



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE

XXIX CICLO

PROCESSO DI OTTIMIZZAZIONE DEI MATERIALI DEL
COVER DELLA TESTATA DI UN MOTORE A
COMBUSTIONE INTERNA

Roberto Aiello

Tesi di Dottorato

Napoli, Italia 2017

Tutor

Ch.mo Prof. Fabio Bozza (DII)

Ing. Daniela Siano (Istituto Motori CNR)

Indice

Introduzione	8
--------------	---

Capitolo 1 - Sorgenti sonore nei veicoli per autotrazione

1.1 Il rumore	12
1.2 Il suono	12
1.3 Pressione, intensità sonora e potenza	13
1.4 Decibel	16
1.5 Composizione ed analisi in frequenza	12
1.6 Le curve isofoniche e la scala dei phon	18
1.7 Sorgenti di rumore	20
1.8 Sistemi attivi e passivi per la riduzione delle emissioni sonore	22
1.9 Sistema passivo: cover del blocco motore	22

Capitolo 2 - Dinamica delle Strutture

2.1 SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

2.1.1 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento	27
2.1.2 Oscillazioni libere in presenza di smorzamento	31
2.1.3 Oscillazioni forzate da una pulsante in assenza di smorzamento	35
2.1.4 Oscillazioni forzate da una pulsante in presenza di smorzamento	38
2.1.5 Oscillazioni forzate da una forza variabile con legge qualsiasi in presenza di smorzamento	42
2.1.6 L'integrale di Duhamel	43

2.2 SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

2.2.1 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento	54
2.2.2 Ortogonalità dei modi di vibrare	59
2.2.3 Le coordinate principali: disaccoppiamento delle equazioni del moto	61
2.2.4 Oscillazioni libere in presenza di smorzamento	65
2.2.5 Oscillazioni prodotte da forze pulsanti in fase fra loro	69
2.2.6 Massa partecipante	73

2.3 SISTEMI CONTINUI DISCRETIZZATI-INTRODUZIONE AL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

2.3.1 Equazioni del moto per un sistema continuo discretizzato	75
--	----

Capitolo 3 - Propagazione sonora radiata da componenti strutturali piani

3.1 Onde nei fluidi e nelle strutture solide	80
3.2 Onde sonore nei fluidi	86
3.3 Onde flessionali nelle barre	90
3.4 Curve Dispersive	96
3.5 L'importanza della radiazione sonora	97
3.6 La Sorgente di Volume	98
3.7 Il Pistone Baffled	100
3.8 Radiazione Sonora da Modi Flessionali di Piastre	101
3.9 Radiazione sonora da onde flessionali nelle piastre	103
3.10 Il metodo agli elementi di contorno - Introduzione al BEM	109
3.11 La soluzione numerica	112
3.12 L'equazione di Helmholtz	114

Capitolo 4 - Analisi di risposta in frequenza

4.1 ANALISI DI RISPOSTA DIRETTA E ANALISI DI RISPOSTA MODALE

4.1.1 Analisi di risposta in frequenza nell'ambito di modelli numerici agli elementi finiti	118
4.1.2 Shift di fase	118
4.1.3 Numeri complessi	119
4.1.4 Risposta Diretta in frequenza	119
4.1.5 Risposta modale in frequenza	121
4.1.6 Smorzamento nell'analisi di risposta modale in frequenza	122

4.2 MOTO IMPOSTO

4.2.1 I metodi SPC/SPCD nell'analisi di risposta in frequenza-Metodo della reazione modale	125
---	------------

Capitolo 5 - Confronto numerico-sperimentale:analisi modale

5.1 Analisi modale sperimentale	129
5.2 Applicazioni dell'analisi modale	129
5.3 Analisi modale-Processo	130
5.4 Basi teoriche sulle vibrazioni-matrice delle Funzioni di Risposta in Frequenza	130
5.5 Misure delle vibrazioni	133
5.6 Post-Processing dei dati acquisiti	136

5.7 Il Metodo dell'esponenziale complesso	137
5.8 Il metodo esponenziale complesso per la singola FRF-MDOF nel dominio del tempo	138
5.9 Misure sperimentali sul componente in plastica del cover	142
5.10 Analisi modale numerica	146
5.11 Confronto Numerico-Sperimentale	149

Capitolo 6 - Costruzione del processo di ottimizzazione in Modefrontier

6.1 Settore di applicazione	153
6.2 Modefrontier-logica di base	154
6.3 Processo di ottimizzazione dell'overall di pressione acustica radiata.	160
6.4 Definizione delle variabili di processo e dell'input file	161
6.5 Analisi strutturale - modello agli elementi finiti	165
6.6 Analisi modale	166
6.7 Analisi di risposta modale in frequenza-metodo delle reazioni modali	169
6.8 Definizione del nodo Script e del nodo Transfert_File dell'analisi strutturale	172
6.9 Definizione del secondo Input_File	172
6.10 Analisi acustica - modello agli elementi al contorno	173
6.11 Definizione del nodo Script e del nodo Transfert_File dell'analisi acustica	175
6.12 Definizione delle variabili di uscita e della funzione mono obiettivo	176
6.13 Il Flusso di Processo	178

Capitolo 7 - Analisi dei Risultati del Processo di Ottimizzazione

7.1 Velocità di rotazione 1300 e 1650 rpm	182
7.2 Velocità di rotazione 2000 rpm	194
7.3 Scelta del set di parametri ottimizzato	201

Conclusioni	203
--------------------	------------

Capitolo 1

- Fig. 1 Spettro di un tono puro e spettro continuo di un rumore
- Fig. 2 Audiogramma normale
- Figura 3 Curve di ponderazione in frequenza
- Fig.4 Sorgenti di rumore nel veicolo
- Fig.5 Cover motore
- Fig.6 Cover motore ALFA ROMEO Giulietta 1600 Diesel
- Fig.7 Il componente in plastica (a sinistra) e il componente in plastica (a destra) del cover motore ALFA ROMEO Giulietta 1600 Diesel
- Fig.8 Punti di attacco del cover sulla testata del motore
- Fig.9 Alloggiamenti del componente in plastica
- Fig. 10 Blocco motore in presenza di cover (a sinistra) Blocco motore in assenza di cover (a destra)

Capitolo 2

- Fig.1 Schema di oscillatore armonico semplice
- Fig.2 Schema di oscillatore armonico semplice in assenza di smorzamento
- Fig. 3 Composizione dei due vettori rotanti di modulo A e B
- Fig.4 tre vettori rotanti con velocità angolare ω , di modulo rispettivamente pari a C , ωC e $\omega^2 C$
- Fig.5 Schema di oscillatore armonico semplice in presenza di smorzamento
- Fig. 6 Descrizione del moto dell'oscillatore armonico semplice in presenza di smorzamento per diversi valori dello smorzamento relativo
- Fig.7 Schema di oscillatore armonico semplice forzato, in assenza di smorzamento
- Fig. 8 Andamento del coefficiente di amplificazione in funzione del rapporto β
- Fig. 9 Fenomeno dei battimenti
- Fig. 10 Descrizione del moto di un oscillatore armonico semplice forzato, in assenza di smorzamento nel caso in cui $\omega = \bar{\omega}$
- Fig. 11 Andamento di N in funzione di β
- Fig. 12 Andamenti di φ in funzione di β
- Fig. 13 Descrizione della funzione $F(t)$
- Fig. 14 Forza variabile con legge qualsiasi
- Fig. 15 Schema di sistema a 3 gradi di libertà
- Fig. 16 a) Forze d'inerzia
- Fig. 16 b) Forze viscosse per effetto dello smorzatore b_1
- Fig. 16 c) Forze viscosse per effetto dello smorzatore b_2
- Fig. 16 d) Forze di richiamo per effetto della molla k_1
- Fig. 16 e) Forze di richiamo elastico per effetto della molla k_2
- Fig. 16 f) Forza esterna
- Fig. 17 Schema di sistema a 3 gradi di libertà in assenza di smorzamento
- Fig. 18 Schema di sistema a 3 gradi di libertà in presenza di smorzamento
- Fig. 19 Corpo elastico sotto l'azione di carichi dinamici variabili nel tempo

Capitolo 3

- Fig.1 Rappresentazione complessa di $g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- Fig.2 Diagramma del fasore $g(t)$ che descrive il cambio di fase sull'asse del tempo e dello spazio
- Fig.3 Analogia tra la frequenza temporale ω e la frequenza spaziale k
- Fig.4 Combinazioni di tre differenti componenti frequenziali di un'onda dispersiva nei successivi istanti di tempo
- Fig.5 Componenti del vettore d'onda k
- Fig.6 Spostamento e deformazione di un elemento di trave in flessione

- Fig.7 Deformazione flessionale di un elemento di trave
 Fig.8 Tensioni su una porzione di elemento di trave
 Fig.9 Distribuzione delle tensioni di taglio in una trave in flessione
 Fig.10 Forze trasversali su di un elemento di trave
 Fig.11 Curve di dispersione di diverse onde
 Fig.12 Campo generato da una sorgente sferica
 Fig.13 Disco e sistema di coordinate
 Fig. 14 Sistema di coordinate usato da Wallace e linee nodali di una piastra rettangolare piana
 Fig.15 Onda trasversale in una piastra in contatto con un fluido
 Fig.16 Vibrazione modale di una linea di pannello
 Fig. 17 Spettro del modulo quadrato di $\tilde{V}(k_x)$
 Fig.18 Componenti nel dominio del wavenumber radianti
 Fig. 19 Condotto lineare con pistone vibrante (terminale destro) e materiale assorbente (terminale sinistro)
 Fig. 20 Attenuazione sonora prodotta da una barriera acustica
 Fig. 21 Schematizzazione del problema descritto da una equazione alle derivate parziali
 Fig. 22 Schema delle discretizzazioni usate nei metodi di volume (a sinistra) e di contorno (a destra). La discretizzazione è composta da punti geometrici (nodi) collegati da elementi di superficie (pannelli)
 Fig. 23 Se sulla porzione della superficie è imposto un campo di velocità (a), tale superficie può essere vista come una distribuzione di sorgenti monopolari e dipolari (b).
 Fig. 24 Simbolismo utilizzato nell'equazione di Helmholtz

Capitolo 4

- Fig.1 Shift di fase
 Fig.2 Piano complesso

Capitolo 5

- Fig.1 Configurazione di montaggio di tipo free con molle (a sinistra) e con materiale cedevole (a destra)
 Fig.2 Diagramma di stabilizzazione
 Fig.3 Wireframe della struttura
 Fig.4 Punti di acquisizione delle FRF
 Fig.5 Condizioni di vincolo free con molle di bassa rigidità
 Fig.6 accelerometro fissato sul nodo 1
 Fig. 7 Misure sequenziali del martello sul sistema discretizzato per mezzo di 15 punti
 Fig.8 Layout Sperimentale
 Fig.9 Diagramma di stabilizzazione Testlab
 Fig.10 Componente di Nylon
 Fig.11 Mesh del componente di Nylon
 Fig.12 Area della struttura coperta dalle misure sperimentali
 Fig.13 a) Modo1
 Fig.13 b) Modo2
 Fig.13 c) Modo3
 Fig.13 d) Modo4
 Fig.13 e) Modo5
 Fig.13 f) Modo6
 Fig.13 g) Modo7

Capitolo 6

- Fig.1 Schema logico di base
 Fig.2 Schema logico per ottimizzare la funzione Z
 Fig.3 Tabella di Modefrontier dei valori delle variabili di ingresso e uscita e relativo obiettivo
 Fig.4 Funzione mono obiettivo in funzione di ogni Design ID
 Fig.5 Processo di ottimizzazione per minimizzare l'overall di pressione sonora radiata dal cover
 Fig.6 Nodi relativi alle variabili di processo e nodo Input File
 Fig.7 Definizione dell'intervallo di valori della densità e relativo passo dell'intervallo
 Fig.8 Definizione dell'intervallo di valori del Modulo di Young e relativo passo dell'intervallo
 Fig.9 Definizione dell'intervallo di valori del Coefficiente di Poisson e relativo passo dell'intervallo

Fig.10 Definizione dell'Input File
 Fig.11 Le variabili di processo inserite nel Input File descrivente il problema strutturale da risolvere
 Fig.12 Geometrie CAD del componente in plastica (in alto a sinistra) e del componente di poliuretano (in alto a destra).
 Vista laterale dell'intero oggetto (in basso)
 Fig.13 Mesh del componente in plastica (a sinistra) Mesh del componente di poliuretano (a destra)
 Fig.14 Regioni coinvolte nell'incollaggio dei due componenti costituenti il cover
 Fig.15 Regione Source (linea nera) Regione Target (linea viola) e mesh temporanea (area azzurra)
 Fig.16 Supporti vincolati
 Fig.17 Spettri accelerometrici per le tre velocità di rotazione investigate 1300, 1650 e 2000 rpm
 Fig.18 Nodi sollecitati in azzurro e in giallo rispettivamente del componente di plastica e di poliuretano
 Fig.19 Nodo Script e nodo Transfert File
 Fig.20 Definizione del secondo Input File
 Fig.21 Mesh FEM importata in VA ONE
 Fig.22 Mesh BEM 2D
 Fig.23 Modello numerico agli elementi al contorno (BEM)
 Fig.24 Primo nodo Transfert File, Secondo nodo Input File, Secondo nodo Script e secondo nodo Transfert File
 Fig.25 Definizione della variabili vettoriale dei valori di pressione sonora
 Fig.26 Nodo OutputTemplate, nodi delle variabili vettoriali in ingresso (Hz e sound_pressure) e in uscita (overall_dB) nel programma Matlab e nodo obiettivo

Capitolo 7

Fig.1 Funzione mono obiettivo per ogni Design ID (1300 rpm)
 Fig.2 Funzione mono obiettivo per ogni Design ID (1650 rpm)
 Fig.3 a) modo 1 (65Hz)
 Fig.3 b) modo 2 (91Hz)
 Fig.3 c) modo 3 (101Hz)
 Fig.3 d) modo 4 (145Hz)
 Fig.3 e) modo 5 (151Hz)
 Fig.3 f) modo 6 (155Hz)
 Fig.3 g) modo 7 (202Hz)
 Fig.3 h) modo 8 (204Hz)
 Fig.3 i) modo 9 (218Hz)
 Fig.3 l) modo 10 (232Hz)
 Fig.3 m) modo 11 (249Hz)
 Fig.3 n) modo 12 (260Hz)
 Fig.3 o) modo 13 (271Hz)
 Fig.3 p) modo 14 (288Hz)
 Fig.3 q) modo 15 (291Hz)
 Fig.3 r) modo 16 (297Hz)
 Fig.4 spettro di accelerazione relativo (1300 rpm)
 Fig.5 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica
 Fig.6 Deformata della risposta strutturale a 45 Hz
 Fig.7 deformata del primo modo di vibrare
 Fig. 8 Spettro di pressione sonora, risultato del modello numerico BEM
 Fig.9 spettro di accelerazione relativo (1300 rpm)
 Fig.10 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica utilizzando il set1
 Fig.11 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica utilizzando il set2
 Fig.12 Deformata della risposta strutturale a 70 Hz (set1)
 Fig.13 Deformata della risposta strutturale a 70 Hz (set2)
 Fig.14 Spettro di pressione sonora, risultato del modello numerico BEM utilizzando il set1(curva rossa) e ilset2 (curva blu)

Introduzione

Negli ultimi anni il problema acustico ha rappresentato un indice della qualità della vita umana. Oggi sia da parte degli enti governativi che delle aziende produttrici è posta una fortissima attenzione riguardo al problema delle emissioni acustiche.

Tale problema comune ha la stessa natura ma è osservato da due angolazioni differenti. Gli Enti Governativi attraverso certificazioni adeguate cercano di limitare le emissioni acustiche salvaguardando la salute del cittadino, così come avviene per le emissioni gassose, poiché un'esposizione prolungata e frequente ad emissioni acustiche significative provoca danni alla salute umana, spesso irreversibili.

Mentre le aziende produttrici, per restare al passo con la concorrenza, puntano sul comfort per caratterizzare la qualità del prodotto. Ed aumentare il comfort di un sistema prodotto spesso significa ridurre le emissioni acustiche.

Tale logica industriale coinvolge più che mai il campo automotive. Sia perché la concorrenza in tale settore è serrata e il comfort rappresenta un aspetto cruciale per la scelta degli acquirenti, sia per le numerose sorgenti di rumore coinvolte nel veicolo.

È noto come negli ultimi anni, tutte le più grandi Case Costruttrici nel campo automotive BMW FIAT MASERATI, hanno rivolto sempre più la loro attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti all'interno dei veicoli, ed hanno iniziato a considerare la qualità del suono nel comparto auto come un obiettivo da raggiungere insieme con le prestazioni del motore, le emissioni, i consumi e la guidabilità.

Per conseguire tale obiettivo è stato necessario integrare nel processo produttivo un settore che potesse focalizzare l'attenzione solo sul problema acustico del veicolo. Tale settore è definito con l'acronimo **NVH** (Noise, Vibration, Harshness). L'**NVH** costituisce una branca molto complessa, in quanto comprende molteplici tecnologie in campi differenti. Gli strumenti classici dell'analisi **NVH** utilizzabili nella fase di progettazione sono essenzialmente le analisi modali, analisi dinamiche delle vibrazioni innescanti il fenomeno fonico e fisico da contenere opportunamente, e le analisi acustiche.

Le vibrazioni possono avere origine sia dall'esterno del veicolo, nel caso del contatto pneumatico-strada, che dall'interno, nel caso il disturbo provenga dal motopropulsore o dalla trasmissione.

Il processo riguardante le performance **NVH** permette di individuare una sorgente di rumore e cerca di ridurre gli effetti attraverso l'utilizzo di materiali fonoassorbenti o smorzanti, o quando possibile, eseguendo modifiche geometriche ai sistemi coinvolti.

Per tale complessità di analisi l'uso delle tecniche di modellazione CAE e di simulazione numerica sono diventate uno strumento indispensabile già durante le prime fasi decisionali del processo di progettazione e ciò è particolarmente vero nell'ambito dell'ottimizzazione NVH di un sistema complesso.

L'attività di ricerca descritta in questo lavoro di tesi è stata svolta presso l'Istituto Motori del CNR di Napoli ed è incentrata sulla caratterizzazione vibro-acustica di un cover della testata di un motore diesel pluricilindrico. Il cover è costituito da due componenti, un componente di plastica e uno di poliuretano, entrambi vincolati alla testata motore.

Sono due gli obiettivi raggiunti nel lavoro tesi.

Il primo obiettivo è stato identificare i parametri dei materiali del componente in plastica del cover. L'identificazione dei parametri dei materiali è stata eseguita attraverso un confronto numerico-sperimentale di analisi modale in termini di modi di vibrare e frequenze di risonanza.

Il secondo obiettivo conseguito è la ricerca del set di parametri dei materiali del componente di poliuretano del cover che minimizza il rumore radiato dall'intero cover. Per trovare tale set di parametri è stato realizzato un processo di ottimizzazione numerico. All'interno del processo sono state integrate le analisi del comportamento vibratorio del cover e l'analisi della stima del rumore radiato dalla superficie esterna della struttura. Entrambe le analisi sono state svolte mediante l'utilizzo di due tecniche di simulazione numerica: il metodo agli elementi finiti (FEM) e il metodo agli elementi al contorno (BEM).

Il processo è stato eseguito per tre velocità di rotazioni diverse del motore, 1300, 1650 e 2000 rpm. Condizioni di funzionamento tipiche del contesto urbano.

Il lavoro di Tesi si inserisce in un filone di ricerca riguardante il comportamento dinamico delle strutture e lo studio della conseguente emissione sonora. Il primo passo fondamentale per comprendere il comportamento dinamico di un sistema è l'analisi modale, attraverso la quale sono individuati i modi di vibrare più critici per la struttura (Siano et al. [1]). In tal senso sono state adoperate le classiche metodologie: per l'analisi modale sperimentale la tecnica "impact testing" e per l'analisi modale numerica un modello agli elementi finiti (Siano et al. **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**). La conseguente emissione sonora delle strutture vibranti è stata sviluppata con la metodologia degli elementi al contorno (Siano et al. **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, Armentani et al. **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**). Le analisi sono state affiancate da un processo di ottimizzazione dal quale è possibile rilevare l'influenza dei parametri dei materiali sull'emissione sonora. Oggi sono sempre più diffusi lavori e attività basati sui processi di ottimizzazione, tali processi permettono di indicare le condizioni di ottimo al variare di parametri strutturali o dei materiali migliorando l'efficienza del

prodotto. Di grande interesse in tal senso sono i lavori di Liang et al. [6] e Zhang et al. [6] che hanno effettuato un'ottimizzazione topologica atta ad individuare la migliore disposizione di una quantità definita di materiale smorzante su pannelli vibranti per minimizzare l'emissione sonora e il lavoro di Ruotolo et al. [7] basato su una ottimizzazione di carattere strutturale di un cover della cinghia di un motore a combustione interna, introducendo degli irrigidimenti strutturali che modificano le forme modali per ridurre le interazioni di risonanza.

La Tesi è sviluppata nel modo seguente.

Nel Capitolo 1 saranno esposti alcuni concetti di base di acustica, verranno elencate brevemente le principali sorgenti di rumore del veicolo e si descriverà l'oggetto di studio.

Nel Capitolo 2 si affronterà il problema della Dinamica delle strutture partendo dal fondamentale concetto di sistema ad un grado di libertà, in seguito si passerà alla trattazione dei sistemi a più gradi di libertà e infine ai sistemi continui discretizzati con l'introduzione delle idee di base del metodo agli elementi finiti. Sul cover del blocco motore sono state effettuate delle analisi dinamiche, quindi i concetti esposti all'interno del Capitolo 2 risultano imprescindibili per comprendere l'influenza dei parametri fisici di un'analisi dinamica, quali massa, rigidità e smorzamento.

Nel Capitolo 3 si discuterà del fenomeno della radiazione sonora derivante dalla vibrazione strutturale. Gli argomenti esposti chiariscono come le ampiezze delle vibrazioni strutturali sono in grado di generare un disturbo di pressione che possa propagarsi, generando un campo sonoro.

Nel Capitolo 4 si introdurranno le analisi numeriche risolte nel dominio delle frequenze facendo distinzione tra le analisi di risposta in frequenza dirette e modali. Si indicherà come è stato introdotto lo smorzamento e la sollecitazione sul sistema strutturale per quel che riguarda l'analisi di risposta in frequenza modale.

Nel Capitolo 5 è descritto il confronto numerico-sperimentale di analisi modale della struttura in plastica, attraverso un'analisi modale sperimentale eseguita con tecnica "impact test" e l'analisi modale numerica con approccio FEM.

Nel Capitolo verrà descritta la metodologia di ottimizzazione e dei complessi collegamenti realizzati per la costruzione del processo di ottimizzazione.

Nel Capitolo 7 verranno discussi i risultati dell'ottimizzazione per le tre diverse condizioni operative (1300, 1650 e 2000 rpm) e evidenziati i motivi per i quali il set dei parametri ottimizzati scelto per tutte e tre le condizioni di funzionamento è il set di parametri dei materiali riferito al caso di 2000 rpm.

Riferimenti

- [1] Siano D., Viscardi M., Napolitano P., Panza M.A, "Numerical and experimental acoustic performance investigations of a high-speed train composite sandwich panel", WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, Volume 9, Issue 1, 2014, Pages 290-300.
- [2] Siano, D., M. Viscardi, and R. Aiello. "Sensitivity analysis and correlation Experimental/Numerical FEM-BEM for Noise Reduction assessment of an engine beauty cover." *Energy Procedia* 81 (2015): 742-754, doi: 10.1016/j.egypro.2015.12.080, ISSN: 1876-6102
- [3] Siano, Daniela, Massimo Viscardi, and Roberto Aiello. "Experimental and Numerical Validation of an Automotive Subsystem through the Employment of FEM/BEM Approaches." *Energy Procedia* 82 (2015): 67-74, doi: 10.1016/j.egypro.2015.11.884, ISSN:1876-6102
- [4] Armentani, E., De Stefanis, D., Esposito, R., & Parente, A. (2008, September). Analisi numerica vibro-acustica e correlazione sperimentale per un coperchio testa-cilindri. In XXXVII Congresso Nazionale AIAS, Roma (pp. 10-13).
- [5] Liang, Xinhua, Zhongqin Lin, and Ping Zhu. "Acoustic analysis of damping structure with response surface method." *Applied Acoustics* 68.9 (2007): 1036-1053.
- [6] Zhang, Xiaopeng, and Zhan Kang. "Topology optimization of damping layers for minimizing sound radiation of shell structures." *Journal of Sound and Vibration* 332.10 (2013): 2500-2519.
- [7] Ruotolo, Romualdo, et al. Stamped-Cover Vibro-Acoustic Optimization for Diesel Automotive Applications. No. 2016-01-1772. SAE Technical Paper, 2016.

Capitolo 1

Sorgenti sonore nei veicoli per autotrazione

Negli ultimi anni l'attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti nei veicoli per autotrazione è cresciuta insieme con le richieste dei consumatori di veicoli sempre più performanti, non solo in termini di potenza ed affidabilità, ma anche in termini di comfort e guidabilità. Infatti, se da un lato il cliente finale è diventato più consapevole dei rischi legati al rumore e alle vibrazioni, dall'altro la legislazione è intervenuta introducendo severe limitazioni al fine di proteggere le persone dagli effetti dannosi di una prolungata esposizione ad elevati livelli di rumore, e di migliorarne così la qualità della vita.

In questo capitolo, dopo aver esposto alcuni concetti di base dell'acustica, saranno descritte le principali sorgenti di rumore negli autoveicoli. Di seguito saranno esposti i sistemi attivi e passivi implementati nel veicolo per ridurre le rumorosità. E Infine introdurremo l'oggetto di studio della tesi, il cover della testata motore.

1.1 Il rumore

Il rumore è un suono sgradevole. . Un'esposizione prolungata ad elevate sorgenti di rumore provoca alterazioni delle normali funzioni psicofisiche..

1.2 Il suono

Il suono è la sensazione data dalla vibrazione di un corpo in oscillazione. Tale vibrazione, che si propaga nell'aria o in un altro mezzo elastico, raggiunge l'apparato uditivo dell'orecchio che, tramite un complesso meccanismo interno, crea una sensazione "uditiva" correlata alla natura della vibrazione.

La velocità con la quale il disturbo di pressione si propaga nel mezzo elastico dipende dalle proprietà fisiche del mezzo stesso.

Quando un elemento vibra in un mezzo elastico come ad esempio l'aria, anche le particelle del mezzo circostante cominciano ad oscillare intorno alla loro posizione di equilibrio. Nel volume d'aria circostante alla sorgente sonora, si producono delle variazioni di pressione che consentono la propagazione dell'onda sonora.

Le onde sonore diffondendosi nel mezzo producono una variazione nella densità del mezzo stesso e ciò provoca variazioni di pressione rispetto alla condizione di equilibrio.

La frequenza f è uno dei parametri che caratterizza le onde sonore, definita come il numero di oscillazioni effettuate in un secondo.

Si parla di fenomeno sonoro udibile dall'uomo quando la frequenza è compresa nell'intervallo 20 Hz ÷ 20.000 Hz. I segnali aventi frequenza inferiori ai 20 Hz vengono classificati come infrasuoni, quelli con frequenza superiore ai 20.000 Hz come ultrasuoni. Generalmente un suono non è caratterizzato da un'unica frequenza, caso in cui si parla di tono puro, ma da un segnale complesso, costituito da un grande numero di frequenze che danno origine ad uno spettro continuo.

Altri parametri necessari per la descrizione dei fenomeni acustici sono il periodo T e la lunghezza d'onda λ , rappresentanti rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spazio necessari per poter compiere un'oscillazione completa.

Definendo la pulsazione $\omega=2\pi f$ e la velocità di propagazione del suono nel mezzo c , è possibile scrivere le relazioni tra frequenza, lunghezza d'onda e periodo.

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda = \frac{c}{f}, \quad \lambda = cT$$

La velocità di propagazione del suono nel mezzo non dipende dalla frequenza dell'oscillazione, ma solo dalle condizioni termodinamiche del mezzo in cui si propaga la perturbazione. Per l'aria esistono delle formule approssimate che permettono di determinare il valore della suddetta velocità:

$$c \cong 20.05\sqrt{T}, \text{ con } T \text{ temperatura assoluta in Kelvin,}$$

$$c \cong 331.4 + 0.6 t, \text{ con } t \text{ temperatura in } ^\circ\text{C.}$$

1.3 Pressione, intensità sonora e potenza

Le grandezze fisiche fondamentali per descrivere il fenomeno acustico sono pressione, potenza ed intensità sonora. La pressione acustica è definita come la differenza di pressione esistente in un certo punto del mezzo elastico all'istante t e la pressione statica che esisterebbe nello stesso punto in assenza del fenomeno acustico:

$$p(t) = p_t(t) - p_{atm}$$

Tuttavia la pressione acustica assume valori molto piccoli e quindi anche la densità del mezzo differisce pochissimo da quella statica. Quindi il fenomeno si propagherà attraverso piccole perturbazioni.

Se consideriamo la propagazione di tipo sinusoidale, la pressione acustica varierà tra un massimo ed un minimo simmetrici rispetto allo zero, ha quindi un valor medio nullo. Per tal motivo, anziché considerare il valore medio, è più opportuno considerare il valore efficace della pressione acustica, p_{eff} , definito come:

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [p(t)]^2 dt}$$

con T tempo di integrazione.

L'intensità acustica, invece, è una grandezza vettoriale che esprime il valore e la direzione del flusso netto di potenza acustica in un certo punto dello spazio. Considerando una sorgente puntiforme ed omnidirezionale, posta in un mezzo isotropo come l'aria, l'energia si irradia nello spazio in modo uniforme, per onde sferiche. Misurando la variazione della pressione atmosferica causata dalla perturbazione, questa diminuisce in ampiezza man mano che ci si allontana dalla sorgente perché l'energia si distribuisce su una superficie di emissione sempre maggiore. Nel caso di onde piane in un mezzo elastico non viscoso si ha:

$$I = \frac{p_{eff}}{A} \quad [W/m^2]$$

Mentre la potenza acustica è definita come l'energia emessa dalla sorgente sonora nell'unità di tempo; è una grandezza scalare, la cui unità di misura nel Sistema Internazionale è il Watt. Per onde piane in mezzi in quiete non viscosi si ha:

$$P = I \cdot A \quad [W]$$

1.4 Decibel

Il decibel [1] è un'unità di misura che viene usata in molti campi della tecnica, in acustica la sua applicazione più importante è misurare il livello di pressione sonora (ma viene usato anche per quantificare l'intensità, la potenza sonora, etc.).

Volendo usare una scala lineare come il Pascal per la misura della pressione sonora, il range di valori dell'udibile sarebbe molto ampio: si passa da un valore di soli 20 µPa corrispondente al livello minimo udibile, a un valore di poco superiore ai 100 Pa corrispondente alla soglia del dolore. Per tale motivo si adottano misure di tipo relativo, anziché assoluto, prendendo come riferimento il minimo valore udibile. Da tali considerazioni nasce l'idea di una misurazione di tipo logaritmico: il decibel:

$$L_p = 10 \log_{10} \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0}$$

I parametri acustici così espressi sono grandezze adimensionali, convenzionalmente definiti livelli. L_p è il livello della pressione sonora, p è il valore efficace della pressione sonora del suono in esame, e p_0 è la pressione sonora di riferimento, pari a $2 \cdot 10^{-5}$ Pa. In Tabella 1.1 è riportata la corrispondenza tra decibel e pressione acustica:

Livello di pressione [dB]	Pressione [µPa]	Esempi
140	200000000	Soglia del dolore
110	6324555	Discoteca
100	2000000	Tipografia
90	632455	Cartiera
80	200000	Betoniera a 15 m

70	63245	Traffico urbano
60	20000	Uffici
50	6324	Residenza urbana
40	2000	Biblioteca
30	632	Abitazione di notte
20	200	
10	63	
0	20	Soglia dell'udibile

Tabella 1.1 - Corrispondenza tra decibel e pressione acustica

Il livello di pressione sonora, indicato con l'acronimo SPL [2], Sound Pressure Level, è un parametro molto utilizzato per la descrizione del campo sonoro potendo essere misurato anche con l'ausilio di un semplice microfono.

Per la potenza e l'intensità sonora si definiscono, rispettivamente, il livello di potenza sonora ed il livello dell'intensità sonora:

$$L_P = 10 \log_{10} \frac{P^2}{P_0^2} \quad [dB]$$

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I^2}{I_0^2} \quad [dB]$$

con P_0 potenza sonora di riferimento pari a 10^{-12} W, e I_0 intensità sonora di riferimento pari a 10^{-12} W/m².

1.5 Composizione ed analisi in frequenza

La semplice funzione sinusoidale che descrive la propagazione sonora nel tempo, nota come tono puro, non si osserva in natura, tuttavia è un segnale molto importante per la descrizione dei segnali più complessi. L'espressione di un segnale sinusoidale è del tipo:

$$x(t) = x_M \text{sen}(2\pi f t - \varphi) = x_M \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) = x_M \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

dove x_M è il valore massimo, ovvero l'ampiezza, f è la frequenza, T è il periodo, ω è la pulsazione, o frequenza angolare, pari a $2\pi f$ e φ è la fase. Ampiezza, frequenza e fase descrivono completamente un segnale sinusoidale.

Tuttavia la maggior parte dei suoni non ha un andamento semplice come quello sinusoidale appena descritto, infatti generalmente è costituito da diverse componenti sinusoidali. Ognuna delle quali ha una frequenza, una ampiezza e una fase. Pertanto, quando si deve analizzare un segnale complesso, è utile analizzarne lo spettro del segnale per ricavare informazioni utili riguardo le singole componenti costituenti il segnale. L'analisi di Fourier permette di scomporre qualsiasi segnale nelle sue componenti in frequenza. Secondo l'analisi armonica di Fourier è, infatti, sempre possibile scrivere, per un segnale periodico, una relazione del tipo:

$$x(t) = x_0 + x_{M1} \text{sen}(\omega_1 t - \varphi_1) + x_{M2} \text{sen}(\omega_2 t - \varphi_2) + \dots + x_{Mn} \text{sen}(\omega_n t - \varphi_n)$$

Siccome ogni sinusoide è descritta dall'ampiezza, dalla fase e dalla frequenza, il segnale periodico può essere rappresentato in modo equivalente dal diagramma delle ampiezze in funzione della frequenza, ottenendo il cosiddetto spettro in frequenza delle ampiezze.

In Fig. 1 sono riportati lo spettro in frequenza di un tono puro e quello di un segnale più complesso. La pressione acustica di un tono puro varia con legge sinusoidale nel dominio del tempo, pertanto, nel dominio della frequenza, essendo presente la sola frequenza $f_0 = 1/T$, è rappresentato con uno spettro molto semplice costituito da una singola linea in corrispondenza del valore f_0 . Mentre lo spettro del segnale complesso è costituito da diverse armoniche.

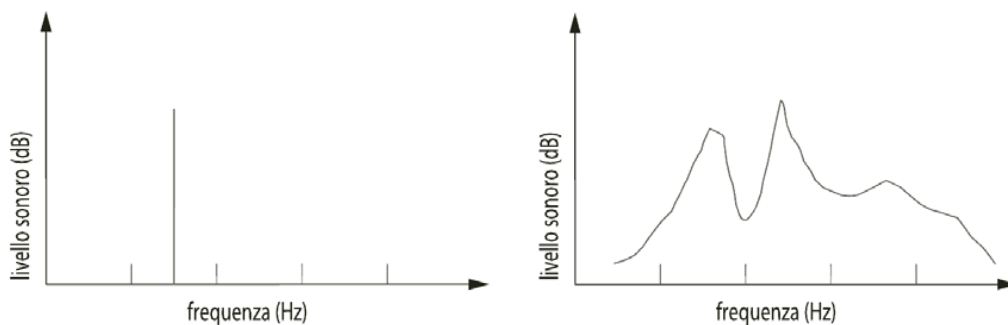


Fig. 1 Spettro di un tono puro e spettro continuo di un rumore

L'analisi della composizione in frequenza di un suono può essere effettuata con diversi metodi basati sulla suddivisione del contenuto energetico sonoro in bande, cioè in prefissati intervalli di frequenza. Ciascuna banda è caratterizzata dalla frequenza nominale di centro banda f_c e dalla frequenze di taglio superiore f_s ed inferiore f_i . La relazione che lega la frequenza di centro banda con le frequenze di taglio è la seguente:

$$f_c = \sqrt{f_i \cdot f_s}$$

L'ampiezza di banda, definita dalla differenza tra frequenza di taglio superiore e frequenza di taglio inferiore, $\Delta f = f_s - f_i$, può essere costante o variabile al variare della frequenza nominale di centro banda.

L'analisi ad ampiezza di banda costante viene utilizzata per analisi approfondite sulla composizione in frequenza di segnali per la diagnostica e per l'identificazione delle sorgenti. L'analisi in bande di ampiezza percentuale costante, in particolare le analisi in ottave e terzi di ottava, viene solitamente utilizzata in acustica ambientale e architettonica. Questa analisi si basa sulla costanza del rapporto tra la larghezza di banda Δf e la frequenza nominale di centro banda f_c che caratterizza la banda stessa ($\Delta f/f_c = \text{cost}$), ovvero l'ampiezza delle bande d'ottava e delle bande di 1/3 d'ottava è proporzionale alla frequenza di centro banda, cioè le bande si allargano all'aumentare della loro frequenza centrale.

La suddivisione più comune dell'intervallo di frequenze udibili è quella in bande d'ottava ($\Delta f/f_c = 0.707$), ma se si desiderano informazioni più dettagliate si ricorre alla suddivisione in bande di terzi d'ottava ($\Delta f/f_c = 0.232$). Per la suddivisione in bande d'ottava la gamma di frequenze udibili è divisa in 8 intervalli non sovrapposti, mentre per la suddivisione in bande di 1/3 d'ottava, la gamma di frequenze udibili è divisa in 24 intervalli non sovrapposti.

1.6 Le curve isofoniche e la scala dei phon

Le sensazioni sonore non dipendono solo dal livello di pressione sonora efficace, ma anche dalla composizione in frequenza del suono. Infatti, l'apparato uditivo introduce una ponderazione del livello sonoro dipendente dalla frequenza. La sensibilità è generalmente maggiore alle frequenze medio-alte e diminuisce progressivamente verso quelle basse e quelle molto alte. L'andamento della sensibilità dell'orecchio umano al variare dei livelli e della frequenza è rappresentato da un diagramma detto audiogramma normale, riportato in Fig. 2.

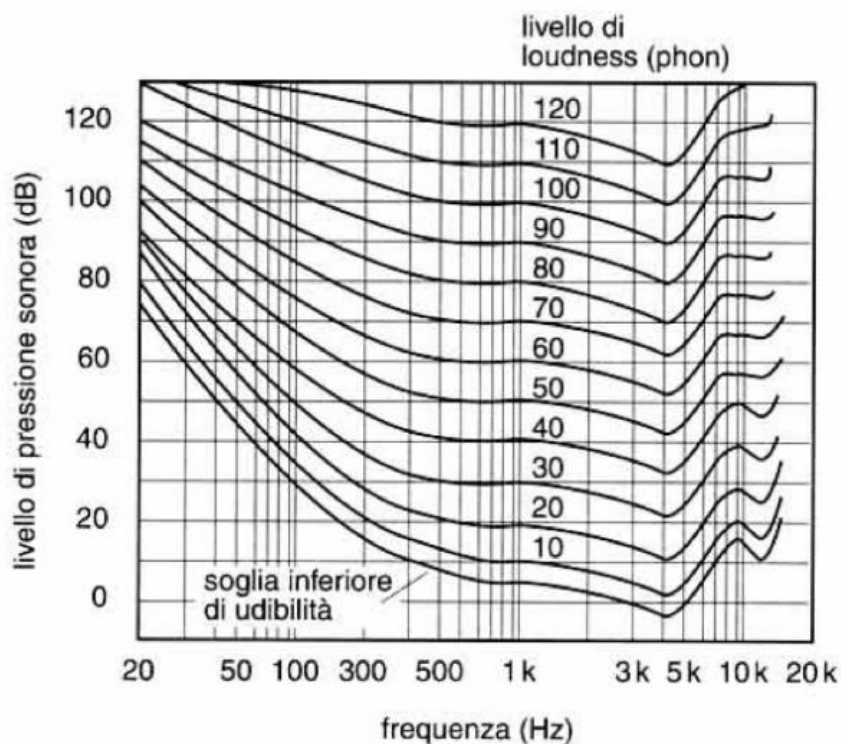


Fig. 2 Audiogramma normale

Tale diagramma è la sintesi dei risultati di esperienze condotte, da Fletcher e Munson, su un numero considerevole di ascoltatori. A ciascun soggetto veniva fatto ascoltare alternativamente un tono puro di 1000 Hz, di livello di pressione sonora prefissato, ed un tono puro a frequenza differente. L'ascoltatore doveva regolare l'intensità di questo secondo tono fino a quando non giudicava equivalenti le due sensazioni provate, e cioè fino a che non stimava, soggettivamente, ugualmente intensi i due suoni. Ripetendo tale procedimento a diverse frequenze Fletcher e Munson costruirono le curve isofoniche dell'audiogramma normale. L'unità di misura della sensazione sonora è il phon, che definisce il livello di pressione sonora che un suono puro di una determinata frequenza f , deve avere, al fine di provocare la medesima sensazione uditiva (in termini di intensità del livello acustico) del suono di riferimento alla frequenza di 1 kHz. Per esempio il valore della pressione sonora corrispondente alla curva isofonica di 40 phon, per un suono puro con frequenza pari a 1000 Hz, equivale a 40 dB mentre alla frequenza di 500 Hz equivale a circa 38 dB. È opportuno precisare che la sensazione prodotta dal suono non è direttamente proporzionale al livello numerico dei relativi phon: un livello d'intensità soggettiva pari a 60 phon non è giudicato doppio di uno di 30 phon. Sopra i 40 phon per raddoppiare la sensazione provata occorre un incremento di circa 10 phon.

Le misure di livello equivalente per intensità soggettiva con il metodo del giudizio di ascolto presenta notevoli difficoltà pratiche e, per questo motivo, si è cercato di ideare delle apparecchiature

elettroacustiche che consentano di determinare oggettivamente i livelli equivalenti. Per misurare con sufficiente precisione la sensazione che un suono genera sull'uomo alle varie frequenze, sono usati i fonometri. Essi sono dotati di curve di ponderazione ricavate da approssimazioni delle curve isofoniche. In Fig. 3 sono riportate tre diverse modalità di pesatura che simulano la risposta dell'orecchio umano in corrispondenza di tre diversi livelli di sensazione sonora, e cioè in corrispondenza di valori nell'intorno di 40, 60 e 80 phon.

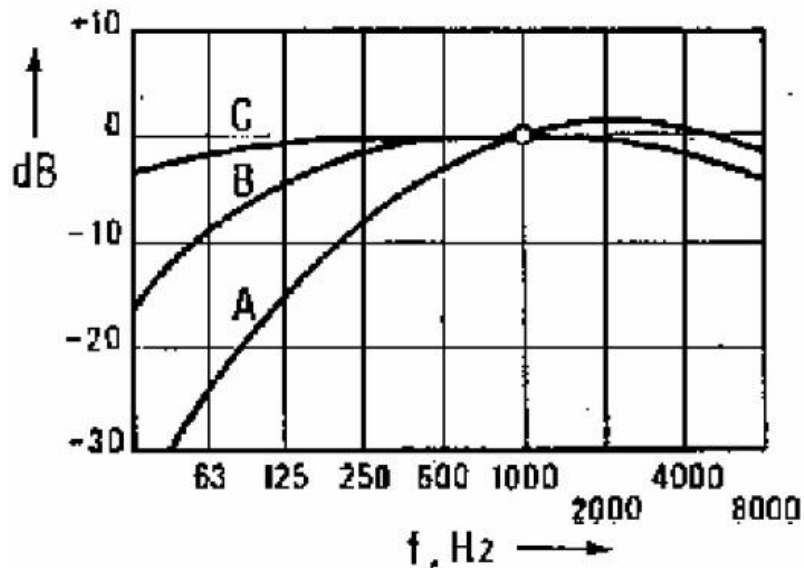


Figura 3 Curve di ponderazione in frequenza

La scala di ponderazione A dello strumento di misura dovrebbe essere utilizzata per suoni a bassa intensità, la B per suoni a media intensità, la C per gli altri.

1.7 Sorgenti di rumore

In (Fig. 4) sono presenti tutte le sorgenti di rumore significative riguardanti il veicolo. Passiamo in rassegna, brevemente, le fonti principali [2].

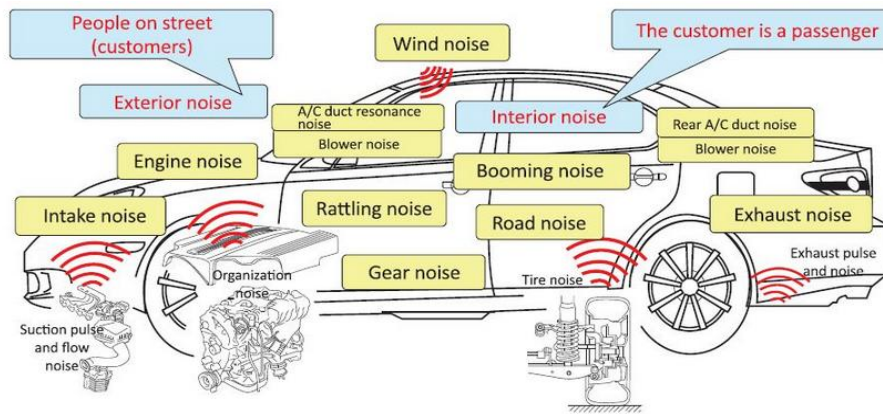


Fig.4 Sorgenti di rumore nel veicolo

Scarico

La fuoriuscita di gas ad alte velocità, pressioni e temperature tipiche dei motori a combustione interna genera molto rumore. Il livello sonoro dell'emissione prodotta dal silenziatore non deve superare il valore di controllo stabilito in sede di omologazione e riportato sulla carta di circolazione.

Pneumatici

Il rotolamento dei pneumatici sull'asfalto è fonte di rumore a seguito dell'intrappolamento e successivo rilascio di aria dalle cavità, nonché di vibrazioni sulla carrozzeria.

Accessori (impianto di condizionamento, ventola del radiatore, ecc.),

I flussi d'aria nei condotti, costituiscono una delle sorgenti di rumore più difficili da attenuare. In tal caso la forma del condotto risulta determinante per ridurre le emissioni sonore.

Freni

L'azione dei freni che si manifesta attraverso lo sfregamento tra le pinze contenenti le pastiglie e il disco, rappresenta un'altra importante sorgente di rumore. Se la pressione fra i due elementi è elevata, può provocare il trascinarsi del pneumatico sull'asfalto, e l'azione combinata dei due fenomeni è causa di elevati livelli di rumorosità.

Motore

È la sorgente di rumore più importante. Il motore a sua volta è un sistema complesso costituito da diverse sottosorgenti di rumore tra cui quella preponderante è sicuramente quella relativa alla combustione, il range di frequenze corrispondente a tale fenomeno riguarda le basse frequenze. (Ad

esempio in un motore 4 tempi 4 cilindri a 1500 giri/min ha come prima seconda e terza frequenza di combustione rispettivamente 50Hz, 100Hz e 150Hz).

1.8 Sistemi attivi e passivi per la riduzione delle emissioni sonore

Considerando un veicolo già progettato, quindi escludendo ulteriori modifiche geometriche, i sistemi implementati per ridurre le emissioni sonore sono essenzialmente di due tipi: sistemi attivi e sistemi passivi [4].

I primi si basano sul principio dell'accoppiamento o interferenza distruttiva tra i campi sonori generati dalla sorgente primaria (rumore) e da una sorgente secondaria (antirumore). Il termine attivo si riferisce al fatto che una sorgente sonora controllabile è impiegata per produrre un segnale di antirumore che, sommato al campo sonoro indesiderato, dà luogo ad una elevata attenuazione del rumore.

I secondi si basano sull'utilizzo di materiali che consentono di attenuare i livelli di rumore emessi dalla sorgente, o per attrito viscoso tra le particelle d'aria e i pori del materiale applicato, o fungendo da elementi smorzanti delle velocità vibrazionali strutturali che rappresentano la sorgente sonora. Per quel che riguarda il primo fenomeno l'onda sonora incidente spinge l'aria nei pori, all'interno dei quali avvengono fenomeni di dissipazione energetica. L'energia di pressione viene trasformata in calore, a causa dell'attrito tra le particelle d'aria libere di muoversi al centro dei pori e quelle sulle pareti degli stessi che sono pressoché ferme. Per quel che riguarda il secondo fenomeno, l'aggiunta di un materiale elastico su di una struttura vibrante, ne aumenta lo smorzamento superficiale e quindi riduce le velocità vibrazionali strutturali del sistema, diminuendo di conseguenza l'emissione sonora.

1.9 Sistema passivo: cover della testata motore

Il principale protagonista per l'attenuazione sonora di tipo passivo nell'autoveicolo è il cover della testata motore, poiché agisce proprio sulla sorgente sonora predominante.

Il cover è posto a contatto con la testata del motore, e inizialmente atto più ad una funzione estetica ha interpretato un ruolo sempre più determinante in termini di comfort acustico all'interno del veicolo.

Il cover è costituito da un componente in plastica, generalmente di nylon, e da un componente di poliuretano che rappresenta l'elemento che conferisce maggiore attenuazione delle vibrazioni superficiali della testata motore siccome è più spesso del componente in plastica e perché è posto a contatto diretto con la testata del motore. I due componenti costituiscono un unico sistema strutturale, ed osservando il vano motore è possibile notare il componente di plastica al di sotto del quale è presente il componente di poliuretano. In Fig. 5 possiamo osservare alcuni cover di forme e dimensioni diverse utilizzati dalle più famose Case Costruttrici in campo automotive.



Fig.5 Cover motore

Il cover, oggetto del lavoro di tesi, è il cover della testata motore della ALFA ROMEO Giulietta 1600 Diesel (Fig.6)



Fig.6 Cover motore ALFA ROMEO Giulietta 1600 Diesel

Il cover presenta una dimensione massima orizzontale di 68 cm e una dimensione massima verticale di 48 cm capace di coprire l'intera testata. Il componente di plastica è spesso 3 mm mentre il

componente di poliuretano non supera i 5 cm di spessore. In Fig.7 possiamo osservare i due elementi separati.

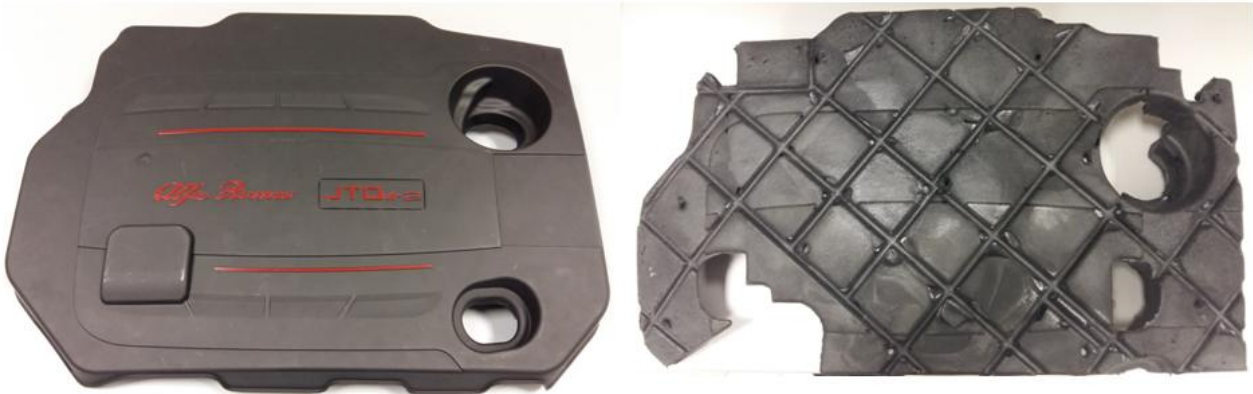


Fig.7 Il componente in plastica (a sinistra) e il componente in plastica (a destra) del cover motore ALFA ROMEO Giulietta 1600 Diesel

I due elementi sono tenuti insieme da uno strato adesivo e da opportune giunzioni. L'intero sistema è vincolato sopra la testata del motore, il poliuretano è incastrato sulla testata mentre l'elemento di nylon è vincolato al blocco motore tramite quattro attacchi costituiti da quattro piolini, ai quali si aggancia tramite opportuni alloggiamenti. In Fig. 8 possiamo osservare i quattro piolini evidenziati con dei cerchi rossi sul blocco motore e in Fig. 9 i quattro alloggiamenti evidenziati in modo analogo sull'elemento di plastica capovolto.

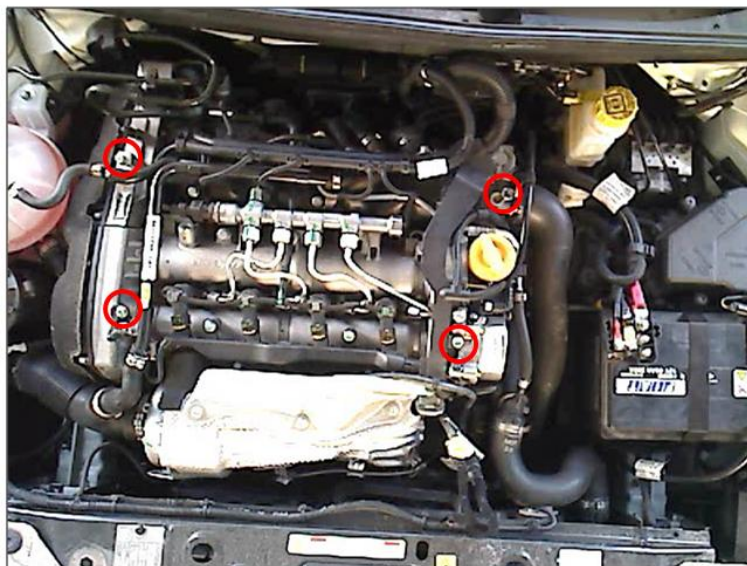


Fig.8 Punti di attacco del cover sulla testata del motore



Fig.9 Alloggiamenti del componente in plastica

Quindi riosservando l'immagine dell'intero sistema cover montato sul blocco motore confrontata con l'immagine del blocco motore in assenza del cover (Fig. 10), definiamo lo scopo del suo utilizzo.



Fig. 10 Blocco motore in presenza di cover (a sinistra) Blocco motore in assenza di cover (a destra)

Tale sistema è in grado di ridurre le velocità superficiali vibrazionali della testata, e quindi di ridurre la sorgente sonora derivante da tali vibrazioni. A valle dell'applicazione di tale sistema sulla testata, le velocità vibrazionali generanti il fenomeno di propagazione sonora saranno le velocità vibrazionali dell'elemento plastico a contatto con il mezzo elastico in cui si propaga il suono, ossia l'aria. Le velocità vibrazionali che causano il fenomeno acustico non saranno più le velocità vibrazionali della testata, ma quelle inferiori dell'elemento di plastica che genereranno una propagazione sonora di minore intensità.

Riferimenti

- [1] Bruel & Kjaer Italia s.r.l., Corso base di Acustica – Teoria e Strumentazione
- [2] Beranek, Leo Leroy, and Tim J. Mellow "*Acoustics: sound fields and transducers*".Academic Press, 2012.
- [3] M.A. Panza, "*A Review of Experimental Techniques for NVH Analysis on a Commercial Vehicle*", Energy Procedia, Volume 82, 2015, Pages 1017-1023, ISSN 1876-6102, doi:10.1016/j.egypro.2015.11.861.
- [4] Istvan L. Ver, Leo L. Beranek "*Noise And Vibration Control Engineering: Principles And Applications*" John Wiley & Sons Inc; 2 edizione (2 dicembre 2005)

Capitolo 2

Dinamica delle Strutture

2.1 SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTA'

Prendono il nome di sistemi ad un grado di libertà quei sistemi nei quali la generica configurazione deformata è individuata da un solo parametro [1]. Pur essendo le strutture reali molto raramente e solo in via approssimata schematizzabili come sistemi ad un grado di libertà, è molto importante lo studio di questo semplice modello in quanto consente di evidenziare alcuni concetti fondamentali riguardanti la dinamica delle strutture.

Ci riferiamo all'oscillatore semplice come esempio di sistema ad un grado di libertà (Fig.1.).

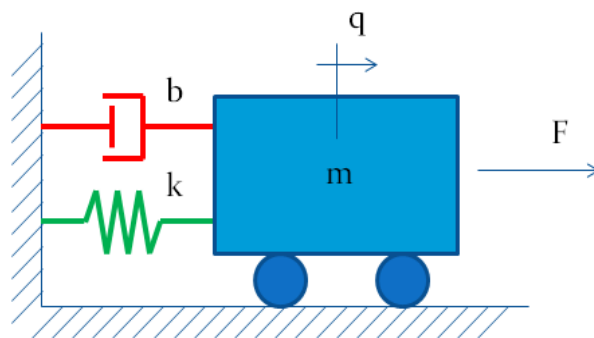


Fig.1 Schema di oscillatore armonico semplice

Qualunque sistema ad un grado di libertà potrà ricondursi ad esso a patto di specificare, come vedremo, i valori delle costanti m (massa) b (smorzamento) k (rigidezza), e della forza esterna $F(t)$. L'oscillatore semplice per il numero limitato di parametri che lo definiscono, consente di cogliere semplicemente gli aspetti essenziali in numerosi problemi di dinamica.

Per quanto riguarda le oscillazioni, esse possono classificarsi in relazione alle caratteristiche più significative quali ad esempio presenza o meno di azioni dissipative, costanza o meno dei coefficienti di massa, di smorzamento e di rigidezza. Si possono pertanto riconoscere:

-oscillazioni libere: si hanno in assenza di forze esterne applicate.

-oscillazioni forzate: si hanno in presenza di forze esterne o di spostamenti applicati alla base.

-oscillazioni smorzate: si hanno quando il modello dissipa energia.

Nella teoria lineare delle oscillazioni le azioni dissipative sono spesso introdotte attraverso forze viscosi, cioè proporzionali alla velocità \dot{x} .

2.1.1 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento

Si consideri il sistema di (Fig.2) costituito da una molla ed una massa. Se si ipotizza che il comportamento della molla sia lineare elastico nel campo delle piccole oscillazioni, il sistema è conservativo.

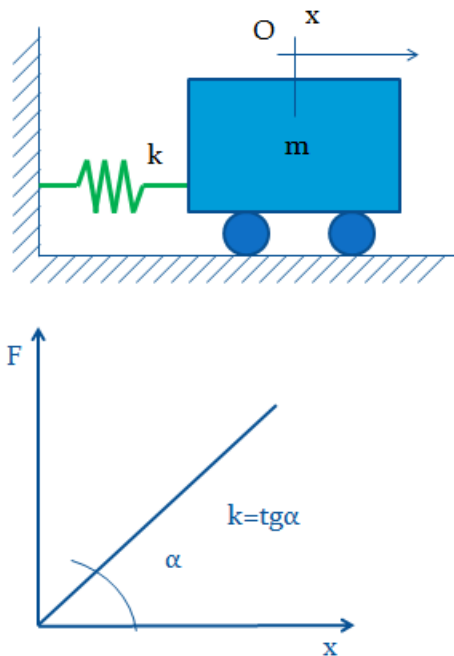


Fig.2 Schema di oscillatore armonico semplice in assenza di smorzamento

Per ricavare le equazioni del moto, (solo per il caso delle oscillazioni libere) sarà mostrato come è possibile ricavare la stessa equazione attraverso il principio di conservazione dell'energia, attraverso l'equazione generalizzata del moto nota come equazione di Lagrange e con il principio di D'Alembert.

- Appliciamo il principio di conservazione dell'energia.

L'energia elastica del sistema può infatti scriversi:

$$U_i = \frac{1}{2} kx^2$$

essendo k la rigidità della molla ed x lo spostamento misurato dalla configurazione indeformata.

L'energia cinetica è uguale a:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

dal principio di conservazione dell'energia si ricava:

$$dT + dU_i = (kx\dot{x} + m\ddot{x}\dot{x})dt = 0$$

Dall'ultima equazione, escludendo il caso banale $\dot{x} = 0$ che corrisponde all'assenza di moto, fornisce l'equazione che governa il problema dinamico libero:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Considerando ora le equazioni di Lagrange e assumendo come coordinata generalizzata lo spostamento x si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U_i}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0$$

Tale equazione indica che ad ogni istante l'equilibrio della massa è ottenuto dal bilancio della forza di richiamo elastico esercitata dalla molla e dalla forza d'inerzia.

La stessa equazione può essere ancora ricavata imponendo il principio di d'Alembert.

Il principio di d'Alembert rappresenta il principio fondamentale per il passaggio dal fenomeno statico a quello dinamico, e stabilisce che ogni stato di moto può essere considerato in ogni istante di tempo come uno stato in equilibrio, qualora siano introdotte le forze di inerzia.

La seconda legge di Newton stabilisce che la forza agente su un punto avente massa è uguale alla massa moltiplicata per l'accelerazione: in realtà la stessa affermazione può essere formulata diversamente se si considera la relazione come una condizione di equilibrio.

Infatti la relazione:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

che esprime la seconda legge di Newton, può scriversi:

$$-m\vec{a} + \vec{F} = 0$$

che rappresenta una condizione di equilibrio fra la forza \vec{F} e la forza $-m\vec{a}$: quest'ultima prende il nome di forza d'inerzia.

Considerando nuovamente la Fig. 2 e definendo positive le forze dirette verso destra, la forza di richiamo elastico vale:

$$F_{el.} = -kx$$

mentre quella d'inerzia vale:

$$F_m = -m\ddot{x}$$

di modo che l'equilibrio deve essere:

$$-m\ddot{x} - kx = 0$$

Tale equazione può scriversi come:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

avendo posto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La soluzione dell'equazione del moto, equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, lineare a coefficienti costanti è:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

e il moto quindi è armonico con pulsazione ω .

Considerando tale moto ottenuto dalla proiezione sull'asse delle x di due vettori rotanti di modulo A e B [2] appare evidente che ω rappresenta la velocità angolare con cui ruotano i due vettori.

Risulta pertanto possibile scrivere (Fig. 3):

$$x(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$

essendo:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \tan \varphi = \frac{A}{B}$$

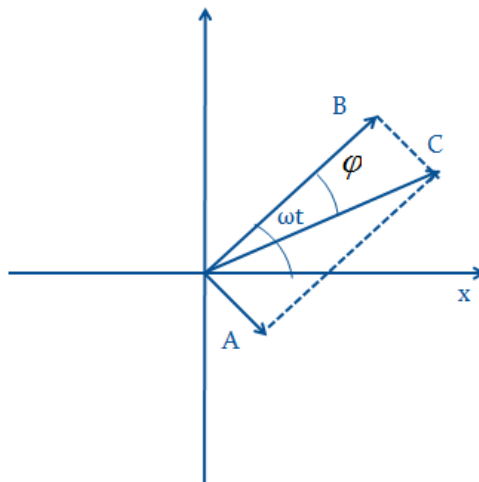


Fig. 3 Composizione dei due vettori rotanti di modulo A e B

Derivando l'ultima equazione due volte, risulta:

$$\dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega t - \varphi) = \omega C \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 C \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 C \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

Se ne deduce quindi che anche la velocità e l'accelerazione variano nel tempo con legge armonica, ma risultano sfasate in anticipo rispetto allo spostamento rispettivamente di $\frac{\pi}{2}$ e π . Si dice quindi che la velocità è in "quadratura" con lo spostamento e l'accelerazione in "opposizione" di fase. Quindi spostamento, velocità e accelerazione rappresentano tre vettori rotanti con velocità angolare ω , di modulo rispettivamente pari a C , ωC e $\omega^2 C$ (Fig. 4)

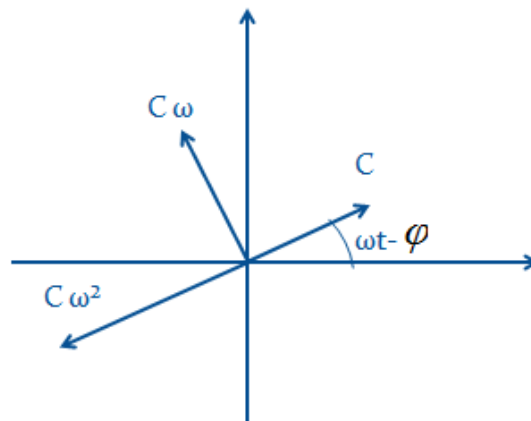


Fig.4 tre vettori rotanti con velocità angolare ω , di modulo rispettivamente pari a C , ωC e $\omega^2 C$

Le costanti A e B che figurano, ovvero le costanti C e φ dipendono dalle condizioni iniziali in quanto, non essendoci forze applicate all'esterno, il moto può essere innescato a patto di trasferire energia all'oscillatore.

Tale energia può essere trasferita sotto forma di energia cinetica, imponendo cioè al tempo zero una velocità finita della massa, ovvero sotto forma di energia elastica, imponendo cioè al tempo zero uno spostamento alla massa.

Nel caso generale in cui siano al tempo $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ risultano:

$$B = x_0$$

$$A = \dot{x}_0 / \omega$$

da cui la soluzione dell'equazione del moto per oscillazioni libere in assenza di smorzamento diventa:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$$

2.1.2 Oscillazioni libere in presenza di smorzamento

Le oscillazioni libere esaminate, in realtà, non si riscontrano sperimentalmente perché sono sempre presenti fonti di dissipazione di energia: i sistemi reali, cioè, sono dotati di smorzamenti la cui natura è da ricercare fra le forze di attrito, la resistenza al moto prodotta dal fluido che circonda la massa in movimento e l'attrito interno associato alla struttura molecolare del materiale.

Ciò sta a significare che, trasferendo dell'energia ad un sistema reale attraverso le condizioni iniziali, le oscillazioni che esso compie nel tempo vanno via via smorzandosi in quanto l'energia viene dissipata. Viceversa, per mantenere delle oscillazioni costanti occorre fornire continuamente energia.

Nella teoria lineare delle oscillazioni, le azioni dissipative sono introdotte nel modello dinamico mediante una resistenza al moto che agisce sulla massa con una forza proporzionale alla velocità mediante una costante " b ", e segno opposto.

La forza esercitata dallo smorzatore sulla massa m si pone pertanto pari a " $-b\dot{x}$ " dove " b " rappresenta il "coefficiente di smorzamento".

Nella Fig. 5 il dissipatore è rappresentato da un pistone che può scorrere in un cilindro. L'adozione di uno smorzamento di tipo viscoso semplifica notevolmente il problema, che si presenta ancora lineare, a discapito naturalmente del rigore della trattazione. Ciononostante l'ipotesi di smorzamento viscoso è generalmente adottata introducendo dei coefficienti di smorzamento che diano luogo mediamente a dissipazioni di energia uguali a quelle che si riscontrano nei sistemi reali.

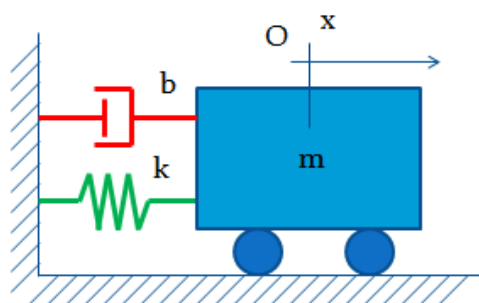


Fig.5 Schema di oscillatore armonico semplice in presenza di smorzamento

L'equazione del moto per il sistema lineare smorzato si scrive:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

ovvero:

$$\ddot{x} + 2\nu\omega\dot{x} + \omega^2x = 0$$

avendo posto il fattore di smorzamento:

$$\nu = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

L'integrale generale dell'equazione del moto nella quale è presente il fattore di smorzamento, per fattori di smorzamento $\neq 1$ può porsi nella forma:

$$x(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t}$$

dove λ_1 e λ_2 sono due costanti arbitrarie e α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione caratteristica che si ottiene ponendo nell'equazione del moto $x(t) = e^{\alpha t}$

Si ha così:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\nu\omega\alpha e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0$$

ovvero:

$$\alpha^2 + 2\nu\omega\alpha + \omega^2 = 0$$

le cui radici sono:

$$\alpha_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{\nu^2 - 1}$$

La natura del moto dipende essenzialmente dal valore di ν e cioè dal rapporto tra la costante di smorzamento b ed il valore $2\sqrt{mk}$, quest'ultimo prende il nome di smorzamento critico.

Il caso $\nu < 1$ è il caso di maggior interesse ed è quello per cui analizzeremo la soluzione dell'equazione del moto e quindi la funzione che descrive lo spostamento della massa m . Poiché per gli altri 2 casi $\nu = 1$ e $\nu > 1$ la soluzione dell'equazione del moto descrive un moto che non è oscillatorio ma tende a zero senza passare per la configurazione indeformata, ossia per la posizione $x = 0$.

Quindi, nel caso $\nu < 1$ le radici dell'equazione risultano essere complesse e coniugate.

Posto:

$$\Omega = \omega\sqrt{1 - \nu^2}$$

risulta

$$\alpha_1 = -\nu\omega + i\Omega$$

$$\alpha_2 = -\nu\omega - i\Omega$$

e l'integrale generale diventa:

$$x(t) = \lambda_1 e^{-\nu\omega t} e^{i\Omega t} + \lambda_2 e^{-\nu\omega t} e^{-i\Omega t}$$

e ricordando le formule di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

abbiamo:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} [\lambda_1 (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) + \lambda_2 (\cos \Omega t - i \sin \Omega t)]$$

siccome λ_1 e λ_2 sono due coefficienti indipendenti, possono essere sostituiti da due diverse loro combinazioni lineari:

$$A = i\lambda_1 - i\lambda_2 \quad ; \quad B = i\lambda_1 + i\lambda_2$$

ottenendosi:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t)$$

Quest'ultima equazione descrive il moto dell'oscillatore per smorzamento inferiore a quello critico e rappresenta, com'è immediato verificare, un moto armonico di pulsazione Ω smorzato dal coefficiente $e^{-\nu\omega t}$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

Come già osservato precedentemente possiamo scrivere la soluzione dell'equazione come:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} C \cos(\Omega t - \varphi)$$

essendo:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad ; \quad \tan \varphi = \frac{A}{B}$$

Le costanti A e B che figurano, ovvero le costanti C e φ dipendono dalle condizioni iniziali, nel caso generale in cui siano al tempo $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ risultano:

$$B = x_0$$

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \nu\omega x_0}{\Omega}$$

sostituendo abbiamo:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} \left(\frac{\dot{x}_0 + \nu\omega x_0}{\Omega} \sin \Omega t + x_0 \cos \Omega t \right)$$

È importante osservare che la pulsazione Ω dell'oscillatore smorzato risulta minore di quella che lo stesso oscillatore avrebbe in assenza di smorzamento, $\Omega < \omega$.

Il moto espresso dall'ultima equazione è illustrato nella Fig. 6 per alcuni valori dello smorzamento relativo. Essendo il moto armonico, i massimi delle ampiezze si verificano ad intervalli di tempo pari a $2\pi/\Omega$.

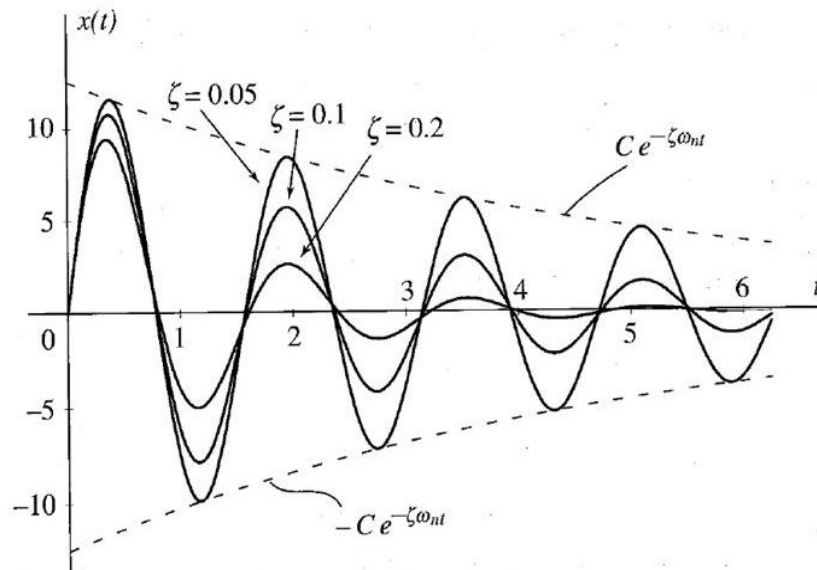


Fig. 6 Descrizione del moto dell'oscillatore armonico semplice in presenza di smorzamento per diversi valori dello smorzamento relativo

2.1.3 Oscillazioni forzate da una pulsante in assenza di smorzamento

Si consideri sempre lo stesso oscillatore (Fig. 7) sollecitato da una forza variabile con legge sinusoidale $F(t) = F \sin \bar{\omega} t$.

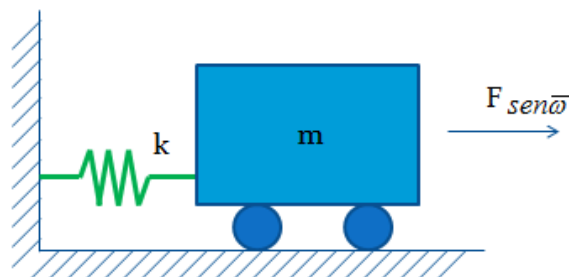


Fig.7 Schema di oscillatore armonico semplice forzato, in assenza di smorzamento

L'equazione del moto diventa in tal caso:

$$m\ddot{x} + kx = F \sin \bar{\omega} t$$

ovvero:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \sin \bar{\omega} t = x_{st} \omega^2 \sin \bar{\omega} t$$

avendo indicato con $x_{st} = F/k$ lo spostamento che subirebbe la massa se la forza F fosse applicata staticamente.

La soluzione dell'ultima equazione richiede la sola definizione dell'integrale particolare, essendo l'integrale generale dell'omogenea associata quello già esaminato per il caso di moto non forzato in assenza di smorzamento.

Posto quindi l'integrale particolare nella forma:

$$x_1(t) = X \sin \bar{\omega}t$$

sostituendo nell'equazione del moto, abbiamo:

$$-X\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t + \omega^2 X \sin \bar{\omega}t = x_{st} \omega^2 \sin \bar{\omega}t$$

dalla quale possiamo scrivere:

$$X(\omega^2 - \bar{\omega}^2) = x_{st} \omega^2;$$

$$X = x_{st} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} = x_{st} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

avendo posto: $\beta = \bar{\omega} / \omega$

sostituendo nell'integrale particolare, si ha: $x_1(t) = x_{st} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t = x_{st} N \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$

avendo posto il fattore N, come fattore di amplificazione:

$$N = \frac{1}{|1 - \beta^2|}$$

e l'angolo di fase

$$\varphi = 0 \text{ per } \beta < 1$$

$$\varphi = \pi \text{ per } \beta > 1$$

In Fig. 8 riportiamo l'andamento del coefficiente di amplificazione in funzione del rapporto β

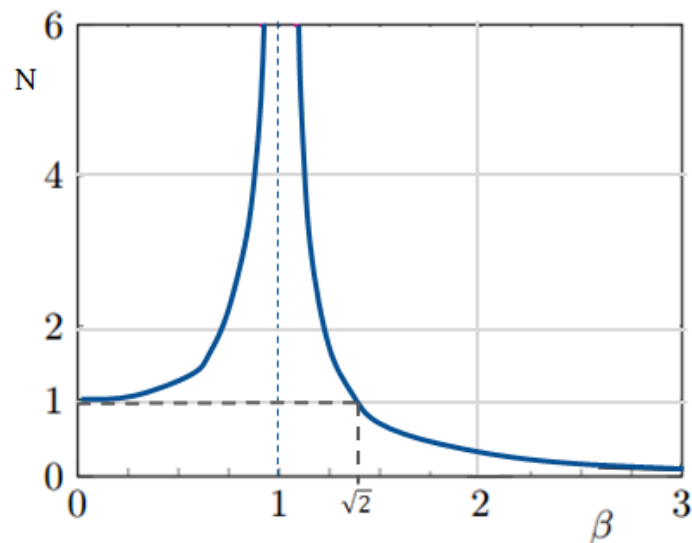


Fig. 8 Andamento del coefficiente di amplificazione in funzione del rapporto β

Si può osservare quindi che per $0 < \beta < \sqrt{2}$ risulta sempre $N > 1$ e quindi la forza pulsante determina un'amplificazione dello spostamento statico x_{st} , viceversa una riduzione si ottiene per $\beta > \sqrt{2}$.

Inoltre spostamento e forza applicata risultano in fase solo quando $\beta < 1$; se $\beta > 1$ invece, spostamento e forza risultano in opposizione.

Quando $\beta = 1$ accade una discontinuità nell'angolo φ e in realtà in questo caso la soluzione dell'integrale particolare cade in difetto e deve essere sostituita da un'altra relazione, come si vedrà in seguito.

Escludendo quindi, questo caso particolare, la soluzione generale dell'equazione del moto è uguale a:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + x_{st} N \sin(\bar{\omega} t - \varphi)$$

ed il moto della massa risulta ottenuto dalla sovrapposizione di due moti armonici di pulsazione pari rispettivamente a ω e $\bar{\omega}$.

Come sempre anche in questo caso, le condizioni iniziali permettono di definire le due costanti A e B .

Infine nel caso in cui $\omega \cong \bar{\omega}$, ossia quando $\beta = 1$ si verificano i "battimenti" ed il moto si presenta come illustrato in Fig. 9 dove $\omega = 2\pi$ e $\bar{\omega} = 1,1\omega$.

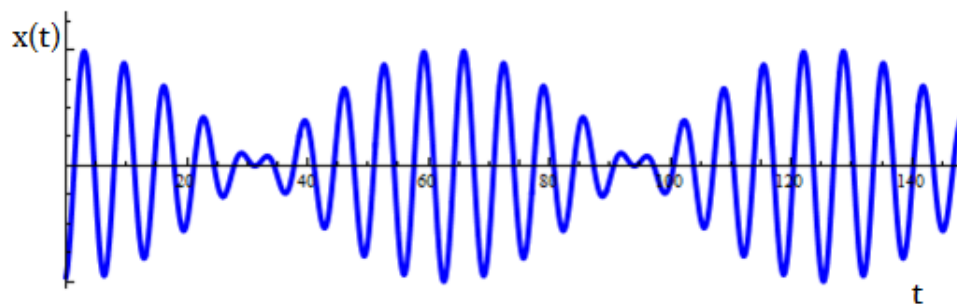


Fig. 9 Fenomeno dei battimenti

Come già detto, se risulta $\omega = \bar{\omega}$, la soluzione dell'integrale particolare cade in difetto ma si ottiene facilmente un integrale particolare ponendo:

$$x_1(t) = Xt \cos \omega t = Xt \cos \bar{\omega} t$$

quindi

$$\dot{x}_1(t) = X \cos \omega t - Xt \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega X \sin \omega t - X \omega \sin \omega t - X t \omega^2 \cos \omega t = -2\omega X \sin \omega t - X t \omega^2 \cos \omega t$$

sostituendo nell'equazione del moto:

$$-2\omega X \sin \omega t - X t \omega^2 \cos \omega t + X t \omega^2 \cos \bar{\omega} t = x_{st} \omega^2 \sin \omega t$$

da cui

$$X = -x_{st} \frac{\omega}{2}$$

L'integrale generale assume pertanto la forma:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - x_{st} \frac{\omega}{2} t \cos \omega t$$

e le ampiezze delle oscillazioni tendono a crescere indefinitamente all'aumentare del tempo, come indicato in Fig. 10.

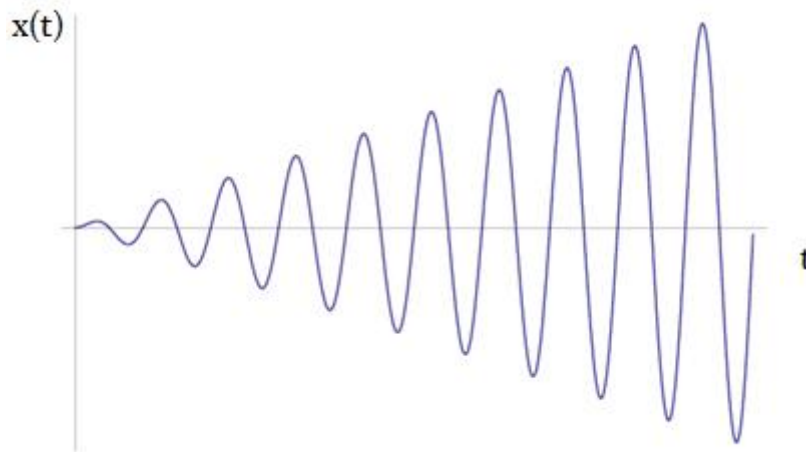


Fig. 10 Descrizione del moto di un oscillatore armonico semplice forzato, in assenza di smorzamento nel caso in cui $\omega = \bar{\omega}$

2.1.4 Oscillazioni forzate da una pulsante in presenza di smorzamento

Si consideri ora la forza pulsante $F \sin \bar{\omega} t$ applicata ad uno oscillatore dotato di smorzamento viscoso. L'equazione del moto si scrive in tal caso:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \sin \bar{\omega} t$$

ma che possiamo esprimere anche come:

$$\ddot{x} + 2\nu\omega\dot{x} + \omega^2 x = x_{st} \omega^2 \sin \bar{\omega} t$$

La soluzione dell'equazione sar  come al solito ottenuta sovrapponendo all'integrale generale, definito gi  per il caso di oscillazioni libere in presenza di smorzamento, ad un integrale particolare del tipo:

$$x_1(t) = C \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$$

essendo:

$$\dot{x}_1(t) = C\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \varphi)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -C\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$$

sostituendo nell'equazione del moto, risulta:

$$-C\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t - \varphi) + 2\nu\omega\bar{\omega}C \cos(\bar{\omega}t - \varphi) + \omega C \sin(\bar{\omega}t - \varphi) = x_{st}\omega^2 \sin \bar{\omega}t$$

L'ultima equazione è valida per qualsiasi valore del tempo t e diventa:

-per $t = 0$

$$-C\bar{\omega}^2 \sin \varphi + 2\nu\omega\bar{\omega}C \cos \varphi + \omega C \sin \varphi = 0$$

-per $(\bar{\omega}t - \varphi) = 0$

$$2\nu\omega\bar{\omega}C \cos = x_{st}\omega^2 \sin \bar{\omega}t$$

dall'equazione ottenuta per $t = 0$, si ha:

$$\tan \varphi = \frac{2\nu\omega\bar{\omega}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} = \frac{2\nu\beta}{1 - \beta^2}$$

e quindi ricordando che:

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

ora sostituendo nell'integrale particolare, otteniamo:

$$x_1(t) = x_{st}N \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$$

avendo indicato con N il fattore di amplificazione:

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\nu\beta)^2}}$$

ed essendo:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\nu\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

Nel caso più interessante, in cui risulti $\nu < 1$, la soluzione generale dell'equazione del moto è:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} (A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) + x_{st}N \sin(\bar{\omega}t - \varphi)$$

dove le costanti A e B dipendono dalle condizioni iniziali.

Poiché, precedentemente, il primo termine della soluzione generale rappresenta delle oscillazioni armoniche smorzate, dopo un certo tempo il moto sarà in pratica governato dal solo integrale particolare e quindi sarà ancora un moto armonico con pulsazione $\bar{\omega}$.

Il moto dei primi istanti, quando cioè il contributo dell'integrale generale dell'omogenea associata è ancora sensibile, rappresenta un transitorio che dallo stato di quiete conduce alle oscillazioni stazionarie.

Risulta interessante calcolare il massimo valore del fattore di amplificazione.

Posto allo scopo $\beta^2 = \alpha$, ed essendo quindi:

$$N(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2v\alpha^2)}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \left[(1-\alpha^2)^2 + (2v\alpha^2) \right]^{-3/2} \cdot [-2(1-\alpha) + 4v^2]$$

La condizione di massimo $\frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0$ fornisce:

$$\alpha = \beta^2 = 1 - 2v^2$$

e quindi:

$$\beta = \sqrt{1 - 2v^2}$$

Accanto alla pulsazione propria ω dell'oscillatore non smorzato ed a quella $\Omega = \omega\sqrt{1-v^2}$ dell'oscillatore smorzato, può definirsi una terza pulsazione $\bar{\omega}$ che dà luogo alla massima amplificazione dell'effetto provocato da una forza pulsante sull'oscillatore smorzato.

Si ha così dalla formula precedente:

$$\bar{\omega} = \omega\sqrt{1-2v}$$

sostituendo $\alpha = \beta^2 = 1 - 2v^2$ nella $\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \left[(1-\alpha^2)^2 + (2v\alpha^2) \right]^{-3/2} \cdot [-2(1-\alpha) + 4v^2]$ si ha:

$$N_{\max} = \left[4v^4 + 4v^2(1-2v^2) \right]^{-1/2} = \frac{1}{2v\sqrt{1-v^2}}$$

che quando risulti $v \ll 1$, può con sufficiente approssimazione scriversi:

$$N_{\max} \cong \frac{1}{2v}$$

Nelle Fig. 11 e Fig. 12 sono riportati rispettivamente gli andamenti di N e di φ in funzione di β .

Dall'esame delle curve $N(\beta)$ che prendono il nome di "curve di risonanza", scaturisce una prima osservazione di carattere generale.

La caratterizzazione di un carico quale "statico" ovvero "dinamico" non è a stretto rigore valida in linea teorica: infatti, in un'ottica rigorosa, tutti i carichi hanno una velocità di crescita finita e pertanto sarebbero dinamici.

In linea approssimata, per conseguire una semplificazione nelle applicazioni pratiche, possono

considerarsi statici quei carichi per i quali risulti $\beta = 0$: in tale caso infatti la velocità di crescita del carico è così piccola in rapporto alla velocità delle oscillazioni proprie del sistema, che il coefficiente di amplificazione dinamica risulta molto prossimo ad 1.

Viceversa, per valori di β molto grandi, il coefficiente di amplificazione tende a zero, a significare che nel corso delle oscillazioni proprie della struttura il carico sinusoidale varia così velocemente da produrre un effetto nullo, quale è appunto la risultante temporale del carico stesso.

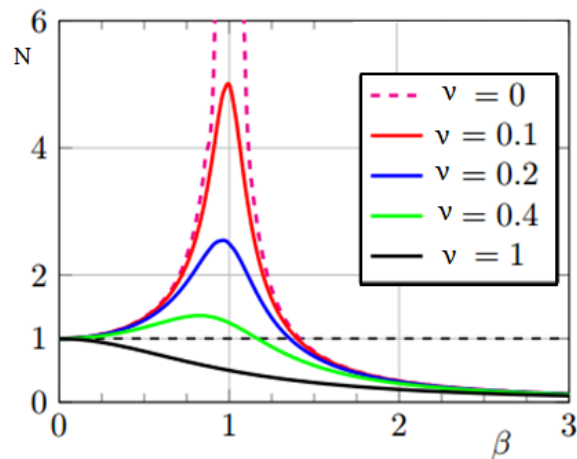


Fig. 11 Andamento di N in funzione di β

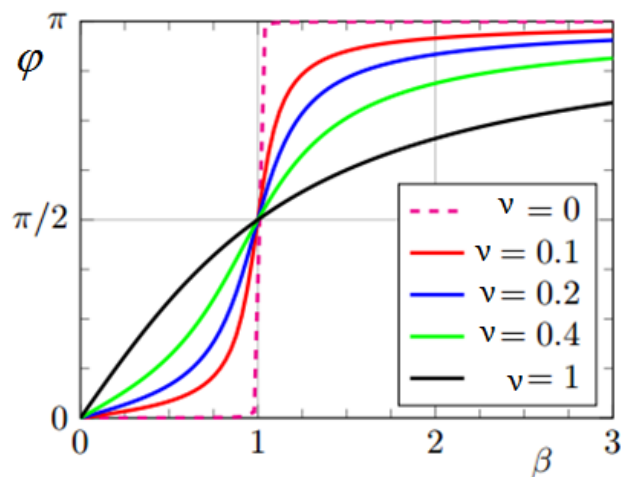


Fig. 12 Andamenti di φ in funzione di β

Dall'esame delle curve $N(\beta)$, valgono ancora le seguenti osservazioni:

- 1) Indipendentemente dal valore ν di risulta sempre $N = 1$ quando $\beta = 0$.
- 2) Al crescere di ν il valore massimo di N si ottiene per valori di β sempre più piccoli; la pulsazione $\bar{\omega}$ della pulsante che dà luogo alla massima amplificazione non solo è minore di

ω ma è anche minore di $\Omega = \omega\sqrt{1-\nu^2}$ cioè della pulsazione propria dell'oscillatore smorzato, ossia senza forzante.

3) Il massimo effetto, cioè il massimo valore di N , si riduce all'aumentare di ν ed è pari ad 1 se

$$\nu = 1/\sqrt{2}$$

4) Per $\beta \gg 1$ il coefficiente di amplificazione, minore di 1, risulta in pratica indipendente dallo smorzamento ν e calcolabile dalla relazione:

$$N_{\max} \cong \frac{1}{2\nu}$$

Dall'esame delle curve $\varphi(\beta)$ si deducono le seguenti osservazioni:

1) Per $\nu \neq 0$ lo sfasamento φ è minore di $\pi/2$ se $\beta < 1$ e tende a π per $\beta \gg 1$. Per $\beta = 1$

risultando dalla $\varphi = \arctan\left(\frac{2\nu\beta}{1-\beta^2}\right)$ si ottiene indipendentemente dal valore di ν , $\varphi = \pi/2$

2) Per $\nu = 1/\sqrt{2} = 0,707$ l'andamento di φ è praticamente lineare per $\beta < 1$.

2.1.5 Oscillazioni forzate da una forza variabile con legge qualsiasi in presenza di smorzamento

Nel caso più generale di oscillazioni forzate la forza varia con legge qualsiasi. Sappiamo che l'equazione del moto dell'oscillatore semplice smorzato è:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

tale equazione è formalmente identica all'equazione che governa il problema quando sia impresso all'estremo fisso della molla e dello smorzatore uno spostamento $y(t)$ tale che sia $\ddot{y}(t) \neq 0$. Stiamo prendendo in considerazione il caso più generale di tipologia di forzante (legge qualsiasi) e il caso più frequente di applicazione della forza (forza applicata alla base della struttura), ma senza perdere di generalità, in quanto l'accelerazione applicata alla base del sistema è il classico problema sismico che rappresenta una parte consistente nelle analisi dinamiche. L'equazione del moto diventa in tal caso:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\ddot{y}(t)$$

che coincide con la precedente se si pone

$$-m\ddot{y}(t) = F(t)$$

La forza fittizia $-m\ddot{y}(t)$ prende il nome di forza di trascinamento: essa rappresenta la forza d'inerzia

generata sulla massa per effetto dell'accelerazione impressa al piede, nell'ipotesi che il sistema sia infinitamente rigido.

Per risolvere l'ultima equazione, esistono diversi tipi di soluzioni, ad esempio attraverso l'utilizzo dell'integrale di Fourier, ma in tal caso cerchiamo la soluzione attraverso l'integrale di Duhamel.

2.1.6 L'integrale di Duhamel

Si consideri una forza tale che per $t = 0$ sia $F(t) = 0$ e per $t > 0$ sia $F(t) = F_1$, come illustrato nella Fig. 13.

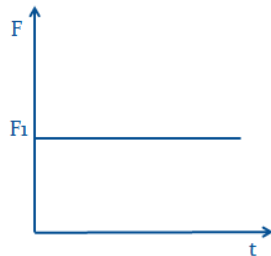


Fig. 13 Descrizione della funzione $F(t)$

Il moto del sistema, per $t > 0$ è retto dall'equazione:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_1$$

con le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

La soluzione di tale equazione è stata già calcolata precedentemente, e nel caso si $\nu < 1$ e considerando la sollecitazione uguale ad F_1 (e non uguale a $F \sin \bar{\omega}t$), abbiamo:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t} \left(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \right) + \frac{F_1}{k}$$

dove le costanti valgono:

$$B = \frac{F_1}{k} \text{ e } A = \frac{F_1}{k} \frac{\nu\omega}{\Omega}$$

quindi:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left[1 - e^{-\nu\omega t} \left(\frac{\nu\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) \right]$$

Il moto descritto dall'ultima equazione è un moto oscillatorio smorzato che tende al valore $\frac{F}{k}$ per $t \rightarrow \infty$. Se ora si ipotizza che all'istante $t = \delta t$ si aggiunga una forza $F(t) = -F_1$, utilizzando ancora

il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left[1 - e^{-v\omega t} \left(\frac{v\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) \right] - \frac{F_1}{k} \left[1 - e^{-v\omega(t-\delta t)} \left(\frac{v\omega}{\Omega} \sin \Omega(t-\delta t) + \cos \Omega(t-\delta t) \right) \right]$$

l'equazione, valida per $t > \delta t$, descrive in sostanza l'effetto dell'impulso $F_1 \delta t$. Posto quindi:

$$g(t) = \frac{F_1}{k} \left[1 - e^{-v\omega t} \left(\frac{v\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) \right]$$

l'equazione $x(t)$ può scriversi come $x(t) = g(t) - g(t - \delta t)$

ovvero, se δt è infinitesimo:

$$x(t) = \frac{dg(t)}{dt} \delta t$$

differenziando quindi $g(t)$ si ottiene la risposta del sistema ad un impulso $F_1 \delta t$ applicato all'istante $t = 0$.

Si ha così:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left(\Omega + \frac{v^2 \omega^2}{\Omega} \right) e^{-v\omega t} \sin \Omega t \delta t$$

ovvero:

$$x(t) = \frac{F_1}{m\Omega} e^{-v\omega t} \sin \Omega t \delta t$$

Se l'impulso è applicato all'istante t_1 , la risposta del sistema sarà fornita dalla relazione che segue, valida ovviamente per $t > t_1$

Si ha nel caso:

$$x(t) = \frac{F_1}{m\Omega} e^{-v\omega(t-t_1)} \sin \Omega(t-t_1) \delta t$$

La forza variabile con legge qualsiasi, come si evince dalla Fig. 14, può essere interpretata come una successione di impulsi $F_i \delta t$ ciascuno dei quali contribuisce al moto attraverso una relazione precedente. Lo spostamento $x(t)$ al tempo t , può essere quindi determinato sommando i contributi degli impulsi $F(t) \delta t$ precedenti al tempo t . Si ha quindi la soluzione:

$$x(t) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t F(t_1) e^{-v\omega(t-t_1)} \sin \Omega(t-t_1) \delta t_1$$

che prende il nome di "integrale di Duhamel".

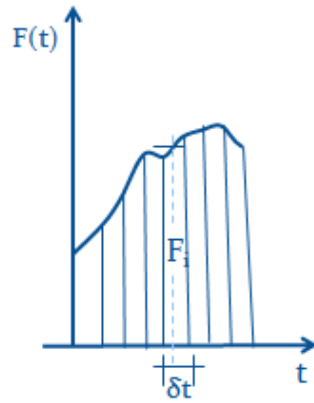


Fig. 14 Forza variabile con legge qualsiasi

2.2. SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ

Si consideri il sistema di Fig. 15 costituito da 3 masse m_1 , m_2 , m_3 collegate da 3 molle di rigidezza k_1 , k_2 , k_3 e da 3 smorzatori di costante b_1 , b_2 , b_3 .

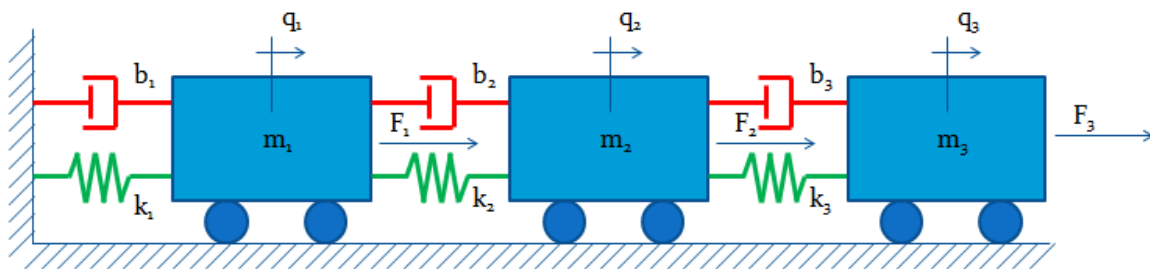


Fig. 15 Schema di sistema a 3 gradi di libertà

Assumendo quali incognite del problema gli spostamenti orizzontali delle masse q_1 , q_2 , q_3 misurati a partire dalla configurazione indeformata, e considerando un comportamento lineare elastico delle molle, si può scrivere l'energia cinetica, la funzione di dissipazione e l'energia potenziale interna, rispettivamente uguali a:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \ddot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ddot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \ddot{q}_3^2$$

$$D = \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} b_3 (\dot{q}_3 - \dot{q}_2)^2$$

$$U_i = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (q_3 - q_2)^2$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze esterne per effetto di una variazione infinitesima delle coordinate generalizzate si ha:

$$\delta L_1 = F_1(t)\delta q_1$$

$$\delta L_2 = F_2(t)\delta q_2$$

$$\delta L_3 = F_3(t)\delta q_3$$

Le equazioni che governano il moto del sistema, come già osservato per il caso di oscillazione libera, e nell'ipotesi di piccoli spostamenti, possono ricavarsi attraverso le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U_i}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad (\text{per } k = 1,2,3)$$

Si ha così:

$$k = 1$$

$$m_1 \ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2 q_2 + (b_1 + b_2)\dot{q}_1 - b_2 \dot{q}_2 = F_1(t)$$

$$k = 2$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_2 + k_3)q_2 - k_3 q_3 - b_2 \dot{q}_1 + (b_2 + b_3)\dot{q}_2 - b_3 \dot{q}_3 = F_2(t)$$

$$k = 3$$

$$m_3 \ddot{q}_3 - k_3 q_2 + k_3 q_3 - b_3 \dot{q}_2 + b_3 \dot{q}_3 = F_3(t)$$

Le ultime 3 equazioni rappresentano un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti nelle incognite q_1 , q_2 , q_3 e possono scriversi in forma più compatta adottando la notazione matriciale:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\}$$

avendo posto:

$$[A] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice degli smorzamenti}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle rigidità}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{rispettivamente vettore degli spostamenti; delle velocità; delle accelerazioni}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vettore delle forze esterne}$$

L'equazione in forma matriciale rappresenta le 3 equazioni di equilibrio dinamico delle 3 masse del sistema; il prodotto

$$[A]\{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} F_{in.1} \\ F_{in.2} \\ F_{in.3} \end{Bmatrix} \quad \text{fornisce le tre forze di inerzia applicate alle masse } m_1, m_2, m_3$$

analogamente i prodotti:

$$[B]\{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} F_{vis.1} \\ F_{vis.2} \\ F_{vis.3} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [C]\{q\} = \begin{Bmatrix} F_{el.1} \\ F_{el.2} \\ F_{el.3} \end{Bmatrix} \quad \text{forniscono le forze viscosse e quelle di richiamo elastico}$$

In tal modo è possibile riscrivere il sistema delle 3 equazioni di equilibrio dinamico come:

$$\begin{cases} F_{in.1} + F_{vis.1} + F_{el.1} = F_1(t) \\ F_{in.2} + F_{vis.2} + F_{el.2} = F_2(t) \\ F_{in.3} + F_{vis.3} + F_{el.3} = F_3(t) \end{cases}$$

Ora è ancora più semplice immaginare che le stesse equazioni si sarebbero potute ricavare applicando il principio di d'Alembert ed imponendo l'equilibrio fra le forze applicate a ciascuna massa, ivi comprese le forze d'inerzia. Già abbiamo osservato nel caso di oscillazioni libere come l'equazione del moto poteva essere scritta attraverso diversi approcci (Equazione di Lagrange, Principio di conservazione dell'energia, principio di d'Alembert).

Con riferimento alla massa m_1 , ad esempio, si hanno infatti le seguenti forze:

a) forza d'inerzia (Fig. 16 a)

$$-m_1\ddot{q}_1$$

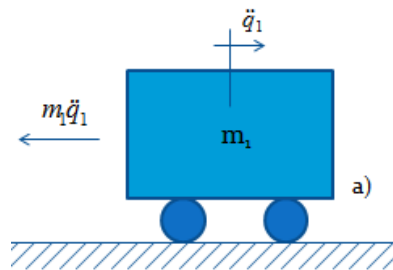


Fig. 16 a) Forze d'inerzia

b)forze viscosse

per effetto dello smorzatore b_1 essendo la forza proporzionale a \dot{q}_1 , si ha:

$$-b_1\dot{q}_1 \text{ (Fig. 16 b)}$$

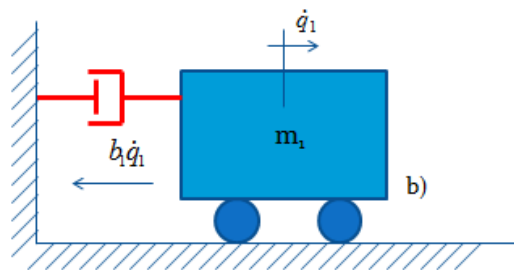


Fig. 16 b) Forze viscosse per effetto dello smorzatore b_1

per effetto dello smorzatore b_2 essendo la forza proporzionale alla differenza $\dot{q}_2 - \dot{q}_1$ si ha

$$b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \text{ (Fig. 16 c)}$$

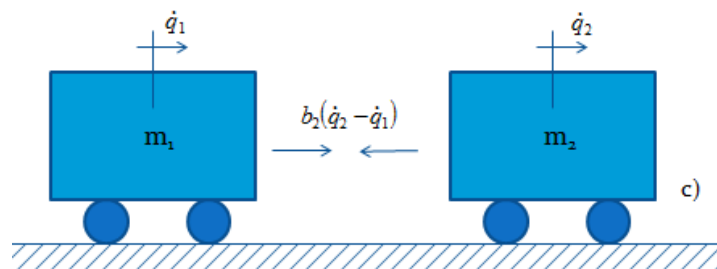


Fig. 16 c) Forze viscosse per effetto dello smorzatore b_2

c)forze di richiamo elastico

per effetto della molla k_1 essendo la forza proporzionale a q_1 si ha:

$$-k_1q_1 \text{ (Fig. 16 d)}$$

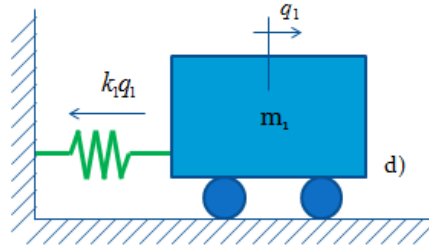


Fig. 16 d) Forze di richiamo per effetto della molla k_1

per effetto della molla k_2 essendo la forza proporzionale alla differenza $q_2 - q_1$ si ha $k_2(q_2 - q_1)$ (Fig. 16 e)

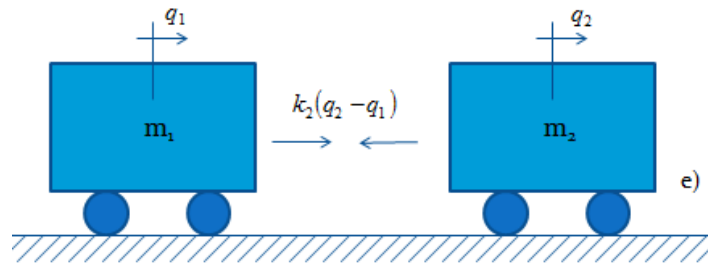


Fig. 16 e) Forze di richiamo elastico per effetto della molla k_2

d)forza esterna F (Fig. 16 f)

$$F_1(t)$$

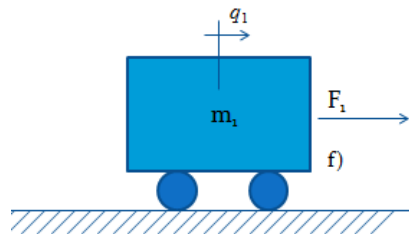


Fig. 16 f) Forza esterna

Annullando la forza risultante applicata alla massa 1, si ricava la relazione:

$$-m_1\ddot{q}_1 - b_1\dot{q}_1 + b_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - k_1q_1 + k_2(q_2 - q_1) + F_1(t) = 0$$

che coincide, come si voleva dimostrare, con la prima del sistema di equazioni già definito.

La formulazione utilizzata, fino ad ora, per la scrittura delle equazioni del moto è quella classica che assume quali incognite del problema gli spostamenti assoluti delle masse rispetto alla configurazione indeformata, ma è possibile percorrere anche altre strade per scrivere le equazioni del moto.

In primo luogo, sempre utilizzando la formulazione di Lagrange, è possibile assumere quali

incognite del problema altre grandezze, purché siano sufficienti ad esprimere la generica configurazione deformata; ad esempio, gli spostamenti relativi delle masse invece di quelli assoluti. Oppure si possono considerare le equazioni di congruenza invece delle equazioni di equilibrio.

Ritornando per un momento alla scrittura matriciale $[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\}$ che introduce la matrice delle masse; quella degli smorzamenti, e quella delle rigidezze, è utile riportare alcune osservazioni di notevole interesse.

Il generico elemento b_{ij} della matrice degli smorzamenti $[B]$, atteso il significato fisico del vettore $\{\dot{q}\}$ incognito, rappresenta, come è facile verificare, la forza viscosa che nasce sulla massa i-esima quando la massa j-esima possiede una velocità \dot{q}_j unitaria, essendo nulle le velocità delle altre masse.

La funzione di dissipazione introdotta in $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U_i}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k$ può esprimersi nella forma:

$$D = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [B] \{\dot{q}\}$$

come è immediato verificare sviluppando la sommatoria.

Dovendo ancora essere $b_{ij} = b_{ji}$ atteso il significato fisico del generico elemento della matrice degli smorzamenti, è immediato verificare che sussiste la relazione:

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

Attraverso questa equazione è possibile generare la matrice degli spostamenti una volta definita la funzione dissipazione.

In perfetta analogia l'elemento c_{ij} della matrice delle rigidezze $[C]$, rappresenta la forza elastica sulla massa i-esima per effetto di uno spostamento unitario della massa j-esima, essendo bloccate le altre masse. Anche per la matrice $[C]$ sussiste una relazione analoga alla matrice degli smorzamenti, che vede chiaramente chiamata in causa l'energia potenziale interna del sistema. Si ha così :

$$U_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \{q\}^T [C] \{q\}$$

per cui, dovendo essere $c_{ij} = c_{ji}$ risulta:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial q_i \partial q_j}$$

Questa equazione consente di generare la matrice delle rigidezze una volta nota la funzione energia potenziale interna.

Ricordando il significato fisico dell'elemento c_{ij} della matrice delle rigidezze dal calcolo matriciale strutturale che talvolta viene affrontato nei corsi di Scienza delle Costruzioni, la sua determinazione risulta sempre possibile attraverso un procedimento semplice. Impediti gli spostamenti q_i ($i = 1,2,3$ nel caso in esame) attraverso l'introduzione di vincoli semplici (carrelli disposti con piano di scorrimento ortogonale agli spostamenti), ed impressa una traslazione unitaria al carrello j-esimo l'elemento c_{ij} è fornito, in valore e segno, dalla reazione del carrello i-esimo. Di conseguenza, ordinate le reazioni dei carrelli secondo la numerazione delle incognite si ottiene dalla soluzione dello schema la colonna j-esima della matrice delle rigidezze. La completa definizione della matrice delle rigidezze richiede quindi la soluzione di N schemi se N sono i gradi di libertà del sistema. Ciascuno schema è caratterizzato dall'avere tutte le masse impedito di traslare e pertanto possiede certamente N iperstaticità in più del modello di partenza.

Questa circostanza non sempre rende più gravoso il calcolo in quanto, ad esempio, nel caso dei telai, è più agevole operare su schemi a nodi fissi, anziché a nodi spostabili.

Ancora l'elemento a_{ij} della matrice delle rigidezze $[A]$, rappresenta la forza elastica sulla massa i-esima per effetto di un'accelerazione unitaria della massa j-esima, essendo bloccate le altre masse. Anche per la matrice $[A]$ sussiste una relazione analoga alla matrice degli smorzamenti, che vede chiaramente chiamata in causa l'energia cinetica del sistema. Si ha così :

$$T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{q}_i \ddot{q}_j = \frac{1}{2} \{\ddot{q}\}^T [A] \{\ddot{q}\}$$

per cui, dovendo essere $a_{ij} = a_{ji}$ risulta:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_j}$$

Questa equazione consente di generare la matrice della massa una volta nota la funzione energia cinetica.

Le considerazioni fin qui riportate possono ripetersi, come già accennato, assumendo quali componenti generalizzate gli spostamenti relativi fra le masse anziché quelli assoluti. Indichiamo con q'_1, q'_2, q'_3 le nuove incognite del problema, legate alle prime dalle relazioni (ad esempio per le accelerazione ma ugualmente per velocità e spostamenti):

$$\ddot{q}_1 = \ddot{q}'_1 \quad ; \quad \ddot{q}_2 = \ddot{q}'_1 + \ddot{q}'_2 \quad ; \quad \ddot{q}_3 = \ddot{q}'_1 + \ddot{q}'_2 + \ddot{q}'_3 \quad \text{da cui}$$

$$\ddot{q}'_1 = \ddot{q}_1 \quad ; \quad \ddot{q}'_2 = \ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \quad ; \quad \ddot{q}'_3 = \ddot{q}_3 - \ddot{q}_2$$

In tal caso non mostreremo tutti i passaggi già eseguiti per gli spostamenti assoluti, poiché ciò che si vuole mettere in evidenza esula dal carattere puramente analitico dell'utilizzo di una o di un'altra coordinata con la quale poter descrivere l'equazione del moto.

Direttamente scriviamo l'equazione in forma matriciale con le nuove coordinate che rappresentano le tre equazioni di equilibrio dinamico delle tre masse del sistema.

$$[A]\{\ddot{q}'\} + [B]\{\dot{q}'\} + [C]\{q'\} = \{F'\}$$

La differenza sostanziale tra questa forma matriciale, ottenuta usando gli spostamenti relativi e la forma matriciale ottenuta usando gli spostamenti assoluti risiede nelle matrici di massa di rigidità e di smorzamento, che riportiamo:

$$A = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice degli smorzamenti}$$

$$C = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle rigidità}$$

dalle quali è possibile notare come, utilizzando gli spostamenti relativi, le matrici di smorzamento e rigidità siano diagonali mentre utilizzando gli spostamenti assoluti la matrice della massa risultava la sola ad essere diagonale.

Le forme diverse delle matrici determinano diversi tipi di accoppiamento tra le equazioni di equilibrio del sistema, infatti le prime equazioni quelle nelle quali abbiamo utilizzato le coordinate assolute, erano accoppiate dai vettori $\{q\}$ e $\{\dot{q}\}$ ma non dal vettore $\{\ddot{q}\}$ e la matrice della massa era diagonale; mentre nelle seconde equazioni nelle quali abbiamo utilizzato le coordinate relative, le equazioni sono accoppiate dal vettore $\{\ddot{q}'\}$ e la matrice della massa risulta piena ma non accoppiate dai vettori $\{q'\}$ e $\{\dot{q}'\}$ e la matrice degli smorzamenti e delle rigidità risultano diagonali.

Per passare da un sistema all'altro possiamo utilizzare la seguente posizione:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{Bmatrix} = [X]\{q'\}$$

che esprime la trasformazione lineare tra $\{q'\}$ e $\{q\}$. Essendo infatti ancora:

$$\{\dot{q}\} = [X]\{\dot{q}'\} \text{ e } \{\ddot{q}\} = [X]\{\ddot{q}'\}$$

L'equazione del moto espressa attraverso gli spostamenti assoluti, diventa:

$$[A][X]\{\ddot{q}'\} + [B][X]\{\dot{q}'\} + [C][X]\{q'\} = \{F\}$$

ma infine premoltiplicando per $[X]^T$, otteniamo:

$$[X]^T [A][X]\{\ddot{q}'\} + [X]^T [B][X]\{\dot{q}'\} + [X]^T [C][X]\{q'\} = [X]^T \{F\}$$

un'equazione che è uguale all'equazione del moto espressa in funzione degli spostamenti relativi.

Come possiamo verificare:

$$[X]^T [A][X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & m_2 & 0 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix} = [A']$$

$$[X]^T [B][X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_3 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = [B']$$

$$[X]^T [C][X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = [C']$$

$$[X]^T \{F\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 \\ F_1 + F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \{F'\}$$

L'impiego della matrice di trasformazione $[X]$ consente, come si è visto di passare rapidamente da

un sistema di coordinate ad un altro: in seguito la stessa tecnica si dimostrerà di fondamentale importanza per lo studio di sistemi a più gradi di libertà sollecitati da forze esterne variabili con legge qualsiasi. La matrice di trasformazione $[X]$ sarà naturalmente assunta in maniera tale da ottenere notevoli semplificazioni, cosa che, nel caso svolto, non si è verificato come già analizzato passando da spostamenti assoluti a relativi, in quanto le equazioni del moto sono rimaste accoppiate.

Si osservi che, dal punto di vista concettuale, molte innovazioni importanti sono introdotte, con lo studio dei sistemi a più gradi di libertà, rispetto a quelli ad un solo grado di libertà.

Con l'aumentare dei gradi di libertà non si verificano invece novità di rilievo rispetto ai sistemi a pochi gradi di libertà, ma si ha solamente maggiore onere delle relative soluzioni numeriche.

2.2.1 Oscillazioni libere in assenza di smorzamento

Le oscillazioni libere si verificano quando il moto avviene in assenza di forze esterne: poiché nel caso che qui si vuole studiare non sono presenti neanche le forze dovute alle resistenze viscosi, l'equilibrio delle masse deve essere assicurato dalle forze d'inerzia e da quelle di richiamo elastico, le sole presenti con le ipotesi formulate.

Naturalmente, perché si verifichino oscillazioni, è necessario che il sistema sia caricato al tempo $t=0$ di energia o sotto la forma di energia potenziale interna, o sotto la forma di energia cinetica o, più in generale, con le due diverse forme di energia.

La carica di energia fornita al tempo $t=0$ è determinata attraverso le condizioni iniziali che stabiliscono al tempo zero i vettori $\{q\}$ e $\{\dot{q}\}$.

D'altra parte, osservando l'equazione di equilibrio dinamico (o del moto) $[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = 0$ e ricordando che in questo caso le equazioni del moto si presentano omogenee, la soluzione deve dipendere necessariamente da $2N$ costanti se N indica i gradi di libertà del sistema.

Si consideri il sistema di Fig.17 dove, ancora una volta, per semplicità, il numero dei gradi di libertà è pari a tre.

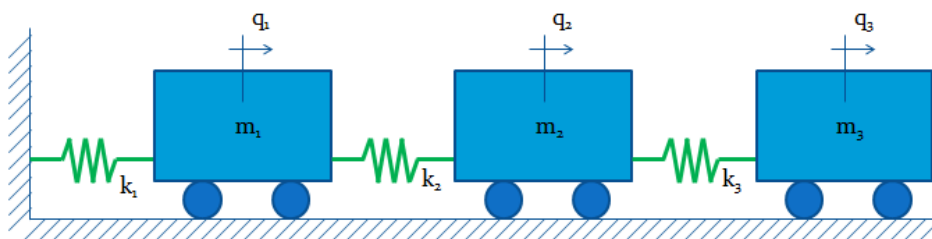


Fig. 17 Schema di sistema a 3 gradi di libertà in assenza di smorzamento

Assumendo quali incognite del problema gli spostamenti assoluti q_1, q_2, q_3 delle masse misurate a partire dalla configurazione indeformata, le equazioni del moto, semplificando il sistema già definito, si scrivono:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2 q_2 = 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 - k_2 q_1 + (k_2 + k_3)q_2 - k_3 q_3 = 0 \\ m_3 \ddot{q}_3 - k_3 q_2 + k_3 q_3 = 0 \end{cases}$$

ovvero utilizzando la notazione matriciale:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = 0$$

dove $[A]$ e $[C]$ sono già state definite in precedenza.

La soluzione dell'equazione matriciale è posta nella forma stazionaria, la soluzione dello spostamento dipende dal tempo e dallo spazio, quindi è funzione di una funzione dipendente dal tempo e da una funzione dipendente dalla posizione:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

dove $C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ è la funzione temporale e $\{\Psi^{(i)}\}$ è la funzione spaziale.

dove le costanti C_i e φ_i , fornite dalle condizioni iniziali, sono indipendenti tra loro: di conseguenza l'equazione matriciale deve risultare soddisfatta con riferimento al termine i -esimo della soluzione, supponendo ossia che siano nulli i valori delle altre $N-1$ costanti C_j . Nel senso che per un sistema a tre gradi di libertà $i = 1, 2, 3$ l'equazione matriciale deve essere soddisfatta con riferimento al termine i -esimo della soluzione, quindi considerando che la soluzione riferita ad $i = 1$ vedrà nulli i termini C_j , ossia C_2 e C_3 . Quindi dalla sommatoria passiamo ad un'equazione nella quale c'è un solo indice $i = 1, 2, 3$ che non varia. Si ha in tal caso:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ \{\ddot{q}\} &= -\omega_i^2 \{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = -\omega_i^2 \{q\} \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione matriciale abbiamo:

$$-\omega_i^2 [A]\{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + [C]\{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = 0$$

ovvero dovendo l'equazione essere soddisfatta indipendentemente dal valore del termine $C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, ossia a meno del tempo, si ha:

$$(-\omega_i^2[A] + [C])\{\Psi^{(i)}\} = 0$$

L'ultima equazione rappresenta un sistema omogeneo di equazioni lineari nelle incognite $\{\Psi_j^{(i)}\}$ con $j = 1, 2, 3$ dove il termine ω_i^2 non è noto, è un tipico problema agli autovalori.

In realtà esso è fornito dall'annullamento del determinante della matrice:

$$-\omega_i^2[A] + [C]$$

in quanto essendo il sistema omogeneo, questa condizione deve essere verificata per assicurare una soluzione non banale.

Sviluppando la condizione:

$$\det[-\omega^2[A] + [C]] = 0$$

si perviene ad una equazione di grado N in ω^2 che prende il nome di "equazione caratteristica" o "equazione delle frequenze" che fornisce N valori di ω^2 .

Essendo le matrici $[A]$ e $[C]$ simmetriche e definite positive, le radici risultano reali e positive e, ad esclusione di casi particolari, distinte: esse sono pertanto ordinabili secondo la sequenza:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{N-1} \leq \omega_N$$

Gli N valori di ω_i rappresentano le N frequenze proprie di oscillazione e la prima, ω_1 , prende il nome di "frequenza fondamentale" ovvero "prima frequenza".

La soluzione del sistema omogeneo $(-\omega_i^2[A] + [C])\{\Psi^{(i)}\} = \{0\}$ fornisce per ciascuna frequenza ω_i , il corrispondente vettore $\{\Psi^{(i)}\}$ che rappresenta il modo di vibrare i-esimo del sistema, definito naturalmente a meno di una costante, caratteristica propria di un problema agli autovalori.

Ricordando che tra la frequenza ed il periodo T sussiste la relazione:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$$

abbiamo le disuguaglianze:

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_{N-1} \geq T_N$$

il più grande dei periodi di oscillazione prende il nome di "periodo fondamentale".

Quando il sistema oscilla secondo il modo di vibrare i-esimo si ha:

$$\{q\} = \{\Psi^{(i)}\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

e cioè gli spostamenti si annullano tutti nello stesso istante così come nello stesso istante assumono i valori massimi.

La condizione generale di oscillazioni libere del sistema vede quindi il moto risultante dalla sovrapposizione degli N modi di vibrazione: le costanti C_i e φ_i , dipendono ovviamente dalle condizioni iniziali in quanto, come già osservato, è necessario che il moto sia eccitato.

Per la determinazione delle costanti iniziali, conviene porre la condizione generale di oscillazioni libere nella forma equivalente:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)$$

essendo:

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \text{ e } \tan \varphi_i = \frac{B_i}{A_i}$$

nel caso più generale che al tempo $t = 0$, sia:

$$\{q\} = \{q_0\} \text{ e } \{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\}$$

otteniamo che:

$$\{q_0\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} B_i = [X]\{B\}$$

$$\{\dot{q}_0\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} \omega_i A_i = [X][\Omega]\{A\}$$

avendo posto la matrice di trasformazione pari a:

$$[X] = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} & \Psi_1^{(2)} & \vdots & \Psi_1^{(N)} \\ \Psi_2^{(1)} & \Psi_2^{(2)} & \vdots & \Psi_2^{(N)} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \Psi_N^{(1)} & \Psi_N^{(2)} & \vdots & \Psi_N^{(N)} \end{bmatrix} \text{ e } [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \omega_N \end{bmatrix}$$

La matrice $[X]$ di ordine $N \times N$, contiene i modi di vibrare ordinati in colonna. Poiché i modi di vibrare sono linearmente dipendenti, la matrice $[X]$ è sicuramente non singolare, di modo che sia

sempre possibile risolvere il sistema di equazioni $\{q_0\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} B_i = [X]\{B\}$

$\{\dot{q}_0\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} \omega_i A_i = [X][\Omega]\{A\}$ e conoscere le costanti A_i e B_i ovvero le costanti C_i e φ_i .

Riprendendo l'equazione omogenea, $(-[A]^{-1}[A]\omega^2 + [A]^{-1}[C])\{\Psi\} = \{0\}$ se la si premoltiplica per la $[A]^{-1}$ otteniamo:

$$(-[I]\omega^2 + [H])\{\Psi\} = \{0\}$$

avendo posto: $[I] = [A]^{-1} \times [A]$ e $[H] = [A]^{-1} \times [C]$.

Si nota così, ancora più chiaramente che la determinazione delle frequenze costituisce un problema di valori caratteristici in quanto le ω^2 sono gli autovalori della matrice $[H]$ e i vettori $\{\Psi\}$ sono gli autovettori.

Pur essendo le matrici $[A]$ e $[C]$ simmetriche non è detto che lo sia la matrice $[H]$ a meno di casi particolari. Siccome la non simmetria della matrice $[H]$ conduce ad un appesantimento notevole dei calcoli, in quanto alcuni algoritmi per il calcolo degli autovalori, validi per matrici simmetriche, non sono applicabili. E notiamo che per matrici non simmetriche, gli autovalori non sono necessariamente positivi e quindi le frequenze possono risultare immaginarie.

Il problema è tuttavia ancora solubile attraverso gli algoritmi tradizionali se si perviene ad una forma "canonica" di autovalori di una matrice simmetrica.

Eseguiamo un cambiamento di variabile:

$$\{\Psi\} = [A]^{-1/2} \{\Psi'\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{\sqrt{m_N}} \end{bmatrix}$$

abbiamo così:

$$(-[A][A]^{-1/2} \omega^2 + [C][A]^{-1/2})\{\Psi'\} = \{0\}$$

e premoltiplicando per $[A]^{-1/2}$, si ottiene:

$$(-[I]\omega^2 + [H'])\{\Psi'\} = \{0\}$$

avendo posto: $[I] = [A]^{-1/2} \times [A] \times [A]^{-1/2}$ e $[H'] = [A]^{-1/2} \times [C] \times [A]^{-1/2}$.

La matrice $[H']$ si presenta ora simmetrica in quanto il suo generico elemento, vale:

$$h_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{\sqrt{m_i} \sqrt{m_j}} = h'_{i,j}$$

Si osservi, ora che una volta noti gli autovettori della matrice $[H']$ si deve applicare l'equazione $\{\Psi\} = [A]^{-1/2} \{\Psi'\}$ per conoscere la forma dei modi di vibrare.

L'ultima posizione $\{\Psi\} = [A]^{-1/2} \{\Psi'\}$ è utilizzabile per simmetrizzare la matrice $[H]$ solo se la matrice delle masse è diagonale; diversamente la simmetrizzazione di $[H]$ può eseguirsi per due diverse strade delle quali, per altre strade, ad esempio menzioniamo quella di Choleski.

2.2.2. Ortogonalità dei modi di vibrare

Gli autovettori $\{\Psi\}$, che caratterizzano la forma dei modi di vibrare, possiedono grandi proprietà di grande interesse ai fini dello studio dei sistemi a più gradi di libertà.

Ipotizzando che il sistema oscilli in condizioni di oscillazioni libera con la frequenza ω_i , deve essere, ricordando la (44):

$$([C] - \omega_i^2 [A])\{\Psi^{(i)}\} = \{0\}$$

dove $\{\Psi^{(i)}\}$ è il vettore che caratterizza il modo di vibrare i-esimo. Analogamente, considerando la frequenza j-esima, abbiamo:

$$([C] - \omega_j^2 [A])\{\Psi^{(j)}\} = \{0\}$$

Premoltiplicando le ultime due equazioni rispettivamente per $\{\Psi^{(j)}\}^T$ e per $\{\Psi^{(i)}\}^T$ si ottiene:

$$\{\Psi^{(j)}\}^T ([C] - \omega_i^2 [A])\{\Psi^{(i)}\} = 0$$

$$\{\Psi^{(i)}\}^T ([C] - \omega_j^2 [A])\{\Psi^{(j)}\} = 0$$

ovvero operando un'operazione di trasposizione (grazie alla quale $[F] = [Q] \times [G]$ eguaglia $[F]^T = [G]^T \times [Q]^T$), otteniamo:

$$\{\Psi^{(j)}\}^T ([C] - \omega_j^2 [A])\{\Psi^{(i)}\} = 0$$

sottraendo l'ultima equazione all'equazione scritta in precedenza, $\{\Psi^{(j)}\}^T ([C] - \omega_i^2 [A])\{\Psi^{(i)}\} = 0$, abbiamo:

$$-\{\Psi^{(j)}\}^T \omega_i^2 [A]\{\Psi^{(i)}\} + \{\Psi^{(j)}\}^T \omega_j^2 [A]\{\Psi^{(i)}\} = \{0\}$$

ovvero:

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\{\Psi^{(j)}\}^T [A]\{\Psi^{(i)}\} = 0$$

Nel rispetto di tale equazione, se per ipotesi $\omega_j \neq \omega_i$, cioè che le due frequenze siano distinte, comporta il verificarsi della relazione:

$$\{\Psi^{(j)}\}^T [A] \{\Psi^{(i)}\} = 0$$

e ricordando la relazione $\{\Psi^{(j)}\}^T ([C] - \omega_i^2 [A]) \{\Psi^{(i)}\} = 0$ ciò comporta anche la scrittura della relazione:

$$\{\Psi^{(j)}\}^T [C] \{\Psi^{(i)}\} = 0$$

Queste relazioni esprimono la condizione di ortogonalità fra i vettori $\{\Psi^{(j)}\}$ e $\{\Psi^{(i)}\}$ rispetto alle matrici $[A]$ e $[C]$.

Ne segue che i vettori che definiscono i modi di vibrare sono linearmente indipendenti. Per essere nulla la combinazione lineare:

$$\{\Psi^{(1)}\} \alpha_1 + \{\Psi^{(2)}\} \alpha_2 + \dots + \{\Psi^{(N)}\} \alpha_N = 0$$

devono essere necessariamente nulli tutti i coefficienti α_i .

Riscrivendo le relazioni $\{\Psi^{(j)}\}^T [A] \{\Psi^{(i)}\} = 0$ e $\{\Psi^{(j)}\}^T [C] \{\Psi^{(i)}\} = 0$ per $i = j$, abbiamo:

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{\Psi^{(i)}\} = m_i^* \neq 0$$

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [C] \{\Psi^{(i)}\} = k_i^* \neq 0$$

il rapporto tra le due quantità è immediato verificare partendo dall'equazione $([C] - \omega_i^2 [A]) \{\Psi^{(i)}\} = \{0\}$ che equivale a:

$$\omega_i^2 = \frac{k_i^*}{m_i^*}$$

(potevamo raggiungere lo stesso risultato anche eseguendo considerazioni energetico, equiparando la massima energia cinetica e la massima energia potenziale, con il cosiddetto rapporto di Rayleigh)

Le grandezze k_i^* e m_i^* rappresentano la rigidità equivalente e la massa equivalente (detta anche massa modale) di un oscillatore semplice con frequenza pari a ω_i .

Poiché i modi di vibrare $\{\Psi\}$ sono definiti a meno di una costante, risulta conveniente paragonarli ad un criterio comune, cioè normalizzandoli.

Ad esempio la normalizzazione può effettuarsi imponendo che risulti:

$$\{\Psi^{(i)}\}^T \{\Psi^{(i)}\} = 1$$

oppure

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{\Psi^{(i)}\} = m_i^* = 1$$

Se adoperiamo quest'ultima normalizzazione i vettori ortogonali vengono detti ortonormali, e avremo che:

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [C] \{\Psi^{(i)}\} = k_i^* = \omega_i^2$$

essendo la massa modale m_i^* unitaria.

2.2.3 Le coordinate principali: disaccoppiamento delle equazioni del moto

Abbiamo precedentemente notato come utilizzando una trasformazione lineare sia possibile operare un cambiamento di variabili ed assumere quindi nuove coordinate libere per le equazioni del moto. Abbiamo visto come utilizzando una trasformazione lineare siamo passati da equazioni scritte attraverso spostamenti assoluti ad equazioni scritte attraverso spostamenti relativi fra le masse. Rendendoci però anche conto che per tale trasformazione le equazioni continuavano a risultare accoppiate fra loro.

Ma se le coordinate libere sono scelte in modo tale che quando il sistema oscilla secondo l'i-esimo modo di vibrare risulti diversa da zero solo la coordinata i-esima, esse prendono il nome di coordinate principali o modali [3]. Attraverso questa rappresentazione una qualsiasi deformata, quindi una qualsiasi configurazione che può essere descritta da coordinate opportunamente scelte, se descritta dalle coordinate modali, viene interpretata come la sovrapposizione dei modi di vibrare del sistema, ciascuno moltiplicato per un parametro che rappresenta appunto la corrispondente coordinata principale.

Indicando con $\{p\}$ il vettore delle coordinate principali, la trasformazione lineare si scrive:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X] \{p\}$$

dove la matrice della trasformazione $[X]$ contiene i modi di vibrare del sistema per colonna:

$$[X] = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} & \Psi_1^{(2)} & \vdots & \Psi_1^{(N)} \\ \Psi_2^{(1)} & \Psi_2^{(2)} & \vdots & \Psi_2^{(N)} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \Psi_N^{(1)} & \Psi_N^{(2)} & \vdots & \Psi_N^{(N)} \end{bmatrix}$$

Essendo i modi linearmente indipendenti la matrice $[X]$ è certamente invertibile di modo che può definirsi la trasformazione inversa:

$$\{p\} = [X]^{-1} \{q\}$$

In realtà, l'inversione della matrice $[X]$ per conoscere le coordinate principali, non è necessaria, in quanto la componente i -esima del vettore $\{p\}$ può ottenersi premoltiplicando l'equazione

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X] \{p\} \text{ per } \{\Psi^{(i)}\}^T [A]. \text{ Infatti:}$$

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{q\} = \{\Psi^{(i)}\}^T [A] [X] \{p\}$$

dove il prodotto $\{\Psi^{(i)}\}^T [A] [X]$, ricordando le proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare, fornisce un vettore riga il cui elemento i -esimo è diverso da zero e uguale a m_i^* . L'ultima equazione diventa:

$$\{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{q\} = m_i^* \{p\}$$

ossia:

$$\{p\} = \frac{1}{m_i^*} \{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{q\}$$

A valle di questa trasformazione che definisce le coordinate modali, ora, scriviamo le equazioni del moto in condizioni di oscillazioni libere per il sistema a tre gradi di libertà, assumendo quali incognite le coordinate principali.

$$\text{Definiamo quindi: } \{q\} = [X] \{p\} \text{ e } \{\dot{q}\} = [X] \{\dot{p}\}$$

l'energia cinetica del sistema può scriversi:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [A] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \{\dot{p}\}^T [X]^T [A] [X] \{\dot{p}\} = \frac{1}{2} \{\dot{p}\}^T [L] \{\dot{p}\}$$

$$\text{ponendo } [L] = [X]^T [A] [X]$$

E facile verificare che, sviluppando il doppio prodotto della matrice $[L] = [X]^T [A] [X]$, il singolo elemento l_{ij} si scrive:

$$l_{ij} = \{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{\Psi^{(j)}\}$$

in modo tale che l'ortogonalità del modo di vibrare rispetto alla matrice $[A]$ deve risultare:

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ m_i^* & i = j \end{cases} \text{ se}$$

La matrice $[L] = [X]^T [A] [X]$ è quindi diagonale e l'energia cinetica del sistema può scriversi più sinteticamente come:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s m_i^* \dot{p}_i^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, analogamente si ha:

$$U_i = \frac{1}{2} \{q\}^T [C] \{q\} = \frac{1}{2} \{p\}^T [X]^T [C] [X] \{\dot{p}\} = \frac{1}{2} \{\dot{p}\}^T [N] \{\dot{p}\}$$

ponendo $[N] = [X]^T [C] [X]$

E facile verificare che, sviluppando il doppio prodotto della matrice $[N] = [X]^T [C] [X]$, il singolo elemento n_{ij} si scrive:

$$n_{ij} = \{\Psi^{(i)}\}^T [C] \{\Psi^{(j)}\}$$

in modo tale che l'ortogonalità del modo di vibrare rispetto alla matrice $[A]$ deve risultare:

$$n_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i^* & i = j \end{cases}$$

La matrice $[N] = [X]^T [C] [X]$ è quindi diagonale e l'energia potenziale del sistema può scriversi più sinteticamente come:

$$U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s k_i^* p_i^2$$

Le ultime equazioni che esprimono l'energia cinetica e potenziale rappresentano una forma particolarmente compatta in quanto non vi figurano i prodotti misti $p_i p_j$ o $\dot{p}_i \dot{p}_j$.

I coefficienti k_i^* e m_i^* rappresentano rispettivamente la massa generalizzata (modale) e la rigidità generalizzata rispetto alla coordinata i -esima. Poiché quest'ultima non è altro che un moltiplicatore del modo i -esimo, ricordando la definizione stessa di coordinata principale, in pratica il contenuto energetico del generico modo di un sistema a più gradi di libertà può essere determinato dalla conoscenza di questi due soli parametri.

Una notevole semplificazione nella scrittura delle equazioni del moto di un sistema a più gradi di libertà si consegue utilizzando quali incognite generalizzate le coordinate principali.

Tenendo presenti le forme quadratiche ritrovate per l'energia cinetica e per l'energia potenziale interna e l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} + \frac{\partial U_i}{\partial p_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3$$

si ottiene:

$$\text{per } k = 1 \quad m_1^* \ddot{p}_1 + k_1^* p_1 = 0$$

$$\text{per } k = 2 \quad m_2^* \ddot{p}_2 + k_2^* p_2 = 0$$

$$\text{per } k = 3 \quad m_3^* \ddot{p}_3 + k_3^* p_3 = 0$$

Le equazioni risultano indipendenti fra loro e rappresentano tre equazioni differenziali nelle incognite p_1, p_2, p_3 .

L' i -esima equazione è quella che si potrebbe scrivere per un oscillatore semplice dotato di massa m_i^* e di rigidità k_i^* , la sua frequenza coincide con la frequenza i -esima del sistema essendo $k_i^* / m_i^* = \omega_i^2$.

In sostanza quindi, utilizzando le coordinate principali, le equazioni del moto si disaccoppiano in quanto al posto di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, si ottengono tante equazioni differenziali indipendenti del secondo ordine.

Le ultime equazioni in forma matriciale possono scriversi:

$$[L]\{\ddot{p}\} + [N]\{p\} = \{0\}$$

ovvero:

$$\{\ddot{p}\} + [\Omega^2]\{p\} = \{0\}$$

avendo posto:

$$[\Omega^2] = [L]^{-1}[N] = \begin{bmatrix} \frac{k_1^*}{m_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2^*}{m_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3^*}{m_3^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema di equazioni disaccoppiate conduce a:

$$p_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$$

$$p_2(t) = A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t$$

$$p_3(t) = A_3 \sin \omega_3 t + B_3 \cos \omega_3 t$$

dove le costanti $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ dipendono dalle condizioni iniziali. Se al tempo $t=0$ si conoscono gli spostamenti e le velocità delle masse attraverso i vettori $\{q_0\}$ e $\{\dot{q}_0\}$, possono altresì definirsi i valori iniziali delle coordinate principali e delle loro derivate rispetto al tempo.

Poiché possiamo scrivere:

$$\{p_{0i}\} = \frac{1}{m_i^*} \{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{q_0\}$$

$$\{\dot{p}_{0i}\} = \frac{1}{m_i^*} \{\Psi^{(i)}\}^T [A] \{\dot{q}_0\}$$

Note le condizioni iniziali in termini di coordinate principali, si ha:

$$B_i = p_{0i}$$

$$A_i = \frac{\dot{p}_{0i}}{\omega_i^2}$$

Facciamo ora attenzione al fatto che, in realtà questa tecnica, che conduce al disaccoppiamento dell'equazioni del moto per studiare problemi di oscillazioni libere, non comporta alcuna semplificazione, se non nella snellezza dei calcoli, poiché sempre richiede la conoscenza delle frequenze di oscillazione e dei corrispondenti modi di vibrare: il che, in pratica, vuol dire aver già risolto il problema.

Tale tecnica, invece, come si vedrà in seguito, consente grandi semplificazioni quando si esaminano problemi di oscillazioni forzate. E sembrato tuttavia opportuno introdurla prima per utilizzare fin da ora la proprietà di ortogonalità dei modi di vibrazione.

Alla luce di quanto mostrato, le coordinate principali possono ancora definirsi come quelle particolari coordinate libere attraverso le quali le equazioni del moto di un sistema a più gradi di libertà si disaccoppiano.

Si deve infine osservare che il disaccoppiamento delle equazioni del moto poteva ottenersi direttamente applicando il cambiamento di variabili $\{q\} = [X]\{p\}$ e $\{\dot{q}\} = [X]\{\dot{p}\}$

alle equazioni del moto $[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = 0$, effettuando la sostituzione e premoltiplicando $[X]^T$ si ottiene infatti:

$$[X]^T [A][X]\{\ddot{p}\} + [X]^T [C][X]\{\dot{p}\} = \{0\}$$

che coincide con:

$$[L]\{\ddot{p}\} + [N]\{\dot{p}\} = \{0\}$$

2.2.4 Oscillazioni libere in presenza di smorzamento

Nella realtà le oscillazioni libere delle strutture risultano sempre smorzate perché le ampiezze degli spostamenti vanno riducendosi progressivamente a causa delle dissipazioni di energia che si verificano durante il moto.

Tali dissipazioni sono da attribuire ai seguenti fenomeni:

- a) smorzamento isteretico
- b) smorzamento viscoso
- c) smorzamento di Coulomb

Lo smorzamento isteretico è dovuto all'attrito interno del materiale e alle connessioni fra i diversi

elementi della struttura. Le forze smorzanti risultano in tal caso proporzionali in valore alle deformazioni e quindi, per un sistema elastico, alle forze elastiche interne (quindi sono forze proporzionali allo spostamento), ed hanno direzione opposta al vettore velocità.

Lo smorzamento viscoso si manifesta invece quando il sistema vibrante oscilla in un fluido. Le forze smorzanti sono in tal caso proporzionali alla velocità attraverso una costante.

Lo smorzamento di Coulomb infine si realizza quando un corpo si muove su una superficie non liscia. In tal caso la forza smorzante può ritenersi proporzionale alla forza di contatto fra il corpo e la superficie.

I fenomeni ora ricordati possono manifestarsi contemporaneamente durante le oscillazioni, rendendo complessa la determinazione della risposta dinamica. A ciò si aggiunge l'incertezza nella determinazione delle costanti di proporzionalità, dovuta principalmente alla concomitanza dei fenomeni.

In definitiva quindi nelle pratiche applicazioni si fa riferimento in genere allo smorzamento viscoso, adottando valori delle costanti di proporzionalità equivalenti, nel senso che l'energia mediamente dissipata dalle forze viscosi, risulta eguale a quella complessivamente dissipata dalle azioni smorzanti. Si ottiene così una notevole semplificazione degli sviluppi analitici, sacrificando solo dal punto di vista concettuale la qualità dell'impostazione.

Si consideri quindi il sistema di Fig. 18, dove gli smorzatori viscosi sono rappresentati con stantuffi scorrevoli in cilindri.

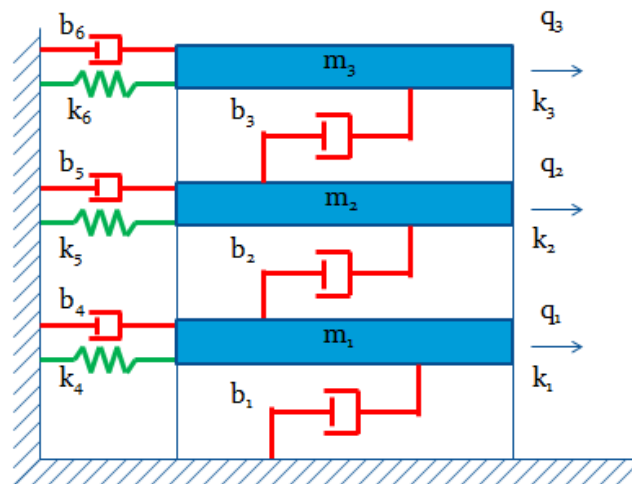


Fig. 18 Schema di sistema a 3 gradi di libertà in presenza di smorzamento

È un sistema del tutto analogo a quello dei tre carrellini già analizzato sia con gli spostamenti assoluti sia con gli spostamenti relativi. Considerando gli spostamenti assoluti abbiamo ancora:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\}$$

avendo posto:

$$[A] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 + b_4 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 + b_5 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 + b_6 \end{bmatrix} \quad \text{matrice degli smorzamenti}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_4 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + k_5 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_6 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle rigidezze}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{rispettivamente vettore degli spostamenti; delle velocità;}$$

Noti i modi di vibrare del sistema in assenza di smorzamento ed ordinati nella matrice $[X]$, possono sostituirsi le coordinate principali nell'equazione del moto ed ottenere:

$$[A][X]\{\ddot{p}\} + [B][X]\{\dot{p}\} + [C][X]\{p\} = \{0\}$$

e premoltiplicando per $[X]^T$, ottenere:

$$[L]\{\ddot{p}\} + [M]\{\dot{p}\} + [N]\{p\} = \{0\}$$

Già sappiamo che la matrice $[L]$ e la matrice $[N]$ sono diagonali, mentre $[M]$ non è detto che lo sia. La matrice $[M]$ dipende essenzialmente dalla matrice degli smorzamenti $[B]$.

Se la matrice $[B]$ la si definisce proporzionale ad $[A]$ e ad $[C]$:

$$[B] = 2\alpha[C] + 2\beta[A]$$

la matrice $[M]$ risulta diagonale essendo per il suo generico elemento:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ b_i^* & i = j \end{cases} \quad \text{se}$$

$$b_i^* = 2\alpha k_i^* + 2\beta m_i^*$$

e il sistema delle equazioni del moto vengono a disaccoppiarsi e la generica equazione si scrive:

$$m_i^* \ddot{p}_i + b_i^* \dot{p}_i + k_i^* p_i = 0$$

dividendo per m_i^* , otteniamo:

$$\ddot{p}_i + 2\nu_i^* \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0$$

avendo posto:

$$v_i^* = \alpha\omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}$$

L'equazione del moto precedente coincide con l'equazione di un oscillatore semplice con smorzamento relativo v_i^* . La sua soluzione già trovata precedentemente è:

$$p_i(t) = e^{-v_i^*\omega_i t} (A_i \sin \Omega_i t + B_i \cos \Omega_i t)$$

avendo posto:

$$\Omega_i = \omega_i \sqrt{1 - v_i^{*2}}$$

Si può pertanto concludere che, nell'ipotesi di smorzamento proporzionale, i modi di vibrare calcolati in assenza di smorzamento conservano validità per quel che riguarda la forma delle deformate, anche le frequenze del sistema non smorzato sono uguali a quelle del sistema smorzato. Per quanto si attiene alla variabilità del tempo, come risulta dalla soluzione $p_i(t)$ essa è governata dalla funzione armonica smorzata dell'esponenziale $e^{-v_i^*\omega_i t}$.

Il coefficiente v_i^* rappresenta lo smorzamento relativo del modo i-esimo, cioè il rapporto tra la costante di smorzamento b_i^* e lo smorzamento critico $2\sqrt{m_i^* k_i^*}$, infatti velocemente attraverso alcuni passaggi analitici, ritorniamo alla formula analitica precedente:

$$\frac{b_i^*}{2\sqrt{m_i^* k_i^*}} = \frac{2\alpha k_i^* + 2\beta m_i^*}{2\sqrt{m_i^* \frac{k_i^*}{m_i^*} m_i^*}} = \frac{2\alpha k_i^* + 2\beta m_i^*}{2\omega_i m_i^*} = \alpha\omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}$$

Lo smorzamento del modo i-esimo, con le ipotesi formulate sulla matrice degli smorzamenti $[B]$, viene a dipendere dalla frequenza non smorzata ω_i . Come è possibile notare dalla formula dello smorzamento relativo $v_i^* = \alpha\omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}$ per $\beta = 0$ ($[B] = 2\alpha[C]$) lo smorzamento dei diversi modi di vibrare aumenta proporzionalmente alla frequenza $v_i^* = \alpha\omega_i$ mentre per $\alpha = 0$ ($[B] = 2\beta[A]$) lo smorzamento dei diversi modi di vibrare diminuisce proporzionalmente alla frequenza $v_i^* = \frac{\beta}{\omega_i}$.

Per la determinazione delle costanti α e β è necessario risolvere un sistema di due equazioni con le quali si pone uno smorzamento assegnato a due modi del sistema; indicando con v_i^* e v_j^* i valori assegnati agli smorzamenti dei modi i e j rispettivamente, si può scrivere:

$$\begin{cases} v_i^* = \alpha \omega_i + \frac{\beta}{\omega_i} \\ v_j^* = \alpha \omega_j + \frac{\beta}{\omega_j} \end{cases}$$

da cui, risolvendo:

$$\alpha = \frac{v_j \omega_j - v_i \omega_i}{\omega_j^2 - \omega_i^2}$$

$$\beta = \frac{v_j \omega_i - v_i \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \omega_i \omega_j$$

Risultano così fissati gli smorzamenti degli altri N-2 modi del sistema.

Inoltre, nel caso generale di oscillazioni libere, il vettore degli spostamenti $\{q\}$, ricordando che

$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X]\{p\}$, è uguale a:

$$\{q\} = [X]\{p\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} e^{-v_i^* \omega_i t} (A_i \sin \Omega_i t + B_i \cos \Omega_i t)$$

2.2.5 Oscillazioni prodotte da forze pulsanti in fase fra loro

Consideriamo dapprima il caso di smorzamento nullo.

Le equazioni del moto sono:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\} \sin \bar{\omega} t$$

dove $\{F\}$ è un vettore costante pari a:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

L'integrale dell'omogenea associata è già stato calcolato ed è uguale a:

$$\{q\}_0 = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)$$

Per quanto riguarda l'integrale particolare, posto:

$$\{q\}_1 = \{X\} \sin \bar{\omega} t$$

dove $\{X\}$ è il vettore incognito, si ha:

$$\{\ddot{q}\}_1 = -\omega^2 \{X\} \sin \bar{\omega} t$$

e quindi, sostituendo, risulta:

$$-[A]\omega^2 \{X\} + [C]\{X\} = \{F\}$$

da cui:

$$\{X\} = (-\omega^2[A] + [C])^{-1} \{F\}$$

L'ultima equazione insieme alla $\{q\}_1 = \{X\} \sin \bar{\omega} t$ definisce l'integrale particolare valido solo se $\bar{\omega} \neq \omega_i$. Se infatti la pulsazione delle forze applicate coincide con una delle pulsazioni proprie del sistema, la matrice $-\omega^2[A] + [C]$ è singolare di modo che non è possibile la sua inversione: è questo il caso di risonanza matematica. Mentre le oscillazioni risultano governate dalla relazione:

$$\{q\} = \{q\}_0 + \{q\}_1 = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) + (-\omega^2[A] + [C])^{-1} \{F\} \sin \bar{\omega} t$$

dove come al solito le 2N costanti $A_1, B_1, \dots, A_N, B_N$ dipendono dalle condizioni iniziali.

Nel caso di smorzamento diverso da zero, sempre che le equazioni del moto risultino

disaccoppiabili, può applicarsi la trasformazione $\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X]\{p\}$, premoltiplicare tutti i

termini con $[X]^T$ e ottenere come termine noto:

$$\{F^*\} \sin \bar{\omega} t = [X]^T \{F\} \sin \bar{\omega} t$$

dove l'elemento i-esimo del vettore $\{F^*\}$ vale:

$$f_i^* = \{\Psi^{(i)}\}^T \{F\}$$

La generica equazione che si ottiene dal disaccoppiamento delle equazioni, assume la forma:

$$m_i \ddot{p}_i + b_i \dot{p}_i + k_i p_i = f_i^* \sin \bar{\omega} t$$

L'equazione è analoga a quella di un oscillatore armonico soggetto a forza pulsante in presenza di smorzamento dal quale possiamo riprendere l'integrale particolare:

$$p_i = p_{st,i} N_i \sin(\bar{\omega} t - \varphi_i)$$

avendo indicato con

$$p_{st,i} = \frac{f_i^*}{k_i^*} \quad \text{lo spostamento statico}$$

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\nu_i^* \beta_i^2)}} \quad \text{il fattore di amplificazione}$$

ed essendo:

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{2\nu_i^* \beta_i}{1 - \beta_i^2}\right)$$

$$\text{con } \nu_i^* = \frac{b_i^*}{2\sqrt{k_i^* m_i^*}} \text{ e } \beta_i = \frac{\bar{\omega}}{\omega_i}$$

La soluzione completa, nel caso di oscillazioni smorzate prodotte da forze pulsanti in fase fra loro, è pertanto:

$$\{q\} = \{q\}_0 + \{q\}_1 = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} [p_{0i} + p_{1i}] = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} \left[e^{-\nu_i^* \omega_i t} (A_i \sin \Omega_i t + B_i \cos \Omega_i t) + p_{st,i} N_i \sin(\bar{\omega} t - \varphi_i) \right]$$

il termine $\sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} \left[e^{-\nu_i^* \omega_i t} (A_i \sin \Omega_i t + B_i \cos \Omega_i t) \right]$ rappresenta il transitorio iniziale, in quanto il suo

contributo alla deformata complessive del sistema, risulta evanescente dopo un certo numero di cicli e la soluzione diventa in pratica stazionaria e governata dal solo integrale particolare:

$$\{q\}_1 = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_{1i} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_{st,i} N_i \sin(\bar{\omega} t - \varphi_i)$$

E interessante osservare che la soluzione qui ritrovata è valida anche in caso di spostamento variabile con legge sinusoidale impresso alla base del sistema. Sia $y(t) = y \sin \bar{\omega} t$ lo spostamento impresso: le accelerazioni totali cui sono sottoposte le masse risultano in tal caso pari a:

$$\{\ddot{q}\} + \{I\}\ddot{y}$$

di modo che le equazioni del moto si scrivono:

$$[A]\{\ddot{q}\} + \{I\}\ddot{y} + [C]\{q\} = \{0\}$$

ovvero:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \bar{\omega}^2 [A]\{I\} y \sin \bar{\omega} t$$

Tale equazione coincide con l'equazione $[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\} \sin \bar{\omega} t$ se al vettore $\{F\}$ si sostituisce il vettore $\bar{\omega}^2 [A]\{I\}$, queste ultime forze fittizie, prendono il nome di forze di trascinamento in quanto derivano dall'accelerazione del moto di base sulle masse della struttura, supposta rigida. E importante sottolineare che la forza $\{F\}$ può essere sempre definita come prodotto tra la velocità angolare al quadrato e lo spostamento $\bar{\omega}^2 [A]\{I\}$. Esprimendolo la forza con tale formula, attraverso alcuni passaggi analitici è possibile definire un'importante parametro per le analisi dinamiche, il coefficiente di partecipazione modale.

Consideriamo l'equazione del moto scritta per sistemi per i quali abbiamo applicato alla base uno spostamento sinusoidale e aggiungiamo lo smorzamento (sottolineiamo ancora che una qualunque forza può essere espressa come prodotto tra la velocità angolare al quadrato e lo spostamento),

abbiamo:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [I]\ddot{y} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\}$$

da cui:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \bar{\omega}^2 [A]\{I\}y \sin \bar{\omega}t$$

utilizziamo le coordinate principali e premoltiplichiamo per la matrice di trasformazione $[X]^T$, otteniamo:

$$[L]\{\ddot{p}\} + [M]\{\dot{p}\} + [N]\{p\} = [X]^T [A]\{I\}\bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega}t$$

la generica equazione equivale a:

$$m_i^* \ddot{p}_i + b_i^* \dot{p}_i + k_i^* p_i = \{\Psi^{(i)}\}^T [A]\{I\}\bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega}t$$

dividendo per m_i^* , otteniamo:

$$\ddot{p}_i + 2\nu_i^* \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = g_i \bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega}t$$

Il coefficiente g prende il nome di coefficiente di partecipazione modale del modo i -esimo ed è definito dalla relazione:

$$g_i = \frac{\{\Psi^{(i)}\}^T [A]\{I\}}{m_i^*} = \frac{\{\Psi^{(i)}\}^T [A]\{I\}}{\{\Psi^{(i)}\}^T [A]\{\Psi^{(i)}\}} = \frac{\sum_j m_j \Psi_i^j}{\sum_j m_j \Psi_i^{j^2}}$$

rappresenta il contributo del modo i -esimo di vibrare sul movimento dell' i -esimo grado di libertà.

Definiamo anche:

$$[G] = \frac{[X]^T [A]\{I\}}{[X]^T [A][X]^T}$$

matrice contenente tutti i coefficienti di partecipazione modale.

Se i vettori $\{\Psi^{(i)}\}$ dei modi di vibrare sono normalizzati, i coefficienti g_i diminuiscono all'aumentare di i per cui solo le prime delle $\ddot{p}_i + 2\nu_i^* \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = g_i \bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega}t$ hanno termine noto significativo e maggior peso nella risposta. Ciò quindi indica che nell'utilizzare l'equazione

$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X]\{p\}$ per conoscere gli spostamenti, si può arrestare la sommatoria ai primi soli

termini, in quanto i modi superiori contribuiscono alla deformata complessive del sistema in maniera del tutto trascurabile. Note quindi le funzioni $p_i(t)$ più significative dalla soluzione

$\ddot{p}_i + 2\nu_i^* \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = g_i \bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega}t$ è possibile, dalla relazione:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X]\{p\}$$

ricavare la deformata $\{q\}$ e risalire alle sollecitazioni in tutti gli elementi della struttura.

Analoghe considerazioni possono eseguirsi anche con oscillazioni prodotte da forze variabili nel tempo con legge qualsiasi, infatti nell'equazione $\ddot{p}_i + 2\nu_i^* \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i = g_i \bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega} t$, il prodotto $\bar{\omega}^2 y \sin \bar{\omega} t$ può essere sostituito da una generica funzione tempo $\ddot{s}(t)$ e la soluzione p_i definita dall'integrale di Duhamel, dove abbiamo lasciato l'accelerazione nell'integrale e abbiamo portato fuori dall'integrale la massa, come già osservato in precedenza, definisce:

$$p_i(t) = \frac{g_i}{\Omega} \int_0^t \ddot{s}(t_1) e^{-\nu \omega (t-t_1)} \sin \Omega(t-t_1) dt_1.$$

2.2.6 Massa partecipante

La formula analitica della massa partecipante spesso viene evidenziata quando si cercano le forze agenti sulla struttura. Consideriamo che, risolvendo il sistema di equazioni del moto disaccoppiate:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\}$$

riusciamo a calcolare gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni delle masse costituenti il sistema a più gradi di libertà, ma spesso l'interesse di un'analisi dinamica ricade sulle forze in gioco per poter operare le verifiche sulla struttura.

Le forze elastiche sono definite come:

$$\{F_{el}\} = [C]\{q\}$$

sostituendo le coordinate principali, abbiamo:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N \{\Psi^{(i)}\} p_i = [X]\{p\}$$

da cui:

$$\{F_{el}\} = [C][X]\{p\}$$

sappiamo anche che:

$$(-\omega_i^2 [A] + [C])\{\Psi^{(i)}\} = 0$$

da cui:

$$[C]\{\Psi^{(i)}\} = \omega_i^2 [A]\{\Psi^{(i)}\}$$

considerando tutti i gradi di libertà e sostituendo nell'equazione delle forze elastiche, abbiamo:

$$\{F_{el}\} = [\Omega][A][X]\{p\}$$

trasformando la $\{p\}$ attraverso il coefficiente di partecipazione modale, abbiamo:

$$\{p\} = [G]\{\dot{s}\}$$

e ricordando che $[A] = [A]^T$ e definendo $[\tilde{M}]$ come matrice delle masse modali, otteniamo:

$$\{F_{el}\} = [\Omega][A][X] \frac{[X]^T [A] \{I\}}{[X]^T [A][X]} = [X]^T [A]^T \frac{[X]^T [A] \{I\}}{[X]^T [A][X]} [\Omega] = \frac{([X]^T [A]^T)^2}{[X]^T [A][X]} [\Omega] = [G]^2 [\tilde{M}] [\Omega]$$

Quindi la massa coinvolta nelle forze elastiche, così come per le forze d'inerzia e per le forze smorzanti è data dal fattore che moltiplica la matrice delle velocità angolari $[\Omega]$, ossia il rapporto

$$\frac{([X]^T [A]^T)^2}{[X]^T [A][X]},$$

che è esprimibile come il prodotto della matrice dei coefficienti di partecipazione al

quadrato e la matrice delle masse modali.

2.3 SISTEMI CONTINUI DISCRETIZZATI-INTRODUZIONE AL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

I recenti sviluppi delle tecnologie strutturali in questi ultimi decenni hanno determinato un continuo affinamento dei procedimenti di calcolo delle strutture [4]. In particolare nel campo delle applicazioni aerospaziali, l'impiego di strumenti di calcolo sofisticati e potenti nello stesso tempo, si è rivelato determinante non solo al fine di ridurre i pesi ma anche per la necessità di valutare le interazioni fra le forze elastiche, dinamiche, aerodinamiche e termiche.

L'algebra matriciale ha trovato largo sviluppo per la sua particolare adattabilità al calcolatore elettronico rendendo così possibile lo studio di grossi sistemi strutturali ovvero di sistemi complessi.

L'uso del calcolatore non è tuttavia limitato alla soluzione di grossi sistemi di equazioni bensì consente di conoscere in dettaglio lo stato tensionale e deformativo delle strutture più complesse partendo da una descrizione dettagliata del modello di calcolo [5].

I metodi matriciali si basano sulla sostituzione della struttura reale continua con un numero elevato di elementi strutturali di dimensioni finite di cui sono note le caratteristiche elastiche ed inerziali, espresse attraverso apposite matrici. Queste ultime, per ciascun elemento, sono calcolate usando la teoria dei mezzi elastici continui mentre l'esame dell'intera struttura è reso possibile dall'assemblaggio dei singoli elementi strutturali.

Con tali ipotesi il modello presenta un numero finito di gradi di libertà.

2.3.1 Equazioni del moto per un sistema continuo discretizzato

Si consideri un corpo elastico sotto l'azione di carichi dinamici variabili nel tempo che, per semplicità si suppongono costituiti da forze e coppie concentrate in un numero finito di punti N (Fig. 19).

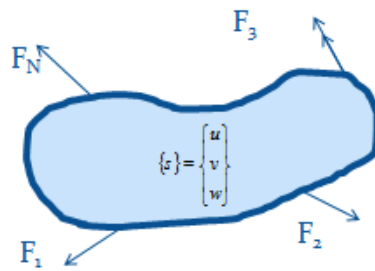


Fig. 19 Corpo elastico sotto l'azione di carichi dinamici variabili nel tempo

E possibile ad ogni istante di tempo apportare al vettore:

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix}$$

che individua la configurazione deformata del corpo, una variazione virtuale $\delta\{s\}$, cioè una variazione arbitraria, infinitesima e compatibile con le condizioni di vincolo.

Si produrranno così, nel corpo elastico, deformazioni virtuali compatibili $\delta\{\varepsilon\}$ che daranno luogo ad una variazione virtuale δU_i dell'energia potenziale interna. Il lavoro delle forze esterne corrispondente alla variazione virtuale $\delta\{s\}$ comprenderà non solo quello delle forze esterne applicate δW_e ma anche quello delle forze d'inerzia distribuite nel corpo.

Il principio dei lavori virtuali si scrive quindi:

$$\delta U_i = \delta W_e - \int_V \delta\{s\}^T \{\ddot{s}\} \rho dV$$

dove l'integrale è esteso all'intero volume V del corpo, di cui ρ indica la densità.

La variazione dell'energia potenziale interna può ottenersi dalla relazione:

$$\delta U_i = \int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

dove lo stato tensionale presente nel corpo è fornito dal vettore $\{\sigma\}$.

Per quel che riguarda il lavoro delle forze esterne, indicando con q_i la componente dello spostamento del punto di applicazione della forza F_i nella direzione della forza, si ha:

$$\delta W_e = \delta\{q\}^T \{F\} = \sum \delta q_i F_i$$

dove il vettore $\{q\}$ raccoglie le componenti q_i in numero pari a quelle delle forze applicate. La variazione virtuale $\delta\{q\}$ dipende ovviamente dalla variazione virtuale $\delta\{s\}$ assegnata. Il principio dei lavori virtuali può scriversi come:

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \delta\{q\}^T \{F\} - \int_V \delta\{s\}^T \{\ddot{s}\} \rho dV$$

Nell'ultima equazione figurano le variazioni infinitesime $\delta\{q\}$ in un numero finito di parametri di spostamento; tuttavia il problema dell'equilibrio dinamico non risulta ancora discretizzato in quanto è ancora presente la variazione $\delta\{s\}$ delle funzioni spostamento $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$.

La discretizzazione dell'ultima equazione è però possibile se si ammette che il vettore $\delta\{s\}$ sia esprimibile con una trasformazione del vettore $\delta\{q\}$, funzione del tempo, mediante una matrice $[a]$, funzione delle coordinate geometriche x, y, z [6].

Ponendo quindi:

$$\{s(x, y, z, t)\} = [a(x, y, z)]\{q(t)\}$$

è possibile esprimere la variazione $\delta\{s\}$ attraverso le variazioni $\delta\{q\}$ essendo:

$$\delta\{s\} = [a]\delta\{q\}$$

$$\delta\{\ddot{s}\} = [a]\delta\{\ddot{q}\}$$

allora anche le deformazioni ε possono esprimersi mediante gli N parametri dello spostamento $\{q\}$; si ha infatti, ricordando da Scienza delle Costruzioni il legame tra le deformazioni e gli spostamenti attraverso le derivate parziali rispetto a x, y, z :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{s\} = [D][a]\{q\} = [b]\{q\}$$

dove $[D]$ è l'operatore di derivazione, contenenti le derivate parziali, e avendo posto $[b] = [D][a]$.

Si ha così:

$$\delta\{\varepsilon\} = [b]\delta\{q\}$$

Andando a sostituire le ultime due posizioni nel principio dei lavori virtuali e ricordando che $\{\sigma\} = [K]\{\varepsilon\}$, abbiamo:

$$\int_V \delta\{q\}^T [b]^T [K][b]\{q\}dV = \delta\{q\}^T \{F\} - \int_V \delta\{q\}^T [a]^T [a]\{\ddot{q}\}\rho dV$$

ovvero, attesa l'arbitrarietà della variazione $\delta\{q\}$:

$$\int_V [b]^T [K][b]\{q\}dV = \{F\} - \int_V [a]^T [a]\{\ddot{q}\}\rho dV$$

Tale equazione può essere riscritta nella forma usuale dell'equazioni del moto per sistemi discreti:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \{F\}$$

ove si è posto:

$$[A] = \int_V [a]^T [a]\{\ddot{q}\}\rho dV$$

e

$$[C] = \int_V [b]^T [K][b]\{q\}dV$$

La matrice $[A]$ rappresenta la matrice delle masse del sistema discreto equivalente mentre la matrice $[C]$ è la matrice delle rigidezze.

Entrambe dipendono ovviamente dal sistema di parametri discreti $\{q\}$ assunto nel passare dal continuo al discreto.

Il caso statico rientra come caso particolare, per il quale l'equazione diventa:

$$[C]\{q\} = \{F\}$$

Occorre tuttavia precisare che la posizione $\{s(x, y, z, t)\} = [a(x, y, z)]\{q(t)\}$, valida solo nel caso di piccoli spostamenti, non consente di risolvere il problema in via rigorosa se non in casi particolari. Solo quando la distribuzione delle tensioni all'interno del corpo è di natura statica e se il collegamento con la struttura circostante si realizza attraverso un numero finito di punti essa è applicabile a rigore. Solo in queste condizioni, infatti, gli spostamenti u, v, w sono univocamente definiti dal vettore $\{q\}$ di modo che la matrice $[a]$ è univocamente determinata. Per elementi collegati agli altri con continuità la matrice $[a]$ non è unica e dipende dalle ipotesi che possono formularsi circa l'andamento delle tensioni, ovvero degli spostamenti, all'interno del corpo. Per problemi di dinamica, quando la distribuzione delle tensioni varia nel tempo con velocità finita la formulazione esatta della matrice $[a]$ è di scarsa utilità per le pratiche applicazioni, sicché si rende necessario far ricorso ad una forma approssimata.

Per elementi collegati in un numero discreto di punti la matrice $[a]$ viene determinata dalla soluzione del problema statico per assegnati valori degli spostamenti discreti assunti. Per gli elementi collegati con continuità la matrice $[a]$ viene usualmente definita assumendo una

distribuzione di spostamenti; tuttavia essa può essere determinata anche assumendo una distribuzione di tensioni, ma in questo caso è necessario integrare i legami deformazioni-spostamenti.

Riferimenti

- [1] R. Ramasco, "*Dinamica delle strutture*". Cuen, 1993.
- [2] Angelo R. Guido, Lello Della Pietra "*Lezioni di meccanica delle macchine vol.1*" Cuen, 1993.
- [3] J.M. Krodkiewsky "*Mechanical Vibration*" The University of Melbourne 2008.
- [4] G. Belingardi "*Il metodo degli elementi finiti nella progettazione meccanica*". Levrotto&Bella, 1999.
- [5] F. Cesari "*Introduzione al metodo agli elementi finiti*". Pitagora, 1997
- [6] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor "*Finite Element Method: Volume 1, Fifth Edition*" Butterworth Heinemann, 2000

Capitolo 3

Propagazione sonora radiata da componenti strutturali piani

3.1 Onde nei fluidi e nelle strutture solide

I prossimi paragrafi sono incentrati sulle strutture elastiche riconducibili a piastre piane. Nelle strutture di questo tipo una delle dimensioni è molto più piccola delle altre due. Lo spessore è molto più piccolo della larghezza e della lunghezza della struttura. Proprio per tali caratteristiche geometriche, le piastre tendono a vibrare in modo predominante lungo la direzione normale alla superficie [1].

Quando tali strutture sono immerse in un fluido e incominciano a vibrare, comprimono il fluido circostante. Nel fluido la compressione si alterna ad una rarefazione, dando luogo alla propagazione dell'onda sonora.

Al fine di capire il processo di interazione acustica tra strutture elastiche e fluidi è essenziale comprendere la natura dell'onda meccanica.

Un'onda meccanica può essere definita come un fenomeno nel quale una quantità fisica (ad esempio energia o tensioni) si propaga in un mezzo.

L'onda meccanica può essere caratterizzata cinematicamente dagli spostamenti delle particelle del mezzo (nel quale si propaga) intorno alle loro posizioni di equilibrio.

Di seguito esporremo la rappresentazione matematica dell'onda e descriveremo la sua variazione nel tempo e nello spazio.

Semplici variazioni armoniche nel tempo sono descritte matematicamente in una forma più comoda per mezzo della rappresentazione esponenziale complessa.

La rappresentazione esponenziale complessa si basa sul fatto che una semplice variazione armonica di una quantità nel tempo che può essere espressa da:

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

dove A rappresenta l'ampiezza e φ rappresenta la fase,

attraverso la rappresentazione esponenziale complessa può essere espressa come:

$$g(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{B}e^{j\omega t}\}$$

dove \tilde{B} è un numero complesso del tipo $a + ib$ e $\operatorname{Re}\{\}$ è la parte reale del numero complesso.

La possibilità di descrivere la grandezza armonica in tal modo dipende dalla definizione stessa dei fasori. Infatti una volta definita la frequenza (confonderemo il termine frequenza con la velocità angolare ω , ricordando che $\omega = 2\pi f$), la variazione armonica di una quantità nel tempo dipende solo dall'ampiezza e dalla fase, proprio come la rappresentazione del numero complesso in forma polare, ossia del fasore, che dipende solo da ampiezza e fase.

Quindi è possibile rappresentare il fasore sul piano complesso dove le componenti del fasore sull'asse reale ed immaginario rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso espresso in forma algebrica.

Quindi il numero complesso può essere espresso come fasore, ossia in forma polare, dipendente da ampiezza e fase, per la quale $\bar{c} = [A; \alpha]$,

oppure nella forma algebrica costituito da una parte reale e una parte immaginaria per la quale $\bar{c} = a + ib$.

La rappresentazione del fasore nel piano complesso ci suggerisce di poter effettuare una trasformazione dalla forma polare a quella algebrica definendo le componenti sull'asse reale e immaginario del fasore, abbiamo $\bar{c} = A \cos \alpha + i A \sin \alpha$.

Utilizzando la formula di Eulero, che definisce la funzione esponenziale nel piano complesso:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

possiamo scrivere ancora il numero complesso come:

$$\bar{c} = A e^{i\alpha}$$

Tale digressione, di carattere del tutto generale sui numeri complessi permette di chiarire la formula con la quale possiamo descrivere un'onda meccanica:

$$g(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{B}e^{j\omega t}\}$$

Infatti aprendo le variabili definite e considerando anche la parte immaginaria abbiamo che:

$$c(t) = (a + ib)e^{j\omega t} = (a + ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

le componenti reale e immaginaria del numero complesso \tilde{B} (anche definito ampiezza complessa) sono definite come :

$$a = A \cos \varphi \quad ; \quad b = A \sin \varphi \quad ; \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \varphi = \arctan(b/a)$$

da cui, continuando:

$$\begin{aligned} c(t) &= (a + ib)e^{j\omega t} = (a + ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = (A \cos \varphi + i A \sin \varphi)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= A \cos \varphi \cos \omega t + i A \cos \varphi \sin \omega t + i A \sin \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = \\ &= A(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t) + i A(\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t) \end{aligned}$$

e considerando la sola parte reale dalle formule trigonometriche otteniamo la formula sinusoidale di partenza:

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi $g(t)$ può essere rappresentato da un vettore rotante nel piano complesso, ossia da un fasore come illustrato in Fig. 1.

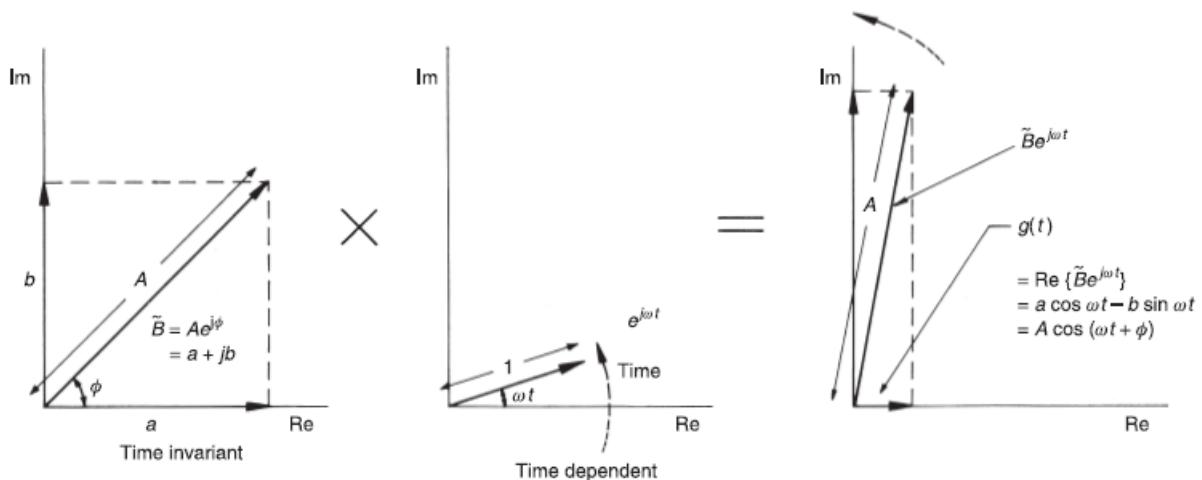


Fig.1 Rappresentazione complessa di $g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

In un'onda che si propaga in una sola dimensione spaziale x , per la quale la velocità di propagazione è indipendente dall'ampiezza dell'onda, un semplice disturbo armonico generato in un punto nello spazio, si propaga sinusoidalmente con una velocità c .

Con la progressione dell'onda, il disturbo in ogni punto nello spazio varia sinusoidalmente nel tempo alla stessa frequenza del disturbo generatore (sorgente), e il mezzo risponde linearmente al disturbo.

Supponiamo di rappresentare il disturbo nel punto di generazione attraverso:

$$g(0,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j\omega t}\}$$

rappresentata dalla Fig.1.

La fase del disturbo in un punto distante x_1 nella direzione di propagazione è sfasato da $x=0$ di un angolo uguale al prodotto della frequenza ω (variazione di fase per unità di tempo, sono radianti al secondo) per il tempo impiegato dal disturbo a viaggiare da x a x_1 . Questo intervallo di tempo è uguale a x_1/c .

Quindi $g(x_1,t)$ può essere rappresentato moltiplicando $\tilde{B}e^{j\omega t}$ per $e^{j\omega x_1/c}$:

$$g(x_1,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x_1/c)}\} = A \cos(\omega t - \omega x_1/c + \varphi)$$

Quello che possiamo osservare dal prodotto $\omega x_1/c$ è che il rapporto ω/c può essere definito come la variazione di fase per unità di distanza, analogamente ad ω che rappresenta la variazione di fase per unità di tempo.

Nella Fig.2 sono mostrati gli effetti combinati delle variazioni di spazio e di tempo in un'onda.

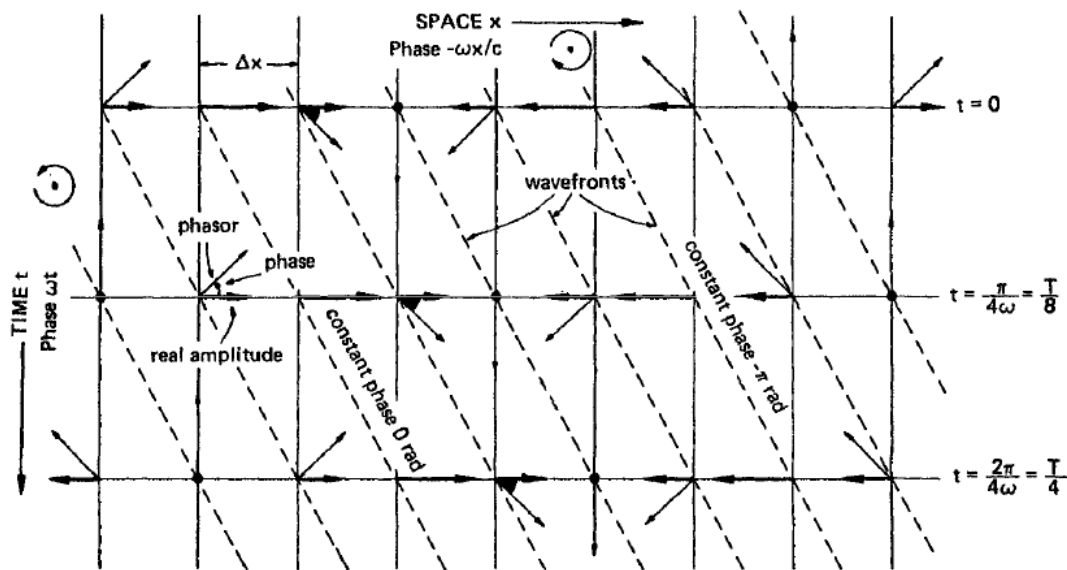


Fig.2 Diagramma del fasore $g(t)$ che descrive il cambio di fase sull'asse del tempo e dello spazio

E possibile notare come a parità di fase φ (linea tratteggiata) se incrementando il tempo t in modo tale che il prodotto ωt assuma un certo valore della fase e incrementando lo spazio in modo tale che il prodotto $\omega x_1/c$ assumo lo stesso valore della fase, otteniamo la stessa fase totale della funzione $g(x_1,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x_1/c)}\} = A \cos(\omega t - \omega x_1/c + \varphi)$.

Facciamo un semplice esempio, consideriamo la linea tratteggiata corrispondente a $\varphi = 0$, otteniamo che la funzione descrivente la variazione spaziale e temporale dell'onda è:

$$g(x,t) = A \cos(\omega t - \omega x/c)$$

Assumiamo che al tempo $t=0$ sia $-\omega x/c = -\pi$, avremo un certo vettore rotante corrispondente a tale equazione $g(x,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x/c)}\} = A\cos(-\pi)$, ora al tempo $t = \frac{\pi}{4\omega}$ avremo che il prodotto

ωt verrà incrementato di $\frac{\pi}{4}$, ma aumentando lo spazio x di modo che il prodotto $-\omega x/c$ venga incrementato di $\frac{\pi}{4}$ continueremo ad ottenere la stessa fase globale dell'onda

$$g(x,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x/c)}\} = A\cos(-\pi) \text{ poiché avremo:}$$

$$g(x,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x/c)}\} = A\cos(\omega t - \omega x/c) = A\cos\left[\frac{\pi}{4} + \left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = A\cos(-\pi).$$

Un'onda armonica semplice che viaggia nella direzione positiva delle x è data da:

$$g^+(x,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t - \omega x/c)}\}$$

mentre l'onda della stessa ampiezza che viaggia nella direzione negativa delle x è data da:

$$g^-(x,t) = \text{Re}\{\tilde{B}e^{j(\omega t + \omega x/c)}\}$$

La velocità di propagazione dell'onda è anche detta velocità di fase dell'onda, un osservatore che si muove nella stessa direzione di propagazione dell'onda, alla stessa velocità, non vede cambio di fase dell'onda.

Il periodo spaziale di un'onda armonica semplice è comunemente detto, lunghezza d'onda λ .

E molto comodo definire le variazioni spaziali attraverso il rapporto tra la variazione della fase e l'unità di distanza, uguale a ω/c .

Questo rapporto è definito "wavenumber" ossia numero d'onda e generalmente si indica con il k .

Una lunghezza d'onda corrisponde ad una variazione di fase di 2π : quindi $\omega\lambda/c = k\lambda = 2\pi$.

Evidenziamo che:

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

Il numero d'onda ha la dimensione del reciproco della lunghezza e l'unità di misura è il reciproco del metro.

Il numero d'onda, in realtà è l'ampiezza di una quantità vettoriale che indica la direzione e anche la variazione della fase spaziale. Tale caratteristica è molto importante per la rappresentazione matematica di onde bi-dimensionali e tri-dimensionali (fino ad ora abbiamo considerato l'onda progressiva in un'unica dimensione spaziale x).

L'analogia tra la frequenza temporale ω e la frequenza spaziale k è descritta in Fig. 3.

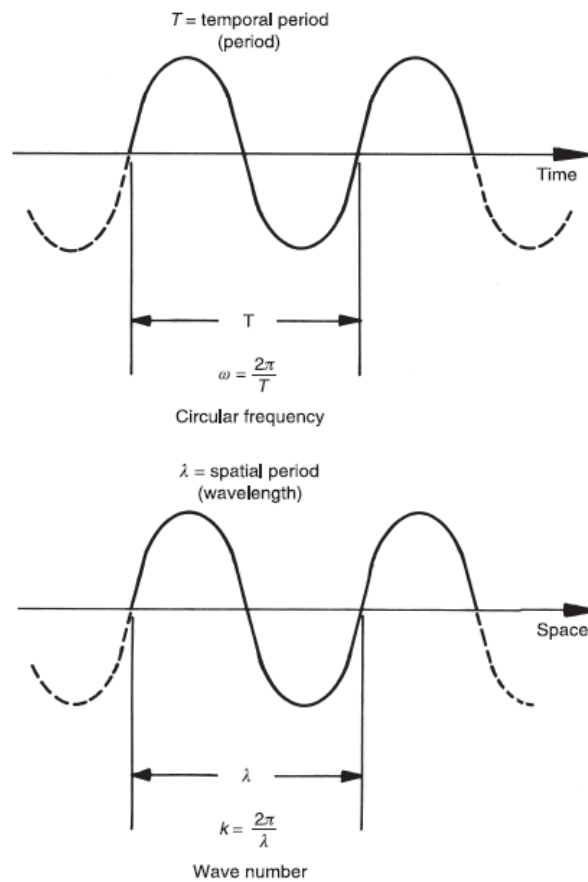


Fig.3 Analogia tra la frequenza temporale ω e la frequenza spaziale k

Ogni variazione spaziale può essere trasformata attraverso un'analisi di Fourier in uno spettro costituito da tante componenti complesse secondo i numeri d'onda, proprio come ogni variazione temporale (un segnale) può essere trasformato attraverso analisi di Fourier in uno spettro costituito da tante componenti complesse in frequenza.

Fino ad ora non è stata fatta nessuna assunzione circa la dipendenza della velocità di fase c dalla frequenza ω . L'equazione $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ indica che questa relazione determina una dipendenza tra la frequenza ω e il numero d'onda k . La relazione tra la frequenza ω e il numero d'onda k è detta dispersione; essa è una proprietà del tipo dell'onda e anche del tipo di mezzo nel quale l'onda si propaga.

Solo se la relazione tra k e ω è lineare, la variazione spaziale dell'onda non sarà soggetta a cambiamenti durante la propagazione: tale cambiamento è definito dispersione.

La Fig.4 mostra l'avanzamento di tre differenti componenti frequenziali di un'onda dispersiva e mostra il processo di dispersione.

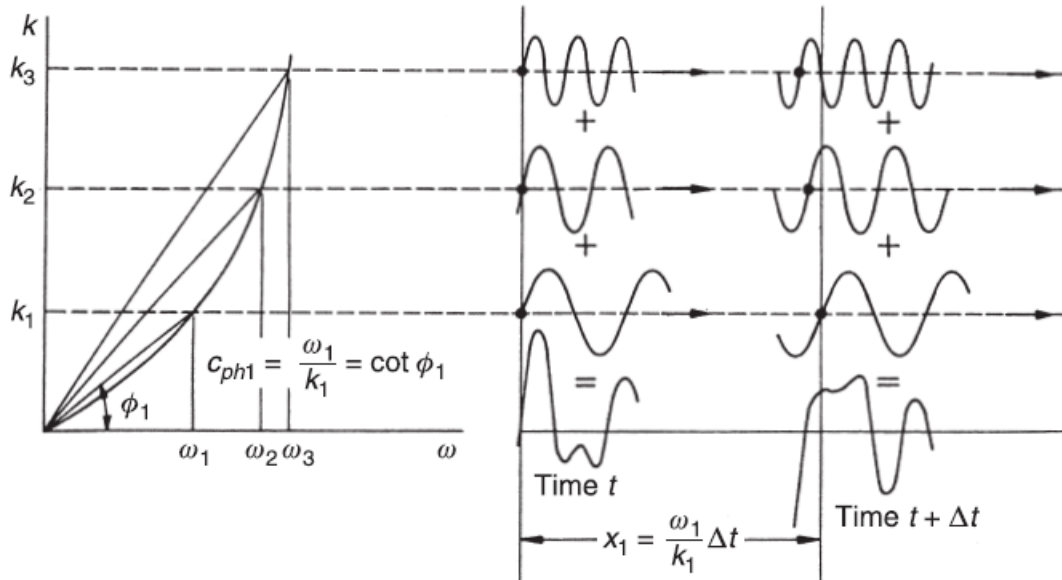


Fig.4 Combinazioni di tre differenti componenti frequenziali di un'onda dispersiva nei successivi istanti di tempo

Ogni disturbo di una durata finita di tempo contiene un'infinità di componenti frequenziali e se trasportato da un processo d'onda dispersiva sarà distorto durante la propagazione.

Successivamente osserveremo che le curve di dispersione possono essere di grande aiuto per comprendere l'interazione tra onde in mezzi accoppiati, perché quando le curve di dispersione di due tipi di onde si intersecano, esse hanno frequenza ω e wavenumber k comuni e quindi comuni lunghezze d'onda λ e velocità di fase c .

Una curva di dispersione dà informazioni anche a proposito della velocità alla quale l'energia è trasportata da un'onda. Tale velocità è chiamata velocità di gruppo c_g , essa è ottenuta dalla curva di dispersione dalla relazione

$$c_g = \partial\omega / \partial k$$

che è la pendenza inversa della curva di dispersione.

E chiaro come dall'equazione $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ e dall'equazione $c_g = \partial\omega / \partial k$ che la velocità di fase e la velocità di gruppo sono uguali solo per onde non dispersive per le quali la velocità di fase c è indipendente da ω . La conoscenza della velocità di gruppo è utile nelle analisi di vibrazione che coinvolgono la considerazione di flusso di energia dell'onda, come nelle analisi dell'assorbimento di onde flessionali in piastre vincolate.

3.2 Onde sonore nei fluidi

L'equazione dell'onda che governa la propagazione di piccoli disturbi attraverso un fluido omogeneo, senza attrito, comprimibile, può essere scritta in coordinate cartesiane (x, y, z) come la variazione di pressione rispetto alla pressione di equilibrio, ossia la "pressione acustica" p ,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

La stessa equazione governa densità, temperatura, spostamenti, velocità e accelerazioni delle particelle nei fluidi: c è indipendente dalla frequenza ed è la velocità del suono data da $c^2 = (\gamma P_0 / \rho_0)$, dove P_0 è la pressione media e ρ_0 è la densità media.

L'equazione dell'onda deriva dall'equazione linearizzata di bilancio dell'equazione di continuità [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

e dall'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

nelle quali u, v, w sono le velocità delle particelle in direzione x, y, z rispettivamente.

Inoltre è assunto che il fenomeno di propagazione di un'onda è un processo adiabatico.

Generalmente per lo studio dell'interazione tra strutture piane e fluidi, si fa riferimento all'equazione dell'onda bi-dimensionale che coinvolge solo variazioni in due direzioni ortogonali.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

ricordiamo che una semplice armonica nel tempo $a(t)$ può essere scritta in generale attraverso il passaggio ai fasori e utilizzando la formula di Eulero come:

$$a(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{A} e^{j(\omega t)} \right\}$$

Sottoliniamo un'altra importante proprietà, tra funzioni sinusoidali e fasori esiste una corrispondenza che non è soltanto biunivoca ma ad una combinazione lineare di grandezze sinusoidali corrisponde la stessa combinazione lineare dei relativi fasori.

Dette $b(t)$ e $c(t)$ due funzioni sinusoidali e considerata una loro combinazione lineare:

$$d(t) = h \cdot b(t) + k \cdot c(t) \text{ con } h \text{ e } k \text{ costanti reali}$$

se $b_c(t)$ e $c_c(t)$ sono i rispettivi vettori complessi rotanti, risulterà non solo,

$$d_c(t) = h \cdot b_c(t) + k \cdot c_c(t)$$

ma anche

$$\tilde{D} = h \cdot \tilde{B} + k \cdot \tilde{C}$$

Da quanto scritto segue che la derivata temporale di un vettore rotante

$$\frac{d}{dt} a_c(t) = j\omega \operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega t + \alpha)}\}$$

essendo un'operazione di combinazione lineare tra vettori rotanti può essere messa in corrispondenza biunivoca con il fasore

$$\frac{d}{dt} a_c(t) = j\omega \tilde{A} \text{ dove una delle due costanti reali della combinazione lineare è nulla}$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} a(t) = j\omega \tilde{A}$$

per cui possiamo scrivere la derivata prima e seconda come:

$$\frac{d}{dt} a(t) = j\omega \tilde{A} \quad ; \quad \frac{d^2}{dt^2} a(t) = j\omega j\omega \tilde{A} = -\omega^2 \tilde{A}$$

Per cui ritornando all'equazione dell'onda possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = -k^2 p$$

Quindi la propagazione di un'onda piana può essere espressa come:

$$p(x, y, t) = \tilde{p} e^{(-jk_x x - jk_y y)} e^{j\omega t}$$

sostituendo tale equazione nell'equazione precedente dell'onda, otteniamo la seguente relazioni tra i numeri d'onda:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

L'interpretazione di questa equazione è che solo certe combinazioni di k_x e k_y soddisferanno l'equazione dell'onda ad una determinata frequenza. La direzione dell'onda è indicata dal vettore d'onda \bar{k} come mostrato in Fig.5.

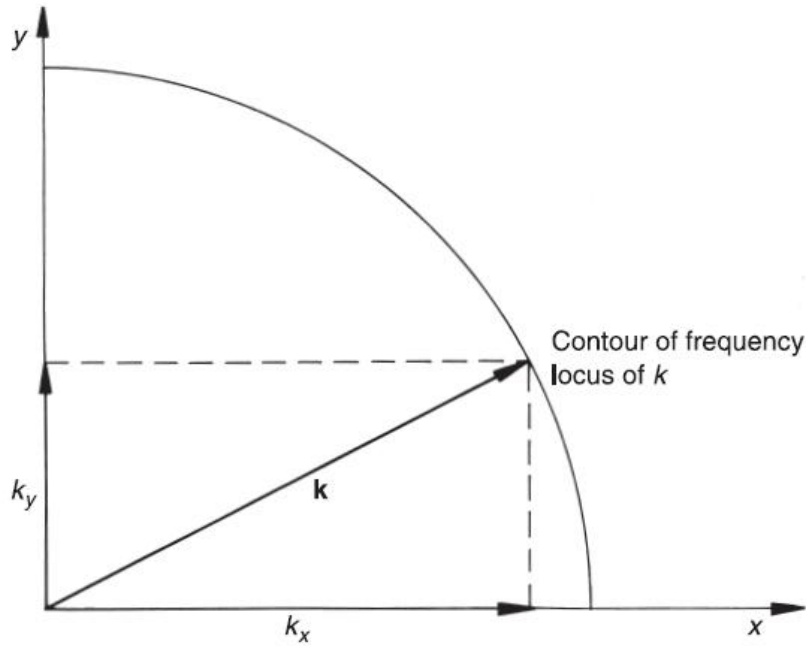


Fig.5 Componenti del vettore d'onda k

Il centro del vettore d'onda \bar{k} per una fissata frequenza ω per valori reali di k_x e k_y è chiaramente il centro della circonferenza di raggio k .

L'importanza delle equazioni linearizzate della quantità di moto nell'analisi di interazione fluido-strutturale è quello di collegare il gradiente di pressione e accelerazione delle particelle.

Quindi la velocità vibrazionale trasversale di una superficie determina il valore sulla superficie del gradiente di pressione nella direzione normale alla superficie, ad esempio dalla relazione:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} = -\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} = -j\omega\rho_0(v)_{y=0}$$

dove la superficie si trova nel piano x, y .

Questa relazione è generalmente usata come condizione al contorno nell'analisi di radiazione sonora e diffusione derivante da superfici vibranti.

Assumendo che il campo sia piano, possiamo scrivere:

$$-jk_y(p)_{y=0} = -j\omega\rho_0(v)_{y=0}$$

$$jk_y(p)_{y=0} = j\omega\rho_0(v)_{y=0}$$

(ricordando che la derivata del primo membro è una derivata rispetto allo spazio da cui $-jk_y$)

da cui:

$$(p/v)_{y=0} = -\omega\rho_0/k_y$$

Questo rapporto ha la dimensione di una impedenza acustica specifica, definita dal rapporto delle ampiezze complesse di pressione e velocità delle particelle ad una singola frequenza.

Una delle applicazioni del concetto di impedenza è la valutazione della potenza sonora irradiata all'interno di un fluido da una superficie vibrante. La potenza sonora media irradiata per unità di area è uguale a:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)v(t)dt$$

Per una singola frequenza, per la quale la velocità vibrazionale normale alla superficie è $v(t) = \tilde{v}e^{j\omega t}$ che produce una pressione acustica locale di $p(t) = \tilde{p}e^{j\omega t}$, potremmo scrivere l'impedenza acustica specifica normale del fluido sulla superficie come $\tilde{z} = \tilde{p}/\tilde{v}$.

Quindi:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{p}\tilde{v}^*) = \frac{1}{2} |\tilde{v}|^2 \operatorname{Re}(\tilde{z}) = \frac{1}{2} |\tilde{p}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$$

dove * indica il complesso coniugato e $|\quad|$ indica l'ampiezza. Questa equazione è valida per tutti i tipi di campi acustici. Per il caso speciale di onde piane radiate, $\tilde{z} = -\omega\rho_0/k_y$.

3.3 Onde flessionali nelle barre

Dei vari tipi di onda che possono propagare nelle barre, nelle travi e nelle piastre, le onde flessionali sono quelle di maggior interesse nel processo di interazione fluido-strutturale alle frequenze udibili. Le ragioni derivano dal fatto che le onde di flessione coinvolgono spostamenti significativi nella direzione trasversale alla direzione di propagazione e che può attivare il fenomeno di propagazione in un fluido circostante.

Nelle deformazioni flessionali di una barra, le sezioni sono traslate in una direzione trasversale rispetto all'asse della barra e sono ruotate rispetto al loro piano di equilibrio, come mostrato in Fig.6.

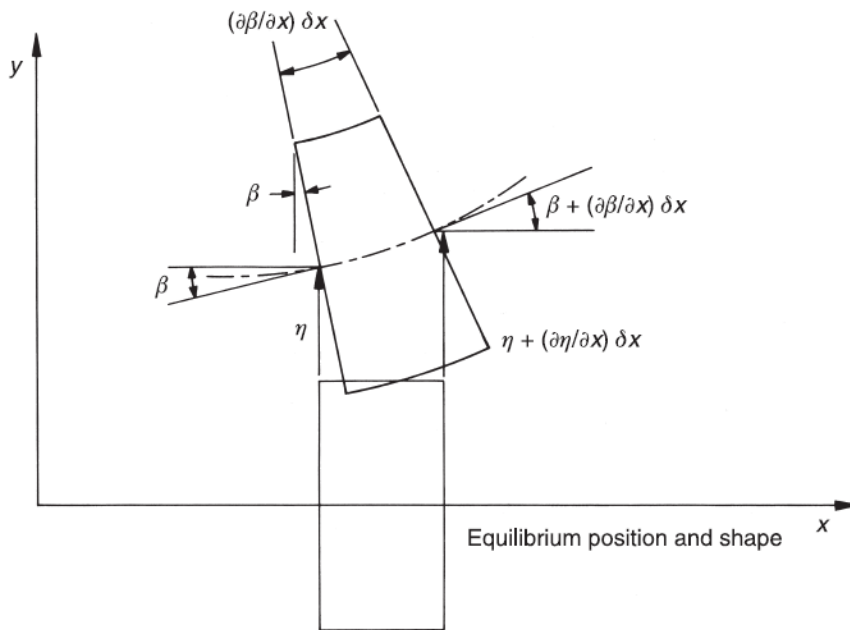


Fig.6 Spostamento e deformazione di un elemento di trave in flessione

Gli spostamenti trasversali η e le rotazioni β sono collegate approssimativamente da:

$$\beta = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

L'assunzione primaria della teoria flessionale è che durante la flessione dell'elemento la sezione rimanga piana. Esaminiamo come questa assunzione sia collegata al movimento dell'onda flessionale. Nella Fig.7 c'è un elemento della barra soggetto ad una flessione sotto l'azione di forze trasversali: notiamo che θ è assunto essere molto piccolo.

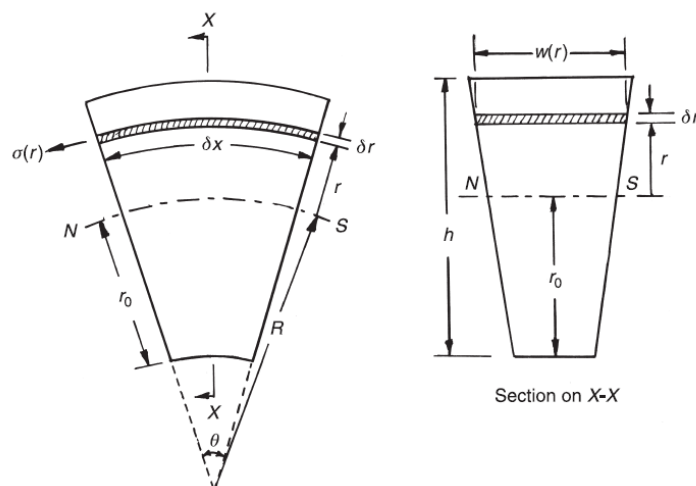


Fig.7 Deformazione flessionale di un elemento di trave

La deformazione longitudinale ε_r e quindi σ_r variano linearmente con r in accordo con l'assunzione che le sezioni rimangano piane a valle della deformazione. Siccome non c'è una componente della forza nella direzione dell'asse della barra, possiamo scrivere:

$$\int_{-r_0}^{h-r_0} \sigma(r)w(r)dr = 0$$

dove $\sigma(r)$ è la tensione longitudinale. Questa equazione indica immediatamente che $\sigma(r)$ deve variare negativamente e positivamente. Osserviamo che la superficie per la quale $\sigma(r)$ è nullo viene chiamata superficie neutrale (quando $r = r_0$). La deformazione longitudinale della superficie neutrale è chiaramente nulla e gli elementi conservano la loro lunghezza originale δx lungo quest'arco. Quindi possiamo scrivere:

$$\varepsilon(r) = \frac{[(R+r)\theta - \delta x]}{\delta x}$$

Ora assumiamo che la relazione tra $\sigma(r)$ e $\varepsilon(r)$ sia la stessa che avviene nelle barre sottili, ossia senza vincoli laterali: $\sigma(r) = E\varepsilon(r)$. Il raggio locale di curvatura R è legato a θ e dalla Fig. 7, all'inclinazione e allo spostamento dell'asse della barra, da cui:

$$\frac{1}{R} = \frac{\theta}{\partial x} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

quindi:

$$\sigma(r) = E\varepsilon(r) = -Er \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

In generale, la curvatura della barra varierà con x , e così varierà $\sigma(r)$.

In una situazione statica la variazione di $\sigma(r)$ nella direzione assiale deve essere bilanciata da altre tensioni così che l'elemento abbia equilibrio longitudinale; Il sistema di forze su una sezione della barra sopra $r = r'$ è mostrato in Fig.8.

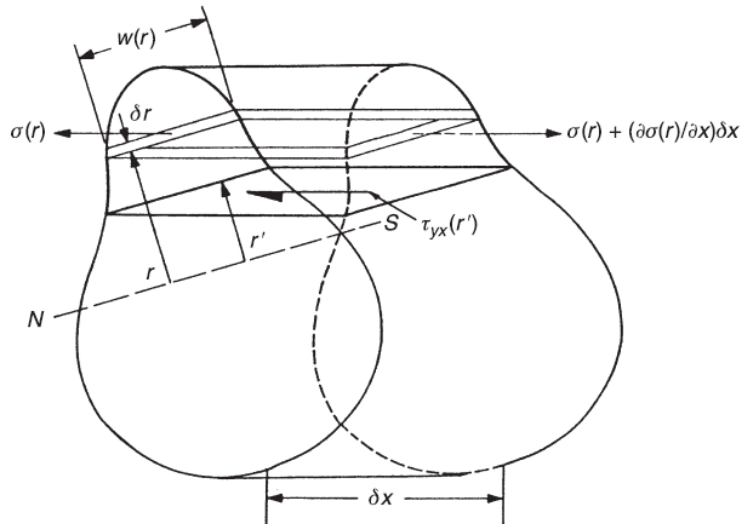


Fig.8 Tensioni su una porzione di elemento di trave

L'equazione di equilibrio è:

$$\tau_{yx}(r')w(r') = \int_{-r_0}^{h-r_0} \frac{\partial \sigma(r)}{\partial x} w(r) dr$$

dalle due equazioni precedenti otteniamo:

$$\tau_{yx}(r') = \frac{E}{w(r')} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \int_{-r_0}^{h-r_0} r w(r) dr$$

L'integrale può solo essere valutato per specifiche variazioni della larghezza della barra $w(r)$ con r .

Per una barra di larghezza uniforme si ha:

$$\tau_{yx}(r') = \frac{E}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - (r')^2 \right]$$

Tale relazione parabolica è valida per barre con larghezza uniforme: comunque la massima tensione di taglio avviene sulla superficie neutrale $r'=0$ in tutti i casi.

E di grande importanza apprezzare il ruolo di queste tensioni di taglio nella direzione opposta alla variazione della tensione longitudinale nelle barre, perché dove la loro azione è distrutta, come nelle barre multi laminate nelle quali l'adesivo fallisce, o dove è possibile creare distorsioni di taglio a causa di un basso modulo di taglio, come in un nucleo di un pannello sandwich, l'assunzione fondamentale che le sezioni dei piani rimangano costanti non è più valida.

La tensione di taglio orizzontale è controbilanciata dalla tensione di taglio verticale di uguale ampiezza, che ha la stessa distribuzione lungo la profondità della barra (Fig.9).

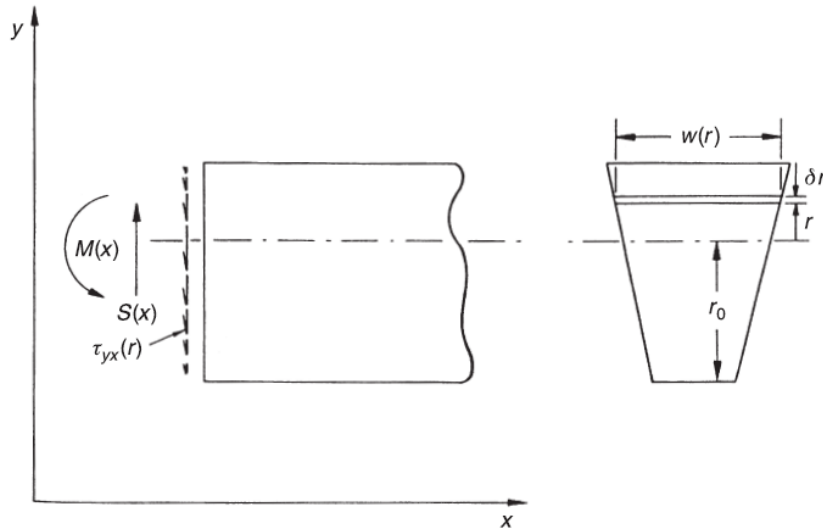


Fig.9 Distribuzione delle tensioni di taglio in una trave in flessione

La forza di taglio totale verticale agente sulla singola sezione è data da:

$$S(x) = - \int_{-r_0}^{h-r_0} \tau_{yx} w(r) dr = E \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \int_{-r_0}^{h-r_0} \left[\frac{1}{w(r')} \int_{-r_0}^{h-r_0} r w(r) dr \right] w(r') dr'$$

L'integrazione per parti conduce a

$$S(x) = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad \text{dove } I = \int_{-r_0}^{h-r_0} w(r) r^2 dr$$

I è il momento di inerzia rispetto allo stesso asse dove agisce il momento flettente. Il momento flettente da analoghi passaggi può essere definito come:

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Ora l'equazione del moto trasversale per un elemento di una barra può essere ricavata osservando la Fig.10 :

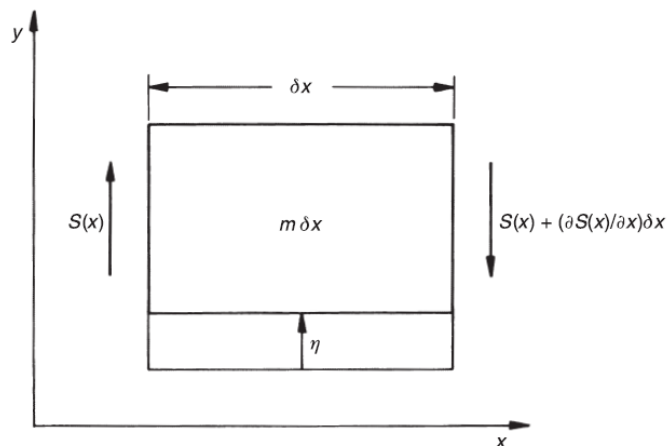


Fig.10 Forze trasversali su di un elemento di trave

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

dove m è la massa per unità di lunghezza della barra. Ricordando che

$$S(x) = EI \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$$

La derivata di S rispetto ad x è uguale a:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}$$

da cui l'equazione del moto è:

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Questa è l'equazione della barra valida quando si trascura il contributo di taglio allo spostamento trasversale.

L'equazione differisce molto dalle equazioni dagli altri tipi di equazioni delle onde nei solidi (onda di taglio, onda longitudinale), siccome la derivata spaziale è di quarto ordine: la ragione è da ricercare nel fatto che l'onda flessionale è un ibrido tra onde di taglio e onde longitudinali.

La sostituzione dell'espressione esponenziale complessa di una semplice armonica d'onda progressiva

$\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{[j(\omega t - kx)]}$, conduce a:

$$EI k^4 = \omega^2 m$$

quindi:

$$k = \pm (\omega^2 m / EI)^{\frac{1}{4}}$$

La soluzione completa è quindi:

$$\eta(x, t) = [\tilde{A} e^{(-jk_b x)} + \tilde{B} e^{(jk_b x)} + \tilde{C} e^{(-k_b x)} + \tilde{D} e^{(k_b x)}] e^{(j\omega t)}$$

dove $k_b = (\omega^2 m / EI)^{\frac{1}{4}}$.

I primi due termini dell'equazione rappresentano onde propaganti nella direzione positiva e negativa

di x , ad una velocità di fase $c_b = \frac{\omega}{k_b} = \omega^{\frac{1}{2}} \left(\frac{EI}{m} \right)^{\frac{1}{4}}$.

I secondi due termini non rappresentano campi di propagazione, le ampiezze decadono con la distanza, le loro velocità di fase sono immaginarie e non trasportano energia. I due secondi termini non possono essere strettamente chiamati onde.

La velocità di fase dei primi due termini è proporzionale a $\omega^{\frac{1}{2}}$; le onde flessionali nelle barre sono dispersive. La velocità di gruppo è uguale a:

$$(c_b)_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2c_b$$

Il fatto che la velocità di fase di onde flessionali varia con la frequenza ha una profonda influenza sul fenomeno dell'accoppiamento fluido-strutturale.

3.4 Curve Dispersive

Nell'analizzare l'accoppiamento tra le onde nei solidi e le onde acustiche nei fluidi è rilevante osservare le caratteristiche del numero d'onda dei sistemi su un unico grafico. Nella Fig.11 ci sono le curve di dispersione.

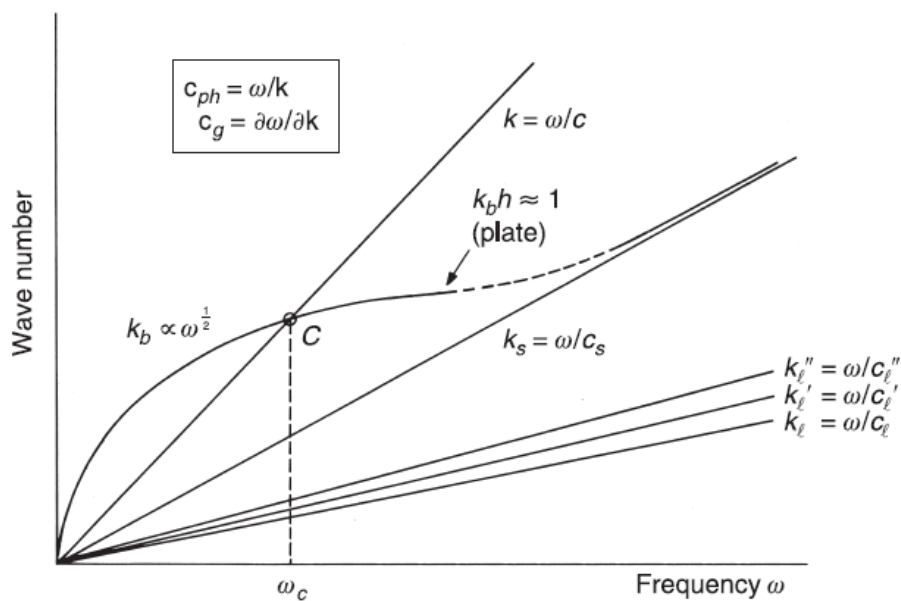


Fig.11 Curve di dispersione di diverse onde

E opportuno ricordare che la velocità di fase è uguale a $c_{ph} = \omega/k$ e la velocità di gruppo è uguale a $c_g = \partial\omega/\partial k$; quindi osservando il grafico abbiamo che la velocità di gruppo è la derivata della curva $c_{ph} = \omega/k$ e quindi è la tangente della curva $c_{ph} = \omega/k$; siccome il grafico ha sull'asse delle y , k e sull'asse delle x , ω e non il contrario, abbiamo che nel grafico la curva con minore pendenza ha una velocità di gruppo più alta.

Il punto C, è il punto per il quale la velocità di fase dell'onda flessionale eguaglia la velocità di fase dell'onda acustica, e la frequenza corrispondente al punto C, ossia ω_c viene detta frequenza critica o la più bassa coincidenza. Alle alte frequenze la curva di dispersione relativa all'onda flessionale tende alla velocità relativa all'onda trasversale di taglio.

L'inclinazione delle varie curve dipende dal tipo di materiale e geometria del mezzo in cui viaggia l'onda.

3.5 L'importanza della radiazione sonora

Gran parte delle sorgenti sonore radiano energia attraverso l'azione di superfici solide vibranti immerse nei fluidi che le circondano. Alcune di queste sorgenti, come il pianoforte, la radio, le campane di una Chiesa sono desiderate; altre come la combustione che avviene in un motore, il colpo delle presse, le ruote di un treno sulle rotaie, sono indesiderate.

Lo studio del suono irradiato da superfici vibranti è di grande importanza pratica. È fondamentale che il progettista di altoparlanti comprenda il fenomeno della radiazione sonora così che possa migliorare la qualità del prodotto. I progettisti di macchine industriali devono adeguarsi alle norme che regolano l'emissione sonora e quindi devono individuare le fonti di generazione sonora relative a tali macchine. E una volta individuate le fonti devono cercare di ridurre gli effetti o eliminarle nel modo più efficace e economico possibile.

L'ingegnere del controllo rumore deve capire la natura e i metodi di controllo della radiazione sonora da parte delle strutture vibranti. Ad esempio il progettista di navi militari o di imbarcazioni per la pesca deve ridurre la radiazione del rumore dalle strutture al fine di minimizzare, rispettivamente, le possibilità di essere individuati o il disturbo della fauna marina.

Sebbene sia possibile affermare che il meccanismo di generazione del suono dovuto a superfici vibranti, che causa le accelerazioni dei fluidi in contatto con la superficie, sia comune a tutte le sorgenti, l'efficacia della radiazione sonora varia notevolmente da sorgente a sorgente relativamente all'ampiezza della vibrazione. Affinché una superficie vibrante irradia suono efficacemente non solo deve essere capace di comprimere e cambiare la densità del fluido con il quale è a contatto, ma deve farlo in maniera tale da produrre significativi cambiamenti di densità nel fluido ad una certa distanza dalla superficie.

Consideriamo un volume di fluido contenuto in un piccolo tubo, chiuso da un lato e dall'altro aderente ad un pistone. Spingendo il pistone verso l'interno cambierà necessariamente il volume e quindi la densità e la pressione del fluido.

Supponiamo ora che l'estremità chiusa del cilindro sia aperta. Quanta compressione avverrà? Intuitivamente saremmo spinti a pensare che la compressione non si verifichi, perché il fluido è libero di uscire dall'apertura, ma la risposta non è corretta. La compressione dipende dall'accelerazione del pistone, perché il fluido ha un'inerzia, una proprietà per la quale esso resiste all'accelerazione e per la quale applica una forza di reazione ad ogni sollecitazione che tenta di accelerarlo.

Più grande è l'accelerazione del pistone, più grande è la compressione iniziale del fluido in contatto con esso.

Quindi sono le accelerazioni normali alla superficie e la distribuzione spaziale di queste ultime che influenzano significativamente l'efficacia della compressione del fluido e, quindi la radiazione sonora. Ora considereremo le caratteristiche fisiche del fenomeno della radiazione sonora derivante dalle superfici piane.

3.6 La Sorgente di Volume

Le superfici vibranti in contatto con i fluidi spostano volume di fluido all'interfaccia. Di conseguenza è ragionevole inizialmente investigare il campo sonoro generato dallo spostamento del volume di fluido prodotto da un piccolo elemento di una superficie vibrante.

Per il principio di sovrapposizione ci si aspetterebbe di essere in grado di costruire il campo sonoro generato dalla somma dei campi sonori prodotti dalle sorgenti elementari distribuite sull'intera superficie. Anche se tale esercizio potrebbe sembrare semplice, generalmente non lo è perché il campo generato da una sorgente elementare dipende dalla geometria dell'intera superficie della quale esso fa parte e dalla presenza di altri corpi nel fluido. Ma ci sono molti casi di importanza pratica per i quali una semplice espressione teorica fornisce risultati affidabili.

È dimostrato (Kinsler et al., 1982) che la pressione generata in un campo libero (senza riflessioni) da una pulsazione uniforme in direzione radiale da parte di una sfera di raggio a è:

$$p(r,t) = \frac{1}{1 + jka} \frac{j\omega\rho_0\tilde{Q}}{4\pi r} \exp\{j[\omega t - k(r - a)]\}$$

dove r è la distanza radiale dal centro della sfera e \tilde{Q} è la velocità di volume della sorgente. La velocità di volume è uguale alla derivata dello spostamento del volume di fluido e se lo spostamento della normale della superficie della sfera è $\xi = \tilde{\xi} \exp(j\omega t)$ abbiamo che $\tilde{Q} = j\omega 4\pi a^2 \tilde{\xi}$.

L'equazione $p(r,t) = \frac{1}{1+jka} \frac{j\omega\rho_0\tilde{Q}}{4\pi r} \exp\{j[\omega t - k(r-a)]\}$ indica che l'accelerazione della superficie

è fondamentale nella determinazione del campo sonoro radiato.

In Fig.12 è mostrata la sorgente sferica

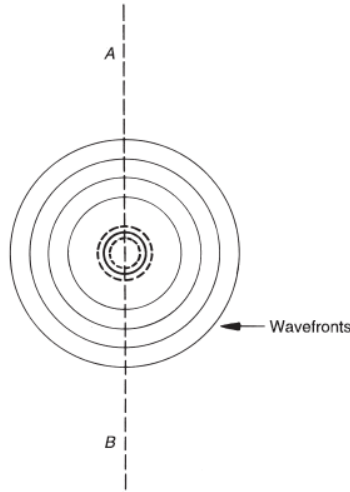


Fig.12 Campo generato da una sorgente sferica

Se la dimensione della sorgente è molto più piccola della lunghezza d'onda, $ka \ll 1$, l'equazione precedente si riduce a:

$$p(r,t) = \frac{j\omega\rho_0\tilde{Q}}{4\pi r} \exp\{j[\omega t - kr]\} \quad (1)$$

Considerando solo il campo sonoro emesso da un lato del piano AB, tale campo potrebbe rappresentare una sorgente di volume elementare relativa ad una superficie piana, rigida e infinita.

Per un osservatore confinato da un lato del piano, la velocità di volume è uguale a $\tilde{Q}/2$, e la pressione è ancora data dall'equazione precedente.

Consideriamo la velocità superficiale normale di una superficie elementare di area δS sia $v_n(t) = \tilde{v}_n \exp(j\omega t)$, quindi $\tilde{Q}/2 = \tilde{v}_n \delta S$, da cui possiamo riscrivere l'equazione della pressione come:

$$p(r,t) = \frac{j\omega\rho_0 2\tilde{v}_n \delta S}{4\pi r} \exp\{j[\omega t - kr]\}$$

Tale equazione può essere applicata alle superfici piane dalla sommatoria o integrazione della sorgente elementare sull'area della superficie. Tale formulazione integrale fu derivata da Lord Rayleight (1896).

$$p(r,t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \exp(j\omega t) \int_S \frac{\tilde{v}_n(r_s) \exp(-jkR)}{R} dS \quad (2)$$

dove r è il vettore posizione del punto di osservazione, r_s è il vettore posizione della superficie elementare dS avente velocità normale $\tilde{v}_n(r_s)$, e R è l'ampiezza del vettore $R = |r - r_s|$

3.7 Il Pistone Baffled

Il modello matematico descrivente il campo sonoro generato da un disco rigido che vibra trasversalmente al proprio piano intorno al quale è presente un schermo rigido è spesso utilizzato per descrivere il campo sonoro generato dagli altoparlanti. Il modello è mostrato in Fig.13.

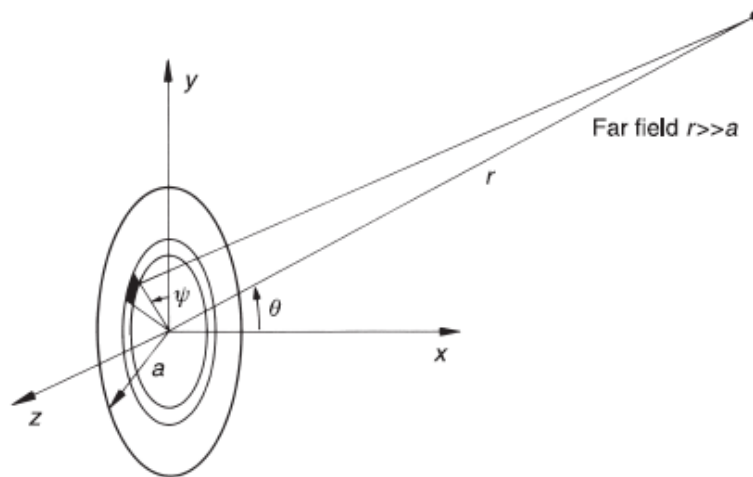


Fig.13 Disco e sistema di coordinate

Per la maggior parte dei problemi di radiazione sonora, è difficile valutare il campo sonoro generato ad una distanza confrontabile con la dimensione caratteristica della sorgente. La difficoltà di valutare l'integrale (2), per distanze confrontabili con la dimensione della sorgente nasce dal fatto che la distanza R tra la sorgente elementare e il punto di osservazione è una funzione piuttosto complicata e dipendente dalle coordinate dei due punti. Mentre se il punto di osservazione si trova ad una distanza grande rispetto dimensione della sorgente sonora, allora la distanza R può essere approssimata ad una costante, cioè ad una distanza media.

Considerando le coordinate del sistema mostrate nella Fig.13, l'integrale diventa:

$$p(r,t) \cong \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_n}{2\pi r} \exp(j\omega t) \int_0^a y dy \int_0^{2\pi} \exp(-jk y \sin\theta \cos\psi) d\psi = \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_n}{r} \exp(j\omega t) \int_0^a J_0(k y \sin\theta) y dy =$$

$$= j\rho_0 c k a^2 \tilde{v}_n \exp(j\omega t) \left[\frac{2J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta} \right] \frac{e^{-jkr}}{2r}$$

Le funzioni J_0 e J_1 sono le funzioni di Bessel del primo tipo e del primo e del secondo ordine (Watson, 1966). Se $ka \rightarrow 0$, $\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \rightarrow \frac{1}{2}$ e il risultato corrisponde (1) con $\tilde{Q} = 2\pi a^2 \tilde{v}_2$. Il termine contenente la funzione di Bessel è un termine di direttività in un campo lontano, che può essere spiegato fisicamente dall'interferenza tra i campi radiati dalle sorgenti elementari distribuite. Brevemente quando $ka \ll 1$, $p(r)$ è strettamente dipendente da θ , e la radiazione è omnidirezionale; quando $ka \gg 1$ il campo sonoro è molto più forte in prossimità degli assi polari, e c'è una piccola radiazione nella direzione laterale.

3.8 Radiazione Sonora da Modi Flessionali di Piastre

Con lo scopo di valutare la radiazione sonora, molte strutture di interesse potrebbero essere modellate sufficientemente accuratamente da piastre piane rettangolari. Per esempio muri e pavimenti di costruzioni, involucri delle macchine nelle fabbriche, involucri delle auto, scafi delle navi. Il pannello rettangolare isolato è un utile punto di partenza per la comprensione del comportamento della radiazione dei modi flessionali, e gli effetti delle complicazioni strutturali possono essere spesso stimati in modo affidabile e accuratamente una volta afferrate le basi fisiche della radiazione modale.

I modi flessionali di pannelli rettangolari sono generalmente costituiti da regioni contigue aventi simile estensione e che variano alternativamente in fase. Tali regioni sono separati da linee nodali che hanno vibrazione nulla. Per una piastra con i bordi incernierati, la vibrazione di velocità normale è:

$$\tilde{v}_n(x, z) = \tilde{v}_{pq} \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi z/b)$$

La radiazione generata da strutture eccitate meccanicamente e leggermente smorzate ($\eta < 5 \times 10^{-2}$) è usualmente associata alla risonanza dei modi intorno alle loro frequenze naturali. È possibile valutare la radiazione di una distribuzione modale ad ogni frequenza ω . L'equazione (2) (l'equazione della pressione per una volume source) diventa:

$$p(x', y', z', t) = \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_{pq}e^{j\omega t}}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\sin(p\pi x/a) \sin(q\pi z/b) e^{-jkR}}{R} dx dz$$

Come già affermato quest'integrale non ammette una soluzione analitica per punti di osservazione arbitrari x', y', z' . Comunque nel campo lontano, dove R è molto più grande della dimensione

della sorgente, Wallace ha prodotto una soluzione analitica, usando le coordinate del sistema mostrato in Fig.14,

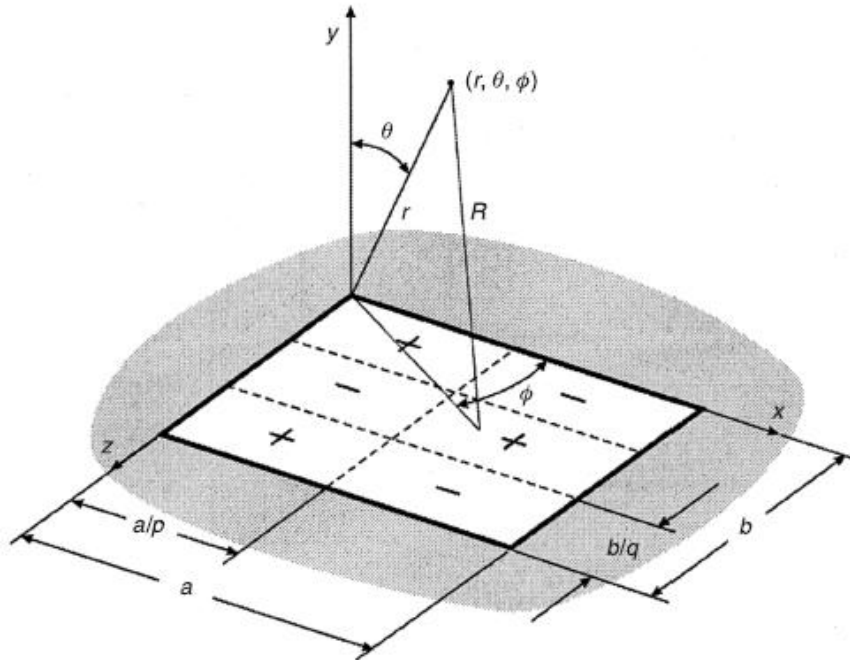


Fig. 14 Sistema di coordinate usato da Wallace e linee nodali di una piastra rettangolare piana

e l'equazione precedente diventa:

$$p(r, \theta, \phi, t) = \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_{pq}e^{-jkr}e^{j\omega t}}{2\pi r} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi z}{b} \times e^{\left[j\left(\frac{\alpha x}{a}\right) + j\left(\frac{\beta y}{b}\right) \right]} dx dy$$

dove $\alpha = k \sin \theta \cos \phi$ e $\beta = k \sin \theta \sin \phi$

Confrontando le ultime due equazioni si può notare che R è connessa ad r , dalla relazione approssimata abbiamo:

$$R \cong r - x \sin \theta \cos \phi - z \sin \theta \sin \phi$$

Se $R \gg a$ e $R \gg b$, questa relazione è sufficientemente accurata per valutare l'integrale dell'equazione:

$$p(x', y', z', t) = \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_{pq}e^{j\omega t}}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\sin(p\pi x/a) \sin(q\pi z/b) e^{-jkR}}{R} dx dz$$

da cui la soluzione dell'equazione

$$p(r, \theta, \phi, t) = \frac{j\omega\rho_0\tilde{v}_{pq}e^{-jkr}e^{j\omega t}}{2\pi r} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi z}{b} \times e^{\left[j\left(\frac{\alpha x}{a}\right) + j\left(\frac{\beta y}{b}\right) \right]} dx dy \text{ è:}$$

$$p(r, \theta, \phi, t) = j\tilde{v}_{pq} k \rho_0 c \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \frac{ab}{pq\pi^2} \left[\frac{(-1)^p e^{-j\alpha} - 1}{(\alpha / p\pi^2)} \right] \left[\frac{(-1)^q e^{-j\beta} - 1}{(\beta / q\pi^2) - 1} \right]$$

Nota che la distanza dipende di \tilde{p} è caratteristica del campo lontano: $\tilde{p} \propto (1/r)e^{-jkr}$

3.9 Radiazione sonora da onde flessionali nelle piastre

Riconsideriamo la radiazione dai modi di pannello da un altro punto di vista. La vibrazione modale di strutture leggermente smorzate nasce da interferenze costruttive tra le onde viaggianti sulla struttura, che sono moltiplicate dalla riflessione dei contorni strutturali o dalle discontinuità, per formare schemi di vibrazione stazionari, ossia i modi. Perciò è naturale indagare sulla natura della radiazione sonora attraverso le onde trasversali che viaggiano lungo l'interfaccia fluido strutturale.

Incominciamo con un problema bi-dimensionale illustrato in Fig. 15.

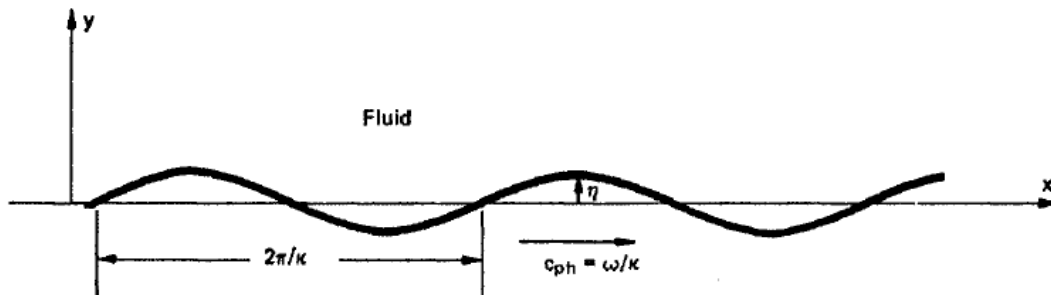


Fig.15 Onda trasversale in una piastra in contatto con un fluido

Un piastra infinita uniforme è in contatto con un fluido che esiste in un semi spazio infinito $y > 0$. Un'onda trasversale piana ad una frequenza ω e numero d'onda κ è forzata a viaggiare nella piastra; lo spostamento trasversale della piastra è:

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{j(\omega t - \kappa x)}$$

Il campo acustico nel fluido è calcolato usando la soluzione dell'equazione d'onda bi-dimensionale e dall'equazione di bilancio della quantità di moto, all'interfaccia piastra-fluido, equazioni già menzionate precedentemente:

$$p(x, y, t) = \tilde{p} e^{(-jk_x x - jk_y y)} e^{j\omega t} \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

La variazione lungo la direzione della x del campo acustico variabile deve seguire quella dell'onda nella piastra, cioè k_x nel fluido deve uguagliare κ .

Già avevamo visto, dalla soluzione dell'equazione delle onde bi-dimensionali nei fluidi che:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

da cui otteniamo che:

$$k_y = \pm(k^2 - \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$$

dove ricordiamo che $k = \omega/c$

Il segno appropriato della radice quadrata è determinato dalla fisica del modello. Sono possibili tre condizioni:

(a) La velocità di fase dell'onda della piastra è più grande della velocità del suono nel fluido: da cui $\kappa < k$. Le onde sonore piane si spostano fuori la superficie della piastra con un angolo rispetto alla

normale dato da $\cos\phi = k_y/k = \left[1 - (\kappa/k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, come visto dall'equazione $p(x, y, t) = \tilde{p}e^{(-jk_x x - jk_y y)}e^{j\omega t}$:

nessuna onda può propagare verso la superficie della piastra, e quindi il segno negativo è impedito.

(b) la velocità dell'onda della piastra è più bassa della velocità del suono nel fluido $\kappa > k$. Quando $\kappa > k$,

$k_y = \pm(k^2 - \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$ risulta immaginario; il disturbo del fluido decade esponenzialmente con la distanza e solo un'onda superficiale esiste nel fluido, in tal caso il segno negativo della radice quadrata deve essere selezionato così che:

$$k_y = -j(\kappa^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$p(x, y) = \tilde{p}e^{-j\kappa x} e^{\{-k[(\kappa/k)^2 - 1]^{\frac{1}{2}} y\}}$$

in tal caso abbiamo espresso k_y nell'esponenziale considerando che in tal caso $k_y = -j(\kappa^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ e

che dalla formula $\cos\phi = k_y/k = -j[(\kappa/k)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}$ possiamo esprimere $k_y = -jk[(\kappa/k)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}$ poi moltiplicando per $-jy$ otteniamo l'esponente del secondo esponenziale nella soluzione dell'equazione dell'onda bi-dimensionale.

(c) La velocità di fase dell'onda della piastra eguaglia la velocità del suono nei fluidi: $\kappa = k$ in tal caso $k_y = 0$: comunque, le condizioni al contorno non possono essere soddisfatte nella pratica,

perché la vibrazione finita produce pressione infinita, e questa condizione non può avvenire fisicamente.

L'ampiezza \tilde{p} del campo di pressione può essere determinata dall'applicazione dell'equazione di compatibilità della velocità normale, o degli spostamenti nell'interfaccia piastra-fluido. L'equazione già precedentemente scritta che esprime l'impedenza del fluido all'interfaccia è:

$$(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} = \omega\rho_0/k_y = \pm\omega\rho_0/(k^2 - \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$$

Notiamo che questa è una forma particolare dell'impedenza del fluido, che può essere chiamata impedenza d'onda, siccome dell'ondulatoria forma dell'eccitazione.

Nel caso (a) $\kappa < k$ è:

$$(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} = \omega\rho_0/k_y = \rho_0 c / [1 - (\kappa/k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

L'impedenza d'onda del fluido è reale e positiva; la piastra lavora sul fluido.

Nel caso (b), $\kappa > k$ e

$$(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} = j\omega\rho_0/(\kappa^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} = j\rho_0 c / [(\kappa/k)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}$$

L'impedenza d'onda del fluido è immaginaria e positiva; nessun lavoro è compiuto sul fluido ma ci sarà una certa inerzia da parte del fluido al movimento della piastra.

Nel caso (c) $\kappa = k$

$$(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} \rightarrow \infty$$

Questa analisi mostra che solo le componenti dell'onda della piastra con velocità di fase maggiori rispetto alla velocità del suono creano disturbi nel campo lontano e irradiano energia nel fluido.

Ritornando ora al problema della radiazione sonora dei modi di un pannello incernierato sui bordi, abbiamo osservato che un modo corrisponde ad un particolare schema di interferenza tra onde viaggianti. Questo suggerisce che la radiazione dovuta alle componenti d'onda che viaggiano potrebbe essere valutata individualmente e quindi sommata per ottenere un campo totale. Comunque non come le onde che viaggiano in una piastra infinita, quelle in un pannello esistono solo all'interno di uno spazio finito tra i contorni del pannello.

Facciamo ora una analogia con i segnali nel tempo. Sappiamo che un segnale nel tempo può essere scomposto nelle sue componenti nel dominio della frequenza attraverso la trasformata di Fourier. Ma allora anche una distribuzione ondosa spaziale, ossia quella rappresentata dai modi, può essere scomposta nelle sue componenti.

Lo spettro in frequenza del segnale nel tempo è ottenuto dall'applicazione della trasformata integrale di Fourier:

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

L'equivalente spaziale dell'equazione precedente può essere espresso come:

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

dove $f(x)$ può essere considerato essere costruito da un'infinità di onde sinusoidali che viaggiano della forma:

$$f_k(x) = \tilde{F}(k) \exp(jkx)$$

proprio come il segnale nel tempo può essere considerato essere fatto di un'infinità di toni puri,

$$f_\omega(t) = \tilde{F}(\omega) \exp(j\omega t)$$

L'espressione formale della sintesi di $f(x)$ da $\tilde{F}(k)$ è

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k) \exp(jkx) dk$$

L'intervallo di integrazione è visto estendersi da $-\infty$ a $+\infty$, così che vengano incluse le onde che viaggiano in entrambe le direzioni.

Il vantaggio analitico e concettuale di scomporre uno schema modale in onde sinusoidali che viaggiano è che la relazione dell'impedenza dell'onda piana $(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} = \omega\rho_0/k_y = \pm\omega\rho_0/(k^2 - \kappa^2)^{1/2}$ può essere applicata ad ogni componente. Ciò evidenzia come il campo di pressione radiato sia connesso alla distribuzione normale di velocità superficiale.

Per illustrare tale processo consideriamo una distribuzione di velocità superficiale monodimensionale.

Consideriamo un pannello semplicemente vincolato di larghezza a e infinitamente lungo in un infinito rigido baffle (schermo) (Fig. 16).

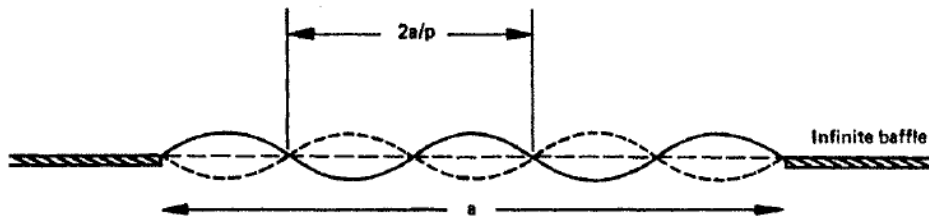


Fig.16 Vibrazione modale di una linea di pannello

La distribuzione di velocità è:

$$\tilde{v}_n(x, z) = \begin{cases} \tilde{v}_p \sin(p\pi x/a) \exp(j\omega t) & 0 < x < a \\ 0 & 0 > x > l \end{cases}$$

La trasformazione del numero d'onda di v_n è:

$$\tilde{V}(k_x) = \tilde{v}_p \int_0^a \sin(p\pi x/a) \exp(jk_x x) dx$$

dove k_x è usato per distinguerlo dal numero d'onda acustico k . La soluzione dell'equazione precedente è:

$$\tilde{V}(k_x) = \tilde{v}_p \frac{(p\pi/a) [(-1)^p \exp(-jk_x a) - 1]}{[k_x^2 - (p\pi/a)^2]}$$

quindi:

$$v_n(x, t) = \frac{\exp(j\omega t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(k_x) \exp(jk_x x) dk_x \quad (3)$$

Associata ad ogni componente del numero d'onda $\tilde{V}(k_x)$ c'è un campo di pressione superficiale data dall'equazione dell'impedenza d'onda: $(\tilde{p}/\tilde{v})_{y=0} = \omega\rho_0/k_y = \pm\omega\rho_0/(k^2 - k_x^2)^{1/2}$ uguale a:

$$[\tilde{P}(k_x)]_{y=0} = \frac{\pm\omega\rho_0}{(k^2 - k_x^2)^{1/2}} \tilde{V}(k_x) \quad (4)$$

così che la superficie di pressione può essere espressa come:

$$[p(x, t)]_{y=0} = \frac{\exp(j\omega t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{P}(k_x)]_{y=0} \exp(jk_x x) dk_x \quad (5)$$

La potenza irradiata per unità di lunghezza della piastra è trovata valutando l'espressione:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l [p(x, t)]_{y=0} v_n(x, t) dx dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^l \tilde{p}(x) \tilde{v}_n^*(x) dx \right\}$$

La sostituzione delle equazioni precedenti (3) e (5) conduce a:

$$\bar{P} = \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{P}(k_x)]_{y=0} \times \exp(jk_x x) dk_x \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}^*(k'_x) \exp(-jk'_x x) dk'_x dx \right\} \quad (6)$$

dove k'_x è stato usato solamente per distinguere tra le integrazioni su k_x associate a \tilde{P} e \tilde{V} . Notiamo che l'intervallo di integrazione su x è cambiato da 0 a l a $-\infty$ a ∞ , siccome la forma di $\tilde{V}(k_x)$ assicura che v è in realtà uguale a 0 fuori dal range $0 \leq x \leq l$. Possiamo sostituire \tilde{P} nell'equazione (6) dall'equazione (4) e abbiamo:

$$\bar{P} = \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pm\omega\rho_0}{(k^2 - k_x^2)^{1/2}} \tilde{V}(k_x) \times \exp(jk_x x) dk_x \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}^*(k'_x) \exp(-jk'_x x) dk'_x dx \right\} \quad (7)$$

L'integrazione è prima eseguita su x : le sole funzioni di x sono $e^{jk_x x}$ e $e^{-jk'_x x}$ che insieme formano l'integrando $e^{j(k_x - k'_x)x}$. L'integrale di questo termine su un range doppiamente infinito è zero se $k_x \neq k'_x$ e è chiaramente infinito se $k_x = k'_x$: infatti è equivalente all'integrale de delta di Dirac

$2\pi\delta(k_x - k'_x)$. La natura di questa funzione è tale che la seguente integrazione su k'_x fa sì che k'_x sia uguale a k_x . Quindi l'integrale dell'equazione (7) diventa:

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pm \omega \rho_0 |\tilde{V}(k_x)|^2}{(k^2 - k_x^2)^{1/2}} dk_x \right\}$$

Ora solo le componenti dei numeri d'onda soddisfacenti la condizione $k_x \leq k$ contribuiscono alla radiazione della potenza sonora e alla parte reale dell'integrale. Quindi il range di integrazione può essere ridotto a $-k \leq k_x \leq k$ per dare:

$$\bar{P} = \frac{\rho_0 c k}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{-k}^k \frac{|\tilde{V}(k_x)|^2}{(k^2 - k_x^2)^{1/2}} dk_x$$

Quindi al fine di valutare la potenza radiata abbiamo bisogno di considerare la forma dello spettro del modulo quadrato di $\tilde{V}(k_x)$, che è anche conosciuto come spettro di energia di $\tilde{V}(k_x)$, dato da:

$$|\tilde{V}(k_x)|^2 = |\tilde{v}_p|^2 \left[\frac{2\pi p/a}{k_x^2 - (p\pi/a^2)} \right]^2 \sin^2 \left(\frac{k_x a - p\pi}{2} \right)$$

che è raffigurato come uno spettro in Fig. 17.

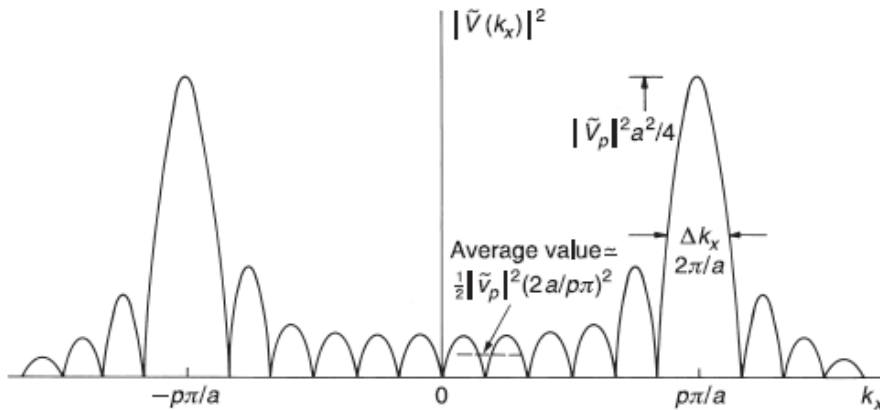


Fig. 17 Spettro del modulo quadrato di $\tilde{V}(k_x)$

Come previsto i picchi dello spettro quando $k_x = p\pi/a = 2\pi/\lambda$, dove $\lambda = 2a/p$ è la lunghezza d'onda strutturale: il valore del picco è $|\tilde{v}_p|^2 a^2 / 4$, è indipendente da p . L'eccezione di questa forma è lo spettro del modulo del modo fondamentale ($p=1$), che ha il suo massimo valore per $k_x = 0$. La "larghezza di banda" del picco principale nello spettro del modulo quadrato è connesso alla larghezza del pannello a da $\Delta k_x \cong \pi/a$, che è indipendente da p . Per valori di $k_x \ll p\pi/a$ il

valore medio dello spettro ha approssimativamente un valore costante di $\frac{1}{2}|\tilde{v}_p|^2(2a/p\pi)$, che è proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda strutturale. Per la condizione $k_x a \ll p\pi$ la potenza sonora irradiata è:

$$\bar{P} = \frac{\rho_0 c k |\tilde{v}_p|^2}{2} \left(\frac{a}{p\pi} \right)^2$$

La corrispondente efficienza di radiazione è:

$$\sigma = 2kl / p^2 \pi^2$$

per $k_x a \gg p\pi$ l'efficienza di radiazione è unitaria.

Il significato dello spettro del modulo quadrato della velocità riguarda la condizione necessaria per la radiazione dell'energia sonora dalla velocità superficiale delle onde, ossia $|k_x| < k$. Ad ogni frequenza $k = \omega/c$ può essere segnato sull'asse dei numeri d'onda in Fig.18: solo quelle componenti di numeri d'onda soddisfacenti la condizione $|k_x| < k$ possono radiare energia sonora; le altre componenti semplicemente creano disturbi nel campo vicino del fluido in prossimità della superficie della piastra.

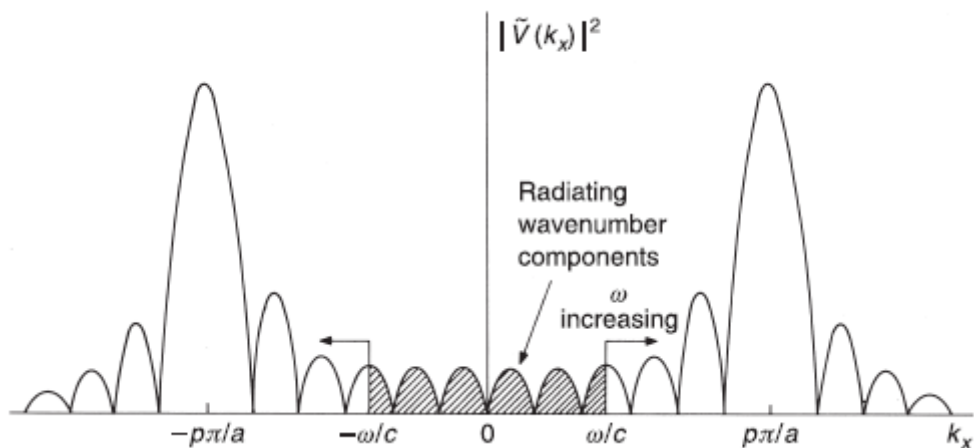


Fig.18 Componenti nel dominio del wavenumber radianti

3.10 Il metodo agli elementi di contorno - Introduzione al BEM

Il metodo agli elementi di contorno (o BEM secondo l'acronimo inglese Boundary Element Method) è una potente tecnica di calcolo, capace di fornire soluzioni numeriche ad una ampia serie di problemi scientifici e ingegneristici (quali i problemi di radiazione acustica, i problemi di acustica negli ambienti chiusi e l'analisi modale dei fluidi contenuti in domini chiusi), [3],[4],[5].La

caratteristica principale di questo metodo è quella di richiedere l'uso della sola griglia del confine (o contorno) del dominio che si vuole studiare.

Ad esempio nell'ambito dei problemi di radiazione acustica, il BEM è un'importante alternativa se confrontato con i metodi più tradizionali (FEM). Infatti, se consideriamo un corpo vibrante che irradia verso l'ambiente esterno, il dominio acustico (che è rappresentato dall'aria aperta) è così grande che è possibile accettare per il modello che il dominio acustico sia di estensione infinita. Applicando il FEM a tale problema, occorrerebbe discretizzare l'intero volume del dominio acustico che è di estensione infinita, mentre ricorrendo al BEM basta considerare solo una griglia della superficie (mesh bidimensionale) del corpo vibrante, riducendo sia il tempo di realizzazione della mesh che il tempo di calcolo.

Al fine di applicare il metodo agli elementi al contorno, le equazioni alle derivate parziali che governano il dominio devono essere riformulate come equazioni integrali delle funzioni definite sul solo contorno del dominio stesso. Rappresentando il contorno del dominio mediante un insieme di pannelli superficiali e le funzioni al contorno come funzioni parametriche su ciascun pannello, le equazioni integrali sul contorno si riconducono ad un sistema lineare di equazioni ed è possibile ottenere una soluzione numerica.

Consideriamo, ad esempio, la propagazione del suono in un volume V racchiuso da una superficie S . Il disturbo di pressione $p(x,y,z)$, nel punto x, y, z ed al tempo t , è descritto dall'equazione alle derivate parziali nota come equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (8)$$

dove c è la velocità del suono nel mezzo indisturbato. Una volta risolta tale equazione per il volume V considerato, è possibile ottenere il disturbo di pressione per qualsiasi punto all'interno dello stesso e in ogni istante di tempo, caratterizzando completamente il campo acustico all'interno di V . L'equazione (8) da sola tuttavia non è sufficiente a definire il campo acustico. Se consideriamo, ad esempio, una distribuzione della pressione $p_1(x,y,z,t)=0$, ovvero con una pressione che è sempre nulla in ogni punto (x,y,z) e in ogni istante t , si vede che l'equazione (8) è sempre soddisfatta indipendentemente dal volume V . Quindi, oltre all'equazione (8), che comunque deve essere soddisfatta in ogni punto del dominio, c'è un altro importante aspetto che bisogna considerare per descrivere correttamente il campo: le condizioni al contorno, ovvero cosa accade sulla superficie di confine S che racchiude il volume V . Imporre le condizioni al contorno significa definire il comportamento di ogni superficie che racchiude il volume in esame.

L'equazione (8) può essere vista come una relazione che la pressione p deve soddisfare per qualsiasi punto interno al volume V , ma non dice nulla su ciò che accade sulla superficie di confine

S. Consideriamo, ad esempio, un condotto semplice con un terminale (a sinistra) ricoperto con materiale fonoassorbente, e l'altro (a destra) che vibra ad una data frequenza (come un pistone oscillante), e supponiamo di voler calcolare il campo acustico all'interno del condotto (Fig.19).



Fig. 19 Condotto lineare con pistone vibrante (terminale destro) e materiale assorbente (terminale sinistro)

Per poter risolvere le equazioni che governano il fenomeno, occorrerà definire le condizioni al contorno sulle superfici che delimitano il volume. Per quanto riguarda la superficie vibrante, poiché questa avrà una data velocità v_0 , basterà imporre al fluido una velocità pari proprio a v_0 ($v_{fluido}=v_0$). Per la superficie ricoperta di materiale fonoassorbente, caratterizzato dall'impedenza acustica $Z(f)$, basterà invece imporre al fluido una velocità pari a $v_{fluido}=p(f)/Z(f)$. Infine, per caratterizzare le superfici laterali del condotto, che sono rigide e senza moto, occorrerà imporre che la velocità del fluido sia nulla ($v_{fluido}=0$). Pertanto, per ogni superficie che racchiude il dominio, occorre definire una specifica condizione al contorno che definisca il comportamento della superficie stessa. Questo vale sia nel caso in cui si voglia determinare il campo acustico all'interno del dominio V , sia nel caso in cui si voglia determinare il campo acustico generato esternamente alla superficie S . Supponiamo, ad esempio, di avere una sorgente sonora e di voler valutare l'attenuazione prodotta da barriera acustica sul livello di rumore percepito da un osservatore (Fig.20).

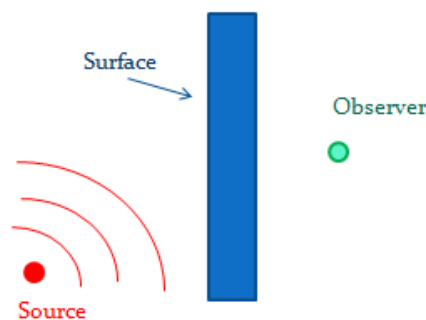


Fig. 20 Attenuazione sonora prodotta da una barriera acustica

In questo caso il dominio computazionale è tutto il volume V esterno alla barriera definita dalla superficie S e le condizioni al contorno su tale superficie saranno definite mediante il campo incidente prodotto dalla sorgente.

3.11 La soluzione numerica

Tipicamente una soluzione analitica delle equazioni differenziali alle derivate parziali con le rispettive condizioni al contorno è ottenibile solo raramente e per casi particolarmente semplici, mentre per la maggior parte dei problemi di interesse pratico tali equazioni devono essere risolte numericamente. Esistono due famiglie di metodi numerici adatti alla risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali: i metodi di volume (tra cui rientra anche il metodo agli elementi finiti, *FEM*) ed i metodi di contorno (tra cui rientra il metodo agli elementi di contorno, *BEM*). Per comprendere le differenze tra queste due tipologie di metodi numerici consideriamo, ad esempio, la soluzione dell'equazione (8) nel volume V delimitato dalla superficie S (Fig.21).

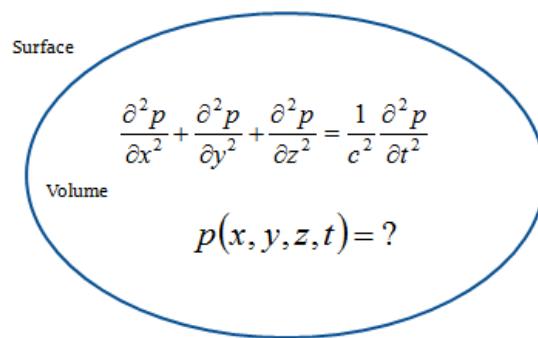


Fig. 21 Schematizzazione del problema descritto da una equazione alle derivate parziali

Per risolvere numericamente un problema di questo tipo, i metodi di volume richiedono la suddivisione del volume V in un numero elevato di sottodomini di volume più piccolo detti elementi. Tale operazione prende il nome di discretizzazione del dominio e porta alla creazione della cosiddetta mesh del dominio (Fig. 22).

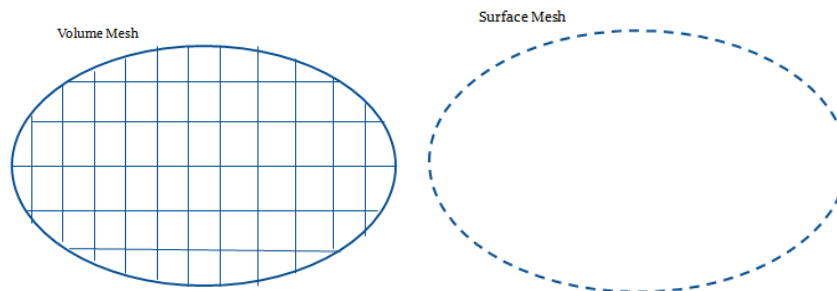


Fig. 22 Schema delle discretizzazioni usate nei metodi di volume (a sinistra) e di contorno (a destra). La discretizzazione è composta da punti geometrici (nodi) collegati da elementi di superficie (pannelli)

L'aspetto fondamentale della discretizzazione è che in seguito a tale operazione la pressione p , che era nota all'interno del volume V , è ora sostituita dal valore della pressione in numero discreto di punti che costituiscono i nodi della discretizzazione. Tali nodi sono connessi mediante un numero di elementi superficiali che vengono comunemente chiamati pannelli. La condizione fondamentale è che i nodi siano abbastanza vicini tra loro in modo da poter fornire un andamento della pressione che approssimi in maniera adeguata quello all'interno del volume V . Una volta discretizzato il volume, per ciascun nodo viene scritta l'equazione delle onde: in questo modo il valore della pressione p in ciascun nodo è messo in relazione con il valore della pressione dei nodi ad esso adiacenti. Si ottiene in questo modo un sistema di equazioni che, una volta risolto, fornisce l'andamento della pressione p nel dominio discretizzato.

Il metodo degli elementi di contorno si basa, invece, su di un approccio completamente diverso: a partire dal volume V , l'equazione differenziale delle onde viene scritta in forma integrale, per cui il valore della pressione p in ogni punto del volume V sarà calcolato mediante l'integrale della pressione p sulla superficie S che lo racchiude. Tale metodo si basa sul teorema di Green, secondo il quale è possibile ridurre un problema integrale definito su di un volume V ad un problema integrale definito sulla superficie bidimensionale S che lo delimita. La forma integrale dell'equazione delle onde può essere scritta come:

$$4\pi p(x,t) = \int_S Kt_1 p dS + \int_S Kt_2 \frac{\partial p}{\partial n} dS + \int_S Kt_3 \frac{\partial p}{\partial t} dS \quad (9)$$

dove le funzioni Kt_1 , Kt_2 e Kt_3 sono funzioni complesse che dipendono da diverse grandezze geometriche e cinematiche. A questo punto, il problema è stato ricondotto al calcolo della pressione p sulla superficie di contorno S . Quello che è opportuno sottolineare è che una volta nota la pressione p (e le sue derivate) sulla superficie S , è possibile ottenere il valore della pressione in ogni punto all'interno del volume V .

Tuttavia, anche per questo tipo di problemi, una soluzione analitica è possibile solo in casi molto semplici, per cui è opportuno procedere per via numerica. Così, come è stato fatto per i metodi di volume, anche per i metodi di contorno è necessario effettuare una discretizzazione del dominio: questa volta però, anziché discretizzare l'intero dominio V , è sufficiente discretizzare la sola superficie S che lo delimita Fig.22. La discretizzazione (o mesh) sarà quindi caratterizzata da un certo numero di elementi superficiali (detti pannelli) che collegano un certo numero di punti geometrici (detti nodi). Una volta discretizzata la superficie S , l'equazione (9) viene usata per ottenere un sistema di equazioni che lega la pressione p in ciascun nodo con la pressione degli altri

nodì che, una volta risolto, fornisce l'andamento della pressione p sulla superficie S , e infine, all'interno del volume V .

3.12 L'equazione di Helmholtz

La propagazione del suono in un mezzo uniforme e stazionario, è descritta dall'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (8)$$

Tale equazione descrive l'andamento del disturbo di pressione $p(x,y,z)$, nel generico punto (x,y,z) in funzione del tempo t . Tuttavia talvolta, soprattutto per applicazioni di tipo acustico, è molto utile esprimere le grandezze che caratterizzano un fenomeno anziché mediante funzioni del tempo, come funzioni della frequenza. In questo modo è possibile separare i diversi contenuti in frequenza, in modo da poter poi focalizzare l'attenzione su un determinato campo di frequenze. In base a questo approccio, l'equazione delle onde viene trasformata da una funzione del dominio del tempo in un funzione del dominio della frequenza mediante una trasformata di Fourier. A tale scopo si osservi che un segnale sinusoidale $p(t)$ può essere scritto in notazione complessa come $p(t) = \text{Re}\{\bar{p}e^{j\omega t}\}$, dove \bar{p} è un numero complesso, e introducendo tale espressione nell'equazione delle onde si ottiene l'espressione:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} + k^2 \bar{p} = 0$$

nota come equazione di Helmholtz, dove k è detto numero d'onda ed è pari a $k=2\pi f/c$.

L'equazione di Helmholtz rappresenta l'equazione delle onde espressa nel dominio della frequenza. Per poter utilizzare tale equazione nel BEM bisognerà scriverla in forma integrale e, a questo scopo, si ricorre generalmente alla tecnica delle funzioni generalizzate basata sulla teoria della distribuzione. Tale teoria permette di riscrivere una generica equazione differenziale alle derivate parziali in forma non omogenea, il che è utile per ottenere la forma integrale. Senza entrare troppo nei dettagli matematici, essa permette di ottenere a partire dalla equazione differenziale alle derivate parziali limitata al dominio del problema, una nuova equazione differenziale alle derivate parziali valida in tutto lo spazio, mediante l'introduzione di termini aggiuntivi (che sono detti termini sorgente) che costituiscono la parte non omogenea. L'equazione che si ottiene potrà essere integrata per ottenere la desiderata forma integrale necessaria al BEM. Il punto critico della procedura è la

natura dei termini sorgente: se tali termini sono confinati sul contorno del dominio del problema originario (ad esempio, sulla superficie S), allora si ottiene un BEM efficiente; ciò tipicamente accade per le equazione differenziale alle derivate parziali lineari. Se, invece, i termini sorgente sono distribuiti in tutto il dominio originario (ad esempio, nel volume V), come tipicamente accade per le equazione differenziale alle derivate parziali non lineari, l'applicazione della tecnica BEM è molto più complessa e perde molti dei suoi vantaggi. Applicando la procedura appena descritta è possibile ottenere la seguente forma integrale, che mette in relazione la pressione per un qualsiasi punto all'interno del dominio V con alcuni integrali che devono essere eseguiti sulla superficie S :

$$4\pi p(x) = \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \bar{p}(y) dS(y) + \int_S G(x, y) \frac{\partial \bar{p}(x, y)}{\partial n} dS(y)$$

dove la funzione $G(x, y) = \frac{e^{-ikr}}{r}$ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Helmholtz, ed detta funzione di Green di spazio libero. La funzione di Green rappresenta sostanzialmente una sorgente monopolare di intensità unitaria disposta sui punti y di S , mentre la derivata normale della funzione di Green è equivalente ad una sorgente bipolare di intensità unitaria. Pertanto, è possibile affermare che la pressione nel generico punto x interno al volume V si ottiene disponendo sulla superficie S una serie di sorgenti monopolari con intensità uguale alla derivata normale della pressione, ed una serie di sorgenti bipolari con intensità uguale alla pressione stessa (Fig.23).

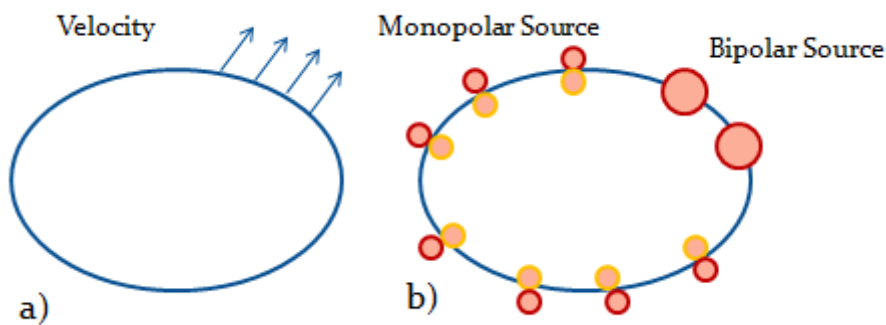


Fig. 23 Se sulla porzione della superficie è imposto un campo di velocità (a), tale superficie può essere vista come una distribuzione di sorgenti monopolari e dipolari (b).

Dopo una serie di passaggi matematici, si ottiene:

$$4\pi \bar{p}(x) = \int_S K_1(y) \bar{p} dS + \int_S K_2(y) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS + \int_S K_3(y) dS \quad (10)$$

dove:

$$K_1(x, y) = \frac{\cos(\theta)}{r^2} e^{-ikr}$$

$$K_2(x, y) = -\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$K_3(x, y) = \frac{\cos(\theta)}{r} ike^{-ikr}$$

ed indicando con \mathbf{x} il vettore delle coordinate dei punti interni al volume V , con \mathbf{y} il vettore dei punti sul contorno S , con $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la distanza tra \mathbf{x} e \mathbf{y} , e infine con θ l'angolo formato tra la normale alla superficie n e il vettore r che unisce i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} . I punti \mathbf{x} e \mathbf{y} vengono chiamati, rispettivamente, osservatore e sorgente. L'equazione (10) è la forma integrale dell'equazione di Helmholtz, e rappresenta il punto di partenza delle analisi. La Fig. 24 mostra il simbolismo utilizzato nell'equazione di Helmholtz.

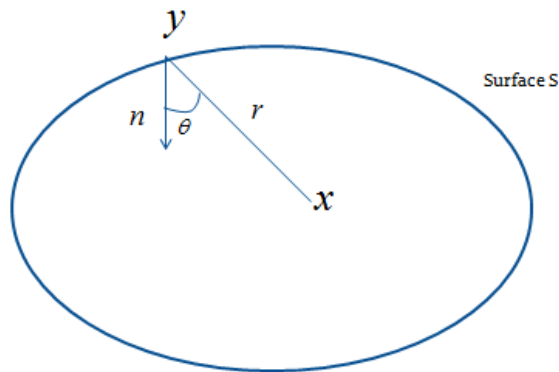


Fig. 24 Simbolismo utilizzato nell'equazione di Helmholtz

Riferimenti

- [1] Fahy, Frank J., and Paolo Gardonio "*Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*" Academic press, 2007
- [2] Carlomagno, Giovanni Maria "*Elementi di gasdinamica*" (2009)
- [3] P. Hunter, A. Pullan, FEM/BEM NOTES, 2003
- [4] S. Kirkup, The Boundary Element Method in Acoustics, ISBN 0 953 4031 06
- [5] An Introduction to Boundary Elements Methods for Acoustics, VNoise Theoretical Manual, Release 1.3, 2003

Capitolo 4

Analisi di risposta in frequenza

4.1 ANALISI DI RISPOSTA IN FREQUENZA: ANALISI DI RISPOSTA DIRETTA E ANALISI DI RISPOSTA MODALE

4.1.1 Analisi di risposta in frequenza nell'ambito di modelli numerici agli elementi finiti

L'analisi di risposta in frequenza è usata per calcolare la risposta di un sistema causata dall'applicazione di un'eccitazione nota. Nel caso specifico in oggetto di studio, l'analisi di risposta in frequenza è utilizzata per correlare il comportamento strutturale del sistema in analisi con una eccitazione oscillatoria stazionaria applicata ad esso. Sono innumerevoli gli ambiti nei quali ritroviamo eccitazioni di carattere oscillatorio, ad esempio nelle macchine rotanti, sulle pale di elicotteri, su pneumatici non bilanciati e così via. Nell'analisi di risposta in frequenza l'eccitazione è esplicitamente definita nel dominio delle frequenze. Una prima grande distinzione discende proprio dalla tipologia di carico, possiamo definire forze applicate sulla struttura o definire moti forzati su di essa, quindi imporre in determinate zone spostamenti, velocità o accelerazioni.

Un'ulteriore distinzione deriva dal metodo di soluzione dell'analisi in frequenza, è possibile effettuare un'analisi di risposta diretta in frequenza o un'analisi di risposta modale in frequenza. La prima risolve le equazioni del moto accoppiate, la seconda utilizza un numero finito di forme modali della struttura per ridurre le dimensioni del problema, e risolve le equazioni del moto disaccoppiate in caso di assenza di smorzamento o di previa definizione di smorzamento modale.

4.1.2 Shift di fase

Il carico oscillatorio è sinusoidale per natura [1]. Nel suo caso più semplice, è definito con una sola ampiezza ad una singola frequenza. La risposta oscillante del sistema lineare eccitato avviene alla stessa frequenza del carico. Comunque la risposta può essere shiftata nel tempo a causa dello

smorzamento del sistema. Lo shift nella risposta è chiamato shift di fase siccome il picco del carico e il picco della risposta non accadono allo stesso istante di tempo, come mostrato in Fig.1.

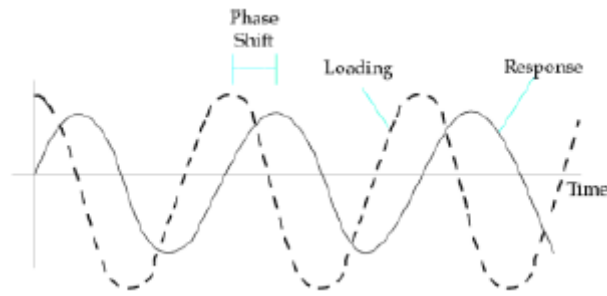


Fig.1 Shift di fase

4.1.3 Numeri complessi

I risultati fondamentali, ottenuti da un'analisi di risposta in frequenza strutturale, generalmente includono spostamenti, velocità e accelerazioni e anche forze e tensioni. Le risposte calcolate rappresentano numeri complessi definiti da ampiezza e fase (rispetto alla sollecitazione applicata) o dalla componente reale e immaginaria. Queste quantità sono graficamente raffigurate in Fig.2.

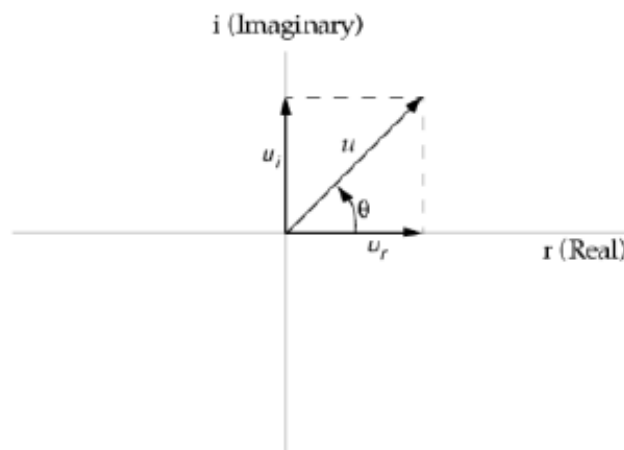


Fig.2 Piano complesso

dove:

$$u = \sqrt{u_r^2 + u_i^2} \text{ è l'ampiezza}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u_i}{u_r}\right) \text{ è la fase}$$

$$u_r = u \cdot \cos\theta \text{ è la componente reale}$$

$$u_i = u \cdot \sin\theta \text{ è la componente immaginaria}$$

4.1.4 Risposta Diretta in frequenza

Nell'analisi di risposta diretta in frequenza [2], la risposta strutturale viene calcolata risolvendo un sistema di equazioni matriciali accoppiate attraverso l'algebra complessa. Le equazioni del moto per un sistema smorzato soggetto ad una eccitazione armonica, che vengono risolte frequenza per frequenza, sono esprimibili attraverso la notazione matriciale come:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [B]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t}$$

Il carico dell'equazione è introdotto come vettore complesso, che è conveniente per la soluzione matematica del problema. Dal punto di vista matematico, il carico può essere espresso da un numero complesso, o entrambi. La stessa interpretazione può essere usata per i risultati.

Per un moto armonico, che è la base di un'analisi di risposta in frequenza, assumiamo una soluzione armonica posta nella forma.

$$\{x\} = \{u(\omega)\}e^{i\omega t}$$

dove $\{u(\omega)\}$ rappresenta il vettore complesso relativo allo spostamento.

Derivando una prima volta otteniamo la velocità $\{\dot{x}\} = i\omega\{u(\omega)\}e^{i\omega t}$ e derivando una seconda volta otteniamo l'accelerazione $\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{u(\omega)\}e^{i\omega t}$ per cui $i\omega\{u(\omega)\}$ rappresenta il vettore complesso relativo alla velocità e $-\omega^2\{u(\omega)\}$ rappresenta il vettore complesso relativo all'accelerazione.

Sostituendo nell'equazione del moto otteniamo:

$$-\omega^2[M]\{u(\omega)\}e^{i\omega t} + i\omega[B]\{u(\omega)\}e^{i\omega t} + [K]\{u(\omega)\}e^{i\omega t} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t}$$

e dividendo tutto per $e^{i\omega t}$, abbiamo:

$$[-\omega^2 M + i\omega B + K]\{u(\omega)\} = \{P(\omega)\}$$

$$\{u(\omega)\} = \frac{\{P(\omega)\}}{[-\omega^2 M + i\omega B + K]}$$

Lo smorzamento nella risposta in frequenza diretta, nel caso più generale e completo può essere rappresentato dalla matrice di smorzamento viscoso $[B]$ e dalla matrice di rigidità $[K]$. La prima matrice tiene conto dello smorzamento dovuto a fenomeni viscosi mentre la seconda matrice tiene conto dello smorzamento dovuto all'attrito interno dei materiali. Ma spesso è possibile considerare lo smorzamento dovuto all'attrito interno dei materiali contenuto nella matrice di smorzamento viscoso $[B]$.

4.1.5 Risposta modale in frequenza

La risposta modale in frequenza è un metodo alternativo per calcolare la risposta in frequenza di una struttura. Questo metodo usa i modi di vibrare di una struttura per disaccoppiare le equazioni del moto, quando non consideriamo lo smorzamento o quando utilizziamo lo smorzamento modale. E dipendentemente dal numero di modi considerati e calcolati, riduce la dimensione del problema, e di conseguenza i tempi computazionali. Siccome l'analisi di risposta modale in frequenza utilizza i modi di vibrare della struttura, tale analisi in frequenza rappresenta una naturale estensione dell'analisi modale.

Per comprendere la risposta modale in frequenza, inizialmente non consideriamo lo smorzamento strutturale e lo smorzamento viscoso. Le equazioni del moto sono esprimibili attraverso la notazione matriciale come:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t}$$

anche in tal caso assumiamo una soluzione armonica nella forma.

$$\{x\} = \{u(\omega)\}e^{i\omega t}$$

dove $\{u(\omega)\}$ rappresenta il vettore complesso relativo allo spostamento.

Derivando due volte otteniamo l'accelerazione $\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{u(\omega)\}e^{i\omega t}$ per cui $-\omega^2 \{u(\omega)\}$ rappresenta il vettore complesso relativo all'accelerazione.

Ora, nell'equazione del moto consideriamo nullo il termine forzante a destra dell'equazione, sostituiamo la soluzione armonica espressa nella forma $\{x\} = \{u(\omega)\}e^{i\omega t}$ e dividiamo tutto per $e^{i\omega t}$.

La risoluzione di tale sistema di equazioni

$$-\omega^2 [M]\{\ddot{u}(\omega)\} + [K]\{u(\omega)\} = 0$$

conduce alle frequenze naturali del sistema e alle forme modali $[\varphi]$.

Quindi calcolata l'analisi modale, utilizziamo le forme modali $[\varphi]$ per trasformare la risposta da coordinate fisiche a coordinate modali $\{\xi(\omega)\}$:

$$\{x\} = \{u(\omega)\}e^{i\omega t} = [\varphi]\{\xi(\omega)\}e^{i\omega t}$$

Tale equazione rappresenta un'uguaglianza se tutti i modi sono considerati, e rappresenta un'approssimazione quando solo un numero definito di modi sono utilizzati o calcolati.

Sostituendo l'ultima equazione e la seconda derivata nel tempo all'interno dell'equazione del moto e dividendo tutto per $e^{i\omega t}$, otteniamo l'equazione del moto in termini di coordinate modali:

$$-\omega^2 [M][\varphi]\{\xi(\omega)\} + [K][\varphi]\{\xi(\omega)\} = \{P(\omega)\}$$

Le equazioni del moto espresse in tale forma risultano accoppiate. Per disaccoppiare le equazioni premoltiplichiamo l'equazione per la matrice trasposta degli autovettori ossia per la matrice trasposta delle forme modali $[\varphi]^T$.

Da cui:

$$-\omega^2 [\varphi]^T [M][\varphi]\{\xi(\omega)\} + [\varphi]^T [K][\varphi]\{\xi(\omega)\} = [\varphi]^T \{P(\omega)\}$$

In tal modo otteniamo delle matrici di massa e rigidezza diagonali.

Dove le matrici sono definite come:

$[\varphi]^T [M][\varphi]$ massa modale

$[\varphi]^T [K][\varphi]$ rigidezza modale

$[\varphi]^T \{P(\omega)\}$ vettore delle forze modali

Nella forma disaccoppiata, le equazioni del moto sono disaccoppiate e formano un sistema costituito da un set di equazioni descriventi un sistema ad un grado di libertà:

$$-\omega^2 m_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega)$$

dove:

m_i è la massa modale dell'i-esimo modo

k_i è la rigidezza modale dell'i-esimo modo

p_i è la forza modale dell'i-esimo modo

Dall'ultima equazione le risposte modali individuali ξ_i sono calcolate per una specifica frequenza forzante ω .

La risposta in coordinate fisiche ad una specifica frequenza è quindi recuperata utilizzando la posizione: $\{x\} = \{u(\omega)\}e^{i\omega t} = [\varphi]\{\xi(\omega)\}e^{i\omega t}$

4.1.6 Smorzamento nell'analisi di risposta modale in frequenza

Se lo smorzamento strutturale è presente, la proprietà di ortogonalità dei modi, in generale non è sufficiente a rendere diagonale la matrice dello smorzamento, come invece accade per la matrice della massa e della rigidità. Infatti abbiamo che la matrice:

$$[\varphi]^T [B][\varphi] \text{ non è diagonale}$$

Analogamente se lo smorzamento strutturale è presente, la proprietà di ortogonalità dei modi, in generale non rende diagonale la matrice della rigidità, che considerando lo smorzamento si esprime come:

$$[\varphi]^T [(1 + iG)[K] + i\Sigma G_E [K_E][\varphi]$$

dove

$[K]$ è la matrice di rigidità globale; $[K_E]$ è la matrice di rigidità dell'elemento

G è il coefficiente globale di smorzamento strutturale; G_E è il coefficiente dell'elemento di smorzamento strutturale.

Quindi di conseguenza in presenza di smorzamento viscoso o strutturale, le equazioni del moto sono tipicamente accoppiate. Per tali casi, l'analisi di risposta modale in frequenza:

- risolve il sistema non smorzato e non forzato per ottenere le frequenze naturali e le relative forme modali del sistema
- premoltiplica le equazioni del moto del sistema smorzato e forzato per la matrice trasposta degli autovettori ossia delle forme modali:

$$-\omega^2 [\varphi]^T [M][\varphi] \{\xi(\omega)\} + i\omega [\varphi]^T [B][\varphi] \{\xi(\omega)\} + [\varphi]^T [K][\varphi] \{\xi(\omega)\} = [\varphi]^T \{P(\omega)\}$$

che conduce ad un sistema di equazioni del moto espresse in coordinate modali ma accoppiate.

- risolve l'ultima equazione matriciale con una soluzione di risposta diretta in frequenza.

Siccome nell'ultima equazione del moto, solo un numero definito di forme modali è utilizzato, la dimensione dell'equazione matriciale utilizzando le coordinate modali è inferiore alla dimensione dell'equazione matriciale descrivente il moto in coordinate fisiche.

Un altro modo per introdurre lo smorzamento nella risposta modale in frequenza è utilizzare lo smorzamento modale. Lo smorzamento modale è applicato ad ogni modo separatamente, quindi tale smorzamento è applicato alla singola equazione separatamente, così che le equazioni del moto rimangano disaccoppiate.

L'equazione del moto assume la forma:

$$-\omega^2 m_i \xi_i(\omega) + i\omega b_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega)$$

dove b_i è il coefficiente di smorzamento viscoso dell' i -esimo modo.

Ognuna delle risposte modali è calcolata attraverso:

$$\xi_i(\omega) = \frac{p_i(\omega)}{-\omega^2 m_i + i\omega b_i + k_i}$$

Una volta che le equazioni in coordinate modali sono risolte, le coordinate fisiche sono recuperate come la sommatoria delle risposte modali.

È possibile che non tutti i modi calcolati siano richiesti nella risposta modale in frequenza. Spesso solo i primi modi sono sufficienti per descrivere adeguatamente la risposta dinamica. Il requisito minimo è che tutti i modi compresi nell'intervallo di frequenza della sollecitazione siano considerati. Per esempio se l'analisi di risposta in frequenza di una struttura soggetta ad un carico deve essere calcolata tra 100 e 1000 Hz, almeno tutti i modi che ricadono in questo intervallo devono essere considerati. Per una maggiore accuratezza dovrebbero essere considerati tutti i modi fino a due volte o tre volte il limite superiore dell'intervallo frequenziale di applicazione della forzante. Per esempio, se una struttura è eccitata tra 100 e 1000 Hz, per una maggiore accuratezza dovrebbero essere considerati tutti i modi da 100 a 3000 Hz.

Il vantaggio dell'utilizzo della risposta modale in frequenza rispetto alla risposta diretta in frequenza, che è ancora più evidente definendo uno smorzamento modale, è la dimensione del problema che è di gran lunga inferiore nel caso di risposta modale.

4.2 MOTO IMPOSTO

Il moto imposto specifica lo spostamento, la velocità e/o l'accelerazione di un certo numero di nodi nel modello agli elementi finiti in un'analisi di risposta in frequenza [3]. Il moto imposto è usato quando è noto il moto della base di una struttura, invece di o in aggiunta ai carichi applicati. La più comune applicazione del moto imposto è l'eccitazione dovuta ad un terremoto applicata ad una costruzione.

Il solutore che abbiamo utilizzato per svolgere tale analisi supporta due metodi di implementazione relativo al moto imposto:

- il metodo SPC/SPCD (da Single Point Constrained, singoli punti vincolati) permette di specificare direttamente gli spostamenti, velocità o accelerazioni in alcuni nodi vincolati
- il metodo della grande massa che prevede di inserire una massa molto più grande della massa della struttura ma connessa ad essa, sulla quale si applica la forza. La forza

proporzionale alla massa inserita provocherà un'accelerazione, una velocità o uno spostamento forzato.

La tecnica di cui parleremo nei paragrafi successivi è il metodo SPC/SPCD che permette di utilizzare le forme modali. Inoltre eseguendo meno manipolazioni rispetto al metodo della grande massa risulta un metodo più robusto.

4.2.1. I metodi SPC/SPCD nell'analisi di risposta in frequenza-Metodo della reazione modale

Come già accennato, l'assunzione fondamentale nell'analisi di risposta in frequenza è che gli effetti transitori sono trascurabili, e la natura dei carichi dipendente dal tempo, può essere espressa puramente in termini di funzioni forzanti armoniche. La risposta forzata della struttura a tali carichi armonici avviene alla stessa frequenza, ed è proporzionale all'ampiezza dei carichi applicati.

Quindi se invece di applicare una forzante armonica, applichiamo un moto imposto, l'effetto deve essere simile. Cioè una risposta con forze proporzionali agli spostamenti, velocità o accelerazioni imposte, alla stessa frequenza del moto imposto. Ognuna delle grandezze imposte, ossia spostamenti, velocità o accelerazioni devono esclusivamente determinare le altre due, siccome tra di loro sono proporzionali in ampiezza attraverso la ω , con forze risultanti di vincolo derivata dalla soluzione delle equazioni che governano il fenomeno.

Per illustrare ciò, un applicata funzione forzante armonica della forma:

$$P(t) = P(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

provoca lo spostamento in fase

$$u(t) = U(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

con le rispettive velocità e accelerazioni

$$\dot{u}(t) = i\omega U(\omega) \cdot e^{i\omega t} ; \ddot{u}(t) = -\omega^2 U(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

Se quindi la struttura è eccitata cinematicamente l'equazione del moto matriciale, già scritta introducendo l'analisi infrequenza, può essere scritta suddividendo i gradi di libertà interni (f) dai gradi di libertà dei supporti (s).

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fs} \\ M_{sf} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_f \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ff} & B_{fs} \\ B_{sf} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_f \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_f \\ P_s + q_s \end{Bmatrix}$$

U_f rappresenta lo spostamento dei gradi di libertà interni

U_s rappresenta lo spostamento dei gradi di libertà dei supporti

P_f indica i carichi esterni applicato sui nodi liberi

P_s indica i carichi esterni applicato sui nodi vincolati

q_s rappresentano le reazioni vincolari

Siccome il campo degli spostamenti è noto relativamente ai gradi di libertà dei supporti, la procedura di soluzione consiste nella valutazione dei gradi di libertà interni U_f . Il metodo della reazione modale propone una strategia di soluzione nello spazio modale.

Consideriamo l'equazione agli autovalori associata ad un problema non smorzato con supporti fissi:

$$-\begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fs} \\ M_{fs}^T & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{fs}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix}$$

dove Λ è la matrice diagonale contenenti le frequenze al quadrato

φ_i corrisponde agli autovettori, ossia alle forme modali della libera struttura (quindi dei gradi di libertà interni)

R è la matrice che contiene le reazioni modali nei supporti fissi.

Due assunzioni ulteriori sono definite per semplificare la derivazione:

- la massa accoppiata tra i gradi di libertà interni e i gradi di libertà dei supporti può essere trascurata, cioè $M_{fs} = M_{fs}^T = 0$ (questo vale sempre se le masse sono considerate concentrate)
- il modello dello smorzamento è proporzionale alla massa e alla rigidezza

$$B = 2\eta_M M + \eta_K K$$

Dal secondo set di equazioni dell'equazione matriciale agli autovalori, otteniamo:

$$K_{fs}^T \cdot \varphi_i = R$$

Ora, come già scritto in precedenza utilizziamo la posizione: $\{x\} = \{u(\omega)\} = [\varphi]\{\xi(\omega)\}$

per passare da coordinate fisiche a coordinate modali. Sostituiamo tale posizione, riferita solo ai gradi di libertà interni, nel primo set dell'equazione del moto scritta scindendo i gradi di libertà interni e i gradi di libertà dei supporti, e considerando nulli i carichi applicati dall'esterno, siccome stiamo eccitando la struttura con il solo moto imposto.

Quindi ,otteniamo:

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fs} \\ M_{sf}^T & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_f \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ff} & B_{fs} \\ B_{fs}^T & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_f \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_f \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_s \end{Bmatrix}$$

$$M_{ff} \cdot \phi_i \cdot \ddot{\xi}_i + (2\eta_M M_{ff} + \eta_K K_{ff}) \cdot \phi_i \cdot \dot{\xi}_i + (\eta_K K_{fs}) U_s + K_{ff} \phi_i \cdot \xi_i + K_{fs} U_s = 0$$

$$M_{ff} \cdot \phi_i \cdot \ddot{\xi}_i + (2\eta_M M_{ff} + \eta_K K_{ff}) \cdot \phi_i \cdot \dot{\xi}_i + K_{ff} \phi_i \cdot \xi_i = -K_{fs} U_s - (\eta_K K_{fs}) U_s$$

premultiplicando tale relazione per la ϕ_i^T che corrisponde alla matrice trasposta della matrice agli autovettori, ossia alle forme modali della libera struttura (quindi dei gradi di libertà interni), e assumendo la normalizzazione della massa modale, otteniamo:

$$\ddot{\xi}_i + (2\eta_M I + \eta_K \Lambda) \cdot \dot{\xi}_i + \Lambda \cdot \xi_i = -\phi_i^T \cdot K_{fs} U_s - (\eta_K \cdot \phi_i^T \cdot K_{fs}) U_s$$

All'interno della quale possiamo sostituire le reazioni modali $K_{fs}^T \cdot \phi_i = R$ che possiamo scrivere

come $\phi_i^T \cdot K_{fs} = R^T$ ed ottenere:

$$\ddot{\xi}_i + (2\eta_M I + \eta_K \Lambda) \cdot \dot{\xi}_i + \Lambda \cdot \xi_i = -R^T \cdot U_s - (\eta_K \cdot R^T) U_s$$

La rappresentazione modale dei gradi di libertà interni è corretta quando tutta la base modale è tenuta in conto. Ma nelle applicazioni pratiche, la rappresentazione modale è usata come una tecnica di riduzione del problema e solo gli autovettori associati ai più bassi autovalori sono presi in considerazione. Questo introduce un errore di troncamento modale, che può essere relativamente importante se la risposta strutturale è vicina ai gradi di libertà dei supporti.

Riferimenti

- [1] Basic Dynamic Analysis User's Guide, Siemens 2014
- [2] NX Nastran 10 Quick Reference Guide, Siemens 2014
- [3] Advanced Dynamic Analysis User's Guide, Siemens 2014

Capitolo 5

Confronto numerico-sperimentale: analisi modale

5.1 Analisi modale sperimentale

Lo studio sperimentale delle strutture dinamiche ha sempre fornito un grande contributo alla comprensione e il controllo di diversi fenomeni di natura vibrazionale.

Dalle osservazioni sperimentali è possibile determinare la natura della risposta vibrazionale, verificare i modelli teorici strutturali, predire la risposta strutturale di diversi fenomeni vibrazionali ed identificare le proprietà del materiale sotto l'effetto di un carico dinamico, come lo smorzamento e la resistenza (fatica) strutturale.

I problemi derivanti dalle vibrazioni strutturali costituiscono una delle cause più importanti del non corretto funzionamento di molti prodotti ingegneristici.

Le misure sperimentali possono avvenire su macchine o strutture in funzionamento (condizione operativa) oppure su strutture sulle quali si impone una sollecitazione nota (diversa da quella a cui è sottoposta durante il suo normale funzionamento). Quest'ultimo caso è possibile controllarlo meglio proprio perché la sollecitazione agente sulla struttura è nota.

In generale l'analisi modale è un processo che coinvolge test sperimentali sulle strutture, al fine di individuarne il comportamento dinamico. Come vedremo tale processo conduce alla determinazione di un modello matematico della struttura in grado di descriverne il comportamento vibrazionale.

5.2 Applicazioni dell'analisi modale

Esistono diverse applicazioni dell'analisi modale, ad esempio viene utilizzata per calcolare i modelli matematici che descrivono il comportamento dinamico di strutture che fanno parte di un assemblato strutturale. In tal modo da verificare, e così evitare, l'eventuale insorgere di fenomeni di risonanza tra gli stessi elementi dell'assemblato. L'analisi modale può essere usata per trovare modelli

matematici di previsione della risposta strutturale sotto diversi tipi di sollecitazione e ancora può essere utilizzata per calcolare le forze agenti su una determinata struttura in condizioni operative.

In tale lavoro di tesi l'analisi modale è stata utilizzata per individuare i parametri del materiale del componente di plastica del cover. Tale procedura prevede il confronto del comportamento dinamico della struttura analizzata in termini di modi e frequenze naturali calcolati sperimentalmente, con i modi e le frequenze naturali numeriche ottenute con un modello agli elementi finiti (può essere utilizzato anche un altro metodo numerico o anche una soluzione analitica). I parametri dei materiali individuati sono stati poi utilizzati nelle successive analisi numeriche.

5.3 Analisi modale-Processo

Il processo dell'analisi modale deriva dall'interazione di tre parti:

- Le basi teoriche sulle vibrazioni;
- Misure delle vibrazioni;
- Post-Processing dei dati acquisiti;

Esistono diverse tecniche di misura delle vibrazioni strutturali, ma la tecnica utilizzata in questo lavoro è stata quella dell'impact testing che prevede l'uso di due trasduttori piezoelettrici, un martello che fornisce una sollecitazione impulsiva alla struttura e un accelerometro che misura la vibrazione strutturale. Anche per la fase di post-processing è possibile utilizzare diversi metodi per estrarre i parametri di interesse dalle misurazioni acquisite. Alcuni dei quali lavorano nel dominio del tempo e altri nel dominio della frequenza, quello che abbiamo utilizzato è il metodo dell'esponenziale complesso basato sull'algoritmo di Prony. Nei prossimi paragrafi analizzeremo più in dettaglio le tre parti sui cui si basa il processo di analisi modale, accennando a diverse metodologie e approfondendo quelle utilizzate nel lavoro di Tesi.

5.4 Basi teoriche sulle vibrazioni-matrice delle Funzioni di Risposta in Frequenza

Esistono tre modelli teorici per descrivere un sistema dinamico: Il modello Spaziale, Il modello Modale e il modello basato sulle funzioni di risposta in frequenza (FRF). Capire le loro interconnessioni è fondamentale per comprendere l'analisi modale.

Nel secondo Capitolo abbiamo ampiamente discusso dei primi due modelli. Il primo modello si basa sulle caratteristiche fisiche della struttura, in termini di proprietà di massa, rigidità e smorzamento. Il secondo modello è definito dai modi di vibrare, dalle frequenze naturali e dai relativi fattori di smorzamento modale.

Mentre il terzo modello dipende dalla risposta forzata del sistema dinamico.

Osserviamo come è possibile passare da un modello all'altro nel caso di un sistema dinamico forzato con smorzamento di tipo viscoso a più gradi di libertà.

L'equazione del moto forzato e smorzato espressa attraverso le proprietà fisiche è:

$$[A]\{\ddot{q}(t)\} + [B]\{\dot{q}(t)\} + [C]\{q(t)\} = \{F(t)\}$$

avendo posto:

$[A]$ matrice delle masse

$[B]$ matrice degli smorzamenti

$[C]$ matrice delle rigidità

Le tre matrici hanno dimensione $N \times N$ dove N è il numero di gradi di libertà del sistema dinamico.

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{Bmatrix} \quad \{\dot{q}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{q}(t)\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_N(t) \end{Bmatrix}$$

sono rispettivamente il vettore degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{Bmatrix} \quad \text{vettore delle forze esterne}$$

Considerando che la struttura sia sollecitata in maniera sinusoidale da forze che hanno la stessa frequenza ω ma con diversa ampiezza e fase, possiamo esprimere la forzante generica come:

$$F(t) = \{F\}e^{i\omega t}$$

e quindi possiamo assumere la soluzione generica nella forma:

$$q(t) = \{q\}e^{i\omega t}$$

dove $\{F\}$ e $\{q\}$ sono vettori $N \times 1$ le cui componenti sono dette ampiezze complesse e non sono dipendenti dal tempo.

L'equazione del moto può essere scritta come:

$$\{q\} = ([C] - \omega^2[A] + i\omega[B])^{-1}\{F\}$$

oppure

$$\{q\} = [\alpha(\omega)]\{F\}$$

avendo posto

$$([C] - \omega^2[A] + i\omega[B])^{-1} = [\alpha(\omega)]$$

quindi $[\alpha(\omega)]$ è la matrice $N \times N$ delle funzioni di risposta in frequenza (FRF) e rappresenta il punto cardine del terzo modello attraverso il quale è possibile descrivere il sistema dinamico.

Il generico elemento della matrice $[\alpha(\omega)]$ (definita anche reattanza, rappresenta il rapporto tra lo spostamento e la forza) è possibile esprimerlo come:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left(\frac{X_j}{F_k} \right) \quad F_m = 0 \quad m = 1, N; \neq k$$

Quindi sostituendo gli appropriati valori è possibile determinare gli elementi della matrice $[\alpha(\omega)]$ ad ogni frequenza di interesse, ma l'espressione della matrice delle FRF prevede un'inversione che può diventare un processo oneroso in termini computazionali per sistemi con un gran numero di gradi di libertà.

Per questo e altri motivi si preferisce definire la matrice delle FRF attraverso un'espressione più semplice utilizzando i parametri modali, ossia i modi di vibrare, le frequenze naturali e lo smorzamento modale.

Consideriamo che:

$$([C] - \omega^2[A] + i\omega[B])^{-1} = [\alpha(\omega)]$$

quindi possiamo scrivere anche:

$$([C] - \omega^2[A] + i\omega[B]) = [\alpha(\omega)]^{-1}$$

premultiplichiamo per la matrice degli autovettori trasposta $[\Psi]^T$ e postmultiplichiamo per la matrice degli autovettori $[\Psi]$, otteniamo:

$$[\Psi]^T ([C] - \omega^2[A] + i\omega[B]) [\Psi] = [\Psi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Psi]$$

Ricordando che $[\Psi]^T [K] [\Psi] = k_r$, $[\Psi]^T [M] [\Psi] = m_r$ e $[\Psi]^T [C] [\Psi] = c_r$ sono le matrici generalizzate, rispettivamente, di rigidezza, massa e smorzamento e normalizzando rispetto alla massa, abbiamo che:

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \omega_r^2, \quad [\Psi]^T [M] [\Psi] = 1 \text{ e } [\Psi]^T [C] [\Psi] = 2\nu_r \omega_r$$

attraverso le quali possiamo esprimere la formula precedente come:

$$[(\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega 2\nu_r \omega_r)] = [\Psi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Psi]$$

da cui possiamo scrivere:

$$[\alpha(\omega)] = [\Psi] \left[(\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega 2\nu_r \omega_r) \right]^{-1} [\Psi]^T$$

Tale equazione può essere rappresentata attraverso una sommatoria:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_j^{(r)} \psi_k^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega 2\nu_r \omega_r}$$

oppure:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega 2\nu_r \omega_r} \quad (1)$$

dove r rappresenta il numero di modi di vibrare e il termine $A_{jk}^{(r)}$ è indicato come costante modale o residuo (mentre talvolta la frequenza naturale è indicata come polo).

Tale espressione della matrice delle FRF, ottenuta attraverso l'utilizzo dei parametri modali è molto più semplice dell'espressione contenente le caratteristiche fisiche del sistema.

Ricordiamo che per ottenere l'espressione (1) abbiamo considerato lo smorzamento viscoso come proporzionale alla massa o alla rigidità o ad entrambe le matrici. Quando non consideriamo lo smorzamento viscoso proporzionale, allora l'espressione (1) diviene più complicata, ma dipendente dagli stessi parametri [1], otteniamo (2):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_r \nu_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \nu_r^2})} + \frac{A_{jk}^{*(r)}}{\bar{\omega}_r \nu_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \nu_r^2})} \quad (2)$$

Le espressioni (1) e (2) sono alla base del processo di analisi modale, in quanto connettono le proprietà modali alla risposta strutturale.

5.5 Misure delle vibrazioni

Le ipotesi fondamentali da fare sulla struttura alla base delle acquisizioni per effettuare un'analisi modale sono [2]: la struttura è considerata lineare, cioè la risposta della struttura ad una qualsiasi combinazione di forze, applicate contemporaneamente sulla struttura stessa, è pari alla somma delle singole risposte valutate come se ogni forza agisse singolarmente; la struttura è tempo invariante, questo implica che i parametri da determinare sono costanti; la struttura obbedisce al principio di reciprocità di Maxwell, e cioè se una forza applicata in un punto P genera una data risposta in un punto Q, allora la stessa risposta sarà causata in P dalla stessa forza applicata in Q; la struttura è

osservabile, ovvero l'insieme di misure input-output è tale da contenere informazioni sufficienti per descrivere in maniera adeguata il comportamento dell'intera struttura.

Il processo di acquisizione delle FRF sperimentali comprende le seguenti fasi:

- 1) costruzione del wireframe della struttura, ossia la schematizzazione della struttura attraverso una serie di punti sui quali sono effettuate le misure
- 2) scelta delle condizioni di vincolo
- 3) eccitazione della struttura (ad esempio attraverso un martello strumentato) e misura della risposta vibratoria del sistema attraverso l'accelerometro;

Quindi in primo luogo è necessario schematizzare la struttura in esame con una serie di punti, opportunamente scelti, al fine di creare un modello ("wireframe"), sui cui punti sono acquisite le FRF.

Siccome la risposta del sistema meccanico è influenzata dall'interazione con i vincoli, è opportuno vincolare l'oggetto da analizzare in modo da rendere facilmente individuabili ed isolabili dalla risposta del sistema i contributi derivanti dall'interazione tra sistema in esame e i vincoli. Di solito si fa riferimento a due configurazioni limite: configurazione free e configurazione grounded.

Tipiche tecniche di montaggio free consistono nel sospendere tramite una o più molle (meglio se relativamente lunghe) il componente in esame. Un'altra analoga soluzione è quella di appoggiare la struttura su una sede costituita da materiale estremamente cedevole [3] (come ad esempio gommapiuma o un letto di molle) (Fig.1).

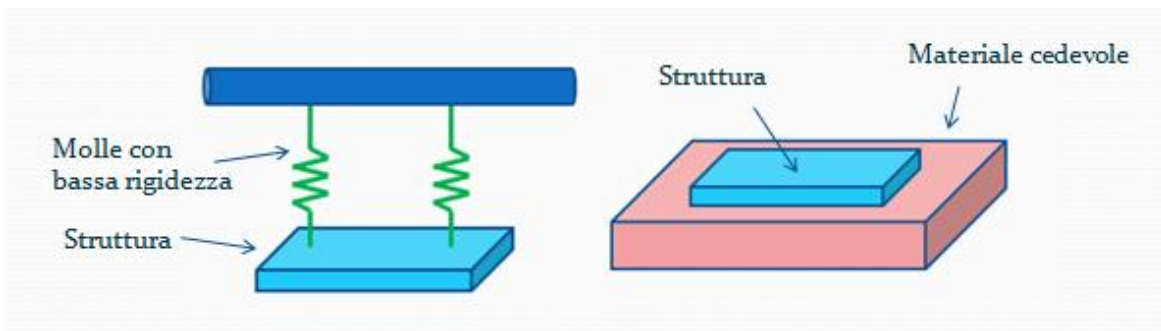


Fig.1 Configurazione di montaggio di tipo free con molle (a sinistra) e con materiale cedevole (a destra)

In queste condizioni la struttura presenta dei modi rigidi determinati solamente dalle sue caratteristiche di massa e rigidità ma siccome la condizione di assenza di vincolo è approssimata, le frequenze naturali dei modi sono diverse da 0. (Teoricamente ogni struttura possiede sei modi rigidi ed ognuno di questi ha una frequenza naturale a 0 Hz). Per realizzare tale condizione le molle utilizzate per la configurazione free devono avere una bassa rigidità in modo tale da ottenere bassi

valori delle frequenze dei modi rigidi rispetto ai successivi, per i quali la struttura incomincia a deformarsi. Bassi valori significa che la frequenza più alta relativa ad uno dei modi rigidi deve essere tra il 10 e il 20% inferiore alla prima frequenza flessionale.

Il montaggio si definisce grounded quando il vincolo realizzato approssima la condizione di incastro perfetto: il vincolo è talmente rigido che eventuali frequenze introdotte dalla sua cedevolezza risultano ben al di sopra di quelle di interesse. Evidentemente il vincolo grounded prescelto deve essere tale da non compromettere la mobilità del componente stesso, almeno per quanto riguarda il campo di frequenze di interesse, altrimenti i risultati sarebbero inattendibili. Si tenga presente, inoltre, che nessun vincolo grounded reale può effettivamente realizzare un incastro perfetto: esisterà sempre una frequenza oltre la quale il vincolo non può essere considerato come rigido. L'importante è che tale campo di frequenze cada ben al di sopra di quello di interesse.

Quando si effettua un'analisi modale sperimentale, come in ogni tipo di test sperimentale, è necessario utilizzare la giusta strumentazione. In particolare per questo genere di analisi, le caratteristiche geometriche ed il peso della struttura in esame determinano sia il tipo di eccitazione che il tipo di strumentazione, ed entrambe condizionano la tecnica di analisi.

La struttura viene eccitata mediante opportune attrezzature in grado di generare forze o imporre spostamenti secondo un prefissato andamento nel tempo. I metodi più comuni per eccitare la struttura sono attraverso lo shaker, che fornisce un'eccitazione sinusoidale nota, e il martello strumentato.

Il martello strumentato è uno strumento di misura che produce vibrazioni di breve durata (impulsive) colpendo le strutture in determinati punti. Il martello è dotato di un sensore piezoelettrico che produce un segnale proporzionale alla forza d'impatto.

La punta del martello, in base al tipo di frequenze che abbiamo intenzione di eccitare, può essere fatta di diverso materiale. Una punta costruita con gomma morbida è l'ideale per stimolare le basse frequenze, al contrario, per le alte frequenze è più idonea una punta in metallo.

I martelli possono essere costruiti con masse variabili da pochi grammi, per piccole strutture, fino ad alcuni chili, per strutture imponenti. I campi di frequenza interessati dall'eccitazione variano da 0 a 5000 Hz per i martelli più piccoli, e da 0 a 10000 Hz per quelli più grandi. La combinazione costituita dalla testa e dalla massa del martello consente di trasferire energia alla struttura nel campo di frequenza di interesse.

Il martello ad impatto, che rappresenta lo strumento più comune per generare eccitazioni impulsive, presenta vantaggi e svantaggi. Per quanto concerne i pregi, occorre rilevare che lo strumento è relativamente poco costoso. Per contro, non è semplice fornire un impulso manualmente, durante la martellata può capitare di colpire due volte la struttura oppure colpire la struttura secondo un asse

con direzione diversa rispetto a quella del grado di libertà da analizzare. Per tali motivi per ottenere un risultato più affidabile e meno affetto da questi errori di misura (comuni) si esegue più di una martellata per una stessa misurazione (sul medesimo punto) in modo da considerare la FRF media delle martellate multiple date alla struttura.

Tecniche più recenti per la sollecitazione strutturale riguardano dispositivi elettromagnetici in grado di sollecitare la struttura evitando il contatto.

Mentre la risposta del sistema in termini di vibrazione viene acquisita mediante degli accelerometri monoassiali o triassiali dipendentemente dai gradi di libertà della struttura da esaminare. L'accelerometro può essere fissato alla strutture attraverso una calamita (se le strutture sono metalliche) una vite, un sottile strato di cera e anche a mano.

La tecnica di acquisizione che utilizza il martello e l'accelerometro è chiamata Impact Testing: la struttura è eccitata con una forza impulsiva applicata sequenzialmente nei diversi punti che costituiscono il wireframe, e la risposta è misurata in un punto fisso. In alternativa, è possibile eccitare il sistema agendo sempre nel medesimo punto e rilevando la risposta in tutti gli altri punti del "wireframe". Nel primo caso si parla di Impact testing roving hammer, nel secondo caso si parla di Impact testing roving accelerometer. Nel seguente lavoro è stata utilizzata la prima tecnica di acquisizione.

5.6 Post-Processing dei dati acquisiti

L'obiettivo delle misure vibrazionali sulla struttura è ottenere una riga o una colonna della matrice delle FRF dalla quale si estraggono i parametri modali di interesse, modi di vibrare, frequenze naturali e smorzamento.

Partendo dai metodi di estrazioni più semplici verso quelli più complessi abbiamo i cosiddetti metodi curve-fitting, dapprima applicati ad una sola parte di una singola FRF, poi all'intera FRF e poi all'intero set di FRF misurate.

In ogni caso il processo generale è sempre lo stesso: trovare i coefficienti in un'espressione teorica della FRF che approssima meglio i dati sperimentali (rigorosamente l'analisi modale è proprio la definizione del processo di estrazione dei parametri modali). L'obiettivo è raggiunto il più delle volte riferendosi alle espressioni teoriche della FRF (1) e (2) lavorando nel dominio della frequenza, ma come vedremo esistono anche altri metodi che invece lavorano nel dominio del tempo e che si basano sulle cosiddette Impulse Response Function (IRF) che rappresentano le trasformate di Fourier inverse della FRF.

E importante a questo punto classificare i metodi di analisi modale per fornire un quadro d'insieme di tutte le metodologie implementabili.

Una prima classificazione è fatta in base al dominio nel quale l'analisi è eseguita:

- dominio della frequenza, o
- dominio del tempo

Poi l'analisi può estrarre un singolo modo alla volta e allora si parla di metodi SDOF (Single Degree Of Freedom) oppure più modi simultaneamente e si parla di MDOF (Multi- Degree Of Freedom).

Un'ulteriore classificazione riguarda come le FRF vengono misurate, esistono tre tipologie diverse:

- SISO (Single-input Single-output) quindi per un singolo input è misurato un singolo output
- SIMO (Single input Multi-output) quindi è applicato sempre un singolo input ma la risposta strutturale è misurata simultaneamente in più punti della struttura
- MIMO (Multi-input Multi-output) in tal caso sia le risposte che le sollecitazioni strutturali sono fornite in più punti della struttura simultaneamente.

Ancora l'analisi modale può essere divisa in altre due categorie in base alla metodologia di estrazione dei parametri modali, ci sono metodi che analizzano un FRF alla volta e quelli che analizzano più FRF insieme. I primi sono detti single-FRF e i secondi multi-FRF.

Menzioniamo alcuni metodi come il pick picking e il circle fitting che fanno parte dei metodi SDOF (single degree of freedom) e che lavorano nel dominio della frequenza e il metodo dell'esponenziale complesso, un metodo MDOF che lavora nel dominio del tempo. Quest'ultimo è il metodo utilizzato nel lavoro di Tesi, e nei prossimi paragrafi analizzeremo l'algoritmo sul quale si basa questo metodo, l'algoritmo di Prony [3].

5.7 Il Metodo dell'esponenziale complesso

Il metodo di estrazione dei parametri modali e quindi il processo di analisi modale può avvenire nel dominio del tempo. Uno dei metodi più utilizzati che lavora nel dominio del tempo è il metodo dell'esponenziale complesso basato sull'algoritmo di Prony, matematico francese del 18° secolo.

Il metodo conosciuto come esponenziale complesso permette un'analisi dei dati discreti ottenuti da una trasformata di Fourier inversa della FRF. La cosiddetta IRF (Funzione di Risposta all'Impulso).

Il concetto di base è che ogni IRF può essere espressa da una serie di componenti esponenziali complessi, ed ognuna delle quali (componenti) contiene l'autovalore e l'autovettore di un modo.

Tale metodo è molto utile quando le prime frequenze di risonanza strutturali accadono alle basse frequenze.

5.8 Il metodo esponenziale complesso per la singola FRF-MDOF nel dominio del tempo

Il nostro punto di partenza è l'espressione della matrice della FRF (espressa intermini di reattanza) di un sistema a più gradi di libertà, avendo considerato uno smorzamento viscoso non proporzionale. Bisogna sottolineare che l'inversione della FRF per ottenere la IRF è limitata all'utilizzo dello smorzamento viscoso. Considerando l'espressione per lo smorzamento non proporzionale (2):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_r v_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - v_r^2})} + \frac{A_{jk}^{*(r)}}{\bar{\omega}_r v_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - v_r^2})}$$

oppure

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_r v_r + i(\omega - \omega_r')}$$

dove $\omega_r' = \omega_r \sqrt{1 - v^2}$ e $\omega_{r+N}' = -\omega_r'$ e $A_{jk}^{(r+N)} = A_{jk}^{*(r)}$

La IRF corrispondente, ottenuta calcolando la trasformata di Fourier inversa è uguale a:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_{jk}^{(r)} e^{s_r t} \quad \text{dove } s_r = -\omega_r v_r + i\omega_r' \quad (3)$$

I dati discreti di FRF sono acquisiti hanno un certo step frequenziale Δf dipendente dalla frequenza di acquisizione utilizzata, quindi la risultante IRF è descritta da dati discreti che hanno uno step temporale dipendente dallo step frequenziale della FRF, e tale intervallo è uguale a: $\Delta t = 1/\Delta f$.

Quindi avremo un certo set di dati discreti che può essere definito come:

$$h_0, h_1, h_2, \dots, h_q = h(0), h(\Delta t), h(2\Delta t), \dots, h(q\Delta t)$$

Da questo punto in poi è conveniente omettere il pedice $_{jk}$ e usare una notazione abbreviata, definiamo:

$$A_{jk}^{(r)} \rightarrow A^{(r)} \quad \text{e} \quad e^{s_r \Delta t} \rightarrow V_r$$

Cosicché il generico elemento dell'equazione (3) diventa:

$$h_l = \sum_{r=1}^{2N} A^{(r)} V_r$$

considerando l'intero set di campioni q, abbiamo:

$$\begin{aligned}
h_0 &= A_1 + A_2 + \dots + A_{2N} \\
h_1 &= V_1 A_1 + V_2 A_2 + \dots + V_{2N} A_{2N} \\
h_2 &= V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 + \dots + V_{2N}^2 A_{2N} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
h_q &= V_1^q A_1 + V_2^q A_2 + \dots + V_{2N}^q A_{2N}
\end{aligned}$$

A patto che il numero di campioni q sia maggiore di $4N$, tale equazione può essere usata per definire un problema agli autovalori, la cui soluzione conduce alle frequenze naturali contenuti nei parametri V_1, V_2, \dots utilizzando l'algorithmo di Prony.

Ora moltiplichiamo il precedente sistema per un coefficiente β_i , otteniamo:

$$\begin{aligned}
\beta_0 h_0 &= \beta_0 A_1 + \beta_0 A_2 + \dots + \beta_0 A_{2N} \\
\beta_1 h_1 &= \beta_1 V_1 A_1 + \beta_1 V_2 A_2 + \dots + \beta_1 V_{2N} A_{2N} \\
\beta_2 h_2 &= \beta_2 V_1^2 A_1 + \beta_2 V_2^2 A_2 + \dots + \beta_2 V_{2N}^2 A_{2N} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\beta_q h_q &= \beta_q V_1^q A_1 + \beta_q V_2^q A_2 + \dots + \beta_q V_{2N}^q A_{2N}
\end{aligned}$$

possiamo sintetizzare formalmente il precedente sistema come:

$$\sum_{i=0}^q \beta_i h_i = \sum_{j=1}^{2N} \left(A_j \sum_{i=0}^q \beta_i V_j^i \right) \quad (4)$$

I coefficienti β_i sono i coefficienti del polinomio:

$$\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \dots + \beta_q V^q = 0$$

le cui radici sono V_1, V_1, \dots, V_q . Quindi bisogna cercare i coefficienti β_i al fine di determinare le radici V_1, V_1, \dots, V_q , ossia le frequenze naturali.

Ricordiamo che q è il numero di campioni provenienti dalla IRF, mentre N è il numero di gradi di libertà del sistema strutturale (costituente N coppie coniugate di modi), è conveniente considerare $q=2N$, da cui possiamo ricavare dall'equazione (4):

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i V_r^i = 0 \text{ per } r = 1, 2N$$

e

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i h_i = 0$$

L'ultima equazione può essere riorganizzata come:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \beta_i h_i = -h_{2N} \text{ settando } \beta_{2N} = 1$$

che potrebbe essere riscritta come:

$$\left\{ \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{matrix} = -h_{2N}$$

Ora ripetiamo l'intero processo utilizzando un altro set di dati discreti della IRF, potremmo scegliere un set di nuovi dati che si sovrapponga al primo set di dati, ad esempio considerando tutti i precedenti tranne uno (il primo h_0), otteniamo:

$$\left\{ \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{matrix} = -h_{2N+1}$$

Altre applicazioni della stessa procedura conducono alla definizione di un sistema di $2N$ equazioni:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{bmatrix}$$

oppure

$$[h]_{2N \times 2N} \{\beta\}_{2N \times 1} = -\{\tilde{h}\}_{2N \times 1}$$

dalla quale è possibile ricavare i coefficienti β_i :

$$\{\beta\} = -[h]^{-1} \{\tilde{h}\}$$

Con tali coefficienti possiamo trovare la soluzione dell'equazione $\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \dots + \beta_q V^q = 0$ e calcolare i valori V_1, V_1, \dots, V_{2N} , dai quali calcolare le frequenze naturali usando la relazione:

$$V_r \rightarrow e^{s_r \Delta t}$$

Le costanti modali o Residui possono essere calcolate attraverso il sistema:

$$\begin{aligned} h_0 &= A_1 + A_2 + \dots + A_{2N} \\ h_1 &= V_1 A_1 + V_2 A_2 + \dots + V_{2N} A_{2N} \\ h_2 &= V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 + \dots + V_{2N}^2 A_{2N} \\ &\vdots \\ h_q &= V_1^q A_1 + V_2^q A_2 + \dots + V_{2N}^q A_{2N} \end{aligned}$$

e rielaborandolo come:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_1 & V_2 & \dots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & \dots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & \dots & V_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{Bmatrix}$$

oppure

$$[V]\{A\} = \{h\}$$

Il metodo dell'esponenziale complesso è usato generalmente indicando inizialmente una stima del numero dei gradi di libertà (numero dei modi) per considerare un valore $2N$ e poter applicare la metodologia. Applicando la procedura esaminata calcoliamo i valori delle frequenze di risonanza, (o poli) dei residui e dello smorzamento e calcoliamo la funzione reattanza:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_r \nu_r + i(\omega - \omega_r')}$$

Dopodiché viene calcolato l'errore tra la curva ricostruita e quella sperimentale.

La procedura può essere iterativa, nel senso che possiamo considerare altre stime dei gradi di libertà in modo tale da ridurre l'errore tra la curva sperimentale e quella ricostruita attraverso le IRF.

Praticamente il metodo è impiegato nel seguente modo: è fatta un'iniziale stima dei gradi di libertà della struttura (o numero di modi). Quindi viene utilizzato il metodo dell'esponenziale complesso per ricostruire la FRF e quindi confrontata con quella misurata. A questo punto è calcolato l'errore tra le due curve. L'intera procedura è quindi ripetuta assumendo diversi numeri dei gradi di libertà e l'errore ancora calcolato. Un diagramma dell'errore tra le curve e i gradi di libertà produrrà un risultato esprimibile attraverso il digramma in Fig.2 (da riferimento [1]).

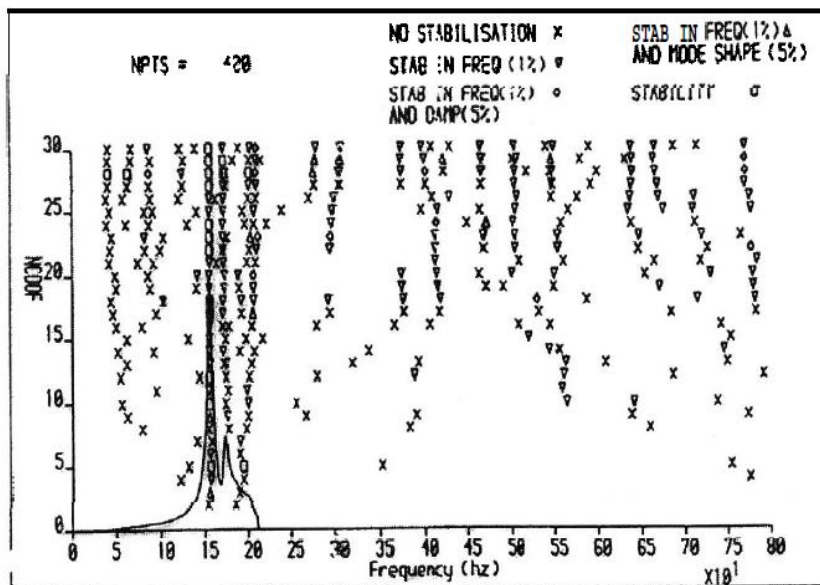


Fig.2 Diagramma di stabilizzazione

Nel quale osserviamo che nell'intervallo dei gradi di libertà considerato nell'intervallo frequenziale che vogliamo esaminare abbiamo delle soluzioni che possono essere considerate stabili e altre che non lo sono. Questo perché quando stimiamo un numero di modi maggiore di quelli che effettivamente sono presenti nel range frequenziale analizzato, verranno calcolati dei modi non "fisici" ma "computazionali" derivanti dalla natura stessa del metodo. Tali modi sono però identificati poiché hanno dei valori delle basse costanti modali e degli alti smorzamenti.

5.9 Misure sperimentali sul componente in plastica del cover

L'oggetto sul quale è stata effettuata l'analisi modale sperimentale è il componente in plastica del cover del blocco motore (Fig. 5 Cap. I). Sia la fase di acquisizione che di post-processing è stata effettuata tramite il software Testlab.

I risultati dell'analisi sono stati utilizzati per individuare i parametri dei materiali del componente di plastica attraverso un confronto con un modello agli elementi finiti in termini di modi di vibrare e frequenze di risonanza.

Le misure sperimentali sono state effettuate all'interno del "Laboratorio di vibrazioni" dell'Istituto Motori del Consiglio Nazionale delle Ricerche di Napoli.

Ripercorrendo le fasi discusse per l'acquisizione delle misure, dapprima è stato realizzato il wireframe della struttura Fig.3.

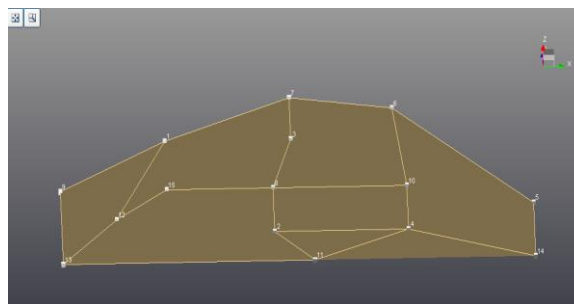


Fig.3 Wireframe della struttura

Il wireframe è la schematizzazione della struttura in una serie di punti rappresentanti l'oggetto fisico, le cui coordinate sono misurate in relazione ad un punto, opportunamente selezionato, che funge da riferimento. Dopodiché le coordinate dei punti sono state importate in Testlab e generate linee e superfici che permettono una migliore visualizzazione della struttura, e come vedremo risulteranno molto utili anche nella visualizzazione dei modi di vibrare. Tali punti individuati sulla

struttura sono i punti sui quali sono calcolate le FRF. In Fig.4 possiamo osservare il componente in plastica del cover sul quale abbiamo indicato i punti in rosso sui quali sono state acquisite le FRF.

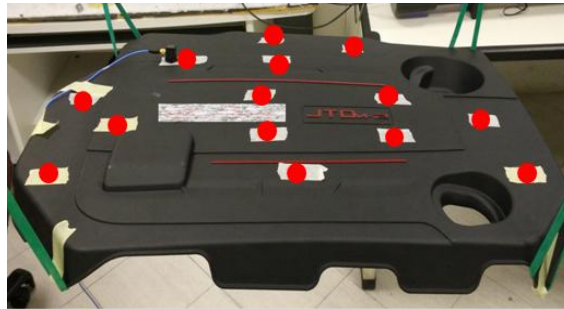


Fig.4 Punti di acquisizione delle FRF

La prova è stata eseguita con condizioni di vincolo di tipo free, la struttura è stata sospesa attraverso delle molle di bassa rigidità indicate in Fig.5.

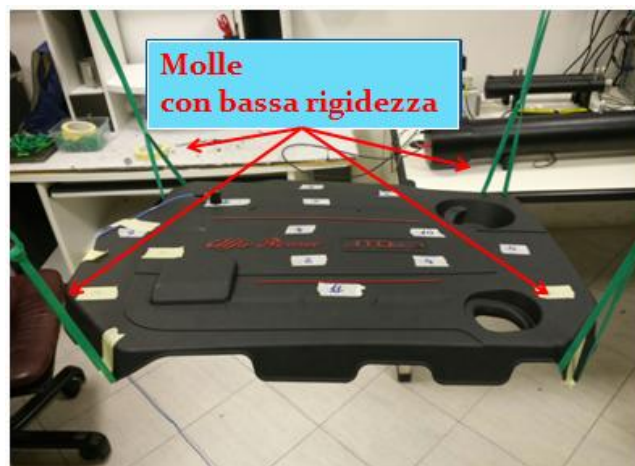


Fig.5 Condizioni di vincolo free con molle di bassa rigidità

Il test sperimentale scelto per l'analisi è stato l'impact test roving hammer per la quale l'accelerometro è fissato su di un nodo tramite un sottile strato di cera e il martello si muove (roving) sugli altri punti del wireframe. Quindi in Testlab sono stati settati i due canali di acquisizione relativi ai due traduttori utilizzati e il nodo di riferimento dell'accelerometro.

Nel caso specifico, l'accelerometro è stato fissato sul nodo 1 e gli altri 14 punti sono stati sollecitati sequenzialmente dal martello, Fig.6 e Fig.7.

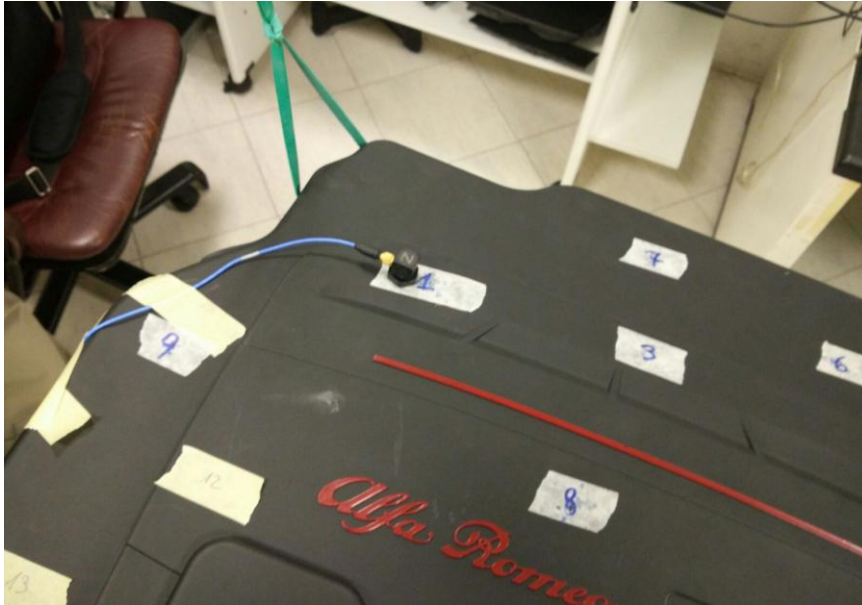


Fig.6 accelerometro fissato sul nodo 1



Fig. 7 Misure sequenziali del martello sul sistema discretizzato per mezzo di 15 punti

Entrambi i trasduttori utilizzati sono di tipo ICP (Integrated Circuit Piezoelectric) dotati di amplificatore di carica interno, in modo tale da mantenere il voltaggio in uscita misurabile per il tempo necessario all'acquisizione. Per completare la configurazione relativa ai trasduttori utilizzati sono state inserite le sensibilità. La sensibilità del martello è 0.23 mV/N mentre per l'accelerometro, essendo un accelerometro triassiale, abbiamo tre sensibilità relative alle tre direzioni x,y,z 102.5 mV/g , 99.7 mV/g e 100.8 mV/g rispettivamente per x,y,z.

La Fig.8 riassume il layout sperimentale: il martello strumentato e l'accelerometro triassiale sono collegati ad un sistema di acquisizione dati (SCADAS) dotato di FFT analyzer per stimare le FRF,

per le quali ovviamente l'input è rappresentato dal martello e l'output dal segnale accelerometrico [4]. Lo SCADAS a sua volta è collegato ad un PC sul quale è installato il programma TestLab.

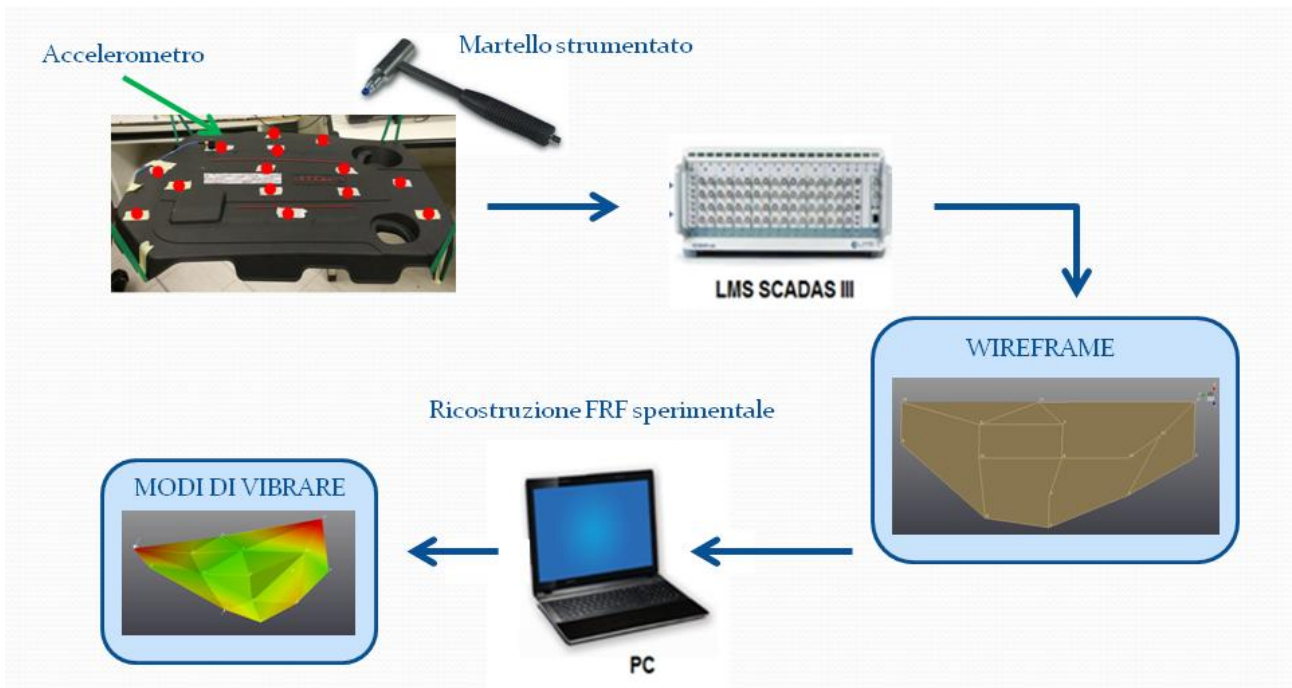


Fig.8 Layout Sperimentale

Quindi una volta definito il layout sperimentale è stato possibile acquisire le FRF nei punti di misura. Sia la fase di acquisizione che di post-processing dei dati acquisiti è stata eseguita attraverso il software Testlab.

La fase di post-processing è stata eseguita fino a 600 Hz utilizzando il metodo dell'esponenziale complesso, da cui otteniamo il diagramma di stabilizzazione in Fig.9.

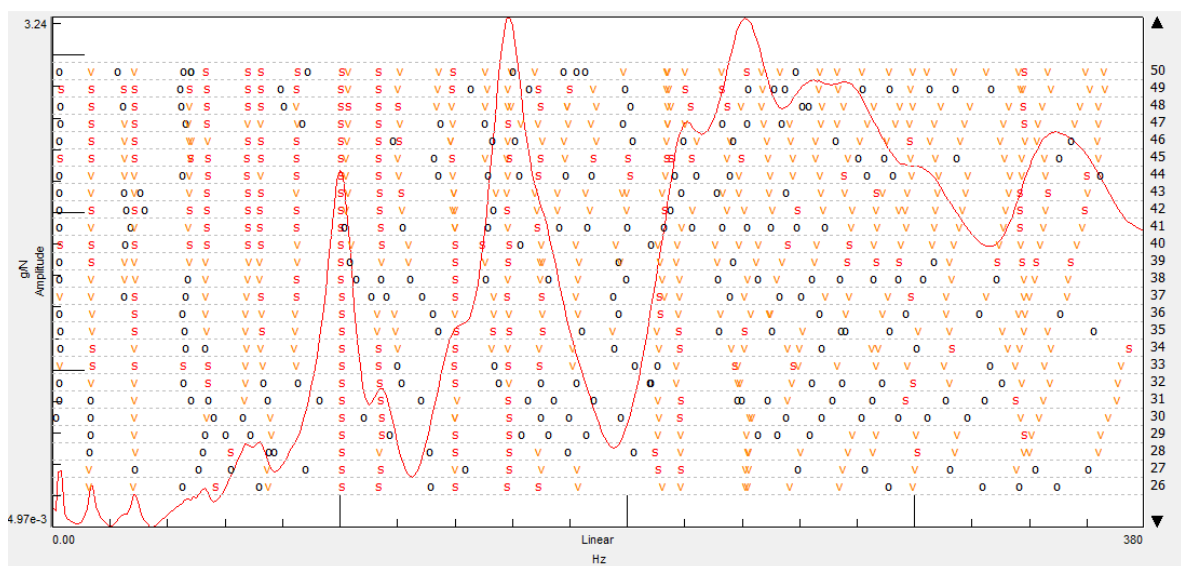


Fig.9 Diagramma di stabilizzazione Testlab

Nel diagramma di stabilizzazione è raffigurata una singola FRF, utilizzata come riferimento per visualizzare i picchi. Tali picchi (non tutti) potrebbero corrispondere a probabili modi di vibrare, quindi tale riferimento risulta utile per il processo di identificazione dei parametri modali. L'asse verticale a sinistra nel diagramma indica i valori di ampiezza della FRF, mentre l'asse a destra indica il numero di modi considerato, ossia 50, nell'intervallo frequenziale inizialmente considerato 0-380 Hz. Dopodiché analoghi processi sono effettuati per esportare i parametri modali fino a 600 Hz.

Per quel che riguarda il processo di identificazione, dal Diagramma sono estratte le soluzioni stabili indicate con la lettera s in corrispondenza di alcuni picchi della FRF, dalle quali è possibile estrarre i modi di vibrare le frequenze naturali e gli smorzamenti.

La tabella 1 mostra i valori delle frequenze e degli smorzamenti estratti per i primi 7 modi del sistema analizzato.

Modo	Frequenza Hz	Smorzamento %
1	13.6	4.03
2	28.3	4.57
3	47.6	5.15
4	54.0	3.98
5	67.9	4.18
6	85.5	4.2
7	92	4.5

Tabella 1 Frequenze naturali e smorzamento modale

I modi di vibrare sono mostrati successivamente, nel paragrafo relativo ai confronti.

5.10 Analisi modale numerica

L'analisi modale è stata sviluppata utilizzando il software FEMAP come interfaccia grafica e il software Nastran come solutore. In FEMAP è stata importata la geometria CAD rappresentante il

componente in plastica. La geometria è stata notevolmente semplificata attraverso un software commerciale CAD, CATIA V5. In Fig.10 è possibile osservare, il componente in Nylon.

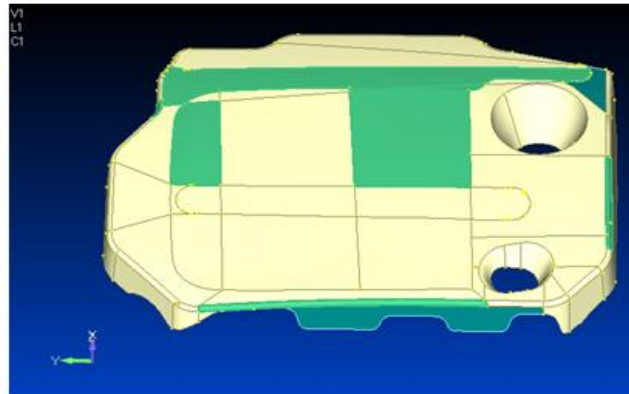


Fig.10 Componente di Nylon

Le zone in verde rappresentano delle semplificazioni automatiche realizzate dal software FEMAP durante l'importazione del CAD. In tali regioni la distanza delle superfici di separazione è tale che il software semplifica la geometria, unendo le superfici. Il passo successivo riguarda la realizzazione della mesh, ovvero la griglia che rappresenta gli elementi finiti. Per tale componente è stata effettuata una mesh di superficie con elementi sia triangolari che quadrangolari. Tale geometria possiede uno spessore molto minore rispetto alle altre due dimensioni, per cui trascuriamo lo stato tensionale nello spessore del componente e lo modelliamo come una piastra. FEMAP è dotato di numerose operazioni per realizzare e affinare la mesh sia di superficie che di solidi. In modo tale che i parametri canonici di controllo della mesh come aspect ratio, warp angle rientrino nei valori di default. La dimensione massima per gli elementi di superficie è stata scelta in modo tale da ottenere risultati con un grado di approssimazione soddisfacente fino a 600 Hz. In Fig.11 è mostrata la mesh del componente di plastica. La mesh è costituita da 285 elementi triangolari e 5099 elementi quadrangolari.

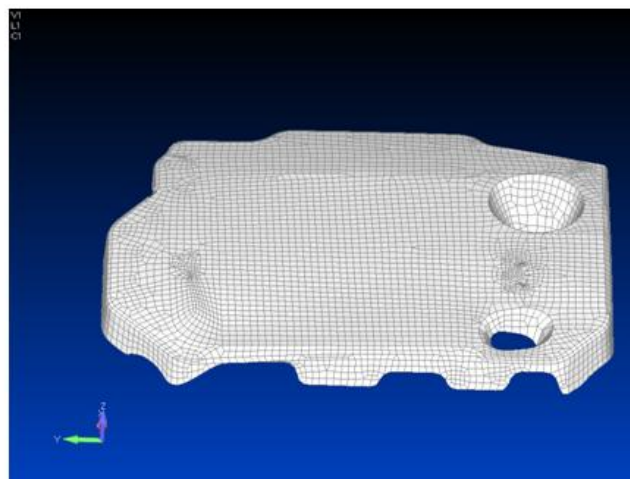


Fig.11 Mesh del componente di Nylon

Una volta realizzato il modello agli elementi finiti è stato definito lo spessore della struttura di 3 mm e la tipologia di materiale. Il materiale è stato modellato come elastico lineare isotropo e omogeneo, quindi definito da due parametri, modulo di Young e coefficiente di Poisson. Siccome l'analisi è di tipo dinamico abbiamo bisogno anche della densità per il computo delle forze di inerzia. La matrice del materiale del componente di plastica del cover è una particolare tipologia di nylon, il nylon PA 6.6. E composto da 2 monomeri che contengono entrambi 6 atomi di carbonio, da cui proviene il nome di nylon 6.6. In tabella 2 sono mostrati gli intervalli nei quali ricadono i parametri del Nylon PA 6.6.

Materiale	Nylon PA 6.6
Modulo di Young [N/m ²]	1·10 ⁹ -5·10 ⁹
Densità [kg/m ³]	900
Coefficiente di Poisson	0,3-0,4

Tabella 2 Intervalli dei parametri del materiale Nylon PA 6.6

Tali variazioni dei parametri dipendono dalle fibre di vetro che sono inserite per conferire maggiore rigidità al materiale e alle lavorazioni attraverso le quali l'oggetto è realizzato, mentre la densità è stata misurata pesando l'oggetto e calcolandone il volume.

A questo punto il modello FE è stato correttamente implementato ed è stato possibile avviare analisi modali iterative variando i parametri del materiale (Modulo di Young e coefficiente di Poisson) secondo gli intervalli definiti in tabella. In modo tale è stato possibile individuare quelli per i quali si raggiunge il miglior confronto con i dati sperimentali in termini di modi e frequenze di risonanza. L'analisi numerica è stata svolta dal solutore Nastran.exe che risolve attraverso un modello agli elementi finiti l'equazione del moto libero non smorzato (5), da cui ricaviamo modi di vibrare e frequenze naturali.

$$[A]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} = 0 \quad (5)$$

I parametri dei materiali che meglio approssimano i risultati sperimentali sono mostrati in tabella 3.

Materiale	Nylon PA 6.6
Modulo di Young [N/m ²]	3,5·10 ⁹
Densità [kg/m ³]	900
Coefficiente di Poisson	0,35

Tabella 3 Parametri del materiale Nylon PA 6.6

Il numero dei modi totali estratti dal sistema fino a 600 Hz è 62, da cui escludiamo i primi 6 modi rigidi le cui relative frequenze normali accadono a frequenze inferiore ad 1 Hz.

Nella tabella 4 vengono riportate tutte le frequenze normali del sistema dei primi 7 modi.

Modo	Frequenza [Hz]
1	13.42
2	28.23
3	45.0
4	58.34
5	70.84
6	87,6
7	90

Tabella 4 Valori delle frequenze normali

I modi di vibrare sono mostrati successivamente, nel paragrafo relativo ai confronti.

5.11 Confronto Numerico-Sperimentale

A questo punto possiamo confrontare le forme modali e i valori delle frequenze dall'analisi numerica modale con quelli ricavati dalle prove sperimentali. In tabella 5 c'è il confronto in termini di frequenze di risonanza.

Modo	Frequenza numerica [Hz]	Frequenza sperimentale [Hz]
1	13.42	13.6
2	28.23	28.3
3	45.0	47.6
4	58.34	54.0
5	70.84	67.9

6	87,6	85.5
7	90	92

Tabella 5 Frequenze normali numeriche e sperimentali

Mentre per quel che riguarda i modi, per visualizzare al meglio il confronto delle forme modali, in Fig. 12 è evidenziata l'area della struttura coperta dalle misure sperimentali.

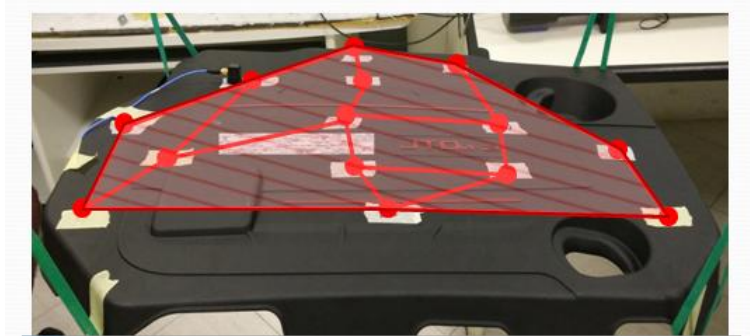


Fig.12 Area della struttura coperta dalle misure sperimentali

I successivi confronti delle forme modali numerici e sperimentali sono mostrati isolando la stessa area anche nel modello numerico agli elementi finiti. Nelle Fig.13 a)-g) ci sono le prime 7 forme modali, partendo da sinistra verso destra, osserviamo la forma modale sperimentale, quella numerica isolando la stessa area sperimentale e quella completa numerica. In tal modo è possibile evidenziare con maggiore chiarezza le forme delle deformate numeriche e sperimentale.

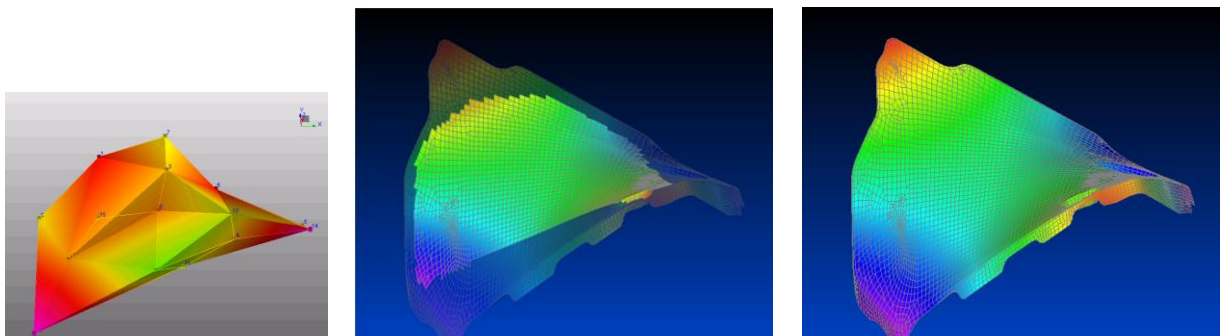


Fig.13 a) Mod01

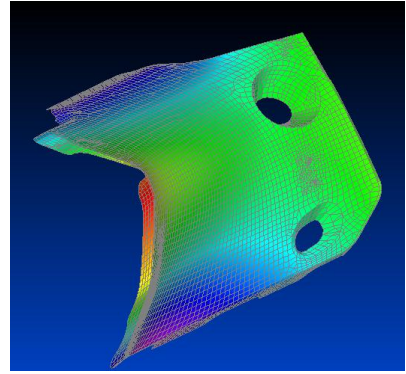
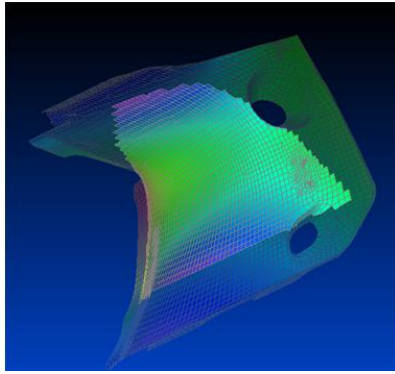
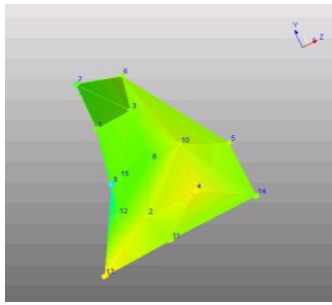


Fig.13 b) Modo2

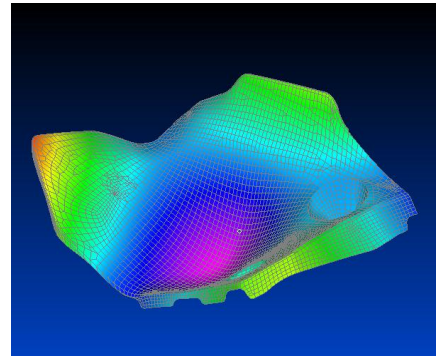
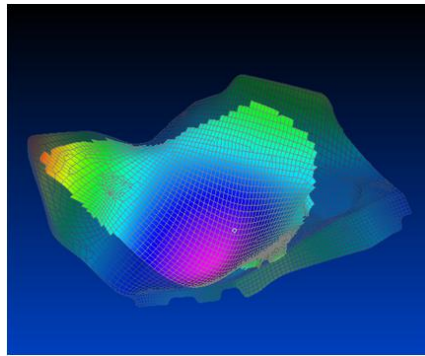
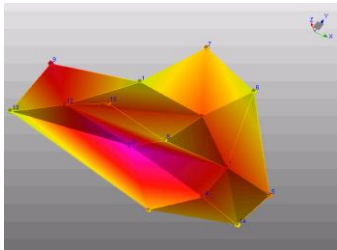


Fig.13 c) Modo3

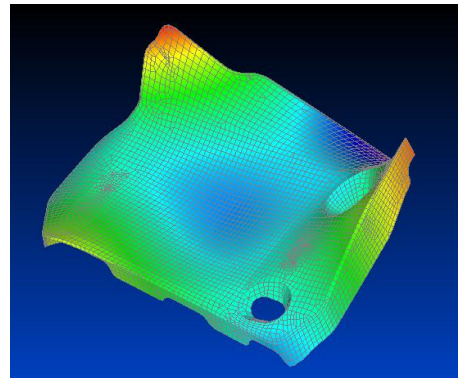
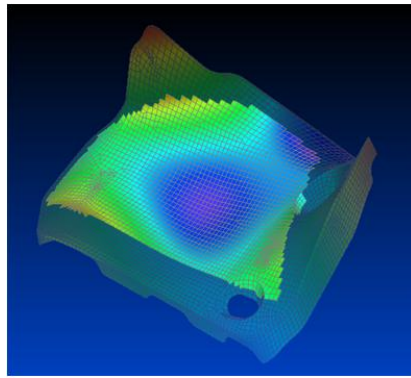
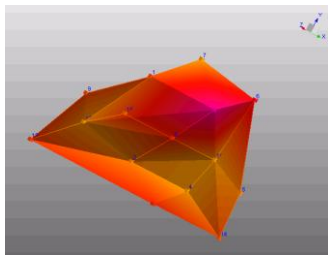


Fig.13 d) Modo4

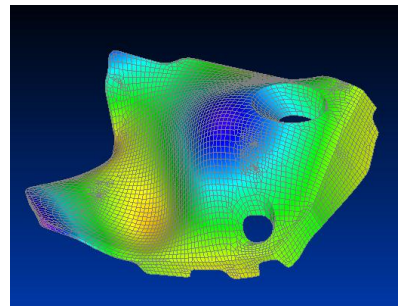
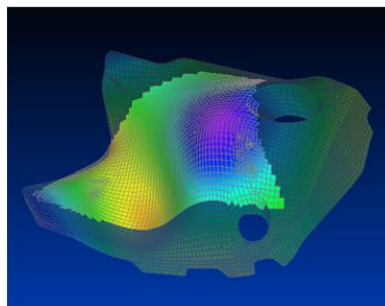
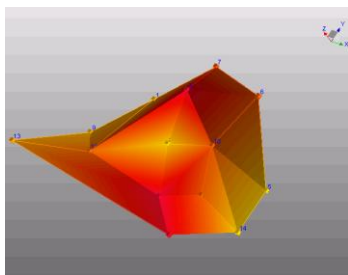


Fig.13 e) Modo5

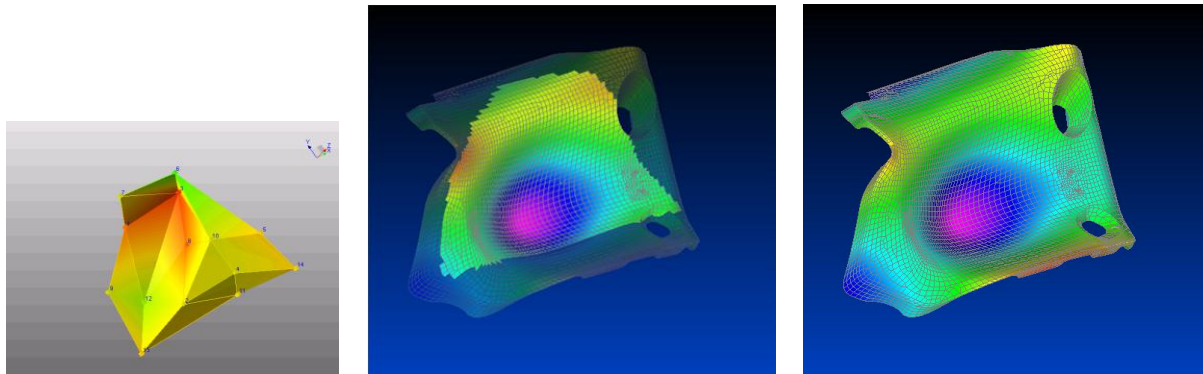


Fig.13 f) Modo6

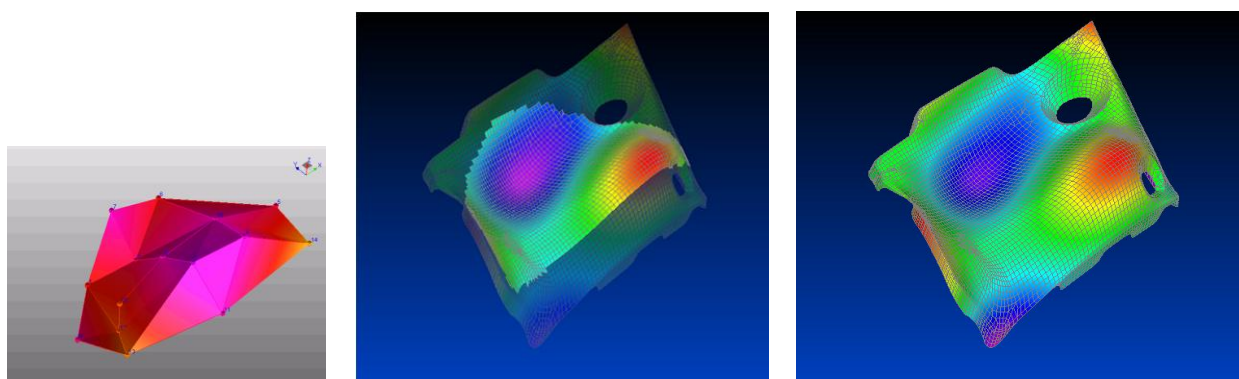


Fig.13 g) Modo7

Osserviamo che il primo modo è il classico modo cosiddetto a "farfalla" tipico delle strutture simili ad un pannello con la linea nodale a forma di croce al centro. Il secondo modo prevede la flessione del bordo in basso e il alto in fase e nel terzo è evidente il lobo al centro della struttura. Via via le forme modali sono più complesse ma la deformata sperimentale ne riesce ad approssimare bene la forma numerica.

Quindi dal confronto sia in termini di forme modali che in termini di valori delle frequenze normali si evince il buon accordo tra i risultati sperimentali e numerici e la conseguente identificazione dei parametri dei materiali del componente in plastica di Nylon PA 6.6. Tali materiali sono stati poi utilizzati nei successivi modelli numerici di risposta forzata.

Riferimenti

- [1] Ewins, D. J. "Modal testing: theory, practice and application (mechanical engineering research studies: engineering dynamics series)." (2003).
- [2] D. Siano, "Vibro-Acosutic Characterisation of a D.I. Diesel Engine by the use of the Scanning Laser Vibrometer Technique", 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia, 2007
- [3] "Experimental Modal Analysis" Gaetan Kerschen - Jean-Claude Golinval
- [4] P. R. Valletta, M. J. Crocker, "Noise and Vibration Measurements, Handbook of Noise and Vibration Control", Edited by M. J. Crocker, John Wiley & Sons Inc., 2007

Capitolo 6

Costruzione del processo di ottimizzazione in Modefrontier

6.1 Settore di applicazione

Modefrontier si è affermato a livello mondiale come il software per eccellenza nel campo dell'integrazione multi-disciplinare e dell'ottimizzazione multi-obiettivo, potendosi quindi inquadrare nel settore del PIDO (Process Integration and Design Optimization)/MDO (Multi-disciplinary and multi-objective Design Optimization). Nel contesto di un'applicazione ingegneristica, come lo sviluppo del prodotto o l'analisi numerica FEM/CFD tramite strumenti CAD-CAE, Modefrontier è in grado di determinare come le diverse possibili soluzioni progettuali si collocano e si differenziano una rispetto all'altra in funzione delle variabili monitorate. Modefrontier quindi è in grado di ricercare quelle configurazioni che garantiscono il miglioramento delle performance (obiettivi) del sistema investigato e/o il conseguimento delle specifiche prefissate (obiettivi/vincoli). L'utente ha dunque la possibilità di comprendere se la soluzione ottenuta è effettivamente quella di ottimo rispetto alle condizioni al contorno prestabilite oppure se è fattibile e/o conveniente ricercarne una migliore. Il pre-processing del sistema da investigare avviene per mezzo di un workflow grafico molto intuitivo e flessibile. La capacità di trattare le variabili di input/output tramite vettori, matrici e stringhe permette una rapida manipolazione dei dati anche in presenza di un vasto numero di variabili. Nel contempo, l'utilizzo di un ampio set di tecniche DoE (Design Of Experiments), di algoritmi di ottimizzazione altamente avanzati e di strumenti di analisi molto potenti per le fasi di solving e post-processing, permette di ricercare e comprendere le soluzioni progettuali ottimali in modo estremamente efficiente. Tale efficienza computazionale, unita alla completa automatizzazione delle analisi numeriche (le risorse hardware/software di calcolo possono essere impiegate al 100% in quanto si azzerano i tempi morti), permette di ridurre notevolmente il "time to market" associato alla realizzazione del proprio prodotto.

Per comprendere i settori di applicazione del software, conviene evidenziare le caratteristiche essenziali di modefrontier. Chiarendo immediatamente che tra le caratteristiche essenziali del software quella a cui si è fatto riferimento per il lavoro di tesi è l'integrazione multi-obiettivo.

- ottimizzazione multi-obiettivo: la risposta del sistema investigato può essere misurata rispetto ad una singola funzione obiettivo o, in modo più significativo ed accurato, rispetto a molteplici obiettivi (tensioni, massa, potenza, consumi, costi, ...). Per mezzo di efficienti algoritmi di ottimizzazione modefrontier è in grado di individuare i set di soluzioni che soddisfano contemporaneamente gli obiettivi fissati;
- post-processing: l'interpretazione dei dati provenienti da test sperimentali di laboratorio o da analisi numeriche, richiede strumenti di analisi in grado di catturare le relazioni esistenti tra il dominio delle variabili di input e il co-dominio delle funzioni obiettivo (analisi di sensitività), tra le stesse variabili di input, e tra le stesse funzioni obiettivo (Pareto Frontier).

6.2 Modefrontier-logica di base

Ogni schema realizzato in Modefrontier rappresenta un schema logico costituito da due flussi principali, un **flusso di processo** che evidenzia il procedimento, o il metodo utilizzato, e definisce la sequenza cronologica delle applicazioni usate per la realizzazione del progetto, e da un **flusso di dati in ingresso e in uscita**, che definisce tutte le operazioni necessarie atte sia ad inserire le variabili in ingresso all'interno dei file eseguiti da singole applicazioni richiamate nel processo e sia atte ad estrarre le variabili in uscita dai file generati dalle singole applicazioni [1].

Al fine di comprendere come costruire uno schema logico in Modefrontier, partiamo da uno schema logico semplice e definiamo gli aspetti fondamentali fin qui menzionati; aspetti che però, risultano fondamentali per la comprensione degli schemi logici più complessi. In Fig.1 è rappresentato lo schema logico più semplice realizzabile in Modefrontier.

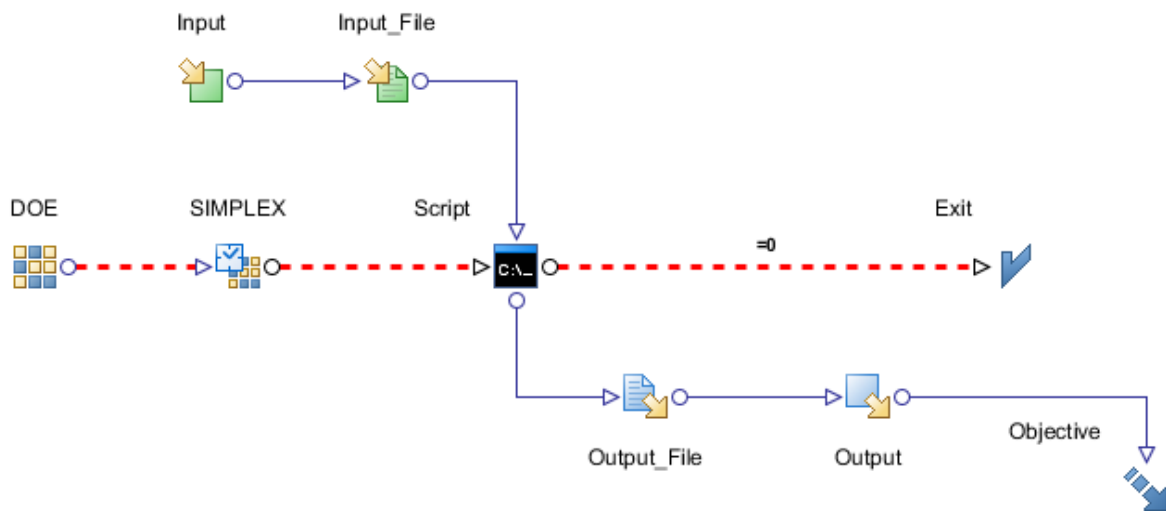


Fig.1 Schema logico di base

Ogni schema logico realizzato in Modefrontier è costituito da nodi logici che descrivono il processo di ottimizzazione. Approfondiremo le particolari funzioni di ogni nodo logico utilizzato, direttamente nello schema logico più complesso, quello costruito in Modefrontier per raggiungere l'obiettivo del lavoro di tesi. Per ora, invece, ci limiteremo ad evidenziare le caratteristiche strettamente necessarie per generare un processo di ottimizzazione in Modefrontier sia attraverso i diversi colori e tipi di linee utilizzate per collegare i diversi nodi sia attraverso i nomi generici dati ai diversi nodi che sottintendono a grandi linee le loro funzionalità.

Lo schema logico semplice è costituito dal **flusso di processo** indicato dalla linea rossa tratteggiata e dal **flusso di dati in ingresso e in uscita** indicato dalla linea blu continua. Procedendo da sinistra verso destra, il **flusso di processo** è costituito da un nodo DoE (Design Of Experiments) che definisce gli iniziali valori della variabile o variabili in ingresso utilizzati nel processo di ottimizzazione. Il nodo DoE è sempre seguito da un nodo Scheduler che definisce l'algoritmo usato per definire i valori successivi rispetto a quelli iniziali utilizzati nel processo. In tal caso, il nodo Scheduler è stato nominato SIMPLEX in quanto abbiamo scelto l'algoritmo del semplice, utilizzato per la ricerca dell'ottimo nelle funzioni mono obiettivo. Il flusso di processo procede con il nodo Script, che rappresenta il cuore del **flusso di processo**, in quanto può sia eseguire direttamente comandi scritti in un linguaggio specifico, e sia eseguire i comandi scritti in un linguaggio specifico per aprire a sua volta uno o più programmi solutori. In tal caso è stato scelto il nodo Script che utilizza il linguaggio C. Quindi in tal caso, attraverso il linguaggio C possono essere richiamati diversi programmi solutori che a loro volta utilizzano tipi di linguaggio differenti rispetto al linguaggio del nodo Script scelto, e sempre attraverso il linguaggio C riuscir a far eseguire loro un file o diversi file relativi al programma solutore, ossia "comprensibili" per il programma solutore, e generando un relativo file di uscita.

Questa seconda modalità con cui è usato il nodo Script è definita modalità batch, il nodo Script è stato usato in modalità batch sia in questo semplice esempio sia nei processi più complessi, come vedremo in seguito.

Per tale motivo è il caso di spendere qualche altra parola per chiarire ancor meglio come funziona tale modalità.

In sostanza operare in modalità batch significa che tutta la sequenza di operazioni per svolgere un particolare compito vengono preparate in anticipo e memorizzate in un file con estensione .bat o (da batch) o .exe, creando una procedura, tale procedura rappresenta il programma solutore. Il programma solutore viene poi eseguito dal sistema come un blocco unico, cioè senza che sia necessario, o possibile, un intervento prima che sia terminata l'esecuzione. Infatti i file con estensione .bat non possono essere aperti come file di testo e quindi essere modificati, la procedura è chiusa. Quindi operativamente parlando, quando il nodo Script lavora in modalità batch apre uno o più sottoprogrammi in grado di eseguire dei file scritti con un linguaggio "comprensibile" a tali sottoprogrammi e capaci di generare un file di uscita.

Il flusso di processo viene concluso con il nodo Exit che indica la fine del processo.

Per quel che riguarda il **flusso di dati in ingresso e in uscita**, procedendo dall'alto verso il basso abbiamo il nodo Input che rappresenta la variabile in ingresso al processo di ottimizzazione che abbiamo intenzione di far variare all'interno di un particolare intervallo di valori e con un certo passo da noi scelto. Ovviamente possiamo avere anche una serie di variabili che possiamo far variare e non solo una variabile. Operando in modalità batch, il nodo che rappresenta la variabile di ingresso deve essere collegato necessariamente al nodo Input_File che contiene il file che verrà letto dal programma solutore; come già menzionato, il programma solutore è aperto dal nodo Script. Il file contenuto all'interno del nodo Input_File rappresenta la descrizione del problema che viene risolto dal programma solutore, quindi è all'interno di tale file e quindi all'interno del problema da risolvere dove deve essere indicata la variabile definita nel nodo Input. Inoltre sottolineiamo che il file contenente il problema da risolvere, può essere aperto come file di testo e quindi spesso possiede l'estensione .txt. Il **flusso di dati in ingresso e in uscita** attraversa il **flusso di processo** nel nodo Script, in quanto è quest'ultimo che genera un file di uscita. Il file di uscita viene aperto e letto all'interno del nodo Output_File. Quest'ultimo nodo è collegato a sua volta al nodo Output che rappresenta la variabile di uscita che vogliamo conservare dal file di uscita. Ovviamente le variabili da conservare possono essere più di una. Il **flusso di dati in ingresso e in uscita** si chiude con il nodo Objective attraverso il quale definiamo l'obiettivo che vogliamo raggiungere per la variabile che abbiamo deciso di conservare.

Il processo di ottimizzazione, anche quello più semplice, che nella sua descrizione, sembra complesso e contorto, risulta certamente più chiaro analizzando il processo operativamente. Supponiamo che il nostro problema sia rappresentato da una semplice funzione z dipendente da due variabili x e y.

$$z = \frac{50x - y^2}{x + y}$$

E supponiamo che il nostro obiettivo sia quello di minimizzare il valore di z facendo variare le variabili x e y all'interno di intervalli prestabiliti. Lo schema logico (Fig.2) da utilizzare per ottenere tale processo di ottimizzazione è analogo allo schema logico di cui abbiamo già discusso. In tal caso i nomi dei nodi del tutto generici, scritti per lo schema logico precedente sono stati sostituiti dai nomi delle variabili e del problema da risolvere.

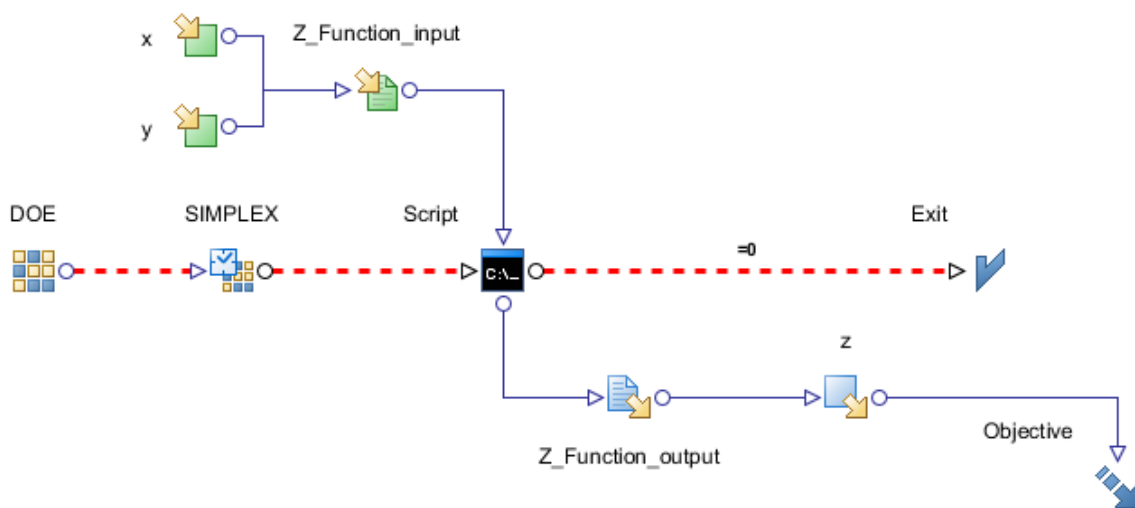


Fig.2 Schema logico per ottimizzare la funzione Z

Partendo dal **flusso di dati in ingresso e in uscita**, abbiamo definito due variabili x e y. La x capace di variare all'interno dell'intervallo 5÷100 con passo 2.5. La y capace di variare sempre all'interno dello stesso intervallo 5÷100 ma con passo uguale a 5. Entrambe le variabili sono collegate al nodo Input_File nominato Z_Function_input all'interno del quale è scritta la funzione z. Il linguaggio con cui è definita la funzione z corrisponde al linguaggio del programma aperto dal nodo Script. Attraverso il nodo Script possiamo aprire un programma come Matlab per calcolare la funzione, ma in tal caso può essere utilizzato anche un programma più semplice come Excel, o qualunque tipo di programma nel quale possono essere eseguite operazioni matematiche semplici. Dal nodo Script è ottenuto l'output del problema quindi l'output della funzione, visualizzabile nel nodo Output_File nominato Z_Function_output. Generalmente, come già detto, i file utilizzati nei nodi Input_File e Output_File sono apribili come file di testo.

Dopodiché definiamo la variabile z che indica la specifica variabile dell'output del problema che vogliamo conservare e quindi ottimizzare. Per chiudere il **flusso di dati in ingresso e in uscita** colleghiamo alla variabile z il nodo Objective che permette di impostare il criterio di ottimizzazione, in tal caso abbiamo deciso di minimizzare la variabile z.

Per quel che riguarda **flusso di processo** nel nodo DoE sono stati definiti i primi valori delle variabili x e y di tentativo per l'analisi della funzione z mentre nel nodo SIMPLEX, seguendo le specifiche dell'algoritmo del simplesso sono state provati via via altri valori delle variabili x e y al fine di trovare la coppia di valori x e y all'interno degli intervalli prestabiliti che minimizzino la funzione z. Di seguito nel nodo Script sono stati scritti i comandi per aprire un programma in grado di calcolare la funzione z. Per chiudere il **flusso di processo** è stato inserito il nodo Exit che indica il termine del processo.

Una volta conclusa la costruzione del processo di ottimizzazione, è stato possibile far partire l'analisi in Modefrontier. E dopo pochi minuti, proprio per la semplicità del problema, esattamente dopo 18 iterazioni Modefrontier è stato in grado di trovare la coppia di valori delle variabili x e y desiderata, ossia quella che minimizza la funzione z.

In Fig.3 osserviamo, per ogni iterazione, i valori delle variabili x e y della variabile z che abbiamo voluto conservare e dell'obiettivo che in tal caso deve corrispondere con la variabile z.

ID	RID	M	CATEGORY	x	y	z	Objective
0		<input type="checkbox"/>	RNDDOE	7.5000E1	4.5000E1	1.4375E1	1.4375E1
1		<input type="checkbox"/>	RNDDOE	2.5000E1	3.5000E1	4.1667E-1	4.1667E-1
2		<input type="checkbox"/>	DOE_RANDOM	7.2500E1	6.0000E1	1.8868E-1	1.8868E-1
3		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	2.2500E1	5.0000E1	-1.8966E1	-1.8966E1
4		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	5.0000E0	5.5000E1	-4.6250E1	-4.6250E1
5		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	5.2500E1	8.0000E1	-2.8491E1	-2.8491E1
6		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	5.0000E0	7.5000E1	-6.7188E1	-6.7188E1
7		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	3.0000E1	7.5000E1	-3.9286E1	-3.9286E1
8		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.7500E1	7.0000E1	-4.6000E1	-4.6000E1
9		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.2500E1	7.0000E1	-5.1818E1	-5.1818E1
10		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.2500E1	9.0000E1	-7.2927E1	-7.2927E1
11		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.7500E1	1.0000E2	-7.7660E1	-7.7660E1
12		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.0000E1	1.0000E2	-8.6364E1	-8.6364E1
13		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.0000E1	9.0000E1	-7.6000E1	-7.6000E1
14		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	1.2500E1	9.5000E1	-7.8140E1	-7.8140E1
15		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	5.0000E0	9.5000E1	-8.7750E1	-8.7750E1
16		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	5.0000E0	1.0000E2	-9.2857E1	-9.2857E1
17		<input type="checkbox"/>	SIMPLEX	7.5000E0	1.0000E2	-8.9535E1	-8.9535E1

Fig.3 Tabella di Modefrontier dei valori delle variabili di ingresso e uscita e relativo obiettivo

Mentre in Fig.4 compare l'andamento della funzione obiettivo in funzione delle iterazioni eseguite [2]

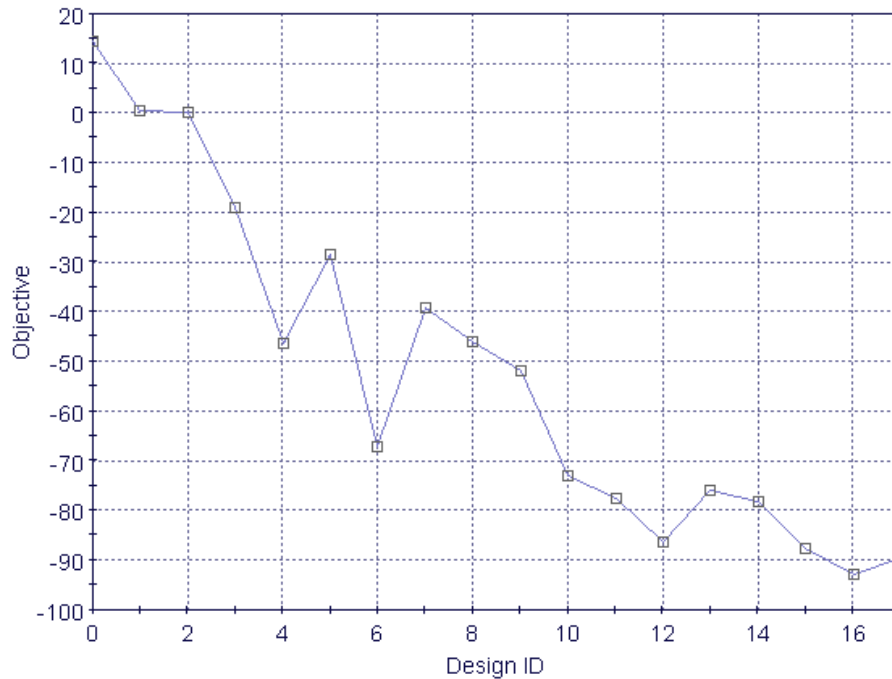


Fig.4 Funzione mono obiettivo in funzione di ogni Design ID

E' possibile notare che l'iterazione associata ad ogni Design ID (ID da identifier ossia identificatore) 16 corrisponde al minimo della funzione obiettivo. Ritornando alla Fig.3 quindi alla coppia di valori di 5 e di 100 per x e y rispettivamente.

Un problema di ottimizzazione del genere, data la sua semplicità, poteva essere banalmente risolto anche con un piccolo sforzo mentale, sostituendo ad esempio alternativamente i valori massimi e minimi delle variabili x e y, in modo da individuare l'andamento della funzione z. Saremmo arrivati, ovviamente alla stessa soluzione calcolata da Modefrontier.

Per quel che riguarda la struttura dei prossimi paragrafi, utilizzeremo lo schema logico realizzato in Modefrontier (descritto sopra) per ottimizzare l'overall di pressione acustica radiata dal cover ad un metro di distanza. Quindi analizzeremo ogni nodo dello schema logico, approfondendone il significato e le caratteristiche. Inoltre durante la descrizione del processo di ottimizzazione, quando parleremo dei nodi Input_File contenenti i file descrittivi le analisi strutturali e acustiche, che si trovano a ridosso dei nodi Script, ci soffermeremo per descrivere i passi necessari per la realizzazione dei modelli numerici.

6.3 Processo di ottimizzazione dell'overall di pressione acustica radiata.

In Fig.5 è raffigurato il processo di ottimizzazione realizzato in Modefrontier in grado di minimizzare l'overall di pressione acustica radiata dal cover, ed è possibile osservare il **flusso di processo** seguendo la linea tratteggiata in rosso e il **flusso di dati in ingresso e in uscita** seguendo le linee blu continue.

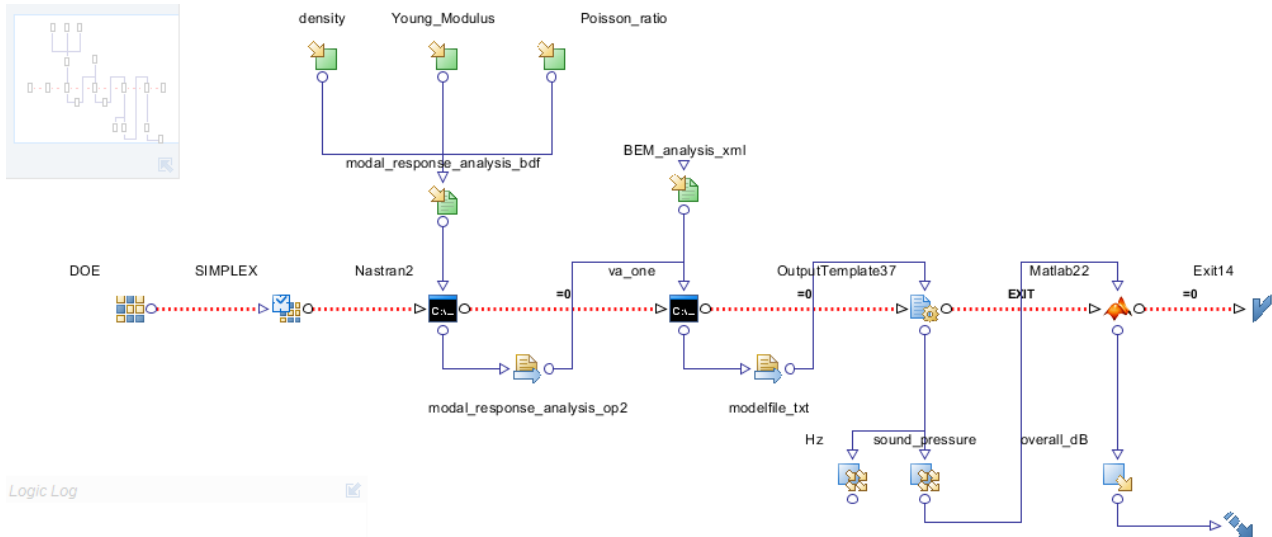


Fig.5 Processo di ottimizzazione per minimizzare l'overall di pressione sonora radiata dal cover

Riassumiamo rapidamente ciò che abbiamo realizzato, il tutto sarà poi approfondito seguendo l'evoluzione del processo di ottimizzazione e sviscerando il significato dei nodi utilizzati nel processo.

L'analisi vibro-acustica che ci siamo proposti di affrontare è costituita essenzialmente da due step. Il primo step riguarda un'analisi di tipo strutturale. Il secondo step riguarda un'analisi acustica. Nel primo step abbiamo eseguito l'analisi di risposta modale in frequenza. Tale analisi, come già esposto nel Cap. 4, è sorretta dall'analisi modale e al variare dei parametri del materiale del componente di poliuretano sono calcolate le ampiezze delle vibrazioni superficiali del componente in plastica, le quali costituiscono l'input del secondo step del processo di ottimizzazione. Per realizzare il primo step è stata utilizzata la tecnica numerica degli elementi finiti.

Nel secondo step abbiamo utilizzato i dati dell'analisi di risposta in frequenza per realizzare un modello di propagazione delle velocità superficiali strutturali. Attraverso quest'ultimo modello è stato possibile calcolare la pressione sonora radiata ad una certa distanza dal cover espressa in termini di livello globale o "overall". Per il secondo step è stata utilizzata la tecnica numerica degli elementi al contorno.

6.4 Definizione delle variabili di processo e dell'input file

In Fig.6 possiamo osservare la parte del processo di ottimizzazione relativa alla definizione delle variabili di processo e alla definizione dell'input file [3].

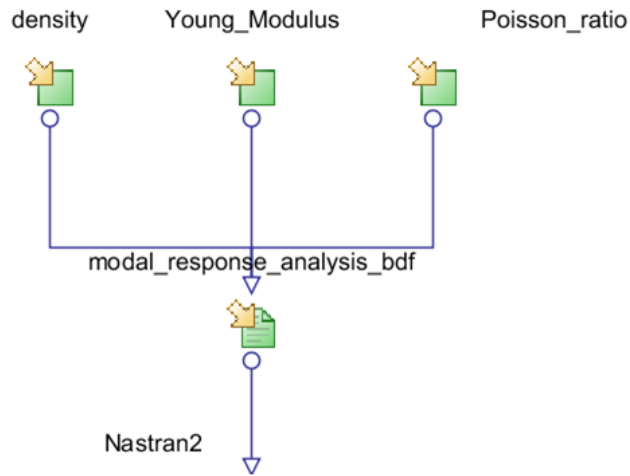


Fig.6 Nodi relativi alle variabili di processo e nodo Input File

All'inizio del **flusso di dati in ingresso e in uscita** abbiamo definito le tre variabili corrispondenti ai tre parametri che descrivono il materiale del componente di poliuretano. Ricordiamo che avendo considerato il materiale come lineare elastico isotropo e omogeneo ed eseguendo un'analisi dinamica abbiamo bisogno dei seguenti tre parametri: modulo di Young, coefficiente di Poisson e densità. Nelle Fig 7,8,9 possiamo osservare le finestre relative alle variabili definite, rispettivamente, densità, modulo di Young e Coefficiente di Poisson, all'interno delle quali sono stati definiti gli intervalli dei valori e i relativi passi dell'intervallo.

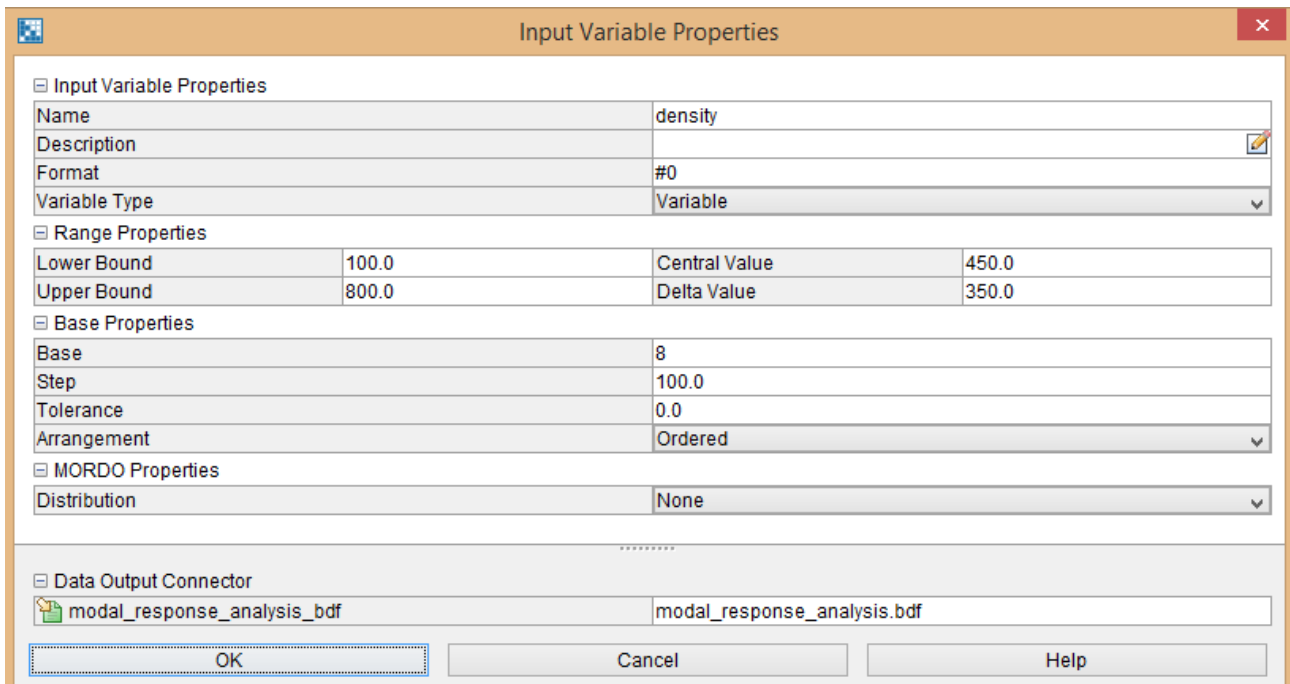


Fig.7 Definizione dell'intervallo di valori della densità e relativo passo dell'intervallo

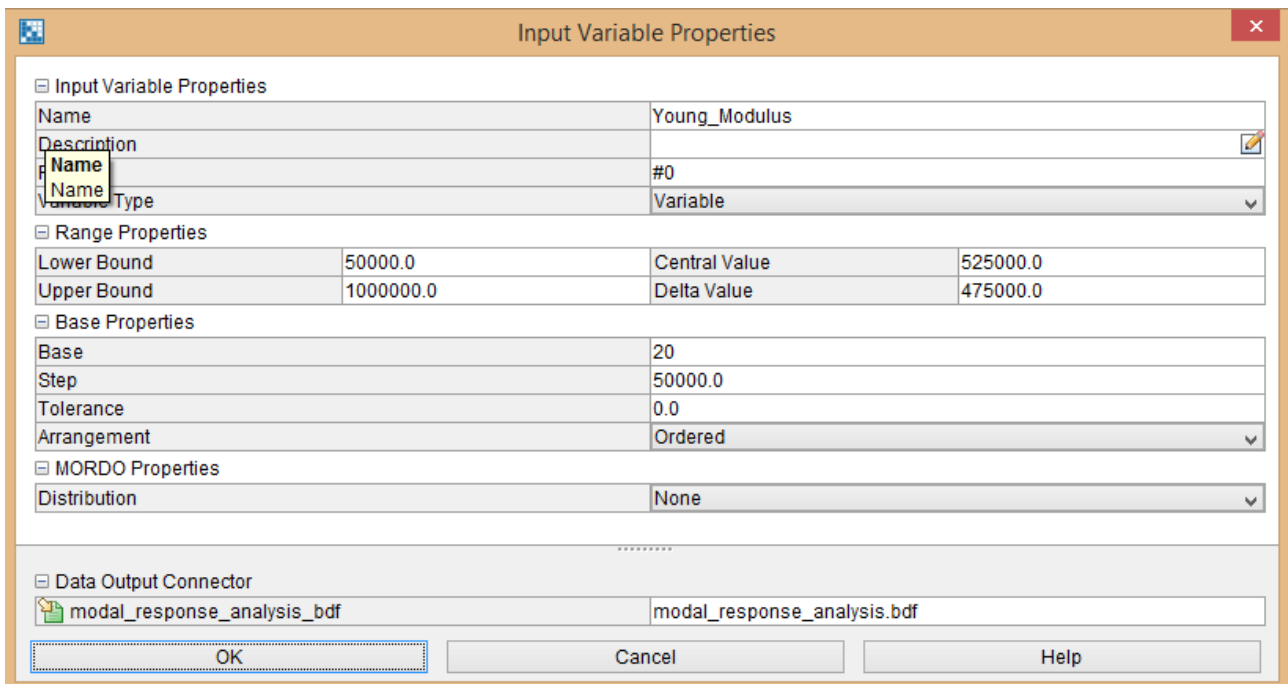


Fig.8 Definizione dell'intervallo di valori del Modulo di Young e relativo passo dell'intervallo

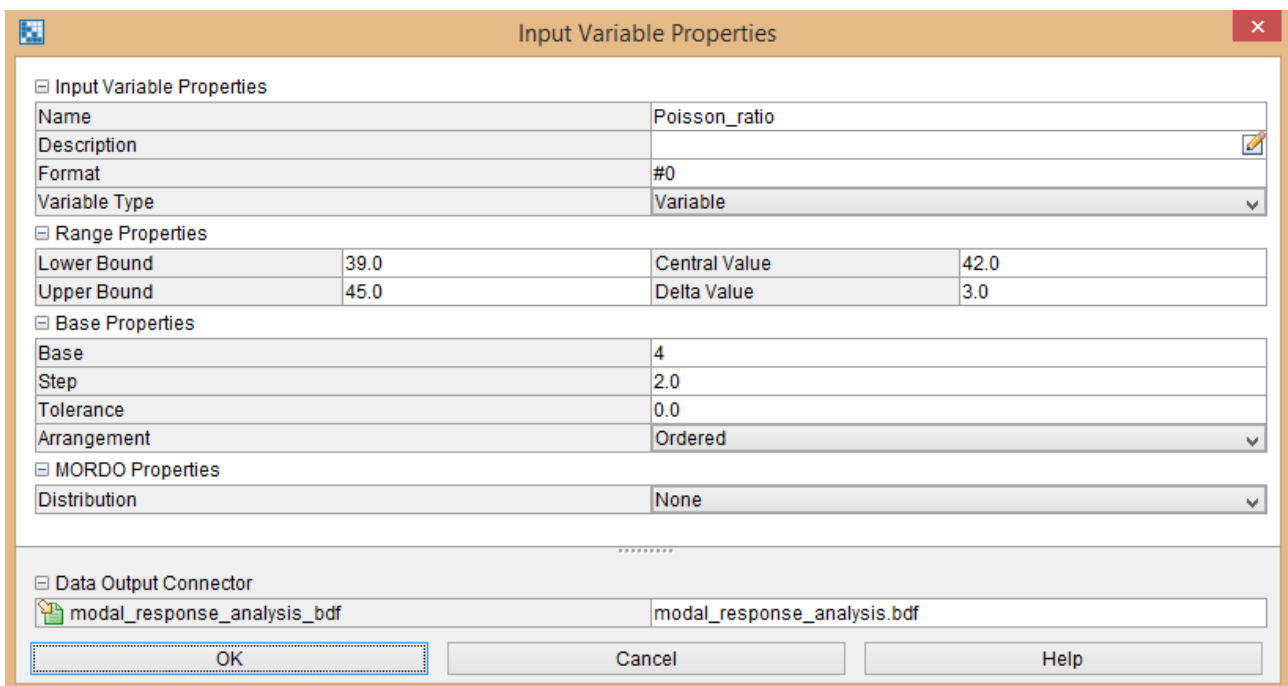


Fig.9 Definizione dell'intervallo di valori del Coefficiente di Poisson e relativo passo dell'intervallo

Lower Bound e Upper Bound definiscono il limite inferiore e superiore dell'intervallo nel quale ricade la variabile. In alternativa per definire l'intervallo di valori è possibile indicare il valore centrale (Central Value) dell'intervallo e la massima distanza dal limite dell'intervallo al valore centrale (Delta Value). Successivamente si imposta il passo (Step) oppure il numero delle volte in cui pensiamo di dividere l'intervallo (Base).

Un'altra importante caratteristica nell'impostazione delle variabili è il format del numero, è da tenere bene a mente soprattutto nel momento in cui le stesse sono inserite nell'Input_File che contiene il file che descrive il problema da risolvere. Scegliendo la dicitura "#0" abbiamo scelto di considerare i numeri interi. Abbiamo scelto la stessa dicitura anche per il coefficiente di Poisson nonostante la sua variabilità sia tra i numeri decimali 0,39÷0,45 perché nel file di testo contenuto nell'Input_File abbiamo definito la variabilità della parte "intera" decimale.

In fondo ad ogni finestra relativa alle variabili definite, è indicata la connessione al nodo successivo, ossia un nodo Input_File, per il quale è presente il simbolo e il nome identificativo "modal_response_analysis_bdf".

Riassumiamo in tabella 1 le variazioni delle tre variabili e i relativi passi considerati:

Materiale	Poliuretano	Passo
Modulo di Young [N/m ²]	50000÷1000000	50000
Densità [kg/m ³]	100÷800	100
Coefficiente di Poisson	0,39÷0,43	0,2

Tabella 1 Intervallo delle variabili di processo e relativo passo dell'intervallo

Il file contenuto all'interno del nodo Input_File rappresenta la descrizione del problema che viene risolto dal programma solutore, quindi è all'interno di tale file e quindi all'interno del problema da risolvere dove devono essere indicate le tre variabili definite.

Il file contenuto all'interno dell'Input_File descrive l'analisi di risposta modale in frequenza, ricordiamo che tale analisi è sorretta dall'analisi modale. In Fig.10 è possibile osservare la finestra relativa al nodo Input_File denominato "modal_response_analysis_bdf".

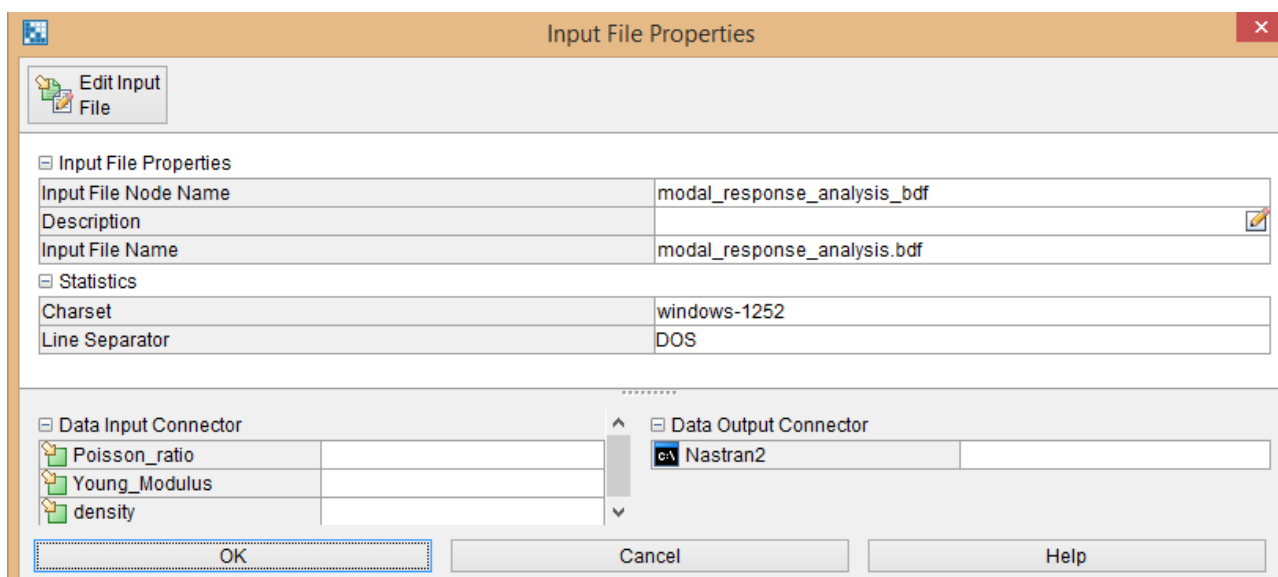


Fig.10 Definizione dell'Input File

In basso sono indicati i collegamenti del nodo. Quindi i tre nodi Input relativi alla tre variabili e il nodo Script, capace di eseguire il file dell'analisi strutturale, denominato "Nastran2"

All'interno dell'edit Input File è aperto il file di analisi descrittivo dell'analisi di risposta modale in frequenza, all'interno del quale in rosa sono evidenziate le tre variabili (Fig.11).

Come già accennato, per i nodi contenenti i file descrittivi delle analisi strutturali e acustiche, scriveremo alcuni paragrafi sulla descrizione della loro costruzione. Quindi ci soffermeremo nei prossimi paragrafi sull'analisi strutturale e il relativo modello agli elementi finiti [4].

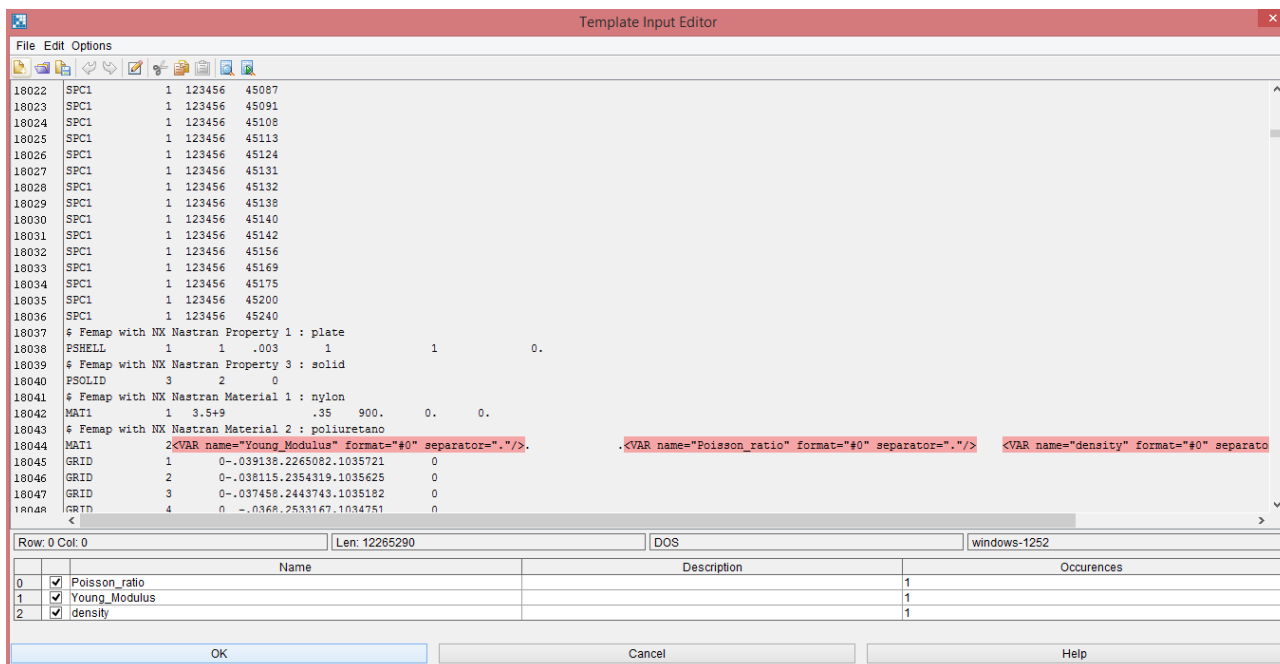


Fig.11 Le variabili di processo inserite nel Input File descrittivo del problema strutturale da risolvere

6.5 Analisi strutturale - modello agli elementi finiti

Le analisi strutturali numeriche sono incentrate su di un'analisi di risposta modale in frequenza attraverso il metodo delle reazioni modali. Quindi è stata calcolata l'analisi modale e sono state calcolate le reazioni modali, le quali sono state utilizzate per risolvere l'analisi di risposta modale in frequenza. Tutta tale procedura di analisi contenente il calcolo dell'analisi modale e la risposta modale in frequenza è contenuta in un unico file che è stato generato in FEMAP. Il software FEMAP è stato utilizzato come interfaccia grafica per l'analisi strutturale, mentre come poi vedremo Nastran.exe è stato usato come solutore dell'analisi.

In FEMAP è stato quindi possibile importare le geometrie CAD, realizzare la mesh, definire i materiali, i vincoli della struttura, indicare lo smorzamento modale, definire le sollecitazioni a cui la struttura è soggetta ed esportare il file dell'analisi, mentre in Nastran.exe è stata fatta girare l'analisi e sono stati ottenuti i relativi risultati in termini di modi di vibrare e relative frequenze di risonanza,

nonché le reazioni modali, utili per il calcolo della risposta modale in frequenza. Dalla quale sono state calcolate le velocità superficiali utilizzate come input del secondo step del processo di ottimizzazione.

Nei prossimi paragrafi descriveremo come è stata realizzata l'analisi modale e l'analisi di risposta modale in frequenza.

6.6 Analisi modale

In FEMAP sono state per prima cosa importate le geometrie CAD rappresentanti l'intero cover. Tali geometrie sono state notevolmente semplificate attraverso CATIA V5. In Fig.12 è possibile osservare i due componenti separati, il componente di Nylon a sinistra e il componente di poliuretano a destra. Inoltre ricordiamo che i due componenti sono uniti insieme come è possibile osservare sul fondo della Fig.12 che mostra la vista laterale dell'oggetto [5].

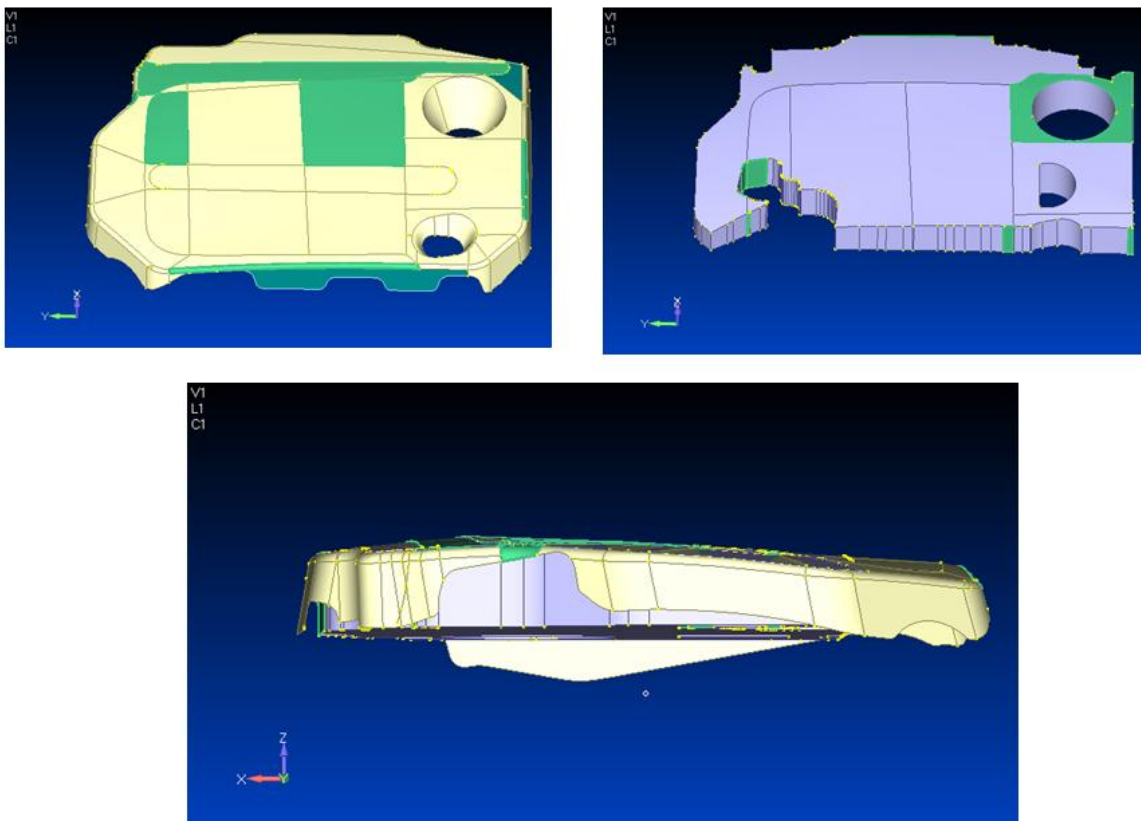


Fig.12 Geometrie CAD del componente in plastica (in alto a sinistra) e del componente di poliuretano (in alto a destra).
Vista laterale dell'intero oggetto (in basso)

Il passo successivo riguarda la realizzazione della mesh, quindi della griglia che rappresenta gli elementi finiti. Per il componente in plastica è stata utilizzata la mesh realizzata per l'analisi modale del solo componente in plastica eseguita per il confronto numerico-sperimentale (Cap.5). Per il componente in poliuretano è stata effettuata una mesh con elementi di volume, con elementi

tetraedrici. La dimensione massima sia per gli elementi di superficie che di volume è stata scelta in modo tale da ottenere risultati con un grado di approssimazione soddisfacente fino a 600 Hz. In Fig.13 sono mostrate le mesh di entrambi i componenti. Sulla sinistra la mesh del componente di nylon costituita da 285 elementi triangolari e 5099 elementi quadrangolari e sulla destra la mesh del componente di poliuretano costituita da 51716 elementi tetraedrici.

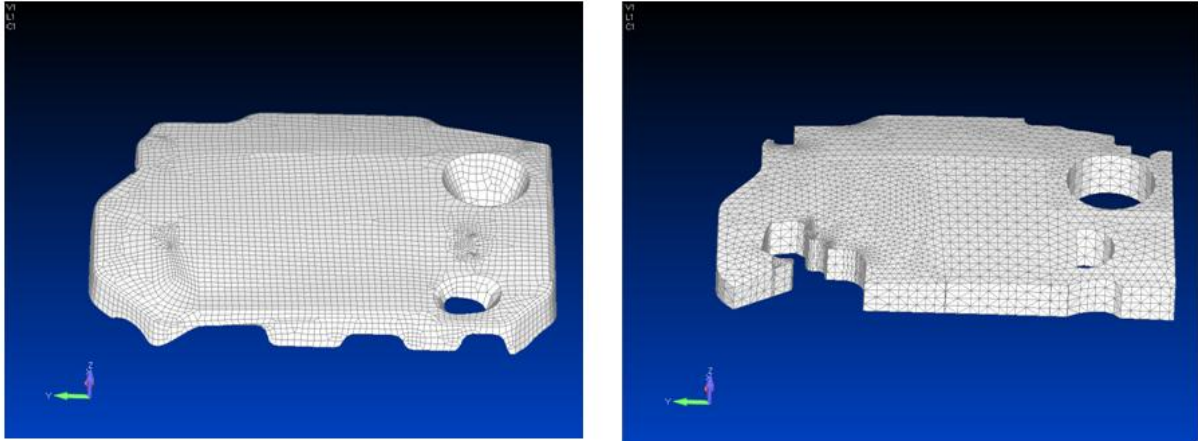


Fig.13 Mesh del componente in plastica (a sinistra) Mesh del componente di poliuretano (a destra)

Una volta realizzato il modello agli elementi finiti di entrambi i componenti sono state definite le condizioni di vincolo e la condizione di incollaggio tra i due componenti. All'interno dell'ambiente FEMAP, la realizzazione della condizione di incollaggio avviene in tre passaggi fondamentali. Dapprima si definisce la proprietà di incollaggio, poi vengono selezionate le regioni dei due componenti che sono unite tra loro e infine è definita la proprietà di connessione tra le due regioni selezionate, identificando una regione come target (obiettivo) e una regione source (sorgente). Nella Fig.14 sono evidenziate in marrone le regioni coinvolte nell'incollaggio, del componente in nylon sulla sinistra, e del componente in poliuretano sulla destra.

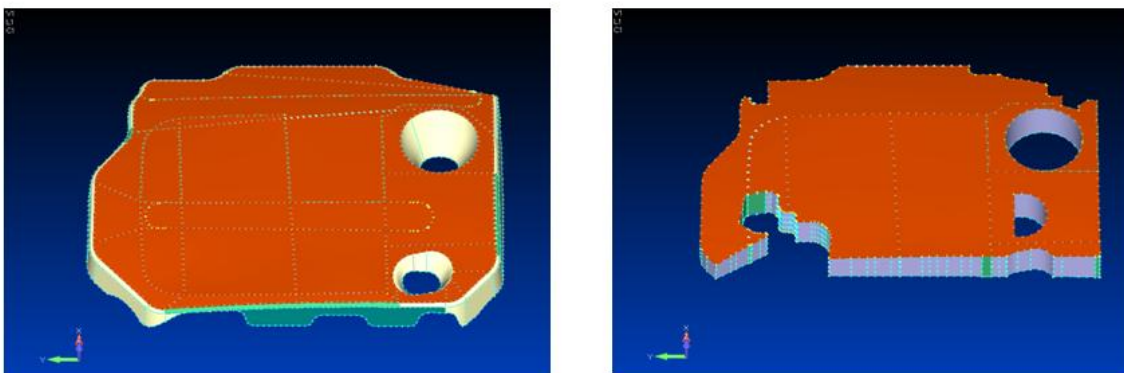


Fig.14 Regioni coinvolte nell'incollaggio dei due componenti costituenti il cover

In tal modo le facce degli elementi finiti delle due diverse mesh, corrispondenti alle superfici selezionate non potranno compenetrarsi e risultano vicendevolmente connesse. Lo scambio di

informazioni tra le due mesh avviene attraverso la tecnica della proiezione. Partendo dalla regione sorgente, ossia dalla regione selezionata sul componente di poliuretano, vengono considerati gli elementi finiti corrispondenti a tale regione. Da tali elementi viene costruita una mesh temporanea. Tale mesh temporanea è costruita partendo dalle normali dei nodi di tali elementi, i quali vengono estrusi seguendo le direzioni normali, in base alla tolleranza indicata nella proprietà di incollaggio tra le due regioni di incollaggio selezionate. A questo punto i nodi della superficie obiettivo, ossia della superficie del componente di nylon, che ricadono all'interno della mesh temporanea sono proiettati sulla superficie sorgente. I valori che assumono i nodi proiettati si ottengono per interpolazione, considerando il valore del nodo della superficie sorgente più vicino al quale ricadono e le funzioni di forma dell'elemento in cui ricadono.

In Fig.15 possiamo distinguere la mesh temporanea in celeste e i nodi trovati sulla superficie obiettivo le cui proiezioni sono riportate sulla superficie sorgente.

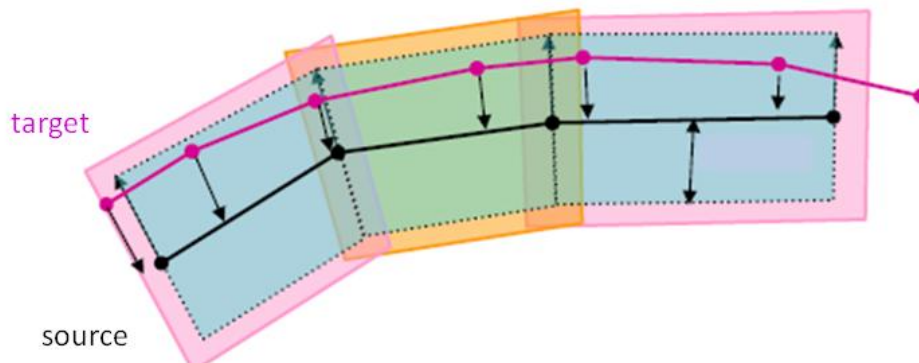


Fig.15 Regione Source (linea nera) Regione Target (linea viola) e mesh temporanea (area azzurra)

Per quel che riguarda le condizioni di vincolo, invece, rifacendoci ovviamente alle condizioni di vincolo reali, abbiamo vincolato i nodi dei supporti indicati nei cerchi rossi (Fig.16) del componente in nylon e i nodi della superficie inferiore del componente in poliuretano vincolato alla testata del motore. Per tutti i nodi vincolati abbiamo vincolato tutti i sei gradi di libertà, tale condizione di vincolo è generalmente denominata "fixed".

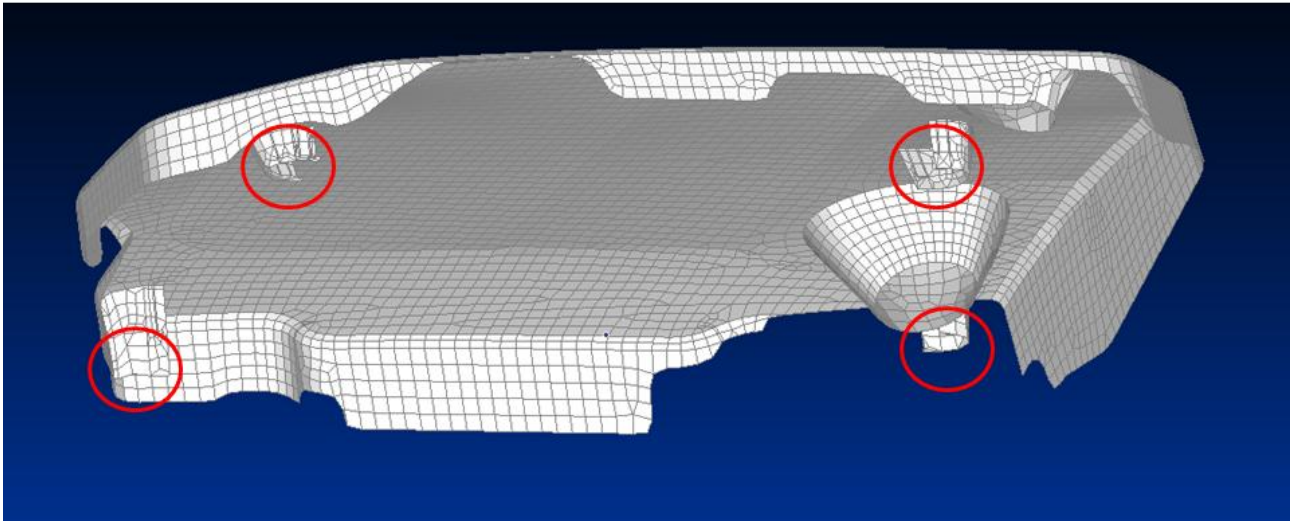


Fig.16 Supporti vincolati

Per quel che riguarda i materiali sono stati modellati entrambi come elastici lineari isotropi e omogenei, quindi possono essere definiti da due parametri, modulo di Young e coefficiente di Poisson. Siccome l'analisi è di tipo dinamico abbiamo bisogno anche della densità per il computo delle forze di inerzia. Per quel che riguarda il componente in plastica, i parametri del materiale sono stati definiti a valle del confronto numerico-sperimentale (Cap.5) basato su di un'analisi modale. I parametri utilizzati sono mostrati in tabella 2.

Materiale	Nylon PA 6.6
Modulo di Young [N/m ²]	3,5·10 ⁹
Densità [kg/m ³]	900
Coefficiente di Poisson	0,35

Tabella 2 Parametri dei materiali del componente di plastica

Mentre i parametri del componente in poliuretano costituiscono le incognite nel processo di ottimizzazione e sono inseriti come variabili nel file di testo descriventi l'analisi di risposta modale in frequenza denominato "modal_response_analysis.bdf". In tabella 3 possiamo osservare gli intervalli utilizzati nel processo di ottimizzazione relativi ai parametri del componente di poliuretano.

Materiale	Poliuretano
Modulo di Young [N/m ²]	50000÷1000000
Densità [kg/m ³]	100÷800
Coefficiente di Poisson	0,39÷0,45

Tabella 3 Variabilità dei parametri del componente di poliuretano

6.7 Analisi di risposta modale in frequenza-metodo delle reazioni modali

Per realizzare un'analisi di risposta modale in frequenza attraverso il metodo delle reazioni modali, è necessario aggiungere al modello numerico precedentemente costruito per l'analisi modale, lo smorzamento modale e le sollecitazioni. L'analisi è stata eseguita da 20 a 300 Hz con passo 1 Hz. Per quel che riguarda lo smorzamento modale è stata definita una funzione costante per tutto l'intervallo di frequenza di interesse. Lo smorzamento modale della singola equazione disaccoppiata è stato ricavato dalla funzione esprime il rapporto tra il coefficiente di smorzamento b e lo smorzamento critico $2\sqrt{km}$ definito come ν . Partendo infatti dall'equazione del moto:

$$-\omega^2 m_i \xi_i(\omega) + i\omega b_i \xi_i(\omega) + k_i \xi_i(\omega) = p_i(\omega)$$

possiamo dividere tutto per m_i ed ottenere:

$$-\omega^2 \xi_i(\omega) + i\omega(2\nu_i \omega) \xi_i(\omega) + \omega^2 \xi_i(\omega) = \frac{p_i(\omega)}{m_i}$$

dove $\nu_i = \frac{b_i}{2\sqrt{k_i m_i}}$

da cui quindi, definito tale rapporto è possibile ricavare il coefficiente di smorzamento.

Il valore della funzione $\nu_i = \frac{b_i}{2\sqrt{k_i m_i}}$ è stato impostato costante per tutte le frequenze e pari a 0.10.

Per quel che riguarda la sollecitazione, l'intero sistema è stato sollecitato con un moto imposto derivante dal risultato sperimentale ottenuto da un accelerometro posto sulla testata del motore, per tre diverse velocità di rotazione del motore 1300, 1650 e 2000 rpm. In Fig.17 osserviamo gli spettri di misura dell'accelerometro espresso in termini di accelerazioni lungo z per le tre diverse velocità di rotazione. I tre spettri risultano simili fra loro, nel senso che presentano tutti il picco principale in corrispondenza della frequenza di combustione, e tale picco in ampiezza e decisamente superiore rispetto al rimanente contenuto spettrale. Possiamo osservare in blu lo spettro in termini di accelerazioni relativo a 1300 rpm in grigio quello relativo a 1650 rpm e in giallo quello relativo a 2000 rpm.

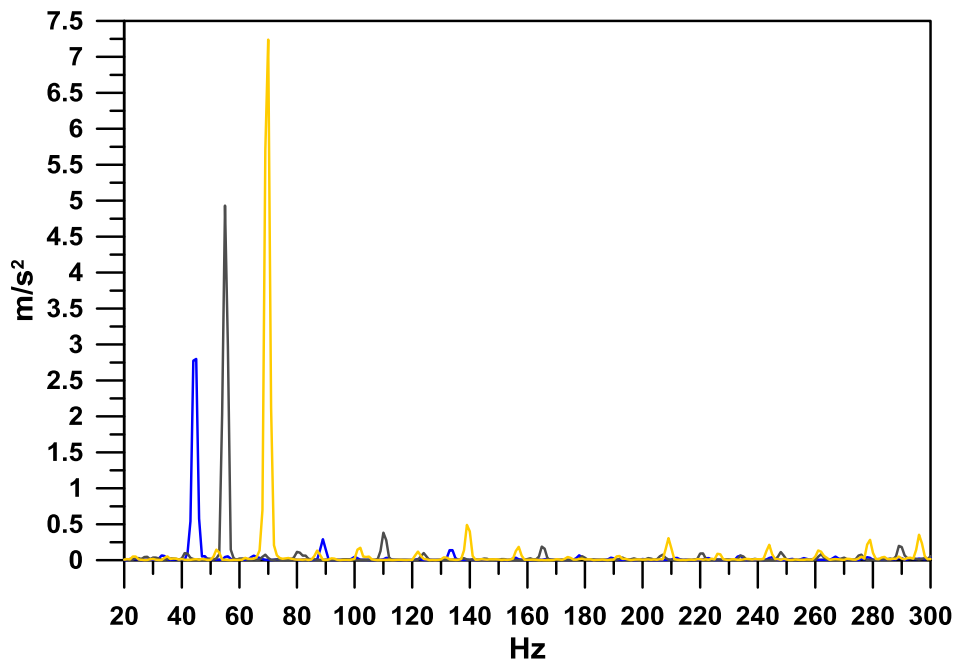


Fig.17 Spettri accelerometrici per le tre velocità di rotazione investigate 1300, 1650 e 2000 rpm

Le misure accelerometriche sono state inserite nel modello sui nodi relativi agli agganci del componente in plastica e sui nodi corrispondenti alla superficie del componente in poliuretano a contatto con la testata del motore. In tal modo a questi nodi specifici è stato possibile imporre il moto (accelerazione) rilevato sperimentalmente. In Fig.18 è presente il cover capovolto dove all'interno dei cerchi in rosso sono presenti, in azzurro, i nodi sui quali sono state caricate le sollecitazioni sul componente in plastica. Dalla stessa figura è possibile osservare i nodi appartenenti alla superficie in giallo sulla quale sono state inserite le sollecitazioni sul componente in poliuretano.

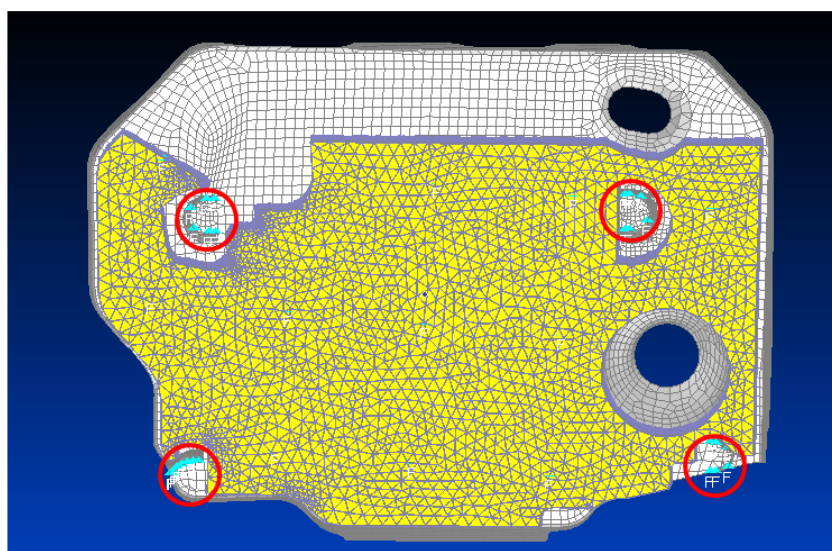


Fig.18 Nodi sollecitati in azzurro e in giallo rispettivamente del componente di plastica e di poliuretano

Per quel che riguarda l'unica misura vibrazionale puntuale utilizzata per sollecitare il modello numerico di analisi di risposta modale in frequenza si è consapevoli dell'approssimazione eseguita. Di fatto per ricostruire la superficie vibrante della testata, si sarebbe dovuta utilizzare una mappa di misure vibrazionali puntuali, delle quali non c'era disponibilità.

Si ritiene che la metodologia di ottimizzazione utilizzata, la cui continuazione sarà esposta nei prossimi paragrafi, rimanga, però, valida e che quando si otterranno dati sperimentali più coerenti, i risultati del processo risulteranno più affidabili.

6.8 Definizione del nodo Script e del nodo Transfert_File dell'analisi strutturale

Ritornando al processo di ottimizzazione, una volta definite le variabili all'interno dell'Input_File, contenente l'analisi strutturale, è giunto il momento di definire un nodo Script che richiami il programma in grado di "leggere" e risolvere il problema strutturale. All'interno del nodo Script è richiamato il programma Nastran.exe [6] che funge da solutore. Nastran.exe da default produce una serie di file contenenti diverse informazioni, quello al quale siamo interessati è quello contenente le velocità dei nodi del modello FEM strutturale. Tali informazioni sono contenute nel file con estensione .op2 denominato "modal_response_analysis.op2". Tale file dovrà essere poi importato nel modello numerico di propagazione acustica. Da qui nasce l'esigenza di definire un nodo Transfert_File, collegato al nodo Script, che permette di conservare in memoria solo il file "modal_response_analysis.op2" con le informazioni necessarie al proseguimento dell'ottimizzazione. In Fig.19 possiamo osservare la parte del processo relativa agli ultimi due nodi descritti.

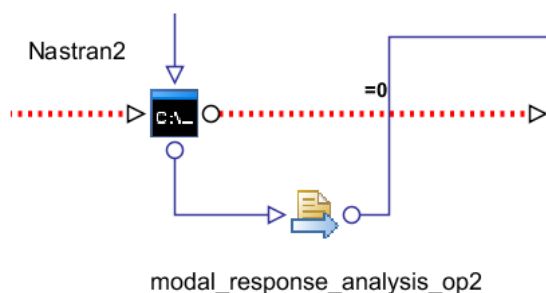


Fig.19 Nodo Script e nodo Transfert File

6.9 Definizione del secondo Input_File

Per quel che riguarda l'Input_File ricordiamo che esso contiene la descrizione del problema che viene risolto dal programma solutore.

In tal caso il file contenuto all'interno dell'Input_File descrive l'analisi acustica con tecnica BEM, grazie alla quale è possibile utilizzare le velocità strutturali per definire un modello di propagazione sonora in campo libero. In Fig.20 è possibile osservare la finestra relativa al nodo Input_File denominato "BEM_analysis_xml".

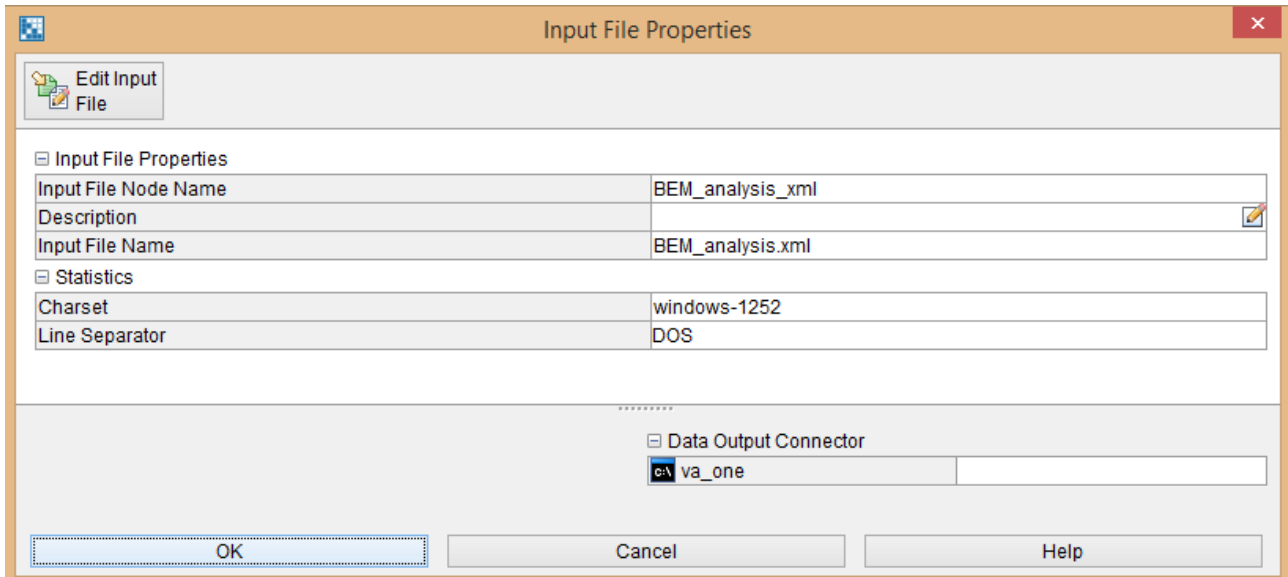


Fig.20 Definizione del secondo Input File

In basso sono indicati i collegamenti del nodo, quindi il nodo Script, capace di eseguire il file dell'analisi acustica, denominato "va_one"

All'interno dell'edit Input File è aperto il file di analisi descrittore l'analisi acustica in frequenza.

Analogamente a quanto scritto per l'analisi strutturale, anche per l'analisi acustica descriveremo la costruzione del modello numerico BEM degli elementi al contorno.

6.10 Analisi acustica - modello agli elementi al contorno

L'analisi acustica è stata costruita per mezzo del software VA ONE. Ed è stata risolta dal suo solutore interno denominato solver.exe. Quindi VA ONE come FEMAP è stato usato come interfaccia grafica mentre il solutore interno solver.exe come Nastran.exe è stato utilizzato per risolvere l'analisi. Il modello numerico sviluppato in VA ONE riprende i risultati ottenuti dall'analisi strutturale e propaga in campo libero le vibrazioni superficiali della struttura. Per tale motivo la prima operazione da fare è proprio importare il modello agli elementi finiti utilizzato per l'analisi strutturale e importare i risultati dell'analisi contenuti nel file .op2. Proprio perché l'analisi acustica è strettamente dipendente dall'analisi strutturale, il range frequenziale di analisi è lo stesso

per entrambe le analisi e ricordiamo che va da 20 a 300 Hz. In Fig.21 possiamo osservare la mesh già utilizzata nel modello FEM, importata in VA ONE [7].

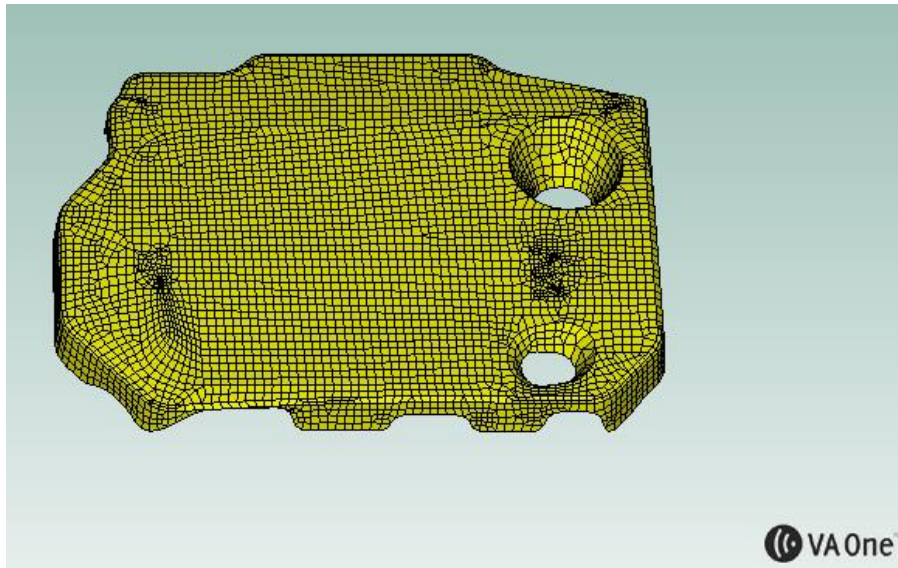


Fig.21 Mesh FEM importata in VA ONE

Dopodichè viene attribuita alla mesh la proprietà di modello agli elementi finiti e come tipo di sottosistema viene assegnata la risposta forzata, che indica che su tale tipo di "oggetto" sarà eseguita o importata un'analisi di risposta in frequenza. Ovviamente costruendo il modello abbiamo importato dei risultati relativi ad un'analisi strutturale con uno dei tanti set di parametri possibili del componente di poliuretano. Nella fase di costruzione di un singolo modello non sono importanti i risultati ma il conseguimento di un file che descrive il problema, e all'interno del quale viene richiamato il file di risultati dell'analisi strutturale con estensione .op2. In modo tale che nel processo di ottimizzazione, nel file di testo "BEM_analysis_xml" descrivente l'analisi acustica possa essere indicata la posizione dove collocare i risultati dell'analisi strutturale.

A questo punto è stata selezionata la superficie dell'oggetto del quale vogliamo propagare le vibrazioni superficiali, quindi tutta la superficie esterna del componente di plastica. Da tale superficie è stata estratta una mesh 2D. Tale mesh è stata rielaborata aumentando la dimensione minima degli elementi e utilizzata come mesh 2D per il modello BEM (Fig.22).

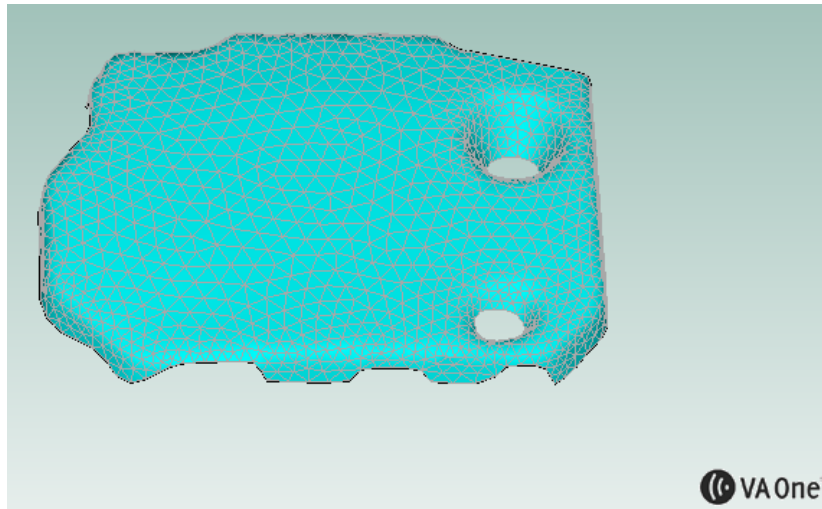


Fig.22 Mesh BEM 2D

Dopodiché è stata collegata la mesh 2D all'ambiente BEM. Il quale simula il campo libero con una semisfera, il cui piano include la struttura vibrante.

Per completare il modello numerico è stato inserito un sensore di pressione sonora ad un metro di distanza dal cover, punto nel quale calcoleremo l'overall di pressione sonora (Fig.23).

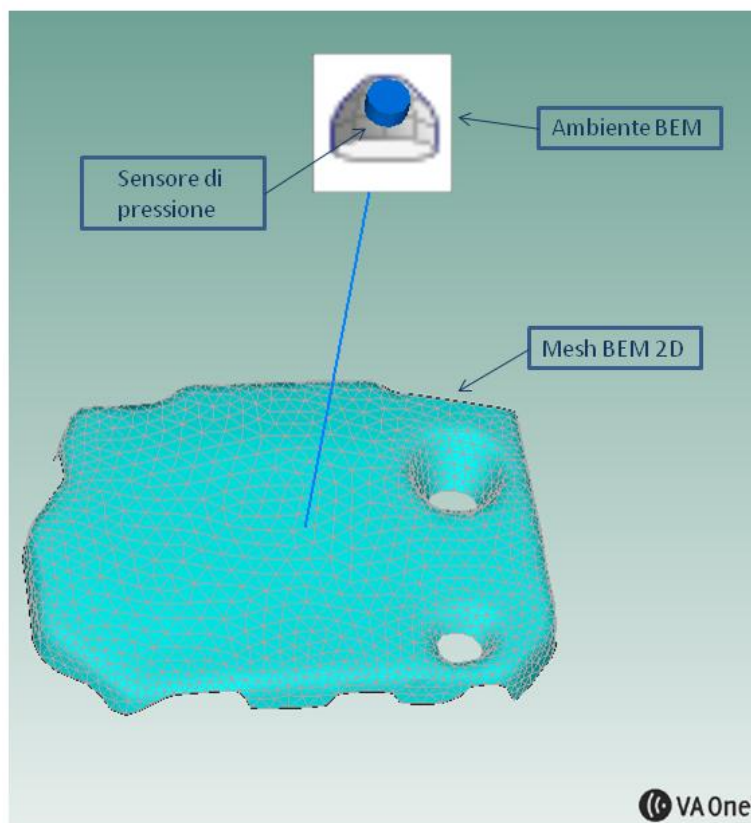


Fig.23 Modello numerico agli elementi al contorno (BEM)

6.11 Definizione del nodo Script e del nodo Transfert_File dell'analisi acustica

Ritornando nuovamente al processo di ottimizzazione, una volta definita l'analisi acustica nell'Input_File, analogamente a quanto eseguito per l'analisi strutturale, bisogna definire un altro nodo Script in grado di eseguire l'analisi. All'interno del nodo Script è richiamato il programma solver.exe che funge da solutore. Comunque a differenza di quanto fatto per l'analisi strutturale, all'interno del nodo Script non solo è richiamato il programma solutore ma sono scritte indicazioni che permettono di inserire il file di risultati con estensione .op2 proveniente dall'analisi strutturale, contenuto nel nodo Trasfert_File precedentemente definito.

Il solutore solver.exe produce un file di testo contenente i valori di pressione sonora calcolati tra 20 e 300 Hz ad un metro di distanza dal cover. Tale file di testo denominato "modelfile.txt" viene indicato in un altro nodo Trasfert_File al fine di essere memorizzato.

In Fig.24 possiamo osservare la parte del processo relativa agli ultimi nodi descritti: L'Input_File contenente l'analisi acustica, il primo Trasfert File che memorizza i risultati dell'analisi strutturale, il nodo Script risolvete l'analisi acustica e il secondo Trasfert File contenente i risultati di pressione sonora.

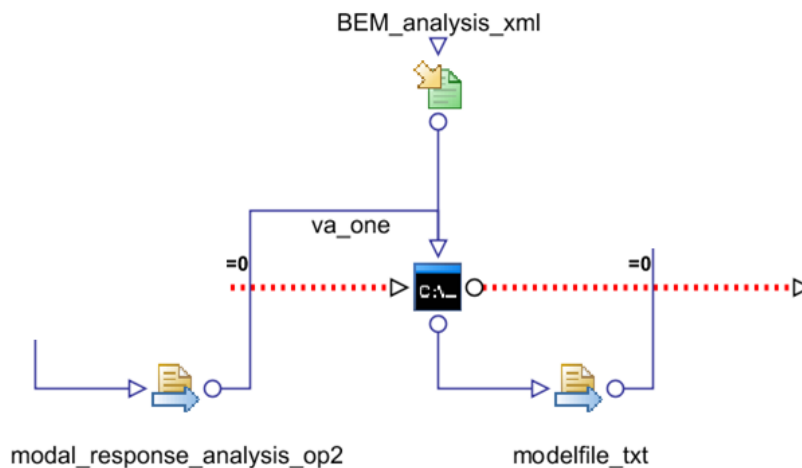


Fig.24 Primo nodo Trasfert File, Secondo nodo Input File, Secondo nodo Script e secondo nodo Trasfert File

6.12 Definizione delle variabili di uscita e della funzione mono obiettivo

A questo punto il **flusso di dati in ingresso e in uscita** si conclude con la manipolazione dei dati in uscita contenuti nel file di testo relativo all'analisi acustica e nella definizione della funzione mono obiettivo che vogliamo ottimizzare.

Per manipolare i dati contenuti in un file di testo in Modefrontier è necessario definire un nodo denominato OutputTemplate, all'interno del quale è possibile indicare valori scalari, vettori o anche matrici utili alla definizione dell'obiettivo da ottimizzare. In tal caso siamo interessati ad ottimizzare

l'overall di pressione sonora. Ricordiamo che l'overall di pressione è definito come la sommatoria dei valori di pressione espressi come N/m^2 al quadrato e sotto radice:

$$overall = \sqrt{\sum_n p_n^2}$$

Quindi abbiamo definito una variabile vettoriale in uscita collegata all'OutputTemplate che permette di conservare la colonna relativa ai risultati di pressione. In Fig.25 osserviamo la finestra relativa all'OutputTemplate nella quale è stata definita una variabile vettoriale denominata "sound_pressure" e selezionata la colonna di valori da immagazzinare.

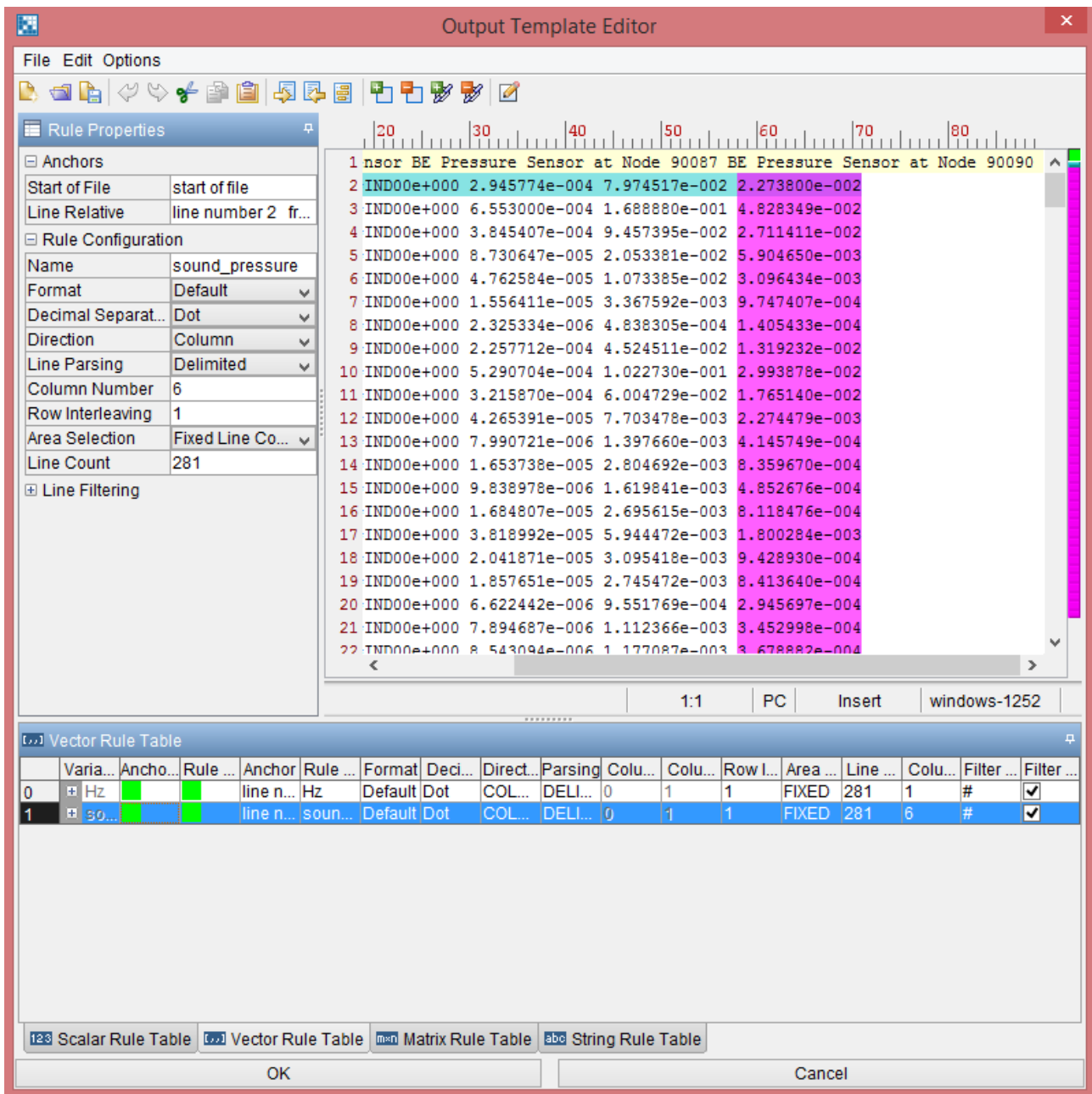


Fig.25 Definizione della variabili vettoriale dei valori di pressione sonora

Inoltre è stata definita un'altra variabile vettoriale relativa alla colonna dell'intervallo frequenziale, utile per l'esposizione dei risultati dell'ottimizzazione.

La funzione mono obiettivo è stata definita con l'aiuto di Matlab. Nelle versioni più recenti del software Modefrontier è possibile inserire all'interno del processo dei nodi che sono collegati direttamente ad alcuni programmi senza passare per linee di codice scritte all'interno dei nodi Script, come nel caso del programma Matlab.

Quindi è stato costruito un semplice programma in Matlab che permette di manipolare l'output vettoriale e di calcolare l'overall di pressione sonora ed esprimerlo poi in deciBel, utilizzando la relazione:

$$overall_dB = 20 \cdot \log_{10} \frac{overall(N/m^2)}{2 \cdot 10^{-5}} \quad [dB]$$

dove il valore $2 \cdot 10^{-5}$ rappresenta il valore di riferimento espresso in N/m^2 .

Per completare il **flusso di dati in ingresso e in uscita** al nodo Matlab viene collagato un nodo che conserva l'output scalare del valore dell'overall denominato "overall_dB" e infine viene definito il nodo obiettivo denominato "minimize" nel quale impostiamo come criterio di ottimizzazione di cercare il minimo dell'overall di pressione sonora.

In Fig.26 possiamo osservare la parte conclusiva del **flusso di dati in ingresso e in uscita** nella quale sono presenti l'OutputTemplate, le variabili vettoriali, il programma di calcolo Matlab, la funzione mono obiettivo contenuta nella variabile scalare e il nodo obiettivo.

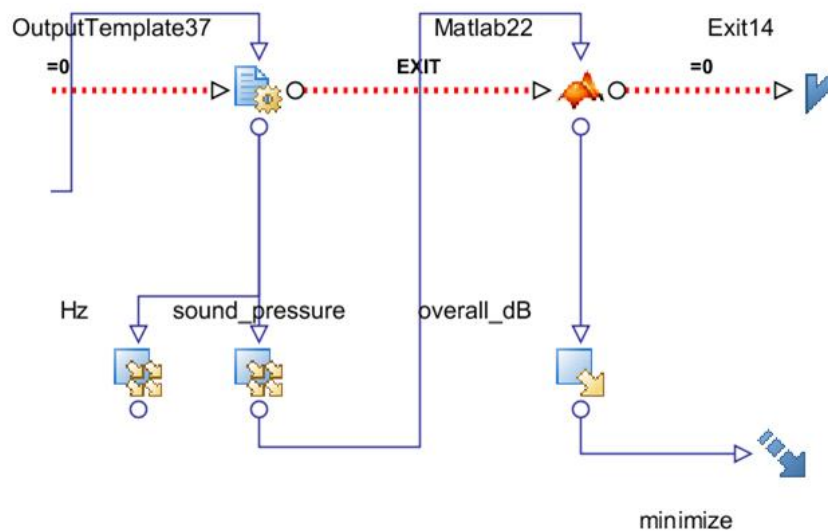


Fig.26 Nodo OutputTemplate, nodi delle variabili vettoriali in ingresso (Hz e sound_pressure) e in uscita (overall_dB) nel programma Matlab e nodo obiettivo

6.13 Il Flusso di Processo

Il **flusso di Processo** rappresenta la chiave che attiva il processo di ottimizzazione. Il **flusso di processo** definisce la sequenza cronologica delle applicazioni usate per la realizzazione del progetto (Fig.5 linea rossa).

In tal caso la struttura del **flusso di processo** può essere suddivisa in 4 parti. La prima parte è costituita dai due nodi DoE e Scheduler che definiscono i primi valori di tentativo (random) delle tre variabili e definiscono l'algoritmo matematico utilizzato nell'ottimizzazione. In tal caso è stato usato l'algoritmo del simplesso.

La seconda parte è costituita dai nodi Script grazie ai quali sono risolte l'analisi strutturale e acustica. La terza parte è costituita dalla scrittura e memorizzazione dei dati di pressione e dalla manipolazione di quest'ultimi per la definizione della funzione mono obiettivo. Infine la quarta parte è definita da un nodo semplice ma essenziale che determina la conclusione del processo.

Il processo è sviluppato in serie. Vengono quindi assegnati i primi valori delle variabili descrittive del materiale del componente in poliuretano, viene effettuata l'analisi strutturale col fine di calcolare le ampiezze delle velocità nodali della struttura. Queste sono utilizzate come input nell'analisi acustica il cui scopo è il calcolo della pressione sonora radiata dal cover in un punto distante un metro da esso. Infine viene calcolato l'overall di pressione sonora. Poi il processo è iterato seguendo le specifiche dell'algoritmo del simplesso fino a quando è ottenuto il minimo della funzione mono obiettivo. Quindi sono provati via via altri set di valori delle tre variabili, modulo di Young, densità e coefficiente di Poisson al fine di trovare i tre valori all'interno degli intervalli prestabiliti che minimizzino l'overall di pressione sonora.

Riferimenti

- [1] Modefrontier User's Guide
- [2] Bozza, F., et al. "*Application of a Quasi-Dimensional Combustion Model to the Development of a High-EGR VVT SI Engine*" No. 2005-24-070. SAE Technical Paper, 2005.
- [3] Giorgio Bartolozzi "*Acoustic characterization and modeling of an automotive floor carpet by combining modeFRONTIER and MSC Actran*" Esteco Conference (2016)
- [4] Nikbay, Melike, and Pinar Acar. "*Flutter Based Aeroelastic Optimization of an Aircraft Wing with Analytical Approach.*" 53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA. 2012.
- [5] Femap User's Guide
- [6] Nastran User's Guide
- [7] VA ONE Tutorials Guide

Capitolo 7

Analisi dei risultati del processo di ottimizzazione

Una volta conclusa la costruzione del processo di ottimizzazione, è stato possibile far partire l'analisi in modefrontier. L'algoritmo del simplesso contenuto all'interno del **flusso di processo** impone i primi valori delle variabili del processo denominate random. Tali primi set di parametri forniscono utili informazioni sulla funzione obiettivo per i successivi tentativi di parametri scelti dall'algoritmo.

Il processo di ottimizzazione è costituito da due tipi di analisi strettamente collegate fra loro. Per entrambe le analisi il range frequenziale analizzato è 20-300 Hz con passo di analisi 1 Hz. Ricordiamo che tale intervallo frequenziale corrisponde all'intervallo nel quale ricadono le frequenze di combustione di un motore 4 tempi 4 cilindri per tutte le velocità di rotazione di funzionamento.

L'analisi strutturale è definita con la risposta modale in frequenza e l'analisi acustica è definita con l'analisi in frequenza descrivente il modello di propagazione in campo libero delle ampiezze delle vibrazioni strutturali superficiali. L'obiettivo dell'ottimizzazione è ridurre l'overall di pressione sonora che dipende dalle ampiezze delle vibrazioni superficiali della struttura. Queste ultime sono determinate significativamente dall'interazione tra la sollecitazione del moto imposto nei vincoli della struttura e la base modale della struttura stessa. Tale processo di ottimizzazione è stato realizzato per tre diverse velocità di rotazione del motore: 1300,1650 e 2000 rpm.

Nei prossimi paragrafi analizzeremo i risultati dell'ottimizzazione relativi ai set dei valori delle variabili del processo (modulo di Young, Coefficiente di Poisson e densità) per le tre differenti velocità di rotazione del motore. Esporremo poi i motivi per i quali per le prime due velocità di rotazione, 1300 e 1650 rpm, i set dei valori delle variabili ottimizzate sono gli stessi mentre per 2000 rpm il set dei valori delle variabili ottimizzate è differente.

7.1 Velocità di rotazione 1300 e 1650 rpm

In Tabella 1 e Tabella 2 osserviamo, per ogni iterazione del processo di ottimizzazione, i valori delle tre variabili relative al modulo di Young, Coefficiente di Poisson e densità e il corrispondente risultato in termini di overall di pressione sonora radiata dal cover, rispettivamente per i casi di 1300 e 1650 rpm.

ID	Coefficiente di Poisson	Modulo di Young	Densità	Overall [dB](minimize)
0	0.43	450000	200	90.133
1	0.41	1000000	100	89.444
2	0.45	95000	800	89.785
3	0.45	400000	300	90.311
4	0.41	1000000	400	89.630
5	0.41	1000000	700	89.822
6	0.43	950000	200	89.504
7	0.39	1000000	100	89.466
8	0.41	950000	100	89.472
9	0.39	1000000	100	89.466
10	0.41	1000000	100	89.422
11	0.41	1000000	100	89.422
12	0.41	1000000	100	89.422

Tabella 1 Variabili di processo e il corrispondente risultato in termini di overall di pressione sonora per 1300 rpm

ID	Coefficiente di Poisson	Modulo di Young	Densità	Overall [dB](minimize)
0	0.43	450000	200	92.280
1	0.41	1000000	100	91.094
2	0.45	95000	800	91.638
3	0.45	400000	300	92.437
4	0.41	1000000	400	91.388
5	0.41	1000000	700	91.689
6	0.43	950000	200	91.202
7	0.39	1000000	100	91.143
8	0.41	950000	100	91.163
9	0.39	1000000	100	91.143
10	0.41	1000000	100	91.094
11	0.41	1000000	100	91.094

12	0.41	1000000	100	91.094
----	------	---------	-----	--------

Tabella 2 Variabili di processo e e il corrispondente risultato in termini di overall di pressione sonora per 1650 rpm

Osserviamo come i primi 4 set di parametri utilizzati nel processo di ottimizzazione siano i parametri random denominati "RNDDOE" mentre i successivi set di parametri sono dettati dall' algoritmo del Simplex denominati "SIMPEX".

Mentre in Fig.1 e Fig.2 compare l'andamento della funzione obiettivo denominata "minimize" in funzione delle iterazioni eseguite sempre per le due velocità di rotazione considerate.

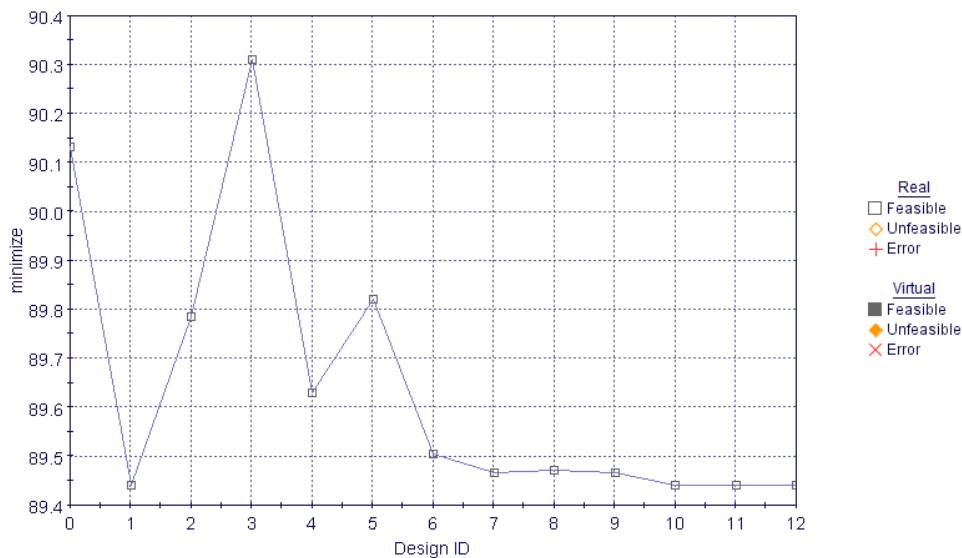


Fig.1 Funzione mono obiettivo per ogni Design ID (1300 rpm)

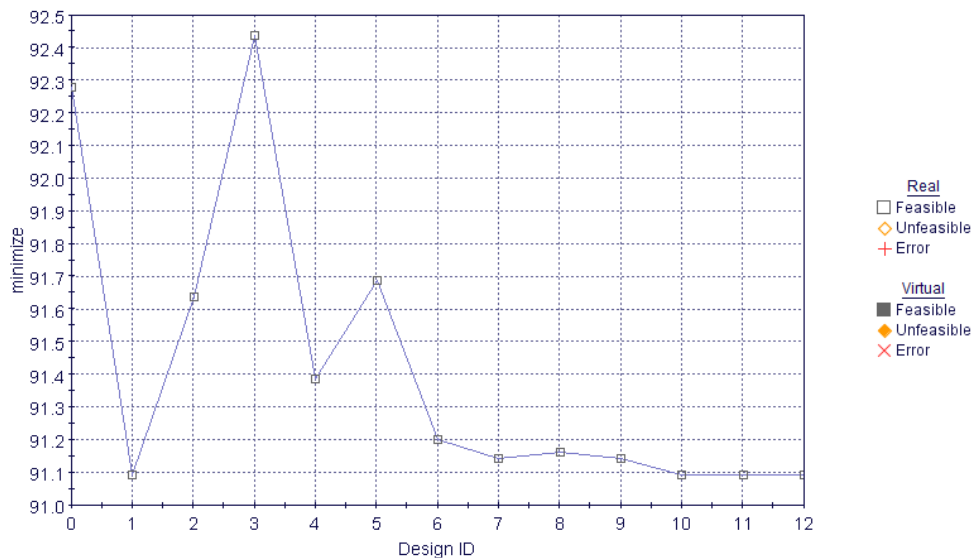


Fig.2 Funzione mono obiettivo per ogni Design ID (1650 rpm)

E possibile notare che le iterazioni associate agli ultimi Design ID corrispondono al minimo della funzione obiettivo. Ritornando alle Tab.1 e Tab.2, leggiamo quindi che per entrambe le velocità di

rotazione 1300 e 1650 rpm, l'algorithmo di ottimizzazione ricava lo stesso set di valori 0,41 1000000 N/m^2 e $100 kg/m^3$ rispettivamente per il Coefficiente di Poisson, modulo di Young e densità.

Ora ricerchiamo i motivi per i quali il processo di ottimizzazione individua tale set di parametri, partendo dall'analisi strutturale. In seguito faremo riferimento ai risultati del caso di 1300 rpm ma tutte le considerazioni possono essere analogamente discusse anche per il caso di 1650 rpm.

Quindi, osserviamo i risultati dell'analisi modale e della risposta modale in frequenza. Nelle Fig.3 a-r) sono mostrati i primi 16 modi di vibrare dell'intero sistema strutturale.

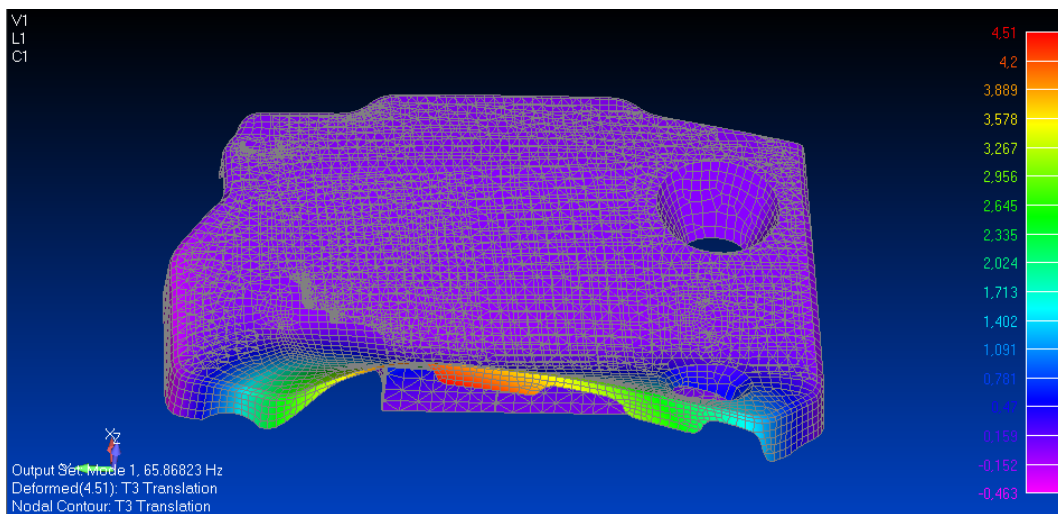


Fig.3 a) modo 1 (65Hz)

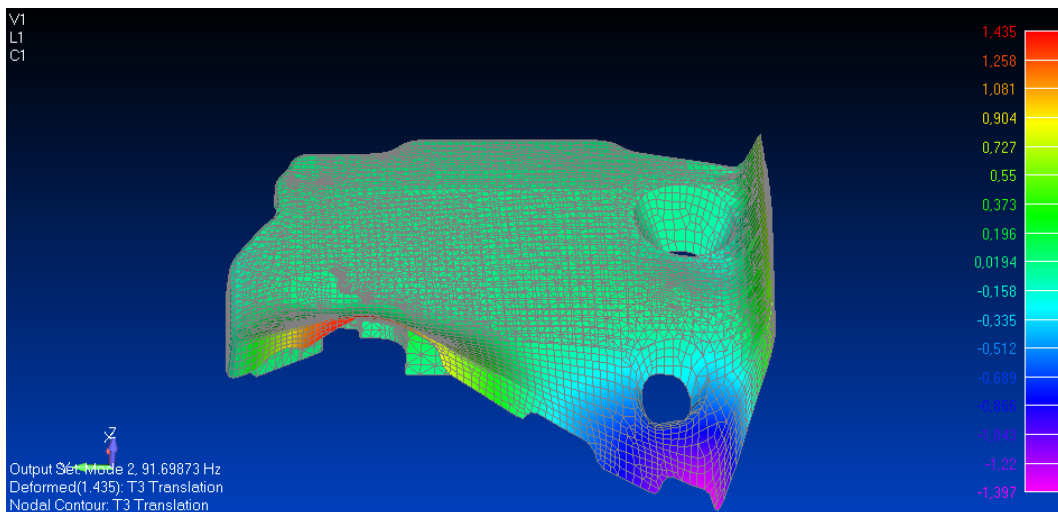


Fig.3 b) modo 2 (91Hz)

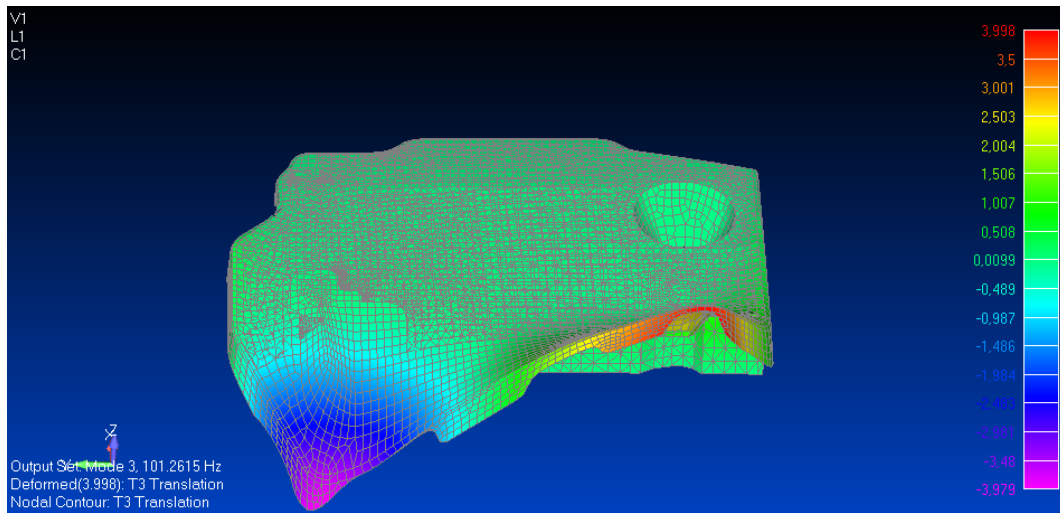


Fig.3 c) modo 3 (101Hz)

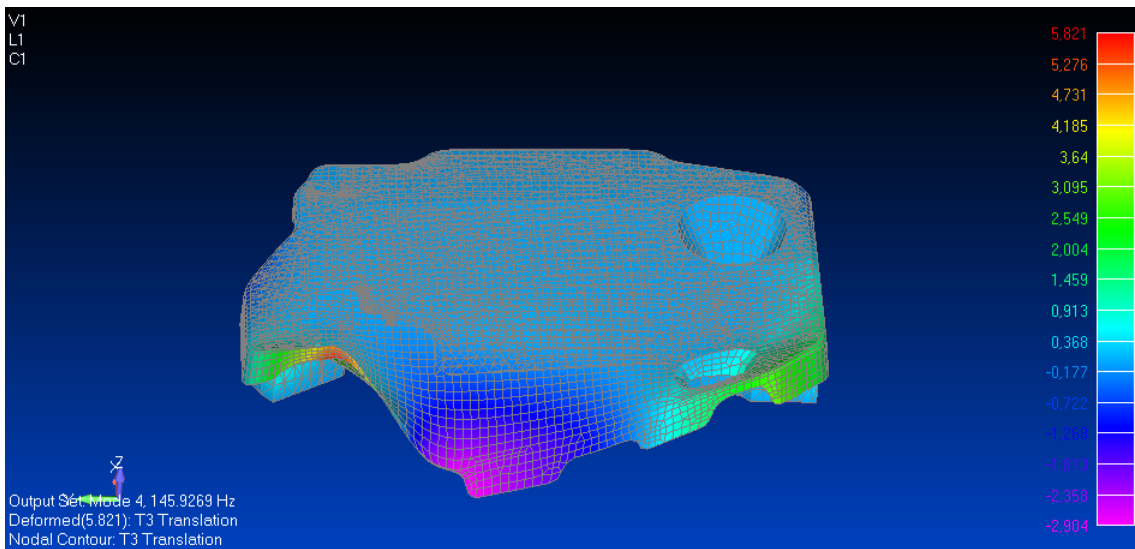


Fig.3 d) modo 4 (145Hz)

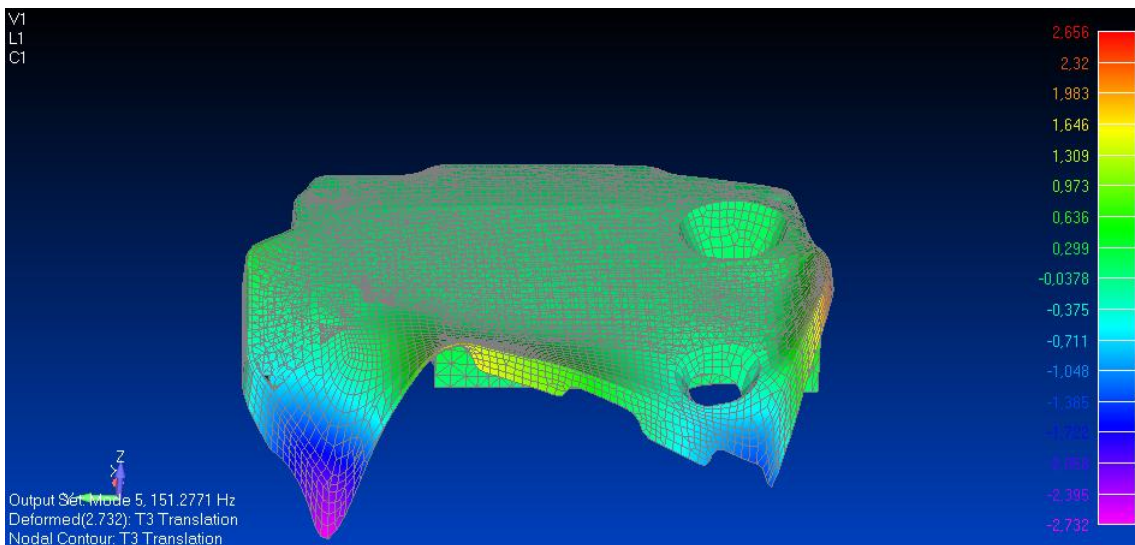


Fig.3 e) modo 5 (151Hz)

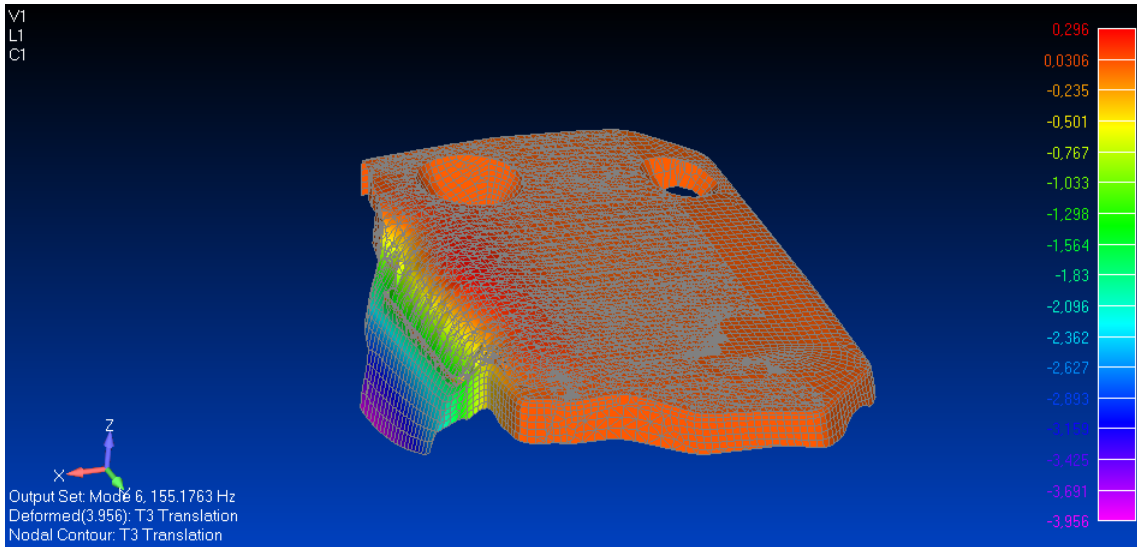


Fig.3 f) modo 6 (155Hz)

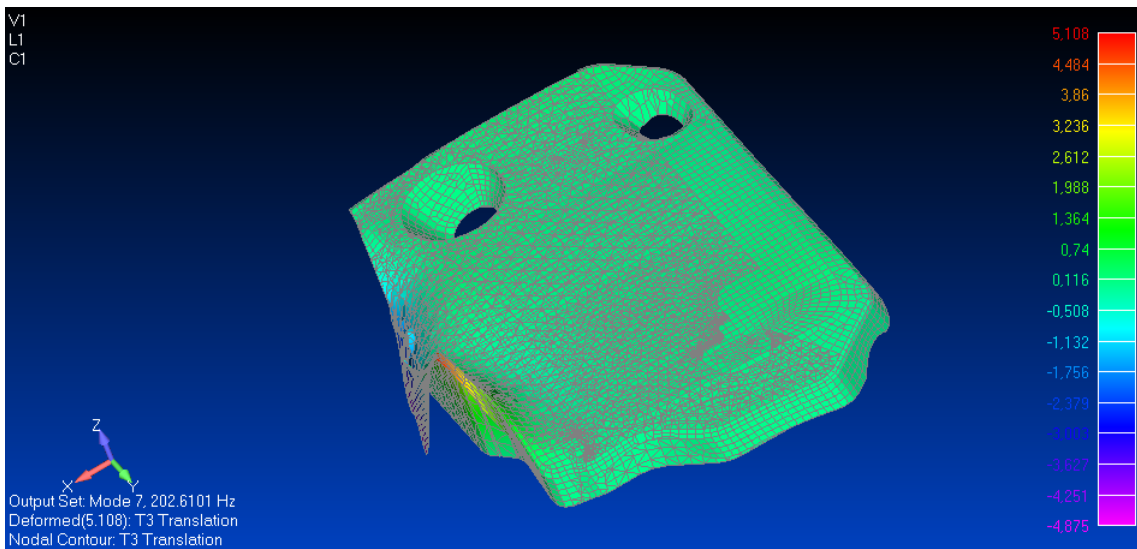


Fig.3 g) modo 7 (202Hz)

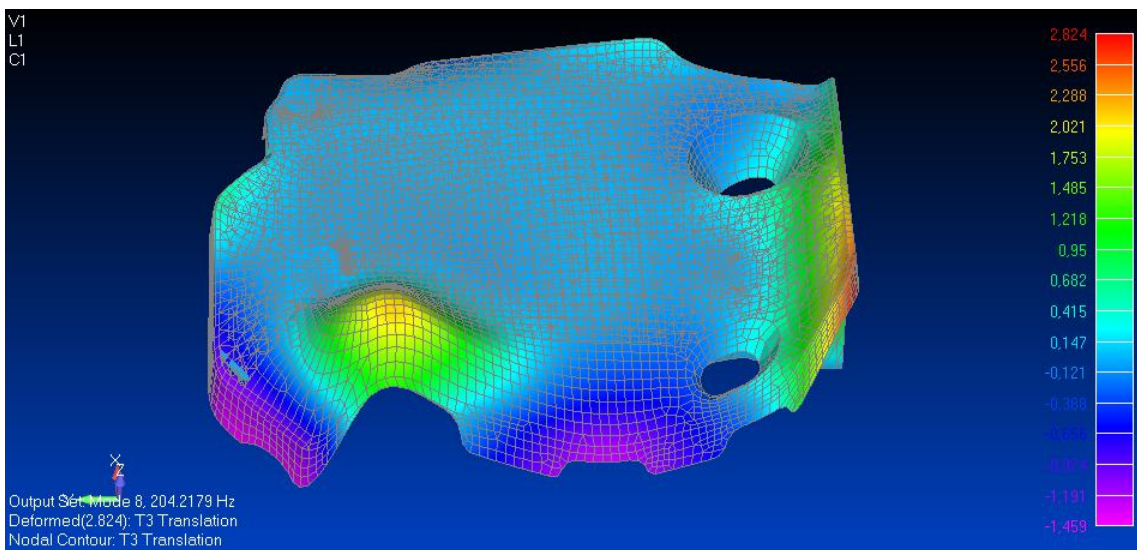


Fig.3 h) modo 8 (204Hz)

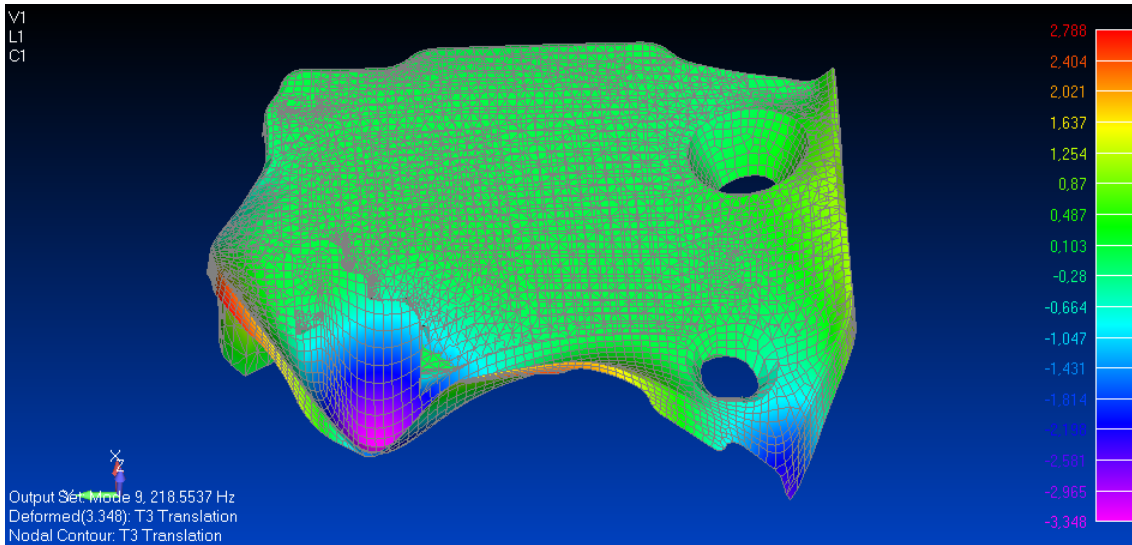


Fig.3 i) modo 9 (218Hz)

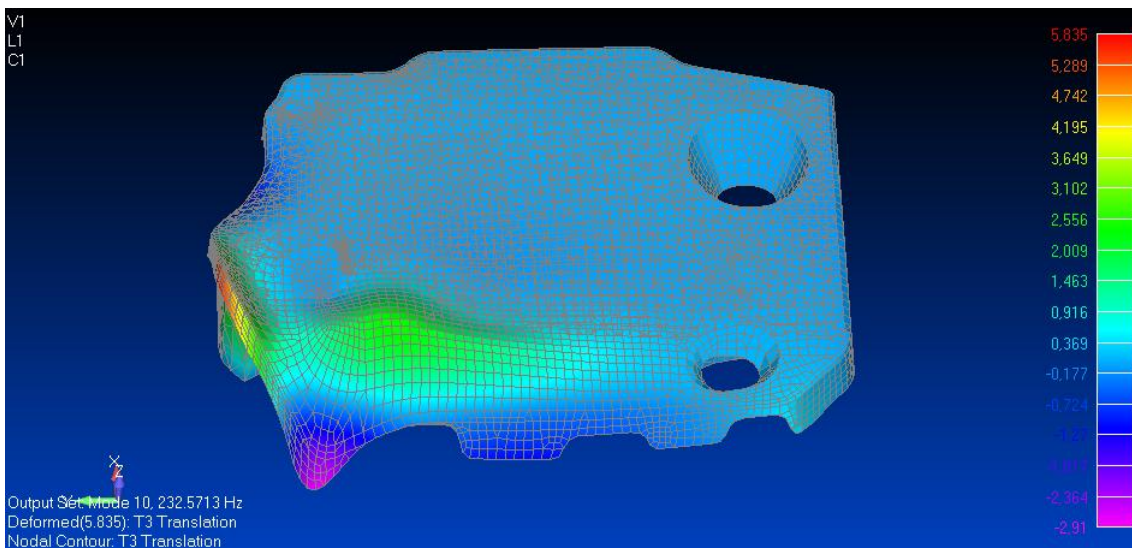


Fig.3 l) modo 10 (232Hz)

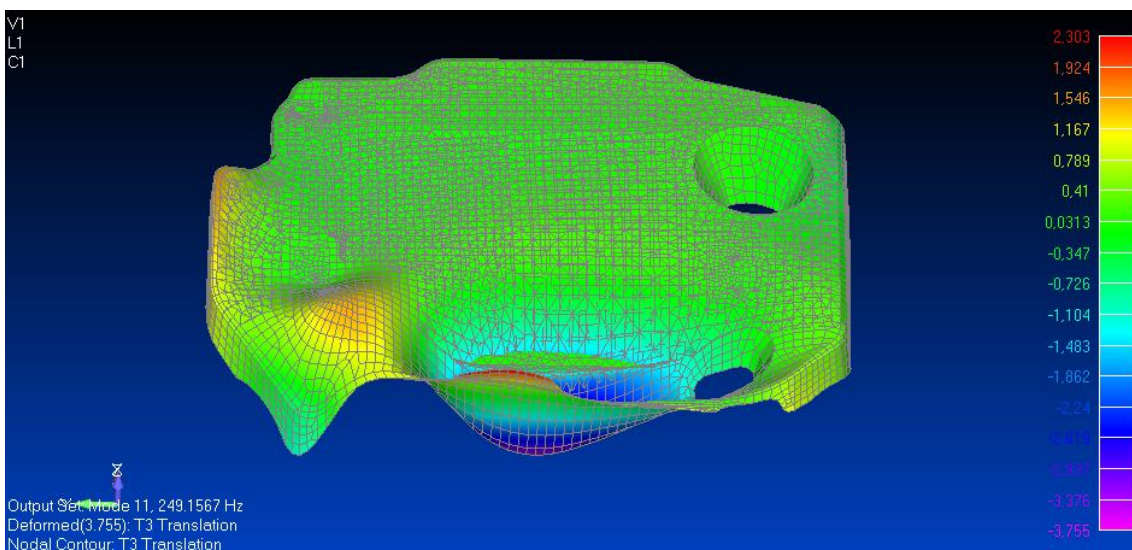


Fig.3 m) modo 11 (249Hz)

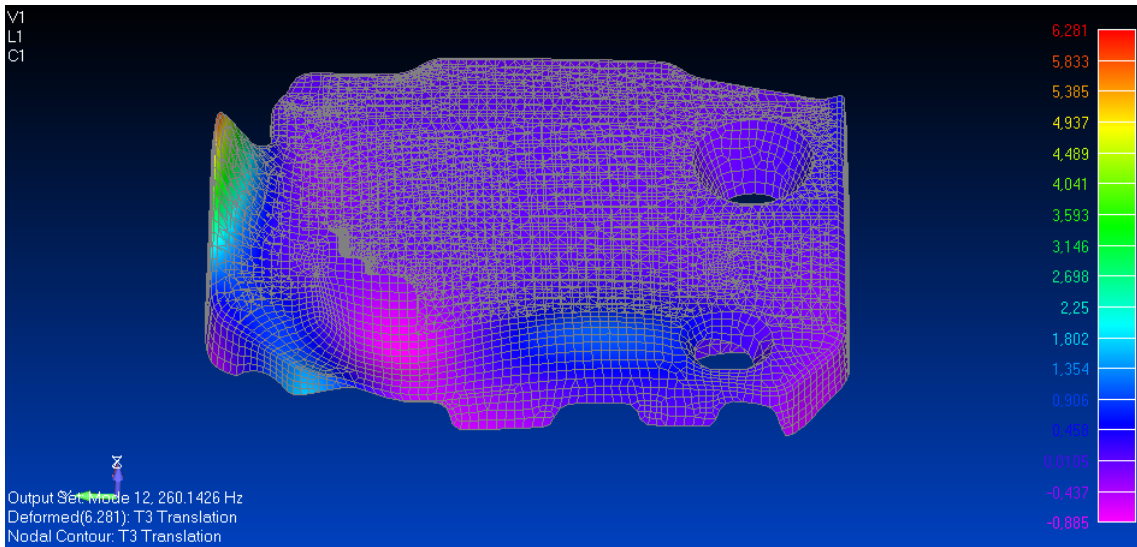


Fig.3 n) modo 12 (260Hz)

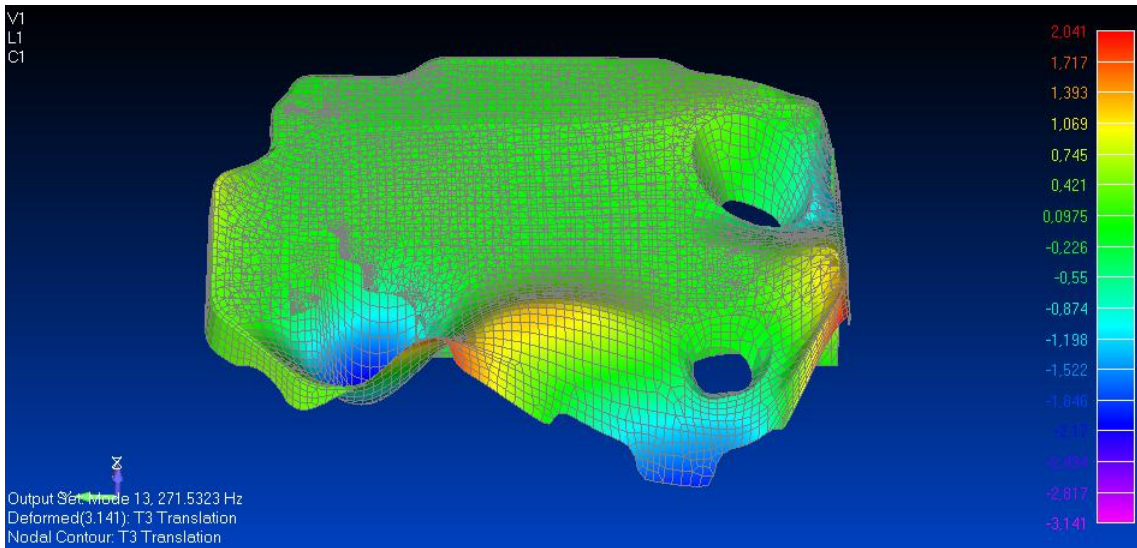


Fig.3 o) modo 13 (271Hz)

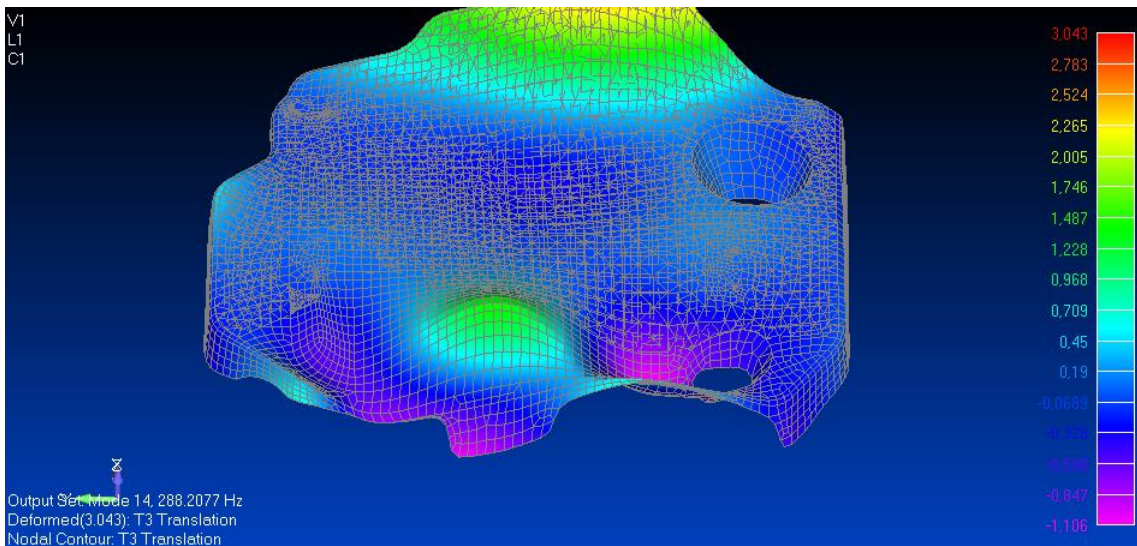


Fig.3 p) modo 14 (288Hz)

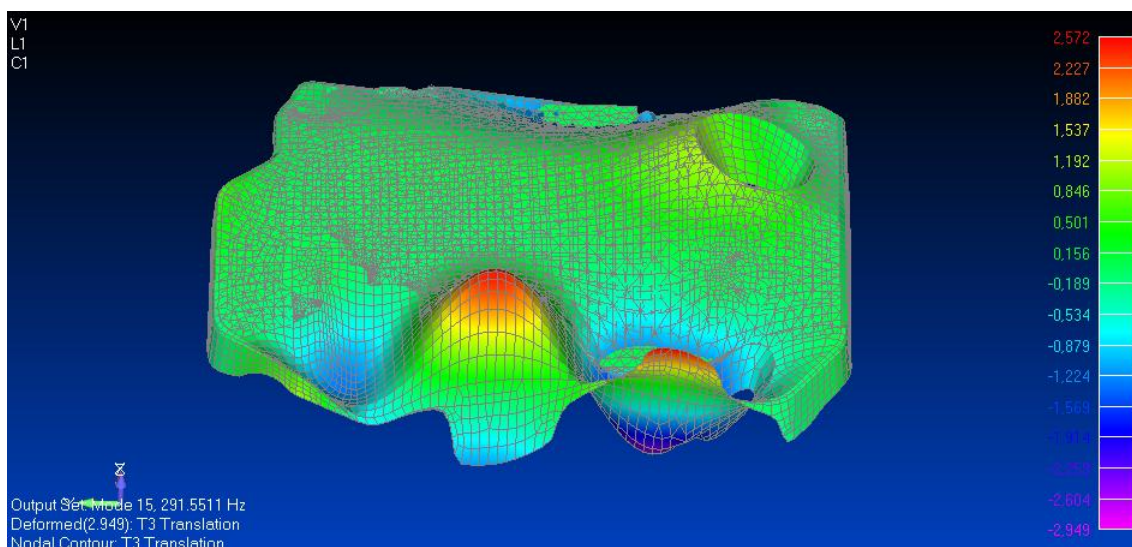


Fig.3 q) modo 15 (291Hz)

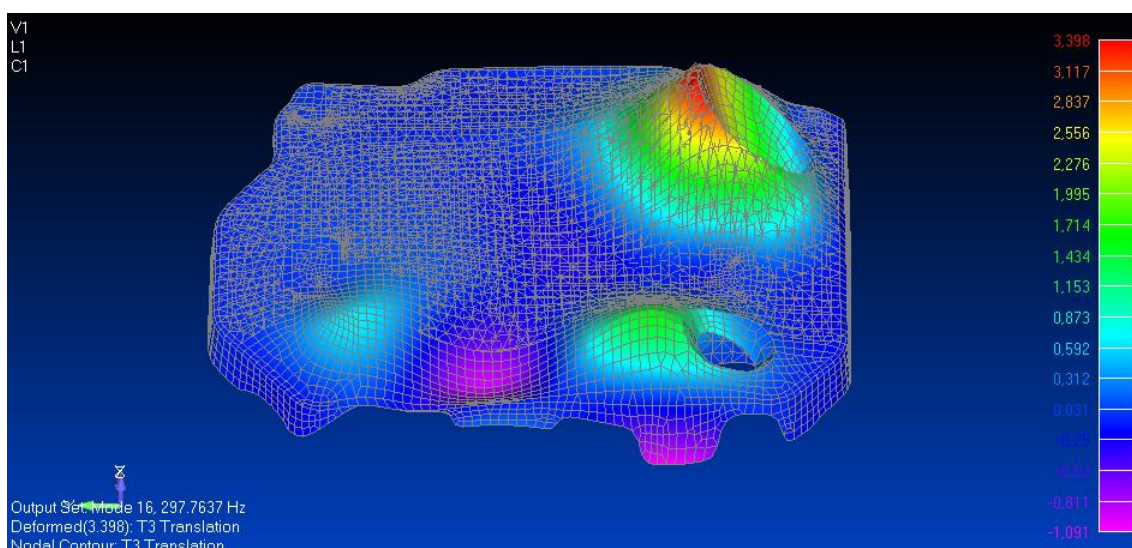


Fig.3 r) modo 16 (297Hz)

Le forme modali nelle Fig.3 sono espresse in funzione della deformazione lungo l'asse z e non in funzione della deformazione totale. Siccome la sollecitazione sul sistema avviene lungo tale asse sono proprio queste forme modali ad essere interessate dai fenomeni di risonanza alle frequenze corrispondenti a tali modi. In tabella 3 sono presenti i valori delle frequenze normali del sistema associati a tali modi di vibrare.

Numero modo	Frequenza [Hz]
1	65,8
2	91,6
3	101,2
4	145,9
5	151,2

6	155,1
7	202,6
8	204,2
9	218,5
10	232,5
11	249,1
12	260,1
13	271,5
14	288,2
15	291,5
16	297,7

Tabella 3 Valori delle frequenze normali del sistema strutturale

Possiamo notare ancora come le deformate dei primi 16 modi, all'interno dell'intervallo frequenziale d'indagine 20-300 Hz, siano localizzate sui bordi del sistema. Questo è giustificato dalle condizioni di vincolo del sistema che è collegato attraverso i supporti e il componente di poliuretano alla testata nella sua parte centrale. Quindi sono proprio tali zone periferiche della struttura che soggette alla sollecitazione vibrano con maggiore ampiezza e che irradiano suono maggiormente.

Ora riosserviamo in Fig.4 lo spettro di accelerazione relativo a 1300 rpm, utilizzato per sollecitare il modello strutturale.

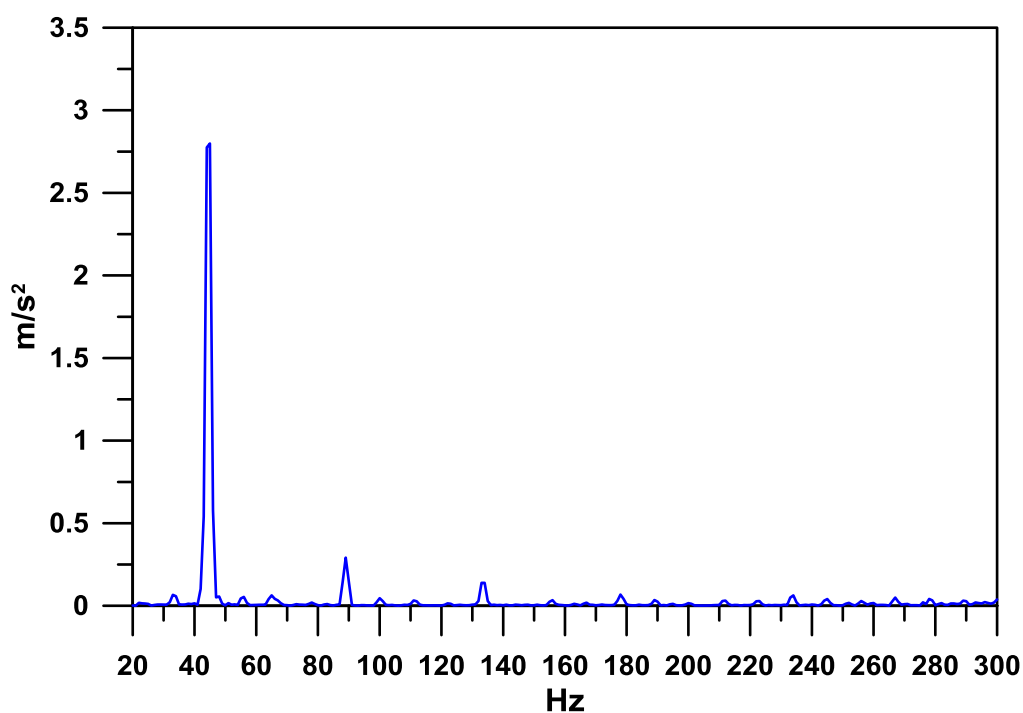


Fig.4 spettro di accelerazione relativo (1300 rpm)

L'ampiezza massima dello spettro si raggiunge intorno al valore di 45 Hz e l'ampiezza massima raggiunge i $2,8 \text{ m/s}^2$. Tale tipo di spettro ha le armoniche principali nell'intorno di 45 Hz poiché

nell'intorno di 45 Hz si verifica il fenomeno di combustione. Infatti riprendendo la formula per il calcolo della frequenza di combustione si ha:

$$f = n \cdot \frac{rpm}{\varepsilon \cdot 60} = 4 \cdot \frac{1300}{2 \cdot 60} \cong 45 \quad (\text{Hz})$$

dove n rappresenta il numero dei cilindri e ε rappresenta il numero dei giri dell'albero motore per ogni ciclo termodinamico.

Ciò che ci aspettiamo è che anche la risposta del sistema raggiunga la massima ampiezza nell'intorno della stessa frequenza e che questo intorno frequenziale per 1300 rpm rappresenti l'intervallo critico anche in termini di emissione acustica.

In Fig.5 mostriamo i valori delle risposte di tutti i nodi espressi in termini di accelerazioni lungo la componente z , in tutto l'intervallo in frequenza di indagine per la sola parte in plastica. Su tale parte focalizziamo l'attenzione siccome nel modello acustico sono utilizzati i risultati di tale componente per il modello di propagazione sonora.

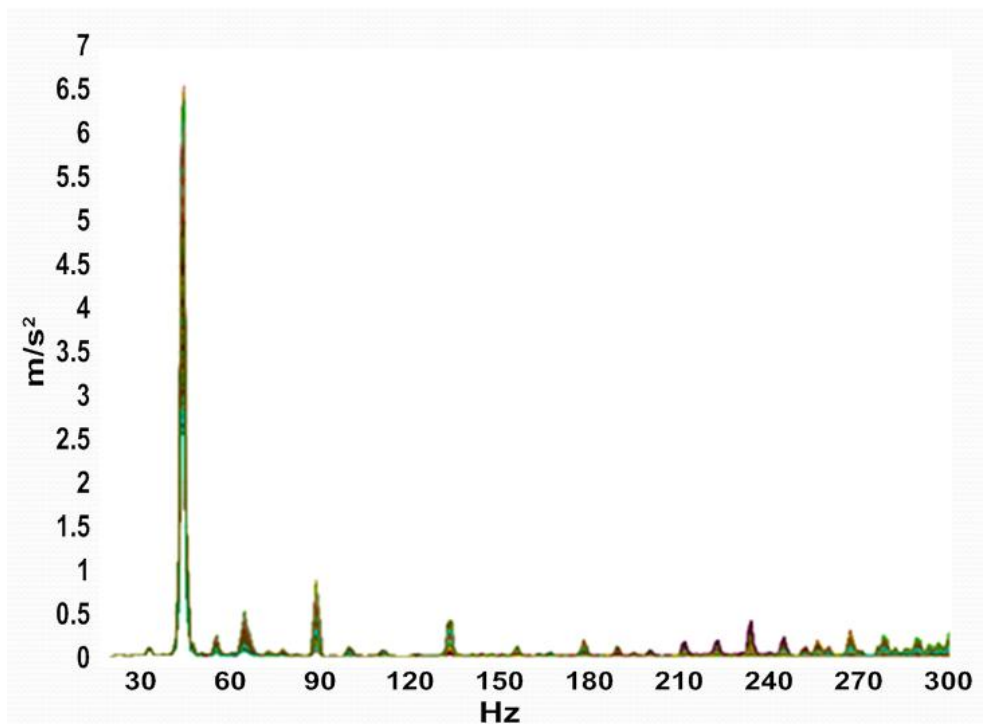


Fig.5 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica

Dai risultati si nota come l'ampiezza massima in termini di accelerazioni, nell'intorno di 45 Hz, è pari a $6,5 \text{ m/s}^2$, che risulta essere maggiore rispetto all'ampiezza massima della sollecitazione riportata in Fig.4 (3 m/s^2). Tale aumento in ampiezza è dovuto all'influenza preponderante del primo modo di vibrare che avviene a 65 Hz. A causa della vicinanza in frequenza tra il primo modo a 65 Hz e la sollecitazione a 45 Hz si genera un fenomeno di risonanza tale da raddoppiare l'accelerazione della sollecitazione raggiungendo per alcuni nodi del sistema strutturale, il valore di

$6,5 \text{ m/s}^2$. Per confermare l'influenza del primo modo di vibrare sulla risposta strutturale ricordiamo che in Dinamica delle Strutture, la risposta forzata di un sistema dinamico può essere espressa come sommatoria pesata delle deformate modali. Volendo focalizzare l'attenzione sulla risposta corrispondente alla massima ampiezza che accade a 45 Hz, essendo tale valore in frequenza inferiore rispetto alla frequenza del primo modo di vibrare che avviene a 65 Hz è proprio quest'ultimo modo ad influenzare maggiormente la risposta.

Inoltre come è possibile apprezzare dall'osservazione delle Fig.6 e Fig.7 la deformata della risposta strutturale a 45 Hz e la deformata del primo modo di vibrare sono simili. Pertanto è evidente come la risposta forzata del sistema a 45 Hz sia prevalentemente influenzata dalla deformata modale del primo modo.

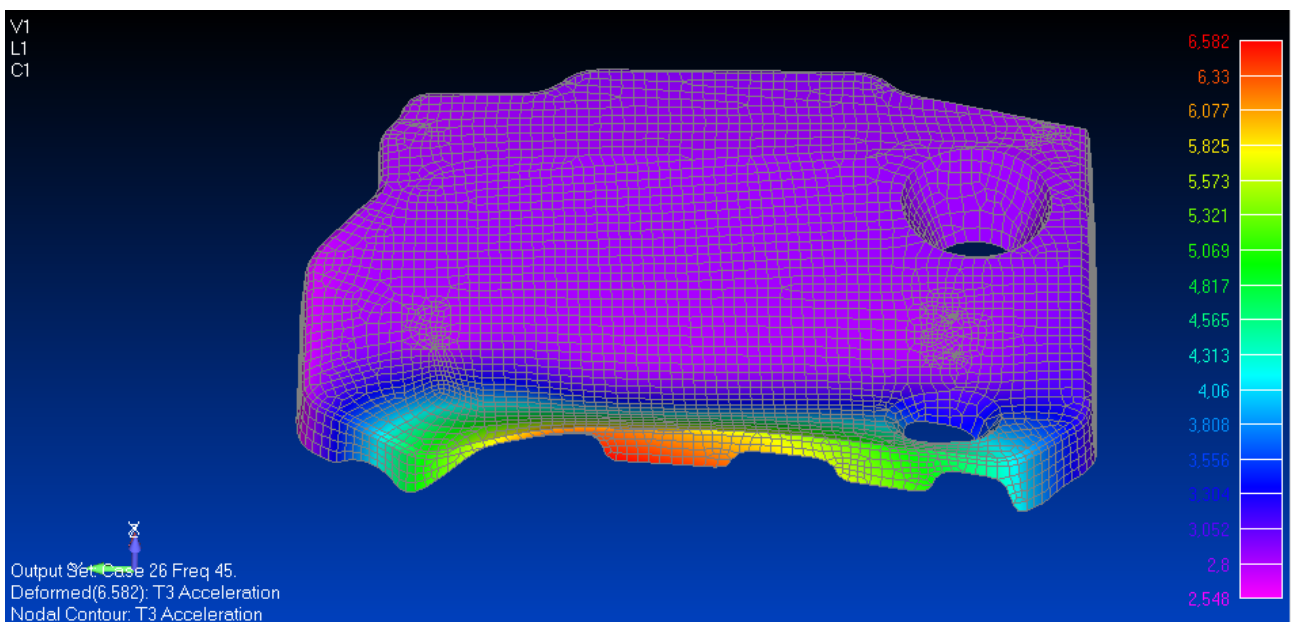


Fig.6 Deformata della risposta strutturale a 45 Hz

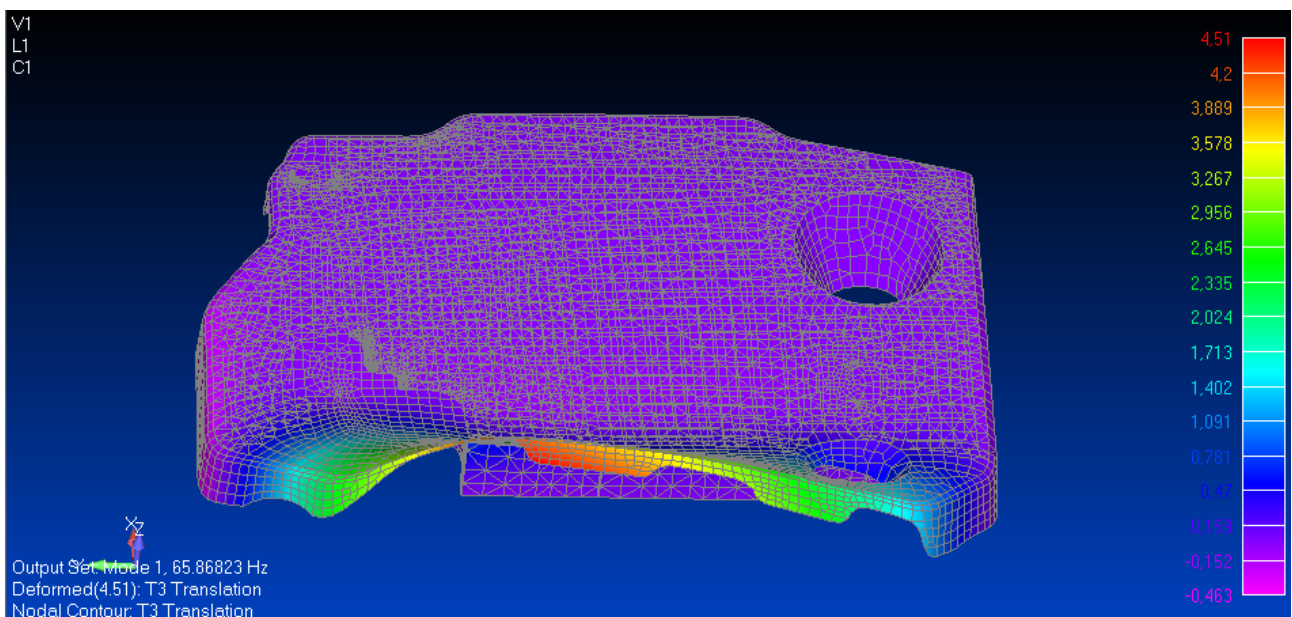


Fig.7 deformata del primo modo di vibrare

In aggiunta come è possibile notare dagli spettri di accelerazione di Fig.5, i nodi che raggiungono le ampiezze maggiori intorno ai $6,5 \text{ m/s}^2$ sono i nodi appartenenti al bordo della struttura che incomincia a deformarsi (Fig.6). Osservando che i colori caldi della scala cromatica, che corrispondono al modulo delle accelerazioni lungo la componente z, si nota come, quelli relativi alla risposta del sistema a 45 Hz sono proprio i più elevati.

I valori delle ampiezze delle vibrazioni superficiali di tutti i nodi che compongono la parte in plastica del modello strutturale, sono poi inseriti nel modello di propagazione sonora, rappresentando una delle condizioni al contorno del modello di propagazione. A tal proposito, mostriamo in Fig.8 il risultato del modello numerico acustico, ossia lo spettro di pressione sonora ad 1m di distanza dal cover, corrispondente al set di parametri ottimizzati.

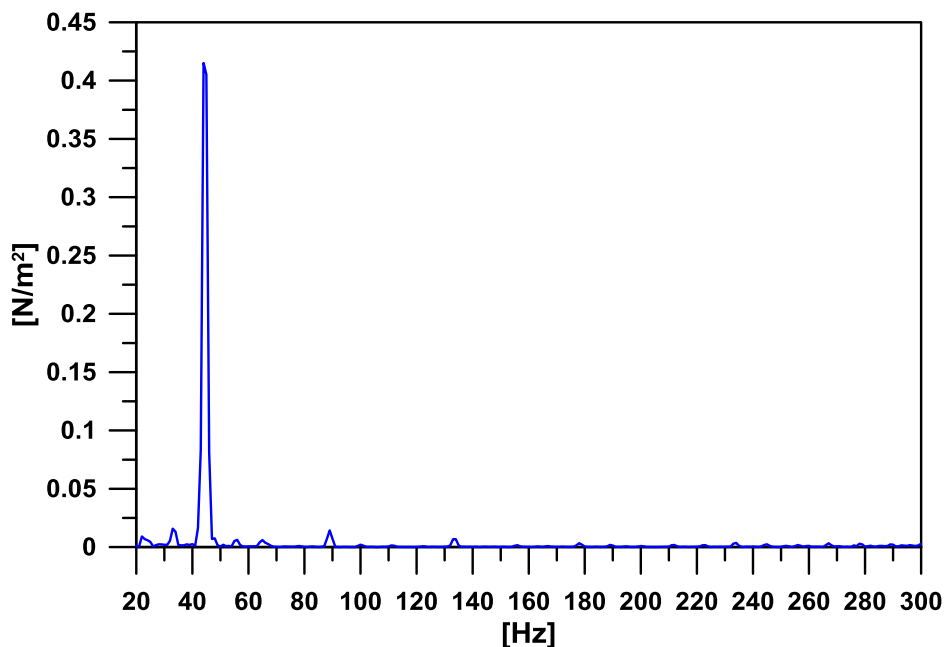


Fig. 8 Spettro di pressione sonora, risultato del modello numerico BEM

Osserviamo come nello spettro di pressione sonora il picco massimo in ampiezza avviene intorno a 45 Hz siccome la sorgente che sviluppa il campo sonoro è costituita dalle ampiezze delle vibrazioni superficiali strutturali, che sono anch'esse massime intorno a 45 Hz. Tale contenuto è quello che "pesa" maggiormente nel computo dell'overall di pressione sonora, che ricordiamo essere una sommatoria dei valori di pressioni dello spettro al quadrato e sotto radice.

$$overall = \sqrt{\sum_n p_n^2}$$

Inoltre è possibile notare dal valore dei parametri del componente di poliuretano grazie ai quali il sistema minimizza l'obiettivo, che il sistema per ridurre le ampiezze delle vibrazioni strutturali e il conseguente campo di pressione sonora non fa altro che irrigidirsi aumentando il valore della

rigidezza portando infatti il valore del modulo di Young al limite superiore e diminuendo la massa portando il valore della densità al limite inferiore. Questo si traduce in un aumento delle frequenze proprie del sistema con conseguente allontanamento dalla condizione di risonanza.

Tutto ciò è concettualmente confermato considerando il semplice modello di oscillatore armonico ad un grado di libertà che però costituisce la base per i sistemi a più gradi di libertà e dal quale è possibile evincere l'influenza dei parametri di analisi.

Infatti l'ampiezza dello spostamento dell'oscillatore risulta proporzionale alla forzante e inversamente proporzionale ad una quantità che aumenta con l'aumentare della rigidezza e il diminuire della densità.

$$\{u(\omega)\} = \frac{\{P(\omega)\}}{[-\omega^2 M + i\omega B + K]}$$

dove $P(\omega)$ rappresenta la forzante

ed M , K e B rispettivamente la massa la rigidezza e lo smorzamento dell'oscillatore

e ricordando che $\omega^2 = \frac{K}{M}$

Analogo commento è possibile eseguire per la velocità 1600 rpm, l'unica sostanziale differenza è che il picco in ampiezza della sollecitazione e quindi della risposta in frequenza avviene intorno a 55 Hz.

7.2 Velocità di rotazione 2000 rpm

Per quel che riguarda il caso di 2000 rpm il set di parametri che individua il processo di ottimizzazione è diverso dai precedenti due casi.

Anche per il caso di 2000 rpm osserviamo in Tabella 4 i valori delle tre variabili e dell'obiettivo calcolato relativo all'overall di pressione, per ogni iterazione del processo di ottimizzazione.

ID	Coefficiente di Poisson	Modulo di Young	Densità	Overall [dB](minimize)
0	0,43	450000	200	88.818
1	0,41	1000000	100	90.459
2	0,45	950000	800	90.325
3	0,45	400000	300	89.246
4	0,41	300000	100	89.307
5	0,45	50000	300	91.656

6	0,43	700000	200	88.719
7	0,45	750000	400	89.142
8	0,43	850000	200	89.240
9	0,43	750000	200	88.856
10	0,41	500000	100	88.459
11	0,41	350000	100	88.979
12	0,43	650000	200	88.627
13	0,41	800000	100	88.826
14	0,43	550000	200	88.602
15	0,41	450000	100	88.568
16	0,41	350000	100	88.979
17	0,43	600000	200	88.586
18	0,41	500000	100	88.459
19	0,39	350000	100	89.104
20	0,43	550000	200	88.602
21	0,41	500000	100	88.459
22	0,41	500000	100	88.459
23	0,43	550000	200	88.602
24	0,39	450000	100	88.658
25	0,43	550000	200	88.602
26	0,41	500000	100	88.459
27	0,41	500000	100	88.459

Tabella 4 Variabili di processo e il corrispondente risultato in termini di overall di pressione sonora per 2000 rpm

I valori delle variabili ottimizzate corrispondono agli ultimi Design ID, quindi al set di valori 0,41 500000 N/m^2 e 100 kg/m^3 rispettivamente per il Coefficiente di Poisson, modulo di Young e densità.

Il sistema, quindi, in tal caso non tende semplicemente a raggiungere la condizione di massima rigidità ma cambia il set di parametri dei materiali del componente di poliuretano rispetto al set precedentemente scelto per i casi 1300 e 1650 rpm. Prima di evidenziare i motivi della scelta di un diverso set di variabili ottimizzate riosserviamo, anche per il caso a 2000 rpm, lo spettro accelerazione utilizzati per sollecitare il modello strutturale (Fig.9).

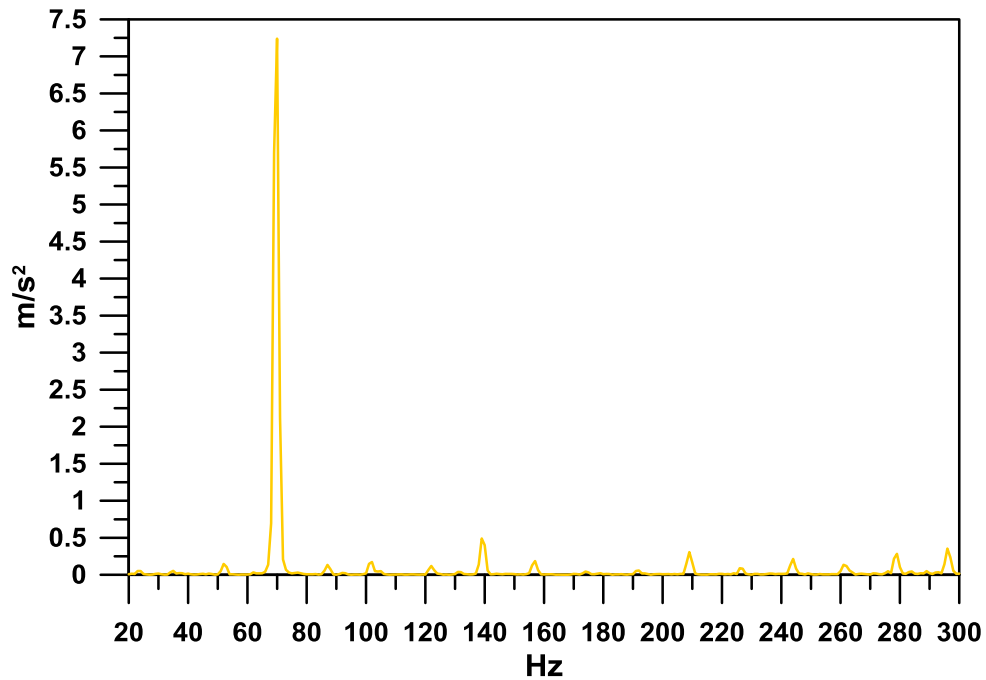


Fig.9 spettro di accelerazione relativo (1300 rpm)

Notiamo che il picco in ampiezza in termine di accelerazione supera di poco i 7 m/s^2 e accade intorno ai 70 Hz.

Quindi incominciamo a considerare che, la frequenza del primo modo di vibrare utilizzando il set di valori ottimizzati per i precedenti due casi 1300 e 1650 Hz, accade a 65 Hz come è possibile osservare in tabella 3 e la frequenza della sollecitazione accade a 70 Hz per il caso di 2000 rpm. Le frequenze del primo modo e della sollecitazione sono prossime. Tale vicinanza in termini di frequenza genera un fenomeno di risonanza significativo che dà luogo a delle ampiezze delle vibrazioni strutturali tali da indurre il processo di ottimizzazione ad individuare un nuovo set di parametri dei materiali. Il nuovo set di valori scelto non cambierà le forme modali ma le frequenze alle quali le stesse avvengono, evitando il fenomeno di risonanza più rilevante. Ciò accade perché stanno cambiando i valori che identificano il componente di poliuretano, per cui cambia la rigidezza e la massa del sistema ma le geometrie e le condizioni di vincolo ovviamente non mutano e quindi neanche le forme modali ma solo le frequenze alle quali si manifestano i modi di vibrare.

Per chiarire la trattazione seguente definiamo il set1 quello composto dai valori indicati dal processo di ottimizzazione per i casi 1300 e 1650 rpm, ossia $0,41 \cdot 1000000 \text{ N/m}^2$ e 100 kg/m^3 rispettivamente per il Coefficiente di Poisson, modulo di Young e densità e chiameremo il set 2 quello composto dai valori individuati dall'ottimizzazione per il caso di 2000 rpm, ossia $0,41 \cdot 500000 \text{ N/m}^2$ e 100 kg/m^3 . Esponiamo più ordinatamente in tabella 5:

Set1	Set2
------	------

Coefficiente di Poisson		0,41	0,41
Modulo di Young	[N/m ²]	1000000	500000
Densità	[kg/m ³]	100	100

Tabella 5 Parametri dei materiali del set1 e del set2

Per verificare quanto incida diversamente il fenomeno della risonanza per la velocità di rotazione di 2000 rpm utilizzando i due diversi set di valori, osserviamo i nuovi valori delle frequenze dei modi di vibrare relativi al set2, le cui forme modali sono le stesse ed esposte nelle Fig.3. E confrontiamo i risultati numerici relativi alle risposte del sistema strutturale, delle ampiezze delle vibrazioni superficiali della struttura espresse in termini di accelerazione lungo z, nel caso dell'utilizzo del set1 e del set2 di parametri.

In tabella 6 sono presenti i nuovi valori delle frequenze utilizzando i parametri del set2 sempre per i primi 16 modi e i valori delle frequenze dei modi (in rosso) utilizzando il set1.

Numero modo	Frequenza modi set1 [Hz]	Frequenze modi set2 [Hz]
1	59,7	65,8
2	88,3	91,6
3	90,9	101,2
4	129,1	145,9
5	132,9	151,2
6	142,0	155,1
7	179,2	202,6
8	180,1	204,2
9	187,7	218,5
10	203,5	232,5
11	215,3	249,1
12	222,4	260,1
13	226,1	271,5
14	232,1	288,2
15	251,2	291,5
16	253,0	297,7

Tabella 6 Valori delle frequenze normali del sistema strutturale utilizzando il set1 e il set2

Notiamo come il valore della prima frequenza del primo modo di vibrare passa da 65 Hz a 59 Hz utilizzando il set2 di parametri. Le frequenze del primo modo di vibrare a 59 Hz e della sollecitazione a 70 Hz si allontanano, generando un fenomeno di risonanza di minore entità rispetto a quando il primo modo di vibrare risultava accadere a 65 Hz relativamente all'utilizzo del set1 di parametri.

A conferma di ciò confrontiamo nelle Fig.10 e Fig.11 le risposte dell'analisi di risposta modale di tutti i nodi espresse in termini delle accelerazioni lungo z, del componente in plastica, relative al set1 e al set2.

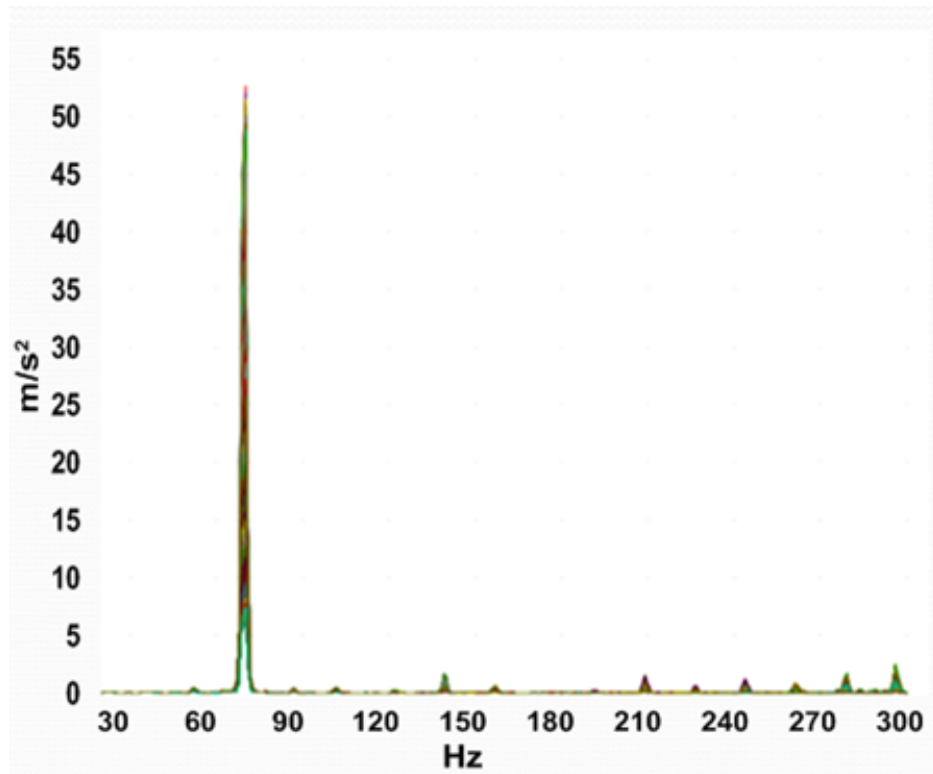


Fig.10 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica utilizzando il set1

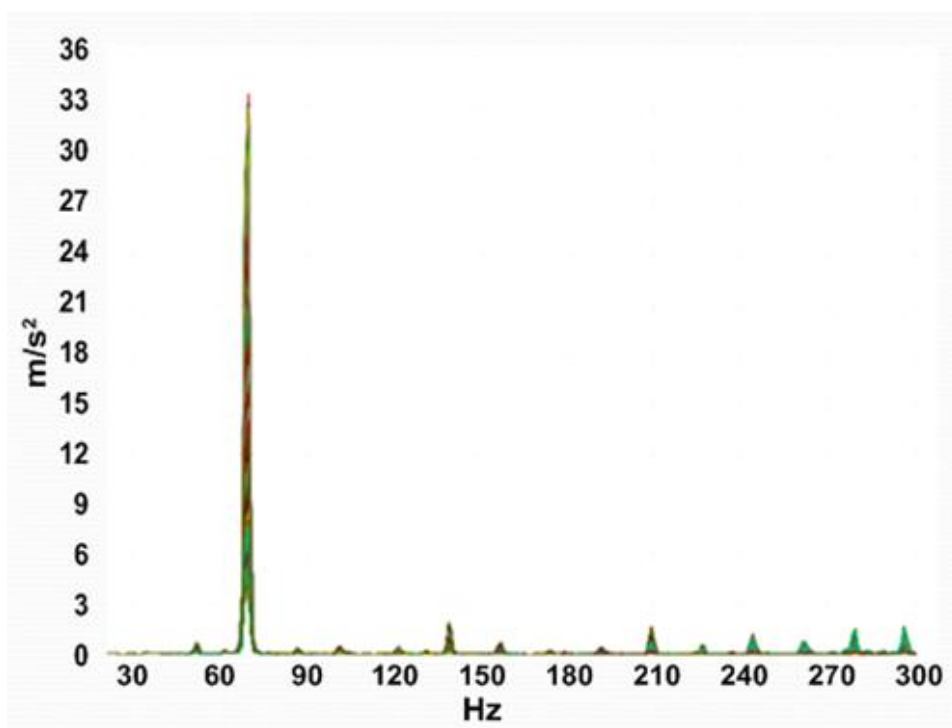


Fig.11 Ampiezza delle accelerazioni di tutti i nodi del componente in plastica utilizzando il set2

Notiamo che la risposta strutturale in termini di accelerazione lungo l'asse z è decisamente più alta adoperando il set1 rispetto al set 2. Il fenomeno di risonanza utilizzando il set1 conduce a valori

dell'ampiezza delle accelerazioni superiori a 50 m/s^2 mentre utilizzando il set2 supera di poco i 33 m/s^2 .

Nelle successive Fig.12 e Fig.13 possiamo osservare le deformate per la frequenza di 70 Hz, frequenza alla quale le ampiezze delle vibrazioni strutturali sono massime, per i due set di parametri utilizzati.

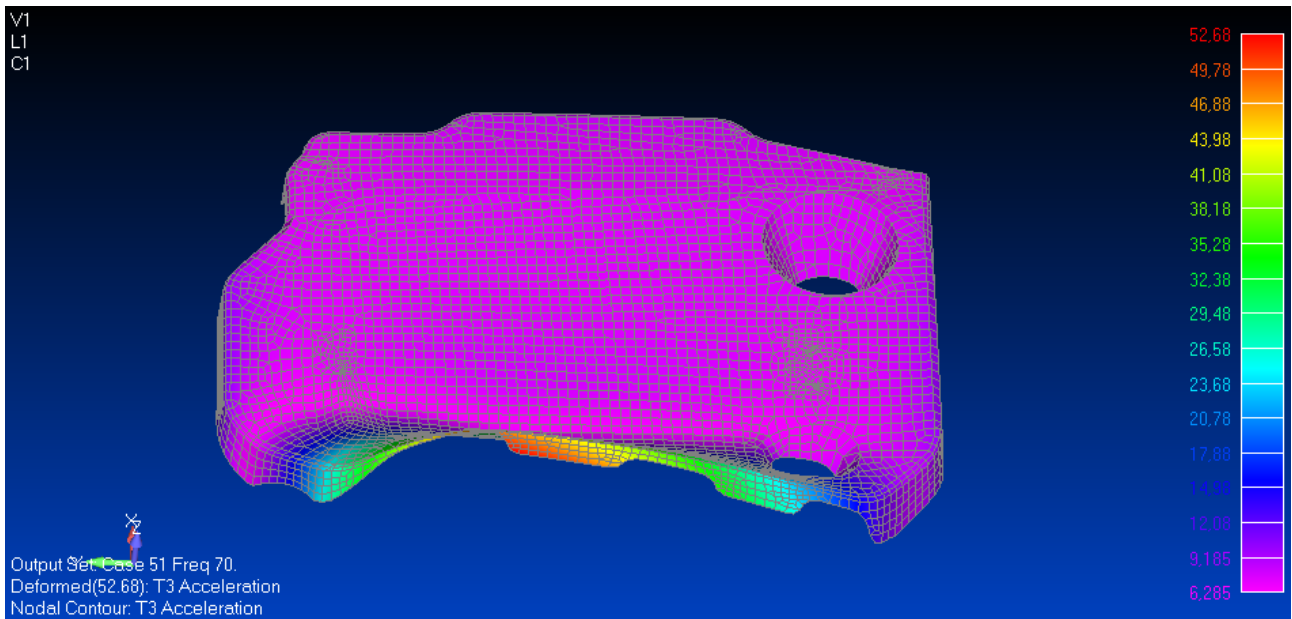


Fig.12 Deformata della risposta strutturale a 70 Hz (set1)

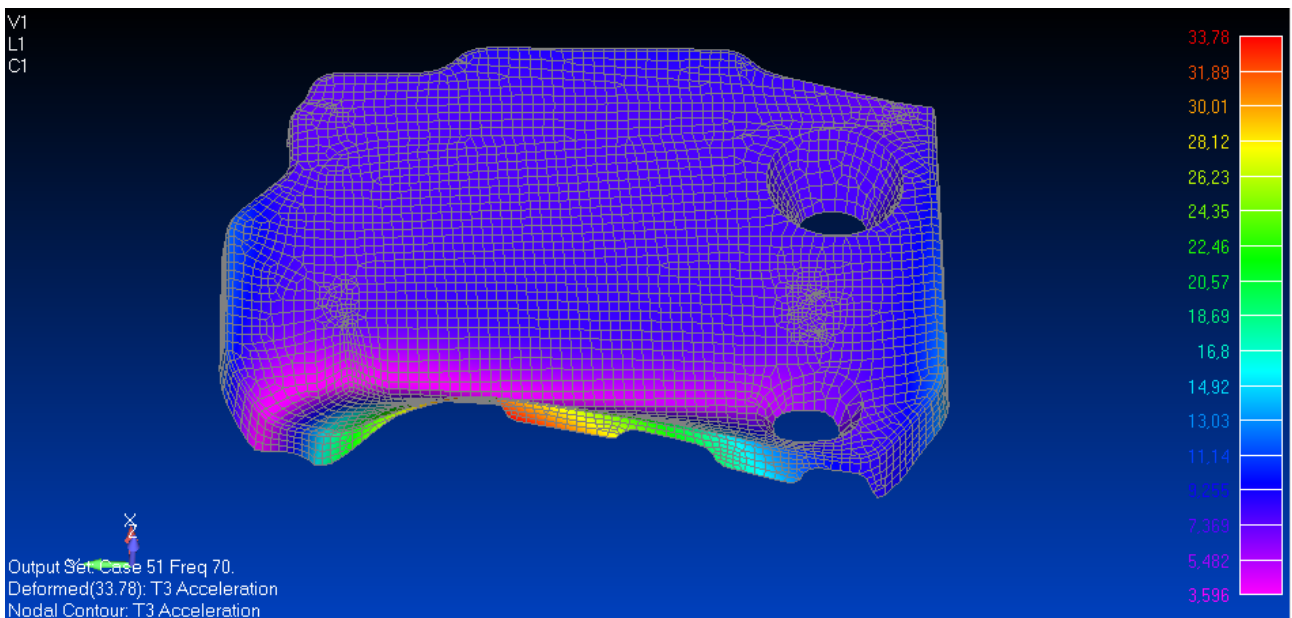


Fig.13 Deformata della risposta strutturale a 70 Hz (set2)

Notiamo che i valori della scala cromatica delle componenti lungo z delle accelerazioni massime sono superiori nel caso dell'utilizzo del set 1, rispetto al set2. Per il set1 si ottiene un valore

massimo di $52,68 \text{ m/s}^2$ e per il set2 si ottiene un valore massimo di $33,78 \text{ m/s}^2$. Sono proprio tali valori raggiunti dai nodi del bordo che più si deforma nelle due risposte (in basso osservando le ultime due figure), che incidono maggiormente nella generazione del campo di pressione e quindi sull'obiettivo del processo di ottimizzazione.

Ancor più interessante è osservare che dai bordi laterali a sinistra e a destra delle Fig.12 e Fig.13 si nota come l'influenza del secondo modo di vibrare nella risposta relativa al set2 dei parametri è più accentuata rispetto alla risposta del set 1. Osserviamo la scala cromatica relativa ai valori delle accelerazioni lungo z, nella Fig.12 le zone dei bordi a sinistra e a destra assumono i valori più bassi della scala cromatica, sono viola e raggiungono i valori di 6 m/s^2 mentre nella Fig.13 le zone dei bordi laterali a sinistra e a destra assumono valori centrali della scala cromatica, sono blu e raggiungono valori intorno ai 14 m/s^2 . Chiariamo subito che ciò non deve sorprenderci o confonderci che i valori dei bordi del cover a sinistra e a destra delle accelerazioni del set 2 sono superiori rispetto al set1 poiché come già detto è sempre la vibrazione del bordo (in basso nelle figure della risposta in frequenza) dovuta al primo modo di vibrare che incide maggiormente sul campo sonoro. Vogliamo solo evidenziare che l'influenza del secondo modo sulla risposta strutturale è maggiore utilizzando il set 2. Rivediamo le deformate modali del primo e del secondo modo Fig.3 a) e b), notiamo che il secondo modo di vibrare prevede la deformazione lungo z dei bordi laterali a sinistra e a destra e tale influenza è più chiara nella risposta relativa all'utilizzo del set2. Questo succede perché, il sistema è sollecitato con lo stesso spettro di accelerazione, la cui ampiezza massima è a 70 Hz, ma utilizzando il set1 tale sollecitazione ricade nell'intervallo tra il primo e il secondo modo che va da 65 Hz a 91 Hz mentre utilizzando il set2 la sollecitazione massima ricade nell'intervallo tra il primo e il secondo modo che va da 59 a 88 Hz. Per cui, utilizzando il set2 di parametri, la risposta del sistema a 70 Hz incomincia a essere influenzata anche dal secondo modo di vibrare che accade a 88 Hz. Mentre non accade in modo evidente per il set1, essendo la frequenza del primo modo a 65 Hz prossima a 70 Hz, l'influenza del secondo modo di vibrare è meno marcata.

Le diverse ampiezze vibrazionali che si ottengono utilizzando i due set diversi di parametri influenzano significativamente lo spettro di pressione del modello di propagazione acustica relativo al pressione sonora rilevata ad 1 m dal cover. In Fig.14 c'è lo spettro di pressione relativo all'analisi acustica all'interno della quale sono stati caricati i risultati strutturali derivanti dall'utilizzo del set1 (curva rossa) e del set2 (curva blu).

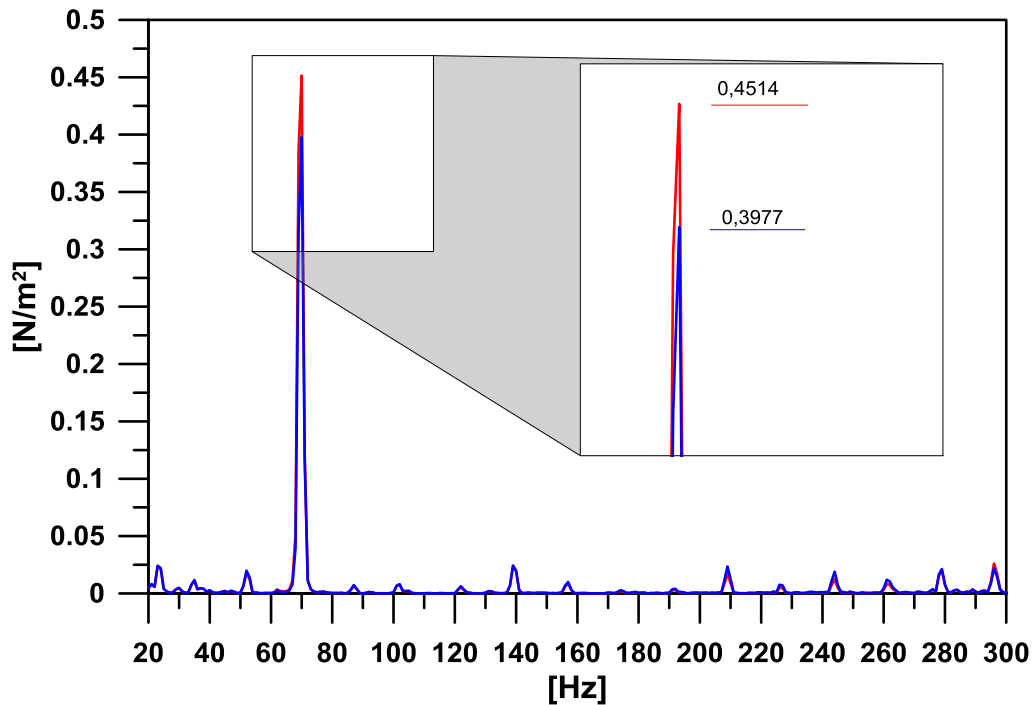


Fig.14 Spettro di pressione sonora, risultato del modello numerico BEM utilizzando il set1 (curva rossa) e il set2 (curva blu)

Osserviamo che il valore del picco massimo a 70 Hz relativo all'utilizzo del set1 conduce ad un valore più alto della pressione sonora che raggiunge i $0,4514 \text{ N/m}^2$ mentre per il set2 il picco di pressione è decisamente più basso e raggiunge i $0,3977 \text{ N/m}^2$. Nel calcolo dell'overall di pressione sonora è il picco massimo a 70 Hz che ne influenza maggiormente il valore.

Esprimendo in dB l'overall di pressione utilizzando i parametri del set 1 si ottengono 90,5 dB e utilizzando il set2 si ha 88,4 dB. Mentre il picco massimo di pressione sonora dello spettro di Fig.14 corrisponde a 87,1 dB per il set1 e 85,9 dB per il set2, dalla nota formula:

$$overall_dB = 20 \cdot \log_{10} \frac{overall(N/m^2)}{2 \cdot 10^{-5}} \quad [dB]$$

7.3 Scelta del set di parametri ottimizzato

Il sistema è stato sollecitato con tre velocità di rotazione 1300, 1650 e 2000 rpm e ha indicato due set diversi di parametri ottimizzati (set1 e set2) relativamente alle tre condizioni di funzionamento analizzate. Come discusso nei paragrafi precedenti se le condizioni operative cambiano, cambia la sollecitazione a cui il sistema strutturale è soggetto e di conseguenza varia la risposta strutturale in termini di ampiezza delle vibrazioni superficiali e quindi varia anche l'emissione acustica. Nel caso più generale possibile avremmo potuto avere tre set di parametri ottimizzati, ognuno corrispondente

ad una condizione di funzionamento. La soluzione ottimale sarebbe quella di cambiare il materiale ad ogni velocità di rotazione, ma ovviamente non è un'ipotesi realizzabile tecnologicamente. Quindi per definire il set dei parametri da utilizzare per tutte le condizioni operative analizzate è necessario fare una scelta dettata dalla convenienza.

Il set di parametri scelto è il set2 quello costituito dai valori $0,41 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ e 100 kg/m^3 rispettivamente per il Coefficiente di Poisson, modulo di Young e densità, perché utilizzando il set di parametri individuato dal processo di ottimizzazione nel caso di sollecitazione di 2000 rpm (set2) per i casi 1300 e 1650 rpm avremo un peggioramento sull'overall di pressione sonora radiata di solo mezzo dB mentre se utilizzassimo il set di parametri individuato dal processo di ottimizzazione nel caso di sollecitazione 1300 e 1650 (set1) per il caso di 2000 rpm avremo un peggioramento più consistente sull'overall di pressione sonora. Passeremo da 90,5 dB a 88,4 dB (ID 1 e ID 27 di Tabella4) peggiorando l'overall di pressione sonora di due dB.

Conclusioni

Negli ultimi anni l'attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti nelle autovetture è cresciuta insieme con le richieste dei consumatori di veicoli sempre più performanti, non solo in termini di potenza ed affidabilità, ma anche in termini di comfort e guidabilità.

Pertanto, la stima del rumore e delle vibrazioni è diventata ormai un fattore cruciale per la progettazione di veicoli con bassi livelli di rumorosità e di vibrazioni. Una volta progettato il veicolo, quindi escludendo ulteriori modifiche geometriche, i sistemi implementati per ridurre le emissioni sonore sono essenzialmente di due tipi: sistemi attivi e sistemi passivi. Tra i sistemi passivi il più efficiente è sicuramente il cover della testata motore in quanto agisce sulla sorgente di rumore predominante nei veicoli, il motore a combustione interna.

L'intervallo frequenziale investigato va da 20 e 300 Hz, riguarda le basse frequenze, siccome proprio in tale intervallo rientrano le frequenze di combustione di un motore a combustione interna con quattro cilindri nel campo di funzionamento da 1000 e 5000 rpm. In tale intervallo di frequenza le ampiezze della sollecitazione a cui è soggetta il cover raggiungono il valore massimo.

Nel lavoro di Tesi le attività di Ricerca sono state guidate da un duplice fine. Da una parte l'identificazione dei parametri del materiale del componente di plastica del cover, dall'altra la ricerca del set di materiale del componente di poliuretano che potesse minimizzare l'emissione sonora della struttura. Entrambi i componenti sono modellati con materiali lineari elastici omogenei ed isotropi.

Il primo obiettivo coinvolge il problema dell'incertezza dei parametri dei materiali presenti in un sistema meccanico che è un problema molto comune. Anche nel caso in cui siano noti i tipi di materiali utilizzati per la produzione di un oggetto, proprio in fase di lavorazione i parametri potrebbero subire alterazioni; solo poi con le analisi sperimentali e numeriche si può giungere ad una valutazione affidabile dei parametri dei materiali.

Per conseguire il primo obiettivo è stato condotto un confronto numerico-sperimentale di analisi modale del componente in plastica del cover. Attraverso il confronto e il buon accordo delle forme modali e dei valori delle relative frequenze ricavate dalla sperimentazione e dalle analisi numeriche è stato possibile identificare i parametri caratterizzanti la plastica del componente.

Il secondo obiettivo si basa su di un processo di ottimizzazione numerica. Tali processi si stanno diffondendo sia in ambito aziendale che nelle attività di Ricerca in quanto dal punto di vista aziendale permettono di ridurre i tempi di procedure definite grazie al veloce collegamento tra i

software numerici e dal punto di vista della Ricerca consentono di verificare come la definizione diverse condizioni al contorno possa migliorare le performance dei sistemi.

Il secondo obiettivo è stato raggiunto per mezzo di un processo di ottimizzazione che al variare dei parametri dei materiali descrittivi il componente di poliuretano calcola la minima emissione sonora radiata dal cover in termini di overall di pressione sull'interno intervallo frequenziale investigato, per tre condizioni operative 1300, 1650 e 2000 rpm.

Il processo di ottimizzazione è costituito fondamentalmente da due step.

Il primo step è costituito da un'analisi strutturale, un'analisi di risposta modale in frequenza attraverso il metodo della reazione modale. Il fine dell'analisi è quello di calcolare le ampiezze delle vibrazioni superficiali del componente in plastica, che rappresentano un input per il secondo step dell'ottimizzazione. L'analisi strutturale è stata risolta con un modello agli elementi finiti.

Nel secondo step è stata eseguita un'analisi acustica al fine di stimare il livello di rumore radiato dal cover. All'interno del modello sono state importate le ampiezze delle vibrazioni strutturali le quali costituiscono le condizioni al contorno dell'analisi acustica. Da qui è stato possibile calcolare la pressione sonora radiata ad 1 m di distanza dal cover espressa in termini di livello globale o "overall" in dB, secondo quanto stabilito dalla normativa ISO 3744.. Per il secondo step è stata utilizzata la tecnica numerica degli elementi al contorno.

L'analisi dei risultati dell'ottimizzazione, per le tre diverse velocità di rotazione, ha evidenziato l'influenza determinante del fenomeno di risonanza tra le frequenze normali strutturali e la frequenza della sollecitazione sulla radiazione sonora del cover. Per le velocità di rotazione di 1300 e 1650 rpm l'ottimizzazione evidenzia un set di parametri che rappresenta la condizione di massima rigidità del cover mentre per la velocità di rotazione di 2000 rpm, il set di parametri ottimizzati non corrisponde alla condizione di massima rigidità, poiché a causa dell'insorgere di un significativo fenomeno di risonanza il processo di ottimizzazione individua un diverso set di parametri per il quale il fenomeno di risonanza risulta meno intenso.

E chiaro che, eseguendo tre processi di ottimizzazione avremo potuto trovare, nel caso più generale, tre diversi set di parametri dei materiali del componente di poliuretano in grado di minimizzare l'emissione sonora radiata dal cover. Infatti variando la velocità di rotazione del motore varia la sollecitazione alla quale il cover è soggetto e di conseguenza cambia la risposta dell'analisi vibro-acustica del sistema. Ma l'obiettivo dell'ottimizzazione è indicare uno solo set dei parametri che possa essere il più conveniente per tutte e tre le condizioni di funzionamento.

E il set dei materiali scelto a valle dell'analisi dei risultati del processo di ottimizzazione è quello relativo alla condizione di funzionamento del motore di 2000 rpm. Tale set conduce ad un peggioramento dell'overall di pressione sonora per i casi 1300 e 1650 rpm di appena mezzo dB ma

migliora la condizione di 2000 rpm di ben 2 dB mentre l'utilizzo del set relativo alle condizioni di 1300 e 1650 rpm condurrebbe ad un peggioramento dell'overall di ben 1,5 dB. E' evidente di come la scelta ricada sul set relativo alla condizione di funzionamento di 2000 rpm.

Attività future potranno essere rivolte all'ottimizzazione del cover secondo altri due possibili approcci. In un primo caso, cambiare le condizioni di vincolo del sistema, in modo tale da modificare le forme modali in modo tale da ridurre i fenomeni di risonanza dovuti all'interazione con la sollecitazione, nel secondo modificare le geometrie, al fine di diminuire le ampiezze delle vibrazioni superficiali e i conseguenti livelli di rumore emesso.