

Università degli Studi di Napoli Federico II  
Facoltà di Ingegneria

---

---

Francesco Fabbrocino

*Una proposta di Metodi di Analisi Modale Non Lineare per  
Sistemi Strutturali*

Tesi di Dottorato  
Ciclo XIX



2006

---

---

**Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Costruzioni**



*A mio padre,  
che ha sempre creduto in me  
e continua a darmi forza.*



## RINGRAZIAMENTI

Ringrazio i proff. Mario Pasquino e Giovanni Celentano per la disponibilità, i consigli e l'affetto che mi hanno mostrato durante l'elaborazione della mia tesi di dottorato.

Napoli, 24-10-2006



## INDICE

<b>Sommario .....</b>	<b>5</b>
<b>Capitolo 1 – Analisi Modale .....</b>	<b>9</b>
1.1 Introduzione.....	9
1.2 Analisi modale.....	9
1.3 Analisi modale sperimentale.....	10
1.4 Analisi modale non lineare (NLMA: Nonlinear Modal Analysis).....	37
1.5 Funzioni di risposta in frequenza non lineare (NLFRF: Nonlinear Frequency Response Functions).....	38
1.6 Identificazione dei sistemi non lineari.....	41
1.7 I metodi “Dominio di Frequenza” e “Dominio del Tempo” a confronto .....	45
1.8 Coordinate fisiche e coordinate modali a confronto.....	47
1.9 Osservazioni sull’armonica higher-order .....	48
1.10 Obiettivi della Tesi .....	49
<b>Capitolo 2 – Il Metodo della Funzione Descrittiva .....</b>	<b>51</b>
2.1 Il metodo della funzione descrittiva (DFM, describing function method).....	51
2.2 Modi normali non lineari (NNMs, Nonlinear Normal Modes) .....	51
2.3 Identificazione di sistemi non lineari.....	51
2.4 Metodo di equilibrio armonico (HBM, Harmonic Balance Method) 53	
<b>Capitolo 3 - La formulazione non lineare .....</b>	<b>55</b>
3.1 Introduzione.....	55
3.2 Formulazione dei coefficienti non lineari attraverso il metodo della funzione descrittiva (DFM).....	56
3.2.1 Funzione descrittiva per rigidità volumetrica.....	58
3.2.2 Elementi non-grounded di rigidità volumetrica .....	61
3.2.3 Funzione descrittiva per smorzamento per attrito .....	63
3.2.4 Elementi non-grounded per smorzamento per attrito .....	67
3.3 Il vettore non lineare (NLV) e la matrice non lineare (NLM).....	67
3.4 NL-DOF (n), regione non lineare ( $\Gamma$ ) e regione misurata $\mathfrak{R}$ .....	71
<b>Capitolo 4 - Il metodo della formulazione esplicita (EFM) di FRF non lineari per sistemi MDOF .....</b>	<b>75</b>
4.1 Introduzione.....	75
4.2 La formulazione esplicita di non linearità FRF .....	78
4.3 Metodo ottimizzato per l’ EFM per grandi sistemi .....	80
4.4 Minimizzazione di un grande insieme di equazioni non lineari .....	83
4.5 Un esempio di rigidità volumetrica – Test ring n. 1.....	86
4.6 Un esempio di smorzamento per attrito - Test ring n. 2.....	94

4.7	Conferma sperimentale del metodo EFM ottimizzato .....	95
<b>Capitolo 5 – Il metodo della formulazione esplicita inverso (R-EFM): un metodo di identificazione .....</b>		<b>101</b>
5.1	Introduzione.....	101
5.2	Fase I: pre-processing.....	104
5.3	Fase II: rilevazione dei NL-DOF .....	104
5.4	Fase II: rilevazione del meccanismo non lineare.....	107
5.5	Fase III: riduzione.....	110
5.6	Fase IV: quantificazione.....	111
5.7	Fase V: Rigenerazione.....	113
5.8	Il caso analizzato per il metodo della REF esemplificata.....	114
5.9	Test N. 3: pre-processing (fase I) .....	115
5.10	Test N. 3: rilevazione delle NL-DOF (fase II) .....	115
5.11	Test N. 3: rilevazione del meccanismo non lineare (fase II) .....	117
5.12	Test N. 3: riduzione (fase III).....	118
5.13	Test N. 3: quantificazione (fase IV) .....	119
5.14	Test N. 3: rigenerazione (fase V) .....	121
<b>Capitolo 6 – Un metodo modale ibrido (HMM) per la formulazione di FRF non lineari in sistemi MDOF .....</b>		<b>125</b>
6.1	Introduzione.....	125
6.2	Analisi modale lineare tradizionale e non lineare .....	130
6.3	Analisi modale lineare (LMA) estesa per sistemi non lineari .....	134
6.4	Lo spazio modale non lineare.....	137
6.5	Il vettore modale non lineare (NLMV).....	140
6.6	Il metodo modale ibrido (HMM).....	144
6.7	Schema di minimizzazione non lineare .....	148
6.8	Test N. 1: un esempio modale di rigidità volumetrica .....	150
6.9	Test N. 2: un esempio modale di smorzamento per attrito .....	156
<b>Capitolo 7 – Derivazione analitica dei parametri modali NL mediante un metodo di approssimazione veloce (FAM) .....</b>		<b>163</b>
7.1	Introduzione.....	163
7.2	Calcolo con FAT degli autovalori non lineari.....	165
7.3	Il calcolo degli autovettori non lineari con FAM .....	169
7.4	Applicazione del metodo FAM .....	173
7.4.1	I parametri modali NL per il test n. 1 .....	173
7.4.2	Parametri modali NL per il test n. 2 .....	174
<b>Capitolo 8 – Il metodo HMM inverso (R-HMM) per l'identificazione di sistemi strutturali .....</b>		<b>188</b>
8.1	Introduzione.....	188
8.2	Fase I: pre-processing dei dati .....	189
8.3	Fase II: estrazione del NLMV .....	191

8.4	Fase facoltativa: riconciliazione .....	195
8.5	Fase III: rilevamento del meccanismo non lineare .....	197
8.6	Fase IV: grado di non linearità in un modo non lineare .....	199
8.7	Fase V: trasformazione verso i parametri modali NL mediante la FAM .....	203
8.8	Fase VI: quantificazione del sistema attraverso polinomi .....	206
8.9	Fase VII: rigenerazione e predizione .....	209
8.10	Fase VIII: rilevazione dei NL-DOF .....	210
8.11	Test n. 3: pre-processing dei dati (Fase I) .....	215
8.11.1	Test n. 3: estrazione del NLMV (fase II) .....	216
8.11.2	Test n. 3: rilevazione del meccanismo non lineare (fase III) .....	218
8.11.3	Test n. 3: grado di non linearità in un modo non lineare (fase IV) ..	218
8.11.4	Test n. 3: trasformazione ai parametri modali NL con il metodo del FAM (fase V) .....	219
<b>Capitolo 9 – Conclusioni .....</b>		<b>235</b>
<b>Bibliografia .....</b>		<b>238</b>
<b>Appendice .....</b>		<b>243</b>
Appendix A - Sample Test ring n. 1 and n. 2 .....		244
Appendix B - Test ring n. 3 .....		250



## Sommario

In questo lavoro sono presentati due metodi di analisi modale non lineare di sistemi strutturali nel campo dell'ingegneria.

L'obiettivo generale è quello di rilevare, localizzare, identificare e quantificare le non linearità in grandi sistemi, attraverso funzioni di risposta in frequenza (FRF: *Frequency Response Functions*). I metodi sono presentati attraverso l'analisi di un sistema teorico generico. I concetti sono riproposti seguendo un approccio inverso al fine di ottenere un'identificazione non lineare dei sistemi.

Le formulazioni non lineari descritte in questo lavoro si basano su funzioni del primo ordine, le quali rappresentano le non linearità attraverso i coefficienti che sono funzione dell'ampiezza.

A causa della mancanza di sufficienti prove sperimentali, lo studio si è occupato solo di non linearità per rigidità (*stiffness*) volumetrica e di smorzamento per attrito (*damping*). Si può ampliare il concetto ad altri tipi di non linearità, data la generalità degli sviluppi.

Il primo metodo presentato, denominato "metodo formulazione esplicita" o EFM (*Explicit Formula Method*), viene sviluppato nel dominio fisico. Tale tecnica opera sui coefficienti fisici che fanno parte delle matrici di sistema, da cui il termine "esplicita", che producono la FRF non lineare di un DOF dato in forma chiusa, senza tener conto della reale dimensione del sistema. È stata sviluppata anche una versione ottimizzata di tale metodo a partire da misure reali ottenute da un *test rig*, ed è stato osservato che il comportamento non lineare viene calcolato con ragionevole accuratezza..

Il percorso inverso del "metodo della formulazione esplicita" o R-EFM (*Reverse Explicit Formula Method*), si implementa come strumento di identificazione non

lineare. Nonostante gli ottimi risultati, si è giunti alla conclusione che il costo computazionale del presente approccio è troppo alto per essere applicato in modo pratico. Inoltre, il metodo fornisce un gran numero di *bridge* tra un modello teorico *full-size* ed il numero relativamente piccolo di misure sperimentali disponibili.

Il secondo metodo è denominato “metodo modale ibrido” (HMM - *Hybrid Modal Method*). Si basa su uno sviluppo modale non lineare che risulta analogo alle preesistenti tecniche di sovrapposizione modale non lineare. Il sistema lineare principale si esprime in coordinate modali generalizzate, mentre le non linearità si mantengono in un dominio fisico. L’uso di coordinate ibride costituisce un aspetto fondamentale grazie al quale si riesce ad ottenere una localizzazione delle non linearità.

Un percorso inverso di questo metodo, R-HMM (*Reverse Hybrid Modal Method*), incorpora l’applicazione di molte tecniche “isolate”, anche qui sviluppate, da usare in modo indipendente per affrontare i diversi aspetti dell’analisi modale non lineare. Raggruppate insieme, le singole tecniche forniscono una robusta metodologia, capace di sviluppare un’identificazione non lineare all’interno delle solite restrizioni sperimentali, mostrando così un’alta efficienza computazionale.

Il tipo di non linearità si identifica attraverso una tecnica recentemente introdotta basata sull’impronta geometrica del componente non lineare scelto. La localizzazione delle non linearità si raggiunge poi attraverso un calcolo lineare dei minimi quadrati calcolati su una regione non lineare predefinita di dimensione arbitraria. Questa tecnica fornisce una localizzazione esplicita, dato che il range di frequenza analizzato è una chiara rappresentazione del sistema.

Quando le frequenze naturali non lineari e lo smorzamento (*damping*) modale non sono particolarmente essenziali per identificare il sistema o rigenerare le risposte ad un altro livello di forza, si introduce il “metodo di veloce approssimazione” FAT

(*Fast Approximation Method*) che consente la derivazione analitica di questi parametri attraverso espressioni di recente sviluppo.



## **Capitolo 1 – Analisi Modale**

### ***1.1 Introduzione***

Il presente lavoro trae origine dallo studio di argomenti di dinamica strutturale e da interessanti lavori scientifici in materia e riportati in bibliografia.

Molti autori hanno sottolineato la necessità di una migliore comprensione degli effetti non lineari. La conoscenza accurata di questi argomenti consente di consentire e consentirà lo sviluppo di modelli matematici di strutture “ingegneristiche” non lineari.

### ***1.2 Analisi modale***

Nel campo della dinamica strutturale, l’analisi modale si può definire come un insieme di tecniche il cui principale scopo è la caratterizzazione dinamica delle strutture. Nonostante risulti utile come strumento teorico per ottenere la risposta del sistema attraverso una procedura di ricerca della radice, le sue applicazioni sono principalmente legate all’ambiente sperimentale.

L’analisi modale è un metodo che si è sviluppato in modo considerevole negli ultimi cinquant’anni, la cui tendenza si è accelerata negli ultimi dieci anni grazie agli sviluppi computazionali e di potenti strumenti di misura. Il suo successo è dovuto al semplice approccio meccanico combinato ad una base matematica, che si mette in relazione con la già sperimentata teoria analitica lineare.

Il “teorema di sovrapposizione modale” è diventato fondamentale nell’analisi dei sistemi lineari, in quanto consente di risolvere un sistema complesso come blocchi di strutture più piccole e maneggevoli. Nel campo dell’analisi modale lineare (LMA

- *Linear Modal Analysis*), questo teorema si applica spesso a un sistema a più gradi di libertà (*multi-degree-of-freedom* - MDOF) per “suddividerlo” in diversi sistemi indipendenti ad un solo grado di libertà (*single-degree-of-freedom* - SDOF), ognuno dei quali è importante per studiare il comportamento di un dato *modo* del sistema originale.

Questo approccio semplifica l’analisi dei grandi sistemi e riduce anche le equazioni da risolvere. Le risposte fisiche, infatti, sono esprimibili come somma delle risposte modali dei sistemi SDOF di cui si compone.

Teoricamente un sistema lineare presenta tanti *modi* quanti sono i DOF; in realtà il numero dei *modi* considerati si restringe al range di frequenza misurato. Solo i *modi* definiti “dominanti” possono essere sufficienti per ottenere una risposta fisica, il resto presenta effetti insignificanti. Tale procedura è nota come “troncamento modale” e i parametri che descrivono il sistema fisico nello spazio modale si chiamano “parametri modali”, cioè autovalori (*eigenvalues*) e autovettori (*eigenvectors*).

### 1.3 *Analisi modale sperimentale.*

#### Modi propri di una struttura e metodo della sovrapposizione modale.

I modi propri di una struttura, supposta discretizzata come un sistema ad  $n$  gradi di libertà, rappresentano un insieme di possibili deformate della struttura compatibili con i vincoli presenti su di essa. Essi costituiscono la soluzione del problema dinamico

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (1.1)$$

ottenuta cercando soluzioni del tipo  $\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot e^{i\omega t}$  (1.2). Sostituendo la (1.2) nella (1.1) si ottiene il problema omogeneo

$$(-\mathbf{M} \cdot \omega^2 + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (1.3)$$

che ammette soluzioni, diverse da quella nulla, se il  $\det(-\mathbf{M} \cdot \omega^2 + \mathbf{K}) = 0$

Per ogni valore  $\omega_i$ , con  $i=1..n$ , che annulla tale determinante, si trova una soluzione  $\mathbf{Y}_i$  del problema omogeneo (1.3) che costituisce un modo proprio della struttura. I valori di tale vettore sono le ampiezze di una forma di vibrare che avviene con pulsazione  $\omega_i$ . I modi propri sono linearmente indipendenti, cioè una loro combinazione lineare è nulla solo con scalari tutti nulli; inoltre essi sono ortonormali alle matrici di massa e rigidezza, ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_k &= 0 & i \neq k \\ \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{Y}_k &= 0 & i \neq k \end{aligned}$$

In particolare quest'ultima proprietà indica che i modi propri sono energeticamente disaccoppiati, cioè un sistema che vibra ad una pulsazione  $\omega_i$ , secondo un modo  $\mathbf{Y}_i$ , non possiede energia cinetica o potenziale relativa a modi diversi da quello sopra indicato.

In altre parole, l'energia totale del sistema può essere considerata come somma delle energie associate ai singoli modi propri, come se questi agissero indipendentemente, anche nel caso in cui il moto reale sia ottenuto come sovrapposizione contemporanea dei vari modi di vibrare. Su tale ipotesi si basa il metodo della sovrapposizione modale, secondo il quale la soluzione del problema dinamico

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P} \quad (1.4)$$

si può ottenere come combinazione lineare dei singoli modi propri

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n\}$$

secondo il vettore  $\mathbf{a}$ , funzione del tempo, il cui generico elemento,  $a_i(t)$ , definisce l'entità della partecipazione del modo di vibrare  $Y_i$ , nella risposta del moto reale  $X$ . Sfruttando le proprietà di ortonormalizzazione dei modi propri, e nell'ipotesi di smorzamento proporzionale ( $\mathbf{C}$  come combinazione lineare di  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , o quantomeno un caso in cui le forze viscosse sono più piccole delle forze elastiche e d'inerzia) il sistema (1.4) di  $n$  equazioni differenziali si riduce ad un sistema di  $n$  equazioni differenziali disaccoppiate, la cui singola soluzione fornisce il coefficiente  $\mathbf{a}_i(\mathbf{t})$ . Sfruttando le proprietà sopra elencate, si ottiene la  $i$ -esima equazione differenziale

$$\ddot{a}_i + \gamma_i \cdot \dot{a}_i + w_i^2 \cdot a_i = \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P} \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

per le cui soluzioni del problema omogeneo e del forzato è possibile ipotizzare soluzioni del tipo

$$\mathbf{a}_i = A_i \cdot e^{i\omega t}$$

Risolvendo il problema omogeneo si ottiene

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{t}) = e^{-2\xi_i \cdot w_i t} \cdot \left[ \left( \frac{\mathbf{a}_{i_0}}{2} - j \frac{\xi_i \cdot w_i \cdot \mathbf{a}_{i_0} + \dot{\mathbf{a}}_{i_0}}{w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}} \right) \cdot e^{j \cdot w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \cdot t} + \left( \frac{\mathbf{a}_{i_0}}{2} + j \frac{\xi_i \cdot w_i \cdot \mathbf{a}_{i_0} + \dot{\mathbf{a}}_{i_0}}{w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}} \right) \cdot e^{-j \cdot w_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \cdot t} \right]$$

$$\gamma_i = 2 \cdot \xi_i \cdot w_i$$

I valori di  $\mathbf{a}_{i_0}$  e  $\dot{\mathbf{a}}_{i_0}$  sono ricavati dalle condizioni iniziali  $\mathbf{X}_0$  e  $\mathbf{V}_0$  con le relazioni

$$\mathbf{a}_{i_0} = \mathbf{Y}_i \mathbf{M} \mathbf{X}_0; \quad \dot{\mathbf{a}}_{i_0} = \mathbf{Y}_i \mathbf{M} \mathbf{V}_0;$$

La soluzione del problema forzato è data da

$$a_i(t) = \frac{\mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P}}{(\omega_i - \omega)^2 + 2i \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Limitandosi al solo contributo del termine forzato, permanente nel tempo, si ottiene la soluzione del j-esimo grado di libertà

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{Y}_{ij} \cdot \mathbf{Y}_i^T \cdot \mathbf{P}}{(\omega_i - \omega)^2 + 2i \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Le tecniche di analisi modale sperimentale permettono di ricavare informazioni sul comportamento dinamico di una struttura, nella fattispecie i valori delle pulsazioni di risonanza  $\omega_i$ , i fattori di smorzamento modale  $\xi_i$ , e le forme modali  $\mathbf{Y}_i$ . Esse consistono nella misura della risposta del sistema ad un'eccitazione nota; in sostanza si applica una forza di pulsazione  $\omega$ , in un punto  $i$  della struttura e se ne misura la risposta, intesa come spostamento, velocità o accelerazione, in un altro punto  $j$ . Si ottiene così una funzione complessa  $H_{ij}(\omega)$ , nella variabile  $\omega$ , che rappresenta la funzione di risposta in frequenza nel punto, nota anche come F.R.F. Ripetendo le misurazioni in diversi punti della struttura si ottiene la matrice di risposta in frequenza  $\mathbf{H}$ , da cui è possibile ricavare il comportamento dinamico della struttura.

Le varie tecniche di analisi differiscono per tipo di eccitazione della struttura, per numero di punti di eccitazione, o per metodi di estrazione dei parametri modali. Riguardo al tipo di eccitazione esistono due principali categorie. La prima comprende eccitazioni di tipo random e di tipo impulsivo, necessitando per l'estrazione dei parametri modali l'uso di tecniche di analisi FFT dei segnali. La seconda comprende invece eccitazioni di tipo sinusoidale con la quale si ottiene una buona qualità della FRF richiesta, che deve però essere costruita per punti con l'ausilio di un software. Quest'ultimo metodo viene utilizzato per lo studio delle non linearità nel comportamento della struttura. Un'ulteriore differenza tra i metodi usati è data dal numero di punti di eccitazione. Sebbene l'uso di un solo punto di

eccitazione sia più semplice, l'utilizzo di più punti di eccitazione simultanei permette di distribuire in maniera più uniforme l'energia nella struttura, ottenendo una risposta più uniforme, ed eliminando la probabilità di perdere visualizzazione di modi propri qualora questi vengano eccitati in corrispondenza dei loro nodi. In tutti i metodi descritti la FRF viene calcolata servendosi delle funzioni di autocorrelazione e di correlazione incrociata applicate ai segnali di risposta(uscita) ed eccitazione(ingresso) della struttura. Dato un segnale  $x(t)$  si definisce autocorrelazione la funzione

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) \cdot dt$$

ed indica quanto il segnale è correlato con se stesso. L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica, mentre l'autocorrelazione di un segnale casuale tende a zero per  $\tau \neq 0$ . La trasformata di Fourier di  $R_{xx}(\tau)$  è detta densità di potenza spettrale (PSD) e si indica di solito con  $S_{xx}(w)$

$$S_{xx}(w) = F\{R_{xx}(\tau)\}$$

La funzione  $S_{xx}(w)$  è legata alla trasformata di Fourier di  $x(t)$  dalla relazione:

$$S_{xx}(w) = X^*(w) \cdot X(w) = |X(w)|^2$$

Essa è una funzione reale e contiene le informazioni sulle frequenze presenti in  $x(t)$  ma non quelle sulle fasi. Si definisce invece, correlazione incrociata di due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  la funzione  $R_{xy}(\tau)$  definita come

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt$$

che indica quanto i due segnali sono correlati tra loro. La trasformata di Fourier di  $R_{xy}$  è detta densità di spettro incrociato (CSD) e si indica di solito con  $S_{xy}(w)$

$$S_{xy}(w) = F\{R_{xy}(\tau)\}$$

La funzione  $S_{xy}(w)$  è legata alla trasformata di Fourier di  $x(t)$  e  $y(t)$  dalla relazione:

$$S_{xx}(w) = X^*(w) \cdot Y(w)$$

Essa è una funzione complessa nella variabile  $w$  e contiene informazioni sulla frequenza e sulle fasi. Indicando quindi con  $f(t)$  l'eccitazione della struttura e con  $x(t)$  la sua risposta, si definisce funzione di risposta in frequenza, o FRF, la funzione  $H(w)$  ottenuta come rapporto delle loro trasformate di Fourier:

$$H(w) = \frac{X(w)}{Y(w)}$$

Per diminuire gli errori di misura si impiegano degli stimatori della FRF. Si hanno quindi lo stimatore  $H_1$  definito come:

$$H_1(w) = \frac{S_{fx}(w)}{S_{ff}(w)}$$

che minimizza gli effetti dei disturbi sull'uscita, e lo stimatore  $H_2$  definito come:

$$H_2(w) = \frac{S_{xx}(w)}{S_{xf}(w)}$$

che invece riduce gli effetti dei disturbi all'ingresso. In assenza di errori di misura sarebbe  $H_1(w) = H_2(w) = H(w)$ . Per giudicare l'attendibilità della misura si può usare la funzione coerenza  $\gamma_2(w)$  definita come:

$$\gamma^2(w) = \frac{|S_{fx}(w)|^2}{S_{ff}(w) \cdot S_{xx}(w)}$$

$$0 \leq \gamma^2(w) \leq 1$$

che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione. Se  $\gamma_2(\omega) < 0.75$  i risultati sono poco attendibili cioè il rapporto segnale/rumore è basso. Altre cause che danno luogo a bassi valori della coerenza sono:

- o Presenza eccitazioni che però non vengono misurate.
- o Comportamento non lineare del sistema.

#### Tipi di eccitazione nell'analisi modale sperimentale.

I segnali d'eccitazione più comunemente usati nell'analisi modale sperimentale possono essere divisi in due principali categorie: segnali contenenti uno spettro di frequenze e segnali contenenti una singola frequenza. I segnali della prima categoria possono essere divisi in tre sottogruppi: segnali periodici (pseudo random, periodic random, chirp), non periodici (pure random) e transitori (burst random, burst chirp, impatto); i segnali della seconda categoria sono invece di tipo sinusoidale (swept sine, stepped sine). Si riportano di seguito alcune proprietà delle funzioni aleatorie o random. Data una variabile aleatoria  $x(t)$  si definisce densità di distribuzione di probabilità la funzione  $p(x)$  col seguente significato fisico:  $p(x)dx$  rappresenta la probabilità che al tempo  $t_0$  la variabile  $x(t)$  abbia valori compresi tra  $x$  e  $x+dx$  e si indica con

$$p(x)dx = \text{Prob}[x \leq x(t_0) \leq x+dx]$$

La funzione distribuzione di probabilità  $P(x)$ , che rappresenta la probabilità che  $x(t_0)$  abbia valori compresi tra  $-\infty$  e  $x$  è data da

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$$

Il valore atteso in senso statistico della variabile aleatoria  $x(t)$  è dato da

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

Un'importante classe di valori attesi è quella delle potenze di una o più variabili aleatorie; tali valori attesi sono chiamati momenti. Particolare importanza assume  $E(x^2)$  che esprime la media dei valori di  $x(t)$  elevato al quadrato, detta anche valore quadratico medio (RMS); esso indica di  $x$  e si indica

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

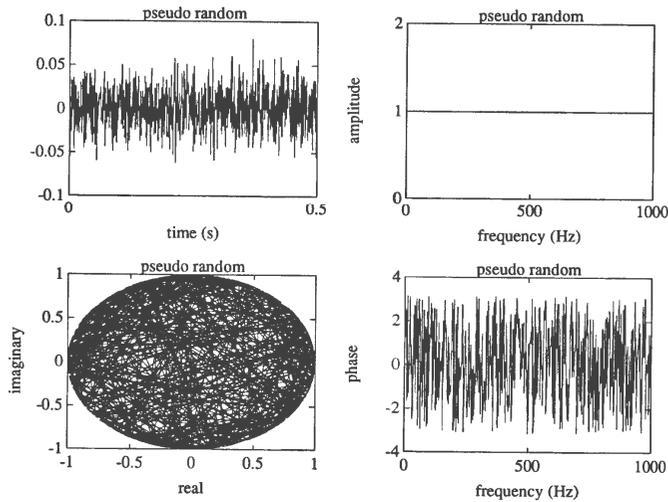
Un processo aleatorio dipendente dal tempo è rappresentato dall'insieme delle possibili funzioni aleatorie  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ , dette funzioni "campione". Per descrivere "statisticamente" il segnale  $x(t)$  si può esaminare la distribuzione dei valori  $x(t_1)$  che le varie funzioni campione hanno al tempo  $t=t_1$ . La grandezza  $x(t_1)$  viene considerata una variabile aleatoria per la quale può essere definita una funzione distribuzione di probabilità di primo ordine. Analogamente si può fare per l'insieme dei valori al tempo  $t_2$ . Conoscendo le distribuzioni statistiche ai tempi  $t_1$  e  $t_2$  può essere definita anche la distribuzione di probabilità del secondo ordine o distribuzione congiunta, che rappresenta il legame statistico tra queste due variabili aleatorie. Essa può essere funzione sia di  $t_1$ , sia di  $t_2$  o dalla differenza  $\tau = t_1 - t_2$ . Col termine stazionario si indica che le funzioni di distribuzione di probabilità di ordine superiore al primo non dipendono dal valore assoluto del tempo ma solo dalla differenza dei tempi, indicata con  $\tau$ ; col termine ergodico invece si indica un processo stazionario in cui le medie fatte su una singola funzione campione al variare del tempo sono indipendenti dalla funzione campione; in altre parole una funzione campione è completamente rappresentativa dell'insieme delle funzioni campione. Fatta questa premessa si analizzano i fattori che influenzano la scelta del tipo di segnale.

Primo fra tutti la disponibilità e complessità delle attrezzature; essa può essere costituita da un semplice martello strumentato nel caso di eccitazione d'impatto, oppure dall' "insieme" costituito da generatore di segnale controllabile in frequenza e ampiezza, amplificatore di potenza, eccitatore (shaker), e connessione tra struttura e eccitatore nel caso di eccitazioni di tipo sinusoidale. In secondo luogo bisogna considerare il tempo di misurazione connesso al tipo di segnale scelto; un tipo di eccitazione che, per ricostruire la FRF, scandisce frequenza per frequenza l'intervallo di interesse (stepped sine) richiede più tempo di una che contiene al suo interno tutte le frequenze di interesse (burst random). D'altro canto l'uso di segnali di quest' ultimo tipo comporta la necessità di operare con grandezze medie al fine di ottenere una stima attendibile della FRF. Bisogna considerare inoltre che la complessità dell'attrezzature connesse al tipo di segnale richiede degli adeguati tempi di set-up, che in casi particolari possono essere maggiore del tempo di misurazione. Un altro parametro è costituito dalla sensibilità del segnale d'eccitazione agli errori. Il più importante errore è costituito dal leakage. Esso è una distorsione dello spettro dovuta all'applicazione di tecniche FFT a segnali non periodici nel tempo di campionamento. Sono segnali periodici dei segnali che non presentano discontinuità all'inizio o alla fine di tale tempo e vengono ripetuti indefinitamente al suo esterno. Segnali con tali caratteristiche sono quelli contenuti interamente nel tempo di campionamento, o segnali ciclici che al suo interno completano un numero intero di cicli. Quindi se il segnale di risposta della struttura ad un'eccitazione decade a zero(o vicino allo zero) prima della fine del tempo di campionamento non vi sarà leakage nello spettro. Bisogna inoltre tenere conto, nella scelta del tipo d'eccitazione, del comportamento della struttura; strutture con caratteristiche non lineari presenteranno una FRF che dipende dal tipo e dal livello del segnale d'eccitazione. In tal caso, se l'obiettivo della prova è cercare una stima lineare del comportamento della struttura, è auspicabile utilizzare segnali

d'eccitazione che agiscano in un intervallo in cui la non linearità non si manifesta. Ciò significa evitare segnali con un basso rapporto picco-RMS, tipico dei segnali impulsivi. Se invece lo scopo della prova è caratterizzare il comportamento non lineare della struttura è preferibile utilizzare segnali d'eccitazione facilmente controllabili quali quelli sinusoidali.

### Pure random.

L'eccitazione pure random è un segnale aleatorio non periodico con una distribuzione di probabilità gaussiana. Il suo spettro presenta tutte le frequenze contenute in una specifica banda, ed essendo definito in maniera aleatoria è essenziale l'uso di un processo di media delle misure per stimare la FRF. Per effetto del basso rapporto tra picco-RMS, l'eccitazione pure random permette di eliminare facilmente il rumore; inoltre fornisce una buona approssimazione lineare di un sistema non lineare in quanto, effettuando un numero sufficiente di medie, gli effetti non lineari del sistema eccitati casualmente tenderanno a autocompensarsi. Un'altra caratteristica positiva di tale tipo di segnale è la relativa semplicità dell'attrezzatura richiesta, costituita da un generatore esterno di rumore. Il principale problema di questo tipo d'eccitazione è costituito dal leakage. Essendo il segnale non periodico nel tempo di osservazione tale errore non può essere evitato. L'uso di "dedicati" filtri nel dominio tempo (Hanning), non può rimuovere completamente l'effetto di tale disturbo, causando effetti indesiderati quali una diminuzione della frequenza di risoluzione. Un minor inconveniente è costituito tempo di prova relativamente lungo per effetto delle medie richieste per una buona stima della FRF. La figura 1.1 mostra le principali caratteristiche di questo segnale.



*Fig.3: Pseudo random: time and frequency content*

Figura 1.1: Pure random: contenuto temporale ed in frequenza.

### Pseudo random.

L'eccitazione pseudo random è un segnale stazionario ergodico, con uno spettro che contiene solo multipli interi dell'incremento di frequenza presente nella sua trasformata di Fourier. Lo spettro dell'ampiezza è in genere molto piatto mentre quello della fase è casuale. La generazione di un segnale di questo tipo richiede l'uso di un hardware dedicato, quale un convertitore analogico digitale. Essendo un segnale periodico non presenta problemi di leakage, tuttavia la ripetizione dello stesso intervallo di tempo, in un processo di medie, comporta la stessa eccitazione delle non linearità della struttura, che pertanto non vengono eliminate. Comunque per strutture lineari in genere sono richieste pochi campioni, per cui tale tipo d'eccitazione risulta conveniente in termini di tempo, mostrando anche un buon

rapporto tra picco-RMS. La figura 1.2 mostra le principali caratteristiche di questo segnale.

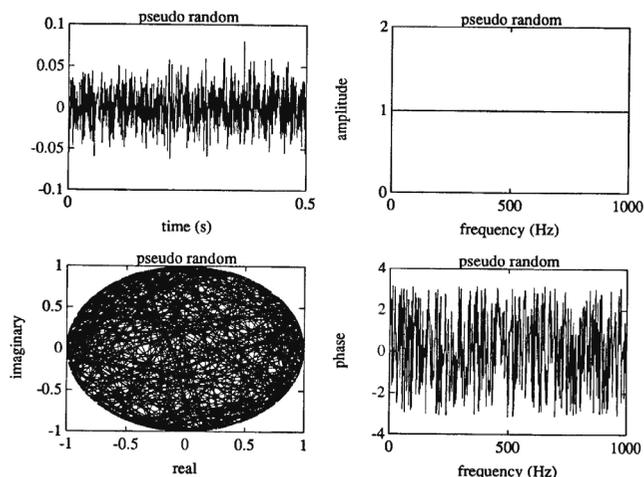


Figura 1.2: Pseudo random: contenuto temporale e in frequenza.

### Periodic random.

Simile al segnale pseudo random, l'eccitazione periodic random ha uno spettro che contiene frequenze discrete costituite da i multipli interi della risoluzione di frequenza usata nella sua FFT. Il segnale è generato unendo un numero casuale di generatori al fine di avere un contenuto in ampiezza e fase casuale. Si genera così un segnale “base” di una certa durata, la cui ripetizione in sequenza genera il segnale d'eccitazione della struttura. Per effetto della sua periodicità questo tipo d'eccitazione non presenta problemi di leakage; inoltre la variabilità tra le varie misurazioni di un processo di media, permette l'eliminazione delle non linearità eventualmente eccitate. Si ottiene pertanto una buona stima lineare di un sistema non lineare. Essendo interessati alla risposta forzata della struttura è necessario, durante una misurazione, attendere che il contributo transitorio si estingua; ciò

comporta in strutture debolmente smorzate un periodo di misurazione elevato, risultando uno dei principali svantaggi di tale metodo. La figura 1.3 mostra l'andamento temporale di questo tipo d'eccitazione.

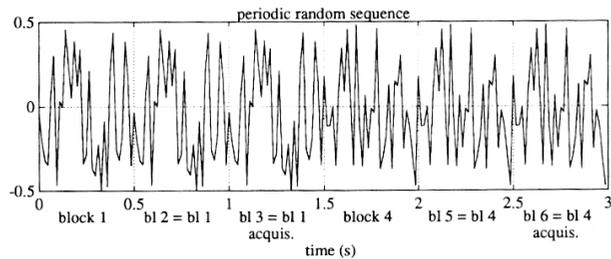


Figura 1.3: Tipica sequenza d'eccitazione periodic random.

### Periodic chirp.

Il periodic chirp è costituito da un segnale sinusoidale la cui la frequenza viene variata durante il periodo d'eccitazione; tale variazione è ripetuta in maniera tale da ottenere un segnale periodico. Questo tipo di segnale può essere considerato un caso particolare del pseudo random, quindi con caratteristiche simili. Una volta estinto il contributo transitorio, la risposta della struttura a questo tipo di segnale sarà anch'essa periodica per cui non vi sono problemi di leakage. Inoltre questo tipo di segnale presenta un eccellente rapporto picco-RMS, ed un buon rapporto segnale-rumore. Tuttavia, effettuando diverse misurazioni, le non linearità della struttura vengono eccitate nella stessa maniera, per cui non possono essere eliminate con un processo di media. Un miglioramento delle caratteristiche del segnale può essere ottenuto utilizzando un unico segnale per ogni misurazione, ma con una scelta casuale dei limiti di variazione della frequenza. La figura 1.4 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale.

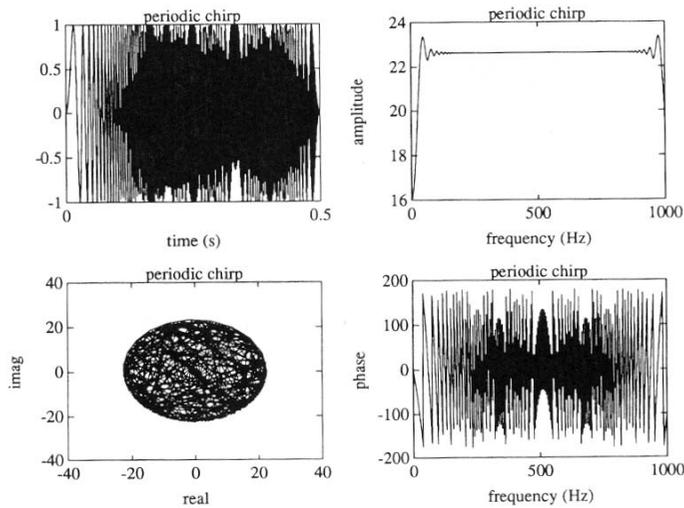


Figura 1.4: Periodic chirp: contenuto temporale ed in frequenza.

### Burst random.

Il segnale Burst random inizia come il Pure random, ma dopo un certo tempo di eccitazione viene troncato a zero in maniera tale da permettere alla struttura di completare le sue oscillazioni entro il periodo di acquisizione. Lo spettro di frequenza ha un'ampiezza e fase casuale e contiene energia in tutto la banda di frequenza d'interesse. La figura 1.5 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale. Il periodo di eccitazione, dopo il quale il segnale viene troncato a zero, dipende sostanzialmente dallo smorzamento della struttura in prova. Un ruolo importante è dato al tipo d'eccitazione. Infatti l'uso di uno shaker comporta che, dopo l'interruzione dell'eccitazione, la struttura, col suo transitorio di assestamento, mette in movimento lo shaker. Queste oscillazioni, per effetto del campo magnetico presente tra le armature dello shaker, generano una tensione e quindi una forza che, opponendosi a tale movimento, aumenta lo smorzamento delle oscillazioni della struttura. Pertanto, per evitare l'introduzione di errori nella stima della FRF, è necessario registrare tale forza. Il segnale Burst random ha gli

stessi vantaggi del periodic random. La sua periodicità permette di minimizzare gli errori di leakage, mentre l'eccitazione casuale fornisce una buona approssimazione lineare di una struttura non lineare. Ha dei buoni rapporti segnale-rumore e picco-RMS; inoltre, essendo che la struttura ritorna dopo l'eccitazione nelle stesse condizioni iniziali, non è necessario alcun tempo di attesa tra le acquisizioni, diminuendo così il tempo di prova. Il principale svantaggio è la necessità di una attrezzatura "dedicata" alla generazione del segnale.

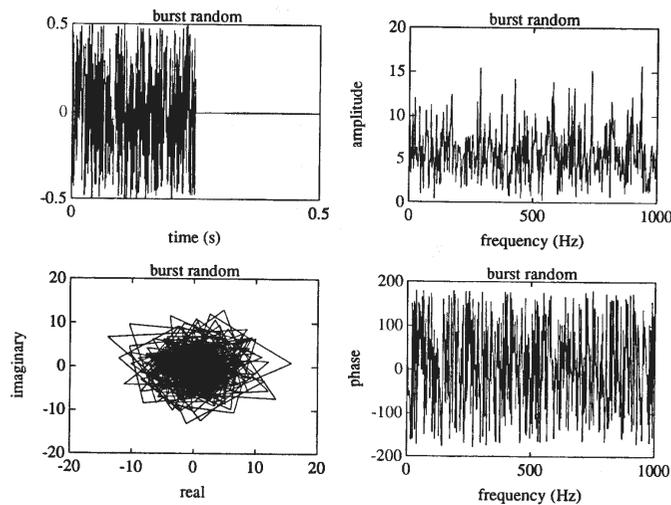


Figura 1.5: Burst random: contenuto temporale ed in frequenza.

### Burst chirp.

Il burst chirp è un segnale sinusoidale, con frequenza variabile, che similmente al burst random, viene troncato a zero nell'ultima parte del periodo d'eccitazione. Questo permette alla struttura di completare le sue oscillazioni e minimizzare gli errori di leakage. Rispetto al burst random, l'uso di un'eccitazione sinusoidale fornisce un rapporto migliore di picco-RMS e segnale-rumore; inoltre il controllo dell'ampiezza del segnale ad ogni frequenza, lo rende adatto per la

caratterizzazione di sistemi non lineari. Tuttavia, una stima lineare del sistema può essere ottenuta utilizzando un unico segnale per ogni campione e scegliendo in maniera casuale la banda di variazione della frequenza. La figura 1.6 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale.

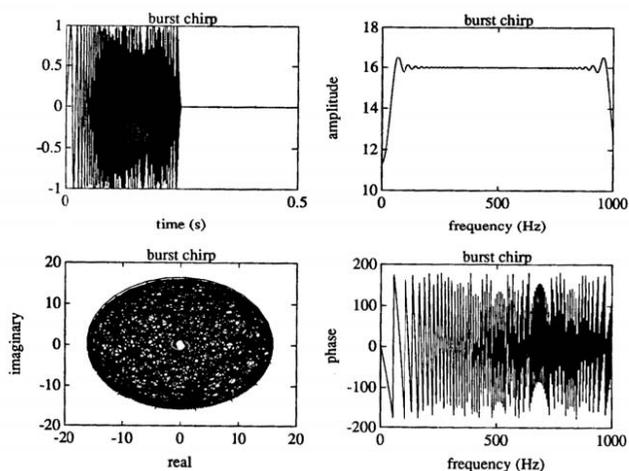


Figura 1.6: Burst chirp: contenuto temporale ed in frequenza.

### Impatto.

L'eccitazione d'impatto è un segnale transitorio, consistente in un impulso di durata molto limitata rispetto al tempo di acquisizione. La forma, e l'ampiezza dell'impulso controllano principalmente il livello dello spettro, la durata, invece influenza la larghezza di banda. La massima frequenza nello spettro è inversamente proporzionale alla durata dell'impulso. La figura 1.7 mostra le caratteristiche di questo tipo di segnale. L'impatto è il metodo più veloce per l'eccitazione di strutture lineari, inoltre richiede un'attrezzatura minima, e dei tempi di set-up limitati. Tali caratteristiche lo rendono adatto misure "sul campo" e test rapidi. L'impulso è determinato dalla forza dell'esecutore, dal peso del martello, dalla durezza della sua punta e dalla deformabilità della zona d'impatto; una superficie

dura, un peso del martello contenuto e una limitata forza impressa, genereranno un impulso "stretto" e quindi una larga banda di frequenza. La prova più comune di impatto è quella definita con "martello errante". In tale prova l'accelerometro è fissato ad un punto della struttura e questa viene eccitata di volta in volta in punti diversi in maniera da riprodurre la matrice di risposta in frequenza della struttura  $H_{ij}$  e ricavarne quindi le forme modali. L'unico inconveniente di tale metodo è che i punti della struttura non possono essere eccitati in tutte le direzioni contemporaneamente. Per ovviare a ciò

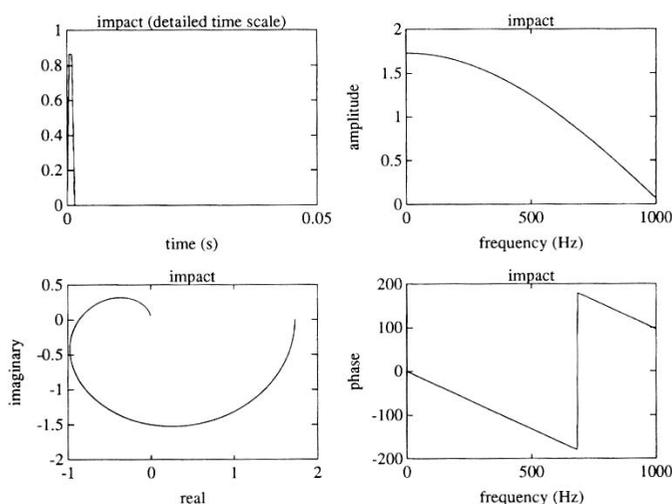


Figura 1.7: Impatto: contenuto temporale e in frequenza.

esiste una variante di tale metodo, definita come "accelerometro errante", nella quale la struttura è eccitata ad un punto fisso con un martello, mentre un accelerometro tri-assiale mobile misura in punti diversi lo spostamento della struttura così da ricostruire una forma modale tridimensionale. I due metodi, in base al principio di reciprocità di Maxwell, sono equivalenti. Nonostante i vari vantaggi, quali velocità e semplicità, tale metodo d'eccitazione comporta alcune complicazioni. Innanzi tutto, la difficoltà nel riprodurre eccitazioni regolari con lo stesso livello, e quindi la richiesta di personale esperto. Inoltre il basso rapporto

picco-RMS comporta un'elevata sensibilità a problemi di sovraccarico dei canali d'acquisizione ed eccitazione di un eventuale comportamento non lineare della struttura. Un'altra caratteristica negativa è il basso rapporto segnale-rumore che richiede apparecchiature "dedicate" per l'analisi del segnale. Infatti il segnale d'eccitazione è diverso da zero per un breve periodo del tempo di acquisizione e uguale a zero per il restante; ciò significa che il rumore di misurazione, sparso su tutto il periodo d'acquisizione, diviene della stessa entità del segnale d'eccitazione. Per evitare ciò si usano dei particolari filtri, nel dominio tempo, quali il Force window, che intervenendo dopo la durata dell'impulso, azzerava il rumore di misurazione. Problemi analoghi si rilevano nell'acquisizione della risposta di strutture estremamente smorzate e periodi elevati d'acquisizione. Per strutture debolmente smorzate, si usano invece dei filtri, quali l'Exponential window che, introducendo uno smorzamento artificiale sulla risposta permettono l'azzerarsi delle oscillazioni nel tempo di campionamento, minimizzando così gli errori di leakage. Sebbene questo smorzamento sia conosciuto e se ne può tenere conto in fase di analisi, molte volte comporta il decoupling di modi propri.

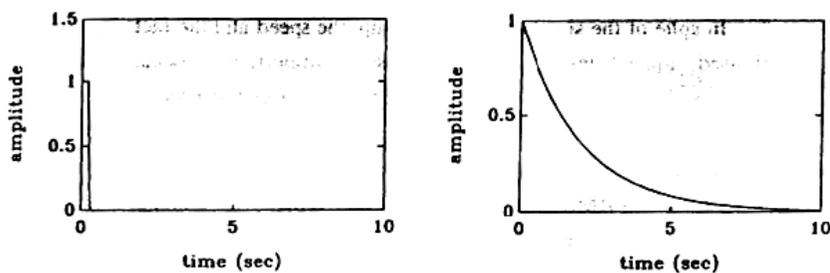


Figura 1.8: Azione del Force window e exponential window.

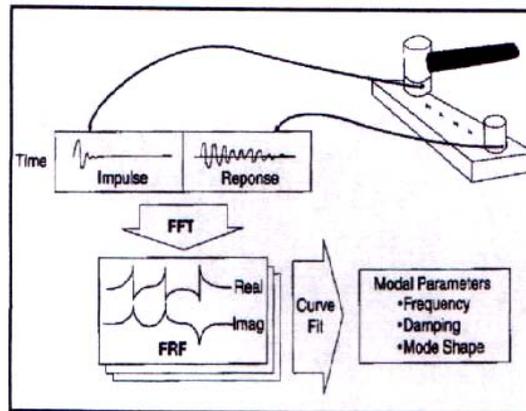


Figura 1.9: Prova con eccitazione d'impatto.

### Swept sine.

Lo swept sine è una eccitazione costituita da un segnale sinusoidale, con una lenta e continua variazione di frequenza. Esso è uno dei più antichi metodi d'eccitazione e ad esso sono stati applicati per prima le tecniche di analisi dei segnali, quali i filtri passa banda. In questo tipo d'eccitazione la struttura è virtualmente eccitata ad una sola frequenza, e dato il lento incremento di variazione si può assumere che la risposta sia stazionaria. Tipico di questo tipo d'eccitazione è il buon rapporto picco-RMS e segnale-rumore; inoltre l'elevato controllo su frequenza e ampiezza lo rende indicato per la caratterizzazione di strutture dal comportamento non lineare. Il limite principale di questo tipo d'eccitazione è costituito dalla lenta variazione di frequenza che comporta un tempo di prova elevato.

### Stepped sine.

L'eccitazione stepped sine può essere considerata la versione moderna dello swept sine, ottenuta di fatto, applicando a questa le moderne tecniche di analisi dei

segnali digitali. Invece di una variazione continua di frequenza, lo stepped sine prevede un incremento discreto di frequenza. I passi principali di tale metodo sono:

1. definizione della banda di frequenza d'interesse, attraverso frequenza iniziale, frequenza finale, ed incremento di frequenza.
2. conversione del segnale digitale in analogico attraverso un convertitore (DAC), ed eccitazione del "insieme" amplificatore di segnale-shaker.
3. Acquisizione del segnale analogico dall' "insieme" accelerometro-amplificatore tramite una scheda di conversione analogico-digitale (ADC), settata ad una frequenza di scansione pari al prodotto della frequenza d'eccitazione per il numero di punti voluti in un onda.
4. Attesa di estinzione del termine transitorio della risposta della struttura, quindi registrazione dei dati acquisiti e successiva analisi.

I punti da 1 a 4 sono ripetuti per ogni incremento di frequenza. Paragonato allo swept sine, questo metodo presenta gli stessi vantaggi in termini di qualità e controllabilità del segnale. La gestione di segnali digitali permette inoltre di variare l'incremento di frequenza riducendo i tempi di prova; inoltre fornisce un buon controllo contro errori quali l'aliasing e il leakage . Rimane comunque un metodo lento dovuto al modo di scandire la banda di frequenza interessata, ed al periodo d'attesa richiesta per l'estinzione del termine transitorio della risposta. Esso richiede inoltre un'attrezzatura software e hardware "dedicata".

I metodi di analisi sperimentali, usati per ricavare i parametri modali di una struttura, possono essere raggruppati in tre categorie.

1. Sinusoidal Input-Output Model.
2. Frequency Response Function.(F.R.F.)
3. Damped Complex Exponential Response.

Storicamente i primi due metodi sono quelli più comunemente usati; l'ultimo è invece un metodo d'approccio che utilizza algoritmi matematici per l'estrazione dei parametri modali. Tutte le categorie si basano su alcune assunzioni riguardanti il comportamento della struttura e le caratteristiche dell'eccitazione. Per quel che riguarda il comportamento della struttura, si assume innanzi tutto che esso sia

- Lineare. Ciò significa che la risposta della struttura ad una combinazione di forze eccitatrici, simultaneamente applicate, è la somma delle singole risposte a ciascuna di queste forze, come se agissero da sole. Tale assunzione risulta valida per una vasta gamma di strutture e permette di utilizzare delle forze eccitatrici di forma e ampiezza conveniente per le misurazioni, senza influire sulla stima dei parametri modali.
- Tempo invariante. Ciò significa che i parametri modali trovati sono costanti nel tempo. Una struttura tempo variante presenterà invece caratteristiche quali massa, rigidità, smorzamento dipendenti, in maniera diretta o meno, dal tempo. Un esempio di comportamento tempo variante è fornito dalla dipendenza delle caratteristiche meccaniche di un materiale dalla variabile temperatura e quindi, in ultimo, dal suo andamento nel tempo.
- Osservabile. L'osservabilità garantisce che le misure di eccitazione e risposta che vengono effettuate, contengono una quantità di informazioni sufficienti per sviluppare un corretto modello di comportamento della struttura. Una inosservabilità di una struttura è dovuta, ad esempio, alla presenza di componenti "sciolti", il cui moto non può essere eccitato e "sentito" da sensori posizionati sul resto struttura, oppure dall'esistenza di gradi di libertà di moto che non sono misurati.

Un'altra assunzione sul comportamento della struttura, è la validità del teorema di reciprocità di Maxwell che permette, in alcuni metodi d'eccitazione quali l'impatto, di ricostruire la matrice di risposta in frequenza  $H_{ij}$  più velocemente.

Per qualche riguarda invece le assunzioni fatte sull'eccitazione, quella di primaria importanza è che essa sia osservabile; ciò significa che, le caratteristiche dell'eccitazione, ricavate dalle misure effettuate coincidono con quelle effettivamente trasmesse alla struttura. Tali assunzioni diventano più restrittive nel caso in cui la stima dei parametri modali viene effettuata sulle informazioni contenute nella sola risposta della struttura. In particolare si assume che

- Nel caso di eccitazioni impulsive l'autospettro dell'impulso "corto" è uniforme, costante in ampiezza e indipendente dalla forma dell'impulso.
- Nel caso di eccitazione con rumore bianco, l'autospettro del rumore è uniforme nella banda di frequenza contenuta nel segnale.
- Nel caso di risposta libera, o libero decadimento, la struttura viene eccitata con uno spostamento o velocità diverso da zero e alla rimozione del vincolo viene misurata la risposta.

Tali assunzioni sono dovute al fatto che i poli della funzione di risposta in frequenza della struttura sono costituiti dai poli della risposta e dagli zeri dell'eccitazione. Per cui, affinché la risposta fornisca informazioni sulla funzione risposta in frequenza, è necessario che lo spettro dell'eccitazione sia privo di zeri.

### Sinusoidal Input-Output Model.

I metodi raggruppati in questa categoria sono caratterizzati da un'eccitazione che, nel periodo d'osservazione, presenta una sola frequenza. Per effetto di questa eccitazione la risposta della struttura sarà somma di un termine transitorio che si

estingue nel tempo, e dalla risposta forzata, stazionaria nel tempo ed alla stessa frequenza dell'eccitazione. Talvolta la risposta forzata può contenere più frequenze nello spettro dovute all'eccitazione delle non linearità del sistema; in tal caso il segnale prima di essere analizzato, viene filtrato, lasciando nello spettro la sola frequenza d'interesse. I metodi che appartengono a questa categoria sono

- **Forced Normal Mode Excitation Method.** È uno dei più vecchi metodi utilizzati per la stima dei parametri modali di una struttura ed è stato uno dei primi ad essere utilizzato nel caso di eccitazioni multiple; al giorno d'oggi è ancora largamente in uso nell'industria aeronautica per la misura di vibrazioni su strutture d'aerei. Sostanzialmente, tale metodo si basa sulla possibilità di settare gli eccitatori della struttura, in maniera da bilanciare, ad una certa frequenza le forze dissipative presenti al suo interno. In tal caso il sistema di equazioni dinamiche della struttura, idealmente discretizzata, può essere ridotto a quello di una struttura non smorzata e priva d'eccitazione. Quando ciò avviene, si osserva che la risposta della struttura presenta un ritardo rispetto all'eccitazione di circa 90 gradi. Si individua così la frequenza di risonanza e, utilizzando più canali d'acquisizione, la forma modale della struttura. Un'ulteriore controprova è costituita dalla rimozione dell'eccitazione. Infatti se la risposta forzata conteneva frequenze relative ad un singolo modo proprio, il transitorio d'arresto conterrà anch'esso la stessa frequenza, ed il suo decadimento nel tempo darà una stima dello smorzamento della struttura. Questo metodo funziona bene nel caso in cui valga l'ipotesi di smorzamento proporzionale inoltre non considera la possibilità di modi complessi di vibrare. Per effetto di tali limitazioni si usa una tolleranza di 10 gradi sul ritardo della risposta.

- **Forced Response Decomposition Method.** Questo metodo si basa sul metodo della sovrapposizione modale della risposta per il quale, la risposta forzata di una struttura può essere considerata come combinazione lineare dei singoli modi propri, secondo funzioni dipendenti dal tempo. Sostanzialmente, un insieme di eccitatori,

settati alla stesa frequenza, vengono applicati alla struttura generando una risposta che, a parte il transitorio iniziale, sarà stazionaria ed alla stessa frequenza d'eccitazione. L'ampiezza e la fase degli eccitatori, tenute costanti durante il periodo d'osservazione, sono scelte in maniera casuale. Utilizzando più punti di misurazione si genera un vettore di risposta forzata che, secondo il metodo della sovrapposizione modale, in un dato range di frequenza, sarà generato da N modi propri. Per cui se si generano N o più vettori di risposta forzata, indipendenti tra loro, è possibile costruire un sistema di equazioni da cui determinare gli N modi propri. I vettori di risposta forzate indipendenti possono essere generati o scegliendo, ad una certa frequenza, in maniera casuale fase ed ampiezza, oppure ripetendo l'eccitazione a diverse frequenze contenute entro il range d'interesse.

#### Frequency Response Function Method.

Il metodo della funzione risposta in frequenza, o F.R.F, è una delle tecniche più utilizzate per la stima dei parametri modali di una struttura. Esso consiste nella ricostruzione, per una struttura idealmente discretizzata, della funzione complessa  $H_{ij}(w)$ , che rappresenta la funzione di trasferimento tra la risposta della struttura lungo il grado di libertà  $i$ , ed un eccitazione applicata in  $j$  e di pulsazione  $w$ . Ricostruendo tale funzione per diversi punti della struttura, variando sia il punto d'eccitazione che quello della risposta, si ottiene la matrice di risposta in frequenza  $H(w)$ , da cui è possibile estrarre i parametri modali della struttura.

Si considerano le equazioni del problema dinamico di una struttura (1.4), e assumendo che tutte le condizioni iniziali siano nulle, vi si applica la trasformata di Laplace; si ottiene:

$$(\mathbf{M} \cdot s^2 + \mathbf{C} \cdot s + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s) \quad (1.5)$$

che raccogliendo i termini a primo membro fornisce:

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{M} \cdot s^2 + \mathbf{C} \cdot s + \mathbf{K} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{P}(s)$$

Si definisce matrice di trasferimento la matrice  $\mathbf{H}$  definita come

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1}$$

che fornisce

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{P}(s) \quad (1.7)$$

La matrice inversa è definita come:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{B}(s)^{-1} = \frac{\mathbf{D}}{\det(\mathbf{B})}$$

dove con  $\mathbf{D}$  si indica la matrice dei minori complementari di  $\mathbf{B}$ . Essendo che sia ciascun elemento di  $\mathbf{D}$ , sia il determinante di  $\mathbf{B}$ , sono dei polinomi in  $s$ , ogni elemento di  $\mathbf{H}$  sarà costituito da una funzione polinomiale fratta, nella variabile  $s$ . Tali funzioni  $H_{ij}$  sono le funzioni risposta in frequenza dei vari punti. Si osserva che gli elementi di  $\mathbf{H}$  hanno tutti lo stesso denominatore, costituito dal determinante di  $\mathbf{B}$ ; per tanto tutte le funzioni risposta in frequenza,  $H_{ij}$ , avranno gli stessi poli. Le forme modali, chiamati anche vettori modali, possono essere ricavati dalla matrice  $\mathbf{D}$ . Si ha infatti che:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = \det(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{I}$$

Prendendo la  $k$ -esima colonna di  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}_k = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

si osserva che l'equazione 1.9 fornisce la soluzione omogenea dell'equazione 1.6. Pertanto la  $k$ -esima colonna di  $D$ , a meno di un fattore costante, è una stima del vettore modale relativo al polo scelto. Essendo che la  $k$ -esima colonna è stata scelta in maniera arbitraria, ogni colonna di  $D$  costituisce, secondo costanti diverse, una stima della forma modale. Infine si osserva che le colonne di  $H$  sono uguali alle colonne di  $D$ , a meno di fattore costante dato dal valore del  $\det(B)$ ; pertanto le colonne di  $H$ , in corrispondenza di un polo, forniranno una stima dei modi propri della struttura. Conoscendo le funzioni  $H_{ij}(w)$  è possibile calcolare lo smorzamento modale col metodo della larghezza di banda. Il metodo della FRF. può essere utilizzato sia con eccitazioni a singola frequenza, ricostruendo la curva di risposta per punti, sia con eccitazioni a banda larga servendosi di tecniche di analisi FFT. L'utilizzo di più punti d'eccitazione nella struttura consente al solito di evitare di eccitare le forme modali in corrispondenza dei nodi, e quindi di perderne la loro visualizzazione nello spettro.

#### Damped Complex Exponential Method.

I metodi che appartengono a questa categoria estraggono i parametri modali di una struttura analizzando le sue oscillazioni libere a partire da determinate condizioni iniziali. Il più importante è l'Ibrahim Time Domain Approach. In questo metodo le oscillazioni libere vengono misurate in diversi punti della struttura; se per motivi di equipaggiamento non è possibile un'acquisizione simultanea dei vari punti, si effettuano più misure mantenendo una posizione comune dei sensori tra una misura ed un'altra. Le oscillazioni dei punti della struttura vengono registrati a partire da due istanti diversi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N_0}(t) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t+\alpha) \\ y_2(t+\alpha) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N_0}(t+\alpha) \end{Bmatrix}; \quad (1.10)$$

con  $N_0$  maggiore del numero di modi da estrarre. Nell'ipotesi assenza di forze esterne, il transitorio della struttura, contenuto nei vettori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , può essere espresso come una combinazione lineare dei di  $N_m$  funzioni esponenziali

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t)}; & \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t+\alpha)} = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda(t)} \cdot e^{\lambda\alpha}; \\ \boldsymbol{\lambda}^T &= \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{N_m}\}; \end{aligned} \quad (1.11)$$

Eliminando  $e^{\lambda(t)}$  dalla (1.11) si ottiene una relazione tra i vettori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , valida per ogni campione acquisito nel tempo di misurazione.

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda\alpha} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P}(t);$$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(t);$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot e^{\lambda\alpha} \cdot \mathbf{R}^{-1};$$

Si genera una matrice di ricorrenza,  $\mathbf{A}$ , i cui autovalori costituiscono le pulsazioni proprie del sistema, mentre dagli autovettori corrispondenti si ricavano le forme modali. L'uso di diverse condizioni iniziali garantisce che tutti i modi propri vengano eccitati, in maniera analoga all'uso di diversi punti di eccitazione degli altri metodi.

#### 1.4 *Analisi modale non lineare (NLMA: Nonlinear Modal Analysis)*

Metodi come il metodo degli elementi finiti (FEM - *Finite Element Method*), LMA (*Linear Modal Analysis*) e altre tecniche di analisi lineare si sono affermati come validi strumenti di analisi. Essi forniscono una tecnica utile per affrontare una grande varietà di casi, perfino quelli che mostrano un certo grado di non linearità. In effetti, quando non si compromette l'accuratezza della soluzione, è preferibile trattare il sistema come lineare anche se non lo è (ed è più probabile che non lo sia). L'analisi lineare, invero, risulta poco affidabile quando l'accuratezza della risposta è di fondamentale importanza, o gli effetti non lineari sono significativi.

Negli ultimi dieci anni numerosi sono stati i lavori scientifici che hanno avuto come oggetto i metodi atti ad affrontare non linearità.

Queste tecniche sono definibili come “*case sensitive*”. Le fonti della non linearità in una tipica struttura sono così diverse da rendere particolarmente impossibile prenderle tutte in considerazione, ecco perché alcuni ingegneri tendono ad eluderle quando le incontrano. Questo è causato dalla mancanza di un'unica teoria capace di affrontare i casi non lineari e di creare un legame, nello stesso tempo, con gli strumenti lineari standard già conosciuti.

Riportiamo alcuni argomenti riguardanti la NLMA (*Non Linear Modal Analysis*):

- Una non linearità localizzata in una struttura può avere un impatto globale significativo, lasciando delle aree irrisolte. Le non linearità locali sono: giunti, smorzatori (*shock absorbers*), discontinuità geometrica, regioni sottoposte a grandi spostamenti, *spring/dampers* discontinui, ecc.
- Gli effetti non lineari vengono di solito confinati a pochi *modi* e coordinate, mentre gli altri si comportano in modo lineare.
- Non esiste un modo semplice per definire una risposta non lineare come una generale funzione algebrica in forma chiusa.

A causa della mancanza di una teoria non lineare, la volontà di definire una metodologia NLMA standard ha portato ad inserire parametri non lineari in *frame* lineare. Questo approccio garantisce una certa compatibilità con i metodi LMA ma non costituisce però il giusto percorso.

Alcuni ricercatori si sono posti una serie di domande riguardo la validità dei concetti di linearizzazione per analizzare i sistemi non lineari, poiché esistono fenomeni non lineari che non hanno un equivalente nei sistemi lineari. Per esempio, i “*modi* non lineari biforcati” sono dovuti a movimenti non lineari e non possono essere assimilati a *modi* lineari. In tali casi una linearizzazione del sistema potrebbe essere perfino impossibile o potrebbe non fornire tutte le possibili risonanze.

Potrebbe essere interessante lo sviluppo di tecniche non lineari analoghe alla sovrapposizione lineare per esprimere risposte transitorie generali come l’addizione algebrica di risposte modali non lineari, purché una risposta periodica e stabile domini il comportamento non lineare. Tale approccio potrebbe portare ad una riduzione di ordine del numero delle equazioni disaccoppiate di moto.

### 1.5 Funzioni di risposta in frequenza non lineare (NLFRF: Nonlinear Frequency Response Functions)

La funzione di risposta in frequenza (FRF) è forse quella più usata nel campo dell’analisi modale per descrivere le relazione di input-output di un sistema (Fig.1.1).

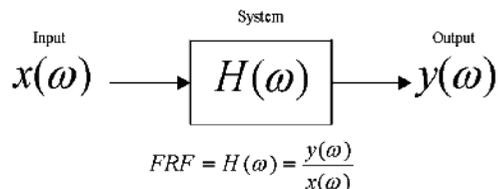


Figura 1.1: Rappresentazione semplificata di un sistema in-out

Tale funzione si usa nel campo strutturale in modo quasi invariabile poiché costituisce il primo passo per attribuire caratteristiche dinamiche ad una struttura, e fornire importanti informazioni:

- Le risonanze e le anti-risonanze che indicano a quali frequenze si verificano le ampiezze più alte e più basse.
- La quantità di smorzamento come meccanismo di assorbimento dell'energia.
- La *phase-lag* della risposta relativa all'eccitazione in input.

Queste ed altre principali caratteristiche possono essere osservate nella fig. 1.2.

Grazie alle diverse risposte ottenute in differenti punti di una struttura, si può ottenere un'animazione al computer del predetto movimento a qualsiasi frequenza naturale;

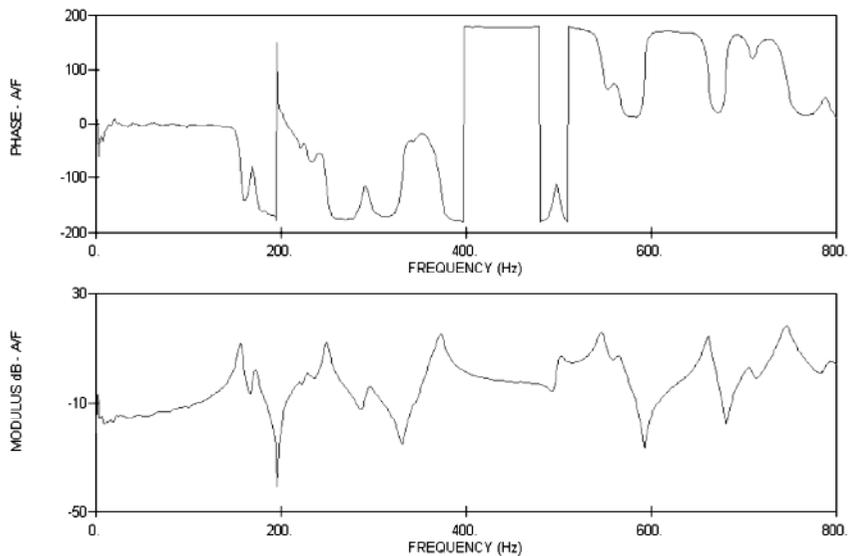


Figura 1.2: Una tipica FRF di una struttura meccanica

ciò costituisce uno strumento importante per visualizzare *mode-shapes* sperimentali e confrontarli con quelli analitici (Fig. 1.3).

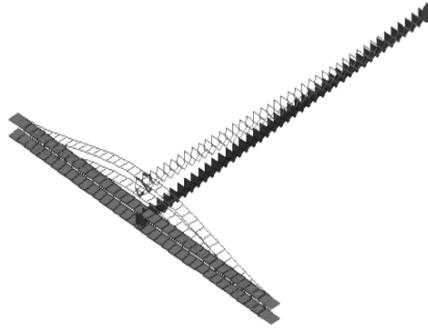


Figura 1.3: Visualizzazione di un *mode-shape* sperimentale

Una delle caratteristiche principali che rende la FRF così interessante per l'analisi dei sistemi lineari è la sua invariabilità all'eccitazione in input grazie alla sua linearità. Questa caratteristica le permette di usare un ampio *range* di eccitazione (*step-sine*, *random noise*, impulso, ecc.) ed inoltre di ottenere la stessa funzione. Altra caratteristica è la cosiddetta "ortogonalità modale" in cui una FRF si può scomporre (o espandere) in diversi termini (o risposte modali). Ogni termine si occupa di un *modo* singolo che semplifica l'analisi in modo evidente mettendo in campo la sovrapposizione modale. Sarebbe molto utile estendere la definizione della FRF per descrivere sistemi non lineari ma non è semplice. Il principale problema è che i coefficienti contenuti nel modello matematico di una FRF lineare (frequenze naturali, fattori di smorzamento e *mode-shapes*) risultano costanti; nel caso non lineare tali coefficienti dipendono dall'ampiezza.

I *modi* non lineari, inoltre, non possono essere più considerati come ortogonali, per cui si perde il concetto originale di "*modi* normali". Come risultato della non linearità, un plot di una FRF apparirà distorto confrontato al caso lineare (Fig. 1.4).

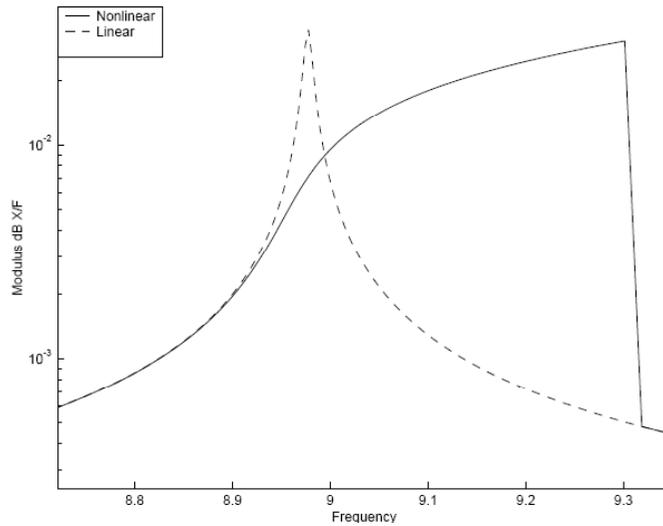


Figura 1.4: Una FRF distorta a causa della non linearità della rigidità volumetrica

Per sviluppare un effettivo metodo NLMA, è necessaria una rappresentazione di una FRF non lineare. Tale espressione deve contenere un insieme di coefficienti lineari e non lineari. Il metodo della funzione descrittiva (DFM - *Describing Function Method*) ha mostrato buoni risultati per ottenere coefficienti dipendenti dall'ampiezza degli elementi non lineari, attraverso le forze non lineari in un ciclo di carico (*load-cycle*). Questi coefficienti possono essere posti in un'equazione generale che consente un'estensione non lineare della definizione classica della FRF.

### 1.6 Identificazione dei sistemi non lineari

I metodi non lineari "Benchmark", come il metodo di equilibrio armonico (HBM - *Harmonic Balance Method*), sono in grado di affrontare problemi generali

attraverso l'applicazione di un approccio sistematico, che offre una procedura diretta per la soluzione.

Questa classe di metodi risulta più adatta ad un'analisi teorica (percorso diretto) nella quale i presunti modelli sono già disponibili e contiene dati di input sviluppati e organizzati in forma matriciale.

La risoluzione di un problema di identificazione è un argomento molto più difficile, perché appartiene a un ambito sperimentale, nel quale le differenze tra un modello teorico e il suo equivalente sperimentale si devono in qualche modo conciliare (percorso inverso). Un metodo di identificazione affidabile deve liberarsi di tutte le incertezze ed offrire risultati espliciti.

Ogni sistema si può descrivere con la condizione  $[x, y, H]$  (Fig. 1.5). In realtà, questa serie è molto usata poiché se si conoscono due variabili, è possibile (almeno secondo il principio) calcolare anche l'altra. Questa idea basilare costituisce il punto di partenza per i più comuni problemi di identificazione.

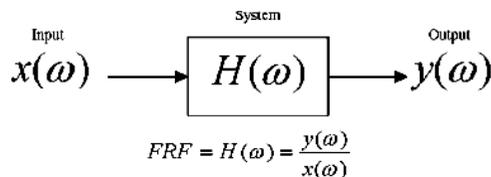


Figura 1.5: Sistema semplificato

Si può rappresentare un sistema lineare come una funzione di trasferimento non accoppiata (*uncoupled transfer function*) (Fig. 1.5), nella quale l'output  $y$  è completamente caratterizzato dalle caratteristiche del sistema  $H$  e dall'input  $x$ . L'identificazione dei sistemi lineari costituisce una procedura relativamente semplice, che cerca di rilevare e quantificare dei coefficienti lineari che descrivono  $H$ . Ciò si ottiene misurando  $[x, y]$  in diverse condizioni, e osservando il corrispondente comportamento di  $H$ .

I problemi s'incontrano nel momento in cui il sistema dipende dall'ampiezza (Fig. 1.6). Tale condizione è tipica delle maggior parte delle strutture che contengono non linearità. Si possono rappresentare le complessità introdotte aggiungendo un feedback dell'output, così da generare effetti non lineari nella risposta.

L'oggetto principale di questo lavoro consiste proprio nell'identificazione di questa classe di sistemi.

In particolare, abbiamo affrontato il problema dell'identificazione del componente non lineare  $H$  attraverso la conoscenza di  $x$ ,  $y$  e del componente lineare  $H$ . Nel caso della NLMA, l'identificazione del problema si può porre nei seguenti termini.

Date alcune informazioni di base del sistema (la sua descrizione lineare) e i comportamenti che assume sotto una nota eccitazione (le risposte misurate), trovare gli elementi non lineari all'interno del sistema che lo rende capace di comportarsi in modo non lineare.

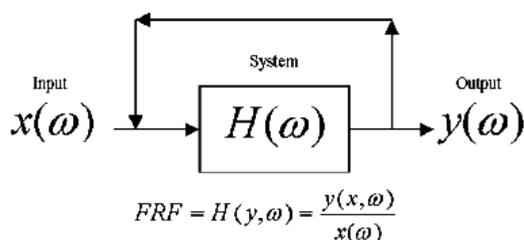


Figura 1.6: Sistema con un loop chiuso

Di solito, non si conosce la posizione degli elementi non lineari all'interno del sistema, per cui prima di tentare un processo di identificazione è consigliabile rilevare la loro posizione. Tale procedura è nota come “*Nonlinear Detection*”.

La natura degli elementi non lineari, inoltre, deve essere calcolata prima di stabilire i parametri da trovare.

Generalmente, i metodi di identificazione si possono dividere in *parametrici* e *non parametrici*:

- I metodi parametrici assumono una specifica forma matematica del sistema (Es.: un oscillatore SDOF) e tendono ad identificare i parametri  $(m,c,k)$  che fanno parte del modello preso in considerazione. Il meccanismo non lineare viene rappresentato attraverso una funzione analitica conosciuta e le dimensioni vengono usate per generare una regressione lineare (*least-squares*) per trovare i suoi parametri. Di norma, le non linearità si trovano localizzate a-priori.
- I metodi non parametrici risultano più numerosi in natura, dato che il sistema è considerato come una “scatola nera”. Non sono note né la forma né la locazione delle non linearità, per cui è necessario creare le condizioni favorevoli sia per un problema indefinito che per uno mal posto. Non è stato ancora trovato un metodo ideale non parametrico, ma alcune tecniche note sono applicabili per lo studio del problema, quali la trasformata di Hilbert o le equazioni di Volterra.

La tecnica introdotta in questo lavoro e che esplicheremo più avanti, si considera come “*parametrica*” in un contesto lineare, ma “*non parametrica*” in un contesto non lineare. In altre parole, richiede alcune informazioni sul sistema lineare di base ma senza assumere nulla della non linearità (tipo e locazione).

Quando ci si occupa di grandi sistemi strutturali bisogna tener presente l’incompletezza dei dati.

Il modello sperimentale, spesso, è di dimensioni ridotte rispetto a quello teorico, per cui la serie di risposte misurate descrive soltanto una sottoserie di risposte analitiche.

Per complicare le cose, si è scoperto che le non linearità locali possono avere un effetto globale, rendendo la rivelazione lineare molto più complessa.

D'altra parte, è noto che alcune regioni all'interno del sistema possono contenere non linearità. Alcune delle quali sono state già identificate come giunti, smorzatori (*shock absorber*), discontinuità geometrica, ecc.

È possibile liberarsi di questo aspetto per affrontare il problema dell'identificazione in modo più efficiente, attraverso la delimitazione approssimativa di regioni non lineari, prima di passare all'analisi vera e propria.

A seconda del grado di incompletezza dei dati, l'identificazione non lineare offre due tipi di soluzione:

- Per dati significativamente incompleti (Es.: poche misure), è consigliabile eseguire un'identificazione modale, che fornisca una soluzione nella forma dei coefficienti modali identificati. È possibile spiegare il comportamento non lineare dei singoli *modi* e perfino rigenerare/predire le risposte fisiche all'interno di range limitati, ma i componenti non lineari fisici restano una scatola nera.
- Per dati piuttosto completi (Es.: sufficienti misure), teoricamente, è possibile eseguire un'identificazione fisica. Tale soluzione mira a mostrare la parte centrale del sistema non lineare, permettendo la rivelazione e la quantificazione dei singoli elementi non lineari. Rappresenta una descrizione completa del sistema non lineare, raggiungendo illimitate capacità di predizione.

### ***1.7 I metodi “Dominio di Frequenza” e “Dominio del Tempo” a confronto***

I metodi di modellazione ed identificazione possono essere suddivisi in due gruppi principali, secondo la natura dei dati in input:

1. **Dominio del Tempo.** I dati di input hanno la forma di un segnale nel tempo, che descrivono il moto della struttura in funzione di tempo. Ciò risulta vantaggioso dato che questi segnali sono direttamente forniti dalle attuali procedure di misura.

Questi metodi forniscono dei risultati accurati, grazie alla natura esplicita dei dati. La soluzione viene cercata attraverso l'integrazione diretta delle equazioni di sistema e sviluppate dall'integrazione di Montecarlo o altre.

Questo richiede un grande sforzo computazionale per semplici sistemi smorzati che rappresentano la grande maggioranza delle strutture meccaniche.

I metodi del Dominio del Tempo erano molto usati agli albori dell'analisi modale, per la sua caratteristica fisica e l'interpretazione diretta dei risultati. Un altro decisivo fattore s'incontrava nell'eseguire la trasformata di Fourier in tempo reale, come richiesto per i metodi *frequency domain*.

2. **Dominio di Frequenza.** Sviluppi recenti di strumenti di misura come gli analizzatori di risposte in frequenza (FRA - *Frequency Response Analyzers*) e l'avvento della trasformata di Fourier (FFT) hanno portato ad una rivalutazione dei metodi del Dominio della Frequenza, considerati come quelli più pratici.

Tale classe di metodi richiede una FFT del segnale naturale del tempo, prima che possa essere trattata come dati in input. Questo processo divide la risposta del tempo in un numero di componenti armoniche, ognuno con una specifica ampiezza e frequenza. Data la natura periodica di questi dati si riduce molto lo sforzo computazionale.

La soluzione di questi metodi si considera approssimativa in quanto gli eventi che si sono verificati in un *load-cycle* si rappresentano attraverso quantità standard. L'accuratezza dipenderà anche dal numero delle armoniche considerate nell'analisi. Per una grande classe di sistemi, compreso quello lineare, l'analisi della fondamentale ovvero della prima armonica fornisce risultati interessanti e pratici.

I metodi sviluppati in questo lavoro di ricerca rientrano nel gruppo del Dominio di Frequenza, scelto per la buona accuratezza e le capacità computazionali. Risulta vantaggioso usare la funzione descrittiva (DFM - *Describing Function Method*) per formulare gli elementi non lineari nel dominio di frequenza.

### 1.8 *Coordinate fisiche e coordinate modali a confronto*

I metodi di identificazione si possono dividere, a secondo del tipo di coordinate nel quale si realizzano le analisi, in due categorie:

1. A **Coordinate fisiche**. L'analisi si basa sui coefficienti contenuti nelle matrici del sistema ottenute dalla discretizzazione spaziale. Il vantaggio di questo metodo è costituito dall'ambiente fisico, dovuto alla manipolazione dei coefficienti di massa, smorzamento e rigidità. Di conseguenza, la soluzione risulterà sempre significativa dal punto di vista fisico e ne costituisce un interessante vantaggio.

Esso gode anche di svantaggi. A seconda della qualità della discretizzazione, la quantità di dati in input può essere grande anche dell'ordine di decine di migliaia di coefficienti, che si presentano legati alle equazioni differenziali. Ognuno di questi coefficienti esercita una certa influenza su ogni DOF del sistema, che comporta una pesante manipolazione algebrica e di calcolo.

2. A **Coordinate modali**. L'analisi si esegue nello spazio modale, basato sulle cosiddette "coordinate generalizzate" e sui parametri modali (*eigenvalues* e *eigenvectors*). Di solito, si richiede un numero relativamente piccolo di *modi* per generare la risposta del sistema, e tale caratteristica riduce i costi computazionali. La proprietà ortogonale degli *eigenvectors* denota che un dato DOF viene descritto dal proprio *eigenvector*, riducendo il carico algebrico.

La presenza di svantaggi a un tale approccio, è forse dovuto al fatto che le risposte modali hanno poco significato fisico; ciò si verifica durante un processo di analisi di

identificazione nel quale si devono conciliare le differenze tra un modello sperimentale ed il suo equivalente teorico. Molto spesso accade che nell'implementare una correzione modale si arrivi ad eseguire correzioni fisiche, come una molla tra punti interni precedentemente non collegati.

In questo lavoro si analizzano entrambi gli approcci con i relativi vantaggi e svantaggi.

### **1.9 Osservazioni sull'armonica higher-order**

Per una grande classe di sistemi non lineari soggetti ad una eccitazione armonica, la risposta resta essenzialmente armonica, anche se si verifica una dispersione di energia a certe frequenze, piuttosto che alle frequenze lineari naturali. Questo fenomeno -chiamato "armonica higher-order" (*higher order harmonics*)- si verifica in quasi tutti i sistemi non lineari e la sua esistenza si può matematicamente dimostrare con l'applicazione delle equazioni di Volterra-Weiner.

Queste funzioni predicono risonanze a determinati multipli (in base al tipo di non linearità) della frequenza naturale non lineare  $\omega_n$ :

$$\dots, \frac{1}{3}\omega_n, \frac{1}{2}\omega_n, \omega_n, 2\omega_n, 3\omega_n, \dots$$

Considerando tali risonanze extra, si presenta un caso peggiore quando uno di questi multipli coincide con una frequenza naturale. Questa condizione porta ad un fenomeno interno di feedback e ad un'ampiezza più alta di quella prevista. Tuttavia ci sono alcune difficoltà che frenano la diffusione di questa teoria in un contesto strutturale:

- Nonostante le ricerche eseguite in questo campo, non vi sono state significative prove tali da estendere questi studi a strutture reali.

- Le FRF higher-order non sono state direttamente misurate con l'applicazione delle attuali tecniche di misura, poiché influenzate dai termini higher-order. Inoltre, non possono essere confrontate direttamente -a causa delle loro diverse unità-, rendendo difficile avere un riscontro reale.

Considerando questi argomenti, gli sviluppi di questa ricerca lasciano in disparte gli effetti armonici higher-order, essendo una teoria ancora teorica anche se importante.

### ***1.10 Obiettivi della Tesi***

I tre principali obiettivi del presente lavoro sono:

- a) Sviluppo di un metodo sperimentale in grado di rilevare, caratterizzare, localizzare e quantificare le non linearità in una struttura.
- b) Creare un modello matematico per una struttura non lineare, capace di rigenerare e predire la sua risposta sottoposta a diverse eccitazioni.
- c) Utilizzare dei metodi e modelli che consentono di affrontare casi generali con un approccio sistematico e che siano compatibili con i metodi LMA e FE, nonché con i metodi non lineari noti.



## Capitolo 2 – Il Metodo della Funzione Descrittiva

### *2.1 Il metodo della funzione descrittiva (DFM, describing function method)*

Il principale problema quando ci si occupa di elementi non lineari è la loro dipendenza dall'ampiezza.

Tale condizione genera equazioni di rigidità/smorzamento che variano continuamente a seconda del livello della risposta. Il DFM cerca di “descrivere” la relazione tra l'armonica fondamentale della risposta e dell'eccitazione, mediante il calcolo della media della “*restoring force*” occorrente in un ciclo.

### *2.2 Modi normali non lineari (NNMs, Nonlinear Normal Modes)*

Lo sviluppo di tecniche non lineari analoghe alla sovrapposizione è stato oggetto di studio di molti ricercatori negli ultimi decenni. Considerando che una risposta non lineare rimane oscillatoria e periodica, una sovrapposizione modale non lineare potrebbe permettere una riduzione di ordine del sistema mediante le equazioni disaccoppiate di moto ottenute.

### *2.3 Identificazione di sistemi non lineari*

Alcuni studiosi tra cui Imregun ed altri hanno presentato una metodologia generale per l'analisi di accoppiamento di sistemi con non linearità relativamente deboli, del tipo di rigidità volumetrica, supponendo che ad una eccitazione armonica la

risposta resti armonica. Gli autori hanno affrontato il problema dell'accoppiamento mediante due approcci diversi: la costruzione di un profilo (che si avvale direttamente dei dati spaziali del sistema) e l'estrazione parametrica, che si basano sul loro primo metodo usato per estrarre i parametri modali non lineari dai dati misurati. Entrambi i metodi hanno prodotto risultati virtualmente identici e sono stati capaci di predire la risposta di una struttura accoppiata a diversi livelli di forza, mostrando una buona conformità con il metodo standard di equilibrio armonico (HBM, *Harmonic Balance Method*) e, più importante, con i dati misurati.

Una recente ricerca ha mostrato di avere forti legami con un metodo introdotto da Chong & Imregun, i quali hanno esplorato l'applicabilità di una tecnica di sovrapposizione nella quale i NNM si sono comportati in modo non lineare alla risonanza e lineare in altri casi. È stata presa in considerazione la natura accoppiata dello spazio modale non lineare, mediante l'espressione dell'ampiezza modale non lineare risonante come funzione di modi contigui. Gli autovalori e gli autovettori non lineari sono stati separatamente estratti dai dati misurati e si è ottenuta la risposta fisica come addizione algebrica delle coordinate modali non lineari. Tale metodo è stato capace di rigenerare con successo la risposta di un sistema a un diverso livello di eccitazione (Fig. 2.1).

Questo argomento ha avuto una rilevanza maggiore nel lavoro attuale, mostrando una vasta gamma di applicazione pratica. Data la sua importanza, questo campo è oggetto ancora di ricerca in cui si prevedono grossi vantaggi computazionali.

Il principale metodo di identificazione trattato in questa tesi ha ricavato non poche idee dal metodo di Masry & Caughey, ma piuttosto che interagire nel dominio frequenza, è stato trattato da un punto di vista computazionale. Mentre, il processo di identificazione del nostro metodo è sviluppato nello spazio modale, la localizzazione degli elementi non lineari viene indirizzata mediante un ritorno alle

coordinate fisiche. Ciò si raggiunge mediante una tecnica recente che si applica a sistemi generali MDOF e alla maggior parte delle non linearità.

#### ***2.4 Metodo di equilibrio armonico (HBM, Harmonic Balance Method)***

L'HBM viene presentato come il metodo più vicino alla metodologia standard per analizzare sistemi teorici non lineari. Il metodo si basa sull' "equilibrare" i termini armonici differenti che si vengono a determinare nelle equazioni di moto a causa delle non linearità.

In un approccio comune si ignorano i termini di ordine superiore, per cui si risolve un problema fondamentale (prima armonica). Alcuni studiosi hanno concentrato il loro interesse di studio sul metodo multi armonico, che ha dato risultati più accurati anche se a costi computazionali alti.

Nonostante il metodo sia più adatto ad analisi teoriche, viene comunque studiato per la sua caratteristica di adattarsi a metodologie sperimentali.



## Capitolo 3 - La formulazione non lineare

### 3.1 *Introduzione*

La discretizzazione spaziale di un sistema lineare è nota e costituisce la base di metodi standard quali FEM e LMA. Ciò può essere ottenuto mediante un certo numero di tecniche (per es. Ritz, Galerkin, formulazioni variazionali), che forniscono un approccio sistematico per la produzione di equazioni differenziali ordinarie (ODE, *Ordinary Differential Equations*).

Il vantaggio principale della suddetta procedura consiste nella rappresentazione compatta di un sistema strutturale in formato matriciale.

I coefficienti delle matrici del sistema rappresentano la massa locale, gli elementi di rigidità e smorzamento, tutti costanti per un sistema lineare.

Si tiene conto della distribuzione spaziale di questi elementi mediante i loro indici di matrice.

Quando si considerano, invece, sistemi non lineari, è naturale attendersi delle matrici con delle non linearità. Il sistema viene così diviso in componenti lineari e non lineari, in cui queste ultime costituiscono una matrice contenente una rappresentazione discreta delle non linearità. La matrice non lineare conterrà coefficienti non lineari locali (in relazione con rigidità e/o smorzamento) che sono funzione dell'ampiezza.

Alcuni ricercatori hanno sviluppato metodi di costruzione di una matrice non lineare (NLM): hanno usato la teoria della funzione descrittiva (DFM) per ottenere coefficienti equivalenti del primo ordine delle comuni non linearità, quali rigidità volumetrica e smorzamento per attrito e tali coefficienti hanno rappresentato il

“meccanismo” base di un sistema non lineare consentendo la “fusione (*merging*)” di componenti lineari con quelli non lineari in una singola rappresentazione matriciale. In questo capitolo si presenta la formulazione di elementi non lineari basata sulle funzioni descrittive del primo ordine, solo per rigidità volumetrica e smorzamento per attrito.

Viene costruita una matrice non lineare (NLM) associata a un vettore non lineare (NLV) che rappresenta il componente non lineare di un sistema MDOF.

### ***3.2 Formulazione dei coefficienti non lineari attraverso il metodo della funzione descrittiva (DFM)***

La teoria di base del DFM consiste nel fatto che, quando soggetti a eccitazione armonica, i sistemi non lineari mostrano una risposta oscillatoria e periodica molto prossima alla sinusoidale pura. Nonostante si sappia che la risposta di un sistema non lineare mostrerà diverse armoniche ad una data frequenza naturale, è anche vero che le ampiezze di una sub/super armonica risultano relativamente piccole in confronto alla fondamentale.

Il DFM, quindi, cerca di “descrivere” la relazione tra l’armonica fondamentale della risposta e l’eccitazione e calcola la forza media di “restoring” occorrente in un ciclo. A causa dell’assunzione di equazioni del primo ordine, il comportamento multi armonico non verrà né osservato né predetto.

Il metodo per ottenere coefficienti del primo ordine per le non linearità di rigidità volumetrica e smorzamento per attrito non è nuovo; è stato già affrontato mediante una varietà di metodi che vanno dall’ HBM (*Harmonic Balance Method*) al metodo a parametri differenziali. In questo lavoro questa metodologia viene presentata solo per completezza formale.

L'analisi viene semplificata considerando l'equazione di moto di un semplice oscillatore soggetto ad eccitazione armonica:

$$m\ddot{y} + \tilde{g}(\dot{y}, y) = f \sin \omega t \quad 3.1$$

dove  $\tilde{g}(\dot{y}, y)$  racchiude tutte le forze di “restoring”, essendo una funzione non lineare per velocità e spostamento  $(\dot{y}, y)$  della massa  $m$ . La sua natura non lineare viene indicata dal simbolo “~” in alto.

Se la risposta  $y$  è sufficientemente vicina alla senoide pura, e posto che poca energia viene liberata alle frequenze oltre la fondamentale, allora si può ipotizzare che la funzione non lineare  $\tilde{g}(\dot{y}, y)$  è oscillante periodicamente. È possibile trovare un coefficiente linearizzato  $\tilde{v}(\dot{y}, y)$  che fornisce la media migliore per la forza di “restoring” pura. Tale equazione agisce sull'armonica fondamentale della risposta non lineare ( $\tilde{Y}^1$ ) per un singolo ciclo di carico, di modo che:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{v}(\dot{y}, y) \cdot y \quad 3.2$$

per

$$y \approx \tilde{Y}^1 \sin(\omega t + \theta) = \tilde{Y}^1 \sin \tau$$

Per trovare il coefficiente non lineare  $\tilde{v}(\dot{y}, y)$ , la forza di “restoring”  $\tilde{g}(\dot{y}, y)$  si estende intorno a  $y$  mediante le serie di Fourier, trascurando tutti i termini di ordine più alto:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{v}(\dot{y}, y) \cdot y = \sigma_a^1 y + \sigma_b^1 y + \underbrace{\sigma_c^2 y + \sigma_d^2 y + \dots}_{\text{termini trascurati}} \quad 3.3$$

In (3.3) la funzione  $\sigma$  è data da:

$$\sigma_a^1 = \frac{1}{\pi \tilde{Y}^1} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{Y}^1 \sin \tau, \omega \tilde{Y}^1 \cos \tau) \sin \tau d\tau \quad 3.4$$

$$\sigma_b^1 = \frac{1}{\pi \tilde{Y}^1} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{Y}^1 \sin \tau, \omega \tilde{Y}^1 \cos \tau) \cos \tau d\tau$$

ed i coefficienti NL (non lineari)  $\tilde{v}(\dot{y}, y)$  sono definiti univocamente dalla seguente espressione:

$$\tilde{v}(\dot{y}, y) = \sigma_a^1 + \sigma_b^1 \quad 3.5$$

### 3.2.1 Funzione descrittiva per rigidezza volumetrica

Il modello matematico di un elemento di rigidezza volumetrica può essere espresso come:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) = ky + \beta y^3 \quad 3.6$$

dove il coefficiente  $k$  rappresenta il componente lineare della molla, mentre il coefficiente  $\beta$  descrive gli sforzi degli effetti non lineari dovuti al termine  $y^3$ . Nella fig. 3.1 è rappresentato sia il comportamento lineare (linea tratteggiata) che quello non lineare (linea intera) di un elemento a rigidezza volumetrica.

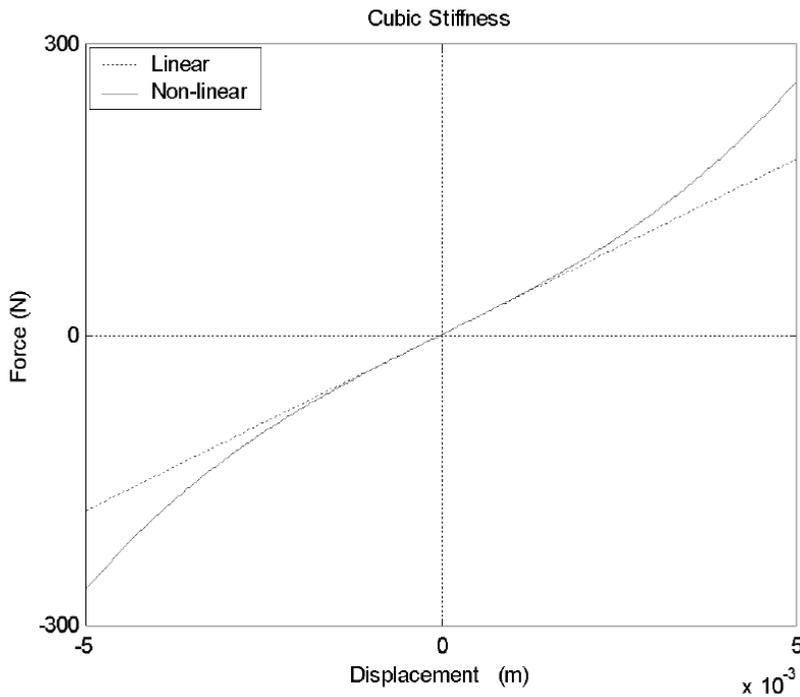


Fig. 3.1 – Rappresentazione grafica del comportamento di un elemento e rigidezza volumetrica

Da notare che, mentre la rigidezza totale della molla varia con l'ampiezza  $y$ , i coefficienti di rigidezza  $k$  e  $\beta$  rimangono costanti e non dipendono dalla frequenza. Diversamente, l'equazione differenziale (3.1) sarebbe molto più difficile da risolvere, in quanto i coefficienti “variano nel tempo”.

Inserendo (3.6) in (3.4), e sostituendo l'apice  $l$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} ky + \beta y^3 \sin \tau d\tau \\ \sigma_b &= 2 \sin(\pi) \cos(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Inserendo queste funzioni in (3.5) e sviluppando ulteriormente (il pedice  $k$  in  $\tilde{v}_k$  sta per coefficiente relativo alla rigidezza) si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_k(\dot{y}, y) &= \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} (k \tilde{Y} \sin \tau + \beta \tilde{Y}^3 \sin^3 \tau) \sin \tau d\tau \\ \tilde{v}_k(\dot{y}, y) &= \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} k \tilde{Y} \sin^2 \tau d\tau + \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} \beta \tilde{Y}^3 \sin^4 \tau d\tau \\ \tilde{v}_k(\dot{y}, y) &= \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau + \frac{\beta \tilde{Y}^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \tau d\tau \\ \tilde{v}_k(\dot{y}, y) &= \frac{k}{\pi} (\pi) + \frac{\beta \tilde{Y}^2}{\pi} \left( \frac{3}{4} \pi \right)\end{aligned}$$

che porta a scrivere l'equazione del primo ordine per un elemento a rigidezza volumetrica

$$\tilde{v}_k(\dot{y}, y) = k + \frac{3}{4} \beta \tilde{Y}^2 \quad 3.8$$

dove la parte non lineare NL del coefficiente è data da:

$$\tilde{v}_k(\dot{y}, y) = \frac{3}{4} \beta \tilde{Y}^2 \quad 3.9$$

Il significato del coefficiente NL  $\tilde{v}_k(\dot{y}, y)$  potrebbe essere descritto osservando che, secondo (3.2), è stata approssimata la forza di “restoring” mediante l'uso di un coefficiente linearizzato come di seguito riportato:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{v}(\dot{y}, y) \cdot y \quad 3.10$$

$$\left( k \cdot \tilde{Y} \sin \tau + \beta \tilde{Y}^3 \sin^3 \tau \right) \approx \left( k + \frac{3}{4} \beta \tilde{Y}^2 \right) \cdot \tilde{Y} \sin \tau \quad 3.11$$

con il risultato che la funzione di “restoring” vera presenta sia un termine  $\sin \tau$  che un  $\sin^3 \tau$ , mentre la funzione linearizzata ha soltanto un termine  $\sin \tau$ . Entrambe le funzioni sono mostrate nella fig. 3.2, dove si può osservare il coefficiente linearizzato che porta delle variazioni nella funzione NL.

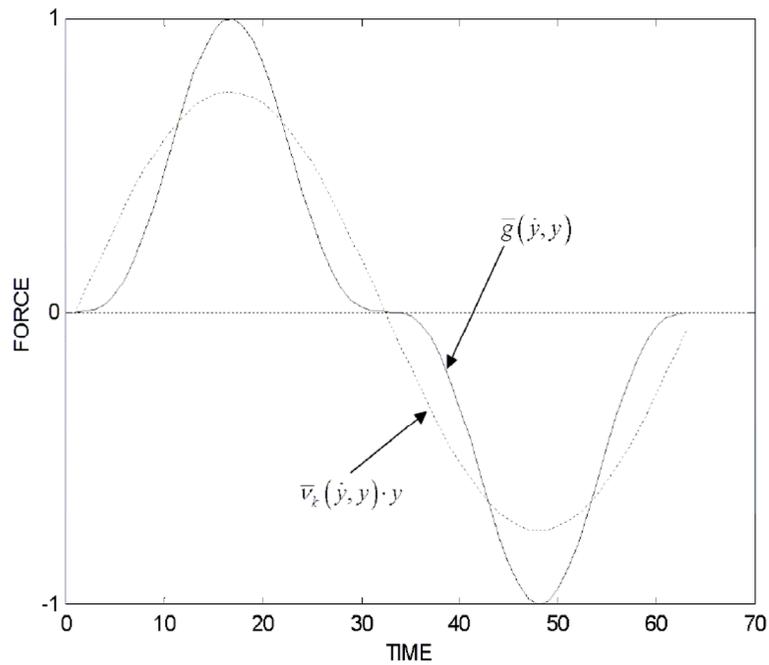


Fig. 3.2 – Funzione del 1° ordine descrittiva di un elemento a rigidità volumetrica

### 3.2.2 Elementi non-grounded di rigidità volumetrica

Alcuni miglioramenti sono stati applicati fino ad ora all'elemento grounded nel quale la sua unica coordinata è  $y$ . Se l'elemento NL risulta unito tra due nodi  $y_1$  e  $y_2$  (cioè è non-grounded), è necessario applicare un'altra variabile alla stessa procedura:

$$z = y_1 - y_2 \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_1 = \tilde{Y}_1 \sin(\omega t + \theta_1) \\ y_2 = \tilde{Y}_2 \sin(\omega t + \theta_2) \end{cases}$$

e

$$z = \tilde{Z} \sin(\omega t + \theta_z) = \tilde{Z} \sin \tau$$

dove

$$\tilde{Z} = |z| = |y_1 - y_2| \quad 3.12$$

$$\theta_z = \sphericalangle(y_1, y_2)$$

e la forza di “restoring” NL diviene:

$$\tilde{g}(\dot{z}, z) \approx \tilde{v}_k(\dot{z}, z) \cdot z \quad 3.13$$

Introducendo questo cambiamento di variabile e seguendo una procedura simile, si ottiene la seguente espressione:

$$\tilde{v}_k(\dot{z}, z) = k + \frac{3}{4} \beta \tilde{Z}^2 \quad 3.14$$

in cui la parte non lineare dell’equazione è data da:

$$\tilde{v}_k(\dot{z}, z) = \frac{3}{4} \beta \tilde{Z}^2 \quad 3.15$$

Come prima, l’approssimazione risulta più comprensibile se messa in condizione di uguaglianza matematica:

$$\left( k \cdot \tilde{Z} \sin \tau + \beta \tilde{Z}^3 \sin^3 \tau \right) \approx \left( k + \frac{3}{4} \beta \tilde{Z}^2 \right) \tilde{Z} \sin \tau \quad 3.16$$

### 3.2.3 Funzione descrittiva per smorzamento per attrito

Per ottenere la funzione descrittiva del primo ordine per non linearità dovute a smorzamento per attrito si procederà come già visto in precedenza. La forza di “restoring” è data dalla funzione:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) = c\dot{y} + \gamma \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}$$

(slip condition) 3.17

per

$$y > \tilde{Y}_{\text{limite}}$$

dove il termine  $|\dot{y}|$  tiene conto che la forza di “restoring” sia sempre opposta alla direzione del moto. Questo modello è soltanto valido durante la fase “slip (scorrimento)”, che si verifica in caso di spostamenti oltre un certo limite  $\tilde{Y}_{\text{limite}}$  e che è relativo alle proprietà delle superfici di contatto. In questi casi, si verifica un fenomeno conosciuto come “stick-slip”, caratterizzato da un moto intermittente e un comportamento stazionario. In questo caso la condizione (3.17) non è più valida.

Per spostamenti molto piccoli, corrispondenti alla fase “stick-slip”, la componente

non lineare  $\gamma \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}$  in (3.17) viene di solito sostituita da una forza elastica

proporzionale all’ampiezza del moto. Le fasi “stick” e “stick-slip” non saranno approfondite in quanto lo scopo della ricerca è focalizzato sui descrittori non lineari.

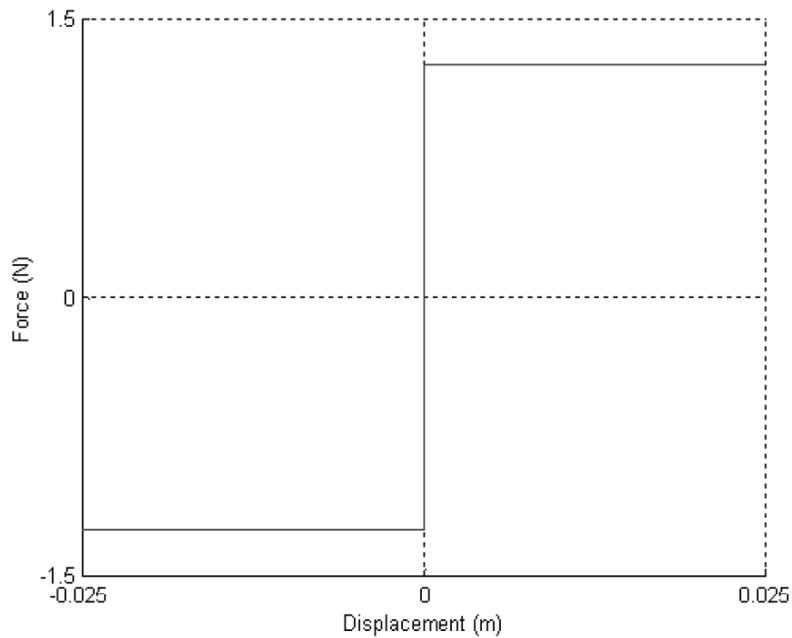


Fig. 3.3 – Comportamento di un elemento di smorzamento per attrito

La fig. 3.3 illustra il comportamento di un tipico elemento di smorzamento per attrito.

La relazione tra la forza di “restoring” e la sua funzione descrittiva è:

$$\tilde{g}(\dot{y}, y) \approx \tilde{v}_c(\dot{y}, y) \cdot y \quad 3.18$$

dove il pedice  $c$  in  $\tilde{v}_c$  sta per coefficiente legato allo smorzamento. La serie di Fourier produce:

$$\sigma_a = 0 \quad 3.19$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} \left( c\dot{y} + \gamma \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|} \right) \cos \tau d\tau$$

L'integrale diverso da zero deve essere risolto per parti al fine di trattare il termine  $|\dot{y}|$ . Si ottiene, quindi, l'algebra:

$$\tilde{v}_c(\dot{y}, y) = \frac{c}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} (\omega \tilde{Y} \cos \tau) \cos \tau d\tau + \frac{\gamma}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\omega \tilde{Y} \cos \tau}{|\omega \tilde{Y} \cos \tau|} \right) \cos \tau d\tau$$

$$\tilde{v}_c(\dot{y}, y) = \frac{\omega c}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau + \frac{\gamma}{\pi \tilde{Y}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \tau}{|\cos \tau|} \right) d\tau$$

$$\tilde{v}_c(\dot{y}, y) = \frac{\omega c}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau + \frac{\gamma}{\pi \tilde{Y}} \left[ 2 \int_0^{\pi/2} \cos \tau d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \tau d\tau \right]$$

ed infine si arriva alla equazione del primo ordine di un elemento di smorzamento per attrito:

$$\tilde{v}_c(\dot{y}, y) = \mathbf{i} \omega c + \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Y}} \quad 3.20$$

dove il numero immaginario “ $\mathbf{i}$ ” tiene conto dello sfasamento introdotto dal termine coseno in (3.19). La parte non lineare del coefficiente è data solo da:

$$\tilde{v}_c(\dot{y}, y) = \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Y}} \quad 3.21$$

L'approssimazione si completa introducendo (3.20) in (3.18):

$$\left( c \cdot \omega \tilde{Y} \sin \tau + \gamma \frac{\omega \tilde{Y} \sin \tau}{|\omega \tilde{Y} \sin \tau|} \right) \approx \left( \mathbf{i} \omega c + \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Y}} \right) \cdot \tilde{Y} \cos \tau \tag{3.22}$$

Dalla (3.22) si osserva che la forza di “restoring” contenente sia un termine  $\sin \tau$  che un  $\frac{\sin \tau}{|\sin \tau|}$  è stata approssimata dall’uso di un coefficiente linearizzato che contiene soltanto il termine  $\cos \tau$ . Ciò viene ulteriormente spiegato nella fig. 3.4, che mostra come la funzione descrittiva rappresenti la media migliore della variazione della forza di “restoring”.

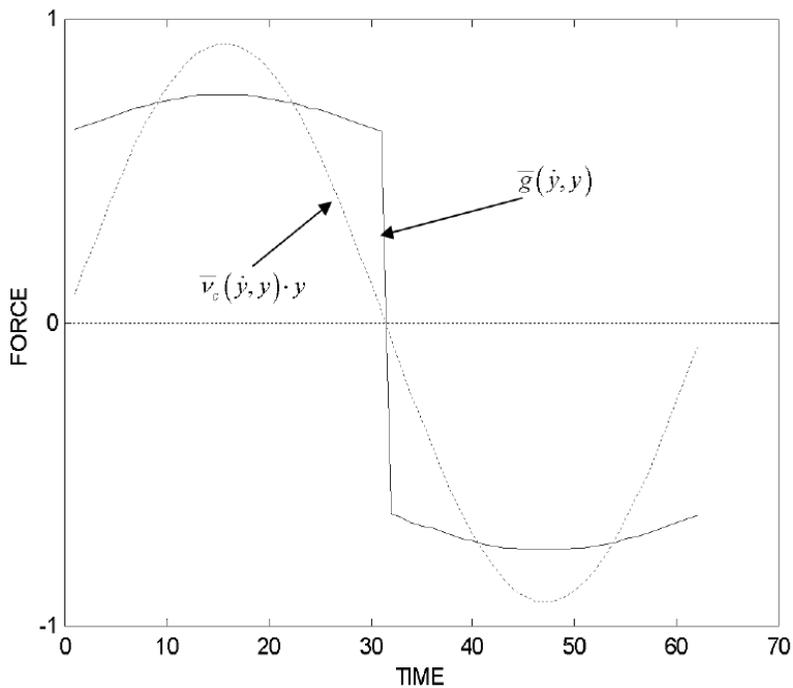


Fig. 3.4 – Funzione descrittiva del primo ordine di un elemento con smorzamento per attrito

### 3.2.4 Elementi non-grounded per smorzamento per attrito

Seguendo un approccio simile allo sviluppo della rigidità volumetrica, viene introdotto il cambiamento di variabile espresso in (3.12). La forza di “restoring” NL diventa:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\dot{z}, z) \approx \tilde{\mathbf{v}}_c(\dot{z}, z) \cdot z \quad 3.23$$

Dopo aver applicato la formulazione della funzione descrittiva, il coefficiente linearizzato  $\tilde{\mathbf{v}}_c(\dot{z}, z)$  diventa:

$$\tilde{\mathbf{v}}_c(\dot{z}, z) = \mathbf{i}\omega c + \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Y}} \quad 3.24$$

dove la parte non lineare del coefficiente è data soltanto da:

$$\tilde{\mathbf{v}}_c(\dot{z}, z) = \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Y}} \quad 3.25$$

L'approssimazione diventa:

$$\left( c \cdot \omega \tilde{Z} \sin \tau + \gamma \frac{\omega \tilde{Z} \sin \tau}{|\omega \tilde{Z} \sin \tau|} \right) \approx \left( \mathbf{i}\omega c + \mathbf{i} \frac{4\gamma}{\pi \tilde{Z}} \right) \cdot \tilde{Z} \cos \tau \quad 3.26$$

### 3.3 Il vettore non lineare (NLV) e la matrice non lineare (NLM)

Il caso introdotto dell'oscillatore semplice descritto in (3.1) viene esteso ad un sistema MDOF:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + \{\tilde{\mathbf{G}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad 3.27$$

con  $[\mathbf{M}]$  matrice di massa,  $\{\ddot{\mathbf{y}}\}$ ,  $\{\dot{\mathbf{y}}\}$  e  $\{\mathbf{y}\}$  vettori di accelerazione, velocità e spostamento, ed  $\{F\}$  vettore di eccitazione armonica alla frequenza  $\omega$ .

$\{\tilde{\mathbf{G}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\}$  è un vettore che contiene tutte le forze di “restoring” nel sistema e, in generale, è funzione degli spostamenti e velocità.

Per le non linearità additive,  $\tilde{\mathbf{g}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{g}}_c(\dot{\mathbf{y}}) + \tilde{\mathbf{g}}_k(\mathbf{y})$ , è possibile espandere l’NLV esplicitando le forze di “restoring” non lineari individuali, come segue:

$$\{\tilde{\mathbf{G}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}\tilde{\mathbf{v}}_1(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{g}\tilde{\mathbf{v}}_2(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{g}\tilde{\mathbf{v}}_3(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \\ \dots \\ \mathbf{g}\tilde{\mathbf{v}}_N(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{11} + \tilde{\mathbf{g}}_{12} + \tilde{\mathbf{g}}_{13} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{1N} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{21} + \tilde{\mathbf{g}}_{22} + \tilde{\mathbf{g}}_{23} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{2N} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{31} + \tilde{\mathbf{g}}_{32} + \tilde{\mathbf{g}}_{33} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{3N} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_{N1} + \tilde{\mathbf{g}}_{N2} + \tilde{\mathbf{g}}_{N3} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{NN} \end{Bmatrix}_N \quad 3.28$$

dove  $N$  è la dimensione del sistema (in DOFs). Ogni funzione non lineare  $\tilde{\mathbf{g}}_{ij}$  rappresenta una forza di “restoring” che agisce tra DOF  $i$  e  $j$ , mentre i termini con indici ripetuti  $\tilde{\mathbf{g}}_{ii}$  rappresentano una forza di “restoring” tra DOF  $i$  e terra. Le righe  $i$ -esime del NLV che contengono la funzione  $\mathbf{g}\tilde{\mathbf{v}}_i(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ , rappresentano l’effetto combinato di tutti gli elementi collegati al DOF  $i$ -esimo ( $\tilde{\mathbf{g}}_{i1} + \tilde{\mathbf{g}}_{i2} + \tilde{\mathbf{g}}_{i3} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{iN}$ ). Nella validità della terza legge di Newton, sarà vero che  $\tilde{\mathbf{g}}_{ij} = -\tilde{\mathbf{g}}_{ji}$ .

A questo punto, si sostituisce ogni funzione di “restoring” individuale  $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$  con i coefficienti linearizzati già sviluppati in precedenza. Si considera che il sistema presenta una risposta armonica  $\{y(t)\} = \{\tilde{Y}\} e^{i\omega t}$ , dove  $\{\tilde{Y}\} = \{|\tilde{Y}| e^{i\theta}\}$  è un vettore complesso non lineare che consente di accordare la fase, per cui è facile ridefinire le equazioni descrittive per questa condizione.

Per gli elementi NL “grounded”, la ridefinizione è quasi insignificante:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{ii}(\dot{y}_i, y_i) \cdot y_i = \left( k_{ii} + \frac{3}{4} \beta_{ii} |\tilde{Y}_i|^2 \right) \tilde{Y}_i \quad 3.29$$

oppure

$$\tilde{\mathbf{v}}_{ii}(\dot{y}_i, y_i) \cdot y_i = \left( \mathbf{i}\omega c + \mathbf{i} \frac{4\gamma_{ii}}{\pi |\tilde{Y}_i|} \right) \tilde{Y}_i \quad 3.30$$

dove la dipendenza di  $\tilde{Y}$  sul termine armonico  $e^{i\omega t}$  è stata trascurata. Per elementi NL non-grounded, i coefficienti NL possono essere ridefiniti mediante l’“adozione” dell’approccio di “rigidezza diretta” dal metodo FEM, in cui gli elementi sono formulati mediante una matrice di trasformazione che agisce su tutte le coordinate (DOFs). Per gli elementi discreti non lineari che hanno soltanto due nodi attivi (i e j) come coordinate locali, si ottiene la seguente notazione:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij} \approx \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij}) \cdot z_{ij} = \tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\dot{y}_i, \dot{y}_j, y_i, y_j) \cdot (y_i - y_j) \quad 3.31$$

che conduce a:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\dot{z}_{ij}, z_{ij}) \cdot z_{ij} = \left\{ \begin{matrix} k_{ij} & -k_{ij} \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i \\ \tilde{Y}_j \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{4} \beta_{ij} |\tilde{Z}_{ij}|^2 & -\frac{3}{4} \beta_{ij} |\tilde{Z}_{ij}|^2 \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i \\ \tilde{Y}_j \end{Bmatrix} \quad 3.32$$

oppure

$$\tilde{\mathbf{v}}_{ij}(\dot{\mathbf{z}}_{ij}, \mathbf{z}_{ij}) \cdot \mathbf{z}_{ij} = \left\{ \mathbf{i}\omega c_{ij} \quad -\mathbf{i}\omega c_{ij} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_j \end{Bmatrix} + \left\{ \mathbf{i} \frac{4\gamma_{ij}}{\pi |\tilde{\mathbf{Z}}_{ij}|} \quad -\mathbf{i} \frac{4\gamma_{ij}}{\pi |\tilde{\mathbf{Z}}_{ij}|} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_j \end{Bmatrix} \quad 3.33$$

dove si può notare che questa formulazione produce coefficienti simmetrici, per es.  $\tilde{\mathbf{v}}_{ij} = -\tilde{\mathbf{v}}_{ji}$ . Introducendo i coefficienti ora ridefiniti in (3.28), si forma una matrice di coefficienti NL:

$$\left\{ \tilde{\mathbf{G}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \right\} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{1j} & \tilde{\mathbf{v}}_{12} & \tilde{\mathbf{v}}_{13} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{1N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{21} & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{2j} & \tilde{\mathbf{v}}_{23} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{2N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{31} & \tilde{\mathbf{v}}_{32} & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{3j} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{v}}_{N1} & \tilde{\mathbf{v}}_{N2} & \tilde{\mathbf{v}}_{N3} & \dots & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{Nj} \end{bmatrix}_{N,N} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_3 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_N \end{Bmatrix}_N \quad 3.34$$

La sommatoria nella diagonale principale della matrice dei coefficienti si spiega dicendo che, come abbiamo visto in (3.32) e (3.33), ogni coefficiente fuori diagonale  $\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$  introduce una componente aggiuntiva (di uguale grandezza ma di segno opposto) al coefficiente della diagonale principale  $\tilde{\mathbf{v}}_{ii}$ . A causa dell'impiego di non linearità aggiuntive, ogni coefficiente NL  $\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$  può essere rigido e/o smorzato e agisce sul vettore di risposta  $\{\tilde{\mathbf{Y}}\}$ . Chiameremo  $\tilde{\mathbf{v}}$  la matrice quadrata e simmetrica dei coefficienti non lineari NLM (matrice non lineare); essa è data da:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{1j} & \tilde{\mathbf{v}}_{12} & \tilde{\mathbf{v}}_{13} & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{1N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{21} & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{2j} & \tilde{\mathbf{v}}_{23} & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{2N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{31} & \tilde{\mathbf{v}}_{32} & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{3j} & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_{N1} & \tilde{\mathbf{v}}_{N2} & \tilde{\mathbf{v}}_{N3} & \cdots & \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_{Nj} \end{bmatrix}_{N,N} \quad 3.35$$

dove il vettore NLV  $\tilde{\mathbf{G}}$  e la matrice NL  $\tilde{\mathbf{v}}$  sono legati dalla seguente espressione:

$$\{\tilde{\mathbf{G}}\} = [\tilde{\mathbf{v}}]\{\tilde{\mathbf{Y}}\} \quad 3.36$$

### 3.4 *NL-DOF (n), regione non lineare ( $\Gamma$ ) e regione misurata* $\mathfrak{R}$

Uno dei problemi più importanti dell'analisi non lineare è la localizzazione precisa delle non linearità, che possono essere riconosciute solo dai più esperti.

Dato che pochi elementi locali non lineari possono avere un impatto globale significativo, una ricerca intransigente richiederebbe misure in tutti i DOF.

Comunque, quando si opera con grandi strutture sono disponibili poche misure.

Gli effetti non lineari osservati nella risposta di un sistema sono generati da elementi non lineari. Nonostante la loro posizione sia sconosciuta, possono essere approssimativamente delimitati all'interno della regione non lineare  $\Gamma$  prima di passare all'analisi, dove:

$$\Gamma \in N, \text{ con } \Gamma \ll N \quad 3.37$$

I DOF associati a elementi non lineari vengono definiti come n NL-DOF con:

$$\begin{aligned} n \in \Gamma \in N, & \quad \text{tipicamente} & 3.38 \\ n \ll \Gamma \ll N & \end{aligned}$$

Da notare che l'esatta posizione di  $n$  in  $\Gamma$  rimane sconosciuta.

Come è stato dimostrato, gli n NL-DOF hanno bisogno di essere misurati per essere identificati per cui le misure in tutta la regione non lineare  $\Gamma$  sono necessarie per ottenere una buona localizzazione.

Le misure fuori  $\Gamma$  risultano inutili durante la fase di ricerca ed aiutano a migliorare la qualità della quantificazione non lineare ed a ridurre la dimensione del sistema analizzato. Tutti i DOF misurati, esterni ed interni, saranno rappresentati dalla regione misurata  $\mathcal{R}$ , dove:

$$n \in \Gamma \in \mathcal{R} \in N, \text{ con } n \ll \Gamma \ll \mathcal{R} \ll N \quad 3.39$$

Dalla letteratura si evince che l'impiego di una regione non lineare predefinita è possibile. È stato osservato, inoltre, che le non linearità sono spesso causate da alcuni agenti locali che possono essere approssimativamente localizzati prima dell'analisi. Le aree associate alle non linearità possono essere racchiuse in una regione  $\Gamma$  di misura arbitraria. Fuori di ciò, il sistema appare libero di elementi NL ma non libero dagli effetti NL.

Questo lavoro si può applicare per ottenere una riduzione delle dimensioni di calcolo durante l'analisi di un sistema non lineare. Dividendo righe/colonne di (3.36) in  $\Gamma$  e  $(N - \Gamma)$  DOF, abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{G}_{N-\Gamma} \\ \tilde{G}_\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-\Gamma),(N-\Gamma)} & \mathbf{0}_{(N-\Gamma),\Gamma} \\ \mathbf{0}_{\Gamma,(N-\Gamma)} & \tilde{\mathbf{v}}_{\Gamma,\Gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{N-\Gamma} \\ \tilde{Y}_\Gamma \end{Bmatrix} \quad 3.40$$

dove i coefficienti non lineari  $\tilde{\mathbf{v}}_{i,j}$  al di fuori della regione  $\Gamma$  sono assunti pari a zero. Questo conduce all'espressione ridotta:

$$\{\tilde{G}_\Gamma\} = [\tilde{\mathbf{v}}_{\Gamma,\Gamma}] \{\tilde{Y}_\Gamma\} \quad 3.41$$

dove:

$$\{\tilde{G}_\Gamma\} = \begin{Bmatrix} g\tilde{\mathbf{v}}_1(\dot{y}, y) \\ g\tilde{\mathbf{v}}_2(\dot{y}, y) \\ g\tilde{\mathbf{v}}_3(\dot{y}, y) \\ \dots \\ g\tilde{\mathbf{v}}_\Gamma(\dot{y}, y) \end{Bmatrix}_\Gamma = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{11} + \tilde{\mathbf{g}}_{12} + \tilde{\mathbf{g}}_{13} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{1\Gamma} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{21} + \tilde{\mathbf{g}}_{22} + \tilde{\mathbf{g}}_{23} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{2\Gamma} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{31} + \tilde{\mathbf{g}}_{32} + \tilde{\mathbf{g}}_{33} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{3\Gamma} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_{\Gamma 1} + \tilde{\mathbf{g}}_{\Gamma 2} + \tilde{\mathbf{g}}_{\Gamma 3} + \dots + \tilde{\mathbf{g}}_{\Gamma \Gamma} \end{Bmatrix}_\Gamma \quad 3.42$$

e:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\Gamma\Gamma} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}_{1j} & \tilde{\mathbf{v}}_{12} & \tilde{\mathbf{v}}_{13} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{1N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{21} & \sum_{j=1}^{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}_{2j} & \tilde{\mathbf{v}}_{23} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{2N} \\ \tilde{\mathbf{v}}_{31} & \tilde{\mathbf{v}}_{32} & \sum_{j=1}^{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}_{3j} & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{v}}_{N1} & \tilde{\mathbf{v}}_{N2} & \tilde{\mathbf{v}}_{N3} & \dots & \sum_{j=1}^{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}_{Nj} \end{bmatrix}_{\Gamma,\Gamma} \quad 3.43$$



## **Capitolo 4 - Il metodo della formulazione esplicita (EFM) di FRF non lineari per sistemi MDOF**

### **4.1 Introduzione**

Il fondamento di ogni metodo di analisi modale è un insieme di misure della FRF per il sistema in esame. La derivazione di modelli matematici basata su FRF non lineari costituisce un buon campo di studio e l'analisi modale lineare (LMA) è riconosciuta come valido strumento d'identificazione.

Non è ancora stato studiato un modello non lineare generale ricavato da FRF disponibili di un sistema non lineare. La maggior parte dei metodi esistenti si riferiscono solo a casi specifici.

Un problema per l'identificazione non lineare sperimentale è costituito dal fatto che le poche misure disponibili devono trovare un confronto con la FRF delle numerose formulazioni teoriche.

A causa della natura accoppiata di un problema non lineare, un approccio teorico, come il *metodo di equilibrio armonico* (HBM), può fornire tutte le risposte. Per grandi sistemi, questo consiste nell'ottimizzazione non lineare di un gran numero di incognite.

Andando, poi, a manipolare dati derivati sperimentalmente, quello che si ottiene sono formulazioni teoriche alle sole coordinate misurate. Questo approccio produce un numero ridotto di equazioni non lineari da risolvere e quindi semplifica il processo di identificazione non lineare.

Il metodo studiato e proposto è stato denominato “metodo della formulazione esplicita” (EFM) e fornisce una rappresentazione discreta di una FRF non lineare come espressione algebrica in forma chiusa per un DOF scelto. Ciò viene eseguito in modo sistematico senza badare alla dimensione del sistema.

Il termine “esplicito” deriva dal fatto che il modello proposto si basa sui coefficienti fisici localizzati nelle matrici  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $[C]$  (massa, rigidità e smorzamento), e classificate secondo un metodo di coordinate fisiche. Le non linearità sono rappresentate da una matrice non lineare (NLM) e dal suo vettore non lineare associato (NLV), che permette l’integrazione dei componenti lineari e non lineari in una singola formulazione matriciale.

Un’inversione di matrice, comunemente associata ad analisi modali standard, viene evitata per la definizione della FRF non lineare data come rapporto di due determinanti. Anche se risulta non molto efficiente in termini computazionali, la tecnica offre un grado incomparabile di robustezza. È stato, anche, studiata una versione ottimizzata del metodo EFM utile a mantenere l’economia computazionale nel caso in cui si operi su sistemi con molti gradi di libertà.

Il metodo ottimizzato EFM (EFM-O) è stato confrontato con una serie di valori di misure reali ricavate da una struttura di prova (test rig) contenente non linearità di rigidità volumetrica.

Il modello tratto dalla letteratura ed utilizzato come benchmark è riportato nell’Appendice.

La metodologia proposta condivide una filosofia comune trovata in altri metodi NL: innanzitutto, le equazioni di moto vengono derivate dalla discretizzazioni del modello attraverso il FEM; successivamente, le equazioni differenziali ordinarie NL (ODE) vengono convertite in un insieme di equazioni algebriche NL, le quali vengono di solito risolte attraverso la formulazione di Newton-Raphson, o da algoritmi più specializzati. Questa tecnica è stata implementata in MATLAB e

---

FEMLAB; si è approfondito l’approccio di Newton-Raphson per una veloce convergenza.

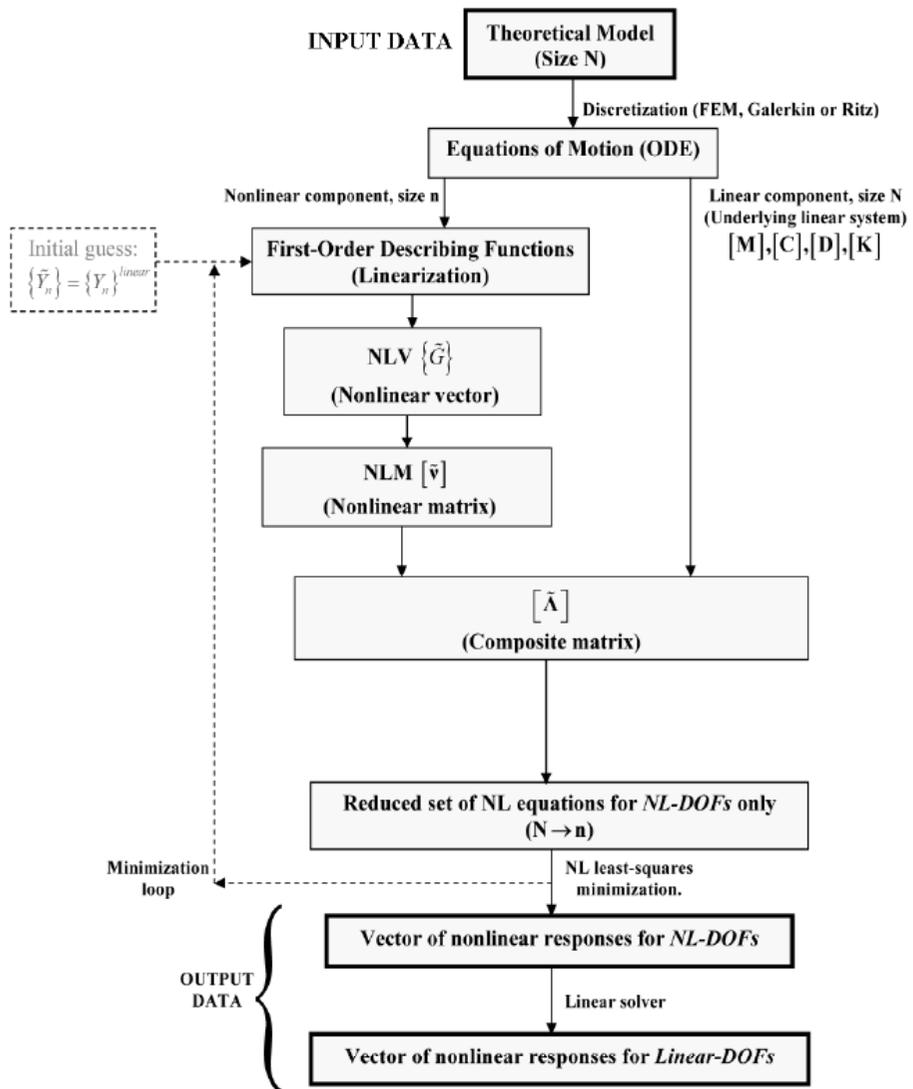


Fig. 4.1 – Diagramma di Flusso del metodo EFM

#### 4.2 La formulazione esplicita di non linearità FRF

Si può descrivere l'equazione di moto di un sistema non lineare generale soggetto ad eccitazione armonica mediante la seguente equazione differenziale ordinaria non lineare:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{y}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{y}\} + \mathbf{i}[\mathbf{D}]\{y\} + [\mathbf{K}]\{y\} + \{\tilde{G}(y, \dot{y})\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad 4.1$$

dove  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $[\mathbf{D}]$  e  $[\mathbf{K}]$  sono le matrici di massa, smorzamento viscoso, smorzamento isterico e rigidità – rispettivamente – del sistema lineare principale;  $\{\ddot{y}\}$ ,  $\{\dot{y}\}$  e  $\{y\}$  sono l'accelerazione, velocità e spostamento, ed  $\{F\}$  è il vettore di eccitazione armonica alla frequenza  $\omega$ .

Il componente non lineare del sistema viene rappresentato da un vettore non lineare (NLV)  $\{\tilde{G}\}$ , il quale è funzione di tutti gli spostamenti e velocità in generale.

Considerando una risposta armonica  $\{y(t)\} = \{\tilde{Y}\}e^{i\omega t}$ , dove  $\{\tilde{Y}\} = \{|\tilde{Y}|e^{i\theta}\}$  è un vettore complesso non lineare che permette di adattare la fase, l'equazione di spostamento viene ridotta a:

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}] + \mathbf{i}\omega [\mathbf{C}] + \mathbf{i}[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}])\{\tilde{Y}\} + \{\tilde{G}(\omega, \tilde{Y})\} = \{F\} \quad 4.2$$

Il “*linear receptance*” può essere definito come:

$$[\alpha] = (-\omega^2 [\mathbf{M}] + \mathbf{i}\omega [\mathbf{C}] + \mathbf{i}[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}])^{-1} \quad 4.3$$

e la sua inversa,  $[\Lambda] = [\alpha]^{-1}$ , come:

$$[\mathbf{\Lambda}] = -\omega^2 [\mathbf{M}] + \mathbf{i}\omega [\mathbf{C}] + \mathbf{i}[\mathbf{D}] + [\mathbf{K}] \quad 4.4$$

Secondo quanto descritto in (3.36), il vettore non lineare (NLV)  $\{\tilde{G}\}$  si esprime in termini di matrice non lineare (NLM)  $[\tilde{v}]$  e di vettore risposta:

$$\{\tilde{G}\} = [\tilde{v}]\{\tilde{Y}\} \quad 4.5$$

Introducendo la (4.4) e la (4.5) nella (4.2), si ha:

$$([\mathbf{\Lambda}] + [\tilde{v}])\{\tilde{Y}\} = \{F\} \quad 4.6$$

per arrivare alla rappresentazione finale del sistema NL:

$$[\tilde{\mathbf{\Lambda}}]\{\tilde{Y}\} = \{F\} \quad \text{dove} \quad [\tilde{\mathbf{\Lambda}}] = [\mathbf{\Lambda}] + [\tilde{v}] \quad 4.7$$

$[\tilde{\mathbf{\Lambda}}]$  è una matrice composta, che racchiude coefficienti lineari e non lineari, e viene formulata in  $[\dot{y}, y, \omega]$ . Potrebbe essere considerata come matrice di sistema.

Calcolate le radici del determinante di  $[\tilde{\mathbf{\Lambda}}]$  si ottengono le frequenze naturali non lineari dipendenti dalla frequenza e rapporti di smorzamento.

Dalla (4.7), si ha che la risposta ad ogni DOF  $i$  esimo viene data dal il rapporto di due determinanti:

$$\tilde{Y}_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{1,1} & \overset{i_{th} \text{ colonna}}{\tilde{\Lambda}_{1,N}} & \\ & F & \\ \tilde{\Lambda}_{N,1} & & \tilde{\Lambda}_{N,N} \end{pmatrix}}{\det(\tilde{\mathbf{\Lambda}})} \quad 4.8$$

dove  $N$  è la dimensione del sistema, e la matrice al numeratore si forma rimettendo il vettore forza  $\{F\}$  nella colonna  $i$ -esima della matrice composta  $[\tilde{\Lambda}]$ . L'equazione (4.8) è l'espressione fondamentale del metodo della EF.

Per una tipica struttura di ingegneria che contiene non linearità localizzate (giunti, discontinuità geometriche, smorzatori, ecc.) la matrice non lineare  $[\tilde{\nu}]$  risulta estremamente poco densa, con poche entrate diverse da zero. La notazione:

$$\begin{aligned}\Lambda_{ij} &= (-\omega^2 m_{ij} + \mathbf{i}\omega c_{ij} + \mathbf{i}d_{ij} + k_{ij}) \\ \tilde{\Lambda}_{ij} &= (-\omega^2 m_{ij} + \mathbf{i}\omega c_{ij} + \mathbf{i}d_{ij} + k_{ij} + \tilde{\nu}_{ij})\end{aligned}\quad 4.9$$

distingue tra coefficienti lineari  $(\Lambda_{ij})$  e non lineari  $(\tilde{\Lambda}_{ij})$ , entrambi contenuti in  $[\tilde{\Lambda}]$ .

### 4.3 Metodo ottimizzato per l'EFM per grandi sistemi

L'equazione (4.8) si adatta bene all'analisi di sistemi di piccole dimensioni, infatti un coefficiente non lineare  $\tilde{\Lambda}_{ij}$  rappresenta un collegamento fisico (lineare e non lineare)  $c$  tra DOF  $i$  e  $j$ .

Per grandi sistemi, il fatto che le non linearità si presentano sparpagiate nella  $[\tilde{\Lambda}]$ , un'analisi non lineare risulta scomoda e costosa dal punto di vista computazionale. Ma questa difficoltà può essere risolta mediante un'ulteriore manipolazione di (4.7)

Posto  $n$  tutti quei DOF associati ad elementi non lineari, nella (4.7) si dividono i componenti in  $n$  e  $(N-n)$ :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{(N-n),(N-n)} & \Lambda_{(N-n),n} \\ \Lambda_{n,(N-n)} & \Lambda_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{N-n} \\ \tilde{Y}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{N-n} \\ F_n \end{Bmatrix} \quad 4.10$$

dove le non linearità risultano concentrate in una sottomatrice  $[\tilde{\Lambda}_{n,n}]$ . Dividendo la (4.5) nello stesso modo, otteniamo:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{G}_{(N-n),(N-n)} \\ \tilde{G}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-n),(N-n)} & \mathbf{0}_{(N-n),n} \\ \mathbf{0}_{n,(N-n)} & \tilde{v}_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{N-n} \\ \tilde{Y}_n \end{Bmatrix} \quad 4.11$$

dove i coefficienti non lineari sparpagliati si sono concentrati nella sottomatrice  $[\tilde{v}_{n,n}]$ . Inserendo (4.11) in (4.10) e trasferendo i termini non lineari al RHS, finalmente arriviamo a:

$$\tilde{Y}_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{1,1} & \overset{i_{th} \text{colonna}}{\tilde{R}} & \tilde{\Lambda}_{1,N} \\ \tilde{\Lambda}_{N,1} & & \tilde{\Lambda}_{N,N} \end{pmatrix}}{\det(\Lambda)} \quad 4.12$$

dove:

$$\tilde{R} = \begin{Bmatrix} F_{N-n} \\ F_n - \tilde{v}_m \tilde{Y}_n \end{Bmatrix} \quad 4.13$$

Le equazioni (4.12) e (4.13) rappresentano il metodo ottimizzato per un calcolo efficiente delle risposte non lineari quando ci si occupa di grandi sistemi. Nonostante la dimensione della matrice  $[\Lambda]$  sia ancora  $N$ , la tecnica di risoluzione è stata molto semplificata, in quanto:

- 1 Le espressioni (4.12) e (4.13) rappresentano rispettivamente un sistema ridotto di  $n$  equazioni non lineari ( $\tilde{Y}_i$ , definite per i DOF  $i \in n$ ) in  $n$  incognite, le risposte non lineari allo stesso  $n$  DOF ( $\tilde{Y}_n$ ) contenute in  $(R)$ , dove  $n \ll N$ . Ciò dimostra che un sistema non lineare si può pienamente descrivere mediante un primo calcolo di risposte non lineari a soltanto  $n$  DOF.
- 2 Durante un'ottimizzazione non lineare, risulta molto conveniente il fatto che le incognite  $\{\tilde{Y}_n\}$  siano concentrate nel numeratore di (4.12), nel vettore  $\{\tilde{R}\}$ . Ciò riduce di molto il costo computazionale della soluzione mediante l'aggiornamento di una regione locale della matrice del numeratore in (4.12). Per una data frequenza  $\omega$  la matrice nel denominatore ( $[\Lambda]$ ) resta invariata.
- 3 Una volta calcolate le risposte non lineari  $\{\tilde{Y}_n\}$ , il problema viene ridotto ad un solo lineare. Le restanti risposte  $\{\tilde{Y}_{N-n}\}$  si possono trovare tutte attraverso la risoluzione della prima equazione di (4.10).
- 4 Nonostante il costo computazionale ancora alto per ottenere un determinante, la capacità di calcolare alcune risposte discrete analitiche per accoppiare le loro controparti sperimentali, vale la pena affrontare questa spesa.

- 5 La tecnica permette l'inclusione di qualsiasi tipo di smorzamento (viscoso e/o isteretico, proporzionale o non) senza alcuna considerazione speciale.

#### 4.4 *Minimizzazione di un grande insieme di equazioni non lineari*

Il metodo Newton-Raphson è quello più noto per risolvere funzioni non lineari, fornendo un semplice meccanismo per convergere alla soluzione da un'ipotesi iniziale sufficientemente chiusa. Attualmente, non esistono metodi che possano garantire una convergenza globale per un problema non lineare, quindi l'importanza di stimare un'ipotesi iniziale corretta non può essere enfatizzata.

Il problema di Newton-Raphson può essere utilizzato per trovare il vettore  $\{y\}$  che costituisce la soluzione migliore (residuale minimo) per la funzione  $\{f(y)\}$ ,

$$\{f(y)\} \approx \{0\} \quad 4.14$$

Lo schema iterativo si basa sulla seguente equazione:

$$\{y^{(k+1)}\} = \{y^k\} - \varepsilon [J]^{-1} \{f(y^k)\}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad 4.15$$

dove il vettore  $\{y^{k+1}\}$  corrispondente alla  $(k + 1)$  interazione che viene prodotta dal vettore  $\{y^k\}$  e lo Jacobiano  $[J]$ . Il problema si riduce a trovare il valore di  $\varepsilon$  che minimizza il funzionale (4.14).

Per un problema multi variabile, lo Jacobiano si definisce come:

$$[J] = \frac{\partial \{f(y^k)\}}{\partial \{y^k\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad 4.16$$

Quando ci si trova di fronte ad un grande numero di equazioni si può migliorare la percentuale di convergenza mediante l'adozione di un approccio della "trust region", in cui la funzione da minimizzare  $\{f(y)\}$  – di solito di ordine superiore – viene approssimata con una funzione più semplice ( $q(y)$ ) che imita il comportamento della funzione originale in un'area  $\Pi$  intorno al punto  $\{y\}$ . L'area viene chiamata "trust-region" e lo step  $\{s\}$  di prova si compie mediante la minimizzazione della funzione su  $\Pi$ . Il problema si trasforma in :

$$\min \{ \{f(y)\}, \{y\} \in \Pi \} \rightarrow \min \{ \{q(s)\}, \{s\} \in \Pi \} \quad 4.17$$

Tipicamente,  $\{q(y)\}$  si considera come un'approssimazione quadratica definita dai primi due termini di uno sviluppo di Taylor di  $\{f(y)\}$ , e l'area  $\Pi$  è di solito in forma sferica o ellissoidale. Matematicamente, il sub-problema della "regione trust" si definisce come:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \{s\}^T [\mathbf{T}] \{s\} + \{s\}^T \{g\}, \text{cosi-che } \|\mathbf{A}s\| \leq \Delta \right\} \quad 4.18$$

dove  $\{g\}$  è il gradiente di  $\{f(y)\}$  al punto  $\{y\}$ ,  $[\mathbf{T}]$  è la matrice Hessiana (la matrice simmetrica delle derivate seconde),  $[\mathbf{A}]$  è una matrice diagonale scalata,  $\Delta$  è uno scalare positivo e  $\|\cdot\|$  è il 2-norm. Si raggiunge una buona iterazione se vale le seguente condizione:

$$\begin{aligned} \{f(y+s)\} &\leq \{f(y)\} \\ \{y\} &= \{y\} + \{s\} \end{aligned} \quad 4.19$$

Applicando il suddetto schema per calcolare analiticamente le risposte Y si avrà la seguente procedura:

- 1 Stabilire un vettore di variabilità non note. In questo caso, dato dalle risposte non lineari  $\{\tilde{Y}_n\}$
- 2 Costruzione di un insieme di equazioni algebriche non lineari. Questi sono basati su (4.12), formando il vettore  $\{\tilde{Y}_n\}^{analytical}$ . La funzione oobiettivo è  $\{f(y)\} = \{f(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \dots, \tilde{Y}_n)\}$ .
- 3 Fornire un'ipotesi iniziale  $\{\tilde{Y}_n\}^{trial}$  per la prima iterazione. Le risposte lineari vengono scelte per questo scopo.
- 4 Separare reale-immaginario. Lo schema di minimizzazione standard usato nel presente lavoro non può essere utile nel caso di variabili complesse, per cui il problema deve essere separato in parti reali ed immaginarie prima di procedere. Ciò si esprime matematicamente come:

$$\{f(y)\} = \begin{Bmatrix} f_{\text{Re}}(y) \\ \dots \\ f_{\text{Im}}(y) \end{Bmatrix}_{2n} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\tilde{Y}_n^{\text{trial}} - \tilde{Y}_n^{\text{analytical}}) \\ \dots \\ \text{Im}(\tilde{Y}_n^{\text{trial}} - \tilde{Y}_n^{\text{analytical}}) \end{Bmatrix}_{2n} \approx \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 4.20$$

- 5 Procedura iterativa. La procedura iterativa si conclude quando la funzione obiettivo  $\{f(y)\}$  è inferiore alla tolleranza predefinita (cioè, tra 1 e 2%) rispetto alla precedente iterazione. Si segnaleranno le risposte  $\{\tilde{Y}_n\}$  solo per la frequenza di eccitazione attuale, per cui una nuova minimizzazione deve essere applicata per il successivo step frequenza. A questo punto, le risposte calcolate sono molto utili come ipotesi iniziali per l'algorithm –invece di una soluzione lineare.
- 6 Solver lineare. Dopo aver ottenuto le risposte per tutti i range di frequenza calcolati, sono ora disponibili le n FRF non lineari e, cosa più importante, il problema è stato trasformato in quello lineare. Si possono trovare le restanti risposte  $\{\tilde{Y}_{N-n}\}$  risolvendo l'equazione principale di (4.10), oppure impiegando (4.12).

#### 4.5 *Un esempio di rigidità volumetrica – Test ring n. 1*

Vediamo ora una esemplificazione con l'applicazione a un caso semplice. Assegnato un sistema come in figura 4.2.

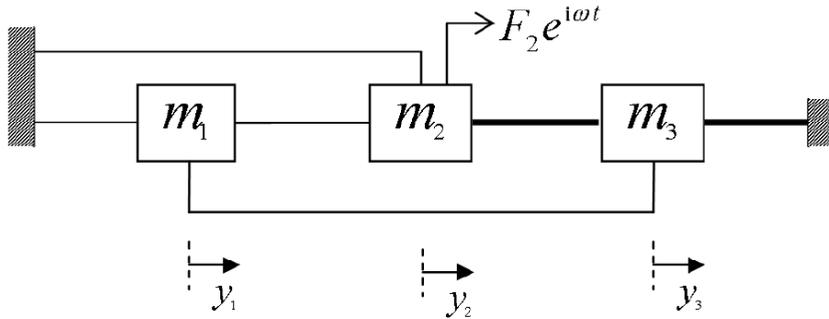


Fig. 4.2 – Modello per l’esempio implementato

Per esso vogliamo calcolare le FRF non lineari. Come primo passo procediamo al calcolo del vettore non lineare (NLV); dato che le molle non lineari (rappresentate da linee doppie nella Fig. 4.2) sono localizzate una alla massa  $m_3$  e l’altra tra le masse  $m_2$  e  $m_3$ , ne consegue che le uniche forze di “restoring” non nulle in (3.28) sono  $\tilde{g}_{23}$ ,  $\tilde{g}_{32}$  e  $\tilde{g}_{33}$ :

$$\{\tilde{G}(\dot{y}, y)\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}v_1(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}v_2(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}v_3(\dot{y}, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{12} + \tilde{g}_{13} \\ \tilde{g}_{21} + \tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{23} \\ \tilde{g}_{31} + \tilde{g}_{32} + \tilde{g}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{g}_{23} \\ \tilde{g}_{32} + \tilde{g}_{33} \end{Bmatrix}$$

Poi, usiamo (3.29) per esprimere il coefficiente non lineare per l’elemento *grounded* rappresentato dalla forza di “restoring”  $\tilde{g}_{33}$ :

$$\tilde{g}_{33} = \tilde{v}_{33}(\dot{y}_3, y_3) \cdot y_3 = \left( \frac{3}{4} \beta_{33} |\tilde{Y}_3|^2 \right) \tilde{Y}_3$$

Le forze di “restoring”  $\tilde{g}_{23}$  e  $\tilde{g}_{32}$  a causa della molla sono entrambe ottenute da (3.32):

$$\tilde{\mathbf{g}}_{23} = \tilde{\mathbf{v}}_{23}(\dot{z}_{23}, z_{23}) \cdot z_{23} = \left\{ \frac{3}{4} \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 \quad -\frac{3}{4} \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{Bmatrix}$$

e

$$\tilde{\mathbf{g}}_{32} = \tilde{\mathbf{v}}_{32}(\dot{z}_{32}, z_{32}) \cdot z_{32} = \left\{ \frac{3}{4} \beta_{32} |\tilde{Z}_{32}|^2 \quad -\frac{3}{4} \beta_{32} |\tilde{Z}_{32}|^2 \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_3 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix}$$

dove  $|\tilde{Z}_{ij}| = |\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j|$ ; essendo  $\beta_{32} = \beta_{23}$  e  $|\tilde{Z}_{32}| = |\tilde{Z}_{23}|$ , La terza legge di Newton risulta vera se  $\tilde{\mathbf{g}}_{32} = -\tilde{\mathbf{g}}_{23}$ . Introducendo tutte queste espressioni nel NLV (3.28), otteniamo

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{v_1}(\dot{y}, y) \\ \tilde{\mathbf{g}}_{v_2}(\dot{y}, y) \\ \tilde{\mathbf{g}}_{v_3}(\dot{y}, y) \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 & -\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 \\ 0 & -\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 & (\beta_{33} |\tilde{Y}_3|^2 + \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{Bmatrix} \quad 4.21$$

dove la matrice contenente i coefficienti non lineari è NLM  $[\tilde{\mathbf{v}}]$ , definita in (3.35).

Dal momento che stiamo operando su un piccolo sistema, useremo l'EFM non ottimizzato (4.8), in quanto consente di capire l'aspetto fisico. Mediante (4.8), si determinano le FRF non lineari:

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ F_2 & \tilde{\Lambda}_{22} & \tilde{\Lambda}_{23} \\ 0 & \tilde{\Lambda}_{32} & \tilde{\Lambda}_{33} \end{pmatrix}}{\det(\tilde{\Lambda})}$$

$$\tilde{Y}_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & F_2 & \tilde{\Lambda}_{23} \\ \Lambda_{31} & 0 & \tilde{\Lambda}_{33} \end{pmatrix}}{\det(\tilde{\Lambda})}$$

$$\tilde{Y}_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \tilde{\Lambda}_{22} & F_2 \\ \Lambda_{31} & \tilde{\Lambda}_{32} & 0 \end{pmatrix}}{\det(\tilde{\Lambda})}$$

o semplicemente:

$$\frac{\tilde{Y}_1}{F_2} = \frac{\Lambda_{13}\tilde{\Lambda}_{32} - \Lambda_{12}\tilde{\Lambda}_{33}}{\det(\tilde{\Lambda})} \quad \frac{\tilde{Y}_2}{F_2} = \frac{\Lambda_{11}\tilde{\Lambda}_{33} - \Lambda_{31}\Lambda_{13}}{\det(\tilde{\Lambda})} \quad \frac{\tilde{Y}_3}{F_2} = \frac{\Lambda_{12}\Lambda_{31} - \Lambda_{11}\tilde{\Lambda}_{32}}{\det(\tilde{\Lambda})}$$

dove

$$\det(\tilde{\Lambda}) = \Lambda_{11}\Lambda_{22}\tilde{\Lambda}_{33} - \Lambda_{11}\tilde{\Lambda}_{23}\tilde{\Lambda}_{32} - \Lambda_{21}\Lambda_{12}\tilde{\Lambda}_{33} + \Lambda_{21}\Lambda_{13}\tilde{\Lambda}_{32} + \Lambda_{31}\Lambda_{12}\tilde{\Lambda}_{23} - \Lambda_{31}\Lambda_{13}\tilde{\Lambda}_{22}$$

4.22

Dalla (4.9) e (4.21) si osserva che:

$$\tilde{\Lambda}_{22} = \tilde{\Lambda}_{22}(\Lambda_{22}, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \beta_{23}) \quad 4.23$$

$$\tilde{\Lambda}_{23} = \tilde{\Lambda}_{23}(\Lambda_{23}, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \beta_{23})$$

$$\tilde{\Lambda}_{32} = \tilde{\Lambda}_{23}$$

$$\tilde{\Lambda}_{33} = \tilde{\Lambda}_{33}(\Lambda_{33}, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \beta_{23}, \beta_{33})$$

L'equazione (4.23) mostra che il determinante di  $[\tilde{\Lambda}]$  è una funzione quadrata di  $\beta_{23}$ , dovuto al 1° e 2° termine del determinante. Comunque,  $\beta_{33}$  mostra soltanto un aspetto lineare (per es., il 3° termine del determinante contiene un singolo elemento non lineare,  $\tilde{V}_{33}$ ). Tale caratteristica suggerisce che il sistema è più sensibile alle variazioni nelle non linearità *non-grounded*  $\beta_{23}$ .

Un'altra conclusione utile si può ricavare da (4.23): il determinante di  $[\tilde{\Lambda}]$  contiene tutti i coefficienti non lineari del sistema. Poiché si tratta di un denominatore comune, ne consegue che ogni cambiamento in uno degli elementi non lineari influenzerà tutte le risposte, come ci si aspettava. Comunque, il punto in cui ogni risposta individuale verrà influenzata dipende anche dal numeratore, anche se questo costituisce una complicazione forte della formulazione:

- $\frac{\tilde{Y}_3}{F_2}$  sarà più sensibile alle variazioni in  $\beta_{23}$  che in  $\beta_{33}$ , perché  $\tilde{\Lambda}_{33}$  non appare nel suo numeratore.
- $\frac{\tilde{Y}_2}{F_2}$  sarà più sensibile ai cambiamenti in  $\beta_{33}$  che in  $\beta_{23}$ , perché  $\tilde{\Lambda}_{23}$  non appare nel suo numeratore. Questa non è una conclusione ovvia, dato che la massa  $m_2$  non è fisicamente collegata all'elemento  $\beta_{33}$ . Comunque, sarebbe bene che le variazioni più piccole della variabile quadratica  $\beta_{23}$  (presenti in un denominatore) annullino le grandi variazioni nella variabile lineare  $\beta_{33}$  (presenti nel numeratore).

- Quando consideriamo la FRF non lineare  $\frac{\tilde{Y}_1}{F_2}$  possiamo solo dire che essa avrà sensibilità più alta alle non linearità, dato che viene influenzata dalla presenza di  $\beta_{23}$  e di  $\beta_{33}$  al numeratore (entrambe contenute in  $\tilde{\Lambda}_{23}$  e  $\tilde{\Lambda}_{33}$ ). La nostra previsione in questo caso è risultata errata dato che si pensava che  $\tilde{Y}_1$  fosse il DOF più colpito del sistema, invece risulta essere quello più lontano dalla “regione non lineare”.

Le FRF non lineari  $\frac{\tilde{Y}_1}{F_2}$ ,  $\frac{\tilde{Y}_2}{F_2}$  e  $\frac{\tilde{Y}_3}{F_2}$  insieme formano un insieme di 3 complesse

equazioni non lineari con 3 complesse incognite (le risposte  $\tilde{Y}_1$ ,  $\tilde{Y}_2$  e  $\tilde{Y}_3$ ), valide per una singola frequenza  $\omega$ ; le risposte possono essere risolte usando un algoritmo standard di Newton-Raphson esteso alle sole regioni risonanti, in cui le non linearità si presentano come attive, ovunque vengano posizionate dalle risposte lineari.

L’azione del metodo EFM può essere confrontato con il “metodo di equilibrio armonico”, punto di riferimento per i problemi non lineari.

Dopo aver applicato il processo di minimizzazione ad ogni frequenza  $\Delta\omega$  di step nella vicinanza di risonanza, si ottiene la risposta non lineare come mostrano le figg. 4.3 e 4.4.

La linea tratteggiata rappresenta la risposta lineare, mentre quella intera rappresenta i risultati ottenuti dal metodo del punto di riferimento, contrassegnato come “HBM”. Infine, i segni “\_” intorno alle risonanze sono i risultati ricavati dal metodo EFM, che risultano in perfetto accordo con il punto di riferimento. La simulazione effettuata ha impiegato circa 4 secondi utilizzando un calcolatore con a bordo un Pentium 4 da 3.0 GHz e fornito di 512 MB di RAM.

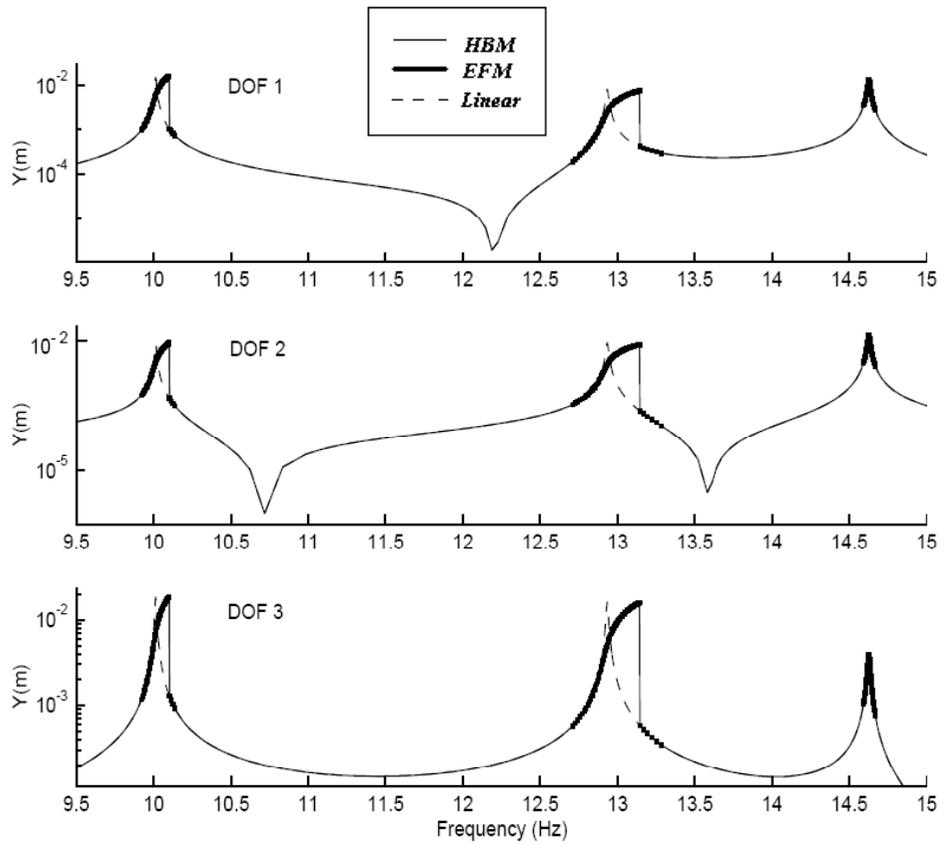


Fig. 4.3 - Test N1 – Risposta Non Lineare del sistema assegnato

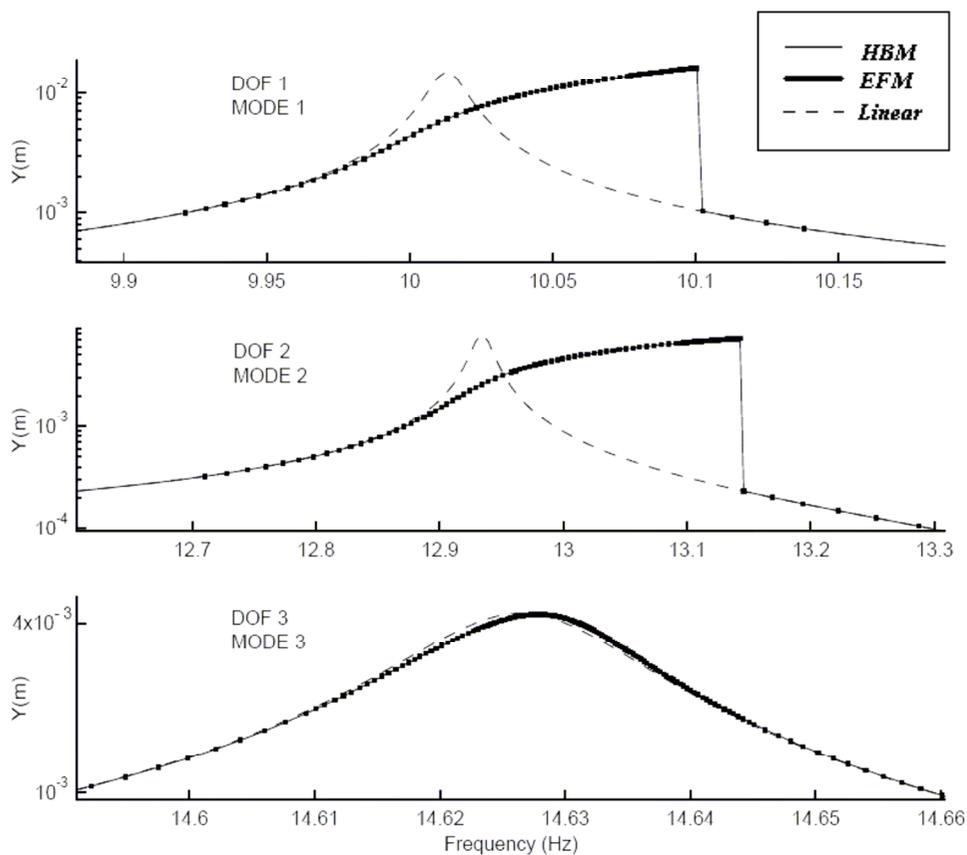


Fig. 4.4 – Test n1 – Vista ingrandita del diagramma di cui alla fig. 4.3

#### 4.6 *Un esempio di smorzamento per attrito - Test ring n. 2*

Il metodo EFM viene esemplificato per un sistema contenente non linearità di smorzamento per attrito. Il caso in esame è identico a quello esaminato in precedenza, tranne per i due elementi NL che sono del tipo smorzamento per attrito.

Seguendo un approccio simile al caso già visto, la matrice non lineare (NLM) è costruita come:

$$[\tilde{\mathbf{v}}] = \mathbf{i} \frac{4}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_{23}}{|\tilde{\mathbf{Z}}_{23}|} & -\frac{\gamma_{23}}{|\tilde{\mathbf{Z}}_{23}|} \\ 0 & -\frac{\gamma_{23}}{|\tilde{\mathbf{Z}}_{23}|} & \frac{\gamma_{33}}{|\tilde{\mathbf{Y}}_3|} + \frac{\gamma_{23}}{|\tilde{\mathbf{Z}}_{23}|} \end{bmatrix}$$

Dopo l'applicazione di (4.8), viene calcolata la risposta non lineare come mostrano le figg. 4.5 e 4.6. Si può osservare che il metodo EFM (segni "+") è in completo accordo con quanto ottenuto con il HBM (linea intera) ed entrambi i metodi mostrano distorsioni NL in confronto al caso lineare (linea tratteggiata).

L'effetto della non linearità provoca una riduzione generale nelle ampiezze, come si nota maggiormente nei modi primo e secondo. Questo spiega il motivo per cui il meccanismo delle non linearità sia di tutto rispetto per strutture in moto come nelle strutture a turbina dove le ampiezze superiori costituiscono un rischio per la stabilità della struttura.

Il terzo modo è meno esagerato perché, alle frequenze superiori, la forza di smorzamento NL viene sopraffatta dalle forze di “restoring” lineari; l’effetto più evidente nel secondo modo può essere spiegato mediante il fatto che due masse sono in movimento opposto, generando un effetto aggiuntivo alle forze di attrito.

Tutto ciò che è stato discusso nel caso precedente (paragrafo 4.5), riguardo la sensibilità delle FRF non lineari alle non linearità, rimane valido.

#### 4.7 *Conferma sperimentale del metodo EFM ottimizzato*

Il metodo EFM ottimizzato è stato confermato sperimentalmente contro le misure reali ottenute da un test rig. Le FRF non lineari vengono misurate in diversi punti della struttura, a vari livelli di forza diversa entro il range 0.5 - 1.5N. Le stesse FRF vengono numericamente calcolate mediante il EFM ottimizzato (4.12).

La figura 4.7 mostra i risultati per la FRF in prossimità del primo modo, a quattro livelli di eccitazione.

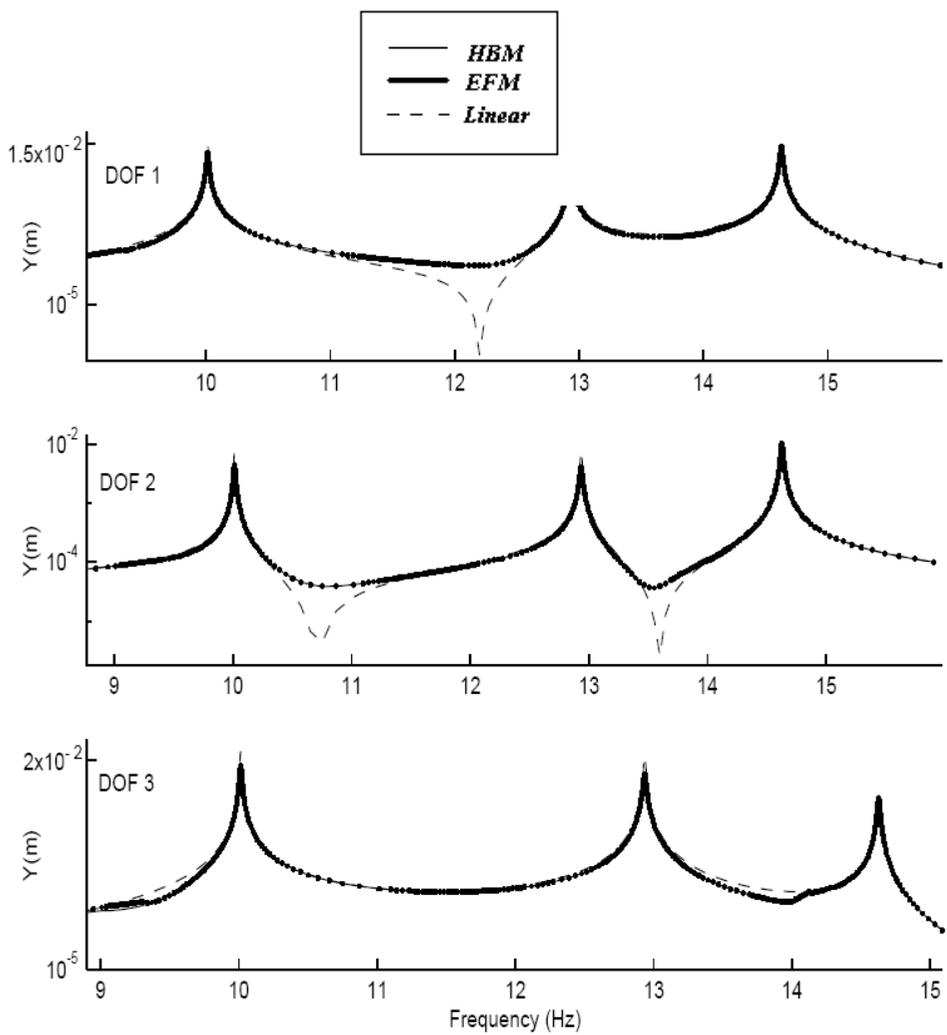


Fig. 4.5 - Test N2 – Risposta non lineare del sistema in esame

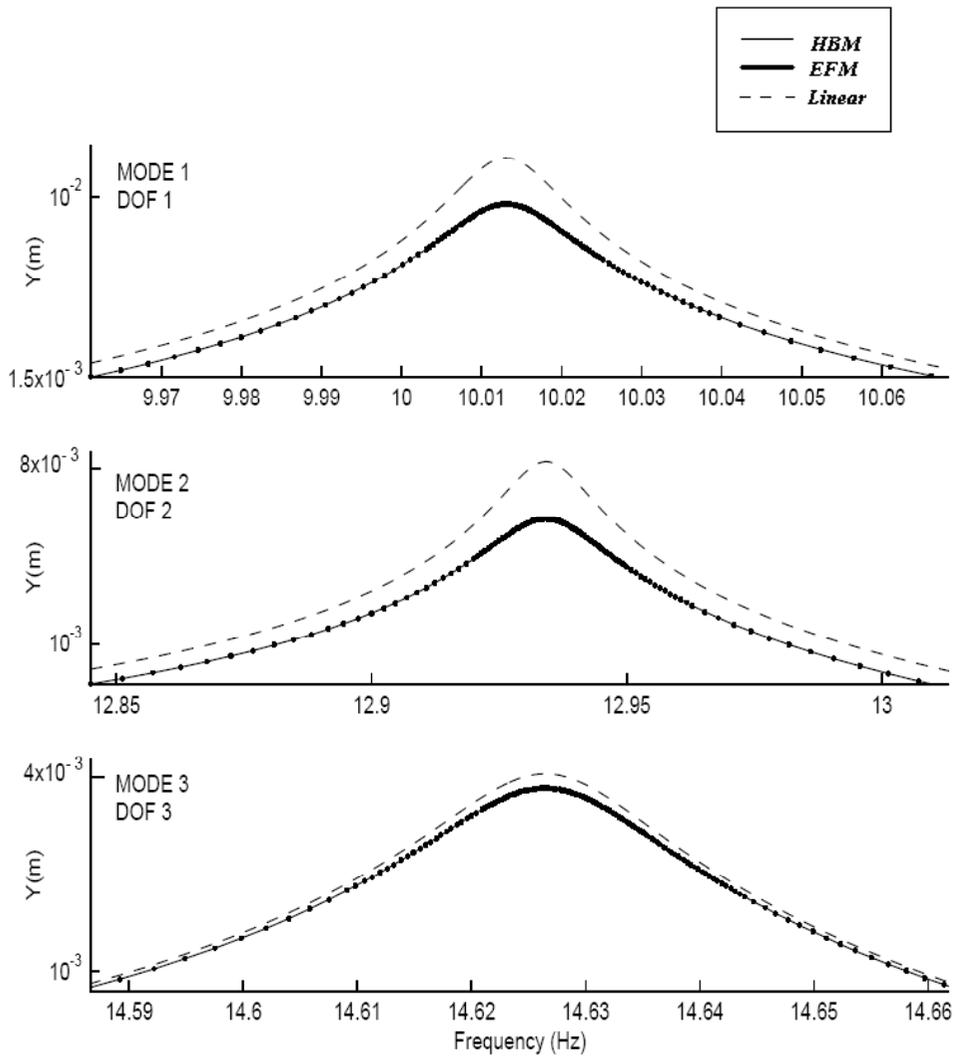


Fig. 4.6 – Test N2 – Vista ingrandita del diagramma di cui alla figura 4.5

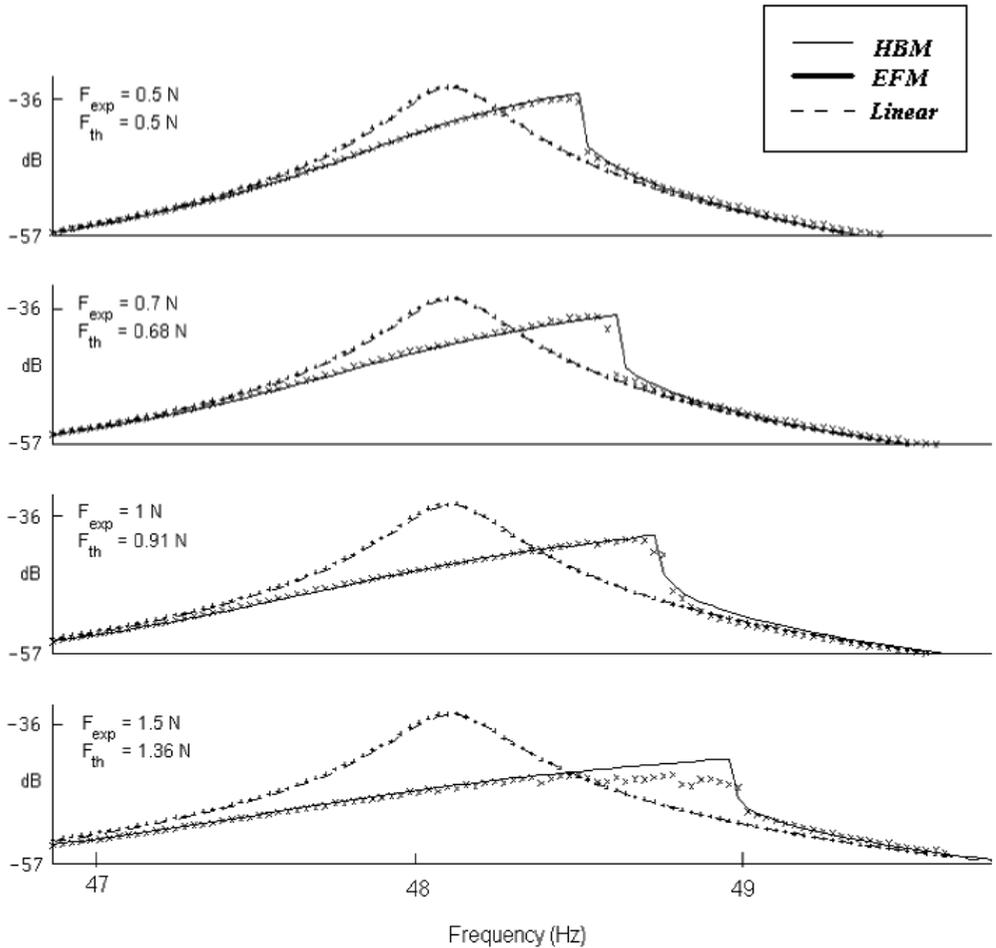


Fig. 4.7 – FRF del test ring proposto e del EFM predetto Non Lineare

Le parti non lineari sono sovrapposte e sono mostrati i risultati numerici (linea intera) e quelli misurati (segni “x”). Un accordo ragionevole risulta evidente nel primo modo flessionale della struttura (risposta fondamentale).

Si osserva che il livello di eccitazione numerico  $F$  ha bisogno di uguagliarsi a una misura ricavata a un livello  $F_{exp}$  per cui, in generale, è più basso. Ciò, probabilmente, è dovuto all'effetto di pre-carico a causa di un assemblaggio difettoso, come si deduce dal *trend* in aumento. Inoltre, l'effetto di un controllo di forza risulta maggiormente evidente nei livelli superiori di eccitazione, quanto più ci avviciniamo alla risonanza. I punti sparpagliati nella regione possono essere causati da forze drop-out (di diseccitazione), piuttosto che da un puro comportamento non lineare.

A prescindere da tali discrepanze, si può concludere che il metodo della EF ottimizzato può evidentemente caratterizzare il comportamento di una grande struttura di ingegneria.



## Capitolo 5 – Il metodo della formulazione esplicita inverso (R-EFM): un metodo di identificazione

### 5.1 *Introduzione*

In questo capitolo si illustra il metodo inverso dell'EFM utilizzato come strumento di identificazione NL. Diversamente dall'analisi teorica basata su equazioni differenziali con condizioni al contorno ben definite, la soluzione di un problema di identificazione è generalmente non-univocamente determinata.

Ciò è dovuto alla natura del problema ed all'impossibilità di misurare tutti i DOF del sistema.

Il principale vantaggio del metodo di identificazione basato sulle coordinate fisiche è quello di mostrare risultati più significativi, visto che i parametri da identificare sono rigidità, smorzamento e coefficienti di massa. Lo svantaggio è costituito dallo sforzo computazionale dovuto alla manipolazione algebrica di una grande quantità di dati, principalmente tutti i parametri contenuti nelle matrici del sistema.

Il metodo della formulazione esplicita inverso (R-EFM) può essere diviso in cinque fasi (Fig. 5.1).

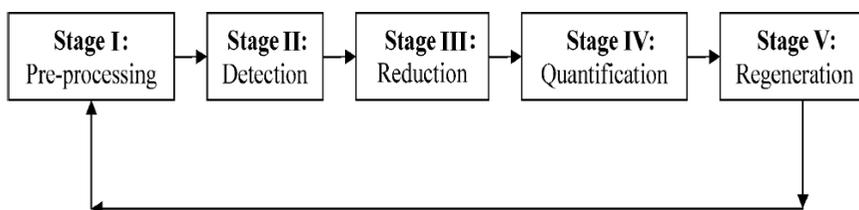


Fig. 5.1 – I cinque stadi rappresentativi del metodo REF

Il processo può essere implementato iterativamente, fino a quando le risposte rigenerate uguagliano quelle misurate. Anche in questo caso, non si garantisce che le non linearità siano state fedelmente identificate in quanto la soluzione di un problema di identificazione è non-unico. Ciò significa che la soluzione ottenuta genera lo stesso comportamento osservato alle coordinate misurate.

Un flow-chart più dettagliato del metodo della R-EFM è mostrato nella Fig. 5.2.

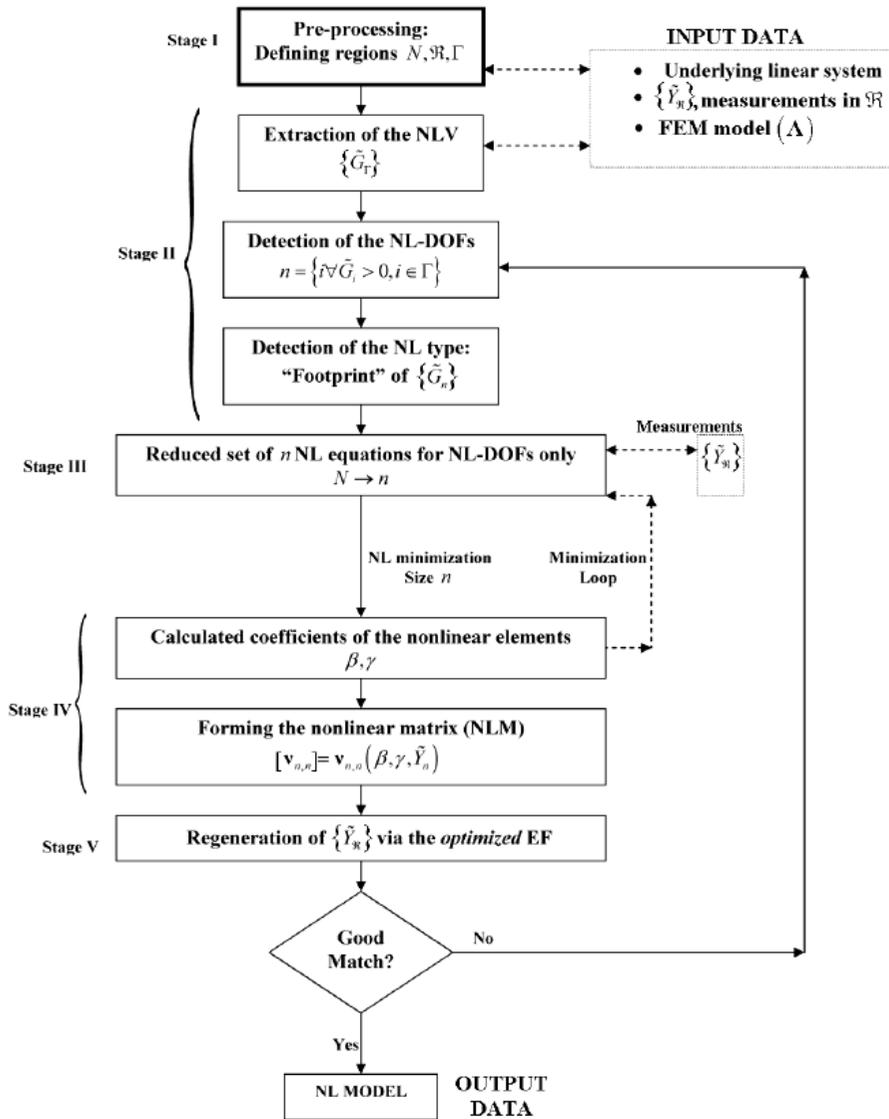


Fig. 5.2 – Diagramma di flusso del metodo R-EFM

## 5.2 *Fase I: pre-processing*

Le seguenti regioni devono essere definite a priori secondo quanto descritto nel paragrafo 3.4:

- Il sistema  $N$  DOF: un vettore raccoglie tutti i DOF del sistema, secondo la discretizzazione precedente. Il suo numero deve essere sufficiente per descrivere accuratamente il comportamento del sistema nel range di frequenza analizzato.
- La regione non lineare  $\Gamma$ : un vettore raccoglie tutti i DOF che possono essere associati agli elementi NL (NL-DOF).
- La regione misurata  $\mathfrak{R}$ : un vettore raccoglie tutti i DOF che sono stati misurati, sia dentro che fuori  $\Gamma$ .
- I DOF forzati  $f$ : un vettore raccoglie tutti i DOF che provocano eccitazione al sistema.

In definitiva:

$$\Gamma \in \mathfrak{R} \in N \quad 5.1$$

con

$$\Gamma \leq \mathfrak{R} \ll N$$

## 5.3 *Fase II: rilevazione dei NL-DOF*

Questa sezione si focalizza sul rilevamento di  $n$  NL-DOF, contenuti nella regione non lineare  $\Gamma$ . Il vettore non lineare (NLV) è stato definito (3.28), come:

$$\{\tilde{G}(\dot{y}, y)\} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}v_1(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}v_2(\dot{y}, y) \\ \tilde{g}v_3(\dot{y}, y) \\ \vdots \\ \tilde{g}v_N(\dot{y}, y) \end{array} \right\}_N = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{12} + \tilde{g}_{13} + \dots + \tilde{g}_{1N} \\ \tilde{g}_{21} + \tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{23} + \dots + \tilde{g}_{2N} \\ \tilde{g}_{31} + \tilde{g}_{32} + \tilde{g}_{33} + \dots + \tilde{g}_{3N} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{N1} + \tilde{g}_{N2} + \tilde{g}_{N3} + \dots + \tilde{g}_{NN} \end{array} \right\}_N \quad 5.2$$

dove  $\tilde{g}_{ij}$  rappresenta la forza di “restoring” non lineare tra i DOF  $i$  e  $j$ , e  $\tilde{g}_{ii}$  rappresenta un elemento NL *grounded* del DOF  $i$ esimo. Ne consegue che  $\tilde{g}v_i$  fornisce la forza di “restoring” totale di tutti gli elementi non lineari associati ad  $i$  DOF e possiamo usare quest’aspetto per evidenziare le non linearità a tali DOF ( $i$  principali, almeno).

Da (4.5) e (4.6), possiamo ottenere un’altra utile rappresentazione del NLV, in termini di risposte non lineari e matrici del sistema lineare:

$$\{\tilde{G}\} = \{F\} - [\mathbf{\Lambda}]\{\tilde{Y}\} \quad 5.3$$

Teoricamente, i valori diversi da zero nel  $\{\tilde{G}\}$  indicano la presenza dell’attività non lineare ai corrispondenti DOF, permettendo così di rilevare i NL-DOF. Ciò richiede che sia conosciuto (misurato) il vettore delle risposte non lineari  $\{\tilde{Y}\}$ , che è chiaramente poco realistico perfino per piccole dimensioni, mentre i DOF rotazionali sono comunemente non misurati. Ciononostante, un’ulteriore manipolazione può semplificare e ridurre questa restrizione.

Richiamando il concetto di regione non lineare  $\Gamma$ , possiamo dividere (5.3) in quei DOF dentro ( $\Gamma$ ) e fuori ( $N - \Gamma$ ) questa regione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \tilde{G}_\Gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_{N-\Gamma} \\ F_\Gamma \end{array} \right\} - \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma),(N-\Gamma)} & \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma),\Gamma} \\ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma,(N-\Gamma)} & \mathbf{\Lambda}_{\Gamma,\Gamma} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_{N-\Gamma} \\ \tilde{Y}_\Gamma \end{array} \right\} \quad 5.4$$

dove è stato stabilito che  $\{\tilde{G}_{N-\Gamma}\}$  è zero, mentre tutti gli elementi non lineari sono contenuti in  $\Gamma$ . L'equazione (5.4) può essere scritta come:

$$\{\tilde{G}_{\Gamma}\} = \{F_{\Gamma}\} - \left[ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma, (N-\Gamma)} \right] \underbrace{\{\tilde{Y}_{N-\Gamma}\}}_{\text{termine non noto}} - \{\tilde{Y}_{\Gamma}\} \quad 5.5$$

che risulta non determinata in quanto  $\{\tilde{Y}_{N-\Gamma}\}$  sono principalmente risposte non misurate.

La risposta  $\{\tilde{Y}_{N-\Gamma}\}$  può essere estrapolata dall'equazione (5.4), ottenendo:

$$\{\tilde{Y}_{N-\Gamma}\} = \left[ \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma), (N-\Gamma)} \right]^{-1} \left( \{F_{N-\Gamma}\} - \left[ \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma), \Gamma} \right] \{\tilde{Y}_{\Gamma}\} \right) \quad 5.6$$

È noto che (5.6) rappresenta un enorme sforzo computazionale per un grande sistema, dato che l'inversione  $\left[ \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma), (N-\Gamma)} \right]^{-1}$  deve essere eseguita ad ogni frequenza analizzata. Ciò rappresenta uno svantaggio del metodo della REF.

Continuando con gli sviluppi principali, il NLV per la regione non lineare  $\Gamma$  si scrive come:

$$\{\tilde{G}_{\Gamma}\} = \{F_{\Gamma}\} - \left[ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma, (N-\Gamma)} \right] \left[ \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma), (N-\Gamma)} \right]^{-1} \left( F_{N-\Gamma} - \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma), \Gamma} \tilde{Y}_{\Gamma} \right) - \left[ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma, \Gamma} \right] \{\tilde{Y}_{\Gamma}\} \quad 5.7$$

dove i valori diversi da zero di  $\{\tilde{G}_{\Gamma}\}$  definiranno gli  $n$  NL-DOF.

#### 5.4 *Fase II: rilevazione del meccanismo non lineare*

In questa fase ci si occupa della rilevazione del meccanismo non lineare (rigidezza volumetrica, smorzamento per attrito, ecc.), che permette una piena parametrizzazione delle non linearità ed una semplificazione delle analisi successive.

Definiamo  $\{\tilde{G}_n\}$  come un sub-NLV che contiene  $n$  dati non-zero di  $\{\tilde{G}_T\}$  riducendo, pertanto, il componente non lineare del sistema a una dimensione minima.

Il nostro scopo è quello di caratterizzare il tipo di non linearità basato su questa informazione.

Poiché  $\{\tilde{G}_n\}$  contiene i dati non lineari per ogni NL-DOF, ne consegue che la forma geometrica analitica, o “footprint”, di questa funzione non lineare può suggerire il tipo di non linearità coinvolto. Questa ricerca si è focalizzata solo su tipi di non linearità quali rigidezza volumetrica e smorzamento per attrito.

Forse il miglior modo per descrivere questa procedura è quello di prendere in considerazione un caso numerico. La Fig. 5.3 mostra due diversi tipi di NLV, ricavati dai casi esposti (test ring N. 1 e 2).

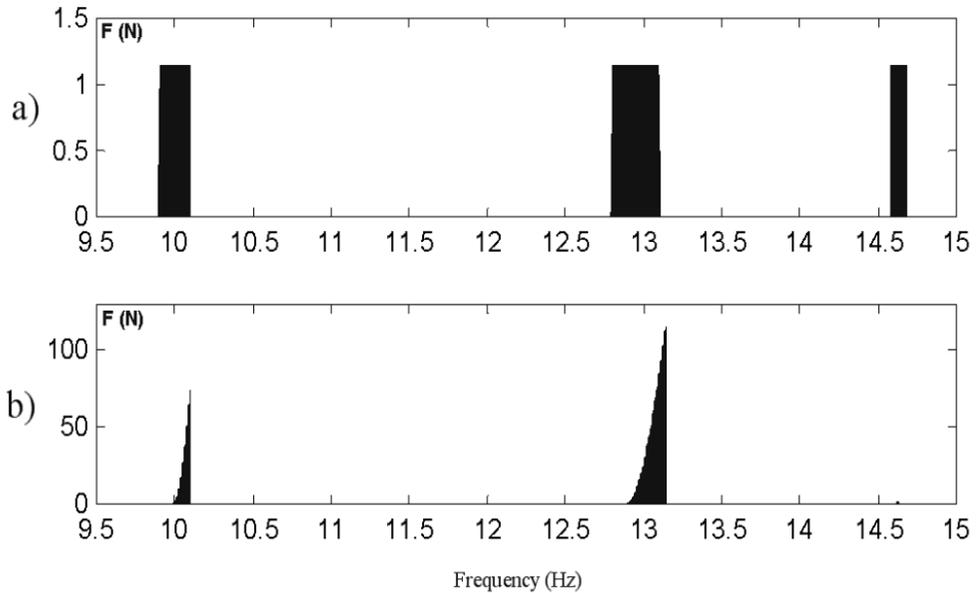


Fig. 5.3 – Ampiezza di due differenti tipi di NLV

Consideriamo l'NLV della Fig. 5.3(a) nel confronto con la figura 4.3. Osserviamo che:

- La funzione è significativa solo nella vicinanza della risonanza, proprio dove risultano evidenti le distorsioni FRF. Questa osservazione suggerisce che le distorsioni si spiegano bene mediante la presenza di non linearità.
- La grandezza dell'NLV rimane costante in queste regioni. Questa osservazione si accorda con un modello di smorzamento per attrito (Eq. 3.21), che predice una forza di “restoring” costante.
- La forma leggermente curvata vista nel range 9-10 Hz. non si spiega con l'esistenza di elementi NL *non-grounded*, la cui forza di “restoring” dipende simultaneamente da due risposte diverse (Eq. 3.25).

- Uno sguardo veloce al componente immaginario della grandezza del NLV (Fig. 5.4a) ci fornirà una prova più evidente del meccanismo di smorzamento per attrito. Si può confermare che la forza di “restoring” NL cambia segno proprio dopo la risonanza, in accordo con le (3.17).

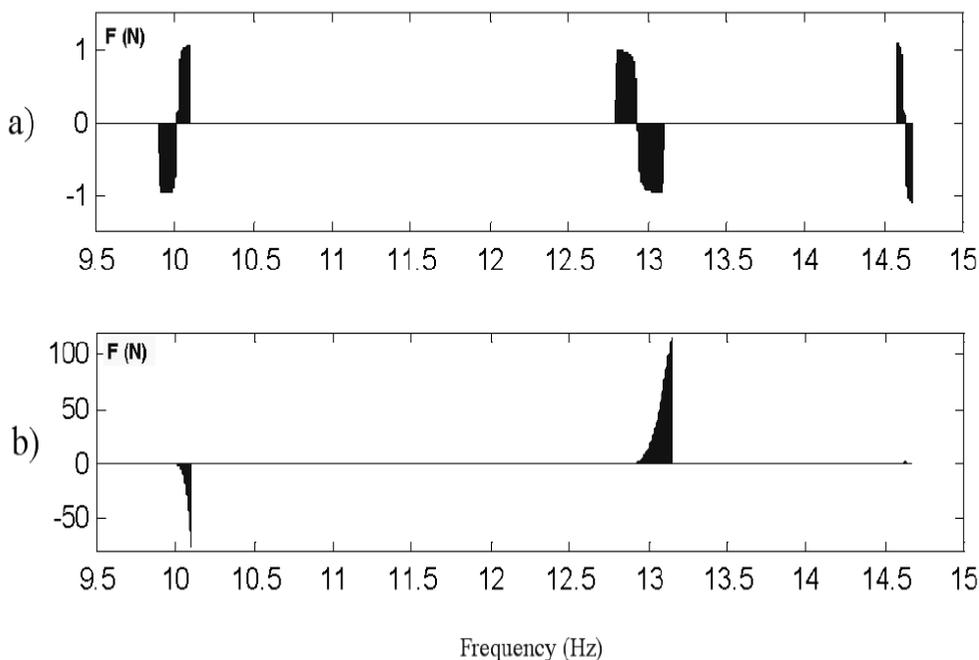


Fig. 5.4 – Parte Immaginaria del NLV della fig. 5.3

I meccanismi NL delle Fig. 5.3(a) e (b) sono rispettivamente smorzamento per attrito e rigidità volumetrica.

Questi elementi forniscono uno strumento affidabile per distinguere il meccanismo NL prima della fase quantitativa. La ricerca ha anche evidenziato che altre non linearità (come velocità quadratica, softening stiffness, rigidità bi-lineare, ecc.) mostrano un *footprint* unico, che si incorporano facilmente in questa tecnica.

### 5.5 Fase III: riduzione

Una volta parametrizzate completamente le non linearità, si può creare un insieme ridotto di equazioni NL. Possiamo anche usufruire delle risposte misurate,  $\{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}}\}$ , per ridurre la misura del sistema analizzato trattandole come condizioni al contorno. Mediante una procedura analoga in cui si è sviluppata l'EFM ottimizzato (4.12), si può derivare la seguente espressione:

$$\tilde{Y}_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{1,1} & \dots & \tilde{\Lambda}_{1,S} \\ \vdots & \tilde{R}_s & \vdots \\ \tilde{\Lambda}_{S,1} & \dots & \tilde{\Lambda}_{S,S} \end{pmatrix}}{\det(\tilde{\Lambda}_S)}, \quad i \in \mathfrak{n} \quad 5.8$$

dove

$$\begin{aligned} S &= N - \mathfrak{R} + \mathfrak{n} & 5.9 \\ \{\tilde{\mathfrak{R}}\}_S &= \{F\}_S - [\mathbf{\Lambda}]_{S,(\mathfrak{R}-\mathfrak{n})} \{\tilde{Y}\}_{(\mathfrak{R}-\mathfrak{n})} - [\tilde{\mathbf{v}}]_{S,S} \{\tilde{Y}\}_S \\ [\tilde{\mathbf{v}}]_{S,S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-\mathfrak{R}), (N-\mathfrak{R})} & \mathbf{0}_{(N-\mathfrak{R}), \mathfrak{n}} \\ \mathbf{0}_{\mathfrak{n}, (N-\mathfrak{R})} & \tilde{\mathbf{v}}_{\mathfrak{n}, \mathfrak{n}} \end{bmatrix}_{S,S} \end{aligned}$$

dove la misura del sistema analizzato è stata ridotta a  $S$ . Le equazioni (5.8) e (5.9) rappresentano il R-EFM ottimizzato, un insieme ridotto di  $n$  equazioni NL che si possono risolvere attraverso una minimizzazione non lineare.

### 5.6 Fase IV: quantificazione

La quantificazione dei coefficienti sconosciuti in (5.8) e (5.9) può essere ricavata da una minimizzazione non lineare, simile a quella già descritta nel paragrafo 4.4.

I dati in input devono essere organizzati entro un insieme di equazioni NL e un vettore di incognite, facendo attenzione al fatto che il problema risultante sia non determinato e mal posizionato.

La procedura si organizza nel seguente modo:

**1. Definire il vettore di incognite.** Ciò si ricava direttamente dalla sub-matrice  $[\tilde{v}_{n,n}]$  in (5.9), che contiene i coefficienti non lineari sconosciuti  $\beta, \gamma$ . Si considera che il meccanismo non lineare sia stato già identificato, altrimenti  $[\tilde{v}_{n,n}]$  conteranno funzioni non lineari di natura sconosciuta, e la soluzione diventa molto più complessa. Il numero dei coefficienti sconosciuti in  $[\tilde{v}_{n,n}]$  è:

$$\frac{n^2 + n}{2} \tag{5.10}$$

**2. Restringere il vettore di incognite.** Per evitare convergenze locali, sensibili confini inferiori e superiori devono stare insieme al vettore di incognite, e questa

fase si può realizzare mediante il re-posizionamento della variabile  $x$  con quella ristretta, cioè  $x$  confinata, regolata dall'equazione:

$$x_{\text{confinata}} = Lower + (Upper-Lower) * \sin^2 x \quad 5.11$$

dove  $Lower$  e  $Upper$  sono i valori limite rispettivamente inferiori e superiori, della variabile  $x$ , la quale può soltanto variare tra zero e uno.

Anche se questa parte migliora grandemente le caratteristiche di convergenza globale dell'algoritmo fornendo un punto di partenza vicino alla soluzione, potrebbe anche non aversi convergenza se i confini si presentano inesatti. Nel caso di una reale e positiva variabile  $x$  valutata (come  $\beta$  o  $\gamma$ ), i confini vengono facilmente posizionati tra zero (limite inferiore) e un limite superiore abbastanza alto da permettere all'elemento NL di portare le non linearità al livello osservato di risposta. A questo punto, si può usare come base la curva forza-spostamento di un elemento lineare tipico nella locazione di interesse.

**3. Definire l'insieme delle equazioni non lineari.** Ciò si ottiene applicando (5.8) all'insieme di  $n$  NL-DOF, dove LHS può essere equiparato alle risposte misurate agli stessi  $n$  DOF. Dividendo (5.8) in parti reale e immaginarie, il numero del punto di equazioni pre-frequenza disponibili è uguale a  $2n$ , che è più piccolo del numero delle incognite  $\frac{n^2 + n}{2}$ . Stabilito che un meccanismo non lineare è stato già

rilevato o scelto, il numero delle equazioni NL si può espandere nel modo seguente: Dato che i coefficienti  $\beta$ ,  $\gamma$  sono reali e di valore positivo, possiamo considerare i punti di frequenza multipla, per esempio i punti  $q$ , che risultano essere tutti validi per gli stessi coefficienti. Per cui, il numero delle equazioni NL cresce fino a  $2nq$ , mentre il numero delle incognite rimane  $(n^2+n)/2$ . I punti di frequenza  $q$  devono essere selezionati da quelli delle regioni dove l'effetto delle non linearità è più forte, tipicamente in prossimità delle risonanze.

Per evitare un problema indeterminato, si deve applicare la seguente relazione:

$$q \geq \text{round} \left( \frac{n+1}{4} \right) \quad 5.12$$

**4. Procedura iterativa.** L'analisi si concluderà quando la funzione obiettivo  $\{f(y)\}$ ,

$$\{f(y)\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \left( \tilde{Y}_n^{\text{analytical}} - \tilde{Y}_n^{\text{measured}} \right) \\ \dots \\ \text{Im} \left( \tilde{Y}_n^{\text{analytical}} - \tilde{Y}_n^{\text{measured}} \right) \end{array} \right\}_{2nq} \approx 0 \quad 5.13$$

è minore della tolleranza predefinita (cioè, tra 1-2%) lontana dall'iterazione precedente.

### 5.7 Fase V: Rigenerazione

Il metodo EFM ottimizzato (4.12) può essere usata per rigenerare le risposte misurate. Qualsiasi discordanza indicherà che l'insieme di n NL DOF non è autentico, oppure che il meccanismo non lineare in azione non corrisponde al modello matematico. In questo caso, l'analisi deve essere rifatta scegliendo un diverso insieme di n NL-DOF o considerando un diverso tipo di non linearità.

Si faccia attenzione che, a causa della soluzione non unica dell'analisi, una stretta concordanza non garantisce che le non linearità siano identificate esattamente. Ciò significa che la soluzione ottenuta genera lo stesso comportamento osservato alle coordinate misurate.

### 5.8 Il caso analizzato per il metodo della REF esemplificata

Il comportamento del metodo R-EFM verrà esemplificato nella identificazione di un sistema, come quello rappresentato nella fig.5.6. Il sistema è precisamente descritto nell'Appendice, per cui verranno presentati qui solo i risultati principali.

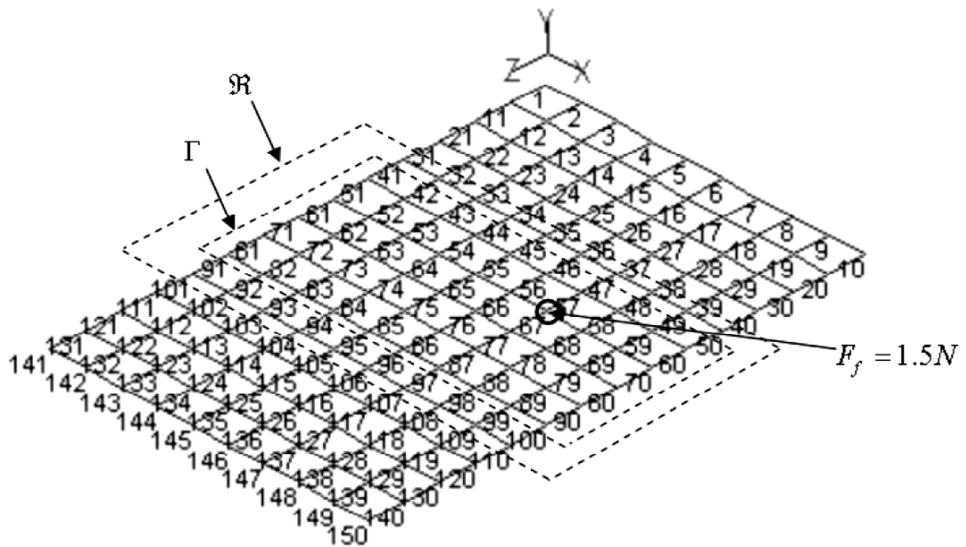


Fig. 5.6 – Modello del Test ring n. 3

### 5.9 Test N. 3: pre-processing (fase I)

Le regioni predefinite per il caso n. 3, date sia in DOF che in notazione nodale, sono:

$$\begin{aligned}
 N &= \left\{ \underbrace{(1, 2, 3, 4, 5, 6)}_{11(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)}, \underbrace{(7, 8, 9, 10, 11, 12)}_{12(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)}, \dots, \underbrace{(775, \dots, 780)}_{140(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\
 \mathfrak{R} &= \left\{ \underbrace{182}_{41Y}, \underbrace{188}_{42Y}, \underbrace{194}_{43Y}, \dots, \underbrace{596}_{110Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\
 \Gamma &= \left\{ \underbrace{236}_{51Y}, \underbrace{242}_{52Y}, \underbrace{248}_{53Y}, \dots, \underbrace{536}_{100Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\
 f &= \left\{ \underbrace{338}_{67Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array}
 \end{aligned}$$

dove  $N$ ,  $\mathfrak{R}$ ,  $\Gamma$  e  $f$  sono definiti a priori dall'analista. Queste regioni sono evidenziate in Fig. 5.6.

### 5.10 Test N. 3: rilevazione delle NL-DOF (fase II)

Si può effettuare una rilevazione non lineare impiegando la (5.7),

$$\left\{ \tilde{G}_\Gamma \right\} = \left\{ F_\Gamma \right\} - \left[ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma,(N-\Gamma)} \right] \left[ \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma),(N-\Gamma)} \right]^{-1} \left( F_{N-\Gamma} - \mathbf{\Lambda}_{(N-\Gamma),\Gamma} \tilde{Y}_\Gamma \right) - \left[ \mathbf{\Lambda}_{\Gamma,\Gamma} \right] \left\{ \tilde{Y}_\Gamma \right\}$$

5.14

I risultati evidenti nella Fig. 5.7, mostrano la grandezza accumulate del NLV per un range di frequenza 8-35 Hz. Tre non linearità localizzate si possono facilmente spottare a DOF 51Y, 62Y e 92Y, condividendo un comune ordine di grandezza.

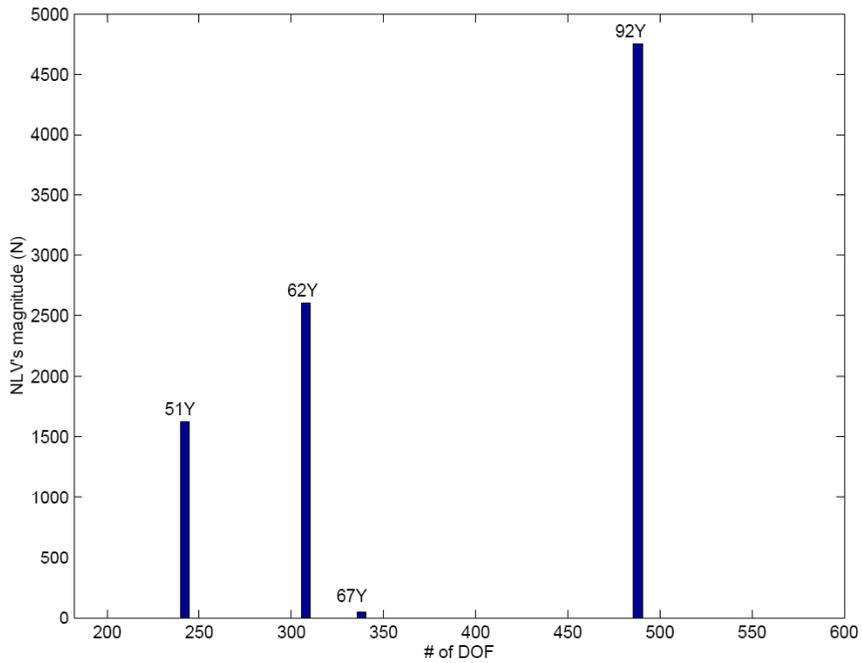


Fig. 5.7 – NLV estratta per il Test n. 3

Una possibile quarta NL-DOF a DOF 67Y è stata eliminata, a causa della sua grandezza comparativamente bassa. Quindi, è stato deciso di rappresentare le NL-DOF mediante  $n = \{51Y, 62Y, 92Y\}$  (che costituisce la risposta esatta).

Questo approccio diretto porta un enorme sforzo computazionale, equivalente a risolvere un problema lineare per ogni frequenza analizzata; questo è un evidente svantaggio del metodo R-EFM.

### 5.11 Test N. 3: rilevazione del meccanismo non lineare (fase II)

Nel paragrafo 5.4, è stata introdotta una tecnica figurativa atta ad assegnare il tipo di meccanismo non lineare che agisce in un sistema. La tecnica si basa sulla forma geometrica del NLV estratto, il cui “*footprint*” può essere associata al tipo di non linearità.

Il NLV per i tre NL-DOF rilevati è mostrato nella Fig. 5.8 (a),(b) e (c), per un range di frequenza intorno alla prima risonanza; si possono osservare gli effetti non lineari più forti. Si osserva che il NLV acquista un significato solo quando si trova in prossimità di questa risonanza e che la grandezza del NLV sembra aumentare monotonamente con il livello totale delle risposte.

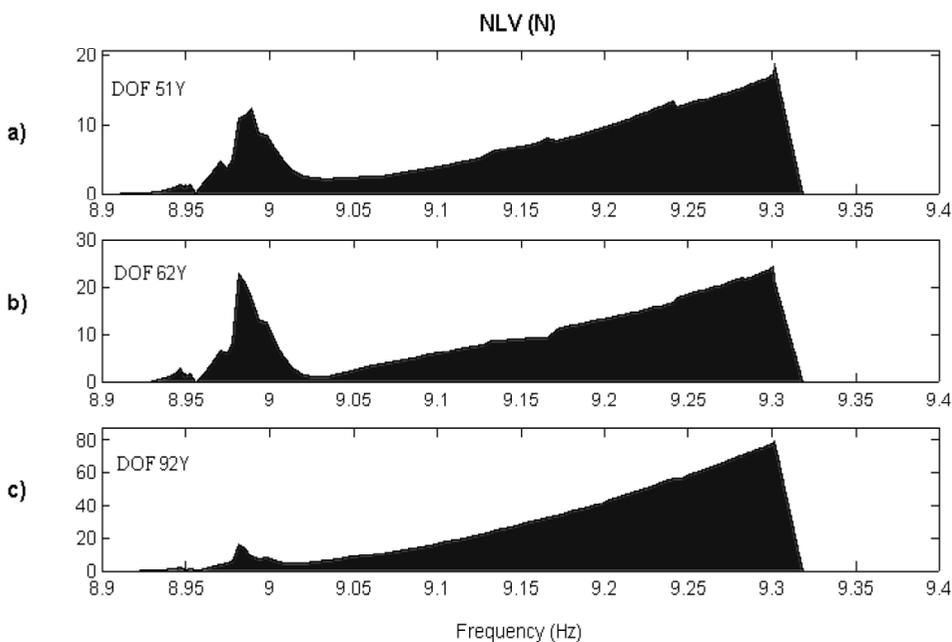


Fig. 5.8 – NLV per gli NL DOF rilevati nel test n. 3

Queste osservazioni suggeriscono un tipo di rigidità volumetrica, che è corretta.

### 5.12 Test N. 3: riduzione (fase III)

Poiché il test comprende solo le non linearità *grounded*, lo schema della connettività degli elementi non lineari nella sub-matrice  $[\tilde{\mathbf{v}}_{n,n}]$  si riduce a:

$$[\tilde{\mathbf{v}}_{n,n}] = \begin{bmatrix} \beta_{51Y} |\tilde{Y}_{51Y}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{62Y} |\tilde{Y}_{62Y}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{92Y} |\tilde{Y}_{92Y}|^2 \end{bmatrix} \quad 5.15$$

$[\tilde{\mathbf{v}}_{n,n}]$  è estesa a  $[\tilde{\mathbf{v}}]_{S,S}$  come segue:

$$[\tilde{\mathbf{v}}]_{S,S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-\mathfrak{R}), (N-\mathfrak{R})} & \mathbf{0}_{(N-\mathfrak{R}), n} \\ \mathbf{0}_{n, (N-\mathfrak{R})} & \tilde{\mathbf{v}}_{n,n} \end{bmatrix}_{S,S} \quad 5.16$$

ed incluso in  $\{\tilde{\mathbf{R}}\}_S$

$$\{\tilde{\mathbf{R}}\}_S = \{\mathbf{F}\}_S - [\mathbf{\Lambda}]_{S, (\mathfrak{R}-n)} \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_{(\mathfrak{R}-n)} - [\tilde{\mathbf{v}}]_{S,S} \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_S \quad 5.17$$

arrivando in definitiva alla rappresentazione R-EFM ottimizzato:

$$\tilde{Y}_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \dots & \Lambda_{1,S} \\ \vdots & \tilde{R}_S & \vdots \\ \Lambda_{S,1} & \dots & \Lambda_{S,S} \end{pmatrix}}{\det(\Lambda_S)}, \quad i \in \{n\} \quad 5.18$$

La (5.18) rappresenta un insieme di  $2n$  equazioni NL, dividendolo in componenti reali e immaginari. Il vettore delle incognite viene confermato dai coefficienti sconosciuti  $\{\beta_{51Y}, \beta_{62Y}, \beta_{92Y}\}$ . Per questo particolare problema, la misura ridotta del sistema analizzato è  $S = 713$ , mostrando una riduzione dell'8.58%. Comunque, la riduzione principale si raggiunge mediante il R-EFM ottimizzato, che riduce il sistema di equazioni NL da  $N$  a  $n$ .

### 5.13 Test N. 3: quantificazione (fase IV)

Prima di applicare la minimizzazione non lineare, si devono completare due compiti:

Espansione dell'insieme delle equazioni NL. Si può espandere l'insieme di  $2n$  equazioni NL mediante la considerazione di un totale di  $q = 15$  frequenze campione, perfino distribuite nelle vicinanze di tutte le risonanze osservabili. Ciò aumenta il numero di equazioni a  $2nq = 90$ , mentre il numero di incognite rimane 3.

Confinare il vettore di incognite. I limiti superiori e inferiori disponibili per i coefficienti non noti possono essere definiti nel seguente modo: Secondo le idee esposte, si osserva che un valore di rigidezza tipico tra le  $n$  entrate diagonali

della matrice di rigidezza del sistema è circa  $k = 1.11e5N/m$ . Come mostra la Fig 5.9, un limite superiore di  $\beta$  di  $1.5e8N/m^3$  combinato con una risposta osservata di 0.026 m, spiega perfino i livelli irrealistici di non linearità

D'altra parte, un plausibile limite inferiore appare essere  $1e5N/m^3$ , dato che questo coefficiente genera non distinguibili effetti non lineari. Comunque, dobbiamo tener conto della possibilità che uno o più DOF in  $n$  non siano genuini NL-DOF, ma piuttosto il risultato di una rilevazione errata. Ci aspettiamo, in questo caso, un coefficiente identificativo nullo.

Considerando i suddetti argomenti, confiniamo i coefficienti identificati per rimanere all'interno del range:

$$0 \leq \beta \leq 1,5e8 \text{ N/m}^3 \quad 5.19$$

Dopo aver applicato una minimizzazione non lineare iterative, si trovano i coefficienti  $\beta$  per gli  $n$  NL-DOF.

Questi risultati sono evidenti nella Tavola 5.1, che mostra un'ottima precisione.

DOF	True $\beta(x10^8)$	Identified $\beta(x10^8)$	error (%)
51Y	1.6	1.5204	4.96%
62Y	1.5	1.5178	1.19%
92Y	7.82	7.4360	4.91%

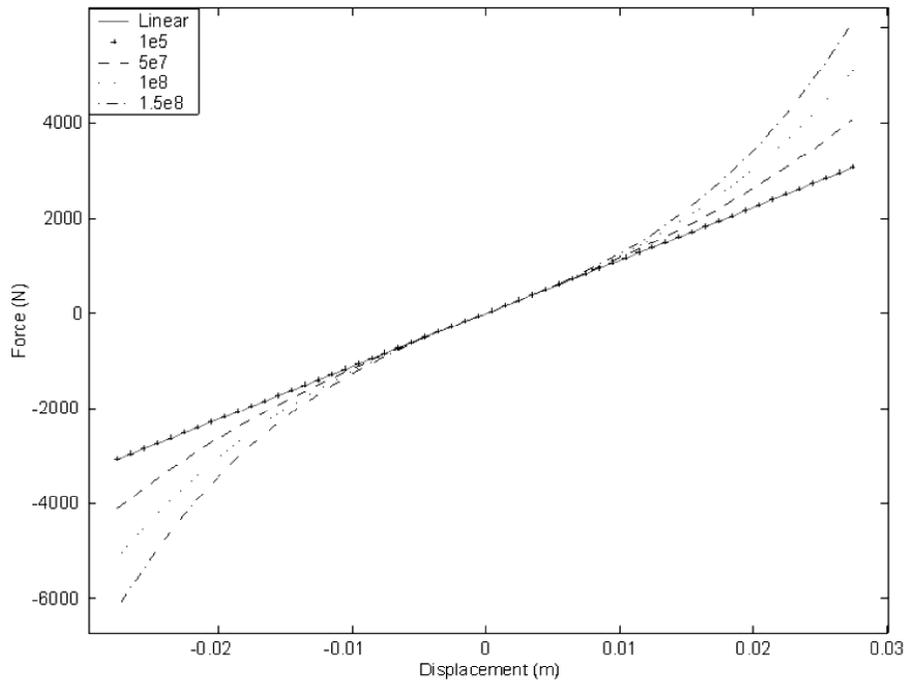


Fig. 5.9 – Diagramma forza-spostamento per diversi valori di  $\beta$

#### 5.14 Test N. 3: rigenerazione (fase V)

Le Figure 5.10 e 5.11 mostrano il lineare originale e le risposte non lineari (rispettivamente, linea tratteggiata e intera) per le NL-DOF. Posizionando in “\_”, sono evidenti le risposte rigenerate dalla EF ottimizzata (4.12). Si può osservare che la qualità della rigenerazione è molto buona.

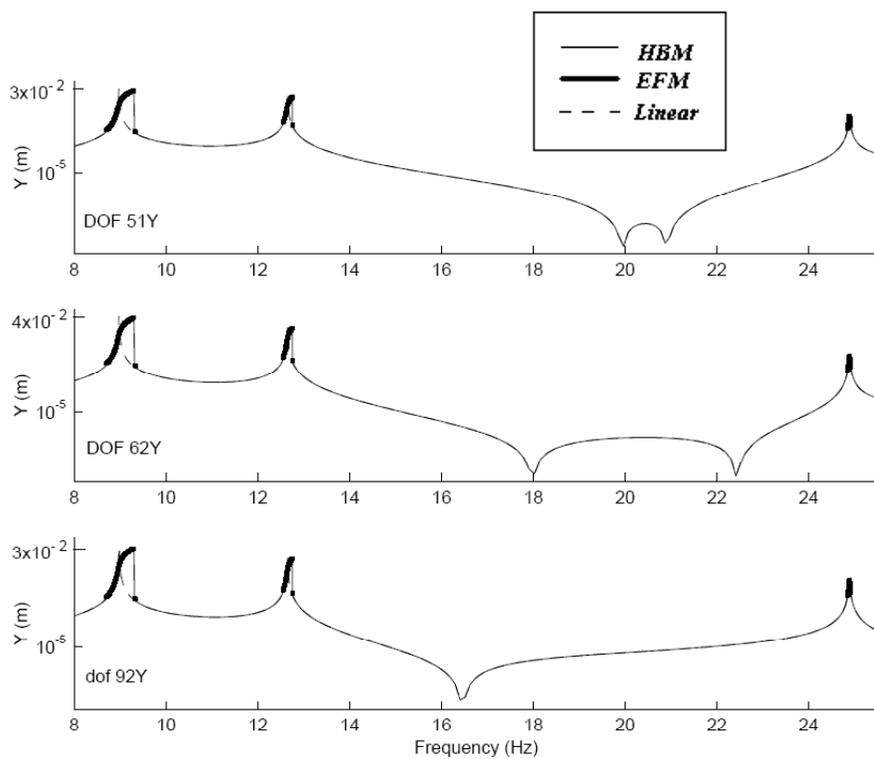


Fig. 5.10 – Risposta del modello utilizzato nel test n. 3

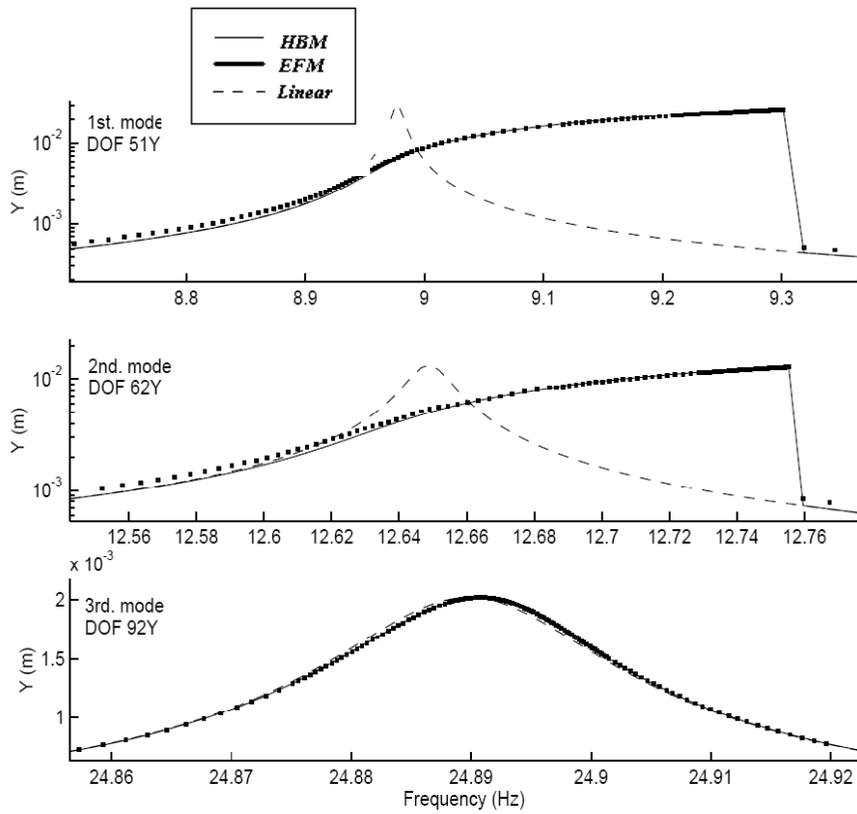


Fig. 5.11 – Vista ingrandita del diagramma di cui alla fig. 5.10



## Capitolo 6 – Un metodo modale ibrido (HMM) per la formulazione di FRF non lineari in sistemi MDOF

### 6.1 *Introduzione*

I metodi basati sulle coordinate fisiche sono in grado di predire con esattezza il comportamento non lineare delle strutture reali e consentono una diretta manipolazione dei coefficienti di massa, rigidità e smorzamento.

Questo vantaggio si vanifica se si considera il pesante carico computazionale dovuto alla grande quantità di dati necessari alla formulazione analitica, ovvero tutti quei parametri inclusi nelle matrici del sistema. Un approccio modale, di contro, potrebbe superare lo svantaggio in quanto esprime la risposta come funzione di autovalori e autovettori riducendo di molto la quantità di dati da elaborare.

Non è un compito facile eseguire lo sviluppo di un metodo basato su coordinate modali non lineari a causa della dipendenza dei parametri modali dall'ampiezza.

Quanto premesso introduce una certa ambiguità quando si applicano i concetti principali come il “*teorema di sovrapposizione modale*”.

I teoremi lineari, infatti, non possono essere impiegati nell'analisi di sistemi non lineari.

Negli ultimi dieci anni numerosi studi si sono concentrati sui sistemi non lineari ed molti studi hanno testato i “modi normali” in un ambiente non lineare. Il concetto dei modi normali non lineari (*NonLinear Normal Modes*) è stato introdotto nel 1966 da Rosenberg et al. in relazione a sistemi conservativi a parametri concentrati (*lumped*), ed ha gettato le basi per successive ricerche.

Una definizione accettata di NNM di un sistema non-smorzato (discreto o continuo) è “un’oscillazione periodica sincronica in cui tutti i punti materiali del sistema raggiungono i loro valori estremi o passano attraverso lo zero simultaneamente”.

Quando un sistema discreto vibra in un NNM, l’oscillazione corrispondente viene rappresentata mediante una linea nel suo spazio di configurazione, chiamata linea modale. Una linea modale rappresenta l’oscillazione sincronica del sistema nello spazio di configurazione durante un movimento del NNM.

I sistemi lineari hanno linee modali rette dal momento che le loro coordinate si relazionano linearmente durante un’oscillazione di modo normale. Nei sistemi non lineari, le linee modali possono essere sia rette che curve.

Gli ultimi casi sono dei sistemi discreti non lineari, poiché le linee nodali non lineari rette riflettono le simmetrie del sistema.

La teoria dei NNM si è evoluta in modo considerevole negli ultimi venti anni, al punto che vengono di solito rappresentati da varietà differenziabili (*manifolds*) invarianti nello spazio delle fasi (Fig. 6.1). Una delle conclusioni dell’analisi di varietà invarianti potrebbe essere il fatto che i sistemi non lineari mostrano un numero di modi superiore ai DOF, un aspetto che non ha confronti nei sistemi lineari.

L’NNM può, inoltre, mostrare biforcazioni, instabilità o comportamento caotico in condizioni particolari.

«Anche se i suddetti argomenti possono sollevare serie questioni riguardo la validità dei concetti di tensione lineare per analizzare sistemi non lineari, lo sviluppo delle tecniche non lineari equivalenti alla sovrapposizione lineare resta ancora di grande interesse.

Nei casi in cui una risposta stabile e periodica domina il comportamento non lineare, una sovrapposizione modale non lineare permette una riduzione di ordine

mediante il possibile raggiungimento di equazioni disaccoppiate di moto. Queste linee di ricerca hanno acquisito un maggiore interesse recentemente».

Nel presente capitolo si introduce una tecnica modale non lineare che cerca di simulare una sovrapposizione non lineare di NNM, seguendo uno studio di Wright e Cooper e riconoscendo la natura accoppiata dello spazio modale non lineare. Un limite della teoria di NNM è rappresentata dal fatto che le non linearità sono confinate in “*resonant region*”. La validità di tale assunzione verrà studiata alla luce delle espressioni sviluppate recentemente relative al NNM con risposte fisiche.

Il tradizionale sviluppo modale non lineare (basato su autovettori e autovalori non lineari) viene messo a confronto con lo sviluppo “ibrido” introdotto.

Il termine “ibrido” deriva dal fatto che un sistema lineare principale viene ridotto ed espresso mediante i suoi parametri modali (autovettori e autovalori lineari), mentre le non linearità vengono ancora formulate nel dominio fisico.

Si crede che la nuova tecnica si sviluppi meglio in ambiente sperimentale, dato che le non linearità estratte si concentrano in singolo termine modale non lineare. Il termine non lineare estratto acquista un significato fisico molto esplicito, essendo analiticamente relazionato ai coefficienti non lineari del sistema.

In breve si può affermare che il metodo di cui si discute considera le non linearità come parte dell'eccitazione esterna mentre il sistema stesso rimane lineare. Il metodo riconosce l'esistenza di autovettori e autovalori non lineari anche se le risposte fisiche sono determinate senza calcolare queste quantità modali.

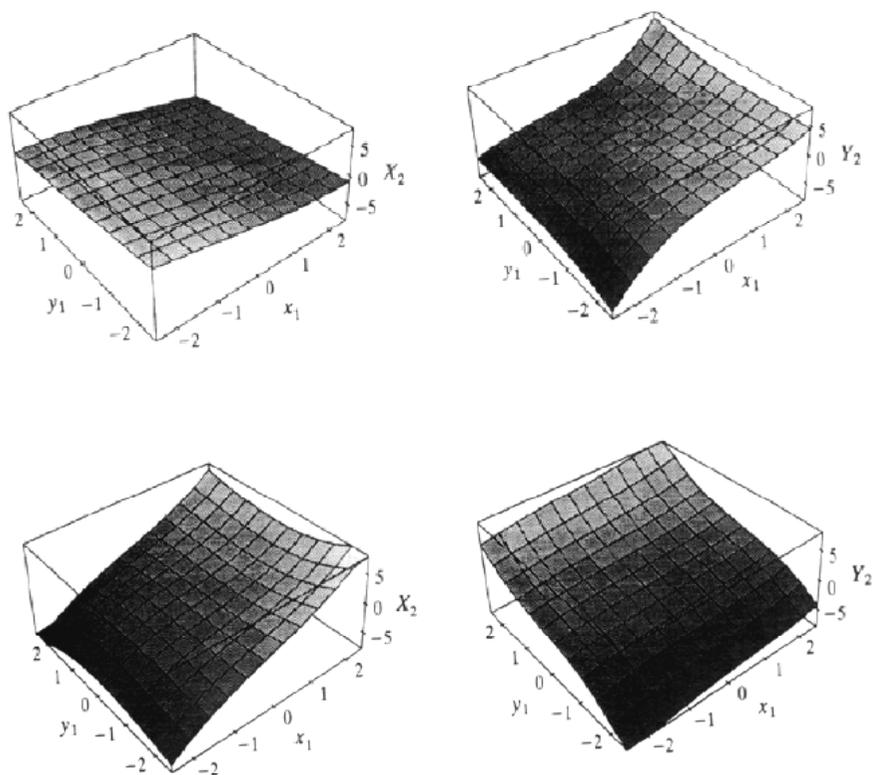


Fig. 6.1 - Esempio di superfici modali invarianti non lineari

Si precisa che il metodo non presenta restrizioni riguardo la dimensione del sistema, anche se i sistemi semplici meglio si adattano al metodo.

Il metodo HMM può essere implementata anche inversamente servendo questa volta come strumento di identificazione.

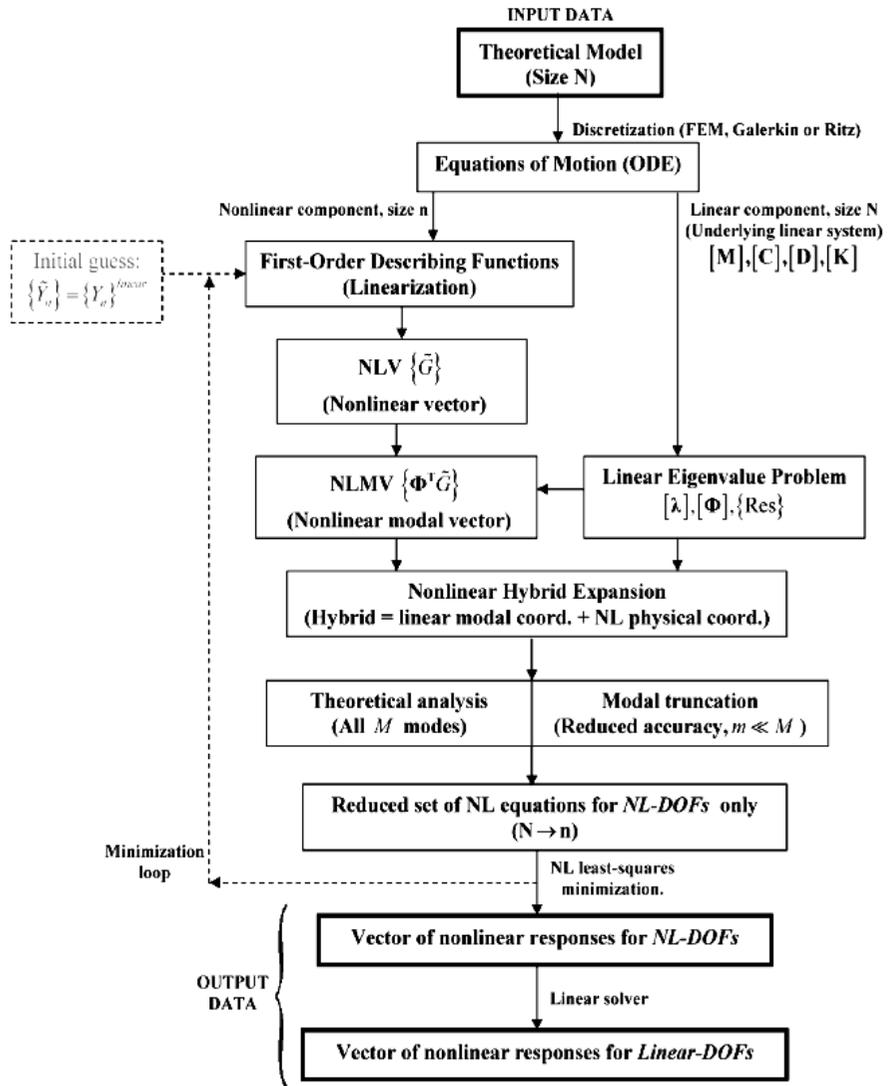


Fig. 6.2 – Diagramma di flusso del metodo HMM

## 6.2 *Analisi modale lineare tradizionale e non lineare*

Al fine di introdurre il metodo di che trattasi è necessario un breve cenno sull'“analisi modale lineare” (LMA) ed esplicitando il modo in cui tali concetti si estendono a sistemi non lineari.

Nella definizione del percorso inverso la tecnica permette di calcolare la risposta fisica di un sistema attraverso il calcolo della radice, nonché consente di determinare alcuni importanti parametri modali (frequenze naturali e rapporti di smorzamento).

La rappresentazione generale di un sistema lineare con smorzamento proporzionale isteretico e soggetto ad eccitazione armonica è data dall'equazione differenziale ordinaria:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{y}\} + [\mathbf{K}]\{\dot{y}\} + \mathbf{i}[\mathbf{D}]\{y\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad 6.1$$

dove  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$  e  $[\mathbf{D}]$  sono rispettivamente la matrice di massa, rigidità e smorzamento isteretico,  $\{y\}$ ,  $\{\dot{y}\}$ ,  $\{\ddot{y}\}$  sono i vettori di spostamento, velocità e accelerazione, ed  $\{F\}$  è il vettore di eccitazione armonica alla frequenza  $\omega$ .

Assumendo una risposta armonica  $\{y\} = \{Y\}e^{i\omega t}$ , in cui  $\{Y\} = \{|Y|e^{i\theta}\}$  è una grandezza complessa che permette di accordare la fase, il problema si trasforma nel dominio della frequenza:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{iD})\{Y\} = \{F\} \quad 6.2$$

La soluzione della parte omogenea della (6.2) porta alla matrice diagonale degli autovalori  $[\lambda^2]$  (in cui le parentesi “[ ]” denotano una matrice diagonale) e alla matrice di autovettori della massa normalizzata  $[\Phi]$ . Entrambe le radici sono relate mediante le proprietà ortogonali:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] &= [\mathbf{I}] \\ [\Phi]^T [\mathbf{K} + i\mathbf{D}] [\Phi] &= [\lambda^2] \end{aligned} \quad 6.3$$

dove  $[\mathbf{I}]$  è la matrice identità. Le relazioni (6.3) costituiscono la chiave per trasformare un sistema MDOF lineare in diversi componenti SDOF, ognuno di essi utilizzato per l’analisi del comportamento di un singolo modo. Questa proprietà si collega a quella della sovrapposizione modale, mediante la quale si esprimono le risposte fisiche  $\{Y\}$  come una combinazione lineare di risposte modali  $\{P\}$ :

$$\{Y\} = [\Phi] \{P\} \quad 6.4$$

in cui  $\{P\}$  è un vettore ortogonale. La Fig. 6.3 mostra con la linea continua una FRF composta da 3 modi e le risposte modali corrispondenti (indicate con “P1”, “P2” e “P3”) per ogni modo individuale. Alla risonanza, la risposta fisica viene dominata da una singola risposta modale, mentre il contributo delle altre due è molto piccolo. In accordo con il principio di sovrapposizione modale, la somma algebrica delle tre risposte modali risulta nella FRF fisica.

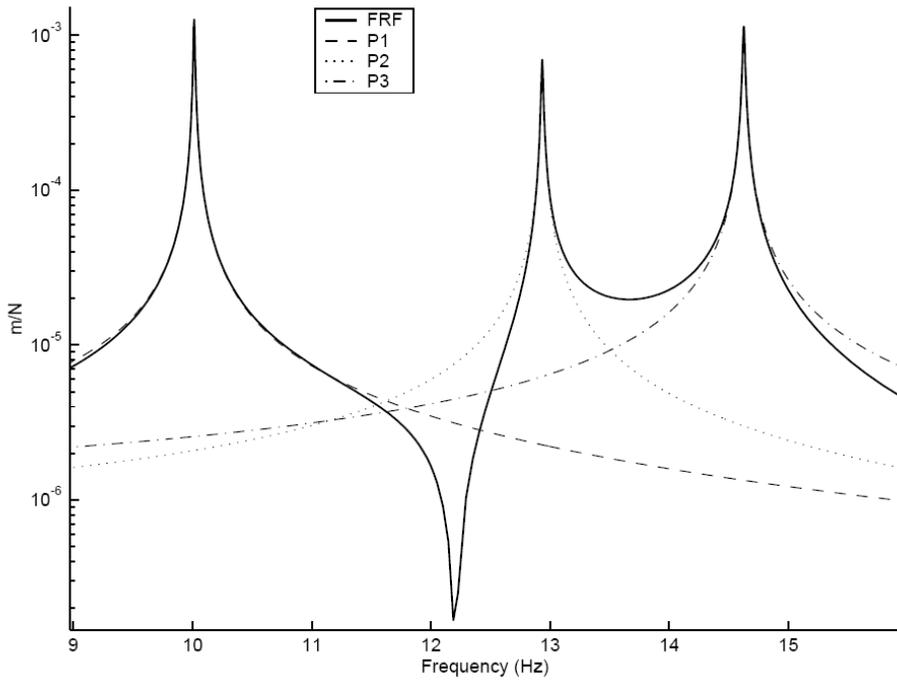


Fig. 6.3 – Risposta modale di un FRF lineare

Sostituendo (6.4) in (6.2), e premoltiplicando per  $[\Phi]^T$ , si ha:

$$[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) [\Phi] \{P\} = [\Phi]^T \{F\} \quad 6.5$$

E considerando le relazioni di ortogonalità (6.3), si ottiene:

$$[\lambda^2 - \omega^2] \{P\} = \{\Phi^T F\} \quad 6.6$$

in cui  $[\lambda^2 - \omega^2]$  è una matrice diagonale che contiene le frequenze naturali del sistema e i rapporti di smorzamento per ogni modo,  $\{P\}$  è il vettore delle risposte

modali e  $\{\Phi^T F\}$  può essere visto come un vettore di forze modali per gli equivalenti sistemi SDOF. Mentre  $[\lambda^2 - \omega^2]$  è una matrice diagonale, la natura non accoppiata dello spazio modale lineare è espressa in conseguenza delle relazioni di ortogonalità (6.3).

Si può facilmente tracciare la risposta del sistema lineare  $\{Y\}$  da (6.6), premoltiplicando entrambi i lati per  $[\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}$ ,

$$\{Y\} = [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1} \{\Phi^T F\} \quad 6.7$$

Il componente  $i$ -esimo di (6.7) può essere espresso come una somma di termini individuali:

$$Y_i = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \mathfrak{F}_r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 6.8$$

dove  $M$  è il numero totale dei modi del sistema e  $\mathfrak{F}_r = (\Phi^T F)_r$  è la forza di eccitazione modale corrispondente al modo  $r$ -esimo. Per la definizione classica della funzione di risposta frequenza (FRF) in cui soltanto un singolo nodo  $j$  è stato eccitato nel tempo, abbiamo:

$$\frac{Y_i}{F_j} = H_{ij} = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 6.9$$

dove  $H_{ij}$  è la FRF del nodo  $i$  quando il sistema è stato eccitato al nodo  $j$ .

Il principio di reciprocità dei sistemi lineari garantisce che  $H_{ij} = H_{ji}$ , quindi si genera una matrice FRF simmetrica. Osservando (6.9), si può riconoscere che il

sistema MDOF di (6.1) è stato trasformando in M sistemi SDOF, in cui la risposta del componente r-esimo viene dato da:

$$\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 6.10$$

Questa espressione rappresenta ognuna delle curve SDOF in Fig. 6.3.

### 6.3 *Analisi modale lineare (LMA) estesa per sistemi non lineari*

Il problema principale dell'utilizzo di un approccio della LMA per sistemi non lineari è costituito dal fatto che i parametri modali contenuti nella formulazione lineare della FRF (6.9) sono coefficienti costanti mentre i coefficienti di sistemi non lineari sono dipendenti dall'ampiezza.

Si possono espandere i concetti della LMA ai sistemi non lineari scrivendo una versione non lineare della (6.9):

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \tilde{Y}) = \sum_{r=1}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir}(\omega, \tilde{Y})\tilde{\phi}_{jr}(\omega, \tilde{Y})}{\tilde{\lambda}_r^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2} \quad 6.11$$

in cui la dipendenza dall'ampiezza dei parametri modali è esprimibile come funzioni della frequenza e/o ampiezza. Per semplicità, il simbolo “~” verrà usato per denotare una variabile non lineare.

Per le non linearità la matrice della FRF non è più invariante ai cambiamenti del vettore di eccitazione; viene meno il principio di reciprocità ( $\tilde{H}_{ij} \neq \tilde{H}_{ji}$ ); la sovrapposizione modale non vale più ed ogni parametro è variabile.

Il modo più facile per indicare le non linearità in un plot di FRF è quello di cercare le distorsioni alle risonanze, in cui la dipendenza dall'ampiezza dei parametri modali, genera notevoli deviazioni dalla forma lineare.

Mediante una procedura analoga in cui viene definita la (6.11), la versione non lineare di (6.4) viene scritta per ogni stato particolare  $[\omega, \tilde{Y}]$ :

$$\{\tilde{Y}(\omega, \tilde{Y})\} = [\tilde{\Phi}(\omega, \tilde{Y})] \{\tilde{P}(\omega, \tilde{Y})\} \quad 6.12$$

nonché nella versione non lineare di (6.6), tracciata dal re-posizionamento dei coefficienti modali costanti con parametri dipendenti dall'ampiezza:

$$[\tilde{\lambda}^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2] \{\tilde{P}(\omega, \tilde{Y})\} = \{\tilde{\Phi}^T(\omega, \tilde{Y}) F\} \quad 6.13$$

Le equazioni 6.12 e 6.13 rappresentano lo spazio modale di un sistema non lineare caratterizzato dall'essere accoppiato. Anche se ciò non risulta immediatamente ovvio in (6.13) a causa della matrice ancora diagonale  $[\tilde{\lambda}^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2]$ , la dipendenza dall'ampiezza dei coefficienti modali non lineari fa venire meno la proprietà della sovrapposizione modale trovata nello spazio modale lineare.

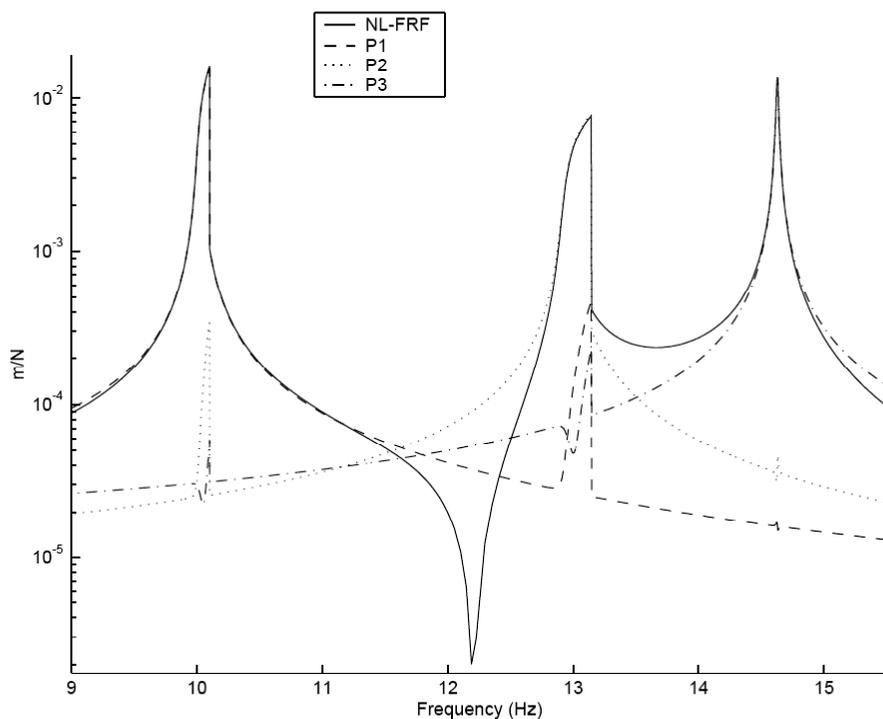


Fig. 6.4 – Risposta modale di un FRF non lineare

La Fig. 6.4 mostra una FRF non lineare composta da 3 modi e una forte non linearità ai modi 1 e 2 (linea intera). Sono inoltre evidenti (in linea tratteggiata) le corrispondenti risposte modali non lineari. Diversamente da quelle lineari –che mostrano un singolo picco alla corrispondente risonanza- queste contengono picchi ad ogni risonanza, poiché risultano più pronunciati laddove le non linearità sono più forti. Per cui, non si può dire con sicurezza che la risposta alla risonanza sia dominata da una singola risposta modale, né che lontano dalla risonanza il modo non lineare si comporti linearmente.

#### 6.4 Lo spazio modale non lineare

Un sistema dinamico non lineare con smorzamento isteretico proporzionale può essere matematicamente definito dall'equazione differenziale ordinaria non lineare,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{y}\} + [\mathbf{K}]\{\dot{y}\} + \mathbf{i}[\mathbf{D}]\{y\} + \{\tilde{G}(\dot{y}, y)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad 6.14$$

in cui  $\{\tilde{G}(\dot{y}, y)\}$  è il vettore non lineare (NLV) che contiene tutte le non linearità del sistema.

Supponendo una risposta armonica oscillatoria e periodica, il problema si trasforma nel dominio della frequenza:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{iD})\{\tilde{Y}\} + \{\tilde{G}(\omega, \tilde{Y})\} = \{F\} \quad 6.15$$

Pre-moltiplicando tale equazione per la trasposta della matrice lineare degli autovettori  $[\Phi]^T$ , abbiamo:

$$[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{iD})\{\tilde{Y}\} + \{\Phi^T \tilde{G}(\omega, \tilde{Y})\} = \{\Phi^T F\} \quad 6.16$$

Come osservato in precedenza, ad ogni stato  $[\omega, Y]$  si può espandere o trasformare la risposta fisica del sistema nelle sue risposte modali non lineari  $\{P\}$ ,

$$\{\tilde{Y}(\omega, \tilde{Y})\} = [\tilde{\Phi}(\omega, \tilde{Y})]\{\tilde{P}(\omega, \tilde{Y})\} \quad 6.17$$

in cui  $[\tilde{\Phi}]$  è la matrice non lineare degli autovettori, che dipende sia dall'ampiezza che dalla frequenza. Questa matrice può essere decomposta in un componente

lineare  $[\Phi]$  –matrice dell’autovettore lineare di “massa normalizzata” - ed una componente non lineare variabile  $[\Delta\tilde{\Phi}(\omega, \tilde{Y})]$ :

$$\{\tilde{Y}\} = [\Phi + \Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} \quad 6.18$$

in cui la dipendenza di  $[\omega, \tilde{Y}]$  è stata risolta mediante l’uso del simbolo “ $\sim$ ”.

Inserendo (6.18) in (6.16):

$$[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \cdot [\Phi + \Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\}$$

e sviluppando ulteriormente l’algebra:

$$[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \cdot [\Phi]\{\tilde{P}\} + [\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \cdot [\Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \quad 6.19$$

$$\begin{aligned} & [\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \cdot [\Phi]\{\tilde{P}\} + \\ & + [\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \cdot \underbrace{\{\Phi\Phi^{-1}\}}_{=\mathbf{I}} \cdot [\Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \end{aligned} \quad 6.20$$

$$[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D})[\Phi] \cdot [\mathbf{I} + \Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \quad 6.21$$

Il termine lineare  $[\Phi]^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D})[\Phi]$  si può ridurre per la proprietà di ortogonalità (6.3), avendosi:

$$[\lambda^2 - \omega^2][\mathbf{I} + \Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\} \quad 6.22$$

che costituisce la rappresentazione matematica di un sistema non lineare MDOF nello spazio modale.

La (6.22) rappresenta l'equivalente modale dei cosiddetti modi non lineari normali (NNM). I NNM di solito vengono considerati come ortogonali –cioè, indipendenti l'uno dall'altro- dove il modo viene influenzato dalle non linearità alla risonanza soltanto, mentre in altre parti si comporta in modo lineare. In altre parole, una sovrapposizione modale viene usata per suddividere un sistema non lineare MDOF in diversi componenti SDOF, ognuno dei quali si occupa esclusivamente di un singolo modo non lineare.

Confrontando (6.22) con la sua controparte lineare, data da (6.6), troviamo che la formulazione non lineare contiene tutti i termini lineari più due termini non lineari nuovi,  $(\Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi})$  e  $\{\Phi^T\tilde{G}\}$ . Questi risultano i responsabili del comportamento modale non lineare direttamente relazionato all'ipotesi dell'ortogonalità formulata dalla teoria dei NNM.

Analizziamo ognuno dei termini non lineari separatamente:

- 1 Si capisce da (6.22) che la coordinate modale r-esima  $(\tilde{P}_r)$  contiene componenti che appartengono a tutti gli altri modi, a causa del termine non lineare  $(\Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi})$ . Questo termine sembra essere direttamente responsabile degli effetti di accoppiamento modale introducendo dati non diagonali nelle matrici di autovalori. Ciò convalida l'ipotesi della sovrapposizione modale per la quale i modi sono indipendenti (o ortogonali). Si è osservato –sia in questa ricerca che in letteratura - che la variazione non lineare degli autovettori  $[\Delta\tilde{\Phi}]$  di solito cade nel range di 1-20%, quindi è chiaramente piccola. In prossimità del modo risonante resimo,  $(\Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi})$  non è più importante confrontare la

grandezza della coordinata modale  $\tilde{P}_r$ , che attenua la sua influenza. Lontano dalla risonanza, comunque,  $\tilde{P}_r$  si decompone in piccoli valori e l'influenza di  $(\Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi})$  diviene dominante. L'ultima affermazione relaziona direttamente il termine non lineare con la natura accoppiata dello spazio modale non lineare, nel quale una coordinata modale mostra distorsioni ad ogni altra risonanza. Per questo motivo,  $(\Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi})$  sarà considerato come il “termine accoppiato non lineare”. La forza dell'effetto accoppiato dipenderà dalle caratteristiche specifiche del sistema in analisi.

- 2  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$  è l'altro termine non lineare che appare in (6.22). Esso è la fonte principale delle non linearità nell'ampiezza modale risonante. A causa del suo ruolo principale come generatore di non linearità, nel modo risonante, e poiché contiene il vettore non lineare precedentemente introdotto (NLV)  $\{\tilde{G}\}$ , questo termine è denominato “vettore modale non lineare” (NLMV).

### 6.5 *Il vettore modale non lineare (NLMV)*

Richiamando la (3.28), l' NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$  si può esplicitare come:

$$\{\Phi^T \tilde{G}\} = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} \tilde{g}v_1 + \phi_{21} \tilde{g}v_2 + \dots + \phi_{N1} \tilde{g}v_N \\ \dots \\ \phi_{1r} \tilde{g}v_1 + \phi_{2r} \tilde{g}v_2 + \dots + \phi_{Nr} \tilde{g}v_N \\ \dots \\ \phi_{1M} \tilde{g}v_1 + \phi_{2M} \tilde{g}v_2 + \dots + \phi_{NM} \tilde{g}v_N \end{array} \right\}_M \quad 6.23$$

dove  $\tilde{g}v_i$  rappresenta l'effetto combinato di tutti gli elementi non lineari associati al DOF  $i$ -esimo. La riga  $r$  di (6.23) rappresenta la non linearità che agisce alla coordinata modale  $\tilde{P}_r$ , data da:

$$\left(\Phi^T \tilde{G}\right)_r = \left(\phi_{1r} \tilde{g}v_1 + \phi_{2r} \tilde{g}v_2 + \dots + \phi_{Nr} \tilde{g}v_N\right) \quad 6.24$$

La (6.24) mostra che il componente  $r$  del NLMV,  $\left(\Phi^T \tilde{G}\right)_r$ , contiene ogni singola forza di “restoring” del sistema (inserita nelle funzioni  $\tilde{g}v_1, \tilde{g}v_2, \dots, \tilde{g}v_N$ ).

Ciò spiega chiaramente il motivo per cui ogni elemento NL, in qualsiasi posizione nel sistema, sia sicuro di avere un'influenza globale su tutte le risonanze. Comunque, l'ampiezza al quale un dato elemento NL  $\tilde{g}_{ij}$  (contenuto nella funzione  $\tilde{g}v_i$ ) influenza il modo  $r$ -esimo, dipende anche dal fattore “peso”  $\phi_{ir}$ . Ciò risulta anche vero per gli elementi  $\tilde{g}_{ij}$  “non-grounded”, ma le cose qui sono meno chiare perché il suo comportamento viene influenzato da più di un autovettore allo stesso tempo.

La (6.24) spiega anche il comportamento lineare dei modi superiori, dovuto all'incidenza di piccole ampiezze. In ogni caso, potrebbe accadere che un modo superiore mostri effetti non lineari forti. Questo comportamento può essere spiegato

mediante la presenza di un elemento NL “non-grounded” che agisce tra due DOF  $i$ ,  $j$  con autovettori di uguale grandezza ma segno opposto. Questo può creare un effetto aggiuntivo e indurre notevoli comportamenti non lineari, come esemplificato in (6.25):

$$\phi_{ir} \tilde{g}_{ij} + \phi_{jr} \tilde{g}_{ji} = \phi_{ir} \tilde{g}_{ij} + (-\phi_{ir})(-\tilde{g}_{ij}) = 2\phi_{ir} \tilde{g}_{ij} \quad 6.25$$

dove si può notare che un tale aspetto raddoppia la forza di “restoring” non lineare di una non linearità grounded simile.

La (6.24) prova che il NLMV mostrerà significativi picchi laddove le funzioni  $\tilde{g}_{v_1}, \tilde{g}_{v_2}, \dots, \tilde{g}_{v_N}$  (dipendenti dall’ampiezza) sono significative.

Ciò accadrà invariabilmente ad ogni risonanza, poiché risulta evidente se il modo in analisi possiede autovettori di grande ampiezza.

La Fig. 6.5a mostra una FRF non lineare composta da 3 modi e dimostra forti non linearità nei modi primo e secondo, mentre nella Fig. 6.5b si notano 3 funzioni del NLMV per lo stesso sistema. È chiaro che il NLMV contiene attività significative ad ogni risonanza, piuttosto che solo alle loro coordinate modali. Inoltre, il terzo componente del NLMV mostra picchi perfino più forti alle altre risonanze. Tali osservazioni risultano importanti per gli effetti di accoppiamento delle non linearità.

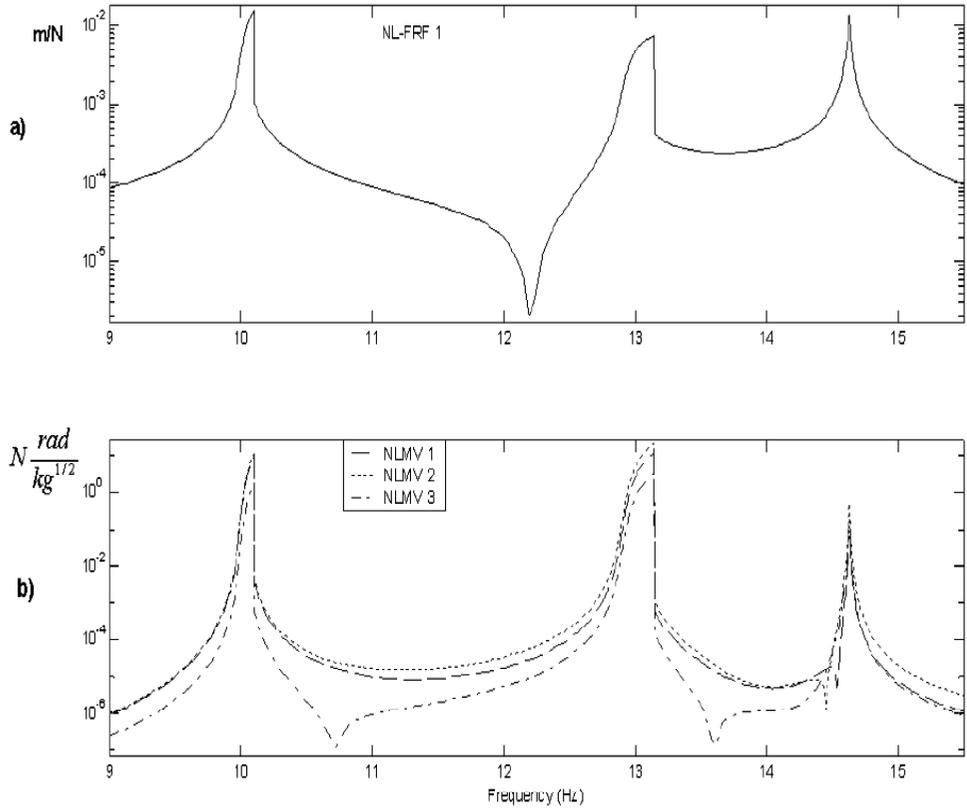


Fig. 6.5 – NLMV di un sistema 3-DOF

Anche se il NLMV è stato definito come  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$ , successivamente per indicare la presenza di forze lineari esterne che agiscono sul sistema; l' NLMV si esprimerà come:

$$\{\tilde{\chi}\} = \{\Phi^T \tilde{F}\} - \{\Phi^T \tilde{G}\} \quad 6.26$$

in cui il primo termine della (6.26) rappresenta le forze modali lineari esterne. Chiameremo  $\{\tilde{\chi}\}$  il NLMV esteso.

## 6.6 *Il metodo modale ibrido (HMM)*

Uno degli svantaggi di esprimere un sistema NL nello spazio modale è costituito dal fatto che la formulazione degli elementi non lineari nel NLV  $\{\tilde{G}\}$  si basa sulle coordinate fisiche –invece che modali– del sistema che sono le incognite del sistema. Un approccio completamente modale deve esprimere le forze di “restoring” non lineari in  $\{\tilde{G}\}$  come funzioni delle risposte modali  $\{\tilde{P}\}$ .

Considerando lo spazio modale accoppiato, la matematica coinvolta diventa proibitiva per sistemi MDOF.

Un altro svantaggio di una formulazione dell’analisi modale non lineare usata come strumento di identificazione è costituito dal fatto che la localizzazione fisica delle non linearità non può essere identificata, dal momento che tale informazione non è esplicitamente contenuta in una formulazione modale tipica.

Nonostante gli svantaggi, l’analisi modale è considerata ancora uno strumento prezioso per ridurre un sistema lineare ad una dimensione giusta per ragionevoli tempi di computazione.

Si propone un metodo particolare denominato “*metodo modale ibrido*” (HMM) che considera un’analisi modale standard per esprimere il comportamento del sistema lineare principale. Mantiene la formulazione delle non linearità nel dominio fisico, da qui il termine “ibrido”.

Il punto di partenza dell’analisi è l’equazione (6.22) che descrive lo spazio modale non lineare:

$$[\lambda^2 - \omega^2][\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}\tilde{\mathbf{\Phi}}]\{\tilde{P}\} + \{\mathbf{\Phi}^T\tilde{G}\} = \{\mathbf{\Phi}^T F\}$$

Moltiplicando per  $[\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}$  e sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} [\Phi][\mathbf{I} + \Phi^{-1}\Delta\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} &= [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}(\{\Phi^T F\} - \{\Phi^T \tilde{G}\}) \\ \underbrace{(\Phi + \Delta\tilde{\Phi})}_{[\tilde{\Phi}]} \{\tilde{P}\} &= [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}(\{\Phi^T F\} - \{\Phi^T \tilde{G}\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\Phi}]\{\tilde{P}\} &= [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}(\{\Phi^T F\} - \{\Phi^T \tilde{G}\}) \\ \{\tilde{Y}\} &= [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}(\{\Phi^T F\} - \{\Phi^T \tilde{G}\}) \end{aligned}$$

Richiamando (6.26), arriviamo ad un'equazione che esprime le risposte fisiche non lineari:

$$\{\tilde{Y}\} = [\Phi][\lambda^2 - \omega^2]^{-1}\{\tilde{\chi}\} \quad 6.27$$

Si noti che, in (6.27), l'unica variabile non lineare NLMV è  $\{\tilde{\chi}\}$ , mentre gli altri sono parametri puramente lineari. Questa caratteristica ci consente di evidenziare la netta separazione del sistema in componenti lineari e non lineari.

Possiamo esprimere il componente iesimo di (6.27) come uno sviluppo modale nello spazio lineare:

$$\tilde{Y}_i = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \tilde{\chi}_r}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 6.28$$

Le similarità tra (6.28) e la sua versione lineare (6.8) sono interessanti. Di fatto, il problema originale di un sistema NL eccitato da una forza costante è stato trasformato in uno nel quale il sistema lineare originale è stato eccitato da una forza non lineare. Ciò potrebbe alterare la fisica del problema, ma la serie espressa in

(6.28) è molto più efficace per analizzare i sistemi NL in un ambiente sperimentale della serie non lineare tradizionale, già introdotta in (6.11) e qui riscritta:

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \tilde{Y}) = \sum_{r=1}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir}(\omega, \tilde{Y}) \tilde{\phi}_{jr}(\omega, \tilde{Y})}{\tilde{\lambda}_r^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2}$$

Ciò è dovuto alle variazioni individuali molto piccole che si verificano negli autovettori e autovalori che tuttavia causano effetti significativi quando sono combinati. Queste piccole variazioni sono molto più difficili da estrarre individualmente dell'identificazione di un singolo componente non lineare forte e combinato  $\{\tilde{\mathcal{X}}\}$ .

Per le N risposte fisiche di un sistema MDOF, la (6.27) può essere data in forma matriciale, nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \dots \\ \tilde{Y}_N \end{Bmatrix}_N = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{12}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \dots & \frac{\phi_{1M}}{\lambda_M^2 - \omega^2} \\ \frac{\phi_{21}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{22}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \dots & \frac{\phi_{2M}}{\lambda_M^2 - \omega^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\phi_{N1}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{N2}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \dots & \frac{\phi_{NM}}{\lambda_N^2 - \omega^2} \end{bmatrix}_{N,M} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_1 \\ \tilde{\mathcal{X}}_2 \\ \dots \\ \tilde{\mathcal{X}}_M \end{Bmatrix}_M \quad 6.29$$

La (6.29) rappresenta un sistema non lineare di equazioni che si possono risolvere mediante lo schema di Newton-Raphson per trovare le risposte non lineari  $\{\tilde{Y}\}$ .

Si osservi che i coefficienti combinati nella matrice da invertire (o manipolare) sono tutti lineari, per cui non porta a brutte condizioni.

Possiamo ridurre il sistema (6.29) ad una dimensione minima solo se gli  $n$  NL-DOF sono inclusi nell'analisi ( $n \ll N$ ). Ciò è possibile perché  $\{\tilde{\chi}\}$  dipende esclusivamente dalle variabili associate agli  $n$  NL-DOF:

$$\{\tilde{\chi}\} = \{\tilde{\chi}(v_{n,n}, \tilde{Y}_n)\} \quad 6.30$$

La natura modale di (6.29) consente un troncamento modale. Questo si realizza focalizzando l'analisi nelle vicinanze di alcune risonanze  $m$  scelte ( $m \ll M$ ), equivalenti alla selezione di alcune colonne in (6.29). Si cerchi di inserire tutti i modi con non linearità significative, nonché quelli che si comportano in modo lineare ma che introducono forti effetti residuali nel range di frequenza misurato.

Anche se un troncamento modale permette all'analista di trascurare dati non essenziali (modi deboli), ciò costituisce una procedura forzata. Come abbiamo già visto nella Fig. 6.5, anche i modi debolmente non lineari possono introdurre effetti non lineari significativi nei modi vicini. Questo risultato potrebbe essere superato mediante l'estensione del range di frequenza all'ultimo modo non lineare osservato.

Dopo una riduzione sia spaziale che modale, la (6.29) si trasforma in:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \dots \\ \tilde{Y}_N \end{Bmatrix}_N = [\Phi]_{n,m} \cdot [\lambda^2 - \omega^2]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}_1(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \\ \tilde{\chi}_2(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \\ \dots \\ \tilde{\chi}_m(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \end{Bmatrix}_m \quad 6.31$$

che rappresenta un insieme di  $n$  equazioni NL in  $n$  incognite,  $\{\tilde{Y}_n\}$ , contenute in  $\{\tilde{\chi}_m\}$ . Questo può essere risolto mediante l'algoritmo di Newton-Raphson alla stregua di quanto riportato nel paragrafo 4.4.

Dopo aver ottenuto le  $n$  risposte non lineari, la (6.29) si trasforma in un insieme di equazioni lineari, questa volta inserendo solo quei termini associati a DOF lineari (DOF liberi di elementi NL):

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \dots \\ \tilde{Y}_N \end{Bmatrix}_N = [\Phi]_{(N-n),m} \cdot [\lambda^2 - \omega^2]_{m,m}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}_1(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \\ \tilde{\chi}_2(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \\ \dots \\ \tilde{\chi}_m(v_{n,n}, \tilde{Y}_n) \end{Bmatrix}_m \quad 6.32$$

in cui  $\{\tilde{\chi}_m\}$  è adesso un vettore noto.

### 6.7 Schema di minimizzazione non lineare

La minimizzazione non lineare presentata qui si basa sullo schema di Newton-Raphson già visto nel paragrafo 4.4, con alcuni adattamenti:

1. Stabilire la dimensione del sistema da risolvere. Costruendo un sistema ridotto  $[n,m]$ , si possono prendere in considerazione soltanto gli  $n$  NL-DOF e i modi  $m$  scelti.
2. Stabilire il vettore delle incognite. Corrisponde alle risposte sconosciute associate con le NL-DOF  $n$ ,  $\{\tilde{Y}_n\}$ .

3. Stabilire l'insieme delle equazioni NL. Espresso mediante (6.31), in cui il vettore LHS viene considerato come la soluzione “analitica”,  $\{\tilde{Y}_n\}^{analytical}$ .
4. Fornire una supposizione iniziale  $\{\tilde{Y}_n\}^{trial}$  per la prima iterazione. Per il presente lavoro, la soluzione lineare  $\{\tilde{Y}_n\}^{trial} = \{\tilde{Y}_n\}^{linear}$  lineare scelta.
5. Costruzione del NLMV esteso. Innanzitutto bisogna costruire il NLV  $\{\tilde{G}_n\}$  per le NL-DOF n. Poi, calcolare il NLMV  $\{\Phi_{m,n}^T \tilde{G}_n\}$ . Infine, ottenere il NLMV esteso  $\{\tilde{\mathcal{X}}_m\}$ :

$$\{\tilde{\mathcal{X}}_m\} = \{\Phi_{m,n}^T \tilde{F}_n\} - \{\Phi_{m,n}^T \tilde{G}_n\}$$

6. Dividere reale/immaginario. La routine di minimizzazione standard disponibile in MATLAB ed implementate, con diverse migliorie, dallo scrivente in FEMLAB non è in grado di affrontare complesse variabili, per cui le equazioni NL devono essere divise in parti reali ed immaginarie prima di procedere. Ciò non può essere matematicamente dichiarato come:

$$\{f(y)\} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\tilde{Y}^{trial} - \tilde{Y}^{analytical}) \\ \dots \\ \text{Im}(\tilde{Y}^{trial} - \tilde{Y}^{analytical}) \end{Bmatrix}_{2n} \approx \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n} \quad 6.33$$

7. Calcolare  $\{\tilde{Y}_n\}$ . La procedura iterativa terminerà quando il vettore di soluzione aggiornato  $\{f(y)\}$  risulterà inferiore alla tolleranza predefinita (cioè, tra 1-2%) lontana dalla precedente iterazione. Conterrà le risposte richieste per la sola

frequenza di eccitazione attuale, per cui l'intera procedura verrà riapplicata per la successiva frequenza step. Bisogna aggiungere che adesso le risposte calcolate servono bene come supposizione iniziale per l'algoritmo.

8. Calcolare  $\{\tilde{Y}_{N-n}\}$ . Una volta calcolate le risposte  $\{\tilde{Y}_n\}$ , il problema è stato traslato a quello lineare. Si ottengono le restanti risposte  $\{\tilde{Y}_{N-n}\}$  (tipicamente  $n \ll N$ ) mediante l'uso di (6.28) su una base individuale, oppure usando (6.32) per l'intero insieme di  $(N - n)$  incognite.

### 6.8 Test N. 1: un esempio modale di rigidità volumetrica

L'esempio applicativo n. 1 viene chiaramente descritto nell'Appendice, ed è mostrato nella Fig. 6.6.

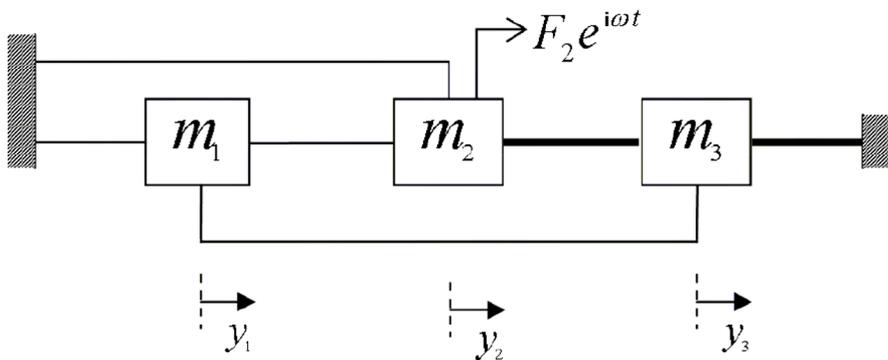


Fig. 6.6 – Schema dell'esempio n. 1

Il nostro scopo è quello di ottenere le non linearità FRF. Il NLV per questo problema già ottenuto in precedenza e riportato al paragrafo 4.5:

$$\{\tilde{G}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}v_1 \\ \tilde{g}v_2 \\ \tilde{g}v_3 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 & -\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 \\ 0 & -\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2 & (\beta_{33} |\tilde{Y}_3|^2 + \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{Bmatrix}$$

dove  $|\tilde{Z}_{ij}| = |\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j|$

Il vettore NLV può essere espresso nella forma più compatta:

$$\{\tilde{G}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}v_1 \\ \tilde{g}v_2 \\ \tilde{g}v_3 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}} \\ \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}} + \beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3} \end{bmatrix}$$

dove  $\theta_{ij} = \angle(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_j)$  e  $\tilde{g}v_1 = 0$  perché non ci sono elementi attaccati al DOF 1.

Calcoliamo il NLMV dalla (6.23):

$$\{\Phi^T \tilde{G}\} = \frac{3}{4} \begin{Bmatrix} (\phi_{21} + \phi_{31}) (\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}}) + \phi_{31} (\beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3}) \\ (\phi_{22} + \phi_{32}) (\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}}) + \phi_{32} (\beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3}) \\ (\phi_{23} + \phi_{33}) (\beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}}) + \phi_{33} (\beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3}) \end{Bmatrix} \quad 6.34$$

in cui ogni riga rappresenta la non linearità che riguarda la coordinata modale corrispondente.

È interessante notare che la Fig. 6.7a anticipa la risposta non lineare alla coordinata 1 e la Fig. 6.7b mostra i suoi tre NLMV associati, definiti in (6.34); si osserva che ogni funzione del NLMV mostra forti componenti ad ogni risonanza e, nel caso di

NLMV 3, i suoi componenti risulteranno perfino più forti, alla risonanza prime e seconda, di quelli osservati nella sua coordinata modale

La (6.34) permette, inoltre, la seguente interessante osservazione: l'ampiezza al quale un dato elemento NL, per es.  $\beta_{33}$ , eserciterà influenza al modo  $s$ , viene determinato mediante il suo valore numerico nonché dal suo fattore "peso"  $\phi_{3s}$ . Per elementi "non-grounded" come  $\beta_{23}$  la situazione è meno definita a causa della dipendenza simultanea da due autovettori,  $\phi_{2s}$  e  $\phi_{3s}$ . Nel caso estremo in cui questi due autovettori siano identici ma di segno opposto (abbastanza comune nelle strutture simmetriche), la non linearità scompare completamente. Questa è la dimostrazione matematica per la soluzione non-unica di un problema di identificazione.

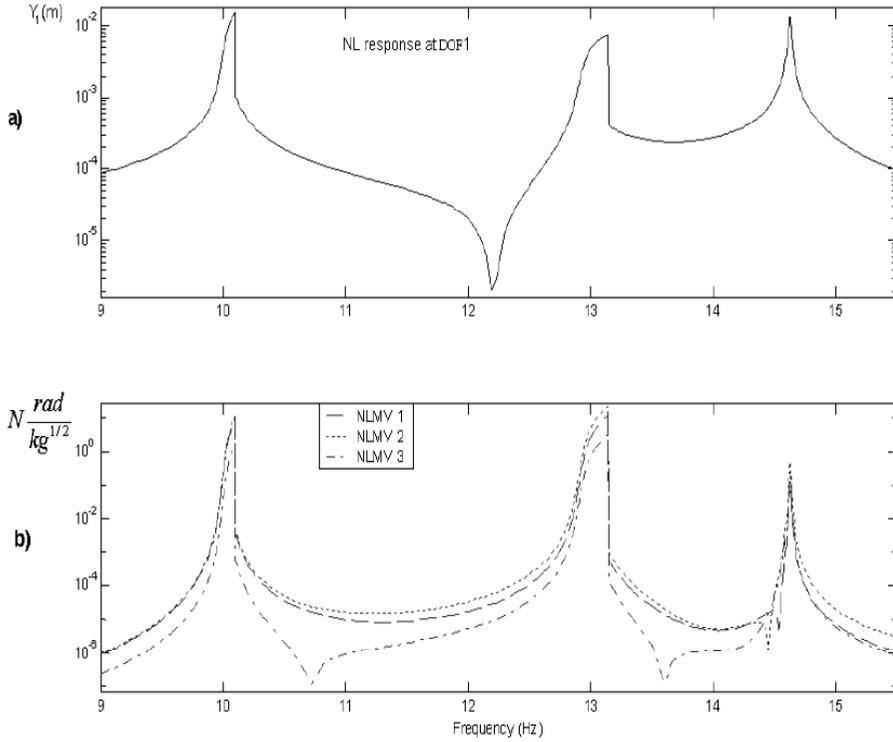


Fig. 6.7 – NLMV del caso in esame

Il NLMV esteso è derivato direttamente:

$$\{\tilde{\chi}\} = -\frac{3}{4} \left\{ \begin{array}{l} (\phi_{21} + \phi_{31}) \left( \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}} - F_2 \right) + \phi_{31} \left( \beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3} \right) \\ (\phi_{22} + \phi_{32}) \left( \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}} - F \right) + \phi_{32} \left( \beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3} \right) \\ (\phi_{23} + \phi_{33}) \left( \beta_{23} |\tilde{Z}_{23}|^3 e^{i\theta_{23}} - F \right) + \phi_{33} \left( \beta_{33} |\tilde{Y}_3|^3 e^{i\theta_3} \right) \end{array} \right\}$$

Dalla (6.29) si ricava il sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{12}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{13}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \\ \frac{\phi_{21}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{22}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{23}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \\ \frac{\phi_{31}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{32}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{33}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}_1 \\ \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_3 \end{Bmatrix}$$

Le espressioni non lineari sono valide per una singola frequenza  $\omega$ ; da un punto di vista computazionale, le risposte potranno risolversi intorno alla risonanza, dove le non linearità diventano attive.

Questa procedura è valida in quanto le armoniche superiori/inferiori non sono state prese in considerazione in questo lavoro.

Il comportamento del metodo HMM verrà messo a confronto con il “metodo di equilibrio armonico” che costituisce un riconosciuto punto di riferimento per problemi non lineari. Il particolare codice HBM usato in questo studio è stato scritto da E. Petrov nell’ambito di un programma di ricerca per l’analisi delle vibrazioni di strutture non lineari con diverse non linearità.

Le risposte non lineari mostrate nelle Figg. 6.8 e 6.9 sono ottenute applicando lo schema di minimizzazione presentato nel paragrafo 6.6.

La linea tratteggiata rappresenta la risposta lineare, mentre la linea intera rappresenta i risultati ottenuti dal metodo “HBM”. Infine, i segni “\_” intorno alle risonanze sono i risultati del metodo HMM, che si presentano in eccellente accordo con il punto di riferimento.

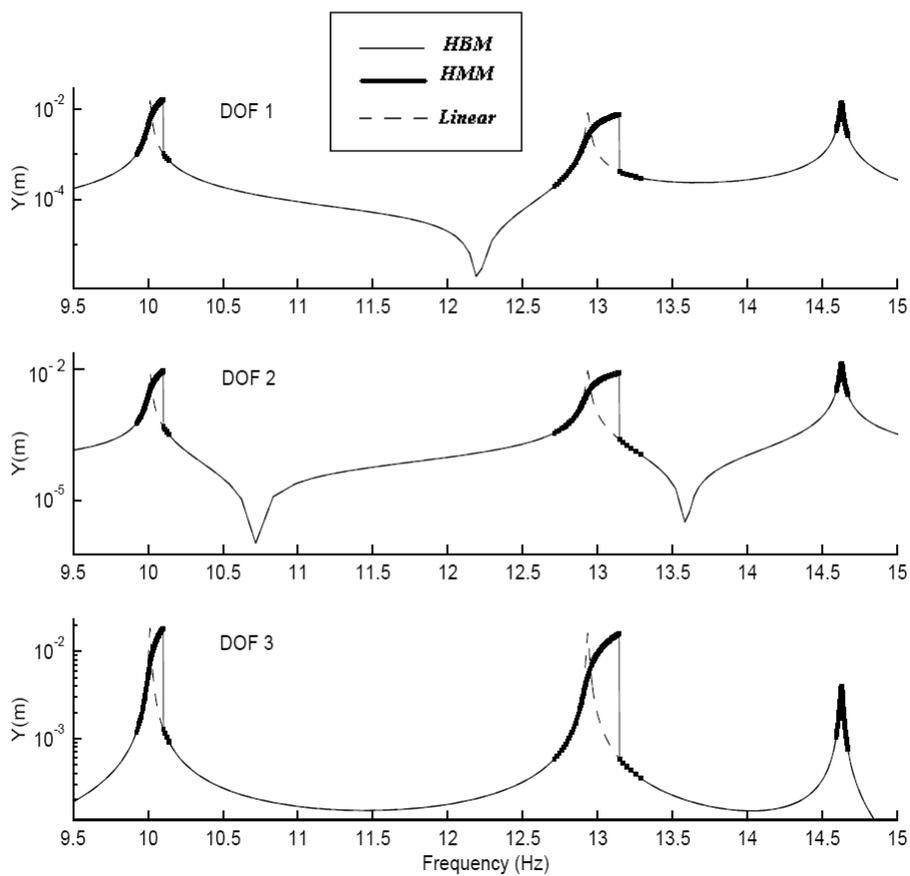


Fig. 6.8 – Test n. 1 –Risposta Non Lineare calcolata con varie tecniche

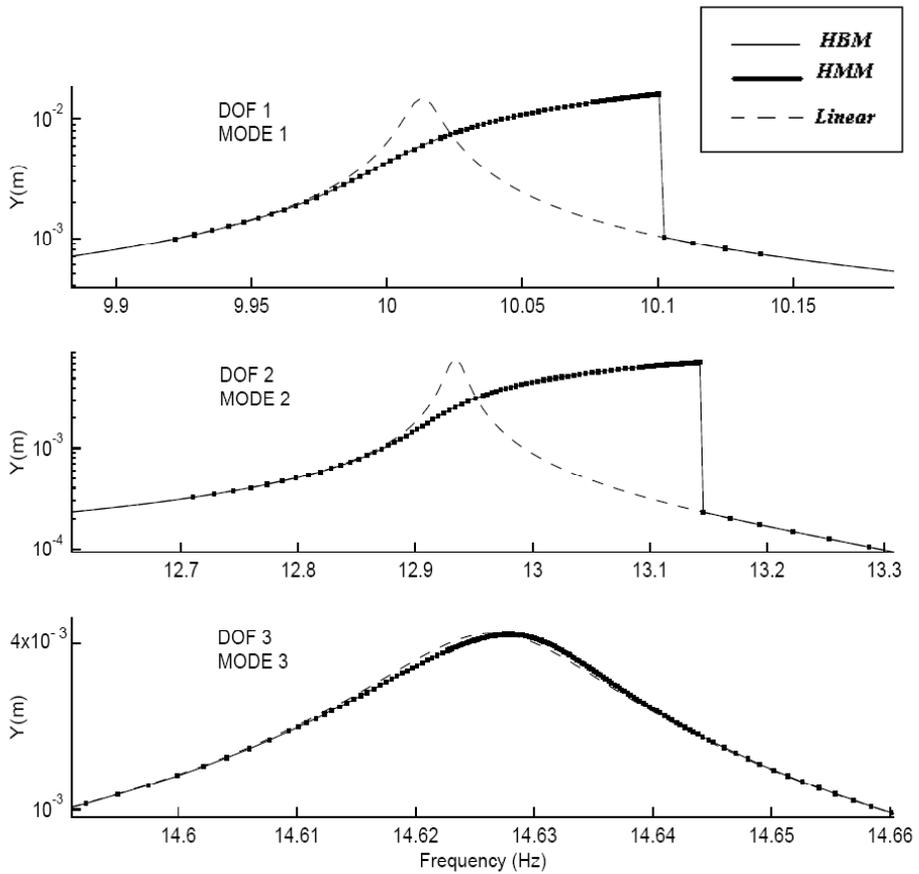


Fig. 6.9 – Test n. 1 – Particolare ingrandito sul 1° picco di cui alla fig. 6.8

### 6.9 Test N. 2: un esempio modale di smorzamento per attrito

Ora viene spiegato il metodo HMM in un sistema che contiene non linearità di smorzamento per attrito. L'esempio n. 2 è identico al n. 1, tranne che per i due

elementi NL che sono del tipo smorzamento per attrito, come descritto nell'Appendice.

Il vettore NLV per questo problema è stato già ottenuto nella Paragrafo 4.6, espresso come:

$$\{\tilde{G}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}v_1 \\ \tilde{g}v_2 \\ \tilde{g}v_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{i} \frac{4}{\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} & -\frac{\gamma_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} \\ 0 & -\frac{\gamma_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} & \left( \frac{\gamma_{23}}{|\tilde{Y}_3|} + \right) \frac{\gamma_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{Bmatrix}$$

dove  $|\tilde{Z}_{ij}| = |\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j|$ . Il NLV vettore può anche essere espresso in una forma compatta:

$$\{\tilde{G}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}v_1 \\ \tilde{g}v_2 \\ \tilde{g}v_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{i} \frac{4}{\pi} \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} \\ \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} + \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \end{Bmatrix}$$

dove  $\theta_{ij} = \angle(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_j)$  e  $\tilde{g}v_1 = 0$  semplicemente, perché non compaiono elementi NL collegati alla coordinata 1. Successivamente calcoliamo il NLMV come segue:

$$\{\Phi^T \tilde{G}\} = \mathbf{i} \frac{4}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} (\phi_{21} + \phi_{31}) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} \right) + \phi_{31} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \\ (\phi_{22} + \phi_{32}) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} \right) + \phi_{32} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \\ (\phi_{23} + \phi_{33}) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} \right) + \phi_{33} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \end{array} \right\} \quad 6.35$$

in cui ogni riga rappresenta ora la non linearità che influenza la coordinata modale corrispondente.

È interessante notare che la Fig. 6.10a mostra la risposta non lineare al primo modo e la Fig. 6.10b mostra i tre NLMV definiti in (6.35); come di solito accade per questi meccanismi non lineari, le forze modali non lineari saltano tra i valori costanti secondo la direzione del movimento relativo.

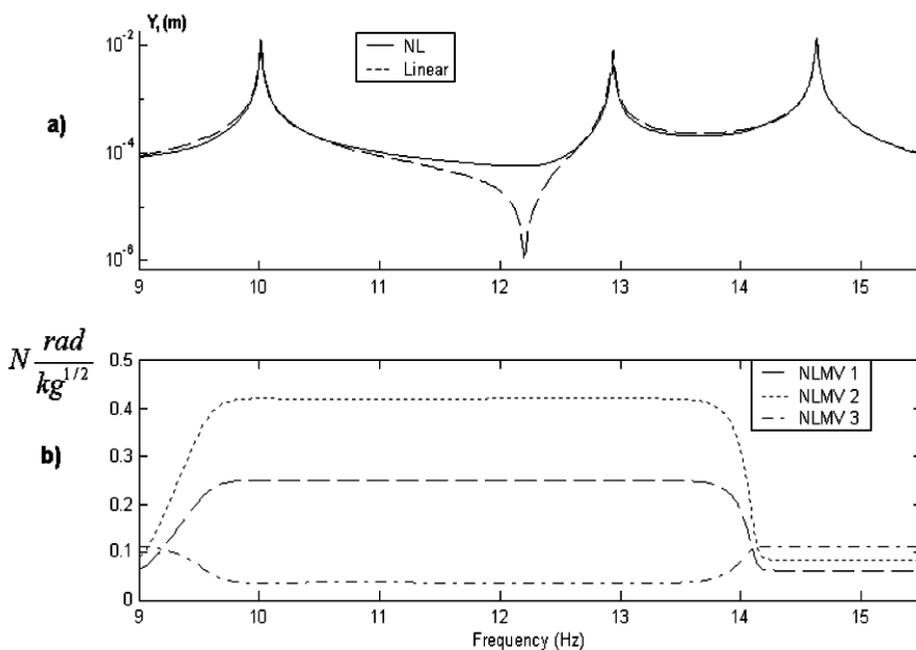


Fig. 6.10 – Test n. 2 - --Risposta Non Lineare calcolata con varie tecniche

Si può notare che ogni funzione del NLMV mostra componenti non-zero ad ogni risonanza e, nel caso di 3 NLMV, i suoi componenti risultano perfino più forti, alle risonanze 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, di quelli ottenuti al suo 3<sup>o</sup> modo.

Tutte le osservazioni scritte nella Paragrafo 6.7, che riguardano il comportamento accoppiato del NLMV, restano ancora valide. Il NLMV esteso è:

$$\{\tilde{\chi}\} = -\mathbf{i} \frac{4}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \left( \phi_{21} + \phi_{31} \right) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} - F_2 \right) + \phi_{31} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \\ \left( \phi_{22} + \phi_{32} \right) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} - F_2 \right) + \phi_{32} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \\ \left( \phi_{23} + \phi_{33} \right) \left( \gamma_{23} \frac{\tilde{Z}_{23}}{|\tilde{Z}_{23}|} e^{i\theta_{23}} - F_2 \right) + \phi_{33} \left( \gamma_{33} \frac{\tilde{Y}_3}{|\tilde{Y}_3|} e^{i\theta_3} \right) \end{array} \right\}$$

Usando la (6.29) possiamo generare un sistema di equazioni non lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{12}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{13}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \\ \frac{\phi_{21}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{22}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{23}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \\ \frac{\phi_{31}}{\lambda_1^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{32}}{\lambda_2^2 - \omega^2} & \frac{\phi_{33}}{\lambda_3^2 - \omega^2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\chi}_1 \\ \tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_3 \end{array} \right\}$$

Le risposte non lineari mostrate nella Fig. 6.11 e 6.12 si ottengono applicando lo schema di minimizzazione presentato nella Paragrafo 6.6. Si nota che HMM (segni “\_”) è in completo accordo con l’HBM (linea intera), mostrando ampiezze inferiori alla risonanza se confrontate con il caso lineare (linea tratteggiata).

L’effetto della non linearità è una riduzione generale delle ampiezze, che risulta più evidente nei modi 1° e 2°.

Il terzo modo è meno influenzato perché, alle frequenze superiori, la forza di smorzamento NL viene sopraffatta dalla forza di “restoring” lineare; l’effetto più evidente nel secondo modo si può spiegare con il fatto che due masse sono in movimento opposto, generando un effetto additivo delle forze per attrito.

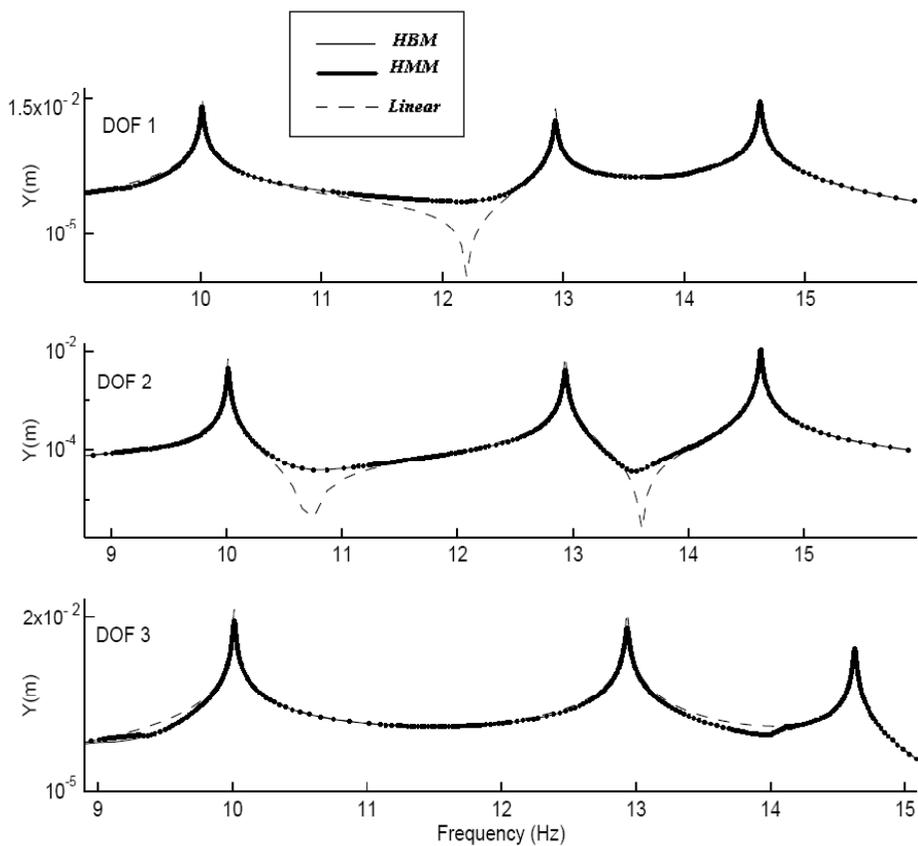


Fig. 6.11 – Test n. 2 –Risposta non lineare

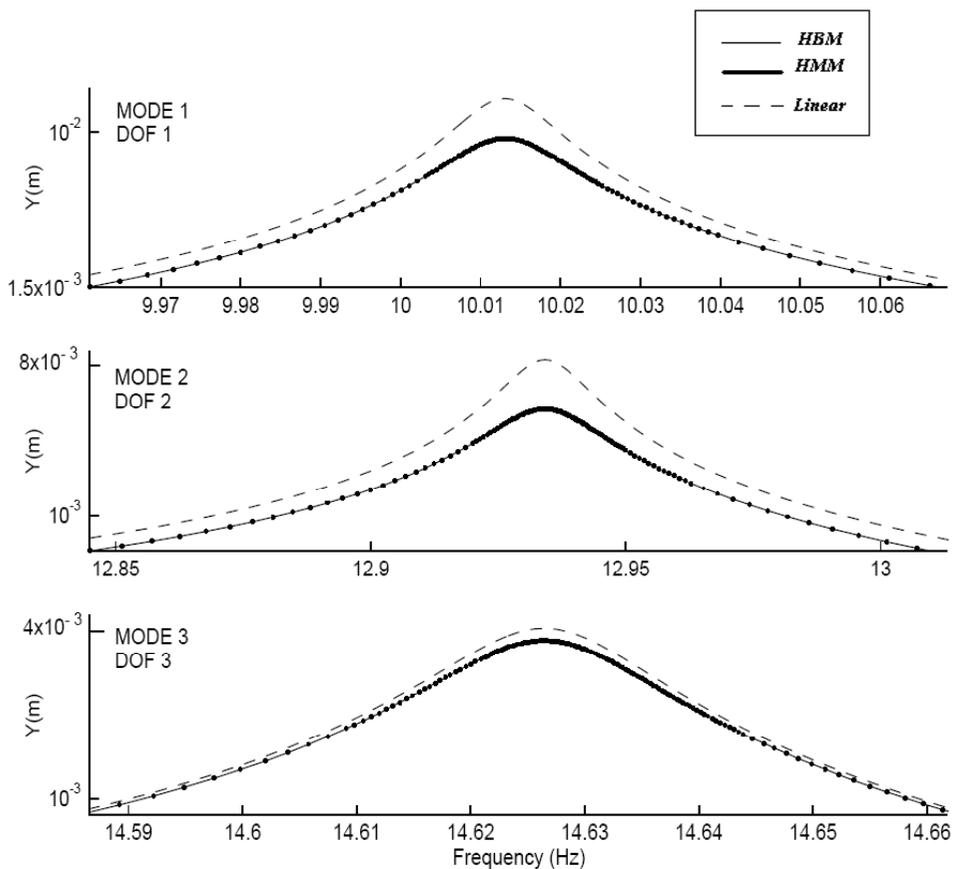


Fig. 6.12 – Test n. 2 – Vista ingrandita su primo picco del diagramma di cui alla fig. 6.11

## Capitolo 7 – Derivazione analitica dei parametri modali NL mediante un metodo di approssimazione veloce (FAM)

### 7.1 Introduzione

La rappresentazione modale standard per sistemi lineari viene data da (6.9),

$$\frac{Y_i}{F_i} = H_{ij} = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}$$

che costituisce la base per la rappresentazione modale non lineare tradizionale, data da (6.11),

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \tilde{Y}) = \sum_{r=1}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir}(\omega, \tilde{Y}) \tilde{\phi}_{jr}(\omega, \tilde{Y})}{\tilde{\lambda}_r^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2}$$

D'altra parte, la formulazione del metodo HMM per sistemi non lineari viene dato da (6.28),

$$\tilde{Y}_i = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \tilde{\chi}_r}{\lambda_r^2 - \omega^2}$$

Confrontando queste espressioni, è chiaro che uno dei principali vantaggi della formulazione HMM (6.28) è quello di non calcolare gli autovettori ed autovalori

non lineari. Un limite, invece, potrebbe essere la mancanza di una metodologia per determinare questi parametri.

A titolo esemplificativo dobbiamo considerare che:

- Il concetto di autovalori ed autovettori variabili in (6.11) ha un fondamento fisico. E' stato dimostrato che le non linearità che provengono per esempio, da un meccanismo a rigidezza volumetrica dipendono da alcune proprietà dei materiali. Ciò porta ad un aumento della rigidezza totale e ad un aumento nelle frequenze di vibrazione.
- D'altra parte, il metodo HMM rappresenta la struttura lineare originale soggetta a una forza non lineare, la quale non descrive la vera fisica del problema.

In questo capitolo, l'informazione non lineare contenuta nel NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$  verrà trasformata in parametri maggiormente standardizzati, ovvero in autovalori non lineari  $(\tilde{\lambda}^2)$  ed autovettori  $(\tilde{\Phi})$  non lineari.

Questa trasformazione verrà eseguita mediante espressioni analitiche di recente sviluppo, che forniscono una veloce derivazione approssimata. Il metodo proposto viene chiamato "metodo di approssimazione veloce" (FAM).

L'informazione non lineare contenuta nel NLMV di ogni modo è di solito fortemente accoppiata e mostra componenti non lineari forti ad ogni altra risonanza. Se si vuole usare questa informazione in un contesto di sovrapposizione modale, è necessario decomprimere il NLMV in componenti modali individuali, disaccoppiando così il problema. La derivazione di autovalori e autovettori non lineari realizza questo compito mediante l'estrazione di informazioni relazionate a un singolo modo soltanto (Fig. 7.1).

Il metodo FAM, inoltre, non rappresenta una identificazione finale perché i risultati ottenuti sono ancora dipendenti dalla frequenza o dall'ampiezza, per es.  $\tilde{\lambda}_r(\omega)$ ,

$\tilde{\Phi}_r(\omega)$  per cui è necessaria una ulteriore trasformazione (regressione polinomiale) per fornire un modello invariante valido per ogni livello di eccitazione.

Il metodo FAM fornisce un approccio semplice e analitico per calcolare gli autovalori e autovettori non lineari, consentendo procedure più complesse. L'approccio corretto per questo compito si basa su un'ottimizzazione non lineare da dati misurati.

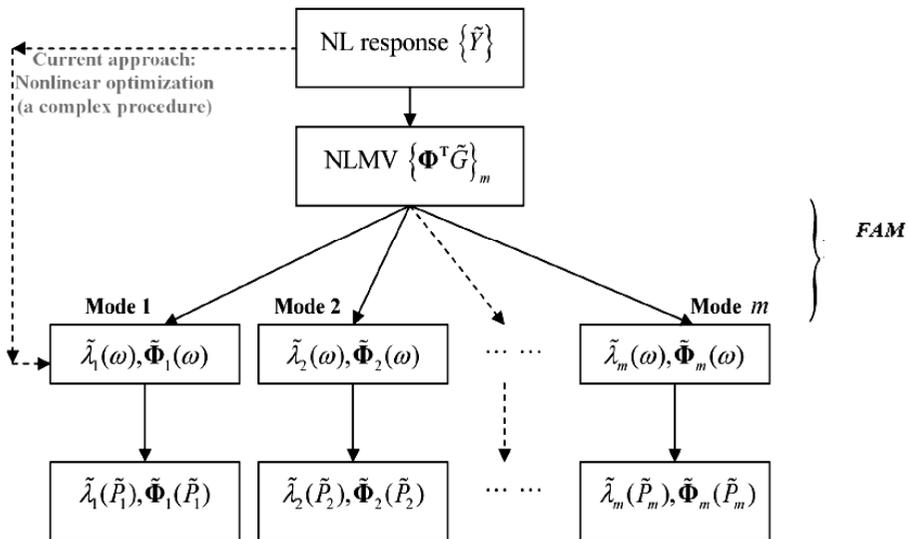


Fig. 7.1 – Schema a blocchi del NLMV

### 7.2 Calcolo con FAM degli autovalori non lineari

Lo spazio modale di un sistema lineare è stato espresso da (6.6):

$$\lfloor \lambda^2 - \omega^2 \rfloor \{P\} = \{\Phi^T F\}$$

Una simile espressione per un sistema non lineare, (6.13), è data da:

$$\lfloor \tilde{\lambda}^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2 \rfloor \{\tilde{P}(\omega, \tilde{Y})\} = \{\tilde{\Phi}^T(\omega, \tilde{Y}) F\}$$

Gli autovalori e autovettori non lineari si possono decomporre in lineari ( $\lfloor \lambda \rfloor$ ,  $[\Phi]$ ) e non lineari ( $\lfloor \Delta \tilde{\lambda}(\omega, \tilde{Y}) \rfloor$ ,  $[\Delta \tilde{\Phi}(\omega, \tilde{Y})]$ ), imputando le variazioni alle non linearità:

$$\lfloor \lambda^2 + \Delta \tilde{\lambda} - \omega^2 \rfloor \{\tilde{P}\} = \{(\Phi + \Delta \tilde{\Phi}^T) F\} \quad 7.1$$

Confrontando (7.1) con (6.22), che descrive lo spazio modale non lineare, si ha:

$$\lfloor \lambda^2 - \omega^2 \rfloor [\mathbf{I} + \Phi^{-1} \Delta \tilde{\Phi}] \{\tilde{P}\} + \{\Phi^T \tilde{G}\} = \{\Phi^T F\}$$

La variazione non lineare dell'autovalore resimo,  $\Delta \tilde{\lambda}_r^2$  è data da:

$$\Delta \tilde{\lambda}_r^2 = \frac{(\Phi^T \tilde{G})_r + ((\lambda^2 - \omega^2)(\Phi^{-1} \Delta \tilde{\Phi})\{\tilde{P}\})_r + (\Delta \tilde{\Phi}^T F)_r}{\tilde{P}_r} \quad 7.2$$

in cui il pedice “r” si riferisce alla coordinata modale r esima.

L'equazione (7.2) stabilisce, per la prima volta, una relazione analitica spiegando l'incremento di frequenze naturali e valori di smorzamento causati da un'aggiunta del vettore non lineare  $\{\tilde{G}\}$  nel sistema.

Un'altra interessante caratteristica di questa equazione è il legame tra la variazione dei due parametri modali di un sistema non lineare, principalmente gli autovalori  $\lfloor \Delta \tilde{\lambda}_r^2 \rfloor$  e gli autovettori  $[\Delta \tilde{\Phi}]$ . Anche se dipendono mutuamente da un punto di

vista teorico, una procedura della NLMA sperimentale tradizionale estrae questi parametri indipendentemente, aumentando, quindi, la complessità degli algoritmi di regressione non lineari abituati a costruire il modello matematico del sistema.

La (7.2) non può essere risolta così com'è, soprattutto perché il termine  $[\Phi]^{-1}$  risulta virtualmente impossibile da calcolare per dati sperimentali. Essa permette di capire la fisica di un sistema modale NL e, introducendo alcune semplificazioni, diventa un valido strumento per una NLMA pratica.

Analizziamo in dettaglio ognuno dei tre termini principali nel numeratore di (7.2), che ci permetterà di comprendere meglio le necessarie semplificazioni:

1. Il primo di essi,  $(\Phi^T \tilde{G})$ , è già un termine familiare, il “vettore modale non lineare” (NLMV), riconosciuto come fonte principale di non linearità nel modo risonante. Non si può e non si potrebbe fare molto per semplificare questo termine già linearizzato.
2. Anche il secondo termine,  $((\lambda^2 - \omega^2)(\Phi^{-1} \Delta \Phi)\{\tilde{P}\})$ , il “termine accoppiato non lineare, è stato già discusso. Costituisce un contributo relativamente basso al modo risonante ma gioca un ruolo significativo come agente accoppiato. Nonostante la sua forza possa essere in modo significativo lontano dalla risonante, è interessante studiare come l'autovalore varia in prossimità del modo risonante, per cui questo termine potrebbe essere ignorato all'interno di questa regione senza creare problemi.
3. Il terzo termine,  $(\Delta \tilde{\Phi}^T F)_T$ , potrebbe essere visto come l'aumento nella forza modale dovuto all'incremento corrispondente negli autovettori locali. Anche se è stato detto che  $[\Delta \Phi]$  sia chiaramente piccolo per un'ampia varietà di sistemi NL, introdurrà un piccolo errore ovunque venga ignorato. A questo si può facilmente

rimediare implementando una procedura iterativa che stimi  $[\Delta\tilde{\Phi}]$ , per essere opportunamente descritto.

Si noti che:

$$(\Delta\tilde{\Phi}^T F)_T = \{\Delta\tilde{\Phi}_r\}_f^T \{F\}_f \quad 7.3$$

in cui  $f$  rappresenta i DOF forzati. In altre parole, solo gli  $f$  dati di  $\{\Delta\tilde{\Phi}_r\}$  devono essere stimati per calcolare accuratamente  $\Delta\tilde{\lambda}_r$ .

Avendo fatto il possibile per evitare i due termini “guastatori” da (7.2), viene derivata la seguente espressione semplificata:

$$\Delta\tilde{\lambda}_r^2 \approx \frac{(\Phi^T \tilde{G})_T}{\tilde{P}_r} \quad 7.4$$

Questo costituisce un risultato elegante, poiché collega il NLV  $\{\tilde{G}\}$  (definito nel dominio fisico) alle frequenze naturali non lineari e ai rapporti di smorzamento (parametri modali). Un’osservazione interessante può essere fatta nei confronti del modo normale non lineare  $\tilde{P}_r$  che appare anche nell’equazione.

In passato, ricercatori come Imregun, Setio, Shaw ed altri hanno suggerito l’esistenza di una relazione invariante tra il modo non lineare  $\tilde{P}_r$  e la sua frequenza naturale non lineare associata, mediante l’estrazione di curve sperimentali; queste curve, di solito, predicevano con precisione un comportamento modale non lineare (Fig. 7.2), ma la natura della relazione rimane ancora sconosciuta.

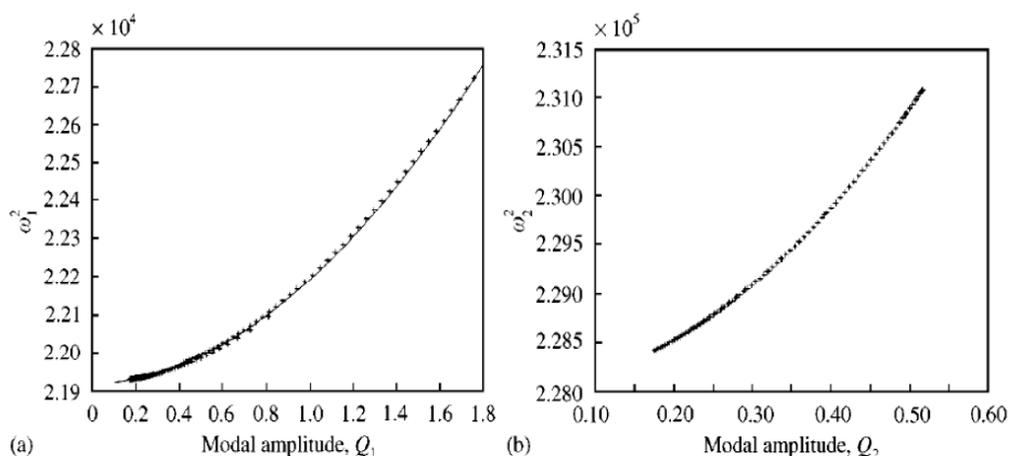


Fig. 7.2 – Curve di relazione tra ampiezza modale e frequenze naturali non lineari [Imregun]

L'equazione (7.4) conferma tale relazione e la determina analiticamente.

### 7.3 *Il calcolo degli autovettori non lineari con FAM*

Con l'aiuto degli autovalori NL calcolati, è ora possibile calcolare gli autovettori non lineari associati. L'accuratezza degli autovettori dipenderà dall'accuratezza degli autovalori, e verrà stabilita una procedura interattiva per migliorarli entrambi simultaneamente.

Bisogna ancora affrontare il problema di tradurre i risultati della HMM di (6.28),

$$\tilde{Y}_i = \sum_{r=1}^M \frac{\phi_{ir} \tilde{\chi}_r}{\lambda_r^2 - \omega^2}$$

in variabili equivalenti dello sviluppo modale tradizionale (6.11),

$$\tilde{H}_{ij}(\omega, \tilde{Y}) = \sum_{r=1}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir}(\omega, \tilde{Y}) \tilde{\phi}_{jr}(\omega, \tilde{Y})}{\tilde{\lambda}_r^2(\omega, \tilde{Y}) - \omega^2}$$

In prossimità del modo risonante  $s$ , la (6.11) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{\tilde{\phi}_{is} \tilde{\phi}_{js}}{\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2} + \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\tilde{\phi}_{ir} \tilde{\phi}_{jr}}{\tilde{\lambda}_r^2 - \omega^2} \quad 7.5$$

dove il modo risonante  $s$  è stato ricavato dalla serie, e le variabili non lineari sono state rappresentate mediante un simbolo “ $\sim$ ”. Per l’assunzione di modi normali non lineari, si considera il termine residuale  $\Sigma$  in (7.5) comportarsi in modo lineare, poiché sostituito dal termine lineare:

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{\tilde{\phi}_{is} \tilde{\phi}_{js}}{\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2} + \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 7.6$$

in cui il modo risonante  $s$  rimane l’unico modo non lineare. Focalizzandosi sul punto FRF  $\tilde{H}_{ij}$ , otteniamo:

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{\tilde{\phi}_{js}^2}{\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2} + \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\phi_{jr}^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 7.7$$

Dalla (7.4), che evidenzia la variazione dell’autovalore di risonanza  $s$ :

$$\Delta \tilde{\lambda}_s^2 \approx \frac{(\Phi^T \tilde{G})_s}{\tilde{P}_s}$$

così il punto FRF può essere riscritto come segue:

$$\tilde{H}_{jj} = \frac{\tilde{\phi}_{js}^2}{(\lambda_s^2 + \Delta\tilde{\lambda}_s^2) - \omega^2} + \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\phi_{jr}^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} \quad 7.8$$

$\tilde{H}_{jj}$  è la misura della FRF non lineare al nodo j, data da:

$$\tilde{H}_{jj} = \frac{\tilde{Y}_j}{F_j} \quad 7.9$$

Infine, l'autovettore non lineare del modo risonante s al punto di eccitazione j -  $\tilde{\phi}_{js}$  - viene direttamente calcolato come:

$$\tilde{\phi}_{js} = \sqrt{(\lambda_s^2 + \Delta\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2)} \left( \tilde{H}_{jj} - \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\phi_{jr}^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right) \quad 7.10$$

e gli autovettori non lineari per le altre coordinate ( $i=1, \dots, N, i \neq j$ ) sono dati da:

$$\tilde{\phi}_{is} = \frac{(\lambda_s^2 + \Delta\tilde{\lambda}_s^2 - \omega^2) \left( \tilde{H}_{ij} - \sum_{r=1, r \neq s}^M \frac{\phi_{jr}^2}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right)}{\tilde{\phi}_{js}} \quad 7.11$$

Una volta conosciuti l'autovalore s e i suoi autovettori associati  $\{\tilde{\Phi}\}_s$ , si completa la descrizione non lineare per questo modo riempiendo il resto della matrice degli autovettori con informazioni lineari, nel seguente modo:

$$\tilde{\Phi}_{N,M} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \cdot & \dots & \phi_{1,M} \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{\Phi}_s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \dots & \cdot & \dots & \phi_{N,M} \end{pmatrix} \quad 7.12$$

Quest'ultimo passo è strettamente invalido, dato che un problema dell'autovalore teorico predice una matrice completa degli autovettori non lineari ad ogni frequenza. Comunque, l'errore verificatosi è piccolo in prossimità della risonanza  $s$ esima, per modi separati.

Una volta trovati gli autovettori non lineari  $\{\tilde{\Phi}\}_s$  per tutte le coordinate in prossimità della risonanza  $s$ , si può aggiornare l'autovalore non lineare generale rivisitando (6.18) e (7.4), nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \{\Delta\tilde{\Phi}\}_s &= \{\tilde{\Phi}\}_s - \{\Phi\}_s \\ \{\tilde{P}\} &= [\Phi + \Delta\tilde{\Phi}]^{-1} \{\tilde{Y}\} \\ \Delta\tilde{\lambda}_s^2 &\approx \frac{(\Phi^T \tilde{G})_s + (\Delta\tilde{\Phi}^T F)_s}{\tilde{P}_s} \end{aligned}$$

dove il termine  $[\Delta\tilde{\Phi}]$  – inizialmente ignorato - viene ora inserito, dato che una prima stima è stata già realizzata.

È possibile iterativamente implementare la suddetta procedura, migliorando l'accuratezza degli autovalori e gli autovettori non lineari calcolati.

## **7.4    *Applicazione del metodo FAM***

Il metodo FAM verrà applicato per ottenere i parametri modali non lineari dei test n.1 (l'applicazione al test. I nostri risultati verranno confrontati con i valori teorici ottenuti dalla soluzione del problema dell'autovalore per ogni frequenza, considerato la soluzione esatta. Il NLMV, dati input del FAM, può essere calcolato dalle risposte non lineari già ottenute nei capitoli precedenti.

### **7.4.1    *I parametri modali NL per il test n. 1***

I seguenti risultati si ottengono mediante l'esecuzione di un calcolo del metodo FAM per il test n. 1:

- La Fig. 7.3 mostra i risultati del FAM (“\_”) per le frequenze naturali NL al termine della prima iterazione, mostrando un notevole accordo con i valori teorici (linea intera).

Per il meccanismo di rigidità volumetrica, le frequenze naturali aumentano continuamente mentre l'eccitazione si avvicina alla risonanza, improvvisamente si abbassano quando anche l'ampiezza modale si abbassa.

Questi risultati mostrano che il metodo FAM costituisce un'ottima scelta per ottenere la variazione delle frequenze naturali quando il meccanismo NL è di rigidità relazionata, senza aver bisogno di una procedura iterativa.

- La Fig. 7.4 mostra che i risultati del FAM (“\_”) per lo smorzamento modale NL, al termine della quinta iterazione, mostra un importante accordo con i valori teorici (linea intera).
- La Fig. 7.5 mostra la variazione non lineare delle frequenze naturali per il range di frequenza intero. Questo risultato è stato già mostrato nella Fig. 7.4, ma solo per la risonanza che circonda la regione. Questa volta, il range analizzato si allarga per mostrare gli effetti del “termine accoppiato non lineare” ignorato in (7.2).
- La Fig. 7.6 mostra la parte reale della matrice degli autovettori non lineari in prossimità della risonanza; i risultati sono soddisfacenti, considerando le piccole variazioni mostrate.
- Per quanto riguarda la parte immaginaria degli autovettori non lineari, il calcolo è piuttosto disturbato, come mostra la Fig. 7.7.
- La Fig. 7.8 mostra la risposta non lineare rigenerata dallo sviluppo non lineare tradizionale, usando gli auto-parametri calcolati dal FAM. Si ottiene un vicino accordo vicino alla supposta teoria.

#### **7.4.2 Parametri modali NL per il test n. 2**

I seguenti risultato sono ottenuti dall’esecuzione di un calcolo del metodo FAM per il test n. 2:

- La Fig. 7.9 mostra che i risultati FAM (“\_”) per lo smorzamento modale NL al termine della prima iterazione, esibendo un notevole accordo con i valori teorici (linea intera).

Per il meccanismo di smorzamento per attrito, l'intero smorzamento modale cambia continuamente mentre l'eccitazione si avvicina alla risonanza, mostrando un minimo/massimo esattamente alla risonanza.

- La Fig. 7.10 mostra i risultati del FAM (“\_”) per le frequenze naturali non lineari, al termine della quinta iterazione, mostrando un significativo accordo con i valori teorici (linea intera). Come previsto per questa classe di sistemi, la variazione risulta molto piccola.
- La Fig. 7.11 mostra la variazione non lineare dello smorzamento modale per l'intero range di frequenza. Questa volta, il range analizzato si allarga per mostrare gli effetti del “termine accoppiato non lineare” ignorato in (7.2).
- La Fig. 7.12 mostra la parte immaginaria della matrice degli autovettori non lineari in prossimità della risonanza; i risultati sono soddisfacenti, considerando le piccole variazioni mostrate.
- Per quanto riguarda la parte reale degli autovettori non lineari, il calcolo risulta piuttosto disturbato, come mostra la Fig. 7.13.
- La Fig. 7.14 mostra la risposta non lineare rigenerata dallo sviluppo non lineare tradizionale, usando gli auto-parametri calcolati dal FAM.

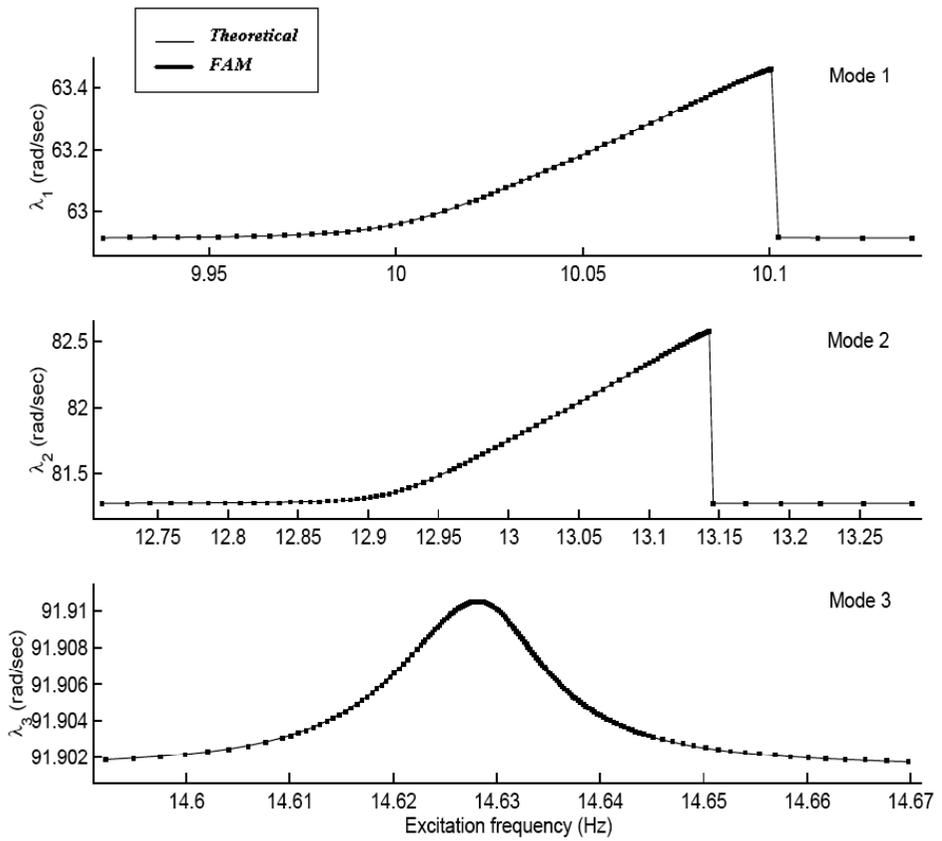


Fig. 7.3 – Test n. 1 – Frequenze naturali non lineari alla fine della 1<sup>a</sup> iterazione

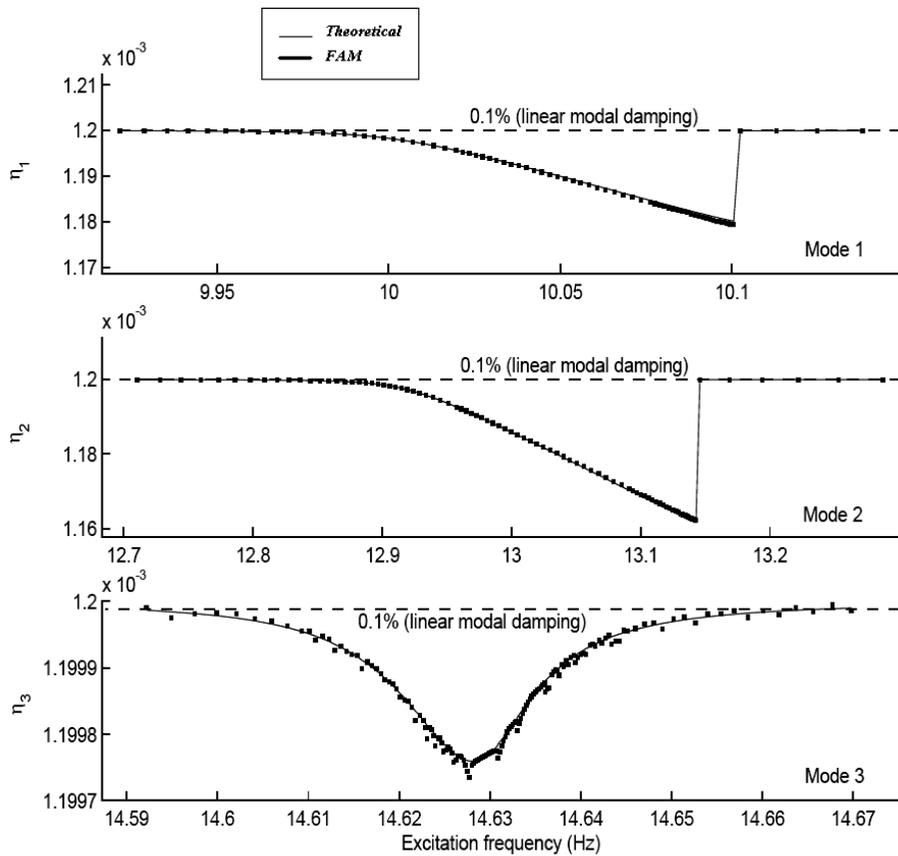


Fig. 7.4 – Test N. 1 – Smorzamento non lineare alla fine della 1<sup>a</sup> iterazione

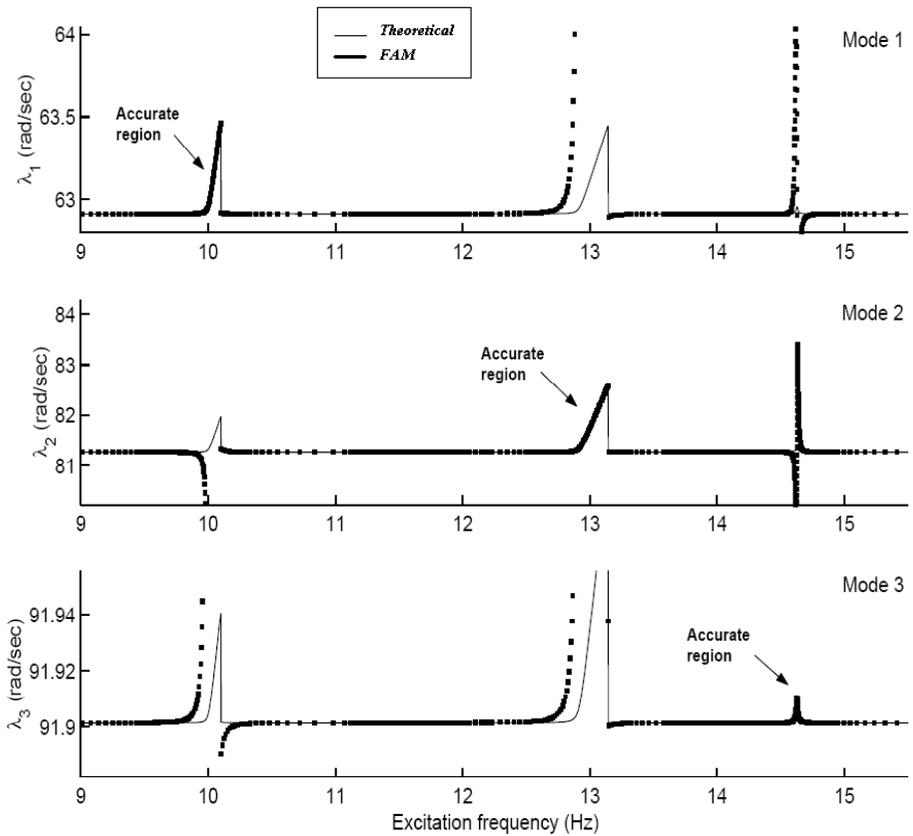


Fig. 7.5 – Test N.1 – Diagramma delle discordanze della FAT al di fuori della regione di risonanza

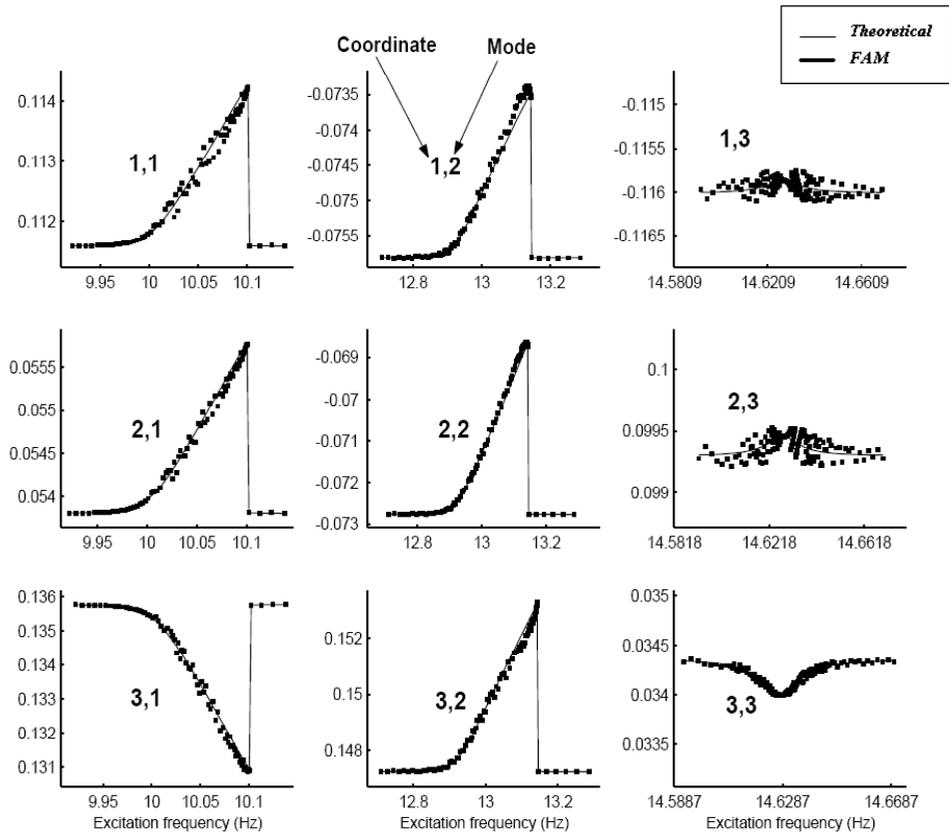


Fig. 7.6 – Test N.1 – Parte Reale degli autovettori non lineari alla fine della 5<sup>a</sup> iterazione

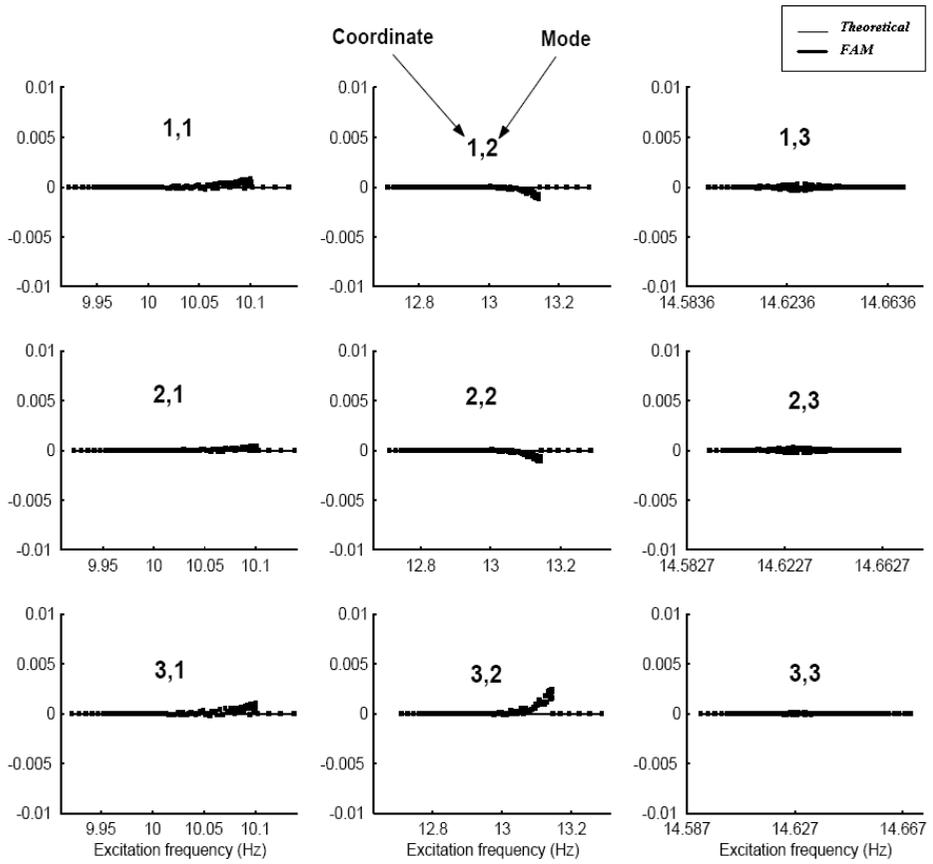


Fig. 7.7 – Test N.1 – Parte Immaginaria degli autovettori non lineari alla fine della 5<sup>a</sup> iterazione

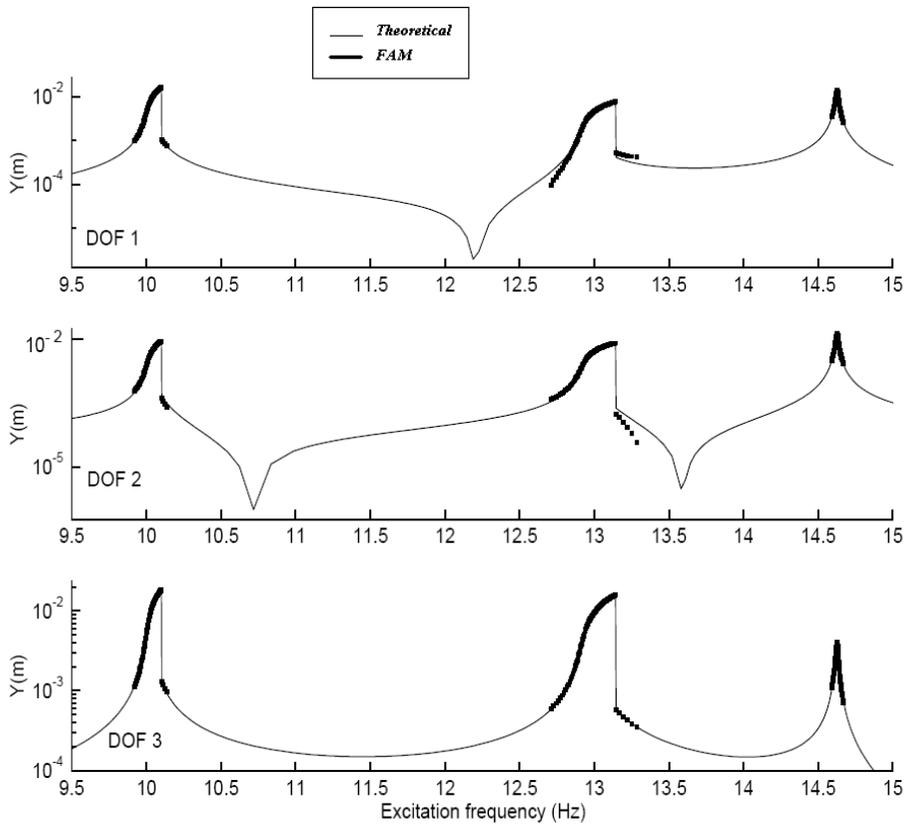


Fig. 7.8 – Test N.1 – Diagramma della risposta non lineare usando autoparametri calcolati con FAM

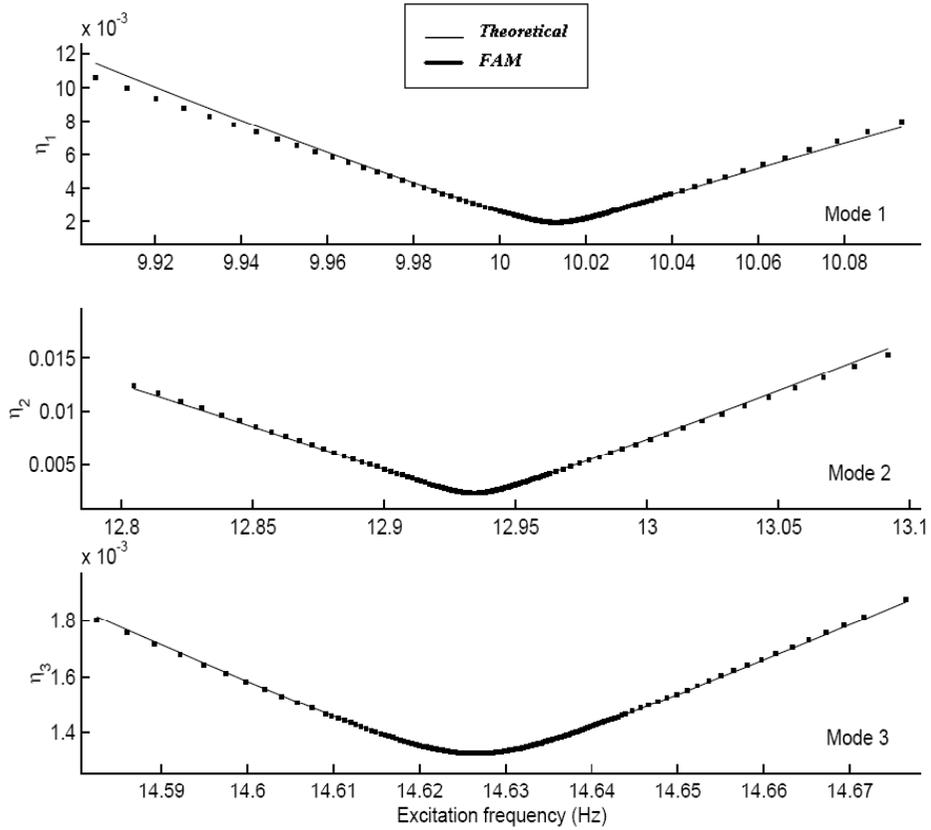


Fig. 7.9 – Test n. 2 – Smorzamento modale non lineare alla fine della 1<sup>a</sup> iterazione

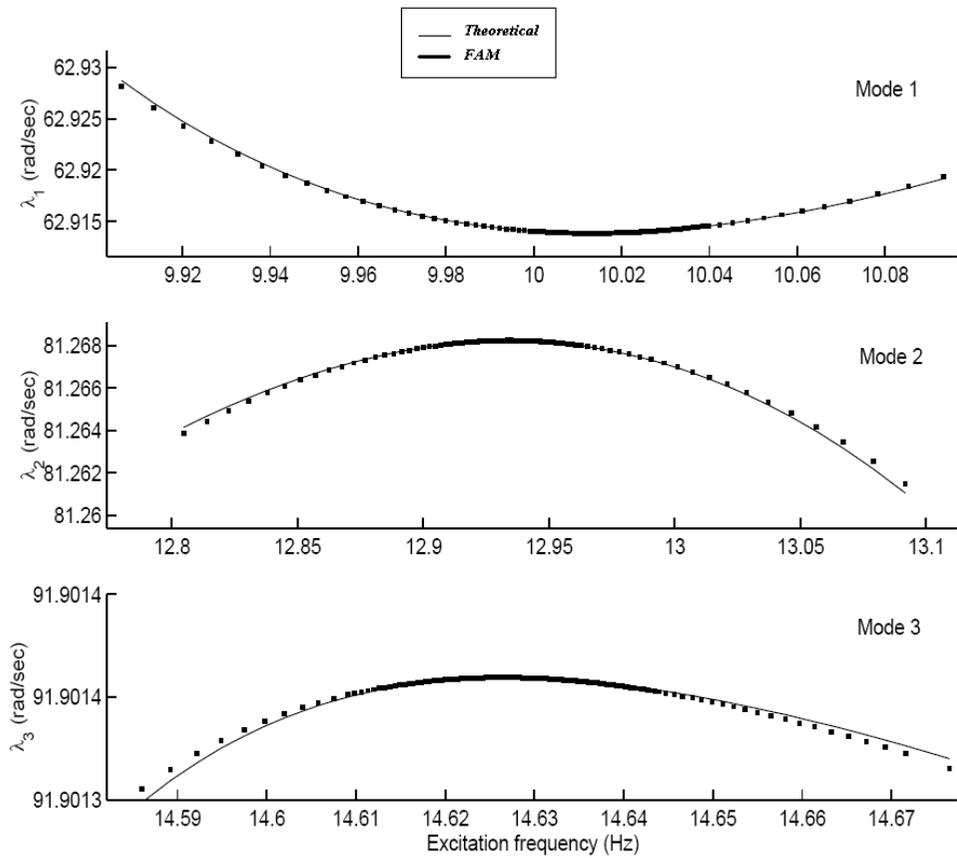


Fig. 7.10 – Test N. 2 – Frequenze naturali non lineari alla fine della 5<sup>a</sup> iterazioni

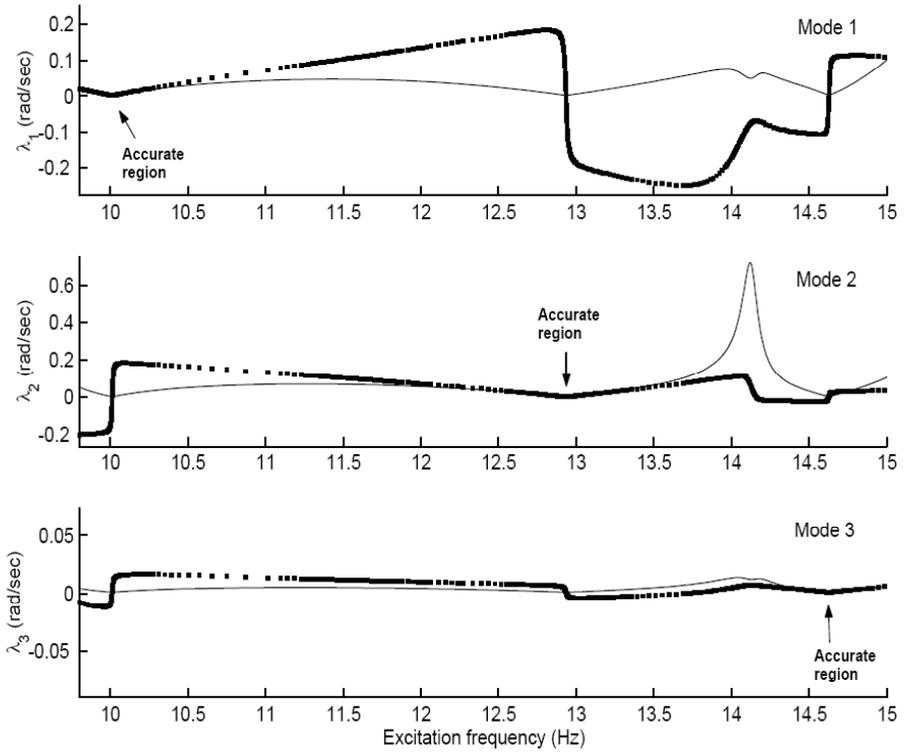


Fig. 7.11 – Test N. 2 – Diagramma delle non accurtezze del FAM al di fuori della regione risonante

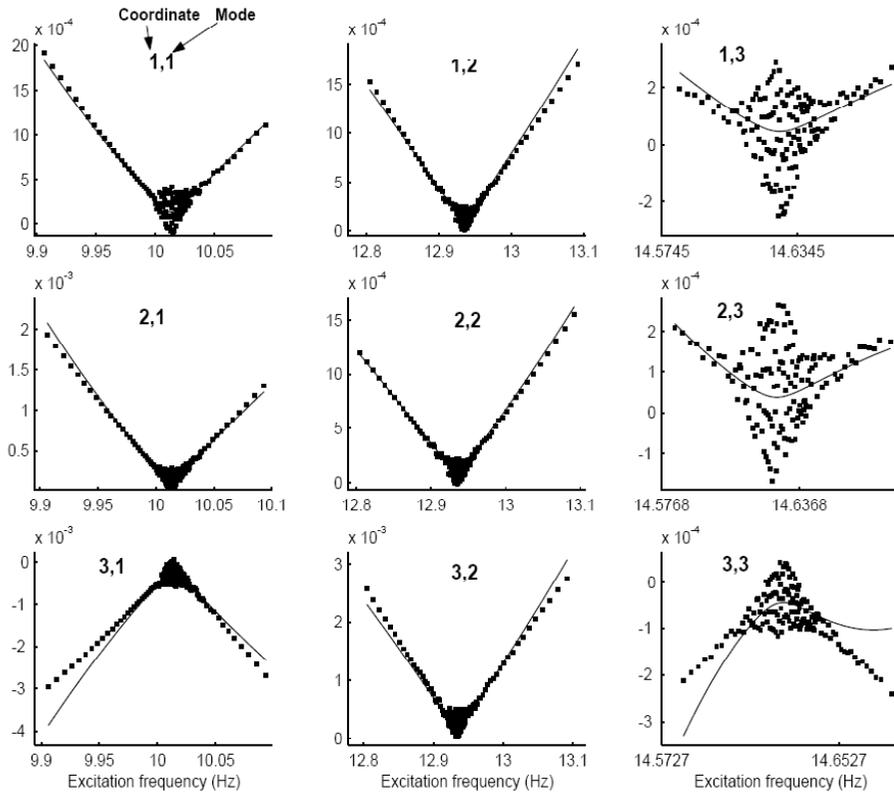


Fig. 7.12 – Test N. 2 – Parte Immaginaria degli autovettori non lineari alla fine della 5<sup>a</sup> iterazione

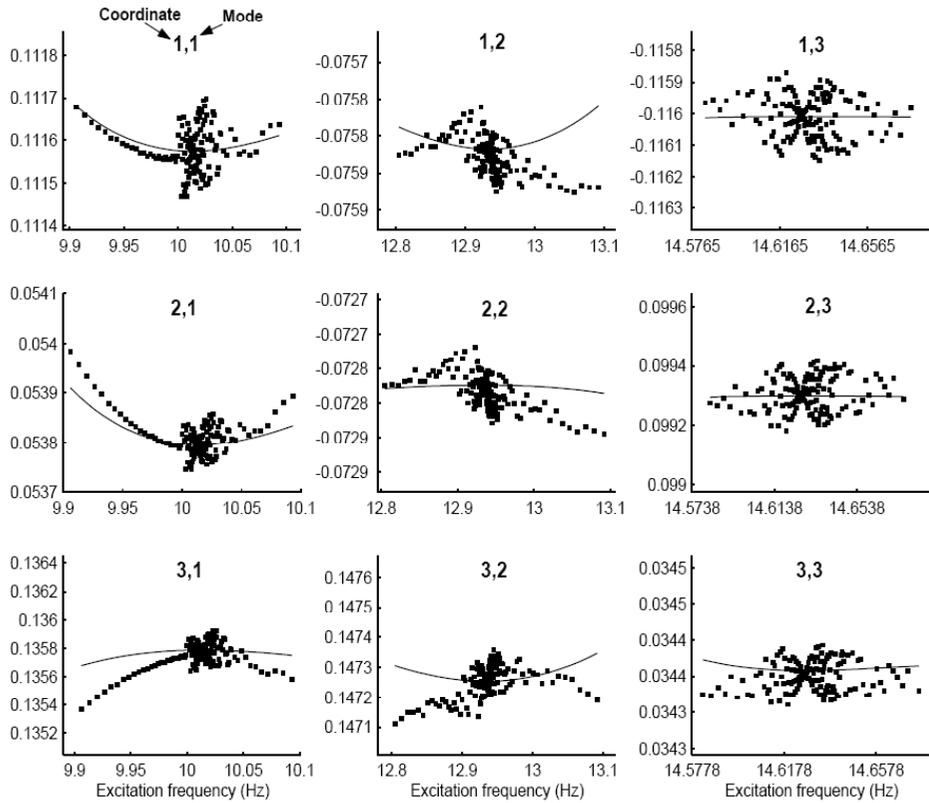


Fig. 7.13 - Test N. 2 – Parte Reale degli autovettori non lineari alla fine della 5<sup>a</sup> iterazione

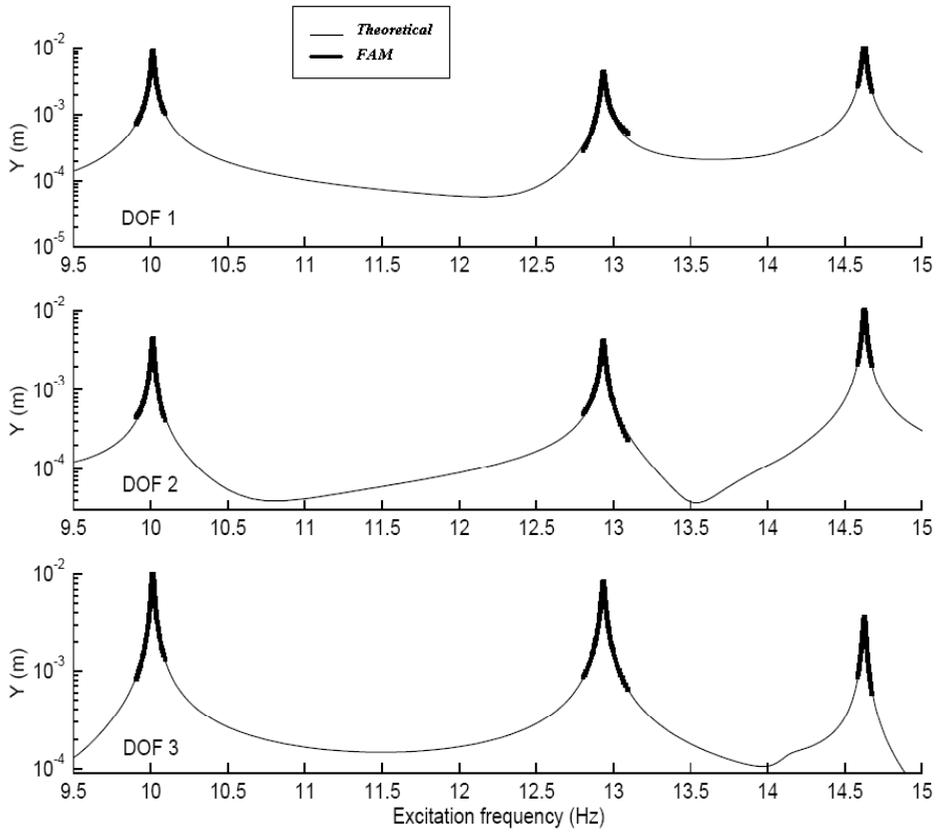


Fig. 7.14 – Test N. 2 – Diagramma della risposta del sistema rigenerato

## **Capitolo 8 – Il metodo HMM inverso (R-HMM) per l'identificazione di sistemi strutturali**

### **8.1 Introduzione**

Alla luce dello stato dell'arte persiste ancora un problema fondamentale per l'analisi di sistemi non lineari: la mancanza di un metodo unificato che possa occuparsi di sistemi generali non lineari, quali le grandi strutture di ingegneria.

Occorrerebbe, in realtà, un metodo che sia semplice da usare, compatibile con la LMA e le tecniche FE standard, non legato alle dimensioni del modello, a causa della restrizione computazionale, capace di elaborare dati misurati acquisiti ovunque nel sistema (La disponibilità di più misure che semplicemente producano risultati di alta qualità), che consenta una separazione netta del sistema in componenti lineari e non lineari, capace di rilevare in automatico i modi non lineari ed il tipo di non linearità, che localizzi in maniera automatica gli elementi non lineari, a condizione che ci siano misure associate, e se tali misure non ci sono, il metodo deve fornire un valido modello matematico nel solito range.

Il metodo che si vuole presentare è, sostanzialmente, una versione inversa del metodo HMM, quindi denominato R-HMM. Tale tecnica permette l'eccitazione del NLMV da poche misure, prese ovunque nel sistema.

Il NLMV contiene tutte le informazioni necessarie per caratterizzare sia il tipo che la posizione degli elementi non lineari, a condizione che siano inclusi nelle misure.

La FAM, introdotta precedentemente come strumento di calcolo veloce, costituisce ora una componente essenziale di questo metodo, disaccoppiando il NLMV estratto

---

in parametri a singolo modo NL. Questi vengono ulteriormente convertiti in polinomi, fornendo un modello NL invariante valido per ogni livello di eccitazione. Questo percorso costituisce un modello di “scatola nera”, capace di rigenerare/predire risposte all’interno di un range, perfino con pochi dati misurati (input).

Questo metodo è di certo uno strumento interessante per quantificare la forza della non linearità in un dato modo.

Esso permette la selezione automatica di questi modi da inserire in un’analisi non lineare, il resto viene preso come lineare. In un contesto di sovrapposizione modale, questo metodo migliora di molto l’efficienza computazionale.

Si ottiene, quindi, la precisa localizzazione degli elementi NL in un grande sistema mediante una semplice operazione dei minimi quadrati lineari in una regione non lineare di dimensione arbitraria. I risultati di questa tecnica non sono ambigui a condizione che il range di frequenza analizzato sia una chiara rappresentazione del sistema.

## **8.2 Fase I: pre-processing dei dati**

I dati in input devono essere organizzati in poche regioni, definite nel seguente modo:

- $N$ : numero totale dei DOF del sistema non lineare, secondo una discretizzazioni precedentemente fatta dall’analista.
- $\mathfrak{R}$ : la regione misurata, un vettore che contiene tutti i DOF misurati. Le misure possono essere create ovunque nel sistema.

- $f$ : i DOF forzati al quale il sistema viene eccitato. Devono essere anche misurati ( $f \in \mathfrak{R}$ ), per ottenere la normalizzazione di massa. Si suppone che tutte le eccitazioni siano applicate ad una singola frequenza, anche se le fasi tra le forze individuali possono essere differenti.
- $m$ : il numero di modi identificati all'interno del range di frequenza analizzato, tipicamente i primi.
- $m_{NL}$ : il numero dei modi non lineari, come sottoinsieme di  $m$ . Si richiede tale identificazione per selezionare i modi da includere in un'analisi non lineare, il resto viene considerato lineare. Questa mancanza viene eseguita dall'analista, ma qui si sviluppa una procedura automatica per affrontare questo problema.

Le seguenti definizioni, anche se non fanno parte dei dati input, sono utili per la derivazione del metodo:

- $M$ : il numero totale dei modi del sistema sotto analisi (infinito, per un sistema continuo).
- $n$ : i NL-DOF, quei DOF collegati agli elementi NL discreti.

Le seguenti relazioni devono contenere:

$$f \in \mathfrak{R} \in N \text{ tipicamente } f \ll \mathfrak{R} \ll N \quad 8.11$$

$$m_{NL} \in m \in M \text{ tipicamente } m_{NL} < m \ll M$$

La seguente relazione è opzionale, ma essenziale per la localizzazione dei NL-DOF:

$$n \in \mathfrak{R} \text{ tipicamente } n \ll \mathfrak{R} \quad 8.2$$

Come passo successivo si deve eseguire un'analisi modale lineare (LMA) della regione misurata  $\mathfrak{R}$  per i modi  $m$ , che fornisce autovalori e autovettori lineari  $[\lambda]$ ,  $[\Phi]$ , nonché i residuali lineari dovuti ai modi più alti,  $\{Res\}$ .

### 8.3 Fase II: estrazione del NLMV

Durante questa fase si procede a separare il sistema nei suoi componenti lineari e non lineari, prima di qualsiasi fase di quantificazione. Ciò può essere raggiunto mediante l'estrazione di NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$ , espresso in (6.23), che contiene tutte le non linearità del sistema.

Lo sviluppo della HMT, definito in (6.27), si riscrive:

$$\{\tilde{Y}\}_N = [\Phi]_{N,M} \llbracket \lambda^2 - \omega^2 \rrbracket_{M,M}^{-1} \{\tilde{\chi}\}_M \quad 8.3$$

dove  $\{\tilde{Y}\}$  è il vettore delle risposte non lineari,  $[\Phi]$  è la matrice lineare degli autovettori normalizzati di massa,  $\llbracket \lambda^2 - \omega^2 \rrbracket$  è la matrice diagonale (simboleggiata dalle parentesi “ $\llbracket \rrbracket$ ”) degli autovalori lineari,  $\omega$  è la frequenza di eccitazione e  $\{\tilde{\chi}\}$  è il NLMV esteso di (6.26).

L'equazione 8.3 può essere suddivisa in risposte misurate ( $\mathfrak{R}$ ) e non misurate ( $N - \mathfrak{R}$ ), nelle righe. Nelle colonne, può essere suddivisa in modi interni ( $m$ ) ed esterni ( $M - m$ ) al range di frequenza analizzato, nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Y}_{N-\mathfrak{R}} \\ \tilde{Y}_{\mathfrak{R}} \end{Bmatrix}_N = \begin{bmatrix} \Phi_{(N-\mathfrak{R}),m} & \Phi_{(N-\mathfrak{R}),(M-m)} \\ \Phi_{\mathfrak{R},m} & \Phi_{\mathfrak{R}),(M-m)} \end{bmatrix}_{N,M} \begin{bmatrix} (\lambda^2 - \omega^2)_m & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - \omega^2)_{M-m} \end{bmatrix}_{M,M}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}_m \\ \tilde{\chi}_{M-m} \end{Bmatrix}_M \quad 8.4$$

da questa separando le componenti  $m$  e  $(M-m)$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \tilde{Y}_{N-\mathfrak{R}} \\ \tilde{Y}_{\mathfrak{R}} \end{array} \right\}_N &= \begin{bmatrix} \Phi_{(N-\mathfrak{R}),m} \\ \Phi_{\mathfrak{R},m} \end{bmatrix}_{N,m} [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{m,m} \{ \tilde{\chi}_m \} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \Phi_{(N-\mathfrak{R}), (M-m)} \\ \Phi_{\mathfrak{R}, (M-m)} \end{bmatrix}_{N, (M-m)} [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{(M-m), (M-m)} \{ \tilde{\chi}_{M-m} \}
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

in cui il secondo termine del RHS si mostra come un componente ( $\tilde{\text{Res}}$ ) residuale non lineare dei modi più alti nel range di frequenza misurato:

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{Y}_{N-\mathfrak{R}} \\ \tilde{Y}_{\mathfrak{R}} \end{array} \right\}_N = \begin{bmatrix} \Phi_{(N-\mathfrak{R}),m} \\ \Phi_{\mathfrak{R},m} \end{bmatrix}_{N,m} [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{m,m} \{ \tilde{\chi}_m \} + \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\text{Res}}_{N-\mathfrak{R}} \\ \tilde{\text{Res}}_{\mathfrak{R}} \end{array} \right\} \tag{8.6}$$

$\{ \tilde{Y}_{N-\mathfrak{R}} \}$  rappresenta le risposte non misurate, per cui si rimuovono le righe corrispondenti e si sviluppa il componente misurato  $\{ \tilde{Y}_{\mathfrak{R}} \}$ :

$$\{ \tilde{Y}_{\mathfrak{R}} \} = [\Phi_{\mathfrak{R},m}] [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{m,m} \{ \tilde{\chi}_m \} + \{ \tilde{\text{Res}}_{\mathfrak{R}} \} \tag{8.7}$$

in cui  $\{ \tilde{\text{Res}}_{\mathfrak{R}} \}$  è il residuale non lineare dei modi più alti al di fuori del range di frequenza analizzato, per le sole coordinate ( $\mathfrak{R}$ ) misurate:

$$\{ \tilde{\text{Res}}_{\mathfrak{R}} \} = [\Phi_{\mathfrak{R}, (M-m)}] [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{(M-m), (M-m)} \{ \tilde{\chi}_{M-m} \} \tag{8.8}$$

D'altra parte, la sua controparte lineare viene data da:

$$\{ \text{Res}_{\mathfrak{R}} \} = [\Phi_{\mathfrak{R}, (M-m)}] [\lambda^2 - \omega^2]^{-1}_{(M-m), (M-m)} \{ \Phi^T F \}_{M-m} \tag{8.9}$$

che si può trovare mediante una LMA nella regione misurata  $\mathfrak{R}$ .

Se il range di frequenza analizzato si estende oltre quei modi che mostrano forti non linearità (tipicamente i primi), allora gli effetti non lineari di  $\{\tilde{\chi}\}_{M-m}$  si attenuano seriamente per questi modi e si suppone che:

$$\{\tilde{\text{Re}} s_{\mathfrak{R}}\} \approx \{\text{Re } s_{\mathfrak{R}}\} \quad 8.10$$

Introducendo la (8.10) nella (8.7) si ha:

$$\{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}}\} = [\Phi_{\mathfrak{R},m}] \llbracket \lambda^2 - \omega^2 \rrbracket_{m,m}^{-1} \{\tilde{\chi}_m\} + \{\text{Re } s_{\mathfrak{R}}\} \quad 8.11$$

A questo punto dovremo estrarre il NLMV  $\{\tilde{\chi}_m\}$  esteso. Risolvendo questa variabile nel seguente modo:

$$\{\tilde{\chi}_m\} = [\Phi_{\mathfrak{R},m}] \llbracket \lambda^2 - \omega^2 \rrbracket_{m,m}^{-1} \{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}} - \text{Re } s_{\mathfrak{R}}\} \quad 8.12$$

e arriviamo alla:

$$\{\tilde{\chi}_m\} = \llbracket \lambda^2 - \omega^2 \rrbracket_{m,m} [\Phi_{\mathfrak{R},m}]^+ \{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}} - \text{Re } s_{\mathfrak{R}}\} \quad 8.13$$

dove:

$$[\Phi_{\mathfrak{R},m}]^+ = \left( [\Phi_{\mathfrak{R},m}]^T [\Phi_{\mathfrak{R},m}] \right)^{-1} [\Phi_{\mathfrak{R},m}]^T \quad 8.14$$

è la pseudo-inversa di Moore-Penrose, dato che l'inversione diretta  $[\Phi_{\mathfrak{R},m}]^{-1}$  non esiste. La pseudo-inversa minimizza la somma dei quadrati di tutti i dati, fornendo una soluzione migliore, cioè ai minimi quadrati.

Una volta estratto  $\{\tilde{\chi}_m\}$ , il NLMV standard migliora mediante (6.26):

$$\{\Phi^T \tilde{G}\}_m = \{\Phi^T F\}_m - \{\tilde{\chi}_m\} \quad 8.15$$

dove

$$\{\Phi^T F\}_m = [\Phi_{f,m}]^T \{F\}_f \quad 8.16$$

è la forza modale lineare, che dipende esclusivamente dai DOF eccitati e i modi  $m$  misurati.

L'equazione (8.13) gode di peculiarità fondamentali quali:

- Rappresenta un semplice calcolo, dato che si conoscono tutti i termini nel RHS, una caratteristica che rende il processo di estrazione una procedura molto efficace.

Nonostante  $\{\tilde{\chi}_m\}$  non rappresenti un'identificazione finale, permette una netta separazione dei componenti lineari e non lineari del sistema prima di una fase di quantificazione. Ciò rappresenta un importante successo.

- Il problema posto è ben sovra-determinato, naturalmente a causa di  $\mathfrak{R} \gg m$ . Questa caratteristica permette piccole inconsistenze nei dati da ricavare, dei minimi quadrati. Si osservi che il numero minimo di misure richieste da estrarre  $\{\tilde{\chi}_m\}$  è  $\mathfrak{R} = m$ . Questa condizione potrebbe applicarsi a qualsiasi verifica sperimentale.

- $[\Phi_{\mathfrak{R},m}]^+$  deve essere valutato solo una volta, dato che contiene solo parametri lineari puri. Ma l'estrazione non coinvolge le inversioni di matrice.

Si noti che anche gli autovalori  $\lambda^2$  sono lineari, e che l'unica variabile non lineare nel RHS è  $\{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}}\}$ , nota a tutti i codomini di frequenza.

- $\{\tilde{\text{Re}}_{s_{\mathfrak{R}}}\}$  solitamente emerge da una precedente LMA dei modi lineari misurati.

D. J. Ewins descrive diversi modi in cui si possono trattare i residuali. Vanno da approssimazioni irregolari, come elementi di molla e massa, ad approcci più sofisticati che trattano il residuale come uno “pseudomodo”, posizionato al di fuori

del range di frequenza misurato. Alcuni di questi risultano compatibili con la presente formulazione.

Per questo lavoro, il residuale viene semplicemente trattato come un vettore che contiene le correzioni necessarie che permettono una buona rigenerazione delle FRF lineari.

- Il NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}_m$  costituisce il principale risultato del processo di estrazione.

Rappresenta il componente non lineare del sistema, anche se non ancora esplicitamente localizzato e quantificato.

Si noti che l'unica approssimazione che si verifica nell'estrazione  $\{\Phi^T \tilde{G}\}_m$  è il residuale linearizzato  $\{\tilde{R}e s_{gr}\}$ . Per un range di frequenza esteso ben oltre i modi non lineari, l'errore è molto piccolo. La seguente regola si basa sull'esperienza pratica: durante la NLMA, il range di frequenza misurato si estende il più lontano possibile dal modo non lineari superiore.

#### 8.4 *Fase facoltativa: riconciliazione*

Il processo di estrazione introdotto, permette l'implementazione di un modello facoltativo noto come "riconciliazione", nel quale le risposte sono rigenerate da insiemi di dati ridondanti distinti. Il grado di concordanza tra le risposte rigenerate si relazione alla qualità complessiva delle misure, in cui gli insiemi di non-concordanza possono indicare una insufficienza dei dati.

Ci troviamo nella posizione favorevole di poter eseguire una riconciliazione con le informazioni fino ad ora ottenute, prima di affidarsi ad una lunga fase di quantificazione.

Si ottiene ciò prendendo diversi sottoinsiemi di  $\mathfrak{R}$  della stessa dimensione di  $m$ , ma generando varie sottomatrici quadrate  $[\Phi_{m,m}]$  e sottovettori associati  $\{\tilde{Y}_m\}$ . Si risolve ogni sottosistema quadrato (8.13), e l'estratto  $\{\tilde{\mathcal{X}}_m\}$  rigenera subito tutte le risposte misurate  $\mathfrak{R}$ , usando il processo diretto della HMT (8.11). Le risposte rigenerate risulteranno quasi identiche per tutti i sottoinsiemi, concordando anche le misure sperimentali  $\{\tilde{Y}_{sr}\}$ .

I sottoinsiemi che non concordano si distinguono e si possono perfino rimisurare oppure eliminarli. Successivamente, un consistente gruppo di sottoinsiemi può essere usato tutto insieme in (8.13), fornendo quindi un'estrazione del minimo quadrato del NLMV.

### 8.5 *Fase III: rilevamento del meccanismo non lineare*

E' stata trattata una tecnica qualitativa per determinare il meccanismo non lineare che agisce in un sistema. Era basata su una valutazione visiva del “footprint” geometrico del NLV  $\{\tilde{G}\}$ , e si è mostrata efficace nel distinguere tra non linearità di rigidezza volumetrica e smorzamento per attrito. Le regole generali hanno permesso di eseguire un consistente rilevamento ed è stato affermato che l'identificazione dei tipi non lineari si può facilmente incorporare in questa tecnica. Proviamo ad estendere questa idea all'equivalente modale del NLV, cioè del NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$ . Forse il modo migliore per fornire utili direttive è quello di eseguire un rilevamento della non linearità mediante un esempio numerico.

La Fig. 8.1 mostra il NLMV estratto, per soltanto i primi tre modi, di un sistema con non linearità diverse. Segue una breve discussione di questi risultati.

- La Fig. 8.1(a) mostra l'importanza del NLMV per le non linearità del tipo di rigidezza volumetrica. Si noti che tali funzioni assomigliano alla geometri delle FRF, esibendo picchi a tutte le risonanze, con il caratteristico “salto” trovato nei modi non lineari. Si può anche verificare che il NLMV aumenta in modo monotono con il livello totale delle risposte, come ci si aspetta dalla relazione (3.9).
- La Fig. 8.1(b) mostra l'importanza del NLMV per le non linearità di smorzamento per attrito. La caratteristica distintiva è quella che queste funzioni mostrano regioni ben definite a un valore costante, con improvvisi salti ad alcune frequenze.

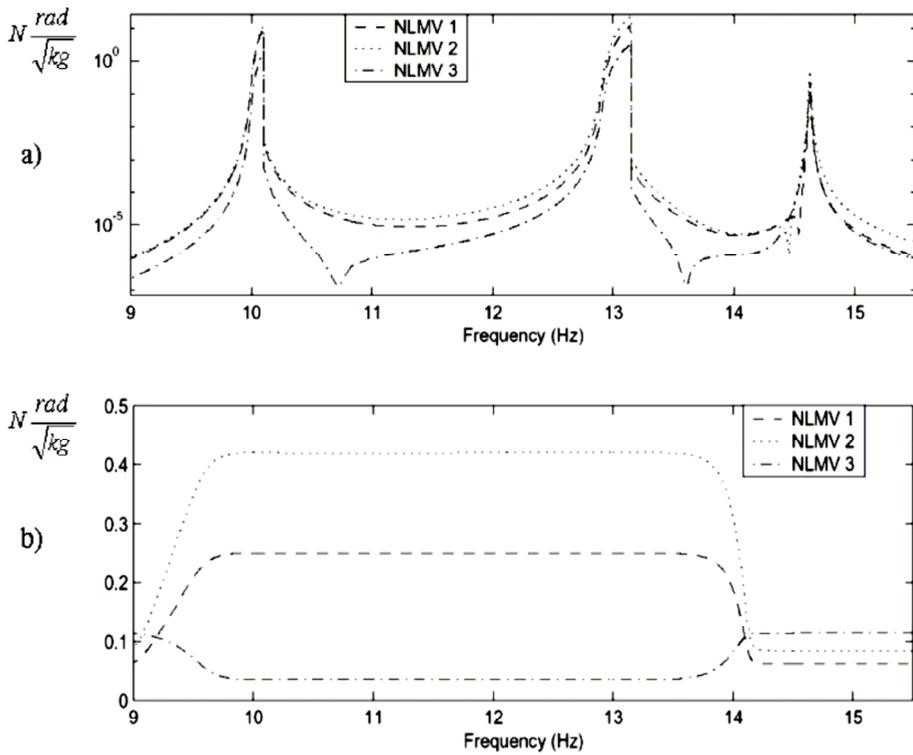


Fig. 8.1 – (a): NLMV di un sistema con rigidità volumetrica; (b): NLMV di un sistema con smorzamento per attrito

Anche la forza non lineare rimane costante in prossimità della risonanza, in accordo con il modello di smorzamento per attrito (3.21). Osservando la parte immaginaria di questo NLMV si conferma che questa forza cambia segno esattamente alla risonanza, comprovando ulteriormente un meccanismo di smorzamento per attrito. Fortunatamente, entrambi i “footprints” mostrano un comportamento completamente diverso, fornendo uno strumento di rilevamento pratico per ogni sistema riguardo alla sua misura.

### 8.6 Fase IV: grado di non linearità in un modo non lineare

Quando si esegue un rilevamento non lineare, è interessante quantificare il grado della non linearità modale.

Questo di sicuro è un risultato difficile da ottenere. Il nostro scopo in questo lavoro è la presentazione di una tecnica efficace per conoscere se il NLVM estratto sia significativo per la determinazione del problema.

Anche se basata su osservazioni sperimentali, è possibile fornire un supporto analitico.

Lo spazio modale non lineare era descritto da (6.22):

$$\lfloor \lambda^2 - \omega^2 \rfloor [\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{\Phi}}] \{ \tilde{P} \} + \{ \mathbf{\Phi}^T \tilde{G} \} = \{ \mathbf{\Phi}^T F \} \quad 8.17$$

e la sua controparte lineare era descritta in (6.6)

$$\lfloor \lambda^2 - \omega^2 \rfloor \{ P \} = \{ \mathbf{\Phi}^T F \} \quad 8.18$$

In prossimità della risonanza di un dato modo, si può ignorare il “termine accoppiato non lineare”  $\mathbf{\Phi}^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{\Phi}}$ .

Confrontando le ultime due espressioni, si capisce che l’introduzione del NLMV  $\{ \mathbf{\Phi}^T \tilde{G} \}$  altera solo l’equilibrio tra un modo lineare e un modo non lineare.

In altre parole, mentre la forza modale lineare  $\{ \mathbf{\Phi}^T F \}$  resta costante in (8.17), i cambiamenti introdotti dal NLMV  $\{ \mathbf{\Phi}^T \tilde{G} \}$  si riflettono principalmente nella

transizione  $\{P\} \rightarrow \{\tilde{P}\}$ . Ne consegue che, se  $\{\Phi^T \tilde{G}\}$  è significativo in confronto al valore costante  $\{\Phi^T F\}$ , allora la transizione  $\{P\} \rightarrow \{\tilde{P}\}$  sarà sensibile, nella forma delle ben note distorsioni di FRF.

Naturalmente, la transizione da lineare a non lineare si verifica senza problemi per le non linearità continue, e sarebbe ugualmente infondato cercare di stabilire le soglie fisse per definire il grado di non linearità. Ciononostante, le varie simulazioni eseguite durante questa ricerca hanno mostrato che le soglie che relazionano bene con la terminologia “standard” possono essere definite come:

$$\begin{aligned} 0 < \left( \frac{\max_r \left| \left( \Phi^T \tilde{G} \right) \right|}{\left| \Phi^T F \right|} \right) < 1 & \quad 8.19 \\ 1 \leq \left( \frac{\max_r \left| \left( \Phi^T \tilde{G} \right) \right|}{\left| \Phi^T F \right|} \right) < 10 \\ 10 \leq \left( \frac{\max_r \left| \left( \Phi^T \tilde{G} \right) \right|}{\left| \Phi^T F \right|} \right) \end{aligned}$$

dove  $\left( \max_r \left| \left( \Phi^T \tilde{G} \right) \right| \right)$  è il valore di picco trovato nella grandezza di NLMV, in prossimità del suo modo  $r$ .

Le (8.19) si usano per definire se le distorsioni osservate nelle risposte siano dovute alle non linearità o meno. Nonostante si possa affermare che le soglie sembrano completamente arbitrarie, esse si relazionano bene con la regola d’ingegneria frequentemente usata quella delle “10 volte più grande di” per determinare quanto una dimensione possa essere grande/piccola. Applicando questa regola al presente

caso si producono le seguenti osservazioni: se le forze di “restoring” modali NL e lineari sono di grandezza simile, il modo si comporta come il lineare. Se la forza modale NL è almeno 10 volte più grande di quella lineare, allora il modo si comporta come “fortemente non lineare”.

Possiamo, altresì, definire una singola “soglia lineare” basata in (8.19), sulla quale il modo non lineare non può essere più approssimato dalla sua controparte lineare:

$$\max \left| \left( \Phi^T \tilde{G} \right) \right|_r \geq \left| \Phi^T F \right|_r \quad 8.20$$

L'utilizzo di (8.20) può essere illustrato in un esempio illuminante, fornito dalla Fig. 8.2 che mostra il NLMV estratto di un grande sistema. Per quanto affermato in precedenza si può prima verificare che il meccanismo non lineare si relaziona bene con un modello di rigidità volumetrica (in questo caso).

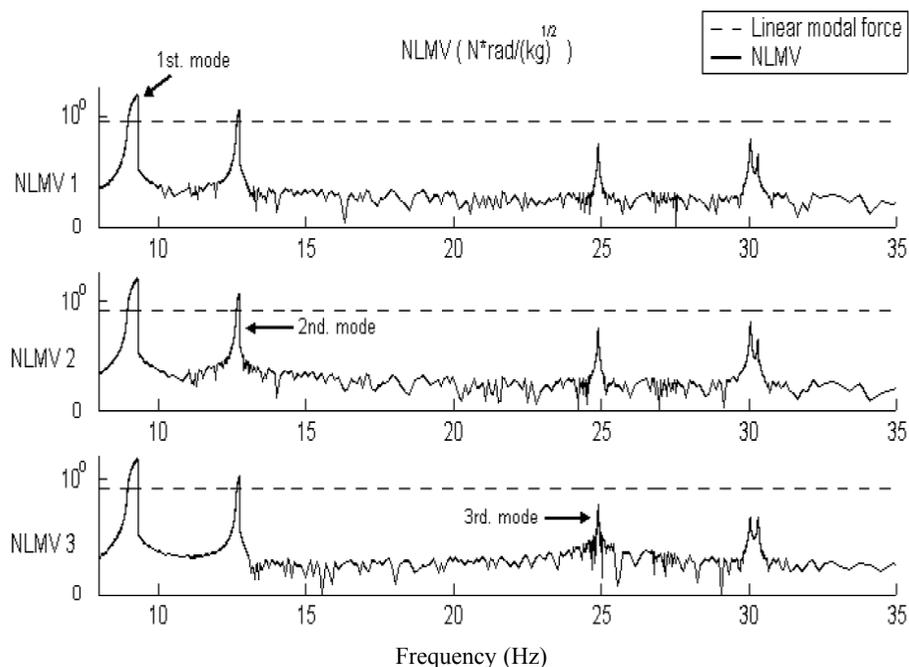


Fig. 8.2 – NLMV di un grande sistema strutturale

La Fig. 8.3 mostra anche, in linea intera, la forza modale lineare costante per ogni modo. Risulta immediatamente ovvio che il NLMV dei modi 1 e 2 eccede facilmente dalla loro corrispondente “soglia lineare”, confermando che le distorsioni osservate nelle risposte sono senza dubbio dovute alle non linearità. Si verificano, inoltre, che i modi 3, 4 e 5 cadono dietro la loro rispettiva soglia, spiegando il loro comportamento quasi lineare.

Mediante l’uso di (8.19), i “gradi modali non lineari” possono essere calcolati per tutti i modi dell’esempio precedente. Questi sono elencati nella tabella 8.1.

Mode	Nonlinear modal grade
1	75.56
2	16.52
3	0.07
4	0.1
5	0.025

Lo scopo principale dei “gradi modali non lineari” consiste nel fornire un grado di automatizzazione per la scelta di  $m_{NL}$ , i modi non lineari inseriti in analisi. Se la rigenerazione viene calcolata mediante una sovrapposizione modale, il costo computazionale si riduce impiegando modi debolmente non lineari come lineari.

La “soglia lineare” viene calibrata a priori all’esperienza dell’analista, secondo (8.19).

Il concetto di “soglia lineare” ha bisogno di essere sostenuto da dati sperimentali per un gran numero di esperimenti e per sistemi diversi. Per il momento, rappresenta solo un’idea da tenere in mente, che potrebbe essere utilizzata in diverse simulazioni, a discrezione dell’autore.

### 8.7 *Fase V: trasformazione verso i parametri modali NL mediante la FAM*

Il metodo FAM verrà applicata ai grandi sistemi. Le modifiche introdotte sono principalmente dovute ai residuali di modi superiori e alla regione misurata  $\mathfrak{R}$ . In caso contrario, la derivazione risulta simile a quella introdotta nel Capitolo 7 per un modello completo. Per maggiore chiarezza, si riporta in Fig. 8.3 un flow-chart con la procedura modificata.

Per esso si osserva che:

- Originariamente, i dati input per la FAT rappresentavano il NLMV teorico, calcolato dalla risposta non lineare  $\{\tilde{Y}\}$  e una descrizione completa delle non linearità,  $\{\tilde{G}\}$ . Questa volta, i dati input sono il NLMV estratto  $\{\Phi^T \tilde{G}\}_m$ , disponibile come funzione composta anche se il suo componente non lineare  $\{\tilde{G}\}$  risulta sconosciuto.
- Il simbolo “ $\approx$ ” in:

$$\Delta \tilde{\lambda}_s^2 \approx \frac{(\Phi^T \tilde{G})_s + (\Delta \tilde{\Phi}^T F)_s}{\tilde{P}_s} \quad 8.21$$

riconosce il fatto che il “termine accoppiato non lineare” è stato già ignorato. Nel Capitolo 7, si è mostrato come questo termine introduceva effetti ignorabili nel modo risonante, e che (8.21) era un’ approssimazione simile alla frequenza naturale non lineare e allo smorzamento per attrito, se implementati in un breve schema iterativo.

La procedura suppone una singola forza di eccitazione. Nonostante si possa considerare un sistema multi eccitazione mediante l'applicazione di alcune modifiche, queste potrebbero generare un insieme di equazioni f non lineari multi-variabili per calcolare solo gli autovettori.

- In accordo con lo sviluppo modale non lineare tradizionale, si suppone anche che, in prossimità della risonanza  $s$  esima, l'effetto dei modi non lineari contigui  $r = 1 \dots m_{NL}$ ,  $r \neq s$  rimane lineare. Questa approssimazione è valida per i modi separati quasi bene ma, anche uno schema iterativo può essere usato per spiegare i modi vicini.

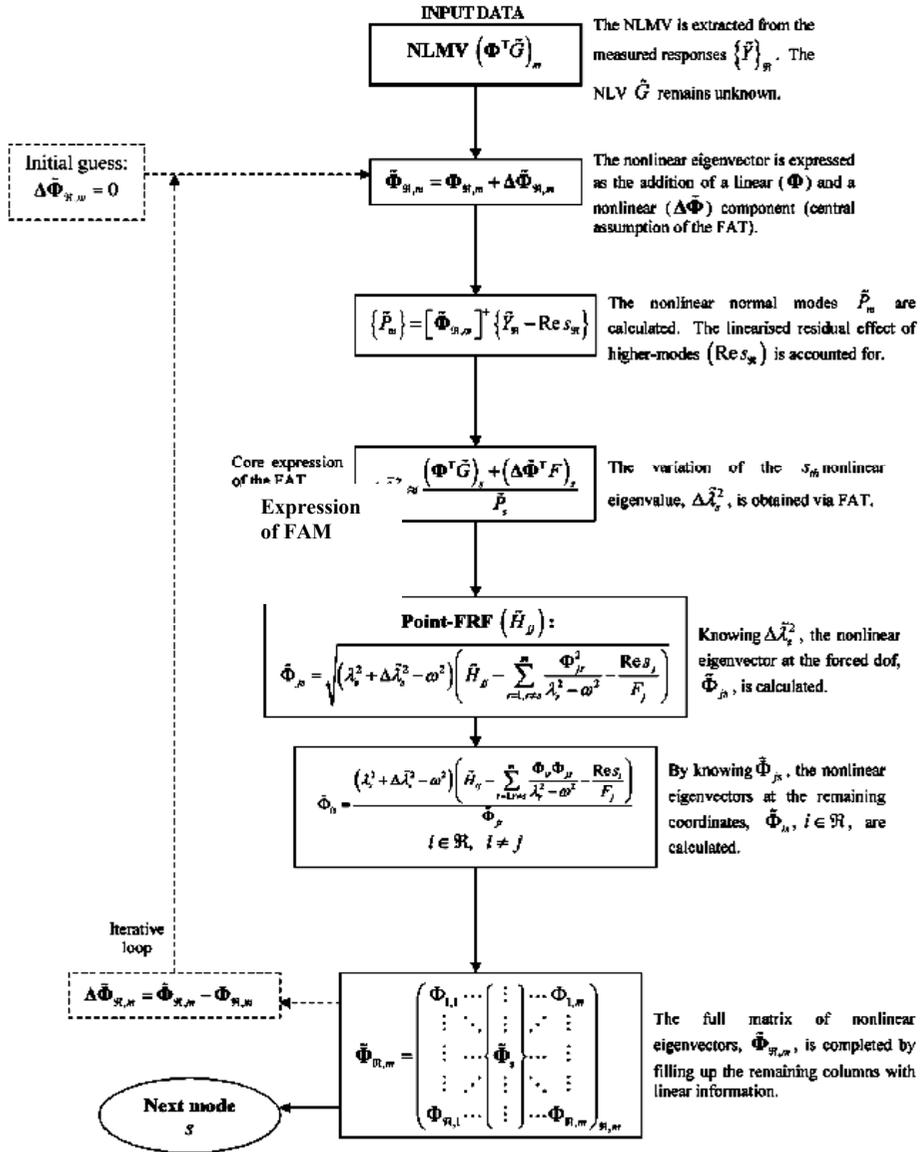


Fig. 8.3 – Flow-chart per l'applicazione della FAM per il calcolo degli autovalori ed autovettori

### 8.8 Fase VI: quantificazione del sistema attraverso polinomi

Alcuni ricercatori hanno presentato un metodo per la NLMA, in cui i parametri modali non lineari vengono estratti dai dati sperimentali ed espressi in funzione dell'ampiezza modale non lineare, mediante una regressione della curva polinomiale:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_r^2 &= \tilde{\omega}_r^2(|\tilde{P}_r|) \\ \tilde{\eta}_r &= \tilde{\eta}_r(|\tilde{P}_r|) \\ \tilde{\Phi}_r &= \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{ir} \Phi_r\end{aligned}\tag{8.22}$$

Queste funzioni sono invarianti al livello di eccitazione, capaci di predire i parametri modali non lineari a una diversa eccitazione e di costruire risposte fisiche attraverso la sovrapposizione modale. Questi ricercatori hanno ottenuto ottimi risultati sperimentali per l'identificazione di strutture varie.

Quando ha preso piede questa ricerca, è stato rivisto il suddetto metodo, che si è comportato molto bene per un grande range di problemi ed è stato capace di sviluppare un modello matematico perfino con scarse informazioni. Comunque, è stato anche osservato che la procedura di eccitazione soffre di instabilità numerica per sistemi fortemente non lineari a causa di una minimizzazione non lineare multi variabile.

Nella nostra ricerca, le non linearità vengono prima estratte mediante un calcolo diretto, nella forma del NLMV. Successivamente, i parametri modali non lineari

vengono analiticamente ottenuti attraverso la FAM, quindi aumentando la loro accuratezza e stabilità numerica. I parametri NL si possono poi esprimere come funzioni delle ampiezze modali non lineari, costruendo polinomi simili:

$$\begin{aligned} {}_{re}\Delta\tilde{\lambda}_R^2 &= {}_{re}\Delta\tilde{\lambda}_R^2(|\tilde{P}_r|), & {}_{im}\Delta\tilde{\lambda}_R^2 &= {}_{im}\Delta\tilde{\lambda}_R^2(|\tilde{P}_r|) \\ {}_{re}\Delta\tilde{\Phi}_r &= {}_{re}\Delta\tilde{\Phi}_r(|\tilde{P}_r|), & {}_{im}\Delta\tilde{\Phi}_r &= {}_{im}\Delta\tilde{\Phi}_r(|\tilde{P}_r|) \end{aligned} \quad 8.23$$

La metodologia originale esprime l'autovettore non lineare risonante come una combinazione di pochi autovettori lineari contigui, mediante coefficienti non lineari  $\tilde{b}_{ij}$ . Questi coefficienti non lineari vengono ulteriormente calcolati come funzioni non lineari dell'ampiezza modale. Questo approccio, pur essendo efficace, non ha un significato fisico diretto e ciò introduce alcuni gradi di *case sensitivity*.

In questo lavoro, gli autovettori non lineari sono stati esplicitamente calcolati con FAM, e si possono esprimere direttamente come funzioni della loro ampiezza modale corrispondente, proprio come gli autovalori non lineari. Mentre questo percorso aumenta il numero dei polinomi richiesti per la rigenerazione, è un piccolo prezzo da pagare in confronto con l'aumentata robustezza e il significato fisico.

La procedura per la quantificazione del sistema attraverso il suddetto approccio viene di seguito spiegata:

Lo sviluppo modale non lineare tradizionale (6.13) esprime i modi normali non lineari come:

$$\lfloor \tilde{\lambda}^2 - \omega^2 \rfloor \{\tilde{P}\} = \{\tilde{\Phi}^T F\} \quad 8.24$$

Secondo la metodologia introdotta in questo lavoro, i parametri modali non lineari si separano in componenti lineari e non lineari:

$$\lfloor \lambda^2 + \Delta\tilde{\lambda}^2 - \omega^2 \rfloor \{\tilde{P}\} = \{(\Phi + \Delta\tilde{\Phi})^T F\} \quad 8.25$$

Per cui, il modo normale non lineare  $r$  si esprime come:

$$\left[ \lambda_r^2 + \Delta \tilde{\lambda}_r^2 - \omega^2 \right] \{ \tilde{P}_r \} = \left( \{ \Phi_r + \Delta \tilde{\Phi}_r \}^T \{ F \} \right)_r \quad 8.26$$

dove  $\Delta \tilde{\lambda}_r^2$ ,  $\Delta \tilde{\Phi}_r$  già ottenuto attraverso FAM, si esprime come (8.23).

L'implementazione al computer di (8.23) si ottiene costruendo polinomi di ordine  $\rho$ , collegando le variabili non lineari con la grandezza di  $\tilde{P}_r$ :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\lambda}_r^2 &= a_1 |\tilde{P}_r| + a_2 |\tilde{P}_r|^2 + \dots + a_\rho |\tilde{P}_r|^\rho \\ \Delta \tilde{\Phi}_r &= b_1 |\tilde{P}_r| + b_2 |\tilde{P}_r|^2 + \dots + b_\rho |\tilde{P}_r|^\rho \end{aligned} \quad 8.27$$

in cui  $a_i$  e  $b_i$  sono i coefficienti numerali dei polinomi, che vengono calcolati mediante un algoritmo standard di regressione curva. Gli auto-parametri devono essere separati in parti reali e immaginarie prima del processo.

Le equazioni (8.26) e (8.27) formano un insieme di equazioni non lineari a variabile singola, in cui l'unica incognita è  $\tilde{P}_r$ , quindi permettendo la rigenerazione delle risposte attraverso la sovrapposizione modale. Inoltre, permettono di predire le risposte a differenti livelli di eccitazione.

Per rigenerare/predire una risposta a un dato DOF  $i$ , si devono costruire i seguenti polinomi:

1. Polinomi per tutte le frequenze naturali non lineari di  $m_{NL}$  e per le variabili di smorzamento modale – requisito essenziale per rigenerare qualsiasi DOF.
2. Polinomi per gli autovettori non lineari forzati  $f$ , per tutti i modi  $m_{NL}$  - requisito essenziale per rigenerare qualsiasi DOF.

3. Polinomi per l'autovettore  $i$ , per tutti i modi  $m_{NL}$  - requisito essenziale per rigenerare qualsiasi DOF  $i$ .

Poiché i polinomi separati devono essere costruiti per componenti reali ed immaginari, il numero totale richiesto per rigenerare un insieme di risposte  $n$  è  $2m_{NL}(1 + f + n)$ .

### 8.9 Fase VII: rigenerazione e predizione

Dato in insieme di forze in eccitazione  $\{F\}_f$ , le equazioni non lineari (8.26) e (8.27) si risolvono per  $\tilde{P}_r$ . La minimizzazione non lineare produce nuovi modi normali non lineari per il sistema, poi si applica la sovrapposizione modale per ottenere le risposte fisiche.

Per rigenerare/predire una coordinate data  $\tilde{Y}_i$ , si può usare lo sviluppo modale non lineare tradizionale:

$$\tilde{Y}_i = \underbrace{\left( \sum_{r=m_{NL}} (\phi_{ir} + \Delta\tilde{\phi}_{ir}) \tilde{P}_r \right)}_{\text{Modi non lineari}} + \underbrace{\left( \sum_{r=m-m_{NL}} \phi_{ir} P_r + \text{Re } s_i \right)}_{\text{Residuo esteso lineare}} \underbrace{\begin{pmatrix} {}^2F \\ {}^1F \end{pmatrix}}_{\text{Forze updated}} \quad 8.28$$

in cui i modi normali non lineari  $m_{NL}$  vengono aggiornati mediante i NNM recentemente formati  $\tilde{P}_r$  e i polinomi per  $\{\Delta\tilde{\Phi}\}_{i,r=1\dots m_{NL}}$ . Il residuale lineare  $Res$  si estende per spiegare i modi lineari in  $m$ , e  ${}^1F$  e  ${}^2F$  sono, rispettivamente, le forze di eccitazione iniziali e aggiornate. Si noti che il solo residuale lineare esteso deve

essere aggiornato per riflettere il cambiamento di eccitazione, dato che i modi NL  $\tilde{P}_r$  sono stati già calcolati per  ${}^2F$ .

Due importanti osservazioni:

- (8.28) è valido per una forza di singola eccitazione. Se si considera un sistema di multi eccitazione, allora è necessario implementare un approccio più sofisticato (possibilmente molto complesso) per aggiornare il residuale  $\{Res\}$ . Alternativamente, il range di frequenza analizzato può essere esteso in modo tale da far avere al residuale un impatto minimo sui modi non lineari di interesse, cioè evitando il problema ( $\{Res\} \approx 0$ ).
- Il range di forza in cui può raggiungere una buona predizione dipenderà dalla qualità dei polinomi regressi e dal loro comportamento fuori dal range regresso. Per questo fine, è meglio appoggiarsi ai polinomi del minimo ordine possibile, per mantenere un percorso senza problemi dietro il range regresso.

### **8.10 Fase VIII: rilevazione dei NL-DOF**

La procedura qui descritta si applica in quasi tutte le situazioni, comprese i casi con dati incomplete. Il modello permette la rigenerazione delle risposte assicurate e la predizione a diversi livelli di eccitazione, che costituisce lo scopo principale di un metodo di identificazione.

Comunque, esistono alcuni svantaggi. Il range dei livelli di eccitazione per cui la risposta viene rigenerata accuratamente è ristretto, a seconda delle caratteristiche di qualità ed estrapolazione dei polinomi regressi. Il numero dei polinomi ha bisogno di rigenerare una parte sostanziale di un grande sistema che rappresenta un

importante peso. Più importante, il componente non lineare del sistema, inizialmente sconosciuto, rimane sconosciuto, senza rilevare dati quali la locazione degli elementi non lineari. La procedura introdotta permette una piena caratterizzazione del sistema, rilevando e quantificando gli elementi non lineari individuali. Questo, in cambio, permette l'esatta rigenerazione ad ogni livello di eccitazione, più molte altre caratteristiche precedentemente inattendibili.

Per questa sezione, è necessario richiamare il concetto di una regione non lineare  $\Gamma$ .  $\Gamma$  deve essere una sottospecie della regione misurata  $\mathfrak{R}$ , che comprende tutti i possibili n NL-DOF.

Ciò può essere matematicamente espresso come:

$$n \in \Gamma \in \mathfrak{R}, \quad n \ll \Gamma \leq \mathfrak{R} \quad 8.29$$

Nella Paragrafo 3.4, si è parlato che la delimitazione approssimata di una regione non lineare  $\Gamma$  è possibile per molte strutture di ingegneria. L'analista attento suppone piuttosto  $\Gamma = \mathfrak{R}$ , che aumenta solo il peso computazionale ma non la complessità dei calcoli, una caratteristica che verrà dimostrata presto. Si noti che la misura di  $\Gamma$  è arbitraria.

Una volta assegnato il meccanismo non lineare (Paragrafo 8.5) si può eseguire l'analisi. Innanzitutto, si decompone il NLMV  $\{\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}}\}$  nei componenti modali  $m$  e  $(M-m)$  (column-wise), nonché in coordinate  $\Gamma$  e  $(N-\Gamma)$  (row-wise)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}})_m \\ (\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}})_{M-m} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{N-\Gamma, m} & \mathbf{\Phi}_{N-\Gamma, M-m} \\ \mathbf{\Phi}_{\Gamma, m} & \mathbf{\Phi}_{\Gamma, M-m} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{G}}_{N-\Gamma} \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\Gamma} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{m, N-\Gamma} & \mathbf{\Phi}_{m, \Gamma} \\ \mathbf{\Phi}_{M-m, N-\Gamma} & \mathbf{\Phi}_{M-m, \Gamma} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\Gamma} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad 8.30$$

dove il sub-NLV  $\{\tilde{\mathbf{G}}_{N-\Gamma}\}$  si suppone che sia zero, come tutte le non linearità contenute nella regione non lineare  $\Gamma$ . Questo porta a:

$$\{\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}}\}_m = [\mathbf{\Phi}_{\Gamma,m}]^T \{\tilde{\mathbf{G}}_\Gamma\} \quad 8.31$$

che dimostra che NLMV  $\{\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}}\}_m$  estratto è una funzione dei  $\Gamma$  DOF e dei modi  $m$  soltanto.

Richiamando (3.41), il sub-NLV  $\{\tilde{\mathbf{G}}_\Gamma\}$  si esprime come una funzione della matrice non lineare (NLM)  $[\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma,\Gamma}]$  e le risposte alle coordinate  $\Gamma$ .

$$\{\tilde{\mathbf{G}}_\Gamma\} = [\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma,\Gamma}] \{\tilde{\mathbf{Y}}_\Gamma\} \quad 8.32$$

Introducendo (8.32) in (8.31), abbiamo:

$$\{\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}}\}_m = [\mathbf{\Phi}_{\Gamma,m}]^T [\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma,\Gamma}] \{\tilde{\mathbf{Y}}_\Gamma\} \quad 8.33$$

Richiamando (3.9) per un sistema di rigidezza volumetrica, e ricavando i coefficienti  $\beta$  da  $[\tilde{\mathbf{V}}_{\Gamma,\Gamma}]$ , (8.33) si trasforma in:

$$\{\mathbf{\Phi}^T \tilde{\mathbf{G}}\}_m = [\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\omega]_{m,\Gamma} \{\beta\}_\Gamma \quad 8.34$$

dove

$$\tilde{\tau}_\omega = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} |\tilde{Y}_1(\omega)|^2 \tilde{Y}_1(\omega) & \phi_{2,1} |\tilde{Y}_2(\omega)|^2 \tilde{Y}_2(\omega) & \dots & \phi_{\Gamma,1} |\tilde{Y}_\Gamma(\omega)|^2 \tilde{Y}_\Gamma(\omega) \\ \phi_{1,2} |\tilde{Y}_1(\omega)|^2 \tilde{Y}_1(\omega) & \phi_{2,2} |\tilde{Y}_2(\omega)|^2 \tilde{Y}_2(\omega) & \dots & \phi_{\Gamma,2} |\tilde{Y}_\Gamma(\omega)|^2 \tilde{Y}_\Gamma(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,m} |\tilde{Y}_1(\omega)|^2 \tilde{Y}_1(\omega) & \phi_{2,m} |\tilde{Y}_2(\omega)|^2 \tilde{Y}_2(\omega) & \dots & \phi_{\Gamma,m} |\tilde{Y}_\Gamma(\omega)|^2 \tilde{Y}_\Gamma(\omega) \end{bmatrix} \quad 8.35$$

e

$$\{\beta\}_\Gamma = \{\beta_{11} \quad \beta_{22} \quad \dots \quad \beta_{\Gamma\Gamma}\}^T \quad 8.36$$

L'equazione 8.34 è valida per un singolo punto di frequenza  $\omega$  ed anche seriamente indeterminata poiché di solito  $m \ll \Gamma$ . Si fissa mediante l'assemblaggio di diverse versioni di (8.34), costruite a diverse frequenze  $q$ , valide per lo stesso vettore  $\{\beta_\Gamma\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\Phi^T \tilde{G}\}_m^{\omega=\omega_1} \\ \{\Phi^T \tilde{G}\}_m^{\omega=\omega_2} \\ \dots \\ \{\Phi^T \tilde{G}\}_m^{\omega=\omega_q} \end{array} \right\}_{q,m} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{\omega=\omega_1} \\ \tilde{\tau}_{\omega=\omega_2} \\ \dots \\ \tilde{\tau}_{\omega=\omega_q} \end{bmatrix}_{q,m,\Gamma} \{\beta_\Gamma\} \quad 8.37$$

L'equazione 8.37 rappresenta un insieme super determinato di equazioni lineari per  $q \cdot m \geq \Gamma$ , dal quale si estraggono direttamente i coefficienti  $\beta$ . La soluzione rileverà implicitamente la posizione degli elementi NL, dati dagli indici non-zero.

(8.37) potrebbe soffrire della mancanza di ordine se le frequenze  $q$  scelte sono troppo vicine l'un l'altra. Ciò causerà due o più righe di (8.35) da essere linearmente dipendenti. Un efficace strategia per risolvere (8.37) è quella che consiste nel dividerlo nei suoi componenti reali e immaginari, separando il numero

delle frequenze necessarie, poi risolvendo un unico problema ingrandito  $[2qm, \Gamma]$ . Per ottenere ciò è necessaria una minimizzazione lineare dei minimi quadrati, applicando la costrizione  $\{\beta\}_\Gamma \geq 0$ . Da questa tecnica derivano risultati non ambigui a condizione che  $q$  ed  $m$  siano rappresentativi del sistema non lineare sotto analisi, per cui (8.37) è chiaramente costretto.

Una volta localizzati i  $n$  NL-DOF, (8.37) può essere ridotto per l'insieme ridotto di  $n$  DOF, migliorando l'accuratezza del calcolo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \Phi^T \tilde{G} \right\}_m^{\omega=\omega_1} \\ \left\{ \Phi^T \tilde{G} \right\}_m^{\omega=\omega_2} \\ \dots \\ \left\{ \Phi^T \tilde{G} \right\}_m^{\omega=\omega_q} \end{array} \right\}_{q,m} = \left[ \begin{array}{l} \tilde{\tau}_{\omega=\omega_1} \\ \tilde{\tau}_{\omega=\omega_2} \\ \dots \\ \tilde{\tau}_{\omega=\omega_q} \end{array} \right]_{q,m,n} \left\{ \beta_n \right\} \quad 8.38$$

Seguono alcune importanti affermazioni:

- La presente procedura si applica ad ogni tipo di non linearità, finché i coefficienti  $\beta$  sconosciuti,  $\gamma$  restano costanti.
- Questa deduzione è stata fatta considerando la rigidezza volumetrica, le sole non linearità *grounded*. Per il caso generale di elementi misti, reggono gli stessi principi, anche se si possono apportare modifiche alla matrice  $[\tilde{\tau}_\omega]$  e al vettore  $\{\beta_\Gamma\}$ .
- Le sequenze  $q$  di prova si scelgono in quelle regioni in cui il NLMV è significativo, uniformemente distribuito su tutti i modi  $m$ . Bisogna porre attenzione nell'assicurare che  $\Delta q$ , la separazione delle frequenze  $q$  scelte, sia abbastanza grande da evitare singolarità, e che  $2qm \geq \Gamma$  raggiunga un insieme super determinato.

- Se le frequenze  $q$  sui modi  $m$  scarsamente rappresentano il sistema, (8.37) può essere risolta diverse volte, ogni volta scegliendo una combinazione diversa di frequenze di prova e di modi. Successivamente, si raccolgono i DOF  $n$  rilevati per ogni soluzione, risolvendo un problema consistente e ridotto (8.38) per l'ultima volta.

### 8.11 Test n. 3: pre-processing dei dati (Fase I)

Il metodo R-HMM si applica per l'identificazione del esempio n.3, dettagliatamente descritto nell'Appendice. Il sistema rappresenta un grande modello di piatti sottili (Fig. 8.5) in cui risultano predefinite le seguenti regioni:

$$\begin{aligned}
 N &= \{1, 2, \dots, 150\} \text{ numero di DOF attivi in dir. } y \\
 \mathfrak{R} &= \{41, 42, \dots, 110\} \text{ regione misurata} \\
 \Gamma &= \{51, 52, \dots, 100\} \text{ regione non lineare} \\
 f &= \{67\} \text{ singola eccitazione, } F_{67}=1,5N \\
 m &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ per il range di frequenza , } 8 \div 35 \text{ Hz}
 \end{aligned}
 \tag{8.39}$$

dove il simbolo “Y” è stato eliminato dalla notazione DOF (per es.: “DOF 51Y”), perché sono stati presi in considerazione solo i movimenti verticali da essere misurati. I risultati per un'analisi modale lineare precedente (LMA) dei DOF misurati sono stati inclusi nell'Appendice.

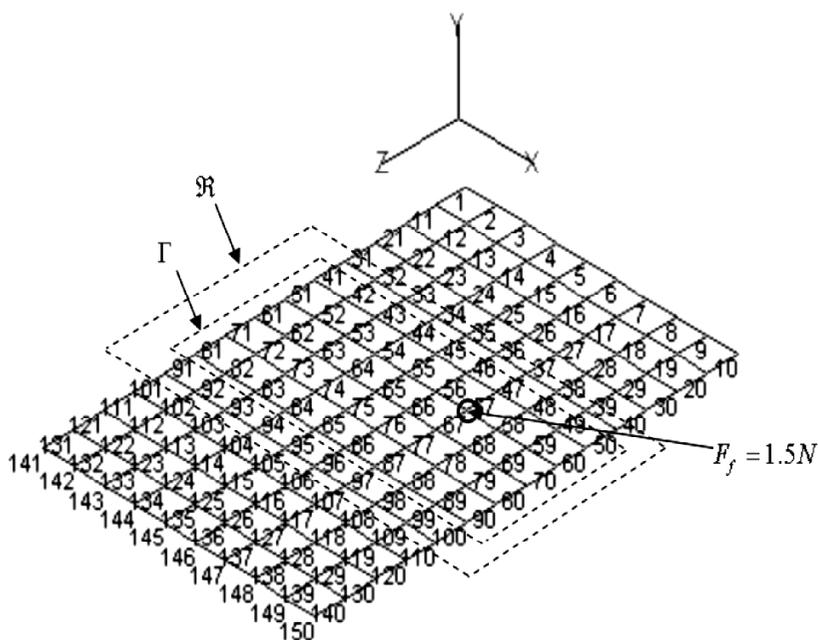


Fig. 8.4 – Modello del Test n. 3

### 8.11.1 Test n. 3: estrazione del NLMV (fase II)

Il vettore NLMV  $\{\tilde{\chi}_m\}$  esteso può essere estratto dalle risposte  $\mathfrak{R}$  misurate, applicando (8.13) per ogni punto di frequenza all'interno del range misurato:

$$\{\tilde{\chi}_m\} = [\lambda^2 - \omega^2]_{m,m} [\Phi_{\mathfrak{R},m}]^+ \{\tilde{Y}_{\mathfrak{R}} - \text{Re } s_{\mathfrak{R}}\}$$

Il NLMV  $\{\Phi^T \tilde{G}\}_m$  standard può essere ancora migliorato da (8.15):

$$\{\Phi^T \tilde{G}\}_m = \{\Phi^T F\}_m - \{\tilde{\chi}\}_m$$

dove

$$\{\Phi^T F\}_m = [\Phi_{f,m}]^T \{F\}_f$$

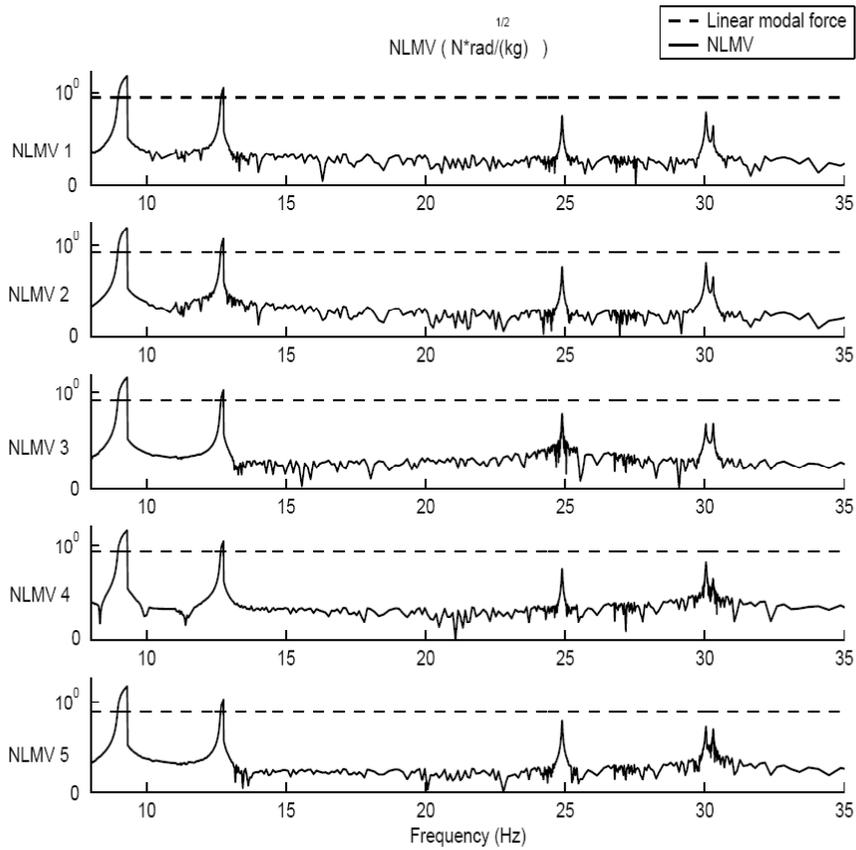


Fig. 8.5 – NLMV estratto per i primi 5 modi

### **8.11.2      *Test n. 3: rilevazione del meccanismo non lineare (fase III)***

Il “footprint” geometrico del NLMV estratto (Fig. 8.6) alle due prime risonanze suggerisce un tipo non lineare di rigidità volumetrica, secondo le direttive presentate nella Paragrafo 8.5.

### **8.11.3      *Test n. 3: grado di non linearità in un modo non lineare (fase IV)***

Nella Fig. 8.6, si vede che il NLMV estratto dei modi 1 e 2 mostra alti peak alle loro risonanze, facilmente superando le loro rispettive “soglie lineari”.

Esercitano, inoltre, alti effetti di accoppiamento nei restanti modi. In base a (8.19), i modi 1 e 2 raggiungono “gradi modali non lineari” di, rispettivamente, 75.56 e 16.52. Questi risultati li classificano come “fortemente non lineari”, in concordanza con il comportamento non lineare osservato nella risposta. È importante notare che gli alti gradi di questi modi confermano che le distorsioni nella risposta vengono completamente spiegate dalla presenza di non linearità, piuttosto che da cause più nascoste.

Facendo un confronto, si nota anche il NLMV dei modi 3, 4 e 5 sono molto piccolo, con “gradi modali non lineari” di 0.078, 0.103 e 0.025, rispettivamente. Questi risultati concordano con il loro comportamento quasi lineare nella risposta. In un contesto di sovrapposizione modale non lineare, questi modi possono essere considerati come lineari.

La selezione  $m_{NL} = \{1, 2\}$  si automatizza sulla suddetta base.

#### **8.11.4 Test n. 3: trasformazione ai parametri modali NL con il metodo del FAM (fase V)**

Il NLMV estratto può essere trasformato in frequenze naturali non lineari e funzioni di smorzamento modale, mediante la FAM. Concordemente con i “gradi modali non lineari” ottenuti, solo i modi 1 e 2 si inseriranno nell’analisi non lineare. mediante l’applicazione della procedura iterativa mostrata dalla Fig. 8.4, i seguenti risultati si ottengono dopo 10 iterazioni:

- La Fig. 8.6 mostra la variazione delle frequenze naturali non lineari.
- La Fig. 8.7 mostra la variazione dello smorzamento modale non lineare. A causa della non linearità di rigidità volumetrica, la variazione viene ignorata restando quasi al valore lineare ( $\eta = 0.1\%$ ).
- La Fig. 8.8 mostra la variazione dell’autovettore non lineare corrispondente al DOF (67) forzato. A causa della non linearità di rigidità volumetrica, anche il componente immaginario viene ignorato.
- La Fig. 8.9 mostra la variazione dei tre autovettori non lineari scelti casualmente (solo la parte reale), corrispondente ai DOF  $\{51, 62, 92\}$ . Non si vede la controparte immaginaria, poiché mostra variazione ignorata.

#### **8.11.5 Test n. 3: quantificazione del sistema attraverso polinomi (fase VI)**

Una volta conosciuti i parametri modali non lineari, possono essere espressi come funzioni delle ampiezze modali non lineari.

I valori numerici di  $|\tilde{P}_r|$  (per un dato modo non lineare) vengono prima classificati da un minimo a un massimo e posizionati in un asse orizzontale. Le frequenze associate generano un indice master, per il quale i corrispondenti parametri modali non lineari vengono classificati e tracciati in assi verticali. Infine, i valori tracciati possono essere regressi a polinomi del tipo (8.27).

La caratterizzazione verrà confermata ai soli modi 1 e 2, spiegando solo la parte reale dei parametri non lineari. A causa della variazione ignorata, la controparte immaginaria era stata rimossa e rimpiazzata dai valori lineari. I risultati per l'esempio n. 3 sono evidenti nelle Figg. 8.10, 8.11 e 8.12, in cui i segni “+” rappresentano i parametri non lineari estratti, e la linea intera rappresenta un polinomio di 4° ordine regresso. L'asse orizzontale si è estesa 1,5 volte dietro l'ultimo punto regresso, per evidenziare le caratteristiche di estrapolazione dei polinomi. Questa caratteristica è essenziale per raggiungere un'accurata predizione a livelli ulteriori, oltre quelli usati per l'estrazione.

#### **8.11.6 Test n. 3: rigenerazione e predizione (fase VII)**

Il processo di rigenerazione verrà spiegato per il primo modo, applicando (8.26) e (8.27). Lo stesso processo deve essere ripetuto per tutti i modi non lineari, i modi 1 e 2.

La Fig. 8.13 mostra la prima ampiezza modale dell'esempio n. 3, calcolata attraverso il nostro punto di riferimento codice HMB. Il caso lineare appare in linea tratteggiata, mentre i risultati per i tre diversi livelli di eccitazione,  $F = 1N$ ,  $F = 1.5N$

and  $F = 2N$  sono in linea intera. Le predizioni basate sui polinomi sono indicate dai segni “+”, mostrando una notevole accuratezza.

Una volta separatamente generate le ampiezze modali non lineari m NL, si usa una sovrapposizione modale per ottenere le risposte fisiche, attraverso (8.28). La rigenerazione/predizione per i DOF 52 casualmente scelti è evidente nelle Fig. 8.14 e 8.15, si focalizza sui modi 1 e 2 rispettivamente. Si può osservare che le risposte (“+”) rigenerate/predette si abbinano bene con la soluzione HBM.

#### **8.11.7 Test n. 3: rilevazione dei NL-DOF (fase VIII)**

Applicando la procedura introdotta in par. 8.10, sono state scelte le frequenze  $q=650$ , distribuite sui primi 5 modi in prossimità delle risonanze. Si noti che, per ottenere un insieme di equazioni correttamente costrette, si devono anche prendere in considerazione i modi “lineari”, assicurandosi che rimangano tali.

La Fig. 8.16 mostra i risultati dell’analisi, stabilendo chiaramente che ci sono tre NL-DOF  $n = \{51, 62, 92\}$  (che è corretto). La Fig. 8.17 mostra i risultati migliorati del problema ridotto (8.38), per i soli DOF  $n$ . I coefficienti migliorati sono presenti nella Tavola 8.2.

Una volta localizzati e quantificati gli elementi non lineari, si può trovare la risposta per ogni eccitazione (non solo sinusoidale), mediante l’applicazione di un percorso diretto del metodo HMT presentato nel Capitolo 6. Le risposte rigenerate /predette non mostrano differenze discernibili dalle risposte HBM nelle Fig. 8.14 e 8.15, per cui non è necessario mostrarle.

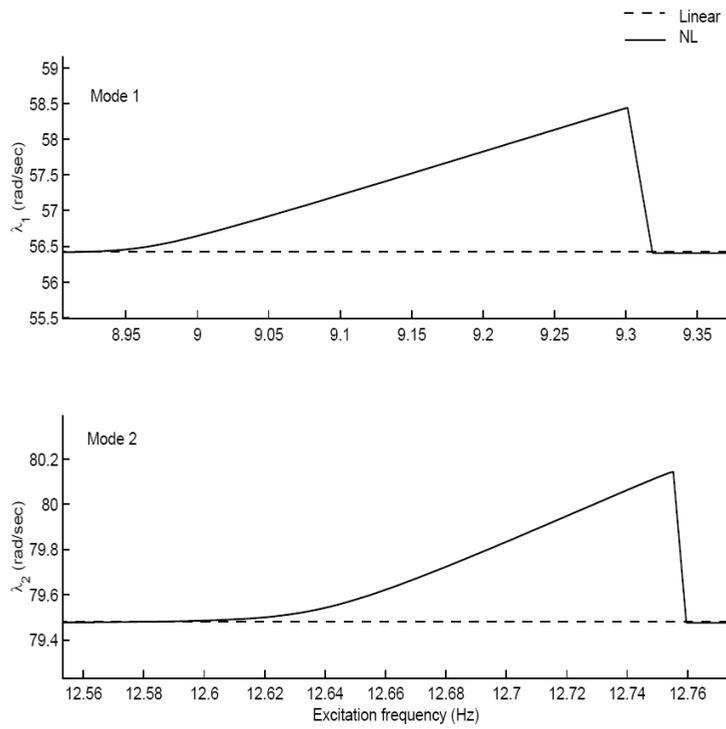


Fig. 8.6 - Frequenze naturali NL per il 1° e 2° modo

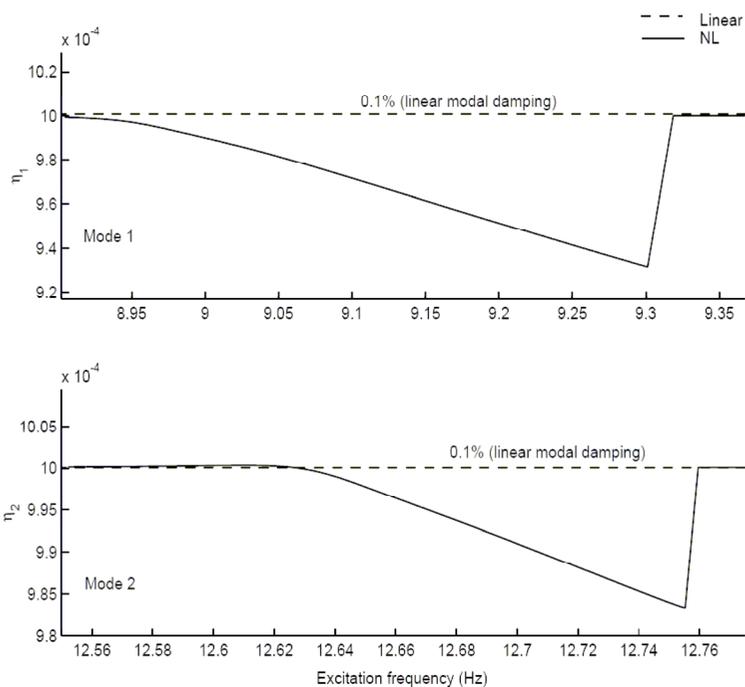


Fig. 8.7 – Smorzamento modale NL per il 1° e 2° modo

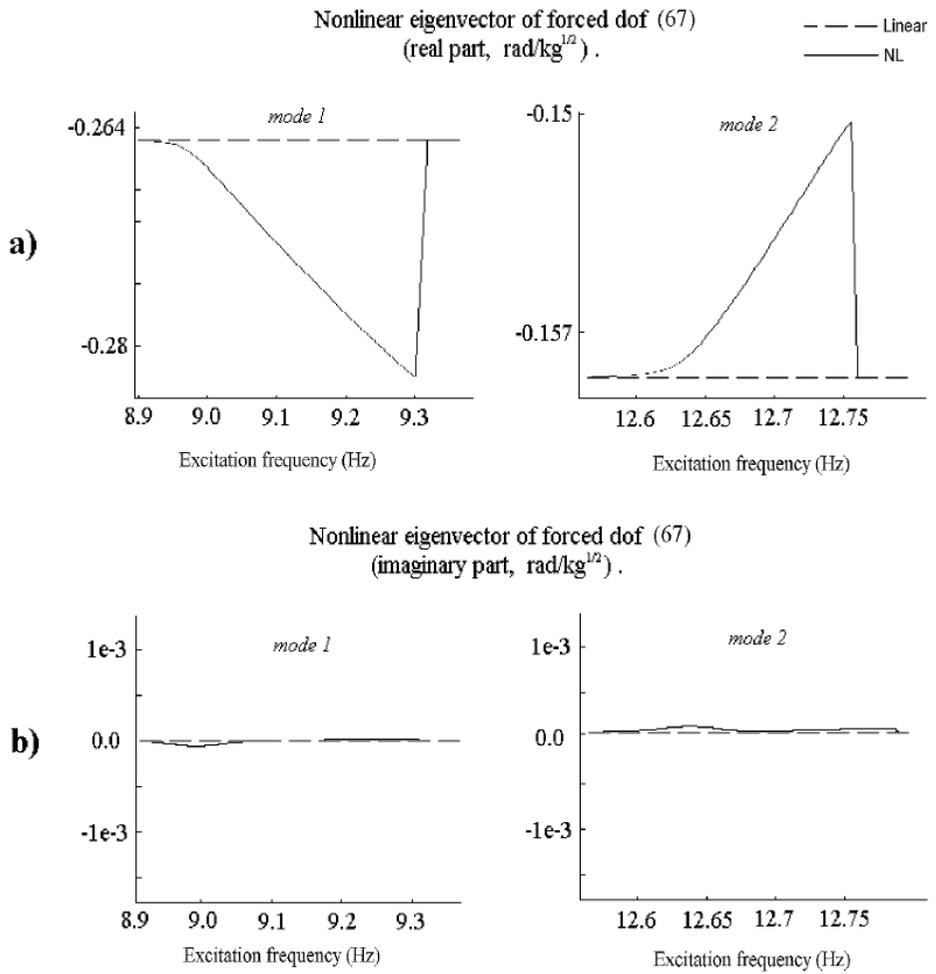


Fig. 8.8 – Autovettori NL per il DOF 67 al 1° e 2° modo

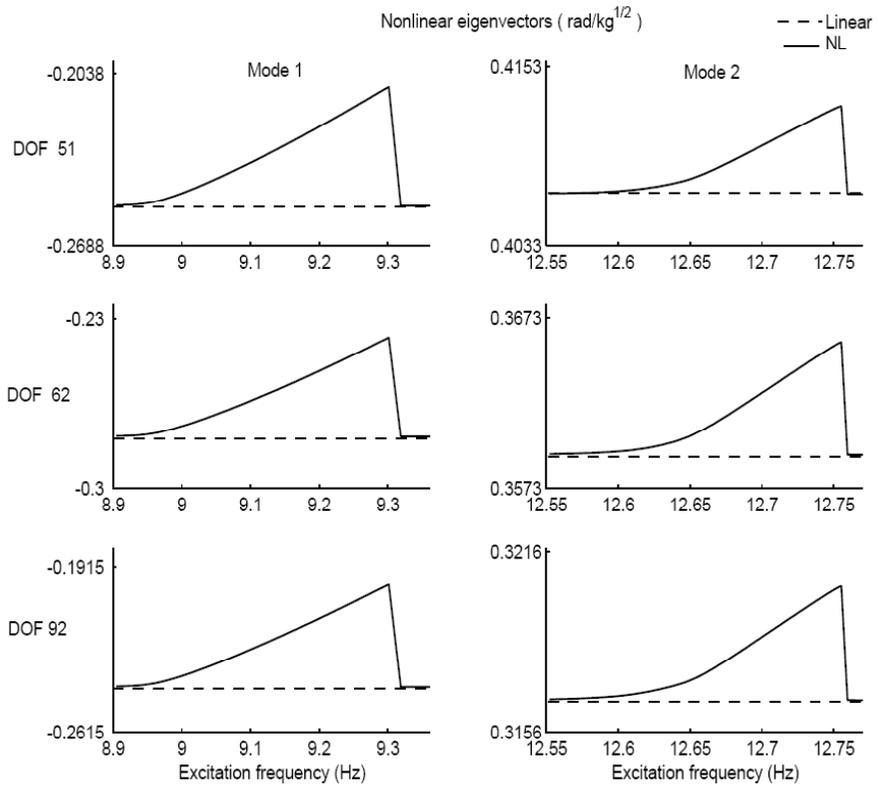


Fig. 8.9 - Autovettori NL per il DOF 51, 62, 92 al 1° e 2° modo

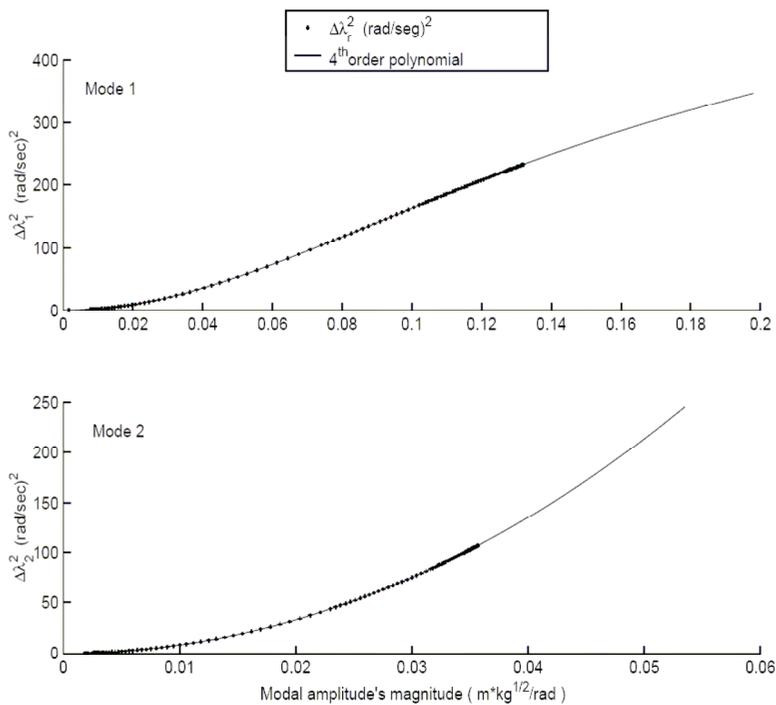


Fig. 8.10 – Variazioni delle frequenze naturali

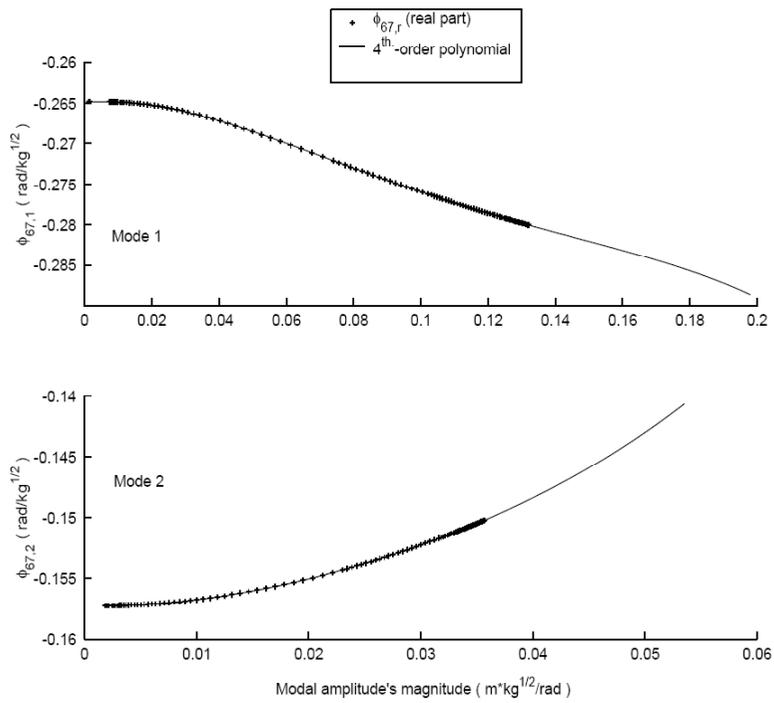


Fig. 8.11 – Variazione dell'autovettore NL DOF 67

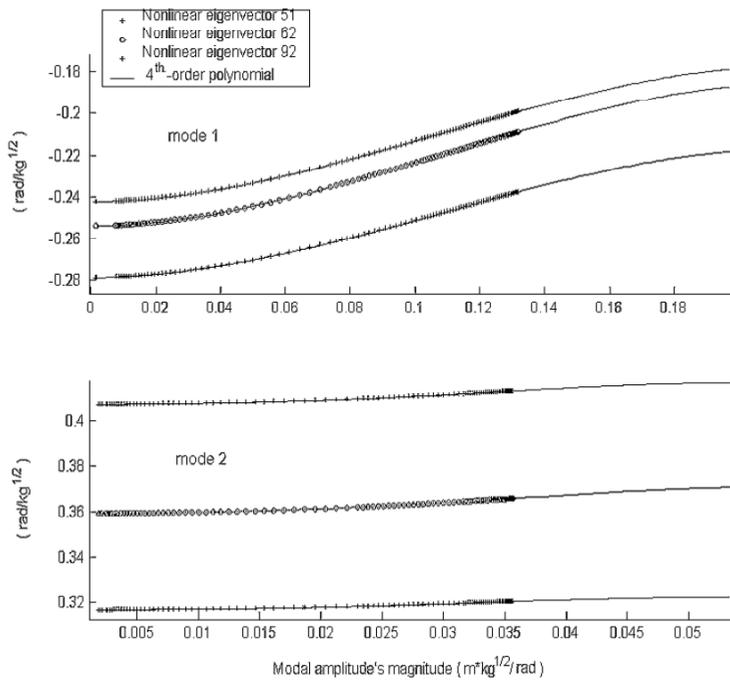


Fig. 8.12 - Variazione dell'autovettore (solo parte reale) NL DOF 51, 62, 92

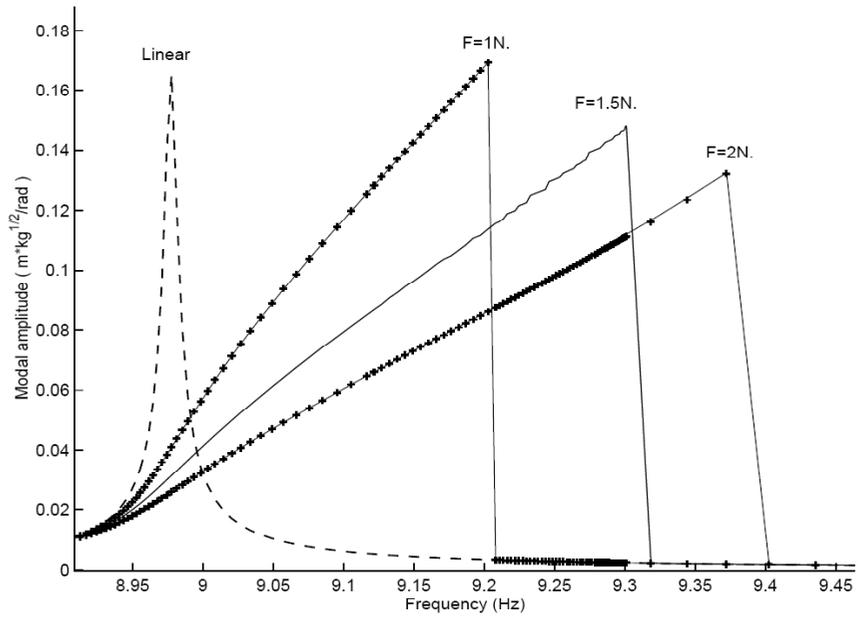


Fig. 8.13 – Variazione degli autovettori NL dei DOF 51, 62, 92

DOF	Identified $\beta(10^6 N/m^3)$	True $\beta(10^6 N/m^3)$	Error %
51	1.5896	1.6	0.65%
62	1.4141	1.5	6.07%
92	7.9885	7.82	2.10%

Tab. 8.2 – Valori numerici di  $\beta$

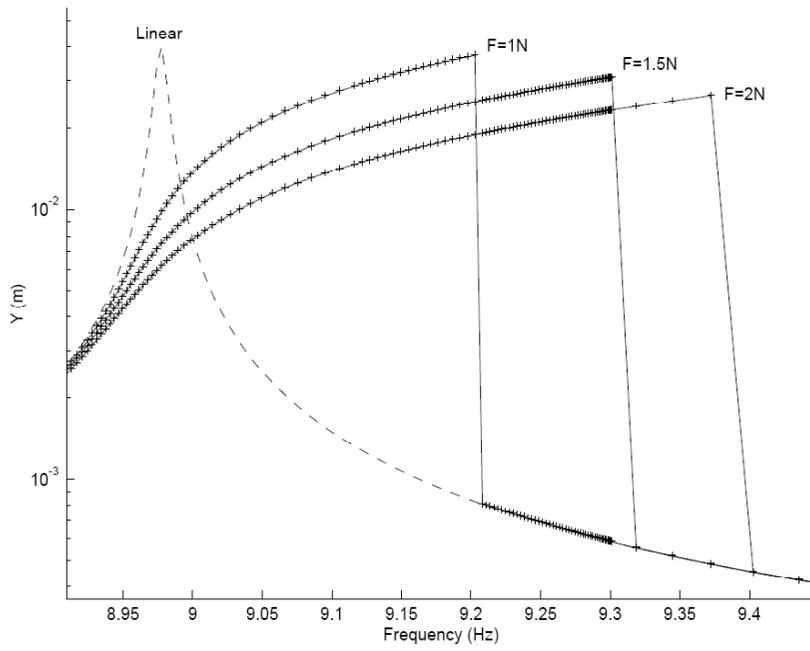


Fig. 8.14 – Risposta fisica del 1 modo del DOF 52

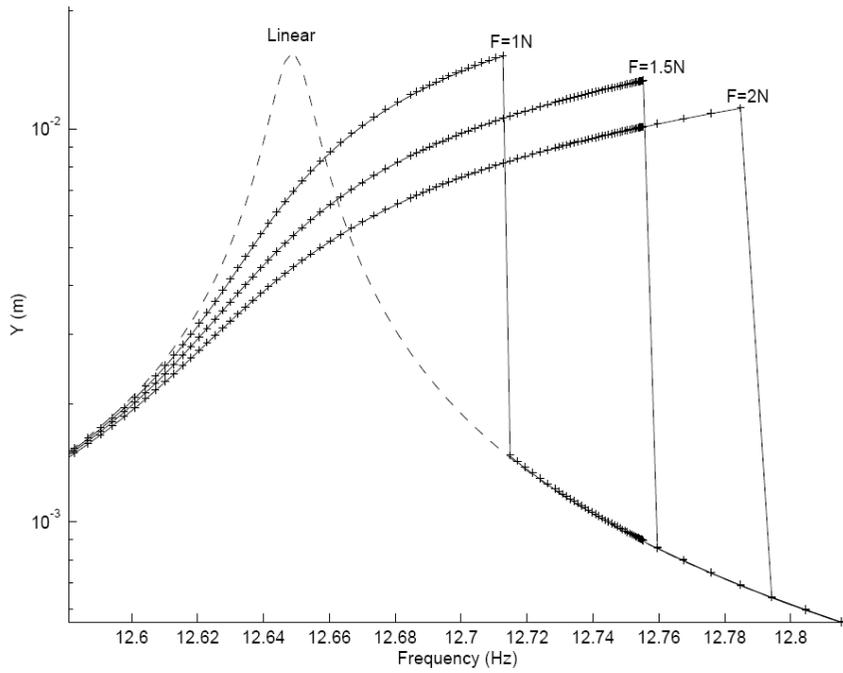


Fig. 8.15 - Risposta fisica del 2 modo del DOF 52

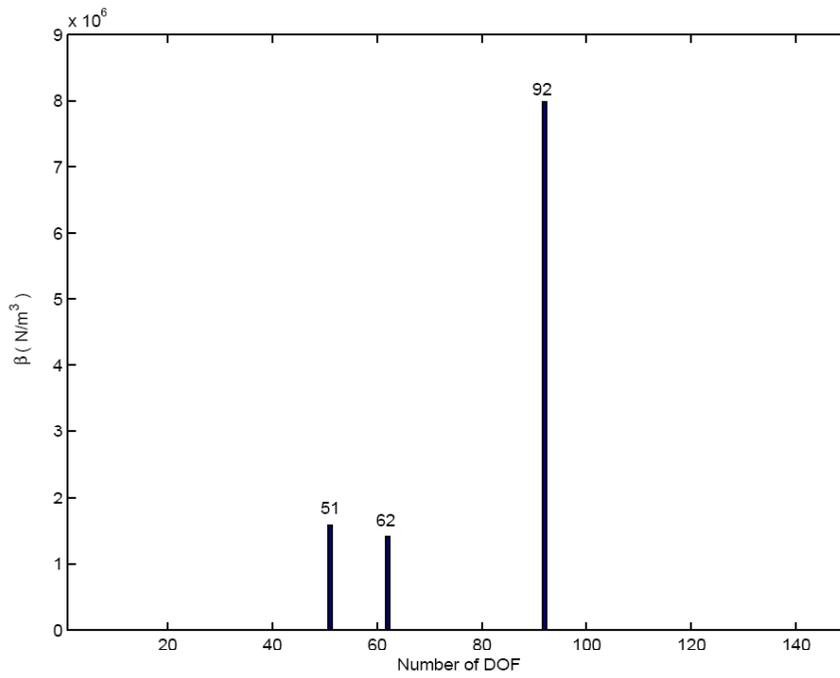


Fig. 8.16 – Individuazione dei NL DOF per il test n. 3

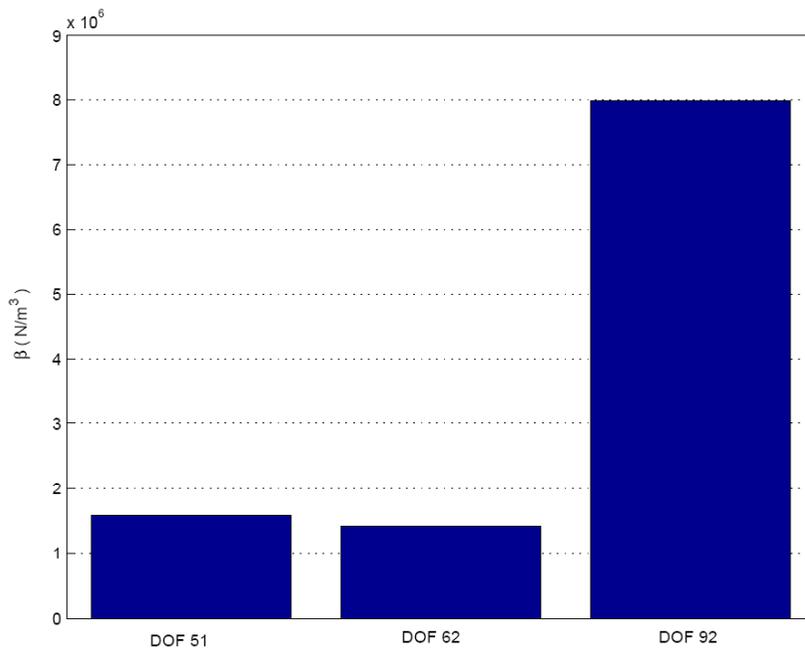


Fig. 8.17 – Quantificazione dei NL DOF



## Capitolo 9 – Conclusioni

### 9.1 Conclusioni

Il lavoro pone l'attenzione su aspetti teorici, numerici e computazionali di metodi utili allo studio di sistemi strutturali nel campo dell'ingegneria.

Il metodo EFM viene interamente sviluppato nel dominio fisico. Esso opera sui coefficienti fisici contenuti nelle matrici del sistema, da qui il termine “esplicito”, che porta la FRF non lineare a una DOF scelta come espressione in forma chiusa, che prescinde dalla dimensione del sistema. Anche se la sua derivazione è in qualche modo equivalente al HBM, le risposte sono state ricavate in un approccio più semplice ma originale coinvolgendo il rapporto di due determinanti.

È stato proposto un metodo ottimizzato dell'EFM per affrontare grandi strutture. Nonostante si sia perso l'aspetto del significato fisico immediato, l'ottimizzazione massimizza l'economia computazionale. Questo metodo è stato convalidato in confronto con le misure reali ottenute da un sistema prova consolidato in letteratura ed i risultati hanno confermato che l'EFM ottimizzato è in grado di caratterizzare il comportamento di grandi strutture.

Lo stesso metodo è stato implementato in un percorso inverso R-EFM ed impiegato come strumento di identificazione non lineare. Nonostante i buoni risultati, si è concluso che il costo computazionale di questo approccio è troppo alto per essere impiegato in un'analisi pratica.

Il metodo modale ibrido (HMM) si basa su uno sviluppo modale non lineare nel dominio frequenza, analogo alle esistenti tecniche di sovrapposizione modali non lineari. Il sistema lineare originale si esprime in coordinate modali generalizzate,

mentre le non linearità si mantengono nel dominio fisico. L'uso di coordinate ibride è una caratteristica fondamentale, mediante la quale viene pienamente indirizzata la localizzazione delle non linearità.

Il HMM fornisce una dimostrazione “esatta” di una FRF non lineare. Evita alcune approssimazioni comuni trovate in altri metodi della NLMA, in cui la variazione degli autovettori ai modi non-risonanti viene spesso ignorata o approssimata.

Confrontata con i metodi della tradizionale NLMA, il metodo HMM si comporta meglio in ambiente sperimentale. Ciò accade perché le non linearità sono racchiuse in un termine non lineare singolo ma più forte (il NLMV), la cui estrazione dai dati misurati risulta più semplice.

Sulla scorta di studi effettuati da Chong & Imregun ed altri si è dedotto che esiste una relazione invariante tra le frequenze naturali e i modi normali non lineari corrispondenti. Il metodo FAM fornisce le basi matematiche per questi lavori, esplicitamente determinanti la relazione analitica.

Il metodo della R-HMM è finalizzato all'identificazione non lineare di grandi strutture. Opera come un'applicazione successiva di diverse tecniche “isolate” anche qui sviluppate, che possono essere usate in modo indipendente per affrontare i diversi aspetti dell'analisi modale non lineare. Raccolte insieme, le tecniche individuali forniscono una robusta metodologia, capace di eseguire una identificazione non lineare all'interno delle solite restrizioni sperimentali, mostrando un'alta efficienza computazionale.

La localizzazione delle non linearità è stata raggiunta mediante un calcolo dei minimi quadrati lineari sulla regione non lineare predefinita della misura arbitraria.

Questo metodo fornisce una localizzazione non ambigua, a condizione che il range di frequenza misurato sia una chiara dimostrazione del sistema.

## 9.2 *Futuri sviluppi*

La formulazione non lineare di questa ricerca si basa sulle funzioni descrittive di primo ordine. Dato che le funzioni multi armoniche sono già disponibili per la maggior parte delle non linearità, può risultare semplice estendere i metodi sviluppati per spiegare i termini di ordine superiore. Anche se questo approccio migliora l'accuratezza dei metodi sviluppati nel percorso diretto, il miglioramento nelle capacità di identificazione non si verifica per effetto delle difficoltà nel misurare le FRF di ordine superiore.

Riguardo alla tecnica di rilevazione NL basata sui footprint del NLV e NLMV, sarà necessario un ulteriore lavoro per incorporare altre non linearità a questo schema, costruendo una biblioteca di footprint per la rilevazione on-line di tipi non lineari. Inoltre, si è visto che un'analisi statistica del footprint –piuttosto del puramente visivo- aumenta l'affidabilità e l'automazione della rivelazione.

Di certo saranno sviluppati altri metodi che riprendono quelli da me analizzati e saranno migliorati. Oppure altri sceglieranno una diversa strada procedurale che porterà a migliori risultati.

**Bibliografia**

- [1] V. VOLTERRA (1959), Theory of functionals and of integral equations. Dover Publ., New York, 1959;
- [2] S. F. Masri and T. K. Caughey. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. *Journal of Applied Mechanics*, 46:433–47, 1979;
- [3] S. Setio, H. D. Setio, and L. Jezequel. A method of nonlinear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration*, 3:421–436, 1984.
- [4] E. F. Crawley and A. C. Aubert. Identification of nonlinear structural elements by force-state mapping. *AIAA Journal*, 24:155–162, 1986;
- [5] H. N. OZGUVEN. A new method for harmonic response of non-proportionally damped structures using undamped modal data. *Journal of Sound and Vibration*, 117(2):313–328, 1987;
- [6] V. FRANCIOSI (1988), *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni*, voll. 1,2,3, Liguori Editore;
- [7] K. WATANABE AND H. SATO (1988), A modal analysis approach to nonlinear multidegrees-of-freedom systems. *ASME Journal of Vibrations, Stress, and Reliability in Design*, 189-3:110–410, 1988;
- [8] M. A. Al-Hadid and J. R. Wright. Developments in the force-state mapping technique for non-linear systems and the extension to the location of nonlinear elements in a lumped-parameter system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(3):269–290, 1989;
- [9] H. N. OZGUVEN. Structural modifications using frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 4(1):53–63, 1990;
- [10] E. Budak and H. N. Ozguven. A method for harmonic response of structures with symmetrical non-linearities. *Proceedings of the 15th*

- International Seminar on Modal Analysis, Leuven, 2:901–915, 1990;
- [11] J. H. Wang and W. K. Chen. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by HBM. The American Society of Mechanical Engineers, 92-GT-8, 1992;
- [12] E. Budak and H. N. Ozguven. Iterative receptance method for determining harmonic response of structures with symmetrical nonlinearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7:75–87, 1993;
- [13] O. Tanrikulu, B. Kuran, H. N. Ozguven, and M. Imregun. Forced harmonic response analysis of non-linear structures. *AIAA Journal* (ISSN 0001-1452), 31:1313–1320, 1993;
- [14] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for nonlinear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124, 1993;
- [15] R. M. Lin, D. J. Ewins, and M. K. Lim. Identification of nonlinearity from analysis of complex modes. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 8(3):290–306, 1993;
- [16] Y. Ren and C. F. Beards. A new receptance-based perturbative multiharmonic balance method for the calculation of the steady state response of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1993;
- [17] S. Hiamang and R. E. Mickens. Harmonic balance: comparison of equation of motion and energy methods. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):179–181, 1993;
- [18] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319–347, 1994;
- [19] N. Boivin, C. Pierre, and S. W. Shaw. Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182(2):225–230, 1995;
- [20] D. Shalev and A. Unger. Nonlinear analysis using a modal-based reduction technique. *Composite structures*, 31:257–263, 1995 ;
- [21] P. M. A. Slaats, J. de Jongh, and A. A. H. J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & structures*, 54(6):1155–1171, 1995;

- [22] H. J. Rice. Identification of weakly nonlinear systems using equivalent linearization. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3):473–481, 1995;
- [23] H. J. Rice and K. Q. Xu. A convergent algorithm for harmonic response prediction of general non-linear structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(1):107–112, 1996;
- [24] B. Kuran and H. N. Ozguven. A modal superposition method for non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, 189-3:315–339, 1996;
- [25] C. Soize and O. Le Fur. Modal identification of weakly nonlinear, multidimensional dynamical systems using a stochastic linearisation method with random coefficients. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1):37–49, 1997;
- [26] A. F. VAKAKIS (1997), Nonlinear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(1):3–22, 1997;
- [27] T. Coleman, M. A. Branch, and A. Grace. *Optimization toolbox for use with MATLAB 5.11*. The MathWorks, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760-1500, 1999;
- [28] L. F. Rosa, C. Magluta, and Ney Roitman. Estimation of modal parameters through a nonlinear optimisation technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(4):593–607, 1999;
- [29] A. BARATTA, O. CORBI (2000), On the Optimality Criterion in Structural Control, *Earesimoquake Engineering and Structural Dynamics 2000*; 29: 141-157;
- [30] P. A. Atkins, J. R. Wright, and K. Worden. An extension of force appropriation to the identification of non-linear multi-degree of freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, 237(1):23–43, 2000;
- [31] M. PASQUINO, F. FABBROCINO (2001), *Appunti di teoria e tecnica di controllo attivo per sistemi strutturali* – CUEN Editore, Napoli (pubblicato in Luglio 2002);
- [32] A. CAROTTI (2001), *Meccanica delle Strutture e Controllo*, Springer Ed.;

- [33] K. WORDEN, G. R. TOMLINSON (2001), *Non-linearity in structural dynamics: detection, identification and modeling*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, Sheffield, 2001;
- [34] E. Pesheck, N. Boivin, and C. Pierre. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. *Nonlinear Dynamics*, 25:183–205, 2001;
- [35] M. I. McEwan, J. R. Wright, J. E. Cooper, and A. Y. T. Leung. A combined modal/finite element analysis technique for the dynamic response of a nonlinear beam to harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 243(4):601–624, 2001;
- [36] Y. C. Liang, D. P. Feng, and J. E. Cooper. Identification of restoring forces in non-linear vibration systems using fuzzy adaptive neural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1):47–58, 2001;
- [37] G. MUSCOLINO (2002), *Dinamica delle Strutture*, McGraw-Hill;
- [38] A. Besancon-Voda and P. Blaha. Describing function approximation of a two-relay system configuration with application to Coulomb friction identification. *Control Engineering Practice*, 10:655–668, 2002;
- [39] M. PASQUINO, F. FABBROCINO, M. MODANO (2004), *Stability Control Analysis of 1-DOF system – 3ECSC Third European Conference on Structural Control - Vienne, July 12-15, 2004* Pubblicata su “European Earesimoquake Engineering” – Vol. II;
- [40] M. PASQUINO, M. BRIGANTE, F. FABBROCINO, M. MODANO (2005), *A Active Vibration Isolation System for a three-dimensional equipment structures – XVII Congresso Aimeta di Meccanica Teorica e Applicata – Firenze 11-15 settembre 2005* – Pubblicato sugli Atti del Convegno;
- [41] M. PASQUINO, M. BRIGANTE, F. FABBROCINO, M. MODANO (2005), *Stability Control Analysis of a M-DOF system – XVII Congresso Aimeta di Meccanica Teorica e Applicata – Firenze 11-15 settembre 2005* – Pubblicato sugli Atti del Convegno;



## **Appendice**

### Appendix A - Sample Test ring n. 1 and n. 2

Test ring n. 1 and n. 2 are identical in terms of the underlying linear system, but contain different types of non linear elements. The test ring n. 1 contains purely cubic stiffness NL elements, while test ring n. 2 has friction damping elements.

#### Underlying linear data

Fig. A.1 shows a 3-DOF system comprised of 3 masses, whose motion is defined at all times by the response coordinates  $y_1$ ,  $y_2$  and  $y_3$ . Each mass is linked to each other and to the ground by stiffness and damping linear elements, creating fully populated linear matrices. The system is driven by a single harmonic force at mass  $m_2$ .

The numerical values for all the coefficients are shown below in matrix format, where a proportional hysteretic damping mechanism has been assumed.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.590 & 0 & 0 \\ 0 & 55.401 & 0 \\ 0 & 0 & 24.212 \end{pmatrix} kg$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{31} & k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200491.263 & -64920.980 & -36279.371 \\ -64920.980 & 398118.365 & -17503.205 \\ -36279.371 & -17503.205 & 132578.825 \end{pmatrix} N/m$$

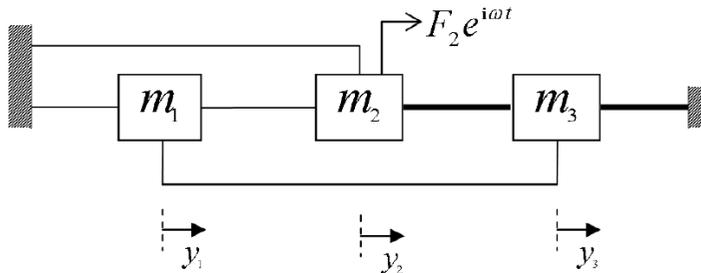


Figure A.1: Diagram for the test ring n. 1 and n. 2

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{Bmatrix} N$$

$$\eta = 0.12\%$$

Formulating the eigenvalue problem, we have:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + i\mathbf{D}) \{Y\} = 0$$

from which the linear matrices of eigenvalues and (mass-normalized) eigenvectors are obtained:

$$\lambda^2 = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 3.9581(1 + 0.0012i) & 0 & 0 \\ 0 & 6.6045(1 + 0.0012i) & 0 \\ 0 & 0 & 8.4458(1 + 0.0012i) \end{pmatrix} \frac{rad^2}{sec^2}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.1115 & -0.0758 & -0.1160 \\ 0.0537 & -0.0727 & 0.0992 \\ 0.13577 & 0.1472 & 0.0343 \end{pmatrix} \frac{rad}{\sqrt{kg}}$$

The corresponding linear response is shown in Fig. A.2, where it can be seen that the three expected resonances occur at approximately 10.01, 12.93 and 14.62 Hz.

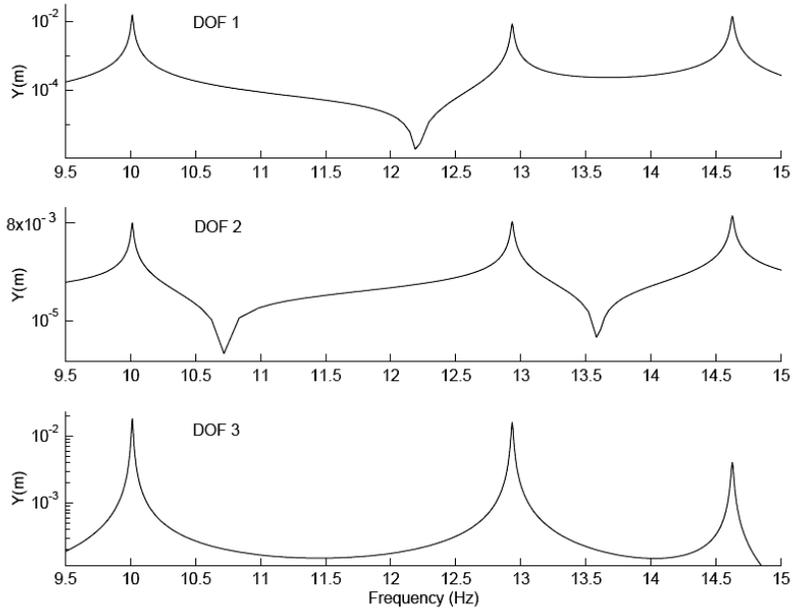


Figure A.2: Sample Cases n.1 and n. 2, linear response

### ***Nonlinear data***

In addition to the linear system, two nonlinear elements have been incorporated, represented by the two thick links in Figure A.1. The numeric values of these coefficients are given in Table A.1, and their correspondent force-displacement curves are shown in Figures A.3 to A.6.

The nonlinear elements were placed as previously described to provide a sufficiently general arrangement considering the size of the system. It has a mixture of grounded and non-grounded NL elements, a “nonlinear region” comprised of

DOFs 2 and 3, as well as a “region away from nonlinearities”, represented by DOF 1.

DOF	DOF	Sample Case #1 $\beta(N/m^3)$	Sample Case #2 $\gamma(N)$	Type
1	1	—	—	
1	2	—	—	
1	3	—	—	
2	2	—	—	
2	3	7.82E6	1.25	non-grounded
3	3	1.44E7	2.10	grounded

Table A.1: Nonlinear coefficients for the Cases n. 1 and n. 2

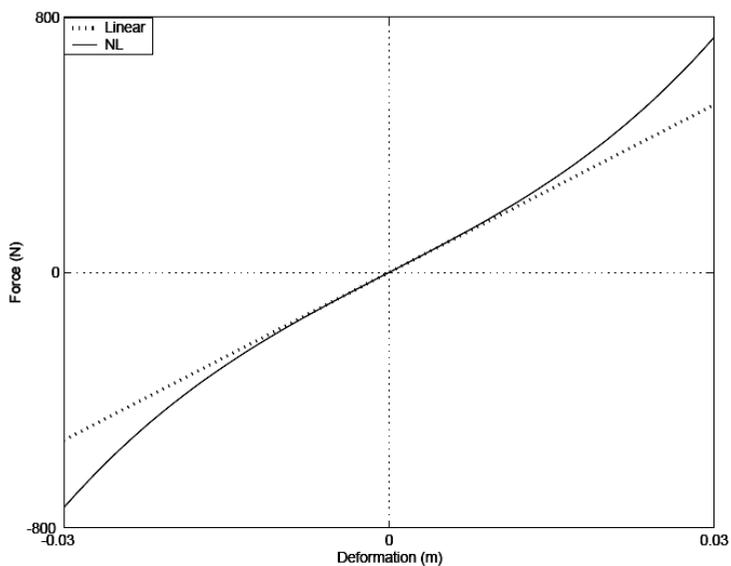


Figure A.3: Case n. 1, non-grounded cubic stiffness spring

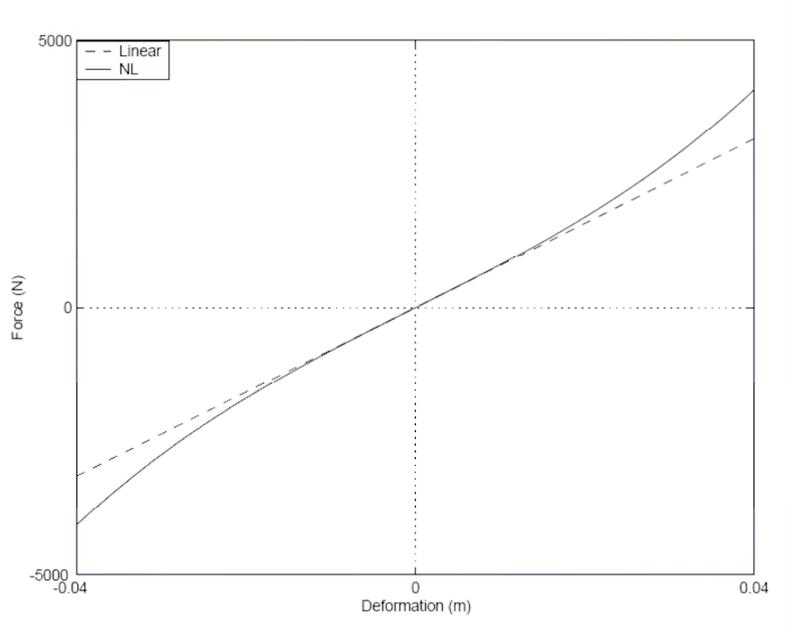


Figure A.4: Case n. 1, grounded cubic stiffness spring

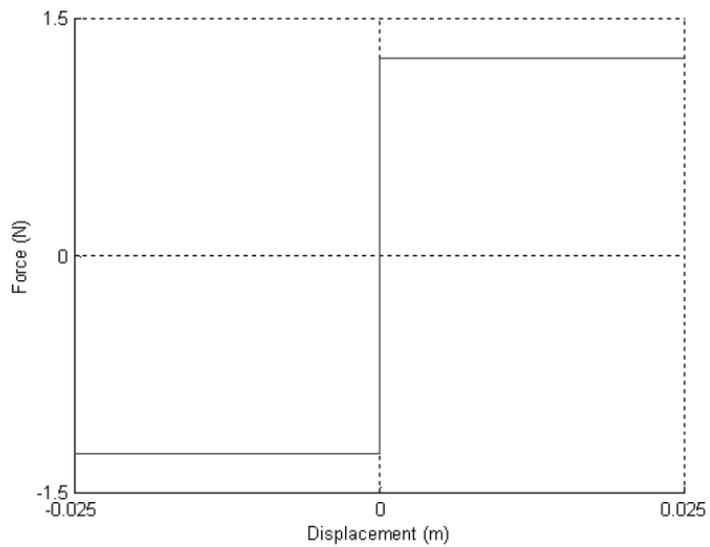


Figure A.5: Case n. 2, non-grounded friction damping element

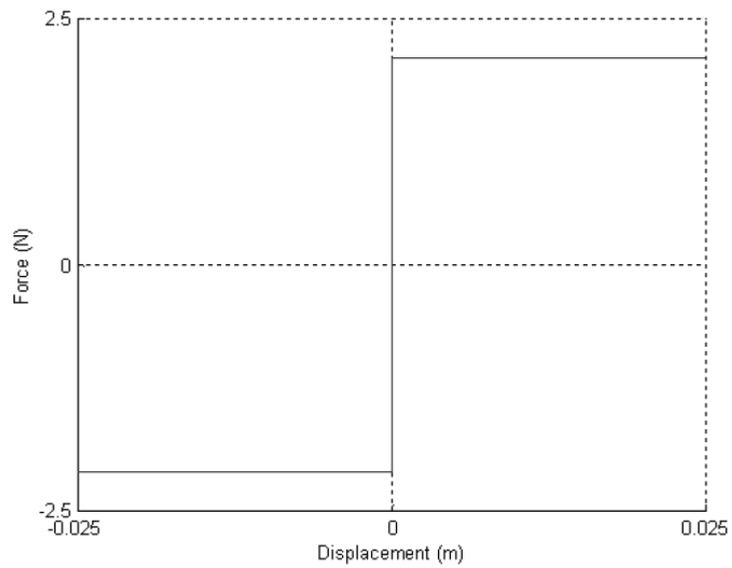


Figure A.6: Case n. 2, grounded friction damping element

### **Appendix B - Test ring n. 3**

A FE model of the Sample Case #3 is shown in Figure B.1, displaying a flat rectangular plate which lies in the “XZ” plane, with its normal aligned in the positive direction of the “Y” axis.

#### ***FEM model***

The properties of the FEM model are listed below:

- Dimensions: 1m x 0.0032m x 1.4m
  
- Material properties:
  - Material Young’s modulus = 207.0E9 N/m<sup>2</sup>
  - Poisson’s ratio = 0.3
  - Material density = 7800 kg/m<sup>3</sup>
  - Material loss factor = 0.1%
  
- Computer model:
  - Number of nodes = 150

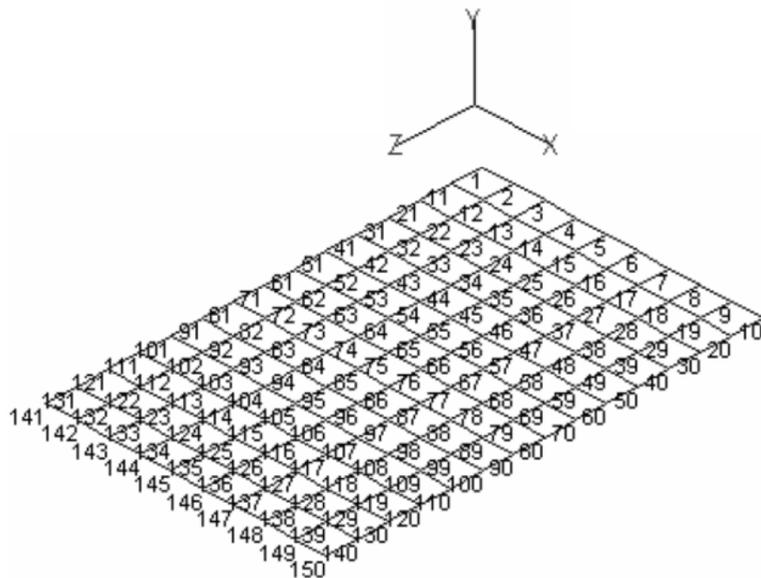


Figure B.1: FEM model of the Case n. 3

- Number of elements = 126 shell elements with 6 DOFs per node ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ). This type of element has a genuine drilling degree of freedom about its main axis.
  - Boundary conditions (BC): clamped at nodes  $\{1, 2, \dots, 10\}$  and  $\{141, 142, \dots, 150\}$ .
  - Total number of DOFs after applying BC ( $N$ )= 780
- Excitation:  $f = \{67Y\}$ , a single harmonic force at DOF 67Y (node 67 in the “Y” direction), with a magnitude of 1.5N. See Fig. B.4.
- Analyzed frequency range: 8-35 Hz., covering the first five modes of the model. This yields  $m = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- Measured region  $\mathfrak{R}$ : DOFs  $\{41Y, 42Y, \dots, 110Y\}$ , see Fig. B.4. Outside this region, measurements are not available.
- Nonlinear region  $\Gamma$ : DOFs  $\{51Y, 52Y, \dots, 100Y\}$ , see Fig. B.4. Nonlinearities are assumed to exist only within this region.
- Nonlinearities: an unknown number of discrete NL elements, attached between any node within  $\Gamma$  and ground, acting along the “Y” axis.

According to the assumptions surrounding the definition of the various regions, we have:

$$n \in \Gamma \in \mathfrak{R} \in N, \quad \text{typically} \quad n \ll \Gamma \leq \mathfrak{R} \ll N \quad (\text{B.1})$$

and

$$f \in \mathfrak{R}, \quad \text{typically} \quad f \ll \mathfrak{R} \quad (\text{B.2})$$

### Linear data

The geometry was built using MODENT<sup>1</sup>, a modal analysis software developed at Imperial College London, and then exported to FINES<sup>2</sup>, a simple but efficient finite element solver. The linear eigenvalue problem was then solved, calculating the first 20 natural frequencies, damping loss factors and translational eigenvectors. The results were sent back to the MODENT suite, allowing the animation of the mode shapes on the computer model.

<sup>1</sup> ICATS users guide. 47 Prince’s Gate, Exhibition Road, London SW7 2QA, 2001.

<sup>2</sup> K. Y. Sanliturk. FINES users guide. Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey, 2000.

Figure B.2 shows the first 4 mode shapes of the structure, where it can be verified that the results are in agreement with the theoretical linear predictions<sup>3</sup> (72).

The information obtained so far constitutes the so-called "underlying linear system" and suffices to describe its linear response. As an example, Fig. B.3.

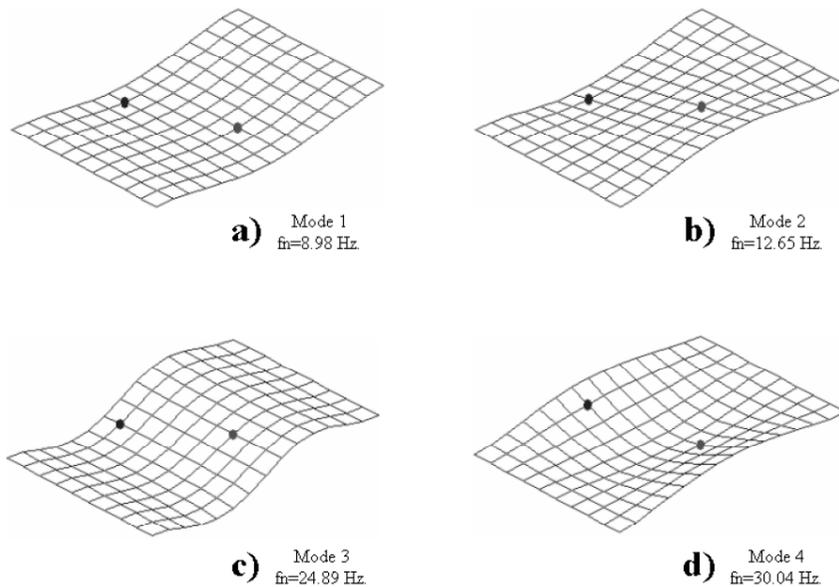


Figure B.2: Visualization of the linear mode shapes on the computer model

shows the linear FRF corresponding to DOF 82Y (node 82 in the "Y" direction). Only the first five modes are shown, as grounded nonlinearities are unlikely to affect higher modes in this type of structure. Because each node in the FEM model contains 6 DOFs, and because the actual formulation manipulates DOFs instead of nodes, the following convention is handy for translating the node number to its correspondent DOF:

---

<sup>3</sup> Patrick L.M. Chang. Vibration of rectangular plates. Master's thesis, Imperial College London, Department of Mechanical Engineering, 1972.

$$\#DOF = (\#node - 1) * 6 + \left. \begin{array}{l} 1, \text{ if } x \text{ direction} \\ 2, \text{ if } y \text{ direction} \\ 3, \text{ if } z \text{ direction} \\ 4, \text{ if } \theta_x \text{ direction} \\ 5, \text{ if } \theta_y \text{ direction} \\ 6, \text{ if } \theta_z \text{ direction} \end{array} \right\} - (10 * 6)$$

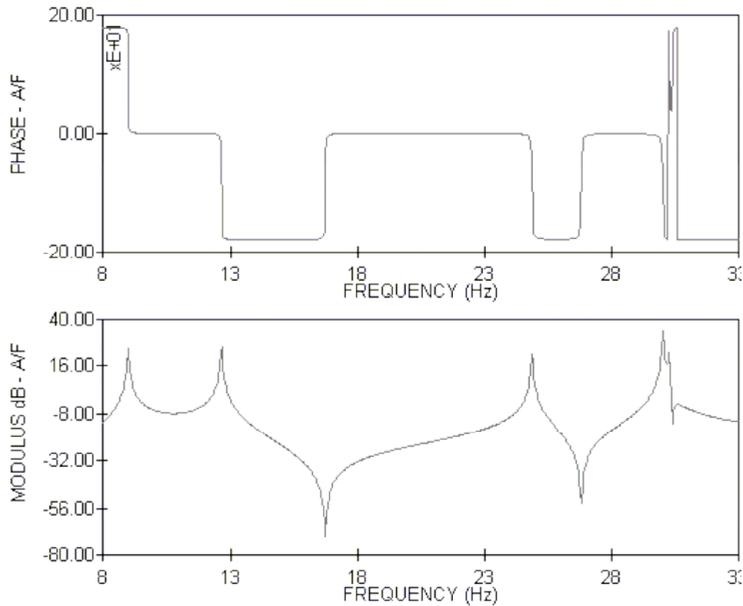


Figure B.3: Linear FRF of the Case n. 3 corresponding to DOF 82Y

where the included term “(10 \_ 6)” accounts for the first 10 clamped nodes at  $Z = 0$ , which are simply dropped from the analysis as their displacement is zero at all times. The clamped nodes at  $Z = 1.4$  are also excluded for the same reason, but they play no further role in renumbering the DOFs because they represent the last rows/columns in the system’s matrices.

As an example, the DOF in which the excitation has been placed is calculated as follows: the force is acting at node 67, along the “Y” axis, so its corresponding DOF is:

$$\left. \begin{aligned} F_{DOF} &= (67 - 1) * 6 + 2 - (10 * 6) \\ F_{DOF} &= 338 \end{aligned} \right|$$

The pre-defined regions for the Sample Case #3, given both in DOF and nodal notation, are:

$$\left. \begin{aligned} N &= \left\{ \underbrace{(1, 2, 3, 4, 5, 6)}_{11(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)}, \underbrace{(7, 8, 9, 10, 11, 12)}_{12(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)}, \dots, \underbrace{(775, \dots, 780)}_{140(x,y,z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\ \mathfrak{R} &= \left\{ \underbrace{182}_{41Y}, \underbrace{188}_{42Y}, \underbrace{194}_{43Y}, \dots, \underbrace{596}_{110Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\ \Gamma &= \left\{ \underbrace{236}_{51Y}, \underbrace{242}_{52Y}, \underbrace{248}_{53Y}, \dots, \underbrace{536}_{100Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \\ f &= \left\{ \underbrace{338}_{67Y} \right\} \begin{array}{l} \text{(DOF notation)} \\ \text{(node notation)} \end{array} \end{aligned} \right|$$

where  $N$ ,  $\mathfrak{R}$ ,  $\Gamma$  and  $f$  are a-priori defined by the analyst. These regions are shown in Fig. B.4.

Nonlinear data

The NL-DOFs for the Sample Case #3 are defined as  $n = \{51, 62, 92\}$ , as shown in Fig. B.4. This vector represents three discrete nonlinear elements attached between each NL-DOF and ground, characterized by cubic stiffness behaviour. According to the restriction posed by the nonlinear region  $\Gamma$ , it can be observed that  $n \not\subset \Gamma$ . The numerical values for the  $\beta$  coefficients are given in Table B.1.

The nonlinear responses were obtained by numerical simulation, with a code based on the “harmonic balance method”, which is a recognized benchmark for nonlinear problems. The particular HBM code used in this work was written by Dr. Evgeny

Petrov <sup>4</sup> under a long term research program at Imperial College London for the vibration analysis of nonlinear structures with different types of nonlinearities, such as friction damping and cubic stiffness.

Figures B.5 and B.6 show the simulated nonlinear response of three randomly chosen DOFs, within  $\mathfrak{R}$ . It can be seen that the first two modes exhibit strong nonlinear effects, while the third mode behaves almost linearly. Higher modes are undistinguishable from their linear counterparts. Fig. B.7(a) shows the linear and nonlinear responses of a randomly chosen DOF 92Y, while Fig. B.7(b) shows the corresponding linear residual Res92Y. A suitable choice of nonlinear modes as a subset of  $m$  would be  $m_{NL} = \{1, 2\}$ , as the remaining behave in an almost linear fashion.

DOF	$\beta(10^6 N/m^3)$
51	1.6
62	1.5
92	7.82

Table B.1: Coefficients  $\beta$  for the Case n. 3

<sup>4</sup> E. Petrov and D. J. Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of non-linear multi-harmonic vibrations of bladed disks. Transactions of the ASME, 125, 2003.

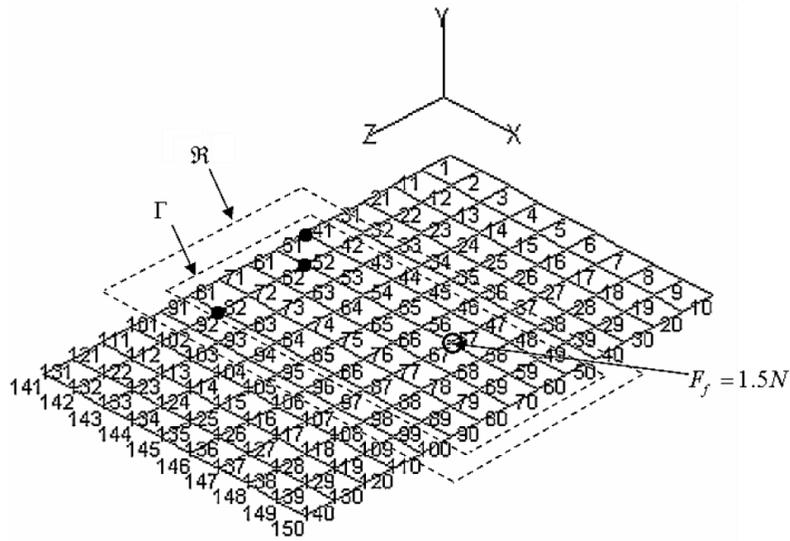


Figure B.4: The measured region  $\mathfrak{R}$ , the nonlinear region  $\Gamma$  and the forced DOF  $f$  for the Case n. 3. The NL-DOFs  $n = \{51, 62, 92\}$  are marked with black dots.

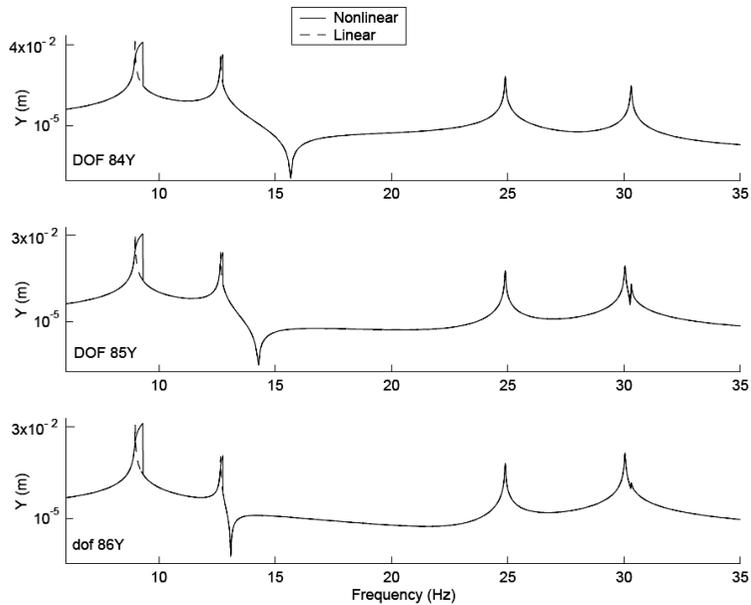


Figure B.5: Nonlinear response of the Case n. 3, for three randomly chosen DOFs. A Zoom-In of modes 1 and 2 is shown in Fig. B.6

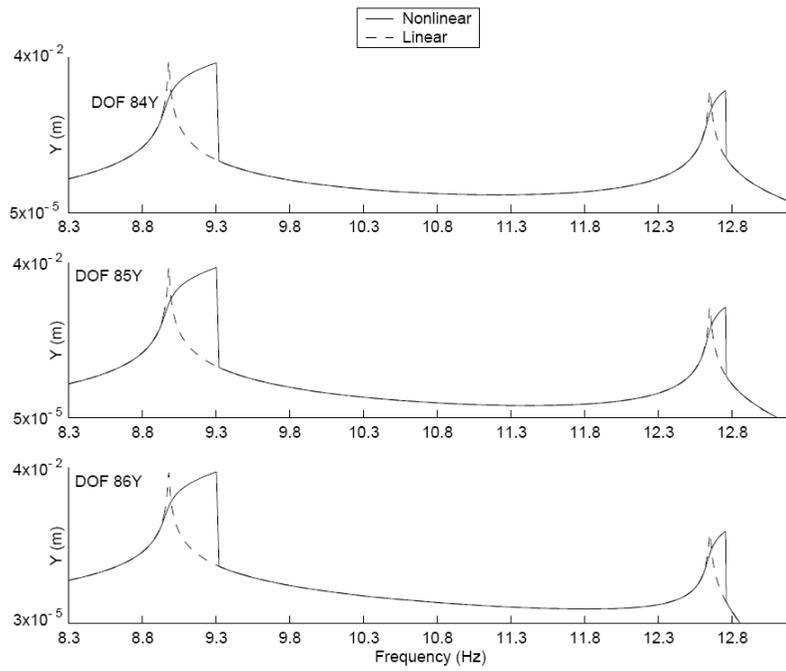


Figure B.6: Zoom-In of the first two modes of Figure B.5

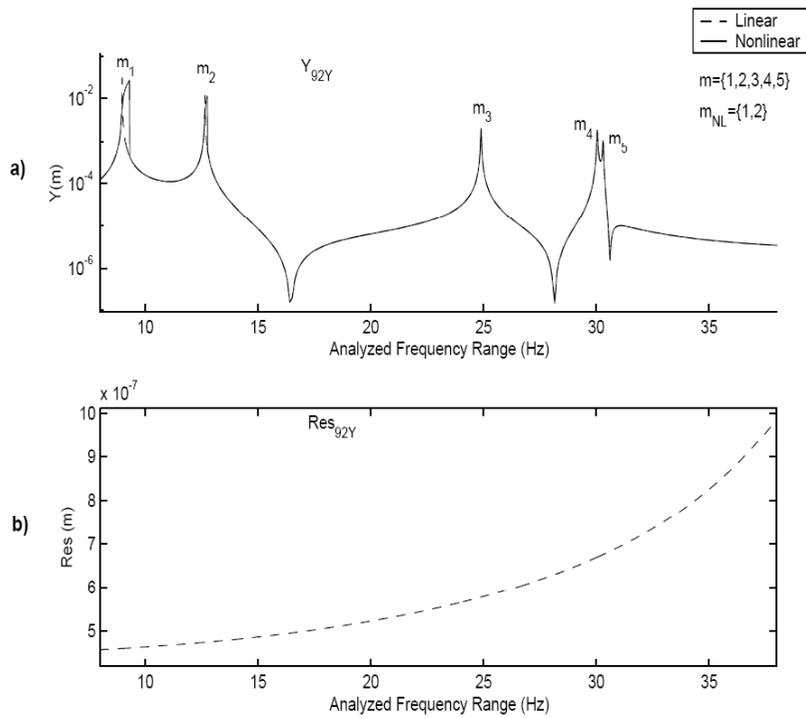


Figure B.7: (a): linear (dashed line) and nonlinear (solid line) responses for DOF 92Y of the Case n.3. (b): linear residual for the same DOF