

SCUOLA DI DOTTORATO IN SCIENZE MATEMATICHE
XVIII ciclo

Condizioni di Trasversalità nel Calcolo Secondario

tesi di dottorato di
Giovanni MORENO

22 ottobre 2006

Tutore
Prof.ssa Assunta RUSSO

Coordinatore del corso
Prof. Salvatore RIONERO

Indice

1	Introduzione	5
1.0.1	5
1.0.2	6
1.0.3	7
1.0.4	8
1.0.5	9
1.0.6	10
1.0.7	10
1.0.8	11
1.0.9	Struttura della Tesi.	11
2	Breve introduzione al Calcolo Secondario	14
2.1	Dalle PDE non lineari ai diffieties.	14
2.1.1	Sistemi di PDE non lineari.	14
2.1.2	Introduzione agli spazi di getti.	14
2.1.3	Spazi di getti.	15
2.1.4	PDE non lineari negli spazi di getti.	16
2.1.5	Conseguenze differenziali.	18
2.1.6	Getti infiniti.	18
2.1.7	Prolungamenti infiniti delle PDE.	19
2.1.8	Connessione di Cartan.	20
2.1.9	PDE non lineari come diffieties.	21
2.2	Elementi di Calcolo Secondario.	22
2.2.1	Equazioni differenziali su sottovarietà.	22
2.2.2	Una rappresentazione grafica.	24
2.2.3	Campi secondari.	25
2.2.4	Derivazioni evolutive.	25
2.2.5	Sezioni generatrici.	28
2.2.6	Operatore di linearizzazione universale.	28
2.2.7	Equazione delle simmetrie superiori di una PDE.	30
2.2.8	Operatori \mathcal{C} -differenziali.	31
2.2.9	Forme orizzontali.	32
2.2.10	Termine E_0 della successione \mathcal{C} -spettrale.	32

2.2.11	Teoria coomologica degli operatori aggiunti.	34
2.2.12	Formula di Green.	34
2.2.13	Termine E_1 della successione \mathcal{C} -spettrale.	35
2.2.14	Funzioni secondarie.	36
2.2.15	Il differenziale $d_1^{0,n}$	37
2.2.16	Derivata secondaria di una funzione secondaria.	38
2.2.17	Il differenziale secondario.	39
2.3	Conclusioni.	40
2.3.1	40
2.3.2	40
2.3.3	40
3	Coppie Esatte.	42
3.0.4	Coppie esatte e coppie derivate.	42
3.0.5	Sequenza spettrale associata ad una coppia esatta.	44
4	Complessi Filtrati con Shift e Sequenze Spettrali Associate.	47
4.0.6	Oggetti filtrati.	47
4.0.7	Oggetti differenziali filtrati.	48
4.0.8	Introduzione alla teoria delle sequenze spettrali.	48
4.0.9	Complessi filtrati con shift.	49
4.0.10	Successione spettrale associata ad un complesso filtrato con shift.	51
4.0.11	Descrizione del termine $E_{r+\sigma}$	52
4.0.12	Descrizione dei morfismi della $(r - 1)$ -esima coppia derivata.	54
4.0.13	Condizioni di regolarità per le filtrazioni con shift.	55
4.0.14	Un risultato di convergenza per le filtrazioni regolari.	56
4.0.15	Un risultato di stabilizzazione per le filtrazioni regolari.	57
4.0.16	Il risultato fondamentale.	58
5	Sequenze Spettrali Filtrate	58
5.0.17	Complessi doppiamente filtrati.	58
5.0.18	Filtrazione del termine E_0	59
5.0.19	Filtrazione del termine E_1	59
5.0.20	Filtrazione del termine E_2	61
5.0.21	Filtrazioni stabili del termine E_2	63

5.0.22	Sequenze spettrali filtrate associate ad una coppia di ideali differenziali.	63
6	Coppie di diffieties	64
6.1	La sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa associata ad una coppia di diffieties	64
6.1.1	Coppie di diffieties.	64
6.1.2	Notazioni.	66
6.1.3	Il termine E_0 relativo.	66
6.1.4	Il termine E_1 relativo.	68
6.2	Coppie di diffieties nel caso fibrato	69
6.2.1	Introduzione.	69
6.2.2	Coordinate locali.	72
6.2.3	Getti lungo distribuzioni.	72
6.2.4	Getti normali.	76
6.2.5	Descrizione di ∂B	78
6.2.6	Descrizione del termine E_0 relativo.	79
6.2.7	Descrizione del termine E_0 quoziente.	82
6.2.8	Derivazioni evolutive su ∂B	82
6.2.9	Linearizzazione universale su ∂B	84
6.2.10	Descrizione della sequenza esatta corta nel termine E_0	86
6.2.11	Descrizione del termine $E_1^{1,n}$ relativo.	87
6.2.12	Il differenziale $d_1^{0,n}$ relativo.	89
6.2.13	L'esempio più semplice.	90
7	Appendice	91

1 Introduzione

1.0.1 La maturità della visione geometrica delle equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) non lineari ha permesso ad A. M. Vinogradov di avanzare la propria ricerca dei fondamenti concettuali del formalismo Lagrangiano in piena generalità, portando, verso la fine degli anni Settanta, ad una costruzione puramente algebrica che permetteva di interpretare in modo naturale le idee basilari del calcolo variazionale. Il nucleo centrale di questa nuova teoria, la successione \mathcal{C} -spettrale, apparve in un lavoro del 1978 (vedi [14]).

In un lavoro quasi contemporaneo di W. M. Tulczyjew si trova una risoluzione dell'operatore di Eulero (vedi [22]). Ciò delinea un'analogia cruciale col complesso di de Rham, che altro non è se non una risoluzione del differenziale standard. La teoria di Vinogradov, opportunamente sviluppata nel corso degli anni, ha svelato che questa analogia non è affatto casuale, e che, anzi, essa rappresenta il primo passo verso un nuovo tipo di calcolo.

Un seguace dello studioso di geometria formale I.M. Gelfand, T. Tsujishita, fornì la propria interpretazione della sequenza \mathcal{C} -spettrale, introducendo, nel 1982, il cosiddetto—e forse, in alcuni ambienti, più noto—bicomplexo variazionale (vedi [23]).

Formalizzare algebricamente le basi del calcolo variazionale era una necessità sentita dalla comunità matematica. Il bicomplexo variazionale, che è a tutti gli effetti una versione in coordinate locali della successione \mathcal{C} -spettrale, è stato subito adottato dai fisici, assai sensibili alle potenzialità dei nuovi strumenti offerti dalla matematica. Ma proprio questa sua formulazione in termini di coordinate impedisce al bicomplexo variazionale di proporsi come base solida per una teoria veramente generale, estesa a problemi globali e non necessariamente dotati di struttura fibrata.

La praticità da un lato, ed i limiti logici dall'altro, accompagnano la storia del bicomplexo variazionale, svoltasi principalmente oltreoceano. La raccolta [11] di P. J. Olver presenta numerosi esempi applicativi, come il calcolo delle simmetrie e delle leggi di conservazione. D'altra parte, il lavoro [2] di I. M. Anderson, concepito per dare una sistemazione finale e consistente alla teoria, non è mai stato completato.

La sequenza \mathcal{C} -spettrale, per sua natura globale e intrinseca, ha dato luo-

go ad un'intera teoria geometrica delle PDE non lineari, ricca e ben lungi dall'essersi esaurita, che si è spinta fino alla formulazione di un nuovo tipo di calcolo, il Calcolo Secondario, costruito con la stessa logica del calcolo standard. Alla base di questo nuovo calcolo vi è proprio l'analogia fra l'operatore di Eulero applicato ad una Lagrangiana, ed il differenziale standard applicato ad una funzione.

1.0.2 Ciascuna definizione, costruzione o teorema del calcolo sulle varietà differenziabili ha un analogo nel Calcolo Secondario. Trovare l'analogo secondario di un concetto standard è un processo chiamato “secondarizzazione”, molto simile alla quantizzazione in Fisica. Ma il metodo soggiacente è profondamente differente. Le procedure di quantizzazione sono varie e talvolta contraddittorie, basate sulla forzatura di formule valide nel caso classico, e giustificate dai riscontri sperimentali piuttosto che dalla coerenza interna.

Il primo passo verso la secondarizzazione è la comprensione della logica del calcolo standard. Una volta individuati i funtori fondamentali del calcolo differenziale, l'intera geometria differenziale classica può essere spiegata in termini di tali funtori e della logica che li governa. Questo lavoro ebbe inizio negli anni settanta a Mosca, ed i primi risultati furono pubblicati nel 1972 (vedi [21]), anche se per un'esposizione più esaustiva e completa si dovette aspettare la monografia [10], apparsa tent'anni più tardi.

La procedura di secondarizzazione ha reso necessaria la rivisitazione di alcune nozioni della matematica standard, adoperando una chiave di lettura più concettuale. È questo il caso dell'integrazione sulle varietà, ritenuta da sempre un aspetto della teoria della misura, che adesso può essere spiegata in termini dei funtori fondamentali. I dettagli di una simile teoria verranno esposti nel libro [3], preparato dal sottoscritto in collaborazione con C. Di Pietro, A. M. Vinogradov, e L. Vitagliano.

La ricerca dei funtori fondamentali del calcolo differenziale non è solo finalizzata alla secondarizzazione, che resta comunque il suo più alto traguardo. Interessantissimo “effetto collaterale” è la scoperta che tali funtori non si applicano soltanto alle varietà differenziabili, ma anche a qualsiasi algebra commutativa, con conseguenze notevoli. Viene infatti automatico esportare i teoremi classici in ambiti più generali, come quello delle algebre graduate—le supervarietà in Fisica.

1.0.3 Chiarita la base logica sulla quale deve essere programmato il Calcolo Secondario, restano da formalizzare gli oggetti del suo studio in un modo appropriato a tale logica. Come trattare dunque le PDE non lineari in modo da poter sfruttare le piene potenzialità della logica del calcolo differenziale? Questa è una prima domanda, la più fondamentale, la cui risposta è rappresentata dalla teoria geometrica delle PDE non lineari.

Ma il cuore del Calcolo Secondario non è tanto l'interpretazione geometrica in sé, quanto la constatazione che, inevitabilmente, ogni “concetto secondarizzato” deve essere una classe di equivalenza costituita da concetti standard analoghi. Per comprendere le ragioni di un simile fenomeno, basta pensare che un “punto secondario”, diversamente da un punto classico, ha una struttura interna. Per manipolare un punto secondario occorre perciò agire sulle sue particelle “interne” mediante gli strumenti del calcolo standard, e poi ricomporre il risultato. Dunque, esistono manipolazioni che, pur alterando drasticamente l'ordine interno di un punto secondario, lo lasciano inalterato esternamente. E tutte queste manipolazioni sono banali nell'ottica del Calcolo Secondario, e pertanto vanno quozientate via. Una manipolazione nel Calcolo Secondario è dunque una classe di equivalenza di manipolazioni.

La scoperta, fondamentale ed inaspettata, è che tali classi di equivalenza sono sempre interpretabili come le classi di coomologia di un opportuno complesso.

La scelta di porre delle classi di coomologia a fondamento dell'intera teoria, è una scelta illuminata dalla Natura, che ha permesso di formulare il cosiddetto principio di osservabilità in Matematica: *una varietà differenziabile è l'insieme degli stati di un sistema fisico, ed ogni suo punto è caratterizzato dalle letture di un numero opportuno, e finito, di strumenti di misura, i cosiddetti osservabili*. Gli osservabili chiudono un'algebra commutativa, sulla quale si può sviluppare un calcolo differenziale completo, senza perdere alcuna informazione rispetto al calcolo usuale, sviluppato geometricamente. Analogamente, per sviluppare il Calcolo Secondario, si deve assumere che tutta l'informazione riguardante una PDE non lineare sia racchiusa in una opportuna—e per ora non meglio specificata—famiglia di osservabili, insensibili alla struttura interna dei punti.

Affiancando il principio di osservabilità alla constatazione matematica che il calcolo differenziale è semplicemente un aspetto dell'algebra commutativa, si perviene ad una procedura di secondarizzazione praticamente obbligata: definire, per ogni concetto del calcolo standard, un opportuno complesso, le cui coomologie forniscono l'analogo secondario di quel concetto. Il complesso

è una sorta di materiale grezzo, il quale, ripulito mediante il passaggio in coomologia, dà come prodotto finito l'oggetto secondario cercato.

1.0.4 Per trovare gli inizi della trattazione geometrica delle PDE non lineari bisogna probabilmente risalire all'amicizia di due grandi personalità, il tedesco Felix Klein ed il norvegese Sophus Lie, incontratisi per la prima volta a Parigi intorno al 1870. Klein si interessava di geometria assiomatica, ed è passato alla storia per il "programma di Erlangen", secondo il quale un oggetto geometrico è descritto dalle sue simmetrie. Lie lavorava invece ad un analogo della teoria di Galois per le equazioni differenziali. Pur essendo molto apprezzato dalla comunità matematica, Lie non si vide mai assegnare una posizione accademica del giusto prestigio.

L'influenza personale di Klein portò Lie, insieme col suo allievo Bäcklund, a quella che a posteriori potrebbe essere definita una generalizzazione verso la geometria differenziale del programma di Erlangen. Lie però non fece in tempo a fornire applicazioni pratiche della sua teoria, ed ebbe pochissimi allievi, insufficienti per portare avanti la sua enorme eredità matematica. Infatti, solo la parte riguardante la classificazione delle algebre di Lie fu sviluppata negli anni successivi, principalmente per merito di W. Killing prima e di Elie Cartan poi, trovando seguito anche nella scuola italiana con L. Bianchi. Nella scuola francese, E. Goursat trovò alcune applicazioni delle algebre di Lie alle equazioni differenziali. Ma il crescente interesse per l'Analisi Funzionale e l'influenza dei bourbakiani contribuirono ad indebolire l'attenzione verso la teoria di Lie applicata allo studio delle equazioni differenziali. Solo Poincaré mosse un passo in questa direzione, ma fu ostacolato dallo stesso Lie, ed il progresso della teoria rimase bloccato per decenni.

Verso la metà del secolo entrò in scena il vero pioniere delle applicazioni pratiche della teoria di Lie, l'esperto di idromeccanica L. V. Ovsiannikov, seguito dai suoi collaboratori (vedi [12]). È assai istruttivo che non sia stato un matematico puro a smuovere le acque, ma uno studioso di meccanica. In molte teorie fisiche è di importanza cruciale avere a disposizione un certo numero di soluzioni esatte delle PDE che le governano. Non solo come sostituto teorico di esperimenti a volte impraticabili, ma anche per orientarsi più facilmente nel mondo delle soluzioni generiche. Per esempio, in Relatività Generale, se non si conoscesse la soluzione di Schwarzschild, l'esperimento della deflessione non avrebbe alcun senso. Il ruolo qui giocato dalla teoria di Lie è che in molti casi le soluzioni esatte vengono scoperte imponendo

l'invarianza rispetto ad una certa algebra di simmetrie.

1.0.5 In seguito, dopo l'introduzione, da parte di Charles Ehresmann, degli spazi di getti, è stato possibile fare ulteriori passi avanti verso una visione geometrica e concettuale delle PDE non lineari, ritratte come sottovarietà di un opportuno spazio di getti. In questo quadro, le soluzioni della PDE si visualizzano come sottovarietà di dimensione pari al numero dei parametri indipendenti contenute all'interno del ritratto geometrico della PDE (come illustrato nella figura 1 di pag. 23). Ma non tutte le sottovarietà di questo tipo sono soluzioni della PDE. La necessità fondamentale di distinguere una sottovarietà dall'altra conduce alla scoperta di una nuova struttura geometrica che accompagna il ritratto della PDE, la cosiddetta distribuzione di Cartan. Se una sottovarietà è tangente alla distribuzione di Cartan, allora essa è una soluzione della PDE.

Tuttavia, una simile costruzione non è soddisfacente da un punto di vista algebrico. Così come, in geometria algebrica, per descrivere l'ideale della sottovarietà individuata da un certo polinomio, occorre aggiungere tutte le conseguenze algebriche di quel polinomio, analogamente, per avere un buon ideale associato ad una PDE non lineare, bisogna arricchire il sistema con tutte le sue conseguenze differenziali. Diversamente dalla geometria algebrica, questa operazione di arricchimento si conclude in uno spazio più grande, la varietà infinito-dimensionale dei getti infiniti. Su tale oggetto geometrico emerge naturalmente l'analogo della distribuzione di Cartan—la cosiddetta struttura di contatto d'ordine infinito—che, sorprendentemente, risulta essere finito-dimensionale e completamente integrabile.

Si realizza così la visione geometrica di una PDE non lineare: un ideale differenzialmente chiuso associato allo spazio dei getti infiniti munito della struttura di contatto d'ordine infinito. E questo è anche uno degli esempi più semplici di un *diffiety*—da *differential variety*, per analogia con “algebraic variety”—l'analogo secondario delle varietà differenziabili. Dalla costruzione stessa dello spazio dei getti infiniti, che sono il limite proiettivo degli spazi dei getti finiti, si ottiene che l'algebra delle funzioni lisce ad esso associata è, dualmente, un'algebra filtrata. Lavorare direttamente con le algebre filtrate permette di evitare tutte quelle problematiche tipiche dell'approccio diretto con spazi infinito-dimensionali, rendendo superflua l'introduzione di una topologia. Il calcolo differenziale sulle algebre filtrate fornisce tutto il materiale grezzo di cui si ha bisogno per costruire gli oggetti secondari. E permette

anche di organizzare le PDE non lineari in una categoria (vedi [15]).

1.0.6 Il passaggio dagli spazi di getti finiti a quelli infiniti è soltanto a posteriori giustificabile in termini di chiusura di un certo ideale di funzioni lisce, una volta che l'analogia con la geometria algebrica è stata precisata. Ma storicamente non è stata questa la causa di un simile allargamento di prospettive. La spinta fondamentale venne da alcuni fatti sperimentali emersi nella teoria dei sistemi integrabili. Si scopersero infatti certe gerarchie di simmetrie delle PDE che sembravano condurre verso oggetti esotici, non più interpretabili geometricamente in nessuno spazio di getti finiti. Soltanto introducendo gli spazi di getti infiniti questi nuovi oggetti assumevano un significato preciso, e vennero chiamati simmetrie superiori.

1.0.7 Il concetto secondario più semplice e in un certo senso più importante è proprio quello di simmetria superiore di una PDE non lineare, analizzato inizialmente da A. M. Vinogradov negli anni 1975–1977 (vedi [7]). La natura coomologica degli oggetti secondari, che è il principale ostacolo alla loro computazione, in alcuni casi può venire semplificata, se in ogni classe di coomologia esiste un qualche rappresentante privilegiato. Ciò accade, ad esempio, per i campi vettoriali secondari sul diffeotipo associato ad una PDE non lineare, chiamati appunto simmetrie superiori. Il rappresentante privilegiato è detto derivazione evolutiva, ed è facilmente accessibile alla computazione. Il volume [1] contiene un'estesa trattazione del soggetto, e numerosi esempi di calcolo pratico.

Trovare il complesso nella cui coomologia vivono le simmetrie superiori non è assolutamente banale. Il punto di partenza, in questo ed in simili casi, è sempre la struttura di contatto d'ordine infinito, unita alla sua peculiarità, la completa integrabilità. L'ideale delle forme differenziali ad essa associato produce infatti una successione spettrale, chiamata \mathcal{C} -spettrale (dall'iniziale di "contatto"), fra i cui termini si individuano importanti oggetti secondari, come le Lagrangiane, le leggi di conservazione, il gruppo delle Lagrangiane banali, o lo stesso operatore di Eulero.

Mediante gli strumenti dell'algebra omologica e della topologia differenziale, si riescono a dimostrare immediatamente, in modo intrinseco ed in piena generalità, risultati come il problema inverso del calcolo delle variazioni od il calcolo del potenziale per una Lagrangiana banale. Simili risultati

sono raccolti nel volume [16], che rappresenta lo stato dell'arte del Calcolo Secondario.

1.0.8 Il programma di secondarizzazione è soltanto agli inizi. Probabilmente alcuni oggetti, come le funzioni secondarie, dovranno essere ripensati in modo profondo, per potersi adattare alla descrizione di fenomeni fisici complessi, come le teorie quantistiche di campo. Ma con gli strumenti già a disposizione si è fatto molto, e la letteratura al riguardo è in crescita continua. Le potenzialità dell'algebra omologica applicata alla teoria geometrica delle PDE non lineari sono ancora enormi.

In questa Tesi verrà studiato l'analogo secondario di una ben nota costruzione di topologia differenziale: la sequenza esatta lunga associata ad una sottovarietà. Essa verrà costruita in modo puramente algebrico, ma alla fine dimostrerà un sorprendente significato geometrico: vi si trovano le cosiddette condizioni di trasversalità del calcolo delle variazioni (menzionate, ad esempio, in [4, 5]). Una tale eventualità era stata prevista in [20], ma l'idea non era mai stata sviluppata fino in fondo.

Per affrontare un simile problema verrà preventivamente sviluppata la teoria delle successioni spettrali associate ad un complesso doppiamente filtrato, ed una teoria delle successioni spettrali associate ad un complesso filtrato con shift.

La struttura di contatto di ordine infinito è responsabile della filtrazione principale dell'algebra delle forme differenziali, che conduce alla sequenza \mathcal{C} -spettrale. Quando si considerano altre informazioni, come le condizioni al contorno o certi dati iniziali, emerge una seconda filtrazione, ed è principalmente per tale motivo che si sviluppa una teoria delle successioni spettrali associate ad un complesso doppiamente filtrato.

Sebbene tali apparati teorici siano sovrabbondanti rispetto al problema centrale, si è ritenuto opportuno portarli avanti in vista di future applicazioni, come il problema di trovare l'analogo secondario della successione di Leray-Serre associata ad un fibrato.

1.0.9 Struttura della Tesi. Tutte le principali nozioni ed i risultati fondamentali sugli spazi di getti e sulla trattazione geometrica delle PDE non lineari verranno brevemente richiamati nella Sezione 2, ed il lettore è rimandato ai volumi [7, 1] per eventuali approfondimenti. Gli articoli [19, 20] verranno assunti come base per la successione \mathcal{C} -spettrale, rappresentando

il principale spunto del presente lavoro. Le notazioni perciò concordano con quelle presenti in queste opere. Le direttive generali del Calcolo Secondario, seguite nel corso di questo lavoro, sono quelle esposte in [16].

Per quanto riguarda l'algebra omologica e la teoria delle successioni spettrali, si rimanda ai testi [8, 6]. Per una maggiore chiarezza, la teoria delle coppie esatte viene brevemente riepilogata nella Sezione 3. La definizione di un complesso filtrato con shift e la costruzione della corrispondente successione spettrale costituiscono la Sezione 4. Nella Sezione 5 vengono introdotte le sequenze spettrali filtrate, e derivati i primi teoremi utili nel seguito.

Una volta chiariti e sviluppati i necessari strumenti algebrici, si passa all'analisi geometrica di un diffiety con bordo, oggetto centrale della Sezione 6. La presenza di siffatto bordo "secondario" determina una filtrazione—molto semplice—nella sequenza \mathcal{C} -spettrale, la cui indotta in coomologia è l'analogo secondario della successione esatta lunga associata ad una varietà con bordo. L'unico termine non banale di tale filtrazione verrà chiamata sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa. Per fornire una visione geometrica più chiara del bordo secondario verrà introdotta la nozione di getti lungo una distribuzione e di getti trasversali. Si dimostrerà infine che uno degli esempi più semplici di diffiety con bordo è lo spazio dei getti infiniti associato ad un problema variazionale con bordo libero, e che il nuovo operatore secondario, chiamato operatore di Eulero relativo, produce simultaneamente le equazioni di Eulero–Lagrange classiche e le condizioni di trasversalità. I risultati fondamentali della Sezione 5 si possono trovare nella nota [17]. Sono attualmente in fase di studio casi più elaborati di diffiety con bordo, ed il caso di un diffiety fibrato, ed i primi risultati verranno pubblicati nelle note successive.

Ringraziamenti. I ringraziamenti vanno innanzitutto al mio maestro, il prof. A. M. Vinogradov, ed alla forte tradizione della scuola russa, che ha reso la geometria uno strumento efficace e trasparente per aggredire alcuni dei problemi classicamente trattati con metodi analitici. Sono altresì riconoscente verso la prof.ssa A. Russo ed il compianto dott. G. Rotondaro, non solo per avermi introdotto alla topologia algebrica ed alla geometria differenziale, ma soprattutto per avermi trasmesso la passione verso queste discipline. Non posso dimenticare le persone che hanno contribuito a creare un ambiente piacevole e stimolante nel quale portare avanti il mio lavoro, i miei amici e colleghi di Dottorato, le ottime persone che ho avuto la fortuna di incontrare a convegni e scuole estive, specialmente alle Diffiety School, e tutte le persone

cui ho insegnato qualcosa. Ringrazio in modo speciale mio nonno Eugenio,
che mi ha aiutato ad arrivare fin qua.

2 Breve introduzione al Calcolo Secondario

2.1 Dalle PDE non lineari ai diffieties.

2.1.1 Sistemi di PDE non lineari. Siano x_1, \dots, x_n delle variabili reali. Un sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} f^1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f^l(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

determina una varietà algebrica \mathcal{E} in \mathbb{R}^n , il cui ideale $I(\mathcal{E})$ è proprio quello generato dai polinomi f^1, \dots, f^l . Un punto che giace in \mathcal{E} è per definizione una soluzione del sistema (1).

Le variabili x_1, \dots, x_n verranno chiamate indipendenti. Si introducano delle nuove variabili u^1, \dots, u^m , chiamate dipendenti. Si consideri inoltre la famiglia di simboli u_σ^j , con $j = 1, \dots, m$, e $\sigma \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indice non nullo di lunghezza $|\sigma| \leq k$.

Si può allora generalizzare il sistema (1) permettendo alle funzioni f^1, \dots, f^l di dipendere da tutte queste nuove coordinate, ed in modo non necessariamente polinomiale. Ciò che si ottiene,

$$\begin{cases} f^1(x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots) = 0 \\ \vdots \\ f^l(x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

è universalmente noto come sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) non lineari d'ordine k in n variabili indipendenti ed m variabili dipendenti.

Ma qual'è adesso l'analogia con (1)? Esiste una varietà \mathcal{E} i cui punti sono soluzioni del sistema (2)?

2.1.2 Introduzione agli spazi di getti. L'idea è ovviamente quella di considerare una varietà, indicata con J^k , le cui coordinate siano proprio

$$x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots, \quad (3)$$

di modo tale che (2) determina una sottovarietà \mathcal{E} di J^k . Ma un punto di \mathcal{E} non è una soluzione del sistema (2). Una soluzione di tale sistema è piuttosto una funzione vettoriale

$$\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m, \dots, v_\sigma^j, \dots), \quad (4)$$

essendo $v^1, \dots, v^m, \dots, v_\sigma^j, \dots$ funzioni di $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, tale che, per ogni punto \mathbf{x} , il punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))$ giaccia in \mathcal{E} , e si abbia inoltre

$$v_\sigma^j(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\sigma|} v^j}{\partial x^\sigma}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

L'insieme dei punti $(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}))$, come grafico della funzione \mathbf{v} , è una sottovarietà n -dimensionale di J^k . La funzione \mathbf{v} , o, equivalentemente, il suo grafico, è quello che verrà chiamato un punto secondario. La condizione (5) si traduce geometricamente nel fatto che la sottovarietà deve essere tangente alla distribuzione di Cartan \mathcal{C} in J^k , quella determinata dalle forme differenziali

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma+1_i}^j dx_i, \quad j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| \leq k-1. \quad (6)$$

Dunque, la sottovarietà \mathcal{E} di J^k e la distribuzione \mathcal{C} permettono insieme di visualizzare geometricamente il sistema (2). Le sue soluzioni sono tutte e sole le sottovarietà di J^k che siano il grafico di una funzione del tipo (4), e che inoltre risultino tangenti a \mathcal{C} . Si osserva subito che il passaggio dal caso algebrico (1) a quello differenziale (2) non è esattamente immediato. Bisogna infatti aggiungere nuove variabili e munire lo spazio così arricchito di un'opportuna distribuzione.

Le fondamenta del Calcolo Secondario vengono gettate proprio con queste semplici osservazioni: una soluzione "secondaria" non è un punto ma una sottovarietà; la distribuzione di Cartan è ciò che permette di selezionare solo le sottovarietà "interessanti"; l'oggetto geometrico \mathcal{E} è solo un "contenitore", ed i suoi singoli punti hanno una rilevanza minore rispetto alle sottovarietà.

2.1.3 Spazi di getti. Per formalizzare meglio i concetti sopra esposti, ed in modo molto più generale, bisogna abbandonare le coordinate locali. Le variabili indipendenti x_1, \dots, x_n saranno rimpiazzate da una varietà astratta n -dimensionale M , e le variabili dipendenti u^1, \dots, u^m saranno intese come

coordinate di fibra di un fibrato liscio m -dimensionale $E \xrightarrow{\pi} M$ su M . Una funzione vettoriale

$$\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m) \quad (7)$$

su M sarà perciò intesa come una sezione (locale) di π . Come intendere allora funzioni vettoriali del tipo (4) in questa nuova visione senza coordinate? Da dove escono fuori le nuove variabili u_σ^j ?

Si consideri la relazione d'equivalenza fra le sezioni (locali) di π che identifica due elementi $s, s' \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi)$ se essi sono tangenti all'ordine k nel punto $x \in M$. Si indichi con $[s]_x^k$ la classe di equivalenza di s , e con J_x^k l'insieme quoziente. Il coprodotto

$$J^k(\pi) \stackrel{\text{def.}}{=} \coprod_{x \in M} J_x^k \quad (8)$$

è in modo naturale un fibrato liscio su M , le cui coordinate di fibra sono proprio $u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots$, ed è chiamato lo *spazio di getti* d'ordine k del fibrato π . Localmente, infatti, una sezione s è del tipo (7), e si pone

$$\begin{aligned} u^j([s]_x^k) &= v^j(x), \\ u_\sigma^j([s]_x^k) &= \frac{\partial^{|\sigma|} v^j}{\partial x^\sigma}(x). \end{aligned}$$

Per semplicità si permette a σ di essere anche il vettore nullo, intendendo nessuna derivazione rispetto alle entrate nulle. Allora, u_0^j è semplicemente u^j .

Prendendo la proiezione canonica $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, si vede che $J^k(\pi)$ coincide col caso banale J^k , analizzato in precedenza.

Oltre alla proiezione π_k di $J^k(\pi)$ su M , si hanno anche le proiezioni $\pi_{k,l} : J^k(\pi) \rightarrow J^l(\pi)$, per ogni $k \geq l$, definite mandando $[s]_x^k$ in $[s]_x^l$. Si osservi che $J^0(\pi)$ non è altro che E .

Data una sezione locale s di π , si definisce la sezione locale $j_k(s)$ di π_k ponendo $(j_k(s))(x) = [s]_x^k$, $x \in M$. Si noti che $j_0(s)$ è proprio s . Per tale motivo $j_k(s)$ si chiama il *prolungamento* (o il *getto*) k -esimo della sezione s .

2.1.4 PDE non lineari negli spazi di getti. L'idea comunemente accettata è che una PDE sia l'insieme degli zeri di un operatore differenziale, così come una varietà algebrica è l'insieme degli zeri di certi polinomi. Come sono legati gli spazi di getti con gli operatori differenziali? La risposta è una semplice dualità funtoriale.

Sia infatti π lineare. Allora $\Gamma(\pi)$ è un $C^\infty(M)$ -modulo. Poiché anche $J^k(\pi)$ risulta essere lineare, allora l'insieme delle sezioni $\Gamma(\pi_k)$ è un $C^\infty(M)$ -modulo esso stesso, indicato col simbolo $\mathcal{J}^k(\pi)$. Si dimostra facilmente che il funtore $\text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathcal{J}^k(\pi), \cdot)$ è naturalmente isomorfo al funtore $\text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot)$ degli operatori differenziali lineari agenti sulle sezioni di π . Più precisamente, preso il modulo $Q = \Gamma(\xi)$ delle sezioni di un fibrato vettoriale $E_\xi \rightarrow M$, ogni operatore differenziale $\Delta \in \text{Diff}_k(\Gamma(\pi), Q)$ è univocamente determinato dall'omomorfismo h_Δ fra $\mathcal{J}^k(\pi)$ e Q definito dalla proprietà $h_\Delta \circ j_k = \Delta$. L'operatore differenziale $j_k : \Gamma(\pi) \rightarrow \mathcal{J}^k(\pi)$, che manda s nel suo getto $j_k(s)$, è d'ordine k , e gioca un ruolo universale analogo a quello del differenziale per le derivazioni.

Ora l'omomorfismo h_Δ altro non è se non una funzione fra $J^k(\pi)$ ed E_ξ , compatibile con le proiezioni, e lineare fibra per fibra. In particolare, esso è una sezione del fibrato indotto $\pi_k^*(\xi)$. Si pone $\mathcal{F}_k(\pi, \xi) = \Gamma(\pi_k^*(\xi))$.

Poiché

$$\Delta(s) = 0 \Leftrightarrow h_\Delta(j_k(s)) = 0, \quad (9)$$

l'equazione differenziale lineare d'ordine k

$$\Delta = 0, \quad (10)$$

imposta sulle sezioni s di π , si può riformulare nella veste

$$h_\Delta = 0 \quad (11)$$

che è un analogo intrinseco (ed in tal caso lineare) della forma (2). Infatti una sezione (locale) di π_k che risulti tangente alla distribuzione di Cartan deve essere necessariamente del tipo $j_k(s)$, e dunque, per la (9), il suo grafico sarà nell'insieme degli zeri di h_Δ se e solo se $\Delta(s) = 0$.

Se invece di h_Δ si considera una qualsiasi sezione $f \in \mathcal{F}_k(\pi, \xi)$, e la corrispondente sottovarietà $\mathcal{E} = \{f = 0\}$ di $J^k(\pi)$, si avrà una formulazione ancora più generale del sistema di PDE non lineari (2). Il modulo $\mathcal{F}_k(\pi, \xi)$, che ha senso anche se π non è lineare, è dunque il *modulo degli operatori differenziali non lineari* d'ordine k su π a valori in ξ .

Anche la distribuzione di Cartan su $J^k(\pi)$ emerge in modo naturale, applicando l'operatore di jet-Spencer ad una certa sezione universale, ed il risultato che si ottiene è la generalizzazione del sistema locale (6).

2.1.5 Conseguenze differenziali. Data la PDE non lineare

$$\mathcal{E} = \{f = 0\} \subseteq J^k(\pi), \quad f \in \mathcal{F}_k(\pi, \xi), \quad (12)$$

si ha che $s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi)$ è una soluzione di \mathcal{E} se e solo se per ogni punto $x \in M$ risulta $f([s]_x^k) = 0$. Ma ciò si può esprimere più elegantemente dicendo che il pull-back $j_k(s)^*(f)$ di f mediante $j_k(s)$, che è una sezione del fibrato ξ , deve essere zero.

Si consideri il caso di un'unica equazione, quando cioè ξ è uguale al fibrato unitario $\mathbf{1}_M$ su M . In tal caso $\mathcal{F}_k(\pi, \mathbf{1}_M)$ si indica semplicemente con $\mathcal{F}_k(\pi)$, ed è l'algebra delle funzioni lisce su $J^k(\pi)$. Sia allora $f \in \mathcal{F}_k(\pi)$, e sia s una soluzione della PDE $\mathcal{E} = \{f = 0\}$. Per definizione di soluzione si ha che $j_k(s)^*(f)$ è la funzione identicamente nulla su M . Sia X una derivazione di M . Naturalmente si avrà che $X(j_k(s)^*(f)) = (X \circ j_k(s)^*)(f)$ è identicamente nullo su M .

Ora è facile accorgersi, applicando la regola della derivazione di una funzione composta, che esiste una derivazione \widehat{X} di $\mathcal{F}_k(\pi)$ a valori in $\mathcal{F}_{k+1}(\pi)$ tale che

$$X \circ j_k(s)^* = j_{k+1}(s)^* \circ \widehat{X} \quad \forall s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi). \quad (13)$$

Segue che una soluzione s dell'equazione differenziale $\mathcal{E} = \{f = 0\}$ d'ordine k è anche una soluzione dell'equazione differenziale $\mathcal{E}' = \{\widehat{X}(f) = 0\}$, stavolta d'ordine $k+1$. L'equazione \mathcal{E}' è una delle cosiddette *conseguenze differenziali* di \mathcal{E} .

2.1.6 Getti infiniti. Per poter completare una PDE con tutte le sue conseguenze differenziali, bisogna essere liberi di aumentare indefinitamente l'ordine dello spazio di getti. Si considera allora il limite

$$J^\infty(\pi) = \lim_{k \rightarrow \infty} J^k(\pi) \quad (14)$$

della torre di proiezioni

$$\dots \rightarrow J^k(\pi) \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} J^{k-1}(\pi) \dots \rightarrow J^1(\pi) \xrightarrow{\pi_{1,0}} E \xrightarrow{\pi} M. \quad (15)$$

Le proiezioni $J^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_{\infty,l}} J^l(\pi)$ e $J^\infty(\pi) \xrightarrow{\pi_\infty} M$ sono definite come limiti, per $k \rightarrow \infty$, delle $\pi_{k,l}$ e delle π_k , rispettivamente. Similmente si definisce, per ogni sezione (locale) s di π , la sezione (locale) $j_\infty(s)$ di π_∞ .

Geometricamente, un punto $\theta = [s]_x^\infty$ di $J^\infty(\pi)$ è definito in modo analogo al caso finito, utilizzando adesso la nozione di tangenza all'ordine infinito. La sequenza

$$\theta \equiv (\dots, [s]_x^k, [s]_x^{k-1}, \dots, [s]_x^1, s(x), x) \quad (16)$$

è l'interpretazione di θ come elemento di $J^\infty(\pi)$, inteso stavolta come limite (14).

L'algebra $\mathcal{F}(\pi)$ delle funzioni lisce su $J^\infty(\pi)$ è definita, dualmente, come il limite della torre di inclusioni

$$C^\infty(M) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_{k-1}(\pi) \xrightarrow{\pi_{k,k-1}^*} \mathcal{F}_k(\pi) \rightarrow \dots \quad (17)$$

Considerando ogni algebra $\mathcal{F}_{k-1}(\pi)$ canonicamente inclusa in $\mathcal{F}_k(\pi)$, il limite $\mathcal{F}(\pi)$ si trova semplicemente considerando l'unione (ossia l'algebra filtrata)

$$\mathcal{F}(\pi) = \bigcup_k \mathcal{F}_k(\pi). \quad (18)$$

Ogni funzione $f \in \mathcal{F}(\pi)$ appartiene dunque ad un qualche $\mathcal{F}_k(\pi)$, e quindi dipende soltanto da un numero finito di parametri. Non vi sono cioè, in questa algebra $\mathcal{F}(\pi)$, funzioni “esotiche” dipendenti da un numero infinito di parametri, che causerebbero problemi sia pratici che concettuali. È interessante notare come, utilizzando il semplice strumento algebrico del limite diretto, si sia automaticamente pervenuti ad una buona algebra di funzioni sulla varietà infinito-dimensionale $J^\infty(\pi)$.

In $\mathcal{F}(\pi)$ vivono, in particolare, le funzioni x_1, \dots, x_n e le funzioni u_σ^j , con $j = 1, \dots, m$, e $\sigma \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indice di lunghezza qualunque. Questo set infinito di funzioni è chiamato *carta standard* sullo spazio di getti infiniti.

2.1.7 Prolungamenti infiniti delle PDE. Data l'equazione differenziale $\mathcal{E} = \{f = 0\}$ d'ordine k , si può riguardare f come un elemento di $\mathcal{F}(\pi)$, e chiaramente tutte le conseguenze differenziali di f si trovano di nuovo in $\mathcal{F}(\pi)$. Sia $I(\mathcal{E})$ l'ideale in $\mathcal{F}(\pi)$ generato da f e da tutte le sue conseguenze differenziali. La sottovarietà $\mathcal{E}_{(\infty)}$ di $J^\infty(\pi)$ determinata da $I(\mathcal{E})$ prende il nome di *prolungamento infinito* dell'equazione $\mathcal{E} \subseteq J^k(\pi)$.

Geometricamente, $\mathcal{E}_{(\infty)}$ è la varietà delle cosiddette *soluzioni formali* dell'equazione $\mathcal{E} = \{f = 0\}$. Infatti, un punto $\theta = [s]_x^\infty$ di $\mathcal{E}_{(\infty)}$ si interpreta geometricamente nel seguente modo: il grafico della sezione $j_k(s)$ è tangente ad \mathcal{E} all'ordine infinito nel punto $\theta' = [s]_x^k = \pi_{\infty,k}(\theta)$. Dunque, s non può

essere considerata una soluzione di \mathcal{E} , perché nulla assicura che il grafico di $j_k(s)$ sia contenuto in \mathcal{E} , ma certamente s approssima con ordine infinito una eventuale soluzione di \mathcal{E} che passasse per il punto θ' . Ecco perché θ si chiama una soluzione formale di \mathcal{E} nel punto θ' . Analiticamente, θ è lo sviluppo in serie di Taylor infinito della funzione s i cui coefficienti risolvono formalmente la relazione $f \circ j_k(s) = 0$ nel punto x .

La costruzione di $\mathcal{E}_{(\infty)}$ è estremamente importante per due motivi. In primo luogo, essa rappresenta il fallimento del primo tentativo di raggiungere, attraverso la geometria standard, il fantomatico “spazio delle soluzioni” di una PDE non lineare. L’oggetto geometrico $\mathcal{E}_{(\infty)}$, sebbene ricco di informazioni e di struttura, *non è affatto, così com’è, lo spazio delle soluzioni di \mathcal{E}* . Ma in questo fallimento è nascosta la chiave per portare avanti la teoria nella giusta direzione: il fatto importantissimo che l’ideale $I(\mathcal{E})$ della sotto-varietà $\mathcal{E}_{(\infty)}$, sia differenzialmente chiuso, ossia chiuso rispetto all’aggiunta di conseguenze differenziali.

2.1.8 Connessione di Cartan. Analogamente a quanto fatto in (13), preso un campo X su M , si definisce in modo unico un campo \widehat{X} su $J^\infty(\pi)$ ponendo

$$X \circ j_\infty(s)^* = j_\infty(s)^* \circ \widehat{X} \quad \forall s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi). \quad (19)$$

\widehat{X} si chiama il *sollevamento* di X , e si può pensare così: data una funzione $f \in \mathcal{F}(\pi)$, la funzione $\widehat{X}(f)$ è quella che, valutata su un punto $[s]_x^\infty$, dà lo stesso risultato che si avrebbe applicando il vettore tangente X_x alla funzione $f \circ j_\infty(s)$. Perciò, se quest’ultima è identicamente nulla, anche $j_\infty(s)^*(\widehat{X}(f))$ lo sarà, e quindi $\widehat{X}(f) = 0$ è una conseguenza differenziale di $f = 0$.

La relazione (19) permette di trovare l’espressione coordinata del sollevamento. Un esempio notevole è dato dal sollevamento dell’ i -esimo campo coordinato $\frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$D_i \stackrel{\text{def.}}{=} \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^m} u_{\sigma+1_i}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \quad (20)$$

la cosiddetta derivata totale rispetto alla coordinata x_i .

La corrispondenza $X \mapsto \widehat{X}$ dà luogo ad una connessione nel fibrato π_∞ , che risulta essere piatta. Essa è la connessione di Cartan. La distribuzione ad essa associata è la struttura di contatto d’ordine infinito, indicata col

simbolo \mathcal{C} , spesso chiamata semplicemente distribuzione di Cartan. Viene determinata dal sistema di Pfaff infinito

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma+1_i}^j dx_i, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sigma \in \mathbb{N}_0^n \quad (21)$$

delle forme di Cartan su $J^\infty(\pi)$. Il simbolo \mathcal{C} viene usato anche per indicare l'ideale delle forme differenziali generato dalle forme di Cartan. È chiaro inoltre che tutte e sole le sottovarietà integrali di tale distribuzione sono i grafici di getti infiniti di sezioni di π .

2.1.9 PDE non lineari come diffieties. Il fatto che l'ideale $I(\mathcal{E})$ di $\mathcal{E}_{(\infty)}$ sia differenzialmente chiuso significa geometricamente che la distribuzione di Cartan su $J^\infty(\pi)$ è tangente ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$. Dunque, la distribuzione ristretta ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$, indicata col simbolo $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, è nuovamente n -dimensionale e completamente integrabile. La coppia $(\mathcal{E}_{(\infty)}, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ è l'esempio più semplice di un diffiety. Il numero n delle variabili indipendenti, che coincide con la dimensione della distribuzione $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, è detto la Dimensione del diffiety.

Definizione 1. Una coppia $\mathcal{O} = (M, \Delta)$, dove M è una varietà liscia, eventualmente infinito-dimensionale, e Δ è una distribuzione finito-dimensionale e completamente integrabile su M , è detta, per definizione, un diffiety. Il numero $\text{Dim}(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def.}}{=} \dim \Delta$ si chiama la Dimensione di \mathcal{O} .

M è detto il sostegno del diffiety \mathcal{O} , mentre Δ sarà la sua distribuzione.

Si osservi che, una volta costruita la distribuzione ristretta $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ci si può dimenticare dell'ambiente $J^\infty(\pi)$, il cui unico ruolo è quello di fornire un "ricettacolo universale" dal quale ritagliare tutti gli oggetti del tipo $\mathcal{E}_{(\infty)}$. L'algebra delle funzioni lisce su $\mathcal{E}_{(\infty)}$ è definita naturalmente come quoziente

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}_{(\infty)}) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathcal{F}(\pi)}{I(\mathcal{E})}, \quad (22)$$

in perfetta analogia con quanto si fa in geometria algebrica. $\mathcal{F}(\mathcal{E}_{(\infty)})$ è un'algebra filtrata, e come prima ci si può dimenticare della sua origine, considerandola semplicemente come oggetto astratto.

I *punti secondari* del diffiety $(\mathcal{E}_{(\infty)}, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$ si definiscono come le sottovarietà integrali di $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ossia le soluzioni di \mathcal{E} . Un punto secondario può essere identificato con una sezione s di π , col suo getto infinito $j_\infty(s)$, o col

grafico di quest'ultimo. Ecco dunque il punto di arrivo: non uno spazio delle soluzioni, ma *una nuova entità geometrica*, il diffiety, governata da un nuovo tipo di calcolo, il Calcolo Secondario.

2.2 Elementi di Calcolo Secondario.

2.2.1 Equazioni differenziali su sottovarietà. Prima di esaminare i concetti base del Calcolo Secondario, si richiama qui un'importante costruzione che permette di generalizzare gli spazi di getti di un fibrato ed i sistemi di PDE non lineari. Tale costruzione è assai utile, ad esempio, per descrivere l'equazione di propagazione delle singolarità di una certa PDE (vedi [18]).

Invece di una varietà E fibrata sulla varietà n -dimensionale M , si considera semplicemente una varietà $(n+m)$ -dimensionale E , e si prendono tutte le sottovarietà n -dimensionali L in essa immerse. Dato un punto $y \in E$, si definisce la relazione di equivalenza di tangenza all'ordine k nel punto y fra tali sottovarietà. Sia $[L]_y^k$ la classe d'equivalenza individuata da L , e sia $J_y^k(E, n)$ l'insieme quoziente. Il coprodotto

$$J^k(E, n) \stackrel{\text{def.}}{=} \coprod_{y \in E} J_y^k(E, n) \quad (23)$$

è una varietà chiamata *spazio dei k -getti delle sottovarietà n -dimensionali di E* . Data una sottovarietà n -dimensionale L di E , si definisce il suo k -getto $j_k(L)$ ponendo $j_k(L)(y) = [L]_y^k$ per ogni $y \in L$. In altre parole, l'immersione $L \subseteq E$ di L in E si prolunga all'immersione

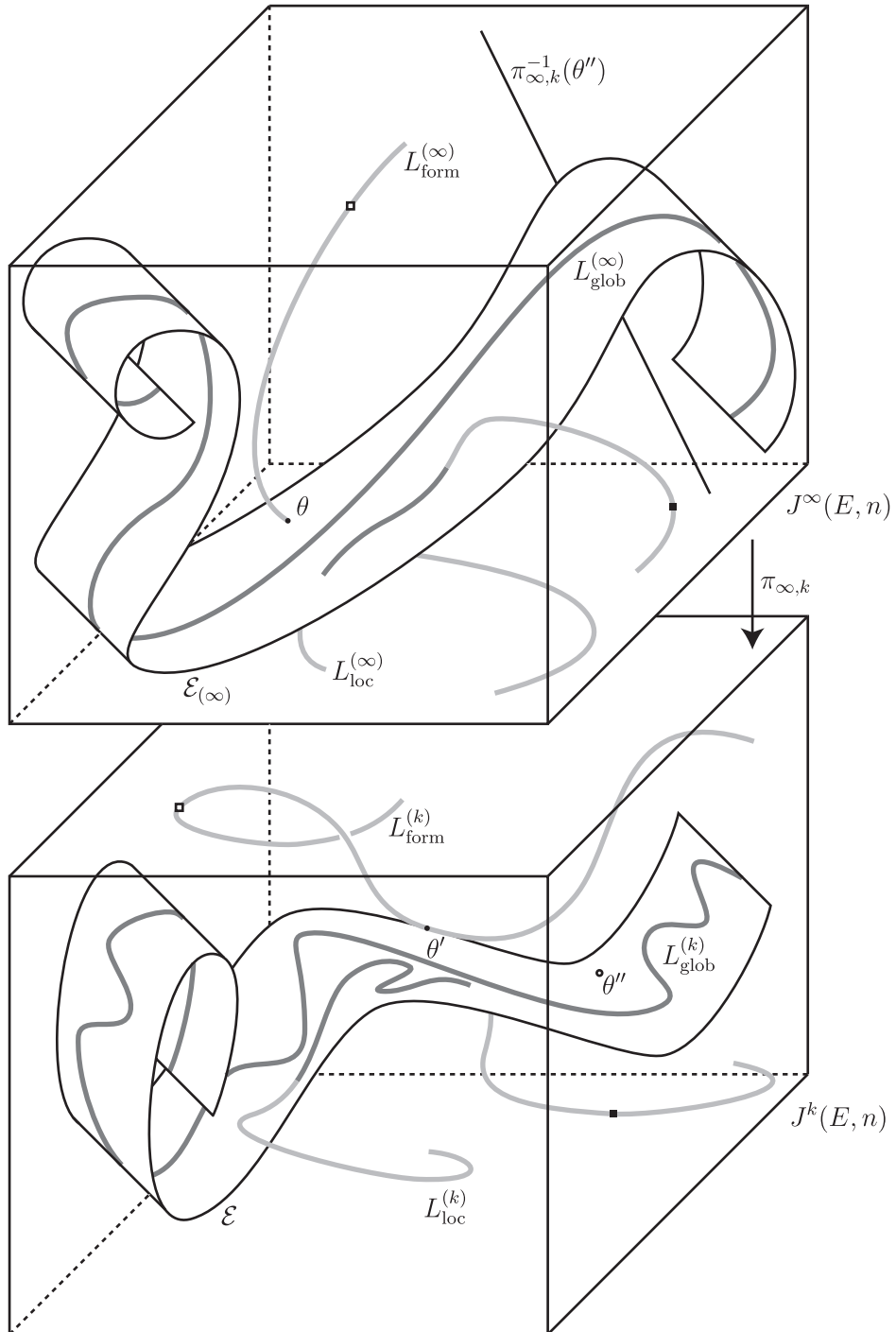
$$L \xrightarrow{j_k(L)} J^k(E, n) \quad (24)$$

dello stesso L in $J^k(E, n)$, incorporando tutte le informazioni differenziali su L fino all'ordine k . L'immagine di tale immersione si denota con $L^{(k)}$.

Il piano di Cartan \mathcal{C}_θ nel punto $\theta \in J^k(E, n)$ è definito come lo span di tutti i piani tangenti alle sottovarietà del tipo $L^{(k)}$ passanti per θ . Portando tutto al limite per $k \rightarrow \infty$ si ottiene lo spazio $J^\infty(E, n)$, ed il getto infinito $j_\infty(L)$ della sottovarietà L , la cui immagine si denota con $L^{(\infty)}$.

Una sottovarietà \mathcal{E} di $J^k(E, n)$ è detta equazione differenziale d'ordine k imposta sulle sottovarietà n -dimensionali di E . Il prolungamento infinito $\mathcal{E}_{(\infty)}$ si definisce in modo geometrico analogamente al caso precedente, ed esso risulta tangente alla struttura di contatto d'ordine infinito. Si ottiene così nuovamente un diffiety, i cui punti secondari sono elementi del tipo $L^{(\infty)}$.

Figura 1: Spazi di getti, equazioni differenziali e loro soluzioni.



Vale la pena osservare che la varietà $J^\infty(E, n)$ può essere ricoperta con degli aperti tutti isomorfi allo spazio di getti $J^\infty(\pi)$, chiamati *carte affini*. Molte delle costruzioni su $J^\infty(E, n)$ si localizzano sulle carte affini, dove la struttura fibrata permette notevoli semplificazioni, come nel caso delle simmetrie superiori di una PDE.

2.2.2 Una rappresentazione grafica. In Figura 1 si incontra una rappresentazione grafica della teoria geometrica fin qui esposta. Gli spazi di getti $J^k(E, n)$ e $J^\infty(E, n)$ sono raffigurati come “contenitori” nei quali vivono l’equazione differenziale \mathcal{E} ed il suo prolungamento infinito $\mathcal{E}_{(\infty)}$, rispettivamente, visualizzate come superfici curve. I “lacci” sono invece i prolungamenti (finiti ed infiniti) delle sottovarietà n -dimensionali L . Si ricordi che nel caso fibrato, ossia di $J^\infty(\pi)$, tali sottovarietà non sono altro che i grafici delle sezioni di π .

La sottovarietà L_{glob} è una soluzione globale di \mathcal{E} , perché il suo prolungamento k -esimo giace completamente in quest’ultima. L_{loc} è, invece, una soluzione locale di \mathcal{E} . Il punto θ è un esempio di soluzione formale di \mathcal{E} , perché esso è il getto infinito di una sottovarietà L_{form} il cui k -getto tocca \mathcal{E} nel punto $\theta' = \pi_{\infty, k}^{(k)}(\theta)$ con ordine di tangenza infinito.

Si osservi che $L_{\text{form}}^{(k)}$ tocca \mathcal{E} unicamente nel punto θ' , e che potrebbero non esistere soluzioni di \mathcal{E} , nemmeno locali, passanti per tale punto. O addirittura potrebbe esistere un punto $\theta'' \in \mathcal{E}$ per il quale non passa neppure una soluzione formale, ed in tal caso la fibra $\pi_{\infty, k}^{-1}(\theta'')$ non può incidere $\mathcal{E}_{(\infty)}$.

Sebbene sia difficile immaginare concretamente uno spazio ad infinite dimensioni, e pensare a quali possano essere le sue peculiarità, è interessante soffermarsi su di un fenomeno curioso che si manifesta nello spazio dei getti infiniti $J^\infty(E, n)$. Se due sottovarietà del tipo $L^{(\infty)}$ si intersecano, allora esse sono anche tangenti! Ciò si spiega informalmente osservando che, passando al prolungamento infinito, tutta l’informazione differenziale contenuta in L , che è per sua natura locale, diventa, in $L^{(\infty)}$, di natura puntuale, ossia codificata da coordinate aggiuntive, e dunque non esiste più il concetto di tangenza, ma solo quello di secanza. Per tale motivo la sottovarietà $L_{\text{form}}^{(\infty)}$ è stata rappresentata secante ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$, mentre, nello spazio di getti finiti, $L_{\text{form}}^{(k)}$ è tangente ad \mathcal{E} con ordine infinito.

Il passaggio ai getti infiniti dà luogo, sostanzialmente, ad un fenomeno analogo, per sottovarietà arbitrarie, alla risoluzione delle singolarità per le curve mediante sollevamento alla varietà tangente.

2.2.3 Campi secondari. Si consideri il diffiety $(\mathcal{E}_{(\infty)}, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$. Sia $\Lambda(\mathcal{E}_{(\infty)})$ l'algebra differenziale delle forme su $\mathcal{E}_{(\infty)}$, e sia $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}_{(\infty)})$ il modulo delle 1-forme di Cartan.

Una derivazione $X \in D(\mathcal{F}(\mathcal{E}_{(\infty)}))$ è detta *simmetria infinitesimale* della distribuzione di Cartan, o \mathcal{C} -campo su $\mathcal{E}_{(\infty)}$, intuitivamente, “se il suo flusso preserva le sottovarietà integrali di $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ ”. Ma non tutte le derivazioni ammettono flusso, nel caso di varietà infinito-dimensionali come $\mathcal{E}_{(\infty)}$, ed allora l'affermazione intuitiva va sostituita con il suo analogo infinitesimale, ossia che la derivata di Lie rispetto ad X di una forma di Cartan deve di nuovo essere una forma di Cartan,

$$L_X (\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}_{(\infty)})) \subseteq \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}_{(\infty)}). \quad (25)$$

Si denoti con $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_{(\infty)})$ l'insieme di tutti i \mathcal{C} -campi su $\mathcal{E}_{(\infty)}$. Esso è una sottoalgebra di Lie di $D(\mathcal{F}(\mathcal{E}_{(\infty)}))$. In tale algebra vive un ideale notevole, l'algebra di Lie $\mathcal{C}D(\mathcal{E}_{(\infty)})$ dei campi che *appartengono* alla distribuzione di Cartan $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Immaginando che uno di tali campi ammettesse flusso, un tale flusso farebbe scivolare le sottovarietà integrali della distribuzione lungo se stesse, e dunque tali sottovarietà apparirebbero immobili ad un osservatore insensibile alla loro struttura interna. Per il principio di osservabilità, tali \mathcal{C} -campi vanno equiparati allo zero, ed è per questo motivo che l'algebra di Lie

$$\text{sym } \mathcal{E} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_{(\infty)})}{\mathcal{C}D(\mathcal{E}_{(\infty)})} \quad (26)$$

prende il nome di algebra delle simmetrie infinitesimali superiori dell'equazione \mathcal{E} . Esse rappresentano la versione più semplice di campi secondari sul diffiety $(\mathcal{E}_{(\infty)}, \mathcal{C}(\mathcal{E}))$. Come annunciato, un campo secondario non è un campo vettoriale, ma una classe di equivalenza di campi vettoriali. In Figura 2 è rappresentato un diffiety molto semplice, i cui punti secondari sono circonferenze concentriche. Sia il campo normale (frece scure) che quello tangenziale (frece chiare) sono \mathcal{C} -campi, ma solo il primo è non banale, mentre il secondo appartiene alla distribuzione.

Nel caso particolare $\mathcal{E} = J^\infty(\pi)$, l'algebra $\text{sym } J^\infty(\pi)$ si indica semplicemente con \varkappa , ed è dotata di una struttura di modulo notevole, spiegata qui di seguito.

2.2.4 Derivazioni evolutive. In ogni punto θ dello spazio di getti infiniti $J^\infty(\pi)$, lo spazio tangente (infinito-dimensionale) $T_\theta(J^\infty(\pi))$ si spezza

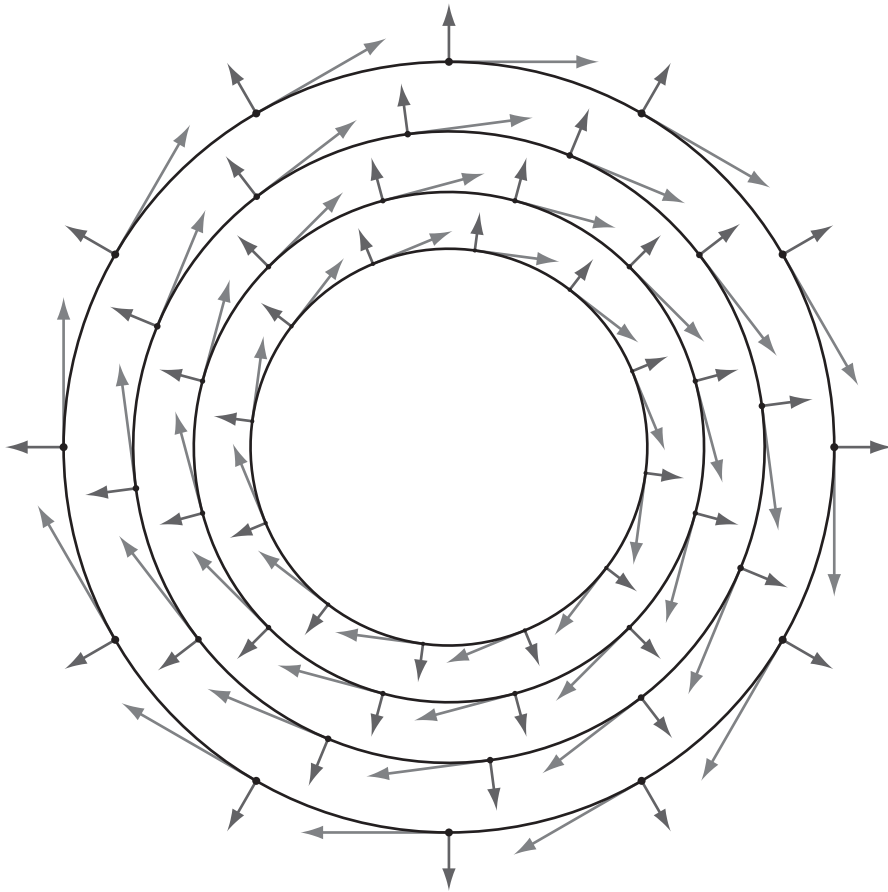


Figura 2: \mathcal{C} -campi banali e non banali.

nella somma diretta di due sottospazi notevoli: quello di Cartan \mathcal{C}_θ , che è n -dimensionale, e quello tangente alla fibra di π_∞ passante per θ , che è ovviamente infinito-dimensionale. Il primo sottospazio è detto *orizzontale*, mentre il secondo è detto *verticale*. Ciò permette di semplificare la descrizione di \varkappa .

Sia infatti $\chi = [X] \in \varkappa$ una simmetria superiore di $J^\infty(\pi)$, e si decomponga X come somma di un campo verticale ed uno orizzontale, ossia giacente nella distribuzione di Cartan: $X = \mathfrak{D} + Y$. Allora la simmetria superiore χ può essere identificata con l'unico campo verticale \mathfrak{D} che la rappresenta, essendo $[X] = [\mathfrak{D}]$. In coordinate locali, la verticalità di \mathfrak{D} sarà espressa dalla formula

$$\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} \varphi_j^\sigma \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}. \quad (27)$$

Ma non è tutto. Il “flusso” di \mathfrak{D} deve mandare sottovarietà integrali in sottovarietà integrali, e tali sottovarietà sono localmente il grafico di getti infiniti di sezioni di π . Per spostare il grafico del getto infinito di una sezione, basta agire sulla sezione stessa, perché le informazioni differenziali aggiuntive si spostano di conseguenza. Questa è la spiegazione intuitiva del perché fra tutti i coefficienti φ_j^σ soltanto i primi m sono quelli significativi. Rigorosamente, imponendo la (25) su \mathfrak{D} , si trova che

$$D_i(\varphi_j^\sigma) = \varphi_j^{\sigma+1_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \sigma \in \mathbb{N}_0^n. \quad (28)$$

Per individuare il campo verticale \mathfrak{D} , basta specificare una m -pla di coefficienti $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ in $\mathcal{F}(\pi)$, e porre $\varphi_j^\sigma = D_\sigma(\varphi_j)$, essendo D_σ la composizione $D_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ D_n^{\sigma_n}$. Invece di \mathfrak{D} si scrive \mathfrak{D}_φ , e tale campo verticale si chiama la *derivazione evolutiva* determinata dalla *sezione generatrice* φ . Il nome “sezione” deriva dal fatto che, in termini più intrinseci, l' m -pla $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ è solo la rappresentazione coordinata di una sezione φ del fibrato indotto $\pi_\infty^*(\pi)$, ossia un elemento dell' $\mathcal{F}(\pi)$ -modulo $\mathcal{F}(\pi, \pi)$, il cosiddetto modulo delle sezioni generatrici delle simmetrie superiori di $J^\infty(\pi)$.

Si ha dunque l'isomorfismo notevole

$$\varkappa \ni \chi = [\mathfrak{D}_\varphi + Y] \xrightarrow{\cong} \varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi) \quad (29)$$

che permette di dare una struttura di modulo all'algebra di Lie \varkappa . Si riporta per maggior chiarezza l'espressione di \mathfrak{D}_φ ,

$$\mathfrak{D}_\varphi = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} D_\sigma(\varphi_j) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}. \quad (30)$$

2.2.5 Sezioni generatrici. Il significato geometrico della sezione generatrice φ della derivata evolutiva \mathfrak{D}_φ è assai trasparente. Si ricordi che il fibrato indotto $\pi_\infty^*(\pi)$ è quello costruito attaccando sopra ogni punto θ di $J^\infty(\pi)$ la fibra di π che cresce sul punto $\pi_\infty(\theta)$. Una sezione φ di tale fibrato, dunque, assegna al punto $\theta = [s]_x^\infty$, un punto $\varphi(\theta)$ della fibra $\pi^{-1}(x)$. Ma π è un fibrato vettoriale, e vi è l'identificazione canonica dello spazio vettoriale $\pi^{-1}(x)$ con lo spazio tangente $T_{s(x)}(\pi^{-1}(x))$ a tale fibra nel punto $s(x)$.

Sottoposto all'azione del “flusso” di \mathfrak{D}_φ , il punto θ evolve nel tempo. Sia θ_t tale evoluzione, con $\theta_0 = \theta$. Ma \mathfrak{D}_φ è un \mathcal{C} -campo, e allora, dopo un tempo t , il suo “flusso” avrà mandato il grafico di $j_\infty(s)$ nel grafico di un certo $j_\infty(s_t)$, con $s_0 = s$, perché esso deve preservare le sottovarietà che sono il grafico del getto infinito di una sezione di π . Segue che $\theta_t = [s_t]_x^\infty$, dato che \mathfrak{D}_φ , essendo verticale, non sposta il punto base x .

Si ha allora la curva $t \mapsto s_t(x)$ nella fibra $\pi^{-1}(x)$. Il vettore tangente in 0 a tale curva giace nello spazio $T_{s(x)}(\pi^{-1}(x))$, che è identificato con $\pi^{-1}(x)$. Ma questo vettore è proprio $\varphi([s]_x^\infty)$, che guadagna così un chiaro significato geometrico: la velocità con la quale cambia il valore in x della sezione s , che evolve sotto l'azione del “flusso” di \mathfrak{D}_φ , come si vede in Figura 3. Il nome “evolutiva” che si dà alla derivazione \mathfrak{D}_φ dovrebbe a tal punto risultare evidente.

2.2.6 Operatore di linearizzazione universale. La costruzione che segue rappresenta il primo passo verso una definizione corretta del differenziale secondario. Si consideri il prolungamento infinito $\mathcal{E}_{(\infty)}$ dell'equazione $\mathcal{E} = \{f = 0\}$, dove per semplicità $f \in \mathcal{F}(\pi)$. Una derivazione evolutiva \mathfrak{D}_φ sarà tangente ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$ se e solo se essa preserva l'ideale $I(\mathcal{E})$. Quindi, per verificare se \mathfrak{D}_φ è tangente o meno ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$, occorrerebbe, in principio, applicare \mathfrak{D}_φ a tutte le conseguenze differenziali di f , e verificare che il risultato è di nuovo una conseguenza differenziale di f .

Fortunatamente, la geometria viene in aiuto per semplificare il problema. Il commutatore $[\mathfrak{D}_\varphi, D_i]$, fra una derivazione evolutiva ed una derivata totale, è verticale perché commutando un campo verticale con uno orizzontale si ha di nuovo un campo verticale. Ma \mathfrak{D}_φ è altresì un \mathcal{C} -campo. Ergo, la derivata di Lie rispetto ad \mathfrak{D}_φ delle derivate totali, che appartengono alla distribuzione di Cartan, deve di nuovo appartenere alla distribuzione di Cartan. Segue che il commutatore $[\mathfrak{D}_\varphi, D_i]$ deve essere simultaneamente verticale ed orizzontale, e l'unico campo soddisfacente tale richiesta è quello nullo.

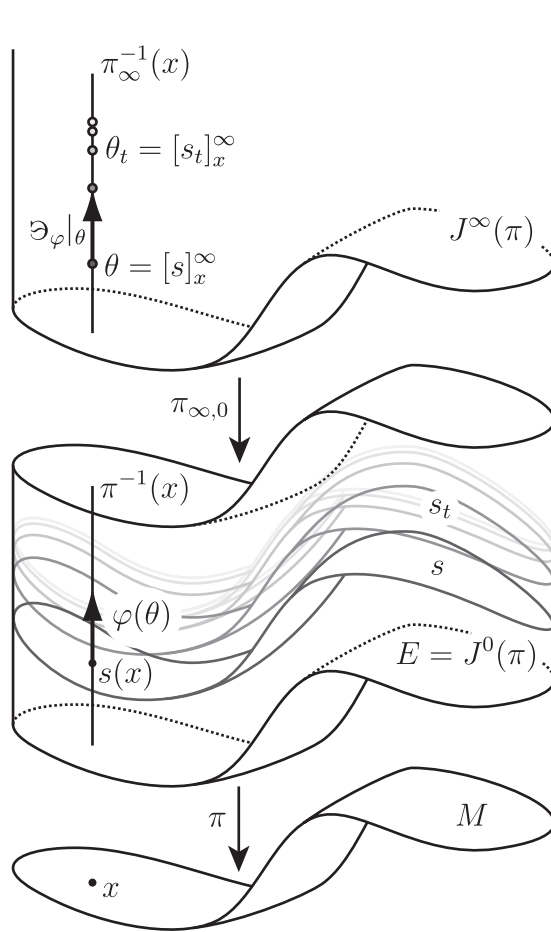


Figura 3: La sezione generatrice di un campo evolutivo.

Dunque *le derivazioni evolutive commutano con le derivate totali*, e perciò la condizione $\mathfrak{D}_\varphi(f) \in I(\mathcal{E})$ è sufficiente (oltre che necessaria) a garantire che \mathfrak{D}_φ sia tangente ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$.

In analogia con la geometria differenziale standard, dove l'applicazione $X(f)$ del campo X alla funzione f può essere riletta come $df(X)$, ossia il differenziale di f valutato su X , qui si definisce l'operatore

$$\ell_f(\varphi) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathfrak{D}_\varphi(f), \quad (31)$$

che associa ad ogni elemento $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$ l'elemento $\ell_f(\varphi) \in \mathcal{F}(\pi)$. Tale operatore si chiama *l'operatore di linearizzazione universale* della funzione f . Si osservi che non vi è ancora una vera e propria analogia secondaria col differenziale standard, perché f *non* è una funzione secondaria. Per ottenere una tale analogia sarà indispensabile introdurre la sequenza \mathcal{C} -spettrale.

2.2.7 Equazione delle simmetrie superiori di una PDE. Nel caso di equazioni *formalmente integrabili*, ossia nelle quali per ogni punto passa sempre una soluzione formale, si ha $\pi_\infty(\mathcal{E}_{(\infty)}) = M$, e dunque si può considerare l' $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -modulo $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi)$ delle sezioni del fibrato indotto da π mediante la restrizione ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$ della proiezione π_∞ su M . La restrizione ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$ della derivazione evolutiva \mathfrak{D}_φ è dunque determinata dalla restrizione $\overline{\varphi}$ di φ ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$, che è un elemento di $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi)$. La definizione dell'operatore ristretto

$$\begin{aligned} \ell_f^\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}) \\ \overline{\varphi} &\longmapsto \overline{\mathfrak{D}_\varphi(f)} \end{aligned} \quad (32)$$

è ovviamente ben posta. Ora $\mathfrak{D}_\varphi(f)$ risulta una conseguenza differenziale di f se e solo se la sua restrizione $\overline{\mathfrak{D}_\varphi(f)}$ ad $\mathcal{E}_{(\infty)}$ è nulla. Segue che la semplice equazione

$$\ell_f^\mathcal{E} = 0 \quad (33)$$

fornisce come soluzioni tutte e sole le simmetrie superiori di \mathcal{E} . In analogia col caso classico, nel quale la condizione “ $df = 0$ sui punti della varietà $f = 0$ ”, imposta sui campi vettoriali, dà tutti e soli i campi tangenti alla varietà $f = 0$. In coordinate, si ha

$$\ell_f^\mathcal{E} = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^m} \frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j} \Big|_{\mathcal{E}_{(\infty)}} D_\sigma^{(j)} \Big|_{\mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi)}. \quad (34)$$

Localmente, il modulo $\mathcal{F}(\pi, \pi)$ è la somma diretta di m copie di $\mathcal{F}(\pi)$. Sia

$$\Pi^{(j)} : \mathcal{F}(\pi, \pi) \longrightarrow \mathcal{F}(\pi) \quad (35)$$

la proiezione sulla j -esima componente. Il simbolo $D_\sigma^{(j)}$ sta ad indicare la composizione $D_\sigma \circ \Pi^{(j)}$.

2.2.8 Operatori \mathcal{C} -differenziali. La linearizzazione ℓ_f è chiaramente un operatore differenziale lineare fra gli $\mathcal{F}(\pi)$ -moduli $\mathcal{F}(\pi, \pi)$ e $\mathcal{F}(\pi)$, ossia un elemento dell' $\mathcal{F}(\pi)$ -modulo $\text{Diff}(F(\pi, \pi), \mathcal{F}(\pi))$. Ma già dall'espressione coordinata si evidenzia una notevole peculiarità: ℓ_f è, informalmente, *una combinazione lineare di composizioni di derivate totali*, ossia di campi che appartengono alla distribuzione di Cartan. Siffatti operatori verranno perciò chiamati \mathcal{C} -differenziali.

Ciò che caratterizza intrinsecamente gli operatori \mathcal{C} -differenziali è la proprietà di essere restringibili ai punti secondari di $J^\infty(\pi)$, che sono i grafici dei getti infiniti delle sezioni di π . Ma quali saranno gli $\mathcal{F}(\pi)$ -moduli per i quali ha senso parlare di “restrizione”? Restringere, ad esempio, un elemento $f \in \mathcal{F}(\pi)$ al grafico di $j_\infty(s)$, equivale a considerare il pull-back $j_\infty(s)^*(f)$ di f mediante $j_\infty(s)$. Tale pull-back è un elemento di $C^\infty(M)$. Esiste allora una certa classe di moduli, che verranno chiamati *orizzontali*, ai cui elementi ha senso applicare il pull-back $j_\infty(s)^*$. Un modulo orizzontale è semplicemente il modulo $\mathcal{F}(\pi, \xi)$ delle sezioni di un fibrato $\pi_\infty^*(\xi)$, indotto mediante π_∞ da un fibrato vettoriale ξ . Dunque il pull-back $j_\infty(s)^*(\varphi)$ di un elemento $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \xi)$ è un elemento di $\Gamma(\xi)$.

Informalmente, l'elemento $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \xi)$ può essere riguardato come famiglia $\{j_\infty(s)^*(\varphi)\}_{s \in \Gamma(\pi)}$ di elementi di $\Gamma(\xi)$ *parametrizzata dal punto secondario* s . Una tale proprietà fa pensare all'analogo secondario della sezione di un fibrato, e difatti i moduli orizzontali sono il materiale grezzo col quale costruire i moduli secondari.

Un operatore $\Delta \in \text{Diff}(\mathcal{F}(\pi, \xi), \mathcal{F}(\pi, \eta))$ si dice, rigorosamente, \mathcal{C} -differenziale se per ogni $s \in \Gamma(\pi)$ esiste un operatore differenziale standard $\Delta_s \in \text{Diff}(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$ tale che

$$\Delta_s \circ j_\infty(s)^* = j_\infty(s)^* \circ \Delta. \quad (36)$$

In altre parole, la famiglia $\{j_\infty(s)^*(\Delta(\varphi))\}_{s \in \Gamma(\pi)}$ di sezioni di η ottenuta applicando Δ all'elemento $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \xi)$, è precisamente la famiglia $\{\Delta_s(j_\infty(s)^*(\varphi))\}_{s \in \Gamma(\pi)}$ ottenuta applicando ad *ogni* elemento della famiglia il

corrispondente operatore differenziale. L'operatore \mathcal{C} -differenziale Δ è dunque equivalente alla famiglia di operatori differenziali $\{\Delta_s\}_{s \in \Gamma(\pi)}$. Coerentemente, il sottomodulo $\mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{F}(\pi, \xi), \mathcal{F}(\pi, \eta))$ degli operatori \mathcal{C} -differenziali è a sua volta un modulo orizzontale. L'operatore Δ_s è esattamente la restrizione di Δ al grafico di $j_\infty(s)$.

Dalla loro definizione (19), è evidente che i campi sollevati \widehat{X} sono dei particolari operatori \mathcal{C} -differenziali, "costanti" in un certo senso, visto che in questo caso \widehat{X}_s è sempre uguale ad X , indipendentemente da s .

2.2.9 Forme orizzontali. Sia Λ l'algebra delle forme differenziali su $J^\infty(\pi)$. Essa è in particolare un $\mathcal{F}(\pi)$ -modulo, ed ha senso applicare ai suoi elementi il pull-back $j_\infty(s)^*$. Tuttavia, Λ non può essere ancora considerato un modulo orizzontale perché, intuitivamente, in esso vi sono delle forme che, ristrette ai punti secondari, danno zero. Si tratta proprio delle forme di Cartan, che chiudono l'ideale differenziale denotato con \mathcal{C} . Per definizione di forme di Cartan, si ha $j_\infty(s)^*(\mathcal{C}) = 0$, ed allora si deve passare al quoziente, ponendo

$$\overline{\Lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Lambda}{\mathcal{C}}. \quad (37)$$

L'oggetto così ottenuto è un vero e proprio modulo orizzontale, chiamato l'algebra delle forme differenziali orizzontali su $J^\infty(\pi)$. Se τ è quel fibrato su M che fornisce $\Gamma(\tau) = \Lambda(M)$, allora $\overline{\Lambda}$ altro non è se non $\mathcal{F}(\pi, \tau)$.

In coordinate, una forma orizzontale $\overline{\omega}$ può essere rappresentata come combinazione lineare di prodotti wedge delle 1-forme coordinate dx_1, \dots, dx_n , a coefficienti in $\mathcal{F}(\pi)$.

Immergendo $\overline{\Lambda}$ in Λ , e considerando la proiezione canonica $\omega \mapsto \overline{\omega}$ del secondo sul primo, si può definire l'operatore $U_1 : \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \Lambda^1$ ponendo

$$U_1(f) \stackrel{\text{def.}}{=} df - \overline{df}. \quad (38)$$

Si dimostra che l'immagine di U_1 genera il modulo delle 1-forme di Cartan. In particolare, $\omega_\sigma^j = U_1(u_\sigma^j)$.

2.2.10 Termine E_0 della successione \mathcal{C} -spettrale. L'ideale \mathcal{C} determina la filtrazione

$$\Lambda \supseteq \mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}^2 \supseteq \mathcal{C}^3 \supseteq \dots \quad (39)$$

che a sua volta definisce una successione spettrale $\{E_r\}_{r \in \mathbb{N}_0}$, detta perciò *successione \mathcal{C} -spettrale*. Il simbolo $\mathcal{C}^p \Lambda^i$ indica la componente omogenea i -esima di \mathcal{C}^p . Le colonne del termine E_0 sono date dai complessi quoziente

$$E_0^p = \frac{\mathcal{C}^p}{\mathcal{C}^{p+1}}. \quad (40)$$

Per $p = 0$ si ha l'algebra $\bar{\Lambda}$ delle forme differenziali orizzontali, ed il differenziale d_0 , in tal caso, si chiama *differenziale orizzontale*, e viene indicato con \bar{d} . Sia adesso $p = 1$, e si consideri solo la componente omogenea di bigrado $(1, 0)$ di E_0 , ossia la componente di grado 1 del quoziente $\mathcal{C}/\mathcal{C}^2$.

Si ha

$$E_0^{1,0} = \mathcal{C} \Lambda^1, \quad (41)$$

perché ovviamente l'unica forma di grado 1 in \mathcal{C}^2 è quella nulla. Si dimostra poi agevolmente che per ottenere gli altri termini della colonna basta tensorizzare per $\bar{\Lambda}^q$,

$$E_0^{1,q} = \mathcal{C} \Lambda^1 \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \bar{\Lambda}^q. \quad (42)$$

Sia adesso $\omega \in \mathcal{C} \Lambda^1$, e sia $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$. Si definisce l'operatore ∇_ω ponendo $\nabla_\omega(\varphi) \stackrel{\text{def.}}{=} \omega(\mathfrak{D}_\varphi)$. Tale operatore agisce fra il modulo $\mathcal{F}(\pi, \pi)$ ed il modulo $\mathcal{F}(\pi)$, ed è \mathcal{C} -differenziale, in quanto $\nabla_{U_1(f)} = \ell_f$, essendo $\bar{d}f(\mathfrak{D}_\varphi) = 0$. Si trova così l'isomorfismo canonico

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \Lambda^1 &\xrightarrow{\cong} \mathcal{C} \text{Diff}(\mathfrak{x}, \mathcal{F}(\pi)) \\ \omega = g^i U_1(f_i) &\longmapsto \nabla_\omega = g^i \ell_{f_i}, \end{aligned} \quad (43)$$

sapendo che $\mathcal{C} \Lambda^1$ è generato dall'immagine di U_1 . Adoperando poi la (42) si trova subito che

$$E_0^{1,q} \cong \mathcal{C} \text{Diff}(\mathfrak{x}, \bar{\Lambda}^q). \quad (44)$$

Senza scendere nei dettagli, si completa la descrizione del termine E_0 con l'isomorfismo

$$E_0^{p,q} \cong \mathcal{C} \text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathfrak{x}; \bar{\Lambda}^q), \quad (45)$$

dove al secondo membro si trova il modulo dei *multi-operatori \mathcal{C} -differenziali alternanti di lunghezza p sul modulo \mathfrak{x} a valori nel modulo $\bar{\Lambda}^q$* . Il differenziale d_0 agisce molto semplicemente, componendo a sinistra con \bar{d} l'operatore sul quale agisce,

$$d_0(\nabla) = \bar{d} \circ \nabla. \quad (46)$$

2.2.11 Teoria coomologica degli operatori aggiunti. La teoria degli operatori aggiunti nasce, in Analisi Funzionale, come una generalizzazione agli operatori che agiscono sugli spazi di Hilbert, delle matrici aggiunte, e viene sviluppata usando tecniche integrali. Sorprendentemente, la medesima teoria può essere ottenuta ricorrendo unicamente a tecniche coomologiche, rendendola immediatamente applicabile alla descrizione del termine E_1 della successione \mathcal{C} -spettrale.

Sia, per semplicità, P un modulo su di un'algebra liscia, ad esempio l'algebra $C^\infty(M)$ delle funzioni lisce sulla varietà n -dimensionale M . Applicando il funtore $\text{Diff}(P, \cdot)$ al complesso di de Rham di M , si ottiene il complesso

$$0 \rightarrow \text{Diff}(P, C^\infty(M)) \xrightarrow{d_*} \text{Diff}(P, \Lambda^1(M)) \xrightarrow{d_*} \dots \xrightarrow{d_*} \text{Diff}(P, \Lambda^n(M)) \rightarrow 0, \quad (47)$$

laddove l'operatore d_* è la composizione a sinistra col differenziale d . Più sinteticamente, il complesso (47) si indica con $\text{Diff}(P, \Lambda(M))$, sottointendendo d_* . Filtrando tale complesso rispetto all'ordine degli operatori differenziali, si ottiene una sequenza spettrale il cui termine E_0 è composto da tanti complessi di Koszul, le cui coomologie sono ben note. Si scopre così che il complesso (47) è esatto in tutti i termini tranne l' n -esimo, la cui coomologia è proprio

$$\widehat{P} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Hom}_{C^\infty(M)}(P, \Lambda^n(M)), \quad (48)$$

il *modulo duale* di P . Se M è orientabile, $\Lambda^n(M)$ diviene isomorfo all'algebra di base $C^\infty(M)$, mediante una forma di volume, ed allora la definizione (48) combacia con quella classica di modulo duale.

Sia ora $\square \in \text{Diff}(P, Q)$, e si applichi ad esso il funtore $\text{Diff}(\cdot, \Lambda(M))$. Poichè la composizione a sinistra commuta con la composizione a destra, il morfismo $\text{Diff}(\square, \Lambda(M))$ che si ottiene, fra i moduli $\text{Diff}(Q, \Lambda(M))$ e $\text{Diff}(P, \Lambda(M))$, è anche un morfismo di complessi. L'unica parte non banale del morfismo corrispondente indotto in coomologia

$$\square^* : \widehat{Q} \longrightarrow \widehat{P}, \quad (49)$$

fornisce proprio la definizione dell'*operatore aggiunto* a \square .

2.2.12 Formula di Green. Si osservi che la coomologia n -esima del complesso (47) è data dal quoziente

$$\frac{\text{Diff}(P, \Lambda^n(M))}{d_*(\text{Diff}(P, \Lambda^{n-1}(M)))}, \quad (50)$$

dato che ogni n -cocatena è anche un n -cociclo. Si consideri un operatore ∇ in $\text{Diff}(P, \Lambda^n(M))$. Il suo aggiunto ∇^* è un operatore differenziale fra $\widehat{\Lambda^n(M)}$ e \widehat{P} , ed il duale $\widehat{\Lambda^n(M)}$ si identifica canonicamente con l'algebra di base $C^\infty(M)$. Allora $\nabla^*(1)$, essendo un elemento di $\widehat{P} = \text{Hom}_{C^\infty(M)}(P, \Lambda^n(M))$, è in particolare un elemento di $\text{Diff}(P, \Lambda^n(M))$, sicché ha senso considerare la differenza $\nabla - \nabla^*(1)$.

Con semplici considerazioni algebriche si scopre che tale differenza è un n -cobordo che si può scrivere come $d_*(\mathfrak{K}(\nabla))$, essendo $\mathfrak{K} : \text{Diff}(P, \Lambda^n(M)) \rightarrow \text{Diff}(P, \Lambda^{n-1}(M))$ un operatore differenziale. Allora ∇ si decompone in modo unico come

$$\nabla = \nabla^*(1) + d \circ \mathfrak{K}(\nabla), \quad (51)$$

e l'isomorfismo fra il quoziente (50) e \widehat{P} è quello che manda la classe $[\nabla]$ in $\nabla^*(1)$. La (51) è la *formula di Green* per l'operatore ∇ .

2.2.13 Termine E_1 della successione \mathcal{C} -spettrale. Sostituendo nella teoria degli operatori aggiunti appena sviluppata i moduli con i moduli orizzontali e gli operatori differenziali con gli operatori \mathcal{C} -differenziali, tutti i risultati continuano a valere. Ad esempio, il modulo duale $\widehat{\mathcal{X}}$ altro non è che $\text{Hom}_{\mathcal{F}(\pi)}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}^n)$. Si dice, in questo come in casi simili, che “si considera l'analogo nella \mathcal{C} -teoria” di qualche definizione o teorema.

La colonna E_0^0 , riscritta qui di seguito, dal basso verso l'alto,

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(\pi) \xrightarrow{\bar{d}} \overline{\Lambda}^1 \xrightarrow{\bar{d}} \dots \xrightarrow{\bar{d}} \overline{\Lambda}^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}} \overline{\Lambda}^n \rightarrow 0, \quad (52)$$

è il cosiddetto *complesso di de Rham orizzontale*, le cui coomologie \overline{H}^i sono dette appunto le *coomologie di de Rham orizzontali* di $J^\infty(\pi)$. Segue che nella colonna E_1^0 compaiono proprio tali coomologie, ossia $E_1^{0,q} = \overline{H}^q$.

Riscrivendo la colonna E_0^1 come sopra, si ottiene il complesso

$$0 \rightarrow \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \mathcal{F}(\pi)) \xrightarrow{\bar{d}_*} \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}^1) \xrightarrow{\bar{d}_*} \dots \xrightarrow{\bar{d}_*} \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}^n) \rightarrow 0, \quad (53)$$

che è proprio l'analogo nella \mathcal{C} -teoria del complesso (47). Dunque, tutti i termini $E_1^{1,q}$ sono nulli per $q \neq n$, mentre $E_1^{1,n} = \widehat{\mathcal{X}}$. Senza scendere nei dettagli, si dimostra un risultato analogo per tutte le altre colonne. L'unico termine non banale si trova in $q = n$, e risulta $E_1^{p,n} = \mathcal{C}\text{Diff}_{(p-1)}^{\text{alt}}(\mathcal{X}; \widehat{\mathcal{X}})$, il modulo degli *operatori multi-antiautoaggiunti* su \mathcal{X} . Ad esempio, un operatore $\nabla \in E_1^{2,n}$ è un operatore \mathcal{C} -differenziale fra \mathcal{X} e $\widehat{\mathcal{X}}$ tale che $\nabla^* = -\nabla$.

La descrizione di E_1 per $J^\infty(\pi)$ è così completa. La sua particolare conformazione si chiama “ad una riga”. Per diffiety più elaborati come il prolungamento $\mathcal{E}_{(\infty)}$ di una equazione \mathcal{E} soddisfacente certe condizioni di regolarità non troppo restrittive, il termine E_1 ha una struttura più ricca, chiamata “a due righe” (vedi [16], 4.4).

2.2.14 Funzioni secondarie. Informalmente, per capire cosa sia una funzione secondaria sul diffiety $J^\infty(\pi)$, occorre usare l'algebra filtrata $\mathcal{F}(\pi)$ come materiale grezzo, e poi inserire tale materiale all'interno di un complesso. Sia $f \in \mathcal{F}(\pi)$ una funzione liscia, ed $\text{im } j_\infty(s)$ un punto secondario. Come fare per valutare f su $\text{im } j_\infty(s)$ ed ottenere un numero reale? L'idea più ovvia è quella di valutare f su tutti i punti interni di $\text{im } j_\infty(s)$, e poi considerarne il valore medio. Ma ciò significa effettuare un'integrazione. Dunque si fa agire f sui punti secondari nel modo seguente

$$\text{im } j_\infty(s) \xrightarrow{f} \int_M j_\infty(s)^*(f) \in \mathbb{R}. \quad (54)$$

Per il principio di osservabilità, andrebbero poi quozientate via tutte le funzioni che danno una valutazione nulla sui punti secondari, e bisognerebbe scoprire che tali funzioni scartate sono in realtà i cobordi di un certo complesso. Apparentemente, ciò sembra strano, ma con un leggero cambio di prospettiva, tutto risulta ovvio.

La funzione secondaria *non* è f , ma è piuttosto la n -forma orizzontale $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, un elemento di $\overline{\Lambda}^n$. E non si integra f , ma la forma ω . E le forme che danno integrale nullo sono tutte e sole quelle esatte nel complesso di de Rham orizzontale. Ergo, la vera funzione secondaria non è f , ma la classe di coomologia orizzontale $L = [\omega] \in \overline{H}^n$, chiamata *Lagrangiana*.

Pertanto, le classi di coomologia orizzontali n -esime sono buoni candidati per giocare il ruolo di funzioni secondarie sul diffiety $J^\infty(\pi)$. L'azione della Lagrangiana L sui punti secondari è data da

$$\text{im } j_\infty(s) \xrightarrow{L} \int_M j_\infty(s)^*(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (55)$$

Tale risultato può essere ulteriormente raffinato, perché l'integrale di una n -forma è semplicemente il numero che marca in modo univoco la sua classe di coomologia (i dattagli di tale teoria si trovano in [3]). Si ottiene così

$$\text{im } j_\infty(s) \xrightarrow{L} [j_\infty(s)^*(\omega)] \in H^n(M) \cong \mathbb{R}. \quad (56)$$

Si indichi con S il punto secondario in $j_\infty(s)$, e con val_S la funzione di valutazione in S , quella che ad ogni funzione secondaria associa il suo valore in S . Allora val_S è proprio l'indotta in coomologia n -esima del morfismo di complessi $j_\infty(s)^* : \bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda(M)$,

$$\text{val}_S = H^n(j_\infty(s)^*) : \bar{H}^n \longrightarrow H^n(M) \cong \mathbb{R}, \quad (57)$$

completando così il quadro puramente coomologico delle funzioni secondarie.

2.2.15 Il differenziale $d_1^{0,n}$. Grazie alle nozioni accumulate, si può fornire una definizione (almeno formalmente) più corretta di differenziale secondario. Si consideri la funzione secondaria, o Lagrangiana, $L = [\omega]$. La forma orizzontale $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ si dice *densità* della Lagrangiana L . Applicando $d_1^{0,n}$ ad L si trova l'elemento $d_1^{0,n}(L)$ di $\hat{\mathcal{Z}}$.

Dalla teoria generale delle successioni spettrali si ha

$$d_1^{0,n}(L) = [[d\omega]_{\mathcal{C}^2}]_{\text{im } d_0^{1,n-1}}, \quad (58)$$

laddove $[d\omega]_{\mathcal{C}^2} \in E_0^{1,n}$.

Adoperando la decomposizione (38) del differenziale d , si trova $d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = U_1(f) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, in quanto non esistono $(n+1)$ -forme orizzontali non nulle. Esprimendo $[d\omega]_{\mathcal{C}^2}$ in accordo con la rappresentazione (42) di $E_1^{1,n}$, si ha

$$[d\omega]_{\mathcal{C}^2} \equiv U_1(f) \otimes dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad (59)$$

da cui, basandosi sull'isomorfismo (43), si ricava infine

$$[d\omega]_{\mathcal{C}^2} \equiv \ell_f \otimes dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{Z}, \bar{\Lambda}^n). \quad (60)$$

Indicando col simbolo ℓ_ω l'operatore \mathcal{C} -differenziale $\ell_f \otimes dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, in virtù di quanto esposto in 2.2.12, si ha

$$d_1^{0,n}(L) = \ell_\omega^*(1). \quad (61)$$

L'equazione $\ell_\omega^*(1) = 0$ è nient'altro che l'equazione di Eulero-Lagrange associata alla Lagrangiana L . Pertanto, il differenziale $d_1^{0,n}$ associa ad ogni Lagrangiana il primo membro della corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.

2.2.16 Derivata secondaria di una funzione secondaria. Data la funzione secondaria $L = [\omega]$ ed il campo secondario \mathfrak{D}_φ , la logica vorrebbe che esistesse un modo naturale per applicare il campo alla funzione, ed ottenere un risultato che esprima la variazione della seconda lungo le “traiettorie” del primo. Si osservi che la derivata di Lie $\mathfrak{D}_\varphi(\omega)$ è di nuovo una forma orizzontale, e dunque ha senso considerarne la classe di coomologia orizzontale $[\mathfrak{D}_\varphi(\omega)] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathfrak{D}_\varphi(L)$, che, si faccia attenzione, non è necessariamente nulla.

Se $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, allora $\mathfrak{D}_\varphi(\omega) = \mathfrak{D}_\varphi(f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Facendo agire $\mathfrak{D}_\varphi(L)$ sul punto secondario $S = \text{im } j_\infty(s)$ si ottiene, in accordo con la (54), il numero reale

$$(\mathfrak{D}_\varphi(L))(S) = \int_M j_\infty(s)^*(\mathfrak{D}_\varphi(f)) = \int_M j_\infty(s)^*(\ell_f(\varphi)). \quad (62)$$

Ora ℓ_f è un operatore \mathcal{C} -differenziale, e dunque ammette la restrizione $(\ell_f)_s$ al punto secondario $\text{im } j_\infty(s)$. Dall’espressione coordinata di ℓ_f ,

$$\ell_f = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j} D_\sigma^{(j)} \quad (63)$$

si deduce immediatamente quella di $(\ell_f)_s$,

$$(\ell_f)_s = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} \left(\frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j} \circ j_\infty(s) \right) \left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \circ \pi^{(j)} \right), \quad (64)$$

dove adesso $\pi^{(j)}$ è la proiezione del modulo libero $\Gamma(\pi)$ sulla sua j -esima componente. Come è stato illustrato in 2.2.5, la sezione $j_\infty(s)^*(\varphi)$ di π è quella che ad ogni punto $x \in M$ associa il vettore $(j_\infty(s)^*(\varphi))(x) = \varphi([s]_x^\infty)$ di $\pi^{-1}(x)$, che è la velocità

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_t(x), \quad (65)$$

essendo $\{s_t\}$ l’evoluzione di s causata da \mathfrak{D}_φ .

Dalla relazione $j_\infty(s)^*(\ell_f(\varphi)) = (\ell_f)_s(j_\infty(s)^*(\varphi))$, si ottiene infine

$$(j_\infty(s)^*(\ell_f(\varphi)))(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j}([s]_x^\infty) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_t^j \right)(x), \quad (66)$$

che è proprio

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\sigma \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial f}{\partial w_\sigma^j} ([s]_x^\infty) u_\sigma^j \left(\left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} s_t \right]_x^\infty \right), \quad (67)$$

ossia il valore in x della derivata

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ j_\infty(s_t). \quad (68)$$

Ma allora, combinando la (62) con la (66) e la (68), si trova che il valore in S della funzione secondaria $\mathfrak{D}_\varphi(L)$ è precisamente

$$(\mathfrak{D}_\varphi(L))(S) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_M j_\infty(s_t)^*(f) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(S_t), \quad (69)$$

avendo indicato con S_t il punto secondario $\text{im } j_\infty(s_t)$.

Quindi il campo secondario \mathfrak{D}_φ determina la “traiettoria secondaria” $\{S_t\}$, ed il numero reale $(\mathfrak{D}_\varphi(L))(S)$ rappresenta proprio la derivata in 0 della funzione secondaria L valutata lungo tale traiettoria.

2.2.17 Il differenziale secondario. Dalla relazione $\mathfrak{D}_\varphi(\omega) = \mathfrak{D}_\varphi(f)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \ell_f(\varphi)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ si vede che la corrispondenza $\varphi \mapsto \mathfrak{D}_\varphi(\omega)$ è data dall’operatore \mathcal{C} -differenziale $\ell_f \otimes dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{C}\text{Diff}(\mathfrak{X}, \overline{\Lambda}^n)$, lo stesso che in 2.2.15 era stato indicato con ℓ_ω . Dunque $\mathfrak{D}_\varphi(\omega) = \ell_\omega(\varphi)$.

A rigor di logica, il differenziale secondario della funzione secondaria L dovrebbe essere quell’operatore che ad ogni $\varphi \in \mathfrak{X}$ associa $\mathfrak{D}_\varphi(L) \in \overline{H}^n$. D’altra parte, ogni oggetto secondario deve essere una classe di coomologia. L’operatore $\ell_\omega : \varphi \in \mathfrak{X} \mapsto \ell_\omega(\varphi) \in \overline{\Lambda}^n$ fa parte del complesso E_1^1 , e la sua classe di coomologia è data da $\ell_\omega^*(1) \in \widehat{\mathfrak{X}}$.

Per la formula di Green, $\ell_\omega = \ell_\omega^*(1) + \overline{d} \circ \mathfrak{K}(\ell_\omega)$, da cui $\mathfrak{D}_\varphi(\omega) = \langle \ell_\omega^*(1), \varphi \rangle + \overline{d}(\mathfrak{K}(\ell_\omega)(\varphi))$, e quindi $\mathfrak{D}_\varphi(L) = [\mathfrak{D}_\varphi(\omega)] = [\langle \ell_\omega^*(1), \varphi \rangle]$. Indicando con pr la proiezione canonica di $\overline{\Lambda}^n$ su \overline{H}^n , la composizione $\text{pr} \circ \ell_\omega^*(1) : \mathfrak{X} \rightarrow \overline{H}^n$ è proprio la formalizzazione cercata del differenziale secondario.

Nel calcolo standard, un punto $x \in M$ è stazionario per f se e solo se l’operatore $\text{val}_x \circ df : D(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è nullo. Allora il punto secondario S sarà stazionario per la funzione secondaria $L = [\omega]$ se e solo se l’operatore analogo,

$$\text{val}_S \circ \text{pr} \circ \ell_\omega^*(1) : \mathfrak{X} \rightarrow H^n(M) \cong \mathbb{R}, \quad (70)$$

è nullo. Per il lemma di du Bois–Reymond, la (70) è equivalente alla più familiare equazione di Eulero–Lagrange $\ell_\omega^*(1) = 0$. Una soluzione di tale equazione è una sezione $s \in \Gamma(\pi)$ tale che $j_\infty(s)^*(\ell_\omega^*(1)) = 0$.

2.3 Conclusioni.

2.3.1 La teoria che è stata qui brevemente tratteggiata dimostra che una corretta interpretazione geometrica dei sistemi di PDE non lineari, unita ad una visione algebrica e functoriale del calcolo differenziale ed all'algebra omologica, ed illuminata dal principio di osservabilità, consente, in un modo naturale e trasparente, di ottenere le equazioni di Eulero–Lagrange associate ad un funzionale L come semplice riscrittura, in un contesto geometricamente più ricco, dell'equazione dei punti stazionari nel calcolo standard.

Dunque, seguendo la logica corretta, si ritrovano automaticamente alcune costruzioni o risultati classicamente basati su tecniche analitiche. Ciò conferma che il Calcolo Secondario è il giusto tipo di calcolo che soggiace ad una certa classe di problemi, come lo studio delle PDE non lineari, od il calcolo delle variazioni.

2.3.2 Questi risultati incoraggiano a spingere oltre le analogie col calcolo standard, per riscoprire in nuova luce alcuni risultati classici, o di trovarne di inediti. In ogni caso, il cambio di prospettiva permette sempre di allargare gli orizzonti ed elaborare nuove strategie. Non è lo scopo di questa breve introduzione quello di elencare simili teorie, ma se ne possono giusto accennare alcune.

Ad esempio, secondarizzando il concetto di fibrato, si ottiene una teoria assai ricca, quella dei cosiddetti coverings delle PDE non lineari. In essa trovano la loro precisa formalizzazione logica, ad esempio, le simmetrie non locali e le trasformazioni di Bäcklund. La letteratura in proposito è molto ricca, ed il volume [9] rappresenta la prima trattazione sistematica del soggetto. Anche nella teoria degli invarianti differenziali e delle classi caratteristiche, il Calcolo Secondario ha dato il suo contributo (vedi ad esempio [13]). Sul sito <http://diffiety.ac.ru/> si può trovare una raccolta completa e dettagliata dei risultati ottenuti finora.

2.3.3 Si ricorda infine che in questa introduzione è stata presentata la sequenza \mathcal{C} –spettrale più semplice, quella associata al diffiety $J^\infty(\pi)$, che

è il contesto più elementare dal quale ricavare i primi risultati del Calcolo Secondario. I passi immediatamente successivi sono lo studio di $J^\infty(E, n)$, dei prolungamenti infiniti $\mathcal{E}_{(\infty)}$, dei coverings, e così via.

Si avverte inoltre che la parola “secondario” è stata usata in modo improprio, per stimolare certe analogie. Gli oggetti secondari propriamente detti sono di regola oggetti graduati, i quali, nei casi più semplici come quelli finora considerati, hanno solo una componente non banale, che per sineddoche identifica l'intero oggetto.

Al fine di garantire una comprensione chiara ed esaustiva della presente Tesi, il materiale fin qui esposto è senza dubbio sufficiente.

3 Coppie Esatte.

3.0.4 Coppie esatte e coppie derivate. Sia \mathcal{M} una categoria abeliana.

Definizione 2. Siano E, C e j, p, ∂ oggetti e morfismi di \mathcal{M} . Il triangolo

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{j} & C \\
 & \swarrow \partial & \searrow p \\
 & E &
 \end{array}
 \tag{71}$$

è chiamato una coppia esatta in \mathcal{M} se esso risulta esatto in ogni vertice.

Dalla coppia esatta (71) si può ottenere l'oggetto differenziale $(E, p \circ \partial)$ in \mathcal{M} , essendo $(p \circ \partial)^2 = p \circ (\partial \circ p) \circ \partial = 0$ per l'esattezza in E . Ha senso dunque considerare la coomologia

$$E' \stackrel{\text{def.}}{=} H(E, p \circ \partial) = \frac{\ker(p \circ \partial)}{\text{im}(p \circ \partial)}
 \tag{72}$$

di tale oggetto differenziale. Si consideri inoltre l'oggetto

$$C' \stackrel{\text{def.}}{=} \text{im}(j) = \ker(p) \subseteq C.
 \tag{73}$$

Il morfismo j si restringe naturalmente al morfismo j' di C' in se stesso

$$\begin{array}{ccc}
 j' : C' & \longrightarrow & C' \\
 z & \longmapsto & j(z).
 \end{array}
 \tag{74}$$

Inoltre, p manda C all'interno dei cocicli di E , e $\ker j$ nei cobordi di E , cosicché ha senso definire

$$\begin{array}{ccc}
 p' : C' & \longrightarrow & E' \\
 z & \longmapsto & [p(j^{-1}(z))]_{\text{im}(p \circ \partial)}.
 \end{array}
 \tag{75}$$

Si osservi che $[p(j^{-1}(z))]_{\text{im}(p \circ \partial)}$ non è un elemento di E' . Piuttosto, si tratta di un singleton in E' . Ciononostante, si prenderà la libertà di identificare i singletons con il loro contenuto, e quindi ogni mappa potrà essere vista come a valori nella famiglia dei singletons. Usando questo abuso di notazione, forse inelegante, si guadagna però la possibilità di dire che p' è indotto da $p \circ j^{-1}$.

Infine, si osservi che i cocicli di E sono mandati da ∂ nel kernel di p , che è C' , mentre i cobordi sono annullati da ∂ . Segue che il morfismo ∂' indotto da ∂ ,

$$\begin{aligned} \partial' : E' &\longrightarrow C' \\ [y]_{\text{im}(p \circ \partial)} &\longmapsto \partial(y), \end{aligned} \tag{76}$$

è ben definito.

Teorema 1. *Il triangolo*

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{j'} & C' \\ & \swarrow \partial' & \searrow p' \\ & E' & \end{array} \tag{77}$$

è una coppia esatta, detta la coppia derivata della coppia esatta (71).

Dimostrazione. Primo, si osservi che la composizione $p' \circ j'$ è il morfismo da C' a E' indotto da $(p \circ j^{-1}) \circ j = p$, e come tale risulta nullo, essendo C' il kernel di p . Secondo, la composizione $\partial' \circ p'$ è il morfismo da C' a C' indotto da $\partial \circ p \circ j^{-1}$, e come tale risulta nullo, essendo $\partial \circ p$ nullo. Terzo, la composizione $j' \circ \partial'$ è il morfismo da E' a C' indotto da $j \circ \partial$, che è zero.

Si è così provata la semi-esattezza in ogni vertice.

Il kernel di j' è dato da $\ker(j) \cap C'$, che coincide con $\text{im}(\partial) \cap \ker(p)$. Un suo elemento z è perciò della forma $z = \partial(y)$, con $p(z) = 0$, che significa $(p \circ \partial)(y) = 0$. In altre parole, y è un cociclo in E , e $z = \partial'([y]_{\text{im}(p \circ \partial)})$ si trova nell'immagine di ∂' .

Il kernel di p' è rappresentato dagli elementi $j(z) \in C'$ tali che $p(z)$ risulta un cobordo in E , ossia $p(z)$ appartiene a $p(\partial(E))$. Ciò significa che z , modulo un elemento di $\ker(p) = C'$, appartiene a $\partial(E)$, il quale combacia con $\ker(j)$. In altre parole, si ha $z \in C' + \ker(j)$, da cui $j(z) \in j(C') = \text{im } j'$.

Il kernel di ∂' è costituito da classi di coomologia rappresentate da cocicli che si trovano nel kernel di ∂ , cioè nell'immagine di p . Ma se una classe può essere scritta nella forma $[p(z)]$, che coincide con $p'(j(z))$, allora tale classe appartiene a $\text{im}(p')$. \square

Derivando $r - 1$ volte la coppia esatta (71), si trova la $(r - 1)$ -esima coppia

derivata, indicata con

$$\begin{array}{ccc}
 C_r & \xrightarrow{j_r} & C_r \\
 & \searrow \partial_r & \swarrow p_r \\
 & E_r &
 \end{array}
 \tag{78}$$

In particolare, nella 0-esima coppia derivata, si ha $E = E_1$.

3.0.5 Sequenza spettrale associata ad una coppia esatta. Ponendo

$$d_r \stackrel{\text{def.}}{=} p_r \circ \partial_r, \tag{79}$$

si trova la sequenza di oggetti differenziali in \mathcal{M}

$$\{(E_r, d_r)\}_{r \in \mathbb{N}}, \tag{80}$$

tale che la coomologia di ciascun oggetto differenziale produce l'oggetto soggiacente al termine successivo.

Definizione 3. *Una successione*

$$\{(E_r, d_r)\}_{r \in \mathbb{N}} \tag{81}$$

di oggetti differenziali in \mathcal{M} tale che $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$ per ogni $r \in \mathbb{N}$ è detta successione spettrale (in \mathcal{M}).

Teorema 2. *Nella coppia esatta (78) si ha*

$$C_r = j^{r-1}(C), \tag{82}$$

$$E_r = \frac{\partial^{-1}(j^{r-1}(C))}{p(\ker(j^{r-1}))}. \tag{83}$$

Inoltre, la coppia esatta (78) si inscrive nel seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & \xrightarrow{j} & C & & (84) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 C_r & \equiv & j^{r-1}(C) & \xrightarrow{j_r} & j^{r-1}(C) & \equiv & C_r \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow p & & \\
 & & E & & E & & \\
 & & \uparrow \partial_r & & \uparrow p_r & & \\
 & & \partial^{-1}(j^{r-1}(C)) & \xrightarrow{p \circ j^{-(r-1)}} & \partial^{-1}(j^{r-1}(C)) & \equiv & \ker d_{r-1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \frac{\partial^{-1}(j^{r-1}(C))}{p(\ker(j^{r-1}))} & \equiv & E_r & &
 \end{array}$$

dove sia il rettangolo in alto che i due triangoli in basso sono commutativi.

Osservazione 1. Nel diagramma (84), le frecce uncinato rappresentano i monomorfismi canonici dei sotto-oggetti, mentre le frecce doppie rappresentano gli epimorfismi canonici sugli oggetti quoziente. Lo stesso simbolo ∂ viene adoperato anche per la sua (ben definita) restrizione.

La freccia tratteggiata è in effetti una mappa a più valori, e la commutatività del triangolo in basso a destra ha dunque un duplice significato. Primo, la composizione della freccia tratteggiata con l'epimorfismo canonico è a singoli valori. Secondo, tale composizione coincide proprio con p_r .

Informalmente, ogni coppia derivata si può esprimere mediante sotto-oggetti o quozienti della coppia esatta originaria.

Dimostrazione. Si osservi che se $j^{r-1}(z)$ e $j^{r-1}(z')$ sono diverse rappresentazioni dello stesso elemento di $j^{r-1}(C)$, allora la differenza $z - z'$ appartiene a $\ker j^{r-1}$, da cui $p(z)$ e $p(z')$ differiscono per un elemento di $p(\ker j^{r-1})$, provando così che la composizione di $p \circ j^{r-1}$ con l'epimorfismo canonico è a singoli valori.

Si faccia ora l'induzione per provare il resto. Per $r = 1$ tutto è banalmente vero, tenendo conto che $j^0 = \text{id}_C$. Si supponga allora che le tesi da dimostrare siano vere per un certo r , e si dimostrino per $r + 1$.

Dato che $\text{im } j_r = j(j^{r-1}(C)) = j^r(C)$, la proprietà (82) è subito provata.

Essendo E_{r+1} la coomologia di E_r , si ha

$$\begin{aligned}
E_{r+1} &= \frac{\ker d_r}{\operatorname{im} d_r} \\
&= \frac{\ker(p_r \circ \partial_r)}{\operatorname{im}(p_r \circ \partial_r)} \\
&= \frac{\partial_r^{-1}(\ker p_r)}{p_r(\operatorname{im} \partial_r)} \\
&= \frac{\partial_r^{-1}(\operatorname{im} j_r)}{p_r(\ker j_r)}. \tag{85}
\end{aligned}$$

Per ipotesi di induzione, $\partial_r^{-1}(\operatorname{im} j_r)$ è il sotto-oggetto del quoziente $\frac{\partial^{-1}(j^{r-1}(C))}{p(\ker(j^{r-1}))}$ determinato da quei rappresentanti y tali che $\partial(y) \in \operatorname{im} j_r = j^r(C)$, ossia

$$y \in \partial^{-1}(j^r(C)). \tag{86}$$

Sempre per le ipotesi di induzione, $p_r(\ker j_r)$ è il sotto-oggetto del quoziente $\frac{\partial^{-1}(j^{r-1}(C))}{p(\ker(j^{r-1}))}$ determinato da quei rappresentanti y tali che $y = p_r(j^{r-1}(z)) = p(z)$, essendo $j^{r-1}(z)$ un elemento di $j^{r-1}(C)$ tale che $j_r(j^{r-1}(z)) = 0$, cioè $z \in \ker j^r$, ossia

$$y \in p(\ker j^r). \tag{87}$$

Allora, essendo (87) contenuto in (86), il quoziente (85) porta all'isomorfismo canonico

$$\begin{aligned}
E_{r+1} &\cong \frac{\partial^{-1}(j^r(C))}{p(\ker j^r)} \tag{88} \\
[[y]_{p(\ker j^{r-1})}]_{\operatorname{im} d_r} &\mapsto [y]_{p(\ker j^r)},
\end{aligned}$$

ed anche la (83) è provata.

Ora resta da provare la commutatività di (84) per $r + 1$.

Primo, j_{r+1} è indotto da j_r per restrizione a $C_{r+1} = \operatorname{im} j_r$, cioè al sotto-oggetto $j^r(C)$ di $C_r = j^{r-1}(C)$. Ma dalla commutatività del rettangolo in alto in (84), valida per r , si ha che j_r agisce su $j^{r-1}(C)$ come la restrizione di j . Segue allora che j_{r+1} , essendo la restrizione di j_r , è esso stesso la restrizione di j to C_{r+1} , il che porta alla commutatività del rettangolo in alto.

Secondo, p_{r+1} è indotto da $p_r \circ j_r^{-1}$,

$$\begin{aligned}
p_{r+1} : j_r(C_r) &\longrightarrow E_{r+1} \\
j_r(z) &\longmapsto [p_r(z)]_{\operatorname{im} d_r}. \tag{89}
\end{aligned}$$

Ma z , essendo un elemento di $C_r = j^{r-1}(C)$, può essere scritto come $z = j^{r-1}(z')$, $z' \in C$, e, dalla commutatività del triangolo in basso a destra in (84) per l'indice r , si ha anche che $p_r(j^{r-1}(z')) = [p(z')]_{p(\ker j^{r-1})}$. Di conseguenza, $[p_r(z)]_{\text{im } d_r}$ coincide con $[[p(z')]_{p(\ker j^{r-1})}]_{\text{im } d_r}$, che a sua volta, in virtù della (88), è uguale a $[p(z')]_{p(\ker j^r)}$. Allora il morfismo (89) assume la veste

$$\begin{aligned} p_{r+1} : j(j^{r-1}(C)) &\longrightarrow \frac{\partial^{-1}(j^r(C))}{p(\ker j^r)} \\ j(j^{r-1}(z')) &\longmapsto [p(z')]_{p(\ker j^r)}, \end{aligned} \quad (90)$$

che è quella della mappa indotta da $p \circ j^{-r}$, e ciò prova la commutatività del triangolo in basso a destra.

Terzo, ∂_{r+1} è indotta da ∂_r . Si prenda allora un elemento $[y]_{p(\ker j^r)}$ di E_{r+1} e lo si riscriva come $[[y]_{p(\ker j^{r-1})}]_{\text{im } d_r}$, in accordo con la (88). Applicandovi ∂_{r+1} , si ottiene $\partial_r([y]_{p(\ker j^{r-1})})$, il quale, per la commutatività del triangolo in basso a sinistra in (84) per l'indice r , coincide con $\partial(y)$. Segue che ∂_{r+1} è indotto da ∂ , ed anche il triangolo in basso a sinistra è commutativo. La dimostrazione risulta così conclusa. \square

Corollario 1. *Il differenziale d_r è indotto dalla mappa a più valori $p \circ j^{-(r-1)} \circ \partial$ di $\ker d_{r-1}$ in sé.*

4 Complessi Filtrati con Shift e Sequenze Spettrali Associate.

4.0.6 Oggetti filtrati. In questa Sezione verrà generalizzato il risultato classico di convergenza di una successione spettrale verso la coomologia del complesso filtrato che l'ha determinata. La nozione di complesso filtrato sarà rimpiazzata con quella di complesso filtrato con shift, ma il risultato finale rimarrà formalmente lo stesso.

Definizione 4. *Una successione $\{i_{p+1,p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ di inclusioni $i_{p+1,p} : K_{p+1} \subseteq K_p$ di oggetti in \mathcal{M} è detta una filtrazione in \mathcal{M} .*

Se esistono delle inclusioni $i_p : K_p \subseteq K$ per tutti i $p \in \mathbb{Z}$, in un oggetto K , allora K è un oggetto filtrato in \mathcal{M} . Si dice che l'oggetto K è filtrato dai suoi sotto-oggetti K_p .

L'intero p è chiamato l'indice di filtrazione di K_p .

Osservazione 2. Non necessariamente, se si ha un oggetto filtrato K , risulta $\cup_p K_p = K$ oppure $\cap_p K_p = 0$. In tali casi speciali si parla di *regolarità* della filtrazione.

Se $K, L \in \mathcal{M}$ sono entrambe filtrati, l'oggetto $\text{Hom}(K, L)$ è a sua volta filtrato. Infatti, dato un morfismo $h \in \text{Hom}(K, L)$, potrebbe esistere un intero σ tale che ciascun K_p è mandato da h in $L_{p+\sigma}$. Se un tale intero esiste, ha senso definire l'indice di filtrazione di h come il più grande fra tutti gli interi *non positivi* che soddisfano tale proprietà.

In questo modo, raccogliendo tutti i morfismi che possiedono indice di filtrazione σ , si ottiene il sotto-oggetto $F_\sigma \text{Hom}(K, L)$ di $\text{Hom}(K, L)$.

Chiaramente, queste considerazioni conducono alla definizione della categoria abeliana $F\mathcal{M}$ degli oggetti filtrati in \mathcal{M} .

4.0.7 Oggetti differenziali filtrati.

Definizione 5. *Un oggetto filtrato K in \mathcal{M} che sia anche un oggetto differenziale in \mathcal{M} , munito del differenziale d , viene chiamato un oggetto differenziale filtrato con shift in \mathcal{M} , se d appartiene ad $F_\sigma \text{Hom}(K, K)$. Il numero non positivo σ sarà detto indice di shift.*

Osservazione 3. Un oggetto differenziale filtrato standard possiede dunque indice di shift pari a 0.

Ad un oggetto differenziale filtrato con shift K è possibile applicare il funtore di coomologia, ed ottenere di nuovo un oggetto filtrato. Basta infatti porre

$$F_p H(K, d) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\ker d \cap K_p + dK}{dK} \subseteq \frac{\ker d}{dK} = H(K, d). \quad (91)$$

In altre parole, $F_p H(K, d)$ è il sotto-oggetto di $H(K, d)$ ottenuto considerando solo quelle classi di coomologia che sono rappresentate da cocicli che giacciono in K_p .

4.0.8 Introduzione alla teoria delle sequenze spettrali. È noto che ogni oggetto filtrato può essere convertito in un oggetto \mathbb{Z} -graduato. Il funtore responsabile di tale conversione si indica con Gr . Allora ha senso applicare il funtore composto $Gr \circ H$ all'oggetto differenziale filtrato con shift (K, d) ,

$$Gr \circ H : (K, d) \longmapsto \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\ker d \cap K_p}{\ker d \cap K_{p+1} + dK \cap K_p}. \quad (92)$$

D'altra parte, si può *prima* convertire l'oggetto differenziale filtrato con shift (K, d) in un oggetto differenziale \mathbb{Z} -graduato, e *poi* applicare il funtore di coomologia,

$$H \circ Gr : (K, d) \longmapsto \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H \left(\frac{K_p}{K_{p+1}} \right). \quad (93)$$

Si osservi che se d ha indice di filtrazione σ , allora il differenziale indotto in $Gr(K)$ sarà un morfismo graduato avente per grado proprio σ .

Poiché

$$H \left(\frac{K_p}{K_{p+1}} \right) = \frac{d^{-1}(K_{p+\sigma+1}) \cap K_p}{d^{-1}(K_{p+\sigma+1}) \cap K_{p+1} + dK_{p-\sigma} \cap K_p}, \quad (94)$$

si vede facilmente che i funtori Gr e H *non commutano*, essendo in generale $d^{-1}(K_{p+\sigma+1})$ più grande di $\ker d$, e $dK_{p-\sigma}$ più piccolo di dK .

In altre parole, $H(Gr(K))$ è di solito più grande di $Gr(H(K))$, e non esiste alcun modo per recuperare il secondo dal primo. Si noti che la coomologia di $Gr(K)$ dovrebbe essere più facile da calcolare rispetto a quella di K , visto che $Gr(K)$ è la somma diretta di oggetti più semplici di K . Pertanto, se si potesse sfruttare $H(Gr(K))$ per ottenere $Gr(H(K))$, ciò sarebbe una notevole risorsa per il calcolo di $H(K)$, visto che quest'ultimo può essere, nei casi più comuni, facilmente recuperato da $Gr(H(K))$.

La teoria delle successioni spettrali rende possibile una simile procedura, ma occorre imporre delle restrizioni sulla categoria \mathcal{M} . Infatti, \mathcal{M} deve essere una categoria abeliana \mathbb{Z} -graduata, ed il differenziale d deve essere un morfismo di grado 1. In tal caso, l'oggetto $H(Gr(K))$ è naturalmente iscritto in una coppia esatta, che determina a sua volta una sequenza spettrale. Come osservato in (84), i termini successivi E_r diventano sempre più piccoli, ed in molti casi uno di questi termini, per r abbastanza grande, finirà per coincidere con $Gr(H(K))$.

4.0.9 Complessi filtrati con shift.

Definizione 6. *Un oggetto differenziale filtrato con shift (K, d) di indice σ nella categoria $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$, è chiamato un complesso di cocatene filtrato con shift (di indice σ), se d ha grado 1.*

In tali ipotesi, indicando con K^i l' i -esima componente omogenea di un

oggetto graduato K , si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
-- \triangleright & K_{p-\sigma+1}^{i-1} & \xrightarrow{d} & K_{p+1}^i & \xrightarrow{d} & K_{p+\sigma+1}^{i+1} & -- \triangleright \\
& \downarrow i_{p-\sigma+1,p-\sigma} & & \downarrow i_{p+1,p} & & \downarrow i_{p+\sigma+1,p+\sigma} & \\
-- \triangleright & K_{p-\sigma}^{i-1} & \xrightarrow{d} & K_p^i & \xrightarrow{d} & K_{p+\sigma}^{i+1} & -- \triangleright \\
& \downarrow \pi_{p-\sigma} & & \downarrow \pi_p & & \downarrow \pi_{p+\sigma} & \\
-- \triangleright & \frac{K_{p-\sigma}^{i-1}}{K_{p-\sigma+1}^{i-1}} & \xrightarrow{d} & \frac{K_p^i}{K_{p+1}^i} & \xrightarrow{d} & \frac{K_{p+\sigma}^{i+1}}{K_{p+\sigma+1}^{i+1}} & -- \triangleright
\end{array} \tag{95}$$

con l'ovvio significato delle proiezioni canoniche π_p , al quale si può associare un'intera famiglia di sequenze esatte lunghe in coomologia

$$\begin{array}{ccccc}
H(K_{p-\sigma+1}^{i-1}) & & H(K_{p+1}^i) & & H(K_{p+\sigma+1}^{i+1}) & \\
\uparrow & \downarrow H^{i-1}(i_{p-\sigma+1,p-\sigma}) & \uparrow & \downarrow H^i(i_{p+1,p}) & \uparrow & \downarrow H^{i+1}(i_{p+\sigma+1,p+\sigma}) \\
H(K_{p-\sigma}^{i-1}) & \xrightarrow{\partial_{p-\sigma}^{i-1}} & H(K_p^i) & \xrightarrow{\partial_p^i} & H(K_{p+\sigma}^{i+1}) & \\
\downarrow H^{i-1}(\pi_{p-\sigma}) & & \downarrow H^i(\pi_p) & & \downarrow H^{i+1}(\pi_{p+\sigma}) & \\
H\left(\frac{K_{p-\sigma}^{i-1}}{K_{p-\sigma+1}^{i-1}}\right) & & H\left(\frac{K_p^i}{K_{p+1}^i}\right) & & H\left(\frac{K_{p+\sigma}^{i+1}}{K_{p+\sigma+1}^{i+1}}\right) &
\end{array} \tag{96}$$

dove, per definizione di coomologia di un complesso, si ha

$$H(K_p^i) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\ker d \cap K_p^i}{dK_{p-\sigma}^{i-1}}. \tag{97}$$

Allora si può definire

$$C_{1+\sigma} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigoplus_{(p,i) \in \mathbb{Z}^2} H(K_p^i), \tag{98}$$

$$E_{1+\sigma} \stackrel{\text{def.}}{=} (H \circ Gr)(K) = \bigoplus_{(p,i) \in \mathbb{Z}^2} H\left(\frac{K_p^i}{K_{p+1}^i}\right), \tag{99}$$

e costruire la coppia esatta

$$\begin{array}{ccc}
C_{1+\sigma} & \xrightarrow{j} & C_{1+\sigma} \\
& \searrow \partial & \swarrow p \\
& & E_{1+\sigma}
\end{array} \tag{100}$$

nella categoria $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}^2}$, dove j , p e ∂ sono le mappe \mathbb{Z}^2 -graduate le cui componenti omogenee di indice (i, p) sono date da $H^i(i_{p,p-1})$, $H^i(\pi_p)$ e ∂_p^i , rispettivamente.

4.0.10 Successione spettrale associata ad un complesso filtrato con shift. Si indichi con

$$\begin{array}{ccc}
 C_{r+\sigma} & \xrightarrow{j_{r+\sigma}} & C_{r+\sigma} \\
 & \swarrow \partial_{r+\sigma} & \searrow p_{r+\sigma} \\
 & E_{r+\sigma} &
 \end{array} \tag{101}$$

la $(r-1)$ -esima coppia derivata della coppia esatta (100), e si esplicitino i suoi elementi in accordo col Teorema 2.

Prima di tutto

$$\begin{aligned}
 E_{1+\sigma}^{p,i} &= H\left(\frac{K_p^i}{K_{p+1}^i}\right) \\
 &= \frac{K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+\sigma+1}^{i+1})}{K_{p+1}^i} \\
 &= \frac{dK_{p-\sigma}^{i-1} + K_{p+1}^i}{K_{p+1}^i} \\
 &= \frac{K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+\sigma+1}^{i+1})}{dK_{p-\sigma}^{i-1} + K_{p+1}^i} \\
 &= \frac{Z_{1+\sigma}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}}, \tag{102}
 \end{aligned}$$

laddove i *cocicli generalizzati* d'ordine r ,

$$Z_r^{p,i} \stackrel{\text{def.}}{=} K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+r}^{i+1}), \tag{103}$$

sono definiti nel modo usuale, così che, in presenza di uno shift σ , si ha sempre

$$Z_{\sigma}^{p,i} = K_p^i. \tag{104}$$

I cocicli generalizzati d'ordine pari allo shift del complesso filtrato sono dunque tutte le cocatene.

Inoltre, riguardando K_{∞} come il sotto-oggetto nullo di K , e $K_{-\infty}$ come K stesso, le seguenti definizioni sono consistenti con (103):

$$Z_{\infty}^{p,i} \stackrel{\text{def.}}{=} K_p^i \cap \ker d, \quad Z_{-\infty}^{p,i} \stackrel{\text{def.}}{=} K_p^i. \tag{105}$$

Ma allora

$$C_{1+\sigma}^{p,i} = \frac{Z_{\infty}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}}. \quad (106)$$

L'identificazione fornita in (102) è data dalla mappa

$$\begin{aligned} E_{1+\sigma}^{p,i} &\xrightarrow{\cong} \frac{Z_{1+\sigma}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}} \\ [[z]_{K_{p+1}^i}]_{\text{im } d} &\longmapsto [z]_{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}}. \end{aligned} \quad (107)$$

Dalla definizione stessa della coppia esatta (100) si trova allora che l'azione di p è data da

$$C_{1+\sigma}^{p,i} = \frac{Z_{\infty}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}} \ni [z] \xrightarrow{p} [z] \in \frac{Z_{1+\sigma}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}} = E_{1+\sigma}^{p,i}, \quad (108)$$

quella di ∂ da

$$E_{1+\sigma}^{p,i} = \frac{Z_{1+\sigma}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}} \ni [z] \xrightarrow{\partial} [dz] \in \frac{Z_{\infty}^{p+1+\sigma,i+1}}{dZ_{\sigma}^{p+1,i}} = C_{1+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1}, \quad (109)$$

e quella di j da

$$C_{1+\sigma}^{p,i} = \frac{Z_{\infty}^{p,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}} \ni [z] \xrightarrow{j} [z] \in \frac{Z_{\infty}^{p-1,i}}{dZ_{\sigma}^{p-1-\sigma,i-1}} = C_{1+\sigma}^{p-1,i}. \quad (110)$$

4.0.11 Descrizione del termine $E_{r+\sigma}$. Dalla (110) è immediato trovare l'espressione dell'immagine di j^{r-1} , ricordando che il bigrado di quest'ultima è $(r-1, 0)$,

$$(j^{r-1}(C_{1+\sigma}))^{p+1+\sigma,i+1} = \frac{Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1} + dZ_{\sigma}^{p+1,i}}{dZ_{\sigma}^{p+1,i}} \subseteq C_{1+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1}, \quad (111)$$

da cui, adoperando la (109), si ricava

$$(\partial^{-1}(j^{r-1}(C_{1+\sigma})))^{p,i} = \frac{Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap d^{-1}(Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1} + dZ_{\sigma}^{p+1,i})}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}} \subseteq E_{1+\sigma}^{p,i}, \quad (112)$$

rammentando che il bigrado di ∂ è $(1+\sigma, 1)$. Adoperando di nuovo la (110), si ricava l'espressione del kernel di j^{r-1} ,

$$(\ker j^{r-1})^{p,i} = \frac{Z_{\infty}^{p,i} \cap dZ_{\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}} \subseteq C_{1+\sigma}^{p,i}, \quad (113)$$

da cui, servendosi ora della (108), si ottiene infine

$$(p(\ker j^{r-1}))^{p,i} = \frac{dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}} \subseteq E_{1+\sigma}^{p,i}, \quad (114)$$

dato che $dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1}$ contiene $dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}$, ed essendo $Z_{\infty}^{p,i} \cap dZ_{\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} = dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1}$. Le espressioni (112) e (114) rappresentano, rispettivamente, le parti di bigrado (p, i) del quoziente (83), che permette di descrivere l'oggetto $E_{r+\sigma}$ della $(r-1)$ -esima coppia derivata della coppia esatta (100),

$$\begin{aligned} E_{r+\sigma}^{p,i} &= \left(\frac{\partial^{-1}(j^{r-1}(C_{1+\sigma}))}{p(\ker(j^{r-1}))} \right)^{p,i} \\ &= \frac{Z_{r+\sigma}^{p,i} + Z_{\sigma}^{p+1,i}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} + Z_{\sigma}^{p+1,i}}. \end{aligned} \quad (115)$$

Infatti,

$$Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap d^{-1}(Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1} + dZ_{\sigma}^{p+1,i}) = Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap (d^{-1}Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1} + d^{-1}dZ_{\sigma}^{p+1,i}) \quad (116)$$

per la (251). Poiché

$$d^{-1}dZ_{\sigma}^{p+1,i} = Z_{\sigma}^{p+1,i} + \ker d \quad (117)$$

per la (252), il numeratore della (112) si riscrive allora come

$$Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap (Z_{\sigma}^{p+1,i} + d^{-1}Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1}), \quad (118)$$

dato che $\ker d = d^{-1}(0)$ può essere omissso, essendo incluso in $d^{-1}Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1}$.

Avendosi

$$Z_{\sigma}^{p+1,i} = K_{p+1}^i \cap d^{-1}(K_{p+1+\sigma}^{i+1}) \subseteq K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+1+\sigma}^{i+1}) = Z_{1+\sigma}^{p,i}, \quad (119)$$

si può applicare la proposizione 16 alla (118) e ricavare un'ulteriore variante del numeratore della (112)

$$Z_{\sigma}^{p+1,i} + Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap d^{-1}Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1}. \quad (120)$$

Ma

$$\begin{aligned} Z_{1+\sigma}^{p,i} \cap d^{-1}Z_{\infty}^{p+\sigma+r,i+1} &= K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+1+\sigma}^{i+1}) \cap d^{-1}(K_{p+\sigma+r}^{i+1} \cap \ker d) \\ &= K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+1+\sigma}^{i+1}) \cap d^{-1}(K_{p+\sigma+r}^{i+1}) \\ &= Z_{r+\sigma}^{p,i} \end{aligned} \quad (121)$$

per la (253), ed essendo r almeno 1, sicché $K_{p+\sigma+r}^{i+1}$ è contenuto in $K_{p+1+\sigma}^{i+1}$. Si scopre allora che il numeratore della (112) è semplicemente

$$Z_{r+\sigma}^{p,i} + Z_{\sigma}^{p+1,i}, \quad (122)$$

e la spiegazione della (115) è dunque terminata.

Dall'eguaglianza

$$\begin{aligned} Z_{r+\sigma}^{p,i} \cap Z_{\sigma}^{p+1,i} &= K_p^i \cap d^{-1}(K_{p+r+\sigma}^{i+1}) \cap K_{p+1}^i \cap d^{-1}(K_{p+1+\sigma}^{i+1}) \\ &= d^{-1}(K_{p+r+\sigma}^{i+1}) \cap K_{p+1}^i = Z_{r-1+\sigma}^{p+1,i}, \end{aligned} \quad (123)$$

ed applicando la proposizione 15 alla (115), si ottiene infine

$$E_{r+\sigma}^{p,i} = \frac{Z_{r+\sigma}^{p,i}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} + Z_{r-1+\sigma}^{p+1,i}}. \quad (124)$$

La relazione

$$C_{r+\sigma}^{p,i} = (j^{r-1}(C_{1+\sigma}))^{p,i} = \frac{Z_{\infty}^{p+r-1,i} + dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}}, \quad (125)$$

ottenuta sostituendo nella (111) il bigrado (p, i) , completa la descrizione degli oggetti che appaiono ai vertici del diagramma (101).

4.0.12 Descrizione dei morfismi della $(r-1)$ -esima coppia derivata.

Primo, $p_{r+\sigma}$, essendo indotto da $p \circ j^{-(r-1)}$ per il teorema 2, ha grado $(r-1, 0)$, e dunque manda $C_{r+\sigma}^{p,i}$ in $E_{r+\sigma}^{p+r-1,i}$,

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\infty}^{p+r-1,i} + dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}}{dZ_{\sigma}^{p-\sigma,i-1}} &\xrightarrow{p_{r+\sigma}} \frac{Z_{r+\sigma}^{p+r-1,i}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p-\sigma,i-1} + Z_{r-1+\sigma}^{p+r,i}} \\ [z + dz'] &\longmapsto [z], \end{aligned} \quad (126)$$

in luce della (108) e della (125). Secondo, $\partial_{r+\sigma}$, essendo indotto da ∂ per il teorema 2, ha grado $(1+\sigma, 1)$, e manda $E_{r+\sigma}^{p,i}$ in $C_{r+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1}$,

$$\begin{aligned} \frac{Z_{r+\sigma}^{p,i}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} + Z_{r-1+\sigma}^{p+1,i}} &\xrightarrow{\partial_{r+\sigma}} \frac{Z_{\infty}^{p+r+\sigma,i+1} + dZ_{\sigma}^{p+1,i}}{dZ_{\sigma}^{p+1,i}} \\ [z] &\longmapsto [dz], \end{aligned} \quad (127)$$

basandosi sulle (109) e (125). Incidentalmente, il morfismo $d_{r+\sigma}$, di grado $(r + \sigma, 1)$, manda $E_{r+\sigma}^{p,i}$ in $E_{r+\sigma}^{p+r+\sigma,i+1}$,

$$\frac{Z_{r+\sigma}^{p,i}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p-r+1-\sigma,i-1} + Z_{r-1+\sigma}^{p+1,i}} \xrightarrow{d_{r+\sigma}} \frac{Z_{r+\sigma}^{p+r+\sigma,i+1}}{dZ_{r-1+\sigma}^{p+1,i+1} + Z_{r-1+\sigma}^{p+r+1+\sigma,i+1}} \\ [z] \longmapsto [dz], \quad (128)$$

combinando la (127) con la (126). Terzo, il morfismo $j_{r+\sigma}$, di grado $(-1, 0)$, che manda $C_{r+\sigma}^{p,i}$ in $C_{r+\sigma}^{p-1,i}$, è quello indotto dall'inclusione di $Z_{\infty}^{p+r-1,i}$ in $Z_{\infty}^{p-1+r-1,i}$ in virtù delle (110) e (125).

4.0.13 Condizioni di regolarità per le filtrazioni con shift. Se K è un oggetto differenziale filtrato standard (cioè con indice di shift pari a 0), le inclusioni i_p sono morfismi di oggetti differenziali, e come tali inducono i corrispondenti morfismi in coomologia $\iota_p = H(i_p)$. Nel caso di indice di shift arbitrario, K_p non è un sotto-oggetto differenziale, e dunque non ha senso considerare $H(i_p)$. Ciononostante, si può dare la seguente

Definizione 7. *La filtrazione di un oggetto differenziale filtrato K , con shift σ , è detta coomologicamente finita se*

1. le mappe ι_p indotte dall'inclusione di $K_p \cap \ker d$ in $\ker d$,

$$H(K_p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K_p \cap \ker d}{dK_{p-\sigma}} \xrightarrow{\iota_p} \frac{\ker d}{dK} = H(K), \quad (129)$$

si stabilizzano ad isomorfismi per indici p abbastanza piccoli;

2. gli oggetti $H(K_p)$ si stabilizzano a 0 per indici p abbastanza grandi.

Nel caso in cui K è un complesso di cocatene, si può prendere la singola componente omogenea di $H(K_p)$,

$$H^i(K_p) = \frac{Z_{\infty}^{p,i}}{dK_{p-\sigma}^{i-1}}, \quad (130)$$

ritrovando così la definizione (97), che combacia con l'oggetto $C_{1+\sigma}^{p,i}$ definito in (106).

Definizione 8. *Una filtrazione (con shift) di un complesso di cocatene K è detta coomologicamente finita in ciascun grado se per ogni i esistono due indici $p^-(i)$ e $p^+(i)$, tali che*

1. le mappe ι_p^i

$$H^i(K_p) \xrightarrow{\iota_p^i} H^i(K) \quad (131)$$

si stabilizzano ad isomorfismi per indici $p \leq p^-(i)$;

2. gli oggetti $H^i(K_p)$ si stabilizzano a 0 per indici $p \geq p^+(i)$.

Osservazione 4. Se ι_p^i diviene un isomorfismo, allora esso è in particolare iniettivo, e dunque $dK_{p-\sigma}^{i-1}$ coinciderà con dK^{i-1} . Similmente, essendo ι_p^i suriettivo, anche $K_p^i \cap \ker d$ verrà a coincidere con $K^i \cap \ker d$. In altre parole, i cocicli di K_p^i convergono a quelli di K^i , e così anche per i cobordi, ma non necessariamente K_p^i converge a K^i .

4.0.14 Un risultato di convergenza per le filtrazioni regolari.

Teorema 3. *Se la filtrazione di K è coomologicamente finita, per r abbastanza grande si ha $Gr^p(H^i(K)) \cong E_{r+\sigma}^{p,i}$.*

Dimostrazione. La coppia esatta (101) può essere “srotolata” ad ottenere la sequenza esatta lunga

$$\dots C_{r+\sigma}^{p-r+2,i} \xrightarrow{j_{r+\sigma}} C_{r+\sigma}^{p-r+1,i} \xrightarrow{p_{r+\sigma}} E_{r+\sigma}^{p,i} \xrightarrow{\partial_{r+\sigma}} C_{r+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1} \dots \quad (132)$$

Scegliendo r in modo tale che $p + r + \sigma$ risulti maggiore di $p^+(i + 1)$, si scopre che $C_{1+\sigma}^{p+r+\sigma,i+1}$ diventa zero, e conseguentemente sarà zero anche $j^{r-1}(C_{1+\sigma}^{p+r+\sigma,i+1})$ che coincide con $C_{r+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1}$, rendendo così suriettivo l'ultimo morfismo che appare in (132).

Scegliendo r in modo tale che $p - r - \sigma + 2$ sia più piccolo di $p^-(i - 1)$, si scopre che $dZ_{\sigma}^{p-r-\sigma+2}$ e $dZ_{\sigma}^{p-r-\sigma+1}$ entrambi coincidono con dK^{i-1} per l'osservazione 4, sicché i primi due oggetti della sequenza (132) diventano uguali ad $F_{p+1}H^i(K)$ e $F_pH^i(K)$ rispettivamente, essendo

$$F_pH^i(K) = \frac{Z_{\infty}^{p,i} + dK^{i-1}}{dK^{i-1}} \quad (133)$$

la parte di grado i della p -esima filtrazione di $H(K)$ definita dalla (91).

Allora, se r è scelto maggiore di

$$r_0(p, i) \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{p^+(i + 1) - p - \sigma, p - \sigma + 2 - p^-(i - 1)\}, \quad (134)$$

la sequenza (132) fornisce la sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow F_{p+1}H^i(K) \xrightarrow{j_{r+\sigma}} F_pH^i(K) \xrightarrow{p_{r+\sigma}} E_{r+\sigma}^{p,i} \rightarrow 0, \quad (135)$$

dove $j_{r+\sigma}$ è proprio l'inclusione, concludendo così la dimostrazione. \square

Definendo

$$E_{\infty}^{p,i} \stackrel{\text{def.}}{=} Gr^p(H^i(K)) = \frac{Z_{\infty}^{p,i}}{dK^{i-1} \cap K_p^i + Z_{\infty}^{p+1,i}}, \quad (136)$$

in accordo con la (92) applicata ad un complesso filtrato con shift, il teorema 3 può essere parafrasato nel modo seguente

$$E_{r+\sigma}^{p,i} \cong E_{\infty}^{p,i} \quad \forall r \geq r_0(p, i). \quad (137)$$

4.0.15 Un risultato di stabilizzazione per le filtrazioni regolari. Il teorema 3 verrà ora rafforzato dal seguente

Teorema 4. *Nelle ipotesi del teorema 3, si ha $H^{p,i}(E_{r+\sigma}, d_{r+\sigma}) = E_{r+\sigma}^{p,i}$, ossia la sequenza spettrale si stabilizza.*

Dimostrazione. La coppia esatta (100) dà come prima la sequenza esatta lunga

$$\dots C_{1+\sigma}^{p+1,i} \xrightarrow{j} C_{1+\sigma}^{p,i} \xrightarrow{p} E_{1+\sigma}^{p,i} \xrightarrow{\partial} C_{1+\sigma}^{p+1+\sigma,i+1} \xrightarrow{j} C_{1+\sigma}^{p+\sigma,i+1} \dots \quad (138)$$

Scegliendo p in modo tale che $p \geq p^+(i)$ e $p + \sigma \geq p^+(i + 1)$, tutti i $C_{1+\sigma}$ nella (138) svaniscono, e quindi anche $E_{1+\sigma}^{p,i}$ sarà zero.

Scegliendo p in modo tale che $p+1 \leq p^-(i)$ e $p+1+\sigma \leq p^-(i+1)$, stavolta i $C_{1+\sigma}$ nella (138) *non* svaniscono, ma accade che i primi due diventano isomorfi a $H^i(K)$, e gli ultimi due diventano isomorfi a $H^{i+1}(K)$. Ed inoltre, per la (110) e l'osservazione 4, i morfismi j coincideranno con le identità. Per motivi differenti, dunque, si scopre che $E_{1+\sigma}^{p,i}$ svanisce di nuovo.

Riassumendo,

$$p'(i) \leq p \text{ oppure } p \leq p''(i) \Rightarrow E_{1+\sigma}^{p,i} = 0, \quad (139)$$

laddove

$$p'(i) \stackrel{\text{def.}}{=} \max\{p^+(i), p^+(i+1) - \sigma\}, \quad (140)$$

$$p''(i) \stackrel{\text{def.}}{=} \min\{p^-(i) - 1, p^-(i+1) - 1\}. \quad (141)$$

Prendendo allora un indice r per il quale le disuguaglianze $p+r+\sigma \geq p'(i+1)$ e $p-r-\sigma \leq p''(i-1)$ risultano entrambe verificate, gli oggetti $E_{1+\sigma}^{p-r-\sigma, i-1}$ e $E_{1+\sigma}^{p+r+\sigma, i+1}$ svaniscono entrambi, e perciò i termini corrispondenti nella $(r-1)$ -esima coppia derivata, nello stesso bigrado, si annulleranno anch'essi. Si conclude che gli estremi della sequenza

$$E_{r+\sigma}^{p-r-\sigma, i-1} \xrightarrow{d_{r+\sigma}} E_{r+\sigma}^{p, i} \xrightarrow{d_{r+\sigma}} E_{r+\sigma}^{p+r+\sigma, i+1} \quad (142)$$

sono entrambi nulli, pervenendo così alla relazione

$$H^{p, i}(E_{r+\sigma}, d_{r+\sigma}) = E_{r+\sigma}^{p, i} \quad (143)$$

per

$$\begin{aligned} r &\geq \max\{p'(i+1) - p - \sigma, p - \sigma - p''(i-1)\} \\ &= \max\{p^+(i+1) - p - \sigma, p^+(i+2) - p - 2\sigma, p - \sigma - p^-(i-1) + 1, p - \sigma - p^-(i) + 1\} \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} r_1(p, i), \end{aligned} \quad (144)$$

come volevasi dimostrare. \square

4.0.16 Il risultato fondamentale. Combinando la (137) con la (143) appena dimostrata, si trova che, nelle stesse ipotesi dei teoremi 3 e 4, per $\bar{r} = \max\{r_0(p, i), r_1(p, i)\}$, risulta

$$E_{\bar{r}+\sigma}^{p, i} = E_{\bar{r}+1+\sigma}^{p, i} = E_{\bar{r}+2+\sigma}^{p, i} = \dots \cong E_{\infty}^{p, i} = Gr^p(H^i(K)). \quad (145)$$

Teorema 5 (Fondamentale). *Un complesso filtrato con shift K , di indice σ , con filtrazione coomologicamente finita in ciascun grado, dà origine ad una sequenza spettrale che inizia con $E_{1+\sigma}$ e termina, in ciascun grado, con una coda stabile isomorfa alla corrispondente componente omogenea dell'oggetto bigraduato $Gr(H(K))$.*

5 Sequenze Spettrali Filtrate

5.0.17 Complessi doppiamente filtrati. Si consideri un complesso (K, d) , e si supponga che in esso vi siano le due filtrazioni

$$\dots \subseteq \Phi_{p+1} \subseteq \Phi_p \subseteq \dots \subseteq K, \quad (146)$$

$$\dots \subseteq \Psi_{s+1} \subseteq \Psi_s \subseteq \dots \subseteq K. \quad (147)$$

In tali ipotesi emergeranno due sequenze spettrali, dette ${}^{\Phi}E$ e ${}^{\Psi}E$, rispettivamente, ed è lecito chiedersi in che modo ciascuna filtrazione influenzi la sequenza spettrale prodotta dall'altra filtrazione. Nel seguito la sequenza spettrale ${}^{\Phi}E$ verrà indicata semplicemente con E , attribuendo così a Φ il ruolo di filtrazione “principale”, quella cioè che produce la sequenza spettrale E , ed a Ψ il ruolo di filtrazione “ausiliaria”, quella che permetterà di individuare alcune filtrazioni all'interno di E .

5.0.18 Filtrazione del termine E_0 . Intersecando il complesso Ψ_s con la filtrazione Φ si ottiene la filtrazione naturale di Ψ_s

$$\cdots \subseteq \Psi_s \cap \Phi_{p+1} \subseteq \Psi_s \cap \Phi_p \subseteq \cdots \subseteq \Psi_s. \quad (148)$$

Definizione 9. Il termine E_0 della successione spettrale associata alla filtrazione (148) verrà denotato con $(\Psi_s E_0, \Psi_s d_0)$, o semplicemente con $\Psi_s E_0$.

Proposizione 1. I complessi $\Psi_s E_0$ definiscono una filtrazione del complesso (E_0, d_0) , ed i loro differenziali non sono altro che la restrizione di d_0 .

Dimostrazione. Dato che

$$\Psi_s E_0^p = \frac{\Phi_p \cap \Psi_s}{\Phi_{p+1} \cap \Psi_s} = \frac{\Phi_p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}}, \quad (149)$$

laddove la prima uguaglianza è proprio la definizione del termine E_0 e la seconda segue dalla proposizione 14, l'immersione di $\Phi_p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}$ in Φ_p induce un'immersione di $\Psi_s E_0$ in

$$E_0^p = \frac{\Phi_p}{\Phi_{p+1}}. \quad (150)$$

Si osservi ora che, in entrambe le rappresentazioni di $\Psi_s E_0^p$ date in (149), il differenziale $\Psi_s d_0$ è nient'altro che il differenziale quoziente, dato che tutti gli oggetti in gioco sono complessi. Segue che $\Psi_s d_0$ è proprio la restrizione di d_0 , e per questo motivo esso verrà denotato semplicemente col simbolo d_0 . \square

5.0.19 Filtrazione del termine E_1 .

Definizione 10. L'immagine della mappa indotta in coomologia dall'immersione di sottocomplessi $\Psi_s E_0 \subseteq E_0$ verrà denotata con $\Psi_s E_1$.

Proposizione 2. *I sotto-oggetti $\Psi_s E_1$ di E_1 sono stabili rispetto al differenziale d_1 , definendo così una filtrazione del complesso (E_1, d_1) .*

Dimostrazione. Si ha la seguente catena di identità

$$\begin{aligned}
\Psi_s E_1^p &\stackrel{\text{def.}}{=} \text{im } H(\Psi_s E_0^p \subseteq E_0^p) \\
&= \{ [[\omega]_{\Phi_{p+1}}]_{\text{im } d_0} \mid \omega \in \Phi_p \cap \Psi_s, d\omega \in \Phi_{p+1} \} \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}} + \text{im } d_0 \\
&= \frac{\text{im } d_0}{\Phi_{p+1}} \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}} \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}} \cap \text{im } d_0 \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}} \\
&= \frac{\frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}} \cap \frac{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}}}{\Phi_{p+1}} \\
&= \frac{\frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{\Phi_{p+1}}}{(Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}) \cap (d\Phi_p + \Phi_{p+1})} \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}}{(Z_1^p \cap \Psi_s + \Phi_{p+1}) \cap (d\Phi_p + \Phi_{p+1})} \\
&= \frac{Z_1^p \cap \Psi_s + d\Phi_p + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}},
\end{aligned}$$

ed è chiaro che che l'immersione di $Z_1^p \cap \Psi_s + d\Phi_p + \Phi_{p+1}$ in Z_1^p induce precisamente l'immersione di $\Psi_s E_1^p$ in

$$E_1^p = \frac{Z_1^p}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}. \quad (151)$$

Dato che $d(d\Phi_p + \Phi_{p+1}) = d\Phi_{p+1}$ e $d(Z_1^p \cap \Psi_s) \subseteq d(Z_1^p) \cap d\Psi_s \subseteq Z_1^{p+1} \cap \Psi_s$, si ha $d_1(\Psi_s E_1^p) \subseteq \Psi_s E_1^{p+1}$. \square

Le proposizioni 1 e 2 appena dimostrate spingono a pensare che una tale procedura possa essere iterata indefinitamente, o, in altre parole, che la filtrazione iniziale del termine E_0 si propaghi attraverso tutti i termini della sequenza spettrale inducendo una filtrazione stabile (rispetto al differenziale corrispondente) ad ogni passo.

Sfortunatamente—e sorprendentemente—ciò non accade, ed il meccanismo si inceppa già al secondo passo. La filtrazione $\Psi_s E_2^p$, infatti, non risulta, in generale, essere stabile rispetto al differenziale d_2 .

5.0.20 Filtrazione del termine E_2 .

Definizione 11. *L'immagine della mappa indotta in coomologia dall'immersione di sottocomplessi $\Psi_s E_1 \subseteq E_1$ verrà denotata con $\Psi_s E_2$.*

Lemma 1. *I sotto-oggetti $\Psi_s E_2$ di E_2 non sono, in generale, stabili rispetto al differenziale d_2 .*

Dimostrazione. Si ha

$$\Psi_s E_2^p \stackrel{\text{def.}}{=} \text{im } H(\Psi_s E_1^p \subseteq E_1^p) = \frac{\Psi_s E_1^p \cap \ker d_1 + \text{im } d_1}{\text{im } d_1}, \quad (152)$$

e

$$\Psi_s E_1^p \cap \ker d_1 = \frac{Z_1^p \cap \Psi_s \cap d^{-1}(d\Phi_{p+1} + \Phi_{p+2}) + d\Phi_p + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}. \quad (153)$$

Ma

$$Z_1^p \cap d^{-1}(d\Phi_{p+1} + \Phi_{p+2}) = Z_2^p + \Phi_{p+1}, \quad (154)$$

come nel caso non filtrato, da cui

$$\Psi_s E_1^p \cap \ker d_1 = \frac{(Z_2^p + \Phi_{p+1}) \cap \Psi_s + d\Phi_p + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}, \quad (155)$$

e di conseguenza

$$\Psi_s E_2^p = \frac{\frac{(Z_2^p + \Phi_{p+1}) \cap \Psi_s + d\Phi_p + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}} + \frac{dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}}{\frac{dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}{d\Phi_p + \Phi_{p+1}}}, \quad (156)$$

cioè

$$\Psi_s E_2^p = \frac{(Z_2^p + \Phi_{p+1}) \cap \Psi_s + dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}{dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}. \quad (157)$$

Applicando la proposizione 18 si ottiene

$$\Psi_s E_2^p = \frac{Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s) + dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}{dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1}}, \quad (158)$$

che, in virtù della proposizione 15, diventa

$$\Psi_s E_2^p = \frac{Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s) + dZ_1^{p-1}}{dZ_1^{p-1} + \Phi_{p+1} \cap Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s)}. \quad (159)$$

Dato che dZ_1^{p-1} è contenuto in Z_2^p , e $\Phi_{p+1} \cap Z_2^p$ è uguale a Z_1^{p+1} , l'ultima uguaglianza si modifica nel modo seguente

$$\Psi_s E_2^p = \frac{Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s + dZ_1^{p-1})}{dZ_1^{p-1} + Z_1^{p+1} \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s)}, \quad (160)$$

e si ottiene finalmente

$$\Psi_s E_2^p = \frac{Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s + dZ_1^{p-1})}{dZ_1^{p-1} + Z_1^{p+1}} \subseteq \frac{Z_2^p}{dZ_1^{p-1} + Z_1^{p+1}} = E_2^p \quad (161)$$

essendo Z_1^{p+1} parte di $\Phi_{p+1} + \Psi_s$.

Si osservi ora che

$$d_2(\Psi_s E_2^p) = \frac{d(Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s + dZ_1^{p-1})) + dZ_1^{p+1} + Z_1^{p+3}}{dZ_1^{p+1} + Z_1^{p+3}} \quad (162)$$

cade all'interno di $\Psi_s E_2^{p+2}$ se e solo se vale l'inclusione

$$d(Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s)) \subseteq Z_2^{p+2} \cap (\Phi_{p+3} + \Psi_s + dZ_1^{p+1}) \quad (163)$$

il che non è sempre il caso. \square

Teorema 6 (Condizione di compatibilità per E_2). *Se una delle due condizioni $\Psi_s \subseteq Z_2^p$ oppure $\Psi_s \supseteq Z_2^p$ è soddisfatta, allora $d_2(\Psi_s E_2^p) \subseteq \Psi_s E_2^{p+2}$.*

Dimostrazione. In luce della proposizione 16, ed adoperando le ipotesi del teorema, si trova

$$Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s) = Z_2^p \cap \Phi_{p+1} + Z_2^p \cap \Psi_s = Z_1^{p+1} + Z_2^p \cap \Psi_s, \quad (164)$$

da cui, applicando il differenziale, si ottiene

$$d(Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s)) \subseteq dZ_1^{p+1} + dZ_2^p \cap \Psi_s, \quad (165)$$

inclusione che implica immediatamente la (163). \square

5.0.21 Filtrazioni stabili del termine E_2 .

Definizione 12. *Le seguenti filtrazioni dell'oggetto E_2*

$$\Psi_s^> E_2^p \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s + d\Phi_{p-1})}{dZ_1^{p-1} + Z_1^{p+1}}, \quad (166)$$

$$\Psi_s^< E_2^p \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Z_2^p \cap (Z_1^{p+1} + \Psi_s + dZ_1^{p-1})}{dZ_1^{p-1} + Z_1^{p+1}}, \quad (167)$$

verranno chiamate, rispettivamente superiore ed inferiore.

Lemma 2. *Le filtrazioni superiore ed inferiore controllano quella ereditata da E_1 , nel senso che si ha la seguente catena di inclusioni*

$$\Psi_s^> E_2^p \supseteq \Psi_s E_2^p \supseteq \Psi_s^< E_2^p. \quad (168)$$

Tali filtrazioni sono altresì stabili rispetto al differenziale d_2 .

Dimostrazione. Per la filtrazione superiore si ha

$$d(Z_2^p \cap (\Phi_{p+1} + \Psi_s + d\Phi_{p-1})) \subseteq dZ_2^p \cap (d\Phi_{p+1} + \Psi_s) \subseteq Z_2^{p+2} \cap (\Phi_{p+3} + \Psi_s + d\Phi_{p+1}),$$

mentre per quella inferiore la formula analoga è data da

$$d(Z_2^p \cap (Z_1^{p+1} + \Psi_s + dZ_1^{p-1})) \subseteq dZ_2^p \cap (dZ_1^{p+1} + \Psi_s) \subseteq Z_2^{p+2} \cap (Z_{p+3}^1 + \Psi_s + dZ_1^{p+1}).$$

Dalle inclusioni appena dimostrate si ricavano infine le inclusioni $d_2(\Psi_s^> E_2^p) \subseteq \Psi_s^> E_2^{p+2}$ e $d_2(\Psi_s^< E_2^p) \subseteq \Psi_s^< E_2^{p+2}$, rispettivamente. \square

5.0.22 Sequenze spettrali filtrate associate ad una coppia di ideali differenziali. Si analizza qui il caso in cui K possiede una struttura moltiplicativa, ossia quando K è un'algebra differenziale (denotata col simbolo Λ), e le filtrazioni Φ e Ψ sono determinate dalle potenze degli ideali \mathcal{I} e \mathcal{L} , rispettivamente, di Λ . Si ha

$$\Phi_p \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{I}^p,$$

$$\Psi_s \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}^s.$$

In tal caso si trovano le formule

$$Z_r^p = \mathcal{I}^p \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+r}), \quad (169)$$

$$dZ_r^{p-r} = \mathcal{I}^p \cap d\mathcal{I}^{p-r}, \quad (170)$$

che conducono alle espressioni

$$\Psi_s E_0^p = \frac{\mathcal{I}^p \cap \mathcal{L}^s + \mathcal{I}^{p+1}}{\mathcal{I}^{p+1}} \quad (171)$$

$$\Psi_s E_1^p = \frac{\mathcal{I}^p \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+1}) \cap \mathcal{L}^s + d\mathcal{I}^p + \mathcal{I}^{p+1}}{d\mathcal{I}^p + \mathcal{I}^{p+1}} \quad (172)$$

$$\Psi_s^> E_2^p = \frac{\mathcal{I}^p \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+2}) \cap (\mathcal{I}^{p+1} + \mathcal{L}^s + d\mathcal{I}^{p-1})}{d\mathcal{I}^{p-1} \cap \mathcal{I}^p + \mathcal{I}^{p+1} \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+2})} \quad (173)$$

$$\Psi_s^< E_2^p = \frac{\mathcal{I}^p \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+2}) \cap (\mathcal{I}^{p+1} \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+2}) + \mathcal{L}^s + d\mathcal{I}^{p-1} \cap \mathcal{I}^p)}{d\mathcal{I}^{p-1} \cap \mathcal{I}^p + \mathcal{I}^{p+1} \cap d^{-1}(\mathcal{I}^{p+2})} \quad (174)$$

6 Coppie di diffieties

6.1 La sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa associata ad una coppia di diffieties

6.1.1 Coppie di diffieties. Si ricordi la definizione 1 di un diffiety. Un *morfismo* fra due diffieties è una mappa liscia fra i rispettivi sostegni che manda la distribuzione del primo diffiety nella distribuzione del secondo diffiety. Un morfismo di diffieties $i : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ che sia anche un'immersione fra i rispettivi sostegni è detto *immersione di diffieties*. Se il sostegno di \mathcal{O}' è contenuto nel sostegno di \mathcal{O} , e l'inclusione canonica è un morfismo di diffieties, allora \mathcal{O}' si dirà un *sotto-diffiety* di \mathcal{O} .

Ad esempio, ogni punto secondario del diffiety \mathcal{O} , strutturato a diffiety con la distribuzione totale, è un sotto-diffiety di \mathcal{O} . Ponendo $\mathcal{O}' = (M, \Delta')$, ed $\mathcal{O} = (M, \Delta)$, essendo Δ' una sotto-distribuzione di Δ , si ottengono due diffieties diverse ma con lo stesso sostegno, e la mappa identica realizza un'immersione della prima nella seconda.

Osservazione 5. Data una qualsiasi sottovarietà N di M , e considerando la distribuzione ristretta $\Delta|_N$, la coppia $(N, \Delta|_N)$ non è necessariamente un diffiety, in quanto $\Delta|_N$ potrebbe non essere completamente integrabile, o addirittura potrebbe non essere regolare.

Definizione 13. *L'oggetto $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ viene detto coppia di diffieties se \mathcal{O}' è un sotto-diffiety di \mathcal{O} .*

Data una coppia di diffieties $(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ ha senso parlare di co-dimensione e di co-Dimensione di \mathcal{O}' rispetto ad \mathcal{O} , intendendo con la prima la co-dimensione

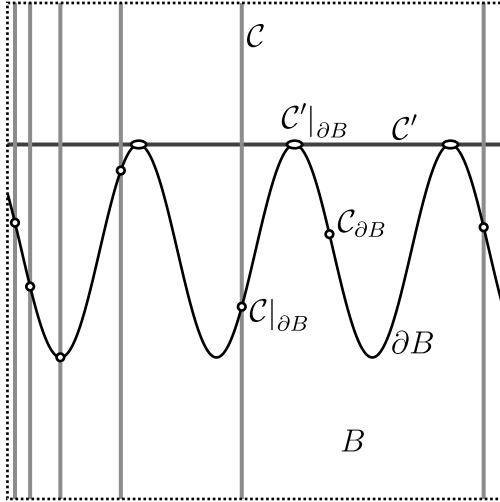


Figura 4: B è il piano \mathbb{R}^2 , \mathcal{C} la distribuzione verticale, e \mathcal{C}' quella orizzontale. ∂B è il grafico di una sinusoide munito della distribuzione nulla. La coppia $(B, \partial B)$ soddisfa il punto 1) della definizione 14 indipendentemente dalla scelta di \mathcal{C} o \mathcal{C}' . Ma solo dotando B della distribuzione \mathcal{C} si ottiene che $(B, \partial B)$ soddisfa anche il punto 2).

del sostegno di \mathcal{O}' nel sostegno di \mathcal{O} , e con la seconda la co-dimensione della distribuzione di \mathcal{O}' riguardata come sotto-distribuzione della distribuzione di \mathcal{O} .

Osservazione 6. Tutte le coppie di diffiety che verranno menzionate in questa Tesi avranno co-dimensione e co-Dimensione entrambe uguali ad 1. Una siffatta coppia, indicata col simbolo $(B, \partial B)$, verrà semplicemente chiamata *diffiety con bordo*, intendendo per “bordo” il sotto-diffiety ∂B . Il nome “bordo” è improprio, perché si assume per bordo una qualsiasi ipersuperficie secondaria (ossia un sotto-diffiety avente co-dimensione e co-Dimensione entrambi uguali ad 1). La scelta del nome è dovuta al fatto che il caso di un bordo vero e proprio è senz'altro quello più importante.

La nozione di coppia di diffieties fornisce l'analogo secondario delle coppie di varietà, costituite da una varietà e da una sottovarietà in essa, ad esempio una ipersuperficie oppure il bordo. Ma adesso gli oggetti geometrici B e ∂B sono più ricchi, in quanto ciascuno di essi porta con sé la propria distribuzione, denotate con \mathcal{C} e $\mathcal{C}_{\partial B}$, rispettivamente.

Osservazione 7. Sebbene il sostegno di ∂B sia contenuto nel sostegno di B , ciò non vuol dire che la distribuzione $\mathcal{C}_{\partial B}$ coincide con la distribuzione ristretta $\mathcal{C}|_{\partial B}$, perché potrebbe accadere che ∂B sia tangente a \mathcal{C} (vedi Figura 4). Nella presente Tesi si assume che $\mathcal{C}_{\partial B}$ è proprio la restrizione di \mathcal{C} a ∂B , ossia che ∂B è *trasversale* alla distribuzione \mathcal{C} . In termini di foglie della distribuzione, ciò significa che le sottovarietà integrali di \mathcal{C} sono sempre *tra-*

sversali alla ipersuperficie ∂B in B . È interessante notare come già agli inizi della teoria si incontra naturalmente il concetto di *trasversalità*, conseguenza immediata della secondarizzazione del concetto di bordo.

Nel presente lavoro si adotterà dunque la seguente

Definizione 14 (Diffiety con bordo). *Una coppia di diffieties $(B, \partial B)$ è detta diffiety con bordo se*

1. ∂B ha co-dimensione e co-Dimensione entrambe uguali ad 1;
2. $\mathcal{C}_{\partial B} = \mathcal{C}|_{\partial B}$.

6.1.2 Notazioni. Le notazioni saranno consistenti con quelle adottate in [16]. Più precisamente, \mathcal{F} e Λ rappresentano l'algebra filtrata delle funzioni lisce e l'algebra differenziale delle forme differenziali su B , rispettivamente, $\mathcal{C} \subset \Lambda$ è l'ideale differenziale delle forme di Cartan, $\bar{\Lambda}$ l'algebra differenziale delle forme orizzontali, e \varkappa è l'algebra di Lie delle simmetrie superiori di B . Se $B = J^\infty(\pi)$, allora la derivazione evolutiva, la cui funzione generatrice è ψ , verrà denotata con \mathfrak{D}_ψ , mentre ℓ_f è la linearizzazione universale di $f \in \mathcal{F}$, ed U_1 è l'operatore universale, e così via. Consistentemente, $\mathcal{F}(\partial B)$, $\Lambda(\partial B)$, $\mathcal{C}_{\partial B}$, $\bar{\Lambda}(\partial B)$, $\varkappa(\partial B)$, $\mathfrak{D}_\psi^{\partial B}$, $\ell_f^{\partial B}$ e $U_1^{\partial B}$ rappresenteranno i concetti corrispondenti per il diffiety ∂B . Ad esempio, $\ell_f^{\partial B}$ è un operatore $\mathcal{C}_{\partial B}$ -differenziale. La sequenza \mathcal{C} -spettrale per B è indicata con E_r , mentre la sequenza \mathcal{C} -spettrale per ∂B è indicata con $E_r(\partial B)$.

6.1.3 Il termine E_0 relativo. Sia $\iota_{\partial B} : \partial B \rightarrow B$ l'immersione canonica. Si denoti con $\mathcal{L} = \Lambda(B, \partial B)$ l'ideale $\ker \iota_{\partial B}^*$ delle forme differenziali di B che si annullano su ∂B , e con $I(\partial B)$ l'ideale delle funzioni su B che si annullano su ∂B . L'ideale algebrico $I(\partial B)$ coincide allora con la parte di grado 0 dell'ideale differenziale \mathcal{L}

La restrizione della distribuzione di Cartan su B ad ∂B è data dall'ideale

$$\mathcal{C}_{\partial B} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C} \cap \mathcal{L}} = \frac{\mathcal{C} + \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \quad (175)$$

dell'algebra quoziente $\Lambda/\mathcal{L} = \Lambda(\partial B)$. La parte di grado 0 di $\Lambda(\partial B)$ è proprio il quoziente $\frac{\mathcal{F}}{I(\partial B)}$, l'algebra $\mathcal{F}(\partial B)$ delle funzioni lisce su ∂B .

Si vede dunque che l'algebra differenziale Λ è doppiamente filtrata. In primo luogo, mediante le potenze di \mathcal{C} , e poi, in modo banale, $\Lambda \supseteq \Lambda(B, \partial B) \supseteq$

0. La proposizione 1 di pag. 59, unita alla (171), dimostra automaticamente la seguente

Proposizione 3. *Il sottomodulo*

$$E_0^p(B, \partial B) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} + \mathcal{C}^{p+1}}{\mathcal{C}^{p+1}} \quad (176)$$

di E_0^p è, inoltre, un sotto-complesso di (E_0^p, d_0) .

In altre parole, alla filtrazione $\Lambda \supseteq \Lambda(B, \partial B) \supseteq 0$ di Λ corrisponde la filtrazione $E_0 \supseteq E_0(B, \partial B) \supseteq 0$ di E_0 . Questo è il caso più semplice di una successione spettrale filtrata. In futuro verranno analizzati casi meno banali, nei quali ogni termine della successione spettrale principale è filtrato, e come tale dà luogo esso stesso ad una nuova successione spettrale.

All'interno di $E_0(B, \partial B)$ si trova un'algebra di forme assai notevole.

Definizione 15. *Il termine $E_0^p(B, \partial B)$ è chiamato l'algebra differenziale delle forme differenziali orizzontali su B relative rispetto a ∂B , e si indica con $\bar{\Lambda}(B, \partial B)$.*

Così come, quozientando Λ su $\Lambda(B, \partial B)$ si ottiene $\Lambda(\partial B)$, analogamente, quozientando E_0^p su $E_0^p(B, \partial B)$ si ottiene $E_0^p(\partial B)$, come dimostrato dal seguente

Teorema 7. *L' \mathcal{F} -modulo quoziente $\frac{E_0^p}{E_0^p(B, \partial B)}$ è isomorfo all' $\mathcal{F}(\partial B)$ -modulo $\frac{\mathcal{C}_{\partial B}^p}{\mathcal{C}_{\partial B}^{p+1}}$, ossia $E_0^p(\partial B)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione (176) di $E_0^p(B, \partial B)$ si ha

$$\frac{E_0^p}{E_0^p(B, \partial B)} = \frac{\frac{\mathcal{C}^p}{\mathcal{C}^{p+1}}}{\frac{\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} + \mathcal{C}^{p+1}}{\mathcal{C}^{p+1}}} = \frac{\mathcal{C}^p}{\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} + \mathcal{C}^{p+1}}, \quad (177)$$

mentre per la (175) si ha

$$\mathcal{C}_{\partial B}^p = \left(\frac{\mathcal{C} + \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right)^p = \frac{\mathcal{C}^p + \mathcal{L}}{\mathcal{L}}, \quad (178)$$

da cui

$$\frac{\mathcal{C}_{\partial B}^p}{\mathcal{C}_{\partial B}^{p+1}} = \frac{\frac{\mathcal{C}^p + \mathcal{L}}{\mathcal{L}}}{\frac{\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{L}}{\mathcal{L}}} = \frac{\mathcal{C}^p + \mathcal{L}}{\mathcal{C}^{p+1} + \mathcal{L}}, \quad (179)$$

che coincide con $\frac{\mathcal{C}^p}{\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} + \mathcal{C}^{p+1}}$ in virtù della Proposizione 15.

La corrispondenza

$$[[\omega]_{\mathcal{C}^{p+1}}]_{E_0^p(B, \partial B)} \longmapsto [\omega|_{\partial B}]_{\mathcal{C}_{\partial B}^{p+1}} \quad (180)$$

realizza così l'isomorfismo cercato fra il quoziente $\frac{E_0^p}{E_0^p(B, \partial B)}$ ed $E_0^p(B, \partial B)$, in quanto $\omega|_{\partial B} \in \Lambda(\partial B)$ si identifica con la classe $[\omega]_{\mathcal{L}} \in \frac{\Lambda}{\mathcal{L}}$. \square

Si perviene così alla seguente sequenza esatta corta di complessi, nella quale compaiono gli oggetti ben noti E_0^p ed $E_0^p(\partial B)$,

$$0 \rightarrow E_0^p(B, \partial B) \xrightarrow{i} E_0^p \xrightarrow{\alpha} E_0^p(\partial B) \rightarrow 0, \quad (181)$$

ed il nuovo oggetto $E_0^p(B, \partial B)$, chiamato *il termine E_0 della sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa* associata alla coppia $(B, \partial B)$. Il differenziale del complesso $E_0^p(B, \partial B)$ verrà indicato con $d_{0, \text{rel}}^p$, e chiamato *il differenziale d_0 relativo*. Nel seguito, usando coordinate affini, si fornirà una descrizione esplicita di tale oggetto.

6.1.4 Il termine E_1 relativo. Si consideri adesso la sequenza esatta lunga indotta in coomologia dalla (181),

$$\begin{array}{ccc} E_1^p(B, \partial B) & \xrightarrow{H(i)} & E_1^p \\ & \swarrow \partial & \searrow H(\alpha) \\ & E_1^p(\partial B) & \end{array} \quad (182)$$

Definizione 16. *L'oggetto*

$$E_1(B, \partial B) \stackrel{\text{def.}}{=} H(E_0(B, \partial B)). \quad (183)$$

è chiamato il termine E_1 della sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa associata alla coppia $(B, \partial B)$.

Osservazione 8. Tale definizione è impropria, visto che $E_1(B, \partial B)$ non possiede un differenziale naturalmente definito. Dalla teoria esposta in 5.0.19 si sa però che l'immagine di $H(i)$ filtra il complesso E_1^p

Definizione 17. *Il termine $E_1^0(B, \partial B)$ è chiamato l'algebra delle coomologie orizzontali su B relative rispetto a ∂B , e si indica con $\overline{H}(B, \partial B)$.*

Poiché $E_1(B, \partial B)$ é inscritto all'interno del diagramma (182), si può dare una descrizione qualitativa di questo nuovo oggetto, basandosi su analoghe proprietà degli oggetti noti.

Proposizione 4. *Se il Teorema dell'unica linea (vedi [16], 4.3.7) vale sia per B che per ∂B , allora esso vale anche per la sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa associata alla coppia $(B, \partial B)$.*

Dimostrazione. Immediata. □

In altre parole, se il termine $E_1^{p,q}(B, \partial B)$ è non banale, allora o $p = 0$, oppure $q = n$.

In particolare, se $p = 0$, la (182) diviene

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}(B, \partial B) & \xrightarrow{H(i)} & \overline{H} \\ & \searrow \bar{\partial} & \swarrow H(\alpha) \\ & & \overline{H}(\partial B), \end{array} \quad (184)$$

la cosiddetta *sequenza esatta lunga delle coomologie di de Rham orizzontali* associata alla coppia $(B, \partial B)$. Qui $\bar{\partial}$ è l'*operatore di bordo orizzontale*.

Osservazione 9. Nelle ipotesi della Proposizione 4, la sequenza (182) per $p > 0$ si riduce alla sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow E_1^{p,n-1}(\partial B) \xrightarrow{\bar{\partial}} E_1^{p,n}(B, \partial B) \xrightarrow{H(i)} E_1^{p,n} \longrightarrow 0. \quad (185)$$

Ma allora $H(i)$ è suriettivo, e dunque la sua immagine è l'intero $E_1^{p,n}$, sicché la filtrazione nel termine E_1 , data dalle definizioni 10 di pag. 59, risulta banale.

A questo punto non si può dire altro riguardo alla sequenza \mathcal{C} -spettrale relativa. Per arricchire l'analisi appena portata a termine di questo nuovo oggetto, occorre fare l'analogo secondario del passaggio in coordinate locali della geometria differenziale classica. Bisogna, cioè, considerare dei casi speciali di coppie di diffieties, i cosiddetti casi fibrati.

6.2 Coppie di diffieties nel caso fibrato

6.2.1 Introduzione. Uno dei modi più semplici per produrre una coppia di diffieties è quello di considerare inizialmente una coppia di varietà $(E, \partial E)$.

Così come i getti infiniti di una varietà producono una varietà secondaria, ossia un diffiety, così i getti infiniti di una coppia di varietà producono una coppia di diffieties. Ma occorre solo una leggera cautela nella definizione. Si pone naturalmente $B = J^\infty(E, n)$, e poi

$$\partial B \stackrel{\text{def.}}{=} \{[L]_y^\infty \mid L \subset E, \dim L = n, L \text{ interseca } \partial E \text{ trasversalmente in } y\}. \quad (186)$$

Osservazione 10. Il motivo per cui non si pone semplicemente $\partial B = \pi_{\infty,0}^{-1}(\partial E)$ è che, in questo caso, esisterebbero dei punti θ di ∂B nei quali il piano di Cartan \mathcal{C}_θ sarebbe tangente a ∂B . Se $\theta = [L]_y^\infty$, allora \mathcal{C}_θ è tangente a ∂B se e solo se $\mathcal{C}_\theta = T_\theta(L^{(\infty)}) \subseteq T_\theta(\partial B)$. Usando la rappresentazione implicita $\partial E = \{\phi = 0\}$, si ha $\partial B = \{\pi_{\infty,0}^*(\phi) = 0\}$, e di conseguenza $T_\theta(\partial B) = \ker d_\theta \pi_{\infty,0}^*(\phi)$. Applicando quindi $d_\theta \pi_{\infty,0}$ all'inclusione $T_\theta(L^{(\infty)}) \subseteq T_\theta(\partial B)$ si ottiene l'inclusione $T_y(L) \subseteq T_y(\partial E)$.

Viceversa, $T_y(L) \subseteq T_y(\partial E)$ equivale a $d_y(\phi \circ j_0(L)) = 0$. Ma $j_0(L) = \pi_{\infty,0} \circ j_\infty(L)$, e dunque $d_y(\pi_{\infty,0}^*(\phi) \circ j_\infty(L)) = 0$, cioè $L^{(\infty)}$ è tangente a ∂B in $\theta = j_\infty(L)(y)$.

Segue che \mathcal{C}_θ è tangente a ∂B se e solo se L è tangente a ∂E in $y = \pi_{\infty,0}(\theta)$. Rimuovendo tali punti θ da $\pi_{\infty,0}^{-1}(\partial E)$ si ottiene proprio l'insieme ∂B definito in (186).

Proposizione 5. *Definendo ∂B come in (186), e ponendo $\mathcal{C}_{\partial B} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{C}|_{\partial B}$, la coppia $(B, \partial B)$ risulta essere un diffiety con bordo.*

Dimostrazione. L'osservazione 10 garantisce che \mathcal{C} non può essere tangente a ∂B . Poiché si dimostra immediatamente (vedi Figura 5), utilizzando coordinate affini, che ∂B è una ipersuperficie liscia in B , la distribuzione \mathcal{C} non può far altro che intersecare ∂B lungo iperpiani. \square

Inoltre, se $E \xrightarrow{\pi} M$ è una fibrazione liscia sopra la varietà n -dimensionale M e $\partial E = \pi^{-1}(\partial M)$, essendo ∂M una ipersuperficie in M , ponendo $B = J^\infty(\pi)$, la definizione (186) diviene semplicemente

$$\partial B = \pi_\infty^{-1}(\partial M). \quad (187)$$

Questo caso particolare sarà chiamato *caso fibrato*, e localmente è sempre possibile ridursi ad esso, come illustrato in Figura 6.

Nei casi più generali finora considerati, B è un dominio aperto in $J^\infty(E, n)$ e ∂B è ∂ -ammissibile in B (vedi [20], 8.4).

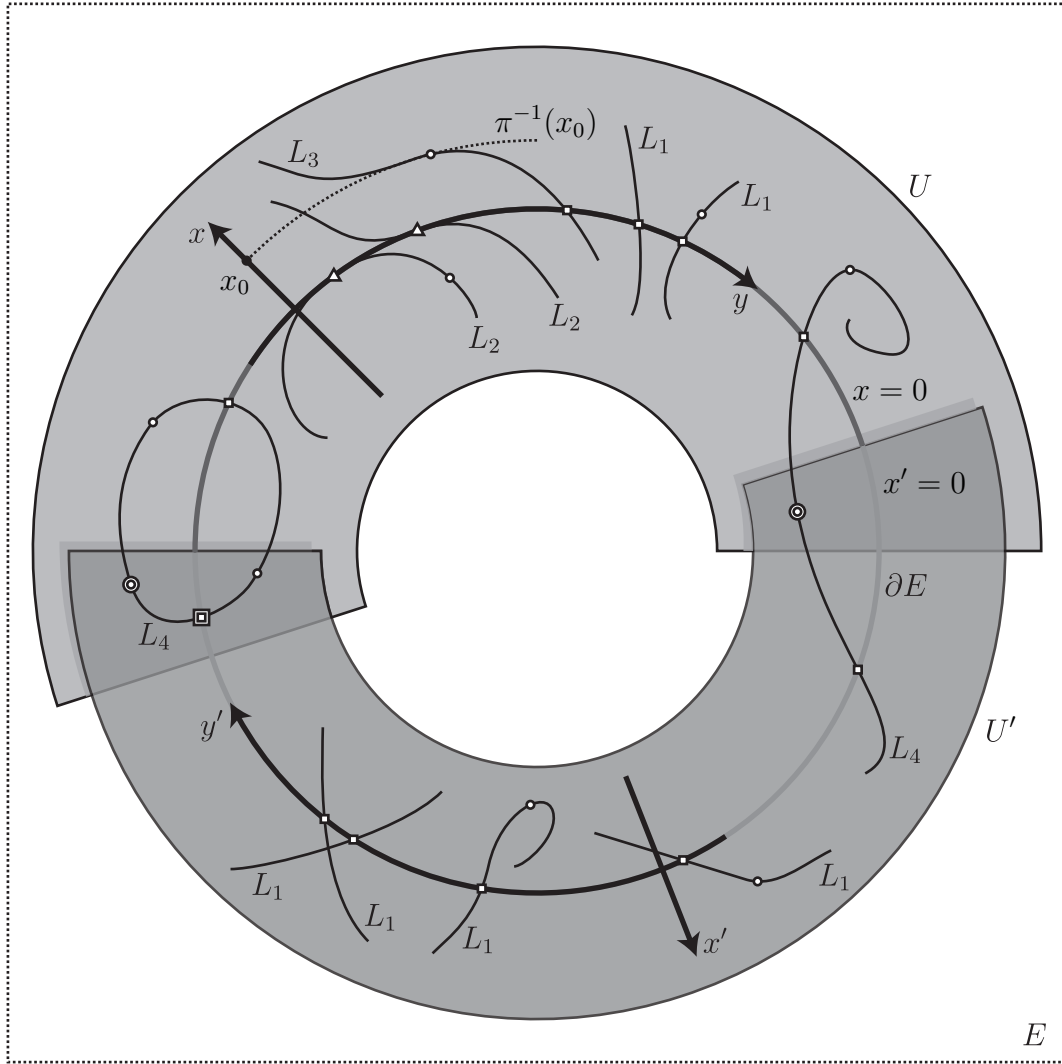


Figura 5: E è il piano \mathbb{R}^2 , e ∂E è una circonferenza in esso. Il numero n è stato posto uguale ad 1. I due aperti Euclidei U ed U' sono disposti in modo tale che ∂E abbia equazione $x = 0$ in U ed $x' = 0$ in U' . Se π (risp. π') è la proiezione sull'asse delle x in U (risp. x' in U'), si scopre agevolmente che l'intersezione $\partial B \cap J^\infty(\pi)$ di ∂B con la carta affine $J^\infty(\pi)$ è proprio π_∞^{-1} dell'origine, e come tale risulta essere una ipersuperficie liscia nella carta affine $J^\infty(\pi)$ di B (ed analogamente per π'). Infatti i punti di $\partial B \cap J^\infty(\pi)$ sono tutti e soli i getti infiniti delle curve trasversali a ∂E nei punti dell'asse delle y , ossia tutti i getti delle sezioni di π nel punto $x = 0$. Le curve L_1 sono trasversali a ∂E , ed anche le curve L_4 , che però giacciono in entrambe le carte. I loro getti nei punti a quadrato giacciono perciò in uno dei due aperti $\partial B \cap J^\infty(\pi)$ o $\partial B \cap J^\infty(\pi')$ di ∂B . Il getto nel punto a doppio quadrato si trova in entrambi. Le curve L_2 sono tangenti a ∂E , per cui i loro getti nei punti a triangolo, pur trovandosi in $\pi_{\infty,0}^{-1}(\partial E)$, non fanno parte di ∂B . I getti nei punti a cerchio fanno tutti parte di una delle due carte affini $J^\infty(\pi)$ o $J^\infty(\pi')$ (o di entrambe, per i punti a cerchio doppio), tranne quello della curva L_3 , ivi tangente alla fibra di π .

6.2.2 Coordinate locali. Per descrivere il caso fibrato, è conveniente scegliere una carta locale (x_1, \dots, x_n) su M tale che $\partial M = \{x_n = 0\}$. Questa carta viene poi estesa ad E introducendo le coordinate di fibra (u^1, \dots, u^m) , così da produrre la carta standard $(x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m, \dots, u_\sigma^j, \dots)$ su $J^\infty(\pi)$. Ciò è molto comodo, in quanto ∂B , in tale carta, diviene semplicemente l'ipersuperficie $\{x_n = 0\}$.

Si osservi che le derivate totali D_i , $1 \leq i \leq n$, su $J^\infty(\pi)$, corrispondenti a tale carta sono tangenti a ∂B se $i < n$. Sia $\Pi^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$, la proiezione di $\mathcal{F}(\pi, \pi)$ sulla sua j -esima componente e si ponga $D_\sigma^{(j)} = D_\sigma \circ \Pi^{(j)}$ essendo $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-indice. Gli elementi della base standard di \mathbb{N}_0^n sono 1_i , $i = 1, \dots, n$.

Fissando infine le forme di volume $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ e $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ su M e ∂M , rispettivamente, si identificheranno gli operatori a valori in $\overline{\Lambda}^n$ con operatori a valori in \mathcal{F} , e gli operatori a valori in $\overline{\Lambda}^{n-1}(\partial B)$ con operatori a valori in $\mathcal{F}(\partial B)$, rispettivamente.

6.2.3 Getti lungo distribuzioni. Per descrivere ∂B nel caso fibrato non basta affatto considerare il diffiety $(n - 1)$ -Dimensionale $J^\infty(\pi|_{\partial M})$. Tale spazio di getti, infatti, non contiene alcuna informazione riguardo alle derivate di sezioni di π lungo la direzione “normale” a ∂M , informazione che, invece, è presente in ∂B . Bisogna allora formalizzare il concetto di direzione “normale” (visto che non c'è alcuna metrica) e poi incorporare in qualche modo l'informazione mancante in $J^\infty(\pi|_{\partial M})$.

La teoria che segue nasce appunto per dare una soluzione a questo problema.

Sia Δ una distribuzione completamente integrabile su M . Si indichi con M_x la foglia della distribuzione Δ che passa per il punto $x \in M$.

Definizione 18. *Si dice che due sezioni (locali) $s, s' \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi)$ sono tangenti all'ordine k lungo Δ nel punto x se le loro restrizioni $s|_{M_x}, s'|_{M_x}$ ad M_x sono tangenti all'ordine k in x nel senso usuale (vedi Fig. 7).*

Basandosi sul concetto di tangenza lungo una distribuzione, si possono allora mimare tutte le costruzioni che si fanno classicamente con i getti riassunte in 2.1.3, ottenendo una teoria consistente.

Sia $[s]_{\Delta, x}^k$ la classe di equivalenza, rappresentata da s , delle sezioni locali di π che sono tangenti l'una coll'altra all'ordine k lungo Δ nel punto x , e sia inoltre

$$J_\Delta^k(\pi) \stackrel{\text{def.}}{=} \{[s]_{\Delta, x}^k \mid s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi), x \in M\}, \quad (188)$$

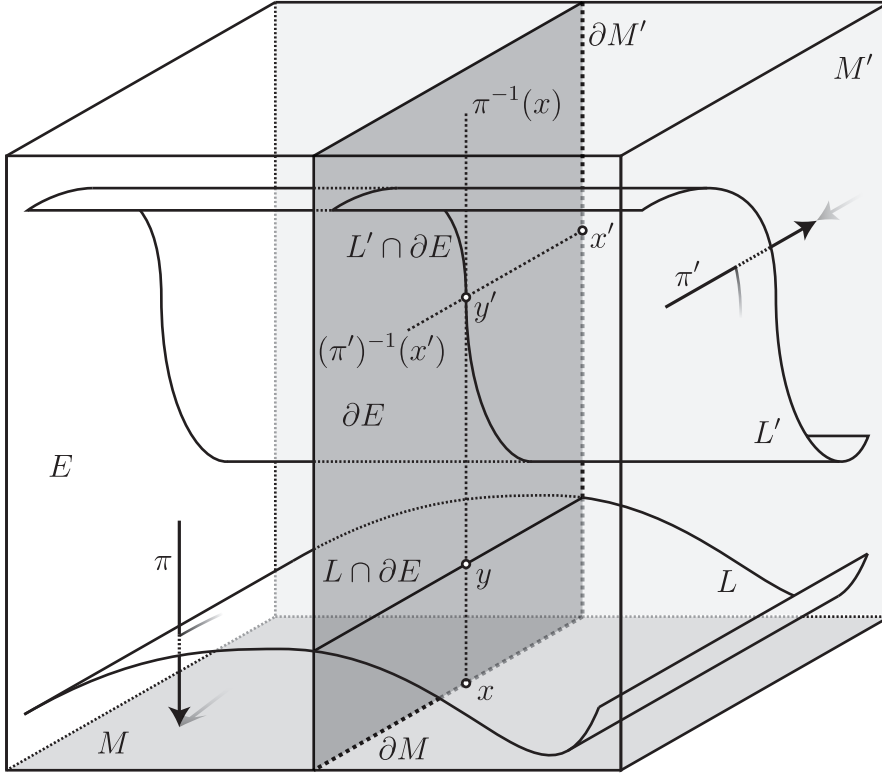


Figura 6: E è lo spazio Euclideo \mathbb{R}^3 , e ∂E è un piano perpendicolare ad uno degli assi coordinati. Il numero n è uguale a 2. Sebbene la situazione possa sembrare topologicamente banalissima, il diffiety ∂B definito come in (186) non può essere ricoperto da una sola carta affine. Si scelgano due piani perpendicolari M ed M' , e siano π e π' le rispettive proiezioni su di essi. Sia inoltre ∂M (resp. $\partial M'$) una retta in M (resp. M') tale che ∂E venga a coincidere con $\pi^{-1}(\partial M)$ (resp. $(\pi')^{-1}(\partial M')$). Le sottovarietà L ed L' sono entrambe trasversali a ∂E , e dunque ambedue i punti $\theta = [L]_y^\infty$ e $\theta' = [L']_{y'}^\infty$ fanno parte di ∂B . Ma L' è π -verticale in y' e dunque θ' non può appartenere a $J^\infty(\pi)$. Similmente, L è π' -verticale in y e dunque θ non può appartenere a $J^\infty(\pi')$. Per ricoprire ∂B occorrono perciò entrambe gli aperti $\partial B \cap J^\infty(\pi)$ e $\partial B \cap J^\infty(\pi')$, i quali coincidono, rispettivamente, con $\pi_\infty^{-1}(\partial M)$ e $(\pi')_\infty^{-1}(\partial M')$, ossia i bordi nel caso fibrato (187).

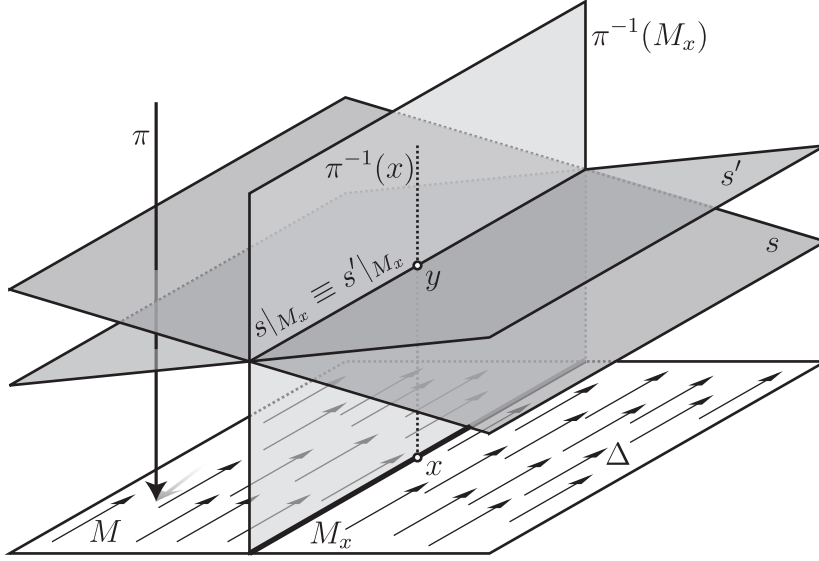


Figura 7: Le due sezioni s ed s' di π , pur non essendo tangenti in x nel senso usuale, sono ivi tangenti (all'ordine infinito) lungo la distribuzione Δ , la cui foglia per x è stata indicata con M_x .

$$\pi_{k,l}^{\Delta} : J_{\Delta}^k(\pi) \rightarrow J_{\Delta}^l(\pi), \quad \pi_{k,l}^{\Delta}([s]_{\Delta,x}^k) \stackrel{\text{def.}}{=} [s]_{\Delta,x}^l, \quad k \geq l, \quad (189)$$

$$\pi_k^{\Delta} : J_{\Delta}^k(\pi) \rightarrow M, \quad \pi_k^{\Delta}([s]_{\Delta,x}^k) \stackrel{\text{def.}}{=} x. \quad (190)$$

Il limite inverso $J_{\Delta}^{\infty}(\pi) \xrightarrow{\pi_{\infty}^{\Delta}} M$ delle π_k^{Δ} , $k \rightarrow \infty$, è definito nel modo usuale, come in 2.1.6.

Osservazione 11. Per trovare una carta affine in $J_{\Delta}^{\infty}(\pi)$ basta scrivere localmente Δ come lo span $\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle$ di k campi coordinati, $k = \dim \Delta$, in un aperto U che trivializzi π . Siano u^1, \dots, u^m le coordinate di fibra in tale aperto.

Una sezione $s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi)$ è allora identificata con una m -upla (f^1, \dots, f^m) di funzioni lisce su \mathbb{R}^n , sicché la classe di equivalenza $[s]_{\Delta,x}^{\infty}$ è identificata col vettore di lunghezza infinita $(\mathbf{x}, \dots, \frac{\partial^{|\tau|} f^k}{\partial x^{\tau}}(\mathbf{x}), \dots)$, con $k = 1, \dots, m$ e $\tau \in \mathbb{N}_0^k$.

Si ponga

$$u_\tau^k ([s]_{\Delta, \mathbf{x}}^\infty) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^{|\tau|} f^k}{\partial x^\tau}(\mathbf{x}). \quad (191)$$

Allora il set di funzioni $(x_1, \dots, x_n, \dots, u_\tau^k, \dots)$, con $k = 1, \dots, m$ e $\tau \in \mathbb{N}_0^k$, forma un sistema di coordinate in $(\pi_\Delta^\Delta)^{-1}(U)$.

Se la distribuzione è monodimensionale, ad esempio $\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle$, allora si usa una notazione senza multi–indice,

$$u_i^k ([s]_{\Delta, \mathbf{x}}^\infty) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^i f^k}{\partial x_l^i}(\mathbf{x}). \quad (192)$$

I risultati che seguono mostrano che $J^\infty(\pi|_{M_x})$ si immerge naturalmente in $J_\Delta^\infty(\pi)$ (mentre non si immerge naturalmente in $J^\infty(\pi)$), e che, d'altra parte, $J^\infty(\pi)$ si proietta naturalmente su $J_\Delta^\infty(\pi)$ (venendo rimossa l'informazione sulle derivate normali).

Proposizione 6. *Le mappe*

$$J^\infty(\pi|_{M_x}) \rightarrow J_\Delta^\infty(\pi), \quad [s]_x^\infty \mapsto [\tilde{s}]_{\Delta, x}^\infty, \quad (193)$$

essendo \tilde{s} un'estensione di $s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi|_{M_x})$ a $\Gamma_{\text{loc}}(\pi)$, e

$$J^\infty(\pi) \rightarrow J_\Delta^\infty(\pi), \quad [s]_x^\infty \mapsto [s]_{\Delta, x}^\infty, \quad (194)$$

sono iniettive e suriettive, rispettivamente.

Dimostrazione. Ovvio. □

Osservazione 12. Non è possibile definire un'immersione di $J^\infty(\pi|_{M_x})$ in $J^\infty(\pi)$ analoga alla (193). Si veda in proposito la Figura 8. Qui la foglia M_x è data da ∂M . Per ricostruire il getto di f nel punto \mathbf{x} non è infatti sufficiente conoscere il getto della restrizione $f|_{M_x}$, perché in esso sono codificate unicamente le informazioni sulle derivate di f lungo M_x (ossia rispetto alla variabile x nel disegno). Ciò che manca è l'informazione sulle derivate di f *normali* rispetto ad M_x . Dal getto di $f|_{M_x}$ si può ricostruire soltanto il getto di f lungo Δ , e proprio questo è il significato della (193).

Osservazione 13. È interessante notare che (M, Δ) è un diffiety, sicché ha senso considerare gli operatori Δ –differenziali nella categoria dei $C^\infty(M)$ –moduli (vedi 2.2.8). In quest'ottica, i risultati della precedente Proposizione diventano banali.

Infatti, supponendo π lineare, il sotto-funtore $\Delta\text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot)$ di $\text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot)$ è rappresentato da $\mathcal{J}_\Delta^k(\pi) = \Gamma(\pi_\Delta^k)$. La proiezione di oggetti rappresentativi $\mathcal{J}^k(\pi) \mapsto \mathcal{J}_\Delta^k(\pi)$ corrisponde all'inclusione naturale di funtori

$$\Delta\text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot) \subset \text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot).$$

Questo spiega la (194). D'altra parte, poiché per loro natura gli operatori Δ -differenziali ammettono restrizioni alle foglie di Δ , la proiezione naturale di funtori $\Delta\text{Diff}_k(\Gamma(\pi), \cdot) \rightarrow \text{Diff}_k(\Gamma(\pi|_{M_x}), \cdot)$ è rappresentata da un'immersione $\mathcal{J}^k(\pi|_{M_x}) \subset \mathcal{J}_\Delta^k(\pi)$ dei corrispondenti oggetti rappresentativi. Questo è il significato della (193).

6.2.4 Getti normali. È intuitivamente chiaro che il fibrato π_∞^Δ è più piccolo del fibrato π_∞ , come dimostra la (194), perché il primo codifica l'informazione delle derivate lungo le foglie di Δ , mentre il secondo riguarda tutte le possibili derivate. È allora lecito chiedersi se sia possibile una costruzione che permetta di aggiungere a π_∞^Δ l'informazione mancante, così da ottenere π_∞ .

Proposizione 7. *Il diffeity $J^\infty(\pi_\infty^\Delta)$ è un covering infinito-dimensionale di $J^\infty(\pi)$.*

La precedente Proposizione dimostra che considerare i getti infiniti di π_∞^Δ non è la via giusta. Infatti, le variabili di covering sarebbero dei “doppioni” formali delle derivate lungo Δ . Occorre perciò un modo per aggiungere solo le derivate che *non sono* lungo Δ , ossia che risultano *normali* a Δ .

Sia, a questo scopo, ∇ una distribuzione complementare a Δ , e completamente integrabile, su M . Ciò vuol dire che $D(\Delta) \oplus D(\nabla) = D(M)$. Si assuma inoltre che ∂M sia una foglia di Δ .

Proposizione 8. *I diffeities $J_\nabla^\infty(\pi_\infty^\Delta)$ e $J_\Delta^\infty(\pi_\infty^\nabla)$ sono entrambi naturalmente identificati con $J^\infty(\pi)$.*

Dimostrazione. Si dimostrerà solo l'identificazione di $J_\Delta^\infty(\pi_\infty^\nabla)$ con $J^\infty(\pi)$, utilizzando l'approccio locale introdotto con l'osservazione 11. Sia allora $M = \mathbb{R}^n$ munito delle distribuzioni $\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\rangle$ e $\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$, e si supponga π banale.

Allora anche il fibrato infinito-dimensionale π_∞^∇ su M è banale, e le u_i^k saranno le sue coordinate di fibra.

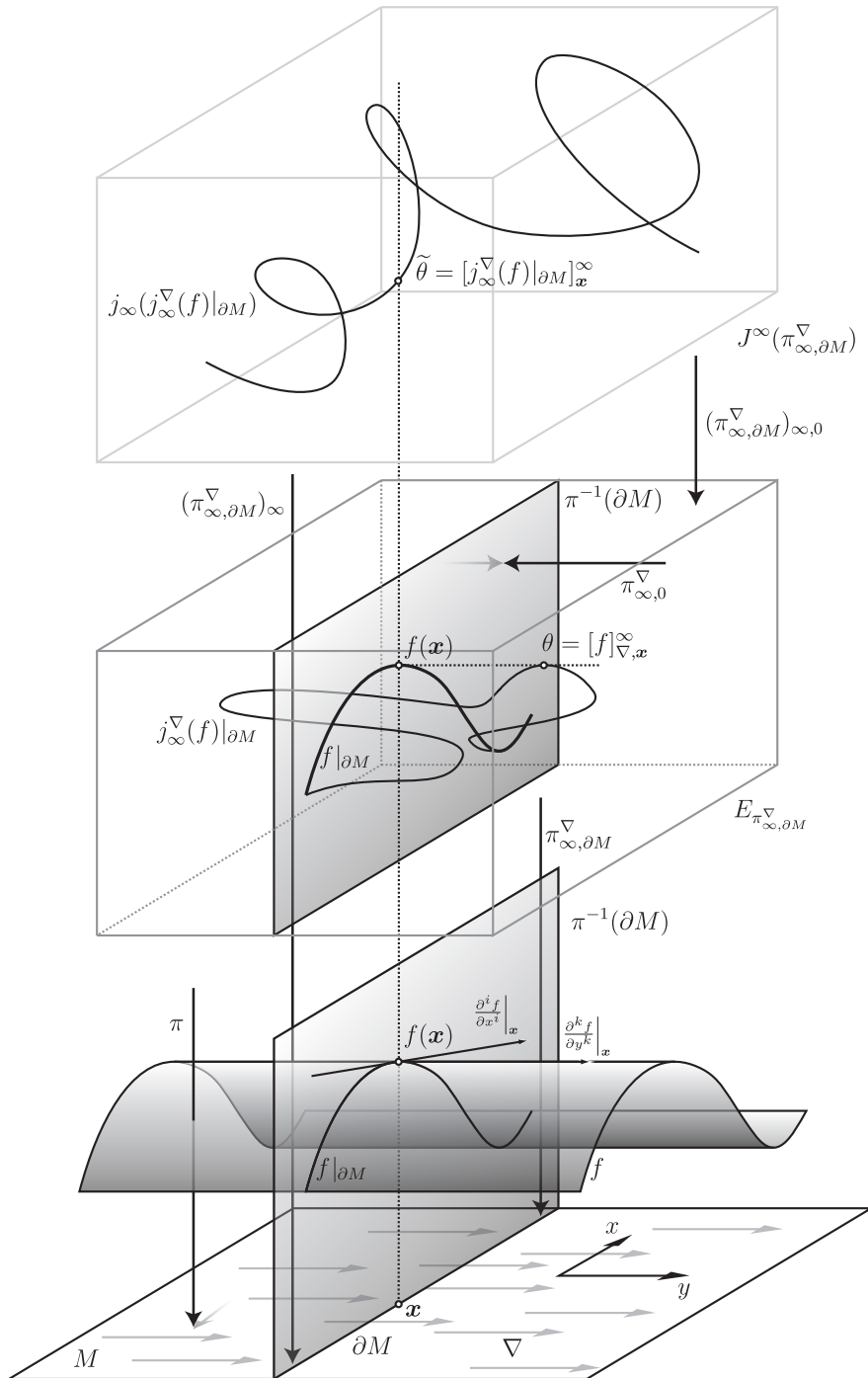


Figura 8: Getti normali.

In modo simile, il fibrato $(\pi_\infty^\nabla)_\infty^\Delta$ avrà come coordinate di fibra le funzioni $(u_i^k)_\tau$, dove adesso $\tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. Si vede facilmente che la corrispondenza

$$(x_1, \dots, x_n, \dots, (u_i^k)_\tau, \dots) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, \dots, u_{\tau+i1_n}^k, \dots) \quad (195)$$

definisce un isomorfismo fra $J_\Delta^\infty(\pi_\infty^\nabla)$ e $J^\infty(\pi)$. In pratica, il punto $\theta \in J^\infty(\pi)$ è identificato col punto θ' di $J_\Delta^\infty(\pi_\infty^\nabla)$ dato dalle relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j(\theta') = x_j(\theta) \\ \vdots \\ (u_i^k)_\tau(\theta') = u_{\tau+i1_n}^k(\theta) \\ \vdots \end{array} \right. \quad (196)$$

□

Ponendo ora $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla \stackrel{\text{def.}}{=} (\pi_\infty^\nabla)|_{\partial M}$, si ottiene un fibrato su ∂M . Mediante le Proposizioni 6 e 8, si può immergere lo spazio dei getti infiniti di tale fibrato in $J^\infty(\pi)$,

$$\iota : J^\infty(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla) \subset J_\Delta^\infty(\pi_\infty^\nabla) = J^\infty(\pi). \quad (197)$$

Come anticipato, si è riusciti ad espandere il fibrato $\pi|_{\partial M}$, arricchendolo con l'informazione relativa alle derivate normali, ottenendo così il fibrato $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla$, che permetterà di chiarire la struttura di ∂B .

Definizione 19. *Il fibrato $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla$ è detto il fibrato dei getti (infiniti) normali di π rispetto alla ipersuperficie ∂M .*

6.2.5 Descrizione di ∂B . Il risultato atteso si trova nel seguente

Teorema 8. *Siano Δ , ∇ e ∂M come sopra. Allora i diffeomorfismi ∂B e $J^\infty(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ sono naturalmente identificati.*

Dimostrazione. In accordo con l'Osservazione 11, una sezione π_∞^∇ è descritta da un vettore $\mathbf{f} = (\dots, f_i^k, \dots)$, $f_i^k \in C^\infty(M)$, e, dunque, una sezione di $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla$ sarà descritta da un vettore simile, ma stavolta con $f_i^k \in C^\infty(\partial M)$. Allora, un elemento θ di $J^\infty(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ è rappresentato dal vettore $(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, \frac{\partial^{|\tau|} f_i^k}{\partial x^\tau}(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots)$, con $k = 1, \dots, m$, $i \in \mathbb{N}_0$, e $\tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. Si ricordi che le funzioni coordinate standard $(u_i^k)_\tau$ sono date da

$$(u_i^k)_\tau(\theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^{|\tau|} f_i^k}{\partial x^\tau}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \theta = [\mathbf{f}]_{(x_1, \dots, x_{n-1})}^\infty. \quad (198)$$

Segue facilmente che l'immersione ι introdotta in (197) è data da

$$\begin{cases} \iota^*(x_i) = x_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \iota^*(x_n) = 0, \\ \iota^*(u_\sigma^k) = (u_{\sigma_n}^k)_{\sigma-\sigma_n 1_n}, & k = 1, \dots, m, \sigma \in \mathbb{N}_0^n. \end{cases} \quad (199)$$

Chiaramente ι^* è un epimorfismo di algebre, perché produce tutte le funzioni coordinate, e $\text{im}(\iota)$ coincide con ∂B , sicché quest'ultimo può essere identificato con $J^\infty((\pi_\infty^\nabla)|_N)$ come varietà. Ora bisogna provare che le rispettive distribuzioni di Cartan coincidono anch'esse.

Si prenda allo scopo l'operatore universale $U_1^{\pi_\infty^\nabla, \partial M}$ associato al fibrato $\pi_\infty^\nabla|_{\partial M}$. Applicando ad esso le funzioni $(u_i^k)_\tau$, si ottiene una base per le 1-forme di Cartan su $J^\infty(\pi_\infty^\nabla|_{\partial M})$,

$$(\omega_i^k)_\tau = U_1^{\pi_\infty^\nabla, \partial M}((u_i^k)_\tau) = d(u_i^k)_\tau - \sum_{j=1}^{n-1} (u_i^k)_{\tau+1_j} dx_j. \quad (200)$$

Poiché $\iota^*(\omega_\sigma^k)$ coincide con $(\omega_{\sigma_n}^k)_{\sigma-\sigma_n 1_n}$, per tutti i $\sigma \in \mathbb{N}_0^n$ e $k = 1, \dots, m$, il morfismo ι è davvero un morfismo di diffieties, perché manda forme di Cartan in forme di Cartan. \square

Osservazione 14. In Figura 8 viene chiarita geometricamente la costruzione di $J^\infty(\pi_\infty^\nabla|_{\partial M})$. Il concetto basilare è che, una volta ristretta f ad $f|_{\partial M}$, non è più possibile ricavare informazioni sulle derivate di f normali rispetto a ∂M . Perciò, prima di effettuare la restrizione a ∂M , bisogna incorporare in f tutte le informazioni sulle derivate normali. Ecco perché si considera $j_\infty^\nabla(f)|_{\partial M}$ al posto di $f|_{\partial M}$. Lo spazio in cui si opera tale arricchimento è lo spazio totale $E_{\pi_\infty^\nabla, \partial M}$ del fibrato normale $\pi_\infty^\nabla|_{\partial M}$. Fatto ciò, si può procedere e fare il getto infinito $j_\infty(j_\infty^\nabla(f)|_{\partial M})$, nel quale si ritrovano *tutte* le informazioni differenziali su f nei punti di ∂M . Questa è la sostanza del teorema 8.

6.2.6 Descrizione del termine E_0 relativo. Disponendo di una descrizione più dettagliata del bordo secondario ∂B nel caso fibrato, si può adesso fornire un'interpretazione del complesso $E_0^p(B, \partial B)$, in termini di operatori \mathcal{C} -differenziali.

Innanzitutto, ∂M è una ipersuperficie in M , e pertanto esisterà una funzione liscia ϕ su M tale che $\partial M = \{\phi = 0\}$. Di conseguenza, l'ipersuperficie ∂B in $J^\infty(\pi)$ sarà il luogo degli zeri del pull-back $\pi_\infty(\phi)$, che viene

naturalmente denotato con lo stesso simbolo ϕ della funzione sulla base M ,

$$\partial B = \{\phi = 0\}, \quad \phi \in C^\infty(M). \quad (201)$$

L'ideale delle forme relative $\mathcal{L} = \Lambda(B, \partial B)$ coinciderà in tal caso con l'ideale differenziale di Λ generato da ϕ ,

$$\Lambda(B, \partial B) = \phi\Lambda + d\phi \wedge \Lambda. \quad (202)$$

Ma $d\phi$ è una 1-forma orizzontale su B , ossia un elemento di $E_0^{0,1}$, e dunque, rammentando la struttura moltiplicativa della sequenza spettrale associata ad un ideale differenziale (vedi [3]), ha senso, almeno formalmente, riscrivere la (202) rimpiazzando Λ con una qualsiasi colonna del termine E_0 della successione \mathcal{C} -spettrale,

$$E_0^p(B, \partial B) = \phi E_0^p + d\phi \wedge E_0^p. \quad (203)$$

Come era lecito aspettarsi, l'analogia formale conduce ad un risultato giusto, come dimostrato dal seguente

Lemma 3. *La formula (203) è valida.*

Dimostrazione. Si ricordi la definizione generale (176) del complesso $E_0^p(B, \partial B)$,

$$E_0^p(B, \partial B) = \frac{\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} + \mathcal{C}^{p+1}}{\mathcal{C}^{p+1}}. \quad (204)$$

Una forma $\omega \in \mathcal{L}$, in luce della (202), si rappresenta come

$$\omega = \phi\eta + d\phi \wedge \rho \in \mathcal{L}, \quad \eta, \rho \in \Lambda. \quad (205)$$

Ora Λ possiede una struttura di bicomplesso, spiegata in [16], paragrafo 4.3.2 (dove si adopera il simbolo Λ_Γ per indicare le forme orizzontali immerse in Λ), che fornisce la decomposizione

$$\Lambda = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}^p \Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}^q. \quad (206)$$

Le forme η e ρ potranno perciò essere decomposte come $\eta = \sum_i \eta_i$ e $\rho = \sum_i \rho_i$, dove le η_i e le ρ_i appartengono entrambe a $\mathcal{C}^i \Lambda^i \otimes \bar{\Lambda}$. La (205) fornisce allora

$$\omega = \sum_i (\phi\eta_i + d\phi \wedge \rho_i), \quad (207)$$

che è la decomposizione di ω nella somma diretta (206). Si noti che sia ϕ che $d\phi$ appartengono a $\bar{\Lambda}$.

Segue che la forma $\omega \in \mathcal{L}$ giace anche in \mathcal{C}^p se e solo se tutte le forme η_i e le ρ_i sono zero per i minore di p , da cui si ricava immediatamente

$$\mathcal{C}^p \cap \mathcal{L} = \left\{ \omega = \sum_{i \geq p} (\phi \eta_i + d\phi \wedge \rho_i) \right\} = \phi \mathcal{C}^p + d\phi \wedge \mathcal{C}^p, \quad (208)$$

completando così la descrizione del numeratore del quoziente (204).

Quozientare la (208) per \mathcal{C}^{p+1} , equivale ad azzerare in ω tutte le componenti con $i > p$, ottenendo

$$E_0^p(B, \partial B) = \{ \omega = \phi \eta_p + d\phi \wedge \rho_p \mid \eta_p, \rho_p \in \mathcal{C}^p \Lambda^p \otimes \bar{\Lambda} \}. \quad (209)$$

D'altra parte, E_0^p si identifica con $\mathcal{C}^p \Lambda^p \otimes \bar{\Lambda}$ via l'isomorfismo

$$\mathcal{C}^p \Lambda^p \otimes \bar{\Lambda} \ni \eta \otimes \bar{\omega} \mapsto [\eta \wedge \bar{\omega}]_{\mathcal{C}^{p+1}} \in \frac{\mathcal{C}^p}{\mathcal{C}^{p+1}} = E_0^p, \quad (210)$$

laddove il simbolo $\bar{\omega}$ rappresenta la medesima forma orizzontale, intesa, al primo membro, come elemento del quoziente $\bar{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\mathcal{C}}$ e, al secondo membro, come elemento del sottomodulo $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda$.

Dunque, le forme ω al secondo membro della (209), corrisponderanno, mediante l'isomorfismo (210) esattamente agli elementi del sottocomplesso $\phi E_0^p + d\phi \wedge E_0^p$ di E_0^p , il che prova la validità della (203). \square

Osservazione 15. Ricordando la definizione 15, l'uguaglianza (203) per $p = 0$ diviene semplicemente

$$\bar{\Lambda}(B, \partial B) = \phi \bar{\Lambda} + d\phi \wedge \bar{\Lambda}, \quad (211)$$

ossia l'analogo "orizzontale" della (202). Si noti che si può scrivere indifferentemente $d\phi$ oppure $\bar{d}\phi$. L'algebra delle forme orizzontali relative è dunque l'ideale differenziale di $(\bar{\Lambda}, \bar{d})$ generato da ϕ .

Proposizione 9. *Si ha l'isomorfismo di \mathcal{F} -moduli*

$$E_0^p(B, \partial B) \cong \mathcal{C} \text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{A}, \bar{\Lambda}(B, \partial B)). \quad (212)$$

Dimostrazione. Considerando l'uguaglianza (203) ristretta alle componenti omogenee di grado complementare q , si ottiene

$$\begin{aligned}
E_0^{p,q} &= \phi E_0^{p,q} + d\phi \wedge E_0^{p,q-1} \\
&= \phi(E_0^{p,0} \wedge \bar{\Lambda}^q) + d\phi \wedge (E_0^{p,0} \wedge \bar{\Lambda}^{q-1}) \\
&= E_0^{p,0} \wedge (\phi \bar{\Lambda}^q + d\phi \wedge \bar{\Lambda}^{q-1}) \\
&= E_0^{p,0} \otimes_{\mathcal{F}} \bar{\Lambda}^q(B, \partial B),
\end{aligned}$$

da cui il risultato, essendo $E_0^{p,0}$ isomorfo a $\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. \square

6.2.7 Descrizione del termine E_0 quoziente. Disponendo del teorema 8, è ora possibile precisare il risultato del teorema 7 nel seguente

Corollario 2. *Si ha l'isomorfismo di $\mathcal{F}(\partial B)$ -moduli*

$$\frac{E_0^p}{E_0^p(B, \partial B)} \cong \mathcal{C}_{\partial B} \text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}(\partial B), \bar{\Lambda}(\partial B)). \quad (213)$$

Osservazione 16. Si noti che il quoziente al primo membro della (213) è naturalmente un \mathcal{F} -modulo, ma possiede anche una struttura di $\mathcal{F}(\partial B)$ -modulo, dato che l'algebra $\mathcal{F}(\partial B)$ è il quoziente di \mathcal{F} rispetto all'ideale $\phi\mathcal{F}$, e che, per la (203), la moltiplicazione per gli elementi di tale ideale si banalizza sul quoziente $\frac{E_0^p}{E_0^p(B, \partial B)}$.

6.2.8 Derivazioni evolutive su ∂B . Per il teorema 8, l'algebra di Lie $\mathcal{X}(\partial B)$ altro non è se non l' $\mathcal{F}(\partial B)$ -modulo $\mathcal{F}(\partial B, \pi_{\infty, \partial M}^{\nabla})$ delle sezioni del fibrato indotto $(\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla})_{\infty}^*(\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla})$, in virtù dell'isomorfismo (29). Ragionevole e di immediata dimostrazione è il seguente

Lemma 4. *Le derivazioni evolutive di B sono tangenti al bordo ∂B .*

Dimostrazione. Per la (201), basta controllare che ogni derivazione evolutiva \mathfrak{D}_{φ} , con $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$, preservi l'ideale $\phi\mathcal{F}$ del bordo ∂B . Ma ciò è immediato perché \mathfrak{D}_{φ} è un campo verticale rispetto alla proiezione π_{∞} , e ϕ è una funzione sollevata dalla base M , per cui $\mathfrak{D}_{\varphi}(\phi) = 0$. \square

Segue che per ogni derivazione evolutiva \mathfrak{D}_φ ha senso considerare la sua restrizione $\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B}$ al bordo ∂B , e dunque ad ogni simmetria superiore $\chi = [\mathfrak{D}_\varphi]$ si può associare la corrispondente simmetria superiore $\chi|_{\partial B} \stackrel{\text{def.}}{=} [\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B}]$ di ∂B .

Si consideri ora la carta introdotta in 6.2.2, dove si è posto $\phi = x_n$. Dalla dimostrazione del teorema 8 si evince che $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla$ è banale su tale aperto, gli elementi del $C^\infty(\partial M)$ -modulo $\Gamma(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ identificandosi con i vettori $\mathbf{f} = (\dots, f_i^k, \dots)$ di funzioni $f_i^k \in C^\infty(\partial M)$. Segue che anche il modulo $\mathcal{F}(\partial B, \pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ è libero, i suoi elementi identificandosi con i vettori $\boldsymbol{\psi} = (\dots, \psi_i^k, \dots)$ di funzioni $\psi_i^k \in \mathcal{F}(\partial B)$. Premesso ciò, si può enunciare la seguente

Proposizione 10. *L'omomorfismo di restrizione*

$$\begin{aligned} \varkappa &\longrightarrow \varkappa(\partial B) \\ \chi = [\mathfrak{D}_\varphi] &\longmapsto \chi|_{\partial B} = [\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B}] \end{aligned} \quad (214)$$

corrisponde all'omomorfismo di \mathcal{F} -moduli

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi, \pi) &\longrightarrow \mathcal{F}(\partial B, \pi_{\infty, \partial M}^\nabla) \\ \varphi &\longmapsto \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (215)$$

dove

$$\psi_i^k = D_{x_n}^i(\varphi^k)|_{\partial B} \quad (216)$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che i campi coordinati verticali $\frac{\partial}{\partial u_\sigma^k}$ sono tangenti al bordo ∂B , e dunque ha senso cercare l'espressione della restrizione $\frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B}$ nelle coordinate standard di ∂B date dalla sua identificazione con $J^\infty(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ di cui al teorema 8.

È immediato verificare che $\frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B}$ è $(\pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ -verticale. Si calcoli allora la sua componente lungo il vettore verticale $\frac{\partial}{\partial (u_i^h)_\tau}$, con $\tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, $i \in \mathbb{N}_0$, ed $h = 1, \dots, m$, ricordando il funzionamento dell'omomorfismo di restrizione ι^* descritto dalla (199),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B} ((u_i^h)_\tau) &= \frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B} (\iota^*(u_{\tau+i1_n}^h)) \\ &= \iota^* \left(\frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} (u_{\tau+i1_n}^h) \right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = h \text{ e } \sigma = \tau + i1_n; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned} \quad (217)$$

Segue che

$$\frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B} = \frac{\partial}{\partial (u_{\sigma_n}^k)_{\sigma - \sigma_n 1_n}} \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}_0^n, \quad k = 1, \dots, m. \quad (218)$$

Dalla (218) si ricava subito che

$$\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B} = \sum D_\sigma(\varphi^k) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^k} \Big|_{\partial B} = \sum D_\sigma(\varphi^k) \Big|_{\partial B} \frac{\partial}{\partial (u_{\sigma_n}^k)_{\sigma - \sigma_n 1_n}}. \quad (219)$$

Ora si può espandere D_σ come $D_{\sigma - \sigma_n 1_n} \circ D_{x_n}^{\sigma_n}$, e ricordare, come osservato in 6.2.2, che le derivate totali $D_{\sigma - \sigma_n 1_n}$ sono tutte tangenti al bordo ∂B . Ergo, indicando con lo stesso simbolo la derivata totale e la sua restrizione a ∂B , si ottiene

$$\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B} = \sum D_{\sigma - \sigma_n 1_n} (D_{x_n}^{\sigma_n}(\varphi^k) \Big|_{\partial B}) \frac{\partial}{\partial (u_{\sigma_n}^k)_{\sigma - \sigma_n 1_n}}. \quad (220)$$

Ma invece di far variare σ in \mathbb{N}_0^n , si può porre $\sigma = \tau + i 1_n$ e far variare τ in \mathbb{N}_0^{n-1} , ed i in \mathbb{N}_0 ,

$$\mathfrak{D}_\varphi|_{\partial B} = \sum D_\tau (D_{x_n}^i(\varphi^k) \Big|_{\partial B}) \frac{\partial}{\partial (u_i^k)_\tau}. \quad (221)$$

Nelle notazioni introdotte in 6.1.2, la formula generale (30) per le derivazioni evolutive fornisce

$$\mathfrak{D}_\psi^{\partial B} = \sum D_\tau(\psi_i^k) \frac{\partial}{\partial (u_i^k)_\tau}, \quad \tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (222)$$

È chiaro allora che la (221) e la (222) coincidono quando la sezione generatrice ψ è scelta secondo la (216), concludendo così la dimostrazione. \square

6.2.9 Linearizzazione universale su ∂B . Nella carta locale di cui al 6.2.2, si denoti con $\Pi^{(k,i)}$, in analogia con la (35), la proiezione del modulo libero $\mathcal{F}(\partial B, \pi_{\infty, \partial M}^\nabla)$ sulla sua (k, i) -esima componente. Posto

$$D_\tau^{(k,i)} \stackrel{\text{def.}}{=} D_\tau \circ \Pi^{(k,i)}, \quad \tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}, \quad (223)$$

si può riscrivere la (222) come

$$\mathfrak{D}_\psi^{\partial B} = \sum D_\tau^{(k,i)}(\psi) \frac{\partial}{\partial (u_i^k)_\tau}, \quad \tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (224)$$

Si trova così l'espressione dell'operatore di linearizzazione universale su ∂B ,

$$\ell_g^{\partial B} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum \frac{\partial g}{\partial (u_i^k)_\tau} D_\tau^{(k,i)}, \quad g \in \mathcal{F}(\partial B), \tau \in \mathbb{N}_0^{n-1}, i \in \mathbb{N}_0, k = 1, \dots, m. \quad (225)$$

Osservazione 17. L' $\mathcal{F}(\partial B)$ -modulo (175) delle 1-forme di Cartan su ∂B si esprime come

$$\mathcal{C}_{\partial B} \Lambda^1(\partial B) = \frac{\mathcal{C} \Lambda^1}{I(\partial B) \mathcal{C} \Lambda^1}. \quad (226)$$

Infatti, la parte di grado 1 del prodotto di ideali $\mathcal{C} \mathcal{L} = \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ si riduce al solo termine $I(\partial B) \mathcal{C} \Lambda^1$ perché l'altro termine, $\Lambda^1(B, \partial B) \mathcal{C} \Lambda^0$, è banale. L'operatore universale $U_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C} \Lambda^1$ induce allora l'operatore quoziente

$$U_1^{\partial B} : \mathcal{F}(\partial B) \rightarrow \mathcal{C}_{\partial B} \Lambda^1(\partial B), \quad (227)$$

in quanto $I(\partial B)$ è generato da ϕ , ed U_1 è una derivazione verticale.

Proposizione 11. *L'operatore quoziente $U_1^{\partial B}$ definito da (227) coincide con l'operatore universale $U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^\nabla}$ associato al fibrato $\pi_{\infty, \partial M}^\nabla$.*

Dimostrazione. Basta osservare che U_1 è in tutti i casi la differenza $d - \bar{d}$. Poiché l'omomorfismo di restrizione ι^* commuta sia con d che con \bar{d} , esso commuterà anche con la loro differenza, e quindi, con U_1 . Segue che

$$(U_1(f))|_{\partial B} = U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^\nabla}(f|_{\partial B}). \quad (228)$$

D'altra parte $(U_1(f))|_{\partial B}$ si identifica con la classe $[U_1(f)]_{I(\partial B) \mathcal{C} \Lambda^1}$, che è $U_1^{\partial B}([f]_{I(\partial B)})$, ossia $U_1^{\partial B}(f|_{\partial B})$, data l'identificazione di $[f]_{I(\partial B)}$ con $f|_{\partial B}$. Dall'arbitrarietà di $f \in \mathcal{F}$, si ottiene l'uguaglianza $U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^\nabla} = U_1^{\partial B}$. \square

Si può adesso raffinare il risultato del corollario 2.

Lemma 5. *L'isomorfismo (180) fra $\frac{E_0^{1,0}}{E_0^{1,0}(B, \partial B)}$ e $\mathcal{C}_{\partial B} \text{Diff}(\mathcal{X}(\partial B), \mathcal{F}(\partial B))$ manda la classe di equivalenza $[g^i U_1(f_i)]_{E_0^{1,0}(B, \partial B)}$ nell'operatore $\mathcal{C}_{\partial B}$ -differenziale $g^i|_{\partial B} \ell_{f_i|_{\partial B}}^{\partial B}$.*

Dimostrazione. Immediata, se si particolarizza la (180) al grado complementare $q = 0$,

$$[g^i U_1(f_i)]_{E_0^{1,0}(B, \partial B)} \longmapsto (g^i U_1(f_i))|_{\partial B}, \quad (229)$$

ricordando che $E_0^{1,0}(B, \partial B) = \mathcal{C}_{\partial B} \Lambda^1(\partial B)$. La relazione (228), e l'isomorfismo canonico (43) forniscono infine il risultato cercato. \square

6.2.10 Descrizione della sequenza esatta corta nel termine E_0 .

Combinando i risultati fin qui accumulati, si può fornire un'interpretazione della sequenza esatta corta (181), in termini di operatori \mathcal{C} -differenziali. In luce della proposizione 9 e del corollario 2, la (181) si legge ora come

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}(B, \partial B)) &\xrightarrow{i} \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}) \\ &\xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}_{\partial B}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}(\partial B), \overline{\Lambda}(\partial B)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (230)$$

Il monomorfismo i è ovviamente la semplice inclusione, dato che ogni operatore a valori in $\overline{\Lambda}(B, \partial B)$ è in particolare un operatore a valori in $\overline{\Lambda}$. La descrizione dell'epimorfismo α , leggermente più elaborata, è l'oggetto della seguente

Proposizione 12. *La proiezione α nella (230), corrispondente alla proiezione α nella (181), è data da*

$$\alpha(\ell_{f^1} \wedge \cdots \wedge \ell_{f^p} \otimes \overline{\omega}) = \ell_{f^1|_{\partial B}}^{\partial B} \wedge \cdots \wedge \ell_{f^p|_{\partial B}}^{\partial B} \otimes \overline{\iota^*(\omega)} \quad (231)$$

con $f^1, \dots, f^p \in \mathcal{F}$ e $\overline{\omega} \in \overline{\Lambda}$.

Dimostrazione. Si richiama brevemente il funzionamento dell'isomorfismo canonico (45). Poichè E_0^p si può rappresentare come $\mathcal{C}^p \Lambda^p \otimes \overline{\Lambda}$, allora gli elementi di E_0^p sono somme di forme del tipo $U_1(f^1) \wedge U_1(f^2) \wedge \cdots \wedge U_1(f^p) \otimes \overline{\omega}$, con $f^1, \dots, f^p \in \mathcal{F}$ e $\overline{\omega} \in \overline{\Lambda}$. L'isomorfismo (45) non è altro che la corrispondenza

$$\begin{aligned} E_0^p &\longrightarrow \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \overline{\Lambda}) \\ U_1(f^1) \wedge U_1(f^2) \wedge \cdots \wedge U_1(f^p) \otimes \overline{\omega} &\longmapsto \ell_{f^1} \wedge \cdots \wedge \ell_{f^p} \otimes \overline{\omega}. \end{aligned} \quad (232)$$

Si osservi che $\mathcal{C}\text{Diff}_{(\bullet)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ è un'algebra commutativa graduata rispetto al prodotto wedge definito in modo analogo alle forme differenziali,

$$\begin{aligned} &(\Delta \wedge \nabla)(\chi_1, \dots, \chi_{r+s}) \\ &= \frac{1}{s!r!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} (-1)^\sigma \Delta(\chi_{\sigma(1)}, \dots, \chi_{\sigma(r)}) \nabla(\chi_{\sigma(r+1)}, \dots, \chi_{\sigma(r+s)}), \end{aligned}$$

per ogni $\Delta \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(r)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ e $\nabla \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(s)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. L'isomorfismo canonico (45) risulta essere compatibile con le strutture moltiplicative di E_0 e di $\mathcal{C}\text{Diff}_{(\bullet)}^{\text{alt.}}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ (si consulti [16], 4.3.3–4.3.4, per maggiori dettagli).

Si parta allora dall'operatore $\ell_{f^1} \wedge \cdots \wedge \ell_{f^p} \otimes \bar{\omega}$, che, per la (232), proviene dall'elemento $U_1(f^1) \wedge U_1(f^2) \wedge \cdots \wedge U_1(f^p) \otimes \bar{\omega}$, che corrisponde alla classe $[U_1(f^1) \wedge U_1(f^2) \wedge \cdots \wedge U_1(f^p) \wedge \bar{\omega}]_{\mathcal{C}^{p+1}}$ in E_0^p . Applicando la proiezione α della (181) a tale forma, e ricordando l'isomorfismo (180), si ottiene la classe

$$[(U_1(f^1) \wedge U_1(f^2) \wedge \cdots \wedge U_1(f^p) \wedge \bar{\omega})|_{\partial B}]_{\mathcal{C}_{\partial B}^{p+1}} \quad (233)$$

in $E_0^p(\partial B)$. Ma l'omomorfismo di restrizione è lineare rispetto al prodotto wedge, ed è compatibile con l'orizzontalizzazione, sicché, ricordando la (228), l'espressione (233) diviene

$$\left[U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^1|_{\partial B}) \wedge U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^2|_{\partial B}) \wedge \cdots \wedge U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^p|_{\partial B}) \wedge \overline{\iota^*(\omega)} \right]_{\mathcal{C}_{\partial B}^{p+1}}, \quad (234)$$

che si identifica con l'elemento

$$U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^1|_{\partial B}) \wedge U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^2|_{\partial B}) \wedge \cdots \wedge U_1^{\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}}(f^p|_{\partial B}) \otimes \overline{\iota^*(\omega)} \quad (235)$$

di $\mathcal{C}_{\partial B}^p \Lambda^p(\partial B) \otimes \bar{\Lambda}(\partial B)$. L'isomorfismo (232) per il fibrato $\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}$ manda infine l'espressione (235) nell'operatore $\mathcal{C}_{\partial B}$ -differenziale

$$\ell_{f^1|_{\partial B}}^{\partial B} \wedge \cdots \wedge \ell_{f^p|_{\partial B}}^{\partial B} \otimes \overline{\iota^*(\omega)}, \quad (236)$$

come appunto volevasi dimostrare. \square

6.2.11 Descrizione del termine $E_1^{1,n}$ relativo. La proposizione 4 è valida nel caso fibrato, e allora, ponendo $p = 1$ nella (185), si ottiene la sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}(\partial B) \xrightarrow{\partial} \widehat{\mathcal{X}}(B, \partial B) \xrightarrow{H^{(i)}} \widehat{\mathcal{X}} \rightarrow 0, \quad (237)$$

dove si è posto

$$\widehat{\mathcal{X}}(B, \partial B) \stackrel{\text{def.}}{=} E_1^{1,n}(B, \partial B). \quad (238)$$

Si osservi che $E_1^{1,n}(B, \partial B)$ altro non è se non la coomologia n -esima del complesso ottenuto rimpiazzando in (53) le forme orizzontali con le forme orizzontali relative,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{d}_*} \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \bar{\Lambda}^1(B, \partial B)) \xrightarrow{\bar{d}_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\bar{d}_*} \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{X}, \bar{\Lambda}^n(B, \partial B)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (239)$$

Ma $\overline{\Lambda}^n(B, \partial B) = \overline{\Lambda}^n$, mentre $\overline{\Lambda}^{n-1}(B, \partial B)$ è in generale più piccolo di $\overline{\Lambda}^{n-1}$, sicché il complesso (239) ha gli stessi n -cocicli del complesso (53), ma possiede meno n -cobordi. L'espressione

$$\widehat{\varkappa}(B, \partial B) = \frac{\mathcal{C}\text{Diff}(\varkappa, \overline{\Lambda}^n)}{\overline{d}_* \left(\mathcal{C}\text{Diff}(\varkappa, \overline{\Lambda}^{n-1}(B, \partial B)) \right)}, \quad (240)$$

simile in tutto e per tutto alla definizione coomologica (50) di modulo aggiunto, tranne che per la presenza, al denominatore, di $(n-1)$ -forme relative, induce naturalmente la seguente

Definizione 20. *L' \mathcal{F} -modulo $\widehat{\varkappa}(B, \partial B)$ è detto il modulo aggiunto relativo del modulo \varkappa .*

Osservazione 18. I complessi (53) e (239) possiedono entrambi due strutture distinte di \mathcal{F} -modulo, una destra, ottenuta componendo a destra gli operatori \mathcal{C} -differenziali con gli scalari, ed una sinistra, ottenuta mediante composizione a sinistra. Rispetto alla struttura destra, il differenziale \overline{d}_* è ovviamente \mathcal{F} -lineare, mentre rispetto alla struttura sinistra esso risulta un operatore differenziale del primo ordine. Segue che, passando alla coomologia, la struttura destra viene ereditata, ma nulla si può dire riguardo alla struttura sinistra.

La struttura di \mathcal{F} -modulo su $\widehat{\varkappa}(B, \partial B)$ è quella indotta dalla struttura di \mathcal{F} -modulo destro su (239),

$$f \cdot [\square] = [\square \circ f] \quad f \in \mathcal{F}, \quad \square \in \mathcal{C}\text{Diff}(\varkappa, \overline{\Lambda}^n). \quad (241)$$

La differenza sostanziale fra il modulo aggiunto standard $\widehat{\varkappa}$ ed il modulo aggiunto relativo $\widehat{\varkappa}(B, \partial B)$, è che nel primo la struttura di \mathcal{F} -modulo destro coincide proprio con la struttura di \mathcal{F} -modulo sinistro indotta da quella standard di $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\varkappa, \overline{\Lambda}^n)$. In $\widehat{\varkappa}$ si ha

$$f \cdot [\square] = f \cdot [\square^*(1) + \overline{d} \circ \mathfrak{K}(\square)] = [\square^*(1) \circ f + \overline{d} \circ \mathfrak{K}(\square) \circ f] = [f \square^*(1)] \quad (242)$$

in quanto $\square^*(1)$ è \mathcal{F} -lineare. Ricordando che l'identificazione fra $\widehat{\varkappa}$ e $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\varkappa, \overline{\Lambda}^n)$ è data dalla corrispondenza $[\square] \rightarrow \square^*(1)$, come spiegato in 2.2.12, la cui inversa è $h \rightarrow [h]$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\varkappa, \overline{\Lambda}^n)$, si ha che $[f \square^*(1)]$ è il corrispettivo di $f \square^*(1)$. Dunque, la moltiplicazione destra $f \cdot [\square]$ della classe $[\square]$ per lo scalare f corrisponde alla moltiplicazione standard dell'omomorfismo corrispondente $\square^*(1)$ per il medesimo scalare.

Nel modulo aggiunto relativo $\widehat{\mathfrak{z}}(B, \partial B)$, avendo a disposizione meno n -cobordi, non è possibile marcare ogni classe di coomologia con un rappresentante \mathcal{F} -lineare, e guadagnare così una struttura di \mathcal{F} -modulo sinistra. In altre parole, un analogo relativo della formula di Green non può sussistere.

Si consideri un elemento $\vartheta = [\square]_{\text{im } d_{0,\text{rel}}}$ di $\widehat{\mathfrak{z}}(B, \partial B)$, e, usando la \mathcal{C} -formula di Green (51) per \square , si decomponga ϑ come somma $\vartheta = h + \vartheta'$, essendo $h = [\square^*(1)]_{\text{im } d_{0,\text{rel}}}$ e $\vartheta' = [d \circ \square']_{\text{im } d_{0,\text{rel}}}$, con $\square' \in \mathcal{C}\text{Diff}(\varkappa, \overline{\Lambda}^{n-1})$. Ora, sebbene \square' non sia univocamente determinato da \square , lo è invece $d \circ \square'$. Ma $H(i)(\vartheta')$ è zero, sicché esiste un unico elemento $\theta' \in \widehat{\mathfrak{z}}(\partial B)$ tale $\bar{\partial}(\theta') = \vartheta'$. È dunque provata la seguente

Proposizione 13. *La corrispondenza $\vartheta \mapsto \theta'$ spezza la sequenza (237).*

È allora possibile identificare ϑ con la coppia $(\square^*(1), \theta') \in \widehat{\mathfrak{z}} \oplus \widehat{\mathfrak{z}}(\partial B)$. La scoperta della sequenza esatta corta (237) e del suo spezzamento di cui alla proposizione 13, rappresentano il risultato centrale della presente Tesi. Si pensi infatti che il modulo $\widehat{\mathfrak{z}}(B, \partial B)$ in sé avrebbe scarso interesse geometrico, in quanto, non essendo un \mathcal{F} -modulo orizzontale come $\widehat{\mathfrak{z}}$, non risulta immediatamente interpretabile come modulo di operatori differenziali non lineari su π , e quindi non costituirebbe una sorgente interessante di equazioni differenziali.

Il fatto che $\widehat{\mathfrak{z}}(B, \partial B)$ si spezzi in due parti, un \mathcal{F} -modulo orizzontale, ed un $\mathcal{F}(\partial B)$ -modulo orizzontale, rende invece tale oggetto estremamente interessante, perché i suoi elementi codificano simultaneamente un operatore differenziale non lineare su π , ed uno su $\pi_{\infty, \partial M}^{\nabla}$. Ciò condurrà tra un attimo alla scoperta delle condizioni di trasversalità associate ad un problema variazionale a bordo libero, in totale generalità. Vedere emergere le classiche equazioni di Eulero–Lagrange e le condizioni di trasversalità simultaneamente come aspetti diversi della stessa teoria, è solo un’ulteriore conferma dell’appropriatezza del linguaggio nel quale tale teoria è stata—e continua ad essere—scritta.

6.2.12 Il differenziale $d_1^{0,n}$ relativo.

Definizione 21. *Il differenziale $d_{1,\text{rel}}^{0,n} : \overline{H}^n(B, \partial B) \rightarrow \widehat{\mathfrak{z}}(B, \partial B)$ è chiamato l’operatore di Eulero relativo, e si denota col simbolo \mathbf{E}_{rel} .*

Applicando l’operatore di Eulero relativo ad una Lagrangiana $L = [\overline{\omega}] \in \overline{H}^n(B, \partial B)$ si ottiene la coppia $(\ell_{\overline{\omega}}^*(1), \theta'_{\overline{\omega}})$ in accordo con la proposizione

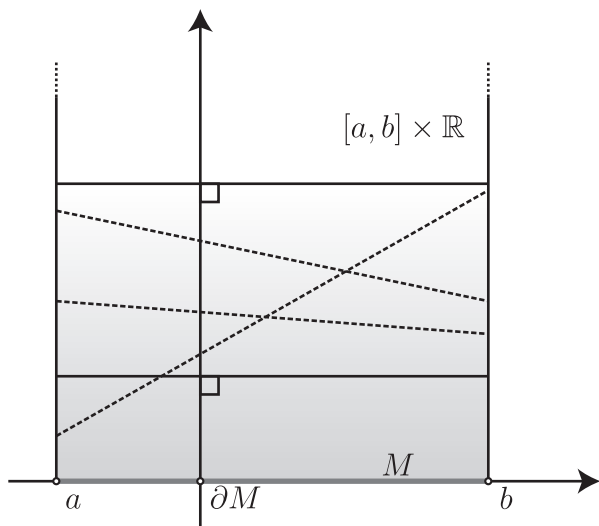


Figura 9: Un semplice problema variazionale a bordo libero è quello di trovare le curve più corte che congiungono due punti che appartengono a due rette fissate distinte. L'equazione di Eulero–Lagrange classica non è sufficiente per individuare le soluzioni del problema, perché non tutte le linee rette minimizzano la distanza (linee tratteggiate). Solo considerando l'equazione di Eulero–Lagrange relativa si ottengono tutte e sole le soluzioni del problema, che sono le linee rette trasversali ad entrambe le rette date.

13. D'altra parte, la condizione di estremalità per il problema variazionale associato ad L è proprio

$$\mathbf{E}_{\text{rel}}(L) = 0, \quad (243)$$

cioè, $\ell_{\bar{w}}^*(1) = 0$ e $\theta'_{\bar{w}} = 0$. La prima di queste due condizioni è l'equazione di Eulero–Lagrange classica associata ad L , mentre la seconda verrà chiamata la *condizione di trasversalità* per il problema variazionale a bordo libero associato ad L (see [20], 8.5) in conformità con la terminologia adottata nel calcolo variazionale standard.

L'equazione (243) rappresenta dunque una condizione di estremalità più forte rispetto all'equazione di Eulero–Lagrange, perché in essa sono racchiuse anche le condizioni di trasversalità.

6.2.13 L'esempio più semplice. Sia M un intervallo chiuso $[a, b] \ni 0$, $\phi = x$, e $\pi = \mathbf{1}_M$ il fibrato unitario, come illustrato nella Figura 9. Allora ∂M è la varietà 0-dimensionale $\{0\}$, e le distribuzioni Δ e ∇ sono 0 e $D(M)$, rispettivamente. Di conseguenza, π_{∞}^{∇} si riduce a π_{∞} , da cui $\partial B = J^{\infty}((\pi_{\infty})|_{\partial M})$. Ma $(\pi_{\infty})|_{\partial M}$ è un fibrato sopra un punto, e come tale

coincide al proprio prolungamento infinito. Si osservi che lo spazio totale di $(\pi_\infty)_{|\partial M}$ è la varietà pro-finita \mathbb{R}^∞ dei valori in 0 delle derivate di ordine qualsiasi di tutte le funzioni (lisce) su $[a, b]$. Allora sarà possibile identificare $\varkappa(\partial B)$ con $\mathcal{F}(\mathbb{R}^\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^\infty$.

Si prenda la funzione $f = \sqrt{1 + u_1^2} \in \mathcal{F}$, e la Lagrangiana associata $L = [fdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n] \in \overline{H}^1(B, \partial B)$. Seguendo la proposizione 13, $d_{1,\text{rel}}^{0,1}(L)$ si identifica con la coppia $(\ell_f^*(1), \ell_f')$, dove $\ell_f^*(1)$ è la ben nota equazione di Eulero–Lagrange u_2/f^3 associata ad f , e

$$\ell_f' = \frac{u_1}{f} \Big|_{\partial B}. \quad (244)$$

I grafici delle sezioni $s \in \Gamma(\pi)$ che risolvono l'equazione $\ell_f^*(1) = 0$ sono le linee rette di pendenza (costante) arbitraria. Le soluzioni di $\ell_f' = 0$ sono esattamente quelle sezioni s tali che $j_\infty(s)^*(u_1)$ si annulla su ∂M , cioè in 0. In altre parole, $s \in \Gamma(\pi)$ risolve la $\ell_f' = 0$ se e solo se il suo grafico forma con la fibra $\pi^{-1}(0)$ un angolo retto (rispetto alla metrica Euclidea su $[a, b] \times \mathbb{R}$).

I grafici delle sezioni $s \in \Gamma(\pi)$ che soddisfano sia la $\ell_f^*(1) = 0$ che le condizioni di trasversalità $\ell_f' = 0$ sono esattamente le rette orizzontali che giacciono in $[a, b] \times \mathbb{R}$ (si veda anche [4]).

7 Appendice

Proposizione 14. *Dati i sottomoduli A, B, C dello stesso R -modulo, con $B \subseteq A$, si ha l'identificazione canonica*

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} = \frac{A \cap C + B}{B}. \quad (245)$$

Proposizione 15 (Identità Modulare di Noëther). *Dati i sottomoduli A, B, C dello stesso R -modulo, con $B \subseteq A$, si ha l'identificazione canonica*

$$\frac{A + C}{B + C} = \frac{A}{B + C \cap A}. \quad (246)$$

Proposizione 16. *Dati i sottomoduli A, B, C dello stesso R -modulo, con $C \subseteq A$ oppure $A \subseteq C$, si ha l'identità*

$$A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C. \quad (247)$$

Dimostrazione. L'inclusione " \supseteq " è piuttosto ovvia.

Si prenda $a = b + c \in A$, con $b \in B$ e $c \in C$.

Se $C \subseteq A$, allora $c \in A$, e $b = a - c$ si trova anch'esso in A . Ma $b \in A \cap B$ e $c \in C = A \cap C$ implica $a \in A \cap B + A \cap C$.

Se $A \subseteq C$, allora $A \cap (B + C) = A$ coincide con $A \cap C$. \square

Proposizione 17. *Dati gli R -moduli A, B, B', C , con $B, B' \subseteq C$, si ha $A \otimes B + A \otimes B' = A \otimes (B + B')$.*

Dimostrazione. Chiaramente $A \otimes (B + B')$ contiene entrambe i moduli $A \otimes B$ e $A \otimes B'$, e quindi deve contenere anche la loro somma. Ciò dimostra l'inclusione " \subseteq ".

D'altra parte, gli elementi di $A \otimes (B + B')$ sono della forma $a^i \otimes (b_i + b'_i)$, con $a^i \in A$, $b_i \in B$, e $b'_i \in B'$. Ma $a^i \otimes (b_i + b'_i)$ coincide con $a^i \otimes b_i + a^i \otimes b'_i$, che appartiene a $A \otimes B + A \otimes B'$. \square

Proposizione 18. *Dati i sottomoduli A, B, C, D del medesimo R -modulo, con $B \subseteq D$, si ha l'identificazione canonica*

$$\frac{(A + B) \cap C + D}{D} = \frac{A \cap (B + C) + D}{D}. \quad (248)$$

Dimostrazione. Si osservi che la mappa $\varphi : [a + b]_D \mapsto [a]_D$, laddove $a + b \in (A + B) \cap C$, $a \in A$, $b \in B$, è ben definita perché a è determinato a meno di un elemento di $A \cap B$, il quale a sua volta è contenuto in D , ed $a + b \in C$ implica $a \in B + C$.

Anche la mappa $\psi : [b + c]_D \mapsto [c]_D$, essendo $b + c \in A \cap (B + C)$, $b \in B$, $c \in C$, è ben definita dato che c è determinato a meno di un elemento di $B + C$, che è sottomodulo di D , e $b + c \in A$ comporta $c \in A + B$.

La dimostrazione si completa osservando che φ e ψ sono lineari ed inverse l'una dell'altra. \square

Proposizione 19. *Dati i sottomoduli A, B dello stesso R -modulo, ed una mappa lineare f , si ha*

$$f(A + B) = f(A) + f(B) \quad (249)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \quad (250)$$

$$f^{-1}(A + f(B)) = f^{-1}(A) + f^{-1}(f(B)) \quad (251)$$

$$f^{-1}(f(A)) = A + \ker f \quad (252)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \quad \text{se } B \supseteq \text{im } f \quad (253)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] A.A.V.V. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics* .
- [2] I. M. ANDERSON: *The variational bicomplex*, Academic Press, Boston, to appear.
- [3] C. DI PIETRO, G. MORENO, A. M. VINOGRADOV, AND L. VITAGLIANO: *Cohomological Theory of Integration and the Leray–Serre Spectral Sequence*, in preparazione per Springer.
- [4] I. M. GELFAND, S.V. FOMIN: *Calculus of variations* Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs (1963). Russian ed. Fizmatgiz, 1961.
- [5] M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT: *Calculus of variations* Springer–Verlag Berlin Heidelberg (1996).
- [6] P. J. HILTON AND U. STAMMBACH *A Course in Homological Algebra* (Graduate Texts in Mathematics).
- [7] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. LYCHAGIN, A. M. VINOGRADOV: *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Differential Equations.*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 1 (1986), Gordon and Breach, New York, London. xx+441 pp.
- [8] I. S. KRASIL'SHCHIK, VERBOVETSKY A.M.: Homological methods in equations of mathematical physic - Open Education, Opava, 1998, 150 pp. See also Diffiety Inst. Preprint Series, DIPS 7/98.
- [9] I. S. KRASIL'SHCHIK, A. M. VINOGRADOV: *Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations*, Acta Appl. Math., 15 (1989) 1-2, 161-209.
- [10] JET NESTRUEV: *Smooth Manifolds and Observables*, Springer-Verlag, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 220, 2002, XIII+222 pages.
- [11] P. J. OLVER: *Applications of Lie groups to differential equations*, Second Ed., Graduate Texts in Math., vol 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [12] L. V. OVSIANNIKOV: *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York (1982).
- [13] A. M. VERBOVETSKY, A. M. VINOGRADOV, D. M. GESSLER: *Scalar differential invariants and characteristic classes of homogeneous geometric structures*, (Russian) *Mat. Zametki*, 51 (1992), no. 6, 15-26. English translation in *Math. Notes*, 51 (1992), no. 5-6, 543-549.
- [14] A. M. VINOGRADOV: *A spectral system associated with a non-linear differential equation, and the algebro-geometric foundations of Lagrangian field theory with constraints.*, *Soviet Math. Dokl.*, 19 (1978), 144-148.
- [15] A. M. VINOGRADOV: *Category of partial differential equations*, *Lecture Notes in Math.*, 1108 (1984), Springer-Verlag, Berlin, 77-102.
- [16] A. M. VINOGRADOV: *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*, AMS Translations of mathematical monographs **204**, USA (2001).
- [17] A. M. VINOGRADOV AND G. MORENO: *Domains in Infinite Jets: \mathcal{C} -Spectral Sequence*, accettato per la pubblicazione da *Doklady Mathematics*.
- [18] A. M. VINOGRADOV: *Geometric singularities of solutions of nonlinear partial differential equations*, *Differential geometry and its applications* (Brno, 1986), 359-379, *Math. Appl. (East European Ser.)*, 27, Reidel, Dordrecht-Boston, MA (1987).
- [19] A. M. VINOGRADOV: *The \mathcal{C} -spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. I. The linear theory.*, *J. Math. Anal. Appl.* 100 (1984), no. 1, 1-40.
- [20] A. M. VINOGRADOV: *The \mathcal{C} -spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. II. The nonlinear theory.*, *J. Math. Anal. Appl.* 100 (1984), no. 1, 41-129.
- [21] A. M. VINOGRADOV: *The logic algebra for the theory of linear differential operators.*, *Soviet Math. Dokl.*, 13 (1972), 1058-1062.

- [22] W. M. TULCZYJEW: *The Lagrange complex*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 419–431.
- [23] T. TSUJISHITA: *On variation bicomplex associated to differential equations.*, Osaka J. Math 19 (1982), 311–363.