

Francesco  
di Liberto<sup>\*\*</sup>,  
Emilio Balzano\*,  
Marco Serpico\*,  
Fulvio Peruggi<sup>\*\*</sup>

\* Dipartimento  
di Scienze Fisiche,  
Università  
"Federico II",  
Centro universitario  
di Monte Sant'Angelo,  
Napoli  
\* CNISM,  
Sezione di Napoli  
° INFN,  
Sezione di Napoli

# Dinamica *Stick-Slip*: Oscillazioni con Attrito

(Pervenuto il 16.03.2006, approvato il 08.06.2007)

## ABSTRACT

A variety of phenomena in which sliding friction between bodies having some degree of elasticity is present exhibit stick-slip motion. We describe a simple device that allows to analyse this kind of dynamics and we present a wide set of possible experimental observations and measurements. The equipment was tested with undergraduate students and with student teachers at the university of Naples "Federico II". We are now evaluating the educational impact.

## Introduzione

Un gran numero di fenomeni naturali all'apparenza molto differenti, sia qualitativamente che quantitativamente, sono accomunati dal fatto che, in determinate circostanze, possono presentare dinamiche di tipo intermittente: fasi "statiche" in cui il sistema accumula energia potenziale si alternano a fasi "dinamiche" in cui l'energia potenziale viene trasformata in movimento. Tali fenomeni sono riconducibili, in maniera più o meno astratta, al problema del moto di scorrimento con attrito di un corpo materiale su un altro corpo che abbia proprietà elastiche. Spesso si fa riferimento ad essi come processi di tipo stick-slip, [1-10] poiché sono caratterizzati dall'alternanza di fasi di aderenza (*stick*) e fasi di scorrimento (*slip*).

Molti altri processi con intermittenza di due fasi sono riconducibili ai processi stick-slip. I moti franosi, il cigolio dei cardini di una porta aperta lentamente, lo stridio che si avverte nello spostare un tavolo o una sedia, il suono e il moto di un tergicristallo su un vetro asciutto, il suono prodotto quando si fa scorrere la punta di un dito sul bordo di un bicchiere, il sibilo che talvolta fa il gesso sulla lavagna, il meccanismo di emissione del suono nel violino, sono esempi comuni di processi di tipo stick-slip. Molti altri esempi possono essere individuati in una varietà di processi meccanici artificiali (nella frenata di auto, treni, e organi meccanici negli impianti industriali) e naturali (dinamica delle valanghe [11-13] e generazione dei terremoti [14-15]).

Il sistema fisico più semplice che può presentare una dinamica di questo tipo, è costituito da un blocco di massa  $M$ , che scivola con attrito su una superficie piana. Il blocco è trascinato da una molla di costante elastica  $k$ , in maniera che l'estremità libera della molla si muova a velocità  $v$  (Figura 1).



Figura 1. Molla Libera - Blocco di massa  $M$  trascinato da una molla di costante elastica  $k$ . L'estremità libera della molla si muove a velocità costante  $v$ .

Per semplicità, possiamo considerare un sistema fisico equivalente al precedente, nel quale il blocco è collegato tramite una molla ad una parete fissa, mentre sotto di esso scorre, a velocità costante, un piano con attrito (Figura 2). Identificheremo quest'ultimo sistema denominandolo sistema a Molla Vincolata (MV), mentre il precedente sarà detto sistema a Molla Libera (ML).

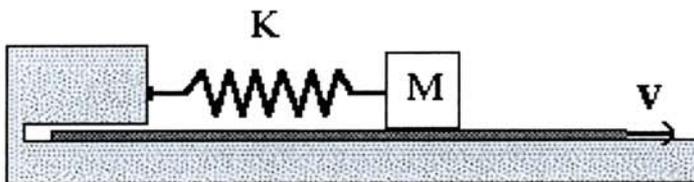


Figura 2. Molla Vincolata - Il piano scabro scorre a velocità  $v$  sotto il blocco legato alla molla che ha l'altro estremo fisso.

La descrizione del moto del blocco nel sistema a Molla Vincolata, è riconducibile a quella del sistema a Molla Libera tramite una trasformazione di coordinate.

Per avere un'idea immediata di come la dinamica del blocco si sviluppi in maniera intermittente, attraverso l'alternanza di fasi di aderenza e scorrimento, riportiamo un'istantanea tratta da un'animazione nella quale presentiamo anche l'andamento temporale sia della posizione del blocco che della forza d'attrito agente su di esso (Figura 3). L'animazione è realizzata col programma *Interactive Physics*.

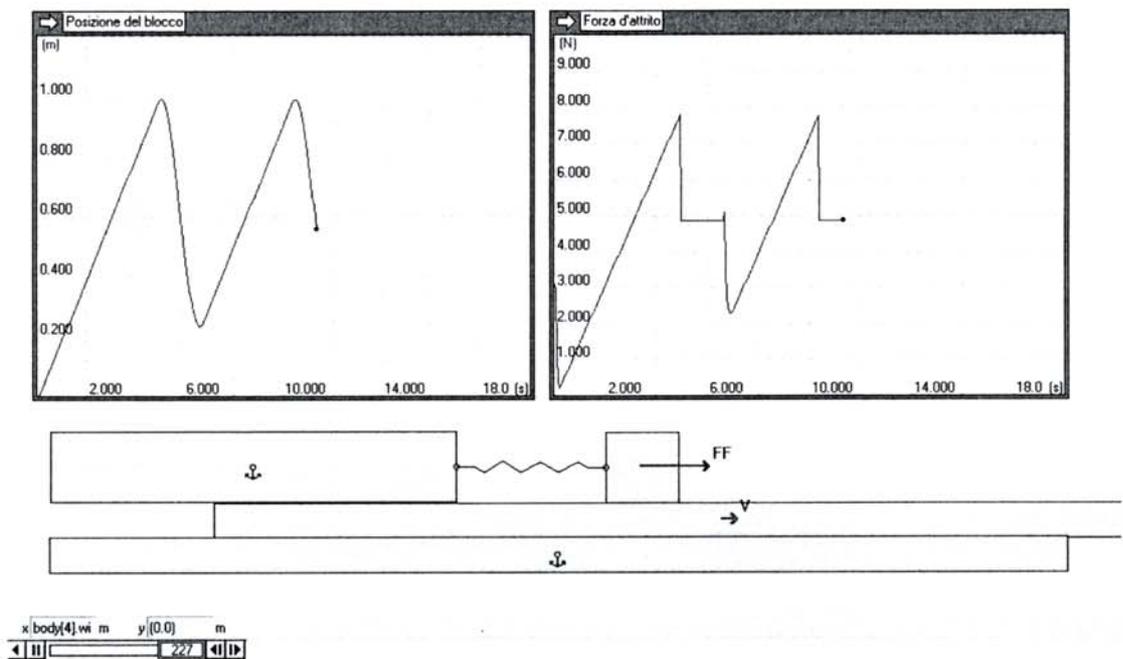


Figura 3. Animazione realizzata con *Interactive Physics*, che descrive la dinamica del blocco nella configurazione di figura 2 (Molla Vincolata). Il piano scorre a velocità  $v$ . L'attrito agente sul corpo è rappresentato dal vettore  $FF$ . La forza di attrito statico cresce linearmente con l'elongazione della molla, mentre la forza di attrito dinamico è modellizzata come costante.

**Equazione del moto**

Sia  $x = x(t)$  la posizione del blocco nel sistema a molla vincolata. Assumiamo che l'origine del riferimento coincida con la posizione occupata dal blocco all'istante  $t = 0$ , e che in tale istante la molla sia a riposo. In  $t = 0$  il piano comincia a scivolare sotto al blocco con velocità  $v$ . L'equazione del moto del blocco è allora data da

$$M\ddot{x} = F_s - F_{el} ,$$

dove  $F_s$  è la forza di attrito statico e  $F_{el}$  è la forza elastica esercitata dalla molla. In ogni istante di tempo, la forza d'attrito statico equilibra la forza elastica ed il bloc-

co resta quindi solidale con il piano (fase di aderenza). Il suo moto è perciò descritto dall'equazione

$$x(t) = vt$$

ossia si tratta di un moto rettilineo uniforme.

Ad un certo istante  $t_1$ , la forza elastica

$$F_{el} = kx(t) = kv t$$

eguaglia in modulo il valore critico della forza di attrito statico

$$F_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg$$

dove  $N = Mg$  è la reazione vincolare,  $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico assunto indipendente dalla superficie di contatto [6].

A partire dall'istante  $t_1$ , il corpo comincia a scivolare all'indietro rispetto al piano (fase di scorrimento), soggetto alla forza elastica della molla ed alla forza di attrito dinamico

$$F_d = \mu_d N = \mu_d Mg$$

dove  $\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico.

Abbiamo assunto che il coefficiente di attrito dinamico sia indipendente dalla velocità  $v$ , dalla massa  $M$  e dalla superficie di contatto [6]. L'equazione del moto per la fase di slip è allora data da

$$M\ddot{x} = F_d - kx(t)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{\mu_s N}{k} \\ \dot{x}(t_1) = v \end{cases}$$

L'equazione del moto può essere risolta con la procedura che riportiamo nel paragrafo Approfondimento 1, dando luogo, nell'approssimazione di piccole velocità di scorrimento del piano<sup>2</sup>, alla seguente legge oraria per la fase di scivolamento

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t.$$

Si tratta di un'oscillazione armonica di ampiezza  $\frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k}$  e periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$  che, per  $M$  e  $k$  fissati, è determinata esclusivamente dalla

differenza tra i coefficienti di attrito statico e dinamico.

La fase di scorrimento termina in effetti dopo mezza oscillazione, quando il blocco riassume la velocità  $v$ , come all'istante iniziale, ossia è di nuovo solidale col piano. Il blocco entra allora di nuovo nella fase di aderenza, dominata dall'attrito statico. Successivamente, le due fasi del moto continuano ad alternarsi periodicamente, come si vede in Figura 4, dove è rappresentato l'andamento del moto complessivo del blocco.

Nella Figura 4 è evidenziata la dipendenza dai coefficienti d'attrito di tutte le grandezze caratteristiche del moto. Riportiamo nelle Figure 5 e 6 i corrispondenti andamenti della velocità e dell'accelerazione del blocco. Questi ultimi permettono di visualizzare in maniera chiara la natura intermittente della dinamica stick-slip: al passaggio dalle fasi di aderenza a quelle di scorrimento, gli andamenti di velocità ed accelerazione sono bruscamente discontinui.

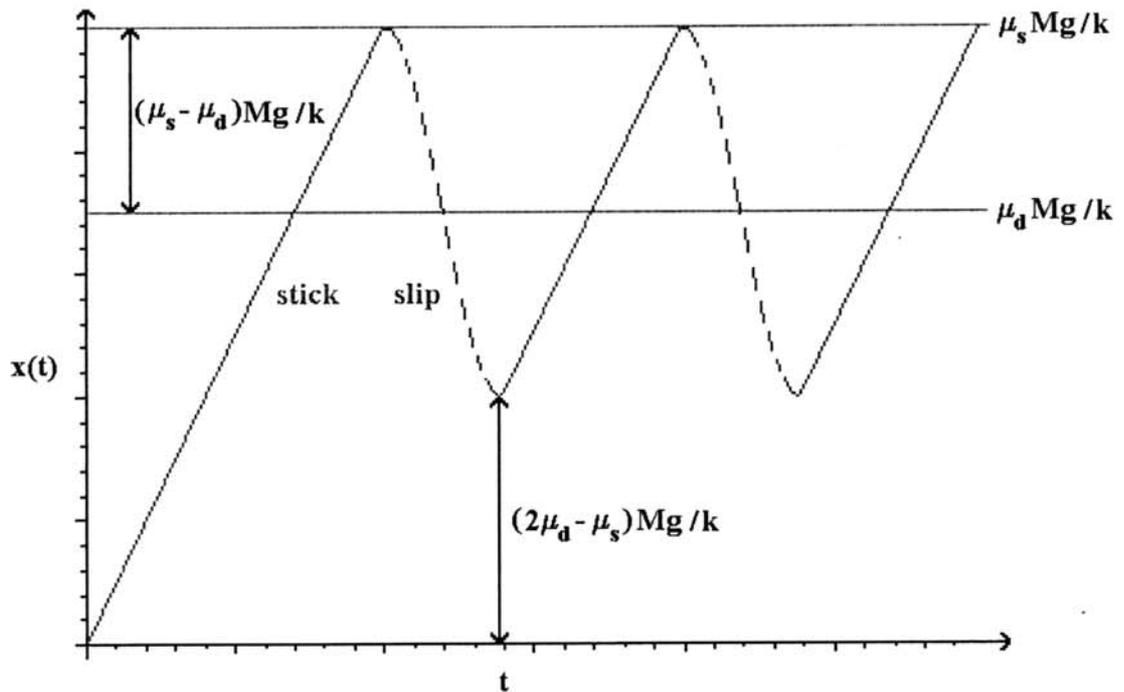


Figura 4. MV - Grafico di  $x(t)$ . Le fasi di aderenza sono rappresentate col tratto pieno, le fasi di scorrimento con le linee tratteggiate.

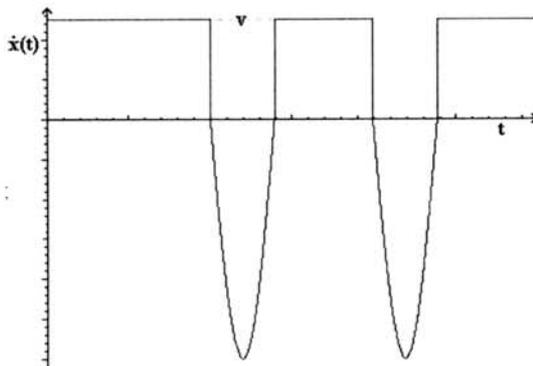


Figura 5. MV - Grafico della velocità.

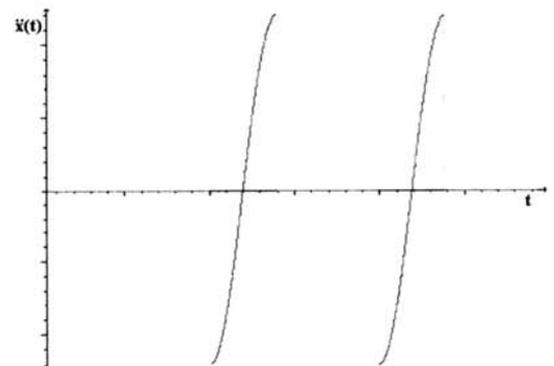


Figura 6. MV - Grafico dell'accelerazione.

## L'esperimento

Passiamo ora a descrivere l'apparato sperimentale che abbiamo utilizzato (Figura 7). Il blocco è un parallelepipedo di legno di peso pari a circa 650 grammi (comprensivi del peso del sensore di posizione posto al di sopra del blocco) con una faccia ricoperta da uno strato di gomma. Questa faccia è posta a contatto con un rotolo di panno che può essere avvolto attorno ad un supporto ruotante. Non è difficile manovrare la manopola del

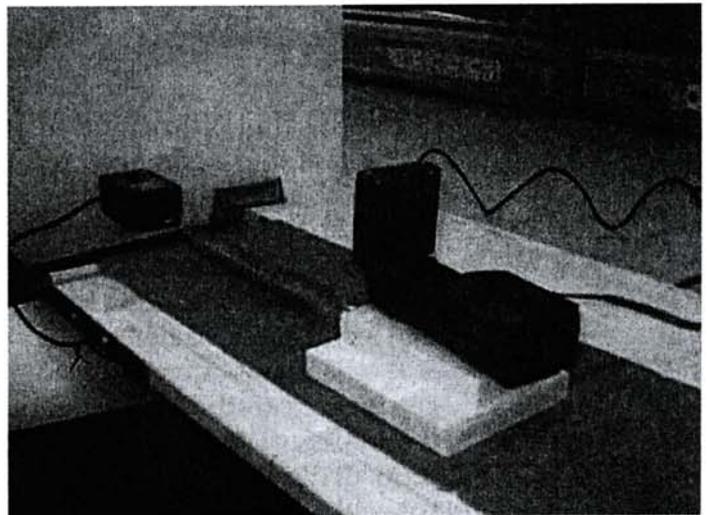


Figura 7. Apparato sperimentale.

supporto in maniera da far scivolare il rotolo sul tavolo d'appoggio a velocità approssimativamente costante. Il blocco è collegato per mezzo di una molla ad un sensore di forza, che misura la tensione della molla stessa.

Al di sopra del blocco è collocato un sensore di posizione (*sonar*) che determina la posizione del blocco rispetto ad uno schermo piano. Entrambi i sensori sono interfacciati con un calcolatore (mediante l'uso del pacchetto *LabPro*) e permettono quindi di ottenere gli andamenti nel tempo delle grandezze osservabili (tensione della molla, posizione, velocità ed accelerazione del blocco e tutte le grandezze derivabili da queste) direttamente in formato grafico.

## Risultati

I parametri liberi del problema possono facilmente essere variati aggiungendo pesi sul blocco per cambiarne la massa, utilizzando diverse molle, ricoprendo la superficie di contatto del blocco con un materiale diverso per cambiare i valori dei coefficienti d'attrito, cambiando la velocità di scorrimento del rotolo sul tavolo.

Qui presentiamo i risultati ottenuti nella configurazione descritta precedentemente (massa del blocco pari a circa 650 grammi, gomma su panno per la superficie di contatto) con una molla di costante elastica pari a circa 22 N/m e una velocità di scorrimento pari a circa 0.06 m/s. Nelle Figure 8-11 riportiamo tutte le grandezze misurate.

A partire dagli andamenti nel tempo della posizione del blocco e della tensione della molla, possiamo ottenere misure indirette di tutti i parametri liberi del problema.

- La pendenza delle rampe lineari relative alle fasi di stick nel grafico della posizione fornisce una stima della velocità di scorrimento del blocco.
- Il rapporto tra le pendenze delle rampe lineari relative alle fasi di stick nei grafici della tensione della molla e della posizione fornisce una stima della costante elastica della molla.

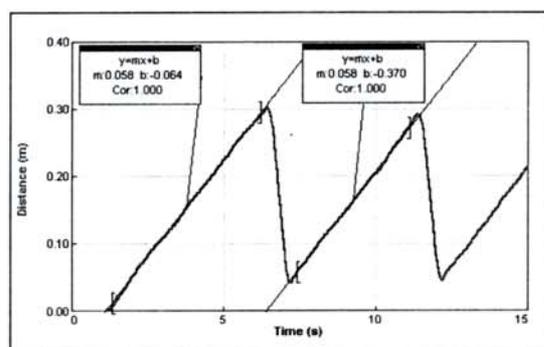


Figura 8. Grafico della posizione del blocco misurata.

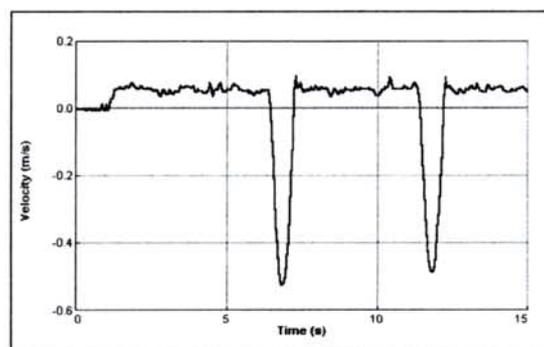


Figura 9. Grafico della velocità del blocco misurata.

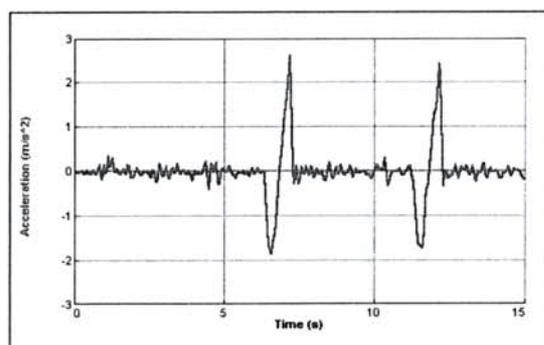


Figura 10. Grafico dell'accelerazione del blocco misurata.

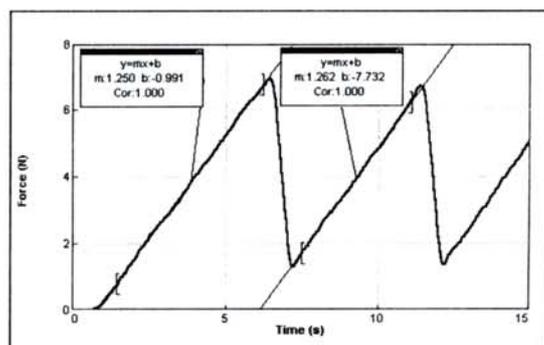


Figura 11. Grafico della tensione della molla misurata.

- Il valore della tensione della molla nel punto di massima elongazione fornisce una stima del valore critico della forza d'attrito statico e quindi (misurando indipendentemente la massa del blocco) del coefficiente d'attrito statico.
- È molto interessante verificare che variando la superficie di contatto del corpo con il nastro o ricoprendo il nastro con carta più o meno liscia si ottengono andamenti diversi.

Per il set di dati di cui abbiamo presentato i grafici si ottiene, ad esempio:

$$\begin{aligned} v &= 0.058 \pm 0.002 \text{ m/s} \\ k &= 21.6 \pm 0.9 \text{ N/m} \\ F_{max} &= 6.9 \pm 0.1 \text{ N} & \mu_s &= 1.08 \pm 0.02 \\ F_d &= 4.1 \pm 0.1 \text{ N} & \mu_d &= 0.65 \pm 0.02 . \end{aligned}$$

Gli errori sulla velocità e sulla costante elastica della molla sono errori statistici ottenuti propagando gli errori sui coefficienti delle regressioni lineari.

Gli errori sulle forze vanno intesi invece come errori massimi. Il programma LabPro permette di determinare le coordinate di un determinato punto in un grafico semplicemente utilizzando il puntatore del mouse. Le misure di  $F_{max}$  e di  $F_d$ , come abbiamo già sottolineato, si ottengono a partire dal valore della tensione della molla in determinati istanti caratteristici. Gli errori riportati sono stime per eccesso dell'errore commesso nel localizzare con la procedura suddetta tali valori.

Gli errori sui coefficienti d'attrito sono infine ottenuti propagando quelli sulle forze.

Inserendo le opportune istruzioni nel programma LabPro è possibile ottenere un grafico dell'energia totale  $U = \frac{1}{2}Kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2$  calcolata a partire dalla posizione e dalla velocità del blocco misurate, che ci consente di visualizzare il bilancio energetico durante il moto (Figura 12). Sempre utilizzando LabPro si può visualizzare la traiettoria nello spazio delle fasi ( $x, \dot{x}$ ) corrispondente a posizione e velocità misurate (Figura 13).

Si possono realizzare ulteriori misure, in relazione alla questione della durata delle fasi di aderenza e scorrimento (Approfondimento 2). In particolare:

- Dal grafico della legge oraria oppure usando un cronometro si può effettuare una stima di  $T_a$  e  $T_{slip}$ , rispettivamente, tempi della fase stick e della fase slip.
- Si può verificare che a bassa velocità  $T_a$  e  $T_{slip}$  sono indipendenti da  $x_0$  (la posizione iniziale del blocco), dipendenza che invece si trova per  $v \geq v_c$ . Per  $v \geq v_c$  si può trovare il valore di  $x_0$  per cui  $T_a$  si annulla.

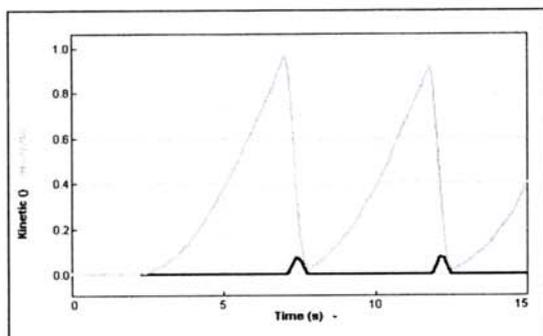


Figura 12. Grafico dell'energia potenziale (in grigio) e cinetica (in nero) calcolate (ed espresse in joule). I dati sperimentali sono gli stessi che nelle figure precedenti. Il grafico dell'energia totale è praticamente identico a quello dell'energia potenziale, dato che il contributo di quest'ultima è molto maggiore di quello dell'energia cinetica.

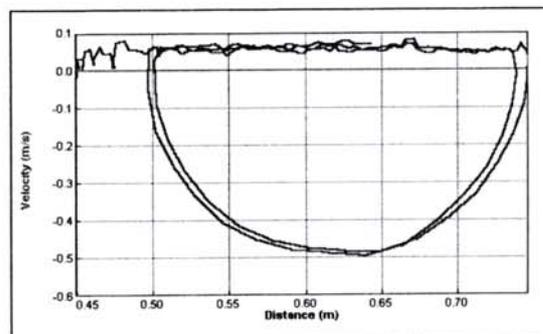


Figura 13. Traiettoria nello spazio delle fasi misurata. I dati sperimentali sono gli stessi che nelle figure precedenti. Le fasi di aderenza sono rappresentate approssimativamente da segmenti paralleli all'asse delle distanze (velocità costante). Le fasi di scivolamento da semicirconferenze (oscillazione armonica).

– Si può verificare che per  $v \gg v_c$ , si ha solo la fase di scorrimento ed in particolare, fissando opportunamente la posizione iniziale del blocco, osservare sperimentalmente l'esistenza di una soluzione stazionaria (Approfondimento 3) per le equazioni del moto (Figura 14). Ci si mette direttamente nella fase stazionaria quando, per non avvertire il cigolio, si apre rapidamente una porta che invece cigola quando viene aperta lentamente. Lo stesso fa il prestigiatore che tira via la tovaglia da una tavola apparecchiata senza far muovere i piatti!

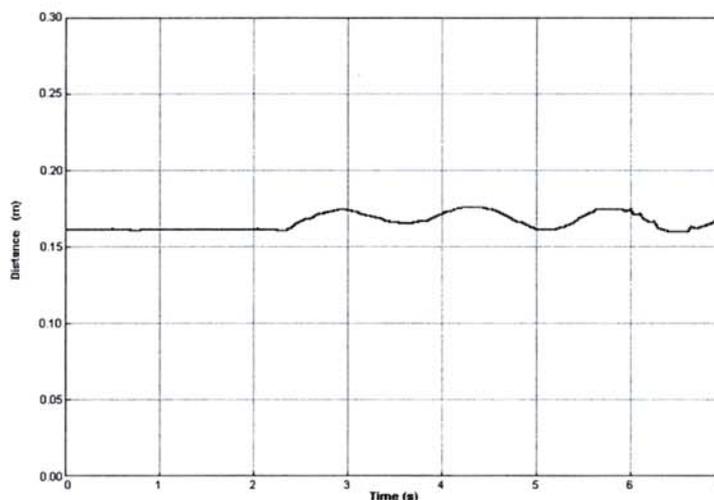


Figura 14. Soluzione stazionaria. Stessa configurazione sperimentale delle Figure precedenti. Il blocco è tenuto inizialmente fermo, mentre il piano scorre sotto di esso a velocità sostenuta ( $\sim 1$  m/s), in una posizione ragionevolmente prossima alla posizione stazionaria teorica data dalla (12) (Approfondimento 3). Una volta lasciato libero, il blocco è soggetto a piccole oscillazioni (di ampiezza pari a circa 1 cm) intorno alla posizione stazionaria reale (nel caso in esame  $x_{stazionaria} \sim 17$  cm).

**Approfondimento 1**  
**Equazione del**  
**moto per la fase**  
**di scorrimento**

Ripartiamo dall'equazione del moto per la fase di slip

$$M\ddot{x} = F_d - kx(t) \tag{1a}$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{\mu_s N}{k} \\ \dot{x}(t_1) = v \end{cases} \tag{1b}$$

Definendo ora una nuova coordinata  $y = y(t)$  per la posizione del blocco

$$y(t) = x(t) - \frac{F_d}{k}$$

l'equazione del moto diventa

$$M\ddot{y} = -ky(t) \tag{2a}$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(t_1) = \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \\ \dot{y}(t_1) = v \end{cases} \tag{2b}$$

Tale equazione ammette una soluzione nella forma

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi,$$

in cui  $A$  e  $\varphi$  dipendono dalle condizioni iniziali, e  $\omega^2 = k/M$ .

Se scegliamo  $t_1 = 0$  come istante iniziale, imponendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$y(t) = \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \quad (3a).$$

La legge oraria  $x = x(t)$  nella fase di slip è dunque data da

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t \quad (3b).$$

Prima di analizzarla nella sua generalità, limitiamoci al regime di basse velocità, in cui vale la seguente disuguaglianza

$$\frac{v}{\omega} = v \sqrt{\frac{M}{k}} \ll \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \quad (4).$$

In tal caso il termine in  $\sin \omega t$  nell'equazione (3b), può essere trascurato e il moto del blocco nella fase di scorrimento è costituito da un'oscillazione armonica di ampiezza  $\frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k}$  che, per  $M$  e  $k$  fissati, è determinata esclusivamente dalla differenza tra i coefficienti di attrito statico e dinamico. Per avere un'idea degli ordini di grandezza per cui ciò si verifica, osserviamo che per  $M = 1$  kg,  $k = 1$  N/m, e  $\mu_s - \mu_d = 0.1$ , la relazione (4) diventa  $v \ll 1$  m/s. In queste condizioni la legge oraria per la fase di scorrimento sarà, come già sottolineato in precedenza, data da

$$x(t) = \frac{\mu_d N}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \cos \omega t \quad (5).$$

Quando la velocità non è troppo bassa e più in generale quando

$$\frac{v}{\omega} = v \sqrt{\frac{M}{k}} \geq \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \quad (6),$$

l'approssimazione precedente non è valida e nella relazione (3b), che descrive la fase di scorrimento, bisogna tenere conto del contributo dell'ultimo termine. In tal caso il moto complessivo del blocco segue l'andamento rappresentato in Figura 15.

L'andamento qualitativo del moto del blocco non cambia in maniera particolarmente significativa. L'andamento rappresentato in Figura 15 non è facilmente distinguibile da quello rappresentato in Figura 4, se non per una maggiore gradualità nell'inversione della direzione del moto del blocco. In sostanza si ha un passaggio meno brusco dalla fase di aderenza a quella di scorrimento, poiché l'a-

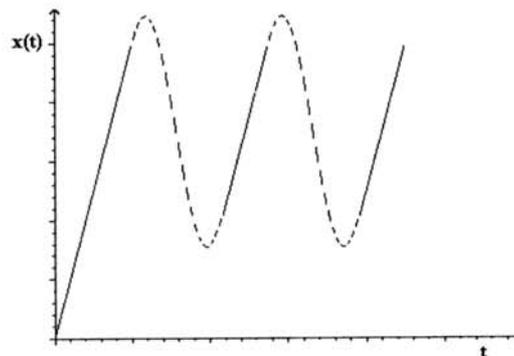


Figura 15. MV - Grafico di  $x(t)$  per la soluzione esatta (3b). Le fasi di scorrimento sono anche qui indicate con linee tratteggiate.

zione della forza elastica non riesce inizialmente ad invertire la direzione del moto del blocco.

Il caratteristico alternarsi delle fasi di stick e slip è più evidente nella Figura 4 piuttosto che nella Figura 15. Conviene quindi, dal punto di vista didattico, incominciare con piccole velocità.

Nel prossimo paragrafo discutiamo in dettaglio il comportamento del sistema al variare della velocità.

**Approfondimento 2**  
**Dipendenza del**  
**moto dalla**  
**velocità del piano**  
**scorrevole**

È interessante capire come cambia la dinamica del blocco al crescere del rapporto  $v/\omega$ . Cerchiamo di determinare le caratteristiche del moto al variare della velocità del piano tenendo fissi tutti gli altri parametri. Quello che si verifica è che, all'aumentare di  $v$ , la fase di aderenza tende a diventare sempre più breve<sup>3</sup> fino a cessare nel limite di velocità infinita. La durata della prima fase di aderenza può essere calcolata, come abbiamo già sottolineato, determinando l'istante di tempo  $t_1$  tale che risulti:

$$kx(t_1) = vt_1 = F_{Max} = \mu_s N.$$

Per la generica fase di aderenza che inizi all'istante  $t_0$  e termini all'istante  $t_f$ , che duri cioè un tempo  $T_a = t_f - t_0$  risulta:

$$x(t_f) = x(t_0) + v(t_f - t_0) = x(t_0) + vT_a \quad (7).$$

E poiché

$$x(t_f) - x(t_0) = \mu_s N/k - (2\mu_d - \mu_s)N/k = 2(\mu_s - \mu_d)N/k,$$

si ha:

$$T_a = \frac{2(\mu_s - \mu_d)N}{kv} \approx \frac{\text{cost.}}{v}.$$

Maggiore è dunque la velocità, minore la durata della fase di aderenza.

La durata delle fasi di scorrimento può essere ottenuta derivando l'espressione (3b) ed imponendo la condizione

$$\dot{x}(t) = v,$$

poiché la fase di scorrimento termina quando il moto del blocco torna ad essere solidale con il piano sottostante che trasla a velocità  $v$ . Se indichiamo con  $T_{slip}$  la durata delle fasi di scorrimento, l'espressione di questa quantità in funzione di  $v$  potrà essere ottenuta risolvendo l'equazione trascendente

$$v(\cos \omega T_{slip} - 1) - \frac{(\mu_s - \mu_d)N}{k} \omega \sin \omega T_{slip} = 0 \quad (8).$$

Una soluzione è  $T_{slip} = T = 2\pi/\omega$ , il periodo della soluzione armonica della fase di scorrimento dell'equazione (3b).

È chiaro che questa soluzione rappresenta la condizione limite in cui non si ha più alcuna fase di aderenza, in cui cioè la fase di scorrimento ha una durata infinita.

Le altre soluzioni dell'Equazione (8) sono riportate in Figura 16 insieme ai valori di  $T_a$ .

Per velocità piccole il tempo di aderenza diverge (come potevamo aspettarci) mentre il tempo di scorrimento tende al valore di  $T/2$  che è proprio quello che abbiamo utilizzato nell'approssimazione di bassa velocità in cui l'equazione del moto per la fase di scorrimento ammetteva la soluzione (5). Al crescere della velocità,  $T_a$  decresce piuttosto rapidamente tendendo asintoticamente ad annullar-

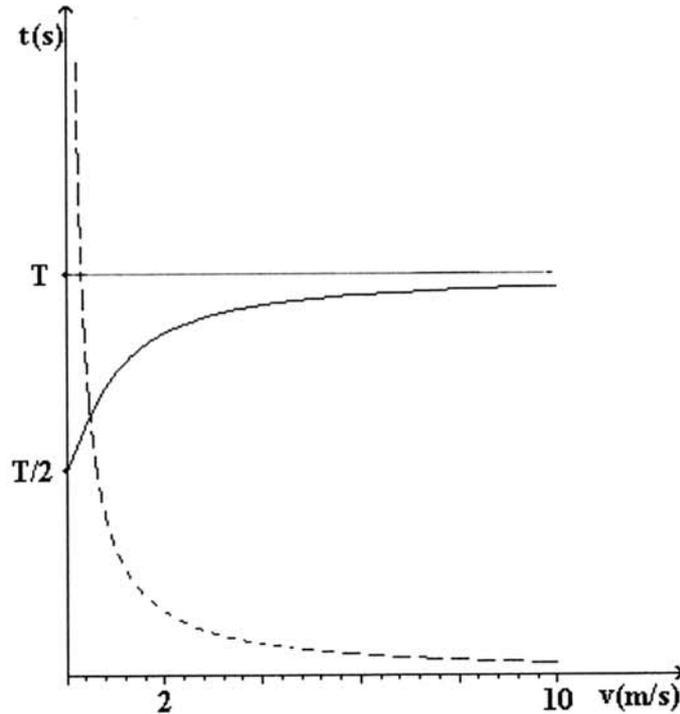


Figura 16. Andamenti di  $T_a$  (linea tratteggiata) e  $T_{slip}$  (linea piena), per i seguenti valori dei parametri  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 25 \text{ N/m}$ ,  $\mu_s = 1$ ,  $\mu_d = 0.5$ . Il periodo  $T$  dell'oscillazione armonica è pari a circa 1.26 secondi.

si, mentre  $T_{slip}$  tende al valore asintotico  $T$  che avevamo predetto. Intorno ad un certo valore critico  $v_{crit}$  della velocità<sup>4</sup> si ha un fenomeno di *cross-over* per cui si passa molto rapidamente da una situazione in cui  $T_a \gg T_{slip}$  ad una situazione in cui  $T_a \ll T_{slip}$ . Per velocità molto maggiori di questa velocità critica, la fase di aderenza è praticamente inesistente e si può approssimare il moto come una pura oscillazione armonica.

Nel prossimo paragrafo vedremo che, al variare della velocità del piano, la durata delle fasi di aderenza e scorrimento dipende anche dalle condizioni iniziali imposte.

### Approfondimento 3 Un'altra soluzione delle equazioni del moto - Moto stazionario

Ritorniamo ora all'equazione del moto per la fase di scorrimento (1a). È interessante notare che, assumendo condizioni iniziali diverse dalle (1b), questa equazione ammette una soluzione stazionaria. In particolare se alle (1b) sostituiamo le condizioni iniziali.

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{F_d}{k} = \frac{\mu_d N}{k} \\ \dot{x}(t_1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

la (1a) ammette la soluzione

$$x(t) = \frac{F_d}{k} = \frac{\mu_d N}{k} \quad (12).$$

L'interpretazione fisica di questa soluzione è semplice: se all'istante iniziale il blocco, mentre il piano scorre sotto ad esso a velocità  $v$ , si trova fermo nella posizione in cui la forza elastica bilancia la forza d'attrito dinamico, allora il blocco resterà indefinitamente in questa posizione dando luogo ad un moto stazionario. La soluzione (12) vale per la fase di scorrimento. Le condizioni iniziali (11), però, non sono compatibili con l'equazione del moto relativa alla fase di aderenza, nel-

la quale, come sappiamo, il blocco si muove a velocità  $v$  solidalmente col piano e che termina al verificarsi della condizione

$$x(t_1) = \frac{\mu_s N}{k} \geq \frac{\mu_d N}{k} \quad (13).$$

La (12) non può quindi seguire alla fase di aderenza precedente, poiché quest'ultima impone una condizione iniziale per la posizione del blocco differente da quella contenuta nelle (11).

Tuttavia è possibile osservare sperimentalmente la dinamica descritta dalla (12), a patto che la velocità del piano sia abbastanza grande (rispetto a  $v_{crit}$ ) e che le condizioni iniziali del blocco siano abbastanza prossime alle (11).

Possiamo dare una giustificazione qualitativa di questo genere di dinamica utilizzando le considerazioni del paragrafo precedente. Come abbiamo già sottolineato, la dinamica (12) si osserva quando la velocità del piano è grande rispetto a  $v_{crit}$ . Analizzando la Figura 16 è chiaro che per  $v > v_{crit}$  la durata della fase di aderenza è sempre più piccola, mentre la durata della fase di scorrimento si avvicina all'intero periodo  $T$  dell'oscillazione armonica. È chiaro allora che, scegliendo opportunamente le condizioni iniziali del blocco (in modo che siano prossime alle (11)) e per velocità del piano abbastanza elevate, si può fare in modo che la dinamica del blocco si riduca alla sola fase di scorrimento ed in particolare che si realizzi proprio la soluzione (12).

La soluzione (12) è anche possibile per velocità prossime a  $v_{crit}$  quando si ipotizzi che la forza di attrito dinamico abbia una dipendenza dalla velocità relativa blocco-piano, cioè quando si ponga  $F_d = f(\dot{x} - v)$ . In questo modello più generale esistono soluzioni delle equazioni del moto nelle quali si passa dalla condizione iniziale (13) alla dinamica descritta dalla (12) per mezzo di un transitorio in cui si verifica un'oscillazione smorzata.

In ogni caso però, per velocità del piano molto più piccole della velocità critica, la dinamica è sempre caratterizzata dall'alternarsi delle fasi di aderenza e scorrimento indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Per concludere questo paragrafo vogliamo far notare che il cambio di variabili (2)

$$y(t) = x(t) - \frac{F_d}{k}$$

che abbiamo utilizzato per risolvere le equazioni del moto per la fase di slip, può essere interpretato fisicamente in termini della soluzione stazionaria (12). La nuova variabile  $y(t)$  per la posizione del blocco definita con la (2), descrive il moto del blocco rispetto alla soluzione stazionaria (12).

## Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato una vasta gamma di opportunità didattiche offerte dal semplice apparato sperimentale per lo studio della dinamica stick-slip da noi progettato e realizzato. Il pregio di questo esperimento didattico ci sembra proprio quello di dare la possibilità da un lato di effettuare semplici osservazioni (legge oraria, forza elastica, forza d'attrito) e misure sperimentali (quantità cinematiche, costante elastica, coefficienti d'attrito), dall'altro di approfondire il discorso con una serie di osservazioni più elaborate. Ci riferiamo alla dipendenza delle caratteristiche della dinamica da parametri quali la velocità del piano scorrevole o le condizioni iniziali, alle diverse possibili soluzioni delle equazioni dinamiche (e alle considerazioni sul modello utilizzato che ne derivano), alla possibilità di visualizzare la traiettoria nello spazio delle fasi o l'andamento dell'energia meccanica in tempo reale durante l'esperimento. L'utilizzo dell'interfaccia digitale permette inoltre, in ciascuna parte del percorso didattico,

di soffermarsi su argomenti quali la trasduzione e il campionamento dei segnali, le cui implicazioni possono anch'esse essere osservate in tempo reale.

La sperimentazione di questo materiale didattico è stata effettuata nel Dicembre 2005 nel corso di Complementi di Fisica Generale (seguito da circa 40 allievi) e nel Gennaio 2006 nel corso di Laboratorio di Fisica della Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento (circa 20 specializzandi), presso la Facoltà di Scienze dell'Università "Federico II" di Napoli. L'analisi dell'impatto formativo è ancora in corso. Si prevede la sperimentazione in altri corsi universitari ed in corsi per la formazione degli insegnanti nella Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento che si tiene presso l'Università "Federico II".

**Note** <sup>1</sup>  $t_f = \mu_s N/kv$ .

<sup>2</sup> Come meglio specificato in appendice, possiamo assumere che velocità "piccole" significhi  $v \ll 1$  m/s.

<sup>3</sup> Occorre un tempo sempre più piccolo affinché l'elongazione della molla sia abbastanza grande da vincere l'attrito statico.

<sup>4</sup> Nel caso rappresentato in Figura 8,  $v_{crit} = 0.42$  m/s.

## Bibliografia

- [1] F.P. BOWDEN e D. TABOR, *Friction and Lubrication of Solids*, Oxford University Press, 1952.
- [2] E. RABINOWICZ "The intrinsic Variables affecting the Stick-Slip Process", *Proc. Phys. Soc.* **71** (1958), 668-675, and "Stick and slip" *Sci. Am.* **194** (1956), 109-118.
- [3] F.J. ELMER, "Nonlinear dynamics of dry friction", *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), 6057-6063.
- [4] B.N.J. PERSSON e V.L. POPOV, "On the origin of the transition from the slip to stick", *Solid State Communications* **114** (2000) 261-266.
- [5] A.J. McMILLAN, "A non-linear model for self-excited vibrations", *Journal of Sound and Vibration* **205** (2000) 323-335.
- [6] M. DENNY, "Stick-slip motion: an important example of self-excited oscillation", *Eur. J. Phys.* **25** (2004) 311-322.
- [7] R. CROSS, "Increase in friction force with sliding speed", *Am. J. Phys.* **73** (2005) 812-816.
- [8] L.R. LAPIDUS, "Motion of a harmonic oscillator with sliding friction", *Am. J. Phys.* **38** (1970), 1360.
- [9] F.J. ELMER, *The Friction Lab* <http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/flab/index.html>
- [10] L. GRATTON, S. DEFRADESCO, "A simple measurement of the sliding friction coefficient", *Physics Education* **41**, 232 (2006).
- [11] S.R. NAGEL, "Instabilities in a sandpile", *Rev. of Mod. Phys.* **64** (1992), 32.
- [12] L.A.N. AMARAL e K.B. LAURITSEN, "Energy avalanches in rice-pile model", *Physica A* **231** (1996), 608-614.
- [13] J. RAJCHENBACH "Dynamics of grain avalanches", *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 14301.
- [14] M.A. MOSER, (1986) *The response of stick-slip systems to random seismic excitation*, Technical Report: CaltechEERL:1986.EERL-86-03, California Institute of Technology <http://caltecheerl.library.caltech.edu/167/00/8603.pdf>
- [15] J. GALEANO, P. ESPAÑOL e M.A. RUBIO, "Experimental and theoretical results of stress relaxations in a model of earthquake dynamics", *Europhys. Lett.*, **49** (2000) 410.