

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II



DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DEI SISTEMI CIVILI  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE

CICLO XXXV

**METASTABILITÀ E CRASH NELLE DINAMICHE DI CAR-FOLLOWING**

**COORDINATORE**

PROF. ANDREA PAPOLA

**RELATORE**

PROF. VINCENZO PUNZO

**CORRELATORE**

ING. MARCELLO MONTANINO

**CANDIDATO**

GAETANO ZACCARIA

# 1 SOMMARIO

---

<b>1.</b>	<b>INTRODUZIONE.....</b>	<b>2</b>
<b>2.</b>	<b>MODELLI DI INTERAZIONE LONGITUDINALE: STATO DELL'ARTE.....</b>	<b>4</b>
2.1.	MODELLI MICROSCOPICI PER LA SIMULAZIONE DEL TRAFFICO.....	4
2.2.	I MODELLI DI CAR-FOLLOWING.....	4
2.2.1.	<i>Modelli ingegneristici.....</i>	<i>6</i>
2.2.1.1.	Modelli stimolo-risposta .....	6
2.2.1.2.	Modelli basati sulla distanza di sicurezza .....	9
2.2.1.3.	Modelli basati su una grandezza desiderata .....	10
2.2.1.4.	Modelli lower order .....	12
2.2.1.5.	Comportamento dei modelli di car-following all'equilibrio .....	13
2.2.2.	<i>Modelli psico-fisici.....</i>	<i>14</i>
2.2.2.1.	Modelli basati sulle soglie di percezione .....	14
2.2.2.2.	Modelli basati sull'angolo di visuale.....	15
2.3.	MODELLI MICROSCOPICI DEL TRAFFICO: ADAPTIVE CRUISE CONTROL.....	16
2.3.1.	<i>Constant Space-Headway spacing policy (CSH).....</i>	<i>17</i>
2.3.2.	<i>Constant Time Headway policy (CTH).....</i>	<i>18</i>
2.3.3.	<i>Variable Time headway policy (VTH).....</i>	<i>18</i>
<b>3.</b>	<b>INSTABILITÀ NEL TRAFFICO.....</b>	<b>20</b>
3.1.	IL FENOMENO DELLO STOP AND GO.....	20
3.2.	CLASSIFICAZIONE DELL'INSTABILITÀ.....	20
3.3.	ANALISI LINEARE DELLA STABILITÀ.....	22
3.3.1.	<i>Linearizzazione del modello di car following.....</i>	<i>23</i>
3.3.2.	<i>Approccio nella teoria del traffico.....</i>	<i>25</i>
3.3.3.	<i>Approccio nella teoria del controllo.....</i>	<i>26</i>
3.3.4.	<i>Weak string stability e strict string stability.....</i>	<i>27</i>
3.3.5.	<i>Analisi lineare dei modelli di IDM e GIPPS al variare della velocità di equilibrio.....</i>	<i>28</i>
3.4.	ANALISI NON LINEARE DELLA STABILITÀ.....	34
3.4.1.	<i>Limiti del modello lineare e definizione di metastabilità.....</i>	<i>34</i>
3.4.2.	<i>Sviluppo di una metodologia per l'analisi in campo non lineare della stabilità di stringa.....</i>	<i>35</i>
3.4.3.	<i>Design dell'esperimento.....</i>	<i>38</i>
3.4.4.	<i>Risultati.....</i>	<i>40</i>
<b>4.</b>	<b>CONCLUSIONI.....</b>	<b>49</b>
<b>5.</b>	<b>APPENDICE.....</b>	<b>51</b>
<b>6.</b>	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>57</b>
<b>7.</b>	<b>RINGRAZIAMENTI.....</b>	<b>61</b>

# 1. INTRODUZIONE

---

Il recente sviluppo e l'implementazione nei veicoli in commercio di funzioni automatizzate di guida, in particolare dei sistemi di Adaptive Cruise Control, ACC, ha rinnovato l'interesse per una proprietà microscopica del traffico, ossia la stabilità di stringa, studiata già diffusamente dagli anni '50; l'argomento è stato diffusamente studiato sia nella teoria del traffico che nella teoria del controllo, seppure con approcci differenti.

Come noto, i sistemi ACC si sostituiscono al guidatore nel controllo longitudinale del veicolo, ossia nelle manovre di accelerazione e decelerazione, operando come un modello di car-following, ampiamente nell'ingegneria del traffico, con l'aggiunta di dinamiche legate alla meccanica del veicolo.

Ovviamente i sistemi ACC sono pubblicizzati e percepiti dagli utenti come sicuri, tuttavia si è dimostrato, grazie ad una sperimentazione effettuata dalla commissione europea in Ungheria nel 2019, la pericolosità di questi sistemi allo stato attuale.

Durante la sperimentazione, i veicoli top di gamma dotati di ACC si inseguono su di un circuito. I piloti controllano esclusivamente lo sterzo per effettuare le manovre in curva. A seguito della frenata di circa  $5 \text{ m/s}^2$  del primo veicolo, i veicoli all'interno del plotone non riescono ad anticipare il comportamento del primo veicolo, portandosi sempre a velocità inferiori rispetto al veicolo che precede, rischiando la collisione, evitata solo dall'intervento del pilota.

Questa sperimentazione ha messo in luce le problematiche degli ACC, e la problematica dell'instabilità di stringa, che brevemente può essere definita come la proprietà del sistema di amplificare un disturbo; proprio quello che è accaduto durante la sperimentazione.

Alla luce dell'evidenza sperimentale del 2019 e di studi successivi in cui viene mostrato che gli odierni veicoli dotati di ACC sono instabili di stringa (Ciuffo et al. 2021), la Commissione Europea ha promosso presso i tavoli UNECE nei quali si discutono le procedure di omologazione e certificazione dei veicoli a livello mondiale, l'adozione della stabilità di stringa quale requisito di sicurezza dei veicoli a guida automatizzata di livello 2 o superiore automatizzati. Il requisito è quindi comparso nelle ultime bozze del regolamento UNI 157, seppur non sia ancora definito in maniera rigorosa (UNR157 - 8th session - Transport - Vehicle Regulations - UNECE Wiki).

Tuttavia, ci sono tanti interrogativi a cui ancora rispondere.

La stabilità stringa di veicoli è stata oggetto di numerosi studi, ma fino ad ora si è concentrata principalmente su sistemi lineari o linearizzati (Treiber 2011; Wilson 2001; Ward 2008; Montanino and Punzo, 2021; Montanino et al., 2021), in grado di fornire mediante una formulazione del problema in forma chiusa. Tuttavia, il traffico stradale è un sistema dinamico non lineare complesso (Treiber and Kesting, 2013) in cui i comportamenti dei singoli veicoli sono influenzati dal comportamento degli altri veicoli circostanti e dalle condizioni della strada. Inoltre, il traffico è soggetto a una grande varietà di disturbi interni ed esterni, come la presenza di pedoni, ciclisti, lavori stradali, eventi meteorologici e così via, che possono influenzare il comportamento dei veicoli e la fluidità del traffico. Poiché il traffico è un sistema dinamico non lineare, il comportamento del sistema non può essere descritto in modo completo da un

modello matematico lineare. Pertanto, l'approccio lineare non è sufficientemente affidabile per lo studio di questa proprietà microscopica del traffico.

I controllori utilizzati nei sistemi di controllo automatico della velocità sono non lineari, mentre in letteratura vi è una vasta gamma di controllori di tipo lineare (Liang and Peng, 1999; Shladover et al. 2012; Goñi-Ros 2019). Studi recenti hanno dimostrato che i controllori lineari sono meno adatti dei modelli non lineari di car-following per riprodurre la dinamica del veicolo (He et al., 2022). Pertanto, in questa tesi il focus sarà incentrato su due modelli di car-following ben noti e ampiamente studiati in letteratura, ossia il modello di Gipps (Gipps, 1981) e il modello IDM (Treiber, 2000).

L'analisi in campo non lineare permette di analizzare il fenomeno così com'è nella realtà, e studiare la metastabilità dei modelli. La metastabilità, si riferisce alla condizione in cui un sistema si trova in uno stato incerto o ambiguo e può oscillare tra due o più stati possibili prima di stabilirsi in uno stato definitivo, o instabilizzarsi. È un fenomeno di grande importanza nell'analisi della stabilità dei sistemi dinamici, in particolare nei sistemi complessi come quelli che caratterizzano il traffico veicolare. L'obiettivo principale è quindi quello di valutare la metastabilità dei modelli di traffico, analizzando dapprima la stabilità lineare e in seguito la stabilità non lineare dei modelli.

Nel corso della tesi verrà fornita una definizione dettagliata della metastabilità di un modello, e si andrà alla ricerca delle soglie di metastabilità, ossia quelle soglie definite per particolari intensità dei disturbi e che fanno sì che il modello, inizialmente stabile nel campo lineare, diventi instabile.

In generale, la proprietà di stabilità di stringa e anche la metastabilità sono proprietà critiche per lo studio di sicurezza del traffico in quanto possono influire sulla qualità e sicurezza del traffico. Se una stringa non fosse stabile, potrebbe portare fenomeni quali stop and go e nel peggiore dei casi a collisioni tra i veicoli del plotone, fino a tamponamenti a catena. Allo stesso modo, se un sistema è metastabile, potrebbe essere vulnerabile a interferenze esterne portando anche in questo caso alle problematiche prima citate. Per cui devono essere valutate attentamente durante la progettazione e l'implementazione dei controllori.

Data la criticità nello studio di sicurezza del traffico di queste due proprietà microscopiche, in questa tesi si studieranno oltre la metastabilità dei modelli di Gipps e IDM, anche le dinamiche che portano alla collisione tra i veicoli. In particolare, i tamponamenti tra veicoli causati da effetti a catena nel traffico sono un fenomeno piuttosto comune, soprattutto in condizioni di traffico congestionato, e dal 1991 al 2021 rappresentano circa il 18% di tutti gli incidenti stradali (<https://www.istat.it/it/archivio/275554>).

Si verificherà quindi se i modelli sopra citati, e definiti in letteratura collision free, siano in grado di riprodurre le collisioni tra veicoli dovuti all'instabilità e alla metastabilità nel campo non lineare, e che quindi siano adatti per lo studio di sicurezza dei veicoli e del traffico.

Infine, con tale tesi si ha lo scopo di definire un framework metodologico che sia di riferimento per lo studio dell'analisi di sicurezza del traffico.

## 2. MODELLI DI INTERAZIONE LONGITUDINALE: STATO DELL'ARTE

---

### 2.1. MODELLI MICROSCOPICI PER LA SIMULAZIONE DEL TRAFFICO

Nel corso degli anni la ricerca nel campo dell'analisi del traffico ha prodotto numerosi risultati, offrendo alla comunità modelli sempre più accurati. Il modello rimane però pur sempre una rappresentazione della realtà attraverso formulazioni matematiche, e per tale motivo introduce nello studio del traffico un'incertezza.

Nell'approccio microscopico si tiene conto dell'interazione tra i veicoli; riguarda quindi lo studio di una coppia di veicoli o di un insieme di veicoli, ossia il plotone. Con lo studio microscopico si è in grado di ottenere informazioni rilevanti sul tipo di guida, in quanto si ottengono informazioni quali velocità, accelerazione, decelerazione e la traiettoria. Nell'approccio microscopico i modelli a cui si fa riferimento sono i modelli di car-following su cui verrà fatta una analisi nel paragrafo successivo.

### 2.2. I MODELLI DI CAR-FOLLOWING

I modelli di car-following sono sempre più presenti nei temi dell'ingegneria dei trasporti e nel corso degli anni hanno assunto sempre maggiore importanza, trovando applicazioni in diversi campi.

Il modello simula la cinematica del veicolo "follower" come risposta agli stimoli ricevuti dal veicolo "leader"; l'ipotesi di base è quella che il veicolo "follower" si muova lungo la strada adattando la sua velocità in funzione della velocità del veicolo "leader".

Le variabili di stato del modello sono:

- La posizione del piano frontale del veicolo lungo un arco di strada,  $x_n(t)$ , ovvero la traiettoria del veicolo.
- La velocità del veicolo:

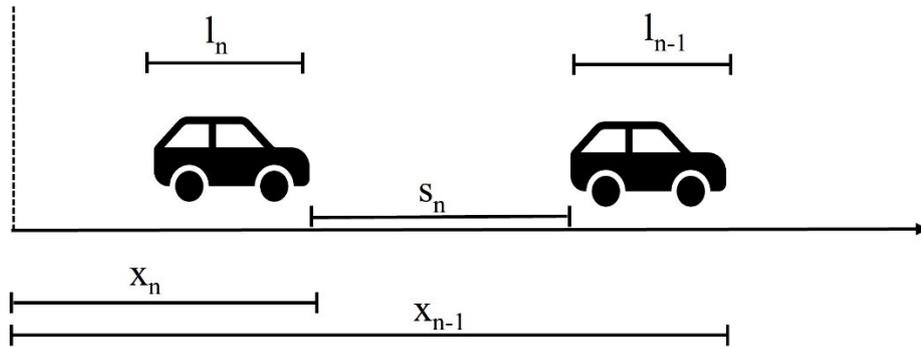
$$\dot{x}_n(t) = v_n(t) = \frac{dx_n(t)}{dt} \quad (2.1)$$

- L'accelerazione del veicolo:

$$a_n(t) = \dot{v}_n(t) = \frac{dv_n(t)}{dt} \quad (2.2)$$

- Tempo di percezione e reazione.

Si definiscono inoltre i seguenti attributi:



**Fig. 1:** Definizione delle grandezze caratteristiche del car-following. Leader = n-1; follower = n.

- Lunghezza del veicolo leader,  $l_{n-1}$ .
- Lunghezza del veicolo follower,  $l_n$ .
- Distance gap,  $s_n$ .

Da cui si deriva:

$$s_n(t) = x_{n-1}(t) - l_{n-1} - x_n(t) \quad (2.3)$$

In generale i modelli di car-following possono essere schematizzati mediante:

$$a = f(s_n(t), v_n(t), \Delta v_n(t)) \quad (2.4) \quad \text{Wilson (2001):}$$

L'accelerazione è funzione di tre variabili, ossia gap; velocità del follower; differenza di velocità tra leader e follower ( $\Delta v_n$ );  $f$  sta ad indicare la forma funzionale del modello.

Affinché un modello sia definito di car following, esso deve rispettare alcuni requisiti:

- l'accelerazione è una funzione decrescente della velocità:

$$\frac{\partial a(s_n, v_n, \Delta v_n)}{\partial v_n} \leq 0$$

- l'accelerazione è funzione del distance gap (requisito di tipo comportamentale):

$$\frac{\partial a(s_n, v_n, \Delta v_n)}{\partial s_n} \geq 0$$

- l'accelerazione è funzione crescente della velocità del leader:

$$\frac{\partial a(s_n, v_n, \Delta v_n)}{\partial v_{n-1}} \geq 0$$

- requisito di sicurezza dato dal mantenimento di un gap minimo,  $s_0$ , anche in fase di stallo.

$$\partial a(s_n, v_n, \Delta v_n) = 0 \quad \text{per } v_{n-1} \geq 0 \text{ e } s \leq s_0$$

- non vengono simulati incidenti.
- accelerazioni e decelerazioni realistiche.

In generale lo sviluppo e lo studio dei modelli di car-following, come anche nei tempi più recenti, sono dovuti alla forte innovazione scientifica nel campo automotive che spinge sempre di più verso l'innovazione e nuovi standard di sicurezza.

Lo studio di queste dinamiche non solo ha suscitato grande interesse nel campo ingegneristico ma anche nel campo delle scienze comportamentali, creando nel tempo una classificazione netta di questi modelli. Si riconoscono appunto modelli di car-following che seguono un:

- Approccio ingegneristico
- Approccio psico-fisico

### 2.2.1. Modelli ingegneristici

I modelli di car-following in ambito ingegneristico sono stati studiati per più di mezzo secolo, già a partire dal 1953, anno in cui Pipes introdusse il concetto di car-following (Pipes, 1953). Egli si pone come scopo quello di sviluppare un metodo matematico per studiare una colonna di veicoli, che rispondano allo stimolo del veicolo che precede.

Nel corso degli anni i modelli di car-following si sono evoluti e sono diventati sempre più dettagliati e in grado di descrivere accuratamente il fenomeno del traffico; alcuni di essi sono stati in seguito implementati nei software di microsimulazioni attualmente in commercio. Si cita a titolo di esempio il software Aimsun in cui è implementata una versione modificata del modello di Gipps (Gipps, 1981).

I modelli che si sono sviluppati negli anni seguono dinamiche diverse tra di loro e possono essere raggruppati in diverse categorie, in base alle ipotesi di base e alla logica creata, come da tabella.

**Tabella 2:** classificazione dei modelli di car-following.

Classe dei modelli	Modelli di car-following
Stimolo-risposta	GHR models
Distanza di sicurezza	Kometani & Sasaki; GIPPS model
Grandezza desiderata	Helly; OVM; IDM
Lower-order	Newell

#### 2.2.1.1. Modelli stimolo-risposta

I modelli sono basati sul comportamento del guidatore in base allo stimolo ricevuto dal veicolo che precede:

$$risposta = costante \times stimolo \text{ (Saifuzzaman et al., 2014)}$$

In cui la risposta è in genere l'accelerazione adottata dal veicolo follower; lo stimolo può essere il distanziamento o una combinazione di più grandezze, tra cui anche la differenza di velocità per i modelli più complessi.

Il primo modello fu sviluppato nell'ambito della General Motors nel 1958 (Chandler et al., 1958) che sviluppò un modello di car-following lineare rispettando la formulazione 1.

$$a_n = C \Delta v_n(t - \tau)$$

Dove  $a_n$  è l'accelerazione del follower;  $\Delta v_n = v_l - v_n$  è la differenza di velocità tra il follower e il leader al tempo  $(t - \tau)$ ;  $C$  è una costante di sensitività. La  $\tau$  rappresenta il tempo di percezione e reazione del follower.

Il modello è molto semplice e per tale motivo ha alcuni limiti, anche evidenti. In primo luogo, l'accelerazione in output al modello dipende unicamente dalla differenza di velocità tra follower e leader e non dipende dal distanziamento tra i due veicoli. Questo comporta una accelerazione positiva quando  $\Delta v_n > 0$  anche quando il distanziamento tra i due veicoli è ridotto, e tale comportamento non rispecchia la realtà. In secondo luogo, il modello non è in grado di riprodurre l'eterogeneità del traffico in quanto tutti i veicoli hanno lo stesso tempo di percezione e reazione.

Nel tempo il modello è stato rivisto ed implementato; nel 1961 Gazis et al. proposero una versione non lineare del modello di Chandler noto oggi come modello GHR (Gazis et al. 1961), in cui venne introdotto il distanziamento spaziale:

$$a_n = \alpha v_n(t)^\beta \frac{\Delta v_n(t - \tau)}{\Delta x_n(t - \tau)^\gamma}$$

Dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono parametri da calibrare;  $\Delta x_n = x_l - x_n$  è il distanziamento spaziale tra leader e follower. Nonostante l'introduzione del distanziamento nella formulazione del modello, rimane il limite evidenziato nel modello di Chandler, infatti per  $\Delta v_n = 0$  il modello produce una accelerazione pari a 0 nonostante il distanziamento sia ridotto. Infatti, in ottica realistica, anche se la differenza di velocità è nulla, il follower tenderà ad imprimere un'accelerazione negative, quindi decelera per evitare la collisione.

Il comportamento modellato dal GHR e precedentemente dal modello di Chandler è quindi molto semplice, ossia il follower accelera quando la differenza di velocità è positiva, decelera quando è negativa, e viaggia a velocità di crociera quando tale differenza è nulla.

In seguito ad osservazioni sperimentali Yang and Koutsopoulos (Yang and Koutsopoulos, 1996), hanno esteso il modello GHR introducendo nella logica del loro modello tre differenti regimi di guida, ossia:

- Regime di emergenza, in cui il follower decelera con decelerazione:

$$a_n = \begin{cases} \min\left\{a_{n-1} - \frac{\Delta v^2}{s_n}, a_n^-\right\} & \text{se } v_n > v_{n-1} \\ \min\{a_{n-1}, a_n^-\} & \text{se } v_n < v_{n-1} \end{cases}$$

Dove  $a_n^-$  è la decelerazione di comfort.

- Regime di car-following, in cui il follower segue le dinamiche di car following secondo la legge:

$$a_n = \alpha^\pm v_n(t)^{\beta^\pm} \frac{\Delta v_n(t - \tau)}{\Delta x_n(t - \tau)^{\gamma^\pm}}$$

in cui  $\alpha^+, \beta^+, \gamma^+$ , sono parametri da calibrare per la fase di accelerazione; mentre  $\alpha^-, \beta^-, \gamma^-$  sono riferiti alla fase di decelerazione.

- Regime di free flow, in cui il follower regola l'accelerazione in base alla velocità desiderata. L'accelerazione sarà pari:
  - alla massima accelerazione se  $v_n < v_{max}$
  - a 0 se  $v_n = v_{max}$
  - alla decelerazione di confort se  $v_n > v_{max}$

Il modello tiene conto di un time headway massimo,  $h^{upper}$ , e di un time headway minimo,  $h^{lower}$ . Il modello è in grado di passare da un regime di guida all'altro, confrontando il time headway, ossia il distanziamento temporale tra il veicolo leader e il veicolo follower, con i valori di soglia:

- Se  $h < h^{lower}$ , regime di emergenza
- Se  $h^{lower} \leq h \leq h^{upper}$ , regime di car-following
- Se  $h > h^{upper}$ , regime di free flow

Con il modello sviluppato da Yang e Koutsopoulos, si ovvia ai problemi riscontrati nei modelli precedenti, in cui non si ha la dipendenza dal distanziamento. Infatti, al contrario dei modelli precedenti, se la differenza di velocità è nulla e il distanziamento tra i veicoli è ridotto, l'accelerazione non sarà più pari a zero ma si entrerà nel regime di emergenza. In tale regime il follower frenerà per aumentare il time headway ed evitare la collisione.

Partendo dal modello GHR e utilizzando lo stesso approccio di Yang e Koutsopoulos, Ahmed (Ahmed, 1999) sviluppa il suo modello capace di riprodurre in base al time headway le dinamiche di car-following e di free-flow, mancando però di modellare il regime di emergenza come fatto da Yang. Il modello introduce una dinamica originale, ossia la dipendenza della risposta (accelerazione) alle condizioni di traffico, e quindi alla densità. Individuata una soglia del time headway, propria di ogni guidatore,  $h_n^*$ , l'accelerazione è data da:

$$a_n(t) = \begin{cases} a_n^{cf}(t) & \text{se } h_n(t - \tau_n) \leq h_n^* \\ a_n^{ff}(t) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove  $a_n^{cf}$  è l'accelerazione in regime di car-following;  $a_n^{ff}$  è l'accelerazione in regime di free-flow;  $\tau_n$  è il tempo di percezione e reazione.

Il regime di car following è governato dalla legge:

$$a_n^{cf}(t) = \alpha^g \frac{v_n(t - \xi\tau_n)^{\beta^g}}{\Delta x(t - \xi\tau_n)^{\gamma^g}} k_n(t - \xi\tau_n)^{\rho^g} \Delta v_n(t - \xi\tau_n)^{\lambda^g} + \varepsilon_n^{cf,g}(t)$$

In cui  $g$  definisce lo stato del follower all'istante  $t$ , ossia accelerazione o decelerazione;  $k$  è la densità del traffico davanti al follower;  $\xi$  è un parametro di lag di sensitività;  $\alpha^g, \beta^g, \gamma^g, \rho^g, \lambda^g$  sono costanti;  $\varepsilon_n^{cf,g}$  termine aleatorio riferito al follower in regime di c-f che descrive la variabilità alla guida.

Il regime di free flow è governato dalla legge:

$$a_n^{ff}(t) = \lambda^{ff} [v_n^*(t - \tau_n) - v_n(t - \tau_n)] + \varepsilon_n^{ff}(t)$$

In cui  $v_n^*$  è la velocità desiderata dal follower;  $\lambda^{ff}$  costante di sensitività;  $\varepsilon_n^{ff}$  termine aleatorio riferito al follower in regime di f-f che descrive la variabilità alla guida.

### 2.2.1.2. Modelli basati sulla distanza di sicurezza

La risposta allo stimolo non viene più modellata come nei modelli GHR, ma il follower reagisce oltre alla differenza di velocità, anche al gap tra di lui e il leader. L' ipotesi alla base di questi modelli è che il follower deve adottare una velocità tale da permettergli l'arresto in totale sicurezza in caso in cui il leader decelerasse bruscamente ed improvvisamente. Per cui la posizione del follower all'arresto deve essere sempre inferiore a quella del leader all'arresto; per garantire la sicurezza la posizione del follower viene incrementata di uno spazio di sicurezza  $s_0$ :

$$x_n^* < x_{n-1}^* - L - s_0 \quad (2.5)$$

In cui  $L$  è la lunghezza del veicolo;  $x_f^*$  è la posizione del follower all'arresto;  $x_l^*$  è la posizione del leader all'arresto.

Il primo approccio in tal senso fu dato da Kometani e Sasaki (Kometani and Sasaki, 1959); la formulazione originale del modello è:

$$\Delta x(t - \tau) = \alpha v_{n-1}^2(t - \tau) + \beta v_n^2(t) + \gamma v_n(t) + s_0$$

La miglior espressione dei modelli basati sulla distanza di sicurezza è espressa dal modello di Gipps (1981), che inoltre per la prima volta introduce una logica multi-regime; il modello di Gipps, infatti, prevede due regimi: free-flow e car-following.

Nel regime di free-flow, ossia quando il veicolo follower è ad una distanza tale da non risentire dell'influenza del veicolo leader e per tale motivo accelera fino a raggiungere una propria velocità desiderata, il modello di Gipps permette al follower di accelerare fino a raggiungere la sua velocità desiderata, mediante una formulazione sperimentale ottenuta mediante l'utilizzo di un'auto strumentata lungo una strada con condizioni di traffico moderate:

$$v_n^{ff}(t - \tau) = v_n(t) + 2.5 a_{max,n} \tau \left( 1 - \frac{v_n(t)}{V_{max,n}} \right) \sqrt{0.025 + \frac{v_n(t)}{V_{max,n}}}$$

In cui  $v_n^{ff}$  è la velocità in regime di free-flow;  $a_{max,n}$  è il massimo tasso di accelerazione del follower;  $V_{max,n}$  è la velocità desiderata;  $\tau$  è il tempo di percezione e reazione. Il veicolo inizialmente viaggia con accelerazione massima; tale accelerazione diminuisce al tendere della velocità del veicolo alla sua velocità desiderata che in alcun caso può essere superata.

Nel regime di car-following il modello di Gipps segue l'idea alla base di questi modelli, ossia ad ogni step di integrazione definisce una velocità di marcia del follower tale da rispettare l'equazione 2.5. Per cui:

$$v_n^{cf}(t - \tau) = -b_n \left( \frac{\tau}{2} + \theta \right) + \sqrt{\left[ b_n \left( \frac{\tau}{2} + \theta \right) \right]^2 + b_n \left[ 2[x_{n-1}(t) - x_n(t) - L - s_0] - \tau v_n(t) + \frac{v_{n-1}(t)^2}{\hat{b}_n} \right]}$$

In cui  $b_n$  è la decelerazione di comfort del follower;  $\hat{b}_n$  è la decelerazione stimata del leader da parte del follower;  $\theta$  è un tempo di reazione aggiuntivo in cui il follower continua a viaggiare a velocità costante prima di reagire allo stimolo dato dal leader;  $L$  è la lunghezza del veicolo;  $s_0$  il gap minimo che rappresenta il margine di sicurezza.

Il modello non presenta la decelerazione del leader ma solo una sua stima in quanto è impossibile per il follower conoscere esattamente il tasso di frenata del veicolo che lo precede. "L'effetto del theta è quello di far sì che il veicolo simulato freni prima e riduca gradualmente la frenata" (GIPPS 1981).

Il modello di Gipps offre una transizione dal regime di free-flow a quello di car-following:

$$v_n(t - \tau) = \min \{v_n^{ff}(t - \tau), v_n^{cf}(t - \tau)\}$$

Il modello di Gipps ha peculiarità importanti che lo rendono molto apprezzato e studiato, tra cui la stabilità per particolari valori di  $b_n$  e  $\hat{b}_n$ . Questa peculiarità fa sì che tale modello venga anche utilizzato in software di simulazioni come Aimsun.

Tuttavia, in regime di car-following vi è la presenza dell'operatore radice che per particolari combinazioni di parametri del modello produce soluzioni immaginarie che si traducono in una impossibilità di ottenere dal modello delle soluzioni reali.

### 2.2.1.3. Modelli basati su una grandezza desiderata

I modelli inclusi in questa categoria seguono l'ipotesi che ogni guidatore regola il suo moto e quindi la sua accelerazione tenendo conto di una grandezza desiderata; quest'ultima può essere una velocità desiderata come nel caso dell'OVM (Bando et al. 1995), oppure una distanza desiderata come nel caso del modello di Helly (Helly 1959) e dell'Intelligent Driver Model, IDM (Treiber et al. 2000).

Helly nel 1959 propose un modello lineare monoregime ovviando al limite del modello Chandler e introducendo un ulteriore stimolo ossia il distanziamento spaziale tra i veicoli. Introduce inoltre il distanziamento desiderato che dipende da accelerazione e velocità del follower.

$$a_n(t) = C_1 \Delta_v(t - \tau) + C_2 (\Delta_x(t - \tau) - s_n^*(t))$$

$$D_n(t) = \alpha + \beta v_n(t - \tau) + \gamma a_n(t - \tau)$$

In cui  $a_n$  è l'accelerazione del follower;  $\Delta_v$  è la differenza di velocità tra follower e leader;  $\Delta_x$  è il gap tra follower e leader;  $s_n^*$  è la distanza desiderata;  $\alpha, \beta, \gamma, C_1$  e  $C_2$  sono parametri di calibrazione del modello.

L'introduzione del distanziamento spaziale e del distanziamento desiderato, a differenza del modello di Chandler e del GHR, fa sì che in caso di differenza di velocità pari a 0 il modello produce una risposta. Per cui per  $\Delta_v = 0$ ,  $a_n(t) \neq 0$  a meno che  $\Delta_x = D_n$ .

Uno dei modelli più studiati, insieme al modello di Gipps, e che tiene conto del distanziamento desiderato è l'IDM, Intelligent Driver Model.

L'IDM modella matematicamente l'accelerazione come una funzione continua di velocità, distanziamento desiderato, gap e differenza di velocità:

$$a_n = a_{max} \left[ 1 - \left( \frac{v_n}{V_{max}} \right)^\delta - \left( \frac{s^*(v_n, \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right] \quad (2.6)$$

$$s^*(v_n, \Delta v_n) = s_0 + s_1 \sqrt{\frac{v_n}{V_{max}}} + T v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{a_{max} b_n}}$$

In cui  $a_{max}$  è il massimo tasso di decelerazione;  $V_{max}$  è la velocità desiderata;  $\delta$  è un parametro del modello da calibrare ed è maggiore di zero;  $s_n$  è il gap netto (distanziamento spaziale bumper to bumper);  $s^*$  è il distanziamento desiderato;  $b_n$  è il tasso di decelerazione di comfort;  $T$  è il time Hedway desiderato;  $s_1$  è un parametro del modello da calibrare.

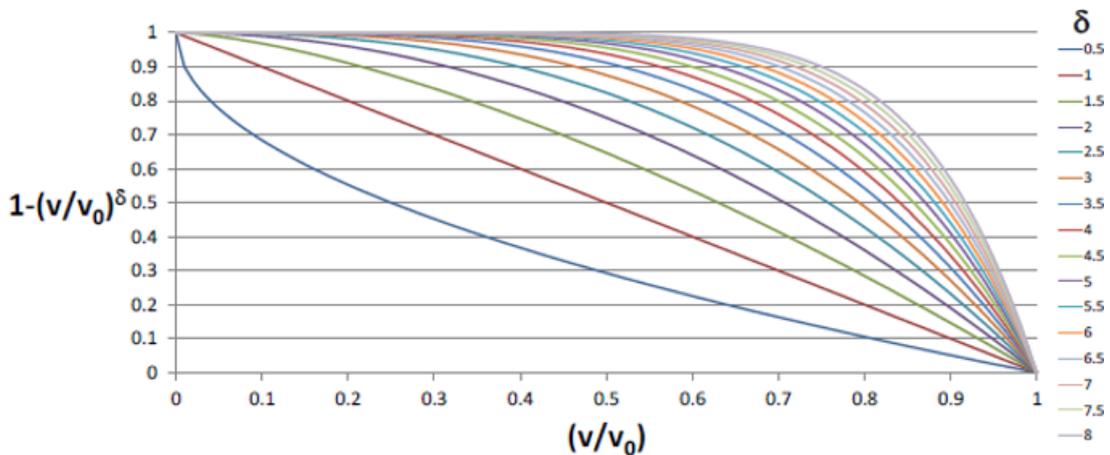
Se  $v=0$  allora  $s^* = s_0$ ;

L'equazione 2.6 è composta da due parti:

- $a_n^{ff} = a_{max} \left[ 1 - \left( \frac{v_n}{V_{max}} \right)^\delta \right]$  che definisce l'accelerazione nel regime di free-flow. Per questo motivo il secondo termine della 1 tende a zero e il termine  $1 - \left( \frac{v_n}{V_{max}} \right)^\delta$  compreso tra 0 ed 1, decresce fino a zero quando il follower raggiunge la sua velocità desiderata.
- $a_n^{cf} = a_{max} \left[ \left( \frac{s^*(v_n \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right]$  che definisce l'accelerazione nel regime di car-following, basata sul rapporto tra  $s^*$  e  $s_n$ .

Si distinguono tre differenti casi:

- $s^* \ll s_n$ ; i veicoli sono molto distanti tra di loro e il follower non risente degli stimoli del leader. L'accelerazione si riduce al solo termine di free flow con  $0 \leq a_n^{ff} \leq a_{max}$ . L'accelerazione decresce da un valore massimo pari ad  $a_{max}$  fino ad arrivare a zero col tendere della velocità del follower alla sua velocità desiderata. In tal caso si può vedere l'impatto del parametro  $\delta$  sul modello, come mostrato in figura.



**Fig. 2:** Impatto del parametro  $\delta$  sulla componente di accelerazione libera del modello IDM.

Per valori di  $\delta \rightarrow \infty$  l'accelerazione tende ad essere costante fino al raggiungimento della velocità desiderata; mentre per valori di  $\delta \rightarrow 0$  l'accelerazione è costante per tempi sempre più brevi fino a cambiare concavità per valori di  $\delta < 1$  e assumendo una concavità rivolta verso l'alto. A seconda del valore di  $\delta$  si distinguono tipi di guida diversi, aggressivi con  $\delta$  alti e conservativi con  $\delta$  bassi.

- $s^* = s_n$ ; il termine  $a_n^{cf} = a_{max}$  e l'equazione 6 diventa:  $\dot{a}_n = a_{max} \left[ - \left( \frac{v_n}{V_{max}} \right)^\delta \right]$ . Il follower decelera con tasso di decelerazione crescente fino al tasso massimo  $a_{max}$  quando la velocità del follower raggiunge la velocità desiderata.
- $s^* \gg s_n$ ; il termine  $a_n^{cf} > a_{max}$  e il follower segue le leggi di car following fino al raggiungimento del distanziamento desiderato.

L'IDM è sprovvisto di un tempo di percezione e reazione nella sua formulazione ma tale mancanza è stata sopperita dallo stesso Treiber (Treiber et al. 2006).

All'interno di questa categoria di modelli si può annoverare anche l'Optimal Velocity Model, OVM, (Bando 1995) in cui viene ipotizzato che ogni veicolo ha una sua velocità ottima o di sicurezza, funzione del distanziamento spaziale.

$$a_n(t) = \alpha[V^*(\Delta x(t)) - v_n(t)]$$

$$V^*(\Delta x(t)) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh(2) \quad (2.7)$$

In cui  $V^*(\Delta x(t))$  è la velocità sicurezza, ed è una funzione monotona crescente con vincolo superiore dato dalla velocità desiderata  $V_{max}$  che si ottiene quando  $\Delta x \rightarrow \infty$ .

L'equazione 2.7 è ipotizzando un circuito circolare con un numero elevato di veicoli; in tal modo non è necessario imporre il vincolo superiore alla funzione  $V^*(\Delta x(t))$  in quanto impossibile da raggiungere.

Nel tempo l'OVM è stato ulteriormente studiato fornendo altre interpretazioni della velocità di sicurezza, ad esempio Helbing e Tilch (Helbing and Tilch 1998) danno la seguente formulazione matematica della velocità di sicurezza:

$$V^*(\Delta x(t)) = V_1 + V_2[\tanh C_1(\Delta x - L_{n-1}) + C_2]$$

In cui  $V_1, V_2, C_1, C_2$  sono parametri da calibrare.

Lo stesso Bando (1998):

$$V^*(\Delta x(t)) = 16.8[\tanh 0.0860(\Delta x - 25) + 0.913]$$

Formula sperimentale ricavata raccogliendo dati sulle autostrade giapponesi. Inoltre, viene anche introdotto il tempo di ritardo nella formulazione matematica del modello:

$$a_n(t) = \frac{\alpha[V^*(\Delta x(t)) - v_n(t)]}{\tau}$$

Dove  $\tau$  è il tempo di ritardo ed è una costante del modello.

Il limite di tale modello è dovuto alle grandi decelerazioni e accelerazioni date in output dal modello stesso.

#### 2.2.1.4. Modelli lower order

I modelli di tipo lower-order, o anche detti di basso ordine, sono quei modelli che danno in output la posizione del veicolo al contrario di quanto visto nei paragrafi precedenti in cui l'output del modello è l'accelerazione o la velocità del follower.

Il modello lower-order più conosciuto è quello sviluppato da Newell (2002); un modello molto semplice e che porta con sé solo due parametri da calibrare ossia la distanza desiderata dal guidatore in condizioni di arresto,  $s_0$ , e il tempo di percezione e reazione  $\tau$ .

Il modello di Newell è valido solo per condizioni di traffico omogenee come detto dallo stesso autore, ossia condizioni per cui i veicoli nel traffico si comportano tutti allo stesso modo.

Il veicolo leader si muove con moto rettilineo uniforme:

$$x_{n-1}(t) = x_{n-1}(0) + vt$$

L'ipotesi del modello è che il follower ha un distanziamento spaziale col leader che varia linearmente con la sua velocità, dato da:

$$s_n(t) = s_0 + v\tau$$

In cui  $s_0$  e  $\tau$  possono essere visti come degli spostamenti spaziali e temporali rispetto al leader.

In particolare,  $s_0$  è l'intercetta nel piano v-s; mentre  $\tau$  è la pendenza della retta sempre nel piano v-s.

$s_0$  e  $\tau$  possono essere interpretati come una distanza di sicurezza al disotto del quale il follower non si porta mentre  $\tau$  come un tempo di percezione; infatti, quest'ultimo rappresenta nel piano t-x proprio lo scarto temporale al termine del quale il follower reagisce allo stimolo del leader, si veda figura 3.

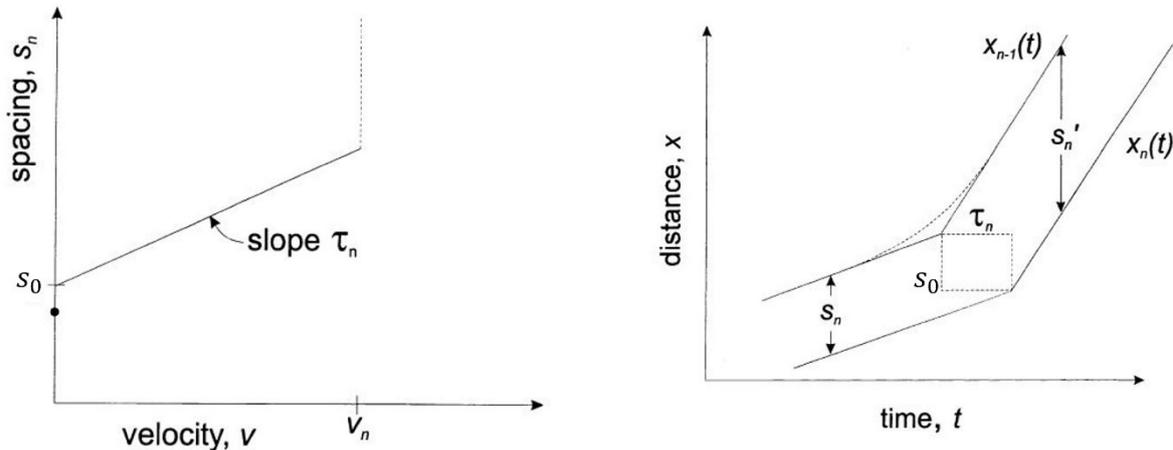


Fig.3 : Newell (2002).

Dalle due equazioni si ricava:

$$x_n(t + \tau) = x_{n-1}(t) - s_0$$

I limiti del modello sviluppato da Newell sono principalmente due: il primo dovuto alla condizione di utilizzo di tale modello, ossia solo in condizioni di traffico omogeneo; il secondo dovuto al funzionamento del modello unicamente in regime di car-following.

#### 2.2.1.5. *Comportamento dei modelli di car-following all'equilibrio*

Durante la guida il follower tende a portare la sua velocità ad un valore pari alla velocità desiderata, che varia da guidatore a guidatore; se il follower però si ritrova in una situazione in cui vi è un veicolo leader, non sempre ha la possibilità di raggiungere la propria velocità desiderata, in quanto il leader potrebbe viaggiare ad una velocità, ovvero la propria velocità desiderata, inferiore a quella del follower; al contrario non si raggiungerebbe mai l'equilibrio se il leader avesse una velocità maggiore rispetto a quella desiderata del follower, in quanto quest'ultimo non avrebbe alcun interesse ad aumentare ulteriormente la propria velocità.

Per cui ipotizziamo una situazione in cui il follower inizia a diminuire la propria velocità in funzione del leader fino a portarsi alla sua stessa velocità; in questo istante si ha che le velocità, di leader e follower sono uguali e si ha:

$$\Delta v = 0$$

Di conseguenza:

$$s = f(v)$$

Ponendo  $v_f = cost$  ottengo il distance gap di equilibrio, attraverso il quale si può risalire alla densità, effettuando in tal modo un passaggio da grandezze microscopiche a macroscopiche.

### 2.2.2. Modelli psico-fisici

Per migliorare la sicurezza stradale e l'apprendimento dell'attività di guida, nel 1960 sono iniziati i tentativi di modellizzare il comportamento di guida nel settore dei fattori umani. Questi modelli seguono un approccio psico-fisiologico, tenendo conto di parametri rappresentativi del comportamento dei guidatori (es. la velocità desiderata, il tempo di reazione, ecc.).

Si ritrovano in letteratura modelli:

- Con soglia di percezione
- Con angolo di visuale

#### 2.2.2.1. Modelli basati sulle soglie di percezione

Wiedemann (1974) fu il primo ad introdurre il concetto di soglia di percezione, con il quale indica la soglia oltre il quale il follower reagisce allo stimolo del leader.

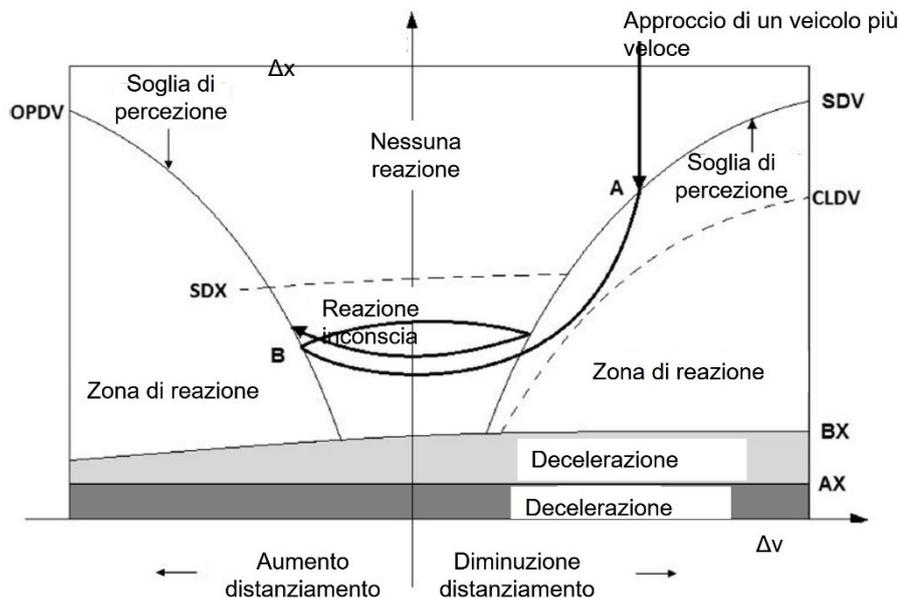


Fig.4: Wiedemann (1974).

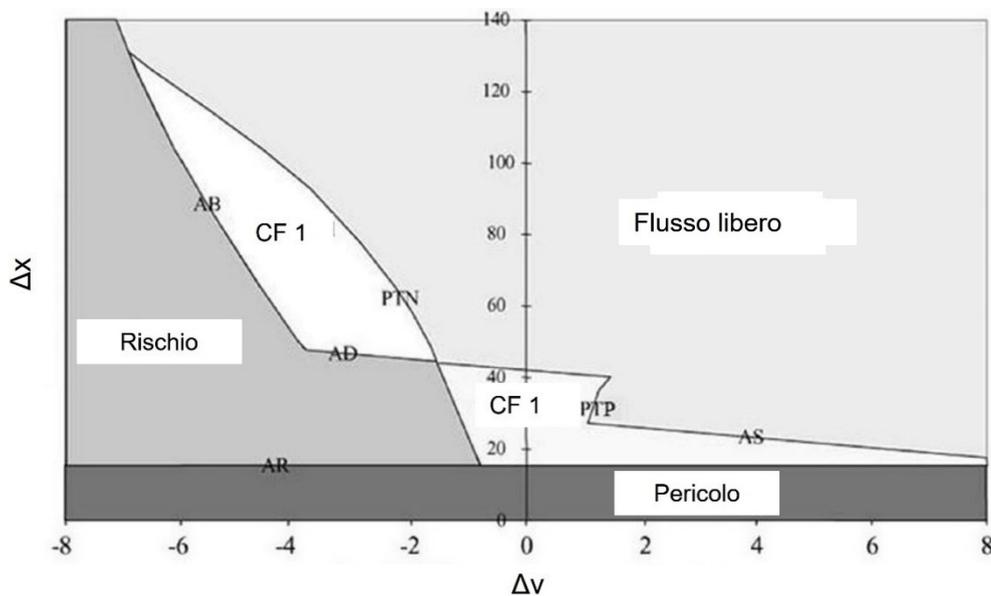
Il follower si avvicina al veicolo che precede con una velocità maggiore, fino ad incontrare la curva SDV che indica la soglia di percezione quando il follower si avvicina al leader avendo velocità maggiore; da questo punto il follower diventa cosciente che viaggia ad una velocità maggiore del leader, per cui inizia la fase di decelerazione cercando di portarsi ad una condizione di equilibrio. Non avendo percezione della velocità del veicolo che precede, il follower rimarrà in una zona di reazione inconscia in cui la sua velocità oscillerà intorno a quella presunta del leader, oscillando tra la curva SDV e la curva OPDV che indica la soglia di percezione quando il follower si avvicina al leader avendo velocità minore. BX indica la minima

distanza di sicurezza; AX la distanza minima all'arresto superata la quale si ha collisione tra i veicoli; SDX rappresenta la massima distanza dal leader, superata tale soglia il follower viaggia con accelerazione massima e si entra nella regione di free flow così come definita dai modelli di car-following.

In seguito, Fritzsche (1994) mette appunto un modello simile a quello di Wiedemann, in cui suddivide il piano  $\Delta v$ - $\Delta x$  in cinque regioni:

- Regione flusso libero
- Regione 1 di car-following
- Regione 2 di car-following
- Regione di rischio
- Regione di pericolo

Le uniche due regioni in cui il follower decelera sono la regione di rischio e quella di pericolo. Il passaggio da una regione all'altra avviene tenendo conto dello spacing e della differenza di velocità.



**Fig.5:** Fritzsche (1994).

### 2.2.2.2. Modelli basati sull'angolo di visuale

Uno dei primi schemi modellistici in questo campo è dato da Michaels (1963) in cui si considera che il guidatore sia in grado di percepire la differenza di velocità con il leader attraverso la variazione dell'angolo di visione.

$$\theta_f = \frac{W_l}{\Delta x - L} \quad (2.8)$$

In cui  $W_l$  e  $L$  sono rispettivamente la larghezza e la lunghezza del veicolo leader.

Dall'equazione 2.8 possiamo facilmente ricavare la velocità di variazione dell'angolo di visione:

$$\frac{d\theta_f}{dt} = -W_l \frac{\Delta v}{\Delta x - L}$$

L'angolo di visione e la velocità angolare possono sostituire i parametri di spacing e differenza di velocità nei modelli di car-following. Ci sono diversi esempi in letteratura:

- Partendo dal Full Velocity Model (Jiang et al. 2001), si ottiene:

$$a_n(t) = \alpha[V^*(\theta_f(t)) - v_n(t)] - \lambda \frac{d\theta_f}{dt}(t)$$

$$V^*(\Delta x(t)) = V_1 + V_2 \left[ \tanh C_1 \left( \frac{W_l}{\Delta x - L} \right) + C_2 \right]$$

*Jin et al. (2011)*

- Partendo dal modello di Helly:

$$a_n(t) = \alpha \left( \frac{1}{\theta_f} + \frac{1}{\tilde{\theta}_f} \right) + \lambda \frac{d\theta_f}{dt}(t)$$

$$\tilde{\theta}_f = 2 \arctan \left( \frac{W_l}{\tilde{T}V} \right)$$

*Andersen e Sauer (2007)*

In cui  $\tilde{\theta}_f$  è l'angolo di visione desiderato;  $\tilde{T}$  è il time headway desiderato.

I risultati per entrambi i modelli non risultano essere differenti ai modelli di car-following.

### 2.3. MODELLI MICROSCOPICI DEL TRAFFICO: ADAPTIVE CRUISE CONTROL

L'evoluzione nel campo tecnologico e la ricerca di tecnologie innovative in campo automotive improntate in generale alla sicurezza stradale e alla sicurezza e al comfort dei guidatori e passeggeri, hanno portato allo sviluppo di tecnologie quali l'Adaptive Cruise Control (ACC), evoluzione del più semplice sistema di Cruise Control, che permette di mantenere una velocità di crociera costante.

L'ACC è una delle tante tecnologie messe appunto negli ultimi anni nel campo automotive, come ad esempio il lane keeping, che permettono ai veicoli di adeguarsi agli standard della guida automatizzata di livello 2 o superiore, ovviamente in combinazione con altre tecnologie.

I primi ACC furono installati a bordo della Mitsubshi negli anni '90 per il solo mercato giapponese; la tecnologia fu chiamata "Preview Distance Control" ([www.mitsubishimotors.com](http://www.mitsubishimotors.com)). In seguito, anche Toyota e Mercedes (tecnologia Distronic) installarono questa tecnologia sulle loro auto di punta, fino ad arrivare al giorno d'oggi in cui i sistemi ACC sono implementati nella quasi totalità dei veicoli.

Come i modelli di car-following, gli ACC sono controllori atti a regolare la marcia longitudinale dei veicoli adattando la velocità dei veicoli in funzione del veicolo che precede.

La dinamica è quindi esattamente quella studiata dai modelli di car-following, con delle differenze però sulle ipotesi di base, dovute anche ai periodi in cui i due differenti modelli, ACC e modelli di car-following, si sono sviluppati. In particolare, i modelli di car-following studiati dall'ingegneria del traffico nascono dall'esigenza di simulare ciò che si osserva in strada, in particolar modo simulare l'instabilità del traffico in modo da capirne le cause e le conseguenze di tale fenomeno. L'ACC è invece studiato nella teoria del controllo, branca che si occupa dei sistemi e che più in generale coinvolge l'ingegneria meccanica; esso nasce con uno scopo ben preciso, ossia garantire la sicurezza dei guidatori e dei passeggeri all'interno dei veicoli. Viene da sé che per garantire la sicurezza bisogna garantire la stabilità del controllore in primis e del traffico in secondo luogo.

L'ACC funziona grazie alla comunicazione da parte di sensori radar o laser con la centralina del veicolo. I sensori monitorano continuamente la distanza col veicolo che precede regolando di conseguenza la velocità, secondo diverse politiche di spacing:

- Constant Space-Headway
- Constant Time-Headway
- Variable Time-Headway

### 2.3.1. Constant Space-Headway spacing policy (CSH)

La politica di spacing costante, come si può già desumere dal nome, prevede un gap tra i veicoli costante per tutte le velocità che il follower può raggiungere, ossia gap indipendente dalla velocità.

Viene espressa semplicemente attraverso la seguente formulazione:

$$s^* = S$$

In cui  $S$  è una costante;

Secondo Darbha e Rajagopal (2008), l'utilizzo di modelli ACC con una politica di spacing costante porta ad un'elevata efficienza del traffico; inoltre, secondo Wang e Wu (2018) un aumento della capacità stradale può essere ottenuto riducendo il parametro  $L$ . Tuttavia, considerando il solo distanziamento spaziale si stanno ignorando tutte le altre dinamiche che entrano in gioco alla guida, come ad esempio i tempi di percezione e reazione che incidono sulla qualità del traffico.

Un controllore lineare molto semplice che adotta tale politica è dato da:

$$a_{des} = -k_v(v_l - v_f) - k_p(s^* - s)$$

*Swaroop and Hedrick 1999*

in cui,  $s^* - s = \delta$ ,  $k_v$  e  $k_p$  sono delle costanti entrambe maggiori di zero, e paragonabili alle derivate  $\frac{\partial f_v}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial f_{\Delta x}}{\partial \Delta x}$  nei modelli simil Wilson appartenenti ai modelli di car-following. Nello stesso articolo viene dimostrato l'inadeguatezza di tale politica di spacing nei confronti della stabilità di stringa. Infatti, per qualsiasi valore di  $k_v$  e  $k_p$  maggiore di zero si ha sempre instabilità.

Anche in Farnan e Sarlette (Farnan and Sarlette, 2019) viene provato come tale politica di spacing renda il controllore instabile, a meno che non vengano considerate all'interno del controllore altre variabili quali ad esempio le accelerazioni del leader e del follower:

$$a_{des} = k_x \delta + k_v \dot{\delta} + k_a \ddot{\delta} + c_v(v_l - v_f) + c_a(a_l - a_f)$$

In cui  $k_x, k_v, k_a, c_v, c_a$  sono parametri del modello,  $\dot{\delta}$  e  $\ddot{\delta}$  sono le derivate temporali di  $\delta$  e rappresentano rispettivamente l'errore legato alla velocità e alla accelerazione.

### 2.3.2.Constant Time Headway policy (CTH)

La politica di time headway costante prevede uno spacing desiderato funzione lineare della velocità:

$$s^* = s_0 + T v_f$$

In cui T è il time headway desiderato ed è costante.

Il distanziamento desiderato così espresso non è altro che il distanziamento desiderato formulato nell'IDM a meno del termine  $\frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{a_{max} b_n}}$ .

È la politica di spacing più utilizzata nel mondo automotive, con la possibilità di scegliere il time headway da parte del driver. Tuttavia, viene dimostrato come una politica di questo tipo incrementi i tempi medi di percorrenza sulla rete all'aumentare del tasso di penetrazione dei veicoli equipaggiati di ACC (Marsden et al. 2001).

Liang e Peng nel 1999 introducono tale politica nel controllore lineare:

$$a_{des} = -k_v(v_l - v_f) - k_p(s^* - s)$$

con l'ipotesi di veicolo ideale, ossia un veicolo che attua istantaneamente l'accelerazione desiderata.

In Gunter et al. (Gunter et al., 2020), la politica CTH viene applicata all'OVRV, ossia l'OVM con la velocità relativa. La velocità desiderata dell'OVM viene sostituita con la politica CTH ottenendo così il controllore per modellare l'ACC:

$$a_f = k_1(x_l - x_f - s_0 - T v_f) + k_2(\Delta v)$$

Questa particolare logica mette in risalto la somiglianza tra i controllori utilizzati negli ACC e i modelli di car-following; in particolare si nota come i controllori negli ACC risultano più semplici di alcuni modelli di car-following, su tutti il modello di Gipps e l'IDM. Modelli che sono in grado di ottenere risultati migliori in termini di simulazione delle dinamiche longitudinali dei veicoli rispetto a semplici modelli lineari.

### 2.3.3.Variable Time headway policy (VTH)

Dato che con la politica a time headway costante lo spacing desiderato cresce al crescere della velocità, e non vi è alcuna dipendenza dalla velocità del leader si opta per una politica a time headway variabile:

$$s^* = s_0 + T v_f$$

$$T = T_0 + c_1 \Delta v$$

*Yaniakiev e Kanellakopoulos (1995):*

In cui  $T_0$  è il time headway minimo in condizioni di arresto,  $c_1$  è una costante maggiore di 0. Dato che è preferibile avere T non elevati, quest'ultimo viene limitato in un range da 0 ad 1, in quanto comporta tempi di percorrenza maggiori e minor densità.

$$\begin{cases} 1 & \text{se } T_0 + c_1\Delta v \geq 1 \\ T_0 + c_1\Delta v & \text{se } 0 < T_0 + c_1\Delta v < 1 \\ 0 & \text{se } T_0 + c_1\Delta v \leq 0 \end{cases}$$

Per catturare ancor meglio il comportamento del veicolo leader un'ulteriore formulazione di T è data da:

$$T = T_0 + c_1\Delta v + c_2a_l$$

*Guo et al. 2020*

In cui  $a_l$  è l'accelerazione del veicolo leader.

## 3. INSTABILITÀ NEL TRAFFICO

---

### 3.1. IL FENOMENO DELLO STOP AND GO

Il fenomeno di stop and go si genera a seguito della presenza di un *bottleneck* o di un *phantom bottleneck*. Il primo dovuto alla presenza di cantieri stradali, restringimenti della carreggiata o incidenti; il secondo dovuto al comportamento del veicolo leader, con frenate improvvise senza apparente motivazione.

Si consideri una condizione iniziale in cui vi sia un plotone di veicoli che procede lungo la strada, ipotizzando una condizione di equilibrio per cui tutti i veicoli procedono alla velocità  $v_{eq}$ .

Ad un istante  $t = t_0$  il veicolo in testa al plotone inizia a decelerare proseguendo nella sua marcia ad una velocità minore di quella di equilibrio, generando un *phantom bottleneck*; quindi, a  $t = t_0$ , si ha  $v_{n-1} < v_e$ .

Questa diminuzione di velocità del veicolo in testa comporta ripercussioni sui veicoli che seguono; infatti, il secondo veicolo del plotone ad un tempo  $t_1$  dovrà ridurre la propria velocità in quanto la nuova velocità di equilibrio sarà data da  $v_{n-1}$ . Il gap tra i due veicoli sarà minore rispetto al gap di equilibrio, questo comporta una frenata più intensa da parte del secondo veicolo per evitare la collisione. In seguito alla manovra la velocità del secondo veicolo, in un istante  $t_2$  sarà minore di quella del veicolo in testa, per cui  $v_n < v_{n-1}$ .

Il disturbo si amplifica proseguendo lungo il plotone di veicoli, coinvolgendo man mano tutti i veicoli.

Risultato di questo fenomeno è la generazione di una *shock wave* o *onda di shock* che si propaga verso monte.

### 3.2. CLASSIFICAZIONE DELL'INSTABILITÀ

Le onde di shock prodotte dal fenomeno di stop and go generano delle perturbazioni nella corrente di traffico che portano ad una instabilità, e descrivono una tendenza a generare oscillazioni, la cui ampiezza aumenta durante la propagazione verso monte e descrivono la gravità del fenomeno. Si riconoscono diversi tipi di instabilità:

- INSTABILITÀ NUMERICA

Per lo studio di un fenomeno si fa riferimento ad un modello matematico, che anche se in maniera approssimata, sia in grado di descrivere il fenomeno stesso. In questo processo di modellizzazione del fenomeno si fa ricorso a dei modelli continui, come dei sistemi di equazioni differenziali, che non sempre permettono di trovare la soluzione analiticamente; per cui si fa ricorso a modelli discreti in grado di ritrovare una soluzione. Il passaggio da un modello continuo ad un modello discreto comporta l'introduzione di ulteriori approssimazioni rispetto al fenomeno reale. L'instabilità numerica del modello è generata

dalla mancata verifica delle condizioni iniziali del modello, dal passo di integrazione molto grande che porta la soluzione ad oscillare e ad avere ampiezza crescente, portando in questo modo la soluzione a divergere dalla soluzione reale. In un modello di car following generano spacing negativi, che fanno pensare a collisioni tra i veicoli; mentre nella realtà il fenomeno non corrisponde ad incidenti.

- **INSTABILITÀ FISICA**

È generata da ritardi fisici dovuti ai tempi di reazione dei conducenti e alle accelerazioni finite.

- **INSTABILITÀ LOCALE**

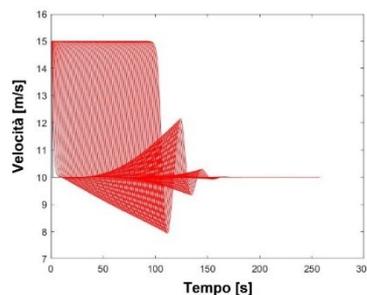
Si riferisce a dinamiche di car following in cui si generano oscillazioni prolungate in un sistema in cui un singolo veicolo segue un veicolo leader.

- **INSTABILITÀ DI STRINGA**

Sono il risultato di onde di traffico che si propagano lungo un plotone di veicoli che si susseguono.

Si ha stabilità di stringa nel momento non si ha una amplificazione del disturbo lungo il plotone.

Si parla invece di instabilità nel momento in cui si ha un'amplificazione delle perturbazioni lungo il plotone. Il fenomeno di instabilità si instaura a livello di stringa anche se a livello locale il singolo veicolo è in grado di smorzare le perturbazioni generate dal leader, o se non vi siano proprio oscillazioni. In figura 6 è mostrato un plotone instabile di stringa; infatti, il disturbo si amplifica sempre più lungo il plotone. È questa amplificazione lungo il plotone che interessa ai fini dell'instabilità di stringa e non la capacità del singolo veicolo e in seguito anche del plotone di ritornare alle condizioni di equilibrio col passare del tempo.



**Fig. 6:** Instabilità di stringa. In figura si può osservare l'amplificazione del disturbo lungo il plotone.

- **INSTABILITÀ LINEARE**

Si ha instabilità lineare quando vi sono delle piccole perturbazioni, di livello infinitesimale, che aumentano nel tempo, propagandosi nella corrente. Un esempio sono piccole variazioni di velocità. Il sistema viene sottoposto all'ingresso di un disturbo con una durata finita e con ampiezza limitata; se l'effetto di questo disturbo si amplifica lungo il plotone si ha instabilità.

- INSTABILITÀ NON LINEARE

In questo caso le perturbazioni sono causate da eventi più drastici, come una brusca frenata o manovre di cambio di corsia, che portano a perturbazioni consistenti in grado di generare delle onde persistenti nel tempo.

- INSTABILITÀ ASSOLUTA E CONVETTIVA

Nei sistemi aperti l'instabilità di stringa può essere suddivisa in: assoluta e convettiva.

Nell'instabilità convettiva si ha che le perturbazioni si propagano in un'unica direzione, verso monte o verso valle della corrente di traffico.

Generalmente in una corrente di traffico la propagazione è diretta verso monte, in direzione opposta al flusso; teoricamente si può avere anche un fenomeno di propagazione verso valle definito, ma non è mai osservata in casi reali. Quest'ultima può essere sperimentata se il guidatore durante la propria marcia viene influenzato dal veicolo che segue.

Se le perturbazioni si propagano in entrambe le direzioni si parla di instabilità assoluta.

### 3.3. ANALISI LINEARE DELLA STABILITÀ

La stabilità di stringa è un requisito necessario per la sicurezza stradale. Nel corso degli anni a partire dalla ricerca effettuata nei laboratori della General Motors (Chandler et al., 1958) si sono sviluppati due diversi approcci al problema, legati al modello oggetto dello studio. Da un lato lo studio si sviluppa nell'ambito della teoria del controllo, dall'altro nell'ambito della teoria del traffico. I due approcci differiscono sia nell'idea di base che nella loro formulazione matematica.

- Teoria del traffico: l'idea alla base è quella di riprodurre l'instabilità osservata nella realtà. Viene studiata la soluzione dell'equazione differenziale a seguito dell'introduzione della Traffic Wave Ansatz (Bando et al., 1995). Tale metodo è stato utilizzato in diversi studi (Wilson et al., 2008; Treiber et al., 2011; Ngoudy, 2013).
- Teoria del controllo: l'idea alla base è quella di progettare un controllore che sia robusto nei riguardi della stabilità (Cosgriff, 1965; Bender et al., 1969; Ploeg et al., 2014). A tal fine, la stabilità del controllore viene posta come vincolo nella progettazione. Dal punto di vista matematico viene studiata la funzione di trasferimento del sistema con un approccio basato sulla norma indotta (norma del sistema)  $H_\infty$ .

Tuttavia, i due approcci hanno in comune lo studio di un modello lineare, come nel caso della maggior parte degli ACC studiati nell'ambito teoria del controllo.

Lo studio della stabilità di stringa differisce anche per un'ulteriore ipotesi concettuale alla base di esso:

- Ipotesi di traffico omogeneo
- Ipotesi di traffico eterogeneo

Per la maggior parte degli anni gli studi sulla stabilità di stringa si sono focalizzati sullo studio del plotone omogeneo (Treiber and Kesting, 2011; Swaroop and Hedrick, 1996; Ploeg et al., 2014, Wang et al., 2018; Montanino et al. 2021). Tale approccio è dettato da una maggior semplicità di calcolo e soprattutto dalla possibilità di ottenere una soluzione in forma chiusa del problema. Tuttavia, l'ipotesi di omogeneità è distante dalla realtà che si osserva, per cui risulta fondamentale studiare plotoni eterogenei (Ward,

2010; Ngoudy, 2013; Zhang and Orosz, 2016; Wang et al., 2018; Monteil et al., 2019; Montanino and Punzo, 2021; Montanino et al., 2021).

L'eterogeneità si classifica nello spazio, tempo e tra gli agenti. In alcuni degli studi che assumono il plotone eterogeneo, tuttavia, l'eterogeneità viene introdotta definendo diversi modelli di car-following (Ngoudy, 2013) o nell'individuazione di due classi di veicoli (Ward, 2010). Nel campo della teoria del controllo si considera l'eterogeneità legata ai diversi controllori e alle loro logiche, nonché la differenza tra i parametri afferenti alla comunicazione, ad esempio, il ritardo di comunicazione (Zhang and Orosz, 2016). In altri studi si riscontra invece l'eterogeneità di alcuni parametri all'interno dei modelli di car-following studiato (Monteil et al., 2019; Xie et al., 2019), ciò identifica il diverso comportamento del driver all'interno di una classe. In Montanino e Punzo, 2021 e Montanino et al., 2021 viene presentato un quadro metodologico per lo studio dell'impatto dell'eterogeneità dei parametri sulla stabilità di stringa.

### 3.3.1. Linearizzazione del modello di car following

L'accelerazione nel modello di car-following viene definita come una funzione generalmente di tra variabili:

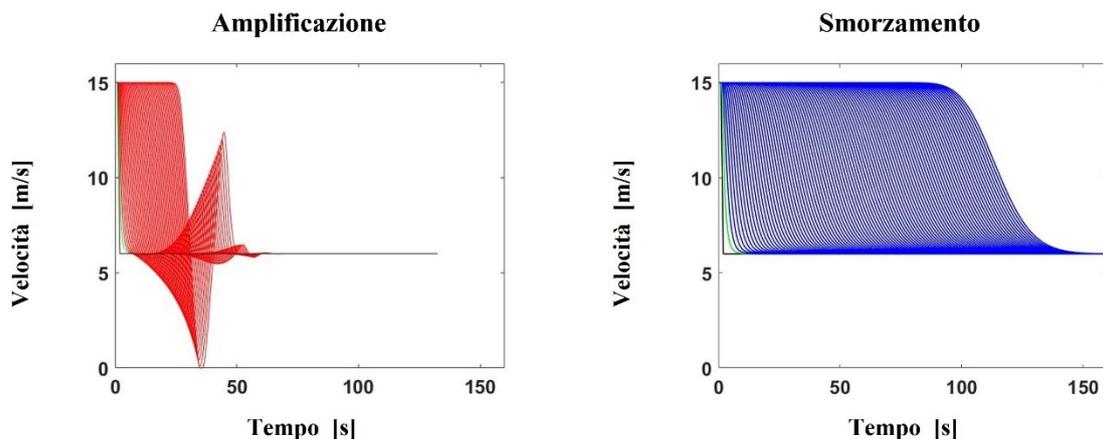
$$a_n = f_\beta(s_f(t), v_f(t), \Delta v_f(t)) \quad (3.1)$$

In cui la  $f_\beta$  è la forma funzionale del modello scelto dipendente dai propri parametri. Ad esempio, nel caso dell'IDM si avrà:

$$a_n = a_{max} \left[ 1 - \left( \frac{v_n}{v_{max}} \right)^\delta - \left( \frac{s^*(v_n, \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

Così come scritta l'equazione 1 permette lo studio della stabilità interna in quanto non vi è un disturbo esterno, o un input che agisce sul sistema.

In generale un sistema è definito stabile se a seguito di un cambiamento delle sue condizioni iniziali o per via di un disturbo esterno è in grado di ritornare alla sua condizione iniziale.



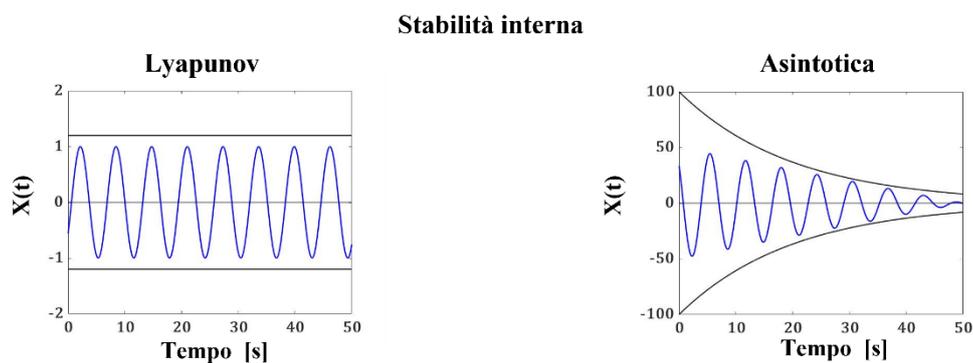
**Fig. 7:** Confronto tra sistema instabile di stringa, a sinistra in rosso, e sistema stabile di stringa, a destra in blu.

Viene da sé che il sistema è definito instabile la perturbazione dello stato iniziale subisce una amplificazione portando il sistema ad allontanarsi sempre più dalla condizione iniziale.

Nell'ambito della teoria della stabilità sono studiate due tipologie di stabilità:

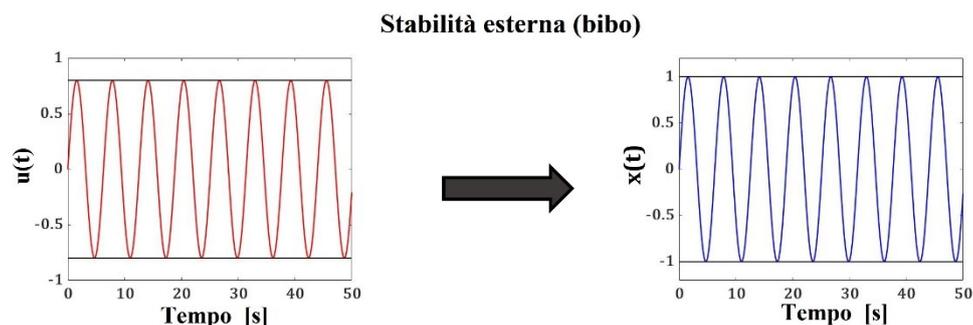
- Stabilità interna (Lyapunov) o esponenziale
- Stabilità esterna o BIBO

La stabilità interna in principio fu studiata da Lyapunov; è preso in esame l'evoluzione nel tempo di un sistema non forzato, ossia un sistema che subisce una perturbazione del suo stato iniziale. Il sistema si definisce stabile per Lyapunov se partendo da una condizione prossima a quella di equilibrio, con lo scorrere del tempo il sistema continua a rimanere prossimo all'equilibrio. La condizione più restrittiva è data dalla stabilità asintotica: il sistema è asintoticamente stabile se partendo da una condizione diversa da quella di equilibrio per  $t \rightarrow \infty$  converge alla condizione di equilibrio.



**Fig. 8:** Stabilità interna.

La stabilità esterna o stabilità  $\mathcal{L}_p$  è la proprietà di un sistema in condizioni di equilibrio di tornare alla condizione di equilibrio iniziale a seguito di un input, ossia un disturbo, esterno. Nel caso in cui l'input dato dal sistema è limitato, si definisce la BIBO stabilità; il sistema in tal caso è BIBO stabile se a seguito di un input limitato il sistema si mantiene sempre limitato nel tempo.



**Fig. 9:** Stabilità esterna.

Lo studio della stabilità interna non è di particolare interesse in quanto come si vedrà, ogni modello di car following per essere definito tale deve possedere la proprietà di stabilità interna.

All'equazione 3.1 si aggiunge quindi un disturbo esterno,  $d_n$ :

$$a_n = f_\beta(s_n(t), v_n(t), \Delta v_n(t)) + d_n \quad (3.3)$$

Si procede con la linearizzazione del modello tramite l'espansione di Taylor del primo ordine:

$$a_n \approx a_{n,eq} + f_{n,v} \cdot (v_n - v_{n,eq}) + f_{n,\Delta x} \cdot (\Delta x_n - \Delta x_{n,eq}) + f_{n,\Delta v} \cdot (\Delta v_n - \Delta v_{n,eq}) + d_n \quad (3.4)$$

In cui  $f_{n,v}$ ,  $f_{n,\Delta x}$  e  $f_{n,\Delta v}$  sono le tre derivate parziali del modello all'equilibrio, ossia:

$$a_n = 0; \quad v_n = v_{eq}; \quad s_n = s_{eq}$$

Alle condizioni di equilibrio:

- $\dot{y}_n = (v_n - v_{n,eq})$
- $\Delta y_n = (\Delta x_n - \Delta x_{n,eq})$
- $\Delta \dot{y}_n = (\Delta v_n - \Delta v_{n,eq})$

Che rappresentano le deviazioni dalla condizione di equilibrio rispettivamente della velocità: dello spacing e della differenza di velocità.

Sostituendo questi ultimi nell'equazione 3.4 e manipolando l'equazione si ottiene:

$$\ddot{y}_n + (f_{n,\Delta v} - f_{n,v}) \cdot \dot{y}_n + f_{n,\Delta x} \cdot y_n \approx f_{n,\Delta v} \cdot \dot{y}_{n-1} + f_{n,\Delta x} \cdot y_{n-1} + d_n \quad (3.5)$$

In quanto  $\Delta y_n = y_{n-1} - y_n$  e di conseguenza  $\Delta \dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} - \dot{y}_n$ .

Nell'equazione tutto ciò che è alla destra dell'equazione rappresenta l'input al sistema, ciò che sta alla sinistra dell'uguale invece rappresenta l'output.

Infatti, in un modello di car following il veicolo follower è influenzato dal veicolo leader e adatta la propria velocità in base agli stimoli ricevuti dal leader. Per questo motivo la velocità e la posizione del leader sono visti come input, mentre la velocità e la posizione del follower sono l'output ottenuto a seguito dell'adattamento del follower stesso.

Definita la relazione che lega input e output del sistema, la stringa di veicoli viene modellato con un sistema di equazioni differenziali a cascata:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 + (f_{1,\Delta v} - f_{1,v})\dot{y}_1 + f_{1,\Delta x}y_1 \approx f_{1,\Delta v}\dot{y}_n + f_{1,\Delta x}y_n \\ \ddot{y}_2 + (f_{2,\Delta v} - f_{2,v})\dot{y}_2 + f_{2,\Delta x}y_2 \approx f_{1,\Delta v}\dot{y}_1 + f_{1,\Delta x}y_1 \\ \dots \\ \ddot{y}_n + (f_{n,\Delta v} - f_{n,v})\dot{y}_n + f_{n,\Delta x}y_n \approx f_{n-1,\Delta v}\dot{y}_{n-1} + f_{n-1,\Delta x}y_{n-1} \end{array} \right.$$

In cui ogni equazione del sistema spiega l'interazione longitudinale di un veicolo con il veicolo che lo precede.

Come detto nell'introduzione al capitolo, l'approccio utilizzato nell'ingegneria del traffico e l'approccio utilizzato nella teoria del controllo differiscono tra loro per idea alla base e per la risoluzione del problema, tuttavia, le equazioni alla base sono le stesse e sono appunto rappresentate dal sistema appena descritto.

### 3.3.2. Approccio nella teoria del traffico

Partendo dal sistema di equazione la condizione di stabilità che viene studiata è una condizione che dipende unicamente dai parametri del modello e dalla velocità di equilibrio.

Non viene introdotto alcun disturbo, si studia la stabilità interna del sistema.

Alla base dello studio sulla stabilità interna vi è il metodo dell'Ansatz. Fu utilizzato originariamente da Bando (1995) e applicata al suo modello, l'OVM, e in generale utilizzata poi nel corso degli anni da altri autori come Treiber (2013) e Wilson (2001,2008).

Il termine Ansatz è proveniente dalla lingua tedesca indica un "tentativo". Ed è infatti proprio questo ciò che viene effettuato per lo studio della stabilità. Si ipotizza una soluzione compatibile al problema in base ai dati a disposizione, ricordando altri fenomeni fisici e assimilandoli a quello in esame; dopo di che viene verificata l'ipotesi al termine della risoluzione.

Per somiglianza con la teoria dell'oscillatore armonico smorzato l'ipotesi effettuata per risolvere l'equazione differenziale 3.5 è:

$$y_n(t) = Me^{\sigma t + (i\omega t + in\theta)} \quad \text{Re}(\lambda_n^+) < 0 \quad (3.6)$$

In cui  $\theta$  è il vettore d'onda che sta ad indicare la direzione di propagazione;  $Me^{\sigma t + i\omega t}$  è la "traffic wave Ansatz";  $\sigma$  rappresenta il tasso di crescita dell'ampiezza della propagazione;  $\omega$  rappresenta indica la frequenza angolare.

Tuttavia, nello studio della stabilità di stringa non è di interesse valutare la variazione dell'ampiezza dell'onda nel tempo, ma ciò che interessa è tale variazione nello spazio, ossia lungo il plotone. Per tale motivo  $\sigma = 0$ .

Sostituendo la 3.6 nell'equazione differenziale 3.5 a meno del termine  $d_n$ , si ottiene:

$$\lambda^2(\theta) = + [f_{\Delta v}(1 - e^{-i\theta}) - f_v]\lambda_n + f_{\Delta x}(1 - e^{-i\theta}) = 0$$

Imponendo  $\theta = 0$ , e risolvendo l'espansione del secondo ordine di Taylor di  $\lambda^+$ , ricercando valori di  $\lambda^+$  che abbiano parte reale negativa, si ottiene:

$$f_v^2 - 2f_v f_{\Delta v} - 2f_{\Delta x} \geq 0 \quad (3.7)$$

Ossia la condizione di stabilità interna. Tale formulazione verrà denominata come *relazione di Wilson* (Wilson, 2008).

### 3.3.3. Approccio nella teoria del controllo

Nella teoria del controllo si segue un'altra strada per la risoluzione del sistema di equazioni differenziali.

Viene studiata la risposta del sistema a seguito di un disturbo esterno.

Al fine di ciò viene studiata la funzione di trasferimento:

$$\Gamma_n(s) = \frac{s f_{\theta_{n,3}} + f_{\theta_{n,3}}}{s^2 + s(f_{\theta_{n,3}} - f_{\theta_{n,1}}) + f_{\theta_{n,2}}}$$

La misura della stabilità è data dalla norma di segnale  $\mathcal{L}_2$  se si è interessati alla deviazione di energia, oppure dalla norma di segnale  $\mathcal{L}_\infty$ , se si è interessati alla deviazione del picco di energia.

$$\mathcal{L}_2 = \|\Gamma_n(s)\|_{2,sys} = \sup |\Gamma_n(i\omega)| \quad \text{con } \omega \in R_0^+ \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_\infty = \|\Gamma_n(s)\|_{\infty,sys} = \int_0^\infty |\gamma_n(t)| dt$$

In cui,  $\gamma_n(t) = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma_n(s))$ , ossia l'anti trasformata di Laplace;  $\Gamma_n(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema lineare del veicolo n (Monteil, 2019):

$$\Gamma_n(s) = \frac{sf_{\theta_{n,3}} + f_{\theta_{n,3}}}{s^2 + s(f_{\theta_{n,3}} - f_{\theta_{n,1}}) + f_{\theta_{n,2}}}$$

Quest'ultima può essere scritta:

$$\Gamma_n(s) = \frac{\dot{y}_{n-1}}{\dot{y}_n}$$

In cui  $\|\dot{y}_{n-1}\|_p$  e  $\|\dot{y}_n\|_p$  sono rispettivamente le norme p della variazione di velocità rispetto all'equilibrio del veicolo leader e del follower.

Il sistema risulta stabile se (Ploeg et al., 2014):

$$\sup |\Gamma_n(i\omega)| = \sup \frac{\|\dot{y}_{n-1}\|_2}{\|\dot{y}_n\|_2} \leq 1$$

In cui  $\sup |\Gamma_n(i\omega)|$  è la norma di sistema  $H_\infty$ .

La scelta della variabile di input e output è indifferente tra  $y_n$  e  $\dot{y}_n$ , tuttavia risulta utile in determinati casi preferire la deviazione dello spacing rispetto all'equilibrio,  $y_n$ , in quanto con l'arresto dei veicoli del plotone si è comunque in grado di valutare l'amplificazione o lo smorzamento del disturbo.

### 3.3.4. Weak string stability e strict string stability

In generale detta  $\mathcal{L}_p$ , la norma che include sia la definizione di  $\mathcal{L}_2$  che di  $\mathcal{L}_\infty$ , si ha:

- *Strict string stability*: dato un sistema con un numero di veicoli  $N > 1$ , è detto  $\mathcal{L}_p$  strettamente stabile in termini di stringa, se è asintoticamente stabile e per la perturbazione in ingresso  $d_i$  agente solo su di un veicolo, per ogni  $n > i$ , si ottiene:

$$\|\dot{y}_n\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|\dot{y}_{n-1}\|_{\mathcal{L}_p}$$

- *Weak string stable*: dato un sistema con un numero di veicoli  $N > 1$ , e uno spazio di misura  $(l, m)$ , il sistema è detto  $\mathcal{L}_p$  debolmente stabile in termini di stringa se è asintoticamente stabile e per la perturbazione in ingresso  $d_i$  agente solo su di un veicolo, dato  $l > i$  e  $m \geq l$ , si ottiene:

$$\|\dot{y}_m\|_{\mathcal{L}_p} \leq \|\dot{y}_{l-1}\|_{\mathcal{L}_p}$$

Nel primo caso studiamo la perturbazione di coppie di veicoli, che interagiscono direttamente; nel caso di stabilità debole invece ci si focalizza sul primo veicolo e l'ultimo, in quanto ciò che interessa è che alla

fine del plotone e quindi all'ultimo veicolo, la perturbazione si sia completamente dissipata; per cui si tiene conto di:

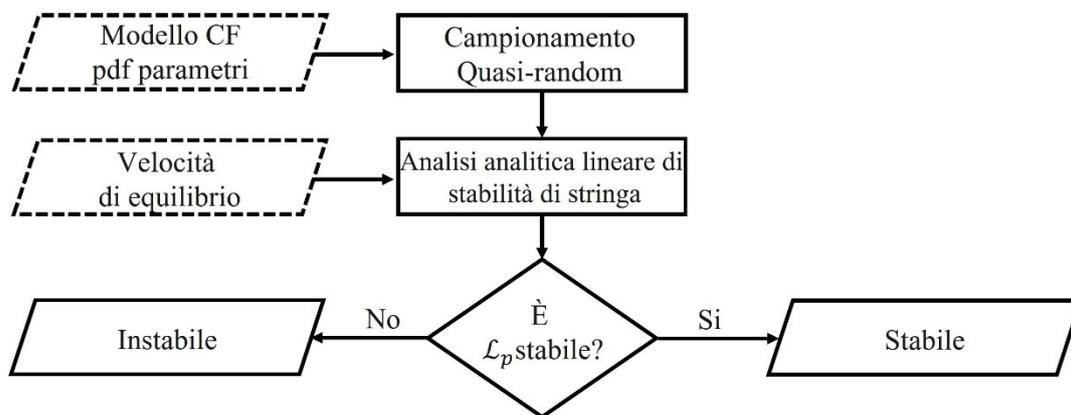
$$\|\dot{y}_N\|_{L_\infty} \leq \|\dot{y}_0\|_{L_\infty}$$

Infatti, se possiamo garantire che non vi sia alcun incremento della norma tra il primo e l'ultimo veicolo nel plotone di veicoli, possiamo anche garantire che le perturbazioni introdotte nel plotone di veicoli dal veicolo leader si attenuano lungo di essa. Per questi motivi si propende per la norma  $\mathcal{L}_\infty$  per la caratterizzazione della stabilità di stringhe eterogenee dei veicoli.

### 3.3.5. Analisi lineare dei modelli di IDM e GIPPS al variare della velocità di equilibrio

Al fine di valutare in maniera esaustiva il comportamento dei modelli di car-following, in particolare IDM e Gipps, si procede con una analisi di stabilità lineare al variare della velocità di equilibrio.

Con tale analisi si riesce ad ottenere informazioni rilevanti sulla variabilità della frontiera di stabilità e sulla scelta della metrica da utilizzare in futuro per definire la proprietà di stabilità di un plotone.



**Fig. 10:** Framework metodologico per l'analisi lineare della stabilità.

Per riprodurre la variabilità dei parametri del modello da un plotone omogeneo all'altro, si adotta un framework quasi-Monte Carlo, figura 10, in cui i parametri sono distribuiti secondo un modello di incertezza. Campionati i parametri che identificano i plotoni omogenei e fissate le condizioni al contorno date dalle diverse velocità di equilibrio, si effettua un'analisi analitica lineare della stabilità di stringa.

È presa in considerazione una distribuzione uniforme dei parametri, in quanto ciò che ci interessa studiare è come i modelli si comportano nei confronti della stabilità a prescindere dal contesto reale; tale scelta permette di studiare la proprietà di stabilità del modello senza filtri.

Per scongiurare una non completa copertura dello spazio dei parametri il campionamento di quest'ultimi è effettuato mediante una sequenza di numeri casuali a bassa discrepanza.

Per ottenere una valenza generale dei risultati, l'analisi è condotta su 8192 set diversi di parametri, i cui range sono riportati nel paragrafo 3.4.3.

La velocità di equilibrio, la lunghezza dei veicoli e il numero di veicoli costituenti il plotone sono fissate a priori e mantenute costanti.

- $v_{eq} = da\ 5\ a\ 21\ m/s$
- Lunghezza dei veicoli pari a 5 m.
- Numero dei veicoli del plotone pari a 20.

Al fine di interpretare al meglio i risultati è bene ricordare quanto riportato in Montanino e Punzo (2021); è stata data una giustificazione matematica dell'equivalenza tra la stabilità asintotica di un sistema chiuso e la stabilità  $\mathcal{L}_2$  di un sistema aperto.

$$\|\Gamma_n(s)\|_{2,sys} \leq 1 \leftrightarrow f_v^2 - 2f_v f_{\Delta v} - 2f_{\Delta x} \geq 0$$

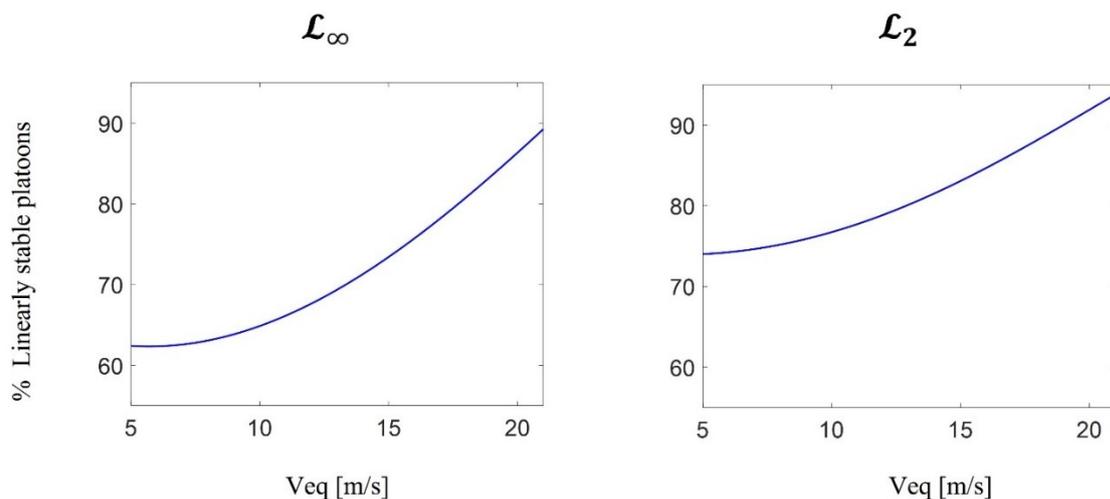
Il framework messo a punto è tale da permettere lo studio sulla stabilità lineare mediante le norme  $L_\infty$  e  $L_2$ , permettendo un confronto diretto tra le due norme.

La norma  $L_2$  è limitata superiormente dalla norma  $L_\infty$ ; questo vuol dire che quest'ultima è più restrittiva nei confronti della stabilità:

- Se  $\mathcal{L}_2 > 1$  allora anche  $\mathcal{L}_\infty > 1$ ;
- Se  $\mathcal{L}_2 \leq 1$ :
  - $\mathcal{L}_\infty > 1$
  - $\mathcal{L}_\infty \leq 1$

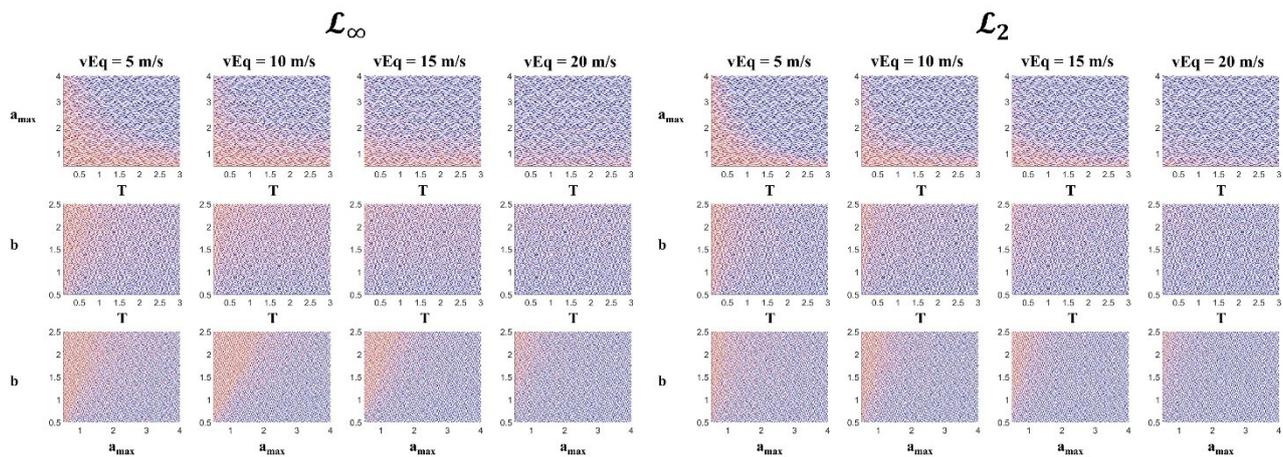
Nel primo caso non c'è alcun dubbio sul fatto che il sistema o il plotone nel caso specifico sia instabile. Nel secondo caso la norma  $\mathcal{L}_2$  potrebbe essere inappropriata nel definire il giudizio di stabilità. In Montanino et al. (2021) si dimostra l'importanza di utilizzare la norma  $\mathcal{L}_\infty$  per l'analisi di stabilità, a differenza di ciò che è stato effettuato nella maggior parte della letteratura in cui viene utilizzata la norma  $\mathcal{L}_2$  o l'equivalente relazione di Wilson. Viene infatti mostrata l'esistenza di casi in cui la norma  $\mathcal{L}_2$  non è in grado di valutare l'instabilità di un plotone anche se vi è una chiara amplificazione del disturbo.

Viene per la prima volta data una percentuale di plotoni stabili linearmente in riferimento alla velocità di equilibrio per i due modelli, e confrontata tale percentuale ottenuta con la norma  $\mathcal{L}_\infty$  con quella ottenuta con la norma  $\mathcal{L}_2$ .



**Fig. 11:** Percentuale di plotoni linearmente stabili al variare della velocità di equilibrio, per il modello di IDM. A sinistra i plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  stabili; a destra i plotoni  $\mathcal{L}_2$  stabili.

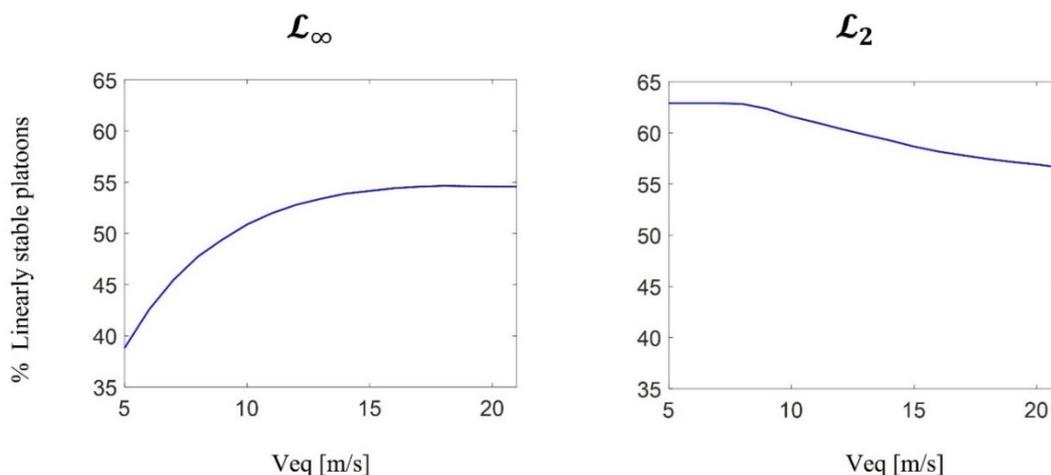
In primo luogo, si nota come la percentuale di plotoni stabili aumenti all'aumentare della velocità di equilibrio; il comportamento è il medesimo per le due norme. L'analisi sull'intera regione dei parametri permette, di definire la percentuale di stabilità dei plotoni in maniera esaustiva, e di definire dei diagrammi di stabilità che permettano l'identificazione di una regione di frontiera tra la regione instabile e quella stabile.



**Fig. 12:** Diagramma di stabilità lineare del modello IDM al variare della velocità di equilibrio. A sinistra la stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$ ; a destra la stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$ .

In figura ogni punto dei diagrammi rappresenta un plotone omogeneo, stabile in blu, instabile in rosso.

Da questa rappresentazione si può notare quanto detto in precedenza, ossia la restrittività della norma  $\mathcal{L}_\infty$  nello studio della stabilità rispetto la  $\mathcal{L}_2$ . Infatti, se nella figura precedente si può leggere una percentuale sempre maggiore di plotoni stabili per la norma  $\mathcal{L}_2$ , in questa figura con l'ausilio dei colori si capisce immediatamente che per la norma  $\mathcal{L}_\infty$  la regione instabile è sempre più ampia. Tuttavia, se si confrontano le due norme si nota come la conformazione della regione rimane la medesima, variando la sola ampiezza all'aumentare della velocità di equilibrio. Allo stesso modo per il modello di Gipps si ottiene:



**Fig. 13:** Percentuale di plotoni linearmente stabili al variare della velocità di equilibrio, per il modello di Gipps. A sinistra i plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  stabili; a destra i plotoni  $\mathcal{L}_2$  stabili.

Il risultato rispetto al modello IDM, fa emergere una differenza di comportamento tra lo studio della stabilità con la norma  $\mathcal{L}_\infty$  e la norma  $\mathcal{L}_2$ . Per quanto riguarda la norma  $\mathcal{L}_\infty$  sulla stregua di quanto visto con l>IDM si ha una percentuale di plotoni stabili che aumenta con la velocità di equilibrio; la differenza risiede nella diversa concavità che si viene a creare. Questo comporta un aumento di plotoni stabili minore all'aumentare della velocità di equilibrio, fino a raggiungere un asintoto localizzato per valori prossimi a quelli trovati per la norma  $\mathcal{L}_2$  per alte velocità di equilibrio. Per Gipps, infatti, un ulteriore aumento della velocità di equilibrio oltre quella di 15 m/s sembra non avere impatto sulla stabilità  $\mathcal{L}_\infty$ .

È da sottolineare come invece la stabilità calcolata con la norma  $\mathcal{L}_2$  risulta avere un comportamento totalmente opposto al caso dell'IDM. Si ha infatti per un primo momento una percentuale di plotoni stabili costanti all'aumentare della velocità di equilibrio fino al raggiungimento di un valore soglia,  $v_{eq,lim}$ , oltre il quale si hanno sempre meno plotoni stabili. Inoltre, al di sotto di questa soglia i plotoni sono sempre tutti stabili, qualsiasi sia la combinazione dei parametri campionati dal modello, è evidente in figura 15.

Il comportamento comune invece ad entrambi modelli è la tendenza della percentuale di plotoni stabili  $\mathcal{L}_\infty$  e  $\mathcal{L}_2$ , all'aumentare della velocità di equilibrio, di eguagliarsi. Infatti, è molto chiaro per il modello di Gipps come per alte velocità di equilibrio la percentuale di plotoni stabili  $\mathcal{L}_\infty$  e  $\mathcal{L}_2$  tende a raggiungere lo stesso valore.

La percentuale di plotoni stabili nel modello di Gipps è inferiore a quella ottenuta con il modello IDM; questo è dovuto ad una particolarità del modello di Gipps. Per il modello di Gipps si definisce una regione di instabilità numerica, definita in Wilson (2001):

$$\text{se } b > \hat{b} \text{ e } V_{max} > \frac{\tau + \theta}{\frac{1}{\hat{b}} - \frac{1}{b}} \quad (3.9)$$

in tal caso si ha instabilità numerica e la funzione  $V(h)$ , ossia la funzione velocità-spacing non è ben definita.

La regione di instabilità numerica viene scartata a priori dall'analisi condotta, ed è indipendente dalla velocità di equilibrio.

Partendo dalle condizioni espresse in Wilson (2001) per il modello di Gipps:

$$\theta < \left(\frac{1}{\hat{b}} - \frac{1}{b}\right) v_{eq} \text{ per l'instabilità}$$

$$\left(\frac{1}{\hat{b}} - \frac{1}{b}\right) V_{max} < \tau + \theta \text{ per una funzione } V(h) \text{ ben definita}$$

Si ricava una condizione di instabilità sul parametro  $\hat{b}$  data da:

$$\hat{b} < \frac{V_{max}}{\left(\theta + \frac{v_{eq}}{b}\right)} \text{ per l'instabilità}$$

$$\hat{b} > \frac{V_{max}}{\left(\tau + \theta - \frac{V_{max}}{b}\right)} \text{ per una funzione } V(h) \text{ ben definita}$$

Si ha infine:

- Condizioni di instabilità numerica:

$$\begin{cases} b > \hat{b} \\ \hat{b} < LB \end{cases}$$

- Condizione instabilità  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{cases} b > \hat{b} \\ LB < \hat{b} < UB \end{cases}$$

- Condizioni di stabilità:

$$b < \hat{b} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} b > \hat{b} \\ \hat{b} > UB \end{cases}$$

In cui:

$$LB = \frac{V_{max}}{(\tau + \vartheta) + \frac{V_{max}}{b}} \quad UB = \frac{V_{eq}}{\vartheta + \frac{V_{eq}}{b}}$$

Come detto in precedenza la stabilità  $\mathcal{L}_2$  nel modello di Gipps presenta una peculiarità, ossia quella di avere dei plotti sempre stabili al di sotto di una  $v_{eq,lim}$ . Si può calcolare questa soglia prendendo come punto di partenza un caso limite in cui  $UB < LB$ .

In tal caso la condizione di stabilità prima espressa diventa:

$$\begin{cases} b > \hat{b} \\ UB < LB \end{cases}$$

Sostituendo i valori di UB e LB nella disequazione si ottiene:

$$\frac{V_{eq}}{\vartheta + \frac{V_{eq}}{b}} < \frac{V_{max}}{(\tau + \vartheta) + \frac{V_{max}}{b}}$$

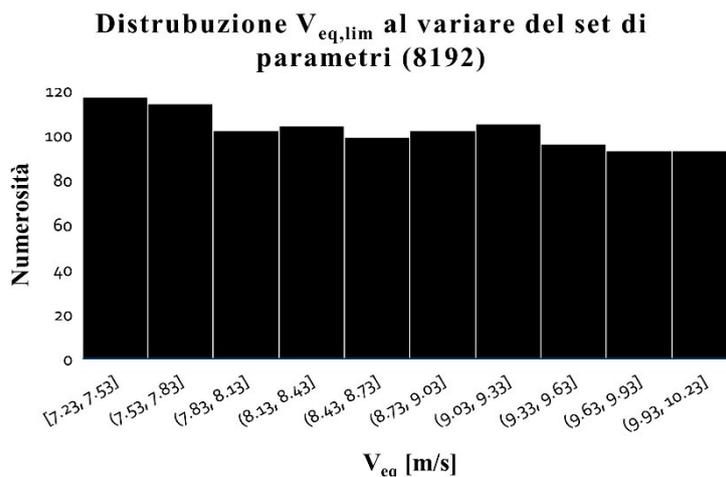
Risolviendo questa disequazione con incognita  $v_{eq}$  si ottiene il valore soglia di  $v_{eq}$  al disotto del quale si ha sempre stabilità  $\mathcal{L}_2$ :

$$V_{eq,lim} \leq \frac{k\vartheta b}{b+k} \quad (3.10)$$

Con  $k = LB$ .

$V_{eq,lim}$  è quindi funzione dei parametri  $b, \tau, \theta, V_{max}$ .

L'analisi condotta su 8192 plotti omogenei ha portato ad una distribuzione delle  $V_{eq,lim}$  ottenuto eguagliano la 3.10:



**Fig. 14:** Distribuzione di  $V_{eq,lim}$  calcolato su 8192 set diversi di parametri del modello di Gipps. Sull'asse y è riportata la numerosità, ossia quante volte la  $v_{eq,lim}$  compresa nell'intervallo sull'asse x è stata ottenuta.

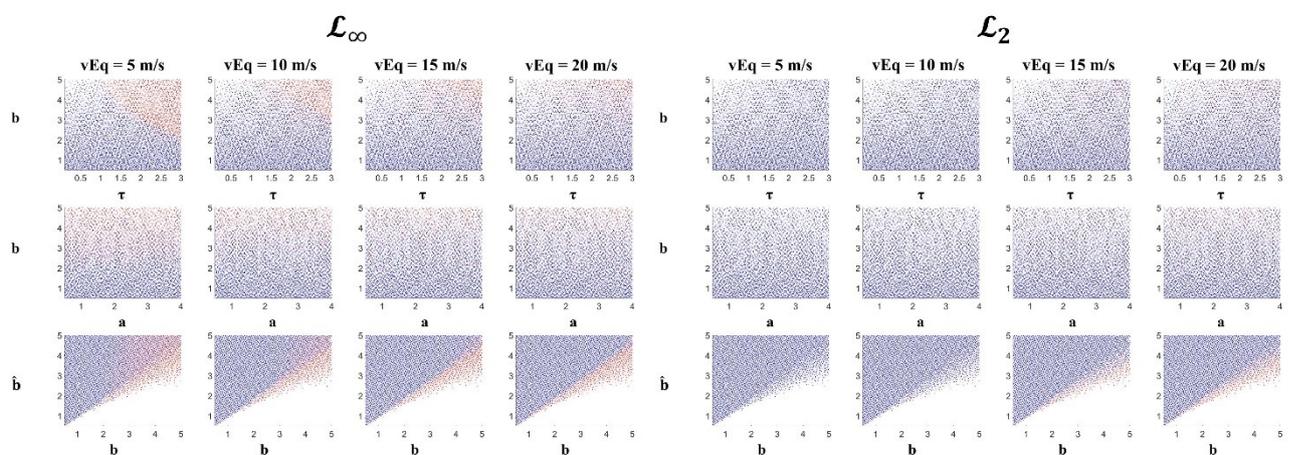
Per ottenere la distribuzione in figura sono stati campionati 8192 set di parametri differenti, ossia 8192 plotoni omogenei differenti. Per ogni plotone è stata ricavata  $V_{eq,lim}$  risolvendo l'equazione ottenuta eguagliando la 3.10.

**Tabella 3:** Valori significativi della  $V_{eq,lim}$ .

	Valore Minimo	Valore Massimo	Valore Medio
$V_{eq,lim}$ [m/s]	7.23	10.23	8.68

Per cui la soglia di  $V_{eq,lim}$  è di 7.23 m/s; per valori minori si ha sempre stabilità  $\mathcal{L}_2$ .

A destra della figura 15 si può notare come per una  $V_{eq} = 5$  m/s i punti all'interno del diagramma sono tutti blu e non vi è presenza di instabilità.



**Fig. 15:** Diagramma di stabilità lineare del modello Gipps al variare della velocità di equilibrio. A sinistra la stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$ ; a destra la stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$ . In rosso i plotoni linearmente instabili; in blu i plotoni linearmente stabili.

Gli spazi in bianco nei diagrammi di instabilità indicano tutti quei plotoni instabili numericamente, definiti dalla 3.9, indipendenti da  $v_{eq}$ .

Il risultato ottenuto col modello di Gipps è di assoluto rilievo in quanto, definisce ulteriormente quale sia la metrica da utilizzare per definire il giudizio di stabilità di un plotone. Infatti, se dall'analisi classica e quindi per la  $\mathcal{L}_2$  risulta che i plotoni sono sempre stabili al di sotto della soglia  $V_{eq,lim}$ , ciò non è per nulla vero se il giudizio viene espresso mediante la  $\mathcal{L}_\infty$ . Infatti nella figura 15, a sinistra si nota come vi sia una regione ben definita di plotoni instabili (in rosso) per  $V_{eq} = 5$  m/s. Questo comporta un errore evidente se la stabilità viene studiata tramite la  $\mathcal{L}_2$ .

### 3.4. ANALISI NON LINEARE DELLA STABILITÀ

#### 3.4.1. Limiti del modello lineare e definizione di metastabilità

Il modello matematico è una approssimazione della realtà, in quanto si cerca di rappresentare nel miglior modo possibile attraverso set di equazioni ciò che si sta osservando. Per raggiungere l'obiettivo nel corso degli anni sono stati sviluppati modelli sempre più complessi.

Per via della complessità raggiunta dai modelli e della difficoltà di effettuare analisi legate alla stabilità si è reso necessario effettuare un'operazione di linearizzazione del modello, come visto nel paragrafo 3.3.1. Nel caso dei modelli di C-F si è ottenuta l'equazione 3.5.

L'operazione di linearizzazione viene effettuata all'intorno del punto di equilibrio del modello, motivo per cui rimane valido quando non si discosta da tale punto. Questo comporta una errata percezione dei risultati man mano che ci si allontana da tale punto.

Al contrario di quanto visto fino ad ora in cui la stabilità lineare è sempre stata studiata partendo da modelli linearizzati o lineari, in quanto gli ACC nella stragrande maggioranza sono controllori lineari, le dinamiche in esame sono non lineari. Infatti, nella realtà durante la guida si sperimentano decelerazioni più o meno brusche che non possono essere considerate lineari.

Un primo errore è quello di studiare il fenomeno con un modello che in teoria non sarebbe in grado di riprodurre al meglio tale fenomeno. Infatti, si è detto che il modello linearizzato rimane valido nell'intorno del punto attorno al quale il modello viene linearizzato. Questa ipotesi fa sì che non possono essere studiati disturbi grandi ma si deve rimanere al di sotto di una certa soglia affinché il modello linearizzato funzioni.

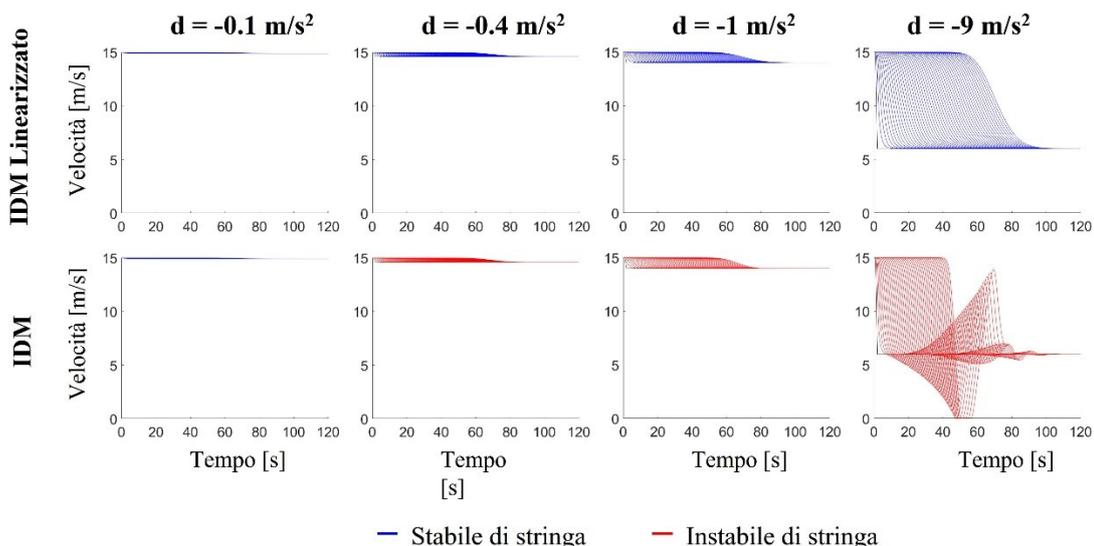
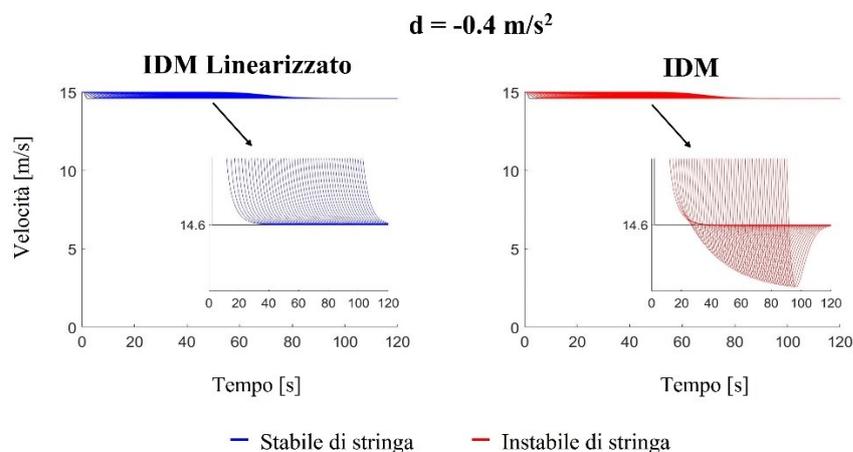


Fig. 16: Confronto del comportamento di stabilità di stringa tra l'IDM linearizzato e il modello IDM.

Nella figura 16 è riportato il caso di un plotone che per piccole intensità del disturbo,  $-0.4 \text{ m/s}^2$ . In blu è riportato il plotone che soggetto ad un disturbo di intensità  $d$  è stabile di stringa; in rosso il plotone che

per un disturbo di intensità  $d$  è instabile di stringa. Si nota una differenza di comportamento tra l'IDM linearizzato e l'IDM. In questo caso specifico  $-0.4 \text{ m/s}^2$  funge da soglia oltre il quale il modello linearizzato non è più in grado di cogliere il reale comportamento del sistema. In figura 17 viene rappresentata, con un grado di dettaglio maggiore, la differenza tra i due modelli. Infatti, mediante un ingrandimento si nota come l'IDM riproduce l'instabilità del traffico, seppur la differenza di velocità tra primo e ultimo veicolo rimane contenuta; nel modello linearizzato invece i veicoli all'interno del plotone riescono ad anticipare il comportamento del leader e non vanno mai al di sotto della minima velocità da esso raggiunta.

Il modello linearizzato è sempre stabile per qualsiasi intensità del disturbo che si studia; questo comportamento trova riscontro dal punto di vista teorico in quanto il risultato ottenuto dallo studio analitico della stabilità  $\mathcal{L}_2$  o  $\mathcal{L}_\infty$  di stringa lineare, per definizione è valido per qualsiasi tipo di disturbo e intensità di esso, equazione 3.8.



**Fig. 17:** Confronto del comportamento di stabilità di stringa tra l'IDM linearizzato e il modello IDM ad una decelerazione del leader di  $0.4 \text{ m/s}^2$ , con ingrandimento. Nella seconda colonna, con il modello IDM si osserva l'amplificazione del disturbo lungo il plotone; il modello è instabile di stringa in campo non lineare.

La figura 16 ci dà un'altra importantissima informazione; da essa si può osservare un plotone (o sistema) definito *metastabile*. Il plotone metastabile, come si osserva in figura, è quel plotone stabile linearmente ovvero per il modello linearizzato, quindi per disturbi di piccola intensità, ma instabile per disturbi di grande intensità.

È proprio questa figura che dà un'informazione in più rispetto a quanto fatto in altri studi come, ad esempio, in Treiber (2013), in quanto se in quest'ultimo non viene mai data una quantificazione alla definizione di disturbo di grande intensità, in questo caso si è in grado di definirlo quantitativamente e capire quindi fin dove risulta valida la teoria lineare.

### 3.4.2. Sviluppo di una metodologia per l'analisi in campo non lineare della stabilità di stringa

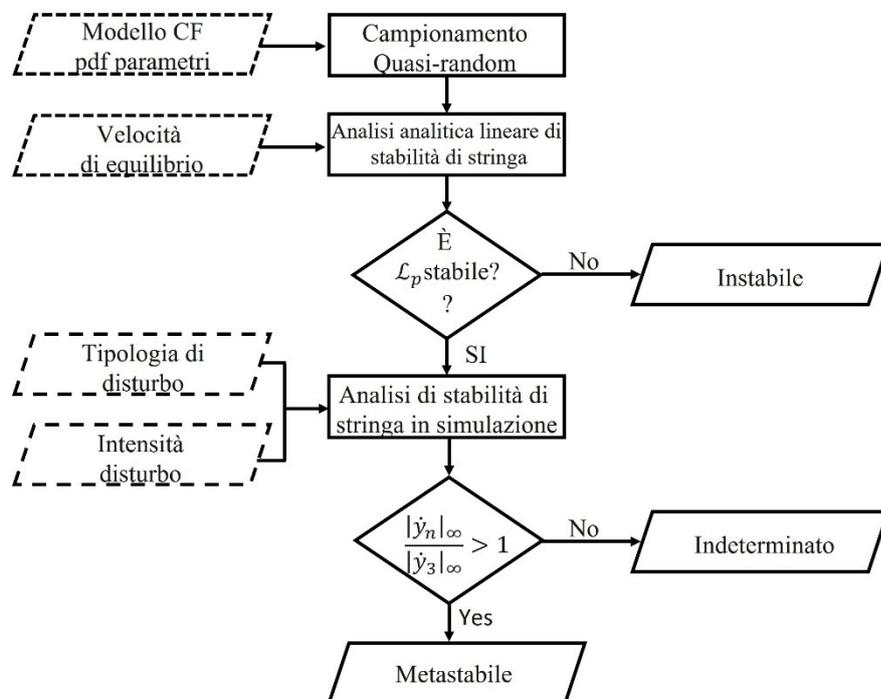
In letteratura la stabilità di stringa è per lo più stata studiata per sistemi lineari e in condizioni lineari, ossia lo studio di modelli sotto l'influenza di disturbi di piccola entità. La letteratura inerente allo studio di questa proprietà microscopica del traffico in campo non lineare è meno vasta. Nel tempo si sono susseguiti diversi studi, tra cui Treiber (Treiber and Kesting, 2013), Sun (Sun et al., 2018).

Limite di questi studi in primis è la mancanza di un approccio che permetta lo studio della stabilità del modello tenendo conto della variabilità dei suoi parametri; la definizione di una soglia del disturbo che definisca una linea di demarcazione tra l'approccio lineare e non lineare.

In altri casi come in Wubing (2022), l'analisi di stabilità condotta su di un controllore non lineare è eseguita per semplicità sulla sua versione linearizzata intorno l'equilibrio; i due modelli attorno al punto di equilibrio hanno lo stesso comportamento. Il limite in tal caso è rappresentato dal fatto che lo studio della stabilità rientra sempre nel campo lineare; infatti, i disturbi sono di piccola entità al fine di non allontanarsi dal punto di equilibrio. Tuttavia, come in Treiber (2013), non si ha una tangibilità della soglia del disturbo oltre il quale l'analisi risulta valida per entrambi i modelli.

In questa tesi si cerca di dare un valore alla soglia del disturbo oltre la quale la stabilità lineare e non lineare hanno comportamenti diversi. È indispensabile quindi studiare casistiche in cui si parte da valore molto bassi del disturbo, quasi impercettibili alla guida fino ad intensità paragonabili a quelle che si sperimentano in situazioni di emergenza; esempio una decelerazione di  $-9 \text{ m/s}^2$ . Se tali intensità non vengono studiate si perdono quelli che possono essere dei comportamenti instabili in situazioni di emergenza.

Altri approcci in letteratura propongono di studiare il solitone, ossia la soluzione di un'equazione differenziale non lineare che descrive un'onda di forma permanente tramite l'equazione modificata di Kourteweg-de Vries, mKdV (Nagatani, 1998, Ge et al., 2004, Jin et al., 2011 ). Tuttavia, l'equazione descrive i comportamenti del traffico solamente attorno al punto critico, considerando quindi una piccola perturbazione da tale punto. Questo comporta quindi l'impossibilità di studiare il modello soggetto a disturbi ad alta intensità, ossia in situazioni simili alla realtà. L'analisi di stabilità in campo non lineare è affrontata implementando il framework in figura 10; introducendo le linee guida per lo studio in campo non lineare basato su un approccio in simulazione.



**Fig. 18:** Framework metodologico per l'analisi non lineare della stabilità

Campionati i parametri che identificano i plotoni omogenei, fissate le condizioni al contorno, ed effettua l'analisi analitica della stabilità lineare, si prendono in esame i soli plotoni stabili linearmente.

È, infatti, su tali plotoni che si svolge tutto lo studio, che mira ad analizzare le condizioni in cui un plotone linearmente stabile diviene instabile all'introduzione di disturbi non lineari, ossia metastabile. Entrano quindi in gioco altri input, ossia la tipologia di disturbo, figura 21, e la sua intensità. È di rilevante importanza studiare gli effetti di molteplici intensità del disturbo in quanto ad oggi ancora non è stata definita alcuna soglia che identifichi il passaggio da un comportamento lineare ad uno non lineare, e studiare molteplici intensità per ogni tipologia permette di definire con maggior precisione tale soglia.

Definiti questi due ulteriori input che si sommano alla definizione di una velocità di equilibrio e alla scelta del modello, si procede all'analisi non lineare della stabilità di stringa mediante un approccio in simulazione, data la mancanza allo stato attuale, in letteratura, di una formulazione matematica idonea.

In simulazione, con riferimento alla definizione di weak string stability, il giudizio di stabilità di stringa viene espresso mediante il rapporto:

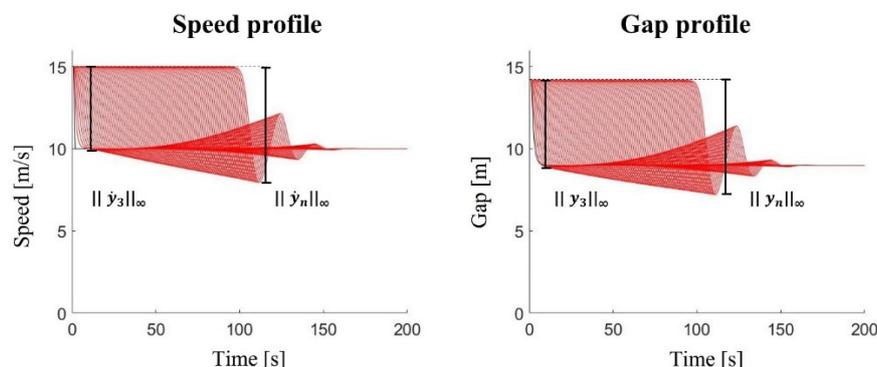
$$\frac{\|\dot{y}_n\|_\infty}{\|\dot{y}_3\|_\infty} \quad (3.11)$$

Se:

$$\frac{\|\dot{y}_n\|_\infty}{\|\dot{y}_3\|_\infty} \leq 1 \quad \textit{Stabile}$$

$$\frac{\|\dot{y}_n\|_\infty}{\|\dot{y}_3\|_\infty} > 1 \quad \textit{Instabile}$$

Questo rapporto non è altro che la rappresentazione analitica della definizione di stabilità; infatti, esso rappresenta il rapporto tra la deviazione della velocità dell'ultimo veicolo del plotone rispetto la velocità di equilibrio rispetto la deviazione della velocità dell'ultimo veicolo del plotone rispetto la velocità di equilibrio del terzo veicolo del plotone, figura 19. Per cui se risulta minore o uguale ad uno vuol dire che la velocità dei veicoli che seguono il terzo veicolo del plotone, non è mai minore della velocità del terzo veicolo; ciò indica che non c'è amplificazione del disturbo.



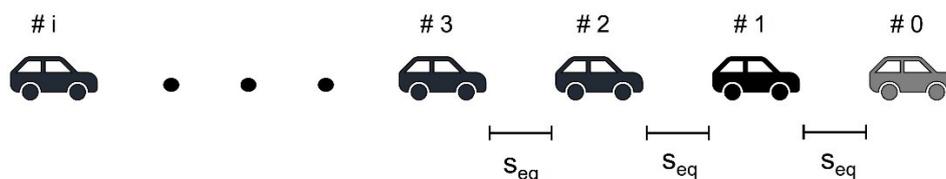
**Fig. 19:** Misura dell'instabilità in simulazione. Alla sinistra la misura di instabilità adottata sul profilo di velocità; Alla destra la misura di instabilità adottata sul profilo di gap.

Il giudizio di stabilità è quindi fornito dalla 3.11, che a secondo del suo valore da come output due possibili soluzioni:

- Indeterminato; vuol dire che non si è in grado di dare alcun giudizio definitivo sul plotone. Questo perché è risultato stabile a valle della simulazione, ma lo è per una determinata tipologia del disturbo. Non siamo in grado di definire se il plotone in esame sia instabile o meno per le infinite altre tipologie di disturbo possibili. Questo a differenza di ciò che avviene per la stabilità lineare dove per definizione matematica la norma  $\mathcal{L}_2$  o  $\mathcal{L}_\infty$  è calcolato su ogni tipologia di disturbo, e quindi si ha la certezza che se il plotone è stabile linearmente, quest'ultimo lo sarà sempre nel campo lineare. Proprio questo punto in Sun 2018 non viene considerato tanto da indicare come stabile il plotone ed evidenziare una differenza con il modello lineare; differenza che per quanto detto potrebbe non esserci se si considerano altre tipologie di disturbo.
- Metastabile; il plotone oggetto dello studio che si è prefissato di individuare, ossia il plotone stabile per disturbi di piccola intensità e instabile per disturbi di grande intensità. Il plotone può risultare metastabile solo per particolari tipologie del disturbo, motivo per cui è necessario non limitarsi a studiare un'unica tipologia di esso.

### 3.4.3. Design dell'esperimento

Il plotone analizzato secondo il framework in figura 18 è così costituito:



**Fig. 20:** Schema del plotone preso in esame nelle simulazioni. #0 è il virtual vehicle; #1 il leader; dal #2 in poi i follower.

Il virtual vehicle è un veicolo che si muove a velocità costante pari a quella di equilibrio, indispensabile per stabilire delle condizioni di equilibrio per il plotone. Gli altri veicoli, sia leader che follower procedono nella loro marcia seguendo le dinamiche di car-following, mantenendo un distanziamento spaziale pari allo spacing di equilibrio ( $s_{eq}$ ):

- IDM:

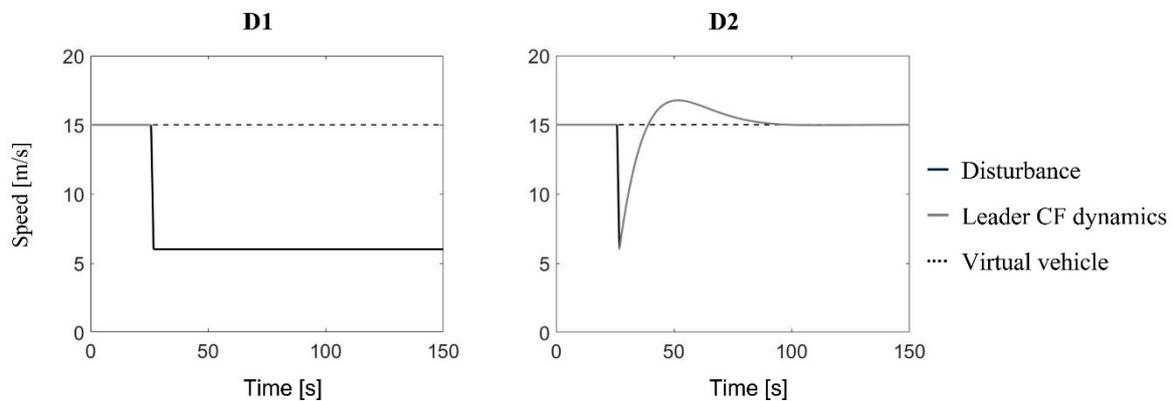
$$s_{eq} = \frac{s_0 + T * v_{eq}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{eq}}{V_{max}}\right)^\delta}}$$

- Gipps:

$$s_{eq} = \frac{v_{eq}^2}{2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{\hat{b}} \right) + v_{eq}(\tau + \theta) + L + s_0$$

Sono considerati due differenti tipologie del disturbo, figura 23. Il disturbo viene applicato dopo un primo periodo in cui i veicoli seguono le dinamiche di car-following, il cui leader è rappresentato dal virtual vehicle; in un secondo periodo viene applicato il disturbo che consta in una decelerazione costante applicata per 1s al leader; al termine del secondo di applicazione, nel caso D1 il disturbo

continua ad essere applicato imponendo una accelerazione pari a 0, mentre nel caso D2 il leader viene lasciato libero di seguire le dinamiche di car-following e avrà come leader il virtual vehicle, che nel mentre ha proseguito la sua marcia a velocità costante.



**Fig. 21:** Profilo di decelerazione del leader. La parte in grigio del profilo di velocità sta ad indicare che il leader segue liberamente le dinamiche di car-following.

Sono considerate 18 diverse intensità del disturbo: -0.1;-0.2;-0.3;-0.4;-0.5;-0.6;-0.7;-0.8;- 0.9;-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;-9  $m/s^2$ .

La velocità di equilibrio, la lunghezza dei veicoli e il numero di veicoli costituenti il plotone omogeneo sono fissate a priori e mantenute costanti.

- $v_{eq} = 10; 15; 20 \text{ m/s}$ .
- Lunghezza dei veicoli pari a 5 m.
- Numero dei veicoli del plotone pari a 20.

I modelli oggetto dello studio sono il modello IDM e il modello di Gipps, le cui formulazioni sono riportate all'interno del capitolo 2.

I modelli, tuttavia, presentano alcune problematiche nel riprodurre le dinamiche di traffico:

- Decelerazioni in output irrealistiche
- Velocità negative
- Instabilità numerica

Per quanto riguarda il primo punto al fine di evitare le decelerazioni irrealistiche generate dal modello per far sì che i veicoli si arrestino in sicurezza, viene posto un vincolo che definisce un tetto massimo alle decelerazioni. Per questo motivo oltre i modelli base si sono studiati gli stessi modelli vincolati rispetto alla decelerazione. Il vincolo è stato posto prendendo in riferimento le norme UNI 157, definendo una decelerazione di  $-5 \text{ m/s}^2$  come vincolo.

Per il secondo punto invece poiché le velocità negative non hanno alcun senso fisico, ma sono restituite dal modello per far sì che i veicoli rimangano in condizioni di sicurezza, esse verranno sostituite da velocità nulle.

L'instabilità numerica è una problematica che affligge il modello di Gipps, come visto nel paragrafo precedente. I set di parametri, ossia i plotoni omogenei, che danno luogo ad instabilità numerica vengono scartati a priori dall'analisi.

Vengono considerati 6 parametri, sia per il modello IDM che per il modello di Gipps variabili all'interno di un range prestabilito, e distribuiti uniformemente all'interno del range. La scelta di una distribuzione uniforme è dovuta alla necessità di studiare la proprietà di stabilità del modello senza apporre alcun filtro. Infatti, utilizzando alti modelli di incertezza, quali ad esempio una distribuzione condizionata, introdurremmo nello studio dinamiche non più legate al solo modello ma anche a quelle legate al comportamento dei guidatori.

Parametri modello IDM:

- $a_{max} \in [0.5,4]$   $[m/s^2]$
- $V_{max} \in [21.7,30.7]$   $[m/s]$
- $s_0 \in [0.1,3]$   $[m]$
- $T \in [0.1,3]$   $[s]$
- $b \in [0.5,2.5]$   $[m/s^2]$
- $\delta \in [0.1,3]$

Parametri modello Gipps:

- $a_{max} \in [0.5,4]$   $[m/s^2]$
- $V_{max} \in [21.7,30.7]$   $[m/s]$
- $s_0 \in [0.1,3]$   $[m]$
- $\hat{b} \in [0.5,5]$   $[m/s^2]$
- $b_n \in [0.5,5]$   $[m/s^2]$
- $\tau \in [0.1,3]$   $[s]$
- $\theta = \frac{\tau}{2}$   $[s]$

Si analizzano 8192 plotoni omogenei, caratterizzati ognuno da un set di parametri del modello campionati con una sequenza di numeri casuali a bassa discrepanza (Sobol).

#### 3.4.4. Risultati

Il design dell'esperimento raccontato nel paragrafo precedente in combinazione con il framework in figura 19 ha portato ai seguenti risultati.

Le tabelle 4-7 mostrano la variazione della metastabilità da una velocità di equilibrio all'altra e la numerosità dei plotoni metastabili ad ogni intensità del disturbo, per ogni modello studiato.

**Tabella 4:** Percentuale di plotoni metastabili per plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili. IDM Vs IDM vincolato.

Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	IDM						IDM Vincolato					
	Veq = 20 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 6994; 85%)		Veq = 15 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5989; 73%)		Veq = 10 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5150; 63%)		Veq = 20 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 6994; 85%)		Veq = 15 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5989; 73%)		Veq = 10 m/s (# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5150; 63%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	1 (0.01%)	-	-	-	-	-	-	1 (0.01%)	-	-	-	-
-0.2	1 (0.01%)	-	2 (0.03%)	-	-	-	-	1 (0.01%)	-	2 (0.03%)	-	-
-0.3	6 (0.09%)	-	5 (0.08%)	-	-	-	-	6 (0.09%)	-	5 (0.08%)	-	-
-0.4	10 (0.14%)	-	8 (0.13%)	-	-	-	-	10 (0.14%)	-	8 (0.13%)	-	-
-0.5	19 (0.27%)	-	13 (0.22%)	-	-	-	-	19 (0.27%)	-	13 (0.22%)	-	-
-0.6	25 (0.36%)	-	21 (0.35%)	-	3 (0.06%)	-	25 (0.36%)	-	20 (0.33%)	-	3 (0.06%)	-
-0.7	31 (0.44%)	-	24 (0.40%)	-	3 (0.06%)	-	31 (0.44%)	-	23 (0.38%)	-	3 (0.06%)	-
-0.8	42 (0.60%)	-	31 (0.52%)	-	5 (0.10%)	-	42 (0.60%)	-	30 (0.50%)	-	5 (0.10%)	-
-0.9	48 (0.69%)	-	37 (0.62%)	-	9 (0.17%)	-	48 (0.69%)	-	36 (0.60%)	-	9 (0.17%)	-
-1	63 (0.90%)	1 (0.01%)	46 (0.77%)	2 (0.03%)	10 (0.19%)	3 (0.06%)	63 (0.90%)	-	44 (0.73%)	-	10 (0.19%)	-
-2	197 (2.82%)	1 (0.01%)	143 (2.39%)	7 (0.12%)	63 (1.22%)	18 (0.35%)	197 (2.82%)	-	139 (2.32%)	2 (0.03%)	61 (1.18%)	13 (0.25%)
-3	325 (4.65%)	10 (0.14%)	237 (3.96%)	33 (0.55%)	157 (3.05%)	91 (1.77%)	325 (4.65%)	9 (0.13%)	231 (3.86%)	27 (0.45%)	152 (2.95%)	84 (1.63%)
-4	470 (6.72%)	31 (0.44%)	328 (5.48%)	108 (1.80%)	290 (5.63%)	187 (3.63%)	469 (6.71%)	29 (0.41%)	319 (5.33%)	98 (1.64%)	282 (5.48%)	185 (3.59%)
-5	584 (8.35%)	60 (0.86%)	441 (7.36%)	272 (4.54%)	411 (7.98%)	234 (4.54%)	579 (8.28%)	54 (0.77%)	427 (7.13%)	262 (4.37%)	402 (7.81%)	231 (4.89%)
-6	702 (10.04%)	127 (1.82%)	560 (9.35%)	315 (5.26%)	523 (10.16%)	264 (5.13%)	695 (9.94%)	233 (3.33%)	542 (9.05%)	388 (6.48%)	512 (9.94%)	269 (5.22%)
-7	829 (11.85%)	268 (3.83%)	707 (11.80%)	355 (5.93%)	641 (12.45%)	282 (5.48%)	813 (11.62%)	706 (10.09%)	671 (11.20%)	608 (10.15%)	623 (12.10%)	332 (6.45%)
-8	952 (13.61%)	301 (4.30%)	831 (13.88%)	374 (6.24%)	760 (14.76%)	298 (5.79%)	926 (13.24%)	925 (13.23%)	757 (12.64%)	793 (13.24%)	736 (14.29%)	388 (7.53%)
-9	1048 (14.98%)	330 (4.72%)	948 (15.83%)	396 (6.61%)	870 (16.89%)	314 (6.10%)	1004 (14.36%)	1073 (15.34%)	843 (14.08%)	915 (15.28%)	837 (16.25%)	452 (8.78%)

**Tabella 5:** Percentuale di plotoni metastabili per plotoni  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili. IDM Vs IDM vincolato.

Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	IDM						IDM Vincolato					
	Veq = 20 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile 7535; 92%)		Veq = 15 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 6794; 83%)		Veq = 10 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 6298; 77%)		Veq = 20 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile 7535; 92%)		Veq = 15 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 6794; 83%)		Veq = 10 m/s (# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 6298; 77%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	340 (4.51%)	-	571 (8.40%)	-	752 (11.94%)	-	340 (4.51%)	-	571 (8.40%)	-	752 (11.94%)	-
-0.2	363 (4.82%)	-	595 (8.76%)	-	765 (12.15%)	-	363 (4.82%)	-	595 (8.76%)	-	765 (12.15%)	-
-0.3	388 (5.15%)	-	611 (8.99%)	-	780 (12.38%)	-	388 (5.15%)	-	611 (8.99%)	-	780 (12.38%)	-
-0.4	407 (5.40%)	-	623 (9.17%)	-	788 (12.51%)	-	407 (5.40%)	-	623 (9.17%)	-	788 (12.51%)	-
-0.5	433 (5.75%)	-	632 (9.30%)	-	792 (12.58%)	-	433 (5.75%)	-	632 (9.30%)	-	791 (12.56%)	-
-0.6	452 (6.00%)	-	649 (9.55%)	-	802 (12.73%)	-	452 (6.00%)	-	648 (9.54%)	-	800 (12.70%)	-
-0.7	471 (6.25%)	-	660 (9.71%)	-	808 (12.83%)	-	471 (6.25%)	-	659 (9.70%)	-	806 (12.80%)	-
-0.8	487 (6.46%)	-	669 (9.85%)	-	813 (12.91%)	-	486 (6.45%)	-	668 (9.83%)	-	811 (12.88%)	-
-0.9	502 (6.66%)	-	685 (10.08%)	-	821 (13.04%)	-	501 (6.65%)	-	684 (10.07%)	-	819 (13.00%)	-
-1	524 (6.95%)	1 (0.01%)	697 (10.26%)	2 (0.03%)	826 (13.12%)	4 (0.06%)	523 (6.94%)	-	695 (10.23%)	-	824 (13.08%)	-
-2	698 (9.26%)	1 (0.01%)	827 (12.17%)	9 (0.13%)	904 (14.35%)	30 (0.48%)	698 (9.26%)	-	822 (12.10%)	4 (0.06%)	898 (14.26%)	24 (0.38%)
-3	848 (11.25%)	11 (0.15%)	946 (13.92%)	43 (0.63%)	992 (15.75%)	154 (2.45%)	847 (11.24%)	10 (0.13%)	939 (13.82%)	37 (0.54%)	982 (15.59%)	146 (2.32%)
-4	997 (13.23%)	25 (0.3%)	1043 (15.35%)	132 (1.94%)	1093 (17.35%)	279 (4.43%)	995 (13.21%)	33 (0.44%)	1034 (15.22%)	122 (1.80%)	1080 (17.15%)	277 (4.40%)
-5	1112 (14.76%)	61 (0.81%)	1152 (16.96%)	316 (4.65%)	1153 (18.31%)	341 (5.41%)	1106 (14.68%)	65 (0.86%)	1137 (16.74%)	306 (4.50%)	1139 (18.09%)	338 (5.37%)
-6	1232 (16.35%)	139 (1.84%)	1261 (18.56%)	363 (5.34%)	1182 (18.77%)	378 (6.00%)	1224 (16.24%)	257 (3.41%)	1242 (18.28%)	438 (6.45%)	1166 (18.51%)	383 (6.08%)
-7	1359 (18.04%)	289 (3.84%)	1390 (20.46%)	407 (5.99%)	1208 (19.18%)	398 (6.32%)	1342 (17.81%)	748 (9.93%)	1352 (19.90%)	666 (9.80%)	1185 (18.82%)	448 (7.11%)
-8	1483 (19.68%)	325 (4.31%)	1492 (21.96%)	428 (6.30%)	1242 (19.72%)	415 (6.59%)	1456 (19.32%)	976 (12.95%)	1416 (20.84%)	863 (12.70%)	1214 (19.28%)	508 (8.07%)
-9	1580 (20.97%)	355 (4.71%)	1572 (23.14%)	453 (6.67%)	1263 (20.05%)	433 (6.88%)	1535 (20.37%)	1128 (14.97%)	1464 (21.55%)	990 (14.57%)	1226 (19.47%)	582 (9.24%)

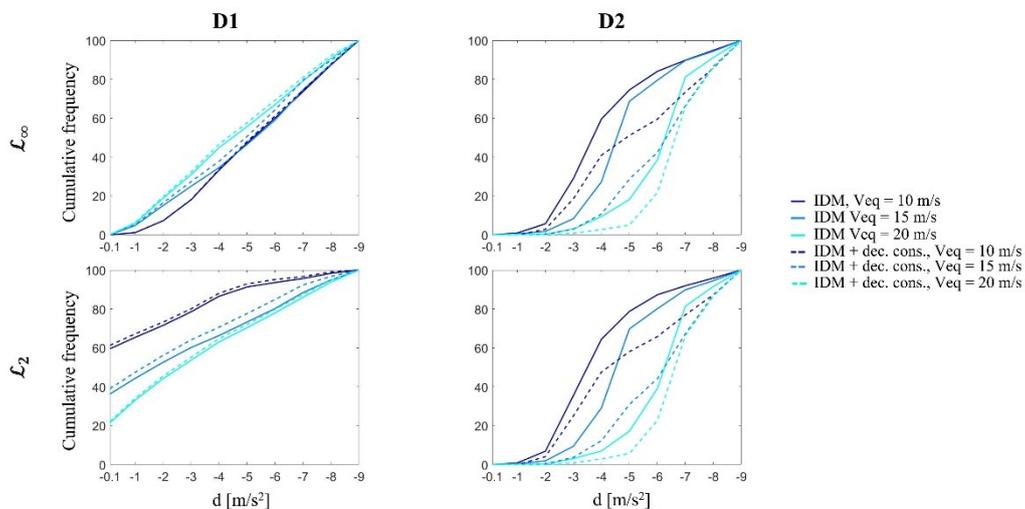
Il confronto tra le tabelle 4 e 5 ribadisce il concetto già espresso nel paragrafo precedente, in cui si afferma la bontà di effettuare l'analisi di stabilità lineare con la  $\mathcal{L}_\infty$ . Infatti, come si può notare quando si esaminano nel campo non lineare i plotoni  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili si ha una percentuale di plotoni metastabili per disturbi di piccola intensità che è dalle 10 o più volte quelle riportate in tabella 4. Se si osserva la figura 12, si nota come i plotoni stabili linearmente per  $\mathcal{L}_2$  prossimi alla frontiera sono in realtà instabili per  $\mathcal{L}_\infty$ . Il risultato in tabella 5 conferma che in realtà tutti questi plotoni nelle vicinanze della frontiera sono in realtà instabili in quanto nell'analisi non lineare è bastato introdurre un disturbo di piccola entità, che possiamo ritenere lineare, per rendere il plotone metastabile.

La tabella 4 mostra una tendenza ben definita per il modello IDM in cui la metastabilità aumenta al diminuire della velocità di equilibrio; anche per il modello si ha lo stesso trend passando da 15 a 10 m/s di velocità di equilibrio; tuttavia, da 20 a 15 m/s le percentuali rimangono pressoché invariate.

La tabella 4 ci dà un'altra importante informazione in quanto ci permette di confrontare l'IDM con la sua versione vincolata. Da questo confronto emerge che il modello vincolato rispetto di quello che inizialmente si potrebbe pensare, risulta essere più stabile dell'IDM quando il disturbo introdotto è del tipo D1.

Quando si passa ad un disturbo impulsivo, del tipo D2, il comportamento cambia totalmente; infatti, l'IDM risulta essere meno incline alla metastabilità rispetto la sua versione vincolata. E se ci soffermiamo all'analisi dei risultati ottenuti per l'IDM vincolato si nota una tendenza ad avere maggiore metastabilità quanto più la velocità di equilibrio aumenta.

Ancora si può osservare come in definitiva il disturbo D1 sia maggiormente impattante nei confronti della metastabilità rispetto al D2; infatti, con il modello IDM la percentuale totale di plotoni metastabili è più del doppio quando si analizza il disturbo D1 rispetto al disturbo D2. Quest'ultima tendenza è riscontrabile anche in tabella 5. Dalla tabella 4 si è finalmente in grado di dare una quantificazione a quello che è definito come "piccolo disturbo" (Wilson 2013). Il valore di soglia varia con la velocità di equilibrio, che come già visto gioca un ruolo chiave nella stabilità. Infatti, se per basse velocità di equilibrio la soglia del disturbo si attesta a  $-0.6 \text{ m/s}^2$ , aumentando la velocità di equilibrio la soglia tende a valori via via minori. La tabella 5 conferma la tendenza del modello vincolato ad essere più stabile della sua versione originale quando il disturbo non è impulsivo (D1), viceversa se il disturbo in esame è il D2. Questo comportamento sta ad indicare che con il disturbo D1 le frenate generate dal veicolo sono in media minori rispetto al caso D2, il che comporta un impatto minore del vincolo sul modello. Addirittura, con il disturbo D1 la frenata dilazionata in più step temporali e con una intensità minore favoriscono la stabilità del plotone.



**Fig. 22:** Frequenza cumulate dei plotoni metastabili, sul totale dei plotoni metastabili, al variare del tasso di decelerazione del leader, per D1 e D2, per il modello IDM. Sulla prima riga i plotoni  $L_\infty$  stabili linearmente che diventano metastabili; sulla seconda riga i plotoni  $L_2$  stabili linearmente che diventano metastabili.

In figura 22 sono riportate le probabilità di avere un plotone metastabile al variare del tasso di decelerazione del leader. Con tonalità più chiare all'aumentare della velocità di equilibrio, sono rappresentate con linea continua il modello IDM, mentre con linea tratteggiata il modello IDM vincolato.

Nell'IDM vincolato la soglia di metastabilità si definisce per valori del tasso di decelerazione del leader di un ordine di grandezza maggiore rispetto al modello non vincolato. La probabilità di incontrare plotoni metastabili quando si prende in considerazione il disturbo D2, aumenta drasticamente una volta superata la soglia; ad esempio, si passa da un valore di poco meno del 10% di probabilità ad una soglia di  $-2 \text{ m/s}^2$  ad un valore di oltre il 60% ad una soglia di  $-4 \text{ m/s}^2$  per una velocità di equilibrio di 10 m/s.

**Tabella 6:** Percentuale di plotoni metastabili per plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili. Gipps Vs Gipps vincolato.

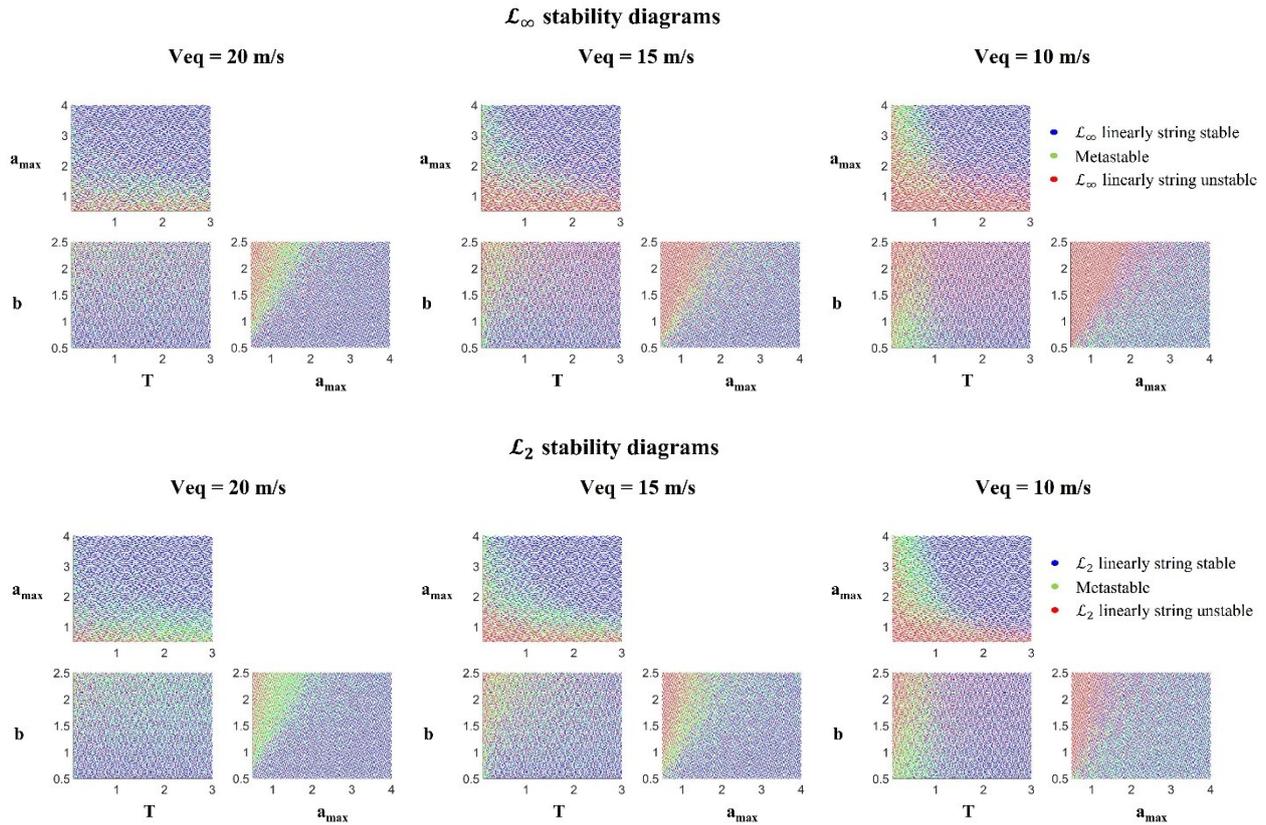
Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	GIPPS						GIPPS Vincolato					
	Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s		Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s	
	(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile 4402; 85% <sup>1</sup> )		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 4274; 73%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 3948; 63%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile 4402; 85% <sup>1</sup> )		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 4274; 73%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 3948; 63%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-7	-	-	3 (0.07%)	-	5 (0.10%)	-	-	-	3 (0.07%)	-	5 (0.10%)	-
-8	-	-	5 (0.12%)	-	872 (22.06%)	-	-	-	5 (0.12%)	-	872 (22.06%)	1 (0.03%)
-9	-	-	7 (0.16%)	2 (0.05%)	2635 (66.71%)	2 (0.05%)	-	-	7 (0.16%)	-	2637 (66.76%)	1 (0.03%)

**Tabella 7:** Percentuale di plotoni metastabili per plotoni  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili. Gipps Vs Gipps vincolato.

Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	GIPPS						GIPPS Vincolato					
	Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s		Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s	
	(# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile 4662; 57% <sup>1</sup> )		(# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 4805; 59%)		(# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 5045; 62%)		(# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile 4662; 85% <sup>1</sup> )		(# $\mathcal{L}_2$ li. stabile:4805; 73%)		(# $\mathcal{L}_2$ lin. stabile: 5045; 62%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	32 (0.69%)	-	159 (3.31%)	-	36 (0.71%)	-	32 (0.69%)	-	159 (3.31%)	-	36 (0.71%)	-
-1	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-
-2	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-
-3	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-	32 (0.69%)	-	162 (3.37%)	-	36 (0.71%)	-
-4	32 (0.69%)	-	163 (3.39%)	-	37 (0.73%)	-	32 (0.69%)	-	163 (3.39%)	-	37 (0.73%)	-
-5	32 (0.69%)	-	164 (3.41%)	-	40 (0.79%)	1 (0.02%)	32 (0.69%)	-	164 (3.41%)	-	40 (0.79%)	-
-6	32 (0.69%)	-	166 (3.45%)	-	85 (1.68%)	1 (0.02%)	32 (0.69%)	-	166 (3.45%)	-	85 (1.68%)	-
-7	32 (0.69%)	-	171 (3.56%)	2 (0.04%)	342 (6.78%)	1 (0.02%)	32 (0.69%)	-	171 (3.56%)	-	342 (6.78%)	-
-8	32 (0.69%)	-	178 (3.70%)	2 (0.04%)	1503 (29.79%)	2 (0.04%)	32 (0.69%)	-	178 (3.70%)	-	1503 (29.79%)	1 (0.02%)
-9	32 (0.69%)	-	183 (3.81%)	2 (0.04%)	3442 (68.23%)	2 (0.04%)	32 (0.69%)	6 (0.13%)	183 (3.81%)	-	3444 (68.27%)	1 (0.02%)

La tabella 6 mette in risalto la minor propensione del modello di Gipps a generare plotoni metastabili per alte velocità di equilibrio. Il comportamento del modello cambia drasticamente passando da una velocità di equilibrio di 10 m/s a velocità maggiori, passando da una percentuale di plotoni metastabili di circa il 67% ad una prossima allo zero.

Le soglie che danno luogo alla metastabilità nel modello di Gipps e nella sua versione vincolata sono più alte rispetto a quelle viste negli altri due modelli. È necessario per questi modelli introdurre disturbi di intensità superiore o pari a -7 m/s<sup>2</sup> affinché si abbiano plotoni metastabili.



**Fig. 23:** Diagramma di stabilità non lineare per l'IDM. Sulla prima riga è rappresentata la stabilità non lineare partendo dai plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili; sulla seconda riga è rappresentata la stabilità non lineare partendo dai plotoni  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili.

I diagrammi forniscono una rappresentazione della regione di stabilità (in blu) e della regione metastabile (in verde).

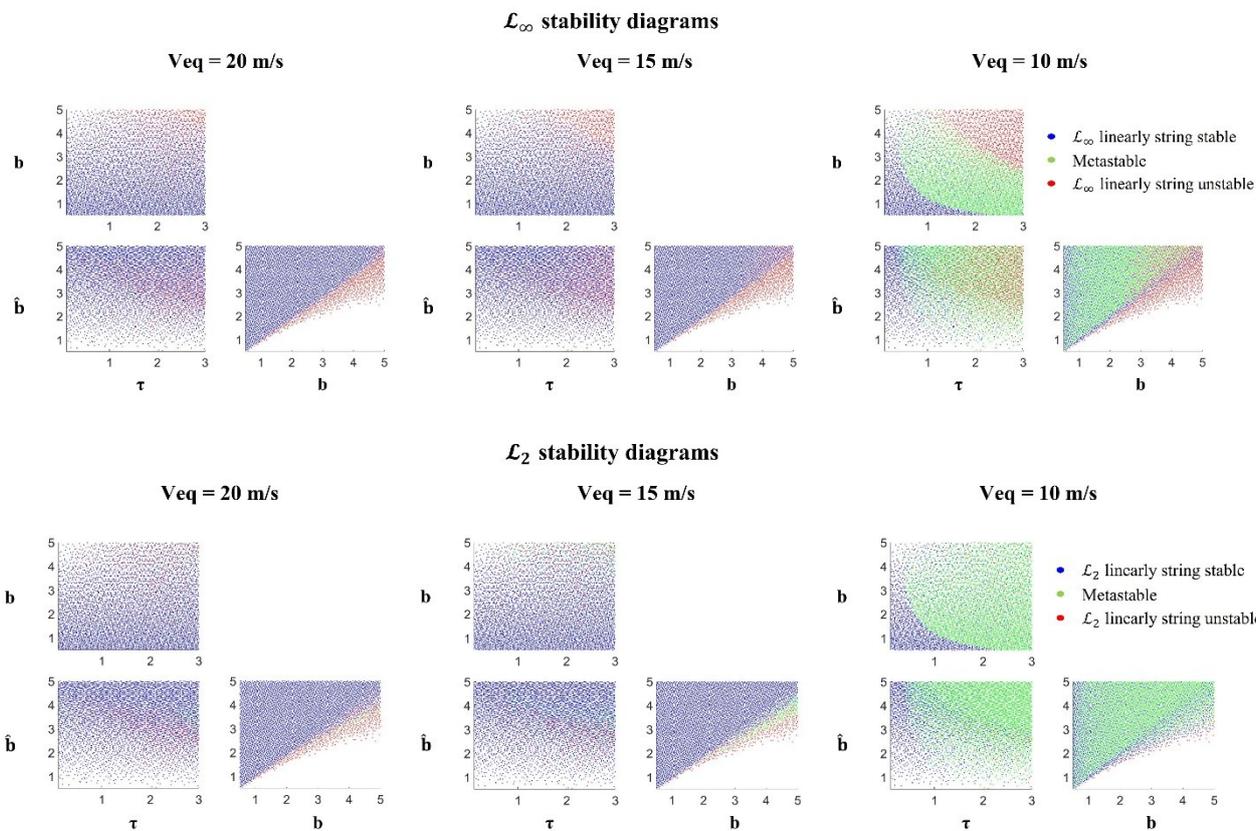
Vengono rappresentati i diagrammi  $a_{max} - T$ ,  $b - T$  e  $b - a_{max}$ , perché questi tre parametri risultano influenzare maggiormente la stabilità del modello (Montanino, Punzo 2021). In appendice sono riportati i diagrammi di stabilità relativi agli altri parametri del modello.

Ogni punto del diagramma rappresenta uno degli 8192 set di parametri, linearmente stabili per  $\mathcal{L}_\infty$  o per  $\mathcal{L}_2$ .

I diagrammi  $a_{max} - T$  e  $a_{max} - b$  evidenziano chiaramente la frontiera tra la regione stabile e quella metastabile, ovvero la regione dei parametri per cui il modello è instabile a partire da un disturbo pari a  $0.1 \text{ m/s}^2$ .

Con l'aumentare della velocità di equilibrio i plotoni metastabili si caratterizzano per valori di  $a_{max}$  sempre più bassi, e maggiori per T. Quindi con l'aumentare della velocità di equilibrio i plotoni che diventano metastabili sono quelli che hanno dei parametri di  $a_{max}$  e T più conservativi. Al contrario il parametro b segue l'andamento opposto, infatti per velocità di equilibrio maggiori i valori in media sono più alti rispetto ad una velocità di equilibrio di 10 m/s.

La metastabilità nell'IDM è dipendente principalmente da un T basso per velocità di equilibrio non maggiori di 10 m/s, dopo di che sembra che la metastabilità sia principalmente governata da alti valori di b e al contempo bassi valori di  $a_{max}$ . Tale combinazione risulta un po' strana in quanto si fa riferimento a plotoni in cui si ha una predisposizione ad avere un alto tasso di frenata ma al contempo si è disposti poco ad accelerare.



**Fig. 24:** Diagramma di stabilità non lineare per il modello di Gipps. Sulla prima riga è rappresentata la stabilità non lineare partendo dai plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili; sulla seconda riga è rappresentata la stabilità non lineare partendo dai plotoni  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili;

Per il modello di Gipps i piani rappresentati sono  $b - \hat{b}$ ,  $\tau - \hat{\tau}$  e  $\tau - b$ , in quanto sono parametri impattanti sulla stabilità del modello. In appendice sono riportati i diagrammi di stabilità relativi agli altri parametri del modello.

La metastabilità nel modello di Gipps è fortemente presente per una velocità di equilibrio di 10 m/s, velocità per cui nell'analisi lineare si ha la quasi totalità di plotoni stabili con la L2. In tal caso non si riconosce una particolare incidenza dei parametri sulla metastabilità in quanto essi occupano la regione dei piani per la quasi totalità. Discorso diverso per la velocità di equilibrio di 15 m/s; infatti, nel piano  $b - \hat{b}$  si nota come la metastabilità sia prerogativa di solo quei plotoni che in cui sono  $b > \hat{b}$ .

L'analisi non lineare sui plotoni  $\mathcal{L}_2$  stabili va in forte controtendenza con quanto visto nell'analisi lineare; i plotoni metastabili sono in percentuale maggiori quando la velocità di equilibrio è bassa, mentre in figura si ha una maggiore percentuale di stabilità per le basse velocità di equilibrio.

L'analisi non lineare ha permesso di studiare anche quei plotoni omogenei che possono dar luogo a delle collisioni durante la marcia dei veicoli.

Ci si aspettava che la proprietà di metastabilità potesse comportare l'insorgenza di questi fenomeni, in quanto un'amplificazione di disturbi di alta intensità alla fine potesse portare al non mantenimento delle distanze di sicurezza e in seguito ad una collisione tra i veicoli all'interno del plotone.

L'analisi ha però fornito risultati opposti; infatti in primo luogo i modelli non vincolati:

IDM e Gipps, non hanno mai dato luogo ad alcuna collisione, e sono rimasti fedeli alla proprietà che nel tempo è stata accostata a questi modelli, ossia quella di essere dei modelli collision free.

Tuttavia, bisogna specificare che la mancanza di collisioni per questi due modelli è dovuta alla possibilità da parte del modello di generare in condizioni di emergenza delle decelerazioni molto alte, e assolutamente irrealistiche, al fine di evitare proprio la collisione tra i veicoli.

Tale affermazione è avvalorata dai risultati ottenuti per i modelli vincolati: IDM vincolato e Gipps vincolato. In tabella 8 e 9 è riportata la numerosità dei plotoni in cui si è verificata una collisione tra veicoli, rispettivamente partendo da plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili e  $\mathcal{L}_2$ .

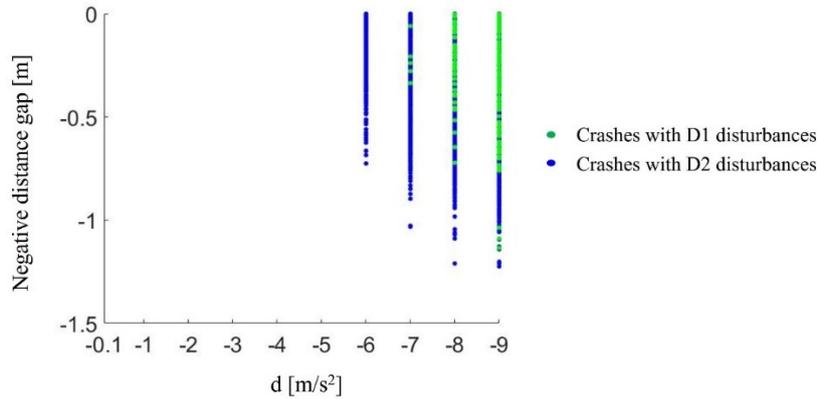
Come per la metastabilità la percentuale di plotoni in cui si verifica un crash diminuisce all'aumentare della velocità di equilibrio con il disturbo D1; il modello di Gipps vincolato essendo sempre stabile per velocità di equilibrio di 20 m/s, non presenta alcuna collisione.

Tuttavia, anche per le altre velocità di equilibrio il modello di Gipps vincolato ha percentuale di collisioni prossime allo zero. Al contrario dell'IDM vincolato in cui le percentuali di collisione aumentano all'aumentare della velocità di equilibrio con il disturbo D2, il modello di Gipps vincolato non presenta alcuna collisione.

**Tabella 8:** Percentuale di plotoni con collisioni per plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili. IDM vincolato Vs Gipps vincolato.

Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	IDM Vincolato						GIPPS Vincolato					
	Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s		Veq = 20 m/s		Veq = 15 m/s		Veq = 10 m/s	
	(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 6994;85%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5989;73%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 5150;63%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile 4402; 85%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 4274; 73%)		(# $\mathcal{L}_\infty$ lin. stabile: 3948; 63%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	-	1 (0.01%)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-6	-	89 (1.27%)	-	24 (0.40%)	-	3 (0.06%)	-	-	-	-	-	-
-7	-	320 (4.87%)	-	94 (1.57%)	5 (0.10%)	11 (0.21%)	-	-	-	-	-	-
-8	-	468 (6.69%)	8 (0.13%)	174 (2.90%)	36 (0.69%)	26 (0.38%)	-	-	-	-	-	-
-9	5 (0.07%)	565 (8.08%)	49 (0.82%)	243 (4.06%)	121 (2.35%)	38 (0.58%)	-	-	2 (0.05%)	-	6 (0.15%)	-

In figura 25, è mostrata l'entità delle collisioni per il modello IDM vincolato, in termini di distance gap negativo.



**Fig. 25:** Massimo distance gap negativo lungo il plotone al variare del tasso di decelerazione del leader, per il modello IDM. Ogni punto identifica il massimo distance gap negativo all'interno del plotone (collisioni); in verde sono rappresentate le collisioni per il disturbo D1; in blu le collisioni per il disturbo D2. Sono riportate tutte le collisioni avvenute all'interno del plotone indipendentemente dalla velocità di equilibrio.

L'analisi dettagliata di questi plotoni porta ad un risultato di rilievo; infatti, nei plotoni in cui si verifica una collisione, quest'ultima si verifica sempre tra il veicolo #1 e il veicolo #2, in quanto il veicolo #2 a seguito dell'introduzione del vincolo non può più frenare imponendo alte decelerazioni e quindi non è più in grado di mantenere una distanza di sicurezza dal veicolo che precede. Per questo motivo si può affermare che le collisioni sono dovute alla sola introduzione del vincolo e non alla metastabilità del plotone. Possiamo definirla come *metastabilità fisica* alla stessa stregua dell'instabilità fisica definita nel paragrafo 3.2, in quanto dovuta a decelerazioni finite imposte dal vincolo.

Dalla figura 25 si nota infatti che tutti i crash registrati con il modello IDM si verificano quando l'intensità del disturbo è maggiore di  $-5 \text{ m/s}^2$ . Dalla stessa figura si evince come la gravità dell'impatto sia in generale maggiore con un disturbo di intensità maggiore; inoltre, si evince una numerosità maggiore quando viene introdotto all'interno del plotone la tipologia di disturbo D2. La stessa analisi è stata effettuata anche sui plotoni omogenei instabili lineari. Si sono studiati quindi questi plotoni già instabili in campo lineare, soggetti a disturbi in campo non lineare, ottenendo il medesimo risultato ottenuto per i plotoni metastabili e riportato in tabella 9; ossia l'assenza di collisioni nei modelli IDM e di Gipps, mentre vi sono collisioni nelle rispettive versioni vincolate.

**Tabella 9:** Percentuale di plotoni con collisioni per plotoni  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente instabili. IDM vincolato Vs Gipps vincolato.

Lead. decel. rate [m/s <sup>2</sup> ]	IDM Vincolato						GIPPS Vincolato					
	Veq = 20 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile 1198; 15%)		Veq = 15 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile: 2203; 27%)		Veq = 10 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile: 3042; 13%)		Veq = 20 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile 750; 9%)		Veq = 15 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile:878; 11%)		Veq = 10 m/s (#L <sub>∞</sub> lin. instabile: 1204; 15%)	
	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2	D1	D2
-0.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	-	-	-	1 (0.04%)	-	-	-	-	-	-	-	-
-6	-	30 (2.50%)	-	31 (1.40%)	-	5 (0.20%)	-	-	-	-	-	-
-7	-	94 (7.84%)	-	96 (4.36%)	-	26 (0.85%)	-	-	-	-	-	-
-8	-	184 (15.36%)	2 (0.09%)	158 (7.17%)	5 (0.20%)	45 (1.48%)	-	-	-	-	-	-
-9	-	287(23.96%)	26 (1.18%)	201 (9.12%)	46 (1.51%)	58 (1.91%)	-	-	-	-	-	-

Allo stesso modo di quanto accaduto per i plotoni metastabili le collisioni sono solo frutto dell'introduzione del vincolo e non di una amplificazione del disturbo lungo il plotone. Si può quindi concludere che l'instabilità e la metastabilità non sono condizioni necessarie e sufficienti per la generazione di collisioni tra veicoli, e che queste dipendono esclusivamente da altri fattori non legati alla metastabilità, quali ad esempio distrazione dei conducenti o errori di percezione da parte dei sensori di veicoli a guida automatizzata.

## 4. CONCLUSIONI

---

Il lavoro descritto in questa tesi aveva lo scopo di studiare il fenomeno della stabilità di stringa in campo non lineare e definire la proprietà di metastabilità. I risultati ottenuti mostrano che è necessario svolgere uno studio in campo non lineare per definire la proprietà di stabilità di stringa di un modello (figura 16).

L'analisi in campo non lineare è stata svolta su due modelli di car-following ben noti e ampiamente utilizzati in letteratura, ossia il modello IDM e il modello di Gipps. La scelta ricade su dei modelli di car following in quanto è stato dimostrato quanto questi modelli siano più accurati nel descrivere le dinamiche dei veicoli, rispetto ai classici controllori lineari ampiamente utilizzati come ACC (He et al. 2022).

Nell'analisi lineare il modello è linearizzato intorno al punto di equilibrio, per cui man mano che ci si allontana da tale punto il risultato ottenuto è sempre meno preciso. Le dinamiche in gioco sono non lineari, per cui è necessario studiare il fenomeno considerando disturbi nel campo non lineare; non è possibile quindi studiare in maniera esaustiva il fenomeno con uno studio lineare, in quanto vi è l'ipotesi di piccoli disturbi, e il modello linearizzato.

L'analisi non lineare ha evidenziato una differenza di comportamento tra il modello linearizzato e originale, risultato del tutto generale e applicabile a qualsiasi modello di car-following o ACC. Il risultato evidenzia la necessità di condurre lo studio della stabilità di stringa in campo non lineare, tenendo conto sia di modelli non lineari che di disturbi nel campo non lineare, come le brusche decelerazioni che si sperimentano alla guida, ad esempio in caso di frenate di emergenza.

È stato definito quindi un framework metodologico per lo studio della stabilità in campo non lineare, applicabile a qualsiasi tipologia di modello e in grado di definire la proprietà di metastabilità del modello stesso, e utile per uno studio di sicurezza del traffico. Il framework dà inoltre, la possibilità di studiare svariate dinamiche legate alle diverse tipologie del profilo del disturbo e alle diverse distribuzioni con cui sono distribuiti i parametri dei modelli. Ipotizzare diverse distribuzioni dei parametri permette di studiare il fenomeno ipotizzando anche diverse condizioni di guida.

Dallo studio sia in campo lineare che in campo non lineare si è evinto che la  $v_{eq}$  è un parametro fortemente impattante sulla stabilità in entrambi i campi, e di conseguenza anche sulla metastabilità. In particolare, si è riscontrato che un aumento della velocità di equilibrio comporta una riduzione di plotoni con comportamento metastabile. Si è ottenuta una percentuale di plotoni stabili linearmente al variare della velocità di equilibrio; quindi, anche una probabilità di ottenere stabilità ad una data  $v_{eq}$ .

In particolare, per il modello di Gipps si è scoperto che la stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  e la stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  all'aumentare della velocità di equilibrio hanno andamenti opposti (figura 13). Inoltre, il modello di Gipps risulta essere sempre stabile per basse  $v_{eq}$ , se l'analisi lineare è condotta secondo il metodo classico adottato nella teoria del traffico (stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$ ). Si è definita quindi una soglia per la  $v_{eq}$  al di sotto della quale si ha sempre un comportamento stabile del plotone.

Si è dimostrata l'esistenza della regione di metastabilità per i modelli IDM, già in parte studiata da Treiber (2013) e di Gipps; ossia la zona di valori dei parametri in cui i modelli hanno un comportamento instabile in seguito all'applicazione di disturbi non-lineari, eventualmente causando collisioni. In

particolare, per il modello di Gipps sono stati ottenuti risultati del tutto originali e mai ottenuti in letteratura.

È stato possibile definire una soglia oltre la quale il plotone diventa metastabile e oltre la quale il modello linearizzato non è più in grado di fornire una risposta adeguata del fenomeno, restituendo di fatto un giudizio di stabilità del tutto errato.

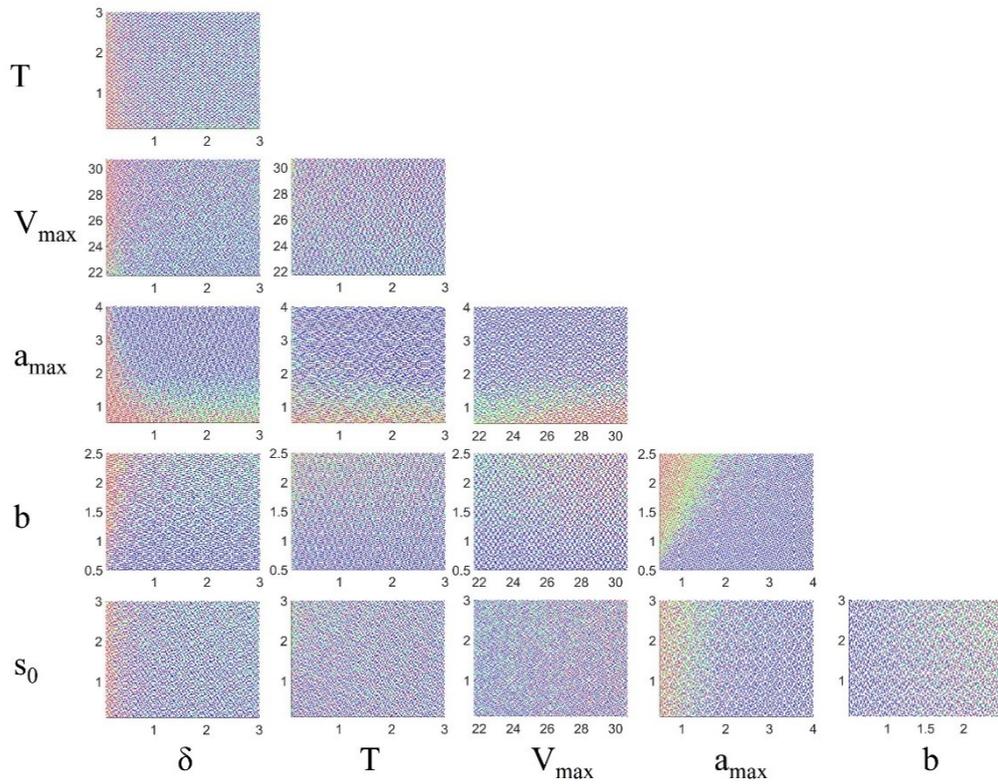
L'analisi di stabilità lineare nei modelli di car-following si basa sulla relazione di Wilson, si veda (Treiber 2011, Wilson 2013), ossia come spiegato da Montanino e Punzo sulla stabilità  $\mathcal{L}_2$ . Tuttavia, si è mostrato che condurre una analisi  $\mathcal{L}_\infty$  di stabilità lineare, è più appropriato, in quanto essendo più restrittiva si ha la certezza di non includere nell'analisi plotoni che sono dei falsi linearmente stabili. Ciò trova conferma nel confronto tra le tabelle 4 e 5 e le tabelle 6 e 7, in cui si evidenzia una percentuale di plotoni metastabili per disturbi di piccola intensità, che sono  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili, di 10 o più volte maggiore rispetto a quelle ottenute partendo da plotoni che sono  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente stabili. Tutti i plotoni che diventano metastabili per disturbi di piccola intensità e che sono  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili, sono in realtà linearmente instabili. Infatti, a seguito dell'analisi non lineare è bastato introdurre un disturbo di piccola entità, che possiamo ritenere lineare, per rendere il plotone metastabile. È ancora più evidente se si osserva la figura 23, in cui la maggioranza dei punti in verde nella figura in basso, ossia i plotoni che diventano metastabili per disturbi di piccola intensità e che sono  $\mathcal{L}_2$  linearmente stabili, sono colorati in rosso nella figura in alto, il che indica che il plotone è  $\mathcal{L}_\infty$  linearmente instabile.

Nel confronto tra i due modelli emerge che il modello di Gipps risulta essere più stabile rispetto al modello IDM; infatti, per una velocità di equilibrio 20 m/s il modello di Gipps non presenta alcun plotone metastabile. Inoltre, il modello di Gipps non è mai metastabile a meno che non si introduca un disturbo di intensità maggiore o superiore a 7 m/s<sup>2</sup> (tabella 6), al contrario di quanto accade per il modello IDM in cui si ha un comportamento metastabile anche per disturbi di 0.1 m/s<sup>2</sup> (tabella 4).

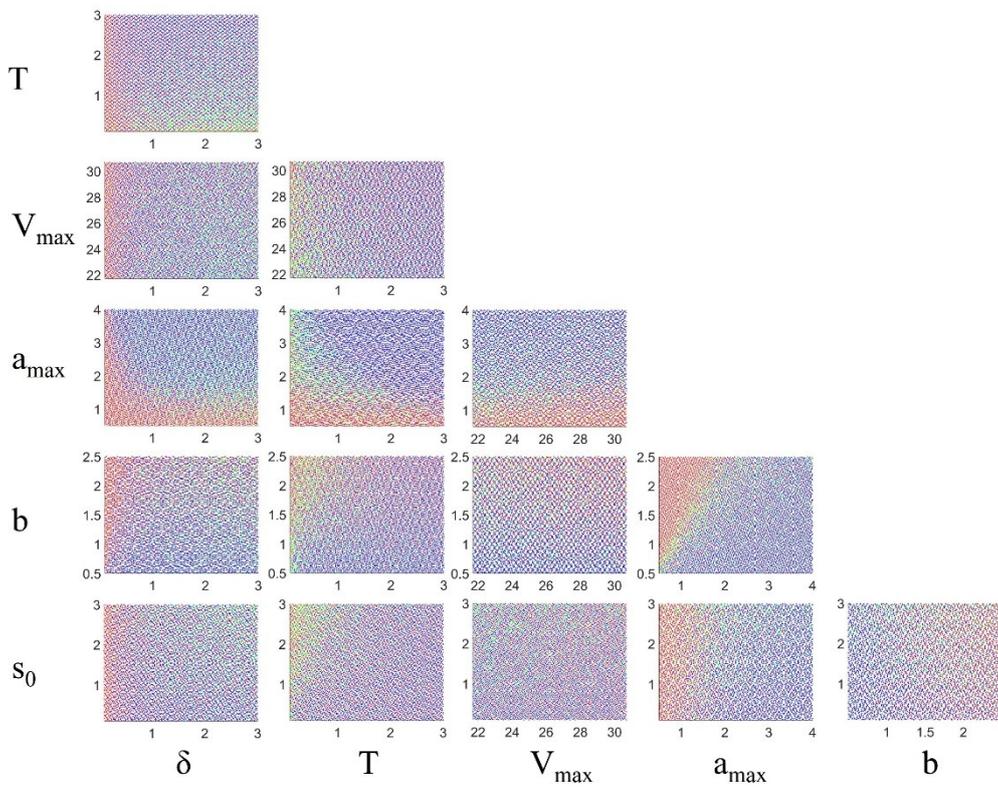
L'instabilità e la metastabilità nei due modelli studiati non generano collisioni nei plotoni. Queste ultime sono dovute esclusivamente all'introduzione di una soglia sulla decelerazione che non permette al modello di restituire valori irrealistici della decelerazione. Questo risultato indica che la metastabilità nel modello IDM e di Gipps non è una proprietà tale da indurre delle collisioni tra i veicoli del plotone a meno che non venga appunto introdotto un vincolo sulla massima decelerazione restituita dal modello (IDM vincolato e Gipps vincolato). Per cui le collisioni sono riconducibili a fenomeni in cui vi è l'impossibilità di frenare con un tasso di decelerazione estremamente alto o legate a fattori umani, quale ad esempio distrazione del guidatore, o errori di percezione della sensoristica a bordo dei veicoli. Stesso analogo risultato si è ottenuto analizzando in campo non lineare i plotoni linearmente instabili, quindi quei plotoni che sono instabili per disturbi di intensità piccola (minore di -0.1 m/s<sup>2</sup>) e continuano ad esserlo anche in campo non lineare, quando i disturbi aumentano di intensità. In conclusione, si è dimostrato che i modelli studiati non possono essere utilizzati per lo studio di sicurezza del traffico, in quanto questi sia in campo lineare che in campo non lineare non producono crash al contrario di quel che accade nella realtà. È stato quindi dimostrato che tali modelli sono crash-free non solo in campo lineare ma anche in campo non lineare.

È stato infine fornito un approccio metodologico da seguire ogni qualvolta si volesse utilizzare un modello di car-following per l'analisi di sicurezza del traffico.

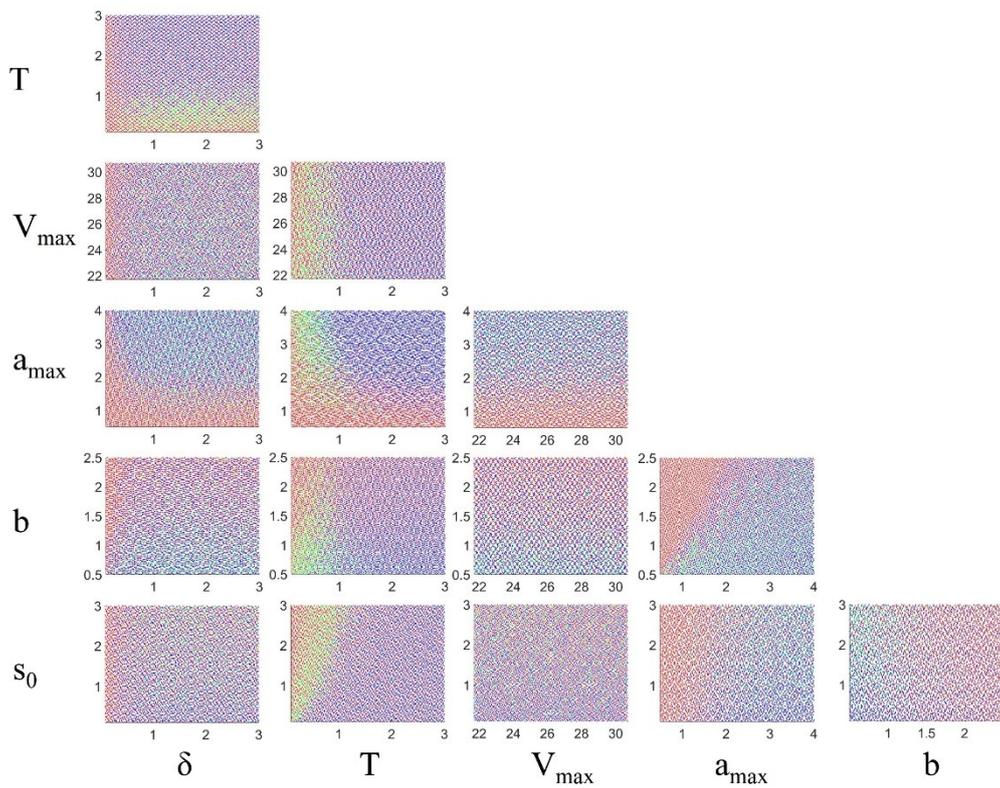
## 5. APPENDICE



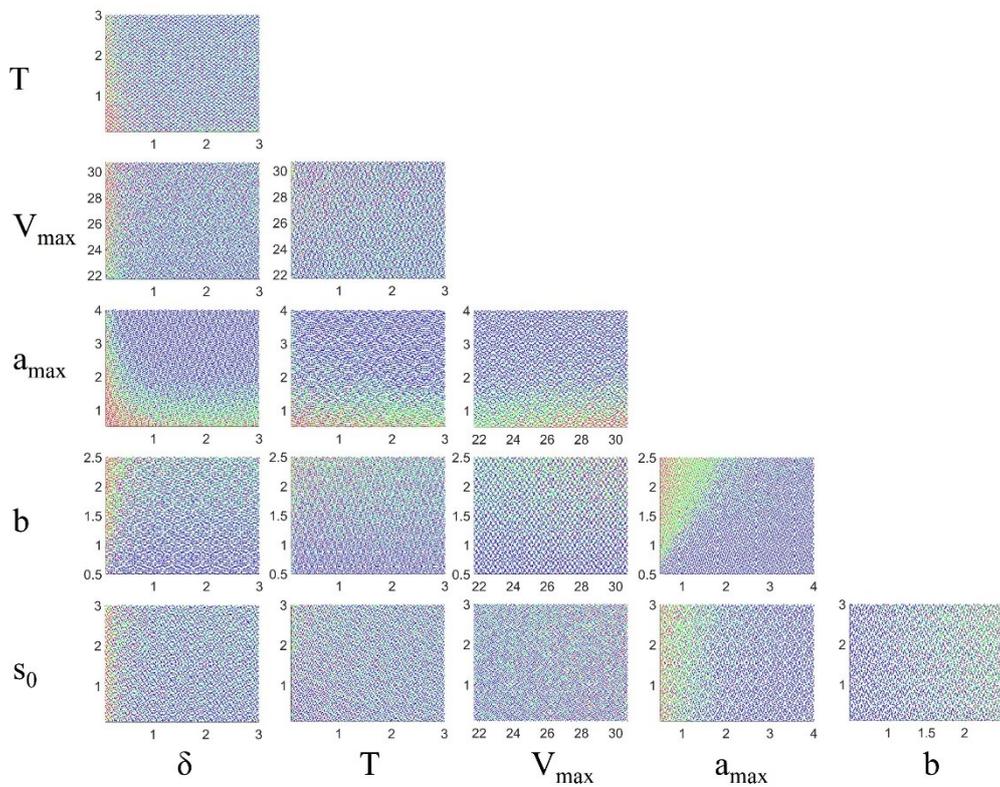
**Fig. A1:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per l'IDM con  $v_{eq} = 20$  m/s.



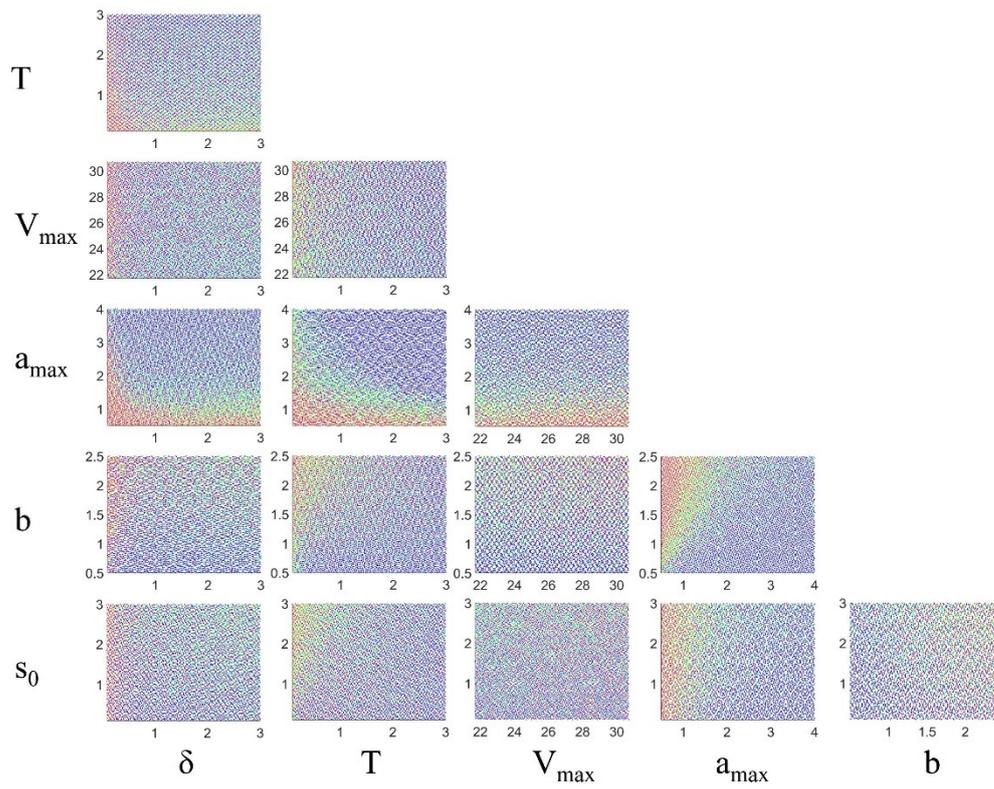
**Fig. A2:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per l'IDM con  $v_{eq} = 15$  m/s.



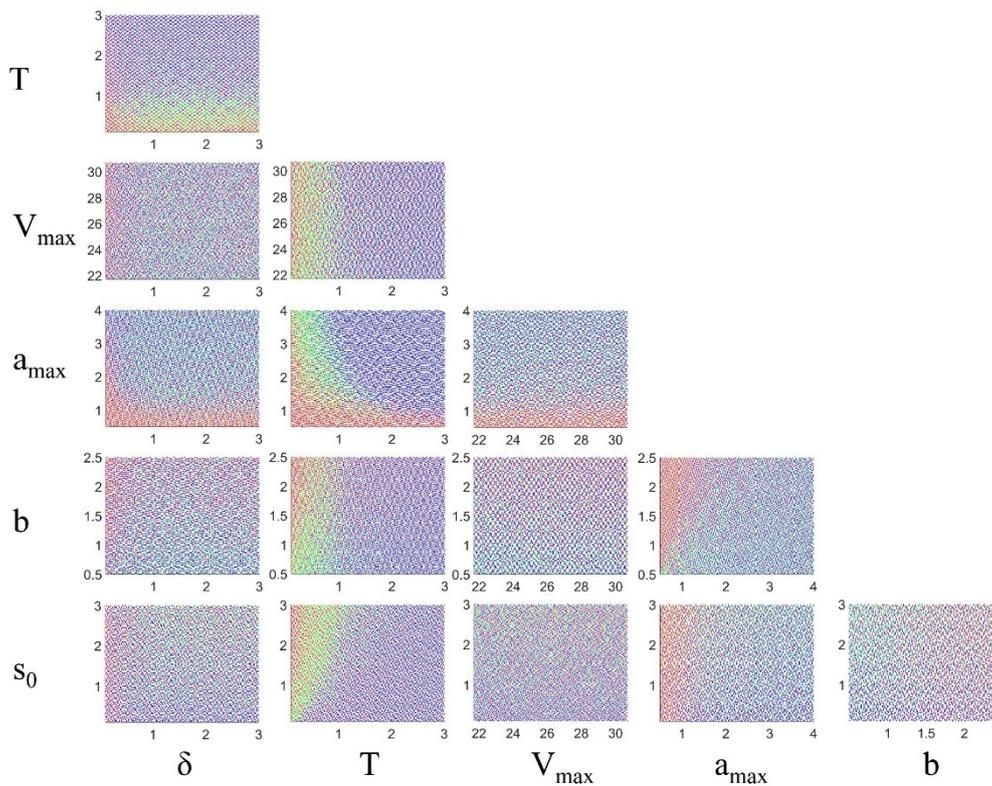
**Fig. A3:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per l'IDM con  $v_{eq} = 10$  m/s.



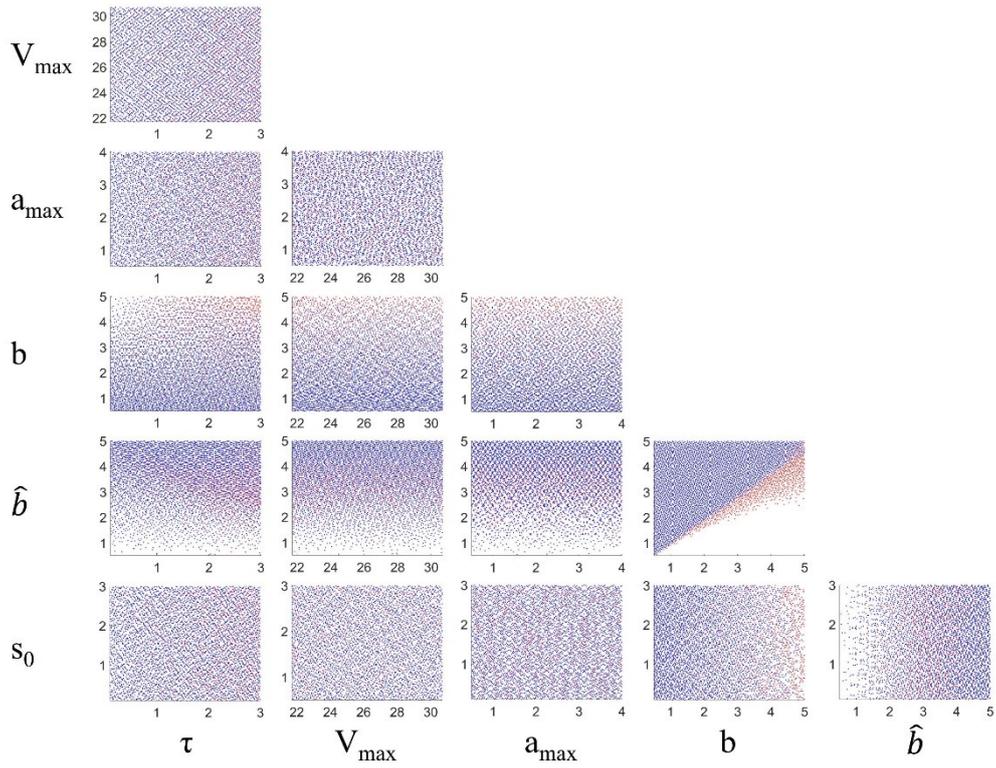
**Fig. A4:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per l'IDM con  $v_{eq} = 20$  m/s.



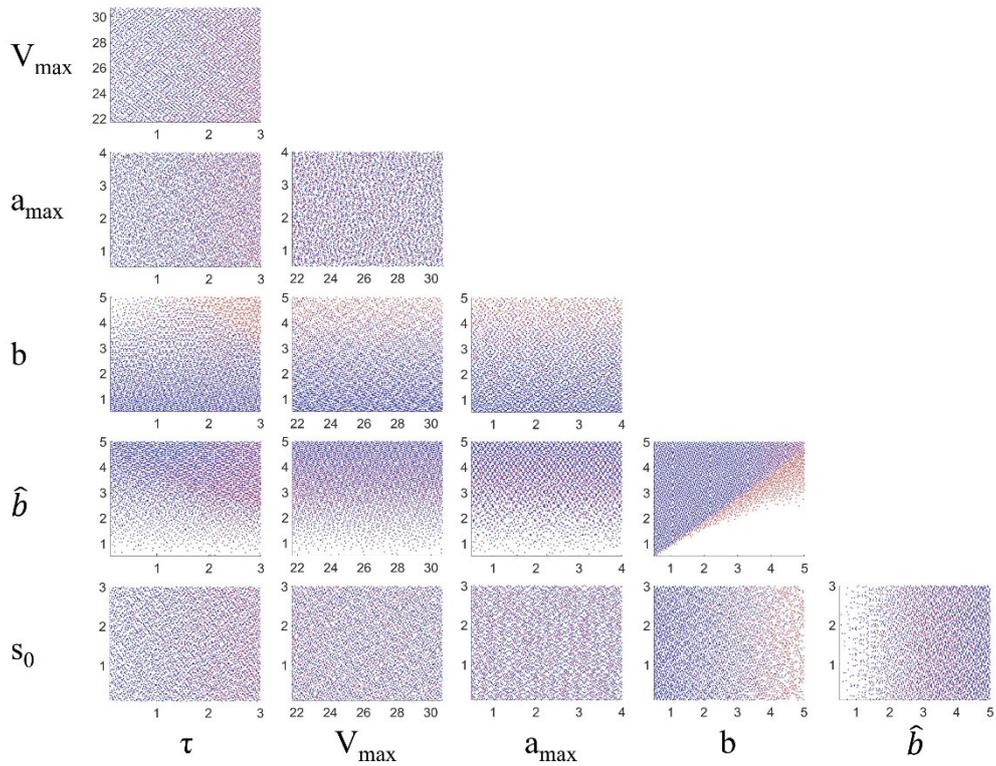
**Fig. A5:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per l'IDM con  $v_{eq} = 15$  m/s.



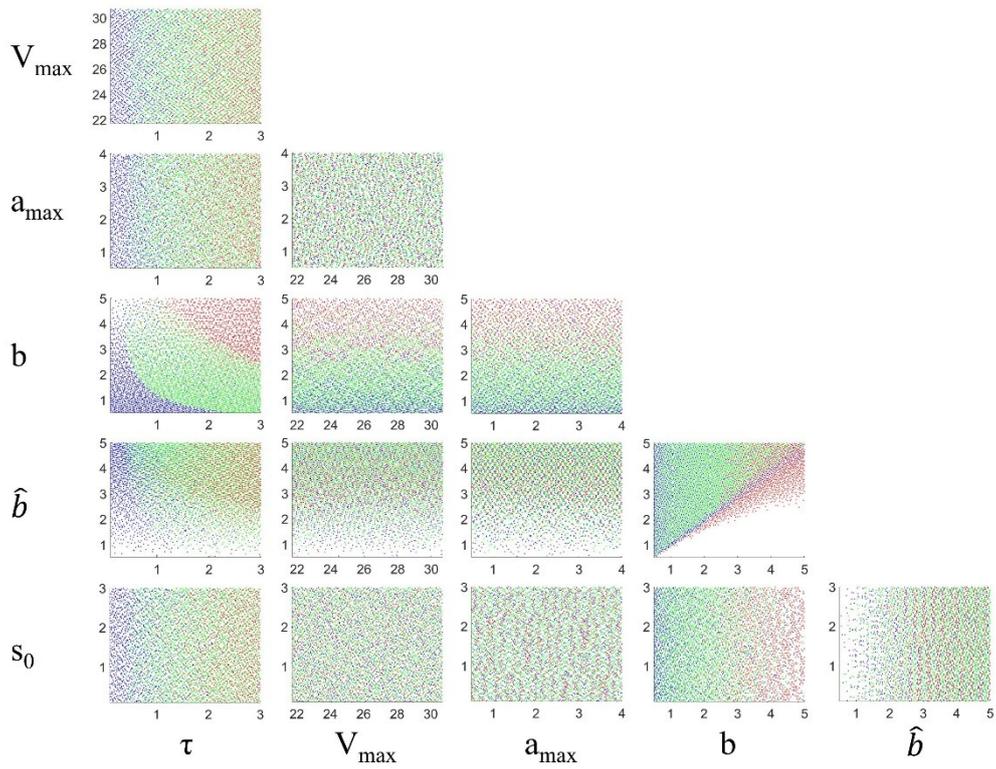
**Fig. A6:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per l'IDM con  $v_{eq} = 10$  m/s.



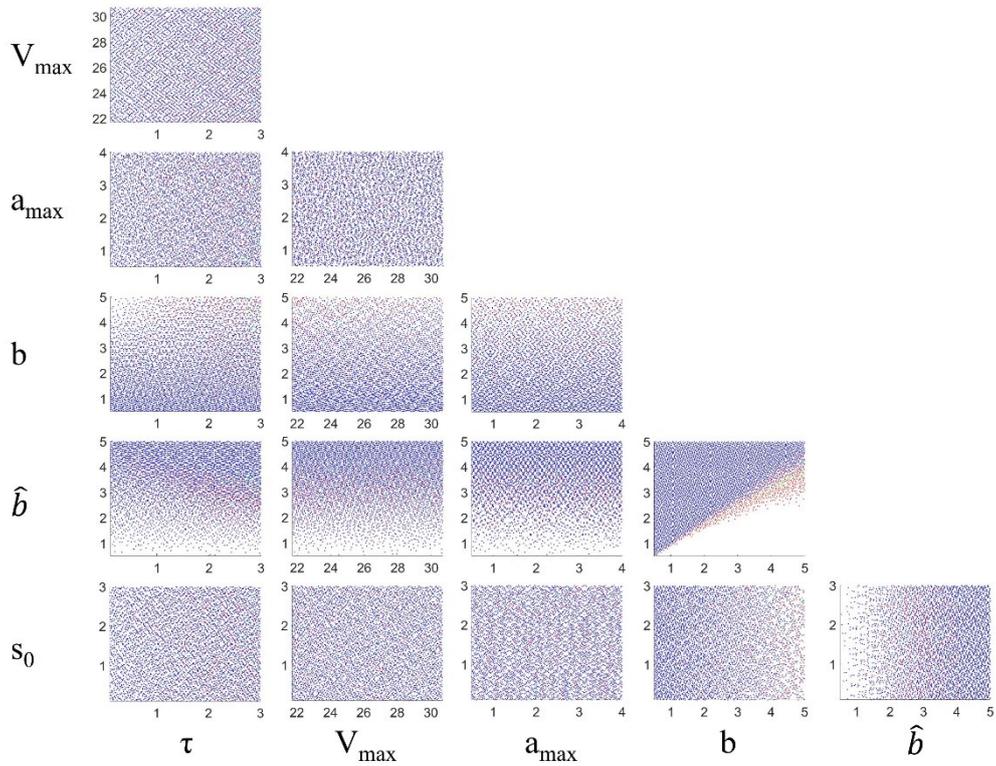
**Fig. A7:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per il modello di Gipps con  $v_{eq}=20$  m/s.



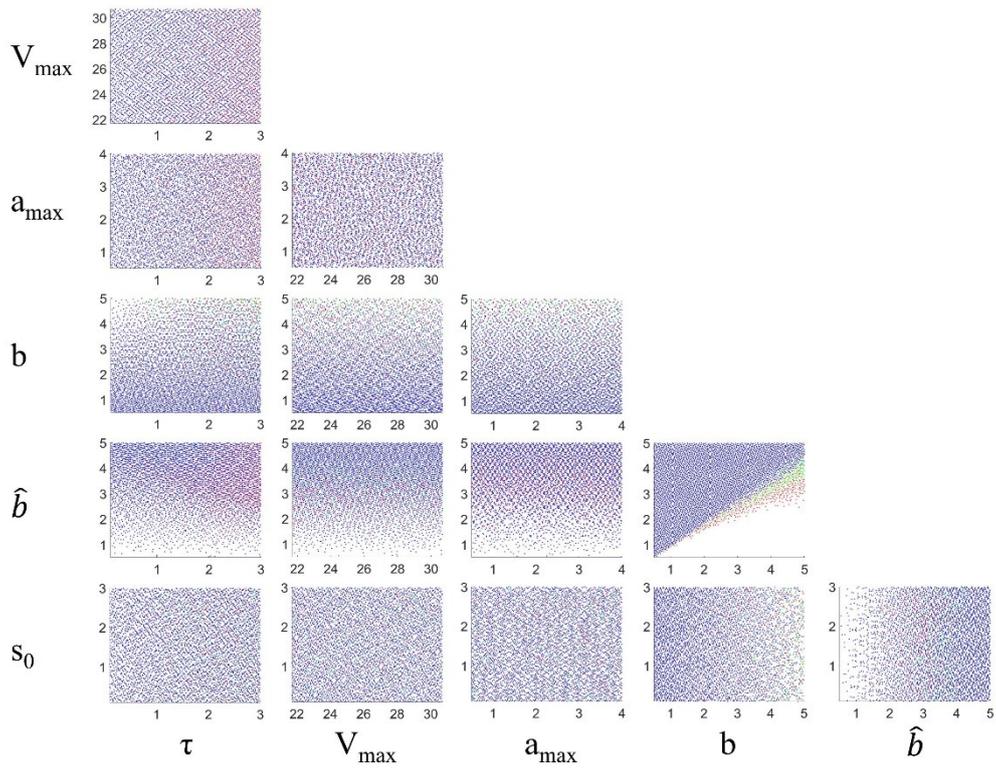
**Fig. A8:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per il modello di Gipps con  $v_{eq}=15$  m/s.



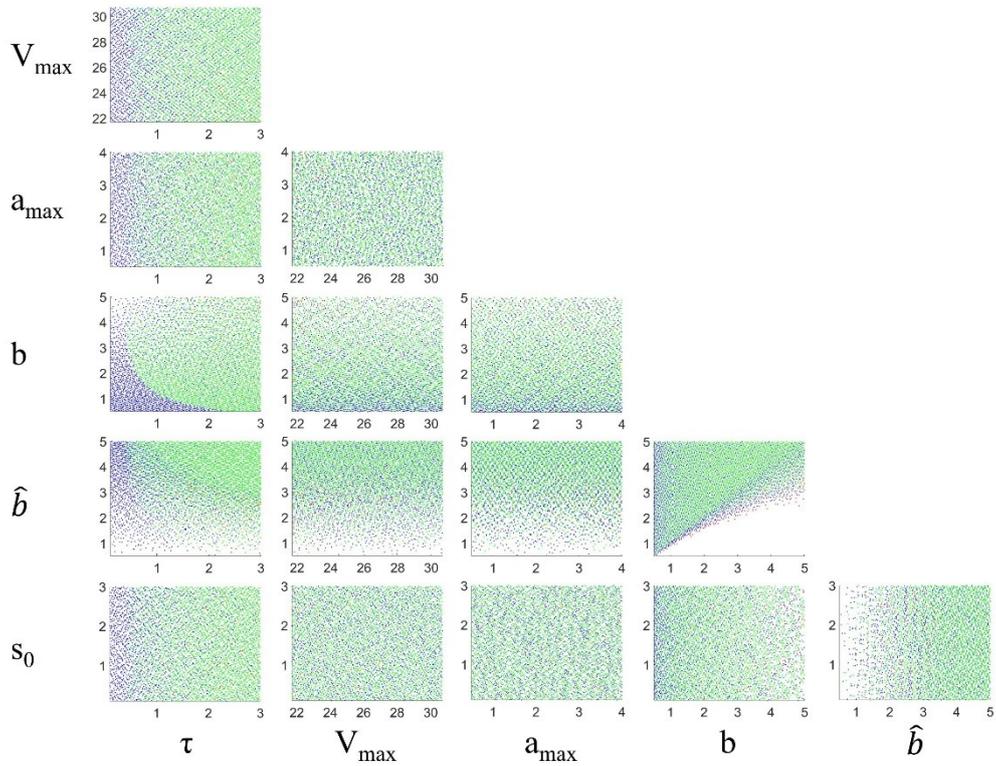
**Fig. A9:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_\infty$  per il modello di Gipps con  $v_{eq} = 10$  m/s.



**Fig. A10:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per il modello di Gipps con  $v_{eq} = 20$  m/s.



**Fig. A11:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per il modello di Gipps con  $v_{eq} = 15$  m/s.



**Fig. A12:** Diagramma di stabilità lineare  $\mathcal{L}_2$  per il modello di Gipps con  $v_{eq} = 10$  m/s.

## 6. BIBLIOGRAFIA

---

- Ahmed, K., I. - 1999 - Modeling Driver's Acceleration and Lane Changing Behavior - PhD Thesis
- Andersen, G., J., Sauer, C., W. - 2007 - Optical Information for Car Following: The driving by Visual Angle (DVA) Model - Human Factors – Vol 49 – No. 5 – p. 878-896.
- Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., Sugiyama, Y. - 1995- Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation - Physical Review E – Vol. 51 – Issue 2 – p. 1035-1042.
- Bender, J., G., Fenton, R., E. - 1969 - A study of an automatic car-following - IEE Transaction Vehicular Technology – Vol. 18 – No. 3 - p. 134-140.
- Boer, E., E. - 1999 - Car following from the driver's perspective - Transportation Research Part F: Traffic psychology and Behaviour – Vol. 2 – Issue 2 – p. 201-206.
- Ciuffo, B., Mattas, K., Makridis, M., Albano, G., Anesiadou, A., He, Y., Josvai, S. Komnos, D., Pataki, M., Vass, S., Szalay, Z. – 2021 -Requiem on the positive effects of commercial adaptive cruise control on motorway traffic and recommendations for future automated driving systems - Transportation Research Part C: Emerging Technologies – Vol. 130 – 103305.
- Chandler, R., E., Herman, R., Montroll, E., W. - 1958 - Traffic Dynamics: Studies in Car Following - Operation Research – Vol. 6 – No. 2– p. 165-184.
- Chaudhari, A., A., Srinivasan, K., K., Chilukuri, B., R., Treiber, M., Okhrin, O. - 2022 – Calibrating Wiedemann-99 Model Parameters to Trajectory Data of Mixed Vehicular Traffic - Transportation Research Record – Vol. 2676 – Issue 1 – p. 718-735.
- Darbha, S., Rajagopal, K., R., Tyagi, V. - 2008 - A review of mathematical models for the flow of traffic and some recent results - Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Application – Vol.69 – Issue 3 - p. 950-970.
- Farnam, A., Sarlette, A. - 2019 - About string stability of a vehicle chain with unidirectional controller - European Journal of Control. – Vol. 50 – p. 138-144.
- Fritzsche, H., - 1994 - A model for traffic simulation - Traffic Engineering and Control - Vol. 35– p. 317–321.
- Gazis, D., C., Herman, R., Rothery, R., W. – 1961 - Nonlinear Follow-the-Leader Models of Traffic Flow - Operations Research - 9(4): 545-567.
- Ge, H., X., Cheng, R., J., Dai, S.Q. - 2011 - KdV and Kink-Antikink solitons in an extended car-following model – Physica A: Statistical Mechanics and its Applications – Vol. 364 – Issue 3-4 – p.466-476.
- Goñi-Ros, B., Schakel, W., J., Papacharalampous, A., E., Wang, M., Knoop, V., L., Sakata, I., van Arem, B., Hoogendoorn, S., P. - Using advanced adaptive cruise control systems to reduce congestion at sags: An evaluation based on microscopic traffic simulation - Transportation Research Part C: Emerging Technologies – Vol. 102 – p. 411-426.

- Ge, H., K., Dai, S., Q., Dong, L., Y., Xue, Y. - 2004 - Stabilization effect of traffic flow in an extended car-following model based on an intelligent transportation system application - Physical Review E – Vol. 70 – 066134 – p. 1-6.
- Gipps, P., G. - 1981 - A behavioural car-following model for computer simulation - Transportation Research Part B: Methodological. – Vol.15 – No 2 – p. 105-111.
- Gunter, G., Janssen, C., Barbour, W., Stern, R., E., Work, D., B. - 2020 - Model-Based String Stability of Adaptive Cruise Control Systems Using Field Data - IEEE Transactions on Intelligent Vehicle. - Vol.5 – No. 1, 90-99.
- Guo, L., Ge, P., Sun, D. - 2020 -Variable Time Headway Autonomous Emergency Braking Control Algorithm Based on Model Predictive Control - Chinese Automation Congress (CAC), Shanghai, China, 2020 - p. 1794-1798.
- He, Y., Montanino, M., Mattas, K., Punzo, V., Ciuffo, B., ‘Physics-augmented models to simulate commercial adaptive cruise control (ACC) systems’, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2022, 139, art. no. 103692.
- Helly, W. – 1959 – Simulation of bottlenecks in single-lane traffic flow - Proceedings of the Symposium on Theory of Traffic Flow, Research Laboratories, General Motors, New York – p. 207-238.
- Helbing, D., Tilch, B. – 1998 - Generalized force model of traffic dynamics - Physica Review E - 58 (1) – p. 133–138.
- Hoogendoorn, S., Hoogendoorn, R., G., Daamen, W. - 2011 - Wiedemann Revisited New Trajectory Filtering Technique and Its Implications for Car-Following - Transportation Research Record – Vol. 2260 – Issue 1 – p. 152-162.
- Jin, S., Wang, D., Huang, Z., Tao, P. - 2011 - Visual angle model for car-following theory - Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – Vol. 390 – Issue 11 – p. 1931-1940.
- Kometani, E., Sasaki, T. – 1959 - Dynamic behaviour of traffic with a nonlinear spacing-speed relationship - Proceedings of the Symposium on Theory of Traffic Flow, Research Laboratories, General Motors. New York: Elsevier – p. 105-119.
- Koutsopoulos, H., N., Farah, H. - 2012 - Latent class model for car following behaviour - Transportation Research Part B: Methodological. – Vol. 46 - Issue 5 – p. 563-578.
- Liang, C., Peng, H. – 1999 – Optimal Adaptive Cruise Control with Guaranteed String Stability – Vehicle System Dynamic – 32: 4-5 – p. 313-330.
- Marsden, G., McDonald, M., Brackstone, M. - 2001 - Towards an understanding of adaptive cruise control - Transportation Research Part C. – Vol. 9 – Issue 1 – p. 33-51.
- Monteil, J., Bourouche, M., Leith, D., J. – 2019 –  $L_2$  and  $L_\infty$  Stability Analysis of Heterogeneous Traffic With Application to Parameter Optimization for the Control of Automated Vehicles – IEEE Transactions On Control System Technology – Vol 27 – No. 3 – p. 934-949.
- Montanino, M., Monteil, J., Punzo, V. - 2021 - From homogeneous traffic flows  $L_p$  string stability under uncertain model parameters - Transportation Research Part B. – Vol.146 – p. 136-154.
- Montanino, M., Punzo, V. - 2021 - On string stability of a mixed and heterogeneous traffic flow: A unifying modelling framework - Transportation Research Part B. – Vol. 144 – p. 133-154.

Nagatani, T. - 1998 - Modified KdV equation for jamming transition in the continuum models of traffic - Physica A: Statistical Mechanics and its Applications – Vol. 261 – Issue 3-4 – p. 599-607.

Newell, G., F. - 2002 - A simplified car-following theory: a lower order model - Transportation Research Part B: Methodological. – Vol. 36 – Issue 3 – p. 195-205.

Ngoudy, D. - 2013 - Analytical studies on the instabilities of heterogeneous intelligent traffic flow - Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – Vol. 18- Issue 10 – p. 2699-2706.

Ntousakis, I., A., Nikolos, I., K., Papageorgiou, M. - 2015 - On Microscopic Modelling of Adaptive Cruise Control Systems - Transportation Research Procedia – Vol. 6 – p. 111-127.

Pipes, L., A. - 1953 - An operational analysis of traffic dynamics - Journal of Applied Physics – Vol. 24 – Issue 3 – p. 274-281.

Ploeg, J., Van De Wouw, N., Nijmeijer, H. - 2014 -  $L_p$  String Stability of Cascaded systems: Application to Vehicle Platooning – IEEE Transactions on Control Systems Technology – Vol 22 – No. 2 – p. 786-793.

Saifuzzaman, M., Zheng, Z. – 2014 - Incorporating human-factors in car-following models: A review of recent developments and research needs - Transportation Research Part C: Emerging Technologies – Vol. 48 – p. 379 – 403.

Shladover, S., E., Su, D., Lu, X. – 2012 – Impacts of Cooperative Adaptive Cruise Control on Freeway Traffic Flow – Transportation Research record – 2324 (1) - p. 63-70.

Sun, J., Zheng, Z., Sun, J. – 2018 - Stability analysis methods and their applicability to car-following models in conventional and connected environments - Transportation Research Part B: Methodological – Vol. 109 – p. 212-237.

Swaroop, D., Hedrick, J., K. - 1996 - String stability of interconnected systems - IEEE Transactions on Automatic Control – Vol. 41 – No. 3 – p. 349-357.

Swaroop, D., Hedrick, J., K. - 1999 - Constant Spacing Strategies for Platooning in Automated Highway systems - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control – Vol. 121 – p. 462-470.

Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D. – 2000 - Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations - Physical Review E – Vol. 62 – Issue 2 – p. 1805-1824.

Treiber, M., Kesting, A., Helbing, D. – 2006 - Delays, inaccuracies and anticipation in microscopic traffic models - Physica A: Statistical Mechanics and its Applications – Vol. 360 – Issue 1- p. 71-88.

Treiber, M., Kesting, A. - 2011 - Evidence of convective instability in congested traffic flow – TRB – Vol. 45 – Issue 9 – p. 1362-1377.

Treiber, M., Kesting, A. – 2013 -Traffic Flow Dynamic - Chapter 15 - Stability – Springer – ISBN 978-3-642-32460-4.

UNR157 - 8th session - Transport - Vehicle Regulations - UNECE Wiki

Wang, M., Daamen, W., Hoogendoorn, S., P., van Arem, B. et al. - 2014 - Rolling horizon control framework for driver assistance systems. Part I Mathematical formulation and non-cooperative systems – Transportation Research Part C: Emerging Technologies – Vol. 40 – p. 271-289.

Wang, Z., Wu, G., Barth, M., J. - 2018 - A Review on Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC) Systems: Architectures, Controls, and Applications - 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), Maui, HI, USA, 2018 - pp. 2884-2891.

Ward, J., A. - 2008 - Heterogeneity, Lane-Changing and instability in traffic: a mathematical approach – PhD Thesis.

Ward, J., A. - 2010 - instability in heterogeneous traffic - <https://www1.maths.leeds.ac.uk/~jaward/publications/JAW-Het-2010.pdf>.

Wiedemann, R. - 1974 - Simulation des StraBenverkehrsflusses - Proceedings of the Schriftenreihe des Instituts für Verkehrswesen der Universität Karlsruhe, Heft 8, Germany.

Wilson, R., E. - 2008 - Mechanism for Spatio-Temporal Pattern Formation in Highway Traffic Models - Philosophical Transaction: Mathematical, Physical and Engineering Sciences – Vol. 366 – No. 1872 – p. 2017-2032.

Wilson, R., E. - 2001 - An analysis of Gipps's car-following model of highway traffic - IMA Journal of Applied Mathematics – Vol. 66 – No. 5 – p. 509-537.

Wu, C., Xu, Z., Liu, Y., Fu, C., Li, K., Hu, M. et al. - 2020 - Spacing Policies for Adaptive Cruise Control: A Survey - IEEE Access – Vol. 8 – p. 50149-50162.

Wubing, B., Q. – 2022 - A Nonlinear Car-Following Controller Design Inspired by Human-Driving Behaviours to Increase Comfort and Enhance Safety - IEE Transactions on Vehicular Technology – Vol. 71 – No. 8 – p. 8212-8224.

Yanakiev, D., Kanellakopoulos, I. - 1995 - Variable time headway for string stability of automated heavy-duty vehicles - Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA, 1995 – Vol. 4 – p. 4077-4081.

Yang, Q., Koutsopoulos, H., N.- 1996 - A microscopic Traffic Simulator for evaluation of dynamic traffic management systems - Transportation Research Part C: Emerging Technology – Vol. 4 – Issue 3 – p. 113-129.

Xie, D., Zhao, X., He, Z. – 2019 - Heterogeneous Traffic Mixing Regular and Connected Vehicles: Modeling and Stabilization - IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems – Vol. 20 – No. 6 – p. 2060-2071.

Zhang, L., Orosz, G. - 2016 - Motif-Based Design for Connected Vehicle Systems in Presence of Systems, Heterogeneous Connectivity Structures and Time Delays - IEEE Transactions on Intelligent Transportation System – Vol. 17 – No. 6 – p. 1638-1651.

<https://www.mitsubishimotors.com/en/corporate/pressrelease/corporate/detail429.html#:~:text=3.,Preview%20Distance%20Control&text=In%20addition%20to%20its%20cruise,close%20to%20the%20one%20ahead.>

<https://www.istat.it/it/archivio/275554>

## 7. RINGRAZIAMENTI

---

Giunto al termine di questo percorso desidero esprimere il mio più sincero ringraziamento alla mia famiglia, che mi ha sostenuto e supportato durante tutto il percorso accademico che mi ha portato a scrivere questa tesi.

In particolare, desidero ringraziare i miei genitori, Giovanna e Michele, che mi hanno dato l'opportunità di studiare e mi hanno sempre incoraggiato a perseguire i miei sogni. Un ringraziamento speciale va a mia sorella, Roberta, che mi ha sempre sostenuto moralmente e mi ha aiutato in ogni momento di difficoltà. La sua presenza costante e il suo sostegno sono stati un grande supporto per me durante tutto il percorso universitario.

Ringrazio Francesca per essermi stata vicino in questi ultimi mesi, durante la stesura di questa tesi, supportandomi costantemente.

Inoltre, desidero ringraziare tutti i miei parenti, amici e conoscenti che mi hanno sostenuto e incoraggiato lungo il percorso. Il loro supporto morale e le loro parole di incoraggiamento sono stati sempre un'importante fonte di motivazione per me.

Infine, un ringraziamento speciale al professore Vincenzo Punzo, e l'ingegnere Marcello Montanino, che mi hanno accolto nel loro gruppo di ricerca. In questi tre anni il vostro sostegno e insegnamento professionale e personale hanno significato molto per me, e sicuramente porterò con me le esperienze e le conoscenze acquisite. Grazie ancora per avermi dato l'opportunità di crescere e di arricchirmi sia sotto l'aspetto professionale che personale.

Grazie ancora a tutti coloro che mi sono stati vicini, la vostra presenza è stata fondamentale per la realizzazione di questo importante traguardo.