

Dinamica Stick-Slip: Oscillazioni con Attrito

Francesco di Liberto^{*}, Emilio Balzano[^], Marco Serpico[^] e Fulvio Peruggi[§]

^{*} CNISM e INFN, Sezioni di Napoli, Dipartimento di Scienze Fisiche, Università "Federico II", I-80126 Napoli, Italy

[^] Dipartimento di Scienze Fisiche, Università "Federico II", I-80126 Napoli, Italy

[§] CNISM, Sezione di Napoli, Dipartimento di Scienze Fisiche, Università "Federico II", I-80126 Napoli, Italy

Abstract

Stick-Slip motion is the basis for the description of a great variety of phenomena characterized by the presence of sliding friction between bodies with elastic features. In this article we describe a simple experimental equipment for the analysis of this kind of dynamics. A wide set of possible experimental observations and measures is presented, which is suitable for use in laboratory sessions in university courses.

Introduzione

Un gran numero di fenomeni naturali all'apparenza molto differenti, sia qualitativamente che quantitativamente, sono accomunati dal fatto che, in determinate circostanze, possono presentare dinamiche di tipo intermittente: fasi "statiche" in cui il sistema accumula energia potenziale, si alternano a fasi "dinamiche" in cui l'energia potenziale viene trasformata in movimento. Tali fenomeni sono riconducibili, in maniera più o meno astratta, al problema del moto di scorrimento con attrito di un corpo materiale su un altro corpo che abbia proprietà elastiche. Spesso si fa riferimento ad essi come processi di tipo stick-slip, [1-5] poiché sono caratterizzati dall'alternanza di fasi di aderenza (stick) e fasi di scorrimento (slip).

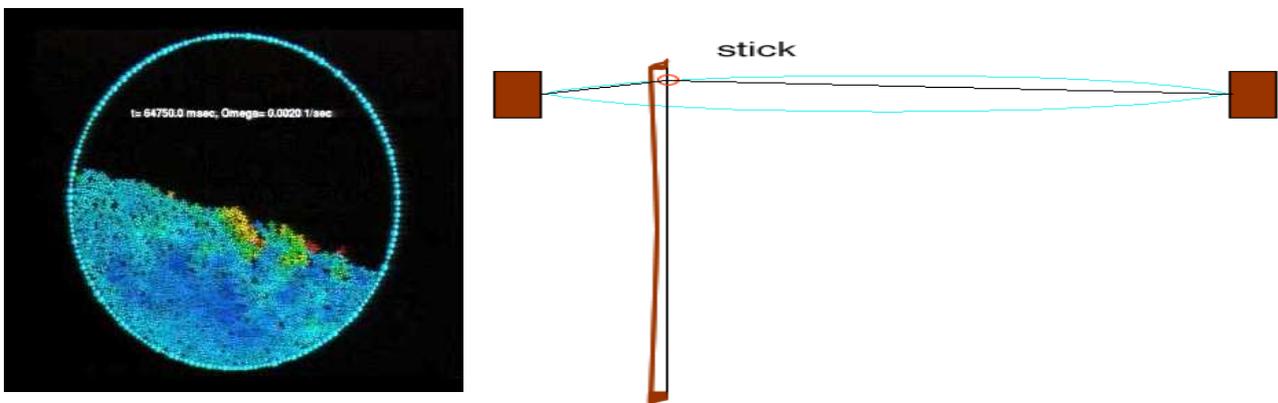


Fig. 1 - Esempi di moto stick-slip. a) Rotolamento dei granelli di sabbia in un cilindro ruotante; i grani più veloci sono colorati in rosso. b) Corda di violino ed archetto.

Molti altri processi con intermittenza di due fasi sono riconducibili ai processi Stick-Slip. I moti franosi (la figura 1a, estratta da un'animazione, rappresenta il moto di granelli di sabbia in un cilindro in rotazione, il cambiamento di colore dall'azzurro verso il rosso sta ad indicare velocità crescenti), il cigolio dei cardini di una porta aperta lentamente, lo stridio che si avverte nello spostare un tavolo o una sedia, il sibilo che talvolta fa il gesso sulla lavagna, il meccanismo di emissione del suono nel violino (figura 1b), sono esempi comuni di processi di tipo stick-slip. Altri esempi sono presenti nei processi meccanici (dall'auto ai treni e negli impianti industriali) e nella generazione dei Terremoti [10] e nella dinamica delle Valanghe [9].

Il sistema fisico più semplice che può presentare una dinamica di questo tipo, è costituito da un blocco di massa M , che scivola con attrito su una superficie piana. Il blocco è trascinato da una molla di costante elastica k , in maniera che l'estremità libera della molla si muova a velocità v .



Fig.2 - Molla Libera -Blocco di massa M trascinato da una molla di costante elastica k .
L'estremo libero della molla si muova a velocità costante v .

Per semplicità, possiamo considerare un sistema fisico equivalente al precedente, nel quale il blocco è collegato tramite una molla ad una parete fissa e sotto di esso scorre, a velocità costante, un piano con attrito. Chiamiamo questo sistema a Molla Vincolata (MV) ed il precedente a Molla Libera (ML).

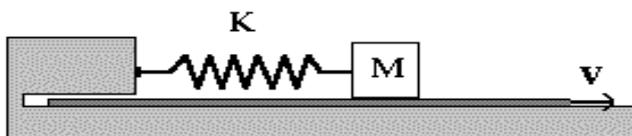


Fig.3 - Molla Vincolata - Il piano scabro scorre a velocità v sotto il blocco legato alla molla che ha l'altro estremo fisso.

La descrizione del moto del blocco nel sistema a Molla Vincolata, è riconducibile a quella del sistema a Molla Libera tramite una trasformazione di coordinate, come mostreremo nel seguito.

Per avere un'idea immediata di come la dinamica del blocco si sviluppi in maniera intermittente, attraverso l'alternanza di fasi di aderenza e scorrimento, riportiamo un'istantanea tratta da un'animazione nella quale presentiamo anche l'andamento temporale sia della posizione del blocco che della forza d'attrito agente su di esso.

L'animazione è realizzata col programma Interactive Physics.

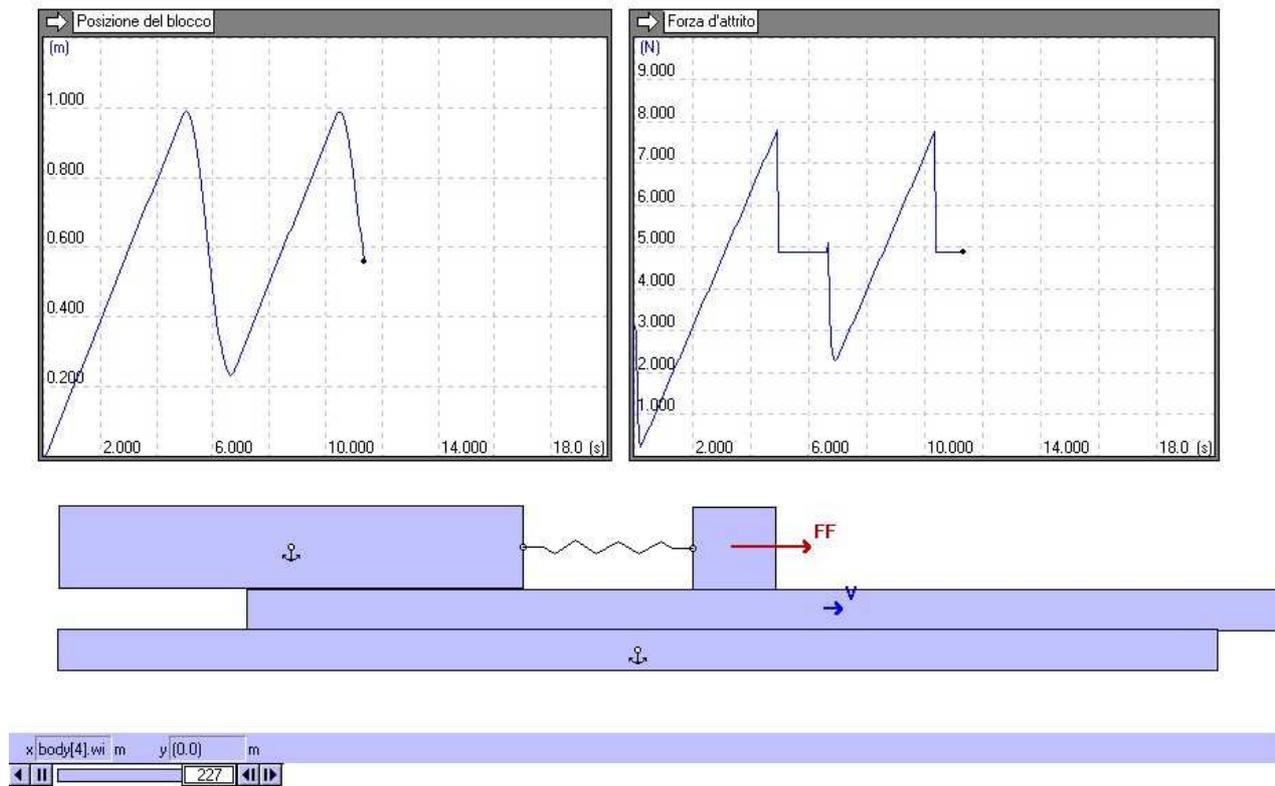


Fig. 4 - Animazione realizzata con Interactive Physics, che descrive la dinamica del blocco nella configurazione di Figura 3.(Molla Vincolata). Il piano scorre a velocità v . L'attrito agente sul corpo è rappresentato dal vettore FF .

Equazione del moto

Sia $x = x(t)$ la posizione del blocco nel sistema a molla vincolata. Assumiamo che l'origine del riferimento coincida con la posizione occupata dal blocco all'istante $t = 0$, e che in tale istante la molla sia a riposo. In $t = 0$ il piano comincia a scivolare sotto al blocco con velocità v . A causa dell'attrito statico il blocco resta inizialmente solidale con il piano (fase di aderenza). Il suo moto è quindi descritto dall'equazione

$$x(t) = vt$$

Ad un certo istante t_1 , la forza elastica esercitata dalla molla

$$F_{el} = kx(t) = kvt$$

eguaglia in modulo il valore critico della forza di attrito statico

$$F_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg$$

Dove $N=Mg$ è la reazione vincolare, μ_s è il coefficiente di attrito statico assunto indipendente dalla superficie di contatto [6]-[7].

A partire dall'istante t_1 , il corpo comincia a scivolare all'indietro rispetto al piano (fase di scorrimento), soggetto alla forza elastica della molla ed alla forza di attrito dinamico

$$F_d = \mu_d N = \mu_d Mg$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico.

Abbiamo assunto che il coefficiente di attrito dinamico sia indipendente dalla velocità v , dalla massa M e dalla superficie di contatto [6,7]. L'equazione del moto per la fase di slip è allora data da

$$M\ddot{x} = F_d - kx(t) \quad (1a)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{\mu_s N}{k} \\ \dot{x}(t_1) = v \end{cases} \quad (1b)$$

Definendo ora una nuova coordinata $y = y(t)$ per la posizione del blocco

$$y(t) = x(t) - \frac{F_d}{k}$$

l'equazione del moto diventa

$$M\ddot{y} = -ky(t) \quad (2a)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(t_1) = \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \\ \dot{y}(t_1) = v \end{cases} \quad (2b)$$

Tale equazione ammette una soluzione nella forma

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

In cui A e φ dipendono dalle condizioni iniziali e $\omega^2 = k / M$.

Se scegliamo $t_1 = 0$ come istante iniziale, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$y(t) = \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \quad (3a)$$

La legge oraria $x = x(t)$ nella fase di slip è dunque data da

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \quad (3b)$$

Prima di analizzarla nella sua generalità limitiamoci al regime di basse velocità, in cui vale la seguente disuguaglianza

$$\frac{v}{\omega} = v \sqrt{\frac{M}{k}} \ll \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \quad (4)$$

In tal caso il termine in $\sin \omega t$ nell'equazione (3b), può essere trascurato e il moto del blocco nella fase di scorrimento è costituito da un'oscillazione armonica di ampiezza $\frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k}$.² che, per M e k fissati, è determinata esclusivamente dalla differenza tra i coefficienti di attrito statico e dinamico. La fase di scorrimento termina in effetti dopo mezza oscillazione, quando il blocco riprende velocità v , come all'istante iniziale, ossia è di nuovo solidale col piano. Il blocco entra allora di nuovo nella fase di aderenza, dominata dall'attrito statico, e le due fasi del moto continuano ad alternarsi periodicamente. Mettendo insieme la legge oraria per la fase di aderenza: $x(t) = vt$ e la legge oraria per la fase di scorrimento:

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t \quad (5)$$

otteniamo per il moto complessivo del blocco, l'andamento rappresentato in Figura 5

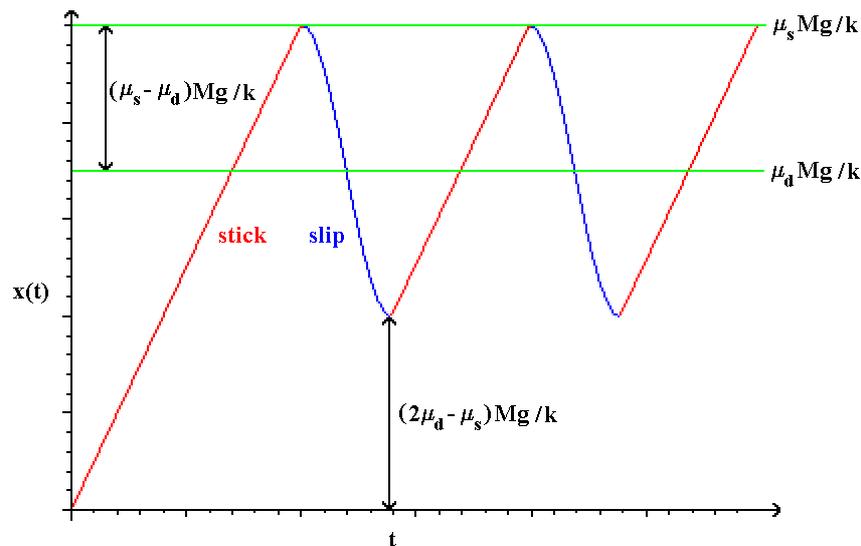


Fig.5 - M.V. - Grafico di $x(t)$. In rosso sono evidenziate le fasi di aderenza ed in blu le fasi di scorrimento. Questa scelta dei colori vale anche per tutte le figure seguenti.

Nella Figura 5 è evidenziata la dipendenza dai coefficienti d'attrito di tutte le grandezze caratteristiche del moto. Riportiamo nelle Figure 6 e 7 i corrispondenti andamenti della velocità e dell'accelerazione del blocco e nella Figura. 8 l'andamento della forza d'attrito tra il blocco ed il piano.

² Per avere un'idea degli ordini di grandezza per cui ciò si verifica, osserviamo che per $M = 1$ Kg, $K = 1$ N/m, e $\mu_s - \mu_d = 0.1$, la relazione diventa $v \ll 1$ m/s

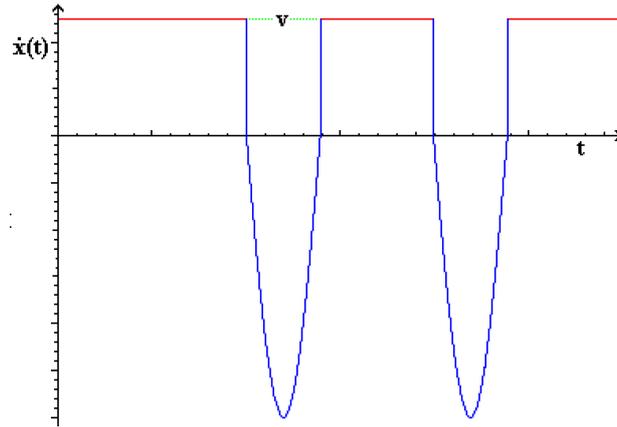


Fig. 6 - M. V. - Grafico della velocità.

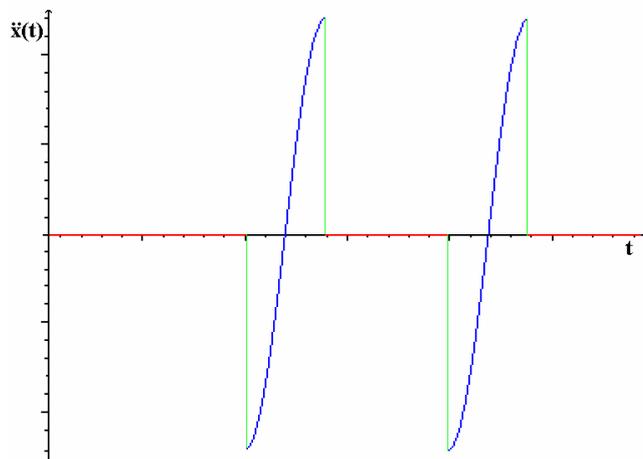


Fig. 7 - M. V. - Grafico dell'accelerazione.

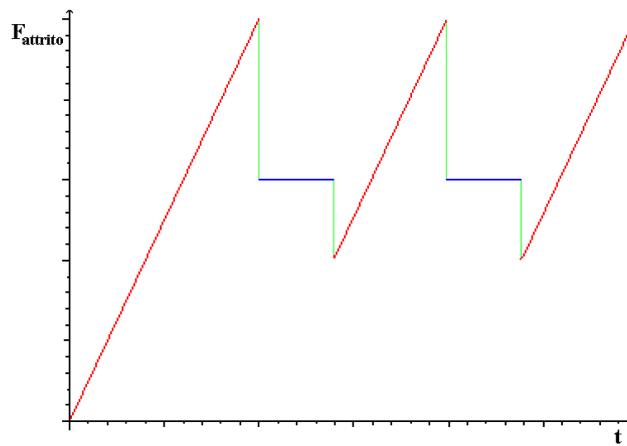


Fig. 8 - M.V. - Grafico della forza d'attrito.

Quando la velocità non è troppo bassa e più in generale quando

$$\frac{v}{\omega} = v \sqrt{\frac{M}{k}} \geq \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \quad (6)$$

l'approssimazione precedente non è valida e nella Relazione (3b), che descrive la fase di scorrimento, bisogna tenere conto del contributo dell'ultimo termine. In tal caso il moto complessivo del blocco segue l'andamento rappresentato in Figura 9

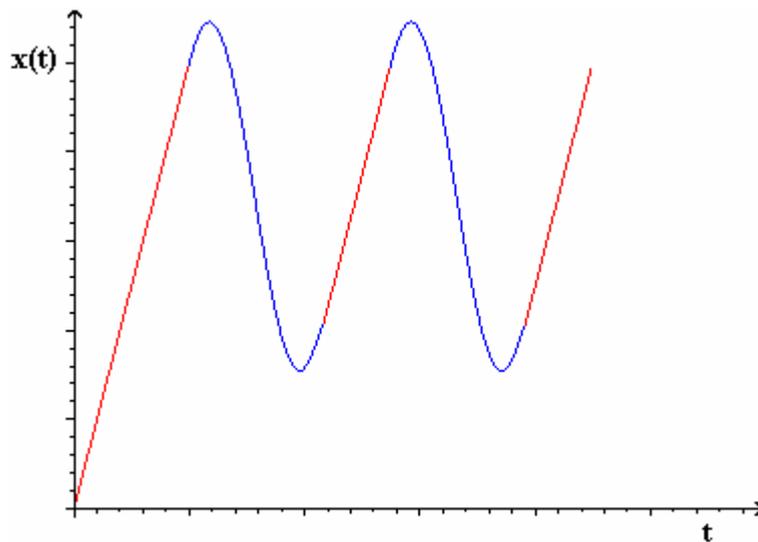


Fig. 9 - M.V. - Grafico di $x(t)$ per la soluzione esatta (3b)

L'andamento qualitativo del moto del blocco non cambia in maniera particolarmente significativa. L'andamento rappresentato in Figura 9 non è facilmente distinguibile da quello rappresentato in Figura 5, se non per una maggiore gradualità nell'inversione della direzione del moto del blocco. In sostanza si ha un passaggio meno brusco dalla fase di aderenza a quella di scorrimento, poiché l'azione della forza elastica non riesce inizialmente ad invertire la direzione del moto del blocco: quando il blocco comincia a scorrere rispetto al piano, la forza di attrito dinamico continua a trascinarlo per un breve intervallo di tempo, nella direzione di moto del piano stesso. Questa maggiore gradualità nel passaggio da una fase del moto all'altra è forse ancora più evidente nel grafico della velocità del blocco, che riportiamo in Figura 10

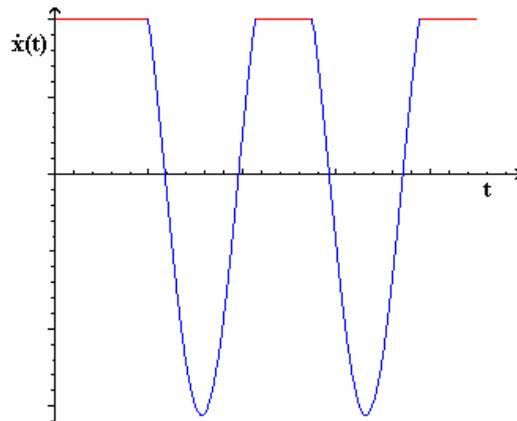


Fig. 10 - M.V. - Grafico della velocità per la soluzione esatta

Quest'andamento differisce da quello riportato in figura 6 per il fatto che non è discontinuo negli istanti di passaggio dalle fasi di aderenza a quelle di scorrimento e viceversa.

Il caratteristico alternarsi delle fasi di stick e slip è più evidente nella figura 5 piuttosto che nella figura 9, conviene quindi, dal punto di vista didattico, incominciare con piccole velocità.

Nel prossimo paragrafo discutiamo in dettaglio il comportamento del sistema al variare della velocità. Per completezza presentiamo in figura 11 anche il grafico dell'accelerazione per la soluzione (3b).

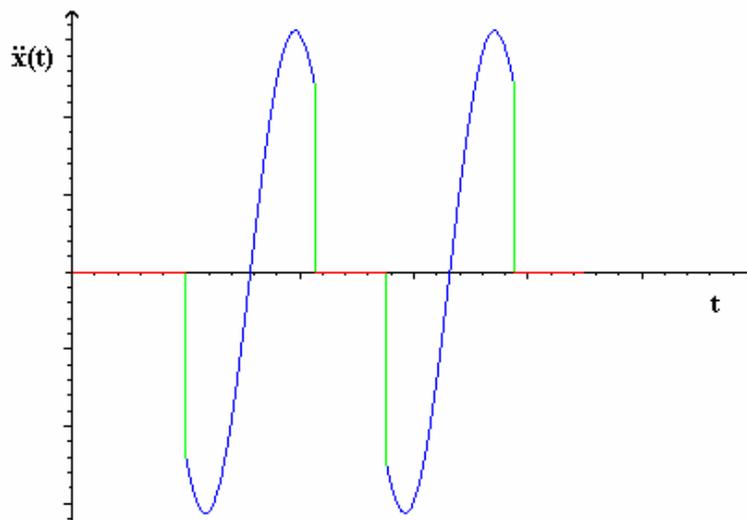


Fig. 11 - Grafico dell'accelerazione per la soluzione esatta (3b)

Dipendenza del moto dalla velocità del piano scorrevole

E' interessante capire come cambia la dinamica del blocco al crescere del rapporto v/ω . Cerchiamo di determinare le caratteristiche del moto al variare della velocità del piano tenendo fissi tutti gli altri parametri. Quello che si verifica è che, all'aumentare di v , la fase di aderenza tende a diventare

sempre più breve³ fino a cessare nel limite di velocità infinita. La durata della prima fase di aderenza può essere calcolata, come abbiamo già sottolineato, determinando l'istante di tempo t_1 tale che risulti

$$kx(t_1) = vt_1 = F_{Max} = \mu_s N$$

Per la generica fase di aderenza che inizi all'istante t_0 e termini all'istante t_f , che duri cioè un tempo $T_a = t_f - t_0$ risulta

$$x(t_f) = x(t_0) + v(t_f - t_0) = x(t_0) + vT_a \quad (7)$$

E poiché

$$x(t_f) - x(t_0) = \mu_s N / k - (2\mu_d - \mu_s) N / k = 2(\mu_s - \mu_d) N / k$$

Si ha

$$T_a = \frac{2(\mu_s - \mu_d) N}{k v} \approx \frac{\text{cost.}}{v}$$

Maggiore è dunque la velocità, minore la durata della fase di aderenza.

La durata delle fasi di scorrimento può essere ottenuta derivando l'espressione (3b) ed imponendo la condizione:

$$\dot{x}(t) = v$$

Poiché la fase di scorrimento termina quando il moto del blocco torna ad essere solidale con il piano sottostante che trasla a velocità v . Se indichiamo con T_{slip} la durata delle fasi di scorrimento, l'espressione di questa quantità in funzione di v potrà essere ottenuto risolvendo l'equazione trascendente

$$v(\cos \omega T_{slip} - 1) - \frac{(\mu_s - \mu_d) N}{k} \omega \text{sen} \omega T_{slip} = 0 \quad (8)$$

Una soluzione è $T_{slip} = T = 2\pi/\omega$, il periodo della soluzione armonica della fase di scorrimento dell'Equazione (3b).

E' chiaro che questa soluzione rappresenta la condizione limite in cui non si ha più alcuna fase aderenza, in cui cioè la fase di scorrimento ha una durata infinita.

Le altre soluzioni dell'Equazione (8) sono riportate in Figura 12 insieme ad i valori di T_a che sono riportati in rosso.

³ Occorre un tempo sempre più piccolo affinché l'elongazione della molla sia abbastanza grande da vincere l'attrito statico

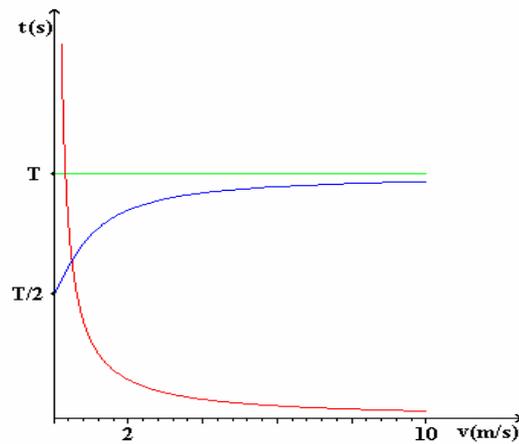


Fig. 12 - Andamenti di T_a (in rosso) e T_{slip} (in blu), per i seguenti valori dei parametri $M=1\text{Kg}$, $k=25\text{ N/m}$, $\mu_s=1, \mu_d=0.5$. Il periodo T dell'oscillazione armonica è pari a circa 1.26 secondi.

Per velocità piccole il tempo di aderenza diverge (come potevamo aspettarci) mentre il tempo di scorrimento tende al valore di $T/2$ che è proprio quello che abbiamo utilizzato nell'approssimazione di bassa velocità in cui l'equazione del moto per la fase di scorrimento ammetteva la soluzione (5). Al crescere della velocità T_a decresce piuttosto rapidamente tendendo asintoticamente ad annullarsi, mentre T_{slip} tende al valore asintotico T che avevamo predetto. Intorno ad un certo valore critico v_{crit} della velocità ⁴ si ha un fenomeno di cross-over per cui si passa molto rapidamente da una situazione in cui $T_a \gg T_{slip}$ ad una situazione in cui $T_a \ll T_{slip}$. Per velocità molto maggiori di questa velocità critica, la fase di aderenza è praticamente inesistente e si può approssimare il moto come una pura oscillazione armonica.

Nel prossimo paragrafo vedremo che, al variare della velocità del piano, la durata delle fasi di aderenza e scorrimento dipende anche dalle condizioni iniziali imposte.

Un'altra soluzione delle equazioni del moto - Moto stazionario

Ritorniamo ora all'equazione del moto per la fase di scorrimento (1a). E' interessante notare che, assumendo condizioni iniziali diverse dalle (1b), questa equazione ammette una soluzione stazionaria. In particolare se alle (1b) sostituiamo le condizioni iniziali.

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{F_d}{k} = \frac{\mu_d N}{k} \\ \dot{x}(t_1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

la (1a) ammette la soluzione

⁴ nel caso rappresentato in Figura 12 $v_{crit} = 0.42\text{ m/s}$

$$x(t) = \frac{F_d}{k} = \frac{\mu_d N}{k} \quad (12)$$

L'interpretazione fisica di questa soluzione è semplice: se all'istante iniziale il blocco, mentre il piano scorre sotto ad esso a velocità v , si trova fermo nella posizione in cui la forza elastica bilancia la forza d'attrito dinamico, allora il blocco resterà indefinitamente in questa posizione dando luogo ad un moto stazionario. La soluzione (12) vale per la fase di scorrimento. Le condizioni iniziali (11), però, non sono compatibili con l'equazione del moto relative alla fase di aderenza, nella quale, come sappiamo, il blocco si muove a velocità v solidalmente col piano e che termina al verificarsi della condizione

$$x(t_1) = \frac{\mu_s N}{k} \geq \frac{\mu_d N}{k} \quad (13)$$

La (12) non può quindi seguire alla fase di aderenza precedente, poiché quest'ultima impone una condizione iniziale per la posizione del blocco differente da quella contenuta nelle (11).

Tuttavia è possibile osservare sperimentalmente la dinamica descritta dalla (12), a patto che la velocità del piano sia abbastanza grande (rispetto a v_{crit}) e che le condizioni iniziali del blocco siano abbastanza prossime alle (11).

Possiamo dare una giustificazione qualitativa di questo genere di dinamica utilizzando le considerazioni del paragrafo precedente. Come abbiamo già sottolineato, la dinamica (12) si osserva quando la velocità del piano è grande rispetto a v_{crit} . Analizzando la Figura 12 è chiaro che per $v > v_{crit}$ la durata della fase di aderenza è sempre più piccola, mentre la durata della fase di scorrimento si avvicina all'intero periodo T dell'oscillazione armonica. E' chiaro allora che, scegliendo opportunamente le condizioni iniziali del blocco (in modo che siano prossime alle (11)) e per velocità del piano abbastanza elevate, si può fare in modo che la dinamica del blocco si riduca alla sola fase di scorrimento ed in particolare che si realizzi proprio la soluzione (12).

La soluzione (12) è anche possibile per velocità prossime a v_{crit} quando si ipotizzi che la forza di attrito dinamico abbia una dipendenza dalla velocità relativa blocco-piano, cioè quando si ponga $F_d = f(\dot{x} - v)$. In questo modello più generale, come vedremo, esistono soluzioni delle equazioni del moto nelle quali si passa dalla condizione iniziale (13) alla dinamica descritta dalla (12) per mezzo di un transitorio in cui si verifica un'oscillazione smorzata.

In ogni caso però, per velocità del piano molto più piccole della velocità critica, la dinamica è sempre caratterizzata dall'alternarsi delle fasi di aderenza e scorrimento indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Per concludere questo paragrafo vogliamo far notare che il cambio di variabili (2)

$$y(t) = x(t) - \frac{F_d}{k}$$

che abbiamo utilizzato per risolvere le equazioni del moto per la fase di slip, può essere interpretato fisicamente in termini della soluzione stazionaria (12). La nuova variabile $y(t)$ per la posizione del blocco definita con la (2), descrive il moto del blocco rispetto alla soluzione stazionaria (12).

Lo spazio delle fasi

Passiamo ora ad analizzare le traiettorie caratteristiche della dinamica stick-slip nello spazio delle fasi. Cominciamo dal caso più semplice, ossia quello in cui la fase di slip è descritta dall'equazione (5)

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t$$

In questo caso (vedi figura 13), le fasi di aderenza saranno rappresentate da un segmento parallelo all'asse delle posizioni e giacente sulla retta $\dot{x}(t) = v$ (l'ampiezza del segmento relativo alla prima fase di stick è diversa perché cambia $x(t_0)$, (vedi equazione (7)), mentre le fasi di scorrimento saranno rappresentate da semicirconferenze (mezze oscillazioni armoniche) centrate nel punto di coordinate

$$x = \frac{F_d}{k} = \frac{\mu_d N}{k} \quad ; \quad \dot{x} = v$$

e di raggio pari a

$$\frac{F_{\max} - F_d}{k} \equiv \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k}$$

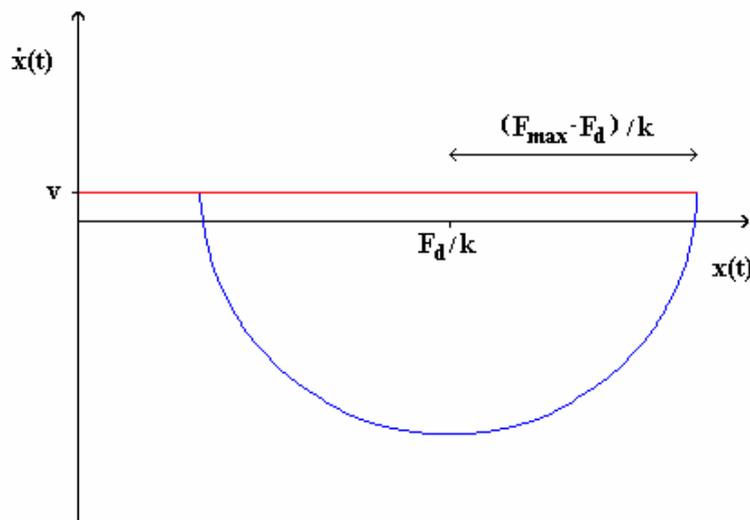


Fig.13 - Traiettoria nello spazio delle fasi della dinamica stick-slip descritta dall'equazione (5)

Nel caso in cui la fase di scorrimento è descritta dall'equazione (3b) piuttosto che dalla (5) (vedi figura 14), ossia non utilizzando l'approssimazione di velocità piccole rispetto alla velocità critica, la traiettoria di fase del moto stick-slip non cambia in modo sostanziale. L'unica differenza sta nel fatto che la fase di aderenza sarà rappresentata da un arco di circonferenza leggermente più esteso di una semicirconfenza.

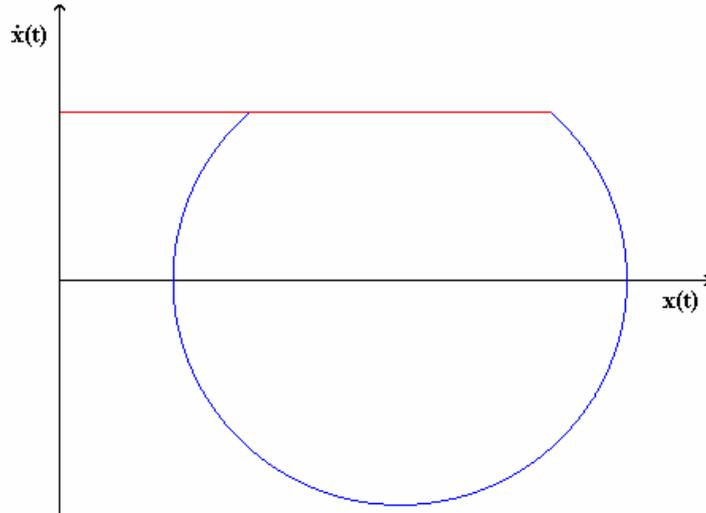


Fig.14 – Traiettoria nello spazio delle fasi della dinamica stick-slip descritta dall'equazione (3b)

Al crescere della velocità del piano scorrevole i segmenti che descrivono le fasi di aderenza diventano sempre più brevi fino a scomparire nel limite di velocità infinita, mentre le fasi di scorrimento approssimano intere circonferenze.

La soluzione stazionaria è invece rappresentata, nello spazio delle fasi, da un punto di coordinate

$$x = \frac{\mu_d N}{k} \quad ; \quad \dot{x} = 0$$

L'argomento sarà ulteriormente discusso nella parte sperimentale del presente lavoro.

Equazioni del moto per il sistema Molla Libera

Quando il blocco di massa M è trascinato dalla molla il cui estremo libero si muove a velocità costante v , la traiettoria è ancora una successione di fasi di aderenza e di scorrimento. È questo il caso della Molla Libera. La differenza con il caso prima descritto (Molla Vincolata) è che questa volta nelle fasi di aderenza il blocco rimane fermo rispetto alla tavola che è ferma rispetto al laboratorio, e nelle fasi di scorrimento il corpo avanza; dunque il corpo, alternando soste regolari con avanzamenti regolari, avanza indefinitamente. La legge oraria $x_{ML}(t)$ avrà dunque l'aspetto di una scalinata. (Vedi Figura 15)

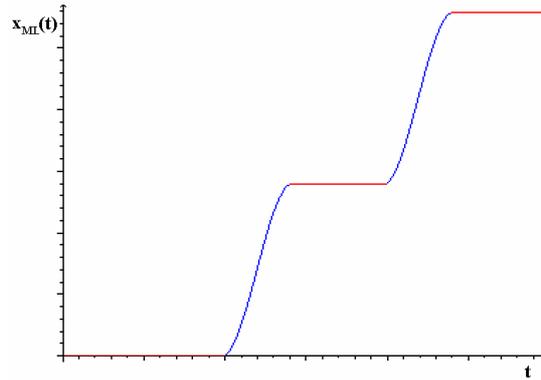


Fig. 15 - M.L. Grafico di $x_{ML}(t)$

Un'altra differenza con caso precedente è che la forza elastica è sempre diretta nel verso di avanzamento della molla e l'attrito, sia esso statico che dinamico è costantemente diretto verso l'estremo vincolato della molla.

Supponiamo che all'istante $t=0$ inizi il moto della molla la cui lunghezza a riposo è l_0 , il corpo si trovi a tale istante nell'origine dell'asse x . Fino all'istante t_1 la massa M rimane ferma (fase di aderenza) e l'estremo libero della molla arriva nella posizione $x_{molla} = l_0 + vt_1$. A tale istante la forza di attrito statico avrà raggiunto il suo valore massimo $F_{max} = \mu_s Mg$. All'istante t_1 cessa dunque la quiete del blocco, la sua posizione è $x_{ML}(t_1) = 0$ e la velocità $\dot{x}_{ML}(t_1) = 0$; inoltre

$$k[x_{molla}(t_1) - l_0] = \mu_s Mg$$

in cui $x_{molla}(t_1) = l_0 + vt_1$ e quindi $kvt_1 = \mu_s Mg$.

All'istante t_1 inizia dunque la fase di Slip per $t > t_1$, la dinamica del blocco è regolata dalla seguente equazione

$$M \ddot{x}_{ML}(t) = k[x_{molla}(t) - x_{ML}(t) - l_0] - F_d$$

ed esplicitando, sempre nell'ipotesi di attrito dinamico indipendente dalla velocità, $F_d = \mu_d Mg$ e poiché per $t > t_1$

$$x_{molla}(t) = l_0 + vt_1 + v(t - t_1)$$

$$M \ddot{x}_{ML}(t) = k[v(t - t_1) - x_{ML}(t)] + (\mu_s - \mu_d)Mg$$

effettuando il cambio di variabile

$$y(t) = x_{ML}(t) - v(t - t_1) + (\mu_s - \mu_d)Mg / k$$

l'equazione diventa

$$M \ddot{y} = -ky$$

con condizioni iniziali $y(t_1) = -(\mu_s - \mu_d)Mg/k$ e $\dot{y}(t_1) = -v$

Questa equazione e la relativa soluzione è stata già trovata nel caso di Molla Vincolata. Abbiamo dunque per $t > t_1$

$$x_{ML}(t) = v(t - t_1) + \frac{Mg}{k}(\mu_s - \mu_d)[1 - \cos\omega t] - \frac{v}{\omega} \text{sen}\omega t \quad (14)$$

La trasformazione di coordinate che permette di passare dalla legge oraria $x_{ML}(t)$ alla legge oraria $x(t)$ trovata nel caso della Molla Vincolata è data dalla relazione:

$$x(t) = -[x_{ML}(t) - x_{molla}(t)] - \ell_0$$

Da questa trasformazione si vede chiaramente che la $x(t)$ è la coordinata del blocco in un sistema di riferimento solidale col moto dell'estremo libero della molla.

Riportiamo, anche in questo caso, un'istantanea tratta da un'animazione (figura 16).

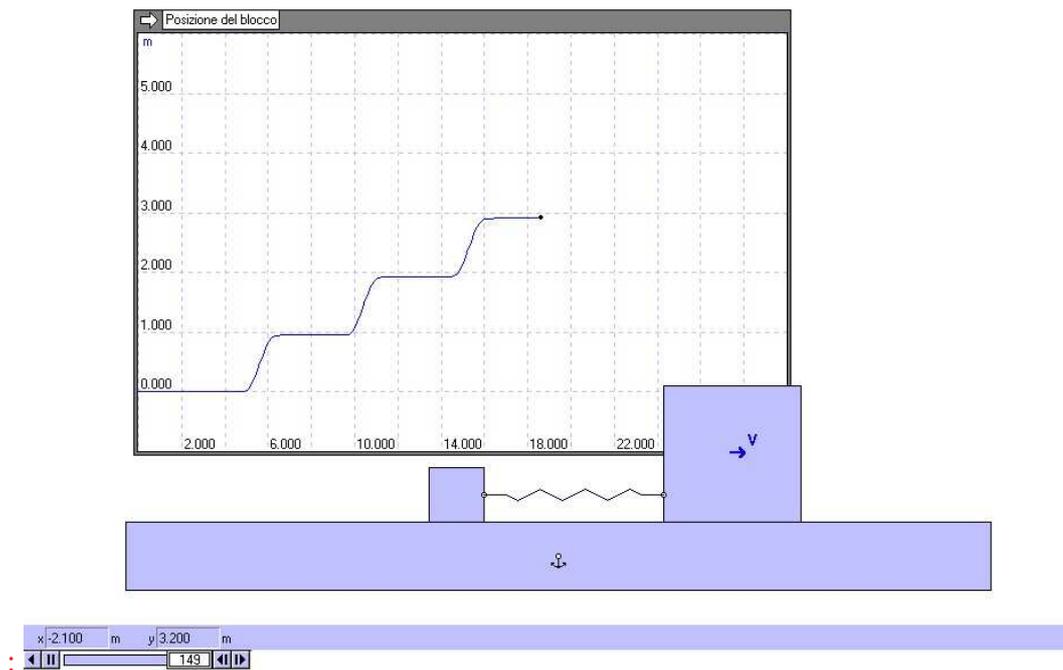


Fig. 16 - M.L. - Animazione realizzata con Interactive Physics, che descrive la dinamica del blocco nel caso di molla libera, ossia nella configurazione di Figura 2.

Il blocco che segue la dinamica stick-slip è trascinato tramite la molla da un blocco di massa molto maggiore. Quest'ultimo si muove a velocità costante, poiché l'effetto della forza elastica su di esso è trascurabile.

L'esperienza

Passiamo ora a descrivere l'apparato sperimentale che abbiamo utilizzato. Il **blocco** è un parallelepipedo di legno di peso pari a circa 650 grammi (comprensivi del peso del sensore di posizione posto al di sopra del blocco) con una faccia ricoperta da uno strato di gomma.



Fig. 17 - Blocco con sensore -sonar sovrapposto.

Questa faccia è posta a contatto con un rotolo di carta morbida che può essere avvolto attorno ad un **supporto ruotante**.



Fig. 18 - Cilindro di avvolgimento della carta.

Non è difficile manovrare la manopola del supporto in maniera da far scivolare il rotolo sul tavolo d'appoggio a velocità approssimativamente costante.

Il blocco è collegato per mezzo di una molla ad un **sensore di forza**, che misura la tensione della molla stessa.



Fig. 19 - Molla collegata al sensore di forza ed al blocco.

Al di sopra del blocco è collocato un sensore di posizione (sonar) che determina la posizione del blocco rispetto ad uno schermo piano. Entrambi i sensori sono interfacciati con un calcolatore (mediante l'uso del pacchetto LabPro) e permettono quindi di ottenere gli andamenti nel tempo delle grandezze osservabili (tensione della molla, posizione, velocità ed accelerazione del blocco e tutte le grandezze derivabili da queste) direttamente in formato grafico.

Successivamente l'apparato sperimentale è stato perfezionato ed è stato realizzato il nastro scorrevole di stoffa azionato da una manovella riportato in Figura 20. il sensore di forza è inserito nello schermo piano che fa corpo unico con la tavola di legno intorno alla quale il nastro scorre.



Fig. 20 - Nuova versione dell'apparato sperimentale

Risultati

I parametri liberi del problema possono facilmente essere variati aggiungendo pesi sul blocco per cambiarne la massa, utilizzando diverse molle, ricoprendo la superficie di contatto del blocco con un materiale diverso per cambiare i valori dei coefficienti d'attrito, cambiando la velocità di scorrimento del rotolo sul tavolo.

Qui presentiamo i risultati ottenuti nella configurazione descritta nella pagina precedente (massa del blocco pari a circa 650 grammi, gomma su carta per la superficie di contatto) con una molla di costante elastica pari a circa 22 N/M e una velocità di scorrimento pari a circa 0.06 m/s. Nelle figure 21-24 riportiamo tutti le grandezze misurate.

A partire dagli andamenti nel tempo della posizione del blocco e della tensione della molla, possiamo ottenere misure indirette di tutti i parametri liberi del problema

- La pendenza delle rampe lineari relative alle fasi di stick nel grafico della posizione fornisce una stima della velocità di scorrimento del blocco.
- Il rapporto tra le pendenze delle rampe lineari relative alle fasi di stick nei grafici della tensione della molla e della posizione, fornisce una stima della costante elastica della molla.
- Il valore della tensione della molla nel punto di massima elongazione fornisce una stima del valore critico della forza d'attrito statico e quindi (misurando indipendentemente la massa del blocco) del coefficiente d'attrito statico.
- È molto interessante verificare che variando la superficie di contatto del corpo con il nastro o ricoprendo il nastro con carta più o meno liscia si ottengono andamenti diversi.

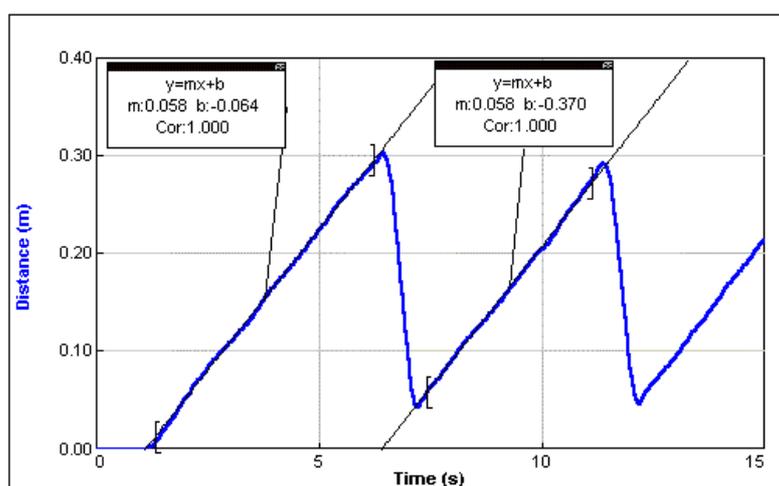


Fig. 21 – Grafico della posizione del blocco, misurata.

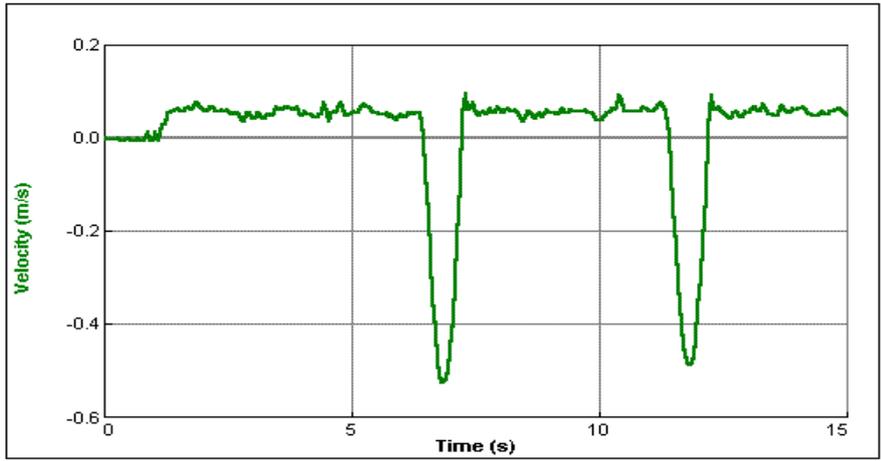


Fig. 22 – Grafico della velocità del blocco misurata.

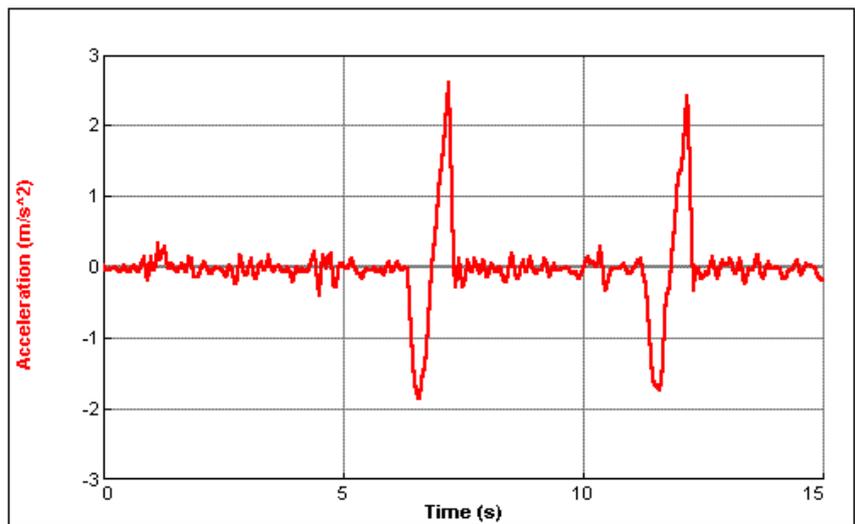


Fig. 23 – Grafico dell'accelerazione del blocco misurata.

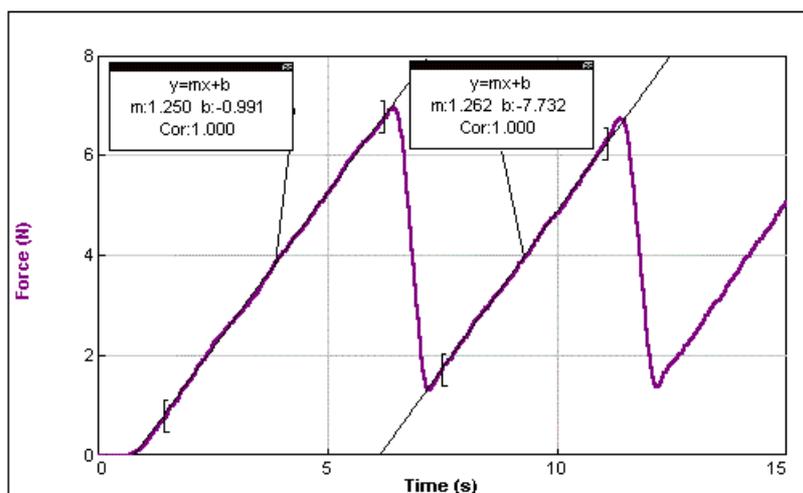


Fig. 24 – Grafico della tensione della molla misurata.

Per il set di dati di cui abbiamo presentato i grafici si ottiene, ad esempio:

$$\begin{aligned}
 v &= 0.058 \pm 0.002 \text{ m/s} \\
 k &= 21.6 \pm 0.9 \text{ N/m} \\
 F_{\max} &= 6.9 \pm 0.1 \text{ N} & \mu_s &= 1.08 \pm 0.02 \\
 F_d &= 4.1 \pm 0.1 \text{ N} & \mu_d &= 0.65 \pm 0.02
 \end{aligned}$$

Gli errori sulla velocità e sulla costante elastica della molla sono errori statistici ottenuti propagando gli errori sui coefficienti delle regressioni lineari.

Gli errori sulle forze vanno intesi invece come errori massimi. Il programma LabPro permette di determinare le coordinate di un determinato punto in un grafico semplicemente utilizzando il puntatore del mouse. Le misure di F_{\max} e di F_d , come abbiamo già sottolineato, si ottengono a partire dal valore della tensione della molla in determinati istanti caratteristici. Gli errori riportati sono stime per eccesso dell'errore commesso nel localizzare con la procedura suddetta tali valori.

Gli errori sui coefficienti d'attrito sono infine ottenuti propagando quelli sulle forze.

Inserendo le opportune istruzioni nel programma LabPro è possibile ottenere un grafico dell'energia totale $U = \frac{1}{2} Kx^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ calcolata a partire dalla posizione e dalla velocità del

blocco misurate, che ci consente di visualizzare il bilancio energetico durante il moto (Figura 25).

Nella fase di aderenza, il blocco accumula energia potenziale elastica.

Durante la fase di scorrimento una piccola parte di questa energia viene rilasciata nell'energia cinetica che il blocco acquista scivolando sul piano, mentre la maggior parte di essa si dissipa per attrito.

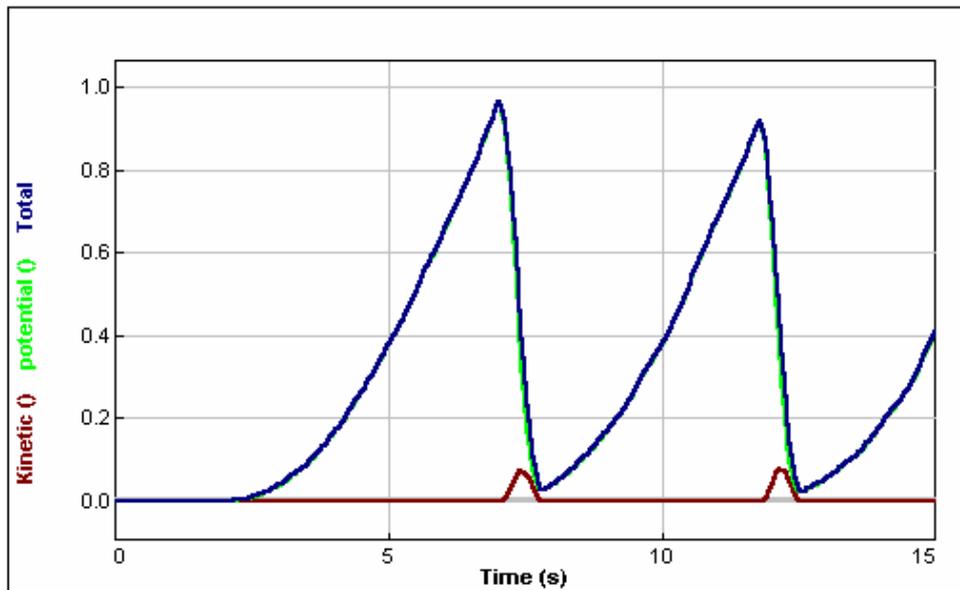


Fig. 25 – Grafico, in funzione del tempo, dell’ energia calcolata a partire da posizione e velocità (stessi dati delle Figure 21 e 22).

Sempre utilizzando LabPro si può visualizzare la traiettoria nello spazio delle fasi (x, \dot{x}) corrispondente a posizione e velocità misurate (Figura 26)

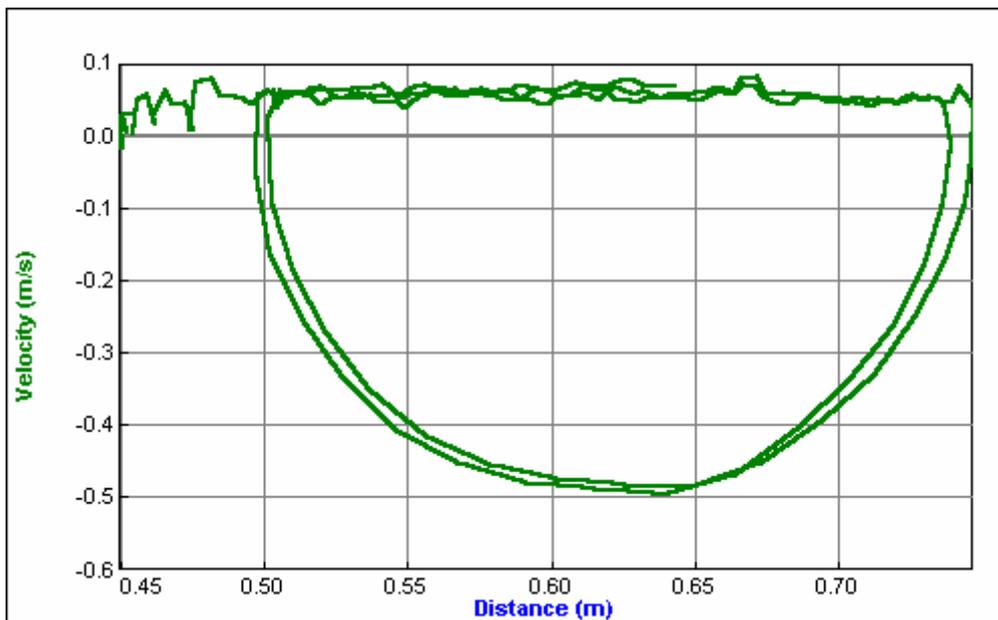


Fig. 26 – Traiettoria nello spazio delle fasi (stessi dati delle Figure 21 e 22)

La possibilità di ottenere sperimentalmente la traiettoria del blocco nello spazio delle fasi ci sembra particolarmente interessante dal punto di vista didattico, soprattutto perché questo genere di grafici possono essere visualizzati in tempo reale, in maniera da poter guardare la traiettoria formarsi mentre il blocco è in movimento.

Si possono realizzare ulteriori misure, in relazione alla questione della durata delle fasi di aderenza e scorrimento di cui si è detto in precedenza. In particolare:

- Dal grafico della legge oraria oppure usando un cronometro si può effettuare una stima di T_a e T_{slip} , rispettivamente, tempi della fase stick e della fase slip. Riportandoli in un unico grafico in funzione della velocità si può ritrovare sperimentalmente il grafico teorico riportato in Figura 12.
- Si può verificare che a bassa velocità T_a e T_{slip} sono indipendenti da x_0 (la posizione iniziale del blocco), dipendenza che invece si trova per $v \geq v_c$. Per $v \geq v_c$ si può trovare il valore di x_0 per cui T_a si annulla.
- Si può verificare che per $v \gg v_c$, si ha solo la fase di scorrimento ed in particolare, fissando opportunamente la posizione iniziale del blocco, osservare sperimentalmente la soluzione stazionaria (12) (vedi Figura 27). Ci si mette direttamente nella fase stazionaria quando, per non avvertire il cigolio, si apre rapidamente una porta che invece cigola quando viene aperta lentamente. Lo stesso fa il prestigiatore che tira via la tovaglia da una tavola apparecchiata senza far muovere i piatti!

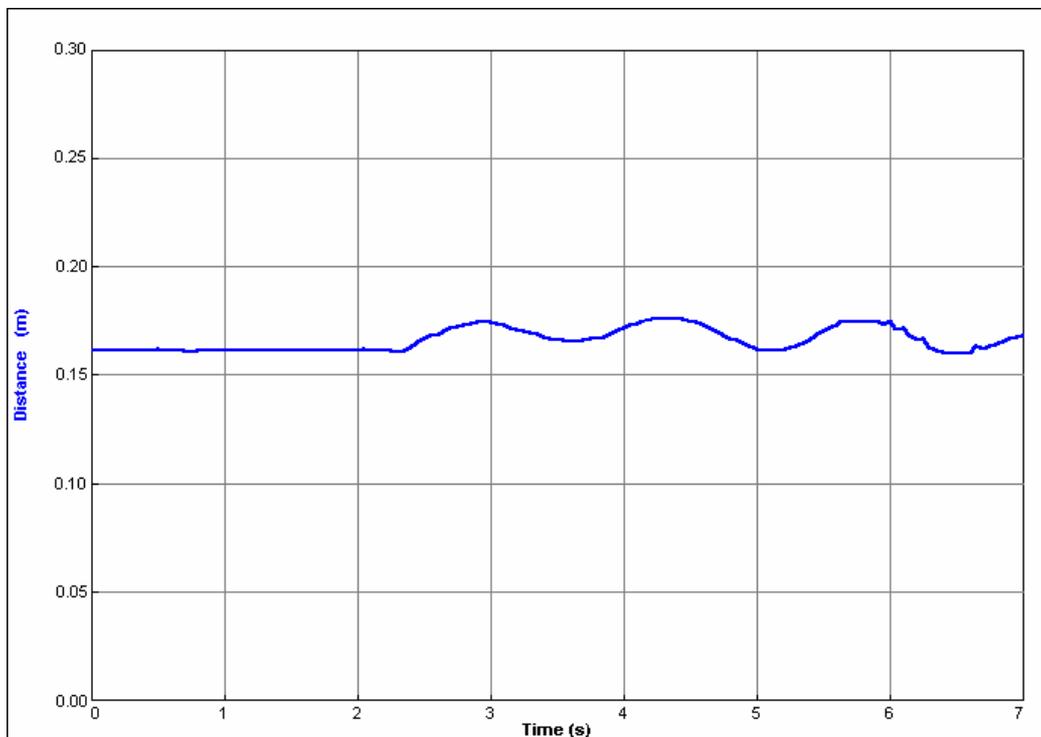


Fig. 27 - Stessa configurazione sperimentale delle Figure precedenti. Il blocco è tenuto inizialmente fermo, mentre il piano scorre sotto di esso a velocità sostenuta ($\sim 1 \text{ m/s}$), in una posizione ragionevolmente prossima alla posizione stazionaria teorica data dalla (12). Una volta lasciato libero il blocco è soggetto a piccole oscillazioni (di ampiezza pari a circa 1 cm) intorno alla posizione stazionaria reale (nel caso in esame $x_{stazionaria} \sim 17 \text{ cm}$).

Approfondimenti

A partire dalle misure della tensione della molla e dell'accelerazione del blocco è possibile realizzare anche una misura dell'andamento nel tempo della forza d'attrito calcolata. Sia nella fase stick che nelle fasi slip deve infatti risultare

$$F_{\text{attrito}}(t) = M\ddot{x} + kx(t)$$

Per il set di dati presentato, si ottiene per la forza d'attrito l'andamento mostrato in Figura 28.

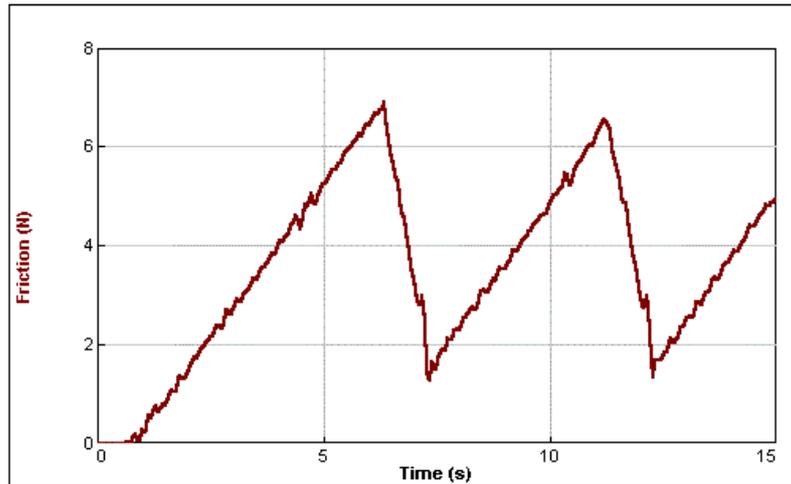


Fig. 28 - Grafico della forza d'attrito.

Questo andamento è evidentemente in disaccordo col modello utilizzato per la forza d'attrito dinamico, che abbiamo supposto indipendente dalla velocità relativa tra il blocco ed il rotolo e quindi costante durante tutta la fase di scorrimento. Ciononostante, il modello descrive in maniera piuttosto accurata il moto del blocco. Questa contraddizione può essere spiegata notando che il calcolo numerico che permette di ottenere gli andamenti di velocità ed accelerazione a partire da quello misurato della posizione del blocco, ha dei limiti intrinseci nella descrizione delle fasi di transizione tra le due fasi del moto. In particolare, i picchi nell'andamento dell'accelerazione, sono sottostimati quasi di un fattore 2 rispetto al valore predetto dal modello. A scopo puramente dimostrativo, mostriamo in Figura 29, l'andamento della forza d'attrito che si ottiene utilizzando l'espressione corretta "a mano"

$$F_{\text{attrito}}(t) = 2M\ddot{x} + kx(t)$$

che presenta un ragionevole accordo con il modello a forza d'attrito dinamico costante.

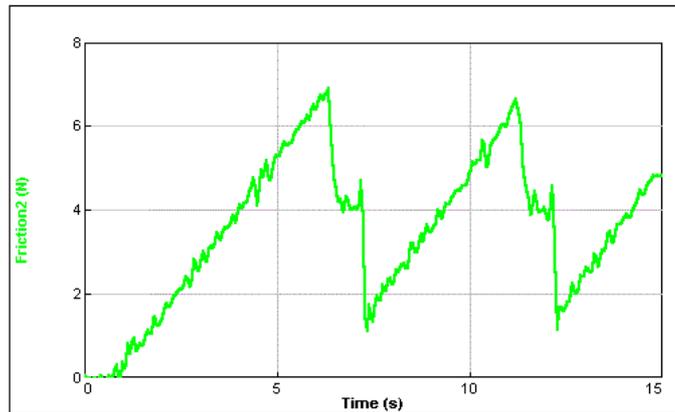


Fig. 29 – Grafico della forza d’attrito “corretta”.

D'altra parte è anche chiaro che nel modellizzare la forza d'attrito dinamico come indipendente dalla velocità si effettua un'approssimazione. Il modello qui utilizzato non è, ad esempio, in grado di dare conto della dinamica stick-slip di tipo smorzato, che abbiamo osservato con una differente configurazione dell'apparato sperimentale. In particolare, ricoprendo la superficie di contatto del blocco di carta piuttosto che di gomma (e lasciando invariati tutti gli altri parametri), abbiamo osservato l'andamento della posizione rappresentato in figura 30.

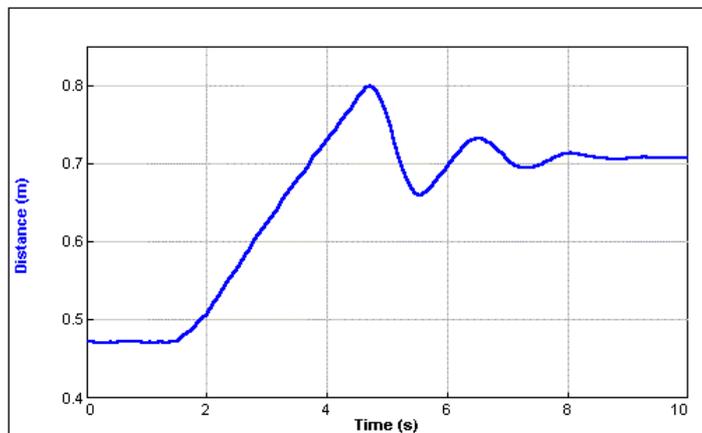


Fig. 30 - Oscillazione smorzata.

Detta $\dot{x}_{rel} = \dot{x}(t) - v$ la velocità relativa del blocco rispetto al rotolo, un'equazione del moto che ammetta soluzioni di tipo smorzato può essere ottenuta ipotizzando che la forza d'attrito dinamico dipenda da \dot{x}_{rel} nella forma

$$F_d = F^* - \alpha \dot{x}_{rel} \quad (15)$$

oppure

$$F_d = F^* - \alpha \dot{x}_{rel}^2$$

con F^* e α costanti opportunamente scelte.[6-8]

Scegliamo l'espressione (15) per la forza d'attrito dinamico. Chiaramente siamo interessati a capire come cambia la dinamica del blocco nella fase di scorrimento. L'equazione del moto (1a) diventa

$$M \ddot{x} = F^* - \alpha(\dot{x} - v) - kx(t)$$

ossia

$$M \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx(t) = F^* + \alpha v \quad (16)$$

con le condizioni iniziali (1b).

Se si verifica la condizione

$$4Mk > \alpha^2$$

la (16) ammette una soluzione del tipo oscillazione smorzata

$$x(t) = \frac{F^* + \alpha v}{k} + e^{-t/\tau} A \sin(\omega t + \varphi) \quad (17)$$

dove il tempo caratteristico τ è dato da

$$\tau = \frac{2M}{\alpha}$$

e le costanti A e φ sono determinate assegnando le condizioni iniziali.

Senza entrare in ulteriori dettagli, possiamo notare che la (17) differisce dalle (3) solo per la presenza del termine esponenziale di smorzamento. È chiaro allora che la legge oraria (17) rappresenta proprio una dinamica del tipo di quella rappresentata in Figura 30.

Vogliamo poi sottolineare che la soluzione (17) tende asintoticamente alla soluzione stazionaria

$$x(t) = \frac{F^* + \alpha v}{k}$$

che, nell'approssimazione in cui la forza d'attrito non dipende dalla velocità, coincide chiaramente con la (12). L'incompatibilità della soluzione stazionaria (12) con le fase di aderenza precedente, viene quindi superata utilizzando l'espressione (15) della forza d'attrito, poiché in questo caso il passaggio dalla fase di aderenza alla fase stazionaria avviene grazie ad un transiente il cui tempo caratteristico è inversamente proporzionale al coefficiente α . Il caso precedente si ottiene facendo tendere a zero il coefficiente α , condizione nella quale il tempo caratteristico diverge [3],[5].

Per completare il discorso sullo spazio delle fasi, riportiamo in Figura 31 la traiettoria nello spazio delle fasi corrispondente alla soluzione smorzata di Figura 30.

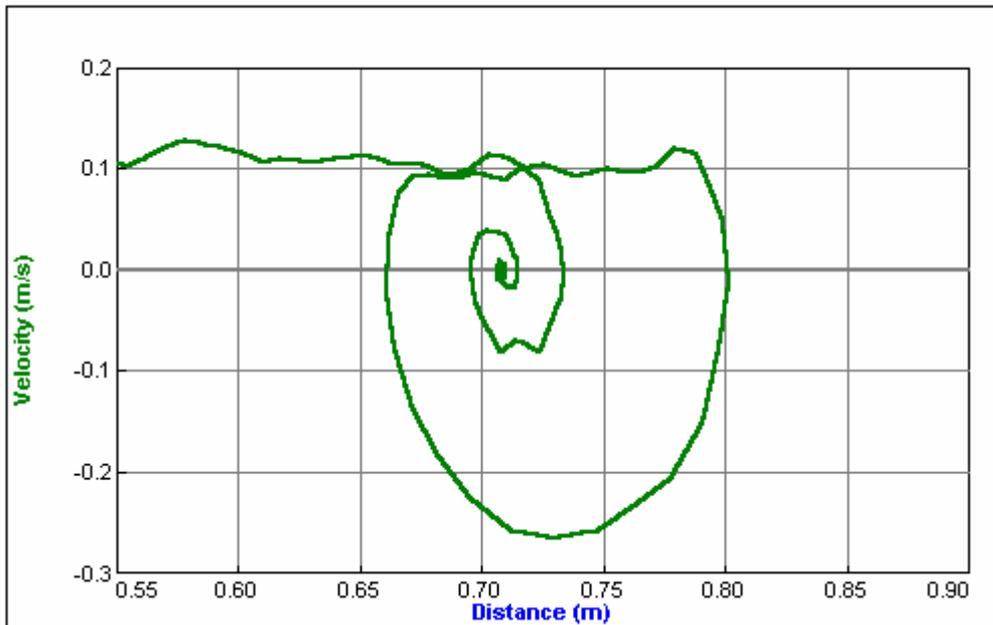


Fig. 31 - Traiettoria nello spazio delle fasi (stessi dati della Figura 30)

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato una vasta gamma di opportunità didattiche offerte dal semplice apparato sperimentale per lo studio della dinamica stick-slip da noi progettato e realizzato. Il pregio di questo esperimento didattico ci sembra proprio quello di dare la possibilità da un lato di effettuare semplici osservazioni (legge oraria, forza elastica, forza d'attrito) e misure sperimentali (quantità cinematiche, costante elastica, coefficienti d'attrito), dall'altro di approfondire il discorso con una serie di osservazioni più elaborate. Ci riferiamo alla dipendenza delle caratteristiche della dinamica da parametri quali la velocità del piano scorrevole o le condizioni iniziali, alle diverse possibili soluzioni delle equazioni dinamiche (e alle considerazioni sul modello utilizzato che ne derivano), alla possibilità di visualizzare la traiettoria nello spazio delle fasi o l'andamento dell'energia meccanica in tempo reale durante l'esperimento. L'utilizzo dell'interfaccia digitale permette inoltre, in ciascuna parte del percorso didattico, di soffermarsi su argomenti quali la trasduzione e il campionamento dei segnali, le cui implicazioni possono anch'esse essere osservate in tempo reale.

La sperimentazione di questo materiale didattico è stata effettuata nel Dicembre 2005 nel corso di Complementi di Fisica Generale seguito da circa 40 allievi, presso la Facoltà di Scienze dell'Università "Federico II" di Napoli. L'analisi dell'impatto formativo è ancora in corso. Si prevede la sperimentazione in altri corsi universitari ed in corsi per la formazione degli insegnanti nella Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento che si tiene presso l'Università "Federico II".

Bibliografia

- 1 F P Bowden and D Tabor 1954 *Friction and Lubrification* (Oxford University Press)
- 2 E. Rabinowicz *The intrinsic Variables affecting the Stick-Slip Process* Proc. Phys. Soc. **71** (1958) 668-675, and *Stick and slip* Sci. Am. **194** (1956),109-118
- 3 F-J Elmer *Nonlinear dynamics of dry friction* J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997),6057-6063
- 4 B N J Persson and V L Popov *On the origin of the transition from the slip to stick* Solid State Communications **114** (2000) 261-266
- 5 A J McMillan *A non-linear model for self-excited vibrations* Journal of Sound and Vibration **205** (2000) 323-335
- 6 Mark Denny *Stick-slip motion : an important example of self-excited oscillation.* Eur. J. Phys **25** (2004) 311-322
- 7 Rod Cross *Increase in friction force with sliding speed,* Am. J. Phys. **73** (2005) 812-816
- 8 F-J Elmer *The Friction Lab.* <http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/flab/index.html>
- 9 S.R. Nagel *Instabilities in a sandpile.* Rev. of Mod. Phys. **64** (1992),32
L.A:N: Amaral and K:B: Lauritsen *Energy avalanches in rice-pile model.* Physica.A **231**(1996), 608-614.
J. Rajchenbach *Dynamic of grain avalanches.* Phys.Rev.Lett. **88** (2002),14301
- 10 M. A. Moser, (1986) *The response of stick-slip systems to random seismic excitation*
T echnical Report: CaltechEERL:1986.EERL-86-03. California Institute of Technology
<http://caltecheerl.library.caltech.edu/167/00/8603.pdf>
J. Galeano, P. Español and M.A.. Rubio *Experimental and theoretical results of stress relaxations in a model of earthquake dynamics* Europhys. Lett., **49** (2000) 410