

***IL FENOMENO DELLA LONGEVITA' ED IL RISCHIO DI  
MODELLO:  
ANALISI E MISURA***

Valeria D'Amato

Dottorato in Matematica per l'Analisi economica e la Finanza – XX Ciclo

***Coordinatore:***

Prof. Emilia Di Lorenzo

***Tutor:***

Prof. Emilia Di Lorenzo

## Indice

### **Capitolo 1 – Il fenomeno della sopravvivenza in questioni di carattere attuariale**

Premessa .....	4
1. Il <i>Longevity Risk</i> .....	6
2. L’impatto del <i>Longevity Risk</i> su differenti tipi di polizze assicurative.....	6
3. Un’analisi storica della mortalità.....	6
4. Dibattito internazionale sul trend della sopravvivenza.....	9
5. Come controllare l’esposizione al rischio longevità.....	10
6. Requisiti ideali per le tavole di mortalità.....	13

### **Capitolo 2 – I rischi di un portafoglio assicurativo**

1. Tipologie di rischio.....	15
2. Misure di rischiosità.....	15

### **Capitolo 3 – Lo scenario finanziario e la struttura per scadenza dei tassi d’interesse**

1. Introduzione.....	17
2. Modelli Unifattoriali: il modello di Vasicek ed il modello di Cox, Ingersoll ( <i>CIR</i> ).....	19

### **Capitolo 4 – Lo scenario demografico: modelli per la sopravvivenza**

Premessa.....	26
1. Il modello Lee Carter.....	26
2. Altri modelli.....	30

### **Capitolo 5 – Un esempio in assicurazioni caso vita: Il rischio di proiezione in un portafoglio di rendite pensionistiche**

1. Introduzione.....	32
2. Le rendite pensionistiche .....	33
3. Il modello per il fondo di portafoglio.....	35
4. Rischi di un portafoglio di rendite pensionistiche.....	36

5. L'indice di rischiosità.....	37
---------------------------------	----

**Capitolo 6 – Applicazione numerica ad un portafoglio di rendite pensionistiche**

1. Obiettivo delle applicazioni numeriche.....	39
2. Ipotesi sulla dinamica dei tassi d'interesse.....	39
3. Ipotesi sulla mortalità.....	47
4. Applicazioni numeriche.....	59

**Capitolo 7 – Un esempio in assicurazioni caso morte: Il rischio di tavola in un portafoglio di mutui assicurati**

1. Introduzione.....	65
2. Il mutuo assicurato.....	66
3. Il <i>fair value</i> della riserva.....	68
4. Modello di valutazione: il caso di un portafoglio.....	69
5. Uno strumento per la misura del rischio di tavola.....	72
6. La mappa dei rischi demografici.....	73

**Capitolo 8 – Applicazione numerica ad un portafoglio di mutui assicurati**

1. Obiettivi delle applicazioni numeriche.....	75
2. Ipotesi sulla dinamica dei tassi d'interesse.....	75
3. Ipotesi sulla mortalità.....	80
4. Evidenze empiriche.....	81

<i>Considerazioni conclusive</i> .....	88
--	----

<i>Appendice</i> .....	89
------------------------	----

<i>Riferimenti bibliografici</i> .....	135
--	-----

## Capitolo 1 - IL FENOMENO DELLA SOPRAVVIVENZA IN QUESTIONI DI CARATTERE ATTUARIALE

### Premessa

La specificità delle imprese assicurative operanti nel ramo Vita deriva dall'inscindibile legame delle attività aziendali con la durata di vita umana: "...l'assicurazione vita garantisce la corresponsione di una somma di denaro al verificarsi di un evento attinente la vita umana, o sotto forma di capitale o mediante quote sotto forma di rendita" (art. 1882 codice civile). Le prestazioni dell'assicuratore dipendono dunque soltanto dalla durata aleatoria di vita dell'assicurato. Le valutazioni probabilistiche circa la durata aleatoria di vita costituiscono dunque uno strumento fondamentale ai fini di un competente e prudente impiego nel tempo dei mezzi raccolti dall'azienda. Al fine di preservare la propria redditività e solidità patrimoniale, le compagnie assicurative sono costrette a selezionare accuratamente i modelli di rappresentazione delle dinamiche demografiche della collettività in portafoglio, poiché da esse dipende la stima dell'esposizioni future.

Oltre ad un obiettivo siffatto di natura meramente aziendale, le compagnie assicurative europee soggiacciono ad un vincolo altrettanto stringente di adeguata descrizione del fenomeno della mortalità, in ossequio ai principi emanati dall'*International Accounting Standards Board* - IASB, secondo cui tutte le fonti di rischio da cui è affetto un portafoglio devono essere tenute in conto nel calcolo del *fair value* delle poste del passivo da iscrivere in bilancio. Nell'ambito infatti del sistema di vigilanza prudenziale, il nuovo regime di solvibilità, *Solvency II*, si fonda su di un approccio integrato al rischio (*Integrated Risk Analysis*) che richiede che l'assicuratore effettui una valutazione a valori di mercato (*market consistent*).

Si possono identificare principalmente due fonti di rischio che insistono sul portafoglio di un assicuratore e che concorrono a tracciarne un'identità composita: il rischio finanziario (*investment risk*) ed il rischio demografico (*demographic risk*). Per quanto riguarda il primo, esso è connesso alle fluttuazioni dei tassi di rendimento che si verificano sul mercato e che possono causare un deprezzamento del valore degli investimenti effettuati dalla compagnia assicurativa. Come è ben noto, la sua natura è quella di componente sistematica di rischio. In merito al secondo, esso si distingue ulteriormente in due componenti: il rischio assicurativo (*insurance risk*) ed il rischio longevità (*longevity risk*). Il rischio assicurativo discende da deviazioni accidentali del numero delle morti dal valore atteso ed i suoi effetti possono essere mitigati dall'incremento del numero delle polizze in portafoglio (*pooling risk*). Il rischio longevità si configura a fronte dei miglioramenti nel

trend della mortalità, che possono causare una deviazione sistematica del numero dei decessi dal valore atteso.

Il profilo temporale della mortalità osservato negli ultimi decenni per ogni generica età  $x$  evidenzia tre aspetti significativi: la rettangolarizzazione, l'espansione ed il più alto livello insieme con una più larga dispersione della morte a giovani età (Pitacco (2004), Olivieri (2001)).

La rettangolarizzazione (particolarmente marcata a partire da ad età adulte  $x \geq 35$ ) consiste in una maggiore concentrazione della distribuzione di probabilità intorno al punto di Lexis (cioè alla moda della distribuzione), il quale a propria volta tende a coincidere con la durata massima di vita  $\omega$ .

L'espansione consiste invece nello spostamento in avanti di entità aleatoria del punto di Lexis che determina l'incertezza dell'ampiezza della rettangolarizzazione. Tali marcate tendenze si traducono in un allungamento dell'aspettativa di vita, fatta salva una forte volatilità dei tassi di mortalità in giovani età.

Il problema di possibili scostamenti sistematici tra frequenze di decesso osservate ex post e ipotesi sulla sopravvivenza delle teste assicurate formulate ex ante dalle compagnie assicurative (*longevity risk*) può seriamente compromettere una sana e prudente gestione aziendale. Emerge dunque un problema di governo di tale rischio affinché esso non si abbatta preoccupantemente sull'equilibrio d'impresa e sulla sua sostenibilità prospettica.

I principali strumenti di controllo che attualmente si rendono disponibili sono le tavole di mortalità proiettata e i *Longevity Bonds*. Riguardo a questi ultimi, di cui si dirà diffusamente nel prosieguo della trattazione, rimane una incapacità descrittiva dell'evoluzione della mortalità legata all'incompletezza del mercato demografico: non esiste infatti un mercato secondario dal quale trarre indicazioni esaustive sulla misura della mortalità (Ballotta et al 2006).

Il trend della mortalità può essere invece "anticipato" dall'assicuratore mediante l'impiego di tavole proiettate. In un approccio deterministico, l'effettuare valutazioni con una tavola proiettata può comportare una riduzione del rischio rispetto a valutazioni operate in ipotesi di mortalità statica. Ma tale analisi non tiene conto che la proiezione stessa è affetta da aleatorietà. E' pertanto opportuno valutare un portafoglio in ipotesi di aleatorietà della proiezione (approccio stocastico), sulla base del quale deve essere misurato il rischio insito in tale casualità: si tratta di un rischio di modello, detto rischio di proiezione (*projection risk*) o di tavola (*table risk*).

Il senso del lavoro è proprio quello di costruire degli indicatori della rischiosità derivante dall'aleatorietà nella scelta della proiezione da parte dell'assicuratore, in differenti condizioni contrattuali assicurative. In particolare si farà riferimento ad un portafoglio di tipiche assicurazioni

caso vita, quali le rendite pensionistiche e ad un portafoglio di assicurazioni caso morte, quali i mutui assicurati.

### **1. Il longevity risk**

Il *longevity risk* può essere definito ad un livello individuale o aggregato (cf. Stallard 2006).

Al livello individuale, il *longevity risk* si sostanzia nella eventualità che una testa assicurata viva di più di quanto pianificato dalla compagnia assicurativa.

Al livello aggregato, il *longevity risk* si sostanzia invece nella eventualità di un numero medio di anni di sopravvivenza più alto di quello assunto nell'ambito di un sistema di polizze assicurative.

I miglioramenti nei tassi di mortalità sono causati dall'effetto combinato dei due summenzionati fenomeni di rettangolarizzazione ed espansione. In fondo si potrebbe dire che il *longevity risk* si materializza quando le aspettative circa la mortalità non si incontrano nell'esperienza della mortalità (Michael Johnson<sup>1</sup> - Tillinghast Towers Perrin).

### **2. L'impatto del longevity risk su differenti tipi di polizze assicurative**

Le compagnie assicurative sono obbligate a quantificare accuratamente l'impatto dell'aleatorietà nel trend della mortalità sulle differenti coperture offerte, allo scopo di governare il rischio che ne discende.

Il *longevity risk* influisce infatti con tendenze di segno opposto nelle assicurazioni caso vita ed in quelle caso morte. Con riguardo alle polizze che corrispondono benefit in caso vita, i miglioramenti della sopravvivenza causano un effetto di carico sui pagamenti che l'impresa si trova a dovere regolare: il fondo disponibile risulta sottodimensionato ad ogni tempo.

Dall'altra parte, con riguardo alle assicurazioni che pagano somme ai beneficiari in caso di morte della testa assicurata, l'allungamento della vita degli assicurati implica un contenimento dei costi a favore della compagnia. Nondimeno, la sovrastima di costi pesa negativamente sull'attività di gestione aziendale. A causa di essa, l'impresa apposta disponibilità in accantonamenti a copertura di costi futuri che non sosterrà, immobilizzando attività per un dato periodo di tempo che potrebbero essere diversamente impiegate. L'impresa cioè sopporta un costo opportunità più o meno significativo.

### **3. Un'analisi storica della mortalità**

Nel ventesimo secolo l'aspettativa di vita è aumentata in media di 3 mesi ogni anno (Antolin 2007). Recentemente il tasso medio di miglioramento ha addirittura subito un'accelerazione. In particolare

---

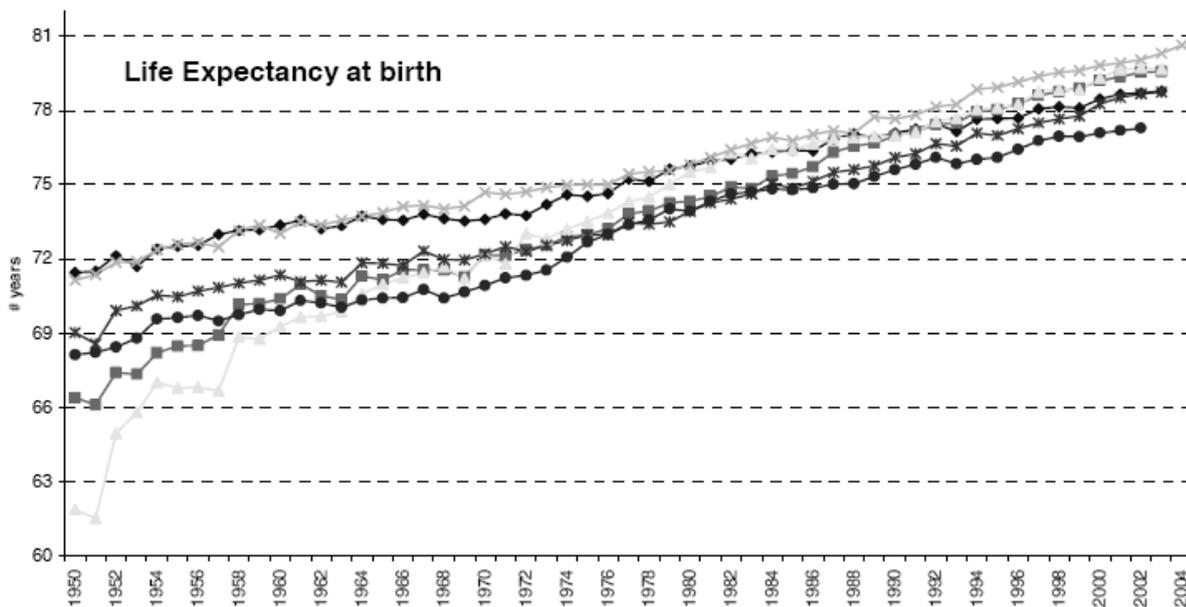
<sup>1</sup> Prima Conferenza Internazionale sul longevity risk e capital market, tenutasi il 18 Febbraio 2005, alla Cass Business School, London.

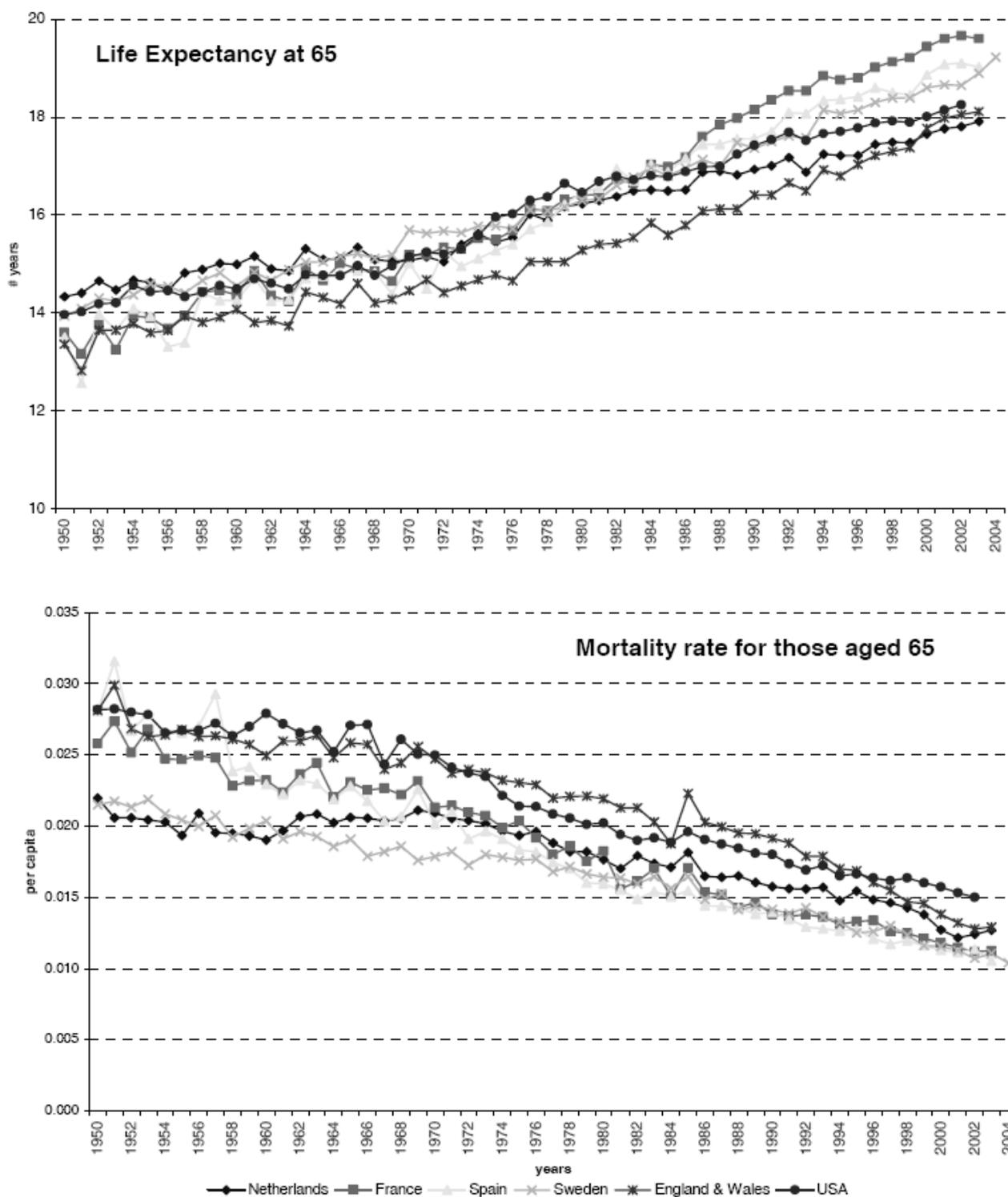
la coorte nata tra le due guerre sta vivendo significativamente più a lungo. Sicuramente all'allungamento della vita umana hanno concorso diversi fattori, quali diete alimentari migliori, cambiamenti nelle abitudini di fumo ed un generale miglioramento delle condizioni di vita. A titolo di esempio, l'aspettativa di vita per un uomo di 65 anni nel 1980 era di altri 13 anni; nel 2000 l'aspettativa di vita di un uomo di 65 anni è aumentata a 16 anni, registrando un incremento di più del 20%.

Nello scorso secolo, le significative riduzioni nei tassi di mortalità sono state osservate in età infantili (mortalità infantile) ed in età adulte (figura 1). Durante la prima parte del XX secolo, la decrescenza dei tassi di mortalità è stata causata principalmente dalla riduzione delle malattie in età infantili, mentre nell'ultima decade soprattutto dalle diminuzioni del numero di morti per malattie croniche in età avanzate.

Dal grafico 1 emerge con chiarezza l'entità dell'aumento sensibile dell'aspettativa di vita alla nascita ed a 65 anni. L'aspettativa di vita alla nascita è aumentata più rapidamente durante la prima metà del XX secolo, mentre l'aspettativa di vita all'età di 65 anni è aumentata più velocemente durante la seconda metà del XX secolo.

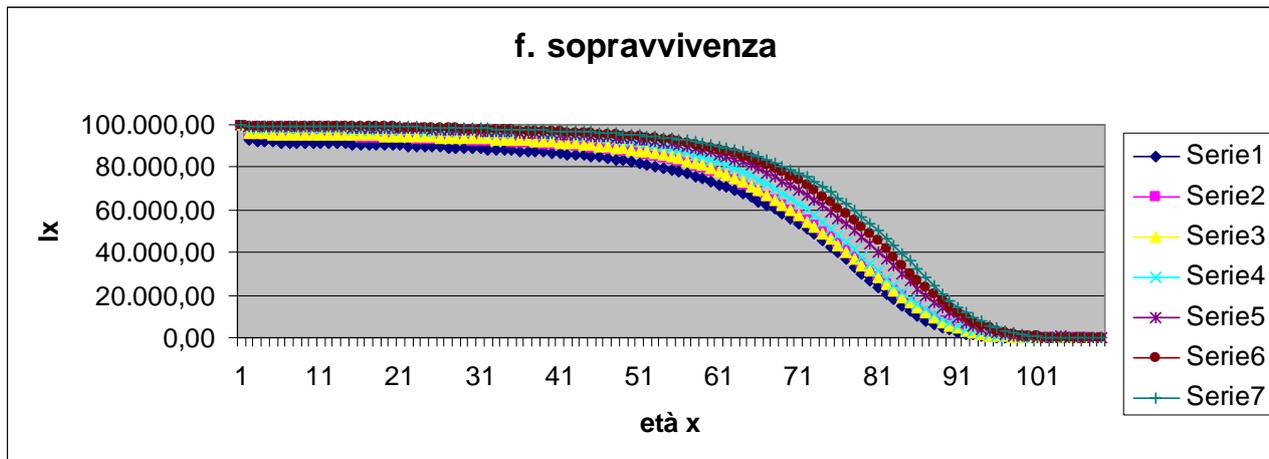
**Grafico 1, Fonte: Antolin P. 2007, Vita attesa e tassi di mortalità nei paesi OCSE, 1950-2003**



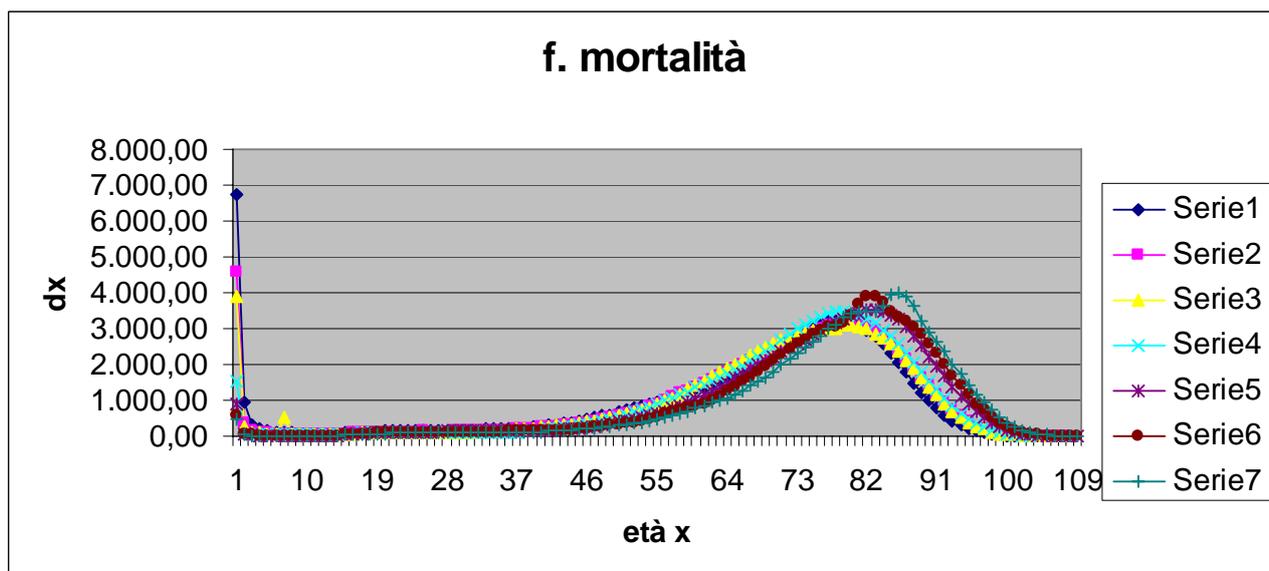


Di seguito si riporta l'andamento grafico di una serie di funzioni di sopravvivenza e di mortalità della popolazione italiana tra il 1950-1953; 1960-1962; 1964-1967; 1981; 1992; 1998; 2002 (grafico 2 – 3) elaborato sulla base delle tavole di mortalità della popolazione italiana (Biblioteca Centrale Istat).

**Grafico 2** – Fascio di funzioni di sopravvivenza ottenuto dall'elaborazione delle tavole di mortalità della popolazione maschile italiana, Fonte: Faraone A. 2007



**Grafico 3** – Fascio di curve di decesso ottenuto sulla base delle serie storiche del grafico 2, Fonte: Faraone A. 2007



#### 4. Dibattito internazionale sul trend della sopravvivenza

Nell'ambito dell'analisi sui prossimi sviluppi del trend della sopravvivenza umana si scontrano due differenti scuole di pensiero: secondo la prima non vi sarebbero limiti all'aspettativa di vita (Oeppen e Vaupel, 2002), mentre per la seconda esisterebbe un trend conservativo (Olshansky et al, 2005). A fronte di una massiccia riduzione del trend della mortalità si sarebbero prodotti infatti piccoli incrementi nell'aspettativa di vita, che suggeriscono che i miglioramenti nell'aspettativa di vita saranno lievi o addirittura si arresteranno. Secondo altri autori (Kannisto, 2000) il fenomeno di rettangolarizzazione indica la presenza di un limite naturale all'aspettativa di vita. Tuttavia, come argomenta Siegel (Siegel, 2005) la teoria della rettangolarizzazione non è irrefutabile.

Rimane cioè un'incertezza forte non solo sul trend della longevità, ma anche su quali strumenti metodologici impiegare per studiarla.

## 5. Come controllare l'esposizione al rischio longevità

### 5.1 Soluzioni alternative

La natura sistematica del *longevity risk* rende improponibile il ricorso a operazioni di diversificazione di portafoglio.

Le tecniche sviluppate fino ad oggi per far fronte a tale rischio sono essenzialmente riconducibili a due approcci:

- 1) la gestione del rischio in proprio;
- 2) il trasferimento del rischio a soggetti terzi.

In particolare, per quanto attiene al primo, le compagnie assicurative storicamente implementano tavole di mortalità proiettate.

Nel caso invece in cui esse adottino l'orientamento opposto (cioè il trasferimento del rischio), il mercato attualmente propone le seguenti opportunità:

- a) l'acquisto di *Survivor derivatives* (*Longevity Bonds* e *Survivor Swaps*);
- b) il trasferimento del rischio ad agenzie private (*OTC*) o a collettività di assicurati (*mortality linked contracts*)

### 5.2 La gestione del rischio in proprio: tavole proiettate

La letteratura attuariale ha sviluppato numerosi approcci in ordine all'obiettivo di effettuare proiezioni sui tassi di mortalità (si veda in particolare CMI, 2004, 2005a; Wong-Fupuy and Haberman, 2004), che potrebbero essere così classificati (Antolin):

- metodi *process-based*;
- metodi *explanatory-based*;
- metodi *estrapolativi*.

I metodi *process-based* si riferiscono a dati biomedici della popolazione e su di essi sono effettuate le proiezioni

I metodi *explanatory-based* esplicitano relazioni econometriche presenti nel trend della sopravvivenza.

I metodi *estrapolativi* fondano le proiezioni sui trend storici della mortalità.

Gli ultimi costituiscono la classe di modelli di gran lunga più utilizzati dagli attuari e dagli enti pubblici europei ed americani.

La caratteristica precipua di tali metodi è che la mortalità ad una data età è funzione dell'anno di calendario sulla base dei dati passati. Nell'ambito dei metodi estrapolativi si distinguono quelli di tipo deterministico, che semplicemente estendono l'andamento della sopravvivenza passata al futuro e quelli di tipo stocastico, che operano previsioni sulla base di date distribuzioni di probabilità.

I metodi estrapolativi stocastici più significativi in letteratura risultano i seguenti:

- 1) modelli che si fondano su proiezione interdependente della mortalità ad età specifiche<sup>2</sup>;
- 2) modelli che usano procedure di stima su serie storiche standard come il Lee-Carter method (Lee and Carter, 1992);
- 3) modelli econometrici (e.g. *Spline models*).

E' interessante notare che le agenzie governative impiegano principalmente metodi estrapolativi sulla base di dati storici secondo un approccio deterministico, al contrario gli attuari soprattutto metodi estrapolativi di tipo parametrico come il modello di Gompertz. Si considerino ad esempio *Eurostat e United States Census Bureau population projections*. Esse implementano entrambe un approccio deterministico, che fa ricorso ai trend storici, generalmente degli ultimi 15 anni, circa i tassi di mortalità ad età specifiche (*age-specific mortality rates - ASMR*) ed assumono che tali tendenze si estendano al futuro dati taluni pesi (European Commission, Eurostat, 2005; Hollman et al., 2000). I valori di *ASMR* vengono stimati ad una data intermedia ed alla fine del periodo considerato per la previsione. Queste stime vengono effettuate tenendo conto dei miglioramenti nei tassi di mortalità registrati negli ultimi 3 o 5 anni disponibili. Per ciascun anno intermedio gli *ASMR* vengono calcolati per interpolazione. Infine estrapolano gli anni intermedi assumendo una funzione di sopravvivenza parametrica, ad esempio logistica o alla Gompertz.

Indipendentemente dal metodo usato, la previsione dei tassi di mortalità ad età molto avanzate (85 anni o più) risulta la sfida più complessa, dal momento che i dati ad età inoltrate non sono accurati a causa del ristretto set di dati osservabili.

### 5.3 Il trasferimento del rischio a soggetti terzi: i *survivor derivatives*

L'assicurazione si concretizza nell'associazione di più individui sottoposti al medesimo rischio al fine di trasferire il danno "dall'economia che direttamente ne è colpita ad un gruppo di economie esposte al medesimo rischio, sicchè il danno stesso viene ad essere ripartito su di una massa di soggetti" (Cassandro 1975). Dunque è insito nel fenomeno assicurativo stesso il concetto di trasferimento del rischio ad entità terze. Nella fattispecie, il *longevity risk* viene ceduto al mercato finanziario, attraverso l'emissione di derivati legati all'intensità di morte (*survivor derivatives*). Essi

---

<sup>2</sup> Ad esempio il modello di Gompertz.

vennero proposti da Blake e Burrows in un paper del 2001 e presentati alla comunità scientifica nel 2006 in occasione del convegno dell'Istituto degli Attuari a Londra. Come tutti gli strumenti innovativi, i *survivor derivatives* non vennero salutati dal plauso della comunità scientifica, ma da un vento di scetticismo. Ma lo scetticismo ed i costi di occasionali fallimenti sono tipici della sperimentazione o del cosiddetto processo di “distruzione creativa” di nuovi prodotti finanziari.

Il *payoff* dei *survivor derivatives* dipende appunto dall'andamento della mortalità. Nell'ambito di questa particolare classe di attività finanziarie si distinguono: *mortality bonds* anche detti *longevity bonds* e *mortality swaps* o *survivor swaps*. Questi ultimi risultano particolarmente interessanti per struttura e per funzione. In ordine alla prima, essi costituiscono un accordo per lo scambio di uno o più cash flows nel futuro, sulla base di un dato indice di sopravvivenza; nel caso base, si scambia un pagamento presente con uno stocastico dipendente dall'indice di mortalità relativo ad una data popolazione. In merito alla funzione, essi servono a coprirsi dal rischio di deviazioni sistematiche ed accidentali del numero dei decessi dal valore atteso. L'acquisto di *survivor swaps* configura una copertura per riassicurazione. L'interesse maggiore verso i titoli di pura mortalità è che essi potrebbero fornire un beneficio derivante da diversificazione poiché la mortalità potrebbe non avere alcuna correlazione con i mercati finanziari, o tutt'al più una correlazione molto bassa (Lin, Cox (2005)). Tuttavia, sembra che attualmente le compagnie esitino ad acquistare contratti di questo tipo a lungo termine poiché potrebbero prospettare un altro tipo di problema: un significativo rischio di credito (Dahal 2004). Inoltre esiste una condizione ostativa forte alla diffusione di tali asset: i modelli di pricing sono infatti ad un iniziale stadio di sviluppo, non essendo agevolmente implementabili le metodologie tipiche di *pricing* di un mercato completo.

#### 5.4 Il trasferimento del rischio a soggetti terzi: i *mortality linked contracts*

Il *longevity risk* può essere ceduto ad un gruppo di assicurati oppure ad agenzie private nei contratti di tipo *mortality – linked*. In questi contratti si legano i premi o i benefits ad una dato gruppo di individui sufficientemente ampio: ad es. l'intera popolazione italiana, l'intero portafoglio della compagnia assicurativa, ecc. L'idea sottostante è che l'equivalenza tra premi e benefits è stabilita sulla base dell'informazione disponibile sulla mortalità al tempo 0. Si prevede un aggiustamento su premi o benefits: cioè il contratto non è interamente pagato da una somma fissa, ma dipende dalla variazione realmente osservata della mortalità. In generale questi prodotti legati all'intensità di mortalità introducono un problema di stima di essa ed anche in questo caso i modelli di pricing di tali contratti necessitano di ulteriore sviluppo.

Nel corso della trattazione si farà riferimento ad una gestione “interna” del *longevity risk* mediante l’impiego di tavole di mortalità proiettate, piuttosto che a strumenti innovativi di trasferimento del rischio. Tale scelta è motivata dal forte limite di cui risente il mercato dei titoli legati all’andamento della sopravvivenza: l’assenza di liquidità del mercato demografico implica che il rischio in oggetto non possa essere perfettamente coperto attraverso l’acquisto di tali titoli (Hari et al. 2007).

In generale, i contratti dipendenti dalla sopravvivenza umana non sono negoziabili in un mercato completo nel senso del termine (Coppola et al. 2007). Nonostante l’accresciuto interesse nei confronti dei *longevity bonds*, questi prodotti non sono al momento sufficientemente diffusi al punto da descrivere completamente il mercato assicurativo, proprio per la struttura a termine della mortalità e per il citato aspetto della illiquidità. Il risvolto pratico dell’incompletezza del mercato demografico risulta essere l’assenza di indicazioni circa la dinamica della misura della mortalità. In un’ottica di valutazione a valori correnti, si descrive il fenomeno demografico usando l’aspettativa della sua migliore stima (*best estimate*), considerando il mercato neutrale rispetto alla componente sistematica ed accidentale del rischio demografico (Ballotta et al 2006).

## **6. Requisiti ideali per le tavole di mortalità proiettata**

La Commissione *Life Office Mortality* afferente al *Continuous Mortality Investigation Bureau* ha codificato in sette requisiti le caratteristiche considerate desiderabili per i modelli di proiezione (CMI):

- 1) facilità d’uso: è un’ovvia richiesta che risponde anche alla necessità di comprendere e spiegare ad altri il modello;
- 2) facilità d’interpretazione dei parametri: i parametri del modello devono essere facili da capire e da stimare;
- 3) struttura del modello ed adattamento: questo risulta un requisito chiave secondo cui il modello di proiezione dovrebbe essere *sensibile alla regione dei dati*, nel senso di aderenza ai dati;
- 4) effetti coorte: laddove esistano nei dati, i modelli devono essere in grado di rifletterli;
- 5) *best estimate*, questo requisito chiave implica che le proiezioni devono essere ragionevoli ed attendibili; le proiezioni dovrebbero inoltre essere consistenti con i trend più recenti e dovrebbero prendere in considerazione i trend più significativi;
- 6) intervalli di confidenza: avendo le proiezioni natura probabilistica possono essere associate a dati livelli di confidenza;
- 7) abilità a generare traiettorie di rilevazione.

Tali requisiti sarebbero auspicabili, tuttavia rimane forte la componente di incertezza circa la proiezione della mortalità futura, in ordine alle seguenti ragioni:

- l'incertezza del modello, che nasce a causa del fatto che il sottostante modello "corretto" è incognito;
- l'incertezza dei parametri: i parametri sono stimati da un set di dati finito;
- l'incertezza stocastica: questa riflette le variazioni casuali che si potrebbero verificare in futuro, anche se il modello ed i parametri sono conosciuti;
- l'errore di misura;
- l'eterogeneità che si configura se, nell'ambito del set di dati, ci manifestano trend differenti;
- l'esperienza passata che non può essere una buona *proxy* per il futuro.

Rimane dunque significativa l'incertezza nella scelta della tavola che ne giustifica una sua accurata quantificazione.

## Capitolo 2 – I RISCHI DI UN PORTAFOGLIO ASSICURATIVO

### 1. Tipologie di rischio

Le principali tipologie di rischio che insistono su di un portafoglio assicurativo sono riconducibili al *rischio d'investimento* ed al *rischio demografico*.

Il primo deriva dall'aleatorietà dei tassi di rendimento degli investimenti effettuati dalla compagnia assicurativa rispetto ai tassi effettivi e presenta natura sistematica impattando su tutte le polizze nello stesso verso.

Il secondo va analizzato distinguendone la componente assicurativa e quella di longevità. La componente assicurativa risulta connessa alle oscillazioni del numero effettivo di decessi rispetto al numero previsto. Essa si configura come un rischio diversificabile che può essere controllato incrementando il numero di polizze in portafoglio. La componente di longevità invece deriva dal miglioramento del trend della mortalità. Essa rappresenta un rischio sistematico che può essere controllato mediante tavole di mortalità proiettate, cioè costruite sulla base di previsioni sull'andamento dei futuri tassi di mortalità (Marocco e Pitacco, 1998; Olivieri, 1998). Da ciò deriva una ulteriore fonte di rischio, rappresentata dall'aleatorietà della tavola di proiezione prescelta (Coppola *et al.*, 2002): il cosiddetto rischio di modello.

### 2. Misure di rischiosità

Allo scopo di decomporre il rischio di portafoglio nelle sue componenti principali, in termini generali, si consideri una variabile aleatoria affetta da tre fonti di incertezza  $X, Y, G$ . Sia inoltre  $f(\cdot)$  una funzione in tre variabili così che

$$Z = f(XYG)$$

per la formula di decomposizione della varianza (Coppola *et al.* 2005), possiamo decomporre la varianza di  $Z$  secondo  $X$  come segue:

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[E(Z | X)] + E[\text{var}(Z | X)] \quad (1),$$

Si consideri per la quantità  $\text{Var}[E(Z | X)]$  la funzione:

$$E(Z | X) = E[f(XYG) | X] \quad (2).$$

Nella (11) si assumo che  $X$  abbia un valore noto  $x_0$ , si ha:

$$E(Z | X = x_0) = E[f(XYG) | X = x_0] \quad (3).$$

Tutti i valori assunti da  $Y$  e  $G$  in  $f(XYG)$  sono influenzati da  $X = x_0$  e dunque l'incertezza della quantità  $E[f(XYG) | X]$  è dovuta solamente alla variabilità di  $X$ . La misura  $Var[E(Z | X)]$  riassume questa incertezza, essa può essere dunque considerata come misura della variabilità di  $Z$  dovuta ad  $X$  avendo mediato gli effetti dovuti ad  $Y$  e a  $G$ .

Si prenda ora in considerazione il secondo addendo della formula (1), cioè  $E[\text{var}(Z | X)]$ .

Analogamente a quanto detto precedentemente si assumo che  $X = x_0$ , si ha:

$$Var(Z | X = x_0) = Var[f(XYG) | X = x_0] \quad (4)$$

In questo caso la variabilità di  $Z$  è determinata dalla variabilità di  $Y$  e  $G$  per ogni dato valore assunto da  $X$ , quindi la quantità  $E[\text{var}(Z | X)]$  è semplicemente una media dell'incertezza di  $Z$  dovuta a  $Y$  e  $G$ .

Si voglia infine decomporre secondo la (1) la quantità  $Var[Z | X]$  condizionando ad esempio secondo  $Y$ , ottenendo così:

$$Var[Z | X] = Var[E(Z | Y) | X] + E[\text{var}(Z | Y) | X] \quad (5)$$

e quindi

$$E[Var[Z | X]] = E[Var[E(Z | Y) | X]] + E[E[\text{var}(Z | Y) | X]] \quad (6)$$

dove, in base ad un ragionamento analogo a quello precedentemente esposto, la componente  $E[Var[E(Z | Y) | X]]$  può essere considerata una misura dell'incertezza di  $Z$  dovuta ad  $Y$  mentre  $E[E[\text{var}(Z | Y) | X]]$  può essere considerata dipendente dalla variabilità di  $G$ , avendo condizionato rispetto ad  $X$  e ad  $Y$ .

## Capitolo 3 – LO SCENARIO FINANZIARIO E LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE

### 1. Introduzione

Il primo passo nel processo di costruzione di un modello consiste nel caratterizzare l'ambiente nel quale si intende operare. Le tre ipotesi fondamentali sul funzionamento del mercato che si è soliti assumere sono le seguenti:

- *non frizionalità*, cioè l'assenza di costi di transazione, di gravami fiscali, possibilità di vendite allo scoperto e nessun rischio di default;
- *completezza*, ossia la disponibilità di titoli di scadenza qualsiasi e l'infinita divisibilità degli stessi;
- *assenza di arbitraggio*, assenza di possibilità di guadagno non rischiose.

Stabilite dunque le ipotesi alla base del modello occorre identificare i fattori che guidano l'evoluzione dei tassi.

Si farà riferimento ai cosiddetti *modelli per la struttura a termine dei tassi a breve* (modelli della *term structure*), i quali descrivono l'evoluzione della *yield curve* nel tempo; in essi viene specificato il comportamento del tasso di interesse  $r$  a breve termine (il tasso spot è per definizione il compenso, per unità monetaria impiegata, che il mercato fissa al tempo  $t$  per investimenti che hanno durata pari all'intervallo  $(t, T)$  e viene usualmente riferito ad una unità temporale standard quale l'anno).

Studi empirici sulla evoluzione delle strutture dei tassi di interesse hanno mostrato che è possibile scomporre l'evoluzione della curva in tre tipi di moti indipendenti:

- una traslazione rigida (*shift*), indipendente dalla data di scadenza  $T$  ;
- una torsione (*twist*) in cui i tassi a breve termine si muovono in direzione opposta a quelli a lungo termine;
- un moto cosiddetto a farfalla (*butterfly*) in cui i tassi intermedi si muovono in maniera opposta a quelli estremi che si muovono in modo concorde.

Alcune analisi della varianza dei tassi di interesse in termini di componenti principali hanno suggerito che di questi tre tipi di moto il primo è quello dominante.

### 1.1 Modelli unifattoriali

Nei *modelli unifattoriali* il processo stocastico che descrive la dinamica del tasso di interesse istantaneo a pronti dipende da un solo fattore di incertezza; a seconda di quale è il processo stocastico che determina l'evoluzione del tasso a pronti la dinamica può essere differente.

Di solito il tasso a breve è descritto, in un mondo neutrale verso il rischio, dal seguente processo di Itô:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (1)$$

dove  $z = \{z_t\}_{t \geq 0}$  è un processo di Wiener (o moto Browniano) e il *drift* istantaneo  $m(r)$  e la deviazione standard istantanea  $s(r)$  sono funzioni del tasso  $r$  ma indipendenti dal tempo  $t \geq 0$ .

L'assunzione di un solo fattore di rischio non è così restrittiva come si potrebbe pensare: un modello ad un solo fattore implica che tutti i tassi si muovano nella stessa direzione in ogni breve intervallo di tempo ma non che tutti si muovano in uguale misura. La forma della *yield curve* può quindi cambiare con il passare del tempo.

Tra i modelli unifattoriali, godono di una maggiore diffusione il modello di Cox, Ingersoll e Ross (di seguito denominato *CIR*) e il modello di Vasicek.

Il successo di questi modelli è dovuto principalmente alla possibilità di ottenere delle soluzioni analitiche per il prezzo di obbligazioni; ciò infatti li rende strumenti abbastanza semplici da maneggiare nella pratica. Tuttavia, hanno anche dimostrato di avere diversi limiti e di non riuscire a rispettare molte delle esigenze presenti sul mercato; infatti, c'è chi ritiene che una singola variabile sia insufficiente per catturare ragionevolmente la distribuzione dei cambiamenti futuri della *yield-curve*.

Questi modelli non si adattano automaticamente alla *term structure* corrente; scegliendo adeguatamente i parametri si può fare in modo che essi riproducano approssimativamente molte delle *term structure* che si incontrano in pratica.

### 1.2 Modelli ad arbitraggi nulli

Tali modelli sono disegnati in modo da essere esattamente coerenti con la *term structure* corrente; la differenza tra i modelli di equilibrio e quelli ad arbitraggi nulli è che nei primi la *term structure* corrente è un output mentre nei secondi è un input.

Generalmente, nei modelli di equilibrio il *drift* del tasso a breve non è funzione del tempo, invece nei modelli ad arbitraggi nulli il *drift* del tasso a breve dipende dal tempo. Inoltre, in questi ultimi

modelli la configurazione iniziale della *yield curve* regola il sentiero medio che verrà seguito in futuro dal tasso a breve: se la *term structure* è inclinata verso l'alto,  $r$  tenderà ad aumentare in un mondo neutrale verso il rischio; se la *term structure* è inclinata verso il basso,  $r$  tenderà a diminuire; se, invece, la *term structure* prima decresce e poi cresce, il sentiero atteso avrà una pendenza negativa all'inizio e positiva dopo.

Tra i modelli ad arbitraggi nulli rientrano il modello di Ho e Lee, il modello di Hull e White ad uno e a due fattori e il modello di Black e Karasinski.

I modelli di equilibrio e quelli ad arbitraggi nulli presentano due importanti limiti:

- contengono un solo fattore di rischio (ossia, una sola fonte di incertezza);
- non consentono all'utente di scegliere liberamente la struttura della volatilità.

Essi, pertanto, offrono trattabilità, ma al contempo c'è motivo di ritenere che una singola variabile sia insufficiente per catturare ragionevolmente bene la distribuzione dei cambiamenti futuri della *yield-curve*; l'interesse si è allora spostato su modelli più sofisticati, i modelli multi-fattoriali.

### *1.3 Modelli multi-fattoriali*

I modelli multifattoriali consentono all'utente piena flessibilità nella definizione delle condizioni di volatilità, sia al tempo zero che ad istanti futuri. In linea di principio la curva dei tassi trova la sua collocazione matematica ideale in uno spazio di funzioni infinito-dimensionale; per ragioni pratiche tuttavia si ricorre ad un numero finito di variabili di stato, ed è un problema pratico quello di determinare quale sia il numero di queste variabili sufficiente ad offrire ragionevolezza di risultati e trattabilità.

Alcuni lavori suggeriscono che due o tre variabili di stato possono essere sufficienti per molti scopi pratici.

A tale gruppo appartengono il modello di mercato del Libor (LMM) e il modello di Heath, Jarrow e Morton (HJM). Si tratta di un approccio diverso in quanto considera l'intera curva dei tassi d'interesse come una variabile di stato; inoltre, descrive la struttura a termine dei tassi d'interesse utilizzando i tassi "forward" (il tasso forward per l'anno  $n$  o più in generale per il periodo  $\Delta t$  per l'anno  $n$ , è il tasso determinato dai tassi spot attuali per un periodo  $\Delta t$  di tempo a partire dall'anno  $n$ ), per i quali si costruisce un modello stocastico.

## **2. Modelli Unifattoriali: il modello di Vasicek ed il modello di Cox, Ingersoll (CIR)**

I primi e più noti tentativi di modellare la struttura a termine, come pure la sua evoluzione nel tempo, erano basati sull'assunzione che fosse sufficiente modellare il comportamento di un solo punto della curva dei rendimenti. Il tipico punto utilizzato nei modelli tradizionali è l'intercetta della curva, cioè il tasso d'interesse istantaneo.

Sulla base di particolari assunzioni sulla dinamica stocastica di questo punto della curva, ed assumendo che sul mercato non sia possibile realizzare arbitraggi, è possibile ottenere il valore di tutti gli altri punti attraverso relazioni matematiche precise, e talvolta disponibili anche in forma analitica: è il caso del modello di Vasicek e quello *CIR*.

### 2.1 Modello di Vasicek

Una delle rappresentazioni maggiormente utilizzate per modellizzare l'evoluzione della struttura a termine dei tassi di interesse consiste nell'assumere che il tasso spot *risk-free* sia un processo stocastico markoviano, soluzione di un'equazione differenziale stocastica. Uno dei più noti modelli è il modello di Vasicek.

In questo modello si pone:

$$m(r) = a(b - r)$$

$$s(r) = \sigma$$

pertanto il processo neutrale verso il rischio per  $r$  è descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (2)$$

dove  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  (coefficiente di diffusione, ossia la volatilità) sono parametri costanti a valori reali, mentre  $dz$  è un moto Browniano standard.

Nel modello di Vasicek il processo stocastico  $r$  è di tipo *mean reverting*, il cui valore, quindi, tende ad essere riportato nel tempo ad un livello di lungo periodo: in questo modello il livello di lungo periodo è rappresentato dal parametro  $b$ . Infatti:

- se  $r_t > b$  il drift  $a(b - r)$  è negativo, proporzionalmente alla differenza: il livello di  $r$  tende a scendere;
- se  $r_t < b$  il drift risulta positivo e tende a far aumentare il valore di  $r$ .

Il tasso a breve viene spinto verso il livello  $b$  con una velocità pari ad  $a$ : infatti,  $b$  è la media di lungo periodo mentre  $a$  fissa la velocità di mean reversion.

Il modello di Vasicek fornisce una descrizione piuttosto realistica dei processi osservati sulla serie storica del tasso a breve; esso viene ancora largamente utilizzato nella pratica, data la sua maneggevolezza dovuta soprattutto al fatto che ammette soluzioni analitiche.

Inoltre, la possibilità che per alcune traiettorie i tassi a breve possano diventare negativi costituisce una caratteristica del modello che non ne limita affatto l'implementazione, al contrario esso può essere impiegato nei casi in cui si rende necessaria la rappresentazione della dinamica del tasso globale di rendimento su dati portafogli.

Nel modello di Vasicek si possono scrivere in forma chiusa le formule di valutazione per il prezzo di un titolo senza cedole. Si consideri in particolare uno zero-coupon bond unitario che paga un euro all'epoca  $T$ .

Il prezzo  $P(t, T)$  di tale titolo all'epoca  $t$  (con  $0 \leq t \leq T$ ) si può scrivere come segue:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad (3)$$

con

$$B(t, T) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

e

$$A(t, T) = \exp \left[ (B(t, T) - T + t) \left( ab - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}] / a^2 - [\sigma^2 B(t, T)^2 / 4a]$$

Quando  $a = 0$  si ha

$$B(t, T) = T - t$$

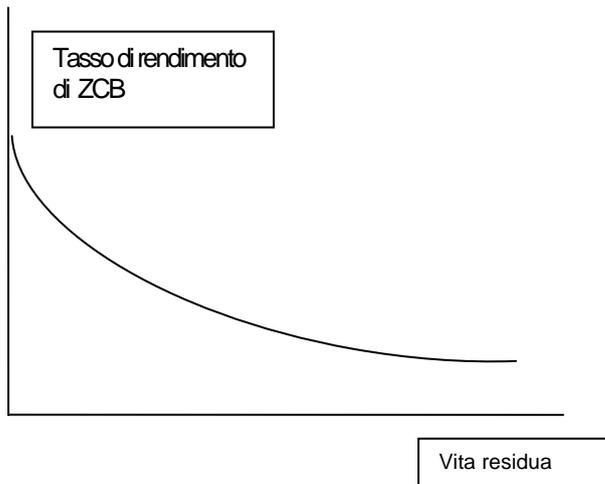
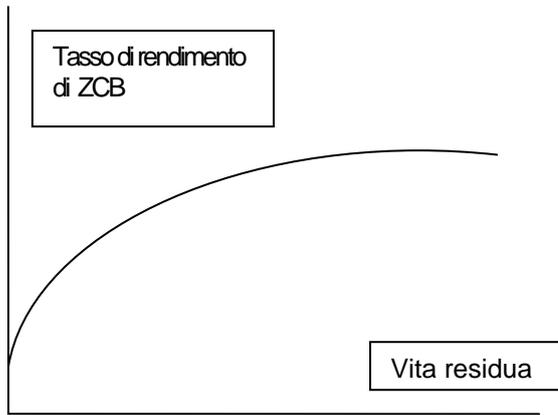
e

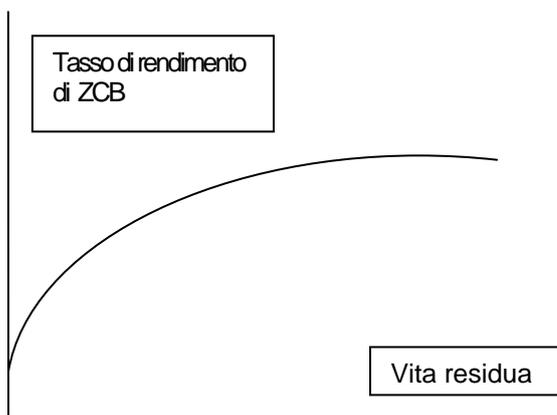
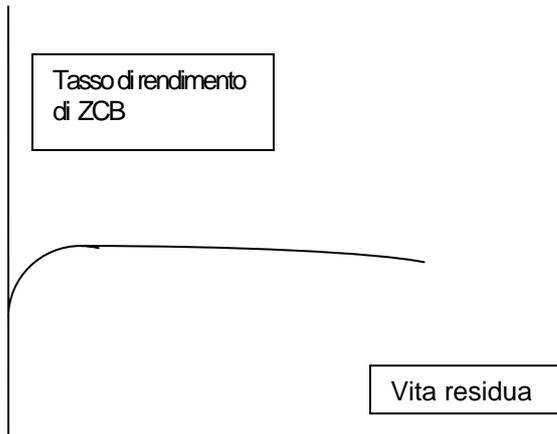
$$A(t, T) = \exp \left[ \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3 \right]$$

Pertanto, dati i valori di  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  si potrà determinare l'intera *term structure* che si può diversamente configurare: con inclinazione positiva, negativa, o con "gobba".

Ad esempio, le evidenze empiriche hanno mostrato in questi anni un andamento monotono della curva dei rendimenti *strippata* sulla base del mercato dei tassi Euro.

**Grafico 1** - Possibili forme della *term structure* secondo il modello di Vasicek:





## 2.2 Modello di Cox, Ingersoll e Ross

Il modello *CIR*, sviluppato nel 1981 da Cox, Ingersoll e Ross, rappresenta la dinamica per il tasso d'interesse sulla base sia del livello di tassi nel lungo termine, sia sul grado di volatilità dei tassi.

Si ipotizza che il tasso di interesse nel lungo termine converga ad un valore medio  $e$ , quindi, quando i tassi si attestano ad un livello inferiore alla media tenderanno gradualmente ad aumentare, viceversa quando essi si trovano al di sopra della media tenderanno gradualmente a diminuire. A questa tendenza di fondo si aggiunge una componente aleatoria nell'andamento dei tassi medesimi.

Il modello *CIR* assume:

- che il tasso di interesse istantaneo  $r$  segua il processo descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (4)$$

dove  $a$  è la velocità di aggiustamento del tasso d'interesse  $r$  verso la sua media di lungo periodo  $b$ ,  $\sigma\sqrt{r}$  è la volatilità che caratterizza le variazioni di  $r$  e  $dz$  è un processo di Wiener standardizzato; se risulta  $0 < a < 1$  il tasso istantaneo tende a convergere al suo valore medio  $b$  (*mean reverting process*);

- il rendimento istantaneo atteso di obbligazioni di qualsiasi scadenza è pari al tasso d'interesse  $r$  maggiorato di un premio al rischio (*Local Expectations Hypothesis*):

$$E\left(\frac{dB}{B}\right) = \left[ r + \lambda r \left( \frac{B_r}{B} \right) \right] \quad (5)$$

dove  $-\lambda$  è il prezzo di mercato del rischio e  $rB_r / B rB_r / B$  rappresenta l'elasticità del prezzo  $B$  dell'obbligazione rispetto ad  $r$ ;

- valgono le consuete ipotesi di mercati perfetti.

Si tratta di un modello in cui i tassi sono sempre non negativi e il processo neutrale verso il rischio per  $r$  ha lo stesso *drift* con *mean reversion* del modello di Vasicek, ma il termine stocastico ha una deviazione proporzionale a  $\sqrt{r}$ ; ciò vuol dire che, al crescere del tasso d'interesse a breve, la sua deviazione standard aumenta.

Cox, Ingersoll e Ross hanno dimostrato che i prezzi delle obbligazioni hanno la stessa forma generale del modello di Vasicek:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}$$

ma le funzioni  $B(t, T)$  e  $A(t, T)$  sono diverse e precisamente:

$$B(t, T) = \frac{2e^{y(T-t)} - 1}{(y + a)[e^{y(T-t)} - 1] + 2y}$$

e

$$A(t, T) = \frac{(2e^{y(T-t)} - 1)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}}{(y + a)[e^{y(T-t)} - 1] + 2y}$$

con  $y = \sqrt{(a^2 + 2\sigma^2)}$

Tuttavia, come nel modello di Vasicek, le *yield curves* possono essere inclinate verso l'alto o verso il basso o mostrare una lieve gobba. Il tasso a lungo termine  $R(t,T)$  dipende da  $r(t)$  in modo lineare: ciò vuol dire che il valore di  $r(t)$  determina il livello della *term structure* al tempo  $t$ . Quindi, la forma della *term structure* al tempo  $t$  è indipendente da  $r(t)$  ma dipende da  $t$ .

L'utilizzo del modello CIR presenta alcuni vantaggi:

- è semplice, ma significativo da un punto di vista economico;
- è possibile stimarlo agevolmente sia su serie storica che dalla curva dei rendimenti (analisi *cross-section*).

I limiti di tale modello sono dunque essenzialmente connessi al fatto che si tratta di un modello unifattoriale e quindi utilizza un'unica variabile per descrivere l'intera *yield curve*; questa assunzione implica che tutti i tassi di interesse si muovano nella stessa direzione in ogni breve intervallo di tempo. In altre parole i modelli a singolo fattore comportano una perfetta correlazione tra i movimenti dei tassi a differenti *maturities*, ciò comunque non implica che i rendimenti per ogni scadenza varino ogni volta della stessa quantità, né che la *term structure* debba aver sempre la stessa forma.

## Capitolo 4 – LO SCENARIO DEMOGRAFICO: MODELLI PER LA SOPRAVVIVENZA

### Premessa

Sin dai primi anni '90 sono stati sviluppati modelli stocastici per rappresentare i miglioramenti dell'andamento del trend della sopravvivenza umana, tra i quali vi sono i seguenti:

- il modello *Lee - Carter* (1992), e le sue estensioni *Brouhns et al.* (2002), *Renshaw e Haberman* (2003,2006), CMI (2005, 2006));
- il modello *P-splines* (Currie et al. (2004), Currie (2006),CMI (2005, 2006));
- il modello di *Cairns et al.* (2006b).

Negli ultimi decenni tuttavia il modello proposto da *Lee e Carter* (di seguito L-C) ha acquisito una popolarità crescente tra demografi ed attuari. La descrizione dei cambiamenti della mortalità come funzione di un unico indice temporale si è dimostrata infatti molto calzante nel prevedere i trend della mortalità (Biffis et al. 2005).

Nonostante la scelta della tavola risponda ad un criterio di tipo *best estimate*, vale la pena considerare brevemente il modello L-C che osserva molti dei requisiti considerati auspicabili e che viene implementato a titolo di esempio nelle applicazioni sviluppate di seguito insieme ad altre tavole di sopravvivenza. In particolare, il modello L-C costituisce un risultato fondamentale nella rappresentazione e previsione della sopravvivenza umana. Oltre alla maneggevolezza nella implementazione dei dati, tale modello rappresenta efficacemente i miglioramenti nel trend della mortalità. Per il suo meccanismo endogeno di generazione dei parametri di anno in anno, esso riesce a catturare i cambiamenti nel trend della mortalità. Nuovi dati correggono la descrizione del fenomeno a conseguentemente evidenziano i cambiamenti nel trend.

### 1. Il modello Lee Carter

Ronald Lee e Lawrence Carter propongono in un articolo del 1992 pubblicato sul *Journal of the American Statistical Association* un modello per la mortalità che ha la caratteristica di essere estremamente semplice da un punto di vista applicativo ed allo stesso tempo ha la capacità di descrivere il fenomeno con buona accuratezza. Il metodo proposto è puramente estrapolativo, nel senso che non tende in alcun modo ad inglobare informazioni mediche, sociali o comportamentali, ma tutte le considerazioni sono basate su come il fenomeno si è evoluto in passato.

Esso appartiene a quella categoria di modelli nei quali l'andamento della mortalità è espresso sia in funzione del tempo  $t$  che dell'età  $x$ .

Questo modello risulta *fittato* su dati storici e la risultante stima del parametro che varia nel tempo è prevista come una serie storica stocastica, usando il metodo di *Box-Jenkins*. Sulla base della previsione del generale livello di mortalità si ottengono i tassi specifici per età.

### 1.1 La relazione caratteristica del modello

Il modello ipotizza un andamento esponenziale del tasso centrale di mortalità per ogni età. Tale tasso può essere interpretato come una probabilità di decesso centrale, cioè calcolata alla metà del periodo in considerazione (attraverso il rapporto tra decessi e numero medio di persone), diversamente da  $q_x$  che è la probabilità di decesso all'inizio del periodo (in questo caso il rapporto è tra decessi e numero di persone all'inizio del periodo).

L'andamento esponenziale del tasso centrale di mortalità ricalca perfettamente il fenomeno della decelerazione: la vita attesa per un soggetto di età  $x$  cresce nel tempo ma la velocità alla quale ciò avviene tende a ridursi. Nella sua versione originale il modello è caratterizzato dalla seguente relazione (Lee e Carter, 1992):

$$m_{x,t} = \exp(a_x + k_t b_x + e_{x,t}) \quad (1)$$

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + k_t b_x + e_{x,t} \quad (2)$$

dove :

- $m_{x,t}$  il tasso centrale di mortalità calcolato per un individuo di età  $x$  al tempo  $t$ .
- $a_x$  è una media semplice di  $\ln(m_{x,t})$  lungo l'intero periodo di osservazione. Essa descrive in media appunto il comportamento del tasso centrale di mortalità per ogni età  $x$ .
- $k_t$  è un indice di mortalità nel tempo. Esso mostra per tutte le età insieme come il fenomeno della mortalità si è evoluto nel passato.
- $b_x$  è un parametro di sensitività. Per ogni età, esso spiega come  $\ln(m_{x,t})$  reagisce al passare del tempo, come mostra la seguente espressione:  $\frac{d \ln(m_{x,t})}{dt} = \frac{b_x dk}{dt}$ . Il parametro sintetizza l'ampiezza del tasso di mortalità che si reduce per ogni età;
- $e_{x,t}$  rappresenta la parte di mortalità che non è catturata dal modello, con media zero e varianza  $\sigma_e < \infty$ .

## 1.2 La stima dei parametri

Il modello così come risulta dalla relazione caratteristica è sottostimato, cioè i termini a secondo membro della (1), (2) non sono direttamente osservabili.

Dunque il primo problema che riguarda la stima è quello di determinare innanzitutto il parametro  $a_x$  ad ogni età  $x$ . A tale scopo si imponga la normalizzazione del parametro  $k$  in maniera tale che:

$$\sum_t k_t = 0 \quad (3)$$

e sulla base della (4.3) si ottiene:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_{x,t}) = na_x + b_x \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t + \sum_{t=t_1}^{t_n} e_{x,t} \quad (4)$$

Se  $e_{x,t}$  è zero in media, si può scrivere la seguente relazione:

$$\frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_{x,t})}{n} = \ln \left[ \left( \prod_{t=t_1}^{t_n} m_{x,t} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = \hat{a}_x \quad (5)$$

essendo  $m_{x,t}$  osservabile dalle tavole di sopravvivenza, si può agevolmente determinare  $a_x$

Si supponga inoltre:

$$\sum_x b_x = 1 \quad (6)$$

e sulla base della (4.6) si può scrivere la seguente espressione:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \ln(m_{x,t}) = \sum_{x=0}^{\omega} a_x + k_t \sum_{x=0}^{\omega} b_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{x,t} \quad (7)$$

trascurando l'addendo somma degli errori, l'indice  $k_t$  può approssimarsi così:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \ln(m_{x,t}) - \sum_{x=0}^{\omega} a_x = \hat{k}_t \quad (8)$$

Essendo il parametro  $b_x$  ottenibile attraverso il *fitting* di una semplice regressione, il modello è così espresso:

$$\hat{m}_{x,t} = \exp(\hat{a}_x + \hat{k}_t \hat{b}_x) \quad (9)$$

$$\ln(\hat{m}_{x,t}) = \hat{a}_x + \hat{k}_t \hat{b}_x \quad (10)$$

### 1.3 Lo step finale: la previsione

Il modello assume la costanza di  $a_x$  e  $b_x$ . L'unico parametro da proiettare è  $k_t$  attraverso una procedura *Box – Jenkins* che serve a determinare un appropriato ARIMA. Lee e Carter ottengono per l'indice di mortalità  $k_t$  un trend lineare sulla base di un ARIMA(0,1,0), che ben si adatta alla rappresentazione dell'evoluzione dell'indice nel tempo. Si richiama dunque per  $k_t$  il seguente modello:

$$k_t = k_{t-1} - c + e_t \quad (11)$$

in cui:

- $k_t$  è l'indice di tempo al tempo  $t$ ,
- $c$  è il rapporto tra il decremento globale di  $k_t$  ed il numero dei periodi in cui il decremento si è realizzato,
- $e_t$  è il termine di errore al tempo  $t$ .

Per quanto riguarda l'intervallo di confidenza, si definisce lo standard error associato ad  $s$  periodi di previsione come segue (Lee e Carter, 1992):

$$\hat{\sigma}_h = \sigma_1 \cdot \sqrt{h} \quad \text{con } 2 \leq h \leq s \quad \text{e } h \in N$$

dove  $\hat{\sigma}_1$  è lo standard error della stima che indica l'incertezza associate ad un anno di previsione.

Si può evidentemente osservare che, all'aumentare dell'orizzonte di previsione, lo standard error cresce secondo la radice quadrata dell'orizzonte medesimo.

Avendo così proiettato  $k_t$  e sulla base della costanza di  $a_x$  e  $b_x$  si possono ottenere dalla relazione caratteristica gli  $m_{x,t}$  per ogni età  $x$  ed in ogni epoca  $t$ . Infine dagli  $m_{x,t}$  si può risalire alle  $q_{x,t}$  e dunque alla tabulazione di intere tavole di mortalità:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}.$$

## 2. Altri modelli

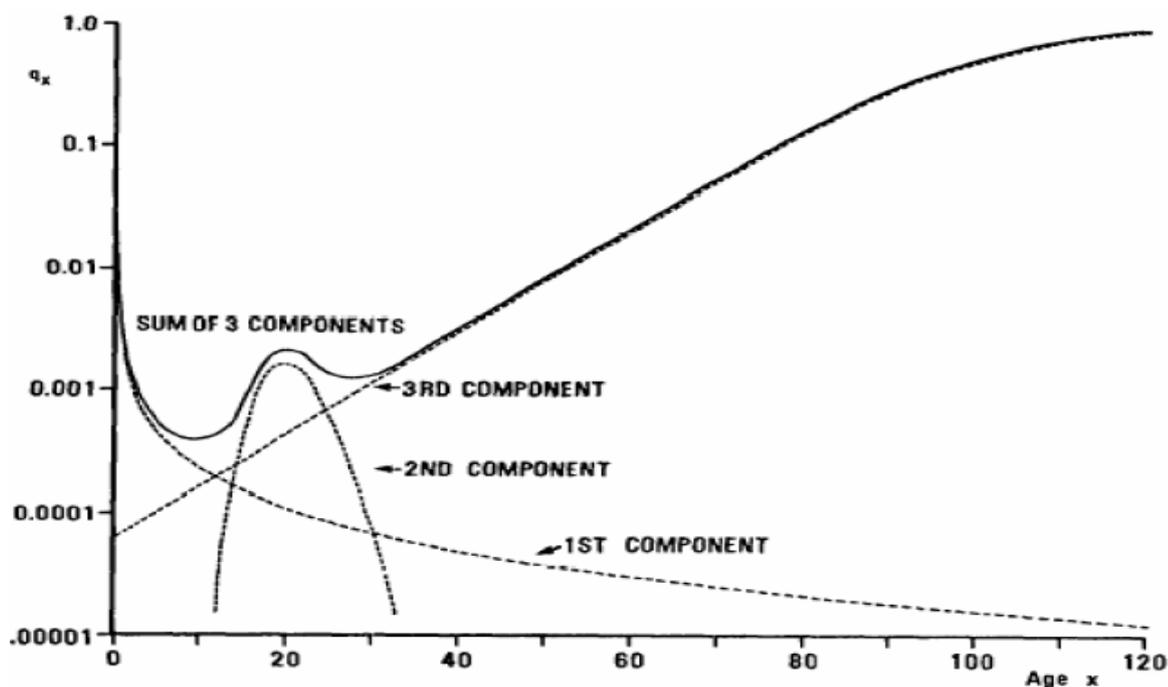
### 2.1 Il modello di Heligman Pollard

Nel 1980 Heligman e Pollard (di seguito H-P) introdussero un modello, diventato poi famoso, per la rappresentazione del trend della sopravvivenza. Nel modello di Heligman e Pollard, la probabilità di decesso tra  $x$  ed  $x+1$   $q_x$  può essere ottenuta dalla seguente relazione:

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D \exp \left[ -E \left\{ \log \left( \frac{x}{F} \right) \right\}^2 \right] + GH^x \quad (12)$$

L'idea sottostante il modello è quella di effettuare una decomposizione del termine al primo membro della (12) in tre parti: la mortalità infantile, la cosiddetta gobba accidentale in giovani età ed infine la mortalità senile. L'andamento grafico del trend della mortalità di una data popolazione, distinto nelle sue diverse componenti è rappresentato dal grafico 1:

**Grafico 1-** Il trend della mortalità, Fonte: Heligman Pollard (1980)



Ai fini dell'analisi condotta di seguito su portafogli di rendite pensionistiche, i primi due addendi al secondo membro della (12) possono essere trascurati, poiché si terrà in considerazione esclusivamente la componente della mortalità senile. Si considera dunque solo il terzo termine della (12) che descrive appunto il pattern della mortalità ad età adulte:

$$\frac{q_x}{p_x} = GH^x \quad (13)$$

dove G esprime il livello della mortalità senile ed H il tasso di incremento della mortalità senile.

## 2.2 Il modello di Weibull

Il modello di Weibull, che viene impiegato largamente nell'ambito della teoria dell'affidabilità, è altresì utilizzato per descrivere l'andamento della mortalità di un individuo appartenente ad una determinata collettività, sia per la semplicità della sua formulazione analitica, sia per il fatto che di tale modello si conoscono le espressioni analitiche dei valori sintetici della distribuzione.

Il modello generalizza l'uso di una distribuzione esponenziale a due o a tre parametri, in modo tale da poter descrivere intensità di mortalità non costanti e da rendere la distribuzione più adatta alla rappresentazione della mortalità.

Con riferimento alla variabile aleatoria  $T_0$ , che indica la durata aleatoria di vita di un individuo alla nascita, l'intensità di mortalità è espressa come:

$$\mu(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x - \mathcal{G}}{\beta} \right)^{\alpha-1} \quad \text{con } x \geq \mathcal{G} \quad (14)$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\mathcal{G}$  parametri positivi, rispettivamente di forma, di scala e di localizzazione. Dall'espressione analitica (14) dell'intensità di mortalità, mediante integrazione è possibile ricavare le espressioni analitiche delle altre funzioni della distribuzione.

## **Capitolo 5 - UN ESEMPIO IN ASSICURAZIONI CASO VITA: IL RISCHIO DI PROIEZIONE IN UN PORTAFOGLIO DI RENDITE PENSIONISTICHE**

### **1. Introduzione**

La progressiva riduzione della mortalità in età senili ha un effetto dirompente soprattutto su determinate polizze assicurative, quali le rendite vitalizie, caratterizzate da lunghe durate contrattuali: in età senili, la decrescenza nel tempo delle probabilità di decesso ad ogni età, gioca a sfavore dell'impresa assicuratrice.

Le assicurazioni in caso di vita sono infatti finalizzate allo scopo di costituire una disponibilità finanziaria, in caso di vita dell'assicurato ad una data epoca. Tipicamente, il contratto di rendita vitalizia prevede la corresponsione di una successione di rate a partire da una data epoca, nel caso in cui l'assicurato sia in vita. Il pagamento delle rate della rendita viene effettuato per tutta la durata di vita residua dell'assicurato (che usualmente coincide con il beneficiario della polizza) o per un periodo di tempo fissato (rendita temporanea).

La sistematica riduzione della mortalità rispetto al suo valore atteso impatta sia sull'entità delle prestazioni dell'assicuratore ad ogni data (il numero dei decessi ad ogni data è minore di quello previsto) che sul tempo di liquidazione (i pagamenti devono essere effettuati per un numero maggiore di periodi). Conseguentemente, se il trend migliorativo della mortalità si manifesta più forte di quello atteso, ciò conduce ad una sottostima dei costi dell'assicuratore, determinando una sovraesposizione finanziaria.

Tra i contratti di rendita vitalizia assume particolare importanza quello delle rendite pensionistiche, vale a dire di quei prodotti di rendita offerti dalle compagnie assicurative in qualità di previdenza complementare. Il mercato delle pensioni private attualmente rappresenta il terzo pilastro dei moderni sistemi pensionistici (Sigma 2007). Il volume dei fondi che sostengono le pensioni di anzianità private risulta particolarmente significativo. Nei sistemi che si affidano in larga misura a soluzioni private (come negli USA, UK, Svizzera) tali fondi ammontano al 100-150% del PIL. Anche i paesi con mercati pensionistici privati meno sviluppati stanno recuperando terreno: nell'area dell'euro tra il 2001-2005 gli attivi che sostengono tali settori sono cresciuti di oltre il 20% l'anno (Sigma 2007). Il potenziale di crescita è significativo ed in gran parte inesplorato, particolarmente se confrontato con il vuoto che la riduzione del ruolo del settore pubblico si lascerà dietro.

Il problema più grande è il rischio di un aumento sistematico della durata di vita della popolazione nel suo complesso. La natura sistematica, cioè non diversificabile, di questo rischio rende molto

costosa la sua gestione da parte degli assicuratori, tanto più nella misura in cui tali rendite sono tipicamente di tipo differito. Confrontando le rendite immediate e differite, l'esposizione al rischio longevità di una rendita differita è sempre maggiore di una dalle caratteristiche equivalenti, ancorché immediata, a causa del periodo di tempo più lungo durante il quale può aver luogo un miglioramento della mortalità e per il fatto che l'effetto di tale miglioramento è concentrato negli anni di pagamento della rendita.

Si stima che l'ammontare di questo rischio sui portafogli degli assicuratori sia ingente e destinato a crescere ulteriormente in futuro.

Nei decenni passati, le agenzie governative, gli attuari e gli accademici hanno consistentemente sottostimato i miglioramenti nel trend della mortalità. Uno studio della *National Academy of Sciences* (Lee e Miller (2000)) ha rilevato che le proiezioni sulla mortalità operate dalle Nazioni Unite, per le popolazioni in età avanzata di Europa e nord America tra il 1965 ed il 1990, hanno avuto una media di errore di circa il 10% dopo 15 anni.

Si rende oggi dunque ancor più pressante l'esigenza di misurare l'impatto dell'incertezza nell'ipotesi di sopravvivenza da adottare sulla posizione finanziaria dell'assicuratore.

Nella presente sezione viene presentata dunque una metodologia di analisi e di misura dell'impatto dell'aleatorietà della scelta della tavola di sopravvivenza proiettata sul fondo costituito dalle disponibilità finanziarie (fondo di portafoglio) detenute in un portafoglio omogeneo di rendite pensionistiche, in un ambiente stocastico per la mortalità e per i tassi d'interesse.

## **2. Le rendite pensionistiche**

### *2.1 Schema contrattuale*

Il fondo previdenziale si configura come un portafoglio istituito ad un tempo  $t$  di  $c$  contratti omogenei emessi su teste di età  $x$  al momento della stipulazione contrattuale, che prevede per il gestore del fondo il diritto ad incassare premi dall'entrata in vigore del contratto fino all'epoca  $n$  di inizio del pensionamento (fase di accumulazione) e l'obbligo di versare anticipatamente dall'epoca  $t+n$  l'ammontare del benefit di quiescenza  $R$  fino al momento del decesso. Si consideri un portafoglio chiuso a nuovi ingressi dopo il tempo  $t$ , per cui l'unica causa di uscita dal portafoglio stesso è il decesso, secondo un approccio cosiddetto *run - off*.

Sulla base del principio di equivalenza attuariale, il premio si calcola imponendo l'uguaglianza tra le prestazioni dell'iscritto al fondo, costituite da una rendita aleatoria anticipata temporanea di rata  $P$  incognita, e quelle del gestore, costituite da una rendita aleatoria anticipata differita di rata  $R$ . In simboli attuariali, possiamo scrivere:

$$P\ddot{a}_{x:n} = R_n / \ddot{a}_{x:n}$$

da cui si ricava  $P$

$$P = \frac{R_n / \ddot{a}_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Si noti che l'ammontare del premio dipende direttamente dal grado di proiezione, poiché un'ipotesi di proiezione maggiore (alte probabilità di sopravvivenza) significa in generale per il gestore erogare pensioni per più tempo ed a più persone in ciascun periodo in cui gli iscritti ne hanno diritto.

## *2.2 Un tipico contratto di rendita pensionistica: il caso italiano*

La rendita pensionistica è una forma individuale pensionistica, attuata mediante un contratto di assicurazione sulla vita a premi periodici che tipicamente serve a costituire un trattamento pensionistico complementare al sistema obbligatorio, sotto forma di rendita vitalizia erogata in rate rivalutabili annualmente.

Generalmente l'assicurazione entra in vigore, a condizione che sia stato pagato il premio, alle ore ventiquattro del giorno in cui il contratto è concluso.

A fronte delle prestazioni della compagnia assicurativa è prevista da parte dell'Assicurato la corresponsione di un piano di versamenti pagabili in rate annuali o mensili, fino alla data di accesso alle prestazioni medesime (epoca in cui inizia il pensionamento).

Il piano individuale pensionistico ha durata indeterminata e comunque non inferiore al periodo che intercorre dalla stipulazione contrattuale al decesso dell'assicurato.

Il diritto alla prestazione pensionistica complementare si acquisisce al momento della maturazione dei requisiti di accesso alle prestazioni stabiliti nel regime obbligatorio di appartenenza, in genere con almeno cinque anni di partecipazione alle forme pensionistiche complementari.

Per i soggetti non titolari di reddito di lavoro o d'impresa si considera età pensionabile quella vigente nel regime obbligatorio di base.

Al raggiungimento dei limiti di età pensionabile previsti dal regime obbligatorio di appartenenza, l'aderente ha la facoltà di proseguire il contratto a condizione che, alla data del pensionamento, possa far valere almeno un anno di contribuzione a favore delle forme di previdenza complementare. L'aderente che decide di proseguire volontariamente la contribuzione ha la facoltà di determinare autonomamente il momento di fruizione delle prestazioni pensionistiche.

Per quanto riguarda la destinazione del fondo che accoglie le risorse della fase di accumulazione delle forme pensionistiche e dal quale vengono pagati i benefit assicurativi, viene attuata una speciale forma di gestione degli investimenti, separata da quella delle altre attività.

L'art. 13, comma 3, del decreto legislativo 5 dicembre 2005, n.252 stabilisce infatti che le risorse delle forme pensionistiche complementari costituiscano patrimonio autonomo e separato ai sensi dell'art. 2117 del codice civile.

### 3. Il modello per il fondo di portafoglio

Si consideri una rendita pensionistica su di un individuo di età  $x$  al tempo di emissione. Dalla stipula contrattuale fino all'età di quiescenza, egli paga una sequenza di premi  $P$ , all'inizio di ciascun periodo in caso di vita del beneficiario. Dopo questo periodo di accumulazione, in caso di vita del beneficiario, vengono versati benefit di importo costante  $R$  all'inizio di ciascun periodo.

I premi sono accumulati in un fondo che matura interessi periodo per periodo (Pitacco 2003).

La consistenza del fondo di portafoglio dipende dunque per definizione dalla reale esperienza della mortalità, nella misura in cui la numerosità dei premi incassati ad ogni epoca nella fase di accumulazione e delle rate versate ad ogni epoca nella fase di decumulazione dipendono dal numero dei sopravvissuti osservato ad ogni epoca di contratto.

Per quanto riguarda l'ottica temporale dell'analisi in oggetto, si intende considerare la consistenza di portafoglio con riferimento all'intervallo di tempo nel quale termina la coorte di polizze.

Nell'ottica di portafoglio, consideriamo una coorte di  $N^0$  persone della stessa età  $x$ , che entrano nella fase di quiescenza sopra descritta e raggiungono lo stato di pensionamento alla stessa epoca  $n$ , che accade all'età  $x+n$ .

Durante la fase del pagamento dei premi, il portafoglio diviene più sostanzioso per effetto del pagamento dei premi  $P$ , fatto all'inizio di ogni periodo  $k = (0,1,2,\dots,n-1)$ , dagli  $N^k$ , che sopravvivono al tempo  $k$ , tra gli iniziali sopravvissuti. Tali depositi maturano interessi al tasso stocastico finanziario  $i_k^*$  nel periodo  $(k-1, k)$ .

Dal tempo  $n$ , i sopravvissuti ricevono un beneficio costante  $R$  all'inizio di ogni anniversario di contratto, finché l'assicurato è in vita.

Indicando con  $Z_k$  la consistenza del fondo di portafoglio all'epoca  $k$ , si può scrivere:

$$Z_k = Z_{k-1}(1 + i_k^*) + N^k P$$

con  
 $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$Z_k = Z_{k-1}(1 + i_k^*) - N^k R$$

con  
 $k = n, n+1, n+2, \dots, w-x$

(1)

La prima formula in (1) si riferisce al periodo di deposito dei premi, la fase di accumulazione (*accumulation phase*), mentre il secondo si riferisce al periodo di versamento dei benefit, chiamato fase di decumulazione (*annuitization phase*).

In particolare si ha

*Fondo di portafoglio nella fase di accumulazione:*

$$Z_h = \sum_{i=0}^{h-1} N^i P \prod_{j=i+1}^h (1+i_j^*) + N^h P \quad (2)$$

$$h = 1, 2, \dots, n-1$$

*Fondo di portafoglio nella fase di decumulazione:*

$$Z_n = Z_{n-1} (1+i_n^*) - N^n R$$

e

(3)

$$Z_{n+m} = Z_{n-1} \prod_{l=n}^{n+m} (1+i_l^*) - \left[ \sum_{p=n}^{n+m-1} N^p R \prod_{q=p+1}^{n+m} (1+i_q^*) + N^{n+m} R \right]$$

con

$$m = 1, 2, \dots, w - (x+n)$$

#### 4. Rischi di un portafoglio di rendite pensionistiche

Per i contratti caratterizzati da lunghe durate e da età adulte, quali appunto le rendite pensionistiche, la compagnia assicurativa è costretta a definire con attenzione i dettagli relativi alla base tecnica, al fine di calcolare correttamente l'ammontare dei premi al tempo della stipulazione del contratto.

I fattori di rischio che incidono su un portafoglio di rendite pensionistiche sono di tipo finanziario e di tipo demografico. La prima classe di rischi ha origine dal mercato finanziario nel quale l'assicuratore investe: esso può essere espresso dalle fluttuazioni aleatorie del tasso globale di rendimento. A chiusura di ciascun esercizio, il rendimento realizzato dalla gestione può essere infatti di segno positivo o negativo. Tipicamente tale rischio attiene alla *performance* delle attività investite. Nell'ambito del rischio finanziario ricade anche il rischio di *default* (Olivieri et al. 2003), derivante dall'eventualità che le istituzioni che emettono strumenti finanziari acquistati dalla compagnia assicurativa non paghino a scadenza gli ammontari promessi.

Per quanto concerne il rischio demografico, esso dipende dall'incertezza circa il numero di sopravvissuti ad ogni anniversario di contratto: esso si sostanzia nel numero aleatorio di premi che verranno versati nel periodo di accumulazione e di benefits che dovranno essere pagati nella fase di decumulazione/pensionamento. Il rischio demografico è causato da deviazioni accidentali nel numero dei sopravvissuti rispetto al valore atteso e più significativamente da deviazioni sistematiche causate dal fenomeno della longevità. A livello di valutazioni di portafoglio, la prima componente può essere considerata sufficientemente *hedgibile*, dato un numero sufficientemente ampio di rendite pensionistiche in portafoglio. Al contrario, il *longevity risk* non può essere coperto in questo modo.

Di seguito ci si soffermerà sulla componente sistematica del rischio demografico che insiste su portafogli di rendite pensionistiche, ritenendo il portafoglio già sufficientemente diversificato ai fini del *pooling risk*. In particolare la presente sezione oltre a misurare la posizione finanziaria attesa della compagnia assicurativa ad ogni data futura così come indicata dal cosiddetto *retrospective gain*  $rg$ , nell'ottica appunto di una valutazione retrospettiva, intende determinare la variabilità della consistenza del fondo di portafoglio in relazione all'aleatorietà nella scelta della tavola di sopravvivenza.

Di seguito si intende indagare l'impatto della scelta delle differenti tavole di mortalità nell'ambito del modello per il fondo di portafoglio, attraverso un opportuno indice di rischio. Lo scopo è quello di trarre utili informazioni sulla quantificazione dell'indice di rischio e del suo andamento nella struttura di un portafoglio di rendite pensionistiche.

## 5. L'indice di rischiosità

Prendendo in considerazione il fondo di portafoglio (1), se ne analizza la rischiosità in riferimento alla componente demografica, impiegando la varianza come misura di rischio.

In prima istanza si può decomporre la rischiosità globale nelle sue componenti principali:

$$\text{Var}[Z_k] = \text{Var}[E(Z_k | T)] + E[\text{var}(Z_k | T)] \quad (4)$$

Il primo addendo al secondo membro può essere considerato una misura della variabilità della consistenza del fondo di portafoglio causata dall'aleatorietà nella scelta della tavola di mortalità proiettata, avendo mediato gli effetti delle fluttuazioni dei tassi d'interesse e delle deviazioni accidentali della mortalità. Il secondo addendo rappresenta il valore medio degli scarti delle realizzazioni del fondo di portafoglio rispetto al valore atteso sotto ciascuna ipotesi demografica.

Di seguito si considera che le variabili casuali vita residua aleatoria dell' $i$ -esimo assicurato dalla collettività di assicurati ad una data epoca siano indipendenti ed identicamente distribuite sul processo finanziario sulla base del quale il fondo di portafoglio matura interessi.

Allora, si ha (Coppola et al 2006):

$$DMRM = Var_T [E[Z_k]] \quad (5)$$

avendo indicato con l'acronimo *DMRM* l'indicatore che può essere considerato una misura del rischio demografico di modello sul valore di portafoglio ad un'epoca  $k$ . Condizionando alla tavola di sopravvivenza proiettata  $T$ , la (5) rappresenta la variabilità dovuta all'aleatorietà nella scelta della funzione di sopravvivenza usata per determinare le probabilità di sopravvivenza.

## Capitolo 6 – APPLICAZIONE NUMERICA AD UN PORTAFOGLIO DI RENDITE PENSIONISTICHE

### 1. Obiettivo delle applicazioni numeriche

L'intera sezione è dedicata alla quantificazione del rischio derivante dall'aleatorietà nella scelta delle tavole di mortalità da impiegare nelle valutazioni di un portafoglio omogeneo di rendite pensionistiche. Nonostante la trattazione si enuclei intorno all'aspetto demografico che tipicamente le attività delle aziende assicurative devono tenere in conto, un'ampia sottosezione dell'applicazioni in questione si sviluppa intorno al tema della previsione della struttura a termine dei tassi d'interesse. Nel caso delle rendite pensionistiche, i tassi d'interesse cui ci si riferisce sono i tassi stocastici a cui maturano interessi sui fondi accumulati dalla compagnia assicurativa periodo per periodo.

L'obiettivo delle applicazioni seguenti è individuare qual è lo scenario meno rischioso dal punto di vista della mortalità tra differenti scenari considerati, sulla base dell'andamento dell'indicatore di rischiosità *DMRM* costruito intorno al surplus disponibile nel fondo ad ogni epoca futura di valutazione rispetto al momento della stipulazione del contratto, il cosiddetto *insurer's retrospective gain* (Lysenko e Parker 2007), la cui entità è determinata dal valore dei *cash flows* accumulato ad un tempo  $r$  sulla base del versamento dei premi degli assicurati e della corresponsione dei benefit agli assicurati, nonché beneficiari.

L'ipotesi stocastica per l'evoluzione dei tassi d'interesse a cui il fondo di portafoglio matura interessi è quella del modello di Vasicek. In particolare si farà riferimento alla curva dei tassi di rendimento ottenuta sulla base della stima dei parametri del processo stesso.

### 2. Ipotesi sulla dinamica dei tassi d'interesse

#### 2.1 Il modello di Vasicek

Si adotta un modello per la rappresentazione del tasso d'interesse a breve, il cui comportamento dovrebbe riflettere i tassi di rendimento per guadagni o perdite in conto capitale derivanti rispettivamente dall'apprezzamento o dal deprezzamento del valore delle attività in cui è investito il portafoglio preso in considerazione.

Sia  $r(t)$  il tasso d'interesse a breve che esprime il tasso istantaneo globale di rendimento che matura sugli *assets* in cui è impiegato il portafoglio e che concorre a determinare il cosiddetto montante del

piano previdenziale. Si assume che il suo comportamento possa essere rappresentato dal modello di Vasicek, descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (1)$$

dove  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  sono parametri costanti a valori reali, mentre  $dz$  è un moto Browniano standard. In particolare  $b$  rappresenta la media di lungo periodo verso la quale tende il tasso a breve,  $a$  una forza frizionale che spinge il processo al livello  $b$  e  $\sigma$  il coefficiente di diffusione. Si noti come la (1) può condurre a tassi negativi per il tasso d'interesse, circostanza del tutto compatibile con l'eventualità che le attività in cui è investito il portafoglio subiscano un deprezzamento.

### 2.2 Articolazione delle fasi di stima dei parametri del modello di Vasicek

Al fine di rappresentare la struttura per scadenza dei tassi d'interesse si stimano i parametri del modello di Vasicek  $a, b, \sigma$ .

Le fasi preordinate all'ottenimento della stima di tali parametri sono le seguenti:

1. predisposizione del set di dati costituito da tassi di interesse osservati sul mercato su di un determinato orizzonte temporale;
2. elaborazione di statistiche sul dataset prescelto;
3. implementazione della procedura econometrica.

### DATASET

Esistono differenti tipi di tassi d'interesse ed una prima distinzione può essere operata tra tassi interbancari e tassi governativi. I primi sono tassi a cui le banche scambiano depositi e transazioni swap. I secondi sono tipicamente dedotti dai bond emessi dal governo.

I tassi zero – coupon possono essere *strippati* sia da bond governativi che sulla base dei prodotti interbancari<sup>1</sup>, risultando ovviamente differenti curve zero-coupon.

Di seguito si farà ricorso ad un panel dati costituito dai tassi d'interesse:

- LIBOR,
- EURIRS

Il LIBOR (*London InterBank Offered Rate*) è un tasso interbancario calcolato giornalmente dalla *British Bankers Association* in base ai tassi d'interesse richiesti per cedere a prestito depositi in una

---

<sup>1</sup> Cfr. Brigo, D., Mercurio, F., 2001, *Interest Rate Models; Theory and Practice*, Springer.

data divisa (tra le altre, sterlina, dollaro, franco svizzero ed euro) da parte delle principali banche operanti sul mercato interbancario londinese.

L'EURIRS è un tasso interbancario, la cui denominazione sta per *Euro Interest Rate Swap* ed indica lo stretto legame con il tasso di interesse swap ossia una operazione in cui le due controparti che hanno un prestito in comune pattuiscono uno scambio reciproco degli interessi applicati.

Il suo valore viene diffuso giornalmente dalla Federazione Bancaria Europea ed è pari alla media ponderata delle quotazioni alle quali le banche operanti nell'Unione Europea realizzano l'*Interest Rate Swap* (I.R.S).

Il panel dati è costruito su tassi LIBOR con scadenze che vanno da 3, 6 e 12 mesi e tassi EURIRS a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 12, 15,20,25, 30 anni per coprire scadenze di lungo periodo. In particolare, per ciascuna scadenza sono state rilevate con frequenza mensile le serie storiche dal 2 gennaio 2001 al 21 maggio 2007 dei tassi presi in considerazione.

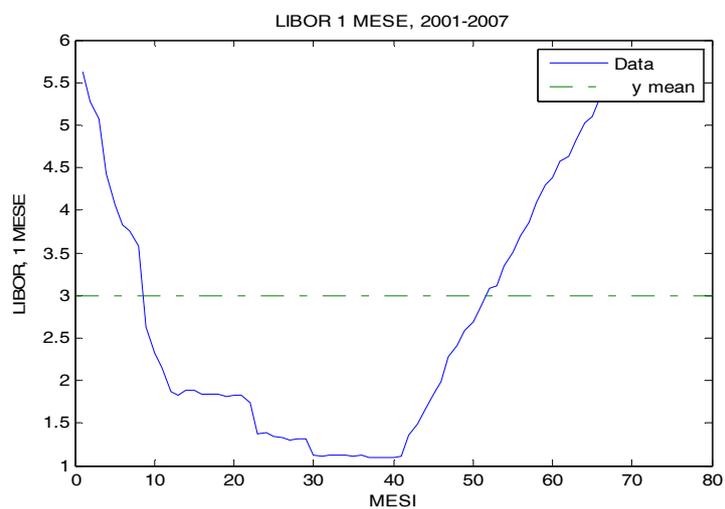
#### STATISTICHE SUL DATASET

Per ciascuna delle serie storiche dei tassi rilevati e con riferimento all'intero arco temporale considerato, si è proceduto come segue:

- all'elaborazione del *plot* che visualizza l'andamento del tasso per i 78 mesi considerati (Gennaio 2001-Settembre 2007) con evidenziazione del valore medio del tasso;
- al calcolo di dati statistici: valore minimo e massimo, media, mediana, deviazione standard e range;
- all'interpolazione polinomiale: si sceglie l'interpolazione di sesto grado con visualizzazione dell'equazione e del relativo *plot*; viene altresì mostrato il *plot* dei residui dell'interpolazione.

In appendice si riportano le statistiche calcolate sul dataset. Di seguito viene riportato il caso del Libor ad 1 mese come esempio di quanto illustrato in appendice per tutti gli altri tassi:

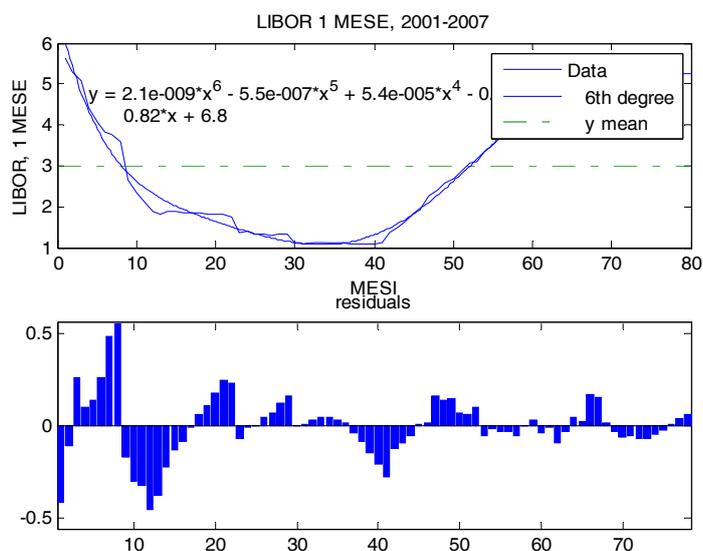
**Grafico 1**



**Tabella 1- Statistiche calcolate**

<b>Valore Minimo</b> = 1,091	<b>Mediana</b> = 2,503
<b>Valore Massimo</b> = 5,622	<b>Deviazione Standard</b> = 1,628
<b>Media</b> = 2,996	<b>Range</b> = 4,531

**Grafico 2**



#### PROCEDURA ECONOMETRICA DI STIMA

Preordinata alla fase di implementazione della procedura econometrica di stima vera e propria si rende necessaria la discretizzazione del processo stocastico descritto dalla (1) per restituire una funzione di verosimiglianza approssimata.

In prima istanza dunque il modello di Vasicek viene discretizzato sulla base della *discretizzazione di Eulero* che assume la seguente forma:

$$r_t = r_{t-1} + \mu(r_{t-1}; \theta) + \sigma(r_{t-1}; \theta)\varepsilon_t \quad (2)$$

dove  $\varepsilon_t$  rappresenta un *white noise gaussiano*.

Successivamente stimando  $\theta$  con il metodo *MLE* si ottiene  $\hat{\theta}$  quale sua buona approssimazione. La discretizzazione del modello presenta però un inconveniente: la stima ottenuta con il metodo *MLE* è generalmente inconsistente in quanto  $\hat{\theta}$  è uno stimatore asintoticamente distorto; quindi, per correggere la distorsione asintotica della stima si utilizzano il metodo di inferenza indiretta, che prevede simulazioni perimate e la calibratura del modello.

In ordine alla stima dei parametri del modello di Vasicek si è scelto la procedura di stima di massima verosimiglianza o *MLE* (cfr. Brigo e Mercurio, 2001). Spesso infatti le tecniche che si utilizzano per la stima dei parametri di un modello si basano proprio sulla funzione di verosimiglianza del campione osservato.

Il Metodo della Massima Verosimiglianza è stato originariamente sviluppato dallo statistico Ronald Fisher intorno agli anni '20 del secolo scorso e consiste nella massimizzazione della funzione di verosimiglianza che esprime la plausibilità dei diversi valori assunti dai parametri oggetto di stima rispetto alle osservazioni ottenute.

Si supponga di avere una variabile casuale  $X$  che assume valori in un insieme  $S$  e che la distribuzione di  $X$  dipenda da un parametro ignoto  $\theta$ , suscettibile di assumere valori in uno spazio parametrico  $\Theta$ ; in particolare si indicherà con  $f(x|\theta)$  la funzione di densità di  $X$  in  $x$ . In genere sia  $X$  che  $\theta$  sono vettori.

La funzione di verosimiglianza  $L$  è la funzione che si ottiene invertendo i ruoli di  $x$  e  $\theta$ , cioè interpretando  $\theta$  come la variabile e  $x$  come l'informazione nota:

$$L(\theta|x) = f(x|\theta) \tag{3}$$

per  $\theta \in \Theta$  e  $x \in S$

Il principio della massima verosimiglianza porta ad attribuire a  $\theta$  il valore che massimizza la funzione  $L(\theta|x)$ ; il valore di stima ottenuto rappresenta lo stimatore  $ML$ ,  $\hat{\theta}$ , che è uno stimatore consistente, non distorto, asintoticamente efficiente e asintoticamente normale. Infatti, con il metodo  $MLE$  si attribuiscono ai parametri i valori che possono aver prodotto con la maggiore probabilità i dati osservati.

Lo stimatore  $ML$  sarà:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta|x) \tag{4}$$

In particolare, essendo la funzione di verosimiglianza una produttoria e la funzione logaritmo naturale strettamente crescente, il valore massimo di  $L(\theta|x)$ , se esiste, si ha allo stesso punto in cui è massima la *funzione di log-verosimiglianza*,  $\log[L(\theta|x)]$ , spesso più semplice da trattare. In tal caso si avrà che:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log[L(\theta|x)] \tag{5}$$

Riscriviamo ora l'equazione differenziale stocastica (1) che descrive la dinamica del tasso d'interesse a breve nel modello di Vasicek in questo modo:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (6)$$

integrando tra  $s$  e  $t$  si ottiene:

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz \quad (7)$$

dove  $r(t)$  è una variabile normalmente distribuita con:

- media =  $r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)})$ ;

- varianza =  $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$ .

I parametri da stimare risultano dunque i seguenti:

$$\rightarrow \beta = \frac{b}{a} \quad (8)$$

$$\rightarrow \alpha = e^{-a\delta} \quad (9)$$

$$\rightarrow V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta}) \quad (10)$$

dove  $\delta$  denota gli istanti delle proxies osservate  $r_0, r_1, \dots, r_n$  di  $r$  (tipicamente  $\delta$  è pari al giorno).

Gli stimatori *ML* per  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $V^2$  risultano i seguenti:

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n r_{i-1} \right)^2} \quad (11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} \right]}{n \left( 1 - \hat{\beta} \right)} \quad (12)$$

$$\hat{V}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\beta} (1 - \hat{\alpha}) \right]^2 \quad (13)$$

### PIATTAFORMA DI CALCOLO

La piattaforma di calcolo prescelta allo scopo di implementare tali applicazioni è il foglio di lavoro Excel della Microsoft presente nel pacchetto *Office*. Il foglio di calcolo Excel, che si caratterizza per flessibilità di adattamento ad esigenze particolari e per massiccia diffusione tra gli utenti, consente di attivare formule risolutive ad hoc. Tuttavia esse devono essere necessariamente prima predisposte dall'operatore per poi essere impiegate.

Il foglio di calcolo Excel offre inoltre il vantaggio dell'esiguità del costo di installazione, rispetto ad applicativi chiusi, sofisticati per potenza, ancorché onerosi per tempi di apprendimento allungati.

In ciascun foglio di lavoro sono state inserite le 78 osservazioni relative alle rilevazioni mensili del Libor e dell'Eurirs nel periodo 2001-2007 e sulla base dell'implementazione delle formule (11), (12), (13), si è giunti alla stima dei parametri del modello di Vasicek.

Di seguito viene riportato il foglio di lavoro con le stime dei parametri ottenute in relazione al Libor ad 1 mese, ricordando che analogo procedimento è stato effettuato per il Libor a 3-6-12 mesi e per l'Eurirs a 2-3-5-7-9-10-12-15-20-25-30 anni.

**Figura 1- Esempio dell' implementazione della procedura econometrica in Excel**

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	LIBOR 12 mesi	t	r(t)	r(t-1)	r(t)*r(t-1)	r(t)^2	r(t-1)^2	r(t)-alpha*r(t-1)	r(t)-alpha*r(t-1)	r(t)-alpha*r(t-1)	r(t)-alpha*r(t-1)	r(t)-alpha*r(t-1)-beta*(1-alpha)	[r(t)-alpha*r(t-1)-beta*(1-alpha)]^2	
1														
2														
3	4,42875	1	0,04429	0,04434	0,00196	0,00196	0,00197	0,00833	-	0,00106		0,00000		
4	4,50750	2	0,04508	0,04429	0,00200	0,00203	0,00196	0,00916	-	0,00023		0,00000		
5	4,49625	3	0,04496	0,04508	0,00203	0,00203	0,00203	0,00841	-	0,00098		0,00000		
6	4,50500	4	0,04505	0,04496	0,00203	0,00203	0,00202	0,00859	-	0,00080		0,00000		
7	4,50875	5	0,04509	0,04505	0,00203	0,00203	0,00203	0,00855	-	0,00084		0,00000		
8	4,44125	6	0,04441	0,04509	0,00200	0,00197	0,00203	0,00785	-	0,00154		0,00000		
9	4,34875	7	0,04349	0,04441	0,00193	0,00189	0,00197	0,00747	-	0,00192		0,00000		
10	4,32750	8	0,04328	0,04349	0,00188	0,00187	0,00189	0,00801	-	0,00138		0,00000		
11	4,36250	9	0,04363	0,04328	0,00189	0,00190	0,00187	0,00853	-	0,00086		0,00000		
12	4,37000	10	0,04370	0,04363	0,00191	0,00191	0,00190	0,00832	-	0,00107		0,00000		
13	4,37063	11	0,04371	0,04370	0,00191	0,00191	0,00191	0,00827	-	0,00112		0,00000		
14	4,39125	12	0,04391	0,04371	0,00192	0,00193	0,00191	0,00847	-	0,00092		0,00000		
15	4,41500	13	0,04415	0,04391	0,00194	0,00195	0,00193	0,00854	-	0,00085		0,00000		
16	4,41250	14	0,04413	0,04415	0,00195	0,00195	0,00195	0,00832	-	0,00107		0,00000		
17	4,41250	15	0,04413	0,04413	0,00195	0,00195	0,00195	0,00834	-	0,00105		0,00000		
18	4,47500	16	0,04475	0,04413	0,00197	0,00200	0,00195	0,00896	-	0,00042		0,00000		
19	4,51750	17	0,04518	0,04475	0,00202	0,00204	0,00200	0,00888	-	0,00051		0,00000		
20	4,53891	18	0,04539	0,04518	0,00205	0,00206	0,00204	0,00875	-	0,00064		0,00000		
21	4,52625	19	0,04526	0,04539	0,00205	0,00205	0,00205	0,00845	-	0,00094		0,00000		
22	4,57250	20	0,04573	0,04526	0,00207	0,00209	0,00205	0,00902	-	0,00037		0,00000		
23	4,58000	21	0,04580	0,04573	0,00209	0,00210	0,00209	0,00872	-	0,00067		0,00000		
24	4,56906	22	0,04569	0,04580	0,00209	0,00209	0,00210	0,00855	-	0,00084		0,00000		
25	4,54500	23	0,04545	0,04569	0,00208	0,00207	0,00209	0,00839	-	0,00099		0,00000		
26	4,54250	24	0,04543	0,04545	0,00206	0,00206	0,00207	0,00857	-	0,00082		0,00000		
27	4,54500	25	0,04545	0,04543	0,00206	0,00207	0,00206	0,00861	-	0,00078		0,00000		
28	4,57875	26	0,04579	0,04545	0,00208	0,00210	0,00207	0,00893	-	0,00046		0,00000		
29	4,51000	27	0,04510	0,04579	0,00207	0,00203	0,00210	0,00797	-	0,00142		0,00000		
30	4,49500	28	0,04495	0,04510	0,00203	0,00202	0,00203	0,00837	-	0,00102		0,00000		
31	4,52500	29	0,04525	0,04495	0,00203	0,00205	0,00202	0,00880	-	0,00059		0,00000		
32	4,48250	30	0,04483	0,04525	0,00203	0,00201	0,00205	0,00813	-	0,00126		0,00000		
33	4,45500	31	0,04455	0,04483	0,00200	0,00198	0,00201	0,00820	-	0,00119		0,00000		
34	4,45250	32	0,04453	0,04455	0,00198	0,00198	0,00198	0,00840	-	0,00099		0,00000		
35	4,44344	33	0,04443	0,04453	0,00198	0,00197	0,00198	0,00832	-	0,00106		0,00000		
36	4,45375	34	0,04454	0,04443	0,00198	0,00198	0,00197	0,00850	-	0,00089		0,00000		
37	4,52625	35	0,04526	0,04454	0,00202	0,00205	0,00198	0,00914	-	0,00025		0,00000		

### 2.3 Struttura per scadenza dal modello di Vasicek

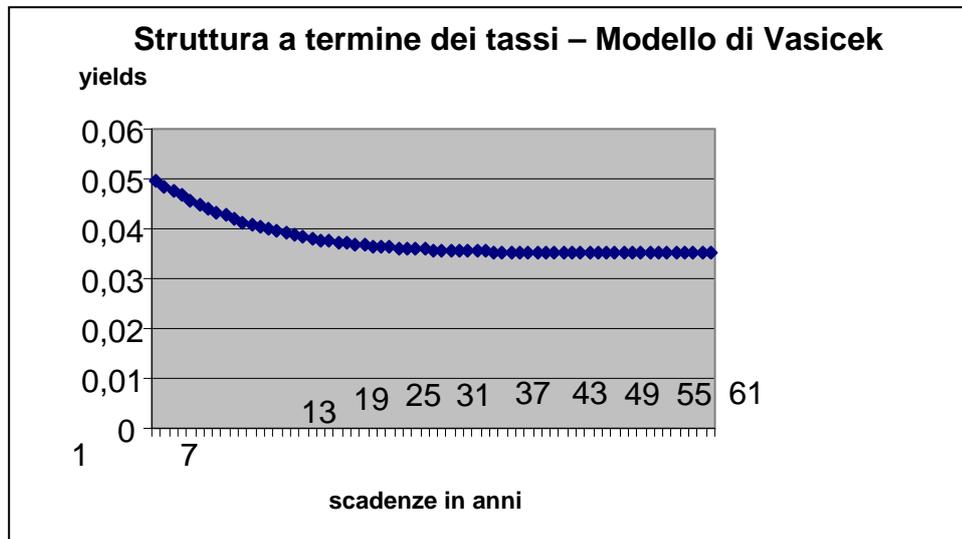
In tabella 2 si illustrano i risultati ottenuti dalla stima dei parametri dell'equazione differenziale (1) del modello di Vasicek, sulla base della procedura econometrica *MLE* operata sul panel dati sopra descritto.

Il grafico 3 mostra invece la struttura per scadenza dei tassi d'interesse così come ottenuta sulla base dei parametri stimati in tabella 2.

**Tabella 2** – stima parametri Vasicek

Parametri
b = 6.7146%
a = 0.4485
sigma = 0.0191
R <sup>2</sup> (variazioni del tasso) = 0.0145

**Grafico 3** – Andamento della struttura a termine stimata con Vasicek



## 3. Ipotesi sulla mortalità

### 3.1 Tavole di mortalità impiegate

Le tavole di proiezione implementate per controllare il *longevity risk*, sono caratterizzate da tre differenti gradi di proiezione. Le probabilità di sopravvivenza inerenti le prime due sono state ottenute dalla seguente legge:

$$\frac{q_x}{p_x} = GH^x$$

che risulta essere il terzo termine della legge di H-P. Le stime delle probabilità in questione sono effettuate a partire dai parametri seguenti (Olivieri, Pitacco 2003):

**Tabella 3 – Parametri della legge di Heligman Pollard**

	medium	maximum
G	0,000002	0,0000001
H	1,13451	1,17215

Si ottengono così due differenti tavole di mortalità rispettivamente con medio e massimo grado di proiezione.

Per quanto riguarda la terza tavola di mortalità prescelta, si effettua di seguito la generazione delle probabilità di sopravvivenza dal modello L-C che, come si è visto, rappresenta una buona descrizione del fenomeno della sopravvivenza essendo attendibile anno per anno e catturando le variazioni nel trend dovuto al fenomeno della longevità. In particolare si è scelto di implementare nelle applicazioni numeriche probabilità di sopravvivenza ottenute attraverso la simulazione Monte Carlo del modello L-C.

### 3.2 La generazione di probabilità di sopravvivenza dal modello Lee Carter

#### PREMESSA

In ordine all'accuratezza esplicativa del fenomeno della mortalità da parte del modello Lee Carter, si è scelto di calcolare sulla base di esso le probabilità di sopravvivenza  $p_x$  per una testa di età  $x$ .

In particolare, in questa sezione s'intende studiare come dal modello Lee Carter possano essere generate tali probabilità (Lee and Carter, 1992; Lee, 2000; Lee and Miller, 2000; Lee and Miller, 2001), sulla base dell'esperienza di mortalità della popolazione maschile italiana tra il 1950 ed il 2000. A tale scopo, in prima istanza si esegue il metodo di Renshaw and Haberman (2003a). Successivamente, per ottenere il medesimo tipo di proiezioni, si impiega un metodo simulativo costruito sulla base di simulazioni Monte Carlo che chiameremo Monte Carlo Lee Carter (di seguito *MCLC*). Al fine di validare il metodo *MCLC* si effettua infine una comparazione tra i risultati ottenuti con entrambi i metodi.

## DATASET IMPIEGATO NEI DUE METODI

Sono stati impiegati i dati relativi ai tassi storici di mortalità della popolazione maschile italiana tra il 1950 ed il 2000, al fine di generare le probabilità di sopravvivenza  ${}_t p_x$  per una testa di età  $x$ .

Tali dati provengono dallo *Human Mortality Database* e sono disponibili on-line.

Sulla base di questo singolo parametro sono state generate proiezioni su di un orizzonte temporale previsivo di 65 anni, sia del livello che della distribuzione della mortalità per appunto per l'età  $x = 45$  per i prossimi 65 anni.

Per la popolazione maschile e per ciascun anno di calendario  $t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_1 + h - 1 = t_n$  dove  $h = t_n - t_1 + 1$  si considerano tutte le età  $x = x_1, x_2, \dots, x_k$  raggruppate in classi del tipo  $[0, 1 - 4, 5 - 9, 10 - 14, \dots, 95 - 99, 100 - 104]$ . Sulla base di questi dati vengono costruiti i tassi puri di

$$\text{decesso } m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{e_{x,t}} .$$

## METODO RENSCHAW HABERMAN

### Modello Lee Carter

Come si è visto, il modello L-C è un approccio per ottenere proiezioni della mortalità, in forza del quale il logaritmo di una serie storica dei tassi di mortalità per una data età  $x$ ,  $m_{x,t}$  è spiegato dalla somma di una componente specifica per l'età  $x$ ,  $\alpha_x$  che è indipendente dal tempo, e di un'altro addendo che è costituito dal prodotto del parametro variabile nel tempo  $k_t$  che riflette il livello generale della mortalità, e della componente anch'essa specifica per ciascuna età  $\beta_x$ , che rappresenta come varia la mortalità ad ogni età, quando cambia il livello generale della mortalità:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (14)$$

### Fitting del modello

La prima fase preordinata all'ottenimento delle probabilità di sopravvivenza proiettate è quella del *fitting* del modello.

Il modello non può essere stimato sulla base di metodi tradizionali di regressione, poiché non esistono regressori dati, bisogna piuttosto impiegare la tecnica cosiddetta *Singular Value Decomposition-SVD* suggerita da Lee e Carter nel 1992 per regredire l'equazione caratteristica (1), ipotizzando che gli errori siano omoschedastici (cfr. Haberman, Russolillo 2005). Inoltre si impongono i seguenti vincoli per ottenere una soluzione unica:

- $\sum_x \beta_x = 1$ ;
- $\sum_t k_t = 0$

Sotto queste ipotesi si può stimare  $\alpha_x$  come il logaritmo della media geometrica dei tassi puri di mortalità per tutti i tempi  $t$ , per ogni  $x$ :

$$\alpha_x = \frac{1}{h} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_{x,t} = \ln \left[ \prod_{t=t_1}^{t_n} m_{x,t}^{\frac{1}{h}} \right] \quad (15)$$

In secondo luogo,  $k_t$  deve essere uguale alla somma per l'età  $x$  l'età di  $(\ln(m_{x,t}) - \alpha_x)$ . Per quanto riguarda  $\beta_x$ , la stima di esso è effettuata attraverso la regressione di  $(\ln(m_{x,t}) - \alpha_x)$  su  $k_t$ , separatamente per ogni gruppo di età  $x$ . In effetti, si opera la stima di  $\beta_x$  dalla regressione dell'equazione

$$(\ln(m_{x,t}) - \alpha_x) = \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (16)$$

usando una stima dei minimi quadrati, sulla base dei  $k_t$  stimati. In sostanza, si sceglie il  $\beta_x$  che minimizzi la relazione

$$\sum_{x,t} (\ln(m_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x k_t)^2 \Rightarrow \beta_x = \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t (\ln(m_{x,t}) - \alpha_x)}{\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t^2} \quad (17)$$

### Ristima dei $k_t$

La ristima dei  $k_t$  si rende necessaria al fine di correggere una eventuale discrasia tra tassi di decesso proiettati ed osservati, che può insorgere a causa del fatto che la previsione è basata sui logaritmi dei tassi di decesso, anziché sui tassi medesimi. A questo proposito si impiega la metodologia suggerita da Lee e Carter (1992) nella sezione 3. La nuova stima di  $k_t$  comporta un aggiustamento,

operato attraverso un procedimento iterativo (cfr. Haberman, Russolillo 2005), tale che sia verificata la seguente relazione:

$$\sum_{x_1}^{x_k} d_{x,t} = \sum_{x_1}^{x_k} e_{x,t} e^{(\alpha_x + \beta x k_t)} \quad (18)$$

cioè i tassi totali realmente osservati devono essere uguali ai tassi totali attesi per ogni anno  $t$ .

### Metodologia Arima

Al fine di modellare l'indice  $k_t$ , si utilizza una metodologia Box e Jenkins per generare un appropriato modello di serie storiche ARIMA. In Haberman Russolillo risulta più appropriato per gli uomini un ARIMA (0,1,0), tale che:

$$k_t = k_{t-1} + \lambda + \varepsilon_t \quad (19)$$

dove  $\lambda$  è la variazione annuale media che subisce  $k_t$  e  $\varepsilon_t$  è l'errore standard stimato in  $t$ . Inoltre si definisce come segue l'errore standard stimato per  $s$  periodi di previsione:

$$\hat{\sigma}_h = \hat{\sigma}_1 \sqrt{h} \text{ con } 2 \leq h \leq s \text{ e } h \in N \quad (20).$$

### METODO SIMULATIVO *MCLC*

Proponiamo ora un metodo simulativo che fa uso del metodo Monte Carlo per la generazione delle probabilità di sopravvivenza.

### Articolazione del procedimento

Allo stesso modo del procedimento Renshaw Haberman, si è deciso di articolare come segue il metodo simulativi *MCLC*:

- *fitting* del modello;
- ristima dei  $k_t$ ;
- generazione delle proiezioni con ARIMA (0,1,0)

Tuttavia nel metodo simulativo *MCLC* così come è stato elaborato, l'errore  $\varepsilon_t$  non risulta a fronte di una stima, bensì da un procedimento simulativo di Monte Carlo.

### Simulazioni Monte Carlo dell'errore

Come si è visto, la procedura di Box-Jenkins è orientata a determinare un appropriato ARIMA per l'indice di mortalità  $k_t$  da proiettare. La procedura ha cioè come scopo quello di costruire un modello che si adatti alla serie storica osservata e che rappresenti il processo generatore della serie stessa.

Si ipotizzi di fare ricorso ad un modello ARIMA (0,1,0) per rappresentare l'indice  $k_t$  nel caso specifico della popolazione maschile così come nella relazione (19).

Come preannunciato, nel metodo simulativo *MCLC* elaborato, l'errore  $\varepsilon_t$  non risulta a fronte di una stima, bensì da un procedimento simulativo di Monte Carlo. Nella fattispecie, per ogni anno  $t$  si effettuano  $j = 1, 2, \dots, N$  simulazioni per ottenere  $\varepsilon_t^{(j)}$ . Inoltre si calcola la media aritmetica degli  $\varepsilon_t^{(j)}$  su  $N$  simulazioni:

$$M_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_t^{(j)} \quad (21)$$

dove  $M$  rappresenta appunto tale media.

Infine, in luogo dell'errore standard stimato  $\varepsilon_t$  nella relazione (19) si introduce il valore  $M_t$  della (21) da cui si ottiene:

$$k_t = k_{t-1} + \lambda + M_t \quad (22).$$

In tal modo dalla (22) si ottengono le proiezioni dei  $k_t$  da cui si possono calcolare le  $m_{x,t}$  per ogni età  $x$  e per ogni epoca  $t$ . Infine dalle  $m_{x,t}$  è possibile risalire alle  $q_{x,t}$  e dunque alla tabulazione di intere tavole di mortalità. Si ha infatti:

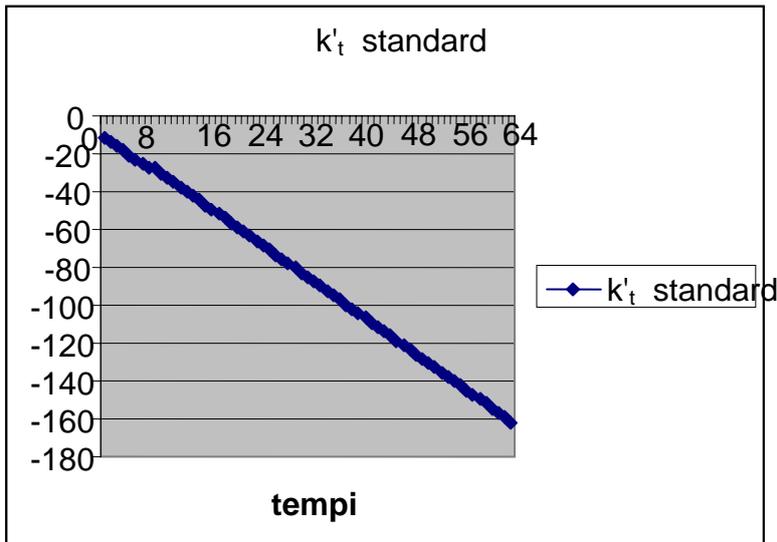
$$q_{x,t} = \frac{2m_{x,t}}{2 + m_{x,t}} \quad (23).$$

### RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

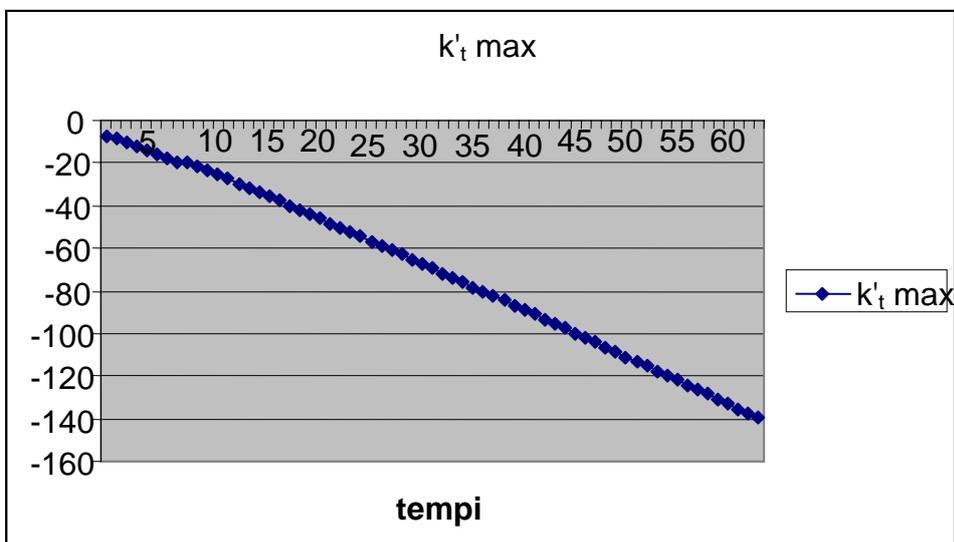
Sulla base dei tassi di decesso della popolazione maschile italiana dal 1950 al 2000 si effettua la proiezione delle probabilità di sopravvivenza  ${}_t p_x$  per una testa di età  $x = 45$  sulla base del modello Lee Carter, secondo tre differenti gradi di proiezione. In particolare, l'orizzonte previsivo considerato è pari a 65 anni.

Di seguito si illustrano i risultati del metodo simulativo *MCLC*. Al fine del calcolo dei  $k_t$ , si operano per ogni  $t$  10000 simulazioni. Le simulazioni Monte Carlo sono effettuate con l'ausilio del foglio di calcolo Excel. Si ottiene così la seguente stima dei  $k_t$ , in relazione ai differenti gradi di proiezione:

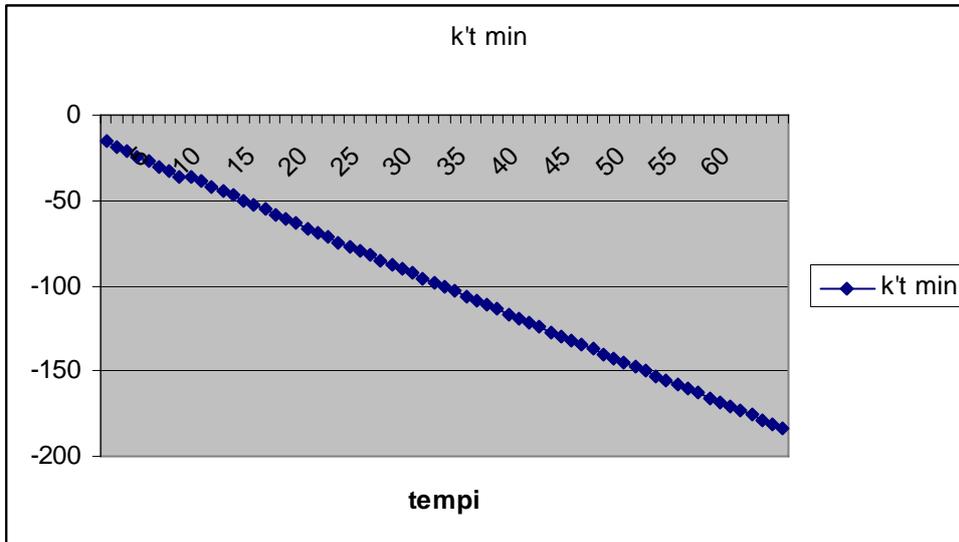
*Grafico 1*



*Grafico 2*



**Grafico 3**



In questo modo siamo in grado di calcolare i tassi centrali di mortalità  $m_{x,t}$  sulla base dei  $k_t$  ri-stimati con simulazioni Monte Carlo Infine dalla (23) otteniamo tassi annui di decesso, da cui possiamo agevolmente ricavare le probabilità di sopravvivenza  ${}_t p_x$  per una testa di età  $x = 45$  :

**Tabella 1 - Proiezioni elaborate con metodo MCLC**

tempi	2006p45standard	2006p45minima	2006p45massima
0	1	1	1
1	0,998566	0,99846	0,998461
2	0,996992	0,996767	0,996766
3	0,995259	0,994907	0,994938
4	0,993406	0,992914	0,992977
5	0,991397	0,990749	0,990848
6	0,989189	0,988366	0,988505
7	0,986804	0,98579	0,985968
8	0,984125	0,982898	0,983121
9	0,981216	0,979756	0,980023
10	0,978091	0,976379	0,9767
11	0,974629	0,972644	0,973014
12	0,970965	0,968687	0,969117
13	0,967063	0,964472	0,964956
14	0,962777	0,959841	0,960377

15	0,958101	0,954791	0,955395
16	0,953024	0,949303	0,949982
17	0,94805	0,943918	0,944668
18	0,942066	0,937443	0,938274
19	0,935559	0,930401	0,931315
20	0,928426	0,922685	0,923683
21	0,920708	0,914315	0,915417
22	0,912438	0,905348	0,90654
23	0,903484	0,895626	0,89693
24	0,893917	0,885205	0,886638
25	0,883723	0,874076	0,87564
26	0,873068	0,862387	0,864087
27	0,861589	0,849789	0,851634
28	0,849352	0,836347	0,838341
29	0,836498	0,822198	0,824365
30	0,822793	0,807111	0,809454
31	0,80839	0,791225	0,79377
32	0,792577	0,773791	0,776558
33	0,775809	0,755348	0,758339
34	0,757949	0,73572	0,738917
35	0,738855	0,714797	0,718245
36	0,718851	0,692893	0,696581
37	0,697097	0,669131	0,673032
38	0,674164	0,644155	0,648281
39	0,649512	0,617397	0,621754
40	0,623645	0,589432	0,593992
41	0,596334	0,560041	0,564788
42	0,567366	0,529035	0,534042
43	0,537261	0,497007	0,50222
44	0,506302	0,464299	0,469704
45	0,474183	0,43063	0,436222
46	0,441598	0,396773	0,402472
47	0,408864	0,363094	0,368793
48	0,376088	0,329735	0,335467
49	0,343744	0,29721	0,302859
50	0,312215	0,265918	0,271408
51	0,281157	0,235535	0,240854
52	0,251272	0,20676	0,211833
53	0,222832	0,179845	0,184642
54	0,19605	0,154971	0,159452

55	0,171158	0,132313	0,136493
56	0,148243	0,111904	0,115717
57	0,12741	0,093774	0,09723
58	0,10869	0,077881	0,081009
59	0,092073	0,064138	0,066937
60	0,077696	0,055483	0,054842
61	0,074548	0,052955	0,052336
62	0,071528	0,050542	0,049945
63	0,06863	0,048239	0,047663
64	0,065849	0,046041	0,045485
65	0	0	0

*Tabella 2 - Proiezioni elaborate con metodo Haberman Renshaw*

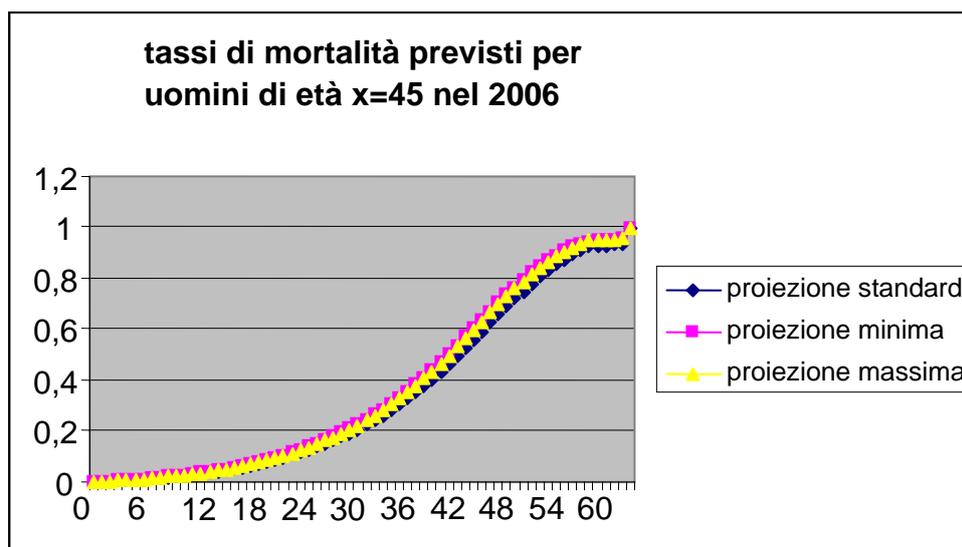
tempi	2006p45standard	2006p45minima	2006p45massima
0	1	1	1
1	0,998560704	0,998660054	0,998453994
2	0,99698055	0,997190867	0,996754511
3	0,995276286	0,995608499	0,994918997
4	0,993453978	0,993920399	0,992951874
5	0,991477428	0,99209237	0,990814824
6	0,98930383	0,990084137	0,988462378
7	0,98695453	0,987915061	0,985918058
8	0,984315656	0,985478252	0,983060609
9	0,981447089	0,982828391	0,979955611
10	0,978366255	0,979985143	0,976617755
11	0,974949235	0,97682444	0,972924173
12	0,97133237	0,973483022	0,969009822
13	0,967480209	0,969925106	0,964839895
14	0,963246429	0,966013939	0,960257918
15	0,958626749	0,961745865	0,955258938
16	0,953609691	0,957113952	0,949826279
17	0,94869411	0,952581947	0,944496396
18	0,942778278	0,9471256	0,938084742
19	0,93634405	0,941191245	0,931111432
20	0,92928933	0,934682684	0,923468301
21	0,921656284	0,927657753	0,915178889
22	0,913475812	0,920128611	0,906296054
23	0,904618708	0,911988006	0,896665893

24	0,895157467	0,90332077	0,886345807
25	0,885076991	0,894108982	0,87532432
26	0,874544391	0,884530403	0,863754177
27	0,863196617	0,874217614	0,85128172
28	0,851098732	0,863234609	0,837973057
29	0,838390696	0,851722317	0,823965823
30	0,824840018	0,839451299	0,809027254
31	0,810599237	0,826582527	0,79329843
32	0,794961215	0,812449192	0,77603338
33	0,778370812	0,797422712	0,757761866
34	0,760696852	0,781408316	0,738311389
35	0,741792241	0,764234187	0,717568337
36	0,721982072	0,746231013	0,695848328
37	0,700430832	0,726606995	0,672276893
38	0,677701479	0,705860881	0,647489126
39	0,653255854	0,683485038	0,620920772
40	0,627591554	0,659915421	0,59313918
41	0,600478737	0,634919429	0,563924306
42	0,571702726	0,608270863	0,533082168
43	0,541775292	0,580412443	0,501201671
44	0,510975133	0,55157352	0,468617415
45	0,47899264	0,521428472	0,435045695
46	0,446516119	0,490588062	0,401254197
47	0,413858312	0,459316619	0,367604759
48	0,381121381	0,427679134	0,334237321
49	0,348778289	0,396102613	0,301663123
50	0,317209344	0,364937032	0,270281606
51	0,286068628	0,333815996	0,239767285
52	0,256059121	0,303419311	0,210822557
53	0,22745481	0,274019006	0,183703509
54	0,200472801	0,245843279	0,158594719
55	0,175348023	0,219155084	0,135679342
56	0,152175495	0,194085447	0,114995665
57	0,131064407	0,170794234	0,096582019
58	0,112054117	0,149379218	0,080403252
59	0,095141676	0,129902724	0,066379689
60	0,080222133	0,112317322	0,054343737
61	0,077010911	0,108393206	0,051853388
62	0,073928231	0,10460619	0,049477161
63	0,070968948	0,100951484	0,047209827

64	0,068128123	0,097424465	0,045046396
65	0	0	0

Il grafico 3 illustra l'andamento dei tassi di mortalità ottenuti sulla base dell'implementazione del metodo *MCLC*.

**Grafico 3 – Tassi di mortalità ottenuti con il metodo *MCLC***



#### CONSIDERAZIONI

E' stata presentata un'applicazione del modello Lee Carter per la generazione di probabilità di sopravvivenza sulla base di un metodo simulativo che è stato chiamato *MCLC* costruito su simulazioni Monte Carlo del fattore di disturbo di un modello ARIMA (0,1,0).

Sulla base dei tassi di decesso della popolazione maschile italiana nel periodo 1950 -2000 sono state proiettate le probabilità con tre differenti gradi di proiezione: standard, minimo, massimo per una testa di età  $x = 45$  nell'anno  $t = 2006$ . Il dataset impiegato è stato predisposto nel solco del lavoro Haberman Russolillo (2005).

Le risultanze empiriche relative all'implementazione del metodo *MCLC* hanno dato luogo ad un interessante risultato: la simulazione Monte Carlo del fattore di disturbo conduce, sul medesimo set di dati, ad un risultato pressoché identico a quello ottenuto da Haberman Russolillo, sulla base del metodo Haberman Renshaw.

## 4. Applicazioni numeriche

### 4.1 Obiettivi

Nell'ambito del contesto stocastico per l'evoluzione dei tassi d'interesse e dei tassi di mortalità sopra descritto, s'intende valutare periodo per periodo l'entità del fondo del portafoglio in considerazione, che accoglie flussi in entrata per effetto degli interessi che maturano sul fondo accumulato medesimo e flussi in uscita dovuti ai pagamenti che la compagnia assicurativa corrisponde ai pensionati in vita.

I valori disponibili nel fondo di portafoglio hanno una natura intrinsecamente stocastica sia dal punto di vista della struttura stocastica dei tassi d'interesse, sia dal punto di vista della scelta aleatoria della tavola di mortalità. In particolare, si assume pari a 0.20, 0.30, 0.50 rispettivamente la probabilità di selezionare le tavole di sopravvivenza HP media, HP massima, LC.

Infine si sviluppano tre differenti scenari in relazione a differenti ipotesi sulla base tecnica per il calcolo dei premi, nonché sulle assunzioni della mortalità nella fase di accumulazione e decumulazione, allo scopo di analizzare il comportamento del rischio di tavola. In particolare, sulla base della formula (5) del capitolo 5 che fornisce una misura di tale rischio, l'obiettivo dell'applicazione è di identificare lo scenario meno rischioso tra quelli configurati nella fase contrattuale della cosiddetta de cumulazione, ossia a partire dal pensionamento degli assicurati.

### 4.2 Risultati

Si consideri un portafoglio di contratti riferiti ad una coorte di  $c=1000$  beneficiari di età  $x=45$  al tempo  $t=0$ , che ottengono il trattamento di quiescenza solo 20 più tardi, a 65 anni di età. Si ipotizzi inoltre che il portafoglio sia chiuso a nuove entrate.

Durante la fase di accumulazione, i cash flow sono costituiti da una sequenza di premi di ammontare costante  $P$ , pagabili all'inizio di ogni anno fino a  $t=20$  se l'assicurato è in vita. Durante la fase della decumulazione (*annuitization phase*), la struttura dei cash flow si compone di una sequenza di benefit di importo costante  $R=100$ , pagabili all'inizio di ogni anno dopo  $t=20$  in caso di vita del beneficiario.

#### SCENARIO A

In ordine al computo dell'ammontare del premio, nello *Scenario A* si ipotizza l'uso della seguente base tecnica:

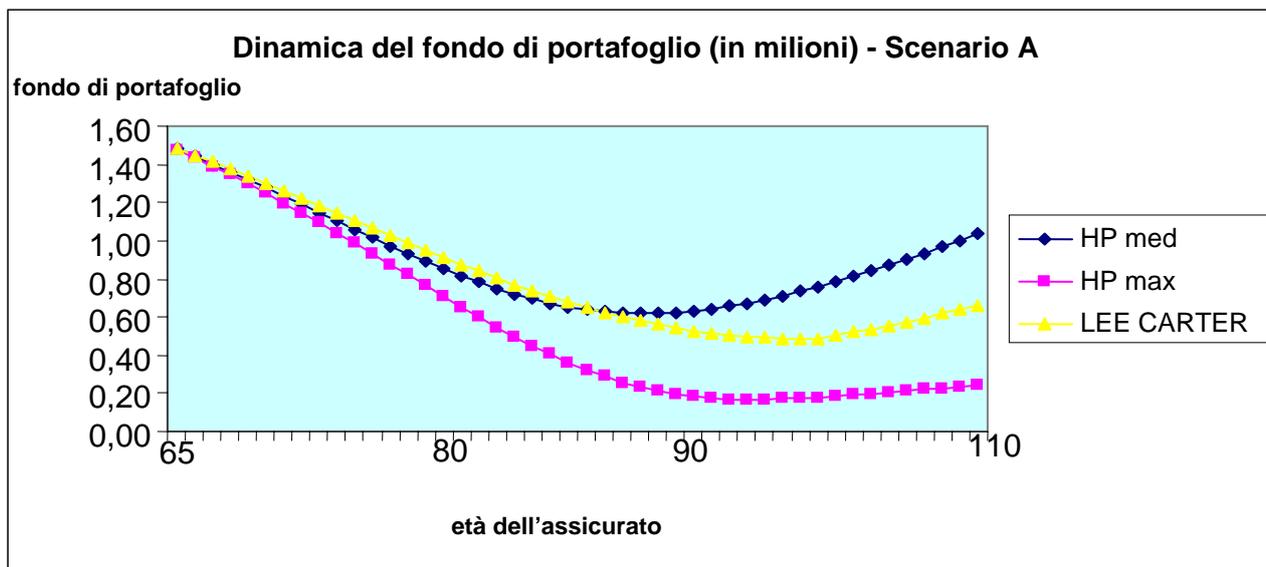
- tavola HP media;
- tasso d'interesse fissato al 3%.

Per quanto riguarda le assunzioni postulate sulla mortalità, i tassi di decesso sono calcolati sulla base della HP media relativamente alla fase di accumulazione, e sulle tre differenti tavole nella fase della decumulazione:

- HP medium
- HP maximum
- LC

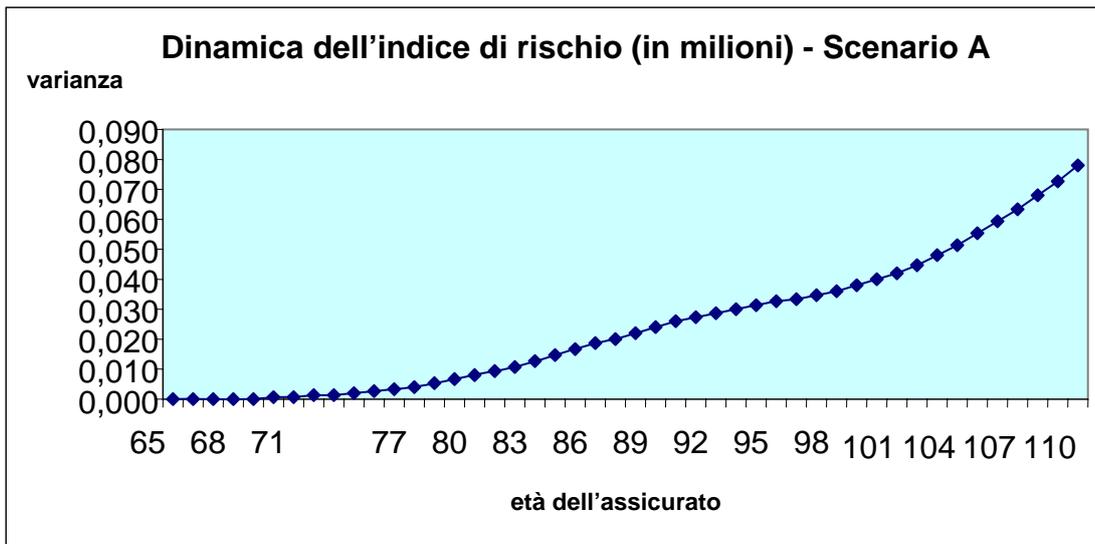
Il grafico 4 mostra l'andamento del fondo di portafoglio dall'età del pensionamento ( $x = 65$ ) in poi, rispetto alle tre differenti ipotesi sulla mortalità. Si noti come, all'aumentare dell'età, si accentua la distinzione tra i tre diversi trend.

*Grafico 4 – Fondo di portafoglio – Scenario A*



Per quanto riguarda l'andamento degli indici di rischio ottenuti assegnando alla scelta di ciascuna tavola le probabilità sopra richiamate, essi risultano rappresentati nel grafico 5.

**Grafico 5 – Indice di rischio nella fase di decumulazione – Scenario A**



Nello Scenario A risulta evidente l'impatto della scelta della tavola sui fondi di portafoglio. In particolare, si rileva che il rischio è crescente all'aumentare dell'età dell'assicurato.

#### SCENARIO B

Nello scenario B, si ipotizza l'uso delle tre distinte tavole di sopravvivenza ai fini del calcolo del premio:

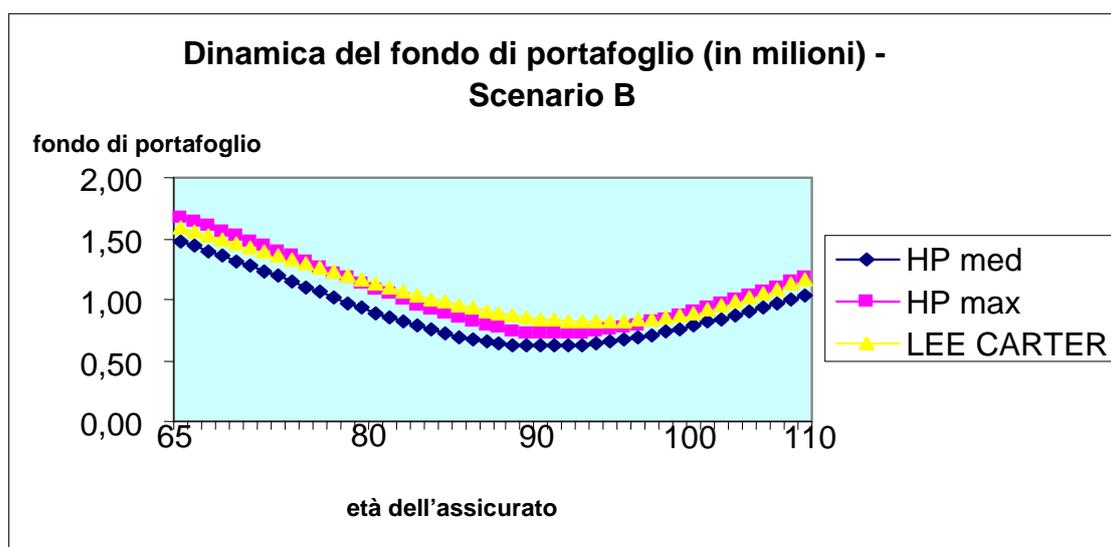
- HP medium
- HP maximum
- LC

Si fa riferimento inoltre alle medesime assunzioni sulla mortalità nella fase di accumulazione e decumulazione, così come postulate per il calcolo del premio.

Infine, il tasso d'interesse della base tecnica rimane al livello del 3% come nello scenario A.

Il grafico 6 mostra l'andamento del fondo di portafoglio che risulta di ammontare maggiore dello Scenario A:

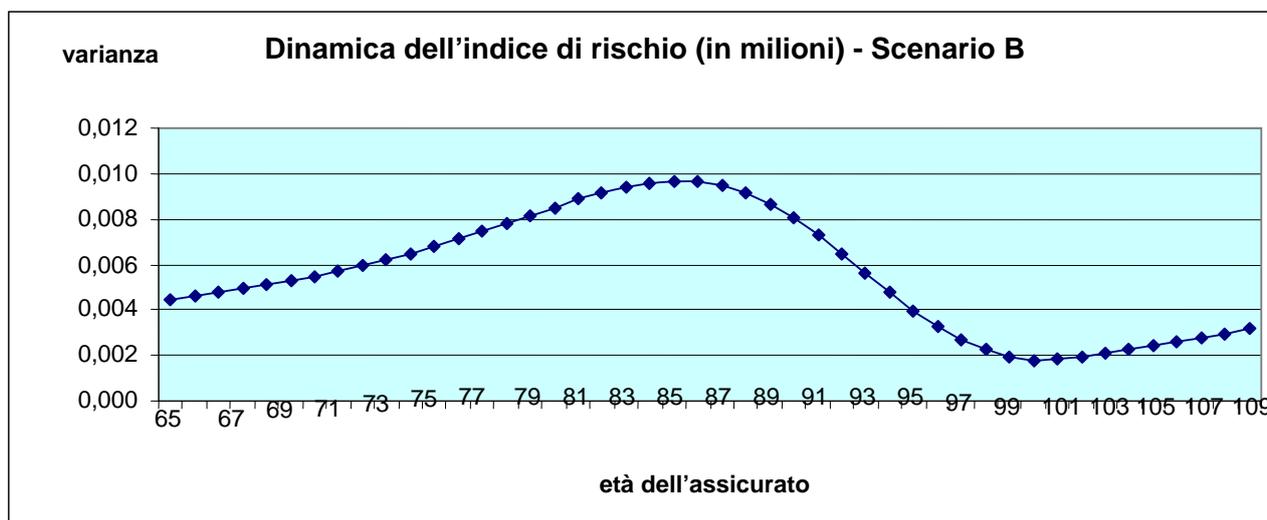
**Grafico 6 – Fondo di portafoglio – Scenario B**



cioè l'omogeneità nelle assunzioni circa l'andamento della mortalità, nel quadro demografico appare vantaggiosa, poiché ci si ritrova con fondi accumulati di importi maggiori.

Particolarmente interessante risulta l'andamento degli indici di rischio, sensibilmente diverso dal precedente:

**Grafico 7 – Indice di rischio nella fase di decumulazione – Scenario B**



In particolare, dall'età di 86 anni fino a 102 circa, il rischio di tavola decresce addirittura, cioè l'assicuratore è meno esposto all'incertezza della tavola.

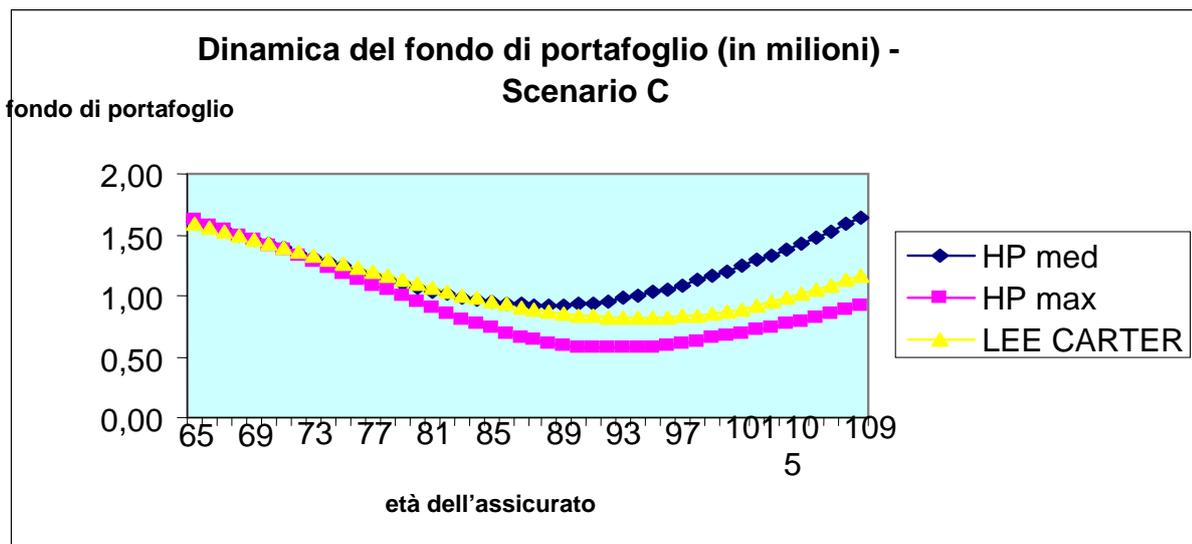
SCENARIO C

Nell'ambito dello scenario C la base tecnica per il calcolo del premio è costituita dalla tavola LC e del tasso d'interesse del 3%.

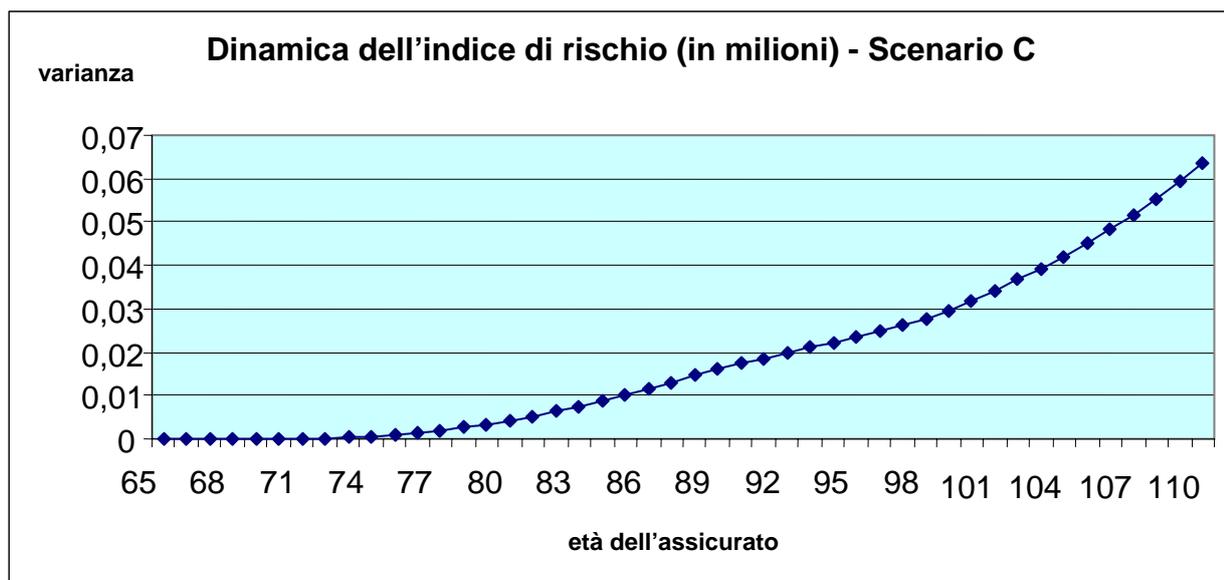
Il grafico 8 illustra il trend del fondo di portafoglio nella fase della decumulazione, laddove sono state operate le tre differenti assunzioni sulla mortalità dalla stipulazione del contratto in poi.

Tale andamento sembra ricalcare quello dello scenario A ed anche il comportamento dell'indice di rischio non se ne discosta significativamente.

**Grafico 8 – Fondo di portafoglio – Scenario C**



**Grafico 9 – Indice di rischio nella fase di decumulazione – Scenario C**

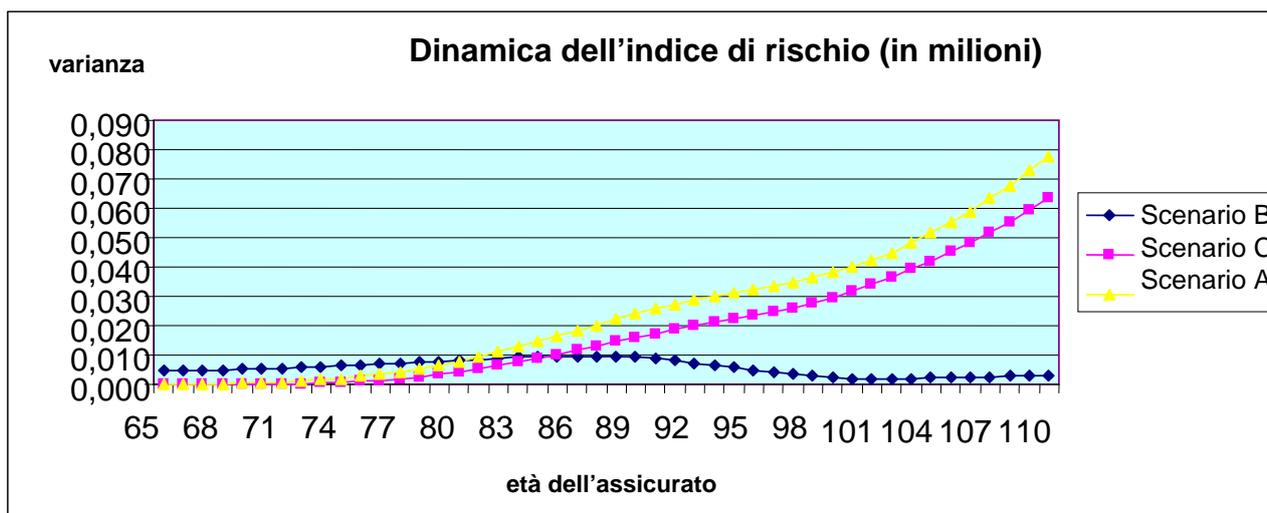


A conclusione, appare che la differenza nell'andamento dell'indice di rischio deriva dall'omogeneità dello scenario, rispetto a scelte disomogenee.

## CONFRONTO TRA SCENARI

Sulla base degli scenari analizzati nell'applicazione, si nota che la differenza tra gli andamenti degli indici di rischio dipendono sensibilmente dal grado di omogeneità del profilo demografico.

*Grafico 10 – Confronto tra scenari*



Questo aspetto emerge in tutta la sua evidenza nel grafico 10 in cui è mostrato un confronto del trend degli indici di rischio negli scenari A, B,C. Infatti è del tutto evidente che lo scenario che presenta il più basso grado di rischio derivante dall'aleatorietà della tavola è lo scenario B, caratterizzato dal più forte grado di omogeneità nelle assunzioni operate circa la mortalità, in ordine al calcolo del premio e all'evoluzione del fondo.

## **Capitolo 7 – UN ESEMPIO IN ASSICURAZIONI CASO MORTE: IL RISCHIO DI TAVOLA IN UN PORTAFOGLIO DI MUTUI ASSICURATI**

### **1. Introduzione**

La funzione del sistema bancario di intermediazione creditizia trova nella concessione di finanziamenti alla clientela la sua espressione più significativa. Nondimeno, l'attività di erogazione dei prestiti si inquadra in un'area di rischi compatibili con l'obiettivo di stabilità d'impresa. In particolare, il rischio di default cui sono esposte le banche sui finanziamenti e specialmente sui mutui, che ne costituiscono una delle sottoclassi più rilevanti per volumi e per remunerazioni, risulta estremamente significativo.

L'attuale situazione economica internazionale è caratterizzata da un aumento della domanda di contratti di mutuo, soprattutto per l'acquisto di immobili, parallelamente ad un numero notevole di sofferenze di crediti su mutui, al punto che recentemente la Federal Reserve è stata costretta a ritoccare, seppur lievemente, il livello dei tassi d'interesse al ribasso. Le istituzioni internazionali guardano infatti con preoccupazione allo stato in cui versa l'industria dei mutui, data la crucialità di tale segmento per l'intero sistema economico.

In ordine dunque ad un problema così sentito, quale quello del mancato rientro delle somme di capitale prestato e di mancata remunerazione del prestito medesimo da parte del cliente affidato, le banche hanno conformato diversi prodotti ad hoc, tra i quali grande rilievo ha il mutuo assicurato. Il concetto innovativo risiede nella copertura del rischio di default attraverso un'assicurazione vera e propria delle somme ancora dovute ad un dato anniversario di contratto, anziché mediante il ricorso alle tradizionali garanzie collaterali di tipo reale.

Il contratto di mutuo che ne risulta assume dunque una fisionomia più complessa rispetto alla versione di base. Nell'ambito di questa trattazione si considererà il caso dell'assicurazione del mutuo contro la morte del debitore, pur essendo l'intera analisi sviluppata di seguito estensibile, con opportune variazioni, ad altri frangenti, come il mutuo assicurato contro invalidità o perdita di reddito da lavoro del debitore – mutuatario, ecc.

Nel caso di specie, l'attività di gestione contrattuale risulta interessata dalla dinamica del fenomeno della sopravvivenza, e segnatamente dal trend migliorativo della mortalità. Se infatti quest'ultimo, nel mutuo assicurato, non incide visibilmente sui costi della compagnia assicurativa, nella misura in cui il tasso di mortalità osservato è minore di quello atteso, risulta comunque cospicuo il costo – ombra causato dall'inutile accantonamento di disponibilità finanziarie superiori alle reali necessità, nonché protratto per un periodo di tempo lungo (i mutui assicurati hanno spesso scadenze

decennali, o addirittura ventennali). Di conseguenza, essendo presente anche in tale tipo di polizza un rischio longevità, seppur diversamente configurato, si intende quantificare il rischio di modello legato alla scelta di una data tavola di mortalità proiettata sul valore della riserva da iscrivere a bilancio, alla luce delle più recenti prescrizioni internazionali in materia (*fair valuation* delle passività). A tale scopo, dapprima sarà proposta una valutazione in forma chiusa del *fair value* della riserva matematica nel caso di un intero portafoglio di mutui assicurati, in uno scenario stocastico per la mortalità e per la componente di rischio finanziario e successivamente sarà analizzata appunto la rilevanza della scelta dell'approccio demografico nella mappatura dei rischi del portafoglio medesimo.

## 2. Il mutuo assicurato

### 2.1 Profili contrattuali

Il presente contratto è predisposto quindi per i clienti di una banca che, al momento della sottoscrizione di un mutuo, scelgono di stipulare, a tutela del mutuo erogato, un'assicurazione temporanea per il caso di morte, a copertura del debito residuo. Spesso la banca lo impone come condizione obbligatoria per l'accensione del mutuo medesimo.

L'appetibilità commerciale di questo prodotto dipende dal fatto che è in grado di offrire un contemperamento di interessi opposti: la banca mutuante non subisce il rischio di default, il cliente mutuatario evita ai suoi eredi o ad altri obbligati di regresso di doversi accollare l'ammontare del debito, in caso di sua premorienza rispetto alla scadenza contrattuale.

Il mutuo assicurato può assumere due differenti configurazioni, che possiamo indicare come segue:

- a. la forma *inglobata*;
- b. la forma *separata*.

tra le quali la seconda risulta senz'altro la più frequentemente praticata dal mercato.

Nel primo caso, il mutuatario – assicurato versa in via anticipata ammontari periodici costanti  $P$ , fino alla scadenza del contratto  $n$ , o fino alla sua morte se essa si verifica prima di  $n$ . La somma  $P$  dovuta ad un tempo  $s$  ( $s=0,1,2,\dots,n-1$ ) ingloba l'ammontare della rata così come determinata sulla base del piano di ammortamento - quota capitale  $C_s$  più gli interessi  $I_s$ , sul debito residuo  $D_{s-1}$  - ed il premio attuariale richiesto per coprire il debito residuo all'inizio di ciascun periodo, se la morte del mutuatario – assicurato avviene prima della scadenza.

In forza del principio di equilibrio finanziario tra le controparti, se poniamo pari ad un'unità di capitale il debito del mutuatario – assicurato, si può scrivere la seguente espressione:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P A_{x:k|}^1 = 1 \quad (1)$$

in cui  $A_{x:n|}^1$  è il valore attuale attuariale di un'unità di capitale pagata in caso di vita di un assicurato di età  $x$ , temporanea  $n$ .

Nel caso della forma *separata*, il cliente accende un mutuo nella sua configurazione di base insieme ad un'assicurazione temporanea  $n$  anni per il caso di morte.

## 2.2 Piano di ammortamento e valutazione del premio

Di seguito si farà riferimento allo schema contrattuale del mutuo assicurato nella forma *separata*.

Si ipotizzi che il mutuatario – assicurato contragga con la banca un debito di un'unità di capitale da rimborsare in  $n$  anni, ad un dato tasso di interesse annuale  $i$ . Possiamo esprimere il pagamento annuale di ammontare costante e il debito residuo al tempo  $h$  rispettivamente:

$$R = 1/a_{n|i} \quad O_h = a_{n-h|i} / a_{n|i} \quad (2)$$

Il contratto prevede che in caso di premorienza del mutuatario-assicurato rispetto alla scadenza, la compagnia assicurativa paghi le obbligazioni a carico del de cuius: al tempo  $h$  il debito residuo al tempo  $h-1$  più l'interesse annuale maturato su questa somma. Siano  $B_h$  il valore del benefit pagabile al tempo  $h$  ( $h=1,2,\dots,n$ ) se il mutuatario – assicurato di età  $x$  all'emissione muore durante l' $h$ -esimo anno e la probabilità di tale evento rispettivamente:

$$B_h = \left(1/a_{n|i}\right) \ddot{a}_{n-h+1|i} \quad {}_{h-1|}q_x \cdot \quad (3)$$

Per quanto riguarda i premi, il premio unico del contratto assicurativo risulta il seguente:

$$S = \left(1/a_{n|i}\right) \sum_{j=0}^{n-1} j/a_{n-j|i} \quad j/1q_x \quad (4)$$

mentre il premio pagabile all'inizio dei primi  $m$  anni ( $0 < m \leq n$ ,  $0 \leq h < m-1$ ) se il mutuatario – assicurato è in vita si può esprimere come segue:

$${}_m P_{x,h+1} = {}_m P_x = \left(1/a_{n|i}\right) {}_m \pi_x \quad (5)$$

in cui  ${}_m P_{x,h+1}$  rappresenta l' $(h+1)$ -esimo premio costante pagabile all'inizio dell'anno  $h$ -esimo e:

$${}_m \pi_x = \left(1/\ddot{a}_{x:m|}\right) \sum_{j=0}^{n-1} j/a_{n-j|i} \quad j/1q_x \quad (6)$$

### 2.3 Un tipico contratto di mutuo assicurato: il caso italiano

Tipicamente il contratto di mutuo assicurato assume la forma *separata*, cioè a dire è caratterizzato dalla *triangolazione* dei soggetti:

- 1) il cliente mutuatario – assicurato,
- 2) la banca mutuante – beneficiaria,
- 3) la compagnia assicurativa.

In particolare, la polizza assicurativa prevede che, in caso di morte del mutuatario – assicurato, la compagnia assicurativa versi al beneficiario designato, la banca mutuante, l'importo del debito residuo più l'interesse maturato dall'inizio dell'anno in cui è avvenuto il decesso fino alla fine di esso.

Generalmente l'ammontare mutuato non può essere inferiore a €10.000,00 ed è soggetto ad un tetto massimo variabile da banca a banca. La copertura assicurativa entra in vigore dalle ore 24.00 del giorno di erogazione del finanziamento. Per quanto riguarda la durata contrattuale, essa è pari a quella del piano di ammortamento del mutuo. Il contratto può essere stipulato a partire dai 18 anni fino ai 60 ed in ogni caso la copertura viene interrotta al compimento del 75° anno di età.

### 3. Il *fair value* della riserva

I principi guida elaborati dalle istituzioni internazionali attive in campo assicurativo, l'*International Accounting Standards Board* (IASB) in Europa e il *Financial Accounting Standards Board* (FASB) negli Stati Uniti, indicano che, nell'ambito delle valutazioni della solvibilità aziendale, la quantificazione dell'entità della riserva deve essere operata secondo una valutazione *mark-to-market* delle passività correnti, cosiddetta *fair value*.

La clausola generale di chiarezza e di rappresentazione veritiera e corretta della situazione patrimoniale e finanziaria di una società e del suo risultato economico di esercizio (ex art. 2423 comma 2, codice civile) si trasfonde a livello di *fair valuation*, che sostituisce il tradizionale principio d'iscrizione in bilancio al costo storico con quello a valori correnti.

In assenza di un'univoca definizione di *fair value* e di chiare indicazioni su come esso debba essere computato, la caratterizzazione più significativa ed utilizzata risulta la seguente: "*the market value, if a sufficiently active market exists, or an estimated market value otherwise*" (CAS *Fair Value Task Force*). In forza di tale precisazione, il *fair value* della riserva può essere espresso come una stima del prezzo di mercato e non necessariamente come prezzo di equilibrio (Cocozza et al 2007).

La forma di *fair value* implica inoltre che la riserva matematica debba essere calcolata a valori correnti per i tassi d'interesse e di mortalità. Si pone cioè il problema della scelta del più "adatto" processo di sconto e della più "adatta" tavola di mortalità.

#### 4. Modello di valutazione: il caso di un portafoglio

##### 4.1 Schema deterministico

Si consideri un portafoglio omogeneo di  $c$  mutui assicurati emessi su teste assicurate di età  $x$ , con premi pagabili all'inizio di ciascun periodo (anno) finché l'assicurato – mutuatario è in vita o fino alla scadenza della durata contrattuale  $n$ , e benefits alla fine di ogni periodo (anno), nel caso di sua morte, se essa si verifica prima della scadenza contrattuale.

Il benefit risulta essere proprio pari al debito residuo calcolato all'inizio di ogni periodo, più l'interesse maturato sull'ammontare in questione fino alla fine del periodo medesimo.

Nell'ambito di uno scenario deterministico per tutte le variabili, si indichi con  $k_x$  la durata aleatoria di vita futura di un assicurato di età  $x$  alla stipulazione.

Nel caso in cui l'assicurato – mutuatario corrisponda premi unici, il flusso al tempo  $h$  connesso ad ogni assicurato risulta:

$$X_h = \begin{cases} \left(1/a_{\overline{n}|i}\right) \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} & h-1 \leq k_x < h \\ 0 & k_x \geq h \end{cases}$$

$$h = 1, 2, \dots, n \quad e \quad \text{con } X_0 = -S$$

Nel caso invece di corresponsione di premi periodici anticipati, il flusso al tempo  $h$  è dato dal seguente schema:

$$X_h = \begin{cases} -/m P_{x,h+1} & k_x \geq h & 0 \leq h \leq m-1 \\ 0 & k_x \geq h & h \geq m \\ \left(1/a_{\overline{n}|i}\right) \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} & h-1 \leq k_x < h & 1 \leq h \leq n \end{cases}$$

$$\text{con } h = 1, 2, \dots, n, \quad P_{n+1} = 0 \quad e \quad X_0 = -P_1$$

Il generico cash flow connesso al portafoglio di  $c$  polizze omogenee di contratti di mutuo assicurato può essere scritto come segue:

$$f_0 = -c/m P_{x,1} \quad \text{se } h=0$$

$$f_h = -/m P_{x,h+1} n_h + \left[ \left( 1/a_{n|_i}^- \right) \ddot{a}_{n-h+1|_i}^- \right] (n_{h-1} - n_h) \quad \text{se } h=1,2,\dots,n$$

nel quale  $n_h$  rappresenta il numero di sopravvivenuti al tempo  $h$ .

#### 4.2 Schema stocastico: la fair valuation di un portafoglio di mutui assicurati

Si consideri uno spazio di probabilità  $\{\Omega, \mathfrak{F}, \phi\}$  originato da due spazi di probabilità  $\{\Omega, \mathfrak{F}', \phi'\}$  e  $\{\Omega, \mathfrak{F}'', \phi''\}$ , in cui  $\mathfrak{F}'$  ed  $\mathfrak{F}''$  rappresentano le  $\sigma$ -algebra che contengono rispettivamente il flusso di informazioni relative agli eventi finanziari ed agli eventi demografici (cf. Coppola et al 2005).

In particolare, la  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}$  rappresenta la filtrazione  $\{\mathfrak{F}_t\} \subset \mathfrak{F}$ , con  $\mathfrak{F}'_t \cup \mathfrak{F}''_t = \mathfrak{F}_t$ , contenente il flusso di informazioni al tempo  $t$  circa gli eventi finanziari e della mortalità.

Il mercato nel quale si opera è privo di frizioni, continuamente attivo, senza restrizioni su acquisti e vendite allo scoperto, con titoli perfettamente divisibili.

Di seguito si indichi con:

- $\tilde{N}_h$  la variabile casuale che rappresenta il numero di sopravvivenuti al tempo  $h$  tra il gruppo di quelli, fra gli  $c$  iniziali assicurati al tempo  $0$ , che sono in vita in  $h$ ;
- $v(t,h)$  il valore attuale stocastico al tempo  $t$  di un'unità di capitale al tempo  $h$ ;
- $F_h$  il flusso stocastico al tempo  $h$ ;
- $L_t$  la riserva stocastica in  $t$  del portafoglio di  $c$  contratti;
- $K_{x,t}$  la variabile aleatoria di vita futura al tempo  $t$  dell'assicurato di età  $x$  alla stipula.

Sulla base dell'ipotesi di completezza del mercato, si scriverà la riserva stocastica al tempo  $t$  nella sua forma di *fair value*, che replica il flusso stocastico  $F_h$  al tempo  $h$  ( $h > t$ ) attraverso una strategia di trading che consiste di:

$$\tilde{N}_h /m P_{x,h+1} + \left( \tilde{N}_{h-1} - \tilde{N}_h \right) \left( 1/a_{n|_i}^- \right) \ddot{a}_{n-h+1|_i}^-$$

unità di Zero Coupon Bonds emessi al tempo  $t$  e che scadono in  $h$ .

Il *fair value* della riserva risulta essere il seguente:

$$V_t = E \left\{ \sum_{h=t+1}^n \left[ -/m P_{x,h+1} \tilde{N}_h + \left( \tilde{N}_{h-1} - \tilde{N}_h \right) \left( 1/a_{n|_i}^- \right) \ddot{a}_{n-h+1|_i}^- \right] v(t,h) / \mathfrak{F}_t \right\} \quad (7)$$

calcolato sotto un'opportuna misura di neutralità al rischio  $\varphi$ . La valutazione demografica non è supportata dall'ipotesi di completezza del mercato, tuttavia è possibile introdurre una misura di probabilità appropriata (De Felice *et al.*, 2004).

Si supponga che le variabili  $K_{x,t}$  siano indipendenti ed identicamente distribuite, le variabili casuali  $F_j$  indipendenti ed identicamente distribuite condizionatamente al processo del tasso d'interesse e che le due fonti di rischio  $K_{x,t}$  e  $v(t,j)$  siano indipendenti.

Indicando con:

- $1_{\{K_{x,t}>h\}}$  la variabile casuale indicatore che assume valore 1 se la vita residua future dell'assicurato di età  $x$  alla stipulazione è maggiore di  $t+h$ , cioè se l'assicurato all'età  $x+t$  è in vita al tempo  $t+h$ , e 0 altrimenti;
- $1_{\{h-1 < K_{x,t} < h\}}$  la variabile casuale indicatore che assume valore 1 se l'assicurato muore tra le età  $x+t+h-1$  e  $x+t+h$ , e 0 altrimenti;

sulla base del calcolo delle aspettative condizionate si può scrivere:

$$V_t = E \left\{ \sum_{h=t+1}^n \left[ -/m P_{x,h+1} c 1_{\{K_{x,t}>h\}} + \left( 1/a_{\overline{n}|i} \right) \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} c 1_{\{h-1 < K_{x,t} < h\}} \right] v(t,h) / \mathfrak{F}_t \right\} = \quad (8)$$

$$= \sum_{h=t+1}^n \left[ -/m P_{x,h+1} c {}_tP_x {}_{h-t}P_{x+t} + \left( 1/a_{\overline{n}|i} \right) \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} c {}_tP_x {}_{h-1-t}q_{x+t} \right] E[v(t,h) / \mathfrak{F}_t] \quad (9)$$

Nella formula (9)  ${}_tP_x$  è la probabilità che un assicurato di età  $x$  alla stipulazione contrattuale sia in vita all'età  $x+t$  e  ${}_{h-1-t}q_{x+t}$  è la probabilità che un assicurato di età  $x+t$  muoia durante l'h-esimo anno del contratto. Queste probabilità sono calcolate secondo la legge di mortalità scelta allo scopo di una migliore rappresentazione del fenomeno.

E' opportuno osservare che nessuna indicazione sulle deviazioni sistematiche della mortalità dal valore atteso provengono dal mercato, in modo che i valori della riserva ottenuti siano valori di mercato (*marked to model*).

Sostituendo le probabilità di sopravvivenza e richiamando le formule (5) e (6), la formula (9) può essere scritta come segue:

$$V_t = \left( c / a_{\overline{n}|i} \right) {}_tP_x \sum_{h=t+1}^n \left[ \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} {}_{h-1-t}P_{x+t} - \left( /m \pi_{x,h+1} + \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|i} \right) {}_{h-t}P_{x+t} \right] E[v(t,h) / \mathfrak{F}_t] \quad (10)$$

## 5. Uno strumento per la misura del rischio di tavola

Dal momento che il rischio di proiezione nelle polizze caso morte si conforma in maniera diversa rispetto al caso vita, si decide di nominare diversamente anche il rischio stesso. Si farà riferimento al rischio derivante dall'aleatorietà nella scelta della tavola di proiezione, come al rischio di tavola. Si intende analizzare la misura del suo impatto su di un portafoglio di mutui assicurati. Si farà riferimento ad uno scenario stocastico per il tasso d'interesse e per la deviazioni della mortalità. Sulla base dei principi delle distribuzioni di probabilità condizionata, la varianza del *fair value* della riserva, che misura la rischiosità globale che include indistintamente tutte le fonti di rischio, può essere decomposta rispetto alla funzione di sopravvivenza con cui si costruisce la tavola di mortalità proiettata (si veda cap. 5, par. 5):

$$\text{Var}[L] = \text{Var}[E(L|T)] + E[\text{Var}(L|T)] \quad (11)$$

Analizziamo i termini a secondo membro, cioè i contributi alla rischiosità totale.

Il primo termine a secondo membro rappresenta una misura della variabilità del *fair value* della riserva dovuta all'aleatorietà nella scelta della tavola, essendo state mediate (gli effetti delle altre componenti di rischio) le componenti di aleatorietà dovute ai tassi di rendimento ed alle deviazioni accidentali della mortalità. (Di Lorenzo et al 2002).

Il secondo termine a secondo membro è una media della variabilità del *fair value* della riserva dovuta ai tassi di rendimento ed alle deviazioni accidentali della mortalità.

Il primo rappresenta il rischio di tavola (natura sistematica), il secondo il rischio d'investimento.

Sulla base delle ipotesi precedentemente introdotte (schema di valutazione), si introduce il *table risk*, considerando l'indice  $R_{T_t}$  che rappresenta la sua quantificazione al tempo  $T$ , dato dalla varianza dovuta all'aleatorietà nella scelta della tavola di mortalità  $T_t$  impiegata per la valutazione a quel tempo:

$$\begin{aligned} R_{T_t} &= \text{Var}_{T_t} [E(V_t)] = \\ &= \text{Var}_{T_t} \left[ c {}_t p_x \left\{ \sum_{h=t+1}^n \left[ \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|}_i {}_{h-1-t} p_{x+t} - \left( {}_t/m \pi_{x,h+1} + \ddot{a}_{\overline{n-h+1}|}_i \right) {}_{h-t} p_{x+t} \right] E[v(t,j)/\mathfrak{F}_t] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (12).$$

$R_{T_t}$  esprime la variabilità della riserva al tempo  $t$  dovuta alla stocasticità nella scelta della tavola di mortalità, essendo stati mediati gli effetti delle altre due componenti (tassi d'interesse stocastici e deviazioni aleatorie della mortalità) (Di Lorenzo et al 2002).

## 6. La mappa dei rischi demografici

In questa sezione s'intende analizzare l'impatto del rischio di mortalità sulle valutazioni di un portafoglio di mutui assicurati. Tipicamente la numerosità di contratti che compongono un portafoglio siffatto è piuttosto esigua, così da non poter assorbire l'incertezza connessa alle deviazioni aleatorie dei decessi dai valori attesi per effetto dell'incremento del numero delle polizze, data la sua natura di *pooling risk* (cfr. Coppola et al. 2002).

Si ipotizzi di considerare ancora una volta la riserva stocastica di un portafoglio di mutui assicurati nel caso del premio unico pagato in  $t = 0$

Sulla base della formula 7 la misura del rischio di mortalità al tempo  $t$  può così essere espressa:

$$MR_t = E[E[Var[U_t / \mathfrak{S}'_t] / T_t]] = \tag{13}$$

$$= E \left[ E \left[ Var \left[ \sum_{h=t+1}^n [(N_{h-1} - N_h) (\ddot{a}_{\overline{n-h+1}|} / \ddot{a}_{\overline{n}|}) v(t, h)] / \mathfrak{S}'_t \right] / T_t \right] \right]$$

La varianza nella formula (13) può essere osservata calcolando che:

$$N_h = \sum_{j=1}^c X_h^j$$

avendo indicato con  $X_h^j$  la variabile che assume valore

- 1 se il  $j$ -esimo assicurato di età  $x$  alla stipula contrattuale e tra gli iniziali  $c$  assicurati, è in vita all'età  $x+h$  ( $j=1,2,\dots,c$ ;  $h=t+1,t+2,\dots,t+n$ )
- e 0 altrimenti.

Si noti che i primi due momenti di  $X_h^j$  sono gli stessi e che le variabili casuali  $X_h^j$  sono indipendenti ed identicamente distribuite. Dunque possiamo scrivere:

$$E(N_h) = cE(X_h^j) = c {}_t p_x {}_h p_{x+t}$$

$$\text{Var}(N_h) = c\text{Var}(X_h^j) = c {}_t p_x (1 - {}_t p_x)$$

Inoltre la covarianza si può così esprimere:

$$E(N_h N_k) = c {}_t p_x + 2 \sum_{j=1}^{c-1} \sum_{i=j+1}^c E(X_h^j X_k^i)$$

con  $t < h < k$ , in particolare si ottiene:

$$E(X_h^j X_k^i) = {}_{t+h+k} p_x$$

ed infine

$$E[N_h N_k] = c {}_t p_x [1 + (c-1) {}_k p_{x+t+h}].$$

**Proposizione 1:** Se  $N_h$  è una variabile casuale che corrisponde al “numero di sopravvissuti al tempo  $h$ ” tra gli iniziali  $c$  assicurati e se le variabili indicatore  $X_h^j$  sono indipendenti ed identicamente distribuite, la funzione di autocovarianza di  $N_h$  può essere descritta dalla seguente equazione:

$$\text{cov}(N_h, N_k) = c {}_t p_x [1 + (c-1) {}_k p_{x+t+h} - c {}_{t+k} p_x] \quad \text{con } h < k. \quad (14)$$

## Capitolo 8 – APPLICAZIONE NUMERICA AD UN PORTAFOGLIO DI MUTUI ASSICURATI

### 1. Obiettivi delle applicazioni numeriche

In tale sezione si illustrano, nell'ambito di un dato scenario finanziario e di determinate ipotesi sulla mortalità, i risultati delle applicazioni numeriche condotte sulla base delle formule per la quantificazione della riserva a valori correnti di un portafoglio di mutui assicurati, del rischio di tavola per il portafoglio preso in considerazione ed infine della misura dell'impatto del rischio di mortalità sulle passività del portafoglio medesimo ( cfr. capitolo 4).

Le evidenze empiriche mostrano, in prima analisi, che la numerosità dei premi periodici influenza sia l'andamento che il segno del *fair value* della riserva matematica nell'ambito della durata contrattuale. Inoltre, dai calcoli effettuati in ordine alla determinazione del ruolo della tavola di mortalità scelta per la valutazione, viene in risalto la significatività del rischio di tavola. Di seguito si illustra anche l'impatto del rischio di mortalità sulle riserve di portafoglio.

Infine un'ampia sezione di apertura del capitolo, funzionale all'analisi condotta, è dedicata alla stima della struttura per scadenza dei tassi d'interesse sulla base del modello *CIR*, dalla quale si ottengono i fattori stocastici di sconto  $v(t,h)$  che esprimono il valore attuale stocastico al tempo  $t$  di un'unità di capitale al tempo  $h$ .

### 2. Ipotesi sulla dinamica dei tassi d'interesse

#### 2.1 Il modello CIR

Il CIR è un modello unifattoriale descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr_t = -k(r_t - \gamma)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t \quad (1)$$

dove  $k$  è la velocità di aggiustamento del tasso di interesse  $r$  verso la sua media di lungo periodo  $\gamma$ ,  $\sigma\sqrt{r}$  è la volatilità che caratterizza le variazioni di  $r$ , mentre  $z$  è un moto Browniano standard.

In prima istanza, allo scopo di effettuare la stima dei parametri del processo stocastico in tempo continuo CIR sulla base di dati rilevati in tempo discreto, è inevitabile operare una rappresentazione

discreta del processo stesso<sup>2</sup>. Si noti che, dato un set di dati, si produrranno stime dei parametri differenti in relazione al tipo di discretizzazione impiegata<sup>3</sup>.

Di seguito si farà ricorso alla discretizzazione di Chan che è “un’approssimazione della specificazione in tempo continuo” e che garantisce che “l’errore è di importanza di second’ordine se le variazioni di  $r$  sono misurate su brevi intervalli di tempo”. Tuttavia, si ricorda che si può operare un’altra discretizzazione (Deelstra – Parker 1995) sulla base del principio di equivalenza della covarianza<sup>4</sup>: in tal modo si assicura l’equivalenza della rappresentazione discreta del processo stocastico con quella continua, per ogni tempo<sup>5</sup>.

## 2.2 Articolazione delle fasi di stima dei parametri del modello CIR

Al fine di rappresentare la struttura per scadenza dei tassi d’interesse si stimano i parametri del modello CIR  $k, \gamma, \sigma$ .

Le fasi preordinate all’ottenimento della stima di tali parametri sono le seguenti:

1. predisposizione del set di dati costituito da tassi di interesse osservati sul mercato su di un determinato orizzonte temporale;
2. elaborazione di statistiche sul dataset prescelto;
3. implementazione della procedura econometrica.

### DATASET

Il panel di dati utilizzato e sul quale si procederà ad effettuare le elaborazioni che seguono è il medesimo di quello illustrato e descritto in precedenza per il Vasicek, al quale si rimanda. In tale sede, quindi, si ricorda solo che i tassi utilizzati sono il Libor e l’Eurirs.

### PROCEDURA ECONOMETRICA DI STIMA

In relazione alla procedura di stima, possono essere adoperati differenti metodi: il metodo dei minimi quadrati<sup>6</sup>, la stima di massima verosimiglianza ed il metodo generalizzato dei momenti - GMM<sup>7</sup>.

---

<sup>2</sup> Cfr. Deelstra, G., Parker G., *A covariance equivalent discretisation of the CIR model*, 5<sup>th</sup> Afir International Colloquium.

<sup>3</sup> Cfr. Deelstra, G., Parker G., *A covariance equivalent discretisation of the CIR model*, 5<sup>th</sup> Afir International Colloquium.

<sup>4</sup> Cfr. Pandit, S.M., Wu, S.M., 1983, *Time Series and System Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 586 p.

<sup>5</sup> Cfr. Deelstra, G., Parker G., *A covariance equivalent discretisation of the CIR model*, 5<sup>th</sup> Afir International Colloquium. In tale paper, gli autori, pur suggerendo la discretizzazione dell’equivalenza della covarianza, rilevano come non necessariamente tale rappresentazione discreta catturi la dinamica dei tassi d’interesse in modo migliore della discretizzazione alla Chan, poiché questo dipende dai dati usati.

<sup>6</sup> Cfr. Deelstra, G., Parker G., *A covariance equivalent discretisation of the CIR model*, 5<sup>th</sup> Afir International Colloquium.

Si farà ricorso a quest'ultimo. Innanzitutto esso non richiede che le variazioni nei tassi d'interesse siano normalmente distribuite<sup>8</sup>. Si richiede soltanto che le variazioni nei tassi d'interesse siano stazionari ed ergodici. Un altro vantaggio nell'impiegare il metodo GMM è che le stime dei parametri ed i loro standard error sono consistenti anche se i termini di errore sono condizionatamente eteroschedastici<sup>9</sup>

Il metodo generalizzato dei momenti costituisce un'estensione del metodo classico dei momenti.

L'idea principale del metodo è di considerare un insieme di condizioni, dette condizioni dei momenti del tipo:

$$E[m(X_i; \mathcal{G}_0)] = 0 \quad (2)$$

dove  $\mathcal{G}_0 \in \Theta$  è un vettore  $(p \times 1)$  di parametri incogniti che caratterizza la legge delle variabili osservabili  $X_i$  per  $i = 1, \dots, N$  e per  $m(X_i; \mathcal{G})$  è un vettore  $(q \times 1)$  di funzioni assegnate in modo tale che l'equazione (2) è verificata solo per  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ .

Una condizione necessaria per l'identificazione di  $\mathcal{G}_0$  è che  $q \geq p$ .

Se  $q = p$ , ovvero il numero di condizioni dei momenti coincide con il numero di parametri incogniti, allora  $\mathcal{G}_0$  è esattamente la soluzione dell'equazione (2) ed è univocamente determinato poichè soluzione di un sistema di  $q$  equazioni in  $q$  incognite. Ci sono casi però in cui il valore di  $E[m(\cdot)]$  è ignoto mentre il valore di  $m(X_i; \mathcal{G})$  può essere calcolato per ogni  $\mathcal{G}$  ed  $i$ .

In questo caso le condizioni dei momenti vengono stimate dai momenti campionari nel modo seguente

$$f_N(\mathcal{G}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m(X_i; \mathcal{G}_0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_N \approx \mathcal{G}_0 \quad (3)$$

Se  $f_N$  approssima  $E[m(\cdot)]$ , allora  $\hat{\mathcal{G}}_N$  è circa uguale a  $\mathcal{G}_0$  dove  $f_N(\hat{\mathcal{G}}_N) = 0$ , ovvero:

$$f_N(\hat{\mathcal{G}}_N) \approx E[m(\mathcal{G}_0)] = 0$$

---

<sup>7</sup> Chan K.C.; G. Andrew Karolyi; Francis A. Longstaff; Anthony B. Sanders, 1992, An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate, *Journal of Finance*, 1209-1227.

<sup>8</sup> Chan K.C.; G. Andrew Karolyi; Francis A. Longstaff; Anthony B. Sanders, 1992, An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate, *Journal of Finance*, 1209-1227.

<sup>9</sup> Cfr. Venkatesh, V., 2006, Comparison of models of the short-term libor rate, Simon Fraser University.

Se  $q > p$ , ovvero ci sono più condizioni dei momenti che parametri incogniti, allora si dice che  $\mathcal{G}_0$  è sovraidentificato e l'equazione (3) non ha soluzione per  $\mathcal{G}$  perchè ci sono  $q$  equazioni in  $p$  incognite, ovvero più equazioni che incognite.

Allora è necessario scegliere uno stimatore di  $\mathcal{G}$  che faccia approssimare  $f_N$  a 0 in qualche misura.

Per questo motivo si cerca uno stimatore  $\hat{\mathcal{G}}_N$  di  $\mathcal{G}$  risolvendo il problema di minimo:

$$\hat{\mathcal{G}}_N = \arg \min_{\mathcal{G}} Q_N(\mathcal{G}) = f_N(\mathcal{G})' A_N f_N(\mathcal{G}) \quad (4)$$

dove  $A_N$  è un'opportuna matrice ( $q \times q$ ) di pesi, simmetrica e definita positiva.

Ovviamente essendo  $p < q$ ,  $Q_N > 0$ , altrimenti se  $Q_N = 0$  avremo subito la condizione  $f_N(\mathcal{G}) = 0$ .

Lo stimatore  $\hat{\mathcal{G}}_N$  definito dall'equazione (4) è detto stimatore GMM.

Il valore di partenza assunto per la stima è  $r_0 = 0,04$ .

#### PIATTAFORMA DI CALCOLO

Per la stima della struttura per scadenza dei tassi d'interesse si utilizza il software di calcolo MATLAB nella versione *Professional Edition*. MATLAB rappresenta uno strumento di calcolo molto potente. Questo programma non solo dispone di comandi di calcolo estremamente avanzati, ma fornisce anche numerosi strumenti per generare grafici. In aggiunta alle operazioni specializzate, MATLAB include un proprio linguaggio di programmazione. Nella fattispecie sono stati sviluppati e poi eseguiti programmi e *script* ad hoc.

#### CARATTERISTICHE DELL'AMBIENTE DI MATLAB

Il programma MATLAB di MathWorks è stato sviluppato originariamente per essere un "laboratorio delle matrici" (*MATrix LABoratory*). Nel 1980 Cleve B. Moler ha scritto la prima versione allo scopo di sviluppare un calcolatore matriciale interattivo. L'elemento base è infatti costituito dalla matrice. Essa rappresenta la struttura dati principale. Il programma MATLAB così come è configurato oggi è insieme un sofisticato sistema interattivo, nonché un linguaggio di programmazione per calcoli scientifici.

#### I PACCHETTI PER LA STIMA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE: GMM E MINZ

Il software MATLAB è stato impiegato non solo come ambiente di calcolo, ma soprattutto nella veste di linguaggio di programmazione, sia attraverso *script M-file* (essi consentono di eseguire una

sequenza di comandi o di istruzioni), che *function M-file* (accettano in ingresso dati di input e producono dati in uscita-output). In particolare, si è scelto di impiegare i pacchetti GMM e MINZ che sono propriamente librerie di funzioni e programmi costruite da *James LeSage's Econometrics Toolbox* (<http://www.mgmt.purdue.edu/faculty/mcliff/progs.html>) come strumenti di complemento alla versione di base di MATLAB.

Il pacchetto GMM include una serie di m-file che si collegano ad altri comandi di supporto presenti nella libreria per le ottimizzazioni cosiddetta MINZ. Specificamente, il pacchetto GMM dispone di un codice *ckls\_d* che identifica i programmi di stima dei seguenti modelli di struttura a termine per i tassi d'interesse:

- modello di Merton;
- modello di Vasicek;
- modello CIR square root;
- modello di Dothan;
- modello GBM (geometric brownian motion);
- modello di Brennan-Schwartz;
- modello CIR variance;
- modello CEV.

Il codice *ckls\_d* implementa la stima dei parametri dei modelli summenzionati, così come trattati in Chan et al. 1992.

Ricordiamo che il modello in tempo continuo è:

$$dr(t) = (\alpha + \beta r)dt + \sigma_r r^\gamma dw_r(t) \quad (5)$$

dove  $w_r(t)$  è un moto browniano standard e  $\sigma_r$  è la volatilità del tasso stesso.

Il modello CIR viene trattato come un caso particolare della (5) per  $\gamma = 0.50$ .

L'esecuzione dei programmi produce tavole che illustrano le stime dei parametri, gli standard errors e varie altre misure.

### 2.3 Struttura per scadenza dal modello CIR

Si illustrano in tabella 2 i risultati ottenuti dall'implementazione della procedura econometrica di stima GMM operata sul dataset preso in considerazione:

**Tabella 2 – stima parametri CIR**

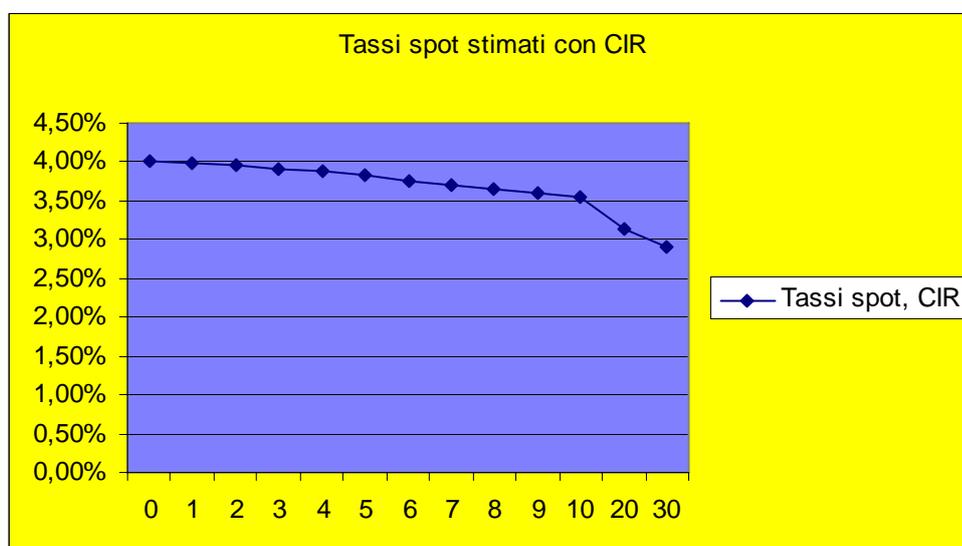
gamma	4.000%
kappa	0.0089

sigma	0.0845
-------	--------

*Dataset: Libor-Eurirs*

Sulla base dei parametri stimati dal modello *CIR* si può calcolare la struttura dei tassi a pronti (grafico 1)

**Grafico 1 – Tassi spot stimati con CIR**



*Dataset: Libor-Eurirs*

Sulla base della relazione di coerenza del mercato si costruisce la struttura per scadenza dei tassi. Per quanto riguarda l'evoluzione dei tassi d'interesse, nel seguito dell'applicazione si farà riferimento alla curva ottenuta sulla base dei parametri stimati con il modello *CIR*.

### 3. Ipotesi sulla mortalità

Prima di descrivere l'applicazione, sono opportune alcune considerazioni. Dal punto di vista strettamente assicurativo, il contratto di mutuo assicurato è un'assicurazione temporanea per il caso di morte in cui le somme assicurate sono decrescenti, cioè il benefit che eventualmente paga l'assicuratore è di ammontare decrescente negli anni.

I premi naturali dipendono, oltre che dalle probabilità di morte che aumentano con il tempo, da somme di capitale assicurato decrescente; il loro trend può risultare quindi decrescente. Com'è noto i premi periodici di ammontare costante pagabili durante l'intera durata contrattuale nasce da una media pesata dei premi naturali e sulla base di tali pagamenti, nel primo periodo di contratto, l'assicuratore potrebbe risultare non pienamente finanziato. In questa circostanza, l'assicuratore

diventa creditore e questa posizione non è accettabile per allontanare problemi di rescissione del contratto (Pitacco 2000).

Alla luce di quanto detto, il *fair value* della riserva non sarà sempre positivo per ciascun numero di premi periodici.

L'applicazione numerica proposta fa riferimento a due portafogli uno di  $c = 1000$  e l'altro di  $c = 10$  polizze di ammontare unitario di durata 10 anni, emesse su uomini di età  $x = 40$ . Sulla base di un tasso fisso di mutuo del 4% e di una tavola di mortalità SIM 2002, sono stati determinati il premio unico ed i premi periodici pagabili all'inizio di ciascun anno se l'assicuratore è vivo, per 7, 8, 9 e 10 anni (tabella 1).

**Tabella 1** – Ammontare del premio per 1 unità di capitale assicurata

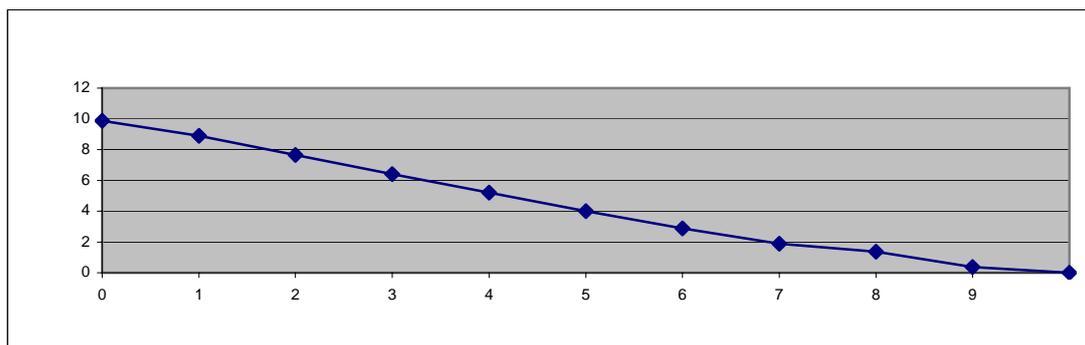
<i>Numero dei pagamenti</i>	<i>Ammontare del premio</i>
Premio unico	0.00931
Sette	0.00149
Otto	0.00133
Nove	0.00121
Dieci	0.00111

## 4. Evidenze empiriche

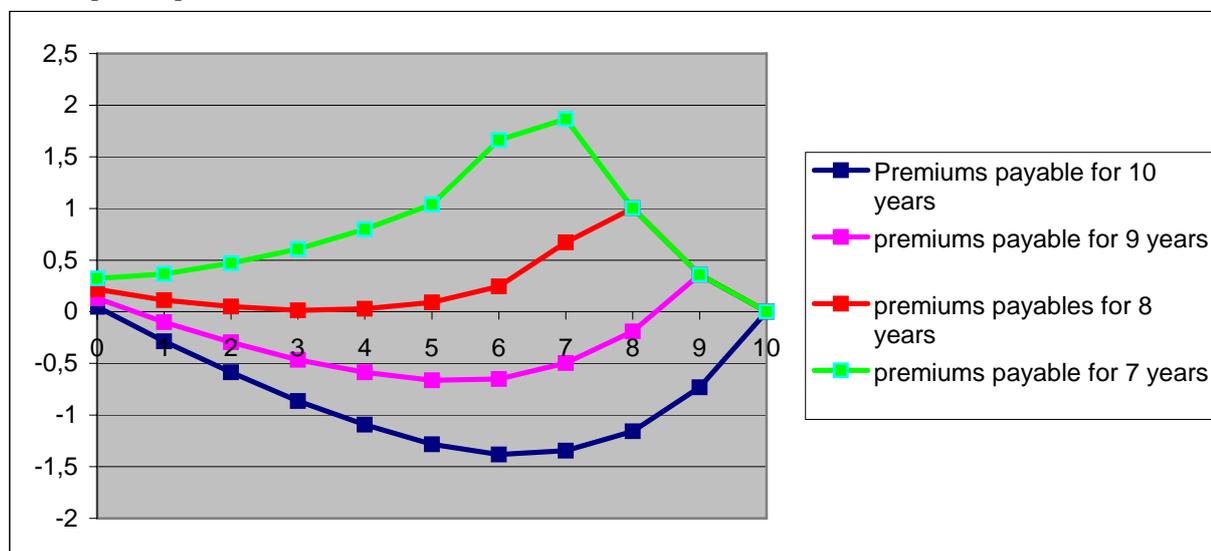
### 4.1 Il *fair value* della riserva

I due grafici mostrano i valori del *fair value* delle riserve espresso nei loro valori correnti calcolate all'inizio di ogni anno, in caso di premio unico (grafico 2) e di premi periodici (grafico 3).

**Grafico 2** – Il valore corrente della riserva di un portafoglio di 1000 contratti di mutuo assicurato, accesi su teste assicurate di 40 anni. Il caso del premio unico



**Grafico 3** – Il valore corrente della riserva di un portafoglio di 1000 contratti di mutuo assicurato, accesi su teste assicurate di 40 anni. Il caso di premi periodici



Si può osservare che il trend della riserva è piuttosto regolare nel caso di premi periodici e che essa rimane negativa nel caso di pagamenti effettuati per 10 anni, diventando completamente positiva nel caso di pagamenti effettuati per 7 anni. Nell'applicazione la massima durata di pagamento di premi che assicura la riserva sempre positiva è 7 anni.

A questo punto allo scopo di evidenziare l'influenza del modello usato come *best estimation* della mortalità nel calcolo del *fair value* si considerano a titolo di esempio tre differenti tavole di mortalità:

- la tavola SIM 2002;
- il modello *Lee Carter* : le probabilità sono state ottenute sulla base della simulazione Monte Carlo *MCLC*;
- modello di *Weibull*: le probabilità sono state ottenute assegnando i parametri proposti in Olivieri 1998

$$S(x) = e^{-(x/\alpha)^\gamma}, \quad x > 0,$$

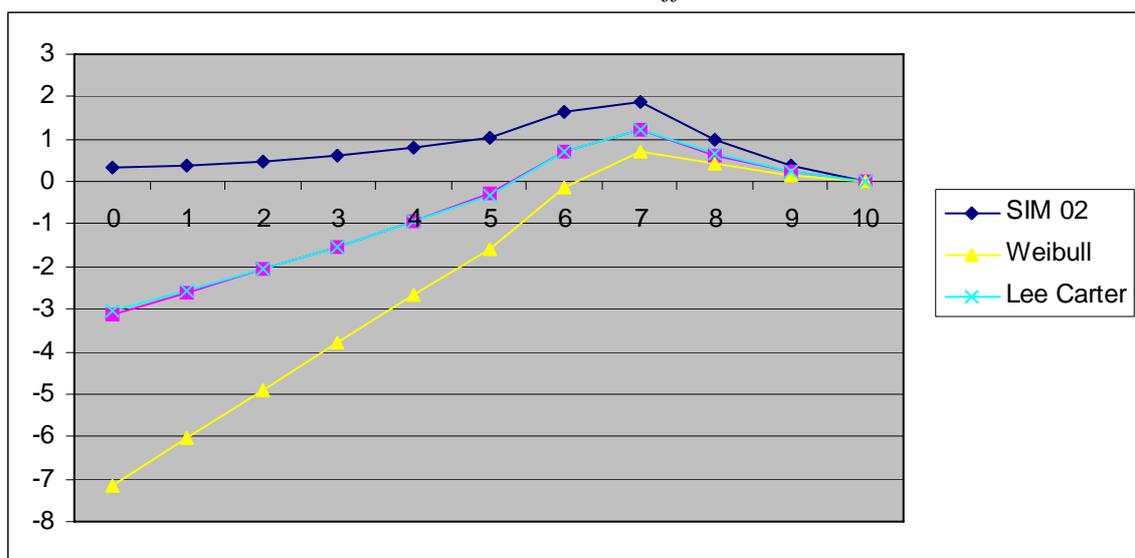
dove  $\alpha=85.2$  e  $\gamma=9.15$ .

Le tre tavole di mortalità considerate costituiscono un esempio di applicazione; esse sono caratterizzate da un incremento nel livello di proiezione, cioè probabilità di sopravvivenza che

aumentano, al fine di prendere in considerazione l'evoluzione nel tempo del fenomeno della sopravvivenza caratterizzato da miglioramenti della longevità.

Sulla base dei risultati sopra riportati, si considera un mutuo assicurato caratterizzato dal pagamento di premi annui per la durata di 7 anni. Il grafico 3 mostra l'andamento del *fair value* della riserva nel caso di premi pagati al più per 7 anni, valutati sulla base delle tre differenti tavole di mortalità. Da tale grafico risulta evidente l'importanza di una corretta descrizione dello scenario demografico.

**Grafico 4** – *Il fair value della riserva nel caso di premi pagabili per 7 anni, il cui ammontare risulta calcolato sulla base di tre differenti tavole di mortalità.*



Il grafico 4 mostra che il pagamento di 7 premi garantisce una riserva positiva per l'intera durata del contratto di mutuo assicurato soltanto nel caso in cui si implementi la SIM 02; l'uso delle tavole caratterizzate da un livello di proiezione crescente conduce ad un livello della riserva più basso e di conseguenza ad una durata più breve assicurata valori positivi per la riserva nell'arco della durata contrattuale. Qui il problema della scelta della "più adatta" tavola di mortalità emerge in tutta la sua importanza pratica e la misura del suo impatto sembra essere un'informazione interessante dal punto di vista del business management

#### 4.2 Il rischio di tavola

Dati i due portafogli sopra descritti si calcola il rischio di tavola al tempo  $t=2$ , nel caso del pagamento di un premio unico, calcolato in base alle basi tecniche:

- tasso d'interesse 4%;
- tavola di mortalità SIM02

Si ipotizzi inoltre di assegnare probabilità 0.2, 0.5 and 0.3 rispettivamente alla scelta della tavola di mortalità SIM2002, Lee Carter e Weibull

La tabella 2 due riporta il valore del rischio di tavola nel caso dei due portafogli in oggetto:

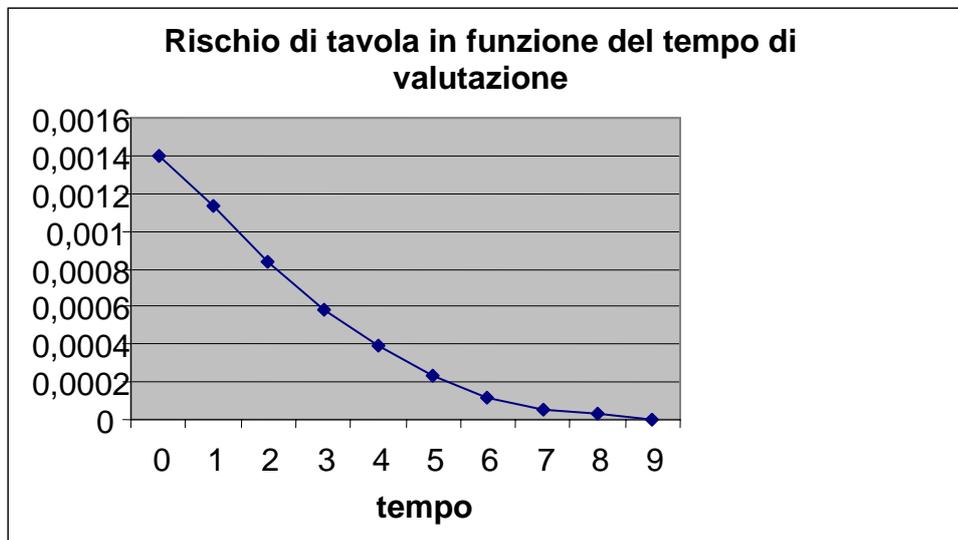
**Tabella 2 – Rischio di tavola sulla riserva di portafoglio**  
*Portafoglio di c mutui assicurati di capitale unitario,  $x=40$ ,  $t=2$ ,  $n=10$*

	$c=1000$	$c=10$
Table risk	8.365594428	0.000836559

I valori che compaiono nella tavola 2 rappresentano, per i due portafogli considerati, misure della variabilità connessa all'aleatorietà nella scelta della tavola impiegata nelle valutazioni, avendo mediato gli effetti delle altre due componenti di rischio (tassi d'interesse e deviazioni accidentali della mortalità).

Il grafico 5 mostra l'andamento del rischio di tavola in funzione del tempo di valutazione nel caso di un portafoglio di  $c=10$  contratti:

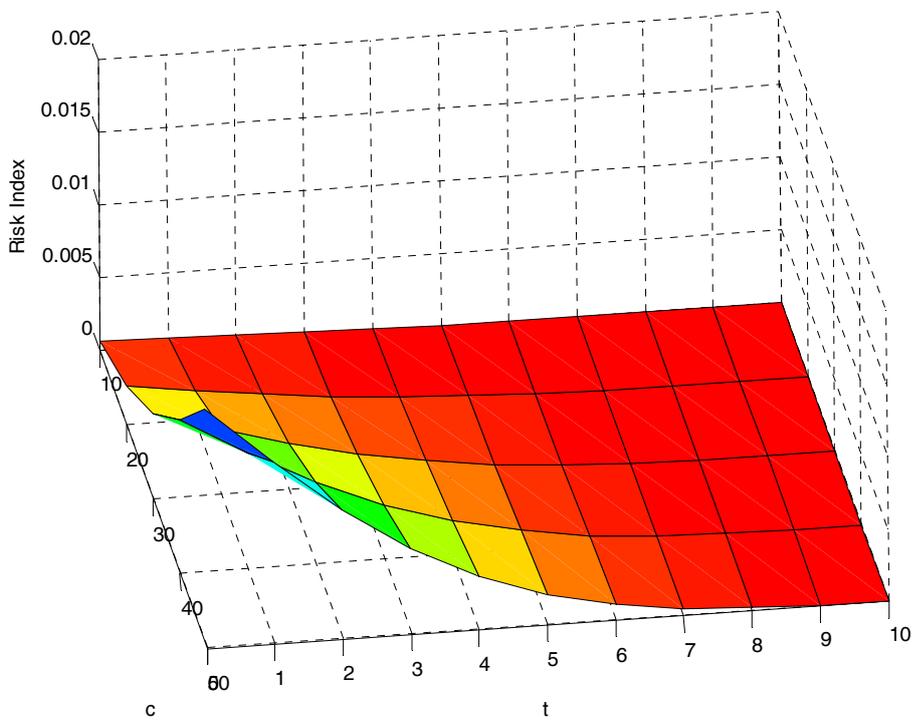
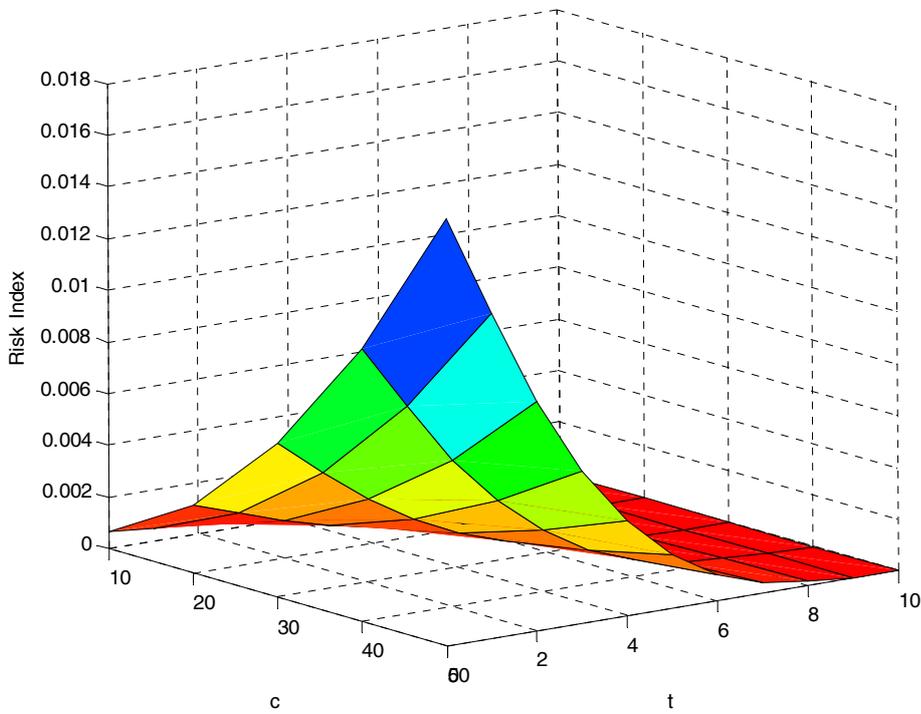
**Grafico 5– Portafoglio di contratti di mutuo assicurato,  $x=40$ ,  $n=10$ ,  $c=10$**



Infine, nel grafico 6 si analizza l'andamento del rischio di tavola in funzione del numero di polizze detenute in portafoglio ( $c=10, \dots, 50$ ), nonché del tempo di valutazione nel caso in cui l'assicurato corrisponda il premio in un'unica soluzione alla stipula del contratto.

Dal grafico 6 si evince che il rischio di tavola aumenta al decrescere del tempo di valutazione  $t$  ed al crescere del numero di polizze in portafoglio.

**Grafico 6** – Il rischio di tavola in un portafoglio di  $c$  contratti ( $c=10, \dots, 60$ ) stipulati su teste assicurate di 40 anni, valutate al tempo  $t$  ( $t=0, \dots, 10$ )



### 4.3 Il rischio di mortalità

Calcoleremo ora il rischio di mortalità in  $t=2$  applicando la formula (13) del capitolo 7, nel caso di un portafoglio di  $c=10$  contratti di mutuo assicurato che prevedono il pagamento del premio in un'unica soluzione. Gli assicurati al momento della stipulazione della polizza hanno 40 anni.

La tabella 3 illustra i valori del rischio di mortalità per i due portafogli presi in esame, nonché richiama a scopo comparativo i valori ottenuti per il rischio di tavola.

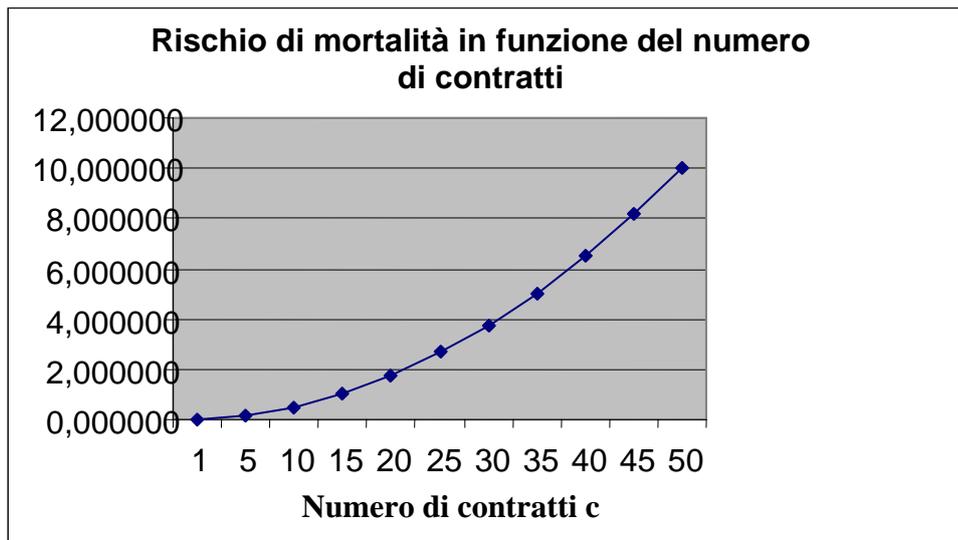
**Tabella 3** – Rischio di tavola e rischio di mortalità sulla riserva di portafoglio  
Portafoglio di  $c$  mutui assicurati di capitale unitario,  $x=40$ ,  $t=2$ ,  $n=10$

	$c=1000$	$c=10$
Rischio di mortalità	3673.089	0.508368264
Rischio di tavola	8.365594428	0.000836559

Dalla tabella 3 si evince quanto sia considerevole il peso del rischio di mortalità confrontato con il corrispondente rischio di tavola.

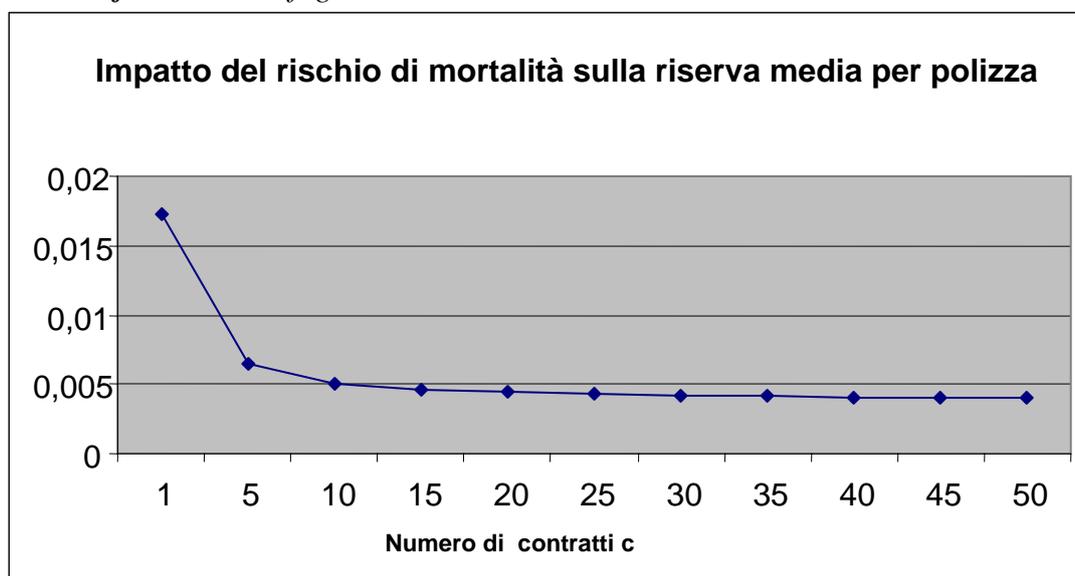
Il grafico 7 illustra inoltre l'andamento del rischio di mortalità sul valore di portafoglio in funzione del numero dei contratti emessi al tempo  $t = 0$  e quantificati in  $t = 2$ .

**Grafico 7** - Portafoglio di contratti di mutuo assicurato,  $x=40$ ,  $n=10$ ,  $t=2$



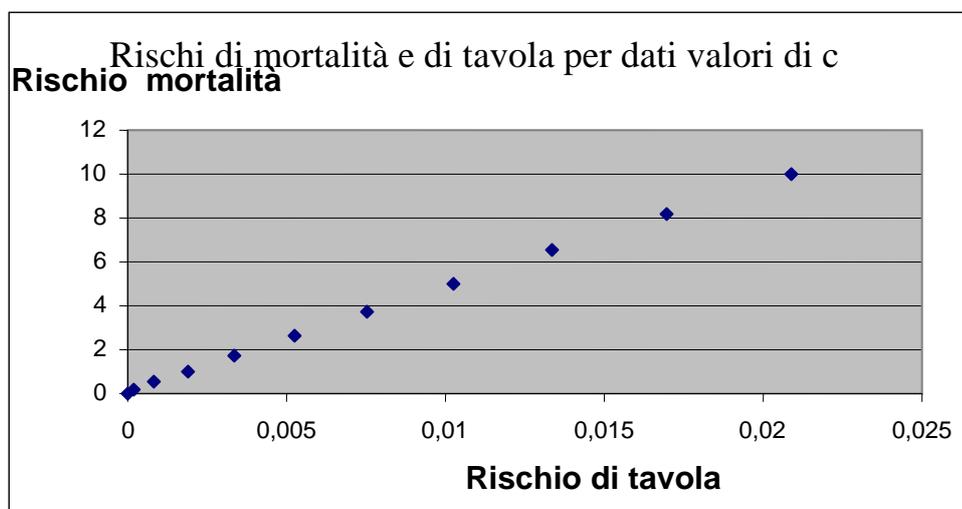
Nel grafico 8 è rappresentato il rischio di mortalità di una riserva matematica media per polizza in funzione del numero di contratti detenuti in portafoglio. In esso si evince la presenza dell'effetto *pooling*.

**Grafico 8 - Portafoglio di contratti di mutuo assicurato,  $x=40, n=10, t=2$**



Infine, nel grafico 9 ciascun punto dello *scatter plot* individua contestualmente, per un portafoglio di  $c=1,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50$  contratti di mutuo assicurato valutati in  $t = 2$ , il rischio di mortalità ed il rischio di tavola.

**Grafico 9 - Portafoglio di contratti di mutuo assicurato,  $x=40, n=10, t=2$   
 $c=1,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50$ .**



### *Considerazioni conclusive*

Nella trattazione si è inteso sviluppare degli indicatori di rischiosità appropriati alla quantificazione del rischio connesso all'aleatorietà della scelta della tavola di mortalità proiettata in ordine a due tipi diversi di portafogli. Il primo composto da rendite pensionistiche, caratterizzate da un significativo rischio finanziario, il secondo da mutui assicurati, in cui il rischio finanziario risulta piuttosto riposto.

L'indicatore di rischiosità è costruito, nel caso del primo tipo di portafoglio, intorno alla posizione finanziaria dell'assicuratore stimata a ciascuna epoca contrattuale. Nel caso del secondo tipo di portafoglio, intorno alla solvibilità dello stesso (riserva accantonata) stimata alla fine di ogni esercizio compreso nell'arco di periodo in cui è in vigore il contratto. In ciascuno dei casi, l'indicatore si fonda sullo stesso strumento di misura: il calcolo delle aspettative condizionate.

Assumendo differenti scenari per la mortalità, le evidenze empiriche mostrano che, nel caso del portafoglio di rendite pensionistiche, l'andamento dell'indice di rischio risente fortemente della capacità del modello di essere coerente con le ipotesi iniziali. L'ipotesi di omogeneità nella scelta della tavola di mortalità proiettata risulta pagante in termini di minore volatilità circa l'ammontare del fondo di portafoglio anno per anno.

Nel caso di un portafoglio di mutui assicurati, l'andamento del *fair value* della riserva risulta sensibilmente influenzato dalla scelta della tavola di mortalità al punto da determinare anche valori negativi. Da quanto detto finora risulta evidente l'importanza di una corretta descrizione dello scenario demografico, a prescindere dallo schema contrattuale presente in portafoglio.

### ***Appendice***

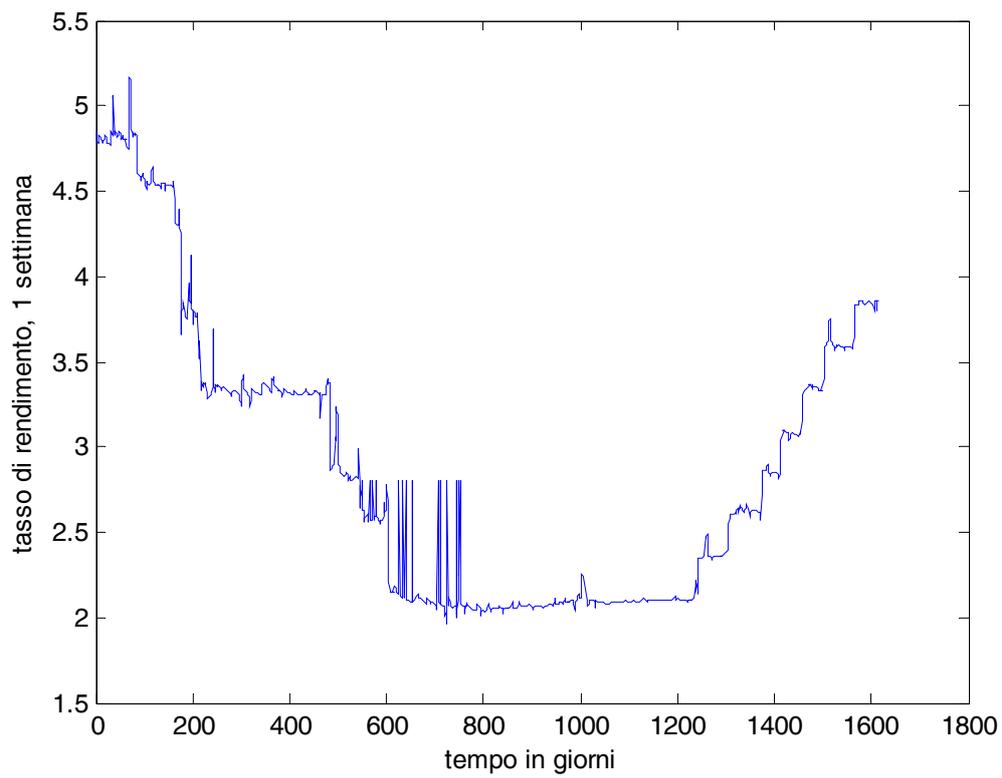
N.B. Le stime dei parametri dei modelli Vasicek e *CIR* riportate nel testo sono state ottenute sulla base del panel dati costituito da tassi LIBOR- EURIRS. Le medesime stime sono state condotte ulteriormente sul panel dati EURIBOR- EURIRS ed hanno portato ad andamenti grafici per la struttura per scadenza dei tassi pressoché identici a quelli illustrati nel testo.

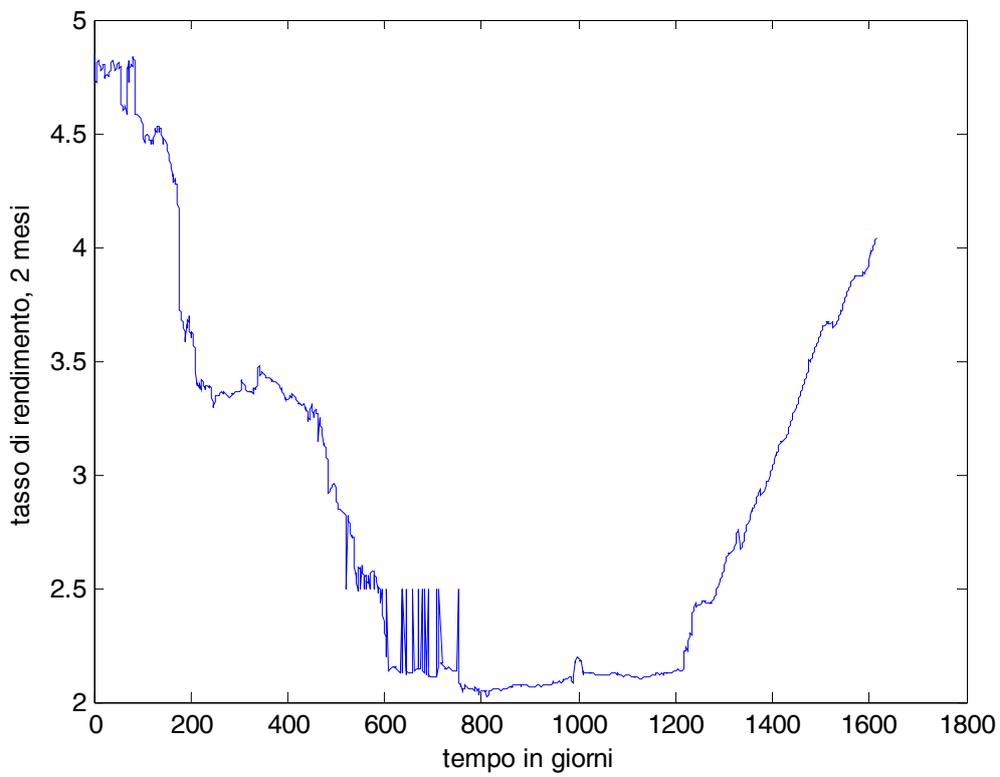
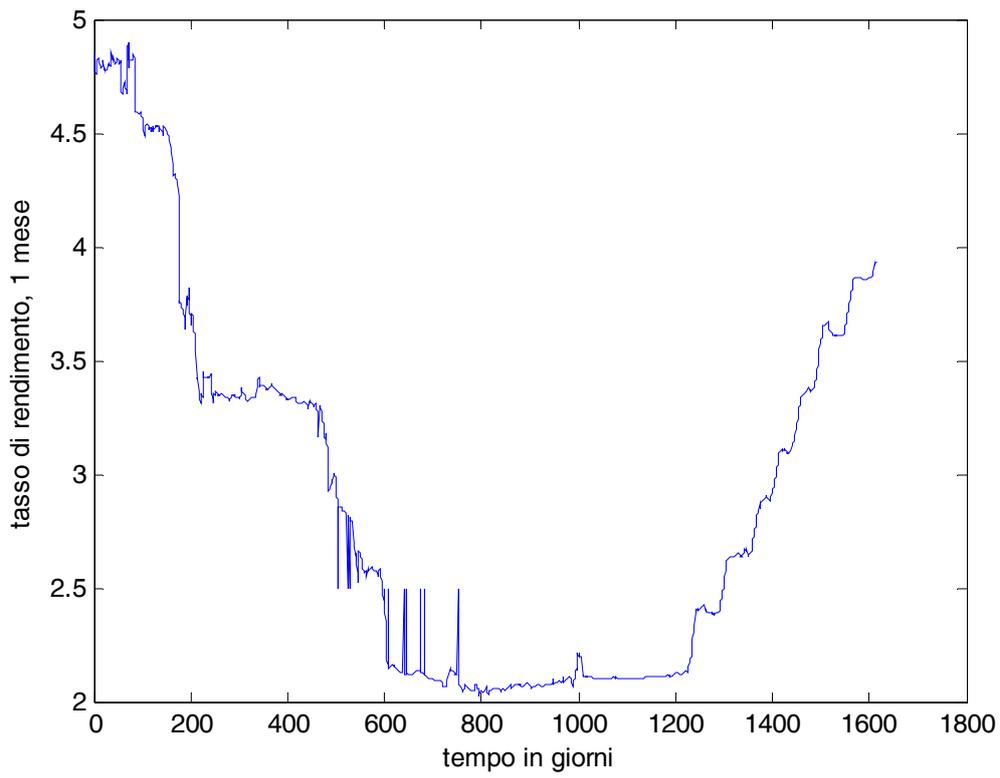
Si richiamano di seguito le statistiche calcolate su i 2 panel dati.

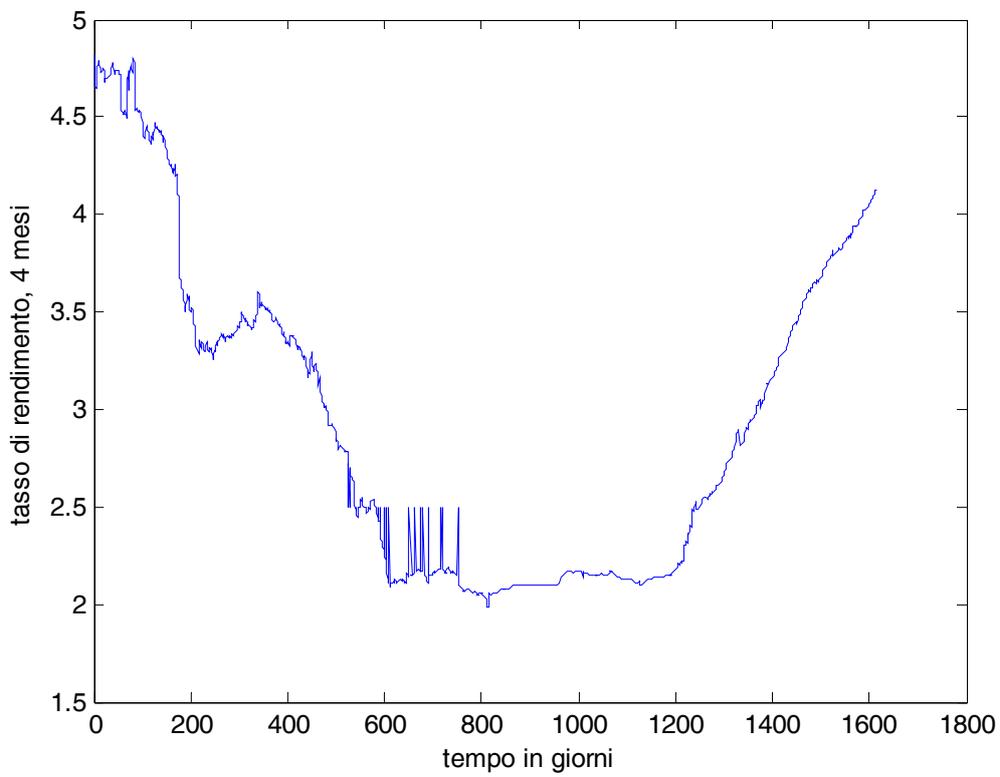
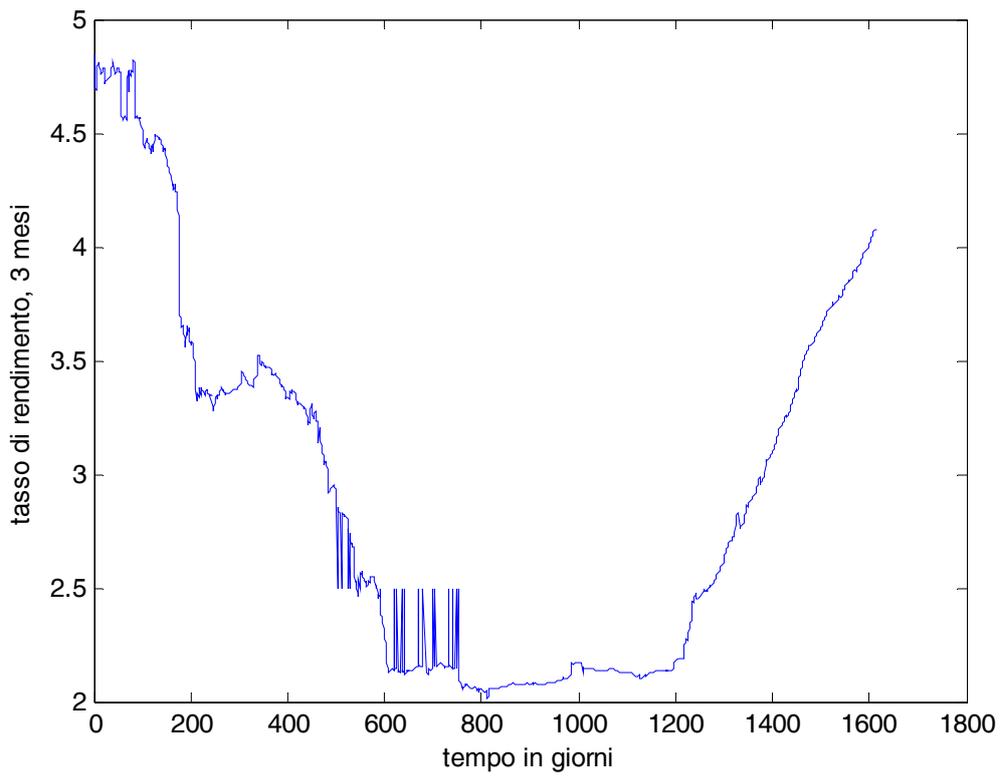
**Statistiche su panel Euribor – Eurirs (2001-2007)**

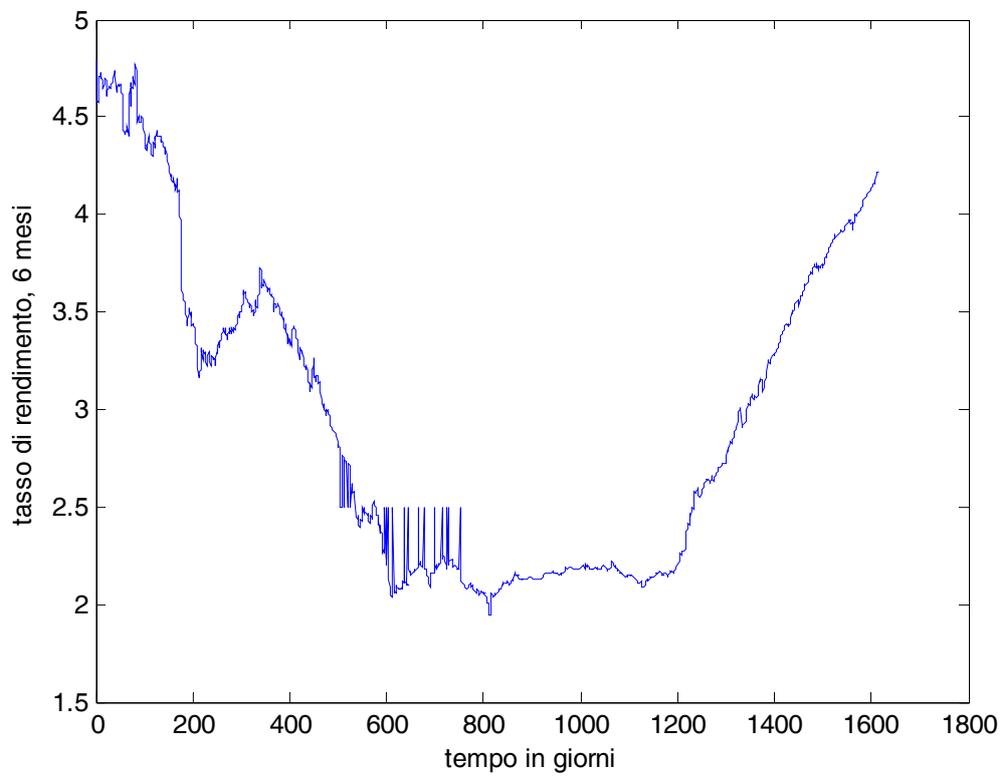
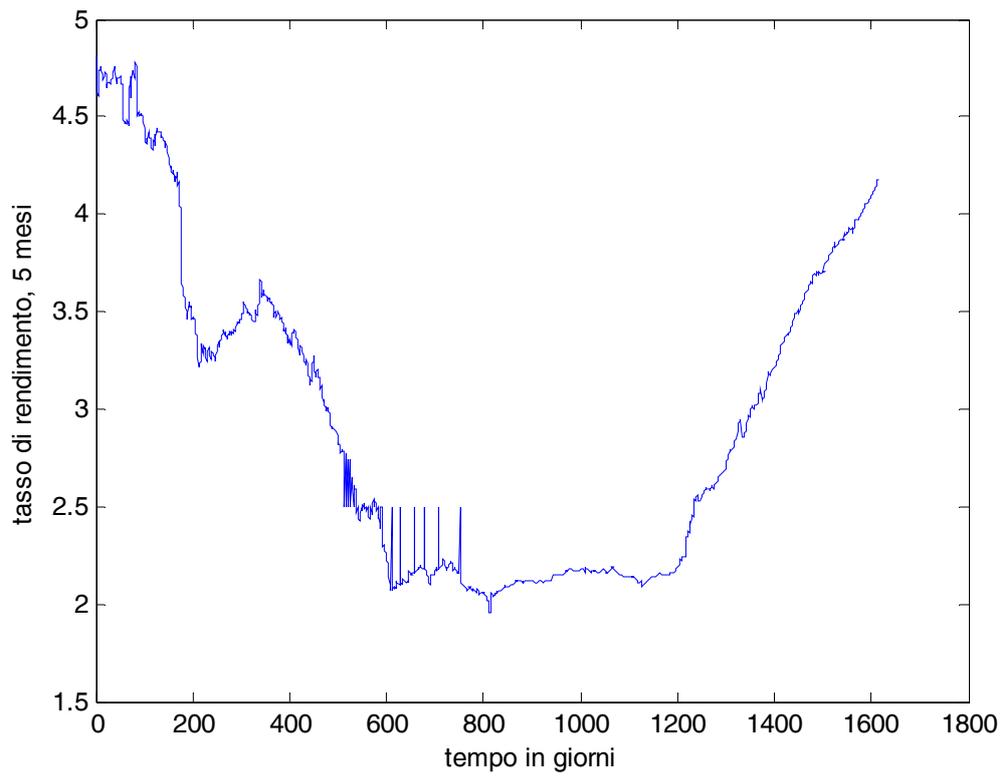
<b>Scadenze</b>	<b>Media (tasso di rendimento)</b>	<b>Min (tasso di rendimento)</b>	<b>Max (tasso di rendimento)</b>	<b>Deviazione standard (tasso di rendimento)</b>
1 settimana	2.8988	1.9610	5.1710	0.8497
1 mese	2.9030	2.0180	4.8990	0.8412
2 mesi	2.9184	2.0230	4.8480	0.8333
3 mesi	2.9307	2.0160	4.8440	0.8293
4 mesi	2.9407	1.9850	4.8240	0.8224
5 mesi	2.9490	1.9570	4.8070	0.8184
6 mesi	2.9619	1.9410	4.7880	0.8139
7 mesi	2.9742	1.9300	4.7640	0.8110
8 mesi	2.9860	0.0020	4.7490	0.8125
9 mesi	3.0002	1.9190	4.7450	0.8098
10 mesi	3.0156	0.0020	4.7410	0.8108
11 mesi	3.0337	1.9220	4.7350	0.8068
12 mesi	3.0504	1.9290	4.7290	0.8068
2 anni	3.3029	2.0030	4.8040	0.7555
3 anni	3.5026	2.2230	4.8870	0.7090
4 anni	3.6746	2.4830	4.9810	0.6757
5 anni	3.8227	2.6240	5.1150	0.6574
6 anni	3.9541	2.7430	5.2240	0.6490
7 anni	4.0706	2.8520	5.3160	0.6456
8 anni	4.1708	2.9490	5.4130	0.6439
9 anni	4.2565	3.0000	5.4980	0.6417
10 anni	4.3295	3.0000	5.5680	0.6390

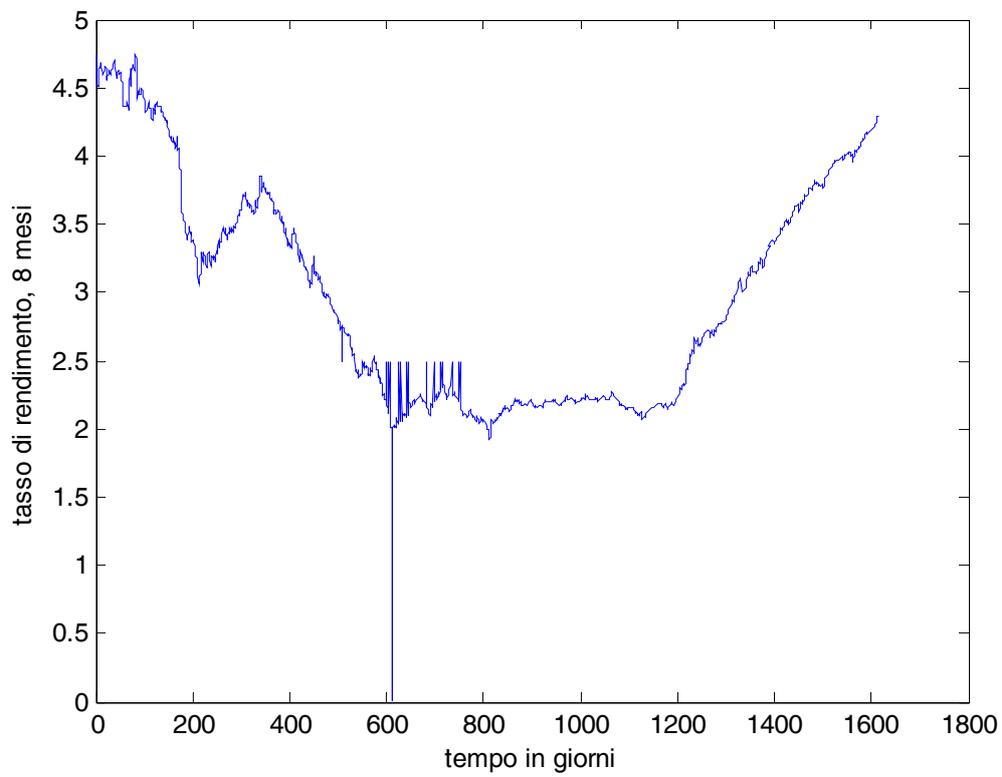
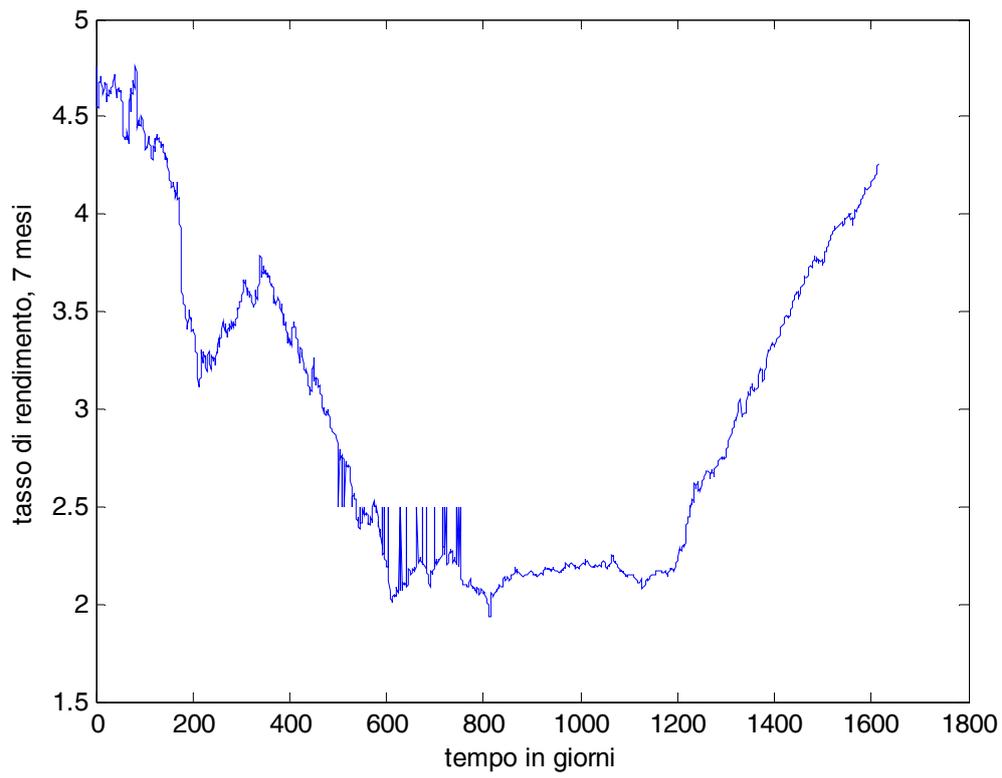
12 anni	4.4503	3.0000	5.6950	0.6399
15 anni	4.5843	3.0000	5.8420	0.6458
20 anni	4.7143	3.0000	5.9780	0.6515
25 anni	4.7664	3.0000	6.0420	0.6518
30 anni	4.7708	3.0000	6.0480	0.6523

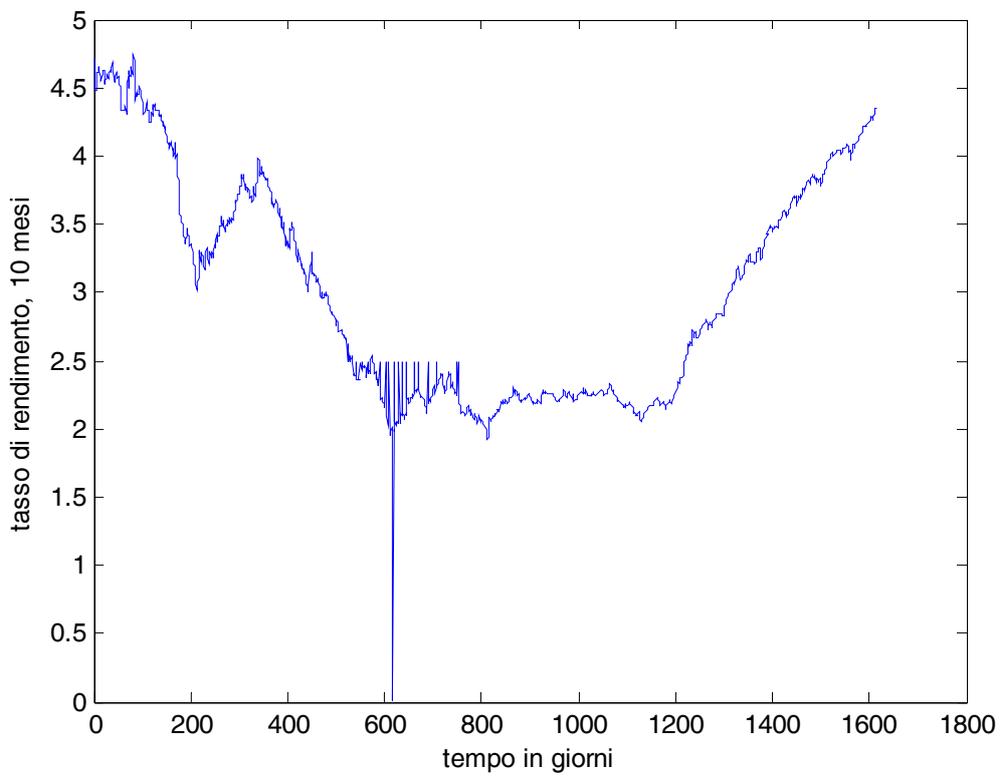
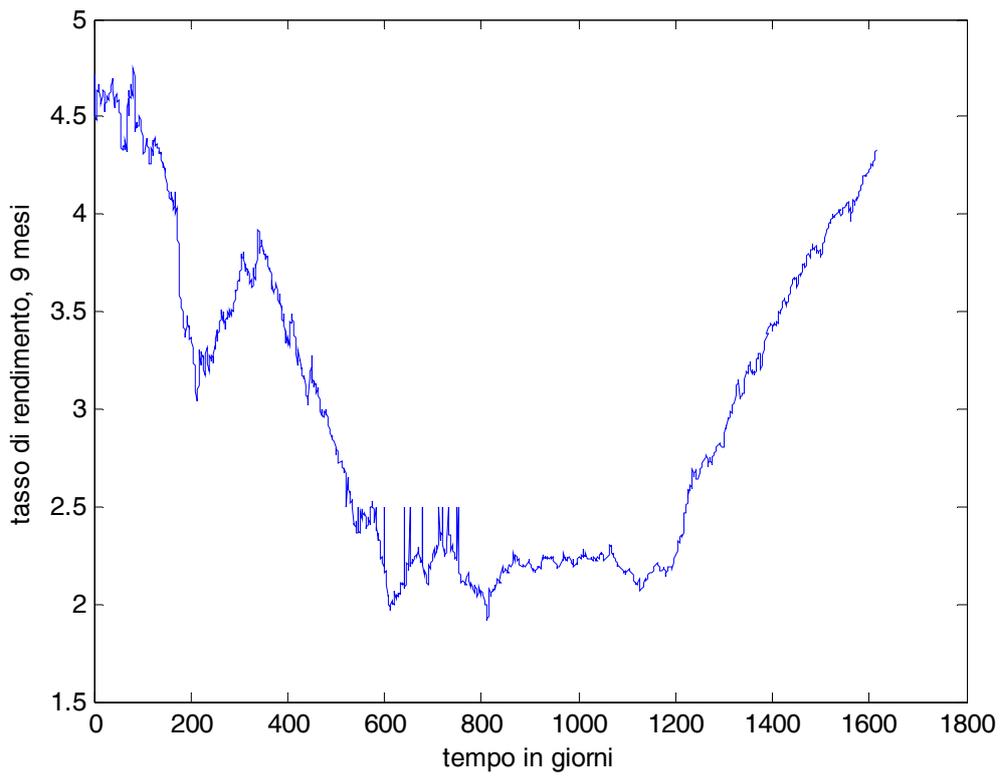


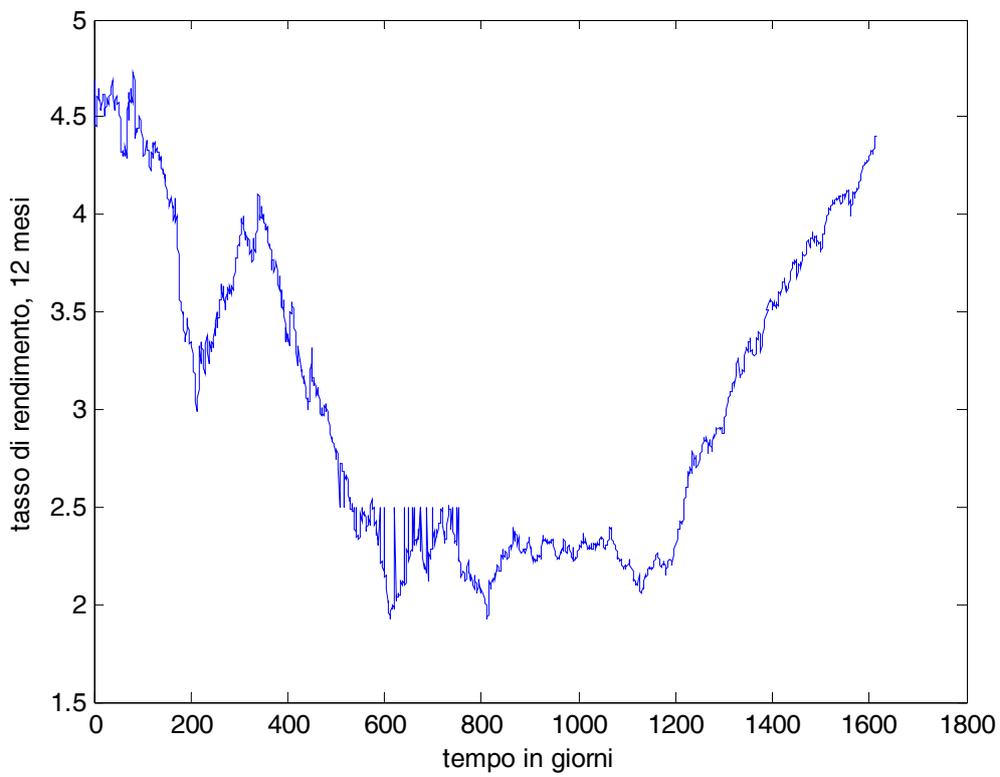
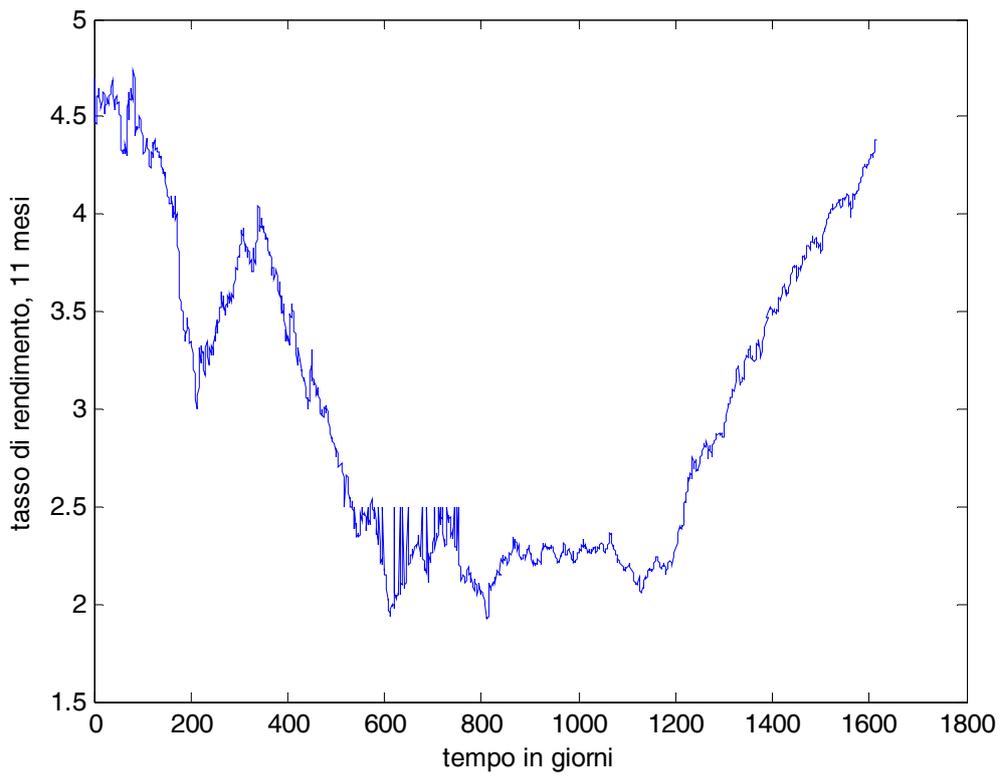


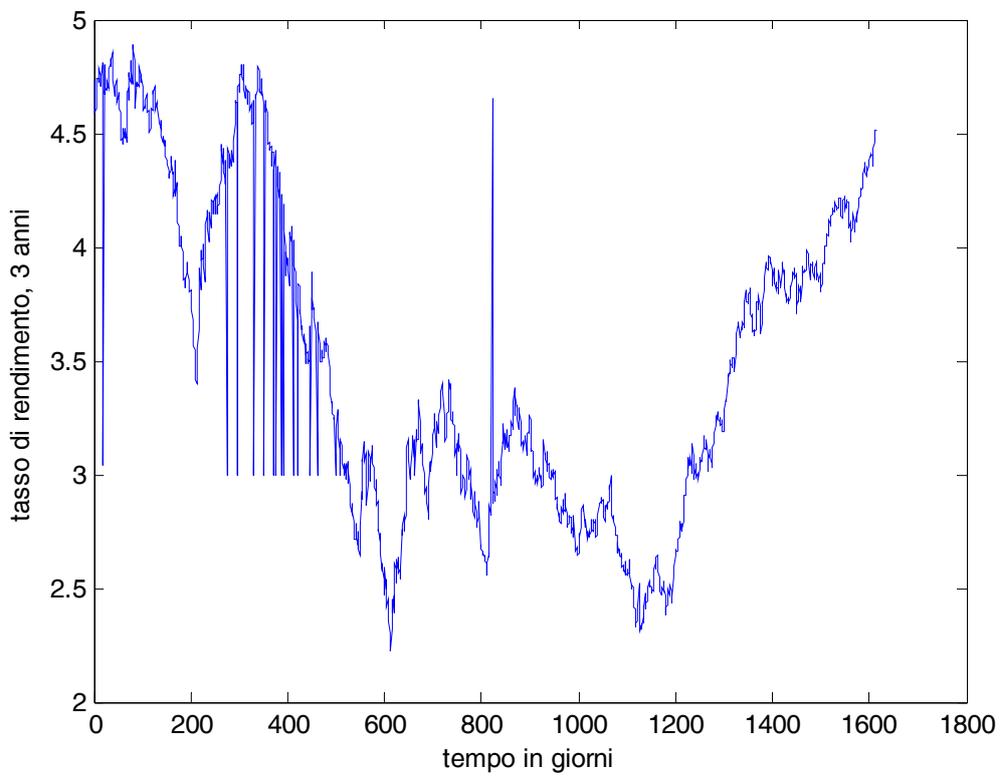
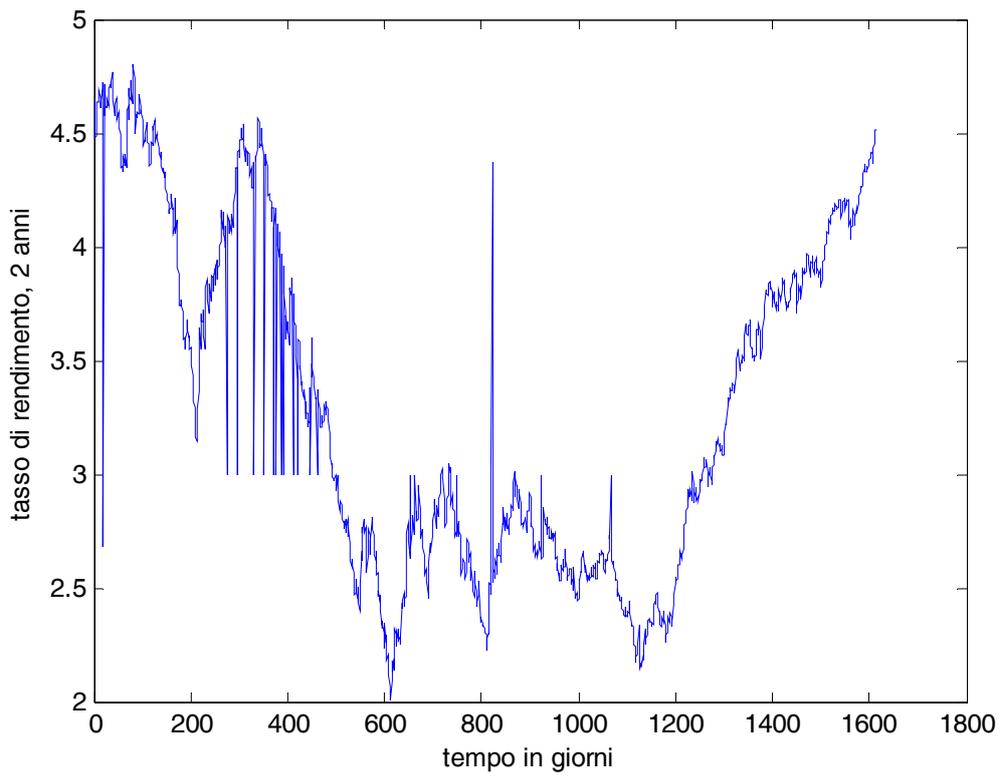


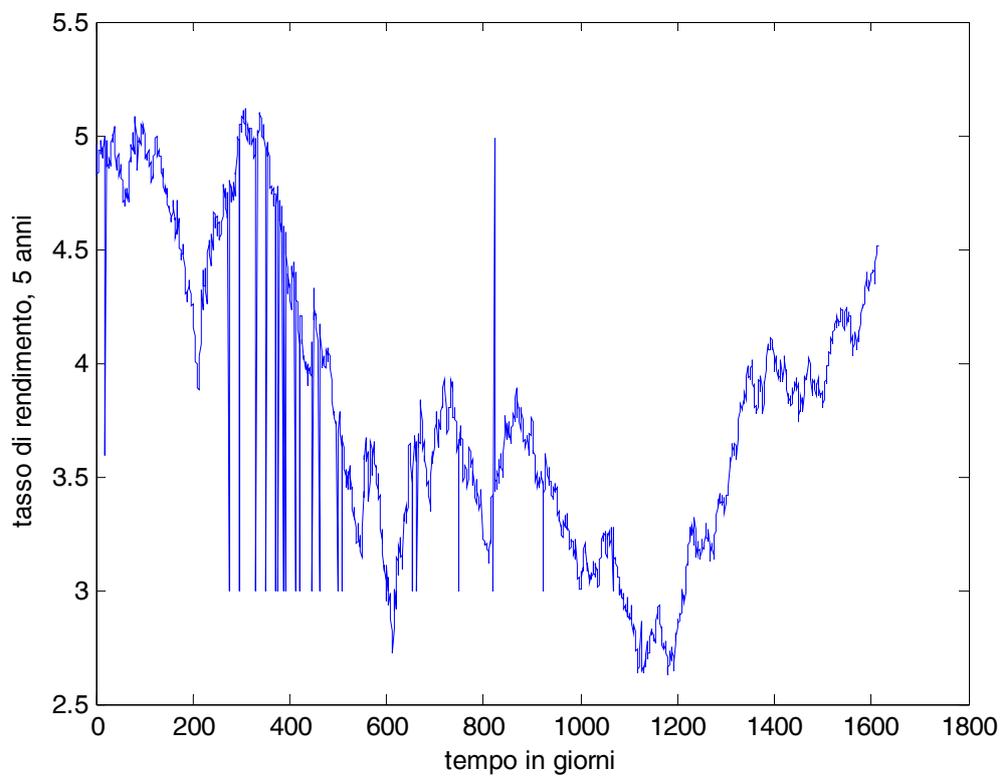
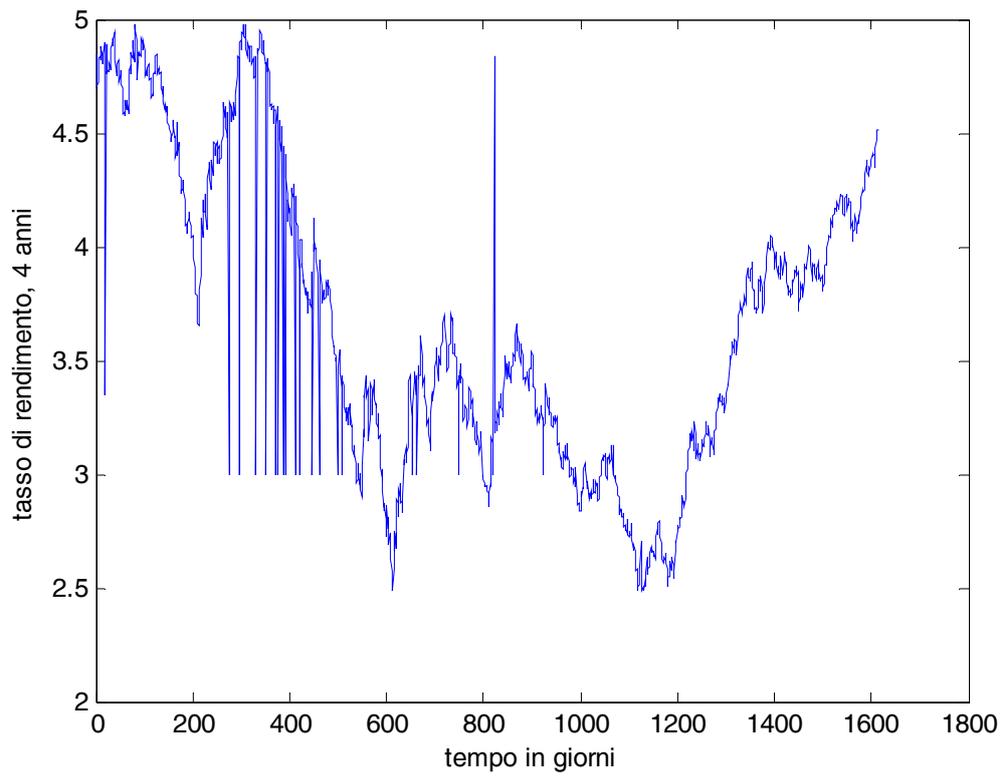


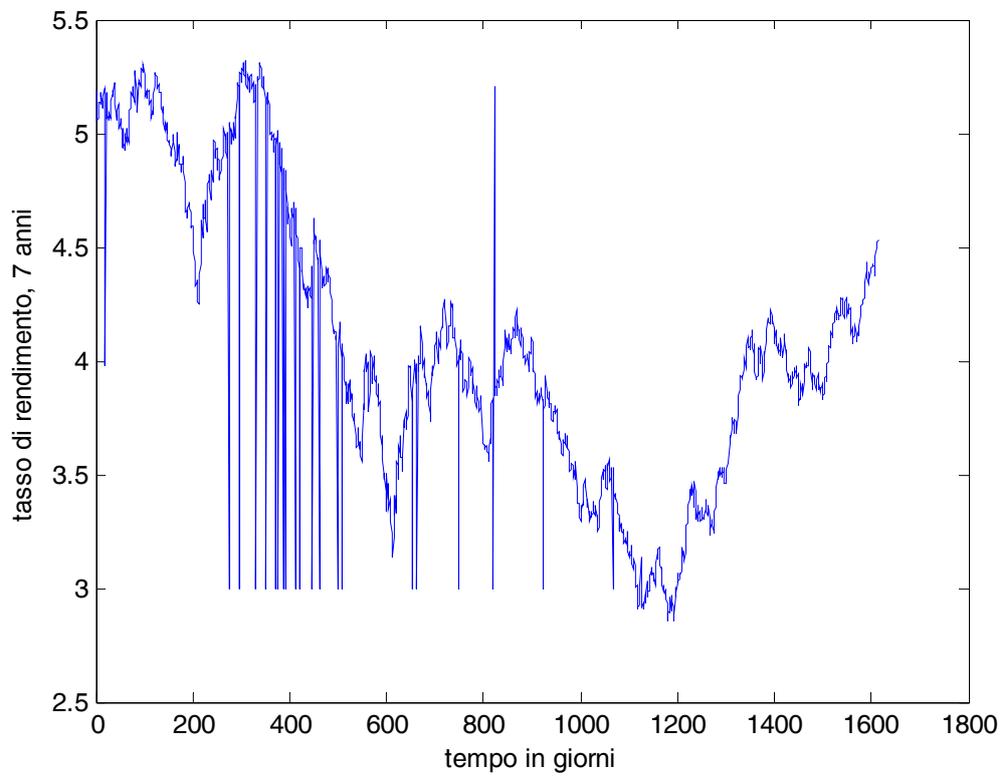
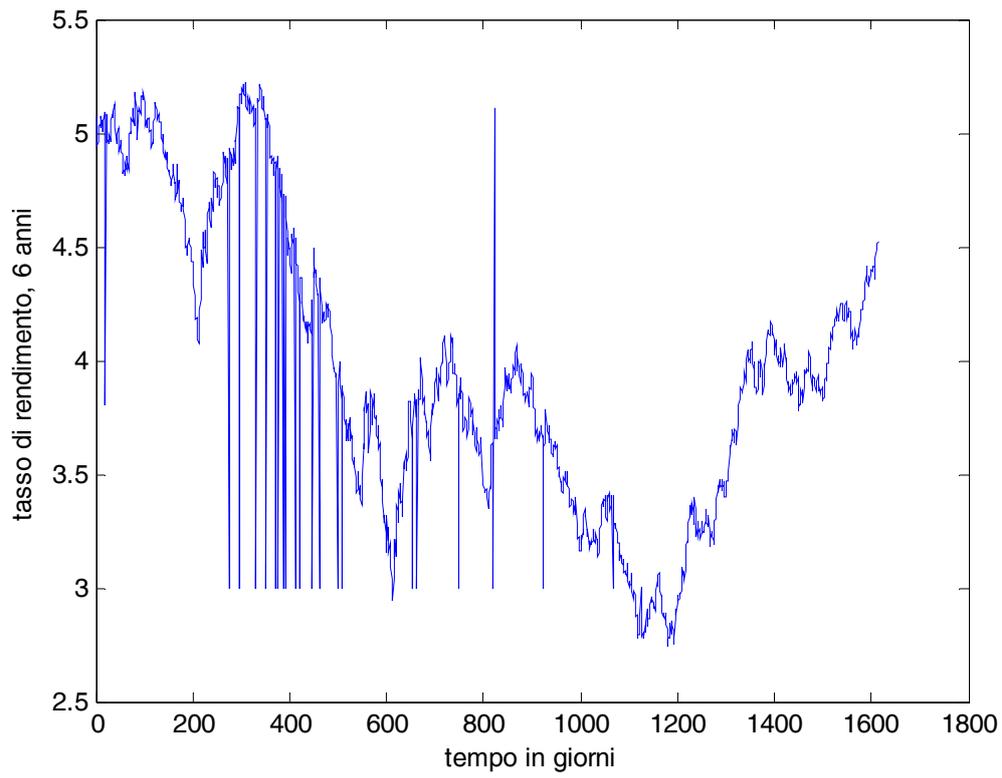


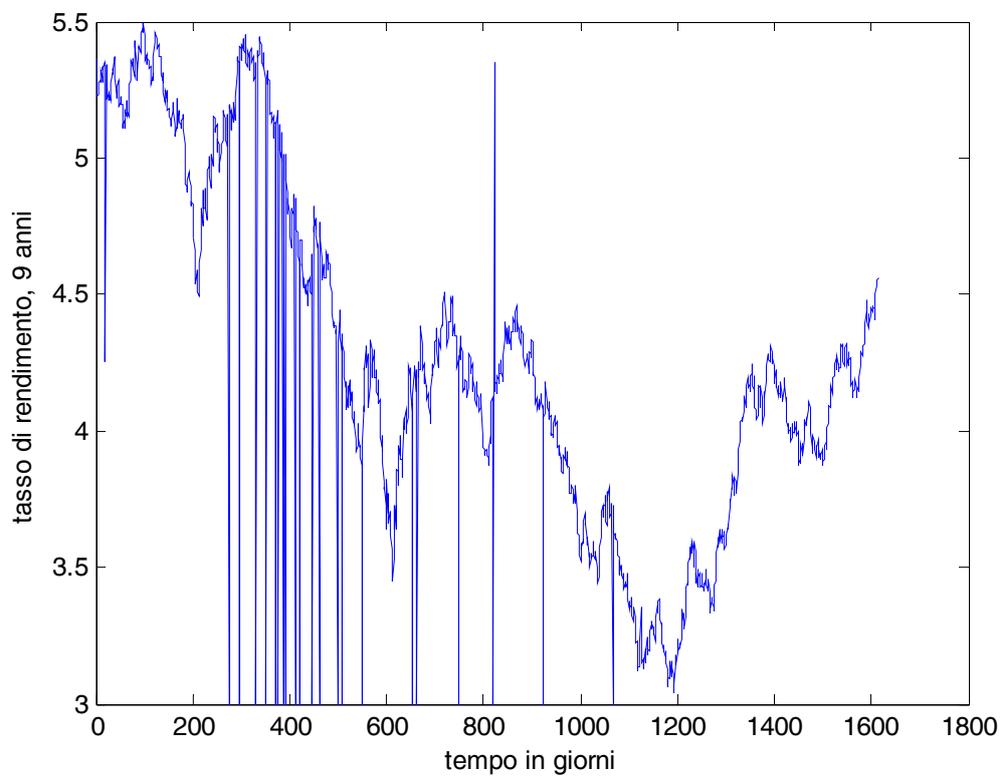
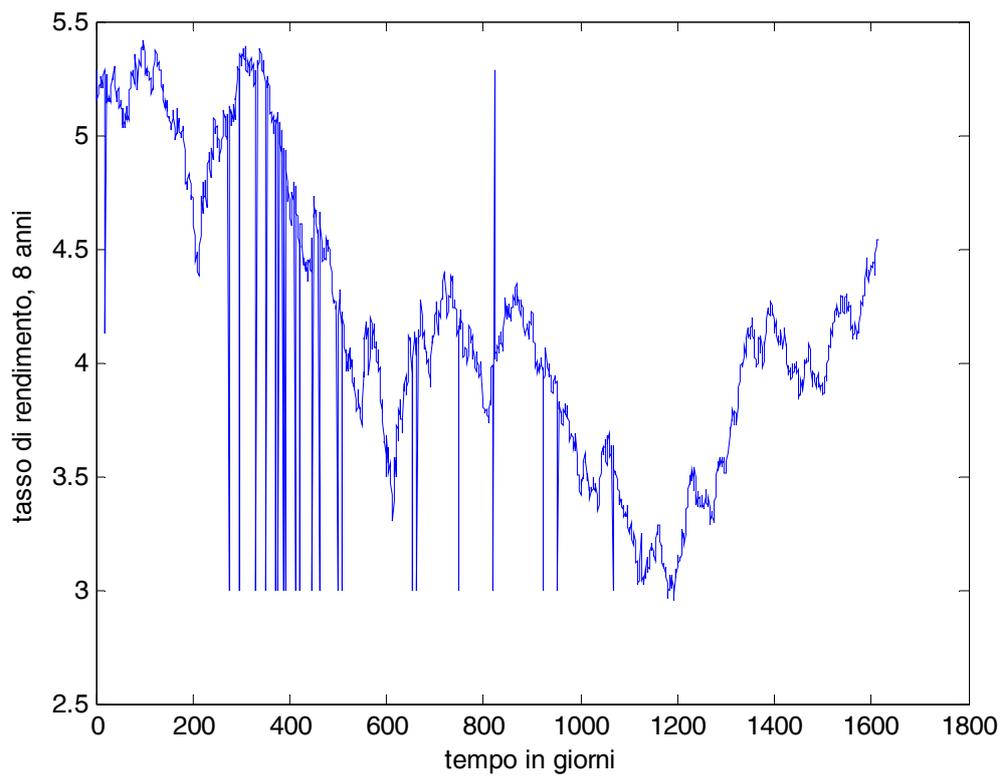


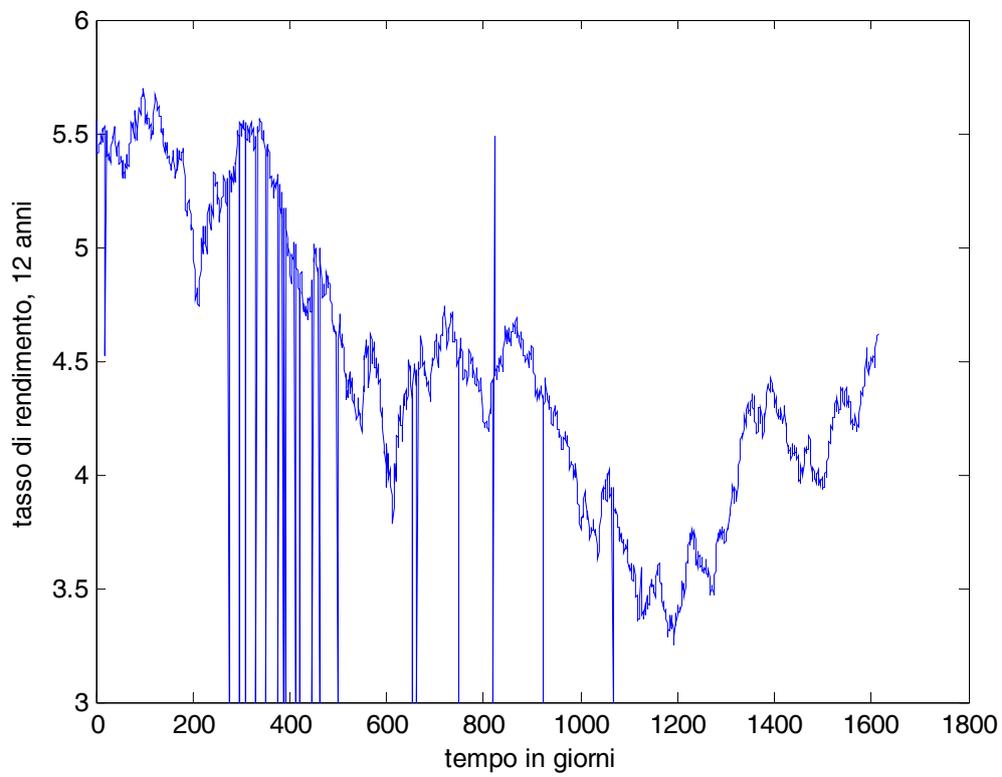
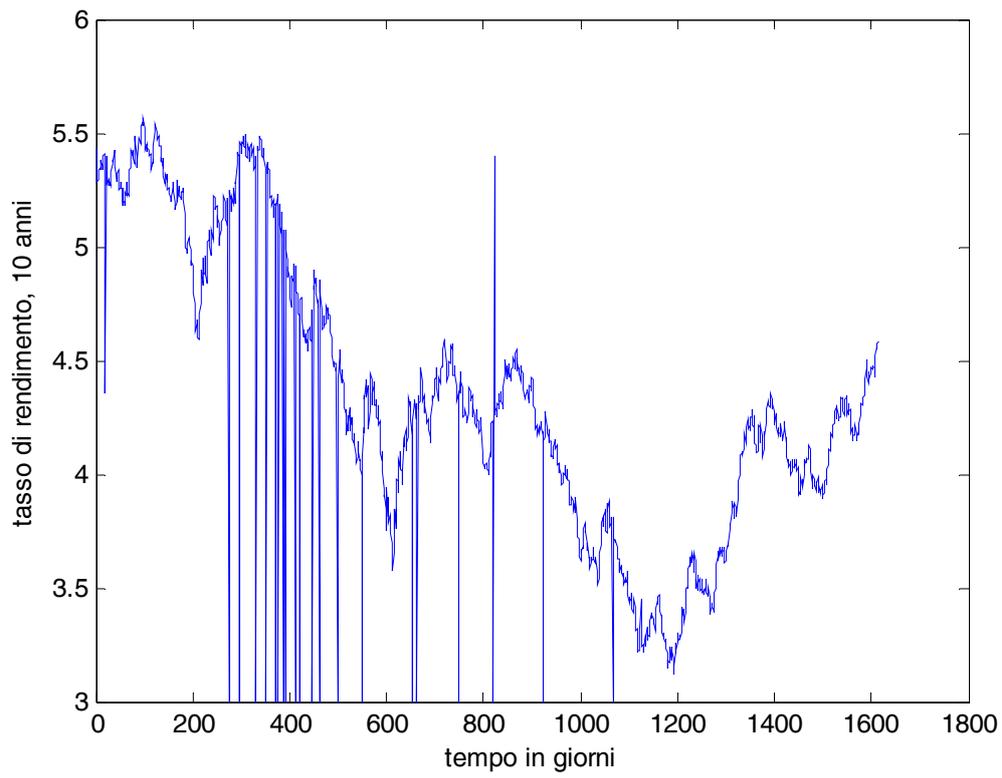


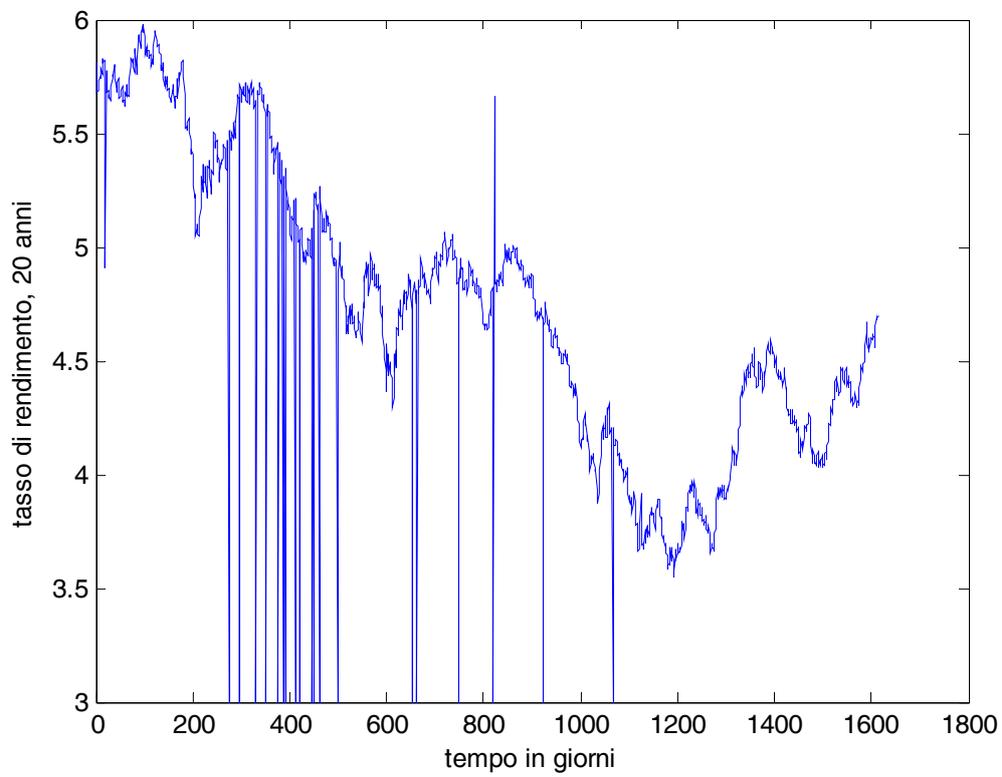
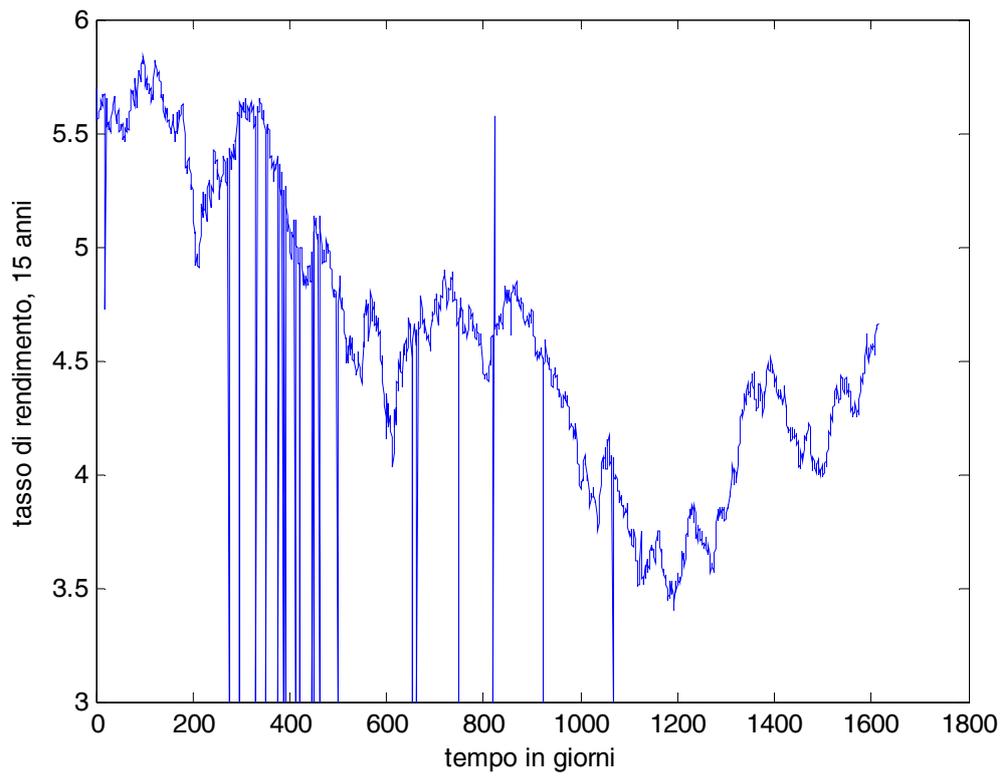


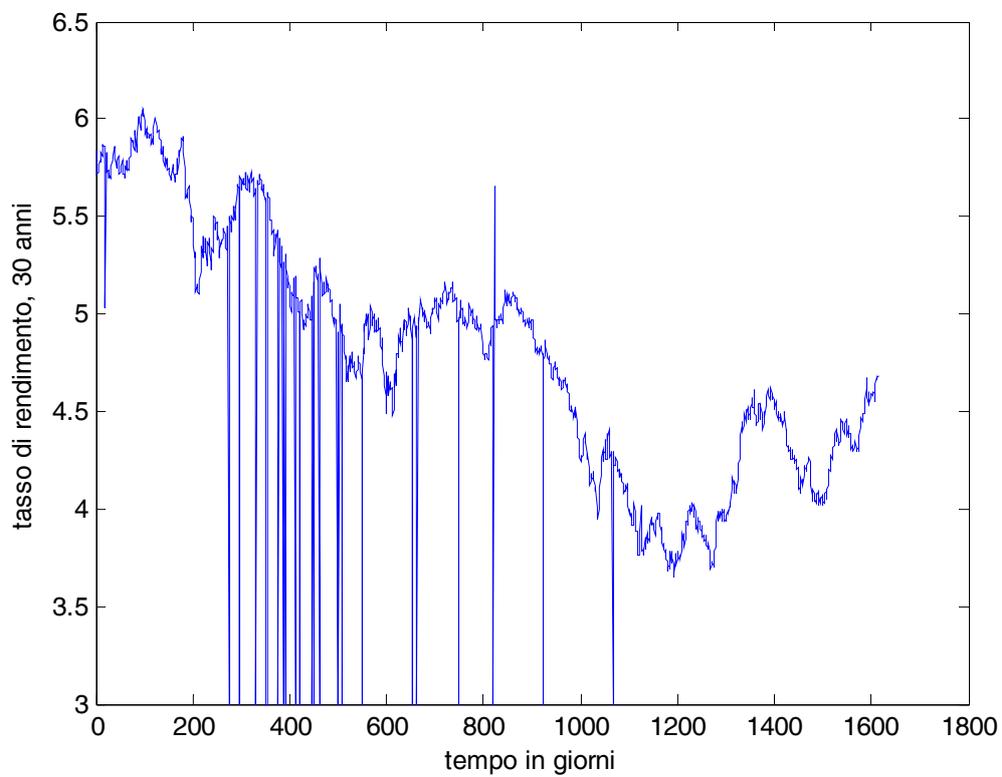
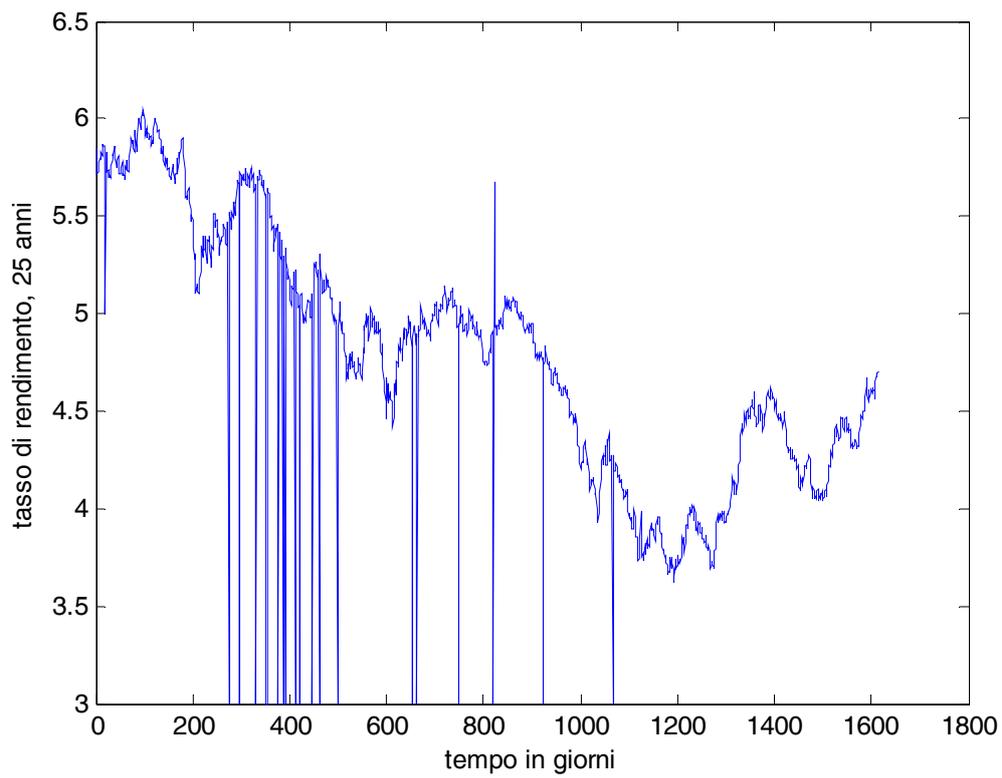






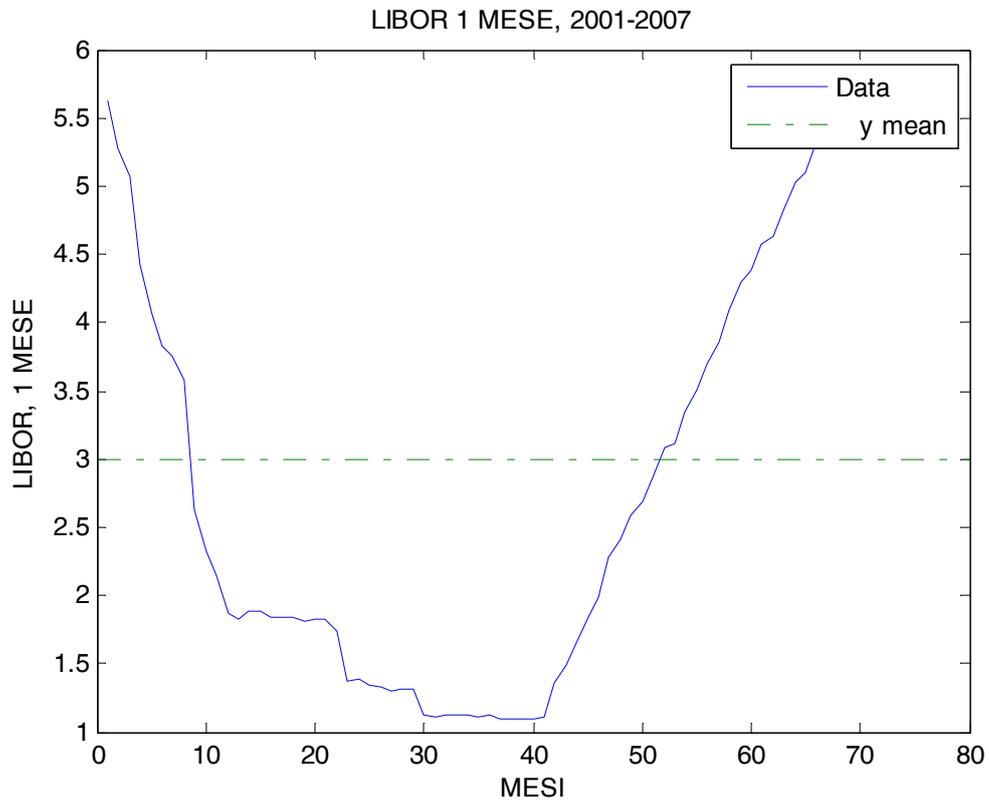






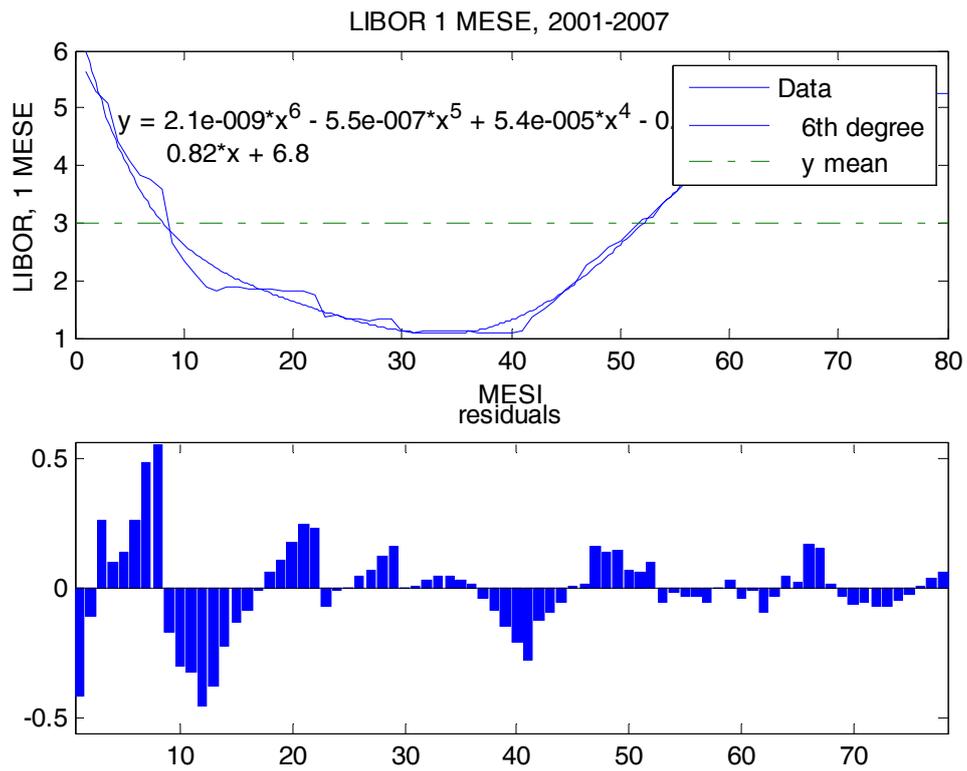
## Statistiche su dataset Libor – Eurirs (2001-2007)

### LIBOR A 1 MESE, 2001-2007

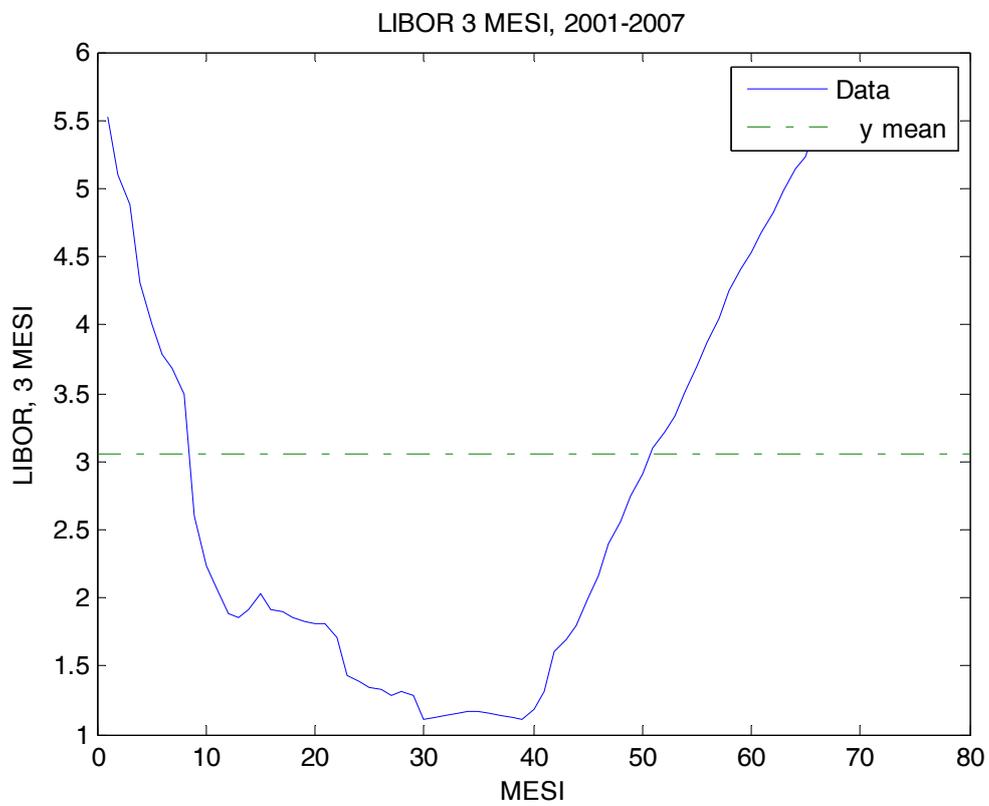


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
1,091	5,622	2,996	2,503	1,628	4,531

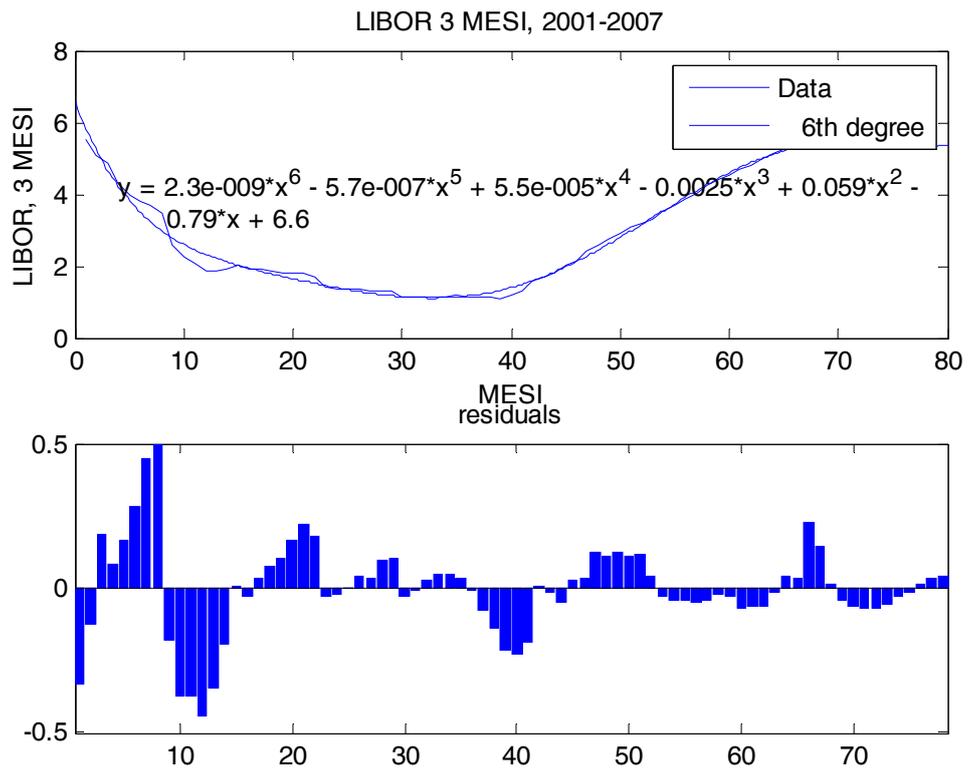


## LIBOR A 3 MESI, 2001-2007

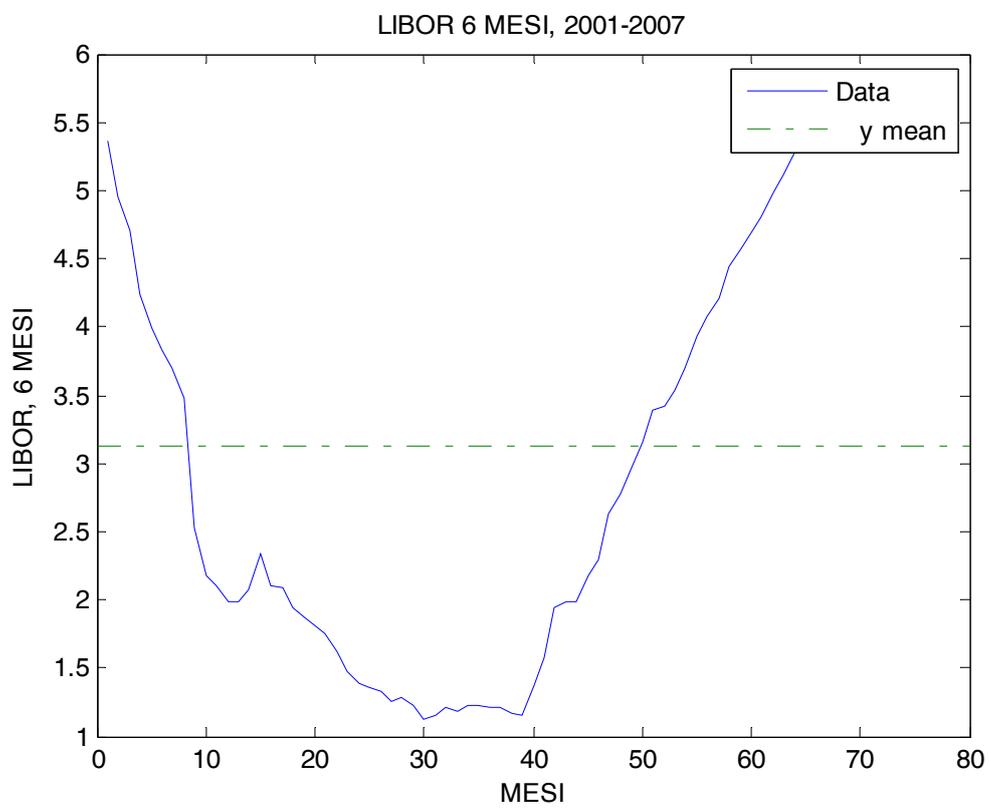


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
1,111	5,518	3,053	2,577	1,628	4,407

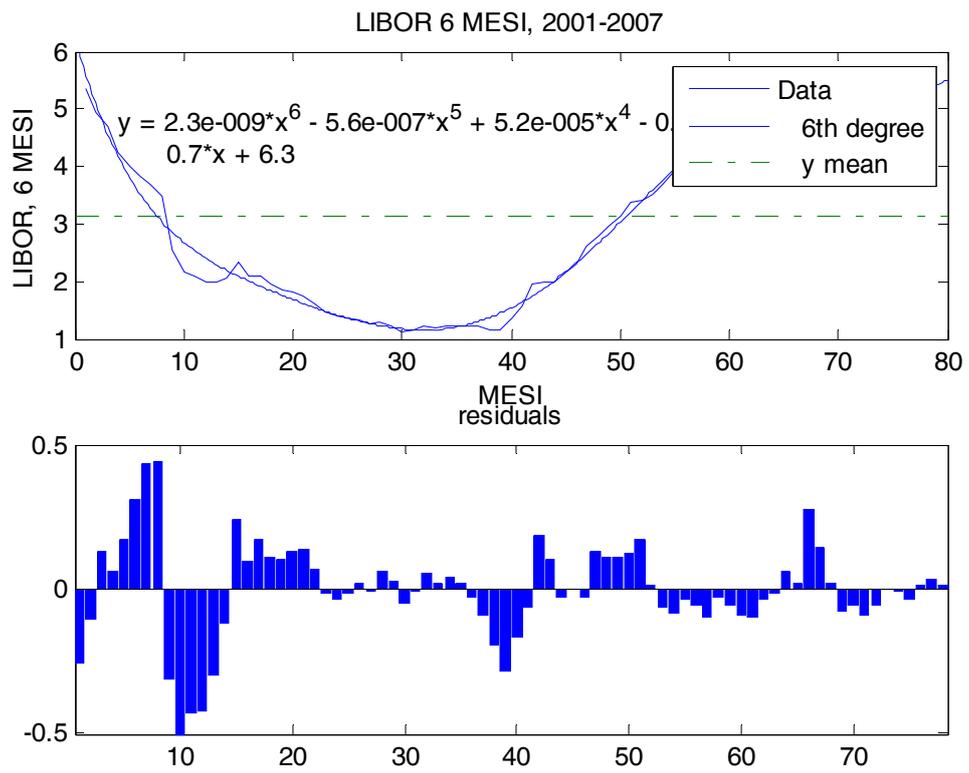


## LIBOR A 6 MESI, 2001-2007

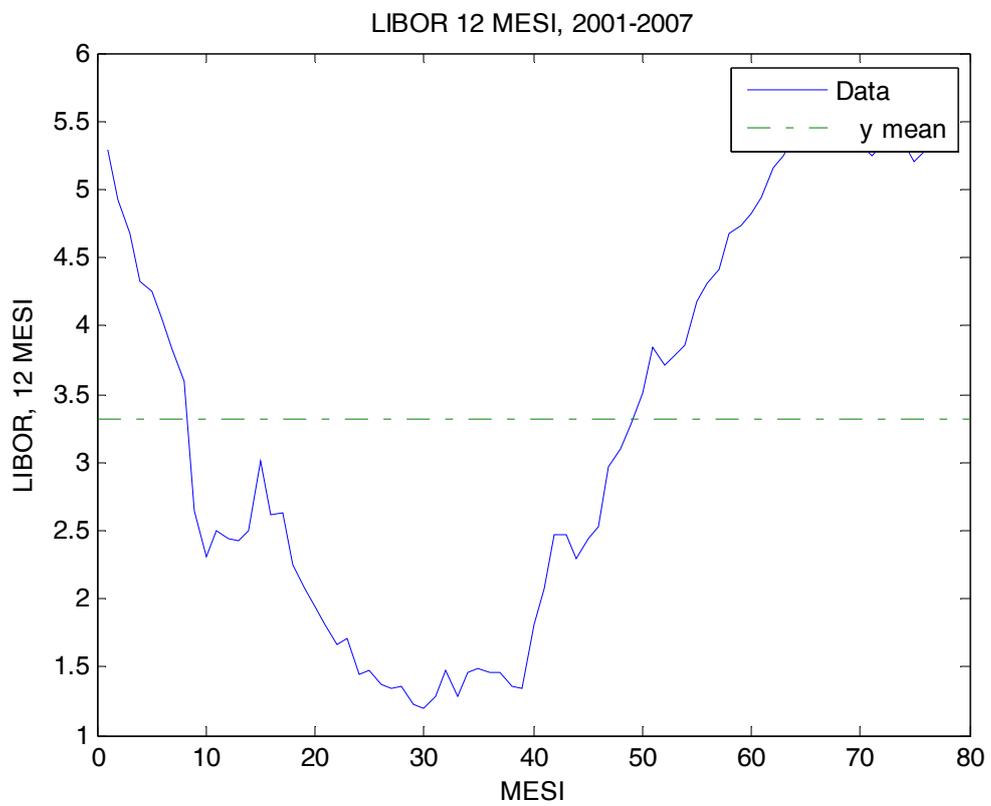


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
1,124	5,638	3,134	2,7	1,613	4,514

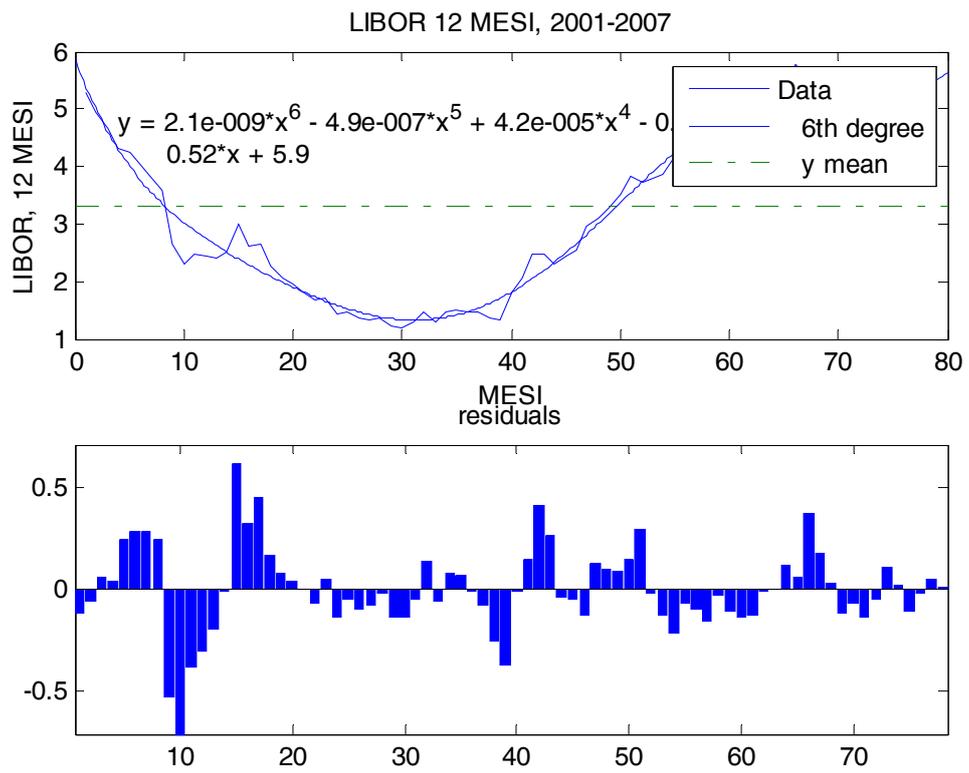


## LIBOR 12 MESI, 2001-2007

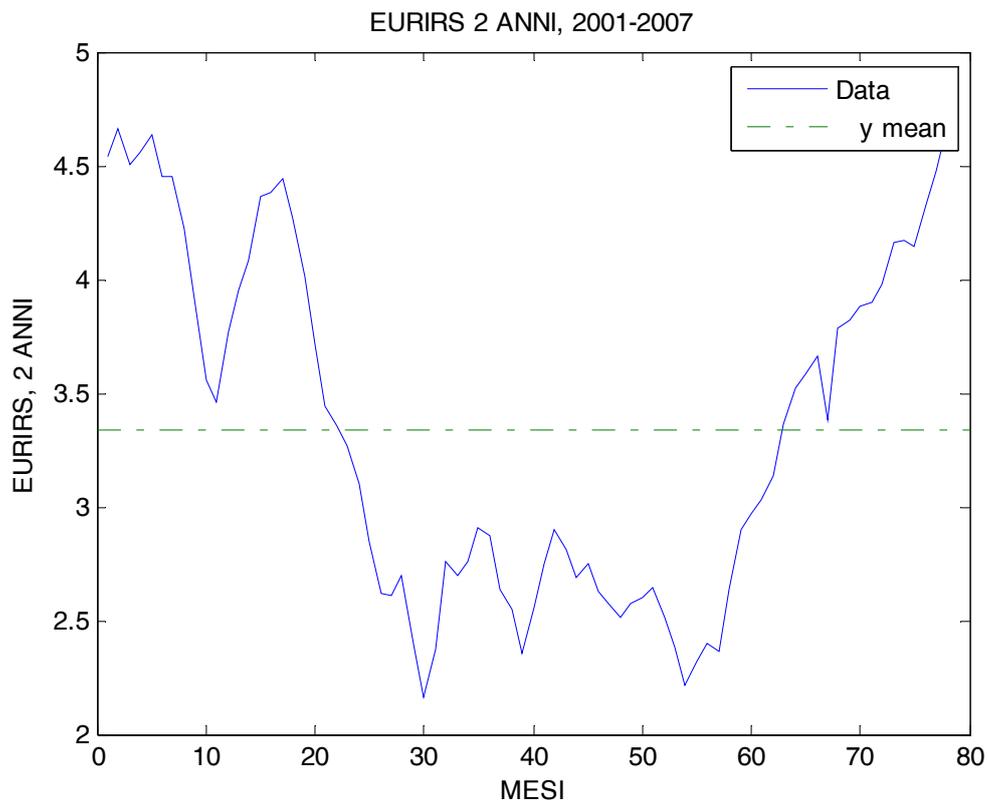


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
1,201	5,766	3,32	3,053	1,536	4,565

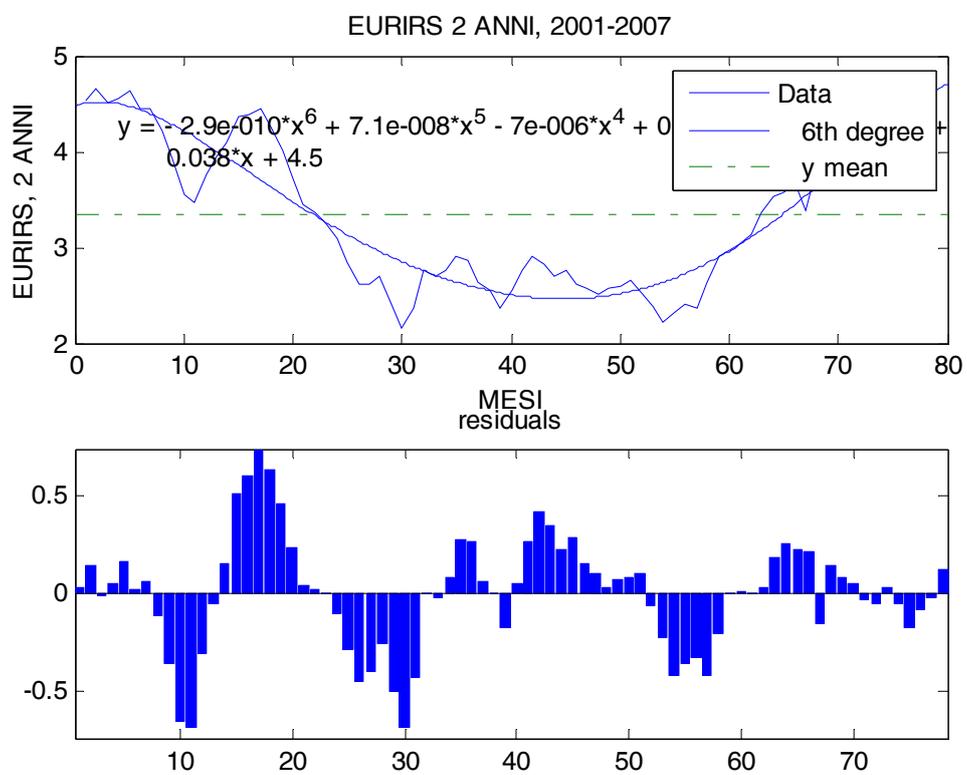


## EURIRS 2 ANNI, 2001-2007

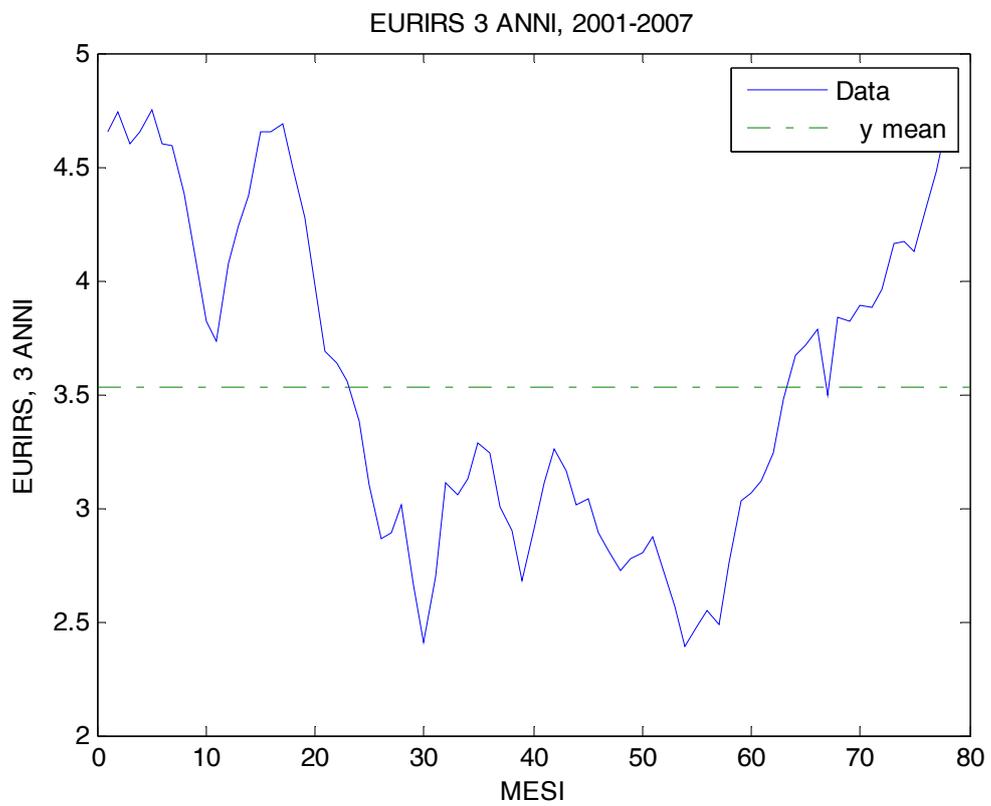


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
2,159	4,694	3,334	3,2	0,7721	2,535

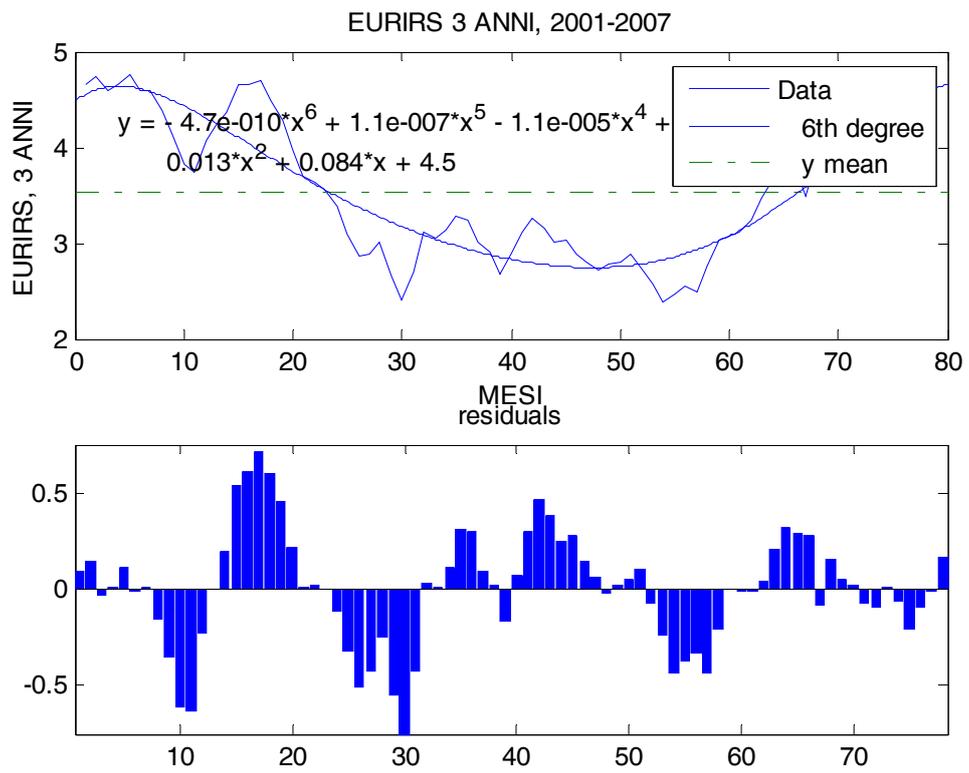


## EURIRS A 3 ANNI, 2001-2007

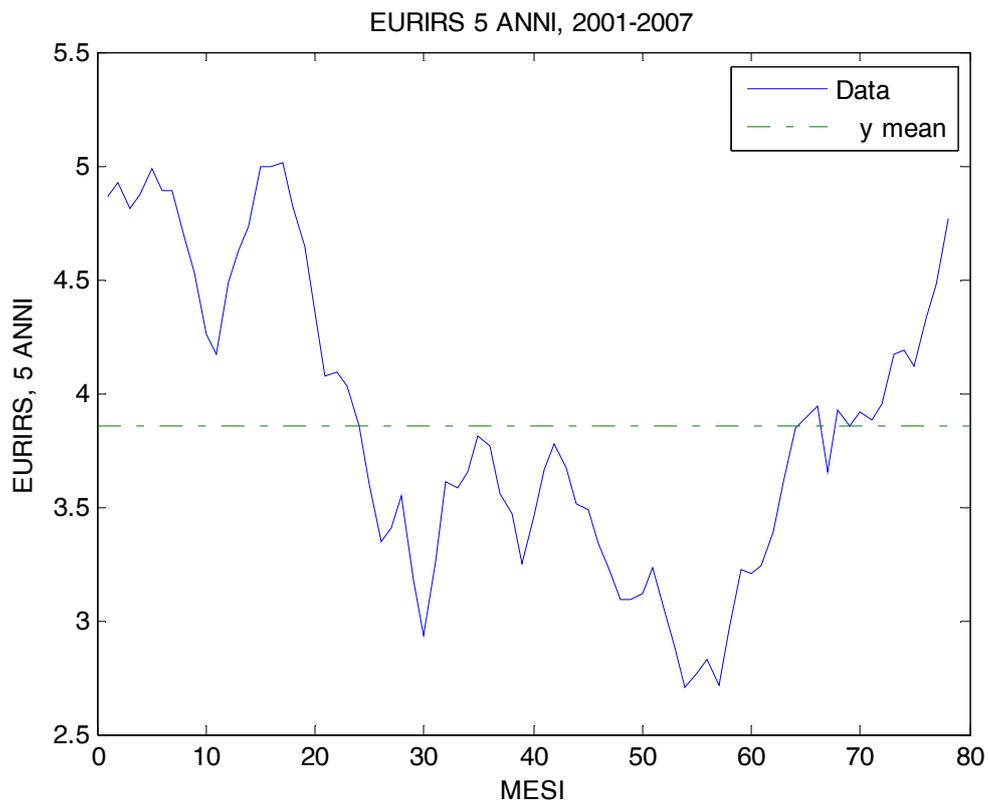


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
2,386	4,751	3,534	3,427	0,7204	2,365

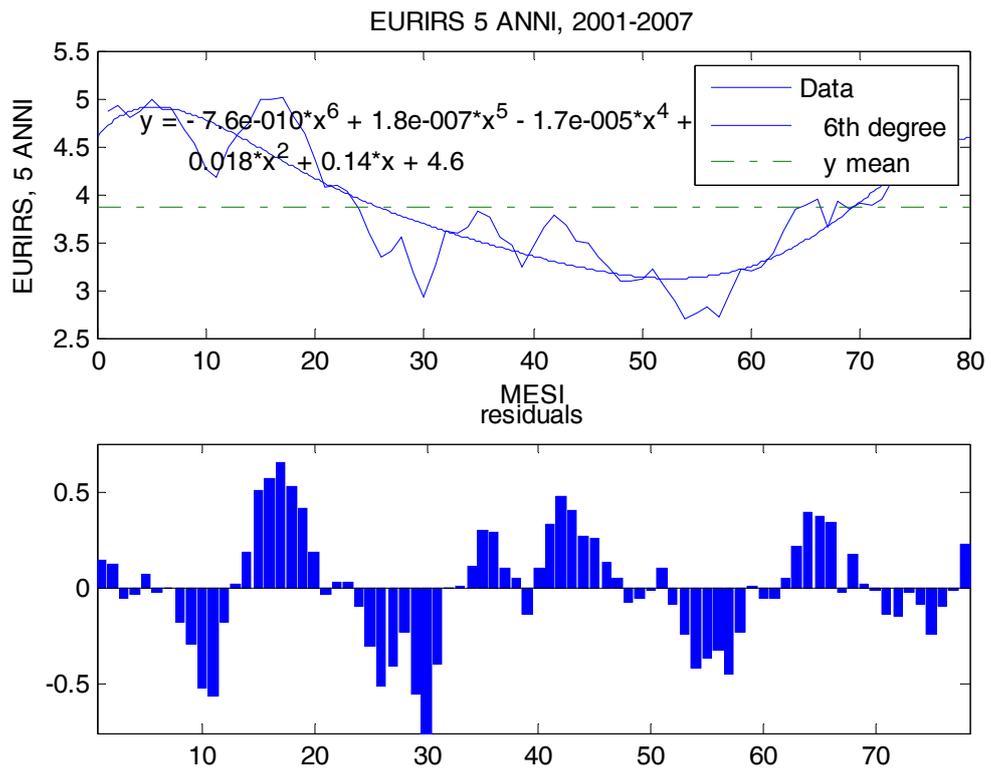


## EURIRS A 5 ANNI, 2001-2007

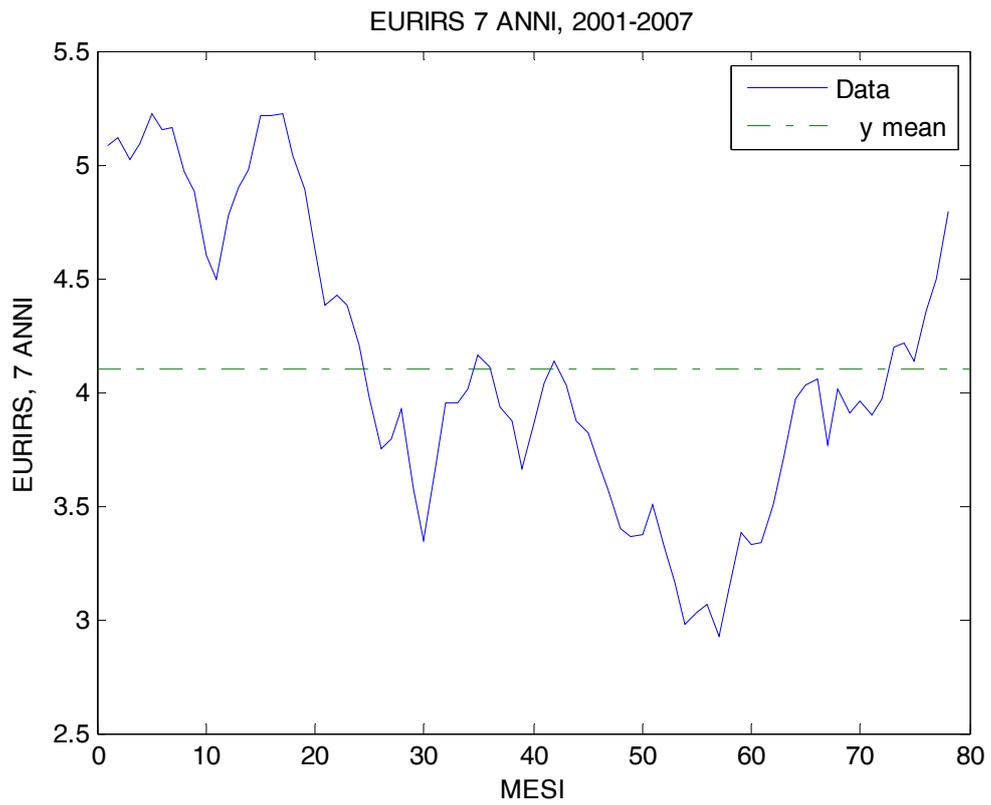


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
2,706	5,01	3,855	3,797	0,6589	2,304

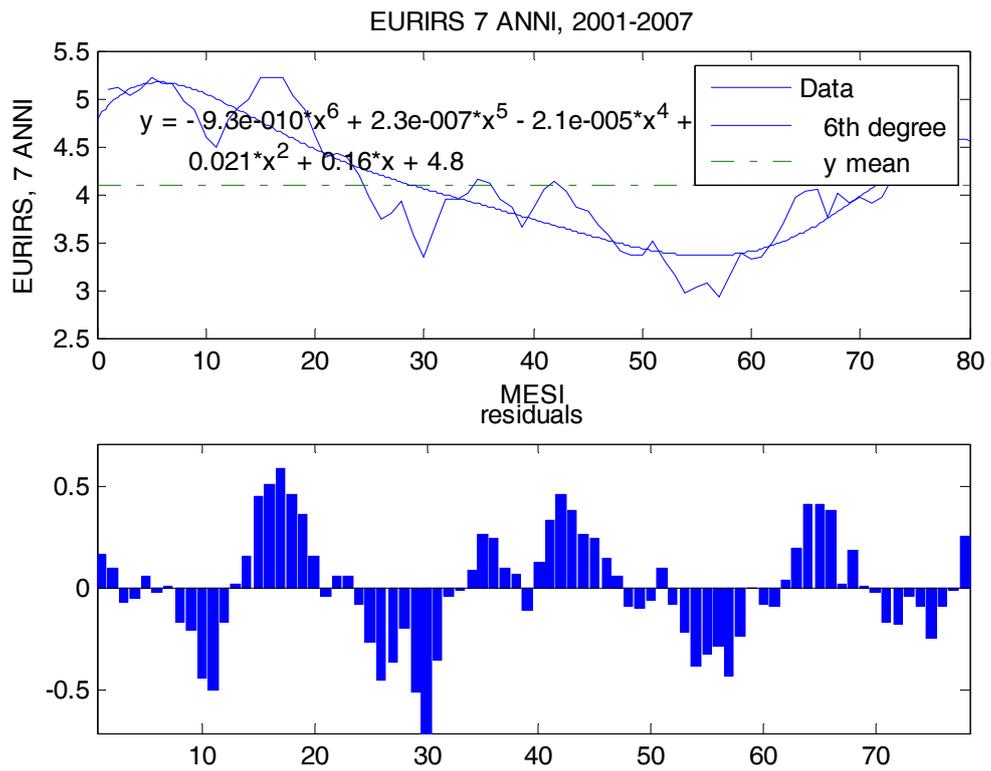


## EURIRS A 7 ANNI, 2001-2007

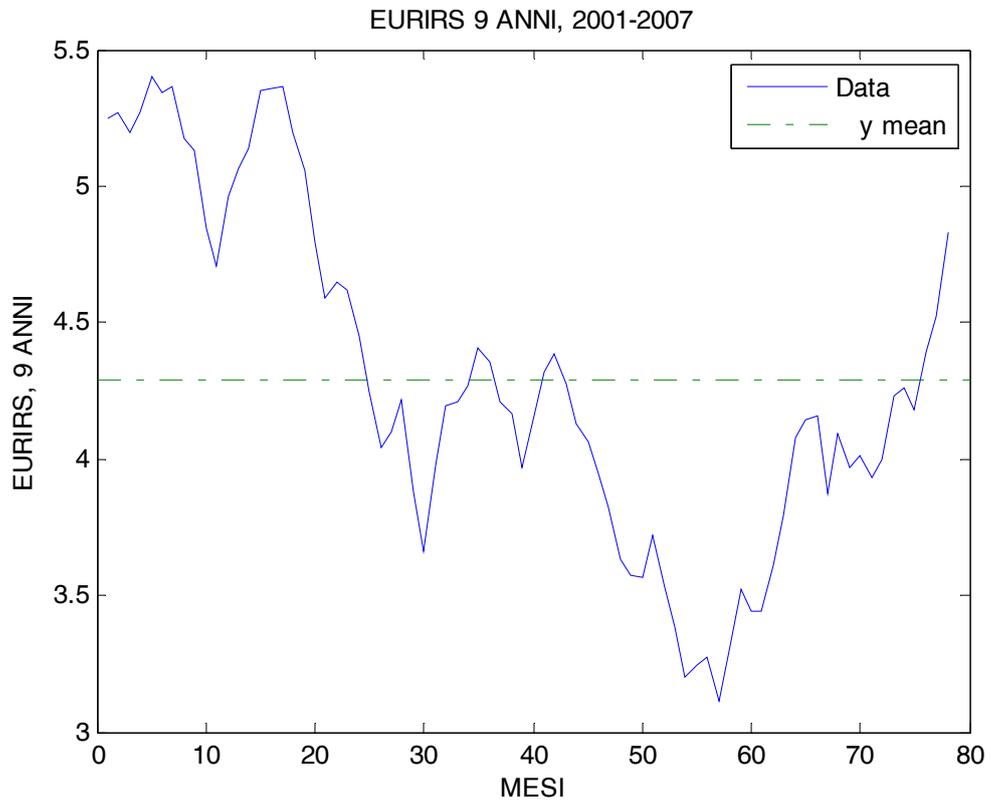


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
2,924	5,225	4,103	3,994	0,639	2,301

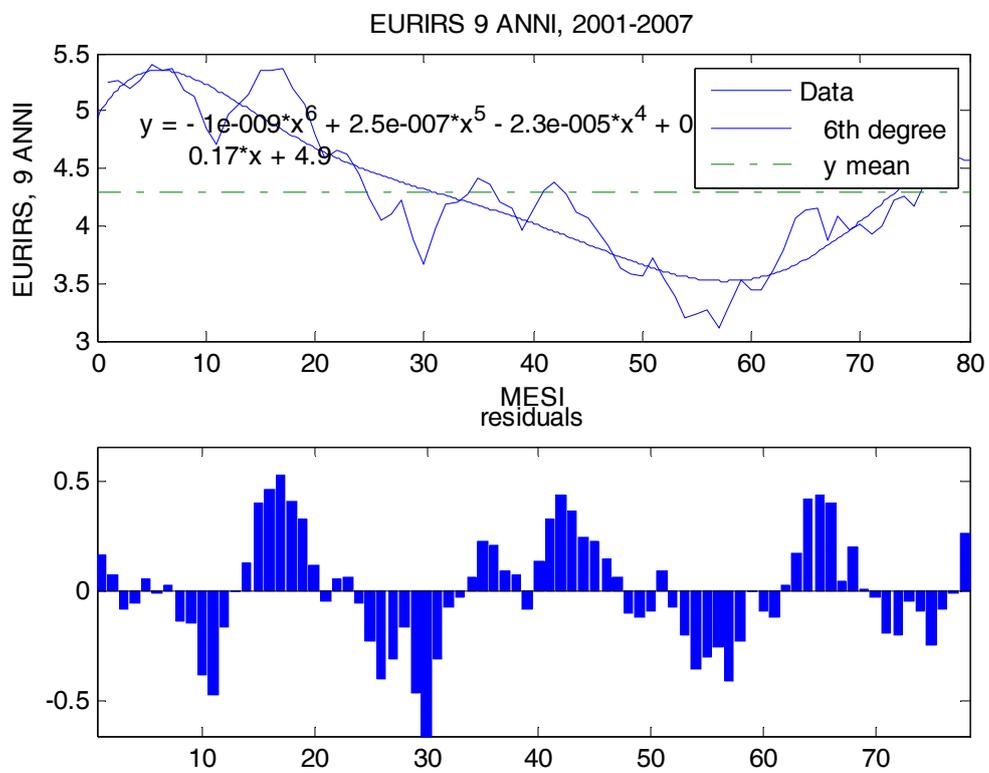


## EURIRS A 9 ANNI, 2001-2007

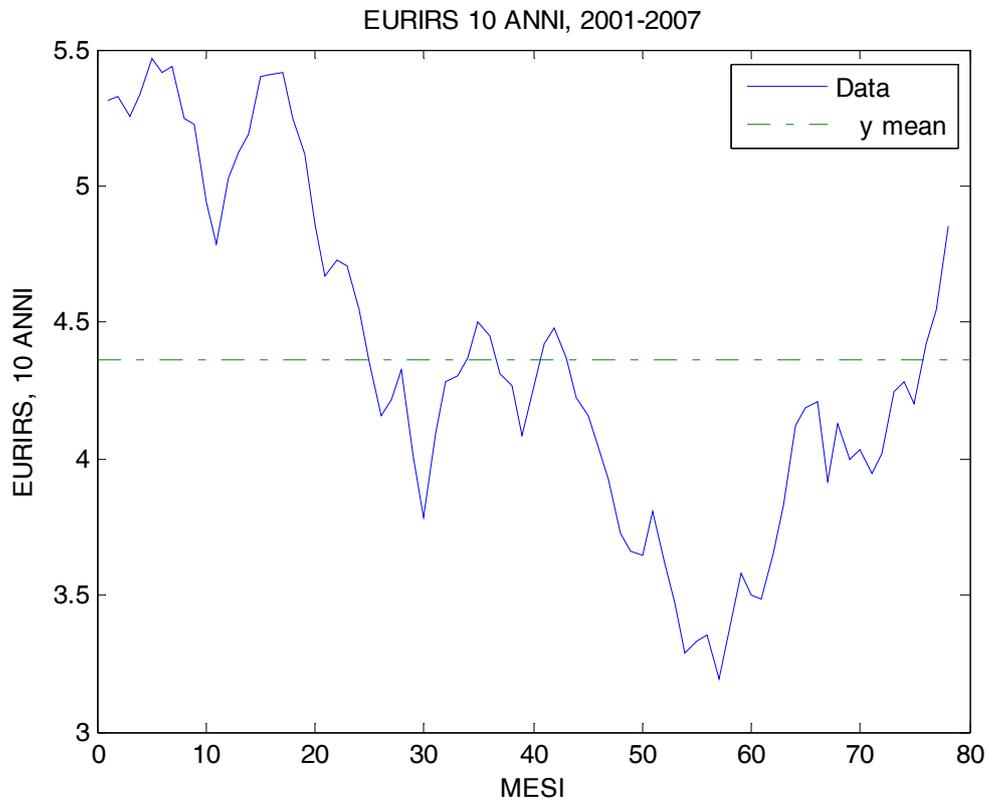


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
3,114	5,398	4,29	4,2	0,628	2,284

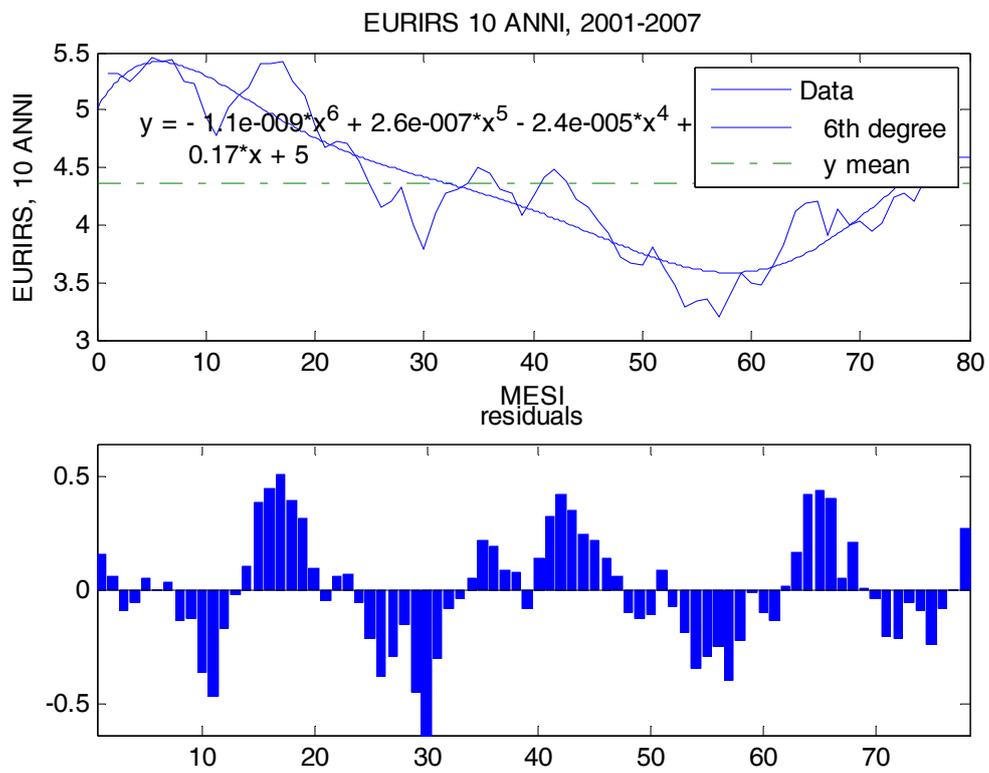


## EURIRS A 10 ANNI, 2001-2007

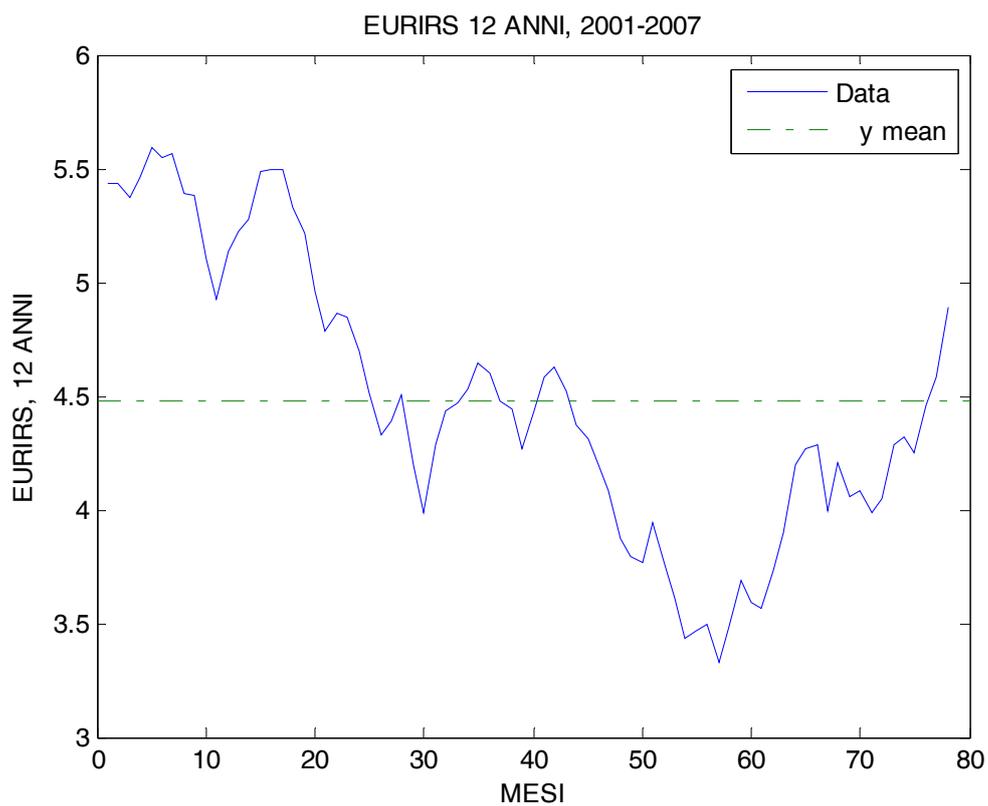


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
3,196	5,464	4,362	4,277	0,6234	2,268

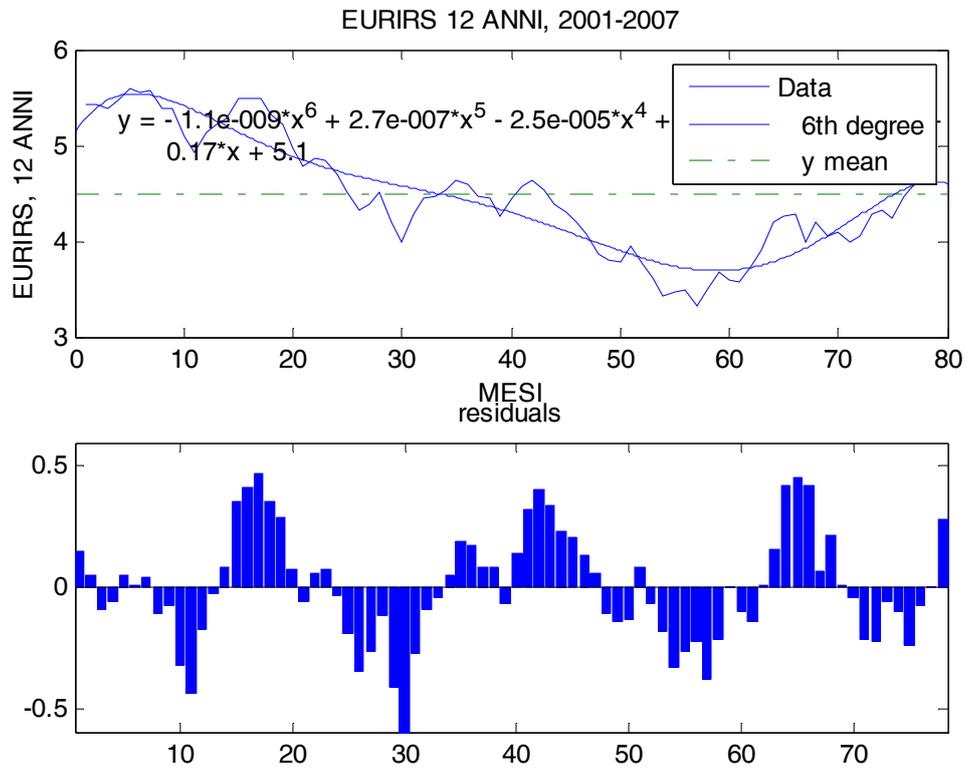


## EURIRS A 12 ANNI, 2001-2007

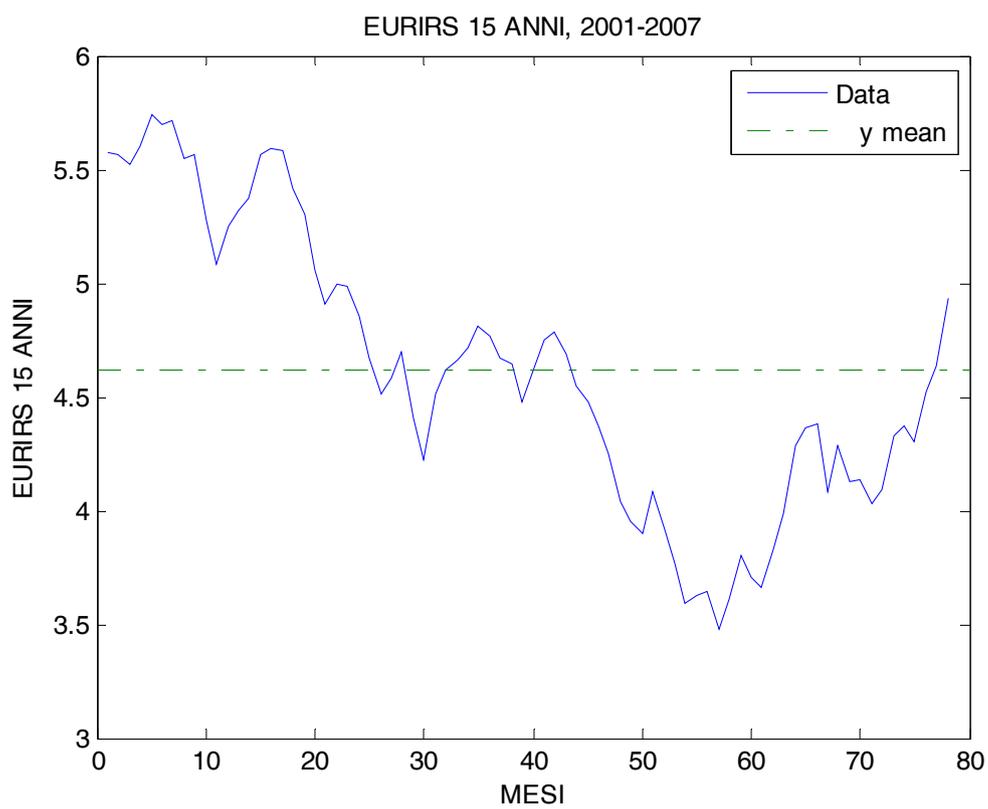


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
3,331	5,589	4,482	4,438	0,6213	2,258

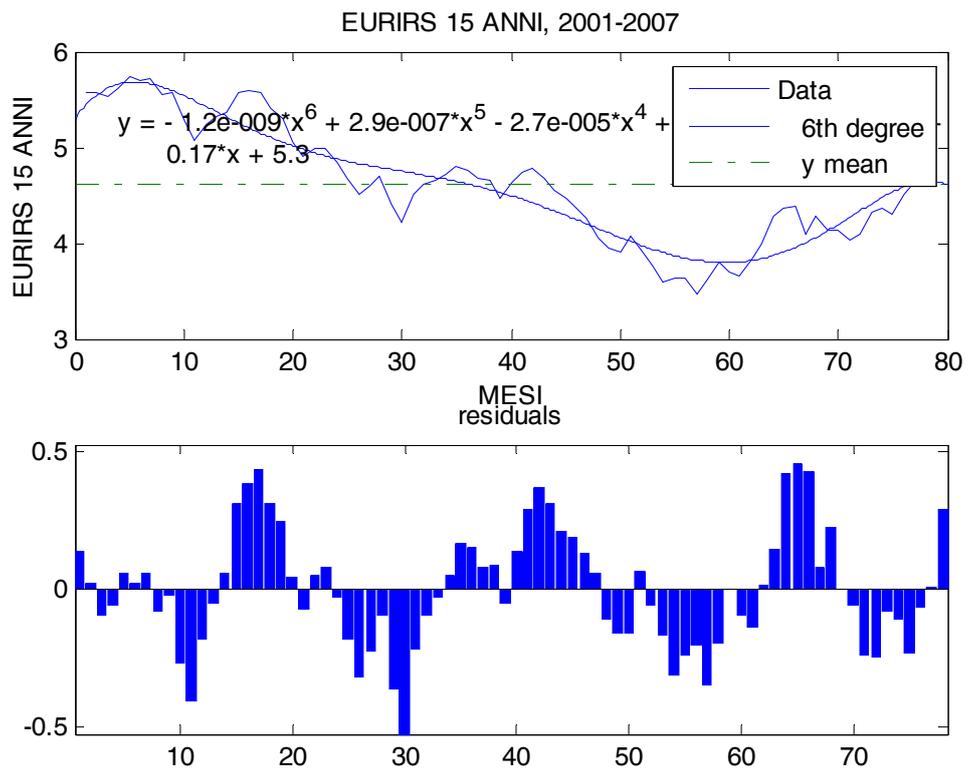


## EURIRS A 15 ANNI, 2001-2007

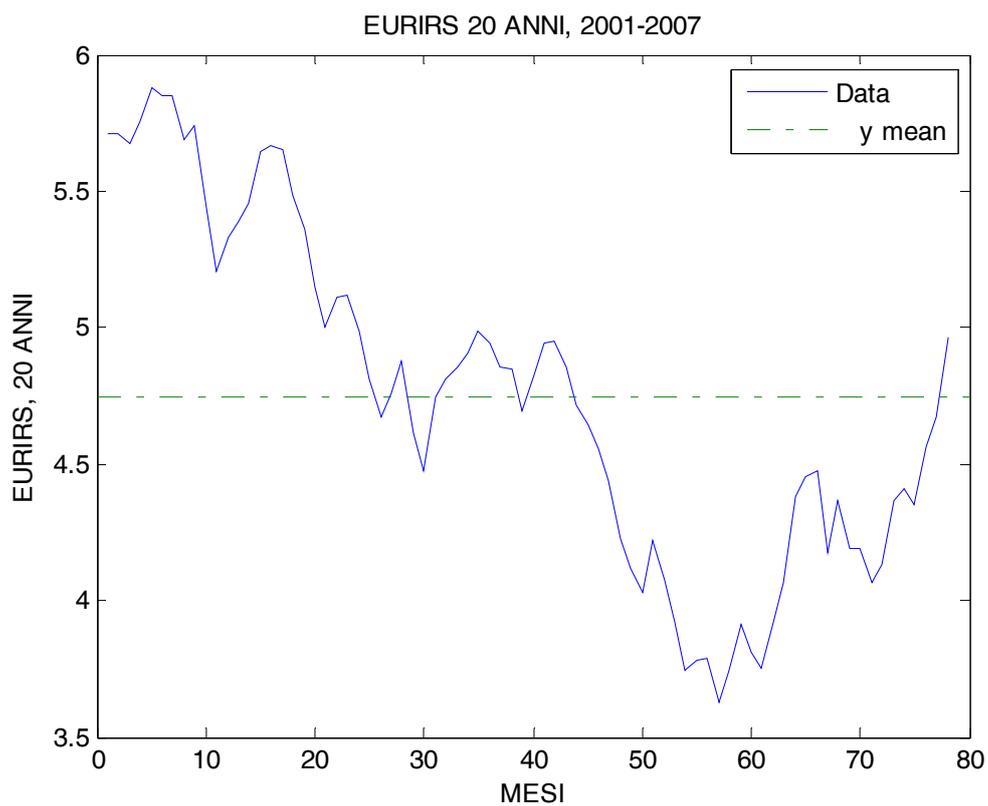


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
3,478	5,737	4,616	4,603	0,622	2,259

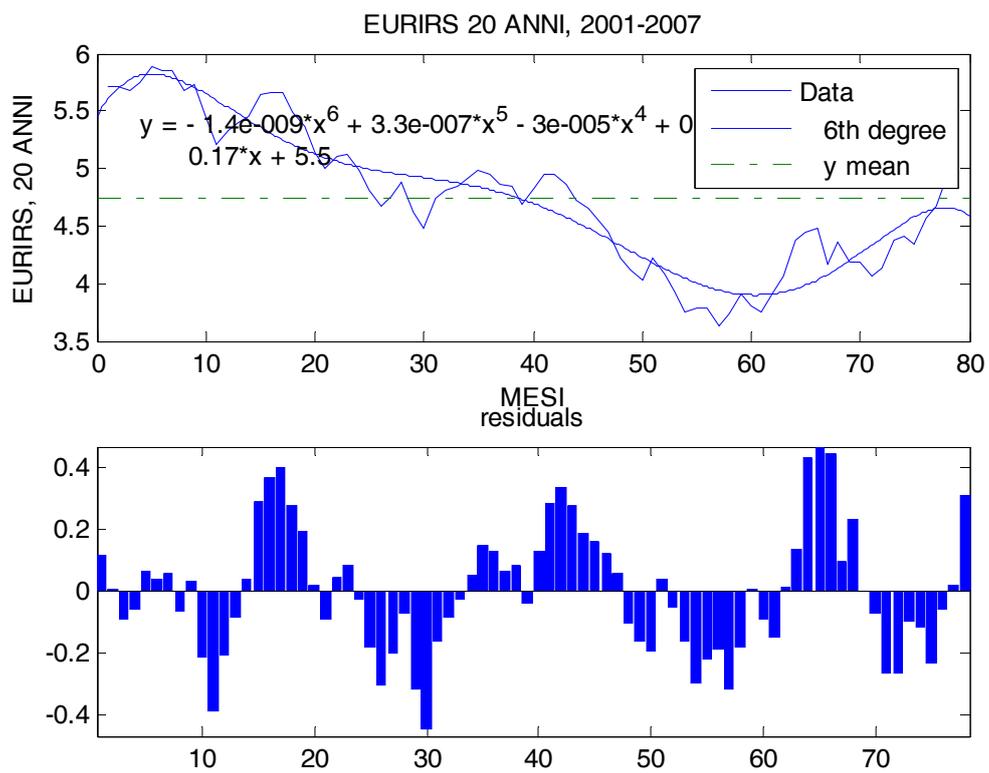


## EURIRS A 20 ANNI, 2001-2007

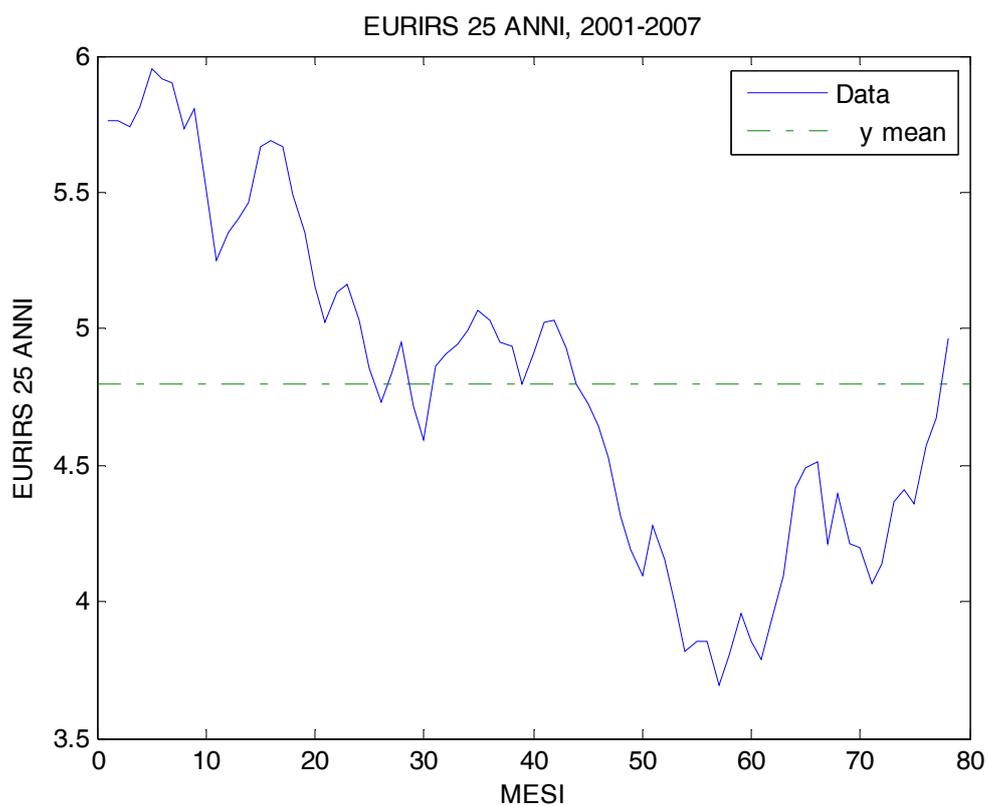


### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
3,331	5,589	4,482	4,438	0,6213	2,258

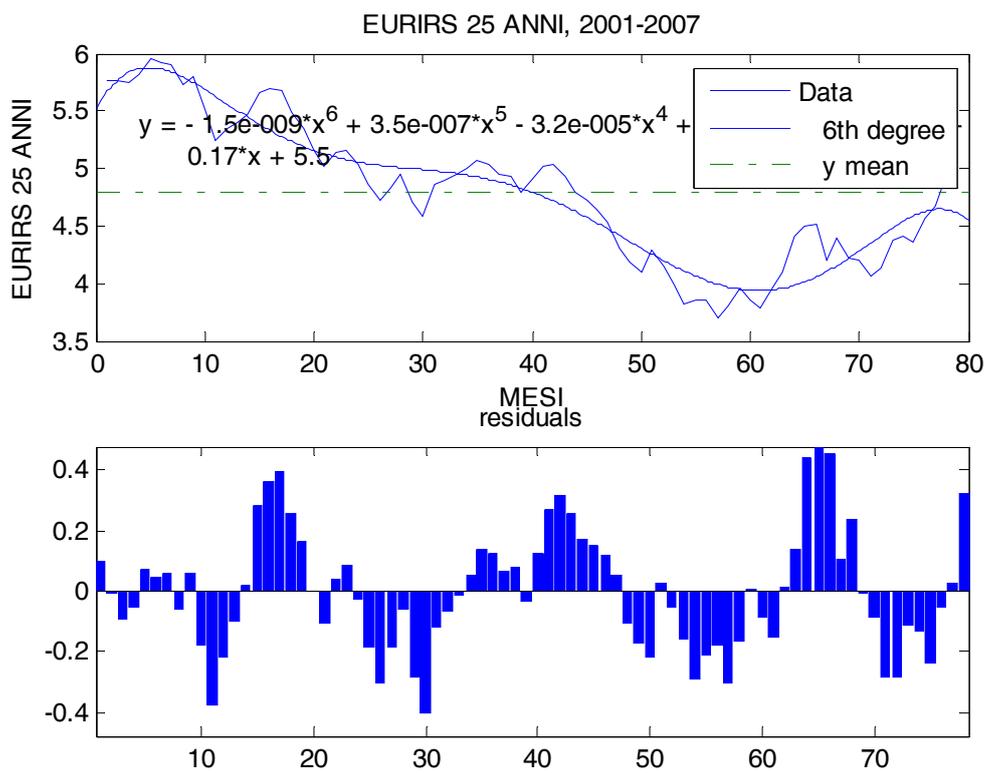


## EURIRS A 25 ANNI, 2001-2007

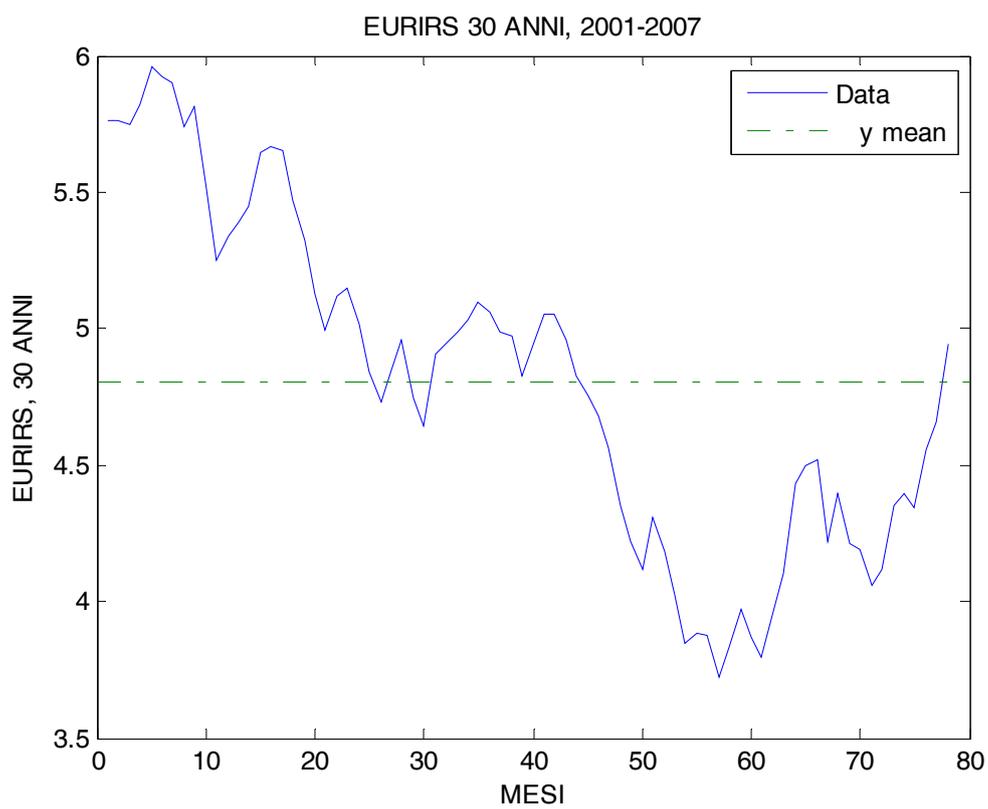


### Statistiche sui dati

Min	max	mean	median	std	range
3,694	5,951	4,798	4,845	0,6215	2,257

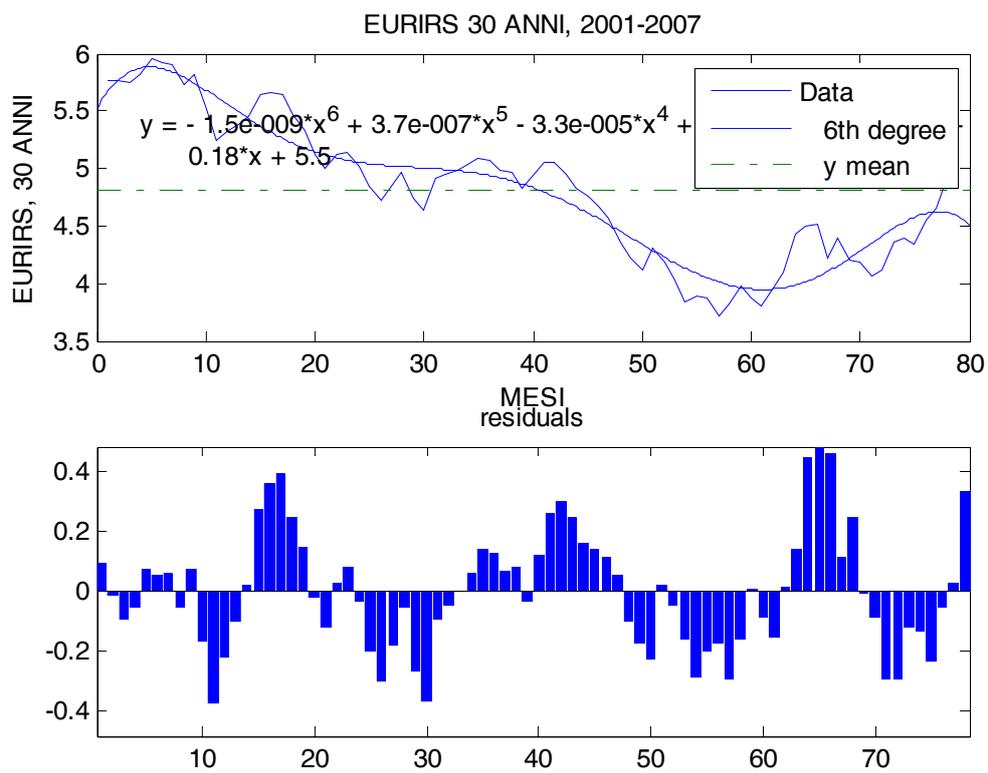


## EURIRS A 30 ANNI, 2001-2007



### Statistiche sui dati

Min	Max	Mean	Median	Std	Range
3,721	5,957	4,806	4,845	0,6153	2,236



## *Riferimenti bibliografici*

Le serie storiche dei tassi euribor sono state scaricate dal sito [www.euribor.org](http://www.euribor.org) patrocinato da FBE ed ACI. Le serie storiche dei tassi euroswap sono state scaricate dal sito <http://www.oenb.at/isaweb/report.do;jsessionid=0BB4358B6D4E35B651BB2A80E67B232F?report=660>

Ahangarani Mashayekh P., (2007) *An empirical Estimation and Model Selection of Short-Term Interest Rates*, Working Paper, University of Southern California, Economics Department.

Antolin, P., (2007), *Longevity Risk and Private Pensions*, OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions, No. 3, OECD Publishing. doi:10.1787/261260613084

Ballotta, L., Esposito G., Haberman, S., (2006), *The IASB Insurance Project for life insurance contracts; impact on reserving methods and solvency requirements*, Insurance: Mathematics and Economics, 39, 356-75.

Ballotta, L., Haberman, S., (2006), *The fair valuation problem of guaranteed annuity options: The stochastic mortality environment case*, Insurance: Mathematics and Economics 38 (2006): 195-214.

Blake, D., Burrows W., (2001), *Survivor bonds: helping to hedge mortality risk*, Journal of Risk and Insurance. 68: 339-348.

Blake, D., Cairns A.J.G., Dowd K., (2006), *Living with mortality: longevity bonds and other mortality-linked securities*, presentato presso Institute of Actuaries in Londra, 27 Febbraio 2006. [http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/sessional/fac\\_sm20060116.pdf](http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/sessional/fac_sm20060116.pdf).

Buhlmann H., (2002), *New Math for life actuaries*, Astin Bulletin 32, 209-211.

Buhlmann H., (2004), *Multidimensional Valuation*, <http://www.math.ethz.ch/hbuhl/moskau4.pdf>

Biffis E., Denuit M., Lee-Carter goes risk neutral, an application to the italian annuity market, Actuarial Research Paper n.166.

Black, Fischer, Karasinski, (1991), Bond, *Bond and option pricing when short rates are lognormal*, Financial Analysts Journal (July/August), 52-59.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D. A., Nesbitt C. J., Actuarial Mathematics *The Society of Actuaries*, 1997: 101-103

Brennan M. J., Schwartz E.S., (1977), *Savings bonds, retractable bonds, and callable bonds*, Journal of Financial Economics 3, 133-155.

Brennan M. J., Schwartz E.S., (1979), *A continuous time approach to the pricing of bonds*, Journal of Banking and Finance 3, 133-155.

Brennan M. J., Schwartz E.S., (1980), *Analyzing convertible bonds*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, 907-929.

Brigo D., Mercurio F., (2001), *Interest Rate Models – Theory and Practice*, Springer Finance.

Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K., (2002), *A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables*, Insurance: Mathematics and Economics 31, 373-393.

Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K., (2002), *Measuring the longevity risk in mortality projections*, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 105-103.

Brouhns N., Denuit M., Van Keilegom I, (2005), *Bootstrapping the poisson log-bilinear model for mortality forecasting*, Scandinavian Actuarial Journal, 212-224.

Ballotta, L., Esposito G., Haberman, S., (2006), *Modelling the fair value of annuities contracts: the impact of interest rate risk and mortality risk*, Actuarial Research Paper n.176

Cairns A. J. G., Blake D., Dowd K., (2006), *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration*, Journal of Risk and Insurance, 73: 687-718.

<http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/>

Cairns A.J.G., Balevich I., Blake D., Coughlan G.D., Dowd K., Epstein D., Ong A., (2007), *A quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models using data from England & Wales and the United States*, Discussion Paper Pension Institute -0701

Cassandro, P.E., (1975), *Le gestioni assicuratrici*, Utet, Torino.  
<http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/cmi/wp15/wp15.pdf>

Cliff M., (2003), *GMM and MINZ Program Libraries for MATLAB*,  
<http://mcliff.cob.vt.edu/MICHAEL T. CLIFF>

Currie, I. D., Durban M., Eilers P. H. C., (2004), *Smoothing and forecasting mortality rates*,  
*Statistical Modelling*, 4(20): 278–298.

Currie, I.D., (2006), *Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines*, Presentazione tenuta presso Institute of Actuaries, Giugno 2006. <http://www.ma.hw.ac.uk/~iain/research/talks.html>

CAS Fair Value Task Force, [www.cassact.org/research/tffv1/012.pdf](http://www.cassact.org/research/tffv1/012.pdf)

Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F. A., Sanders A. B., (1992) , *An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate*, *Journal of Finance*, 1209-1227.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (1998), *The mortality of pensioners in insured group pension schemes 1991-1994*, Paper n.16.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Marzo 2004), *Projecting future mortality: a discussion paper*, Paper n.3.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Gennaio 2005), Responses to Working Paper 3 entitled *Projecting future mortality: a discussion paper* and further commentary thereon, Paper n.11.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Luglio 2005), *Projecting future mortality: Towards a proposal for a stochastic methodology*, Paper n.15

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Aprile 2006), *Stochastic projection methodologies: Further progress and P-Spline model features, example results and implications*, Paper n. 20.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Agosto 2006), *The Graduation of the CMI 1999-2002 Mortality Experience: Final “00” Series Mortality Tables – Assured lives*, Paper n. 21.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Agosto 2006), *The Graduation of the CMI 1999-2002 Mortality Experience: Final “00” Series Mortality Tables – Annuitants and Pensioners*, Paper n. 22.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Aprile 2007), *Stochastic projection methodologies: Lee-Carter model features, example, results and implications*, Paper n. 25.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Aprile 2007), *Extensions to Younger Ages of the “00” Series Pensioner Tables of Mortality*, Paper n. 26.

Continuous Mortality Investigation-CMI, (Luglio 2007), *The “library” of mortality projections*, Paper n. 27.

Coppola M., D’Amato V., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2006), *Risk Measurement and Fair Valuation Assessment in the Life Insurance Field. New Series Book by Springer Economics from Tradition to Complexity – Faggini, M., Lux, T. Edition (2006)*.

Cocoza R., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2003), *Risk profiles of life insurance business: a combined approach*, Proceeding di “6 Conferenza Italo-Spagnola sulla Matematica Finanziaria”, Dipartimento di Matematica Applicata Bruno de Finetti, Trieste, 157-170.

Cocoza R., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2004), *Life insurance risk indicators: a balance-sheet approach*, Proceedings di Congresso IME, Roma.

Cocoza R., De Feo D., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2005), *On the financial risk factor in fair valuation of the mathematical provision*, Proceedings di Astin Conference 2005, [ftp://ftp.math.ethz.ch/hg/users/astin2005/contributed\\_papers\\_astin/cocoza\\_et\\_al.pdf](ftp://ftp.math.ethz.ch/hg/users/astin2005/contributed_papers_astin/cocoza_et_al.pdf).

Cocoza, R., Di Lorenzo, E., Sibillo M., (2007), *The current value of the mathematical provision: a financial risk prospect*, International Scientific Journal “Problems and perspectives in management, vol.5, issue 2. 127-140

- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2000), *Risk sources in a life annuity portfolio: Decomposition and measurement tools*, Journal of Actuarial Practice, Vol.8.
- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2001), *Il sistema dei rischi demografico-finanziari: analisi dell'impatto sulle riserve matematiche*, atti VII Convegno "Teoria del Rischio", Università degli studi del Molise.
- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2001), *Vincoli di coerenza per le misure dei rischi di un portafoglio assicurativo*, Volume in onore di A. Di Lorenzo.
- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2002), *Further Remarks on Risk Sources Measuring: The Case of a Life Annuity Portfolio*, Journal of Actuarial Practice, Vol.10.
- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2003), *Stochastic analysis in life office management: applications to a life annuity portfolio*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, 19. Journal of Actuarial Practice, Vol.10.
- Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M., (2005) *Fair Valuation Schemes for Life Annuity Contracts*, Proceedings di Applied Stochastic Models and Data Analysis, ASMDA 2005, Editors J.
- Carter L.R., Prskawetz A., (2001), *Examining structural shifts in mortality using the Lee-Carter method*, Working Paper, Max Planck Institute for demographic research, Rostock, Germany.
- Chamberlain G., (1987), *Asymptotic efficiency in estimation with conditional moment restrictions*, Journal of Econometrics, 34, 305-334.
- Constantinides G. M., Ingersoll J.E., (1984), *Optimal bond trading with personal taxes*, Journal of Financial Economics, 13,299-335.
- Cox J. C., Ingersoll J.E., Stephan A. R., (1980), *An analysis of variable rate loan contracts*, Journal of Finance, 35, 389-403.
- Cox J. C., Ingersoll J.E., Stephan A. R., (1985), *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53, 385-407.

Dahl, M., (2004), *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality – linked insurance contracts*, Insurance: Mathematics and Economics, 35.

Deelstra G., Parker G., (1995), *A covariance equivalent discretisation of the CIR model*, 5<sup>th</sup> Afir International Colloquium.

De Felice, M., Moriconi, F., (1989), *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: modelli e strategie*, Il Mulino.

De Felice M., Moriconi M., (2004), *Market based tools for managing the life insurance company*, <http://www.math.ethz.ch/finance/Life DFM.pdf>

De Feo D., *An empirical method for human mortality forecasting. An application to Italian data*, International Research Journal Problems and Perspectives in Management 4, sect.3.

Dothan, Uri L., 1978, *On the term structure of interest rates*, Journal of Financial Economics 6, 59-69.

Dowd K., Blake D., Cairns A.J.G., Dawson P. E., (2006), *Survivor Swaps*, Journal of Risk and Insurance. 73(1): 1-17.

Di Lorenzo E., Sibillo M., (2002), *Longevity risk: Measurement and application perspectives*, Proceedings di “2 Conferenza in Scienze Attuariali e Finanza”, Samos. <http://www.stat.ucl.ac.be/Samos2002/proceedSibillo.pdf>.

Encyclopedia of Actuarial Science, (2004), Ed. Teugels, J. L., Sundt, B. Wiley.

(2005), European Commission, Eurostat EUROPOP2004: Methodology for drafting mortality assumptions.

Etter D.M., Kuncicky D.C., (2001), *Introduzione a Matlab*, edizioni Apogeo.

(Marzo 2004), Financial Accounting Standard Board, *Project update: fair value measurements*.

Feldman David, (1989), *The term structure of interest rates in a partially observable economy*, Journal of Finance 44, 789-812.

Frees, E.W., (1990), *Stochastic life contingencies with solvency considerations*. *Transactions of Society of Actuaries*, XLII, 91-129.

Frees, E.W., (1998), *Relative importance of risk sources in insurance system*, *North American Actuarial Journal*, vol.2, n.2, (1998), 34-52.

Haberman, S., Russolillo M., (2005), *Lee Carter mortality forecasting: application to the italian population*, *Actuarial Research Paper n.167*.

Hardy M. (2005), *A matter of life and death*, *Financial Engineering News*. 46: 17, 20.  
[http://www.fenews.com/fen46/topics\\_act\\_analysis/topics-act-analysis.htm](http://www.fenews.com/fen46/topics_act_analysis/topics-act-analysis.htm)

Hari, N., De Waegenare, A., Nijman T.E., (2007), *Longevity risk in portfolios of pension annuities*, *Mathematics and Economics*.  
[http://www.sciencedirect.com/science?\\_ob=ArticleListURL&\\_method=list&\\_ArticleListID=603336868&\\_sort=d&view=c&\\_acct=C000059177&\\_version=1&\\_urlVersion=0&\\_userid=2926757&md5=9e0f5a3562c292ab000aa0495441c4c0](http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleListURL&_method=list&_ArticleListID=603336868&_sort=d&view=c&_acct=C000059177&_version=1&_urlVersion=0&_userid=2926757&md5=9e0f5a3562c292ab000aa0495441c4c0)

Hansen H.P., (1982), *Large sample properties of generalized method of moments estimators*, *Econometrica*, 50:1029{1054.

Hull, John and Alan White, (1990), *Pricing interest-rate derivative securities*, *Review of Financial Studies* 3, 573-592.

Heligman L., Pollard J. H., (1980), *The Age Pattern of Mortality*, *Journal Inst. Act.*, n107, 49-80.

Hollmann, F.W., Mulder T.J., Kallan J.E., (2000), *Methodology and Assumptions for the Population Projections of the United States: 1999-2100*, *Population Division, Working Paper No. 38*.

(Marzo 2000), IAIS Solvency & Actuarial Issues Subcommittee. *On solvency, solvency assessments and actuarial issues*.

(Gennaio 2002), IAIS Solvency & Actuarial Issues Subcommittee. *Principles on capital adequacy and solvency*.

(2003) International Accounting Standard Board. *Exposure Draft 5 Insurance Contracts*, International Accounting Standard Board Committee Foundation, Londra.

(2006), Issues arising as a result of the IASB's Insurance Contracts Project- Phase II Second Set of IAIS observations.

Jorgensen, P.L., *On accounting standards and Fair valuation of life insurance and Pensions liabilities*, Scandinavian Actuarial Journal, 5.

Kannisto V., (2000), *Measuring the Compression of Mortality*, Demographic Research, 3.

Lee R., (2000), *The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications*, North American Actuarial Journal 4, 80-93.

Lee R., Carter (1992), *Modeling and forecasting U.S. mortality*, Journal of the American Statistical Association 87(14), 659-671

Lee R., Miller, T., (2000), *Assessing the performance of the Lee-Carter Approach to modelling and forecasting mortality*, scaricabile dal sito web [www.demog.berkeley.edu](http://www.demog.berkeley.edu)

Lee R., Miller, T., (2000), *Evaluating the performance of Lee Carter mortality forecast*, Demography, 38, 4, 537-549.

Lee R., Tuljapurkar S., (1994), *Stochastic population forecast for the United States: beyond high, medium and low*, Journal of American Statistical Association, vol.89, n.428, 1175-89.

Lin Y., Cox S. H., (2005), *Securitization of mortality risks in life annuities*, Journal of Risk and Insurance. 72: 227-252. <http://rmictr.gsu.edu/Papers/WP03-3.pdf>

Lysenko N., Parker G., (2007), *Stochastic Analysis of Life Insurance Surplus*, presentato a Afir 2007.

Longstaff F. A., (1989), *A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates*, Journal of Financial Economics 23, 195-224.

- Longstaff F., Schwartz E.S., (1992), *Interest rate volatility and the term structure: A tw-factor general equilibrium model*, Journal of Finance.
- Marocco P., Pitacco E., (1998), *Longevity risk and life annuity reinsurance*, Transactions of the 26<sup>th</sup> International Congress of Actuaries, 6.
- Marsh T.A., Rosenfeld E.R., (1983), *Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices*, Journal of Finance 38, 635-646.
- Merton, Robert C., (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.
- Newey, West K., (1987), *Hypothesis testing with efficient method of moments estimation*, International Economic Review 28, 777-787.
- Naldi G., Pareschi, (2007), *Matlab Concetti e progetti*, edizioni Apogeo.
- Olshansky S.J., Passaro D., Hershow R., Layden J., Carnes B.A., Brody J., Hayflick L., Butler RN., Allison DB, Ludwig DS., (2005), *A Possible Decline in Life Expectancy in the United States in the 21st Century*, New England Journal of Medicine 352:1103-1110.
- Olivieri, A., (1998), *Per una quantificazione del Longevity Risk*, atti Convegno Amases, Genova, 383-390.
- Olivieri, A., (2001), *Rischi demografici negli schemi previdenziali*, Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata Bruno de Finetti, n.6/2007, Università degli Studi di Trieste.
- Olivieri, A., (2001), *Uncertainty in mortality projections: An actuarial perspective*. Insurance: Mathematics and Economics 29, 231 – 245.
- Olivieri, A., Pitacco E., (2002), *Inference about mortality improvements in life annuity portfolios*, Presentato a “27th International Congress of Actuaries”, Cancun, Mexico.
- Olivieri, A., Pitacco, E., (2003), *Solvency requirements for pension annuities*, Journal Pension Economics and Finance , 2 (2), pp. 127-157(2003).

Pandit S.M., Wu S.M., (1983), *Time Series and System Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 586.

Parker G., (1994), *Stochastic analysis of a portfolio endowment insurance policies*, Scandinavian Actuarial Journal, 2 (1994), 119-130.

Parker G., (1994), *Limiting distribution of the present value of a portfolio*, Scandinavian Astin Bulletin, vol.24, n.1, 47-60.

Parker G., (1994), *Moments of the present value of a portfolio of policies*, Scandinavian Actuarial Journal, 1(1994), 53-67.

Parker G., (1996), *A portfolio of endowment policies and its limiting distribution*, Astin Bulletin, vol.26, n.1, (1996), 25-33.

Parker G., (1997), *Stochastic analysis of the interactions between investment and insurance risk*, NAAJ, vol.1, n.2, 55-84.

(2005), Pensions Commission, *A New Pensions Settlement for the 21st Century*.  
<http://www.pensionscommission.org.uk/publications/2005/annrep/annrep-index.asp>.

Perks W., (1932), *On some experiments in the graduation of mortality statistics*, *Journal of the Institute of Actuaries*, 63: 12-57.

Pitacco E., (2000), *Elementi di Matematica delle Assicurazioni*, Trieste: Lint.

Pitacco, E., (2004), *Survival models in a dynamic context: A survey*, *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 279 – 298.

Proceedings di *The first international conference on longevity risk and capital market solutions*. 18 Febbraio 2005. Cass Business School, London.

Renshaw A.E., Haberman, S., (2000), *Modelling for mortality reduction factors*, Actuarial research paper, n.127.

Renshaw A.E., Haberman S., (2003), *Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement*, Insurance: Mathematics and Economics, 33: 255-272.

Renshaw A.E., Haberman S., (2003), *Lee-Carter mortality forecasting: a parallel generalised linear modelling approach for England and Wales mortality projections*, Applied Statistics, 52, 1, 119-137.

Renshaw A.E., Haberman, S., (2003), *On the forecasting of mortality reduction factors*, Insurance: Mathematics and Economics.

Renshaw A.E., Haberman, S., (2006), *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*, Insurance: Mathematics and Economics, 38: 556-570.

Renshaw A.E., Haberman, S., Hatzopoulos P., (1996), *The modelling of recent mortality trends in U.K. male assured lives*, British actuarial Journal, vol.2, parte II, n.7.

Schaefer S., Schwartz E.S., (1984), *A two factor model of the term structure: an approximate analytical solution*, Journal of Financial and Quantitative Analyses 19, 413-424.

Siegel, J., (2005), *The Great Debate on the Outlook for Human Longevity: Exposition and Evaluation of Two Diverging Views*, Society of Actuaries.

Sigma – SwissRe, (2007), *Prodotti di rendita:una soluzione privata per il rischio di longevità*, n.3/2007.

Stallard, E., (2006), *Demographic issues in Longevity Risk Analysis*, Journal of Risk and Insurance. Vol. 73, No. 4, pp. 575-609.

Sundaresan S. M., (1984), *Consumption and equilibrium interest rates in stochastic production economies*, Journal of Finance 39,77-92.

Vasicek, Oldrich, (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5, 177-188.

Venkatesh V., (2006), *Comparison of models of the short-term libor rate*, Simon Fraser University.

Voung H., Quang, (1989), *Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypothesis*, *Econometrica*, 57, 307-333.

Wong-Fupuy, C., S. Haberman, (2004), *Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the United Kingdom and the United States*, *North American Actuarial Journal*, 8 (2).

Faraone A., *Valutazione di portafogli di rendite pensionistiche*, Tesi di laurea in Modelli Matematici per la gestione del rischio Anno Accademico 2006 -2007 Facoltà di Economia, Università di Salerno

Siti web consultati:

[www.dataprincedon.edu/eco572/LeeCarter](http://www.dataprincedon.edu/eco572/LeeCarter)

[www.demogr.mpg.de](http://www.demogr.mpg.de), Max Planck institute for demographic researches

[www.mortality.org](http://www.mortality.org), Human Mortality Database, University of California, Berkley (USA)

[www.mortality.org](http://www.mortality.org), Berkley University of California, Department of demography

[www.weibull.com](http://www.weibull.com)