

DOTTORATO DI RICERCA in
SCIENZE MATEMATICHE
Ciclo XVII

**Analisi dell'errore e regolarizzazione
numerica di un metodo per l'inversione della
trasformata di Laplace nel caso reale**

Ardelio Galletti

Tesi di Dottorato di Ricerca

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Novembre 2006

a mia moglie Martina

per gli incoraggiamenti, la pazienza e l'amore
con cui mi ha accompagnato in questo periodo,
per tutto ciò che mi ha dato, mi sta dando e mi darà

al mio piccolo Alberto

per avermi permesso, talvolta, di non giocare a palla con lui

ai miei genitori Viliano e Pina

per aver creduto in me incondizionatamente
e per avermi incoraggiato nei momenti di difficoltà

Ringraziamenti

Desidero esprimere profonda riconoscenza al Prof. **Almerico Murli** per la disponibilità e l'intensità con le quali ha cercato di trasferirmi la sua enorme esperienza. In questi anni di dottorato, quale mio tutor scientifico e non solo, si è dimostrato per me guida insostituibile e inesauribile risorsa di idee.

Dedico un ringraziamento speciale alla Prof.ssa **Luisa D'Amore**, che ha supportato con pazienza il mio lavoro e che ha saputo far sí, guidandomi "per mano e un metro alla volta", che il lungo e tortuoso percorso della tesi mi apparisse come un dritto viale alberato.

Ci sono molte altre persone che dovrei ringraziare, persone che mi sono state vicine e, in misura diversa, concretamente utili allo sviluppo di questo lavoro. Però provare a fare un elenco significherebbe rischiare di dimenticare qualcuno e, pertanto, spero che ognuna di esse, pur non leggendo il suo nome, da queste poche righe capisca e sia cosciente della mia piú sincera gratitudine, la quale non tarderó ad esprimere personalmente.

Tuttavia tra queste persone ce ne é una che non posso non menzionare. Desidero pertanto esprimere sincera riconoscenza al Dott. **Salvatore Cuomo**, per l'attiva e amichevole collaborazione scientifica, per il pieno supporto e confronto quotidiano, per le proficue discussioni che abbiamo avuto e per il dialogo continuo e insostituibile, oltre che per l'aiuto piú volte profuso negli "aspetti tecnici". Considero il periodo trascorso in questi ultimi anni assieme a questo caro collega motivo di arricchimento culturale, del quale resterà traccia indelebile.

Indice

Ringraziamenti	iii
Sommario	vii
1 Problemi mal posti e regolarizzazione: inversione della Trasformata di Laplace	1
1.1 Premessa	2
1.2 Il concetto di posizionamento	3
1.2.1 Problemi mal posti	4
1.2.2 Posizionamento e condizionamento	6
1.3 Il concetto di regolarizzazione	12
1.3.1 Una introduzione generale	12
1.3.2 Scelta del parametro di regolarizzazione	14
1.4 Il problema di inversione numerica della trasformata di Laplace	17
1.4.1 Posizionamento nel caso complesso	19
1.4.2 Posizionamento nel caso reale	23
1.4.3 Posizionamento di una formula d'inversione	24
2 Una formula per l'inversione reale della trasformata di Laplace	27
2.1 Premessa	28
2.2 Derivazione di autofunzioni e autovalori	30
2.2.1 Proprietá elementari	33
2.3 L'operatore integrale di Laplace	35
2.3.1 Comportamento degli autovalori	36
2.3.2 Comportamento delle autofunzioni	37
2.4 Derivazione della formula d'inversione	40
2.5 Comportamento dei coefficienti	42

2.5.1	Un caso studio	43
2.5.2	La formula di inversione per il caso studio	48
3	Analisi numerica di un metodo basato sulla formula d'inversione	54
3.1	Premessa	55
3.1.1	Primo utilizzo della formula d'inversione	55
3.2	Schema generale di approssimazione numerica: da $M(P)$ a $M_h(P)$	62
3.2.1	Sorgenti di errore: il troncamento e la discretizzazione	64
3.2.2	Analisi dell'errore di discretizzazione	64
3.2.3	Analisi dell'errore di troncamento	66
3.3	Dal metodo numerico $M_h(P)$ all'algoritmo $A(P)$	72
3.3.1	Sorgenti di errore: l'errore di condizionamento	72
3.3.2	Analisi dell'errore di condizionamento	73
4	Regolarizzazione numerica della formula d'inversione	80
4.1	Premessa	81
4.2	Il concetto di regolarizzazione numerica	82
4.2.1	Una introduzione generale	83
4.2.2	Scelta del parametro di regolarizzazione numerica	86
4.2.3	L'insieme di applicabilit� numerica	88
4.3	Regolarizzazione della formula d'inversione	90
4.3.1	Il funzionale di regolarizzazione $\Psi(\omega)$	91
4.3.2	L'insieme di applicabilit� numerica: condizioni sufficienti	93
4.4	Un nucleo computazionale per la regolarizzazione numerica	98
4.4.1	1. Stima computazionale del funzionale $\Psi(\omega)$	99
4.4.2	2. Stima computazionale del parametro ω_{opt}	104
5	Aspetti implementativi ed esperimenti numerici	106
5.1	Premessa	107
5.2	Calcolo della soluzione numerica regolarizzata $f_{\omega_{opt}}(t)$	108
5.2.1	Calcolo delle proiezioni sulle autofunzioni	110
5.3	Esperimenti numerici	113
5.3.1	Test 1	114

5.3.2	Test 2	116
5.3.3	Test 3	118
Bibliografia		119
A L'indice di condizionamento		128

Sommario

Analisi dell'errore e regolarizzazione numerica di un metodo per l'inversione della trasformata di Laplace nel caso reale

Ardelio Galletti

Tutor Scientifico: Almerico Murli

Il presente lavoro di tesi descrive l'attività di ricerca svolta, nell'ambito del corso di Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche. L'attività svolta ha principalmente riguardato il problema del calcolo numerico della antitrasformata di Laplace. In particolare, l'interesse è stato rivolto all'approfondimento del problema nel caso reale e allo studio di uno schema di approssimazione numerica a partire da una formula di inversione. In generale il problema di inversione della trasformata di Laplace nel caso reale si colloca nell'ambito dei problemi inversi e mal posti. Un aspetto significativo da considerare è che, per tali problemi, c'è da aspettarsi una amplificazione non limitata degli errori sulla soluzione e solo mediante una dettagliata analisi della loro propagazione è possibile capire come controllare e/o attenuare le "eventuali" instabilità. Il principale metodo per affrontare i problemi inversi mal posti consiste nell'utilizzo delle *tecniche di*

regolarizzazione e, nel caso in esame, tali tecniche sono state discusse da Varah (1983) [75], Brianzi e Frontini (1991)[12], Brianzi (1994)[11], Essah e Delves (1998)[34], D'Amore e Murli (2002) [25] ed altri ancora. Nel presente lavoro di tesi, osservato che la formula d'inversione considerata, basata sull'espansione della soluzione in termini di autofunzioni dell'operatore integrale di Laplace, dá luogo ad un problema inverso mal posto, si ricorre all'introduzione del concetto di *regolarizzazione numerica*. Con tale termine si vuole intendere un insieme di concetti generali, principi e metodologie che permeano interamente l'approccio numerico alla regolarizzazione di un problema inverso. In particolare tale concetto é posto alla base nella determinazione dei parametri che caratterizzano lo schema numerico proposto. Il presente lavoro é pertanto cosí articolato:

- nel **Capitolo 1** sono illustrati i concetti generali di posizionamento di un problema e tecnica di regolarizzazione. Quindi é analizzato il posizionamento del problema di inversione della trasformata di Laplace, effettuando una necessaria distinzione tra caso complesso e caso reale;
- nel **Capitolo 2** viene dedotta la formula di inversione basata sullo sviluppo della soluzione in termini di autofunzioni dell'operatore di Laplace. Tale formula, che assieme al concetto di regolarizzazione numerica rappresenta il nocciolo fondamentale della tesi, é analizzata mediante la caratterizzazione delle proprietá di autovalori, autofunzioni e coefficienti;
- nel **Capitolo 3**, a partire dalla formula di inversione considerata, si descrive un schema di approssimazione numerica per il calcolo numerico della antitrasformata di Laplace nel caso reale. Qui vengono identificate e discusse tutte le fonti di errore che insorgono a causa dell'introduzione dello schema proposto;

- nel **Capitolo 4** é affrontato, in maniera generale, il concetto di regolarizzazione numerica. In seguito la regolarizzazione numerica é applicata allo schema proposto al fine di calcolare una approssimazione della anti-trasformata richiedendo che l'errore globalmente presente sulla soluzione numerica sia minimo. Tale tecnica é infine realizzata mediante un nucleo computazionale di regolarizzazione numerica.
- nel **Capitolo 5** sono chiariti alcuni aspetti implementativi relativi al calcolo della soluzione numerica regolarizzata e dei coefficienti della formula di inversione. In conclusione sono poi condotti alcuni test numerici volti a mostrare l'*affidabilitá* dello schema numerico proposto nel predire il comportamento dei risultati in funzione della propagazione degli errori ed in particolare nel fornire con la prefissata accuratezza i risultati.

Capitolo 1

Problemi mal posti e regolarizzazione: inversione della Trasformata di Laplace

1.1 Premessa

L'obiettivo primario di questa tesi é lo studio di un metodo per il calcolo numerico della antitrasformata di Laplace nel caso reale. Tale problema si colloca nell'ambito piú generale dei problemi inversi e mal posti. Il principale metodo per affrontare i problemi inversi mal posti consiste nell'utilizzo delle *tecniche di regolarizzazione*. Nel caso del calcolo numerico della antitrasformata di Laplace metodi di regolarizzazione sono stati discussi da Varah (1983) [75], Brianzi e Frontini (1991)[12], Brianzi (1994)[11], Essah e Delves (1998)[34], D'Amore e Murli (2002) [25] ed altri ancora. In questa ottica, il presente capitolo é dedito all'introduzione delle principali definizioni e nozioni relative ai concetti di posizionamento di un problema e di tecnica di regolarizzazione. Tale lavoro risulterà inoltre un'utile premessa per l'introduzione, nel **Capitolo 4**, del concetto di regolarizzazione numerica. In particolare, la prima parte del capitolo é dedicata all'illustrazione del concetto di posizionamento [40] e, sulle linee dei lavori di Demmel (1987)[28] [29], al legame tra posizionamento e condizionamento di un problema: alcuni aspetti formali sono riportati in **Appendice A**. Nella seconda parte del capitolo viene introdotto il concetto di regolarizzazione [71][72][73] e sono sviluppate le principali tematiche relative, ponendo l'accento solo sugli aspetti piú generali. Infine il capitolo si conclude con l'analisi del posizionamento del problema di inversione della trasformata di Laplace. Qui, a partire dalla letteratura esistente [20][45][63], sono studiati piú casi, in modo da stabilire in quali di questi il problema é da ritenersi ben posto o mal posto. A tal fine sono distinti il caso complesso ed il caso reale, nel cui ambito si colloca la formula d'inversione di McWhirter e Pike (1978) [56], alla base di un metodo per il calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace.

1.2 Il concetto di posizionamento

La nozione rigorosa di problema ben posto é dovuta a Jacques Solomon Hadamard [40]. L'idea che accomunava Hadamard a molti studiosi del ventesimo secolo era che i fenomeni fisici rilevanti dovessero essere ”[...] *sia possibili che determinati* [...]”, cioé descritti mediante problemi ben posti. Tuttavia oggi é ben noto che molti problemi *reali* della fisica, della medicina, della tecnologia (ad esempio nel campo dell'Elaborazione di Immagini) e delle scienze naturali, danno luogo a problemi mal posti: in linea generale si puó affermare che ogni qual volta si vogliono determinare le cause a partire dalle conseguenze si finisce per affrontare un problema che é inverso e (generalmente) mal posto.

Prima di definire il significato di *mal posizione* (e di *ben posizione*) di un problema, chiariamo ciò che intendiamo per problema. Consideriamo problema *la determinazione di una certa soluzione avendo a disposizione un modello matematico e dati in ingresso*¹.

Se indichiamo con $M(P)$ il modello matematico che esprime un fenomeno fisico, allora $M(P)$ é un problema in cui, a partire da un insieme di dati noti (derivanti ad esempio da delle misurazioni), se ne vuole determinare la causa, ovvero la soluzione. Appare chiaro che affinché il problema $M(P)$ ben rappresenti una situazione fisica, deve necessariamente godere della proprietà che *ad ogni insieme di dati corrisponda una e una sola soluzione*.

Tuttavia questa proprietà, che garantisce l'unicità delle soluzioni, non assicura che tali soluzioni siano ”accurate”. In effetti si deve prendere in considerazione il fatto che sui dati del problema possono essere presenti delle perturbazioni.

¹Cosí formulato il problema é da considerarsi un problema *diretto*, mentre diciamo *inverso* il problema che si ottiene scambiando il ruolo tra dato in ingresso e soluzione in uscita. Se, ad esempio, supponiamo di avere a disposizione un trasduttore che, posto a contatto con una sorgente, restituisce un valore numerico α , allora il problema inverso consiste nel determinare la configurazione della sorgente, una volta noto il valore di α .

Quindi affinché un problema $M(P)$ possa essere risolto con "sufficiente accuratezza", tali perturbazioni, non potendo essere evitate, devono almeno essere "controllate" e "limitate": ovvero si desidera che *la soluzione del problema dipenda con continuità dai dati iniziali*.

Riepilogando, per un problema sono desiderate le tre seguenti proprietà²:

- (a') l'esistenza della soluzione;
- (b') l'unicità della soluzione;
- (c') la dipendenza continua dal dato della soluzione.

1.2.1 Problemi mal posti

Le proprietà (a'),(b') e (c') individuano completamente un problema inverso ben posto, ma non hanno carattere di definizione rigorosa. Infatti, per quel che concerne la continuità, è necessario fare riferimento ad opportuni spazi topologici.

Introduciamo in forma più astratta il concetto di *problema*: assegnati un insieme (di partenza) X , un insieme (di arrivo) Y ed una applicazione $K : X \rightarrow Y$ definiamo **problema** la terna (K, X, Y) ³

²Tornando all'esempio in nota 1 possiamo leggere la ben posizione in questi termini:

- (a') *per ogni dato valore α esiste almeno una configurazione della sorgente per cui il trasduttore restituisce il valore α*
- (b') *per ogni dato valore α al più una configurazione della sorgente è possibile;*
- (c') *se il valore di α "cambia di poco" la nuova configurazione della sorgente sarà simile alla precedente configurazione.*

³Nel seguito potremo intendere **problema diretto** un problema in cui a partire da $x \in X$ si vuol determinare $y = Kx \in Y$ e **problema inverso** un problema in cui a partire da $y \in Y$ si vuol determinare $x \in X$ tale che $y = Kx$.

A questo punto, assegnato un problema (K, X, Y) , richiamiamo la ben nota definizione di Hadamard di problema ben posto:

Definizione 1.2.1 [40]

*Assegnati uno spazio topologico X , uno spazio topologico Y ed una applicazione $K : X \rightarrow Y$ il problema (K, X, Y) si dice **ben posto** se e solo se sono verificate le seguenti condizioni*

- (a) *per ogni dato $y \in Y$ esiste una soluzione $x \in X$ di $Kx = y$;*
- (b) *la soluzione x é unica in X ;*
- (c) *la dipendenza di x da y é continua.*

*Se il problema non soddisfa ad una o piú delle tre condizioni si dirá **mal posto**.*

E' evidente che il buon posizionamento del problema é intimamente connesso non solo con l'operatore K , ma anche con gli spazi X e Y e le loro topologie. Ovvero il posizionamento é una caratteristica della terna (K, X, Y) . Dettagliatamente la (a) e la (b) equivalgono rispettivamente alla suriettivit  e all'injectivit  dell'applicazione K , mentre la (c) non é che un altro modo per dire che l'applicazione inversa é continua. In conclusione, dire che la terna (K, X, Y) rappresenta un problema ben posto é precisamente la stessa cosa di dire che l'operatore inverso $K^{-1} : Y \rightarrow X$ esiste ed é continuo. Possiamo distinguere essenzialmente due motivi per cui un problema pu  essere mal posto:

- (1) l'operatore inverso $K^{-1} : Y \rightarrow X$ é discontinuo;
- (2) l'operatore inverso $K^{-1} : Y \rightarrow X$ non esiste.

Nel caso (1) la mal posizione del problema si identifica con la discontinuit  dell'operatore inverso: come detto, per tali problemi piccoli errori nei dati possono creare grandi deviazioni, non controllabili, dalla soluzione ideale. Per affrontare questo tipo di problemi si utilizzano le tecniche di regolarizzazione.

Nel caso (2) il problema é mal posto perché la soluzione non esiste o non é unica. Questo tipo di difficoltà é superato rendendo biunivoca l'applicazione K . In sostanza si sostituisce il problema (K, X, Y) con il problema (K, X', Y') , in modo che $K : X' \rightarrow Y'$ risulti invertibile⁴. In conclusione, a meno di ricorrere a restrizione del dominio e del codominio, é essenzialmente lecito, ed é quello che si farà nel seguito, identificare la mal posizione di un problema direttamente con la non continuità dell'operatore inverso.

1.2.2 Posizionamento e condizionamento

Si vogliono adesso comprendere quali sono gli effetti della mal posizione del problema durante le varie fasi del procedimento di risoluzione computazionale del problema. In particolare si vuole evidenziare lo stretto legame che intercorre tra posizionamento e condizionamento di un problema.

Partiamo dal procedimento di risoluzione computazionale di un problema. Gli stadi del procedimento, mostrati in Fig 1.1, possono essere riassunti come segue:

⁴Nel contesto degli spazi di Hilbert tale scopo é raggiunto ricorrendo all'introduzione dell'operatore inverso generalizzato K^\dagger , anche detto operatore di *Moore-Penrose* [65]. Tale approccio consente di estendere il concetto di unica soluzione. Sinteticamente

Definizione 1.2.2 [35]

Se $K : X \rightarrow Y$ é un operatore lineare limitato tra spazi di Hilbert e $R(K)$ il suo rango, allora l'operatore **inverso generalizzato** K^\dagger di K é una applicazione lineare

$$K^\dagger : D(K^\dagger) = R(K) \oplus R(K)^\perp \rightarrow X$$

definita come $K^\dagger y = x^\dagger$ dove

- (i) $x^\dagger \in S = \{u \in X : \|Tu - y\|_Y \leq \|Tx - y\|_Y, \quad \forall x \in X\} \subset X$
- (ii) $\|x^\dagger\|_X \leq \|u\|_X \quad \forall u \in S;$

la soluzione x^\dagger é detta **soluzione generalizzata** e S é l'insieme delle **pseudo soluzioni**.

Naturalmente se $K : X \rightarrow Y$ é invertibile allora $K^\dagger \equiv K^{-1}$.

- P formulazione del problema reale P ;
- $M(P)$ formulazione del modello matematico $M(P)$, ovvero la modellizzazione del problema reale P ;
- $M_h(P)$ la formulazione del modello discreto $M_h(P)$, ovvero l'approssimazione di $M(P)$ mediante un Metodo Numerico;
- $A(P)/S(P)$ sviluppo di un algoritmo $A(P)$, basato sul modello discreto $M_h(P)$, e relativa implementazione in un ambiente di calcolo mediante un software $S(P)$.

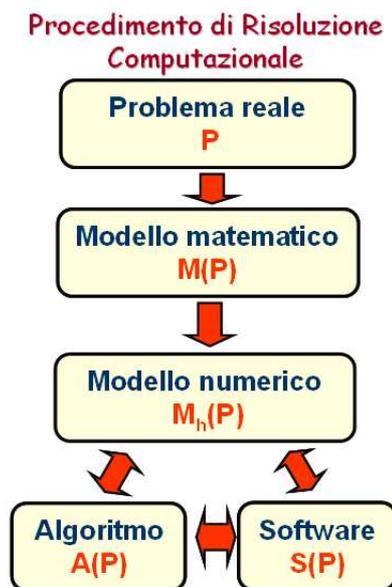


Figura 1.1: Schematizzazione del procedimento di risoluzione computazionale

Analizzando nel dettaglio le diverse fasi del procedimento di risoluzione computazionale si individuano piú fonti di errore:

- (e1) perturbazioni o errori di misurazione, dovuti ad esempio alla sensibilità dello strumento di rilevazione dei dati nel problema reale;

- (e2) errori dovuti alla formulazione matematica del problema: ad esempio per semplificare il modello $M(P)$ alcune informazioni possono essere trascurate, mentre si possono utilizzare altre informazioni aggiuntive non direttamente legate al problema reale;
- (e3) errori di discretizzazione o troncamento analitico, tipici del passaggio dal modello matematico $M(P)$ (che é in generale un modello "continuo") al modello discreto $M_h(P)$;
- (e4) errori dovuti allo sviluppo di un algoritmo $A(P)$ e alla relativa implementazione mediante un software $S(P)$, in un opportuno ambiente di calcolo. Questi errori sono principalmente riconducibili alla precisione finita del sistema aritmetico del calcolatore, si tratta cioè degli errori di round off.

Nel paragrafo precedente abbiamo assunto, che la mal posizione del problema coincide con la discontinuitá dell'operatore inverso⁵ K^{-1} . Notoriamente la continuitá é una proprietá topologica e quindi puó essere studiata ogni qual volta il problema reale P é descritto mediante un modello matematico $M(P)$ che sia rappresentato da un'applicazione tra spazi topologici. Tuttavia questa semplice osservazione non deve indurre a credere che il posizionamento sia esclusivamente una proprietá del modello continuo. Infatti é possibile che l'applicazione K , che caratterizza il problema, sia definita direttamente tra spazi di Hilbert (si pensi alla risoluzione di sistemi lineari o, in generale, ai problemi di algebra lineare numerica). In particolare il posizionamento diventa anche una caratteristica dei problemi discreti e in tal caso, come vedremo, coincide con il condizionamento.

Oltretutto si osservi che, anche nel caso in cui il problema matematico $M(P)$ é

⁵Dell'operatore K^\dagger nel caso in cui si sia introdotto l'operatore inverso generalizzato.

un problema continuo (definito cioè tra spazi topologici), l'utilizzo di un metodo numerico $M_h(P)$, per risolverlo, conduce comunque ad una applicazione tra opportuni spazi metrici (siano questi finito o infinito-dimensionali). Vediamo quindi come può essere caratterizzato il posizionamento nei problemi discreti.

Condizionamento e posizionamento secondo Demmel

Come anticipato, per i problemi discreti il concetto di posizionamento è fortemente connesso al concetto di *condizionamento*. Uno dei principali studiosi del legame tra posizionamento e condizionamento è senz'altro Demmel. In un lavoro del 1987 [28], Demmel caratterizza i problemi mal posti da un punto di vista geometrico:

"[...] tali problemi formano tipicamente una superficie sotto-dimensionale nello spazio dei problemi, una sorta di frontiera di tale spazio[...]"

I problemi ben posti possono comunque essere "vicini" alla superficie dei problemi mal posti. In effetti, il condizionamento è una misura di tale distanza che indica il grado di mal posizione del problema. Demmel ha osservato che in molti problemi dell'analisi numerica l'indice di condizionamento di un dato problema è direttamente proporzionale alla minima distanza di tale problema da uno mal posto dello stesso tipo. Il seguente esempio, relativo al problema dell'inversione di matrice, chiarirà la precedente affermazione:

Esempio 1.2.1 [28]

Si consideri il caso di inversione di matrice, se A è perturbata in $A + \delta A$, allora a meno di errori del secondo ordine la soluzione del problema A^{-1} diventa $A^{-1} + \delta A^{-1}$ dove

$$\frac{\|\delta A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| . \quad (1.1)$$

Dalla relazione (1.1) si evince che $\|A^{-1}\|$ può essere scelto come condizionamento del problema. Questa scelta è in accordo con il ben noto risultato dovuto

a W.Kahan [53] in cui si prova che $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ é la minima distanza di A dall'insieme delle matrici singolari, la cui inversione é, evidentemente un problema mal posto.

Risultati simili, dovuti rispettivamente a Wilkinson e Hough, valgono per il calcolo di autovalori ed autovettori [77] e per la ricerca di zeri di polinomi [46].

Dall'interpretazione geometrica della mal posizione, si ha che se un problema é mal posto, allora ha distanza nulla dalla superficie sotto-dimensionale dei problemi mal posti. Per cui volendo che tale distanza sia l'inverso del condizionamento, si deve avere che l'indice di condizionamento é infinito. Ciò in sostanza afferma Demmel in [28], afferma

"[...] chiamiamo mal posti quei problemi il cui indice di condizionamento é infinito [...]"

Si osservi però che il condizionamento deve essere inteso rispetto all'operatore K^{-1} . Dal punto di vista teorico utilizzando la definizione di indice di condizionamento e i risultati riportati in **Appendice A**, si prova che:

Osservazione 1.2.1

Se $K : X \rightarrow Y$ é un operatore lineare invertibile tra spazi di Hilbert, allora il problema (K, X, Y) é ben posto se e solo se

$$\mu(K^{-1}) < \infty \tag{1.2}$$

Dimostrazione

Poiché K é una biezionazione di X in Y , la ben posizione equivale alla continuitá di K^{-1} in Y . Tuttavia, K^{-1} é in particolare un funzionale lineare tra spazi normati, per cui la continuitá equivale alla limitatezza che, a sua volta per il **Teorema A.1**, equivale alla finitezza di $\mu(K^{-1})$. \square

Si é già osservato che se K é un operatore lineare limitato tra spazi di Hilbert é possibile introdurre l'operatore inverso generalizzato K^\dagger . In tal caso come conseguenza dell'**Osservazione 1.2.1**, si ha che il problema $(K, R(K^\dagger), D(K^\dagger))$ é ben posto se e solo se $\mu(K^\dagger) < \infty$, ovvero la mal posizione é imputabile alla non limitatezza della norma di K^\dagger , che ne rappresenta l'indice di condizionamento. In conclusione, in accordo con le affermazioni di Demmel, **la mal posizione coincide con il mal condizionamento**.

1.3 Il concetto di regolarizzazione

Una delle principali tecniche per far fronte ai problemi mal posti in presenza di perturbazioni sui dati é rappresentata dalla regolarizzazione. L'origine delle tecniche di regolarizzazione é relativamente recente ed é dovuta a Tikhonov [71] in un lavoro del 1963. Tale lavoro é fondato sul seguente presupposto[73]:

"[...]poiché non é possibile calcolare la soluzione al problema, essendo il problema mal posto, si cerca una soluzione che sia il piú possibile fedele al dato ma che al tempo stesso soddisfi certi vincoli[...]".

L'idea alla base della regolarizzazione di Tikhonov, é quindi di bilanciare la richiesta di fedeltá ai dati con la richiesta di soddisfare opportune condizioni (ad esempio una sufficiente regolaritá). Ciò é realizzato sostituendo al problema mal posto (K, X, Y) un problema ben posto (K_α, X, Y) , in modo che l'operatore K_α sia una buona approssimazione dell'operatore K e che la soluzione x_α al problema ben posto soddisfi i vincoli richiesti. In questo contesto vogliamo attribuire al termine "regolarizzazione" un significato piú ampio: tecniche di regolarizzazione sono state sviluppate anche per risolvere problemi non lineari e il principio, che accomuna tutte queste tecniche con l'idea di base di Tikhonov, é quello *di cercare di definire delle approssimazioni della soluzione del problema, modificando opportunamente gli spazi o l'operatore, in modo che il nuovo problema modificato sia piú semplice da risolvere numericamente.*

1.3.1 Una introduzione generale

Consideriamo qui un problema mal posto (K, X, Y) con X, Y spazi di Hilbert. Ritenendo poco significativo il caso in cui l'operatore inverso non esiste, consideriamo direttamente il caso in cui esiste $K^{-1} : Y \rightarrow X$ operatore inverso

discontinuo.

Supponiamo che il dato y sia conosciuto con una soglia di errore δ . Ovvero che si abbia a disposizione un dato y_δ tale che

$$\|y_\delta - y\|_Y = \delta .$$

Essendo K^{-1} discontinuo, si ha $\mu(K^{-1}) = \infty$, ovvero il fattore di amplificazione dell'errore δ sul dato é infinito e dunque non é possibile controllare l'errore sulla soluzione. In pratica non si puó stimare mediante K^{-1} la quantità:

$$x_\delta - x = K^{-1}(y_\delta) - K^{-1}(y) .$$

In questo contesto la regolarizzazione consiste nel sostituire a K^{-1} un operatore R_α ⁶, dipendente da parametro α , che goda essenzialmente delle seguenti proprietà [35]:

- l'operatore R_α é lineare e continuo;
- R_α approssima, in qualche senso, l'operatore K^{-1} .

La prima proprietà implica che R_α abbia condizionamento limitato (dalla (A.12)): sostanzialmente si sostituisce a K^{-1} , un operatore con norma limitata che garantisce il controllo delle perturbazioni sui dati. La seconda proprietà invece prevede che la soluzione calcolata da R_α sia in qualche senso una buona approssimazione del problema.

Questi aspetti possono essere riassunti esprimendo in modo formale il significato di metodo di regolarizzazione:

Definizione 1.3.1 [35]

*Una famiglia di operatori lineari $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$, con $R_\alpha : Y \rightarrow X$, é detta **famiglia di operatori regolarizzanti** per il problema (K, X, Y) , se*

⁶Equivalentemente si puó sostituire a K un operatore K_α ed in seguito porre $R_\alpha = K_\alpha^{-1}$.

(RS) $\mu(R_\alpha) < \mu(K^{-1}) = \infty$;

(RC) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha(y) - x\|_X = 0 \quad \forall y \in Y$.

Il parametro α é detto **parametro di regolarizzazione**.

1.3.2 Scelta del parametro di regolarizzazione

Una delle maggiori difficoltà nelle tecniche di regolarizzazione é determinare un criterio per la scelta del *parametro di regolarizzazione*. Come é noto, nelle fasi del procedimento risolutivo, si devono considerare perlomeno gli errori dovuti alla precisione finita dell'ambiente di calcolo, nel quale si sviluppa l'algoritmo per risolvere il problema. In concreto, supposti X e Y spazi di Hilbert, dobbiamo assumere di avere a disposizione, non il dato esatto y , ma un dato perturbato:

$$y_\delta = y + h_\delta = K^{-1}x + h_\delta, \quad (1.3)$$

dove il valore δ é una misura della perturbazione $h_\delta \in X$ che contamina il dato, cioè

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta.$$

Si osservi che scrivendo la (1.3) non si vuole assumere che h_δ sia una perturbazione di tipo additivo, ma può anche dipendere dal dato y . Si richiede soltanto di conoscere una misura dell'ordine di grandezza dell'errore. Cioé la decomposizione (1.3) non é nota ma si assume solo che esista. Supponiamo di avere scelto una famiglia di operatori regolarizzanti $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$. Fissato α il metodo regolarizzante R_α fornisce la seguente approssimazione della soluzione

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha(y_\delta). \quad (1.4)$$

Volendo misurare l'errore commesso si ha

$$x_\alpha^\delta - x = R_\alpha(y_\delta) - x = R_\alpha(y) - x + R_\alpha(h_\delta) \quad (1.5)$$

e passando alle norme si ha

$$E_\alpha[x, y_\delta] = \|x_\alpha^\delta - x\|_X \leq \|R_\alpha(y) - x\|_X + \|R_\alpha(h_\delta)\|_X \leq \|R_\alpha(y) - x\|_X + \mu(R_\alpha)\delta . \quad (1.6)$$

Il funzionale $E_\alpha[x, y_\delta]$ misura l'errore commesso e dipende essenzialmente dalle due quantità a destra nella (1.6). Il primo termine rappresenta l'errore di approssimazione introdotto, dovuto al fatto che si è utilizzato R_α in luogo di K^{-1} . Questo errore, per la proprietà di convergenza (**RC**) degli operatori regolarizzanti, tende a zero se $\alpha \rightarrow 0$.

Viceversa il secondo termine è l'effetto dovuto alla propagazione dell'errore di perturbazione presente sul dato. L'amplificazione di tale errore è dell'ordine di grandezza di $\mu(R_\alpha) = \|R_\alpha\|$ e, poiché per $\alpha \rightarrow 0$ si ha $R_\alpha \rightarrow K^{-1}$, allora deve essere

$$\mu(R_\alpha) \rightarrow \mu(K^{-1}) = \infty .$$

Quindi l'errore diventa inaccettabile. Una rappresentazione grafica del comportamento tipico del funzionale errore $E_\alpha[x, y_\delta]$ è mostrata in Figura 1.2. L'andamento mostrato suggerisce che una plausibile scelta del parametro di regola-

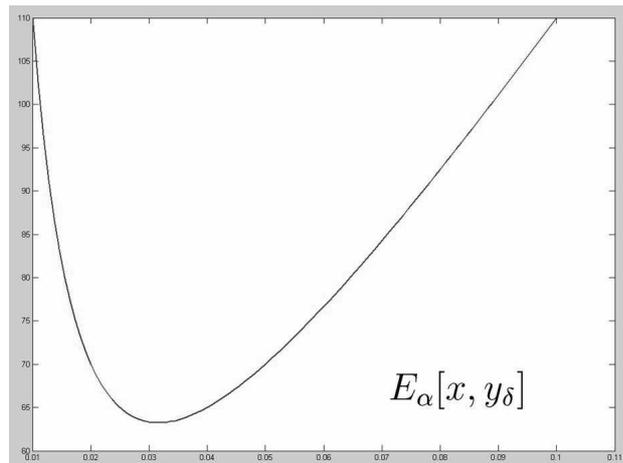


Figura 1.2: Tipico andamento dell'errore $E_\alpha[x, y_\delta]$ in funzione di α .

rizzazione potrebbe essere quella in corrispondenza della quale risulta minimo l'errore $E_\alpha[x, y_\delta]$. D'altra parte, volendo che x_α^δ sia fedele ai dati, allora α deve rendere piccolo anche il residuo

$$RES_\alpha[x, y_\delta] = \|Kx_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y . \quad (1.7)$$

Piú in generale, considerando entrambi gli aspetti, possiamo introdurre un funzionale

$$\Phi(\alpha) = \Phi_\alpha[x, y_\delta] \quad (1.8)$$

che tenga conto di (1.6) e (1.7), e vincolare a tale funzionale la scelta del parametro di regolarizzazione. Possiamo cosí dare la seguente:

Definizione 1.3.2

Sia $K : X \rightarrow Y$ un operatore invertibile tra due spazi di Hilbert e $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ una famiglia di operatori regolarizzanti. Assegnato un funzionale del tipo in (1.8), (se esiste) il valore

$$\alpha_{opt} := \operatorname{argmin}_\alpha \Phi_\alpha[x, y_\delta] \quad (1.9)$$

*é detto **parametro di regolarizzazione ottimale**. Il funzionale $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$ é detto **funzionale di regolarizzazione** e la soluzione $x_{\alpha_{opt}}^\delta$ **soluzione regolarizzata**.*

L'espressione del funzionale $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$ caratterizza le differenti tecniche per il calcolo del parametro ottimale. Ad esempio nel *principio di discrepanza* di Morozov [58], α_{opt} é scelto in modo che

$$\|Kx_{\alpha_{opt}}^\delta - y_\delta\|_Y^2 = \delta^2 .$$

Si osserva infine che il funzionale $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$ dipende da δ , errore sul dato y , pertanto anche il parametro di regolarizzazione risente di questa dipendenza, cioé:

$$\alpha_{opt} = \alpha_{opt}(\delta) .$$

1.4 Il problema di inversione numerica della trasformata di Laplace

Poniamo adesso l'attenzione sul problema dell'inversione numerica della trasformata di Laplace. In questa sezione faremo distinzione tra caso complesso e caso reale. Tale distinzione, che origina dalla letteratura sull'argomento, é necessaria perché dal punto di vista del posizionamento del problema possiamo considerare il caso reale e il caso complesso due problemi distinti.

Consideriamo la definizione di *operatore o trasformazione integrale di Laplace*:

Definizione 1.4.1 [45]

Sia L l'insieme delle funzioni L -trasformabili, anche detto **spazio delle originarie o antitrasformate**. Si definisce **Trasformazione integrale di Laplace** l'operatore \mathcal{L} definito come segue⁷:

$$\mathcal{L} : f \in L \rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s t} f(t) dt . \quad (1.10)$$

Dalla **Definizione 1.4.1** si evince che, una volta nota una trasformata di Laplace $F(s)$, il problema consiste nel determinare la sua antitrasformata $f(t)$, ovvero una funzione tale che

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) .$$

Tale problema ricade nella tipologia di quei problemi che, nel paragrafo 1.2.1, abbiamo detto essere inversi. In ambito del tutto generale si tratta quindi di

⁷Notiamo che l'operatore integrale di Laplace é un'applicazione lineare rispetto alle usuali operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare complesso, cioè soddisfa alle due evidenti proprietà:

$$\mathcal{L}[f_1 + f_2] \equiv \mathcal{L}[f_1] + \mathcal{L}[f_2] \quad \mathcal{L}[c f_1] \equiv c \mathcal{L}[f_1] .$$

studiare il posizionamento del seguente problema:

$$(\mathcal{L}, L, \mathcal{L}(L)) \tag{1.11}$$

Naturalmente il posizionamento dipende sia dalle caratteristiche di biunivocita' dell'operatore che dalla scelta delle topologie negli spazi L e $\mathcal{L}(L)$. Il risultato che segue dimostra che l'operatore \mathcal{L} e', a meno di identificare le funzioni quasi ovunque uguali, una biezione di L in $\mathcal{L}(L)$.

Teorema 1.4.1 [36]

Sia $f_1(t)$ e $f_2(t)$ due funzioni continue a tratti e L -trasformabili nel semipiano di convergenza $C(f)$. Sia σ_0 l'ascissa di convergenza e si supponga che in $C(f)$ le loro trasformate di Laplace coincidano:

$$\mathcal{L}[f_1](s) \equiv \mathcal{L}[f_2](s) \text{ in } C(f) .$$

Allora

$$f_1(t) = f_2(t)$$

in ogni punto t in cui f_1 e f_2 sono continue. □

Il **Teorema 1.4.1** rende possibile l'introduzione, almeno dal punto di vista formale, dell'operatore inverso

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(L) \rightarrow L / \sim .^8$$

In generale l'espressione di \mathcal{L}^{-1} non e' data. Tuttavia, restringendo dominio e codominio dell'operatore \mathcal{L} , si hanno alcuni *operatori invertibili indotti da*

⁸Con L / \sim si intende lo spazio ottenuto quotizzando la classe L delle funzioni L -trasformabili rispetto alla relazione d'equivalenza definita come:

$$f \sim g \iff f = g \text{ quasi ovunque in } \mathbb{R}^+ .$$

\mathcal{L} . Nel seguito lo studio del posizionamento del problema é condotto in questa direzione, particolarizzando cioè la scelta dello spazio delle trasformate e delle antitrasformate. Questo approccio é volto a mostrare, come il problema dell'inversione della trasformata di Laplace, si possa considerare ben posto nel caso complesso (trasformata nota su tutto il semipiano di convergenza) e mal posto nel caso reale (trasformata nota sull'asse reale o in un suo sottoinsieme). Infine l'ultimo caso riguarderà una particolare coppia di spazi: verrà mostrato il mal posizionamento nel caso in cui si abbia $X = Y = L^2(\mathbb{R}^+)$, ovvero nel contesto in cui si pone la formula d'inversione, oggetto della tesi.

1.4.1 Posizionamento nel caso complesso

Trasformate sugli spazi pseudo-esponenziali

Introduciamo le seguenti nozioni preliminari:

Definizione 1.4.2 [45]

Diremo *funzione di tipo esponenziale* ogni funzione f , di variabile complessa, che sia intera e per la quale $\exists \gamma_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$\max_{|s|=r} |f(s)| \leq e^{\gamma_0 r} \quad \forall r > r_0 . \quad (1.12)$$

L'estremo inferiore dei numeri γ_0 per cui sussiste la (1.12) si dice **parametro di crescita** e l'insieme E_γ delle funzioni di tipo esponenziale aventi lo stesso parametro di crescita γ si dice **classe delle funzioni esponenziali di ordine γ** ⁹

Dalla teoria sulle funzioni L-trasformabili si deduce che se consideriamo una funzione esponenziale di ordine γ essa é assolutamente L-trasformabile (e conseguentemente anche L-trasformabile). Infatti si ha:

⁹Per il **Teorema di Liouville**, γ o é positivo oppure vale $-\infty$. In questo ultimo caso E_γ degenera nel singleton della funzione nulla.

Teorema 1.4.2 [45]

Sia $f(t) \in E_\gamma$, allora f é assolutamente L -trasformabile e l'ascissa di assoluta convergenza coincide con il parametro di crescita, $\sigma'_0 \equiv \gamma$. □

In particolare $E_\gamma \subset L$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$. In corrispondenza a ciascuna classe E_γ , consideriamo, per ogni $\gamma > 0$, la classe T_γ , costituita da tutte e sole le funzioni di variabile complessa che vanno a zero all'infinito e che sono olomorfe all'esterno della circonferenza del piano complesso:

$$\mathcal{C} = \{s \in \mathbb{C} : |s| = \gamma\}$$

il cui raggio risulti minimale rispetto a questa proprietà¹⁰. Si osserva preliminarmente che la trasformazione di Laplace induce, nel senso specificato dal prossimo enunciato, una corrispondenza biunivoca tra queste e le classi delle funzioni di tipo esponenziale. Si ha:

Teorema 1.4.3 [45]

Sia γ un elemento qualsiasi in \mathbb{R}_0^+ . Ogni $f \in E_\gamma$ ha come trasformata di Laplace una funzione che ammette un prolungamento analitico appartenente a T_γ . Viceversa se $F \in T_\gamma$, essa é ottenibile mediante prolungamento della trasformata di Laplace di una funzione in E_γ . □

Le classi E_γ e T_γ sono in corrispondenza biunivoca ma non sono dotate della struttura di spazio lineare, il che impedisce lo studio del posizionamento del problema per questa coppia di classi. Si puó ovviare a tale inconveniente introducendo i seguenti spazi vettoriali:

$$\mathcal{E}_\gamma = \bigcup_{\gamma' \in [0, \gamma] \cup \{-\infty\}} E_{\gamma'} \quad (\gamma \in \mathbb{R}_0^+).$$

¹⁰Analogamente alla classe $E_{-\infty}$ consideriamo la classe $T_{-\infty}$ costituita dalla sola funzione nulla.

$$\mathcal{T}_\gamma = \bigcup_{\gamma' \in [0, \gamma] \cup \{-\infty\}} \mathcal{T}_{\gamma'} \quad (\gamma \in \mathbb{R}_0^+).$$

Lo spazio \mathcal{E}_γ può essere normato ponendo¹¹

$$\|f\|_{\mathcal{E}, \gamma} = \max_{x \geq 0} e^{-\gamma x} |f(x)|. \quad (1.13)$$

In particolare si può mostrare che

Teorema 1.4.4 [20]

Per ogni $\gamma \geq 0$, \mathcal{L} induce, nel senso specificato dal **Teorema 1.4.3**, una corrispondenza biunivoca di \mathcal{E}_γ in \mathcal{T}_γ . Inoltre ciascun \mathcal{T}_γ può essere normato ponendo, per ogni $F \in \mathcal{T}_\gamma$:

$$\|F\|_{\mathcal{T}, \gamma} = \max_{|s|=\gamma} |F(s)|. \quad (1.14)$$

□

Utilizzando infine le norme introdotte in (1.13) e (1.14) si mostra che:

Teorema 1.4.5 [20]

Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$, il problema $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_\gamma, \mathcal{T}_\gamma)$ è ben posto nel senso di Hadamard.

Dimostrazione

In virtù del **Teorema 1.4.4** \mathcal{E}_γ e \mathcal{T}_γ sono in corrispondenza biunivoca. È sufficiente provare che l'applicazione indotta da \mathcal{L} tra \mathcal{E}_γ e \mathcal{T}_γ ammette inversa continua. Sia allora F una trasformata con prolungamento analitico \overline{F} in \mathcal{T}_γ per un opportuno $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$, allora per il **Teorema 1.4.3** deve esistere α , con $0 < \alpha < \gamma$, tale che $f = \mathcal{L}^{-1}F$ appartenga ad E_α . Per il **Teorema di Pincherle** [45] dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{sx} \overline{F}(s) ds \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad (1.15)$$

¹¹Se $f \in \mathcal{E}_\gamma$ da un certo punto in poi dovrà essere $|f(x)| \leq e^{\gamma x}$. Ovvero le funzioni $|f(x)|e^{-\gamma x}$ ammettono massimo.

dove per C si può scegliere la curva di equazione $|s| = \gamma$. Dalla (1.14) e dalla (1.15) segue

$$|f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C e^{sx} \overline{F}(s) ds \right| \leq \gamma \max_{|s|=\gamma} |e^{sx} \overline{F}(s)| \leq \gamma e^{\gamma x} \|F\|_{\mathcal{T}, \gamma}, \quad (1.16)$$

e quindi

$$\|f\|_{\mathcal{E}, \gamma} \leq \gamma \|F\|_{\mathcal{T}, \gamma}.$$

□

Trasformate sugli spazi di Hardy-Lebesgue

Il **Teorema 1.4.5** ha evidenziato che nel caso degli spazi \mathcal{E}_γ e \mathcal{T}_γ la trasformazione integrale di Laplace da luogo ad un problema ben posto. Nel caso complesso il buon posizionamento é osservabile anche in un caso piú generale, cioè nel caso in cui le funzioni trasformate appartengano agli spazi di Hardy-Lebesgue:

Definizione 1.4.3 [30]

Diremo **spazio di Hardy-Lebesgue di ordine p** ($1 \leq p < \infty$) l'insieme $H^p(\mathbb{R}^+)$ delle funzioni F nella variabile complessa $s = \sigma + i\tau$, olomorfe nel semipiano $\sigma > 0$ e soddisfacenti la condizione

$$\sup_{\sigma > 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\tau)| d\tau \right)^{1/p} < \infty, \quad (1.17)$$

con la norma $\|F\|_{H,p}$ data dall'espressione a primo membro della (1.17).

Facendo uso di risultati concernenti la teoria degli operatori limitati negli usuali spazi di Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^+)$ di ordine p con $1 \leq p \leq \infty$ [63], si ottiene un risultato preliminare che mette in relazione le originarie in $L^p(\mathbb{R}^+)$ con le trasformate in $H^q(\mathbb{R}^+)$ con q esponente coniugato di p :

Teorema 1.4.6 [20]

Per ogni $p \in]1, 2]$, \mathcal{L} induce un'applicazione di $L^p(\mathbb{R}^+)$ nello spazio di Hardy-Lebesgue di ordine coniugato $H^q(\mathbb{R}^+)$. □

In particolare $p = 2$ implica $q = 2$, dunque la trasformazione di Laplace induce un'applicazione di $L^2(\mathbb{R}^+)$ in $H^2(\mathbb{R}^+)$. In questo caso, inoltre, il problema dell'inversione di \mathcal{L} é ben posto, infatti si osserva preliminarmente che:

Teorema 1.4.7 [30]

L'applicazione $\frac{1}{2\pi}\mathcal{L}$ é un isometria di $L^2(\mathbb{R}^+)$ in $H^2(\mathbb{R}^+)$. □

Dal **Teorema 1.4.7** si deduce infine che

Teorema 1.4.8

Il problema $(\mathcal{L}, L^2(\mathbb{R}^+), H^2(\mathbb{R}^+))$ é ben posto nel senso di Hadamard. □

1.4.2 Posizionamento nel caso reale

Trasformate sugli spazi $L^p(\mathbb{R}^+)$

I **Teoremi 1.4.5** e **1.4.8** hanno evidenziato che nel caso complesso la trasformazione integrale di Laplace dá luogo ad un problema ben posto. Diversa é la situazione nel caso reale, dove, con caso reale, usualmente si suol intendere che la trasformata di Laplace é conosciuta solo sull'asse reale o in un suo sottoinsieme.

Studiamo in particolare il posizionamento del problema supponendo che lo spazio delle originarie e lo spazio delle trasformate siano gli spazi di Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^+)$ di ordine p con $1 \leq p \leq \infty$, rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^+ .

Premettiamo il seguente

Lemma 1.4.1 [20]

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ ($1 \leq p \leq \infty$), f risulta assolutamente L -trasformabile e per l'ascissa di assoluta convergenza si ha $a(f) \leq 0$. Inoltre $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ se e solo se l'asse immaginario é contenuto nella regione di assoluta convergenza ($a(f) < 0$). □

Dunque una funzione in L^p é anche L-trasformabile. In piú si ha che:

Teorema 1.4.9 [20]

Per ogni $p \in]1, 2]$, \mathcal{L} induce un'applicazione di $L^p(\mathbb{R}^+)$ nello spazio omonimo di ordine coniugato $L^q(\mathbb{R}^+)$. \square

Il precedente risultato ha evidenziato come la trasformata di una funzione $L^p(\mathbb{R}^+)$ cada in $L^q(\mathbb{R}^+)$, tuttavia ciò non é sufficiente per la la ben posizione. Infatti, generalizzando un classico risultato relativo a $p = q = 2$, si ha

Teorema 1.4.10 [20]

Per ogni $p \in]1, 2]$, l'operatore indotto tra $L^p(\mathbb{R}^+)$ in $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+))$ dotato della norma di $L^q(\mathbb{R}^+)$ ha inverso discontinuo. \square

In conclusione si é stabilito che

Teorema 1.4.11 [20]

Per ogni $p \in]1, 2]$, il problema $(\mathcal{L}, L^p(\mathbb{R}^+), \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+)))$ é mal posto nel senso di Hadamard. \square

1.4.3 Posizionamento di una formula d'inversione

La studio del posizionamento condotto nel caso degli spazi L^p risulta di particolare interesse in quanto tale scelta per la coppia di spazi metrici ha frequente riscontro nelle applicazioni. In questo lavoro di tesi é descritto un metodo per il calcolo numerico della antitrasformata di Laplace basato su una formula di inversione introdotta da McWhirter e Pike in [56]. La formula proposta permette di fatto di invertire formalmente l'operatore di Laplace mediante l'utilizzo degli autovalori e delle autofunzioni dell'operatore stesso. Tale inversione é però lecita solo nel caso in cui le funzione $F(s)$ e $f(t)$ appartengano ad un

opportuno spazio metrico. Nel loro lavoro Pike e McWhirter, parlando direttamente di problema fortemente mal condizionato, riconoscono intrinsecamente il mal posizionamento del problema correlato alla formula d'inversione. Il mal condizionamento é da loro giustificato facendo ricorso al comportamento dello spettro degli autovalori, tuttavia questo risultato puó essere tradotto in termini di posizionamento come segue.

Preliminarmente indichiamo con $L_w^1(\mathbb{R}^+)$ l'insieme delle funzioni g continue in \mathbb{R}^+ e a valori reali, tali che esista finito il seguente integrale

$$\int_0^\infty |g(x)|w(x)dx \quad (1.18)$$

con $w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $L_w^1(\mathbb{R}^+)$ é uno spazio L^1 sui reali "pesato" mediante la funzione peso $w(x)$. A meno di identificare le funzioni quasi ovunque uguali, tale spazio puó essere normato ponendo

$$\|g\|_{L_w^1} = \int_0^\infty |g(x)|\frac{1}{\sqrt{x}}dx . \quad (1.19)$$

Considerando infine la metrica indotta da tale norma L_w^1 diviene uno spazio metrico. Si é allora in grado di enunciare il seguente:

Teorema 1.4.12

Il problema

$$(\mathcal{L}, L_w^1(\mathbb{R}^+), L_w^1(\mathbb{R}^+)) \quad (1.20)$$

é mal posto nel senso di Hadamard.

Dimostrazione

Si osserva che $L^2(\mathbb{R}^+) \subset L_w^1(\mathbb{R}^+)$, per cui l'operatore inverso \mathcal{L}^{-1} , ove definito, é discontinuo, ereditando tale proprietá mostrata nel **Teorema 1.4.10** (caso $p = 2$). Ció é sufficiente alla mal posizione, tuttavia il problema é mal posto anche perché l'operatore $\mathcal{L} : L_w^1(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_w^1(\mathbb{R}^+)$ non é suriettivo: se consideriamo la funzione originaria $f(t) = \frac{t \sin(t)}{2}$ e la relativa trasformata di Laplace $F(s) =$

$\frac{s}{(s^2+1)^2}$ definita per $Re(s) > 0$, si ha che $F(s) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$ mentre $f(t) \notin L_w^1(\mathbb{R}^+)$.

Per vedere che $F(s) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$ basta osservare che

$$\|F\|_{L_w^1} = \int_0^{+\infty} \frac{|F(s)|}{\sqrt{s}} ds = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s}}{(s^2+1)^2} ds < \infty . \quad (1.21)$$

Mentre per verificare che $f(t) \notin L_w^1(\mathbb{R}^+)$, da

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-1)^n \sqrt{t} \sin(t) = \int_0^\pi \sqrt{z+n\pi} \sin(z) (-1)^n \cos(n\pi) \geq 2\sqrt{n\pi} \quad (1.22)$$

segue

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} |\sin(t)| / 2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-1)^n \sqrt{t} \sin(t) \geq 2\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} = \infty . \quad (1.23)$$

Capitolo 2

Una formula per l'inversione reale della trasformata di Laplace

2.1 Premessa

L'obiettivo di questo capitolo é di fornire una formula per il problema dell'inversione reale della trasformata di Laplace. Tale formula, dovuta a McWhirter e Pike [56], rappresenta il primo gradino $M(P)$ nel procedimento di risoluzione computazionale del problema e permette di invertire l'operatore integrale di Laplace nel caso in cui trasformata e originaria appartengano allo spazio $L_w^1(\mathbb{R}^+)$. In [56] gli autori ottengono tale formula in ambito piú generale: ovvero la formula proposta fornisce una soluzione formale alle equazioni integrali del tipo

$$F(s) = \int_0^{+\infty} K(st)f(t)dt , \quad (2.1)$$

nelle ipotesi in cui il nucleo dipenda solo dal prodotto di s e t ed abbia la proprietá

$$\int_0^{+\infty} |K(x)|x^{-1/2}dx < \infty . \quad (2.2)$$

Questa classe generale di equazioni include la trasformata di Laplace, le trasformate seno e coseno di Fourier e molte altre equazioni di interesse nelle applicazioni. Tale formula si basa esclusivamente sulle autofunzioni e sugli autovalori dell'operatore

$$\mathcal{K} : f(t) \rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} K(st)f(t)dt \quad (2.3)$$

che definisce l'equazione (2.1).

La prima parte del capitolo é dedicata alla derivazione elementare delle autofunzioni e degli autovalori, nonché alle loro caratteristiche. I risultati sono ottenuti facendo uso della trasformata di Mellin [74].

Nella seconda parte tali espressioni e proprietá sono discusse nel caso dell'operatore di Laplace. In seguito, nella Sezione 2.3, a partire dalla relazione (2.1), viene dedotta la formula di inversione.

Infine nell'ultima parte del capitolo si evincono alcune caratteristiche generali sul comportamento asintotico dei coefficienti che caratterizzano la formula di inversione, ottenendo poi risultati piú precisi per particolari funzioni trasformate.

2.2 Derivazione di autofunzioni e autovalori

Questa sezione é dedicata alla ricerca di autofunzioni e autovalori per il problema definito in (2.1).

Definizione 2.2.1 [56]

Diremo **autofunzioni dell'operatore \mathcal{K}** , definito in (2.3), quelle funzioni $\Phi_\omega(t)$ per cui sia verificata l'equazione

$$\mathcal{K}[\Phi_\omega](s) = \lambda_\omega \Phi_\omega(s)$$

per un valore opportuno λ_ω . Cioé:

$$\int_0^{+\infty} K(st)\Phi_\omega(t)dt = \lambda_\omega \Phi_\omega(s) . \quad (2.4)$$

I valori λ_ω saranno detti **autovalori dell'operatore \mathcal{K}** .

Preliminarmente si dimostra il seguente lemma:

Lemma 2.2.1 [56]

Sia z un numero complesso per cui esistono finiti i seguenti integrali ¹

$$\hat{K}(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} K(x) dx \quad , \quad \hat{K}(1-z) = \int_0^{+\infty} x^{-z} K(x) dx . \quad (2.5)$$

Allora l'operatore \mathcal{K} definito in (2.3) ammette le seguenti autofunzioni:

$$\Phi_z^+(t) = \sqrt{\hat{K}(z)t^{-z}} + \sqrt{\hat{K}(1-z)t^{z-1}} \quad (2.6)$$

$$\Phi_z^-(t) = \sqrt{\hat{K}(z)t^{-z}} - \sqrt{\hat{K}(1-z)t^{z-1}} , \quad (2.7)$$

corrispondenti rispettivamente agli autovalori

$$\lambda_z^+ = \sqrt{\hat{K}(z)\hat{K}(1-z)} , \quad \lambda_z^- = -\sqrt{\hat{K}(z)\hat{K}(1-z)} . \quad (2.8)$$

¹L'integrale a sinistra della (2.5) induce una trasformazione integrale nota come **Trasformazione integrale di Mellin**. La funzione $\hat{K}(z)$ é detta trasformata di Mellin della funzione $K(x)$.

Dimostrazione

Consideriamo le funzioni

$$\Phi_z(t) = At^{-z} + Bt^{z-1}, \quad (2.9)$$

con A e B numeri complessi. Sostituendo le $\Phi_z(t)$ nella (2.1) si arriva alla funzione

$$F_z(s) = \int_0^{+\infty} K(st)(At^{-z} + Bt^{z-1})dt \quad (2.10)$$

che esiste a patto che l'integrale converga. Facendo la sostituzione $x = st$ otteniamo:

$$F_z(s) = \int_0^{+\infty} K(x) \left[A \left(\frac{x}{s} \right)^{-z} + B \left(\frac{x}{s} \right)^{z-1} \right] \frac{dx}{s}, \quad (2.11)$$

cioé

$$F_z(s) = A\hat{K}(1-z)s^{z-1} + B\hat{K}(z)s^{-z} \quad (2.12)$$

Imponendo adesso che $\Phi_z(t)$ sia una autofunzione, detto λ_z il relativo autovalore, si deve avere $\mathcal{K}[\Phi_z](s) = F_z(s) = \lambda_z\Phi_z(s)$, da cui le condizioni

$$\lambda_z A = \hat{K}(z)B \quad e \quad \lambda_z B = \hat{K}(1-z)A. \quad (2.13)$$

Le relazioni (2.13) possono essere risolte ponendo

$$A = \sqrt{\hat{K}(z)}, \quad B = \sqrt{\hat{K}(1-z)} \quad e \quad \lambda_z = \sqrt{\hat{K}(z)\hat{K}(1-z)} \quad (2.14)$$

da cui la (2.6), oppure ponendo

$$A = \sqrt{\hat{K}(z)}, \quad B = -\sqrt{\hat{K}(1-z)} \quad e \quad \lambda_z = -\sqrt{\hat{K}(z)\hat{K}(1-z)} \quad (2.15)$$

da cui la (2.7). □

Dal **Lemma 2.2.1** si deduce che affinché esista un'autofunzione dell'operatore \mathcal{K} della forma in (2.9), é sufficiente che per un dato valore complesso z la trasformata di Mellin del nucleo K esista finita sia in z che in $1 - z$. Se la trasformata di Mellin é definita in z , allora ci sono α e β per cui

$$\alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta . \quad (2.16)$$

Inoltre affinché anche il valore $\hat{K}(1 - z)$ sia finito deve essere

$$1 - \beta < \operatorname{Re}(z) < 1 - \alpha . \quad (2.17)$$

Abbinando la (2.16) e la (2.17) si ha

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \leq \beta . \quad (2.18)$$

La principale conseguenza della (2.18) é che, qualora l'operatore \mathcal{K} ammetta autofunzioni, allora tra queste devono esserci quelle per cui

$$z = \frac{1}{2} + iy . \quad (2.19)$$

Il prossimo risultato mostra che assunta la (2.19) le autofunzioni esistono e risultano essere funzioni reali.

Proposizione 2.2.1 [56]

L'operatore \mathcal{K} , definito in (2.3), ammette un insieme continuo di autofunzioni reali dato da:

$$\phi_{\omega}^{+}(t) = \frac{\sqrt{\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} - i\omega}} + \sqrt{\hat{K}\left(\frac{1}{2} - i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} + i\omega}}}{2\sqrt{\pi}|\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)|} = \frac{\operatorname{Re}\left[\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} - i\omega}\right]}{\sqrt{\pi}\left|\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)\right|} \quad (2.20)$$

e

$$\phi_{\omega}^{-}(t) = \frac{\sqrt{\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} - i\omega}} - \sqrt{\hat{K}\left(\frac{1}{2} - i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} + i\omega}}}{2i\sqrt{\pi}|\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)|} = \frac{\operatorname{Im}\left[\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)t^{-\frac{1}{2} - i\omega}\right]}{\sqrt{\pi}\left|\hat{K}\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)\right|} \quad (2.21)$$

con $\omega \geq 0$ e corrispondenti autovalori reali

$$\lambda_z^+ = \left| \hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) \right| \quad \lambda_z^- = - \left| \hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) \right|. \quad (2.22)$$

Dimostrazione

Si osserva dapprima che le autofunzioni $\phi_\omega^\pm(t)$ sono ottenibili dalle corrispondenti autofunzioni del **Lemma 2.2.1** ponendo $z = \frac{1}{2} + i\omega$ in (2.7) e (2.8) e dividendo rispettivamente per $2\sqrt{\pi}|\hat{K}(\frac{1}{2} + i\omega)|$ e $2i\sqrt{\pi}|\hat{K}(\frac{1}{2} + i\omega)|$. Le autofunzioni sono ben definite in quanto:

$$\left| \hat{K} \left(\frac{1}{2} - i\omega \right) \right| = \left| \hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) \right| = \left| \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2} + i\omega} K(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} K(x) x^{-\frac{1}{2}} dx < \infty.$$

Inoltre le $\phi_\omega^\pm(t)$ risultano reali: per dimostrarlo é sufficiente utilizzare le relazioni valide nel campo complesso

$$\frac{ab + \bar{a}\bar{b}}{2} = \text{Re}[ab] \quad e \quad \frac{ab - \bar{a}\bar{b}}{2i} = \text{Im}[ab].$$

□

2.2.1 Proprietá elementari

Dall'espressione ottenuta per le autofunzioni si derivano alcune loro principali caratteristiche [56]:

- (a) L'espressione delle autofunzioni é simmetrica rispetto ad ω . Cioé si ha:

$$\phi_\omega^\pm(t) = \pm \phi_{-\omega}^\pm(t) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Questo consente di considerare solo il caso $\omega \geq 0$.

- (b) Le autofunzioni non sono normalizzabili, ma sono mutualmente ortogonali. In particolare:

$$\int_0^{+\infty} \phi_\omega^+(t) \phi_{\omega'}^+(t) dt = \begin{cases} \delta(\omega - \omega') & \text{se } \omega \neq 0 \\ 2\delta(\omega) & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \phi_\omega^-(t) \phi_{\omega'}^-(t) dt = \begin{cases} \delta(\omega - \omega') & \text{se } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \phi_\omega^+(t) \phi_{\omega'}^-(t) dt = 0 . \quad (2.24)$$

(c) Le autofunzioni possono essere espresse in termini di sole quantità reali.

Si ha:

$$\phi_\omega^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos\left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln t\right) \quad (2.25)$$

e

$$\phi_\omega^-(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin\left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln t\right) . \quad (2.26)$$

Per quel che concerne gli autovalori, si ha:

$$\lambda_\omega^\pm = \pm \sqrt{c_\omega^2 + s_\omega^2} \quad (2.27)$$

dove

$$c_\omega = \operatorname{Re} \hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) , \quad s_\omega = \operatorname{Im} \hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) , \quad (2.28)$$

e

$$\theta_\omega = \arg \left[\hat{K} \left(\frac{1}{2} + i\omega \right) \right] = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) . \quad (2.29)$$

In particolare se il nucleo K é reale, c_ω e s_ω assumono la forma

$$c_\omega = \int_0^{+\infty} K(x) x^{-1/2} \cos(\omega \ln x) dx \quad (2.30)$$

e

$$s_\omega = \int_0^{+\infty} K(x) x^{-1/2} \sin(\omega \ln x) dx . \quad (2.31)$$

2.3 L'operatore integrale di Laplace

Vogliamo adesso esplicitare la forma che assumono le autofunzioni e gli autovalori nel caso in cui l'operatore \mathcal{K} sia l'operatore integrale di Laplace. Nel presente paragrafo e nei prossimi capitoli per le autofunzioni dell'operatore di Laplace é adottata la notazione

$$\{\psi^\pm(\omega, t)\}_{\omega \in \mathbb{R}^+} \quad (2.32)$$

in luogo di $\phi_\omega^\pm(t)$. Analogamente gli autovalori sono indicati con

$$\{\lambda^\pm(\omega)\}_{\omega \in \mathbb{R}^+} \quad (2.33)$$

in luogo di λ_ω^\pm . Il nucleo dell'operatore di Laplace é dato da:

$$K(x) = e^{-x}, \quad (2.34)$$

da cui, utilizzando la funzione Gamma², si deriva

$$\int_0^{+\infty} K(x)x^{-1/2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-1/2}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} < \infty. \quad (2.35)$$

che assicura l'esistenza delle autofunzioni. Sostituendo l'espressione del nucleo (2.34) in (2.30) e (2.31) si ha poi

$$c_\omega = \operatorname{Re}\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\omega\right), \quad s_\omega = \operatorname{Im}\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\omega\right), \quad (2.36)$$

mentre per gli autovalori si ottiene l'espressione

$$\lambda^\pm(\omega) \equiv \pm \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\omega\right) \right| = \pm \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi\omega)}}. \quad (2.37)$$

²La funzione Gamma può essere definita mediante un integrale definito per $\operatorname{Re}[z] > 0$ (forma integrale di Eulero) [74]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx.$$

2.3.1 Comportamento degli autovalori

Dall'espressione di autovalori e autofunzioni si possono dedurre alcune osservazioni. Una prima considerazione riguarda il comportamento dello spettro degli autovalori. Possiamo riassumere la (2.37) nella seguente proposizione:

Proposizione 2.3.1 [56]

L'operatore integrale di Laplace ammette una infinitá continua di autovalori che convergono a zero con ordine esponenziale.

Dimostrazione

Dalla (2.37) si ha

$$\lambda^\pm(\omega) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi\omega)}} = \pm \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega}}} \simeq \pm \sqrt{2\pi} e^{-\pi\omega/2}. \quad (2.38)$$

□

L'andamento dello spettro degli autovalori, mostrato in Fig.2.1, conduce ad ulteriore e abbastanza naturale osservazione: l'operatore di Laplace \mathcal{L} ammette un insieme di autovalori (e di corrispondenti autofunzioni) che ha la potenza del continuo. Poiché \mathcal{L} é un operatore autoaggiunto³ [10] allora non può essere compatto⁴. Infatti per gli operatori compatti e autoaggiunti ogni autovalore

³[39] Un operatore $T : X \rightarrow X$, tra spazi di Hilbert, si dice autoaggiunto se coincide con il suo aggiunto. Ovvero se

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in X,$$

dove (\cdot, \cdot) rappresenta il prodotto interno di X .

⁴[39] Un operatore $K : X \rightarrow Y$, tra spazi di Hilbert, si dice compatto se la chiusura di $K(B)$ é compatta per ogni B , sottoinsieme limitato di X .

La teoria generale sugli operatori compatti evolve dalla teoria degli operatori integrali della forma

$$Ku(x) = \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy.$$

Infatti, se $k(\cdot, \cdot)$ é a quadrato integrabile in $\Omega \times \Omega$, allora si prova che [39] K é un operatore compatto di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$

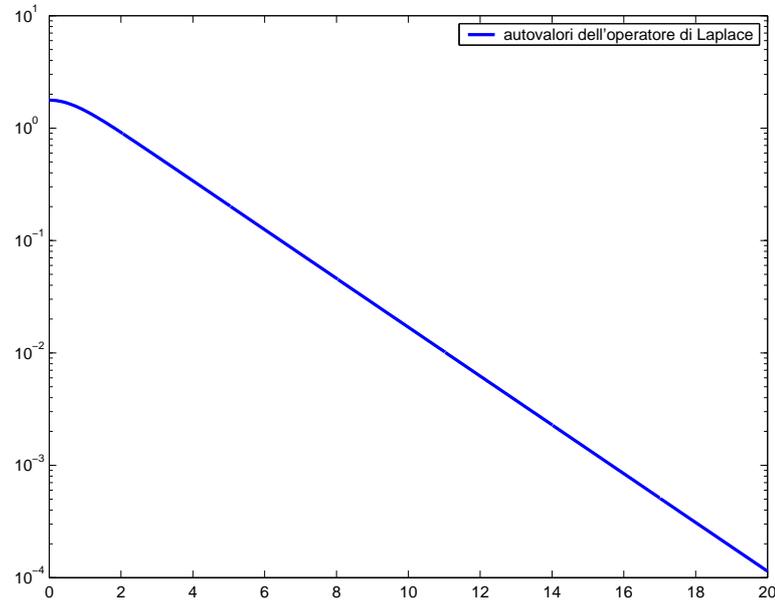


Figura 2.1: Spettro degli autovalori dell'operatore integrale di Laplace: scala logaritmica.

rappresenta un punto isolato dello spettro degli autovalori. Tale spettro risulta così discreto (cioé con un numero finito o numerabile di autovalori), contrariamente al caso riscontrato per \mathcal{L} .

2.3.2 Comportamento delle autofunzioni

Oltre alle proprietà elencate nel paragrafo 2.2.1, ci sono ulteriori interessanti considerazioni relative alle autofunzioni $\psi^\pm(\omega, t)$. Osservando le Figure 2.2 e 2.3, che mostrano l'andamento delle autofunzioni $\psi^+(1, t)$, $\psi^-(6, t)$, $\psi^+(20, t)$ e $\psi^-(100, t)$ per $t \in [0.01, 5]$, e l'espressione analitica delle autofunzioni, possiamo dedurre tre proprietà:

- (AF1) Tutte le autofunzioni hanno il grafico contenuto nella regione del piano delimitata dall'asse delle ordinate e dalle funzioni $\psi^+(0, t)$ e $-\psi^+(0, t)$.

Questa proprietà é una conseguenza delle disuguaglianze

$$|\psi^+(\omega, t)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln t \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \psi^+(0, t), \quad \forall \omega, t > 0 \quad (2.39)$$

e

$$|\psi^-(\omega, t)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \left(\frac{\theta_\omega}{2} - \omega \ln t \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \psi^+(0, t), \quad \forall \omega, t > 0; \quad (2.40)$$

(AF2) Le autofunzioni $\psi^\pm(\omega, t)$ ($\omega \neq 0$) sono fortemente oscillanti per valori di t prossimi allo zero. A dimostrazione di ciò si fissi un valore t_0 . Il periodo di una oscillazione si può calcolare come $\Delta t_0 = t_1 - t_0$, dove t_1 é il minimo valore piú grande di t_0 per cui

$$\cos(\theta_\omega/2 - \omega \ln t_1) = \cos(\theta_\omega/2 - \omega \ln t_0).$$

Allora si ha

$$\theta_\omega/2 - \omega \ln t_1 = \theta_\omega/2 - \omega \ln t_0 + 2N\pi$$

da cui $\ln(t_0/t_1) = 2N\pi/\omega$. In valore di t_1 si ottiene ponendo $N = -1$. Quindi $t_1 = t_0 e^{-2\pi/\omega}$ e

$$\Delta t_0 = t_0(e^{-2\pi/\omega} - 1). \quad (2.41)$$

Cosí, se t_0 é piccolo le oscillazioni risultano frequenti. Dalla (2.41) si evince che le oscillazioni sono frequenti anche quando ω é grande. Infatti si ha:

$$\Delta t_0 = t_0(e^{-2\pi/\omega} - 1) = t_0 \left[\frac{2\pi}{\omega} + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \right].$$

(AF3) Le autofunzioni $\psi^\pm(\omega, t)$ decadono a zero per $t \rightarrow \infty$ e non sono limitate nello 0.

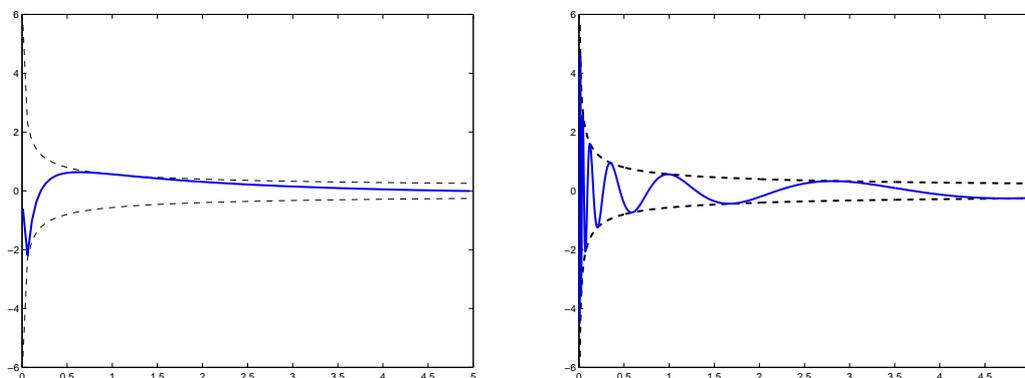


Figura 2.2: Grafico dell'andamento delle autofunzioni $\psi^+(1, t)$ e $\psi^-(6, t)$ per $t \in [0.01, 5]$.

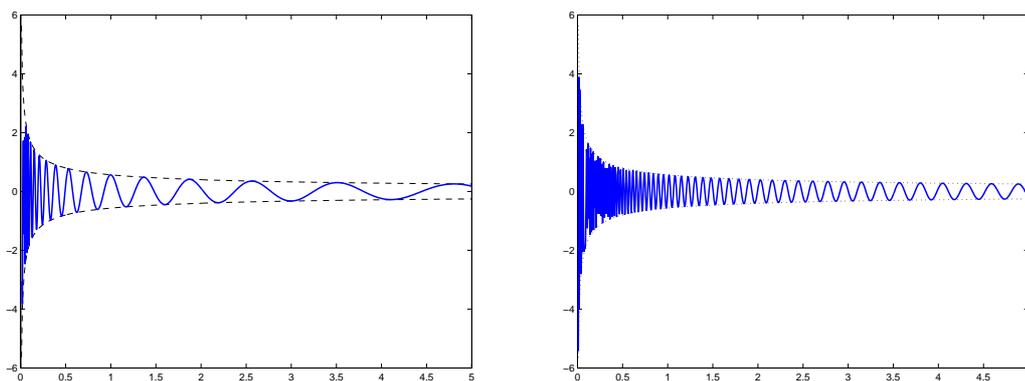


Figura 2.3: Grafico dell'andamento delle autofunzioni $\psi^+(20, t)$ e $\psi^-(100, t)$ per $t \in [0.01, 5]$.

2.4 Derivazione della formula d'inversione

In questa sezione deriviamo l'espressione della formula d'inversione proposta da McWhirter e Pike. Nel seguito, sebbene i risultati ottenuti siano validi in generale, cioè per un operatore K che verifica la (2.2), consideriamo direttamente il caso della trasformata di Laplace e utilizziamo le relative notazioni (2.33) e (2.32). Ricordando il significato di $L_w^1(\mathbb{R}^+)$, enunciamo il seguente

Lemma 2.4.1 [56]

Sia $f(t) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$ una funzione reale quasi ovunque continua. Allora i coefficienti

$$\alpha^\pm(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\psi^\pm(\omega, t)dt, \quad \omega \geq 0 \quad (2.42)$$

sono finiti. Inoltre la funzione $f(t)$ può essere espressa in termini di autofunzioni come:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \alpha^+(\omega)\psi^+(\omega, t)d\omega + \int_0^{+\infty} \alpha^-(\omega)\psi^-(\omega, t)d\omega. \quad (2.43)$$

Dimostrazione

I coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$ sono finiti perché

$$|\alpha^\pm(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)t^{-1/2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|f\|_{L_w^1} < \infty.$$

Si osservi adesso che l'equazione (2.43) può essere riscritta come

$$f(t) = t^{-1/2} \int_0^{+\infty} C_\omega \cos(\omega \ln t) d\omega + t^{-1/2} \int_0^{+\infty} S_\omega \sin(\omega \ln t) d\omega, \quad (2.44)$$

dove si è posto

$$C_\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\alpha^+(\omega) \cos(\theta_\omega/2) + \alpha^-(\omega) \sin(\theta_\omega/2)] \quad (2.45)$$

e

$$S_\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [\alpha^+(\omega) \sin(\theta_\omega/2) - \alpha^-(\omega) \cos(\theta_\omega/2)]. \quad (2.46)$$

Ponendo $t = e^y$ e moltiplicando ambo i membri per $e^{y/2}$, la (2.44) diventa

$$f(e^y) e^{y/2} = \int_0^{+\infty} C_\omega \cos(\omega y) d\omega + \int_0^{+\infty} S_\omega \sin(\omega y) d\omega . \quad (2.47)$$

La (2.47) altro non é che la rappresentazione della funzione $f(e^y) e^{y/2}$ (che é ancora quasi ovunque continua) in funzione della sua trasformata di Fourier in seno e coseno. Dalla teoria sulle trasformate di Fourier si ha che la formula é valida qualora $\int_{-\infty}^{\infty} |f(e^y) e^{y/2}| dy$ esista finito, il che equivale alla condizione $f(t) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$. \square

Siamo adesso in grado di esibire la **formula d'inversione**:

Teorema 2.4.1 [56]

Sia $F(s), f(t) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$. Allora l'equazione (2.1) ammette la seguente soluzione

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{+\infty} \frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) d\omega \quad (2.48)$$

dove

$$c^\pm(\omega) = \int_0^{+\infty} F(s) \psi^\pm(\omega, s) ds . \quad (2.49)$$

Le quantità $c^\pm(\omega)$ sono dette **coefficienti o proiezioni sulle autofunzioni**.

Dimostrazione

Sostituendo la (2.43) nella (2.1) otteniamo:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \lambda^+(\omega) \alpha^+(\omega) \psi^+(\omega, s) d\omega + \int_0^{+\infty} \lambda^-(\omega) \alpha^-(\omega) \psi^-(\omega, s) d\omega \quad (2.50)$$

e dalle relazioni di ortogonalitá (2.24) segue che

$$\alpha^\pm(\omega) = \frac{1}{\lambda^\pm(\omega)} \int_0^{+\infty} F(s) \psi^\pm(\omega, s) ds = \frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} . \quad (2.51)$$

Sostituendo la (2.51) nella (2.50) si ha la tesi. \square

2.5 Comportamento dei coefficienti

Analizziamo adesso le caratteristiche dei coefficienti $c^\pm(\omega)$ coinvolti nella formula d'inversione. Il primo risultato, che ne esprime il comportamento asintotico, é conseguenza diretta del **lemma di Riemann-Lebesgue**⁵

Teorema 2.5.2

Siano $f(t), F(s) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$. Allora per i coefficienti $c^\pm(\omega)$ si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} = 0. \quad (2.53)$$

In particolare i coefficienti $c^\pm(\omega)$ decadono almeno esponenzialmente come:

$$c^\pm(\omega) = o(e^{-\pi\omega/2}).$$

Dimostrazione

Dalla relazione (2.51) si ha

$$\frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} = \alpha^\pm(\omega), \quad (2.54)$$

con $\alpha^\pm(\omega)$ proiezioni della $f(t)$ sulle autofunzioni. Dal **Teorema 2.4.1** si ha che anche $f(t) \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$ per cui per la funzione $f(e^x)e^{x/2}$ vale l'espressione (2.47). Dalle relazioni (2.46) e (2.45) si ottiene

$$\alpha^+(\omega) = \sqrt{\pi}[C_\omega \cos(\theta_\omega/2) + S_\omega \sin(\theta_\omega/2)] \quad (2.55)$$

⁵Il lemma di Riemann-Lebesgue, noto anche come **Teorema di Mercer**, é uno dei teoremi fondamentali nella teoria degli integrali di Fourier, cosí come nella teoria delle serie di Fourier. Può essere enunciato come segue [74]:

Teorema 2.5.1

Sia $f(x) \in L(\mathbb{R})$ Allora gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx \quad (2.52)$$

tendono a zero per $\lambda \rightarrow \infty$.

e

$$\alpha^-(\omega) = \sqrt{\pi}[C_\omega \sin(\theta_\omega/2) - S_\omega \cos(\theta_\omega/2)] . \quad (2.56)$$

Poiché dal lemma di Riemann-Lebesgue si ha che

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} C_\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} S_\omega = 0$$

dalle (2.55) e (2.56) segue anche che

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha^\pm(\omega) = 0 . \quad (2.57)$$

Ovvero, tenendo conto della (2.54), la tesi.

L'ordine di convergenza può essere dedotto immediatamente dall'andamento degli autovalori $\lambda^\pm(\omega)$. Poiché $\lambda^\pm(\omega) = \mathcal{O}(e^{-\pi\omega/2})$ si ha

$$c^\pm(\omega) = o(e^{-\pi\omega/2}) .$$

□

2.5.1 Un caso studio

L'espressione dedotta dell'andamento dei coefficienti evidenzia che il rapporto $\frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)}$ tende a zero. Naturalmente l'ordine di convergenza è legato alle caratteristiche analitiche della funzione trasformata $F(s)$ e, ancor più, a quelle della funzione antitrasformata $f(t)$. Conduciamo tale studio per tre particolari scelte di funzioni antitrasformate. Adottando la notazione di prodotto interno:

$$\langle a, b \rangle = \int_0^{+\infty} a(x)b(x)dx , \quad (2.58)$$

le proiezioni sulle autofunzioni della trasformata e della antitrasformata diventano

$$c^\pm(\omega) = \langle F, \psi^\pm(\omega, \cdot) \rangle \quad \text{e} \quad \alpha^\pm(\omega) = \langle f, \psi^\pm(\omega, \cdot) \rangle . \quad (2.59)$$

Ponendo adesso

$$\gamma^+(\omega) = \langle f, \frac{\cos(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} \rangle \quad \text{e} \quad \gamma^-(\omega) = \langle f, \frac{\sin(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} \rangle \quad (2.60)$$

otteniamo per i coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$:

$$\alpha^+(\omega) = \pi^{-1/2} [\cos(\theta_\omega/2)\gamma^+(\omega) + \sin(\theta_\omega/2)\gamma^-(\omega)] , \quad (2.61)$$

$$\alpha^-(\omega) = \pi^{-1/2} [\sin(\theta_\omega/2)\gamma^+(\omega) - \cos(\theta_\omega/2)\gamma^-(\omega)] . \quad (2.62)$$

da cui, tenendo conto che $\lambda^-(\omega) = -\lambda^+(\omega)$,

$$c^+(\omega) = \pi^{-1/2} \lambda^+(\omega) [\cos(\theta_\omega/2)\gamma^+(\omega) + \sin(\theta_\omega/2)\gamma^-(\omega)] , \quad (2.63)$$

$$c^-(\omega) = \pi^{-1/2} [\lambda^+(\omega) [-\sin(\theta_\omega/2)\gamma^+(\omega) + \cos(\theta_\omega/2)\gamma^-(\omega)] . \quad (2.64)$$

Utilizzando le relazioni (2.63) e (2.64) é possibile analizzare e dedurre il comportamento dei coefficienti $c^\pm(\omega)$ per tre classi di funzioni.

	antitrasformata di Laplace	trasformata di Laplace
classe 1	$f_1^{N,a}(t) = t^N e^{-pt} \quad N, a > 0$	$F_1^{N,a}(s) = \frac{\Gamma(N+1)}{(s+a)^{N+1}}$
classe 2	$f_2^k(t) = \max(1 - t/k, 0) \quad k > 0$	$F_2^k(s) = \frac{e^{-ks} + ks - 1}{ks^2}$
classe 3	$f_3^A(t) = \chi_{[0,A]} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq A \\ 0 & t > A . \end{cases}$	$F_3^A(s) = \frac{1 - e^{-As}}{s}$

Si osserva che tutte le funzioni considerate appartengono ad $L_w^1(\mathbb{R})$, per cui sono ben definiti gli integrali $c^\pm(\omega), \alpha^\pm(\omega)$ e $\gamma^\pm(\omega)$.

Le seguenti proposizioni forniscono nell'ordine l'espressione in forma chiusa dei coefficienti $c^\pm(\omega)$ per le classi 1,2 e 3. Indichiamo tali coefficienti rispettivamente con $c_1^\pm(\omega), c_2^\pm(\omega)$ e $c_3^\pm(\omega)$.

Proposizione 2.5.1

Siano $f_1^{N,a}(t) = t^N e^{-at}$ e $F_1^{N,a}(s) = \frac{\Gamma(N+1)}{(s+a)^{N+1}}$ rispettivamente una funzione e la relativa trasformata di Laplace, con $N, a > 0$. Allora per le proiezioni sulle autofunzioni si ha

$$c_1^+(\omega) = \frac{\pi^{-1/2} \lambda^+(\omega)}{a^{N+1/2}} \operatorname{Re} \left[e^{i\theta\omega/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\omega\right) a^{i\omega} \prod_{k=1}^N (k - 1/2 - i\omega) \right] \quad (2.65)$$

$$c_1^-(\omega) = -\frac{\pi^{-1/2} \lambda^+(\omega)}{a^{N+1/2}} \operatorname{Im} \left[e^{i\theta\omega/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\omega\right) a^{i\omega} \prod_{k=1}^N (k - 1/2 - i\omega) \right]. \quad (2.66)$$

In particolare

$$c_1^\pm(\omega) = \mathcal{O}(\omega^N e^{-\pi\omega}). \quad (2.67)$$

Dimostrazione

Si ha:

$$\begin{aligned} \gamma^+(\omega) &= \int_0^{+\infty} t^{N-1/2} e^{-at} \cos(\omega \ln t) dt = \int_0^{+\infty} t^{N-1/2} \operatorname{Re}[t^{i\omega}] e^{-at} dt = \\ & \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} t^{N-1/2+i\omega} e^{-at} dt = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{z^{N-1/2+i\omega} e^{-z}}{a^{N+1/2+i\omega}} dz = \operatorname{Re} \frac{\Gamma(N+1/2+i\omega)}{a^{N+1/2+i\omega}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Procedendo in modo analogo per $\gamma^-(\omega)$, si ottiene:

$$\gamma^-(\omega) = \operatorname{Im} \frac{\Gamma(N+1/2+i\omega)}{a^{N+1/2+i\omega}}. \quad (2.69)$$

Sostituendo le (2.68) e (2.69) in (2.63) e (2.64), applicando le relazioni valide nel campo complesso

$$\operatorname{Re}[z]\operatorname{Re}[s] + \operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[s] = \operatorname{Re}[z\bar{s}] \quad \operatorname{Im}[z]\operatorname{Re}[s] - \operatorname{Re}[z]\operatorname{Im}[s] = \operatorname{Im}[z\bar{s}],$$

con $z = e^{i\theta\omega/2}$ e $s = \frac{\Gamma(N+1/2+i\omega)}{a^{N+1/2+i\omega}}$, e osservando che:

$$\Gamma(N+1/2+i\omega) = \Gamma(1/2+i\omega) \prod_{k=1}^N (k-1/2+i\omega), \quad (2.70)$$

la tesi é provata. Infine per provare la (2.67) é sufficiente passare al modulo nelle (2.65) e (2.66). \square

Proposizione 2.5.2

Siano $f_2^k(t) = \max(1-t/k, 0)$ e $F_2^k(s) = \frac{e^{-ks} + ks - 1}{ks^2}$ rispettivamente una funzione e la relativa trasformata di Laplace, con $k > 0$. Allora per le proiezioni sulle autofunzioni si ha

$$c_2^+(\omega) = \frac{\sqrt{k}\lambda^+(\omega)}{\sqrt{\pi}} \left[\cos(\theta_\omega/2) \frac{(3/4 - \omega^2) \cos(\omega \ln k) + 2\omega \sin(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)} + \sin(\theta_\omega/2) \frac{(3/4 - \omega^2) \sin(\omega \ln k) - 2\omega \cos(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)} \right] \quad (2.71)$$

$$c_2^-(\omega) = -\frac{\sqrt{k}\lambda^+(\omega)}{\sqrt{\pi}} \left[\sin(\theta_\omega/2) \frac{(3/4 - \omega^2) \cos(\omega \ln k) + 2\omega \sin(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)} + \cos(\theta_\omega/2) \frac{(3/4 - \omega^2) \sin(\omega \ln k) - 2\omega \cos(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)} \right]. \quad (2.72)$$

In particolare

$$c_2^\pm(\omega) = \mathcal{O}(\omega^{-2} e^{-\pi\omega/2}). \quad (2.73)$$

Dimostrazione

Per i coefficienti $\gamma^+(\omega)$ si ha:

$$\begin{aligned} \gamma^+(\omega) &= \int_0^k (1-t/k) \frac{\cos(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} dt = \int_{-\infty}^{\ln k} (1 - e^x/k) e^{x/2} \cos(\omega x) dx = \\ &= \left[\frac{e^{x/2} (\cos(\omega x)/2 + \omega \sin(\omega x))}{\omega^2 + 1/4} \right]_{-\infty}^{\ln k} - \frac{1}{k} \left[\frac{e^{3x/2} (3 \cos(\omega x)/2 + \omega \sin(\omega x))}{\omega^2 + 9/4} \right]_{-\infty}^{\ln k} = \\ &= \frac{\sqrt{k} (3/4 - \omega^2) \cos(\omega \ln k) + 2\omega \sin(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Analogamente per i coefficienti $\gamma^-(\omega)$:

$$\gamma^-(\omega) = \int_0^k (1-t/k) \frac{\sin(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{(3/4 - \omega^2) \sin(\omega \ln k) - 2\omega \cos(\omega \ln k)}{(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)}. \quad (2.75)$$

La tesi é provata sostituendo le (2.74) e (2.75) nelle (2.63) e (2.64). Infine per provare la (2.73) é sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} |c_2^\pm(\omega)| &\leq \sqrt{[c^+(\omega)]^2 + [c^-(\omega)]^2} = \lambda^+(\omega) \sqrt{[\alpha^+(\omega)]^2 + [\alpha^-(\omega)]^2} = \\ &= \lambda^+(\omega) \sqrt{\pi [\gamma^+(\omega)]^2 + [\gamma^-(\omega)]^2} = \lambda^+(\omega) \sqrt{\frac{k}{\pi(\omega^2 + 1/4)(\omega^2 + 9/4)}} = \mathcal{O}(e^{-\pi\omega/2} \omega^{-2}). \end{aligned}$$

Infine

Proposizione 2.5.3

Siano $f_3^A(t) = \chi_{[0,A]}$ e $F_3^A(s) = \frac{1-e^{-As}}{s}$ rispettivamente una funzione e la relativa trasformata di Laplace, con $A > 0$. Allora per le proiezioni sulle autofunzioni si ha

$$c_3^+(\omega) = \frac{\sqrt{A}\lambda^+(\omega)}{\sqrt{\pi}} \left[\cos(\theta_\omega/2) \frac{\cos(\omega \ln A)/2 + \omega \sin(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)} + \sin(\theta_\omega/2) \frac{\sin(\omega \ln A)/2 - \omega \cos(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)} \right] \quad (2.76)$$

$$c_3^-(\omega) = -\frac{\sqrt{A}\lambda^+(\omega)}{\sqrt{\pi}} \left[\sin(\theta_\omega/2) \frac{\cos(\omega \ln A)/2 + \omega \sin(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)} + \cos(\theta_\omega/2) \frac{\sin(\omega \ln A)/2 - \omega \cos(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)} \right]. \quad (2.77)$$

In particolare

$$c_3^\pm(\omega) = \mathcal{O}(\omega^{-1}e^{-\pi\omega/2}). \quad (2.78)$$

Dimostrazione

Come nelle **Proposizioni 2.5.1 e 2.5.2** si tratta di determinare $\gamma^\pm(\omega)$. Si ha:

$$\gamma^+(\omega) = \int_0^A \frac{\cos(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{A} \frac{\cos(\omega \ln A)/2 + \omega \sin(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)} \quad (2.79)$$

e

$$\gamma^-(\omega) = \int_0^A \frac{\sin(\omega \ln t)}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{A} \frac{\sin(\omega \ln A)/2 - \omega \cos(\omega \ln A)}{(\omega^2 + 1/4)}. \quad (2.80)$$

Infine per provare la (2.78), si ha:

$$|c_3^\pm(\omega)| \leq \lambda^+(\omega) \sqrt{\pi[\gamma^+(\omega)]^2 + [\gamma^-(\omega)]^2} = \lambda^+(\omega) \sqrt{\frac{A}{\pi(\omega^2 + 1/4)}} = \mathcal{O}(e^{-\pi\omega/2}\omega^{-1}). \quad (2.81)$$

□

I risultati ottenuti nei tre casi studiati confermano il decadimento esponenziale previsto per i coefficienti $c^\pm(\omega)$ dal **Teorema 2.5.2**. Tuttavia, guardando al comportamento asintotico dei corrispondenti coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$, si ha che sebbene in tutti e tre i casi anche essi decadono, solo per le funzioni della prima classe il decadimento é di tipo esponenziale. Questa sostanziale differenza é da attribuire alle caratteristiche analitiche della funzione $f(t)$, essendo gli $\alpha^\pm(\omega)$ combinazioni lineari dei coefficienti di Fourier della funzione $f(e^x)e^{x/2}$. In particolare

- (C1) Le funzioni $f_1^{N,p} \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ e i coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$ decadono esponenzialmente;
- (C2) Le funzioni $f_2^k \in C(\mathbb{R}^+)$ (ma non in $C^1(\mathbb{R}^+)$) e i coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$ decadono come ω^{-2} ;
- (C3) Le funzioni f_3^A sono discontinue in $t = A$ e i coefficienti $\alpha^\pm(\omega)$ decadono come ω^{-1} ;

2.5.2 La formula di inversione per il caso studio

Vogliamo mettere in luce alcuni aspetti preliminari ed evidenziare eventuali difficoltà intrinseche che possono derivare dall'utilizzo della formula d'inversione (2.48). A tal fine ci serviamo della conoscenza in forma chiusa dei coefficienti $c^\pm(\omega)$, stabilita dalle **Proposizioni 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3**. In questo contesto supponiamo quindi note le espressioni dei coefficienti $c_1^\pm(\omega), c_2^\pm(\omega)$ e $c_3^\pm(\omega)$ ottenute per le tre classi di funzioni studiate. Più precisamente la formula d'inversione assume la forma

$$f_j(t) = \int_0^{+\infty} \frac{c_j^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{+\infty} \frac{c_j^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) d\omega \quad (j = 1, 2, 3) . \quad (2.82)$$

Al fine di calcolare un'approssimazione delle funzioni $f_1^{N,p}$, f_2^k e f_3^A , mediante le formule (2.82), introduciamo la seguente funzione

$$f_{j,\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c_j^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c_j^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) d\omega \quad (j = 1, 2, 3) . \quad (2.83)$$

che rappresenta la *formula d'inversione troncata*. Si osserva, dalla stessa definizione di integrale in senso improprio, che deve essere

$$f_j(t) = \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} f_{j,\bar{\omega}}(t) \quad (j = 1, 2, 3) . \quad (2.84)$$

Pertanto le $f_{j,\bar{\omega}}(t)$ rappresentano delle approssimazioni delle $f_j(t)$. Le figure seguenti mostrano il comportamento delle funzioni $f_{1,\bar{\omega}}(t)$, $f_{2,\bar{\omega}}(t)$ e $f_{3,\bar{\omega}}(t)$ per due valori distinti di $\bar{\omega}$ a confronto con le antitrasformate

$$f_1^{3,1}(t) = t^3 e^{-t} , \quad f_2^5(t) = \max(1 - t/5, 0), \text{ e } \quad f_3^1(t) = \chi_{[0,1]} .$$

Da questa analisi scaturiscono tre osservazioni:

- (1) Al crescere di $\bar{\omega}$ le $f_{j,\bar{\omega}}(t)$ meglio approssimano le antitrasformate f_j , come previsto dalla (2.84);
- (2) Per ogni fissato valore di $\bar{\omega}$ si osserva che l'approssimazione peggiora in vicinanza di $t = 0$ e migliora per grandi valori di t . Questo fenomeno, piú evidente per $f_1^{3,1}(t)$, é additabile alla natura delle autofunzioni che non sono limitate nello zero e si annullano all'infinito.
- (3) Infine nelle Figure 2.8, 2.9 si osserva che l'approssimazione peggiora anche in vicinanza di $t = 1$ che é un punto di discontinuitá per $f_3(t)$.

I fenomeni riscontrati in (2) e (3) appariranno piú chiari nel **Capitolo 3**. Le approssimazioni $f_{j,\bar{\omega}}(t)$ mostrate sembrano convincere che la formula d'inversione (2.48) possa risultare molto promettente per essere posta alla base della

costruzione di un metodo numerico. Questo aspetto sembra contrapporsi alla già citata mal posizione del problema. Si noti bene però, che in questo paragrafo é fatto utilizzo della conoscenza in forma chiusa dei coefficienti $c_j^\pm(\omega)$, cosa in generale (nelle applicazioni) non possibile. Di questo si dovrà tener conto nel seguito.

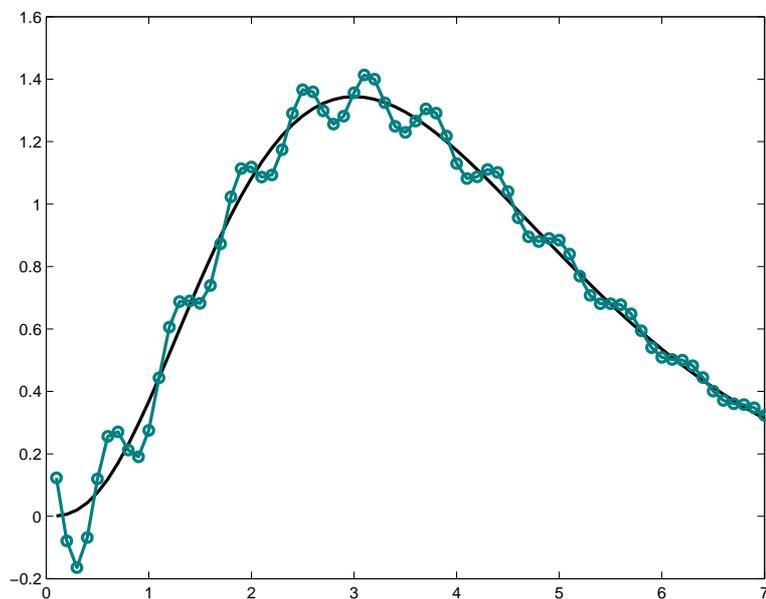


Figura 2.4: Confronto tra $f_1^{3,1}(t) = t^3 e^{-t}$ e $f_{1,\bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 5$, per $t \in [0.1, 7.0]$.

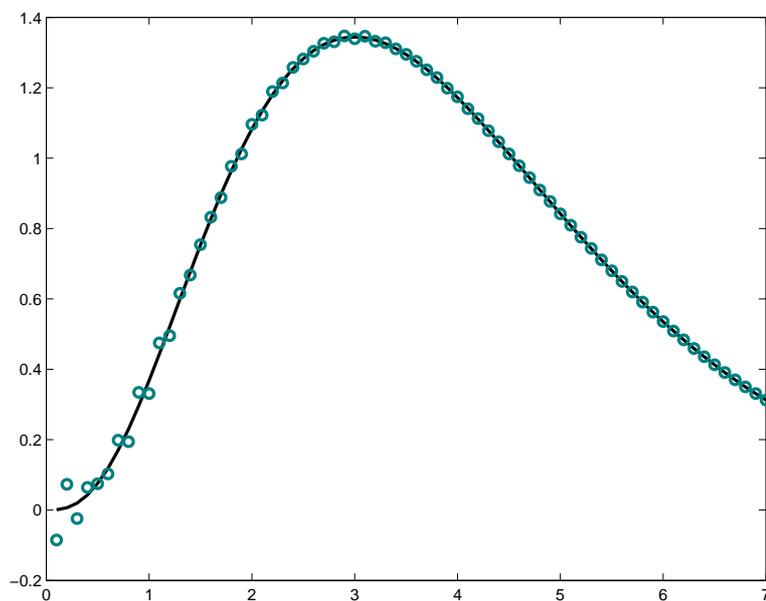


Figura 2.5: Confronto tra $f_1^{3,1}(t) = t^3 e^{-t}$ e $f_{1,\bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 30$, per $t \in [0.1, 7.0]$.

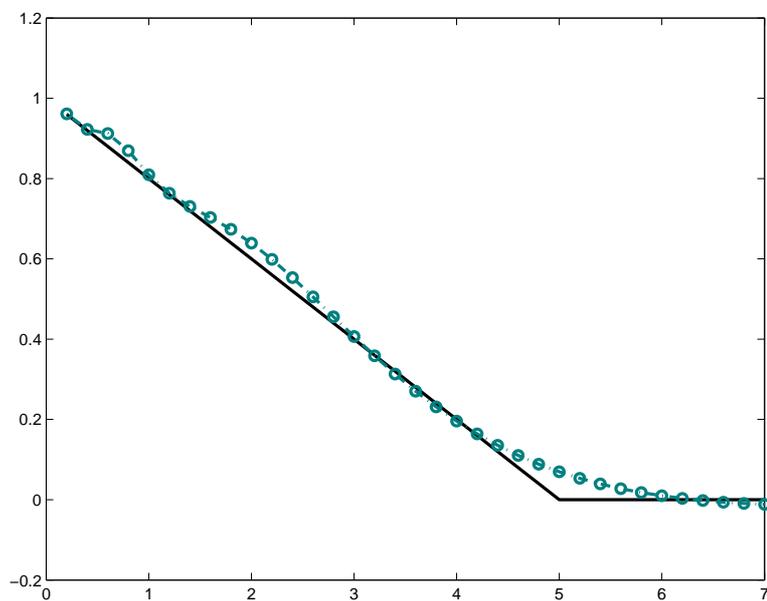


Figura 2.6: Confronto tra $f_2^5(t) = \max(1 - t/5, 0)$ e $f_{2, \bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 10$, per $t \in [0.1, 7.0]$.

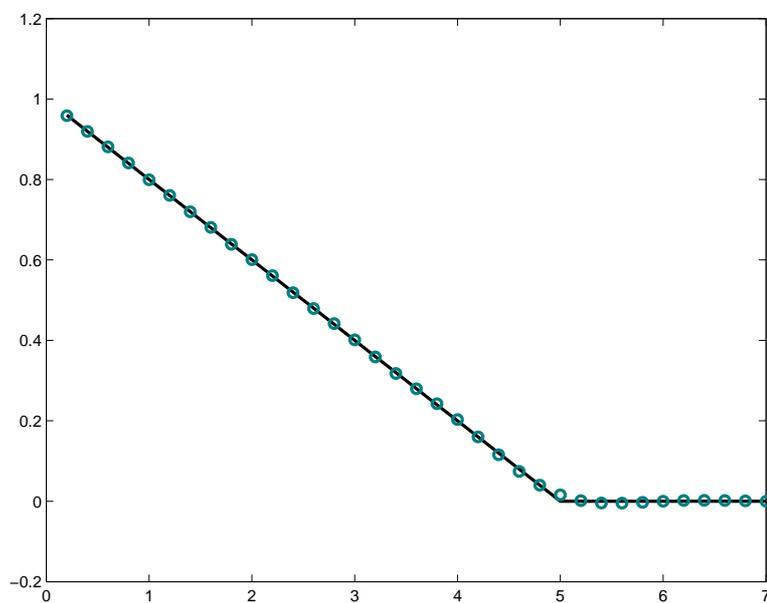


Figura 2.7: Confronto tra $f_2^5(t) = \max(1 - t/5, 0)$ e $f_{2, \bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 40$, per $t \in [0.1, 7.0]$.

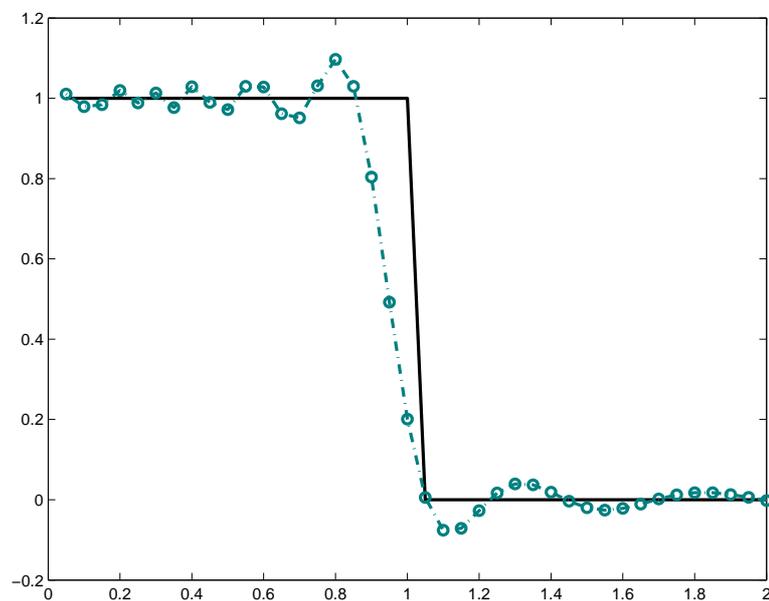


Figura 2.8: Confronto tra $f_3^1(t) = \chi_{[0,1]}$ e $f_{3,\bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 20$, per $t \in [0.05, 2.0]$.

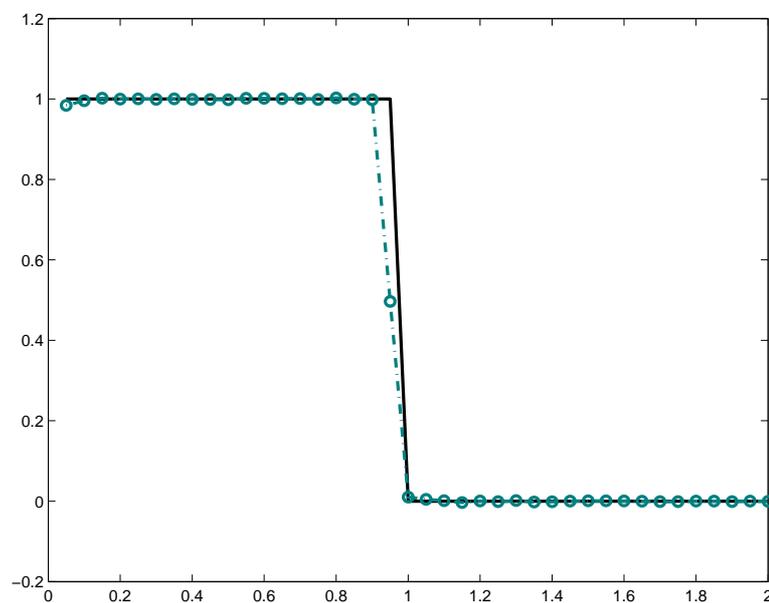


Figura 2.9: Confronto tra $f_3^1(t) = \chi_{[0,1]}$ e $f_{3,\bar{\omega}}(t)$ con $\bar{\omega} = 400$, per $t \in [0.05, 2.0]$.

Capitolo 3

Analisi numerica di un metodo basato sulla formula d'inversione

3.1 Premessa

In questo capitolo l'attenzione é volta alla descrizione di un metodo numerico per l'inversione della trasformata di Laplace nel caso reale, basato sulla formula d'inversione dedotta nel **Capitolo 2**. Nell'ambito del procedimento di risoluzione computazionale del problema, questa fase consiste nel passaggio dal modello continuo $M(P)$ a modello discreto $M_h(P)$, fino alla sua descrizione mediante un algoritmo $A(P)$. Come punto di partenza, analizziamo gli esperimenti "numerici" condotti da McWhirter e Pike [56]. Le relative considerazioni, di cui si dice nel paragrafo 3.1.1, servono per illustrare alcuni aspetti principali che devono essere considerati nella realizzazione di un metodo numerico basato sulla formula d'inversione (2.48). La seconda parte del capitolo, Sezione 3.2, riguarda la formalizzazione dello schema generale di approssimazione numerica: qui vengono mostrati i passi che caratterizzano il passaggio dal modello continuo $M(P)$ al modello discreto $M_h(P)$, e analizzati mediante lo studio delle fonti di errore. Infine la Sezione 3.3 é dedicata allo studio del passaggio tra modello discreto $M_h(P)$ e algoritmo $A(P)$, con particolare riferimento all'effetto della valutazione della soluzione discreta in un sistema aritmetico a precisione finita. Qui trovano giustificazione anche i fenomeni descritti in [56] e riportati nel paragrafo 3.1.1.

3.1.1 Primo utilizzo della formula d'inversione

Rivisitiamo in questo paragrafo le problematiche descritte da McWhirter e Pike in relazione alla formula d'inversione in [56]. In particolare mostriamo come dalla (2.48) viene dedotto un primo esempio di ricerca di "soluzione numerica" al problema (2.1). Prendendo spunto da un esempio sui fenomeni di ottica,

in cui la soluzione del problema é espressa mediante uno sviluppo in serie di autofunzioni, essi stabiliscono, per ogni problema del tipo (2.1), che

"[...] le autofunzioni dell'operatore devono essere riguardate come elementi basilari di informazione, i quali mantengono la loro identitá sotto l'azione dell'operatore

$$\int_0^{+\infty} K(x, y)\Phi_n(y)dy = \lambda_n\Phi_n(x) , \quad (3.1)$$

ma sono scalati in grandezza attraverso gli autovalori λ_n [...]" .

Inoltre:

"[...] Piú λ_n é grande, piú efficiente sará la trasmissione del corrispondente elemento di informazione¹ attraverso l'integrale. Elementi per i quali λ_n é sufficientemente piccolo sono trasmessi cosí debolmente che scompaiono nel rumore [...]" .

Chiaramente, rileggendo in termini di condizionamento quest'ultima affermazione, si lascia intendere che per valori piccoli di λ_n il problema diventa molto mal condizionato. La soluzione proposta é di riscrivere la formula d'inversione nella forma

$$f(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)}\varphi^+(\omega, t)d\omega + \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)}\varphi^-(\omega, t)d\omega + \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} a_{\omega}^+\varphi^+(\omega, t)d\omega + \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} a_{\omega}^-\varphi^-(\omega, t)d\omega \quad (3.2)$$

dove

"[...] $\bar{\omega}$ é un numero il cui valore dipende dagli errori durante i calcoli ..., e i coefficienti a_{ω}^{\pm} non possono essere valutati indipendentemente e devono essere determinati attraverso qualche conoscenza a priori sul risultato [...]"

¹L'autofunzione Φ_n .

In effetti, tale assunzione corrisponde all'aver adottato una tecnica di regolarizzazione per risolvere il problema. Il parametro $\bar{\omega}$, dagli autori indicato come "numero di Shannon generalizzato", gioca infatti il ruolo del parametro di regolarizzazione.

Ricerca della "soluzione numerica"

In [56] gli autori non parlano mai esplicitamente di metodo numerico poiché, pur essendo stabilito come valutare in (3.2) i coefficienti $c^\pm(\omega)$ e gli integrali rispetto ad ω , non viene indicato un criterio per decidere quale sia la scelta ottimale del valore $\bar{\omega}$. É comunque giusto rimarcare che, negli esempi proposti, gli autori puntualizzano sull'importanza di questo valore e evidenziano che esso dipende "livello di rumore" nel calcolo dei coefficienti $c^\pm(\omega)$.

Gli esempi in questione sono volti alla ricerca delle "soluzioni numeriche" dell'equazione²

$$F(s) = \frac{1}{1+s^2} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.4)$$

la cui soluzione é nota ed é data da $f(t) = te^{-t}$. La determinazione di soluzioni numeriche é schematizzata dalle tre seguenti fasi.

Fase 1: La regolarizzazione per troncamento

Il primo punto consiste nel porre nella (3.2)

$$a_\omega^\pm = 0 \quad \forall \omega > \bar{\omega}. \quad (3.5)$$

²Nei test originali é considerata l'equazione piú generale

$$F(s) = \frac{1+s^2-\beta^2 t^2}{(1+s^2+\beta^2 t^2)^2} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\beta st) f(t) dt, \quad (3.3)$$

che rappresenta il problema (2.1) con nucleo $K(x) = e^{-x} \cos(\beta x)$.

In sostanza si assiste ad un procedimento di regolarizzazione per troncamento. L'assunzione (3.4) si fonda sull'ipotesi, non sempre lecita, che l'espressione

$$f_{\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \varphi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{\bar{\omega}} \frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \varphi^-(\omega, t) d\omega, \quad (3.6)$$

sia, già per piccoli valori di $\bar{\omega}$, una approssimazione "sufficientemente" accurata della soluzione $f(t)$.

Fase 2: Il sistema discreto di autofunzioni

Il calcolo degli integrali rispetto ad ω nella (3.6) é ricondotto ad una combinazione lineare di speciali autofunzioni. Dati due valori positivi L_1 e $L_2 > L_1$, che per il momento non sono ancora fissati, e posto

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\ln L_2 - \ln L_1}, \quad (3.7)$$

é facile provare che il sistema discreto di autofunzioni

$$\varphi^\pm(n\Delta\omega, t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

forma un sistema ortogonale completo nell'intervallo $[L_1, L_2]$, che potrebbe essere normalizzato mediante il fattore $\sqrt{\Delta\omega}$. In virtù di questo la "soluzione numerica" é ridotta al calcolo di una somma finita:

$$f_N^{dis}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{c_n^+}{\lambda^+(n\Delta\omega)} \varphi^+(n\Delta\omega, t) + \sum_{n=1}^N \frac{c_n^-}{\lambda^-(n\Delta\omega)} \varphi^-(n\Delta\omega, t). \quad (3.9)$$

Questa sostituzione va interpretata come una discretizzazione uniforme degli integrali in (3.6). In alternativa tali integrali possono essere valutati piú accuratamente utilizzando discretizzazioni non uniformi (come la quadratura di Gauss).

Fase 3: Il calcolo dei coefficienti

Infine resta il problema di come valutare numericamente i coefficienti $c^\pm(\omega)$. Poiché negli integrali considerati le $\varphi^\pm(n\Delta\omega, t)$ non sono limitate nello zero e il dominio é la semiretta reale, si opta per un doppio troncamento. Ponendo

$$c^\pm(n\Delta\omega) = c_1 + C^\pm(n\Delta\omega) + c_2 \quad (3.10)$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{L_1} F(s)\varphi^\pm(n\Delta\omega, s)ds, & c_2 &= \int_{L_2}^{+\infty} F(s)\varphi^\pm(n\Delta\omega, s)ds, \\ C^\pm(n\Delta\omega) &= \int_{L_1}^{L_2} F(s)\varphi^\pm(n\Delta\omega, s)ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

si scelgono L_1 "abbastanza" piccolo e L_2 "abbastanza" grande in modo che $C^\pm(n\Delta\omega)$ sia una approssimazione sufficientemente accurata di $c^\pm(n\Delta\omega)$. Sfruttando la particolare espressione di $F(s) = \frac{1}{1+s^2}$ e le relazioni (2.39) e (2.40), si derivano le approssimazioni

$$\left| \int_0^{L_1} F(s)\varphi^\pm(n\Delta\omega, s)ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{L_1} |F(s)|s^{-1/2}ds \sim L_1^{1/2} \quad (3.12)$$

e

$$\left| \int_{L_2}^{+\infty} F(s)\varphi^\pm(n\Delta\omega, s)ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{L_2}^{+\infty} |F(s)|s^{-1/2}ds \sim L_2^{-3/2}. \quad (3.13)$$

Da cui ponendo $L_1 = 10^{-15}$ e $L_2 = 10^5$ si ottengono le stime $|c_1|, |c_2| < 10^{-7.5}$.

Pertanto, nella somma (3.9), poniamo

$$c_n^\pm = \begin{cases} \Delta\omega C^\pm(n\Delta\omega) & \text{se } n \neq 0 \\ \frac{1}{2}\Delta\omega C^\pm(0) & \text{se } n = 0 \end{cases}, \quad (3.14)$$

con

$$\Delta\omega \simeq 0.136 \quad e \quad N\Delta\omega = \bar{\omega}. \quad (3.15)$$

I risultati

Nel primo test (di cui si riporta l'immagine originale in Figura 3.1) gli autori discutono i risultati ottenuti mediante (3.9) per tre diversi valori di N e ammettendo di valutare i coefficienti c_n^\pm con accuratezza 10^{-5} . In [56] essi osservano che

per $N = 20$ pur se la soluzione numerica ”[...] ha una forma non dissimile da quella della soluzione $f(t)$, essa devia notevolmente da essa a causa della perdita delle componenti piú alte [...]”;

per $N = 40$ La soluzione numerica in questo caso differisce davvero poco dalla $f(t)$. Questo risultato é adibito alla
 ”[...] particolare $f(t)$ scelta che non contiene componenti significative piú alte [...]”.

In pratica $f_N^{dis}(t) \simeq f(t)$ per $N = 40$ ($\bar{\omega} = 5.44$).

per $N = 60$ ”[...] Il risultato devia considerevolmente dalla soluzione $f(t)$ [...]”.
 Cioé dipende dal fatto che quando $N \geq 60$
 ”[...] $\lambda^\pm(n\Delta\omega)$ é cosí piccolo che anche se i piccoli errori sono tollerati nella valutazione delle proiezioni sulle autofunzioni c_n^\pm , sono sufficienti per dominare la soluzione $f(t)$ [...]”.

Il secondo test (Figura 3.2) é praticamente identico al primo, se non per la differenza che in questo caso vengono aggiunti errori casuali ai coefficienti c_n^\pm , con distribuzione di probabilitá Gaussiana e deviazione standard 10^{-3} . In questo caso le soluzioni numeriche sono ottenute solo per $N = 20$ e $N = 30$.

per $N = 20$ ”[...] Il risultato che include 20 termini é simile a quello ottenuto nel primo test [...]”.

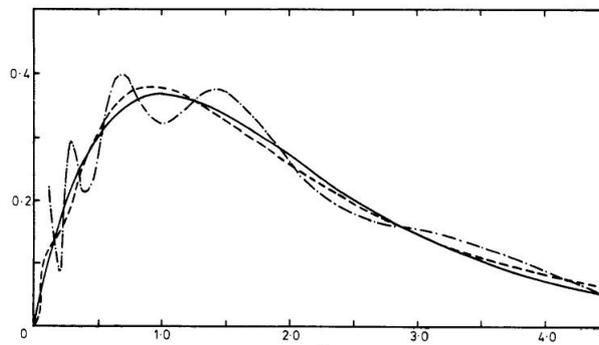


Figura 3.1: Immagine originale del primo test proposto in [56]. La curva piena é la soluzione "esatta" ed é indistinguibile dalla soluzione numerica per $N = 40$, la curva tratteggiata e la curva rotta (tratteggio-punto) sono rispettivamente la soluzione numerica per $N = 20$ e $N = 60$.

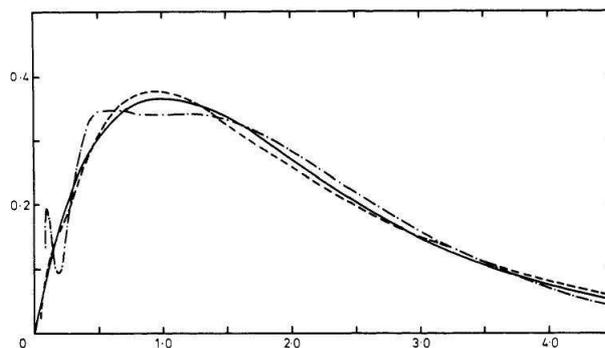


Figura 3.2: Immagine originale del secondo test proposto in [56]. La curva piena é la soluzione "esatta", la curva tratteggiata e la curva rotta (tratteggio-punto) sono rispettivamente la soluzione numerica per $N = 20$ e $N = 30$.

per $N = 30$ "[...] Quando piú termini vengono inclusi nella somma, i risultati diventano crescono costantemente in modo erroneo. Già per $N = 30$ il comportamento é abbastanza errato [...]"

L'effetto dell'avere aumentato il rumore (errore) sui coefficienti si ripercuote sulla scelta ottimale del valore $\bar{\omega}$. Nel primo caso $\bar{\omega} \sim 40\Delta\omega$, nel secondo $\bar{\omega} \sim 20\Delta\omega$. La **Proposizione 3.3.1** mostrerá che questo rapporto é semplicemente legato alle cifre significative corrette nel calcolo dei coefficienti c_n^\pm .

3.2 Schema generale di approssimazione numerica: da $M(P)$ a $M_h(P)$

Affrontiamo in questa sezione il problema della introduzione di uno schema generale di approssimazione numerica della formula d'inversione (2.48). Osserviamo che la formula d'inversione può essere riscritta come

$$f(t) = \int_0^\infty G_F(\omega, t) d\omega \quad t \in \mathfrak{R}^+ \quad (3.16)$$

dove

$$G_F(\omega, t) := G(\omega, t) = \frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) + \frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) \quad t, \omega \in \mathfrak{R}^+ . \quad (3.17)$$

Come osservato nel **Capitolo 2**, il condizionamento della formula d'inversione dipende dalla quantità

$$\left| \frac{1}{\lambda^\pm(\omega)} \right| \simeq e^{\frac{\pi\omega}{2}} \quad (3.18)$$

che cresce senza limite. Pertanto, dal punto di vista numerico, si comprende che, sebbene (3.16) esprima formalmente la soluzione, essa non può essere utilizzata per valutare la $f(t)$. Quindi, fissato un valore positivo $\bar{\omega}$, come in (3.2), ha senso definire

$$f_{\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} G_F(\omega, t) d\omega \quad t \in \mathfrak{R}^+ . \quad (3.19)$$

In (3.9) l'integrale è sostituito con una sommatoria. Più in generale, data una formula di quadratura Q^h relativa all'intervallo $[0, \bar{\omega}]$, la relazione (3.19) può essere approssimata con

$$f_{\bar{\omega}}^h(t) = Q^h(G_F(\cdot, t)) . \quad (3.20)$$

Evidentemente l'ultima relazione fornisce un'espressione discreta della formula d'inversione. Nella (3.20) è possibile riconoscere, come caso particolare, la "soluzione numerica" descritta in (3.9): in quella circostanza la formula si

quadratura coinvolta é la trapezoidale composta. Attraverso le relazioni (3.19) e (3.20) possiamo finalmente fornire lo schema di approssimazione numerica:

Definizione 3.2.1

Passo 1:: Assegnato $\bar{\omega} > 0$, si consideri l'operatore

$$\mathcal{T}_{\bar{\omega}} : F \mapsto f_{\bar{\omega}}(t) ; \tag{3.21}$$

Passo 2:: Assegnata Q^h , formula di quadratura relativa all'intervallo $[0, \bar{\omega}]$, con h massima ampiezza del passo di discretizzazione, si consideri l'applicazione

$$\mathcal{D}_h : f_{\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} G_F(\omega, t) d\omega \mapsto Q^h(G_F(\cdot, t)) . \tag{3.22}$$

Allora si ha:

$$f_{\bar{\omega}}^h(t) = Q^h(G_F(\cdot, t)) = \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) ; \tag{3.23}$$

I **Passi 1 e 2** individuano lo **schema di approssimazione numerica** o, piú semplicemente, il **metodo numerico**.

La soluzione $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ determinata dalla schema é detta **soluzione discreta** o **approssimazione discreta** del metodo.

Si osservi che, volutamente, ancora non si é preso in considerazione che la soluzione discreta deve essere valutata in un sistema aritmetico a precisione finita, aspetto che verrà indagato nella Sezione 3.3.

Dalla **Definizione 3.2.1** si evincono per il metodo numerico due caratteristiche:

1. Nel **Passo 1** non si é fissato il valore di $\bar{\omega}$. La scelta di questo valore rappresenta il problema principale nell'utilizzo della formula d'inversione, problema che verrà affrontato nel **Capitolo 4** per mezzo dell'introduzione della regolarizzazione numerica.

2. Nel Passo 2 non si é fissato il tipo di formula di quadratura. La Sezione 3.5 mostrerá che tale scelta, a prima vista importante, sará di influenza secondaria sull'accuratezza ottenibile dalla formula di inversione.

3.2.1 Sorgenti di errore: il troncamento e la discretizzazione

Vogliamo qui analizzare gli errori naturalmente legati alla definizione di soluzione discreta. Nel Passo 1 l'integrale rispetto a ω viene troncato in $\bar{\omega}$, per cui

Definizione 3.2.2

La differenza:

$$TE_{\bar{\omega}}(t) = \mathcal{T}_{\infty}(F) - \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) = f(t) - f_{\bar{\omega}}(t) \quad (3.24)$$

rappresenta l'errore di troncamento introdotto al Passo 1.

Nel Passo 2 l'integrale che definisce $f_{\bar{\omega}}(t)$ é discretizzato per mezzo di una formula di quadratura, quindi

Definizione 3.2.3

La differenza:

$$DE_{\bar{\omega}}^h(t) = \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) = f_{\bar{\omega}}(t) - f_{\bar{\omega}}^h(t) \quad (3.25)$$

rappresenta l'errore di discretizzazione introdotto al Passo 2.

3.2.2 Analisi dell'errore di discretizzazione

In generale, supponiamo che Q_h sia una formula di quadratura composta relativa all'intervallo $[0, \bar{\omega}]$, ottenuta da una formula base Q che ha grado di precisione algebrico $d > 0$ [18], otteniamo il seguente risultato:

Lemma 3.2.1 (Stima dell'errore di discretizzazione)

Se $G(\cdot, t) \in C^{k+1}[0, \bar{\omega}]$, $\forall t > 0$ e se esiste $H(t)$, $t > 0$ tale che:

$$|G^{(k+1)}(\omega, t)| \leq H(t), \quad \omega \in [0, \bar{\omega}] \quad t > 0, \quad (3.26)$$

allora l'errore di discretizzazione $DE_{\bar{\omega}}^h(t)$, dovuto alla formula composta Q^h , può essere stimato come segue:

$$|DE_{\bar{\omega}}^h(t)| \leq c_{k,d} H(t) \bar{\omega} h^{k+1} = \mathcal{O}(h^{k+1}), \quad (3.27)$$

dove $c_{k,d} = 2 \frac{e^k 3^{k+1}}{d^k (d-k)}$ e $d > k$ é il grado di precisione algebrico della formula base Q .

Dimostrazione

Sia τ_j la lunghezza del sottointervallo $[t_{j-1}, t_j]$ della formula composta $Q^h(G_F(\cdot, t))$.

Usando il **Teorema di Rivlin** [66] in ogni sottointervallo e sommando su tutti i sottointervalli:

$$|DE_{\bar{\omega}}^h(t)| \leq c_{k,d} H(t) \sum_{j=1}^n \tau_j^{k+2} \leq c_{k,d} H(t) \sum_{j=1}^n t_j h^{k+1} = c_{k,d} H(t) \bar{\omega} h^{k+1} \quad (3.28)$$

□

Si osserva che le ipotesi di regolarit  sulla funzione $G(\omega, t)$ sono verificate non appena $F, f \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$. Infatti

- i rapporti $\frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)}$ sono combinazioni lineari dei coefficienti di Fourier di $f(e^x)e^{x/2}$;
- le funzioni $\psi^\pm(\omega, t)$ sono analitiche rispetto ad ω per ogni fissato $t > 0$.

Ne consegue una sufficiente regolarit  che, insieme al **Lemma 3.2.1**, prova il seguente:

Teorema 3.2.1

Se Q^h é una formula composta di una formula Q con grado di precisione algebrico $d > 0$, allora per l'errore di discretizzazione si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} |DE_{\bar{\omega}}^h(t)| = \lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F)| = 0 \quad \forall t > 0 \quad . \quad (3.29)$$

□

La relazione (3.29) suggerisce che, una volta fissato il valore di $\bar{\omega}$, é bene infinitire la discretizzazione diminuendo la massima ampiezza del passo h . É bene osservare che, avendo a disposizione un sistema aritmetico a precisione finita, il valore h non puó essere scelto arbitrariamente piccolo.

3.2.3 Analisi dell'errore di troncamento

Discutiamo adesso dell'errore di troncamento introdotto al **Passo 2**. Prendiamo in considerazione la funzione ausiliaria³:

$$N(\omega) = \left[\alpha^+(\omega)^2 + \alpha^-(\omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \right)^2 + \left(\frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.31)$$

Allora si ha il seguente risultato preliminare:

Lemma 3.2.2

Se

$$\int_{\bar{\omega}}^{\infty} N(\omega) d\omega < \infty \quad (3.32)$$

l'errore di troncamento $TE_{\bar{\omega}}(t)$ puó essere stimato come segue:

$$|TE_{\bar{\omega}}(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{\infty} N(\omega) d\omega \quad . \quad (3.33)$$

³Per ogni fissato ω , $N(\omega)$ rappresenta la norma euclidea della coppia

$$\left(\frac{c^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)}, \frac{c^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)} \right) \quad . \quad (3.30)$$

Dimostrazione

Dalle disuguaglianze

$$|\psi^\pm(\omega, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad , \quad \left| \frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} \right| \leq N(\omega) \quad , \quad (3.34)$$

abbiamo:

$$|TE_{\bar{\omega}}(t)| \leq \int_{\bar{\omega}}^{\infty} (N(\omega)|\psi^+(\omega, t)| + N(\omega)|\psi^-(\omega, t)|) d\omega \leq \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{\infty} N(\omega) d\omega . \quad (3.35)$$

□

Si osservi che la condizione (3.32) é sufficiente a garantire che gli integrali nella (2.48) esistano finiti. Inoltre essa ha un ruolo analogo a quello che gioca la condizione di Picard [42] nel caratterizzare l'esistenza della decomposizione in valori singolari delle soluzioni delle equazioni integrali di Fredholm di prima specie [43].

Il **Lemma 3.2.2** stabilisce che lo studio della funzione $N(\omega)$ puó fornire informazioni sull'andamento generale dell'errore di troncamento. Una espressione asintotica di $N(\omega)$ é deducibile a partire dai risultati ottenuti nel paragrafo 2.5.1.

Dalla **Proposizione 2.5.1**, per le funzioni $f_1^{N,a}(t) = t^N e^{-at}$ della classe 1, si ha:

$$\left| \frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} \right| = \frac{\mathcal{O}(\omega^N e^{-\pi\omega})}{\lambda^\pm(\omega)} = \mathcal{O}(\omega^N e^{-\pi\omega}) \mathcal{O}(e^{\pi\omega/2}) = \mathcal{O}(\omega^N e^{-\pi\omega/2}) \quad , \quad (3.36)$$

mentre, dalla **Proposizione 2.5.2**, per le funzioni $f_2^k(t) = \max(1 - t/k, 0)$ della classe 2, si ha:

$$\left| \frac{c^\pm(\omega)}{\lambda^\pm(\omega)} \right| = \frac{\mathcal{O}(\omega^{-2} e^{-\pi\omega/2})}{\lambda^\pm(\omega)} = \mathcal{O}(\omega^{-2} e^{-\pi\omega/2}) \mathcal{O}(e^{\pi\omega/2}) = \mathcal{O}(\omega^{-2}) . \quad (3.37)$$

Mettendo insieme le relazioni (3.36) e (3.37) e il **Lemma 3.2.2**, si ottengono per le classi 1 e 2 i seguenti risultati:

Proposizione 3.2.1

Siano $f_1^{N,a}(t) = t^N e^{-at}$ e $F_1^{N,a}(s) = \frac{\Gamma(N+1)}{(s+a)^{N+1}}$ rispettivamente una funzione e la relativa trasformata di Laplace, con $N, a > 0$. Per l'errore di troncamento $TE_{\bar{\omega}}(t)$ si ha

$$TE_{\bar{\omega}}(t) = \mathcal{O}(\bar{\omega}^N e^{-\pi\bar{\omega}/2}) . \quad (3.38)$$

Dimostrazione

Supponiamo per semplicitá N intero. Per la (3.36) esiste $K > 0$ tale che

$$N(\omega) \leq K\omega^N e^{-\pi\omega/2} , \quad (3.39)$$

da cui

$$TE_{\bar{\omega}}(t) \leq \frac{2K}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega^N e^{-\pi\omega/2} d\omega \leq \frac{2K}{\sqrt{\pi t}} [e^{-\pi\bar{\omega}/2} \bar{\omega}^N + N e^{-\pi\bar{\omega}/2} \bar{\omega}^{N-1} + \dots + N! e^{-\pi\bar{\omega}/2}] < \frac{2K}{\sqrt{\pi t}} (N+1)! \bar{\omega}^N e^{-\pi\bar{\omega}/2} = \mathcal{O}(\bar{\omega}^N e^{-\pi\bar{\omega}/2}) . \quad (3.40)$$

Il caso piú generale $N \in \mathbb{R}^+$ si prova mediante la funzione Gamma. □

Proposizione 3.2.2

Siano $f_2^k(t) = \max(1-t/k, 0)$ e $F_2^k(s) = \frac{e^{-ks} + ks - 1}{ks^2}$ rispettivamente una funzione e la relativa trasformata di Laplace, con $k > 0$. Per l'errore di troncamento $TE_{\bar{\omega}}(t)$ si ha

$$TE_{\bar{\omega}}(t) = \mathcal{O}(\bar{\omega}^{-1}) . \quad (3.41)$$

Dimostrazione

Per la (3.37) esiste $K > 0$ tale che

$$N(\omega) \leq K\omega^{-2} , \quad (3.42)$$

da cui

$$TE_{\bar{\omega}}(t) \leq \frac{2K}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega^{-2} d\omega = \frac{2K}{\sqrt{\pi t}} \bar{\omega}^{-1} = \mathcal{O}(\bar{\omega}^{-1}) . \quad (3.43)$$

□

In effetti le **Proposizioni 3.2.1** e **3.2.2** forniscono delle stime a priori dell'errore di troncamento che sono basate sulla conoscenza in forma chiusa dei coefficienti $c^\pm(\omega)$. L'andamento teorico suggerisce che per il troncamento sono possibili due ordini di decadimento: esponenziale e polinomiale. Per verificare questo risultato consideriamo piú in generale le tre funzioni

$$f_1(t) = t e^{-4t}, \quad f_2(t) = \max(5 - t, 0), \quad f_3(t) = \chi_{[0,1]}, \quad (3.44)$$

le cui trasformate di Laplace sono nell'ordine

$$F_1(s) = \frac{1}{(s + 4)^2}, \quad F_2(s) = \frac{e^{-5s} + 5s - 1}{s^2}, \quad F_3(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}. \quad (3.45)$$

In Figura 3.3 é riportato, in scala semi-logaritmica, l'andamento di $N(\omega)$ per le tre funzioni scelte. Si puó osservare che:

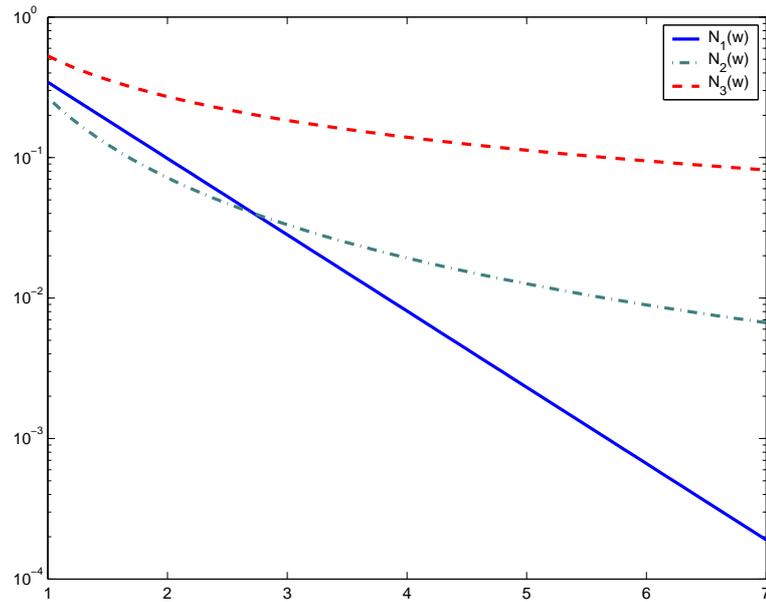


Figura 3.3: Comportamento asintotico di $N(\omega)$. $N_1(\omega)$, $N_2(\omega)$ e $N_3(\omega)$ si riferiscono rispettivamente a $f_1(t) = te^{-4t}$, $f_2(t) = \max_{(5-t,0)}$ e $f_3(t) = \chi_{[0,1]}$.

- $N_1(\omega)$ decade con ordine esponenziale (il suo grafico in scala semi-logaritmica é pressoché una retta).

- $N_2(\omega)$ e $N_3(\omega)$ hanno un "minor ordine di decadimento" (le curve sono funzioni decrescenti e convesse, ma non sono rette).

In effetti, mediante una tecnica illustrata nel **Capitolo 4** che fornisce una stima computazionale di $N(\omega)$, si trova sperimentalmente che al crescere di ω $N(\omega)$ decade approssimativamente: con ordine esponenziale nel primo caso e con ordine polinomiale negli altri due. Si ha infatti:

$$N_1(\omega) \leq 12.1 e^{-1.25 \omega}, \quad N_2(\omega) \leq 0.267 \omega^{-1.896}, \quad N_3(\omega) \leq 0.528 \omega^{-0.9596}. \quad (3.46)$$

Le stime sperimentali in (3.46), in accordo con quelle teoriche, suggeriscono che in generale é lecito assumere per $N(\omega)$ uno dei due comportamenti asintotici:

$$(a) \ N(\omega) \leq C_1 e^{-C_2 \omega}, \quad (b) \ N(\omega) \leq C_1 \omega^{-(C_2+1)}. \quad (3.47)$$

Il seguente risultato, basato sul **Lemma 3.2.2**, fornisce una stima dell'errore di troncamento nei due possibili casi.

Teorema 3.2.2 (Stima dell'errore di troncamento)

Siano $C_1, C_2 > 0$ due valori reali. Ponendo

$$TB(\bar{\omega}) := \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1}{C_2} e^{-C_2 \bar{\omega}} & \text{se } N(\omega) \leq C_1 e^{-C_2 \omega} \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1}{C_2} \bar{\omega}^{-C_2} & \text{se } N(\omega) \leq C_1 \omega^{-(C_2+1)} \end{cases} \quad (3.48)$$

per l'errore di troncamento si ha

$$|TE_{\bar{\omega}}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} TB(\bar{\omega}). \quad (3.49)$$

Dimostrazione

Dalla (3.33), se $N(\omega) \leq C_1 e^{-C_2 \omega}$

$$|TE_{\bar{\omega}}(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{\infty} C_1 e^{-C_2 \omega} d\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{C_1}{C_2} e^{-C_2 \bar{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{t}} TB(\bar{\omega}), \quad (3.50)$$

altrimenti, se $N(\omega) \leq C_1 \omega^{-(C_2+1)}$

$$|TE_{\bar{\omega}}(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{\bar{\omega}}^{\infty} C_1 \omega^{-(C_2+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{C_1}{C_2} \bar{\omega}^{-C_2} = \frac{1}{\sqrt{t}} TB(\bar{\omega}) . \quad (3.51)$$

□

La stima (3.49) é di effettiva utilitá solo nel caso sia possibile stimare $N(\omega)$ con una delle espressioni in (3.48). Ció avviene per le funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$, ma non per la funzione $f_3(t)$, per la quale si ha $N_3(\omega) \leq C_1 \omega^{-(C_2+1)}$ con $C_2 = -0.04 < 0$. Quindi per $f_3(t)$ l'errore di troncamento non é stimabile mediante $N(\omega)$: in questo caso la finitezza di $TE_{\bar{\omega}}(t)$ é conseguenza del lemma di Riemann-Lebesgue.

Il **Teorema 3.2.2** suggerisce che al fine di ottenere una stima superiore dell'errore di troncamento é sufficiente determinare C_1 e C_2 e selezionare il comportamento asintotico di $TB(\bar{\omega})$. Come stimare il valore di $TB(\bar{\omega})$ e calcolare C_1 e C_2 é spiegato nella Sezione 4.4.

3.3 Dal metodo numerico $M_h(P)$ all'algoritmo $A(P)$

Nell'aver analizzato gli errori legati al metodo numerico non si é ancora considerato che la soluzione discreta, introdotta mediante la **Definizione 3.2.1**, deve essere valutata in un sistema aritmetico a precisione finita.

Definizione 3.3.1

Passo 3: *Sia u la precisione macchina del sistema aritmetico a precisione finita F . Si consideri l'applicazione*

$$\mathcal{C}_u : f_{\bar{\omega}}^h(t) \mapsto f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = f_{\bar{\omega}}^h(t) (1 + \eta u) \quad (\eta = \text{const.}) \quad (3.52)$$

con η quantità dipendente dal condizionamento e dal sistema aritmetico a precisione finita F . Allora la $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ é detta **soluzione numerica o approssimazione numerica del metodo**.

3.3.1 Sorgenti di errore: l'errore di condizionamento

Una volta stabiliti i parametri $u, \bar{\omega}$ e Q^h , su $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ sono certamente presenti l'errore di troncamento, l'errore di discretizzazione ed una ulteriore fonte di errore:

Definizione 3.3.2

La differenza:

$$CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) := \mathcal{D}_h \mathcal{I}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{C}_u \mathcal{D}_h \mathcal{I}_{\bar{\omega}}(F) = f_{\bar{\omega}}^h(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \quad (3.53)$$

rappresenta l'errore di condizionamento introdotto al passo 3.

L'errore di condizionamento é l'errore che si commette nella valutazione della soluzione discreta $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ in un sistema aritmetico a precisione finita. L'ordine

di grandezza di $CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ dipende anche dal condizionamento della soluzione discreta, da qui la scelta del nome *errore di condizionamento*. Infine, tenendo conto di tutti i Passi 1-3:

Definizione 3.3.3

La differenza:

$$GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) := f(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \quad (3.54)$$

rappresenta l'errore globale introdotto su $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$.

Nel **Capitolo 4** lo studio dell'errore globale $GE_{\bar{\omega}}(t)$, mediante sue stime, risulta discriminante nella scelta del valore del parametro $\bar{\omega}$.

3.3.2 Analisi dell'errore di condizionamento

L'analisi della propagazione degli errori durante i calcoli é di fondamentale importanza nella progettazione di algoritmi. Questo aspetto é particolarmente significativo nel caso dei problemi mal posti. Infatti per questi problemi c'è da attendersi una amplificazione non limitata degli errori. Solo una dettagliata analisi della propagazione degli errori durante la fase di valutazione numerica può permettere di capire come controllare e attenuare le instabilità.

Quindi, riguardo alla formula d'inversione (2.48) ed al relativo schema di approssimazione numerica descritto, é necessario studiare essenzialmente gli errori legati al Passo 3. In particolare, ci riferiamo al calcolo della funzione integranda G che dipende dai coefficienti c^{\pm} e dagli autovalori λ^{\pm} .

Vogliamo stabilire adesso un risultato per l'errore di condizionamento

$$CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{C}_u \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) . \quad (3.55)$$

Indichiamo preliminarmente con $F_{\delta}(s)$ il valore in s a disposizione della funzione trasformata $F(s)$, e assumiamo che sia:

$$F_{\delta}(s) := F(s)(1 + \delta(s)) , \quad |\delta(s)| \leq \delta , \quad \forall s \geq 0 . \quad (3.56)$$

Al fine di stimare $CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$, mediante un modello semplificato, assumiamo che l'errore introdotto, nel passaggio tra soluzione discreta $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ e soluzione numerica $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$, sia unicamente imputabile alla propagazione dell'errore δ presente sul dato F_{δ} . Cioé

$$\mathcal{C}_u \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) \simeq \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F_{\delta}) . \quad (3.57)$$

L'ipotesi (3.57) é plausibile e giustificata dalla seguente:

Osservazione 3.3.1

Se consideriamo la valutazione della trasformata $F(s)$ nel sistema aritmetico F a precisione finita, con massima accuratezza relativa u , indicando con $C(F, s) = \frac{|sF'(s)|}{|F(s)|}$ l'indice di condizionamento relativo della funzione F in s , si avrà

$$\delta(s) = C(F, s)u + \mathcal{O}(u^2) \quad (3.58)$$

da cui, posto $C = \sup_s |C(F, s)|$,

$$\delta = Cu \quad (3.59)$$

Dalla (3.55) e dalla (3.57) si ha:

$$CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \simeq \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F_{\delta}) = \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F - F_{\delta}) . \quad (3.60)$$

Quindi l'errore di condizionamento può essere stimato come:

$$|CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq K(\mathcal{D}_h, \mathcal{T}_{\bar{\omega}})\delta \quad (3.61)$$

con $K = K(\mathcal{D}_h, \mathcal{T}_{\bar{\omega}})$ costante dipendente dai singoli passi dello schema numerico. Il valore di K può essere stimato attraverso l'analisi della propagazione dell'errore δ .

Denotiamo mediante

$$c_{\delta}^{\pm}(\omega) := \langle \psi^{\pm}(\omega, \cdot), F_{\delta}(\cdot) \rangle \quad (3.62)$$

i valori perturbati delle proiezioni sulle autofunzioni, e mediante

$$\Theta^\pm(\omega) = c_\delta^\pm(\omega) - c^\pm(\omega) \quad (3.63)$$

l'errore assoluto su tali proiezioni. Il prossimo risultato descrive la propagazione di $\delta(s)$ su $\Theta^\pm(\omega)$.

Lemma 3.3.1

Siano $F_\delta(s)$, $\delta(s)$, $c_\delta^\pm(\omega)$ e $\Theta^\pm(\omega)$ come in (3.56), (3.62) e (3.63). Allora⁴:

$$|\Theta^\pm(\omega)| \leq \|F\|_{L_w^1} \delta, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (3.64)$$

Dimostrazione

Si ha:

$$\begin{aligned} |\Theta^\pm(\omega)| &= |c_\delta^\pm(\omega) - c^\pm(\omega)| = | \langle \psi^\pm(\omega, \cdot), F_\delta(\cdot) \rangle - \langle \psi^\pm(\omega, \cdot), F(\cdot) \rangle | = \\ &= | \langle \psi^\pm(\omega, \cdot), F(\cdot)\delta(\cdot) \rangle | = \left| \int_0^{+\infty} F(s)\delta(s)\psi^\pm(\omega, s)ds \right| \leq \delta \int_0^{+\infty} |F(s)||\psi^\pm(\omega, s)|ds. \end{aligned}$$

Infine dalla (3.34) segue la (3.64). □

Poniamo ora

$$G_\delta(\omega, t) := \frac{c_\delta^+(\omega)}{\lambda^+(\omega)}\psi^+(\omega, t) + \frac{c_\delta^-(\omega)}{\lambda^-(\omega)}\psi^-(\omega, t) \quad t, \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (3.65)$$

Si vuole discutere della propagazione di Θ^\pm su

$$\beta(\omega, t) = G_\delta(\omega, t) - G(\omega, t), \quad t, \omega > 0, \quad (3.66)$$

che denota l'errore assoluto su G . Allora:

Lemma 3.3.2

Siano $c_\delta^\pm(\omega)$, $\Theta^\pm(\omega)$, $G_\delta(\omega, t)$ e $\beta(\omega, t)$ come in (3.62), (3.63), (3.65) and (3.66). Se esiste un valore $\Theta \geq 0$ tale che

$$|\Theta^\pm(\omega)| \leq \Theta, \quad 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}, \quad (3.67)$$

⁴Si osserva che se $F(s)$ non cambia segno allora $\|F\|_{L_w^1} = |c^+(0)|$.

allora:

$$|\beta(\omega, t)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} e^{\pi\bar{\omega}/2} \Theta, \quad 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}, \quad t > 0. \quad (3.68)$$

Dimostrazione

Dalla (3.34), si ha:

$$\begin{aligned} |\beta(\omega, t)| &= |\tilde{G}(\omega, t) - G(\omega, t)| \leq \frac{|\Theta^+(\omega)|}{|\lambda^+(\omega)|} |\psi^+(\omega, t)| + \frac{|\Theta^-(\omega)|}{|\lambda^-(\omega)|} |\psi^-(\omega, t)| \leq \\ &\leq 2 \Theta \max_{\omega \leq \bar{\omega}} |\psi^\pm(\omega, t)| \max_{\omega \leq \bar{\omega}} \left| \frac{1}{\lambda^\pm(\omega)} \right| = 2 \Theta \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \max_{\omega \leq \bar{\omega}} \left| \frac{1}{\lambda^\pm(\omega)} \right| \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dalla (2.38):

$$\left| \frac{1}{\lambda^\pm(\omega)} \right| \simeq \frac{e^{\pi\omega/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{e^{\pi\bar{\omega}/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.70)$$

Applicando la (3.70) nella (3.69) la tesi é provata. \square

Infine il seguente lemma collega l'errore β , presente su G all'errore di condizionamento $CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$, mediante l'indice di condizionamento assoluto della formula di quadratura Q^h [18].

Lemma 3.3.3

Siano $G_\delta(\omega, t)$, $\beta(\omega, t)$, $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ e l'errore di condizionamento $CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ come in (3.65), (3.66), (3.52) e (3.53). Se esiste una funzione $h(t)$ tale che

$$|\beta(\omega, t)| \leq h(t) \quad 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}, \quad t > 0 \quad (3.71)$$

allora si ha:

$$|CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq h(t) \nu(Q^h) \quad 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}, \quad t > 0, \quad (3.72)$$

dove $\nu(Q^h)$ é l'indice di condizionamento assoluto della formula di quadratura Q^h .

Dimostrazione

La tesi segue immediatamente applicando la (3.71) nella disuguaglianza:

$$\begin{aligned} |CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| &= |f_{\bar{\omega}}^h(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| = |Q^h(G(\cdot, t)) - Q^h(G_\delta(\cdot, t))| \leq \\ &\leq \nu(Q^h) \max_{0 \leq \omega \leq \bar{\omega}} |G_\delta(\omega, t) - G(\omega, t)| = \nu(Q^h) \max_{0 \leq \omega \leq \bar{\omega}} |\beta(\omega, t)|. \end{aligned} \quad (3.73)$$

□

I precedenti risultati hanno mostrato che l'amplificazione dell'errore presente sul dato avviene in tre fasi:

- calcolo dei coefficienti $c^\pm(\omega)$ (**Lemma 3.3.1**);
- moltiplicazioni per gli autovalori $\lambda^\pm(\omega)$ (**Lemma 3.3.2**);
- integrazione della funzione G mediante quadratura (**Lemma 3.3.3**).

Queste fasi possono essere inglobate in un unico risultato che descrive l'effetto complessivo della propagazione dell'errore, dal dato F_δ alla soluzione numerica $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$.

Teorema 3.3.1 (Stima dell'errore di condizionamento)

Siano $F_\delta(s)$ e $\delta(s)$ come in (3.56). Allora per l'errore di condizionamento si ha:

$$|CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} CB(\bar{\omega}) \quad (3.74)$$

dove

$$CB(\bar{\omega}) := \frac{\sqrt{2}}{\pi} \|F\|_{L_w^1} \delta \nu(Q^h) e^{\pi\bar{\omega}/2}, \quad (3.75)$$

e $\nu(Q^h)$ è l'indice di condizionamento assoluto della formula di quadratura Q^h .

Dimostrazione

È sufficiente applicare il **Lemma 3.3.2** con $\Theta = \|F\|_{L_w^1} \delta$ ed il **Lemma 3.3.3** con $h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} e^{\pi\bar{\omega}/2} \Theta$. □

La quantità CB fornisce a meno del fattore $t^{-1/2}$, una stima superiore dell'errore di condizionamento e pertanto verrà detta in seguito **stima del condizionamento**. Si noti che in CB sono presenti tutti i fattori di amplificazione dell'errore $\|F\|_{L_w^1}$, $\nu(Q^h)$ e $e^{\pi\bar{\omega}/2}$. In particolare

- un primo fattore moltiplicativo nella stima del condizionamento é dato dall'indice di condizionamento $\nu(Q^h)$. Questo permette di decidere quale scelta sia piú opportuna per la formula di quadratura Q^h : é preferibile utilizzare formule con basso indice di condizionamento (Newton-Cotes composite, Gauss, etc etc) [18].
- Oltre a $\nu(Q^h)$, il termine dominante in CB é il fattore esponenziale $e^{\pi\bar{\omega}/2}$ dovuto alla divisione per gli autovalori λ^\pm . Questo aspetto conferma che il mal condizionamento del problema discreto dipende principalmente dall'andamento asintotico dello spettro degli autovalori.

Una prima notevole conseguenza della presenza del fattore $e^{\pi\bar{\omega}/2}$ é evidenziata nella seguente:

Proposizione 3.3.1

Dato $m > 0$, sia $Tol = 10^{-m}$. Supponiamo di calcolare le proiezioni sulle autofunzioni con una accuratezza $\Theta = 10^{-p}$ e sia $K > 0$ tale che $\nu(Q^h) \leq K$. Allora affinché si abbia per l'errore di condizionamento

$$CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \leq Tol \quad (3.76)$$

deve essere

$$\bar{\omega} \leq \frac{2}{\pi} \left[(p - m) \ln 10 + \frac{1}{2} \ln t + \ln \frac{\pi}{K\sqrt{2}} \right]. \quad (3.77)$$

Dimostrazione

In questo caso l'accuratezza Θ nei coefficienti é fissata. Pertanto in (3.74) si ha $\Theta = \|f\|_{L_w^1} \delta$, da cui la stima per $CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ diventa

$$CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Theta K e^{\pi\bar{\omega}/2}. \quad (3.78)$$

Sostituendo nella (3.76),

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{2}}{\pi} 10^{-p} K e^{\pi\bar{\omega}/2} \leq 10^{-m}, \quad (3.79)$$

da cui la tesi. □

La relazione (3.77) evidenzia che il valore di $\bar{\omega}$ é direttamente proporzionale alla differenza di cifre corrette p nel calcolo dei coefficienti $c^\pm(\omega)$ e cifre corrette m desiderate sulla soluzione. Questa relazione convalida i primi esperimenti, mostrati nel paragrafo 3.1.1, dove l'accuratezza nei coefficienti varia da 10^{-5} a 10^{-3} e il corrispondente valore di $\bar{\omega}$ tra $20\Delta\omega$ e $40\Delta\omega$.

Capitolo 4

Regolarizzazione numerica della formula d'inversione

4.1 Premessa

Nel **Capitolo 3** sono state discusse le fonti di errore che insorgono a causa dell'introduzione di uno schema di approssimazione numerica basato sulla formula d'inversione. Il contributo di tutti gli errori, troncamento, discretizzazione e condizionamento, dá luogo a quello che in (3.54) abbiamo definito **errore globale** presente su $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$. Dalla definizione stessa segue che l'errore globale $GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ é funzione dei parametri u , h e $\bar{\omega}$. Nel presente capitolo vogliamo stabilire un criterio di scelta per questi parametri, in modo da poter calcolare la soluzione numerica piú accurata possibile, ovvero quella soluzione in corrispondenza della quale risulta minimo l'errore globale (o una sua stima). Si osserva che il valore di u é fissato e dipende dal sistema aritmetico a precisione finita. Mentre per h si é stabilito che é opportuno scegliere formule di quadratura con basso indice di condizionamento assoluto. Rimane quindi il problema della scelta del parametro $\bar{\omega}$. Tale problema riveste un ruolo centrale ed é affrontato sulla base della metodologia descritta nella Sezione 4.2. Qui é introdotto il concetto generale di "regolarizzazione numerica". Con regolarizzazione numerica si vuole intendere la metodologia per calcolare una approssimazione della soluzione del problema $M(P)$, richiedendo che l'errore globalmente introdotto dallo schema di regolarizzazione sia il minimo possibile. Nella Sezione 4.3 viene mostrato come tale tecnica si adatta allo schema numerico proposto. In questo contesto la soluzione numerica regolarizzata svolgerà il ruolo della soluzione ottimale e i risultati ottenuti in termini di accuratezza saranno riguardati come caso particolare. La Sezione 4.4 é infine dedicata all'introduzione di un nucleo computazionale per regolarizzazione numerica e al chiarimento di come siano state ottenute le stime computazionali ad essa necessarie.

4.2 Il concetto di regolarizzazione numerica

Con il termine "regolarizzazione numerica" si vuole intendere l'insieme di concetti generali, principi e metodologie che permeano interamente l'approccio numerico alla regolarizzazione di un problema inverso. Tale approccio deve tenere conto sia delle intrinseche difficoltà del problema continuo, quali posizionamento prima e condizionamento poi, sia delle difficoltà proprie del fatto che ogni metodo di regolarizzazione (in senso classico) necessita di essere implementato, mediante algoritmi e software, in un opportuno ambiente di calcolo. Di qui la necessità di tenere conto di tutte le fonti di errore che insorgono nelle fasi del procedimento di risoluzione computazionale del problema. Una sintesi grafica di tale concetto é riportata in Figura 4.1

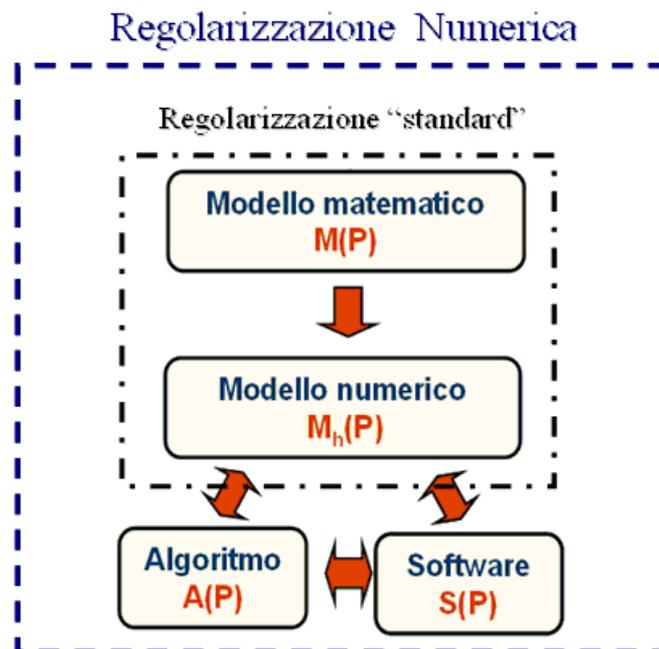


Figura 4.1: Regolarizzazione e regolarizzazione numerica nel procedimento di risoluzione computazionale di un problema

4.2.1 Una introduzione generale

Siano P un problema reale ed $M(P)$ un modello matematico che lo descrive. Supponiamo inoltre che $M(P)$ dia luogo ad un problema mal posto. Ripercorriamo il procedimento di risoluzione computazionale del problema.

$M(P)::$ Se $M(P)$ é un problema mal posto rappresentato dalla terna (K, X, Y) , allora l'operatore inverso K^{-1} di K é discontinuo. Pertanto si ha

$$\mu(K^{-1}) = \infty . \quad (4.1)$$

$M^{(\alpha)}(P)::$ Introduciamo allora una famiglia di operatori regolarizzanti $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ (paragrafo 1.3.1) e sostituiamo al problema $M(P)$ il problema descritto da $M^{(\alpha)}(P)$. Il problema é ben posto (l'operatore R_α é stabile) e permette di stimare l'errore di perturbazione mediante il fattore di amplificazione

$$\mu(R_\alpha) < \infty . \quad (4.2)$$

La scelta del parametro ottimale di regolarizzazione $\alpha_{opt}(\delta)$ é basata sulla minimizzazione di un funzionale di regolarizzazione $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$ definito in (1.8). La soluzione regolarizzata é data da

$$x_{\alpha_{opt}}^\delta = R_{\alpha_{opt}}(y_\delta) . \quad (4.3)$$

I precedenti passi mostrano che la tecnica di regolarizzazione descrive il passaggio da un problema mal posto in $M(P)$ ad un problema ben posto in $M^{(\alpha)}(P)$. Questo approccio non tiene conto però degli ulteriori stadi del procedimento di risoluzione computazionale che dal problema reale P conduce alla realizzazione dell'algoritmo $A(P)$, alla base di un elemento di software matematico $S(P)$.

Sulla base dello schema di approssimazione numerica, descritto nella Sezione 3.2, esponiamo adesso le restanti fasi del procedimento di risoluzione computazionale del problema:

$M_h^{(\alpha)}(P)$:: Si vuole introdurre il problema discreto $M_h^{(\alpha)}(P)$. Se il problema matematico $M^{(\alpha)}(P)$ é già discreto, poniamo

$$M_h^{(\alpha)}(P) \equiv M^{(\alpha)}(P) , \quad (4.4)$$

altrimenti assumiamo che $M^{(\alpha)}(P)$ sia discretizzato formalmente mediante l'introduzione di un operatore (*di discretizzazione*)

$$D_h : x_\alpha \rightarrow x_{\alpha,h} , \quad (4.5)$$

e poniamo

$$D_h \circ R_\alpha \equiv R_{\alpha,h} : y \rightarrow x_{\alpha,h} . \quad (4.6)$$

Ci si aspetta che $R_{\alpha,h}$ sia una buona approssimazione di R_α , cioè che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_{\alpha,h}(y_\delta) - R_\alpha(y_\delta)\|_X = 0 \quad \forall y_\delta \in Y . \quad (4.7)$$

La soluzione

$$x_{\alpha,h}^\delta = R_{\alpha,h}(y_\delta) \quad (4.8)$$

rappresenta la *soluzione discreta* del problema $M(P)$.

$A(P)$:: Infine il problema matematico discreto $M_h^{(\alpha)}(P)$ é descritto mediante un algoritmo $A(P)$ implementato in un sistema aritmetico \mathbb{F} a precisione finita u , ovvero formalmente mediante l'introduzione di un operatore (*di round-off* o *di condizionamento*)

$$C_u : x_{\alpha,h} \rightarrow x_{\alpha,h,u} := x_{\alpha,h}(1 + \sigma_{\alpha,h,u} u) , \quad (4.9)$$

con $\sigma = \sigma_{\alpha,h,u}$, quantità dipendente dal condizionamento di $R_{\alpha,h}$, dalla

precisione u e dalla stabilità dell'algoritmo $A(P)$ ¹, e tale che

$$C_u \circ R_{\alpha,h} \equiv R_{\alpha,h,u} : y \rightarrow x_{\alpha,h,u} . \quad (4.10)$$

La soluzione

$$x_{\alpha,h,u}^\delta = R_{\alpha,h,u}(y_\delta) \quad (4.11)$$

rappresenta la *soluzione numerica* al problema $M(P)$. Infine si deve avere:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \|R_{\alpha,h,u}(y_\delta) - R_{\alpha,h}(y_\delta)\|_X = 0 \quad \forall y_\delta \in Y . \quad (4.12)$$

La relazione (4.12) vuol significare che, supponendo di avere a disposizione un sistema aritmetico a precisione infinita ($u = 0$), non ci sono errori di round-off e la soluzione numerica viene a coincidere con la soluzione discreta.

Per quanto riguarda l'ordine di grandezza di σ si osservi che l'algoritmo è l'implementazione del metodo numerico. Pertanto deve riflettere in termini di amplificazione dell'errore δ almeno le caratteristiche del modello discreto. Ovvero durante l'esecuzione dell'algoritmo, oltre alla naturale amplificazione dell'errore δ dovuta al fattore $\mu(R_{\alpha,h})$, condizionamento del problema discreto, intervengono anche altri errori (vedi (a2) in nota 1). Questo ci permette di assumere che

$$\sigma \geq \mu(R_{\alpha,h}) , \quad (4.13)$$

¹Con stabilità dell'algoritmo intendiamo il grado di sensibilità che lo stesso algoritmo ha rispetto

- (a1) alle perturbazioni sui dati iniziali, affetti sia dall'errore di perturbazione che dall'errore di rappresentazione in \mathbb{F} ;
- (a2) agli errori commessi durante l'esecuzione di ogni singola operazione dell'algoritmo in \mathbb{F} .

La sensibilità è studiata attraverso il fattore σ , che misura quanto la perturbazione totale introdotta sul dato y si amplifica sulla soluzione calcolata da $A(P)$ in \mathbb{F} .

e in particolare²

$$\sigma = k_{Alg} \cdot \mu(R_{\alpha,h}) , \quad (4.14)$$

con $k_{Alg} \geq 1$ costante dipendente unicamente dall'algoritmo.

L'introduzione degli operatori D_h (discretizzazione) e C_u (condizionamento) permette di rappresentare formalmente ogni fase del procedimento di risoluzione computazionale del problema. Attraverso il quadro generale descritto possiamo guardare al significato di regolarizzazione in senso piú ampio ed introdurre il concetto di regolarizzazione numerica. A partire dalle definizioni in (4.5) e (4.9) possiamo quindi dare la seguente:

Definizione 4.2.1

*Sia $K : X \rightarrow Y$ un operatore invertibile tra due spazi di Hilbert. Siano inoltre \mathbb{F} un sistema aritmetico a precisione finita, con massima accuratezza relativa u , e $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ una famiglia di operatori regolarizzanti nel senso della **Definizione 1.3.1**. Allora la famiglia di operatori $\{R_{\alpha,h,u}\}_{\alpha>0}$,*

$$R_{\alpha,h,u} \equiv C_u \circ D_h \circ R_\alpha : Y \rightarrow X , \quad (4.15)$$

*con D_h e C_u definiti come in (4.5) e (4.9), si definisce **famiglia di operatori numerici regolarizzanti**. Il parametro α é detto **parametro di regolarizzazione numerica**.*

4.2.2 Scelta del parametro di regolarizzazione numerica

Come per la regolarizzazione standard anche qui la scelta del parametro di regolarizzazione gioca un ruolo determinante. Il percorso appena illustrato, comprensivo anche delle fasi descritte in $M_h^\alpha(P)$ e $A(P)$, suggerisce che per fondare un criterio di scelta ottimale del parametro di regolarizzazione, in corrispondenza del quale calcolare la soluzione numerica piú accurata, non ci si

²La fondatezza della (4.13) deriva direttamente dallo studio della stabilità mediante le tecniche di Backward e Forward Error Analysis.

deve limitare a minimizzare il funzionale $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$ così come é definito in (1.8). Per meglio dire, é piú opportuno minimizzare rispetto ad α un funzionale, che possiamo indicare con $\Phi_{\alpha, h, u}[x, y_\delta]$, che **tenga conto di tutti gli errori che insorgono durante il procedimento di risoluzione computazionale del problema**, da $M(P)$ ad $A(P)$. Possiamo esprimere formalmente questa idea mediante la seguente

Definizione 4.2.2

Siano $K : X \rightarrow Y$ un operatore invertibile tra due spazi di Hilbert e $\{R_{\alpha, h, u}\}_{\alpha > 0}$ una famiglia di operatori numerici regolarizzanti. Dato il funzionale

$$\Phi(\alpha) = \Phi_\alpha^{h, u}[x, y_\delta] \quad (4.16)$$

che fornisce una misura degli errori

$$E_{\alpha, h, u}[x, y_\delta] = \|x_{\alpha, h, u}^\delta - x\|_X, \quad (4.17)$$

e

$$RES_{\alpha, h, u}[x, y_\delta] = \|Kx_{\alpha, h, u}^\delta - y_\delta\|_Y. \quad (4.18)$$

Allora (se esiste) il valore

$$\alpha_{numopt} := \operatorname{argmin}_\alpha \Phi_\alpha^{h, u}[x, y_\delta] \quad (4.19)$$

é detto **parametro di regolarizzazione numerica ottimale**.

Il funzionale $\Phi_\alpha^{h, u}[x, y_\delta]$ é detto **funzionale di regolarizzazione numerica** e la soluzione $x_{\alpha_{numopt}, h, u}^\delta$ é detta **soluzione numerica regolarizzata**.

Riguardo la **Definizione 4.2.2** emergono due aspetti:

- In generale u ed h si ritengono fissati. Pertanto

$$\alpha_{numopt} = \alpha_{numopt}(\delta) = \alpha_{numopt}(\delta, h, u).$$

- Se $u \rightarrow 0$ e $h \rightarrow 0$ allora il funzionale $\Phi_\alpha^{h, u}[x, y_\delta]$ diventa un funzionale di regolarizzazione $\Phi_\alpha[x, y_\delta]$, nel senso definito in (1.9), per cui

$$\lim_{h, u \rightarrow 0} \alpha_{numopt}(\delta, h, u) = \alpha_{opt}(\delta).$$

Infine la soluzione numerica regolarizzata tende alla soluzione regolarizzata

$$\lim_{h,u \rightarrow 0} x_{\alpha_{numopt},h,u}^{\delta} = x_{\alpha_{opt}}^{\delta} .$$

Nel seguito, nei casi che non costituiscono ambiguitá, il parametro di regolarizzazione numerica α_{numopt} e la soluzione numerica regolarizzata $x_{\alpha_{numopt},h,u}^{\delta}$ sono indicati rispettivamente con α_{opt} e $x_{\alpha_{opt}}^{\delta}$.

4.2.3 L'insieme di applicabilitá numerica

La soluzione numerica regolarizzata rappresenta quindi la migliore soluzione calcolabile dall'algoritmo $A(P)$, nel senso indotto dal funzionale di regolarizzazione numerica $\Phi_{\alpha}^{h,u}[x, y_{\delta}]$. Poiché tale funzionale fornisce una misura dell'errore totale, si può allora affermare che la soluzione numerica regolarizzata $x_{\alpha_{numopt},h,u}^{\delta}$ é la soluzione calcolata che fornisce la *massima accuratezza possibile*. Diamo a tal proposito la seguente:

Definizione 4.2.3

Sia α_{numopt} come in (4.19). Allora la quantitá

$$\epsilon^* = \Phi_{\alpha_{numopt}}^{h,u}[x, y^{\delta}] \tag{4.20}$$

é definita **massima accuratezza ottenibile**.

Lo schema proposto permette di stabilire (a posteriori) se la massima accuratezza ottenibile é tale da ritenere o meno la soluzione numerica regolarizzata una soluzione sufficientemente accurata al problema.

In generale questo concetto può essere esteso ad un qualunque problema che rientra nei canoni del procedimento di risoluzione computazionale descritto nel paragrafo 4.2.1. In effetti, una volta stabilita una soglia (richiesta in accuratezza) *tol*, che definisce il massimo errore ammissibile, si può cercare nell'insieme

Y , quali y_δ diano luogo a soluzioni numeriche regolarizzate $x_{\alpha_{numopt},h,u}^\delta$, per le quali si abbia

$$\epsilon^* \leq tol . \quad (4.21)$$

Viene stabilito un criterio per misurare la bontá della soluzione e decidere dell'applicabilitá numerica dell'operatore K^{-1} . Si osservi che, nel caso in cui K sia un operatore lineare, una scelta coerente della richiesta in accuratezza deve essere basata sull'ordine di grandezza del dato y_δ . Cioé in generale ha senso richiedere che $tol = tol(\|y_\delta\|_Y)$. Sulla base di questa considerazione, possiamo introdurre infine il seguente concetto.

Definizione 4.2.4

L'insieme

$$N_{app} = \{y_\delta \in Y : \epsilon^* \leq tol(\|y_\delta\|_Y)\} . \quad (4.22)$$

é definito insieme di applicabilitá numerica dell'operatore K^{-1} .

Attraverso l'insieme N_{app} si intende stabilire un confine tra l'applicabilitá teorica (Y) e applicabilitá numerica dell'operatore K^{-1} . Ovvero stabilito che l'operatore K^{-1} é ben definito per un certo dato y_δ , si tratta di verificare se lo schema di approssimazione numerica derivante da K^{-1} é in grado di calcolare una soluzione "sufficientemente" accurata.

4.3 Regolarizzazione della formula d'inversione

La regolarizzazione numerica viene qui posta alla base per la trattazione numerica della formula d'inversione. Si tratta adesso di riuscire ad identificare lo schema numerico introdotto nel **Capitolo 3** con gli aspetti piú generali discussi nella Sezione 4.2. Si parte dalla seguente

Proposizione 4.3.1

La famiglia di operatori $\{\mathcal{T}_{\bar{\omega}}\}_{\bar{\omega}>0}$ definiti come in (3.21) costituisce una famiglia di operatori regolarizzanti.

Dimostrazione

Per ogni $\alpha > 0$ poniamo $R_\alpha \equiv \mathcal{T}_{\alpha^{-1}}$. Si tratta di mostrare che per R_α valgono le proprietá degli operatori regolarizzanti **(RS)** e **(RC)**. Per quel che riguarda la **(RS)** dal **Teorema 3.3.1** si ha

$$\mu(R_\alpha) = \mu(\mathcal{T}_{\alpha^{-1}}) \simeq \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \nu(Q^h) e^{\pi/(2\alpha)} < \infty . \quad (4.23)$$

Mentre per la **(RS)** si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(F)(t) - f(t) &= \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F)(t) - f(t) = \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} f_{\bar{\omega}}(t) - f(t) = 0 \\ &\forall F, f \in L_w^1(\mathcal{R}^+) \text{ e } \forall t \in \mathcal{R}^+ , \end{aligned} \quad (4.24)$$

che prova la tesi. □

La precedente osservazione sostanzialmente afferma che effettuare il **Passo 1** del metodo numerico equivale ad applicare alla formula d'inversione una tecnica di regolarizzazione (per troncamento). Tuttavia si deve qui tenere conto anche dei **Passi 2 e 3** dello schema di approssimazione numerica. In particolare:

- (i) nel Passo 2 il valore di $f_{\bar{\omega}}(t)$ é calcolata mediante quadratura, ovvero si applica a $f_{\bar{\omega}}(t)$ un operatore di discretizzazione D_h del tipo definito in (4.5), cioè $D_h \equiv \mathcal{D}_h$.
- (ii) nel Passo 3, analogamente, il valore di $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ é calcolato in un sistema aritmetico a precisione finita, ovvero si applica a $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ un operatore di condizionamento C_u del tipo definito in (4.9), cioè $C_u \equiv \mathcal{C}_u$.

A partire dalla **Proposizione 4.3.1**, da (i) e (ii) resta provata la validità della seguente:

Proposizione 4.3.2

La famiglia di operatori

$$\mathcal{C}_u \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\bar{\omega}} : F \rightarrow f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t), \quad \bar{\omega} \in \mathcal{R}^+, \quad (4.25)$$

costituisce una famiglia di operatori numerici regolarizzanti.

□

4.3.1 Il funzionale di regolarizzazione $\Psi(\omega)$

Una volta che é stata stabilita la forma degli operatori numerici regolarizzanti si vuol provvedere a fornire un criterio di scelta del parametro di regolarizzazione numerica ottimale. Una scelta opportuna del parametro é basata sulla minimizzazione di un funzionale (di regolarizzazione numerica) che tenga conto di tutto l'errore globalmente commesso. A tal fine consideriamo la definizione di errore globale. Si osserva preliminarmente che:

Proposizione 4.3.3

Supposto che $f, f_{\bar{\omega}}^{h,u} \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$ allora si ha

$$\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}[F, f] = \|\sqrt{t}GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)\|_{\infty} = \sup_{t>0} \sqrt{t}|f(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| < +\infty. \quad (4.26)$$

Dimostrazione

Si ha che $GE_{\bar{\omega}}^{h,u} = f - f_{\bar{\omega}}^{h,u} \in L^1_w(\mathbb{R}^+)$, cioè $g(t) := t^{-1/2}GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ é sommabile in \mathbb{R}^+ . Cosí, dalle condizioni di sommabilitá per $g(t)$ all'infinito e in 0, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot g(t) = 0 . \quad (4.27)$$

Dalla (4.27) deriva la limitatezza di $t \cdot g(t) = \sqrt{t}|GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)|$ in \mathbb{R}^+ , cioè la tesi. \square

La relazione (4.26) mostra che $\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}$ é un funzionale che misura l'errore e potrebbe perciò essere scelto come funzionale di regolarizzazione numerica. Tuttavia il valore di $GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ non é noto, cosí come l'espressione del funzionale $\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}$. Introduciamo adesso un opportuno funzionale di regolarizzazione $\Psi(\bar{\omega})$ che sia una stima di $\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}$.

Teorema 4.3.1 (*Stima dell'errore globale*)

Nelle ipotesi dei Teoremi 3.2.1, 3.2.2 e 3.3.1, per l'errore globale si ha:

$$|GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq \frac{TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega})}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}(h^{k+1}) \quad \forall t, \bar{\omega} . \quad (4.28)$$

Inoltre, definito $\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}[F, f]$ come in (4.26), si ha:

$$\Phi_{\bar{\omega}}^{h,u}[F, f] \leq TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega}) + \mathcal{O}(h^{k+1}) . \quad (4.29)$$

Dimostrazione

Dalla definizione di errore globale:

$$GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = f(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = TE_{\bar{\omega}}(t) + DE_{\bar{\omega}}^h(t) + CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) . \quad (4.30)$$

Dalla (4.30) e dalle stime in (3.49) e (3.74), $\forall t, \omega \in \mathbb{R}^+$:

$$|GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq |TE_{\bar{\omega}}(t)| + |DE_{\bar{\omega}}^h(t)| + |CE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq \frac{TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega})}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}(h^{k+1}) ,$$

che prova la (4.28). Da questa, moltiplicando per \sqrt{t} ,

$$\sqrt{t}|GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)| \leq TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega}) + \mathcal{O}(h^{k+1})$$

e passando all'estremo superiore si ha la (4.29). \square

La (4.29) mostra che, a meno di $\mathcal{O}(h^{k+1})$, la quantità $TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega})$ può essere riguardata come una misura dell'errore globale, pertanto su di essa ricade la scelta di funzionale di regolarizzazione.

Definizione 4.3.1

Il funzionale

$$\Psi(\bar{\omega}) = TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega}) \quad (4.31)$$

rappresenta il funzionale di regolarizzazione numerica per la formula d'inversione (2.48).

4.3.2 L'insieme di applicabilità numerica: condizioni sufficienti

Dalle espressioni di $TB(\bar{\omega})$ e $CB(\bar{\omega})$ si ottiene una basilare proprietà del funzionale di regolarizzazione $\Psi(\bar{\omega})$. Si ha:

Proposizione 4.3.4

Il funzionale di regolarizzazione $\Psi(\bar{\omega})$ è una funzione convessa del parametro $\bar{\omega}$.

Dimostrazione

Da (3.48) se $TB(\bar{\omega})$ decade esponenzialmente:

$$\Psi(\bar{\omega}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} e^{-C_2^a \bar{\omega}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \bar{\omega} \Theta e^{\pi \bar{\omega}/2}, \quad (4.32)$$

da cui

$$\Psi^{(2)}(\bar{\omega}) = C_2^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} e^{-C_2^a \bar{\omega}} + \left(\pi + \bar{\omega} \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Theta e^{\pi \bar{\omega}/2} \geq 0. \quad (4.33)$$

Mentre, se $TB(\bar{\omega})$ decade polinomialmente si ha

$$\Psi(\bar{\omega}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} \bar{\omega}^{-C_2^b} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \bar{\omega} \Theta e^{\pi\bar{\omega}/2}, \quad (4.34)$$

da cui

$$\Psi^{(2)}(\bar{\omega}) = C_2^b(C_2^b + 1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} \bar{\omega}^{-C_2^b-2} + \left(\pi + \bar{\omega} \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Theta e^{\pi\bar{\omega}/2} \geq 0. \quad (4.35)$$

In entrambi i casi $\Psi(\bar{\omega})^{(2)} \geq 0$, condizione sufficiente alla convessità. \square

Le proprietà di convessità e di non limitatezza all'infinito garantiscono l'esistenza di un punto di minimo per $\Psi(\bar{\omega})$ in $[0, +\infty[$. In particolare, in conformità con lo schema descritto nella Sezione 4.2, diamo la seguente:

Definizione 4.3.2

Il valore

$$\omega_{opt} = \operatorname{argmin}_{\bar{\omega}} \Psi(\bar{\omega}) \quad (4.36)$$

é il parametro di regolarizzazione numerica ottimale per la formula d'inversione (2.48). Il corrispondente valore di $\Psi(\bar{\omega})$,

$$\epsilon^* = \Psi(\omega_{opt}), \quad (4.37)$$

é detto massima accuratezza ottenibile e la soluzione

$$f_{\omega_{opt}}(t) := f_{\omega_{opt}}^{h,u}(t) \quad (4.38)$$

é la soluzione numerica regolarizzata.

Si osserva che il valore di ϵ^* , che fornisce il valor minimo della stima dell'errore globale, dipende dalla trasformata F e, in particolare, dall'ordine di grandezza di F , una cui misura é data da $\|F\|_{L_w^1}$. Ciò suggerisce di definire l'insieme di applicabilità numerica, ponendo in (4.22),

$$\operatorname{tol}(\|y_\delta\|_Y) = \|F\|_{L_w^1}.$$

Per cui si ha:

Definizione 4.3.3

L'insieme

$$\mathcal{N}_{app} = \{F \in L_w^1(\mathbb{R}^+) \text{ t.c. } \epsilon^* \leq \|F\|_{L_w^1}\} \quad (4.39)$$

costituisce l'insieme di applicabilità numerica della formula d'inversione (2.48).

Con la precedente definizione si vuole intendere che la formula d'inversione (2.48) é applicabile numericamente se la sua approssimazione numerica, $f_{\omega_{opt}}(t)$, fornisce una migliore accuratezza ottenibile il cui ordine di grandezza scala con quello della trasformata F (e della sua inversa f). Il seguente teorema, dá una condizione sufficiente su F per la sua appartenenza a \mathcal{N}_{app} .

Teorema 4.3.2

Siano $F, f \in L_w^1(\mathbb{R}^+)$. Se $F \geq 0$

$$N(\omega) \leq C_1 e^{-C_2 \omega} \quad \text{con} \quad C_2 > \frac{2\pi}{\pi^2 - 4} \simeq 1.07 \quad (4.40)$$

e $\delta \nu(Q^h) < \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ allora ϵ^* può essere stimato come

$$\epsilon^* < \|F\|_{L_w^1} \frac{4C_2 + 2\pi}{\pi^2 C_2} < \|F\|_{L_w^1} . \quad (4.41)$$

In particolare F appartiene a \mathcal{N}_{app} .

Dimostrazione

Da $F \geq 0$ si ha

$$\|F\|_{L_w^1} = |c^+(0)| = N(0)\lambda^+(0) \leq C_1 \lambda^+(0) = C_1 \sqrt{\pi} , \quad (4.42)$$

da cui $C_1 \simeq \frac{\|F\|_{L_w^1}}{\sqrt{\pi}}$. Mentre da (3.48) e (3.75), si ha:

$$\Psi(\bar{\omega}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{2} \frac{C_1}{C_2} e^{-C_2 \bar{\omega}} + \frac{\|F\|_{L_w^1}}{\sqrt{\pi}} \delta \nu(Q^h) e^{\pi \bar{\omega}/2} \right) \leq \quad (4.43)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}}{C_2} \frac{\|F\|_{L_w^1}}{\sqrt{\pi}} e^{-C_2 \bar{\omega}} + \frac{\|F\|_{L_w^1}}{\sqrt{\pi}} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{\pi \bar{\omega}/2} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\|F\|_{L_w^1}}{C_2} \left(e^{-C_2 \bar{\omega}} + \frac{2C_2}{\pi} e^{\pi \bar{\omega}/2} \right) . \quad (4.44)$$

Si osserva ora che per $A, B, C, D > 0$ la funzione

$$\vartheta(x) = Ae^{-Bx} + Ce^{Dx} \quad (4.45)$$

ammette, in $[0, +\infty]$, un punto di minimo assoluto in

$$x = \frac{\ln AB/CD}{B+D} \quad \text{se } AB \geq CD \quad \text{oppure} \quad x = 0 \quad \text{se } AB < CD. \quad (4.46)$$

Il valore di $\vartheta(x)$ in tale minimo é nel primo caso

$$\min_x \vartheta(x) = \vartheta\left(\frac{\ln AB/CD}{B+D}\right) = \frac{C}{B}(D+B) \left(\frac{AB}{CD}\right)^{\frac{D}{D+B}}, \quad (4.47)$$

e nel secondo

$$\min_x \vartheta(x) = \vartheta(0) = A + C. \quad (4.48)$$

Ponendo $A = 1$, $B = C_2$, $C = \frac{2C_2}{\pi}$ e $D = \frac{\pi}{2}$, risulta

$$A + C = \frac{C}{B}(D+B) = \frac{2C_2 + \pi}{\pi} \quad e \quad \frac{AB}{CD} = 1, \quad (4.49)$$

da cui si ha:

$$\epsilon^* = \min \Psi(\bar{\omega}) \leq \frac{2}{\pi} \frac{\|F\|_{L_w^1}}{C_2} \min_{\bar{\omega}} \left(e^{-C_2 \bar{\omega}} + \frac{2C_2}{\pi} e^{\pi \bar{\omega}/2} \right) = \quad (4.50)$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{\|F\|_{L_w^1}}{C_2} \frac{2C_2 + \pi}{\pi} = \|F\|_{L_w^1} \frac{4C_2 + 2\pi}{\pi^2 C_2}. \quad (4.51)$$

Infine da $C_2 > \frac{2\pi}{\pi^2 - 4}$ segue $\frac{4C_2 + 2\pi}{\pi^2 C_2} < 1$, da cui la tesi. \square

Dal **Teorema 4.3.2** si deduce che l'insieme \mathcal{N}_{app} é non vuoto: infatti é facile verificare che le funzioni $F_1^{N,a}$ della prima classe, definite nella Sezione 2.5, soddisfano l'ipotesi (4.40). Gli esperimenti numerici nel prossimo capitolo confermano la stima teorica (4.41).

Un'ultima osservazione riguarda il significato del valore ϵ^* . Dalla (4.28), omettendo l'errore di discretizzazione $\mathcal{O}(h^{k+1})$ e utilizzando la definizione di massima accuratezza ottenibile, si ha

$$GE_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) \leq \frac{\epsilon^*}{\sqrt{t}}.$$

Quindi ϵ^* **rappresenta una stima dell'errore globale uniforme rispetto a \sqrt{t}** . Da ciò discende che:

- in vicinanza di $t = 0$, la soluzione numerica regolarizzata é sempre meno accurata, ciò rappresenta un limite del metodo numerico descritto;
- per grandi valori di t ($t \rightarrow \infty$), la stima dell'errore globale é molto piccola, ma tale é anche la soluzione teorica f per stare in $L_w^1(\mathbb{R}^+)$. Ovvero il metodo é certamente accurato laddove la soluzione *svanisce*.

4.4 Un nucleo computazionale per la regolarizzazione numerica

Nella metodologia della regolarizzazione numerica il parametro ottimale, la soluzione numerica regolarizzata ed il funzionale di regolarizzazione dipendono, anche, da quantità calcolabili a posteriori. Nel caso della formula d'inversione (2.48) le quantità che devono essere determinate sono le funzioni $TB(\bar{\omega})$ e $CB(\bar{\omega})$ o, più precisamente, i parametri che le caratterizzano. In questa sezione ci vogliamo occupare della realizzazione di un nucleo computazionale basato sulla tecnica di regolarizzazione numerica descritta. Alla base dell'implementazione del nucleo computazionale assume rilevanza fondamentale la tecnica mediante la quale sono effettivamente stimate le quantità $TB(\bar{\omega})$, $CB(\bar{\omega})$ e ω_{opt} . Una volta che si é fornita una stima computazionale di $TB(\bar{\omega})$, $CB(\bar{\omega})$ e ω_{opt} , restano automaticamente determinate, seguendo i Passi 1-3, la soluzione numerica regolarizzata $f_{\omega_{opt}}(t)$, la massima accuratezza ottenibile ϵ^* e la stima dell'errore globale $\frac{\epsilon^*}{\sqrt{t}}$. Il seguente schema riassume i principali passi che costituiscono il nucleo computazionale che realizza la regolarizzazione numerica.

1. Stima computazionale di $\Psi(\bar{\omega})$:
 - (i) Stima computazionale di $TB(\bar{\omega})$;
 - (ii) Stima computazionale di $CB(\bar{\omega})$;
2. Stima computazionale di ω_{opt} mediante $\Psi(\bar{\omega})$
e della massima accuratezza ottenibile $\epsilon^* = \Psi(\omega_{opt})$.
3. Calcolo della soluzione numerica regolarizzata $f_{\omega_{opt}}(t)$
e della stima dell'errore globale $\frac{\epsilon^*}{\sqrt{t}}$ seguendo i Passi 1-3 .

Nucleo computazionale di regolarizzazione numerica.

4.4.1 1. Stima computazionale del funzionale $\Psi(\omega)$

Il primo punto nel nucleo computazionale di regolarizzazione numerica riguarda la determinazione di una stima computazionale del funzionale $\Psi(\omega)$. Essendo

$$\Psi(\bar{\omega}) = TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega})$$

si deve allora provvedere a stimare i parametri che caratterizzano $TB(\bar{\omega})$ e $CB(\bar{\omega})$.

(i) Stima computazionale di $TB(\bar{\omega})$

Per ottenere una stima computazionale di $TB(\bar{\omega})$, si utilizzano le assunzioni, relative al comportamento asintotico della funzione $N(\omega)$, fatte nel **Capitolo 3**. Poniamo

$$(a) \quad N(\omega) = C_1 e^{-C_2 \omega} \quad \text{oppure} \quad (b) \quad N(\omega) = C_1 \omega^{-(C_2+1)}. \quad (4.52)$$

Il comportamento asintotico tra (a) e (b) piú verosimile é estrapolato campionando la funzione $N(\omega)$ e utilizzando un procedimento di approssimazione ai minimi quadrati. Piú nel dettaglio:

- dati m valori $\omega_i = 0.1 \cdot i$ si campionano i valori $N_i = N(\omega_i)$;
- successivamente:

- (a) Si cerca tra le funzioni "modello" del tipo $y_a(\omega) = C_1 e^{-C_2 \omega}$ quella che "meglio" approssima i dati N_i nei punti ω_i . La bontá dell'approssimazione é misurata nella norma

$$E^{(a)}(C_1, C_2) = \sum_{i=1}^m [\ln C_1 - C_2 \omega_i - \ln N(\omega_i)]^2. \quad (4.53)$$

In effetti $E^{(a)}(C_1, C_2)$ misura in norma-2 la distanza tra i punti $(\omega_i, \ln N_i)$ e i punti $(\omega_i, \ln C_1 - C_2 \omega_i)$, che giacciono sulla retta di equazione

$$r_a(x) = \ln y_a(x) = \ln C_1 e^{-C_2 x} = \ln C_1 - C_2 x ,$$

cioé $E^{(a)}(C_1, C_2)$ misura la distanza tra i dati e la funzione modello in scala semi-logaritmica. Tale scelta apporta una notevole semplificazione del modello di approssimazione: infatti indicata con

$$(C_1^a, C_2^a) = \operatorname{argmin} E^{(a)}(C_1, C_2) , \quad (4.54)$$

la soluzione ottenuta risolvendo il problema di approssimazione ai minimi quadrati, si ha esplicitamente:

$$C_1^a = \exp \frac{\sum \omega_i \cdot \sum (\omega_i \ln N_i) - \sum \omega_i^2 \cdot \sum \ln N_i}{(\sum \omega_i)^2 - m \sum \omega_i^2} \quad (4.55)$$

e

$$C_2^a = \frac{m \sum (\omega_i \ln N_i) - \sum \omega_i \cdot \sum \ln N_i}{(\sum \omega_i)^2 - m \sum \omega_i^2} \quad (4.56)$$

dove tutte le somme sono intese per $i = 1, \dots, m$.

- (b) Si cerca tra le funzioni "modello" del tipo $y_b(\omega) = C_1 \omega^{-(C_2+1)}$ quella che "meglio" approssima i dati N_i nei punti ω_i . In questo caso l'approssimazione é misurata nella norma

$$E^{(b)}(C_1, C_2) = \sum_{i=1}^m [\ln C_1 - (C_2 + 1) \ln \omega_i - \ln N_i]^2 . \quad (4.57)$$

$E^{(b)}(C_1, C_2)$ misura in norma-2 la distanza tra i punti $(\ln \omega_i, \ln N_i)$ e i punti $(\ln \omega_i, \ln C_1 - (C_2+1) \ln \omega_i)$, che giacciono sulla retta di equazione

$$r_b(x) = \ln y_b(e^x) = \ln C_1 e^{-x(C_2+1)} = \ln C_1 - (C_2 + 1)x ,$$

ovvero $E^{(b)}(C_1, C_2)$ misura in scala logaritmica la distanza tra i dati e la funzione modello. Indicata con

$$(C_1^b, C_2^b) = \operatorname{argmin} E^{(b)}(C_1, C_2), \quad (4.58)$$

la soluzione ottenuta risolvendo il problema di approssimazione ai minimi quadrati, si ha esplicitamente:

$$C_1^b = \exp \frac{\sum \ln \omega_i \cdot \sum (\ln \omega_i \ln N_i) - \sum (\ln \omega_i)^2 \cdot \sum \ln N_i}{(\sum \ln \omega_i)^2 - m \sum (\ln \omega_i)^2} \quad (4.59)$$

e

$$C_2^b = -1 + \frac{m \sum (\ln \omega_i \ln N_i) - \sum \ln \omega_i \cdot \sum \ln N_i}{(\sum \ln \omega_i)^2 - m \sum (\ln \omega_i)^2} \quad (4.60)$$

dove ancora le somme sono intese per $i = 1, \dots, m$.

- Tra le due funzioni modello individuate

$$y_a(\omega) = C_1^a e^{-C_2^a \omega} \quad e \quad y_b(\omega) = C_1^b \omega^{-(C_2^b+1)} \quad (4.61)$$

si sceglie quella che, nel senso delle norme introdotte $E^{(a)}(C_1, C_2)$ e $E^{(b)}(C_1, C_2)$, offre una migliore approssimazione dei dati a disposizione N_i ($i = 1 \dots, m$).

Se $E^{(a)}(C_1^a, C_2^a) \leq E^{(b)}(C_1^b, C_2^b)$ allora si pone

$$N(\omega) \leq y_a(\omega) = C_1^a e^{-C_2^a \omega} \quad (4.62)$$

altrimenti

$$N(\omega) \leq y_b(\omega) = C_1^b \omega^{-(C_2^b+1)}. \quad (4.63)$$

- Infine la stima computazionale di $TB(\bar{\omega})$ é una "coerente" realizzazione del **Teorema 3.2.2**, definita sinteticamente come:

$$TB(\bar{\omega}) := \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} e^{-C_2^a \bar{\omega}} & \text{se } E^{(a)}(C_1^a, C_2^a) \leq E^{(b)}(C_1^b, C_2^b) \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^b}{C_2^b} \bar{\omega}^{-C_2^b} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(ii) Stima computazionale di $CB(\bar{\omega})$

Resta ora da stimare $CB(\bar{\omega})$. Dalla (3.75) si ha l'espressione

$$CB(\bar{\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \|F\|_{L_w^1} \delta \nu(Q^h) e^{\pi\bar{\omega}/2} . \quad (4.64)$$

Per ottenere dalla (4.64) una stima computazionale di $CB(\bar{\omega})$ si osserva preliminarmente che

- l'indice di condizionamento $\nu(Q^h)$ dipende dalla formula di quadratura utilizzata. Possiamo supporre di utilizzare una formula *ben condizionata* [18], ovvero una formula per la quale si abbia

$$\nu(Q^h) = \bar{\omega} . \quad (4.65)$$

- Il valore $\theta = \|F\|_{L_w^1} \cdot \delta$ rappresenta l'errore (round-off e discretizzazione) presente nel calcolo dei coefficienti $c^\pm(\omega)$. Una misura di tale errore la si può ottenere dall'osservazione dell'andamento dei valori

$$c(\omega_i) = \sqrt{c^+(\omega_i)^2 + c^-(\omega_i)^2} , \quad \omega_i = i \cdot 0.1 \quad e \quad i = 1 : \dots , m .$$

In Figura 4.2 accanto all'andamento effettivo di tali valori é riportato l'andamento dei corrispondenti valori calcolati: i coefficienti $c(\omega_i)$, in accordo con il **Teorema 2.5.2**, decadono esponenzialmente, mentre i relativi valori calcolati, indicati con $cp(\omega_i)$ decadono come i valori $c(\omega_i)$ solo fino ad un certo punto. Da quel punto in poi, in corrispondenza di un particolare valore ω_j , mantengono un ordine di grandezza pressoché costante. Sostanzialmente $cp(\omega_j)$ può essere ritenuto l'ultimo valore attendibile in quanto l'errore presente sui $cp(\omega_j)$ avrà questo ordine di grandezza, cioè

$$\Theta = cp(\omega_j) . \quad (4.66)$$

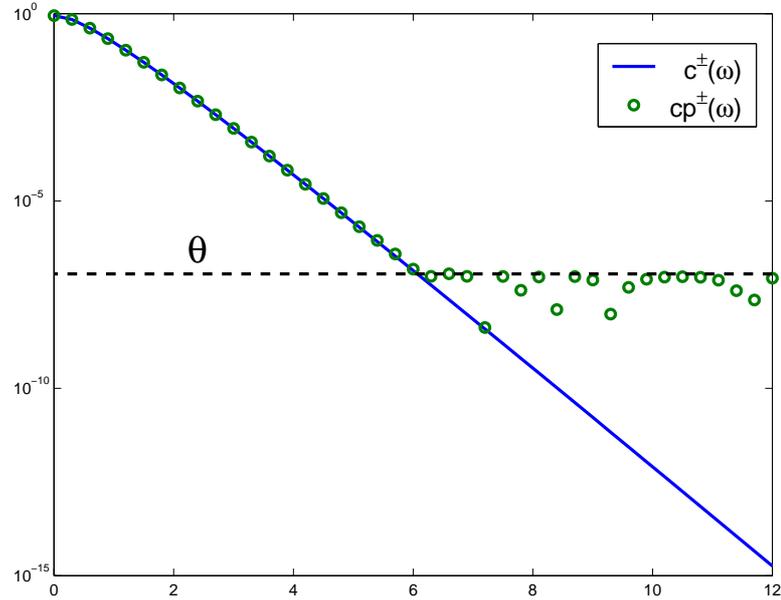


Figura 4.2: Andamento effettivo e corrispondenti valori calcolati ($cp(\omega)$) della funzione $c(\omega) = \sqrt{c^+(\omega)^2 + c^-(\omega)^2}$ in $[0, 12]$. I valori sono relativi alla funzione antitrasformata $f_1(t) = te^{-t}$.

Tenendo conto della (4.65) e della (4.66) otteniamo infine la seguente stima computazionale per $CB(\bar{\omega})$

$$CB(\bar{\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \Theta \bar{\omega} e^{\pi\bar{\omega}/2}. \quad (4.67)$$

Il calcolo delle stime computazionali di $TB(\bar{\omega})$, $CB(\bar{\omega})$ e conseguentemente di $\Psi(\bar{\omega})$ permettono di dettagliare infine il **Passo 1** del nucleo computazionale mediante il seguente schema

1. minimizza $E^{(a)}(C_1, C_2)$
2. minimizza $E^{(b)}(C_1, C_2)$
3. if ($E^{(a)}(C_1^a, C_2^a) \leq E^{(a)}(C_1^b, C_2^b)$)
4. valuta $TB(\bar{\omega}) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} e^{-C_2^a \bar{\omega}}$
5. else
6. valuta $TB(\bar{\omega}) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1^a}{C_2^a} \bar{\omega}^{-C_2^b}$
7. endif
8. campiona i valori $c(\omega_i) = \sqrt{c^+(\omega_i)^2 + c^-(\omega_i)^2}, i = 1, \dots, m$ con $\omega_i = i \cdot 0.1$
9. stima $\Theta = cp(\omega_j)$
10. valuta $CB(\bar{\omega}) := \frac{\sqrt{2}}{\pi} \bar{\omega} \Theta e^{\pi \bar{\omega}/2}$
11. valuta $\Psi(\bar{\omega}) := CB(\bar{\omega}) + TB(\bar{\omega})$

Algoritmo 1: Schema computazionale per il calcolo di $\Psi(\bar{\omega})$.

4.4.2 2. Stima computazionale del parametro ω_{opt}

Si vuole descrivere come é stimato computazionalmente il parametro ottimale di regolarizzazione numerica ω_{opt} . L'osservazione basilare é che la funzione $\Psi(\bar{\omega})$ é convessa (**Proposizione 4.3.4**), pertanto si tratta di affrontare il problema del calcolo numerico del minimo di una funzione convessa. Quindi, per determinare una approssimazione del minimo di $\Psi(\bar{\omega})$, é sufficiente tabulare la funzione in un numero finito di punti, in modo da determinare il primo valore dopo il quale la funzione comincia a crescere. Nel dettaglio

- assegnati m valori $\bar{\omega}_i = h \cdot i$ con $i = 1, \dots, m$ e $h = 0.1$, si tabula $\Psi(\bar{\omega})$ in tali punti;
- si assume $\widetilde{\omega}_{opt} = \omega_j$ dove

$$j = \min\{1 \leq i \leq m - 1 \mid \Psi(\bar{\omega}_i) \leq \Psi(\bar{\omega}_{i+1})\}.$$

- si assume che la stima computazionale della massima accuratezza ottenibile é data da

$$\tilde{\epsilon}^* = \Psi(\widetilde{\omega}_{opt}) .$$

La bontá delle approssimazione offerte da $\widetilde{\omega}_{opt} = \omega_j$ e $\tilde{\epsilon}^*$ dipende da h . Si ha:

$$\widetilde{\omega}_{opt} = \omega_{opt} + \Delta\omega_{opt}$$

con

$$\Delta\omega_{opt} = \mathcal{O}(h) .$$

Essendo $h = 0.1$ si ottiene una approssimazione di ω_{opt} corretta fino alla prima cifra decimale. Per quanto riguarda la massima accuratezza ottenibile, considerando lo sviluppo in serie di Taylor di $\Psi(\bar{\omega})$ di punto iniziale ω_{opt} , si ha:

$$\Psi(\widetilde{\omega}_{opt}) = \Psi(\omega_{opt}) + \Psi'(\omega_{opt})\Delta\omega_{opt} + \Psi^{(2)}(\xi)\Delta\omega_{opt}^2 .$$

Se $\omega_{opt} > 0$, dal **Teorema di Fermat** risulta $\Psi'(\omega_{opt}) = 0$, quindi

$$\tilde{\epsilon}^* = \epsilon^* + \mathcal{O}(h^2) .$$

Tale stima é sufficientemente accurata. Le stime computazionali sono riassunta nel seguente schema:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\omega_0 := 0.1;$ 2. repeat 3. valuta $\Psi(\omega_0);$ 4. $\omega_1 := \omega_0 + 0.1;$ 5. valuta $\Psi(\omega_1);$ 6. $\omega_0 := \omega_1;$ 7. until ($\Psi(\omega_1) < \Psi(\omega_0)$) 8. poni $\omega_{opt} := \omega_0;$ 9. valuta $\epsilon^* = \Psi(\omega_{opt}) := \omega_0;$
--

Algoritmo 2: stima computazionale di ω_{opt} e di ϵ^* .

Capitolo 5

Aspetti implementativi ed esperimenti numerici

5.1 Premessa

In questo capitolo si vuole spiegare come é realizzato lo schema di approssimazione numerica proposto, ovvero si vuole discutere di come avviene il calcolo della soluzione numerica regolarizzata. Nel **Passo 2** dello schema di approssimazione numerica, volendo mantenere un approccio piú generale nell'affrontare il problema, si é deciso di non fissare a priori la formula di quadratura. La scelta della formula di quadratura piú adatta al calcolo degli integrali in (2.48), cosí come la conseguente scelta tra il software disponibile della routine di quadratura, rappresenta una delle principali problematiche nell'implementazione dello schema numerico proposto.

Pertanto, nella prima parte del capitolo, a partire dall'analisi della formula d'inversione, é individuato il tipo di problema numerico associato al calcolo degli integrali in (2.48) e nell'espressione delle proiezioni sulla autofunzioni. Quindi, sulla base dei metodi numerici a disposizione per il tale problema, si decide come selezionare la routine di quadratura piú adatta tra quelle che implementano tali metodi.

Infine nella seconda parte del capitolo sono descritti alcuni esperimenti numerici ottenuti su mirate funzioni test, volti a mostrare e spiegare i diversi risultati ottenibili dalla formula d'inversione su tali funzioni. Tali esperimenti vogliono provare l'*affidabilitá* dello schema numerico proposto nel predire il comportamento dei risultati in funzione della propagazione degli errori ed in particolare nel fornire con la prefissata accuratezza i risultati.

5.2 Calcolo della soluzione numerica regolarizzata $f_{\omega_{opt}}(t)$

Vogliamo mostrare come é valutata la soluzione numerica regolarizzata

$$f_{\omega_{opt}}(t) = \mathcal{C}_u \mathcal{D}_h \mathcal{T}_{\omega_{opt}}(F) , \quad (5.1)$$

definita mediante i passi:

$$\text{Passo 1:} : f_{\bar{\omega}}(t) = \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F);$$

$$\text{Passo 2:} : f_{\bar{\omega}}^h(t) = \mathcal{D}_h(f_{\bar{\omega}}(t));$$

$$\text{Passo 3:} : f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) := \mathcal{C}_u(f_{\bar{\omega}}^h(t)) .$$

Una volta stabilito il valore di $\omega_{opt} := \bar{\omega}$ come descritto dal nucleo computazionale di regolarizzazione numerica, i Passi 2 e 3 sono realizzati mediante l'utilizzo di opportuno software di quadratura, basato su una formula di quadratura che rappresenta \mathcal{D}_h . Osserviamo preliminarmente l'espressione degli integrali presenti in

$$f_{\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} G_F(\omega, t) d\omega \quad t \in \mathfrak{R}^+ . \quad (5.2)$$

Definendo le funzioni ausiliarie:

$$h_1(\omega) = \cos(\theta_\omega/2)c^+(\omega) - \sin(\theta_\omega/2)c^-(\omega) \quad (5.3)$$

e

$$h_2(\omega) = \sin(\theta_\omega/2)c^+(\omega) + \cos(\theta_\omega/2)c^-(\omega) , \quad (5.4)$$

si ha

$$f_{\bar{\omega}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\bar{\omega}} \left[\frac{h_1(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \cos(\omega \ln t) + \frac{h_2(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \sin(\omega \ln t) \right] d\omega \quad (5.5)$$

Pertanto, per ogni fissato punto di valutazione $t := \bar{t}$ della soluzione numerica, si deve affrontare il problema del calcolo numerico degli integrali trigonometrici del tipo

$$\int_0^{\bar{\omega}} \frac{h_1(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \cos(\omega \ln t) d\omega , \quad (5.6)$$

e

$$\int_0^{\bar{\omega}} \frac{h_2(\omega)}{\lambda^+(\omega)} \sin(\omega \ln t) d\omega . \quad (5.7)$$

Gli integrali (5.6) e (5.7) si presentano nella forma di integrali del tipo

$$I_{\cos}[c_1, c_2]f := \int_{c_1}^{c_2} \cos(\omega x) f(x) dx \quad (5.8)$$

e

$$I_{\sin}[c_1, c_2]f := \int_{c_1}^{c_2} \sin(\omega x) f(x) dx . \quad (5.9)$$

Osservato che, mediante un cambiamento di variabile, il problema del calcolo di tali integrali é riconducibile al caso piú semplice in cui $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$, il principale metodo numerico per la risoluzione di tale problema, detto metodo di Clenshaw-Curtis modificato [66], é basato sulla espansione in termini di polinomi di Chebyshev della funzione $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) , \quad x \in [-1, 1] \quad (5.10)$$

dove

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \quad e \quad a_k = (2/\pi) \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) (1-x^2)^{1/2} dx . \quad (5.11)$$

In particolare approssimando

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^d a_k T_k(x) , \quad x \in [-1, 1] \quad (5.12)$$

si determina una formula di quadratura che dipende dal parametro d e dai momenti di Chebyshev:

$$C_k(\lambda) = \int_{-1}^1 \cos(\lambda x) T_k(x) dx , \quad k = 0, \dots, d , \quad (5.13)$$

e

$$S_k(\lambda) = \int_{-1}^1 \sin(\lambda x) T_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, d. \quad (5.14)$$

Per il calcolo di tali momenti si utilizzano formule ricorrenti dovute a Piessens e Branders [67]. I valori dei momenti $C_k(\lambda)$ e $S_k(\lambda)$ sono estrapolati da tali formule mediante l'algoritmo di Olver [64]. Effettuando una ricerca tra il software numerico esistente, si trovano due routine di quadratura che implementano tale metodo:

- (1) la routine **QAWO** di *QUADPACK* [66];
- (2) la routine **D01ANF** della *NAG Fortran Routine Library* [50].

Tuttavia, poiché entrambe le routine **D01ANF** e **QAWO** sono basate sulla routine **QFOUR** di *QUADPACK*, allora si ritiene **QAWO** il nocciolo fondamentale per l'implementazione del metodo numerico descritto e su di essa ricade la preferenza.

5.2.1 Calcolo delle proiezioni sulle autofunzioni

Il calcolo degli integrali trigonometrici (5.6) e (5.7) necessita della valutazione delle funzioni ausiliarie $h_1(\omega)$ e $h_2(\omega)$. Poiché tali funzioni dipendono dai coefficienti $c^\pm(\omega)$, ciò comporta che anche essi debbano essere valutati. Pertanto ogni valutazione delle funzioni $h_1(\omega)$ e $h_2(\omega)$ dá luogo al problema del calcolo numerico degli integrali $c^\pm(\omega)$. Si osservi che da

$$\gamma_1(\omega) = \int_0^{+\infty} F(t) t^{-1/2} \cos(\omega \ln t) dt \quad (5.15)$$

e

$$\gamma_2(\omega) = \int_0^{+\infty} F(t) t^{-1/2} \sin(\omega \ln t) dt, \quad (5.16)$$

si ha

$$c^+(\omega) = \cos(\theta_\omega/2)\gamma_1(\omega) + \sin(\theta_\omega/2)\gamma_2(\omega) \quad (5.17)$$

e

$$c^-(\omega) = \sin(\theta_\omega/2)\gamma_1(\omega) - \cos(\theta_\omega/2)\gamma_2(\omega) . \quad (5.18)$$

Pertanto il problema del calcolo numerico degli integrali $c^\pm(\omega)$ é a sua volta riconducibile a quello del calcolo numerico degli integrali $\gamma_1(\omega)$ e $\gamma_2(\omega)$. Per tali integrali si ha:

$$\gamma_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(e^x)e^{x/2} \cos(\omega x)dx = \int_0^{+\infty} H_1(x) \cos(\omega x)dx \quad (5.19)$$

e

$$\gamma_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(e^x)e^{x/2} \sin(\omega x)dx = \int_0^{+\infty} H_2(x) \cos(\omega x)dx \quad (5.20)$$

con

$$H_1(x) = F(e^x)e^{x/2} + F(e^{-x})e^{-x/2}$$

e

$$H_2(x) = F(e^x)e^{x/2} - F(e^{-x})e^{-x/2} .$$

Quindi anche gli integrali (5.19) e (5.20) hanno la forma di integrali trigonometrici. Tuttavia in questo caso il dominio é illimitato. Gli integrali (5.19) e (5.20) appartengono alla tipologia di integrali:

$$I_{\cos}[a, \infty]f := \int_a^{\infty} \cos(\omega x)f(x)dx \quad (5.21)$$

e

$$I_{\sin}[a, \infty]f := \int_a^{\infty} \sin(\omega x)f(x)dx , \quad (5.22)$$

detti integrali di Fourier. Un metodo [66] per il calcolo degli integrali di Fourier consiste di tre fasi:

- si suddivide il dominio $[a, \infty)$ in sottointervalli di uguale ampiezza

$$C_k = [a + (k-1)c, a + kc], \quad k = 1, 2, \dots \quad e \quad c = (2[\omega] + 1) \frac{\pi}{|\omega|}, \quad (5.23)$$

dove $[\cdot]$ indica la parte intera;

- si effettua il calcolo numerico dell'integrale in ogni C_k , mediante il metodo di Clenshaw-Curtis modificato;
- si accelera la convergenza della serie formata dagli integrali sui sottointervalli C_k utilizzando l' ϵ -algoritmo di Wynn [66].

Tale metodo é coerentemente implementato dalle routine di quadratura:

- (3) routine **QAWF** di *QUADPACK* [66];
- (4) la routine **D01ASF** della *NAG Fortran Routine Library* [50].

Anche in questo caso, poiché **D01ASF** é basata su **QAWF**, allora su tale routine ricade la scelta. Concludiamo con una osservazione: il metodo considerato permette di avere solo una stima assoluta dell'errore di discretizzazione Tol , indipendente dal parametro ω . Osservando che, dal **Teorema 2.5.2** sull'andamento dei coefficienti $c^\pm(\omega)$, anche $\gamma_1(\omega)$ e $\gamma_2(\omega)$ devono decadere almeno esponenzialmente con ω , allora il metodo descritto non é in grado di calcolare accuratamente tali integrali già per quei valori di ω per cui $|\gamma_i(\omega)| < Tol$, cioè per $\omega \geq \bar{\omega}$. Infine, in accordo con le osservazioni del paragrafo 4.4.1, la stima assoluta dell'errore di discretizzazione, fornita dalla routine **QAWF**, può essere utilizzata in luogo del valore $\theta = \|F\|_{L_w^1} \cdot \delta$ nella stima dell'errore di condizionamento.

5.3 Esperimenti numerici

Concludiamo esibendo tre esperimenti numerici rappresentativi dei tests effettuati su alcune funzioni campione. La scelta della tipologia di tests effettuati é rappresentativa di tre possibili diverse situazioni che si possono presentare ed é finalizzata a mostrare il comportamento dell'algoritmo nei casi considerati. Le funzioni tests scelte sono:

test 1	$F_1(s) = \frac{1}{(4+s)^2}$	$f_1(t) = te^{-4t}$
test 2	$F_2(s) = \frac{e^{-s}+s-1}{s^2}$	$f_2(t) = \max(1-t, 0)$
test 3	$F_3(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$	$f_3(t) = \chi_{[0,1]}$

Funzioni test

Riguardo f_1 , TB é stimato essere di ordine esponenziale e ci si aspetta pertanto che f_1 possa essere calcolato accuratamente. Riguardo f_2 , TB é stimato essere di ordine polinomiale e in questo caso la migliore accuratezza ottenibile non dovrebbe essere la stessa ottenuta per f_1 . Ci si aspetta cioé che l'errore di condizionamento si propaghi maggiormente rispetto ad f_1 essendo il valore di ω_{opt} piú grande. Infine si é considerata la funzione test f_3 in quanto, pur se essa appartiene ad \mathcal{S}_{app} , l'algoritmo proposto non é capace di predire e controllare l'amplificazione degli errori. In alte parole, f_3 non appartiene a \mathcal{N}_{app} .

Le integrazioni numeriche necessarie alla valutazione della soluzione numerica regolarizzata sono state condotte come illustrato nel precedente paragrafo.

5.3.1 Test 1

Si ottiene

$$TB(\bar{\omega}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1.344 \cdot 10^{-1}}{1.175 \cdot 10^0} e^{-1.11 \cdot 10^1 \bar{\omega}}$$

e

$$CB(\bar{\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} 5 \cdot 10^{-8} \bar{\omega} e^{\pi \bar{\omega}/2}$$

- In Fig. 5.1 é mostrata la soluzione numerica regolarizzata a confronto con la soluzione ideale;
- In Fig. 5.2 é mostrato l'andamento del funzionale di regolarizzazione $\Psi(\bar{\omega})$ ed il suo minimo corrispondente a $\bar{\omega} = \widetilde{\omega}_{opt} = 5.0$. La massima accuratezza ottenibile é $\epsilon^* = 6.5012 \cdot 10^{-4}$. Inoltre essendo $\|F\|_{L_w^1} = 1.333$, allora $\epsilon^* < C_F$ e possiamo concludere che $F_1 \in N_{app}$. Ciò indica che possiamo aspettarci che la soluzione abbia almeno tre cifre decimali corrette, come d'altra parte é confermato osservando l'errore globale;
- In Fig. 5.3, l'errore globale $GE_5(t)$ é confrontato con la sua stima $\Psi(5)/\sqrt{(t)}$ per 40 valori di t uniformemente distribuiti in $[0.1, 4.0]$;

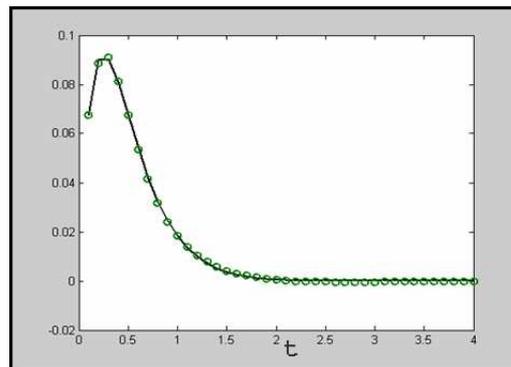
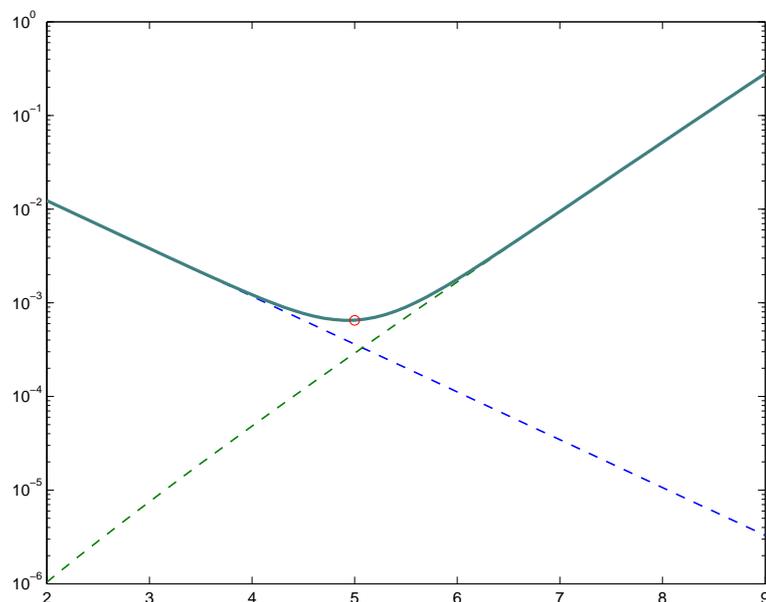
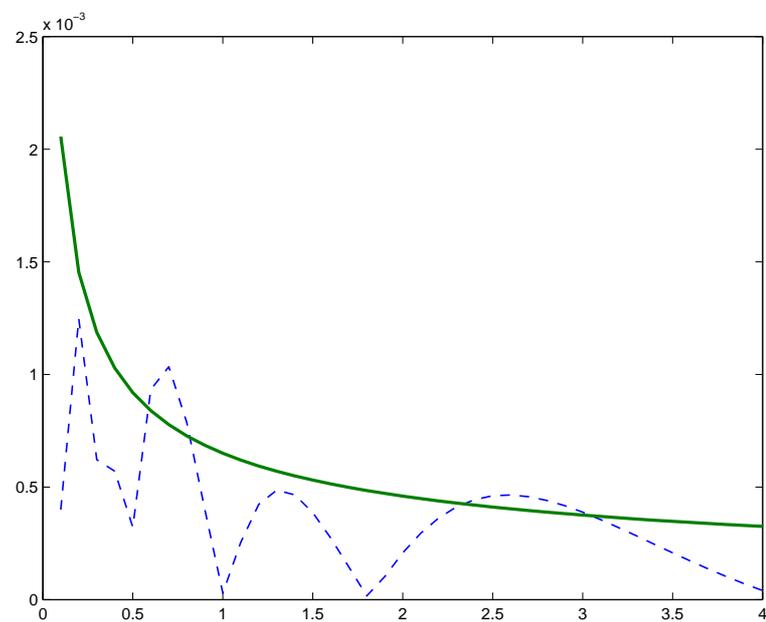


Figura 5.1: Test 1: Soluzione numerica regolarizzata e soluzione ideale a confronto.

Figura 5.2: Test 1: $\Psi(\bar{\omega})$ in funzione di $\bar{\omega}$ Figura 5.3: Test 1: confronto tra stima dell'errore globale $\Psi(5)/\sqrt{t}$ ed errore globale stesso $GE_5(t)$ in funzione di t .

5.3.2 Test 2

In questo caso si ottiene

$$TB(\bar{\omega}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{3.8543 \cdot 10^0}{7.0880 \cdot 10^{-1}} \bar{\omega}^{-7.0880 \cdot 10^{-1}}$$

e

$$CB(\bar{\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} 5 \cdot 10^{-8} \bar{\omega} e^{\pi \bar{\omega}/2}$$

- In Fig. 5.4 é mostrata la soluzione numerica regolarizzata a confronto con la soluzione ideale;
- In Fig. 5.5 é mostrato l'andamento del funzionale di regolarizzazione $\Psi(\bar{\omega})$ ed il suo minimo corrispondente a $\bar{\omega} = \widetilde{\omega}_{opt} = 7.6$, La massima accuratezza ottenibile é $\epsilon^* = 3.9 \times 10^{-1}$ e poiché $\epsilon^* < \|F\|_{L_w^1} = 0.6$ allora possiamo affermare che $F_2 \in N_{app}$. In questo caso ci aspettiamo solo una cifra decimale corretta come confermato dall'errore globale;
- In Fig. 5.6 l'errore globale $GE_{7.6}(t)$ é confrontato con la sua stima $\Psi(7.6)/\sqrt{(t)}$ in 40 valori di t uniformemente distribuiti in $[0.1, 10.0]$;

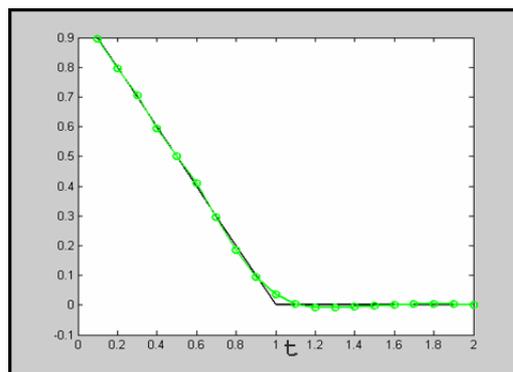
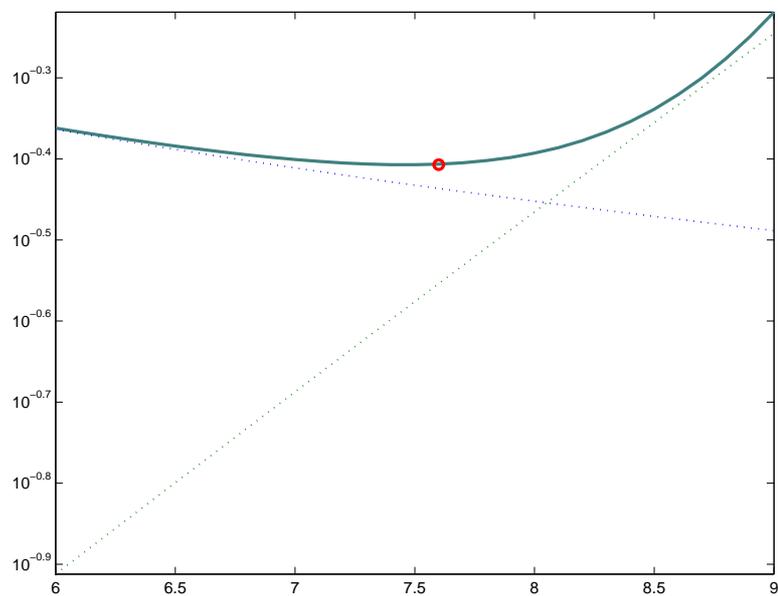
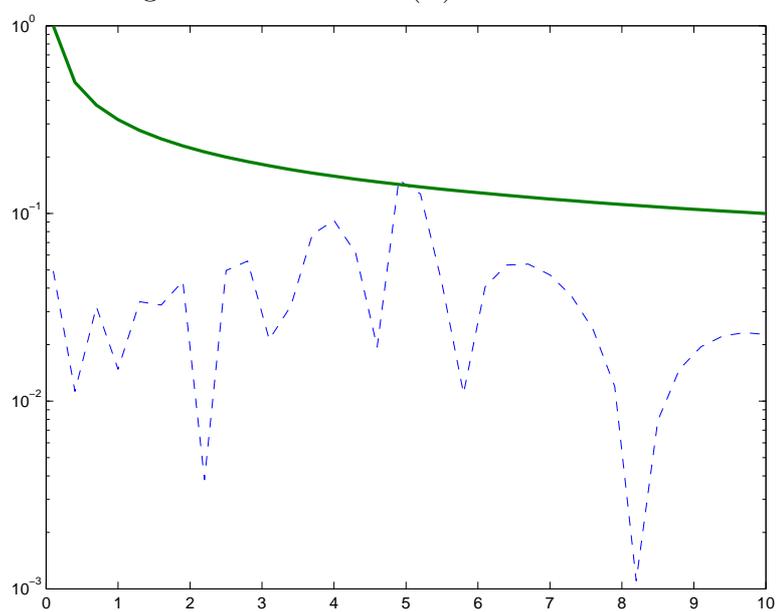


Figura 5.4: Test 2: Soluzione numerica regolarizzata e soluzione ideale a confronto.

Figura 5.5: Test 2: $\Psi(\bar{\omega})$ in funzione di $\bar{\omega}$ Figura 5.6: Test 2: confronto tra stima dell'errore globale $\Psi(7.6)/\sqrt{t}$ ed errore globale stesso $GE_{7.6}(t)$ in funzione di t .

5.3.3 Test 3

Infine consideriamo la terza funzione test. Il valore di $N_3(\omega)$ é stimato decadere polinomialmente. In particolare si ha $N_3(\omega) \leq 0.528 \omega^{-0.9596}$, da cui $C_1 = 0.528$ e $C_2 = -0.0404 < 0$. In questo caso il **Teorema 3.2.2** sulla stima dell'errore di troncamento non puó essere applicato. Ciò significa che non é possibile definire il funzionale di regolarizzazione e pertanto neanche il parametro ottimale e la soluzione numerica regolarizzata. In questo esempio la formula di inversione (2.48) é valida teoricamente, cioè $f_3 \in \mathcal{S}_{app}$, ma l'accuratezza delle valutazioni numeriche non puó essere prevista dallo schema numerico proposto. In tal caso concludiamo che f_3 non appartiene a \mathcal{N}_{app} . La Tabella 5.1 riporta l'errore globale $GE_{\bar{\omega}}$ corrispondente a tre valori di $\bar{\omega} = 4.3, 8.5, 12.0$ e a 10 valori uniformemente distribuiti di t in $[0.1, 1.9]$. Come previsto i valori calcolati di $f_{\bar{\omega}}$, corrispondenti a tali valori di $\bar{\omega}$ offrono approssimazioni non accurate della soluzione ideale $f_3(t)$.

t	$GE_{4.3}(t)$	$GE_{8.5}(t)$	$GE_{12.0}(t)$
0.1	0.0278e+0	0.731 e-2	0.9377e+2
0.3	0.0231e+0	0.193 e-1	0.4832e+2
0.5	0.0930e+0	0.242 e-1	0.7469e+2
0.7	0.0591e+0	0.180 e-1	0.1181e+2
0.9	0.3703e+0	0.2538e-0	0.3298e+2
1.1	0.3538e+0	0.3413e-0	0.7112e+2
1.3	0.1700e+0	0.354 e-1	0.3964e+2
1.5	0.0426e+0	0.1126e-0	0.4771e+2
1.7	0.0344e+0	0.1231e-0	0.2936e+2
1.9	0.0730e+0	0.629 e-1	0.5081e+2

Tabella 5.1: Errore globale per f_3 con $\bar{\omega} = 4.3, 8.5, 12.0$.

Bibliografia

- [1] Al-Shuaibi A., *On the inversion of the Laplace transform by the use of a regularized displacement operator*, Inverse Problems 13 (1997), 1153-1160
- [2] Barone, Ramponi and Sebastiani, *On the numerical inversion of the Laplace transform for nuclear magnetic resonance relaxometry*, Inverse Problems 17 (2001), 77-94
- [3] Baumeister J., *Stable Solutions of Inverse Problems*, Braunschweig: Vieweg (1986)
- [4] Bertero M., *Regularization methods for linear inverse problems*, Inverse Problems (Lecture Notes in Mathematics 1225) 52-112 (1989)
- [5] Bertero M., Boccacci P. and Pike E.R., *On the recovery and resolution of exponential relaxation rates from experimental data: a singular-value analysis of the Laplace transform inversion in the presence of noise*, Proc. R. Soc. A 383 (1982), 15-29
- [6] Bertero M., Brianzi P. and Pike E.R., *On the recovery and resolution of exponential relaxational rates from experimental data: Laplace transform inversions in weighted spaces*, Inverse Problems 1 (1985), 1-15
- [7] Bertero M., Brianzi P. and Pike E.R., *Singular value decomposition of the Laplace transform inversion with discrete data*, Pubblicazioni dell'istituto

di Analisi globale e applicazioni. Serie: Problemi non ben posti ed inversi (Firenze) n.11 (1983)

- [8] Bertero M., De Mol C. and Pike E.R., *Linear inverse problems with discrete data: II. Stability and regularization*, Inverse Problems 4 (1988), 573-94
- [9] Bertero M. and Griinbaumt F. A., *Commuting differential operators for the finite Laplace Transform*, Inverse Problems 1 (1985), 181-192
- [10] Bertero M. and Pike E. R. *Exponential-sampling method for Laplace and other dilationally invariant transforms: I. Singular-system analysis*, Inverse Problems 7 (1991), 1-20
- [11] Brianzi P., *A criterion for the choice of a sampling parameter in the problem of Laplace transform*, Inverse Problems 10 (1994), 55-61
- [12] Brianzi P. and Frontini M., *On the regularized inversion of the Laplace transform*, Inverse Problems 7 (1991), 355-368
- [13] Chen Wei Dong, *A Regularization Method for the Numerical Inversion of the Laplace Transform*, Siam J. Numerical Analysis Vol. 30, No. 3 (1993), 759-773
- [14] Comincioli, V., *Analisi Numerica*, McGraw-Hill (1990)
- [15] Crump S., *Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier-series approximation*, J. ACM 23 (1976), 89-96
- [16] Cunha C. and Bazn F. S. V., *An iterative method for the numerical inversion of Laplace Transforms*, Math. Of Computations, Vol. 64(211) (1995), 1193-1198

- [17] Cunha C. and Viloche F., *The Laguerre functions in the inversion of the Laplace transform*, Inverse Problems 9 (1993), 57-68
- [18] Cuomo S., Galletti A., *Conditioning and Convergence of a Quadrature Process*, Ricerche di Matematica Vol. LII fasc. 2° (2003), 251-274
- [19] D'Alessio A., D'Amore L., Laccetti G., *An effective discretization error estimate of Fourier series methods for the numerical inversion of the Laplace Transform*, Ricerche di Matematica Vol. XLIII, fasc 2° (1994), 293-307
- [20] D'Alessio A., Giunta G., Schmid G., *Sul posizionamento del problema d'inversione della trasformazione di Laplace*, Ricerche di Matematica Vol. XLIII, fasc. 1° (1994), 163-174
- [21] D'Amore L., *L'inversione numerica della trasformata di Laplace*, Tesi di Dottorato in Matematica Applicata e Informatica, Universit degli studi di Napoli Federico II (1995)
- [22] D'Amore L., Laccetti G., and Murli A., *An implementation of a Fourier series method for the numerical inversion of the Laplace transform method*, ACM, Transaction on Mathematical Software 25 (1999), 279
- [23] D'Amore L., Laccetti G., Murli A., *Algorithm 796: A Fortran Software Package for the Numerical Inversion of the Laplace Transform Based on a Fourier Series Method*, ACM, Transaction on Mathematical Software, Vol. 25 (3) (1999), 306-315
- [24] D'Amore L., Murli A., *NILTPACK: A software package for the numerical inversion of Laplace Transform*, "Concepts of Numerical Software", W.

Hackbush, G. Wittum eds, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vieweg Verlag.

- [25] D'Amore L., Murli A., *Regularization of a Fourier Series method for the Laplace Transform inversion with real data*, Inverse Problems 18 (2002), 1185-1205
- [26] D'Amore L., Murli A. and Rizzardi M., *An extension of the Henrici formula for Laplace transform inversion*, Inverse Problems 16 (2000), 1441-1456
- [27] Davies B., and Martin B. *Numerical inversion of the Laplace transform. a survey and comparison of methods*, Journal of Computational Physics 33 (1979)
- [28] Demmel J., *On condition number and the distance to nearest ill posed problem*, Numerische Mathematik 51 (1987), 251-289
- [29] Demmel J., *The Probability that a numerical analysis problem is difficult*, Math. Of Comp. Vol. 50, N.182 (1988), 449-480
- [30] Doetsch G., *Handbuch der Laplace Transformation*, Verlag Birkhauser (1950)
- [31] de Villiers G.D., McNally B. and Pike E.R., *Positive solutions to linear inverse problems*, Inverse Problems 15 (1999), 615-635
- [32] Engl H.W. and Groetsch C.W. (eds), *Inverse and Ill-Posed Problems*, New York: Academic (1987)
- [33] Engl H.W., Kunisch K. and Neubauer A., *Convergence rates for Tikhonov*

- regularisation of non-linear ill-posed problems*, Inverse Problems 5 (1989), 523-541
- [34] Essah W. A. and Delves L. M., *On the numerical inversion of the Laplace transform*, Inverse Problems 4 (1988), 705-724
- [35] Estatico C., *Gradiente coniugato e regolarizzazione di problemi mal posti*, Quaderni del gruppo nazionale per l'informatica matematica, Firenze (1996)
- [36] Ghizzetti A., *Calcolo Simbolico*, Zanichelli Editore (1943)
- [37] Golub G.H., *Matrix Computation*, Johns Hopkins University (1980)
- [38] Greco D., *Complementi di analisi*, Liguori (1978).
- [39] Groetsch C. W., *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Research Notes in Mathematics 105, Pitman, Boston (1984)
- [40] Hadamard J., *Sur les problemes aux drives partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin (1902), 49-52
- [41] Hansen P.C., *Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind*, Inverse Problems 8 (1992), 849-872
- [42] Hansen, P.C., *The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems* BIT, 30 (1994), 658-672
- [43] Hansen P.C., *Rank-deficient and Discrete ill-posed problems*, SIAM, Philadelphia (1998)

- [44] Hansen P.C., O’Leary D.P., *The use of L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems*, Report UMIACS - TR - 91 - 142, University of Maryland (1991)
- [45] Henrici P. *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. II, Wiley (1977)
- [46] Hough D., *Explaining and ameliorating the ill conditioning of zeros of polynomials*, Thesys, Mathematics Department, University of California, Berkeley (1977)
- [47] <http://library.wolfram.com>. Pagina web.
- [48] <http://www.acm.org/toms/>. Pagina web.
- [49] <http://www.mathworks.com>. Pagina web.
- [50] <http://www.nag.com>. Pagina web.
- [51] <http://www.netlib.org>. Pagina web.
- [52] Iqbal M., *The numerical inversion of the Laplace transform in reproducing kernel Hilbert spaces*, Journal of Research (Science), Bahauddin Zakariya University Vol.12(1) (2001), 56-64
- [53] Kahan W., *Numerical linear algebra*, Can. Math. Bull. 9 (1966), 757-801
- [54] Kindermann S. *Convergence rates in the Prokhorov Metric for ill-Posed Problems*, Industrial mathematics Institute Johannes Kepler University Linz, Austria
- [55] Kryzhniy V.V., *Direct regularization of the inversion of real-valued Laplace transforms*, Inverse Problems 19 (2003), 573-583

- [56] McWhirter J.G. and Pike E.R., *On the numerical inversion of the Laplace transform and similar Fredholm integral equations of the first kind*, J. Phys. A: Mathematical and General, Vol.11 (1978), 1729-1745
- [57] Morozov V.A., *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 414-417
- [58] Morozov V.A., *The error principle in the solution of operator equations by the regularization method*, USSR Comp Math Phys 8 No.2 (1968), 69-87
- [59] Morozov V.A., *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1984)
- [60] Murli A., *Lezioni di Calcolo Parallelo*, Liguori editore, Napoli (2006)
- [61] Murli A., Giunta G., Laccetti G. and Rizzardi M., *Laboratorio di Programmazione I*, Liguori Editore, Napoli (2003)
- [62] Murli A. and Rizzardi M., *Algorithm 682: Talbot's method for the Laplace inversion problem*, ACM, Transaction on Mathematical Software 16 (1990), 158-181
- [63] Okikiolu, *Aspects of the theory of bounded integral operators in L_p spaces*, Academic Press (1971)
- [64] Olver F.W.J. *Numerical solution of Second-Order Linear Difference Equations*. J. Nat. Bur. Stand.: B. Math. and Math. Phys. 71B (1967), 111-129
- [65] Penrose R. *A Generalized Inverse for Matrices*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 51 (1955), 406-413

- [66] Piessens R., de Doncker-Kapenga E., Uberhuber C.W., Kahaner D.K., *QUADPACK- A Subroutine Package for Automatic Integration*, Springer - Verlag (1983)
- [67] Piessens R., Branders M. *Computation of oscillating integrals*, J. Comp. App. Math., 1 (1975), 153-164
- [68] Reginska T., *A regularization parameter in discrete ill-posed problems* , Siam J. Sci. Comput. Vol. 17, No. 3 (1996) 740-749
- [69] Rudin W. *Analisi reale e complessa*, Bollati Boringhieri (1974)
- [70] Schuster T., *A stable inversion scheme for the Laplace transform using arbitrarily distributed data scanning points*, J. Inv. Ill-Posed Problems, Vol. 11(3) (2003), 1-25
- [71] Tikhonov A.N., *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Soviet Math Dokl 4, 1035-1038 English translation of Dokl Akad Nauk SSSR 151 (1963), 501-504
- [72] Tikhonov A.N. and Arsenin V.Y., *Methodes de resolution de problemes mal poses*, Editions MIR, Moscow (1974)
- [73] Tikhonov A.N. and Arsenin V. Y., *Solutions of ill-posed problem*, Winston-Wiley, New York (1977)
- [74] Titchmarsh E.C., *Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press (1937)
- [75] Varah J.N., *Pitfalls in the numerical solution of linear ill-posed problems*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 4 (1983), 164-176.

- [76] Week T., *Numerical inversion of Laplace transform using Laguerre functions*, Assoc. Comput. Mach. 13 (1966), 419-429
- [77] Wilkinson J.H., *Note on matrices with a very ill-conditioning eigenproblem*, Numer. Math. 19 (1972), 176-178

Appendice A

L'indice di condizionamento

Forniamo qui alcune definizioni di indice di condizionamento.

Definizione A.1

Siano X_1 e X_2 due spazi metrici rispetto alle metriche d_1 e d_2 , e sia F una trasformazione tra i due spazi $F : X_1 \rightarrow X_2$. Indichiamo con $B_i(x_0, \rho)$ la sfera di centro $x_0 \in X_i$ e raggio ρ ,

$$B_i(x_0, \rho) = \{x \in X_i : d_i(x, x_0) < \rho\} . \quad (\text{A.1})$$

Si definisce **indice di condizionamento assoluto** $\mu_\delta(F, x_0)$ il seguente estremo inferiore

$$\mu_\delta(F, x_0) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : F(B_1(x_0, \delta)) \subset B_2(F(x_0), \sigma\delta)\} , \quad (\text{A.2})$$

se esiste. Altrimenti si pone $\mu_\delta(F, x_0) = \infty$.

Per piccoli valori della perturbazione δ , risulta utile la seguente:

Definizione A.2

Si definisce **indice di condizionamento asintotico** $\mu(F, x_0)$ il valore limite di μ_δ per δ tendente a 0:

$$\mu(F, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(F, x_0) \quad (\text{A.3})$$

Inoltre tenendo conto dell'indice di condizionamento per ogni possibile valore di x_0 e δ :

Definizione A.3

Si definisce **indice di condizionamento assoluto del problema** $\mu(F)$, il seguente estremo superiore

$$\mu(F) = \sup\{\mu_\delta(F, x_0) : \delta > 0, x_0 \in X_1\} \quad (\text{A.4})$$

In particolare diremo che il problema ha **indice di condizionamento limitato** se $\mu(F) < \infty$ e che il problema é **ben condizionato** se $\mu(F) \leq 1$.

La **Definizione A.3** ha carattere piú generale rispetto alla **Definizione A.1** perché legata al problema nella sua "interezza".

Se l'indice di condizionamento $\mu_\delta(F, x)$ é limitato, dalla **Definizione A.1** si ha

$$d_1(y, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(F(y), F(x)) < \mu_\delta(F, x) \delta, \quad (\text{A.5})$$

da cui, se $\mu(F)$ é limitato, segue che

$$d_1(y, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(F(y), F(x)) < \mu(F) \delta. \quad (\text{A.6})$$

Quindi la perturbazione δ sul dato x é amplificata al piú del fattore $\mu(F)$ sulla soluzione $F(x)$, cioè l'indice di condizionamento $\mu(F)$ é il massimo fattore di amplificazione qualunque sia il dato del problema e qualunque sia la perturbazione introdotta. La proprietà (A.6) é senz'altro verificata se F é lipschitziana. Infatti:

Osservazione A.1

Se l'applicazione $F : X_1 \rightarrow X_2$ é lipschitziana in X_1 con costante di Lipschitz L_F , cioè se

$$d_2(F(x), F(y)) \leq L_F d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X_1,$$

allora l'indice di condizionamento del problema é limitato da:

$$\mu(F) \leq L_F, \quad (\text{A.7})$$

Inoltre se $L_F \leq 1$ il problema risulta ben condizionato.

L'**Osservazione A.1** mostra che se l'applicazione é lipschitziana, allora il condizionamento é limitato. Poiché la lipschitziana implica la continuità é lecito chiedersi se la continuità di una applicazione é ancora sufficiente per avere condizionamento limitato. Vediamo quale legame sussiste in generale. Si premette la seguente

Osservazione A.2

Se l'applicazione $F : X_1 \rightarrow X_2$ é discontinua in un punto x_0 , allora per l'indice di condizionamento del problema si ha $\mu(F) = \infty$.

Dimostrazione

F discontinuo significa che

$$\exists \bar{\epsilon} > 0 : \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X_1 : d_1(x_\delta, x_0) < \delta \text{ e } d_2(F(x_\delta), F(x_0)) \geq \bar{\epsilon} .$$

Da cui $\forall \delta > 0$ si ha $\mu_\delta(F, x_0) \geq \bar{\epsilon} \delta^{-1}$. Passando all'estremo superiore per $\delta > 0$ si ha la tesi.

L'**Osservazione A.2** mostra che se l'indice di condizionamento di un problema é limitato allora l'applicazione é continua. Il viceversa non é sempre vero, infatti:

Esempio A.1

Siano $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ i due spazi metrici rispetto alle usuali metriche $d_1(x, y) = d_2(x, y) = |x - y|$. E si consideri la trasformazione tra i due spazi $F(x) = x^3$. Allora si ha che l'indice di condizionamento é dato da

$$\mu_\delta(F, x_0) = 3x_0^2 + 3|x_0|\delta + \delta^2 ,$$

l'indice di condizionamento asintotico é

$$\mu(F, x_0) = 3x_0^2$$

e l'indice di condizionamento del problema risulta

$$\mu(F) = \sup\{3x_0^2 + 3|x_0|\delta + \delta^2 : \delta > 0, x_0 \in X_1\} = \infty .$$

Riepilogando quanto detto, negli spazi metrici vale solo la seguente implicazione

$$\mu(F) < \infty \Rightarrow F \text{ continua} .$$

La validità della implicazione inversa si ha nel caso in cui F é un operatore lineare tra spazi lineari normati. Si premette la seguente caratterizzazione dell'indice di condizionamento.

Teorema A.1

Per l'indice di condizionamento definito in (A.2) vale la seguente caratterizzazione:

$$\mu_\delta(F, x_0) = \sup \left\{ \frac{d_2(F(x), F(x_0))}{d_1(x, x_0)} : d_1(x, x_0) < \delta \right\} . \quad (\text{A.8})$$

Dimostrazione

Poniamo

$$\nu_\delta = \sup \left\{ \frac{d_2(F(x), F(x_0))}{d_1(x, x_0)} : d_1(x, x_0) < \delta \right\} .$$

Si tratta di mostrare che $\mu_\delta = \nu_\delta$. Fissiamo $x_0 \in X_1$, $\delta > 0$ e consideriamo preliminarmente il caso $\nu_\delta < \infty$. Scelto $x \in B_1(x_0, \delta)$, si ha

$$d_2(F(x), F(x_0)) = \frac{d_2(F(x), F(x_0))}{d_1(x, x_0)} d_1(x, x_0) \leq \nu_\delta d_1(x, x_0) < \nu_\delta \delta ,$$

quindi $F(B_1(x_0, \delta)) \subset B_2(F(x_0), \nu_\delta \delta)$, da cui $\mu_\delta \leq \nu_\delta$.

Viceversa, sia $x \in B_1(x_0, \delta)$, posto $\rho = d_1(x, x_0) < \delta$ si ha $d_2(F(x), F(x_0)) \leq \mu_\rho(F, x_0)$, cioè

$$\frac{d_2(F(x), F(x_0))}{d_1(x, x_0)} \leq \mu_\rho(F, x_0) .$$

Passando all'estremo superiore per $x \in B_1(x_0, \delta)$ ($\rho < \delta$), considerando che μ_δ é non decrescente rispetto a δ , si ha infine $\nu_\delta \leq \mu_\delta$, cioè la tesi nel caso finito.

Verifichiamo adesso che $\mu_\delta = \infty \Rightarrow \nu_\delta = \infty$. Supposto $\mu_\delta = \infty$, allora

$$\forall M > 0 \exists x_M \in B_1(x_0, \delta) \text{ t.c. } d_2(F(x_M), F(x_0)) > M\delta .$$

Inoltre

$$x_M \in B_1(x_0, \delta) \Leftrightarrow d_1(x_M, x_0) < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{d_1(x_M, x_0)} > \frac{1}{\delta},$$

quindi

$$\frac{d_2(F(x_M), F(x_0))}{d_1(x_M, x_0)} \geq \frac{M\delta}{\delta} = M.$$

Dalla arbitrarietà di M discende la tesi.

La caratterizzazione fornita assume significato ancora più particolare se si suppone che l'operatore F sia un funzionale lineare tra spazi lineari normati. Infatti:

Teorema A.2

Siano X_1 e X_2 due spazi lineari normati rispetto alle norme $\|\cdot\|_{X_1}$ e $\|\cdot\|_{X_2}$, con metriche indotte d_1 e d_2 , e sia $F : X_1 \rightarrow X_2$ un funzionale lineare tra i due spazi. Allora per l'indice di condizionamento di F si ha

$$\mu_\delta(F, x_0) = \|F\| \quad \forall x_0 \in X_1, \quad \forall \delta > 0, \quad (\text{A.9})$$

dove $\|F\|$ è la norma del funzionale lineare F , definita come

$$\|F\| = \sup \left\{ \frac{\|F x\|_{X_2}}{\|x\|_{X_1}} \right\} \quad (\text{A.10})$$

In particolare l'indice di condizionamento è indipendente da x_0 e da δ e si ha

$$\mu(F) = \|F\|1 \quad (\text{A.11})$$

Dimostrazione

È sufficiente utilizzare la caratterizzazione di indice di condizionamento fornita in (A.8) e la linearità dell'operatore F . Si ha

$$\mu_\delta(F, x_0) = \sup \left\{ \frac{d_2(F(x), F(x_0))}{d_1(x, x_0)} : d_1(x, x_0) < \delta \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \frac{\|F(x) - F(x_0)\|_{X_2}}{\|x - x_0\|_{X_1}} : \|x - x_0\|_{X_1} < \delta \right\} = \\
&= \sup \left\{ \frac{\|F(y)\|_{X_2}}{\|y\|_{X_1}} : \|y\|_{X_1} < \delta \right\} = \|F\| .
\end{aligned}$$

Il **Teorema** permette di osservare che se un problema é rappresentato da un funzionale lineare F tra spazi lineari normati, allora l'indice di condizionamento del problema coincide con la norma del funzionale. In particolare

$$F \text{ lineare e continuo} \Leftrightarrow \|F\| \text{ limitata} \Leftrightarrow \mu(F) < \infty . \quad (\text{A.12})$$