredientur B M F C P L] egredietur S, egreditur N
[339] demonstrabo S C P L] demonstrabimus B M N F
[340] ipsamque B S F C P L] ipsumque M N
[341] per B S F C P L] *om.* M N
[342] acceperis B F C P L] accipueris M, accipias S N
[343] propius B C L] proprius S M N F P
[344] radici B S F C P L] radice M N
[345] reddunt S F C P L] reddent B M N
[346] veniunt B S F C P L] venient M N
[347] in B S F C L] *om.* M N P

erunt 2880, que multiplica per 3600: erunt quarta[348] 10368000. Quorum radix dabit tibi secunda, que sunt in radice de $\frac{4}{5}$.

<**5.1**> |[C, f. 24v] Aliter volumus invenire radicem de $\frac{2}{3}$ unius pertice. Quia ex multiplicatione pedis in pede egreditur |[L, f. 36r] denarius, idcirco fac denarios de $\frac{2}{3}$[349] unius pertice: erunt denari 24. Quibus invenias radicem: exibunt pedes 4, et remanent 8. Ex |[M, f. 27v] quibus fac octavadecimas unius denari: erunt 144, quas divide per duplum radicis invente, scilicet per 8: egredientur |[S, f. 39r] uncie 16, et remanebunt[350] $\frac{16}{18}$. Quos multiplica per 18: erunt $\frac{288}{324}$. Ex quibus extrahe multiplicationem de unciis 16[351] in se, scilicet $\frac{256}{324}$[352]: remanebunt $\frac{8}{81}$ unius denari. Quibus divisis per duplum radicis invente, egredietur[353] circa $\frac{2}{11}$ unius uncie. <**5.2**> Vel aliter accipe radicem de denaris 24: erunt pedes 5, et deest tibi denarius 1. Ex quo fac octavadecimas: erunt 18, quas divide per duplum radicis invente, scilicet per 10, exibit uncia $\frac{4}{5}$ 1[354]. Quibus extractis de pedibus 5, remanent pedes 4 et uncie $\frac{1}{5}$ 16.

Explicit Distinctio Secunda[355].

---

[348] quarta B S F C P L] quarte M N
[349] $\frac{2}{3}$ B S N[3] F C P L] $\frac{1}{3}$ M N[1]
[350] remanebunt S C P L] remanent B M N F
[351] 16 B S F C P L] *om.* M N
[352] ex quibus – scilicet $\frac{256}{324}$ B S N[3] F C P L (16 *om.* N)] *om.* M N[1]
[353] egredietur B S F C P L] egreditur M N
[354] 1 B S M N F C L] *om.* P
[355] Explicit – secunda C P L] *deest* B S M N F

TRADUZIONE

<II>

SECONDA DISTINZIONE

<1>

Introduzione al capitolo sull'estrazione della radice

<1.1> Qualora noi volessimo operare misurazioni di superfici utilizzando le regole della geometria, dobbiamo essere in grado di estrarre le radici di qualsiasi numero, in qualsiasi unità di misura sia essa espressa[1]: a tale scopo, io stesso mi sono incaricato di indicare in che modo si estraggano le radici dei numeri, secondo quanto mi sembra che sia sufficiente per gli scopi di questo libro. **<1.2>** *La radice*[2] *di un numero corrisponde al lato di una certa quadratura*[3],

[1] Tre sono le *dimensiones* in geometria: lunghezza, larghezza e profondità. In questo contesto, però, la traduzione di *dimensio* con "dimensione" non ha senso. Quali potrebbero essere, infatti, le dimensioni di una radice? Nel latino classico *dimensio* indica sia la misura, sia l'azione stessa di misurare. Tuttavia dalla lettura del testo emerge che l'autore, dopo aver illustrato l'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata, mostra anche in che modo vadano calcolate le radici di pertiche (unità di misura dei terreni) e di gradi (unità di misura astronomica): pertanto, mi sembra ragionevole tradurre in questo caso *dimensio* con "unità di misura", sebbene non ci siano attestazioni di un suo utilizzo nel latino classico con questo significato.

[2] Così anche in Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 353 (Boncompagni): *radix enim quidem cuiuslibet numeri est numerus qui, cum in se multiplicatur, facit ipsum numerum, ut 3 que sunt radix de 9*. È molto probabile che l'autore abbia attinto questa definizione da testi di algebra di origine araba, come ad esempio l'*al-Jabr* di al-Khwārizmī, il primo testo di algebra conosciuto in Occidente. Composto nel IX secolo, esso circolò in Europa nel corso del XII secolo in due traduzioni latine: la prima, di Roberto di Chester, si data al 1145; la seconda, realizzata da Gerardo da Cremona, è del 1170. Secondo al-Khwārizmī l'incognita da determinare è la "somma di denaro", *mal* in lingua araba, termine che Gerardo da Cremona traduce con *census* e che corrisponde a x^2; la radice, *jidhr* in lingua araba, altro non è che un'incognita intermedia da ottenere mediante la risoluzione dell'equazione proposta: *census autem qui radicibus equatur est ac si dicas: census equatur quinque radicibus. Radix ergo census est quinque. Et census est vigintiquinque* (al-Khwārizmī, *Al-Jabr*, p. 234 Hughes). Opera di traduttori anonimi è poi la versione latina del libro di algebra di Abū Kāmil (850-930), ove ricorre la stessa definizione di *census* presente in al-Khwārizmī: *census autem qui radicibus equantur est sicut si dicas: census equatur 5 radicibus suis. Cuius expositio est quod census equalis est quincuplo radicum eius. Et radix census erit semper sicut numerus radicum quibus census equalis existit. Que est in hac questione 5, et census est 25. Qui est sicut 5 radices eius* (Abū Kāmil, *al-Jabr*, p. 325 Sesiano). Molto interessante è, infine, la testimonianza costituita dal cosiddetto *Liber Mahameleth*, trattato di aritmetica pratica di XII secolo (cfr. *Liber Mahameleth*, p. 447 Sesiano: *radix census, que est duo. Igitur census est quatuor*).

[3] Per *quadratura* si intende la generica figura quadrata. Il termine può avere sia valore concreto di terreno, superficie agricola di forma quadrangolare (e con questo significato ricorre nei gromatici), sia valore astratto di figura quadrata. Nei testi più specificatamente geometrici, esso ricorre ad indicare la complessa operazione di quadratura del cerchio, un problema antichissimo le cui radici

sicché quando si moltiplica un lato per se stesso, si ottiene l'area di quella quadratura, e ciò spiega per quale motivo il prodotto di un lato per se stesso viene detto "quadrato": perché dà come risultato una superficie quadrata. **<1.3>** Si tenga a mente che la radice di un numero di una cifra, e quella di un numero di due cifre, si compone di una sola cifra[4]; la radice di un numero di tre cifre e quella di un numero di quattro cifre si compone, invece, di due cifre; la radice di un numero di cinque cifre e quella di uno di sei cifre si compone, poi, di tre cifre; la radice di un numero di sette cifre e quella di un numero di otto cifre si compone di quattro cifre, e così via. **<1.4>** È necessario conoscere a memoria le radici di numeri dotati di una cifra e di due cifre, in modo tale che, servendoci di esse, possiamo procedere più speditamente nell'estrazione delle radici di numeri dotati di cifre superiori a due. Uno è la radice di 1, perché 1 per 1 fa 1; 2 è la radice di 4; 3 è la radice di 9; 4 è la radice di 16; 5 è la radice di 25; 6 è la radice di 36; 7 è la radice di 49; 8 è la radice di 64; 9 è la radice di 81; 10 è la radice di 100. **<1.5>** I numeri, infine, che stanno in mezzo a questi quadrati perfetti, non hanno radice intera, ma con molti sistemi possiamo abilmente procedere per approssimazione, servendoci, quando necessario, dei minuti. Questa possibilità sarà mostrata al momento opportuno.

<2.1> Se volessi estrarre la radice intera di numeri dotati di tre cifre, innanzitutto devi trovare la radice delle prime cifre e devi posizionarla sotto le

---

sono rintracciabili già nella cultura egizia (PICHOT 1993, p. 209). Nel 1045 Francone, un monaco di Liegi, aveva dedicato all'argomento un trattato intitolato *De quadratura circuli*, nel quale così definiva il problema: *quadratura circuli reductio quaedam videtur esse ipsius circuli in quadratum vel adaequatio figurae ad se invicem utriusque* (*De quadratura circuli*, p. 65 Folkerts). Il problema della quadratura del cerchio consisteva, dunque, nel trovare un quadrato la cui superficie fosse stata equivalente alla superficie di un cerchio. Nonostante la mancanza di originalità con cui affronta il problema, Francone illustra un metodo molto ingegnoso per estrarre le radici quadrate (FOLKERTS-SMEUR 1976[2], pp. 231-242). Il termine *quadratura* potrebbe, allora, essere stato scelto da Fibonacci con una certa consapevolezza: esso, infatti, per la sua ambiguità, si presta ad essere utilizzato nel contesto di un'opera che vuole essere teorica e pratica insieme; inoltre la scelta di questo termine potrebbe costituire un sottile richiamo a tutta una trattatistica specialistica che, sebbene per motivi diversi, ha tuttavia fornito molti e validi contributi al problema dell'estrazione della radice quadrata.

[4] All'interno della *Pratica Geometrie,* il termine *figura* assume due distinti significati: uno è quello di "cifra", come anche in Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 2 (Boncompagni): *novem figure Indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1*, e nell'*Arithmetica* perduta di al-Khwārizmī, ad esempio nel *Liber Alchorismi*, p. 69 (Allard): *que figure, et earum numerus, et ordo hec sunt: 9 8 7 6 5 4 3 2 1*; l'altro è quello di 'figura geometrica', come ad esempio in Gerb., *Geometria* p. 64 Bubnov: *figura, quae Grece schema vocatur, est spatium certis terminis inclusum. Huius species duae sunt. Aut enim planae aut solidae sunt* e in Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 12 (Curtze): *figura quidem est, qui sub uno vel pluribus terminis continetur.*

decine, visto che già sai che la radice di un numero di tre cifre è necessariamente di due cifre. Così facendo, vi sarà una cifra sotto le decine e una cifra cadrà, invece, sotto le centinaia, mentre quel che sarà avanzato della terza cifra, lo collocherai sotto la medesima[5]. Unirai[6], poi, quanto è rimasto alla seconda cifra, e posizionerai l'altra cifra sotto la prima, ossia dopo il valore che è stato posto sotto la seconda cifra. Essa, moltiplicata per il doppio della cifra posta nella radice, darà un risultato così vicino al numero che si è generato dall'unione di prima, che da tutto il numero avanzato prima, unito alla prima cifra, puoi sottrarre il prodotto della prima cifra per se stessa, e non rimarrebbe nulla oltre al doppio della radice

[5] Il termine *gradus* assume, in Fibonacci, il significato di "valore della cifra" non solo nella *Pratica Geometrie* ma anche nel *Liber Abaci*, dove l'autore parla di *primus gradus* a proposito delle unità, di *secundus gradus* a proposito delle decine, di *tertius gradus* a proposito delle centinaia (BONCOMPAGNI 1857[1], p. 2). Sorprendentemente, però, non esiste nessun altro autore antecedente il nostro per il quale *gradus* indichi il valore della cifra. Per quanto, ad esempio, nei quattro adattamenti latini dell'*Arithmetica* di al-Khwārizmī si parli del valore posizionale della cifra, in nessuno di essi mi sembra che tale valore venga indicato col termine *gradus* ma, piuttosto, si usa a tal proposito il termine *differentia*. In geometria *gradus* indica una misura lineare, e ciò non sorprende: il termine è, infatti, da mettere in correlazione col verbo *gradior* che indica l'azione di spostarsi da un punto a un altro dello spazio fisico, come può essere ad esempio il percorrere una strada. Tale spostamento, ovviamente, non può che essere espresso attraverso una misura lineare, e tale misura è detta in latino *gradus*, "passo". Nella *Pratica Geometrie*, però, *gradus* non indica mai una misura lineare: il termine ricorre qui ora col significato nuovo di "valore della cifra", come abbiamo visto, ora con quello di misura astronomica. Il valore di *gradus* come misura astronomica non rappresenta una novità: esso ricorre per lo più in testi di astronomia per misurare il cammino che gli astri percorrono sul piano dell'eclittica, o dell'equatore celeste, in un certo lasso di tempo. La *Practica Geometriae* di Ugo di San Vittore rappresenta un prezioso antecedente dell'utilizzo di *gradus* con significato astronomico nel contesto di un'opera di geometria: la correlazione tra *gradus* e *gradior*, infatti, sembra implicitamente suggerire la possibilità di una sovrapposizione tra il *gradus* geometrico e il *gradus* astronomico, perché entrambi sono correlati al concetto di movimento.

[6] Molto interessanti sono il verbo *copulo* e il sostantivo *copulatio* che da esso deriva. Essi non indicano l'atto di compiere un'addizione (o una qualsiasi delle classiche quattro operazioni); al contrario, col verbo *copulare* l'autore intende dire che queste cifre vanno lette insieme, come se si trattasse di un unico numero. Lo stesso significato è presente anche in Quintiliano, dove per *copulatio* si intende l'unione di due parole in sintagma (cfr. Quint. *Inst*. 8, 3, 16: *et quod facit syllabarum, idem verborum quoque inter se copulatio, ut aliud alii iunctum melius sonet*). Il verbo *copulo*, infatti, indica l'azione di legare insieme, di associare: pertanto la *copulatio* consiste in un'associazione, non solo di parole, ma anche di idee e di oggetti. Tommaso d'Aquino intende, per *copulatio*, la *continuatio* tra due elementi naturali diversi (cfr. Thomas Aquinas, *In Aristotelis libros Physicorum* 4, 8, 7: *et ideo his, scilicet aeri et aquae, cum sint duo distincta, inest tactus: sed cum ex utrisque fit unum, uno transeunte in naturam alterius, tunc fit copulatio, idest continuatio*). Allo stesso modo, anche nel linguaggio dell'artimetica la *copulatio* consiste in un'associazione, ma soltanto di numeri: l'autore del *Liber Ysagogarum*, ad esempio, distingue, a proposito dell'addizione, i significati di *summa* e di *copulatio*: (cfr. *Liber Ysagogarum*, p. 33 Allard: *in duplatione quoque principium ab ultima sumentes inferiora superioribus copulemus in quibus si denarius excreverit superioribus congregetur*).

che è stata estratta. Se, poi, dell'ultima cifra non sarà rimasto nulla, capirai che dalla seconda cifra deriva ciò che abbiamo detto a proposito dell'unione di quanto era rimasto della terza cifra con la seconda. **<2.2>** Esempio: vogliamo estrarre la radice di 153. Calcolerai la radice dell'1 che sta al terzo posto, ed essa è pari a 1; posiziona questo valore sotto al 5, quindi scrivi 2 sotto al 3. Dal momento che il prodotto di 2 per il doppio della radice che è stata già trovata, vale a dire per 2, fa 4, devi sottrarre 4 da 5, e il risultato, che è pari a 1, devi scriverlo al di sopra del 5. Unisci poi questo 1 al 3 che sta in prima posizione: fa 13. Da questo valore sottraiamo il risultato del prodotto di 2 per se stesso: fa 9, che equivale a meno del doppio della radice che è stata trovata, vale a dire di 24. Dunque la radice intera di 153 è 12 col resto di 9. **<2.3>** Allo stesso modo, se vuoi calcolare la radice di 864: posiziona 2 sotto al 6, perché 2 è la radice intera di 8, e il 4 che rimane posizionalo sopra l'8. Poi raddoppia 2: il risultato sarà 4. Posizionalo sotto al 2, poi dividi 46, che è il risultato dell'unione di quanto avanzato della terza cifra con la seconda, per questo 4: il risultato sarà di 11. Grazie a questa divisione, possiamo avere un'idea della cifra che bisogna porre dopo, la quale innanzitutto deve essere moltiplicata per il doppio della prima cifra che è stata posta, e poi deve essere moltiplicata per se stessa. Questa cifra sarà o di poco inferiore, o del tutto pari al risultato della divisione, come capirai con la pratica: a tale scopo, metteremo ad arbitrio 9 sotto la prima cifra, che è minore di 11. Moltiplicherai poi 9 per 4, vale a dire per il doppio del 2 che è stato trovato prima, e sottrarrai il risultato da 46: otterrai 10, e scriverai 0 sopra al 6 e 1 sopra al 4. Unirai quindi il 10 al 4 posto in prima posizione: otterrai 104. Sottratto da questo 104 il risultato del prodotto di 9 per se stesso, vi sarà 23 di resto, il quale resto è minore del doppio della radice che è stata trovata, che è 29. **<2.4>** Se volessi estrarre la radice di 960, posiziona la radice di 9, che è 3, sotto al 6, e raddoppiala: il risultato sarà 6, che scriverai sotto al 3. Per questo 6 bisogna moltiplicare la cifra che deve essere scritta dopo il 3, e sottrarre, poi, il risultato dal 6 che sta sopra: resta quindi la cifra che sarà poi unita allo 0. Puoi sottrarre il risultato del prodotto di questa cifra per se stessa, e non rimarrebbe nulla oltre al doppio della radice che è stata trovata. Quella cifra sarà 0: dopo averlo moltiplicato per il 6 che è doppio del 3, e aver sottratto da 6 il risultato di questa moltiplicazione, avrai in totale lo stesso 6 che, unito allo 0 che sta in prima posizione, fa in totale 60. Infine, tolto da questo il risultato del prodotto di 0 per 0, resterà 60, che è il doppio di 30, vale a dire della radice che è stata estratta.

<3.1> Se volessi estrarre la radice di un numero di quattro cifre, calcola prima la radice delle prime due cifre[7], e quel che rimane lo affiancherai alle rimanenti due cifre, e opererai secondo quanto abbiamo detto a proposito dei numeri di tre cifre. **<3.2>** A dimostrazione di ciò, sia dato 1234, del quale vogliamo estrarre la radice. Posizionerai sotto al 3 la radice delle prime cifre, vale a dire di 12; essa è pari 3, mentre il resto, che è 3, lo scriverai sul 2 del numero 12. Collocherai 3 accanto alle cifre che vengono dopo: il risultato sarà di 334. Raddoppierai la radice che è stata trovata e otterrai 6, che scriverai sotto al 3, vale a dire sotto alla radice che è stata trovata. Considera quante sono le moltiplicazioni che bisogna eseguire in base a quanto è stato detto prima, nonché quante sono le cifre nel numero da cui dobbiamo sottrarre i risultati di queste moltiplicazioni. Vi sono certamente due moltiplicazioni da eseguire, delle quali una è quella della cifra che deve essere posta per il doppio della radice che è stata trovata, vale a dire per 6; l'altra è quella della medesima cifra che deve essere posta per se stessa. Senza dubbio, dobbiamo sottrarre queste due moltiplicazioni da 334, e posizionare il risultato dell'ultima moltiplicazione sotto la cifra dell'unità. Perciò occorre sottrarre il risultato della prima moltiplicazione dal numero che è nato dall'accostamento delle ultime due cifre, vale a dire da 33. Poi, dall'accostamento di quanto avanzato al 4 delle unità, sottrarrai il risultato dell'altra moltiplicazione. Così facendo, metterai 5 sotto le unità, perché 33 diviso 6 fa 5; poi moltiplicherai 5 per 6, sottrarrai il risultato, vale a dire 30, da 33, e resterà 3 da collocare sotto le decine. Accosta 3 al 4 delle unità: fa 34, da cui togli il risultato del prodotto di 5 per se stesso: rimane 9. In questo modo ottieni 35, che corrisponde alla radice di 1234, col resto di 9. **<3.3>** Se volessi estrarre la radice di 6142, calcola la radice di 61, che è 7, e rimane 12 di resto. Colloca 7 sotto al 4, e scrivi 12 sul 61. Raddoppierai poi il 7 che hai rinvenuto prima, ottenendo così 14. Scriverai 4 sotto al 7, e poi 1 davanti; intuisci, poi, che adesso avviene l'accostamento del 12 che è rimasto al 42: tale accostamento genera il numero 1242, nel quale vi sono quattro cifre da cui bisogna sottrarre il risultato di tre moltiplicazioni. Di queste, la prima è quella della cifra che bisogna porre per il

[7] Il testo latino recita *ultimarum figurarum*: Fibonacci, infatti, leggeva le cifre da destra verso sinistra.

numero 1 che è stato posto, la seconda è quella della cifra che bisogna porre per il 4 che segue l’1, la terza è quella della cifra che bisogna porre per se stessa. Dobbiamo gradualmente sottrarre queste tre moltiplicazioni dalle quattro cifre che abbiamo detto, in modo tale che il risultato dell’ultima moltiplicazione cada sotto le unità. Dal momento, però, che il numero delle cifre eccede il numero delle moltiplicazioni per la cifra 1, per questa occorre accostare la prima cifra[8] del numero 1242 alla seguente: il risultato sarà 12. Da 12 sottrarrai poi il risultato della prima moltiplicazione. Successivamente, il risultato della seconda moltiplicazione sarà posto sotto le decine, e il risultato dell’ultima moltiplicazione sotto le unità. Ciò significa che scriverai 8 dopo il 7 che è stato posto, e moltiplicherai 8 per l’1 che si è detto prima, quindi sottrarrai il risultato da 12: avrai 4 di resto, che collocherai accanto al successivo 4 delle decine, ottenendo 44. Da questo valore sottrarrai poi il risultato del prodotto di 8 per il 4 che sta sotto al 7: il resto è di 12, e lo poni sopra al 44. Unirai poi questo resto al 2 delle unità: il risultato sarà di 122. Da questo valore sottrarrai 64, vale a dire il risultato del prodotto di 8 per se stesso: il resto è di 58. Così facendo, ottieni 78 quale radice di 6142, più il resto di 58. **<3.4>** Infine, se desideri estrarre la radice di 8172, colloca la radice di 81, cioè 9, sotto al 7. Del doppio di 9 scrivi l’8 sotto al 9 e l’1 dopo, andando verso sinistra. Occorre moltiplicare la cifra che bisogna porre singolarmente per questi 1 e 8 e, successivamente, per se stessa. Così vi sono tre moltiplicazioni, il cui risultato occorre sottrarre gradualmente dal 72 che rimane di 8172, in seguito all’estrazione della radice di 81. Da ciò comprendiamo che, evidentemente, non può esservi nulla dopo questa radice, se non 0, giacché manca il grado da cui sarebbe possibile sottrarre il risultato della prima moltiplicazione, sicché se il risultato di questa moltiplicazione viene sottratto da 7, sarebbe opportuno sottrarre il risultato della seconda moltiplicazione da 2, e alla fine non resterebbe più niente da cui potremmo sottrarre il risultato della terza moltiplicazione. Oppure, altrimenti, poiché l’unità moltiplica qualsiasi valore, lo stesso valore viene fuori dal prodotto che viene operato, per cui la cifra che deve essere posta, che cade nelle unità, moltiplicata per le centinaia, ossia per 1, dà come risultato le centinaia. Ma nel numero 72 non vi sono assolutamente centinaia: perciò la radice di 8172 è 90, col resto di 72.

[8] Il testo latino recita *ultima*: in effetti, leggendo il numero da 1242 con andamento da destra verso sinistra, come appunto faceva Fibonacci, la cifra 1 risulta essere l’ultima cifra del numero.

<4.1> Se volessi estrarre la radice di qualsivoglia numero di cinque cifre, troverai, attraverso l'algoritmo illustrato prima, la radice delle prime tre cifre, e se da lì sarà avanzato qualcosa, lo metterai sotto lo stesso grado, oppure sotto il grado da cui sarà avanzato. Accosterai poi quanto rimasto alle ultime due cifre, quindi collocherai il doppio della radice che è stata trovata sotto la medesima radice, il grado sotto il corrispondente, e in base a quanto noto, ti impegnerai a porre l'altra cifra sotto le unità, dal momento che la prima cifra di una radice di un numero di cinque cifre cade sotto le centinaia, essendo la radice di un numero di cinque cifre dotata, appunto, di tre cifre. **<4.2>** Esempio: vogliamo estrarre la radice di 12345. In primo luogo devi calcolare la radice di 123, che è 11, e rimane 2. Quindi, dopo che avrai trovato questo 11, metterai il primo 1 sotto al 3 e il secondo sotto al 4, poi lo raddoppierai: il risultato sarà di 22, che devi scrivere sotto all'11, e il 2 che sarà rimasto lo porrai sul 3. Accosterai poi questo 2 alle cifre che vengono dopo: il risultato sarà di 245, in cui vi sono tre cifre. E le moltiplicazioni, che devono essere similmente tre, perché per ogni cifra viene sottratto il risultato di una moltiplicazione. Pertanto, è opportuno collocare questa cifra dopo l'11 che è stato posto; essa sarà stata moltiplicata per il primo 2, poi per il secondo 2, e infine per se stessa. Il risultato della prima moltiplicazione deve essere sottratto dal 2 che sta sul tre, il risultato della seconda moltiplicazione deve essere sottratto dal 4, e quello della terza moltiplicazione deve essere sottratto dal 5 delle unità. Quella cifra sarà 1. Chiaramente, una volta che il risultato del prodotto di 1 per il primo 2, viene sottratto dal 2 che sta sul 3, non rimane niente. Allo stesso modo una volta che il risultato del prodotto di 1 per il 2 che viene dopo, viene sottratto dal 4, rimane 2 sopra il 4. Accostato questo 2 al 5 delle unità, fa 25. Dopo aver sottratto da 25 l'1 che risulta dal prodotto di 1 per se stesso, rimane 24 di resto. Così facendo ottieni 111 quale radice di 12345, e 24 di resto. **<4.3>** Attraverso questo procedimento puoi sapere se questo risultato è corretto, qualunque sia il resto di prova[9]: moltiplica il resto della prova di 111 per se stesso,

[9] HUGHES 2008, p. 43, propone la seguente traduzione: «there is a way to prove what you did is correct». Tale traduzione non mi convince, in quanto il termine *proba* qui non indica semplicemente la "prova", ma indica il resto della divisione di un numero o, per meglio dire, il resto di una divisione che viene considerato in vista di una dimostrazione matematica (ROZZA 2015[1], p. 86). Innanzitutto, Fibonacci divide 111, ossia la radice che è stata estratta, per 7; moltiplica poi il resto, che è 6, per se stesso; divide infine il risultato per 7, ottenendo un resto di 1 che è da intendersi come *proba* di 111. A questo punto divide anche 24, ossia quanto è avanzato dall'estrazione della radice di 12345, per 7, ottenendo un resto di 3 che è da intendersi come la

e di questa moltiplicazione considera il resto di prova. A questo, aggiungi il resto della prova di 24. Se da ciò avrai ottenuto il resto della prova del numero intero, vale a dire di 12345, allora il risultato che abbiamo ottenuto è corretto. Ad esempio, il resto di prova di 111 per 7 è 6 che, moltiplicato per se stesso, fa 36. Diviso 36 per 7, rimane 1 di resto, che aggiunto al resto di prova di 24, ossia a 3, dà in totale 4, vale a dire il resto di prova di 12345, perché 12345 diviso 7 dà come resto 4, e questo abbiamo inteso dimostrare. In base a questo procedimento, verificherai sempre i risultati ottenuti dalla estrazione delle radici. **<4.4>** Se vuoi estrarre la radice di 98765, calcola la radice di 987, che è 31 col resto di 26. Scrivi 3 sotto al 7, e 1 sotto al 6, e il resto di 26 mettilo sopra a 87, facendo in modo che il 2 stia sull'8 e il 6 sul 7. Accosterai 26 alle ultime due cifre, e otterrai 2665. Raddoppierai 31, e scriverai 6 sotto al 3 e 2 sotto all'1. Dal momento che nel numero restano quattro cifre, dobbiamo gradualmente rimuoverle attraverso tre moltiplicazioni che devono essere svolte con la cifra da porre dopo il 31, la prima delle quali sarà per 6, la seconda per 2 e la terza per se stessa. È opportuno sottrarre il risultato della prima moltiplicazione da 26: per cui, diviso 26 per il 6, che è doppio di 3 della radice, e che è posto al di sotto di questo 3, otterrai 4. Bisogna collocare 4 dopo 31. Collochiamo dunque 4 dopo 31, dal momento che ciò può essere fatto. Moltiplicherai poi 4 per 6, e sottrarrai il risultato darà 26, e il 2 che rimane lo collocherai sopra al 6. Affiancherai poi questo valore al 6 che sta alle decine, ottenendo così 26, da cui sottrarrai il prodotto di 4 per il 2 che posto sotto l'1: rimane 18, e naturalmente scriverai 1 sul 2 e 8 sul 6. Affiancherai 18 al 5 delle unità: il risultato sarà di 185. Da questo sottrarrai il risultato del prodotto di 4 per se stesso: resta 169. Da questa operazione ottieni quindi 314 quale radice di 98765, col resto di 169.

<5.1> Se volessi estrarre la radice di un numero di sei cifre, devi innanzitutto estrarre la radice delle prime quattro cifre, e quello che avanzerà, lo affiancherai alle successive due cifre. Poi procederai come indicato sopra. **<5.2>** Esempio: vogliamo estrarre la radice di 123456. Troverai prima la radice di 1234, che è 35 col resto di 9. Scrivi 35 sotto 45, e il 9 che rimane mettilo sul 4. Affiancherai il 9 al 56: farà 956. Raddoppierai poi il 35 che hai trovato: il risultato

proba di 24. L'autore divide, infine, il numero di partenza (12345) per 7, ottenendo un risultato di 1763 con resto di 4. Dal momento che la *proba* di 12345 coincide con la *proba* di 111 e 24, si dimostra in questo modo la correttezza delle operazioni svolte.

sarà 70, che scriverai facendo in modo che lo 0 stia sotto al 5 e il 7 sotto al 3. Dal momento che le cifre che restano sono tre, anche le moltiplicazioni sono tre, delle quali la prima deve essere operata per 7, la seconda per zero, la terza per se stessa. Sappiamo che la prima moltiplicazione deve provenire da 9: pertanto, dividi 9 per 7, e il risultato sarà 1, che è la cifra che devi porre dopo 35. Moltiplicato quest'1 per 7, e sottratto il risultato da 9, rimane 2 da collocare sopra al 9. Lo scrivi accanto al 5, quindi sottrai da lì il risultato della seconda moltiplicazione, vale a dire di 1 per 0, e rimane 25. Affiancato questo numero alla cifra che viene dopo, si ottiene 256, da cui estratto il risultato del prodotto di 1 per se stesso, rimane 255. Così facendo, otteniamo 351 quale radice di 123456, col resto di 255. **<5.3>** Se volessi estrarre la radice di 987654, troverai prima la radice di 9876, che è 99, col resto di 75: metti 99 sotto al 65, e il 75 sopra al 76. Raddoppierai poi la radice che hai trovato: il risultato sarà 198. Di questo numero, metterai l'8 sotto al 9 che sta alle decine, e il 9 sotto al 9 che sta alle centinaia, quindi scriverai 1 davanti. Affiancherai poi il 75 al 54: il risultato sarà di 7554, nel quale vi sono quattro cifre, che dobbiamo rimuovere gradualmente attraverso quattro moltiplicazioni da operare con la cifra che bisogna porre, ossia per le tre cifre di 198 e per se stessa. A tale scopo, è opportuno sottrarre il risultato della prima moltiplicazione dal 7: in questo modo, comprendiamo che la cifra da scrivere dopo 99 è 3. Moltiplicato, poi, questo valore per l'1 di 198; sottratto 7 dal risultato, rimane 4 da collocare sopra il medesimo 7. Dopo aver affiancato 4 al 5 delle centinaia, si ottiene 45. Quindi, sottratto da questo il risultato del prodotto di 3 per il 9 di 198, rimane 18 da collocare sulle migliaia e sulle centinaia. Poi, dopo aver sistemato questo 18 accanto al 5 delle decine, si ottiene 185. Sottratto da questo valore il risultato del prodotto di 3 per l'8 di 198, si ottiene 161 da collocare sulle cifre delle migliaia, delle centinaia e delle decine. Infine, dopo aver affiancato 161 al 4 delle unità, si ottiene 1614. Sottratto da questo il risultato del prodotto di 3 per se stesso, rimane 1605, e la radice è 993.

<6.1> Se volessi estrarre la radice di un qualsiasi numero di sette cifre, devi trovare prima la radice dei primi cinque numeri e, se vi sarà resto, lo affiancherai alle ultime due cifre. Opererai, poi, come si è detto sopra. **<6.2>** Esempio: vogliamo estrarre la radice di 9876543. Dal momento che la radice di un numero di sette cifre è dotata di quattro cifre, occorre collocare la prima cifra della radice sotto le migliaia, la seconda cifra sotto le centinaia, e la terza sotto le decine. Troverai queste tre cifre estraendo la radice delle prime cinque cifre del numero, vale a dire di 98765. Di questo valore la radice è 314, e rimane 169 da collocare sulle decine di migliaia, le migliaia e le centinaia. Dopo aver accostato 169 alle ultime due cifre, vale a dire a 43, si ottiene 16943. Raddoppia ora il 314 che hai rinvenuto prima, e otterrai 8 da collocare sotto al 4, 2 da collocare sotto all'1 e 6 da collocare sotto al 3. Infine, occorre moltiplicare la cifra, che bisogna porre adesso, prima per queste tre cifre e poi per se stessa. **<6.3>** Così facendo, vi saranno quattro moltiplicazioni da svolgere, i cui risultati andranno poi sottratti gradualmente dal numero di cinque cifre che ho detto prima, vale a dire da 16943. Dal momento che occorre sottrarre il risultato della prima moltiplicazione dalle prime due cifre, vale a dire da 16, dividerai 16 per il 6 che deve essere moltiplicato per primo: il risultato sarà 2. Collocherai 2 sotto l'unità della radice, e lo moltiplicherai per il 6 di 628: il risultato sarà 12. Lo sottrarrai sottrarrai da 16: rimane 4, da collocare sul 6. Unirai poi questo valore a 9: fa 49. Da questo, sottrarrai il risultato del prodotto di 2 per 2: rimane 45, da collocare sul 49. Affiancherai questo risultato al 4 delle decine: il risultato è 454. Da esso sottrarrai il prodotto di 2 per 8: rimane 438, e scriverai 4 sulle migliaia, 3 sulle centinaia e 8 sulle decine. Affiancherai infine 438 al 3 delle unità: il risultato è di 4383, da cui sottrarrai il prodotto di 2 per se stesso: rimane 4379, che equivale a meno del doppio della radice che è stata estratta. Tale radice è pari a 3142.

<7.1> Se vuoi estrarre la radice di un numero di otto cifre, troverai la radice delle prime sei cifre. Al risultat affiancherai, poi, quanto avanzato alle rimanenti due cifre, com'è stato detto prima. **<7.2>** In questo modo, attraverso il metodo che è stato ora esposto, è possibile estrarre la radice di qualsiasi tipo di numero, all'infinito.

<8.1> Ora, se desideri conoscere di quante cifre sarà composta la radice di un numero dotato di molte cifre, valuta innanzitutto se il numero delle cifre sia pari o dispari. Se pari, dividi il numero a metà, e di quante unità è composta questa metà, di tante cifre sarà composta la radice. Se dispari, invece, aggiungi una cifra al totale, in modo che il numero delle cifre diventi pari. Quindi, di quante unità sarà composta la metà del numero, di tante cifre sarà composta la radice. Comincerai, quindi, col porre la prima cifra sotto lo stesso grado. **<8.2>** Se desideri conoscere con un buon grado di approssimazione le radici delle frazioni che avanzano dal calcolo delle radici integre, valuta in primo luogo se il numero di cui vorrai trovare la radice, sarà espresso in pertiche secondo la geometria, o in gradi secondo l'astronomia. Dal momento che nelle radici di pertiche è necessario ridurre le frazioni in piedi, in once e in parti di once, anche nelle radici dei gradi si devono ridurre le frazioni in minuti, in secondi e in sottomultipli dei secondi. **<8.3>** Come ho già detto, una pertica corrisponde a 6 piedi, un piede corrisponde a 18 once, e un'oncia corrisponde a $\frac{1}{18}$ di un piede. Il piede è la sesta parte della pertica, ossia $\frac{1}{6}$, e una pertica corrisponde a 108 once. **<8.4>** Allo stesso modo, un grado si divide in 60 minuti, un minuto in 60 secondi, e un secondo in 60 terzi, sicché un grado intero equivale a 3600 secondi, ossia a 216000 terzi.

<9.1> Dopo aver imparato a memoria queste nozioni, quando vorrai estrarre la radice di un certo numero espresso in pertiche, moltiplica queste pertiche per il risultato del prodotto di 108 per 108, cioé per 11664. Trova quindi la radice della moltiplicazione, e avrai la radice richiesta espresso in once. Dopo aver diviso per 18 questo valore, si ottene la radice espressa in piedi. Infine, dopo aver diviso questo valore per 6, si ottiene la radice espressa in pertiche. **<9.2>** Esempio: vogliamo calcolare la radice di 67 pertiche. Moltiplica 67 per 11664: il risultato sarà pari a 781488, del quale devi estrarre la radice, che è 884, e rimane 32. Dividi 32 per il doppio di 884, oppure dividi la metà di 32, ossia 16, per 884. Sarà quasi $\frac{1}{55}$: ne consegue che la radice di 67 pertiche equivale a 884 once e $\frac{1}{55}$. Dopo aver diviso questa radice espresso in once per 18, si ottengono 49 piedi, e rimangono 2 once. Dopo aver diviso poi questo 49 piedi per 6, si ottengono 8 pertiche, con 1 piede di resto. Dunque la radice di 67 pertiche è pari a 8 pertiche, 1 piede, 2 once e $\frac{1}{55}$. Con questo sistema puoi operare i tuoi calcoli in tutti i casi simili. **<9.3>** Se volessi estrarre la radice di un numero espresso in gradi, moltiplica i secondi che sono in un grado, vale a dire 3600, per se stessi: il risultato sarà di 12960000. Per questo numero moltiplica il valore, espresso in gradi, di cui desideri estrarre la radice. Calcola la radice della moltiplicazione, dividi quello che avanza per il doppio della radice che hai trovato, e avrai la radice richiesta espresso in secondi. Dopo aver divioi questi secondi per 60, si ottengono minuti; divisi i minuti per 60, si ottengono gradi. Così facendo otterrai i gradi, i minuti, i secondi e le parti di un secondo che saranno nella radice di qualsiasi numero espresso in gradi.

<10.1> Se poi desideri gradualmente calcolare la radice di un numero qualsiasi espresso in pertiche, facendo in modo che essa sia espresso in pertiche, piedi, once e, infine, in sottomultipli dell'oncia, in primo luogo estrai la radice del numero espresso in pertiche pertiche, com'è stato detto. **<10.2>** Converti, poi, le pertiche che sono avanzate, in mezzi soldi, vale a dire in piedi. Dividi poi il tutto per il doppio delle pertiche che sono state rinvenute all'interno della radice, e otterrai pedi, quindi converti in denari quello che avanza. Da questi, sottrai il prodotto dei piedi che sono stati trovati per se stessi. Quello che resta, lo triplicherai, vale a dire lo convertirai in once, che dividerai di nuovo per il doppio delle pertiche e dei piedi che sono stati rinvenuti all'interno della radice: in questo modo, otterrai la radice di un numero di quante pertiche si vuole, ed essa sarà espressa in pertiche, piedi, once e parti di oncia.

<11.1> Esempio: vogliamo calcolare al radice di 67 pertiche. Innanzitutto la radice intera di 67 pertiche è pari a 8 pertiche, e rimangono 3 pertiche che equivalgono ad altrettanti mezzi soldi, avvero a 18 piedi che, diviso il doppio di 8, cioè 16, danno come risultato 1 piede, col resto di 2 piedi, che corrispondono a 12 denari. **<11.2>** Da questi sottrai il risultato del prodotto di un piede per se stesso, vale a dire 1 denaro, perché quando si moltiplica un piede per un piede, si ottiene un denaro, com'è stato già detto: rimangono 11 denari, che moltiplicati per 3, fanno 33 once. Diviso poi 33 per il doppio di 8 pertiche e 1 piede, ossia per 16 pertiche e $\frac{1}{3}$, si ottiene in totale 2 once, col resto di $\frac{1}{3}$ di oncia. **<11.3>** Se sottraiamo da questo $\frac{1}{3}$ il risultato del prodotto delle 2 once che sono state rinvenute per se stesse, resterà di quell'$\frac{1}{3}$ di oncia quasi $\frac{1}{55}$ di oncia, giacché abbiamo diviso quanto era rimasto per il doppio della radice che era stata trovata.

<12.1> Se volessi estrarre la radice di 111 pertiche secondo questo sistema, prendi la radice integra, che è 10, e raddoppiala: il risultato sarà 20. Dividi per questa l'equivalente in piedi delle 11 pertiche che sono rimaste, vale a dire 66: il risultato sarà di 3 piedi, col resto di 6 piedi, ovvero di 36 denari. **<12.2>** Da questo risultato, sottrai i 9 denari che vengono fuori dal prodotto di 3 piedi per se stessi, e rimangono 27 denari. Triplicati, essi danno come risultato 81 once. Ora, dopo aver diviso questo valore per il doppio della radice che è stata trovata, ossia per 21, si avrà come risultato 3 once e $\frac{6}{7}$, e non vi è nient'altro di resto, da cui è possibile sottrarre il risultato del prodotto delle once che sono state trovate per se stesse. Per questo motive, poni un po' meno di $\frac{6}{7}$ di oncia. Avrai così in totale 10 pertiche, 3 piedi e 3 once e $\frac{5}{6}$ quale radice di 111 pertiche. **<12.3>** Tieni a mente le cose che abbiamo detto prima a proposito della moltiplicazione di pertiche, piedi e once per pertiche, piedi e once, in questo modo comprenderai donde derivino le procedure che utilizziamo per l'estrazione di radici espresse in piedi e once.

<13.1> Se vuoi estrarre la radice di 1234 pertiche, senza dubbio la radice intera è 35, e rimangono 9 pertiche, che equivalgono a 54 piedi. Tramite questi 54 piedi, che equivalgono a meno del doppio della radice che è stata rinvenuta, ossia di 70, sappiamo che non possono assolutamente esservi piedi in questa radice, per cui converti in once i 54: otterrai 972 once, che divise per 70, daranno come risultato 13 once e $\frac{7}{8}$, e non rimane altro da cui sottrarre il prodotto di 13 once e $\frac{7}{8}$ per se stesse. Per questo motive, in luogo di $\frac{7}{8}$ metti un po' meno, per esempio $\frac{6}{7}$, o $\frac{5}{6}$, o $\frac{4}{5}$, o $\frac{3}{4}$, a piacere, perché, così facendo, ti allontani di poco dal vero. **<13.2>** In base a questo procedimento, con un buon grado di approssimazione puoi estrarre la radice di qualsivoglia numero espresso in pertiche, o in pertiche e piedi, o anche in pertiche, piedi e once.

<14.1> Ho già sufficientemente trattato, nel mio *Liber Abaci*, il tema del calcolo delle frazioni dei gradi in minuti e in secondi. In verità, è senz'altro possibile estrarre le radici di numeri che non sono quadrati perfetti utilizzando segmenti, senza far ricorso a numeri. **<14.2>** Vi è infatti un sistema per determinare la radice usando segmenti: protrai il segmento che esprime la quantità, ossia il numero di cui desideri conoscere la radice, aggiungi a quel segmento un'unità, e fissa nel mezzo del segmento il centro, quindi nello spazio di mezzo segmento conduci un cerchio. Poi, dal punto che è tra l'unità e la linea, protrai ad angolo retto la linea fino al cerchio. Quella linea sarà la radice esatta del numero richiesto.

<15.1> Esempio: vogliamo estrarre la radice di 67. Si tracci una segmento di retta *ab*, della misura di 67, a cui si aggiunga sulla direttrice un'unità *ag*: tutto il segmento *gb* sarà della misura di 68. Si divida *gb* in due parti uguali nel punto *d*, e si tracci il cerchio *gebz* di raggio *dg* ovvero di *db*. Si tracci poi ad angolo retto la linea *ae*. Dico che la linea *ae* corrisponde alla radice esatta della linea *ab*, vale a dire di 67. **<15.2>** Si tracci il segmento *ae* sulla direttrice fino al punto *z*. Dal momento che il segmento *ba* sta sul segmento *ez*, esso forma due angoli retti, o tali che la loro somma corrisponda alla somma di due angoli retti. Retto è certamente l'angolo *bae*, retto è anche l'angolo *baz*. **<15.3>** Dal momento che il segmento *ag* condotto per il centro, interseca il segmento *ez* ad angolo retto, è necessario intersecare il medesimo segmento per parti uguali. Dunque il segmento *ea* è uguale al segmento *az*. Dal momento che nel cerchio *begz* i due segmenti *bg* e *ez* si intersecano a vicenda nel punto *a*, il risultato del prodotto di *ba* per *ag* sarà uguale al risultato del prodotto di *ea* per *az*. Ma il prodotto di *ae* per *az* è uguale al prodotto di *ea* per se stesso, perché il prodotto di *ba* per *ag* è uguale al prodotto di *ae* per se stesso. Senza dubbio, il prodotto di *ba* per *ag*, vale a dire di 67 per 1, fa 67. Allo stesso modo, il prodotto di *ae* per se stesso dà come risultato 67, come volevasi dimostrare. **<15.4>** Ora, invece, vediamo in che modo si moltiplichino tra loro le radici, in che modo si addizionino, in che modo si sottraggano le più piccole dalle più grandi, e infine in che modo si dividano tra loro.

<2>

La moltiplicazione tra radici

<1> Se volessi moltiplicare la radice di 16 per la radice di 25, giacché 16 e 25 sono quadrati perfetti, prendi le loro radici, che sono 4 e 5, e moltiplicale tra di loro: il risultato della moltiplicazione richiesta è 20.

<2> Se invece vuoi moltiplicare la radice di 16 per la radice di 20, dal momento che la radice di 30 è sorda, moltiplicherai 16 per 30[10]: il risultato sarà 480, di cui estrarrai la radice secondo il maggior grado di approssimazione possibile, e avrai il risultato di detta moltiplicazione.

[10] In latino si definisce "sorda" la radice irrazionale di un numero. Cfr. Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 356 (Boncompagni): *radix numeri non quadrati, quae radix dicitur surda, cum numerari non possit, sed eius potentia numeratur*; p. 359: *quorum radix, quae est surda, hoc est inratiocinata*; p. 361: *si vis addere numerum cum radice surda, scilicet cum radice numeri non quadrati*; p. 407: *quare radix cius est surda, cum sit radix numeri non quadrati*. Definizione simile si trova anche all'interno del *Liber Mahameleth*, p. 194: *si autem numerus fuit surdus et eius radicem propinquam invenire volueris, quere numerum propinquiorem ei habentem radicem rationabilem, sive sit maior eo sive minor*.

<3.1> Se volessi moltiplicare la radice di 20 per la radice di 30, moltiplica 20 per 30: il risultato sarà 600, di cui troverai la radice, e avrai quanto richiesto. Esempio: sia dato *a* 20 e *b* 30, sia poi *g* la radice di 20, e *d* sia la radice di 30. Senza dubbio, il prodotto di *g* per *d* fa *z*. Dico che *z* è la radice di 600, vale a dire di *e*. **<3.2>** In primo luogo bisogna dire questo: *un numero sta ad un altro, come il suo multiplo sta al multiplo dell'altro, e qualsiasi suo sottomultiplo sta al medesimo sottomultiplo dell'altro.* **<3.3>** Dimostreremo ciò per i numeri 12 e 24: nella proporzione in cui 12 sta a 24, nella stessa sta il doppio di 12 al doppio di 24, il triplo al triplo e, così via, il quadruplo al quadruplo, e i multipli a seguire. Allo stesso modo, nella proporzione in cui 12 sta a 24, nella stessa proporzione sta la metà di 12 alla metà di 24, la terza parte dell'uno alla terza parte dell'altro, e così via. **<3.4>** Dimostrate tali cose, torniamo al nostro proposito. Dal momento che *g* è la radice del numero *a*, vale a dire di 20, allora *g*, moltiplicato per se stesso, dà come risultato *a*. Certamente *g* per *d* dà come risultato il numero *z*. Dunque, quanto più *z* è multiplo di *g*, tanto più *z* è multiplo di *d*, per cui come *g* sta a *d*, così *a* sta a *z*. Dal momento, poi, che *d* è la radice di *b*, vale a dire di 30, quando *d* moltiplica se stesso, dà come risultato *b*. Ma *d* moltiplicato per *g*, fa *z*. Allora quanto più *z* è multiplo da *g*, tanto più *b* è multiplo da *d*, dal momento che come *g* sta a *d*, così *z* sta a *b*. Perciò come *g* era stato a *d*, così *a* era stato a *z*. Allo stesso modo, infine, come *a* sta a *z*, così *z* sta a *b*, per cui il prodotto di *a* per *b* è uguale al prodotto di *z* per se stesso. Ma il prodotto di *a* per *b* fa *e*, vale a dire 600, e il prodotto di *z* per se stesso fa allo stesso modo *e*: di conseguenza *z* è la radice di *e*, come volevasi dimostrare.

<4.1> Bisogna notare che *quando i numeri, di cui si moltiplicano tra loro le radici, sono in proporzione tra loro, il prodotto di numeri quadrati dà come risultato un numero quadrato: ne consegue che il prodotto delle loro radici dà come risultato un numero razionale.* **<4.2>** Esempio: vogliamo moltiplicare la radice di 8 per la radice di 18. Il rapporto tra questi due numeri è uguale al rapporto di 4 a 9, vale a dire di un numero quadrato a un numero quadrato. Dico che il prodotto di 8 per 18 dà come risultato un numero quadrato, vale a dire 144, la cui radice, che è 12, è pari al prodotto della radice di 8 per la radice di 18. **<4.3>** Allo stesso modo, se vuoi moltiplicare 10 per la radice di 20, moltiplica il quadrato di 10 per 20: il risultato sarà 2000, e la sua radice corrisponde al risultato di detta moltiplicazione. Nota che ciò che risulta dal prodotto di 10 per la radice di

20, è uguale al prodotto della radice di 10 per 20. Ciò significa che se vogliamo ridurre alla radice di un solo numero il prodotto della radice di 10 per 20, dobbiamo moltiplicare il quadrato di 10 per 20, e in questo modo otteniamo 2000, la cui radice è ciò che si somma da questa radice di 10.

<5.1> Ugualmente si deve procedere in casi simili. Perciò, *se si vuole ridurre la radice di un certo numero alla somma delle radici di un altro numero, dividi questo numero per un certo numero quadrato, e quante unità vi saranno nella radice di questo numero quadrato, tante radici risulteranno dalla divisione del numero che viene fuori dalla divisione.* **<5.2>** Esempio: vuoi ridurre la radice di 1200 in più radici di un altro numero: dividerai 1200 per un certo numero quadrato, diciamo per 16, e il risultato sarà 75. Prendi poi la radice di 16, che è 4: avrai come risultato altrettante radici di 75 in luogo di una sola radice di 1200. Se poi avremo diviso 1200 per 25, la cui radice è 5, otterremo 5 radici di 48 per la sola radice di 1200. Così facendo possiamo ridurre la radice di 1200 in più radici di numeri diversi.

Fine.

<3>

L'addizione tra radici

<1.1> Quando si opera un'addizione di radici numeriche, essa dà come risultato o un numero razionale, oppure una radice; quando le radici non possono essere addizionate, il risultato è tale per cui perviene o un numero intero o la radice. **<1.2>** Se vogliamo addizionare tra loro le radici di numeri quadrati, allora dalla loro unione viene fuori un numero intero: così, se vogliamo addizionare la radice di 16 alla radice di 25, uniremo 4 e 5, vale a dire le radici di 16 e 25: il risultato sarà 9. **<1.3>** Quando, invece, vogliamo addizionare le radici di numeri tra i cui quadrati vi è un certo rapporto di proporzionalità, allora il risultato corrisponde a numero razionale. Indichiamo ora con due esempi in che modo si addizionino le radici.

<2.1> Vogliamo addizionare la radice di 27 alla radice di 48. Trova i quadrati che stanno in proporzione tra loro: essi saranno 9 e 16. Addiziona le loro radici: il risultato sarà 7. Moltiplica questo valore per se stesso: il risultato sarà 49. Ora triplicalo, perché 27 e 48 corrispondono al triplo rispettivamente di 9 e 16: il risultato sarà 147, la cui radice equivale al totale di detta addizione. **<2.2>** Questo procedimento si dimostra attraverso le proporzioni dei triangoli simili, in questo modo: si traccino lungo la stessa direttrice i segmenti *ab* e *bg*, di cui *ab* è la radice di 27 e *bg* è la radice di 48. Dal punto *a* si tracci il segmento *adde*, in modo da formare un angolo. Sia *ad* 3 e *de* 4. Si traccino poi i segmenti *eg* e *bd*: il quadrato di *ab* corrisponde, dunque, al triplo del quadrato di *ad*, e il quadrato di *bg* corrisponde al triplo del quadrato di *de*. Ne consegue che come *ab* sta ad *ad*, così *bg* sta a *de*, perciò *db* è equidistante rispetto a *eg*. Da ciò, il triangolo *adb* è simile al triangolo *aeg*: essi hanno l'angolo *a* in comune, l'angolo *adb* è uguale all'angolo *aeg* e all'angolo *age*, vale a dire gli angoli esterni sono uguali agli angoli interni. Dunque il quadrato di *ab* sta al quadrato di *ad*, come il quadrato di *ag* sta al quadrato di *ae*. Ma il quadrato di *ab* è triplo del quadrato di *ad*, per cui il quadrato di *ag* è triplo del quadrato di *ae*. Ma il quadrato di *ae* è 49, quindi il quadrato di *ag* è il triplo, ossia 147. Dunque dall'unione di *ab* e *bg* viene la radice di 147, come volevasi dimostrare.

<3.1> Nota che *le radici di interi che stanno in proporzione tra loro possono tutte essere ridotte alla radice di un unico numero, dividendo il numero che viene prima per il quadrato che viene prima, e il numero successivo per il quadrato successivo.* **<3.2>** Esempio: se vuoi ridurre le radici di 27 e 48 alla radice di un unico numero, dividerai il precedente numero, ossia 27, per il precedente quadrato, ossia per 9, e il successivo 48 per il successivo quadrato, vale a dire per 16: il risultato sia della prima sia della seconda divisione sarà pari a 3. Ora, quante unità vi sono nella radice di 9, tante volte la radice di 3 è contenuta nella radice di 27, e quante unità vi sono nella radice di 16, tante volte la radice di 3 è contenuta nella radice di 48. **<3.3>** Così, in luogo della radice di 27 si ottiene $3\sqrt{3}$, e in luogo della radice di 48 si ottiene $4\sqrt{3}$. Ne consegue che se le vogliamo addizionare tra loro, otterremo $7\sqrt{3}$; se poi vuoi convertire questo risultato nella radice di un unico numero, moltiplica il quadrato di 7 per 3, ed estrai la radice del risultato. Il risultato di questa addizione sarà allora pari alla radice di 147, come si è detto prima. **<3.4>** Oppure si operi dapprima l'addizione di 27 e 48: il risultato sarà 75. Moltiplica poi 27 per 48, e raddoppia la radice del risultato: otterrai 72. Addiziona questo valore a 75, e avrai in totale 147 quale quadrato della detta addizione. **<3.5>** Dimostreremo ciò anche attraverso un esempio: giaccia sulla stessa direttrice il segmento *ab* quale prolungamento del segmento *bg*, e sia *ab* la radice di 27 e *bg* la radice di 48: vogliamo calcolare la misura di tutto il segmento *ag*. **<3.6>** Dal momento che il segmento *ag* è stato diviso in due parti nel punto *b*, il quadrato di *ab* più il quadrato di *bg* più il doppio prodotto di *ab* per *bg* sarà uguale al quadrato dell'intero segmento *ag*. Ma la somma del quadrato di *ab* e del quadrato di *bg*, è pari alla somma di 27 e 48, vale a dire a 75, e il prodotto di *ab* per *bg* è pari alla radice del prodotto di 27 per 48, vale a dire a 36. Il doppio di 36 è 72 che, addizionato a 75, fa 147, ossia il quadrato di *ag*, come ho detto prima.

<4.1> Se invece vogliamo addizionare la radice di 20 alla radice di 30, dal momento che 20 e 30 non sono in proporzione tra loro, come invece sono il quadrato di un numero rispetto al quadrato di un numero, come si capisce dal fatto il prodotto di 20 per 30 dà come risultato un numero che non ha radice intera, ebbene, dalla somma delle radici di questi due numeri non proviene né un numero intero, né una radice intera. **<4.2>** Esempio: sia dato il segmento *ba* pari alla radice di 20, e il segmento *ag* pari alla radice di 30. La somma del quadrato di *ba* col quadrato di *ag* dà come risultato 50, mentre il prodotto di *ba* per *ag* dà come risultato la radice di 600, per cui il doppio prodotto di *ba* per *ag* è pari alla radice di quattro volte 600, vale a dire alla radice di 2400. Dal momento che questa radice è irrazionale, dalla predetta addizione sappiamo che non possiamo ottenere né un intero né una radice intera, ma otteniamo la radice di un numero e di una radice, vale a dire al radice di 50 e la radice della radice di 2400. **<4.3>** Perciò, dal momento che possiamo ottenere soltanto quello che è possibile calcolare, si estragga la radice di 2400 al massimo grado di approssimazione possibile: essa è 49 meno $\frac{1}{98}$. Ad essa si aggiunga il 50 che abbiamo detto prima: il risultato sarà 99 meno $\frac{1}{98}$. Infine, estrarrai la radice di questo valore e otterrai il risultato richiesto. Oppure estrai le radici di 20 e 30 al massimo grado di approssimazione possibile, addizionale e otterrai, allo stesso modo, quanto desiderato.

Fine.

<4>

La sottrazione tra radici

<1> Se invece volessi sottrarre la radice di un quadrato perfetto dalla radice di un altro quadrato perfetto, come ad esempio la radice di 16 dalla radice di 49, sottrai la radice di 16, vale a dire 4, dalla radice di 49, ossia da 7: rimarrà 3, che è il risultato della detta estrazione.

<2.1> Se poi dalla radice di 125 vuoi sottrarre la radice di 45, dal momento che tra questi numeri vi è una proporzione di quadrati, cioè di 9 e 25, sottrai la radice di 9 dalla radice di 25, cioè 3 da 5: rimane 2. Moltiplica questo valore per se stesso: il risultato sarà pari a 4. Moltiplica 4 per 5, giacché 45 e 125 equivalgono a cinque volte 9 e 25: il risultato sarà pari a 20, la cui radice corrisponde al risultato di detta sottrazione. **<2.2>** Ad esempio: si tracci il segmento *ab* corrispondente alla radice di 125. A partire dal punto *a*, si tracci il segmento *ag* in modo da formare l'angolo *bag*, e sia *ag* pari a 5, ossia alla radice di 25. Si sottragga ora da *ag* il segmento *ad* pari a 3: rimarrà *da* pari a 2. Si protragga per il punto *d* il segmento *de* equidistante al lato *gb*. Dal momento che nel triangolo *agb* è stato protratto il segmento *de* equidistante al lato *bg*, i lati *ab* e *ag* sono tra loro in proporzione e si intersecheranno nei punti *d* ed *e*. Ciò significa che vale come *ae* sta a *eb*, così *ad* sta a *dg*. **<2.3>** Di conseguenza, come *ba* sta a *be*, così *ga* sta a *gd*. Se poi li permuteremo, diremo che come *ba* starà ad *ag*, così *be* starà a *gd*, per cui come il quadrato del lato *ba* sta al quadrato del lato *ag*, così il quadrato del segmento *be* sta al quadrato del segmento *gd*. Ma il quadrato del lato *ba* è cinque volte il quadrato del lato *ag*, per cui anche il quadrato di *be* è cinque volte il quadrato di *gd*. Ora, il quadrato di *gd* misura 9: ne consegue che il quadrato di *be* misura 45. Dunque il lato *be* corrisponde alla radice di 45, e la vogliamo sottrarre da *ab*, vale a dire dalla radice di 125, nonché calcolare il resto, ossia la linea *ae*. Il quadrato della linea *ae* sta al quadrato della linea *ad*, come il quadrato della linea *be* sta al quadrato della linea *gd*: ne consegue che il quadrato della linea *ae* è cinque volte il quadrato della linea *ad*. Ma il quadrato di *ad* è pari 4, dunque il quadrato di *ae*, vale a dire di quello che resta da cercare, è pari a 20: in questo modo si è visto che *ae* corrisponde alla radice di 20, come si è detto sopra.

<3.1> Oppure se ridurremo la radice di 45 e quella di 125 in multipli della radice di 5, in luogo della radice di 45 avremo $3\sqrt{5}$, e in luogo della radice di 125 avremo $5\sqrt{5}$. Ne consegue che se da $5\sqrt{5}$ si sottrae $3\sqrt{5}$, rimarrà $2\sqrt{5}$, che corrisponde alla radice di 20, come si è visto. **<3.2>** Altrimenti aggiungi 45 a 125: il risultato sarà 170. Da qui sottrai il doppio della radice del prodotto di 45 per 125, vale a dire 150. Rimane 20, che è pari al quadrato di quello che resta da cercare. **<3.3>** A riprova di ciò, sia data la linea *ab* corrispondente alla radice di 125, e si aggiunga ad essa la linea *bg* corrispondente alla radice di 45: dico che la linea *ga* è pari alla radice di 20. Dal momento che la linea *ab* è stata divisa in due parti nel punto *g*, la somma dei due quadrati delle linee *ab* e *gb* sarà uguale al quadrato di *ag* più il doppio prodotto di *gb* per *ab*. La somma, infatti, del quadrato di *ab* più il quadrato di *gb* è pari a 170, e corrisponde al quadrato della linea *ag* più il doppio prodotto di *bg* per *ba*. Ma il prodotto di *bg* per *ba* è pari alla radice del prodotto di 45 per 125, vale a dire a 75. Il doppio di 75 fa 150, che sottratto da 170, fa in totale 20 per il quadrato della linea *ag*, come volevasi dimostrare.

<4.1> Se poi vuoi sottrarre la radice di 20 dalla radice di 30, poiché 20 e 30 non sono in proporzione come tra numeri quadrati, calcolerai la radice di 20 e quella di 30 quanto più approssimativamente potrai. Sottrai poi la radice di 20 dalla radice di 30, e così facendo otterrai non il risultato preciso, ma quasi. **<4.2>** Oppure aggiungi 20 a 30: il risultato sarà 50; moltiplica quindi 20 per 30: il risultato sarà pari a 600. Da questo valore, prendi due radici, ovvero il doppio della radice di quello, cioè la radice del quadruplo di 600, la quale corrisponde a quasi 49 meno $\frac{1}{98}$. Sottrai poi questo valore da 50, e rimane 1 più $\frac{1}{98}$. Estrai ora la radice di questo numero, e avrai il risultato che cerchi, in forma approssimata.

Fine.

<5>

La divisione tra radici

<1.1> Se vuoi dividere la radice di 600 per la radice di 40, dividi 600 per 40: il risultato sarà 15. La radice di questo cade dalla predetta divisione. **<1.2>** Esempio: sia *a* pari a 40, *b* pari a 600 e *g* pari a 15. Sia poi *d* la radice di *a*, e sia *e* la radice di *b*. Si divida *e* per *d*, vale a dire la radice di 600 per la radice di 40: il risultato è *z*: dico che *z* è la radice di *g*, ossia di 15. <**1.3**> Dal momento che *e* diviso *d* fa *z*, se *d* moltiplica *z*, il risultato è *e*. Ma *d* per se stesso fa *a*. Dunque quanto più *a* è multiplo di *d*, tanto più *e* è multiplo di *z*, per cui come *d* sta a *z*, così *a* sta a *e*. Di nuovo *z*, moltiplicando *d*, fa *e*, e *z* moltiplicando se stesso fa *i*. Allora come *d* sta a *z*, così *e* sta a *i*. Ma come *d* sta a *z*, così *a* sta ad *e*, come si è visto, per cui come *a* sta ad *e*, così *e* sta ad *i*. Allora *a*, *e* ed *i* sono tra loro in proporzione continua, perché il prodotto di *a* per *i* è uguale al prodotto di *e* per se stesso. Ma il prodotto di *e* per se stesso fa *b*, dunque *a* per *i* fa ugualmente *b*, vale a dire 600. Ora, *b* diviso *a* fa *g*, dunque il prodotto di *a* per *g* fa *b*, e di *a* per *i* fa *b*, per cui il numero *i* è uguale al numero *g*. Ma *z* moltiplicando se stesso fa *i*, per cui dal prodotto di *z* per se stesso risulta allo stesso modo *g*. Ne consegue che *z* è la radice di *g*, come volevasi dimostrare.

<**2.1**> Oppure, dalla moltiplicazione *d* per *z* viene fuori *e*, ed *e* moltiplicando se stesso dà come risultato *b*. Ne consegue che il prodotto di *d* per *z*, moltiplicato poi per *e*, dà come risultato *b*. Allo stesso modo *d*, moltiplicando se stesso, dà come risultato *a*, e *a* moltiplicando *g* dà come risultato *b*. Ciò significa che il prodotto di *d* per se stesso, moltiplicato a sua volta per *g*, fa *b*, per cui il prodotto di *d* per *z*, moltiplicato poi per *e*, è pari al prodotto di *d* per se stesso, moltiplicato a sua volta per *g*. <**2.2**> Se si tralascia il prodotto per *d*, secondo procedura, resterà il prodotto di *z* per *e* il cui risultato è uguale al prodotto di *d* per *g*. Ne consegue che come *d* sta a *z* così *e* sta a *g*. Ora, come *d* sta a *z*, così *e* sta ad *i*: ciò significa che *e* sta a *g* e ad *i* in eguale proporzione, per cui *g* è uguale a *i*. Ma *z* è la radice di *i*, per cui *z* sarà anche la radice di *g*. Se poi vuoi dividere la radice di 40 per la radice di 600, dividi 40 per 600: il risultato sarà pari a $\frac{1}{15}$, del quale puoi trovare la radice, e avrai quanto richiesto.

<**3.1**> Mi occuperò ora di dimostrare in che modo si estraggano le radici delle frazioni. In primo luogo bisogna notare che *quando si dividono tra loro le radici di numeri quadrati, oppure di numeri che stanno tra loro in un certo rapporto, il risultato è sempre un numero razionale.* <**3.2**> Esempio: vogliamo dividere la radice di 64 per la radice di 16: 64 diviso 16 dà come risultato 4, la cui radice, che è 2, corrisponde al risultato di detta divisione. Infatti 8, ossia la radice di 64, diviso la radice di 16, cioè diviso 4, fa ugualmente 2. <**3.3**> Nota ora che si otterrà sempre lo stesso risultato dalla divisione delle radici di tutti i numeri che

hanno, tra loro, la stessa relazione che hanno 16 e 64, sicché se vogliamo dividere la radice di 80 per la radice di 20, allo stesso modo viene fuori 2 da detta divisione.

<**4.1**> Se desideri estrarre la radice di una frazione, indicherò come fare ciò in due modi. <**4.2**> Il primo modo è questo: da un numero piuttosto grande prendi una o più parti, e quante ne otterrai, moltiplicale per il numero stesso. Trova poi la radice del risultato di questa moltiplicazione, e dividila per il numero sopradetto: così facendo, otterrai quanto prefissato. <**4.3**> Esempio: vogliamo estrarre la radice di $\frac{2}{3}$. Prendi $\frac{2}{3}$ di un numero grande: sia quel numero 60. Infatti, quanto più grande è il numero che prenderai in considerazione, tanto più troverai una radice prossima a quella vera. $\frac{2}{3}$ di 60 è senza dubbio 40 che, moltiplicato per 60, fa 2400. Dividi ora la radice di questo valore, ossia 49 meno $\frac{1}{49}$, per 60, e avrai quanto richiesto. Se poi desideri convertire questo risultato in piedi e once, prendi $\frac{2}{3}$ delle once che compongono un piede, vale a dire di 108: il risultato sarà 72, che moltiplicato per 108, fa 7776; estrai ora la radice di questo valore: sarà 88 e $\frac{2}{11}$. Di uguale numero, poi, sono le once contenute nella radice di $\frac{2}{3}$ di una pertica. <**4.4**> Allo stesso modo, se vuoi convertire in minuti e in secondi la radice di $\frac{4}{5}$ di un grado, prendi $\frac{4}{5}$ dei secondi che compongono un grado, vale a dire di 3600: il risultato sarà 2880, che devi moltiplicare per 3600: otterrai così la quarta parte di 10368000. La radice di questo valore ti restituirà i secondi che sono contenuti nella radice di $\frac{4}{5}$ (di un grado).

<**5.1**> Altrimenti, vogliamo trovare la radice di $\frac{2}{3}$ di una pertica. Dal momento che dalla moltiplicazione di un piede per un piede si ottiene un denaro, converti i $\frac{2}{3}$ di pertica in denari: il risultato sarà di 24 denari. Di questi, estrai la radice: essa sarà pari a 4 piedi, col resto di 8. Converti ora questo valore nella diciottesima parte di un denaro: otterrai 144 denari, che diviso il doppio della radice trovata, vale a dire 8, fa in totale 16 once, col resto di $\frac{16}{18}$. Moltiplica questo risultato per 18: otterrai $\frac{288}{324}$. Da questo, estrai il prodotto di 16 once per se stesse, vale a dire $\frac{256}{324}$: il resto sarà pari a $\frac{8}{81}$ di denaro. Diviso poi questo per il doppio

della radice che è stata trovata, otterrai circa $\frac{2}{11}$ di oncia. **<5.2>** Oppure estrai la radice di 24 denari: essa sarà pari a 5 piedi, meno 1 denaro. Di questo, prendi la diciottesima parte: otterrai 18 once che, diviso il doppio della radice trovata, vale a dire 10, danno come risultato 1 oncia e $\frac{4}{5}$. Tolto questo valore dai 5 piedi, rimangono 4 piedi più 16 once e $\frac{1}{5}$.

Fine della Seconda Distinzione.

APPENDICE

Appendice delle fonti e dei luoghi paralleli

<1>

<1> Al-Khwāwirzmī, *Al-Jabr*, p. 233 (Hughes): radix vero que est unum eorum est quicquid in se multiplicatur ab uno, et quod est super ipsum ex numeris, et quod est preter eum ex fractionibus. Census autem est quicquid aggregatur ex radice in se multiplicata. Sed numerus simplex est quicquid ex numeris verbis exprimitur absque proportione eius ad radicem et ad censum; **Al-Khwāwirzmī, *Al-Jabr* pp. 233-4 (Hughes):** census equatur radicibus, et census equatur numero, et radices equantur numero. Census autem qui radicibus equatur est ac si dicas: census equatur quinque radicibus. Radix ergo census est quinque. Et census est viginti quinque; **Al-Khwārizmī, *Al-Jabr*, p. 234 (Hughes):** sicut si dicas: census et decem radices equantur triginta novem dragmis. Cuius hec est significato: ex quo censu cui additur equale decem radicum eius aggregatur totum quod est triginta novem. Cuius regula est ut medies radices que in hac questione sunt quinque. Multiplica igitur eas in se et fiunt ex eis viginti quinque. Quos triginta novem adde, et erunt sexaginta quattuor. Cuius radicem accipias que est octo. Deinde minue ex ea medietatem radicum que est quinque. Remanet igitur tres qui est radix census. Et census est novem. Et si duo census aut tres aut plures aut pauciores nominentur, similiter reduc eos ad censum unum. Et quod ex radicibus aut numeris est cum eis, reduc ad similitudinem eius ad quod reduxisti censum; **Abū Kāmil, *al-Jabr*, p. 325 (Sesiano):** census autem qui radicibus equantur est sicut si dicas: census equatur 5 radicibus suis. Cuius expositio est quod census equalis est quincuplo radicum eius. Et radix census erit semper sicut numerus radicum quibus census equalis existit. Que est in hac questione 5, et census est 25. Qui est sicut 5 radices eius; **Ps. al-Khwāwirzmī, *Dixit Algorizmi*, p. 16 (Allard)**: et scito quod omnis numerus integer qui multiplicatur in numero integro efficitur numerus integer; **Ps. al-Khwāwirzmī, *Liber Alchorismi*, pp. 175-6 (Allard)**: radix autem cuiuslibet numeri est quilibet alius numerus, qui in se multiplicatus reddit ipsum; **Ps. al-Khwāwirzmī, *Liber Alchorismi*, p. 175 (Allard)**: cuius rei scientia [*sc.* inveniendi radices numerorum] non solum ad geometriam et astronomiam, verum etiam ad totam quadruvii disciplina valde est necessaria; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Alchorismi*, pp. 182-4 (Allard)**: capitulum de assignanda regula inveniendi radicem numeri: his igitur precognitis, cum radicem cuiuslibet numeri invenire volueris, eum per differentias suas prius ordinabis. Et quia semper ab impari inchoandum est, idcirco an pares sint differentie, an impares considerabis. Si enim fuerint impares, sub ultima earum numerum execogitatum pones, qui in se ductus reddat numerum equalem numero sibi superiori, vel minorem, propinquiorem autem quam possit inveniri. Si autem fuerint pares, pones sub penultima, et illum in eo multiplicatum, id est summam provenientem ex sui in se multiplicatione subtrahes de superiori numero, sicut superius predocuimus in divisione. Deinde eundem numerum inferiorem in eodem loco duplica, et duplatum una differentia versus dexteram muta. Post illum autem in alia differentia iterum talem alium numerum nota, qui multiplicatus in numerum duplatum et in se reddat numerum equalem superiori, vel minorem propinquiorem autem sicut predictum est. Et illum numerum, qui ex eius multiplicatione provenerit, minues de superiori; et postea etiam duplabis ipsum in eodem loco sicut fecisti de primo; et tunc mutabis utrumque una differentia versus dexteram, si forte tot fuerint differentie superioris numeri. Deinde prepones illis duobus tercium numerum sub alia differentia, qui multiplicatus in illis duobus duplatis, et in se reddat summam equalem superiori, vel minorem, sed propinquiorem, quam demes de superiori. Et iterum duplatis eumdem tercium numerum in suo loco, et sic mutabis omnes tres numeros una differentia versus dexteram, si forte adhuc aliqua superius superfuerit differentia. Quibus iterum prepones quartum numerum eodem modo quo dictum est de aliis tribus. Et ita facies donec nulla remaneat superius versus dexteram differentia, ad quam possis mutare inferiores differentias. Hoc facto, si aliquid remanserit superius, denomina illud a numero inferiorum differentiarum duplatarum. Deinde dimidia dupplatas differentias, et qui remanserit numerus, erit radix supra positi numeri; **Ps. al-Khwāwirzmī, *Liber Ysagogarum*, p. 51 (Allard)**: verumtamen radix, quae in geometria latus dicitur, est cuiuslibet numeri numerus, qui in se ipsum ductus, ipsum efficiet, ut 3 novenarii; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, pp. 52-3 (Allard)**: de inventione radicis integrorum: cum vero radicem alicuius extrahere voluerimus, sub ultima impari differentia talis numerus apponatur qui in semetipsum ductus superiores consumat et ibidem geminatus in secunda differentia versus dextram transmutetur. Cui iterum talis supponatur a dextris qui per duplatum et semetipsum multiplicatus diminuat superiores. Dupla iditem secundum et mutando eum ad secundam apponas eidem alterum qui per differentias omnes et seipsum superiores auferat, et id facias apponendo sive numerum sive ciffre quousque superiores demas. Sed si aliquid remanserit quod auferri non possit, erit pars inferioris duplati. Postea quos duplaveras media et erit vera radix; **Abraham Ibn Ezra,** ***Sefer ha-Middot*****, p. 206 (Lévy-Burnett)**: Unus igitur, quia est medius eorum, iure habet radicem quadrato suo equalem et dimensio eius est equalis in longo lato et alto. Quando autem adunabis sparsos, id est impares, sicut succedunt sibi naturali ordine, inventes quadratos integrorum ordinatim sicut radices naturali ordine sibi succedunt, ut 1 et 3 sunt duo numeri quadratus binarii, id est quatuor; 1, 3 et 5 sunt tres numeri et quadratus ternarii, id est novem, et sic in ceteri; **Johannes Hispaniensis,** ***Liber Mahameleth*****, p. 194 (Sesiano)**: radix de quatuor sunt duo, et radix de novem sunt tres, et radix de sexdecim sunt quatuor; et ita in aliis numeris qui non sunt surdi radix facile inveniri potest; **Johannes Hispaniensis,** ***Liber Mahameleth*****, p. 194 (Sesiano)**: radix numeri est numerus ex quo in se multiplicato provenit alius; **Iohannis de Sacro Bosco,** ***Tractatus de Arte Numerandi*****, p. 20 (Boncompagni)**: radix autem numeri quadrati est ille numerus qui ita ducitur in se, ut bis sunt duo quatuor. Quaternarius igitur est primus numerus quadratus, et binarius est eius radix; **Iohannis de Sacro Bosco,** ***Tractatus de Arte Numerandi*****, p. 22 (Boncompagni)**: si numerus vero non fuerit quadratus, tunc radicem extrahere est maximi quadrati sub numero proposito contenti invenire; **Fibonacci,** ***Liber Abaci*****, p. 353 (Boncompagni):** Radix enim quidem cuiuslibet numeri est numerus qui, cum in se multiplicatur, facit ipsum numerum.

<4> Ps. al-Khwārizmī, ***Liber Alchorismi*****, p. 176 (Allard)**: omnis igitur numerus multiplicatus in se generat numerum habentem radicem, et omnis talis quadratus est, ut bis bini, vel quinquies 5 et sic de omnibus; **Fibonacci,** ***Liber Abaci*****, pp. 354-5 (Boncompagni)**: Rursus si radicem cuiuslibet numeri quinque figurarum vis invenire, ut dicamus de 12345, invenies quidem supra scripto ordine radicem numeri trium ultimarum figurarum, scilicet de 123; eritque 11, et remanent 2: pone ergo 11 bis sub tertio et secundo gradu, et remanent 2, quae pone super 3; et copulabis ea cum antedente (sic) figura, scilicet cum 4: erunt 24. Pro quibus pones in primo gradu radicis, scilicet ante posita 11, bis talem figuram, qua in cruce multiplicata per 11, et extracta summa multiplicationis de 24, remaneat numerus, qui copulatus comfuerit com (sic) figura primi gradus, scilicet cum 5, valeas inde extrahere multiplicationem illius figure in se ipsa; et non remaneat plus duplo inventae radicis. Eritque 1, qua posita ante utraque 11, multiplicabis eum in cruce per 11: erunt 22. Que extrahe de 24, remanent 2 super 4. Quibus copulatis cum 5 primi gradus, faciunt 25. De quibus extrahe multiplicationem de 1 superiori et 1 inferiori, remanent 24. Et sic habebis numerum trium figurarum, scilicet 111 pro radice de 12345, ut opportet; et remaneant supra ipsam radicem 24; quorum dimidium, scilicet 12, divide per 111. Exibunt $\frac{4}{37}$. Quibus additis cum 111, reddunt $\frac{4}{37}$ 111 pro radice de 12345; **Iohannis de Sacro Bosco,** ***Tractatus de Arte Numerandi*****, p. 24 (Boncompagni)**: si velis ergo probare utrum beneficeris necne, multiplica digitum ultimum invento cum subduplo vel cum subduplis per eundem digitum, et redibunt eaedem figurae quas prius habuisti, si non fuerit residuum, tunc cum additione illius redibunt eaedem figurae quas prius habuisti.

<8> Ps. al-Khwārizmī, ***Liber Ysagogarum*****, p. 55 (Allard)**: de inventione radicis minutiarum. Si autem fractionum radicem invenire desideras, verte ipsas in ultimum genus, deinde, ut in integris docuimus, faciamus, et quod exierit reducas ad integrum ut poteris. Sed si aliquid superfuerit, non habet radicem. Tunc minuas, quia quantocumque plus minues eo magis numerum vere radicis propinquiorem generabis; **Ps. al-Khwārizmī,** ***Liber Alchorismi*****, pp. 195-6 (Allard)**: capitulum de invenienda radice in fractionibus. Si autem volueris invenire radicem alicuius numeri integri cum fractionibus, converte integrum in ultimum genus suarum fractionum. Deinde considera si ille fractiones habent radicem an non. Si habuerint radicem, invenias illam sicut premonstratum est. Si autem non habent, reduc eas ad inferiores fractiones habentes radicem; **Iohannis de Sacro Bosco,** ***Tractatus de Arte Numerandi*****, p. 22 (Boncompagni)**: si velis igitur radicem alicuius numeri quadrati extrahere, scribe numerum illum per suas differentias, et computa numerum figurarum, utrum sit par vel impar.

<14> Euc. II, 2 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸὑπὸ τῆς ὅλης καὶἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ; **Ps. al-Khwārizmī,** ***Dixit Algorizmi*****, pp. 16-7 (Allard)**: eruntque duo gradus multiplicati in duobus minutis IIII minuta, et tres gradus in sex terciis XVIII tercia. Minuta quoque in minutis erunt secunda, et secunda in minutis tercia, et tercia in minutis quarta; **Ps. al-Khwārizmī,** ***Liber Alchorismi*****, p. 196 (Allard)**: Verbi gratia: sint duo gradus et tria minuta et 4 secunda et sex tercia hoc modo: 2 gradus, 3 minuta, 4 secunda, 6 tercia. Multiplica igitur duos gradus in 60, et proveniunt ex multiplicatione 120 minuta, quibus adde tria minuta...; **Abraham Ibn Ezra,** ***Sefer ha-Middot*****, pp. 208-9**: Nunc pro compendio inveniendi ra<dicis>, sumamus quadratum proximum illi qui queritur ante eum vel post eum et vertamus sanos in minuta et minuta in secunda, si habentur, et dividamus super duplum ra<dicis> proximioris quadrati, et si quadratus est ante eum, addamus super ra<dicem> eius hoc quod venit in portione; si autem post eum, faciemus econverso. Post hoc multiplicabimus minuta super invicem et dividemus super 60, et quod veniet in portione partiemur super duplicem que queritur et aptatur in suis minutis radicem.

<15> Al-Khwārizmī, *Al-Jabr*, p. 241 (Hughes): nunc quidem refferam tibi qualiter res multiplicentur que sunt radices alie scilicet in alias cum fuerint singulares et cum numeris fuerit cum eis, aut fuerit exceptus ex eis numerus, aut ipse fuerint excepte ex numero, et qualiter alie aliis aggregentur, et qualiter alie ex aliis minuantur; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Alchorismi*, p. 117 (Boncompagni)**: cum volueris multiplicare radices aliquorum numerorum, ipsos numeros in se multiplica, et producti radix est productus ex ductu unius radicis in aliam.

<2>

<2> Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 194 (Sesiano): si autem numerus fuit surdus et eius radicem propinquam invenire volueris, quere numerum propinquiorem ei habentem radicem rationabilem, sive sit maior eo sive minor; **Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 356 (Boncompagni):** radis (sic) numeri non quadrati, quae radix dicitur surda, cum numerari non possit, sed eius potentia numeratur; **p. 359**: quorum radix, quae est surda, hoc est inratiocinata; **p. 361**: si vis addere numerum cum radice surda, scilicet cum radice numeri non quadrati; **p. 407**: quare radix cius est surda, cum sit radix numeri non quadrati.

<4> Ps. al-Khwārizmī, *Liber Alchorismi*, p. 176 (Allard): et omnis numerus habens radicem ductus in numerum habentem radicem procreat numerum habentem radicem, ut quatuor qui habet radicem, si multiplicetur in novenarium, qui similiter habet radicem, procreantur inde 36 cuius radix senarius est. Sexies enim sex 36 fiunt; **Ps. al-Khwārizmī, *Liber Ysagogarum*, p. 51 (Allard)**: in duorum inter se radicem habentium summa radix invenitur, ut in 4 et 9, 6 est radix; **Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 198 (Sesiano)**: scias autem quod comparatio unius numeri ad alium numerum fuerit sicut comparatio unius quadrati ad alium quadratum, tunc id quod fit ex ductu radicis unius in radicem alterius erit rationabile.

<3>

<1> Al-Khwārizmī, *Al-Jabr*, p. 243 (Hughes): radix ducentorum diminutis decem adiuncta ad viginti diminuta radice ducentorum est decem equaliter. Et radix ducentorum exceptis decem diminuta ex viginti excepta radice ducentorum est triginta diminutis duobus radicibus ducentorum...; **Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 198 (Sesiano)**: scias quod cum duorum numerorum talis fuerit comparatio inter se qualis est duorum quadratorum, tunc agregate radices numerorum erunt radix alicuius numeri. Quod sic probatur. Scimus enim quod cum comparatio duorum numerorum inter se fuerit sicut comparatio duorum numerorum quadratorum inter se, tunc radices eorum sunt communicantes; **Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 199 (Sesiano)**: cum igitur radices duorum numerorum agregare volueris, prius considera si comparatio duorum numerorum sit sicut comparatio unius numeri quadrati ad alium numerum quadratum, et tunc poterunt agregari.

<4>

<1> Johannes Hispaniensis, *Liber Mahameleth*, p. 210 (Sesiano): scias quod minuere radices radicum de radicibus radicum ita est sicut agregare radices radicum cum radicibus radicum, sicut supra docuimus quod minuere radices de radicibus idem erat quod agregare radices inter se. Quisquis igitur novit que dicta sunt de agregando radices radicum inter se et novit quomodo inducitur ad hoc decimus liber Euclidis, poterit per illa pertingere ad scientiam minuendi radices radicum inter se; sed in minuendo radices radicum inter se ponet residua sicut in agregando posuimus binomia.

«La matematica, che ci insegna a fare astrazione dalla materia, dal moto e dal tempo, ci rende capaci di intendere e contemplare le specie intellegibili».

Giordano Bruno

La Terza Distinzione

L'argomento della Terza Distinzione verte sul calcolo dell'area delle superfici piane. Il tema era ben noto al Fibonacci, il quale per questa sezione ha tratto ispirazione non solo dal matematico arabo Abū Bakr, autore, come si è detto, di un libro che ci è pervenuto in traduzione latina col titolo di *Liber Mensurationum*, ma anche e direi soprattutto dal matematico ebreo Abraham bar Hiyya ha-Nasi, meglio conosciuto col nome di Savasorda, e autore di un trattato dal titolo *Hibbūr ha-Meshīhah ve-ha-Tishboret*, del quale Platone di Tivoli nel 1154 aveva dato una traduzione latina. HUGHES 2008, pp. 63-65, ha individuato anche altre probabili fonti per questa sezione, costituite innanzitutto dal *Kitāb maʿrefat mesāḥat al-aškāl al-basīṭa wa'l-korīya* dei fratelli Banū Mūsā, che Fibonacci potrebbe aver conosciuto in traduzione latina, dall'*Almagesto* di Tolemeo, anche questo forse noto all'autore in traduzione latina, e dagli scritti di Aḥmad ibn Yūsuf, le cui opere furono tradotte in latino da Gerardo da Cremona col titolo di *De arcubus similibus* e *De proportione et proportionalitate*.

A causa dell'ampiezza di questa sezione, l'autore ha optato per una sua ripartizione in cinque grandi sottosezioni: la prima di esse tratta dei triangoli, la seconda dei quadrilateri, la terza dei poligoni regolari, la quarta dei cerchi e dei semicerchi, la quinta delle superfici non regolari[1]. La prima sottosezione è a sua volta ripartita in tre *differentie*, ovvero in tre paragrafi dedicati, rispettivamente, ai triangoli rettangoli, acutangoli ed ottusangoli[2]. La seconda sottosezione è invece suddivisa in due parti (*partes*), nella prima delle quali l'autore introduce alcune procedure algebriche utili alla risoluzione di problemi di determinazione delle

[1] *Distinctio* III: *Hanc itaque distinctionem in quinque partes dividere decrevi. In prima quarum mensurabimus triangulos campos; in secunda quadrilateros; in tertia multilateros, qui ex rectis lineis constant; in quarta circulos, et eorum portiones, et obliquas figuras insuper, et commixtas ex rectis et curvis lineis; in quinta mensurabimus ipsos campos, qui in ascensione montium iacent.*

[2] *Distinctio* III, I, 0 (8.2): *Unde, ut doctrinam mensurandi omnia genera trigonorum perfecte habeamus, hanc partem, scilicet primam huius tertie distinctionis, in tres differentias dividimus: in prima quarum mensurabimus trigona orthogonia, in secunda oxigonia, in tertia ampligonia.*

aree dei quadrati e dei rettangoli[3], mentre nella seconda si occupa approfonditamente del calcolo delle aree di rombi, romboidi, trapezi e parallelepipedi irregolari[4]. La terza sottosezione è stata da me suddivisa in due paragrafi, il primo dei quali funge da introduzione, mentre il secondo tratta brevemente del calcolo delle aree di poligoni regolari (con particolare interesse verso il pentagono). La quarta e la quinta sottosezione, infine, presentano carattere di maggiore coesione e non sembrano essere state oggetto di ulteriori ripartizioni da parte del Pisano. Nella quarta sottosezione l'autore affronta, come si è detto, il tema del calcolo delle aree di cerchi e semicerchi, nonché il problema della determinazione delle corde di un cerchio, a proposito del quale utilizza i termini *sinus rectus* e *sinus versus* che, come sottolinea SIMI 2004, p. 10, sono stati presi in prestito dalla trigonometria araba. Nella quinta sottosezione, invece, Fibonacci fornisce una serie di istruzioni per la misurazione delle superfici non piane, per le quali si rende necessario l'utilizzo dell'archipendolo.

[3] Qui egli potrebbe essersi ispirato non soltanto ad Abū Bakr e Abū Kāmil, come suggerisce HUGHES 2008, p. 59, ma anche ad al-Khwārizmī, che nel suo *al-Jabr* aveva affrontato le stesse questioni.

[4] La *Distinctio* III, II è dunque stata divisa dall'autore in *Pars prima* e *Pars secunda*. Mentre, però, la lezione *Pars Secunda* è stata tramandata dai codici (seppure in vario modo, come si può intuire dalle note in apparato), la lezione *Pars prima* è una mia congettura.

TESTO CRITICO

<III>

|[F, f. 19r] INCIPIT DISTINCTIO TERTIA

In mensuratione[1] omnium camporum[2]

Hanc[3] itaque distinctionem in quinque partes dividere decrevi. In prima quarum mensurabimus triangulos campos[4]; in secunda quadrilateros; in tertia multilateros[5], qui ex rectis lineis constant[6]; in quarta circulos, et eorum portiones, et obliquas figuras insuper[7], et commixtas ex rectis et curvis lineis; in quinta mensurabimus ipsos campos, qui in ascensione montium iacent. |[B, f. 18v]

<I>

Incipit pars prima tertie distinctionis de mensuratione triangulorum[8]

<Incipiunt Introductoria>

<1.1> |[N, f. 25r] Campi qui trianguli vel trilateri sunt[9], alii orthogonii, scilicet rectianguli; alii oxigonii, scilicet acutianguli; alii quoque ampligonii |[P, f. 29r] appellantur: et hec nomina recipiunt ab angulis. Orthogonium quidem |[L, f. 36v] trigonum est quod habet unum ex tribus angulis rectum: reliqui vero duo anguli uni recto sunt equales. |[S, f. 39v] Oxigonium quoque trigonum est, quod omnes tres angulos acutos habet[10]. Ampligonium est autem[11], quod unum ex

---

[1] mensuratione B S M^{b} N F C P L] mensure M^{a}

[2] incipit – camporum B S M N F] Et incipit – camporum. Incipit pars prima tertie distinctionis de mensuratione triangulorum C P L

[3] Distinctio tertia *in mg. sn scr.* P, *in mg. dx. scr.* L

[4] campos S C P L] *deest* B M N F

[5] in tertia multilateros B S F C P L] *om.* M N

[6] constant. In quarta B S M F C P L] constant. In tertia campos pluribus quam quatuor lateribus contentos. In quarta N

[7] insuper B S M N^{3} F C P L] super N^{1}

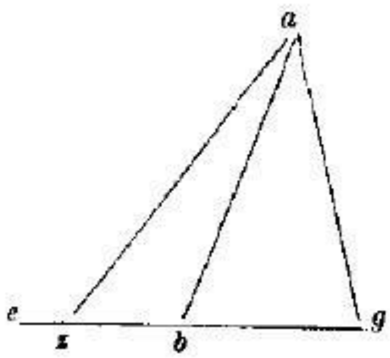
[8] Incipit pars prima tertie distinctionis de mensuratione triangulorum B S M N F] *om.* C P L (*cf. supra n. 2*)

[9] sunt B S N^{3} F C P L] *om.* M N^{1}

[10] quod - habet B S F C P L] quod habet omnes tres angulos acutos M N

[11] est autem C P L] autem est B S M N F

tribus angulis habet maiorem recto. **<1.2>** Recipiunt quidem trianguli[12] nomina a lateribus, ex quibus quidam ysopleuri, idest equilateri[13]; quidam vero ysocheli, idest equicrurii; et quidam diversilateri, qui scaleni appellantur. Equilateri quidem sunt, quorum omnia tria latera sibi invicem equantur. Equicrurii autem sunt, qui duo latera sibi invicem equalia habent. Diversilateri[14] quippe sunt, qui omnia tria latera habent inequalia. **<1.3>** Et notandum, |[C, f. 25r] quia[15] in omni triangulo tres catheti, scilicet perpendiculares, erigi[16] possunt, ex quibus unaqueque cadit a |[M, f. 28r] quolibet angulorum super latus subtendens, vel recipiens ipsum angulum. In orthogoniis autem trigonis una perpendicularium cadit infra trigonum, et est illa que producitur ab angulo recto super latus subtendens ipsum angulum. Relique quidem perpendiculares sunt duo latera continentia angulum rectum. In oxigoniis autem trigonis omnes tres perpendiculares cadunt interius. In ampligoniis namque due cadunt exterius, et[17] alia interius.



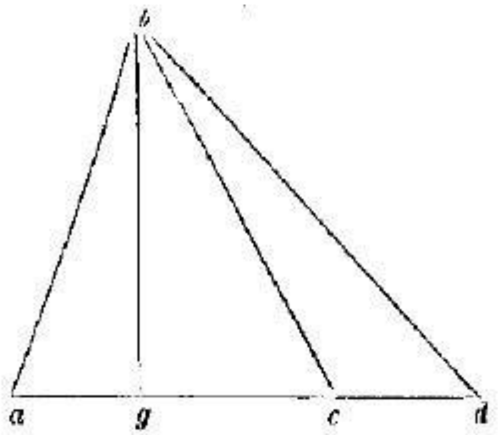
<2.1> *Colligitur quippe embadum, scilicet area omnium trian*|[*b*, p. 31]*gulorum ex multiplicatione dimidii catheti*[18] *in totam basem, vel ex multiplicatione medietatis basis in totam perpendicularem*, que cum demonstrationibus ostendere procurabo. **<2.2>** Si in trigono ab angulo, qui non sit minor alicui reliquorum angulorum, cathetus supra latus subtendens ipsum angulum erigatur, infra trigonum cadet. Si[19] in trigono *abg* sit[20] angulus |[L, f. 37r]

---

[12] trianguli B S M N F] anguli C P L
[13] idest equilateri B S M N F] sunt idest equilateri C, idest equilateri sunt P^{b} L^{b}, idest sunt equilateri P^{a} L^{a}
[14] diversilateri B S M N] diversilatera F C P L
[15] quia B M N F C P L] quare S
[16] erigi S C P L] exigi B M N F
[17] et B S F C P L] *om.* M N
[18] catheti S] cathetus B F C P L, cathetis M N
[19] si B S F C P L] sit M N
[20] sit B S M^{1} F C P L] *om.* N, *del.* M^{2}

bag non minor angulo *abg* vel *bga*, dico si a puncto *a* super rectam *bg* cathetus erigatur, infra trigonum[21] |[S, f. 40r] *abg* cadet. **<2.3>** Non enim, sed si possibile est: cadat[22] extra trigonum a latere *b* et ducatur itaque *gb* in directo in[23] infinitum[24] super punctum *e*. Et[25] protrahatur super *ge* rectam cathetus *az*: eritque trigonum *azb* orthogonium habens angulum qui sub *azb* |[P, f. 29v] rec|[N, f. 25v]tum. Et quoniam in trigono *azb* unum latus eductum[26] est[27] extra trigonum, scilicet *zb* in *bg*, exterior quidem angulus, qui sub *abg* maior est[28] opposito et interiori, qui sub *azb*. Rectus quidem, qui sub *azb*[29]; maior ergo recto, qui sub *abg*. Sed qui sub *bag* non minor est eo, qui sub *abg*: maior[30] enim recto, qui sub *abg*. Similiter et qui sub *bag* maior est recto. In trigono quidem *abg* sunt duo anguli duobus rectis maiores, quod est impossibile, cum omnes tres anguli cuiuslibet trigoni[31] duobus rectis sint equales[32]. Non ergo[33] cathetus ab *a* super latus *bg* ducta extra trigonum cadet ex parte *b*[34]. **<2.4>** Similiter |[F, f. 19v] ostendetur, neque extra[35] *g*: intus enim cadet, quod oportebat |[B, f. 19r] ostendere. Ex hoc enim comprehenditur, quod in oxigonio trigono ab angulo minore existente in ipso, et in orthogonio |[M, f. 28v] ab angulo recto, et in ampligonio ab angulo obtuso, si cathetus supra latera[36] subtendentia ipsos angulos erigatur, infra ipsa trigona cadet[37].

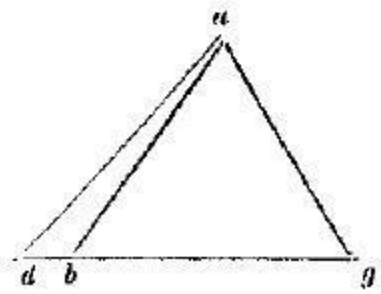
[21] trigonum B S M F C P L] triangulum N
[22] cadat B S M F C P L] cadet N
[23] in B S N^3 F C P L] et M N^1
[24] infinitum B S M N F] infinito C P L
[25] et B M N F C P L] *om.* S
[26] eductum B S M^1 F C P L] est ductum M^2 N (est *om.* N)
[27] est B F C P L] *om.* M N
[28] maior est S N^3 F C P L] maiorem B, maior est M, minor est N^1
[29] rectus – azb B S M N^3 F C P L] *om.* N^1
[30] maior B S F C P L] maior est M N^3, minor est N^1
[31] trigoni B S M F C P L] trianguli N
[32] equales C P L] equale, ut ait Euclides 32^a primi libri B S M N F C P L (ait BF^2C^2, demonstrat M, demonstratum est ab N; Euclides BSMFCPL, Euclide N)
[33] ergo B S F C P L] igitur M N
[34] extra – b B S N^3 F C P L] extrahimus ergo non cadet extra ex parte M N^1
[35] extra B^a S F C P L] extra ex parte B^b M N
[36] latera B S M^2 N F C P L] *om.* M^1
[37] ex hoc - cadet B S^2 M N F C P L] *om.* S^1



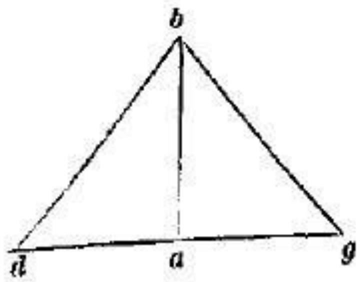
<3.1> Demonstremus[38] itaque, qualiter in orthogonio trigono latera continentia angulum rectum sint catheti[39] in ipso. Adiaceat quidem trigonum ‖[L, f. 37v] orthogonium ‖[C, f. 25v] *bgd*[40]: dico rectam *bg* perpendicularem esse super *gd* rectam, et *dg* super *bg*. **<3.2>** Protrahatur recta *gd* in directo ad punctum *a*: et quoniam super rectam *ad* stat recta *bg*, facit circa se duos angulos aut rectos, aut duobus rectis equales. Rectus quidem qui sub *bgd*; rectus remanet[41] qui sub *bga*: quare *bg* cathetus est super *ad*. Similiter si protrahatur recta *bg*, ostendetur rectam *dg* esse cathetum super *bg*. **<3.3>** Dico iterum a puncto *b* aliam[42] cathetum[43] cadere non posse ‖[S, f. 40v] super rectam *ad* preter cathetum *bg*. Sed si possibile est: esto *ba* cathetus super *ad*: erunt tunc in trigono *bag* duo anguli recti, quod est inconveniens. Similiter si fecerimus eam cadere inter *gd* super punctum *e*, erunt in triangulo *abe* duo anguli recti, qui sub *bge* et qui sub *geb*, quod est ‖[P, f. 30r] impossibile. Non enim super rectam *ad* cathetus cadit preter *bg*. Similiter ostendetur nec a puncto *d* super *bg*[44] cathetum cadere posse preter *dg*, quod oportebat ostendere.

---

[38] demonstremus B S M N F C L] demonstramus P
[39] sint catheti N] sit cathetus B S M F C P L
[40] bgd C P L] bgd rectum habens angulum qui sub bgd B S M N F
[41] remanet S F C P L] manet B M^1, itaque manet M^2 N
[42] aliam M^2 N] alia B S M^1 F C P L
[43] cathetum N] cathetus B M^1 F C P L, catheta M^2 S
[44] bg B S M F C P L] *om.* N



<4.1> Si in oxigonio trigono ab angulo minore existente in ipso super latus subtendens ipsum angulum cathetus trahatur, infra trigonum cadet. **<4.2>** Exempli causa[45]: sit oxogonium trigonum *abg* minorem habens angulum, qui sub *bag*: dico |[N, f. 26r] si ab *a* erigatur cathetus super rectam *bg*, infra trigonum cadet. **<4.3>** Non enim, sed si possibile est: cadat exterius super *d* punctum. Et quoniam recta *ad* cathetus est super rectam *dbg* rectus est angulus, qui sub *adb*. Sed angulus qui sub[46] *abg*, |[L, f. 38r] qui est extra trigonum *adb*, maior est interiori[47] et[48] opposito, qui sub *adb*; sed qui sub *adb* est rectus, quare angulus qui sub *abg* maior[49] est recto, quod est inconveniens, cum acutiangulum sit trigonum *abg*. Non enim cadit cathetus ab *a* extra trigonum *abg*[50]: intus enim cadit, quod oportebat ostendere.

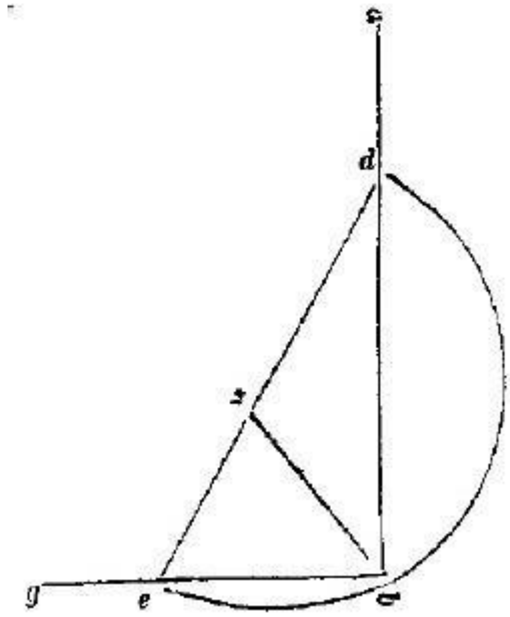


<5.1> |[*b*, p. 32] In ampli|[M, f. 29r]gonio trigono, si ab[51] angulo acuto cathetus trahatur super latus subtendens ipsum angulum, extra trigonum cadet. **<5.2>** Sit trigonum ampligonium *bdg*, amplum habens angulum, qui sub *bdg*: dico si ab angulo *dbg* cathetus ducatur super |[S, f. 41r] *gd* rectam, extra trigonum *bdg* cadet. **<5.3>** Non enim, sed si possibile est: cadat inter *dg* ad[52] punctum *a*. Et

---

[45] causa B S M^2 N F C P L] gratia M^1
[46] sub B S M N F C L] *om.* P
[47] interiori B S M N C P L] interioris F
[48] et S C P L] sibi B M, si N, *om.* F
[49] maior B S M N^3 F C P L] minor N^1
[50] non enim – abg B S M N F (cadit *om.* S)] *om.* C P L
[51] si ab B S M N^3 F C P L] *om.* N^1
[52] ad B S M N F C L] *om.* P

quoniam *ba* cathetus est super rectam *gd*, angulus quidem, qui sub *bad*, rectus est. Est enim[53] maior recto, qui sub *bda*, quare in trigono *bda* sunt duo anguli duobus rectis maio|[C, f. 26r]res, quod est impossibile. **<5.4>** Non enim a puncto *b* super *gd* cathetus infra trigonum *bdg* cadit. Similiter ostendetur, nec a puncto *g* super lineam *bd* ca|[F, f. 20r]thetum cadere posse |[B, f. 19v] infra trigonum *bgd*: exterius enim cadunt, quod oportebat ostendere.

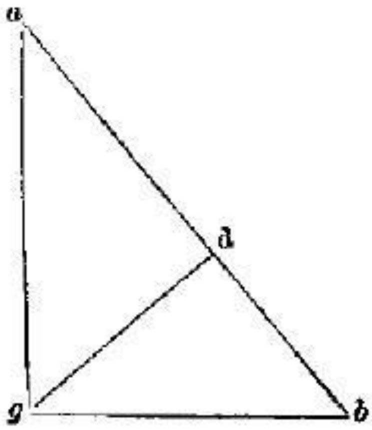


<6.1> Si in duabus lineis angulum continentibus recta aliqua inciderit, et |[P, f. 30v] in medio ipsius sumatur punctus, et a puncto ad angulum protrahatur recta, si ipsa recta equalis fuerit linee iacentis[54] a dicto[55] puncto usque ad unam linearum continentium angulum, tunc angulus ille rectus erit. **<6.2>** Exempli causa: sint due linee *ab* et *bg* continentes angulum *abg* et in eis incidit[56] recta *de*. In medio cuius |[L, f. 38v] accipiatur punctus *z* et[57] protrahatur *zb*: dico quoniam si *zb* recta equalis est recte *ze* vel *zd*, quod angulus *abg* est rectus. **<6.3>** Quoniam tres linee, que sunt *zd* et *zb*[58] et *ze* sibi invicem equales sunt[59]: si a puncto *z* spatio unius ipsarum circulus circinabitur, nimirum[60] per puncta *d b e* veniet, infra quem circulum coaptata est quedam recta *de*, infra quam est centrum circuli: ideo recta

---

[53] enim B S M[1] F C P L] vero M[2] N
[54] iacentis B S N[3] F C P L] catheti M N[1]
[55] a dicto B S N[3] F C P L] adiecto M N[1]
[56] incidit B S M N F C L] inciditur P
[57] et S C P L] *deest* B M N F
[58] zd et zb S C P L] zb et zd B M N F (et *om.* N)
[59] equales sunt B M N F C P L] sunt equales S
[60] nimirum B S M N[3] F C P L] in mirum N[1]

de est diameter illius circuli, a quo diametro comprehensus est arcus *dbe*: ergo semicirculus est *dbe*, infra quem est angulus *dbe*. Angulus quidem, qui est in semicirculo[61], rectus est, ut Euclides in tertio suo[62] libro ostendit. Ex hoc enim ‖[S, f. 41v] manifestum est, quod si recta *zb* maior esset quam recta *zd* ‖[N, f. 26v] vel *ze*, angulus quidem *dbe* acutus esset; si vero minor esset *zb* quam *zd* vel *ze*, obtusus esset angulus *abg*.



<7.1> *In orthogonio quidem*[63] *trigono quadratus*[64] *lateris subtendentis angulum rectum equus est duobus quadratis laterum continentium angulum rectum*. **<7.2>** Sit trigonum orthogonium *abg* rectum habens angulum, qui sub *agb*: ‖[M, f. 29v] dico[65] quadratum linee *ab* equalem esse duobus quadratis linearum *ag* et *gb*. Protrahatur[66] super rectam *ab*[67] a puncto *g* cathetus[68] *gd*: eritque trigonum *abg* divisum in duobus trigonis orthogoniis, que sunt *gdb* et *gda*. Et sunt sibi invicem similia et toti, ut Euclides[69] in sexto libro demon‖[L, f. 39r]stravit. **<7.3>** Et quoniam simile est trigonum *gdb* trigono *agb*, circa ‖[P, f. 31r] comunem angulum *b* habent latera proportionalia: est enim sicut *db* ad *bg* ex trigono *dbg*, ita *gb* ex trigono *bag* est ad lineam *ab*, quare multiplicatio *db* in *ba* equa[70] est quadrato linee *bg*. **<7.4>** Rursus quoniam est trigonum simile[71] *gda* trigono *agb*,

[61] qui – semicirculo B S F C P L] qui in semicirculo est M N
[62] tertio suo B S F C P L] suo tertio M N
[63] quidem B S F C P L] autem M N
[64] quadratus B S F[b] C P L] quadratis F[a], quadratum M N
[65] dico S M[2] N C P L] dico quoniam B M[1] F
[66] protrahatur S F C P L] protraham B M N
[67] ab B S N[3] F C P L] ag M N[1]
[68] cathetus S F C P L] cathetum B M N
[69] Euclides B S N[3] F C P L] idem M N[1]
[70] equa B S F C P L] equalis M N
[71] est trigonum simile C P L] simile est trigonum B S M N F

circa comunem angulum ipsorum *a* latera habet |[C, f. 26v] proportionalia. Est ergo sicut recta *da* ad *ag* ex triangulo[72] *gda*, ita recta *ga* ex triangulo[73] *agb* est ad rectam *ab*, quare multiplicatio[74] *ad* in *ab* equatur quadrato linee *ag*. **<7.5>** Demonstratum quidem est et *db* in *ba* equari quadrato linee *gb*, quare multiplicatio *db* in *ba* cum multiplicatione linee *ad* in *ab* equatur duobus quadratis linearum *bg* et *ga*. Sed multiplicatio *db* in *ab* cum *da* in *ab* |[S, f. 42r] equa est quadrato linee *ab*: ergo quadratus linee *ab* equatur duobus quadratis linearum *bg* et *ga*, quod oportebat ostendere.

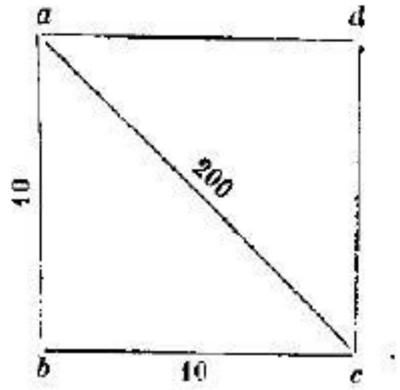
<8.1> His itaque demonstratis, qualiter trigona mensurentur demonstramus[75]. Sed notandum primum, quod ex trigonis orthogoniis et[76] ampligoniis[77] |[F, f. 20v] alia |[B, f. 20r] sunt equicruria, |[*b*, p. 33] alia diversilatera; oxigoniorum quidem, alia sunt equilatera, alia equicruria, alia vero diversilatera[78]. **<8.2>** Unde, ut doctrinam mensurandi omnia genera trigonorum perfecte habeamus, hanc partem, scilicet primam huius tertie distinctionis, in tres differentias dividimus: in prima quarum |[L, f. 39v] mensurabimus[79] trigona orthogonia, in secunda oxigonia, in tertia ampligonia.

<1>
Incipit differentia prima in dimensione triangulorum[80] orthogoniorum[81]

<1> |[N, f. 27r] *Area omnium trigonorum orthogoniorum colligitur ex multiplicatione unius lateris in dimidium alterius continentibus angulum rectum.*

---

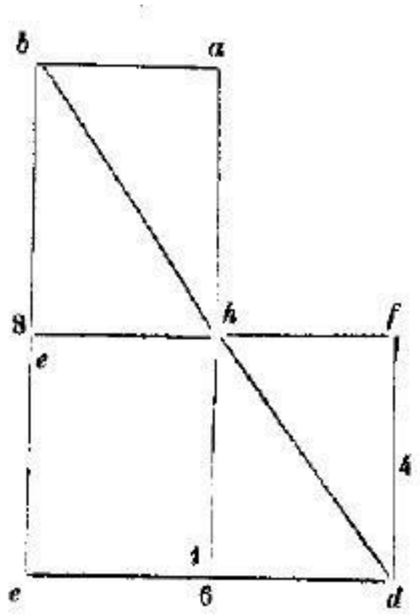
[72] triangulo B S M F C P L] trigono N
[73] triangulo B S M F C P L] trigono N
[74] multiplicatio S C P L] *deest* B M N F
[75] demonstremus C P L] demonstramus B S M F, demonstrabimus N
[76] et S C P L] *deest* B M N F
[77] ampligoniis B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[78] oxigoniorum – diversilatera B S M N^3 F C P L] *om.* N^1
[79] mensurabimus B S M N F^b C P L] mensuramus F^a
[80] incipit – triangulorum B M N F (triangulorum *deest* BMN)] *spatium vacuum reliquit* S, *om.* C P L
[81] orthogoniorum] *om.* B S M N F C P L



<2.1> Exempli[82] causa: sit trigonum orthogonium et equicrurium *abc* habens in singulis lateribus *ab* et *bc* perticas 10. Latus quoque *ac* sit radix de perticis 200. Multiplicabis dimi|[M, f. 30r]dium lateris *ab* in totum latus *bc*, vel e converso[83], scilicet |[P, f. 31v] 5 per 10: et sic reddet pro area totius trigoni perticas 50[84] superficiales. **<2.2>** Et hoc probabitur: si a puncto *a*[85] super lineam *ba*[86], secundum rectum angulum, lineam[87] *ad* equalem[88] linee *bc* protraxeris[89], et copulaveris[90] lineam *dc*, que erit equalis linee *ab*. Ideo quia[91] quadrilaterum est *abcd* equilaterum et orthogonium, ex quo trigonum *abc* dimidium continere in suprascripta figura aperte declaratur. |[S, f. 42v] Totum ergo quadratum *abcd* est perticarum 100, que colliguntur ex multiplicatione de 10 in 10, scilicet ex uno latere in se ipso. Quare trigonum *abc* cum sit dimidium ipsius quadrati, perticas 50 continere necesse est.

---

[82] exempli B M N F C P L] cuius exempli S
[83] e converso B S F C P L] ergo M N
[84] 50 B S M N C P L] *non legitur* F
[85] a B S N^3 F C P L] est M^2 N^1, *om.* M^1
[86] ba B S M^1 N^3 F C P L] be M^2 N^1
[87] lineam B S C P L] linea N^3 F, *om.* M N^1
[88] equalem B S C P L] equale N^3 F, *om.* M N^1
[89] lineam – protraxeris B S F C P L] linea ad equale linee bc trarasceris N^3, *om.* M N^1
[90] et copulaveris S N^3 F C P L] ducemus M^2 N^1, *om.* M^1
[91] quia B S F C P L] *om.* M N



<3.1> Item est trigonum orthogonium[92] diversilaterum *bcd*, cuius latus *bc* est perticarum 8, latus quoque *cd* est perticarum 6, latus vero *bd* perticarum 10; et angulus rectus est qui ad *c*. Quare multiplicabis dimidium *bc* in[93] totam *cd*, hoc est 4 per 6; vel dimidium |[L, f. 40r] *cd* in totam *cb*[94], scilicet 3 per 8, et habebis perticas 24 pro area trigoni *bcd*, quod esse verum cognoscitur suprascripti trigoni doctrina. **<3.2>** Vel aliter |[C, f. 27r] dividatur *bc* in duo equalia supra punctum *e*, et a puncto *e* equidistans et equalis linee *cd* protrahatur linea *ef* et copuletur[95] *df*: et quoniam linea *cd* equidistans est et equalis linee *df*[96], erit linea *fd* equalis, et equidistans linee *ce*, ut in geometria aperte declaratur. Quare linea *df*[97] est pertice 4, et est equalis linee *eb*, et *bh* est equalis *hd*, et angulus *ebh* angulo *hdf* est equalis. Unde recta *eh* recte[98] *hf*[99] equatur, quare trigonum *hfd* equalis est[100] trigono *beh*. Totum ergo trigonum *bcd* equalis est quadrilatero *ecfd* orthogonio, quod continetur ex multiplicatione linee *ec* in lineam *cd*, scilicet de 4 in 6. Quare trigonum *bcd* continetur ex multiplicatione dimidii *bc*, scilicet ex[101] *ec* in *cd*, ut

---

[92] orthogonium B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[93] in S F C P L] per B M N
[94] cb B S N^3 F C P L] ab M N^1
[95] copuletur B S M F C L] copulatur N P
[96] df B S M N^3 F C P L] fc N^1
[97] df B S M N F C L] *om.* P
[98] recte B S F C P L] *om.* M N
[99] recta – hf B S F C P L] recta ih recte eh et hf M N^1, recte eh et hf N^3
[100] est S C P L] d F, *deest* B M N
[101] ex B S F C P L] *om.* M N

prediximus. **<3.3>** Similiter ostendetur, |[P, f. 32r] si a puncto *i*, scilicet[102] dimidio *cd*, protrahatur linea *ia* equidistans et equalis linee *cb*, et copuletur recta *ba*, et erit triangulus *abh* equalis tri|[N, f. 27v]angulo *hid*. Com|[S, f. 43r]muniter si addatur quadrilaterum *bcih*, erit totum quadrilaterum *abci* equale triangulo *bcd*, cuius quadrilateri[103] area habetur ex *ic* in *cb*, hoc est de 3 in 8, |[M, f. 30v] ut supra diximus. **<3.4>** |[F, f. 21r] Nam si latus *bd* per reliqua latera |[B, f. 20v] invenire volueris, multiplica latus *bc* in se, scilicet 8 per 8: |[L, f. 40v] erunt 64, cui[104] superadde multiplicationem lateris *cd* in se, scilicet 36: erunt 100, cuius radix, que[105] est 10, est longitudo *bd* ypotenuse[106]. Sed[107] sit ypotenusa *bd* pertice 10, et basis *cd* pertice 6, et queratur longitudo catheti *bc*: multiplicabis ypotenusam in se, scilicet 10 per 10: erunt 100, de quibus tolle[108] multiplicationem basis in se, scilicet 36[109]: remanent 64 quorum radix, scilicet 8, est longitudo catheti *bc*. Item ypotenusa sit 10 et cathetus sit 8, |[*b*, p. 34] et ignoraveris[110] basem *cd*. Ex tetragono quidem *bd*, scilicet de 100, extrahe tetragonum *bc*[111], scilicet 64: remanent 36, quorum radix, scilicet 6, est latus *cd*.

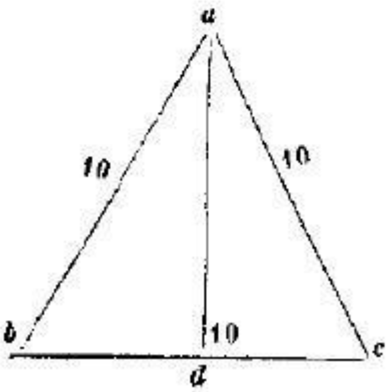
<2>

Incipit differentia secunda de mensuratione trigonorum oxigoniorum prime partis tertie distinctionis[112]

<1> *Omnium trigonorum oxigoniorum area*[113] *colligitur ex multiplicatione catheti in dimidium basis, vel ex multiplicatione basis*[114] *in dimidium*[115] *catheti*.

---

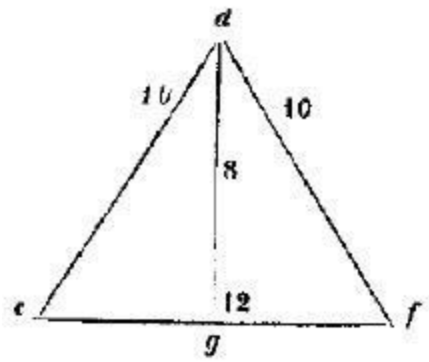
[102] scilicet B S F C P L] in M N
[103] quadrilateri B S M N F] quadrilatera C P L
[104] cui B M N] cuius S F C P L
[105] que B S M N F C L] *om.* P
[106] p. 46 primi Euclidis *in mg. sn. scr.* C
[107] sed S C P L] *deest* B M N F
[108] tolle B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[109] scilicet 36 B S N^3 F C P L] scilicet 36 extrahas M, extrahas scilicet 36 N^1
[110] ignoraveris B S F C P L] ignoremus M, ignoramus N
[111] bc B M N F] ex bc S C P L
[112] de mensuratione – distinctionis S N^3 F C P L (oxigoniorum *deest* S)] *desunt* B M N^1
[113] area B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[114] basis B S F C P L] totius basis M N
[115] dimidium B S M N F] dimidiam C P L



<2.1> Ad cuius rei evidentiam, sit trigonum acutiangulum et equilaterum *abc* habens in singulis lateribus perticas[116] 10. Protrahatur super rectam *bc* cathetus *ad*: et[117] quoniam *ad* cathetus est[118] super rectam *bc*, equalis est uterque angulorum qui ad *d*. Ergo orthogonia sunt trigona *adb* et[119] *adc*, et quoniam equalis est linea *ab* linee ‖[C, f. 27v] *ac*, et linea *ad* comunis ‖[S, f. 43v] est utrique triangulo[120]. Basis ergo *bd* basi[121] *dc*[122] equalis erit, et trigonum *adb* trigono *adc* equale erit. Et quoniam orthogonium est trigonum *adb*[123], ‖[L, f. 41r] area ipsius colligitur ex multiplicatione catheti *ad* in ‖[P, f. 32v] dimidium basis *bd*, scilicet in $\frac{1}{2}$ 2. Similiter quoniam orthogonium est trigonum *adc*, area ipsius colligitur ex multiplicatione catheti *ad* in dimidium basis *dc*, quare area totius *abc* trigoni colligitur ex multiplicatione catheti *ad*[124] in dimidium basis *bc*, ut supra diximus. **<2.2>** Eisdem[125] vero dispositis ostendetur, quod area *abc* trigoni colligitur ex multiplicatione totius basis *bc* in dimidium catheti *ad*. Nam si longitudinem catheti *ad* scire desideras, tetragonum linee *bd*, hoc est multiplicationem[126] ipsius, vel potentiam extrahe ex potentia totius linee *ab*, scilicet 25 de 100: remanebunt 75, cuius numeri radix, scilicet parum minus ‖[M, f. 31r] de perticis $\frac{2}{3}$ 8, est

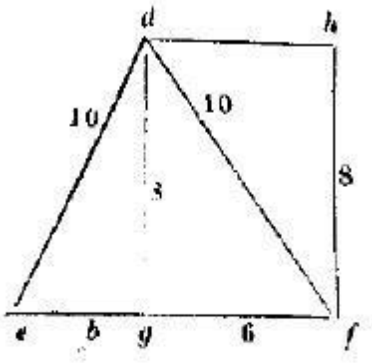
[116] perticas B S M N F C L] *om.* P
[117] et S C P L] *deest* B M N F
[118] est B S M N F^{b} C P L] *om.* F^{a}
[119] et B S M N F^{b} C P L] *om.* F^{a}
[120] triangulo B S M F C P L] trigono N
[121] basi B S M N F^{b} C L] basis P F^{a}
[122] dc S M^{2} N^{1} C P L] bc B M^{1} N^{3} F
[123] trigonum B S M N F C P^{b} L] trigonum est P^{a}
[124] in dimidium – ad B S N^{3} F C P L] *om.* M N^{1}
[125] eisdem B S F C P L] his M N
[126] multiplicationem B S M N F] multiplicationes C P L

longitudo catheti *ad*. Quibus perticis $\frac{2}{3}$ 8[127] multiplicatis per medietatem basis *bc*, scilicet per 5, reddunt parum minus |[N, f. 28r] de perticis $\frac{1}{3}$ 43 pro area totius trigoni *abc*. **<2.3>** Similiter multiplicatio totius basis, scilicet 10[128], in dimidio catheti, qui est parum minus de perticis $\frac{1}{3}$ 4: facit fere de perticis $\frac{1}{3}$ 43. Vel *bd* per *ad*, hoc est 5 per radicem de 75, multiplica, et habebis radicem de 1875 pro embado trianguli *abc*, que radix est secundum propinquitatem $\frac{1}{3}$ 43 minus $\frac{1}{36}$. Et si embadum suprascripti[129] trianguli aliter invenire vis, ex quadrato unius laterum, scilicet de 100, tertiam et decimam partem accipe. Et quod provenerit, erit embadum secundum propinquitatem.

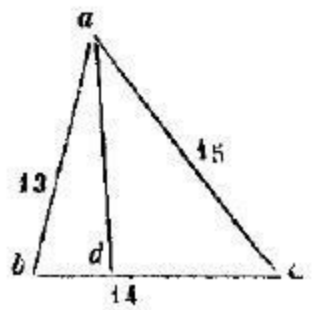


<3.1> Est enim proportio aree[130] cuiuscumque trianguli equila|[F, f. 21v]teris ad quadratum sui lateris parum |[S, f. 44r - L, f. 41v] minus de proportione, quam habent 13 ad 30. **<3.2>** Item sit equicrurium trigonum et acutiangulum *def*, habens latera *de* et *df* equalia[131], quorum unumquodque sit pertice 10. Latus quoque *ef* sit pertice 12. Inter equalia quidem crura ipsius, scilicet super[132] basem *ef*, cathetus protrahenda est. Ideo, quia cadit super dimidium *ef*, et protracta[133] |[B, f. 21r] cathetus[134] *dg*, studeat[135] longitudinem ipsius[136] invenire: videlicet extrahere potentiam *eg* ex potentia lateris *de*, scilicet 36 de 100: remanent 64, qui numerus est potentia catheti *dg*: quare *dg* est perticarum 8, scilicet radix de 64.

[127] est longitudo – $\frac{2}{3}$ 8 B S M N F] *om.* C P L
[128] 10 B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
[129] suprascripti B M N F C P L] ipsius S
[130] aree B S M N[3] F C P L] *om.* N[1]
[131] equalia B S M N F] *om.* C P L
[132] super B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
[133] protracta S C P L] protracte B F, protracti M N
[134] cathetus S C P L] catheti B M N F
[135] studeat S F C P L] studeas B M N
[136] ipsius C P L] *deest* B S M N F



<4.1> ‖[P, f. 33r] Similiter 8 multiplicatis per dimidium basis *ef*, scilicet in 6, vel[137] tota base in dimidio catheti, scilicet 12 per 4, veniunt pertice 48 pro area totius[138] trigoni *def*. ‖[C, f. 28r] Nam cum multiplicetur cathetus in dimidium basis, tunc constituitur ex ipso triangulo[139] quadrilaterum longum, habens in longitudine perticas 8, scilicet quantitatem catheti, et in latitudine perticas 6, scilicet dimidium basis. **<4.2>** Verbi gratia: describatur iterum trigonum *def*, et a puncto *d* protrahatur linea *dh* equidistans et[140] equalis linee *gf*, hoc est equalis linee *ge*. Et copuletur[141] recta *hf*, que erit equalis catheto *dg*, quare quadrilaterum *dgfh* equale[142] est trigono *def*. Nam quadrilaterum *dgfh* ‖[*b*, p. 35] constat ‖[M, f. 31v] ex multiplicatione catheti *dg* in *gf*, scilicet in dimidio *ef*.



<5.1> Item sit trigonum diversilaterum[143] acutiangulum *abc*, cuius latus *ab* sit pertice 13, latus *ac* sit pertice 15, basis *bc* sit pertice 14. In hoc enim triangulo cathetus inveniri non potest, donec primum ‖[L, f. 42r] inveniatur casus supra basem, in quo perpendicularis, scilicet cathetus, cadat. Qui casus tribus

[137] vel B S M N^3 F C P L] *om.* N^1
[138] totius B M N F C P L] *om.* S
[139] triangulo B S M F C P L] trigono N
[140] et B S M N] *om*. F C P L
[141] copuletur B S M N F C L] copulatur P
[142] equale B S M N^3 F C P L] quare N^1
[143] diversilaterum C P L] diversilaterum et B S M N F

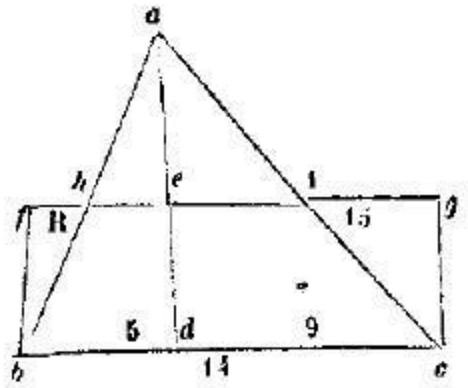
modis inveniri |[S, f. 44v] potest. **<5.2>** Primus[144] quidem modus est[145], ut potentia unius lateris cum potentia basis adiungas[146]; et ex eorum sum|[N, f. 28v]ma extrahes potentiam alterius lateris; residuique dimidium per longitudinem basis divide, et quod ex divisione provenerit, erit casus ab illa parte, a qua coniungitur potentia lateris cum potentia basis. **<5.3>** Ut in trigono suprascripto, cuius potentia basis[147], scilicet de 14 in se ipso, est 196, que addita cum potentia lateris *ab*, scilicet cum multiplicatione de 13 in se ipso[148], que est 169, faciunt 365, de quibus, extracta potentia lateris *ac*, scilicet 225, remanent 140; quorum dimidium, scilicet 70, per basem, scilicet per[149] 14, divide: exibunt 5, que sunt casus a latere *ab*, scilicet quantitas *bd*. Reliquum vero *dc*[150] erunt pertice 9, scilicet differentia que est a 5 usque ad[151] 14. Item potentia lateris *ac*, scilicet 225, addita cum potentia basis |[P, f. 33v] *cb*, scilicet cum 196: facient 421, de quibus extracta potentia lateris *ab*, scilicet 169, remanent 252, quorum dimidium, scilicet 126, divisum per basem, reddunt 9 pro casu *cd*. **<5.4>** Modus[152] alius[153] est, ut addas perticas utriusque ypotenuse, ut in hoc trigono 13 cum 15 erunt[154] 28. Quas divide per 2: erunt 14[155]; quas multiplica per differentiam que est ab una ypotenusarum usque in ipsis 14, scilicet per 1: erunt 14. Quas divide per dimidium ba|[F, f. 22r]sis, scilicet per 7: exibunt 2, quas adde super dimidium basis: erunt 9, que sunt maior casus a latere maioris ypotenuse *ac*. Similiter extractis ipsis 2 ex ipsis 7, relinquetur minor |[L, f. 42v] casus *bd* perti|[C, f. 28v]carum 5, ut per primum modum inventum est. **<5.5>** Tertius[156] modus est, ut potentiam[157] minoris ypotenuse[158] de potentia maioris extrahe[159], scilicet 169 de 225. Residuum |[M, f.

---

[144] primus modis cathetis *in mg. sn. scr.* F[2]
[145] p. 13 secundi Euclidis *scr. in mg. sn.* C
[146] adiungas S C P L] iungas B M N F
[147] ut – basis B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
[148] ipso F[1] C P L] *del.* F[2], *deest* B S M N
[149] per B S F C P L] *om.* M N
[150] dc B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
[151] ad C P L[a]] ad in L[b], in B S M N F
[152] secundus modus catheti *in mg. sn. scr.* F[2]
[153] modus alius B M N F C P L] alius modus S
[154] erunt B S F C P L] faciunt M N
[155] per – 14 B S M N[3] F C P L] ab ab hoc est 1 erunt 14 N[1]
[156] tertius modus catheti *in mg. dx. scr.* F[2]
[157] potentiam B S F] per potentiam C P L, *om.* M N
[158] ypotenuse B S M[1] F C P L] ypotenuse potentiam M[2] N
[159] extrahe B F] extrahes S, extrahetur C P L, *om.* M N

32r] vero, scilicet 56, per basem, scilicet per 14 divide: exibunt 4[160] que adde cum base: erunt 18 quorum dimidium, scilicet 9, |[S, f. 45r] est maior casus. Vel[161] 4 extrahe[162] de base: remanent 10 quorum dimidium, scilicet 5, est minor casus. Et hic modus[163] |[B, f. 21v] videtur mihi aptior[164] reliquis.

<6.1> Invento itaque casu, si perpendicularem *ad* invenire volueris, extrahe potentiam minoris casus, scilicet 25, de potentia lateris *ab*, scilicet de 169: remanebunt 144, quorum radix, scilicet 12, est[165] cathetus *ad*. **<6.2>** Vel potentiam maioris casus, scilicet multiplicationem de 9 in se ipso, scilicet 81, extrahe de potentia *ac*, scilicet de[166] 225: remanebunt similiter[167] 144 pro potentia catheti *ad*[168], quare[169] cathetus *ad* est 12, ut prediximus. Multiplicatio quidem catheti in dimidium basis, vel e converso, reddit perticas 84 pro area totius trigoni *abc*.



<7.1> In suprascripto quidem trigono equicrurio ostendimus ipsum equalem esse ei quadrilatero rectiangulo, qui habet in lon|[N, f. 29r]gitudine quantitatem catheti eiusdem[170] trigoni, et in latitudine quantitatem dimidii sue basis. In hoc vero volumus demonstrare qualiter trigona equiparantur ipsis quadrilateribus rectiangulis, qui ha|[P, f. 34r]bent in longitudine quantitatem totius basis trigonorum, et in latitudine quantitatem dimidii catheti. **<7.2>** Dividatur

160 exibunt 4 B M N] cum base F[a], *om.* S F[b] C P L
161 vel B S N[3] F C P L] et pro minore N[1], *om.* M
162 4 extrahe B S M F C P L] extrahe 4 N
163 modus S N[3] F C P L] *deest* B M N[1]
164 aptior S M N C P L] actior B F
165 est B S N F[b] C P L] scilicet F[a]
166 potentia – de B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
167 225 – similiter B S N F C P L] *om.* M
168 pro – ad B S N F C P L] *om.* M
169 quare B S F C P L] quia M, quia vero N[1], quare vero N[3]
170 eiusdem B S M N F[b] C P L] eiusdem tibi F[a]

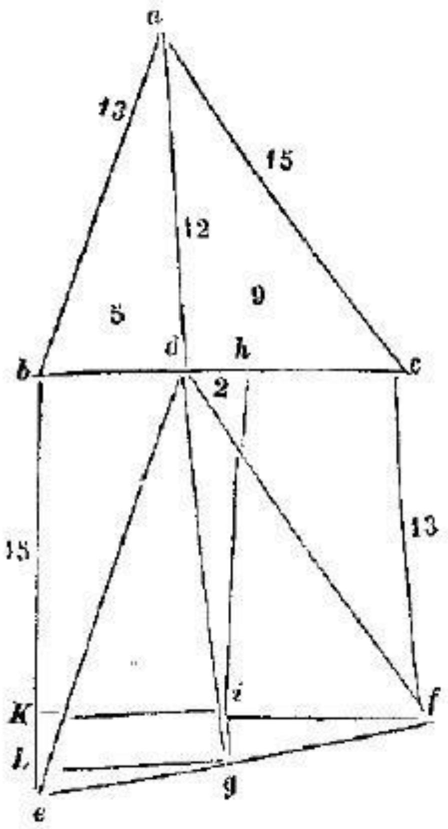
cathetus *ad* in duo equalia supra[171] punctum *e*, ut in hac[172] alia cernitur formula, et per punctum *e* linea trahatur *fg* |[L, f. 43r] que sit equalis et equidistans linee *bc*; et copulentur recte *fb* et[173] *gc*, que erunt equales et equidistantes sibi invicem. Propter quod recta *fg* est equidistans et equalis linee *bc*. Et quoniam cathetus *ad* in duo equalia divisa[174] est secundum punctum *e*, et per punctum |[*b*, p. 36] *e* protracta est basi[175] *bc* equidistans recta[176] *fg*, que secat rectas *ab* et *ac* in duo equalia in punctis |[S, f. 45v] *h* et *i*, secundum quod in geometria declaratur. **<7.3>** Et anguli qui ad *e* recti erunt, sicut sunt anguli qui ad *d*: quare anguli *f* et *g* recti sunt. Ideo si scindatur recta *ae* ab *a* in *e*, et recta *eh* ab *e* in *h*, et ponatur trigonum *aeh* super trigonum *bfh*, tunc[177] recta *ae* super rectam *hb*[178] cadet, ideo quia recta *fb* equalis est recte *ed*, que est equalis recte *ea*, et recta *eh* super rectam |[M, f. 32v] *hf* et recta *ah* super rectam *hb*. Et angulus *f* equalis erit angulo *aef*, quare angulus *f*[179] rectus est: propter eadem ergo rectus est[180] angulus qui ad *g*, et trigonum *cig* equale est trigono *aei*. <**7.4>** Totum ergo *abc* trigonum |[C, f. 29r] quadrilatero[181] *fbcg* equale est, quod habet in uno latere quantitatem basis; in alio quantitatem dimidii catheti, ut oportebat ostendere.

<8.1> Nec pretermittendum est, quod in quadrilatero *fbcg* angulus qui sub *bcg* equalis est angulo, qui ad *f*, ideo quia oppositi sunt: quare |[F, f. 22v] et angulus *fbc* equalis est angulo qui ad *g*, que omnia in libro Euclidis aperte declarantur, |[L, f. 43v] ubi[182] ostenditur quod omnes figure que habent latera opposita equalia, habebunt similiter et angulos equales. Quare anguli *fbc* et *bcg* |[P, f. 34v] recti sunt: orthogonium ergo est quadrilaterum *fbcg*, ut oportet. **<8.2>** In secundo[183] quidem Euclidis libro[184] demonstratur unde procedit prima inventio casus perpendicularis

---

[171] supra B S F C P L] super M N
[172] hac B S M N F C L] hoc P
[173] et B S F C P L] *om.* M N
[174] divisa] divisus B S M N F C P L
[175] protracta est basi (basi: basis B S N^3 F C P L)] est basis protracta M N^1
[176] recta S M N C P L] recte B F
[177] tunc S C P L] *deest* recta B M N F
[178] hb] fb B S M N F C P L
[179] f B S F C P L] *om.* M N
[180] est F C P L] *deest* B S M N
[181] quadrilatero B S M N^3 F C P L] equilatero N^1
[182] ubi B S M N F C L] ibi P
[183] <...> secundi Euclidis *in mg. sn. scr.* F^2
[184] <...> secundi *in mg. sup. scr.* F^2

in oxigonio trigono. Et nos[185] unde procedat[186] inventio eiusdem casus, per secundum et tertium[187] modum volumus |[B, f. 22r] figuris geometricis demonstrare.



<9.1> Describatur rursus trigonum suprascriptum *abc*, et protrahatur in eo[188] cathetus |[N, f. 29v] *ad*, et per puncta *b c* ad rectos angulos protrahantur recte *eb* et *fc*, et sit |[S, f. 46r] recta *eb* equalis recte *ac*, scilicet 15, et recta *fc* equalis recte *ab*, scilicet 13, et copulentur *fe* et *fd* et *de*. Et dividatur recta *ef* in duo equa super punctum *g*, et a punto *g* utrisque rectis *fc* et *eb* equidistans protrahatur recta *gh.* Et per punctum *f* recte et[189] equidistans *bc*[190] trahatur[191] recta *fik*. Rursus per punctum *g* rectis *cb* et *fik* equidistans protrahatur recta *gl*. **<9.2>** Et quoniam orthogonia sunt trigona *adc* et *adb*, rectos habentia angulos, qui sub *adc* et *adb*, potentia quidem lateris *ac* equatur duobus potentiis linearum *ad* et *dc*, et potentia linee *ab* equatur duabus potentiis linearum *ad* et *db*, quare si comuniter auferatur

[185] <...> secundi Euclidis *in mg. sup. scr.* F[2]
[186] procedat S C P L] procedit B M N F
[187] secundum et tertium B S M F C P L] tertium et secundum N
[188] eo B M N] ea S F C P L
[189] et B F[b]] be S C P L, *non legitur* F[a], *om.* M N
[190] bc B M N F[b]] *non legitur* F[a], *om.* S C P L,
[191] trahatur S C P L] protrahatur B M N F

potentia linee *ad*, poterit potentia maioris casus *dc* plus potentia minoris ||[L, f. 44r] *db*, quantum potest potentia linee *ac* plus potentia linee *ab*, quare poten||[M, f. 33r]tie linearum *ab* et *dc* equantur potentiis linearum *ac* et *db*. Sed recta *fc* equalis est recte *ab*, et recta *eb* recte *ac*, quare potentia linearum *fc* et *cd* equatur potentie linearum *eb* et *bd*. Sed potentie linearum *fc* et *cd* equa est potentia linee *fd* cum angulus *fcd* sit rectus. Simili quoque modo potentia linee *de* equatur ||[P, f. 35r] potentie linearum *eb* et *bd*, quare[192] linee *fd* et *de* sibi invicem sunt equales. **<9.3>** Equicrurium ergo est trigonum *fde*, et quoniam basis *ef* in duo equa divisa est[193] super[194] punctum *g*, linea quidem *dg* cathetus est super lineam *ef*: quare rectus est uterque angulus qui sub *dge* et *dgf*.

<10.1> Rursus quoniam recta *gh* ||[C, f. 29v] equidistans est recte *fc*, et in eis incidit recta *cb*, anguli quoque qui sub *fch* et *ghc* duobus rectis sunt equales. Sed qui sub *fch* rectus est: quare qui sub *ghc* rectus ||[S, f. 46v] erit, et[195] exterior angulus qui sub *ghd* est rectus, quia equalis est interiori et opposito, qui sub *fch*. Cathetus ergo est[196] linea *gh* super rectam[197] *bc*. Item quoniam per punctum *f* protracta est linea *fik*[198] equidistans linee *cb*, et linea *be* ||[*b*, p. 37] est equidistans linee *fc*. Paralilogramum ergo est quadrilaterum *kbcf*, quare opposita latera sibi invicem sunt equalia: equalis ergo est recta *fk* recte *bc*, et recta *bk* recte *cf*. ||[L, f. 44v] Ergo *bk* est ||[F, f. 23r] 13, remanet *ke* 2. Nam recta *ih* equalis est utrique rectarum *fc* et *kb*. Paralilogramina enim sunt quadrilatera *kbhi* et *ihcf*, ergo recta *hi* est 13. <**10.2>** Item quoniam in equidistantibus *eb* et *gh* recta incidit *ef*, exterior angulus ||[N, f. 30r] qui sub *fgi* equalis est opposito et[199] interiori, qui sub *gel*, et angulus quidem qui sub *fig* equalis est ei, qui sub *gle*: est enim uterque rectus. Reliquus, qui sub *gfi*[200] reliquo, qui sub *egl*, est equalis, et recta *fg* recte *ge* est equalis, quare reliqua latera reliquis lateribus equalia erunt, que equales angulos subtendunt: latus quippe *gi* lateri *el* est equale, et latus *fi* lateri *gl* est similiter ||[B, f. 22v] equale.

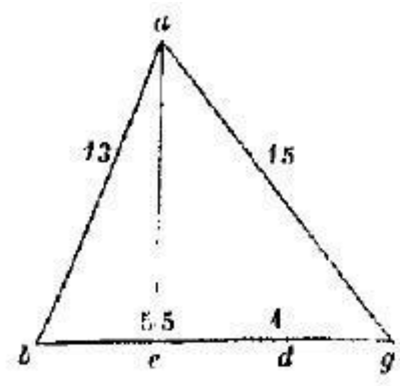
---

[192] quare B S M N F C L] quia P
[193] divisa est B M N F C P L] est divisa S
[194] super B S F C P L] per M N
[195] et S C P L] *deest* B M N F
[196] ergo est B S F C P L] est ergo M N
[197] rectam B S M N F C L] rectum P
[198] fik B S N³ F C P L] fi M N¹
[199] et S C P L] *deest* B M N F
[200] equalis – gfi B S N³ F C P L] *om.* M N¹

Sed recta *gl* recte *ik* est equalis, quia[201] paralilogramum est quadrilaterum *lkig*. Ergo recta *fi* equalis est recte *ik*, quare recta *ch* equa est recte *hb*. Divisa est ergo[202] |[P, f. 35v] basis *bc* in duo equa super punctum *h*, quare *ch* est 7. **<10.3>** |[M, f. 33v] Item quia paralilogramum est quadrilaterum *lkig*, equalis est recta *lk* recte *ig*. Sed recta *ig*[203] demonstrata est esse equalis[204] recte *le*, quare et *kl* equa est recte *le*[205]. Sed tota *ke* est 2, ergo unaqueque rectarum *kl* et *le* et *ig* est 1. Unde tota *hg* est 14. **<10.4>** Rursus quoniam rectus est angulus *dgf*, duo quidem anguli qui sunt *dgh* et *hgf* uni recto sunt equales. Similiter quoniam |[S, f. 47r] orthogonium est trigonum *gif* habens rectum angulum, qui sub *gif*, reliqui duo anguli qui sub |[L, f. 45r] *igf* et *gfi* uni recto sunt equales. Ergo anguli *dgh* et *hgf* equales sunt [206] angulis *hgf* et *gfi*, quare si comuniter auferatur angulus *hgf*, remanebit angulus *dgh* equalis angulo *gfi*. Nam et angulus *gif* angulo *ghd* est equalis. Reliquus *igf* reliquo *hdg*[207] est equalis. Simile est ergo[208] trigonum *fig* trigono *ghd*, quare[209] est sicut *fi* ad *ig*, scilicet sicut 7 est ad 1, ita *gh*, scilicet |[C, f. 30r] 14, est ad *hd*, quare multiplicatio *gi* in *gh* divisa per *fi* reddit *hd*[210], et hoc est quod in secundo modo fecimus. **<10.5>** Videlicet[211] addidimus latus *ab* cum latere *ac*, hoc est *fc* cum *eb*, et habuimus[212] 28. Quorum dimidium, scilicet 14, fuit linea *gh*, que multiplicavimus[213] per *ig*, quod[214] est id[215], in quo *gh* recta superabundat rectam *fc*; hoc est *ab*, vel *gi* est illud, in quo *ac*, scilicet *eb* superabundat lineam *gh* ex qua multiplicatione habuimus 14, que divisimus per dimidium basis *bc*, scilicet per *ch*, hoc est per *fi*, quarum unaqueque est 7, et habuimus 2 pro quantitate *hd*. Que addidimus dimidio basis, scilicet *ch*, que est 7, et habuimus 9 pro *cd* recta, que est maior casus. Vel extraximus *hd* ex *hb*, scilicet

[201] quia B S F C P L] quare M N
[202] est ergo B S F C P L] ergo M, ergo est N
[203] sed recta ig B S N[3] F C L] *om.* M N[1] P
[204] esse equalis B S F C P L] equalis esse M N
[205] quare – le B S M N F (quare *om.* M)] *om.* C P L
[206] equales sunt S F C P L (sunt *om.* F[a])] sunt equales B M N
[207] hdg B S N[3] F C P L] igf M, *om.* N[1]
[208] est ergo S F C P L] ergo est B M N
[209] quare B S F C P L] quia M N
[210] hd B S N[3] F C P L] gd M N[1]
[211] videlicet B S N[3] F C P L] *om.* M N[1]
[212] habuimus B S N[3] F C P L] habemus M N[1]
[213] multiplicavimus B S M N F C L] multiplicamus P
[214] quod B S N[3] F C P L] qui M N[1]
[215] id B S M N F C L] ad P

2 de 7: remanserunt nobis 5 pro ‖[P, f. 36r] minore casu *db*, quod oportebat ostendere.



<11.1> Demonstratio inventionis casus perpendicularis[216] suprascripti trigoni per tertium modum[217]. Adiaceat iterum supradictum trigonum[218] *abg*, cuius ‖[L, f. 45v] latus *ab* sit 13, latus quoque ‖[N, f. 30v] *ag* sit 15, basis quidem *bg* sit 14, et protrahatur super *bg* cathetus *ac*. Et quoniam maius est latus *ag* quam *ab*, maior[219] est casus *gc* quam *cb*, quare ex *cg* auferatur *cd*, que sit equalis recte ‖[S, f. 47v - M, f. 34r] *cb*, et erit recta *bd* divisa in duo equa super punctum *c*. Cui recte *bd* in directo addita est *dg*, quare multiplicatio *dg* in *bg*[220] cum quadrato linee[221] *cb*, equatur[222] quadrato linee [223] *cg*, quare quadratus linee *cg*, scilicet maioris casus, superabundat quadrato linee *bc*, scilicet minoris casus ‖[*b*, p. 38] in quantitate multiplicationis linee *dg* in lineam *bg*[224]. **<11.2>** Sed ostensum est superius in alia figura, quod superabundantia quadrati casus *cg* ad quadratum casus[225] *cb* est sicut superabundantia quadrati lateris *ag* ad quadratum lateris *ab* [226], quare superabundantia quadrati lateris *ag* ad quadratum lateris *ab* est sicut multiplicatio recte *dg* in rectam *bg*. Sed quadratum lateris *ag*, scilicet 225, superabundat potentiam lateris *ab*, scilicet 169, in 56, quare multiplicatio *dg* in *bg*[227] surgit in

---

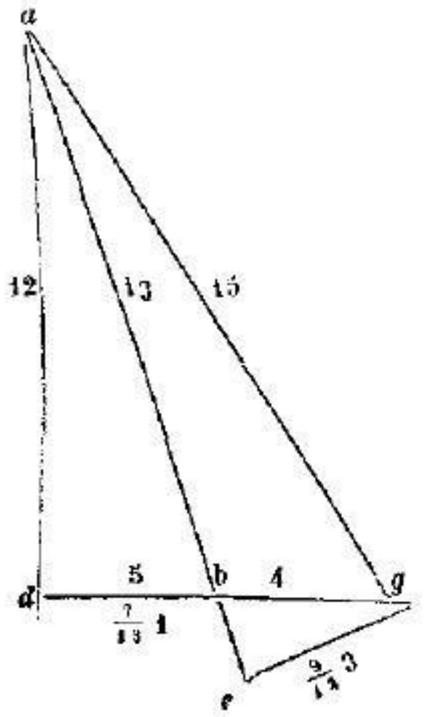
[216] perpendicularis] per perpendicularis S F C P L, *deest* B M N
[217] Demonstratio – modum S F C P L (inventionis *om.* S)] Modus tertius B M N
[218] trigonum B S M N F C L] triangulum P
[219] maior B S M N^3 F C P L] minor N^1
[220] in bg B S M N F C L] *om.* P
[221] linee S M N F^1 C P L] linee cd vel B F^2
[222] equatur B S F C P L] equa est N, *om.* M
[223] cb – linee B S N F C P L] *om.* M
[224] in lineam bg B S M N F C L] *om.* P
[225] casus B S M N F C L] casus cg ad quadratus casus P
[226] quod – ab B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[227] in bg B S M N F C L] *om.* P

56. Sed[228] *bg* est 14, in quibus divisis ‖[B, f. 23r] 56 reddunt 4 pro quantitate linee *dg*. Quibus 4 extractis ex base *bg*, scilicet de 14, remanet linea *bd* 10, quorum dimidium, scilicet 5, erunt in minori casu *bc*, quod oportebat ostendere.

<3>

Incipit differentia tertia prime huius partis de mensuratione trigonorum ampligoniorum[229]

<1> ‖[C, f. 30v] *Si autem*[230] *trigonum ampligonium et equicrurium* ‖[L, f. 46r] *fuerit, protrahes cathetum in ipso super latus maius; et operaberis secundum quod superius in* ‖[P, f. 36v] *trigono acutiangulo et equicrurio diximus.*



<2.1> Sed si trigonum ampligonium diversilaterum fuerit, ut[231] trigonum *abg*, cuius latus *ab* sit pertice 13 et latus *bg* sit[232] pertice 4, latus quoque *ag* pertice 15, si ab angulo *b* obtuso cathetum protrahere volueris super maius latus, scilicet super *ag*, infra triangulum cadet. **<2.2>** Casum itaque seu cathetum, nec

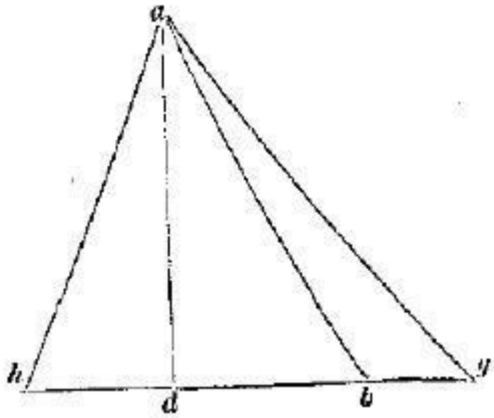
[228] sed B S M N^3 F C P L] sub N^1
[229] prime - ampligoniorum S F C P L (huius *om*. S F)] *deest* B M N
[230] cathetus extra trigonum *in mg. sn. scr.* F^2
[231] ut B S M N F] et C P L
[232] sit C P L] *deest* B S M N F

non et embadum ipsius invenies, secundum quod docuimus |[S, f. 48r] in triangulo acutiangulo diversilatero. Sed si ab angulo *a*, vel ab angulo *g* cathetos protrahere volueris, extra triangulum cadent, quare qualiter casus ipsorum extra bases reperiantur, indicare necesse est[233]. **<2.3>** Ex potentia maioris lateris, que est 225, extrahes potentiam reliquorum duorum laterum. Quorum potentia *ab* est 169 et potentia *bg* est 16: remanebunt 40, quorum dimidium, scilicet 20, si per basem *bg*[234] diviseris, scilicet per 4, exibunt 5 pro quantitate casus *bd*, super quem cathetus *ad*[235] erigitur[236]. Et si ea|[M, f. 34v]dem 20 per basem *ab*, scilicet per 13, diviseris, habebis pro casu *be* perticam $\frac{7}{13}$ 1, super quam cathe|[N, f. 31r]tus *ge* elevatur. **<2.4>** Deinde si potentiam *db*, que est 25, ex potentia *ab*, que est 169 extraxeris, vel si potentiam *dg*, que est 81, ex potentia *ag* dempseris[237], remanebunt pro potentia catheti *ad* 144 |[L, f. 46v] cuius radix, scilicet 12, est longitudo catheti *ad*, quam si in dimidium sue basis, scilicet in 2, multiplicaveris, reddent[238] perticas 24 pro area trigoni *abg*. **<2.5>** Verbi gratia: trigonum *adg* orthogonium est, et colligitur area ipsius ex multiplicatione dimidii catheti *ad*, scilicet de 6 in totam basem *dg*, scilicet in 9, quare area trigo|[F, f. 24r]ni *adg* est pertice 54, ex qua si extraxeris aream trigoni orthogonii *adb*, que est 30, que colligitur ex multiplicatione eiusdem[239] dimidii catheti *ad* in basim *db*, remanebunt pro area trigonii *abg* pertice 24 que colliguntur iterum ex multiplicatione dimidii catheti *ad* in basim *bg*, vel ex multiplicatione catheti *ad* in dimidium basis *bg*, ut prediximus.

<3.1> Similiter si multiplicaveris cathetum *ge* in dimid|[P, f. 37r]ium basis *ba*, eandem habebis aream. Cathetum enim *ge* invenies, si extraxeris potentiam linee *eb* ex potentia linee *bg*, vel potentiam linee *ea* ex potentia linee *ag*. **<3.2>** Et est cathetus *ge* perticarum $\frac{9}{13}$ 3, quorum dimidium, scilicet $\frac{11}{13}$ 1, |[S, f. 48v] si per[240]

233 figura scripta hic per errurem *in mg. dx. scr.* L
234 bg B S M N F C P L[a]] ag L[b]
235 ad B M N] ag S F C P L
236 erigitur B S M F C P L] erigatur N
237 dempseris B S F C P L] diviseris M N
238 reddent B M N F C P L] reddunt S
239 eiusdem B S F C P L] eius M N
240 si per B S M N C P L] super F

basem *ab*, scilicet per 13 multiplica|[C, f. 31r]verimus[241], ad easdem perticas 24 pro embado trigoni *abg* veniemus[242].



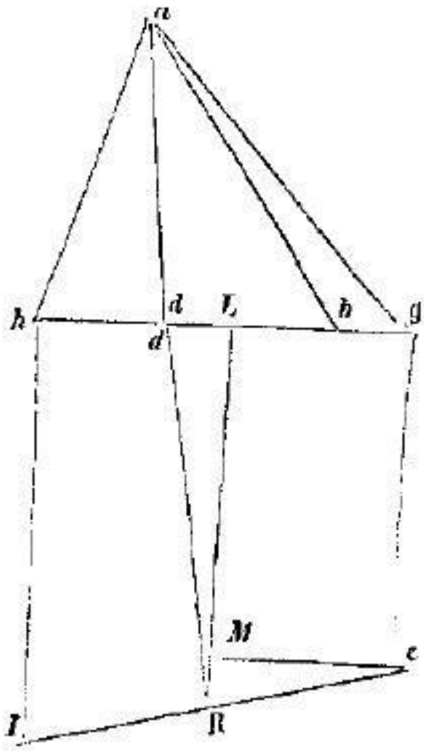
<4.1> Est enim in secundo Euclidis[243] libro aperte demonstratum, unde procedit modus supradictus in reperiendis casibus perpendicularium, que cadunt[244] extra obtusum angulum in ampligoniis trigonis. **<4.2>** Possumus quidem per alios duos modos ipsos casus reperire, |[B, f. 23v - *b*, p. 39] videlicet per eos, quos demonstrationibus superius de|[L, f. 47r]monstravimus. **<4.3>** Et est iste[245] primus modus: adde 13 cum 15, scilicet latus *ab* cum latere *ag*: erunt 28, quorum dimidium, scilicet 14, multiplica per differentiam, que est ab ipsis 14 usque ad unum ex lateribus predictis, scilicet per 1: erunt 14, que si diviserimus per 2, scilicet per di|[M, f. 35r]midium basis, egredientur 7. De quibus demptis 2, scilicet *df*, remanebunt 5 pro casu *bd*: super quibus namque 7, si addiderimus lineam *fg*, habebimus 9 pro tota linea *dg*. **<4.4>** Alius quidem modus est, ut potentiam linee *ab* ex potentia linee *ag* extrahas, scilicet 169 de 225, residuumque, scilicet 56, per basem *bg* dividas, et ex 14 que ex ipsa divisione veniunt[246], 4 scilicet basem extrahas: remanebunt 10 quorum dimidium, scilicet 5, est casus *bd*. |[N, f. 31v] **<4.5>** Que evidentissime monstrabuntur: [si] lineam *gd* protraxerimus in puncto *h*, et sit linea *dh* equalis linee *db*, et copuletur *ah*, ut in hac alia cernitur formula: est enim in trigono *ahg*, et infra ipsum trigonum cathetus ducta *ad*. Et quoniam recta *hd* equalis est recte *db*, et in eis est cathetus *ad*. Equalis est recta *ah* recte *ab*: ergo recta *ah* est 13, et recta *ag* est 15, et recta

---

241 multiplicaverimus B S F] multiplicavimus C P L, multiplicaveris M N
242 veniemus B S F C P L] inveniemus M N
243 <...> secundi *in mg. dx. scr.* F[2]
244 cadunt S C P L] cadent B M N F
245 est iste B S F C P L] iste est M N
246 et ex 14 – veniunt S C P L] scilicet per 4 et que de ipsa divisione pervenit B M N F

bg est 4, et recta *bh* est ignota[247]: et est divisa in duo equa supra punctum *d*, cui iacet in directo linea *bg*. **<4.6>** Et est linea[248] *dg* |[L, f. 47v] maior casus; linea quoque *dh* minor in trigono *ahg*, quare |[P, f. 37v] potentia linee *dg* superabundat potentiam linee |[S, f. 49r] *dh* in quantitate, in qua superabundat potentia linee *ag* potentiam linee *ah*, scilicet in 56. **<4.7>** Sed potentia linee *dg*[249] superabundat potentiam linee *dh* in multiplicatione *bg* in lineam *gh*: quare *bg* ducta in *gh* facit 56, quare divisis 56 per *bg* reddent 14 pro tota linea *hg*, de quibus dempta linea *bg*, scilicet 4, nimirum 10 remanebunt pro linea *bh*. Quorum di|[F, f. 24v]midium, scilicet 5, est casus *bd*, ut superius inventum est. **<4.8>** Nam si super rectam *hg* protraxerimus ad rectos angulos lineas *gc* et *hi*, quarum *gc* sit equalis utrique linearum *ab* et *ah*, et linea *hi* equatur linee *ag*, et copuletur *ci* et expleatur figura, secundum |[C, f. 31v] quod fecimus in trigono oxigonio, invenies lineam *kl* esse dimidium laterum *ah* et *ag*, et *hl* esse dimidium basis *hg*, quare *dl* est 2, et *lg* remanet ignota; et *mk* est 1, scilicet differentia, que est a linea *kl* ad quamlibet linearum *cg* vel *hi*. **<4.9>** Et est trigo|[M, f. 35v]num *dlk* simile trigono *kmc*: quare est sicut *dl* ad *lk*, ita *km* ad *mc*[250], quare multiplicationem *kl* in *km*, scilicet 14 per 1,[251] divides per[252] 2, scilicet[253] per *dl*, egredientur 7 pro linea *mc*, scilicet pro *lg*, quibus additis 2, scilicet *ld*[254], habebis 9 pro linea *gd*. De qua extracta |[L, f. 48r] *gb*, scilicet 4, remanebunt 5 pro casu *bd*, ut oportet.

[247] 4 – ignota B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[248] bg – linea B S N^3 F C P L] *om.* M N^1
[249] dg B S M N^1 F] ad N^3 C P L
[250] quare – mc B S M N F C L] *om.* P
[251] scilicet 14 per 1 S N^3 F C P L] *deest* B M N^1
[252] per B S F C P L] in M N
[253] scilicet B S M F C P L] *om.* N
[254] egredientur – ld B S M N^3 F C P L] *om.* N^1

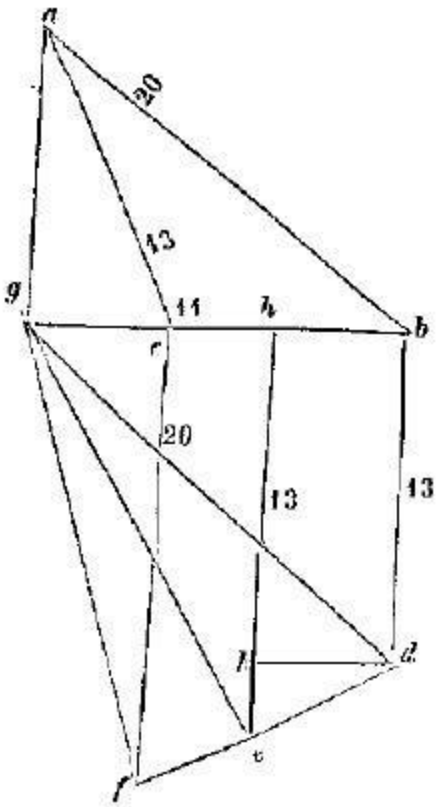


<5.1> Aliter adiaceat rursus trigonum ampligonium *acb* obtusum habens angulum, qui sub *acb*, et sit *ac* 13, et *ab* 20, et *bc* 11. **<5.2>** Et protrahatur extra ipsum cathetus *ag* super lineam *bg*, et a punctis[255] *c* et *b* ‖[B, f. 24r] ad rectos protrahatur *bd* et *cf*, quarum *bd* sit equalis linee *ac* et *cf* linee *ab*. Erit *bd* 13 et *cf* 20, et copulentur *df* et *fg* et *dg*. **<5.3>** Et a puncto *e*, scilicet a medio linee *df*, protrahatur cathetus *eh* super lineam *gb*, et copuletur recta *eg*. **<5.4>** Et per punctum ‖[S, f. 49v] *d* protrahatur ‖[N, f. 24r] *dk* equidistans linee *bh*. Et quoniam orthogonia sunt trigona *agc* et *agb*, equatur potentia linee *ac* duabus potentis linearum *ag* et ‖[P, f. 38r] *gc* et potentia linee *ab* potentiis linearum *ag* et *gb*: quare potentia linearum *ac* et *gb* equatur potentie linearum *ab* et *gc*, hoc est potentia linearum *fc* et *gc* equatur quadratis linearum *db* et *bg*, quare recte *dg* et *gf* sibi invicem sunt equales. Et recta *ge* est cathetus super *df*, et per reliqua supradicta ostendetur *hk* esse 13, scilicet ‖[*b*, p. 40] equalem linee *db*, et *ke* esse superabundantiam linee *he* ad *bd*. Et trigonum *ghe* esse simile trigono *ekd*, quare est sicut *dk* ad *ek*, ita *eh* est[256] ad *hg*, quare si multiplicatio *ek* in *eh* dividatur per *dk*, scilicet per *bh*, que[257] est dimidium linee *bc*, exibit linea *hg* $\frac{1}{2}$ 10, ex quibus ‖[L,

---

[255] punctis B S M N F C L] puncto P
[256] est B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[257] que B S N[4] F C P L] quod M N[1]

f. 48v] extracta linea *ch*, scilicet $\frac{1}{2}$ 5, remanebit casus *cg* 5, ut oportebat ostendere. Quare cathetus *ag* erit 12, cuius dimidium, si per basem *cg*, scilicet 6 per 11 multiplicaverimus[258], nimirum perticas 66 reddet pro area trigoni *acb*.

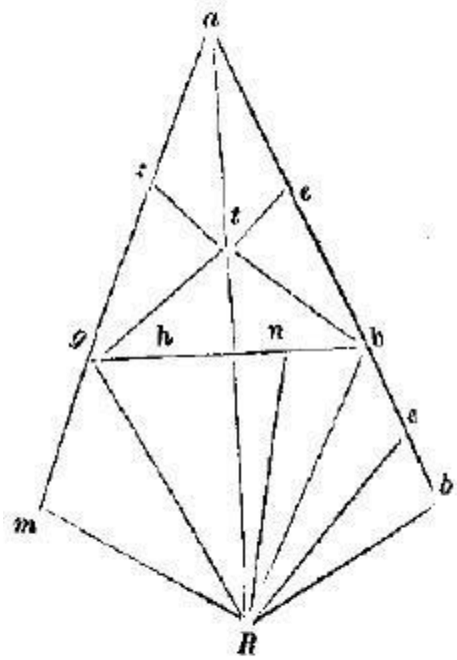


<6.1> Nam ut mensurandi doctrina perfecte in hoc libro contineatur, qualiter quodlibet trigonum sine investigatione catheti mensurari possit, indicabimus. **<6.2>** Trigoni latera in unum coniunge, et dimidium sum|[M, f. 36r]me eorum accipe [259]; de qua extrahe per ordinem latera trigoni. Et multipli|[F, f. 25r]ca residuum unius lateris per residuum alterius, et summam multiplica |[C, f. 32r] per residuum alterius[260] lateris, quod totum per medietatem[261] trium laterum multiplica. Et summe radicem invenias, que erit area totius trigoni. **<6.3>** Verbi gratia: additis in unum lateribus suprascripti trigoni, scilicet 13 et 11 et 20, faciunt 44, cuius dimidium est 22; a quo maius latus distat perticis 2, secundum perticis |[S, f. 50r] 9, tertium perticis 11. Multiplicatio quidem residui primi lateris, scilicet de[262] 2, in residuo secundi lateris, scilicet in 9, multiplicata[263] per residuum tertii

---

[258] multiplicaverimus B S M N^4 F C L] multiplicaveris N^1 P
[259] eorum accipe S N C P L] accipe eorum B M F
[260] et – alterius B N^4 F C P L] *om.* S M N^1
[261] medietatem B S F C P L] multiplicationem summe M, dimidium summe N
[262] de S F^b C P L] in 9 de F^a, *deest* B M N,

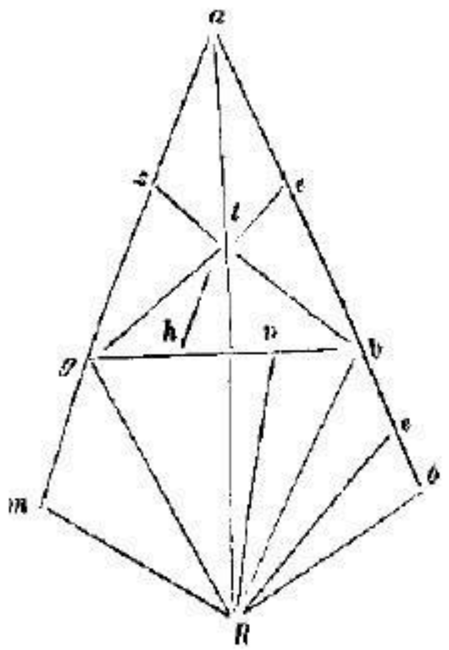
lateris, scilicet per 11, faciunt 198. Quo numero iterum multiplicato per dimidium laterum, scilicet per 22, faciunt 4356, que sunt potentia aree trigoni, quorum radix est 66, ut pro area ipsius superius invenimus.



<7.1> |[P, f. 38v] Ad cuius rei demonstrationem, adiaceat trigonum *abg*, et dividantur in duo equa anguli, qui sub *abg* et *agb* a rectis *bt* et *tg*, et a puncto *t* cathetus[264] protrahantur |[L, f. 49r] *te*, *th*[265] et *tz*. **<7.2>** Et copuletur *at*, et quoniam rectus est qui sub *thg*, et qui sub *tzg*, equalis est angulus qui sub *thg* angulo qui sub *tzg*, nec non et angulus qui sub *tgh* angulo, qui |[N, f. 32v] sub *tgz* est equalis, quare reliquus qui sub *gth* reliquo qui sub *gtz* equatur[266]. **<7.3>** Equianguli enim[267] sunt trianguli *thg* et *tgz*. Et quoniam latus *gt* est comune eorum, reliqua quidem latera, que equos angulos subtendunt[268], equalia habebunt. **<7.4>** Latus quoque *th* lateri *tz*, et *hg* lateri *gz* equantur. Similiter ostendetur |[B, f. 24v] rectam *hb* recte *be*, et rectam *th* recte *te* esse equales, et trigonum *thb* equari trigono *teb*. **<7.5>** Et quoniam utraque rectarum *te* et *tz* equales sunt recte *th*, et sibi invicem equalia sunt, ergo equalis est recta *te* recte *tz*: comunis adiaceat recta *ta*, due ergo, que sunt *et* et *ta*, duabus, que sunt *at* et[269] *tz*, equantur; et angulus qui sub *aet*

263 multiplicata B S N^4 F C P L] multiplica M N^1
264 cathetus B S M N F] catheti scilicet C P L
265 te th S N^4 F C P L] th te B M N^1
266 equatur B S M N^4 F C P L] equatur quare N^1
267 enim B S M N F C P L] *om.* N
268 subtendunt S C P L] subtendent B M N F
269 et ta – et B S M N^4 F C P L] *om.* N^1

angulo qui sub *azt* est equalis; et latus *at* est comune, quare equiangulum et equilaterum est trigonum *aet* trigono *azt*, quare latus *az* lateri *ae* equatur. **<7.6>** Et quoniam equalis est recta *az* recte *ae*, |[M, f. 36v] si comune adiaceat eis recta *eb*, erit quidem recta *ab* equalis duabus rectis que sunt *az* et *eb*, hoc est *az* et *bh*. **<7.7>** Rursus quoniam recta *zg* equalis est recte *gh*, erunt quidem due recte, que sunt *ag* et *hb*, equales duabus rectis *ab* |[L, f. 49v] et *gh*. Ergo *ag* |[S, f. 50v] et *hb*, scilicet *eb*, sunt medietas laterum trigoni *abg*, quare *eb* est id in quo medietas laterum trigoni *abg* superabundat latus[270] *ag*.



<8.1> Similiter ostendetur rectam *ae* esse illud, in quo medietas laterum trigoni *abg* superabundat latus *bg*, et *hg*, vel *gz*, esse superabundantiam a latere *ab*, |[P, f. 39r] quare recte *ab* |[C, f. 32v] et *hg* sunt medietas laterum trigoni *abg*. Similiter et recte *ag* et *hb* sunt medietas laterum eiusdem trigoni: protrahantur ergo recte *ab* et *ag* in directo in punctis *l m*, et sit *bl* equalis recte *hg*, et *gm* equalis recte *hb*: erit ergo utraque re|[*b*, p. 41]ctarum *al* et *am*, sicut medietas laterum trigoni *abg*. |[F, f. 25v] **<8.2>** Deinde producatur *at* in puncto *k*, et copulentur recte *lk* et *km*, et sit rectus qui sub *alk*: quare rectus erit qui sub *amk*, quia due recte *al* et *ak* equales sunt rectis *ak* et *am*, et angulus qui sub *lak* angulo, qui sub *kam* est equalis, quare et latus *lk* lateri *mk* equatur, et reliqui anguli reliquis angulis, qui ab equalibus rectis subtenduntur, equabuntur: angulus quidem[271] qui sub *akl* ei qui

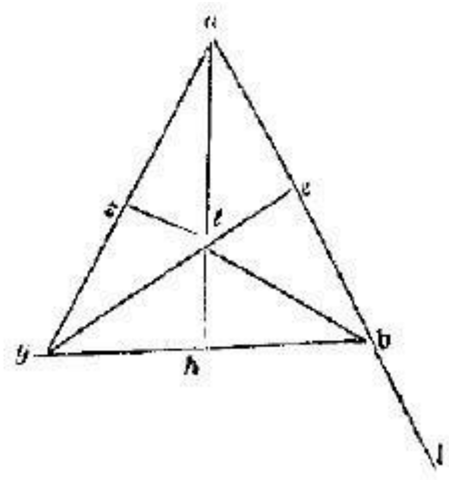
[270] latus B S M N F C L] *om.* P
[271] quidem B M N F C P L] quod S

sub *akm* et qui sub *alk* ei qui sub *amk*. Sed rectus qui sub *alk*, ergo rectus qui sub *amk*, ut predixi|[N, f. 33r]mus. **<8.3>** Et secetur a linea[272] *bg* equalis linee *bl*, et sit *bn*. Et copulentur *nk* et *kg* et *kb*. Et quoniam *gh* est superabundantia dimidii laterum[273] trigoni *abg* a latere *ab*, equalis est linee *bl*, hoc |[L, f. 50r] est *bn*, quare *ng* equatur *gm*, cum sit superabundantia medietatis laterum a latere *ag*. **<8.4>** Et quoniam trigona *gmk* et *klb* orthogonia sunt, potentia linee *gk* equatur duabus potentiis linearum *gm* et *mk*, hoc est *gn* et *mk*, et potentia linee *bk* equatur duabus potentiis linearum *kl* et *bl*, hoc est *kl* et |[M, f. 37r] *bn*. Sed potentie linee *lk* equa est potentia linee *km*, quare quantum potentia linee *kg* |[S, f. 51r] superabundat potentiam linee *kb*, tantum potentia *ng* superabundat potentiam[274] *nb*, quare linea *kn* cathetus est super lineam *bg*, et est equalis linee *kl*. Et quia[275] anguli *knb* et *blk* recti sunt, remanent anguli *nbl* et *lkn*[276] duobus rectis equales[277]. **<8.5>** Sed anguli *ebn* |[P, f. 39v] et *nbl* similiter duobus rectis sunt[278] equales, et[279] angulus *ebn* equalis est angulo *lkn*, et angulus *lkb* dimidium est anguli *lkn*: erit ergo equalis |[B, f. 25r] angulo *ebt* qui[280] est medietas anguli *ebh*, et angulus[281] qui ad *l* est[282] equalis ei qui ad *e*, cum ambo sint recti. Et remanet angulus *etb* equalis angulo *kbl*. **<8.6>** Trigonum ergo *kbl* simile est triangulo[283] *ebt*. Proportio ergo *kl* ad *lb* sicut proportio *be* ad *et*: ductus[284] ergo *kl* ad *et* sicut ductus *lb* ad *be*. Sed proportio tetragoni *et* ad ductum *et* ad *lk*, sicut proportio *et* ad *lk*, et proportio *et* ad *lk* sicut |[C, f. 33r] *ae* ad *al*, cum *et* sit equidistans linee *lk*. Proportio ergo *ae* ad *al* sicut proportio tetragoni *et* ad ductum[285] *et* ad *lk*, et ductus *et* ad *lk*[286] sicut ductus *eb* ad |[L, f. 50v] *bl*: proportio ergo *ae* ad *al* sicut proportio tetragoni *et* ad ductum *eb* ad *bl*[287]. **<8.7>** Ductus ergo tetragoni *et* ad *al* <est> sicut ductus[288] *ae* ad ductum[289]

---

[272] a linea B S^b N^4 F C P L] alia S^a M N^1
[273] laterum B S N^4 F C P L] lateris M N^1
[274] kb – potentiam B S M N^4 F C P L] *om.* N^1
[275] quia B S F C P L] quare M N
[276] recti – lkn B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[277] equales B S M N^4 F C P L] equales sunt N^1
[278] sunt B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[279] et C P L] quare B S M N F
[280] qui B M N] que S F C P L
[281] ebh – angulus B S N F C P L] *om.* M
[282] est B M N F^2] *non legitur* F^1, *om.* S C P L
[283] triangulo B S N^4 F C P L] trigono M N^1
[284] ductus B S M N] ducta F C P L
[285] ad ductum S M N F C P L] a ductu B
[286] et ductus et ad lk S N C P L] *desunt* B F
[287] *spatium vacuum reliquit* L

eb ad *bl*; et ductus tetragoni *et* ad tetragonum *al* est sicut ductus *ae* ad ductum[290] *eb* ad *bl*, et producti ad *al*. <**8.8**> Sed ductus tetragoni[291] *et* ad tetragonum *al* est sicut tetragonum superficiei trigoni *abg*, quod in sequenti demonstrabimus: quare multiplicatio *ae*, que est superabundantia medietatis laterum trigoni *abg* a latere *bg* in *eb*, que est superabundantia a latere *ag*, ducta in *bl*, que est superabundantia a latere *ab*, et producti in *al*, scilicet in medietate laterum trigoni *abg*, reddit |[F, f. 26r] tetragonum[292] aree trigoni *abg*, ut opor|[S, f. 51v]tebat ostendere.

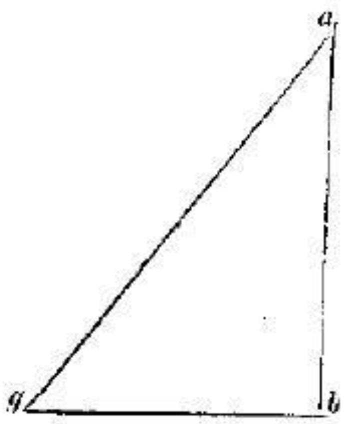


<**9.1**> Sed ostendendum est, qualiter ductus tetragoni[293] *et* ad tetra|[M, f. 37v]gonum[294] *al* est sicut tetragonum[295] aree trigoni *abg*. <**9.2**> Quoniam trigonum *abg* in tribus trigonis resolutum est[296] |[N, f. 33v] a puncto[297] *t*[298], que sunt[299] *atb* et *btg* et *gta*, et catheti uniuscuiusque sunt equales sibi invicem, et sunt *te*,[300] *th* et *tz*, ergo ductus *et* in dimidio basis *ab* reddit aream trigoni *atb*. Similiter ductus *th*, |[P, f. 40r] scilicet *te*, in dimidio *bg*, reddit aream trigoni *btg*. <**9.3**> Propter eadem ergo et ductus *tz*, hoc est *te*, in[301] *ag*, reddit aream trigoni *atg*[302]:

---

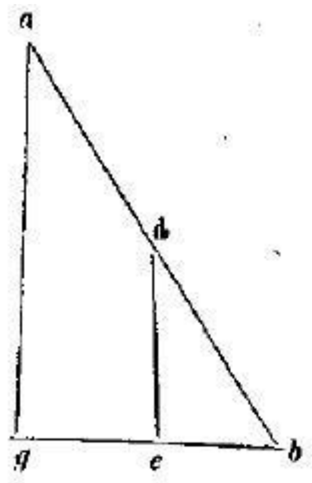
[288] *spatium vacuum reliquit* L
[289] ductum B M N F] ductus S C P L
[290] ductum B M N F] ductus S C P L
[291] tetragoni B M N F C P L] trigoni S
[292] tetragonum B M N F C P L] trigonum S
[293] tetragoni B S] trigoni M N C P L, *non legitur* F
[294] tetragonum B M N F] trigonum S C P L
[295] tetragonum B S M N F C L] trigonum P
[296] est B S N^4 F C P L] et M N^1
[297] a puncto B S M N F C P^b L^b] *om.* P^a L^a
[298] t B S M N F] *om.* C P L
[299] que sunt B S M N F C L] *om.* P
[300] te S N^4 F C P L] te et B M N^1
[301] in S N F C P L] in dimidio B M
[302] propter – atg B S M N^4 F C P L] *om.* N^1

quare ductus *et*[303] in *al*, scilicet in dimidio laterum trigoni *abg*, ‖[L, f. 51r] reddit aream trigoni *abg*; quare ductus[304] tetragoni *et* ad tetragonum *al* est sicut tetragonum aree ‖[*b*, p. 42] trigoni *abg*, ut oportebat ostendere[305].



<10.1> Et[306] si in trigono aliquo[307] duo tantum latera proponantur nota, et volueris per ea habere embadi, et alterius lateris[308] notitiam, ut in trigono *abg* cuius latera *ab* et *bg* sint nota, considerandum est primum, utrum angulus contentus a[309] notis lateribus, scilicet angulus *abg* sit rectus, vel minor, aut[310] maior recto. **<10.2>** Esto[311] primum[312] rectus, quare recta *ab* super rectam *bg* cathetus est. Ex ductu ergo *ab* in *bg* dimidium provenit area trigoni *abg*. Et si acceperimus in unum quadrata linearum *ab* et *bg* notarum, proveniet notum quadratum linee *ag*, cuius radix habebitur[313] pro linea *ag*.

[303] et B M N] at S F C P L
[304] ductus B S N^4 F C P L] ductus ex M N^1
[305] ostendere. Et B S M N F] ostendere. Modus vulgaris quo uti debent agrimensores, et est sufficiens in mensuratione omnium trigonorum. Et C P L
[306] agrimensorum modus *in mg. dx. scr.* P L
[307] aliquo B M N F C P L] *om.* S
[308] lateris B M N F C P L] lateris habere S
[309] a B S M N F C L] in P
[310] aut B S M N F C] vel P L
[311] esto B S N^4 F C P L] est M N^1
[312] primum B M N] primus S F C P L
[313] habebitur B S M N F C L] habetur P

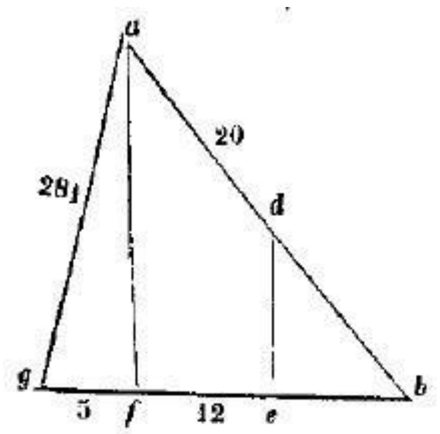


<11.1> |[C, f. 33v] Sed si angulus qui sub *abg* est minor recto, tunc accipies in lineam *ab* punctum aliquod, quod sit *d*, a quo super lineam *bg* cathetus trahatur *de*, et mensurabis latera trianguli *deb*. Et si proportio *be* ad *bg* est equalis proportioni *bd* ad *ba*, angulus qui ad *g* erit rectus, quia[314] linea *ed*[315] equidistans |[B, f. 25v - S, f. 52r] erit lateri *ag*, quare si ex quadrato lateris *ab* auferatur quadratum lateris *bg*, remanebit quadratum lateris *ag* notum. Vel quia[316] linea *de* equidistans est linee *ag*, erit proportionaliter sicut *bd* ad *ba* ita *ed* ad *ga*, quare si[317] multiplicaverimus latus *ba* in *ed* et diviserimus summam per *db*, proveniet utique |[M, f. 38r] latus |[L, f. 51v] *ag* notum. **<11.2>** Verbi gratia: sit latus *ab* 20 et *bg* 12; et sit angulus qui sub *abg* minor recto; et sit *bd* perti|[P, f. 40v]carum 5, et *de* sit 4, et *eb* 3: erit ergo sicut *bd* ad *ba*, scilicet sicut[318] 5 ad 20, ita 3 ad 12, hoc est *be* ad *bg*. Quare recta *de* equidistat recte *ag*[319], quare[320] angulus qui sub *agb*[321] est rectus, cum rectus sit[322] qui sub *deb*, quare si ex quadrato lateris *ab* auferatur quadratum lateris *bg*, scilicet 144 ex 400, remanebunt 256 pro quadrato lateris *ag*, quorum [323] radix, scilicet 16, est longitudo lateris *ag*. **<11.3>** Vel si multiplicaverimus[324] *ba* in *ed*, scilicet |[N, f. 34r] 20 per 4, et diviserimus per *db*,

---

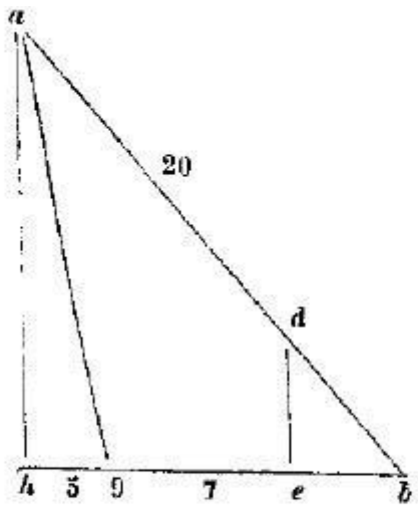
[314] quia B S F C P[b] L] quare M N P[a]
[315] de F C P L] ad B S M N
[316] quia B S M N F C L] quare P
[317] si B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[318] sicut B S M N F C L] sunt P
[319] ag B S M N[4] F C P L] af N[1]
[320] quare B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[321] agb B S M N[4] F C P L] afb N[1]
[322] sit M N] est B S F C P L
[323] quorum S C P L] quarum B M N F
[324] multiplicaverimus B M N F] multiplicavimus S C P L

scilicet per 5, provenient utique 16 pro latere *ag*, quorum dimidio ducto per *gb*, scilicet 8 per 12, provenient[325] 96 pro embado trianguli.



<12.1> Et si proportio *be* ad *bg* fuerit minor[326] proportione *bd* ad[327] *ba*, ut in hoc alio trigono[328] cernitur[329], tunc angulus qui sub *agb* erit minor recto: quare oxigonium erit trigonum *abg*. **<12.2>** Et a puncto *a* cathetus cadat |[F, f. 26v] inter *bg*, unde ut habeamus casum ipsius[330], fiat sicut *bd* ad *ba*, ita *be* ad *bf*, et copuletur *af*, quia[331] ipsa erit cathetus super *bg*[332] rectam. **<12.3>** Verbi gratia: sit iterum *ab* 20 et *bg* 17, et erit *bf* 12. Cum sit sicut *bd* ad *ba*, ita *be* ad *bf*, quare per ea que dicta sunt, invenies cathetum *af* esse 16, cuius quadratum, scilicet 256, si addiderimus cum quadrato linee *fg*, scilicet cum 25, |[L, f. 52r] habebuntur 281 pro quadrato linee *ag*. Et si multiplicaverimus dimidium catheti *af* in totam *gb*, venient 136 pro embado |[S, f. 52v] trianguli *abg*.

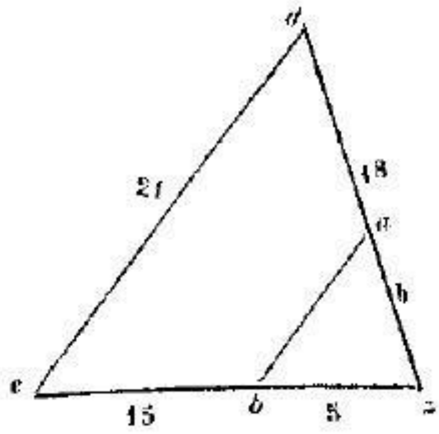
[325] provenient S C L] venient B M N F, proveniunt P
[326] minor B S N^4 F C P L] maior M N^1
[327] ad B S N^4 F C P L] et M N^1
[328] trigono B S N^4 F C P L] triangulo M, *om.* N^1
[329] cernitur B S M N^4 F C P L] cernitur triangulo N^1
[330] ipsius B S M N F^b C P L] ipsius cadat F^a
[331] quia B S F C L] quare M N P
[332] bg B S M N F^b C P L] bg erit F^a



<13.1> Et si proportio *be* ad *bg* fuerit maior proportione *bd*[333] ad *ba*, erit angulus qui sub *agb* maior recto. Unde cathetus a puncto *a* cadet extra trigonum *abg*. **<13.2>** Quare protrahatur linea *bg* |[C, f. 34r] in[334] *h*, et sit *be* ad *bh* sicut *bd*[335] ad *ba*. Et copuletur *ah*, que erit cathetus, super lineam *hb*. **<13.3>** Verbi gratia: sit latus *ab* 20, et *bg*[336] sit 7[337], et *bd* 5, et *be* sit 3, et *de* sit[338] 4: quare *bh*[339] erit 12, que reperies si multiplitationem ex *be* in *ba* diviserimus per *db*, cum sit *be* ad *bh* |[P, f. 41r] sicut |[M, f. 38v] *bd* ad *ba*. Et erit iterum *ed* ad *ah*, sicut *bd* ad *ba*, quare divisa multiplicatione ex *de* in *ba* per *db*, provenient 16 pro[340] catheto *ah*. **<13.4>** Et si ex *bh*, scilicet ex 12, auferat[341] *bg*, scilicet 7, remanebunt 5 pro casu *gh*, cuius quadratum, scilicet 25, si addatur quadrato linee *ah*, habebuntur 281 pro quadrato linee *ag*: quare latus *ag* est radix de 281, et ex ducto dimidio[342] *ah* in *gb* proveniunt 56 pro embado tri|[*b*, p. 43]goni *abg*.

---

[333] bd B S M N[1]] be N[4] F C P L
[334] in S N[4] F C P L] in puncto B M N[1]
[335] bd B S M N[1]] be N[4] F C P L
[336] bg B S M N[1] F[b] C P L] bg sicut N[4] F[a]
[337] 7 B M N[1]] 11 S N[4] F C P L
[338] sit B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[339] bh B S M N[1]] dh N[4] F C P L
[340] pro B S M N F C L] *om.* P
[341] auferat P L] auferatur B S M N F C
[342] dimidio B S M N[4] F C P L] dimidio linee N[1]



<14.1> Et si unum tantum[343] latus alicuius trigoni proponatur[344] notum, et volueris per ispum reliquorum laterum et ipsius embadi habere notitiam, ut trigoni *dez* cuius latus *dz* sit notum, |[B, f. 26r] accipiam in rectam *dz* partem aliquam, que sit *az*, et a puncto *a* super rectam *az* |[L, f. 52v] protraham lineam *ab* equidistantem linee *de*, et mensurabo lineas *ab* et *bz*, ut sint nota latera trigoni *abz*. **<14.2>** Et quia[345] rec|[N, f. 34v]ta *ab* equidistat recte *de*, proportionaliter est sicut *za* ad *zd*, ita recta *zb* ad *ze*, nec non et recta *ab* ad *de*. Sed proportio *za* ad *zd* est nota, quare latera *de* et *ez* erunt nota. **<14.3>** Verbi gratia: sit latus[346] *dz* 18, et *az* sit[347] 6 et *ab* sit 7, et *bz* sit 5. Et sic *zd* ex *za* est tripla, quare *de* erit tripla ex *ab*[348], et *ez* ex *bz* similiter est tripla[349]: ergo[350] latus *de* est 21, et latus *ez* est 15, et cum latera trigoni |[S, f. 53r] *dez* sint[351] nota, erit notum embadum ipsius per ea que dicta sunt superius. **<14.4>** Vel habeatur embadum trigoni *abz* per modum predictum, scilicet[352] accipiatur dimidium laterum ipsius, quod est 9, et accipiamus differentiam laterum que est usque in 9, scilicet[353] 2 et 3 et 4. Et multiplicemus 2 per 3, quod totum per 4, quod[354] totum per 9: erunt 216, quorum radix est embadum trianguli *abz*.

---

343 tantum B S M N^1 C P L] totum N^4 F
344 proponatur B S N^4 F C P L] proponunt M N^1
345 quia B S M N F C L] quare P
346 latus S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
347 sit S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
348 ab B S F^b C P L] ab est F^a N^4, *om.* M N^1
349 quare – tripla B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
350 ergo B S M N^1 F C L] *om.* P, *del.* N^4
351 sint B M N^1] sunt S N^4 F C P L
352 scilicet B S F C P L] sed M N
353 scilicet B M N F C P L] que est S
354 quod B M N^4 F^b C P L] et S, *om.* N^1 F^a

<15.1> Et quoniam simile est trigonum *abz* trigono *dez*, erit embadum trigoni[355] *abz* ad tri|[F, f. 27r]gonum *dez* sicut quadratum lateris *za* ad quadratum lateris[356] *zd*, ut |[P, f. 41v] Euclides ostendit. **<15.2>** Et quia latus *dz* est triplum ex *az*, erit quadratum linee *dz* nonuplum quadrati linee *az*, quare embadum trigoni *dez* est[357] nonuplum trigoni *abz*. Quare si multiplicaveris |[C, f. 34v] 216 per quadratum novenarii, scilicet per 81, habebis 17496 pro quadra|[M, f. 39r]to |[L, f. 53r] embadi trigoni *dez*, quorum radix, que est parum plus de $\frac{1}{4}$ 132, habebitur pro embado ipsius.

<16.1> Diximus autem simile esse trigonum *abz* trigono *dez*[358] cum ad invicem habeant angulos equales: est enim recta *ab* equidistans recte *de*, quare angulus *zab* equalis est angulo *zde*, exterior interiori. **<16.2>** Propter eadem et angulus *zba* equalis est angulo *zed*, et habent enim angulum qui sub *dze* comunem, quare equiangulum est trigonum *abz* trigono *dez*[359]: et sic ipsa trigona sunt similia.

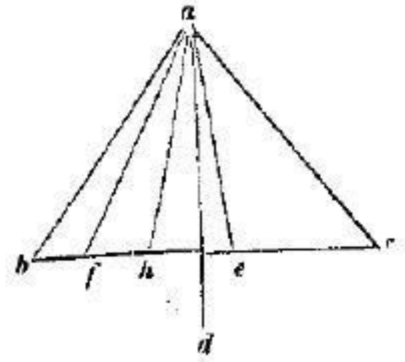
<4>

Modus vulgaris quo uti debent agrimensores, et est sufficiens in mensuratione omnium trigonorum[360]

<1.1> Stet mensor super maiorem trigoni angulum, et aspiciat super latus maius, ubi ab ipso angulo cathetus cadere debeat. **<1.2>** Et si hoc ad oculum[361] perfecte comprehendere nequiverit, habeat lensam fili, et figat unum caput in ipso angulo; et extendat ipsum filum in partes, in quibus cathetus cadere ei videbitur; et producat ipsum aliquantulum extra maius latus trigoni; et tunc ducat eam lensam circiter, donec in utraque |[S, f. 53v] parte cum manu tanget ipsum maius latus; et signet utrumque contactum, et dividat spatium quod fuerit inter utrumque in duo equalia, et tibi erit casus catheti. **<1.3>** Tunc |[N, f. 35r] mensuret cum

[355] trigoni B S M N^{4} F C P L] *om.* N^{1}
[356] za – lateris B S N F C P L] *om.* M N^{1}
[357] est B S M N F C L] *om.* P
[358] dez B S N^{4} F C P L] bez M N^{1}
[359] comunem - dze B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[360] modus – trigonorum B N F (quoque M N)] *om. et spatium vacuum reliquit* S C P L^{a}, *scr. in mg. sn.* L^{b} (*cf. supra n.* 305)
[361] oculum B S M F C P L] arculum N

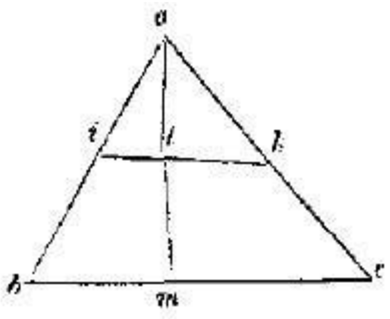
pertica cathetum, et multiplicet eam per longitudinem dimidie basis, scilicet per medietatem maioris lateris, et habebit aream trigoni.



<2.1> Ad cuius rei[362] evidentiam esto ‖[L, f. 53v] trigonum *abc* habens[363] latus *bc* maius quam *ab*, vel quam *ac*, quare ab angulo *a* cathetus dirigenda[364] est super latus ‖[B, f. 26v] *bc*. Et si latus *ab* equalis est lateri *ac*, ‖[P, f. 42r] cadet cathetus in medio lateris *bc*; si minus cadet[365] versus *b*; et si maius cadet versus[366] *c*. **<2.2>** Unde stabit mensor super punctum *a* et considerabit ubi ab ipso puncto *a* cathetus cadere debeat super lineam *bc*. Quo facto figet lensam in puncto *a* et extendet eam super lineam *bc* versus *ab* latus, cum sit minus lateri *ac*: sitque lensa illa *ad*. ‖[*b*, p. 44] Tenebit cum manu lensam super punctum *d*, scilicet aliquantulum extra trigonum ducet ipsam lensam ‖[M, f. 39v] versus *c*, donec *d* punctus tangat[367] lineam *bc*, sitque contactus eius punctus *e*, quare lensa *ae* erit lensa *ad*. **<2.3>** Deinde ducet lensam versus ‖[C, f. 35r] *b*, donec punctus *d* tangat lineam[368] *bc*, ubi sors dediderit. Sitque contactus ipsius punctus *f* hoc[369] est cum lensa *af* sit lensa *ad*; et dividat lineam *ef* in duo equalia supra punctum *h*. **<2.4>** Et a puncto *a* in punctum *h* protrahes lineam *ah*: dico quoniam linea[370] *ah* cathetus est super lineam *bc*. Ideo quia equalis est linea *af* linee *ae*, et linea *fh* linee *he*, quare mensurabit cum pertica cathetum *ah*, nec non et latus *bc*, et multiplicabit

[362] rei S F C P L] *deest* B M N
[363] habens B S M N⁴ F C P L] habes N¹
[364] dirigenda] dirigendus B S M N F C P L
[365] cadet B S N⁴ F C P L] cadat M N¹
[366] b – versus B S N⁴ F C P L] *om.* M N¹
[367] tangat B S N⁴ F C P L] tanget M N¹
[368] tangat lineam B S M N⁴ F C P L] tanget lensam N¹
[369] hoc B S N⁴ F C P L] et hoc M N¹
[370] linea S N⁴ F C P L] *deest* B M N¹

dimidium catheti per totam basem *bc*, vel econverso[371], |[F, f. 27v] et habebit aream trigoni *abc*.



<3.1> Nam si trigonum suprascriptum *abc* tam magnum fuerit, vel lensa quam habuerit, fiat minor catheto, aut area trigoni vineata, vel arborata |[L, f. 54r] fuerit, aut plena segetibus, ita quod[372] cathetus ordine suprascripto[373] haberi[374] non possit: tunc quot sunt pertice in latere *ab*, tot pedes sint in linea *ai*; similiter et quot pertice fuerint in latere *ac*, tot pedes sint in linea *ak*[375]. **<3.2>** Et copuletur linea *ik*, et inveniat cathetum cum lensa suprascripto modo, in trigono[376] *aik*. Sitque *al*: et protrahat[377] cathetum *al* in directo supra punctum *m*: linea vero *am* est cathetus trigoni *abc*, ut in geometria aperte declaratur **|[P, f. 42v]**.

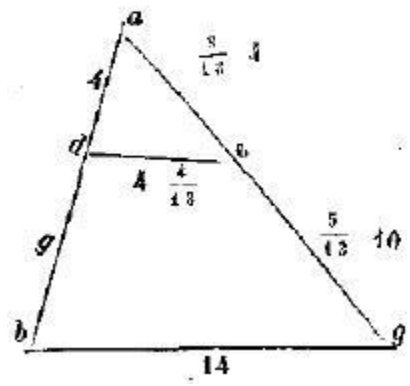
<5>

Incipit[378] de proportionibus et accidentiis, que fiunt in trigonis per protractionem linearum in ipsis

<1.1> Cum duo sint nota latera trigoni, et in eis recta protrahatur equidistans reliquo lateri, et sectiones unius |[S, f. 54r] lateris note fuerint: tunc sectiones alterius note erunt[379], et linea protracta nota erit.

---

[371] econverso B S F C P L] econtra M N
[372] ita quod B S F C P L] itaque M N
[373] suprascripto B S N[4] F C P L] sumpto M N[1]
[374] haberi S C P L] habere B M N F
[375] similiter – ak B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[376] in trigono B S M N F C L] *om.* P
[377] protrahat C P L] protrahet B S M N F
[378] Incipit S N[4] F C P L] *deest* B M N[1]
[379] tunc – erunt B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]



<1.2> |[N, f. 35v] Sit trigonum *abg* et in ipso protracta sit linea *de* equidistans basi *bg* secansque latera *ab* et *ag*. Et sit *ad* 4 et *db* 9 et *ag* 15 et *bg* 14. Dico quod sectiones *ae* et *eg* note erunt, quoniam equidistans est linea *de* linee *bg*, proportionaliter secta sunt trigoni latera, ut Euclides in sexto libro ostendit. **<1.3>** Est enim ut *ad* ad *db*, ita *ae* ad *eg*: ergo sicut 4 est ad 9, ita *ae* est ad[380] *eg*[381]. Similiter erunt coniuncte proportionales[382]: sicut *ad* ad *ab*, ita *ae* est ad *ag*[383], scilicet sicut 4 ad 13 ita *ae* ad *ag*, scilicet |[M, f. 40r] ad 15, quare multiplicatio de 4 in 15 est sicut multiplicatio de 13 in lineam *ae*: ergo divisis 60 per 13, veniunt[384] $\frac{8}{13}$ 4 pro linea *ae*, |[L, f. 54v] quibus extractis ex *ag*, scilicet de 15, remanent $\frac{5}{13}$ 10 pro linea *eg*. **<1.4>** Vel aliter, quia permutatim est sicut *ab*, scilicet 13, ad *db*, scilicet ad[385] 9, ita *ag*, scilicet 15, est ad *eg*, quare si diviserimus nonies 15, scilicet 135, per 13, nimirum ad eadem[386] $\frac{5}{13}$ 10 veniemus pro linea *eg*. **<1.5>** Vel quia[387] est sicut 4 |[C, f. 35v] ad 9, ita *ae* est ad *eg*, dividenda est |[B, f. 27r] linea *ag* in 4 et 9, scilicet in 13 partes, et erunt pro linea *ae* $\frac{4}{13}$ ex tota *ag*, et pro linea *eg* erunt $\frac{9}{13}$ similiter ex *ag*, quare acceptis $\frac{4}{13}$ et $\frac{9}{13}$ de 15, habebimus supradicta $\frac{8}{13}$ 4 et $\frac{5}{13}$ 10. **<1.6>** Sed sit *ad* 4 et *db* 9 et *ae* $\frac{8}{13}$ 4, et *eg* sit ignota: quoniam est sicut 4 ad 9, ita $\frac{8}{13}$ 4 sunt ad *eg*, multiplicabis itaque 9 per $\frac{8}{13}$ 4 et divides[388] per 4: exibunt $\frac{5}{13}$ 10 pro linea *eg*. Et si ignoraverimus lineam *ae* tantum, multiplicanda erunt 4 per

[380] ad – ad B S M N F] *om.* C P L
[381] eg B S N4 F C L] ag M N1, dg P
[382] proportionales B S M N F C L] proportionabiles P
[383] similiter – ag B S N4 F C P L (ita – ag *om.* S N F C P L)] *om.* M N1
[384] veniunt B S F C P L] venient M N
[385] ad S F C P L] *deest* B M N
[386] ad eadem B S M N1 F C P L] *del.* N4
[387] quia B S F C L] quare M N P
[388] divides B S M N F C L] dividas P

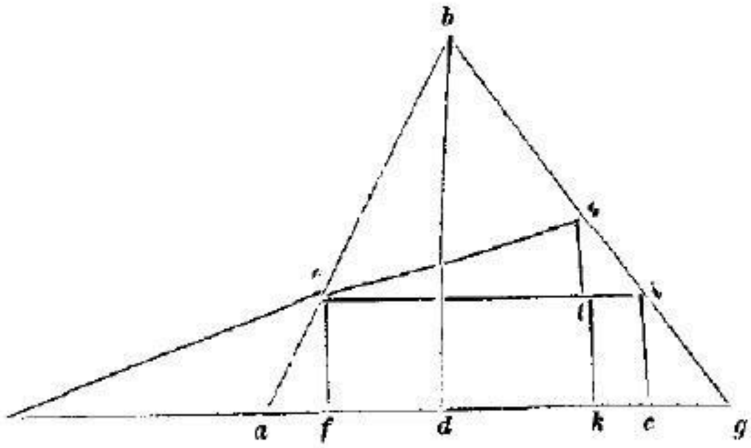
$\frac{5}{13}$ 10 et dividenda per 9, quia sicut *bd* ad *da*, ita *ge* ad *ea*. <**1.7**> Similiter demonstrabimus lineam *de* esse notam: cum ipsa sit equidistans linee *bg*, erit simile trigonum *ade* ei quod est *abg*, quare circa ‖[P, f. 43r] equales angulos latera sunt proportionalia: est ergo sicut *ad* ad[389] *de*, ita *ab* ad *bg*, quare si mul‖[S, f. 54v]tiplicatio ex *ad* in *bg*, scilicet de 4 in 14, divisa fuerit per *ab*, egredientur $\frac{4}{13}$ 4 pro linea *de*, que oportebat ostendere.

<**2.1**> ‖[*b*, p. 45] Volumus invenire quantitatem ‖[F, f. 28r] linee protracte, et terminate in notis terminis duorum laterum trigoni, que non sit equidistans reliquo lateri. <**2.2**> Sit idem trigonum *bag* et protracta linea sit[390] ‖[L, f. 55r] *ez*; et sit *eb* due tertie linee *ba*, et *z* sit in medio *bg*: ergo *be* est $\frac{2}{3}$ 8; remanet *ea* $\frac{1}{3}$ 4. Volumus ergo scire quantitatem *ez*. <**2.3**> Protrahatur cathetus *bd*, quam esse[391] 12 superius demonstravimus, et est minor casus *ad* 5[392], maior quoque *dg* est 9. Et per punctum *e* basi *ag* equidistans ducatur *ei*. Et per punctum *z* equidistans catheto ‖[N, f. 36r] *bd* protrahatur *ztk*. Et quoniam linea *zk* equi‖[M, f. 40v]distans est linee *bd*, est sicut *zg* ad *gb*, ita *gk* ad *gd*, et *zk* ad *bd*. Sed *gz* ex *gb* est medietas, quare *gk* ex *gd* et *zk* ex *bd* sunt medietas. Ergo *gk* est $\frac{1}{2}$ 4, et remanet *kd* totidem, et *zk* est 6.

<**3.1**> Rursus protrahatur *ef* equidistans catheto *bd*: eritque sicut[393] *ae* ad *ab*, ita *af* ad *ad*, et *ef* ad *bd*. Quare *af* est[394] $\frac{2}{3}$ 1: remanet *fd* $\frac{1}{3}$ 3, et *ef* est 4, scilicet[395] tertia pars ex *bd*. <**3.2**> Et quoniam equidistantes sunt linee *ef* et *tk* catheto *bd*[396], et sibi invicem equidistantes sunt, et copulant equidistantes *et* et[397] *fk*, quare *tk* est equalis *ef*, et[398] *et* linee *fk*. <**3.3**> Sed *fk* equatur duabus, que sunt *kd* et *df*, ‖[C, f. 36r] hoc est $\frac{1}{2}$ 4 et $\frac{1}{3}$ 3, quare tota *kf* est $\frac{5}{6}$ 7; ergo *te* est $\frac{5}{6}$ 7. Similiter *tk* est 4, cum sit equa *ef*: remanet *tz* 2, et quoniam in duabus equidistantibus *ei* et *ag* recta incidit *zk*, exterior angulus *zte* equalis est opposito ‖[L, f. 55v] et interiori

[389] ad B S M N F C L] *om.* P
[390] linea sit F C L] sit linea B M N, sit S P
[391] esse B S M N F C L] est P
[392] 5 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[393] sicut B M N F] *om.* S C P L
[394] est B S M N F C L] *om.* P
[395] scilicet B S N^4 F C P L] sit M N^1
[396] bd B S M N F C L] sub bd P
[397] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[398] quare – et B S M N F C L] *om.* P

zkf. Sed rectus qui sub[399] *zkf*, cum rectus sit qui sub *bdk*, rectus quoque qui sub *zte*. **<3.4>** Orthogonium ergo ‖[P, f. 43v] est[400] trigonum *zte*, et sunt duo latera nota, illa videlicet que continent angulum rectum, quare tertium latus, scilicet *ez*, notum erit, ut prediximus, cum quadratus eius equetur duobus quadratis linearum *zt* et *te*. **<3.5>** Nam quadratus ex *zt* est 4, et ex *te* est 61, et tertia, et trigesima sexta pars unius; quibus additis cum 4, reddent $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 9}$ 65 ‖[S, f. 55r] pro quadrato linee *ez* quorum radix, que est parum amplius ex $\frac{1}{12}$ 8, est quantitas linee *ez*, quod oportebat ostendere.



<4.1> Possumus autem aliter ad notitiam ‖[B, f. 27v] linearum *zt* et *te* devenire. Est enim trigonum *zti* simile trigono *bdg* propter rectam *ti*, que est equidistans linee *dg* et *zt* linee *bd*. Est enim latus *zi* lateri *bg* simile, et *it* lateri *gd*: reliquum *zt* reliquo *bd* est simile. **<4.2>** Est ergo sicut *zi* ad *bg*, ita *it* ad *gd* et *zt* ad *bd*. Est enim *gi* tertia pars ex *gb*, et *gz* est medietas ex *gb*, quare *iz* est sexta pars ex *gb*, scilicet $\frac{1}{2}$ 2. Ergo *zt* est sexta ex ‖[M, f. 41r] *bd*, scilicet 2, et *it* est sexta ex *gd*, scilicet $\frac{1}{2}$ 1, quo extracto ex *ie*, que est $\frac{1}{3}$ 9, remanet *te* $\frac{5}{6}$ 7, ut prediximus. **<4.3>** Aliter protrahatur *ic* equidistans linee *bd*, et erit trigonum *icg* simile trigonis ‖[*b*, p. 46] *bdg* et *zti*. Est ergo sicut *gi* ad *gb*, ita *gc* ad *gd*, et *ic* ad *bd*. Est enim[401] ‖[L, f. 56r] *gi* tertia pars ex *gb*, et *gc* est ‖[F, f. 28v] tertia ex *gd*, et *ic* est tertia similiter ex *bd*. **<4.4>** Ergo *gi* est 5, ‖[N, f. 36v] et *gc* 3, et *ic* 4. Et quoniam trigonum *zti* simile est

---

[399] qui sub S N^4 F C P L] *desunt* B M N^1
[400] ergo est B S F C P L] est ergo M N
[401] enim B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

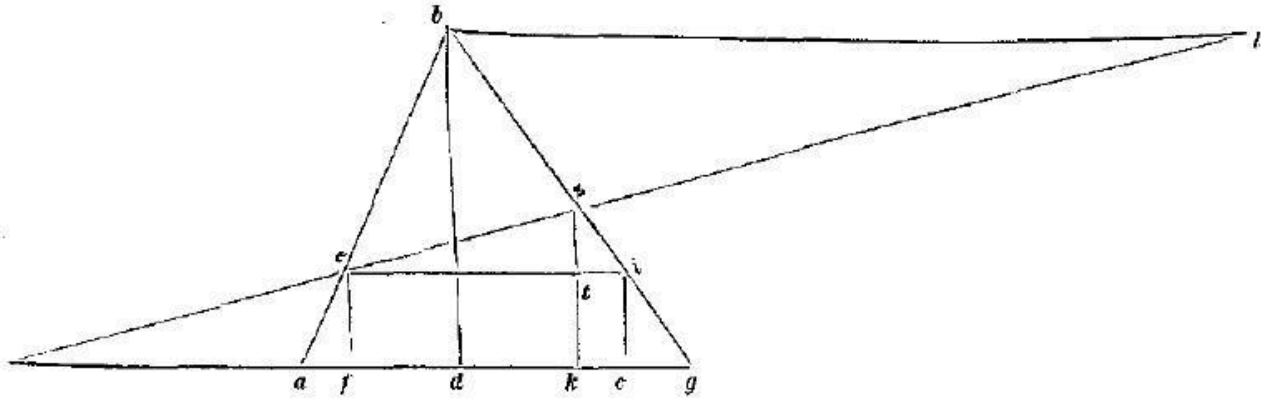
trigono[402] *icg*, est sicut *zi* ad *ig*, ita *ti* ad *cg*. Est enim *zi* medietas ex *ig*: quare *it* est medietas ex *gc* et *zt* est medietas ex *ic*, que oportebat[403] ostendere.

<5.1> Verum si lineas *ze* et *ga* extra trigonum in puncto *h* protraherimus[404], et voluerimus scire quantitatem linearum *ah* et *eh*, ducemus[405] lineam *te* in *ef* et dividemus[406] summam in *zt*, et habebimus lineam *fh*. **<5.2>** |[P, f. 44r] Et hoc faciemus, quia trigonum *zte* simile est trigono *efh*. Est enim *te* equidistans recte *gh*. Et in eis incidit recta *zh*: exterior angulus, qui sub *zet* equalis est interiori et opposito, qui sub *ehf* et angulus *zte* equalis angulo, qui sub *efh*, cum ambo sint recti. **<5.3>** Reliquus autem qui sub *tze* reliquo |[C, f. 36v] qui sub *feh* est equalis, quare est sicut *zt* ad *te*, |[S, f. 55v] ita *ef* ad *fh*, quare multiplicatio *te* in *ef*, divisa per *zt*, reddit lineam *fh*. Vel quia[407] permutatim est sicut *zt* ad *ef*, ita *te* est[408] ad *fh*. Est enim *zt* medietas ex *ef*; quare *te* erit[409] medietas ex *fh*, hoc est *fh* est duplum ex *te*. Sed *te* est $\frac{5}{6}$ 7: quare *fh* est $\frac{2}{3}$ 15, de quibus extractis *fa*, remanet *ah* 14. **<5.4>** Item est enim[410] sicut *zt* ad *ef*, ita *ze* est ad *eh*, quare *eh* est duplum |[L, f. 56v] ex *ez*. Sed quia <radix> *ez* est surda[411], accipiemus proportionem in quadratis earum, videlicet est sicut quadratus linee *zt* ad quadratum linee *ef*, hoc est sicut 4 est ad 16, ita quadratum linee *ze* est ad quadratum linee *eh*, quare quadratum linee[412] *eh* est quadruplum quadrati linee *ez*. Vel adde in unum quadrata linearum *ef* |[M, f. 41v] et *fh*, et veniet quadratum linee[413] *eh*. **<5.5>** Aliter protrahatur linea *hz* extra trigonum, donec concurrat linee *bl*[414] in puncto *l*, et sit *bl* equidistans linee *hg*. Et quoniam equidistantes sunt[415] *bl* et *hg*[416], angulus qui sub *elb* equalis est ei qui

---

[402] est trigono B S N^4 F C P L] trigono est M N^1
[403] oportebat B S M N F C P] oportebant L
[404] protraherimus B S N^4 F C P L] protraxerimus M N^1
[405] ducemus B S N^4 F C P L] ducamus M N^1
[406] dividemus B S M N^4 F C P L] dividamus N^1
[407] vel quia B S N^4 F C P L] videlicet quare M N^1
[408] est S F C P L] *desunt* B M N
[409] erit F C P L] est B S M N
[410] est enim S C P L] enim est B M N F
[411] sed – surda B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[412] ze – linee B S M N F C L (linee *om.* S)] *om.* P
[413] linee B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[414] donec – bl B S M N F P^b L^b] *om.* C P^a L^a
[415] sunt C P L] inter B S M N F
[416] hg S M N F C P L] hg incidit linea hl B

sub *zhg*, et angulus qui sub *lbz* ei qui sub *zgh* est equalis. Reliqui qui ad *z* equales sibi invicem, qui[417] sunt[418] a vertice[419].



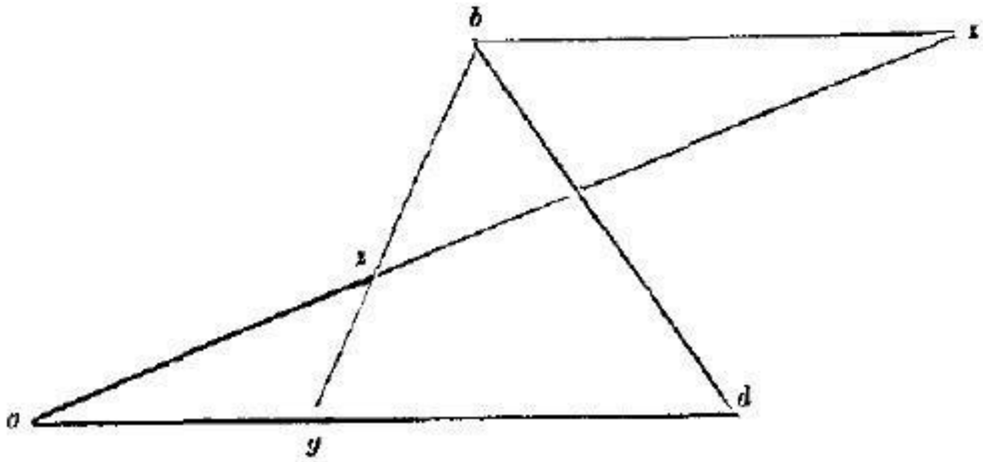
<5.6> Ergo trigonum *dbz* simile est trigono |[B, f. 28r] *hgz*, quare est sicut *gz* ad *zb*, ita *hg* ad *bl*[420]. Est enim *gz* equalis *zb*, et *hg* equatur *bl*. Rursus quia similia sunt trigona *leb* et *eha*, erit quidem sicut *ae* ad *eb*, ita *ah* ad *bl*, hoc est ad *hg*. Est enim *ae* ex *ab* tertia pars, quare *ae* est medietas ex *eb*[421] et *ha* erit medietas ex *bl*, hoc est ex *hg*. Remanet *ag* medietas ex *hg*, quare *ha* equatur *ag*. Sed |[P, f. 44v] *ag* est 14, quare *ah* erit similiter 14, et quelibet rectarum *hg* et *bl* |[N, f. 37r] erit 28.

<6.1> Nam si[422] coniunctionem linearum *ze* et *eh* habere volumus, quia est sicut *zt* ad *ef*, ita *ze* ad *eh*: sed[423] *zt* est ad *ef* sicut medietas *zt* ad medietatem ex *ef*, |[L, f. 57r] hoc est |[F, f. 29r] sicut 1 est ad 2. Adiaceat itaque[424] quedam recta *mno*, |[*b*, p. 47] et sit *mn* 1, et *no* sit 2. Et quia est sicut *mn* ad *no*, ita *ze* ad *eh*. Et coniuncte[425] proportionales erunt. Erit itaque[426] sicut *mn* ad *mo*, ita *ez* ad *eh*[427], quare erit[428] sicut quadratum linee *mn* ad qua|[S, f. 56r]dratum linee *mo*, hoc est sicut 1 est ad 9, ita quadratum linee *ze* est ad quadratum linee *zh*, quare quadratum linee *zh* erit nonuplum ex quadrato linee *ze*, quare si per 9 multiplicaverimus $\frac{13}{36}$ 65, que sunt quadratum linee *ze*, habebimus $\frac{1}{4}$ 588 pro

[417] qui B] *om.* S M N F C P L
[418] sunt B S F C P L] *om.* M N
[419] a vertice B M N F C P L] *om.* S
[420] quare – bl B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[421] eb B S M N F C L] ab P
[422] si B S F C P L] *om.* M N
[423] sed B S M N F C L] scilicet P
[424] itaque S M N F C P L] quidem B
[425] coniuncte B S F C P L] coniunctim M N
[426] erit itaque C P L] eruntque B F, eritque S M N
[427] eh C P L] zh B S M N F
[428] erit S M N F C P L] est B

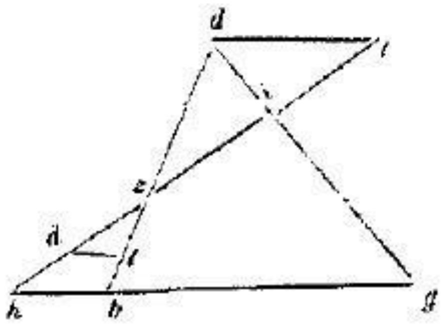
quadrato linee *zh*. **<6.2>** |[C, f. 37r] Aliter quia trigonum *zkh* orthogonium est habens rectum angulum qui ad *k*, iungantur quidem quadrata linearum *zk* et *kh*, et habebimus quadratum linee *zh*. Nam *kd* inventa est superius esse $\frac{1}{4}$ 4, et *da* 5, et *ah* 14: quare tota *kh* est $\frac{1}{2}$ 23 cuius quadratum est $\frac{1}{4}$ 552. Et quadratum linee *zk* est 36 et sic habemus pro quadrato linee *zh* [429] $\frac{1}{4}$ 588, ut prediximus.

<7.1> Rursus sit trigonum *bgd*, cuius *bg* latus – ut diximus – sit 13, *gd* 14 et *bd* 15; et[430] emittatur *gd* in punctum *a*, et sit *ga* 10, et super *gb* accipiatur |[M, f. 42r] punctus *z*, et sit *gz* 5: remanebit *zb* 8. Queritur: si protrahatur *az* et emittatur usque in *e*, quanta erit quantitas sectionum *de* et *eb*? **<7.2>** Ducatur quidem per *b* punctum linea *bi* equidistans linee *gd*, et emittatur linea *ae* in punctum *i*: eruntque duo trigona *bzi* et *azg* |[L, f. 57v] sibi invicem similia, quare est sicut *ag* ad *gz*, ita *ib* est[431] ad *bz*. **<7.3>** Sed *ag* est duplum ex *gz*, quare *ib* erit 16, scilicet duplum ex *bz*. Item quia[432] trigonum *aed* simile est trigono *eib*, est sicut *ad* ad *bi*, ita *de* ad *eb*. Nam *ad* ad *bi* est sicut octava |[P, f. 45r] pars ex *ad* ad octavam partem ex *bi*: est enim 3 octava ex *ad*, et 2 est octava ex *bi*[433]: est ergo[434] sicut 3 ad 2, ita *de*[435] ad *eb*. Et coniunctim[436] proportionales erunt, quare sicut 3 est ad 5, ita *de* est[437] ad *db*, quare *de* est $\frac{3}{5}$ ex *db*, scilicet 9, et *eb* 6, que oportebat ostendere.



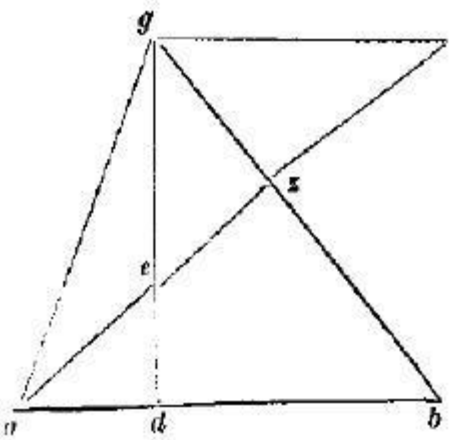
[429] $\frac{1}{4}$ 552 – zh B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[430] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[431] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[432] quia B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[433] est enim – bi B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[434] est ergo S M N F C P L] ergo est B
[435] de B S M N F C L] de est P
[436] coniunctim B S N^4 F] coniunctum M N^1, coniuncti C P L
[437] est S C P L] *deest* B M N F

<8.1> Sint itaque note portiones *bz* et *zg* et *be* et *ed*. Et sint eodem suprascripte, et trigonum sit idem, et ignorantur *ag* et *bi*. **<8.2>** Primum quidem quia est sicut *de* ad *eb*, scilicet sicut 3 est ad 2, ita |[B, f. 28v] *ad* ad *bi*, |[S, f. 56v] ergo *ad* est semel *bi*, et dimidium eius. **<8.3>** Rursus quia est sicut *gz* ad *zb*, scilicet sicut 5 est ad 8, ita *ag* ad *bi*, ergo *ag* est $\frac{5}{8}$ ex *bi*. **<8.4>** Tota quidem *ad* inventa est esse duodecim |[N, f. 37v] octave ex *bi*, cum tota *ad* sit semel *bi*, et dimidium eius: quare extractis $\frac{5}{8}$ ex $\frac{12}{8}$, remanet *gd* $\frac{7}{8}$ ex *bi*. **<8.5>** Ergo est sicut 7 ad 8, ita *gd* ad *bi*, quare multiplicatis 8 per 14, scilicet per *gd*, et divisa summa per 7, vel septimam de 14, scilicet 2, multiplica per 8: egredientur 16 pro linea *bi*. Ex quibus 16 acceptis $\frac{5}{8}$, |[L, f. 58 r] egredientur 10 pro linea *ag*.

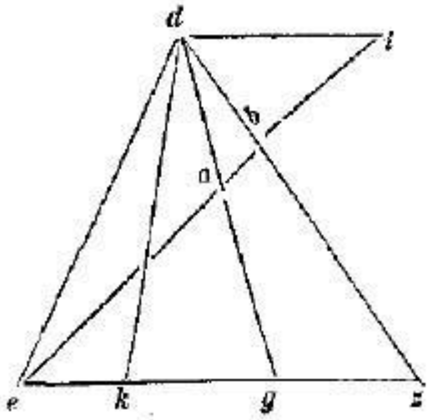


<9.1> Item sit idem trigonum *abg* et extra ipsum sumatur *d* punctus, |[F, f. 29v] qui non sit in directo linee *bg*, et per *d* punctum protrahatur linea *de* |[*b*, p. 48] equidistans basi *bg* et sint *de* et *eb*[438] note: re|[C, f. 37v]manebit *ea* nota, cum tota *ab* sit nota. Et sumatur in *ab* punctus *z* notus et copuletur *dz*, et emittatur in punctum *i*. Dico quod proportio *gi* ad *ia* erit nota. **<9.2>** Compleatur figura. Et quoniam trigonum *dze* simile est trigono |[M, f. 42v] *zat*, est sicut *ez* ad *za* – quorum proportio est nota – ita nota *de* est ad *at*[439], quare *at* erit nota. **<9.3>** Rursus quoniam similia sunt[440] trigona[441] *hzb* et *zat*, est sicut *az* ad *zb*, que sunt note, ita *at* nota est ad *bh*, quare *bh* erit nota. Sed nota[442] posita est *bg*: ergo nota est tota *hg*. Et quoniam similia sunt trigona *hig* et *iat*, est sicut *hg* nota |[P, f. 45v] ad notam *at*, ita *gi* ad *ia*: ergo proportio *gi* ad *ia* est nota, ut oportebat ostendere.

[438] eb S N^4 F C P L] bg B M N^1
[439] at M N^4 F C P L] ad B S M N^1
[440] sunt B S M N F C L] sint P
[441] trigona B S M N F C L] *om.* P
[442] sed nota S M N F C P L] *om.* B



<10.1> Rursus sit trigonum notum[443] *gab*, cuius cathetus sit *gd*; et sumatur in ipso punctus notus *e*, et per puncta quidem *a e* protrahatur linea *aez*. Dico quidem quod proportio *bz*[444] ad *zg* erit nota. **<10.2>** Protrahatur itaque linea *gi* equidistans linee *ab* et producatur *az* in *i*. Et erunt trigona *aed* et *ieg* sibi invicem similia, quare est sicut *de* ad *eg*, ita *ad* ad |[L, f. 58v] *gi*. Erit itaque nota *gi*, cum nota sit *ad*. Ad quam *gi* proportionem habet recta *ab*, sicut *bz* ad *zg*: ergo proportio *bz* ad *zg* est nota, quod opor|[S, f. 57r]tebat ostendere.

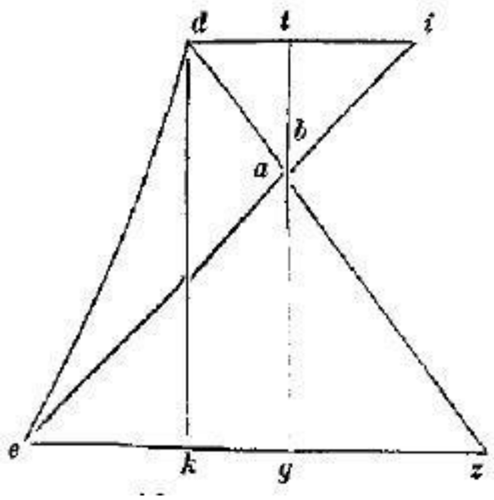


<11.1> Et si punctus, per quem transierit linea ab angulo, nequaquam in catheto fuerit, ut in trigono *dez*[445] in quo datus est punctus *a* in linea *dg*, que non est cathetus, per quem punctum transit linea[446] *eab*[447]; et sit nota proportio *ga* ad *ad*, nec non et sit nota *ge*: dico quidem proportionem *zb* ad *bd* notam[448] esse. **<11.2>** Eisdem dispositis, compleatur quidem figura. Et quoniam est sicut *ga* nota

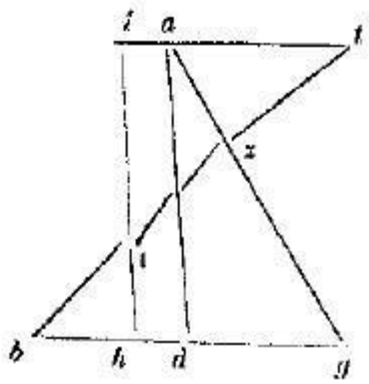
[443] notum B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[444] dico – bz B S M N F C L (quod *om.* S)] *om.* P
[445] dez B S M N F C L] *om.* P
[446] linea B S N[4] F C P L] latera M N[1]
[447] eab B S M N F C L] *om.* P
[448] notam B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

ad *ad* notam, ita *eg* nota ad *di*, quare *di* nota erit. Et est sicut *ez* nota ad notam *di*, ita *zb* ad *bd*.

Ergo proportio *zb* ad *bd*[449] nota est, ut oportebat ostendere.



<12.1> Et si proportio sectionum linee transeuntis per punctum *a* datum, que sit equidistans catheto, nota fuerit que linea termina|[N, f. 38r]ta sit ab una parte super basem in puncto *g*, et ab alia super lineam *di* in puncto *t*, ut in hac alia cernitur figura: dico iterum proportionem *zb* ad *bd* notam esse. **<12.2>** Quoniam simile est trigonum |[B, f. 29r] *eag* ei quod est *ait*, est sicut *ga* ad *at*, ita |[M, f. 43r] *eg* ad *ti*. Protrahatur quidem in trigono *dez* cathetus *dk*, et erit *dt* equalis *gk*, quia par|[P, f. 46r]alilogramum est quadrilaterum *dg*. Quare si addatur linee *ti*[450] equalis |[C, f. 38r] linee *gk*[451], |[L, f. 59r] scilicet *td*, erit nota tota *di*: et quoniam est sicut *ez* ad *di*, ita *zb* ad *bd*, quare proportio *zb* ad *bd* nota est, ut prediximus.



<13.1> Et si punctus datus infra trigonum fuerit inter cathetum, et angulum, a quo per punctum extenditur linea ad latus subtendens ipsum angulum,

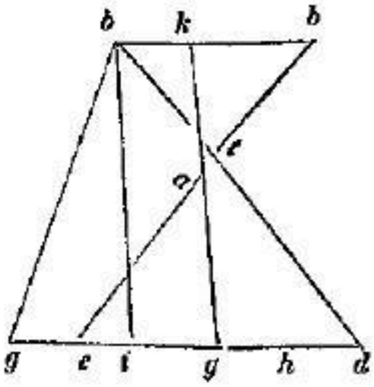
---

[449] ergo – bd B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

[450] ti B S M N F] dl C P L

[451] gk B S M N F] dk C P L

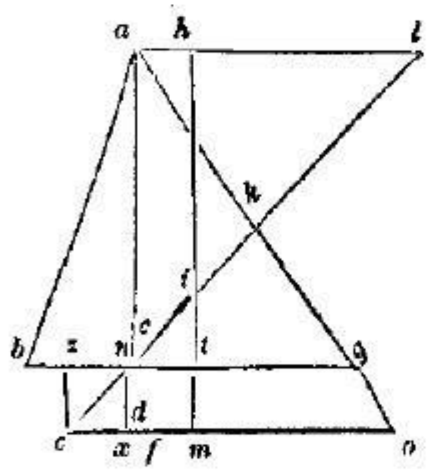
|[F, f. 30r] similiter sectiones illius lateris note erunt. **<13.2>** Sitque in trigono *abg*, cuius cathetus est *ad*, datus punctus *e*. Et a puncto *b* per *e* ducta est linea *bez*. Dico iterum sectiones *gz* et *za* note erunt. **<13.3>** Protrahatur per punctum *a* linea *it* equidistans linee *bg*, et expleatur linea *bt*, et per punctum *e* equidistans catheto *ad* protrahatur *hi*, et sit nota proportio *he* ad *ei*. Et sint nota latera trigoni *abg*, nec non et linea *bh* sit nota. Et quoniam nota sunt latera trigoni *abg*, |[S, f. 57v] notus erit et casus *bd*, de quo si extrahatur *bh* nota, reliqua[452] *hd* nota erit. Quare et *ia* nota est, cum sit equalis *hd* propter *id* paralilogramum. Et quia trigona *beh* et *eit* similia sunt, est sicut *he* ad *ei*, ita *bh* ad *it*. Ergo nota erit *it*, de qua si auferatur *ia*, remanebit *at* nota. Et quoniam est sicut *bg* ad *at*, ita *gz* ad *za*, ergo sectiones *gz* ad *za* note erunt, ut prediximus.



<14.1> Similiter si per punctum datum infra trigonum, a puncto dato in uno laterum trigoni, linea |[L, f. 59v] protrahatur usque ad unum, ex |[*b*, p. 49] lateribus trigoni invenietur proportio sectionum[453] illius lateris. **<14.2>** Exempli causa: in trigono *bdg* sit datus[454] punctus notus *e* in base *gd*, et infra trigonum sit datus[455] punctus *a* similiter notus in linea *zk*, que est equidistans catheto *bi*[456]; et per puncta *e a* linea protrahatur *et*. Dico proportionem *dt* |[P, f. 46v] ad *tb* notam esse. **<14.3>** Compleatur figura: et quoniam linea |[M, f. 43v] *zk* equidis|[N, f. 38v]tans est catheto *bi*, et *bk* est equidistans *iz*, ergo equalis est *bk* recte *iz*, et *zk* catheto *bi*, que cum sit nota, eritque[457] nota *zk*. Et *za* nota est, remanet *ak* nota. Et quoniam est sicut *za* ad *ak*, ita *ez* ad *kh*, ergo *kh* est nota, cui si addatur *kb*, scilicet

[452] reliqua B S N[4] F C P L] remanet M N[1]
[453] sectionum S M N F C P L] sectionis B
[454] datus B S M N F C L] ductus P
[455] datus B S M N F C L] ductus P
[456] bi B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[457] eritque B S N[4] F C P L] erit M N[1]

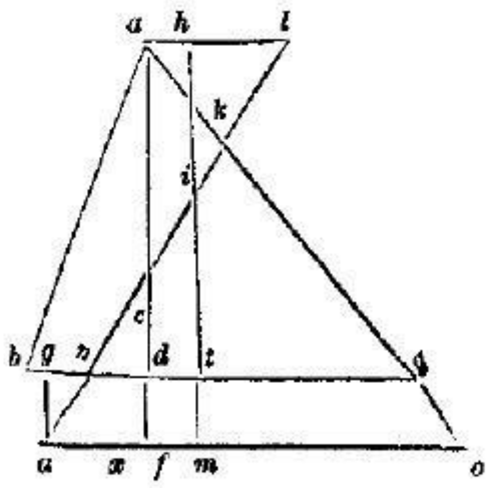
zi, que nota esse ponitur, erit *bh* nota. Et quoniam similia sunt trigona *etd* et *tbh*, est sicut *ed* ad *bh*, ita *dt* ad *tb*, quod oportebat ostendere.



<15.1> Item sit trigonum *abg*, cuius[458] *ab* sit 13, et *bg* 14, et *ag* 15, cuius cathetus *ad* est 12; et sumatur punctus *e*[459] extra trigonum, a quo ducatur recta *ez*[460] equidistans catheto *ad*; et sit[461] *ez* 2, et *zb* 1, quare *zd* erit 4. Et sumatur iterum infra trigonum ‖[C, f. 38v] punctus *i*, et sit *it* 3, et sit equidistans catheto *ad*; et sit *tz* 9, et per puncta[462] *e i* protrahatur linea *eik*. Dico quod proportio *gk* ad *ka* est nota. **<15.2>** Protrahatur ‖[L, f. 60r] linea *al* equidistans basi *bg*, et emittatur[463] *ek*[464] in puncto *l*, et[465] *ti* in punctis *h* et *m*, et sit *tm* equalis *ez*. Et copuletur *em*, ‖[B, f. 29v] et quoniam recte *ez* et *it* equidistantes sunt catheto *ad*, ‖[S, f. 58r] erit recta *tm* equidistans recte *ze*, et quia[466] sunt equales[467] sibi invicem, erit recta *em* equalis et equidistans recte *zt*. Ergo *em* est 9 et est equidistans recte *al*, et *th* est 12, cum sit equalis *ad*. Tota ergo *mh* est 14: est enim[468] *mi* 5, remanet *ih* 9. Est ergo sicut *mi* ad *ih*, ita *em* ad *hl*, hoc est sicut 5 est ad 9, ita 9 est ad *hl*. Ergo *hl* est $\frac{1}{5}$ 16[469], quare tota *al* est $\frac{1}{5}$ 21. **<15.3>** Item quia equidi‖[F, f. 30v]stans est *ez* recte *ti*, similia sunt

[458] cuius B S N^4 F C P L] cuius latus M N^1
[459] e S M N F C P L] d B
[460] ez S M N F C P L] az B
[461] sit B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[462] puncta B S M N F C L] punctum P
[463] emittatur S M N F C P L] emittetur B
[464] ek S M N F C P L] eh B
[465] et B S M N F C L] *om.* P
[466] quia S M N F C P L] *om.* B
[467] sunt equales B S F C P L] equales sunt M N
[468] enim B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[469] $\frac{1}{5}$ 16 N^4 F C P L] 16 B M N^1

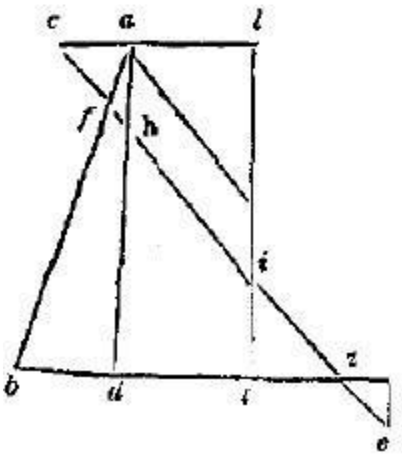
trigona *enz* et *int*, quare est sicut *ti* ad *ez*, ita *tn* ad *nz*, quare *tn* est $\frac{2}{5}$ 5. **<16.4>** Vel aliter: quia trigona *nit* et *lih* sunt similia sibi invicem, est sicut *ti* |[P, f. 47r] ad *ih*, hoc est sicut 3 est ad 9, ita *nt* est ad *hl*, ergo *nt* est tertia ex *hl*, scilicet[470] $\frac{2}{5}$ 5: cui si addatur *tg*, erit *ng* $\frac{2}{5}$ 9. Et est sicut *ng* ad *al*, ita *gk* ad *ka*. Est enim *al* $\frac{1}{5}$ 21, que sunt quinte 106, et in |[N, f. 39r] *gn* sunt quinte |[M, f. 44r] 47. Ergo sicut 47 est ad coniunctum de 47 et de 106, scilicet ad 153, ita *gk* est ad *ga*, scilicet ad 15, quare est sicut 47 ad tertiam de 153, scilicet ad 51, ita *gk* est ad tertiam de 15, scilicet ad 5, quare si multiplica|[L, f. 60v]verimus[471] 5 per 47, et summam diviserimus per 51, exibunt $\frac{1\;\;10}{3\;\;17}$ 4 pro linea *gk*. Reliquum quod[472] est usque in 15, scilicet $\frac{2\;\;6}{3\;\;17}$ 10, remanebit pro *ka*.



<16.1> Aliter emittantur linee *em* et *ag* in *o*: erit sicut *eo* ad *al*, ita *ok* ad *ka*. Per hanc quidem proportionem inveniemus *ak*, et tunc habebimus *kg*, quod oportebat ostendere. **<16.2>** Nam notitiam ex *go* et ex *oe* habebitur per[473] premissa, quia trigonum *adg* simile est trigono *afo*. Item si notitiam puncti *c*, per quem linea *el* secat, cathetum *ad* habere volumus, quia trigonum *ncd* est simile trigono *lca*, est sicut *nd* ad *al*, scilicet sicut due quinte sunt ad se, et ad quintas 106, scilicet sicut 2 sunt ad 108, ita *dc* est ad *da*, quare *dc* est $\frac{2}{9}$ unius integri,

[470] scilicet B S M N F C L] similiter P
[471] multiplicaverimus B S M N F C L] multiplicaveris P
[472] quod S N^4 F C P L] quidem B M N^1
[473] per S C P L] pro B M N F

remanet *ca* $\frac{7}{9}$ 11. Vel si protraherimus[474] cathetum *nx*, erit sicut *ex* ad *xn*, |[S, f. 58v] ita *nd* ad *dc*: est enim *ef* equalis *dz*, et *dn* equalis *fx*, quare *ex* nota est.

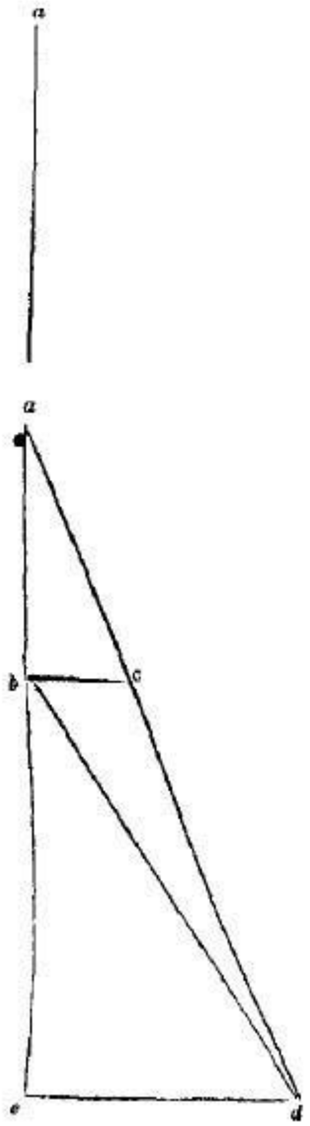


<17.1> |[C, f. 39r] Rursus sit *ge* vice *ez* in hac alia figura, et sit duo latera vero trigoni et cathetus, nec non[475] linea *ti* sint, ut[476] prediximus; et sit angulus *egt* rectus, quare equidistans erit rectis *it* et *ad*. Et protrahatur per puncta *e i* linea *ef*: volumus ergo |[*b*, p. 50] scire sectiones linearum *gb* et *ad*, nec non et *ab*. **<17.2>** Emittatur quidem linea *ef* in puncto *c* et linea *ti* in puncto *l*; et copuletur *cal*[477], et sit equidi|[L, f. 61r]stans linee *bg*. Eritque ut *eg* ad *ti*, ita *gz*[478] ad *zt*, quare erit[479] sicut[480] *eg* et *ei* ad *ti*, hoc est sicut |[P, f. 47v] 5 ad 3, ita *gt* ad *zt*, ergo *zt* erit $\frac{2}{5}$ 2, cum *gt* sit 4. **<17.3>** Item est sicut *ti* ad *il*[481], ita *zt* ad *lc*[482], quare *lc* est $\frac{1}{5}$ 7, de qua dempta *la*, remanet *ac* $\frac{1}{5}$ 2. Item est sicut *td* ad se et ad *ac*, ita *dh* ad *da*, |[N, f. 39v] quare *dh* est[483] $\frac{1}{4}$ 9: rema|[M, f. 44v]net *ha* $\frac{3}{4}$ 2. |[B, f. 30r] Rursus quia est sicut *zb* ad se et ad *ac*, ita *bf* ad *ba*, erit[484] ergo *bf* $\frac{3}{73}$ 11, reliqua *fa* erit $\frac{70}{73}$ 1[485].

---

[474] protraherimus S F C P L] protraxerimus B M N
[475] non C P L] non et B S M N F
[476] ut S F C P L] ubi B M N F
[477] cal B S M N F] cak C P L
[478] gz B S M N F C L] ez P
[479] erit B S F C P L] erunt M N
[480] sicut B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[481] il B S M N F] ik C P L
[482] lc S M N F C P L] tc B
[483] est B S M N F C L] *om*. P
[484] erit B S M N^1 F C P L] eritque N^4
[485] et in trigono aliquo – scilicet 144 *(= ff. 51r/v L) add.* L^a, *exp.* L^b. Vacat. Sicut inveni scriptum in exemplari et cancellatum. Sic conscripsi et cancellavi pro ut inveni: ad cautellam *in mg. dx. scr.* L^b

<18.1> |[L, f. 61v] In trigono orthogonio notorum laterum protrahatur, extra trigonum, latus subtendens angulum rectum per longitudinem notam, et a termino ipsius linee ad angulum rectum recta producatur, erit etiam |[F, f. 31r] et[486] ipsa linea nota. **<18.2>** Exempli causa: sit trigonum orthogonium *abc* notorum laterum, habens angulum *abc* rectum; et emittatur latus *ac* extra trigonum in puncto *d*: et sit tota *ad* nota. Et a puncto *d* ad punctum *b* protrahatur recta *db*. Dico lineam *db* notam esse, quod sic probatur. **<18.3>** Protraham rectam *ab* secundum rectitudinem in infinitum per punctum *e*, et per punctum *d* protraham rectam *de* equidistantem linee *bc*: et erit angulus *aed*[487] rectus, cum sit equalis |[L, f. 62r] angulo *abc* quia, *cum in duabus rectis equidistantibus recta incidit, erit interior angulus equalis exteriori et opposito*. **<18.4>** Nam in equidistantibus *bc* et *ed* recta incidit *ae*, quare[488] angulus *aed* equalis est angulo *abc*. Propter eadem ergo et angulus *ade* |[S, f. 59r] equalis est[489] angulo *acb*, et angulus qui ad *a* est comunis, quare trigona *abc* et *aed* equiangula sunt et sibi invicem similia[490]. Similia vero trigona circa equales angulos latera habent proportionalia, quare est sicut *ac* ad *cb*, ita *ad* ad *de*. Permutatim ergo erit sicut *ad* nota ad *ac* notam, ita *ed* ad *bc* notam, quare recta *ed* erit nota. Similiter est sicut *ad* ad *ac*, ita *ae* ad *ab* notam, quare recta *ae* erit nota: de qua si auferatur recta *ab* nota, remanebit recta *be* nota[491], cuius quadratum |[P, f. 48r] si addatur cum quadrato linee *de*, egredietur quadratum linee *bd* notum: et sic ostenditur lineam *bd* esse notam, ut predixi.



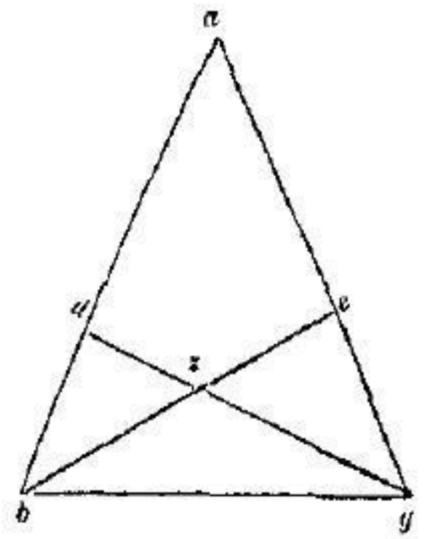
[486] et S C P L] *deest* B M N F
[487] aed B S M N F] aec C P L
[488] quare B M N F C L] quia S P
[489] est S M N F C P L] *om.* B
[490] similia B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[491] nota B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

<19.1> |[C, f. 39v] Ex hac quidem figura egreditur solutio subscripte questionis |[N, f. 40r] mihi proposite a quodam Veronense, qui proposuit[492]: arborem quamdam |[M, f. 45r] erectam esse prope ripam cuiusdam fluminis, et fuit longitudo arboris pedum 40, quam longitudinem pono lineam *bg*. Et spatium, quod erat a pede arboris usque ad flumen, posuit esse pedum 5, quod spatium posui lineam *bc*. Et fuit in arbore *bg* acceptus punctus quidam *a*, et fuit *ba* 10 pedum, et in puncto *a* secta fuit arbor, et cecidit superior pars *ag*, que erat 30 pedum, super lineam *ad* tangens punctum *c*, et fuit linea *ad* 30[493]. Petit quanta esset quantitas |[L, f. 62v] linee *db* egredientis a puncto summitatis arboris usque ad punctum pedis ipsius. **<19.2>** Unde cum vellem hanc questionem solvere, intellexi figuram suprascriptam, et aggregavi quadrata linearum *ba* et *bc*, hoc est 100 et 25, et habui 125 pro quadrato linee *ac*. Et quia erat sicut *ad* ad *ac*, ita *ed* ad *bc*, fuit sicut quadratum linee *ad* ad quadratum linee *ac*, hoc est sicut 900 ad 125, ita quadratum linee *ed* ad quadratum linee *bc*, quod est 25. Sed proportio |[B, f. 30v] de 900 ad 125 est in minimis numeris sicut 36 ad 5. Ergo est sicut 36 ad 5, ita quadratum linee *ed* ad 25[494]. Permutatim ergo fuit 36 ad quadratum linee *ed*, sicut 5 ad 25. Sed 5 de |[S, f. 59v] 25 est quinta pars, quare 36 fuit[495] $\frac{1}{5}$ quadrati linee *ed*, quare multiplicavi 36 per 5, et habui 180 pro quadrato linee *ed*, quod quadratum extraxi ex quadrato linee *ad*, scilicet de |[*b*, p. 51] 900: remanserunt 720 |[F, f. 31v] pro quadrato linee *ae*. **<19.3>** Vel aliter quia est sicut *ad* ad *ac*, ita *ae* ad *ab*. Fuit ergo sicut 36 ad 5, ita quadratum linee *ea* ad quadratum linee *ba*, hoc est ad 100, quare permutatim est sicut 5 ad 100, ita 36 ad quadratum linee *ae*, quare multiplicanda sunt 36 per 20, quia[496] 5 sunt |[P, f. 48v] $\frac{1}{20}$ de 100: |[N, f. 40v] et habentur similiter 720 pro quadrato linee *ae*. **<19.4>** Ergo *ae* fuit radix de 720[497], de qua extraxi lineam *ab*, que est 10, remansit mihi radix de 720 minus 10 |[M, f. 45v] pro linea *eb*; quam multiplicavi in se, et habui 820 minus radice de 288000 pro quadrato linee *eb*. Cui addidi quadratum linee *ed*, quod est 180, et habui 1000[498] |[L, f. 63r] minus radice de 288000 pro quadrato linee *bd*, quare[499] *bd* est

---

[492] proposuit B S M N F C] proponens P L
[493] 30 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[494] 25 B S M N^4 F C P L] *om.* N^1
[495] fuit B S M N F C L] *om.* P
[496] quia B S N F C L] quare M P
[497] pro – 720 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[498] 1000 B S] 10 N^4 F C P L, *om.* M N^1

radix de 1000 minus radice de 288000. Et ut hec reducerem ad numerum ratiocinatum, accepi[500] radicem de 288000[501], quam inveni esse $\frac{2}{3}$ 536 minus $\frac{1}{96}$ quam etiam extraxi de 1000: remanserunt $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$ 463, de quibus etiam accepi radicem, et habui $\frac{1}{2}$ 21, et unam |[C, f. 40r] quadragesimam unius pedis pro quantitate linee *bd*. **<19.5>** Nec etiam pretermittendum est demonstrare viam habendi quadratum linee *eb*, que recisum vel abscisio, seu residuum nuncupatur; cum sit differentia, que est inter duas lineas potentia solum commensurabiles, scilicet inter *ae* et *ab* rectas, quarum *ae* est radix[502] numeri ratiocinati, scilicet de 720, et *ab*, que est 10, est numerus, et quoniam recta *ae* divisa est in duo in puncto *b*, quadrata[503] linearum *ae* et *ab* equantur duplo multiplicationis *ab* in *ae*, et quadrato linee *eb*, ut superius demonstratum est. Ergo si ex quadratis linearum *ae* et *ab*, scilicet ex 720 et ex 100, hoc est de 820 auferatur duplum multiplicationis ex *ab* in *ae*, quod[504] duplum est equale 20 radicibus de 720, que etiam equantur |[S, f. 60r] uni radici numeri provenientis ex multiplicatione quadrati de 20, hoc est de 400, in 720, et qui numerus est 288000: remanebunt 820 minus radice de 288000, ut superius demonstravi.



<20.1> Rursus si in trigono *abg* ab angulis *g b* egredientur recte *be* et *gd* se invicem secantes super punctum *z*, et sit nota proportio |[L, f. 63v] ex *ge* ad *ea*, et

[499] quare B S N[4] F C L] quia P, *om.* M N[1]
[500] accepi B S N[4] F C L] accipe P, *om.* M N[1]
[501] pro quadrato linee eb – 288000 B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[502] radix B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[503] quadrata B S M N F] quia quadrata C P L
[504] quod B S N[4] F C L] qui M N[1], ad P

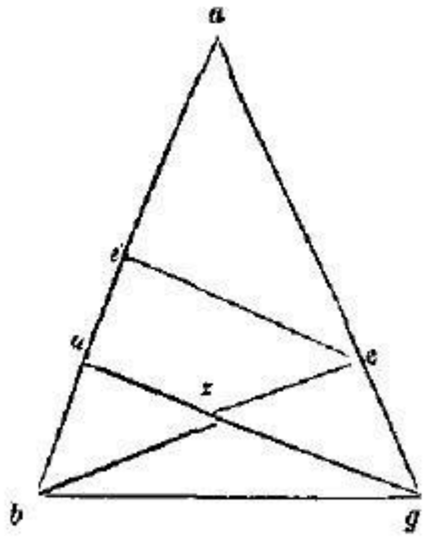
ex *bd* ad *da*, erunt utique note proportiones *bz* ad *ze* et *gz* ad *zd*. **<20.2>** Sed antequam hec |[P, f. 49r] demonstrare[505] possimus, oportet nos tractare de compositione proportionum ex duabus, vel pluribus proportionibus. Nam illa proportio composita dicitur, que provenit ex multiplicatione omnium |[N, f. 41r] antecedentium ad multiplicatum omnium consequentium duarum, vel plurium proportionum. **<20.3>** Verbi gratia: ex proportione, quam habent 2 ad 3, et ex ea quam habent 4 ad 5, componitur proportio ex 8 ad 15, cum ex multiplicatione de 2 in 4 provenient |[M, f. 46r] 8, ex 3 in 5 venient[506] 15. Item ex proportione quam habent 2 ad 3, et 4 ad 5, et 6 ad 7, componitur |[B, f. 31r] proportio quam habent 48 ad 105, cum ex multiplicato omnium antecedentium provenient 48, scilicet ex 2 in 4 productam in 6, et ex multiplicato consequentium, scilicet ex 3 in 5 ducto in 7, ve|[F, f. 32r]niunt 105. Sed proportio de 48 ad 105 est illa in minimis numeris quam habent 16 ad 35. **<20.4>** Et est intellectus talis compositionis, quod inter 16 et 35 cadunt tres numeri in proportionibus suprascriptis, videlicet sicut 2 ad 3, ita 16 ad 24, et sicut 4 ad 5, ita 24 ad 30, et sicut 6 ad 7, ita 30 ad 35. Ex his enim procedit compositio proportionis duarum quantitatum, vel duorum numerorum[507]: cum inter ipsas quantitates eiciatur quantitas[508] aliqua, erit tunc proportio prime quantitatis ad secundam composita ex proportione, quam habet prima[509] quantitas ad |[C, f. 40v] eiectam, et ex ea quam habet quantitas[510] eiecta[511] ad secundam. **<20.5>** Cuius exemplum ponamus in numeris: sint 7[512] eiecta[513] inter 3 et 10: |[L, f. 64r] dico quod proportio de 3 ad 10 componitur ex ea quam habent 3 ad 7, et ea quam |[*b*, p. 52] habent 7 |[S, f. 60v] ad 10. Nam multiplicatus[514] ex antecedentibus ad multiplicatum[515] ex consequentibus fit sicut 3 ad 10, quam si multiplicaverimus insimul antecedentes, scilicet 3 per 7, provenient[516] 21, et si multiplicaverimus insimul consequentes, scilicet 7 per 10, proveniunt 70.

---

505 hec demonstrare B S M N C P L (hec B M N C P L, hoc S)] demonstrare hec F
506 venient B S M N^4 F C P L] provenient N^1
507 vel – numerorum B S M N F C L] *om.* P
508 eiciatur quantitas B S M N F C L] *om.* P
509 prima B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
510 ad eiectam – quantitas B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
511 eiecta B S N^4 F C P L] adiecta M N^1
512 7 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
513 eiecta B S F C P L] adiecta M N
514 multiplicatus S C P L] multiplicatio B M N F
515 multiplicatum B S M N^4 F C P L] multiplicationem N^1
516 provenient B S N^4 F C P L] venient M N^1

Proportio quidem de 21 ad 70 est proportio septime partis de 21 ad septimam partem de 70, et est illa quam habent 3 ad 10, ut diximus. **<20.6>** Similiter inter duas quantitates possunt eici due, vel plures |[N, f. 41v] quantitates, |[P, f. 49v] et erit proportio ipsarum duarum quantitatum composita ex ipsis proportionibus, ut si inter 3 et 10 eiciantur 5 et 6 et 7, erit proportio de 3 ad 10 composita ex proportione, quam habent 3 ad 5, et ex eis quam habent 5 ad 6, et 6 ad 7, et 7 ad 10.

<21.1> His optime intellectis, oportet nos |[M, f. 46v] etiam demonstrare quomodo et[517] ex proportione data extrahatur proportio aliqua: ut si volueris ex proportione, quam habent 7 ad 8, extrahere proportionem quam habent 6 ad 5: multiplicabis antecedens proportionis de qua extrahenda est proportio, per consequens proportionis extrahende, scilicet 7 per 5: provenient[518] 35 pro antecedente proportionis residue. **<21.2>** Et multiplicabis antecedens extrahende proportionis per consequens, de qua extrahitur proportio, scilicet 6 per 8: erunt <48> pro consequente residue proportionis[519]. Ergo si ex proportione quam habent 7 ad 8 auferatur proportio de 6 ad 5, remanebit utique proportio de 35 ad 48. Unde si addi|[L, f. 64v]derimus proportiones quam habent 6 ad 5, et 35 ad 48, proveniet proportio quam habent 210 ad 240, et est ipsa eadem quam habet trigesima pars unius ad[520] trigesimam partem alterius, scilicet 7 ad 8.



[517] et B S N⁴ F C L] *om.* M N¹ P
[518] provenient B S N⁴ F C P L] proveniunt M N¹
[519] proportionis] questionis B S M N F C P L
[520] ad B S M N F C L] *om.* P

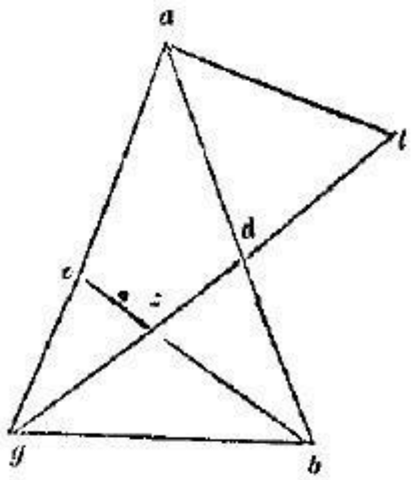
<22.1> His itaque intellectis, oportet nos ostendere, antequam redeamus ad propositum, quomodo proportio quam habet in suprascripto trigono *abg* recta *ga* ad *ea* |[F, f. 32v] componatur ex proportione, quam habet tota reflexa *gd* ad partem suam *zd*, et ex proportione quam habet *bz* ad *be*. **<22.2>** Et est ista demonstratio, que vocatur |[S, f. 61r] cata coniunctum: a puncto quidem *e* protrahatur recta *ei* equidistans linee *gd*, ut in hac alia ostenditur[521] figura. Et erit trigonum *aie*[522] simile trigono *adg*, quare |[B, f. 31v] erit sicut *ga* ad *ae*, ita *gd* ad *ei*. Eiciatur itaque recta *zd* inter *gd* et *ei*[523]; et erit per ea, que supra diximus, proportio |[C, f. 41r - N, f. 42r] *gd* ad *ei* composita ex proportione *gd* ad *dz* et ex *dz* ad *ei*. **<22.3>** Sed proportio *zd* ad *ei* est sicut proportio *bz* ad *be*, cum simile sit trigonum *bzd* trigono *bei*, cum *zd* equidistet recte |[P, f. 50r] *ei*. Ergo proportio *gd* ad *ei* componitur ex proportione *gd* ad *dz* et *bz* ad *be*. Sed proportio *gd* ad *ei* est sicut proportio *ga* ad *ae*, ergo proportio *ga* ad *ae* componitur, ut dixi|[M, f. 47r]mus, ex proportione *gd* ad *dz* et *bz* ad *be*. **<22.4>** Dico iterum quod proportio *ga* ad *ae* componitur ex proportione *gd* reflexe[524] ad reflexam *be*, et ex ea quam habet *bz* ad *zd*, quoniam equalis est proportio *gd* ad *ei* proportioni *ga* ad *ae*. Si inter proportionem quam habet *gd* ad *ei* eiciatur recta *be*, erit proportio recte *ga* ad *ae* composita ex proportione quam |[L, f. 65r] habet *gd* ad *be*, et *be* ad *ei*. Sed proportio *be*[525] ad *ei* est sicut proportio *bz*[526] ad *zd*, ergo proportio *ga* ad *ae* componitur[527] ex proportione *gd* ad *be*, et ex *bz* ad *zd*, quod oportebat ostendere.

<23.1> Nam semper contingit, cum aliqua proportio composita fuerit ex duabus proportionibus, erit etiam ipsa eadem proportio composita ex proportione antecedentium ad permutatos consequentes. **<23.2>** Verbi gratia: proportio de 8 ad 15 est composita ex proportione[528] quam habent 2 ad 3, et 4 ad 5. Erit etiam proportio de 8 ad 15 composita ex permutatis proportionibus, sicut ex ea quam habent 2 ad 5, et ex ea quam habent |[*b*, p. 53] 4 ad 3, quia multiplicatio de 3 in 5 equa est multiplicationi de 5 in 3; et sunt 3 et 5 in utraque compositione consequentes, et 2 et 4 sunt antecedentes. **<23.3>** Simili quoque modo

---

521 ostenditur B S F C P L] cernitur M N
522 aie B S N[4] F C P L] gei M N[1]
523 eiciatur – ei B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
524 reflexe S C P L] reflexa B M N F
525 be S M N F C P L] gd B
526 bz B S M N F] bg C P L
527 componitur B S M N F] ponitur C P L
528 antecedentium – proportione B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]

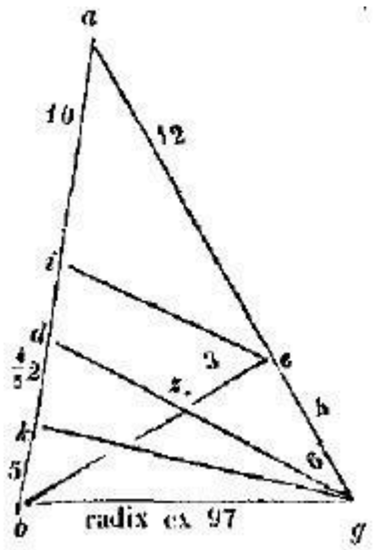
ostendetur[529] quod proportio *ba* ad *ad* componitur ex proportione *be* ad *ez*, et ex ea quam habet *gz* ad *gd*. Si protraxerimus infra trigonum a puncto *d* lineam equidistantem linee *be*, et sic ex proportione quam habet |[S, f. 61v] *ga* ad *ae* ostensa est una combinatio[530] compositarum proportionum[531].



<24.1> |[F, f. 32r bis] rursus |[N, f. 42v] dico quod proportio *bd* ad *da* componitur ex proportione *bz* ad *ze*, et ex proportione *ge* ad *ga*, quod sic probatur: **<24.2>** a puncto quidem |[P, f. 50v] *a* protrahatur recta *at* equidistans linee *be*, ut in hac alia cernitur figura, que cata dicitur disiunctum, et emittatur recta *gd* usque ad punctum *t*. Et quia equidistantes sunt recte *at* et *zb*, et in eis |[L, f. 65v] inci|[M, f. 47v]dit recta *ab*, equalis est angulus, qui sub *tad*, angulo, qui sub *dbz*. **<24.3>** Propter eadem ergo[532] et angulus qui, sub *atd* equalis est angulo, qui sub *dzb*, et anguli qui ad *d* cum sint a vertice sibi invicem sunt equales: ergo equiangula sunt trigona *atd* et *dbz*, et circa equales angulos habent latera proportionalia, quare erit sicut *db* ad *bz*, ita *da* ad *at*. Permutatim ergo erit sicut *bd* ad *da*, ita *bz* ad *at*. |[C, f. 41v] Eiciamus ergo rectam *ze* inter *zb* et *at*: erit tunc proportio *bz* ad *at*, hoc est proportio *bd* ad *da* composita ex proportione quam habet *bz* |[B, f. 32r] ad *ze*, et ex ea quam habet *ze* ad *at*, hoc est *ge* ad *ga*, cum simile sit trigonum *gez* trigono *gat*. Ergo proportio *bd* ad *da* componitur ex proportione *bz* ad *ze*, et *ge* ad *ga*. **<24.4>** Vel proportio *bd* ad *da* componitur ex proportione[533] *bz* ad *ga*, et[534] ex proportione *ge* ad *ez*, quod sic ostenditur: inter *bz* et *at* eiciatur recta *ga*: erit

[529] ostendetur B S N[4] F C P L] ostenditur M N[1]
[530] combinatio] concubinatio B S M F C P L, *om.* N
[531] proportionum B S M F C P L] proportionum concubinatis N
[532] ergo S M N F C P L] *om.* B
[533] proportione B S M N F C P] portione L
[534] et B S F C P L] *om.* M N

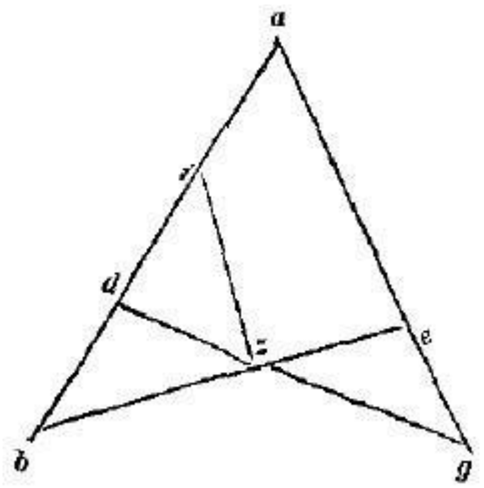
proportio quidem *bz* ad *at* composita ex proportione[535] *bz* ad *ga*, et ex proportione *ga* ad *at*. Sed proportio *ga* ad *at* est sicut proportio *ge* ad *ez*, ergo proportio *bz* ad *at*, hoc est proportio *bd* ad *da*, componitur ex proportione[536] *bz* ad *ga*, et ex proportione[537] *ge* ad *ez*, quod oportebat ostendere. **<24.5>** Et sic ostensa est una combinatio[538] compositionis proportionis *bd* ad *da*. Similiter ostendetur[539] quod proportio *ge* ad *ea* |[S, f. 62r] componitur ex proportione *gz* ad *zd*, et ex proportione *bd* ad *ba*, si protraxerimus a puncto |[L, f. 66r] *a* equidistantem linee *gd*, et copulaverimus eam cum linea *be*.



<25.1> Nunc revertamur ad propositum. Et ostendam, quod[540] si |[N, f. 43r] proportiones *ge* ad *ea* |[P, f. 51r] et *bd* ad *da* fuerint note, erunt[541] utique proportiones *bz* ad *ze* et *gz* ad *zd* note. Cum itaque proportio quam habet *ge* ad *ea* nota componatur ex proportione quam habet *gz* ad *zd*, et ex proportione quam habet *bd* ad *ba*, si ex proportione quam habet *ge* ad *ea* auferatur |[M, f. 48r] proportio *bd* ad *ba*, que est nota, remanebit nota proportio *gz* ad *zd*. Similiter si ex proportione, quam habet *bd* ad *da*, auferatur proportio *ge* ad *ga*, remanebit nota proportio *bz* ad *ze*. **<25.2>** Que omnia ut clarius videantur, |[F, f. 32v bis] ponamus lineam *ag* esse 16, et lineam *ab* esse 15; et sit *ge* tertia pars ex *ea*, et *bd* sit dimidium ex *da*. Erit ergo proportio *ge* ad *ea* sicut l ad 3. De qua si extrahatur

[535] proportione B S M N F] portione C P L
[536] proportione B S M N F] portione C P L
[537] bz – proportione B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[538] combinatio B S F C P L] concubinatio M N
[539] ostendetur B M N F C P L] ostenditur S
[540] quod B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[541] erunt S F C P L] eruntque B M N

proportio *bd* ad *ba*, scilicet ea quam habet 1 ad 3: remanebit proportio *gz* ad *zd*, sicut 3 ad 3, quare equalis est recta *gz* recte *zd*, et sic proportio *gz* ad[542] *zd* inventa est nota. **<25.3>** Similiter si ex proportione, quam habet 1 ad 2, scilicet *bd* ad *da*, extraxerimus[543] proportionem quam habet 1 ad 4, scilicet *ge* ad *ga*, remanebit proportio quam habet 2 ad 1, pro proportione *bz* ad *ze*. Et quamvis proportiones sectionum reflexarum sint note, tamen[544] longitudines ipsarum reflexarum habere non possumus ||[C, f. 42r] nisi per basis notitiam, quam ponamus esse radicem de[545] 97. **<25.4>** Et studeamus super latus ||[*b*, p. 54] *ag* invenire casum perpendicularis cadentis super eam ab angulo ||[L, f. 66v] *b*, et inveniemus[546] ipsum esse, per ea que demonstrata sunt in[547] inventione casuum, punctus[548] *e*, quare[549] recta *be* cathetus est super rectam *ag*. Orthogonia ergo sunt trigona *beg* et *eba*, quare si quadratum lateris *eg*, quod est[550] 16, auferatur ex quadrato linee *bg*, scilicet de 97, remanebunt 81 pro quadrato linee *be*, quare recta *be* est 9. Et quia *bz* ad *ze* est sicut 2 ad 1, ||[S, f. 62v] si coniungerimus proportionem *bz* ad *ze*, inveniemus ipsam sicut 3 ad 1, quare ||[B, f. 32v] recta *be* tripla est recte *ze*, quare cum *be* sit 9, erit *ze* 3 et *zb* erit[551] 6.



<26.1> Item ||[P, f. 51v] ut inveniamus longitudinem recte *gd*, faciemus cadere cathetum ||[N, f. 43v] a puncto *g* super lineam *ab*, que sit linea *gk*. Et erit

---

[542] ad S M N F C P L] *om.* B
[543] extraxerimus B S N[4] F C P L] extrahemus M N[1]
[544] tamen B M N F] tantum S C P L
[545] de B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[546] inveniemus B S N[4] F C P L] inveniamus M N[1]
[547] in S M N F C P L] *om.* B
[548] punctus S M N F C P L] punctum B
[549] quare B S M N F C L] quia P
[550] quod est B S N[4] F C P L] quidem M N[1]
[551] erit B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

notus casus *bk* per ea que demonstravimus in in|[M, f. 48v]ventione casuum: quare *kd* remanebit nota, et erit $\frac{4}{5}$ 2. Unde[552] si ex quadrato linee *gb* extraxerimus quadratum linee *bk*, que est $\frac{1}{5}$ 2, remanebunt pro quadrato linee *gk* $\frac{4}{25}$ 92. Quibus si addiderimus quadratum linee *dk*, scilicet 8 minus $\frac{4}{25}$, venient[553] 100 pro quadrato linee *gd*. Ergo linea *gd* est 10, quare quelibet rectarum *gz zd* est 5, cum ambe sibi[554] invicem invente sint equales[555]. **<26.2>** Iterum sine base reiteretur figura trigoni supradicti: dico quod proportio *gd* ad *dz* componitur ex duabus proportionibus linearum *ga* ad *ae*, et *be* ad *zb*, quod sic probatur. In puncto quidem *z* protraham lineam *zi* equidistantem linee *ga*, et erit trigonum *dzi* simile trigono *dga*, quare[556] proportionaliter est sicut *gd* ad *dz*, ita *ga* ad *zi*. Et eiciatur *ae* inter *ga* et *zi*, et erit proportio *ga* ad *zi* |[L, f. 67r] composi|[F, f. 33r]ta ex proportione *ga* ad *ae*, et ex *ae* ad *iz*. Sed proportio *ea* ad *zi* est sicut proportio *eb* ad *bz*, cum simile sit trigonum *bzi* trigono *bea*. Ergo proportio *ga* ad *zi*, hoc est proportio *gd* ad *dz*, componitur[557] ex proportione *ga* ad *ae*[558], et ex proportione *eb* ad *bz*, quod oportebat ostendere[559]. **<26.3>** Ex hoc ergo manifestum est[560], quod quando proportio duarum quantitatum componatur ex proportione tertie quantitatis ad quartam, et ex proportione quinte quantitatis ad sextam, tunc proportio tertie quantitatis ad quartam erit composita ex proportione prime quantitatis[561] ad secundam, et sexte ad quintam. Fuit enim proportio prime quantitatis *ag* ad secundam *ae* composita ex duabus |[C, f. 42v] proportionibus, scilicet ex ea quam habet tertia quantitas *gd* ad quartam *zd*, et ex proportione quinte *bz* ad sextam *be*. **<26.4>** Modo invenimus[562], proportionem tertie |[P, f. 52r] quantitatis *gd*[563] ad

---

[552] unde B S N^4 F C P L] vide M N^1
[553] venient B S M N F C L] veniunt P
[554] sibi B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[555] sint equales B S F C P L] equales sint M N
[556] quare B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[557] componitur B S M N^1 F C P L] composita N^4
[558] et ex ae ad iz sed proportio ea ad z est sicut proportio eb ad bz cum simile sit trigona bzi trigono bea: ergo proportio ad zi hoc est proportio gd ad dz componitur ex proportione ex ga ad ae et *in mg. inf. scr.* N^4
[559] quod – ostendere B S M N F C L] *om.* P
[560] est B M N^1 C P L] *om.* S F, *del.* N^4
[561] ad - quantitatis B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[562] invenimus B S N^4 F C P L] inveniemus M, inveniamus N^1
[563] gd B] gbd M N^1, gb S N^4 F C P L

quartam |[S, f. 63r] *zd* compositam esse ex proportione prime quantitatis *ga* ad secundam *ae*, et ex proportione sexte quantitatis *be* ad quintam *bz*.

<27.1> |[N, f. 44r] Ostendam rursus in eadem fi|[M, f. 49r]gura, quod proportio *gd* ad *dz* componitur ex proportione *ga* ad *zb*, et ex proportione quam habet *be* ad *ae*, quod sic probatur. Est enim sicut *gd* ad *dz*, ita *ga* ad *zi*: adiaceat quidem recta *zb* inter *ea* et *zi* et erit proportio *ga* ad *zi* composita ex *ga* ad *zb*, et ex *zb* ad *zi*. Si proportio *bz* ad *zi* est sicut proportio *be* ad *ea*, ergo proportio *ga* ad *zi*, scilicet |[F, f. 67v] proportio *gd* ad *dz*, componitur ex proportione *ga* ad *bz* et ex proportione *be* ad *ea*, ut prediximus. **<27.2>** Et sic in hac figura ostensa est alia combinatio[564] proportionum. Sunt enim[565] decem et octo combinationes[566] proportionum, que ostendi possunt in[567] hac figura cata et quas etiam[568] in libro meo in *Regula Baracti* demonstravi. **<27.3>** Sed quia ex his omnibus[569] |[B, f. 33r] colligitur tantum scientia habendi notitiam alicuius ignote quantitatis per notitiam quinque quantitatum notarum, ex quibus sex quantitatibus proportio unius ad aliam componatur ex duabus proportionibus reliquarum quatuor quantitatum. Non curo reliquas combinationes[570] osten|[*b*, p. 55]dere.

prima.	tertia.	quinta
16.	10.	6
a	g	e
secta	quarta	sexta
.12.	5.	9
b	d	z

<28.1> Sed qualiter ad notitiam quantitatis ignote per quinque quantitates[571] notas venire debeamus, ex ordine cum suprascriptis numeris demonstrare curavi. Sit itaque proportio prime quantitatis[572] *a* ad secundam *b*

[564] combinatio B F^{b}] concubinatio S M N F^{a} C P L
[565] enim B S N^{4} F C P L] generi M N^{1}
[566] combinationes B F^{b}] concubinationes S M N F^{a} C P L
[567] in B S M N F C L] et P
[568] etiam B S N^{4} F C P L] etiam M, *om.* N^{1}
[569] omnibus S F C P L] *deest* B M N
[570] combinationes B] concubinationes S M N F C P L
[571] ignote - quantitates B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[572] *spatium vacuum reliquit* F

composita[573] ex proportione tertie quantitatis *g* ad quartam *d*, et ex proportione[574] quinte quantitatis *e* ad sextam *z*, et sit ignota quantitas *a*. **<28.2>** Et quia proportio *a* ad *b* provenit ex proportione multiplicati antecedentium duarum reliquarum proportionum |[F, f. 33v] ad multiplicatum[575] duarum consequentium earundem, erit multiplicatio multiplicati ipsarum antecedentium in quantitatem *b* equalis multiplicationi multiplicati[576] |[P, f. 52v] ipsarum |[S, f. 63v] consequentium in quantitatem *a*, quare si multiplicaverimus multiplicationem ex *e* in *g*, que sunt quantitates antecedentes, per quantitatem *b*, et diviserimus summam per factum ex multiplicatione *d* in *z*, que sunt consequentes, proveniet[577] utique quantitas *a* nota. **<28.3>** Verbi gratia: sit *a* 16, et *b* sit 12, et *g* sit 10, |[L, f. 68r – N, f. 44v] et *d* sit 5, et *e* sit 6, et *z* sit 9. Et multiplicentur 6 per 10, scilicet[578] *e* in *g*: venient[579] 60, |[M, f. 49v] quibus ductis in *b*, scilicet[580] per[581] 12, provenient 720. Similiter si multiplicave|[C, f. 43]rimus 9 per 5, quod totum per 16, provenient 720. Ergo cum equalis sit multiplicatio ex *e* in *g* ducta in[582] *b*, multiplicationi *z* in *d* ducta in *a*[583], si per multiplicationem ex 2 in[584]*d* diviserimus factum[585] ex multiplicatione ex *e* in *g* ducta in *b*, scilicet 720, per 45, provenient utique 16 pro quantitate *a*. **<28.4>** Sed sit quantitas *b* ignota, et relique quinque[586] quantitates sint note: dividemus[587] 720 que proveniunt ex 9 multiplicatis in 5, quod totum in 16 per 60, que proveniunt ex 6 multiplicatis in 10: provenient 12 pro quantitate *b*. **<28.5>** Sed sit ignota quantitas *g*: dividemus iterum 720, que proveniunt ex *a* in *d* et in *z*, per factum ex *b* in *e*, scilicet per 72: provenient 10 pro quantitate *g*. **<28.6>** Sed sit ignota tantum quantitas *d*: dividemus iterum 720 que proveniunt ex *e* ducta in *g* quod totum in *b*, per[588] factum[589] ex *a* in *z*, scilicet[590] 144: provenient 5 pro

---

573 composita B M N F] proposita S C P L
574 tertie - proportione B S F C P L] *om.* M N
575 duarum - multiplicatum B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
576 multiplicati S M N F C P L] *om.* B
577 proveniet S N^{4} F C P L] provenit B M N^{1}
578 scilicet B S M N F C P L^{b}] simile L^{a}
579 venient B S M N F C L] veniunt P
580 scilicet B S M N F C P L^{b}] simile L^{a}
581 per N^{4} F C P L] in B S M N^{1}
582 in S M N F C P L] *om.* B
583 ex – a B M N F C P L] *om.* S
584 per S M N F C P L] *om.* B
585 factum B S M N F C L] factam P
586 quinque B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
587 dividemus S F C P L] diviserimus B M N
588 per B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}

quantitate *d*[591]. **<28.7>** Rursus sit tantum[592] ignota quantitas *e*: dividemus iterum 720 que provenient[593] ex *z* in *d* et in *a* per factum[594] ex quantitatibus *b g*, scilicet per 120: provenient 6 pro quantitate *e*. **<28.8>** Ad ultimum sit ignota quantitas *z* et relique quantitates sint note: dividentur iterum 720, que proveniunt ex *e* in *g* ducta in *b*, per factum[595] ex *a* in *d*, scilicet per 80: provenient 9 pro *z* quantitate [596].

<29.1> Et notandum |[S, f. 64r] quod quantitates *a d z* vocantur |[L, f. 68v] societates prime, relique vero tres quantitates, scilicet *b g e*, |[P, f. 53r] vocantur societates secunde. **<29.2>** Componitur quidem proportio unius cuiuscumque quantitatis prime societatis ad unamquamque quantitatem[597] secunde ex duabus |[B, f. 33v] propor|[M, f. 50r]tionibus reliquarum quatuor quantitatum, secundum unam combinationem[598]: videlicet proportio quantitatis *a*, que |[F, f. 34r] est ex societate quantitatis prime ad quantitatem *b*, que est ex societate secunde, componitur ex duabus proportionibus reliquarum quatuor quan|[N, f. 45r]titatum[599], scilicet ex proportione, quam habet *g* ad *d*, et ex ea quam habet *e* ad *z*, secundum quod demonstratum est. Vel componitur proportio *a* ad *b* ex proportione quam habet *g* ad *z*, et *e* ad *d*. **<29.3>** Item componitur proportio quantitatis *a* ad quantitatem *g*[600] ex proportionibus *b* ad *d* et *e* ad *z*, vel ex proportione quam habet *b* ad *z* et *e* ad *d*. Componitur etiam[601] proportio quantitatis *a* ad quantitatem *e* ex proportionibus *b* ad *z* et *g* ad *d*, vel ex proportionibus *b* ad *d* et *g* ad z[602]. **<29.4** Simili quoque modo componitur proportio quantitatum *d z*, que sunt ex societate prime, ad tres quantitates reliquas ex proportionibus quatuor reliquarum quantitatum, et sic sunt[603] novem |[*b*, p. 56] propor|[C, f. 43v]tiones composite ex

---

[589] factum B S M N F C L] factam P
[590] scilicet B S F C P L] scilicet per M N
[591] d B M N F] g S C P L
[592] tantum B S M N F C L] tantam P
[593] provenient S F C P L] proveniunt B M N
[594] per factum B S M N F C L] perfectam P
[595] factum B S M N F C L] factam P
[596] z quantitate S F C P L] quantitate z B M N
[597] quantitatem S N^4 F C P L] societatem M N^1, *om.* B
[598] combinationem B S] concubinationem M N F C P L
[599] quantitatum S M N F C P L] quantitatem B
[600] g S M N F C P L] z B
[601] etiam B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[602] vel - z B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[603] sunt B S M N F C L] sint P

tribus quantitatibus societatis prime ad tres quantitates societatis secunde. **<29.5>** Eodem quoque[604] modo egredientur[605] alie novem compositiones proportionis ex quantitatibus societatis secunde ad tres quantitates societatis[606] prime[607] et quelibet ipsarum compositionum proveniet combinata. Et sic erunt inter omnes decem et octo combinationes proportionum in ipsis sex quantitatibus et quamvis mutentur proportiones, tantum non vocantur societates predicte. **<29.6>** Quare multiplicatum unius cuiusque societatis erunt 720, ut superius invenimus, et est illud[608] quod procedit ex antecedente composite proportionis |[L, f. 69r] in consequentes compositionum componentium, vel proveniunt 720 ex consequente composite proportionis |[S, f. 64v] in antecedentes componentium[609]. **<29.7>** Non enim aliqua ex sex quantitatibus predictis |[P, f. 53v] proportionem compositam habere potitur[610] ad aliquam ex sua societate ex proportionibus[611] reliquarum quatuor quantitatum: videlicet proportio quantitatis *a* ad quantitatem *d*[612] vel ad quantitatem *z* componi non potest ex proportionibus reliquarum quatuor quantitatum; nec etiam proportio quantitatis *d* ad quantitatem *a*[613] vel ad quantitatem *z* componetur[614], neque proportio quantitatis *z* ad quantita|[M, f. 50v]tem *d a* componi poterunt ex reliquis quatuor quantitatibus. |[N, f. 45v] Similiter non componetur proportio quantitatum *b g e* inter se, cum sint unius societatis. **<29.8>** Et sic erunt duodecim proportiones in his[615] sex quantitatibus, que non componuntur[616] ex duabus proportionibus[617] reliquarum quatuor quantitatum. His itaque explicatis, veniamus ad dimensionem[618] quadrilaterorum camporum.

<Explicit pars prima de mensuratione omnium triangulorum>

---

[604] eodem quoque M N[1] C P L] eodemque B S N[4] F
[605] egredientur B S M N F C L] egredietur P
[606] quantitates societatis S M N F C P L] societates quantitatis B
[607] prime B S M N F] secunde C P L
[608] illud B S M N F] illum C P L
[609] vel - componentium S M N F C P L] *om.* B
[610] potitur C P L] poterit B S M N F
[611] proportionibus S M N F C P L] proportione B
[612] d B S M N F C L] b P
[613] a S M N F C P L] z B
[614] componetur F C P L] componitur B S M N
[615] his B S M N F[b] C P L] ipsis F[a]
[616] componuntur S M N F C P L] componentur B
[617] proportionibus B S M N F C L] proprietatibus P
[618] dimensionem S C P L] mensurationem N[4], mentionem B M N F

<II>

Incipit pars secunda

tertie distinctionis.

De mensuratione camporum[619] quadrilaterorum

<1>

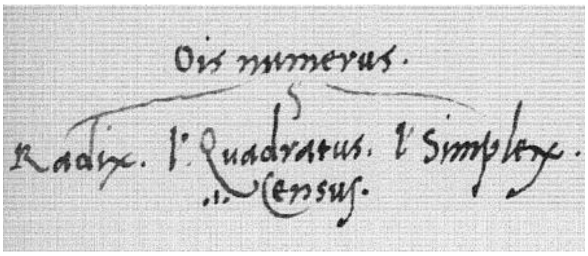
<Incipit pars prima>

<Incipiunt Introductoria>

<1.1> Aree [620] quidem camporum quadrilaterorum [621] rectos angulos habentium colliguntur[622], secundum quod superius in alia distinctione docuimus. |[F, f. 34v] Qui cum habent latera equalia, multiplicatur unum ex lateribus in se; et cum habent latera inequalia, multiplicantur |[B, f. 34r] longitudines ipsorum per latitudines, et sic habemus embadum ipsorum. **<1.2>** Reliqua vero quadrilatera in quatuor differentias dividuntur: in prima quarum sunt rumbi; in secunda rumboides [623] ; in tertia capita abscissa, que duo [624] tantum latera habent equidistantia; in quarta sunt diversilatera, quorum nullum laterum reliquis equidistat. **<1.3>** Quorum omnium mensurationes aperte in suo loco monstrabuntur. |[L, f. 69v] Sed antequam ad dimensiones ipsorum [625] quadrilaterorum veniamus[626], quedam super prescriptis[627] quadrilateribus, que ad notitiam huius artis animum introducunt, proposui demonstrare. |[C, f. 44r] Que pertinent ad solutionem sex regularum, que veniunt |[S, f. 65r] ex tribus essentiis, que sunt in numeris.

---

[619] camporum S C P L] *deest* B M N F
[620] aree B S F C P L] area M N
[621] camporum quadrilaterorum B S M N^4 F C P L] quadrilaterorum camporum N^1
[622] colliguntur B S M N^4 F C P L] colligitur N^1
[623] rumboides ipsorum B S N^4 F C P L] rumboidum M N^1
[624] duo tantum B S M N^4 F C P L] due N^1
[625] ipsorum B S N^4 F C P L] ipsas M N^1
[626] veniamus B S N^4 F C P L] venimus M N^1
[627] prescriptis B S N^4 F C P L] principiis M N^1



Firenze, BNC II III 22, f. 69v

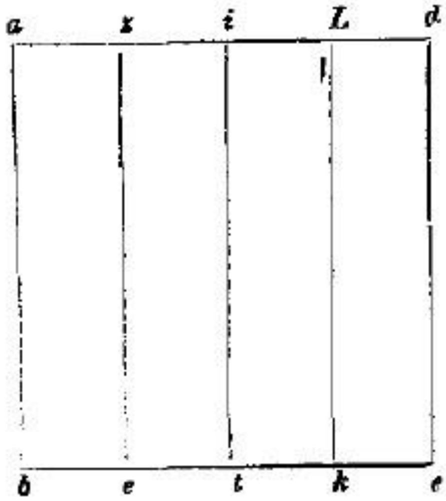
<2.1> Sunt enim numeri et fractiones eorum, aut radices quadratorum, aut quadrati, |[P, f. 54r] aut numeri simplices. Quando numeri in se multiplicantur, radices dicuntur facti ex multiplicatione quadrati, seu census appellantur. **<2.2>** Cum autem numeri non habent respectum ad radices[628] vel ad quadratos numeros, tunc simpliciter numeri vocantur, quare secundum hanc distinctionem omnis numerus est quandoque radix, vel quadratus, vel simplex. **<2.3>** Nam ex his tribus essentiis tres regule simplices, totidemque composite proveniunt. Simplices enim sunt quando, in questio|[M, f. 51r]nibus |[N, f. 46r] arismetricis[629] vel geometricis[630], inveniuntur radices equari quadratis, vel numero quadrati; vel partes unius quadrati equari radicibus, vel numero; vel cum numerus equatur radicibus, vel quadratis. Et econverso, composite quidem sunt quando inveniuntur radices equari quadratis et numero, vel quadrati radicibus et numero; aut numerus radicibus et censibus.

<1>
<Incipit de quadrilatero>

<1.1> Quadratum autem quod radicibus equatur est, ac si dicas: quadratum equatur 4 radicibus, radix ergo |[*b*, p. 57] quadrati est 4, et quadratum est[631] 16, hoc est latus superficiei quadrate et equilatere et equiangule est 4 et eius embadum est 16. Nam quot unitates sunt in unoquoque laterum ipsius, tot radices in eius embado[632] continentur.

---

[628] radices B M N^1] radicem S N^4 F C P L
[629] arismetricis S N^4 F C P L] arithmetricis B M (aritmetricis M), geometricis N^1
[630] geometricis B S M N^4 F C P L] aritmethicis N^1
[631] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[632] eius embado B S M N F C P^b L^b] embado eius P^a L^a



<1.2> Ut in hoc quadrilatero *abcd* ostenditur, quod habet in unoquoque laterum perticas 4, quare embadum eius equatur ‖[L, f. 70r] 4 radicibus, quarum una est quadrilaterum *ae*, secunda *zt*, tertia *ik*, quarta quadrilaterum *lkcd*. **<1.3>** Et si latus quadrati fuerit 5, equabitur 5 radicibus, et erit quadratum 25. **<1.4>** Et cum dicitur 4 quadrati equantur 24 radicibus, tunc[633] unum quadratum equatur ‖[F, f. 35r] 6 radicibus, et unaqueque radix est 6, et quadratum est 36. **<1.5>** Et cum dicitur medietas quadrati, sive census, equatur 4 radicibus, tunc census equabitur[634] 8 radicibus, ‖[S, f. 65v] et erit census 64, et radix eius erit 8. **<1.6>** Item quinta pars quadrati equatur 3 radicibus: ergo quadratum, scilicet embadum eius, equatur 15 radicibus, quare embadum est 225, et latus quadrati est 15. ‖[P, f. 54v] Similiter quoque quod fuerit maius quadrato ‖[B, f. 34v] aut minus, ad unum reducendum est quadratum.

<2.1> Et eodem modo fit quando radices equantur censibus, inveniende sunt radices que equantur ‖[C, f. 44v] uni censui. **<2.2>** Item[635] quando dicitur quadratum equatur numero, ut dicamus perticis 36, tunc[636] embadum est 36 et eius latus est 6. **<2.3>** Et cum quinque quadrata equentur 125, tunc ‖[N, f. 46v] quadra‖[M, f. 51v]tum est 25 et eius radix est 5; **<2.4>** vel cum quarta[637] pars quadrati equetur[638] secundum arismetricam[639] dragmis 16, tunc census, scilicet quadratum, erit 64, et eius radix est 8.

[633] tunc B S M N F C L] ut P
[634] equabitur B S M N[4] F C P L] equatur N[1]
[635] item B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[636] tunc B S N[4] F C P L] tum M N[1]
[637] quarta B S M N[4] F C P L] quadrata N[1]
[638] equetur B S N[4] F C P L] equatur M N[1]
[639] arismetricam S F C P L] arthmetricam B N[1], arismetrica M N[1]

<3.1> Similiter omnis census augmentatus et[640] diminutus ad unum reducendus est censum. Et eodem modo fit quando numerus equatur censibus. **<3.2>** Radices vero que numeris equantur est sicut si dicas: radix equatur 4, ergo radix est 4 et census[641] qui est ex ea est 16. Et sicut si dicas: 6 radices equantur 30, una |[L, f. 70v] igitur radix equatur 5. Et similiter si dicas: medietas radicis equatur 9, ergo radix est 18, et census qui est[642] ex ea est 324.

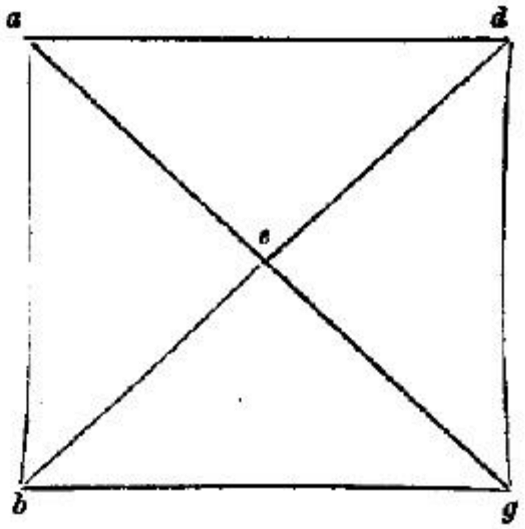
<4.1> Radices siquidem que equantur quadratis et numero sunt, ac si dicas: 36 radices equantur tribus censibus et 105 dragmis, hoc est 12 radices equantur uni censui et dragmis 35[643]. **<4.2>** Et si dicas: 5 radices equantur dimidio censui et dragmis 12, hoc est radices 10 equantur uni censui et 24[644] dragmis.

<5.1> Quadrata autem que equantur radicibus et numero sunt, ac si dicas: tria quadrata equantur 12 radicibus et dragmis 36, hoc est unus census equatur 4 radicibus et 12 dragmis. **<5.2>** Et si dicas: quarta census equatur duabus radicibus et 12 dragmis, hoc est quadratum equatur |[S, f. 66r] 8 radicibus et dragmis 48.

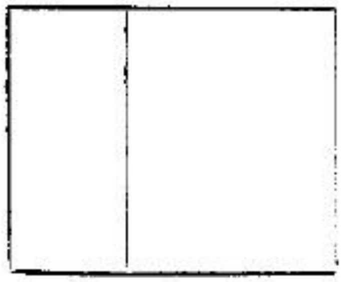
<6.1> Numerus quoque qui equatur quadratis et radicibus est, ac si dicas: 78 dragme equantur duobus quadratis et 10 radicibus, hoc est unum quadratum et 5 radices equantur 39. **<6.2>** Et si dicas: 32 equantur dimidio quadrati et sex radicibus, hoc est unus |[*b*, p. 58] quadratum et duodecim radices equantur 64 dragmis. **<6.3>** Et sic semper debemus questiones redigere ad unum censum, et secundum illud quod proportionaliter ceciderit reductio plurium quadratorum, vel partes unius quadrati ad unum quadratum in eadem proportione reducende |[P, f. 55r] sunt. Radices |[F, f. 35v] et numeri, qui |[N, f. 47r] cum quadratis, vel contra, eos proponentur, ut ve|[M, f. 52r]niamus ad notitiam quadratorum et radicum eorum, ut in sequentibus ostendemus[645].

---

[640] et B S M N^4 F C P L] aut N^1
[641] census B S M N F^b C P L] census est F^a
[642] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[643] 35 B M N F] 45 S C P L
[644] 24 B S M N^1 F C P L] $\frac{1}{2}$ 24 N^4
[645] ostendemus B M N F C P L] ostendamus S



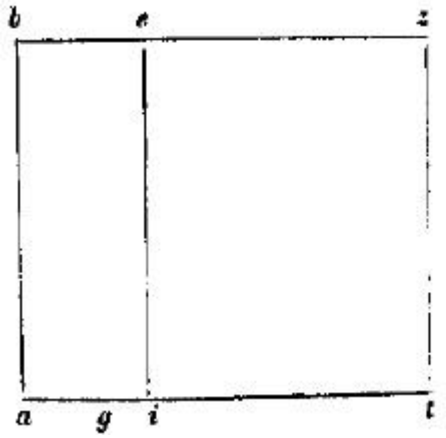
<7.1> |[C, f. 45r] Si in quadrato quidem[646] *abgd*, quod in singulis lateribus habet perticas 10, diametrum eius *ag* vel *bd* habere desideras, ipsius embadum, scilicet 100, |[L, f. 71r] duplica: erunt 200, quorum radicem accipe, et habebis longitudinem unius diametrorum. **<7.2>** Verbi gratia: quoniam rectus est angulus qui sub *abg*, orthogonium est trigonum *abg*, quare multiplicatio lateris *ag* in se, quod recto subtenditur angulo, equatur duobus quadratis linearum *ab* et *bg*[647]. Sed quadratum lateris *bg* est embadum tetragoni *abgd*, et quadratum lateris *ab* equatur quadrato lateris *bg*, quare duo quadrati linearum *ab* et *bg* dupli sunt quadrato |[B, f. 35r] lateris *bg*. Sed quadratum diametri *ag* equum est quadratis laterum[648] *ab* et *bg*: ergo quadratum diametri *ag* duplum est quadrati lateris *bg*. Sed[649] quadratum lateris *bg* est area tetragoni *abgd*, ergo quadratum lateris *ag* duplum est embado tetragoni *abgd*, quod oportebat ostendere. **<7.3>** Et est id in[650] quo census equatur numero, scilicet embadum equatur 100, quare duplum embadi, scilicet quadratum diametri, erunt |[S, f. 66v] 200. Dico iterum, diametrum *ag* equum esse diametro *bd*, quoniam recta *bg* equa est recte *ad*. Si comuniter accipiatur recta *ab*[651], erunt due recte *ab* et *bg* equales duabus rectis *ba* et *ad*, et angulus *abg* equalis est angulo *bad*, quare



[646] quidem B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[647] p. 4 primi Euclidis *in mg. sn scr.* C
[648] laterum S N[4] F C P L] linearum B M N[1]
[649] sed B S F C P L] scilicet M N
[650] id in B S N[4] F C P L] idem M N[1]
[651] ab S N[4] C P L] ad B M N[1] F

diameter[652] *ag* equa[653] est diametro *bd*[654]. **<7.4>** Dico iterum quod diametri *ag* et *bd* sese invicem secant[655] per equalia super punctum *e*, quoniam sibi invicem equales sunt recte *ad* et *bg* et in eorum terminis copulate sunt recte *ab* et *gd*[656], que sibi invicem equantur: erunt siquidem ‖[L, f. 71v] equidistantes recte *ad* et *bg*, et quoniam in eis recte incidunt *bd* et *ag*, equatur quidem angulus *adb* angulo *dbg*[657] et angulus *dag* angulo *agb*. Reliquus ‖[P, f. 55v] *aed* reliquo ‖[M, f. 52v] *beg* est equalis, quare trigonum *aed* trigono *beg* equatur, et recta *be* recte *ed* est equalis. Similiter et recta ‖[N, f. 47v] *ge* recte *ae* est equalis, ergo per equalia sese secant diametri *ag* et *bd*, que oportebat ostendere.

<8.1> Nam si diameter tetragoni dati fuerit radix 200, et ignoraveris embadum, nec non[658] et eius latus, accipe dimidium de 200: erunt 100, que habeas pro[659] embado, et eorum ‖[C, f. 45v] radicem, scilicet 10, habebis ‖[F, f. 36r] pro ‖[*b*, p. 59] latere: **<8.2>** hoc est duo quadrati equantur 200, quare unum quadratum, scilicet embadum tetragoni, erit 100. Et si quadratum diametri cum embado tetragoni[660] fiant 300, ergo tres quadrati equantur 300[661]: quare tertia pars eorum, scilicet 100, erit embadum. Reliqua quidem 200 habebuntur pro quadrato diametri, et radix embadi erit latus tetragoni.



[652] diameter S C P L] diametrum B M N F
[653] equa S N^4 C P L] equum B M N^1 F
[654] p. 4 primi Euclidis *in mg. sn scr.* C
[655] secant B S N^4 F C P L] secantur M N^1
[656] ab et gd B S N^4 F C P L] ad et bg M N^1
[657] p. 30 primi Euclidis *in mg. sn scr.* C
[658] nec non B M N F C P L] *om.* S
[659] pro B S M N^4 F C P L] de N^1
[660] tetragoni B S M N^4 F C P L] trigoni N^1
[661] ergo – 300 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

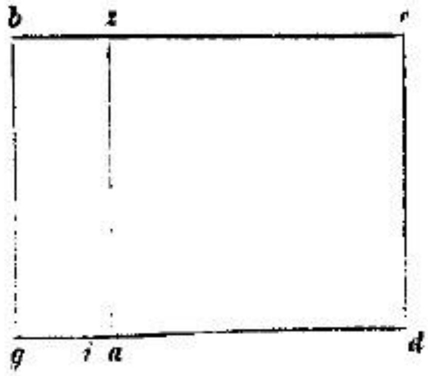
<9.1> Et si embadum et quatuor eius[662] latera faciunt 140 et vis separare latera ab embado[663], adiaceat tetragonum *ezit*[664], et addatur ei superficies *ae* rectiangula, et sit *ai* in directo recte *it*, et *be* in directo *ez*; et sit unaqueque rectarum *be* et *ai* 4 propter numerum laterum tetragoni[665], quare superficies *ae* equatur quatuor lateribus tetragoni *et*, cum latus ipsius *ei* sit unum ex lateribus superficiei *ae*, et superficies quidem *et* continet embadum tetragoni |[S, f. 67r] *zi*, quare tota superficies *za* continet embadum tetragoni *zi*[666], nec non et quatuor eius latera. Ergo superficies *za* est 140 et |[L, f. 72r] hoc est illud quod diximus. Videlicet census cum quatuor radicibus equantur 140, et[667] est census tetragonum *et*, quatuor eius radices sunt superficies *ae*. **<9.2>** Dividatur quidem recta *ai* in duo equa super punctum *g*, et quoniam linea *ti* addita[668] est linee *ai*, erit superficies rectiangula *it* in *at* cum quadrato linee *gi* equa tetragono linee *gt*. Sed superficies *it* in *at* est sicut superficies *zt* |[B, f. 35v] in *at*, cum *it* equa sit ex *tz*. **<9.3>** Ergo superficies *zt* in *at* cum quadrato linee *gi* equatur quadrato linee *gt*. Sed *zt* in *at* est superficies *za*, que est[669] 140, |[P, f. 56r] quibus ad|[M, f. 53r]dito quadrato linee *gi*, scilicet 4, reddunt 144 pro quadrato linee *gt*, quare *gt* est 12, scilicet radix de 144. Quare si ex *gt* relinquatur[670] *gi*, scilicet 2, remanebit *it* 10, |[N, f. 48r] quod est latus tetragoni *et*, cui embado, scilicet 100, si addatur quatuor eius latera, que sunt 40, erunt 140, ut oportet.

<10.1> Et sic fiat in omnibus questionibus, in quibus numerus equatur uni quadrato et radicibus: videlicet super ipsum numerum addatur quadratum medietatis radicum, et summe radix inveniatur. Ex qua tollatur medietas positarum radicum: remanebit radix quesiti census, que in se multiplicata faciet[671] censum. **<10.2>** Verbi gratia: dragme 133 equantur uni censui et duodecim radicibus, quare si[672] quadratum medietatis radicum, scilicet 36, addiderimus super |[C, f. 46r] 133, facient 169, de quorum radice, scilicet de 13, extractis 6,

---

[662] eius B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[663] embado B S M N[4] F C P L] eius embado N[1]
[664] ezit B S M N F[b] C P L] azit F[a]
[665] tetragoni B S M N[4] F C P L] *om.* N[1]
[666] zi - nec S F C P L] *desunt* B M N
[667] hoc – et B M N S F] *om.* C P L
[668] addita B S M N F C L] addata P
[669] est B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[670] relinquatur B S N[4] F C P L] relinquitur M N[1]
[671] faciet B S M N[4] F C P L] facit N[1]
[672] quare si B S N[4] F C P L] in quatuor enim M N[1]

scilicet medietas radicum, remanebunt 7 pro radice quesiti census. Et census erit 49.



<11.1> Item est tetragonum ex cuius embado, si tollantur quatuor eius latera, remanent 77. Adiaceat tetragonum |[L, f. 72v] *bd*, et sumatur punctus *a* in |[F, f. 36v] *gd* rectam, et sit *ga* 4 perticarum. Et per punctum *a* producatur recta *az* equidistans |[S, f. 67v] ubilibet rectarum *gb* et *de*: et quoniam *ga* est quatuor superficies *ba*, quatuor latera[673] – scilicet quatuor radices – ex tetragono *bd* continere necesse est. Quare si de tetragono *bd* extrahatur quadrilaterum *ba*, scilicet quatuor eius latera, remanebit superficies *zd* 77. Et quoniam due superficies *ba* et *zd* equantur tetragono *bd*, ergo census equatur radicibus et numero, hoc est quadratum *bd* equatur quatuor suis radicibus et 77. **<11.2>** Dividaturque *ga* in duo equa, et quoniam recta *ga* divisa est in duo equa super punctum *i* et ei adiuncta est in directo recta |[M, f. 53v] *ad*, erit multiplicatio *ad* in *gd* cum quadrato linee *ai* equalis quadrato linee *di*. Sed multiplicatio *ad* in *dg* est sicut multiplicatio *da*[674] in *de*, cum *de* equa sit linee *dg*. |[P, f. 56v] Sed *da* in *de* est superficies *zd*, que est 77: ergo *da* in *dg*[675] facit 77, quibus si addatur quadratum linee *ai*, quod est 4, erunt 81 pro quadrato linee *di*, cuius radix, scilicet 9, est linea *di*. Cui si addatur linea *ig*: habebitur 11 pro latere *dg*, quare embadum quadrati *bd* est undecies undecim, sci|[*b*, p. 60]licet 121, et quatuor eius latera, scilicet superficies *ba*, est 44 |[N, f. 48v]: remanet superficies *zd* 77, ut oportet.

<12.1> Et sic faciendum est[676] in omnibus questionibus, in quibus quadratum equabitur radicibus et numero[677]: videlicet[678] super numerum addatur

---

[673] latera B S M N F^{b} C P L] *om.* F^{a}
[674] da B S M N^{1} F] di N^{4} C P L
[675] dg C P L] de B S M N F
[676] est B S M N F^{b} C P L] *om.* F^{a}
[677] et numero B S M N^{4} F C P L] *om.* N^{1}

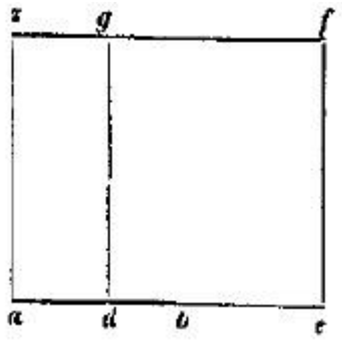
quadratum medietatis radicum, et de summa collecta accipiatur radix, eique addatur medietas radicum: et sic habebitur radix quadrati, que in se multiplicata faciet quesitum quadratum. **<12.2>** Ut si proponatur quod census equatur |[L, f. 73r] decem radicibus et 39 dragmis, addatur quadratum quinque radicum, scilicet 25 super 39: erunt 64, super quorum radice, scilicet super 8, |[B, f. 36r] addatur medietas radicum, scilicet 5, et habebis 13 pro radice census, et census erit 169; et eius decem[679] radices sunt 130, que procreantur ex multiplicatione de 10 in 13. **<12.3>** Item est tetragonum, cuius embadum si tollatur ex summa quatuor laterum ipsius, scilicet ex quatuor suis radicibus, remanebunt pertice 3. Adiaceat tetragonum *ge* habens in singulis late|[S, f. 68r]ribus minus de perticis 4, et addatur *de* linea *da*, et sit tota *ae* 4. Et |[C, f. 46v] dividatur *ae* in duo equa super punctum *b*, et protrahatur recta *az* equidistans et equalis *dg*, et protrahatur *fg* in punctum *z*. Et quoniam recta *ae* est 4, et *ef* est latus tetragoni *ge*, erit itaque[680] *fe* in *ea*, scilicet superficies *ze*, equalis quatuor radicibus, scilicet la|[M, f. 54r]teribus tetragoni *ge*[681]. Ex quibus si tollatur tetragonum *ge*, remanet superficies *ga* 3 |[F, f. 37r] perticarum[682]. Sed tetragonum *ge* et superficies *ga* equantur superficiei *ze*, ergo quatuor radices equantur censui et perticis tribus.

<13.1> Oportet itaque ut inveniamus censum et eius |[P, f. 57r] radicem. Quoniam linea *ae*, que est 4, divisa est in duo equalia super punctum *b*, et in duo inequalia super punctum *d*, erit multiplicatio *ed* in *da* cum quadrato linee *bd* equalis quadrato linee *be*[683], quod describitur[684] a[685] medietate linee *ae*. Sed ex multiplicatione *ed* in *da* oritur superficies *ga*, que est 3, cum *dg* |[L, f. 73v] equalis sit *de*. **<13.2>** Ergo superficies[686] *gd* in *da* cum quadrato linee *bd* equatur quadrato linee *be*, qui est 4: ergo quadratum *bd* est 1, cuius radix, scilicet 1, si tol|[N, f.

---

[678] videlicet B S M N C P L] videlicet et F
[679] eius decem B S M N4 F C P L] decem eius N1
[680] erit itaque B S M N1 F C P L] eritque N4
[681] ge B S M N4 F C P L] *om.* N1
[682] perticarum B S N4 F C P L] *om.* M N1
[683] be B S M N4 F C P L] da N1
[684] describitur B S M N4 F C P L] describatur N1
[685] a B S N4 F C P L] ex M N1
[686] superficies B S M N1 F C P L] superficies gd que est 3 cum dg equalis sit di ergo superficies N4

49r]latur ex linea *be*, remanebit *de* 1[687], que est latus tetragoni *ge*, cuius embadum, scilicet quesitus census, erit similiter 1.



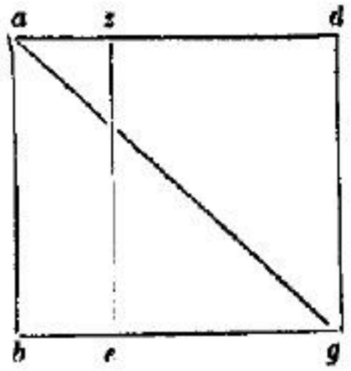
<14.1> Et si medietas linee *ag* fuerit inter *de* super punctum *b*, ut hac alia cernitur figura, adde super *eb*, scilicet super 2, lineam *bd*, et erit tota[688] *de* 3, que est radix quadrati *ge* quesiti. Et quadratum erit 9, et superficies *ga* erit similiter 3, ut prediximus. Et sic fiat semper in omnibus questionibus, in quibus[689] radices equentur[690] quadrato et numero. Videlicet ex quadrato medietatis radicum tollatur numerus et residuo inveniatur radix, que tollatur ex medietate dicta, vel addatur super eam, et habebis radicem quesiti quadrati, ut in hac in qua proponitur: **<14.2>** duodecim radices equari uni quadrato et 27 dragmis; medietas itaque radicum est 6, quorum quadratum |[S, f. 68v] est 36, de quibus extractis 27, remanent[691] 9, quorum radix, scilicet 3, si extrahatur ex medietate radicum, remanebunt 3 pro radice quesita, et census erit 9. Vel |[M, f. 54v] si 3 addantur super 6, habebis pro radice quesita 9, et quadratum erit 81. Et sic semper, cum radices equantur censui et numero, solvuntur questiones dupliciter[692]. Unde in quibusdam questionibus quandoque cadet una solutio[693], quandoque alia[694].

<15.1> |[P, f. 57v] Item quadratum diametri et embadum, nec non et quatuor dati tetragoni latera equantur perticis 279, et queritur quantitas lateris tetragoni. **<15.2>** Quoniam quadratum diametri est duplum tetragoni, ergo quadratum |[B, f.

---

[687] 1 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[688] tota B M N F C P L] nota S
[689] in quibus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[690] equentur B S F C L] equantur M N P
[691] remanent B S M N^4 F C P L] remanebunt N^1
[692] questiones dupliciter B S N^4 F C P L] dupliciter questiones M N^1
[693] solutio S N^4 F C P L] solummodo B M N^1
[694] radices equantur censui et numero et dupliciter solvuntur questiones ut exemplo *et* quod radix quadrati est 9 et radix radicis 3 et sic duodecim 3 que est radix de 9 edt duodecim radices que equantur censui *in mg. sn. scr.* L

36v] diametri cum tetragono[695] |[L, f. 74r] tripla erunt tetragoni, ergo tria qua|[C, f. 47r]drata et quatuor radices equantur 279. Quare ut reducas hec ad censum unum, accipe tertiam |[*b*, p. 61] ex omnibus predictis, et invenies censum et radicem $\frac{1}{3}$ 1 equari perticis 93. Accipe ergo medietatem radicum, scilicet $\frac{2}{3}$, et multiplica eas in se: erunt $\frac{4}{9}$ que adde cum 93: erunt $\frac{4}{9}$ 93, de quorum radice tolle $\frac{2}{3}$, scilicet medietatem radicum[696]: remanent 9 pro latere tetragoni. Ergo embadum est 81, et quadratum diametri est 162.



<16.1> |[N, f. 49v] Rursus quatuor tetragoni latera[697] equantur $\frac{2}{9}$ totius tetragoni. Adiaceat tetragonum *abgd* et in *bg* et *ad* rectis accipiantur puncta *e z*, et sit unaqueque rec|[F, f. 37v]tarum *be* et *az* perticarum 4, et copuletur recta[698] *ez*: eruntque paralilogramina *ae* et *zg* sub equidistantibus *ad* et *bg*, quare erit sicut paralilogramum *ae* est ad paralilogramum *zg*, ita basis *be* est ad basem *eg*. Sed paralilogramum *ae* equatur quatuor radicibus tetragoni *ag*, ergo paralilogramum *ae* est $\frac{2}{9}$ ex tetragono *ag*. Remanet itaque paralilogramum *zg* $\frac{7}{9}$ ex tetragono *ag*. Ergo superficies *ae* ad superficiem *ze* est sicut 2 ad 7; quare est sicut 2 ad 7[699] ita *be*, scilicet 4, est ad *eg*, quare multiplica 4 per 7 et divide per 2: exibunt 14 pro linea *eg*. **<16.2>** Vel aliter, quoniam dupla sunt 4 ex 2, ita dupla est recta *eg* ex 7: ergo[700] *eg* est 14, quibus additis 4, scilicet *eb*, habebis pro *bg* |[S, f. 69r] 18, scilicet pro latere tetragoni *ag*, quod oportebat ostendere. **<16.3>** Vel aliter secundum computationem Algebre[701], quoniam superficies *ae* equatur |[M, f. 55r] quatuor

---

[695] tetragono B S N^4 F C P L] trigono M N^1
[696] radicum B M N F] radicis S C P L
[697] latera B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[698] copuletur recta] copulentur recte B S M N F C P L
[699] quare – 7 B S^2 M N F C P L] *om.* S^1
[700] ergo B S N^4 F C P L] ergo recta M N^1
[701] Algebre B M N^1 F L] Aliebre S N^4 C P

radicibus, vel $\frac{2}{9}$ tetragoni *ag*, ergo quatuor radices equantur $\frac{2}{9}$ census. Unde ut reintegretur census, multiplica 9 per 4 et divide per 2, vel medietatem de 9 multiplica per 4, quia quotiens |[P, f. 58r] due |[L, f. 74v] none sunt in $\frac{9}{9}$, scilicet in[702] censu, totiens 4 erunt in radice tetragoni *ag*, quare quadratum *ag* equatur 18 radicibus, ut prediximus, et continentur in eius embado pertice 324.

<17.1> Rursus 4 latera et $\frac{3}{8}$ embadi tetragoni equantur $\frac{1}{2}$ 77, quare redige $\frac{3}{8}$ census ad censum unum, et habebis quod census et radices $\frac{2}{3}$ 10 equantur $\frac{2}{3}$ 206, et hoc inveniemus multiplicando radices 4 et $\frac{1}{2}$ 77 per 8, et dividendo utramque multiplicationem per 3. **<17.2>** Dimidia itaque radices: erunt $\frac{1}{3}$ 5; quorum quadratum accipe quod est $\frac{4}{9}$ 28; quem[703] numerum adde cum $\frac{2}{3}$ 206: erunt $\frac{1}{9}$ 235; de quorum radice, scilicet de $\frac{1}{3}$ 15, deme medietatem radicum[704]: remanent 10 pro latere tetragoni, et embadum est 100.

<**18.1>** Et si quatuor eius latera equentur[705] embado tetragoni, |[N, f. 50r] tunc quatuor eius radices equantur censui, quare unumquodque latus est 4, et census est 16. **<18.2>** Et si latera duplum essent embadi, tunc quatuor ra|[C, f. 47v]dices equarentur[706] duobus censibus, quare census equatur duabus radicibus: ergo latus tetragoni esset 2, et area esset 4.

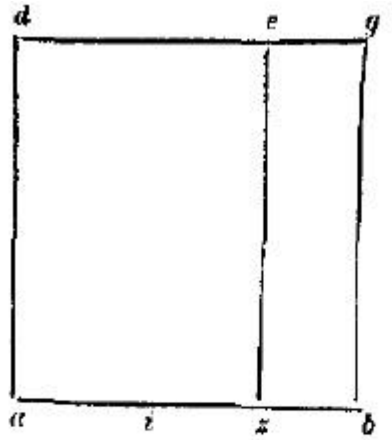
<19.1> Item si ex area tetragoni auferantur tria latera, scilicet tres radices eius, remanent 40, ergo tres radices et 40 equantur censui. **<19.2>** Medietatem quidem radicum in se multiplica[707]: erunt $\frac{1}{4}$ 2, que adde super 40. |[B, f. 37r] Erunt $\frac{1}{4}$ 42 super quorum radicem, scilicet super $\frac{1}{2}$ 6, adde medietatem radicum: erunt 8, que sunt latus tetragoni.

<20.1> Item divisi aream quadrati per diametrum eius, et provenit[708] 10: quanta est dia|[F, f. 38r]meter et latus eius? **<20.2>** Quoniam ex divisione embadi per diametrum proveniunt 10, ergo ex multiplicatione diametri in 10 provenit

---

702 scilicet in B S M N^4 F C P L] *om.* N^1
703 quem B S N^4 F C P L] quibus M N^1
704 radicum B M N F] radicis S C P L
705 equentur B S N^4 F C P L] equantur M N^1
706 equarentur B S N^4 F C P L] equantur M N^1
707 multiplica B S F C P L] multiplicata M N
708 provenit B S F C L P] proveniet M N

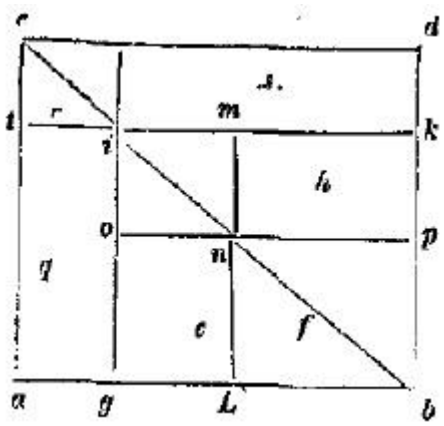
embadum, quare ex multiplicatione diametri[709] in duplo de 10 proveniet duplum ‖[S, f. 69v] embadi. Sed duplum embadi equatur ‖[M, f. 55v] quadrato diametri: ‖[L, f. 75r] ergo ex multiplicatione diametri in 20 provenit quadratum diametri. Sed ex multiplicatione diametri in se provenit idem quadratum, quare diameter est 20 et eius quadratum 400, et embadum est dimidium ‖[P, f. 58v] eius, scilicet 200. Latus quoque est radix de 200, que est parum minus de $\frac{1}{7}$ 14.



<21.1> Item demptis quatuor lateribus ex area[710] remaneant[711] 4: quantum est ergo eius latus[712]? **<21.2>** Adiaceat tetragonum *abgd*, et sumantur puncta *e z*, et sit unaqueque rectarum *az* et *de* 4, et copuletur *ze*[713]. ‖[*b*, p. 62] Erit itaque superficies *dz* equalis quatuor[714] lateribus tetragoni *db*. Remanet[715] itaque superficies *eb* 4: ergo quatuor radices et 4 equantur tetragono *db*. Dividatur itaque recta *az* in duo equalia super[716] *i*, eritque[717] multiplicatio *zb* in *ab* cum quadrato linee *iz* sicut tetragonum linee *ib*. Sed *zb* in *ab* est sicut *zb* in *ze*. **<21.3>** Sed *zb* in *ze*[718] facit superficiem *eb*, scilicet 4: ergo ex *zb* in *ab* proveniunt 4, quibus addito tetragono[719] linee *iz*, erunt 8 pro quadrato linee *ib*. Ergo recta *ib* est radix de 8, cui si addatur recta *ia*, scilicet 2, ha‖[N, f. 50v]bebimus 2 et radicem de 8 pro tota linea *ab*, que est latus tetragoni *db*.

---

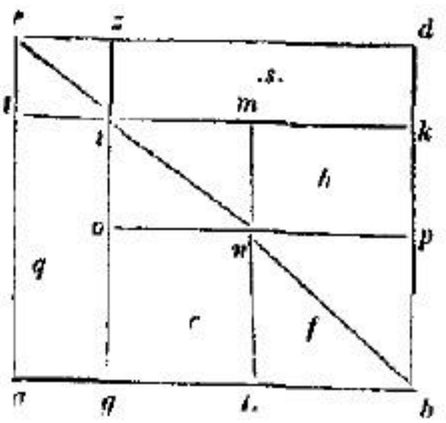
[709] in 10 – diametri B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[710] ex area B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[711] remaneant B S N^4 F C P L] et remanent M N^1
[712] latus B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[713] ze B S M N F P L] za C
[714] quatuor B S N^4 F C P L] quadrato M N^1
[715] remanet B M N] remanent S F C P L
[716] super B M N F C P L] super punctum S
[717] eritque B S N^4 F C P L] erit ergo M N^1
[718] sed – ze B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[719] tetragono S N^4 F C P L] trigono B M N^1



<22.1> Et si diametri quadrati[720] supra unumquodque latus eiusdem quadrilateri[721] addantur[722] 6, quantum erit latus eius? **<22.2>** Multiplica itaque 6 in se, erunt 36; que duplica, erunt 72. Supra radicem quorum adde 6, et habebis latus: ergo latus est 6 et radix[723] 72. **<22.3>** Verbi gratia: adiaceat quedam recta *ab* et sit equalis |[C, f. 48r] diametro dati quadrilateri, et latus eius sit *bg*: remanet *ga* 6, in quibus diameter superabundat latus: et constituatur super rectam *ab* tetra|[L, f. 75v]gonum *ad*, et protrahatur in ipso diameter *eb*, et per punctum *g* protrahatur recta *gz* equidistans rectis *ae* et *bd*; et per punctum *i* protrahatur recta *tk* equidistans rectis *ed* et *ab*: deinde sumatur in *bg* recta punctus *l*[724], et sit[725] *gl* equalis *ga*, et compleatur |[M, f. 56r] figura eadem in tetragono[726] *gk*. Et quoniam tetragonum |[S, f. 70r] est quadrilaterum *ad*, tetragona sunt ea que sunt circa diametrum ipsius, scilicet *tz* et *gk*. Est enim latus tetragoni *tz* recta *ti*, que est equalis |[P, f. 59r] recte *ag*. Ergo *ti* est 6 et tetragonum *tz* est 36.

---

[720] quadrati B M N S] quadrati de F[b], quadrati unum F[a], quadrati *et spatium vacuum reliquerunt* C P L
[721] quadrilateri B S N[4] F C P L] quadrati lateri M N[1]
[722] addantur] addatur B S M N F C P L
[723] radix B S F C P L] radix de M N
[724] in bg recta punctus l B S M N[4] F C P L] punctus l in recta bg N[1]
[725] sit B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[726] tetragono B S N[4] F C P L] trigono M N[1]



<23.1> Item tetragona sunt quadrilatera *om* et *lp*: sunt enim circa diametrum tetragoni *gk*; et est tetragonum *om* equale tetragono *tz*[727] propter rectam *on*, |[B, f. 37v] que est equalis recte[728] *gl*, et *gl* recte *ga*, et *ga* recte *ti* |[F, f. 38v] ostensa est equalis. Et quoniam recta *bg* est latus tetragoni, cuius *ba* est diameter, quod a recta *ba* describitur tetragonum duplum est eius, quod describitur a recta *bg*; ergo tetragonum *ad* duplum est tetragoni *gk*, quare gnomon *qrs* equatur tetragono *gk*. **<23.2>** Auferatur itaque ex gnomone *qrs* tetragonum[729] *tz*, et ex tetragono *gk* tetragonum *om*, que sunt equalia: remanent supplementa *ai* et *id* equalia gnomoni *cfh*. Sed supplementum *ai* equale est superficiei *il*: habet enim unum latus comune, quod est *ig*, et recta quidem *lg* recte *ga* est equalis. Similiter et supplementum *id* equale est superficiei *ip*, ergo due superficies *il* et *ip* equales sunt gnomoni *cfh*, quare si comuniter auferatur superficies *gn* et *nk*, remanebit duplum te|[N, f. 51r]tragoni *om* equale tetragono *lp*. **<23.3>** Sed |[L, f. 76r] tetragonum *om*[730] est 36, quare tetragonum *lp* est 72, cuius latus, scilicet *bl*, est radix 72: cui si addatur *lg*, que est 6, habebimus pro tota *bg* 6 et radicem 72, ut oportebat ostendere. **<23.4>** Cui si addatur *ga*, erit tota *ab*[731], scilicet diameter dati quadrilateri, 12, et radix 72. Vel aliter quoniam recta[732] *ag* est 6, et *gi* est latus tetragoni cuius diameter est equalis linee *ab*, erit propter hoc quadrilaterum *ai*[733] equale 6 radicibus tetragoni *gk*. Et est quadrilaterum *id* equa|[M, f. 56v]le quadrilatero *ai*, ergo quadrilaterum *id* est |[C, f. 48v] 6 radices[734] quadrati *gk* et

[727] tz B S M N[1]] cz N[4] F, ez C P L
[728] recte B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[729] gk – tetragonum B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[730] om B S M N F] *om.* C P L
[731] ab S N[4] F C P L] ag B M N[1]
[732] recta B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[733] ai B S M N F] di C P L
[734] radices B S N[4] F C P L] radicibus M N[1]

quadratum *tz* est 36, quare totum gnomon ||[S, f. 70v] *qrs* est 36 et 12 radices tetragoni *gk*. Et est gnomon *qrs* equale tetragono *gk*[735], ut ostensum est. **<23.5>** Unde si ponamus rectam *bg* rem[736], erit tetragonum *gk* census, qui equatur ||[P, f. 59v] 12 suis[737] radicibus et 36 dragmis: operare ergo in hoc, secundum quod dictum est quando census equatur radicibus et numero.

<24.1> ||[*b*, p. 63] Rursus multiplicavi diametrum per latus, et provenit 100: quanta est ergo diameter et latus tetragoni? **<24.2>** Quoniam multiplicato diametro per latus proveniunt 100, si multiplicaverimus quadratum diametri per quadratum lateris, scilicet per aream[738] tetragoni, provenit quadratum de 100, scilicet decem milia, quare si multiplicaverimus quadratum diametri per duplum embadi, scilicet per quadratum diametri, proveniet duplum eius, scilicet viginti milia. Ergo diameter est radix radicis viginti milium, quare embadum, cum sit medietas ex quadrato diametri, erit radix quinque milium; ||[L, f. 76v] quare latus erit radix radicis quinque milium.

<25.1> Item multiplicavi diametrum per aream tetragoni, et provenit 500: quanta est ergo diameter et latus eius? **<25.2>** Quoniam multiplicatio diametri per embadum facit 500, ||[F, f. 39r] erit itaque multiplicatio diametri per duplum embadi, scilicet per quadratum diametri, 1000: ergo diameter est radix cubica de 1000[739]. Nam radix cubica de 1000 est 10: ||[B, f. 38r] ergo diameter est 10, et quadratum eius est 100. Et area est dimidium eius, scilicet 50, et latus est radix de 50 ||[N, f. 51v].

Explicit de quadrilatero[740].

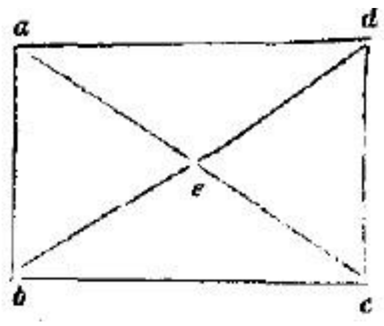
<2>

Incipit de parte altera longiori.

<1.1> Adiaceat quadrilaterum parte altera longius *abcd*, habens in singulis lateribus[741] brevioribus, que sunt *ab* et *dc*, perticas 6, in longioribus quoque ||[M, f.

[735] gk B S M N^1 C P L] lgk N^4 F
[736] rem B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[737] suis B S N^4 F C P L] eius M N^1
[738] aream B S M^b N^4 F C P L] aream quadrati M^a N^1
[739] ergo – 1000 B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[740] explicit de quadrilatero B S M N F P L (quadrilatero B M N F, quadrilatero equilatero S P L)] *om.* C
[741] lateribus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

57r] *ad* et *bc* perticas 8: eius quoque[742] embadum colligitur ex multiplicatione lateris *ab* in *bc*, quare area ipsius est 48. **<1.2>** Nam si eius diametrum *ac* habere desideras, adde quadrata linearum *ab* et *bc* in unum[743], scilicet 36 et 64: erunt 100, quorum radix, scilicet 10, est diameter[744] *ac*.



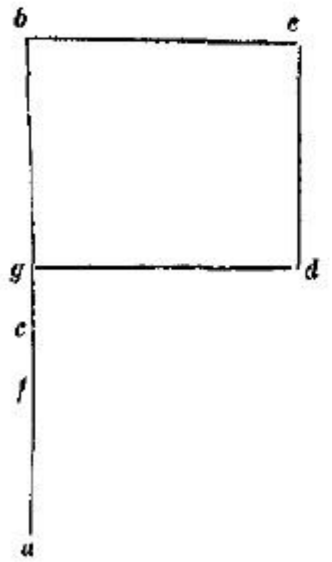
<2.1> |[S, f. 71r] Item sit diameter 10, et latus *cb* sit 8: quantum est ergo latus *ab*? De quadrato linee *ac* extrahe quadratum linee *bc*, et remanebit quadratum linee *ab*, et econverso, ut in trigono orthogonio superius diximus. Simili quoque |[P, f. 60r] modo inveniemus diametrum *bd* esse 10 propter equalitatem trigonorum *abc* et *bad*. **<2.2>** |[C, f. 49r] Dico quidem quod ipsa diametra sese per equalia secant super punctum *e*. Sunt enim equidistantes recte *ad* et *bc*, quare angulus *ade* angulo *ebc* est equalis: propter eadem ergo et angulus *dae* angulo *ecb* est equalis[745]: reliquus *aed* reliquo *bec* est equalis. **<2.3>** Equiangula enim sunt |[L, f. 77r] trigona *aed* et *bec*, et habent latera *ad* et *bc* sibi invicem equalia, quare reliqua latera reliquis lateribus, que equalibus angulis subtenduntur, sibi invicem equalia erunt; latus quoque *be* lateri *ed*, et latus *ce* lateri *ea*. **<2.4>** Et quoniam diametrum *ac* equale est diametro *bd*, et sunt secta per equalia super *i* punctum, quatuor enim recte, que sunt *ia* et *ib* et *ic* et *id*, sibi invicem equales sunt: est enim unaqueque earum 5, scilicet dimidium sui diametri, que oportebat ostendi[746].

<3.1> Nam si area fuerit 48, et latus breve aggregatum fuerit cum longiore et[747] sint 14, et vis scire quantum sit longius, vel brevius latus, medietatem itaque de 14, scilicet 7, in se multiplica: erunt 49 de quibus tolle aream: remanet 1, cuius radicem adde super 7: erunt 8 pro latere longiori, a quibus usque in 14 desunt 6

---

742 eius quoque B S N^4 F C P L] cuius M, cuiusvis N^1
743 quare area – bc B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
744 diameter B S M N F] *om.* C P L
745 propter – equalis B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
746 ostendi S C P L] ostendere B M N F
747 et C P L] *deest* B S M N F

pro breviore latere. **<3.2>** Verbi gratia: adiaceat quadrilaterum *bgde* parte altera longius, et sit *bg* brevius latus, et *gd* sit[748] longius. Et protrahatur recta *bg* in puncto *a*, et sit recta *ga* equalis recte *gd*. Et dividatur recta *ab* in duo equa super punctum *c*: erit ergo |[N, f. 52r] tota[749] linea *ba* 14, quare |[M, f. 57v] *bc*, vel *ac* est 7. **<3.3>** Et quoniam recta *ba* divisa est in duo eq|[F, f. 39v]ualia et totidem inequalia super punctis[750] *g c*[751], erit *bg* in *ga* cum quadrato linee *gc* equalis quadrato linee *ca*. Sed *bg* in *ga* est sicut *bg* in *gd*. Et ex *bg* in *gd* |[S, f. 71v] provenit area; ergo *bg* in *ga* est 48, cui si addatur quadratum linee *gc*, |[*b*, p. 64] faciet 49: ergo quadratum linee *gc* est 1, cuius radix, scilicet 1, est linea *gc* que ad|[P, f. 60v]dita[752] super *ac*. Erit tota *ag*, scilicet *gd*, 8, quod[753] est maius latus; remanet ergo *gb* 6, ut prediximus.



<4.1> Item sit area 48 et latus longius addatur super |[B, f. 38v] brevius |[L, f. 77v] secundum quantitatem duorum. Accipe medietatem ipsorum duorum, erit 1, cuius quadratum addat[754] super 48: erunt 49. De quibus accipe radicem, que est 7, et adde super eam 1 quod fuit medietas duorum supradictorum: erunt 8, quod est latus longius. De quo tolle 2, in quo longius latus superabundat brevius: remanent 6, quod est latus brevius, quod[755] etiam possumus comprehendere in figura

[748] sit B S M N F[b] C P L] sit latus F[a]
[749] tota B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[750] punctis B S F C P L] puncta M N[1]
[751] g c B S N[4] F C P L] g et c M N[1]
[752] que addita S C P L] quadrata B M N F
[753] quod B S N[4] F C P L] quidem M N[1]
[754] addat S F C P L] addatur N[4], adde B M N[1]
[755] est latus brevius quod S C P L] *desunt* B M N F

suprascripta. **<4.2>** Sit longius latus, ut prediximus, *gd*, cui iacet equalis recta *ga*. Et auferatur a recta *ga* recta *gf*, que sit 2. Erit ergo recta *af* equalis recte *gb*. **<4.3>** Divi|[C, f. 49v]datur itaque recta *gf* in duo equa super punctum *c*: erit recta *ac* equalis recte *cb*. Ergo recta *ab* divisa est in duo equalia super punctum *c*[756], et in duo inequalia super punctum *g*. Et est recta *gc* 1, que inter iacet sectionibus. Est ergo multiplicatio *ag* in *gb* cum quadrato linee *gc* equalis quadrato linee *ac*. Sed *bg* in *ga* est 48, et quadratum ex *cg*[757] est 1. Ergo *bg* in *ga* cum quadrato linee *gc* est 49, quorum radix, scilicet 7, est linea *ac*: cui si addatur *cg*, que est 1, erit tota *ag* 8, quod est maius latus.

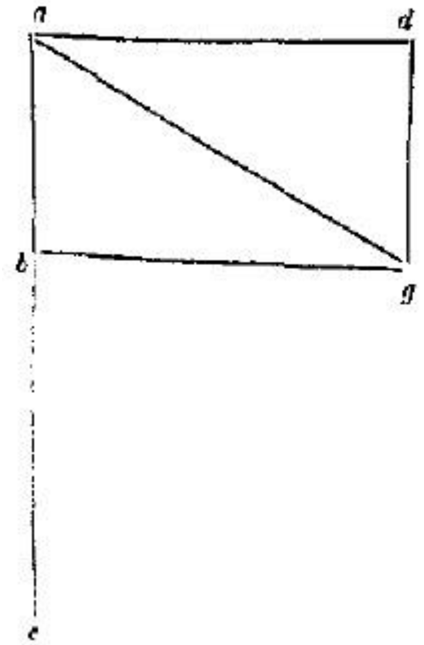
<5.1> Item si ex *cb*, que est 7, cum sit equalis *ca*, auferatur *cg*, remanet *gb* 6, ut prediximus. **<5.2>** Vel aliter: pone latus brevius radicem; eritque tunc latus[758] longius radix et 2. Et quia ex multiplicatione brevioris lateris in longius provenit 48, ergo ex multiplicatione radicis in radicem et in[759] 2 proveniunt similiter 48. Nam ex multiplicatione radicis in radicem provenit cen|[M, f. 58r]sus, et ex multiplicatione radicis in 2 proveniunt due radices: ergo census et due radices equantur 48. Fac |[N, f. 52v] ergo ut supra diximus in his in quibus census et |[S, f. 72r] radices[760] equantur numero, et habebis optatum.

<6.1> |[P, f. 61r – L, f. 78r] Item diameter sit 10 et embadum sit 48: quantum est ergo unumquodque latus? Super quadratum diametri adde duplum embadi: erunt 196 cuius radix, scilicet 14, est longitudo utriusque[761] lateris. **<6.2>** Verbi gratia: adiaceat quadrilaterum *abgd* cuius diameter *ag* sit 10. Protrahatur |[F, f. 40r] quidem recta *ab* in punctum *e* et sit *be* equalis *bg*. Et quoniam[762] recta *ae* divisa est ubilibet in duo super punctum *b*, erunt duo quadrata portionum *ab* et *be* cum duplo *ab* in *be* equalia quadrato totius linee *ae*. Sed portio *be* equa est lateri *bg*: ergo quadrata linearum *ab* et *bg* cum duplo *ab* in *bg* equantur quadrato linee *ae*. Sed quadrata laterum *ab* et *bg* faciunt quadratum diametri *ag*, et duplum *ab* in *bg* facit duplum aree, scilicet 96. Quibus iunctis cum 100, faciunt 196 pro quadrato linee *ae*. Ergo *ae* est radix ipsorum, scilicet 14, ut prediximus. **<6.3>** Post hec, ut

---

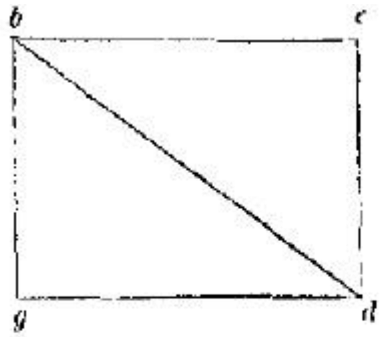
[756] erit – c B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[757] cg B S M N F[b] C P L] c F[a]
[758] brevius – latus B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[759] in B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[760] radices B S N[4] F C P L] rationes M N[1]
[761] utriusque B S N[4] F C P L] uniuscuiusque M N[1]
[762] quoniam B S N[4] F C P L] que M N[1]

separes *ab* ex *be*, scilicet ex *bg*, procedas ut superius dictum[763] est ubi diximus embadum esse[764] 48 et duo latera coniuncta 14.



<7.1> Rursus diameter sit 10 et duo latera coniuncta sint 14, et volo scire embadum, nec non et unumquodque |[B, f. 39r] latus. **<7.2>** Multiplica igitur 14 in se, erunt 196, de quo tolle quadratum diametri, scilicet 100: remanent 96, quorum dimidium, scilicet 48, est embadum. **<7.3>** Post hec per supradicta studeas[765] latera segregare que inveniuntur in supradicta figura hoc ordine: quadratum diametri *ag* equatur duobus quadratis laterum *ab* et *bg*, |[C, f. 50r] hoc est quadratis portionum *ab* et *be*. **<7.4>** Sed quadrata portionum *ab* et *be* cum duplo *ab* in *be* equantur quadrato linee *ae*. Ergo quadratum diametri *ag* cum duplo *ab* in *be* equatur quadrato linee *ae*, quare si auferatur quadratum |[L, f. 78v] diametri, scilicet 100, ex quadrato linee |[M, f. 58v] *ae*, scilicet de 196, re|[*b*, p. 65]manebunt 96 pro duplo *ab* in *be*, hoc est pro duplo *ab* in *bg*. Ergo *ab* in *bg*[766] facit 48, scilicet dimidium de 96. |[P, f. 61v] Sed *ab* in *bg* facit |[N, f. 53r] embadum; ergo |[S, f. 72v] embadum est 48, ut prediximus. Cum quo predicto modo separabis latera, et erit brevius latus 6, longius vero 8.

[763] dictum B M N^{1}C P L] demonstratum S N^4 F
[764] esse S C P L] erunt B M N F
[765] studeas B S M N F] *om.* C P L
[766] ergo – bg B S N^4 F C P L] *om.* M N^1



<8.1> Iterum[767] coniunxi diametrum cum uno latere, et provenerunt inde 16, et aliud latus est 8: quantum[768] est ergo[769] diameter, et quantum est latus ei coniunctum? **<8.2>** Multiplica[770] 16 in se: erunt 256; de quibus tolle quadratum dati lateris, scilicet 64: remanent 192. Que divide per duplum de 16: exibunt 6, que sunt latus coniunctum diametro. Quod latus tolle de 16: remanent 10 pro diametro. **<8.3>** Verbi gratia: adiaceat quadrilaterum *bgde*. Et sit diameter *bd* cum latere *bg* perticarum 16, et latus *dg* sit 8. Pone itaque latus *bg* radicem: remanet diameter *db* 16[771] minus radice. Que multiplica in se: habebis 256 et unum quadratum minus radicibus 32 pro quadrato diametri *bd*. Sed quadrato diametri *bd*[772] equantur duo quadrata laterum[773] *bg* et *gd*; ergo quadrata laterum *bg* et *gd*[774] equantur 256 et uni quadrato lateris *bg*, detractis inde radicibus 32. Restaura ergo ||[F, f. 40v] ipsas radices, et erunt quadrata linearum *bg* et *gd* cum radicibus 32 equales 256 et uni quadrato lateris *bg*. Comuniter auferatur quadratum lateris *bg*: remanebit quadratum lateris *gd* cum radicibus 32 equale 256. Comuniter auferatur quadratum linee *gd*, scilicet 64: rema||[L, f. 79r]nebunt radices 32 equales 192. **<8.4>** Ecce reduximus hanc questionem[775] ad unam ex sex regulis supradictis, ad eam videlicet in qua radices equantur numero, quare divide 192 per 32: exibunt 6 pro radice, hoc est pro latere[776] *bg*; quibus extractis de 16, remanent 10 pro diametro *bd*, ut predixi.

767 iterum B S N^4 F C P L] item M N^1
768 quantum S C P L] quanta B M N F
769 est ergo B S N^4 F C P L] ergo est M N^1
770 multiplica B F M N C P L] multiplicavi S
771 diameter db 16 B S N^4 F C P L] db diameter 16 M N^1
772 sed – bd B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
773 laterum B S M N F P L] linearum C
774 ergo – gd B S M N F^b C P L] *om.* F^a
775 questionem B F M N C P L] comunem S
776 latere B S N^4 F C P L] radice M N^1

<9.1> Et si diameter addat 4 super latus brevius, et longius latus sit 8, quanta est ergo diameter? **<9.2>** Multiplica 8 in se: erunt 64; quibus adde multiplicationem |[M, f. 59r] quaternarii in se: erunt 80: et |[C, f. 50v] dupla ipsa 4: erunt 8; in quibus divide 80: veniunt[777] 10 pro quantitate diametri; de quibus tolle 4, que diameter addit super latus brevius: remanebunt 6 pro |[P, f. 62r] ipso latere. **<9.3>** |[S, f. 73r] Producitur enim hec questio ad unam ex sex regulis supradictis hoc modo: primo quidem manifestum est |[B, f. 39v] quod duo quadrata[778] brevioris videlicet et longioris lateris, equantur quadrato dia|[N, f. 53v]metri, quare pone diametrum radicem, quam in se multiplica, facit quadratum diametri. Item pro latere breviori pone radicem diametri minus 4, que multiplica in se, veniet quadratum diametri et 16 minus 8 radicibus diametri pro quadrato lateris brevioris. Cum quibus adde quadratum lateris longioris: habebis quadratum diametri et 80, minus 8 radicibus diametri, que equantur quadrato diametri. **<9.4>** Restaura ergo ipsas radices ab utraque parte: remanebit quadratum diametri et 80, que equantur quadrato diametri et 8 radicibus. Tolle ergo ab utraque parte quadratum diametri: remanent 80, que equantur |[L, f. 79v] 8 radicibus diametri, quare divisis 80 per 8 venient 10 pro diametro, ut predixi.

<10.1> Et si ex multiplicatione longioris lateris in area proveniat[779] 384, et brevius latus sit 6, et vis scire quanta sit area: **<10.2>** quia ex multiplicatione brevioris lateris in longius provenit[780] area et ex multiplicatione aree in latus longius provenit 384, ergo ex multiplicatione brevioris lateris in quadratum longioris idem provenit, quare si diviserimus 384 per 6, scilicet per brevius latus, provenient 64 pro quadrato longioris, quorum radix, scilicet 8, est latus longius[781].

<11.1> Et si proponatur embadum esse 48; et diviso latere maiore per |[F, f. 41r] minus proveniat $\frac{1}{3}$ 1; et vis scire unumquodque latus: pone brevius latus 3 propter $\frac{1}{3}$ quod denominatur ab ipso; et multiplica 3 per $\frac{1}{3}$ 1: erunt 4, quod pone pro maiori |[*b*, p. 66] latere. Ergo in qua proportione est 3 ad 4, in eadem est brevius latus ad maius. **<11.2>** Multiplica itaque 3 per 4: erunt 12, in quibus divide 48: venient 4, de quibus accipe radicem, que est 2. Et multi|[M, f. 59v]plica in eam

---

[777] veniunt S M N F C P L] erunt B
[778] quadrata B S M N F] quadrati C P L
[779] proveniat F C P L] proveniet B S M N
[780] provenit B S N[4] F C P L] proveniet M N[1]
[781] longius B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

posita 3 et 4, et habebis 6 pro breviori latere, |[S, f. 73v] et 8 pro maiori. **<11.3>** Vel aliter: multiplica 3 per 48 et divide per 4: exibunt 36, quorum radix est brevius latus. Item multiplica 4 per 48, et divide |[P, f. 62v] per 3: exibunt 64, quorum radix est latus longius. **<11.4>** Et si latus minus dividatur per maius, et provenient[782] $\frac{3}{4}$: pone pro maiori latere 4, propter $\frac{3}{4}$ que denominantur ab ipso; |[C, f. 51r] et accipe $\frac{3}{4}$ de 4: erunt 3, que |[N, f. 54r] pone pro minore. Et fac ut supra, et habebis 6 pro minori latere, et 8 pro maiori.

<12.1> Item latus brevius cum diametro sit 16, et latus maius addat 2 super latus minus: et vis scire quantum sit diameter et unumquodque latus. **<12.2>** Quoniam maius latus excedit[783] |[L, f. 80r] minus latus in 2, ergo si addiderimus maius latus cum diametro, venient[784] 18: multiplica itaque 18[785] in se, et 16 in se[786], et aggrega multiplicationes eorum: erunt 580; de quibus tolle quadratum[787] duorum predictorum: remanent 576, quorum radix, scilicet 24, est summa duorum laterum et diametri. **<12.3>** De quibus tolle diametrum et latus brevius, scilicet 16: remanebunt 8, que sunt latus |[B, f. 40r] maius[788]. De quo tolle 2: remanent[789] 6 pro latere breviori, vel 18, scilicet maius latus. Et diametrum tolle de 24.

<13.1> Que si ad computationem Algebre reducere vis, pone latus brevius rem: remanebit diameter 16, excepta re. Multiplica ergo rem in re: proveniet census, quem aggregabis cum quadrato maioris lateris; quod quadratum invenies sic: **<13.2>** quia maius latus excedit[790] minus in 2, pones ipsum maius latus rem et duas dragmas. Que multiplica in se, egredientur census et 4 radices et 4 dragme pro quadrato longioris lateris. Que adde cum quadrato brevioris, scilicet cum censu, erunt duo census, scilicet duo quadrata brevioris lateris et 4 radices et 4 dragme, que equantur quadrato diametri, scilicet multiplicationi de 16, excepta re, in se. Que multiplicatio est 256 et census, exceptis triginta duabus[791] radicibus. **<13.3>** Restaura |[S, f. 74r] ergo radices: remanebunt 256 et census, que equantur

[782] provenient B S N[4] F C P L] venient M N[1]
[783] excedit S F C P L] excidit B M N
[784] venient B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[785] multiplica – 18 B M N S F P L] *om.* C
[786] et 16 in se B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[787] quadratum B S N[4] F C P L] quadrata M, *om.* N[1]
[788] maius B S N[4] F C P L] longius M N[1]
[789] remanent B S F C P L] remanebunt M N
[790] excedit S F C P L] excidit B M N
[791] duabus B S F C P L] et quatuor dragmis N[4], *om.* M N[1]

‖[M, f. 60r] duobus censibus et 36 radicibus et 4 dragmis: tolle itaque ab utraque parte censum et 4 dragmas: remanebunt census et radices 36, que equantur 252; media ergo radices et ‖[F, f. 41v] censum[792], secundum quod superius diximus, ubi census et radices equantur numero. **<13.4>** Et si maius latus cum diametro sit 18, et maius excedat[793] minus in 2, ‖[P, f. 63r] tunc minus latus cum diametro ‖[L, f. 80v] erunt[794] 16, cum quibus operaberis ut supra.

<14.1> Rursus duo latera cum embado surgunt in 62, et maius latus addit super minus 2: quantum est igitur unumquodque latus? **<14.2>** Modus inveniendi hoc erit: ut minuas 2 ‖[N, f. 54v] ex 62, et remanebunt 60; duo igitur adiunge medietati laterum, et provenient 4; ipsum itaque adiunge 60, et pro‖[C, f. 51v]venient 64. Horum[795] ergo radicem, que est 8, assume; ipsum namque est latus[796] longius: quod si vis brevius, minue 2 ex 8: remanebunt 6, quod est latus brevius. **<14.3>** Exempli causa: pone latus minus rem: erit tunc latus maius res et due dragme. Ex multiplicatione quidem brevioris lateris in longius provenit embadum, quare[797] multiplica[798] rem, scilicet minus latus, in rem et in duas dragmas, et habebis censum et duas[799] radices pro embado: quibus si addantur duo latera, scilicet 2 radices et 2 dragme[800], erunt census et 4 radices et 2 dragme, que equantur dragmis 62. Tolle ergo ab utraque parte dragmas 2, et remanent census et 4 radices, que equantur 60 et cetera.

<15.1> Et si multiplicatio maioris[801] lateris in diametrum sit 80 et latus brevius 6, multiplica 80 in se et 6 in se: erunt 6400 et 36. **<15.2>** Accipe ergo quadratum medietatis de ‖[*b*, p. 67] 36, scilicet 324, et adde cum 6400: erunt 6724, super quorum radicem, que est 82, adde medietatem de 36: erunt 100, quorum radix, scilicet 10, est diameter. In quo[802] divide 80: venient 8, que sunt latus

---

[792] secundum B S F C P L] est N[4], *om.* M N[1]
[793] excedat B S N[4] F C P L] excedit M N[1]
[794] erunt C P L] esset B S M N F
[795] horum B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[796] est latus B S N[4] F C P L] latus est M N[1]
[797] quare B S N[4] F C P L] quia M N[1]
[798] multiplica B S M N[1] F C P L] multiplicata N[4]
[799] dragmas – duas B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[800] et 2 dragme B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[801] maioris B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[802] quo B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

longius. Vel de 80 deme 16[803]: remanent 64, |[S, f. 74v] quorum radix est latus longius.

<16.1> Quod si hec ad computationem Algebre reducere vis: quia[804] ex multiplicatione longioris lateris in diame|[M, f. 60v]trum proveniunt 80, ergo ex[805] multiplica|[B, f. 40v]tione quadratorum ipsorum |[L, f. 81r] provenit quadratum de 80, scilicet 6400. Sed quadratus diametri equatur duobus quadratis, longioris videlicet et brevioris lateris, et est quadratum brevioris lateris 36. Ergo ex multiplicatione quadrati maioris lateris in se et in 36, proveniunt 6400. Quare pone quadratum maioris lateris rem, que in se multiplicata |[P, f. 63v] et in 36, facit censum et 36 radices, que equantur sex milibus et quadringentis et cetera[806]. Similiter secundum hanc regulam facies: si ex multiplicatione brevioris lateris in diametrum provenient 60, et maius latus sit 8, tunc census et 64 radices |[N, f. 55r] equabuntur[807] 3600. **<16.2>** Item latus brevius cum area faciunt 54; et latus maius addit super minus 2: quantum est ergo quodque[808] latus? Quia ex multiplicatione brevioris lateris in longius pervenit[809] embadum, si[810] ponamus brevius latus[811] rem, erit[812] latus |[F, f. 42r] longius res et 2, que si multiplicaverimus per rem, scilicet per brevius latus, egredientur census et due radices pro area: quibus si addamus brevius latus, scilicet radicem, erunt census et 3 radices, que |[C, f. 52r] equantur 54. Multiplica ergo $\frac{1}{2}$ 1, scilicet medietatem radicum, in se: erunt $\frac{1}{4}$ 2; que adde cum 54: erunt $\frac{1}{4}$ 56; de quorum radice, scilicet de $\frac{1}{2}$ 7, tolle $\frac{1}{2}$ 1: remanebunt[813] 6, quod est brevius latus. Maius ergo erit[814] 8.

<17.1> Et si longius latus surgat in 56 cum embado, et minus latus sit 2 minus maiore? **<17.2>** Pone maius latus rem: erit minus latus res, exceptis duobus. Multiplica ergo maius latus per minus: veniet census minus duabus radicibus; cui super adde radicem, scilicet latus longius: erit census, una radice

---

803 16 M^a N^1] 18 B S N^b N^4 F C P L
804 quia B S F C P L] quare M N
805 ex B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
806 cetera B S N^4 F C P L] rem M N^1
807 equabuntur B S F C P L] equantur M N
808 quodque B S N^4 F C P L] unumquodque M N^1
809 pervenit B F C P L] perveniet S, provenit M N
810 si B S N^4 F C P L] et si M N^1
811 brevius latus B S N^4 F C P L] latus brevius M N^1
812 erit S C P L] est B N^4 F, et M N^1
813 remanebunt C P L] remanent B S M N F
814 erit B S M N^1 F C P L] est N^4

excepta, que equantur ||[S, f. 75r] 56. **<17.3>** Restaura ergo radicem, et oppone eam: remanebit census, qui equatur uni radici et 56. Accipe quidem ||[L, f. 81v] medietatem radicis, et multiplica eam in se: erit $\frac{1}{4}$, quod adde super 56, erunt $\frac{1}{4}$ 56. Super quorum radicem, scilicet $\frac{1}{2}$ 7, adde medietatem radicis: erunt 8, quod est latus longius.

<18.1> Si autem ex aggregatione quatuor laterum cum area parte altera longioris proveniant[815] 76, et maius latus addat super minus 2: **<18.2>** tunc pones[816] latus brevius[817] rem, et latus longius rem et duo. Multiplica ergo rem in re et duo: erit census et due radices, que equantur embado. Cum quibus adde duas radices pro duobus brevioribus lateribus, et duas alias pro duobus lateribus longioribus et 4, in quibus maiora latera superabundant minora: erunt census et 6 radices et 4 dragme, que equantur 76. **<18.3>** Tolle ergo 4 ab utraque parte: remanebit census et 6 radices, que equantur 72. Pone ||[P, f. 64r] itaque quadratum medietatis radicum super 72: erunt 81, de quorum radice, scilicet de 9, tolle medietatem radicum: remanebunt 6 pro breviori latere.

<19.1> Si vero ex area diminuatur latus bre||[N, f. 55v]vius, et remaneant 42, et latus maius addat super minus 2: **<19.2>** pone ergo latus minus rem, quam multiplica per rem et duo, scilicet per latus longius, egredietur census ||[B, f. 41r] et due radices, que equantur aree. De quibus tolle unam radicem, scilicet brevius latus: remanet census et radix, que equantur 42. Pone ergo super 42 quadratum medie[818] radicis, scilicet $\frac{1}{4}$: erunt $\frac{1}{4}$ 42, de quorum radice, scilicet de $\frac{1}{2}$ 6, tolle $\frac{1}{2}$: remanebunt 6[819], quod est latus brevius.

<20.1> Et si ex area tollatur maius latus, et[820] remanent autem 40, et maius sit duo plus minore, tunc erit manifestum quod si minus latus tollatur ex ||[*b*, p. 68] area, remanebunt duo plus ex eo quod remanet, cum ex area tollitur maius latus; ergo ||[L, f. 82r] dempto minore latere ex area, remanent ||[S, f. 75v] 42: fac ergo ut supra, et habebis propositum, si Deus voluerit. **<20.2>** Vel aliter: pone maius latus rem, et multiplica eam per latus brevius, scilicet per rem, exceptis ||[F, f. 42v]

---

[815] proveniant B S N^{4} F C P L] proveniet M N^{1}
[816] pones S C P L] pone B M N F
[817] pones latus brevius B M N F C P L (pones C P L, pone B M N F)] latus brevius pones S
[818] medie B S N^{4} F C P L] medietatis M N^{1}
[819] 6 B S M N^{4} F C P L] *om.* N^{1}
[820] et B S F C P L] *om.* M N

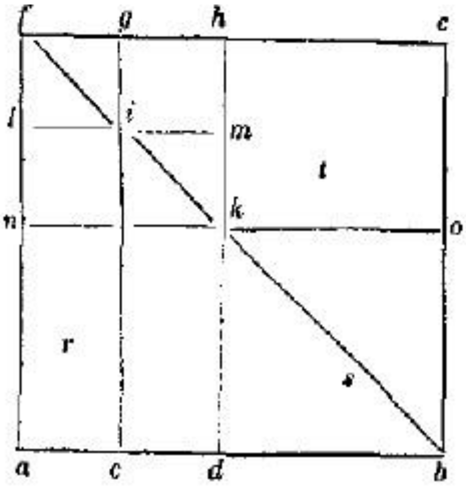
duobus: erit census, minus duabus radicibus, |[C, f. 52v] que equantur aree: deme ergo inde unam radicem, scilicet latus maius: remanebit census, exceptis tribus radicibus, que equantur quadraginta. Restaura ergo[821] radices, et oppo|[M, f. 61v]ne[822] eas, et habebis censum, qui equatur tribus radicibus et 40, et cetera.

<21.1> Item diminutis 4 lateribus ex embado, remanent 20; et maius latus addit super minus 2: quantum est ergo quodque latus? **<21.2>** Pone latus brevius rem, et maius rem et duo, quare 4 latera erunt 4 res et 4 dragme. Ex multiplicatione quidem rei in rem et[823] duo proveniunt census et due res, que equantur embado. De quibus tolle 4 latera, scilicet 4 res et 4 dragmas: remanebit census minus duabus rebus[824] et 4 dragmis, que equantur 20. **<21.3>** Restaura ergo 2 scilicet res, scilicet 2 radices[825], et 4 dragmas: veniet census, qui equatur 2 radicibus et 24 dragmis. Media siquidem radices: erit 1. Cuius quadratum adde super 24: erunt 25. Super cuius radicem adde[826] ipsum 1: erunt 6, quod |[P, f. 64v] est brevius latus[827] et cetera[828].

<22.1> Item si maius latus et minus addantur cum diametro, et sit sicut medietas aree, et area sit 48, et vis scire quantum sit diameter[829], nec |[N, f. 56r] non et quodque latus: **<22.2>** accipe ergo dimidium aree, scilicet 24, que sunt summa duorum laterum et diametri, et multiplica ea in se: erunt 576. De quibus tolle duplum embadi: remanent 480. Dimidium quorum divide per 24, scilicet per summam coniunctionis duorum laterum cum diametro: exibunt |[L, f. 82v] 10 pro diametro. **<22.3>** Vel aliter: duplica ergo[830] embadum: erunt 96, que divide per 24[831]: venient 4, que[832] extrahe de 24: remanent 20, quorum dimidium habeas pro diametro; quibus extractis de 24, remanent 14 pro quantitate duorum laterum. **<22.4>** Ex hoc |[S, f. 76r] ergo talis oritur questio: aggregatio duorum laterum est 14, et area est 48: fac ergo ut superius dictum est, et habebis propositum.

---

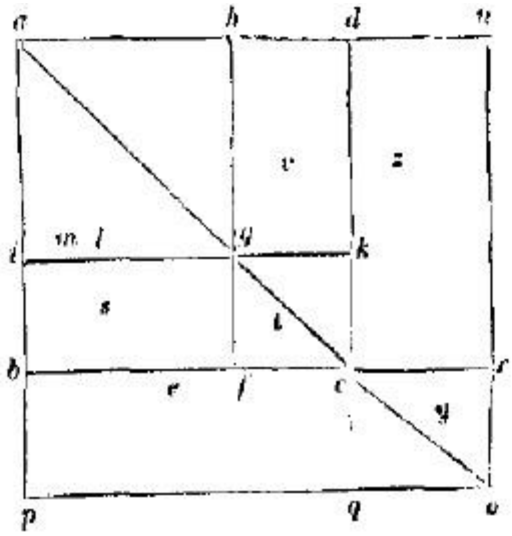
[821] ergo B S F C P L] ergo et M N
[822] oppone] appone B S M N F C P L
[823] et B S N^4 F C P L] et in M N^1
[824] rebus B S N^4 F C P L] radicibus M N^1
[825] que equantur – radices B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[826] adde B S M N^4 F C P L] *om.* N^1
[827] brevius latus B S N^4 F C P L] latus brevius M N^1
[828] et cetera B S N^4 F C P L] et videlicet M N^1
[829] diameter B M N F C P L] diametrum S
[830] ergo C P L] *deest* B S M N F
[831] 24 B S N^4 F C P L] 24 que M N^1
[832] 4 que B S N^4 F C P L] *om.* M N^1



<23.1> Nam si unde iste regule[833] procedant noscere vis: adiaceat quedam recta *ab* 24 ulnarum, in qua continetur summa coniunctionis duorum laterum et diametri; et sit *ac* equalis maiori lateri dati quadrilateri parte altera longioris, et *cd* minori; remanebit ergo *bd* equalis diametro. **<23.2>** Constituatur siquidem super rectam *ab* |[B, f. 41v - *b*, p. 69] tetragonum *ae*, et protrahatur diameter *fb*, et per puncta *c d* protrahantur recte *cpig* et *dkmh* equidistantes ut libet[834] rectarum *af* et *be*; |[M, f. 62r] et per puncta quidem *i k* protrahantur recte *lim* et *nko*. **<23.3>** Quoniam tetragonum est *ae*, tetragona sunt que describuntur circa diametrum ipsius; ergo tetragonum est *kdbc* et *knfh*. Rursus quia tetragonum est quadrilaterum *nh*, tetragona quidem sunt *pimk* et *ilfg*; et est latus tetragoni *do*[835] recta *db*, quare *do* tetragonum equale est quadrato diametri; et tetragoni quidem *pm* est latus recta *pk*, |[C, f. 53r] que est equalis recte *cd*, et *cd* est |[F, f. 43r] equalis minori lateri. Ergo tetragonum *pm* equale est tetragono minoris lateris. **<23.4>** Similiter ostendetur tetragonum *lg* equale esse quadrato maioris lateris propter rectas *fg* et *li* que sunt equales recte *ac*; et *ac* iacet equalis maiori lateri[836] |[P, f. 65r] dati parte altera longioris. Et quoniam tetra|[L, f. 83r]gonum est *pm*, equalis est recta *kp*[837] recte *pi*[838]: ergo *pi* est equalis minori lateri, et *il*[839] est equalis[840] maiori. Ergo supple|[N, f. 56v]mentum *ni* est equale aree dati quadrilateri; et supplementum *ih*, ut Euclides ostendit, est equale supplemento *ni*. Ergo supplementa *ni* et *ih*

[833] iste regule C P L] ista B S M N F
[834] ut libet B S N^4 F C P L] ubilibet M N^1
[835] do B S M N] de F C P L
[836] lateri B S N^4 F C P L] lateri tetragoni M N^1
[837] pi B S N^4 F C P L] im M N^1
[838] pi B S N^4 F C P L] kp M N^1
[839] il B S M F C P L] al N^4, ip N^1
[840] est equalis B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

dupla sunt embado dati parte altera longioris, que supplementa sunt 96. **<23.5>** Si tollantur ex area tetragoni *ae*, scilicet[841] ex 576, remanebunt tetragona *lg* et *pm*, et gnomon *rst* 480. Sed tetragona *lg* et *pm*[842] equalia sunt tetragono *do*, scilicet[843] diametri; ergo *do* tetragonum cum gnomone *rst* sunt 480. Sed ex *do* tetragono et gnomone *rst*[844] dimidium est superficiei |[S, f. 76v] *ao*; ergo superficies *ao* est 240, que constat ex ductu *ab* in *bo*: ergo si 240 diviserimus per *ab*, scilicet per 24, venient 10 pro linea *ob*, scilicet[845] pro linea *bd*, que est equalis diametro; ergo diameter est 10. **<23.6>** Vel secundum aliam supradictam regulam, cum de quadrato linee *ab*, scilicet de 24 vicibus 24 tollitur duplum embadi, |[M, f. 62v] scilicet supplementa *ni* et *ih*; et embadum est duplum quantitatis linee *ab*: ergo duplum embadi est quadruplum de 24. Ergo si ex 24 vicibus 24[846] tollatur quadruplum de 24, remanebunt 20 vicibus 24 pro area tetragonorum *lg* et *pm*, et gnomoni *rst*, ex quibus superficies *ao* dimidium continet, ut ostensum est, quare superficies *ao* constat ex 10 vicibus 24: ergo cum *ab* sit 24, sequitur necessario *bo* esse 10, que oportebat ostendere.



<24.1> Item aggregatio duorum laterum cum diametro est 24; et maius latus addit supra minus 2: quantum est ergo |[L, f. 83v] quodque latus? **<24.2>** Duplica itaque quadratum de 24, scilicet 576: erunt 1152; super que adde quadratum superabundantie, in qua maius latus superabundat minus, scilicet

[841] scilicet B S N4 F C P L] similiter M N1
[842] et gnomon – pm B S N4 F C P L] *om.* M N1
[843] scilicet B S N4 F C P L] similiter M N1
[844] sunt 480 – rst B S N4 F C P L] *om.* M N1
[845] ob scilicet B S M N1 F C P L] *del.* N4
[846] vicibus 24 B S M N F C L] *om.* P

duorum: erunt 1156; de quorum ||[B, f. 42r] radice, scilicet de 34, tolle 24 predicta: remanent 10, que sunt diameter; a quibus usque in 24 desunt 14, que sunt duo latera: de quibus 14 tolle 2, remanent 12; quorum medietas[847], scilicet 6, est brevius latus. **<24.3>** Ad cuius regule demonstrationem, ||[P, f. 65v] adiaceat tetragonum *abcd* habens in singulis lateribus quantitatem duorum late||[C, f. 53v]rum et diametri; et sit *be* equalis maiori lateri, et *ef* minori: remanebit *fc* equalis ||[N, f. 57r] diametro. Et protrahatur diameter *ac*; et per punctum *f* protrahatur linea *fgh* equidistans utrique linearum *ba* et *cd*; et per punctum *g* protrahatur recta *igk*: et erit recta *ig* equalis recte *bf*. Et auferatur a recta *gi* recta *gl*, que sit equalis recte *fe*: re||[F, f. 43v]manet ergo *li* equalis recte *eb*. Ergo *gl* est equalis minori lateri[848], et *li* maiori[849]. **<24.4>** Auferatur itaque ab *li* recta *im*, scilicet id in quo maius latus superaddit minus: remanebit *ml* equalis *lg*, scilicet minori[850] lateri. Et educatur ||[S, f. 77r] *ad* in puncto *n*; et sit *dn* equalis *fc*, scilicet diametro; et constituatur super *an* tetragonum *nopa*; et quoniam tetragona sunt *bd* et *pn*, et sunt circa unum angulum, qui ad *a* circa eundem diametrum sunt, ergo si protrahatur diameter *ac* in punctum *o*, ||[M, f. 63r] veniet ergo recta *ao* diameter. Protrahatur quidem recta *dc* in *q*, et recta *bc* in *r*; tetragonum ergo est *qr* continens in se quadratum diametri dati parte altera longioris: totum igitur tetragonum *pn* equatur tetragono *bd* et gnomoni *stu*. **<24.5>** De||[*b*, p. 70]monstrabo siquidem, ||[L, f. 84r] gnomon *stu* equale esse tetragono[851] *bd*, et tetragono linee *im*, que est superabundantia, in qua maius latus superabundat minus. Sunt enim supplementa *pc* et *cn* equalia superficiebus *bk* et *fd*. Sed due[852] superficies *bk* et *fd* equantur gnomoni *xyz* et tetragono *fk*, quibus superaddatur equale tetragono *qr*, quod est equale tetragono *fk*: erit duplum tetragoni *fk* cum gnomone *xyz* equale gnomoni[853] *stu*. **<24.6>** Restat siquidem demonstrandum duplum tetragoni *fk*[854] equale esse tetragono *ih* et *ei*, quod describitur a recta *im*. Est enim recta *gm* in duo equa divisa in puncto *l*, cui in directo adiuncta est ||[P, f. 66r] recta *mi*. Erit itaque tetragonum, quod describitur a recta *gi*, scilicet tetragonum *ih* cum eo quod

---

[847] medietas B S M N^4 F C P L] radices N^1
[848] lateri B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[849] et li maiori B S F C P L] *om.* M N
[850] minori S N^4 F C P L] maiori B M N^1
[851] tetragono B S M N^1 F C P L] trigono N^4
[852] due B M N F P L] duc S C
[853] gnomoni B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[854] fk B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

describitur a recta[855] *im*, duplum eorum, que describuntur a rectis[856] *gl* et *li*. Sed tetragona que describuntur a rectis *gl* et *li* equantur tetragono *fk*; quare duplum tetragoni *fk* equatur tetragono *ih* et *ei*, quod describitur a recta *im*. Ergo gnomon *stu* equatur tetragono *bd* et quadrato superabundantie maioris lateris, ut prediximus.

<25.1> Nunc[857] veniamus ad causam. Multiplicavimus superius 24 per 24, et habuimus quadratum *bd*; |[N, f. 57v] que[858] duplavimus, |[C, f. 54r] hoc est addidimus[859] super eum equale illius; et[860] superaddimus[861] postea[862] 4, hoc est super quadratum *bd* superaddimus |[B, f. 42v] gnomon *stu*: et sic habuimus 1156 pro quadrato *pn*, cuius latus est radix |[S, f. 77v] illius. Ergo *po* est 34, de qua extracta *pq*, scilicet *bc*, remanet *qo* 10, cui equalis est[863] recta *cf*: ergo *cf* est 10, ut predixi. **<25.2>** Possumus etiam aliter |[L, f. 84v] ad notitiam supradictorum[864] laterum devenire[865], videlicet ut ponas latus minus rem, eritque latus longius res et duo; quibus extractis de 24, remanent pro diametro 22, exceptis duabus rebus. Multiplica rem in se: erit census; et rem et duo in se: erit census |[M, f. 63v] et 4 res et 4[866] dragme. Quibus in unum coniunctis: erunt duo census et 4 res[867] et 4 dragme, |[F, f. 44r] que equantur quadrato diametri, scilicet multiplicationi de 22, exceptis duabus rebus in se. Que multiplicatio est 4 census et 484, exceptis 88 radicibus. Restaura ergo radices, et oppone duos census et 4 dragmas, et invenies 92 radices equari duobus censibus et 480. Redige ergo hec ad censum unum, et erit census et 240, que equantur 46 radicibus et cetera. **<25.3>** Vel pone latus longius rem: eritque latus brevius res minus duo; que extrahe de 24: remanent 26, exceptis duabus rebus: et operaberis deinde ut supra, et invenies census et 336 equari 50 radicibus.

---

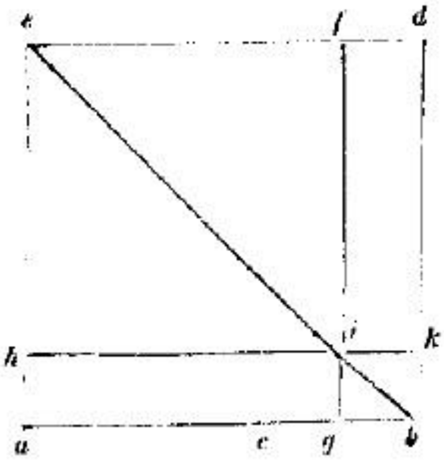
[855] scilicet – recta B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[856] a rectis B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[857] nunc B M N F C P L] sic S
[858] que B S N^4 F C P L] quod M N^1
[859] addidimus B S N^4 F C P L] addimus M N^1
[860] et B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[861] superaddidimus B S N^4 F C P L] superaddimus M N^1
[862] postea B S F C P L] preterea M N
[863] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[864] supradictorum B S N^4 F C P L] predictorum M N^1
[865] devenire B S N^4 F C P L] pervenire M N^1
[866] 4 B S N^4 F C P L] numerus M N^1
[867] 4 res B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

<26.1> Si autem diameter addiderit super latus maius 2, et maius super minus |[P, f. 66v] totidem, et vis scire diametrum et quodque latus, semper cum superabundantie laterum erunt equales, multiplicabis ipsam superabundantiam per 5, et habebis diametrum; et ipsam per 4, et habebis longius latus; et ipsam per 3, et habebis brevius. **<26.2>** Verbi gratia: superabundantia quidem laterum est 2; quibus multiplicatis per 5 et per 4 et per 3, egrediuntur 10 pro diametro, et 8 pro latere longiori et 6 pro breviori: et hec contingunt propter quadrilaterum parte altera longius, cuius latus longius est 4, brevius 3, diameter quoque 5: horum quidem laterum superabundantia est unum, quare sicut 1 erit ad quam volueris |[L, f. 85r] superabundantiam, |[S, f. 78r] ita hec tria latera erunt ad latera illius parte altera longioris, de quo |[N, f. 58r] superabundantia aliqua data fuerit. **<26.3>** Verbi gratia: si superabundantia erit[868] 3, quia 3 tripla sunt de uno, ideo tripla erunt latera ex lateribus predictis, scilicet diameter erit 15, latus quoque maius 12, minus autem 9. Unde si proponatur diametrum esse 20 et vis scire superabun|[C, f. 54v]dantiam laterum, divide 20 per 5: exibunt 4, que sunt superabundantia laterum: quam multiplica per |[*b*, p. 71] 4 et per 3: erunt 16 et 12, que sunt latera. **<26.4>** Item latus longius sit 20; divide ergo ipsum per 4, quia quaternarius est similis lateribus longioribus et 3 brevioribus et 5 diametris. Divisis[869] |[M, f. 64r] ergo 20 per 4, veniunt 5 pro superabundantia; quam multiplica per 3 et per 5: venient 15 pro latere breviori et 25 pro diametro. **<26.5>** Rursus latus brevius sit 18: divide ergo ipsum per 3, exibunt 6 pro superabundantia laterum; quam multiplica per 4 et per 5: venient 24 pro latere longiori, et 30 pro diametro.

<27.1> Nam si superabundantie inequales |[B, f. 43r] fuerint, ut in quadrato in quo proponitur[870] diametrum addere[871] 1 super latus maius, et maius supra minus 7, tunc operabimus[872] per Algebram: **<27.2>** ponemus siquidem latus brevius |[F, f. 44v] rem: eritque latus longius res et 7 et diameter erit res et 8. Multiplica itaque rem in rem: facit censum; et res et 7 in se: facit censum, et 14 res et 49 dragmas. Quibus insimul iunctis, erunt duo census et 14 res et 49[873], que equantur quadrato diametri, scilicet multiplicationi unius rei et 8 in se, que

[868] erit B F C L] fuerit S N^4 P, *om.* M N^1
[869] divisis B S M N^4 F C P L] divides N^1
[870] proponitur B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[871] addere B S F C P L] additur M N
[872] operabimus B S N^4 F C P L] operabis M N^1
[873] 49 B S N^4 F C P L] 49 dragme M N^1

multiplicatio est census et 16 res et 64. **<27.3>** ‖[P, f. 67r] Tolle ergo ab utraque parte censum et 14 res et 49: remanebit census, qui equatur duabus radicibus et 15[874]. Quare media radices: veniet 1, quod ‖[L, f. 85v] multiplica in se: erit 1; quod adde cum 15: erunt 16, super quorum radicem, scilicet super 4, adde medietatem radicum: erunt 5, que sunt minus latus; super que adde 7: erunt 12, que sunt maius latus; super que adde 1: erunt 13, que sunt diameter.



<28.1> Item maius latus addit super minus 7, et diameter ‖[S, f. 78v] est 13: quantum est ergo quoque latus? **<28.2>** Quadratum itaque superabundantie ex quadrato diametri abice, scilicet 49 de 169: remanebunt 120, cuius dimidium, scilicet 60, est area. **<28.3>** Exempli causa: adiaceat recta *ab* equalis duobus lateribus; et sit *bg* equalis minori lateri: remanet *ga* equalis maiori. Et sit *ac* 7, ‖[N, f. 58v] in quo maius latus *ag* superabundat minus *bg*; ergo *gc* equalis est recte *gb*. **<28.4>** Constituatur itaque super rectam *ab* tetragonum *ad*, et expleatur figura: erit quidem latus tetragoni *gk* recta *gb*, hoc est *gi*; latus quoque tetragoni *hf* ‖[C, f. 55r] est recta *hi* vel *if*, que sunt equales recte *ag*. Supplementum ergo *ai* est equale qua‖[M, f. 64v]drilatero dato, quia constat ex rectis *ag* et *gi*, que sunt equales duobus lateribus dati quadrilateri. Et supplementum *id* est equale[875] supplemento *ai*; ergo supplementa *ai* et *id* dupla sunt aree dati quadrilateri. Ergo duplum aree cum[876] tetragonis *hf* et *gk* est equale tetragono *ad*. Sed duo tetragona *hf* et *gk* sunt equalia quadrato diametri; ergo supplementa *ai* et *id* cum quadrato diametri dati parte altera longioris equalia sunt tetragono *ad*. **<28.5>** Sed tetragonum *ad* cum eo quod a recta *ac* describitur duplum est tetragonis, que describuntur a rectis *ag* et *gb*. Sed

---

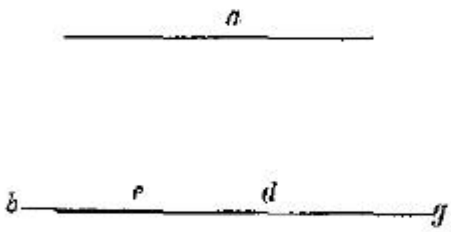
[874] et 15 B S N[4] F C P L] *om. et spatium vacuum rel.* M, *om.* N[1]
[875] est equale B S F C P L] equale est M N
[876] cum B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

ea que describuntur a rectis *ag* et *gb* equalia sunt |[L, f. 86r] tetragono diametri. Ergo duplum tetragoni diametri equale est tetragono *ad* et ei quod a recta *ac* describitur. |[P, f. 67v] Sed semel tetragonum diametri equale est tetragonis *hf* et *gk*; remanet ergo tetragonum diametri equale supplementis *ai* et *id*, et tetragono quod a recta *ac*, quare extraximus tetragonum, quod est a recta *ac*, scilicet 49, ex quadrato diametri, et remanserunt nobis 120 pro[877] supplementis *ai* et |[F, f. 45r] *id*[878]: quorum dimidium, scilicet 60, est area *ai* quadrilateri, quod est equale dati quadrilateri; ergo area dati quadrilateri est 60, |[B, f. 43v] ut predixi. **<28.6>** Sed ut habeas latera, dices: area est 60; et maius latus |[S, f. 79r] addit 7 super minus: fac ergo[879] ut supra docuimus[880]. **<28.7>** Aliter pone latus minus rem, eritque latus maius res et 7: multiplica ergo rem in rem, et rem et 7 in se; et adde ea, et erunt duo census et 14 radices et 49 dragme. Que oppone quadrato diametri, et habebis quod queris.

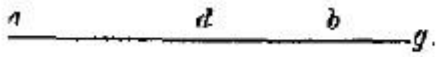
<29.1> |[*b*, p. 72] Item est pars altera longior, cuius diameter est 20; et id quod addit diameter super latus maius non est equale ei quod addit maius super minus: quantum est ergo[881] quodque latus? **<29.2>** Invenias quidem aliquod |[N, f. 59r] quadrilaterum, cuius latera et diameter sit rationabilia; et augmentum ipsius non sit equale. Sitque supradictum quadrilaterum, cui latus minus est[882] 5, maius quoque est 12, diameter |[M, f. 65r] quidem est 13; que 13[883] habeas pro antecedente, cum ponatur diametrum esse 20, quare multiplicabis 20 per 12, et 20 per 5; et divide utramque multiplicationem per 13, et habebis maius latus $\frac{6}{13}$ 18, minus[884] quoque $\frac{9}{13}$ 7. **<29.3>** Et si maius latus |[L, f. 86v] fuerit[885] 20, et |[C, f. 55v] vis invenire minus latus seu diametrum, tunc multiplicabis[886] 20 per 5, et 20 per 13; et divides utramque multiplicationem per 12, et habebis minus latus $\frac{1}{3}$ 8;

[877] pro B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[878] id B S N^4 F C P L] ib M N^1
[879] ergo B S N^4 F C P L] igitur M N^1
[880] docuimus B S N^4 F C P L] diximus M N^1
[881] ergo B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[882] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[883] 13 que 13 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[884] minus B S M N^1 F C P L] maius N^4
[885] fuerit B M N F C P L] fuit S
[886] multiplicabis B S M N F C L] multiplica P

diametrum quoque[887] $\frac{2}{3}$ 21. **<29.4>** Rursus minus latus sit 20; tunc multiplicabis 20 per 12, et 20 per 13, et divides utramque multiplicationem per 5; vel quintam de 20, scilicet 4, multiplica per 12 et per 13, et invenies maius latus esse 48 et diametrum 52.



<30.1> Sed ut in similibus[888] savius procedere valeamus, |[P, f. 68r] quedam adiaceant demonstranda. Videlicet ut[889] super quemlibet datum numerum doceamus addere quadratum numerum, et proveniat numerus quadratus[890]: esto datus numerus *a*, oportet super numerum *a* quadratum numerum addere, et earum summa fiat quadrata, hoc est quod[891] habeat radicem. **<30.2>** Invenias quidem duos numeros inequales, qui insimul[892] multiplicati faciant numerum *a*: sintque *bg gd*; et dividatur *bd* in duo equalia super |[S, f. 79v] punctum *e*; et quoniam numerus *bd* divisus[893] in duo equalia super punctum *e* et[894] inequalia super punctum *g*[895], erit multiplicatio *dg* in *gb* cum quadrato numeri *ge* equalis quadrato *de*. Sed multiplicatio *dg* in *gb* numerum *a* facit; ergo[896] numerus *a* cum quadrato numeri *ge* equatur quadrato numeri *de*, quod oportebat facere.



<31.1> Si autem unum ex lateribus quadrilateri continentibus angulum rectum[897] datum fuerit, et vis aliud latus, nec non et diametrum in numeris[898] invenire: et sit datum latus 13, multiplica itaque 13 in se: erunt 169, que sint linea

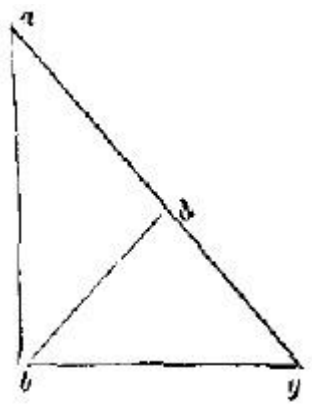
[887] diametrum quoque B S N^4 F C P L] diametrumque M N^1
[888] similibus B S N^4 F C P L] singulis M N^1
[889] videlicet ut B M N F C P L] *om.* S
[890] numerus quadratus B S N^4 F C P L] quadratus numerus M N^1
[891] quod B S N^4 F C P L] que M N^1
[892] insimul B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[893] divisus B S N^4 F C P L] divisus est M N^1
[894] et B S N^4 F C P L] et in duo M N^1
[895] g B S N^4 F C P L] d M N^1
[896] ergo B S N^4 F C P L] igitur M N^1
[897] rectum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[898] in numeris B S M N F^b C P L] *om.* F^a

ab; |[F, f. 45v] et inveni|[L, f. 87r]antur duo numeri, qui insimul multiplicati faciant[899] numerum *ab*. Sintque *ab*[900] et unitas *bg*. **<31.2>** Nam ducta unitate in quovis numero, idem provenit numerus; ergo |[N, f. 59v] multiplicatio *bg* in *ba* numerum *ab* facit, scilicet[901] 169: dividaturque numerus *ag* in duo equalia super punc|[M, f. 65v]tum *d*: eritque *gd* dimidium ex *ag*, scilicet 85, que est diameter; remanebit *bd* 84, quod est aliud latus[902].

<32.1> Et quoniam infinitos duos inequales numeros[903] tamen cum fractionibus[904] |[B, f. 44r] invenire possimus, quorum superficies continent numerum *ab*, infinita quidem latera et diametri inveniri possunt convenientia dato lateri. **<32.2>** Verum si proponatur diametrum esse 34 et vis latera invenire, duplica quidem 34, et egrediatur inde numerus *ef*, scilicet 68: et dividatur *ef* in duo equalia super punctum *g*: eritque *gf* 34. Et sumatur super numerum *ef* punctus *d* et sit proportio *fd* ad *de* sicut aliquis quadratum numerus ad aliquem quadratum numerum. **<32.3>** Sit ita|[C, f. 56r]que *fd* 4: remanebit *de* 64; et quoniam *fd* |[P, f. 68v] et *de* habent proportionem quadratorum, ex *fd* in *de* egredietur quadratum numerus, scilicet 256, quorum radix, scilicet 16, erit unum latus; reliquum erit *dg*, quod est 30; diameter autem *gf*, scilicet 34. **<32.4>** Item si dictum fuerit augmentum diametri super latus longius est equale augmento longioris super brevius; et multiplicatio |[S, f. 80r] augmenti in diametrum faciat 20: supradicta ratione divide 20 per 5: egrediuntur 4 quorum radix, scilicet 2, est augmentum; multiplica ergo augmentum in 5 et in 4 et in 3, et habebis diametrum 10, latus quoque maius 8, minus vero 6.

---

[899] faciant B S M N F] facient C L, faciunt P
[900] sintque ab B S M N F C L] *om.* P
[901] scilicet B S N^4 F C P L] similiter M N^1
[902] aliud latus B S N^4 F C P L] latus aliud M N^1
[903] infinitos - numeros B S N^4 F C P L] duos numeros infinitos inequales M N^1
[904] tamen – fractionibus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1



<33.1> |[L, f. 87v – *b*, p. 73] Et si proponatur: est quadrilaterum longius altera parte, cuius diametri proportio ad ipsius longitudinem est sicut proportio longitudinis eius ad eius latitudinem, etiam diameter est 10. **<33.2>** In hac autem dividenda sunt 10 secundum mediam et extremam proportionem; et quod medie proportioni ceciderit, erit minus latus; ipsumque per 10 multiplicandum est, et ipsius multiplicationis radix erit latus longius. **<33.3>** Verbi gratia: adiaceat trigonum orthogonium *abg*, scilicet dimidium quadrilateri parte altera longioris, cuius diameter est *ag*, latus longius *ab*, brevius quoque *bg*. Et protrahatur super *ag* cathetus *bd*, et sit sicut *ga* ad *ab*, ita *ab* ad *bg*. Et quoniam recta *bd* |[F, f. 46r] cathetus est super rectam *ag*, |[M, f. 66r] trigona *bdg* et *bda* sibi invicem similia sunt, et toti trigono *abg*, quare est sicut *ga* ad *ab*, ita *ba* ad *ad*. Sed |[N, f. 60r] sicut *ga* ad *ab*, ita *ab* est ad *bg*[905]; ergo recta *ab* ad rectas *bg* et *ad* eandem habet proportionem, quare recta *ad* recte *bg* est equalis.

<34.1> Item quia trigona *abg* et *bdg*[906] sibi invicem similia sunt, est sicut *ag*[907] ad *gb*, ita *bg* ad *gd*. Nam *bg* equalis est recte *ad*: est ergo sicut *ag* ad *ad*, ita *ad* est ad *dg*. Ergo *ag*, scilicet 10, divisa est secundum mediam et extremam proportionem; et est media, scilicet maior pars eius *ad*, cuius minus latus quesiti parte altera longioris, scilicet *gb*, iacet equalis. **<34.2>** |[P, f. 69r] Nam ut invenias quantitatem eius, secundum Euclidis regulam, dimidium de 10, scilicet 5, in se multiplica; et quod provenerit adde cum quadrato linee |[L, f, 88r] *ag*, scilicet cum 100: erunt 125; de cuius radice abice 5, scilicet dimidium |[C, f. 56v] linee *ag*; et sic habebis pro minori[908] latere, scilicet[909] pro linea *gb*, radicem de 125 minus 5. Nam

---

[905] ita – bg B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[906] bdg B S N[4] F C P L] bda M N[1]
[907] ag B S M N F[b] C P L] bg F[a]
[908] minori B S N[4] F C P L] uno horum M N[1]
[909] scilicet B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]

ut habeamus maius latus *ab*, |[B, f. 44v] quoniam est sicut *ga* ad *ab*, ita *ab* ad |[S, f. 80v] *bg*, erit quidem superficies *bg* in *ga* equalis quadrato linee *ab*, quare multiplica *ag* in *gb*, scilicet 10 in radice de 125 minus 5[910], egredietur radix de 12500 minus 50 pro latere *ab*. **<34.3>** Procedunt multe et diverse questiones ex lateribus etiam et ex[911] diametro, seu ex area supradictorum duorum quadrilaterorum[912], quarum solutiones, per ea que dicta sunt, poteris invenire.

<2>

Incipit pars secunda[913]

<Incipiunt Introductoria>

<1.1> Reliqui quidem quadrilateri in quatuor[914] partes dividuntur: in prima quorum sunt rumbi, qui omnia quatuor[915] latera sibi invicem equalia habent, sed[916] angulos minime rectos habent. **<1.2>** In secunda[917] sunt rumboides[918] qui tantum[919] habent latera[920] opposita[921] sibi invicem equalia et equidistantia, nec non et angulos oppositos[922] equales habent. **<1.3>** In tertia sunt campi, qui duo latera habent equidistantia, sed non equalia: qui dividuntur in quatuor[923] genera, se|[M, f. 66v]cundum[924] quod inferius demonstrabimus. **<1.4>** In quarta vero[925] sunt diversilateri campi, qui nullam equidistantiam in eorum lateribus habent.

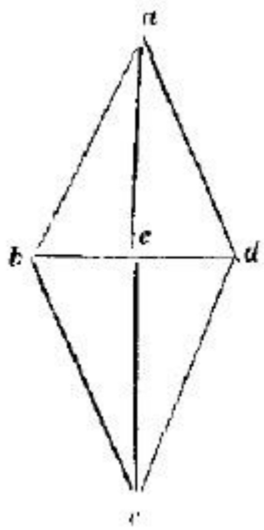
---

910 5 S N^4 F C P L] 5 et B M N^1
911 ex B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
912 quadrilaterorum B M N^1] quadratorum S N^4 F C P L
913 Incipit pars secunda] Incipit pars secunda tertie differentie B M N F (differentia F^a), Incipit differentia prima C P L, *om.* S
914 quatuor B S N^4 F C P L] numeros M N^1
915 quatuor B S N^4 F C P L] numerorum M N^1
916 sed B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
917 secunda S F C P L] secunda quidem B M N
918 rumboides S F C P L] rumbi idest B M N
919 tantum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
920 habent latera B S N^4 F C P L] latera habent M N^1
921 opposita B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
922 oppositos B S M N^1 F C P L] oppositionis N^4
923 in quatuor B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
924 secundum B S N^4 F C P L] superius M N^1
925 vero B^b S N^4 F C P L] *om.* B^a M N^1

<1>

Incipit differentia[926] <prima> de rumbo

<1.1> Sit rumbus *abcd* habens in singulis lateribus perticas 13; cumque hunc mensurare volumus, oportet nos habere notitiam[927] unius dia|[N, f. 60v]metrorum. Esto itaque diameter eius brevius *bd* perticarum 10. |[L, f. 88v] Erit itaque rumbus *abcd* ab ipso diametro |[F, f. 46v] in duo trigona equalia divisus, quorum unumquodque est equicrurium. Nam duo latera, que sunt *ab* et *ad*, duobus lateribus *cb* et *cd* equantur; et comunis eorum est *bd*, quare angulus qui |[P, f. 69v] sub *bad*, angulo qui sub *bcd* est equalis; et totum trigonum *abd* toti trigono *cbd* equatur.



<1.2> Ergo si aream huius rumbi habere volumus, duplabimus[928] aream trigoni *abd* vel *bcd*: et sic habebimus propositum. Nam area trigoni *abd* colligitur ex ducta catheto *ae* in dimidium basis *bd*, ut in trigonis de|[*b*, p. 74]monstratum est, quare si multiplicaverimus cathetum *ae* in totam *bd*, veniet duplum aree trigoni *abd*, hoc est area rumbi *abcd*. **<1.3>** Cadit itaque cathetus *ae* in medio *bd*, cum equicrurium[929] |[S, f. 81r] sit trigonum *abd*, quare si notitiam eius habere vis, extrahe quadratum linee *eb* ex quadrato linee *ab*, scilicet 25 de 169: remanebunt 144, quorum radix, scilicet 12, est cathetus *ae*[930]. Propter eadem ergo et cathetus

---

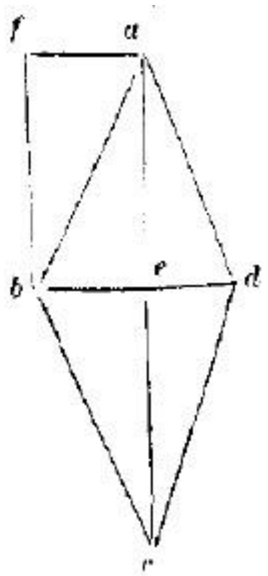
[926] differentia C P L] *deest* B S N F
[927] notitiam B S N^4 F C P L] notitiam in singulis lateribus N^1
[928] duplabimus S C P L] duplicabimus B N F
[929] equicrurium B S N^4 F C P L] equilaterum N^1
[930] ae B S N^4 F C P L] ed N^1

ce[931] est similiter 12; et est ||[C, f. 57r] *ce* recta in directo recte *ea*[932], cum anguli *aed* et *dec* sint recti, quare diameter est recta *ac* et est 24. **<1.4>** Ergo area rumbi *abcd* colligitur ex multiplicatione dimidii diametri *ac* in toto diametro[933] *bd*[934]; que multiplicatio[935] est 120. Similiter si data[936] fuerit diameter *ac* 24 perticarum, invenimus siquidem per ipsum supradicto modo diametrum *bd*, quia equicruria sunt trigona *bac* et *dac*, et sunt sibi invicem equalia, quare si ex potentia lateris *ba* extraxerimus potentiam linee *ae*, scilicet 144 de 169, remanebunt ||[L, f. 89r] 25 pro[937] potentia catheti *be*. Ergo *be* est 5, quare tota diameter *bd* est 10. **<1.5>** Et quoniam si multiplicaverimus cathetum *be* per dimidium basis ||[B, f. 45r] *ac*, egredietur nobis area trigoni *abc*, quare si moltiplica||[M, f. 67r]verimus cathetum *be*, scilicet dimidium diametri *bd*, in totam[938] diametrum *ac*[939], reddetur nobis area totius rumbi *abcd*. Nam multiplicatio *be* in *ac*, scilicet 5 in 24, facit 120, quod est area rumbi *abcd*. **<1.6>** Ergo *area ominium rumborum colligitur ex multiplicatione unius diametri in dimidio alterius*, et hec est regula universalis in ipsis.

<2.1> ||[P, f. 70r] Nam si proponatur quod maior diameter sit 24, minor quoque 10, et vis scire latera rumbi: quadrata[940] medietatis diametrorum, scilicet linearum *ae* et *eb*, in unum coniunge; ||[N, f. 61r] quorum radicem, scilicet 13, habeas pro unoquoque latere. **<2.2>** Possumus quidem multas questiones ex diametris et ex area, etiam et ex lateribus rumbi proponere; que omnes ||[F, f. 47r] reduci possunt ad questiones illius parte altera longiores, cuius latus longius est medietas longioris diametri rumbi, brevius quoque est medietas brevioris[941]. **<2.3>** Quod[942] quadrilaterum dimidium[943] rumbi aree continere probabimus: ||[S, f. 81v] protrahatur itaque, ut in hac alia cernitur figura[944], linea *af* equalis et

[931] propter – ce B S N^4 F C P L] *om.* N^1
[932] recte ea B S N^4 F C P L (recte *om.* N)] ea recta N^1
[933] dimidii – diametro B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[934] bd B S N^4 F C P L] bd in ea M N^1
[935] multiplicatio B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[936] data B M N F] datus S C P L
[937] pro B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[938] totam S C P L] totum B M N F
[939] ac B S M N F] ae C P L
[940] quadrata B S N^4 F C P L] quadrati M N^1
[941] diametri rumbi – brevioris B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[942] quod B S N^4 F C P L] quare M N^1
[943] dimidium B S N^4 F C P L] medium M N^1
[944] figura B S M N F^b C P L] *om.* F^a

equidistans linee *eb*, et copuletur *fb*. Dico quidem quadrilaterum *ef* dimidium esse rumbi *abcd*, et sunt latera eius equalia medietatis diametrorum *ac* et *bd*. Nam *ae* dimidium continet ex *ac*, et *be* ex *bd*: est enim trigonum *abd* dimidium rumbi *abcd*. Sed trigonum *abd* equale est quadrilatero *ef*; constat ‖[L, f. 89v] enim utrumque ex ductu *ae* in *eb*; ergo quadrilaterum *ef* dimidium est rumbi *abcd*, ut predixi. **<2.4>** Nam qualiter questiones rumbi ad quadrilaterum perducantur[945], quedam de multis volumus proponere.



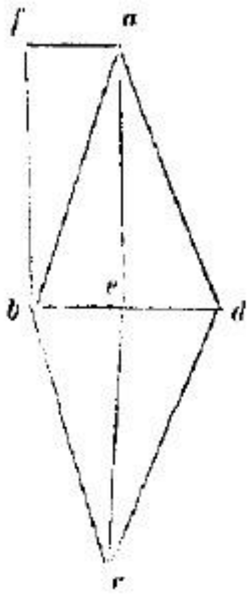
<3.1> Si dictum tibi fuerit: aggregavi duos diametros, et fuit 34; et rumbi area est 120. Quantum est ergo queque diameter? Cum itaque diametri sint 34, dimidium ipsarum, scilicet *ae* ‖[C, f. 57v] et *eb*, sunt 17, et area quadrilateri *ef* est 60. **<3.2>** Ergo perduxisti[946] hanc questionem ad unam ex questionibus parte altera longioris, ad eam videlicet in qua proponitur aream esse 60, et aggregationem laterum 17. Ex quadrato quidem medietatis ‖[M, f. 67v] 17, scilicet ex $\frac{1}{4}$ 72, tolle 60: remanet $\frac{1}{4}$ 12, quorum radicem tolle ex medietate[947] 17: remanebunt 5 pro linea *be*; reliquum quod est usque in 17, est linea *ae*; ergo duplum eorum, scilicet 24 et 10, sunt diametri. **<3.3>** Item aggregatio diametrorum est 34; et maius addit super minus 14. Quantum[948] est ergo area? Tolle 14 et 34: remanebunt 20, quorum dimidium, scilicet 10, est diamiter brevior.

---

[945] perducantur B S F C P L] producantur N^4, producamur M N^1
[946] perduxisti B S F C P L] produxisti M N
[947] medietatem B S N^4 F C P L] medietatem de M N^1
[948] quantum B S N^4 F C P L] quanta M N^1

Reliquum, scilicet 24, est longior. Multiplica siquidem dimidium ||[P, f. 70v] unius diametrorum per aliam[949], et habebis aream.

<4.1> ||[*b*, p. 75] Rursus aggregavi duos diametros[950] cum area rumbi, et provenerunt 154; et maior diameter addit super minorem 14. Quoniam duo diametri rumbi equantur quatuor[951] lateribus quadrilateri *ef*, pone latus brevius rem: eritque latus longius res et 7. Multiplica ergo rem in re ||[S, f. 82r] et in 7: proveniet[952] census et 7 ra||[N, f. 61v]dices, que sunt area ||[B, f. 45v] quadrilateri *ef*. **<4.2>** Et quoniam quadrilaterum *ef* dimidium continet rumbi, duplica ergo censum et 7 radices: erunt duo census et 14 ||[L, f. 90r] res[953], que equantur rumbo. Super que adde 4 res et 14, scilicet quatuor latera: erunt duo census et 18 radices[954] et 14, ||[F, f. 47v] que equantur 154. Tolle ergo ab utraque parte 14, et redige ea ad censum unum: veniet census et 9 radices, que equantur 70. Media ergo radices: erunt $\frac{1}{2}$ 4, que multiplica in se: erunt $\frac{1}{4}$ 20. Que adde cum 70: erunt $\frac{1}{4}$ 90. De quorum radice abice $\frac{1}{2}$ 4: remanebunt 5 pro *be*, quorum duplum, scilicet 10, est diameter *bd*; quibus additis 14, habebis[955] 24 pro diametro longiori; a[956] quibus diametris usque in 154, remanet 120 pro area.



[949] aliam S M N F C P L] alium B
[950] duos diametros B S N^{4} F C P L] diametros duos M N^{1}
[951] quatuor B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[952] proveniet B S N^{4} F C P L] proveniunt M N^{1}
[953] res B S N^{4} F C P L] radices M N^{1}
[954] radices B S N^{4} F C P L] res M N^{1}
[955] habebis S N^{4} F C P L] erunt B M N^{1}
[956] a B S N^{4} F C P L] de M N^{1}

<5.1> Adhuc: aggregavi diametrum breviorem et latus rumbi, et fuerunt 23. Et diameter maior addit super minorem 14: quantum est ergo latus, nec non et queque diameter? **<5.2>** Quoniam diameter maior addit 14 super minorem[957], ergo medietas diametri longioris addit 7 super medietatem brevioris, scilicet latus *ae* super latus *eb*. Ergo *be* cum *ae* addit 7 super diametrum *bd*. Sed *bd* cum latere *ab* sunt 23; ergo *be* et *ea* cum *ab* sunt 30. **<5.3>** Unde talis est hec questio: aggregavi duo latera quadrilateri cum diametro ipsius, et fuit 30; et maius latus addit |[M, f. 68r] super minus 7: fac ergo ut supra dictum est, et cetera[958].

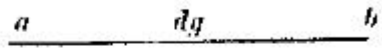
<6.1> |[C, f. 58r] Item multiplicasti unamquamque diametrum in se, et aggregasti eas: et quod provenerit fuit 676 et area est 120: queque igitur diameter quanta est? **<6.2>** Accipe itaque quartum de 676[959], quia quadrata[960] linearum *ae* et *eb* quarta pars sunt ex quadratis diametrorum. Cum ipsa[961] latera |[L, f. 90v] sint dimidium ipsarum[962], exibunt 169 quorum radix, scilicet 13, est diameter quadrilateri *ef*, scilicet latus rumbi. **<6.3>** Et quoniam ostensum est superius quod quadratum diametri parte altera longioris addit super |[S, f. 82v] duplum embadi (quadratum superabundantie |[P, f. 71r] laterum ipsorum), idcirco si extraxerimus embadum rumbi *abcd*, quod est duplum aree quadrilateri[963] *ef*, ex quadrato diametri ipsius, scilicet 120 ex 169, remanebunt 49 quorum radix, scilicet 7, est superabundantia laterum. Ergo area quadrilateri est 60, et maius latus addit super minus 7; quantum est ergo quodque latus, et cetera[964].

<7.1> |[F, f. 48r] Item multiplicavi maiorem diametrum rumbi per minorem, et provenit 240; et maior diameter addit super minorem 14; quanta |[N, f. 62r] est ergo queque diameter? **<7.2>** Ex multiplicatione quidem medietatis unius diametri in totam aliam provenit embadum rumbi, ergo 240, scilicet multiplicatio unius diametri in aliam sunt dupla ex area rumbi[965]. Ergo area rumbi est 120, que est duplum aree[966] quadrilateri *ef*. Ergo area quadrilateri *ef* est 60. **<7.3>** Unde talis oritur questio: est quadrilaterum parte altera longius, cuius area est 60; et maius

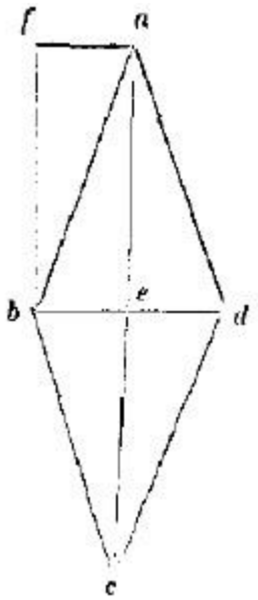
---

[957] quantum est – minorem B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[958] et cetera B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[959] et area – 676 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[960] quadrata B S M N F^b C P L] quadrilaterum F^a
[961] ipsa S N^4 F C P L] ipsarum B M N^1
[962] ipsarum C P L] ipsorum B S M N F
[963] aree quadrilateri B M N F C P L] quadrilateri aree S
[964] et cetera B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[965] rumbi B S M N^1 C P L] rumbi est N^4, rumbi est 120 F
[966] aree B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

latus addit[967] super minus ‖[B, f. 46r] 7, scilicet dimidium[968] de 14, in quibus maior diameter[969] superabundat minorem, et cetera.



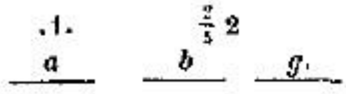
<8.1> Rursus aggregavi diametros, et quod provenit fuit 34; et[970] ex multiplicatione unius diametri per aliam provenerunt 240: quanta est ergo queque diameter? **<8.2>** Ad hec quidem ostendenda, adiaceat recta *ab* 34 perticarum; et sit divisa in duo equa, et totidem inequalia super puncta *g d*; et sit *ad* ‖[L, f. 91r] equalis diametro breviori; remanet ergo *db* equalis maiori. Ex multiplicatione quidem *ad* in *db* cum quadrato linee *dg* egreditur quadratum linee *gb*, scilicet de 17, qui est 289: ex quibus si extraxeris ‖[*b*, p. 76] multiplicationem ex *ad* in *db*, ‖[M, f. 68v] remanebunt 49 pro quadrato *dg*. Ergo *dg* est 7; quibus additis cum *bg*, erit tota *bd*, scilicet maior diameter, 24: remanet *da* 10, que est minor diameter.



<9.1> Iterum divisi maiorem diametrum per minorem, et egredierentur[971] ex divisione $\frac{2}{5}$ 2, et area rumbi est 120: quanta est ergo ‖[C, f. 58v] diameter queque[972]? **<9.2>** Quoniam est sicut totum ad totum, ‖[S, f. 83r] ita quelibet pars est ad eandem partem[973], erit itaque sicut maior diameter est ad minorem, ita medietas

[967] addit B S M N C P L] addit minus F
[968] dimidium B S M N F C L] medium P
[969] maior diameter B S N^4 F C P L] diameter maior M N^1
[970] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[971] egredierentur S C P L] egredietur B M N F
[972] diameter queque C P L] queque diameter B S M N F
[973] est ad eandem partem B S N^4 F C P L] ad eandem partem est M N^1

maioris ad medietatem minoris, et medietas maioris[974] est maius latus quadrilateri |[P, f. 71v] *ef*, scilicet linea *ae*, et medietas minoris diametri[975] est linea *eb*, scilicet minus latus. **<9.3>** Nam *omnes numeri*[976] *qui habent unam et eandem proportionem, si dividantur maiores per*[977] *minores, semper veniet idem ex divisione*. Ergo si diviserimus maius[978] latus quadrilateri *ef* per minus, provenient similiter $\frac{2}{5}$ 2.



<10.1> Ergo talis est questio: area quadrilateri est 60, scilicet dimidium aree rumbi; et divisi maius latus per minus, et provenerunt[979] $\frac{2}{5}$ 2. Et[980] multiplica itaque 1 per $\frac{2}{5}$ 2: proveniunt $\frac{2}{5}$ 2[981]. Que multiplica per 60: erunt 144, quorum radix est 12[982]. Que divide per numeros |[N, f. 62v] proportionis, scilicet per 1, et per $\frac{2}{5}$ 2: egredientur 12 et 5, que sunt latera quadrilateri, scilicet dimi|[F, f. 48v]dium diametrorum. Ergo maior diameter est 24, et minor est 10. **<10.2>** |[L, f. 91v] Nam si unde hec[983] procedant noscere vis, adiaceat unitas *a*, et $\frac{2}{5}$ 2 sit *b*. Et multiplicentur[984] *a* per *b*, et proveniat *g*; et sit minus latus quadrilateri *d*, maius quoque *e*; et area sit *f*. Et quoniam ex divisione maioris lateris per minus

---

[974] maioris B S N^4 F C P L] maioris ad maius latus M N^1
[975] diametri S N^4 F C P L] *om.* B M N^1
[976] numeri B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[977] per B S N^4 F C P L] et M N^1
[978] maius B S N^4 F C P L] minus M N^1
[979] provenerunt B S F C P L] pervenerunt M N
[980] et B S F C P L] *om.* M N
[981] proveniunt $\frac{2}{5}$ 2 S F C P L] *om.* B M N
[982] 12 B S N^4 F C P L] 161 M N^1
[983] unde hec B S N^4 F C P L] hec unde M N^1
[984] multiplicentur B S N^4 F C P L] multiplicatur M N^1

provenit[985] $\frac{2}{5}$ 2, est sicut 1 ad $\frac{2}{5}$ 2, ita minus latus est ad maius, hoc est sicut *a* ad *b*, ita *d* ad *e*, quare ductus *a* in *e* est sicut ductus *b* in *d*. **<10.3>** Sit ergo multiplicatio ex *a* in *e*, vel ex *b* in *d*, numerus *h*; et *h* multiplicetur in se proveniat *i*. Et multiplicetur quidem *g*[986] in *f*, et proveniat *k*. Dico numerum *k* equalem esse[987] numero *i*. Multiplicasti quidem *a* in *b*, et venit *g*; et *d* in *e*, et venit *f*. Et *g* in *f*, fecit *k*: ergo numerus *k* factus est ex multiplicatione *a* in *b* ducta in *d* et producta in *e*. **<10.4>** Item multiplicasti *a* in |[M, f. 69r] *e* et provenit *h*; et *b* in *d*, et provenit similiter *h*. Et ex *h* in *h* factus est *i*: ergo *i* factus est ex multiplicatione *a* in *e* ducta in *b* et producta in *d*. Sed multiplicatio *a* in *b* ducta in *d* et producta |[B, f. 46v] in *e* equatur |[S, f. 83v] multiplicationi *a* in *e* ducta in *b* et producta in *d*; ergo *k* equalis est *i*, ut prediximus. **<10.5>** Multiplicavimus quidem superius *a* in *b*, et provenit $\frac{2}{5}$ 2; que multiplicavimus per aream, scilicet *g* per *f*, et habuimus numerum *k*, hoc est numerum *i* qui fuit 144; de quibus accepimus |[P, f. 72r] radicem, que fuit *h*, quia ex multiplicatione *h* in se provenit *i*: ergo *h* est 12. Et quoniam ex *a* in *e* provenit *h*, scilicet 12, et *a* est *i*, ideo divisimus 12 per *i*, scilicet *h* per *a*: provenit 12, quod est *e*, scilicet maius latus[988]. **<10.6>** |[C, f. 59r] Item ex *b* in *d* provenit *h*, |[L, f. 92r] scilicet 12; et *b* est $\frac{2}{5}$ 2, quare divisimus 12, scilicet *h*[989], per *b*, scilicet per $\frac{2}{5}$ 2, et habuimus *d*, scilicet minus latus, quod fuit 5. Nam si area, scilicet *f*, esset[990] 100, tunc *k*, scilicet *i*, esset[991] 240, cuius radix est *h*. Sed 240 non habent radicem; unde cum non possumus dividere *h* per *a* et per *b*, accipiemus quadratos eorum, et in ipsis dividemus numerum *i*. **<10.7>** Vel aliter accipiemus proportionem in sanis numeris, quam habet unitas *a* ad *b*, eruntque 5 et 12. Sit ergo *a* 5 et *b* 12 et *g* 60, quare *k* vel *i* erit 6000; que dividemus per quadrata numerorum *a* et *b*, scilicet per 25 et per |[N, f. 63r] 144: egredietur pro maiore latere radix ducentorum quadraginta, minus vero erit radix de $\frac{2}{3}$ 41. **<10.8>** Vel aliter, pone latus minus rem: eritque latus maius due res et due quinte rei: multiplica ergo rem in duabus rebus et duabus quintis: erunt |[*b*, p. 77] duo census et due quinte census, que

---

[985] provenit B S N^4 F C P L] pervenit M N^1
[986] g S F C P L] d B M N
[987] equalem esse B S N^4 F C P L] esse equalem M N^1
[988] maius latus B S N^4 F C P L] latus maius M N^1
[989] 12 – h B S N^4 F C P L] similiter 12 hoc est M N^1
[990] esset B^2 S M N F C P L] est B^1
[991] esset B^2 S M N F C P L] est B^1

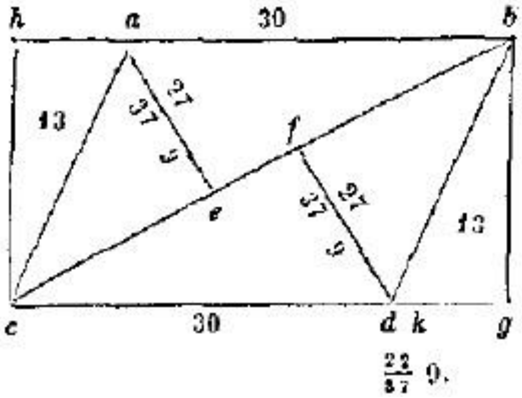
equantur |[F, f. 49r] aree date. Sit ergo area data 100, que divide per $\frac{2}{5}$ 2: proveniet $\frac{2}{3}$ 41, quorum radix est *d*, scilicet latus minus[992]. **<10.9>** Et quoniam est sicut *a* ad *b*, ita *d* ad *e*, erit itaque sicut quadratum numeri *a* ad quadratum numeri *b*, ita quadratum quantitatis *d* ad quadratum quantitatis *e*; quare multiplica quadratum numeri *b* per quadratum quantitatis |[M, f. 69v] *d*, scilicet 144 per $\frac{2}{3}$ 41, et multiplicationis summam divide per quadratum numeri *a*, scilicet per 25: egredientur 250, quorum radix est latus maius[993].

Explicit de rumbo[994]

<2>

Incipit[995] de rumboide differentia secunda[996]

<1.1> Rumboides quidem est figura paralilograma |[L, f. 92v] habens[997] tantum latera |[S, f. 84r] opposita et angulos, ut diximus, equales. **<1.2>** Cumque hanc metiri volumus, protrahemus in ea diametrum, per quam figura |[P, f. 72v] divisa erit in duo trigona equalia: quare *si cathetum unius*[998] *per totam basem, scilicet per diametrum ipsius multiplicaverimus, reddet aream totius rumboidis*.



<2.1> Ad cuius rei evidentiam sit romboides[999] *abcd* habens in singulis lateribus *ab* et *cd* perticas 30, que sibi invicem opposita et equidistantia sunt. Reliqua vero duo latera *ac* et *bd* similiter sunt equalia et equidistantia, continentia

---

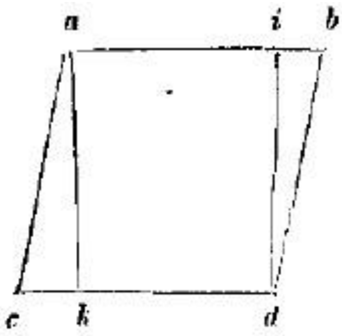
992 latus minus B S M N[1] F C P L] minus latus N[4]
993 latus maius B S N[4] F C P L] maius latus M N[1]
994 Explicit de rumbo S N[4] C P L] explicit F, *om.* B M N[1]
995 Incipit B S M N C P L] *om.* F
996 differentia secunda B M N F C P L] *om.* S
997 habens B S N[4] F C P L] habet M N[1]
998 unius B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
999 ad – rumboides B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]

in unoquoque[1000] perticas 13. Et sit diameter *bc* perticarum 37, a qua rumboides *abcd* in duo equalia trigona divisus est, que sunt *abc* et *dbc*, et[1001] utrumque ipsorum est ampligonium propter potentiam diametri *bc*, que est maior duabus potentiis laterum *ba* et *ac*, vel *bd* et *dc*. Supra basem quidem *bc* protrahatur cathetus |[C, f. 59v] a puncto *a* in trigono *abc*: sitque *ae*. Et multiplicabis cathetum *ae* per basem *cb*, et habebis aream totius[1002] rumboidis |[B, f. 47r] *abcd*. **<2.2>** Vel invenies cathetum *df* in trigono *bcd* supra basem *bc*; et multiplicabis ipsam cathetum *df* per basem *bc*, et habebis similiter embadum romboidis *abcd*. **<2.3>** Verbi gratia: rumboides *abcd* est duplum trigono *bcd*, cuius trigoni area colligitur ex multiplicatione catheti *df* in dimidium basis |[N, f. 63v] *bc*: quare multiplicatio catheti *df* per totam basem *bc* facit duplum aree[1003] trigoni *bdc*, ergo facit aream totius rumboidis, qui est |[L, f. 93r] duplus trigoni *bcd*. Nam utramque cathetum *ae* et *df* invenies esse perticas $\frac{27}{37}$ 9, quibus $\frac{27}{37}$ 9[1004] multiplicatis per diametrum *bc*, scilicet per 37, reddunt[1005] perticas 360 pro area totius rumboidis *abcd*.

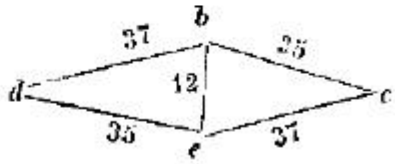
<3.1> Similiter si extra trigonum *bcd* cathetum *bg* protraxeris supra basem *cg*, et multiplicaverimus |[M, f. 70r] ipsam cathetum *bg* per basem trigoni, scilicet per lineam *cd*, habebis embadum totius rumboidis *abcd*. Item multiplicato catheto *ch* |[S, f. 84v] per basem *ab*, reddet eiusdem rumboidis embadum. Reperitur autem utraque cathetus per regulam, quam superius |[F, f. 49v] in trigono ampligonio demonstravimus. **<3.2>** Verbi gratia: |[P, f. 73r] extractis potentiis laterum *ca* et *ab*, vel *bd* et *dc*, scilicet 169 et 900 de potentia lateris *bc*, scilicet ex 1369, remanent 300, |[*b*, p. 78] cuius dimidium si[1006] divisum fuerit per basem *cd*, scilicet per 30, reddet[1007] 5 pro quantitate[1008] linee[1009] *dg* vel *ah*; cuius[1010] potentia, scilicet 25, extracta ex potentia *bd*, scilicet de 169, remanent 144, cuius radix, scilicet 12, est

[1000] quoque S N^4 F C P L] quoque latere B M N^1
[1001] et S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
[1002] aream totius B S N^4 F C P L] totius aream M N^1
[1003] aree B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1004] quibus $\frac{27}{37}$ 9 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1005] reddunt B S N^4 F C P L] reddent M N^1
[1006] si B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1007] reddet C P L] reddit B M N F, reddunt S
[1008] pro quantitate B S N^4 F C P L] et quantitatem M N^1
[1009] linee S N^4 F C P L] *om.* B M N^1
[1010] cuius B S N^4 F C P L] aut M N^1

cathetus *bg*; quo multiplicato per basem *cd*, scilicet 12 per 30, reddunt perticas 360 pro embado dicti rumboidis[1011], ut superius invenimus.



<4.1> Investigatur siquidem huius rumboidis area per duas alias cathetos, qui sunt *di* et *ak*, qui reperiuntur per diametrum *ad* et per latera rumboidis, quia protracto ipso diametro resolvitur ipse rumboides in duobus trigonis oxigoniis, ut in hac alia figura depingitur; quorum unum est trigonum *acd*, aliud *abd*; et est cathetus *id*, vel *ak*, perticarum |[L, f. 93v] 12. **<4.2>** Et nota[1012] quia ab *a* in *i*, ubicumque cathetum protraxerit infra rumboidem inter *k* et *d*, super lineam *kd* cadet. Nam casus catheti illius poteris invenire per ea que in trigonis oxigoniis diximus, vel cum lensa quemadmodum in triangulis docuimus[1013].



<5.1> Est enim quandoque rumboides, qui per breviorem diametrum resolvitur in duobus trigonis orthogoniis, ut rumboides *bcde*, |[C, f. 60r] cuius *bc* et *de* latera sunt perticarum 35; reliqua vero duo latera *bd* et *ce* perticarum 37, diameter quoque *be* brevior sit perticarum 12. **<5.2>** Dico quidem, rumboidem *bcde* divisum esse in duo trigona orthogonia propter potentiam linee *ec*, que |[N, f. 64r] equatur potentiis linearum *cb* et *be*, quare rectus est angulus qui sub *cbe*. Similiter reperitur rectus qui sub *bed*[1014]. Et est equale trigonum |[M, f. 70v] *cbe* trigono *bed*. **<5.3>** Et quoniam |[P, f. 73v] ex multiplicatione catheti *be* in basem *ed* dimidium colligitur area trigoni |[S, f. 85r] *bed*, si multiplica|[B, f. 47v]verimus itaque *be* diametrum in *ed* latus, habebimus perticas 420 pro embado totius rumboidis

[1011] rumboidis B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1012] nota S C P L] no F, notandum B M N
[1013] *spatium vacuum reliquit* F
[1014] bed B S M N F P] bea C L

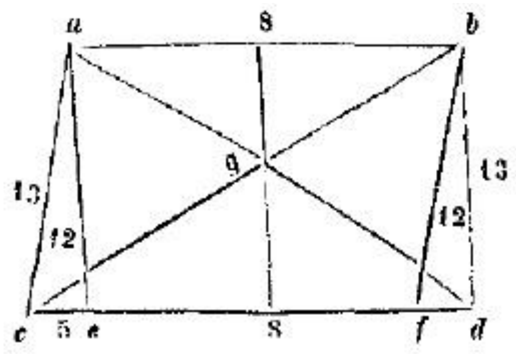
bcde. Similiter fit rumboides, qui per unumquodque diametrum dividitur in duobus trigonis ampligoniis.

Explicit de rumboide[1015]

<3>

Incipit de figuris que habent capita abscissa ex[1016] quibus[1017] quatuor sunt[1018] genera in differentia[1019] tertia[1020]

<1>



<Figura prima>

<1.1> Primum genus tertie differentie[1021] camporum quadrilaterorum, qui habent duo latera equidistantia et inequalia, est figura, que “eque caput abscisa” dicitur, cuius reliqua duo latera ||[F, f. 50r] equalia sibi invicem sunt, ut quadrilaterum *abcd*, cuius latus *ab* est pertice 8, et est equi||[L, f. 94r]distans lateri *cd*, quod latus est pertice 18, quodlibet reliquorum *ac* et *bd* sit pertice 13. **<1.2>** In hac autem[1022] figura, latus *ab* capitis abscissio et latus *cd* abscissio basis appellatur, cuius figure embadum colligitur ex multiplicatione catheti in dimidio laterum *ab* et *cd*; et cathetus ducitur a capite in basim. **<1.3>** Unde si a puncto *a* vel a puncto *b* cathetum super basim *cd* erigere volueris, abscissio capitis, scilicet

[1015] Explicit de rumboide S N[4] F[b] C P L] *om.* B M N[1] F[a]
[1016] ex S C P L] de B M N F[b], *om.* F[a]
[1017] quatuor B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1018] sunt B S N[4] F C P L] sunt numerorum M N[1]
[1019] Incipit – tertia B S M N F[b] C P L (tertia S C P, prima B N F L)] *om.* F[a]
[1020] tertia S C P] prima B M N F[b] L[2], *om.* F[a] L[1]
[1021] differentie B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1022] autem N[4] F C P L] aut B M N[1], *om.* S

8, ex abscissione basis deme, scilicet de 18: remanent 10 cuius dimidium, scilicet 5, est[1023] casus *ce* vel *df*. A puncto enim *a* cathetus cadit super *e*; a puncto vero *b* cadit super *f*, quare si potentiam *ce* ex potentia *ae*, vel potentiam *df* ex potentia *bd*, scilicet 25 de 169 extraxeris, remanebunt 144, cuius radix, que est 12, est perpendicularis *ae* vel *bf*: quibus 12 multiplicatis in dimidium laterum *ab* et *cd*, scilicet in dimidium de 26, hoc est in 13, reddunt[1024] 156 pro embado ipsius quadrilateri *abcd*. **<1.4>** Verbi gratia: protractis cathetis *ae* et *bf*, efficitur quadrilaterum parte altera longius *aefb*; cuius area colligitur ex multiplicatione catheti *ae* in *ef*, et *ef* equalis est linee *ab*: ergo *ef* est pertice 8. In quibus multiplicatis perticis 12 |[N, f. 64v] catheti *ae*, red|[M, f. 71r]dunt perticas 96 pro embado quadrilateri *aefb*. |[P, f. 74r] Quo quadrilatero extracto ex quadrilatero *abcd*, remanent |[S, f. 85v] duo |[C, f. 60v] trigona orthogonia et[1025] equalia, que sunt *aec* et *bfd* |[*b*, p. 79]. Multiplicatio enim catheti *ae* in dimidium *ec* reddit aream trigoni *aec*, quare multiplicatio |[L, f. 94v] linee *ae* in totam *ec* reddit embadum duorum trigonorum *aec* et *bfd*, que multiplicatio est 60; qua addita cum 96, scilicet[1026] cum embado quadrilateri *aefb*, reddit 156, ut prediximus, pro area quadrilateri *abcd*. Nam si diametrum *da* vel *cb* invenire volueris, potentiam linee *de* vel *cf*, scilicet 169 cum potentia catheti *ae* vel *bf*, scilicet cum 144, adde: erunt 313, cuius radix est longitudo diametri *da* vel *bc*.

<2.1> Et si punctus in quo se[1027] intersecant diametri habere vis, adde caput cum base: erunt 26. Que in se multiplica: erunt 676. Item caput *ab* in se multiplica: erunt[1028] 64. Et basis in se: erunt 324. Multiplica ergo 64 per quadratum unius diametrorum, scilicet per 313, et divide |[B, f. 48r] summam per 676; |[F, f. 50v] vel quartum de 64[1029], scilicet 16, multiplica per 313, et divide per quartum[1030] de 676, hoc est per 169: exibunt $\frac{3\ \ 8}{13\ 13}29$, quorum radix est linea *ag* vel *bg*. Similiter multiplica quartum de 324, scilicet 81, per 313, et divide summam per quartum de 676, scilicet per 169, et habebis quadratum linee *gc*

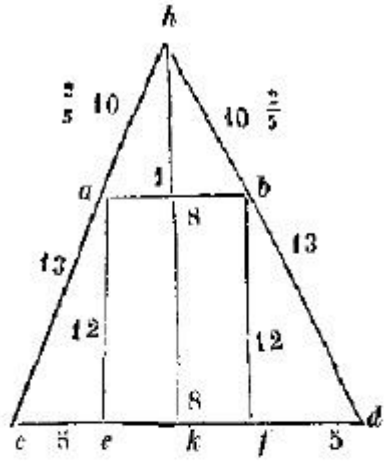
[1023] est C] erit B S M N F, *om. et spatium vacuum reliquerunt* P L
[1024] reddunt F C P L] reddent B S M N
[1025] et B S M N F C L] *om.* P
[1026] scilicet B S N^4 F C P L] similiter M N^1
[1027] se B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1028] 676 – erunt B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1029] vel quartum de 64 B S N^4 F C P L] vel quadratum de 646 M N^1
[1030] scilicet 16 – quartum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

vel[1031] *gd*. **<2.2>** Et nota, quia ideo accepimus quadrata predictarum linearum, quia 313, scilicet quadratum unius diametrorum, non habent[1032] radicem. Nam si diameter rationabilis esset[1033], multiplicavissemus eum per 8 et per 18, et divisissemus summam eorum per 26; et sic haberemus[1034] abscissiones diametrorum. Que omnia volumus geometrice demonstrare. **<2.3>** Quoniam recta *ab* equidistans est linee *cd*, simile est[1035] trigonum *agb* trigono *dgc*; et est angulus ||[L, f. 95r] *abg* angulo *gcd* equalis; et angulus *bag* angulo *gdc*, quare est sicut *ab* ad *bg*, ita *dc* ad *cg*; et permutatim est sicut *ab* ad *cd*, ita *bg* ad *gc*. Similiter est iterum sicut *ab* ad *cd*, ita *ag* ad ||[P, f. 74v] *gd*. Est enim *ab* ex *cd* $\frac{4}{9}$; quare *bg* ex *gc*, vel *ag* ex *gd* sunt ||[M, f. 71v] similiter ||[S, f. 86r] $\frac{4}{9}$. **<2.4>** Et quoniam que disiuncte proportionales sunt, et coniuncte proportionales erunt. Est ergo sicut *ab* ad se et ad *cd*, hoc est[1036] sicut 8 est ad 26, vel 4 ad 13, qui minimi sunt eandem proportionem habentes, ita *bg* est ad totam *bc*, et *ag* ad totam *ad*. Ergo *bg* est ex *bc* $\frac{4}{13}$, et *ag* ex *ad* similiter est ||[N, f. 65r] $\frac{4}{13}$, quare, si ratiocinata[1037], ex diametro *bc* acciperemus[1038] $\frac{4}{13}$ haberemus lineam *bg* vel *ag*. **<2.5>** Reliquum vero *gc* vel *gd* esset $\frac{9}{13}$ ex toto diametro. Sed quia quadratum diametri, scilicet de ||[C, f. 61r] 313, radicem non habet, accepimus quadrata de 4 et de 13, scilicet[1039] 16 et 169; et multiplicavimus 16 per 313 et divisimus per 169, quia cum est sicut *ab* ad se et ad *cd*, ita *bg* ad *bc*: erit itaque sicut quadratum linee *ab* ad quadratum summe iunctionis linearum *ab* et *cd*, scilicet sicut 64 est ad 676, vel sicut quartum de 64 est ad quartum de 676, scilicet 16 ad 169, ita quadratum linee *bg* est[1040] ad quadratum diametri *bc*, scilicet ad 313 et in eadem proportione est quadratum linee *ag*[1041] ad quadratum linee *ad*, quare recta *ag* equalis est recte *bg*: ||[L, f. 95v] habent enim eandem proportionem ad equalia. **<2.6>** Et quoniam cum de

---

[1031] vel B S N[4] F C P L] et M N[1]
[1032] habent S C P L] habet B M N F
[1033] esset B S N[4] F C P L] fuisset M N[1]
[1034] haberemus B S F C] habemus P L, habuissemus M N
[1035] est S F C P L] est ergo B M N
[1036] est S M N F[b] C P L] *om.* B F[a]
[1037] ratiocinata B S N[4] F C P L] *om. et spatium vacuum reliquit* M N[1]
[1038] acciperemus B M N S F L] acciperemus ex eo C P L
[1039] scilicet B S N[4] F C P L] similiter M N[1]
[1040] quadratum – est B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1041] ag S N[4] F C P L] gc B M N[1]

equalibus equalia tolluntur, que remanent sibi invicem equalia sunt[1042], equalis est ergo[1043] recta *gc* recte *gd*, et habent proportionem ad totum diametrum, scilicet ad radicem de 313, sicut *cd* habet ad se et ad *ab* rectam. Que proportio est sicut 9 ad 13, quare proportio quadrati linee *gc* vel *gd* est ad 313, scilicet |[F, f. 51r] ad quadratum diametri, sicut quadratum de 9 est ad quadratum de 13, scilicet sicut[1044] 81 est ad 169. Quare multiplicavimus superius 81 per 313 et divisimus per 169, et habuimus quadratum linee *gc* vel *gd*, que oportebat ostendere.



<3.1> |[P, f. 75r] Nam si linee *ca* et *db* in partes *a b* protrahantur, donec ad punctum *h* con|[*b*, p. 80]currant, |[B, f. 48v] ut in hac alia figura, in qua quadrilaterum *abcd* transmutatur in trigono *hcd*, et volueris scire quantitatem linee[1045] *ah* vel *bh*: dimidium capitis ex dimidio abscissionis basis extrahe[1046], scilicet 4 de 9; super reliquum vero, scilicet super 5, divide multiplicationem dimidii abscisionis capitis |[M, f. 72r] in lineam *ca*, scilicet de 4 in 13: exibunt $\frac{2}{5}$ 10 pro quantitate linee *ah* vel *bh*. **<3.2>** Et si multiplicaveris eadem 4 |[S, f. 86v] per cathetum *ae*, scilicet per 12, et diviseris per 5, exibunt $\frac{2}{5}$ 9 pro catheto trigoni *hab*, scilicet pro linea *ih*: qua protracta usque in punctum *k*, erit tota linea *hk* cathetus trigoni *hcd*. Et quoniam in trigono *hcd* protracta est quedam recta *ab* equidistans basi *cd*, erit trigonum *hab* simile trigono *hcd*, hoc est quod habent[1047] |[L, f. 96r] equales angulos[1048] ad invicem, scilicet angulus *hab* angulo *hcd*, scilicet exterior interiori equalis est; et

[1042] et quoniam – sunt B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1043] ergo B S N^4 F C P L] igitur M N^1
[1044] quadratum – sicut B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1045] linee B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1046] extrahe B S N^4 F C P L] abstrahe M N^1
[1047] habent B S N^4 F C P L] habeat M N^1
[1048] angulos B S M N F^b C P L] *om.* F^a

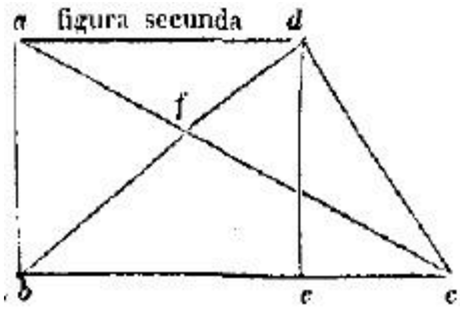
angulus *hba* angulo qui ad *d* |[N, f. 65v] similiter equalis est; comunis autem angulus, qui sub *ahb*.

<4.1> Similia vero trigona circa equales angulos habent latera[1049] proportionalia, ut in Geometria declaratur, quare sicut latus *ha* est ad *ab*, ita *hc* est ad *cd*; et sicut *hb* est ad *ba*, ita *hd* est ad *dc*[1050]; permutatim |[C, f. 61v] ergo sicut *ha* est ad *hc*, ita *hb* est ad *hd*, et *ab* ad *cd*. **<4.2>** Rursus sicut *ab*, scilicet basis trigoni *hab*, est ad basem *cd*, ita latus *ha* est ad latus *hc*, et *hb* ad *hd*, nec non et cathetus *ih* ad cathetum *hk*: ergo que pars est *ab* ex *cd*, scilicet 8 de 18, eadem pars erit *ha*, scilicet $\frac{2}{5}$ 10 ex *ac*, scilicet de $\frac{2}{5}$ 23 et *hb* ex *hd*, et cathetus *ih* ex catheto *hk*. Nam 8 de 18 est $\frac{4}{9}$, quare *ha* ex *hc* et *hb* ex *hd*, nec non et *ih* ex *hk* sunt $\frac{4}{9}$.

<5.1> In hac etiam figura est trigonum *cea* simile trigono *aih*, habent enim[1051] angulos equales[1052]: |[P, f. 75v] angulum siquidem *hia* angulo *aec*, quia uterque ipsorum rectus est; et angulum qui ad *c* angulo *iah*, quia equidistans est linea *ab* linee *cd*. Reliquum ergo qui sub *ahi* reliquo qui sub *cae* est equalis, propter tres angulos cuiuslibet trigoni, qui sunt duobus rectis equales. Est enim sicut *ce*, scilicet 5, ad *ea*, scilicet ad 12, ita *ai*, scilicet 4, est ad *ih*. Quare multiplicavimus |[F, f. 51v – L, f. 96v] superius 4 per 12 et divisimus per 5, et habuimus $\frac{3}{5}$ 9 pro catheto *hi*. **<5.2>** Item sicut *ec* est ad *ca*, scilicet 5 ad 13, ita *ia*, scilicet 4, est ad *ah*. Qua|[M, f. 72v]re multiplicavimus superius 4 per 13, et divisimus per 5, et[1053] habuimus $\frac{2}{5}$ 10 pro linea *ha*[1054]. Per has enim proportiones |[S, f. 87r] investigantur altitudines, et longitudines[1055], et profunditates rerum, ut in suo loco demonstrabimus.

[1049] habent latera B S N^4 F C P L] latera habent M N^1
[1050] dc B M N F C P L] ac S
[1051] enim B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1052] equales B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1053] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1054] item – ha *in mg. sn scr.* N^4
[1055] et longitudines B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

<2>



<1.1> Secundum[1056] vero genus huius tertie differentie[1057] est figura, que “semicaput abscisa” dicitur, cuius duo latera equidistantia sunt, sed non equalia, reliqua vero duo inequalia; quorum unum elevatur supra basem secundum rectum angulum, faciens similiter rectum angulum cum capite abscissionis, reliquum vero latus elevatur ab alia parte basis secundum acutum angulum, ut quadrilaterum *abcd*, cuius latus *ad*, scilicet caput, est[1058] equidistans |[B, f. 49r] basi *bc*, cuius longitudo est pertice 18; basis *bc* perticarum 30; cathetus *ab* 16; latus quoque[1059] *dc* 20. **<1.2>** Ad habendam ergo aream totius quadrilateri, adde 18 cum 30, scilicet caput cum base: erunt |[N, f. 66r] 48; quorum medietas, scilicet 24, multiplica per lineam *ab*, scilicet per 16 ideo quia ipsa erigitur orthogonaliter: erunt pertice 384 in embado quadrilateri a*bcd*. **<1.3>** Verbi gratia: super rectam *bc* a puncto *d* cathetus *de* protrahatur: erit quidem quadrilaterum *abcd* in duo divisum, scilicet in quadrilaterum *abed* parte altera longius, et in trigono |[P, f. 76r] *dec* orthogonium; et est *be* equalis *ad*, et *ad* |[C, f. 62r] est 18, et |[L, f. 97r] *be* est similiter 18; et *de* cathetus catheto *ab* est equalis, est enim uterque illorum 16: area ergo quadrilateri *abed* est 288, que colligitur |[*b*, p. 81] ex multiplicatione *de* in *eb*, hoc est de 16 in 18; area quidem trigoni *dec* colligitur ex multiplicatione catheti *de* in dimidium *ec*, scilicet 16 in 6: faciunt 96, quibus additis cum 288, scilicet cum embado quadrilateri *abed*, reddunt 384 pro embado quadrilateri *abcd*, ut predixi[1060].

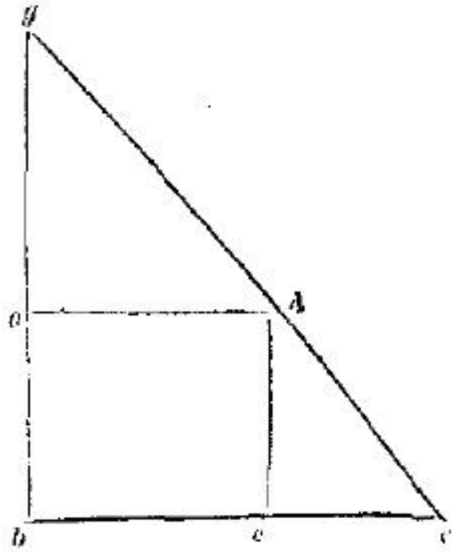
[1056] secundum B S F C P L] sub secundum M N
[1057] differentie B S N[4] F C P L] distinctionis M N[1]
[1058] est B S N[4] F C P L] cum base erunt 48 est M N[1]
[1059] quoque B[b] S M N F[b] C P L] *om.* B[a] F[a]
[1060] predixi B S N[4] F C P L] prediximus M N[1]

<2.1> Et si diametrum *ac* habere vis, quia orthogonium est trigonum *abc*, adde potentias linearum *ab* et *bc*, scilicet 256[1061], cum 900: erunt 1156, cuius radix, scilicet 34, est longitudo diametri *ac*. Item ut habeas diametrum *bd*[1062], adde potentiam catheti *de* |[M, f. 73r] cum potentia basis *eb*, scilicet 256 cum 324: erunt 580, quorum radix, que est surda, est longitudo diametri *bd*, quare dicemus diametrum |[S, f. 87v] *bd* radicem esse de 580[1063], vel quadratum diametri *bd* esse 580. **<2.2>** Sed ut scia|[F, f. 52r]mus intersecationem diametrorum, faciemus ut supra, videlicet addemus caput cum base, scilicet 18 cum 30, erunt 48: est ergo sicut 18 ad 48, ita *af* est ad totum diametrum *ac*. Nam 18 ad 48 est sicut 3 ad 8, quare est sicut 3 ad 8, ita *af* est ad *ac*, quare multiplicabimus[1064] 3 per 34, et dividemus per 8, hoc est 3 per 17, et dividemus per 4: exibunt $\frac{3}{4}$ 12 pro linea *af*. Reliquum |[L, f. 97v] quod est usque in 34, scilicet $\frac{1}{4}$ 21, est linea *fc*. **<2.3>** Similiter quia[1065] simile est *afd* trigono *bfc*, erit sicut *af* ad *ac*, hoc est sicut 3 est ad 8, ita *df* est ad *db*; ergo *df* ex *db* est $\frac{3}{8}$: remanet *fb* $\frac{5}{8}$ ex *db*. Sed quia surda est[1066] linea *db*, accipiemus [1067] proportionem earum in quadratis ipsorum. Est ergo sicut quadratum de 3 ad quadratum de 8, hoc est sicut 9 est ad 64, ita ad quadratum diametri *bd*, scilicet ad 580 est quadratum linee *df*: quare multiplicabimus 9 per 580, et dividemus summam per 64; vel multiplicabimus 9 per quartum[1068] de 580, scilicet per 145, et dividemus summam per quartum[1069] de 64, scilicet per 16; quia[1070] |[N, f. 66v] semper debemus imitari modum evitationis, quem in Libro Abaci [1071] docuimus, scilicet accipere |[P, f. 76v] minimos numeros eandem proportionem habentes in multiplicationibus et divisionibus. Est enim 580 ad 64, sicut quarta de 580[1072] ad quartam de 64: exibunt |[C, f. 62v] $\frac{9}{16}$ 81 pro quadrato

---

[1061] 256 S N^4 F C P L] 259 B M N^1
[1062] bd B S F C P L] ad M N
[1063] quorum radix – 580 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1064] multiplicabimus B S F C P L] multiplicavimus M N
[1065] quia B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1066] surda est B S N^4 F C P L] est surda M N^1
[1067] accipiemus B S N^4 F C P L] accipimus M N^1
[1068] quartum B S N^4 F C P L] quadratum M N^1
[1069] quartum B S N^4 F C P L] quadratum M N^1
[1070] quia B S N^4 F C P L] quare M N^1
[1071] In libro abaci *in mg. dx scr.* P
[1072] ad – 580 B S M N F^b C P L] *om.* F^a

linee *df*. **<2.4>** Rursus |[B, f. 49v] quia linea *fb*[1073] est $\frac{5}{8}$ ex diametro *bd*, multiplicabis quadratum de 5, scilicet 25, per 145, et dividemus summam per 16: exibunt $\frac{9}{16}$ 226 pro quadrato linee *fb*.



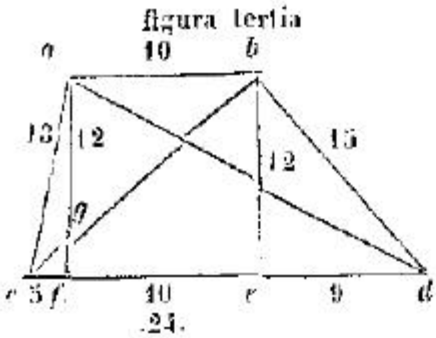
<3.1> Nam si in partes *a* et *d* recte *ba* et *cd* protracte fuerint, donec se tetigerint in punctum *g*, ut in hac alia figura ostenditur, et volueris scire quantitatem linee *ag*, multiplica quidem *ed* per *da*, scilicet 16 per 18, et divide per *ce*, scilicet per 12: exibunt 24. **<3.2>** Est enim simile trigonum |[L, f. 98r] *dec* trigono *gad*; quare est sicut *ce* ad *ed*, ita *da* ad *ag*: pro[1074] equale enim erit sicut *ec* est ad *cd*, ita *ad* est ad *dg*, quare multiplicato[1075] |[M, f. 73v] *cd*, scilicet 20, per *da*, scilicet per 18, et diviso per *ec*, reddit 30 pro quantitate *dg*, ut suprascripta figura |[S, f. 88r] ostenditur.

<3>

<1.1> Tertium vero[1076] genus ex hac tertia differentia est figura, que “diverse caput abscisa” dicitur, cuius caput et basis equidistantia et inequalia sunt. Reliqua vero latera elevantur supra basem secundum acutum angulum, et sunt inequalia, ut quadrilaterum *abcd*, cuius caput *ab* est perticarum 10 et est equidistans basi |[F, f. 52v] *cd*, que est perticarum 24; latus quoque *ac* est 13; latus

[1073] fb B S N^4 F C P L] fg M N^1
[1074] pro C P L] per B S M N F
[1075] multiplicato B S N^4 F C P L] multiplicatio M N^1
[1076] vero B S F C P L] ergo M N

vero *bd* 15. Huius enim figure embadum colligitur ex multiplicatione catheti, qui deducitur[1077] a capite in basem, in dimidium capitis et basis.

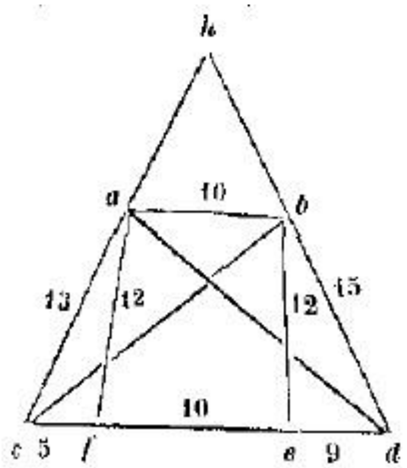


<1.2> Nam si ipsam cathetum a puncto *a* vel a puncto *b* supra basem *cd* protrahere volueris, oportet primum invenire casus ipsarum cathetorum. Quorum inveniendi modus est, ut extrahas caput a base, scilicet 10 de 24: remanent 14; de|[*b*, p. 82]inde extrahe |[P, f. 77r] potentiam lateris *ac*, scilicet 169, ex potentia lateris *bd*, scilicet de 225: remanent 56; que divide per 14 suprascripta: exibunt 4; que adde cum 14: erunt 18, cuius dimidium, scilicet 9, est casus longior *de* a parte lateris *bd*; a quibus[1078] 9 usque in 14 desunt 5, que sunt casus brevior *fc* a latere *ac*, ut in trigonis acutiangulis diximus. **<1.3>** Extracta quidem potentia minoris casus, scilicet ex *cf*[1079], que est 25, ex potentia lateris *ac*[1080], scilicet |[L, f. 98v] ex 169, remanent 144, cuius radix, scilicet 12, est cathetus *af*. Similiter extracta potentia |[N, f. 67r] *ed* ex potentia *bd*, remanebit potentia *be* 144; quare *be* est 12, sicut *af*. Addictio quidem capitis et basis, scilicet 10 et 24, faciunt 34, quorum dimidio, scilicet 17, multiplicato |[C, f. 63r] per cathetum *af*, vel *be*, scilicet per 12, reddunt 204 pro embado quadrilateri *abcd*.

<2.1> Quadratum quoque diametri *cb* colliges, si quadratum linee *ce* cum quadrato catheti *eb* coadunaveris, et est 369, quorum radix est diameter *cb*. **<2.2>** Nam si ubi intersecat cathetum *af* scire desideras, hoc dupliciter facere potueris: primum quidem quia equidistans est linea *ab* linee *cf*, est sicut *ab* ad se |[S, f. 88v] et ad *cf*, ita *ag* est |[M, f. 74r] ad *af*; ergo *ag* est $\frac{2}{3}$ ex *af*, scilicet 8: remanet *gf* 4. **<2.3>** Sunt enim similia trigona *agb* et *cgf*. Similiter et *bg* est |[B, f. 50r] $\frac{2}{3}$ ex *bc*,

[1077] qui deducitur B M N F C P L] quod ducitur S
[1078] 9 – quibus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1079] cf B S N^4 F C P L] ef M N^1
[1080] ac B S N^4 F C P L] ae M N^1

scilicet[1081] quadratum eius est $\frac{4}{9}$ ex quadrato ipsius diametri, quare multiplica 4 per 369, et divide per 9; vel nonam de 369 multiplica per 4: erunt 164 pro quadrato linee *bg*. Et quia *bg* est $\frac{2}{3}$ ex *bc*, remanet *gc* $\frac{1}{3}$ ex *bc*[1082]: quare quadratum eius est $\frac{1}{9}$ de 369, scilicet 41.

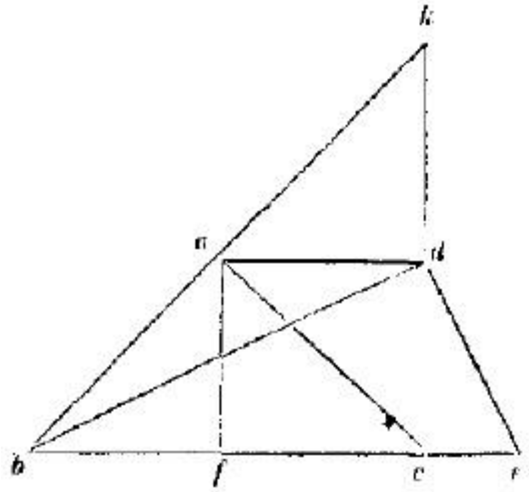


<3.1> Aliter[1083] quia similia sunt trigona *ceb* et *cfg*, est sicut *cf* ad *ce*, ita *fg* ad *eb*, scilicet tertia pars: ergo *fg* est 4, ut predixi. Similiter propter eandem et *cg* est $\frac{1}{3}$ ex *cb*, et cetera. **<3.2>** Possumus enim, secundum ea que dicta sunt in hac parte, |[L, f. 99r] etiam et in trigonis reperire diametrum *da*, et scire ubi intersecat cathetum *be*, nec non ubi se secat[1084] cum diametro *bc*. Etiam si ab angulis *c d*, |[P, f. 77v] vel ab ali|[F, f. 53r]quo puncto dato super rectam *cd*, vel intus, vel extra figuram protraheretur linea super datas partes laterum *db* vel *ca*, et emitteretur extra figuram pariter cum linea *ab*, donec insimul coniungerentur, possumus scire punctum coniunctionis ipsarum, nec non et quantitatem linearum protractarum. **<3.3>** Nam si latera *ca* et *db* extra educere volueris, donec ad punctum *h* concurrant, caput, scilicet 10, ex base, scilicet de 24 extrahe; per reliquum, scilicet per 14, divide multiplicationem capitis *ab* in latus *ac*, scilicet de 10 in 13: exibunt $\frac{2}{7}$ 9 pro linea *ah*. Similiter si diviseris multiplicationem *ab* in *bd*, scilicet de 10 in 15, per 14, venient $\frac{5}{7}$ 10 pro longitudine linee *bh*.

[1081] scilicet S F C P L] similiter B M N
[1082] bc B S M N F] ae C P L
[1083] aliter B S N[4] F C P L] similiter M N[1]
[1084] cathetum – secat B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]

<4>

<1.1> Quartum vero genus est figura, que “caput abscisa declinans” dicitur, cuius caput et basis sunt inequalia et equidistantia; ex reliquis duobus lateribus |[N, f. 67v] unum supra basem elevatur secundum acutum angulum, reliquum super eandem basem facit angulum amplum, ut in quadrilatero *abcd* subscripto, cuius caput *ad* est pertice 12, basis vero *bc* pertice 16, latus quoque |[S, f. 89r] *ab* pertice 15, latus quoque *dc* pertice 13: hec etiam figura colligitur ex multiplicatione catheti |[C, f. 63v] in dimidium capitis et ba|[M, f. 74v]sis ipsius.



<Figura quarta>

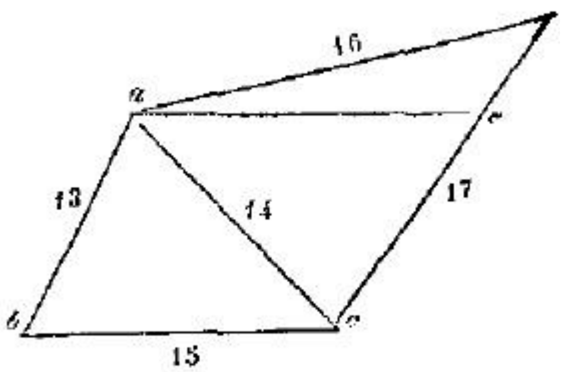
<1.2> Nam a puncto *a* supra basem *bc* cathetus cadit infra quadrilaterum *abcd*; |[L, f. 99v] a puncto vero *d* cathetus cadet extra, quare ut inveniamus quantitatem catheti interioris vel exterioris, oportet ut inveniatur primum casus ipsius, cuius inveniendi modus est ut extrahatur caput a base, scilicet 12 de 16, remanent 4; quorum potentia, scilicet 16, addatur cum potentia lateris *cd*, scilicet cum 169: erunt 185; que extrahantur ex potentia *ab*, scilicet de 225: remanent |[*b*, p. 83] 40, quorum dimidium, scilicet 20, dividenda sunt per suprascripta 4: exibunt 5 pro exteri|[P, f. 78r]ori casu *ce*, ut in trigono ampligonio demonstravimus. **<1.3>** Quibus 5 additis cum base *cb*, scilicet cum 16, reddunt 21 pro tota linea *eb*. Ex qua extractis 12, que sunt quantitas capitis, remanent 9 pro quantitate casus *fb* interioris, quare extracta potentia [ex *fb*], scilicet 81, ex potentia lateris *ba*, scilicet ex 225; vel extracta |[B, f. 50v] potentia *ce*, scilicet 25, ex potentia *cd*, scilicet ex 169, remanebunt 144 quorum radix, scilicet 12, est cathetus *af* vel *de*: quibus scilicet 12 multiplicatis per dimidium capitis et basis, scilicet per 14, reddunt perticas 168 pro area totius quadrilateri *abcd*.

<1.4> In similibus quoque |[F, f. 53v] figuris, que capita declinantia nuncupantur, duo catheti que producuntur ab angulis capitis in basem, quandoque una cadit interius, et alia exterius, ut in suprascripta[1085] figura. Quandoque una cadit interius super angulum basis, qui oppositus est ei angulo a quo cathetus producitur, et alia cadit exterius; quandoque utreque cadunt exterius, ut in his subscriptis figuris ostenditur, quarum figurarum catheti inveniuntur, secundum quod superius demonstravimus.

<2.1> Quadratum quidem ex *be* est |[L, f. 100r] 441, et *ed* est 144; quibus in unum coniunctis faciunt 585 pro quadrato diametri *bd*. Item quadrato linee *cf*, scilicet 49, addito cum quadrato |[N, f. 68r] catheti *fa*, scilicet cum 144, egredientur 193 pro quadrato diametri |[S, f. 89v] *ac*. Secationem vero diametrorum per ea que superius dicta sunt habere potes. **<2.2>** Verum si in partes *a d* latera *ba* et *cd* in punc|[M, f. 75r]to *k* protraxerimus, erit quidem *ka* ad *kb*, et *kb* et *kd* ad *kc*, sicut *ad* est ad *bc*, hoc est $\frac{3}{4}$, quare *ab* ex *kb*, et *dc* ex *kc* sunt quarta pars. Ergo *ka* est triplum ex *ab*, et *kd* ex *dc*, quare *ka* est 45, et *kd* est 29.

<4>

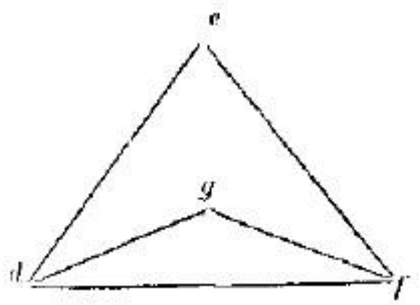
Incipit pars quarta tertie differerentie in dimensione quadrilaterum diversorum laterum[1086]



[1085] in suprascripta B S N^{4} F C P L] insimul proscripta M N^{1}

[1086] incipit – laterum C P L] *desunt* B S M N, *om. et spatium vacuum reliquit* F

<1.1> Si quadrilateri latera nequaquam equidistantia fuerint, ut in quadrilatero |[P, f. 78v] *abcd*, cuius latus *ab* est pertice 13, latus quoque *bc* sit pertice 15, latus quoque *dc* pertice 17, latus quoque[1087] *da* pertice 16: quod quadrilaterum mensurari potest?[1088] Si habeatur notitia |[C, f. 64r] unius diametrorum, a quo ipsum quadrilaterum dividitur in duo trigona, quorum area in unum coniuncta reddit aream totius quadrilateri. **<1.2>** Verbi gratia: sit diameter *ac* pertice 14, eritque area trigoni *abc* pertice 84; trigoni *acd* pertice $\frac{1}{3}$ 104: quibus areis in unum coniunctis reddunt $\frac{1}{3}$ 188 pro embado totius quadrilateri *abcd*. Et est hic modus universalis in omnibus quadrilateribus. **<1.3>** Vel aliter, a puncto *a* protrahatur recta *ae* equidistans lateri *bc*: et secundum ea que dicta sunt in precedenti parte[1089] accipiatur area quadrilateri *abce*, cui superaddatur |[L, f. 100v] triangulus *ade*: et habebitur area totius quadrilateri *abcd*.



<2.1> Preterea est figura, que barbata[1090] dicitur, similiter diversa[1091] habens latera, in qua una ex diametris cadit interius, altera vero exterius, ut in quadrilatero *defg*, cuius diameter *eg* cadit interius; a puncto *f* in puncto *d*, cadit linea *fd* extra quadrilaterum *defg*. **<2.2>** Huius itaque figure aream habebis, si aream |[F, f. 54r] trigoni *deg* cum area trigoni *feg* coadunaveris, vel si ex area trigoni *def* dempseris aream trianguli[1092] *dgf*.

Explicit pars secunda[1093] tertie distinctionis[1094] de dimensione camporum quatuor latera habentium[1095].

[1087] quoque B S N^4 F C P L] vero M N^1

[1088] quadrata diversorum laterum *in mg. dx scr.* L

[1089] parte B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

[1090] barbata B S F M N] barbara C P L

[1091] diversa B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

[1092] trianguli B S N^4 F C P L] trigoni M N^1

[1093] secunda S N^4 F C P L] *om.* B M N^1

[1094] tertie distinctionis C P L] *desunt* B S M N F

[1095] explicit – habentium S N^4 F C P L] *om.* B M N^1

<III>

Incipit pars tertia in dimensione camporum[1096] plura latera quam quatuor habentium. Distinctio tertia[1097].

<1>

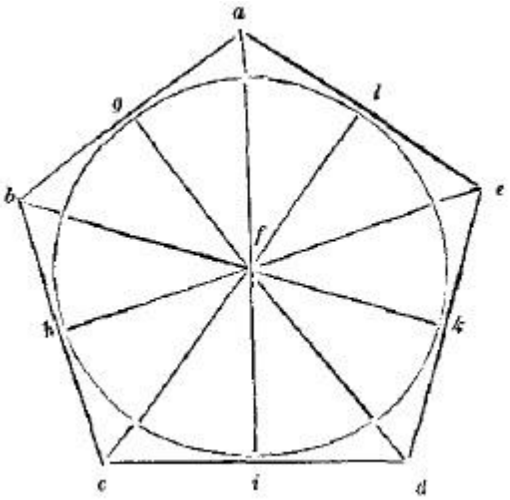
<1> |[S, f. 90r] Modus itaque metiendi multilateras figuras est, ut dividas ipsas |[N, f. 68v] in trigona[1098], et areas omnium trigonorum in unum colligas: et sic |[B, f. 51r] habebis aream cuiuslibet[1099] multilatere figure. Et notandum quia |[P, f. 79r] multilatera fi|[M, f. 75v]gura, que constat ex quinque lateribus, solvitur ad minus in tria trigona, que vero constant ex sex lateribus in quatuor: et sic semper omnis multilatera figura solvitur in duo trigona minus numero[1100] laterum ipsius. Et quamvis |[*b*, p. 84] per resolutionem ipsarum in trigona multilatere figure mensurari[1101] possint, tamen quandoque subtilius in quibusdam procedere possumus. **<2>** Scilicet cum figura fuerit penthagona, hoc est ex quinque lateribus, et poteris ex ea facere duo petia, quorum unum erit trigonum et alterum fit[1102] quadrilaterum, in quo duo[1103] latera ipsius erunt equidistantia, ut in penthagono *abcde*, ex quo absciso trigono *abe*, remanet quadrilaterum *ebcd*[1104] |[L, f. 101r] caput abscisum, cuius *bc*[1105] latus equidistans est lateri *ed*[1106]. Tunc colliget[1107] aream trigoni *abe*, et addes eam cum area quadrilateri *bcde*, et habebis aream penthagoni *abcde*. **<3>** Similiter cum possibile fuerit de exagono, scilicet ex figura que habet sex latera, facies duo quadrilatera, quorum unumquodque habeat duo |[C, f. 64v] latera equidistantia; vel faciat inde unum quadrilaterum,

---

[1096] camporum S M N F C P L] *om.* B
[1097] distinctio tertia C L] distinctione tertie P, *desunt* B S M N F
[1098] trigona S C P L] trigonos B M N^1, trigono N^4 F
[1099] cuiuslibet B S N^4 F C P L] cuiuslibet et M N^1
[1100] numero S C P L] *deest* B M N F
[1101] mensurari S M N C P L] mensurare B F
[1102] fit B M N F C L P] *om.* S
[1103] duo S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
[1104] ebcd B S M N F C L] ebcd tunc P
[1105] bc S C P L] be B M N F
[1106] ed S C P L] cd B M N F
[1107] colliget S N^4 F C P L] colliges B M N^1

quod habeat duo latera sibi invicem equidistantia, et duo trigona: et sic studeat[1108] in reliquis figuris multilateribus operari.

<2>

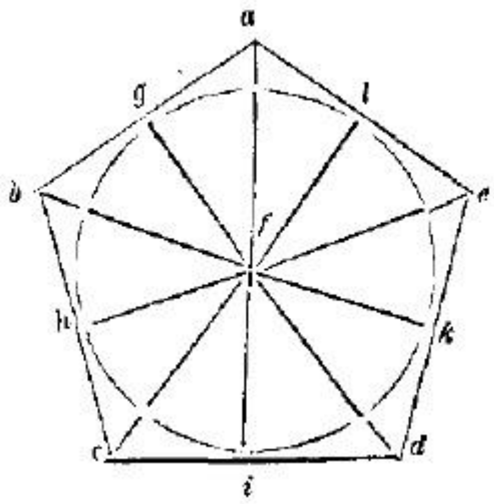


<1.1> Verum si figura multilatera fuerit equilatera et equiangula, quam metiri desideras, aliter quam dictum sit, poteris ad ipsius embadum pervenire, cum in ipsa cadat circulus contigens medium uniuscuiusque laterum ipsius. Multiplicabis itaque[1109] semidiametrum ipsius circuli per dimidium laterum ipsius figure, et habebis embadum ipsius. **<1.2>** Ad cuius rei evidentiam adiaceat penthagonum equilaterum et equiangulum *abcde* in quo volumus describere cir|[S, f. 90v]culum contingentem laterum ipsius, quod sic fit: dividam angulos *eab* et *abc* in duo equa a duabus lineis *af* et *fb*, et protraham lineas *fc*, *fd*, *fe*; et signabo puncta *g*, *h*, *i*, *k*, *l* in medio laterum ipsius, et copulabo lineas *fg*, |[P, f. 79v] *fh*, *fi*, *fk*, *fl*, quas demonstrabo esse sibi invicem |[M, f. 76r] equales. **<1.3>** Quoniam equiangulum est penthagonum *abcde*, erit angulus *fab* equalis angulo |[N, f. 69r] *fba*, cum sint[1110] dimidium angulorum penthagoni. Quare trigonum *fab* est equicrurium, habens latera equales angulos subtendentia sibi invicem equalia, quare equalis est recta *fa* recte *fb*, et *fg*[1111] |[L, f. 101v] quare[1112] cathetus super

---

[1108] studeat S N[4] F C P L] studeas B M N[1]
[1109] itaque B M N C P L] ita S F
[1110] sint B F[b]] sit S C P L, *om.* M N F[a]
[1111] fg] fg que B S M N F C P L
[1112] quare C P L] que est B M N F, *om.* S

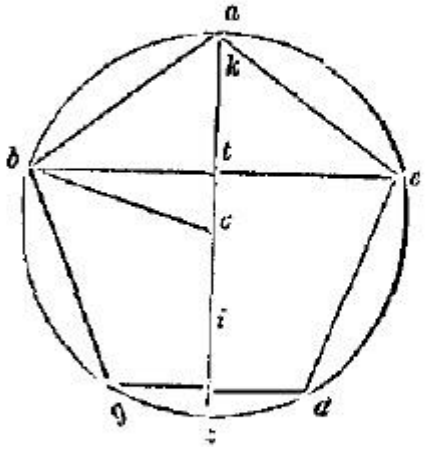
lineam *ab*, |[F, f. 54v] cum cadat in medio ipsius: est enim[1113] *la*, cum sit medietas recte *ae*, equalis recte *ag*. **<1.4>** Comuniter adiaceat recta *fa*: erunt due recte *ga* et *af* equales duabus rectis *fa* et *al*; et angulus qui sub *gaf* equalis est angulo qui sub *fal*, quare et basis *fl* equalis est basi *fg*; et angulus *afl* equalis est *afg* angulo *agf*. Rectus qui sub *agf*, et qui sub *alf* erit rectus, quare recta *fl*[1114] cathetus est |[B, f. 51v – *b*, p. 85] super rectam *ae*. Et quia *al* equalis est recte *el*, si comuniter adiaceat recta *fl*, erunt duo recte *fl* et *la* equales duabus rectis *fl* et *le*[1115], et anguli qui ad *l* sunt equales, cum rectus[1116] sit uterque eorum, quare recta *fe* equalis est recte *fa*; et trigonum *afl* equale est trigono *lfe*, et totum trigonum *bfa* est equale toti trigono[1117] *afe*.



<2.1> Similiter ostendetur, quamlibet rectarum *fh*, *fi*[1118], *fk*, equalem esse cuilibet rectarum *fg*, *fl* quare, centro *f*, spatio unius rectarum *fg*, *fh* describetur circulus *ghikl*, et erit penthagonum *abcde* divisum in quinque trigona equalia, que sunt *fab*, *fbc*, *fcd*, *fde*, *fea*; et catheti cadentes in ipso sibi i|[C, f. 65r]nvicem sunt equales, qui sunt *fg*, *fh*, *fi*, *fk*, *fl*. **<2.2>** Et quia ex ductu *fg* in dimidium *ab* provenit area trigoni *fab*, si multiplicaverimus semidiametrum circuli cadentis in penthagono, scilicet *fg*, in quincuplum medietatis *ab*, hoc est[1119] in medietate

[1113] *Post* enim *spatium vacuum reliquerunt* F C P L
[1114] afg – fl B S N^4 F C P L] angulo afg et afg rectus qui sub afg et g sub alf erit rectus quare recta fl M N^1
[1115] et le B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1116] rectus B S M N^1 C P L] recta F N^4
[1117] lfe – trigono B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1118] fi B S M N F C] fc L P
[1119] est S M N F C P L] *om.* B

laterum penthagoni[1120] |[P, f. 80r], proveniet[1121] quincu|[S, f. 91r]plum aree trigoni *fab*, hoc erit area penthagoni *abcde*, ut prediximus.

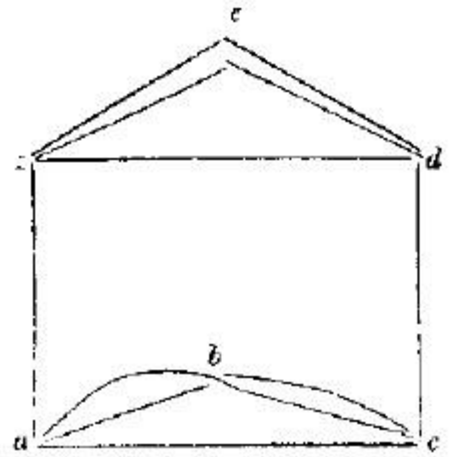


<3.1> Similiter veniet in omni figura equilatera |[L, f. 102r] et equiangula, in qua cadat[1122] circulus. Ex hoc enim manifestum est, quod multiplicatio semidiametri circuli in plus medietate linee cir|[M, f. 76v]cumferentis facit plus embado ipsius circuli. **<3.2>** Possumus autem penthagonum equilaterum et equiangulum alio modo metiri, cum cadat in circulo contingente omnes angulos ipsius. Multiplicetur quidem medietas[1123] et quarta ipsius diametri, per medietatem[1124], et[1125] tertiam corde anguli penthagonici, et habebis embadum ipsius. **<3.3>** Ad cuius rei evidentiam, sit penthagonum *abgde* descriptum in circulo[1126] *abgde*, cuius diameter |[N, f. 69v] sit *az*, et centrum eius sit *c*; et copuletur recta *be*, que est corda anguli penthagonici *bae*; et accipiatur *ci* medietas semidiametri *cz*: et erit tota *ai* medietas et quarta totius diametri *az*. Et sit sicut *ai* ad *ac*, ita *te* ad *tk*. **<3.4>** Est enim *ac* ex *ai* due tertie: similiter et *tk* est due tertie ex *te*, hoc est ex *tb*; equalis quidem est *bt* ex *te*, quare *tk* est tertia pars totius corde *be*, quare *bk* est medietas et tertia corde *be*. Dico quidem quod ex multiplica|[F, f. 55r]tione *ai* in *bk* provenit embadum penthagoni *abgde*, quod sic probatur: quia[1127] est sicut *ia* ad *ac*, ita *te* ad *tk*, erit multiplicatio *ca* in *te*, hoc est in *tb*, equalis multiplicationi *ia* in *tk*. Sed ex multiplicatione *ca* in *bt* provenit duplum trigoni

[1120] penthagoni S F C P L] penthagoni abcde B M N
[1121] proveniet S F C P L] provenit B M N
[1122] cadat S F C L] cadit B M N P
[1123] idest dodrans *in mg. dx scr.* B[2] *in mg. sn.* F[2]
[1124] idest destunce *in mg dx scr.* B[2] *in mg. sn.* F[2]
[1125] et B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1126] sit penthagonum – circulo B S M N F C L] *om.* P
[1127] quia B S N[4] F C P L] quare M N[1]

cba: ergo ex ductu[1128] *ai* in *tk*[1129] provenit duplum trigoni *cba*[1130]. **<3.5>** Et quia *tk* dupla est ex *ek*, si multiplicaverimus *ia* in *ek*, proveniet equale trigono *cba*, quod est quinta pars totius penthagoni |[L, f. 102v] *abgde*, quare si multiplicaverimus *ai* in *bk*, scilicet[1131] quincuplum ex *ke*, proveniet utique |[B, f. 52r] quincuplum aree trigoni *cba*. Sed quincuplum trigoni *cba*[1132] est equale penthagono *abgde*: ergo ex ductu |[S, f. 91v] *ai* in *bk* provenit embadum penthagoni *abgde*, ut |[P, f. 80v] predixi.

<4.1> Et notandum, quod si diameter circuli fuerit ratiocinatus, tunc latus penthagonicum[1133], cadens in ipso, erit linea minor[1134], scilicet radix recisi quarti, vel abscisionis quarte, que abscisio constat ex numero |[C, f. 65v] minus radice: quorum duorum nominum, maius nomen potest super minus, eo quod ab incommensurabili sibi longitudine. Et corda anguli penthagonici erit linea maior, scilicet radix binomii quarti, quod constat ex numero et radice, cuius maius nomen [1135] potest plus minore, eo quod |[M, f. 77r] ab incommensurabili sibi longitudine. Et <radices> sunt eorundem nominum latus penthagonicum et corda anguli penthagonici. **<4.2>** Ut si latus penthagonicum *ab* fuerit radix de 40 minus radice de 320; et corda *be* erit radix de 40, et radicis de 320[1136], et hoc est cum diametrum *az* ponimus esse 8[1137], ut in suo demonstrabitur loco.



[1128] ductu B S N^4 F L] ducta P, ducto C, *om.* M N^1
[1129] tk B C P] btk N^4 F S (tbk S), bt L, *om.* M N^1
[1130] ergo – cga B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1131] scilicet B M N F C P L] simul S
[1132] sed – cba B S N^4 F C L] *om.* M N^1 P
[1133] penthagonicum B S F P L] penthagoni M N C
[1134] minor S M N P L] maior B F C
[1135] maius nomen S C P L] nomen maius B M N F
[1136] et corda – 320 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1137] 8 B S M N C P L] z F

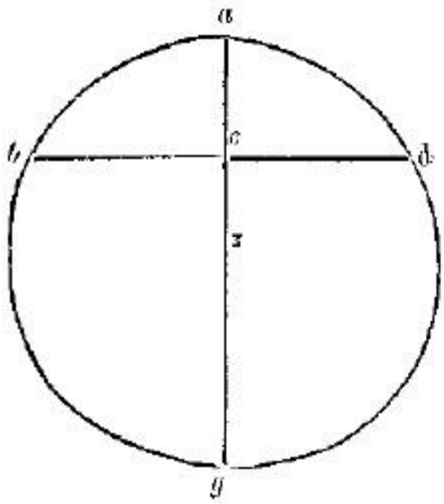
<5.1> |[*b*, p. 86] Si vero campus rectilineus non fuerit, ut quadrilaterum[1138] *abcdez*, cuius duo latera *az* et *cd* sunt rectilinea, reliqua vero *abc* et *dez* sunt curva, qualiter ipsum etiam et similia mensurari debeas, indicabo. **<5.2>** Ex *a* quidem in *c* et ex *z* in *d* recte protrahantur *ac* et *dz*; deinde quadrilateri *acdz* rectilinei aream, secundum ea que dicta sunt, colligere studeas. Super quam aream ventris *zed* superadde; |[N, f. 70r] ex quo toto diminuas aream ventris *abc*. Et habebis aream quesiti campi. **<5.3>** Nam |[L, f. 103r] qualiter habeatur area ventris *zed* indicabo: super dimidium arcus *zed* punctum *e* fige[1139]; et copulabis rectas *ez*, *ed*[1140]. Et erit trigonum *ezd* rectilineum, et remanebunt ex toto ventre *zed* ventres *zge* et *eid*[1141]. In unoquoque quorum, si eodem modo trigona rectilinea ordinaveris, remanebunt ventres quatuor, quos solveris[1142] eos in triangulos rectilineos[1143]. Et hoc eodem modo si semper fiet in reliquis ventribus, veniet aliquando quod ex toto ventre *zed* non remanebit aliquid sensibile: unde si aream |[S, f. 92r] omnium trigonorum contentorum infra ventrem *zed* coniunxeris, habebis siquidem aream ventris |[F, f. 55v] *zed*. Similiter |[P, f. 81r] si eodem modo processeris[1144] in ventre *abc*, habebis utique aream ipsius.

<IV>

Incipit pars quarta in dimensione circulorum et eorum partium[1145]

<1.1> Cum itaque campum[1146] rotundum, idest circulum, mensurare desideras, ipsius diametri notitiam habeas; quem in $\frac{1}{7}$ 3 multiplica, vel ipsum[1147] in 22 extende et quod ex multiplicatione provenerit[1148] per 7 partire, et habebis quantitatem linee circumferentis, et continentis ipsum circulum.

[1138] quadrilaterum B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[1139] e fige S F C P L] fige e B M N
[1140] ezed B M N F C P L] czed S
[1141] eid S F C P L] ead B M N
[1142] solveris B M N F] si solveris C P L, si volueris S
[1143] rectilineos B S M N F^{b} C P L] lineos F^{a}
[1144] processeris B S M N F] processerimus C P L
[1145] incipit – partium B S M N F] *om.* C P L
[1146] campum B M N F C P L] caput S
[1147] ipsum S N^{4} F C P L] *deest* B M N^{1}
[1148] provenerit B S N^{4} F C P L] provenit M N^{1}



<1.2> Cumque[1149] dimidium diametri per dimidium circumferentis linee duxeris, nimirum area ipsi|[M, f. 77v]us circuli inde proveniet[1150]: vel ex quadrato sui diametri undecim quartas de|[C, f. 66r]cimas accipe, et habebis similiter |[B, f. 52v] circuli embadum. **<1.3>** Vel si secundum pisanum modum mensurare desideras, diametrum in se multiplica, et quod provenerit[1151] divide per 7, et habebis panora embadi ipsius circuli. **<1.4>** Et ut[1152] hec omnia apertius declarentur, adiaceat circulus *abgd*, in quo |[L, f. 103v] sumantur duo puncta *b d*, et copuletur recta *bd*; et dividatur in duo equa super *e* punctum[1153], a quo protrahatur recta *ag* faciens rectos angulos cum recta *bd*; et erit utique recta *ag* diameter circuli, in cuius dimidio est centrum ipsius circuli, quod sit *z*. **<1.5>** Et ponamus diametrum *ag* esse 14 perticarum; que si multiplicaverimus per $\frac{1}{7}$ 3, provenient pertice 44 pro linea circumferente *abgd*, que vocatur periferia. Vel 14 per 22 multiplica, et quod provenerit divide per 7, et venient similiter 44 pro curva *abgd*; cuius dimidium, scilicet 22, si per dimidium diametri multiplicaveris[1154], provenient |[N, f. 70v] 154 pro embado circuli *abgd*. Vel si de quadrato diametri, quod est 196[1155], acceperis $\frac{11}{14}$, scilicet multiplicabis 196 per 11, et divides per 14, vel quartam decimam partem de 196, que est 14, extende per 11, et provenient similiter 154 pro embado ipsius. Similiter si diametrum in se multiplicaverimus, erunt 196; quibus |[S, f. 92v]

[1149] cumque S C P L] cum B M N F
[1150] proveniet B S N^4 F C P L] provenit M N^1
[1151] provenerit B S N^4 F C P L] provenit M N^1
[1152] ut B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1153] e punctum B M N F C P L] punctum e S
[1154] multiplicaveris S M N F C P L] multiplicaverimus B
[1155] quod est 196 B M N F C P L] *om.* S

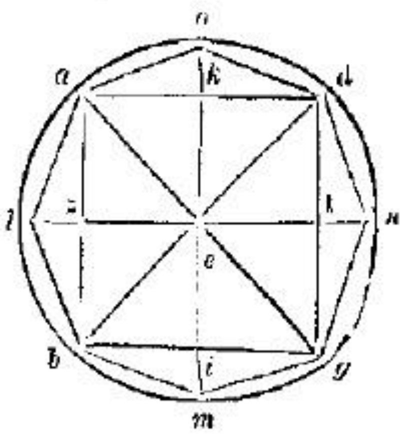
divisis per 7, venient panora 28 pro embado circuli *abgd*, quibus equantur pertice[1156] 154 superius invente; cum unumquodque panorum contineat perticas $\frac{1}{2}$ 5.

<2.1> Et ‖[P, f. 81v] si per notitiam circumferentis linee diametrum circuli habere desideras, ipsam in $\frac{1}{7}$ 3 divide, hoc est septuplum eius divide per 22. **<2.2>** Verbi gratia: sit linea circumferens[1157] 44: quorum septuplum si diviserimus per 22, vel si vigeximam secundam partem de 44 multiplicaverimus per 7, nimirum 14 pro eius diametro provenient. **<2.3>** Et si embadum circuli ex linea circumferente tantum habere desideras, quadratum medietatis ipsius per 7 multiplica, et quod proveniet divide ‖[L, f. 104r] per 22. **<2.4>** Verbi gratia: medietas curve *abgd* ‖[M, f. 78r] est 22, quorum quadratum[1158] est[1159] 484; quod per 7 multiplicatum, faciunt[1160] 3388, quibus ‖[F, f. 56r] per ‖[*b*, p. 87] 22 divisis, veniunt 154, ut superius invenimus; vel si 484 diviserimus per 22, venient 22, quibus multiplicatis per 7, faciunt similiter 154.

<3.1> Et si diameter circuli fuerit 10, erit utique circumferens linea $\frac{3}{7}$ 31, que proveniunt ex multiplicatione 10 in $\frac{1}{7}$ 3, quare si dimidium diametri, scilicet 5, multiplicaverimus[1161] per dimidium circumferentis linee, scilicet per $\frac{5}{7}$ 15, venient $\frac{4}{7}$ 78. **<3.2>** Vel si quadratum diametri, scilicet 100, multiplicaverimus per 11, et summam diviserimus per 14; **<3.3>** vel si 11 multiplicaverimus ‖[C, f. 66v] per dimidium de 100, et summam diviserimus per dimidium de 14, scilicet per 7, provenient[1162] utique $\frac{4}{7}$ 78 pro area suprascripti circuli. **<3.4>** Vel si 100 diviserimus per 7, provenient[1163] panora $\frac{2}{7}$ 14, que equantur perticis $\frac{4}{7}$ 78 suprascriptis[1164]. Et si $\frac{2}{7}$ unius panori in usitatas partes reducere vis, scilicet in soldos et denarios, multiplica 2, que sunt super virgam, per soldos unius panori:

[1156] pertice B M N F C P L] perticis S
[1157] circumferens B M N F C P L] circumferentie S
[1158] quadratum B S N^4 F C P L] multiplicatio M N^1
[1159] est B M N F C P L] *om.* S
[1160] faciunt S F C P L] facient B, faciet M N
[1161] scilicet 5 multiplicaverimus B S N^4 F C P L] multiplicaverimus scilicet 5 M N^1
[1162] provenient S N^4 F C P L] proveniunt B M N^1
[1163] provenient B S F C P L] proveniunt M N
[1164] suprascriptis B M N F C P L] *om.* S

erunt soldi 33, quos divide per 7, venient soldi 4 et denarii $\frac{4}{7}$ 8[1165] mensure. Ergo pro embado suprascripti circuli habetur stariorum unum et panora duo |[B, f. 53r] et soldi 4 et denarii $\frac{4}{7}$ 8. Et sic studeas |[N, f. 71r] facere in similibus.



<4.1> Verum[1166] si nosse[1167] vis unde habeatur quod ex multiplicatione |[S, f. 93r] semidiametri in circumferentie dimidium[1168] embadum circuli proveniet[1169], reiterabo circulum *abgd*, cuius centrum sit *e*; et describam in ipso rectilineum aliquod, et quodcumque volueris[1170] laterum; et sit quadrilaterum *abgd*, quod resolvam a centro *e* in quatuor trigona, |[P, f. 82r] videlicet secundum numerum laterum |[L, f. 104v] ipsius[1171], que sint *eab*, *ebg*, *egd*, *eda*. Et est equicrurium unumquodque ipsorum, cum linee *ea*, *eb*, *eg*, *ed*, sibi invicem sint equales. Sunt enim a centro ad periferiam ducte: quare si in ipsis trigonis catheti producantur a centro *e*, cadet unusquisque super dimidium basis sui trigoni. **<4.2>** |[M, f. 78v] Quare ponamus super dimidium ipsorum trigonorum puncta basium *z*, *i*, *t*, *k*, per que puncta producantur a centro *e* ad periferiam recte *el*, *em*, *en*, *eo*; et copulentur *al*, *lb*, *bm*, *mg*, *gn*, *nd*, *do*, *oa*: et erunt quatuor trigona super bases *ab*, *bg*, *gd*, *da* constituta. **<4.3>** Et quoniam recta *ez* cathetus est super rectam *ab*, si multiplicaverimus *ez* in dimidium *ab*, proveniet[1172] utique embadum trigoni *eab*. Similiter quia *lz* cathetus est trigoni *lab*, proveniet utique ex *zl* in dimidium *ab*

[1165] $\frac{4}{7}$ 8 B S M N^{b} F C P L] $\frac{4}{7}$ 8 et sic studeas facere in N^{a}
[1166] verum B S N^{4} F C P L] unde M N^{1}
[1167] nosse B S N^{4} F C P L] noscere M N^{1}
[1168] in circumferentie dimidium B M N F C P L] in dimidium circumferentie S
[1169] proveniet C P L] proveniat B S M N F
[1170] volueris C P L] voluerit B M N F, voluero S
[1171] laterum ipsius B S N^{4} F C P L] ipsius laterum M N^{1}
[1172] proveniet S N F C P L] provenient B M

embadum trigoni *lab*: quare si multiplicaverimus totam *el*, scilicet semidiametrum circuli, in dimidium *ab*, proveniet utique embadum quadrilateri *ealb*. **<4.4>** Simili quoque modo si multiplicaverimus *em*, scilicet *el*, in dimi‖[F, f. 56v]dium linee *bg*, proveniet embadum quadrilateri *ebmg*. Eodemque modo si multiplicaverimus *en* in dimidium *gd*, et *eo* in dimidium *da*, provenient embada quadrilaterorum *egnd* et *edoa*; hoc est si multiplicaverimus *el*[1173], scilicet semidiametrum, in dimidium laterum quadrilateri *abgd*, proveniet embadum multilatere figure cadentis in circulo. **<4.5>** Sed embadum ipsius multilatere figure, que est *albmgndo*, est minor embado circuli: ergo, ex multiplicatione semidiametri circuli in dimidium rectarum ‖[L, f. 105r] *ab*, *bg*, *gd*, *da*, proveniet minus embado circuli; sed dimidium linearum *abgd* minus ‖[C, f. 67r] est medietate circumferentie circuli[1174] ‖[S, f. 93v] *abgd*: ergo ex multiplicatione semidiametri circuli in minus dimidio circumferentie ipsius circuli facit minus embado circuli. **<4.6>** Demonstravimus itaque in preterita parte in ‖[N, f. 71v] dimensione multilaterum[1175] figurarum continentium circulum, quod ‖[P, f. 82v] ex multiplicatione semidiametri circuli in plus medietate circumferentie ipsius, provenit plus embado circuli: quare concluditur, quod ex multiplicatione semidiametri circuli in dimidium linee circumferentis, provenit embadum ipsius.

<5.1> Sed querendum est rursus[1176] unde procedat inventio embadi circuli per ‖[*b*, p. 88] adsumptionem undecim quartarum decimarum quadrati sui diametri. **<5.2>** Quoniam embadum ‖[M, f. 79r] alicuius circuli ad embadum alterius, est sicut quadratum diametri unius ad quadratum diametri alterius, ut Euclides in secundo theoremate duodecimi sui libri demonstravit, erit permutatim[1177] sicut quadratum diametri[1178] ‖[B, f. 53v] alicuius circuli ad embadum ipsius, ita omnia quadrata diametrorum omnium circulorum erunt ad embada ipsorum circulorum: quare cum inventa fuit proportio quadrati diametri unius circuli ad suum embadum, tunc fuit inventa proportio quadrati diametri uniuscuiusque[1179] circuli ad suum embadum. **<5.3>** Fuit enim quadratum diametri suprascripti circuli 196, et embadum ipsius 154, quorum proportio est sicut 14 ad 11 in minimis numeris:

[1173] el B M N F^b] al S F^a C P L
[1174] circuli S F C P L] *deest* B M N
[1175] multilaterum B S M N F P L] multilaterarum C
[1176] est rursus S C P L] rursus est B M N F
[1177] permutatim B S N^4 F C P L] per multum M N^1
[1178] diametri B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1179] uniuscuiusque S F C P L] unius cuiuslibet B M N

quare erit sicut 14 ad quadratum diametri cuiusvis circuli, ita 11 erit ad embadum ipsius. Unde cum[1180] multiplicaverimus |[L, f. 105v] 11 per quadratum diametri cuiusvis circuli, et summam diviserimus per 14, proveniet embadum ipsius circuli, quod oportebat ostendere. **<5.4>** Similiter si perticas 154 redigemus in panora, venient[1181] panora 28: ergo erit sicut 196 ad panora 28, ita quadratum diametri cuiusvis circuli erit ad panora continentia embadum ipsius. Sed 196 ad 28 sunt sicut 7 ad 1: quare erunt sicut 7 ad 1[1182], ita |[S, f. 94r] quadratum diametri cuiusvis circuli erit ad panora embadi ipsius. Quare si ex quadrato diametri cuiusvis circuli septimam acceperimus, nimirum panora, que sunt in embado ipsius circuli, provenient, ut superius demonstravimus.

<6.1> |[F, f. 57r] Et notandum quia[1183] que proportio est unius quantitatis ad aliam, eadem erit cuiusvis multiplicis unius ad idem multiplex alterius, quare que proportio est diametri antecedentis circuli ad diametrum consequentis, eadem erit li|[N, f. 72r]nee circumferentis antecedentis circuli ad lineam circumferentis consequentis. **<6.2>** Et eadem |[C, f. 67v] erit proportio medietatis linee circumferentis antecedentis circuli ad medietatem linee circumferentis consequentis, |[M, f. 79v] quare erit sicut quadratum diametri antecedentis circuli ad quadratum diametri consequentis, ita quadratum semicircumferentie antecedentis ad quadratum semicircumferentie consequentis. **<6.3>** Et quia est sicut quadratum diametri antecedentis circuli ad quadratum diametri consequentis, ita embadum ad embadum: erit[1184] utique sicut quadratum semicircumferentie antecedentis circuli ad quadratum semicircumferentie consequentis, ita embadum antecedentis circuli |[L, f. 106r] ad embadum consequentis. Permutatim ergo, erit[1185] sicut quadratum semicircumferentie antecedentis[1186] circuli ad suum embadum, ita quadratum semicircumferentie consequentis erit ad suum embadum. **<6.4>** Fuit medietas linee circumferentis supradicti circuli 22, cuius quadratum est 484; et embadum eius fuit 154, quorum proportio in minimis numeris est sicut 22 ad 7. Ergo sicut 22 est ad 7, ita quadratum semicircumferentis linee cuiusvis circuli erit ad suum

[1180] cum B S N[4] F C P L] si M N[1]
[1181] venient B S N[4] F C P L] veniunt M N[1]
[1182] quare – 1 B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1183] quia B S N[4] F C P L] quare M N[1]
[1184] erit B M N[1] F C P L] erunt S, est N[4]
[1185] ergo erit B S N[4] F C P L] ergerit M N[1]
[1186] permutatim – antecedentis B S[2] M N F C L] *om.* S[1] P

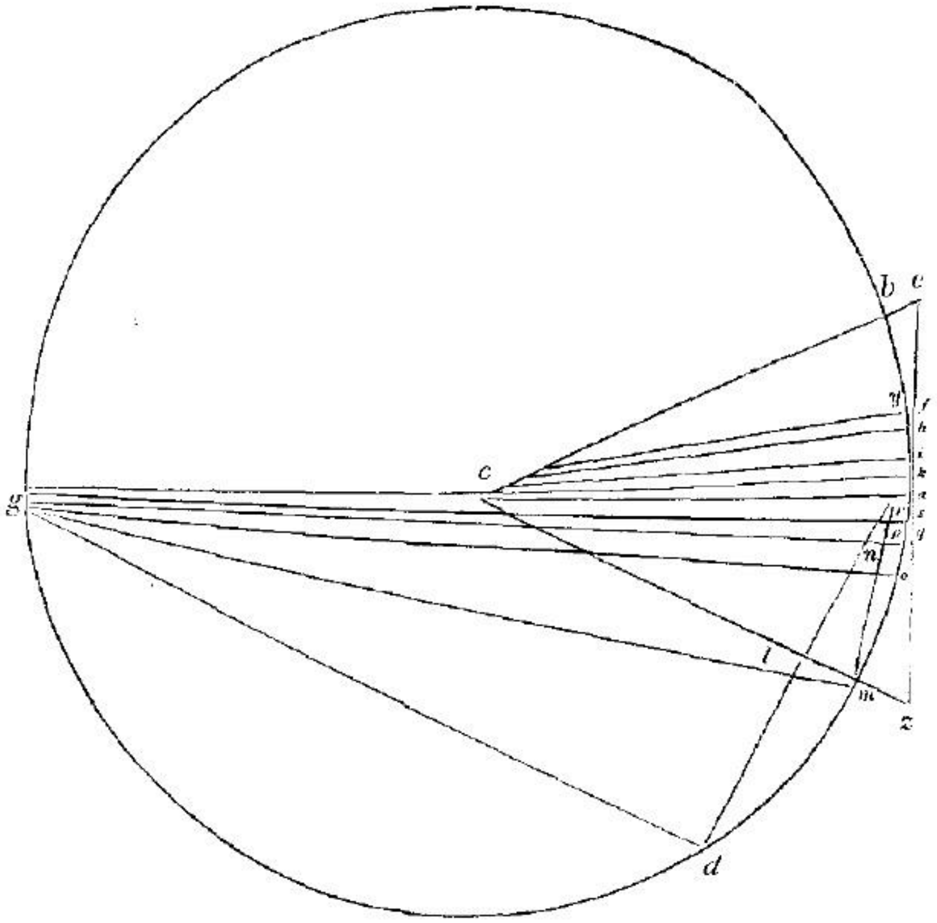
embadum, quare cum multiplicentur[1187] 7 per quadratum ||[B, f. 54r] semicircumferentis linee alicuius circuli, et summa dividatur[1188] per 22, provenit utique embadum ipsius circuli.

<7.1> Ostendendum est etiam quomodo inventum fuit, lineam circumferentem omnis circuli esse triplam ||[S, f. 94v] et septimam sui diametri ab Archimede phylosopho. Et fuit illa inventio pulchra et subtilis valde: quam etiam reiterabo non cum suis numeris, quibus ipse usus fuit demonstrare, cum possibile sit cum parvis numeris ea que ipse cum magnis ostendit plenissime[1189] demonstrare. **<7.2>** Adiaceat quidem circulus *abgd*, cuius diameter sit linea *ag* et centrum eius sit *c*; et protraham lineam *ez* contingentem circulum super punctum *a*, quare diameter *ag* cathetus est super rectam *ez*; deinde super rectam *ac*, et in ipso puncto *c* protraham angulum *ace*, qui ||[*b*, p. 89] sit tertia pars recti: quare angulus *aec* erit $\frac{2}{3}$ unius anguli recti, cum angulus *eac* sit rectus. **<7.3>** Sunt enim omnis trigoni tres anguli duobus ||[M, f. 80r] rectis equales. Et iaceat *az* equalis recte *ae*, et copuletur recta *cz*: et erit trigonum *caz* equale trigono *cae*, et angulus *cza* equa||[N, f. 72v]lis est angulo ||[C, f. 68r] *cea*: est enim unusquisque eorum $\frac{2}{3}$ anguli recti. Similiter cum angulus *ecz* duplus sit angulo ||[L, f. 106v] *eca*, erit similiter angulus *ecz* $\frac{2}{3}$ anguli recti: equiangulum ergo est et equilaterum trigonum *cez*[1190], quare recta *ez* erit latus ||[F, f. 57v] exagoni equilateri et equianguli continentis circulum *abgd*[1191]. **<7.4>** Quibus ita per ordinem peractis, ponam *ce* esse 30, quare *ae* erit 15: et quia orthogonium est trigonum *cae*, si ex quadrato lateris *ce* tollatur quadratum lateris *ae*[1192], scilicet 225 de 900, remanebunt 675 pro quadrato lateris *ca*. Ergo latus *ca* est radix de 675, quam si subtiliter ceperimus, inveniemus ipsam esse secundum propinquitatem perticarum 26 minus unciis $\frac{1}{13}$ 2. Constat enim pertica ex unciis 108. **<7.5>** Deinde dividatur angulus *eca* in duo dimidia[1193] a linea *cf*, que dividat[1194] arcum *ab* super punctum *y*[1195]. Et cum habeatur ex

---

[1187] multiplicentur M N[1]] multiplicantur B S N[4] F C P L
[1188] dividatur M N[1]] dividitur B S N[4] F C P L
[1189] planissime B S N[4] F C P L] planissime et M N[1]
[1190] cez B S M N[1] F C P L] cez a centro equilateri N[4]
[1191] idest area circulum abgd *infra scr.* B[2] F[2]
[1192] ce – ae B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1193] dimidia B M N F] media S C L, *om.* P
[1194] dividat M N C] dividet B S F, dividatur L, *om.* P
[1195] linee supra diametrum *in mg. sn scr.* B[2] F[2]

demonstrationibus Euclidis, equales angulos a centro super equales periferias consistere, equalis est ergo periferia *ay* periferie *by*. Fuit itaque *ae* semilatus exagonici: quare et *af* erit semilatus[1196] ‖[S, f. 95r – P, f. 83r] dodecagoni continentis circulum *abgd*[1197].



<7.6> Et quia angulus *eca* in duo equa divisus est a linea *cf*, proportionaliter erit sicut *ec* ad *ca*, ita *ef* ad *fa*, ut Euclides in sexto declaravit libro: quare erit sicut coniunctum ex *ec* et *ca* ad *ea*, hoc est sicut 56 minus unciis $\frac{1}{13}$ 2[1198] est ad *ea*, ita coniunctum ex *ef fa*, quod est 15[1199], ‖[F, f. 58r – L, f. 107r] ad lineam *fa*: permutatim ergo erit sicut ‖[S, f. 95v] coniunctum ex *ec* et *ca* ad *ea*, hoc est sicut 56 minus unciis $\frac{1}{13}$ 2 sunt ad 15, ita *ca* erit ad *af*: quare ponam *ea* esse 56 minus $\frac{1}{13}$ 2[1200], et *af* erit 15, quare ‖[B, f. 54v] si coniunxerimus quadrata linearum *ca* et *af*, habebimus

---

[1196] ad diametrum consequentis – semilatus B S M N F C L] *pagina recisa* P
[1197] idest area circulum abgd *infra scr.* B^2 F^2
[1198] unciis $\frac{1}{13}$ 2 B S N^4 F C P L] numeris $\frac{2}{132}$ 2 M N^1
[1199] est 15 B S M N F C L] *om.* P
[1200] $\frac{1}{13}$ 2 B S F C P L] $\frac{1}{132}$ M N

pro quadrato linee *cf* 3359, minus unciis $\frac{2}{3}$ 16, quorum radix, que est 58, minus unciis $\frac{4}{5}$ 4, est latus *cf*. **<7.7>** Deinde dividam angulum *fca*[1201] in duo equa a linea *ch*; et erit |[M, f. 80v] *ah* semilatus figure equilatere habentis latera |[L, f. 107v] 24, et descripta[1202] circa circulum *abgd*: et quia angulus *fca* divisus est in duo equa a linea *ch*, erit proportio coniuncti ex *fc* et *ca* ad *ca* sicut *fa* ad *ah*: permutatim ergo erit sicut coniunctum ex *fc* et *ca* ad *fa*, hoc est sicut 114 minus unciis $\frac{7}{8}$ 6 ad 15, ita *ca* ad *ah*: quare ponam *ca* esse 114 minus unciis $\frac{7}{8}$ 6[1203], et *ah* erit 15; quare[1204] si ex coniunctione quadratorum ipsorum |[N, f. 73r] radicem acceperimus, habebimus 115 minus unciis $\frac{16}{23}$ 8 pro linea *ch*.

<8.1> |[C, f. 68v] Rursus dividam angulum *hca* in duo equa cum linea *ci*: et erit *ai* semilatus equilatere figure habentis latera 48, et descripte circa circulum *abgd*[1205]. Cuius *ai* proportio ad *ac* erit sicut 15 ad coniunctum ex *ac* et *ch*, hoc est ad 229, minus unciis $\frac{41}{72}$ 15, secundum maximam propinquitatem. **<8.2>** Non enim possumus vere procedere quando oportet invenire radices numerorum surdorum, eorum videlicet qui radicem non habent in numeris. Ponam ergo *ca* esse 229 minus unciis $\frac{41}{72}$ 15, et *ai* ponam esse 15; et dividam iterum angulum *ica* in duo equa a linea *ck*, et erit *ak* semilatus figure descripte circa circulum *abgd*[1206], habentis latera 96 continentia ipsum circulum. **<8.3>** Addam iterum quadrata linearum *ca* et *ai*, et habebo quadratum |[P, f. 83v] lateris *ci*, cuius radix est 229, et uncie $\frac{1}{23}$ 7[1207] aliquantulum minus; sed proportio *ca* ad *ak* est sicut proportio coniuncti ex *ic* et *ca* ad *ai*; ergo proportio *ca* ad *ak* est quasi $\frac{1}{5}$ 458 |[L, f. 108r] ad 15. Sed proportio *ca* ad *ak* est[1208] sicut proportio diametri *ga* ad duplum |[*b*, p. 90] *ai*. **<8.4>** Sed duplum *ai*[1209] est latus |[S, f. 96r] equilatere figure descripte circa

---

[1201] fca S F C P L^{a}] fc B M N F L^{b}
[1202] descripta B M N F^{2}] descripta sunt S F^{1} C P L
[1203] $\frac{7}{8}$ 6 B S M N^{1} F C P L] $\frac{7}{8}$ 6 ad 15 ita ca ad ah quare ponam ca esse 114 minus unceis $\frac{7}{8}$ 6 N^{4}
[1204] quare B S N^{4} F C P L] quasi M N^{1}
[1205] abgd B M N F C P L] abcd S
[1206] abgd B M N F] abcd S C P L
[1207] $\frac{1}{23}$ 7 B M N] $\frac{1}{2}$ 37 S F C P L
[1208] quasi – est B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[1209] sed duplum ai B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}

circulum *abgd*, ‖[B, f. 55r] habentis latera 96; quare est sicut $\frac{1}{5}$ 458[1210] ad 15, ita diametrum *ga* ad unum ex lateribus figure supradicte habentis latera 96: quare si multiplicaverimus 15 per 96, provenient 1440 pro summa laterum ipsius figure. Ergo proportio omnium laterum figure supradicte ad diametrum circuli ca‖[M, f. 81r]dentis in ipsa est sicut 1440 ad $\frac{1}{5}$ 458 [1211] [1212]. **<8.5>** Inveniam rursus proportionem circuli ad diametrum ipsius per latus figure cadentis in ipso habentis latera 96 in hunc modum: ponam in eodem circulo *abgd* latus exagonici *ad*, quod est equale semidiametro *ca*, et copulabo *gd*, et erit trigonum[1213] *gda* orthogonium, ‖[F, f. 58v] cum sit in semicirculo *gda*. Omnis enim angulus, ut in tertio libro Euclidis habetur, qui est in semicirculo, est rectus; et quia linea *ad* est latus exigonicum, erit periferia *ad* tertia pars periferie *dag*: quare periferia *gd* dupla est periferie *da*. **<8.6>** Unde angulus *gad* duplus est ‖[C, f. 69r] angulo *agd*. Et sunt ambo simul equales uni angulo recto, quare angulus *agd* est tertia pars recti.

<9.1> Ponam ordine suprascripto, ‖[N, f. 73v] diametrum *ag* esse 30: quare recta *ad* erit 15, et recta *gd* erit 26, minus unciis $\frac{1}{13}$ 2[1214] per ea que superius demonstravi[1215]. Et dividam angulum *agd* in duo equa a linea *gm*, et copulabo rectam *am*: et erit proportio recte *al* ad *ld* sicut *ag* ad rectam *gd*. **<9.2>** Et cum coniunxerimus, erit proportio recte *ad* ad *ld* sicut coniuncti ex *ag* et *gd* rectis ad rectam *gd*; et cum permutaverimus, erit sicut *ag* et *gd* ‖[*b*, p. 91] recte ad rectam *ad*, hoc est sicut 56 minus unciis $\frac{1}{13}$ 2[1216] ad 15, ita *gd* ad *dl*. Et quia angulus *agd* ‖[L, f. 108v] in duo equa divisus est a linea *gm*, equalis est angulus *agm* angulo ‖[P, f. 84r] *dgm*, et angulus *gdl* equalis est angulo *gma*: est enim uterque eorum rectus, cum sit in semicirculo *gdma*; reliquus ergo angulus, qui sub *gld*, reliquo, qui sub *gam* est equalis: equiangulum ‖[S, f. 96v] ergo est[1217] trigonum *gdl* trigono *gma*, quare est sicut recta *gd* ad *dl*, ita recta *gm* ad *ma*. Quare ponam *gm* esse 56 minus unciis $\frac{1}{13}$

[1210] $\frac{1}{5}$ 458 B S M N^1 F C P L] $\frac{1}{5}$ 440 N^4
[1211] 458 B S N^4 F C P L] 458 linee circa diametrum M N^1
[1212] linee circa diametrum *in mg sn scr.* B^2, *in mg dx scr.* F^2
[1213] trigonum B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1214] $\frac{1}{13}$ 2 B S F C P L] $\frac{1}{132}$ M N
[1215] demonstravi B S N^4 F C P L] demonstravimus M N^1
[1216] $\frac{1}{13}$ 2 B S F C P L] $\frac{1}{132}$ M N
[1217] ergo est B S F C P L] est ergo M N

2, et *ma* recta erit 15; et est recta *am* latus dodecagoni, cum periferia *am* dimidium sit periferie *amd*.

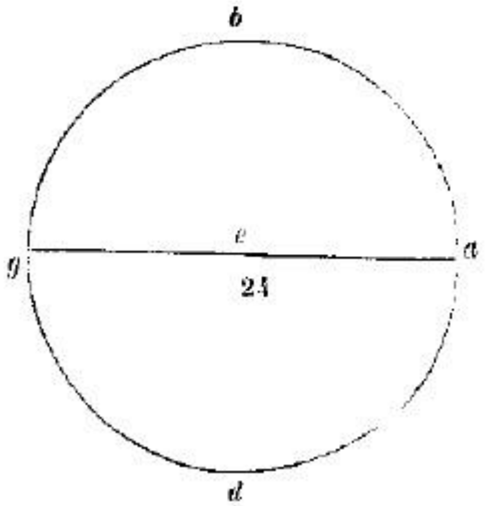
<10.1> |[M, f. 81v] Rursus dividam[1218] angulum *agm* in duo equa cum linea *gno*, et copulabo rectam *ao*; et inveniam radicem coniunctam ex quadratis linearum *gm ma*, que est 58 minus unciis[1219] $\frac{4}{5}$ 4 pro latere *ag*. Et erit sicut coniunctum ex *ag* et *gm* ad lineam *ma*, hoc est sicut 114 minus unciis $\frac{7}{8}$ 6 ad 15, ita *gm* ad *mn*. **<10.2>** Sed sicut *gm* ad *mn*, ita *go* ad *oa*. Sunt enim trigona *gmn* et *goa* similia et orthogonia: est ergo sicut 114 minus unciis $\frac{7}{8}$ 6 ad 15, ita *go* ad *oa*: quare ponam *go* esse 114[1220] minus unciis $\frac{7}{8}$ 6[1221], et *oa* 15; et accipiam iterum radicem ex quadratis linearum *go* et *oa*, et habebo pro linea *ga* 115 minus unciis $\frac{16}{23}$ 8. Et linea *oa* est latus figure descripte intra circulum *abgd*, habentis latera 24: dividam rursus angulum *ago* in duo media a linea |[B, f. 55v] *gq*, et copulabo *qa*: et erit sicut *ag* et *go* ad *oa*, ita *go* ad *op*[1222]. Sed sicut *go* ad *op*[1223], ita *gq* ad *qa*. **<10.3>** Erit ergo sicut 229 minus unciis $\frac{41}{72}$ 15 ad 15, ita *gq* ad *qa*: quare ponam *gq* esse 229 |[L, f. 109r] minus unciis $\frac{41}{72}$ 15 et *qa* 15, et coniungam |[N, f. 74r] quadrata eorum; et coniuncto radicem inveniam, |[F, f. 59r] et habebo 229, et parum minus de unciis $\frac{1}{2}$ 37, et est *aq* latus figure habentis latera 48.

<11.1> Dividam iterum angulum *agq* in duo equa a linea *grs*; et copulabo *sa*, que erit latus figure habentis latera 96 cadentis intra circulum *abgd*; et quia angulus *agq* divisus est in duo equa cum linea *gs*, erit proportio *gq* ad *qr* sicut *ag* et *gq* ad *qa*, hoc est |[P, f. 84v] sicut $\frac{1}{5}$ 458 |[C, f. 69v] ad 15, ita *gq* ad *qr*. Sed sicut *gq* ad *qr*, ita *gs* ad *sa*, cum trigona *gqr* et *gsa* sint similia: quare |[S, f. 97r] erit sicut $\frac{1}{5}$ 458 ad 15, ita *gs* ad *sa*. **<11.2>** Coniungam iterum quadrata linearum *gs* et *sa*, et coniuncto radicem inveniam, et habebis $\frac{4}{9}$ 458 pro diametro *ga*. **<11.3>** Multiplicabo ergo rectam *sa* per 96: erunt 1440 pro summa omnium laterum

[1218] dividam B S M N F P L] dimidium C
[1219] unciis B S^2 M N F C P L] *om.* S^1
[1220] 114 B S N^4 F C P L] 14 M N^1
[1221] unciis $\frac{7}{8}$ 6 S M N F C P L] $\frac{7}{8}$ 6 unciis B
[1222] op B S M N F P L] oq C
[1223] op B S M N F P L] oq C

figure descripte intra |[M, f. 82r] circulum *abgd*; quare est sicut 1440 ad $\frac{4}{9}$ 458, ita omnia latera predicte figure in circulo *abgd* descripte sunt ad diametrum circuli *ga*.

<12.1> Invenimus per investigationem lateris exterioris figure, quod proportio omnium laterum ipsius ad diametrum circuli est sicut 1440 ad $\frac{1}{5}$ 458; et[1224] linea circumferens est minus omnium laterum figure continentis circulum; et[1225] est plus omnium laterum figure descripte intra circulum. Erit proportio circuli ad suum diametrum, sicut 1440 ad $\frac{1}{3}$ 458, cum sint in medio inter $\frac{4}{9}$ 458 et $\frac{1}{5}$[1226] 458[1227]. **<12.2>** Sed proportio de 1440 ad $\frac{1}{3}$ 458 est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut 4320 ad 1375, quorum proportio, in minimis numeris, est sicut 864 ad 275. |[L, f. 109v] Sed proportio de 864 ad 275 minus $\frac{1}{11}$ est sicut $\frac{1}{7}$ 3 ad 1. **<12.3>** Et quia parva est differentia inter proportionem quam habet circulus ad suum diametrum, et proportionem quam habent $\frac{1}{7}$ 3 ad 1, ideo posuerunt sapientes antiqui *circulum esse triplum et septimam sui diametri*; et hoc volui ostendere.



<13.1> Si autem campum semicircularem metiri desideras, embadum ipsius circuli per unum ex demonstratis modis quere, et dimidium eius habeas pro embado ipsius semicirculi. **<13.2>** |[*b*, p. 92] Ad cuius rei evidentiam: esto

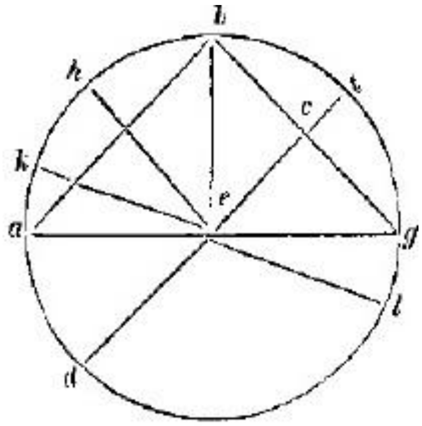
---

1224 et B M N F] et quia S C P L

1225 et B S M N F C L[a]] ut P L[b]

1226 $\frac{1}{5}$ S M N F C P L] $\frac{7}{5}$ B

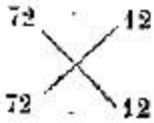
1227 $\frac{4}{9}$ 458 et $\frac{1}{5}$ 458 B S M N F[b] C P L ($\frac{1}{5}$ S F C P L, $\frac{7}{5}$ B M N)] *om.* F[a] semicirculus *abg*, cuius diameter *ag* sit 24; et expleatur circulus *abgd*. Et erit suple|[N, f. 74v]mentum *adg* similiter semicirculus, quare si acceperimus dimidium embadi circuli *abgd*, habebimus utique embadum dati semicirculi *abg*. **<13.3>** Vel dimidium diametri, scilicet 12, in $\frac{1}{7}$ 3 multiplica, et habebis $\frac{5}{7}$ 37 pro arcu *abg*; cumque dimi|[S, f. 97v]dium |[P, f. 85r] diametri per dimidium arcus *abg* multiplicaveris, vel si quartam partem diametri in toto arcu *abg* duxeris, venient $\frac{4}{7}$ 226 pro embado semicirculi *abg*. **<13.4>** Vel si[1228] ex quadrato diametri, quod est 576, |[B, f. 56r] undecim vigeximas octavas acceperis, vel si ex quadrato ipsius diametri vigeximam octavam acceperis, et eam per 11 mul|[F, f. 59v – M, f. 82v]tiplicaveris, ad eundem embadum pervenies[1229]. Et si ex quadrato[1230] diametri quartam decimam partem acceperis, habebis panora embadi suprascripti, que sunt $\frac{1}{7}$ 41.



<14.1> Et si ad notitiam arcus *abg*, qui est semilinea circumferen|[C, f. 70r]tia circuli, aliter venire desideras, a centro *e* super diametrum *ag* lineam *eb* orthogonaliter[1231] erigas, que erit semidiametri circuli *abgd*; et copulabis rectas |[L, f. 110r] *ab bg*, et erit angulus, qui sub *abg*, rectus, cum sit in semicirculo *abg*; vel quia *be* equalis est rectis *ea* et *eg*, erit utrumque trigonum *aeb* et *beg* equicrurium, quare anguli, qui sub *eba* et *eab* et *ebg* et *bge* sibi invicem sunt equales. Et est unusquisque eorum dimidium anguli recti: quare duo anguli, qui sub *abe* et *ebg* uni recto sunt equales. Rectus est ergo angulus, qui sub *abg*, et quia due recte *ae* et *eb* duabus rectis *be* et *eg* sunt equales, et anguli, qui sub *aeb* et *beg* sunt recti,

[1228] si B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1229] pervenies B M N F C P L] invenies S
[1230] quadrato B S N^4 F C P L] quadrato ipsius M N^1
[1231] venire – orthogonaliter B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

equales erunt[1232] sibi invicem recte *ab* et *bg*. **<14.2>** Quare quadratum diametri *ag* est duplus quadrato uniuscuiusque linearum *gb* et *ba*, nec non et unumquodque quadratorum linearum *gb* et *ba* unicuique quadratorum linearum *ae* et *be*[1233] et iterum *be* et *eg* est duplum. Quare est sicut *ag* ad *gb*, ita *gb* ad *be*, vel ad *eg*: quare si multiplicaverimus *ag* in *be*, scilicet 24 per 12, habebimus[1234] 288 pro quadrato uniuscuiusque linearum *ab* et[1235] *bg*; vel si quadrati diametri *ag* dimidium acceperimus, aut duplicaverimus quadratum semidiametri *ge* vel *ea*, habebimus similiter 288 pro |[S, f. 98r] quadrato uniuscuiusque linearum *gb* et *ba*[1236], et est[1237] *ge* arcus medietatis semicirculi *abg*. **<14.3>** Deinde si diviserimus cordam *bg* super punctum *c* in duo equa, |[P, f. 85v] et per puncta |[N, f. 75r] *c e* protraxerimus lineam *df*, erit *df*[1238] diameter circuli *abgd*, et faciet angulos rectos super punctum *c* cum corda *bg*, nec non et[1239] dividet arcum *bfg* in duo equa. **<14.4>** Quare si a puncto *f* protraxerimus lineas *fb* et *fg*, |[L, f. 110v] erit unaqueque ipsarum corda quarte partis semicirculi *gba*, ad quarum notitiam veniemus sic: quia angulus qui sub *bce* est rectus, si quadratum li|[M, f. 83r]nee *bc*, quod est 72, scilicet quartam partem quadrati corde *bg* extraxerimus ex quadrato linee *be* subtendentis angulum rectum qui sub *bce*, remanebunt 72 pro quadrato linee *ce*: quare tota *dc* est 12 et radix de 72, et vocatur *binomia*, cum non possit exprimi ipsa in numeris. Unde si extraxerimus *ec* ex *ef*, remanebunt 12 minus radice de 72 pro linea *cf*. Et vocatur ipsa linea *cf* abscisio, vel recisum, aut *apotami*, cum constet[1240] ex numero minus radice. Deinde accipiemus quadrata linearum *fc* et *cb*, et |[C, f. 70v] habebis quadratum[1241] corde *bf* vel *fg*.



<15.1> Nam qualiter accipiamus quadratum |[B, f. 56v] abscisionis *cf*, volo presentialiter demonstrare: pones |[F, f. 60r] nomina ipsius, scilicet 12 et 72, ut in

[1232] erunt C P L] erant B S M N F
[1233] be S F^1 C P L] et iterum be B M N F^2
[1234] habebimus B S N^4 F C P L] habebis M N^1
[1235] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1236] vel – ba B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1237] est B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1238] erit df B S M N F C L] *om.* P
[1239] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1240] constet B S F C P L] constat M N
[1241] quadratum B S M N^1 F C P L] quadratum bc N^4

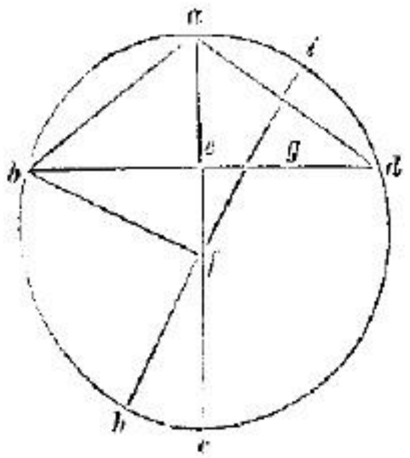
margine cernitur; et multiplicabis 12 per 12: erunt 144; et radicem de 72 per radicem de 72: erunt 72. Quibus iunctis insimul, erunt 216. De quibus extrahes duplum de 12 multiplicatum in radicem de 72: |[*b*, p. 93] venient 24 radices de 72, et sic habentur pro quadrato linee *cf* 216, minus 24 radicibus de 72, que sunt una radix de 41472. **<15.2>** Vel quia linea *ef* divisa ut libet super puntum *c*, erunt duo quadrata linearum *ef* et *ec* equalia quadrato *cf*, et duplo rectiangule superficiei *ec* in *ef*. Nam quadrata linearum *ef* et *ec* sunt 216; de quibus si auferamus duplum multiplicationis *ef* in *ec*, scilicet 24 in radicem de 72, provenient utique 216 minus radice de 41472. Et vocatur |[S, f. 98v] recisum primum, ut in suo demonstrabitur |[P, f. 86r] loco, cui quadrato si addiderimus quadratum linee *bc*, hoc est |[L, f. 111r] 72, habebimus 288 minus radice de 41472 pro quadrato corde *bf*; quod vocatur recisum quartum, cuius radix est illa linea[1242], que dicitur minor. **<15.3>** Nam si secundum propinquitatem notitiam linee *bf* habere vis, radicem de 41472, que est parum minus de $\frac{2}{3}$ 203, de 288[1243] extra|[N, f. 75v]he: remanebunt parum plus de $\frac{1}{3}$ 84 pro quadrato uniuscuiusque quatuor[1244] cordarum *gf*, *fb*, *bh*, *ha*. **<15.4>** Vel aliter quadra|[M, f. 83v]to linee *ce* radicem invenias, que est parum minus de $\frac{1}{2}$ 8; et[1245] ipsam extrahe ex linea *ef*, scilicet ex 12: remanebunt parum plus de $\frac{1}{2}$ 3 pro linea *cf*; quorum quadratum, quod est parum plus de $\frac{1}{3}$ 12, si addiderimus cum quadrato linee *bc*, habebimus similiter parum plus[1246] ex $\frac{1}{3}$ 84 pro quadrato uniuscuiusque suprascriptarum quatuor[1247] cordarum, quod si multiplicaverimus per quadratum quaternarii, scilicet per 16, habebimus 1350 pro quadrato summe ipsarum quatuor[1248] cordarum, quorum radix est circa $\frac{3}{4}$ 36.

<16.1> Sed arcus *abg* est $\frac{5}{7}$ 37. Unde adhuc sumus aliquantulum longe a notitia ipsius per inventionem quatuor cordarum, quare dividam iterum unam ex quatuor[1249] predictis cordis in duo equa: et sit corda *ah* divisa super punctum *i*; et

---

[1242] illa linea B S N^4 F C P L] linea illa M N^1
[1243] 288 B S M N^1 F C P L] 220 N^4
[1244] quatuor B S N^4 F C P L] numerorum M N^1
[1245] et B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1246] de $\frac{1}{3}$ 12 – plus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1247] quatuor B S N^4 F C P L] numerorum M N^1
[1248] quatuor B S N^4 F C P L] numerorum M N^1
[1249] quatuor B S N^4 F C P L] numerorum M N^1

protraham per puncta *i e* diametrum *kl*, que dividit arcus *akh* in duo equa super punctum *k*, et protraham cordam *ak*: erit latus figure cadentis in circulo |[C, f. 71r] *abgd* habentis latera 16. **<16.2>** Et veniam ad notitiam eius secundum id quod demonstratum est: videlicet ex quadrato linee *ae*, hoc est ex 144, auferam quadratum linee *ai*, quod est circa $\frac{1}{11}$ 22, scilicet quarta pars quadrati linee *ah*: remanebunt $\frac{10}{11}$ 121 pro quadrato linee *ei*, quare ipsa linea est circa $\frac{1}{11}$ 11; que si auferatur[1250] ex linea |[F, f. 60v] *ek*, |[L, f. 111v] remanebit *ik*[1251] circa $\frac{10}{11}$ unius pertice cuius quadratum, quod est circa $\frac{9}{11}$, si addiderimus cum quadrato linee *ai*, habebimus $\frac{10}{11}$ 21 pro quadrato corde *ak*, que est corda octave partis arcus *abg*, quare si multiplicaverimus $\frac{10}{11}$ 21 per[1252] quadratum octonarii, scilicet per 64, habebimus circa 1402 pro quadrato octo equalium |[S, f. 99r] cordarum cadentium in semicirculo |[B, f. 57r] *abg*, quorum |[P, f. 86v] radix est minus de $\frac{1}{2}$ 37. **<16.3>** Sed arcus *abg* est plus, videlicet $\frac{5}{7}$ 37[1253], quare si eodem modo si[1254] inveniemus cordam semiarcus *ak*, erimus propius[1255] longitudine arcui *abg*; et sic semper dividendo arcus veniemus ad notitiam corde, cuius differentia ad suum arcum erit quasi insensibilis. Et sic poteris ad notitiam cuiusvis arcus circuli devenire[1256].



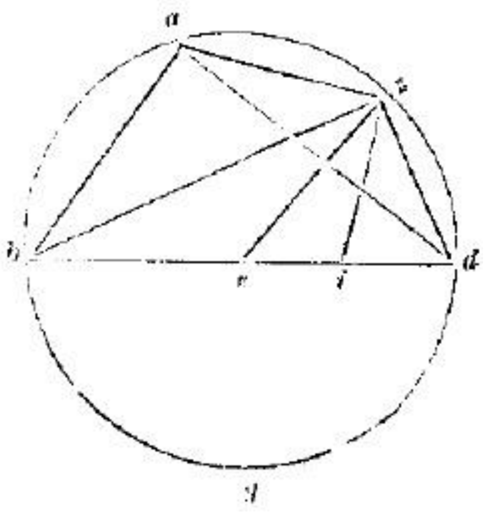
[1250] auferatur S M N[1] C P L] auferamus B N[4] F
[1251] ik S N[4] C P L] ak B M N[1] F
[1252] per S *b* F C P L] pro B M N
[1253] sed - $\frac{5}{7}$ 37 B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1254] si B S[1] N[4] F C P L] *del.* S[2], *om.* M N[1]
[1255] propius B C P L] proprius S M N F
[1256] circuli devenire B S N[4] F C P L] pervenire circuli M N[1]

<17.1> Et ut hoc liquidius deprehendatur, adiaceat circulus *abcd*, cuius diameter *ac* |[M, f. 84r] sit 10; et in eo data sit corda nota *bd*[1257], que sit 8; et volumus arcum *bad* per notitiam ipsius corde invenire. **<17.2>** Primum quidem[1258] ostendam |[N, f. 76r] invenire per notitiam corde longitudinem utriusque sagitte, et per notitiam sagitte invenire etiam longitudinem corde. Et est ista demonstratio super hoc, quia linea *ac* divisa est in duo equalia super punctum *f*, et in duo inequalia super punctum *e*: erit utique multiplicatio *ae* in *ec* cum quadrato linee *ef* equalis quadrato linee *fa*. **<17.3>** Sed *fa* equalis est *fb*, cum utraque ipsarum producantur a centro *f*, et terminentur in periferia circuli: quare multiplicatio *ae* in *ec* cum quadrato |[*b*, p. 94] linee *ef* equatur quadrato linee *fb*. Sed quadratum linee *fb* equalis est duobus quadratis linearum *be* et *ef*: ergo multiplicatio *ae* in *ec* cum quadrato linee *ef*[1259] equalis est duobus quadratis linearum *be* |[L, f. 112r] et *ef*, quare si comuniter auferatur quadratum[1260] linee *ef*, remanebit multiplicatio *ae* in *ec* equalis quadrato linee *be*: quare si extraxerimus quadratum linee *be* ex quadrato linee[1261] *bf*, scilicet 16 de 25, remanebunt 9 pro quadrato linee *ef*: quare *ef* est 3; quibus additis cum *cf*[1262], erunt 8 pro sagitta *ce*. **<17.4>** Similiter extracta *fe* ex *af*, remanebunt 2 pro linea *ae*: est enim multiplicatio *ae* in *ec*, scilicet de 2 in 8, equalis quadrato linee *be*. Unde recte |[C, f. 71v] *ae* et *eb* et *ec* |[S, f. 99v] continue proportionales sunt: est enim ut *ae* ad *eb*, ita *be* ad *ec* inventa est; ergo notitia sagittarum *ae* et *ec* per notitiam corde *bd*. **<17.5>** Sed sint *ae* et *ec* sagitte note: quare *ae* sit 2, et *ec* 8; et[1263] volumus |[P, f. 87r] invenire cordam *bd*: quia[1264] multiplicatio *be*[1265] in *ec* equatur quadrato linee *be*; si multiplicaverimus *ae* in |[F, f. 61r] *ec*, scilicet 2 per 8, habebimus 16 pro quadrato linee *be*, quorum radice, scilicet 4, duplicata, habebimus 8 pro corda *bd*. **<17.6>** Sed sit corda *bd* nota, nec non et sagitta *ea*, et sit[1266] ignotus diameter *ac*: multiplicabis dimidium corde *bd* in se: erunt 16, que divide per sagittam *ae*, scilicet per 2: venient 8 pro sagitta *ec*, quare diameter *ac* erit 10: similiter si

---

[1257] bd B M N F C] be S, bc P L
[1258] quidem B S N[4] F C L] *om.* M N[1] P
[1259] ef B F C] cf S M N P L
[1260] auferatur quadratum] auferantur quadrata B S M N F C P L
[1261] be – linee B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1262] cf B S M N F C] *om. et spatium vacuum rel.* P L
[1263] et B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1264] quia B S M N F P L] quare C
[1265] be S N[4] F C P L] ae B, bd M N[1]
[1266] sit S N[4] F C P L] *om.* B M N[1]

diviserimus quadratum ‖[M, f. 84v] linee *be* per[1267] sagittam *ec*, proveniet sagitta *ae*. **<17.7>** Notandum quia in semicirculo *abc* recta *be* vocatur sinus rectus utriusque arcus *ab* et *bc*; et recta *ae* vocatur sinus versus arcus *ab*; et recta *ec* vocatur sinus versus arcus *bc*[1268], ut in *Arte Astrologie* reperitur: his itaque demonstratis reddeamus[1269] ad causam. **<17.8>** ‖[B, f. 57v] Protrahamus ‖[L, f. 112v] cordas duorum arcuum *ba* ‖[N, f. 76v] et *ad*, que sunt recte *ba* et *ad*, quarum notitiam habebimus, si coniunxerimus quadrata linearum *ae* et *ed*, vel *ae* et *eb*. Et[1270] erit quadratum uniuscuiusque linearum *ab* et *ad* radix de 20: quare si dimidiaverimus cordam *ad* in puncto *g*, et per puncta *g f* duxerimus diametrum *hi*, inveniemus[1271] per ea que dicta sunt notitiam sagittarum *ig* et *gh*, cumque quadrata linearum *ag* et *gi* coniunxerimus, habebimus quadratum corde *ai*, que est corda arcus *ai*, que est quarta pars totius arcus *bad*. **<17.9>** Cumque frequenter sic fecerimus, poterimus secundum propinquitatem totius arcus *bad* notitiam habere; cumque ipsum ex linea circumferente, scilicet ex *adbg* periferia, scilicet de $\frac{3}{7}$ 31[1272], extraxerimus, remanebit arcus *bcd* notus.



<18.1> Est enim alius modus reperiendi cordas semiarcuum, ex quibus arcubus corde sunt note, et quem Tholomeus ‖[S, f. 100r] posuit in Almagesto. Sit quidem in circulo *abgd* diameter *bd* notus, nec non et corda *ad* nota: volo invenire

[1267] per B M N F C P L] pro S
[1268] et recta – bc B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1269] reddeamus S F C P L] redeamus B M N
[1270] et S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
[1271] et per puncta – inveniemus B S N^4 F C P L] in puncto g et ab in puncto f et puncta g f diametrum duxerimus hi inveniemus M N^1
[1272] $\frac{3}{37}$ 31 B S F C P L] $\frac{1}{3}$ 31 M N

cordam medietatis arcus *ad*. **<18.2>** Protraham cordam *ab*, et erit nota, cum corda *ad* sit nota, cum angulus *dab* sit rectus, quare quadratum diametri *bd* equatur quadratis duarum cordarum *da* et *ab*; et adiaceat recta *be* equalis recte *ba*; et dividam angulum, qui |[P, f. 87v] sub *abe*, in duo media a linea *bz*; et copubabo rectas *zd* et *ze* et *za*. Et a puncto *z* |[C, f. 72r] super diametrum *bd* protraham cathetum *zi*: quare[1273] equalis est recta *ab* recte *be*. **<18.3>** Si comuniter adiaceat recta *bz*, erunt due recte *ab* et *bz* duabus rectis *zb* |[L, f. 113r] et *be* equales; et angulus qui sub *abz* angulo qui sub *zbe* est equalis, quare basis *az* basi *ze* |[M, f. 85r] est equalis. Sed recta *az* recte *zd* est equalis, cum equales sint sibi invicem periferie *az* et *zd*. Quia equales anguli super equales periferias consistunt, sive ad centrum, sive ad periferiam fuerint anguli constituti: sunt enim anguli qui ad *b* sibi invicem |[*b*, p. 95] equales, et consistunt super periferias *az zd*: quare recta *ze* equalis est recte *zd*. **<18.4>** Equicrurium est ergo[1274] *zed*; quare punctus *i*, qui est casus catheti *zi*, cadit in medio *ed*: et quia orthogonium est trigo|[F, f. 61v]num[1275] *bzd*, cum |[N, f. 77r] sit in semicirculo, et in eo super basem ab angulo recto protracta est cathetus[1276], utique trigonum *bzd* in duo trigona divisum sibi invicem similiter[1277]. **<18.5>** Habent enim unumquodque ipsorum trigonorum unum angulum rectum et unum comunem cum toto trigono *bzd*, ut Euclides in octavo theoremate sexti libri ostendit; quare erit sicut *bd* ad *dz*, ita *zd* ad *di*; quare multiplicatio *di* in *bd* equatur quadrato linee *zd*. Est enim *id* nota, cum sit dimidium ex *ed*, que est nota propter *be*, que est equalis corde *ba* note; quare si auferatur corda *ba*, |[B, f. 58r] hoc est *be*, ex diametro *bd*, remanebit *ed*[1278]; quare dimidium eius, scilicet[1279] *id*, erit notum[1280]. Unde si multiplicaverimus *di* notam in *bd* notam, proveniet quadratum corde *zd* notum; |[S, f. 100v] quare recta *zd* erit nota, ut prediximus.

<19.1> Que etiam ostenduntur[1281] cum numeris. Sit diameter *bd* 10, et corda *da* sit 8: quare corda *ab* erit 6. Cui cum equalis sit recta *be*, erit *be* similiter

---

[1273] quare] quia S C P L, *deest* B F M N
[1274] ergo S F C P L] ergo trigonum B M N
[1275] trigonum B S M N F C L] *om.* P
[1276] cathetus *et spatium vacuum rel.* P L
[1277] similiter *et spatium vacuum rel.* C P L
[1278] ed F[a] C P L] ed nota B S M N F[b]
[1279] scilicet C P L] *deest* B S M N F
[1280] notum B S M N F[b] L[a]] *om.* F[a], *om. et sp. vac. rel.* C P, *del.* L[b]
[1281] ostenduntur C P L] ostendatur B S M N F

6. Quibus extractis ex diametro *bd*, remanebunt |[L, f. 113v] 4 pro |[P, f. 88r] recta *ed*, quorum[1282] dimidium, scilicet 2, erit recta *id*. Ex multiplicatione quidem *id* in *bd* veniunt 20, que equantur quadrato corde *zd*; quare corda *zd* est radix de 20, quod oportebat ostendere. **<19.2>** Similiter si extraxerimus quadratum linee *zd* ex quadrato[1283] diametri *bd*, remanebunt 80 pro quadrato corde *bz*, quorum radix, que est 9 minus $\frac{1}{18}$, si extraxerimus ex diametro *bd*, remanebit $\frac{1}{18}$ l; cuius |[M, f. 85v] dimidium si multiplicaverimus in diametrum *bd*, vel si multiplicaverimus $\frac{1}{18}$ 1 per dimidium diametri, scilicet per 5, venient $\frac{5}{18}$ 5 pro quadrato corde medietatis[1284] arcus[1285] *dz*.

<20.1> Et secundum hunc modum possumus invenire cordas medietatum quorumlibet datorum arcuum. Sed hec talis investigatio[1286] non est operanda ab agrimensoribus, qui secundum vulgarem |[C, f. 72v] modum procedere volunt. **<20.2>** Nam cum vulgariter longitudinem alicuius arcus habere desiderant, habeant aliquam mensuram lineam, que sit unius pedis, que possit curvari et extendi, et cum ipsa studeant metiri arcus, quos metiri desiderant; vel habeant funem unius pertice vel plurium, et cum ipsa studeant circiter mensurare arcus portionum circulorum, figendo sepe arundines per girum circuli, ut ipsa funis non deviet a circumferentia circuli. Et sic poterit[1287] habere mensuram omnium arcuum cir|[N, f. 77v]culorum.

<21.1> Sed ut ipsi, qui secundum geometricam scientiam operari desiderant levius quam dictum sit, per notas cordas arcus ipsarum reperiri valeant, sequentes tabulas composui, in quibus ordinate arcus 66 notos proposui; et ante unumquemque suam cordam in perticis et pedibus et unciis et punctis describi feci. **<21.2>** Est enim pertica sex pedum, et pes est decem et octo unciarum, et uncia |[L, f. 114r] viginti punctorum; vel pertica est unciarum 108 et punctorum 2160. Et suprascripte corde 66 intelliguntur esse protracte |[F, f. 62r] in semicirculo uno, cuius diameter est perticarum 42[1288], et quia quelibet corda, que in circulo

---

[1282] quorum S] quarum B M N F C L, quare P
[1283] quadrato M N^1 C L^a] quadrato diametro B S N^4 F P L^b
[1284] medietatis S N^4 F C P L] *deest* corde B M N^1
[1285] arcus N^4 F^b] semiarcus B S M N^1 C P L, semidiametri F^a
[1286] hec talis investigatio B S N^4 F C P L] talis hec operatio M N^1
[1287] poterit B F M N C P L] poteris S
[1288] perticarum 42 S N^4 F C P L] 42 perticarum B M N^1

protracta est, est corda duorum arcuum equalium[1289]: si ipsa corda fuerit diameter, ||[B, f. 58v] vel inequalium, si non fuerit diameter. Ideo duos arcus ante ipsas cordas ordinavi, ut in sequentibus tabulis ostenditur. ||[S, f. 101r – C, f. 73r – P, f. 88v – L, ff. 114v-115r – *b*, p. 96]

Arcus	**Arcus**	**Corde**	**Ar**	**Cu**	**Um**	**Arcus**	**Arcus**	**Corde**	**Ar**	**Cu**	**Um**
pertice	**pertice**	**pertice**	**pedes**	**unce**	**puncta**	**pertice**	**pertice**	**pertice**	**pedes**	**unce**	**puncta**
1	131	0	5	17	17	34	98	30	2	6	17
2	130	1	5	17	13	35	97	31	0	8	5
3	129	2	5	17	4 +	36	96	31	4	8	7
4	128	3	5	17	2	37	95	32	2	5	15
5	127	4	4	12	10	38	94	33	0	1	9 *[1290]
6	126	5	5	16	7 [1291]	39	93	34	3	13	0
7	125	6	5	14	5	40	92	35	1	4	15
8	124	7	5	12	9	41	91	35	4	12	10
9	123	8	5	8	16	42	90	36	2	0	0
10	122	9	5	7	8	43	89	36	5	3	5
11	121	10	6[1292]	4	2	44	88	37	2	4	6
12	120	11	4	17	18	45	87	37	5	3	2
13	119	12	4	13	6	46	86	38	1	17	15
14	118	13	4	7	16	47	85	38	4	12	13
15	117	14	4	1	0	48	84	38	1	4	0
16	116	15	3	11	18	49	83	39	3	11	15

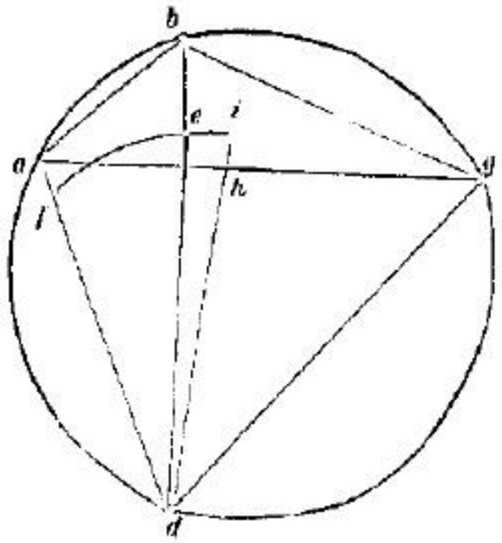
1289 equalium B S N^4 F C P L] et M N^1
1290 * 33 in *mg dx scripserunt* B F
1291 7 M N C P L] 7+ B N F, 17 S
1292 6 S C P L] 5 B M N F

17	115	16	3	3	12	50	82	39	5	17	2
18	114	17	2	12	8	51	81	40	2	2	1
19	113	18	2	0	15	52	80[1293]	40	4	2	10
20	112	19	1	8	12	53	79[1294]	40	0	0	11
21	111	20	0	13	18	54	78[1295]	40	1	14	5
22	110	21	0	0	0	55	77[1296]	41	3	7	8[1297]
23	109	21	5	2	16	56	76[1298]	41	4	16	2
24	108	22	4	4	5	57	75[1299]	41	0	4	12
25	107	23	3	4	8	58	74[1300]	41	1	8	1
26	106	24	2	3	2	59	73[1301]	41	2	9	0
27	105	25	1	0	6	60	72[1302]	41	3	7	14
28	104	25	5	16	2	61	71[1303]	41	4	9	2[1304]
29	103	26	4	8	0	62	70[1305]	41	4	15	10
30	102	27	3	0	3	63	69[1306]	41	5	6	9
31	101	28	1	9	7	64	68[1307]	41	5	12	17
32	100	28	5	16	4	65	67[1308]	41	5	16	14
33	99	29	4	3	9	66	66[1309]	42	0	0	0

<22.1> |[F, f. 62v – B, f. 59r – S, f. 101v – C, f. 73v – *b*, p. 97] Cum itaque[1310] per has tabulas qualiter arcus circulorum inveniri debeant demonstrare proposuerim, ut ipsa doctrina melius habeatur ostendendum est: **<22.2>** quod si in circulo duo arcus inequales fuerint, erit proportio maioris arcus ad suam cordam maior proportione minoris arcus ad suam; quod patet, et etiam ad oculum deprehendi potest in tabulis suprascriptis. **<22.3>** Proportio quidem arcus semicir|[M, f. 86r]culi

[1293] 80 B S M N F C] 89 P L
[1294] 79 B S M N F C] 80 P L
[1295] 78 B S M N F C] 79 P L
[1296] 77 B S M N F C] 78 P L
[1297] 8 S M N C P L] + 8 B F
[1298] 76 B S M N F C] 77 P L
[1299] 75 B S M N F C] 76 P L
[1300] 74 B S M N F C] 75 P L
[1301] 73 B S M N F C] 74 P L
[1302] 72 B S M N F C] 73 P L
[1303] 71 B S M N F C] 72 P L
[1304] 2 S M N C P L] + 2 B F
[1305] 70 B S N F C] 71 P L
[1306] 69 B S N F C] 70 P L
[1307] 68 B S N F C] 69 P L
[1308] 67 B S N F C] 68 P L
[1309] 66 B S N F C] 67 P L
[1310] itaque S N[4] F C L] *om.* B M N[1] P

ad suam cordam, scilicet ad diametrum circuli, est sicut 66 ad 42, et hoc est sicut 11 ad 7. Et proportio arcus sexte[1311] partis circuli ad suam cordam est sicut 22 ad 21: maior quippe est proportio de 11 ad 7 quam de 22 ad 21. Similiter in omnibus arcubus suprascriptarum tabularum invenies, proportionem maioris arcus ad suam cordam superabundare proportionem minoris arcus ad suam cordam[1312].

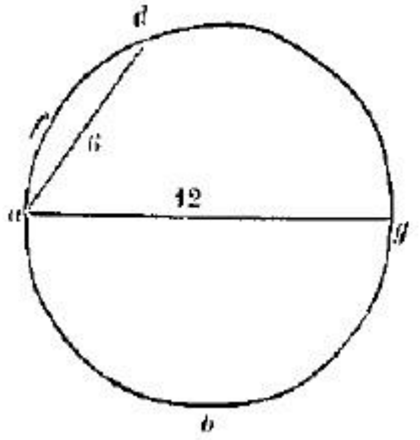


<23.1> |[N, f. 78r] Sed ut hoc geometrice demonstretur, adiaceat circulus *abgd*; et in ipso sint duo arcus ine|[M, f. 86v]quales[1313] *ab* et *bg*, et sit arcus *bg* maior; et protrahatur corda arcui *abg*, que sit[1314] recta *ag*; et dividatur angulus, qui sub rectis *abg* in duo equa a linea *bd*, que secat cordam *ag* super punctum *e*; et copulentur recte *ad gd*. Et quia angulus, qui sub rectis[1315] *abg* divisus est in duo equa a linea *bd*, equalis est angulus, qui sub[1316] *abd* angulo *dbg*. Quare equalis est arcus *ad* arcui *dg*, cum habeatur in tertio Euclidis, equales angulos super equas periferias consistere, cum ad centrum |[N, f. 78v] vel ad periferiam sint constituti. Quare equalis est recta *ad* recte *dg*. **<23.2>** Comunis adiaceat recta *db*: erunt quidem due recte *ad* et[1317] *db* duabus rectis *bd* et *dg* equales. Sed basis *ba* minor est base *bg*: quare angulus, qui sub *gdb* rectis maior[1318] est angulo, qui sub *bda*. Vel |[L, f. 116r] quia maior est periferia *gb* periferie *ba*, maior[1319] est angulus, qui fit

---

[1311] sexte B S F C P L] septe B N^{4}, sepe M N^{1}
[1312] cum – cordam *ante tabulas posuit* N^{1}
[1313] cum – inequales *ante tabulas posuit* M
[1314] sit B S M N F^{b} C L] est F^{a} P
[1315] qui sub rectis B M N F C L] *om.* S P
[1316] qui sub B S M N F^{b} C L] *om.* F^{a} P
[1317] et B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
[1318] maior B S N^{4} F C P L] minor M N^{1}
[1319] maior B S N^{4} F C P L] minor M N^{1}

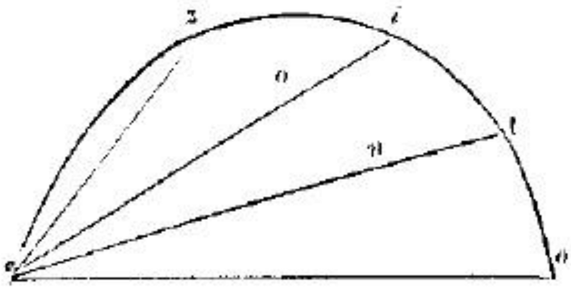
a[1320] rectis *gd* et *db* angulo, qui fit a rectis *bd* et *da*[1321], quia est sicut[1322] periferia *gb* ad periferiam *ba*[1323], ‖[P, f. 89r] ita angulus qui sub rectis *gdb* ad angulum qui sub rectis *bda*. Et quoniam equalis est recta *ad* recte *dg*, si a puncto *d* cathetus ducatur super lineam *ag*, in medio ipsius cadet. **<23.3>** Cadet[1324] ‖[S, f. 102r] ergo inter *e g* puncta, scilicet super lineam *eg*, quia maior[1325] *ge* recte *ae*. Cum sit sicut recta[1326] *gb* ad rectam *ba*, ita *ge* ad *ea*, cadat quidem cathetus super punctum *h* a puncto *d*. Et quia rectus est angulus, qui sub *dhe*, maior est recta *de* quam *dh*, et maior est recta *da* quam *de*.



<24.1> Iaceant[1327] utreque rectarum *di* et *df* equales recte *de*. Et centro *d* spatio rectarum *di* et *de* circinetur arcus *ief*: maior est enim sector *die* trigono rectilineo *dhe*, et sector *dif* minor est trigono *dea*; quare proportio secto‖[C, f. 74r]ris *die* ad sectorem *def* maior est proportione trigoni *dae*[1328] ad trigonum *dea*. **<24.2>** Sed proportio sectoris *die* ad sectorem *def* est sicut proportio anguli *ide* ad angulum rectilineum *edf*; ergo proportio ‖[B, f. 59v] anguli *ide* ad angulum *idf* maior[1329] ‖[F, f. 63r] est ‖[M, f. 87r] proportione trianguli *dhe* ad trigonum rectilineum *dae*. Sed proportio trigoni *hde* ad trigonum *ade* est sicut recta *he* ad *ea*, cum ambo trigona sint sub eadem altitudine, que est ex *d* in *h*. Nam cathetus *dh* perpendicularis est trigonis *hde* et *ade*; ergo proportio anguli *ide* ad angulum *eda*

1320 fit a B S N[4] F C P L] sub M N[1]
1321 qui fit a rectis bd et da B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
1322 sicut B S M N F[b] C L] *om.* F[a] P
1323 cum per has tabulas – periferiam ba *pagina recisa* P
1324 cadet B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
1325 maior B S N[4] F C P L] minor M N[1]
1326 recta B S[2] M N F C P L] *om.* S[1]
1327 iaceant B S M N F C L] iaceat P
1328 dae F C P L] dhe B M N, dei S
1329 maior B S N[4] F C P L] minor M N[1]

est maior proportione recte *he* ad rectam *ea*: et si composuerimus, erit proportio anguli *ida* ad angulum ‖[L, f. 116v] *eda* maior proportione *ah* recte ad rectam *ae*. Sed angulus *gdi* equalis est angulo *adh*; et recta *gh* equalis est recte *ah*; quare proportio anguli *gdi* ad angulum *eda* maior est proportione recte *gh* ad rectam *ae*[1330]. **<24.3>** Sed proportio anguli *ide* ad angulum *ade* inventa est maior proportione *he* recte ad rectam *ea*, quare proportio totius anguli *gde* ad angulum *eda* maior est proportione[1331] recte ‖[*b*, p. 98] *ge* ad rectam *ea*. Sed proportio anguli *gde* ad angulum ‖[P, f. 89v] *ade* est ‖[N, f. 79r] sicut proportio arcus *gb* ad arcum *ba*, et proportio *ge* ad *ea* est sicut proportio corde *gb* ad cordam *ba*. Ergo proportio arcus *gb* ad arcum *ba* est maior proportione corde *gb* ad cordam *ba*: permutatim ergo erit proportio arcus *gb* ad cordam *gb* maior proportione ‖[S, f. 102v] arcus *ba* ad cordam *ba*, quod oportebat ostendere.



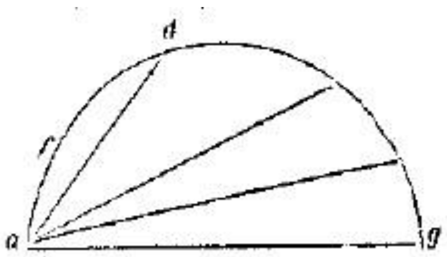
<25.1> His itaque intellectis, si per cordam datam alicuius circuli, cuius diameter sit nota, arcum ipsius corde invenire desideras, ipsam cordam per diametrum tabularum, scilicet per 42, multiplica, et quod provenerit, divide per diametrum circuli dati, et quod provenerit, erit corda tabularum similis date corde. Accipe arcum eius in tabulis, et multiplica eum per diametrum dati circuli, et quod provenerit, divide per diametrum[1332] tabularum, et habebis arcum quesite corde. **<25.2>** Ad cuius rei evidentiam: esto circulus *abg*, cuius diameter *bg* sit perticarum 10, et in ipso data sit corda *ab* 5 perticarum[1333], et vis habere notitiam ex arcu *abe*: multiplica[1334] *ab* cordam per 42, et divides per diametrum *bg*: provenient 21 pro corda tabularum, similis corde *ab*. Quam quere in ta‖[M, f. 87v]bulis, et accipe arcum, qui est in directo ‖[L, f. 117r] ipsius et qui est minor

---

[1330] ae B S M N F^b] de F^a C P L
[1331] he recte – proportione B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1332] dati – diametrum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1333] 5 perticarum B S N^4 F C P L] perticarum 5 M N^1
[1334] multiplica B M N F C P L] multiplicabis S

semicirculo. **<25.3>** Cum queras notitiam ex arcu *aeb*, qui |[C, f. 74v] est etiam minor semicirculo, et est minor arcus ipsius corde[1335] perticarum 22: quas si multiplicaveris per 10, scilicet per diametrum *bg*, et summam diviseris per 42, provenient $\frac{5}{21}$ 5 pro arcu *aeb*. Et si volueris habere notitiam maioris arcus *bdga*[1336], invenias maiorem arcum in tabulis, qui est in directo corde invente: et invenies ipsum esse 110 |[F, f. 63v] perticarum[1337]. Multiplicabis eas similiter per 10, et divides per 42, et venient pertice $\frac{4}{21}$ 26 pro arcu *bdga*.

<26.1> |[B, f. 60r] Item sit corda *ab* perticarum 8, et pedum 2[1338], et unciarum $\frac{4}{7}$ 8[1339]; et diameter *bg* sit 10, ut diximus. Multiplica ergo perticas 8 et pedes 2[1340] et uncias $\frac{4}{7}$ 16[1341] per 42. Et summam divides per 10: venient 35[1342] et pedes 2, que sunt corda tabularum similes corde date *ba*. **<26.2>** Quare <accipe> arcum eius minorem, si minorem |[P, f. 90r] vis scire, vel maiorem, si de maiori, scilicet ex arcu *bdg*[1343] notitiam vis habere. Et est minor arcus ipsius corde 42: que multiplica[1344] per 10, scilicet per diametrum *bg*, et quod provenerit, divide |[S, f. 103r] per diametrum tabularum, qui est 42, et provenient 10 pro arcu *aeb*. Et si maiorem arcum corde perticarum 35[1345], et pedum 2, que est 90, multiplicaverimus[1346] per 10, et summam diviserimus per 42: venient $\frac{3}{7}$ 21 pro arcu ma|[N, f. 79v]ioris semicirculi *bdg*[1347].



[1335] ipsius corde S C P L] corde ipsius B M N F
[1336] bdga F] hdga B M N, bdg S C P L
[1337] 110 perticarum B M N F C P L] perticarum 110 S
[1338] 2 S C P L] 3 B M N F
[1339] $\frac{4}{7}$ 8 S F[1] C P L] $\frac{2}{7}$ 16 B M N F[2]
[1340] 2 S C P L] 3 B M N F
[1341] $\frac{4}{7}$ 8 S F[1] C P L] $\frac{2}{7}$ 16 B M N F[2]
[1342] 35 S C P L] 36 B M N F
[1343] bdg S C P L] bdga B M N F
[1344] multiplica B M N F C P L] multiplicabis S
[1345] 35 S C P L] 36 B M N F
[1346] multiplicaverimus] multiplica B S M N F C P L
[1347] bdg B M N F C P L] bdga S

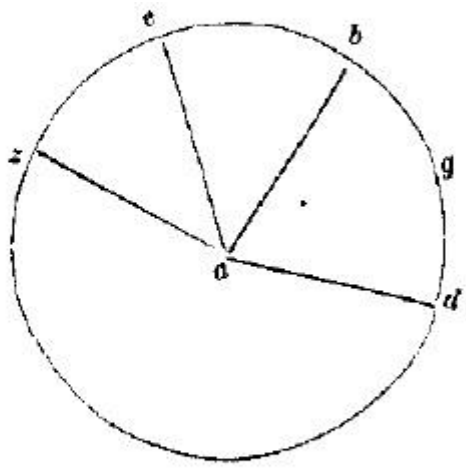
<27.1> Rursus adiaceat circulus alter *abgd*, cuius diameter *ag* sit 12, et eius[1348] corda *ad* sit perticarum 6 et unius pedis: et queritur notitia ex arcu *afd*, qui est minor semicirculo. **<27.2>** Multiplica itaque 6 et pedem 1 per 42: erunt pertice 259; quas divide per 12, scilicet per *ag*: venient pertice 21 et pedes 3 et uncie 9 |[L, f. 117v] pro corda tabularum similis corde *ad*, que corda non invenitur in tabulis, sed cadit inter cordam arcus perticarum 22 et cordam arcus perticarum 23, scilicet inter 21 et 21 et pedes 5 et uncias 2 et puncta 16. **<27.3>** Unde ut habeamus arcum invente corde, volumus per figuram geometricam demonstrare. |[M, f. 88r] Adiaceat semicirculus *ezitk*, cuius diameter *ek* sit perticarum 42, scilicet diameter tabularum; et ex ipso accipiatur arcus *ez* et *et*, quorum *ez* sit 22, et *et* sit 23; et protrahantur corde *ez* et *et*, et[1349] erit corda *ez* perticarum 21, et corda *et*[1350] erit[1351] perticarum 21 et pedum 5 et unciarum 2 et punctorum 16[1352], ut superius in tabulis continetur. Inter quas cordas cadit corda inventa, cuius arcum querimus in tabulis. **<27.4>** Unde scimus ipsum arcum cadere inter arcum *ez* et arcum *et*: cadat itaque in puncto *i*, et pro|[C, f. 75r]trahatur corda *ei*, que erit perticarum 21 et pedum 3 et |[*b*, p. 99] unciarum 9, ut superius inventum est. Et ex his omnibus, volumus invenire quantitatem arcus *ei*. **<27.5>** Sed nos scimus, ex premissis, quod proportio arcus *ez* ad cordam *ez* est minor |[P, f. 90v] proportione arcus *ei* ad cordam *ei*: sed si ponamus proportiones arcus *ei* ad cordam *ei*, eam quam habet arcus *ez* ad cordam *ez*, erit arcus *ei* perticarum 22 et pedum 3 et unciarum 12, que proveniunt ex divisa multiplicatione corde *ez* in cordam *ei* per arcum *ez*. |[F, f. 64r] Sed proportio arcus *ei* ad cordam *ei* est maior[1353] proportione arcus *ez* ad cordam *ez*: ergo arcus |[S, f. 103v] *ei* est plus inventarum perticarum 22 et pedum 3 et unciarum 12. **<27.6>** Item si ponamus arcum *ei* ad cordam *ei* in proportione arcus *et* ad cordam *et*, erit arcus *ei* perticarum 22 et pedum 4 et unciarum 4 et punctorum 13. |[B, f. 60v] Sed proportio arcus *ei* ad cordam *ei* est minor proportione arcus *et* ad cordam *et*: ergo arcus *ei* est minor perticarum |[L, f. 118r] 22 et pedum |[N, f. 80r] 4 et unciarum 4 et punctorum 13. **<27.7>** Et[1354] superius inventum est, arcum *ei* esse plus perticarum 22 et pedum 3 et unciarum 12: unde si

[1348] eius S M N F C P L] ius B
[1349] et S C P L] *deest* B M N F
[1350] corda ez – et B S M N F^2 C P L] *om.* F^1
[1351] erit S F C P L] *deest* B M N
[1352] 16 B M N F C P L] 15 S
[1353] maior B S N^4 F C P L] minor M N^1
[1354] et B S N^4 F C L] ut M N^1 P

dimidiaverimus differentiam, que est a perticis 22 et pedibus 3, et unciis 12, usque in perticas 22 et pedes 4 et uncias 4 et puncta 13, et illam medietatem que provenit addemus super perticas 22 et pedes 3 et uncias 12[1355], habebimus secundum propinquitatem quantitatem arcus *ei*. **<27.8>** Vel aliter aggregemus |[M, f. 88v] arcus *ez* et *et*, erit 45; et aggregemus cordas *ez* et *et*[1356]: erunt pertice 42 et pedes 5 et uncie 2 et puncta 16. In quibus dividamus multiplicationem de 45 in cordam *ei*, scilicet in perticas 21 et pedes 3 et uncias 9, et habebimus perticas 22 et pedes 4[1357] et unciam 1 et puncta 6 pro arcu *ei*. **<27.9>** Vel aliter abscindamus ex cordis *ei* et *et* quantitatem corde *ez*; et remaneat ex corda *ei* quantitas *oi*, que est pedum $\frac{1}{2}$ 3; et ex corda *et* remaneat quantitas *nt*, que est pedum 5 et unciarum 2 et punctorum 16. Et ponamus arcum *zi* ad arcum *zt*, scilicet ad perticam unam, sicut *oi* ad *nt*, hoc est multiplicabimus |[L, f. 118v] arcum *tz*, qui est unius pertice, scilicet 2160 punctorum, per *oi*[1358], scilicet per puncta 1260[1359], et dividemus summam per *nt*, scilicet per puncta 1856: habebimus pro arcu *zi* pedes 4 et unciam unam et puncta 6. Quibus additis cum arcu |[P, f. 91r] *ez*, qui est perticarum 22, habebimus perticas 22 pedes 4 et unciam 1 et puncta 6 pro arcu *ezi*, qui est similis arcui quesito *ad* superioris figure. Quare si multiplicaverimus ipsum per sextam diametri *ag*[1360], scilicet per 2, et diviserimus per sextam diametri tabularum, scilicet per 7, venient pertice 6 et pedes 2 et uncie 15 et puncta 15 pro arcu *ad*. **<27.10>** |[S, f. 104r – C, f. 75v] Et si arcum *abd*, qui est maior semicirculo, per cordam *ad* habere vis, extrahes cordam *ei* ex corda *et*: remanebunt puncta 596; que multiplica per arcum *tz*, scilicet per puncta 2160, et quod pervenerit, divide per *nt*, scilicet per 1856. **<27.11>** Extrahe[1361] puncta 694[1362], que sunt pes 1 et uncie 16 et puncta 14 pro arcu *ti*, que si |[F, f. 64v] addideris[1363] arcum maiorem tabularum, cuius corda est linea *et*, et ipse arcus[1364] est 109 perticarum[1365], habebimus perticas 109 et pedem 1 et uncias 16 et puncta 14 pro arcu tabularum.

[1355] et uncias 12 B M N F^2] *om.* S F^1 C P L
[1356] erit 45 – et B S M N F] *om.* C P L
[1357] 4 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1358] oi B S N^4 F^b C P L] *om.* M N^1 F^a
[1359] punctorum – 1260 B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1360] ag B M N F] ad S C P L
[1361] extrahe B S M N F P L] et habebis C
[1362] 694 S C P L] 596 B M N, *non legitur* F
[1363] addideris B S F C P L] addiderimus M N
[1364] ipse arcus B M N F C P L] arcus ipse S
[1365] perticarum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

Que si multiplicaveris[1366] per 12, et divides per 42; aut si multiplicaveris[1367] ipsum per sextam |[N, f. 80v] de 12, et diviseris summam per sextam de 42, habebis perticas 31 |[L, f. 119r] et pedem 1 et uncias 7 et puncta $\frac{6}{7}$ 6 pro arcu *abd*. **<27.12>** Et si per arcum *afd* notum cor|[M, f. 89r]dam *ad* ignotam habere vis, multiplica arcum *afd* per diametrum tabularum et summam divide per diametrum *ag*, et habebis perticas 22 et pedes 4 et unciam 1 et puncta 6 pro arcu suprascripto *ezi*, qui est arcus cadens in tabulis inter arcum *ez* et arcum *ezt*. **<27.13>** Unde ut inveniamus cordam ipsius |[*b*, p. 100] *ei*, que erit similis corde |[B, f. 61r] *ad* dati circuli *abgd*: ex invento arcu *ezi*, et extrahes[1368] arcum *ez*: remanebunt pedes 4 et uncia 1 et puncta 6, que sunt in summa puncta 1466; que multiplica per differentiam, que est inter cordam *ez* et cordam *et*, que sunt note ex tabulis; et est illa differentia linea *nt*, que est punctorum 1856. Et divides summam per puncta unius pertice, scilicet per arcum *tiz*: exibunt pedes $\frac{1}{2}$ 3 pro linea *oi*; |[P, f. 91v] quibus superadde lineam *eo*, que est equalis corde *ez*. Habebis perticas 22 et pedes $\frac{1}{2}$ 3 pro corda *ei*, que est similis corde tue *ad*. Quare multiplicabis eam per sextam de 12, et divides eam per sextam de 42: exibunt pertice 6 et pes unus pro corda *ad*. **<27.14>** Et sic secundum ea que diximus, cum diametri circulorum erunt noti, poterimus per datas cordas notas in ipsis arcus eorum ignotos reperire, et cetera[1369].

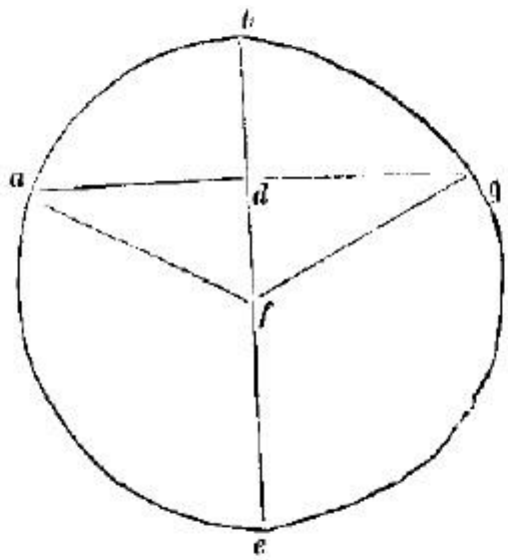


[1366] multiplicaveris N^4 F^b C P L] multiplicaverimus B S M N^1 F^a
[1367] multiplicaveris B S M N C P L] multiplicaverimus F
[1368] extrahes B S M N F C L] extrahas P
[1369] et cetera B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

<28.1> Cum itaque arcus per cordas, et cordas per arcus, per ea que diximus, invenire sciveris, et volueris aream alicuius sectoris circuli invenire[1370], arcum eius inve||[S, f. 104v]nire studeas, et dimidium[1371] ipsius per semidiametrum circuli multiplica, et quod provenerit erit area ipsius sectoris[1372]. **<28.2>** Verbi gratia: sit sector *abgd* ||[L, f. 119v] contentus sub rectis *ab* et *ad*, et arcu *bgd*: quoniam sector est figura *abgd*, erit unaqueque rectarum *ab* et *ad* semidiameter circuli. Quare punctus *a* est centrum circuli, de quo recisus est sector *abgd*. **<28.3>** Compleatur itaque circulus, de quo recisus est sector *abgd*[1373], qui sit circulus *gbed*; et sint arcus *be* et *ez* equales ||[C, f. 76r] arcui *bgd*; et compleantur recte *ae* et *az*: erit itaque unusquisque sectorum *abe* et *aez* equalis sectori *abgd*, quare est sicut arcus *db* ad ||[F, f. 65r] arcum *be*, ita sector *abgd* ad sectorem *abe*. Similiter et sector *aez* equalis est sectori *adb*: quare est sicut arcus *db* ad ||[N, f. 81r] arcum *ez*, ita sector *abgd* ad sectorem *aez*. Tres itaque sectores *abgd* et *abe* et *aez* sibi invicem sunt equales: duo enim illorum reliquo sunt dupli, quare sector *adbe* duplus est sectori *aez*, et arcus *dbe* duplus est arcui *ez*; quare est sicut arcus *dbe* ad arcum ||[M, f. 89v] *ez*, ita sector *adbe* ad sectorem *aez*. **<28.4>** Unde si totum circulum diviserimus in sectores, inveniemus quod proportio unius eorum ad totum circulum est sicut arcus ipsius ad totam lineam circumferentem circuli; sed proportio arcus cuiuscumque sectoris ad totam ||[P, f. 92r] lineam circumferentem est sicut dimidium arcus ipsius ad dimidium linee circumferentis. **<28.5>** Nam proportio numeri facti ex semidiametro circuli in semiarcum sectoris est ad numerum factum ex semidiametro in dimidium linee circumferentis, sicut semiarcus sectoris ad dimidium linee circumferentis[1374]. **<28.6>** Sed ex facto a semidiametro et in medietatem[1375] circumferentis linee[1376], provenit embadum circuli:ergo est sicut ||[L, f. 120r] multiplicatio semidiametri circuli in dimidium arcus[1377] sectoris ad embadum circuli, ita sector ||[B, f. 61v] est ad embadum circuli:

[1370] aream – invenire B S N^4 F C P L] invenire aream – circuli M N^1
[1371] dimidium B S M N^1 C P L] dimidium eius N^4 F
[1372] sectoris M N F^1 C P L] sectionis B S F^2
[1373] compleatur – abgd B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1374] circumferentis B S N^4 F C P L] circumferentis sicut semiarcus sectoris ad dimidium linee circumferentis M N^1
[1375] medietatem] medietatem linee B S M N F C P L
[1376] linee B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1377] arcus B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

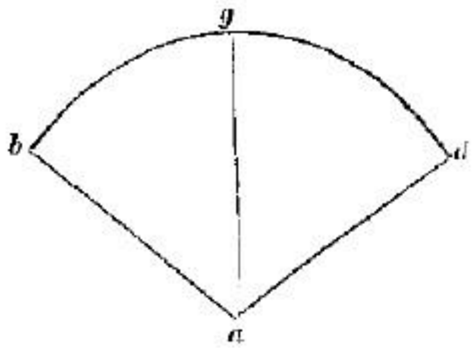
ergo aree[1378] sectorum omnium[1379] colliguntur[1380] ex multiplicationis semidiametri suorum circulorum in dimidium arcus ipsorum, et hoc volui demonstrare. **<28.7>** Et ut hoc in numeris declarescat: sit quelibet rec|[S, f. 105r]tarum *ab* et *ad* perticarum 5, et arcus *bgd* sit perticarum 8: erit ergo diameter tota perticarum 10. Multiplicabis itaque semidiametrum *ad* per dimidium arcus *bgd*, scilicet 5 per 4: venient 20 pro area sectoris *abgd*. Et si aream sectoris *abez* habere vis, multiplicabis semidiametrum *ae* in dimidium arcus *bez*: venient 40 pro area sectoris *abez*. **<28.8>** Et si aream tantum alicuius sectoris minoris semicirculo habere vis, ut aream sectoris *abg*, cu|[M, f. 90r]ius corda *ag* sit perticarum 16, et sagitta *bd* sit perticarum 4, diametrum circuli, unde ipsa sectio est, invenire studeas hoc modo: protrahes lineam *bd* in directo usque ad pun|[*b*, p. 101]ctum *e*; et sit proportio recte *de* ad rectam *da* sicut *da* ad *db*; quare *ed* erit 16, scilicet duplum linee *da*, cum *da* sit duplum linee *db*.



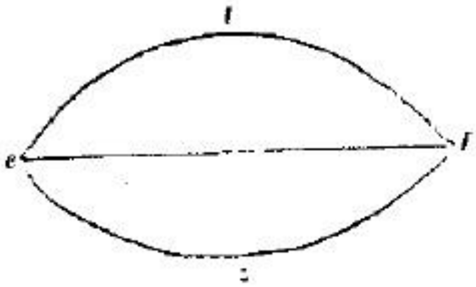
<29.1> Vel aliter multiplicetur *ad* in *dg*, scilicet 8 per 8: erunt 64, que dividantur per rectam |[N, f. 81v] *bd*, scilicet[1381] per 4: venient 16 pro linea *de*, ut diximus. Erit ergo tota diameter *be* 20. Et sumatur centrum circuli punctus *f*, et copulentur |[C, f. 76v] *fa fg*, et erit[1382] sector *fabg*: quare si multiplicaverimus *fb* in |[F, f. 65v] dimidium arcus *abg*, scilicet in arcu *bg*, veniet area sectoris[1383] *fabg*, de qua si astulerimus aream trigoni rectilinei *fag*, que colligitur ex *fd* |[P, f. 92v] in *dg*,

[1378] aree B S F C P L] area M N
[1379] sectorum omnium B S N^4 F C P L] omnium sectorum M N^1
[1380] colliguntur B S N^4 F C P L] colligitur M N^1
[1381] scilicet B M N F C P L] simul S
[1382] et erit B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1383] sectoris B M N F^1 C P L] sectionis S F^2

remanebit utique area sectionis contente sub *ag* recta et arcu *abd*. **<29.2>** Et si aream relique portionis circuli, |[L, f. 120v] que continetur sub recta *ag* et arcu *aeg*, habere desideras, semidiametrum, scilicet *fe*, in medietatem arcus *aeg* multiplica, et provenienti summe aream trigoni *fag* superadde: et habebis embadum sectionis *aeg*. Et sic studeas operari in similibus.

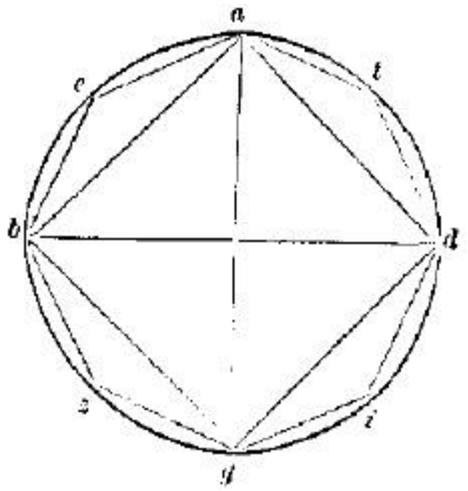


<30.1> Et si occurreret[1384] tibi metiendi campum habentem figuram sectoris[1385], videlicet quod sit composita ex triangulo[1386], et circuli portione[1387], ut campum *abgd*, qui componitur ex triangulo *abd* et sectione circuli *bgd*, que cognoscitur, sectorem non esse si linee *ab* et *ad* inequales sibi invicem sint[1388]. **<30.2>** Vel si protracta recta infra figuram, |[S, f. 105v] ut linea *ag* inequalis fuerit uni rectarum *ab* et *ad*, cuius embadum habebis, si areas sectionis *bgd* et trianguli *abd* in unum coniunxeris.

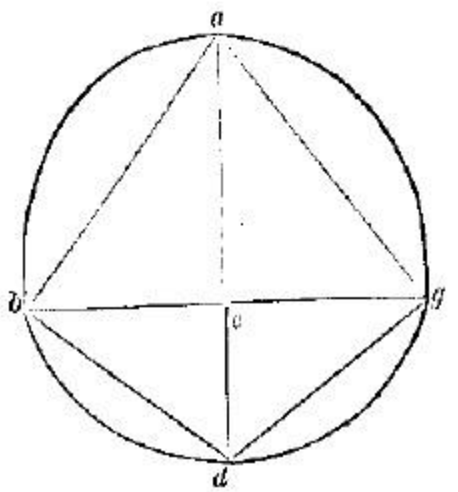


<31> Item si volueris mensurare campum habentem figuram piscis, videlicet que sit composita ex duabus circuli sectionibus, ut figuram *ezit* que com|[M, f. 90v]ponitur ex duabus sectionibus circuli, que sunt *ezi* et *eti*, accipies siquidem embadum uniuscuiusque sectionis, et quod ex ipsa coniunctione provenerit[1389], erit embadum figure *ezit*.

[1384] occurreret B M N F C P L] occurrent S
[1385] sectoris B M N F^2 C P L] sectionis S F^1
[1386] triangulo B S N^4 F C P L] triangulo abd M N^1
[1387] circuli portione B S N^4 F C P L] portione circuli agd M N^1
[1388] sint B S M N F^2 C P L] *om.* F^1
[1389] provenerit S F^2 C P L] provenit B M N F^1



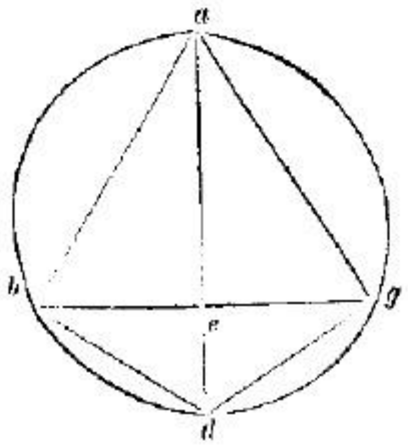
<32.1> Rursus[1390] |[B, f. 62r] est[1391] campus, cui[1392] figura elana[1393] vel obliqua dicitur, que circundatur ab una tantum linea minime circulum faciente[1394], cuius duo diametri *ag* et *bd* sese secundum rectum angulum secantes sibi invicem sunt inequales.



<32.2> Hanc itaque poteris mensurare, si eam in figuris rectilineis solvere procuraveris, ex quibus prima, et maior, erit quadrilaterum rectilineum contentum sub rectis *ba* et *bg* et *da* et *dg*: et remanebunt ex ipsa figura pectora quatuor, quorum unum continetur sub recta *ab* et curva *aeb*; aliud est namque[1395] contentum |[L, f. 121r] a recta *bg* et curva *bzg*; tertium vero est sub recta *gd* et curva *gid*; |[P, f. 93r] quartum quidem continetur sub recta *da* et curva *dta*. In quibus quatuor pectoribus si |[N, f. 82r] protraxerimus triangulos *eab* et *zbg* et *igd* et *tad*

[1390] rursus B S M N F[b] C P L] rursum F[a]
[1391] est B S M N F[b] C P L] *om.* F[a]
[1392] cui B S N[4] F C P L] cuius M N[1]
[1393] elana B S N[4] F C P L] altera M N[1]
[1394] faciente B M N] facientem S F C P L
[1395] est namque C P L] namque est B S N[4] F, namque M N[1]

rectilineos, non remanebit ex tota figura nisi parum quod continetur sub pectoribus octo. **<32.3>** Et si in quolibet ipsorum |[*b*, p. 102] protrahatur triangulus, et in residuis pectoribus illud idem operari |[F, f. 66r] studueris, resolvetur tota figura elana supradicta[1396] in figuris rectilineis, et non remanebit ex ea aliquid sensibile; quarum rectilinearum figurarum omnium, |[C, f. 77r] si embada in unum reduxerimus, nimirum embadum totius figure incontanter habebimus. **<32.4>** Aliter diametros *ag* et *bd* in unum coniunge, et ipsorum dimidium per $\frac{1}{7}$ 3 multiplica, et quod provenerit erit quantitas curve linee *abgd*: cuius dimidium si per dimidium medietatis duorum diametrorum multiplicaveris, embadum suprascripte figure provenerit. **<32.5>** Et ut hec in |[S, f. 106r] numeris habeantur, sit diameter *bd* 16, et diameter *ag* 12; quibus insimul iunctis faciunt 28; quorum dimidium si per $\frac{1}{7}$ 3 diviseris, |[M, f. 91r] venient 44 pro curva linea *abgd*; cuius dimidium, scilicet 22, si per meditatem medietatis diametrorum, scilicet per 7, multiplicaveris, reddent 154 pro embado ipsius.



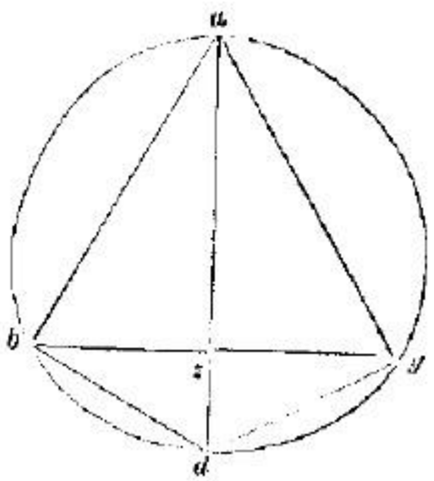
<33.1> Si in circulo trigonum describatur, cuius tres anguli periferiam cinguli[1397] contingant, possibile est per[1398] notitiam ipsius trigoni laterum et[1399] diametrum invenire. **<33.2>** Ad cuius rei evidentiam adiaceat trigonum *abg* descriptum in circulo *abdg*, cuius tres anguli contingunt cingulum in punctis *a b g*. A puncto quidem *a* protrahatur diameter *ad* secans latus trigoni *bg* super punctum |[L, f. 121v] *e*. Dico per[1400] notitiam laterum trigoni *abg* esse possibile quantitatem

1396 supradicta C P L^{b}] suprascripta dicta B S M N F L^{a}
1397 cinguli B S N^{4} F C P L] singuli M N^{1}
1398 per B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}
1399 et C P L] *deest* B S M N F
1400 per B S N^{4} F C P L] *om.* M N^{1}

diametri *ad* invenire. **<33.3>** Adiaceant quidem primum[1401] duo latera trigoni *ab* et *ag* sibi invicem equalia; et copulentur[1402] recte *bd* et *dg*: et erit unumquodque trigonorum *abd* et *agd* orthogonium, cum unumquodque ipsorum sit in semicirculo. Et quia latus *ab* est equale lateri *ag*, equalis erit latus *bd* lateri ||[P, f. 93v] *dg*; quare periferia *bd* periferie *dg* est equalis. Super equales ergo periferias equales[1403] anguli consistunt, quare angulus qui sub *bad* angulo qui sub *dag* ||[B, f. 62v] est equalis, quare basis *be* basi *eg* est equalis. Ergo diameter *ad* secat rectam *eg* in duo equalia: quare ad rectos angulos ipsa secare necesse est, ut Euclides in tertio suo libro demonstrat. **<33.4>** ||[N, f. 82v] Orthogonia quidem sunt et equalia trigona *aeb* et *aeg* et similia, cum anguli unius equales sint angulis alterius[1404]. Et quia trigonum *adb* habet angulum *bad* comunem cum trigono *abe*, et angulus *aeb* angulo *abd* est equalis, cum unusquisque ipsorum sit rectus. Reliquus vero qui sub *adb* reliquo qui sub *abe* est equalis: equiangula ergo sunt trigona *abd* ||[F, f. 66v] et *aeb*. **<33.5>** Similiter ostendetur trigonum *agd* equiangulum esse cum trigono *aeg*. Quatuor ergo trigona *aeb*, *aeg*, *abd*, *agd* sibi invicem ||[M, f. 91v] sunt similia. Similia enim trigona circa equales ||[S, f. 106v] angulos habent ||[C, f. 77v] latera proportionalia. Quare est sicut *da*, subtendens angulum rectum qui sub *abd*, ad *ab* continentem ipsum, ita *ab* vel *ag*[1405] subtendentes angulos rectos, ad rectam *ae*; quare multiplicatio *ad* in cathetum *ae* equatur unicuique quadratorum linearum *ab* ||[L, f. 122r] et *ag*, vel multiplicationi ex *ab* in *ag*. Quare si multiplicaverimus *ab* in *ag*[1406], vel acceperimus quadratum linee *ab* vel linee[1407] *ag*, et summam diviserimus per cathetum *ae*, proveniet quantitas diametri *ad*. Et est nota cathetus *ae*, cum sint nota latera trigoni *abg*: quare et diameter *ad* erit nota. **<33.6>** Que ut demonstrentur in numeris: sit quelibet rectarum *ab* et *ag* perticarum 10, et recta *bg* sit 12: quare cathetus *ae* erit 8. Ex ductu quidem *ab* in *ag*, vel ex quadrato linee *ab*, vel *ag*, proveniunt 100; quibus divisis per *ae*, scilicet ||[P, f. 94r] per 8, venient[1408] $\frac{1}{2}$ 12[1409] pro diametro *ad*. **<33.7>** Vel aliter, quia[1410] due recte *ad* et *bg*

[1401] quidem primum B M N F C P L] primum quidem S
[1402] copulentur S C P L] compleantur B M N F
[1403] equales B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1404] equales – alterius B S N^4 F C P L] angulis alterius sint equales M N^1
[1405] ag S C P L] ag qui subtendens B M N F
[1406] quare – ag B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1407] linee B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1408] venient B M N F C P L] veniunt S

sese invicem secant in circulo *abdg*, erit multiplicatio *ae* in *ed* sicut multipli|[*b*, p. 103]catio *be* in *eg*: quare si multiplicaverimus *be* in *eg*, et diviserimus per *ae*, scilicet 36 per 8, venient $\frac{1}{2}$ 4 pro linea *ed*. Quare tota *ad* diameter erit $\frac{1}{2}$ 12, ut prediximus. **<33.8>** Sed sit unaqueque rectarum *ab* et *ag* cum diametro *ad* nota et recta *bg* sit ignota: quoniam orthogonium est trigonum *abd*, et ab angulo ipsius recto super basem *ad* ad rectos angulos protracta est recta *be*, erunt trigona *abe* et *bed* sibi invicem similia, nec non et toti trigono *abd*. Quare est sicut *da* ad *ab*, ita *ab* ad *ae*. Quare si diviserimus quadratum linee *ab*, quod est 100, per diametrum *ad*, venient 8 pro catheto *ae*. Quorum quadrata[1411] si auferantur[1412] ex quadrato lateris *ab*[1413], remanebunt 36 pro quadrato linee *be*. Vel si multiplicaverimus *ae* per *ed*, hoc est 8 per $\frac{1}{2}$ 4, venient similiter 36 |[M, f. 92r] pro quadrato linee *be*. Ergo *be* |[N, f. 83r] est 6, |[L, f. 122v] et tota *bg* est 12. Vel aliter, quia[1414] trigonum *aeb* est simile trigono *adb*, erit sicut *ad* ad *db*, ita *ab* ad *be*: habent enim latera circa equales angulos proportionalia. Est |[B, f. 63r] quidem angulus, |[S, f. 107r] qui sub *abe*, equalis angulo qui sub *adb*: quare si multiplicaverimus *db* in *ba*, hoc est $\frac{1}{2}$ 7 in 10, et diviserimus per *ad*, venient 6 pro linea *be*, |[F, f. 67r] que est medietas linee *bg*.



<34.1> Sed non sint equales recte *ab* et *ag*, sit minor earum *ab* ut in hac alia cernitur figura. Et protrahatur in trigono *abg* cathetus *az*: et quia in sectione

---

[1409] $\frac{1}{2}$ 12 B M N F C P L] $\frac{1}{2}$ S
[1410] quia B S N[4] F C P L] quare M N[1]
[1411] quadrata C P L] quadratum B S M N F
[1412] auferantur C P L] auferatur B S M N F
[1413] ab B] ae S M N F C P L
[1414] quia B S N[4] F C P L] quare M N[1]

bdga sunt duo anguli, quorum unus est qui sub *bga*, et alter qui sub *bda*, erunt ipsi anguli sibi invicem ‖[C, f. 78r] equales. Et angulus qui sub *azg* angulo qui sub *abd* est equalis, cum sit uterque eorum rectus; reliquus sub *zag* reliquo qui sub *bad* est equalis[1415]: equiangula enim sunt trigona *azg* et *abd*. **<34.2>** Similiter ostendetur trigonum *azb* esse simile trigono *agd*: sunt enim in sectione ‖[P, f. 94v] contenti[1416] a recta *ga* et arcu *abdg* anguli qui sub *abg* et *adg*, quare ipsi anguli sibi invicem sunt equales. Et anguli *azb* et *agd* sunt recti, quare reliquus qui sub *zab* reliquo qui sub *gad* est equalis. Simile est ergo trigonum *azb* trigono *agd*, et quia similia sunt trigona *abd* et *azg*, erit sicut *da* ad *ab*, ita *ga* ad *az*. Quare si multiplicaverimus *ab* in *ag*, et diviserimus per *az*, proveniet diameter *ad*. **<34.3>** Exemplum in numeris: sit *ab* 13, et *ag* 15, et *bg* sit 14: quare *bz* erit 5, et *zg* ‖[L, f. 123r] erunt[1417] 9, et *az* erit 12. Ex *ab* quidem in *ag* veniunt 195; quibus divisis per *az*, scilicet per 12, provenient[1418] $\frac{1}{4}$ 16 pro diametro *ad*. Sed sit nota diameter *ad*, cum unaquaque rectarum *ab* et *ag*. Recta vero *bg*, que est corda arcus *bag*, sit ignota: quia similia sunt trigona *adg* et *azb*, circa equales angulos habent ‖[M, f. 92v] latera proportionalia; quare est sicut *ad* ad *dg*, ita *ab* ad *bz*; quare multiplicatio *ab* in *dg* equa est multiplicationi *ad* in *bz*.

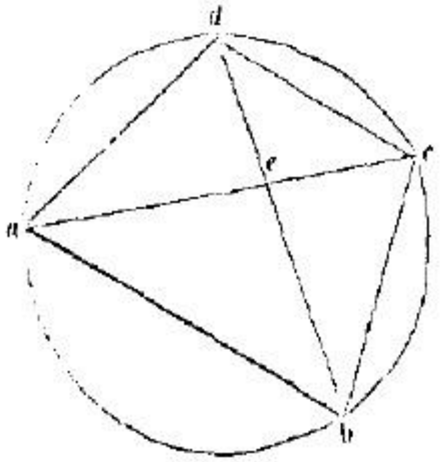
<35.1> Rursus quia similia sunt trigona *abd* et *azg*, erit sicut *ad* ad *db*, ita *ag* ad *gz*; quare multiplicatio *ag* in *db* equatur multiplicationi *ad* in *zg*. Sed multiplicatio *ab* in *gd* fuit equa multiplicationi *ad* in *bz*; ergo multiplicatio *ab* in *gd* cum ‖[S, f. 107v] multiplicatione *ag* in *bd* equatur duabus multiplicationibus, que sunt ex *ad* in *bz* et ex *ad* in *zg*, que due multiplicationes equantur facto ex *ad* in *bg*. Ergo multiplicatio *ab* in *dg* cum *ag* in *db* equatur ‖[N, f. 83v] facto ex *ad* in *bg*: ergo si multiplicationem ex *ab* in *dg* coniunxerimus cum facto ex *ag* in *bd*, et summam diviserimus per *ad*, veniet nota corda *bg*, ut prediximus. **<35.2>** Que demonstrentur[1419] in numeris: ex quadrato quidem diametri *ad* auferantur quadrata linearum *ab* et *ag*, et remanebunt nota quadrata linearum ‖[P, f. 95r] *bd* et *dg*, cum orthogonia sint trigona *abd* et *agd*: et erit *bd* $\frac{3}{4}$ 9, et recta *gd* erit $\frac{1}{4}$ 6. **<35.3>** ‖[F, f. 67v – *b*, p. 104] Unde si multiplicaverimus $\frac{1}{4}$ 6 per 13, hoc est *gd* per *ab*, et $\frac{3}{4}$ 9 per

[1415] cum sit – equalis B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1416] contenti] contenta B S M N F C P L
[1417] erunt S C P L] erit B M N F
[1418] provenient S F C P L] proveniunt B M N
[1419] ad veniet – demonstrentur B M N F C P L] *om.* S

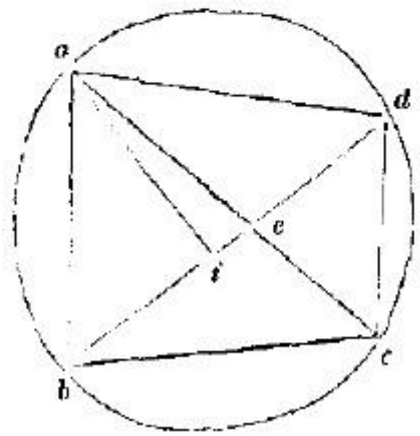
15, hoc est *bd* per *ag*, habebimus ‖[L, f. 123v] $\frac{1}{2}$ 227; quibus divisis per diametrum *ad*, hoc est per $\frac{1}{4}$ 16, reddunt 14 ‖[B, f. 63v] pro corda *bg* (et quibus divisis per $\frac{1}{4}$ 16, scilicet per diametrum *ad*, venient 14 pro corda *bg*)[1420]. Et hoc est ‖[C, f. 78v] valde utile in reperiendo corda cuilibet arcui agregato ex duabus arcubus, quorum corde sint note. **<35.4>** Fuerunt quidem note corde arcuum *ba* et *ag*, scilicet recte *ab* et *ag*, per quarum notitiam invenimus cordam *bg* arcui *abg*, qui fuit aggregatus ex arcu *ba* et *ag*. Et hoc demonstravit Tholomeus in compositione tabule arcuum et cordarum in Almagesti per alium modum.

<36.1> Demonstravit quidem Tholomeus, per consimilem figuram, quod omnis quadrilateri qualitercumque cadentis in circulo, si duo [1421] diametri protrahantur in ipso, multiplicatio unius diametri [1422] in alium equatur duabus multiplicationibus oppositorum laterum, quod sic probatur. **<36.2>** In circulo quidem *abcd* ‖[M, f. 93r] sit quadrilaterum *abcd*, et in ipso sint diametri ipsius quadrilateri *ac* et *bd* se invicem secantes super punctum *e*: dico quod multiplicatio *ac* in *bd* equatur duabus multiplicationibus, que fiunt ex *ab* in *cd*, et ex *ad* in *bc*. Anguli quidem *bae* et *ead* aut sunt equales, vel[1423] inequales[1424]. **<36.3>** Sint prius equales: et ostendetur trigonum *aed* simile esse ‖[S, f. 108r] trigono *abc*, cum anguli qui sub *adb* et *acb* sint sibi invicem equales. Sunt enim in eadem sectione. Reliquus qui sub *aed* reliquo qui sub *abc* similiter est equalis: quare est sicut *ac* ad *cb*, ita *ad* ad *de*. Erit ergo multiplicatio *ad* in *cb* equalis[1425] *ac* in *de*. Similiter ostendetur trigonum *aeb* simile esse trigono *adc*: quare erit sicut *ac* ad *cd*, ita *ab* ad *be*. ‖[L, f. 124r] Multiplicatio ergo *ac* in *eb* est equalis multiplicationi *ab* in *cd*: ergo multiplicatio *ad* in *bc*, cum *ab* in *cd*, equatur multiplicationi *ac* in *bd*, ut predixi.

[1420] $\frac{1}{4}$ 16 – bg B S N^4 F C P L] per diametrum ad hoc est per $\frac{1}{4}$ 16 reddunt 14 pro corda bg M N^1
[1421] si duo B S N^4 F C P L] unius M N^1
[1422] protrahantur – diametri B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1423] vel B S N^4 F P L] aut C *b*, aut sunt M N^1
[1424] inequales B S N^4 F C P L] equales M N^1
[1425] equalis B S M N F] equalis ex C P L



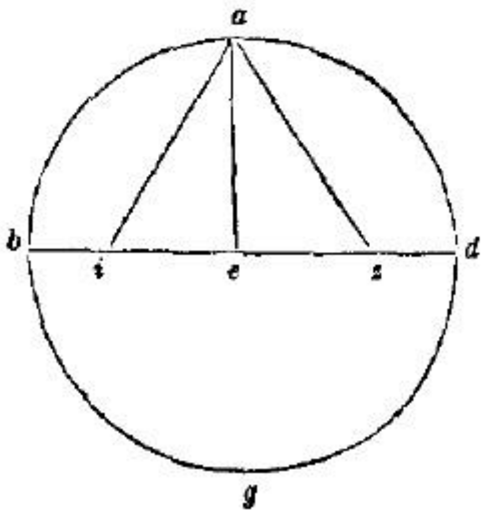
<36.4> |[P, f. 95v] Sed sit angulus *bae* maior angulo *ead*, et iaceat angulus *bai* equalis angulo *ead*. Comunis accipiatur angulus *iae*: erit angulus *bae* equalis angulo *iad*. **<36.5>** Quare ostendetur trigonum *iad* simile esse trigono *abc*, et trigonum *aib* simile esse trigono *adc*, et provenient deinceps que diximus superius. Et ostendetur multiplicatio diametri *ac* in diametrum *bd* equari duabus multiplicationibus oppositorum laterum. Unde si una ex ipsis cordis fuerit ignota, per notitiam reliquarum[1426] poteris ipsam invenire. **<36.6>** Verbi gratia: sit ignotus unus ex diametris; reliquus vero |[F, f. 68r] cum lateribus quadrilateri sit notus. Multiplicabo quidem *ab* in *cd*, et addam id quod provenerit cum facto ex *ad* in *bc*, et summam que provenerit dividam per diametrum notum. Et si fuerit ignotum latus *ab*, ex multiplicatione *ac* in *bd* extraham factum ex *ad* in *bc*, residuumque dividam per *cd*, et veniet *ab*. Et sic intelligas in reliquis.



<37.1> |[B, f. 64r – N, f. 84r – C, f. 79r] Si in circulo, cuius diameter sit 8, latus trigoni equilateri cadentis in circulo in|[M, f. 93v]venire desideras[1427], ex quadrato totius diametri quartam partem remove, vel quadratum semidiametri triplica, et

[1426] reliquarum S F C P L] reliquorum B M N
[1427] desideras B S M N F^{b} C P L] *om.* F^{a}

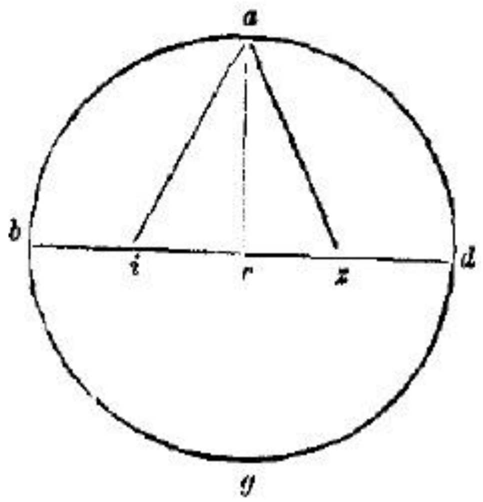
habebis 48 pro quadrato uniuscuiusque laterum trigoni cadentis in ipso circulo; quod si in dimidium sui catheti multiplicaveris, scilicet per 3, venient 3 radices de 48, hoc est una radix de 432 pro embado ipsius trigoni, quod est perticarum 20 et pedum 4 |[S, f. 108v] et unciarum $\frac{3}{4}$ 12. **<37.2>** Unde habetur quod proportio aree uniuscuiusque trigoni cadentis in ipso circulo ad quadratum |[L, f. 124v] sui diametri est sicut 20 et pedes 4 et uncie $\frac{3}{4}$ 12 ad 64: quare si multiplicaverimus ea per quadratum, cuius volueris diametri, et diviserimus per 64, habebimus aream trigoni cadentis in ipso circulo. Et quia trigonum cadens in circulo est medietas exagoni cadentis |[P, f. 96r] in |[*b*, p. 105] ipso circulo[1428], erit proportio aree exagoni ad quadratum diametri sui circuli sicut 41 et pedes 3 et uncie $\frac{1}{2}$ 7 ad 64: quibus multiplicatis per quadratum diametri cuiusvis circuli, si summa dividatur per 64, veniet utique embadum exagoni cadentis in ipso circulo.



<38.1> |[N, f. 84v] Et si in circulo *abgd* eius diameter *bd* sit 8, et vis[1429] latus penthagonicum, seu decagonicum cadens in ipso circulo reperire, super diametrum *bd* a centro *e* cathetus erigatur *ea*; et dividatur *ed* in duo equa super punctum *z*; et copuletur recta *az*; et iaceat recta *zi* equalis recte *az*, et copuletur recta *ai*[1430]. **<38.2>** Dico quidem quod recta *ai* latus est penthagonicum, et recta *ie* latus est decagonicum, quod sic probatur: quia linea *ed* divisa est in duo equa super *z*, et in directo ipsius adiuncta est linea *ei*, erit multiplicatio[1431] *ei* in *id* cum

[1428] circulo B S M N F C L] *om.* P
[1429] vis B S M N F L] eius C P
[1430] ai B S N^4 F C P L] az et iaceat recta zi equalis recte az et copuletur recta ai M N^1
[1431] multiplicatio B S N^4 F C P L] *om.* M N^1

quadrato linee *ez* [est] equalis quadrato linee *zi*. Sed recta *zi*[1432] iacet equalis recte *az*, ergo factum ex *ie* in *di* cum quadrato linee *ez* equatur quadrato linee *az*. Sed quadrato linee *az* equantur quadrata linearum |[M, f. 94r] *ae* et *ez*: ergo factum ex *ie* in *id* cum quadrato linee *ze* equatur duobus quadratis linearum *ae* et *ez*. **<38.3>** Comuniter[1433] aufe|[F, f. 68v]ratur quadratum linee *ez*: remanebit multiplicatio *ei* in *id* equalis[1434] quadrato semidiametri *ae*, |[L, f. 125r] hoc est quadrato semidiametri *de*, cum *de*[1435] sit equalis linee *ae*; ergo linea *di* divisa est in media, et extrema proportione. Est enim ut *id* ad *de* ita *de* ad *ei*. Et est latus exagonicum linea *de*: cum |[S, f. 109r] itaque lateri exagonici adiungatur recta, que cum tota divisa sit |[C, f. 79v] secundum mediam et extremam proportionem in puncto coniunctionis ipsarum, ipsa recta, que coniungitur lateri exagonico, est latus decagonicum, ut Euclides in tertio decimo libro demonstrat: quare recta *ei* est latus |[B, f. 64v] decagonicum.



<39.1> |[P, f. 96v] Et quia, ut idem Euclides in eodem libro ostendit, latus penthagonicum posse super latus exagonicum et decagonicum, erit siquidem recta *ai* latus penthagonicum, cum possit equale quadratorum linearum *ae* et *ei*, scilicet quadratis lateris exagonici, et decagonici, quod *ai* latus monstrabo cum numeris, esse lineam minorem, scilicet radicem abscisionis quarte. **<39.2>** Verbi gratia: diameter *bd*[1436] est 8: quare utraque rectarum *ae* et *ed* est 4. Quorum dimidium, scilicet *ze*, est 2: unde si adiunxerimus quadrata linearum *ae* et *ez*, habebimus 20

[1432] recta zi C P L] zi recta B S M N F
[1433] comuniter B S M N F P L] si comuniter C
[1434] equalis B M N F C P L] equalis diametro S
[1435] cum de B M N F C P L] *om.* S
[1436] bd B S M N F[b]] dg F[a] C P L

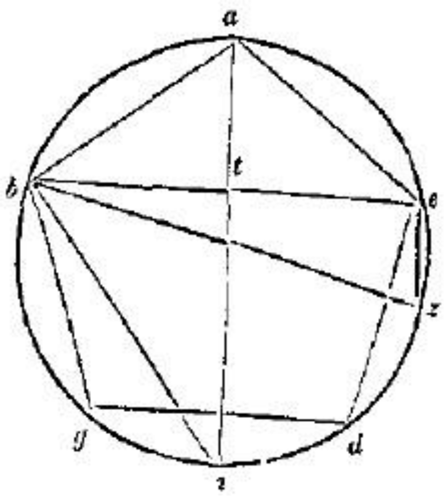
pro quadrato uniuscuiusque linearum *az*[1437] *zi*: ergo recta *ei* constat ex radice minus numero. **<39.3>** Est enim ipsa radix de 20 duobus inde demptis: quam si in se |[N, f. 85r] multiplicaverimus, venient 24, minus quatuor radicibus de 20. Que quatuor radices sunt una radix sexdecupli de 20, scilicet de 320: que si addiderimus cum quadrato linee *ae*, scilicet cum 16, habebuntur 40 minus[1438] radice de 320 pro quadrato linee *ai*. Quorum radix est linea *ai*, et quia ipsa est radix numeri, minus radice, dicimus[1439] ipsam esse lineam minorem, cum differentia, que est inter quadratum de 40, scilicet inter |[L, f. 125v] 1600, et 320, non sit quadratum nume|[M, f. 94v]rus. Cuius recisi radix secundum propinquitatem sic accipitur: radix de 320, que est circa 18, minus nona, extrahitur de 40: remanent $\frac{1}{9}$ 22, quorum radix, que est 4 et pedes 4 et uncie 3 et puncta 17, secundum maximam propinquitatem est linea *ai*, scilicet latus penthagonicum cadens in circulo suprascripto. **<39.4>** Ex hoc enim facile possunt haberi omnia latera penthagonica quorumlibet circulorum, quia est sicut 4 et pedes 2 et uncie 3 et puncta 17 ad 8[1440], ita erit latus penthagonicum cuiusvis circuli ad suum diametrum. Unde si multiplicaverimus diametrum cuiuslibet circuli per 4 et |[F, f. 69r] pedes |[S, f. 109v] 2 et uncias 3 et puncta 17 |[*b*, p. 106] et diviserimus per 8, habebimus latus decagonicum ipsius circuli.

<40.1> Si vero cordam anguli penthagonici *be* in penthagono *abgde*[1441], circa quod |[P, f. 97r] penthagonum sit circulus *abgde* descriptus, invenire desideras, diametrum ipsius circuli *bz* protrahe, que sit 8, et copulabis *ze*, que erit latus decagonicum. Et quia angulus *zeb* est in semicirculo *zeb*, ideo est rectus, quare si ex quadrato diametri *bz*, quod est 64, auferatur quadratum lateris |[C, f. 80r] decagonici *ze*, quod invenimus esse superius 24, minus radice de[1442] 320, remanebunt 40, et radix de 320[1443], quorum radix dicitur linea maior, cum sit radix binomii quarti[1444], que est longitudo corde *be*. **<40.2>** Unde potest haberi quod quorumcumque nominum fuerit quadratum lateris[1445] penthagonici, eorumdem

---

[1437] az B M N F C L] az et S P
[1438] minus B S N[4] F C P L] minus una M N[1]
[1439] dicimus B S N[4] F C P L] diximus M N[1]
[1440] secundum maximam proprinquitatem *in mg. sup. scr.* N[4]
[1441] abgde S C P L] abcde B M N F
[1442] de B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1443] remanebunt 40 - 320 S C P L] *desunt* B M N F
[1444] quarti S F[a] C P L] quarti remanebunt 40 et radix de 320 B M N F[b]
[1445] lateris S C P L] *deest* B M N F

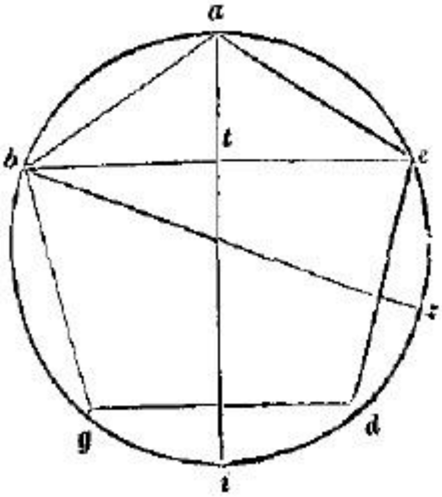
nominum[1446] erit corda anguli penthagonici. Sed latus penthagonicum est radix recisi quarti, scilicet[1447] numeri, minus radice; et quadratum corde est binomium quartum; et quia minus est reciso suo binomio, idcirco |[B, f. 65r] radix quarti recisi dicitur linea minor, et radix |[L, f. 126r] quarti binomii dicitur maior.



<41.1> Aliter protrahatur diameter *ati* secans cordam *be* super punctum *t*; et copulabo rectam *ib*. Et erit trigonum *iba* orthogonium. Et est divisum a catheto *bt* in |[N, f. 85v] duo trigona sibi invicem similia et toti: qua|[M, f. 95r]re est sicut *ia* ad *ab*, ita *ab* ad *at*. Quare si diviserimus quadratum linee *ab*, quod est 40, minus radice de 320, per diametrum *ai*, scilicet per 8, habebuntur 5, minus radice de 5 pro linea *at*, quibus extractis ex tota *ai*, remanebunt 3, et radix de 5 pro linea *ti*. Unde si multiplicaverimus *ti* in *ta*, et quadruplicaverimus illud quod provenerit, habebuntur similiter 40 et radix de 320 pro quadrato linee *be*. **<41.2>** Est enim radix de 320, 18 minus $\frac{1}{9}$, quibus additis cum 40, faciunt 58 minus nona, pro quadrato linee *be*, quorum radix est 7 et pedes 3 et uncie 11 et puncta 14. **<41.3>** Per quam etiam cordam poteris habere notitiam similium cordarum ca|[S, f. 110r]dentium |[P, f. 97v] in quolibet circulo, si ipsam per diametrum ipsius circuli duxeris[1448], et summam diviseris per 8. **<41.4>** Et ut habeamus embadum[1449] suprascripti penthagoni[1450], multiplicabimus $\frac{3}{4}$ diametri, scilicet 6, per $\frac{5}{6}$ corde *be*;

[1446] nominum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1447] scilicet B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1448] duxeris B M N F C P L] duxerimus S
[1449] embadum B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1450] penthagoni B M N F C P L] penthagonici S

vel $\frac{5}{6}$ de 6, que sunt 5, multiplica per totam cordam *be*, et venient circa perticas 38 et denarios $\frac{1}{2}$ 1 mensure pro embado penthagoni *abgde*.

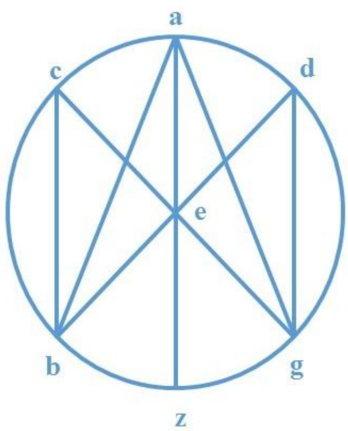


<42.1> Per quod etiam possumus habere notitiam embadorum omnium penthagonorum cadentium in quibuslibet circulis: si mul|[F, f. 69v]tiplicaverimus perticas 38 et denarios $\frac{1}{2}$ 1 per quadrata diametrorum ipsorum circulorum, et diviserimus per quadratum prepositi circuli[1451], scilicet per 64 (quia et ut[1452] Euclides in principio duodecimi libri ostendit, similia rectilinea in circulis ad se invicem sunt |[L, f. 126v] sicuti ad diametrorum tetragona) permutatim ergo est sicut quadratum diametri unius circuli ad multilaterum cadens in ipsum, ita quadratum <diametri> alterius circuli ad simile multilaterum cadens in ipsum. **<42.2>** Possumus etiam aliter habere notitiam corde *be*, et habebitur ex ea que probantur in quarto decimo libro Euclidis, quod corda anguli penthagonici cum latere penthagonico possunt quincuplum tetragoni |[C, f. 80v] semidiametri circuli: |[M, f. 95v] quare si acceperimus quincuplum quadrati medietatis diametri, habebimus[1453] 80; de quibus si extraxerimus quadratum lateris penthagonici, scilicet 40, minus radice de 320, remanebunt 40, et radix de 320 pro quadrato corde *be*, ut prediximus. **<42.3>** Vel si multiplicaverimus diametrum[1454] per $\frac{5}{81}$, habebimus 40 pro maiori nomine; et si ex quadrato quadrati diametri acceperimus

[1451] prepositi circuli B S N^4 F C P L] ipsius circuli prepositi M N^1
[1452] et ut S C P L] et B M N^4 F, ut N^1
[1453] habebimus B N^4 F C P L] habebis S, habentis M N^1
[1454] ut prediximus – diametrum B S^2 M N F C P L] *om.* S^1

$\frac{5}{64}$, hoc est de 4096, habebimus 320, quorum radix est minus nomen. Et sic poteris facere in aliis ‖[N, f. 86r] circulis.

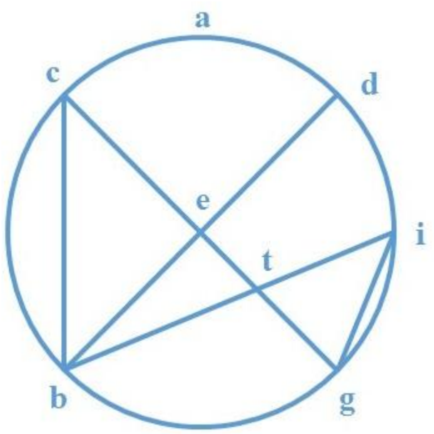
<43.1> Embadum quidem trigoni equilateri et equianguli cadentis in circulo, cuius dia‖[*b*, p. 107]meter est 8, invenimus esse superius perticas quadratas 20, et pedes 4, et uncias $\frac{3}{4}$ 12; embadum quidem tetragoni est 32, scilicet dimidium de 64, scilicet ex tetragono ‖[B, f. 65v] diametri; ‖[S, f. 110v – P, f. 98r] penthagoni vero $\frac{1}{24}$ 38; exagoni quoque 41, et pedes 3, et uncie $\frac{1}{2}$ 7; octagoni embadum quidem[1455] est perticarum 45, et pedis 1, et uncie $\frac{1}{2}$ 9, que habentur ex multiplicatione dupli diametri in medietatem lateris tetragoni, scilicet ex 16 in radice de 8; embadum quoque decagoni est perticarum 47, et unciarum $\frac{1}{2}$ 2, que habentur ex multiplicatione quincuplationis quarte partis diametri in latus penthagonicum, scilicet ex 10, in perticas 4, et pedes 4[1456], et uncias 3, et puncta 17; embadum namque dodecagoni est 48 perticarum, que proveniunt ex multiplicatione medietatis diametri in medietate omnium laterum exagoni cadentis ‖[L, f. 127r] in ipso circulo. **<43.2>** Cumque omnium harum notitiam habueris: poteris embadum similium figurarum cadentium in aliis circulis de facili habere, si immemor non fueris ex predictis.



<44.1> [1457] In circulis, ut in vigesimo theoremate tertii libri habetur, angulus qui ad centrum duplus est eius qui ad periferiam, si eandem basim habuerint anguli. **<44.2>** In circulo quidem *abgd* sit ad centrum angulus *beg* super basim *bg*, et ad periferiam sit angulus *bag*: dico angulum *beg* duplum esse

[1455] embadum quidem B S N^4 F C P L] quidem embadum M N^1
[1456] et pedes 4 B S M N F C L] *om.* P
[1457] §44 *deest* B S M N F

angulum *bag*. **<44.3>** A puncto quidem *a* per *e* centrum ducatur recta *aez*: erit quidem trigoni *aeb* unum latus eductum quod est *ae*, quare angulus qui sub *bez* equalis est duobus interioribus et oppositis qui sub *eba* et *bae*[1458]. Sed anguli qui sub *eba* et *bae* dupli sunt eius qui sub *bae*, cum sint sibi invicem equales. **<44.4>** Est enim trigonum *aeb* equicrurium equalia habens latera *ea* et *eb*: ergo angulus qui sub *bez* duplus est eius qui sub *bae*. Similiter ostendetur angulum *gez* du|[C, f. 81r]plum esse eius qui sub *gaz*, quare totus angulus *beg* duplus est totius anguli *bag*. **<44.5>** Rursus protraham rectam *be* in punctum *d* et copulabo *dg*[1459] rectam et ostendam angulum *beg* duplum esse angulo |[P, f. 98v] *bdg*, quoniam latera *ed* et *eg* sibi invicem sunt equalia. Quare anguli *edg* et *egd* dupli sunt angulo *edg*. Est enim angulus *beg* equalis duobus angulis qui sub *egd* et *edg*: ergo angulus qui sub *beg* qui est ad centrum duplus est angulo *edg* qui est ad periferiam. **<44.6>** Similiter ostendetur angulum *geb* duplum esse angulo *gcb*[1460], quod probabitur per quedam sequentia eiusdem libri hoc modo.



<44.7> Adiaceat rursus |[L, f. 127v] idem circulus *abgd* et protrahamus in eo angulum aliquem cadentem in arcu *dac*; et sit angulus *gcb* et ad centrum[1461] fit angulus *beg*. Et accipiam in arcu *dg* fortuitu punctus *i* et copulabo rectas *bi* et *ig*. Dico siquidem angulum *beg* duplum esse angulo *big*, quod sic probatur. **<44.8>** Quoniam[1462] in circulo *abgd* due recte *bi* et *ge* sese invicem secant super punctum *t*, erit multiplicatio *bt* in *ti* equalis multiplicationi *gt* in *tc*, ut in trigesimo quinto theoremate eiusdem libri habetur; quare recte *bt*, *tc*, *cg*, *ti*, sibi invicem

[1458] bae] bac C P L, *deest* B S M N F
[1459] dg C L] ag P, *deest* B S M N F
[1460] gcb] geb C P L, *deest* B S M N F
[1461] ad centrum] ancentrum C L, acentrum P, *deest* B S M N F
[1462] quoniam] quoniam recti C P L, *deest* B S M N F

proportionales sunt. **<44.9>** Est enim ut *bt* ad *tc* ita *gt* ad *ti*. Et quoniam trigona *btc* et *gti* habent unum angulum *btc* equalem uni angulo qui sub *gti*, et circa equales angulos latera proportionalia, erunt utraque trigona *btc* et *gti* equiangula et similia, quare angulus *tig* equalis est angulo *tcb*. **<44.10>** Sed angulus *beg* ostensus est duplus esse angulo *bcg*, quare et angulus *beg* duplus est angulo *big*, quod oportebat ostendere. **<44.11>** Et ex hoc concluditur manifeste quod anguli qui in eadem sectione circulorum sibi invicem sunt equales[1463].

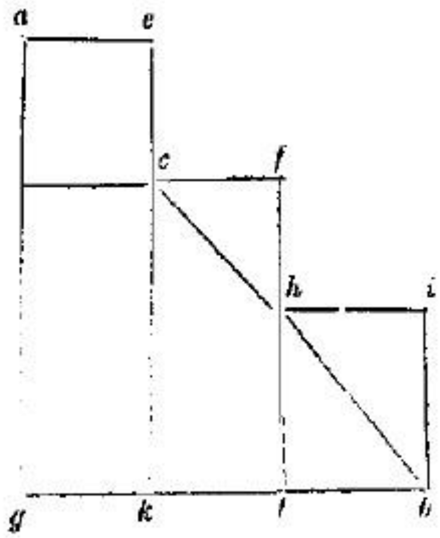
<45> Explicatis itaque que ad circulorum demonstrationes pertinent, nunc ad dimensionem camporum, qui in ascensione montium |[F, f. 70r] iacent, accedamus[1464] |[P, f. 99r - L, f. 128r].

<V>

Incipit pars[1465] quinta tertie distinctionis[1466] in dimensione camporum qui in montibus iacent[1467]

<1.1> Cum itaque campum aliquem qui sit in ascensione, sive in declivibus mon|[M, f. 96r]tium metiri desideras, latera superficiei iacentis in plano sub ipso diligenter inquiras, per que embadum ipsius plane superficiei habere studeas: nam ipsum erit embadum quesiti[1468] campi. **<1.2>** Non enim mensurantur montes secundum superficies apparentes in eis, cum domus, et edificia, arbores, nec non et semina non secundum rectum angulum super ipsas superficies e|[C, f. 81v]leventur. Unde queruntur embada ipsorum planorum, super que apparentes superficies montium iacent, et super que plana predicta omnia secundum rectum angulum elevantur. Nam qualiter per latera declivarum superficierum habeas[1469] notitiam laterum planarum superficierum [1470] existentium sub ipsis, volo presentialiter demonstrare.

[1463] vacat *in mg dx scr.* L
[1464] explicatis – accedamus B M N F C P L] *om.* S
[1465] pars B M N F^2] differentia S F^1 C P L
[1466] tertie distinctionis S N^4 F C P L] *desunt* B M N^1
[1467] incipit – iacent B^b S M N F C P L] *om.* B^a
[1468] quesiti S F C P L] quarti B M N
[1469] habeas B S N^4 F^b C L] habes P, *om.* M N^1 F^a
[1470] habeas – superficierum B S M N F^b C P L (habes P)] *om.* F^a

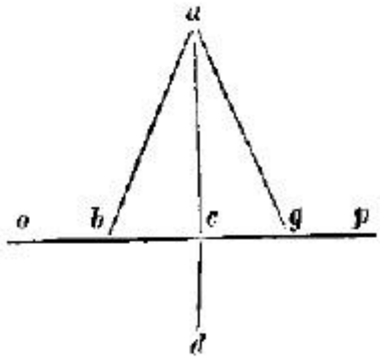


<2.1> Adiaceat quidem linea *ab* pro latere alicuius declivis superficiei ‖[N, f. 86v] iacentis in monte; et sit linea *bg* latus plani existentis sub latere *ab*; et cadat super *bg* perpendiculariter recta *ag* faciens angulum qui[1471] ad *g* rectum: oportet quidem per notitiam apparentis lateris *ab* occultum latus ‖[S, f. 111r] *bg*, nec non et notitiam perpendicularis *ag* verissime reperire. Quod dupliciter fit. **<2.2>** Primus enim modus, et quo sapientes agrimensores utuntur, ut in puncto *a* caput metientis pertice ponas, extendens eam versus *b* super lineam *ab*, et caput pertice, quod est super *a* immobiliter tene; aliud vero sursum erige donec ipsa pertica iaceat equidistanter linee *gb*. Quod scies[1472] per quoddam ‖[L, f. 128v] instrumentum, quod vocatur archipendulum, ut inferius demonstrabo. Et tunc per inferius caput pertice lapillum cadere relinquas super lineam *ab*. Et ubi ‖[B, f. 66r] lapillus ceciderit, ibi cum eadem pertica incipias eodem ordine cum pertica mensurare; et sic facies donec expleveris mensurando totam lineam *ab*. **<2.3>** Verbi gratia: sit pertica primo posita *ae*, que equidistet lateri *gb*; et per *e* punctum cadat lapillus ‖[P, f. 99v] super punctum *c*; super quem punctum ponat iterum caput pertice, tenendo eam cum archipendulo equidistantem cum linea *gb*, ‖[M, f. 96v] que sit *cf*; et a puncto *f* cadat lapillus super punctum *h*, et a[1473] puncto *h* versus *b*. Et ponas iterum perticam equidistantem linee *bg*, que sit *hi*; et per *i* cadat lapillus super punctum *b*: nam quotiens pertica sic[1474] posita cadet[1475] super lineam *ab*, totiens pertica ‖[F, f. 70v – *b*, p. 108] una erit in latere *gb*. **<2.4>** Verbi gratia: quia pertica *ae* equidistat

[1471] qui B S M N F P L] *om.* C
[1472] scies S C P L] scitur B M N F
[1473] et a B S N[4] F C P L] a quo M N[1]
[1474] sic S F C P L] sit B M N
[1475] cadet S N[4] F C P L] cadens B M N[1]

lateri *gb*, erit angulus *eag* rectus, cum sit rectus angulus, qui ad *g*: et quia *ec* est casus lapilli, si emiserimus lineam per *c* a puncto *e* super lineam *gb*, que sit linea *ek*, erit recta *ek* cathetus super rectam *gb*: quare recta *ek* equidistans est et equalis recte *ag*. Quare *gk* equalis est longitudini pertice *ae*. **<2.5>** Similiter si per *h* protraxerimus lineam |[C, f. 82r] *fl*, invenies, eisdem dispositis, lineam *kl* equari pertice *ef*. Rursus si per casum lapilli cadentis ab *i*[1476] in *b* punctum protraxerimus lineam *ib*, erit ipsa equidistans et equalis linee *hl*: quare et *lb* equalis est *hi*, scilicet pertice. Ergo quotiens pertica accepta fuit[1477] equidistanter linee *gb* super lineam *ab*, totiens unius pertice longitudo erit linea *gb*, ut |[S, f. 111v] prediximus.

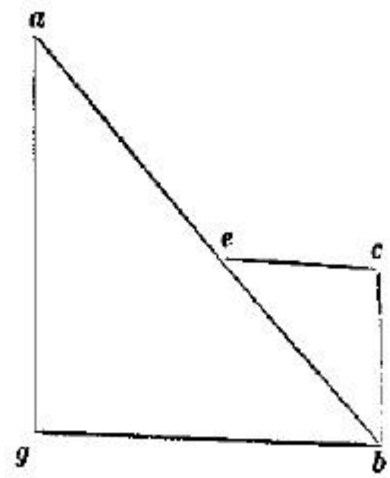
<3.1> Est enim archipendulus |[N, f. 87r] instrumentum ligneum habens formam trianguli equicrurii; et ab uno angulorum |[L, f. 129r] pendit filum cum plumbo: cumque posueris basem ipsius anchipenduli super perticam, et ab angulo superiori plumbum cum filo ceciderit super dimidium basis ipsius, tunc pertica stabit equidistanter illi plano, quod mensurare volueris.



<3.2> Quod poteris[1478] ad oculum deprehendere in subiecta figura, in qua ponitur pro pertica linea *po*, super quam erectus est archipendulus *abg*. Et a puncto *a* cadit filum cum plumbo *ad* per punctum *e*, qui est in medio *bg*. Et si in antecedente figura apparens latus *ab* recte descenderit, non oportebit ponere perticam cum archipendulo nisi semel, quia cum posueris perticam *ae* equidistantem lateri *gb*, et super casum *ec* erexeris arundinem equalem linee *ec*: erit triangulus *aec* similis triangulo *abg*, quia cum in equidistantibus |[P, f. 100r] *ae* et *bg* recta incidit[1479] *ab*, erit angulus *aec* |[M, f. 97r] equalis angulo *abg*. Similiter quia in equidistantibus *ag* et *ec* recta incidit *ab*, erit angulus *gab* equalis angulo *eca*: quare reliquus qui sub

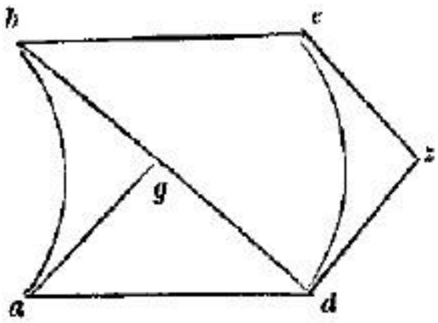
[1476] i B S N[4] F C P L] *om.* M N[1]
[1477] accepta fuit B S N[4] F C P L] fuit accepta M N[1]
[1478] poteris S C P L] potueris B M N F
[1479] incidit B M N F C P L] inciderit S

aec reliquo |[B, f. 66v] qui sub *agb* remanet equalis. Quare proportionaliter erit sicut *ae* ad totam *ab* ita pertica *ae* ad totam *gb*. Unde si multiplicaverimus *ab* in *ae* et diviserimus per *ac*, proveniet utique linea *gb*; hoc est si feceris perticam equalem linee *ac*[1480], et cum ipsa mensurabis totam lineam *ab*, habebis similiter lineam *gb*, quia[1481] quot equales linee *ac* sunt in linea *ab*, tot equales pertice *ae* sunt in latere *gb*: similiter quot equales linee |[F, f. 71r] *ac* sunt in linea *ab*, tot equales linee *ec* sunt in altitudine[1482] *ag*. Unde si multiplicaverimus *ab* per *ec* et diviserimus per *ac*, proveniet utique |[L, f. 129v] altitudo catheti *ag*. Et hec investigatio catheti est multum utilis in reperiendis altitudinibus pyramidum.



<4.1> Sapientes vero antiqui ordinabant cum arundinibus triangulum similem in hunc modum: descripta itaque |[S, f. 112r] figura |[C, f. 82v] suprascripta *agb*, cuius latus *ab* iaceat in apparentia montis, per quod volebant habere longitudinem plani *bg* nec non et altitudinem[1483] *ag*, erigebant itaque super radicem montis arundinem *bc* orthogonaliter cuiuscumque magnitudinis, super quam ponebant aliam arundinem facientem angulum *c* rectum, cuius caput alterum iacebat super lineam *ab*. Que arundo sit linea *ce*: et sic triangulus *cbe* erat similis triangulo *abg*. **<4.2>** Quare erat sicut *be* ad *ba*, ita *ec* ad *bg*: multi|[N, f. 87v]plicabant igitur *ab* per *ce* et dividebant per *be*: et sic habebant notitiam lateris *bg*. Similiter quia erat sicut *be* ad *ba*, ita *cb* ad *ag*, multiplicabant *ab* per *bc*[1484] et dividebant per *be*: et sic habebant altitudinem *ag*.

[1480] ac B S N^4 F C P L] gb M N^1
[1481] quia B S N^4 F C P L] quare M N^1
[1482] altitudine B S] altitudines N^4 F C P L, latitudine M N^1
[1483] altitudinem B S M N F^b C P L] altitudines F^a
[1484] bc B S M N F^2 C P L] be F^1



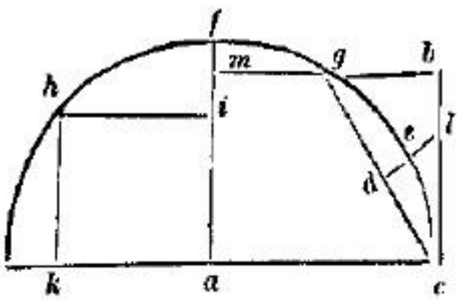
<5.1> Et si campus in monte positus habuerit formam superficiei alicuius portionum columne, ita quod tota[1485] apparens superficies sit gibbosa, ut superficies *abde*, cuius latera *ab* et *de* sint arcus |[*b*, p. 109] circuli, reliqua vero latera *ad* et *be* sint recta, et sit latus *be* in vertice |[M, f. 97v] montis, latus quoque *ad* sit inversus[1486] radicem: intelligam primum latera plani existentis sub ipsa |[P, f. 100v] superficie *agdz* et *gz*, nec non et altitudines *bg* et *ez* cadentes orthogonaliter super planum *adzg* et in puncta *g z*, quare anguli *agb* et *dze* sunt recti; mensurabo siquidem super arcus *ba* |[L, f. 130r] et *ed* cum pertica et archipendulo, prohiciendo lapillos super ipsos arcus, incipiendo a punctis *b e*, que sunt in eminentia campi, et descendendo usque ad puncta *a d*, et sic habebo quantitates *ag* et *dz*. **<5.2>** Et quia latus *ad* est rectus, nec non et in plano superficiei *gadz*, mensurabo ipsum sicuti mensurantur latera planorum. Deinde mensurabo latus *be* si fuerit equidistans et equale lateri *gz*, quod cognoscetur si catheti *bg* et *ez* fuerint equales. Et sic habebo notitiam lateris *gz*.

<6.1> Nam qualiter cognoscatur utrum catheti *bg* et *ez* sibi invicem sint equales[1487] vel non, |[S, f. 112v] in subscripta figura demonstrabitur[1488], vel poterit ad oculum |[B, f. 67r] deprehendi, si punc|[F, f. 71v]ta *b e* fuerint in eodem plano; si autem[1489] aliquis eorum fuerit altior, erit linea *be* in puncto *e* ascendens, vel descendens. **<6.2>** Esto *e* punctus altior puncto *b*, quare super latus *eb* mensurabo cum pertica et archipendulo ordine suprascripto, et sic habebo notitiam lateris *zg*. Et si planum *adzg* fuerit orthogonium, multiplicabo *ga* in *ad*, et habebo aream quadrilateri *az*, quod erit area apparentis gibbose superficiei. Et si planum *az* orthogonium non fuerit, stude|[C, f. 83r]bo invenire diametrum *gd*, cuius notitiam habebo, si super arcum *bd* mensurabo cum pertica et archipendulo; deinde aream

---

[1485] tota S N^4 F C P L] *deest* B M N^1
[1486] inversus B S M N F L^b] in C P L^a
[1487] equales B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1488] demonstrabitur B S M N F P L] demonstrabo C
[1489] autem B M N F C P L] vero S

trigonorum *gad* et *dzg* in unum coniungam, et habebo quesitum. **<6.3>** Et si gibbositas campi fuerit declinans ad utramque partem, ut arcus *cfh*, cuius altior pars sit punctus *f*, intelligam rursus latus plani *ca* orthogonaliter coniungi cum |[N, f. 88r] altitudine *af*. Et si arcus *fc* equalis fuerit arcui *fh*, duplum linee *ca* erit corda arcus *cfh*, scilicet longitudo lateris totius plani cadentis sub arcu *cfh*, dum tamen arcus *cfh*[1490] non sit maior semicirculo, quia si |[L, f. 130v] esset maior[1491] semicircu|[M, f. 98r]lo[1492] |[P, f. 101r], tunc diameter circuli esset longitudo superficiei apparentis. **<6.4>** Sed sit arcus *fh* minor arcu *fc*: et intelligam lineam *hi* coniungi orthogonaliter cum linea *fi*, et intelligam lineam[1493] *cak* equidistantem esse linee *ih*, et equalem *ak* linee *ih*; quare si protrahatur *hk*, erit equalis et equidistans linee *ia* et *hk*; quare[1494] angulus qui ad *k* est rectus; quare tota linea *ck* erit latus plani cadentis sub arcu *cfh*, et *hk* est altitudo[1495], que est ab *a* in *i*.



<7.1> His itaque intellectis mensurabo cum pertica et archipendulo ab *f* in *c*, et ab *f* in *h*, et habebo longitudinem lateris *ck*; vel aliter erigam arundinem super punctum *c* orthogonaliter, que sit *cb*, et aptabo cum ipsa aliam arundinem tante magnitudinis, que cum fecerit in *b* punctum angulum |[S, f. 113r] rectum. Aliud latus tangat arcum *fc*, que arundo sit linea *bg*. **<7.2>** Investigabo igitur quam subtilius potero longitudines arundinum[1496] *cb* et *bg*, et coniungam quadrata earum; et coniuncto radicem inveniam, que erit longitudo corde *cg*[1497]; quam[1498] dividam in duo equa super punctum *d*, et a puncto *d* intelligam cathetum *de* elevatum esse super cordam *cg*; quare *e* punctus dividet arcum *cg* in duo media.

[1490] dum tamen arcus cfh B S^2 M N F C P L] *om.* S^1
[1491] maior B S N^4 F C P L] minor M N^1, *om.* F^a
[1492] quia – semicirculo B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1493] hi – lineam B S N^4 F C P L] *om.* M N^1
[1494] quare B S M N F^b C P L] *om.* F^a
[1495] altitudo B S F C P L] latitudo M N
[1496] longitudines arundinum B S F C P L] arundinum longitudinem M N
[1497] cg B S M N^1 F^2 C P L] cdg F^1 N^4
[1498] quam B M N F C P L] quoniam S

Et quia, ut in undecimo habetur libro, esse omnem triangulum in superficie una, si rectam *de* protraham a parte *e* per superficiem *bcg*, cadet super unum ex lateribus *cb* et *bg*, vel in angulum *b* contentum[1499] ab ipsis. Quando *cb* et *bg* fuerint equales, tunc cadet |[*b*, p. 110] super punctum *b*, et si una ipsarum fuerit maior, tunc cadet |[F, f. 72r] super maiorem ipsarum. **<7.3>** Esto siquidem |[B, f. 67v] maior *cb* quam *bg*: et protrahatur in intellectu linea *de* donec concurrat cum linea *cb* in puncto *l*[1500]: erunt siquidem trigona |[L, f. 131r] *cbg* et *cdl* orthogonia et similia, cum habeant angulum *lcd* comunem, quare erit sicut *bc* ad *bg*, ita *cd* ad *dl*. Quare multiplicabo *bg* per *cd*, |[C, f. 83v – M, f. 98v] et dividam per *bc*, et habebo notam *dl*. **<7.4>** Item est sicut *bc* ad *cg*, ita *cd* ad *cl*: quare multiplicabo *cg* per *cd*, et dividam per *bc*, et habebo quantitatem linee *cl*, quam accipiam subtiliter[1501]. Et accipiam arundinem rectam, |[P, f. 101v] que cadat ab *l* in *e*, cuius longitudinem tollam ex inventa *ld*, et remanebit sagitta *ed* nota. Quare si multiplicavero *cd* in *dg*, et dividam per *de*, et quod provenerit |[N, f. 88v] addam cum *ed*, habebo diametrum circuli, cuius est arcus *cfh*. Cumque, per inventum diametrum, cordam dupli arcus *gf* inveneris per ea que in tabulis diximus, et ipsius corde dimidium acceperis, habebis sane notitiam linee *gam*. Cui si addideris longitudinem arundinis *bg*, habebis notitiam totius linee *bm*, hoc est[1502] linee *ca*. **<7.5>** Similiter si per eundem diametrum inveneris cordam dupli arcus *fh*, dimidium eius erit linea *hi*, que est equalis linee *ak*: et sic habebis notitiam totius recte *ck*, scilicet longitudinem plani existentis |[S, f. 113v] sub gibbosa superficie.

<8.1> Cumque latera planorum, super que apparentes superficies montium elevantur, invenire sciveris, poteris eorum embada per ipsa latera subtiliter invenire, cum ipsa plana fuerint[1503] ex tribus lateribus, vel ex quatuor, vel ex pluribus, vel rotunda, vel ex aliqua parte circuli, vel quod etiam habeant[1504] formam obliquam deviantiam a vera rotunditate. **<8.2>** Cumque formam ipsius plani habueris per ea que in hac tertia distinctione dicta sunt, embadum ipsius invenire poteris. Quare huic distinctioni finem imponentes[1505], ad quartam

[1499] contentum S M N C P L] contemptum B F
[1500] l B S M N C P L] i F
[1501] subtiliter S C P L] subtiliter et ibo B M N F
[1502] est B S F C P L] est totius M N
[1503] fuerint S P L] fuerit C sunt B M N F
[1504] habeant S F C P L] habeat B M N
[1505] imponentes S C P L] imponens B M N, impone F

distinctionem accedamus, in qua docebimus dividere campos cuiuscumque sint forme[1506]. |[L, f. 131v]

Explicit distinctio tertia

[1506] forme B S F C P L] figure M N

TRADUZIONE

<III>

TERZA DISTINZIONE

Il calcolo dell'area di tutti i tipi di superficie

Ho deciso, pertanto, di dividere questa distinzione in cinque parti, nella prima delle quali opererò nell'ambito delle misure dei triangoli; nella seconda, svolgerò operazioni nell'ambito delle misure dei quadrilateri; nella terza, svolgerò operazioni nell'ambito delle misure dei poligoni regolari; nella quarta svolgerò operazioni nell'ambito dei cerchi, delle loro porzioni, delle figure sovrascritte composte di lati obliqui, e delle figure composte di linee rette e curve insieme; nella quinta svolgerò operazioni nell'ambito delle misure delle superfici che sono collocate sulle pendici dei monti.

<I>

Terza distinzione, parte prima. L'area del triangolo.

Terza distinzione: prima parte

<1.1> Per quanto riguarda i triangoli, ovvero i *trilateri*, alcuni sono detti *ortogoni*, vale a dire rettangoli; altri sono detti *oxigoni*, vale a dire acutangoli; altri ancora sono detti *ampligoni*. Essi traggono il nome dagli angoli: si definisce *rettangolo* il triangolo che ha retto uno dei tre angoli e in cui, di conseguenza, la somma degli altri due angoli è pari alla misura di un angolo retto. Si definisce *acutangolo*, poi, il triangolo che ha tutti e tre gli angoli acuti; su definisce, infine, *ottusangolo* quello che ha uno dei tre angoli maggiore dell'angolo retto. **<1.2>** Senza dubbio i triangoli prendono il nome anche dai lati. Di questi, alcuni vengono definiti *ysopleuri*, cioè equilateri; altri vengono definiti *ysocheli*, cioè isosceli; sono infine definiti *diversilateri* quelli che sono scaleni. Equilateri sono certamente i triangoli che hanno tutti e tre i lati uguali tra loro; isosceli sono, invece, quelli che hanno due lati uguali tra loro; i triangoli scaleni sono infine quelli che hanno tutti e tre i lati diversi. **<1.3>** Bisogna evienziare che in ogni tipo di triangolo possono essere eretti tre *catheti*, ovvero tre perpendicolari. Ciascuna di esse si origina da un angolo qualsiasi sul lato sotteso, ovvero sul lato che la riceve. Nei triangoli rettangoli, però, una sola delle perpendicolari cade all'interno del triangolo, ed è quella che si origina dall'angolo retto sul lato che lo sottende, mentre le altre due perpendicolari coincidono con i due lati che contengono l'angolo retto. Nei triangoli acutangoli tutte e tre le perpendicolari cadono all'interno dello stesso. Nei triangoli ottusangoli, infine, due perpendicolari cadono all'esterno del triangolo, mentre la terza cade all'interno.

<2.1> *L'*embadum*, ovvero l'area, di ogni tipo di triangolo, si calcola mediante il prodotto di metà altezza per tutta la base, oppure di metà base per tutta l'altezza*. Mi occuperò di addurre prove a sostegno di questa dichiarazione. **<2.2>** Se in un triangolo, a partire da un angolo che non sia minore dei rimanenti due, viene eretta la perpendicolare sul lato che sottende il medesimo angolo, essa cadrà all'interno del triangolo. In un triangolo *abg* sia dato l'angolo *bag* non minore dell'angolo *abg* ovvero di *bga*: dico che se dal punto *a* viene eretta la perpendicolare sul segmento *bg*, essa cadrà all'interno del triangolo *abg*. **<2.3>** Dimostrazione per assurdo[1]: cada la perpendicolare all'esterno del triangolo dal lato *b*, e sulla direttrice si conduca all'infinito il segmento *bg* passante per il punto *e*. Sul segmento *ge* si tracci la perpendicolare *az*: il triangolo *azb* sarà rettangolo ed avrà l'angolo *azb* retto. Dal momento che nel triangolo *azb* un lato è stato condotto al di fuori del triangolo, vale a dire *zb* oltre *bg*, l'angolo esterno *abg* è senza dubbio maggiore dell'angolo opposto interno *azb*. Retto è, certamente, l'angolo *azb*; maggiore del retto è, dunque, l'angolo *abg*. Ma l'angolo *bag* non è minore dell'angolo *abg*: esso, infatti è maggiore dell'angolo retto *abg*. Parimenti anche l'angolo *bag* è maggiore dell'angolo retto. Nel triangolo *abg* sono dunque presenti due angoli ottusi, cosa impossibile, visto che la somma dei tre angoli di ogni tipo di triangolo è sempre pari a 180°. Si dimostra dunque che la perpendicolare tracciata dal punto *a* sul lato *bg* non cadrà al di fuori del triangolo dalla parte di *b*. **<2.4>** Si dimostrerà, secondo un procedimento simile, che essa

[1] *Non enim, sed si possibile est* è una formula fissa usata da Fibonacci per introdurre la dimostrazione per assurdo, che consiste nell'assumere un'ipotesi temporanea e nel dimostrare che è falsa, in quanto da essa scaturiscono conseguenze assurde sul piano logico. Attraverso questo procedimento, è possibile dimostrare la veridicità di un assunto sulla base del fatto che derivano conseguenze paradossali se solo si presuppone che esso sia falso, e viceversa.

non cadrà neppure all'esterno di *g*: tale perpendicolare cadrà infatti all'interno, come volevasi dimostrare. Da ciò, infatti, si comprende che, se sul lato che sottende lo stesso angolo, viene eretta una perpendicolare dall'angolo acuto di un triangolo acutangolo, dall'angolo retto di un triangolo rettangolo, e dall'angolo ottuso di un triangolo ottusangolo, essa cadrà all'interno del triangolo.

<3.1> Dimostreremo in che modo, in un triangolo rettangolo, i lati che contengono l'angolo retto siano perpendicolari al suo interno. Si tracci il triangolo rettangolo *bgd*: dico che il segmento *bg* è perpendicolare al segmento *gd* e che, viceversa, il lato *dg* è perpendicolare a *bg*. **<3.2>** Si tracci il segmento *gd* sulla direttrice oltre il punto *a*: dal momento che sul segmento *ad* giace il segmento *bg*, esso forma da una parte e dall'altra due angoli o retti, o tali che la loro somma sia pari alla somma di due angoli retti. Retto è certamente l'angolo *bgd*; rimane l'angolo *bga* anch'esso retto, perché *bg* è perpendicolare a *ad*. Similmente, se si traccia il segmento *bg*, si dimostrerà che il segmento *dg* è perpendicolare a *bg*. **<3.3>** Dico ancora: dal punto *b* non può cadere altra perpendicolare al segmento *ad*, ad eccezione della perpendicolare *bg*. Dimostrazione per assurdo: *ba* sarà perpendicolare a *ad*: vi saranno allora all'interno del triangolo *bag* due angoli retti, e ciò non è possibile. Similmente, se la faremo cadere all'interno di *gd* sul punto *e*, nel triangolo *abe* vi saranno due angoli retti, che sono *bge* e *geb*, cosa che è anch'essa impossibile. Ne consegue che sul segmento *ad* non cade altra perpendicolare se non *bg*. Similmente si vedrà che neppure dal punto *d* può cadere su *bg* altra perpendicolare al di fuori di *dg*, come volevasi dimostrare.

<4.1> Se, in un triangolo acutangolo, da un angolo acuto si traccia una perpendicolare al lato che sottende il medesimo angolo, essa cadrà all'interno del triangolo. **<4.2>** Esempio: sia dato il triangolo acutangolo *abg* che abbia acuto l'angolo *bag*: dico che se dal punto *a* si erige la perpendicolare al segmento *bg*, essa cadrà all'interno del triangolo. **<4.3>** Dimostrazione per assurdo: cada la perpendicolare all'esterno del triangolo sul punto *d*. Dal momento che il segmento *ad* è perpendicolare al segmento *dbg*, l'angolo *adb* è retto; ma l'angolo *abg*, che è al di fuori del triangolo *adb*, è maggiore dell'angolo interno e opposto *adb*. Si è visto, però, che l'angolo *adb* è retto, per cui l'angolo *abg* è maggiore del retto, cosa impossibile, essendo *abg* un triangolo acutangolo. Allora la perpendicolare tracciata da *a* non cade al di fuori del triangolo *abg*: essa cade, infatti, all'interno, come volevasi dimostrare.

<5.1> In un triangolo ottusangolo, se da un angolo acuto si traccia la perpendicolare al lato che sottende il medesimo angolo, essa cadrà all'esterno del triangolo. **<5.2>** Sia dato il rettangolo ottusangolo *bdg*, che ha ottuso l'angolo *bdg*: dico che se dall'angolo *dbg* viene condotta la perpendicolare al segmento *gd*, essa cadrà all'esterno del triangolo *bdg*. **<5.3>** Dimostrazione per assurdo: la perpendicolare cada all'interno del lato *dg* nel punto *a*. Dal momento che *ba* è perpendicolare al segmento *gd*, l'angolo *bad* è certamente retto. In realtà però esso è anche maggiore dell'angolo retto *bda*, perciò nel triangolo *bda* sono presenti due angoli ottusi, e questo è impossibile. **<5.4> L**a perpendicolare tracciata dal punto *b* sul lato *gd* non cade infatti all'interno del triangolo *bdg*. Si dimostrerà similmente che neppure la perpendicolare dal punto *g* sul lato *bd* può cadere all'interno del triangolo *bgd*: esse infatti cadono entrambe all'esterno, come volevasi dimostrare.

<6.1> Se un segmento cade tra due linee che contengono un angolo, e nel mezzo di esso si fissa un punto, e dal punto all'angolo si traccia un segmento, se questo segmento sarà uguale al lato che giace dal suddetto punto a una delle due linee che contengono l'angolo, allora quell'angolo sarà retto. **<6.2>** Esempio: siano date due linee *ab* e *bg* che contengano l'angolo *abg*, e tra esse cada il segmento *de*. Nel mezzo di esso si fissi il punto *z* e si tracci *zb*: dico che l'angolo *abg* è retto, dal momento che il segmento *zb* è uguale al segmento *ze* ovvero *zd*. **<6.3>** Dal momento che le tre linee *zd*, *zb* e *ze* sono tra loro uguali, se dal punto *z* fino alla distanza di uno di esse si traccia un cerchio, senza dubbio esso passerà per i punti *d*, *b*, *e*. In questo cerchio è stato tracciato il segmento *de*, in cui giace il centro del cerchio: perciò il segmento *de* corrisponde al diametro del cerchio. Da questo diametro è stato compreso l'arco di circonferenza *dbe*: dunque, *dbe* è il semicerchio nel quale è compreso l'angolo *dbe*. Senza dubbio, l'angolo che è nel semicerchio è retto, come dimostra Euclide nel terzo libro dei suoi *Elementi*. Da ciò risulta chiaro che se il segmento *zb* fosse stato maggiore del segmento *zd* ovvero del segmento *ze*, l'angolo *dbe* sarebbe stato certamente acuto; se invece *zb* fosse stato minore di *zd* o di *ze*, l'angolo *abg* sarebbe stato ottuso.

<7.1> *Senza dubbio, in un triangolo rettangolo il quadrato del lato che sottende l'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei due lati che lo comprendono.* **<7.2>** Sia dato il triangolo rettangolo *abg* che ha retto l'angolo *agb*: dico che il quadrato del lato *ab* è uguale alla somma dei due quadrati dei lati *ag* e *gb*. Si tracci dal punto *g* sul segmento *ab* la perpendicolare *gd*: il triangolo *abg* sarà stato così diviso nei due triangoli rettangoli *gdb* e *gda*. Essi sono tra loro simili ed uguali, come ha dimostrato Euclide nel sesto libro dei suoi *Elementi*. **<7.3>** Dal momento che il triangolo *gdb* è simile al triangolo *agb*, essi hanno in proporzione i lati intorno all'angolo in comune *b*: infatti, come del triangolo *dbg* il lato *db* sta al lato *bg*, così del triangolo *bag* il lato *gb* sta al lato *ab*, per cui il risultato del prodotto di *db* per *ba* è pari al quadrato del lato *bg*. **<7.4>** Di nuovo, dal momento che il triangolo *gda* è simile al triangolo *agb*, esso ha in proporzione i lati intorno all'angolo in comune *a*. Dunque, come del triangolo *gda* il segmento *da* sta a *ag*, così del triangolo *agb* il segmento *ga* sta al segmento *ab*, per cui il risultato del prodotto di *ad* per *ab* è pari al quadrato del lato *ag*. **<7.5>** È stato senza dubbio dimostrato che il prodotto di *db* per *da* è uguale al quadrato del lato *gb*, per cui il risultato del prodotto di *db* per *ba* più il risultato del prodotto della linea *ad* per *ab* è pari alla somma del quadrato del lato *bg* col quadrato del lato *ga*. Ma il prodotto di *db* per *ab* unito al prodotto di *da* per *ab* è pari al quadrato del lato *ab*: dunque il quadrato del lato *ab* è uguale alla somma del quadrato del lato *bg* con il quadrato del lato *ga*, come volevasi dimostrare.

<8.1> Avendo così dimostrato tali assunti, vediamo ora in che modo si debba calcolare la superficie dei triangoli. Bisogna in primo luogo tenere presente che, dei triangoli rettangoli e di quelli ottusangoli, alcuni sono isosceli, altri scaleni; per quanto riguarda poi quelli acutangoli, alcuni sono equilateri, altri isosceli, altri scaleni. **<8.2>** Partendo da ciò, e al fine di garantire il completo insegnamento di come si calcoli la superficie di ogni tipo di triangolo, ho diviso questa prima parte della terza distinzione in tre paragrafi: nel primo paragrafo illustrerò come si calcoli la superficie dei triangoli rettangoli; nel secondo mostrerò come si calcoli la superficie dei triangoli acutangoli; nel terzo spiegherò come si calcoli la superficie dei triangoli ottusangoli.

<1>

Paragrafo Primo

L'area dei triangoli rettangoli

<1> *L'area di ogni tipo di triangolo rettangolo si calcola attraverso la moltiplicazione di uno dei lati per la metà dell'altro tra quelli che contengono l'angolo retto.*

<2.1> Esempio: sia dato il triangolo rettangolo ed equilatero *abc* avente i lati *ab* e *bc* ciascuno di 10 pertiche. Sia anche il lato *ac* pari alla radice di 200 pertiche. Moltiplicherai la metà del lato *ab* per tutto il lato *bc*, oppure il contrario, vale a dire 5 per 10: in questo modo risulteranno in totale 50 pertiche superficiali per l'area di tutto il triangolo. **<2.2>** Tale assunto sarà dimostrato in questo modo: se dal punto *a* sulla linea *ba*, secondo l'angolo retto, avrai tracciato la linea *ad* uguale alla linea *bc*, e avrai unito la linea *dc*, quella sarà uguale alla linea *ab*. Da ciò, poiché il quadrilatero *abcd* è rettangolo ed equilatero, risulta chiaro che il triangolo *abc* misura la metà della figura soprascritta. L'area di tutto il quadrato *abcd* misura allora 100 pertiche, e si calcola attraverso la moltiplicazione di 10 per 10, ossia di un lato per se stesso. Dal momento che il triangolo *abc* corrisponde alla metà del medesimo quadrato, è necessario che la sua area misuri 50 pertiche.

<3.1> Allo stesso modo è dato il triangolo rettangolo scaleno *bcd*, il cui lato *bc* misura pertiche 8, il lato *cd* misura poi pertiche 6, e il lato *bd* misura infine 10 pertiche. L'angolo retto, in verità, è quello in *c*, perciò moltiplicherai la metà di *bc* per tutto il segmento *cd*, vale a dire 4 per 6, oppure la metà di *cd* per tutto il segmento *cb*, ossia 3 per 8, e avrai in totale 24 pertiche per l'area del triangolo *bcd*, cosa che si sa essere vera grazie alla regola relativa al calcolo dell'area del triangolo di cui si è detto sopra. **<3.2>** Oppure, in altro modo, si divida *bc* in due parti uguali nel punto *e*, e dal punto *e* si tracci la linea *ef* uguale ed equidistante rispetto a *cd*, e si unisca il segmento *df*: dal momento che la linea *cd* è uguale ed equidistante rispetto alla linea *df*, la linea *fd* sarà uguale ed equidistante rispetto alla linea *ce*, come è apertamente dichiarato in geometria, per cui la linea *df* misura 4 pertiche ed è uguale alla linea *eb*, e *bh* è uguale ad *hd*, e l'angolo *ebh* è uguale all'angolo *hdf*. Ne consegue che il segmento *eh* è uguale al segmento *hf*, per cui il triangolo *hfd* è uguale al triangolo *beh*. Dunque tutto il triangolo *bcd* è uguale al quadrilatero rettangolo *ecfd*, e la sua area si ottiene dalla moltiplicazione della linea *ec* per la linea *cd*, vale a dire di 4 per 6. Perciò l'area del triangolo *bcd* si ottiene dalla moltiplicazione di metà *bc*, ossia di *ec*, per *cd*, come ho detto prima. **<3.3>** Similmente si mostrerà che se dal punto *i*, vale a dire dalla metà di *cd*, si protrae la linea *ia* uguale ed equidistante rispetto alla linea *cb*, e si traccia il segmento *ba*, il triangolo *abh* sarà uguale al triangolo *hid*. Comunque si aggiunga il quadrilatero *bcih*, l'intero quadrilatero *abci* sarà uguale al triangolo *bcd*, la cui area si ottiene dal prodotto di *ic* per *cb*, vale a dire di 3 per 8, come ho detto prima. **<3.4>** Se vuoi trovare il risultato del prodotto del lato *bd* per l'altro lato, moltiplica il lato *bc* per se stesso, vale a dire 8 per 8: il risultato sarà 64, al quale aggiungi il prodotto del lato *cd* per se stesso, ossia 36: il risultato sarà 100, la cui radice, che è 10, è pari alla lunghezza dell'ipotenusa *bd*. Ma sia l'ipotenusa *bd* di 10 pertiche e la base *cd* di 6 pertiche, e sia richiesta la lunghezza della perpendicolare *bc*: moltiplicherai l'ipotenusa per se stessa, vale a dire 10 per 10: il risultato sarà 100, da cui togli il risultato del prodotto della base per se stessa, vale a dire 36: rimane 64, la cui radice, che è 8, corrisponde alla lunghezza della perpendicolare *bc*. Allo stesso modo, l'ipotenusa sia pari a 10 e la perpendicolare sia pari a 8, e non sai quanto misura la lunghezza della base *cd*. Senza dubbio dal tetragono *bd*, vale a dire da 100, devi sottrarre il tetragono *bc*, vale a dire 64: rimane 36, la cui radice, che è 6, corrisponde al lato *cd*.

<2>

Paragrafo Secondo, terza distinzione, prima parte

L'area dei triangoli acutangoli

<1> *L'area d tutti i tipi di triangoli acutangoli si calcola attraverso la moltiplicazione della perpendicolare per la metà della base, ovvero della base per metà della perpendicolare.*

<2.1> A dimostrazione di ciò, sia dato il triangolo acutangolo ed equilatero *abc* avente ogni lato della misura di 10 pertiche. Si tracci sul segmento *bc* la perpendicolare *ad*: dal momento che *ad* è perpendicolare al segmento *bc*, i due angoli che stanno a *d* sono uguali. Dunque i triangoli *adb* e *adc* sono ortogonali, e dal momento che la linea *ab* è uguale alla linea *ac*, anche la linea *ad* è in comune a entrambi i triangoli. Dunque la base *bd* sarà uguale alla base *dc*, e il triangolo *adb* sarà uguale al triangolo *adc*. Dal momento che il triangolo *adb* è rettangolo, l'area di questo si calcola attraverso la moltiplicazione della perpendicolare *ad* per la metà della base *bd*, ossia per $2 + \frac{1}{2}$. Similmente, dal momento che il triangolo *adc* è rettangolo, l'area di questo si calcola attraverso la moltiplicazione della perpendicolare *ad* per la metà base *dc*, per cui l'area di tutto il triangolo *abc* si calcola attraverso il prodotto della perpendicolare *ad* per la metà della base *bc*, come ho detto sopra. **<2.2>** In verità, fissate tali regole si dimostrerà che l'area del triangolo *abc* si calcola dal prodotto di tutta la base *bc* per la metà della perpendicolare *ad*. Infatti se desideri conoscere la lunghezza della perpendicolare *ad*, devi sottrarre il tetragono della linea *bd*, vale a dire il prodotto di questa per se stessa, ovvero il suo quadrato, dal quadrato di tutta la linea *ab*, ossia 25 da 100: rimarrà 75, la radice del quale, pari a poco meno di 8 pertiche e $\frac{2}{3}$, corrisponde alla lunghezza della perpendicolare *ad*. Moltiplicate queste 8 pertiche e $\frac{2}{3}$ per la metà della base *bc*, ossia per 5, si ottiene in totale poco meno di 43 pertiche e $\frac{1}{3}$ per tutta l'area del triangolo *abc*. **<2.3>** Similmente il prodotto di tutta la base, ossia di 10, per la metà della perpendicolare, che misura poco meno di 4 pertiche e $\frac{1}{3}$, fa quasi 43 pertiche e $\frac{1}{3}$. Oppure moltiplica *bd* per *ad*, cioè 5 per la radice di 75, e otterrai la radice di 1875 per l'area del triangolo *abc*, radice che è approssimativamente del valore di 43 più $\frac{1}{3}$ meno $\frac{1}{36}$. E se vuoi trovare in altro modo l'area del soprascritto triangolo, dal quadrato di uno dei lati, vale a dire di 100, prendi la terza e la decima parte. Ciò che ne verrà fuori, sarà l'area secondo approssimazione.

<3.1> Il rapporto dell'area di un qualsiasi triangolo equilatero con il quadrato di uno sei suoi lati è pari a poco meno del rapporto di 13 a 30. **<3.2>** Allo stesso modo sia il triangolo *def* isoscele ed acutangolo, con i lati *de* e *df* di uguale lunghezza, e sia ciascuno di essi della misura di 10 pertiche. Il lato *ef* poi misuri pertiche 12, e tra le parti[2] uguali di questo, vale a dire sulla base *ef*, deve essere tracciata una perpendicolare. Perciò, dal momento che essa cade sulla metà di *ef*, una volta tracciata la perpendicolare *dg*, devi impegnarti a trovarne la lunghezza: naturalmente devi sottrarre il quadrato di *eg* dal quadrato del lato *de*,

[2] *Crus-cruris* indica, in latino, la gamba ovvero il piede, ma al plurale ricorre a indicare i pilastri (ad esempio di un ponte). In Fibonacci il termine ricorre come sinonimo di *casus*.

vale a dire 36 da 100: rimane 64, il cui valore corrisponde al quadrato della perpendicolare *dg*: perciò *dg* misura 8 pertiche, ossia corrisponde alla radice di 64.

<4.1> Similmente, 8 pertiche moltiplicate per la metà della base *ef*, vale a dire per 6, oppure tutta la base moltiplicata per la metà della perpendicolare, vale a dire 12 per 4, dà come risultato 48 pertiche per l'area di tutto il triangolo *def*. Infatti quando si moltiplica la perpendicolare per la metà della base, allora si costituisce a partire dallo stesso triangolo un rettangolo di 8 pertiche di lunghezza, che corrispondono alla lunghezza della perpendicolare, e di 6 pertiche di larghezza, corrispondenti alla metà della base. **<4.2>** Esempio: si tracci di nuovo il triangolo *def*, e dal punto *d* si protragga la linea *dh* equidistante ed uguale alla linea *gf*, cioè uguale alla linea *ge*. Si tracci poi il segmento *hf*, che sarà uguale alla perpendicolare *dg*, per cui il quadrilatero *dgfh* è uguale al triangolo *def*. L'area del quadrilatero *dgfh* si calcola infatti attraverso la moltiplicazione della perpendicolare *dg* per *gf*, vale a dire per la metà di *ef*.

<5.1> Allo stesso modo sia dato il triangolo scaleno acutangolo *abc*, il cui lato *ab* sia della misura di pertiche 13, il lato *ac* sia di pertiche 15, la base *bc* di pertiche 14. In questo triangolo non può essere calcolata la perpendicolare, finché non si trova il punto sopra la base[3], sul quale cada la perpendicolare, ossia il cateto. È possibile trovare questo punto in tre modi. **<5.2>** Il primo metodo consiste nel sommare il quadrato di uno dei lati con il quadrato della base; dalla loro somma sottrarrai poi il quadrato dell'altro lato; dividi la metà di quello che resta per la lunghezza della base, e sottrai poi, dal risultato della divisione, il quadrato dell'altro lato; dividi la metà di quello che resta per la metà della base, e ciò che verrà fuori dalla divisione, sarà il segmento, a partire dal quale si congiunge il quadrato del lato con il quadrato della base. **<5.3>** Esempio: nel triangolo soprascritto, il quadrato della cui base, vale a dire di 14 per se stesso, è 196 che, aggiunto al quadrato del lato *ab*, vale a dire al risultato del prodotto di 13 per se stesso, che è 169, fa 365, sottratto da questo valore il quadrato del lato *ac*, vale a dire 225, rimane 140; dividi la metà, vale a dire 70, per la base, cioè per 14: il risultato sarà 5, che corrisponde al punto su cui cade il segmento dal lato *ab*, vale a dire alla lunghezza di *bd*. Rimarrà il segmento *dc* della lunghezza di 9

[3] *Casus* indica in latino la caduta, ma in Fibonacci il termine viene utilizzato per indicare il punto in cui l'altezza di un triangolo interseca la base, e la sua distanza da ciascuno dei due estremi della base.

pertiche, ossia pari alla differenza di 14 meno 5. Allo stesso modo il quadrato del lato *ac*, ossia 225, più il quadrato della base *cb*, ossia più 196, fa 421; sottratto il quadrato del lato *ab*, vale a dire 169, rimane 252, la metà del quale, vale a dire 126, diviso per la base, dà come risultato 9 per la lunghezza del segmento *cd*. **<5.4>** Il secondo metodo consistere nell'aggiungere pertiche ad entrambe le ipotenuse, come in questo triangolo, dove 13 più 15 farà 28. Dividi questo risultato per 2: farà 14; moltiplica ora per la differenza che è tra una delle ipotenuse e 14, vale a dire per 1: il risultato sarà 14. Dividi tale valore per la metà della base, vale a dire per 7: il risultato sarà 2, che devi aggiungere alla metà della base. Otterrai 9, che corrisponde alla misura del segmento maggiore del lato dell'ipotenusa maggiore *ac*. Similmente, sottratto 2 da 7, resterà il segmento minore *bd* della lunghezza di 5 pertiche, come si è visto nel primo metodo. **<5.5>** Il terzo metodo è tale per cui si sottrarrà il quadrato dell'ipotenusa minore dal quadrato della maggiore, vale a dire 169 da 225. Quello che resta, cioè 56, dividilo per la base, ossia per 14: il risultato sarà 4, che devi aggiungere alla base: farà 18, la cui metà, cioè 9, corrisponde alla misura del segmento maggiore. Oppure togli 4 dalla base: rimane 10 la cui metà, ossia 5, corrisponde alla misura del segmento minore. E questo a me sembra il sistema più adatto rispetto agli altri due.

<6.1> Trovata perciò tale distanza, se volessi individuare la perpendicolare *ad*, sottrai il quadrato del segmento minore, vale a dire 25, da quadrato del lato *ab*, vale a dire da 169: resterà 144, la cui radice, vale a dire 12, corrisponde alla lunghezza della perpendicolare *ad*. **<6.2>** Oppure sottrai il quadrato del segmento maggiore, ossia il prodotto di 9 per se stesso, cioè 81, dal quadrato di *ac*, vale a dire da 225: il risultato sarà similmente 144, che equivale al quadrato della perpendicolare *ad*, per cui la perpendicolare *ad* misura 12, come ho detto prima. Senza dubbio il prodotto della perpendicolare per la metà della base, e viceversa, dà come risultato 84 per l'area di tutto il triangolo *abc*.

<7.1> A proposito del soprascritto triangolo isoscele, intendo dimostrare che la superficie di questo è uguale a quella di un rettangolo, che misura in lunghezza quanto la perpendicolare del medesimo triangolo, e misura in larghezza quanto la metà della sua base. Relativamente a ciò, voglio indicare in che modo le aree dei triangoli siano uguali a quelle dei rettangoli che hanno lunghezza pari a quella dell'intera base del triangolo e larghezza pari quella della metà della perpendicolare. **<7.2>** Si divida la perpendicolare *ad* in due parti uguali nel punto *e*, come si vede in quest'altra piccola figura, e per il punto *e* si tracci la linea *fg* uguale ed equidistante rispetto alla linea *bc*; si traccino poi i segmenti *fb* e *gc*, in modo che siano uguali ed equidistanti tra loro. In base a questa costruzione, il segmento *fg* è equidistante ed uguale alla linea *bc*. Dal momento poi che la perpendicolare *ad* è stata divisa in due parti uguali nel punto *e*, attraverso il punto *e* è stato anche protratto il segmento *fg* alla stessa distanza della base *bc*, che interseca i segmenti *ab* e *ac* in due parti uguali nei punti *h* e *i*, in base a quanto è dichiarato in geometria. **<7.3>** Gli angoli in *e* saranno retti, così come sono retti anche gli angoli in *d*: perciò gli angoli in *f* e in *g* sono anch'essi retti. Ne consegue che se si divide il segmento *ae* da *a* in *e*, e il segmento *eh* da *e* in *h*, e si pone il triangolo *aeh* sul triangolo *bfh*, allora il segmento *ae* cadrà sul segmento *hb*, perché il segmento *fb* è uguale al segmento *ed*, che è uguale al segmento *ea*, e il segmento *eh* cadrà sul segmento *hf* e il segmento *ah* sul segmento *hb*. L'angolo in *f* sarà uguale all'angolo *aef*, per cui è retto: di conseguenza è retto anche l'angolo in *g*, e il triangolo *cig* è uguale al triangolo *aei*. **<7.4>** Dunque l'area di tutto il triangolo *abc* è uguale all'area del quadrilatero *fbcg*, in cui un lato misura quanto la base del triangolo e un altro misura quanto la metà della perpendicolare, come volevasi dimostrare.

<8.1> Non si deve tralasciare il fatto che, nel quadrilatero *fbcg*, l'angolo *bcg* è uguale all'angolo in *f*, per il fatto che sono opposti: perciò anche l'angolo *fbc* è uguale all'angolo in *g*, e queste sono tutte nozioni che sono apertamente dichiarate nel libro di Euclide in cui si dimostra che tutte le figure che hanno i lati opposti uguali, similmente hanno uguali anche gli angoli. Perciò gli angoli *fbc* e *bcg* sono retti: dunque il quadrilatero *fbcg* è retto, come è opportuno. **<8.2>** Senza dubbio nel secondo libro di Euclide si dimostra da dove derivi il primo metodo di determinazione del segmento della perpendicolare in un triangolo acutangolo. Da ciò noi, servendoci di figure geometriche, dimostriamo il secondo e il terzo sistema.

<9.1> Si tracci di nuovo il soprascritto triangolo *abc* e si protragga in esso la perpendicolare *ad*; per i punti *b* e *c* si traccino, a formare un angolo retto, i segmenti *eb* e *fc*; sia il segmento *eb* pari al segmento *ac*, ossia a 15, e il segmento *fc* sia pari al segmento *ab*, ossia a 13; quindi si uniscano *fe*, *fd* e *de*. Si divida poi il segmento *ef* in due parti uguali nel punto *g*, e dal punto *g* si tracci il segmento *gh* alla stessa distanza da entrambi i segmenti *fc* ed *eb*. Per il punto *f* si tracci poi il segmento *fik* equidistante rispetto al segmento *bc*. Di nuovo per il punto *g* si tracci il segmento *gl* parallelo ai segmenti *cib* e *fik*. **<9.2>** Dal momento che i triangoli *adc* e *adb* sono rettangoli, avendo retti gli angoli *adc* e *adb*, senza dubbio il quadrato del lato *ac* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *ad* e *dc*, e il quadrato della linea *ab* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *ad* e *db*, per cui se si determina secondo procedura il quadrato della linea *ad*, tanto più il quadrato del segmento maggiore *dc* è più grande del quadrato del segmento minore *db*, quanto più il quadrato della linea *ac* è più grande del quadrato della linea *ab*, per cui la somma dei quadrati delle linee *ab* e *dc* è pari alla somma dei quadrati delle linee *ac* e *db*. Ma il segmento *fc* è uguale al segmento *ab*, e il segmento *eb* è uguale al segmento *ac*, per cui la somma dei quadrati delle linee *fc* e *cd* è uguale alla somma dei quadrati delle linee *eb* e *bd*. Ma la somma dei quadrati delle linee *fc* e *cd* è uguale al quadrato della linea *fd*, essendo l'angolo *fcd* retto. In modo simile il quadrato della linea *de* è uguale alla somma dei quadrati delle linee *eb* e *bd*, per cui le linee *fd* e *de* sono tra loro uguali. **<9.3>** Dunque il triangolo *fde* è isoscele, e dal momento che la base *ef* è stata divisa in due parti uguali nel punto *g*, il segmento *dg* è senza dubbio perpendicolare al segmento *ef*. Ne consegue che entrambi gli angoli *dge* e *dgf* sono retti.

<10.1> Di nuovo, dal momento che il segmento *gh* è parallelo al segmento *fc*, e visto che per esso passa il segmento *cb*, anche gli angoli *fch* e *ghc* sono pari alla somma di due angoli retti. Ma l'angolo *fch* è retto, dunque l'angolo *ghc* sarà retto. L'angolo esterno a *ghd* è retto, perché è uguale all'angolo opposto interno *fch*: dunque la linea *gh* è perpedicolare al segmento *bc*. Allo stesso modo dal momento che per il punto *f* è stata tracciata la linea *fik* equidistante alla linea *cb*, anche la linea *be* è parallela alla linea *fc*. Il parallelogramma *kbcf* è dunque regolare, perché ha i lati opposti uguali tra loro: uguale è, dunque, il segmento *fk* al segmento *bc*, uguale è anche il segmento *bk* al segmento *cf*. Dunque *bk* è pari a 13, e rimane *ke* pari a 2. Infatti il segmento *ih* è uguale ad ambedue i segmenti *fc* e *kb*. I parallelogrammi *kbhi* e *ihcf* sono infatti regolari, dunque il segmento *hi* misura 13. **<10.2>** Allo stesso modo dal momento che tra i segmenti equidistanti *eb* e *gh* cade il segmento *ef*, l'angolo esterno *fgi* è uguale all'angolo opposto e interno *gel*, e l'angolo *fig* è uguale all'angolo che rimane *gel*: essi, infatti, sono entrambi retti. L'altro angolo, sotteso a *gfi*, è uguale all'angolo *egl*, e il segmento *fg* è uguale al segmento *ge*, per cui i restanti lati che sottendono angoli uguali, saranno uguali ai restanti lati: il lato *gi* è certamente uguale al lato *el*, e il lato *fi* è similmente uguale al lato *gl*. Ma il segmento *gl* è uguale al segmento *ik*, per cui il parallelogramma *lkig* è regolare. Il segmento *fi* è uguale al segmento *ik*, per cui il segmento *ch* è uguale al segmento *hb*. La base *bc* è stata allora divisa in due parti uguali nel punto *h*, per cui *ch* è pari a 7. **<10.3>** Allo stesso modo, poichè il parallelogramma *lkig* è regolare, il segmento *lk* è uguale al segmento *ig*. Ma è stato dimostrato che il segmento *ig* è uguale al segmento *le*, per cui anche *kl* è uguale al segmento *le*. Ma *ke* misura per intero 2, dunque ciascuno dei segmenti *kl* e *le* e *ig* misura 1. Da ciò deriva che *hg* misura per intero 14. **<10.4>** Di nuovo, dal momento che l'angolo *dgf* è retto, senza dubbio la somma dei due angoli *dgh* e *hgf* corrisponde all'angolo retto. In modo simile, dal momento che il triangolo *gif* è rettangolo, giacchè ha retto l'angolo *gif*, la somma degli altri due angoli che sono *igf* e *gfi* è pari alla misura di un angolo retto. Dunque la somma degli angoli *dgh* e *hgf* è pari alla somma degli angoli *hgf* e *gfi*, per cui se si sottrae l'angolo *hgf* secondo procedura, resterà l'angolo *dgh* uguale all'angolo *gfi*. Anche l'angolo *gif* è infatti uguale all'angolo *ghd*. L'altro angolo *igf* è uguale all'angolo *hdg*. Il triangolo *fig* è allora simile al triangolo *ghd*, e come *fi* sta a *ig*, vale a dire come 7 sta a 1, così *gh*, vale a dire 14, sta a *hd*, quindi il prodotto di *gi* per *gh* diviso *fi* fa *hd*. Così procediamo in base al secondo sistema. **<10.5>** Abbiamo quindi aggiunto il lato *ab* al lato *ac*, ossia *fc* a *eb*, e abbiamo ottenuto 28. La metà di questo valore, cioè 14, corrispose alla lunghezza della linea *gh*, che abbiamo moltiplicato per *ig*, ovvero per quanto *gh* supera il segmento *fc*, ovvero *ab*; in altre parole *gi* corrisponde a quanto *ac*, ossia *eb*, supera il segmento *gh*. Dalla moltiplicazione di questo abbiamo ottenuto 14, che abbiamo diviso per la metà della base *bc*, vale a dire per *ch*, ovvero per *fi*, ciascuno dei quali misura 7, e abbiamo ottenuto 2 per la misura della lunghezza *hd*. Abbiamo aggiunto questo valore alla metà della base, ossia a *ch*, che misura 7, e abbiamo ottenuto 9 che è la misura del segmento *cd*, che è il segmento maggiore. In altro modo abbiamo sottratto *hd* da *hb*, ossia 2 da 7: a noi è rimasto 5, pari alla misura del segmento minore *db*, come volevasi dimostrare.

<11.1> Determinazione del punto su cui cade la perpendicolare del soprascritto triangolo, attraverso il terzo procedimento. Si tracci di nuovo il sopra detto trigono *abg*, il cui lato *ab* misuri 13, il lato *ag* misuri 15, la base *bg* misuri certamente 14, e si tracci su *bg* la perpendicolare *ac*. Dal momento che il lato *ag* è maggiore del lato *ab*, il segmento *gc* è più grande del segmento *cb*, perciò da *cg* si sottragga *cd*, che è uguale al segmento *cb*, e il segmento *bd* sarà stato diviso in due parti uguali nel punto *c*. A questo segmento *bd* stato è aggiunto *dg* sulla stessa direttrice, per cui il prodotto di *dg* per *bg* più il quadrato della linea *cb* è uguale al quadrato della linea *cg*, per cui il quadrato della linea *cg*, vale a dire del segmento più grande, supera il quadrato del segmento *bc*, vale a dire del segmento minore, per la quantità espressa dalla moltiplicazione della linea *dg* per la linea *bg*. **<11.2>** Ma è stato visto prima, a proposito dell'altra figura, che il quadrato del segmento *cg* supera il quadrato del segmento *cb* di tanto quanto il quadrato del lato *ag* supera il quadrato del lato *ab*, per cui il quadrato del lato *ag* supera il quadrato del lato *ab* di tanto quanto è espresso dal prodotto del segmento *dg* per il segmento *bg*. Ma il quadrato del lato *ag*, vale a dire 225, supera il quadrato del lato *ab*, vale a dire 169, di 56, perché il prodotto di *dg* per *bg* è pari a 56. Ma *bg* è pari a 14, e 56 diviso 14 fa 4 per la misura della linea *dg*. Sottratto 4 dalla base *bg*, vale a dire da 14, rimane la linea *bd* pari a 10, la cui metà, ossia 5, corrisponde alla misura del segmento minore *bc*, come volevasi dimostrare.

<3>

Paragrafo Terzo

Il calcolo dell'area dei triangoli ottusangoli

<1> *Se sarà dato un triangolo ottusangolo ed isoscele, protrarrai in esso la perpendicolare al lato maggiore, e procederai sulla base di quanto ho detto a proposito del triangolo acutangolo ed isoscele.*

<2.1> Sia dato il triangolo ottusangolo scaleno, come ad esempio il triangolo *abg*, il cui lato *ab* misuri 13 pertiche e il lato *bg* misuri 4 pertiche e il lato *ag* misuri 15 pertiche: se dall'angolo ottuso *b* vorrai tracciare la perpendicolare sul lato maggiore, vale a dire su *ag*, essa cadrà all'interno del triangolo. **<2.2>** Troverai il segmento, ovvero la perpendicolare, nonché l'area di questo, in base a quanto ti ho insegnato a proposito del triangolo acutangolo scaleno. Se dall'angolo *a*, ovvero dall'angolo *g*, vorrai protrarre le perpendicolari, esse cadranno all'esterno del triangolo, per cui è necessario indicare in che modo sia possibile trovare i segmenti di essi al di fuori delle basi. **<2.3>** Dal quadrato del lato maggiore, che è 225, sottrarrai il quadrato degli altri due lati. Di questi due, il quadrato di *ab* è 169 e il quadrato di *bg* è 16: rimarrà 40, la cui metà, ossia 20, divisa per la base *bg*, ossia per 4, darà 5 per la misura del segmento *bd*, sul quale viene eretta la perpendicolare *ad*. Se poi dividerai 20 per la base *ab*, vale a dire per 13, otterrai il valore di 1 pertica più $\frac{7}{13}$ per la lunghezza del segmento *be*, sul quale si eleva la perpendicolare *ge*. **<2.4>** Se poi il quadrato *db*, che è pari a 25, sottrarrai dalla potenza *ab*, che è pari a 169, oppure se il quadrato *dg*, che è pari a 81, sottrarrai dal quadrato di *ag*, rimarrà 144 per il quadrato della perpendicolare *ad*, la cui radice, ossia 12, corrisponde alla lunghezza della perpendicolare *ad*. Se moltiplicherai questo valore per la metà della sua base, vale a dire per 2, risulteranno 24 pertiche per l'area del triangolo *abg*. **<2.5>** Esempio: il triangolo *adg* è rettangolo, e la sua area si calcola attraverso il prodotto di metà perpendicolare *ad*, ossia di 6, per tutta la base *dg*, ossia per 9, per cui l'area del triangolo *adg* misura 54 pertiche. Se da questa sottrarrai l'area del triangolo rettangolo *adb*, che misura 30 pertiche, e che si ottiene dalla moltiplicazione di metà perpendicolare *ad* per la base *db*, resteranno 24 pertiche per l'area del triangolo *abg*, che si ottiene dalla moltiplicazione di metà perpendicolare *ad* per la base *bg*, ossia dal prodotto della perpendicolare *ad* per la metà della base *bg*, come ho detto prima.

<3.1> Similmente se moltiplicherai la perpendicolare *ge* per la metà della base *ba*, otterrai la medesima area. Troverai infatti la perpendicolare *ge*, se sottrarrai il quadrato della linea *eb* dal quadrato della linea *bg*, ovvero il quadrato della linea *ea* dal quadrato della linea *ag*. **<3.2>** Se avremo moltiplicato la metà, ossia 1 pertica più $\frac{11}{13}$, della perpendicolare *ge*, della misura di 3 pertiche e $\frac{9}{13}$, per la base *ab*, del valore di 13 pertiche, verremmo ugualmente all'area del triangolo *abg* del valore di 24 pertiche.

<4.1> È stato chiaramente dimostrato, nel secondo di libro di Euclide, da dove derivi il metodo sopra descritto per calcolare la lunghezza delle perpendicolari che cadanno all'esterno di un angolo ottuso nei triangoli ottusangoli. **<4.2>** Senza dubbio possiamo individuare la misura di questi segmenti attraverso altri due sistemi, che sono chiaramente quelli che ho mostrato prima attraverso dimostrazioni. **<4.3>** Questo è il primo metodo: aggiungi 13 a 15, vale a dire il lato *ab* al lato *ag*: il risultato sarà 28, la cui metà, ossia 14, moltiplicala per la differenza che sussiste tra 14 e uno dei predetti lati, vale a dire 1: il risultato darà 14, e se lo divideremo per 2, ossia per la metà della base, otterremo 7. Sottraendo a questo 2, ossia *df*, rimarrà 5 per la misura del segmento *bd*: se invece a questo 7 avremo addizionato la linea *fg*, otterremo 9 per la misura totale della linea *dg*. **<4.4>** L'altro sistema consiste nel sottrarre il quadrato della linea *ab* dal quadrato della linea *ag*, vale a dire 169 da 225, nel dividere quello che rimane, ossia 56, per la base *bg*, e infine nel sottrarre la base, ossia 4, dal 14 che risulta da questa divisione: resterà 10, la cui metà, ossia 5, corrisponde alla misura del segmento *bd*. **<4.5>** Tutto ciò si può dimostrare in modo molto evidente: tracceremo la linea *gd* fino al punto *h*, in modo che la linea *dh* sia uguale alla linea *db*, e tracceremo *ah*, come si vede in questa piccola figura: essa infatti cade all'interno del triangolo *ahg*, e la perpendicolare *ad* è stata condotta nel triangolo stesso. Dal momento che il segmento *hd* è uguale al segmento *db*, la perpendicolare *ad* cade al loro interno. Il segmento *ah* è uguale al segmento *ab*: dunque il segmento *ah* misura 13, il segmento *ag* misura 15, il segmento *bg* misura 4, e la lunghezza del segmento *bh* è infine sconosciuta. Tale segmento è stato diviso in due parti uguali nel punto *d*, mentre sulla sua direttrice si estende il segmento *bg*. **<4.6>** La linea *dg* corrisponde al segmento maggiore; la linea *dh* corrisponde invece al segmento minore all'interno del triangolo *ahg*, perciò il quadrato della linea *dg* supera il quadrato della linea *dh* di tanto, quanto il quadrato della linea *ag* supera il quadrato della linea *ah*, ossia di 56. **<4.7>** Ma il quadrato della linea *dg* supera il quadrato della linea *dh* nel prodotto di *bg* per la linea *ah*: perciò il prodotto di *bg* per *gh* fa 56, e 56 diviso *bg* fa 14 che è la misura della linea *hg*, dalla quale tolta la linea *bg*, ossia 4, sicuramente rimarrà 10 per la misura della linea *bh*. La metà di questa, ossia 5, corrisponde alla misura del segmento *bd*, come è stato visto sopra. **<4.8>** Se infatti sul segmento *hg* avremo tracciato ad angolo retto le linee *gc* e *hi*, delle quali *gc* sia uguale a entrambe le linee *ab* e *ah*, e la linea *hi* sia uguale alla linea *ag*, tracciamo poi *ci* e completiamo la figura nel modo in cui abbiamo operato a proposito del triangolo acutangolo: troverai che la linea *kl* misura la metà della somma dei lati *ah* e *ag*, e che *hl* misura la metà della base *hg*, per cui *dl* misura 2, e rimane *lg* ignota; *mk* misura 1, e corrisponde alla differenza che vi è tra la linea *kl* e una qualsiasi delle linee *cg* oppure *hi*. **<4.9>** È dunque il triangolo *dlk* simile al triangolo *kmc*: perciò come *dl* sta a *lk*, così *km* sta a *mc*, motivo per il quale se dividerai per 2, ossia per *dl*, il risultato del prodotto di *kl* per *km*, ossia di 14 per 1, otterrai 7 per la misura della linea *mc* ossia *lg*, alla quale se aggiungi 2, ossia *ld*, avrai 9 per la misura della linea *gd*. Sottratta a questa *gb*, ossia 4, rimarrà 5 per la misura del segmento *bd*, come volevasi.

<5.1> Oppure si tracci di nuovo il triangolo ottusangolo *acb* avente ottuso l'angolo *acb*, e sia *ac* pari a 13, *ab* pari a 20, e *bc* pari a 11. **<5.2>** Si tracci poi all'esterno la perpendicolare *ag* sulla linea *bg*, e dai punti *c* e *b* si traccino ad angolo retto *bd* e *cf*, delle quali *bd* sia uguale alla linea *ac*, e *cf* alla linea *ab*. La linea *bd* misurerà 13, *cf* misurerà 20, e si traccino *df* e *fg* e *dg*. **<5.3>** Dal punto *e*, vale a dire dalla metà della linea *df*, si estenda la perpendicolare *eh* sulla linea *gb*, e si tracci il segmento *eg*. **<5.4>** Per il punto *d* si tracci poi la linea *dk* parallela alla linea *bh*. Dal momento che i triangoli *agc* e *agb* sono rettangoli, il quadrato della linea *ac* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *ag* e *gc*, e il quadrato della linea *ab* è pari alla somma dei quadrati delle linee *ag* e *gb*: perciò il quadrato della somma delle linee *ac* e *gb* è uguale al quadrato delle linee *ab* e *gc*, ovvero il quadrato delle linee *fc* e *gc* è uguale alla somma dei quadrati di *db* e *bg*, per cui i segmenti *dg* e *gf* sono uguali tra loro. Il segmento *ge* è la perpendicolare su *df*, quindi in base a quanto detto sopra si vedrà che *hk* misura 13, e cioè che è uguale alla linea *db*, mentre *ke* corrisponde a quanto la linea *he* supera *bd*. Il triangolo *ghe* è simile al triangolo *ekd*, perciò come *dk* sta a *ek*, così *eh* sta a *hg*, per cui se si divide questa per *dk*, ovvero per *bh*, che corrisponde alla metà della linea *bc*, il risultato del prodotto di *ek* per *eh*, verrà fuori che la linea *hg* è pari a 10 $+ \frac{1}{2}$, da cui tolta la linea *ch*, vale a dire $5 + \frac{1}{2}$, resterà il segmento *cg* pari a 5, come volevasi dimostrare. Perciò la perpendicolare *ag* misurerà 12, e se moltiplicheremo di esso la metà per la base *cg*, vale 6 per 11, il risultato sarà senz'altro di 66 pertiche per l'area del triangolo *acb*.

<6.1> Affinché in questo libro sia espressa in modo compiuto la teoria del calcolo delle aree, indicherò in che modo sia possibile operare calcoli intorno a un qualsiasi triangolo senza conoscere la misura della perpendicolare. **<6.2>** Addiziona i lati del triangolo, e prendi la metà; da essa sottrai uno alla volta i lati del triangolo. Moltiplica poi quello che resta dalla sottrazione di un lato per quello che resta dalla sottrazione dell'altro lato, poi il totale per quello che risulta dall'altro lato, e moltiplica il tutto per il semiperimetro. Estrai la radice del totale, ed essa corrisponderà all'area di tutto il triangolo. **<6.3>** Esempio: dopo aver sommato i lati del soprascritto triangolo, vale a dire 13, 11 e 20, il risultato è 44, la cui metà è 22; da questo il lato maggiore dista 2 pertiche, il secondo 9 pertiche, il terzo 11 pertiche. Senza dubbio il prodotto di quel che avanza del primo lato, ossia 2, per quello che avanza del secondo lato, ossia per 9, moltiplicato poi per quello che avanza del terzo lato, cioè per 11, fa in totale 198. Moltiplicato di nuovo questo numero per la metà del perimetro, ossia per 22, il risultato è 4356, che equivale al quadrato dell'area del triangolo, la cui radice è 66, come abbiamo visto sopra a proposito dell'area di questo.

<7.1> A dimostrazione di ciò, si tracci il triangolo *abg*, e si dividano in due parti gli angoli *abg* e *agb* a partire dai segmenti *bt* e *tg*, e dal punto *t* si traccino le perpendicolari *te*, *th* e *tz*. **<7.2>** Si tracci poi *at*, e dal momento che l'angolo *thg* è retto, ed è retto l'angolo *tzg*, l'angolo *thg* è uguale all'angolo *tzg*, e non di meno l'angolo *tgh* è uguale all'angolo *tgz*, per cui il rimanente angolo *gth* è uguale al rimanente angolo *gtz*. **<7.3>** I triangoli *thg* e *tgz* sono infatti equiangoli: dal momento che il lato *gt* è a loro in comune, essi avranno uguali anche gli altri lati, che sottintendono angoli uguali. **<7.4>** Anche il lato *th* è uguale al lato *tz*, e il lato *hg* è uguale al lato *gz*. Similmente si mostrerà che il segmento *hb* è uguale al segmento *be*, e il segmento *th* è uguale al segmento *te*, e che il triangolo *thb* è uguale al triangolo *teb*. **<7.5>** Dal momento che entrambi i segmenti *te* e *tz* sono uguali al segmento *th*, e sono tra loro uguali, il segmento *te* è uguale al segmento *tz*. Sia in comune il segmento *ta*: dunque le due linee *et* e *ta* sono uguali alle due linee *at* e *tz*; l'angolo *aet* è uguale all'angolo *azt*; il lato *at* è in comune, dunque il triangolo *aet* è equiangolo ed equilatero rispetto al triangolo *azt*, e il lato *az* è uguale al lato *ae*. **<7.6>** Dal momento che il segmento *az* è uguale al segmento *ae*, se il segmento *eb* giace a loro in comune, il segmento *ab* corrisponderà senza dubbio alla somma dei due segmenti *az* ed *eb*, ovvero *az* e *bh*. **<7.7>** Di nuovo, dal momento che il segmento *zg* è uguale al segmento *gh*, la somma dei due segmenti *ag* e *hb* sarà pari alla somma dei due segmenti *ab* e *gh*. Dunque *ag* e *hb*, ossia *eb*, misurano insieme quanto il semiperimetro del triangolo *abg*, per cui *eb* corrisponde alla quantità per cui la metà del perimetro del triangolo *abg* supera la lunghezza del lato *ag*.

<8.1> Similmente si mostrerà che il segmento *ae* corrisponde a quanto il semiperimetro del triangolo *abg* supera il lato *bg*, e che *hg*, ovvero *gz*, corrisponde a quanto tale semiperimetro supera il lato *ab*, per cui i segmenti *ab* e *hg* corrispondono al semiperimetro del trigono *abg*. Allo stesso modo anche i segmenti *ag* e *hb* corrispondono al semiperimetro dello stesso triangolo: si traccino dunque i segmenti *ab* e *ag* sulla stessa direttrice attraverso i punti *l* e *m*, e sia *bl* uguale al segmento *hg*, e *gm* sia uguale al segmento *hb*: dunque ciascuno dei due segmenti *al* e *am* sarà pari al semiperimetro del triangolo *abg*. **<8.2>** Si conduca poi *at* nel punto *k*, si traccino i segmenti *lk* e *km*, e sia retto l'angolo *alk*: in base a ciò sarà retto l'angolo *amk*, perché la somma dei due segmenti *al* e *ak* è uguale alla somma dei segmenti *ak* e *am*, e l'angolo *lak* è uguale all'angolo *kam*: anche il lato *lk* è dunque uguale al lato *mk*, e i restanti angoli saranno uguali ai restanti angoli che siano sottesi ad uguali segmenti. Senza dubbio l'angolo *akl* è uguale all'angolo *akm*, e l'angolo *alk* è uguale all'angolo *amk*. Ma anche l'angolo *alk* è retto, dunque l'angolo *amk* è retto, come ho detto prima. **<8.3>** Si ricavi dalla linea *bg* un segmento della stessa lunghezza della linea *bl*, e lo si indichi con *bn*. Si traccino poi *nk*, *kg* e *kb*. Dal momento che *gh* corrisponde alla differenza tra la metà della somma dei lati del triangolo *abg* e il lato *ab*, esso misura quanto *bl*, ossia quanto *bn*, per cui *ng* è uguale a *gm*, essendo pari alla differenza tra la metà della somma dei lati e il lato *ag*. **<8.4>** Dal momento che i triangoli *gmk* e *klb* sono rettangoli, il quadrato della linea *gk* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *gm* e *mk*, ossia *gn* e *mk*, e il quadrato della linea *bk* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *kl* e *bl*, vale a dire *kl* e *bn*. Ma il quadrato della linea *lk* è uguale al quadrato della linea *km*, perciò quanto più il quadrato della linea *kg* supera il quadrato della linea *kb*, tanto più il quadrato di *ng* supera il quadrato di *nb*, per cui la linea *kn* è perpendicolare alla linea *bg*, ed è uguale alla linea *kl*. E dal momento che gli angoli *knb* e *blk* sono retti, i restanti angoli *nbl* e *lkn* sono pari alla somma di due angoli retti. **<8.5>** Similmente gli angoli *ebn* e *nbl* sono pari alla somma di due angoli retti, l'angolo *ebn* è uguale all'angolo *lkn*, e l'angolo *lkb* è pari alla metà dell'angolo *lkn*: sarà dunque uguale all'angolo *ebt*, che corrisponde alla metà dell'angolo *ebh*, e l'angolo ad *l* è uguale all'angolo ad *e*, essendo entrambi retti. Rimane l'angolo *etb* uguale all'angolo *kbl*. **<8.6>** Dunque il triangolo *kbl* è simile al triangolo *ebt*. Il rapporto, allora, tra *kl* e *lb* è uguale al rapporto tra *be* e *et*: dunque il prodotto di *kl* per *et* è pari al prodotto di *lb* per *be*. Ma il rapporto del quadrato di *et* al prodotto di *et* per *lk* è pari al rapporto di *et* a *lk*, e il rapporto di *et* a *lk* è pari al rapporto di *ae* ad *al*, essendo *et* parallela alla linea *lk*. Dunque il rapporto di *ae* ad *al* è pari al rapporto del quadrato di *et* al prodotto di *et* per *lk*, e il prodotto di *et* per *lk* è pari al prodotto di *eb* per *bl*: dunque il rapporto di *ae* ad *al* è pari al rapporto del quadrato di *et* al prodotto di *eb* per *bl*. **<8.7>** Dunque il prodotto del quadrato di *et* per *al* è pari al prodotto di *ae* per il prodotto di *eb* per *bl*, e il prodotto del quadrato di *et* per il quadrato di *al* è pari al prodotto di *ae* per il prodotto di *eb* per *bl*, il tutto per *al*. **<8.8>** Ma il prodotto del quadrato di *et* per il quadrato di *al* è pari al quadrato della superficie del triangolo *abg*, cosa che dimostrerò di seguito. Ne consegue che il prodotto di *ae*, che corrisponde alla differenza del semiperimetro del triangolo *abg* con il risultato del prodotto di *bg* per *eb*, che corrisponde alla differenza con il lato *ag*, moltiplicato per *bl*, ovvero per la differenza con il lato *ab*, e moltiplicato poi per *al*, ossia per il semiperimetro del triangolo *abg*, fa in totale il quadrato dell'area del triangolo *abg*, come volevasi dimostrare.

<9.1> Si deve ora dimostrare in che modo il prodotto del tetragono *et* per tetragono *al* corrisponda al quadrato dell'area del triangolo *abg*. **<9.2>** Dal momento che il triangolo *abg* è stato risolto in tre triangoli a partire dal punto *t*, i quali triangoli sono *atb*, *btg* e *gta*, e che le loro perpendicolari sono tra loro uguali, e sono sono *te*, *th* e *tz*, allora il prodotto di *et* per la metà della base *ab* dà come risultato l'area del triangolo *atb*. Similmente il prodotto di *th*, ovvero di *te*, per la metà di *bg*, dà come risultato l'area del triangolo *btg*. **<9.3>** Per tale ragione, dunque, anche il prodotto di *tz*, ossia di *te*, per *ag*, dà come risultato l'area del triangolo *atg*: perciò il prodotto di *et* per *al*, vale a dire per la metà della somma dei lati del triangolo *abg*, dà come risultato l'area del triangolo *abg*; perciò, il prodotto del quadrato di *et* per il quadrato di *al* è pari al quadrato dell'area del triangolo *abg*, come volevasi dimostrare.

<10.1> Se in un triangolo dato siano noti soltanto due lati, e attraverso quelli vuoi conoscere la misura dell'area, e quella del terzo lato, come ad esempio nel triangolo *abg* in cui siano noti i lati *ab* e *bg*, bisogna considerare in primo luogo la misura di ciascuno dei due angoli che giacciono sotto i lati noti, vale a dire se l'angolo *abg* sia retto, acuto o ottuso. **<10.2>** Nel primo caso sarà retto, per cui il segmento *ab* è perpendicolare al segmento *bg*. Dunque dal prodotto di *ab* per la metà di *bg* deriva l'area del triangolo *abg*. E se avremo sommato tra loro i quadrati delle note linee *ab* e *bg*, da tale somma sarà nota la misura del quadrato della linea *ag*, la cui radice corrisponderà alla misura della linea *ag*.

<11.1> Ma se l'angolo *abg* è acuto, allora fisserai sulla linea *ab* un certo punto *d*, da cui si tracci sulla linea *bg* la perpendicolare *de*, e calcolerai la misura dei lati del triangolo *deb*. E se il rapporto di *be* a *bg* è uguale al rapporto di *bd* a *ba*, l'angolo in *g* sarà retto, perché la linea *ed* sarà equidistante rispetto al lato *ag*, motivo per il quale se dal quadrato del lato *ab* si sottrae il quadrato del lato *bg*, resterà il quadrato del lato *ag* la cui misura sarà nota. Oppure, dal momento che la linea *de* è equidistante rispetto alla linea *ag*, in proporzione come *bd* starà a *ba*, così *ed* starà a *ga*, per cui se avremo moltiplicato il lato *ba* per *ed* e avremo diviso il totale per *db*, sarà in ogni caso noto il valore del lato *ag*. **<11.2>** Esempio: sia dato il lato *ab* pari a 20 e *bg* pari a 12, e sia l'angolo *abg* minore di 90°, e sia *bd* della lunghezza di 5 pertiche, *de* di 4 pertiche ed *eb* di 3 pertiche: dunque come *bd* starà a *ba*, vale a dire come 5 starà a 20, così 3 starà a 12, ovvero *be* a *bg*. Perciò il segmento *de* è parallelo al segmento *ag*, per cui l'angolo *agb* è retto, essendo retto *deb*, per cui se dal quadrato del lato *ab* si toglie il quadrato del lato *bg*, ossia 144 da 400, il risultato sarà 256 per la misura del quadrato del lato *ag*, la cui radice, che è 16, corrisponde alla lunghezza del lato *ag*. **<11.3>** Oppure se avremo moltiplicato *ba* per *ed*, vale a dire 20 per 4, e avremo diviso il totale per *db*, ossia per 5, il risultato sarà in ogni caso 16 e corrisponderà alla lunghezza del lato *ag*, la cui metà moltiplicata per *gb*, ossia 8 per 12, darà 96 per la misura dell'area del triangolo.

<12.1> Se il rapporto di *be* a *bg* sarà stato inferiore al rapporto di *bd* a *ba*, come si vede in quest'altro triangolo, allora l'angolo *agb* sarà minore di 90°: perciò il triangolo *abg* sarà acutangolo. **<12.2>** Cada dal punto *a* la perpendicolare all'interno di *bg*: da ciò per conoscere il punto in cui essa cade, si stabilisca che come *bd* sta a *ba*, così *be* sta a *bf*, e si tracci *af*, giacché essa stessa sarà la perpendicolare sul segmento *bg*. **<12.3>** Esempio: sia dato di nuovo *ab* pari a 20 e *bg* pari a 17, e *bf* sarà pari a 12. Dal momento che come *bd* sta a *ba*, così *be* sta a *bf*, in base a quanto è stato già detto, troverai che la perpendicolare *af* è pari a 16, e se avremo addizionato il suo quadrato, vale a dire 256, al quadrato della linea *fg*, vale a dire a 25, si otterrà 281 che corrisponde alla misura del quadrato della linea *ag*. E se avremo moltiplicato la metà della perpendicolare *af* per tutta *gb*, il risultato sarà 136 per la misura dell'area del triangolo *abg*.

<13.1> Se il rapporto di *be* a *bg* sarà stato invece maggiore del rapporto di *bd* a *ba*, l'angolo *agb* sarà ottuso. Da ciò deriva che la perpendicolare dal punto *a* cadrà al di fuori del triangolo *abg*. **<13.2>** Si tracci perciò la linea *bg* fino al punto *h*, e come *be* stia a *bh* così *bd* a *ba*. Si tracci poi *ah*, che corrisponderà alla perpendicolare sulla linea *hb*. **<13.3>** Esempio: sia il lato *ab* pari a 20, *bg* pari a 7, *bd* pari a 5, *be* pari a 3, e *de* pari a 4: perciò *bh* sarà pari 12, e ne calcolerai la lunghezza se avremo diviso per *db* il risultato del prodotto di *be* per *ba*, essendo che come *be* sta a *bh* così *bd* sta a *ba*. Di nuovo, come *ed* starà ad *ah*, così *bd* starà a *ba*, per cui il risultato del prodotto di *de* per *ba* diviso *db* darà come risultato 16, che corrisponderà alla misura della perpendicolare *ah*. **<13.4>** Se da *bh*, ossia da 12, si toglie *bg*, ossia 7, rimarrà 5 per la misura del segmento *gh*, e se il suo quadrato, ossia 25, venga sommato al quadrato della linea *ah*, si otterrà 281 per la misura del quadrato della linea *ag*: perciò il lato *ag* corrisponde alla radice di 281, e dal prodotto della metà di *ah* per *gb* viene 56 per la misura dell'area del triangolo *abg*.

<14.1> Se di un dato triangolo soltanto un lato è noto, e partendo da quello vorrai conoscere la misura degli altri due lati e l'area del triangolo stesso, come nel caso del triangolo *dez* di cui è noto il lato *dz*, fisserò sul segmento *dz* una certa quantità *az*, e dal punto *a* sul segmento *az* traccerò la linea *ab* parallela alla linea *de*, e misurerò le linee *ab* e *bz*, in modo che i lati del triangolo *abz* siano noti. **<14.2>** Giacché il segmento *ab* è parallelo al segmento *de*, in proporzione come *za* sta a *zd*, così il segmento *zb* sta a *ze*, nonché il segmento *ab* sta a *de*. Ma il rapporto di *za* a *zd* è noto, per cui i lati *de* ed *ez* saranno noti. **<14.3>** Esempio: sia *dz* della misura di 18, e sia *az* pari a 6, *ab* pari a 7, e *bz* pari a 5. In questo modo, *zd* è tre volte *za*, per cui *de* è tre volte *ab*, e similmente *ez* è tre volte *bz*: dunque il lato *de* misura 21, il lato *ez* misura 15, e giacché i lati del triangolo *dez* sono noti, in base a quanto detto sopra sarà nota anche l'area di questo. **<14.4>** Oppure sia data l'area del triangolo *abz* attraverso il procedimento illustrato prima, ossia si consideri la metà del suo lato, che è 9, e prendiamo la differenza dei lati meno 9, ossia 2 e 3 e 4. Moltiplichiamo poi 2 per 3, e poi tutto per 4, e poi ancora tutto per 9: il risultato sarà 216, la cui radice corrisponde alla misura dell'area del triangolo *abz*.

<15.1> Dal momento che il triangolo *abz* è simile al triangolo *dez*, l'area del triangolo *abz* starà all'area del triangolo *dez* come il quadrato del lato *za* starà al quadrato del lato *zd*, come dimostra Euclide. **<15.2>** Poiché il lato *dz* è tre volte il lato *az*, il quadrato della linea *dz* è nove volte il quadrato della linea *az*, per cui l’area del triangolo *dez* è nove volte quella del triangolo *abz*. Perciò se avrai moltiplicato 216 per il quadrato di nove, ossia per 81, otterrai 17496 per il quadrato dell’area del triangolo *dez*, la cui radice, che è poco più di 132 e $\frac{1}{4}$, corrisponderà alla misura della sua area.

<16.1> Abbiamo inoltre detto che il triangolo *abz* è simile al triangolo *dez*, dal momento che hanno gli angoli uguali tra loro: infatti il segmento *ab* è parallelo al segmento *de*, per cui l’angolo *zab* è uguale all’angolo *zde*, e l’angolo esterno è uguale all’angolo interno. **<16.2>** Per tali ragioni anche l’angolo *zba* è uguale all’angolo *zed*, e infatti essi hanno l’angolo *dze* in comune, per cui il triangolo *abz* è equiangolo rispetto al triangolo *dez*: pertanto questi triangoli sono simili.

<4>

Metodo popolare che deve essere adoperato dagli agrimensori, valido per il calcolo dell’area di ogni tipologia di triangolo

<1.1> L’agrimensore si posizioni sull’angolo maggiore del triangolo, e si affacci sul lato maggiore, nel punto in cui debba cadere la perpendicolare tracciata a partire dall’angolo. **<1.2>** Se non sia in grado di individuare tale punto ad occhio e in modo compiuto, abbia con sé una lensa di filo, e fissi una delle estremità nell’angolo; diriga poi questo filo verso più punti, in cui riterrà che possa cadere la perpendicolare; lo estenda poi di una certa quantità fuori dal lato maggiore del triangolo; quindi muova la lensa in senso circolare, fino a toccare con mano ambedue le estremità del lato maggiore del triangolo; segni i due punti di contatto, e divida lo spazio delimitato dagli estremi del lato in due parti uguali, e quello sarà per te il punto in cui cadrà perpendicolare. **<1.3>** A quel punto misuri la perpendicolare con la pertica, e moltiplichi il risultato per la lunghezza di metà base, ossia per la metà del lato maggiore, e otterrà così l’area del triangolo.

<2.1> A dimostrazione di ciò, sarà dato il triangolo *abc* avente il lato *bc* maggiore del lato *ab* e del lato *ac*, per cui dall’angolo *a* deve essere condotta la perpendicolare sul lato *bc*. Se il lato *ab* è uguale al lato *ac*, la perpendicolare cadrà nel centro del lato *bc*; se minore, cadrà verso *b*; se maggiore, cadrà verso *c*. **<2.2>** Partendo da questa considerazione, l’agrimensore starà sul punto *a* e considererà dove da questo punto *a* la perpendicolare debba cadere sulla linea *bc*.

Fatto ciò, fisserà la lensa nel punto *a* e la estenderà sulla linea *bc* verso il lato *ab*, se esso è minore di *ac*: sia quella lensa *ad*. L'uomo terrà la lensa con la mano sul punto *d*, ossia condurrà la lensa un po' fuori dal triangolo verso *c*, finché il punto *d* tocchi la linea *bc* nel punto *e*, per cui la lensa *ae* sarà uguale alla lensa *ad*. **<2.3>** Condurrà poi la lensa verso *b*, finché il punto *d* tocchi la linea *bc*, dove capita. Sia *f* questo punto di contatto, per cui la lensa *af* sia pari alla lensa *ad*, e divida la linea *ef* in due parti uguali nel punto *h*. **<2.4>** Dal punto *a* al punto *h* traccerai la linea *ah*: dico che la linea *ah* è la perpendicolare sulla linea *bc*. Perciò, dal momento che la linea *af* è uguale alla linea *ae*, anche la linea *fh* è uguale alla linea *he*, per cui l'agrimensore misurerà con la pertica la perpendicolare *ah*, e anche il lato *bc*, e moltiplicherà la metà della perpendicolare per la totalità della base *bc*, o il contrario, e così facendo otterrà l'area del triangolo *abc*.

<3.1> In verità se il soprascritto triangolo *abc* dovesse essere più grande, ovvero la lensa a disposizione dell'agrimensore dovesse essere più piccola della perpendicolare, come nel caso dell'area di un vigneto o di un arboreto di forma triangolare, o di un'area piena di messi, tale comunque che la perpendicolare non possa essere misurata con la tecnica sopradescritta: quante pertiche allora sono contenute nel lato *ab*, tanti piedi siano contenuti nella linea *ai*; similmente, quante pertiche siano contenute nel lato *ac*, tanti piedi siano contenuti nella linea *ak*. **<3.2>** Si tracci poi la linea *ik*, e l'agrimensore trovi con la lensa la misura della perpendicolare nel modo sopra descritto, all'interno del triangolo *aik*. Sia questa perpendicolare *al*. L'agrimensore protrarrà la perpendicolare *al* perpendicolarmente nel punto *m*: in verità la linea *am* è la perpendicolare del triangolo *abc*, come si afferma esplicitamente in geometria.

<5>

I rapporti e le proprietà dei triangoli e delle linee in essi protratte

<1.1> Quando di un triangolo sono noti due lati, e tra questi è tracciato un segmento parallelo al terzo lato, e sono note le ripartizioni di uno dei lati, sarà possibile conoscere anche la misura delle ripartizioni dell'altro lato, nonché la misura della linea che è stata tracciata tra i due lati. **<1.2>** Sia dato il triangolo *abg* e al suo interno sia tracciata la linea *de* parallela alla base *bg* e tale da intersecare i lati *ab* e *ag*. Sia poi *ad* pari a 4, *db* pari a 9, *ag* pari a 15 e *bg* pari a

14. Dico che le sezioni *ae* ed *ed* saranno note, dal momento che la linea *de* è parallela alla linea *bg*, e i lati del triangolo sono stati divisi in modo proporzionale, come dimostra Euclide nel sesto libro degli *Elementi*. **<1.3>** Infatti come *ad* sta a *db*, così *ae* sta a *eg*. Similmente saranno in proporzione continua: come *ad* sta a *ab*, così *ae* sta a *ag*, vale a dire come 4 sta a 13, così *ae* sta a *ag*, ossia a 15, per cui il prodotto di 4 per 15 è uguale al prodotto di 13 per la linea *ae*: dunque 60 diviso 13 fa $4 + \frac{8}{13}$, che corrisponde alla misura della linea *ae*, e sottratto da *ag*, ossia da 15, rimane $10 + \frac{5}{13}$, che corrisponde alla misura della linea *eg*. **<1.4>** Oppure, al contrario dal momento che come *ab*, ossia 13, sta a *db*, ossia a 9, così *ag*, pari a 15, sta a *eg*, per cui se avremo diviso nove volte 15, ossia 135, per 13, senza dubbio rinveniremo il medesimo valore di $10 + \frac{5}{13}$ per la misura della linea *eg*. **<1.5>** Oppure dal momento che come 4 sta a 9, così *ae* sta a *eg*, occorre dividere la linea *ag* in 4 e 9, vale a dire in 13 parti, e vi sarà un risultato di $\frac{4}{13}$ di *ag* per la misura della linea *ae*, e vi sarà un risultato di $\frac{9}{13}$ similmente di *ag* per la misura della linea *eg*, per cui tolti $\frac{4}{13}$ e $\frac{9}{13}$ da 15, avremo i valori di $4 + \frac{8}{13}$ e $10 + \frac{5}{13}$, come ho detto prima. **<1.6>** Ma sia *ad* pari a 4, *db* pari a 9 e *ae* pari a $4 + \frac{8}{13}$, mentre *eg* sia sconosciuta: dal momento che come 4 sta a 9, così $4 + \frac{8}{13}$ sta a *eg*, moltiplicherai perciò 9 per $4 + \frac{8}{13}$ e dividerai il risultato per 4: verrà $10 + \frac{5}{13}$ per il valore della linea *eg*. E se avremo ignorato soltanto il valore della linea *ae*, bisognerà soltanto moltiplicare 4 per $10 + \frac{5}{13}$ e dividere il risultato per 9, perché come *bd* sta a *da*, così *ge* sta a *ea*. **<1.7>** Similmente dimostreremo che la linea *de* è nota: essendo parallela alla linea *bg*, il triangolo *ade* sarà simile al triangolo *abg*, per cui gli angoli che giacciono sui lati in proporzione sono uguali: dunque, come *ad* sta a *de*, così *ab* sta a *bg*, per cui se il risultato del prodotto di *ad* per *bg*, ossia di 4 per 14, sarà stato diviso per *ab*, il risultato sarà $4 + \frac{4}{13}$ per il valore della linea *de*, come volevasi dimostrare.

<2.1> Vogliamo calcolare la quantità di una linea tracciata in modo tale, che termini su punti noti posti su due lati di un triangolo, e che non sia parallela al terzo lato. **<2.2>** Sia dato il medesimo triangolo *bag* e sia stata in esso tracciata la linea *ez*; sia poi *eb* pari a due terzi della linea *ba*, e si fissi il punto *z* nel mezzo di *bg*: dunque *be* misura 8 + $\frac{2}{3}$; rimane *ea* del valore di 4 e $\frac{1}{3}$. A questo punto vogliamo conoscere la misura di *ez*. <**2.3**> Si tracci la perpendicolare *bd*, che come ho dimostrato prima misura 12, e sia il segmento minore *ad* pari a 5, e il maggiore *dg* sia pari a 9. Per il punto *e* si conduca il segmento *ei* perpendicolare alla base *ag*. Per il punto *z* si tracci poi il segmento *ztk* parallelo alla perpendicolare *bd*. Dal momento che la linea *zk* è parallela alla linea *bd*, come *zg* sta a *gb*, così *gk* sta a *gd*, e *zk* sta a *bd*. Ma *gz* è la metà di *gb*, per cui *gk* è la metà di *gd*, e *zk* è la metà di *bd*. Dunque *gk* misura 4 + $\frac{1}{2}$, e rimane tutto il segmento *kd*, e *zk* misura 6.

<**3.1**> Di nuovo si tracci *ef* parallelo alla perpendicolare *bd*: come *ae* starà ad *ab*, così *af* starà ad *ad*, e *ef* a *bd*. Perciò cui *af* misura 1 + $\frac{2}{3}$: rimane *fd* pari a 3 + $\frac{1}{3}$, ed *ef* pari a 4, ossia alla terza parte di *bd*. <**3.2**> Dal momento che le linee *ef* e *tk* sono parallele alla perpendicolare *bd*, esse sono tra loro parallele, e uniscono le parallele *et* e *fk*, per cui *tk* è uguale a *ef*, e *et* è uguale alla linea *fk*. <**3.3**> Ma *fk* è uguale alla somma delle due linee *kd* e *df*, cioè alla somma 4 + $\frac{1}{2}$ con 3 + $\frac{1}{3}$, per cui tutta *kf* misura 7 + $\frac{5}{6}$; *te* misura allora 7 + $\frac{5}{6}$. Similmente *tk* misura 4, essendo uguale a *ef*: rimane *tz* pari a 2, e dal momento che tra i due segmenti paralleli *ei* e *ag* cade il segmento *zk*, l'angolo esterno *zte* è uguale all'angolo opposto interno *zkf*. Ma l'angolo *zkf* è retto, essendo l'angolo *bdk* retto, e anche l'angolo *zte* è retto. <**3.4**> Dunque il triangolo *zte* è rettangolo, e di esso due lati sono noti, ossia quelli che contengono l'angolo retto, per cui anche il terzo lato, ossia *ez*, sarà noto, come ho detto prima, essendo il suo quadrato pari alla somma dei quadrati delle linee *zt* e *te*. <**3.5**> Infatti il quadrato di *zt* è pari a 4, quello di *te* è pari a 61 + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{36}$; aggiunto 4, fa 65 + $\frac{1 \;\; 3}{4 \;\; 9}$ per il valore del quadrato della linea *ez*, la cui radice, che è un po' più di 8 + $\frac{1}{12}$, corrisponde alla misura della linea *ez*, come volevasi dimostrare.

<**4.1**> Possiamo, poi, determinare il valore delle linee *zt* e *te* seguendo un altro procedimento. Il triangolo *zti* è simile al triangolo *bdg*, giacché il segmento *ti* è parallelo alla linea *dg* e *zt* lo è alla linea *bd*. Infatti il lato *zi* è simile al lato *bg*, e *it* è simile al lato *gd*: il lato rimanente *zt* è simile al rimanente *bd*. <**4.2**> Dunque come *zi* sta a *bg*, così *it* sta a *gd* e *zt* sta a *bd*. Infatti *gi* è la terza parte di *gb*, e *gz* è

la metà di *gb*, per cui *iz* è la sesta parte di *gb*, ossia misura $2 + \frac{1}{2}$. Dunque *zt* corrisponde alla sesta parte di *bd*, ossia a 2, e *it* è la sesta parte di *gd*, ossia $1 + \frac{1}{2}$, che sottratto da *ie*, che misura $9 + \frac{1}{3}$, dà come risultato $7 + \frac{5}{6}$, come ho detto prima. <**4.3**> In altro modo, si tracci il segmento *ic* parallelo alla linea *bd*, e il triangolo *icg* sarà simile ai triangoli *bdg* e *zti*. Infatti come *gi* sta a *gb*, così *gc* sta a *gd*, e *ic* sta a *bd*. Infatti *gi* è la terza parte di *gb*, e *gc* è la terza parte di *gd*, e similmente *ic* è la terza parte di *bd*. <**4.4**> Dunque *gi* misura 5, e *gc* 3 e *ic* 4. E dal momento che il triangolo *zti* è simile al triangolo *icg*, come *zi* sta a *ig*, così *ti* sta a *cg*. Infatti *zi* equivale alla metà di *ig*: perciò *it* è la metà di *gc* e *zt* è la metà di *ic*, come volevasi dimostrare.

<**5.1**> In verità se avremo tracciato le linee *ze* e *ga* al di fuori del triangolo fino al punto *h*, e avremo voluto conoscere la misura delle linee *ah* e *eh*, moltiplicheremo la linea *te* per *ef* e divideremo il risultato per *zt*, ed otterremo la misura della linea *fh*. <**5.2**> Faremo ciò, perché il triangolo *zte* è simile al triangolo *efh*. Infatti *te* è parallelo al segmento *gh*. Tra essi cade il segmento *zh*: l'angolo esterno *zet* è uguale all'angolo opposto interno *ehf*, e l'angolo *zte* è uguale all'angolo *efh*, perché sono entrambi retti. <**5.3**> Rimane l'angolo *tze* che è uguale all'angolo *feh*, per cui come *zt* sta a *te*, così *ef* sta a *fh*, e perciò il prodotto di *te* per *ef*, diviso per *zt*, restituisce il valore della linea *fh*. Oppure, viceversa, come *zt* sta a *ef*, così *te* sta a *fh*. Infatti *zt* è la metà di *ef*; ne consegue *te* sarà la metà di *fh*, ovvero che *fh* è il doppio di *te*. Ma *te* misura $7 + \frac{5}{6}$: perciò *fh* misura $15 + \frac{2}{3}$, da cui tolta *fa*, rimane *ah* pari a 14. <**5.4**> Allo stesso modo, infatti, come *zt* sta a *ef*, così *ze* sta a *eh*, per cui *eh* misura il doppio di *ez*. Ma dal momento che il valore *ez* è irrazionale, considereremo il loro rapporto in quadrati, e chiaramente come il quadrato della linea *zt* sta al quadrato della linea *ef*, cioè come 4 sta a 16, così il quadrato della linea *ze* sta al quadrato della linea *eh*, per cui il quadrato della linea *eh* è quattro volte il quadrato della linea *ez*. Oppure somma i quadrati delle linee *ef* e *fh*, e il risultato corrisponderà al quadrato della linea *eh*. <**5.5**> In altro modo, si tracci la linea *hz* al di fuori del triangolo, fino a far estendere la linea *bl* nel punto *l*, e sia *bl* parallela alla linea *hg*. Dal momento che le linee *bl* e *hg* sono parallele, l'angolo *elb* è uguale all'angolo *zhg*, e l'angolo *lbz* è uguale all'angolo *zgh*. I restanti angoli in *z* sono uguali tra loro, e anche

quelli al vertice. <**5.6**> Dunque il triangolo *dbz* è simile al triangolo *hgz*, per cui come *gz* sta a *zb*, così *hg* sta a *bl*. Infatti *gz* è uguale a *zb*, e *hg* è uguale a *bl*. Di nuovo poiché i triangoli *leb* e *eha* sono simili, allora senza dubbio come *ae* starà a *eb*, così *ah* starà a *bl*, cioè a *hg*. Infatti *ae* è la terza parte di *ab*, perciò *ae* è anche la metà di *eb* e *ha* sarà la metà di *bl*, cioè di *hg*. Rimane *ag* pari alla metà di *hg*, per cui *ha* è uguale ad *ag*. Ma *ag* misura 14, per cui *ha* misurerà similmente 14, ed entrambi i segmenti *hg* e *bl* misureranno 28.

<**6.1**> Se invece vogliamo calcolare il valore della somma delle linee *ze* ed *eh*, dal momento che come *zt* sta ad *ef* così *ze* sta a *eh*: ma *zt* sta a *ef* come la metà di *zt* sta alla metà di *ef*, cioè come 1 sta a 2. Si tracci perciò il segmento *mno*, e sia *mn* 1, e *no* 2. E come *mn* sta a *no*, così *ze* sta a *eh*. Essi saranno in proporzione continua. Allora come *mn* starà a *mo*, così *ez* starà a *eh*, per cui come il quadrato della linea *mn* starà al quadrato della linea *mo*, ossia come 1 starà a 9, così il quadrato della linea *ze* sta al quadrato della linea *zh*, per cui il quadrato della linea *zh* sarà pari a nove volte il quadrato della linea *ze*, perché se moltiplicheremo $65 + \frac{13}{36}$, ossia il quadrato della linea *ze*, per 9, avremo in totale $588 + \frac{1}{4}$ per la misura del quadrato della linea *zh*. <**6.2**> In altro modo, poichè il triangolo *zkh* è rettangolo e ha retto l’angolo in *k*, si addizionino senz’altro i quadrati delle linee *zk* e *kh*, e avremo in totale il quadrato della linea *zh*. Infatti è stato visto sopra che *kd* misura $4 + \frac{1}{4}$, *da* 5 e *ah* 14: perciò tutta la linea *kh* misura $23 + \frac{1}{2}$, il cui quadrato è pari $552 + \frac{1}{4}$. Il quadrato della linea *zk* è pari a 36, e così avremo un risultato di $588 + \frac{1}{4}$ per la misura della linea *zh*, come ho detto prima.

<**7.1**> Sia dato di nuovo il triangolo *bgd*, il cui lato *bg*, come abbiamo già detto, misuri 13, il lato *gd* 14, e il lato *bd* 15: si estenda poi *gd* fino al punto *a*, e sia *ga* pari a 10, e su *gb* si fissi il punto *z*, e sia *gz* pari a 5: rimarrà *zb* pari a 8. Problema: se si traccia *az* e la si protrae fino a un punto *e*, quale sarà la misura dei segmenti *de* e *eb*? <**7.2**> Si conduca per il punto *b* la linea *bi* parallela alla linea *gd*, e si estenda la linea *ae* fino al punto *i*: i due triangoli *bzi* e *azg* saranno uguali tra loro, dal momento che come *ag* sta a *gz*, così *ib* sta a *bz*. <**7.3**> Ma *ag* corrisponde al doppio di *gz*, perciò *ib* sarà pari a 16, vale a dire al doppio di *bz*. Allo stesso modo, visto che il triangolo *aed* è simile al triangolo *eib*, allora come *ad* sta a *bi*, così *de* sta a *eb*. Infatti *ad* sta a *bi* come l’ottava parte di *ad* sta

all'ottava parte di *bi*: infatti 3 è l'ottava parte di *ad*, e 2 è l'ottava parte di *bi*: dunque come 3 sta a 2, così *de* sta a *eb*. Essi sono in proporzione continua, per cui come 3 sta a 5, così *de* sta a *db*, per cui *de* è pari a $\frac{3}{5}$ di *db*, vale a dire a 9, e *eb* è pari a 6, come volevasi dimostrare.

<8.1> Siano dunque noti i segmenti *bz*, *zg*, *be* e *ed*. E siano scritti secondo lo stesso ordine di sopra, e sia il triangolo lo stesso, e invece non si conoscano le misure dei segmenti *ag* e *bi*. **<8.2>** In primo luogo, poiché come *de* sta a *eb*, ossia come 3 sta a 2, così *ad* sta *bi*, allora, allo stesso modo, *ad* sta a *bi*, più la metà. **<8.3>** Di nuovo, visto che come *gz* sta a *zb*, ossia come 5 sta a 8, così *ag* sta a *bi*, allora *ag* è pari a $\frac{5}{8}$ di *bi*. **<8.4>** È stato certamente calcolato che tutta la linea *ad* è pari a $\frac{12}{8}$ di *bi*, essendo similmente che *ad* sta a *bi* più la metà: perciò sottratto $\frac{5}{8}$ da $\frac{12}{8}$, rimane *gd* pari a $\frac{7}{8}$ di *bi*. **<8.5>** Dunque come 7 sta a 8, così *gd* sta a *bi*, per cui il prodotto di 8 per 14, ossia per *gd*, diviso 7, ovvero la settima parte di 14, ossia 2, per 8, darà come risultato 16 per la misura della linea *bi*. Sottraendo da 16 il valore di $\frac{5}{8}$, si avrà come risultato 10 per la misura della linea *ag*.

<9.1> Allo stesso modo sia dato lo stesso triangolo *abg* e sia fissato al di fuori di questo il punto *d*, tale che non giaccia sulla stessa direzione della linea *bg*, e per il punto *d* si tracci la linea *de* in modo che sia parallela alla base *bg*, e siano *de* e *eb* note; rimarrà *ea* nota, essendo tutta *ab* nota. Si fissi poi su *ab* il punto *z* a una distanza nota, si tracci *dz*, e la si estenda fino al punto *i*. Dico che il rapporto di *gi* a *ia* sarà noto. **<9.2>** Si completi la figura. E dal momento che il triangolo *dze* è simile al triangolo *zat*, allora come *ez* sta a *za* – di essi il rapporto è noto – così la linea *de* di cui si conosce la lunghezza sta a *at*, per cui la lunghezza di *at* sarà nota. **<9.3>** Di nuovo, dal momento che i triangoli *hzb* e *zat* sono simili, allora come *az* sta a *zb* – la lunghezza di entrambe è nota – così *at*, di cui si conosce la misura, sta a *bh*, per cui la lunghezza di *bh* sarà nota. Ma è stata posta *bg* di valore noto: dunque anche l'intera linea *hg* è nota. E dal momento che i triangoli *hig* e *iat* sono simili, allora come *hg*, di cui si conosce la lunghezza, sta a *at*, di cui si conosce la lunghezza, così *gi* sta a *ia*: dunque il rapporto di *gi* a *ia* è noto, come volevasi dimostrare.

<10.1> Di nuovo sia dato il triangolo *gab*, di cui si conosce la misura dei lati, la cui perpendicolare sia *gd*; e si fissi in esso il punto *e* posto a una distanza nota, e per i punti *a* ed *e* si tracci senz'altro la linea *aez*. Dico he senza dubbio il rapporto tra *bz* e *zg* sarà noto. **<10.2>** Si tracci perciò la linea *gi* parallela alla linea *ab* e si conduca *az* fino al punto *i*. I triangoli *aed* e *ied* saranno uguali tra loro, per cui come *de* sta a *eg*, così *ad* sta a *gi*. Sarà perciò nota la misura di *gi*, essendo nota quella di *ad*. Il rapporto che il segmento *ab* ha con *gi* è pari al rapporto di *bz* a *zg*: dunque il rapporto di *bz* a *zg* è noto, come volevasi dimostrare.

<11.1> Se il punto, attraverso il quale passa la linea condotta a partre dall'angolo, non si trovi affatto sulla perpendicolare, come nel triangolo *dez* in cui è stato dato il punto *a* sulla linea *dg*, che non è perpendicolare, per il quale punto passa la linea *eab*; e sia nota la proporzione di *ga* a *ad*, e sia nota anche *ge*: dico che senza dubbio il rapporto di *zb* a *bd* è noto. **<11.2>** Ciò detto, si completi senza dubbio la figura. Dal momento che come *ga*, di cui si conosce la lunghezza, sta a *ad*, la cui misura è nota, così *eg*, di cui si conosce la lunghezza, sta a *di*, per questo motivo la lunghezza *di* sarà nota. Come *ez* dalla misura nota sta a *di* dalla misura nota, così *zb* sta a *bd*. Dunque il rapporto di *zb* a *bd* è noto, come volevasi dimostrare.

<12.1> Se il rapporto tra le sezioni del segmento passante per il dato punto *a*, parallelo alla perpedicolare, sarà stata nota, quella linea che sia stata terminata da una parte sulla base nel punto *g*, e dall'altra sulla linea *di* nel punto *t*, come si vede in quest'altra figura: dico che il rapporto di *zb* a *bd* è noto. **<12.2>** Dal momento che il triangolo *eag* è simile al triangolo *ait*, come *ga* sta a *at*, così *eg* sta a *ti*. Si tracci senz'altro all'interno del triangolo *dez* la perpendicolare *dk*, e *dt* sarà uguale a *gk*, per cui il parallelogramma è *dg* è regolare. Perciò se si unisce la linea *ti* all'uguale linea *gk*, ossia *td*, tutta *di* sarà nota: dal momento che come *ez* sta a *di*, così *zb* sta a *bd*, perciò il rapporto di *zb* a *bd* è noto, come ho detto prima.

<13.1> Se sarà stato fissato un punto nel triangolo all'interno della perpendicolare e stabilito l'angolo a partire dal quale, attraverso il punto, si estende la linea fino al lato che sottende l'angolo stesso, similmente si potrà risalire alla lunghezza delle sezioni di quel lato. **<13.2>** Sia dato il triangolo *abg*, la cui perpendicolare è *ad*, e si fissi il punto *e*. Dal punto *b*, poi, passando per *e* sia condotta la linea *bez*. Dico che la misura di entrambi le sezioni *gz* e *za* sarà nota. **<13.3>** Si tracci per il punto *a* la linea *it* parallela alla linea *bg*, e si ottenga la linea *bt*, e per il punto *e* si tracci *hi* parallelo alla perpendicolare *ad*, e sia noto il rapporto di *he* a *ei*. Siano poi noti i lati del triangolo *abg*, e sia nota anche la linea *bh*. Dal momento che si conosce la misura dei lati del triangolo *abg*, sarà nota anche la lunghezza del segmento *bd* dal quale si sottrae *bh* di cui si conosce la lunghezza, e la restante *hd* sarà nota. Perciò anche la lunghezza di *ia* è nota, essendo uguale ad *hd* per il fatto che *id* è un parallelogramma. Dal momento, poi, che i triangoli *beh* e *eit* sono simili, come *he* sta a *ei*, così *bh* sta a *it*. Dunque la lunghezza di *it* sarà nota, e se da essa si sottrae *ia*, rimarrà *at* di cui si conoscerà la misura. Dal momento, poi, che come *bg* sta a *at*, così *gz* sta a *za*, allora la lunghezza delle sezioni *gz* e *za* sarà nota, come ho detto prima.

<14.1> In modo simile, se per un punto dato all'interno del triangolo, a partire da un punto fissato su un lato del triangolo, si traccia una linea fino a un altro, dai lati del triangolo si calcolerà la proporzione che intercorre tra le sezioni di quel lato. **<14.2>** Esempio: nel triangolo *bdg* sia stato dato il punto *e* di cui si conosce la posizione sulla base *gd*, e all'interno del triangolo sia dato il punto *a* la cui posizione è ugualmente nota sulla linea *zk*, che è parallela alla perpendicolare *bi*; per i punti *e a* si tracci poi la linea *et*. Dico che il rapporto di *dt* a *tb* è noto. **<14.3>** Si completi la figura: dal momento che la linea *zk* è parallela alla perpendicolare *bi*, e che *bk* è parallela a *iz*, allora *bk* è uguale al segmento *iz*, e *zk* è uguale alla perpendicolare *bi*, di cui essendo nota la lunghezza, sarà nota anche la lunghezza di *zk*. La lunghezza poi di *za* è nota, quindi rimane la lunghezza di *ak*, anch'essa nota. Dal momento poi che, come *za* sta a *ak*, così *ez* sta a *kh*, allora la misura di *kh* è nota, e se ad essa si aggiunge *kb*, vale a dire *zi*, la cui lunghezza si è posto essere nota, la misura di *bh* sarà nota. Dal momento poi che i triangoli *etd* e *tbh* sono simili, allora come *ed* sta a *bh*, così *dt* sta a *tb*, come volevasi dimostrare.

<15.1> Allo stesso modo sia dato il triangolo *abg*, del quale *ab* sia pari a 13 e *ag* sia pari a 15, e la cui altezza *ad* è pari 12; si fissi poi un punto *e* esterno al triangolo, dal quale si conduca il segmento *ez* parallelo all'altezza *ad*, e sia *ez* pari a 2 e *zb* pari a 1, per cui *zd* sarà pari a 4. Si fissi poi di nuovo all'interno del triangolo il punto *i*, e sia il segmento *it* pari a 3 e sia parallelo alla perpendicolare *ad*; sia poi *tz* pari a 9, e per i punti *e i* si tracci la linea *eik*. Dico che il rapporto di *gk* a *ka* è noto. **<15.2>** Si tracci la linea *al* parallela alla base *bg*, e si estenda *ek* nel punto *l*, e *ti* nei punti *h* e *m*, e sia *tm* uguale a *ez*. Si tracci poi *em*, e dal momento che i segmenti *ez* e *it* sono paralleli alla perpendicolare *ad*, il segmento *tm* sarà parallelo al segmento *ze*, e poichè sono uguali tra loro, il segmento *em* sarà uguale e parallelo al segmento *zt*. Dunque *em* è pari a 9 ed è parallelo al segmento *al*, e *th* è pari a 12, essendo uguale a *ad*. Dunque tutta la linea *mh* è pari a 14: infatti *mi* è pari a 5, e rimane *ih* pari a 9. Dunque come *mi* sta a *ih*, così *em* sta a *hl*, cioè come 5 sta a 9, così 9 sta a *hl*. Dunque *hl* è pari a 16 + $\frac{1}{5}$, per cui tutta *al* è pari a 21 + $\frac{1}{5}$. **<15.3>** Allo stesso modo, dal momento che *ez* è parallelo al segmento *ti*, i triangoli *enz* e *int* sono simili, per cui come *ti* sta a *ez* così *tn* sta a *nz*, per cui *tn* è pari a 5 + $\frac{2}{5}$. **<15.4>** Oppure, dal momento che i triangoli *nit* e *lih* sono simili tra loro, allora come *ti* sta a *ih*, cioè come 3 sta a 9, così *nt* sta a *hl*, dunque *nt* è la terza parte di *hl*, ossia 5 + $\frac{2}{5}$: se a questa si aggiunge *tg*, *ng* sarà pari a 9 e $\frac{2}{5}$. E come *ng* sta a *al*, così *gk* sta a *ka*. Infatti *al* è pari a 21 + $\frac{1}{5}$ che corrisponde alla quinta parte di 106, e *gn* corrisponde alla quinta parte di 47. Dunque 47 sta alla somma di 106 + 47, ossia sta a 153, come *gk* sta a *ga*, vale a dire a 15, per cui come 47 sta alla terza parte di 153, ossia a 51, così *gk* sta alla terza parte di 15, ossia a 5, per cui se avremo moltiplicato 5 per 47, e avremo diviso il risultato per 51, si otterrà il valore di $\frac{1\ \ 10}{3\ \ 17}$ 4 per la misura della linea *gk*. Questo valore, meno 15, darà $\frac{2\ \ 6}{3\ \ 17}$ 10 per la misura della linea *ka*.

<16.1> Oppure si estendano le linee *em* e *ag* nel punto *o*: allora come *eo* starà a *al*, così *ok* starà a *ka*. Attraverso questa proporzione calcoleremo la misura di *ak*, e a quel punto avremo la misura di *kg*, come volevasi dimotrare. **<16.2>** Infatti sarà possibile conoscere la misura di *go* e di quella di *oe* attraverso quanto ho detto prima, perché il triangolo *adg* è simile al triangolo *afo*. Allo stesso modo se vogliamo conoscere la posizione del punto *c*, attraverso il quale la linea *el* è divisa in due, e ottenere la misura della perpendicolare *ad*, perché il triangolo *ncd* è simile al triangolo *lca*, allora come *nd* sta a *al*, così $\frac{2}{5}$ stanno a se stessi e alla quinta parte di 106, ovvero così 2 sta a 108, come *dc* sta a *da*, per cui *dc* misura $\frac{2}{9}$, e rimane *ca* pari a 11 + $\frac{7}{9}$. Oppure se avremo tracciato la perpendicolare *nx*, allora come *ex* starà a *xn*, così *nd* starà a *dc*: infatti *ef* è uguale a *dz*, e *dn* è uguale a *fx*, per cui la lunghezza di *ex* è nota.

<17.1> Di nuovo, si consideri *ge* al posto di *ez* in quest'altra figura, e siano dati in verità due lati del triangolo e la sua altezza, nonché la linea *ti*, come ho detto; e sia l'angolo *egt* retto, per cui la linea sarà parallela ai segmenti *it* e *ad*. Si tracci poi per i punti *e i* la linea *ef*: vogliamo dunque conoscere la misura delle sezioni *gb* e *ad* nonché di *ab*. **<17.2>** Si estenda senz'altro la linea *ef* fino al punto *c* nonché la linea *ti* fino al punto *l*, e si tracci *cal*, e sia parallela alla linea *bg*. Come *eg* starà a *ti*, così *gz* starà a *zt*, per cui come *eg* e *ei* staranno a *ti*, cioè come 5 starà a 3, così *gt* starà a *zt*, dunque *zt* sarà pari a $2 + \frac{2}{5}$, essendo *gt* pari a 4. **<17.3>** Allo stesso modo come *ti* sta a *il*, così *zt* sta a *lc*, per cui *lc* è pari a $7 + \frac{1}{5}$, da cui sottratta *la*, rimane *ac* pari a $2 + \frac{1}{5}$. Allo stesso modo come *td* sta a sè e ad *ac*, così *dh* sta a *da*, per cui *dh* misura $9 + \frac{1}{4}$: rimane *ha* pari a $2 + \frac{3}{4}$. Di nuovo, dal momento che come *zb* sta a se e ad *ac*, così *bf* sta a *ba*, dunque *bf* sarà pari a $11 + \frac{3}{73}$, la rimanente *fa* sarà pari a $1 + \frac{70}{73}$.

<18.1> In un triangolo rettangolo di cui si conosca la misura dei lati si estenda, al di fuori del triangolo, il lato che sottende l'angolo retto per una lunghezza nota, e si conduca ad angolo retto, dall'estremità di questa linea, un segmento, la cui misura sarà anch'essa nota. **<18.2>** Ad esempio: sia dato il triangolo rettangolo *abc* dai lati noti, avente l'angolo *abc* retto; si estenda poi il lato *ac* al di fuori del triangolo fino al punto *d*: sia la lunghezza di tutta linea *ad* nota. Dal punto *d* a punto *b* si estenda il segmento *db*. Dico che la linea *db* è nota, e ciò si dimostra in questo modo. **<18.3>** Traccerò il segmento *ab* ad angolo retto e lo estenderò all'infinito fino al punto *e*, e per il punto *d* traccerò il segmento *de* parallelo alla linea *bc*: l'angolo *aed* sarà retto, essendo uguale all'angolo *abc* perché, *quando una retta cade tra due rette parallele, l'angolo interno sarà uguale all'angolo opposto interno*. **<18.4>** Infatti tra le rette equidistanti *bc* e *ed* cade la retta *ae*, per cui l'angolo *aed* è uguale all'angolo *abc*. Perciò dunque anche l'angolo *ade* è uguale all'angolo *acb*, e l'angolo in *a* è in comune, per cui i triangoli *abc* e *aed* sono equiangoli e simili tra loro. In verità i triangoli sono simili e hanno uguali gli angoli che soggiacciono ai lati che stanno in proporzione, per cui come *ac* sta a *cb*, così *ad* sta a *de*. Viceversa, allora, come il segmento *ad* di cui si conosce la misura starà al segmento *ac* di cui si conosce la misura, così il segmento *ed* starà al segmento *bc* di lunghezza nota, per cui anche la lunghezza del segmento *ed* sarà nota. Similmente come *ad* sta ad *ac*, così *ae* sta ad *ab* di cui si conosce la lunghezza, per cui anche la misura del segmento *ae* sarà nota: se da questo si toglie il valore noto del segmento *ab*, resterà il segmento *be* di lunghezza nota, e se si aggiunge il quadrato di questo al quadrato della linea *de*, si otterrà il quadrato della linea *bd* la cui misura è anch'essa nota: in questo modo si vede che la misura della linea *bd* è nota, come ho già detto.

<19.1> Da questa figura viene fuori la soluzione al quesito riportato più sotto che mi fu sottoposto da un tale di Verona, il quale mi domandò: se un albero venisse eretto nei pressi della riva di un fiume, e l'altezza dell'albero fosse di 40 piedi, la cui lunghezza corrisponde alla linea *bg*. Ho stabilito poi che la distanza che era dalla base dell'albero al fiume fosse di 5 piedi, la quale distanza ho posto essere la linea *bc*. Poi sull'albero *bg* è stato fissato un certo punto *a*, tale che *ba* fosse della misura di 10 piedi, e nel punto *a* è stato tagliato l'albero, e la parte superiore *ag*, che era di 30 piedi, è caduta sulla linea *ad* toccando il punto *c*, tale che la linea *ad* fosse pari a 30. Mi chiese di quanto dovesse essere la misura della linea *db* che andava dalla cima dell'albero fino alla sua base. **<19.2>** Volendo da ciò risolvere questo quesito, ho impostato la soprascritta figura, e ho sommato i quadrati delle linee *ba* e *bc*, ossia 100 e 25, e ho ottenuto 125 per la misura del quadrato della linea *ac*. E dal momento che, come *ad* stava ad *ac*, così *ed* stava a *bc*, allora come il quadrato della linea *ad* era stato al quadrato della linea *ac*, cioè come 900 era stato a 125, così il quadrato della linea *ed* era stato al quadrato della linea *bc*, cioè a 25. Ma il rapporto di 900 a 25 è, ridotto in minimi termini, pari al rapporto di 36 a 5. Dunque come 36 sta a 5, così il quadrato di *ed* sta a 25. Viceversa allora 36 era stato al quadrato della linea *ed*, come 5 a 25. Ma 5 è la quinta parte di 25, perciò 36 costituiva la quinta parte del quadrato della linea *ed*, per cui ho moltiplicato 36 per 5, e ho ottenuto 180 per il quadrato della linea *ed*, il quale quadrato l'ho poi sottratto dal quadrato della linea *ad*, ossia da 900: è rimasto 720 per il quadrato della linea *ae*. **<19.3>** Oppure, in altro modo, come *ad* sta ad *ac*, così *ae* sta ad *ab*. Dunque come 36 stava a 5, così il quadrato della linea *ea* stava al quadrato della linea *ba*, cioè a 100, per cui viceversa così 5 stava a 100, come 36 stava al quadrato della linea *ae*, per cui si deve moltiplicare 36 per 20, perché 5 equivale a $\frac{1}{20}$ di 100: si ottiene così similmente 720 per il quadrato della linea *ae*. **<19.4>** Dunque *ae* era stata la radice di 720, dalla quale ho sottratto la linea *ab*, che è pari a 10, e mi è rimasta la radice di 720 meno 10 per la linea *eb*; l'ho moltiplicata per se stessa, e ho ottenuto 820 meno la radice di 288000 per il quadrato della linea *eb*. Ad essa ho aggiunto il quadrato della linea *ed*, che è 180, e ho ottenuto 1000 meno la radice di 288000 per il quadrato della linea *bd*, per cui *bd* equivale alla radice di 1000 meno la radice di 288000. Per ridurre questa a un numero razionale, ho preso la radice di 288000, che ho visto essere pari a 536 + $\frac{2}{3}$ meno $\frac{1}{96}$ e l'ho sottratta da 1000: è rimasto $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$ 463, di cui ho preso la radice, e ho ottenuto 21 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{40}$ di un piede per la quantità della linea *bd*. **<19.5>** Non bisogna trascurare di dimostrare il metodo per trovare il quadrato della linea *eb*, che corrisponde al reciso ovvero all'abscissa, ovvero si nomina dal pezzo che è rimasto; essendo la differenza, che giace tra le due linee, misurabile soltanto tramite i quadrati, come tra i segmenti *ae* e *ab*, dei quali *ae* è la radice del numero razionale, ossia di 720, e *ab* è il numero 10, e dal momento che il segmento *ae* è stato diviso in due parti nel punto *b*, i quadrati delle linee *ae* e *ab* sono uguali al doppio prodotto di *ab* per *ae*, più il quadrato della linea *eb*, come è stato dimostrato sopra. Dunque se dalla somma dei quadrati delle linee *ae* e *ab*, ossia da 720 più 100, cioè da 820, si prende il doppio prodotto di *ab* per *ae*, il quale doppio è uguale a $20\sqrt{720}$, questo è anche pari alla radice del numero proveniente dal prodotto del quadrato di 20, ossia 400, per 720, e quel numero è 288000: rimarrà 820 meno la radice di 288000, come ho dimostrato sopra.

<20.1> Di nuovo, se all'interno di un triangolo *abg* si tracceranno i segmenti *be* e *gd* a partire dagli angoli in *g* e *b* e tali che si intersechino tra loro nel punto *z*, e sia noto il rapporto di *ge* a *ea* e quello di *bd* a *da*, saranno senz'altro noti anche i rapporti di *bz* a *ze* e di *gz* a *zd*. **<20.2>** Ma prima di poter dimostrare ciò, è opportuno trattare della composizione di due o più proporzioni. Si dice composta la proporzione che si ottiene quando il risultato del prodotto di tutte le proporzioni antecenti sta al risultato del prodotto di tutte le conseguenti, siano esse due o più di due. **<20.3>** Esempio: dalla proporzione di 2 a 3, e dalla proporzione di 4 a 5, si compone la proporzione di 8 a 15, dal momento che dal prodotto di 2 per 4 verrà fuori 8, e che dal prodotto di 3 per 5 verrà fuori 15. Allo stesso modo dalle proporzioni di 2 a 3, di 4 a 5, e di 6 a 7, si compone la poporzione di 48 a 105, dal momento che 48 verrà fuori dal prodotto di tutte le quantità antecedenti, ossia di 2 per 4 per 6, e 105 viene fuori dal prodotto di tutte le successive, ossia di 3 pet 5 per 7. Ma la proporzione di 48 a 105 è pari al rapporto, ridotto nei minimi termini, di 16 a 35. **<20.4>** Da tali proposizioni composte, si è capito che tra 16 e 35 cadono tre numeri secondo le proporzioni soprascritte, nel senso che che come 2 sta a 3, così 16 sta a 24, come 4 sta a 5, così 24 sta a 30, come 6 sta a 7, così 30 sta a 35. Da queste, infatti, procede la composizione della proporzione tra due quantità, o due numeri: quando tra queste quantità se ne isola un’altra, allora il rapporto della prima quantità alla seconda della proporzione composta, sarà uguale al rapporto della prima quantità a quella che è stata sottratta, più quella della quantità che è stata sottratta alla seconda. **<20.5>** Proponiamo un esempio numerico di questa regola: sia 7 la quantità sottratta tra 3 e 10: dico che la proporzione di 3 a 10 è pari alla composizione della proporzione di 3 a 7 e di quella di 7 a 10. Infatti il prodotto delle quantità antecedenti sta al prodotto delle conseguenti come 3 sta a 10, per cui se avremo moltiplicato tra loro le quantità antecedenti, ossia 3 per 7, verrà come risultato 21, e se avremo moltiplicato tra loro le quantità successive, ossia 7 per 10, viene come risultato 70. Senza dubbio il rapporto di 21 a 70 è pari al rapporto della settima parte di 21 alla settima parte di 70, corrisponde al rapporto di 3 a 10, come ho detto. **<20.6>** Similmente tra due quantità possono essere sottratte due o più quantità, e la proporzione di queste due quantità sarà composta dalla somma di queste proporzioni, ad esempio se tra 3 e 10 vengono isolati 5, 6 e 7, la proporzione di 3 a 10 sarà composta delle proporzioni di 3 a 5, 5 a 6, 6 a 7 e 7 a 10.

<21.1> Dopo aver pienamente compreso tali cose, è opportuno dimostrare anche in che modo da una data proporzione sia possibile ricavare un’altra proporzione: ad esempio, se dalla proporzione di 7 a 8 volessi ricavare la proporzione di 6 a 5, moltiplicherai la quantità antecedente della proporzione, dalla quale bisogna ricavare il rapporto, per la conseguente della proporzione che occorre ricavare, vale a dire 7 per 5: il risultato sarà 35 per la quantità antecedente della proporzione residua. **<21.2>** Moltiplicherai poi la quantità antecedente, della proporzione da ricavare, per la quantità conseguente, dalla quale viene ricavata la proporzione, ossia 6 per 8: il risultato sarà <48> per la quantità conseguente della rimanente proporzione. Dunque se dal rapporto di 7 a 8 si toglie il rapporto di 6 a 5, rimarrà sicuramente il rapporto di 35 a 48. Ne consegue che, se avremo addizionato il rapporto di 6 a 5 al rapporto di 35 a 48, verrà in totale il rapporto di

210 a 240, che è lo stesso rapporto che ha la trentesima parte dell'uno alla trentesima parte dell'altro, ossia 7 a 8.

<22.1> Dopo aver compiutamente compreso tali cose, prima di tornare al nostro proposito, è opportuno mostrare in che modo il rapporto che, nel soprascritto triangolo *abg*, hanno i segmenti *ga* a *ea*, si componga dal rapporto dell'intero segmento riflesso *gd* con la sua parte *zd*, più il rapporto di *bz* a *be*. **<22.2>** Questa ne è la dimostrazione, che si chiama "secondo congiunzione"[4]: da un punto *e* si traccia il segmento *ei* parallelo alla linea *gd*, come si mostra in quest'altra figura. Il triangolo *aie* sarà simile al triangolo *adg*, per cui come *ga* starà ad *ae*, così *gd* starà a *ei*. Si isoli perciò il segmento *zd* tra *gd* e *ei*: attraverso il segmento *ea*, di cui ho detto sopra, il rapporto di *gd* ad *ei* sarà composto dalla proporzione di *gd* a *dz* e di *dz* ad *ei*. **<22.3>** Ma il rapporto di *zd* a *ei* è pari al rapporto di *bz* a *be*, perché il triangolo *bzd* è simile al triangolo *bei*, essendo *zd* parallelo al segmento *ei*. Dunque il rapporto di *gd* a *ei* si compone della proporzione di *gd* a *dz* e di *bz* a *be*. Ma la proporzione di *gd* ad *ei* è uguale alla proporzione di *ga* ad *ae*, dunque il rapporto di *ga* ad *ae* si compone, come ho detto, della proporzione di *gd* a *dz* e di quella di *bz* a *be*. **<22.4>** Dico di nuovo che il rapporto di *ga* a *ae* si compone del rapporto del segmento *gd* riflesso al segmento *be* riflesso, e del rapporto di *bz* a *zd*, perché il rapporto di *gd* a *ei* è uguale al rapporto di *ga* ad *ae*. Se nel rapporto di *gd* ad *ei* si isola il segmento *be*, il rapporto di *ga* ad *ae* sarà composto dal rapporto di *gd* a *be* e di *be* a *ei*. Ma il rapporto di *be* a *ei* è pari al rapporto di *bz* a *zd*, dunque il rapporto di *ga* ad *ae* si compone del rapporto di *gd* a *be*, e di *bz* a *zd*, come volevasi dimostrare.

<23.1> Infatti sempre accade, che quando vi sarà stata una proporzione composta da due proporzioni, anche questa stessa proporzione sarà composta dalla proporzione delle antecedenti alle permutate conseguenti. **<23.2>** Esempio: la proporzione di 8 a 15 è composta dalla proporzione di 2 a 3, e da quella di 4 a 5. Anche la proporzione di 8 a 15 sarà composta dalle proporzioni permutate, come da quella di 2 a 5 e quella di 4 a 3, perché il prodotto di 3 per 5 è uguale al prodotto di 5 per 3: in entrambe le composizioni, 3 e 5 corrispondono ai valori conseguenti, mentre 2 e 4 corrispondono ai valori antecedenti. **<23.3>** In modo

---

[4] HUGHES 2008, p. 100, opportunamente traduce *cata coniunctum* con "by conjunction". La dimostrazione si trova anche all'interno dell'*Almagesto* di Tolemeo (cap. I, 13): cfr. HUGHES 2008, p. 100, n. 84.

simile si dimostrerà che il rapporto di *ba* ad *ad* si compone della proporzione di *be* ad *ez*, e da quella di *gz* a *gd*. Se a partire dal punto *d* avremo tracciato all'interno del triangolo una linea parallela alla linea *be*, allora dal rapporto di *ga* ad *ae*, è stata mostrata una combinazione di proporzioni composte.

<24.1> Dico di nuovo che il rapporto di *bd* a *da* si compone del rapporto di *bz* a *ze* più il rapporto di *ge* a *ga*, cosa che si dimostra in questo modo: **<24.2>** si tracci a partire dal punto *a* il segmento *at* parallelo alla linea *be*, come si vede in quest'altra figura, che viene detta "secondo disgiunzione", e si prolunghi il segmento *gd* fino al punto *t*. Poiché i segmenti *at* e *zb* sono posti alla stessa distanza, e tra essi cade il segmento *ab*, allora l'angolo *tad* è uguale all'angolo *dbz*. **<24.3>** Pertanto, dunque, anche l'angolo *atd* è uguale all'angolo *dzb*, e gli angoli in *d*, essendo al vertice, sono uguali tra loro: dunque i triangoli *atd* e *dbz* sono equiangoli, e hanno uguali gli angoli che giacciono sui lati in proporzione, per cui come *db* starà a *bz*, così *da* starà ad *at*. Viceversa dunque come *bd* starà a *da*, così *bz* starà ad *at*. Isoliamo dunque il segmento *ze* tra i segmenti *zb* ed *at*: allora la proporzione di *bz* ad *at*, ossia quella di *bd* e *da*, sarà composta dalla proporzione di *bz* a *ze* e da quella di *ze* ad *at*, cioè di *ge* a *ga*, essendo il triangolo *gez* simile al triangolo *gat*. Dunque la proporzione di *bd* a *da* si compone della proporzione di *bz* a *ze* e da quella di *ge* a *ga*. **<24.4>** Oppure la proporzione di *bd* a *ba* si compone della proporzione di *bz* a *ga* e della proporzione di *ge* a *ez*, come così si dimostra: tra *bz* e *at* si isoli il segmento *ga*: senza dubbio il rapporto di *bz* ad *at* sarà composto dal rapporto di *bz* a *ga* e da quello di *ga* ad *at*. Ma il rapporto di *ga* ad *at* è uguale al rapporto di *ge* ad *ez*, dunque il rapporto di *bz* ad *at*, cioè il rapporto di *bd* a *da*, si compone del rapporto di *bz* a *ga* e del rapporto di *ge* ad *ez*, come volevasi dimostrare. **<24.5>** Così è stata mostrata una combinazione della proporzione composta di *bd* a *da*. Similmente si mostrerà che la proporzione di *ge* ad *ea* si compone della proporzione di *gz* a *zd* e della proporzione di *bd* a *ba*, se avremo tracciato dal punto *a* un segmento parallelo alla linea *gd* e lo avremo unito alla linea *be*.

<25.1> Ora torniamo al nostro proposito. Mostrerò che se le proporzioni di *ge* ad *ea* e di *bd* a *da* saranno state note, certamente le proporzioni di *bz* a *ze* e di *gz* a *zd* saranno altrettanto note. Giacchè il noto rapporto di *ge* a *ga* si compone del rapporto di *gz* a *zd* e di *bd* a *ba*, se dal rapporto di *ge* a *ea* si toglie il rapporto di *bd* a *ba*, che è noto, rimarrà il rapporto di *gz* a *zd* anch'esso noto. Similmente, se dalla proporzione di *bd* a *da* si toglie la proporzione di *ge* a *ga*, rimarrà la proporzione di *bz* a *ze* che sarà nota. **<25.2>** Affinché tutte queste notizioni risultino più chiare, poniamo la linea *ag* pari a 16, e sia la linea *ab* pari a 15; sia poi *ge* la terza parte di *ea*, e *bd* sia la metà di *da*. Sarà dunque la proporzione di *ge* ad *ea* pari alla proporzione di 1 a 3. Da questa si sottrae la proporzione di *bd* a *ba*, ossia di 1 a 3: rimarrà la proporzione di *gz* a *zd*, uguale a quella di 3 a 3, per cui il segmento *gz* è uguale al segmento *zd*, e così è stato trovato che il rapporto di *gz* a *zd* è noto. **<25.3>** Similmente, se dalla proporzione di 1 a 2, ossia di *bd* a *da*, avremo sottratto la proporzione di 1 a 4, ossia di *ge* a *ga*, rimarrà la proporzione di 2 a 1 per la proporzione di *bz* a *ze*. E sebbene le proporzioni delle sezioni riflesse siano note, tuttavia non possiamo conoscere la misura di queste lunghezze riflesse, se non attraverso la conoscenza della misura della base, che poniamo essere pari alla radice di 97. **<25.4>** Impegniamoci a trovare sul lato *ag* il segmento della perpendicolare che cade su di essa a partire dall'angolo *b* e, attraverso le cose che sono state dimostrate a proposito del calcolo dei segmenti, troveremo che vi è questo un punto *e*, per il quale il segmento *be* è perpendicolare sul segmento *ag*. I triangoli *beg* e *eba* sono dunque rettangoli, per cui se si sottrae il quadrato del lato *eg*, che è pari a 16, dal quadrato della linea *bg*, che è pari a 97, rimarrà 81 per il quadrato della linea *be*, per cui il segmento *be* misura 9. E dal momento che *bz* sta a *ze* come 2 sta a 1, se avremo congiunto la proporzione di *bz* a *ze*, troveremo che questa è uguale a quella di 3 a 1, per cui il segmento *be* è tre volte il segmento *ze*, dunque *be* è pari a 9, *ze* sarà pari a 3 e *zb* sarà pari a 6.

<26.1> Allo stesso modo per trovare la lunghezza del segmento *gd*, faremo cadere la perpendicolare dal punto *g* sulla linea *ab*, e questa perpendicolare sia *gk*. In base a quanto ho dimostrato prima a proposito del calcolo del punto in cui cade la perpendicolare di un triangolo, la lunghezza del segmento *bk* sarà nota: perciò, resterà *ak* dalla lunghezza anch'essa nota, e sarà della misura di 2 + $\frac{4}{5}$. Da ciò, se avremo sottratto dal quadrato della linea *gb* il quadrato della linea *bk*, pari a 2 + $\frac{1}{5}$, rimarrà 92 + $\frac{4}{25}$ quale misura del quadrato della linea *gk*. Se a questo risultato avremo aggiunto il quadrato della linea *dk*, ossia 8 meno $\frac{4}{25}$, verrà 100 per la misura del quadrato della linea *gd*. Dunque la linea *gd* è pari a 10, per cui entrambi i segmenti *gz* e *zd* misurano 5, dal momento che ambedue si è visto essere uguali tra loro. **<26.2>** Si riproduca di nuovo la figura triangolare sopra disegnata, senza base: dico che il rapporto di *gd* a *dz* si compone delle due proporzioni delle linee *ga* ad *ae,* e di *be* a *bz,* e ciò si dimostra in questo modo. Nel punto *z* traccerò senz'altro la linea *zi* parallela alla linea *ga*, e il triangolo *dzi* sarà simile al triangolo *dga*, per cui come in proporzione *gd* sta a *dz,* così *ga* sta a *zi*. Tra *ga* e *zi* si isoli *ae*, e la proporzione di *ga* a *zi* sarà composta dalla proporzione di *ga* ad *ae* e da quella di *ae* ad *iz*. Ma la proporzione di *ea* a *zi* è uguale alla proporzione di *eb* a *bz,* essendo il triangolo *bzi* simile al triangolo *bea*. Dunque il rapporto di *ga* a *zi*, cioè di *gd* a *dz*, si compone della proporzione di *ga* ad *ae* e della proporzione di *eb* a *bz*, come volevasi dimostrare. **<26.3>** Da ciò dunque è manifesto che quando il rapporto di due quantità si compone del rapporto di una terza quantità ad una quarta, e dalla proporzione di una quinta quantità ad una sesta, allora la proporzione della terza quantità alla quarta sarà composta dalla proporzione della prima quantità alla seconda, e della sesta alla quinta. Infatti la proporzione della prima quantità *ag* alla seconda *ae* fu composta di due proporzioni, vale a dire di quella della terza quantità *gd* alla quarta *zd*, e di quella della quinta *bz* alla sesta *be*. **<26.4>** In tal modo troviamo che la proporzione della terza quantità *gd* alla quarta *zd* è composta dalla proportzione della prima quantità *ga* alla seconda *ae*, e della proporzione della sesta quantità *be* alla quinta *bz*.

<27.1> Mostrerò di nuovo nella stessa figura, che il rapporto di *gd* a *dz* si compone dalla proporzione di *ga* a *zb* e dalla proporzione di *be* ad *ea*, in questo modo. Infatti come *gd* sta a *dz*, così *ga* sta a *zi*: si tracci senz'altro il segmento *zb* tra *ea* e *zi,* e sarà la proporzione di *ga* a *zi* composta dalla proporzione di *ga* a *zb* e dalla proporzione di *zb* a *zi*. Se la proporzione di *bz* a *zi* è uguale alla proporzione di *be* a *ea,* allora la proporzione di *ga* a *zi,* ossia la proporzione di *gd* a *dz,* si compone dalla proporzione di *ga* a *bz* e dalla proporzione di *be* a *ea*, come ho detto prima. **<27.2>** Così in questa figura è stata mostrata un'altra combinazione di proporzioni. Infatti vi sono diciotto combinazioni di proporzioni, che possono essere mostrate in questo trapezoide e secondo i precetti che ho indicato anche nel mio libro nella *Regula Baracti*. **<27.3>** Ma poiché da tutte queste nozioni si acquisisce soltanto la scienza del calcolo di una certa quantità sconosciuta attraverso la conoscenza di cinque quantità note, il rapporto di una all'altra di queste sei quantità si compone da due proporzioni delle restanti quattro quantità. Non mi curo di indicare le altre combinazioni.

<28.1> Ho avuto cura di indicare, secondo l'ordine dei numeri che ho scritto sopra, in che modo dobbiamo calcolare la misura di una quantità ignota attraverso cinque quantità note. Sia perciò il rapporto della prima quantità *a* alla seconda *b* composto dal rapporto della terza quantità *g* alla quarta *d*, e del rapporto della quinta quantità *e* alla sesta *z*, e sia ignota la quantità *a*. **<28.2>** Poiché la proporzione di *a* a *b* è pari alla proporzione che sussiste tra il prodotto delle lunghezze antecedenti e il prodotto delle conseguenti nelle due proporzioni che rimangono, il risultato del prodotto di queste lunghezze antecedenti, moltiplicato per la lunghezza *b*, sarà uguale al risultato del prodotto delle lunghezze conseguenti moltiplicato per *a*, per cui se avremo moltiplicato il prodotto di *e* per *g*, che rappresentano appunto le lunghezze antecedenti, per *b*, e avremo diviso il totale per il risultato del prodotto di *d* per *z*, che rappresentano le conseguenti, il risultato sarà senza alcun dubbio la nota quantità *a*. **<28.3>** Esempio: sia *a* pari a 16, *b* pari a 12, *g* pari a 10, *d* pari a 5, *e* pari a 6, *z* pari a 9. Si moltiplichino 6 per 10, ossia *e* per *g*: il risultato sarà 60, che moltiplicato per *b*, ossia per 12, darà 720. Ugualmente, se avremo moltiplicato 9 per 5, e poi tutto per 16, il risultato sarà 720. Dunque dal momento che il prodotto di *e* per *g* per *b* è uguale al prodotto di *z* per *d* per *a*, se avremo diviso il risultato del prodotto di *e* per *g* per *b*, ossia 720, per 45, il risultato sarà certamente 16 per la misura della lunghezza *a*. **<28.4>** Ma sia la quantità *b* ignota, e le restanti cinque quantità siano note: divideremo 720, che è il risultato del prodotto di 9 per 5 per 16, per 60, che è il risultato del prodotto di 6 per 10: si avrà così 12 per la misura della quantità *b*. **<28.5>** Dia però ignota la quantità *g*: divideremo di nuovo 720, che è il risultato del prodotto di *a* per *d* e *z*, per il risultato del prodotto di *b* per *e*, ossia per 72: si avrà così 10 per la misura della quantità *g*. **<28.6>** Sia poi ignota soltanto la quantità *d*: divideremo di nuovo 720, che è il risultato del prodotto di *e* per *g* per *b*, per il risultato del prodotto di *a* per *z*, ossia per 144: si avrà 5 per la misura della quantità *d*. **<28.7>** Di nuovo, sia ignota la sola quantità *e*: divideremo di nuovo 720, che risulterà dal prodotto di *z* per *d* per *a*, per il risultato del prodotto della quantità *b* per la quantità *g*, ossia per 120: il risultato sarà 6 per la misura della quantità *e*. **<28.8>** Sia infine ignota la quantità *z* e siano note le restanti quantità:

si dividerà di nuovo 720, che è il risultato del prodotto di *e* per *g* per *b*, per il risultato del prodotto di *a* per *d*, ossia per 80: il risultato sarà 9 per la quantità *z*.

<29.1> Bisogna osservare che le lunghezze *a d z* sono dette del primo gruppo, mentre le tre lunghezze che rimangono, ossia *b g e*, sono dette del secondo gruppo. **<29.2>** Ora, il rapporto di ciascuna lunghezza del primo gruppo con ciascuna lunghezza del secondo gruppo si compone delle due proporzioni delle quattro lunghezze che rimangono, secondo una sola combinazione: chiaramente il rapporto della lunghezza *a*, che appartiene al primo gruppo, alla lunghezza *b*, che appartiene al secondo gruppo, si compone delle due proporzioni delle quattro lunghezze che rimangono, ossia della proporzione di *g* a *d*, e di quella di *e* a *z*, come è stato dimostrato. Ovvero il rapporto di *a* a *b* si compone della proporzione di *g* a *z*, e di quella di *e* a *d*. **<29.3>** Allo stesso modo la proporzione della lunghezza *a* alla lunghezza *g* si compone della proporzione di *b* a *d* e di *e* a *z*, ovvero dalla proporzione di *b* a *z* e di *e* a *d*. Anche la proporzione della lunghezza *a* alla lunghezza *e* si compone dalla proporzione di *b* a *z* e di *g* a *d*, ovvero dalla proporzione di *b* a *d* e di *g* a *z*. **<29.4>** Il rapporto delle lunghezze *d* e *z*, che appartengono al primo gruppo, alle tre lunghezze che rimangono, si compone delle proporzioni delle quattro lunghezze che rimangono, e così vi sono nove proporzioni composte dalle tre lunghezze del primo gruppo alle tre lunghezze del secondo gruppo. **<29.5>** Allo stesso modo, vi saranno altre nove composizioni della proporzione che sussiste tra le lunghezze che appartengono al secondo gruppo e le tre lunghezze che appartengono al primo, e ciascuna di queste composizioni proverrà combinata[5]. In questo modo, tra tutte lunghezze espresse vi saranno diciotto combinazioni di proporzioni per queste sei quantità, e man mano che le proporzioni mutano, esse non appartengono più al gruppo di cui era stata fatta prima menzione. **<29.6>** Il prodotto delle lunghezze di ciascun gruppo sarà pari a 720, come ho calcolato prima, e corrisponde a ciò che deriva moltiplicando la prima lunghezza della proporzione composta per quelle successive che stanno in composizione, ma il risultato della moltiplicazione della lunghezza successiva, all'interno della proporzione composta, per le antecedenti che stanno in composizione, è ugualmente pari a 720. **<29.7>** Tuttavia, non si può avere nessuna delle sei quantità di cui si è detto prima in proporzione composta con

---

[5] HUGHES 2008, p. 106, propone di tradurre «and any of these composites produces a combination».

un'altra delle quattro proporzioni che rimangono, qualora essa faccia parte del suo gruppo: ciò significa che il rapporto della lunghezza *a* alla lunghezza *d* o alla lunghezza *z* non si compone attraverso le proporzioni delle restanti quattro lunghezze; anche il rapporto della lunghezza *d* alla lunghezza *a* oppure alla lunghezza *z* non si comporrà delle proporzioni delle restanti quattro lunghezze, e neppure il rapporto della lunghezza *z* alla lunghezza *d* e alla lunghezza *a* potrà essere composto dalle restanti quattro lunghezze. Allo stesso modo non vi sarà proporzione tra le lunghezze *b*, *g* ed *e*, essendo esse appartenenti a un solo gruppo. **<29.8>** Per tale ragione vi saranno dodici proporzioni tra queste sei lunghezze, ed esse non si compongono delle due proporzioni delle restanti quattro lunghezze. Ciò detto, veniamo ora al calcolo dell'area delle superfici quadrilatere.

Fine della prima parte sul calcolo dell'area di tutti i tipi di triangoli.

<II>
Terza Distinzione, parte seconda.
L’area delle superfici quadrilatere.

<1>
<Parte prima>

<Introduzione>

<1.1> Senza dubbio le aree delle superfici quadrilatere composte di angoli retti si calcolano mediante il procedimento che ho illustrato precedentemente nell’altra distinzione. Nelle superfici dotate di lati uguali, si moltiplica uno dei lati per se stesso; in quelle che hanno lati diversi, si moltiplica la loro lunghezza per la larghezza, e in questo modo otteniamo la loro area. **<1.2>** Gli altri tipi di quadrilateri vengono poi divisi in quattro paragrafi: nel primo paragrafo vi sono i rombi; nel secondo i romboidi; nel terzo i trapezi, in cui soltanto due lati sono paralleli; nel quarto vi sono i quadrilateri irregolari, dei quali ciascun lato è parallelo all’altro. **<1.3>** Per tutte queste tipologie si indicherà in che modo si rinviene l’area nella loro sede. Ma prima di venire al calcolo delle dimensioni di questi quadrilateri, ho proposto di dimostrare certe questioni che pertengono ai soprascritti quadrilateri, e che fungono da introduzione all’argomento[6]. Esse si estendono sino alla soluzione di sei tipologie di equazioni, e si ricollegano a tre enti numerici[7].

<2.1> I numeri infatti, e le loro frazioni, o sono radici, o potenze, o numeri semplici. Quando vengono moltiplicati dei numeri tra loro, essi sono definiti radici del quadrato che si è prodotto, ovvero del censo. **<2.2>** Quando invece i numeri non hanno rapporti con le radici o con le potenze, allora sono chiamati semplicemente numeri, pertanto, in base a questa distinzione, ogni numero è talora radice, talora potenza, talora numero semplice. **<2.3>** Infatti da questi tre enti derivano tre equazioni semplici e tre equazioni composte. Le equazioni sono

[6] Letteralemente: e che introducono l’animo alla conoscenza di questa disciplina.
[7] Letteralmente: che vengono tra tre entità, che sono espresse in numeri.

semplici quando, nei quesiti di aritmetica o di geometria, si rinviene che una somma delle radici equivale a una somma di quadrati, ovvero a numeri quadrati; oppure quando parti di un quadrato sono pari a una radice, o a un numero; oppure quando un numero è uguale a una somma di radici o di quadrati. Viceversa, le equazioni sono invece composte quando si rinviene che una radice equivale a una somma di un quadrato e di un numero; oppure quando un quadrato è uguale a una somma di una radice e di un numero; oppure quando un numero equivale a una somma di una radice e di un quadrato.

<1>

<Il quadrilatero>

<1.1> Un quadrato è ciò che equivale al prodotto di radici[8], e se dicessi: un quadrato è uguale a 4 radici, allora la radice è pari a 4 e il quadrato a 16, vale a dire che il lato di una superficie quadrata, equilatera ed equiangola misura 4, e la sua area misura 16. Infatti quante unità vi sono in uno ciascuno dei suoi lati, altrettante radici sono contenute nella sua area. **<1.2>** Come si vede in questo quadrilatero *abcd*, che misura in uno ciascuno dei lati 4 pertiche, per cui la sua area è uguale a 4 radici, una delle quali corrisponde al quadrilatero *ae*, la seconda al quadrilatero *zt*, la terza al quadrilatero *ik*, la quarta al quadrilatero *lkcd*. **<1.3>** Se il lato del quadrato sarà pari a 5, esso sarà uguale a 5 radici, e il quadrato sarà 25. **<1.4>** Quando si dice che 4 quadrati equivalgono a 24 radici, allora un quadrato è uguale a 6 radici, e una ciascuna delle radici misura 6, mentre il quadrato misura 36. **<1.5>** Quando si dice che la metà del quadrato, ossia del censo, è uguale a 4 radici, allora il censo sarà pari a 8 radici, e il censo sarà pari a 64 e la sua radice sarà pari a 8. **<1.6>** Allo stesso modo la quinta parte di un quadrato è pari a 3 radici: dunque il quadrato, ossia l'area, è uguale a 15 radici, per cui l'area misura 225, e il lato misura 15. Allo stesso modo tutto quello che sia più o meno di un quadrato, deve essere ridotto a un solo quadrato.

<2.1> La stessa cosa accade quando un certo numero di radici equivale a un certo numero di censi, bisogna calcolare a quante radici corrisponde un censo. **<2.2>** Parimenti quando si dice che un quadrato è uguale a un numero, per esempio a 36 pertiche, allora l'area è pari a 36 e il lato è pari a 6. **<2.3>** Quando

[8] Letteralmente: un quadrato equivale alle radici.

cinque quadrati equivalgono a 125, allora un solo quadrato è pari a 25 e la sua radice è 5; **<2.4>** oppure quando la quarta parte di un quadrato sia uguale, secondo aritmetica, a 16 dragme, allora il censo, ossia il quadrato, sarà pari a 64, e la sua radice sarà pari a 8.

<3.1> Similmente ogni multiplo o sottomultiplo del censo deve essere ridotto a un solo censo. La stessa cosa accade quando un numero equivale a più censi. **<3.2>** Poi nel caso di radici che equivalgono ai numeri, se dicessi: la radice è pari a 4, allora la radice è 4 e il censo che ne deriva è 16. E se dicessi: 6 radici sono pari a 30, dunque una sola radice è pari a 5. E similmente se dicessi: metà radice equivale a 9, dunque una radice è pari a 18, e il censo che ne deriva è pari a 324.

<4.1> Se in verità una radice è pari alla somma di un quadrato e di un numero, se dicessi: 36 radici equivalgono a 3 censi e 105 dragme, cioè 12 radici sono pari a un censo più 35 dragme. **<4.2>** Se dicessi: 5 radici sono pari a metà censo più 12 dragme, cioè 10 radici sono pari a un censo più 24 dragme.

<5.1> Invece nel caso di quadrati che sono pari alla somma di radici e numeri, se dicessi: tre quadrati sono pari a 12 radici e 36 dragme, cioè un censo è uguale a 4 radici e 12 dragme. **<5.2>** Se dicessi: la quarta parte di un censo è uguale a due radici e 12 dragme, il quadrato è uguale a 8 radici e 48 dragme.

<6.1> Poi nel caso del numero che è uguale alla somma di quadrati e radici, se dicessi: 78 dragme sono pari a due quadrati e 10 radici, un quadrato e 5 radici equivalgono a 39. **<6.2>** Se dicessi: 32 è pari a metà quadrato e sei radici, cioè un quadrato e 12 radici equivalgono a 64 dragme. **<6.3>** In questo modo dobbiamo sempre ridurre le incognite a un solo censo e, in base alla proporzione che ne deriva, secondo la medesima proporzione i multipli e i sottomultipli di un quadrato devono essere ridotti a un solo quadrato. Verranno proposte radici e numeri, che si accompagnano a quadrati, ovvero il contrario, come mostrerò nelle pagine seguenti.

<7.1> Senza dubbio se del quadrato *abgd*, della misura di 10 pertiche per lato, desideri conoscere la misura della diagonale *ag* ovvero di *bd*, la sua area, ossia 100, raddoppia: il risultato sarà pari a 200, del quale prendi la radice, e otterrai la lunghezza di una delle diagonali. **<7.2>** Esempio: dal momento che l'angolo *abg* è retto, il triangolo *abg* è rettangolo, per cui il prodotto di *ag*, che sottende l'angolo retto, per se stesso, è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *ab* e *bg*. Ma il quadrato del lato *bg* è pari al quadrato del tetragono *abgd*, e il quadrato del lato *ab* è pari al quadrato del lato *bg*, per cui la somma dei due quadrati delle linee *ab* e *bg* è pari al doppio prodotto del lato *bg* per se stesso. Ma il quadrato della diagonale *ag* è uguale alla somma dei quadrati dei lati *ab* e *bg*: dunque il quadrato della diagonale *ag* è pari al doppio del quadrato del lato *bg*. Ma il quadrato del lato *bg* è pari all'area del tetragono *abgd*, dunque il quadrato della diagonale *ag* è pari al doppio dell'area del tetragono *abgd*, come volevasi dimostrare. **<7.3>** Ed è questo il caso in cui il censo è pari a un numero, come ad esempio l'area è pari a 100, per cui il doppio dell'area, ossia il quadrato della diagonale, sarà pari a 200. Dico di nuovo che la diagonale *ag* è uguale alla diagonale *bd*, dal momento che il segmento *bg* è uguale al segmento *ad*. Se si prende il segmento *ab* secondo procedura, la somma dei due segmenti *ab* e *bg* sarà uguale alla somma dei due segmenti *ba* e *ad*, e l'angolo *abg* è uguale all'angolo *bad*, per cui la diagonale *ag* è uguale alla diagonale *bd*. **<7.4>** Dico di nuovo che le diagonali *ag* e *bd* si intersecano a vicenda in parti uguali nel punto *e*, dal momento che i segmenti *ad* e *bg* sono tra loro uguali e sono stati tracciati i segmenti *ab* e *gd* fino ai loro estremi, i quali segmenti sono uguali tra loro: senza dubbio i segmenti *ad* e *bg* saranno paralleli, e dal momento che in essi cadono i segmenti *bd* e *ag*, senza dubbio l'angolo *adb* è uguale all'angolo *dbg* e l'angolo *dag* è uguale all'angolo *agb*. L'angolo che rimane *aed* è uguale all'angolo rimanente *beg*, per cui il triangolo *aed* è uguale al triangolo *beg*, e il segmento *be* è uguale al segmento *ed*. Allo stesso modo anche il segmento *ge* è uguale al segmento *ae*, dunque le diagonali *ag* e *bd* si intersecano in parti uguali, come volevasi dimostrare.

<8.1> Infatti se la diagonale del tetragono dato sarà stato corrispondente alla radice di 200, e avrai ignorato la misura dell'area, e anche quella del lato, prendi la metà di 200: sarà 100, che ottieni per la misura dell'area, mentre la radice di quella, cioè 10, corrisponderà alla misura del lato. **<8.2>** Ovvero la somma di due quadrati è pari a 200, per cui un solo quadrato, ossia l'area del tetragono, sarà pari a 100. E se il quadrato della diagonale più l'area del tetragono sia pari a 300, allora la somma di tre quadrati è pari a 300: perciò la terza parte, ossia 100, corrisponderà all'area. Senza dubbio rimane 200 che corrisponderà al quadrato della diagonale, e la radice dell'area corrisponderà al lato del tetragono.

<9.1> Se la somma dell'area e del perimetro è pari a 140, e vuoi separare il perimetro dall'area, si tracci il quadrilatero *ezit*, e ad esso si aggiunga la superficie rettangola *ae*, e sia aggiunta *ai* sulla stessa direttrice del segmento *it*, e *be* sia sulla stessa direttrice di *ez*; e sia uno ciascuno dei segmenti *be* ed *ai* pari a 4, per via del numero dei lati del tetragono, per cui la superficie *ae* è uguale alla somma dei quattro lati del tetragono *et*, essendo il lato di questo *ei* uno dei lati della superficie *ae*, e la misura della superficie *et* è senza dubbio pari all'area del tetragono *zi*, perciò la misura dell'intera superficie *za* è pari all'area del tetragono *zi*, nonché al suo perimetro. Dunque la superficie *za* misura 140, come ho detto. Evidentemente la somma del censo con le quattro radici è pari a 140, e il censo corrisponde al tetragono *et*, mentre le quattro radici corrispondo alla superficie *ae*. **<9.2>** Si divida il segmento *ai* in due parti uguali nel punto *g*, e dal momento che la linea *ti* è stata aggiunta alla linea *ai*, il prodotto della superficie rettangola *it* per *at*, più il quadrato della linea *gi*, sarà uguale alla lunghezza del quadrato della linea *gt*. Ma il prodotto della superficie *it* per *at* è pari al prodotto della superficie *zt* per *at*, essendo *it* uguale a *tz*. **<9.3>** Dunque il prodotto della superficie *zt* per *at*, più il quadrato della linea *gi*, è uguale al quadrato della linea *gt*. Ma il prodotto di *zt* per *at* è pari alla superficie *za*, che misura 140, e aggiungendo a questa il quadrato della linea *gi*, ossia 4, si ottiene 144 per la misura del quadrato della linea *gt*, per cui *gt* è pari a 12, ossia alla radice di 144. Perciò se da *gt* si toglie *gi*, ossia 2, rimarrà *it* pari a 10, che è il lato del tetragono *et*, e se si aggiunge alla sua area, ossia a 100, il perimetro, che corrisponde a 40, il risultato sarà 140, come volevasi.

<10.1> Così accade per tutti i quesiti in cui un numero è uguale alla somma di un quadrato e di alcune radici: chiaramente su questo numero si aggiunge il quadrato della metà della somma delle radici, e si estrae la radice del risultato. Da questa si toglie la metà delle radici che sono state poste: rimarrà la radice del censo richiesto, che moltiplicata per se stessa darà come risultato il censo stesso. **<10.2>** Esempio: 133 dragme equivalgono a un censo più dodici radici, per cui se avremo aggiunto a 133 il quadrato di metà radice, ossia 36, il risultato sarà 169, la cui radice, ossia 13, meno 6, ossia meno metà radice, darà come rimanenza 7 per la radice del censo richiesto, e il censo sarà pari a 49.

<11.1> Ugualmente è per il tetragono, dalla cui area, se si sottrae il perimetro, rimane 77. Si tracci il tetragono *bd*, e si fissi il punto *a* sul segmento *gd*, e sia *ga* del valore di 4 pertiche. Per il punto *a* si estenda il segmento *az* parallelo a entrambi i segmenti *bg* e *de*: dal momento che *ga* misura quattro volte la superficie *ba*, è necessario che contenga il perimetro – pari a quattro radici – del tetragono *bd*. Perciò se dal tetragono *bd* si sottrae il quadrilatero *ba*, ossia il perimetro, rimarrà la superficie *zd* pari a 77. Dal momento che la somma delle superfici *ba* e *zd* è uguale al tetragono *bd*, allora il censo è uguale alla somma di una radice e di un numero, cioè il quadrato *bd* è uguale a quattro radici più 77. **<11.2>** Si divida poi *ga* in due parti uguali, e dal momento che il segmento *ga* è stato diviso in due parti uguali nel punto *i* e ad esso è stato aggiunto sulla stessa direttrice il segmento *ad*, il prodotto di *ad* per *gd* più il quadrato della linea *ai* sarà uguale al quadrato della linea *di*. Ma il prodotto di *ad* per *dg* è pari al prodotto di *da* per *de*, essendo *de* uguale alla linea *dg*. Ma il prodotto di *da* per *de* è pari alla superficie *zd*, della misura di 77: dunque il prodotto di *da* per *dg* fa 77, e se a questo si aggiunge il quadrato della linea *ai*, che è pari a 4, il risultato sarà 81 per il quadrato della linea *di*, la cui radice, ossia 9, corrisponde alla misura della linea *di*. Ad essa si aggiunga la linea *gi*: si avrà 11 per la misura del lato *dg*, per cui l'area del quadrato *bd* è undici volte 11, ossia 121, e il perimetro, ossia la superficie *ba*, è pari a 44: rimane la superficie *zd* della misura di 77, come volevasi.

<12.1> Così bisogna procedere per tutti i quesiti, in cui un quadrato sarà uguale alla somma di radici e numero: chiaramente al numero si aggiunge il quadrato di metà radice, e del totale così costituito si estrae la radice, a cui si aggiunge metà radice: in questo modo si avrà la radice del quadrato, che moltiplicata per se stessa darà come risultato il quadrato richiesto. **<12.2>** Per cui se si stabilisce che un censo è uguale a dieci radici e 39 dragme, si aggiunga a 39 il quadrato di cinque radici, ossia 25: il risultato sarà 64, alla cui radice, ossia a 8, si aggiunga la metà della radice, ossia 5, e avrai 13 per il valore della radice del censo, e il censo sarà pari a 169: di questo, dieci radici corrispondono a 130, che equivale al risultato del prodotto di 10 per 13. **<12.3>** Allo stesso modo sia dato un tetragono, e se sottraiamo l'area di questo dal suo perimetro, vale a dire dalla somma delle quattro radici che corrispondono ai suoi quattro lati, rimarrà un risultato di 3 pertiche. Si tracci il tetragono *be* in cui ogni lato misuri meno di 4 pertiche, e si aggiunga la linea *da* alla linea *de*, e sia tutta la linea *ae* pari a 4. Si divida *ae* in due parti uguali nel punto *b*, e si tracci il segmento *az* parallelo ed uguale a *dg*, e si estenda *fg* fino al punto *z*. Dal momento poi che il segmento *ae* misura 4, e che *ef* corrisponde al lato del tetragono *ge*, il prodotto di *fe* per *ea*, vale a dire la superficie *ze*, sarà pari alla somma delle sue quattro radici, vale a dire al perimetro del tetragono *ge*. Se da questo valore si toglie la misura del tetragono *ge*, rimane la superficie *ga* pari a 3 pertiche. Ma il tetragono *ge* più la superficie *ga* equivalgono alla superficie *ze*, dunque il perimetro è pari alla somma del censo più le tre pertiche.

<13.1> È opportuno perciò calcolare il valore del censo e della sua radice. Dal momento che la linea *ae*, che è pari a 4, è stata divisa in due parti uguali nel punto *b*, e in due parti diverse nel punto *d*, il prodotto di *ed* per *da* più il quadrato della linea *bd* è pari al quadrato della linea *be*, che viene descritto dalla metà della linea *ae*. Ma dal prodotto di *ed* per *da* viene fuori la superficie *ga*, pari a 3, essendo *dg* pari a *de*. **<13.2>** Dunque il prodotto della superficie *gd* per la superficie *da* più il quadrato della linea *bd* è uguale al quadrato della linea *be*, che è pari a 4: dunque il quadrato di *bd* è pari a 1, del quale se la radice, ossia 1, viene sottratta dalla linea *be*, darà come rimanenza *de* pari a 1, che corrisponde al lato del tetragono *ge*, la cui area, ossia il censo richiesto, sarà similmente pari a 1.

<14.1> Se la metà della linea *ag* sarà proiettata in *de* nel punto *b*, come si vede in quest'altra figura, aggiungi ad *eb*, ossia a 2, la linea *bd*, e tutta *de* sarà pari a 3, che corrisponde alla radice del quadrato *ge* richiesto. Il quadrato sarà pari a 9, e la superficie *ga* sarà similmente pari a 3, come abbiamo ho prima. E così sia sempre per tutti i questiti, in cui le radici siano pari alla somma di un quadrato e di un numero. Chiaramente dal quadrato di metà radice si tolga il numero, e di quello che resta si estragga la radice, che viene tolta dalla detta metà, oppure aggiunta a quella, e otterrai la radice del richiesto quadrato, come si propone nel seguente quesito: **<14.2>** 12 radici sono pari a un quadrato e a 27 dragme: perciò la metà della radice è 6 e il suo quadrato è 36, da cui tolto 27, rimane 9, e se la sua radice, ossia 3, viene sottratta dalla metà della radice, avrai come risultato 3 per la radice richiesta, e il suo quadrato sarà 9. Oppure se 3 viene aggiunto a 6, avrai 9 per il risultato della radice richiesta, e il suo quadrato sarà 81. E così, quando la radice è uguale alla somma di censo e numero, i quesiti si risolvono sempre con questo doppio procedimento. Da ciò deriva che in ogni quesito talvolta la soluzione è l'una, talvolta è l'altra.

<15.1> Allo stesso modo il quadrato della diagonale più l'area, più il perimetro del tetragono dato, è uguale a 279 pertiche, e si chiede quale sia la misura dei lati. **<15.2>** Dal momento che il quadrato della diagonale è doppio del tetragono, allora il quadrato della diagonale più il tetragono sarà tre volte il tetragono stesso, per cui tre quadrati più quattro radici sono pari a 279. Perciò per ridurre tutto a un solo censo, prendi la terza parte di tutto questo, e troverai che un censo e 1 radice + $\frac{1}{3}$ è pari a 93 pertiche. Prendi dunque la metà della radice, ossia $\frac{2}{3}$, e moltiplicala per se stessa: il risultato sarà $\frac{4}{9}$, che devi aggiungere a 93: il risultato sarà pari a 93 + $\frac{4}{9}$, dalla cui radici togli $\frac{2}{3}$, ossia mezza radice: rimane 9 per la misura del lato del tetragono. Dunque l'area è pari a 81, e il quadrato della diagonale è pari a 162.

<16.1> Di nuovo il perimetro di un tetragono equivale a $\frac{2}{9}$ della sua area. Si tracci il tetragono *abgd* e nei segmenti *bg* e *ad* si fissino i punti *e* e *z*, e sia uno ciascuno dei segmenti *be* e *az* della misura di 4 pertiche, e si tracci il segmento *ez*: i parallelogrammi *ae* e *zb* saranno sotto ai paralleli *ad* e *bg*, per cui come il parallelogramma *ae* starà al parallelogramma *zg*, così la base *be* sta alla base *eg*. Ma il parallelogramma *ae* è uguale al perimetro del tetragono *ag*, dunque il parallelogramma *ae* è pari a $\frac{2}{9}$ del tetragono *ag*. Rimane perciò il parallelogramma *zg* pari a $\frac{7}{9}$ del tetragono *ag*. Dunque la superficie *ae* sta alla superficie *ze* come 2 sta a 7; per cui come 2 sta a 7 così *be*, ossia 4, sta a *eg*, per cui moltiplica 4 per 7 e dividi il risultato per 2: il risultato sarà 14 per la misura della linea *eg*. **<16.2>** Oppure altrimenti, dal momento che 4 è doppio di 2, allora il segmento *eg* è doppio di 7: dunque *eg* è pari a 14, e aggiunto 4, ossia *eb*, a questo valore, otterrai 18 per la lunghezza di *bg*, ossia per il lato del tetragono *ag*, come volevasi dimostrare. **<16.3>** Oppure, altrimenti, secondo il calcolo dell'Algebra, dal momento che la superficie *ae* è uguale al perimetro, ossia a $\frac{2}{9}$ del tetragono *ag*, allora il perimetro è pari a $\frac{2}{9}$ del censo. Da ciò per reintegrare il valore del censo, moltiplica 9 per 4 e dividi il risultato per 2, oppure moltiplica per 4 la metà di 9, perchè quante volte $\frac{2}{9}$ sta a $\frac{9}{9}$, ossia al censo, altrettante volte 4 starà alla radice del tetragono *ag*, per cui il quadrato *ag* è pari a 18 radici, e come ho detto prima, l'area misura 324 pertiche.

<**17.1**> Di nuovo, il perimetro più $\frac{3}{8}$ dell'area del tetragono è pari a 77 più $\frac{1}{2}$, per cui riduci i $\frac{3}{8}$ del censo a uno solo, e avrai che la somma di 1 censo e 10 radici più $\frac{2}{3}$ è pari a 206 più $\frac{2}{3}$, e troveremo questo valore moltiplicando le 4 radici e 77 + $\frac{1}{2}$ per 8, e dividendo il risultato di entrambe le moltiplicazioni per 3. <**17.2**> Dividi, perciò, le radici per due: il risultato sarà pari a 5 + $\frac{1}{3}$; prendi il quadrato di questo, che è pari a 28 + $\frac{4}{9}$; aggiungi questo numero a 206 + $\frac{2}{3}$: il risultato sarà pari a 235 + $\frac{1}{9}$; dalla radice di questo, ossia da 15 più $\frac{1}{3}$, sottrai la metà della radice: rimane 10 per la misura del lato del tetragono, e l'area è pari a 100.

<**18.1**> Se il perimetro sarà uguale all'area del tetragono, allora le quattro radici sono uguali al censo, per cui ogni lato misura 4 e il censo misura 16. <**18.2**> Se poi il perimetro misurasse il doppio dell'area, allora le quattro radici sarebbero pari a due volte il censo, per cui il censo equivale a due radici: dunque il lato del tetragono sarebbe pari a 2 e l'area sarebbe pari a 4.

<**19.1**> Allo stesso modo se dall'area del tetragono viene sottratta la somma di tre lati, vale a dire delle sue tre radici, rimane 40, dunque la somma delle tre radici più 40 equivale alla misura del censo. <**19.2**> Senza dubbio moltiplica per se stessa la metà della radice: il risultato sarà 2 più $\frac{1}{4}$, che devi aggiungere a 40. Il risultato sarà 42 più $\frac{1}{4}$, alla cui radice, pari a 6 più $\frac{1}{2}$, devi aggiungere la metà della radice: il risultato sarà pari a 8 per la misura del lato del tetragono.

<**20.1**> Allo stesso modo ho diviso l'area del quadrato per la sua diagonale, e ne è uscito 10: quanto misurano la sua diagonale e il suo lato? <**20.2**> Dal momento che dalla divisione dell'area per la diagonale viene 10, allora dalla moltiplicazione della diagonale per 10 viene fuori l'area, per cui dal prodotto della diagonale per il doppio di 10 è pari al doppio dell'area. Ma il doppio dell'area è pari al quadrato della diagonale: allora dal prodotto della diagonale per 20 viene fuori il quadrato della diagonale. Ma dal prodotto della diagonale per se stessa viene fuori allo stesso modo il quadrato, per cui la diagonale misura 20 e il suo quadrato è pari a 400, mentre l'area è pari la metà, cioè a 200. Il lato poi è la radice di 200, che è poco meno di 14 più $\frac{1}{7}$.

<21.1> Allo stesso modo sottratto il perimetro dall'area, rimane 4: quanto misura dunque il lato? **<21.2>** Si tracci il tetragono *abgd*, e si fissino i punti *e* e *z*, e sia ognuno dei segmenti *az* e *de* pari a 4, e si tracci *ze*. Perciò la superficie *dz* sarà uguale al primetro del tetragono *db*. Rimane perciò la superficie *eb* pari a 4: dunque il perimetro più 4 è pari alla misura del tetragono *db*. Si divida perciò il segmento *az* in due parti uguali nel punto *i*, e il prodotto di *zb* per *ab* più il quadrato di *iz* sarà uguale al tetragono di lato *ib*. Ma il prodotto di *zb* per *ab* è pari al prodotto di *zb* per *ze*. **<21.3>** Ma il prodotto di *zb* per *ze* dà come risultato la superdicie *eb*, ossia 4: dunque il prodotto di *zb* per *ab* fa 4, che aggiunto al tetragono di lato *iz*, darà 8 per la misura del quadrato di lato *ib*. Dunque il segmento *ib* corrisponde alla radice di 8, e se ad esso si aggiunge il segmento *ia*, ossia 2, avremo come risultato 2 più la radice di 8 per l'intera linea *ab*, che corrisponde al lato del tetragono *db*.

<22.1> Se alla diagonale del quadrato su ciascuno dei lati del medesimo quadrilatero si aggiunge 6, quanto misurerà il suo lato? **<22.2>** Moltiplica perciò 6 per se stesso, il risultato sarà 36: duplicalo, e sarà 72. Alla radice di questo aggiungi 6, e avrai la lunghezza del lato: dunque il lato misura 6 più la radice di 72. **<22.3>** Esempio: si tracci un certo segmento *ab* e sia uguale alla diagonale di un dato quadrilatero, e il lato sia *bg*: rimane *ga* pari a 6, in cui la diagonale è superiore al lato: si costruisca poi sul segmento *ab* il tetragono *ad*, e in esso si tracci la diagonale *eb*, e per il punto *g* si tracci il segmento *gz* parallelo ai segmenti *ae* e *bd*; per il punto *i* si tracci poi il segmento *tk* parallelo ai segmenti *ed* e *ab*: poi si fissi sul segmento *bg* il punto *l*, e sia *gl* uguale a *ga*, e si completi la medesima figura nel tetragono *gk*. Dal momento che il tetragono *ad* è regolare, sono tetragoni anche quelli intorno alla diagonale dello stesso, ossia *tz* e *gk*. Infatti il lato del tetragono *tz* corrisponde al segmento *ti*, che è uguale al segmento *ag*. Dunque *ti* misura 6 e il tetragono *tz* misura 36.

<23.1> Allo stesso modo i tetragoni *om* e *lp* sono regolari: essi sono infatti posti intorno alla diagonale del tetragono *gk*; e il tetragono *om* è uguale al tetragono *tz* per il fatto che è stato visto che il segmento *on* è uguale al segmento *gl*, e che *gl* è uguale al segmento *ga*, e che *ga* è pari al segmento *ti*. Dal momento, poi, che il segmento *bg* corrisponde al lato del tetragono, di cui *ba* è diagonale, perché dal segmento *ba* si descrive un tetragono che è doppio di quello che si descrive dal segmento *bg*; dunque il tetragono *ad* è doppio del tetragono *gk*, per cui lo gnomone *qrs* è pari al tetragono *gk*. **<23.2>** Perciò dallo gnomone *qrs* si sottragga il tetragono *tz*, e dal tetragono *gk* il tetragono *om*, i quali sono uguali: le superfici supplementari che rimangono *ai* e *id*, insieme sono pari alla misura dello gnomone *cfh*. Ma il supplemento *ai* misura quanto la superficie *il*: infatti ha un lato in comune, che è *ig*, e senza dubbio il segmento *lg* è uguale al segmento *ga*. Similmente anche il supplemento *id* è uguale alla superficie *ip*, dunque le due superfici *il* e *ip* misurano quanto lo gnomone *cfh*, per cui se si sottraggono insieme le superfici *gn* e *nk*, rimarrà il doppio del tetragono *om* che è pari alla misura del tetragono *lp*. **<23.3>** Ma il tetragono *om* misura 36, per cui il tetragono *lp* misura 72, il cui lato, ossia *bl*, corrisponde alla radice di 72: se ad essa si aggiunge *lg*, che è pari a 6, avremo per l'intera linea *bg* il valore di 6 più la radice di 72, come volevasi dimostrare. **<23.4>** Se a questo valore si aggiunge *ga*, tutta la linea *ab*, ossia la diagonale del quadrilatero dato, sarà pari a 12 più la radice di 72. Oppure in altro modo dal momento che il segmento *ag* misura 6 e *gi* è il lato del tetragono, la cui diagonale è pari alla linea *ab*, a causa di ciò il quadrilatero *ai* sarà uguale a 6 radici del tetragono *gk*. E il quadrilatero *id* è uguale al quadrilatero *ai*, dunque il quadrilatero *id* è pari a 6 radici del quadrilatero *gk* e il quadrato *tz* è pari a 36, per cui l'intero gnomone *qrs* misura 36 più 12 radici del tetragono *gk*. Lo gnomone *qrs* è uguale al tetragono *gk*, come è stato dimostrato. **<23.5>** Da ciò, se poniamo il segmento *bg* come incognita, il tetragono *gk* corrisponderà al censo, che è uguale a 12 radici e 36 dragme: operare perciò in questo caso, in base a quanto è stato detto nel caso in cui il censo equivale alla somma di radici e numero.

<24.1> Di nuovo ho moltiplicato la diagonale per il lato, ed è venuto a fare 100: quanto misurano dunque la diagonale e il lato del tetragono? **<24.2>** Dal momento che il prodotto della diagonale per il lato fa 100, se avremo moltiplicato il quadrato della diagonale per il quadrato del lato, ossia per l'area del tetragono, viene a fare il quadrato di 100, ossia 10000, per cui se avremo moltiplicato il quadrato della diagonale per il doppio dell'area, ossia per il quadrato della diagonale, viene a fare il doppio di quello, ossia 20000. Dunque la diagonale corrisponde alla radice della radice di 20000, per cui l'area, essendo la metà del quadrato della diagonale, sarà pari alla radice di 5000: il lato perciò sarà pari alla radice della radice di 5000.

<25.1> Allo stesso modo ho moltiplicato la diagonale per l'area del tetragono, ed è venuto a fare 500: quanto misurano dunque la sua diagonale e il suo lato? **<25.2>** Dal momento che il prodotto della diagonale per l'area fa 500, il prodotto della diagonale per il doppio dell'area, ossia per il quadrato della diagonale, sarà allora pari a 1000: la diagonale corrisponde dunque alla radice cubica di 1000. Infatti la radice cubica di 1000 è 10: dunque la diagonale è 10, e il suo quadrato è pari a 100. L'area corrisponde poi alla metà di questo, ossia a 50, e il lato è pari alla radice di 50.

Fine della parte sul quadrilatero.

<2>

Il rettangolo

<1.1> Si tracci il rettangolo *abcd*, avente i lati brevi, che sono *ab* e *dc*, della misura di 6 pertiche, e i lati lunghi *ad* e *bc* della misura di 8 pertiche: anche l'area di questo si calcola dalla moltiplicazione del lato *ab* per il lato *bc*, per cui la sua area è pari a 48. **<1.2>** Infatti se desideri calcolare la misura della sua diagonale *ac*, addiziona tra loro i quadrati delle linee *ab* e *bc*, vale a dire 36 e 64: il risultato sarà 100, la cui radice, che è 10, corrisponde alla misura della diagonale *ac*.

<2.1> Allo stesso modo sia la diagonale pari a 10, e il lato *cb* sia pari a 8: quanto misura allora il lato *ab*? Dal quadrato della linea *ac* sottrai il quadrato della linea *bc*, e resterà il quadrato della linea *ab*, e viceversa, come ho detto prima a proposito del triangolo rettangolo. In modo simile troveremo che la diagonale *bd* è pari a 10 per via dell'uguaglianza dei triangoli *abc* e *bad*. **<2.2>** Dico che senza dubbio le diagonali si intersecano in parti uguali nel punto *e*. Infatti i segmenti *ad* e *bc* sono paralleli, per cui l'angolo *ade* è uguale all'angolo *ebc*: per questi motivi, allora, anche l'angolo *dae* è uguale all'angolo *ecb*: rimane l'angolo *ade* uguale all'angolo *abc*. **<2.3>** Equiangoli, infatti, sono i triangoli *aed* e *bec*, e hanno i lati *ad* e *bc* uguali tra loro, per cui gli altri lati saranno uguali ai restanti lati che sottendono angoli uguali; anche il lato *be* sarà uguale al lato *ed*, e il lato *ce* sarà uguale al lato *ea*. **<2.4>** Dal momento che la diagonale *ac* è uguale alla diagonale *bd*, e che si intersecano in parti uguali nel punto *i*, i quattro segmenti, che sono *ia*, *ib*, *ic* e *id*, sono uguali tra loro: infatti ciascuno di essi è della misura di 5, ossia la loro misura è pari alla metà della diagonale, come volevasi dimostrare.

<3.1> Infatti se l'area sarà stata pari a 48, e la somma del lato minore sarà stato addizionato al lato maggiore e la loro somma sia pari a 14, e vuoi sapere di quanto misuri il lato maggiore e di quanto il minore, allora moltiplica per se stessa la metà di 14, ossia 7: il risultato sarà pari a 49, da cui togli l'area: rimane 1; di questo, aggiungi la radice a 7: il risultato sarà pari 8 per la misura del lato maggiore, e 14 meno 8 fa 6 per la misura del lato minore. **<3.2>** Esempio: si tracci il rettangolo *bgde*, e sia *bg* il lato minore e *gd* sia il lato maggiore. Si tracci poi il segmento *bg* fino al punto *a*, e sia il segmento *ga* uguale al segmento *gd*. Si divida poi il segmento *ab* in due parti uguali nel punto *c*: allora tutta la linea *ba* sarà pari a 14, per cui *bc*, ossia *ac*, misura 7. **<3.3>** Dal momento che il segmento *ba* è stato diviso in due parti uguali e in altrettante parti diverse nei punti *g* e *c*, il risultato del prodotto di *bg* per *ga* più il quadrato della linea *gc* sarà uguale al quadrato della linea *ca*. Ma il prodotto di *bg* per *ga* è uguale al prodotto di *bg* per *gd*. Dal prodotto di *bg* per *gd* viene fuori l'area; allora il prodotto di di *bg* per *ga* è pari a 48, e se a questo si aggiunge il quadrato della linea *gc*, verrà a fare 49: il quadrato della linea *gc* è dunque pari a 1, la cui radice, ossia 1, corrisponde alla misura della linea *gc* che è stata aggiunta ad *ac*. Tutta la linea *ag*, ossia *gd*, sarà pari a 8, e corrisponde al lato maggiore; rimane allora *gb* pari a 6, come ho detto.

<4.1> Allo stesso modo sia l'area pari a 48 e sia il lato più lungo maggiore del più breve di due unità. Prendi la metà di 2, ossia 1, e si aggiunga il quadrato a 48: il risultato sarà 49. Prendi la radice di questo, che è 7, e aggiungila all'uno che era la metà del 2 di cui ho parlato prima: il risultato sarà 8, che è quanto misura il lato più lungo. Da questo togli 2, che è di quanto il lato maggiore supera il minore: rimane 6 per il lato minore, come si comprende all'interno della soprascritta figura. **<4.2>** Sia il lato maggiore, come ho detto, *gd*, e ad esso si aggiunga l'uguale segmento *ga*. Si sottragga dal segmento *ga* il segmento *gf*, della misura di 2. Il segmento *af* sarà dunque uguale al segmento *gb*. **<4.3>** Si divida perciò il segmento *gf* in due parti uguali sul punto *c*: il segmento *ac* sarà uguale al segmento *cb*. Dunque il segmento *ab* è stato diviso in due parti uguali nel punto *c*, e in due parti diverse nel punto *g*. Il segmento *gc* è pari a 1, ed è quello che giace all'interno delle sezioni. Dunque il prodotto di *ag* per *gb* più il quadrato della linea *gc* è uguale al quadrato della linea *ac*. Ma il prodotto di *bg* per *ga* è pari a

48, e il quadrato di *cg* è pari a 1. Dunque *bg* per *ga* più il quadrato della linea *gc* fa 49, la cui radice, ossia 7, è pari alla misura della linea *ac*: se ad essa si aggiunge *cg*, che è pari a 1, l'intera linea *ag* sarà pari a 8, e corrisponde alla misura del lato maggiore.

<5.1> Allo stesso modo se da *cb*, che è pari a 7, essendo uguale a *ca*, si sottragga *cg*, rimane *gb* pari a 6, come ho detto prima. **<5.2>** Oppure in altro modo: poni come misura del lato più breve la radice; allora il lato più lungo sarà pari alla radice più 2. E dal momento che dal prodotto del lato minore per il lato maggiore viene 48, allora dal prodotto della radice per la radice più 2 viene fuori allo stesso modo 48. Infatti dal prodotto della radice per la radice viene il censo, e dal prodotto della radice per 2 vengono due radici: dunque il censo più due radici è uguale a 48. Fa' dunque come ho detto prima a proposito del caso in cui la somma di censi e radici è pari a un numero, e avrai quanto richiesto.

<6.1> Allo stesso modo la diagonale sia pari a 10 e l'area sia pari a 48: quanto misura dunque ciascuno dei lati? Al quadrato della diagonale aggiungi il doppio dell'area: il risultato sarà 196, la cui radice, ossia 14, corrisponde alla lunghezza di ciascuno dei due lati. **<6.2>** Esempio: si tracci il quadrilatero *abgd* la cui diagonale *ag* sia pari a 10. Si estenda senz'altro il segmento *ab* fino al punto *e* e sia *be* uguale a *bg*. E dal momento che il segmento *ae* è stato diviso a caso in due parti nel punto *b*, la somma dei due quadrati delle porzioni *ab* e *be* più il doppio prodotto di *ab* per *be* sarà uguale al quadrato di tutta la linea *ae*. Ma la porzione *be* è uguale al lato *bg*: dunque la somma dei quadrati delle linee *ab* e *bg* unita al doppio prodotto di *ab* per *bg* è uguale al quadrato della linea *ae*. Ma la somma dei quadrati dei lati *ab* e *bg* dà come risultato il quadrato della diagonale *ag*, e il doppio prodotto di *ab* per *bg* dà come risultato il doppio dell'area, ossia 96. Sommato questo valore a 100, il risultato è 196 per la misura del quadrato della linea *ae*. Dunque *ae* ne è la radice, ossia 14, come ho detto prima. **<6.3>** Dopo di ciò, per separare *ab* da *be*, vale a dire da *bg*, procedi come è stato detto prima, dove ho detto che l'area è pari a 48 e che la somma dei due lati è 14.

<7.1> Di nuovo sia la diagonale pari a 10 e la somma dei due lati sia pari a 14, e voglio conoscere la misura dell'area e la misura di ciascuno dei lati. **<7.2>** Moltiplica dunque 14 per se stesso: il risultato sarà 196, da cui togli il quadrato della diagonale, ossia 100: rimane 96, la cui metà, ossia 48, corrisponde alla misura dell'area. **<7.3>** Dopo di ciò occupati, attraverso le cose che sono state dette prima, di separare i lati che sono stati trovati nella sopradetta figura in questo ordine: il quadrato della diagonale *ag* è uguale alla somma dei due quadrati dei lati *ab* e *bg*, cioè dei quadrati delle porzioni *ab* e *be*. **<7.4>** Ma i quadrati delle porzioni *ab* e *be* più il doppio prodotto di *ab* per *be* è uguale al quadrato della linea *ae*. Dunque il quadrato della diagonale *ag* più il doppio prodotto di *ab* per *be* è uguale al quadrato della linea *ae*, per cui se si sottrae il quadrato della diagonale, ossia 100, dal quadrato della linea *ae*, ossia da 196, rimarrà 96 per il doppio prodotto di *ab* per *be*, cioè per il doppio prodotto di *ab* per *bg*. Dunque il prodotto di *ab* per *bg* fa 48, ossia la metà di 96. Ma il prodotto di *ab* per *bg* dà come risultato il valore dell'area; dunque l'area è pari a 48, come ho detto prima. Secondo il sistema che è stato sopra illustrato, separerai i lati, e il lato più breve sarà della misura di 6, mentre il lato più lungo sarà della misura di 8.

<8.1> Di nuovo ho sommato la diagonale con uno dei lati, e il risultato sarà stato dunque pari a 16, e l'altro lato è pari a 8: quanto misura allora la diagonale, e quanto misura il lato ad esso sommato? **<8.2>** Moltiplica 16 per se stesso: il risultato sarà 256; da questo togli il quadrato del lato dato, ossia 64: rimane 192. Dividilo per il doppio di 16: il risultato sarà 6, che corrisponde alla somma del lato aggiunto alla diagonale. Togli questo lato da 16: rimane 10 per la misura della diagonale. **<8.3>** Esempio: si tracci il quadrilatero *bgde*. La somma della diagonale *bd* con il lato *bg* sia della misura di 16 pertiche, mentre il lato *dg* sia pari a 8. Poni dunque il lato *bg* pari alla radice: rimane la diagonale *db* pari a 16 meno la radice. Moltiplicala per se stessa: otterrai 256 e un quadrato meno 32 radici per la misura del quadrato della diagonale *bd*. Ma il quadrato della diagonale *bd* è uguale alla somma dei due quadrati dei lati *bg* e *gd*; allora la somma dei quadrati dei lati *bg* e *gd* è uguale a 256 e a un quadrato del lato *bg* meno 32 radici. Ripristina dunque queste radici, e la somma dei quadrati delle linee *bg* e *gd* con le 32 radici sarà uguale a 256 più il quadrato del lato *bg*. Si sottragga comunemente il quadrato del lato *bg*: rimarrà la somma del quadrato del lato *gd* più le 32 radici uguale a 256. Si sottragga comunemente il quadrato della linea *gd*, ossia 64: si avranno in totale 32 radici, pari a 192. **<8.4>** Ecco, abbiamo ridotto questa questione ad uno dei sei tipi di funzioni di cui si è detto prima, e in particolare a quella in cui la somma di radici è pari a un numero, per cui dividi 192 per 32: il risultato sarà di 6 per la radice, ossia per il lato *bg*; sottratto questo valore da 16, rimane 10 per la misura della diagonale *bd*, come ho detto prima.

<9.1> Se la diagonale supera di 4 il lato più breve, e il lato più lungo sia pari a 8, quanto misura allora la lunghezza della diagonale? **<9.2>** Moltiplica 8 per se stesso: il risultato sarà 64; a questo aggiungi il prodotto di 4 per se stesso: il risultato sarà 80; raddoppia poi questo 4: il risultato sarà 8; dividi 80 per questo valore: viene 10 per la misura della diagonale; da questo togli 4, che corrisponde a quanto la diagonale supera il lato più breve: rimarrà 6 per il valore di questo lato. **<9.3>** Questa questione proviene infatti da una delle sei regole di cui si è detto sopra, in questo modo: in primo luogo è senza dubbio chiaro che la somma dei quadrati del lato breve con il lato lungo è uguale al quadrato della diagonale, per cui poni la diagonale pari alla radice da determinare, moltiplicala per se stessa, e il risultato corrisponde al quadrato della diagonale. Allo stesso modo, per il lato breve poni la radice della diagonale meno 4, moltiplicala per se stessa, e il risultato sarà pari al quadrato della diagonale più 16 meno 8 radici per la misura del quadrato del lato più breve. A questo valore, aggiungi il quadrato del lato più lungo: otterrai il quadrato della diagonale più 80, meno 8 radici di diagonale, che sono pari al quadrato della diagonale. **<9.4>** Ripristina dunque queste radici da una delle due parti: resterà il quadrato della diagonale più 80, che è uguale al quadrato della diagonale più 8 radici. Togli allora da ambo le parti il quadrato della diagonale: rimane 80, che è uguale a 8 radici della diagonale, per cui 80 diviso 8 darà come risultato 10 per il valore della diagonale, come ho detto prima.

<10.1> Se il risultato del prodotto del lato più lungo per l'area sia pari a 384, e la misura del lato più breve sia pari a 6, e vuoi conoscere di quanto misuri l'area: **<10.2>** dal momento che dal prodotto del lato più breve per il lato più lungo viene fuori l'area, e dal prodotto dell'area per il lato più lungo viene fuori 384, allora dal prodotto del lato più breve per il quadrato del lato più lungo viene fuori lo stesso valore, per cui se avremo diviso 384 per 6, vale a dire per il lato più breve, il risultato sarà 64 per il quadrato del lato più lungo, e la sua radice, ossia 8, corrisponde al valore del lato più lungo.

<11.1> Se si propone che l'area è pari a 48; il lato maggiore diviso il lato minore fa $1 + \frac{1}{3}$; e vuoi sapere la misura di uno ciascuno dei lati: poni il lato più breve pari a 3, giacché 3 è il denominatore della frazione $\frac{1}{3}$; moltiplica poi 3 per $1 + \frac{1}{3}$: il risultato sarà pari a 4, che porre per la lunghezza del maggiore. Dunque il lato minore sta al lato maggiore come 3 sta a 4. **<11.2>** Moltiplica perciò 3 per 4:

il risultato sarà 12, per il quale devi dividere 48: il risultato sarà pari a 4, di cui devi estrarre la radice, che è 2. Moltiplica poi per quella il 3 e il 4 che sono stati posti, ed otterrai 6 per la misura del lato minore, e 8 per la misura del lato maggiore. **<11.3>** Oppure in altro modo: moltiplica 3 per 48 e dividi il risultato per 4: il risultato sarà 36, la cui radice corrisponde al lato minore. Allo stesso modo moltiplica 4 per 48, e dividi il tutto per 3: il risultato sarà 64, la cui radice corrisponde al lato maggiore. **<11.4>** Se il lato minore viene diviso per il maggiore, il risultato di quella divisione sarà $\frac{3}{4}$: poni 4 per il lato maggiore, giacché 4 è a denominatore della frazione $\frac{3}{4}$; prendi poi i $\frac{3}{4}$ di 4: sarà pari a 3, che devi porre per il lato minore. Fa' poi come *supra*, e otterrai 6 per il valore del lato minore, e 8 per il valore del lato maggiore.

<12.1> Allo stesso modo la somma del lato breve con la diagonale sia pari a 16 e il lato maggiore superi di 2 il lato minore: vuoi sapere quanto misurino la lunghezza della diagonale e quella di ciascuno dei lati. **<12.2>** Dal momento che il lato maggiore supera il lato minore di 2, allora se avremo aggiunto il lato maggiore alla diagonale, il risultato sarà 18: moltiplica perciò 18 per se stesso e 16 per se stesso, e addiziona i risultati delle due moltiplicazioni: il risultato sarà pari a 580; da questo togli il quadrato di 2; rimane 576, la cui radice, ossia 24, è pari alla somma dei due lati e della diagonale. **<12.3>** Sottrai poi la somma della diagonale e del lato più breve, ossia 16: il risultato sarà 8, che corrisponde alla lunghezza del lato maggiore. Da questa togli 2: rimane 6 per la misura del lato più breve, oppure togli 18, ossia il lato più grande. Sottrai poi la misura della diagonale da 24.

<13.1> Se vuoi ridurre tutto questo al calcolo algebrico, poni il lato minore pari all'incognita da determinare: rimarrà la diagonale pari a 16 meno l'incognita. Moltiplica allora l'incognita per se stessa: verrà fuori il censo, che unirai al quadrato del lato maggiore; il quale quadrato troverai in questo modo: **<13.2>** dal momento che il lato maggiore supera il minore di 2, porrai il lato maggiore pari all'incognita più 2. Moltiplicalo per se stesso, e il risultato sarà pari al censo più 4 radici più 4 dragme pari al quadrato del lato maggiore. Aggiungilo questo valore al quadrato del lato minore, ossia al censo, e il risultato sarà pari a 2 censi, ossia ai 2 quadrati del lato maggiore più 4 radici e 4 dragme, che equivalgono al quadrato della diagonale, ossia al prodotto di 16, meno l'incognita, per se stesso. Questo prodotto equivale a 256 più il censo, meno 32 radici. **<13.3>** Ripristina allora le radici: rimarrà 256 più il censo, che equivalgono a 2 censi e 36 radici e 4 dragme: sottrai perciò da ambo le parti un censo e 4 dragme: rimarrà un censo e 36 radici, che equivalgono a 252; dimezza allora le radici e il censo, secondo ciò che abbiamo detto prima, a proposito del caso in cui il censo e le radici sono pari a un numero. **<13.4>** Se la somma del lato maggiore più la diagonale sia pari a 18, e il lato maggiore superi il minore di 2, allora la somma del lato minore più la diagonale sarà pari a 16, e in tal caso si opererà come sopra.

<14.1> Di nuovo la somma di due lati più l'area è pari a 62, e il lato maggiore supera il minore di 2: a quanto corrisponde dunque la misura di ciascun lato? **<14.2>** Il modo di trovare la risposta al quesito sarà il seguente: togli 2 da 62, e rimarrà 60; aggiungi dunque 2 alla metà dei lati, e il risultato sarà 4; aggiungi quindi questo a 60, e il risultato sarà 64. Estrai dunque la radice di questo, che è 8; questa è infatti la misura del lato maggiore; se poi vuoi la misura del lato minore, togli 2 da 8: il risultato sarà 6, che corrisponde alla lunghezza del lato minore. **<14.3>** Ad esempio: poni il lato minore pari all'incognita: il lato maggiore allora sarà pari all'incognita più 2 dragme. Dal prodotto del lato minore per il lato maggiore deriva senza dubbio l'area, per cui moltiplica l'incognita, ossia il lato minore, per l'incognita più 2 dragme, e otterrai un censo più 2 radici per la misura dell'area: se a questo risultato unisci la somma dei due lati, ossia 2 radici più 2 dragme, si otterrà un censo più 4 radici più 2 dragme, che equivalgono a 62 dragme. Sottrai dunque da ambo le parti 2 dragme, e rimangono un censo e 4 radici, che equivalgono a 60, eccetera.

<15.1> Se il prodotto del lato maggiore per la diagonale sia pari a 80 e il lato breve sia pari a 6, moltiplica 80 per se stesso e 6 per se stesso: il risultato sarà di 6400 e di 36. **<15.2>** Prendi dunque il quadrato della metà di 36, ossia 324, e aggiungilo a 6400: il risultato sarà 6724, alla cui radice, che è pari a 82, aggiungi la metà di 36: il risultato sarà di 100, la cui radice, ossia 10, corrisponde alla diagonale. Per questo valore dividi 80: il risultato sarà 8, che corrisponde alla misura del lato maggiore. Oppure togli 16 da 80: rimarrà 64, la cui radice corrisponde al lato maggiore.

<16.1> Se vuoi ridurre questa operazione al calcolo algebrico: dal momento che dal prodotto del lato maggiore per la diagonale viene fuori 80, allora dal prodotto degli stessi quadrati proviene il quadrato di 80, ossia 6400. Ma il quadrato della diagonale è uguale alla somma di due quadrati, ossia del maggiore e del minore, e il quadrato del lato minore è pari a 36. Dunque dal prodotto del quadrato del lato minore per se stesso e poi per 36, viene come risultato 6400. Perciò poni il quadrato del lato maggiore pari all'incognita da determinare che, moltiplicata per se stessa e per 36, dà come risultato un censo e 36 radici, che equivalgono a 6400, eccetera. Similmente procederai secondo questa regola: se dal prodotto del lato minore per la diagonale verrà fuori 60, e il lato maggiore sia pari a 8, allora la somma del censo più 64 radici sarà uguali a 3600. **<16.2>** Allo stesso modo, la somma del lato breve con l'area fa 54, e il lato maggiore supera il minore di 2: quanto misura dunque ciascun lato? Dal momento che dal prodotto del lato minore per il lato maggiore viene fuori l'area, se poniamo il lato minore pari all'incognita, il lato maggiore sarà pari all'incognita più 2, e se lo avremo moltiplicato per l'incognita, ossia per il lato minore, il risultato sarà pari al censo più 2 radici per il valore dell'area: se a questo aggiungiamo il lato minore, ossia la radice, il risultato sarà pari al censo più 3 radici, che equivalgono a 54. Moltiplica dunque $1 + \frac{1}{2}$, ossia la metà della radice, per se stesso: il risultato sarà pari a $2 + \frac{1}{4}$; aggiungilo a 54: il risultato sarà di $56 + \frac{1}{4}$; dalla radice di questo, ossia da $7 + \frac{1}{2}$, togli $1 + \frac{1}{2}$: rimarrà 6, che corrisponde alla misura del lato minore. Il lato maggiore sarà dunque pari a 8.

<17.1> Se la somma del lato maggiore più l'area è pari a 56, e il lato minore sia più piccolo del maggiore di 2 unità? **<17.2>** Poni il lato maggiore pari all'incognita da determinare: il lato minore sarà pari all'incognita meno 2. Moltiplica dunque il lato maggiore per il minore: il risultato sarà pari al censo, meno 2 radici; a questo aggiungi la radice, ossia il lato maggiore: il risultato sarà pari al censo meno 1 radice, che equivale a 56. **<17.3>** Ripristina dunque la radice, e opponi quella: rimarrà il censo, che equivale a una radice più 56. Prendi senza dubbio la metà della radice, e moltiplicala per se stessa: farà $\frac{1}{4}$, che più 56, sarà pari a $56 + \frac{1}{4}$. Alla radice di questa, ossia a $7 + \frac{1}{2}$, aggiungi la metà della radice: il risultato sarà pari a 8, che corrisponde alla misura del lato maggiore.

<18.1> Se invece la somma dei quattro lati più l'area del rettangolo è pari a 76, e il lato maggiore supera il minore di 2: **<18.2>** allora porrai il lato minore pari all'incognita da determinare, e il lato maggiore pari all'incognita più 2.

Moltiplica allora l'incognita per se stessa e per 2: il risultato sarà pari al censo più 2 radici, che equivalgono all'area. A questo aggiungi le 2 radici per i due lati minori, e altre due per i due lati maggiori, più 4, che corrisponde alla differenza dei lati maggiori per i minori: il risultato sarà pari al censo più 6 radici più 4 dragme, che equivalgono a 76. **<18.3>** Sottrai dunque 4 da ambo le parti: rimarrà il censo più 6 radici, che equivalgono a 72. Poni perciò il quadrato di metà radice su 72: il risultato sarà 81, la cui radice, ossia 9, togli dalla metà della radice: rimarrà 6 per la misura del lato minore.

<19.1> Se in verità dall'area si sottrae il lato breve, e rimane 42, e il lato maggiore superi il minore di 2: **<19.2>** poni allora il lato minore pari all'incognita, e moltiplicala per l'incognita più 2, ossia per il lato maggiore, e il risultato sarà pari al censo più 2 radici, che equivalgono alla misura dell'area. Da ciò sottrai una radice, ossia il lato minore: rimane il censo più la radice, che equivale a 42. Poni allora su 42 il quadrato di mezza radice, ossia $\frac{1}{4}$: il risultato sarà pari a $42 + \frac{1}{4}$, dalla cui radice, ossia da $6 + \frac{1}{2}$, sottrai $\frac{1}{2}$: rimarrà 6, che corrisponde alla misura del lato breve.

<20.1> Se dall'area si sottrae il lato maggiore, e rimane quindi 40, e il lato maggiore sia di 2 unità più grande del minore, allora sarà manifesto che se il lato minore viene sottratto dall'area, rimarranno 2 unità in più di quello che rimane se dall'area viene tolto il lato maggiore; allora tolto il lato minore dall'area, rimane 42: fa' dunque come si è detto sopra, e otterrai quanto richiesto, se Dio vuole. **<20.2>** Oppure in altro modo: poni il lato maggiore pari all'incognita da determinare, e moltiplicala per il lato breve, ossia per l'incognita meno 2: il risultato sarà pari al censo, meno 2 radici, che equivalgono alla misura dell'area: togli dunque da lì una radice, ossia il lato maggiore: resterà il censo, meno 3 radici, che sono pari a 40, eccetera. Ripristina allora le radici, opponile, e otterrai il censo, che equivale a 3 radici più 40, eccetera.

<21.1> Allo stesso modo sottratto il perimetro dall'area, rimane 20; e il lato maggiore supera il minore di 2: quanto misura dunque ogni lato? **<21.2>** Poni il lato minore pari all'incognita, e il lato maggiore sia pari all'incognita più 2, per cui il perimetro sarà pari a 4 incognite più 4 dragme. Senza dubbio dal prodotto dell'incognita per l'incognita più 2 viene fuori il censo più 2 incognite, che equivalgono all'area. Da questo risultato togli il perimetro, ossia 4 incognite e 4 dragme: rimarrà il censo meno 2 incognite e 4 dragme, che equivalgono a 20. <**21.3**> Ripristina dunque 2 incognite, ossia 2 radici e 4 dragme: viene fuori il censo, che equivale a 2 radici e 24 dragme. Dividi le radici per due: il risultato sarà pari a 1. Aggiungi il quadrato di questo a 24: il risultato sarà pari a 25. Alla radice di questo valore aggiungi 1: il risultato sarà pari a 6, che corrisponde alla misura del lato minore, eccetera.

<**22.1**> Allo stesso modo se il lato maggiore e il lato minore si sommano alla diagonale, e se la loro somma equivalga alla metà dell'area, e l'area sia pari a 48, e vuoi conoscere la misura della diagonale e di ciascuno dei lati: <**22.2**> prendi dunque la metà dell'area, ossia 24, che corrisponde alla somma dei due lati e della diagonale, moltiplicala poi per se stessa, e il risultato sarà pari a 576. Da questo, togli il doppio dell'area: rimane 480, la cui metà dividila poi per 24, ossia per il totale dell'unione dei due lati con la diagonale: il risultato sarà pari a 10 per la misura della diagonale. <**22.3**> Oppure in altro modo: raddoppia dunque l'area: il risultato sarà pari a 96, che devi dividere per 24: verrà 4, che devi sottrarre da 24: rimane 20, la cui metà sarà per te per la misura della diagonale; sottratto questo valore da 24, rimane 14 per la misura dei due lati. <**22.4**> Da ciò dunque sorge tale questione: la somma dei due lati è pari a 14, e l'area è pari a 48: fa' dunque come è stato detto prima, e otterrai la risposta.

<**23.1**> Se vuoi conoscere da dove derivino queste procedure: si tracci un certo segmento *ab* della lunghezza di 24 ulne, in cui è contenuto il totale dell'addizione di due lati più la diagonale; e sia il segmento *ac* pari al lato maggiore di un dato rettangolo, e sia *cd* il lato minore; rimarrà allora *bd* pari alla lunghezza della diagonale. <**23.2**> Si costruisca senz'altro sul segmento *ab* il tetragono *ae*, e si tracci la diagonale *fb*, e per i punti *c* e *d* si traccino i segmenti *cpig* e *dkmh* paralleli e a una distanza scelta dai segmenti *af* e *be*, e senza dubbio per i punti *i* e *k* si traccino i segmenti *lim* e *nko*. <**23.3**> Dal momento che *ae* è un tetragono, tetragone sono le figure descritte intorno alla sua diagonale; dunque *kdbc* è un tetragono, ed è un tetragono *knfh*. Di nuovo, dal momento che il tetragono *nh* è regolare, anche i tetragoni *pimk* e *ilfg* sono regolari; e il lato del tetragono *do* corrisponde al segmento *db*, per cui l'area del tetragono *do* è uguale al quadrato della diagonale; e senza dubbio del tetragono *pm* il segmento *pk* costituisce il lato, che è uguale al segmento *cd*, e *cd* è pari al lato minore. Dunque il tetragono *pm* è pari al tetragono del lato minore. <**23.4**> Allo stesso modo si

dimostrerà che il tetragono *lg* è uguale al quadrato del lato maggiore per il fatto che i segmenti *fg* e *li* sono uguali al segmento *ac*; e *ac* è uguale al lato maggiore del rettangolo. Dal momento che *pm* è un tetragono, il segmento *kp* è uguale al segmento *pi*: dunque *pi* corrisponde al lato minore, e *il* corrisponde al lato maggiore. Dunque il supplemento *ni* è uguale all'area del dato quarilatero; e il supplemento *ih*, come mostra Euclide, è uguale al supplemento *ni*. Dunque i supplementi *ni* e *ih* sono pari al doppio dell'area del rettangolo, e la loro somma è pari a 96. **<23.5>** Se dall'area del tetragono *ae*, ossia da 576, si sottrae questa somma, rimarranno i tetragoni *lg* e *pm*, e lo gnomone *rst* pari a 480. Ma la somma dei tetragoni *lg* e *pm* è pari al valore del tetragono *do*, ossia al quadrato della diagonale; dunque la somma del tetragono *do* con lo gnomone *rst* è pari a 480. Ma la metà della somma del tetragono *do* e dello gnomone *rst* è pari al valore della superficie *ao*; dunque la superficie *ao* misura 240, ed è pari al prodotto di *ab* per *bo*; dunque se avremo diviso 240 per *ab*, ossia per 24, verrà 10 per il valore della linea *ob*, ovvero *bd*, che è uguale alla diagonale; dunque la diagonale misura 10. **<23.6>** Oppure secondo l'altra regola di cui si è detto sopra, quando dal quadrato del segmento *ab*, ossia da 24 per 24, si toglie il doppio dell'area, ossia la somma dei supplementi *ni* e *ih*; e l'area è pari al doppio della lunghezza della linea *ab*; allora il doppio dell'area è pari a quattro volte 24. Dunque se dal quadrato di 24 si toglie il quadruplo di 24, rimarrà il prodotto di 20 per 24 per la somma delle aree dei tetragoni *lg* e *pm* e dello gnomone *rst*, dei quali la superficie *ao* misura la metà, come è stato visto, per cui la superficie *ao* misura 10 per 24: dunque dal momento che *ab* è pari a 24, ne consegue necessariamente che *bo* è pari a 10, come volevasi dimostrare.

<24.1> Allo stesso modo, la somma di due lati e della diagonale è pari a 24; il lato maggiore supera il minore di 2: quanto misura dunque ciascun lato? **<24.2>** Raddoppia perciò il quadrato di 24, ossia 576: il risultato sarà 1152; a questo aggiungi il quadrato del valore per cui il lato maggiore superi il minore, ossia di 2: il risultato sarà 1156; dalla radice di questo, ossia da 34, sottrai il valore 24 che abbiamo rinvenuto prima: rimane 10, che corrisponde alla misura della diagonale; sottraendo questo valore da 24, rimane 14, che corrisponde alla somma dei due lati: da questo 14 togli 2, rimane 12; la metà di questo, ossia 6, corrisponde alla misura del lato minore. **<24.3>** Per la dimostrazione di questo procedimento, si tracci il tetragono *abcd*, nel quale la somma dei due lati e della diagonale sia pari a una certa quantità; sia *be* uguale al lato maggiore ed *ef* al lato minore: rimarrà *fc* pari alla diagonale. Si tracci la diagonale *ac*; per il punto *f*, poi, si tracci la linea *fgh* parallela a ciascuno dei lati *ba* e *cd*; e per il punto *g* si tracci il segmento *igk*; il segmento *ig* sarà uguale al segmento *bf*. Dal segmento *gi* si escluda il segmento *gl*, di lunghezza uguale a quella del segmento *fe*: rimane allora *li* uguale al segmento *eb*. Dunque *gl* è uguale al lato minore, ed *li* è uguale al lato maggiore. **<24.4>** Perciò da *li* si escluda il segmento *im*, ossia la porzione di lunghezza per cui il lato maggiore supera il minore: rimarrà *ml* uguale a *lg*, ossia al lato minore. Si conduca poi *ad* fino al punto *n*; sia *dn* uguale a *fc*, ossia alla diagonale; si costruisca poi su *an* il tetragono *nopa*; dal momento che *bd* e *pn* sono tetragoni, e hanno in comune il solo angolo in *a* posto intorno alla medesima diagonale, allora se si protrae la diagonale *ac* nel punto *o*, il segmento *ao* così costruito sarà pari alla diagonale. Si tracci senz'altro il segmento *dc* fino al punto *q*, e il segmento *bc* fino al punto *r*; dunque *qr* è un tetragono la cui area è pari al quadrato della diagonale del rettangolo: dunque tutto il tetragono *pn* misura quanto il tetragono *bd* più lo gnomone *stu*. **<24.5>** Dimostrerò che senza dubbio lo gnomone *stu* è pari alla somma del tetragono *bd* e del tetragono di lato *im*, che corrisponde a quanto il lato maggiore superi il minore. Infatti le eccedenze *pn* e *cn* sono pari alle superfici *bk* e *fd*. Ma la somma delle due superfici *bk* ed *fd* è pari alla misura dello gnomone *xyz* più il tetragono *fk*, ai quali è aggiunto il corrispondente del tetragono *qr*, che è uguale al tetragono *fk*: il risultato sarà pari al doppio del tetragono *fk* con lo gnomone *xyz*, che è uguale allo gnomone *stu*. **<24.6>** Resta senza dubbio da dimostrare che il doppio del tetragono *fk* corrisponde alla somma dei quadrati *ih* e *ei*, che è descritto dalla retta *im*. Infatti il segmento *gm* è stato diviso in due parti uguali nel punto *l*, e a questo è stato aggiunto lungo la stessa direttrice il segmento *im*. Perciò il tetragono, che è descritto dal segmento *gi*, pari alla somma del tetragono *ih* con quello che è descritto dal segmento *im*, misurerà il doppio dei tetragoni che sono descritti dai segmenti *gl* e *li*. Ma i tetragoni che sono descritti dai segmenti *gl* e *li* equivalgono alla superficie del tetragono *fk*; perciò il doppio del tetragono *fk* è uguale al totale dei tetragoni *ih* ed *ei*, che è descritto dal segmento *im*. Dunque lo gnomone *stu* è uguale al tetragono *bd* più il quadrato dell'eccedenza del lato maggiore, come ho detto prima.

<25.1> Ora veniamo alla nostra causa. Abbiamo moltiplicato il valore 24 per 24, e abbiamo ottenuto la misura del quadrato *bd*; lo abbiamo raddoppiato, cioè abbiamo aggiunto a quello un'altra quantità uguale; poi abbiamo aggiunto 4, ossia al quadrato *bd* abbiamo aggiunto lo gnomone *stu*: e così abbiamo ottenuto 1156 per il quadrato *pn*, il cui lato corrisponde alla sua radice. Dunque *po* misura 34, da cui estratta *pq*, ossia *bc*, rimane *qo* pari a 10, di cui il segmento *cf* è uguale: dunque *cf* è pari a 10, come ho detto prima. **<25.2>** Anche in un altro modo possiamo giungere alla conoscenza della misura dei sopradetti lati, chiaramente ponendo il lato minore pari all'incognita: il lato maggiore sarà allora pari all'incognita più 2. Sottratto il risultato della loro somma da 24, rimane 22 per la misura della diagonale, meno 2 incognite. Moltiplica l'incognita per se stessa: il risultato sarà pari al censo; moltiplica poi l'incognita più 2 per se stessa: il risultato sarà pari al censo più 4 incognite più 4 dragme. Unisci il tutto: il risultato sarà di 2 censi più 4 incognite più 4 dragme, che equivalgono al quadrato della diagonale, ossia a 22 meno 2 incognite. Il loro prodotto fa 4 censi e 484, meno 88 radici. Ripristina dunque le radici, e opponi i 2 censi e le 4 dragme, e troverai che 92 radici equivalgono a 2 censi più 480. Riduci tutto a un solo censo, e sarà un censo più 240 uguale a 46 radici eccetera. **<25.3>** Oppure poni il lato maggiore pari all'incognita: il lato minore sarà uguale all'incognita meno 2; togli questo valore da 24: rimane 26, meno 2 incognite: e opererai poi come sopra, e troverai che il censo più 336 è pari a 50 radici.

<26.1> Se invece la diagonale superi il lato maggiore di 2, e il lato maggiore superi il minore di altrettanto, e vuoi conoscere la misura della diagonale e quella dei lati, per il fatto che la differenza tra i lati sarà sempre uguale, moltiplicherai questa differenza per 5, ed otterrai la misura della diagonale; poi moltiplicherai questa per 4, ed otterrai la misura del lato maggiore; poi questa per 3, ed otterrai la misura del lato minore. **<26.2>** Esempio: senza dubbio la differenza tra i lati è pari a 2; moltiplicato questo valore per 5, per 4 e per 3, viene fuori 10 per la misura della diagonale, 8 per quella del lato maggiore e 6 per quella del lato minore: ciò accade per il fatto che è un rettangolo, il cui lato maggiore misura 4, il minore 3 e la diagonale 5: di questo senza dubbio la differenza tra il lato maggiore e il lato minore misura 1, per cui come 1 starà alla quantità eccedente che avrai stabilito, così questi tre lati staranno ai lati di quel rettangolo, del quale la differenza tra i lati sarà stata nota. **<26.3>** Esempio: se la differenza di un lato con l'altro misurerà 3, dal momento che 3 è il triplo di 1, allora i lati misureranno il triplo dei lati predetti, ovvero la diagonale misuserà 15, il lato maggiore 12 e il lato minore, poi, 9. Da ciò se si stabilisce che la diagonale è pari a 20 e vuoi conoscere la differenza tra i lati, dividi 20 per 5: il risultato sarà pari a 4, e corrisponde alla differenza dei lati: moltiplicalo per 4 e per 3: i risultati saranno 16 e 12, che corrispondono alla misura dei lati. **<26.4>** Allo stesso modo il lato maggiore sia pari a 20; dividi dunque questo per 4, perché 4 è pari alla misura del lato maggiore, 3 a quella del minore e 5 a quella della diagonale. Diviso dunque 20 per 4, viene 5 per la misura della differenza dei due lati; moltiplicalo per 3 e per 5: viene 15 per la misura del lato minore e 25 per quella della diagonale. **<26.5>** Ancora: il lato minore sia pari a 18: dividilo dunque per 3, il risultato sarà 6 per la differenza dei lati; moltiplicalo per 4 e per 5: viene 24 per il lato maggiore, e 30 per la diagonale.

<27.1> Infatti se la differenza tra i lati sarà stata diversa, come in un quadrato in cui si stabilisce che la diagonale superi di 1 il lato maggiore, e il lato maggiore superi di 7 il minore, allora operemo secondo le regole dell'algebra: **<27.2>** porremmo senz'altro il lato breve come incognita: il lato maggiore sarà allora pari all'incognita più 7, e la diagonale sarà pari all'incognita più 8. Moltiplica perciò l'incognita per se stessa: il risultato è pari a un censo; poi moltiplica l'incognita più 7 per se stessa: il risultato è pari al censo più 14 incognite più 49 dragme. Questi due valori sommati insieme daranno come risultato 2 censi più 14 incognite più 49, che equivalgono al quadrato della diagonale, ossia al prodotto di un'incognita più 8 per se stesso, il quale dà come risultato il censo più 16 incognite più 64. **<27.3>** Togli dunque da ambo le parti un censo più 14 incognite più 49: rimarrà il censo, che equivale a 2 radici più 15: perciò dividi in due parti la radice: verrà 1, e moltiplicalo per se stesso: il risultato sarà 1; aggiungilo a 15: il risultato sarà 16, alla cui radice, ossia a 4, aggiungi la metà della radice: il risultato sarà pari a 5, che corrisponde alla misura del lato minore; a questo aggiungi 7: il risultato sarà pari a 12, che corrisponde alla misura del lato maggiore; a questo valore aggiungi infine 1: il risultato sarà pari a 13, che equivale alla misura della diagonale.

<28.1> Allo stesso modo il lato maggiore superi il minore di 7, e la diagonale sia pari a 13: quanto misura dunque ciascun lato? **<28.2>** Sottrai il quadrato della differenza dal quadrato della diagonale, ossia 49 da 169: rimarrà

120, la cui metà, ossia 60, corrisponde alla misura dell'area. **<28.3>** Esempio: si tracci il segmento *ab* uguale alla somma dei due lati, e sia *bg* pari al lato minore: rimane *ga* pari al lato maggiore. Sia poi *ac* pari a 7, che è la quantità per cui il lato maggiore *ag* superi il minore *bg*; dunque *gc* è uguale al segmento *gb*. **<28.4>** Si costruisca perciò sul segmento *ab* il tetragono *ad*, e si completi la figura: senza dubbio il lato del tetragono *gk* sarà della stessa lunghezza del segmento *gb*, cioè di *gi*; anche il lato del tetragono *hf* è della stessa lunghezza del segmento *hi*, cioè di *if*, ed essi sono uguali al segmento *ag*. Dunque il supplemento *ai* è uguale al quadrilatero dato, perché consta dei segmenti *ag* e *gi*, i quali sono pari alla somma dei due lati del quadrilatero dato. E il supplemento *id* è uguale al supplemento *ai*; dunque i supplementi *ai* e *id* misurano il doppio dell'area del quadrilatero dato. Dunque il doppio dell'area più il tetragono *hf* e più il tetragono *gk* è uguale al tetragono *ad*. Ma la somma dei due tetragoni *hf* e *gk* è uguale al quadrato della diagonale; dunque la somma dei supplementi *ai* e *id* più il quadrato della diagonale dato del rettangolo è uguale al tetragono *ad*. **<28.5>** Ma con il tetragono *ad* più quello del segmento *ac* è pari al doppio del tetragono, che viene costruito sui segmenti *ag* e *gb*. Ma i quadrati che vengono costruiti sui segmenti *ag* e *gb* sono uguali al tetragono della diagonale. Dunque il doppio del tetragono della diagonale è uguale al tetragono *ad* più quello costruito sul segmento *ac*. Ma intanto il tetragono della diagonale è uguale alla somma dei tetragoni *hf* e *gk*; rimane dunque il tetragono della diagonale uguale che è alla somma dei supplementi *ai* e *id*, e al tetragono che viene costruito sul segmento *ac*, per cui abbiamo sottratto il tetragono che viene descritto dal segmento *ac*, ossia 49, dal quadrato della diagonale, e a noi è rimasto 120 per la misura della somma dei supplementi *ai* e *id*: la metà di questa, ossia 60, corrisponde alla misura dell'area del quadrilatero *ai*, che è uguale quella del quadrilatero dato; dunque l'area del quadrilatero dato misura 60, come ho detto prima. **<28.6>** Per conoscere la misura dei lati, dirai: l'area misura 60; il lato maggiore, poi, supera il minore di 7: fa' dunque come ho insegnato prima. **<28.7>** Altrimenti poni il lato minore pari all'incognita da determinare, e il lato maggiore sarà pari all'incognita più 7: moltiplica dunque l'incognita per l'incognita, e l'incognita più 7 per se stessa; aggiungi i due risultati, e vi saranno 2 censi più 14 radici più 49 dragme. Opponili al quadrato della diagonale, e otterrai ciò che cerchi.

<29.1> Allo stesso modo è dato un rettangolo, la cui diagonale è pari a 20; la differenza tra la diagonale e il lato maggiore è diversa dalla differenza tra il lato maggiore e il lato minore: quant'è dunque la misura di ciascun lato? **<29.2>** Puoi calcolare senza dubbio un certo quadrilatero, i cui lati e la diagonale siano razionali; e le differenze tra queste parti non siano uguali. Sia poi dato il sopradetto quadrilatero, il cui lato minore è pari a 5, il lato maggiore pari a 12, la diagonale senza dubbio pari a 13. Puoi considerare 13 come valore antecedente, ponendo la diagonale pari a 20, per cui moltiplicherai 20 per 12 e di 20 per 5; dividerai poi entrambi i risultati per 13, e otterrai una lunghezza di $18 + \frac{6}{13}$ per la misura del lato maggiore, e di $7 + \frac{9}{13}$ per quella del lato minore. **<29.3>** Se il lato maggiore sarà poi pari a 20, e vuoi trovare la misura del lato minore o della diagonale, allora moltiplicherai 20 per 5, e 20 per 13; e dividerai entrambi i risultati per 12, e otterrai per il lato minore una lunghezza pari a $8 + \frac{1}{3}$, e per quella della diagonale una lunghezza pari a $21 + \frac{2}{3}$. **<29.4>** Ancora: il lato minore sia pari a 20; allora moltiplicherai 20 per 12, e 20 per 13, e dividerai entrambi i risultati per 5; oppure moltiplica la quinta parte di 20, ossia 4, per 12 e per 13, e troverai che il lato maggiore è pari a 48 e che la diagonale è pari a 52.

<30.1> Ma per procedere più saggiamente in casi simili, è necessario dimostrare alcune cose. Chiaramente per insegnare in che modo a un certo numero si aggiunga un numero quadrato, e il risultato di questa operazione sia un numero quadrato: sarà dato un numero *a*, tale che a questo numero *a* sia sommato un numero quadrato, e che il loro totale sia un numero quadrato, cioè un numero dotato di radice. **<30.2>** Puoi trovare senza dubbio due numeri diversi, che moltiplicati tra loro diano come risultato il numero *a*: siano questi *bg* e *gd*; e si divida *bg* in due parti uguali nel punto *e*; e dal momento che il numero *bd* è stato diviso in due parti uguali nel punto *e* e in due parti diverse nel punto *g*, il prodotto di *dg* per *gb* più il quadrato del numero *ge* sarà uguale al quadrato di *de*. Ma il prodotto di *dg* per *gb* dà come risultato il numero *a*; dunque il numero *a* più il quadrato del numero *ge* è uguale al quadrato del numero *de*, come volevasi dimostrare.

<31.1> Se invece sarà dato uno dei lati del quadrilatero che contengono l'angolo retto, e vuoi conoscere la lunghezza dell'altro lato, e quella della diagonale: sia dato il lato pari a 13, moltiplica perciò 13 per se stesso: il risultato sarà pari a 169, che corrisponde alla linea *ab*; si rinvengano poi due numeri, che moltiplicati tra loro diano come risultato il numero *ab*. Sia *ab* più 1 pari a *bg*. **<31.2>** Infatti dal prodotto di 1 per un qualsiasi numero, viene fuori il medesimo numero; dunque il prodotto di *bg* per *ba* dà come risultato il numero *ab*, ossia 169: si divida il numero *ag* in due parti uguali nel punto *d*: sarà *gd* pari alla metà di *ag*, ossia a 85, che corrisponde alla lunghezza della diagonale; resterà *bd* pari a 84, che corrisponde alla misura dell'altro lato.

<32.1> Dal momento che con l'ausilio delle frazioni possiamo rinvenire infinite coppie di numeri diversi, e che la somma delle loro superfici equivale al numero *ab*, senza dubbio si possono rinvenire infiniti lati e diagonali in grado di rendere la lunghezza di un dato lato. **<32.2>** In verità se si stabilisce che la lunghezza della diagonale è pari a 34 e vuoi trovare la misura dei lati, raddoppia senza dubbio 34, e da li si ottenga il numero *ef*, cioè 68: si divida poi *ef* in due parti uguali nel punto *g*: *gf* sarà pari a 34. Si fissi poi sul numero *ef* il punto *d* e sia il rapporto di *fd* a *de* pari al rapporto di un certo numero quadrato a un altro numero quadrato. **<32.3>** Sia perciò *fd* pari a 4: rimarrà *de* pari a 64; e dal momento che *fd* e *de* stanno tra loro in proporzione di quadrati, dal prodotto di *fd* per *de* viene fuori un numero quadrato, ossia 256, la cui radice, ossia 16, corrisponderà alla lunghezza di un lato; l'altro lato sarà pari a *dg*, della misura di 30; la diagonale invece sarà *gf*, ossia 34. **<32.4>** Allo stesso modo se si dirà che la differenza tra la diagonale e il lato maggiore è uguale alla differenza tra i lato maggiore e il minore; e il prodotto delle due differenze per la diagonale sia pari a 20: per la sopradetta ragione dividi 20 per 5: il risultato è 4, la cui radice, ossia 2, corrisponde alla differenza; moltiplica dunque questa differenza per 5 e per 4 e per 3, e otterrai 10 per la misura della diagonale, 8 per la misura del lato maggiore, e infine 6 per la misura del lato minore.

<33.1> Sia dato poi un rettangolo: il rapporto della diagonale rispetto alla lunghezza è pari al rapporto della lunghezza rispetto alla larghezza, inoltre la diagonale misura 10. **<33.2>** In questa figura occorre dividere 10 secondo la sua proporzione media e la sua proporzione estrema[9]; e ciò che sarà avanzato della media proporzione, corrisponderà al lato minore; questo deve essere moltiplicato

[9] Vale a dire in modo che il rapporto tra la parte maggiore e la parte minore in cui è diviso il segmento sia uguale a quello tra l'intero segmento e la sua parte maggiore (sezione aurea).

per 10, e la radice del risultato corrisponderà alla misura del lato maggiore. **<33.3>** Esempio: si tracci il triangolo rettangolo *abg*, corrispondente a metà rettangolo, la cui diagonale è *ag*, il lato maggiore *ab*, il lato minore *bg*. Si tracci poi su *ag* la perpendicolare *bd*, e come *ga* sta a *ab*, così *ab* sta a *bg*. Dal momento che il segmento *bd* è perpendicolare al segmento *ag*, i triangoli *bdg* e *bda* sono simili tra loro ed uguali al triangolo *abg*, per cui come *ga* sta a *ab*, così *ba* sta a *ad*. Ma come *ga* sta a *ab*, così *ab* sta a *bg*; dunque il segmento *ab* è in uguale proporzione rispetto ai segmenti *bg* e *ad*, perciò il segmento *ad* è uguale al segmento *bg*.

<34.1> Allo stesso modo poiché i triangoli *abg* e *bdg* sono simili tra loro, come *ag* sta a *gb*, così *bg* sta a *gd*. Infatti *bg* è uguale al segmento *ad*: dunque come *ag* sta a *ad*, così *ad* sta a *dg*. Allora *ag*, ossia 10, è stato diviso secondo proporzione media ed estrema; ed è media, ossia la sua parte maggiore *ad* è uguale al lato minore del rettangolo richiesto, ossia a *gb*. **<34.2>** Infatti per trovare la sua lunghezza secondo Euclide, moltiplica per se stessa la metà di 10, ossia 5; aggiungi il risultato al quadrato della linea *ag*, ossia a 100: farà 100; dalla radice di questo togli 5, ossia la metà della linea *ag*: e così il lato minore, ossia la linea *gb*, sarà pari alla radice di 125 meno 5. Infatti per ottenere la misura del lato maggiore *ab*, dal momento che come *ga* sta a *ab*, così *ab* sta a *bg*, senza dubbio il prodotto della superficie *bg* per *ga* sarà uguale al quadrato della linea *ab*, per cui moltiplica *ag* per *gb*, ossia 10 per la radice di 125 meno 5, e come risultato vi sarà la radice di 12500 meno 50 per la lunghezza del lato *ab*. **<34.3>** Esistono molti problemi diversi a proposito dei lati, della diagonale oppure dell'area dei due sopradetti quadrilateri, le cui soluzioni potrai trovare attraverso le questioni che sono state qui discusse.

<2>

Parte seconda

<Introduzione>

<1.1> La trattazione sui restanti quadrilateri è divisa in quattro parti: la prima di queste concerne i rombi, i cui lati sono tutti e quattro uguali, mentre gli angoli acuti. **<1.2>** La seconda parte concerne i romboidi, che hanno uguali e paralleli soltanto i lati opposti, e hanno uguali anche gli angoli opposti. **<1.3>** La terza parte concerne le superfici che sono dotate di due lati paralleli ma non uguali: essi si dividono in quattro tipologie, in base ai criteri che più sotto indicherò. **<1.4>** La quarta parte concerne infine le superfici scalene, all'interno delle quali non sono presenti lati paralleli.

<1>
Paragrafo primo: il rombo

<1.1> Sia dato il rombo *abcd* di 13 pertiche per lato; per calcolare l'area di questo, ci occorre conoscere la misura di una delle sue diagonali. Sarà perciò la diagonale minore *bd* della misura di 10 pertiche. Perciò il rombo *abcd* sarà diviso da questa diagonale in due triangoli uguali, ciascuno dei quali è isoscele. Infatti i due lati *ab* e *ad* sono uguali ai due lati *cb* e *cd*; il lato *bd* è in comune, per cui l'angolo *bad* è uguale all'angolo *bcd*; il triangolo *abd* è poi uguale al triangolo *cbd*. **<1.2>** Dunque se vogliamo calcolare l'area di questo rombo, raddoppieremo l'area del triangolo *abd* ovvero del triangolo *bcd*: in questo modo troveremo la nostra soluzione. Infatti l'area del triangolo *abd* si calcola attraverso il prodotto della perpendicolare *ae* per la metà della base *bd*, come è stato demostrato a proposito del calcolo dell'area dei triangoli, per cui se avremo moltiplicato la perpendicolare *ae* per la base *bd*, il risultato sarà il doppio dell'area del triangolo *abd*, ossia l'area del rombo *abcd*. **<1.3>** Perciò la perpendicolare *ae* cade nel mezzo di *bd*, essendo il triangolo *abd* isoscele, per cui se vuoi rinvenire la misura della sua area, sottrai il quadrato della linea *eb* dal quadrato della linea *ab*, ossia 25 da 169: il risultato sarà pari a 144, la cui radice, ossia 12, è pari alla misura della perpendicolare *ae*. A causa di ciò, dunque, anche la perpendicolare *ce* è allo stesso modo pari a 12; il segmento *ce* è posto poi sulla stessa direttrice del segmento *ea*, essendo gli angoli *aed* e *dec* retti, perciò l'altra diagonale corrisponde al segmento *ac* e misura 24. **<1.4>** Dunque l'area del rombo *abcd* si calcola attraverso il prodotto di metà diagonale *ac* per l'intera diagonale *bd*; il risultato di questo prodotto è 120. Allo stesso modo se la diagonale *ac* sia pari a 24 pertiche, troviamo senza dubbio attraverso il metodo di cui si è detto sopra la misura della diagonale *bd*, perché i triangoli *bac* e *dac* sono isosceli e sono uguali tra loro, per cui se dal quadrato del lato *ba* avremo sottratto il quadrato della linea *ae*, ossia 144 da 169, rimarrà 25 per la misura del quadrato della perpendicolare *be*. Dunque *be* è pari a 5, per cui tutta la diagonale *bd* è pari a 10. <**1.5**> Dal momento che se avremo moltiplicato la perpendicolare *be* per metà della base *ac*, risulterà a noi l'area del triangolo *abc*, se avremo moltiplicato la perpendicolare *be*, ossia la metà della diagonale *bd*, per tutta la diagonale *ac*, il risultato sarà l'area di tutto il rombo *abcd*. Infatti il prodotto di *be* per *ac*, ossia di 5 per 24, è 120, che corrisponde all'area del rombo *abcd*. <**1.6**> Dunque *l'area di ogni tipo di rombo si calcola attraverso il prodotto di una delle diagonali per la metà dell'altra*, e questa regola è valida sempre.

<**2.1**> Infatti se si stabilisce che la diagonale maggiore sia pari a 24, e che la diagonale minore sia pari a 10, e vuoi conoscere la misura dei lati del rombo: addiziona insieme i quadrati delle metà delle diagonali, ossia delle linee *ae* e *eb*; la radice del risultato, ossia 13, sarà per te la misura di ciascuno dei lati. <**2.2**> Possiamo senza dubbio avanzare molti problemi a partire dalle diagonali e dall'area, e anche dai lati di un rombo; e tutti possono essere ridotti ai problemi di quel rettangolo, il cui lato maggiore sia pari alla metà della diagonale maggiore di un rombo, e il lato minore è pari alla metà della diagonale minore. <**2.3**> Dimostreremo perché un rettangolo misuri la metà dell'area di un rombo: si tracci perciò, come si vede in quest'altra figura, la linea *af* in modo che sia uguale e parallela alla linea *eb*, e si tracci *fb*. Dico che senza dubbio l'area del rettangolo *ef* misura la metà dell'area del rombo *abcd*, e i lati di quello sono pari alla metà delle diagonali *ac* e *bd*. Infatti l'area di *ae* misura la metà dell'area di *ac*, e l'area di *be* misura la metà di quella di *bd*: infatti il triangolo *abd* misura la metà del rombo *abcd*. Ma l'area del triangolo *abd* è uguale all'area del rettangolo *ef*; entrambe infatti si calcolano attraverso il prodotto di *ae* per *eb*: dunque il rettangolo *ef* è uguale alla metà del rombo *abcd*, come ho detto prima. <**2.4**> Voglio ora spiegare in che modo molti dei problemi del rombo possano essere ricondotti a quelli di un rettangolo.

<**3.1**> Se ti è stato detto: ho sommato le due diagonali, e il risultato è stato 34; l'area del rombo è poi pari a 120. Quanto misura dunque ciascuna delle diagonali? Essendo perciò la somma delle diagonali pari a 34, la metà, ossia la somma di *ae* più *eb*, è pari a 17, e l'area del rettangolo *ef* è pari a 60. <**3.2**> Dunque hai ridotto questo problema a uno dei problemi tipici del rettangolo, cioè a quello in cui si propone che l'area misura 60, e la somma dei lati 17. Senza

dubbio dal quadrato della metà di 17, ossia da $72 + \frac{1}{4}$, togli 60: rimane $12 + \frac{1}{4}$, poi sottrai la sua dalla metà di 17: rimarrà 5 per la lunghezza della linea *be*; 17 meno questo valore dà poi come risultato la lunghezza della linea *ae*; dunque il doppio di questi, ossia 24 e 10, corrisponde alla misura delle diagonali. <**3.3**> Allo stesso modo la somma delle diagonali è pari a 34; la diagonale maggiore supera poi la diagonale minore di 14. Quanto misura dunque l'area? Sottrai 14 da 34: rimarrà 20, la cui metà, ossia 10, è la misura della diagonale minore. Il resto, ossia 24, è la misura della diagonale maggiore. Moltiplica senz'altro la metà di una delle diagonali per l'altra, e otterrai il valore dell'area.

<**4.1**> Ancora: hai sommato le due diagonali e l'area del rombo, ed è venuto fuori 154; la diagonale maggiore supera poi la minore di 14. Dal momento che la somma delle due diagonali del rombo è uguale alla somma dei quattro lati del rettangolo *ef*, poni il lato minore pari all'incognita: il lato maggiore sarà pari all'incognita più 7. Moltiplica dunque l'incognita per l'incognita più 7: il risultato sarà il censo più 7 radici, che corrispondono all'area del rettangolo *ef*. <**4.2**> Dal momento che metà dell'area del rettangolo *ef* equivale all'area del rombo, raddoppia il censo e le 7 radici: il risultato sarà di 2 censi e 14 radici, che equivalgono all'area del rombo. A questi aggiungi 4 radici e 14, ossia il perimetro: il risultato sarà di 2 censi più 18 radici più 14, che equivalgono a 154. Sottrai dunque da ambo le parti 14, e riduci tutto a un unico censo: verrà un censo più 9 radici, che equivalgono a 70. Dividi allora le radici per due: il risultato sarà di $4 + \frac{1}{2}$. Moltiplicalo per se stesso: il totale sarà pari a $20 + \frac{1}{4}$. Aggiungi questo valore a 70: il risultato sarà pari a $90 + \frac{1}{4}$. Sottrai ora $4 + \frac{1}{2}$ dalla radice di questo: rimarrà 5 per la misura di *be*, il doppio del quale, ossia 10, corrisponde alla misura della diagonale *bd*. Aggiunto a questo 14, otterrai 24 per la misura della diagonale maggiore; 154 meno la somma delle due diagonali, dà come risultato 120 per la misura dell'area.

<**5.1**> Ancora: ho sommato la diagonale minore al lato del rombo, e il risultato era di 23. La diagonale maggiore supera la diagonale minore di 14: quanto misura dunque il lato e quanto misurano le diagonali? <**5.2**> Dal momento che la diagonale maggiore supera di 14 la minore, allora la metà della diagonale maggiore supera di 7 la metà della diagonale minore, ossia il lato *ae* supera di 7 il lato *eb*. Allora la somma di *be* più *ab* supera di 7 la lunghezza della diagonale *bd*.

Ma la somma di *bd* più *ab* fa 23; allora *be* più *ea* più *ab* dà 30 come risultato. **<5.3>** Da ciò deriva questo problema: ho sommato i due lati di un rettangolo alla sua diagonale, e il risultato fu pari a 30; il lato maggiore supera il minore di 7: fa' dunque come è stato detto sopra, eccetera.

<6.1> Allo stesso modo moltiplicasti una ciascuna delle diagonali per se stessa, e addizionasti i risultati: il totale era stato di 676 e l'area è di 120; quanto misura allora ciascuna delle diagonali? **<6.2>** Prendi perciò la quarta parte di 676, perchè i quadrati delle linee *ae* e *eb* corrispondono alla quarta parte della somma dei quadrati delle diagonali. Essendo i lati pari alla metà di queste, viene fuori 169 la cui radice, ossia 13, corrisponde alla diagonale del quadrilatero *ef*, ossia al lato del rombo. **<6.3>** Dal momento che è stato visto prima che il quadrato della diagonale di un rettangolo supera il quadrato del doppio dell'area (il quadrato della differenza di questi lati), per tale ragione se avremo sottratto l'area del rombo *abcd*, che è il doppio dell'area del quadrilatero *ef*, dal quadrato della stessa diagonale, ossia 120 da 169, rimarrà 49 la cui radice, ossia 7, corrisponde alla misura della differenza dei lati. Dunque l'area del quadrilatero è 60, e il lato maggiore supera il lato minore di 7; quanto misura ciascuno dei lati, eccetera.

<7.1> Allo stesso modo hai moltiplicato la diagonale maggiore del rombo per la diagonale minore, e il risultato è di 240; poi la diagonale maggiore supera la diagonale minore di 14: quanto misura dunque ciascuna delle diagonali? **<7.2>** Senza dubbio dal prodotto della metà di una delle diagonali per l'altra viene fuori l'area del rombo, dunque 240, ovvero una delle diagonali moltiplicata per l'altra dà come risultato il doppio dell'area del rombo. Dunque l'area del rombo è pari a 120, e corrisponde al doppio dell'area del rettangolo *ef*. L'area del rettangolo *ef* è allora pari a 60. **<7.3>** Da ciò deriva questo problema: vi è un rettangolo, la cui area è pari a 60; la somma del lato maggiore e del lato minore è pari a 7, ossia è la metà di 14, e corrisponde alla differenza della diagonale maggiore con la diagonale minore, ecc.

<8.1> Ancora: ho sommato le diagonali, e il risultato è stato pari a 34; poi, dal prodotto di una delle diagonali per l'altra è venuto fuori 240: a quanto corrisponde dunque la misura di ciascuna diagonale? **<8.2>** A dimostrazione di ciò, si tracci il segmento *ab* di 34 pertiche; e sia stato diviso in due parti uguali e altrettante diverse nei punti *g* e *d*; sia poi *ad* uguale alla diagonale minore; rimane dunque *db* uguale alla diagonale maggiore. Senza dubbio dal prodotto di *ad* per *db* più il quadrato della linea *dg* viene fuori il quadrato della linea *gb*, ossia di 17, che è pari a 289: se da questo avrai tolto il prodotto di *ad* per *db*, rimarrà 49 per il quadrato di *dg*. Dunque *dg* misura 7; aggiunto questo valore a *bg*, tutto il segmento *bd*, ossia il lato maggiore, sarà pari a 24: rimane *da* pari a 10, che corrisponde alla diagonale minore.

<9.1> Ancora: ho diviso la diagonale maggiore per la diagonale minore, e il risultato della divisione sarà pari a 2 + $\frac{2}{5}$, mentre l'area del rombo è pari a 120: quanto misura dunque ciascuna diagonale? **<9.2>** Dal momento che come il tutto sta al tutto, così una parte sta alla medesima parte, allora come la diagonale maggiore starà alla minore, e la metà della diagonale maggiore starà alla metà della diagonale minore. La metà della diagonale maggiore corrisponde al lato maggiore del quadrilatero *ef*, ossia alla linea *ae*, mentre la metà della diagonale minore corrisponde alla linea *eb*, ossia al lato minore. **<9.3>** Qusnfo infatti *tutti i numeri hanno una sola proporzione, e la stessa, i più grandi vengono divisi per i più piccoli, e il risultato della divisione sarà sempre identico*. Dunque se avremo diviso il lato maggiore del rettangolo *ef* per il minore, i risultato sarà ugualmente di 2 + $\frac{2}{5}$.

<10.1> Problema: l'area di un rettangolo è pari a 60, ovvero è pari alla metà dell'area di un rombo; ho diviso il lato maggiore per il lato minore, e il risultato è stato di 2 + $\frac{2}{5}$. Moltiplica perciò 1 per 2 + $\frac{2}{5}$: il risultato è pari a 2 + $\frac{2}{5}$. Moltiplicalo per 60: il risultato sarà di 144, la cui radice è pari a 12. Dividilo per il numero della proporzione, ossia per 1, e per 2 + $\frac{2}{5}$: i risultati saranno pari a 12 e a 5, che corrispondono rispettivamente alla misura dei lati del rettangolo, ossia alle metà delle diagonali. Dunque la diagonale maggiore misura 24, e la minore misura 10. **<10.2>** Se vuoi sapere da dove vengano questi risultati, si tracci il segmento *a* pari a 1, e sia *b* pari a 2 + $\frac{2}{5}$. Si moltiplichi quindi *a* per *b*, e il risultato sia *g*; si indichi poi con *d* il lato minore del rettangolo, e sia *e* il maggiore; infine si indichi con *f* l'area. Dal momento che il risultato della divisione del lato maggiore per il minore è pari a 2 + $\frac{2}{5}$, come 1 sta a 2 + $\frac{2}{5}$, allora come il lato minore sta al maggiore, cioè come *a* sta a *b*, così *d* sta a *e*, per cui il prodotto di *a* per *e* è uguale al prodotto di *b* per *d*. **<10.3>** Sia dunque il prodotto di *a* per *e*, ovvero di *b* per *d*, pari al numero *h*; se viene moltiplicato *h* per se stesso, il risultato è indicato con *i*. Si moltiplichi *g* per *f*: il risultato è *k*. Dico che il numero *k* è uguale al numero *i*. Hai senz'altro moltiplicato *a* per *b*, ed è venuto *g*; e hai moltiplicato *d* per *e*, ed è venuto *f*. Poi hai moltiplicato *g* per *f*, ed è venuto a fare *k*: dunque il numero *k* è risultato dal prodotto di *a* per *b*, per *d*, per *e*. **<10.4>** Parimenti hai moltiplicato *a* per *e* e hai indicato il risultato con *h*; hai poi moltiplicato *b* per *d*, e allo stesso modo hai indicato il risultato con *h*. Infine, hai moltiplicato *h* per *h* e hai indicato il risultato con *i*: dunque il totale del prodotto di *a* per *e*, per *b*, per *d*, è stato *i*. Ma il prodotto di *a* per *b*, per *d*, per *e*, è uguale al prodotto di *a* per *e*, per *b*, per *d*; dunque *k* è uguale a *i*, come ho detto prima. **<10.5>** Prima abbiamo senza dubbio moltiplicato *a* per *b*, e il risultato è stato di $2 + \frac{2}{5}$; l'abbiamo moltiplicato per l'area, ossia abbiamo moltiplicato *g* per *f*, e abbiamo ottenuto il numero *k*, ossia il numero *i* pari a 144; di questo abbiamo estratto la radice, che è stata indicata con *h*, perché dal prodotto di *h* per se stesso è venuto *i* come risultato: dunque *h* è pari a 12. E dal momento che dal prodotto di *a* per *e* viene *h*, ossia 12, anche *a* è uguale a *i*, perciò abbiamo diviso 12 per *i*, ossia *h* per *a*: il risultato è stato 12, che corrisponde a *e*, ossia al lato maggiore. **<10.6>** Allo stesso modo dal prodotto di *b* per *d* è venuto fuori *h*, ossia 12; *b* è pari a $2 + \frac{2}{5}$, per cui abbiamo diviso 12, ossia *h*, per *b*, ossia per $2 + \frac{2}{5}$, e abbiamo ottenuto *d*, ossia il lato minore, che era pari a 5. Infatti se l'area, ossia *f*, è pari a 100, allora *k*, ovvero *i*, è pari a 240, e la sua radice è indicata con *h*. Ma 240 è un numero che non ha radice; pertanto non potendo dividere *h* per *a* e per *b*, considereremo i loro quadrati, e li divideremo per il numero *i*. **<10.7>** Oppure, in altro modo, considerermo il rapporto in numeri interi che l'unità *a* ha con *b*, e sarà di 5 a 12. Sia dunque *a* pari a 5, *b* pari a 12, e *g* pari a 60, per cui *k* ovvero *i* sarà pari a 6000; divideremo questo per i quadrati dei numeri *a* e *b*, ossia per 25 e 144; il risultato sarà la radice di 240 per la misura del lato maggiore, mentre per la misura del lato minore sarà la radice di $41 + \frac{2}{3}$. **<10.8>** Oppure in altro modo, poni il lato minore pari all'incognita: il lato maggiore sarà uguale a 2 incognite + $\frac{2}{5}$ di incognita: moltiplica dunque l'incognita per 2 incognite + $\frac{2}{5}$: il risultato sarà pari a 2 censi e $\frac{2}{5}$ di censo, che equivalgono alla misura della data area. Sia dunque la data area pari a 100, e dividila per $2 + \frac{2}{5}$: il risultato sarà $41 + \frac{2}{3}$, la cui radice è *d*, ossia corrisponde al lato minore. **<10.9>**

Dal momento che come *a* sta a *b*, così *d* sta a *e*, allora come il quadrato del numero *a* starà al quadrato del numero *b*, così il quadrato della quantità *d* starà al quadrato della quantità *e*; perciò moltiplica il quadrato del numero *b* per il quadrato della quantità *d*, ossia 144 per 41 + $\frac{2}{3}$, e dividi il risultato per il quadrato del numero *a*, ossia per 25: il risultato sarà 250, la cui radice corrisponde alla misura del lato maggiore.

Fine della parte concernente il rombo.

<2>

Paragrafo secondo: il romboide

<1.1> Il rumboide è un tipo di parallelogramma che ha uguali soltanto i lati e gli angoli opposti, come ho detto prima. **<1.2>** Se vogliamo conoscere l'area di questa figura, protrarremo al suo interno una diagonale, attraverso cui la figura sarà stata divisa in due triangoli uguali: perciò, *se avremo moltiplicato una delle perpendicolari per l'intera base, ovvero per la sua diagonale, otterrem come risultato l'area del romboide*.

<2.1> A dimostrazione di ciò, sia dato il romboide *abcd* i cui lati *ab* e *cd* misurino 30 pertiche, i quali sono tra loro opposti e paralleli. Gli altri due lati *ac* e *bd* sono allo stesso modo uguali ed equidistanti, e misurano ciascuno 13 pertiche. Sia poi la diagonale *bc* della misura di 37 pertiche, e da essa il romboide *abcd* sia stato diviso in due triangoli uguali, che sono *abc* e *dbc*, ciascuno dei quali ampligonio, perché il quadrato della diagonale *bc* è maggiore della somma dei quadrati dei lati *ba* e *ac*, ovvero dei lati *bd* e *dc*. Sulla base *bc* si tracci poi la perpendicolare a partire dal punto *a* all'interno del triangolo *abc*, e la si indichi con *ae*. Poi moltiplicherai la perpendicolare *ae* per la base *cb*, e otterrai l'area di tutto il romboide *abcd*. **<2.2>** Oppure troverai la perpendicolare *df* all'interno del triangolo *bcd* sulla base *bc*; moltiplicherai poi questa perpendicolare *df* per la base *bc*, e otterrai allo stesso modo l'area del romboide *abcd*. **<2.3>** Esempio: il romboide *abcd* è doppio del triangolo *bcd*, la cui area si ottiene dal prodotto della perpendicolare *df* per metà base *bc*: perciò il prodotto della perpendicolare *df* per tutta la base *bc* dà come risultato il doppio dell'area del triangolo *bdc*, ossia dà come risultato l'area di tutto il romboide, il quale è pari al doppio del triangolo *bcd*. Infatti troverai che entrambe le perpendicolari *ae* e *df* sono pari a 9 pertiche +

$\frac{27}{37}$, e moltiplicate queste per la diagonale *bc*, ossia per 37, il risultato è di 360 pertiche per l'area di tutto il romboide *abcd*.

<3.1> Allo stesso modo se al di fuori del triangolo *bcd* avrai protratto la perpendicolare *bg* sulla base *cg*, e l'avrai moltiplicata per la base del triangolo, ossia per la linea *cd*, otterrai l'area di tutto il rumboide *abcd*. Allo stesso modo il prodotto della perpendicolare *ch* per la base *ab* darà come risultato l'area di questo romboide. Ma entrambe le perpendicolari si rinvengono attraverso il procedimento che ho illustrato prima a proposito del triangolo ottusangolo. **<3.2>** Esempio: la somma dei quadrati dei lati *ca* e *ab*, ovvero *bd* e *dc*, ossia 169 più 900, meno il quadrato del lato *bc*, ossia da 1369, dà come risultato 300, la cui metà, divisa per la base *cd*, ossia per 30, darà come risultato 5 per la misura della linea *dg* ovvero *ah*; il quadrato di questa, ossia 25, sottratta dal quadrato di *bd*, ossia di 169, dà come risultato 144, la cui radice, ossia 12, corrisponde alla misura della perpendicolare *bg*; il prodotto di questa per la base *cd*, ossia di 12 per 30, dà come risultato 360 pertiche per l'area del detto romboide, come abbiamo visto prima.

<4.1> Senza dubbio l'area di questo romboide si calcola attraverso le altre due perpendicolari *di* e *ak*, e si rinvengono attraverso la diagonale *ad* e i lati del romboide, perché, tracciata la diagonale, questo romboide si divide in due triangoli acutangoli, come si vede in quest'altra figura; uno di questi è il triangolo *acd*, l'altro è il triangolo *abd*; la perpendicolare *id*, ossia *ak*, misura 12 pertiche. **<4.2>** Nota che, da *a* a *i*, in ogni punto la perpendicolare sarà stata protratta all'interno del romboide tra i punti *k* e *d*, essa cadrà sulla linea *kd*. Puoi trovare l'esatto punto in cui la perpendicolare cade attraverso i procedimenti che ho illustrato a proposito dei triangoli acutangoli, oppure con l'ausilio di una lensa secondo il metodo che ho spiegato all'interno del paragrafo relativo ai triangoli.

<5.1> Vi è poi il caso del romboide che viene diviso in due triangoli rettangoli attraverso la diagonale minore, come il rumboide *bcde*, in cui i lati *bc* e *de* misurano 35 pertiche; gli altri due lati *bd* e *ce* misurano poi 37 pertiche, e la diagonale minore *be* misura 12 pertiche. **<5.2>** Dico perciò che il romboide *bcde* è stato diviso in due triangoli rettangoli perché il quadrato della linea *ec* è uguale alla somma dei quadrati delle linee *cb* e *be*, per cui l'angolo *cbe* è retto. Allo stesso modo si riscontra che l'angolo *bed* è retto. Il triangolo *cbe* è inoltre uguale al triangolo *bed*. **<5.3>** Dal momento che dal prodotto della perpendicolare *be* per la metà della base *ed* deriva l'area del triangolo *bed*, se avremo moltiplicato la diagonale *be* per il lato *ed*, otterremo 420 pertiche per la misura dell'area di tutto il romboide *bcde*. Lo stesso vale per il romboide che venga diviso da una qualsiasi delle diagonali in due triangoli ottusangoli.

<3>

Paragrafo terzo: il trapezio, del quale esistono quattro tipologie

<1>

<1.1> Il primo tipo di quadrilatero di questo terzo paragrafo è una figura che viene detta "capo ugualmente tagliato"[10], la quale presenta due lati paralleli di diversa lunghezza, e altri due lati uguali tra loro, come ad esempio il trapezio *abcd*, il cui lato *ab* misura 8 pertiche, ed è parallelo al lato *cd* che misura 18 pertiche, mentre gli altri due lati *ac* e *bd* misurano 13 pertiche ciascuno. **<1.2>** In questa figura, il lato *ab* è definito base minore e il lato *cd* è definito base maggiore[11], e l'area si calcola attraverso il prodotto dell'altezza per la metà della somma dei lati *ab* e *cd*, la quale altezza viene condotta dalla base minore alla base maggiore. **<1.3>** Da ciò, se dal punto *a* oppure dal punto *b* avrai voluto tracciare la perpendicolare sulla base *cd*, sottrai la base minore, ossia 8, dalla base maggiore, ovvero da 18: il risultato è 10, la cui metà, ossia 5, corrisponderà alla misura del segmento *ce* ovvero *df*. Infatti la perpendicolare cade dal punto *a* sul punto *e*; invece dal punto *b* la perpendicolare cade su *f*, per cui se sottrarrai il quadrato di *ce* dal quadrato di *ae*, ovvero il quadrato di *df* dal quadrato di *bd*, ossia 25 da 169, rimarrà 144 la cui radice, che è 12, corrisponde alla misura della perpendicolare *ae* ovvero di *bf*: moltiplicato, poi, 12 per la metà della somma dei lati *ab* e *cd*, ossia per la metà di 26, che è 13, il risultato è pari a 156 per la misura

[10] Letteralmente *eque caput abscisa*, corrisponde al trapezio isoscele. Cfr. HUGHES 2008, p. xxxii.

[11] Abraham Ibn Ezra, matematico ed erudito vissuto a cavallo tra l'XI e il XII secolo e autore di un libro di aritmetica e geometria di cui possediamo sia la versione ebraica sia la traduzione latina, utilizza il termine *caput* per indicare la base minore di un trapezio isoscele. Cfr. Abraham Ibn Ezra, *Sefer ha-Middot*, pp. 220-221: *figura quarta cum capite ampio et lateribus equalibus. Caput constat ex 4 et omnia latera 10 et septima 16. Minue caput de septima; remanent 12, et accipe quadratum medietatis et minue de quadrato unius lateris, et accipe ra<dicem> residui, que est 8, et tanta est columna; quam si multiplicas super medietatem septime cum medietate capitis, habes aream*.

di questo quadrilatero *abcd*. **<1.4>** Esempio: dopo aver tracciato le perpendicolari *ae* e *bf*, si ottiene il rettangolo *aefb*; la sua area si calcola attraverso il prodotto della perpendicolare *ae* per *ef*, ed *ef* è uguale alla linea *ab*: dunque *ef* misura 8 pertiche. Moltiplicato per questo le 12 pertiche della perpendicolare *ae*, il risultato è di 96 pertiche per l'area del quadrilatero *aefb*. Sottratto poi questo valore dal quadrilatero *abcd*, rimangono i due triangoli rettangoli uguali tra loro, che sono *aec* e *bfd*. Il prodotto infatti della perpendicolare *ae* per la metà di *ec* dà come risultato l'area del triangolo *aec*, per cui il prodotto della linea *ae* per tutta la linea *ec* dà come risultato la somma delle aree dei due triangoli *aec* e *bfd*, che è pari a 60; questa, più 96, ossia più l'area del quadrilatero *aefb*, dà 156 come risultato l'area del quadrilatero *abcd*, come ho detto prima. Se infatti avrai voluto calcolare la misura della diagonale *da*, ovvero di *cb*, addiziona il quadrato della linea *de* ovvero della linea *cf*, che è pari a 169, al quadrato della perpendicolare *ae* ovvero *bf*, che è di 144: il risultato sarà di 313, la cui radice corrisponde alla lunghezza della perpendicolare *da*, ovvero di *bc*.

<2.1> Se vuoi determinare il punto in cui si intersecano le diagonali, addiziona base minore e base maggiore: il risultato sarà di 26. Moltiplica questo valore per se stesso: il risultato sarà di 676. Allo stesso modo moltiplica per se stessa la base minore *ab*: il risultato sarà di 64. Moltiplica poi la base maggiore per se stessa: il risultato sarà di 324. Moltiplica dunque 64 per il quadrato di una delle diagonali, ossia per 313, e dividi il risultato per 676; oppure moltiplica la quarta parte di 64, ossia 16, per 313, e dividi il tutto per la quarta parte di 676, cioè per 169: il risultato sarà di $29 + 8 + \frac{3}{13}$ [12], la cui radice corrisponde alla misura della linea *ag*, ovvero di *bg*. Allo stesso modo moltiplica la quarta parte di 324, ossia 81, per 313, dividi il risultato per la quarta parte di 676, ossia per 169, e avrai come risultato il quadrato della linea *gc* ovvero *gd*. **<2.2>** Annota che per questo motivo abbiamo tenuto conto dei quadrati delle predette linee, perché 313, ossia il quadrato di una delle diagonali, non ha radice. Infatti se la misura della diagonale fosse stata pari a un numero razionale, avremmo moltiplicato 8 per 18, e avremmo diviso il risultato per 26; in questo modo avremo avuto il punto di intersezione delle diagonali. Intendiamo dimostrare tutto ciò geometricamente.

[12] Il numero $\frac{3}{13}\frac{8}{13}29$ corrisponde, secondo l'uso moderno, alla somma di $29 + \frac{107}{169}$. Il numero va letto da destra a sinistra secondo il seguente criterio:169 è pari al prodotto di 13 per se stesso; 107 diviso 13 dà come risultato 8, col resto di 3.

<2.3> Dal momento che il segmento *ab* è parallelo alla linea *cd*, il triangolo *abg* è simile al triangolo *dgc*; l'angolo *abg* è poi uguale all'angolo *gcd*; l'angolo *bag* è uguale all'angolo *gdc*, per cui come *ab* sta a *bg*, così *dc* sta a *gc*; viceversa come *ab* sta a *cd*, così *bg* sta a *gc*. Allo stesso modo, di nuovo, come *ab* sta a *cd*, così *ag* sta a *gd*. Infatti *ab* corrisponde ai $\frac{4}{9}$ di *cd*: allo stesso modo, perciò, *bg* è pari ai $\frac{4}{9}$ di *gc*, e *ag* è pari ai $\frac{4}{9}$ di *gd*. **<2.4>** Dal momento che disgiunte sono in proporzione tra loro, saranno in proporzione tra loro anche congiunte. Pertanto, come *ab* sta a se stessa e a *cd*, cioè come 8 sta a 26, ovvero, o meglio 4 sta a 13, i quali sono i numeri più piccoli dotati della medesima proporzione, così *bg* sta a all'intera linea *bc*, e *ag* sta all'intera linea *ad*. Dunque *bg* corrisponde a $\frac{4}{13}$ di *bc*, e *ag* equivale allo stesso modo a $\frac{4}{13}$ di *ad*, per cui, se razionale, prenderemo i $\frac{4}{13}$ della diagonale *bc* e avremo in totale la misura della linea *bg* ovvero della linea *ag*. **<2.5>** Il segmento che resta, *gc* ovvero *gd*, misura $\frac{9}{13}$ di tutta la diagonale. Ma dal momento che il quadrato della diagonale, ossia di 313, non ha radice intera, abbiamo preso in considerazione il quadrato di 4 e quello di 13, ossia 16 e 169; poi abbiamo moltiplicato 16 per 313 e abbiamo diviso il risultato per 169, perché come *ab* sta a se stessa e a *cd*, così *bg* sta a *bc*: perciò come il quadrato della linea *ab* starà al quadrato del risultato della somma delle linee *ab* e *cd*, ossia come 64 starà a 676, o meglio come la quarta parte di 64 sta alla quarta parte di 676, ossia come 16 sta a 169, così il quadrato della linea *bg* sta al quadrato della diagonale *bc*, ossia a 313, e nella medesima proporzione il quadrato della linea *ag* sta al quadrato della linea *ad*, per cui il segmento *ag* è uguale al segmento *bg*: essi infatti hanno la stessa proporzione. **<2.6>** Poi, dal momento che, sottraendo quantità uguali da uguali quantità, quel che resta è uguale, allora il segmento *gc* è uguale al segmento *gd*, come entrambi stanno all'intera diagonale, ossia alla radice di 313, così il segmento *cd* sta a se stesso e al segmento *ab*. Questo rapporto è identico a quello di 9 a 13, sicché il quadrato della linea *gc*, ovvero di *gd*, sta a 313, ossia al quadrato della diagonale, come il quadrato di 9 sta al quadrato di 13, ossia come 81 sta a 169. Per questo motivo prima abbiamo moltiplicato 81 per 313 e abbiamo diviso il risultato per 169, e abbiamo ottenuto come risultato il quadrato della linea *gc*, ovvero della linea *gd*, come volevasi dimostrare.

<3.1> Se infatti si protraggono le linee *ca* e *db* dalla parte di *a* e di *b*, fino a farle incontrare nel punto *h*, come in questa figura, in cui il quadrilatero *abcd* viene trasformato nel triangolo *hcd*, e vorresti conoscere la misura della linea *ah* ossia *bh*: sottrai la metà della base minore dalla metà della base maggiore del trapezio, ossia 4 da 9; dividi poi per il risultato, ossia per 5, il prodotto della base minore per la linea *ca*, ossia di 4 per 13: il risultato sarà pari a 10 + $\frac{2}{5}$ per la misura della linea *ah*, ovvero di *bh*. **<3.2>** Se avrai moltiplicato il medesimo 4 per la perpendicolare *ae*, ossia per 12, e avrai diviso il risultato per 5, uscirà 9 + $\frac{2}{5}$ per la misura della perpendicolare del triangolo *hab*, ossia per la linea *ih*: protratta questa fino al punto *k*, tutta la linea *hk* corrisponderà alla perpendicolare del triangolo *hcd*. Dal momento che nel triangolo *hcd* è stato protratto un certo segmento *ab* parallelo alla base *cd*, il triangolo *hab* sarà simile al triangolo *hcd*, e ciò significa che hanno gli angoli uguali tra loro, vale a dire l'angolo *hab* uguale all'angolo *hcd*, cioè l'angolo esterno uguale all'angolo interno; allo stesso modo l'angolo *hba* è uguale all'angolo in *d*; l'angolo *ahb* è invece in comune.

<4.1> In verità i triangoli simili hanno in proporzione i lati posti intorno agli angoli uguali, come è dichiarato in Geometria, per cui come il lato *ha* sta al lato *ab*, così il lato *hc* sta al lato *cd*; e come *hb* sta a *ba*, così *hd* sta a *dc*; viceversa allora come *ha* sta a *hc*, così *hb* sta a *hd*, e *ab* a *cd*. **<4.2>** Di nuovo come *ab*, ossia come la base del triangolo *hab*, sta alla base *cd*, così il lato *ha* sta al lato *hc*, e *hb* sta a *hd*, nonché la perpendicolare *ih* sta alla perpendicolare *hk*: dunque la porzione che risulta dividendo *ab* per *cd*, ossia 8 per 18, sarà la medesima che risulterà dalla divisione di *ha*, ossia di 10 + $\frac{2}{5}$, per *ac*, ossia da 23 + $\frac{2}{5}$, dalla divisione di *hb* per *hd*, e dalla divisione della perpendicolare *ih* per la perpendicolare *hk*. Infatti 8 diviso 18 fa $\frac{4}{9}$, per cui *ha* diviso *hc* e *hb* diviso *hd*, ma anche *ih* diviso *hk* danno come risultato $\frac{4}{9}$.

<5.1> Anche in questa figura il triangolo *cea* è simile al triangolo *aih*, e infatti essi hanno gli angoli uguali: senza dubbio l'angolo *hia* è iuguale all'angolo *aec*, perché entrambi sono retti; anche l'angolo che sta in *c* è uguale all'angolo *iah*, perché la linea *ab* è parallela alla linea *cd*. Dunque l'angolo che rimane *ahi* è uguale all'angolo che rimane *cae*, perché la somma dei tre angoli interni di un qualsiasi triangolo è pari all'unione di due angoli retti. Infatti come *ce*, pari a 5, sta a *ea*, pari a 12, così *ai*, ossia 4, sta a *ih*. Per questo motivo prima abbiamo moltiplicato 4 per 12, abbiamo diviso il risultato per 5, e abbiamo ottenuto 9 + $\frac{3}{5}$ per la misura della perpendicolare *hi*. <**5.2**> Allo stesso modo come *ec* sta a *ca*, cioè come 5 sta a 13, così *ia*, ossia 4, sta a *ah*. Per questo motivo prima abbiamo moltiplicato 4 per 13, abbiamo diviso il risultato per 5, e abbiamo ottenuto 10 + $\frac{2}{5}$ per la misura della linea *ha*. Attraverso queste proporzioni, infatti, si possono trovare le altezze, le lunghezze e le profondità degli oggetti, come dimostreremo a tempo debito.

<2>

<**1.1**> Il secondo tipo di superficie di cui si discuterà all'interno di questo terzo paragrafo è una figura, che viene detta "semicapo tagliato"[13], all'interno della quale due lati sono paralleli ma non uguali, e due lati sono diversi; di questi, uno viene eretto al di sopra la base maggiore a formare un angolo retto, realizzando allo stesso modo un angolo retto anche con la base minore; l'altro, invece, viene eretto dall'altro capo della base, a formare con essa un angolo acuto, come ad esempio nel quadrilatero *abcd*, il cui lato *ad*, ossia la base minore, è parallelo alla base *bc*, ed è lungo 18 pertiche; la base maggiore *bc* misura 30 pertiche; la perpendicolare *ab* misura 16 pertiche; infine il lato *dc* misura 20 pertiche. <**1.2**> Dunque per calcolare l'area dell'intero trapezio, aggiungi 18 a 30, ossia la base minore alla base maggiore: il risultato sarà di 48; moltiplica poi la metà di questo, ossia 24, per la linea *ab*, ossia per 16, giacché essa viene eretta ortogonalmente: il risultato sarà di 384 pertiche per la misura dell'area del trapezio *abcd*. <**1.3**> Esempio: sul segmento *bc* viene tracciata la perpendicolare *de* partendo dal punto *d*: il trapezio *abcd* risulterà così diviso in due parti, ossia nel rettangolo *abed*, e nel triangolo rettangolo *dec*; *be* è uguale ad *ad*, e *ad* misura 18 pertiche, per cui anche *be* misura 18 pertiche; la perpendicolare *de*, poi, è uguale alla perpendicolare *ab*, e infatti entrambe misurano 16 pertiche: dunque l'area del quadrilatero *abed* misura 288 pertiche, e si ottiene attraverso il prodotto di *de* per *eb*, cioè di 16 per 18; invece l'area del triangolo *dec* si ottiene attraverso il prodotto della perpendicolare *de* per la metà di *ec*, ossia di 16 per 6: il risultato è

[13] Letteralmente *semicaput abscisa*, corrisponde al trapezio rettangolo. Cfr. HUGHES 2008, p. xxxii.

di 96, che sommato a 288, ossia all'area del rettangolo *abed*, dà come risultato 384 per il valore dell'area del trapezio *abcd*, come ho detto prima.

<2.1> Se vuoi conoscere la misura della diagonale *ac*, dal momento che il triangolo *abc* è rettangolo, aggiungi la somma dei quadrati delle linee *ab* e *bc*, ossia 256, a 900: il risultato sarà di 1156, la cui radice, ossia 34, corrisponde alla lunghezza della diagonale *ac*. Allo stesso modo per ottenere la misura della diagonale *bd*, aggiungi il quadrato della perpendicolare *de* al quadrato della base maggiore *eb*, ossia 256 a 324: il risultato sarà di 580, la cui radice, che è un numero irrazionale, corrisponde alla lunghezza della diagonale *bd*, per cui diremo che la diagonale *bd* equivale alla radice di 580, ovvero che il quadrato della diagonale *bd* è pari a 580. **<2.2>** Ma per conoscere il punto di intersezione delle diagonali, faremo come sopra, ossia addizioneremo la base minore alla base maggiore, ovvero 18 a 30, e il risultato sarà pari a 48: dunque come 18 sta a 48, così *af* sta all'intera diagonale *ac*. Infatti come 18 sta a 48, così 3 sta a 8, e come 3 sta a 8, così *af* sta a *ac*, per cui moltiplicheremo 3 per 34 e divideremo il risultato per 8, o meglio moltiplicheremo 3 per 17, e divideremo il risultato per 4: si avrà 12 + $\frac{3}{4}$ per la misura della linea *af*. La differenza di 34 meno questo valore è pari a 21 + $\frac{1}{4}$, e corrisponde alla misura della linea *fc*. **<2.3>** In modo simile, dal momento che il triangolo *afd* è simile al triangolo *bfc*, allora come *af* starà a *ac*, cioè come 3 sta a 18, così *df* sta a *db*; dunque *df* è pari a $\frac{3}{8}$ di *db*: rimane *fb* pari a $\frac{5}{8}$ di *db*. Ma perché la misura della linea *db* corrisponde a un numero irrazionale, ne considereremo il rapporto in quadrati. Perciò, come il quadrato di 3 sta al quadrato di 8, ossia come 9 sta a 64, così il quadrato della linea *df* è uguale al quadrato della diagonale *bd*, ossia a 580: pertanto moltiplicheremo 9 per 580 e divideremo il risultato per 64, oppure moltiplicheremo 9 per la quarta parte di 580, ossia per 145, e dividiremo il risultato per la quarta parte di 64, ossia per 16; faremo così perché dobbiamo sempre applicare la tecnica di semplificazione che ho insegnato nel *Liber Abaci*, ossia dobbiamo prendere i numeri più piccoli che stanno in rapporto tra loro quando si operino moltiplicazioni e divisioni. Infatti come 580 sta a 64, così la quarta parte di 580 sta alla quarta parte di 64: il risultato sarà pari a 81 + $\frac{9}{16}$ per il valore del quadrato della linea *df*. **<2.4>** Di nuovo, dal momento che la linea *fb* è pari a $\frac{5}{8}$ della diagonale *bd*, moltiplicherai il quadrato di 5, ossia

25, per 145, e divideremo il totale per 16: il risultato sarà 226 + $\frac{9}{16}$ per il valore del quadrato della linea *fb*.

<3.1> Infatti se i segmenti *ba* e *cd* siano stati estesi lungo i punti *a* e *d* fino a farli incontrare nel punto *g*, come si vede in quest'altra figura, e vuoi calcolare la lunghezza della linea *ag*, moltiplica *ed* per *da*, ossia 16 per 18, e dividi il risultato per *ce*, ossia per 12: il totale sarà pari a 24. **<3.2>** Infatti il triangolo *dec* è simile al triangolo *gad*; perciò come *ce* sta a *ed*, così *da* sta a *ag*: ugualmente come *ec* starà a *cd*, così *ad* starà a *dg*, per cui il risultato del prodotto di *cd*, ossia di 20, per *da*, ossia per 18, diviso per *ec*, dà in totale 30 per la lunghezza di *dg*, come si vede nella figura sopra illustrata.

<3>

<1.1> Infine il terzo tipo di figura di questo terzo paragrafo viene definita "capo diversamente tagliato"[14], e al suo interno la base maggiore e la base minore sono parallele tra loro e di diversa lunghezza. Gli altri due lati si ergono invece a formare un angolo acuto con la base minore, e sono anch'essi diversi tra loro, come all'interno del trapezio *abcd*, all'interno del quale la base minore *ab* misura 10 pertiche ed è parallela alla base maggiore *cd*, della misura di 24 pertiche; il lato *ac* poi misura 13 pertiche; il lato *bd* invece 15. L'area di questa figura si calcola attraverso il prodotto della perpendicolare, che viene condotta dalla base minore sulla base maggiore, per la metà della somma della base minore con la base maggiore. **<1.2>** Ma se vuoi tracciare questa perpendicolare dal punto *a* o dal punto *b* sulla base maggiore *cd*, è opportuno in primo luogo trovare i punti su cui queste perpendicolari cadano. Il metodo per individuarli consiste nel sottrarre la base minore dalla base maggiore, ossia 10 da 24: rimane 14; poi sottrai il quadrato del lato *ac*, ossia 169, dal quadrato del lato *bd*, ossia da 225: rimane 56; dividilo per il 14 sopra riportato: il risultato sarà pari a 4; aggiungilo a 14: il risultato sarà 18, la cui metà, ossia 9, corrisponde alla misura del segmento maggiore *de* dalla parte del lato *bd*; la differenza di 14 meno 9 è 5, e corrisponde alla lunghezza del segmento minore *fc* dalla parte del lato *ac*, come ho detto a proposito dei triangoli acutangoli. **<1.3>** Senza dubbio, sottratto il quadrato del segmento minore, ossia

[14] Letteralmente *diverse caput abscisa*, corrisponde al trapezio scaleno. Cfr. HUGHES 2008, p. xxxii.

di *cf*, che è pari a 25, dal quadrato del lato *ac*, ossia da 169, rimane 144, la cui radice, ossia 12, corrisponde alla misura della perpendicolare *af*. In modo simile sottratto il quadrato di *ed* dal quadrato di *bd*, rimarrà il quadrato di *be* pari a 144; perciò *be* è pari a 12, come *af*. Senza dubbio la somma della base minore più la base maggiore, ossia di 10 più 24, fa 34, la cui metà, ossia 17, moltiplicata per la perpendicolare *af*, oppure per *be*, insomma per 12, dà come risultato 204 per l'area del trapezio *abcd*.

<2.1> Otterrai anche la misura del quadrato della diagonale *cb*, se aggiungerai il quadrato della linea *ce* al quadrato della perpendicolare *eb*, ed il risultato di tale addizione è 369, la cui radice corrisponde alla misura della perpendicolare *cb*. **<2.2>** Se poi desideri determinare il punto in cui si intersechi la perpendicolare *af*, potrai agire in due modi: primo, dal momento che la linea *ab* è parallela alla linea *cf*, allora come *ab* sta a se stessa e a *cf*, così *ag* sta a *af*; dunque *ag* corrisponde a $\frac{2}{3}$ di *af*, cioè a 8: rimane *gf* pari a 4. **<2.3>** Infatti i triangoli *agb* e *cgf* sono simili tra loro. Similmente anche *bg* è $\frac{2}{3}$ di *bc*, ossia il suo quadrato è $\frac{4}{9}$ del quadrato della sua diagonale, per cui moltiplica 4 per 369, e dividi il risultato per 9; ovvero moltiplica la nona parte di 369 per 4: il risultato sarà pari a 169 per il quadrato della linea *bg*. E dal momento che *bg* corrisponde a $\frac{2}{3}$ di *bc*, rimane *gc* pari a $\frac{1}{3}$ di *bc*: perciò il suo quadrato è pari alla nona parte di 369, ossia a 41.

<3.1> Altrimenti, dal momento che i triangoli *ceb* e *cfg* sono simili tra loro, come *cf* sta a *ce*, così *fg* sta a *eb*, ossia alla terza parte: dunque *fg* è pari a 4, come ho detto prima. Similmente, per tale ragione, anche *cg* equivale a $\frac{1}{3}$ di *cb*, ecc. **<3.2>** Infatti, in base a quanto illustrato in questa parte del terzo paragrafo, possiamo calcolare anche nei triangoli la diagonale *da*, e conoscere il punto in cui si interseca con la perpendicolare *be*, nonché dove si incontra con la diagonale *bc*. Se dagli angoli in *c* e in *d* oppure da un qualsiasi altro punto posto sul segmento *cd*, o all'interno o all'esterno della figura, viene tracciata una linea sulle date porzioni dei lati *db* e *ca*, e viene emessa al di fuori della figura parimenti con la linea *ab* fino a farle congiungere, possiamo determinare il punto in cui si congiungono, nonché la lunghezza delle linee che sono state protratte. **<3.3>** Se quindi vorrai condurre al di fuori della figura i lati *ca* e *db*, fino a farli incontrare nel punto *h*, sottrai la base minore, ossia 10, dalla base maggiore, ossia da 24; dividi poi il risultato di questa operazione, ossia 14, per il prodotto della base minore *ab* per il lato *ac*, ossia di 10 per 12: il risultato sarà di 9 + $\frac{2}{7}$ per la lunghezza della linea *ah*. In questo modo se avrai diviso il risultato del prodotto di *ab* per *bd*, ossia di 10 per 15, per 14, il risultato sarà di 10 + $\frac{5}{7}$ per la lunghezza della linea *bh*.

<4>

<1.1> Il quarto tipo di figura, infine, viene definita "capo chinante"[15], e di questa la base minore e la base maggiore sono diverse e parallele; degli altri due lati uno si eleva al di sopra della base maggiore a formare un angolo acuto, l'altro invece forma un angolo ottuso, come nel trapezio *abcd* disegnato qui sotto, in cui la base minore *ad* misura 12 pertiche, la base maggiore invece 16 pertiche, il lato *ab* 15 pertiche, il lato *dc* 13 pertiche: l'area di questa figura si calcola attraverso il prodotto della perpendicolare per la metà della somma della base minore con la base maggiore. **<1.2>** La perpendicolare, infatti, cade dal punto *a* sulla base *bc* all'interno del trapezio *abcd*; invece dal punto *d* la perpendicolare cadrà all'esterno della figura, per cui al fine di calcolare la misura della perpendicolare interna e di quella esterna, è opportuno calcolare in primo luogo il punto su cui essa cade, e il metodo per individuarlo consiste nel sottrarre la base minore dalla base maggiore, ossia 12 da 16, e rimane 4; il quadrato di questo, ossia 16, viene sommato al quadrato del lato *cd*, ossia a 169: il risultato sarà 185; lo si sottrae dal quadrato di *ab*, ossia da 225: rimane 40, la cui metà, ossia 20, deve essere divisa per il 4 di prima: il risultato sarà pari a 5 per la misura del segmento esterno *ce*, come ho già indicato a proposito del triangolo acutangolo. **<1.3>** Dopo aver sommato 5 alla base *cb*, ossia a 16, il risultato è pari a 21 per la misura di tutta la linea *eb*. Dopo aver sottratto da questo 12, ossia la misura della base minore, rimane 9 per la misura del segmento interno *fb*, per cui se si sottrae il quadrato di questo, ossia 81, dal quadrato del lato *ba*, cioè da 225; oppure se si sottrae il quadrato di *ce*, ossia 25, dal quadrato di *cd*, ossia da 169, rimarrà 144 la cui radice, ossia 12, corrisponde alla misura della perpendicolare *af* ovvero della perpendicolare *de*: questo valore, moltiplicato per la metà della base minore e

[15] Letteralmente *caput abscisa declinans*, corrisponde al trapeziode. Cfr. HUGHES 2008, p. xxxii.

della base maggiore, ossia per 14, dà come risultato 168 per l'area di tuto il trapezio *abcd*. **<1.4>** In questo tipo di figura, che viene definita "capo declinante", si originano due perpendicolari che vanno dagli angoli della base minore verso la base maggiore, ma una cade all'interno, l'altra invece all'esterno, come si vede nella figura disegnata sopra. Quando una perpendicolare cade all'interno della figura sull'angolo della base maggiore, che è opposto a quello della base minore da cui si origina appunto la perpendicolare, l'altra cade all'esterno; quando invece entrambe cadono all'esterno, come si vede in queste figure sopra disegnate, le loro perpendicolari si calcolano in base a quanto ho dimostrato prima.

<2.1> Senza dubbio 441 corrisponde al quadrato di *be*, e 144 corrisponde a quello di *ed*; la loro somma fa 585 e corrisponde alla misura del quadrato della diagonale *bd*. Allo stesso modo il quadrato della linea *cf*, ossia 49, più il quadrato della perpendicolare *fa*, che è pari a 144, darà come risultato 193 per la misura del quadrato della perpendicolare *ac*. Puoi senz'altro trovare il punto di intersezione delle diagonali attraverso gli espedienti che sono stati elencati prima. **<2.2>** Se poi avremo protratto fino al punto *k* i lati *ba* e *cd* lungo gli estremi *a* e *d*, senza dubbio il prodotto di *ka* per *kb*, e quello di *kb* e *kd* per *kc*, darà un risultato pari al prodotto di *ad* per *bc*, ossia a $\frac{3}{4}$, per cui *ab* corrisponde alla quarta parte di *kb*, e *dc* corrisponde alla quarta parte di *kc*. Per questo motivo, *ka* è pari al triplo di *ab*, e *kd* è pari al triplo di *dc*, e quindi *ka* è pari a 45, *kd* è pari a 29.

<4>

Terzo paragrafo, parte quarta: l'area dei quadrilateri irregolari.

<1.1> Sia noto il perimetro di un quadrilatero irregolare, come ad esempio il quadrilatero *abcd*, il cui lato *ab* è di 13 pertiche, il lato *bc* è di 15 pertiche, il lato *dc* è di 17 pertiche, il lato *da* è di 16 pertiche: quanto misura l'area di questo quadrilatero? Se si conosce la misura di una delle diagonali che divide il quadrilatero in due triangoli, la somma delle aree di queste due superfici restituisce l'area di tutto il quadrilatero. **<1.2>** Esempio: sia la diagonale *ac* di 14 pertiche, e sia l'area del triangolo *abc* pari a 84 pertiche; sia poi la superficie del triangolo *acd* pari a $104 + \frac{1}{3}$ pertiche: la somma delle loro aree dà come risultato $188 + \frac{1}{3}$ per l'area di tutto il quadrilatero *abcd*. Questo è il sistema universale per calcolare l'area di tutti i tipi di quadrilateri. **<1.3>** Oppure, secondo un altro procedimento, dal punto *a* si tracci il segmento *ae* parallelo al lato *bc*: in base alle cose che sono state dette nella parte precedente, si calcoli l'area del quadrilatero *abce*; ed essa si aggiunga l'area del triangolo *ade*: si otterrà così l'area di tutto il quadrilatero *abcd*.

<2.1> Vi è inoltre una figura, che è detta *barbata*[16], i cui lati sono allo stesso modo diversi tra loro, e in cui una delle diagonali cade all'interno, mentre l'altra cade all'esterno, come nel caso del quadrilatero *defg*, in cui la diagonale *eg* cade all'interno; dal punto *f* al punto *d*, poi, la linea *fd* cade al di fuori del quadrilatero *defg*. **<2.2>** Otterrai l'area di questa figura, se sommerai l'area del triangolo *deg* all'area del triangolo *feg*, oppure se sottrarrai l'area del triangolo *dgf* dall'area del triangolo *def*.

Fine della seconda parte della terza distinzione sul calcolo dell'area delle superfici quadrangolari.

[16] Come chiarisce SIMI 2004, p. 22: «il Pisano sembra sia stato il primo autore a prendere in considerazione un quadrilatero con angolo rientrante, definendolo *figura barbata*. Dopo di lui, tale figura, salvo qualche rara eccezione, venne dimenticata dagli abacisti del Medioevo e del primo Rinascimento. Una prima ed unica attestazione in volgare della *figura barbata* si trova nella carta 380v della *Praticha di geometria* contenuta nel codice Ottob. Lat. 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana».

<III>

Terza distinzione, parte terza.

Il calcolo dell’area dei poligoni.

<1>

<1> Il metodo per calcolare l’area dei poligoni consiste nel dividerli in triangoli e nel sommare le aree di tutti questi triangoli: così facendo, otterrai l’area di qualsiasi tipo di poligono. Bisogna osservare che un poligono di cinque lati come minimo viene diviso in tre triangoli, mentre un poligono di sei lati viene diviso in quattro triangoli: ogni poligono viene così sempre diviso in triangoli pari al numero dei suoi lati meno due. Ma sebbene l’area dei poligoni possa essere calcolata attraverso la loro risoluzione in triangoli, tuttavia possiamo procedere in modo talvolta più accurato. **<2>** Se la figura fosse un pentagono, se cioè presentasse cinque lati, potresti dividerla in due parti, una delle quali sarà un triangolo, e l’altra un quadrilatero in cui due lati saranno paralleli, come ad esempio il pentagono *abcde*, in cui tolto il triangolo *abe*, rimane il trapezio isoscele *ebcd*, il cui lato *bc* è parallelo al lato *ed*. Allora si calcola l’area del triangolo *abe*, l’aggiungerai all’area del quadrilatero *bcde*, e così si ottiene l’area del pentagono *abcde*. <**3**> Similmente da un esagono, ossia da una figura dotata di sei lati, formerai due quadrilateri, ciascuno dei quali costituito da due lati paralleli; oppure formerai un quadrilatero che presenti due lati tra loro paralleli, e due triangoli: questo è il procedimento che bisogna utilizzare relativamente ai restanti poligoni.

<2>

<1.1> Se il poligono di cui desideri calcolare l’area sarà equilatero ed equiangolo, puoi procedere in altro modo rispetto a quello or ora indicato, dal momento che in questo tipo di figura può essere inscritto un cerchio tangente alla metà di ciacuno dei lati. Moltiplicherai perciò il semidiametro di questo cerchio per il semiperimetro di questa figura, e otterrai l’area della figura. **<1.2>** A dimostrazione di ciò, si tracci il pentagono equilatero ed equiangolo *abcde* all’interno del quale vogliamo inscrivere un cerchio tangente ai lati, in questo modo: dividerò gli angoli *eab* e *abc* in due parti uguali attraverso le due linee *af* e *fb*, e traccerò le linee *fc*, *fd* e *fe*; segnerò poi i punti *g*, *h*, *i*, *k*, *l* nel mezzo dei suoi lati, e traccerò le linee *fg*, *fh*, *fi*, *fk* e *fl* che dimostrerò essere tra loro uguali. **<1.3>** Dal momento che il pentagono *abcde* è equiangolo, l'angolo *fab* sarà uguale all'angolo *fba*, essendo pari alla metà degli angoli del pentagono. Perciò il triangolo *fab* è isoscele, e ha uguali tra loro i lati che sottendono angoli uguali, perché il segmento *fa* è uguale al segmento *fb*, e *fg* è perpendicolare alla linea *ab*, giacché cade nel messo di esso: infatti *la*, essendo pari alla metà del segmento *ae*, è uguale al segmento *ag*. **<1.4>** Si tracci comunemente il segmento *fa*: la somma dei due segmenti *ga* e *af* sarà pari alla somma dei due segmenti *fa* e *al*; l'angolo *gaf* è poi uguale all'angolo *fal*, per cui anche la base *fl* è uguale alla base *fg*; l'angolo *afl* è uguale all'angolo *afg*. L'angolo *agf* è retto, come retto sarà l'angolo *alf*, per cui il segmento *fl* sarà uguale alla perpendicolare al segmento *ae*. E poiché *al* è uguale al segmento *el*, se comunemente si traccia il segmento *fl*, la somma dei due segmenti *fl* e *la* sarà pari alla somma dei due segmenti *fl* e *le*, e gli angoli in *l* saranno uguali, essendo entrambi retti, per cui il segmento *fe* è uguale al segmento *fa*; il triangolo *afl* è poi uguale al triangolo *lfe*, e tutto il triangolo *bfa* è uguale a tutto il triangolo *afe*.

<2.1> Si dimostrerà in maniera simile che uno qualsiasi dei segmenti *fh*, *fi* e *fk* è uguale a uno qualsiasi dei segmenti *fg* e *fl*, per cui, fissato il centro *f*, sarà inscritto il cerchio *ghikl* di raggio *fg* e *fh*, e il pentagono *abcde* sarà diviso in cinque triangoli uguali, che sono *fab*, *fbc*, *fcd*, *fde fea*; le perpendicolari che cadono al suo interno sono tra loro uguali, e sono *fg*, *fh*, *fi*, *fk* e *fl*. **<2.2>** Dal momento che dal prodotto di *fg* per metà *ab* deriva l'area del triangolo *fab*, se avremo moltiplicato il semidiametro del cerchio inscritto all'interno del pentagono, ossia *fg*, per cinque volte la metà di *ab*, cioè per il semiperimetro del pentagono, il risultato sarà pari a cinque volte l'area del triangolo *fab*, ovvero corrisponderà all'area del pentagono *abcde*, come ho detto prima.

<3.1> Similmente avverrà per ogni figura che sia equilatera ed equiangola, all'interno della quale sia possibile inscrivere un cerchio. Da ciò risulta infatti chiaro, che il prodotto del semidiametro di un cerchio per la metà della linea della circonferenza, dà come risultato l'area di questo cerchio. **<3.2>** Possiamo però calcolare anche in altro modo l'area di un pentagono equilatero ed equiangolo, inscritto all'interno di un cerchio che ne comprenda tutti gli angoli. Si moltiplichi la metà e la quarta parte del suo diametro per la metà e la terza parte della corda dell'angolo del pentagono, e il risultato corrisponderà all'area di questo. <**3.3**> A dimostrazione di ciò, sia dato il pentagono *abgde* inscritto all'interno del cerchio *abgde*, il cui diametro sia *az*, e il cui centro sia *c*; si tracci poi il segmento *be*, che corrisponde alla corda dell'angolo del pentagono *bae*; si prenda poi *ci*, che corrisponde alla metà del semidiametro *cz*: tutta la linea *ai* sarà dunque pari alla metà più la quarta parte del diametro *az*, e come *ai* sta a *ac*, così *te* sta a *tk*. <**3.4**> Infatti *ac* è pari a $\frac{2}{3}$ di *ai*: in modo simile, anche *tk* è pari a $\frac{2}{3}$ di *te*, ossia di *tb*; senza dubbio *bt* è uguale a *te*, per cui *tk* corrisponde alla terza parte di tutta la corda *be*, e *bk* corrisponde alla metà più la terza parte della corda *be*. Dico che il risultato del prodotto di *ai* per *bk* è pari senz'altro all'area del pentagono *abgde*, e ciò si dimostra in questo modo: come *ia* sta a *ac*, così *te* ta a *tk*, così il prodotto di *ca* per *te*, ovvero per *tb*, sarà pari al prodotto di *ia* per *tk*. Ma il prodotto di *ca* per *bt* è pari al doppio dell'area del triangolo *cba*: dunque dal prodotto di *ai* per *tk* viene fuori il doppio dell'area del triangolo *cba*. <**3.5**> Dal momento poi che *tk* corrisponde al doppio di *ek*, se avremo moltiplicato *ia* per *ek*, il risultato sarà pari all'area del triangolo *cba*, che corrisponde alla quinta parte del pentagono *abgde*, per cui se avremo moltiplicato *ai* per *bk*, ossia per cinque volte *ke*, il risultato corrisponderà a cinque volte l'area del triangolo *cba*. Ma dire cinque volte il triangolo *cba* significa appunto parlare del pentagono *abgde*: dunque dal prodotto di *ai* per *bk* viene fuori l'area del pentagono *abgde*, come ho detto prima.

<**4.1**> Bisogna notare che se il diametro del cerchio sarà corrispondente a un numero razionale, allora il lato del pentagono che verrà in esso inscritto sarà pari alla linea minore, ossia alla radice del quarto reciso, ovvero della quarta "abscissa", la quale "abscissa" consta di un numero meno una radice: di questi due termini, il termine più grande supera il più piccolo di una lunghezza che non si può misurare. La corda dell'angolo del pentagono corrisponderà alla linea maggiore, ossia alla radice del quarto binomio, che consiste nella somma di un numero più una radice, e il cui termine maggiore è più grande del minore di una lunghezza non si può misurare. Il lato del pentagono e la corda dell'angolo del pentagono corrispondono alle radici di questi termini. <**4.2**> Ad esempio, se il lato del pentagono *ab* corrisponderà alla radice di 40 meno la radice di 320, la corda

be sarà pari alla radice di 40 più la radice di 320, ponendo il diametro *az* pari a 8, come si vedrà al momento opportuno[17].

<5.1> Se invece la superficie non sarà rettilinea, come ad esempio nel caso del quadrilatero *abcdez*, i cui due lati *az* e *cd* sono rettilinei, mentre i restanti *abc* e *dez* sono curvi, ti indicherò in che modo dovrai calcolare l'area di questa e di simili figure. **<5.2>** Si tracci senza indugio il segmento *ac*, dal punto *a* al punto *c*, e si tracci il segmento *dz*, dal punto *z* al punto *d*: ti impegnerai, poi, a calcolare l'area del quadrilatero rettilineo *acdz* secondo quanto è stato già detto. A questa aggiungi l'area del settore *zed*; poi, dal tutto, sottrai l'area del settore *abc*. Otterrai in totale l'area della superficie richiesta. **<5.3>** Indicherò ora in che modo si calcoli l'area del settore *zed*: fissa il punto *e* sulla metà dell'arco *zed*; unirai poi i segmenti *ez, ed*. Il triangolo *ezd* sarà rettilineo, e di tutto il settore *zed* rimarranno i settori *zge* e *eid*. Se, in ciascuno di essi, disporrai i triangoli secondo lo stesso procedimento, rimarranno quattro settori, che risolverai in triangoli rettilinei. Se si procederà sempre in questo modo per gli altri settori, non resterà nulla di misurabile di tutto il settore *zed*: pertanto, se sommerai l'area di tutti i triangoli compresi nel segmento *zed*, otterrai l'area del settore *zed*. Se opererai in questo modo anche a proposito del settore *abc*, ne otterrai ugualmente la misura dell'area.

[17] Come opportunamente rileva HUGHES 2008, p. 150, n. 185, Fibonacci fa qui riferimento alle pagine del *Liber Abaci* dedicate alla moltiplicazione tra radici e ai binomi (pp. 356-358 Boncompagni). In esse, a proposito dei binomi, *qui sunt ex duobus nominibus*, (Fibonacci, *Liber Abaci* p. 357, Boncompagni), l'autore afferma che *quartum quidem binomium est ex nominibus primi; sed maius nomen, scilicet numerus, non potest numerum quadratum super minus nomen, ut 4 et radix de 10. Nam 16, scilicet quadratus de 4, addet 6, scilicet numerum non quadratum, super 10* (Fibonacci, *Liber Abaci* p. 357, Boncompagni). I *recisa* sono *numeri autem, qui sunt decompositi ex predictis nominibus sex binomiorum [...] et sunt illud per ordinem, quod est inter utrumque nomen predictorum sex binomiorum* (Fibonacci, *Liber Abaci* p. 358, Boncompagni). Per questo passo, HUGHES 2008, p. 150, propone la seguente traduzione: «it must be noted that if the measure of the diameter of the circle is rational, then the side of the inscribed pentagon is a minor line. That is, it is the root of the fourth recised or fourth cut off lenght which consists of a number less a root. The greater of the two terms is more than the smaller. Further, the chord under the pentagonal angle is called the major line, is incommensurable in lenght with it, and is the root of the fourth binomium. It consists of a number and a root in which the larger term can be greater than the lesser. The side of the pentagon and the chord below the pentagonal angle are incommensurable with each other in lenght. For example: the pentagonal side *ab* is the root of 40 less the root of 320, and chord *be* is the root of 40 and the root of 320, together with the diameter *az* equal to 8, as will be shown in its place».

<IV>

Parte quarta: l’area del cerchio e delle sue frazioni

<1.1> Se vuoi calcolare l’area di una superficie rotonda, ovvero di un cerchio, procurati la misura del suo diametro; moltiplica poi questo valore per 3 più $\frac{1}{7}$, ovvero per il risultato di 22 diviso 7, e otterrai la lunghezza della linea che lo circonda e che ne delimita l’area. **<1.2>** Se avrai moltiplicato la metà del diametro per la metà della circonferenza, otterrai senza dubbio l’area del cerchio; oppure prendi gli $\frac{11}{14}$ del quadrato del suo diametro, e otterrai parimenti l’area del cerchio. **<1.3>** Oppure ancora se vuoi procedere secondo il metodo pisano, moltiplica il diametro per se stesso, dividi il risultato per 7, e così facendo otterrai l’area del cerchio espressa in panori. **<1.4>** Affinché tutte queste cose risultino più chiare, si tracci il cerchio *abgd*, all’interno di esso si fissino due punti *b* e *d*, e si tracci il segmento *bd*; lo si divida poi in due parti uguali nel punto *e*, e a partire da questo si tracci il segmento *ag* a formare due angoli retti con il segmento *bd*; il segmento *ag* sarà dunque il diametro del cerchio, e la sua metà indicherà il centro del cerchio, che è *z*. **<1.5>** Poniamo il diametro *ag* pari a 14 pertiche; se le avremo moltiplicate per 3 più $\frac{1}{7}$, otterremo in totale 44 pertiche per la misura della circonferenza *abgd*, che si definisce “periferia”. Oppure moltiplica 14 per 22 e dividi il risultato per 7, e il risultato sarà similmente 44 per la curva *abgd*; se avrai moltiplicato la metà di questo, ossia 22, per la metà del diametro, otterrai 154 per l’area del cerchio *abgd*. Oppure se avrai preso gli $\frac{11}{14}$ del quadrato del diametro, che è 196, ovvero se avrai moltiplicato 196 per 11 e avrai diviso il risultato per 14, o ancora moltiplica la quattordicesima parte di 196, che è 14, per 11, similmente otterrai 154 per l’area del cerchio. Ugualmente, se avrai moltiplicato il diametro per se stesso, il risultato sarà 196 che, diviso 7, darà come risultato 28 panori per l’area del cerchio *abgd*, ai quali equivalgono le 154 pertiche che sono state rinvenute prima, dal momento che un panoro corrisponde a 5 pertiche più $\frac{1}{2}$.

<2.1> Se poi desideri conoscere la misura del diametro di un cerchio partendo dalla sua circonferenza, dividi questa per 3 più $\frac{1}{7}$, oppure moltiplicala per 7 e dividila poi per 22. **<2.2>** Esempio: sia la circonferenza pari a 44: se la avremo moltiplicata per 7 e divisa per 22, ovvero se avremo moltiplicato per 7 la ventiduesima parte, otterremo senza dubbio 14 per la misura del suo diametro. <**2.3**> Se desideri calcolare l’area di un cerchio di cui conosci soltanto la circonferenza, moltiplica per 7 il quadrato di questa, e dividi il risultato per 22. <**2.4**> Esempio: la metà della curva *abgd* è 22, il cui quadrato è 484; questo, moltiplicato per 7, dà come risultato 3388, che diviso 22 fa 154, come ho calcolato prima; oppure se avremo diviso 484 per 22, il risultato sarà 22, che moltiplicato per 7 fa ugualmente 154.

<**3.1**> Se poi il diametro del cerchio sarà pari a 10, allora la misura della circonferenza sarà pari a 31 più $\frac{3}{7}$, che equivale al prodotto di 10 per 3 più $\frac{1}{7}$, per cui se avremo moltiplicato la metà del diametro, ossia 5, per la metà della circonferenza, ossia per 15 più $\frac{5}{7}$, il risultato sarà 78 più $\frac{3}{7}$. <**3.2**> Oppure se avremo moltiplicato il quadrato del diametro, ossia 100, per 11, e divideremo il totale per 14; <**3.3**> ovvero se avremo moltiplicato 11 per la metà di 100, e avremo diviso il totale per la metà di 14, ossia per 7, il risultato sarà di 78 più $\frac{4}{7}$ per la misura dell’area del cerchio sopra illustrato. <**3.4**> Oppure se avremo diviso 100 per 7, il risultato sarà di 14 panori più $\frac{2}{7}$, che equivalgono alle soprascritte 78 pertiche più $\frac{4}{7}$. Se poi vuoi convertire i $\frac{2}{7}$ di panoro nelle solite ripartizioni, cioè in soldi e denari, moltiplica il 2, che è al di sopra della linea di frazione, per quanti soldi sono in un panoro: il risultato sarà di 33 soldi, che diviso 7 darà come risultato 4 soldi e 8 denari più $\frac{4}{7}$. Dunque l’area del soprascritto cerchio è pari a 1 starioro, 2 panori, 4 soldi e 8 più $\frac{4}{7}$ denari. In questo modo devi ingegnarti a operare in casi simili.

<**4.1**> Se invece desideri conoscere per quale ragione dal prodotto del semidiametro per la metà della circonferenza verrà fuori l’area del cerchio, disegnerò di nuovo il cerchio *abgd*, il cui centro sia *e*; descriverò poi al suo interno un poligono regolare con quanti lati vorrai; sia poi il quadrilatero *abgd*, che a partire dal centro *e* dividerò in quattro triangoli, vale a dire in tanti triangoli quanti sono i lati del quadrato, che indicherò con *eab*, *ebg*, *egd*, *eda*. Ciascuno di essi è isoscele, essendo i lati *ea*, *eb*, *eg*, *ed* uguali tra loro. Infatti essi sono stati condotti dal centro alla circonferenza: pertanto, se all’interno di questi triangoli si traccino le perpendicolari a partire dal centro *e*, ciascuna di esse cadrà sulla metà

della base del triangolo corrispondente. <**4.2**> Perciò poniamo sulla metà delle basi di questi triangoli i punti *z*, *i*, *t*, *k*, attraverso i quali si conducano dal centro *e* alla circonferenza i segmenti *el*, *em*, *en*, *eo*; si traccino poi i segmenti *al*, *lb*, *bm*, *mg*, *gn*, *nd*, *do*, *oa*: sulle basi *ab*, *bg*, *gd* e *da* saranno così stati costruiti quattro triangoli. <**4.3**> Dal momento che il segmento *ez* è perpendicolare al segmento *ab*, se avremo moltiplicato *ez* per la metà di *ab*, il risultato sarà senz'altro l'area del triangolo *eab*. Similmente, dal momento che *lz* è perpendicolare all'interno del triangolo *lab*, il prodotto di *zl* per la metà di *ab* darà come risultato l'area del triangolo *lab*: perciò se avremo moltiplicato l'intera *el*, ossia il semidiametro del cerchio, per la metà di *ab*, si otterrà come risultato l'area del quadrilatero *ealb*. <**4.4**> In modo simile, se avremo moltiplicato *em*, ossia *el*, per la metà della linea *bg*, il risultato sarà l'area del quadrilatero *ebmg*. Allo stesso modo se avremo moltiplicato *en* per la metà di *gd*, ed *eo* per la metà di *da*, i rispettivi risultati saranno corrispondenti alle aree dei quadrilateri *egnd* e *edoa*; cioè se avremo moltiplicato *el*, ossia il semidiametro, per il semiperimetro del quadrilatero *abgd*, il risultato sarà corrispondente alla misura dell'area del poligono inscritto all'interno del cerchio. <**4.5**> Ma l'area di questo poligono, che è *albmgndo*, è di misura inferiore rispetto a quella dell'area del cerchio: dunque, dal prodotto del semidiametro del cerchio per la metà dei segmenti *ab*, *bg*, *gd*, *da*, verrà fuori una misura che è inferiore alla reale misura dell'area del cerchio; ma anche il semiperimetro di *abgd* è minore della metà della circonferenza *abgd*: dunque, dal prodotto del semidiametro del cerchio per meno della metà della circonferenza dello stesso, viene fuori un valore che è inferiore rispetto all'area del cerchio. <**4.6**> Abbiamo già dimostrato, nella precedente parte dedicata all'area dei poligoni descritti intorno a un cerchio, che dal prodotto del semidiametro del cerchio per più della metà della circonferenza, viene fuori un valore che è superiore rispetto a quello dell'area del cerchio: ne consegue quindi che dal prodotto del semidiametro del cerchio per la metà della circonferenza viene fuori l'area di questo.

<**5.1**> Bisogna ora chiedere di nuovo per quale motivo l'area del cerchio si calcoli considerando gli $\frac{11}{14}$ del quadrato del suo diametro. <**5.2**> Dal momento che l'area di un cerchio sta all'area di un altro cerchio, come il quadrato del diametro dell'uno sta al quadrato del diametro dell'altro, come ha dimostrato Euclide XII,

2, allora, viceversa, come il quadrato del diametro di un cerchio starà alla sua area, così tutti i quadrati dei diametri di tutti i cerchi staranno alle loro rispettive aree: per cui, nel momento in cui è stato determinato in che rapporto il quadrato del diametro di un cerchio sta alla sua area, in quel momento è stato determinato anche il rapporto con cui il quadrato del diametro di qualsiasi cerchio sta alla corrispondente area. **<5.3>** Nel nostro caso, il quadrato del diametro del soprascritto cerchio era pari a 196, l'area di questo era pari a 154, e il loro rapporto è pari a quello di 14 a 11, se questi valori vengono ridotti ai minimi termini: perciò come 14 starà al quadrato del diametro di un qualunque cerchio, così 11 starà all'area di questo. Per tale ragione quando avremo moltiplicato 11 per il quadrato del diametro di qualsiasi cerchio, e avremo diviso il risultato per 14, si otterrà l'area di questo cerchio, come volevasi dimostrare. **<5.4>** Similmente se convertiremo le 154 pertiche in panori, il risultato sarà di 28 panori: dunque come 196 starà a 28 panori, così il quadrato del diametro di qualunque cerchio starà all'area di questo espressa in panori. Ma 196 sta a 28 come 7 sta a 1: ciò significa che come 7 starà a 1, così il quadrato del diametro di un cerchio qualsiasi starà alla sua area espressa in panori. Perciò se avremo preso la settima parte del quadrato del diametro di un cerchio qualsiasi, ne otterremo senza dubbio l'area espressa in panori, come ho dimostrato sopra.

<6.1> Da notare che il rapporto di una quantità all'altra sarà uguale al rapporto del suo multiplo per il multiplo dell'altra, per cui il rapporto che sussiste tra il diametro del primo cerchio e il diametro del secondo, sarà uguale al rapporto tra la circonferenza del primo e quella del secondo. **<6.2>** Il medesimo rapporto sussisterà anche tra la metà della circonferenza del primo cerchio e la metà della circonferenza del secondo cerchio, per cui come il quadrato del diametro del primo cerchio starà al quadrato del diametro del secondo, così il quadrato della semicirconferenza del primo cerchio starà al quadrato della semicirconferenza del secondo. **<6.3>** Dal momento che come il quadrato del diametro del primo cerchio sta al quadrato del diametro del secondo, così l'area dell'uno sta all'area dell'altro: senza dubbio come il quadrato della semicirconferenza del primo cerchio starà al quadrato della semicirconferenza del secondo, così l'area del primo cerchio starà all'area del secondo. Viceversa dunque, come il quadrato della semicirconferenza del primo cerchio starà alla sua area, così il quadrato della semicirconferenza del secondo starà alla rispettiva area. **<6.4>** La metà della circonferenza del cerchio di cui sopra era pari a 22, il cui quadrato è 484; la sua area era di 154, e il loro rapporto nei minimi termini è di 22 a 7. Dunque come 22 sta a 7, così il quadrato della semicirconferenza di un qualunque cerchio sta alla sua area, per cui quando si moltiplica 7 per il quadrato della semicirconferenza di un qualsiasi cerchio, e si divide il totale per 22, si ottiene senza alcun dubbio l'area di questo cerchio

<**7.1**> Occorre ora indicare in che modo il filosofo Archimede abbia scoperto che la circonferenza di un cerchio corrisponde a $\frac{3}{7}$ del suo diametro. Quella fu una scoperta assai bella ed elegante: io non la riproporrò attraverso i numeri che egli ha era solito impiegare per la sua dimostrazione, giacché è pienamente possibile dimostrare, attraverso numeri piccoli, le cose che egli ha dimostrato utilizzando numeri grandi. <**7.2**> Si tracci il cerchio *abgd*, il cui diametro corrisponda alla linea *ag* e il centro sia *c*; traccerò poi la linea *ez* tangente al cerchio nel punto *a*, per cui il diametro *ag* è perpendicolare al segmento *ez*; poi sul segmento *ac*, e nel medesimo punto *c*, traccerò l'angolo *ace*, tale che corrisponda alla terza parte di un angolo retto: in questo modo l'angolo *aec* corrisponderà a $\frac{2}{3}$ di un angolo retto, essendo l'angolo *eac* retto. <**7.3**> La somma degli angoli interni di ogni genere di triangolo, infatti, equivale alla somma di due angoli retti. Giaccia poi il segmento *az* uguale al segmento *ae*, e si tracci il segmento *cz*: il triangolo *caz* sarà uguale al triangolo *cae*, e l'angolo *cza* è uguale all'angolo *cea*: ciascuno di essi, infatti, corrisponde a $\frac{2}{3}$ di un angolo retto. Similmente essendo l'angolo *ecz* pari al doppio dell'angolo *eca*, allo stesso modo l'angolo *ecz* sarà pari a $\frac{2}{3}$ dell'angolo retto: dunque il triangolo *cez* è equiangolo ed equilatero, per cui il segmento *ez* corrisponderà al lato di un esagono equilatero ed equiangolo descritto intorno al cerchio *abgd*. <**7.4**> Compiute nell'ordine tali cose, porrò *ce* pari a 30, per cui *ae* sarà pari a 15: dal momento che il triangolo *cae* è rettangolo, se dal quadrato del lato *ce* viene sottratto il quadrato del lato *ae*, ossia 225 da 900, rimarrà 675 per la misura del quadrato del lato *ca*. Dunque la misura del lato *ca* corrisponde alla radice di 675, che se estrarremo con precisione, troveremo essere secondo approssimazione pari a 26 pertiche meno 2 once più $\frac{1}{13}$. Una pertica infatti equivale a 108 once. <**7.5**> Si divida poi l'angolo *eca* in due parti uguali a partire dalla linea *cf*, tale che divida l'arco *ab* nel punto *y*.

Dal momento che, grazie alle dimostrazioni di Euclide, si comprende che angoli uguali al centro insistono su uguali porzioni di circonferenza, allora la porzione di circonferenza *ay* è uguale alla porzione di circonferenza *by*. Infatti il segmento *ae* era il semilato dell'esagono: perciò *af* sarà il semilato di un dodecagono descritto intorno al cerchio *abgd*. <**7.6**> Dal momento che l'angolo *eca* è stato diviso in due parti uguali dalla linea *cf*, allora in proporzione come *ec* starà a *ca*, così *ef* starà a *fa*, come ha dimostrato Euclide nel libro VI: perciò come la somma di *ec* e *ca* sta ad *ea*, cioè come 56 meno 2 once più $\frac{1}{13}$ sta a *ea*, così la somma di *ef* e di *fa*, che è 15, sta alla linea *fa*: viceversa dunque come la somma di *ec* più *ca* starà a *ea*, cioè come 56 meno 2 once più $\frac{1}{13}$ sta a 15, così *ca* starà ad *af*: pertanto porrò *ea* pari a 56 meno 2 più $\frac{1}{13}$, e *af* sarà pari a 15, e così se avremo sommato i quadrati delle linee *ca* e *af*, avremo come risultato 3359 meno 16 once più $\frac{2}{3}$ per la misura del quadrato della linea *cf*, la cui radice, che è 58 meno 4 once più $\frac{4}{5}$, corrisponde alla misura del lato *cf*. <**7.7**> Dividerò poi l'angolo *fca* in due parti uguali attraverso la linea *ch*; *ah* sarà il semilato della figura equilatera di ventiquattro lati, descritta intorno al cerchio *abgd*: dal momento che l'angolo *fca* è stato diviso in due parti uguali attraverso la linea *ch*, il rapporto della somma di *fc* e *ca* a *ca* sarà pari al rapporto di *fa* a *ah*: viceversa, allora, come la somma di *fc* e *ca* starà a *fa*, cioè come 114 meno 6 once più $\frac{7}{8}$ starà a 15, così *ca* starà a *ag*: per cui porrò *ca* pari a 114 meno 6 once più $\frac{7}{8}$, e *ah* sarà pari a 15; pertanto se avremo estratto la radice della somma di questi quadrati, avremo come risultato 115 meno 8 once più $\frac{16}{23}$ per la misura della linea *ch*.

<**8.1**> Di nuovo dividerò l'angolo *hca* in due parti uguali attraverso la linea *ci*: *ai* corrisponderà al semilato di una figura equilatera di quarantotto lati, descritta intorno al cerchio *abgd*. Il rapporto di *ai* ad *ac* sarà uguale al rapporto di 15 alla somma di *ac* più *ch*, cioè a 229 meno 15 once più $\frac{41}{72}$, secondo il più alto grado di appossimazione possibile. <**8.2**> Non possiamo infatti servirci di risultati assolutamente esatti quando dobbiamo estrarre le radici di numeri irrazionali, dei quali chiaramente non vi sono radici intere. Porrò dunque *ca* pari a 229 meno 15 once più $\frac{41}{72}$, e *ai* pari a 15; dividerò di nuovo l'angolo *ica* in due parti uguali a

partire dalla linea *ck*, e *ak* sarà il semilato di una figura equilatera descritta intorno a un cerchio e avente 96 lati. <**8.3**> Sommerò di nuovo i quadrati delle linee *ca* e *ai*, e otterrò il quadrato del lato *ci*, la cui radice è 229 e poco meno di 7 once e $\frac{1}{23}$; ma il rapporto di *ca* a *ak* è pari al rapporto della somma di *ic* e *ca* ad *ai*; dunque il rapporto di *ca* ad *ak* è quasi di 458 più $\frac{1}{5}$ a 15. Ma il rapporto di *ca* ad *ak* è pari al rapporto del diametro *ga* al doppio di *ai*. <**8.4**> Ma il doppio di *ai* corrisponde al lato di una figura equilatera descritta intorno al cerchio *abgd* e avente 96 lati; perciò come 458 più $\frac{1}{5}$ sta a 15, così il diametro *ga* sta a uno dei lati della sopradetta figura di 96 lati: perciò se avremo moltiplicato 15 per 96, il risultato sarà 1440 per la somma dei lati di questa figura. Dunque il rapporto del perimetro della sopradetta figura al diametro del cerchio in essa inscritto è pari al rapporto di 1440 a 458 più $\frac{1}{5}$. <**8.5**> Di nuovo troverò il rapporto di un cerchio rispetto al suo diametro attraverso il lato di una figura inscritta in un cerchio e avente 96 lati, secondo questo procedimento: all'interno del medesimo cerchio *abgd* porrò il lato dell'esagono *ad* pari al semidiametro *ca*, e traccerò *gd*: il triangolo *gda* sarà rettangolo, essendo posto all'interno del semicerchio *gda*. Infatti, come si dimostra nel terzo libro di Euclide, ogni angolo che sia interno a un semicerchio, è retto; e dal moemnto che la linea *ad* corrisponde al lato dell'esagono, la circonferenza *ad* sarà pari alla terza parte della circonferenza *dag*: perciò la circonferenza *gd* è pari al doppio della circonferenza *da*. <**8.6**> Da ciò l'angolo *gad* è doppio dell'angolo *agd*. La loro somma è pari a quella di un angolo retto, per cui l'angolo *agd* corrisponde alla terza parte di un angolo retto.

<**9.1**> Porrò, secondo l'ordine soprascritto, il diametro *ag* pari a 30: pertanto il segmento *ad* sarà pari a 15, e il segmento *gd* sarà pari a 2 meno 2 once più $\frac{1}{13}$ per le ragioni che ho dimostrato prima. Dividerò poi l'angolo *agd* in due parti uguali a partire dalla linea *gm*, e traccerò il segmento *am*: il rapporto del segmento *al* al segmento *ld* sarà pari al rapporto del segmento *ag* al segmento *gd*. <**9.2**> Quando li avremo addizionati, il rapporto del segmento *ad* al segmento *ld* sarà pari al rapporto della somma dei segmenti *ag* e *gd* al segmento *gd*; viceversa, come la somma dei segmenti *ag* e *gd* starà in rapporto al segmento *ad*, cioè come 56 meno 2 once più $\frac{1}{13}$ starà a 15, così *gd* starà a *dl*. Dal momento che l'angolo *agd* è stato diviso in due parti uguali dalla linea *gm*, l'angolo *agm* è uguale

all'angolo *dgm*, e l'angolo *gdl* è uguale all'angolo *gma*: infatti entrambi sono retti, essendo posti all'interno del semicerchio *gdma*; l'altro angolo *gld* è dunque uguale all'angolo *gam*: dunque il triangolo *gdl* è equiangolo rispetto al triangolo *gma*, per cui come il segmento *gd* sta a *dl*, così il segmento *gm* sta a *ma*. Porrò perciò *gm* pari a 56 meno 2 once più $\frac{1}{13}$, e il segmento *ma* sarà pari a 15; il segmento *am* corrisponde inoltre al lato del dodecagono, essendo la porzione di circonferenza *am* pari alla metà della porzione di circonferenza *amd*.

<10.1> Dividerò di nuovo l'angolo *agm* in due parti uguali attraverso la linea *gno*, e traccerò il segmento *ao*; troverò poi la radice congiunta dei quadrati delle linee *gm* e *ma*, che è pari a 58 meno 4 once più $\frac{4}{5}$ per la misura del lato *ag*. Come la somma di *ag* e *gm* starà alla linea *ma*, cioè come 114 meno 6 once e $\frac{7}{8}$ sta a 15, così *gm* starà a *mn*. **<10.2>** Ma come *gm* sta a *mn*, così *go* sta a *oa*. Infatti i triangoli *gmn* e *goa* sono simili e sono rettangoli: dunque come 114 meno 6 once e $\frac{7}{8}$ sta a 15, così *go* sta a *oa*: porrò perciò *go* pari a 114 meno 6 once più $\frac{7}{8}$, ed *oa* pari a 15; prenderò di nuovo la radice della somma dei quadrati delle linee *go* e *oa*, e otterrò 115 meno 8 once più $\frac{16}{23}$ per la misura della linea *ga*. La linea *oa* corrisponde alla misura del lato della figura inscritta nel cerchio *abgd* di 24 lati: dividerò di nuovo l'angolo *ago* in due metà a partire dalla linea *gq*, e traccerò *qa*: come *ag* e *go* staranno a *oa*, così *go* starà a *op*. Ma come *go* sta a *op*, così *gq* sta a *qa*. **<10.3>** Dunque come 229 meno 15 once più $\frac{41}{72}$ starà a 15, così *gq* starà a *qa*: porrò pertanto *gq* pari a 229 meno 15 once più $\frac{41}{72}$ e *qa* pari a 15, e sommerò il loro quadrati; troverò poi la radice del risultato, e otterrò il valore 229 e poco meno di 37 once più $\frac{1}{2}$, che corrisponde al lato *aq* di una figura di dotata di 48 lati.

<11.1> Dividerò di nuovo l'angolo *agq* in due parti uguali a partire dalla linea *grs*, e traccerò *sa*, che corrisponderà al lato di una figura di 96 lati inscritta all'interno del cerchio *abgd*; dal momento che l'angolo *agq* è stato diviso in due parti uguali attraverso la linea *gs*, il rapporto di *gq* a *qr* sarà pari al rapporto della somma di *ag* più *gq* a *qa*, e ciò significa che come 458 più $\frac{1}{5}$ starà a 15, così *gq* starà a *qr*. Ma come *gq* sta a *qr*, così *gs* sta a *sa*, essendo i triangoli *qrs* e *gsa* simili tra loro: perciò come 458 più $\frac{1}{5}$ starà a 15, così *gs* starà a *sa*. **<11.2>**

Sommerò di nuovo i quadrati delle linee *gs* e *sa*, ed estrarrò la radice del risultato, e otterrò in totale 458 più $\frac{4}{9}$ per la misura del diametro *ga*. **<11.3>** Moltiplicherò dunque il segmento *sa* per 96: il risultato sarà 1440 per la misura del perimetro della figura inscritta all'interno del cerchio *abgd*; perciò come 1440 sta a 458 più $\frac{4}{9}$, così il perimetro della predetta figura inscritta all'interno del cerchio *abgd* sta al diametro del cerchio *ga*.

<12.1> Abbiamo visto, per quanto concerne il calcolo del lato della figura esterna al cerchio, che il rapporto del perimetro di questa al diametro del cerchio è pari al rapporto di 1440 a 458 più $\frac{1}{5}$; la circonferenza del cerchio misura meno del perimetro della figura descritta intorno a questo, mentre misura più del perimetro della figura inscritta al suo interno. Il rapporto del cerchio al suo diametro sarà pari al rapporto di 1440 a $\frac{1}{3}$, essendo posto tra 458 più $\frac{4}{9}$ e 458 più $\frac{1}{5}$. **<12.2>** Ma il rapporto di 1440 a 458 più $\frac{1}{3}$ è pari al rapporto del triplo dell'uno al triplo dell'altro, cioè di 4320 a 1375, il cui rapporto, ridotto ai minimi termini, è pari a 864 a 275. Ma il rapporto di 864 a 275 meno $\frac{1}{11}$ è pari al rapporto di 3 più $\frac{1}{7}$ a 1. **<12.3>** Dal momento che vi è una piccola differenza tra il rapporto che un cerchio ha col suo diametro, e il rapporto di 3 più $\frac{1}{7}$ a 1, per tale ragione gli antichi sapienti hanno stabilito che *la circonferenza di un cerchio è pari a tre volte e la settima parte del suo diametro*; e questo ho voluto dimostrare.

<13.1> Se invece desideri calcolare l'area di una superficie semicircolare, trova l'area di questo cerchio attraverso uno dei sistemi indicati, la dividi per due e in questo modo ottieni l'area del semicerchio. **<13.2>** A dimostrazione di ciò: sarà dato il semicerchio *abg*, il cui diametro *ag* sia pari a 24; si completi poi il cerchio *abgd*. Il supplemento *adg* sarà simile al semicerchio, per cui se avremo calcolato la metà dell'area del cerchio *abgd*, otterremo sicuramente l'area del dato semicerchio *abg*. **<13.3>** Oppure moltiplica la metà del diametro, ossia 12, per 3 più $\frac{1}{7}$, e otterrai 37 più $\frac{5}{7}$ per la misura dell'arco *abg*; quando avrai moltiplicato la metà del diametro per la metà dell'arco *abg*, oppure se avrai moltiplicato la quarta parte del diametro per tutto l'arco *abg*, il risultato sarà pari a 226 più $\frac{4}{7}$ per la misura dell'area del semicerchio *abg*. **<13.4>** Oppure se avrai considerato gli $\frac{11}{28}$

del quadrato del diametro, che è pari a 576, ovvero se del quadrato di questo diametro avrai preso la ventottesima parte e l'avrai moltiplicata per 11, perverrai al medesimo valore dell'area. Se poi dal quadrato del diametro avrai preso la quattordicesima parte, otterrai la misura della soprascritta area espressa i panori, ossia 41 più $\frac{1}{7}$.

<14.1> Se desideri conoscere attraverso un altro sistema la misura dell'arco *abg*, che poi è la semicirconferenza del cerchio, conduci dal centro *e* sul diametro *ag* la linea *eb* in modo che sia perpendicolare, la quale corrisponderà al semidiametro del cerchio *abgd*; traccerai poi i segmenti *ab* e *bg*, e l'angolo *abg* sarà retto, essendo all'interno del semicerchio *abg*; oppure dal momento che *be* è uguale alla somma dei segmenti *ea* e *eg*, entrambi i triangoli *aeb* e *beg* saranno isosceli, per cui gli angoli *eba* e *eab* e *ebg* e *bge* sono tra loro uguali. Ciascuno di essi corrisponde alla metà di un angolo retto: pertanto la somma dei due angoli *abe* e *ebg* è pari alla misura di un angolo retto. Retto è dunque l'angolo *abg*, inoltre poiché la somma dei due segmenti *ae* e *eb* è pari alla somma dei due segmenti *be* e *eg*, e gli angoli *aeb* e *beg* sono retti, i segmenti *ab* e *bg* saranno uguali tra loro. **<14.2>** Perciò il quadrato del diametro *ag* misura il doppio del quadrato di ciascuna delle linee *gb* e *ba*, e inoltre sia il quadrato della linea *gb* sia quello della linea *ba* misurano il doppio di ciascun quadrato delle linee *ae* e *be* e *eg*. Perciò come *ag* sta a *gb*, così *gb* sta a *be* ovvero a *eg*: pertanto, se avremo moltiplicato *ag* per *be*, ossia 24 per 12, otterremo 288 per la misura del quadrato di ciascuna delle linee *ab* e *bg*; oppure se avremo preso la metà del quadrato del diametro *ag*, oppure avremo duplicato il quadrato del semidiametro *ge* ovvero *ea*, otterremo allo stesso modo 288 per la misura del quadrato di ciascuna delle linee *gb* e *ba*, mentre *ge* corrisponde all'arco della metà del semicircolo *abg*. **<14.3>** Se avremo diviso poi la corda *bg* nel punto *c* in due parti uguali, e per i punti *c* ed *e* avremo condotto la linea *df*, *df* sarà il diametro del cerchio *abgd*, e formerà angoli retti nel punto *c* attraverso la corda *bg*, nonchè dividerà l'arco *bfg* in due parti uguali. **<14.4>** Perciò se dal punto *f* avremo tracciato le linee *fb* e *fg*, ciascuna delle corde di queste corrisponderà alla quarta parte del semicerchio *gba*, la cui misura conosceremo in questo modo: dal momento che l'angolo *bce* è retto, se avremo sottratto il quadrato della linea *bc*, che è pari a 72, ossia alla quarta parte del quadrato della corda *bg*, dal quadrato della linea *be* che sottende l'angolo retto *bce*, rimarrrà 72 per la misura del quadrato della linea *ce*: pertanto la lunghezza totale di *dc* è pari a 72 più la radice di 72, e si definisce *binomio*, non potendo essere espresso numericamente. Da ciò, se avremo sottratto *ec* da *ef*, rimarrà 12 meno la radice di 72 per la misura della linea *cf*. Questa linea si chiama *abcissa*, oppure *reciso*, o *apotema*, ed è espressa da un numero intero meno una radice. Prenderemo poi i quadrati delle linee *fc* e *cb*, e otterrai come risultato il quadrato della corda *bf* ovvero *fg*.

<15.1> Voglio personalmente dimostrare in che modo possiamo ottenere il quadrato della "abscissa" *cf*: porrai i termini di questa, ossia 12 e 72, come si vede nel margine; moltiplicherai poi 12 per 12: il risultato sarà 144; moltiplicherai anche la radice di 72 per la radice di 72; il risultato sarà 72. Addizionati questi due valori, il risultato sarà di 216. Da questo sottrarrai il doppio prodotto di 12 per la radice di 72: il risultato sarà di $24\sqrt{72}$; in questo modo otterrai in totale 216 - $24\sqrt{72}$ per la misura del quadrato della linea *cf*, che corrisponde alla radice di 41472. **<15.2>** Oppure dal momento che la linea *ef* è stata divisa a caso in due parti nel punto *c*, la somma dei due quadrati delle linee *ef* ed *ec* sarà pari al quadrato di *cf* più il doppio della superficie del rettangolo *ec* per *ef*. Infatti la somma dei quadrati delle linee *ef* e *ec* è pari a 216; se da questa togliamo il risultato del doppio prodotto di *ef* per *ec*, ossia di 24 per la radice di 72, il risultato sarà sicuramente di 216 meno la radice di 41472. Si chiama "reciso primo", come si è visto a suo tempo, e se a questo avremo aggiunto il quadrato della linea *bc*, cioè 72, otterremo 288 meno la radice di 41472 per la misura del quadrato della corda *bf*, che si chiama "reciso quarto", la cui radice è quella linea che si definisce "minore"[18]. **<15.3>** Infatti se vuoi conoscere la misura della linea *bf* secondo una certa approssimazione, sottrai la radice di 41472, che è pari a poco meno di 203 più $\frac{2}{3}$, da 288: il risultato sarà pari a poco più di 84 più $\frac{1}{3}$ per la misura del quadrato di una ciascuna delle quattro corde *gf*, *fb*, *bh* e *ha*. **<15.4>** Oppure, in altro modo, estrai la radice della linea *ce*, che è pari a poco meno di 8 più $\frac{1}{2}$; sottrai poi questa dalla linea *ef*, ossia da 12: il risultato sarà pari a poco più di 3 più $\frac{1}{2}$ per la misura

[18] Fibonacci, *Liber Abaci* p. 358 (Boncompagni): *Numeri autem, qui sunt decompositi ex predictis nominibus sex binomiorum, vocantur recisi, seu apothami, et sunt illud per ordinem, quod est inter utrumque nomen predictorum sex binomiorum, ut 4 minus radice de 7, que sunt primum recisum; et radix de 112 minus 7, que sunt ex secundo reciso; et radix de 112 minus radice de 84, qui sunt ex tercio reciso; et sic intellige de quarto, et quinto, et sexto reciso.*

della linea *cf*; se avremo aggiunto il quadrato di questa, che è pari a poco più di 12 più $\frac{1}{3}$, al quadrato della linea *bc*, otterremo allo stesso modo poco più di 84 più $\frac{1}{3}$ per la misura del quadrato di ciascuna delle soprascritte quattro corde, che se avremo moltiplicato per il quadrato di 4, ossia per 16, otterremo 1350 per il quadrato della somma di queste quattro corde, la cui radice è pari a 36 più $\frac{3}{4}$.

<16.1> Ma l'arco *abg* è pari a 37 più $\frac{5}{7}$. Siamo dunque ancora alquanto lontani dal conoscerne la misura attraverso la misura delle quattro corde, per cui dividerò di nuovo una delle quattro predette corde in due parti uguali: sia stata la corda *ah* divisa in due parti uguali nel punto *i*; traccerò poi attraverso i punti *i* ed *e* il diametro *kl*, che divide l'arco *akh* in due parti uguali nel punto *k*, e traccerò la corda *ak*: essa corrisponderà al lato di una figura inscritta in un cerchio *abgd* e dotata di sedici lati. **<16.2>** Arriverò a conoscere la sua area attraverso il procedimento che è stato indicato: dal quadrato della linea *ae*, cioè da 144, sottrarrò il quadrato della linea *ai*, che equivale all'incirca a 22 più $\frac{1}{11}$, ossia alla quarta parte del quadrato della linea *ah*: rimarrà 121 più $\frac{10}{11}$ per la misura del quadrato della linea *ei*, per cui questa linea misura all'incirca 11 più $\frac{1}{11}$; se si sottrae questo valore dalla linea *ek*, rimarrà *ik* pari a circa $\frac{10}{11}$ di una pertica, e se avremo addizionato il quadrato di questa, che è all'incirca pari a $\frac{9}{11}$, al quadrato della linea *ai*, otterremo 21 più $\frac{10}{11}$ per la misura del quadrato della corda *ak*, che è la corda dell'ottava parte dell'arco *abg*, per cui se avremo moltiplicato 21 più $\frac{10}{11}$ per il quadrato di 8, ossia per 64, otterremo all'incirca 1402 per la misura del quadrato della somma delle otto corde uguali che cadono all'interno del semicerchio *abg*, la cui radice equivale a meno di 37 più $\frac{1}{2}$. **<16.3>** Ma l'arco *abg* misura un po' in più, ossia 37 più $\frac{5}{7}$, per cui se secondo lo stesso procedimento calcoleremo la misura della corda del semiarco *ak*, saremo prossimi alla misura della lunghezza dell'arco *abg*; e così sempre dividendo l'arco perverremo alla misura della corda, la cui differenza di lunghezza rispetto all'arco sarà quasi impercettibile. In questo modo potrai conoscere la misura di qualsiasi arco di cerchio.

<17.1> Per comprendere ciò ancor più chiaramente, si tracci il cerchio *abcd*, il cui diametro *ac* sia pari a 10; sia stata fissata in esso la nota corda *bd*, pari a 8; vogliamo calcolare la misura dell'arco *bad* partendo dalla conoscenza della misura di questa corda. **<17.2>** In primo luogo mostrerò come calcolare la lunghezza di entrambe le linee partendo dalla misura della lunghezza della corda, e anche come calcolare la misura della corda partendo dalla lunghezza delle linee. Questa dimostrazione è costruita su questa figura, perché la linea *ac* è stata divisa in due parti uguali nel punto *f*, e in due parti diverse nel punto *e*: senza dubbio il prodotto di *ae* per *ec* più il quadrato della linea *ef* è uguale al quadrato della linea *fa*. **<17.3>** Ma *fa* è uguale a *fb*, dal momento che entrambe vengono tracciate dal centro *f* alla circonferenza del cerchio: pertanto il prodotto di *ae* per *ec* più il quadrato della linea *ef* è uguale al quadrato della linea *fb*. Ma il quadrato della linea *fb* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *be* ed *ef*: dunque il prodotto di *ae* per *ec* più il quadrato della linea *ef* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *be* e *ef*, per cui se comunemente si sottrae il quadrato della linea *ef*, rimarrà il prodotto di *ae* per *ec* uguale al quadrato della linea *be*: perciò se avremo sottratto il quadrato della linea *be* dal quadrato della linea *bf*, ossia 16 da 25, rimarrà 9 per la misura del quadrato della linea *ef*: perciò *ef* è pari a 3; aggiunto questo valore a *cf*, il risultato sarà pari a 8 per la misura della freccia *ce*. **<17.4>** Similmente sottratta *fe* da *fa*, rimarrà 2 per la misura della linea *ae*: infatti il prodotto di *ae* per *ec*, ossia di 2 da 8, si ottiene il quadrato della linea *be*. Da ciò si è visto che i segmenti *ae*, *eb*, ed *ec* sono in proporzione continua tra loro: infatti come *ae* sta a *eb*, così *be* sta a *ec*; dunque è stata rinvenuta la misura delle frecce *ae* ed *ec* per la misura della corda *bd*. **<17.5>** Ma siano le linee *ae* ed *ec* note: perciò sia *ae* pari a 2, ed *ec* pari a 8: vogliamo trovare la corda *bd*: il prodotto di *be* per *ec* è infatti uguale al quadrato della linea *be*; se avremo moltiplicato *ae* per *ec*, ossia di 2 per 8, avremo 16 per la misura del quadrato della linea *be*, e la sua radice, ossia 4, raddoppiata, darà come risultato 8 per la misura della corda *bd*. **<17.6>** Ma sia nota la corda *bd*, nonché la freccia *ea*, e sia sconosciuto il diametro *ac*: moltiplicherai la metà della corda *bd* per se stessa: il risultato sarà 16, che devi dividere per la freccia *ae*, ossia per 2: il risultato sarà 8 per la misura della freccia *ec*, per cui la diagonale *ac* sarà 10: similmente, se avremo diviso il quadrato della linea *be* per la freccia *ec*, il risultato sarà la freccia *ae*. **<17.7>** Bisogna notare che dal momento che all'interno del semicerchio *abc* il segmento *be* si chiama seno convesso di ciascuno dei due archi *ab* e *bc*; il segmento *ae* si chiama seno concavo dell'arco *ab*; anche il segmento *ec* si chiama seno concavo dell'arco *bc*, come si trova nella *Ars Astrologie*: ciò detto, torniamo al nostro proposito[19]. **<17.8>** Tracciamo le corde dei due archi *ba* e *ad*, che sono i segmenti *ba* e *ad*, dei quali conosceremo la misura, se avremo sommato i quadrati delle linee *ae* e *ed*, oppure di *ae* e *eb*. Il quadrato di ciascuna delle due linee *ab* e *ad* sarà pari alla radice di 20: perciò se avremo diviso la corda *ad* nel punto *g*, e avremo tracciato per i punti *g* e *f* la diagonale *hi*, troveremo attraverso i procedimenti di cui è stato detto prima la misura delle frecce *ig* e *gh*, e se avremo addizionato tra loro i quadrati delle linee *ag* e *gi*, otterremo il quadrato della corda *ai*, che corrisponde alla corda dell'arco *ai*, ossia alla quarta parte di tutto l'arco *bad*. **<17.9>** Se avremo operato spesso questi calcoli, saremo in grado di pervenire alla misura di tutto l'arco *bad* secondo approssimazione; poi, dopo che avremo sottratto questo valore dall'intero perimetro della circonferenza, ossia dalla linea *adbg* che è pari a 31 più $\frac{3}{7}$, rimarrà l'arco *bcd* di cui conosceremo così il valore.

<18.1> Vi è un'altra tecnica per calcolare la misura delle corde di un semiarco, attraverso i quali è nota la misura delle corde, e di questa ha parlato Tolomeo all'interno dell'*Almagesto*. Sia noto il diametro *bd* all'interno del cerchio *abgd*, nonchè la corda *ad*: voglio calcolare la corda della metà dell'arco *ad*. **<18.2>** Traccerò la corda *ab*, ed essa sarà nota, essendo la corda *ad* nota per il fatto che l'angolo *dab* è retto, perciò il quadrato del diametro *bd* è uguale alla somma delle due corde *da* e *ab*; si tracci poi il segmento *be* uguale al segmento *ba*; dividerò poi l'angolo *abe* in due parti uguali attraverso la linea *bz*; traccerò poi i segmenti *zd* e *ze* e *za*. Dal punto *z* traccerò la perpendicolare *zi* sul diametro *bd*, il segmento *ab* è perciò uguale al segmento *be*. **<18.3>** Se si traccia il segmento *bz*, la somma dei due segmenti *ab* e *bz* è pari alla somma dei due segmenti *zb* e *be*; l'angolo *abz* è uguale all'angolo *zbe*, per cui la base *az* è uguale alla base *ze*. Ma il segmento *az* è uguale al segmento *zd*, essendo *az* e *zd* uguali tra loro. Poiché angoli uguali insistono su uguali porzioni di circonferenza, gli angoli saranno o al centro o sulla circonferenza: gli angoli in *b* infatti sono uguali tra loro, e insistono sulle porzioni di circonferenza *az* e *zd*: perciò il segmento *ze* è uguale al segmento

[19] A mio avviso, è possibile che l'autore stia qui facendo riferimento a una sua opera andata perduta.

zd. <**18.4**> Sia dunque *zed* isoscele; perciò il punto *i*, che è dove cade il segmento *zi*, si trova nella metà del segmento *ed*: dal momento che il triangolo *bzd* è ortogonio, giacchè è inscritto all'interno di un semicerchio, e al suo interno dall'angolo sulla base è stata tracciata la perpendicolare, sicuramente il triangolo *bzd* è stato diviso in due triangoli tra loro simili. <**18.5**> Ciascuno di questi triangoli ha infatti retto uno degli angoli e presenta un angolo in comune con tutto il triangolo *bzd*, come dimostra Euclide VI, 8; perciò come *bd* starà a *dz*, così *zd* starà a *di*; perciò il prodotto di *di* per *bd* è uguale al quadrato della linea *zd*. Infatti *id* è nota, essendo pari alla metà di *ed*, che è nota perché *be* è uguale alla corda *ba* nota; perciò se si sottrae la corda *ba*, cioè *be*, dal diametro *bd*, rimarrà *ed*; ne consegue che la metà, ossia *id*, sarà nota. Da ciò se avremo moltiplicato *di* nota per *bd* nota, il risultato sarà il quadrato della corda *zd*; perciò il segmento *zd* sarà noto, come ho detto prima.

<**19.1**> Tutto ciò si dimostra anche con l'ausilio di numeri. Sia il diametro *bd* pari a 10, e sia la corda *da* pari a 8: perciò la corda *ab* sarà pari a 6. Essendo il segmento *be* uguale a questa, è chiaro che *be* sarà pari a 6. Sottratto questo valore dal diametro *bd*, rimarrà 4 per la misura del segmento *ed*, la cui metà, ossia 2, corrisponderà alla misura del segmento *id*. Senza dubbio dal prodotto di *id* per *bd* viene fuori 20, che equivale al quadrato della corda *zd*; perciò la corda *zd* corrisponde alla radice di 20, come volevasi dimostrare. <**19.2**> Similmente se avremo sottratto il quadrato della linea *zd* dal quadrato del diametro *bd*, rimarrà 80 per il quadrato della corda *bz*, e se la radice di questa, che è pari a 9 meno $\frac{1}{18}$, avremo sottratto dal diametro *bd*, rimarrà 1 più $\frac{1}{18}$; se avremo moltiplicato la metà di questo valore per il diametro *bd*, oppure se avremo moltiplicato 1 più $\frac{1}{18}$ per la metà del diametro, ossia per 5, il risultato sarà di 5 più $\frac{5}{18}$ per il quadrato della corda della metà dell'arco *dz*.

<**20.1**> Secondo questo sistema possiamo calcolare le corde delle metà di qualunque dato arco. Ma questo tipo di calcolo non deve essere messo in atto dagli agrimensori che vogliono procedere secondo il metodo popolare. <**20.2**> Coloro che desiderino infatti calcolare la lunghezza di un certo arco secondo il sistema popolare, prendano una corda[20] che sia della misura di un piede, tale che

[20] Letteralmente "una linea".

possa essere incurvata e distesa e, servendosi di questa, procedano alla misurazione degli archi di cui desiderino conoscere la lunghezza; oppure prendano una fune della lunghezza di una o più pertiche, e servendosi di questa procedano alla misurazione degli archi delle porzioni dei cerchi, fissando, con l'ausilio di canne, diversi punti intorno alla circonferenza del cerchio, in modo che la fune non devii dalla circonferenza del cerchio. In questo modo potrai ottenere la misura di tutti i tipi di archi di cerchi.

<21.1> Ma affiché coloro che desiderino procedere secondo la scienza geometrica in modo più sottile di quanto sia stato detto, possano calcolare la misura di questi archi attraverso corde la cui lunghezza sia nota, ho composto le seguenti tavole, nelle quali ho ordinatamente elencato 66 archi noti; dinanzi a ciascuna di queste corde ho posto il corrispondente valore numerico espresso in pertiche, piedi, once e punti. **<21.2>** Infatti una pertica misura sei piedi, un piede misura diciotto once, e un'oncia misura venti punti; oppure una pertica equivale a 108 once e a 2160 punti. Si intende che le soprascritte 66 corde sono state tracciate all'interno di un solo semicerchio il cui diametro misuri 42 pertiche: ciascuna corda protratta all'interno del cerchio è sottesa a due archi uguali, se questa coinciderà diametro, oppure sarà sottesa a due archi di diversa lunghezza, se non coinciderà col diametro. Per questa ragione ho disposto due archi dinanzi a queste corde, come si vede nelle seguenti tavole [vedi figura].

<22.1> Dal momento che mi sono proposto di dimostrare in che modo si debba calcolare la misura degli archi di un cerchio attraverso queste tavole, bisogna ora mostrare in che modo questa regola vada utilizzata al meglio: **<22.2>** se all'interno di un cerchio due archi saranno stati tra loro diversi, il rapporto dell'arco maggiore con la corda maggiore sarà pari al rapporto dell'arco minore con la sua corda; ciò è chiaro, e tra l'altro è visibile attraverso le tavole soprascritte. **<22.3>** Senza dubbio il rapporto dell'arco del semicerchio con la sua corda, ossia col diametro del cerchio, è pari al rapporto di 66 a 42, cioè di 11 a 7. Il rapporto dell'arco della sesta parte del cerchio con la sua corda è di 22 a 21: ora, il rapporto di 11 a 7 è maggiore del rapporto di 22 a 21. Similmente in tutti gli archi delle soprascritte tavole troverai che il rapporto dell'arco maggiore con la sua corda supera il rapporto dell'arco minore con la sua corda.

<23.1> Per dimostrare ciò geometricamente, si tracci il cerchio *abgd*; siano dati al suo interno i due archi *ab* e *bg* diversi tra loro, e sia *bg* il maggiore dei due; si tracci poi la corda dell'arco *abg*, e sia essa il segmento *ag*; si divida quindi l'angolo descritto dai segmenti *abg* in due parti uguali attraverso la linea *bd*, che interseca la corda *ag* nel punto *e*; infine si traccino ora i segmenti *ad* e *gd*. Dal momento che l'angolo in *abg* è stato diviso in due parti uguali attraverso la linea *bd*, l'angolo *abd* è uguale all'angolo *dbg*. Perciò l'arco *ad* è uguale all'arco *dg*, dal momento che nel terzo libro di Euclide si afferma che angoli uguali insistono su uguali porzioni di circonferenza, siano essi al centro o alla circonferenza. Ciò significa che il segmento *ad* è uguale al segmento *dg*. **<23.2>** Si tracci il segmento *db* in comune: senza dubbio i due segmenti *ad* e *db* sono uguali ai due segmenti *bd* e *dg*. Ma la base *ba* è minore della base *bg*: perciò l'angolo *gdb* è maggiore dell'angolo retto *bda*. Oppure dal momento che la porzione di circonferenza *gb* è maggiore della porzione di circonferenza *ba*, maggiore è l'angolo che si genera dai segmenti *gd* e *db* fino all'angolo compreso tra i segmenti *bd* e *da*, perché come la porzione di circonferenza *gb* sta alla porzione di circonferenza *ba*, così l'angolo compreso dai segmenti *gdb* sta all'angolo compreso dai segmenti *bda*. Dal momento che il segmento *ad* è uguale al segmento *dg*, se dal punto *d* si conduce la perpendicolare alla linea *ag*, essa cadrà nel mezzo. **<23.3>** Cadrà dunque in mezzo ai punti *e* e *g*, ossia sulla linea *eg*, perché *ge* è maggiore del segmento *ae*. Dal momento che, come il segmento *gb* sta al segmento *ba*, così *ge* sta a *ea*, la perpendicolare cadrebbe senza dubbio nel punto *h* a partire dal punto *d*. Inoltre, dal momento che l'angolo *dhe* è retto, il segmento *de* è maggiore del segmento *dh*, e il segmento *da* è maggiore di *de*.

<24.1> Si traccino due segmenti *di* e *df* di misura uguale al segmento *de*. Dal centro *d* si tracci l'arco *ief* il cui raggio sia pari ai segmenti *di* e *de*: il settore *die* è allora maggiore del triangolo rettilineo *dhe*, e il settore *dif* è minore del triangolo *dea*; perciò il rapporto tra il settore *die* al settore *def* è maggiore del rapporto del triangolo *dae* al triangolo *dea*. **<24.2>** Ma il rapporto del settore *die* al settore *def* è uguale al rapporto dell'angolo *ide* all'angolo rettilineo *edf*; dunque il rapporto dell'angolo *ide* all'angolo *idf* è maggiore del rapporto del triangolo *dhe* al triangolo rettilineo *dae*. Ma il rapporto del triangolo *hde* al triangolo *ade* è pari al rapporto del segmento *he* al segmento *ea*, essendo entrambi i triangoli della stessa altezza che va da *d* a *h*. Infatti il cateto *dh* è perpendicolare ai triangoli *hde* e *ade*; il rapporto dunque dell'angolo *ide* all'angolo *eda* è maggiore del rapporto del segmento *he* al segmento *ea*: se poi li avremo uniti insieme, il rapporto dell'angolo *ida* all'angolo *eda* sarà maggiore del rapporto del segmento *ah* al segmento *ae*. Ma l'angolo *gdi* è uguale all'angolo *adh*; il segmento *gh* è uguale allora al segmento *ah*, perciò il rapporto dell'angolo *gdi* all'angolo *eda* è maggiore del rapporto del segmento *gh* al segmento *ae*. **<24.3>** Ma il rapporto dell'angolo *ide* all'angolo *ade* è stato visto essere maggiore del rapporto del segmento *he* al segmento *ea*, per cui il rapporto di tutto l'angolo *gde* all'angolo *eda* è maggiore del rapporto del segmento *ge* al segmento *ea*. Ma il rapporto dell'angolo *gde* all'angolo *ade* è pari al rapporto dell'arco *gb* all'arco *ba*, e il rapporto di *ge* a *ea* è pari al rapporto della corda *gb* alla corda *ba*. Dunque il rapporto dell'arco *gb* all'arco *ba* è maggiore del rapporto della corda *gb* alla corda *ba*: viceversa, il rapporto dell'arco *gb* alla corda *gb* è maggiore del rapporto dell'arco *ba* alla corda *ba*, come volevasi dimostrare.

<25.1> Comprese tali cose, se attraverso la data corda di un certo cerchio, del quale sia nota la misura del diametro, desideri conoscere la misura dell'arco della stessa corda, moltiplica questa corda per il diametro delle tavole, ossia per 42, e dividi il risultato per il diametro del dato cerchio, e quello che risulterà sarà la corda delle tavole simile alla data corda. Prendi l'arco corrispondente all'interno delle tavole, e moltiplicalo per il diametro del dato cerchio, poi dividi il risultato per il diametro delle tavole, e otterrai la misura dell'arco della corda richiesta. **<25.2>** A dimostrazione di ciò: sarà dato il cerchio *abg*, il cui diametro *bg* sia della misura di 10 pertiche, sia stata in esso data la corda *ab* della misura di 5 pertiche, e vuoi conoscere la misura dell'arco *abe*: moltiplica la corda *ab* per 42, e dividerai il risultato per il diametro *bg*: si otterrà 21 per la misura della corda delle tavole, simile alla corda *ab*. Cerca nelle tavole il valore corrispondente, quindi prendi l'arco che sta sulla stessa riga e quello che è minore del semicerchio. **<25.3>** Dal momento che cerchi di rinvenire la misura dell'arco *aeb*, che è anche minore del semicerchio, l'arco è minore della corda di 22 pertiche: se l'avrai moltiplicato per 10, ossia per il diametro *bg*, e avrai diviso il totale per 42, il risultato sarà di 5 più $\frac{5}{21}$ per la misura dell'arco *aeb*. Se vorrai conoscere la misura dell'arco maggiore *bdga*, trova l'arco maggiore all'interno delle tavole, che è sulla stessa direttrice della corda che è stata trovata: troverai che questo misura 110 pertiche. Allo stesso modo lo moltiplicherai per 10, dividerai il risultato per 42, e otterrai 26 peritche più $\frac{4}{21}$ per la misura dell'arco *bdga*.

<26.1> Parimenti sia data la corda *ab* della misura di 8 pertiche, 2 piedi e 8 once più $\frac{4}{7}$; sia poi il diametro *bg* pari a 10, come abbiamo già detto. Moltiplica dunque le 8 pertiche, 2 piedi e 8 once più $\frac{4}{7}$ per 42. Dividerai poi il totale per 10: il risultato sarà di 35 pertiche più 2 piedi, e corrisponde alla misura della corda delle tavole simile alla data corda *ba*. **<26.2>** Perciò devi considerare l'arco minore, se vuoi conoscere la misura della corda minore, oppure devi considerare l'arco maggiore, ossia l'arco *bdg*, se vuoi conoscere la misura della corda maggiore. L'arco minore di questa corda misura 42: moltiplica questo valore per 10, ossia per il diametro *bg*, quindi dividi il risultato per il diametro corrispondente nelle tavole, che è di 42 pertiche, e otterrai 10 per la misura dell'arco *aeb*. Se invece avremo moltiplicato per 10 l'arco maggiore, pari a 90, di una corda della misura di 35 pertiche e 2 piedi, e avremo diviso il risultato per 42, otterremo 21 più $\frac{3}{7}$ per la misura dell'arco maggiore del semicerchio *bdg*.

<27.1> Di nuovo si tracci un altro cerchio *abgd*, il cui diametro *ag* sia della misura di 12 pertiche, e la cui corda *ad* sia della misura di 6 pertiche e 1 piede: si vuole conoscere la misura dell'arco *afd*, che è minore del semicerchio. **<27.2>** Moltiplica perciò 6 pertiche e 1 piede per 42: il risultato sarà di 259 pertiche; dividile per 12, ossia per *ag*: il risultato sarà di 21 pertiche, 3 piedi e 9 once per la misura della corda delle tavole corrispondente alla corda *ad*, la quale non si rinviene all'interno delle tavole, ma cade tra la corda dell'arco di 22 pertiche e la corda dell'arco di 23 pertiche, ossia tra il valore 21 e il valore 21, 5 piedi, 2 once, 16 punti. **<27.3>** Da ciò, voglio dimostrare attraverso una figura geometrica in che modo si ottenga la misura dell'arco della corda che è stata rinvenuta. Si tracci il semicerchio *ezitk*, il cui diametro *ek* sia della misura di 42 pertiche e corrisponda al diametro delle tavole; da questo si prendano l'arco *ez* e l'arco *et*, dei quali *ez* sia della misura di 22, e *et* sia della misura di 23 pertiche; si traccino poi le corde *ez* e *et*: la corda *ez* sarà della misura di 21 pertiche, e la corda *et* sarà della misura di 21 pertiche, 5 piedi, 2 once e 16 punti, come si evince nelle tavole di sopra. Tra tali corde cade la corda che è stata trovata, la cui misura dell'arco cercheremo all'interno delle tavole. **<27.4>** Da ciò sappiamo che questo valore cade tra l'arco *ez* e l'arco *et*: cada perciò nel punto *i*, e si tracci la corda *ei* della misura di 21 pertiche, 3 piedi e 9 once, come è stato rinvenuto prima. Partendo da tutti questi dati, vogliamo calcolare la misura dell'arco *ei*. **<27.5>** Da quanto premesso, sappiamo che il rapporto dell'arco *ez* alla corda *ez* è minore del rapporto dell'arco *ei* alla corda *ei*: ma se stabiliamo che il rapporto dell'arco *ei* alla corda *ei* è pari al rapporto dell'arco *ez* alla corda *ez*, l'arco *ei* sarà della misura di 22 pertiche, 3 piedi e 12 once, che è quanto risulta dal prodotto della corda *ez* per la corda *ei* diviso l'arco *ez*. Ma il rapporto dell'arco *ei* alla corda *ei* è maggiore del rapporto dell'arco *ez* alla corda *ez*: l'arco *ei* è allora di misura superiore alle 22 pertiche, 3 piedi e 12 once rinvenute prima. **<27.6>** Allo stesso modo, se stabiliamo che l'arco *ei* sta alla corda *ei* nella stessa proporzione con cui l'arco *et* sta alla corda *et*, l'arco *ei* sarà della misura di 22 pertiche, 4 piedi, 4 once e 13 punti. Ma il rapporto dell'arco *ei* alla corda *ei* è minore del rapporto dell'arco *et* alla corda *et*: l'arco *ei* è allora di misura inferiore a 22 pertiche, 4 piedi, 4 once e 13 punti. <**27.7**> Si è visto sopra che l'arco *ei* misura più di 22 pertiche, 3 piedi e 12 once: da ciò, se avremo diviso in due la differenza che intercorre tra 22 pertiche, 3 piedi, 12 once e 22 pertiche, 4 piedi e 13 punti, e aggiungeremo la metà di quello che viene al valore di 22 pertiche, 3 piedi e 12 once, otterremo secondo approssimazione la misura dell'arco *ei*. **<27.8>** Oppure in altro modo sommeremo l'arco *ez* con l'arco *et*, il risultato sarà di 45 pertiche; poi sommeremo le corde *ez* ed *et*: il risultato sarà di 42 pertiche, 5 piedi, 2 once e 16 punti. Dividiamo per questo valore il risultato del prodotto di 45 pertiche per la corda *ei*, ossia per 21 pertiche, 3 piedi e 9 once, e otterremo come risultato 22 pertiche, 4 piedi, 1 oncia e 6 punti per la misura dell'arco *ei*. **<27.9>** Oppure in altro modo scindiamo dalle corde *ei* e *et* la corda *ez*; della corda *ei* resta allora la quantità *oi*, che è pari a 3 più $\frac{1}{2}$ piedi; della corda *et* rimane invece la quantità *nt*, pari a 5 piedi, 2 once e 16 punti. Stabiliamo poi che l'arco *zi* sta all'arco *zt*, ossia a una pertica, come *oi* sta a *nt*, cioè moltiplicheremo l'arco *tz*, della misura di una pertica, ossia di 2160 punti, per *oi*, ossia per 1260 punti, e divideremo il totale per *nt*, ossia per 1856 punti: otterremo 4 piedi, 1 oncia e 6 punti per la misura dell'arco *zi*. Aggiunto questo valore all'arco *ez*, che è pari a 22 pertiche, avremo in totale 22 pertiche, 4 piedi, 1 oncia e 6 punti per la misura dell'arco *ezi*, che corrisponde all'arco *ad*, incognita della precedente figura. Perciò se avremo moltiplicato questo valore per la sesta parte del diametro *ag*, ossia per 2, e avremo diviso il risultato per la sesta parte del diametro delle tavole, ossia per 7, otterremo 6 pertiche, 2 piedi, 15 once e 15 punti per la misura dell'arco *abd*. **<27.10>** Se poi vuoi pervenire alla misura dell'arco *abd*, che è maggiore del semicerchio, attraverso la corda *ad*, sottrai la corda *ei* dalla corda *et*: il risultato sarà di 596 punti; moltiplicali per la misura dell'arco *tz*, ossa per 2160 punti, quindi dividi il risultato per *nt*, ossia per 1856. **<27.11>** Sottrai 694 punti, che corrispondono a 1 piede, 16 once e 14 punti dell'arco *ti*; se poi avrai addizionato questo valore all'arco maggiore che sta all'interno delle tavole, la cui corda corrisponde alla linea *et*, e se quest'arco è pari a 109 pertiche, otterremo in totale 109 pertiche, 1 piede, 16 once e 14 punti per la misura dell'arco delle tavole. Se avrai moltiplicato questo valore per 12, e dividerai il risultato per 42; oppure se avrai moltiplicato lo stesso per la sesta parte di 12, e avrai diviso il risultato per la sesta parte di 42, otterrai in totale 31 pertiche, 1 piede, 7 once e 6 punti più $\frac{6}{7}$ per la misura dell'arco *abd*. **<27.12>** Se attraverso l'arco *afd*, di cui conosci la lunghezza, vuoi pervenire alla misura della corda *ad* che è ignota, moltiplica l'arco *afd* per il diametro delle tavole e dividi il totale per il diametro *ag*, e otterrai 22 pertiche, 4 piedi, 1 oncia e 6 punti per la misura del soprascritto arco *ezi*, che è l'arco che cade all'interno delle tavole tra l'arco *ez* e l'arco *ezt*. **<27.13>** Da ciò, per calcolare la corda dello stesso arco *ei*, che sarà simile alla corda *ad* del dato cerchio *abgd*: dopo aver trovato l'arco *ezi*, togli l'arco *ez*: il risultato sarà di 4 piedi, 1 oncia e 6 punti, che corrisponde a 1466 punti; moltiplicali per la differenza che intercorre tra la corda *ez* e la corda *et*, la cui misura è nota grazie alle tavole; da quella differenza si ricava la linea *nt*, che misura 1856 punti. Dividerai poi il totale per i punti di cui è costituita una pertica, ossia per l'arco *tiz*: il risultato sarà di 3 piedi più $\frac{1}{2}$ per la misura della linea *oi*. A questa aggiunti la linea *eo*, che è uguale alla corda *ez*: otterrai in totale 22 pertiche e 3 piedi più $\frac{1}{2}$ per la misura della corda *ei*, la quale è simile alla tua corda *ad*. La moltiplicherai perciò per la sesta parte di 12, e dividerai il risultato per la sesta parte di 42: otterrai 6 pertiche e 1 piede per la misura della corda *ad*. **<27.14>** In questo modo, in base ai precetti che ho fornito, quando i diametri dei cerchi saranno noti, potremo trovare la misura degli archi che non si conoscono attraverso le date corde di cui si conoscerà la misura, etc.

<28.1> Perciò quando, attraverso i precetti che ho fornito, vorrai calcolare la misura degli archi attraverso le corde, e la misura delle corde attraverso gli archi, e vorrai trovare l'area di un dato settore del cerchio, impegnati a calcolare l'arco di quello, poi moltiplica la metà per il semidiametro del cerchio, e il risultato sarà pari alla misura dell'area del settore. **<28.2>** Esempio: sia dato il settore *abgd* delimitato dai segmenti *ab* e *ad*, e dall'arco *bgd*: dal momento che il settore del cerchio corrisponde alla figura *abgd*, ciascuno dei segmenti *ab* e *ad* corrisponderà al semidiametro del cerchio. Perciò il punto *a* coincide con il centro del cerchio, da cui è stato reciso il settore *abgd*. **<28.3>** Si completi perciò il cerchio da cui è stato reciso il settore *abgd*, e sia dato il cerchio *gbed*; sia poi la somma degli archi archi *be* e *ez* uguale alla misura dell'arco *bgd*. Si completino poi i segmenti *ae* e *az*: ciascuno dei settori *abe* e *aez* sarà dunque uguale al settore *abgd*, per cui come l'arco *db* sta all'arco *be*, così il settore *abgd* sta al settore *abe*. Parimenti anche il settore *aez* è uguale al settore *adb*: per cui, come l'arco *db* sta all'arco *ez,* così il settore *abgd* sta al settore *aez*. Perciò i tre settori *abgd*, *abe* e *aez* sono uguali tra loro: infatti due di quelli corrispondono al doppio dell'altro, perciò come il settore *adbe* è doppio del settore *aez*, così l'arco *dbe* è doppio dell'arco *ez*, e come l'arco *dbe* sta all'arco *ez*, così il settore *adbe* sta al settore *aez*. **<28.4>** Da ciò, se avremo diviso tutto il cerchio in settori, troveremo che il rapporto di uno di questi settori all'intero cerchio è pari al rapporto dell'arco di questo a tutta la linea della circonferenza; il rapporto dell'arco di ogni settore all'intera circonferenza è però anche uguale a quello della metà del suo arco rispetto alla metà della circonferenza. **<28.5>** Il rapporto in numeri tra il risultato della moltiplicazione del semidiametro del cerchio per il semiarco del settore, e il risultato della moltiplicazione del semidiametro per la metà della circonferenza, è pari al rapporto esistente tra il semiarco del settore e la metà della circonferenza. **<28.6>** Ma dal risultato della moltiplicazione del semidiametro per la metà della circonferenza, viene fuori l'area del cerchio: dunque come il prodotto del semidiametro del cerchio per la metà dell'arco del settore sta all'area del cerchio, così il settore del cerchio sta all'area totale: ciò significa che le aree di tutti i settori si ottengono dalla moltiplicazione del semidiametro dei rispettivi cerchi per la metà degli archi, ed era questo ciò che intendevo dimostrare. **<28.7>** Per chiarire ciò con esempi numerici: siano dati due segmenti *ab* e *ad* della misura di 5 pertiche, e l'arco *bgd* della misura di 8 pertiche: dunque il diametro totale sarà della misura di 10 pertiche. Moltiplicherai perciò il semidiametro *ad* per la metà dell'arco *bgd*, ossia 5 per 4: il risultato sarà 20 per la misura dell'area del settore *abgd*. Se vuoi ottenere l'area del settore *abez,* moltiplicherai il semidiametro *ae* per la metà dell'arco *bez*: il risultato sarà pari a 40 per la misura dell'area del settore *abez*. <**28.8**> Se invece vuoi ottenere soltanto l'area di un certo settore del cerchio che sia minore del semicerchio, come ad esempio l'area del settore *abg*, la cui corda *ag* sia pari a 16 pertiche e la freccia *bd* sia pari a 4 pertiche, fa' in modo di determinare la misura del diametro del cerchio, donde questa sezione, in questo modo: traccerai la linea *bd* in modo che sia dritta fino al punto *e*; sia il rapporto del segmento *de* al segmento *da* pari al rapporto di *da* a *db*; alla luce di ciò, *ed* sarà pari a 16, ossia al doppio della linea *da*, e *da* sarà il doppio della linea *db*.

<**29.1**> Oppure in altro modo si moltiplichi *ad* per *dg*, ossia 8 per 8: il risultato sarà 64, che viene diviso per il segmento *bd*, ossia per 4: il risultato sarà 16 per la misura della linea *de*, come ho detto. Dunque tutto il diametro *be* sarà pari a 20. Si fissi nel punto *f* il centro del cerchio, si traccino *fa* e *fe*, e sarà *fabg* il settore del cerchio: perciò se avremo moltiplicato *fb* per la metà dell'arco *abg*, ossia per l'arco *bg*, il risultato sarà l'area del settore *fabg*, dalla quale, se avremo tolto l'area del triangolo rettangolo *fag* che si ottiene dalla moltiplicazione di *fd* per *dg*, rimarrà la misura dell'area della sezione che è contenuta sotto il segmento *ag* e l'arco *abd*. <**29.2**> Se infine vuoi conoscere la misura dell'area della restante porzione di cerchio che è contenuta sotto il segmento *ag* e l'arco *aeg*, moltiplica il semidiametro, ossia *fe*, per la metà dell'arco *aeg*, e aggiungi il risultato all'area del triangolo *fag*: otterrai così l'area della sezione *aeg*. E così devi fare in casi simili.

<**30.1**> Se ti dovesse capitare di dover calcolare la superficie di un settore costituito da un triangolo e dalla porzione di un cerchio, come la superficie *abgd*, la quale è composta dal triangolo *abd* e dalla sezione del cerchio *bgd*, la cui area è nota, non si può conoscere l'area di questo settore, se le linee *ab* e *ad* sono diverse tra loro. <**30.2**> Se però viene protratto un segmento all'interno della figura, ad esempio a linea *ag*, tale che sia di lunghezza diversa rispetto a ciascuno dei segmenti *ab* e *ad*, otterrai l'area del settore, se sommerai l'area della sezione *bgd* e quella del triangolo *abd*.

<**31**> Allo stesso modo se vorrai calcolare l'area di una superficie che abbia la forma di un pesce, ossia che sia composta dalla somma di due settori di cerchio, come la figura *ezit* che è composta dai due settori *ezi* e *eti*, calcolerai l'area di ciascuna delle sezioni, e ciò che otterrai dalla loro somma, corrisponderà all'area della figura *ezit*.

<32.1> Di nuovo vi è una superficie, che viene detta figura *elana* ovvero "obliqua", circondata da soltanto una linea che non formi un cerchio, i cui diametri *ag* e *bd*, intersecandosi a vicenda ad angolo retto, sono tra loro diversi. **<32.2>** Potrai ottenere l'area di questa figura, se ti risolverai a dividerla in figure rettilinee, la prima delle quali, e la più grande, corrisponderà al quadrilatero rettangolo contenuto sotto i segmenti *ba*, *bg*, *da* e *dg*: di questa figura rimarranno quattro pezzi, il primo dei quali è contenuto dal segmento *ab* e dalla curva *aeb*; il secondo è contenuto dal segmento *bg* e dalla curva *bzg*; il terzo è contenuto dal segmento *bg* e dalla curva *gid*; il quarto infine è contenuto dal segmento *da* e alla curva *dta*. Se in questi quattro pezzi tracceremo i triangoli rettangoli *eab*, *zbg*, *igd* e *tad*, di tutta la figura non resterà niente se non quel poco che è rimasto sotto gli otto pezzi. **<32.3>** Se in uno di questi viene tracciato un triangolo, e nei restanti pezzi ti sarai ingegnato a fare altrettanto, tutta la sopradtta figura *elana* sarà divisa in figure regolari, e non resterà altro di misurabile; sommeremo allora l'area di tutte queste figure rettilinee, e otterremo così l'area di tutta la figura. **<32.4>** Altrimenti somma i diametri *ag* e *bd*, e moltiplica la metà del risultato per 3 più $\frac{1}{7}$, e il totale corrisponderà alla misura della linea curva *abgd*: se avrai moltiplicato la metà di questo per la metà della somma dei due diametri, il risultato sarà pari all'area della soprascritta figura. **<32.5>** Per fare un esempio numerico, sia il diametro *bd* pari a 16, e sia il diametro *ag* pari a 12; la loro somma fa 28; se avrai diviso la metà per 3 più $\frac{1}{7}$, il risultato sarà 44 per la linea curva *abgd*; se avrai moltiplicato la metà di questo, ossia 22, per la metà della metà della somma dei diametri, ossia per 7, il risultato sarà 154 per l'area di questo.

<33.1> Se in un cerchio si inscrive un triangolo, i cui tre angoli toccano la circonferenza della cintola, è possibile calcolare la misura del diametro se si conosce la lunghezza dei lati di questo triangolo. **<33.2>** A dimostrazione di ciò, si tracci il triangolo *abg* inscritto nel cerchio *abdg*, i cui tre angoli tocchino la cintola nei punti nei punti *a*, *b*, e *g*. Dal punto *a* si tracci il diametro *ad* che interseca il lato del triangolo *bg* sul punto *e*. Dico che è possibile calcolare la misura del diametro *ad* se si conosce la misura del lati del triangolo *abg*. **<33.3>** Si traccino allora prima i due lati del triangolo *ab* e *ag* in modo che siano uguali tra loro; si uniscano poi i segmenti *bd* e *dg*: ciascuno dei triangoli *abd* e *agd* sarà rettangolo, essendo entrambi posti all'interno di un semicerchio. Dal momento che il lato *ab* è uguale al lato *ag*, il lato *bd* sarà uguale al lato *dg*; pertanto la circonferenza *bd* è uguale alla circonferenza *dg*. Su uguali porzioni di circonferenza insistono angoli uguali, per cui l'angolo *bad* è uguale all'angolo *dag* e la base *be* è uguale alla base *eg*. Dunque il diametro *ad* interseca il segmento *eg* in due parti uguali: perciò deve necessariamente intersecarlo ad angolo retto, come dimostra Euclide nel terzo libro. **<33.4>** Senza dubbio i triangoli *aeb* e *aeg* sono rettangoli, uguali e simili, essendo gli angoli del primo uguali agli angoli del secondo. Dal momento che il triangolo *adb* ha in comune l'angolo *bad* con il triangolo *abe*, l'angolo *aeb* è uguale all'angolo *abd*, essendo ciascuno dei due retto. In verità rimane l'angolo *adb* uguale all'angolo *abe*: dunque i due triangoli *abd* e *aeb* sono equiangoli. **<33.5>** In modo simile si dimostrerà che il triangolo *agd* è equiangolo rispetto al triangolo *aeg*. Dunque i quattro triangoli *aeb*, *aeg*, *abd* e *agd* sono simili tra loro. Infatti i triangoli simili hanno uguali gli angoli che giacciono sui lati in proporzione. Perciò come *da*, che sottende l'angolo retto *abd*, sta a *ab* che lo contiene, così *ab*, ovvero *ag*, sottendendo angoli retti, sta al segmento *ae*; perciò il prodotto di *ad* per la perpendicolare *ae* è uguale a ciascuno dei quadrati delle linee *ab* e *ag*, ovvero al prodotto di *ab* per *ag*. Ciò significa che se avremo moltiplicato *ab* per *ag*, se cioè avremo preso il quadrato della linea *ab* oppure quello della linea *ag*, e avremo diviso il risultato per la perpendicolare *ae*, il totale corrisponderà alla misura del diametro *ad*. La lunghezza della perpendicolare *ae* è nota, essendo nota la misura dei lati del triangolo *abg*: perciò anche la lunghezza del diametro *ad* sarà nota. **<33.6>** Per fare un esempio numerico: sia uno qualsiasi dei segmenti *ab* e *ag* della misura di 10 pertiche, e sia il segmento *bg* della misura di 12 pertiche: la perpendicolare *ae* sarà allora della misura di 8 pertiche. Dal prodotto di *ab* per *ag*, ovvero del quadrato della linea *ab*, o *ag*, viene fuori 100; questo, diviso *ae*, ossia 8, darà come risultato 12 pertiche più $\frac{1}{2}$ per la lunghezza del diametro *ad*. **<33.7>** Oppure in altro modo, dal momento che i due segmenti *ad* e *bg* si intersecano tra loro all'interno del cerchio *abdg*, il prodotto di *ae* per *ed* starà in rapporto al prodotto di *be* per *eg*: perciò se avremo moltiplicato *be* per *eg*, e avremo diviso il risultato per *ae*, ossia 36 per 8, il risultato sarà 4 più $\frac{1}{2}$ per la lunghezza della linea *ed*. Pertanto tutto il diametro *ad* sarà della misura di 12 più $\frac{1}{2}$, come ho detto prima. **<33.8>** Sia la lunghezza di ciascuno dei segmenti *ab* e *ag* nota e, ugualmente, sia nota la lunghezza del diametro *ad*, mentre sia ignota quella del segmento *bg*: dal momento che il triangolo *abd* è rettangolo, e che dall'angolo retto è stato protratto il segmento *be* perpendicolare alla base *ad*, i triangoli *abe* e *bed* sono tra loro simili nonché uguali al triangolo *abd*. Perciò come *da* sta ad *ab*, così *ab* sta ad *ae*. Se quindi avremo diviso il quadrato della linea *ab*, ossia 100, per il diametro *ad*, il risultato sarà 8 per la lunghezza della perpendicolare *ae*. Se poi il quadrato di questo viene sottratto dal quadrato del lato *ab*, si avrà 36 per il quadrato della linea *be*. Oppure se avremo moltiplicato *ae* per *ed*, cioè 8 per 4 più $\frac{1}{2}$, il risultato sarà similmente di 36 per il quadrato della linea *be*. Dunque *be* misura 6, e tutta *bg* è pari a 12. Oppure in altro modo, dal momento che il triangolo *aeb* è simile al triangolo *adb*, allora come *ad* starà a *db*, così *ab* starà a *be*: essi hanno infatti in proporzione i lati intorno agli angoli uguali. Infatti senza dubbio l'angolo *abe* è uguale all'angolo *adb*: perciò, se avremo moltiplicato *db* per *ba*, cioè 7 più $\frac{1}{2}$ per 10, e avremo diviso il risultato per *ad*, otterremo 6 per la lunghezza della linea *be*, che corrisponde alla metà della linea *bg*.

<34.1> Siano ora i segmenti *ab* e *ag* tra loro diversi, e tra i due sia *ab* il minore, come si vede in quest'altra figura. All'interno del triangolo *abg* si tracci la perpendicolare *az*: dal momento che nella sezione *bdga* sono presenti due angoli, uno dei quali è *bga*, l'altro invece è *bda*, questi saranno uguali tra loro. L'angolo *azg* è uguale all'angolo *abd*, essendo entrambi retti; il restante angolo *zag* è uguale al restante angolo *bad*: pertanto, i triangoli *azg* e *abd* sono equiangoli. **<34.2>** Allo stesso modo si mostrerà che il triangolo *azb* è simile al triangolo *agd*: infatti gli angoli *abg* e *adg* sono contenuti all'interno della stessa sezione dal segmento *ga* e dall'argo *abdg*, e perciò sono tra loro uguali. Gli angoli *azb* e *agd* sono retti, quindi rimane l'angolo *zab* uguale al restante angolo *gad*. Il triangolo *azb* è dunque simile al triangolo *agd*, e dal momento che i triangoli *abd* e *azg* sono simili, allora come *da* starà ad *ab*, così *ga* starà ad *az*. Se perciò avremo moltiplicato *ab* per *ag*, e avremo diviso il risultato per *az*, otterremo la lunghezza del diametro *ad*. **<34.3>** Esempio numerico: sia *ab* pari a 13, *ag* pari a 15 e *bg* pari a 14: *bz* sarà perciò pari a 5, *zg* sarà pari a 9 e *az* sarà pari a 12. Senza dubbio il risultato del prodotto di *ab* per *ag* è 195; questo, diviso *az*, ossia 12, darà come risultato 16 più $\frac{1}{4}$ per la lunghezza del diametro *ad*. Ma sia nota la misura del diametro *ad*, essendo nota la misura sia del segmento *ab* sia del segmento *ag*. Sia però sconosciuta la lunghezza del segmento *bg*, che corrisponde alla corda dell'arco *bag*: dal momento che i triangoli *adg* e *azb* sono simili, essi hanno uguali gli angoli che insistono sui lati in proporzione; per questo motivo, come *ad* sta a *dg*, così *ab* sta a *bz*. Perciò il risultato del prodotto di *ab* per *dg* è uguale al risultato del prodotto di *ad* per *bz*.

<35.1> Di nuovo, dal momento che i triangoli *abd* e *azg* sono simili tra loro, allora come *ad* starà a *db*, così *ag* starà a *gz*; per questo motivo, il risultato del prodotto di *ag* per *db* è uguale al risultato del prodotto di *ad* per *zg*. Ma il risultato del prodotto di *ab* per *gd* è stato uguale al risultato del prodotto di *ad* per *bz*: allora il risultato del prodotto di *ab* per *ag*, sommato al risultato del prodotto di *ag* per *bd*, è uguale alla somma dei risultati delle due moltiplicazioni di *ad* per *bz* e di *ad* per *zg*, la quale è pari al prodotto di *ad* per *bg*. Dunque il prodotto di *ab* per *dg*, sommato al prodotto di *ag* per *db*, è uguale al prodotto di *ad* per *bg*: se quindi avremo sommato il risultato del prodotto di *ab* per *dg* al risultato del prodotto di *ag* per *bd*, e avremo poi diviso il risultato per *ad*, otterremo la lunghezza della nota corda *bg*, come ho detto prima. **<35.2>** Queste cose saranno dimostrate con esempi numerici: senza dubbio dal quadrato del diametro *ad* si sottraggano i quadrati delle linee *ab* e *ag*, e rimarranno i quadrati noti delle linee *bd* e *dg*, essendo i triangoli *abd* e *agd* ortogonali: *bd* sarà della misura di 9 più $\frac{3}{4}$, e il segmento *gd* sarà della misura di 6 più $\frac{1}{4}$. **<35.3>** Pertanto se avremo moltiplicato 6 più $\frac{1}{4}$ per 13, cioè *gd* per *ab*, e 9 più $\frac{3}{4}$ per 15, cioè *bd* per *ag*, otterremo in totale 227 più $\frac{1}{2}$; diviso poi questo valore per il diametro *ad*, cioè per 16 più $\frac{1}{4}$, il risultato è pari a 14 per la misura della corda *bg* (diviso questo per 16 più $\frac{1}{4}$, il risultato sarà pari a 14 per la misura della corda *bg*). Questo procedimento è molto utile nel calcolare la misura della corda relativamente a un qualsiasi arco originato dall'aggregazione di due archi, di cui siano note le corde. **<35.4>** Sarà stata nota la lunghezza delle corde degli archi *ba* e *ag*, ossia dei segmenti *ab* e *ag*, attraverso i quali calcoliamo la misura della corda *bg* per l'arco *abg*, il quale era stato originato dall'aggregazione degli archi *ba* e *ag*. Questo è ciò che ha dimostrato Tolomeo nella composizione della tavola degli archi e delle corde all'interno dell'Almagesto, facendo uso di un altro procedimento.

<36.1> Tolomeo ha infatti dimostrato, facendo ricorso a una figura simile, che in ogni genere di quadrilatero inscritto in un cerchio quando vengono tracciati al suo interno due diagonali, il prodotto di una delle diagonali per l’altra è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti, come si dimostra in questo modo. **<36.2>** All’interno del cerchio *abcd* sia dato il quadrilatero *abcd*, e siano in esso tracciate le diagonali *ac* e *bd* che si intersecano tra loro nel punto *e*: dico che il prodotto di *ac* per *bd* è uguale alla somma dei due prodotti di *ab* per *cd* e di *ad* per *bc*. Ora, gli angoli *bae* e *ead* o sono tra loro uguali, oppure no. **<36.3>** Siano uguali: si mostrerà che il triangolo *aed* è simile al triangolo *abc*, essendo gli angoli *adb* e *acb* uguali tra loro. Infatti sono contenuti all’interno della stessa sezione. Il rimanente angolo *aed* è uguale al rimanente angolo *abc*: perciò, come *ac* sta a *cb*, così *ad* sta a *de*. Dunque il risultato del prodotto di *ad* per *cb* è uguale al risultato del prodotto di *ac* per *de*. Similmente si mostrerà che il triangolo *aeb* è simile al triangolo *adc*: perciò come *ac* starà a *cd*, così *ab* starà a *be*. Il prodotto dunque di *ac* per *eb* è uguale al prodotto di *ab* per *cd*: dunque il prodotto di *ad* per *bc*, sommato al prodotto di *ab* per *cd*, è uguale al risultato della moltiplicazione di *ac* per *bd*, come ho detto prima. **<36.4>** Ma sia l’angolo *bae* maggiore dell’angolo *ead*, e giaccia l’angolo *bai* uguale all’angolo *ead*. Si prenda l’angolo *iae* in comune: l’angolo *bae* sarà uguale all’angolo *iad*. **<36.5>** Si dimostrerà perciò che il triangolo *iad* è simile al triangolo *abc*, e che il triangolo *aib* è simile al triangolo *adc*, e il risultato sarà quello che ho detto prima. Si dimostrerà poi che il prodotto della diagonale *ac* per la diagonale *bd* è uguale alla somma delle due moltiplicazioni dei lati opposti. Da ciò, se una di queste corde sarà stata ignota, attraverso la conoscenza della misura delle restanti potrai calcolarne la lunghezza. **<36.6>** Esempio: sia ignota la misura di una delle diagonali; sia però nota l’altra, insieme con i lati del quadrilatero. Moltiplicherò senza dubbio *ab* per *cd*, aggiungerò il risultato al prodotto di *ad* per *bc*, e dividerò il totale per la lunghezza della diagonale di cui si conosce la misura. Se sarà stato invece ignoto il lato *ab*, dal risultato del prodotto di *ac* per *bd* sottrarrò il prodotto di *ad* per *bc*, dividerò il totale per *cd*, e otterrò *ab*. Procedi in questo modo anche per gli altri lati.

<37.1> Se desideri calcolare la lunghezza del lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio il cui diametro sia della misura di 8, togli la quarta parte del quadrato dell’intero diametro, oppure triplica il quadrato del semidiametro, e otterrai 48 per la misura del quadrato di uno qualsiasi dei lati del triangolo inscritto in questo cerchio; se avrai moltiplicato questo valore per la metà della sua perpendicolare, ossia per 3, ottrerrai 3 $\sqrt{48}$, ossia la radice di 432 per l'area di questo triangolo, che corrisponde a 20 pertiche, 4 piedi, e 12 once più $\frac{3}{4}$. **<37.2>** Da ciò, si apprende che la proporzione dell'area di un qualsiasi triangolo inscritto in questo cerchio, rispetto al quadrato del suo diametro, è pari a quella di 20 pertiche, 4 piedi, e 12 once più $\frac{3}{4}$ a 64: se, dunque, avremo moltiplicato questa per il quadrato del diametro di cui vorrai conoscere la lunghezza, e avremo diviso il risultato per 64, otterremo l'area del triangolo inscritto in questo cerchio. Dal momento che il triangolo inscritto nel cerchio corrisponde alla metà dell'esagono inscritto nello stesso, il rapporto dell'area dell'esagono al quadrato del diametro del suo cerchio sarà uguale al rapporto di 41 pertiche, 3 piedi, e 7 once più $\frac{1}{2}$ a 64: se, allora, questo valore sarà moltiplicato per il quadrato del diametro di qualsiasi cerchio, e il totale sarà diviso per 64, si otterrà l'area dell'esagono inscritto nello medesimo cerchio.

<38.1> Se, poi, all'interno del cerchio *abgd*, il diametro *bd* misura 8, e vuoi calcolare la lunghezza del lato di un pentagono, oppure di un decagono in esso inscritto, sul diametro *bd* nel punto *e* si tracci la perpendicolare *ea*; si divida poi *ed* in due parti uguali nel punto *z*, e si tracci il segmento *az*; infine, sia il segmento *zi* della stessa lunghezza del segmento *za*, e si tracci il segmento *ai*. **<38.2>** Dico allora che il segmento *ai* corrisponde al lato del pentagono, e che il segmento *ie* corrisponde al lato del decagono, come così si dimostra: dal momento che la linea *ed* è stata divisa in due parti uguali sul punto *z*, e che sulla stessa direttrice è stata aggiunta la linea *ei*, il prodotto di *ei* per *id* più il quadrato della linea *ez* sarà uguale al quadrato della linea *zi*. Ma il segmento *zi* è uguale al segmento *za*, dunque il prodotto di *ei* per *di* più il quadrato della linea *ez* è uguale al quadrato della linea *az*. Ma il quadrato della linea *az* è uguale alla somma dei quadrati delle linee *ae* e *ez*: dunque, il prodotto di *ie* per *id* più il quadrato della linea *ze* è uguale alla somma dei due quadrati delle linee *ae* ed *ez*. **<38.3>** Si sottragga secondo prassi il quadrato della linea *ez*: rimarrà il prodotto di *ei* per *id* tale che sarà uguale al quadrato del semidiametro *ae*, ossia al semidiametro del quadrato *de*, essendo *de* uguale alla lunghezza della linea *ae*; la linea *di* è stata dunque divisa secondo media ed estrema proporzione. Infatti come *id* sta a *de*, così *de* sta a *ei*. Il lato dell'esagono è pari alla linea *de*: essendo perciò stato aggiunto al lato dell'esagono un segmento, il quale è stato diviso insieme all'intero segmento secondo media ed estrema proporzione nel punto di congiunzione di questi, questo segmento, che si congiunge al lato dell'esagono, corrisponde al lato del decagono, come dimostra Euclide nel libro tredicesimo: perciò il segmento *ei* corrisponde al lato del decagono.

<39.1> Dal momento che, come lo stesso Euclide mostra nel medesimo libro, il lato di un pentagono è maggiore del lato di un esagono e di un decagono, senza dubbio il segmento *ai* corrisponderà al lato del pentagono, essendo pari alla somma dei quadrati delle linee *ae* ed *ei*, ossia alla somma del quadrato del lato dell'esagono e di quello del lato del decagono, sicché dimostrerò con l'ausilio di numeri che il lato *ai* corrisponde alla linea minore, ossia alla radice della quarta *abscissio*[21]. **<39.2>** Esempio: sia il diametro *bd* della misura di 8: la lunghezza di entrambi i segmenti *ae* e *ed* è allora pari a 4. La metà, ossia *ze*, è pari a 2: da ciò, se avremo aggiunto i quadrati delle linee *ae* e *ez*, otterremo 20 per la misura del quadrato di ciascuna delle linee *az zi*: il segmento *ei* è dunque pari a una radice meno un numero. **<39.3>** Questo segmento è pari alla radice di 20 meno 2: ne consegue che, se avremo moltiplicato questo valore per se stesso, il risultato sarà pari 24 – 4 $\sqrt{20}$. Le quattro radici corrispondono alla radice di sedici volte 20, ossia a 320: se l'avremo addizionata al quadrato della linea *ae*, ossia a 16, si otterrà 40 meno la radice di 320 per la misura del quadrato della linea *ai*. La radice di questo valore corrisponde alla lunghezza della linea *ai*, e dal momento che essa è la radice di un numero meno una radice, noi diciamo che questa è la linea minore, poiché la differenza tra il quadrato di 40, ossia 1600, e 320, non corrisponde a un numero quadrato. La radice di questo reciso si calcola secondo approssimazione in questo modo: la radice di 320, che è pari all'incirca a 18 meno $\frac{1}{9}$, devi sottrarla da 40: rimane 22 più $\frac{1}{9}$, la cui radice, che è pari a 4 pertiche, 4 piedi, 3 once e 17 punti, corrisponde secondo approssimazione alla misura della linea *ai*, ossia del lato del pentagono inscritto nel cerchio di sopra. **<39.4>** Da ciò, si può facilmente calcolare la lunghezza di tutti i lati dei pentagoni inscritti in qualsiasi tipo di cerchio, perché come 4 pertiche, 2 piedi, 3 once e 17 punti stanno a 8, così il lato del pentagono inscritto in qualsiasi cerchio sta al suo diametro. Ne

---

[21] Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 357 (Boncompagni): *quarti quippe binomimium* (sic) *radix est linea, que dicitur maior, hoc est compositum ex duobus numeris inrationatis potentia incommensurabilibus; quorum quadrati insimul iunguntur, faciunt numerum ratiocinatum*.

consegue che, se avremo moltiplicato il diametro di qualsiasi cerchio per 4 pertiche, 2 piedi, 3 once e 17 punti, e avremo diviso il risultato per 8, otterremo la lunghezza del lato del decagono in esso inscritto.

<40.1> Se, infine, desideri calcolare la misura della corda *be* dell'angolo del pentagono *abgde*, intorno al quale sia descritto il cerchio *abgde*, traccia il diametro *bz* di questo cerchio, la cui misura sia pari a 8, unisci poi *ze*, che corrisponderà al lato del decagono. Dal momento che l'angolo *zeb* si trova all'interno del semicerchio *zeb*, esso è retto, per cui se dal quadrato del diametro *bz*, che è pari a 64, si sottrae il quadrato del lato del decagono *ze*, che abbiamo visto prima essere pari a 24 meno la radice di 320, il risultato sarà 40 più la radice di 320, la quale è detta linea maggiore, essendo la radice del quarto binomio, e corrisponde alla lunghezza della corda *be*. **<40.2>** Da ciò puoi comprendere che qualsiasi sia il valore del quadrato del lato del pentagono, dello stesso valore sarà la corda dell'angolo del pentagono. Ma il lato del pentagono corrisponde alla radice del quarto reciso, ossia a un numero meno una radice; il quadrato della corda corrisponde al quarto binomio e, dal momento che è minore del suo binomio reciso, allora la radice del quarto reciso viene detta linea minore, e la radice del quarto binomio viene detta linea maggiore.

<41.1> Oppure, in altro modo, si tracci il diametro *ati* in modo tale che intersechi la corda *be* nel punto *t*; traccerò poi il segmento *ib*. Il triangolo *iba* sarà ortogonio. Esso è stato diviso dalla perpendicolare *bt* in due triangoli simili tra loro e uguali: perciò, come *ia* sta a *ab*, così *ab* sta a *at*. Se dunque avremo diviso il quadrato della linea *ab*, che è pari a 40 meno la radice di 320, per il diametro *ai*, ossia per 8, otterremo 5 meno la radice di 5 per la lunghezza della linea *at*, la quale sottratta all'intera *ai*, darà 3 più la radice di 5 per la lunghezza della linea *ti*. Ne consegue che, se avremo moltiplicato *ti* per *ta*, e avremo quadruplicato il risultato, otterremo similmente 40 più la radice di 320 per il quadrato della linea *be*. **<41.2>** Infatti la radice di 320 è pari a 18 meno $\frac{1}{9}$, la quale aggiunta a 40, dà come risultato 58 meno $\frac{1}{9}$ per la misura del quadrato della linea *be*, la cui radice è pari a 7 pertiche più 3 piedi più 11 once più 14 punti. **<41.3>** Attraverso la misura di questa corda, potrai ottenere anche la misura di simili corde che cadono all'interno di qualsiasi cerchio, se l'avrai moltiplicata per il diametro del medesimo cerchio, e avrai diviso il totale per 8. **<41.4>** Per ottenere l'area del soprascritto pentagono, moltiplicheremo $\frac{3}{4}$ del diametro, ossia 6, per $\frac{5}{6}$ della corda *be*; oppure moltiplica $\frac{5}{6}$ di 6, pari a 5, per tutta la corda *be*, e il risultato sarà pari all'incirca a 38 pertiche e 1 più $\frac{1}{2}$ denari per la misura dell'area del pentagono *abgde*.

<42.1> Attraverso ciò possiamo ottenere la misura dell'area di tutti i tipi di pentagono inscritti all'interno di qualsiasi cerchio: se avremo moltiplicato 38 pertiche e 1 più $\frac{1}{2}$ denari per i quadrati dei diametri dei medesimi cerchi, e avremo diviso il risultato per il quadrato del cerchio preposto, ossia per 64 (dal momento che come Euclide all'inizio del libro XII mostra, figure regolari simili all'interno dei cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri) viceversa allora come il quadrato del diametro di un cerchio sta al poligono in esso inscritto, così il quadrato del diametro di un altro cerchio sta a un poligono della stessa tipologia in esso inscritto. **<42.2>** Possiamo ottenere anche la misura della corda *be*, e la si otterrà attraverso le cose che sono dimostrate nel libro XIV di Euclide, perché la somma della corda dell'angolo del pentagono e del lato del pentagono dà come risultato un valore superiore a cinque volte il quadrato del semidiametro del cerchio: perciò, se avremo preso il quintuplo del quadrato della metà del diametro, otterremo come risultato 80; se poi da questo valore avremo sottratto il quadrato del lato del pentagono, ossia 40 meno la radice di 320, rimarrà 40 più la radice di 320 per la misura del quadrato della corda *be*, come ho detto prima. **<42.3>** Oppure se avremo moltiplicato il diametro per $\frac{5}{81}$, otterremo 40 per il termine maggiore; se infine avremo preso i $\frac{5}{64}$ del quadrato del quadrato del diametro, ossia di 4096, avremo come risultato 320, la cui radice corrisponde al termine minore. Potrai operare in questo modo in relazione ad altri cerchi.

<43.1> Senza dubbio, l'area di un triangolo equilatero ed equiangolo inscritto in un cerchio del diametro di 8, come abbiamo visto, misura più di 20 pertiche quadrate, 4 piedi e 12 once e $\frac{3}{4}$; l'area del quadrato è certamente pari a 32, ossia alla metà di 64, il quale corrisponde al quadrato del diametro; quella del pentagono in verità è di 38 più $\frac{1}{24}$; quella dell'esagono è poi di 41, più 3 piedi e 7 once e $\frac{1}{2}$; l'area dell'ottagono è certamente di 45 pertiche, 1 piede e 9 once e $\frac{1}{2}$, e si ottiene dal prodotto del doppio del diametro per la metà del lato del quadrato, ossia di 16 per la radice di 8; l'area del decagono è di 47 pertiche e 2 once più $\frac{1}{2}$, e si ottiene dal prodotto del quincuplo della quarta parte del diametro per il lato del pentagono, ossia di 10 per 4 pertiche, 4 piedi, 3 once e 17 punti; l'area del dodecagono, infine, è pari a 48 pertiche, e la si ottiene dal prodotto della metà del diametro per il semiperimetro dell'esagono inscritto nel medesimo cerchio. **<43.2>** Dopo aver calcolato la misura di tutte queste figure, potrai calcolare facilmente l'area di figure simili inscritte all'interno di altri cerchi, se non sarai immemore delle cose qui esposte.

<44.1> Come si afferma in Euc. III. 20, all'interno dei cerchi, l'angolo che sta al centro misura il doppio di quello che sta alla circonferenza che insiste sullo stesso arco. **<44.2>** All'interno del cerchio *abgd*, sia dunque dato l'angolo al centro *beg* che insiste sull'arco *bg*, e sia dato l'angolo alla circonferenza *bag*: dico che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bag*. **<44.3>** Si conduca, dunque, dal punto *a* attraverso il centro *e*, il segmento *aez*: uno dei lati del triangolo *aeb* sarà dunque in comune, ossia *ae*, perciò l'angolo *bez* è uguale alla somma dei due angoli interni e opposti *eba* e *bae*. Ma la somma degli angoli *eba* e *bae* è pari al doppio dell'angolo *bae*, dal momento che essi sono uguali tra loro. **<44.4>** Infatti il triangolo *aeb* è isoscele perché ha uguali i lati *ea* ed *eb*: dunque l'angolo *bez* è doppio dell'angolo *bae*. Allo stesso modo si dimostrerà che l'angolo *gez* è doppio dell'angolo *gaz*, per cui l'intero angolo *beg* è doppio dell'intero angolo *bag*. **<44.5>** Protrarrò di nuovo il segmento *be* fino al punto *d* e traccerò il segmento *dg*, e dimostrerò che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bdg*, perché i lati *ed* e *eg* sono tra loro uguali. Ne consegue che la somma degli angoli *edg* e *egd* è pari al doppio dell'angolo *edg*. L'angolo *beg* è infatti uguale alla somma degli angoli *egd* e *edg*: dunque l'angolo al centro *beg* è doppio dell'angolo alla circonferenza *edg*. **<44.6>** Allo stesso modo si dimostrerà che l'angolo *geb* è doppio dell'angolo *gcb*, come si chiarirà qui di seguito. **<44.7>** Si tracci di nuovo lo stesso cerchio *abgd* e protraiamo in esso un angolo che giaccia sul lato *dc*; sia dato così l'angolo *gcb* e si fissi l'angolo al centro *beg*. Sull'arco *dg* fisserò un punto *i* a caso e traccerò i segmenti *bi* e *ig*. Dico che senza dubbio l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *big*, come così si dimostra. **<44.8>** Dal momento che nel cerchio *abgd* i due segmenti *bi* e *ge* si intersecano a vicenda nel punto *t*, il prodotto di *bt* per *ti* sarà uguale al prodotto di *gt* per *tc*, come si afferma in Euc. III, 35; perciò i segmenti *bt*, *tc*, *cg* e *ti* sono in proporzione tra loro. **<44.9>** Infatti come *bt* sta a *tc* così *gt* sta a *ti*. Dal momento che i triangoli *btc* e *gti* hanno l'angolo *btc* uguale all'angolo *gti*, e in proporzione tra loro i lati che sottendono angoli uguali, i triangoli *btc* e *gti* saranno tra loro simili ed equiangoli, per cui l'angolo *tig* è uguale all'angolo *tcb*. **<44.10>** Ma è stato visto che l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *bcg*, perciò anche l'angolo *beg* è doppio dell'angolo *big*, come volevasi dimostrare. **<44.11>** ne consegue che gli angoli che si trovano nello stesso settore della circonferenza sono tra loro uguali.

<45> Dopo aver elencato tali cose che pertengono alle dimostrazioni dei cerchi, dedichiamoci ora al calcolo dell'area delle superfici che giacciono all'ascesa dei monti.

<V>

Terza distinzione, parte quinta

Calcolo delle superfici che giacciono sui monti

<1.1> Perciò, quando desideri calcolare l'area di una superficie che giaccia sulla salita o la discesa dei monti, prendi accuratamente la misura dei lati della superficie che si estende sul piano al di sotto di essa, quindi calcolane l'area: questa corrisponderà all'area della superficie richiesta. **<1.2>** Le aree dei monti, infatti, non possono essere calcolate a partire dalle superfici che appaiono in essi, dal momento che le case, gli edifici, gli alberi, finanche i semi non si ergono su di queste ad angolo retto. Ne consegue che vanno calcolate le aree dei piani su cui giacciono le superfici apparenti dei monti, al di sopra delle quali tutti i predetti oggetti si elevano perpendicolarmente. Io stesso voglio indicare in che modo, partendo dai lati delle superfici dei declivi, puoi ottenere la misura dei lati delle superfici piane che giacciono al di sotto di queste.

<2.1> Si tracci dunque la linea *ab* in modo che corrisponda al lato della superficie in pendenza di un monte; sia poi la linea *bg* il lato del piano che giace al di sotto del lato *ab*; il segmento *ag* cada perpendicolarmente rispetto a *bg* in modo da formare l'angolo retto in *g*: bisogna ora individuare la lunghezza del lato nascosto *bg* partendo dalla misura del lato apparente *ab*, nonché la trovare la misura esatta della perpendicolare *ag*. Ciò si può fare in due modi. **<2.2>** Il primo metodo coincide con quello utilizzato da sapienti agrimensori, e consiste nel fissare nel punto *a* il capo della pertica di misurazione, nell'estenderla verso il punto *b* sulla linea *ab*, e nel tenere fisso il capo della pertica che sta su *a*; bisogna poi erigere la pertica sopra l'altro capo fino a far giacere la stessa parallelamente rispetto alla linea *gb*. Saprai quando è parallela grazie all'utilizzo di uno strumento che si chiama archipendolo, il cui funzionamento illustrerò più avanti. A questo punto, attraverso il capo di sotto della pertica, lascia cadere un ciottolo sulla linea *ab*. Quindi, a partire dal punto in cui il ciottolo sarà caduto, ripeti la procedura[22], e così continuerai fino a completare la misurazione di tutta la linea

[22] Si preferisce qui adottare la traduzione di HUGHES 2008, p. 174: «repeat the procedure», nonostante la traduzione letterale dell'espressione *ibi cum eadem pertica incipias eodem ordine cum pertica mensurare* risulti in realtà essere: «da lì comincia a misurare nello stesso ordine con la pertica».

ab. <**2.3**> Esempio: sia posta la pertica *ae* in modo che sia parallela al lato *gb*; attraverso il punto *e*, si lasci cadere un ciottolo sul punto *c*; su questo punto si ponga di nuovo il capo della pertica, tenendola con l'archipendolo parallela alla linea *gb*, e sia data così *cf*; dal punto *f* si lasci poi cadere un ciottolo sul punto *h*, e poi dal punto *h* verso *b*. Posiziona infine la pertica in modo che sia parallela alla linea *bg*, e sia data *hi*; attraverso, *i* si lasci cadere un ciottolo sul punto *b*: in questo modo, quante volte la pertica così posta cadrà al di sopra della linea *ab*, tante volte essa sarà contenuta nella lunghezza del lato *gb*. <**2.4**> Esempio: dal momento che la pertica *ae* è parallela al lato *gb*, l'angolo *eag* sarà retto, essendo retto l'angolo in *g*: e dal momento che *ec* coincide con il segmento su cui cade il ciottolo, se dal punto *e* tracceremo la linea passante per *c* fino alla linea *gb*, e questa linea sia appunto *ek*, allora il segmento *ek* sarà perpendicolare al segmento *gb*: ne consegue che il segmento *ek* è parallelo ed uguale anche al segmento *ag*. Perciò *gk* misura esattamente quanto la pertica *ae*. <**2.5**> Allo stesso modo, se tracceremo la linea *fl* passante per *h*, troverai, disposte tali cose, che la linea *kl* è uguale alla pertica *ef*. Infine, se per il segmento del ciottolo che cade da *i* sul punto *b* tracceremo la linea *ib*, essa sarà parallela ed uguale alla linea *hl*: pertanto, anche *lb* misura quanto *hi*, ossia quanto la pertica. Dunque, quante volte la pertica è stata compresa parallelamente alla linea *gb* sulla linea *ab*, tante volte essa sarà compresa nella lunghezza della linea *gb*, come ho detto prima.

<**3.1**> L'archipendolo è uno strumento di legno che ha l'aspetto di un triangolo isoscele; da uno degli angoli pende un filo con agganciato un pesetto di piombo: ponendo la base dei questo strumento sulla pertica, e facendo cadere dall'angolo superiore il pesetto attaccato al filo sulla metà della sua base, si otterrà che la pertica stia parallelamente al piano di cui desidererai conoscere la misura. <**3.2**> Nella figura sottostante potrai calcolare la misura del piano ad occhio. In essa, viene posta la linea *po* per la pertica, e su questa è stato eretto l'archipendolo *abg*. Dal punto *a* cade il filo col pesetto di piombo *ad* passante per il punto *e*, che sta sulla metà di *bg*. Se nella figura il lato apparente *ab* fosse stato perpendicolare, non sarebbe stato possibile sistemare la pertica con l'archipendolo se non una sola volta, sicché avrai posto la pertica *ae* in modo che fosse parallela al lato *gb*, e avrai eretto sul segmento *ec* una canna della stessa lunghezza della linea *ec*: il triangolo *aec* sarà simile all'angolo *abg*, perché cadendo il segmento *ab* tra i segmenti *ae* e *bg*, l'angolo *aec* sarà uguale all'angolo *abg*. Similmente, dal

momento che tra i segmenti paralleli *ag* e *ec* cade il segmento *ab*, l'angolo *gab* sarà uguale all'angolo *eca*: per questo motivo, anche il restante angolo *aec* sarà uguale al restante *agb*. Perciò, in proporzione, come *ae* starà all'intera *ab*, così la pertica *ae* starà all'intera pertica *gb*. Ne consegue che se avrai moltiplicato *ab* per *ae* e diviso il risultato per *ac*, otterrai certamente la linea *gb*; in altre parole, se avrai predisposto una pertica uguale alla linea *ac*, e con questa misurerai l'intera lunghezza della linea *ab*, otterrai similmente la linea *gb*, perché quante volte la linea *ac* è contenuta nella linea *ab*, tante volte la pertica *ae* è contenuta nel lato *gb*: similmente quante volte la linea *ac* è contenuta nella linea *ab*, tante volte la linea *ec* è contenuta nell'altezza *ag*. Da ciò, se avremo moltiplicato *ab* per *ec* e diviso il risultato per *ac*, il risultato sarà certamente pari all'altezza della perpendicolare *ag*. Questo sistema per calcolare la perpendicolare è molto utile per rinvenire l'altezza delle piramidi.

<4.1> In verità, gli antichi sapienti disponevano con le cannule un triangolo simile in questo modo: dopo aver descritto la soprascritta figura *agb*, il cui lato *ab* giaceva lungo il fianco di una montagna, e attraverso il quale volevano calcolare la lunghezza del piano *gb*, nonchè l'altezza *ag*, erigevano sulla radice del monte ortogonalmente la cannula *bc* di una certa grandezza, sulla quale ponevano un'altra cannula che con la prima formava un angolo retto in *c*, il cui altro capo giaceva sulla linea *ab*. Sia ora quella linea *ec*: così facendo, il triangolo *cbe* risultava essere simile al triangolo *abg*. **<4.2>** Alla luce di ciò, come *be* stava a *ba*, così *ec* stava a *bg*: moltiplicavano dunque *ab* per *ce* e dividevano il risultato per *be*: in questo modo ottenevano la misura del lato *bg*. Similmente, dal momento che come *be* stava a *ba*, così *cb* stava ad *ag*, moltiplicavano *ab* per *bc* e dividevano il risultato per *be*: in questo modo, ottenevano la misura dell'altezza *ag*.

<5.1> Se la superficie posta sul monte avrà l'aspetto della porzione di una colonna, così che risulti tutta incurvata, come ad esempio la superficie *abde*, i cui lati *ab* e *de* siano archi di cerchio, i restanti lati *ad* e *be* siano segmenti, sia il lato *be* posto sulla cima del monte, e al contrario sia *ad* la base del monte: per prima cosa determinerò la misura del lati del piano che esiste al di sotto della superfice *agdz* e *gz*, nonché la misura delle altezze *bg* ed *ez* che cadono ortogonalmente al di sopra del piano *agdz* nei punti *g* e *z*, sicché gli angoli *agb* e *dze* risultano essere retti; calcolerò poi la misura degli archi *ba* e *ed* usando la pertica e l'archipendolo, facendo cadere ciottoli sugli stessi archi, partendo dai punti *b* ed *e*, che sono sulla parte alta della superficie, e scendendo fino ai punti *a* e *d*. Così procedendo, otterrò la misura delle quantità *ag* e *dz*. **<5.2>** Dal momento che il lato *ad* è dritto, nonché interno alla piano della superficie *gadz*, calcolerò la misura dello stesso attraverso il sistema con cui si determinano le misure dei lati dei piani. Quindi, calcolerò la misura del lato *be*, a condizione che sarà parallelo ed uguale al lato *gz*, la cui lunghezza potrà essere determinata se le perpendicolari *bg* e *ez* saranno uguali. Così facendo, otterrò la misura del lato *gz*.

<6.1> Infatti, in che modo si calcoli la misura di due perpendicolari *bg* e *ez*, siano esse uguali tra loro oppure no, lo indicherò nella sottoscritta figura, oppure potrai capirlo ad occhio, se i punti *b* ed *e* staranno nel medesimo piano; se invece uno dei due starà più in alto, la linea *be* sarà ascendente nel punto *e*, oppure discendente. **<6.2>** Sarà *e* più in alto rispetto al punto *b*, per cui calcolerò la misura del lato *eb* mediante l'utilizzo della pertica e dell'archipendolo nel sopradescritto ordine, e in questo modo otterrò la misura del lato *zg*. Se poi il piano *adzg* sarà ortogonio, moltiplicherò *ga* per *ad* e otterrò l'area del quadrilatero *az*, che corrisponderà a sua volta all'area della superficie apparente incurvata. Se invece il piano *az* non sarà ortogonio, mi occuperò di calcolare la misura del diametro *gd*, di cui troverò la lunghezza, se calcolerò quella dell'arco *bd* attraverso la pertica e l'archipendolo; sommerò poi l'area del triangolo *gad* con quella del triangolo *dzg*, e otterrò la risposta al quesito. **<6.3>** Se l'incurvatura della superficie sarà in discesa da ambo le parti, come ad esempio nell'arco *cfh*, la cui parte più alta sia il punto *f*, farò in modo che il lato del piano *ca* sia ortogonalmente aggiunto all'altezza *af*. Se, poi, l'arco *fc* sarà uguale all'arco *fh*, il doppio della linea *ca* corrisponderà alla corda dell'arco *cfh*, ossia alla lunghezza del lato di tutto il piano che cade sotto l'arco *cfh*, purché tuttavia l'arco *cfh* non sia maggiore del semicerchio, giacché se dovesse esserlo, allora il diametro del cerchio corrisponderebbe alla lunghezza della superficie apparente. **<6.4>** Ma sia l'arco *fh* minore dell'arco *fc*: farò allora in modo che la linea *hi* sia ortogonalmente aggiunta alla linea *fi*, quindi sia la linea *cak* parallela alla linea *ih*, e sia *ak* sia uguale alla linea *ih*; perciò, se si traccia *hk*, essa sarà uguale ed equidistante alla linea *ia*, sicché l'angolo in *k* è retto; ne consegue che la linea *ck* corrisponderà al lato del piano che cade sotto l'arco *cfh*, e che *hk* corrisponde all'altezza che va da *a* in *i*.

<7.1> Avendo perciò compreso tali cose, misurerò la distanza da *f* in *c* e quella da *f* in *h* tramite l'utilizzo della pertica e dell'archipendolo, e otterrò la lunghezza del lato *ck*; oppure, in altro modo, erigerò una cannula ortogonalmente sul punto *c*, in modo da formare la lunghezza *cb*, e apresterò con questa un'altra cannula di pari grandezza, che formerà in *b* un angolo retto. L'altro lato, poi, sia tangente all'arco *fc*, e sia quella cannula corrispondente alla linea *gb*. **<7.2>** Calcolerò, dunque, secondo il maggior grado di approssimazione possibile, la lunghezza delle cannule *cb* e *bg*, e sommerò i loro quadrati; estrarrò, poi, la radice del risultato, ed essa corrisponderà alla lunghezza della corda *cg*; dividerò, quindi, tale lunghezza in due parti uguali nel punto *d*, e da questo punto traccerò la perpendicolare *de* in modo che si elevi sulla corda *cg*; infine, il punto *e* dividerà l'arco *cg* in due metà. Dal momento che, come si dimostra nel libro XI, ogni triangolo è contenuto all'interno del piano, se traccerò il segmento *de* dal punto *e* sulla superficie *bcg*, esso cadrà su uno dei lati *cb* e *bg*, oppure nell'angolo in *b* tra essi compreso. Se *cb* e *bg* saranno tra loro uguali, il segmento cadrà sul punto *b*, mentre se uno di essi sarà maggiore dell'altro, esso cadrà sul maggiore di essi. **<7.3>** Sarà *cb* maggiore di *bg*: si tracci a mente la linea *de* fino a farla incontrare con la linea *cb* nel punto *l*: senza dubbio i triangoli *cbg* e *cdl* saranno ortogonali e tra loro simili, giacché hanno in comune l'angolo *lcd*, per cui come *bc* starà a *bg*, così *cd* starà a *dl*. Moltiplicherò, dunque, *bg* per *cd*, dividerò il risultato per *bc*, e otterrò la misura di *dl*. **<7.4>** Allo stesso modo, come *bc* sta a *cg*, così *cd* sta a *cl*: moltiplicherò perciò *cg* per *cd*, dividerò il risultato per *bc*, e otterrò la misura della linea *cl*, che determinerò al massimo grado di approssimazione possibile. Prenderò poi una cannula dritta, tale che cada tra *l* ed *e*, la cui lunghezza toglierò dalla lunghezza già nota *ld*, e rimarrà la freccia *ed* di cui si conosce già la misura. Se, perciò, avrò moltiplicato *cd* per *dg*, e diviso il risultato per *de*, aggiungerò il totale a *ed*, e otterrò come risultato la misura del diametro del cerchio, di cui *cfh* rappresenta l'arco. Quando poi, attraverso il diametro di lunghezza nota, avrai calcolato la misura della corda del doppio arco *gf* servendoti dei valori che ho fornito nelle tavole, e della stessa corda avrai preso la metà, otterrai la misura della linea *gam*. Se a questa avrai aggiunto la lunghezza della cannula *bg*, otterrai la misura di tutta la linea *bm*, ovvero della linea *ca*. **<7.5>** Similmente, se attraverso il medesimo diametro avrai calcolato la misura della corda del doppio arco *fh*, la metà di quella corrisponderà alla linea *hi*, che è uguale alla linea *ak*: in questo modo, otterrai la misura di tutto il segmento *ck*, ossia della lunghezza del piano che giace sotto la superficie curva.

<8.1> Se, infine, vorrai determinare a misura dei lati dei piani sui quali si elevino le superfici apparenti dei monti, potrai calcolare con precisione le loro aree proprio attraverso questi lati, siano essi piani dotati di tre, quattro, o più di quattro lati, o siano essi rotondi, o in parte rotondi, o dotati di una forma vagamente rotondeggiante. **<8.2>** Dopo che avrai compreso la forma di questo piano attraverso le nozioni che sono state esposte all'interno di questa terza distinzione, potrai calcolarne l'area. Perciò mettiamo fine a questa distinzione e diamo inizio alla quarta, nella quale insegneremo come dividere le superfici di qualsiasi forma.

Fine della terza distinzione.

APPENDICE

Appendice delle fonti e dei luoghi paralleli

Ps. Boeth. *Geom*. p. 147 (Folkerts): Et de trigonis vero qui sicut ternarius naturaliter praecedit quaternarium ita sunt praeponendi tetragonis et pentagonis ceteris que imprimis dicendum esse censeo; **Gerbertus, *Geometria*, p. 71 (Bubnov)**: triangulus, ut in arithmeticis satis a Boetio declaratum est, ideo planarum principium existit figurarum, quia tres primum rectae lineae superficiem seu latitudinem aliquam possunt includere.

Pars I

Gerbertus, *Geometria*, p. 72 (Bubnov): est autem triangulus, qui et trigonus sive tripleurus dicitur, plana figura tribus rectis lineis sive lateribus et totidem angulis terminata. Huius species tres sunt: orthogonius scilicet, amblygonius atque oxygonius; **Gerbertus, *Geometria*, p. 75 (Bubnov)**: his interim de natura triangulorum expeditis, qualiter quisque angulus, utrum rectus, an hebes aut acutus sit, discerni queat, breviter dicamus, ut certius etiam, utrum triangulus quisque orthogonius, an amblygonius sive oxygonius sit, probare valeamus.

<1> Ps. Cens. frg. 6, 3 (Sallmann): si recta linea supra rectam lineam stans continuos angulos inter se pares facit, tum uterque ex paribus angulis rectus dicitur, et ea linea Graece κάθετος, Latine normalis dicitur; **Ps. Cens. frg. 7, 3 (Sallmann)**: triangulum aequilaterum quod paribus trinis lateribus, isosceles quod duo tantum latera paria habet, scalenon quod tria latera inaequalia habet, orthogonium quod habet rectum angulum, amblygonium quod habet [idem] angulum hebetem, oxygonium quod omnes tres acutos angulos habet; **Mart. Cap. 6, 710 (Willis)**: quando autem directa super directam iacentem stans dextra laeva que angulos aequales fecerit, directus uterque est angulus, et illa superstans perpendicularis dicitur, sed Graece κάθετος; **Mart. Cap. 6, 712 (Willis)**: τρίπλευρος tres habet formas, nam trigonus est aut ἰσόπλευρος, quod latine equilaterum dicitur, quod tribus paribus lineis lateribus concurrit; aut ἰσοσκελές, quod ex tribus lineis duas aequaleshabet, quibus quasi cruribus insistit, denique aequicrurium vocitatur: aut σκαληνόν, quod omnes treslineas inter se inaequales habet; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 115 (Folkerts)**: aequilaterum igitur triangulum est quod tribus aequis lateribus cluditur, aequilaterum igitur triangulum est quod tribus aequis lateribus continetur isosceles etiam est quod duo tantummodo latera habet aequalia scalenon vero quod tria latera continet inaequalia; **Gerbertus, *Geometria*, p. 73 (Bubnov)**: habent etiam idem trigoni quaedam alia quoque tria ad discretionem sui vocabula. Alius enim isopleuros, alius isosceles, alius scalenos dicitur; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, pp. 12-3 (Curtze)**: figurarum igitur, quae sub tribus rectis lineis continentur, sunt triangulae figurae, quarum sunt trianguli aequilateri, et sunt, quorum tria latera sunt ad invicem aequalia. Ex ipsis autem sunt aequicrurii, et sunt, quorum duo tantum latera sunt aequalia, tertium autem inaequale. Earundem vero sunt diversilateri. Hi autem sunt, quorum omnia tria latera inaequalia sunt ad invicem; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 50 (Curtze):** quoniam, ut in huius libri exordio monstratur, triangulorum quidam sunt aequilateri, quidam sunt aequicrurii, quidam vero diversorum laterum, primum aequilaterorum dimensiones explanemus; et ipsi sunt, quorum omnes anguli acuti sunt et sibimet invicem aequales.

<2> Ps. Boeth. *Geom*. p. 148 (Folkerts): Huius embadum id est area tali modo est investiganda...; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 87-88 (Bubnov):** multum vero simplicior faciliorque et expeditor erit regula embadi inveniendi in omnibus orthogoniis, immo in omnibus prorsus triangulis universalis: ut scilicet per dimidium basis cathetus multiplicetur, et, quod inde creverit pro embado habeatur. Quod idem erit, si conversim per dimidium catheti basis integra multiplicetur, et inde natum embado detur; vel si tota basis per totum perpendicularem ducatur, et nati inde numeri medietas areae tribuatur. Cum enim per cathetum basis, id est per longitudinem latitudo ducitur, quadrati areae quantitas inenitur. Quem cum transversim ab angulo ad angulum medium divido, duos nimirum triangulos sibi invicem aequos efficio, quia in utroque eorum medietatem areae tetragoni invenio; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 50 (Curtze):** cuiuslibet autem triangulorum embadum est totius perpendicularis ipsius in eiusdem basis dimidium, vel totius basis in perpendicularis dimidium multiplicatio, quapropter perpendicularis <quantitatem>, quae a puncto sui casus supra basim addiscitur, adinveniamus oportet.

<6> Euc. III, 31 (Heiberg): Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔπι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς;

Ps. Boeth. *Geom.* p. 130 (Folkerts): in circulo idem angulus qui in semicirculo est rectus existit qui vero in maiore portione est angulus maior est recto qui autem in minore portione est angulus minor est recto et maioris quidem portionis angulus recto maior existit minoris vero portionis angulus recto minor existit.

<7> Euc. I, 47 (Heiberg): Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις; **Euc. II, 2 (Heiberg)**: Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ; **Ps. Boeth. Geom. p. 126 (Folkerts):** In his triangulis in quibus unus rectus est angulus quem rectiangulum nominamus quadratum quod a latere rectum angulum subtendente describitur aequum est his quadratis quae a continentibus rectum angulum lateribus conscribuntur; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 127 (Folkerts)**: si recta linea secetur quod sub tota et una portione rectiangulum continetur aequum est ei quod sub utraque portione rectiangulum clauditur et ei quadrato quod ad praedictam portionem describitur; **Gerbertus, *Geometria*, pp. 79-83 (Bubnov):** inter omnes diversorum laterum triangulos orthogonios ille quodammodo speciale privilegium et meritum habere videtur, qui ab inventore Pythagora pythagoricus appellatur; quod quare videatur, in consequentibus manifestabitur. [...] Ut ergo hypotenusa inveniatur, catheti numerus in se, ut tetragonus fiat, ducatur, eique basis numerus in se similiter ductus coniungatur. Huius simul summae, ex duobus scilicet tetragonis confectae, latus tetragonale quaesitum et inventum hypotenusae numerus esse sciatur. [...] Ut autem basis quantitas pernoscatur, ex numero hypotenusae in se ducto catheti numerus item in se ductus auferatur, et residui adhuc numeri latus tetragonale basi, ut naturaliter insita quantitas, tribuatur. Ad catheti vero mensuram vestigandam ex hypotenusae numero item in se ducto numerum basis in se ductum adime, et reliqui latus tetragonale pro catheto tene.

<1>

<2> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 89 (Busard): si tibi dixerit: diametrus est radix ducentorum, quantum est ergo latus? Erit eo opus, ut multiplices diametrum in se et erit quod proveniet ducenta, cuius accipe medietatem que est centum. Eius itaque assume radicem que est decem, ipse namque est latus. Quod si tibi dixerit: diametrus est radix ducentorum, area ergo quanta est? Erit regula sciendi illud, ut multiplices diametrum in se et quod proveniet, erit ducenta, eius itaque assume medietatem que est centum, ipse namque est area; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, pp. 32-4 (Curtze):** primum igitur, quanta sit illius tetragoni, in cuius longitudine latitudineque 10 ulnae continentur, diametri longitudo, quaestio proponatur, cui talis fiat responsio: huius tetragoni diametrum est radix 200. Si quis enim hoc diametrum <in se ipsum> duxerit, 200 procurabit. Nam in omni tetragono quadratus ab eiusdem diametro contentus eiusdem quadrati duplex existit, quapropter istius diametrum fore 200 radicem, quod est duplex multiplicationis 10 in 10, manifestum est. Si autem converso modo quaeratur: quadrati latus, cuius diametrum 200 ulnarum radix existiterit, quot ulnas in latere continebit?, quadratum diametri in duo dividens 100 invenies, cuius radix, quae est 10, eiusdem quadrati latus existit; **Fibonacci, *Pratica Geometrie*, pp. 58-9 (Boncompagni)**: nam si diameter tetragoni dati fueri radix ducentorum; et ignoraveris embadum, nec non et eius latus, accipe dimidium de 200, erunt 100, que habeas pro embado, et earum radicem, scilicet 10, habebis pro latere.

<3> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 116 (Busard): trianguli orthogonii unum laterum continencium rectum angulum est sex et secundum est octo et quod recto subtenditur angulo, est decem. Regula vero sciendi aream eius est, ut multiplices unum laterum ipsius continencium rectum angulum in medietatem secundi et quod proveniet, erit 24; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 116 (Busard)**: quod si tibi dixerit: latus quod recto subtenditur angulo est decem et unum duorum brevium est sex, quantum est ergo tercium? Erit modus inveniendi illud, ut multiplices sex in se et decem in se et minus ex maiore minuas et residui accipias radicem, que est octo. Ipsa enim est latus; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 116 (Busard)**: si vero tibi dixerit: latus quod recto subtenditur angulo est decem et secundum est octo, quantum est ergo tercium? Facies secundum quod tibi premissum est.

<2>

<2> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 111 (Busard): est triangulus equilaterus cuius quodque latus est decem, quanta est ergo <eius> area et quanta est perpendicularis ipsius? Regula eum sciendi illud est, ut multiplices latus in se et medietatem basis in se et minuas minus ex maiore et remanebit 75, eius igitur assume radicem que est octo et due tercie vicinus et <ipsa> erit perpendicularis. Aream vero si vis, multiplica <basim> in medietatem perpendicularis et quod fuerit, erit area et illud est quadraginta tria et tercia; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 111 (Busard)**: si vero tibi dixerit: area est quadraginta tria et tercia, quantum est igitur quodque latus? Erit modus inveniendi illud, ut multiplices aream in se et quod proveniet, erit mille et octigenta et septuaginta quinque. Eius <igitur> assume terciam que <est> sexcenta et 25, huius igitur assume radicem <que est 25, deinde eciam accipe radicem> radicis eius que est quinque et dupla ipsam et erit decem. Ipse enim est latus; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, pp. 50-2 (Curtze):** ad cuius evidentiam esto triangulus abc, cuius unumquodque latus 10 ulnas contineat. Istius itaque trianguli aream si nosse desideras, unum latus, quod est 10, in se ipsum multiplicans 100 invenies. De quibus si quinarii, quod est eiusdem lateris dimidium, multiplicationem quae est 25, subtraxeris, 75 remanebunt, quorum radix perpendicularis quantitatem indicat. Multiplicatio radicis 75, quae 8 et modicum minus duabus tertiis in se continet, in 5, quod est 43 et parum minus una tertia, trianguli embadum complet, et haec est figura.

<4> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 112 (Busard): quod si tibi dixerit: area eius est duplum laterum ipsius, quodque igitur latus quantum est? Erit modus inveniendi illud, ut numerum laterum duples et proveniet sex. Ipsum igitur in se multiplica et erit 36. Ipsum quoque in quinque et terciam multiplica semper et <quod> proveniet, erit centum et nonaginta duo, cuius assume radicem et quod fuerit, erit latus.

<5> Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 58 (Curtze): ad cuius doctrinam esto triangulus abc, cuius latus ab 13, latus vero bc 14, latus autem ac 15 ulnas contineat. Istius itaque trianguli embadum scire volens, cum hoc nullatenenus nisi per eius perpendicularem investigari possit, locum in quem perpendicularis incidit, adiscas. In hoc enim triangulo perpendicularis non, ut in aequilateris et aequicruriis, cum perpendicularis inter eius dimidia supra diversum latus erigitur, evenire consuevit, supra basium dimidium cadet. In hoc vero triangulo perpendicularis a dimidio basis versus alterum partem in omnibus lateribus declinat, longiorque pars casus longior, brevior vero brevior casus nuncupatur. Quapropter punctum casus perpendicularis supra basim, et cui duorum laterum longior casus coniungatur, et cuius etiam quantitatis existat, nec non et cui duorum laterum brevior casus adhaereat, cuiusve sit quantitatis, inveniamus oportet. Quibus subtiliter inquisitis perpendicularis <longitudinem> ostendamus; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 60 (Curtze)**: in praedicto igitur triangulo abc sint ipsius duo latera ab, ac, perpendicularis <ad> supra basim bc cuius longitudo est 14. Cum invenire volueris punctum ispius casus per longiorem vel breviorem casum, prius invenias longiorem. Itaque casum invenire desiderans multiplicationem longioris duorum laterum illi angulo adiacentium, a quo perpendicularis abstrahitur, accipe, et ipsum est latus ac, cuius longitudo 15, cui multiplicationi totius basis multiplicationem superadde, indeque collectum erit 421. De cuius summa si reliqui lateris ab multiplicationem abstuleris, quod est latus brevius, cuius multiplicatio est 169, remanebit 252. Quae si in duo aequa diviseris, 126 exibit. Huius autem numeri summa si per basim quantitatem, quae est 14, divisa fuerit,9 in divisione provenient, et haec <est> summa longitudinis casus perpendicularis a latere longiori. Quod si breviorem casum nosse volueris, multiplicationem brevioris lateris cum multiplicatione basis addiscens 365 nimirum invenies. De quibus longioris lateris multiplicatione dempta, quae est 225, relinquentur 140, quae si in aequalia duo diviseris, 70 reperies. Cuius numeri summam per basim quantitatem partire, <et> exibit 5, quod est remotio illius puncti, in quem cadit perpendicularis, a latere breviori. Hoc idem similiter in unumquodque latus, supra quod perpendicularis abstrahitur, operabis; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 62 (Curtze):** item longiorem casum atque breviorem aliter invenire poteris. Nam si utrumque duorum laterum angulo, a quo perpendicularis in basim abstrahitur, adiacentium in se ipsum duxeris, et ex multiplicatione maioris minoris multiplicationem abstuleris, residuique dimidium assumpseris et per totius basis summam diviseris, quod ex divisione proveniet, si ex basis dimidio depresseris, breviorem casum, si vero eiusdem basis dimidio superaddideris, longiorem casum invenies. Ut si in suprascripta figura latus ab, cuius longitudo 13, e lateribus angulo, a quo perpendicularis educitur, adiacentibus in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. Si vero latus ac, cuius longitudo 15, in semet duxeris, 225 provenient. Cumque multiplicationem minoris de multiplicatione maioris abstuleris, 56 relinquentur, cuius summae dimidium 28. Quae si per summam basis bc, quae est 14, diviseris, duo exibunt. Hoc autem si dimidio basis, quod est 7, superaddideris, 9 colligentur, et hoc est casus longior; si vero <ex> eodem septenario depresseris, 5 supererit, quod est casus brevior. Vel, si volueris, illa 56, quae tibi remanserunt, per basis summam partire, et exibit 4, quae si totius summae basis superaddideris, 18 coadunabitur, quorum medietas 9 reddunt, et hoc est longior casus. Si autem ex basi minueris, 10 relinquentur, cuius summae dimidium, quod est 5, breviorem casum efficit; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, pp. 114-5 (Busard)**: capitulum trianguli diversorum laterum <et> acutorum angulorum. Trianguli diversorum laterum et acutorum angulorum latus unum est xiii et secundum est 15 et basis est 14, quanta ergo est area? Non tamen ad aream pervenitur nisi productionem perpendicularis ipsius de cuius iam faciam mencionem, postquam triangulorum perfecerimus doctrinam si Deus voluerit. Regula vero sciendi productionem perpendicularis eius consistit per protractionem casuum ipsius et regula sciendi protractionem casuum eius est, ut multiplices latus unum in se et secundum in se et minuas minus ex maiore et remanebit 56. Cuius igitur assume medietatem que est 28 et divide eam per basim et proveniet tibi duo, adde ergo ea medietati basis que est septem et erit casus longior novem. Quod si breviorem vis, minue duo ex septem et remanebit quinque qui est casus brevior. <Si autem> vis perpendicularem, multiplica quemcumque casuum vis in se et latus quod ipsum sequitur in se et minue minus ex maiore et residui accipe radicem et erit perpendicularis que est xii. Et si aream vis, multiplica medietatem basis in perpendicularem et erit area et illud est 84. Alius preterea modus est quo productio casuum eius scitur qui est, ut multiplices xiiii in se et erit centum 96 et 15 in se et erunt ducenta et viginti quinque. Ea igitur aggrega et <quod> proveniet, erit quadringenta et viginti unum et minue ex eo multipliacionem xiii in se et remanebunt ducenta et 52, quorum assume medietatem que est centum et 26. Ipsam igitur per basim divide et proveniet tibi novem qui est casus longior et residuum basis est casus brevior qui est quinque.

<6> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, pp. 113-4 (Busard): si igitur dixerit tibi: et area est 48 et divisisti basim per perpendicularem et provenit unum et dimidium, quanta est basis et quanta est perpendicularis? Erit modus inveniendi illud, ut aream duples que est 96, deinde multiplica unum et dimidium in 96 et erit centum 44. Eius igitur assume radicem que est xii et erit basis. Ipsam ergo per unum et dimidium divide et proveniet <tibi> perpendicularis que est octo. Et si vis, divide 96 qui est duplum aree per unum et dimidium et accipe radicem eius quod provenit et erit perpendicularis; **Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 115 (Busard)**: quod si tibi dixerit: area est 84 et basis est xiiii, quanta est perpendicularis? Erit modus inveniendi illud, ut dividas 84 per medietatem basis que est septem et proveniet tibi perpendicularis que est xii; **Abraham bar Hiyya, *Liber Embadorum*, p. 60 (Curtze):** cognitur igitur puncto casus, perpendicularis longitudinem sic invenias. Alterum quidem duorum laterum in se ipsum multiplicans ex inde collecto multiplicationem illius casus longioris vel brevioris, qui ei adiacet, deme, residuique radicem inveniens perpendicularis longitudinem incontanter habebis. Veluti si exempli causa brevius istius trianguli latus ab, quod est 13, in se ipsum multiplicaveris, 169 reperies. De quibus si brevioris casus, qui est 5, multiplicationem, quae est 25, proieceris, 144 relinquuntur, cuius summae radix est 12, et ipsae est perpendicularis longitudo. Similiter si longius latus in se ipsum duxeris, et ex collecto multiplicationem longioris casus abstuleris, ad eandem perpendicularis longitudem pervenies.

<7> Euc. I, 45 (Heiberg): Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 126 (Folkerts)**: dato rectilineo angulo aequale parallelogrammum in dato rectilineo angulo collocare id est diametrum oportet.

<8> Euc. I, 34 (Heiberg): τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει; **Euc. II, 13 (Heiberg)**: Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ; **Ps. Boeth. *Geom*. p. 125 (Folkerts)**: eorum spatiorum quae alternis lateribus continentur quae parallelogramma nominantur et ex adverso latera atque anguli constituti sibi invicem aequales sunt ea quoque diametrus in duo aequa partitur.

<11> Euc. II, 5 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

<3>

<2> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, pp. 117-8 (Busard): capitulum trianguli ambigonii. At ipse quidem est extra quem cadit perpendicularis <et intra quem cadit perpendicularis>. Cuius exemplum est, ut sit unum duorum laterum eius continencium angulum expansum quattuor et secundum xiii et eius basis que subtenditur angulo expanso quindecim, quanta est ergo ipsius area? Non tamen pervenitur ad aream eius nisi per productionem perpendicularis. Regula autem sciendi productionem perpendicularis eius que cadit exterius est, ut multiplices quattuor in se et xiii in se et aggreges utramque multiplicacionem et erit centum et 85. Deinde multiplica basim in se et quod proveniet, erit ducenta et 25, minue igitur minus ex maiore et remanebunt 40, quorum assume medietatem que est 20 et ipsam per quattuor divide et proveniet tibi 5 et ipse est casus. Quod si perpendicularem vis, multiplica casum in se et tredecim in se et minus ex maiore minue et residui accipe radicem que est xii et ipsa est une perpendicularis cadens exterius supra latus quod est 4. Si autem aream vis, multiplica medietatem quattuor in xii qui est perpendicularis et quod proveniet, erit area scilicet 24.

<4> Euc. II, 12 (Heiberg): Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

<15> Euc. VI, 19 (Heiberg): Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

<4>

<3> Euc. Αἰτήματα (Heiberg): 2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ'εὐθείας ἐκβαλεῖν.

<5>

<1> Euc. VI, 2 (Heiberg): Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

<20> Euc. V *passim*.

<22> Euc. VI, 4 (Heiberg): Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

<29> Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 119 (Boncompagni): Est enim hec talis propositio proportionum ea que ostenditur in figura cata, scilicet sectoris, per quam Tholomeus docuit in Almagesti reperire demonstrationem circulorum a circulo recto, et multa alia; et Ametus filius ponat decem et octo combinationes ex ea in libro, quem de proportionibus composuit.

Pars II

<II.1>

<2> Al-Khwārizmī, *al-Jabr*, p. 233 (Hughes): Ex his igitur tribus modis sunt qui se ad invicem equant. Quod est sicut si dicas: census equatur radicibus, et census equatur numero, et radices equantur numero.

<1>

<9> Euc. II, 5 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

<11> Euc. II, 5 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ; **6:** Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

<13> Euc. II, 5 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

<22> Euc. II, 8 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

<2>

<23> Euc. I, 43 (Heiberg): Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

<32> Euc. VI, 20 (Heiberg): Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

<33> Euc. II, 6 (Heiberg): Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ by τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης being added, and the (straight-line) having being added, ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

<34> Euc. II, 11 (Heiberg): Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

<II.2>

<1>

<9> Euc. V, 19 (Heiberg): Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

<4>

<1> Abū Bakr, *Liber Mensurationum*, p. 109 (Busard): *capitulum aryde espansis vel latitudinalis.*

Pars III

<2>

<4> Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 357 (Boncompagni): quarti quippe binomimium (sic) radix est linea, que dicitur maior, hoc est compositum ex duobus numeris inrationatis potentia incommensurabilibus; quorum quadrati insimul iunguntur, faciunt numerum ratiocinatum.

Pars IV

<5> Archim. Lat. II, 69-70 (p. 46 Clagett): proportio aree omnis circuli ad quadratum diametri ipsius est sicut proportio 11 ad 14.

<7> Archim. Lat. III, 87 (p. 48 Clagett; p. 473 Knorr): sit linea AG diametrus circuli AG. Sitque eius centrum E, et linea DZ sit contingens circulum, et sit angulus ZEG tertia anguli recti.

<15> Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 356-358 (Boncompagni).

<39> Fibonacci, *Liber Abaci*, p. 367 (Boncompagni): Radix quidcm quarti binomii est composita ex duabus lineis, quarum una est radix quarti binomii, et alia est radix recisi eiusdem binomii habentis eadem nomina. Quorum (sic) linearum prima dicitur maior, secunda minor; ct coniunctum ex eis, scilicet radix binomii quarti, est similiter maior; et dicitur maior, quia maius nomen, quod potest esse numerus.

<42> Euc. XII, 1 (Heiberg): Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα; **Euc. Lat. XIV, 3 (p. 400 Busard):** In circulo tetragonus lateris pentagoni simul cum tetragono corde anguli pentagonici quincuplum est tetragono lateris exagonici.

<44> Euc. Lat. III, 20 (p. 81 Busard): In circulo qui ad centrum angulus duplus est eius qui ad periferiam quando eandem periferiam basim habuerint anguli. Esto circulus *a b g* et ad centrum quidem ipsius angulus esto qui sub *b e g*, ad periferiam vero qui sub *b a g*. Habeant autem eandem periferiam basim *b g*. Dico quoniam duplus est qui sub *b e g* angulus eius qui sub *b a g*. Copulata enim recta *a e* protrahatur in punctum *z*. Quoniam ergo equalis est recta *e a* recte *e b*, equalis et angulus qui sub *e a b* ei qui sub *e b a*. Anguli ergo qui sub *e a b* et *e b a* eius qui sub *e a b* dupli sunt. Equalis autem qui sub *b e z* eis qui sub *e a b* et *e b a*. Et ille ergo qui sub *b e z* eius qui sub *e a b* est duplus. Propter eadem ergo et qui sub *z e g* eius qui sub *e a g* est duplus. Totus ergo qui sub *b e g* tocius qui sub *b a g* est duplus; **Euc. Lat. III, 35 (p. 91 Busard):** Si in circulo due recte secent se invicem, sub unius sectionibus contentum orthogonium equale est ei quod sub alterius sectionibus. In circulo enim *abgd* due recte *i g, b d* secent se invicem secundum *e* punctum. Dico quoniam sub *a e, e g* contentum orthogonium equale est sub rectis *d e, e b* contento orthogonio. Siquidem ergo recte *a g, b d* per centrum sunt quare *e* centrum esse *abgd* circuli, manifestum quoniam equalibus existentibus rectis *a e, e g, d e, e b* et sub rectis *a e, e g* contentum orthogonium equale est sub rectis *d e, e b* contento orthogonio.

Pars V

<7> Euc. Lat. XI, 2 (p. 311 Busard): Si due recte secuerint se invicem, in uno sunt epipedo. Et omne trigonum in unum est epipedo.