Università degli Studi di Napoli
Federico II

Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche
XIX Ciclo

Tesi

Un progetto didattico innovativo sulle strutture aritmetiche

Maria Mellone

Ottobre 2007

Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"R. Caccioppoli"

Grazie a Paolo e Roberto
per l'incredibile pazienza con cui mi hanno guidato
in questo faticoso e indimenticabile percorso.

Un grazie particolare
ad Olga ed ai bambini
che mi hanno accolto
senza riserve.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

"Il pensiero potrebbe essere paragonato ad una nuvola incombente che rovescia una pioggia di parole [...]dovremmo, per seguire questo confronto immaginario, identificare la motivazione del pensiero con il vento che fa muovere le nuvole. Una comprensione reale e completa del pensiero altrui è possibile soltanto quando scopriamo il suo retroscena reale, affettivo – volitivo."

(Vygotskij, 1936/1990, p. 390)

1.1 L'urgenza del problema dell'educazione matematica oggi

Negli ultimi anni, a livello delle istituzioni, è cresciuta l'attenzione per un fenomeno preoccupante, che interessa l'Italia ma più in generale tutti i paesi del mondo occidentale: il calo delle iscrizioni ai Corsi di Laurea dell'Area Scientifica, specificamente a quelli di contenuto matematico. Da noi, ad esempio, la percentuale degli iscritti a matematica sul totale degli studenti iscritti ai vari corsi di laurea è passata, in poco più di dieci anni, da quasi tre su mille a uno su mille[1], e più in generale il calo percentuale degli iscritti ai Corsi di Laurea del gruppo Scientifico, è passata, in 50 anni, da un iscritto su sei ad un iscritto su dieci (Di Martino *et al*, 2007). Questa crisi delle vocazioni è davvero preoccupante tanto che il Ministero ha finanziato, nel 2005, un progetto nazionale (Progetto Lauree Scientifiche) per incrementare il numero di immatricolati e di laureati in Chimica, Fisica e Matematica, mantenendo, al tempo stesso, un alto standard di qualità degli studenti. L'inchiesta PISA[2] ha, inoltre, recentemente documentato che oggi, in Italia, siamo al 26° posto (su 43 paesi) per le competenze matematiche di base rilevate a 15 anni,

[1] Solo recentemente si è registrata una lieve inversione di tendenza.

[2] La letteratura di riferimento è assai ampia. Si veda ad esempio, in particolare in relazione al caso italiano: Il Programma OCSE-PISA: ITER (Enciclopedia Italiana), V, 16-17, dicembre 02.

e il Ministero ha promosso di conseguenza una serie di iniziative per affrontare il problema[3].

1.2 Le grandi linee di ricerca attuali

In realtà, la nascita di progetti riguardanti l'educazione matematica non è un fenomeno circoscritto agli ultimi anni. Già all'inizio del secolo scorso era forte l'esigenza di trovare l'opportunità per discutere e affrontare questioni che riguardassero più da vicino l'educazione scientifica. All'interno del Congresso Internazionale di Matematici, a Roma, nel 1908, questa esigenza trovò risposta nell'istituzione della Commissione Internazionale d'Istruzione Matematica (ICMI)[4] di cui il primo presidente fu Felix Klein. Per mantenere sotto controllo quello che già si andava preannunciando come un fenomeno di rifiuto per le discipline scientifiche in generale e per la matematica in particolare, i primi sforzi della commissione furono rivolti al monitoraggio e all'osservazione della pratica didattica e dei curricula di matematica nelle scuole dei diciannove paesi coinvolti. Diversi decenni più tardi, H. Freudenthal organizzò, nel 1977, a Utrecht, il primo incontro dell'*International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME Group)[5], il primo gruppo di cooperazione internazionale impegnato nella ricerca nell'ambito dell'educazione matematica. Oggi i congressi annuali del PME costituiscono l'appuntamento internazionale più autorevole per i ricercatori del settore[6].

[3] Nel nostro paese esiste un problema analogo per le competenze scientifiche e linguistiche, siamo rispettivamente al 24° e al 22° posto. Il Ministero ha promosso per queste discipline, come per la matematica, dei piani per la formazione degli insegnanti in servizio: l'ISS e il POSEIDON. Questi piani costituiscono una vera azione di sistema sia per durata che per diffusione. In questa direzione esiste una possibile ricaduta concreta per i lavori di ricerca che si occupano della didattica di queste discipline e della matematica.

[4] Per maggiori dettagli si consulti il sito web http://www.mathunion.org/ICMI/.

[5] Informazioni dettagliate sulle attività del PME group sono reperibili sul suo sito web http://igpme.org

[6] Un altro organismo che conviene menzionare è l'ERME (the European Society for Research in Mathematics Education), nato nel 1997, il cui incontro biennale, il CERME, costituisce un appuntamento importante per i ricercatori del settore provenienti da paesi europei. Per ulteriori dettagli si veda il sito web http://ermeweb.free.fr/.

Sembra evidente come il secolo scorso sia stato percorso da una serie di iniziative (alcune delle quali qui richiamate), in cui un po' alla volta prendeva corpo l'esigenza di dare un'identità specifica al settore disciplinare della didattica della matematica. Questo complesso percorso è ancora in atto, in quanto si tratta di una disciplina che per sua natura coinvolge diversi aspetti e richiede competenze di natura disparata e la cui collocazione non appare pertanto universalmente condivisa. Infatti, se da un lato resta ferma l'esigenza di una profonda competenza matematica, dall'altro, però, è anche necessario rapportarsi ad altri ambiti culturali, che includono ad esempio la pedagogia e le scienze della mente.
Di recente significativi filoni di ricerca in didattica della matematica si stanno interessando anche di studi in ambito neuroscientifico. L'interesse verso queste tematiche appare sempre più diffuso, come si può rilevare dal numero crescente di autori che vi fanno riferimento (cfr., ad esempio, Campbell, Butterworth, Dehaene, Lakoff). Queste ricerche sembrano **gettare sempre più luce sugli assunti teorici**, confermando e perfezionando tesi elaborate in precedenza nell'ambito della psicologia. Inoltre, gli studi sul funzionamento del cervello (non solo umano), resi possibili da tecniche moderne di rilevazione di dati, stanno chiarendo sempre di più che cosa avviene nella nostra testa e nel nostro corpo quando siamo coinvolti nell'attività del capire. E' ormai assodato, ad esempio, come per ogni essere umano "normale" l'attività di capire sia autonomamente motivata e quindi non necessiti di una sollecitazione esterna. Questa riflessione pone l'accento su una contraddizione: come è possibile che la scuola, sebbene abbia come obiettivo proprio quello di promuovere un'attività automotivante come il capire, spesso fallisca soprattutto nell'educazione matematica, che è una componente essenziale del capire? Al riguardo la ricerca recente ha evidenziato che esistono dei "cortocircuiti" non necessari, dovuti alla dinamica tra sviluppo e cultura (cfr. Dehaene), che talvolta impediscono al processo di comprensione di avvenire nel migliore dei modi.
Le indagini sulle conoscenze matematiche, come il PISA, hanno dimostrato che il problema coinvolge anche le competenze di base che dovrebbero costruirsi nei primi anni di scuola. Sembra quindi che argomenti spesso considerati poco

problematici dagli insegnanti, come le strutture aritmetiche, siano in realtà il primo tassello di una comprensione matematica potenzialmente a rischio. Nel PME30 del 2006 su 180 research reports ve ne sono 40 che riguardano specificamente problemi di educazione matematica che coinvolgono le strutture aritmetiche. La necessità di confrontarsi con questo fondamentale capitolo della matematica ha da anni impegnato e, evidentemente, impegna ancora ricercatori del settore.

1.3 Un quadro teorico particolare

Il gruppo di ricerca in didattica della matematica di Napoli è andato costruendo, negli anni, un articolato modello cognitivo che vede alla base dell'apprendimento la dinamica di risonanza (Guidoni, 2007; Iannece & Tortora, 2007), la cui struttura è stata confermata da alcuni studi in ambito neuroscientifico.

La parola "risonanza" si riferisce in generale all'interazione tra l'individuo e la "realtà", tra i modi di capire individuali ed i modelli culturali socialmente trasmessi: secondo questo modello tutti gli esseri umani, infatti, mentre agiscono nel mondo producono e utilizzano una molteplicità di pre-rappresentazioni e ipotesi e le confrontano continuamente con la realtà così come la percepiscono attraverso i sensi e la comunicazione. Ogni pre-rappresentazione è così scartata o stabilizzata in accordo con le risposte negative o positive nate da questo confronto. In altre parole: ogni individuo cerca una risonanza tra una "sua simulazione cognitiva" di origine interna e l'input percettivo e culturale di origine esterna. Attraverso questo "processo di tentativi ed errori" ogni umano costruisce i modelli mentali in continua evoluzione che utilizza per interpretare il mondo e agire in esso. Questo processo trova conferma nel modello proposto da Changeux sul funzionamento del cervello, secondo cui il processo di apprendimento si realizza a partire da una disposizione biologica del nostro cervello di produrre "pre-rappresentazioni", il cui corrispettivo fisico è una produzione di sinapsi che si stabiliscono o muoiono in base al riscontro con la realtà esterna (Changeux, 2003).

Questo modello cognitivo ha importanti ricadute nell'educazione e fornisce, tra l'altro, una risposta alle contraddizioni relative ai processi cognitivi che si osservano nella scuola e che sono state menzionate nel paragrafo precedente: anche i modelli culturali, e quindi le strutture e i procedimenti della matematica, possono essere pensati come storicamente selezionati in questo modo (Dehaene, 1997); allora, per farne oggetto di insegnamento, pur senza ripercorrere per ovvie ragioni i tempi ed i modi di questa selezione, la mediazione didattica ha il compito di provare a farli "risuonare" nuovamente negli individui ai quali si intendono trasmettere. I modelli culturali della matematica sono, infatti, descritti dai segni e dalle rappresentazioni che l'evoluzione culturale matematica ha selezionato come efficaci. Questi segni mediano tra processi esterni e processi interni, configurando la dinamica di mediazione semiotica, teorizzata da Vygotkij, da cui prende forma il processo di interiorizzazione (Vygotskij, 1987). L'idea di questo studio è che siano quei segni, rappresentazioni o artefatti sentiti come risonanti dall'individuo, nel senso spiegato sopra, ad agire da mediatori semiotici.

1.4 L'attività sperimentale all'origine di questo lavoro

All'interno del quadro teorico sopra accennato è stata progettata un'attività sperimentale, a livello di scuola primaria, con l'obiettivo di creare condizioni che permettessero di innescare una dinamica di risonanza tra alcuni aspetti interpretativi dei fatti numerici e alcuni aspetti delle strutture aritmetiche elementari. Nell'azione di ricerca si è scelto di seguire una classe elementare dalla prima alla quinta, cercando in collaborazione con l'insegnante di creare "dinamiche di risonanza" fra **lo sviluppo cognitivo e affettivo**[7] dei bambini in ambito matematico e le **proposte di acquisizione guidata dei concetti e delle procedure, su cui si articola la "competenza aritmetica" studiata in letteratura**, per poi osservarne il funzionamento e gli effetti.

Il team di questa ricerca sperimentale è costituito da quattro persone: Paolo Guidoni

[7] Sull'importanza e l'incidenza sull'apprendimento delle componenti affettive vedi ad esempio (Zan, 2006).

(supervisore delle ricerche), Olga Mautone (insegnante della classe), Maria Mellone e Maria Pezzia (ricercatrici sul campo che si sono alternate). Attualmente (anno scolastico 2007-2008) la classe è al V anno e la ricerca è ancora in corso: in questa tesi saranno pertanto documentati gli avanzamenti relativi al percorso fino all'inizio del V anno.

1.5 Questa tesi

Alla luce di questo progetto sperimentale, nel presente lavoro si proverà a sostenere con adeguate argomentazioni l'ipotesi di fondo secondo cui una progettazione didattica volta ad innescare risonanza tra i modelli interpretativi "naturali" dei bambini e le strutture aritmetiche riesce a costruire gradualmente un uso consapevole di tali strutture, e aiuta i bambini ad orientarsi in situazioni di problem solving più complesse, lontane dagli standardizzati "problemi con il più o con il per" di alcune pratiche didattiche[8].

Questa tesi, d'altra parte, si può articolare solo sullo sfondo di alcune ipotesi generali sulla natura e sullo sviluppo della conoscenza concettuale e formale negli individui. La crescita delle capacità cognitive di un essere umano e delle sue conoscenze è un processo lungo e complesso, nel quale intervengono i più svariati fattori, individuali e ambientali; non è un processo lineare, ma è fatto di progressi e regressioni, successi e sconfitte; non si presenta mai nelle stesse forme, ed è perciò spesso imprevedibile nelle sue configurazioni specifiche, anche se lo è nei suoi caratteri generali. La consapevolezza di questa dinamica ha ridimensionato gli studi di Piaget, basati sul costrutto di "soggetto epistemico"[9], le cui sperimentazioni, condotte su bambini sempre diversi, non permettevano di fare correlazioni su uno stesso individuo o su uno stesso contesto lungo il percorso di crescita.

---

[8] É importante notare come anche nell'indagine OCSE/PISA i test sono costruiti per valutare la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per affrontare e risolvere situazioni reali e interdisciplinari, per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente e nelle quali gli ambiti di competenza o le aree curricolari che si possono applicare non sono confinate all'interno dei singoli ambiti della matematica, delle scienze o della lingua.

[9] Comportamento cognitivo standardizzato nelle sue prestazioni "formali" e nel suo sviluppo, indipendentemente dalla variabilità dei contesti e degli individui.

Questa consapevolezza ha evidenziato come qualunque valutazione o proposta sensata possa derivare solo da un lavoro molto lungo di osservazione centrata sulle dinamiche evolutive complessive dei singoli individui nei tempi lunghi (cfr., ad esempio, Boero, 1986), in contrasto con le osservazioni puntuali (nel tempo e negli argomenti) riferite a insiemi pur statisticamente significativi di individui.
Per realizzare osservazioni sperimentali di questo tipo c'è bisogno di specifici impianti metodologici. Una possibile scelta, quella operata in questo studio, è la metodologia di ricerca del *Design Study* (Brown & Collins, 1992). A partire dalla progettazione di percorsi di attività ritenute efficaci alla luce di studi precedenti per l'apprendimento di un determinato contenuto matematico, le ricerche che usano questa metodologia si pongono l'obiettivo di analizzare le diverse traiettorie concettuali seguite durante il percorso proposto al fine di modellizzare dei "corridoi concettuali"[10] da tenere presenti nelle progettazioni didattiche o curricolari. Questo tipo di impianto metodologico ha diversi livelli di realizzazione: mentre infatti la modellizzazione del corridoio è un problema di ricerca, la gestione dei percorsi riguarda più da vicino la mediazione didattica e, ancora, l'azione reciproca delle diverse traiettorie, che gli individui percorrono, interessa le problematiche di interazione tra pari.
Seguendo queste linee generali il progetto sperimentale, da cui è nata questa tesi, aveva l'intento di predisporre un percorso di apprendimento di alcuni aspetti delle strutture aritmetiche su tempi lunghi, e quindi di osservare la realizzazione sia in termini di reazione che di mediazione su **uno stesso gruppo di bambini lungo un tratto molto significativo, i cinque anni della scuola elementare, della loro esperienza di apprendimento**. E' chiaro che la portata di questa sperimentazione e la mole di dati raccolta potrebbero condurre ad altri interessanti risultati, se analizzati con altri impianti teorici. Le parole dei bambini e le loro rappresentazioni potrebbero essere confrontate e analizzate, ad esempio, secondo prospettive

[10] La metafora allude allo spazio astratto in cui avviene l'evoluzione del cambiamento concettuale dell'individuo, come risulta definito dall'interazione fra dinamiche cognitive individuali e azione didattica.

linguistiche o semiotiche, mentre il lavoro presente assume una prospettiva essenzialmente cognitiva e l'analisi semiotica verrà soltanto utilizzata come uno strumento fra gli altri.

Un obiettivo correlato è anche quello di costruire e testare un impianto didattico per l'insegnamento di alcuni aspetti delle strutture aritmetiche nella scuola primaria disponibile anche per l'utilizzazione e per l'adattamento da parte di altri, siano essi ricercatori o insegnanti (cfr. nota 3).

La valutazione dei risultati di una ricerca di questo tipo e il problema di poter pensare di estendere la sperimentazione ad altri contesti pongono una questione centrale con la quale questa tesi proverà a confrontarsi. In particolare il ruolo di formatore di insegnanti, che spesso nel settore della didattica della matematica si intreccia a quello di ricercatore, pone quotidianamente il problema di come l'esperienza maturata in progetti sperimentali possa essere comunicata negli aspetti essenziali, e quindi utilizzata in modo flessibile dai maestri o futuri maestri. Spesso il pericolo è che gli insegnanti rimangano con la convinzione di dover prendere un pacchetto di attività preconfezionato e "collaudato" dai ricercatori, e semplicemente "applicarlo" (Vaccaro, 2005). Ma procedendo in questo modo è ben difficile che i risultati siano positivi: si pone, in definitiva, nei confronti degli stessi insegnanti e formatori di insegnanti un problema di risonanza con il modello proposto, preliminare ad ogni successo didattico.

1.6 Sommario

Dopo questo **primo capitolo** introduttivo, nel **secondo capitolo** sarà presentato il quadro teorico del modello della risonanza cui è ispirato il progetto sperimentale. Nel **terzo capitolo** saranno discusse questioni sia di carattere epistemologico che psicologico relative alle strutture aritmetiche. Conviene anticipare che in tale capitolo piuttosto che fare un elenco bibliografico esaustivo sull'argomento, ci si soffermerà su alcuni studi particolarmente autorevoli - passati e contemporanei - che costituiscono un punto di riferimento per le ricerche del settore. A partire da questo confronto si proverà poi ad illustrare alcune delle ipotesi-congetture che hanno guidato la progettazione didattica della fase sperimentale.

Nel **quarto capitolo**, invece, saranno affrontate le problematiche metodologiche che animano il progetto sperimentale. L'impianto metodologico scelto è, come anticipato, quello del *Design Study* (Brown & Collins, 1992), basato sull'idea di coniugare sul piano progettuale le esigenze teoriche e pratiche mediante la prefigurazione di interventi al fine di verificare puntualmente la loro validità nel contesto concreto delle classi.

Il capitolo sulla metodologia di ricerca introduce alla parte empirica della tesi che si affronterà in maniera più estesa nel **quinto capitolo**. In tale capitolo, partendo dalla descrizione delle attività scelte, si analizzerà la loro realizzazione sia in termini di reazione dei bambini che in termini di mediazione adulta.

Infine nel **sesto capitolo**, dopo un'analisi globale dei risultati acquisiti, si tireranno le fila di questo studio e si prefigurano eventuali sviluppi di ricerca.

L'intero lavoro è caratterizzato da una struttura complessa che rende difficile una sua stesura lineare. Pertanto, onde ovviare a tale complessità ci si è serviti di note e rinvii tra i vari capitoli, funzionali ad una migliore comprensione del testo nella sua interezza, ed in grado di far emergere più facilmente i legami e le relazioni esistenti.

Capitolo 2
Il modello cognitivo:
modellizzare la conoscenza-la mente esplora se stessa

"Ogni teoria seria della coscienza dovrebbe proporsi di spiegare l'"orchestrazione" di quel flusso coerente di oggetti mentali che dà accesso alla conferma razionale di una proposizione, a quella "verità formale" che per Kant, si trova ***nell'accordo della conoscenza con se stessa****, fatta astrazione da tutti gli oggetti e da tutte le differenze tra di essi."* (Changeux, 2003, p.109)

2.1 Premessa

La modellizzazione della conoscenza costituisce oggi una vera sfida "globale". Sono molti i piani necessari ad interpretare "scientificamente" le principali dinamiche di acquisizione, uso, cambiamento, evoluzione individuale e culturale della conoscenza stessa, *sia* naturale *che* scientifica; *sia* a livello di prima formazione *che* a livello di formazione permanente. La sfida, quindi, è proprio quella di un confronto fra le molteplicità di approcci alla modellizzazione cognitiva che oggi sono di fatto disponibili. Potremmo distinguere due grandi aree di ricerca, situate a due estremi del metodo di indagine. Si tratta da una parte di vari filoni di *ricerca fenomenologica,* e quindi nel nostro caso di un'indagine su cosa di fatto succede o non succede a "scuola", e su come lo si può interpretare. L'altra area è sicuramente occupata dalle varie linee di *ricerca neurocognitiva*. Il recente sviluppo scientifico e tecnologico della strumentazione[11] di indagine neuorocognitiva ha reso particolarmente fertile questo settore di ricerca e sono sempre maggiori i risultati che provengono dall'osservazione del cervello che pensa *o* che studia in tempo reale. A questo punto, quindi, non può essere trascurato l'apporto alla conoscenza derivante da tali nuovi mezzi di esplorazione.

[11] Si pensi alle moderne tecniche di neuroimaging che consentono in particolare di esplorare le funzioni di neuroni e gruppi di neuroni, in corrispondenza a compiti cognitivi anche complessi. Cfr., ad esempio, Rizzolatti & Sinigaglia (2006).

Queste sorgenti indipendenti di modellizzazione (fenomenologica-psicologica e neurocognitiva) sembra che diano risultati per molti aspetti largamente coerenti. Data la totale indipendenza dei lunghi percorsi di ricerca che hanno portato a questo accordo fra molte delle ipotesi emergenti dai diversi settori, sembra lecito ritenere che si tratti di un fenomeno estremamente importante, quasi emozionante per gli addetti ai lavori.

In questo scenario si colloca il modello teorico che si intende presentare in questo capitolo. Il gruppo di ricerca in didattica della matematica di Napoli è andato costruendo, negli anni, attraverso ricerche fenomenologiche, un articolato modello cognitivo che vede alla base dell'apprendimento la dinamica di risonanza, la cui struttura ipotetica è, per l'appunto, stata confermata da alcuni studi in ambito neuroscientifico. Questa modellizzazione cognitiva, quindi, oltre che fornire utili strumenti di osservazione e progettazione didattica offre anche la possibilità di legare teoricamente le sperimentazioni di natura fenomenologica a quelle di natura neuroscientifica.

Prima di descrivere il modello cognitivo che chiameremo "della risonanza" vale forse la pena di chiarire l'atteggiamento con cui tale modello è stato usato nella fase di progettazione sperimentale. Il modello della risonanza, infatti, non è stato inteso come "oggetto teorico" con cui "giocare a" verifica-vs-falsificazione. Questo gioco, infatti, andrà comunque avanti attraverso i modi variati e gli intricati percorsi della ricerca. Sembra, allora, più appropriato vedere un modello cognitivo come la proposta di un modo possibile di pensare e di vivere in maniera coerente la complessa realtà della trasmissione culturale. In altre parole, un modello cognitivo è "vivo", nel senso di utile, se è possibile appropriarsi dei suoi modi di guardare e vedere la trasmissione culturale in maniera tale da rendere la mediazione didattica, a tutti i livelli, efficace in relazione allo sviluppo di chi deve capire e imparare. Allora se appropriarsi non significa semplicemente indossare un abito, ma piuttosto cambiare al tempo stesso sé stessi insieme all'oggetto di cui ci si è appropriati, si intuisce che questo modello è stato scelto perché realmente sentito come utile dai ricercatori che hanno partecipato all'azione sperimentale descritta in questa tesi.

Il progetto sperimentale è nato con lo scopo di verificare l'ipotesi di fondo secondo cui una progettazione didattica volta ad innescare risonanza tra i modelli interpretativi "naturali" dei bambini e le strutture aritmetiche riesce a costruire gradualmente un uso consapevole di tali strutture. Questo modello teorico è stato quindi utilizzato come strumento per progettare e analizzare l'intervento di ricerca, descritto nel cap. V.

Nella fase di progettazione, d'altra parte, è stato dato un ruolo importante ad alcuni artefatti (cfr., ad esempio, par. 5.3.3-5.4.1). Sembra allora importante fare riferimento in questo capitolo anche ad alcuni degli aspetti della teoria della mediazione semiotica di Vygotskij (cfr., ad esempio, Bartolini Bussi & Mariotti, 1999). D'altra parte la teoria della mediazione semiotica, come illustrato nell'ultimo paragrafo, ben si integra al modello della risonanza offrendogli preziosi elementi di complemento.

2.2 La dinamica della risonanza

2.2.1 Risonanza tra cognizione individuale e realtà (funzioni psichiche elementari)

Il gruppo di ricerca di Didattica della Matematica e di Didattica della Fisica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, sotto la guida di Paolo Guidoni e di Roberto Tortora, attraverso l'intreccio di osservazioni sperimentali,[12] epistemologiche e neuroscientifiche è andato perfezionando nel corso di molti anni il modello cognitivo che vede alla base dell'apprendimento la dinamica di risonanza.

Per cercare di chiarire il significato della parola risonanza in questo contesto conviene sottolineare in primo luogo come questa parola evochi una potente metafora che cerca di legare il contesto della modellizzazione fisica a quello della

[12] Più di trenta anni di ricerca fenomenologia, in particolare si tratta di indagini portate avanti a lungo termine e a largo spettro in contesti reali di insegnamento e apprendimento (dalla scuola d'infanzia al primo biennio universitario, in matematica e più in generale in scienze).

modellizzazione cognitiva, trasferendo il fenomeno di risonanza dai processi di natura fisica a quelli di natura cognitiva.
In Fisica la risonanza è un fenomeno pervasivo a tutti i livelli di interpretazione e si verifica a livello elementare quando ad un sistema vengono trasmessi impulsi con frequenza uguale alla frequenza di oscillazione del sistema stesso e, di conseguenza, esso oscilla con oscillazioni di ampiezza crescente fino ad un massimo.

E' interessante notare che per quanto si tratti di una metafora, tutti gli stadi della nostra coscienza, ordinari o straordinari che siano, sono dovuti all'incessante attività elettrochimica del cervello, che si manifesta attraverso "**onde elettromagnetiche**"[13].
Il nostro cervello si potrebbe paragonare ad una stazione radio, trasmittente e ricevente. Come vedremo, infatti, il cervello è sia trasmittente nel senso che proietta delle sue ipotesi, ma allo stesso modo quando viene stimolato, o sottoposto ad una alta dose di **vibrazioni**, il cervello assume il ruolo di ricevente di stimoli provenienti da sorgenti esterne.
Per chiarire in che senso si parla di risonanza in ambito cognitivo potremmo partire da alcune osservazioni sulle dinamiche naturali attive nella gestione della percezione e dell'azione, come la dinamica cognitiva totalmente astratta implicata nel fondamentale costrutto di "oggetto permanente". Secondo J. Piaget, un oggetto familiare come un biberon, un pallone, una bambola ed anche una persona che subisce spostamenti, ad esempio, per traslazione o rotazione, non viene considerato dal bambino nei primi mesi di vita come un solo ed unico oggetto, che resta identico a se stesso sotto i diversi aspetti attraverso i quali può apparire al soggetto nel corso

[13]In realtà ci sono due dinamiche "fisiche" nel cervello. Una di carattere elettrico le cui onde sono il fenomeno macroscopico che emerge dall'osservazione, l'altra di carattere chimico. Le due dinamiche interferiscono con tempi diversi.

delle diverse tappe di questi spostamenti. E' nel corso dei primi mesi di vita che si costruiscono le prime invarianze dell'oggetto attraverso un'attività "spontanea" di apprendimento le cui modalità di attuazione sono descritte da Piaget attraverso la doppia dinamica di assimilazione e accomodamento. Il bambino deve, infatti, imparare ad **integrare** una serie di informazioni che riguardano la vista, l'udito e la motricità.

Queste osservazioni fatte in ambito psicologico per il bambino trovano riscontro nel modello dell'elaborazione delle informazioni percettive dell'essere umano in generale (anche adulto). Alcuni recenti studi in ambito neuroscientifico hanno infatti messo in luce come la capacità di riconoscere e identificare anche solo visivamente un oggetto, nelle condizioni più diverse di interazione, sembri basata sulla costruzione attiva estremamente sofisticata di un "modello mentale". Quest'attività "naturale" del cervello non si esplica nella rappresentazione a posteriori delle situazioni, ma piuttosto nella proiezione di una molteplicità di pre-rappresentazioni generate dalla struttura sinaptica individuale, in un processo di tentativi ed errori modulato dal riscontro con la realtà esterna: *"Il cervello funziona come un continuo generatore di ipotesi"* (Changeux, 2003).

Per funzionare, il cervello deve quindi poter "proiettare" all'esterno le sue conoscenze ed i suoi schemi di organizzazione, ma ancor più deve avere la possibilità di selezionare la rappresentazione da stabilizzare mediante un qualche feedback dalla realtà (Iannece & Tortora, 2007 a).

Dal punto di vista della semplice percezione visiva di un oggetto potremmo, ad esempio, osservare come in realtà nessuna singola percezione diretta sia in grado di fornire come dato di ingresso la tridimensionalità dell'oggetto osservato: d'altra parte il sistema cognitivo simula, integrando i diversi dati di ingresso, la tridimensionalità dell'oggetto in modo formale e la evoca e la gestisce sia a livello di progettazione dell'azione, che di interpretazione percettiva, proprio perché il modello tridimensionale, tra i vari possibili proiettati trova continuamente un feedback **risonante** con la realtà.

Già a questi livelli primari il sistema cognitivo incorpora nella sua stessa struttura la dinamica di **risonanza**: *infatti è solo se la simulazione cognitiva trova **risonanza** con l'input percettivo e con i risultati dell'azione, che "discorso" soggettivo e "azione" oggettiva possono garantire il successo della tensione intenzionale* (Guidoni, 2007 b). E' solo se la simulazione tridimensionale dell'esempio precedente "funziona" al meglio, infatti, che può avere buon fine una qualsiasi azione con tutte le sue difficoltà, in cui è evidente la complessità legata dalla necessità di integrare reciprocamente input provenienti da canali percettivi diversi[14]. Discorsi analoghi si possono fare in relazione ad altre sofisticate categorie di simulazione che nel loro complesso determinano le strutture cognitive di base. A fianco di quella di "oggetto permanente", si potrebbe citare ad esempio la categoria di "fenomeno permanente", ancora più complessa della precedente; o anche quella di "sfondo permanente", rispetto a cui gli oggetti, i fenomeni e le loro modulazioni vengono "evidenziati a contrasto" a seconda dell'interesse dominante (Guidoni, 2007 b).

2.2.2 L'irragionevole efficacia della matematica

Le strutture che governano la dinamica che stiamo cercando di evidenziare sono in parte innate, selezionate dall'evoluzione delle diverse specie, e in parte trasmesse culturalmente ed è difficile stabilire con precisione il ruolo di ciascuna delle due componenti nella costituzione dei nostri "modi di guardare" naturali e culturali.
Dehaene ha esposto una teoria saldamente radicata nelle neuroscienze cognitive secondo cui anche la matematica è stata oggetto dell'evoluzione biologica: *"Conosciamo la storia della lunga ascesa attraverso tentativi ed errori verso una maggiore efficacia. Non è dunque necessario supporre che l'universo sia stato concepito per essere conformato alle leggi matematiche. Non potrebbe essere piuttosto che le leggi matematiche, e, prima ancora, i principi di organizzazione del cervello siano stati selezionati in funzione del loro adattamento alla struttura dell'universo? Il miracolo*

[14] Il coordinamento percettivo-motorio è in ben osservabile sviluppo fino all'età adulta.

dell'efficacia della matematica, caro a Wigner, si spiegherebbe allora con un'evoluzione selettiva, proprio come il miracolo dell'adattamento dell'occhio alla vista. Se la matematica di oggi è efficace, forse dipende dal fatto che la matematica inefficace di un tempo è stata eliminata senza pietà." (Dehaene, 1997, p. 277). Deheane ha poi ulteriormente precisato che:*"..la nostra abilità nel dare senso al mondo attraverso la matematica è dovuta all'interiorizzazione di rappresentazioni nella mente e nel cervello umani nel corso dell'evoluzione. Queste rappresentazioni sono così "irragionevolmente efficaci" nella comprensione di quello che ci circonda perché sono state selezionate precisamente per la loro adeguata maniera di rappresentarlo. Infatti, due livelli consecutivi di evoluzione e selezione spiegano l'incredibile adeguatezza della moderna matematica: il primo riguarda l'evoluzione biologica della abilità elementari di rappresentazione, il secondo riguarda invece l'evoluzione culturale degli alti livelli della matematica. Nel corso dell'evoluzione biologica, la selezione ha formato le nostre rappresentazioni celebrali scegliendo le più adatte al mondo esterno.* ***Ho mostrato come l'aritmetica sia parte di questo adattamento***[15]*. Ai nostri occhi, il mondo è per la maggior parte fatto di oggetti separati che si strutturano in insiemi in accordo con le leggi dell'aritmetica. Rappresentare queste operazioni di combinazioni è utile per molti organismi. Pressioni selettive, quindi, hanno guidato la formazione di un sistema interno devoluto all'aritmetica elementare nel cervello di molte specie animali, inclusi gli esseri umani."* (Deahene, 2001, p.16, mia traduzione)

Culturale o biologico, è comunque un processo di tipo evoluzionistico[16] ad aver configurato la sistemazione culturale, anche matematica, così come è oggi a nostra disposizione. Lo stesso processo evoluzionistico è avvenuto anche all'interno delle diverse culture (o "all'esterno", attraverso il conflitto o l'integrazione tra culture differenti): nel corso delle generazioni si sono selezionate categorie fondamentali, modelli, strutture, che costituiscono sia la conoscenza (e il linguaggio) comune sia quella più specializzata e "alta".

[15] L'aritmetica è il contenuto disciplinare al centro della progettazione sperimentale analizzata in questa tesi (cfr. cap. 3 e cap. 5).

[16] Per una "teoria evoluzionistica dello sviluppo scientifico" cfr. Kuhn (2000).

La selezione è avvenuta certamente anche per ragioni storiche (non necessariamente "simpatiche" in molti casi: il tipo di razionalità che caratterizza il pensiero scientifico occidentale, ad esempio, si è imposto su altri modi di guardare il mondo non perché sia in assoluto "migliore", ma perché ha contribuito a distruggere con la forza le società e i modi di vita per i quali quegli altri strumenti di conoscenza erano utili ed efficaci), e in certi casi a fattori casuali. Tuttavia, per avere successo nella selezione è necessario anche che i modi di guardare servano al loro scopo, quello cioè **di permettere agli esseri umani di orientarsi e agire nel mondo, di "mettere in ordine le cose" nei modi più efficaci** (Pezzia, 2004). L'impressione che riceviamo usando tali strutture culturali quindi è che esse "facciano presa sulle cose", che gli oggetti da noi osservati e manipolati "rispondano" bene alle operazioni da noi attuate, "lasciandosi mettere in ordine": in tale senso si può utilizzare ancora la metafora della "risonanza" fra le strategie conoscitive e le strutture esterne a cui esse si riferiscono nell'interpretazione, nella progettazione e nell'azione.

2.2.3 Risonanza, cognizione individuale, realtà e cultura (funzioni psichiche superiori)

Recenti studi neuroscientifici hanno evidenziato come nel nostro cervello non esistano circuiti unicamente devoluti alla matematica, ma che piuttosto la matematica sia incorporata in dei circuiti utilizzati anche per altri compiti. Ad esempio la corteccia intraparietale inferiore, che agisce nel riconoscimento delle quantità, è una zona devoluta anche alla rielaborazione delle informazioni provenienti dalle percezioni sensoriali come la vista e l'udito. Questo sottolinea che l'attività cognitiva di "astrazione" avviene all'interno di un organismo (sistema biologico) complesso, attraverso funzionamenti specifici di alcune sue componenti, e comunque in complessa continuità, integrazione, interferenza, appunto "organica", con tutte le altre funzioni variamente specializzate.

Quindi da un punto di vista fisiologico l'"astrazione" non "risiede" in strutture neurali specializzate, ma si sviluppa e perfeziona attraverso complessi processi di inibizione e marcatura[17], che avvengono grazie all'interazione sociale, al linguaggio e alla progressiva acquisizione culturale, all'interno delle stesse reti neurali biologicamente deputate alla gestione percettivo-motoria. Come hanno evidenziato Gallese e Lakoff (Gallese & Lakoff, 2005) ogni "conoscenza astratta" viene in definitiva costruita "parassitando" le strutture di percezione e azione.

L'effetto dell'apprendimento sulla struttura neurale quindi, come intuito da Vygotskij,[18] non si riflette nella creazione *di un nuovo gruppo di cellule nervose* deputato alla gestione delle nuove *funzioni nervose superiori*, ma in uno sviluppo delle strutture sinaptiche già utilizzate per compiti percettivi[19]. Ecco che la potente visione di Vygotskij delle funzioni psichiche superiori come evoluzione delle funzioni psichiche elementari sembra essere confermata dal fatto che il pensiero astratto "parassita" il pensiero percettivo. Sembra quindi che proprio in questo modo le dinamiche di percezioni elementare del cervello modellizzate attraverso il costrutto di risonanza tra cognizione individuale e realtà, possano essere utilizzate anche a livello "più alto".

Nel caso dell'apprendimento della matematica si tratta, però, non più di risonanza semplicemente tra cognizione individuale e realtà. Come osservato nel paragrafo precedente, il cervello deve poter "proiettare" all'esterno le sue conoscenze ed i

---

[17]Come si è già sottolineato la conoscenza deriva *in primo luogo* dai sensi: per poter "vedere" il mondo è necessario sapere cosa "guardare" e come guardarlo; servono delle "ipotesi di partenza" anche per la conoscenza comune (di solito implicite, e per questo sfuggenti); servono delle strutture in cui collocare le informazioni ricevute tramite i sensi e ordinarle, dei criteri secondo i quali selezionarle, altrimenti gli innumerevoli stimoli sensoriali potrebbero solo sommergerci e invaderci, oppure passarci addosso e scivolare via lasciandoci indifferenti: non arriverebbero neppure a costituire delle "informazioni", e tantomeno quindi a coagularsi in significati, concetti, esperienze. Nel momento in cui, invece, abbiamo delle strutture che ci permettono di "prendere informazioni" e farle nostre, le esperienze (intese sia come percezioni sensoriali che, ad un livello più complesso, come "esperienze di vita", "esperimenti" eccetera) possono intervenire su tali strutture attivando processi di adattamento e modificazione, in una dinamica di continua interazione reciproca.

[18]"*Lo sviluppo di nuovi "organi funzionali" avviene attraverso la formazione di nuovi sistemi funzionali che è un mezzo per lo sviluppo illimitato dell'attività cerebrale. La corteccia cerebrale umana, grazie a questo principio, diviene un organo di civilizzazione in cui sono nascoste possibilità senza limiti, e non richiede apparati morfologici nuovi ogni volta che la storia crea il bisogno di una nuova funzione*". (John-Steiner & Souberman, 1987, pag. 182).

[19]Tale evoluzione avviene sia *"verticalmente", attraverso gli strati della corteccia, che "orizzontalmente", come ricchezza delle mappe corticali che connettono zone specializzate a livello funzionale.*

suoi schemi di organizzazione per poi selezionare la rappresentazione da stabilizzare. Questo processo di selezione avviene attraverso dei feedbacks che, nel caso di funzioni più complesse rispetto alla semplice percezione sensoriale – come l'apprendimento della matematica, provengono anche dalla integrazione socio-culturale delle basi cognitive disciplinari.

In definiva, una continua azione di modellizzazione e simulazione, con continua valutazione di *fit*/*no-fit* delle diverse ipotesi in gioco, sottende tutta la complessità della dinamica cognitiva: da quella percettivo-motoria a quella più esplicitamente formale. E quando si "indovina", quando si riconosce, quando si riesce, quando si capisce, quando si "mette in forma", si produce una *risonanza cognitiva* che in termini piagetiani può essere definita come una convergenza locale fra assimilazione e accomodamento, che produce una equilibrazione parziale. La dinamica di assimilazione/accomodamento di Piaget sembra, infatti, il corrispettivo funzionale del gioco di selezione e stabilizzazione delle sinapsi che, come si è visto, genera e configura la struttura neurale e le capacità cognitive dell'individuo. L'intuizione di Piaget però non contemplava il ruolo cruciale giocato dall'interazione sociale. Nella dinamica di apprendimento della matematica che stiamo cercando di analizzare va chiarito, infatti, che le sue dimensioni essenziali non sono solo l'io (la cognizione individuale) e la realtà, ma entrano in gioco in maniera cruciale **la sistemazione culturale della disciplina** e **la comunità all'interno della quale l'individuo percorre la sua ricerca**. Sono infatti la **sistemazione culturale** e la **comunità sociale** i nuovi canali di interazione con cui l'individuo si confronta, proiettando ancora una volta le sue ipotesi e le sue pre-rappresentazioni costruite attraverso quella dinamica elementare che abbiamo evidenziato nel paragrafo precedente. Ed è proprio la risonanza tra la cognizione individuale e la cultura e, ancora, la risonanza nell'interazione sociale ad agire da sfondo e costituire la chiave dinamica dello sviluppo di ogni conoscenza sia locale che a lungo termine: *"Learning through understanding is the result of a process of* ***resonance*** *between individual cognition, social culture and reality structures, along cognitive paths efficiently addressed and controlled in their meaning-driven* *dynamics"*[20] (Guidoni, Iannece e Tortora, 2005, p. 75).

Quindi anche **capire** il senso di un costrutto culturale astratto, da una semplice frase a un'intera teoria, è un processo congetturale fatto di ipotesi e conferme, di aspettative e aggiustamenti che evolve attraverso quel meccanismo di *fit/no-fit*, risonanza/non-risonanza che costituisce una delle caratteristiche essenziali di ogni vivente. Si potrebbe parlare di un **senso interno** che a livello biologico si aggiusta e raffina "automaticamente" attraverso l'esperienza: ma che a livello culturale può e deve essere "educato" in un continuo progresso di sviluppo di *competenza* a discriminare in modo controllato i diversi piani che esso inesorabilmente e "automaticamente" correla attraverso il suo radicamento biologico. Ricerca e valutazione della **risonanza** sono quindi sempre gestite da questo *senso interno.*

Si tratta, però, di una dinamica che è anche intrinsecamente faticosa, in quanto responsabile di progressiva e sempre incerta assimilazione-accomodamento-equilibrio sul piano interindividuale, intraindividuale e culturale: a partire dalla mediazione dello strumento concettuale così come è progressivamente definito all'interno della stessa storia della cultura.

2.2.4 Risonanza come interferenza reciproca tra le diverse rappresentazioni della realtà

Nel gestire in maniera "astratta" la realtà il sistema cognitivo, quindi, è impegnato incessantemente nella duplicazione e simulazione interna delle possibili interazioni con la realtà, alla continua ricerca di coerenza tra i diversi canali sensoriali. La ricostruzione cognitiva di un oggetto, da questo punto di vista, può essere vista come il risultato della risonanza dei vari canali percettivi.

Attraverso un incremento di complessità si arriva fino alla duplicazione astratta che gestisce le correlazioni, ossia le strutture che sono alla base, ad esempio, di una

---

[20] "L'apprendimento che si basa sul capire è il risultato di un processo di risonanza tra la sfera della cognizione individuale, la sfera culturale e le strutture della realtà, processo che si sviluppa attraverso percorsi di conoscenza di cui occorre tenere sotto efficace controllo le dinamiche di senso."

teoria matematica. Questo stesso nodo dinamico regola, in particolare, quelle sofisticate strategie cognitive che utilizzano la "**multirappresentazione risonante**" di una stessa "realtà" come chiave dinamica per fare meglio risaltare aspetti diversi delle sue correlazioni strutturali. Così a partire dalle più "banali" multirappresentazioni linguistiche, simboliche, formali, iconiche, gestuali, a livello di scuola di base, si arriva fino ai più elaborati livelli delle "teorie" scientifiche o matematiche. In particolare, come messo in evidenza anche da Duval, l'utilizzo di diversi sistemi di rappresentazione (linguistici, formali, iconici), aiuta ad interagire con le strutture matematiche per loro natura astratte (Duval, 1995). La disponibilità di più sistemi semiotici permette infatti diverse rappresentazioni di uno stesso "oggetto", il che arrichisce le capacità cognitive dei soggetti e le loro rappresentazioni mentali (Ferrari, 2004). D'altra parte, oltre ai diversi sistemi di rappresentazione possediamo altri canali di interazione con gli oggetti matematici visti come strumenti interpretativi della realtà: la percezione stessa, la previsione, l'azione, canali che si sviluppano dai livelli più elementari a quelli più astratti. Va sottolineato, infatti, che una delle funzioni cognitive costitutive del pensiero matematico è proprio la capacità di passare in maniera autonoma da una dimensione cognitiva all'altra, in un gioco di mutuo e progressivo rinforzo. D'altra parte il tentativo di cercare coerenza, e quindi risonanza, tra queste diverse dimensioni del pensiero descrive il processo di conoscenza: "*Learning through understanding* [...] *requires, at any level, also **resonance** between various "dimensions" of natural thinking: perception, language, action, representation, planning, interpretation, etc.*"[21] (Guidoni, Iannece e Tortora, 2005, p. 75).

2.2.5 Consapevolezza della risonanza

Fino ad ora abbiamo cercato di chiarire qual è il modello di apprendimento al quale si fa riferimento. É chiaro che il costrutto di risonanza, però, si riferisce ad una

[21] "L'apprendimento che si basa sul capire richiede, ad ogni livello, anche risonanza tra le diverse dimensioni del pensiero naturale: percezione, linguaggio, azione, rappresentazione, progettazione, interpretazione, etc."

dinamica interna e per questo rimane un'ipotesi di funzionamento del cervello, ipotesi che, oltre ad essere nata da anni di ricerca sul campo, ha anche trovato, come si è cercato di illustrare, grandi riscontri con i recenti studi in ambito neuroscientifico. D'altra parte questo modello ha bisogno di fornire degli strumenti utili in ambito didattico perché possa essere "vivo" nel senso che abbiamo cercato di chiarire all'inizio del capitolo.

Il carattere modellistico di ogni interazione con l'esperienza quotidiana fa parte del funzionamento spontaneo del nostro cervello, ma la consapevolezza di questo processo è tutt'altra cosa. In questa direzione potremmo dire che verificare questa dinamica risulta un compito difficile: d'altra parte non è detto che ciò avvenga sempre in maniere consapevole, ma è proprio questo il punto.

"*Lo sviluppo mentale del bambino è un continuo processo di acquisizione di controllo attivo su funzioni mentali inizialmente passive. Per acquisire questo controllo il bambino impara a usare i segni e così trasforma queste funzioni mentali 'naturali' in funzioni culturali mediate da segni*".[22]

In questo modo Vygotskij sottolinea l'importanza cognitiva ed emotiva connessa al prendere coscienza dei propri processi di pensiero, che in questo modello significa prendere coscienza di quando una simulazione, un'ipotesi o una prerappresentazione è risonante nel senso spiegato precedentemente.

"*La legge generale di sviluppo sta nel fatto che la presa di coscienza e la padronanza sono propri solo di uno stadio superiore dello sviluppo di qualsiasi funzione. Esse compaiono tardi. Devono essere precedute necessariamente dallo stadio del funzionamento inconsapevole e involontario di una data forma di attività della coscienza. Per prendere coscienza, bisogna possedere ciò di cui si vuole prendere coscienza. Per padroneggiare bisogna disporre di ciò che deve essere sottoposto alla nostra volontà*." (Vygotskij, 1990, p. 236).

Nel suo libro *il Gene della Matematica*, riprendendo un'ipotesi già avanzata da molti, Devlin (2002) argomenta la tesi che la matematica, come il linguaggio, non sia nata soltanto per risolvere problemi concreti ma piuttosto per capire e dominare,

[22] (Berg, 1970), citato in (John-Steiner & Souberman, 1987), p. 179.

attraverso previsioni, la complessità del mondo circostante (dall'alternarsi di giorno-notte, alla posizione dei corpi celesti, ecc.). A questo punto l'altra ipotesi fondamentale è che *la "conoscenza astratta" è conoscenza di correlazioni che restano stabili attraverso diversi contesti*, e che quindi la consapevolezza della dinamica interna avvenga proprio attraverso il riconoscimento della stessa struttura attraverso il cambiamento dei contesti.

Se, infatti, da un lato la dinamica cognitiva appare gestita, come abbiamo osservato, secondo strategie di risonanza, in relazione a particolari configurazioni di schemi, d'altra parte potremmo trovare un altro aspetto essenziale proprio nelle strategie di variazioni sul tema a partire da schemi-base. Questo in relazione sia al pensiero referenziale, controllato cioè direttamente dal contesto, che al pensiero astratto, controllato da strutture interne che prescindono dal contesto.

Da un punto di vista didattico questo significa che ci sono due momenti fondamentali di sviluppo dell'apprendimento. Il primo è un momento contemporaneo ad una particolare attività o ad un particolare contesto, nel quale si può o meno configurare una dinamica di risonanza tra il proprio modello e il modello culturale. Chiaramente in una situazione di interazione didattica è possibile, ma non scontato, che il ricercatore o l'insegnante possa, attraverso un'analisi semiotica, accorgersi di quello che sta succedendo: da questo punto di vista l'osservazione diretta della situazione didattica, dall'analisi delle registrazioni o video-registrazioni, all'analisi delle rappresentazioni prodotte, acquista un valore fondamentale.

Il secondo momento invece riguarda proprio la capacità di gestire, in autonomia, variazioni sul tema, riconoscendo che un determinato schema culturale scoperto in un particolare contesto è utile nella modellizzazione di un'altra situazione. E' in questa fase che avviene la stabilizzazione di uno schema e la costruzione di consapevolezza del processo; ed è in questa fase che per il ricercatore o per l'insegnante risulta più facile capire quello che è realmente avvenuto. La stabilizzazione o interiorizzazione è definita da Vygotskij come "*la ricostruzione interna di un'operazione esterna*" (Vygotskij, 1987, p. 86), in cui il processo di costruzione della conoscenza individuale è generato da esperienze sociali condivise. Infatti, coerentemente al modello cognitivo, se “conoscere” significa sostanzialmente “essere in grado di duplicare, selettivamente e in modo risonante, aspetti cruciali di correlazioni esterne al pensare locale”, conoscere il conoscere significa essere in grado di attivare dinamiche interne in grado di andare in risonanza con i comportamenti cognitivi propri e altrui.

2.2.6 Condizioni di risonanza e *appropriazione*

La metafora della risonanza funziona anche nel senso che, così come in ambito fisico, anche in ambito cognitivo la risonanza avviene solo in condizioni molto particolari, speciali; e in questa direzione il costrutto della risonanza assume un ruolo fondamentale oltre che nell’interpretazione delle specifiche situazioni didattiche, come visto nel paragrafo precedente, anche nella pianificazione e nella gestione dei contesti di apprendimento a lungo termine.

Il mediare la risonanza, e quindi la progressiva dinamica di assimilizione-accomodamento-equilibrio individuale, di fronte ai dati spesso di per sé non risonanti di conoscenza-natura-cultura è un lavoro molto complesso. Questa mediazione richiede competenze cognitive e disciplinari adeguate al suo ruolo: sia per accorgersi di *dove*[23] sono (Wittgenstein, 1980); sia per individuare le caratteristiche della *strada* via via più adatta alla persona e allo scopo. Ognuno di questi aspetti dovrebbe essere specificato ed esemplificato; e d’altra parte, a seconda del contesto, le dimensioni interne andrebbero delineate *proprio perchè il modello può prendere una specifica forma adatta* a ogni specifica situazione.

Sicuramente, comunque, questo modello di funzionamento del cervello mette in primo piano il ruolo della mediazione, ed è per questo che il quadro della mediazione semiotica risulta complementare e quindi ben si integra ad esso. Si tratta di permettere l’appropriazione di alcuni **strumenti** che aiutino le persone ad interpretare il mondo in cui si trovano a vivere, in modo che possano agire in esso

[23]Il dove non è mai un punto su una linea di percorso in qualche modo predefinito, ma sempre uno *spazio* multidimensionale e multivalente con molte potenziali “uscite”, cfr Vygotskji.

perseguendo i propri fini nella maniera più efficace, oltreché, per quanto possibile, libera da condizionamenti. Ciò implica che gli individui non devono essere schiacciati da un *bagaglio culturale* che la generazione precedente scarica loro addosso: il ruolo dell'insegnante dovrebbe essere piuttosto quello di **mettere in relazione cultura e bambini [sollecitando] un confronto sereno**, che accresce il desiderio di conoscere mostrandone il significato e il valore. Perché gli artefatti culturali possano effettivamente essere usati in modo personale, per perseguire i propri fini appunto, ognuno deve *appropriarsene* (Vygotskji), "incorporarli", il che significa attivare un processo di reciproca trasformazione: l'artefatto culturale cambia nel momento in cui l'essere umano lo fa suo, lo "acquisisce" (cfr. il costrutto di *assimilazione* di Piaget), e contemporaneamente cambia anche l'essere umano che ristruttura i propri modi di percepire e di agire in relazione alla presenza "dentro di sé" del nuovo strumento (cfr. il costrutto di *accomodamento* di Piaget). Ovviamente tali cambiamenti non si operano in un momento, come se la conoscenza fosse un cibo che viene inghiottito e digerito in un paio d'ore, ma richiedono dei processi anche lunghi nel corso dei quali gli strumenti acquisiti interagiscono con il mondo e con altri strumenti, dimostrandosi di volta in volta più o meno efficaci.

E' importante distinguere *livelli/modi diversi di appropriazione* :

a) un'*appropriazione "oggettiva"*: si acquisisce la capacità di esibire a richiesta un comportamento (verbale, operativo,…) che soddisfa dati e precisi canoni (si "sanno" dire le tabelline …);

b) un'*appropriazione"strumentale"*: il comportamento non è più la risposta a una sollecitazione precisa, ma l'individuo è in grado di recuperare e usare autonomamente una particolare conoscenza secondo uno scopo (ci si sa servire della competenza moltiplicativa sugli interi per schematizzare e risolvere numericamente semplici situazioni problematiche, una volta riconosciute come "moltiplicative"...);

c) un'*appropriazione"strutturale"*: nel comportamento globale la possibile, iterata, variata schematizzazione modellistica di aspetti di realtà è integrata al complesso delle altre competenze cognitive e operative, e ne diventa un aspetto evocato quasi automaticamente e usato flessibilmente (la consapevolezza che aspetti diversi di realtà sono schematizzabili numericamente, e che la struttura numerica si articola in una molteplicità di possibili relazioni interne fra cui quelle moltiplicative, incide sistematicamente sulla capacità e sul modo di affrontare situazioni a livelli anche molto diversi di complessità). A questo punto, in altre parole, un modello diventa parte integrante e caratterizzante della "personalità cognitiva" del soggetto, e partecipa a pieno titolo alla sua dinamica evolutiva (Balzano, Guidoni e Minichini, in press).

Ovviamente le diverse modalità di appropriazione sono sempre reciprocamente legate e intrecciate – ad ogni livello cognitivo e ad ogni età, ma in particolare nel corso dello sviluppo: ed è importante che se ne tenga strategicamente conto anche per rendere la comunicazione tra le persone, e in particolare la mediazione didattica, significativa ed efficace nelle sue possibili articolazioni e soprattutto nei suoi scopi realistici. Al tempo stesso, d'altra parte, è facile rilevare che analoghi livelli e/o criteri di graduale "appropriazione" sono riconoscibili anche nella dinamica storica attraverso cui nuovi modelli culturali sono stati e sono poco a poco assunti e integrati dalla comunità culturale nel suo complesso: spesso attraverso "resistenze" e incoerenze, incomprensioni e distorsioni analoghe a quelle che si presentano anche a livello individuale. Con una cruciale differenza: in questo caso una mediazione dall'esterno della conoscenza di gruppo non è possibile, e la conoscenza globale evolve solo attraverso quelle interazioni fra pari di cui lo stesso Vygotskji ha indirizzato a riconoscere l'efficacia (per l'individuo come per il gruppo). A livello individuale invece una mediazione adulta consapevole può guidare e sostenere questa dinamica.

Questa visione delle cose implica, in parallelo alla mediazione, la scelta di metodi "attivi" di acquisizione della conoscenza, che coinvolgano la persona nella sua totalità: è difficile usare in modo autonomo e "creativo" degli strumenti acquisiti passivamente lasciandosi trascinare da qualcun altro, che non ci ha dato modo di sperimentare l'utilità di tali conoscenze e le soddisfazioni che ci potrebbero dare attraverso il loro uso finalizzato. Solo così l'interazione può diventare risonante anche perchè l'ontogenesi non sempre "ricapitola" di per sé ("automaticamente") la filogenesi culturale. L'insegnante mediatore di risonanza dovrebbe quindi guidare l'*appropriarsi*, sicuro e stabile attraverso l'uso attivo e guidato di quanto non potrebbe mai coagularsi "spontaneamente". L'idea è che i bambini **dovrebbero rivivere alcuni nodi cruciali dell'interazione natura-cultura**.

2.3 La mediazione semiotica

2.3.1 Artefatti e segni

Per *artefatto* si intende un particolare oggetto caratterizzato da peculiarità intrinseche, progettate e realizzate allo scopo di eseguire un particolare compito[24] (Verillon & Rabardel, 1995).

Vygotskij ha mostrato come nella sfera pratica gli esseri umani utilizzino di continuo *artefatti* per raggiungere scopi altrimenti non raggiungibili (Bartolini Bussi e Mariotti, in press). A differenza degli artefatti orientati verso l'esterno, i segni prodotti nei processi di interiorizzazione per supportare le attività mentali, che nella terminologia vygotskijana sono chiamati *strumenti psicologici,* sono orientati verso l'interno. Riconoscendo il fondamentale ruolo degli artefatti nello sviluppo cognitivo, a differenza di altri approcci psicologici che separano chiaramente gli artefatti tecnologici e concreti dai segni, la prospettiva vygotskijana afferma un'analogia tra di essi. Così Vygotskij ha evidenziato che "*l'invenzione e l'utilizzo dei segni come mezzi ausiliari per la risoluzione di un problema dato (ricordare, confrontare qualcosa, scegliere e così via), siano analoghi all'invenzione e all'utilizzo di strumenti sotto il profilo psicologico*" (Vygotskij, 1987, p. 82). I segni, dunque, hanno funzione di strumento durante l'attività psicologica, analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro. "*Quando una persona fa un nodo al fazzoletto come promemoria sta*

[24] Secondo gli stessi autori, un artefatto acquisisce la caratteristica di strumento quando viene utilizzato, cioè quando ad esso vengono associate le modalità del suo utilizzo che sono elaborate in modo del tutto individuale e personale da ogni singolo fruitore.

essenzialmente costruendo il processo di memorizzazione con il costringere un oggetto esterno a ricordarle qualcosa, trasforma il ricordare in un'attività esterna. Basta solo questo fatto a dimostrare la caratteristica fondamentale delle forme superiori di comportamento. Nella forma elementare qualcosa viene ricordato, nella forma superire gli esseri umani ricordano qualcosa. Nel primo caso si forma un legame temporaneo per via del sorgere simultaneo di due stimoli che operano sull'organismo, nel secondo caso gli esseri umani creano personalmente un legame temporaneo attraverso una combinazione artificiale di stimoli. L'essenza stessa della memoria umana consiste nel fatto che gli esseri umani ricordano attivamente con l'aiuto di segni. Si potrebbe dire che la caratteristica fondamentale del comportamento umano in generale, è che gli esseri umani influenzano personalmente il loro rapporto con l'ambiente e attraverso quell'ambiente cambiano personalmente il loro comportamento, soggiogandolo al loro controllo. E' stato detto che l'essenza stessa della civilizzazione consiste nel costruire appositamente monumenti per non dimenticare. Nel nodo e nel monumento si manifesta probabilmente proprio l'aspetto fondamentale e più caratteristico che distingue la memoria umana da quella dell'animale" (Vygotskij, 1987, p. 80).

Nella maggior parte della letteratura successiva i segni sono stati interpretati come segni linguistici, e questo per la grande importanza attribuita da Vygotskij al linguaggio. Ma, in realtà, Vygotskij ha suggerito una serie ben più ampia di possibili esempi: oltre il linguaggio, vari sistemi di conteggio, tecniche mnemoniche, sistemi simbolici algebrici, opere d'arte, scrittura, schemi, diagrammi, mappe, disegni meccanici e tutti i tipi di segni convenzionali. Alcuni di essi sono legati alla matematica e, dunque, al campo dell'educazione matematica in generale. Ciò non deve sorprendere, se si pensa alla particolare natura degli oggetti matematici, che richiede una loro rappresentazione esterna per poterli manipolare (Duval, 1995).

Recenti sviluppi nell'ambito delle scienze cognitive (Norman 1991; 1993, Hutchins, 1995) hanno fornito evidenza empirica a sostegno della tesi che la cognizione umana è **mediata** da artefatti. Grazie alle tecniche di brain imaging si dispone oggi di evidenze sperimentali **sull'influenza che l'uso di strumenti ha sull'organizzazione neurale,** evidenziando come lo spazio intorno a noi prenda

forma proprio a partire dagli oggetti e dalla molteplicità di atti coordinati che ci consentono di utilizzarli (Rizzolatti e Sinigaglia, 2006). La percezione stessa degli oggetti e dello spazio che ci circonda è quindi **modificata dall'uso di artefatti**.
Si è per esempio riscontrato sperimentalmente che i campi recettivi visivi dei neuroni bimodali della corteccia parietale posteriore di una scimmia sono modificati da azioni che comportano l'impiego di artefatti[25]. Quindi l'impiego di un artefatto muta le nostre strutture neuronali in modo che il corpo lo percepisca come contiguo alla parte di sé dalla quale viene utilizzato e per la quale è stato, almeno parzialmente, concepito. Questa è una prima relazione tra attività e artefatti; ma una seconda altrettanto importante riguarda gli effetti degli artefatti sull'attività umana nella quale vengono utilizzati. L'uso dell'artefatto trasforma quindi l'attività stessa per la quale è stato progettato e la trasformazione riguarda sia la riorganizzazione delle modalità percettivo-motorie di interazione con l'ambiente che le modalità di pianificazione delle azioni e delle relazioni sociali, come hanno dimostrato gli studi che abbiamo richiamato. Possiamo dire, in altre parole, che **nel modificare le attività un artefatto mette in relazione parti del nostro cervello che non sarebbero altrimenti entrate in risonanza.** Inoltre la possibilità di sincronizzarsi e costituire pattern stabili di attivazione neurale dipende criticamente dalla presenza o meno di quel particolare artefatto all'interno di una situata pratica sociale. C'è ancora una volta da sottolineare la grande intuizione di Vygotskij che nel definire il ruolo di mediazione degli artefatti (la legge della mediazione semiotica) già parlava di un **principio di organizzazione extracorticale delle funzioni cognitive superiori**.
Sembra evidente, quindi, come l'uso, mediato e guidato opportunamente, di artefatti giochi un ruolo cruciale nell' aiutare il processo di risonanza tra la cognizione e le strutture matematiche.

[25]In particolare i ricercatori hanno osservato che durante l'uso ripetuto da parte della scimmia di un rastrello per recuperare del cibo, i campi recettivo-visivi ancorati sulla mano si espandevano al punto di ampliare lo spazio d'azione della loro mano a quello del rastrello, quasi che quest'ultimo fosse incorporato nella mano. Quando poi l'animale smetteva di usare lo strumento, pur tenendolo ancora in mano, i campi recettivi tornavano alla loro estensione naturale.

2.3.2 La mediazione semiotica

Le relazioni sociali con le altre persone e con gli artefatti sottostanno geneticamente a tutte le funzioni cognitive superiori e alle loro relazioni. D'accordo con la "legge genetica dello sviluppo culturale" che propone Vygotskij, nello sviluppo culturale del bambino, ogni funzione appare due volte: primo, a livello sociale, e più tardi, a livello individuale; primo *fra* persone (*interpsicologicamente*) e poi, all'*interno* del bambino stesso (*intrapsicologicamente*). Questo può applicarsi ugualmente all'attenzione volontaria, alla memoria logica e alla formazione di concetti. Tutte le funzioni superiori si originano come – e attraverso – relazioni fra esseri umani.

Il segno svolge, quindi, una funzione da mediatore tra l'individuo ed il suo contesto, e permette, inoltre, questo passaggio tra l'interpsicologico e l'intrapsicologico che assicura la ricostruzione interna dell'azione, cioè, della sua *internalizzazione*. Vygotskij dà come esempio l'apparizione del gesto dell'indicare:

"*Noi chiamiamo la ricostruzione interna di una operazione esterna interiorizzazione. Un buon esempio di questo processo si può trovare nello sviluppo dell'indicare. All'inizio questo gesto non è niente di più che un tentativo non riuscito di afferrare qualcosa, un movimento indirizzato ad un certo oggetto che designa un'attività prossima.*[…] *Quando la madre accorre in aiuto del piccolo e* ***si dà conto che il suo movimento sta indicando qualche cosa****, la situazione cambia radicalmente. L'indicare diventa un gesto per altre persone. Il tentativo non riuscito del bambino genera una reazione non da parte dell'oggetto che egli vuole afferrare, ma da parte di* ***un'altra persona****. Di conseguenza, il significato originario di quel movimento per afferrare non riuscito è stabilito da altri. Soltanto più tardi, quando il bambino è capace di abbinare il suo movimento fallito di afferrare alla situazione obiettiva nel suo intero, egli incomincia intendere questo movimento come indicare.*" (Vygotskij, 1987, p. 86).

La descrizione che fa Vygotskij dell'apparizione del gesto dell'indicare mette in evidenza il ruolo del sociale nella genesi del significato. Il gesto è dapprima una semplice azione diretta verso qualcosa, successivamente l'intervento della madre dà significato a questa azione rendendolo un gesto (piano intersoggettivo), ma è solo ancora più tardi che si converte in gesto per sé stesso (piano intrasoggettivo), in quel processo di interiorizzazione che è mediato dal corpo stesso. Infine l'attività gestuale diventa più complessa con l'apparizione di altre forme di indicare, come quelle linguistiche.

Come illustra la descrizione dell'indicare, il processo di interiorizzazione consiste quindi in una serie di trasformazioni:

a) un'operazione che inizialmente rappresenta un'attività esterna è ricostruita e comincia a prodursi internamente.

b) Un processo interpersonale si trasforma in un processo intrapersonale.

c) La trasformazione di un processo interpersonale in uno intrapersonale è il risultato di una lunga serie di eventi evolutivi[26].

Nella teoria di Vygotskij si assume, quindi, una relazione stretta tra processi esterni (interpersonali) ed interni (intrapersonali), una relazione genetica o evolutiva, rispetto alla quale un punto fondamentale è costituito dal come processi esterni, essenzialmente *sociali,* siano trasformati, o si trasformino per creare processi interni. In questa direzione *la mediazione semiotica è la mediazione esercitata dagli artefatti-segni tra i processi esterni e quelli interni*. Tutto il processo di *interiorizzazione*, definito come *ricostruzione interna di una operazione esterna,* non è un puro trasferimento di un'attività esterna su un piano mentale preesistente, piuttosto si tratta di un processo costitutivo del piano mentale stesso. Il processo di internalizzazione è governato dai processi semiotici (interpretazione e produzione di segni); in particolare, un elemento fondamentale per il suo attuarsi è costituito dal linguaggio[27]. I sistemi di segni (il linguaggio naturale, ma anche altri sistemi di segni – ed in matematica si usano molti sistemi di segni) ed i processi semiotici

[26]Questi eventi potrebbero riguardare, ad esempio, il riconoscimento dell'utilità di uno stesso artefatto in contesti diversi, situazione indotta nella fase sperimentale della tesi (cfr. cap. 5).

[27]Per tale ragione l'analisi del processo di interiorizzazione può essere centrata sull'analisi del funzionamento del linguaggio naturale e di ogni altro sistema semiotico che sia implicato in attività sociali. Questa osservazione è fondamentale per la metodologia di ricerca alla base di qualsiasi sperimentazione che parte da un quadro teorico di impostazione vygotskijana.

connessi al loro uso sono parte integrante dell'attività sociale, così come lo sono (o meglio lo diventano) dell'attività individuale.
Si potrebbe allora pensare all'interazione tra individuo e realtà[28] come dinamica in cui una data rappresentazione[29] venga stabilizzata se sentita come risonante nella cognizione individuale nel senso spiegato precedentemente. Anche nell'esempio della genesi del gesto indicativo si configura una dinamica di tenativi-errori. Questa dinamica permette di scegliere quell'atto iniziale e trasformalo in gesto in quanto risonante nel senso funzionale al raggiungimento dell'obiettivo attraverso il non previsto intervento della madre. Il gesto, quindi, comincia ad agire da mediatore semiotico dopo aver ricevuto questo feedback risonante. In questo modo l'"oggetto" o conoscenza, la *noesis*, custodita nella rappresentazione, nel simbolo o *semiosis*, incomincia ad essere interiorizzata. Ecco che **la mediazione semiotica tra processi esterni e processi interni esercitata da quegli artefatti-segni-rappresentazioni (ad esempio, matematici) riconosciuti come risonanti avvia un processo di interiorizzazione della conoscenza (matematica) posseduta da questi ultimi.**

In conclusione, queste riflessioni configurano delle linee di progettazione didattica molto precise in cui per un dato contenuto matematico la scelta degli artefatti-segni-rappresentazioni e della successiva scelta delle situazioni in cui tali artefatti siano riconosciuti come risonanti pone delle avvincenti sfide di ricerca educativa.

---

[28] Qui la realtà va intesa anche come sistema di individui che ci circondano e quindi anche spazio delle possibili relazioni sociali, interpersonali.
[29] In questa sede la nozione di rappresentazione è perfettamente aderente al costrutto di Vygotskij di segno che viene definito esterno od interno a seconda della direzione del suo uso. In questo senso le nozioni di artefatto, segno e rappresentazione sono considerate perfettamente aderenti.

Capitolo 3
Le strutture aritmetiche

"Il sistema cognitivo, come un 'campo di forza', entra in attività efficiente solo quando gli viene presentato un problema."
(Piaget, 1957, p. 41)

3.1 Premessa

Il lavoro sperimentale di questa tesi fa parte di una ricerca a lungo termine sull'insegnamento-apprendimento delle strutture aritmetiche nella scuola di base. A questo proposito è importante chiarire anche le scelte teoriche sull'idea di numero e di operazione a cui ci si è riferiti. In questo capitolo, quindi, si affrontano alcune questioni riguardanti le *strutture aritmetiche* partendo da riflessioni più generali relative al *numero*.

La ricerca didattica, la ricerca psico-pedagogica e la ricerca neurocognitiva si sono occupate molto del primo apprendimento aritmetico o, meglio, dell'apprendimento aritmetico all'inizio della scuola elementare. Alla luce di ciò è difficile pensare di poter fare riferimento a tutto quello che è stato scritto in proposito dai diversi settori di ricerca. Pertanto, al fine di illustrare, il punto di vista da cui è partita e si è sviluppata l'attività sperimentale di cui si occupa questa tesi, si è scelto di focalizzare l'attenzione su due gruppi di studi: da un lato Piaget, Gelman & Gallistel e Vergnaud che partono da presupposti in parte diversi da quelli scelti nella fase sperimentale di questa tesi, dall'altro Davydov nei confronti del quale si realizza una condivisione di valutazione e intenti con l'approccio anche teorico di questo lavoro. Questa scelta, però, ha portato inevitabilmente a trascurare alcuni studi che, sebbene di fondamentale rilievo (per tutti lo studio di Freudenthal[30]), non sembra immediatamente utile richiamare ai fini delle questioni che si intendono affrontare.

---

[30] Cfr., ad esempio, Freudenthal (1983).

La nostra cultura conosce e scrive[31] i numeri da molte migliaia di anni. Le tracce archeologiche mostrano con evidenza le tappe del processo di rappresentazione-supporto che la traduzione simbolica rende possibile e, al tempo stesso, contribuisce a sviluppare attraverso un tipico processo di "risonanza strumentale"[32].

La discussione sulle basi cognitive e sulle implicazioni epistemologiche della nozione del *contare* percorre tutta la nostra storia culturale: da Aristotele fino alla moderna ricerca psicocognitiva e neurocognitiva. Nell'affrontare questo argomento sembra importante, quindi, innanzitutto fare un riferimento, sia pure sintetico, alle questioni epistemologiche più puramente matematiche, vale a dire ai possibili inquadramenti formali del numero, cui è dedicato il primo paragrafo.

Nei paragrafi che seguono viene fatta una panoramica su alcuni degli studi nell'ambito dell'educazione matematica che assumono il numero e le operazioni aritmetiche come due aspetti della medesima realtà concettuale, come due componenti essenziali di una struttura in cui sia i numeri che le operazioni acquistano significato solo nella loro relazione reciproca. Si è ormai presa consapevolezza, nel settore, di una tendenza che ha da sempre – a ragione – animato gli studi che si occupano del numero e, più in generale, della costruzione di concetti matematici: *"There is no reason to turn process into object unless we have some higher level processes perfomed on this simplex process"* (Sfard, 1991, p. 31). Le teorie che riguardano la dualità tra processo e oggetto[33] si sono quindi esplicitamente occupate di questa intricata dinamica portando a compimento quella che era stata una spontanea tendenza di molti esperti di studiare in maniera simultanea gli oggetti matematici ed i processi che agiscono su di essi[34]. Questa visione prende forma nel costrutto teorico di incapsulazione o reificazione del processo: "*reification is an*

[31] Le prime forme di registrazione numerica precedono anzi di migliaia di anni la trascrizione del parlato.

[32] In termini vygotskiani "mediazione semiotica".

[33] Tre sono le maggiori teorie che si occupano della dualità tra processo e oggetto: procept (process-object) di Gray e Tall, APOS (action-process-object-schemas) di Cottrill, e la teoria strutturale-operazionale di Sfard.

[34] Lo stesso Piaget, in una fase ben precedente alla elaborazione di queste teorie, indicava la genesi dell'oggetto nel *processo* o *stato operatorio*.

instantaneus quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure" (Sfard, 1991, p. 20) e "*This encapsulation is achieved when the individual becomes aware of the totality of the process, realizes that trasformations can act on it, and is able to construct such transformation*" (Cottrill *et al.,* 1996, p. 171).

La dualità tra oggetto e processo e la reificazione del processo in nuovo oggetto, dinamica complessa che può essere vista a livello storico come generatrice di molti sviluppi teorici per esempio relativi alle successive estensioni del concetto di numero, si manifestano già al primo livello, quello relativo all'oggetto – numero intero. Un numero intero, infatti, ha due funzioni: **marcatore di uno stato**, di una situazione; **marcatore di una trasformazione**, di un cambiamento di situazione. Il simbolo matematico "+3" può sia marcare lo stato "+3", sia indicare la trasformazione "+3" da applicare ad uno stato per trasformarlo in un altro stato, due usi diversi, dipendenti chiaramente dalla pragmatica del contesto.

Un'altra delle questioni più delicate e spinose relative al problema della costruzione del numero naturale riguarda il tentativo degli esperti di individuare quale carattere del concetto (complessivamente pluralistico) di numero sia il più originale e autentico. Il riconoscimento della natura primitiva e naturale (rivelata dallo stesso nome) ha posto i numeri naturali, per molti anni, al centro dell'apprendimento dell'aritmetica nei bambini. Gli aspetti di ordinalità e cardinalità, nonché la corrispondente azione intrecciata del contare oggetti **discreti,** sono stati inizialmente posti in primo piano (cfr. ad esempio Gelman & Gallistel, 1978). Di recente, grazie anche agli studi in ambito neuroscientifico, c'è stato un cambiamento di tendenza (cfr. ad esempio Gelman & Gallistel, 2005) e si è identificato nel *numero come misura*[35] la sorgente incorporata nella mente umana e animale della percezione numerica. Ai nostri fini è però importante richiamare, per le interessanti analisi fatte e per i risultati ottenuti, alcuni studi che hanno preceduto l'attuale tendenza. D'altra parte verrà proposta una visione alternativa anche alla più moderna visione di numero come misura. In particolare, verrà chiarito il punto di

[35] Tale visione privilegia, come si illustrerà, l'aspetto "continuo" del numero.

vista di Guidoni che costituisce il quadro di riferimento nella progettazione della fase sperimentale. In questa visione viene evidenziato il rapporto tra il contare oggetti **discreti** ed il misurare quantità **continue**. Il discreto ed il continuo sono trattati teoricamente come aspetti separati della concettualizzazione sebbene siano, nella percezione, continuamente intrecciati. A questo proposito recenti studi in ambito neuroscientifico hanno evidenziato come una delle strategie messe in atto dal cervello umano di fronte a situazioni numeriche utilizzi la trasduzione della numerosità discreta degli oggetti reali in un segmento continuo “interno”, “mentale” (Dehaene, 1997). Questa risorsa, presente negli individui (umani e animali “superiori”) fin dalla nascita, è chiamata “linea interna” dei numeri o "accumulatore" interno e permette di valutare in modo approssimativo la numerosità degli oggetti. Anche da queste evidenze di natura neuroscientifica nasce la convinzione, illustrata negli ultimi paragrafi, di come la comprensione del “pensiero aritmetico” dipenda fortemente dalla gestione controllata e intercontestuale della difficile interferenza tra discreto e continuo, gestione che va quindi educata fin dagli inizi.

Quanto alle strutture aritmetiche, gli studi di Vergnaud hanno fornito un’interessante classificazione psicologica delle diverse situazioni riguardanti le operazioni aritmetiche. Quella di Vergnaud non è l’unica classificazione, ne esistono altri tipi altrettanto interessanti basati su premesse diverse come, ad esempio, quella di Carpenter & Moser (Carpenter & Moser, 1982). Queste classificazioni, se risultano molto utili nell’individuare quale tipo di problema cognitivo si possa nascondere dietro un errore ricorrente, appaiono, però, nel quadro di riferimento qui prescelto, pericolose nella fase di progettazione didattica[36]. Se l’intento è, infatti, quello di educare ad affrontare situazioni complesse e non immediatamente chiare, un percorso che segua (anche se solo inizialmente) un

[36] Un certo tipo di ricerca sviluppata negli ultimi decenni, centrata sul rilevamento e sulla classificazione degli errori (“misconcezioni”) più che sullo sviluppo guidato dalle potenzialità, ha contribuito ad incrementare approcci didattici spesso poco efficaci in relazione a comprensione, motivazione, valutazione etc.

ordine prestabilito dei diversi prototipi di problemi aritmetici raggruppati secondo la loro semantica può risultare controproducente rispetto alla costruzione di un atteggiamento di orientamento autonomo. La visione alternativa proposta negli ultimi paragrafi è quella di una progettazione didattica in cui i problemi aritmetici siano presentati nella loro complessità sintattica e semantica fin dall'inizio, con il sostegno di una mediazione didattica studiata appositamente (cfr. , ad esempio, Guidoni, 2007 a).

3.2 Impostazioni epistemologiche

Le ricostruzioni più note del concetto di numero naturale a livello formale sono essenzialmente tre: l'impostazione assiomatica di Peano, l'impostazione insiemistica di Cantor e l'impostazione di Kolmogorov, in cui più in generale gli insiemi dei numeri razionali, interi e naturali sono visti come sottoinsiemi del campo reale. Il senso di ricordare brevemente in questa sede gli elementi concettuali di base è quello di sottolineare come ogni impostazione corrisponda alla "estremizzazione formalizzante" di atteggiamenti cognitivi che a livello primitivo-intuitivo sono con-presenti nel pensiero naturale. In questo modo ci si pone con un atteggiamento in qualche modo "sincretistico" nel raccordare teoria scientifica e prassi conoscitiva a livello di trasmissione culturale.

- Il sistema assiomatico di Giuseppe Peano[37], presentato nel Formulario Mathematico[38], è costituito da nove assiomi, quattro dei quali relativi all'identità (i primi tre descrivono l'identità come una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva; il quarto afferma che se due oggetti sono uguali e uno di essi è un numero allora anche l'altro è un numero) mentre i rimanenti cinque sono specifici per

[37] Un'esposizione divulgativa scientificamente corretta della sistemazione assiomatica dei numeri naturali fatta da Peano si trova, ad esempio, nell'enciclopedia "*Storia del pensiero filosofico scientifico*" curata da Ludovico Geymonat, nel volume VI, capitolo 12, curato da Corrado Mangione. Si preferisce qui attingere a questa fonte piuttosto che utilizzare una delle tante esposizioni moderne più formali, dato l'intento più epistemologico che strettamente matematico di questa presentazione.

[38] Il *Formulario Mathematico* è stato per la prima volta pubblicato nel 1895, dopo varie revisioni l'ultima pubblicazione risale al 1908.

l'aritmetica[39]:

1) *I* è un numero (1);
2) Il successore di un numero è un numero (6);
3) Se due numeri sono uguali allora hanno successori uguali (7);
4) *I* non è il successore di alcun numero (8)
5) Se *k* è una classe tale che *I* appartiene a *k* e inoltre per ogni numero *x* se *x* appartiene a *k* allora anche *x+I* appartiene a *k*, allora *k* contiene la classe *N* (9);

A questi assiomi Peano premette quattro *explicationes* con le quali assume come idee primitive quelle di *numero*, di *unità,* e di *successore di un numero*. Nell'affrontare questi problemi Peano manteneva consapevolmente un atteggiamento per così dire a-filosofico; il suo scopo era semplicemente quello di escogitare un simbolismo agile ed espressivo, capace di dare una presentazione chiara ed efficace ai risultati matematici. In questa impostazione, quindi, si prescinde da ogni ricerca intorno alla genesi del concetto di numero, ma assumendo alcune idee primitive si pongono degli assiomi che tentano con successo di catturare la struttura e le regole con cui i numeri naturali si esplicano. Le nozioni primitive e gli assiomi enunciati sono fondamento sufficiente per uno svolgimento, logicamente perfetto, ma di carattere strettamente formale, di tutta l'Aritmetica. Rispetto a questo scopo è fondamentale la presenza di un teorema di isomorfismo, che garantisca che tali nozioni primitive e assiomi sono sufficienti a identificare in modo unico la struttura dei numeri naturali, a ottenere in altri termini per essi un risultato di categoricità.

L'ultima edizione del Formulario è in latino sine flexione, la lingua che Peano aveva escogitato come linguaggio internazionale. È interessante riportare da questa, le parole con le quali egli introduce il proprio sistema assiomatico[40]:

"*Questione si nos pote defini N_0 singifica si nos pote scribe aequalitate de forma*

[39] A destra è riportata la numerazione originale.

[40] Dopo la prima versione, il sistema assiomatico di Peano subisce alcune modifiche non sostanziali ad eccezione di quella, suggerita quasi certamente dall'analisi di Gottlob Frege, di far cominciare *N* con lo 0 invece che con l'*I*.

N_0= espressione composito per signos noto ∪, ∩, —, ..., quod non es facile."

"*Ergo nos sume tres idea N_0, 0, + per sistema de propositio primitivo sequante*" a cui seguono gli assiomi sopra enunciati.

In *N* le due operazioni di somma e prodotto possono essere introdotte ricorsivamente, operando sul secondo addendo o rispettivamente fattore. Per l'addizione si ha:

$$a+0=a$$

$$a+f(n)=f(a+n)$$[41].

Da cui discende, in maniera non banale, la definizione di somma.

Per la moltiplicazione:

$$a\cdot 0=0$$

$$a\cdot f(n)=a\cdot n+a.$$

Dalle precedenti definizioni di somma e prodotto come operazioni unarie, si passa poi in modo non banale alle definizioni ordinarie delle due operazioni come operazioni binarie. Dopodichè le varie proprietà si dimostrano per induzione.

- Contemporaneo di Peano, Georg Cantor cerca invece di costruire un impianto formale[42] che provi anche a confrontarsi con questioni psicologiche come dimostra la sua "definizione" di insieme comparsa nei *Contributi*[43] del 1895 "*Con "insieme"intendiamo ogni riunione M in un tutto di oggetti m (che vengono detti elementi di M) della nostra intuizione o del nostro pensiero.*" Una volta introdotto il concetto di insieme, con tutto il corredo ben noto delle relative operazioni, l'idea è quella di ricondurre la nozione di numero naturale a quella di insieme. La grande fecondità di questo approccio è peraltro la possibilità di estendere la nozione di numero al transfinito. Cantor procede così: a ogni insieme M spetta una ben determinata "*potenza*" o "*numero cardinale*" che è *"...quel concetto generale ...che si ottiene da M*

[41] Dove f è la funzione successore.

[42] Anche per la presentazione dell'impostazione di Cantor attingiamo a Geymonat (*op. cit.*).

[43] I *Contributi alla fondazione della Teoria dei numeri transfiniti* (1895-1897), sono due tra i più importanti saggi di Cantor, pubblicati sui "Mathematische Annalen" anche grazie al vivo interessamento di Felix Klein.

quando si astragga dalla natura particolare dei suoi elementi e dall'ordine col quale essi sono dati"[44]. Per tener conto anche simbolicamente della doppia astrazione dalla natura e dall'ordine degli elementi, Cantor pone due sbarrette sul simbolo dell'insieme stesso per indicare il cardinale dell'insieme: così il cardinale di M, ad esempio, sarà indicato con $\overline{\overline{M}}$. Se chiamiamo "*equivalenti*" (o come oggi si preferisce dire, equipotenti) due insiemi M e N quando fra loro possa stabilirsi una corrispondenza biunivoca, risulta che l'equivalenza è condizione necessaria e sufficiente perché i due insiemi M e N abbiano lo stesso cardinale, ossia affinché sia $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Ora è ben noto che la precedente non è ancora una definizione in senso matematico di numero cardinale. I passaggi successivi consistono nel sostituire al "concetto generale.." sopra chiamato la classe di equivalenza di ciascuno insieme rispetto alla relazione di equipotenza. E ancora, come necessario passo ulteriore, a sostituire a tali classi, che risultano troppo grandi e generatrici per questo di contraddizioni, loro opportuni sottoinsiemi o elementi ad esse appartenenti. Tale procedimento fu portato a termine con successo da altri matematici, come Ernest Zermelo, nell'ambito delle teorie assiomatiche degli insiemi. Questi sviluppi esulano però dal nostro discorso e comunque non modificano l'idea originaria di Cantor, che risulta invece significativa ai nostri scopi.

I numeri cardinali così definiti comprendono, come facilmente si verifica, gli usuali numeri naturali che risultano essere quei particolari cardinali associati ad insiemi finiti, si noti tuttavia che mai Cantor, nel corso dell'esposizione della sua teoria, dà un definizione di insieme finito o di insieme infinito, questione affrontata invece da Richard Dedekind. Fra i cardinali così introdotti è possibile definire in generale una relazione di ordine totale, nonché le operazioni di addizione e di moltiplicazione, in modo tale che, nel caso non ci si limiti a considerare solo cardinali finiti (ossia: numeri naturali) la relazione e le operazioni coincidano con le omonime relazione e

---

[44] Notare l'assenza di considerazioni sull'eventualità che gli elementi abbiano fra loro specifiche forme di relazione /correlazione.

operazioni aritmetiche ordinarie.

Limitandoci alle operazioni ricordiamo che l'addizione si definisce attraverso l'unione e la moltiplicazione attraverso il prodotto cartesiano nel modo seguente:

$$\overline{\overline{M_1}} + \overline{\overline{M_2}} = \overline{\overline{(M_1 \cup M_2)}} \; se \; M_1 \cap M_2 = \varnothing$$

$$\overline{\overline{M_1}} \bullet \overline{\overline{M_2}} = \overline{\overline{(M_1 \times M_2)}}$$

Queste definizioni risultano nel caso finito più semplici rispetto all'approccio di Peano e le proprietà delle operazioni possono essere provate più facilmente. Questa circostanza, insieme con la consonanza tra l'idea di numero cardinale di Cantor e i risultati delle ricerche psicologiche di Piaget sono probabilmente tra le cause maggiori della fortuna che l'impostazione cantoriana ha ricevuto nella formulazione dei curriculi scolastici a partire circa dalla seconda metà del secolo scorso.

• Andreij Kolmogorov, e con lui altri matematici, fra i quali Henry Lebesgue, hanno evidenziato del concetto di numero un altro aspetto, osservando come esso derivi in realtà da un contesto di misura di **quantità continue,** che rinvia chiaramente al dominio dei numeri reali. Il loro approccio rovescia quindi il tradizionale percorso che conduce attraverso successivi ampliamenti dai numeri naturali a quelli interi, razionali e infine reali, e privilegia invece tale insieme più ampio e generale come il più vicino all'intuizione primaria dello spazio di esperienza.

Questa visione ha trovato recentemente conferma in alcuni risultati in ambito neuroscientifico in cui è stato dimostrato come la percezione numerica immediata di un certo numero di oggetti avvenga attraverso la trasduzione della loro numerosità discreta su un segmento continuo (Dehaene, 1997).

Questa prospettiva psicologica corrisponde, da un punto di vista formale, ad assumere come punto di partenza l'insieme dei numeri reali per riconoscere al suo interno i sottoinsiemi dei razionali, interi e naturali. In questa impostazione, quindi, si parte dall'assioma dell'esistenza di un campo ordinato completo, per poi, dimostrata la sua categoricità con un apposito teorema di isomorfismo, riconoscere l'insieme dei numeri naturali come quel particolare sottoinsieme dei reali costituito dai multipli dell'unità. Questa impostazione formale risulta evidentemente più "veloce" ai fini dello studio delle funzioni reali ed è per questa ragione che trova largo utilizzo nei testi di Analisi Matematica. L'interesse verso questioni epistemologiche ci induce, però, a considerare riflessioni precedenti a questa moderna e funzionale formalizzazione[45]. In questa direzione sembra interessante notare cosa scrisse Newton nell'*Aritmetica Universale* (1722) in merito al concetto di numero reale: "*Per numero intendiamo non tanto una collezione di unità, quanto il rapporto fra una certa quantità e un'altra, presa come unità*". In questa prospettiva, quindi, un numero reale è il *rapporto* fra una grandezza e un'altra scelta come unità[46]: può essere il rapporto tra lunghezze di segmenti, ma può anche essere un rapporto tra aree, tra pesi e così via[47]. Tale rapporto può essere intero, razionale o irrazionale se la grandezza data è incommensurabile con l'unità. Anche Kolmogorov fornisce una definizione ingenua di numero reale attraverso un'accurata descrizione del processo di misura:

"*Supponiamo di voler misurare il segmento AB per mezzo del segmento CD, scelto come unità. A partire dal punto A riportiamo il segmento CD su AB tante volte quanto è possibile, diciamo n_0 volte.*
In generale gli n_0 segmenti uguali a CD non esauriscono tutto AB: vi sarà un resto PB. Suddividiamo CD in dieci parti e misuriamo il resto con questi decimi: supponiamo che n_1 sia il numero dei decimi di CD che entra in PB. Se dopo di ciò vi è un altro resto, suddividiamo ancora in dieci parti la nostra unità di misura (cioè suddividiamo CD in 100 parti) e ripetiamo la stessa operazione. Questo processo può avere termine, oppure continuare all'infinito, ma in ogni caso si ha che AB si compone di n_0 segmenti uguali a CD, di n_1, segmenti uguali a un decimo di CD, di n_2, segmenti uguali a un centesimo di CD, e così via. In una parola valutiamo il rapporto tra AB e CD con un'approssimazione sempre maggiore: prima fino ai decimi, poi fino ai centesimi ecc. Quindi il rapporto stesso è rappresentato dal numero decimale n_0 unità, n_1 decimi, n_2 centesimi, e così via: $\frac{AB}{CD} = n_0,n_1n_2n_3....$ Questo numero decimale può risultare illimitato, ciò corrisponde alla possibilità di rendere la misura sempre più precisa.

[45] Questo tipo formalizzazioni passano in realtà attraverso il fondamentale lavoro fatto da J. W. R. Dedekind (*Continuità e numeri irrazionali*, 1872) di traduzione della proprietà di continuità geometrica della retta nella continuità aritmetica delle sezioni razionali.

[46] L'idea di numero reale come rapporto di grandezze è stata sostenuta anche da Frege (*Principi dell'Aritmetica*, 1903) nella sua critica alle teorie proposte da Dedekind e da Cantor.

[47] La nozione di numero reale come rapporto tra la misura di grandezze qualsiasi, tra loro omogenee, è in perfetta analogia con il concetto di "*volta*" di Guidoni (cfr. par. 3.7.2).

Così il rapporto di due segmenti, o più in generale di due grandezze, è rappresentato da un numero decimale, limitato o no. Ma nel numero decimale non vi è più traccia della grandezza in esame; esso rappresenta esattamente il rapporto astratto, il numero reale. *Con ciò i numeri reali possono essere formalmente definiti come numeri decimali, limitati o illimitati.*
Per completare la nostra definizione dobbiamo dire in che modo si effettuano le operazioni (come l'addizione ecc.) con i numeri decimali. Faremo in modo che tali operazioni corrispondano a quelle con le grandezze stesse. Per esempio, giustapponendo due segmenti, le loro lunghezze si sommano: la lunghezza del segmento AB+BC è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti AB e BC. La definizione delle operazioni con i numeri decimali presenta qualche difficoltà perché in generale questi sono illimitati, mentre le regole conosciute si applicano ai numeri decimali limitati. Una definizione rigorosa si può ottenere per questa via: supponiamo, per esempio, di voler sommare due numeri a e b. Si considerino i numeri decimali limitati che si ottengono da a e b trascurandone, da un certo punto in poi, tutte le cifre decimali, per esempio trascurandone dalla milionesima in poi, e si sommano questi numeri decimali limitati. Otteniamo così una valutazione approssimativa di a+b (nel nostro caso l'approssimazione si spinge sino a i due milionesimi, poichè gli errori commessi su a su b possono cumularsi) con ciò intravediamo la possibilità di valutare a+b con l'approssimazione che si vuole, ed è in questo senso che a+b risulta completamente definito, sebbene lo si possa conoscere solo con una certa approssimazione.
Tutto corrisponde alla natura essenziale della situazione, dato che anche le misure delle grandezze a e b sono approssimate, e il valore esatto dei corrispondenti numeri decimali è il risultato di un processo di approssimazione sempre maggiore. A questo punto le relazioni di 'maggiore di' e 'minore di' si possono definire per mezzo dell'addizione: a è maggiore di b se esiste un c tale che a=b+c[48] *(qui si parla naturalmente di numeri positivi)"*

(Kolmogorov & Lavrent'ev, 1974, p. 34).

La definizione di numero reale attraverso gli allineamenti decimali oltre che richiedere alcune precisazioni formali, come ad esempio un'opportuna relazione di equivalenza che permetta di identificare alcune scritture decimali, comporta sofisticate dimostrazioni per le definizioni di somma e prodotto nel caso irrazionale a cui Kolmogorov fa brevemente riferimento. Queste complicazioni sul piano formale, sono però ripagate da un forte legame psicologico con l'operazione di misura di quantità. Il concetto di quantità ha origine dal confronto di elementi appartenenti ad una classe di oggetti per qualche motivo ritenuti simili (omogenei) e applicando ad essi le relazioni di "uguale", "maggiore", "minore", rendendo fondamentale in questo modo la struttura d'ordine. Il ruolo fondamentale della relazione d'ordine

[48] Cfr. con la figura 5.1, pag. 81.

corrisponde sul piano psicologico ad un atteggiamento spontaneo con cui il cervello umano e animale valuta e confronta le grandezze fisiche della realtà circostante[49].

3.3 Piaget

Fra i suoi innumerevoli studi sullo sviluppo cognitivo Piaget approfondì la formazione del concetto di numero nei bambini: le sue ipotesi sulla costruzione del numero, elaborate negli anni quaranta, costituiscono ancora oggi un prezioso punto di riferimento per la ricerca psicologica nel settore.

Sono molti i lavori di Piaget e dei suoi collaboratori che si occupano dell'acquisizione delle prime competenze numeriche e uno dei testi fondamentali a riguardo è The *Child's Conception of Number*[50] (1952).

Lo psicologo svizzero ipotizza che la costruzione concettuale del numero sia correlata con lo sviluppo della logica e quindi ad un livello pre-logico del pensiero corrisponde un periodo pre-numerico. Inoltre per Piaget il numero è una costruzione di natura operatoria e si costruisce e si evolve in stretto rapporto con l'elaborazione graduale delle due entità logiche di classe e di serie, costituendosi quale loro sintesi operante.

Per quanto riguarda l'entità logica della classe, l'idea è che se si numera una serie di oggetti e così facendo si arriva al suo valore di numero cardinale, si trattano in effetti gli oggetti come se fossero tutti uguali, esattamente come si farebbe se li si assegnasse a una classe comune. Proprio come, nel classificare una serie di oggetti, trascuriamo le loro differenze, così anche trascuriamo le differenze tra gli oggetti quando assegniamo alla serie il suo valore cardinale. Il numero pertanto, implica chiaramente una componente di classe.

Ma il numero non è semplicemente una classe perché sebbene gli oggetti enumerati siano trattati come equivalenti nella misura in cui viene loro assegnato un numero

---

[49]Si pensi alle sperimentazioni sui neonati (Dehaene, 1997) in cui le misure dell'attenzione dell'occhio su diapositive contenenti differenti numeri di oggetti hanno evidenziato, già a livello pre-linguistico, una valutazione spontanea della differente numerosità.

[50]Traduzione inglese di *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941).

cardinale, in un altro senso possono venire considerati diversi l'uno dall'altro e questo non accade nel caso delle operazioni di classificazione. Mentre si porta in luce, con la numerazione, il loro valore cardinale, gli oggetti devono essere ordinati: si conta dapprima un determinato oggetto, poi il successivo, e così via. Non ha alcuna importanza, ovviamente, quale sia l'ordine della numerazione, ma un ordine deve esserci; si devono contare gli oggetti in una data sequenza e tenere a mente quelli che sono stati già contati per non contare gli stessi oggetti più di una volta. Questo processo di ordinazione è tipico non delle operazioni di classificazioni, ma delle operazioni di relazione. Gli oggetti disposti nell'ordine in cui sono stati contati formano una vera serie, una serie di relazioni asimmetriche, esattamente uguale ad una serie di segmenti di lunghezza graduata. In questo caso, tuttavia, le differenze fra gli oggetti non sono di lunghezza ma di posizione ordinale. Le unità numeriche, pertanto, si trovano in una condizione particolare: appaiono essere, nello stesso tempo, elementi di una classe e elementi di una relazione asimmetrica. Per un aspetto sono tutte equivalenti, proprio come gli elementi di una classe, per l'altro sono tutte diverse, come i termini di una serie asimmetrica. Per contarle, le si deve contare successivamente; una volta contate, sono ancora indistinguibili. In questo modo, nella visione del numero si sentono echi della visione insiemistica del numero suggerita da Cantor, in cui si parla appunto di una doppia astrazione *"dalla natura particolare dei suoi elementi e dall'ordine col quale essi sono dati"*(cfr. par. 3.2), corrispondente alle nozioni di classe e di serie.

Nella parte della teoria piagetiana che si occupa del numero e delle operazioni aritmetiche le strutture logico-matematiche sono concepite come **modelli** della stessa struttura cognitiva. Piaget si è occupato con molto interesse di collegare i fatti e la teoria dello sviluppo ad alcuni problemi più puramente matematici e logici[51], come ad esempio il problema della natura psicologica delle operazioni logiche e numeriche. Piaget ritiene che i logici ed i matematici abbiano per lo più qualche

---

[51] Molto del prolungato lavoro compiuto da Piaget nell'area dell'epistemologia genetica consiste appunto in una serie di tentativi diretti ad adoperare i risultati di sviluppo per chiarire alcuni problemi filosofici fondamentali (compresi i problemi logico-matematici).

ipotesi, implicita o esplicita, su ciò che gli enti e le operazioni elementari esprimano nell'area dell'attività cognitiva umana, e che lo studioso dello sviluppo intellettuale possa fornire un aiuto, a questo riguardo, esplorando la storia dello sviluppo sia psicologico che culturale di questi enti ed operazioni elementari.

Partendo da questa analisi del numero Piaget studia lo sviluppo dei fondamenti delle operazioni numeriche. Il suo studio comprende sia un esame della comprensione delle operazioni di ordinazione e di cardinazione e delle loro interrelazioni, sia un'indagine sulla comprensione delle proprietà additive e moltiplicative. Di fatto Piaget considera le classi, le relazioni e i numeri aree cognitive che si sviluppano simultaneamente e in modo strettamente intrecciato, interdipendente. Inoltre, egli sostiene che anche una comprensione genuinamente operatoria (nel senso delle operazioni concrete) del numero richiede un uso, anch'esso operatorio, delle classi e delle relazioni, e che quindi solo quando il bambino è capace di compiere delle operazioni reversibili di seriazioni e di classificazione effettiva (relazione di inclusione e tutte le altre) è in grado di comprendere realmente che cosa siano i numeri e le loro relazioni e proprietà.

A riguardo, gran parte degli studi sulle operazioni aritmetiche riguardano il terzo stadio della suddivisione dello sviluppo cognitivo[52]. Secondo Piaget è, infatti, nello stadio delle operazioni concrete che i sistemi operatori cominciano a possedere quelle proprietà – come la reversibilità, l'associatività, la compensazione – indispensabili per una solida base cognitiva, flessibile e plastica, e tuttavia coerente e duratura, con cui si riesce a strutturare il presente in termini del passato senza

[52] Come è ben noto, Piaget suddivide lo sviluppo cognitivo del bambino in quattro stadi principali, ognuno caratterizzato da una modalità di pensiero qualitativamente diversa, resa possibile dall'emergere di un nuovo "schema" che si costruisce sulla base delle esperienze del bambino durante lo stadio precedente. Tale processo viene inteso come processo di "maturazione" che può essere più o meno accelerato dalle condizioni al contorno, ma che non può essere sostanzialmente modificato da interventi esterni.

Il completamento di uno stadio è una condizione imprescindibile perché possa evolversi lo stadio successivo. Ne discende che l'ordine dei quattro stadi è invariabile:

- Stadio senso-motorio (dalla nascita ai due anni circa);
- Stadio pre-operatorio (dai due ai sette anni);
- Stadio operatorio concreto (dai sette ai dodici anni circa);
- Stadio operatorio formale (dai dodici anni a tutta l'età adulta).

tensioni e dislocazioni indebite: in altra parole, senza quella tendenza costante a cadere in perplessità ed in contraddizione che contraddistingue il bambino in età prescolare.

Partendo dal presupposto che le strutture logico matematiche siano dirette a modellare la struttura cognitiva, una delle strutture logico-matematiche considerata **modello** in molte aree diverse dell'attività intellettuale è quella di *raggruppamento*.

Il raggruppamento è una delle strutture create da Piaget e dai suoi collaboratori ed è fondamentalmente un ibrido nato dalle due strutture matematiche di gruppo e di reticolo. Un raggruppamento ha infatti cinque proprietà: le prime quattro sono le comuni proprietà di gruppo[53] e l'ultima è una proprietà di reticolo[54]. La particolarità di questa struttura è che oltre al comune elemento di identità tipico del gruppo, che possiamo chiamare "identità generale", il raggruppamento possiede anche delle "identità speciali" (proprietà derivate dal reticolo), in quanto ogni elemento svolge funzione identità rispetto a se stesso (Piaget chiama questa proprietà tautologia) e rispetto agli elementi che lo contengono. L'aggiunta di questa quinta proprietà fa sì che il raggruppamento sia una struttura nuova e a sé stante: esso è in parte gruppo e in parte reticolo e tuttavia, preso nel complesso, non è né gruppo né reticolo.

In definitiva per Piaget ci sono nove raggruppamenti distinti e due gruppi, che descrivono la struttura cognitiva nel sottoperiodo delle operazioni concrete: un raggruppamento preliminare, secondario, otto raggruppamenti fondamentali e due gruppi concernenti le operazioni aritmetiche.

Senza entrare nel dettaglio dei raggruppamenti è però importante chiarire che Piaget costruisce queste strutture sia perchè le considera una descrizione precisa ed equilibrata della "conoscenza ideale" nel dominio delle operazioni logico intensive di classi e di relazioni, e sia perchè esse costituiscono una struttura generale per

[53] Piaget definisce gruppo una struttura astratta costituita da una serie di elementi e da un'operazione relativa a questi elementi tali che le proprietà della composizione, dell'associatività, dell'identità e della reversibilità si dimostrino vere.

[54] Piaget definisce reticolo una struttura costituita da una serie di elementi e da una relazione tale che due elementi hanno un massimo comune maggiorante e un minimo comune minorante, dove per massimo comune maggiorante si intende la classe più piccola che include entrambi i membri della coppia e, in maniera analoga, si definisce il minimo comune minorante.

interpretare certe qualità globali e sfuggenti, ma nondimeno importanti, che distinguono il pensiero operatorio concreto dal pensiero pre-operatorio. Ma è importante sottolineare come i raggruppamenti non siano derivati interamente osservando pensare i bambini. Sembra infatti, ad esempio, che Piaget, non abbia nessun risultato sperimentale, attinente alla verifica, nel pensiero del bambino del periodo delle operazioni concrete, del quarto e dell'ottavo raggruppamento. I raggruppamenti sono quindi creati, chiaramente, perché descrivono delle strutture cognitive *logicamente possibili*, non delle strutture logiche *scoperte empiricamente*.
In questa direzione ha senso domandarsi in quale misura i bambini di 7-11 anni possano operare a livello di raggruppamento e come sia giustificato, pertanto, considerare i raggruppamenti come i modelli della loro conoscenza. Piaget sembra affermare, a partire da una base sperimentale di varia natura, che i bambini del periodo operatorio concreto mostrano (e, in correlazione, i bambini del periodo pre-operatorio non mostrano) certe qualità cognitive generalizzate e più o meno in varianti rispetto al contesto che rivelano la presenza di una struttura del tipo raggruppamento. Una di queste qualità è la reversibilità. Per Piaget, la reversibilità non è semplicemente una delle cinque proprietà del raggruppamento, è la proprietà centrale della conoscenza all'interno di un sistema strutturato, quella da cui derivano tutte le altre.

Accanto alla reversibilità sembra centrale nella teoria piagetiana anche la nozione di compensazione. La "compensazione moltiplicativa" è strettamente connessa con la relazione di proporzionalità, (se $A \cdot B = C \cdot D$ anche $A/C = D/B$), e riguarda la capacità di prevedere qaulitativamente, ad esempio, che un oggetto che rotola lungo un piano inclinato acquisterà una velocità crescente a mano a mano che si avvicina all'estremità e che, "a causa" di questo aumento di velocità, percorrerà, in unità di tempo, una distanza sempre maggiore mentre continua a rotolare. Per Piaget si registra un'evoluzione della comprensione della proprietà di compensazione moltiplicativa nella prima adolescenza: l'adolescente, ad esempio, si rende conto che può compiere lo stesso lavoro alzando un certo peso ad una certa altezza oppure alzando un peso doppio a metà dell'altezza precedente, in quanto il lavoro è dato appunto dal prodotto dell'altezza per il peso.

Indubbiamente molte cose nel modo in cui Piaget tratta il nesso tra struttura astratta e struttura cognitiva si prestano a critiche ed a discussioni, come ad esempio il suo tentativo di creare delle prove ingegnose per saggiare e verificare se è presente l'una o l'altra componente del raggruppamento pretendendo di *diagnosticare, in tal modo, la struttura cognitiva naturale attraverso esperimenti modellati proprio sulla struttura matematica di raggruppamento*. Piaget procede dunque in qualche modo come uno psichiatra che cerca di scoprire gli elementi di un possibile sistema paranoide nel paziente attraverso un'intervista costruita appositamente proprio per pazienti paranoidi.

Nel libro che è stato citato all'inizio del paragrafo si affrontano molte delle tematiche della ricerca sul numero compiuta da Piaget: dai famosi esperimenti sulla conservazione della quantità discreta, mediata dalla corrispondenza termine a termine, al riconoscimento di relazioni di ordine, mediata da una corrispondenza tra due serie, sempre discrete. Senza entrare nel dettaglio delle sperimentazioni e delle successive conclusioni dei cui limiti si è ampiamente discusso in seguito a livello di ricerca, va sottolineato come gli studi successivi siano partiti, per sviluppare poi in maniera più consapevole e propria, proprio dalla ricchezza quantitativa e qualitativa degli studi di Piaget. L'osservazione, ad esempio, che la capacità del bambino di fare semplicemente enumerazione verbale degli elementi di una serie non garantiva affatto una comprensione dell'importante relazione esistente tra l'ordinazione e la cardinazione, relazione essenziale per una comprensione reale del numero, sarà cruciale per molti degli studi successivi, come quello di Gelman & Gallistel (cfr. il successivo par. 3.4).

Altre indagini interessanti sono state fatte sulle conoscenze dei bambini a proposito delle fondamentali proprietà additive e moltiplicative dei numeri. Rispetto alla composizione additiva del numero sono stati fatti studi riguardo il riconoscimento della stabilità di una totalità aritmetica quando viene variata la composizione additiva delle sue parti: otto oggetti, ad esempio, suddivisi in due gruppi da quattro oggetti ciascuno sono numericamente equivalenti a otto oggetti suddivisi in uno e sette, in quanto l'aumento da quattro a sette è "compensato" dalla diminuzione corrispondente da quattro a uno, lasciando invariato il tutto. Questa capacità, ritenuta centrale da Piaget, nell'approccio di Guidoni prende il nome di compensazione additiva (cfr. par. 3.7.1).

Altra idea centrale di Piaget è che il numero, a differenza della classe, implica delle unità strettamente ripetibili ed è, quindi, strettamente collegato all'operazione di misurazione[55], di cui l'unità di misura è la pietra angolare. Alcuni studi, così, sono stati focalizzati sulla capacità del bambino di applicare un'unità di misurazione nel determinare le quantità di acqua contenuti in diversi recipienti di forma diversa.

3.4 La teoria dei principi di conteggio (Gelman & Gallistel)

A partire dagli anni settanta appaiono sempre più numerosi gli studi che affrontano il tema della costruzione del numero nel bambino relativamente a conoscenze matematiche trascurate o giudicate secondarie dal modello piagetiano. Tra questi spiccano le interessanti ricerche di Gelman e Gallistel, al punto che gran parte dei risultati pubblicati negli ultimi venticinque anni sulle capacità aritmetiche dei bambini in età prescolare si può dire che trovino le loro basi teoriche nel libro "*The child's understanding of number*", pubblicato da R. Gelman e C.R.Gallistel nel 1978.

I due ricercatori hanno studiato, in particolare, lo sviluppo della conoscenza numerica preverbale, e nel loro studio hanno messo in evidenza come neonati di 30 giorni sappiano già discriminare tra disegni con 2 o 3 oggetti; come bambini di 5/6 mesi sappiano discriminare tra serie di 3 o 4 elementi; come neonati di 5 mesi riescano a compiere semplici operazioni di tipo additivo (1+1) e sottrattivo (2–1). Secondo questa teoria la competenza numerica non verbale fornisce la base per l'acquisizione dell'abilità di conteggio verbale: sarebbe dunque la capacità innata di riconoscere la quantità ad innescare la spinta "evolutiva" che serve a padroneggiare le competenze più complesse alla base dei meccanismi di conteggio verbale.

---

[55] Si noti il punto di contatto in questa concezione con le ipotesi di Davydov (cfr. par 3.5.1).

3.4.1 Processi di astrazione e ragionamento

Analizzando meglio l'approccio di Gelman & Gallistel, secondo questi ricercatori, nello studio dello sviluppo del concetto di numero è necessario distinguere due tipi di processi:

- il processo di astrazione[56],
- il processo di ragionamento[57].

Il primo riguarda la formazione delle rappresentazioni di numerosità, approssimate o precise delle collezioni; esso comprende il "subitizing" o subitizzazione, processo rapido, senza sforzo consapevole con cui si stabilisce con accuratezza la numerosità di insiemi di dimensioni limitate, da 1 a 3-4 elementi (Gelman e Gallistel, 1978; Deheane, 1997); e la conta spontanea.

Il secondo processo di ragionamento numerico riguarda l'operare sulle numerosità, cioè la capacità di fare inferenze sulle relazioni (maggiore, minore, uguale) e trasformazione numeriche (addizione, sottrazione).

Queste due abilità sono strettamente connesse: infatti l'uso del ragionamento numerico dipende dal disporre di rappresentazioni mentali dei valori numerici, mentre il ragionamento numerico infantile si svolge sulle rappresentazioni delle numerosità fornite dalla conta. Per questo motivo Gelman e Gallistel hanno ritenuto che Piaget abbia poco considerato il valore della conta, considerandola quasi un semplice automatismo prescolastico senza legami con le relazioni e le operazioni numeriche. Nel dare grande valore alla conta, ed in particolare al suo procedimento iterativo, si coglie invece un certo legame con la funzione successore, iterativa per definizione, del sistema assiomatico costruito da Peano per i numeri naturali (cfr. par. 3.2). Per quanto riguarda la conta i bambini, d'altra parte, presentano comportamenti che non si possono spiegare esclusivamente come risultanti di un apprendimento meccanico, anzi si ipotizza che il bambino possieda una vera e

[56]A questo livello, il trasferimento di proprietà concrete, come può essere la distribuzione oggetti discreti in una certa regione di spazio, alla rappresentazione mentale di questi oggetti.
[57]Inteso come capacità di ragionare sulla struttura dei numeri.

propria comprensione dei principi che regolano il contare (si tratta però di una comprensione di tipo implicito).

3.4.2 I cinque principi

Grande merito dei due ricercatori è stata la descrizione del processo del contare attraverso cinque "principi" che secondo loro lo governano, in cui possiamo riconoscere un'impostazione epistemologica fortemente cantoriana del numero. I cinque principi di conteggio possono essere così sintetizzati:

Il principio di iniettività *(the one-one principle)*

Il principio di iniettività (the one-one principle) consiste nell'appaiare gli oggetti di un insieme con "segni" distinti (etichette, *numerons, numerlogs*[58]).

In questa fase i processi da coordinare sono: *ripartizione* ed *etichettamento*. Per ripartizione si intende la conservazione passo dopo passo di due categorie: quella degli oggetti già contati ed "etichettati" e quella degli oggetti da contare ed "etichettare". Bisogna trasferire gli oggetti (mentalmente o fisicamente) dalla categoria da etichettare alla categoria dei già etichettati.

Coordinato con questo vi è il processo di etichettamento che consiste nel trovare ogni volta delle etichette diverse (*numerons*). Per un bambino piccolo che sta appropriandosi del processo del contare non è per nulla detto che le etichette (tags) debbano corrispondere completamente alle tradizionali parole del contare. Il principio dell'iniettività richiede il **coordinamento ritmico**[59] dei processi di ripartizione e di etichettamento. I due processi devono iniziare insieme, fermarsi insieme ed essere 'in fase' durante tutto il loro uso. La tendenza dei bambini ad indicare quando contano conferma l'importanza che essi attribuiscono al principio dell'iniettività nel coordinamento dei due processi di ripartizione e di etichettamento.

[58]Gli autori spiegano che intendono con *numerons* la categoria generale delle possibile etichette, mentre con *numerlogs* il sottinsieme di tali etichette date dalle parole tradizionali del contare.
[59]Cfr. l'approccio di Guidoni (par. 3.7.2).

Nel principio di iniettività è possibile che il bambino compia tre tipi di errori:

- errori nel processo di “ripartizione”: spuntare un oggetto più di una volta o saltare un oggetto;
- errori nel processo di “etichettamento”: usare più volte la stessa etichetta;
- fallimento nel coordinare i due processi: continuare a prelevare etichette quando tutti gli oggetti sono nella categoria dei già contati o prelevare un numero di etichette diverso dal numero degli oggetti.

Il principio dell’ordine stabile *(the Stable-order Principle)*

Anche se il bambino sa usare i numeri come etichette non si può facilmente concludere che conosca la procedura del contare. Le etichette usate per etichettare gli oggetti di un insieme devono essere ordinate e scelte in un ordine stabile, cioè ripetibile. Questo principio, il principio dell’ordine stabile, richiede l’uso di una lista stabile non certo semplice da acquisire. E’ ben noto infatti che la mente umana a differenza del computer ha delle grandi difficoltà a formare liste lunghe, di parole arbitrarie, che possono essere richiamate in modo stabile. Questo fa pensare che gran parte dello sviluppo delle abilità numeriche coinvolga la memorizzazione delle parole che indicano i primi 12, 13 numeri e le regole generative per produrre le successive.

Il principio di cardinalità *(the Cardinal Principle)*

Il principio di cardinalità afferma che l’etichetta finale ha un significato speciale; infatti, questa etichetta a differenza delle etichette precedenti, rappresenta una proprietà dell’intero insieme, è il numero cardinale dell’insieme e cioè il numero degli oggetti dell’insieme. Il bambino oltre ad essere capace di assegnare le etichette deve successivamente essere anche in grado di tirar fuori l’ultima etichetta assegnata e riconoscere che essa rappresenta la numerosità della collezione di oggetti. Poiché la selezione di una particolare etichetta e il suo uso per designare la numerosità dello schieramento richiedono passi di processo aggiuntivi, sembra verosimile che il principio della cardinalità abbia una relazione di tipo evolutivo con il principio dell'ordine stabile. Il principio di cardinalità che presuppone gli altri due dovrebbe svilupparsi più tardi.

Il principio di astrazione *(the Abstraction Principle)*

Secondo Gelman e Gallistel i primi tre principi descrivono il funzionamento del processo del contare, essi riguardano il "come contare". Il principio di astrazione, invece, afferma che essi possono essere applicati a tutte le collezioni, sia con riferimento a entità fisiche che non fisiche e anche a schieramenti eterogenei.

Il principio di irrilevanza dell'ordine *(the Order-irrelevance Principle)*

Secondo il principio di irrilevanza dell'ordine l'ordine di conteggio è irrilevante; così come l'ordine nel quale gli oggetti sono etichettati e quindi quale etichetta viene assegnata ad un oggetto e viceversa.

Perché i bambini comprendano che l'etichetta non appartiene definitivamente all'oggetto devono essere in grado di conoscere che:

- l'oggetto continua ad essere una cosa (non è diventato uno o due) secondo il principio di astrazione;
- le etichette sono arbitrarie e provvisorie, non appartengono agli oggetti una volta che il conteggio è finito;
- a prescindere dall'ordine di conteggio, il risultato è sempre lo stesso numero cardinale.

Questo principio riguarda non solo l'abilità del contare ma anche la comprensione delle proprietà dei numeri.

3.5 Il numero come misura

Pubblicato recentemente in un articolo di Gelman & Gallistel è evidente un profondo cambiamento di prospettiva: infatti, rispetto agli studi brevemente richiamati nel paragrafo precedente, il cuore dello studio dai numeri naturali si sposta verso i numeri reali, dominio numerico riconosciuto come autentico modello delle grandezze ancestrali mentali: *"Our thesis is that this cultural creation of the real numbers was a Platonic rediscovery of the underlying non-verbal system of arithmetic reasoning. The cultural history of the number concept is the history of our learning to talk coherently about a system of reasoning with real numbers that predates our ability to talk, both phylogenetically and ontogenetically."* (Gelman *et al.*, 2005, p. 1)

Gli autori, in questo recente studio, illustrano inoltre l'affascinante tesi secondo cui il ruolo predominante dei numeri interi nei primi albori dello sviluppo storico della matematica sia in realtà un compromesso tra le grandezze mentali, di natura continua e formalmente equivalenti ai numeri reali, e il linguaggio verbale, per sua essenza discreto: *"The evidence from experiments that probe the properties of numerical representations in non-verbal animals and humans suggests that* ***there exists a common system for representing both countable and uncountable quantity by means of mental magnitudes formally equivalent to real numbers***[60]*. These mental magnitudes are arithmetically processed without regard to whether they represent countable or uncountable quantity.* […] ***If this suggestion is correct, then the real numbers are the psychologically primitive system, not the natural numbers. The special role of the natural numbers in the cultural history of arithmetic is a consequence of the discrete character of human language, which picks out of the system of real numbers in the brain the discretely ordered subset generated by the nonverbal counting process, and makes these the foundation of the linguistically mediated conception of number."*** (*ibid.*, p. 23).

Questo cambiamento di punto di vista sovverte ancora una volta la questione e dona nuovo lustro alle posizioni teoriche della scuola storico-culturale sovietica. In particolare molti anni prima di questi studi V. V. Davydov aveva riconosciuto nei

60 In questo articolo gli autori sembrano sostenere l'esistenza di un unico sistema celebrale devoluto alla gestione di situazioni numeriche. Altri recenti studi (cfr., ad esempio, Dehaene, 1997) hanno invece evidenziato come, in realtà, ci siano due diverse strategie messe in atto dal cervello umano di fronte a situazioni numeriche. Una sembra si serva di immagini ed è controllata da una rete neurale bilaterale. Questa risorsa, presente fin dalla nascita e chiamata "linea interna" dei numeri o "accumulatore" interno, permette di valutare in modo approssimativo la numerosità degli oggetti trasducendo la numerosità discreta su un segmento continuo. L'altra strategia, situata nel lobo frontale sinistro, è strettamente legata al pensiero verbale e simbolico dalla quale dipendono i calcoli esatti.

numeri reali e in particolare nel concetto di *quantità* la vera origine della percezione numerica e dello sviluppo concettuale del numero.

3.5.1 Il numero come quantità (Davydov)

Gli studi di Davydov partivano dall'osservazione cruciale che **l'orientamento generale dei bambini verso il mondo della matematica è, in buona parte, in funzione dei concetti e delle operazioni che si dominano inizialmente**. Per Davydov è quindi di grande importanza identificare i concetti e le strutture con cui lo studio della matematica nelle scuole dovrebbe iniziare proprio perché questi concetti e le operazioni connesse costituiscono le fondamenta per la struttura dell'intera disciplina.
Le sue considerazioni partivano infatti dall'assunzione che:
"At any rate, the ultimate aim of instruction in mathematics should be clear from the very beginning. Of course, this does not imply that one must start out to fulfil this immediately; rather the intent is to have the aim prescribe the particular form of development of the entire school mathematics program, even in its initial stages"[61] (Davydov, 1982, p. 230).
Questo significa avere ben chiaro quali siano gli sviluppi di quei concetti che si incominciamo a trattare al livello di scuola primaria, una competenza non da poco da richiedere all'insegnante. Partendo da questa fondamentale premessa Davydov individua nei numeri reali il dominio numerico a cui guardare asintoticamente e alla base del concetto di numero reale riconosce il concetto di *quantità*. L'idea centrale è quindi quella di guardare ai numeri interi e alle frazioni come inclusi nel dominio dei reali, riconoscendo anche per questi una forte corrispondenza con il concetto di quantità. A questo livello le sue posizioni sembrano solo funzionali allo sviluppo di un programma di matematica che sia lungimirante e organico fin dall'inizio. In realtà le sue idee si spingono ben oltre richiamando le riflessioni di Kolmogorov:

[61] In questa citazione si evince un approccio molto diverso da quello di Piaget in cui la divisione negli stati di sviluppo (cfr. nota 52) assumeva l'impotenza della mediazione, se non in alcune condizioni al contorno, su questo sviluppo. In questo modo di intendere il processo educativo, si avverte d'altra parte la condivisione, anche se non esplicita, di intenti di Davydov con Vygotoskij: è la mediazione a determinare lo sviluppo successivo.

"Divorcing mathematical concepts from their origins, in teaching, results in a course with complete absence of principles and with defective logic"[62] (Kolmogorov in Davydov, *ibid.*, p. 230).

La scelta di Davydov di identificare nel concetto di quantità il cuore dell'intero impianto numerico era nata da considerazioni molto diverse da quelle che hanno portato Gelman & Gallistel dopo anni alla medesima tesi. Il suo, infatti, è uno studio storico ed epistemologico che parte dalle riflessioni di grandi matematici come Lebesgue e Kolmogorov, i quali, come già detto nel paragrafo 3.2, hanno evidenziato come il concetto di numero derivi in realtà da un contesto di misura di **quantità continue**.

Da un punto di vista didattico questo significa guardare anche ai numeri naturali come esempio di quantità matematica e quindi progettare attività, di cui l'autore mostra interessanti esempi, che li concepiscano in questo modo. In questa ottica è possibile considerare, come abbiamo già anticipato, il contare come la *misura* di un insieme discreto di oggetti. Quando si lavora con le quantità si lavora anche con il complesso sistema di trasformazioni attraverso cui le relazioni e le proprietà connesse si delineano. Nel produrre trasformazioni ci si sposta facilmente da situazioni di uguaglianza a situazioni di disuguaglianza, così come si compiono addizioni e sottrazioni passando attraverso le proprietà commutativa e associativa dell'addizione.

Molti sono gli stati gli studi di Davydov riguardo la operazioni aritmetiche, che riportano in particolare molte sperimentazioni didattiche nelle scuole elementari russe in cui sono state usate attività di misurazioni corredate da una serie di trasformazioni, soprattutto per quanto riguarda la struttura additiva.

Per quanto riguarda la struttura moltiplicativa Davydov (Davydov, 1992), partendo sempre dalla visione epistemologica di numero come misura propone una visione uniforme di moltiplicazione come *"a reflection of transfer operation from larger*

---

[62] Questo punto di vista è completamente coerente con l'approccio seguito nella progettazione della parte sperimentale di questa tesi (cap. 5). Le citazione prese dal lavoro di Davydov (1982) descrivono perfettamente lo spirito nel quale si è sviluppato questo studio.

unit of count to smaller one", idea tra l'altro più recentemente ripresa da Boulèt (Boulèt, 1998).
Davydov prova a mostrare come il concetto di trasferimento di unità di misura sia centrale nella moltiplicazione con tutti i tipi di numeri, anche se con i numeri razionali sembra che la natura stessa dei numeri in gioco metta in primo piano, a seconda che sia il moltiplicando o il moltiplicante la frazione, anche un'operazione di divisione oltre che il cambio di unità.

3.6 La classificazione di Vergnaud

L'importanza dell'opera di Gerard Vergnaud, psicologo formatosi alla scuola di Piaget, risiede risiede probabilmente nella sua capacità di fondere profonde competenze psicologiche con altrettanto preziose conoscenze matematiche. Questa doppia competenza gli ha permesso di indagare su una questione centrale, e cioè su come le idee fondamentali della psicologia cognitiva possano essere applicate nell'insegnamento della matematica e in particolare al livello più interessante e delicato di questo insegnamento: la scuola elementare. Oltre ad aver elaborato un modello cognitivo globale di costruzione della conoscenza con la teoria dei campi concettuali, Vergnaud ha analizzato in maniera molto accurata le operazioni aritmetiche, costruendo una classificazione *non empirica*, come egli stesso la definisce, dei diversi problemi aritmetici. Va sottolineato che altrettanto accurate classificazioni sono state proposte da altri autori; ad esempio quella di Carpenter & Moser (1982) è fondata, a differenza di quelle di Vergnaud, sull'azioni che intervengono nel problema più che sugli schemi strutturali. Si distinguono all'incirca venti casi, imperniati sulle azioni di *cambiamento* (in cui è previsto che un'azione modifichi la situazione di un insieme dinamico), *combinazione* (che considera la relazione tutto-parte in un insieme statico), *confronto* (in cui si confrontano due insiemi statici disgiunti e quindi anche distinti) e *uguaglianza* (in cui è prevista un'azione per riportare due insieme dinamici disgiunti e distinti ad avere lo stesso numero di elementi)[63].

Il tentativo di questi studi di voler classificare le moltissime sfaccettature dei problemi di aritmetica elementare può però portare ad una situazione quasi "ossessiva" in cui l'obiettivo può diventare quello di classificare in maniera sempre più precisa ed accurata a scapito della prospettiva didattica, di per sé dinamica e multicomprensiva. Nel gruppo di ricerca nella quale questa tesi si è sviluppata si punto piuttosto ad affrontare i problemi aritmetici nella loro complessità fin dall'inizio per poi lentamente, con un'opportuna mediazione didattica, aiutare i bambini ad orientarsi nelle strutture necessarie a risolverli. La competenza numerica, senza dubbio alcuno, è costituita da diversi aspetti, puntualmente schematizzati da queste classificazioni, ma probabilmente togliendone alcuni di essi è l'intera competenza numerica a crollare. Secondo questa prospettiva, quindi, le classificazioni se possono essere preziose a livello teorico nel diagnosticare come conviene intervenire in alcune situazioni bloccate, non risultano, però, didatticamente utili ad educare ad affrontare la complessità dei problemi aritmetici nella loro interezza.

Al fine di paragonare questi tipi di classificazioni all'approccio seguito nella progettazione della fase sperimentale, si riporta una breve sintesi dell'accurato studio di Vergnaud sia per l'addizione che per la moltiplicazione (Vergnaud, 1994).

3.6.1 L'addizione in Vergnaud

Vergnaud spiega che il suo punto di partenza, come quello di molti matematici, è di considerare la sottrazione e l'addizione come operazioni strettamente connesse l'una all'altra, e quindi si propone di studiarle insieme anche da un punto di vista didattico. Egli intende quindi per problemi di tipo additivo tutti quei problemi la cui soluzione richiede esclusivamente l'uso dell'operazione di addizione o di

[63] Per maggiori ragguagli sul senso e sull'articolazione di tale classificazione, qui riportata in estrema sintesi, si rinvia ai lavori degli autori (cfr., ad esempio, Carpenter & Moser, 1982).

sottrazione, così come per strutture additive intende delle strutture in cui le operazioni in gioco sono solo addizioni e sottrazioni.

La classificazione dei problemi additivi di Vergnaud ha una prima importante premessa: i problemi additivi possono riguardare due numeri della stessa natura[64] che vengono sommati gli uni agli altri e danno come risultato un numero della stessa natura, cioè ancora una misura, oppure possono riguardare un altro tipo di relazione additiva che passa attraverso il modello di stato-trasformazione-stato.

Partendo da questa premessa Vergnaud distingue sei grandi categorie di relazioni additive, che implicano diversi gradi di difficoltà. Le relazioni additive sono relazioni ternarie che possono comporsi in diversi modi dando origine ad una grande varietà di strutture additive.

tabella 3. 1

I categoria	II categoria	III categoria	IV categoria	V categoria	VI categoria
Due misure si compongono per dare una misura.	Una trasformazione opera su una misura per dare una misura.	Una relazione collega due misure.	Due trasformazioni si compongono per dare una trasformazione.	Una trasformazione opera su uno stato relativo(relazione) per dare uno stato relativo.	Due stati relativi(relazioni) si compongono per dare uno stato relativo.[65]
Se Paul ha 6 biglie di vetro e nella tasca sinistra 8 biglie d'acciaio, ha in tutto 14 biglie	Se Paul ha 7 monete da 1 franco e ne perde 3, gliene resteranno 4	Paul ha 8 biglie. Jacques ne ha 5 di meno. Dunque egli ne ha 3.	Paul ieri ha vinto 6 biglie e oggi ne ha perse 9. In tutto ne ha perse 3.	Paul doveva 6 biglie a Henri. Gliene restituisce 4. Gliene deve solo 2.	Paul deve 6 biglie a Henri ma Henri gliene deve 4. Paul dunque deve 2 biglie a Henri.

Per quanto la sesta categoria somigli alla quarta, la necessità di distinguere tra trasformazioni e relazioni[66], spiega l'autore, deriva dal fatto che gli stati relativi o relazioni non hanno alcun ordine temporale, ma sono necessariamente considerati

---

[64]In questo caso l'autore si riferisce al numero come misura e quindi per numeri della stessa natura intende numeri che esprimono misure.

[65]A questo livello sembra importante puntualizzare come due stati siano, in realtà, legati da una trasformazione e come la parola *comporre* usata nel caso degli stati appaia poco appropriata.

[66] Si potrebbe definire una relazione come una trasformazione potenziale o virtuale.

contemporanei e per questo richiedono una categorie diversa da quella di stato e trasformazione.

Vergnaud inoltre aggiunge che la complessità dei problemi additivi varia non solo in funzione delle diverse categorie di relazioni numeriche, ma anche dalle diverse classi di problemi che emergono in ciascuna categoria. Quindi la sua analisi si sviluppa in dettaglio su ogni categoria e ognuna a sua volta viene suddivisa in classi.

I categoria

La prima categoria dà luogo a due grandi classi di problemi:

1. Conoscendo le due misure elementari, trovare la misura composta.
2. Conoscendo la misura composta e una misura elementare, trovare l'altra.

La prima classe di problemi si risolve con un'addizione, la cui difficoltà può variare in funzione dei dati, del contenuto e della forma delle informazioni. La seconda classe di problemi si risolve con una sottrazione e la difficoltà varia in funzione degli stessi fattori.

II categoria

Nella II categoria si possono distinguere sei grandi classi di problemi:

-secondo che la trasformazione sia positiva o negativa

-secondo che la domanda sia sullo stato finale, sulla trasformazione o sullo stato iniziale.

tabella 3. 2 : II categoria

	Domanda sullo stato finale	Domanda sulla trasformazione	Domanda sullo stato iniziale
Trasformazione positiva	I classe Sull'autobus c'erano 17 persone; ne sono salite 4. Quante ve ne sono ora?	II classe Alla partenza il conta km segna 64,08; dopo segna 67,352. Quanti km sono stati percorsi?	III classe Henri trova 2,60 franchi così ha in tutto 3,90 franchi. Quanti ne aveva prima?
Trasformazione negativa	IV classe Jean ha 9 confetti; ne regala 4. Quanti gliene rimangono?	V classe Paul ad inizio partita aveva 41 biglie ora ne ha 29. Quante ne ha perse?	VI classe Un paese a 3567 abitanti, in cinque anni la popolazione è diminuita di 670 abitanti. Quanti ce ne erano 5 anni prima?

Secondo Vergnaud il calcolo relazionale che implica la soluzione di problemi della prima colonna è il più semplice che si possa immaginare poiché è sufficiente applicare una trasformazione diretta ad uno stato iniziale. Ma anche in questa colonna l'autore ci tiene a precisare che nella prima classe la trasformazione diretta è un'addizione e la sua applicazione è sempre possibile, nella seconda invece la trasformazione diretta è una sottrazione e la sua applicazione è possibile solo se il valore dello stato iniziale è sufficientemente grande[67]. Questa è indicata da Vergnaud come un'eventuale difficoltà per i bambini sulla quale occorre fare chiarezza: ad esempio non si possono regalare 4 confetti se se ne hanno solo 3.

Secondo Vergnaud i problemi delle classi della prima colonna possono essere affrontati fin dall'inizio, mentre, anche con numeri piccoli le classi della seconda colonna possono dare maggiori difficoltà e non si può affrontare questo tipo di problemi prima della fine della prima o seconda elementare. Infatti alcune procedure possono passare attraverso un calcolo relazionale del tipo "se b fa passare da a a c allora b è uguale alla differenza tra c ed a". Secondo Vergnaud questo calcolo relazionale è al di sopra delle capacità della maggior parte dei

[67] Questa analisi indica il tabù che Vergnaud ha nel trattare i numeri negativi a livello di scuola di base.

bambini della scuola elementare, tanto più che il valore assoluto della trasformazione non si ottiene nello stesso modo quando essa è positiva o negativa.[68]
Il calcolo relazionale che porta alla soluzione dei problemi della terza colonna è ancora più complesso, in quanto la soluzione canonica implica l'inversione della trasformazione diretta e il calcolo dello stato iniziale applicando allo stato finale la trasformazione inversa: " se b fa passare da a a c , allora $-b$ fa passare da c ad a ed occorre applicare $-b$ a c per trovare a".

IV categorie

Come per la prima categoria di relazioni additive, esistono due grandi classi:
1. Conoscendo le due trasformazioni elementari, trovare la trasformazione composta.
2. Conoscendo la trasformazione composta e una delle trasformazioni elementari, trovare l'altra trasformazione.
Inoltre qui l'autore si sofferma in una minuziosa analisi delle sottoclassi che si vengono a costituire distinguendo tra trasformazioni positive e negative, riconoscendo una difficoltà maggiore dei problemi della seconda classe rispetto a quelli della prima classe.
Vergnaud non si addentra nello studio della terza e delle ultime due categorie dicendo che si può ripetere un'analisi simile alle altre. Per la quinta categoria, nella quale una trasformazione opera su uno stato relativo, si ritrovano le classi studiate a proposito della seconda categoria (ricerca dello stato finale, della trasformazione, dello stato iniziale) con classi più numerose, tenendo conto delle diverse possibilità esistenti per il segno e il valore assoluto. Per la sesta categoria, nella quale due stati

[68] Questa idea appare smentita dal percorso sperimentale descritto in questa tesi in cui, nell'attività della *ballata degli elefanti* (par. 5.3.1), i bambini nel produrre comandi con l'intenzione di far spostare un loro compagno dalla piastrella 3 alla 9 si sono trovati nella situazione di dover pensare, con successo, ad un comando costituito addirittura da due trasformazioni. Si tratta in realtà di capacità molto intrecciate, che, nel nostro approccio alla sperimentazione, si è deciso di stimolare fin dalla prima elementare.

relativi si compongono in uno stato relativo, si ritrovano delle classi simili a quelle studiate a proposito della prima categoria, ma anche qui più numerose.

3.6.2 La moltiplicazione in Vergnaud

"*Le difficoltà principali nelle strutture moltiplicative si basano sulle proprietà dimensionali delle quantità e degli operatori coinvolti*" (Vergnaud, 1983).

Anche nel caso della moltiplicazione l'approccio di Vergnaud è quello di distinguere numerose classi secondo la forma della relazione moltiplicativa, secondo il carattere discreto o continuo delle quantità considerate, secondo le proprietà dei numeri utilizzati.

Le classi principali che l'autore distingue secondo la forma della relazione moltiplicativa sono essenzialmente tre.

I classe: isomorfismo di misure

L'isomorfismo di misure mette in opera quattro quantità, ma nei problemi più semplici si sa che una di queste quantità è uguale a uno.

Esistono tre grandi classi di problemi a seconda che l'incognita sia l'una o l'altra delle tre quantità.

tabella 3. 3

Moltiplicazione	"Ho 3 confezioni di yogurt, in ogni confezione vi sono 4 yogurt. Quanti yogurt ho?"	*confezioni* *yogurt* 1 → 4 3 → x
Divisione: ricerca del valore unitario	"Ho speso 12 franchi per 3 bottiglie di vino. Quanto costa una bottiglia?"	*bottiglie* *franchi* 1 → x 3 → 12
Divisione: ricerca della quantità di unità	"Pierre ha 12 franchi e vuole acquistare alcuni pacchetti di caramelle che costano 4 franchi al pacchetto. Quanti ne potrà acquistare?"	*pacchetti* *franchi* 1 → 4 x → 12

L'autore passa poi ad un'analisi dettagliata del primo esempio per cercare di esplicitare i percorsi diversi che possono portare alla soluzione.

Nel fare questo è interessante notare come Vergnaud ci tenga a sottolineare le *due relazione di proporzionalità quaternaria* che strutturano questo tipi di problemi. Nel caso del primo problema, ad esempio, queste relazioni possono essere così esplicitate:

Prima relazione:
x yogurt stanno a 4 yogurt come tre confezioni stanno ad 1 confezione

$$\frac{x\ yogurt}{4\,yogurt} = \frac{3 confezioni}{1 confezione}.$$ [69]

Seconda relazione:
x yogurt stanno a 3 confezioni come 4 yogurt stanno ad 1 confezione

$$\frac{x\ yogurt}{3 confezioni} = \frac{4\,yogurt}{1 confezione}.$$

Questo tipo di scrittura mette in evidenza un'analisi ben nota in fisica come analisi dimensionale che per l'autore è indispensabile per chiarificare a pieno le relazioni coinvolte in una moltiplicazione e per mostrare che anche la moltiplicazione più elementare implica un calcolo relazionale basato su quattro quantità e parecchi tipi di operazione.

[69] Vergnaud non sembra sottolineare come in questo caso la relazione sia tra due numeri "puri", cioè non relativi a particolari grandezze. Il rapporto tra *'x yogurt'* e *'4 yogurt'*, così come quello tra '3 confezioni' e '1 confezione', rende la relazione adimensionale e relativa solo alle *'volte'*. La relazione infatti, riconosciuto che x=12, si riduce a $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$, interpretabile come "12 yogurt sono *'3 volte'* 4 yogurt, così come 3 confezioni sono '*3 volte*' 1 confezione". (Per il concetto di *'volta'*, cfr. par. 3.7.2).

II classe: caso di un solo spazio di misure.

"Occorrono 2 metri di tessuto per confezionare una gonna e tre volte di più per confezionare un completo. Occorrono dunque 6 metri per confezionare un completo"

Questo esempio illustra una forma di relazione moltiplicativa, che non rientra nei casi della classe precedente, e che fa intervenire una corrispondenza che non è un isomorfismo di misure. In effetti in questo esempio vi è una sola categoria di misure, i metri di tessuto, e la corrispondenza non è stabilita tra quattro quantità ma tra due quantità da un lato, e due oggetti, gonna e completo, dall'altro.

$$\begin{array}{r|l} & \textit{metri} \\ \textit{gonna} & 2 \\ \textit{completo} & 6 \end{array} \quad \times 3$$

Il numero 2 rappresenta una misura in metri così come il numero 6, mentre il numero 3 rappresenta un operatore scalare, verbalmente indicato con la parola "volta". Le espressioni linguistiche "tre volte di più", "tre volte di meno" sono inevitabilmente presenti nell'enunciato di questa forma di relazione. Esse non vengono evidentemente utilizzate nello studio degli isomorfismi di misure se non per esplicitare il ruolo degli operatori scalari. Analogamente alla prima classe si possono considerare tre sottoclassi di problemi e in particolare due tipi di divisione (ricerca di una misura e ricerca di uno scalare). Esaminiamo i tre schemi possibili:

tabella 3. 4

Moltiplicazione	Divisione: ricerca di una misura	Divisione: ricerca di uno scalare
Occorrono due metri di tessuto per confezionare una gonna; ne occorrono tre volte di più per confezionare un completo.	*Occorre tre volte in più di tessuto per confezionare un completo che una gonna. Per il completo ne occorrono 6 metri.*	*Occorrono 2 metri di tessuto per confezionare una gonna, 6 metri per confezionare un completo. Quante volte di più ne occorre per un completo in rapporto ad una gonna.*
gonna 2 *completo* x $\times 3$	*gonna* x *completo* 6 $\times 3$	*gonna* 2 *completo* 6 $\times x$

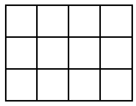
III classe: prodotto di misure

Qui troviamo una relazione ternaria fra tre quantità di cui una è il prodotto delle altre due, sia sul piano numerico che sul piano dimensionale. La grande forma moltiplicativa del prodotto di misura permette di distinguere due classi di problemi:

Moltiplicazione: trovare la misura-prodotto conoscendo le misure elementari.
Divisione: trovare una delle misure elementari conoscendo l'altra e la misura del prodotto.

Per ognuna di queste due sottoclassi si può poi ancora considerare un'ulteriore suddivisione in cui lo schema più naturale per rappresentare questa forma di relazione è quello della tabella cartesiana, infatti, secondo Vergnaud è la nozione di prodotto cartesiano di insiemi che rende manifesta la struttura di prodotto di misure[70]:

[70] In realtà il prodotto di misure nasconde il problema di moltiplicare due quantità continue, nel senso di rappresentate da numeri reali non naturali. In questa circostanza, infatti, nessuno dei due fattori è interpretabile come '*volta*', intera per costituzione. Il problema di trasformare un continuo in *'volta'* non è banale. Purtroppo la moltiplicazione tra due grandezze continue, omogenee o non omogenee, innesca un'astrazione molto delicata con la quale il risultato è una grandezza non

Prodotto discreto-discreto. "Tre ragazzi e 4 ragazze vogliono ballare. Ogni ragazzo vuole ballare con ciascuna delle ragazze e ogni ragazza vuole ballare con ciascuno dei ragazzi. Quante sono le coppie possibili?" Che designando con {a, b, c}l'insieme dei ragazzi e con {f, g, h, i} l'insieme delle ragazze, può essere rappresentato. (a,f) (a,g) (a,h) (a,i) (b,f) (b,g) (b,h) (b,i) $((c,f)$ (c,g) (c,h) (c,i)	*Prodotto continuo-continuo.* "Una stanza rettangolare è lunga 4 m e larga 3 m. Qual è la sua area?" Si può considerare la seguente rappresentazione 	*Prodotto continuo-continuo e nozione di media.* "Una piscina ha l'area di 265,2 m^2 e occorrono 633,3 m^3 per riempirla. Qual è la profondità media dell'acqua?"

3.7 Il numero tra discreto e continuo (Guidoni)

Gli studi di Guidoni, partendo da una serie di evidenze, inquadrano il problema da una prospettiva completamente diversa. Per chiarire il suo punto di vista conviene richiamare le premesse che costituiscono il punto di partenza delle sue ipotesi (Guidoni, 2007 a):

* Popolazioni "primitive" dell'Amazzonia, rivisitate ad hoc anche recentemente, "contano" esplicitamente fino a 3, utilizzando poi varie strategie per gestire alla meglio i "molti". Le stesse popolazioni rivelano d'altra parte "competenze geometriche" analoghe a quelle rilevabili in popolazioni dei paesi culturalmente più sviluppati.

* A partire da qualche mese di vita i bambini mostrano inequivocabili "competenze numeriche additive" per numeri piccolissimi (circa sotto il 4); evidenze osservative e neurologiche mostrano d'altra parte che tale capacità non si sviluppa in modo sostanziale che un paio di anni più tardi, in profonda interferenza (evidente anche neurologicamente) con le competenze di azione e linguaggio (a loro volta in interferenza costruttiva).

---

omogenea ai due fattori. Si pensi al caso del prodotto di lunghezze, che risulta, cosa per nulla scontata, è un'area.

* Le stime di numerosità eseguite (senza contare) su gruppi più o meno numerosi di oggetti rivelano, in base a esperienze sia fenomenologiche sia neurologiche che valutano tempi ed errori, una profonda similarità fra "animali superiori", bambini e adulti: l'ipotesi più ragionevole per interpretare le strutture dei dati disponibili appare quella di una "trasduzione" della stima di numerosità, per la sua gestione cognitiva, in una estensione (approssimata) di intervallo unidimensionale continuo. Il più semplice "contare" su base linguistica coinvolgerebbe quindi una ri-trasduzione cognitiva dal continuo al discreto basata su una pratica culturale, linguistica, come evidenziato anche da Gelman e Gallistel.
Partendo da queste premesse l'ipotesi di Guidoni, validata attraverso la ricerca diretta e confortata dalle recenti acquisizioni neurocognitive, sovverte completamente la ricerca "metafisica" di un'unica originale sorgente per la percezione numerica:

"Discreto e continuo sono e restano, nei contesti di vita più elementari come nella speculazione più raffinata, modi di pensare direttamente e irriducibilmente antinomici (dissòi lògoi, direbbe Protagora); ma sono al tempo stesso modi di guardare diversi che devono comunque trovare una necessaria complementarietà all'interno di "discorsi" più complessi che ne valorizzino la specificità di "presa" sul reale: modi via via "possibili" in quanto potenzialmente (parzialmente) risonanti rispetto alla struttura della strategia complessiva (cfr. il "gioco dei giochi" di Wittgenstein) via via perseguita."(Guidoni, 2007, p. 7)

Per Guidoni, quindi, esistono due sorgenti irriducibili della percezione numerica, due "mosse" percettive radicalmente antinomiche, risonanti con aspetti di realtà fra loro complementari: la *centratura di attenzione*, correlata alla nozione discreta di *azione chiusa*, o *volta*; e la *diffusione di attenzione*, correlata alla nozione continua di *azione aperta*, o *cambiamento.* È nell'antinomicità dell'azione chiusa in quanto percepita intera (es. uno schiaffo) e azione aperta (es. una camminata) che si gioca

l'antinomicità tra discreto e continuo che costituiscono entrambi sorgenti indipendenti, ma interferenti della percezione della realtà.
Come evidenzia Guidoni, non si dispone di nessuna "mossa" culturale di possibile sintesi cognitiva a livello di base. D'altra parte le possibilità del capire e del non capire fin dagli inizi il "pensiero aritmetico", si giocano sulla gestione controllata e intercontestuale di questa difficile interferenza. L'autore sottolinea come quindi solo un'efficace e precoce strategia di *mediazione culturale* (o didattica), che sembra ancora oggi tutta da inventare, in questa critica area cognitiva può aiutare nella costruire una gestione controllata dell'interferenza tra discreto e continuo.
Secondo Guidoni, quindi, la nostra capacità di contare si costruisce sulla presenza di due delle categorie, o "modi originari di guardare il mondo", fondamentali ed irriducibili: la categoria di "individuo" e la categoria di "sostanza continua".
Chiamiamo IN-DIVIDUO qualcosa (oggetto, essere vivente, sistema, correlazione stabile di parti…) che è definito in quanto preso-nella-sua-interezza. Ad un individuo attribuiamo un nome ("comune") che serve ad etichettare e stabilizzare la sua definizione in quanto individuo-schema. In questo modo tutti gli individui che fanno parte della stessa "definizione schematica" fanno parte di una classe. In particolare nella nostra cultura, all'individuo generico della classe a cui corrisponde il nome ci riferiamo poi facendolo precedere dall'articolo "un" (sottintendendo "esemplare di"). "Un" generico individuo ("cosa") guardato e trattato come tale costituisce la nostra definizione di UNO. In altre parole: "uno" è ciò che hanno in comune tutti gli individui-cose di ogni tipo; ciò che può/deve essere colto in via preliminare nell'atto di attenzione globale in cui si realizza qualunque riconoscere.
Individuo è, per rifarsi alle radici etimologiche del termine, "quello che non si può pensare di dividere senza che perda la sua identità". Tale identità deve essere almeno relativamente stabile, pur attraverso le molteplici trasformazioni che l'individuo può subire. Solo così l'individuo è identificabile, discriminabile, riconoscibile, e, dunque, anche "contabile".

Alla categoria di individuo è collegata la nozione di “discreto”, che indica appunto la caratteristica degli individui di essere stabilmente distinti gli uni dagli altri, separati e riconoscibili (ovvero, è possibile “discernerli”).

Per comprendere la strutturazione del contare è importante anche mettere in evidenza i rapporti indicati fra individuo e classe: quando si conta, si contano sempre gli esemplari di una classe, alla quale ci si riferisce anche implicitamente, sia che gli individui che si stanno contando siano “identici” o molto simili (e allora conto “la classe di tutte le viti che ho nella scatola”, “la classe degli esseri umani viventi al momento attuale”, eccetera…), sia che essi siano molto diversi tra loro, nel qual caso bisogna comunque trovare una classe più ampia a cui appartengono tutti, anche se si tratta della classe “delle cose che si è deciso di contare in quel momento”. Quando si conta si centra l'attenzione su un individuo o sistema. Bisogna sapere che cosa si conta, altrimenti è inutile contare: ogni azione e quindi anche il contare nasce da una necessità.

La nozione di “discreto” assume significato in opposizione a quella di “continuo”, a sua volta riferita all'altra categoria fondamentale di “sostanza”: “sostanza” può essere ad esempio l'acqua, la farina, la terra. La “sostanza” può essere definita come un “quasi-individuo-illimitato”, una quantità continua prendibile in parti grandi o piccole quanto si vuole. Alla “identità” che caratterizza gli individui corrisponde, per quanto riguarda la sostanza, la “conservazione della quantità”, che rimane stabile malgrado tutte le operazioni di discretizzazione a cui noi la sottoponiamo.

Per discretizzare la sostanza che per natura è continua la si può dividere in pezzi in diversi modi artificiali. Il numero viene imposto con un'operazione culturalmente profonda. Anche il ritmo discretizza qualcosa che è di per sé continua. Dopotutto, appena nati si discretezza ritmicamente il respiro e, a poche ore di vita, si discretezza ancora ritmicamente il flusso entrante di liquido attraverso il succhiare proprio per poterli gestire in modo vitale; a pochi mesi – minuti o ore per gli animali – si discretizza lo spazio da percorrere attraverso movimenti corporei che sono di nuovo ritmici nello spazio e nel tempo … e così via.

La sostanza, dunque, per essere contata deve essere discretizzata: il che in genere avviene nel momento in cui noi la "costringiamo ad entrare" in un individuo-contenitore (prendendone la forma), o la tagliamo a pezzi della dimensione o del peso voluto, o comunque compiamo su di essa una sequenza di azioni ritmiche di vario genere atte a misurarla, separandola in passi, sorsi, metri, battute e così via[71]. In questo senso definiamo il contare come *"riconoscimento di un discreto preesistente (per quanto riguarda gli individui) o imposizione di un discreto formante (nel caso delle sostanze)".*[72]

Lavorando con i bambini, sottolinea l'autore, ci si rende conto di come spesso questa "imposizione del discreto" risulti più complicata del previsto a livello sia operativo che concettuale: non è così facile dividere l'acqua in parti, o lo spazio dell'aula in passi, in modo che "i conti tornino sempre" – e rendersi conto del perché, a quale fine, può essere necessario che "tornino", ma è proprio cominciando a porsi questo tipo di domande che i bambini arrivano a reinventare i sistemi di riferimento e le unità di misura, a comprenderne l'utilità (cfr. par. 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3).

Inoltre esistono anche cose che possono essere guardate sia come insiemi di individui sia come sostanze. Ad esempio i mandarini si contano uno a uno, a meno che non siano veramente "tanti", allora si può pensare di misurarli a kg; il riso (o la sabbia, ad esempio) si conta a cucchiai o bicchieri, a meno che i grani non siano veramente "pochi", allora si può contarli in chicchi. Resta, quindi, difficile individuare il "punto di scavalco" fra contare il discreto che "c'è già", e contare il discreto che viene culturalmente introdotto "a forza" come espediente per gestire il continuo attraverso la struttura essenzialmente discreta – ritmica – dell'agire e del pensare.

---

[71] Anche il tempo e lo spazio vengono trattati come sostanze continue.

[72] A questo proposito appare esemplare nell'attività sperimentale il tentativo di un bambino, nel cercare un'unità di misura per il riso, di rendere continua una sostanza discreta come il riso inserendolo in delle cannucce (cfr. par. 5.3.2, p. 120): operazione di '*discretizzazione*' vs operazione di '*continuizzazione*'.

Inoltre ci sono altre cose "difficili da contare", come dicono i bambini, quelle che pur essendo "in teoria" individui, non hanno delle caratteristiche di stabilità o di "separabilità" sufficienti per noi, per i mezzi percettivi che abbiamo a disposizione: cose che si muovono troppo velocemente, che scappano, che sono troppo piccole o troppo grandi o troppo lontane o tendono a stare tutte attaccate. La faccenda è più complessa di quello che potrebbe sembrare.

In questa fase la mediazione semiotica assume un ruolo cruciale e se guidata in maniera opportuna può creare un'efficace risonanza tra l'interpretazione della realtà ed i modelli culturalmente selezionati. Infatti, in questa fase, in aiuto possiamo far intervenire gli individui-segni, nella forma di segni grafici ad esempio, o di oggetti-marcatori, che possono essere utili per supplire alle necessarie caratteristiche di stabilità o di "manipolabilità" carenti nelle cose che dobbiamo contare, e che i segni vanno a rappresentare, a sostituire. Grazie ai segni possiamo lavorare con una cosa "comoda" anziché con una "scomoda", con una cosa che rimane al posto di una che sfugge. E ovviamente i segni hanno anche il ruolo fondamentale di rendere stabile la memoria, di aiutare a non perdere il conto.

Altra ipotesi fondamentale, in parte già richiamata, è che:

"*L'oggetto-base dell'attività del contare sono le* ***centrature soggettive di attenzione****, di per sé discrete e ordinate, attraverso cui viene scandito un qualunque contesto che sia di per sé potenzialmente discretizzabile.*"

Questa base percettiva dell'astrazione è correlata all'azione "chiusa" della *volta*. Le centrature di attenzione, ossia le *volte*, sono oggetto-base sia del *contare* oggetti discreti, sia del *misurare* entità intrinsecamente continue avendole artificialmente discretizzate. Inoltre questa base percettiva del contare interferisce, anche conflittualmente, con la base percettiva deputata alla gestione del continuo-in-quanto-tale. La nozione numerica fondamentale e universale – il "numero puro" – del contare è in definitiva associata alla nozione di *volta*, e in particolare alla nozione di *accumulazione controllata e strutturata delle volte.* Dunque, <cinque> – numero ordinale o cardinale che sia – significa sempre <cinque volte uno>; e la struttura operatoria additiva, con le sue proprietà centrate sulle <volte-di-uno>, fa parte della stessa idea-base di numero.

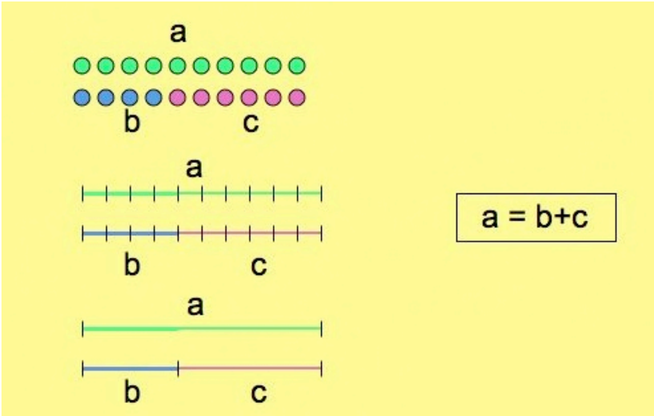
3.7.1 L'addizione

La gestione precoce della struttura additiva-sottrattiva per numeri piccolissimi rivela altri aspetti cruciali della dinamica cognitiva coinvolta nella "costruzione del numero".

La base fondamentale della prima gestione della numerosità è connessa al vero e proprio riconoscimento di una configurazione spaziale, sostanzialmente invariante nei contesti se non troppo "perturbata" da discrepanze percettive: si riconosce la "forma di tre" indipendentemente dalle posizioni relative, purché queste si realizzino entro un "frame" spaziale definito e con oggetti discreti semanticamente omogenei anche se non identici.

La numericità dello stato e gli effetti delle sue trasformazioni elementari (aggiungere-togliere uno) sono riconosciuti contemporaneamente, in evidente correlazione reciproca: "numeri" e "operazioni" appaiono cioè come facce di una stessa struttura interpretativa. Coerentemente, la competenza è attivata in presenza di vere e proprie azioni su oggetti, e non su loro rappresentazioni. Infine, omogeneità semantica degli oggetti e invarianza rispetto alla posizione relativa da un lato si ricollegano a processi analoghi evidenti negli animali, dall'altro limitano necessariamente il "subitizing" a piccoli numeri.

figura 3. 1



L'efficace metafora spaziale della struttura additiva in fig. 3.1 mette in evidenza uno schema di *compensazione additiva*[73], in cui sono evidenti le relazioni tra le operazioni di addizione e sottrazione viste come due aspetti simmetrici della medesima struttura (sia in caso di discreto, che di continuo discretizzato, che di continuo): una volta compresa questa dinamica è possibile muoversi all'interno di tale struttura con maggiore sicurezza.

Anche Vergnaud concepisce la struttura additiva considerando simultaneamente i due aspetti di addizione e sottrazione, ma nel suo approccio, come in quello di Carpenter e Moser, vi è una classificazione molto accurata dei diversi problemi additivi con una relativa scansione di difficoltà. Queste classificazioni e i relativi incrementi di difficoltà sottendono anche esplicitamente, come abbiamo visto, una scansione temporale con cui è preferibile presentare le diverse situazioni problematiche. Nell'approccio di Guidoni, invece, pur riconoscendo una diversa difficoltà nei diversi problemi additivi, non c'è una classificazione, ma vi è piuttosto l'idea, che anima d'altra parte anche il modello cognitivo, che non ci sia una preferenza temporale con cui scontrarsi con situazioni problematiche anche più complesse, ma che la mediazione didattica sia la chiave ad ogni livello.

[73] La parola compensazione, come evidenziato nel par. 3.3, è stata introdotta da Piaget nel caso di situazioni moltiplicative a prodotto costante. In questo paragrafo si parla di compensazione additiva nel senso che di situazioni a somma costante.

Ad esempio, in Vergnaud, non vi è alcun riferimento all'uso dei numeri negativi, trattati come "tabù". Anche se storicamente i numeri negativi sono emersi molto tardi, da questo probabilmente nasce il tabù nella didattica, non è sempre vero però che l'ontogenesi ripete la filogenesi: i bambini di oggi vivono in un ambiente culturale in cui si scontrano non solo con rappresentazioni di numeri negativi, ma anche con situazioni in cui è utile imparare ad usarli. In questo approccio non vi è questo limite, e lo schema di compensazione è una buona metafora spaziale anche in situazioni additive con numeri negativi. L'idea è di privilegiare un approccio olistico[74] sia alla struttura additiva, sia, come vedremo nella struttura moltiplicativa, approccio che può essere definito olistico in due sensi diversi. Da una parte, all'interno di ciascuna delle due strutture le operazioni dirette e inverse sono viste come due facce della stessa medaglia, e di conseguenza nella mediazione didattica vanno trattate simultaneamente. Dall'altra parte, entrambe le strutture coinvolgono tutti i diversi aspetti e significati del numero (discreto-continuo, positivo-negativo, stato-trasformazione), dei quali nessuno è visto come originario, più spontaneo o più semplice degli altri (Guidoni, 2007 b); da ciò consegue che in termini di mediazione didattica si affrontano fin dall'inizio i diversi nodi problematici che compongono sia il numero che le operazioni aritmetiche.

In questo senso per i bambini resta essenziale per diversi anni la teoria e la pratica del "palcoscenico": spazio-cornice, collettivo o individuale, al cui interno avvengono i fatti numerici da interpretare e rappresentare, sempre e sistematicamente attraverso azioni su oggetti comuni o simbolici, prima di passare alla rappresentazione. In questo modo è possibile rendersi consapevoli che *"ha senso e significato* sommare e sottrarre entità discrete solo se omogenee rispetto a uno scopo/interesse definito".

---

[74] Sono molti gli studi del settore che mostrano l'efficacia di un approccio olistico, ad esempio cfr. (Price, 2001).

3.7.2 La moltiplicazione

Prima di analizzare le differenze tra le operazioni aritmetiche di addizione e di moltiplicazione sembra importante sottolineare un loro punto di contatto nella funzione di confrontare delle loro operazioni inverse di sottrazione e di divisione. Si può notare, infatti, come sia la sottrazione che la divisione siano delle operazioni, sul piano formale, e delle strategie psicologiche, sul piano cognitivo, attraverso le quali si eseguono operazioni di confronto. Nel caso, ad esempio, si intenda confrontare due nastri, nel senso di stabilire chi sia il più lungo, o di stabilire se esiste un sottomultiplo comune, si opera in maniera naturale un'operazione di sottrazione o di divisione tra le lunghezze relative ai due nastri. D'altra parte se si confrontano due grandezze uguali il risultato della sottrazione è "0" mentre il risultato della divisione è "1". Da questo punto di vista gli elementi neutri delle due strutture aritmetiche risultano dei "marcatori di uguaglianza".

Per passare ad analizzare le differenze tra le due strutture è utile osservare come la struttura additiva, come si è visto, operi con elementi appartenenti alla stessa classe, omogenei dal punto di vista del significato; essa è, infatti, facilmente rappresentabile attraverso uno schema di compensazione unidimensionale (fig. 3.1). La struttura moltiplicativa, al contrario, è organizzata su più dimensioni, generalmente disomogenee, e corrisponde ad una grandissima varietà di situazioni reali.

Questa forse è stata, ed è, la grossa difficoltà con la quale ci si scontra a livello di insegnamento-apprendimento, e con la quale si sono scontrati e si scontrano molti ricercatori in educazione matematica. La difficoltà è sempre stata quella di cercare un modello unico di moltiplicazione a cui riferire le diverse semantiche, nel quale potessero rispecchiarsi i diversi prototipi reali, di cui il primo esempio è quello di addizione ripetuta.

Il primo illustre sostenitore del modello di moltiplicazione come addizione ripetuta è stato J. Piaget. Diversi autori hanno cercato di evidenziarne i pericoli.. Davydov, (1992), ha osservato, ad esempio, come questo modello non riesce ad includere tutti i casi, come nel caso della moltiplicazione con almeno un fattore uguale ad uno, dove non è chiaro "*cosa venga addizionato a cosa*". Vergnaud (1983, 1994) suggerisce invece, come si evidenzia dalla sua attentissima classificazione (cfr. par. 3.6.2), una teoria non uniforme di moltiplicazione, scegliendo di classificare i problemi moltiplicativi in tre diverse classi: l'isomorfismo di misure, il caso di un solo spazio di misure, il prodotto di misure. Come osservato, precedentemente, queste classificazioni però fanno fatica a cogliere il concetto delle '*volte*' ritenuto molto utile, invece, nell'approccio didattico suggerito da Guidoni e utilizzato nella nostra attività sperimentale. La struttura ritmica delle '*volte*', infatti, ha il grande vantaggio di accomunare la struttura del contare con la struttura moltiplicativa: da questo punto di vista si può anche dire che il contare "normalmente" per *uno*, non sia che un caso particolare della moltiplicazione (addizione ripetuta, ma con precauzione).

Può essere allora utile pensare ad un *loop cognitivo* che lega l'operazione del contare, dell'addizionare e del moltiplicare, in cui dal contare per *uno* si passa all'addizionare e dal contare per *n* si passa al moltiplicare (cfr. *il gioco della tenda matematica*, par. 5.4.1). Le tre azioni del moltiplicare, del contare e dell'addizionare sono, d'altra parte, legate reciprocamente da forti relazioni che mantengono solida e coerente la struttura aritmetica dei numeri, come le forze agenti in un vortice (figura 3. 2).

figura 3.2

"*Contare è fare un'azione*" dice un bambino in prima elementare: si impara a contare, cioè il significato del contare, facendo operazioni, non solo operazioni additive, ma anche moltiplicative (se bisogna contare per n).

Anche nel caso della moltiplicazione, l'approccio che si privilegia è ancora una volta olistico nel senso che non c'è una scansione temporale per cui, ad esempio, la moltiplicazione debba essere presentata prima della divisione. L'idea è che la moltiplicazione e la divisione vadano esplorate fin dall'inizio contemporaneamente con delle attività strategicamente costruite (cfr. le attività dei par. 5.4.1-5.4.2-5.4.3).

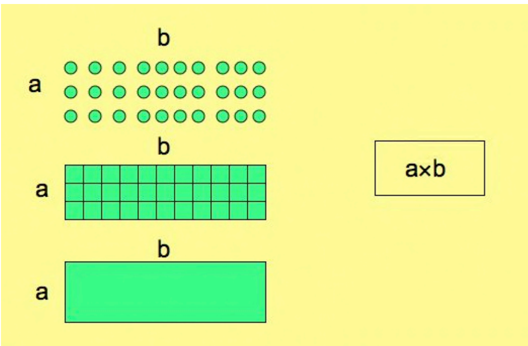
In questa direzione vi è la convinzione che la mediazione semiotica svolta da una codifica della moltiplicazione in '*cose*', '*volte*' e '*cose/volta*' ('*cose per volta'*) possa aiutare nella costruzione di un controllo semantico della situazione. Questa chiave interpretativa, ad esempio, può aiutare a decifrare situazioni delicate, come quelle sollevate da Davydov in cui la moltiplicazione non è interpretabile come addizione ripetuta:

$$(4 \text{ cose/volta}) \times (1 \text{ volta}) = 4 \text{ cose}$$

$$(4 \text{ cose/volta}) \times (0 \text{ volte}) = 0 \text{ cose}$$

In questo approccio, inoltre, viene riconosciuta come molto utile per la moltiplicazione, nel senso della mediazione semiotica, una metafora spaziale o una rappresentazione grafica: la disposizione a schieramento (in caso di discreto, continuo discretizzato e continuo) della fig. 3.3, nella quale è possibile riconoscere la struttura ritmica della moltiplicazione simultaneamente con l'operazione inversa di divisione.

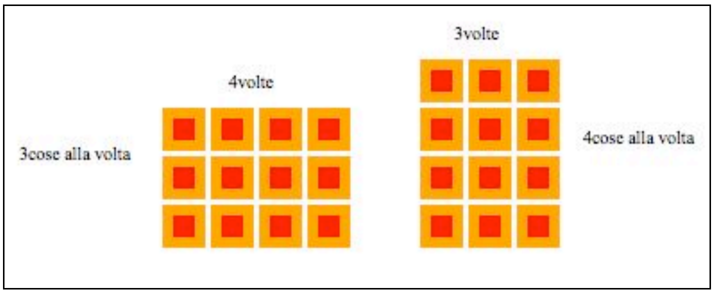
figura 3. 3



Per quanto riguarda la divisione si possono distinguere tre tipi di divisione, due dei quali sono ben rappresentati dallo schieramento, mentre per il terzo conviene fare un discorso a parte.

I primi due tipi di divisione sono la **divisione di ripartizione** (12 cose : 4 volte =3 cose per volta, ho 12 pezzi di pizza che distribuisco tra 4 persone e ognuna ne prende 3) e la **divisione di contenenza** (12 cose : 4 cose per volta = 3 volte, ho 12 pezzi di pizza da dividere in teglie da 4 pezzi, riempio 3 teglie), cfr. fig. 3.4.

figura 3. 4

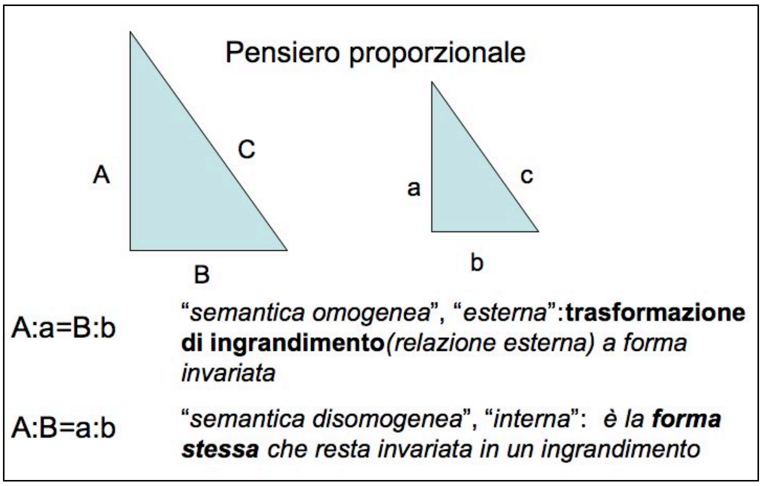


Il terzo tipo divisione è il **rapporto** il quale coinvolge*,* invece, *un confronto tra grandezze disomogenee* (12 cose / 4 volte, 12 pezzi di pizza su 4 tavoli) legato evidentemente *all'isomorfismo di misure* della classificazione di Vergnaud (cfr. par. 3.6.2). A differenza di quello di Vergnaud questo tipo di approccio, però, non utilizza la struttura di rapporto come voce di una classificazione, ma piuttosto la riconosce come una delle strutture che la mente naturalmente (spesso in maniera inconsapevolmente) valuta. L'esperienza di mettere a confronto numerosità diverse senza contarle[75], infatti, appare non solo naturale, ma anche cruciale per tutto lo sviluppo cognitivo ed in particolare per tutto il percorso di comprensione del numero. D'altra parte come messo in evidenza da Dehaene una prima valutazione delle numerosità pare avvenga attraverso la trasduzione della numerosità discreta degli oggetti reali in un segmento continuo "interno", "mentale" (Dehaene, 1997). Sembra quindi molto probabile che, già nei primi anni di vita, vi sia un naturale

[75]Notare che questa esperienza risulta in analogia e in contrasto con l'esperienza di confrontare estensioni continue.

controllo percettivo di una variabile che corrisponde a quello che si potrebbe chiamare un "relazione discreto/continuo", una "fittezza" (come dicono i bambini). Per i bambini quindi può essere di grande aiuto confrontarsi con esperienze che mettono in gioco un confronto qualitativo di rapporti, che attiva una gestione intrecciata del numero e dello spazio.
E' evidente che l'idea di fittezza, e in particolare quella di fittezza "regolare" (uniforme equivalente), correla fortemente numerosità e estensione spaziale, una correlazione che si evidenzia dall' intuizione "qualitativa" di rapporto che è possibile vedere all'opera quando bambini "piccoli" confrontano o producono "fittezze" diverse. Si può parlare, pertanto, di fittezza spaziale: unidimensionale (perle spaziate in una collana), bidimensionale (tubetti distribuiti su un foglio), tridimensionale (uvette in un panettone). D'altra parte si potrebbe parlare anche di fittezza temporale riferendosi a gesti o suoni, la cd. frequenza. Il rapporto, che quindi in un certo senso è una struttura naturale, coinvolge il pensiero proporzionale e in particolare definisce di per sé nuove grandezze: ad esempio, costi/prezzi/quantità, spazi/velocità/tempi, pesi/pesi-specifici/volumi o forze/momenti/distanze (la forma nella proporzione disomogenea di fig. 3.5). Come messo anche in evidenza da Vergnaud, il rapporto e in generale il pensiero proporzionale possono coinvolgere due diversi modi di guardare. Questi due modi di guardare possono essere definiti in un cotesto spaziale dalle diverse relazioni che legano due triangoli (fig. 3.5).

figura 3. 5



Si tratta cioè dei due modi in cui può essere scritta una proporzione e quindi un rapporto[76]. Inoltre, nel caso della proporzione omogenea ci si rende facilmente conto che occupandosi di un rapporto tra grandezze omogenee si fa riferimento al concetto di numero reale così come lo definisce Kolmogorov (cfr. par. 3.2), nozione fortemente legata al concetto di '*volta*'. Con la proporzione omogenea, infatti, l'attenzione è focalizzata sulla relazione di ingrandimento (o di rimpicciolimento) nel senso di guardare quanto una data grandezze è più grande dell'altra, e nel caso di rapporti interi la relazioni può essere espressa dicendo "g_1 *è n 'volte'* g_2".

L'idea è di creare delle esperienze di apprendimento in cui si possa osservare, sempre attraverso una mediazione opportuna, che le due relazioni di proporzionalità, omogenea e disomogenea, sono concettualmente e numericamente riducibili una all'altra nel rappresentare in modi diversi i rapporti di proporzionalità. Queste proprietà dei rapporti fanno parte delle proprietà strutturali delle operazioni moltiplicative fra numeri, ma costituiscono una cruciale conquista cognitiva, per nulla ovvia a priori ma da sperimentare e stabilizzare gradualmente.

---

[76] Sia il rapporto disomogeneo che quello omogeneo, considerando i reciproci, danno luogo ad altri due rapporti innescando un delicato gioco di contrari.

Capitolo 4
La metodologia

"...la necessità di trovare il modo di studiare i concetti reali in profondità ci confronta con un urgente problema metodologico"
(Vygotskij, 1990).

4.1 Premessa

L'esigenza di una metodologia di ricerca che riesca ad indagare in profondità lo sviluppo dei concetti nelle persone è una richiesta ambiziosa, ma quanto mai attuale. Probabilmente l'ampio ventaglio di approcci metodologici che caratterizzano oggi le diverse ricerche in educazione matematica, nei loro aspetti almeno in parte complementari, concorrono all'ambizioso progetto di Vygotskij.

Negli ultimi decenni l'affermarsi della scuola socioculturale e la conseguente presa di coscienza dell'importanza di indagare sulla pratica educativa considerata nella sua globalità hanno determinato una sostanziale evoluzione anche negli impianti metodologici delle ricerche del settore. Per esempio nel 1938 Bachelard, anticipando quella che sarebbe stata l'attuale problematica metodologica, aveva espresso in maniera chiara che nella pratica dell'educazione "*Educatore ed educando dovranno essere studiati da una psicoanalisi speciale*" (Bachelard, 1938). La consapevolezza di questa necessità ha contribuito alla formazione di diversi impianti metodologici; dalla ricerca curriculare, al teaching experiment, all'attuale ricerca-azione.

L'impianto teorico di natura socioculturale di questa tesi, nel senso spiegato nel cap. 1, presuppone necessariamente una metodologia di ricerca che consideri la globalità della situazione didattica. Ecco perchè, fin dall'inizio, è stata adottata una metodologia di ricerca in cui il sistema classe potesse essere osservato integralmente. In un secondo momento, abbiamo riconosciuto alcune caratteristiche peculiari della nostra metodologia come quelle della **Design-Based Research** o anche **Design Study**, in Italia **Ricerca basata su progetti**.

4.2 Design Study

A differenza della ricerca-azione di impostazione lewiniana in cui la progettazione di interventi innovativi si configura come una risposta direttamente riferita alle situazioni problematiche individuate, nella ricerca basata su progetti gli interventi innovativi derivano da esigenze derivanti dal quadro teorico. Certamente anche nella ricerca-azione l'apporto di categorie interpretative di natura teorica ha la sua importanza, ma è più fortemente incidente la percezione di un bisogno di cambiamento.

Se i due impianti metodologici differiscono sostanzialmente per il punto di partenza dell'indagine va sottolineato, però, che sia il metodo della Ricerca-Azione, sia quello basato su progetti auspicato da Brown e Collins condividano la natura "interventista" dell'impianto.

Il gruppo specialistico collettivo Design-Based Research Collective così presenta nel suo sito l'approccio denominato Ricerca basata su progetti:

Le ricerche sviluppate in contesti educativi hanno avuto storicamente due obiettivi generali: comprendere come la gente impara, particolarmente in contesti scolastici; progettare percorsi che garantiscano meglio in essi un effettivo apprendimento. Perseguire questi due obiettivi contemporaneamente pone sfide significative. Tuttavia, tale impegno ha anche significativi guadagni, in quanto i contesti d'apprendimento possono essere rapidamente adattati in risposta alle ricerche in corso.

Negli anni recenti, un nuovo paradigma è emerso per impegnarsi in ricerche di natura teorica in contesti d'apprendimento realistici. La ***sperimentazione progettuale*** *è un approccio interdisciplinare che riconosce la natura fondamentalmente applicata della ricerca educativa. In questo approccio ricercatori lavorano in collaborazione con educatori per affinare teorie sull'apprendimento progettando, studiando, e mettendo a punto innovazioni in*

ambienti realistici d'aula che sono ricche e basate su teorie.
Se la sperimentazione progettuale vuole svilupparsi come un campo fattibile e robusto, i suoi praticanti devono giungere ad un accordo sulla sua natura e i suoi scopi e sviluppare pratiche e metodi condivisi che ci consentono di costruire insieme alle ricerche degli altri, condividere risultati che contribuiscano alla teoria e alla pratica e (alla fine) fornire un significativo apporto a come la gente apprende in un insieme di contesti.[77]

Già in queste generiche affermazioni si percepiscono abbastanza chiaramente i lineamenti essenziali dell'impianto metodologico: coniugare sul piano progettuale le esigenze teoriche e pratiche dell'impresa educativa mediante la prefigurazione di interventi che incarnano assunzioni di natura teorica derivanti da studi precedenti e la puntuale verifica della loro validità nel contesto concreto della pratica educativa.
Il gruppo collettivo precisa cinque caratteristiche della metodologia:

a) In primo luogo va evidenziato che gli obiettivi fondamentali di progettare ambienti di apprendimento e di sviluppare teorie o «prototeorie» dell'apprendimento sono strettamente interconnessi.
b)Lo sviluppo del progetto sul piano pratico e quello della ricerca legata al controllo delle sue qualità e all'enucleazione dei suoi caratteri specifici hanno luogo attraverso continui cicli di progettazione, attuazione, analisi e riprogettazione.
c) La ricerca progettuale deve condurre a teorie condivisibili che aiutino a comunicare agli operatori e ai progettisti implicazioni rilevanti sul piano della progettazione e dell'azione educativa.
d) La ricerca deve render conto di come il progetto funziona in contesti autentici, documentando successi e fallimenti, focalizzando l'attenzione sulle interazioni che affinino la nostra comprensione delle problematiche d'apprendimento coinvolte.

[77]Vedi la Home page del sito www.designbasedresearch.org.

e) Lo sviluppo di tali rapporti e rendicontazioni si basa su metodi che documentino e colleghino processi di attuazione con risultati pertinenti.[78]

In questa prospettiva si colgono in tutta la loro pregnanza le tensioni che emergono quando si cerca di far «funzionare» un intervento in situazioni complesse, spesso sollecitati ad apportare modifiche al progetto iniziale data la natura contingente e dinamica delle decisioni educative, mentre si deve attuare anche un controllo empirico che richiede chiarezza e continuità di «trattamento», cioè una modalità di intervento che sia identificabile nelle sue caratteristiche. Le questioni che si pongono suonano più o meno così: che cosa rende una particolare forma di intervento valida ed efficace in uno specifico contesto? Come è possibile generalizzare quanto si è imparato da un'azione particolarmente valida ed efficace? Rispondere a queste domande significa, secondo Shavelson e colleghi, tracciare, sulla base di precedenti ricerche e teorie e facendo riferimento ad attività svolte in situazioni educative concrete, lo sviluppo dell'apprendimento in contesti complessi, come lo sono le scuole e le classi, verificando e costruendo teorie dell'apprendimento e dell'insegnamento e producendo strumenti istruttivi che riescono a superare le sfide della pratica quotidiana (Shavelson, 2003).

L'interesse specifico che i metodi di ricerca basati su progetti hanno per la comprensione del complesso e disordinato mondo reale della pratica, non può assolutamente trascurare il contesto educativo come una variabile estranea, ma anzi lo pone in una posizione centrale dell'indagine. Inoltre, sono vitali in tutto ciò sia una dinamica continua di revisione flessibile del progetto, sia la considerazione delle molteplici variabili dipendenti e delle interazioni sociali. Tuttavia, ogni modifica deve essere giustificata e fornire informazioni di ritorno circa sia la validità dell'impostazione teorica di base, sia la qualità delle mosse pratiche adottate.

D'altra parte, dal momento che ci si focalizza su situazioni specifiche (e non su

---

[78] Vedi The Design-Based Research Collective, Design-Based research: An emerging paradigm for educational Enquiry, «Educational Researcher», 2003, n. 1.

variabili da controllare), la ricerca intende sviluppare un profilo o una teoria che caratterizza il progetto in pratica (e non semplicemente verificare delle ipotesi). (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004)

La ricerca basata su progetti, infatti, diversamente da altre impostazioni metodologiche, studia, più che ipotesi, congetture:

"[…]a means to reconceptualize the ways in which to approach both the content and the pedagogoy of a set of mathematics topics […] a strong conjecture should shift one's perspective and bring new events, previously insignificant or perplexing, into relief. At points in its evolution, the conjecture should feel like a grand schema beginning to emerge from many, previously disparate pieces, making them more cohesive." [79] (Confrey & Lachance, 2000, p.235)

In questa prospettiva dal classico approccio di controllo di selezionate variabile, il Design Study si configura meglio come dipendente inevitabilmente da una molteplicità di variabili e si esplica attraverso la caratterizzazione più che dal controllo di variabili.

Alla base delle proposte e delle sperimentazioni sviluppate a partire dagli anni Novanta vi è, come osservato, la presa di coscienza dell'importanza della pratica educativa considerata nella sua globalità, sia come contesto che implica una progettazione accurata degli interventi, sia come tribunale di verifica della qualità effettiva degli interventi progettati una volta che essi siano stati messi atto. Il lasciarsi coinvolgere con la realtà quotidiana dell'azione didattica porta inevitabilmente anche la necessità di una costante riflessione retrospettiva durante la stessa attuazione del progetto. Questo, a differenza dei trattamenti psicologici propri delle indagini sperimentali classiche, non può né essere definito a priori in tutti i

---

[79] "…uno strumento per ripensare al modo in cui affrontare sia il contenuto che la pedagogia di un insieme di argomenti matematici…una forte congettura dovrebbe far cambiare prospettiva e mettere in rilievo fatti, che prima apparivano insignificanti o confusi. Ad un punto della sua evoluzione, la congettura dovrebbe apparire come un grande schema che incomincia ad apparire da molti, prima disparati pezzi e renderli più coesi."

suoi dettagli, né è possibile impedire un suo adattamento, anche profondo, sulla base dei risultati via via conseguiti, siano essi positivi o negativi.
La natura contingente di questo impianto metodologico è però resa più metodica attraverso due costrutti teorici che permettono di registrare i risultati che si incontrano durante il percorso progettato. Lo spirito che anima l'osservazione dei Design Study è spiegato, infatti, attraverso due costrutti teorici tra loro collegati: *the conceptual corridor*, il possibile spazio di navigazione per un apprendimento efficace di un determinato contenuto matematico; *the conceptual trajectory*, il particolare percorso seguito dai diversi studenti durante l' insieme di attività scelte per la sperimentazione. Come spiega Jere Confrey, il *design study* ha l'obiettivo, attraverso l'analisi delle particolari *conceptual trajectories* seguite dagli studenti nelle attività proposte, di modellizzare il *conceptual corridor* e di descrivere tutte le possibili *conceptual trajectories*.
Nelle intenzioni dei promotori del metodo, questo dovrebbe essere capace di aiutare a migliorare la pratica educativa. In particolare, vengono segnalate le seguenti aree di possibile apporto significativo:

a) esplorare nuovi ambienti di apprendimento e di insegnamento, verificandone la validità ed efficacia; in particolare, sviluppare nuovi materiali, nuovi strumenti, nuovi metodi, nuove forme organizzative e nuove modalità di interazione sociale;
b) sviluppare teorie dell'apprendimento e dell'insegnamento che siano contestualizzabili, cioè teorie che prendono in considerazione i processi di apprendimento che hanno luogo in specifiche situazioni, sia scolastiche, sia extrascolastiche, e che si riferiscono a particolari contenuti e obiettivi formativi;

Nel "Design Experiments in Educational Research" Cobb e altri (2003) argomentano che il proposito di uno studio basato su progetti è quello di "*sviluppare una classe di teorie riguardo sia i processi di apprendimento che gli strumenti progettati per supportare l'apprendimento, sia esso l'apprendimento di un singolo studente, o della comunità di classe, o di una comunità di insegnanti* *professionisti, o della scuola o del distretto scolastico visto come organizzazione*"(p.10)

D'altra parte i problemi connessi con il poter o meno generalizzare i risultati ottenuti portano a pensare che poter giungere attraverso questa impostazione metodologica a progetti di interventi educativi a prova di docente, studenti e contesti differenti è semplicemente illusorio. L'approccio progettuale, quale è stato proposto da Simon (1969), implica che si giunga alla prospettazione di un **«artefatto»**, sia esso di natura tecnologica od organizzativa. Questo artefatto può essere un ambiente di apprendimento basato sull'uso di tecnologie dell'informazione e della comunicazione, un impianto didattico per l'insegnamento di specifici contenuti disciplinari, oppure una metodologia di organizzazione della classe o della scuola. Tuttavia, esso deve poter rimanere disponibile anche per l'utilizzazione e per l'adattamento di altri soggetti interessati, siano essi ricercatori o insegnanti.

Ciò permette la sua iteratività, cioè la possibilità di una sua valorizzazione in altri contesti, da parte di altri docenti e studenti. Per questa strada si potranno raccogliere ulteriori elementi di giudizio e corroborare o indebolire le assunzioni che hanno condotto alla progettazione e utilizzazione dell'«artefatto», eventualmente identificandone gli elementi più significativi e quelli più caduchi.

4.3 Il progetto sulle strutture aritmetiche della tesi

Le linee generali dell'impianto metodologico presentato permettono di entrare in dettaglio con maggiore cognizione di causa nel progetto di ricerca che verrà analizzato nel prossimo capitolo.

Uno degli obiettivi di questo lavoro di ricerca è quello di verificare se una progettazione didattica volta ad innescare una risonanza tra i modelli interpretativi dei bambini e le strutture aritmetiche riesca a costruire gradualmente e inter-soggettivamente un **uso consapevole**[80] di queste strutture e aiuti i bambini ad

[80] Cfr. "appropriazione", par. 2.2.6.

orientarsi in situazioni di problem solving più complesse, lontane dagli standardizzati "problemi con il più o con il per" di alcune pratiche didattiche. Nell'azione di ricerca, iniziata nel 2003/2004, è quindi stata seguita una classe elementare dalla prima alla quinta, cercando in collaborazione con l'insegnante di creare "dinamiche di risonanza" (cfr. cap. 2) ed osservarne il funzionamento e gli effetti.

Altra richiesta teorica è quella di chiarire meglio quali sono i "punti di forza" delle situazioni didattiche progettate e realizzate, e quali i "punti critici" in cui è necessario che l'opera di mediazione culturale svolta dagli adulti si faccia particolarmente attenta e sensibile alle difficoltà che prevedibilmente incontreranno i bambini. Un altro obiettivo correlato è, infatti, anche quello di costruire e testare un impianto didattico per l'insegnamento di alcuni aspetti delle strutture aritmetiche nelle scuola primaria, da rendere disponibile anche per l'utilizzazione e per l'adattamento di altri soggetti interessati, siano essi ricercatori o insegnanti. Infatti l'idea era quella che uno studio a lungo termine potesse dare dei contributi importanti nella costruzione di un modello dei ***conceptual corridors*** delle strutture aritmetiche.

Il team di questa ricerca sperimentale è costituito da quattro persone: Paolo Guidoni (supervisore teorico delle ricerche), Olga Mautone (insegnante della classe), Maria Mellone e Maria Pezzia (ricercatrici sul campo che si sono alternate). Attualmente la classe è al V anno e la ricerca è ancora in corso: pertanto in questa tesi saranno documentati gli avanzamenti relativi al percorso fino all'inizio del V anno.

In queste direzioni è stata progettata l'azione con alcune scelte specifiche che hanno caratterizzato il progetto fin dall'inizio. La prima scelta, come abbiamo anticipato, è stata quella di osservare un particolare contesto-classe lungo i cinque anni del percorso elementare. Un investimento di ricerca a lungo termine è, infatti, più adatto a verificare l'efficacia dell'approccio proposto, e d'altra parte aiuta maggiormente ad individuare le sue caratteristiche e la sua flessibilità. Inoltre l'intenzione era quella di sollecitare ed esplorare l'azione di apprendimento-insegnamento in dettaglio, con una lente ravvicinata per alcuni aspetti cruciali, e per

fare questo è stata inevitabile la necessità di circoscrivere l'ambiente di ricerca ad un'unica classe.
Altra scelta è stata quella di agire e osservare una classe dove l'insegnante fosse anche un'esperta ricercatrice in didattica innovativa. In particolare l'esperienza dell'insegnante in questo campo ha facilitato l'integrazione tra gli interventi di ricerca e il suo lavoro giornaliero in classe, che si svolge anche come sostegno e rinforzo delle diverse attività proposte. D'altra parte alla base di un lavoro di questo tipo, affinché si lavori nella massima serenità, è indispensabile una profonda fiducia reciproca fra insegnante e ricercatori che le propongono, spesso in via puramente congetturale, una visione innovativa della disciplina e della mediazione didattica.
Come già è stato affermato più volte, il modello di apprendimento di riferimento per l'azione sperimentale esaminata in questa tesi è quello della risonanza (cfr. cap. 2). La parola "risonanza" si riferisce in generale all'interazione tra l'individuo e la "realtà", tra i modi di capire individuali ed i modi di capire socialmente trasmessi: tutti, infatti, mentre agiscono nel mondo producono e utilizzano una molteplicità di pre-rappresentazioni e ipotesi e le confrontano continuamente con la realtà così come la percepiscono attraverso i sensi. Ogni pre-rappresentazione è così scartata o stabilizzata in accordo con le risposte negative o positive nate da questo confronto. In altre parole: ogni individuo cerca una risonanza tra una "sua simulazione cognitiva" di origine interna e l'input percettivo di origine esterna. Attraverso questo "processo di tentativi ed errori" ogni umano costruisce i suoi modelli mentali che utilizza per interpretare il mondo e agire in esso. Questo processo è guidato da un "senso interno" che valuta le condizioni "fit/no-fit", che è una delle caratteristiche base di ogni animale. Questo "senso interno" è automaticamente raffinato attraverso l'esperienza quotidiana, a partire dai processi biologici di coordinamento intenzione, percezione e azione. Allo stesso tempo è un elemento cruciale da considerare nell'azione di mediazione tra individuo e modello culturale. L'insegnante può usare questo senso interno come guida della propria azione didattica, può educare chi apprende a diventare consapevole, per quanto possibile, del funzionamento del proprio senso interno, che significa imparare riconoscere

quando si sta realmente capendo[81] (dare significato a una domanda come “hai capito?” “avranno capito?”, che non significa “sei o no in grado di ripetere ciò che ho detto?”). Anche i modelli culturali sono stati storicamente selezionati in questo modo e per insegnarli bisogna verificare che risuonino nuovamente nei bambini a cui si comunicano.

A monte della pianificazione delle attività didattiche c’è, inoltre, una visione epistemologica e disciplinare, delle strutture additiva e moltiplicativa[82], che può essere definita olistica in due sensi diversi. Da una parte, all’interno di ciascuna delle due strutture, le operazioni dirette e inverse sono viste come due facce della stessa medaglia, e di conseguenza nella mediazione didattica trattate simultaneamente. Dall’altra parte, entrambe le strutture coinvolgono tutti i diversi aspetti e significati del numero (discreto-continuo, stato-trasformazione), dei quali nessuno è visto come originario, più spontaneo o semplice degli altri (Guidoni, 2007). Da queste ipotesi, congetture di tipo modellistico è conseguito che in termini di mediazione didattica si è scelto di affrontare fin dall’inizio i diversi nodi connessi alla comprensione del numero.

Durante questi anni i ricercatori, lavorando in team con l’insegnante di classe, hanno proposto ai bambini un’attenta sequenza di attività costruite su selezionati schemi di azione. Gli schemi di azione principali su cui si è costruita la progettazione didattica sono stati, scelti per creare delle situazioni di possibile risonanza tra la percezione-azione direttamente ancorata al contesto, la competenza cognitiva “naturale” dei bambini nel loro momento di sviluppo e gli strumenti culturali via, via proposti. La scelta è stata perciò quella di proporre delle attività costruite attorno a dei punti ritenuti chiave per la costruzione delle strutture aritmetiche, in coerenza con la visione della disciplina e del modello cognitivo di riferimento, per osservarne il loro funzionamento e sviluppo in termini di apprendimento-insegnamento.

[81]Parlando in termini del modello cognitivo di riferimento potremmo dire quando si sta verificando risonanza.
[82]Cfr. capitolo 3.

L'intenzione era quella di individuare le diverse *conceptual trajectories* seguite dai bambini all'interno di *conceptual corridors* ipotizzati dal modello teorico e sviluppato nel lavoro in classe: eventuali blocchi, rallentamenti, illuminazioni; e inoltre di analizzare le caratteristiche della mediazione attiva che si disegna come fondamentale nella regia delle attività e nella valorizzazione dei feedback.
Inoltre c'è stata comunque una naturale evoluzione durante gli anni nell'organizzazione tra i tempi dedicati ad attività manuali che portavano alla costruzione di artefatti ed i tempi riguardanti situazioni di problem solving. Durante i primi due anni, infatti, sono state molte le attività con il corpo e meno le situazioni di problem solving, mentre successivamente i tempi dedicati ad attività concrete si sono contratti, senza però mai scomparire, per dare più spazio ai problemi.

4.4 Strumenti di analisi

Il lavoro di ricerca realizzato si disegna, quindi, come uno studio descrittivo in cui si intendono chiarire i punti di forza, i punti critici e l'efficacia del percorso proposto, organizzato attraverso una serie di attività, in parte già esplorate e parzialmente verificate in altri contesti. La verifica dell'efficacia del percorso risulta inevitabilmente intrecciata all'osservazione dei punti chiave dell'azione didattica e alla progettazione dell'azione successiva. Il nostro, come si è detto anche in generale per i design study, non appare quindi come un percorso precostituito da verificare, ma più esattamente come un approccio di fondo che si sviluppa e realizza attraverso una progettazione-riprogettazione continua in base all'azione-interazione realizzata. Lo sbocco ipotetico di questa azione di ricerca è quindi la validazione di un approccio che definisce corridoi di risonanza possibile in modo efficace e trasferibile.
Nella complessità del lavoro possiamo però distinguere tre momenti fondamentali di verifica e osservazione.
Il primo è un momento di evocazione contemporaneo ad una particolare attività o ad un particolare contesto, nel quale si cerca di favorire una dinamica di risonanza

tra aspetti del proprio modello e aspetti del modello culturale. Chiaramente in una situazione di interazione didattica è possibile, ma non scontato, che il ricercatore o l'insegnante possa, attraverso un'analisi semiotica, accorgersi se effettivamente c'è risonanza. Da questo punto di vista l'osservazione diretta della situazione didattica, l'analisi delle registrazioni o video-registrazioni, l'analisi delle rappresentazioni prodotte, acquistano un valore fondamentale. Recentemente (durante il IV anno) è stato inserito anche l'utilizzo della videoregistrazione: tale necessità si è resa infatti evidente soprattutto nel confronto con studi recenti nei quali si affronta il problema di come spesso le trascrizioni e le rappresentazioni considerate isolatamente possano non essere sufficienti all'analisi delle dinamiche cognitive in atto (San Diego P. J., Aczel J., Hodgson B. & Scanlon E., 2006).

Il secondo momento invece riguarda proprio la capacità di gestire, in autonomia, variazioni sul tema, riconoscendo che un determinato schema culturale scoperto in un particolare contesto è utile nella modellizzazione di un'altra situazione analoga (più o meno lievemente variata) in un contesto simile. E' in questa fase che avviene la stabilizzazione di uno schema e la costruzione di consapevolezza del processo; ed è in questa fase che per il ricercatore o per l'insegnate risulta più facile capire quello che è realmente avvenuto. L'idea generale è che *la "conoscenza astratta" è conoscenza di correlazioni stabili attraverso diverse configurazioni di fatti in contesti diversi*, e che quindi la consapevolezza della dinamica interna avvenga proprio attraverso il riconoscimento della stessa struttura nel cambiamento di definizione dei contesti. L'idea è stata quindi quella di far esplorare la stessa struttura in contesti inizialmente differenti soprattutto per la loro definizione qualitativa.

Infine il terzo momento di verifica, che non va mai intesa come verifica definitiva, riguarda la capacità dei bambini di saper evocare e usare strategie diverse per risolvere situazioni più complesse, combinandole variamente fra loro. Tipica di questo momento può essere una situazione di problem-solving in cui bisogna capire quali aspetti della struttura operativa dell'aritmetica può tornare utile: si tratta cioè di vedere quanto i bambini riescano a muoversi all'interno di una struttura complessa proiettandola su contesti diversi. Va inoltre aggiunto che i momenti di verifica sono concepiti come direttamente integrati nel percorso progettato per cercare, il più possibile, di non interferire e scontrarsi con il corso del processo di costruzione dei concetti.

I dati, quindi, sono stati e sono raccolti durante tutto il processo proprio per monitorare l'intera azione e riflettere sugli aspetti critici.

Inoltre ai fini di questa tesi si è ritenuto necessario progettare un momento di verifica diverso dai momenti descritti prima, ma in linea con la filosofia sottesa al terzo momento. Per confrontarsi con l'ipotesi iniziale in cui si supponeva che delle attività finalizzate a creare una dinamica di risonanza potessero aiutare un uso consapevole delle strutture aritmetiche, si è costruito un questionario con domande aperte e con problemi additivi e moltiplicativi con numeri piccoli. Il questionario è stato dato ai bambini all'inizio della V elementare, ed è stato fatto risolvere individualmente.

4.5 Problematiche metodologiche

Il problema fondamentale e la critica più comune a questa metodologia riguarda la rappresentatività del lavoro, la sua potenzialità e ripetitività, e la questione del poter generalizzare lo studio (Shavelson et all, 2003). Effettivamente la questione del valore dei risultati di una ricerca di questo tipo e il problema di poter pensare di estendere la sperimentazione ad altri contesti è una questione centrale con la quale questa tesi proverà a confrontarsi. In particolare il ruolo di formatori di insegnanti, che spesso nel settore della didattica della matematica si intreccia a quello di ricercatori, pone quotidianamente il problema di come l'esperienza maturata in progetti sperimentali come questo possa essere comunicata, e quindi utilizzata dai maestri o futuri maestri. Spesso il pericolo è che gli insegnanti rimangano con la convinzione di dover prendere un pacchetto di attività preconfezionato e "collaudato" dai ricercatori, e semplicemente "applicarlo" (Vaccaro, 2005). Procedendo in questo modo è ben difficile che i risultati siano positivi. Le condizioni che hanno reso possibile la comprensione in una situazione didattica non sempre sono i fattori più evidenti ad un primo sguardo, in quanto dominati da correlazioni concettuali profonde (cfr. Vygotskij) trasversale verticali, e si rischia quindi di riprodurre soltanto alcuni aspetti inessenziali, superficiali di una determinata attività, che potrebbero e dovrebbero invece essere modificati per adattarli ad un contesto differente. Nel far questo spesso si trascurano proprio i reali punti di forza del modello di intervento proposto, non si arriva a capire quello che realmente una certa esperienza può insegnare. Si pone in definitiva nei confronti degli stessi insegnati un problema di risonanza, quindi appropriazione (cfr. i diversi livelli) (assimilazione e accomodamento) con il modello proposto, preliminare ad ogni successo didattico.

Capitolo 5

La parte sperimentale

"Un primo anno di esperienza mi aveva finalmente aperto la mente.
Avevo compreso che la matematica è dovunque,
perché dovunque ci sono delle strutture sottostanti".
(Le Bohec, 1995)

5.1 Premessa

Alla luce delle scelte metodologiche discusse in precedenza (cap. 4), in questo capitolo si descrive il lavoro sperimentale progettato per verificare l'effettiva possibilità di costruire situazioni didattiche capaci di promuovere risonanza tra i modelli interpretativi dei bambini e le strutture aritmetiche. Inoltre si è interessati a dimostrare che una progettazione didattica di questo tipo riesca a guidare i bambini verso un uso consapevole delle strutture aritmetiche in maniera da sviluppare una capacità autonoma di orientamento di fronte a situazioni problematiche lontane dagli standardizzati problemi con il "più" o con il "per".
Si tratta quindi di un lavoro sperimentale interessato a guardare da vicino il processo di apprendimento. A questo proposito bisogna segnalare che esiste un problema concreto nel documentare ricerche che, come questa, intendono concentrarsi sullo sviluppo di conoscenze e competenze: sullo sviluppo guidato dalle potenzialità. Documentare il processo di costruzione di conoscenze risulta più complesso, almeno per alcuni aspetti, rispetto al rilevare e classificare errori ("misconcezioni"): *"Normalmente costruire richiede molto tempo, mentre distruggere poco tempo - è lo stesso per un organismo o una macchina come un orologio. Il passo dall'ordine al caos è breve, mentre dal caos all'ordine è lungo"*[83] (Heider in Seeger, 2001, p. 292, mia traduzione). L'apprendimento, per quanto possa manifestarsi attraverso delle illuminazioni istantanee, è, come tutti i processi di costruzione, un processo lento. Negli studi di natura socio-culturale, in cui l'apprendimento è

[83] "*Building up normally takes a long time, destruction takes a short time – and this is equally true for an organism or a building or a machine like a clock. The step from order to chaos is short, from chaos to order is long*".

considerato come “processo di partecipazione a un discorso” (Kieran, Forman, Sfard, 2001) più che come acquisizione individuale, si è diffusa l’abitudine di documentare l’apprendimento attraverso delle sequenze di sbobinature o videoregistrazioni ritenute, per qualche ragione, particolarmente emblematiche e teoricamente rappresentative. Ma come viene messo in luce da Seeger: *“E’ utile conoscere che un determinato discorso matematico può diventare così ricco e fertile, ma d’altra parte dovrebbe essere terribilmente importante imparare come questa situazione, le competenze dell’insegnante e degli studenti si siano sviluppate nel tempo”*[84] (Seeger, *ibid.*, p. 292, mia traduzione). Esiste effettivamente una tensione tra il guardare in dettaglio cosa avviene nel processo di apprendimento e il guardare quello che è avvenuto in globale, tra l’analizzare da vicino le parole ed i comportamenti dei bambini e il tenere conto del processo lento che si cela dietro ad una conquista che appare istantanea. Prendendo atto di questa difficoltà, in questo capitolo si prova a tener conto di entrambi questi aspetti schematizzando i tempi e le attività collocandoli negli anni, per poi riprendere in dettaglio la descrizione e le fasi salienti di ognuna. A questo scopo si è costruita una piccola mappa (tabella 5.1) che colloca negli anni le attività svolte in classe che si intendono analizzare. D’altra parte l’obiettivo di questo studio è anche quello di seguire da vicino i discorsi e le conquiste dei bambini e quindi, per entrare nel merito dell’analisi, si è scelto di documentare le singole attività in modalità narrativa, con il racconto cioè, dell’esperienza fatta attraverso le sbobinature, ma anche attraverso il racconto di aneddoti significativi, di incidenti sul percorso, di illuminazioni ed epifanie che hanno riattivato situazioni bloccate.

5.2 La metodologia didattica

Gli schemi di azione principali su cui si è costruita la progettazione didattica sono

[84] “*It is worthwhile to know that discourse can be so rich and fruitful, but it would also be of tremendous interest to learn how this situation, how the skills of teacher and students have developed over time.*”

stati scelti per creare delle situazioni di possibile risonanza[85] tra la percezione, l'azione e gli strumenti culturali via via proposti. La risonanza è, infatti, una condizione indispensabile affinché gli strumenti culturali siano percepiti come strumenti utili e possano quindi iniziare ad agire come mediatori semiotici (cfr. par. 2.3.2). La scelta è stata perciò quella di scegliere alcune rappresentazioni (schemi grafici, parole, simboli matematici) ritenute chiave per la costruzione delle strutture aritmetiche in coerenza con la visione della disciplina e del modello cognitivo di riferimento, per poi proporre delle attività che stimolassero una risonanza con tali rappresentazione e osservarne il loro funzionamento e sviluppo in termini di apprendimento-insegnamento.

La strategia utilizzata nelle attività è stata quella di partire dalle azioni strettamente integrate ai discorsi (di descrizione, progetto, correzione, commento, etc.), che gradualmente diventavano sempre più "azioni strutturate", coordinate in maniera consapevole, per poi giungere, attraverso una mediazione culturale adeguata a delle rappresentazioni utili nel riconoscere le strutture formali sottostanti. Il processo è avvenuto generalmente coinvolgendo dapprima il corpo: il movimento, la percezione di sé nello spazio, la manipolazione, azioni che lentamente arrivavano a coordinarsi ed organizzarsi, ad esempio attraverso un'organizzazione ritmica o comunque "appoggiata" ad uno schema.

Mentre si agisce, e anche dopo, si comincia a rappresentare ciò che si fa, per registrarlo e per schematizzarlo. Alla fine si comincia a "**vedere la struttura**". Il verbo vedere viene spontaneo in questo contesto ma non è casuale: molto spesso si esce dalla situazione concreta e particolare verso l'astrazione attraverso un'intuizione di tipo visivo, che parte dalla "rappresentazione mentale" che ci si è fatta della situazione e si appoggia sulle rappresentazioni grafiche in cui questa è stata tradotta (o viceversa). Le immagini mentali e reali, essendo compatte ed unificanti, sembrano evidenziare concezioni strutturali; in Hadamard (1949) si trova un esplicito riferimento alla necessità dell'immagine: *"I need [an image] in order to*

[85] Cfr. cap. 2.

have a simultaneous view of all elements ... to hold them toghether, to make a whole of them ...; to achieve synthesis ... and give the concept its physiognomy". La visualizzazione strettamente connessa all'azione attraverso la spazializzazione[86], quindi, rende le idee astratte più tangibili ed incoraggia a trattarle quasi come se fossero entità materiali. Anche la Sfard (1991) riconosce alle immagini la caratteristica di poter essere manipolate quasi come gli oggetti reali. La rappresentazione visiva è per sua natura olistica, e vari aspetti del concetto matematico possono essere esplorati attraverso un "accesso casuale", senza cioè dover seguire un ordine di accesso prestabilito. D'altra parte la visualizzazione ha una lunga tradizione in matematica e la lista di matematici famosi che ne fanno uso o che la evocano è molto lunga: si pensi ad Eulero, che nonostante la sua cecità ne fa un costante riferimento, o ad Einstein e Poincarè, per citarne alcuni. In educazione matematica recentemente in (Rösken & Rolka, 2006) viene sottolineata l'idea che "a picture is worth a 1000 words".

Le rappresentazioni grafiche, inoltre, possono essere di grande aiuto nel capire che anche dietro ad operazioni cognitive che possono apparire come molto diverse (come l'addizionare o il sottrarre, o come il moltiplicare con le sue diverse accezioni nella varietà dei contesti) ci sia in realtà la stessa struttura. Il processo di astrazione, infatti, passa proprio attraverso il riconoscimento che strutture apparentemente diverse sono in realtà isomorfe: è dopo questo riconoscimento che si arriva ad avere confidenza ed impadronirsi della struttura per usarla all'occorrenza. Per questo riconoscimento passa un altro livello di risonanza (cfr. par. 2.2.6) che è quello che permette di appropriarsi di un dato strumento matematico.

Il senso dell'individuazione di strutture formali risiede nella capacità di "mettere in ordine" una molteplicità di situazioni concrete e contingenti, che possono in questo modo essere trattate "come se" fossero la stessa situazione. L'esperienza di una

[86] Lo spazio è supporto strutturante anche nei confronti dei simboli (forme e relazioni).

situazione diventa così trasferibile ad altre ed è in questo senso che le strutture formali aiutano a ridurre la complessità del mondo.

La struttura emerge meglio proprio mettendo a confronto contesti diversi che però funzionano allo stesso modo[87], cogliendo invarianti nella varietà dei contesti. Questo lavoro di esplicitazione formale è stato fatto esplicitamente con i bambini, e viene fatto continuamente man mano che si passa ad una nuova attività.

Il percorso sperimentale si è sviluppato, quindi, nel proporre ai bambini diversi contesti e attività di problem solving accomunati da analoghe strutture formali. Attraverso le diverse esperienze su cui si è lavorato insieme, i bambini hanno avuto modo di vedere come la struttura del contare, la struttura additiva e la struttura moltiplicativa si costituiscono attorno ad alcune questioni fondamentali, che cambiano aspetto a seconda dei contesti, dei linguaggi e dei materiali usati, ma alla fine si rivelano sempre le stesse: così per esempio la lunghezza dei passi e la quantità di riso contenuta in un cucchiaio, "incarnazioni" dell'unità di misura in due contesti molto diversi, si comportano in modo analogo, creano problemi simili; lo stesso accade con i fiocchi nella "tenda matematica" e i "viaggi di pecore" o per i "tubetti sui fogli" e "il sale nell'acqua"[88] e così via.

Questa modalità è particolarmente utile per la verifica e il rinforzo dell'apprendimento: è, infatti, interessante vedere cosa succede quando, a distanza di tempo, ci si ritrova in una situazione già sperimentata.

Riguardo al problema dell'astrazione va menzionato un altro aspetto fondamentale per questo lavoro: si tratta della necessità di concepire il passaggio dal concreto all'astratto non come un distacco definitivo, ma come un continuo percorso di andata e ritorno, che può essere messo in atto da ognuno quando ne senta l'esigenza. Mantenendo viva la memoria dei propri percorsi e la capacità di tornare alle radici concrete da cui si è partiti ci si può anche muovere con più sicurezza e

[87] Cfr., ad esempio, le attività "la ballata degli elefanti" e "il mostro del riso" descritte successivamente all'interno del paragrafo della struttura additiva.
[88] Cfr. più avanti par. 5.3.1 – 5.3.2 – 5.4.1 – 5.4.3 – 5.5.1 - 5.5.3.

disinvoltura nei campi più astratti, migliorando la comprensione ed eventualmente risolvendo dubbi anche nell'ambito di strutture più complesse.
Il seguente schema mostra la collocazione durante gli anni delle diverse "attività emblematiche" intorno a cui ha ruotato la comprensione (molte varietà e alternative sono state presenti nel lavoro di classe) ed i colori blu, verde e rosso mostrano i principali nodi delle strutture aritmetiche che esse intendevano affrontare, rispettivamente la struttura di compensazione dell'addizione, la struttura a schieramento della moltiplicazione e il rapporto. All'inizio del V anno, inoltre sono state fatte risolvere individualmente delle schede per provare a valutare il grado di autonomia e di orientamento di fronte a problemi più complessi che riguardano le strutture aritmetiche, per provare a verificare la tesi che ha animato questo lavoro. Il punto interrogativo nell'ultima colonna, indica che la ricerca è ancora in corso e si stanno progettando nuove attività da affrontare durante il V anno.

tabella 5.1

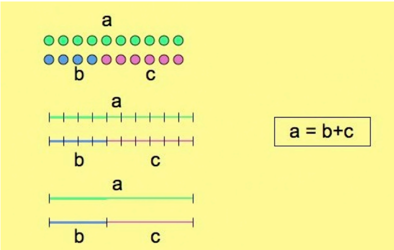
I anno	II anno	III anno	IV anno	V anno
• La ballata degli elefanti (par. 3.1) • Il mostro del riso (par.3.2) • Il gioco dell'attesa (par.3.3)	• La tenda matematica(par.4.1) • Il gioco della fittezza(par.5.1)	• Il gioco dell'attesa(par. 4.2) • Il problema dei mestoli (par.3.4) • Il problema del maiale (par. 5. 2)	• I viaggi con le pecore.(par.4.3) • Il problema del sale (par.5.3) • Il problema dei pani (par. 5.4)	Schede individuali ?

C'è da sottolineare, come è evidente che sia, che queste non sono le uniche attività matematiche svolte nella classe. Molto è stato il lavoro fatto dall'insegnante oltre le attività che si presentano in questo capitolo, ma ai fini degli obiettivi di questa ricerca è importante focalizzarsi su queste attività proprio per cercare di analizzare gli effetti provocati e i processi innescati intenzionalmente da questi stimoli. E' interessante notare come queste attività costituiscono per i bambini un insieme di "strutture operative di riferimento". A riguardo la maestra della classe, in un' intervista rilasciata al ricercatore all'inizio della IV elementare, ha osservato: *"Appena abbiamo dato il problema del sale, Lorenza ha detto "questo problema è un misto* *del problema dei mestoli e del problema dell'acqua e zucchero"*[89]*. E' evidente che questi problemi fanno parte della loro storia e quindi non se li dimenticano, sono legati anche ad un percorso affettivo. Loro su questi problemi ci ricamano sopra, ci ripensano, ci ritornano, non è come quando andavo a scuola io. Mi ricordo che per me i problemi erano insignificanti, ce ne davano più di uno al giorno e non appartenevano alla nostra storia di crescita culturale, invece per loro sono delle tappe miliari. Questa cosa mi è piaciuta molto perché Lorenza in questo modo ha individuato una struttura. Da un punto di vista cognitivo è una conquista importante riconoscere che quella cosa è come quell'altra, simile ma non è uguale. A me è sembrato notevole. […] Io ogni tanto pongo il problema della struttura e dico, per esempio, andiamo a veder se ci ricordiamo una cosa simile a questa. Se Lorenza si è ricordata questa cosa è probabilmente perché c'è stato un lavoro in questo senso di dire "ma allora è come", è un continuo andare a vedere a cosa è simile."*

Nel presentare e analizzare le attività svolte non si rispetta la loro successione cronologica, ma le attività sono presentate nei paragrafi che riguardano l'aspetto della struttura aritmetica che intendevano trattare, in questo modo è più facile vedere a distanza di tempo con quale atteggiamento i bambini si pongono di fronte a problemi che presentano la stessa struttura.

5.3 La Struttura additiva e lo schema di compensazione

figura 5.6



Il modello cognitivo (culturale nel senso dell'esperienza comune) attorno al quale si sono costruite le attività che saranno presentate in questo paragrafo non è in

[89]Cfr. par. 5.5.3.

generale quello di addizione, ma è, più specificamente, lo schema di compensazione (cfr. par. 3.7.1). Come abbiamo sottolineato, infatti, le rappresentazioni grafiche possono essere di grande aiuto nel capire che anche dietro ad operazioni che possono apparire come molto diverse, come l'addizionare o il sottrarre, ci sia in realtà la stessa struttura. Tale schema infatti permette di evidenziare le relazioni tra le operazioni di addizione e sottrazione viste come due aspetti simmetrici della medesima struttura (sia in caso di discreto, che di continuo discretizzato, che di continuo): una volta compresa questa dinamica è possibile muoversi all'interno di tale struttura con maggiore sicurezza. Infatti, a differenza di altri[90], nell'approccio di questo lavoro di ricerca, pur riconoscendo una diversa difficoltà nei diversi problemi additivi, vi è l'idea che non ci debba essere una sequenza temporale predefinita per confrontarsi con situazioni problematiche anche più complesse, ma che la mediazione didattica sia la chiave ad ogni livello. D'altra parte la struttura additiva, così come la struttura moltiplicativa, coinvolge tutti i diversi aspetti e significati del numero (discreto-continuo, positivo-negativo, stato-trasformazione), dei quali nessuno è visto come più originario, più spontaneo o più semplice degli altri (Guidoni, 2007). Da ciò segue che in termini di mediazione didattica si è deciso di affrontare fin dall'inizio le diverse problematiche che riguardano sia il numero che la struttura additiva. Le operazioni-base della struttura, addizione e sottrazione, sono state quindi introdotte contemporaneamente, così come le problematiche che coinvolgono i numeri naturali positivi e negativi o le sostanze discrete e continue e la loro "matematizzazione".

5.3.1 La ballata degli elefanti

Questa attività, nata all'interno del progetto <*Capire si può*>[91], è costruita su un contesto di "movimento lungo una traiettoria", azione che trova corrispondenza con

[90] Cfr., ad esempio, l' approccio di Vergnaud descritto nel par. 3.6.

[91] <*Capire si può*> è stato un pluriennale Progetto di Ricerca Nazionale per l'insegnamento delle Scienze e della Matematica nella scuola elementare, coordinato da P. Guidoni. Un report globale del progetto è attualmente in elaborazione.

una delle metafore individuate da Lakoff e Núñez (2000) come basilari per la costruzione dell'aritmetica. Questa attività può essere considerata una "drammatizzazione" aperta di questa metafora, in quanto offre la possibilità di scontrarsi direttamente, anche attraverso il corpo proprio e altrui, con molti nodi fondamentali a livelli via via più complessi. D'altra parte il "movimento lungo una traiettoria" può essere ben rappresentato, come vedremo, da uno schema di compensazione[92], ed in questo senso è stato selezionato perché più adatto ad innescare risonanza con questo modello.

Il primo incontro si svolge in un'aula vuota, piuttosto grande, con il pavimento di piastrelle. I bambini spontaneamente si dispongono in linea uno accanto all'altro, il conduttore del gioco (bambino o adulto) canta la filastrocca <*È la Ballata degli Elefanti / tre passi indietro, due passi avanti*> per indicare ai partecipanti le azioni da compiere, sostituendo di volta in volta al due e al tre dell'esempio i numeri che vuole - scelti con un intento preciso, oppure a caso, magari estratti a sorte, ma sempre piccoli all'inizio. Si gioca e si osserva cosa succede, "dove si va a finire": variando i numeri, aggiungendo altri ordini o producendone di "simmetrici", ponendo vincoli al movimento. Partendo da situazioni semplici la complessità del gioco cresce gradualmente lasciando i bambini sempre più autonomi nella scelta delle regole e dei ritmi.

Durante il primo turno sembra che abbiano interpretato il gioco proprio come una lezione di danza: si guardano molto l'un l'altro cercando di restare vicini e di andare a tempo, più che di fare il numero di passi indicato (ad esempio, ascoltando la filastrocca cantata[93], in corrispondenza delle parole «tr**é** passi indi**é**tro» sono chiaramente percepibili due accenti forti: i bambini non a caso fanno solo due passi, oppure ne fanno uno e poi lo chiudono unendo i piedi – comunque due azioni). Si prova allora a dare una consegna "parlata" e si divide inoltre la classe in due gruppi,

[92] Cfr. par.3.7.1.

[93] Abbiamo cantato la Ballata sulla melodia della nota canzone di Vinicius De Moraes e Sergio Endrigo "La Casa". Le parole della nostra filastrocca: «E' la Ballata degli Elefanti/ tre passi indietro, due passi avanti» corrispondono ai primi versi della canzone: «C'era una casa molto carina/ senza soffitto, senza cucina».

giocatori e osservatori, che successivamente si scambiano i ruoli. Dopo ogni turno viene chiesto ai bambini di spiegare che cosa hanno fatto e che cosa hanno notato. Molti tendono a rilevare gli "errori" dei compagni, ma senza che questo implichi una valutazione negativa della persona o un'atmosfera competitiva.

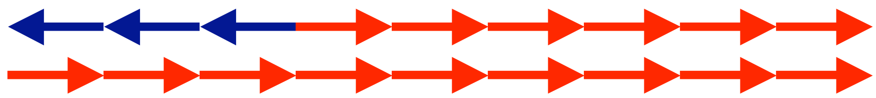
Il primo nodo che è stato affrontato è l**'arbitrarietà del riferimento spaziale (linea di partenza) e dell'unità di misura (lunghezza del passo).** La questione ha un aspetto in qualche modo paradossale che, se non esplicitato, spesso mette le persone in difficoltà: le cose più importanti, proprio quelle che servono per iniziare, sono arbitrarie, si possono scegliere tra infinite possibilità (anche se ci sono scelte più o meno comode, ma questo è già il passo successivo). Questa consapevolezza mette in luce il ruolo fondamentale dell'accordo intersoggettivo preliminare alla costruzione di qualsiasi modello matematico.

Particolarmente rilevante appare il blocco di Marcello nell'eseguire *"tre passi indietro, due passi avanti"*. Marcello, fatti i primi tre passi indietro, non sa da dove partire per compiere i due passi avanti: deve tornare alla linea di partenza o può partire da dove si trova? Dal punto di vista di un adulto non c'è niente da capire nell'eseguire un comando di questo tipo, infatti, la "metafora dell'aritmetica come movimento lungo una traiettoria" è ormai interiorizzata tanto da non riuscire più a vederla come tale: sembra evidente che per fare *"tre passi indietro, due passi avanti"* bisogna mantenersi su una linea immaginaria retta, che il punto di arrivo dei passi indietro diventa il punto di partenza per andare in avanti, che nel farlo bisogna "ritornare sui propri passi", i quali, dunque, devono essere più o meno uguali tra loro. Per Marcello, e per molti altri bambini, qualcuno di questi passaggi non è né scontato, né naturale e da questo punto di vista Luisa sembra cogliere a pieno questa difficoltà: *"Marcello si è imbrogliato perché aveva fatto tre passi indietro e non capiva come li doveva fare avanti"*. Sembra che Luisa percepisca chiaramente come il blocco fisico, l'imbrogliarsi dei piedi, dello sguardo che non sa dove posarsi, siano la manifestazione di una difficoltà a livello cognitivo.

La scelta di proporre ai bambini la Ballata è stata inoltre motivata dalle occasioni che questo gioco offre quasi spontaneamente per lavorare sul passaggio, cruciale, **dall'azione al suo simbolo** (e viceversa): durante l'attività i bambini avvertono naturalmente la necessità di utilizzare segni o oggetti-simbolo per ricordare, per "trasformare" i passi in oggetti manipolabili, stabili nel tempo, numerabili, confrontabili.
Emerge anche la condivisa necessità di segnare la **linea di partenza** (con lo scotch rosso): se non ci si ricorda da dove si è partiti non si può sapere se si è arrivati dove si doveva arrivare, non si può *"tornare indietro"* per controllare ciò che si è fatto. Da questo filone di riflessioni nasce anche, pochi minuti dopo, l'idea di mettere sul pavimento un **segno per ogni passo** e più precisamente gettoni rossi per i passi avanti e blu per i passi indietro. Già da questo momento alcuni bambini cominciano a chiamare la linea di partenza *"zero"*, nominano come *"l'uno"*, *"il due"* o *"il tre"* i luoghi in cui i loro passi li portano. L'insegnante propone di chiamare *"meno uno"*, *"meno due"* o *"meno tre"* i luoghi *"dietro lo zero"*. La differenza tra il numero di gettoni e il numero che rappresenta il luogo da cui partono e finiscono gli spostamenti pone l'accento sul doppio aspetto di numero come stato e come azione, così come si incomincia inevitabilmente a scontrarsi con la sua doppia valenza di ordinale e cardinale. Durante il primo incontro, quasi da subito Giorgio osserva *"Marcello se ha fatto 3 indietro e 1 avanti è* ***come se*** *ne avesse fatti 2 indietro"*. In questo modo Giorgio comincia già ad utilizzare la struttura della Ballata per compiere delle operazioni, introducendo quella che chiameremo la "**questione del *come se***", questione che ricalca perfettamente lo schema di compensazione di fig. 5.6 e che la classe sarà pronta a recepire solo al termine del terzo incontro.
L'altra questione che viene subito affrontata dai bambini è la differente maniera di fare i passi, c'è chi fa passi da formica e chi fa passi da elefante. La questione viene risolta da Lorenza "*se facciamo che i passi sono le mattonelle siamo* ***più giusti***".

Di fronte al comando *"tre passi indietro e nove avanti"*, Stefano solleva nuovamente la questione del ***"come se"***, pur senza averne l'intenzione; egli dà, infatti, per scontata la struttura della **"linea dei numeri"**, ne ha già un'immagine mentale molto chiara: senza fare i passi, posiziona i 6 gettoni rossi sulle mattonelle. La questione del come se, in realtà, è una delle osservazioni che si intendevano stimolare con questa attività, infatti, è proprio uno schema di compensazione quello che permette di riconoscere che *"se faccio tre passi indietro e poi nove avanti in realtà* ***è come se*** *ne avessi fatti sei avanti"*.

figura 5.7



Come è accaduto nel caso di Giorgio, la classe non è pronta immediatamente ad accogliere i suggerimenti "all'avanguardia" di Stefano. E' possibile tuttavia che la rappresentazione da lui proposta abbia agito "sotto la superficie" per poi riemergere al momento opportuno offrendo un esempio e un supporto per l'immaginazione agli altri bambini, nel momento in cui hanno cominciato a farsi domande sulla questione. Sarebbe interessante trovare dei modi per mettere alla prova un'ipotesi di questo genere, per capire meglio il ruolo svolto nel gruppo dai **"precursori (apparentemente?) inascoltati"**.
Durante il terzo incontro, infatti, sembra che tutti abbiano imparato a rispondere in che luogo si arriverà prima di svolgere concretamente l'azione ed è a questo punto, che in una delle lavagne in cui si tiene il conto dei passi eseguiti, viene proposto esplicitamente lo schema di compensazione, che i bambini sembrano accogliere volentieri.

5.3.2 Il mostro del riso

Lo schema di compensazione che si vuole far "risuonare" ritorna utile anche in caso di sostanze continue.

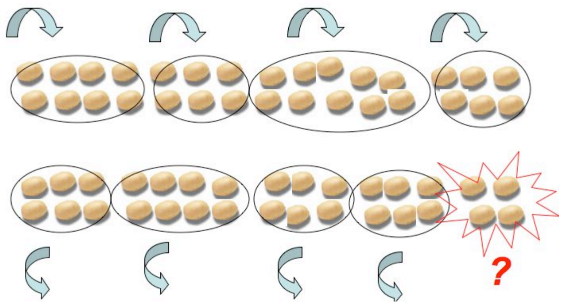
Uno degli aspetti che si intendevano affrontare fin dall'inizio riguardano le due azioni attorno cui si struttura il contare: **il riconoscimento di un discreto preesistente** (per quanto riguarda gli individui) e **l'imposizione di un discreto formante** (nel caso delle sostanze continue). Questa questione è stata affrontata con il gioco del Mostro del riso, esplorato verso la fine della prima elementare.
Nelle intenzioni iniziali c'era, infatti, l'idea di introdurre al più presto questo materiale perché le sue caratteristiche lo rendono molto utile per un percorso intorno al "**discreto e continuo**": il riso nell'uso comune viene trattato come una sostanza continua in genere, si misura in cucchiai, in pugni, in piatti, o in chili, eppure i suoi chicchi sono chiaramente degli individui, abbastanza facili da vedere e manipolare come tali, anche se "un po' troppo piccoli" e troppi di numero per essere "facili da contare" ad uno ad uno.
L'idea è stata quindi quella di presentare un contesto, chiaramente di natura diversa (passi-discreto, riso-continuo) in cui i bambini potessero incominciare a capire l'invarianza dello schema di compensazione additivo in situazioni diverse.
La storia del mostro comincia così: *ci sono quattro villaggi (ognuno costituito da 4 o 5 bambini), ciascuno dei quali vive sotto la minaccia costante di un mostro, al quale gli abitanti, coltivatori di riso, sono costretti a cedere una parte consistente del raccolto (ognuno deve dare quattro cucchiai di riso). Fortunatamente i mostri in questione non sono molto furbi e non hanno un buon servizio di sicurezza, così che la notte, mentre dormono, tutti gli abitanti dei villaggi possono intrufolarsi nelle loro tane e riprendere ciò che avevano ceduto durante il giorno.* Come è facile immaginare già dal primo turno di gioco è emerso il problema dei contadini che riprendono più di quanto hanno dato (cucchiai di riso più colmi), lasciando così in povertà i compagni. All'inizio i contadini impoveriti non riescono a capire bene la causa della propria disgrazia, né gli arricchiti hanno ben chiare le proprie responsabilità. Dopo molte riflessioni e prove i meccanismi cominciano a rivelarsi, e allora si può cominciare ad escogitare soluzioni.
E' centrale chiaramente, ancor prima della questione dell'**unità di misura**, la **conservazione della quantità** (Davydov, 1982): quest'idea, come risulta evidente

dalle loro reazioni, è già presente nei bambini, almeno come "area di sviluppo prossimo", e si è andata esplicitando e rafforzando nel corso del gioco. Si è lavorato inoltre intorno allo **zero**, inteso come insieme (contenitore) vuoto, oltre che come punto di partenza (e di ritorno, quando tutto fila liscio) delle operazioni. Tutte queste questioni, affrontate già nella ballata degli elefanti, sono rincontrate dai bambini in un contesto diverso, ma isomorfo dal punto di vista della struttura, in cui è centrale la questione del discreto-continuo e in cui la questione dell'unità di misura dei passi "lunghi quanto" diventa il cucchiaio "pieno quanto".
Si gioca in classe, sui banchi disposti in modo da favorire il lavoro di gruppo, i bambini sono divisi in 4 "villaggi". Ogni villaggio si riunisce intorno ad un'isola di banchi, al cui centro è posta una vaschetta trasparente con dentro una figurina "mostruosa". Ogni bambino è inoltre dotato di un bicchiere di plastica trasparente e di un cucchiaio da minestra, sempre di plastica, tutti uguali. I bicchieri sono pieni di una quantità di riso identica per tutti (situazione iniziale). Le tane dei quattro mostri sono vuote. La prima consegna è che ognuno dia 4 cucchiai di riso al mostro. C'è chi versa nella tana dei cucchiai colmi e chi riempie appena, appena la punta del cucchiaio. Al termine dell'operazione viene chiesto ai bambini di confrontare tra loro i bicchieri. Ovviamente ora ognuno si ritrova con una quantità visibilmente diversa, come protesta Giuseppe*"ma il mio è troppo poco!"*. Si chiede allora ad ognuno di dire quanti cucchiai ha dato e di far vedere a tutti *"come erano"* le cucchiaiate.
Nella seconda fase del gioco il mostro va a dormire e ognuno riprende «i 4 cucchiai che ha dato prima». Questa volta al termine del turno si chiede ad ognuno di confrontare la situazione attuale del proprio bicchiere con la situazione iniziale. Molti affermano di *"non trovarsi"*[94]. Giuseppe è convinto di aver *"pigliato più poco"*. Altri non riescono ad operare il confronto perché non ricordano la situazione iniziale. Si propone dunque di trovare un sistema per ricordare. Il ricercatore insiste

[94] L'espressione *"non mi trovo"* è usatissima a Napoli, nelle situazioni più disparate, per dire che "i conti non tornano", in senso letterale o metaforico.

anche su un'altra questione *"all'inizio non c'era riso nella tana, ora sì. Perché? Visto che ne avete dati 4 e ripresi 4"*, risponde solo Lorenza *"i cucchiai non sono tutti quanti lo stesso."* Evidentemente ha già chiara la situazione: è vero che se ognuno dà una quantità e se la riprende è ***come se*** nessuno avesse dato niente, però in questa situazione questo non è avvenuto perché i cucchiai contengono quantità diverse; insomma per far tornare i conti non basta contare il numero dei cucchiai. Questa situazione ricalca uno schema additivo di compensazione in cui se si rappresentano le cucchiaiate con degli ovali, se metto 4 cucchiaiate di riso *"non tutte le stesse",* e poi ne tolgo 4, rimane chiaramente una certa quantità di riso.

figura 5.8



Durante quest'incontro e il successivo Lorenza propone a più riprese di contare i chicchi, stabilendo quanti deve contenerne ciascun cucchiaio. La sua idea però non viene messa alla prova per lo sgomento di molti bambini, anche degli adulti, di fronte all'idea di un'operazione così lunga e minuziosa. Ci sono altre proposte, come addirittura "misurare" i chicchi di riso *"infilandoli nelle cannucce"*[95]. Stefano propone allora un'altra soluzione *"Facciamo un segno sul bicchiere con un pennarello all'inizio quando prendiamo il riso. Poi se sta di nuovo a quest'altezza vuol dire che è uguale a prima. Se sta più in alto o più in giù è diverso."* L'idea di Stefano, promette

[95] E' interessante notare quanto sia "astuta" questa proposta in cui si trasforma il discreto in continuo, l'inverso dei processi di misurazione normale in cui il continuo viene discretizzato (cfr. il modello di"accumulatore" di Dehaene).

una soluzione molto più rapida ed efficace, ed apre soprattutto la strada verso la misurazione delle sostanze continue.

figura 5.9

 il riso e la quantità del mistero		

In questa tabella la prima immagini mostra Lorenzo che conta un chicco alla volta, e le altre due immagini sono i disegni fatti dai bambini a fine anno su un
Sebbene in questo gioco, per non forzare troppo la mano, non si sia introdotto esplicitamente lo schema di figura 5.1, una volta trovata un'unità di misura efficace, la questione è stata guidata nuovamente sui ragionamenti per compensazione.

5.3.3 Il gioco dell'attesa (I elementare)

La periodicità "variabile" delle visite dei ricercatori a scuola ha offerto l'occasione per un altro gioco: tra un incontro e l'altro ogni bambino aveva il compito di mettere tutte le mattine un particolare oggetto in un sacchettino trasparente, che doveva poi riappendere, accanto a quelli di tutti gli altri compagni: qualcuno doveva mettere un tappo al giorno, qualcun altro una foglia, una conchiglia, una lenticchia, un chicco di riso e così via. Ad altri è stato assegnato invece il compito di contare tramite una cucchiaiata quotidiana di una **sostanza continua**: per qualcuno la farina, per altri il sale, altri ancora dovevano mettere riso o lenticchie, però a cucchiai e non a chicchi, in modo da poter confrontare collettivamente, alla fine, **due diversi modi di guardare lo stesso materiale**.

All'incontro successivo con il ricercatore si contavano o si misuravano gli oggetti nei sacchetti per calcolare quanti giorni erano passati dalla visita precedente.
Questo gioco è stato proposto in due momenti differenti con due intenti differenti: in prima elementare e in terza elementare. In prima elementare l'intento era quello di confrontarsi sempre con situazioni additive di compensazioni costruite attorno a sostanze sia discrete che continue. In prima infatti i bambini hanno potuto verificare come, utilizzando gli oggetti discreti come segno, non sia difficile tenere il conto dei giorni, mentre i problemi cominciano a sorgere, al contrario, quando si guarda il proprio sacchetto pieno di farina e ci si accorge che non è più possibile *vedere* quanti cucchiai sono, perché «si è mischiata tutta». Allora si prova a contarla rifacendo le cucchiaiate ma, come si è già avuto modo di sperimentare durante il gioco del mostro del riso, i cucchiai non sono affidabili: ricontando più volte la stessa farina risulta un numero diverso di cucchiai ogni volta. In questo modo si arriva ad esplicitare il **significato del contare**: per prima cosa il conto deve "tornare", proprio nel senso che ricontando la stessa quantità più e più volte, e chiunque sia a contare, deve ripresentarsi (tornare) sempre lo stesso risultato.
In prima, nel primo incontro successivo all'inizio del gioco il ricercatore chiede ai bambini se possono dire quanti giorni sono passati dall'ultimo incontro. Chi aveva in consegna gli oggetti discreti[96] comincia subito a contarli estraendoli ad uno ad uno dal sacchetto. Chi invece l'ha riempito di cucchiai di zucchero, farina, riso eccetera si blocca, non sa che fare. Mentre i compagni annunciano alla classe il risultato del conteggio (11 quasi per tutti) che viene poi scritto alla lavagna, i proprietari delle sostanze continue riescono al massimo a dire che i giorni passati sono *"tanti"*, oppure *"non so"* o *"non posso"*. Dopo un po' di tentativi, Gaia

[96]Nel raccontare lo svolgimento degli incontri si farà spesso riferimento ai materiali usati utilizzando le due categorie di "oggetti discreti" e "sostanze continue". Queste definizioni non sono però state utilizzate in classe: gli alunni hanno gradualmente introdotto, come si vedrà oltre, altri termini man mano che hanno sentito la necessità di distinguere le cose che riuscivano a contare tranquillamente da quelle che invece creavano problemi; ciò è stato loro possibile nel momento in cui hanno iniziato ad individuare delle caratteristiche comuni tra i diversi materiali appartenenti a ciascuna delle due categorie.

formula un piano d'azione: *"quelli che hanno riso, farina, sale, lo devono mettere in un barattolo con un cucchiaio e contare"*.

Si incomincia a mettere in atto il piano e si aggiungono i risultati raggiunti allo schema alla lavagna.

All'invito a commentare lo schema alla lavagna risponde Lorenza: "*ognuno ha un diverso numero. Forse è perché qualcuno è mancato, è andato in viaggio"*. Luisa nota però che *"ci sono anche un pochettino di 11, non è che i numeri sono tutti diversi"*. Quasi tutti ritengono che siano passati 11 giorni (perché ci sono molti 11), qualcuno si orienta verso il 12 (perché è normale che molti bambini siano stati assenti un giorno, ma non è possibile che qualcuno sia venuto un giorno in più). Tutti sono d'accordo che quei numeri così alti come 25 e 35 non sono plausibili, ma devono dipendere da qualche problema con i cucchiai. Si prova allora a ricontare più volte la farina di Giulia e Davide, ma continuano a venir fuori risultati diversi. Secondo Gaia per risolvere il problema "*bisogna decidere prima di iniziare il gioco quanta farina ci dev'essere nel cucchiaio, per esempio così*" – mostra un cucchiaio raso di farina- "*Così quando finisce il gioco lo puoi rifare"*. Insiste poi per provare a contare la farina di Giulia a cucchiaiate rase. I bambini si dispongono in cerchio intorno a Gaia e contano ad alta voce le sue cucchiaiate. Si insiste che tutti pronuncino il numero nello stesso momento, si propone anche dire "volta" alla fine di ogni ciclo di azione, cioè dopo che Gaia ha versato ciascuna cucchiaiata: ciò per evitare la confusione, che porterebbe a perdere il conto, oltre che per stimolare i bambini a controllare l'effettiva corrispondenza dei numeri pronunciati con i gesti, invece di cantilenarli "a vuoto" come una filastrocca. Si arriva così a 28! Solo a questo punto Gaia si rende conto fino in fondo delle implicazioni della propria stessa idea, perché è perfettamente in grado di giustificare il risultato evidentemente sbagliato: "*non abbiamo deciso prima quanto metterne*", nel senso che poiché l'unità di misura non è stata fissata all'inizio del gioco, due settimane fa, anche se la fissiamo ora non si può risolvere il problema, a meno di non ricominciare il gioco da capo (come in effetti si deciderà di fare alla fine dell'incontro). I commenti di Luca e Giuseppe al conteggio della farina portano invece verso una definizione di sostanza continua: "*certe cose non si contano bene perché sono **molli, si mettono tutte insieme***"; "*con queste cose **cambia il numero** se fai i cucchiai grandi o piccoli*" (insomma i conti non tornano mai, come si è detto nel gioco del mostro del riso a proposito del **significato del contare**). La maestra approfitta dell'occasione offerta dall'intervento di Giuseppe per avviare una riflessione sulla **compensazione** tra numero delle unità di misura e loro dimensione: "*se prendo proprio i cucchiaini da caffè invece che quelli da minestra, il numero è più grande o più piccolo?"*

Coro*: "più grande!"*

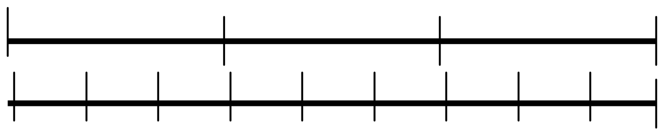
Marco*: " più piccolo"*

Maestra: "*no, più grande, perché dobbiamo fare più cucchiaiate"*

Lorenza: "*più grande, perché ne metti poco e quindi ne conti tanti"*.

Per mettere bene in evidenza la scoperta che con un'unità di misura più piccola il numero di unità in cui si discretizza il continuo è maggiore rispetto a quello che si ottiene con un'unità più grande, la maestra propone questo schema:

figura 5.10



Il successivo intervento di Gaia riporta la discussione sulla differenza tra discreto e continuo: *"perché con tappi, noci , bottoni non è successo come con la farina?".* Secondo alcuni, il problema con la farina è che i chicchi sono troppo piccoli, non si vedono bene, e insomma non si riescono a separare, a prenderne uno alla volta per contarli, come si fa con i tappi e cose simili. Gaia ritorna invece sulla sua idea precedente proponendo di *"riempire il cucchiaio con i cucchiaini da caffè, così contiamo sempre quanti cucchiai piccoli vanno sul cucchiaio grande".* Una proposta del genere può apparire in un primo momento poco utile (si riproporrebbero gli stessi problemi con i cucchiai piccoli, e poi non è chiara la funzione di quelli grandi in questo modo…), ma nasconde l'intuizione importante che, utilizzando unità di misura sempre più piccole per lo stesso oggetto, il margine d'errore diventa via via più trascurabile. Per sviluppare quest'intuizione potrebbe essere interessante impostare delle attività confrontando i risultati di misurazioni della stessa quantità di sostanza con unità di misura grandi e piccole, verificando in quale delle situazioni considerate i conti tornano di più. Il discorso potrebbe collegarsi spontaneamente alla questione dell'atomismo ipotizzando di dividere le unità di misura in unità sempre più piccole, fino ad un limite (e quale allora?) oppure all'infinito. In questo caso si è preferito aprire la riflessione sull'atomismo a partire dai chicchi, che costituivano al momento il problema più sentito da tutti, per poi spostarla sul problema dell' acqua.

E' interessante guardare da vicino l'ultima fase della discussione:

Gaia: "*anche la farina c' ha i chicchi, li senti pure, solo che sono molto piccoli.*"
Maestra: *"si devono dividere"*
Ricercatore: *"ma tutte le cose hanno i chicchi?"*
Cristiana: *"sì."*
Ricercatore: *"e l'acqua?"*
Cristiana: *"no!"*
Coro: *"le gocce! I bicchieri"*
Gaia: *"o con i cucchiai o con i bicchieri."*
Ricercatore: *"ma le gocce si possono dividere una dall'altra?"*
Coro: *"no!"*
Dea: *"le medicine!"*
Ricercatore: *"allora si possono dividere, ma cosa ci vuole?"*
Gaia: *"quel coso piccolo che si butta negli occhi."*
Ricercatore: *"come si chiama?"*
Maestra: *"quella specie di pompetta, come si chiama? A che serve? Permette di…"*
Luca: *"dividere le gocce"*
Ricercatore: *"le dividiamo perché?"*
Marco: *"per contarle."*

Ricercatore: *"e allora si chiama?"*

Coro: *"contagocce!!!"*

Marcello: *"se piove e hai l'ombrello cadono le gocce e puoi contarle."*

Gaia: *"e se cade una goccia sopra l'altra come le conti?"*

Gli interventi riportati evidenziano il modo in cui i bambini hanno fatto propria la necessità di centrare l'attenzione, per poter contare, su degli "individui" (dividere: imposizione di un discreto formante), identificando il momento in cui le cose "si mischiano", o stanno "una sopra l'altra" come una condizione che rende impossibile l'azione di contare, inoltre è emerso nel corso dell'attività che, nel loro schema mentale del "contare", alcuni privilegiano il momento dell'**azione** di prendere e mettere da una parte, altri sentono soprattutto l'esigenza di una **visione** chiara e, soprattutto, "distinta" degli oggetti.

L'ultima fase dell'incontro è dedicata alla raccolta di proposte per "trovarsi con i conti" delle sostanze continue la prossima volta. Si è infatti giunti alla conclusione che bisogna stabilire prima una buona "organizzazione" e solo in seguito ricominciare il gioco daccapo. La classe si divide in tre gruppi di discussione, ad ognuno dei quali partecipa un'insegnante. La proposta più "convinta" viene da Giulia, che suggerisce inizialmente di usare *"uno di quei bicchieri con i numeri, e poi decidere fino a che numero"*; poiché però a scuola non ci sono misurini Giulia ritiene che si possono usare i bicchieri della mensa che sono a righine e *"decidere la riga",* oppure qualsiasi bicchiere purché si segni il livello con un pennarello. Nei giorni successivi la classe costruirà un misurino usando quest'ultimo metodo e ricomincerà a contare i giorni, fino all'incontro successivo.

Sembra che il metodo funzioni, nel secondo incontro, infatti, riutilizzandolo per contare farina, lenticchie eccetera, troviamo che il numero di misurini corrisponde al numero di giorni trascorsi, che questa volta la classe ha annotato su di un foglio, oltre a contarli come la volta precedente tramite gli oggetti discreti. Certo qualche errore c'è ancora, ma è dell'ordine di mezzo misurino. D'altra parte anche con gli oggetti discreti ci possono essere degli errori dovuti per esempio a dimenticanze.

Alcuni notano però come sia comunque più difficile utilizzare le sostanze continue: riempire in modo preciso un misurino è un'operazione laboriosa e non sempre riesce del tutto.

Una volta ultimate queste considerazioni si provano ad utilizzare i materiali con cui si è giocato in un modo diverso: la maestra rovescia su un banco un misurino di farina, poi la appiattisce con la mano e la spande in modo da formare un cerchio; ripete l'operazione con un misurino di lenticchie ed uno di riso. Come nota Giulia, *"più i chicchi sono piccoli più il cerchio è grande".* Secondo Luca questo curioso fenomeno si può spiegare tenendo conto che il riso, ad esempio, *«è anche chiatto, va anche in altezza, non si spiaccica tutto sul banco»*, a differenza della farina. Il ricercatore prova a chiedere a questo punto perché i tre materiali quando stanno nel misurino occupano tutti lo stesso spazio (cioè lo spazio di un misurino), mentre una volta sparsi sul banco occupano spazi di grandezze diverse. I bambini fanno facce perplesse. La domanda resta aperta, ma forse in qualche modo aveva già risposto Luca. Si aggiungono nuovi elementi a questa spiegazione portando l' esperimento fino ai casi più estremi, che rendono più chiara la situazione: si prova a riempire anche un misurino di tappi, uno di conchiglie, uno di noci (ci va una noce sola!). In questo caso si trattano gli oggetti discreti come se fossero dei chicchi enormi di una sostanza continua (questo succede anche nella vita quotidiana: ad esempio le noci o le cozze si mangiano una per volta ma si vendono a chili, si trasportano a secchi o a sacchi. L'effetto "straniante" in questo caso è dato dal fatto che il misurino è straordinariamente piccolo per la dimensione di questi nuovi "chicchi"). Per quanto si provi ad incastrare gli oggetti in vari modi, ci si accorge che restano sempre molti spazi vuoti. Allora forse una cosa del genere succede anche con il riso e le lenticchie, solo che ci se ne accorge di meno perché gli spazi vuoti sono più piccoli. Con la farina invece non ci sono proprio.

Una volta rovesciati sul banco, questi misurini formati da sei o sette tappi da birra, quattro conchiglie, una noce, formano dei cerchi molto più piccoli rispetto a quelli costituiti dalle tre sostanze fatte di chicchi fini.

Durante l'incontro successivo, il ricercatore solleva nuovamente la questione sulle cose facili o difficili da contare, proponendo ai bambini delle schede con una lista di materiali da confrontare sul loro grado di contabilità. La scheda è anche costruita in modo da esplicitare il perché un dato materiale è più o meno facile da contare, e le risposte sono ricche ed interessanti.

Dalle opinioni dei bambini traspare la loro interiorizzazione dell'idea di conteggio come ripetizione (per un certo numero di *volte*) di una sequenza di azioni, per poter compiere la quale è necessario soprattutto poter "**prendere**" gli oggetti, o almeno toccarli. Solo in casi estremi qualcuno riesce a farsi bastare una **visione** chiara e distinta. Non a caso la percezione della differenza tra discreto e continuo sembra passare spesso attraverso impressioni legate al tatto ("liscia", "molle", "duro", "attaccaticce"…). Emerge inoltre l'elemento ***tempo*** come condizione per portare a termine la nostra **centratura di attenzione** su ogni oggetto dell'insieme considerato. Per qualcuno è parte fondamentale della sequenza la **parola o il segno** (le "pietre" per marcare i passi o il momento in cui si pronuncia il numero).

Si apre l'ultimo incontro del Gioco dell'Attesa con una discussione sui risultati delle schede. Il dibattito si sposta però ben presto sulla questione spinosa delle cucchiaiate di farina, lasciata in sospeso. Il ricercatore approfitta dell'occasione per mettere in evidenza le opinioni divergenti emerse dalle schede a proposito della questione - cucchiaiate:

"alcuni di voi però hanno scritto che la farina è facile da contare se la prendo a cucchiaiate, basta che faccio una cucchiaiata e la conto…". Gaia però si ricorda che in questo modo qualcosa non funzionava: *"Non riesco a fare le stesse cucchiaiate all'andata e al ritorno. Prima ne vengono 5 per esempio, poi 7, 8…"*. Il ricercatore chiede alla classe perché questo accade.

Ci si rende conto a questo punto che, per rispondere ad una simile domanda, bisogna prima esplicitare che cosa significa contare. O meglio: **cosa si deve fare per contare**? Il ricercatore propone ai bambini di far finta di spiegarlo ad un marziano, immaginando che sul suo pianeta nessuno si sia mai preso la briga di contare le cose. *La prima conclusione a cui si arriva è che non basta "dire tutti i numeri",* ma cosa si deve fare, allora, *"se abbiamo un mucchio di cose e dobbiamo capire quante sono"*?. Risponde Stefano *"Contare è fare un'azione"*[97]. Il marziano però vorrebbe sapere di che azione si tratta, e non si accontenta di una descrizione sommaria: bisogna dirgli tutti i particolari altrimenti non capisce. Dopo alcuni tentativi l'extraterrestre riesce ad eseguire un conteggio come si deve seguendo le indicazioni di Dea: *"prendi una cannuccia e dici uno, poi ne prendi un'altra e dici due..."* fino all'ultima cannuccia: *"la metti qua e dici sei ed è finito. Sono 6".* Rimane solo un problema: anche con la farina, come alcuni bambini avevano scritto sulle schede, prendi un cucchiaio e dici uno, ne prendi un altro e dici due…e allora cosa c'è di difficile?

Per il momento non si riesce a risolvere verbalmente questa contraddizione. La necessità di uscirne porta però Giorgio a cercare una soluzione pratica: *"trasformare"* la farina in cannucce, visto che si è verificato più volte che queste si possono contare meglio. Questa la sua proposta: poiché le cannucce sono vuote se ne possono prenderne tante e riempirle di farina, per poi prenderle una ad una e contarle, come ha appena fatto il marziano. Alla fine si potrebbero anche svuotare formando così tanti piccoli mucchi di farina ordinati sul tavolo e contare anche quelli "per controllare". Si prova a mettere in pratica l'idea ma, ovviamente, è più la farina che cade di quella che si riesce a infilare nelle cannucce: sono troppo strette! Si cerca allora un contenitore più grande. Qualcuno si ricorda dei **bicchieri col segno** usati per il gioco del riso. Giorgio allora prende tre bicchieri della mensa e decide il livello da segnare, li riempie di farina fino al tratto di pennarello, poi li conta spostandoli uno alla volta dall'altro lato del banco. Alla fine li rovescia, curando di mantenere i 3 mucchi separati: *"così ci troviamo",* afferma, *"poiché abbiamo preso tre bicchieri e poi abbiamo versato tre bicchieri e siamo rimasti senza niente."*

---

[97]Notare la bivalenza di discorso vs azione ed azione vs discorso.

Interviene a questo punto l'insegnante, proponendo alla classe di ricontare la stessa farina utilizzando un solo bicchiere. Vista la perplessità di alcuni bambini dà prima una dimostrazione: riempie il bicchiere e lo svuota per tre volte, formando tre mucchietti separati. In seguito procede ad una nuova dimostrazione lasciando che la farina versata dal bicchiere «si mischia tutta». Compie anche l'operazione di ritorno, rimettendola nel bicchiere e versandola nel contenitore di partenza, e conclude dicendo *"anche mischiando la farina (così che il numero non sia più visibile), e anche* ***contando i gesti invece degli oggetti*** *ci possiamo "trovare", purché prendiamo accordi sull'unità di misura."*

Il fatto che una sostanza come la farina possa partire dal "caos", da una situazione iniziale indistinta, per poi venire ordinata ed acquistare un numero, perderlo ritornando al caos e riacquistarlo come se niente fosse successo, sembra probabilmente a molti bambini un avvenimento quasi magico, a giudicare dalla loro meraviglia. La scoperta viene meglio interiorizzata (o forse si potrebbe dire: accettata come parte dell'ordine naturale delle cose) successivamente attraverso la sperimentazione diretta, svolta da qualcuno subito e dagli altri in successive sessioni di lavoro proposte dall'insegnante.

Al termine dell'attività si rievocano le situazioni affrontate insieme nelle quali si è dovuto stabilire un'**unità di misura** per potersi "trovare": la Ballata, il Gioco del Mostro, oltre al Gioco dell'Attesa.

5.3.4 Il problema dei mestoli

Come abbiamo anticipato, parte integrante dell'azione-interazione sono alcuni momenti, lontani nel tempo rispetto ai contesti di esplorazione della struttura, nei quali i bambini vengono posti davanti a situazioni abbastanza complesse in cui bisogna capire quale struttura operativa può tornare utile. In questo caso si tratta di una situazione di problem solving che coinvolge la struttura additiva, il problema viene proposto al gruppo classe all'inizio della terza elementare:

Un bottiglione si riempie con 6 mestoli e 5 litri, si può anche riempire con 2 litri e 12 mestoli. Quanti litri contiene un mestolo? Quanti litri contiene il bottiglione? Trova altri modi per riempirlo.

Dopo la lettura del problema incomincia la discussione di classe condotta dall'insegnante. Tutti bambini sembrano catturati dalla complessità del problema, che appare ai loro occhi come non banale e quindi tale da suscitare interesse, ma allo stesso tempo non fuori dalla loro portata e quindi tale da accettare la sfida. La discussione è da subito vivace e compaiono idee confuse, o che appaiono come tali, che hanno bisogno di essere chiarite per essere accettate dagli altri bambini. Così inizialmente il ragionamento di Stefano "*poichè 6 più 6 fa 12 e 2 più 2 fa 4, quindi ho ½. Poi 2 e ½ più 2 e ½ fa 5, perché 2 è l'intero e ½ sarebbe la metà, quindi 2 più 2 fa 4 e ½ più ½ fa 1 e quindi 2 più ½, più, 2 più ½ fa 5"* viene subito messo in discussione da Luca. È la stessa dinamica di classe guidata dall'insegnante a permettere al ragionamento, collettivo e individuale, di chiarirsi e svilupparsi. Attraverso questa dinamica le idee prendono forma proprio nel tentativo di chiarirle agli altri, e le parole di Luca sono emblematiche in questo senso :

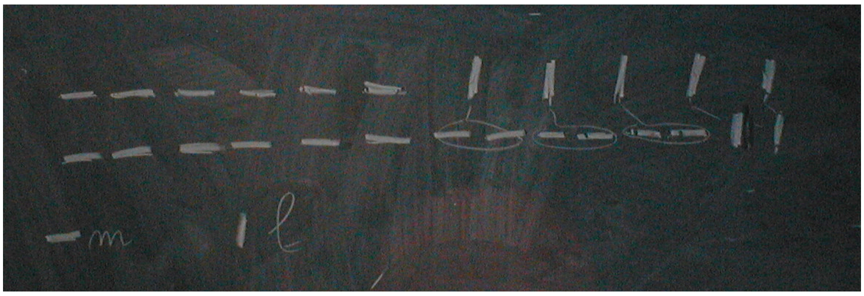
"Io non ho capito come ho fatto, ho pensato che un litro è un litro, ma un mestolo non so quanto è. Per me un litro è di più di un mestolo. Ma è facile, si può fare una somma, litri più mestoli e so quanto è il bottiglione. Io vedo che nella seconda maniera hanno messo sei mestoli in più e invece tre litri in meno. Ora però non so come continuare. Da una parte ci sono sei mestoli in più e dall'altra tre litri in meno [chiude gli occhi]. *sei mestoli a quanti litri equivalgono? Equivalgono a tre litri*"[98].

Evidentemente anche qui il ruolo dell'immagine mentale è centrale, Luca sembra ragionare proprio su un'immagine anche nella sua azione di chiudere gli occhi. Successivamente, infatti, Luca farà una rappresentazione grafica molto precisa proprio per supportare il suo ragionamento e convincere il resto della classe. La via della rappresentazione sembra quella, infatti, più gestibile in una dinamica di questo tipo, il disegno è meglio condivisibile e più immediatamente compreso dal resto

[98]Notare la compensazione a monte.

della classe rispetto alla verbalizzazione narrativa di un ragionamento[99], ed è il modo con cui anche Stefano, precedentemente non preso in considerazione per la poca chiarezza del suo ragionamento, cerca di riscattarsi.

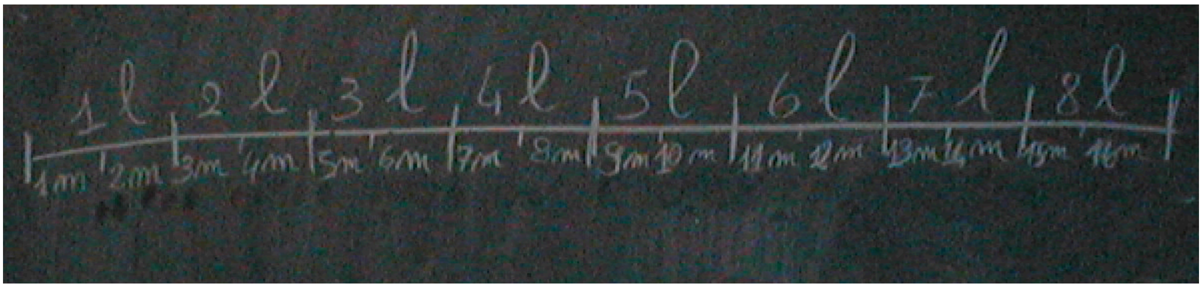
figura 5.11 (rappresentazione di Stefano)



E' interessante notare quanto la rappresentazione di Stefano ricalchi lo schema di compensazione in caso discreto. Si tratta, infatti, di un problema che pur trattando di grandezze continue, in quando quantità liquide, passa comunque attraverso una discretizzazione in unità di misura. Le due unità di misura, il mestolo e il litro, sono visualizzate come due grandezze diverse da Stefano che usa due simboli diversi per denotarle. Nella rappresentazione di Luca, invece, i mestoli e litri assumono più chiaramente il ruolo di diverse unità di misura di una stessa sostanza continua, discretizzata in due modi diversi. Tra l'altro, come fa notare Luca, la sua rappresentazione riesce anche a rispondere anche all'ultima domanda, perché *"così si vedono tutti i modi in cui posso riempirlo, 14 mestoli e 1 litro oppure 12 mestoli e 2 litri"* [indica con il dito i segmenti verticali della sua rappresentazione].

[99] Però c'è e va seguita la via dell'algebrizzazione isomorfa alla spazializzazione (cfr. formule in fig.5.1), che a questo livello del lavoro di classe non è stata ancora introdotta.

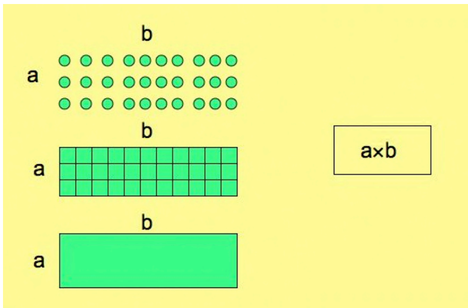
figura 5.12 (rappresentazione di Luca)



In entrambe le rappresentazioni appare, come in trasparenza, lo schema di compensazione di fig. 5.6. In questo caso sembra, quindi, che tale rappresentazione sia stata utile per risolvere il problema e che le attività costruite nel promuovere una risonanza con questo schema siano risultate efficaci.

5.4 La struttura moltiplicativa e gli schieramenti

figura 5.13



Una delle grandi difficoltà con la quale ci si scontra a livello di insegnamento-apprendimento e anche di livello di ricerca è la grande differenza che esiste tra le due strutture aritmetiche, differenza che i bambini spesso non riescono a mettere a fuoco. Infatti, mentre la struttura additiva opera con elementi appartenenti alla stessa classe, omogenei dal punto di vista del significato, la struttura moltiplicativa, al contrario, è organizzata su due dimensioni, generalmente, disomogenee, corrispondente ad una grandissima varietà di situazioni reali.

La difficoltà è sempre stata quella di cercare un modello (cognitivo, strutturale, operativo, matematico) unico di moltiplicazione a cui riferire le diverse semantiche, nel quale i diversi prototipi reali potessero rispecchiarsi. Per molti anni in passato, infatti il modello piagetiano di moltiplicazione come addizione ripetuta ha animato molte progettazioni didattiche, pur non evidenziando la bidimensionalità della moltiplicazione.

La scelta di questa ricerca è stata quella di cercare, in primo luogo, una rappresentazione che evidenziasse la bidimensionalità della moltiplicazione e che potesse essere in grado di catturare una buona parte dei problemi moltiplicativi. In questo senso è stata ancora una volta una rappresentazione grafica, un'immagine, una metafora spaziale a tornare utile: la disposizione a schieramento (in caso di discreto, continuo discretizzato e continuo) della fig. 5.13, nella quale si riconosce la struttura ritmica della moltiplicazione simultaneamente con la sua operazione inversa di divisione. L'idea, quindi, come nel caso dello schema di compensazione additiva, è stata quella di costruire delle attività in cui la rappresentazione a schieramento potesse entrare in risonanza con le necessità e i modelli dei bambini. Per fare questo è stato riconosciuto come molto utile il concetto di "volte". La struttura ritmica delle "volte" accomuna la struttura del contare con la struttura moltiplicativa: da questo punto di vista si può anche dire che il contare "normalmente", per 1, non è che un caso particolare della moltiplicazione (addizione ripetuta, ma con attenzione). "*Contare è fare un'azione*" (Stefano, prima elementare): si impara a contare, cioè il significato del contare, facendo operazioni, non solo operazioni additive, ma anche moltiplicative se dobbiamo contare per n.

5.4.1 La tenda matematica

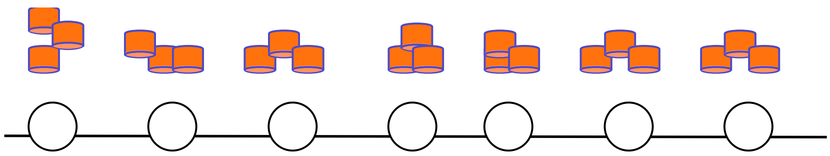
Un modo produttivo per cominciare ad introdurre la struttura moltiplicativa è quello di "contare per n" (per 2, o per 3, o per 10, eccetera), situazione che si è deciso di affrontare alla fine della prima elementare.

Messi davanti ad una collezione di oggetti abbastanza numerosa, magari tanto che non siano in grado di contarla, i bambini si rendono facilmente conto di come "contare un mucchio grande è più facile se si fanno dei gruppi".

figura 5.14

Ogni volta che "si fa un gruppo" si può fare un segno sulla carta, oppure si può mettere in un posto preciso un oggetto-marcatore, per esempio, infilare una perlina in un filo.

figura 5.15



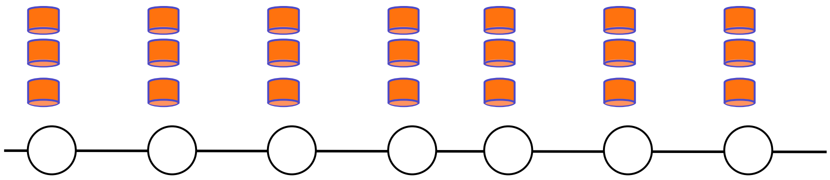
L'intenzione di questo gioco è proprio quella di permettere ai bambini di usare una loro risorsa naturale, che è quella del contare, e di cercare attraverso un artefatto culturale spontaneamente costruito da loro, il fare gruppi, di riuscire a dominare la situazione. In un'attività del genere è importante sottolineare la ritmicità dei gesti, delle corrispondenze, più che il numero di oggetti effettivamente contati. Anche se i bambini non saranno in grado da soli di calcolare il totale avranno comunque "contato" il mucchio, avranno "marcato lo stato": se non si sa contare fino a 80, ma si sa che ho 10 mucchietti da 8 figurine si avrà comunque sotto controllo la situazione - per esempio ci si può accorgere se se ne è persa qualcuna. Si è riscontrata una grande soddisfazione dei bambini in questo tipo di attività legata alla loro sensazione, inaspettata, di impadronirsi facilmente di uno strumento potente, che da un momento all'altro rende accessibile, controllabile una situazione che prima era vista come "inavvicinabile".

La reale innovazione è stata però quella di fornire del filo e degli oggetti marcatori che servissero per tenere il conto: in questo modo infatti si cerca di indurre il passaggio tra addizione ripetuta, che è comunque-come dice il nome-legata inevitabilmente all'unidimensionalità della struttura additiva, ad un nuovo tipo di struttura. I bambini non si limitano a disporre dei gruppi di oggetti sul banco, ma il vero passaggio chiaramente graduale, tra struttura additiva e struttura moltiplicativa avviene proprio nell'introduzione del un nuovo oggetto-marcatore, che indica le volte in cui gruppi vengono presi, semanticamente diverso dai tubetti. In questo modo si introduce una nuova dimensione, che come tale va disposta su una linea diversa: il filo della tenda matematica. Il riconoscere la forte natura bidimensionale della moltiplicazione a dispetto della natura lineare dell'addizione ripetuta aiuta il riconoscimento della diversa natura delle due strutture.

Fin dall'inizio è stato importante far riflettere i bambini sulle strategie più convenienti da usare a seconda dei casi: molte sono state le osservazioni sul fatto che contare per 1 può essere una buona strategia soprattutto con delle piccole quantità, ma se il mucchio è grande può essere più conveniente raggruppare gli oggetti. Si può scegliere la numerosità dei gruppi valutando *"a occhio"* la dimensione del mucchio, oppure procedendo per tentativi, considerando magari in che modo si riesce ad evitare i resti, oppure quale numero di oggetti per gruppo è abbastanza piccolo da risultare *"facile da contare"* e contemporaneamente abbastanza grande da *"far uscire"* pochi gruppi. Procedendo in questo modo la struttura moltiplicativa presenta simultaneamente i suoi due aspetti di moltiplicazione e divisione, operazioni inverse: *"prendendo otto gruppi da tre oggetti sono arrivato a contare un mucchio di ventiquattro oggetti"*, ma anche: *"vediamo in questo mucchio quanti gruppi da tre ci stanno; e quanti da quattro, o da dieci?"*.

Altro passaggio importante è stato quello di chiedere ai bambini di sistemare gli oggetti sul banco in una «forma» tale che a colpo d'occhio si capisca «quanti gruppi di quanti» sono stati costituiti. Le forme sono varie e fantasiose, ma nessuno ha utilizzato un vero e proprio schieramento, che si voleva fare emergere spontaneamente. Verso la fine del secondo incontro, nel cercare la procedura più chiara possibile per superare le difficoltà emerse, si è suggerito ai bambini di racchiudere ogni gruppo di oggetti entro un contorno tracciato a matita, ed in seguito di infilare una perlina per ogni forma disegnata. Il passaggio successivo è stato quello di suggerire ai bambini una disposizione a schieramento e, a questo punto, sono stesso loro a notare la potenza di questa rappresentazione, infatti, Giulia osserva soddisfatta: *"ma allora basta contare le file"*.

figura 5.16



La disposizione spaziale è così forte che si può anche dimenticare il filo della tenda matematica: il numero di perline nel filo non sono niente altro che le colonne, mentre il numero di tubetti per perlina non sono niente altro che le righe.

5.4.2 Il gioco dell'attesa (II elementare)

figura 5.17

All'inizio della terza elementare è stato riproposto, con grande gioia dei bambini, il gioco dell'attesa e, poiché nel frattempo il ricercatore è cambiato, questa volta sono i bambini a spiegarne le regole. Tutte le questioni riguardanti le unità di misura vengono brillantemente riassunte dalla classe. Le regole sono sempre le stesse: ogni bambino mette nel suo barattolo una certa quantità di una certa sostanza per contare i giorni che intercorrono tra ogni incontro. La sostanza può avere carattere più o meno discreto o più o meno continuo a seconda della scelta del bambino (noci, pasta, riso, sale, zucchero, detersivo ecc.).

In questa fase però, si decide di utilizzare il gioco per un altro scopo: affrontare questioni moltiplicative. Il ricercatore rilancia e si decide insieme di incrementare il grado di difficoltà, visto che sono tutti cresciuti. Una volta scelta un'unità di misura, ogni bambino sceglie un certo numero tra 1 e 5 (il loro numero preferito) di unità di misura della sostanza da mettere nel barattolo per ogni giorno (ad esempio per ogni giorno 3 cucchiai di zucchero, 2 pezzi di pasta ecc.). Sotto suggerimento dei bambini si è anche deciso di prendere un barattolo speciale per contare il numero di incontri. Visto che il conteggio è per un evento speciale (gli incontri con il ricercatore) si decide di scegliere un numero "speciale" di unità di misura della sostanza scelta che in questo caso sono delle figurine rotonde (l'unità è chiaramente una figurina). Il ricercatore provoca una discussione chiedendo *"ma esistono numeri tra zero e uno?"*, la risposta è un corale *"no!"*. Si stimola il ricordo di alcune attività fatte l'anno precedente e in particolare alcune attività fatte con la pizza, che si cercava di dividere in vari pezzi (2, 3, 4 parti uguali) o anche dei giochi manuali fatti per dividere un pezzo di spago in due, tre, quattro parti. Così si incomincia a ragionare sul fatto che metà di una pizza è sempre pizza o anche che tre parti di uno spago è sempre spago e così forse anche metà di un numero è sempre un numero, ma la cosa non convince tutti, soprattutto non convince perché nessuno ha mai visto scritto un simbolo per rappresentare questa misteriosa quantità. Ci sono varie ricerche spontanee su come possa essere fatto un simbolo che rappresenti metà di uno, così si cerca di dividere il simbolo 1 in due parti che possano sembrare pressoché uguali. Si parla dei 50 centesimi che sono metà di un euro, ma il simbolo non c'è, quindi forse neanche il numero c'è! La cosa continua ad essere confusa, così la maestra decide, senza avere la presunzione di risolvere un problema così profondo, di continuare a riflettere sulla metà e in particolare sulle bottigline d'acqua che hanno sui banchi dove ci sono segnate degli strani simboli come 0,50 l o 50 cl. Si prova a capire in che relazione sta la quantità d'acqua delle loro bottiglie con la quantità d'acqua contenuta nella bottiglia da un litro, travasi vari ci permettono di dire che è giusto la metà! E quei l o cl? Naturalmente in questo incontro non si riesce a spiegare tutto, ma si conviene che 0,50 l è un simbolo che si usa per rappresentare la metà di 1l, e che quindi passando ai numeri evidentemente 0,50 rappresenta la metà di 1. In realtà rimane ancora aperta la questione delle unità di misura relative alla quantità d'acqua e anche quella dell'equivalenza dei vari simboli 0,5- 0,50-0,500-…0,5000. Tra l'altro Tommy, si ricorda che *"c'era un simbolo ½ o forse 2/1, non mi ricordo bene, che pure serve ad indicare la metà"*, una buona occasione per introdurre la rappresentazione frazionaria. A questo punto il ricercatore, dividendo la figurina in 4, annuncia alla classe che ad ogni suo arrivo metterà nel barattolo ¼ di figurina, e mostra il simbolo alla classe $\frac{1}{4}$.

Il controllo periodico del gioco non è avvenuta in presenza del ricercatore. A fine anno i bambini, stimolati dal ricercatore, ricordano i giochi che hanno fatto e nei vari interventi ci sono alcuni che riguardano il gioco dell'attesa.

Dea: *"Maria ha detto come funzionava il gioco ed ha detto che si devono procurare i barattoli e riso, pasta, farina e altre cose."*

Luca: *"Veramente noi abbiamo spiegato a Maria come era il gioco dell'attesa e poi lo abbiamo giocato. Dovevamo scegliere cosa, quanto e cosa mettere nel barattolo ogni giorno."*

Cristiana: *"Maria ci ha detto che dovevamo scegliere un numero da 1 a 5 di cose da mettere nel barattolo per ogni giorno che venivamo a scuola. Io ho scelto la pastina: 4 cucchiai al giorno. Ad ogni incontro Maria metteva un quarto di figurina."*

Giuseppe: *"Quando Maria non veniva, noi mettevamo le cose nella scatola; quando Maria veniva, doveva metter nel suo barattolo ¼ di cerchio.* ***Dopo un po' contavamo quante assenze e quante presenze e per contarle facevamo gli schieramenti****.* ***Quando veniva 4 volte faceva un cerchio e lo completava e così erano le frazioni****."*

Giorgio: *"Sì perché quando veniva Maria, lei doveva mettere ¼ e noi non dovevamo mettere niente. Contavamo i quarti e vedevamo quante volte era venuta****. Quando lei completava il cerchio noi sapevamo che era venuta 4 volte.*** *Quando Maria non c'era, noi mettevamo il sale, lo zucchero, le noci, la pasta. Io mettevo 2 cucchiai di sale colorato, cioè si metteva qualcosa ogni giorno tranne quando veniva Maria."*

Stefano: *"Ci volevate far capire le frazioni. Io ho scelto il numero 3 ed ogni volta che lei non veniva io mettevo 3 noci.* ***Quando dovevo contare facevo le colonne da tre noci, poi contavo le colonne e sapevo quanti giorni erano passati****"*

Luisa: *"Io mettevo 3 cucchiai di farina perché tre è il mio numero preferito. Se cadeva il contenuto dei recipienti si doveva ricominciare daccapo. Mi sono divertita molto a contare i pezzi, a imparare a fare le frazioni del gioco dell'attesa.* ***E alla fine si è capito che, visto che lei metteva ¼ di dischetto alla volta, 4 volte è un intero****."*

5.4.3 Viaggi con le pecore

All'inizio della quarta elementare i bambini sono stati coinvolti in un contesto che integra moltiplicazione e divisione. L'attività, videoregistrata, è iniziata con la drammatizzazione di una storia: ***Un pastore deve traghettare le sue pecore al di là di un fiume dove i pascoli sono più verdi e teneri. Il barcaiolo gli spiega che la sua barca può portare solo 3 pecore alla volta ed ogni viaggio costa 1 euro. Il povero pastore ha solo 4 euro e non vuole indebitarsi, così decide di portare solo un numero di pecore in modo da poter pagare al momento. Quante pecore possono essere traghettate con questi soldi?***

Con un disegno di gesso che rappresenta fiume si divide in due il pavimento dell'aula, si sceglie tra i bambini chi "fa" il pastore, Giuseppe, e chi il barcaiolo, Stefano, mentre tutti gli altri "fanno" le pecore.

Si mettono in scena i viaggi: il barcaiolo lega le pecore a tre a tre, e, una volta traghettate le pecore, cerca di ordinarle in modo da ricordare come sono arrivate. I modi di riordinare sono diversi, si possono lasciarle in mucchietti da tre, modalità che trova più immediato successo, ma poi, in maniera guidata, si passa agli schieramenti di fig. 5.13.

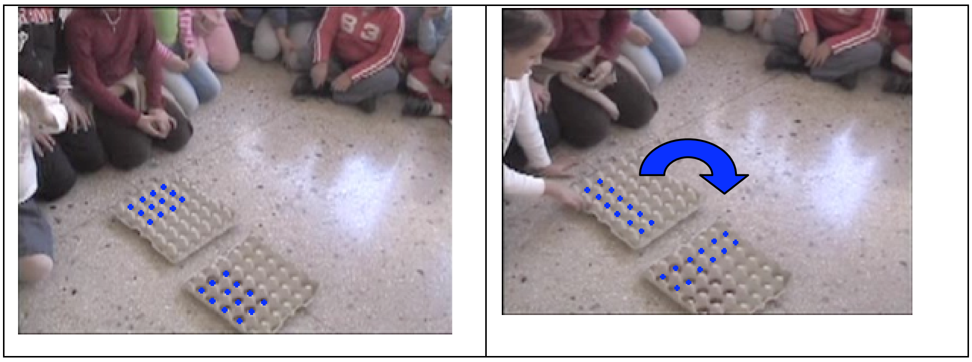
figura 5.18

La storia riprende: ***Dopo qualche giorno il pastore ha recuperato qualche soldo e torna dal barcaiolo con l'idea di far tornare le sue pecore all'ovile, questa volta però il barcaiolo ha una barca più grande che può trasportare 4 pecore alla volta, e il viaggio costa sempre 1euro. Quanti soldi dovrà dare il pastore?***

Anche in questo caso, una volta traghettate le pecore sull'altra sponda, si dispongono in modo da ricordare com'è avvenuto il viaggio.

Successivamente si torna in classe e si passa a rappresentare a schieramento le pecore con l'uso di portauova, scandendo così un primo passaggio di astrazione tra pecore e oggetto che le rappresenta.

figura 5.19



Con questi nuovi strumenti, rappresentando i viaggi e le pecore per viaggio, vengono inventate anche situazioni diverse con barche da 6 o da 12 pecore. La metafora spaziale dello schieramento aiuta, in primo luogo, a scontrarsi con la forte bidimensionalità della struttura moltiplicativa che in questo contesto corrisponde all'intreccio delle tre grandezze: i viaggi, le pecore per viaggio e le pecore. Inoltre il riconoscimento della proprietà commutativa avviene in maniera spontanea, infatti, Gaia, girando il portauova, dice soddisfatta: *"Per portare dodici pecore si possono fare sei viaggi con una barca da due pecore, ma anche due viaggi con una barca da due pecore"* .Si riflette ancora su quello che è successo e la proprietà commutativa è ancora oggetto di discussione, ma questa volta Giorgio ci tiene a chiarire una cosa molto importante che pone nuovamente l'aspetto sul significato, sull'azioni avvenute nei due traghettamenti. Infatti, Giorgio osserva che le due azioni, per quanto portino allo stesso risultato di pecore traghettate, sono diverse in primo luogo perchè, *"è praticamente il contrario! prima i viaggi erano 4 ed i posti per le pecore in ogni barca erano 3, adesso, invece, faranno 3 viaggi ed in ogni barca entreranno 4 pecore"*, e in secondo luogo, *"per le tasche del pastore che la prima volta spende 4 euro, mentre la seconda volta ne spende 3"*.

Questa attività ha anche permesso di giocare con i diversi significati di divisione, infatti, se la prima parte del problema riguardava una moltiplicazione del tipo:

3 pecore / viaggio × 4 viaggi = 12 pecore,

e quindi una divisione del tipo:

12 pecore : 4 viaggi = 3 pecore / viaggio (*divisione di ripartizione*),

la seconda parte del problema coinvolge una divisione del tipo:

12pecore : 4 pecore / viaggio = 3 viaggi (*divisione di contenenza*).

Risulta complesso per un bambino riconoscere che queste diverse situazioni convergono alla stessa struttura. D'altra parte per alcuni bambini risulta complesso comprendere e accettare l'algoritmo della divisione, basato solo su un tipo di *divisione di contenenza*. La maestra prova a cogliere questa occasione per affrontare la questione, e interviene notando *"Se pensiamo anche al linguaggio in cui abbiamo imparato a fare le divisioni, quando ci chiediamo quante* ***volte*** *il quattro entra nel venti, ci chiediamo le volte, così come con le pecore ci chiedevamo quanti viaggi"*. L'intervento non suscita particolari reazioni, ma l'idea di proporre un'attività che permetta di affrontare diverse semantiche della divisione nasce anche dall'intento di capire che in realtà la scelta di un determinato algoritmo è strettamente legata a quella di una semantica più comoda per le diverse manipolazioni numeriche.

5.5 La struttura moltiplicativa e il concetto di rapporto

Già nel capitolo 3 si è anticipato che, accanto alla pluri-dimensionalità della struttura moltiplicativa, nella fase della sperimentazione sarebbe risultato centrale il concetto di rapporto. Così, alla fine della seconda elementare, dopo aver affrontato alcuni aspetti della struttura moltiplicativa, si è progettato di trattare il concetto di rapporto attraverso delle nuove esperienze.

L'esperienza di mettere a confronto numerosità diverse senza contarle (anche prima di attivare la corrispondenza biunivoca), che se vogliamo risulta in analogia e in contrasto con l'esperienza di confrontare estensioni continue, appare cruciale per tutto lo sviluppo cognitivo ed in particolare per tutto il percorso di comprensione

del numero. Per i bambini quindi può essere di grande aiuto confrontarsi con esperienze che mettono in gioco un confronto qualitativo di rapporti, che attiva una gestione intrecciata del numero e dello spazio.
Come sembra evidente dalla percentuale costante dagli errori di stima (Dehaene, 1997), la trasduzione "automatica" del discreto in continuo approssimato avviene neurologicamente attraverso il probabile aggiustamento della numerosità a un intervallo fisso (Guidoni, 2007). Sembra quindi molto probabile che, già nei primi anni di vita, vi sia un naturale controllo percettivo di una variabile che corrisponde a quello che si potrebbe chiamare un "rapporto discreto/continuo", una "fittezza" (come dicono i bambini). E' evidente che l'idea di fittezza, e in particolare quella di fittezza "regolare"(uniforme equivalente), correla fortemente numerosità e estensione spaziale, una correlazione che si evidenzia dall' intuizione "qualitativa" di rapporto che è possibile vedere all'opera quando bambini "piccoli" confrontano o producono "fittezze" diverse. Si può parlare, pertanto, di fittezza spaziale: unidimensionale (perle spaziate in una collana), bidimensionale (tubetti distribuiti su un foglio), tridimensionale (uvette in un panettone). D'altra parte si potrebbe parlare anche di fittezza temporale riferendosi a gesti o suoni, la cd. frequenza. L'idea è quindi quella di creare una risonanza tra l'abilità naturale di confrontare "fittezze" e la nozione culturale di rapporto numerico, quest'ultima in grado, nel gioco che sarà presentato, di aiutare a controllare situazioni che potrebbero sfuggire e che hanno bisogno, accanto a riconoscimenti qualitativi, di dati quantitativi.

5.5.1 Il gioco della "fittezza"

Questo contesto di esplorazione ha tenuto impegnata la classe per quattro incontri, avvenuti a distanza di una settimana l'uno dall'altro, settimane durante le quali l'insegnante continuava a stimolare discussioni attorno alle questioni sollevate durante gli incontri.
Il primo incontro è iniziato con il racconto di una storia:

Un feudatario assegna diversi pezzi di terra alle famiglie della sua regione con il compito di piantare alberi. Ogni famiglia deve quindi disporre i semi su queste terre in maniera tale che i boschi siano ugualmente fitti.

L'idea è quella di simulare questa situazione e la maestra, che fa le veci del feudatario, divide la classe in famiglie da 4 bambini. Inizialmente i gruppi devono disporre 10 tubetti di pasta, che rappresentano i semi degli alberi, su un foglio, che rappresenta un pezzo di terra; successivamente vengono dati loro altri 10 tubetti-albero ed un altro foglio, e così via fino ad arrivare a 40 tubetti-albero su quattro fogli.

figura 5.20

In questo modo si realizza un gioco percettivo per cui la prima configurazione di 10 tubetti su 1 foglio appare simile a quella di 40 tubetti su 4 fogli, nel senso che, come dicono i bambini, *"lo spazio bianco tra i tubetti sembra lo stesso"*. In questa fase, in maniera inconsapevole e in un discorso matematico che rimane solo a livello di linguaggio naturale, si riflette sulla proporzione disomogenea[100]:

$$\frac{10\,tubetti}{1\,foglio} = \frac{40\,tubetti}{4\,fogli}$$

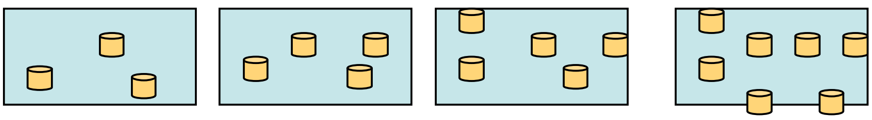
Il rapporto tra numero di tubetti e numero di fogli, è chiamato da alcuni bambini *"fittezza"*, che per quanto sia una parola inventata, esprime bene le scoperte successive dei bambini. L'utilizzo di questa parola, infatti, stimola spontaneamente un gioco di ricerca dell'aggettivo *"fitto"*, e del suo contrario *"rado"*. I bambini, nei giorni successivi al primo incontro ad esempio, leggendo un libro con l'insegnante,

[100] Vedi par. 3.7.2.

incontrano l'espressione *"vedeva i genitori di rado"*, e molti non sono sicuri sul significato di quest'espressione. Nell'incontro successivo, Lorenza chiarisce che *"vedere di rado"* vuol dire *"vedere poco"* e il ricercatore, a questo punto, prova ad anticipare un'osservazione cruciale "*Fitto e rado si intendono sempre di una cosa rispetto ad un'altra"*, ma evidentemente l'anticipazione ha poco successo, come esprimono chiaramente le parole di Lorenza *"Non ho capito"*. In questa fase Lorenza non è la sola ad avere problemi e il brusio tra i banchi rivela una situazione ancora non chiara.

L'incontro procede con un altro gioco. I bambini sono divisi nuovamente in gruppi da 4, ogni bambino del gruppo deve creare una configurazione diversa dagli altri membri: un bambino riceve 3 tubetti, un altro 4 tubetti, un altro 5 tubetti e l'ultimo 7 tubetti da distribuire sul foglio.

figura 5.21

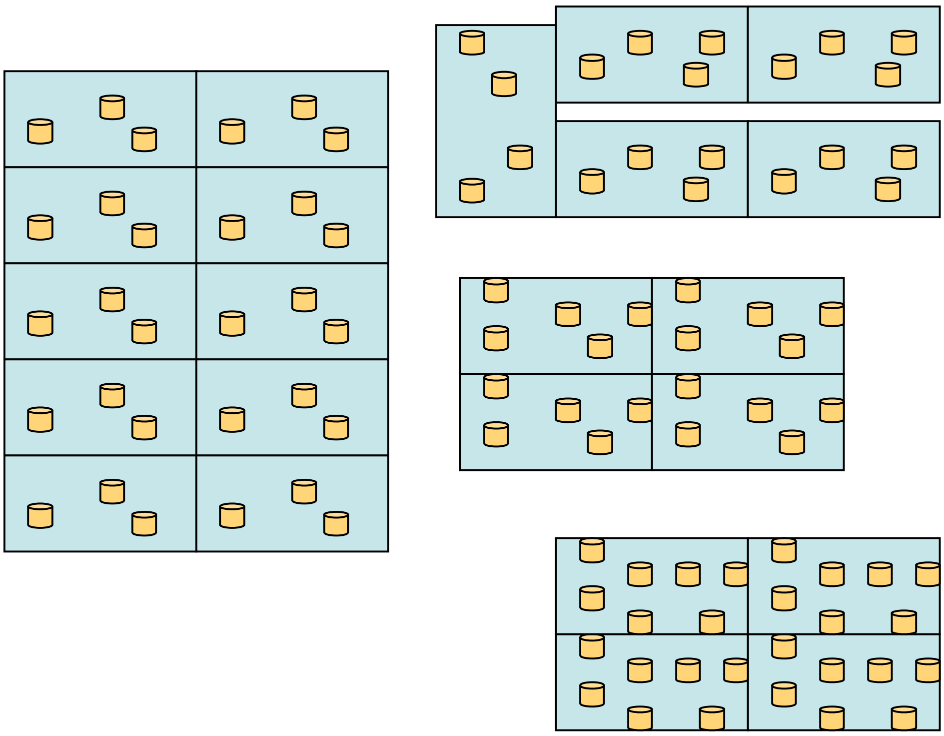


Ad ogni bambini vengono dati altri fogli e altri tubetti in modo tale da creare configurazione più grandi, ma con il rapporto tubetti/fogli uguale al rapporto iniziale[101].

[101] Al bambino con il foglio da 3 tubetti, vengono dati altri 9 fogli e altri 27 tubetti, al bambino con il foglio da 4 tubetti vengono dati altri 4 fogli e altri 16 tubetti, al bambino con il foglio da 5 tubetti vengono dati altri 3 fogli e altri 15 tubetti, al bambino con il foglio da 7 tubetti vengono dati altri 3 fogli e altri 21 tubetti.

Sul banco i bambini hanno una situazione come quella della figura.

figura 5.22



A questo punto il ricercatore stimola una discussione sul confronto della *"fittezza"* dei diversi boschi *"Ora per banco dovete mettere in ordine quale secondo voi è il foglio che rappresenta il bosco più fitto."* La domanda non è subito chiara, e l'idea è di cercare "*Chi ha più tubetti?"*, ma il ricercatore interviene nuovamente per cercare di guidare la ricerca "*Non dovete mettere in ordine con i numeri, ma dovete guardare e provare a rispondere quale vi sembra più fitto".* Una volta appurato di chi è il bosco più fitto, come è naturale che fosse, viene sollevata una nuova questione da Cristiana *"Anch'io potevo essere più fitto di Giorgio se li mettevo più attaccati!"*, ma

prima Lorenza, *"No, poi ti rimane tutto lo spazio intorno",* e poi Giorgio, "*Devi mettere uguale, non è che puoi mettere da un lato di più e da un lato di meno",* chiariscono che la *"fittezza"* è una grandezza che va considerata in caso di situazioni uniformi, regolari.
A questo punto, la classe è d'accordo che su ogni banco siano i bambini che hanno 4 fogli con 28 tubetti uniformemente distribuiti sopra ad avere il bosco più fitto. Il ricercatore prova allora a sollevare la questione del rapporto "*Se do altri 10 fogli e altri 30 tubetti ai bambini che hanno 10 fogli e 30 tubetti, quale diventerà il bosco più fitto? Facciamolo banco, per banco*", ma i bambini sembrano abbastanza ricettivi, e, alla minaccia di avere altri tubetti da collocare, protestano, come fanno rispettivamente Max e Lorenza, *"Non c'è bisogno di farlo! Vincono sempre Davide, Tommy, Giorgio, Stefano R. e Sara", "Non conta quanti fogli sono, ma conta quanti tubetti ci sono su ogni foglio. Quindi anche se ne fai cento, duecento, vince sempre sette"* . Il ricercatore allora prova a provocare "*ma in questa situazione, se immaginiamo che i fogli si siano uniti e che sia diventata una stoffa, il 7 non c'è",* ma Cristiana è pronta a rispondere alla provocazione riconoscendo l'invariante "*C'è! C'è dentro il 28! Perchè 28 è formato da 7 per 4".* La maestra allora sottolinea la scoperta *"Abbiamo scoperto che anche se ho 28 pallini e 4 foglietti è sempre fitto 7".* La scoperta fatta aiuta a sostenere le rappresentazioni che intende proporre poco dopo:

$$\frac{7 tubetti}{1 foglio} = \frac{28 tubetti}{4 fogli}$$

A questo punto la maestra mostra ai bambini un modo comodo per rappresentare le diverse "fittezza":

$$\frac{3 tubetti}{1 foglio}; \ \frac{4 tubetti}{1 foglio}; \frac{5 tubetti}{1 foglio}; \ \frac{7 tubetti}{1 foglio}$$

Disponendo in maniera crescente i simboli che rappresentano i boschi più fitti i bambini notano che è *"il piano di sopra"* ad aumentare all'aumentare della *"fittezza"*. Allora il ricercatore chiede di provare ad immaginare cosa succede alla *"fittezza del bosco"*, se lasciando fisso *"il piano di sopra"* si aumenta *"il piano di sotto"*, in una situazione rappresentata da questi rapporti:

$$\frac{10tubetti}{1foglio};\frac{10tubetti}{3fogli};\frac{10tubetti}{6fogli};\frac{10tubetti}{8fogli}.$$

I bambini non riescono a fare previsione e quindi si decide di tornare a creare ed a guardare le diverse configurazioni. Alla fine del controllo concreto, sono tutti d'accordo che se si vuole ordinare i boschi al crescere della fittezza, allora bisogna ordinarli così:

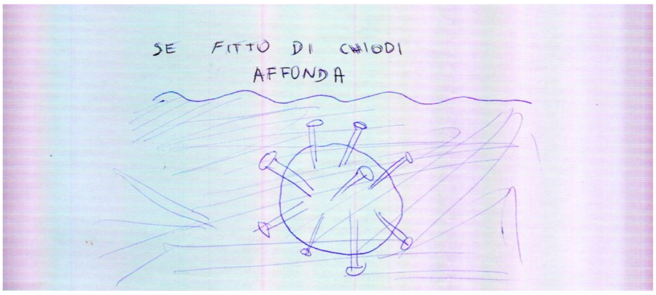
$$\frac{10tubetti}{8fogli};\frac{10tubetti}{6fogli};\frac{10tubetti}{3fogli};\frac{10tubetti}{1foglio}.$$

Nei giorni successivi l'incontro, l'insegnante inventa un gioco in cui i bambini ballando al ritmo di musica devono, quando la musica viene spenta, rifugiarsi su un'isola rappresentata da venti fogli di giornale sul pavimento: chi rimane fuori l'isola viene eliminato. Così, se inizialmente ognuno al suo foglio di giornale, ad ogni turno di gioco si toglie un foglio di giornale e i bambini affrontano con il corpo il problema della *"fittezza"*.

Nell'ultimo incontro si riprende da qui, e i bambini raccontano al ricercatore il gioco che hanno fatto, facendo espliciti riferimenti alla fittezza*:"eravamo come in un bosco fitto, fitto, addirittura ci siamo dovuti abbracciare e c'era chi spingeva e chi tirava, quello più sicuro era chi era quello che s'era messo al centro".* Il ricercatore decide di tornare a parlare della parola *"fittezza"*, e alcuni bambini che hanno fatto ricerche sul vocabolario, parlano di *"acquazzoni fitti, fitti"*, e questa volta i bambini alla domanda *"fitti di cosa?"* rispondono prontamente di *"gocce d'acqua"*, e poi di buste della spesa fitte di prodotti e del buio che per i bambini è *"fitto di buio"*, vengono anche affrontate questioni più spinose come quella del mare che, a quanto pare, *"è fitto d'acqua, ma anche di sale"*.

Nei giorni successivi, i bambini esplorano in un altro progetto sperimentale di fisica il problema del galleggiamento e quando il ricercatore torna in classe l'insegnante mostra alcune rappresentazioni dei bambini. La rappresentazione di Lorenza sembra particolarmente interessante.

figura 5.23



In questa rappresentazione è evidente che c'è un riconoscimento della stessa struttura in due contesti differenti, quindi si tratta, per il quadro teorico considerato, della costruzione di conoscenza astratta definita come **"conoscenza di correlazioni stabili attraverso diversi contesti"** (cfr. par. 2.2.5). In questa fase il ricercatore prova a condividere con la classe l'osservazione di Lorenza generando una nuova discussione attorno alla questione del galleggiamento e della fittezza.

L'altra questione che viene affrontata è la differenza tra le due scritture:

$$\frac{10tubetti}{3fogli};\ \frac{3fogli}{10tubetti}$$

Dopo una discussione, l'intervento di Luca sembra soddisfare tutti: *"E' come un cannocchiale speciale, da una parte si vedono le cose fitte dall'altra le cose rade"*.

5.5.2. Il problema del maiale

Alla fine della terza elementare è stato proposto un problem solving da risolvere insieme attraverso una discussione collettiva. Il problema è piuttosto articolato e coinvolge sia la struttura additiva che quella moltiplicativa:

Il maiale intero pesa 100kg. Si tolgono due prosciutti da 7kg l'uno. La metà di quello che resta non è utilizzabile per mangiare. Dalla parte utile si levano 15kg di lardo. In tutto restano 5kg di grasso, oltre la carne magra. Nelle salsicce si mette sempre ¼ di grasso e

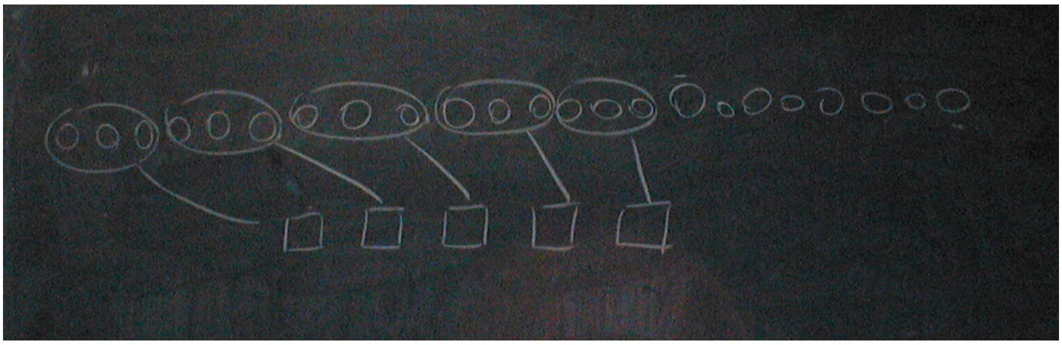
¾ di carne magra. Con tutto il grasso che resta, e con la carne che serve, si fanno salsicce. Quanti kg di salsicce fatte?Quanti kg di carne magra rimasta?

Il problema, riguarda una divisione che non è né di contenenza, né di ripartizione, ma bensì appare chiaro che si tratta nuovamente di un rapporto:

$$\frac{3/4 magra}{1/4 grasso} = \frac{3 magra}{1 grasso} = \frac{15 magra}{5 grasso}.$$

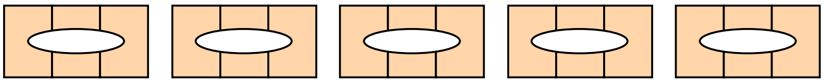
Già dal primo momento i bambini riconoscono la difficoltà del problema, anche se inizialmente la difficoltà è avvertita nella lunghezza e nell'articolazione della traccia, Tommy: "*Ma è difficilissimo questo problema, è lunghissimo*!", e anche chi non si scoraggia deve fare i conti con il fatto che la domanda finale sia molto lontana dai primi dati, Stefano: "*Allora dobbiamo fare 100kg,* [si blocca] *ma la domanda quale è?".* La maestra interviene per guidare i bambini rapiti dalla frenesia delle operazioni: *"Non dovete buttare i numeri a casaccio! I numeri non si buttano a casaccio. Abbiamo i pennarelli, l'abaco, il materiale multibase, quindi ci fermiamo e facciamo per bene 43kg meno 15kg".* Nonostante l'intervento della maestra, le quantità in gioco fanno scontrare i bambini con diversi problemi, Luca: *"[...]Non è possibile, perché la metà di 23 non esiste, perché 12 e 12 fanno 24."*, ma il pensiero collettivo si muove e subito ci si aiuta, Tommy: *"Sì, Luca esiste, perché è 11 e ½.".* Ma le difficoltà sono proprio di orientamento nella struttura, come si evince dalle parole di Tommy: *"Dobbiamo addizionarli?[...]Ma che bisogna fare con quel 1/4 e quei ¾?".* Dopo diversi faticosi passaggi le idee si cominciano a chiarire: *"ogni ¼ ci vuole 3/4, quindi la carne magra è 3 volte il grasso.".* Anche in questo problem solving, come era successo per il problema dei mestoli, è una rappresentazione grafica a chiarire le idee, d'altra parte anche Polya (1973), nella lista delle strategie euristiche per la risoluzione di problem solving, pone tra i suggerimenti centrali proprio quello di disegnare una figura.

figura 5.24 (rappresentazione di Tommy)



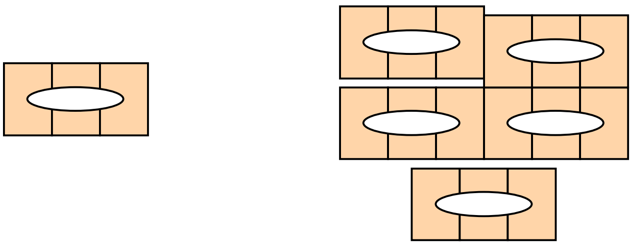
A questo punto, è il ricercatore a provare a recuperare il concetto di "*fittezza*", di rapporto, proponendo, accanto alla rappresentazione di Tommaso, una rappresentazione di questo tipo:

figura 5.25



I bambini sembrano pronti a recepire, e, Lorenza interviene "*Infatti le salsicce sono così, hanno il rosa con un po' di bianco dentro"*. A questo punto e nuovamente il ricercatore a stimolare il riconoscimento della struttura di rapporto *"Questa cosa non vi ricorda il gioco dei boschi fitti, fitti?"*. Non tutti sembrano ricordarsene e la maestra ricorda brevemente quello che era successo, a questo punto Giulia interviene "*quindi potremmo dire che una salsiccia piccola da tre chili di carne e uno di grasso è fitta uguale a una salsiccia enorme da quindici chili e cinque di grasso*" e fa il disegno:

figura5. 26



Dal punto di vista dell' analisi, sembra quindi che, per quanto non vi sia stato un recupero immediato dell'esperienza del gioco, allo stimolo dell'insegnante, una bambina abbia ricostruito il legame tra le due esperienze e quindi la struttura. L'intervento di Giulia, ha inoltre agito sugli altri bambini, innescando probabilmente riflessioni in questo senso[102].

5.5.3 Il problema del sale

In quarta, prima di affrontare il problema del sale, si decide di affrontare con i bambini questioni che riguardano il confronto della salinità di diverse soluzioni. Sono diverse le questioni che vengono fuori da queste esperienze, come il legame tra la relazione d'ordine tra numeri interi e quella tra i loro reciproci. Nel confrontare, ad esempio una soluzione costituita da sei bicchieri d'acqua e due cucchiaini di sale con una costituita da quattro bicchieri d'acqua e due bicchierini di sale, la veloce risposta di Tommy "*1/3 di cucchiaino in ogni bicchiere. E' salato di più il secondo, perché ½ è più di 1/3",* non convince Cristiana che si concentra sull'ultima affermazione *"Ma tre è maggiore di due".* Tommy prova a spiegarsi *"Non centra niente, cioè non è che non centra niente, e che è il contrario. Non so come spiegarlo."*, ma è consapevole che la sua risposta non argomenta e quindi non può convincere la compagna. A questo punto è l'intervento di Luca a cercare di chiarire *"Cristiana, perché se prendi un cucchiaino di sale e lo dividi in due tu ottieni una quantità maggiore che se lo dividi in tre. Se hai un pezzo di cioccolata e lo dividi in tre e poi un altro pezzo di cioccolata e lo dividi in due, se vuoi mangiare di più ti prendi il pezzo di quello che l'ha diviso in due".* Luca si concentra sul processo più che sulla risposta finale, in questo modo aiuta a recuperare il significato della relazione d'ordine attraverso il contesto dell'acqua e sale, ma non solo anche in un altro contesto, quello della cioccolata, quasi che Luca intuisse che i molti esempi e che quindi, ancora una volta, gli

[102] Cfr. "effetti specchio" (Rizzolatti & Sinigaglia, 2006).

invarianti nella varietà dei contesti, aiutino a cogliere la struttura. Sembra che Luca sia consapevole di come lui riesca a capire e quindi di come può aiutare la compagna a farlo.

figura 5.27

Dopo qualche incontro, in cui si provano a risolvere problemi come quello precedente, viene presentato il problema dell'acqua e sale:

C'è un litro d'acqua già un po' salata, ma non abbastanza. Giacomo ne prende mezzo litro e ci aggiunge un cucchiaino di sale. Tommaso prende l'altro mezzo litro e ci aggiunge un litro di acqua di rubinetto e tre cucchiaini di sale. Alla fine è più salata l'acqua di Giacomo o quella di Tommaso?Cosa si deve fare per renderle ugualmente salate?

Lorenza, dopo la lettura del testo, esordisce osservando *"questo problema è un misto del problema dei mestoli e del problema dell'acqua e zucchero[103]"*. In realtà, questo problema presenta una doppia difficoltà, infatti la questione si articola sia attorno al concetto di rapporto, che i bambini stanno affrontando da diverso tempo, sia attorno ad una quantità di sale di cui non si sa esattamente l'entità, *"c'è un litro d'acqua un po' salata"*.

Stefano solleva a proposito due dubbi "*Questo litro d'acqua un po' salata, però Tommaso ne prende mezzo litro già un po' salata non si può sapere quanto è salata? se un cucchiaino, due cucchiaini, può anche darsi che Giacomo prende mezzo litro con più sale."*

Oltre l'incertezza della quantità di sale iniziale, Stefano solleva anche dei dubbi sul

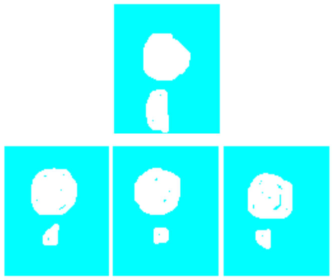
[103] Il problema dell'acqua e zucchero è un problema che i bambini hanno svolto con l'insegnante senza la presenza del ricercatore. Si tratta di un problema in cui bisogna dire quale delle due soluzioni di acqua e zucchero, una da 150g d'acqua e 20g di zucchero e l'altra da 600g d'acqua e 40g di zucchero, è più dolce.

fatto che il sale sia uniformemente sciolto. Luca collegandosi al discorso di Stefano, solleva un dubbio di natura diversa "*Secondo me Stefano ha detto una cosa vera perché se tu sapessi quanto è quel un po' salata allora si potrebbe fare, invece così ho un po' di difficoltà, perché l'acqua del rubinetto che aggiunge Ilaria potrebbe essere un po' salata tanto da uguagliare quel sale che c'era inizialmente."* A questo punto è l'intervento del ricercatore a provare ad eliminare questi dubbi ed a condurre la discussione verso altre questioni "*Effettivamente va chiarito che per acqua del rubinetto si intende acqua senza sale. Ma il problema di queste rappresentazioni è che per Tommaso i tre mezzi litri in realtà sono nello stesso contenitore e quindi il sale che fa?",* Gaia "*Si mischia"*. Ma, evidentemente, la situazione non è ancora chiara, infatti, l'intervento di Luca *"No, è un disastro",* è la premessa della richiesta di fare l'esperimento concretamente.
Le questioni che coinvolgono la riproduzione concreta di un problema di questo tipo sono tante. In primo luogo bisogna trovare un modo per misurare un litro d'acqua e poi, cosa che lascia tutti molto soddisfatti, bisogna decidere quanto è quel "po' di sale", si decide per un cucchiaino di sale.

figura 5.28

Dopo una serie di assaggi, la questione non è risolta perché a quanto pare, non ci si può fidare neanche dell'esperimento, Stefano *"Si, ma che ti ha detto che i loro sensi siano perfetti, precisi."* A questo punto, è proprio Stefano a proporre una rappresentazione:

figura 5.29



Probabilmente aiutato dall'assegnazione arbitraria dell'esperimento, decide anche lui di salare con un cucchiaino di sale il litro iniziale e fornisce questa spiegazione *"Per me è più salata quella di Giacomo. Perché Tommaso ha un litro e mezzo. Per me quell'acqua un po' salata era salata con un cucchiaino di sale, quindi quando Tommaso ne prende mezzo litro prende anche il mezzo cucchiaino di sale che si sparge nel resto dell'acqua e poi ho i tre cucchiaini che si spargono,* ***quindi in ogni mezzo litro ho un cucchiaino e un terzo del mezzo di cucchiaino****. Mentre nel mezzo litro di Giacomo* ***ho il mezzo cucchiaino che rimane tutto lì e in più il cucchiaino che ci aggiungo****".* Per quanto in questo problema i bambini non abbiano usato esplicitamente il rapporto sale/acqua come ci si aspettava, l'analisi di questa esperienza pone in evidenza due tipi osservazioni. La prima riguarda la possibilità che la quantità iniziale di sale non specificata non abbia agevolato l'uso esplicito della scrittura di rapporto che, in questo caso, avrebbe assunto l'aspetto di una scrittura di questo tipo: $\frac{x\ sale + 3\ cucchiaini}{1,5\ litri}$. L'altra è che effettivamente ci sia ancora una difficoltà, a questo livello, ad afferrare e utilizzare la struttura di rapporto, anche se le rappresentazioni grafiche sembrano segnalare una buona comprensione della situazione.

5.5.4 Il problema dei pani

Ormai i bambini hanno preso gusto e confidenza con i problemi. Per loro il problema è un'esperienza importante, da richiamare alla memoria e raccontare. La lettura del libro "L'uomo che sapeva contare" è l'occasione per scontrarsi con una nuova questione matematica da affrontare sempre con una discussione di classe.

"...Tre giorni dopo stavamo avvicinandoci alle rovine di un piccolo villaggio chiamato Sippar, quando scorgemmo, steso al suolo, un povero viandante ricoperto di cenci che sembrava gravemente ferito. Era in condizioni pietose. Ci accingemmo a soccorrerlo e in seguito ci narrò la storia della sua sciagura. Si chiamava Salem Nasair ed era uno dei più ricchi mercanti di Baghdad. Pochi giorni prima, di ritorno da Basra e diretto a el-Hilleh, la sua grande carovana era stata attaccata e rapinata da una banda di nomadi persiani e quasi tutti i suoi compagni erano stati uccisi. Egli, il padrone, era riuscito miracolosamente a salvarsi nascondendosi nella sabbia tra i corpi inanimati dei suoi schiavi.
Quando ebbe terminato il racconto delle sue sventure, ci chiese con voce tremante: "Non avete per caso qualcosa da mangiare? Sto morendo di fame ".
"Ho tre pagnotte" risposi.
"Io ne ho cinque" disse l'Uomo Che Contava.
" Allora" fece lo Sceicco, "vi scongiuro di dividere le vostre pagnotte con me. Vi propongo uno scambio ragionevole. Vi darò per il pane otto monete d'oro, non appena giungerò a Baghdad". E così dividemmo tra di noi le pagnotte. Il giorno dopo, tardi nel pomeriggio, entrammo nella famosa città di Baghdad, Perla dell'Oriente. Attraversando una piazza affollata e rumorosa, fummo bloccati dal passaggio di una sfarzosa comitiva alla cui testa cavalcava, su di un elegante sauro, il potente visir Ibrahim Maluf. Vedendo lo sceicco Salem Nasair in nostra compagnia, fece fermare il suo brillante seguito e lo interpellò: "Cosa ti è capitato, amico mio? Come mai arrivi qui a Baghdad così mal ridotto, in compagnia di questi due stranieri? "
Il povero Sceicco gli narrò nei dettagli quanto gli era accaduto in viaggio, lodandoci ampiamente.
" Ricompensa subito questi due stranieri" ordinò il Visir. Prese dalla borsa otto monete d'oro e le diede a Salem Nasair dicendo: "Ti porterò subito con me a palazzo poi, ché il Difensore dei Fedeli vorrà di sicuro essere informato di questo nuovo affronto dei banditi beduini, che osano attaccare i nostri amici e saccheggiare una carovana sul territorio del Califfo".
A questo punto Salem Nasair ci disse: "Prendo congedo da voi, amici miei. Desidero però ringraziarvi ancora una volta per il vostro aiuto e, come avevo promesso, compensarvi per la vostra generosità ". E, rivolgendosi all'Uomo Che Contava: "Ecco cinque monete d'oro per i tuoi cinque pani". Poi a me: "E tre a te, mio amico di Baghdad, per le tue tre pagnotte ".
Con mia grande sorpresa l'Uomo Che Contava sollevò rispettosamente un'obbiezione. "Perdonami, Sceicco! Ma questa suddivisione, che pure sembra semplice, non è matematicamente giusta. Dal momento che ho dato cinque pagnotte, devo ricevere sette monete. Il mio amico che ha ceduto tre pagnotte, deve riceverne soltanto una".
" Per il nome di Maometto! " esclamò il Visir vivamente interessato. "Come può questo straniero giustificare una pretesa così assurda?" (Tahan,1996)

Sia la formulazione del problema che il suo contenuto non ricalcano la traccia di un problema tradizionale. Innanzitutto alla fine della storia non vi è una domanda precisa, ma vi è piuttosto la richiesta di giustificare un ragionamento. Inoltre, il contenuto matematico non riguarda un'unica struttura. Il problema ha, infatti, un grado di complessità piuttosto elevato: si passa attraverso un frazionamento della pagnotta in $\frac{3}{3}$, per poi fare ragionamenti di compensazione e capire quanti pezzi di pagnotta Beremiz e Ibraim cedono. La questione centrale è però il criterio con cui è data la ricompensa. I bambini, come tutti i lettori d'altra parte, sono indotti inizialmente a pensare che la ricompensa sia valutata in termini di rapporto $\frac{1\,pagnotta}{1\,moneta}$, ma in realtà il criterio per assegnare la ricompensa è $\frac{\frac{1}{3}\,pagnotta}{1\,moneta}$.

Dopo un primo momento di confusione dovuto anche alla forma del problema, la maestra decide di guidare la discussione facendo uno schema alla lavagna per riassumere i dati e la questione che il problema solleva.

Luca*: "Quindi, all'uomo che sapeva contare ne sono state aggiunte due, mentre all'amico dell'uomo che sapeva contare ne sono tolte due rispetto a come doveva essere, ed è arrivato ad uno. E' come se avessero tolto delle cose all'amico e le hanno aggiunte all'altro. Non so se mi sono confuso".*

Il ricercatore: *"Aspettate, leggiamo un altro pezzettino della storia. L'Uomo Che Contava si avvicinò al ministro e gli disse: " Permettimi di mostrare, o Visir, che la mia proposta è matematicamente corretta. Durante il viaggio, quando avemmo fame, presi una pagnotta e la divisi in tre parti. Ciascuno di noi ne mangiò una."*

Maestra: "*Vogliamo provare a farci un disegno della storia"*

Lorenza: *"Ma non poteva essere che quello che aveva cinque pagnotte le aveva più grandi?E quindi doveva essere ricompensato di più"*

Ricercatrice: *"No, nel racconto non c'è scritto"*

Stefano: *"Le pagnotte venivano divise in tre parti, uguali."* [Stefano fa un disegno alla lavagna]

figura 5.30

"Allora beremiz gli da cinque pezzi di pagnotta. Quindi gli da una pagnotta e due pezzettini"[Stefano scrive 1, $\frac{2}{3}$]

Ricercatore: *"Bellissimo questo numero, non l'avevo mai visto"*

Stefano: *"forse non ci vuole la virgola, insomma una pagnotta e due terzi, allora può essere che si fa dare sette soldi perché lui in pratica gli da di più"*

Maestra: "*Ibraim che gli da?"*

Stefano: *"Gli da solo una pagnotta. Perché lui ne ha tre, quindi lui gli paga un soldo perchè lui gli ha dato una pagnotta"*

Maestra: *"Quindi beremiz gli da cinque pezzi che formano una pagnotta e due terzi e Ibraim gli da tra pezzi che formano una pagnotta"*

Ricercatore: "*Stefano ci ha aiutato molto perché ci ha visualizzato questa divisione per tre"*

Luca: *"La differenza tra tre e cinque è due. Nel racconto dice un terzo, ne ha più beremiz, tutte e cinque le pagnotte che ha le divide per tre, la differenza è di due fra le pagnotte di Beremiz e di Ibraim che è anche la differenza tra le monete. Quindi lui da due pagnotte in più e quindi anche due pezzi in più allo sceicco e deve avere anche due monete in più."*

figura 5.31

Ricercatore: *"Ok questo è un primo ragionamento, ma dobbiamo cercare di essere ancora più precisi perché non è chiaro perché una a Ibraim e sette a Beremiz, perché la differenza tra le monete non è due!"*

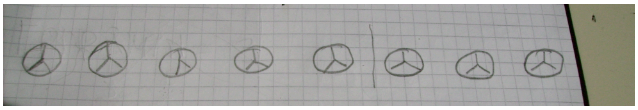
Tommy*: "Per me una pagnotta equivale a una moneta"*

Ludovica*: "ma se lo sceicco ha otto soldi non è più giusto che ne da quattro a Beremiz e quattro a Ibraim"*

Ricercatore*: "Si, infatti poi vedremo che succederanno altre cose"*

Tommy: *"Ci sono ventiquattro pezzi in tutto*"[intanto Tommy ha disegnato sul quaderno una rappresentazione]

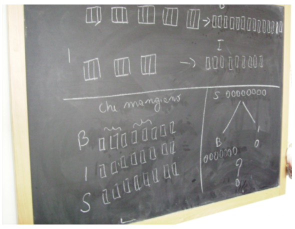
figura 5.32



La discussione prosegue per quasi un'ora e vengono proposte rappresentazioni diverse e diverse idee, ma le cose sono molto confuse, allora il ricercatore fa una sintesi delle diverse idee che sono venute fuori e propone uno schema alla lavagna.

Ricercatore: *"Quindi fanno otto fermate e ognuno ne mangia otto terzi. Alla fine si assegnano sei monete a Beremiz e una Ibraim e sappiamo che è matematicamente corretto, ma perché è matematicamente corretto?"*

figura 5.33



Con questa domanda, si rimanda la discussione al giorno successivo.

Luca: *"Ho fatto la differenza tra i terzi che ha da Ibraim e quelli che ha da Beremiz. Beremiz ne da quindici, mentre Ibraim ne da nove e la differenza è sei come la differenza tra le monete. Quindi Beremiz dice io ho dato sei terzi in più rispetto a Ibraim perché ne devo avere di meno"*

Cristiana: *"Io ho capito perchè Beremiz ne deve avere sette, ma non ho capito perché quell'altro ne deve avere una. Perché beremiz si tiene sette pezzi di pane e ne da sette allo sceicco e quindi deve avere sette monete."*

Maestra: *"Guarda che Beremiz ne mangia otto non sette"*

Tommy: "*Facciamo i pezzi di pagnotte di Ibraim che sono nove, mentre quelle di Beremiz sono quindici. Allora qui uno se lo mangia lui, uno lo sceicco e uno il suo amico, anche qui è così, anche qui, quindi Beremiz da sei pezzi allo sceicco, mentre ibraim ne da tre*".[nel ragionare indica le 8 pagnotte divise in tre che ha sul suo quaderno]

Giuseppe: *"Io ho designato prima i quindici pezzettini, dopo ho visto che ce ne erano altri nove di Ibraim."*

figura 5.34

Maestra: *"Che sono quelle mazzarelle verticali?"*

Giuseppe: *"Servono a separare perché ognuno ne mangia otto, quindi Beremiz allo sceicco ne ha dati sette, poi dopo Ibraim gliene da soltanto uno perché ne serve solo uno perché lo sceicco ne mangi otto*"

Maestra: *"tu sai che ognuno ne mangia otto?"*

Giuseppe: "*si!Allora Ibraim gliene da uno dei suoi così tutti se ne mangiano otto."*

Giorgio: *"In questo modo un terzo di pagnotta equivale ad una moneta"*

Tommy: *"A si, si è vero"*

A questo punto il problema sembra chiaro a tutti, e i bambini vanno a turno alla lavagna per mostrare la propria rappresentazione. A parte i diversi modi di dividere in tre le pagnotte, le rappresentazioni sono abbastanza simili e evidenziano lo stesso ragionamento. Nessuno però rappresenta con un rapporto il criterio per la ricompensa, il ricercatore allora decide di scrivere il rapporto e provare a porre l'attenzione sulla questione: $\frac{\frac{1}{3}\, pagnotta}{1\, moneta}$.

5.6. Le schede risolte individualmente

Allo scopo di provare a valutare il grado di autonomia dei 21 bambini a questo punto del percorso, all'inizio della quinta, sono state proposte tre schede da risolvere individualmente. Nella prima scheda sono presenti un problema di compensazione additiva, in cui sono coinvolte sia grandezze continue che discrete, e due quesiti di carattere moltiplicativo. La seconda scheda è costituita da un problema che coinvolge sia la struttura additiva che quella moltiplicativa, un quesito che riguarda la struttura di rapporto e un quesito di tipo moltiplicativo. Infine la terza scheda pone delle domande aperte su due questioni complesse che coinvolgono il numero e le operazioni allo scopo di stimolare una riflessione e di far esprimere i bambini su tali questioni.

Scheda 1 Prova a risolvere ed a rappresentare i seguenti problemi: 1)Ai due lati di un viale vengono piantati alberi a intervalli regolari, a cominciare dall'inizio del viale. Sul lato sinistro sono già piantati 12 alberi, dopo di che il viale prosegue per altri 70 metri senza alberi sulla sinistra. Sul lato destro sono già piantati 20 alberi, dopo di che il viale prosegue per altri 30 metri senza alberi sulla destra. Di quanti metri sono spaziati gli alberi? Quanti metri è lungo il viale? Quanti alberi mancano per completare il lavoro? 2) Per comperare 3 sciarpe uguali ho speso 42 euro. Quanto ho speso per ogni sciarpa? 3) Un treno percorre un anello ferroviario che misura 24km. Se in un giorno fa 42 giri, quanti km ha percorso in tutto?

Scheda2 Prova a risolvere e a rappresentare i seguenti problemi: 1) Per avere una buona cioccolata da bere si usano di solito 4 cucchiai di cacao in polvere per ogni mezzo litro di latte (dose per tre persone). Il cacao in polvere si vende in confezioni che contengono circa 20 cucchiai, il latte in confezioni da un litro o mezzo litro. Quanto latte e quanto cacao si devono acquistare per preparare una cioccolata per una classe di 22 bambini (e per la maestra)? Cosa avanza dopo la preparazione? 2) 10 uvette per ogni briosche, 3 uvette per ogni candito. Quanti canditi ci sono in ogni briosche? 3) Un negoziante ha comprato 160 kg di farina di granturco contenuta in 8 sacchi uguali. Quanto pesa un sacco?

Scheda 3
1)Secondo te, che relazione esiste tra l'addizionare e il sottrarre? Fai esempi. 2)Secondo te, esiste qualche relazione tra i numeri decimali e le frazioni? Fai esempi.

Le tre schede sono state date a distanza di una settimana l'una dall'altra. La seguente tabella mostra il quadro delle risposte esatte per le prime due schede:

tabella 5.5

scheda 1	Risposte corrette	Risposte errate	Risposte incomplete
Problema 1	15	3	3
Quesito 2	21	0	0
Quesito 3	21	0	0
Scheda 2			
Problema 1	4	4	13
Quesito 2	13	3	5
Quesito 3	21	0	0

Le risposte dei protocolli del Problema 1 della prima scheda sono state abbastanza aderenti alle aspettative. Il problema, infatti, si presta facilmente ad una rappresentazione del tipo schema di compensazione ed effettivamente i 18 bambini che hanno risposto correttamente o in maniera incompleta hanno utilizzato questo tipo di schema, solo che nell'ultimo caso non hanno sviluppato tutte le operazioni necessarie per arrivare alla conclusione. I 3 protocolli nei quali si giunge a risultati errati mostrano disegni figurativi che meno si prestano ad una lettura matematica e,

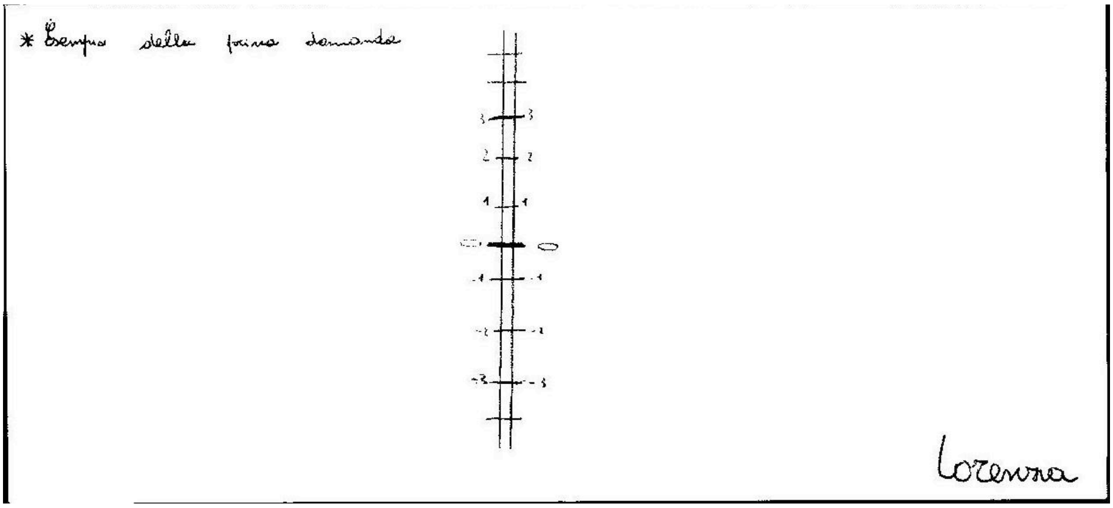
d'altra parte, nell'analisi del ragionamento non si riesce a seguire il filo delle operazioni aritmetiche compiute.
I due quesiti della seconda scheda sono stati risolti da tutta la classe. Si tratta di due quesiti risolvibili con un'unica operazione, di divisione per il secondo e di moltiplicazione per il terzo. In 12 protocolli la maniera di scrivere l'operazione, ponendo accanto ai numeri delle marche di significato, rivela un particolare controllo semantico, inoltre per il secondo quesito, negli stessi 12 protocolli, c'è un uso esplicito dello schema a schieramento, mentre le rappresentazioni degli altri protocolli sono di tipo figurativo.
Il problema 1 della seconda scheda riguarda una serie di operazioni moltiplicative che portano a scontarsi numeri non interi. Questo ha evidentemente creato non poche difficoltà a gran parte della classe, in molti protocolli, nonostante una prima sequenza esatta di operazioni, arrivati a delle quantità espresse in numeri decimali, si rilevano dei blocchi. Inoltre, in 11 protocolli (4 appartenenti al gruppo delle risposte esatte e 7 a quello delle risposte incomplete) ci sono rappresentazioni riconducibili allo schieramento.
Nel rispondere al secondo quesito della seconda scheda i 13 bambini che hanno risposto correttamente hanno prodotto interessanti rappresentazioni che ricalcano le configurazioni della "gioco della fittezza" (cfr. par. 5.5.1). L'utilizzo del simbolo di rapporto in 5 protocolli sembra evidenziare, per questi bambini, un buon livello di appropriazione di tale strumento.
Infine il terzo quesito della seconda scheda, risolvibile con un'operazione di divisione, è stato risolto correttamente da tutta la classe e in 10 protocolli vi è l'utilizzo, accanto ai numeri, delle marche di significato e in 8 di questi sono presenti rappresentazioni di tipo schieramento.
Nelle risposte aperte si nota una ricchezza argomentativa corredata da un'ampia gamma di esempi. Sembra che per la gran parte dei bambini (14 protocolli) la relazione che esiste tra l'operazione di addizione e quella di sottrazione è quella di essere l'una il contrario dell'altro, perché **"una aggiunge e l'altra toglie"**. Queste 14 risposte simili esibiscono uno o più esempi tra cui uno di questi è costantemente

"la ballata degli elefanti" (cfr. par. 5.3.1). Ad esempio Ludovica si esprime in questo modo: *"Quando sottrai qualcosa diventa di meno (togliere) se fai 0-1=-1, e se fai 0+1=+1. Come la ballata degli elefanti, che con il dado rosso andavi avanti, e con il dado blu andavi indietro di caselle. L'addizione è la parte opposta della sottrazione e la sottrazione è la parte opposta dell'addizione".* Anche la risposta di Stefano appartiene a questo gruppo, ma l'esempio che avanza a sostegno della sua idea è più articolato: *"L'uno è l'incontrario dell'altro. E' come la ballata degli elefanti, se faccio 2 passi indietro e 1 avanti sono a -1, viceversa se faccio 2 passi avanti e 1 indietro sono a +1".* Stefano simula la composizione di due azioni "fare due passi indietro" e "fare un passo avanti" per "giungere" alla mattonella +1, per poi comporre le due azioni "inverse", "fare due passi avanti" e "fare un passo indietro", e "giungere" alla mattonella -1, evidentemente opposta rispetto alla linea di partenza. Questa sua argomentazione sembra particolarmente interessante in primo luogo perché recupera un contesto d'azione, esplorato in I elementare. Inoltre Stefano non si accontenta semplicemente di esibire due azioni semplici, come fanno gli altri bambini, ma il fatto che funzioni anche per azioni (operazioni) composte costituisce evidentemente per lui una prova migliore. Sembra che Stefano giochi con disinvoltura nella struttura additiva: la forza di questa struttura gli garantisce di trovare il suo discorso coerente anche componendo operazioni.

L'argomentazione **"una aggiunge e l'altra toglie"** per 6 bambini porta invece alla conclusione che non c'è relazione tra le due operazioni, o meglio "*la relazione è che sono due cose diverse*". Di questo tipo è la risposta di Cristiana *"3+3=6 e 9-4=5. Come avete visto l'addizione e la sottrazione sono due cose diverse e quindi la risposta è che non hanno cose uguali perché uno toglie e l'altro aggiunge".* Sembra importante notare come in nessuna di queste risposte è presente un riferimento alla ballata.

Una bambina che si differenzia da queste risposte è Lorenza secondo la quale la relazione tra le due operazioni è "**il punto di riferimento**": "*Per addizionare basta aggiungere, come 3+3=6, è come se ho 3 caramelle poi ne aggiungo 3 e sono 6 caramelle. Invece per sottrarr,e a differenza della addizione che si aggiunge, si deve togliere come 4-3=1. Perché se tu hai 4 caramelle e ne mangi 3 alla fine hai 1 caramella. La relazione* *che c'è, per me, è che tutte e due le operazioni hanno come punto di riferimento lo zero".* Nel protocollo di Lorenza c'è anche un riferimento alla ballata degli elefanti e un disegno:

figura 5.35



Per la seconda domanda aperta tutti i 21 bambini sembrano affermare che si tratti della **"stessa cosa"**. Molti bambini negli esempi ricordano dei problemi di conversione ed effettivamente c'è un uso frequente (20 protocolli) di esempi di conversione in sottounità di misura di varia natura (moneta, pesi, litri), come ad esempio Lorenza: *"Per me la relazione che c'è tra i numeri decimali e le frazioni è che tutte e due valgono uguali, sono lo stesso numero.* $\frac{1}{2}$*€=50 cent"*, o Cristiana " $\frac{1}{2}$ *kg=500g. Mi ricordano quei problemi con le ricette che si dovevano fare per più persone o quelli che ti dava* $\frac{1}{2}$ *kg e tu dovevi scrivere che era uguale a 500g. Esempio inventato da me: mezzo gelato è = a una coppetta, due bicchieri sono = a una bottiglia"*. Luca, invece inizialmente non si riferisce a grandezze fisiche: " $\frac{1}{2}$ *una frazione è uguale a 0,50 che è un decimale quindi non cambia niente fra loro, quindi sono la stessa cosa. La frazione risveglia la parte decimale di una cosa*". Inoltre in 4 protocolli c'è un riferimento al "problema del sale" (cfr. par. 5.5.3) che però non viene chiarito.

Capitolo 6

Analisi "globale" dei dati e conclusioni

"... era il mio professore di matematica al liceo, devo a lui tutto il mio amore per i numeri, le simmetrie, il ragionamento geometrico. Il professor Trivarchi, dimostrare toeremi come si raccontano favole: le sue parole non arrivavano alle nostre orecchie, raggiungevano direttamente il nostro cervello e io traevo dalle sue lezioni un autentico godimento."
("Una pura formalità", G. Tornatore, 1993)

6.1 Premessa

Al fine di rendere evidenti alcuni snodi e alcuni nodi tra gli aspetti teorici e gli aspetti progettuali e di realizzazione, in questo capitolo si richiameranno, riorganizzandole, questioni già discusse più diffusamente nelle altre sezioni. Questa analisi servirà per poter giungere ad alcune conclusioni, intese come punto di arrivo di questo lavoro, ma anche come tappe provvisorie di un percorso che non può ritenersi esaurito e che ci si augura possa dar luogo a futuri approfondimenti.

6.2 Discussione dei dati

Prima di riesaminare criticamente i dati raccolti e le interpretazioni date ai processi osservati è necessario riflettere, anche solo brevemente, sulle dinamiche di gruppo nei loro aspetti cognitivi ed emotivi[104]. La classe coinvolta in questo progetto sperimentale ha sempre lavorato, nei momenti esaminati in questa tesi, in cooperazione: o in piccoli gruppi o attraverso discussioni collettive dell'intero gruppo classe. Questa modalità di lavoro ha inevitabilmente innescato delle dinamiche di gruppo: alcuni bambini sembravano rispondere in modo più diretto agli stimoli ed altri sembravano essere inizialmente passivi spettatori, salvo poi sintonizzarsi gradualmente con il resto della classe. Sono molti i lavori di ricerca in didattica della matematica, e non solo, in cui si cerca di analizzare questo fenomeno (cfr., ad esempio, Locatello & Meloni, 2003). Facendo riferimento nello sviluppo

[104] Vedi, ad esempio, Baldrighi *et all.*, 2004.

della ricerca ad un quadro teorico particolare, però, conviene chiarire come in quest'ultimo sono analizzate e quindi valutate queste dinamiche. C'è un doppio aspetto da considerare di quello che potremmo chiamare l'"effetto rimorchio" di una dinamica di gruppo. Da un lato alcuni bambini potrebbero abituarsi ad essere passivi spettatori e aspettare sempre che qualcun altro "incominci a ragionare" al posto loro[105]. Dall'altro però se, come messo in luce da Vygotskij, ogni funzione psichica superiore è inizialmente una funzione sociale e quindi necessariamente attraversa un passaggio "esterno" nel suo sviluppo, allora questa dinamica acquista un valore fondamentalmente positivo. Vedere qualcun altro, simile a sé, nell'atto di capire[106], ovvero di andare in risonanza con il modello culturale proposto, aiuta a convincersi che allora "capire si può"[107]. Inoltre c'è molta più probabilità di capire facendo cose che non sono ancora chiare con altre persone che sembrano capire[108], rispetto a fare individualmente una serie di "esercizi" su cose già interiorizzate magari in modo incompleto, ambiguo o addirittura errato.

Si potrebbe così sintetizzare una delle difficoltà del capire: se il significato è una funzione d'uso, allora per capire un concetto si ha bisogno di lavorare con esso (Arcavi, 2005): ma d'altra parte, come si può usare qualcosa senza capirlo? Questa circolarità costituisce spesso una seria trappola per chi apprende, ma allo stesso tempo è proprio questa circolarità ad innescare il processo di apprendimento (Sfard, 2000) ed a svilupparlo fino a una nuova conclusione "risonante". Sembra anche che la capacità di vivere temporaneamente in armonia con una comprensione parziale e con la consapevolezza che spesso il significato emerge proprio dalla confusione, sia una caratteristica peculiare del pensiero scientifico (Tobias, 1990).

---

[105] In questo lavoro di ricerca si è però osservata anche una certa alternanza tra i bambini della classe nell'assumere un ruolo attivo all'interno del gruppo.

[106] Cfr. "effetti specchio" a diversi livelli (Rizzolatti & Sinigaglia, 2006).

[107] Anche in questo caso il titolo "Capire si può" del Progetto MIUR '97-'99 descrive bene la situazione.

[108] Cfr. con il costrutto teorico di corridoio concettuale (Confrey, 2006) nel quale possono intrecciarsi le diverse traiettorie individuali, ovvero si realizza l'interazione tra pari.

La chiave anche per questa dinamica è ancora una volta la mediazione didattica, che deve in primo luogo guidare le dinamiche di gruppo a cui si faceva riferimento prima e, in secondo luogo, aiutare i bambini a costruire quella pazienza e fiducia intellettuale che permetta loro di convivere con una comprensione "temporaneamente parziale". Al tempo stesso occorre ricordare che i processi profondi di appropriazione e padronanza dipendono fortemente da quella azione di rielaborazione e rinforzo secondo cui un insegnante competente è in grado di guidare in modo cognitivamente risonante una classe: azione che sfugge per lo più all'osservazione occasionale oggetto dei lavori di ricerca, ma che è cruciale per interpretare i risultati.
Nei paragrafi successivi si farà un'analisi globale dei risultati acquisiti attraverso tre diverse modalità che corrispondono ai tre diversi livelli in cui la risonanza può avvenire (cfr. cap.2). Questo modo di analizzare, caratteristico dell'impostazione del presente lavoro, nasce appunto dall'esigenza di usare il quadro teorico di riferimento, oltre che per costruire l'azione sperimentale, anche come strumento analitico.

6.2.1 Prima modalità di analisi: evocazione

Una prima modalità, che potremmo definire di "**evocazione**", è contemporanea ad una particolare attività nella quale si cerca di favorire una dinamica di risonanza tra aspetti del modello interpretativo dei bambini e aspetti del modello culturale. Vi sono stati essenzialmente tre momenti caratterizzati da tale modalità: la "ballata degli elefanti" per lo schema di compensazione additiva, la "tenda matematica" per lo schema a schieramento ed il "gioco della fittezza" per il concetto di rapporto.
Nella "**ballata degli elefanti**" (par. 5.3.1) la questione del *"come se"* era proprio una delle osservazioni che si intendevano stimolare. Questa questione è stata sollevata in due momenti diversi da due bambini, Giorgio e Stefano[109], e pare che in questo caso la dinamica di gruppo abbia agito al meglio. Durante l'ultimo incontro,

[109] Giorgio: *"Marcello se ha fatto 3 passi indietro e 1 avanti è **come se** ne avesse fatti 2 indietro".* Stefano: *"se faccio tre passi indietro e poi nove avanti in realtà è **come se** ne avessi fatti sei avanti".*

infatti, sembra che tutti i bambini abbiano imparato ad anticipare in che luogo sarebbero arrivati prima di svolgere concretamente l'azione. Solo dopo aver osservato questo comportamento diffuso l'insegnante ha deciso di presentare esplicitamente lo schema di compensazione, cercando di creare una situazione di risonanza tra lo schema e la loro percezione riflessiva della struttura del gioco.
Nella "**tenda matematica**" (par. 5.4.1) invece il lavoro è stato più duro nel senso che la disposizione a schieramento non è stata né riconosciuta né usata spontaneamente dai bambini, ma sono stati gli adulti a suggerirla. D'altra parte la difficoltà di passare dalla struttura additiva alla struttura moltiplicativa è molto nota in letteratura di ricerca didattica e, in particolare, in ambito neuroscientifico è stato mostrato (Dehaene *et al*, 2004) come vi sia una dissociazione tra l'operazione aritmetica del sottrarre[110] e quella del moltiplicare.
Sembra, infatti, che le strategie che il cervello umano mette in azione di fronte a situazioni numeriche siano in realtà due, e molto diverse tra loro (Dehaene, 1997). Una è strettamente legata al pensiero verbale e simbolico, l'altra si serve di immagini: i calcoli esatti dipendono dal lobo frontale sinistro (come il pensiero verbale), mentre una rete neurale bilaterale controlla rappresentazioni visive e movimento delle dita. Questa seconda risorsa, di cui ogni individuo dispone fin dalla nascita, è chiamata la "linea interna" dei numeri, o "accumulatore" interno, e permette di valutare in modo approssimativo la numerosità degli oggetti. Questi recenti studi hanno evidenziato come il meccanismo (non ancora del tutto chiaro) con cui si risolvono semplici problemi di sottrazione, richieda una qualche forma di manipolazione di quantità non verbali sulla "linea interna" dei numeri, e che tale meccanismo sia accessibile (Wynn, 1992) anche ai bambini preverbali. La moltiplicazione richiede invece maggiori conoscenze sulle diverse rappresentazioni numeriche, e la capacità di risolvere problemi di moltiplicazione compare solo

[110]In (Dehaene, 2004) si pone l'accento su una differenza tra l'operazione del sommare e quella del sottrarre, evidenziando nel caso della somma anche delle strategie di memorizzazione delle addizioni più facili. In questa ricerca, però, non pare significativo sottolineare questa differenza perché, come si spiega nel cap. 3, lo schema di compensazione additivo tiene conto di entrambe le operazioni contemporaneamente.

successivamente all'acquisizione di alcune competenze numeriche più sofisticate, come le rappresentazioni dei numeri o delle operazioni in parole. Visto in altri termini, si può dire che con la struttura moltiplicativa ci si rivolge a competenze cognitive di secondo ordine (ragionare sulle operazioni come tali e sulle loro invarianze sintattiche e semantiche): competenze che per svilupparsi hanno bisogno di una padronanza metacognitiva esplicita su base operatoria e linguistica.
In più c'è un'ulteriore difficoltà in questo passaggio: infatti la struttura additiva ha un carattere essenzialmente unidimensionale, operando con oggetti semanticamente omogenei, mentre la struttura moltiplicativa opera in modo essenzialmente bidimensionale con oggetti di natura semanticamente diversa. Questa difficoltà era stata prevista, e l'attività della tenda matematica era stata progettata per aiutare a riconoscere la diversa natura degli oggetti sui cui opera la moltiplicazione. L'introduzione dell'artefatto della tenda e il suggerimento di infilare un oggetto marcatore in un filo per segnare i gruppi di oggetti formati, aveva così lo scopo di introdurre in modo esplicito e percepibile la nuova dimensione delle "*volte*", in contrapposizione con quella degli "*oggetti alla volta*". Dall'osservazione diretta è sembrato che i bambini abbiano trovato utile l'artefatto suggerito appropriandosene rapidamente. E' stato, però, necessario un altro intervento di mediazione didattica consapevole a spingere i bambini verso la rappresentazione a schieramento. D'altra parte anche lo schieramento nel caso di Giulia che osserva *"allora basta contare le file"*, sembra aver trovato risonanza con questo aspetto del suo modello interpretativo.
Il "**gioco della fittezza**" (par. 5.5.1) infine, che intendeva affrontare il concetto di rapporto, è stato articolato in più fasi. C'è da sottolineare, infatti, il *triplo passaggio* cognitivo che si deve affrontare nell'appropriazione del concetto di rapporto: l'uguaglianza percettiva globale di un rapporto (la fittezza dei tubetti sul foglio)[111]; la rappresentazione semantica di relazione tra due grandezze (fittezza come relazione tra "numerosità" di tubetti e "numerosità" di fogli); la rappresentazione

[111]Cfr. con quello che avviene nella percezione diretta della velocità, sebbene si differenzi dalla fittezza in quanto rapporto tra grandezze continue.

sintattica del rapporto come numero che marca la fittezza in modo risonante (fittezza descritta dal rapporto $\frac{numero\ di\ tubetti}{numero\ di\ fogli}$). Questo ultimo passaggio è probabilmente il più delicato perché comporta anche la necessità di riconoscere che la stessa operazione di divisione incontrata in altri contesti, ad esempio di ripartizione o di contenenza, è pertinente anche in queste situazioni.

Nella prima parte del gioco[112] il riconoscimento dell'uguaglianza della fittezza nelle diverse configurazioni, il *primo passaggio*, è avvenuto naturalmente. Gli incontri successivi sono, inoltre, riusciti nel loro intento di stimolare una distinzione tra la numerosità assoluta dei fogli, o dei tubetti, dalla numerosità correlata dei tubetti-su-fogli, come hanno evidenziato diversi interventi dei bambini tra i quali quello di Lorenza: *"Non conta quanti fogli sono, ma conta quanti tubetti ci sono su ogni foglio. Quindi anche se ne fai cento, duecento, vince sempre sette".* Quindi anche il *secondo passaggio* sembra che sia stato, almeno in questa situazione, affrontato. Queste osservazioni hanno permesso all'insegnante di introdurre e lavorare su delle rappresentazioni esplicite di uguaglianze di rapporti del tipo $\frac{7\ tubetti}{1\ foglio} = \frac{28\ tubetti}{4\ fogli}$.

Le successive attività che coinvolgevano la struttura di rapporto hanno richiesto una serie di interventi da parte dell'insegnante che hanno evidenziato come forse, in questa fase iniziale, l'azione di mediazione avrebbe dovuto agire in maniera più consapevole rispetto al *terzo passaggio* di cui si parlava prima.

6.2.2 Seconda modalità di analisi: variazioni sul tema

Una seconda modalità di analisi consiste invece nell'osservazione della capacità dei bambini di gestire, in autonomia, "**variazioni sul tema**", riconoscendo che un determinato schema culturale scoperto in un particolare contesto è utile nella modellizzazione di un'altra situazione analoga (più o meno lievemente variata). L'idea è stata quindi quella di far esplorare la stessa struttura in contesti differenti,

[112] In questa prima fase del gioco venivano forniti ai bambini sempre più fogli e tubetti mantenendo il rapporto costante.

sia dal punto di vista numerico sia per la loro definizione qualitativa, ma isomorfi dal punto di vista della struttura formale coinvolta.

Per la struttura di compensazione in situazione additiva questi contesti sono stati il "**mostro del riso**" e il "**gioco dell'attesa**" (sviluppati in I elementare, par. 5.3.2 e 5.3.3). Sono stati diversi i ragionamenti per compensazione[113] fatti spontaneamente dai bambini durante questi giochi che però, riguardando contesti qualitativamente diversi, hanno coinvolto anche la ricerca di apposite unità di misura. Stefano, durante il gioco del mostro del riso, ha suggerito un procedimento di misurazione *"Facciamo un segno sul bicchiere con un pennarello all'inizio quando prendiamo il riso. Poi se sta di nuovo a quest'altezza vuol dire che è uguale a prima. Se sta più in alto o più in giù è diverso."*. Gaia, nel gioco dell'attesa, ha osservato *"Non riesco a fare le stesse cucchiaiate all'andata e al ritorno. Prima ne vengono cinque per esempio, poi sette, otto…"*; mentre Giorgio, nello stesso gioco, dopo aver trovato una giusta unità di misura, ha concluso *"così ci troviamo, poiché abbiamo preso tre bicchieri e poi abbiamo versato tre bicchieri e siamo rimasti senza niente."*

Per la rappresentazione a schieramento il contesto differente, ma isomorfo per quanto riguarda la struttura, è stato il "**gioco dell'attesa**" (fatto in III elementare, par. 5.4.2), nel quale i bambini dovevano calcolare i giorni di assenza del ricercatore ponendo in un apposito contenitore un "numero piccolo" (maggiore di uno), di oggetti per ogni giorno di assenza. In una discussione a fine anno Giuseppe ha ricordato *"Dopo un po' contavamo quante assenze e per contarle facevamo **gli schieramenti**."*

Per il concetto di rapporto va segnalata una rappresentazione di Lorenza da considerare come particolarmente interessante. La bambina ha spontaneamente correlato il gioco della fittezza con un'attività di sperimentazione fisica sul galleggiamento in cui la classe era coinvolta nello stesso periodo. Attraverso una rappresentazione (cfr. fig. 5.23, cap. 5) in cui si osservava che una palla di polistirolo *"se fitta di chiodi affonda"*, la bambina ha probabilmente cercato di

---

[113] Cfr. il par. 3.7.1.

individuare la grandezza del peso-specifico, espressa appunto da un rapporto tra peso e volume. Questo fatto appare particolarmente notevole nel quadro teorico della risonanza in cui la costruzione di conoscenza astratta è stata definita come costruzione **“di correlazioni stabili attraverso diversi contesti”** (cfr. par. 2.2.5). Questa osservazione è stata poi condivisa con tutta la classe dando modo di sviluppare interessanti osservazioni sulla relazione tra il gioco della fittezza e l’esperienza del galleggiamento.

Altro contesto di natura differente rispetto al “gioco della fittezza” è stato il “**problema del sale**” (svolto in IV elementare, par. 5.5.3). Il problema, come si può vedere dalla documentazione della sperimentazione, è piuttosto complesso, ma il ricorso alla manualità ha permesso ai bambini di fare congetture e ragionamenti estremamente sofisticati. Sebbene non compaia un esplicito utilizzo del simbolo matematico di rapporto, il ragionamento di Stefano fornisce una valutazione chiara del rapporto sale-acqua in termini linguistici che rimandano chiaramente a varie competenze acquisite in altri contesti:*“[…]quindi quando Tommaso ne prende mezzo litro prende anche il mezzo cucchiaino di sale che si sparge nel resto dell’acqua, e poi ho i tre cucchiaini che si spargono. Quindi in ogni mezzo litro ho un cucchiaino e un terzo del mezzo cucchiaino. Mentre nel mezzo litro di Tommaso, ho il mezzo cucchiaino che rimane tutto lì e in più il cucchiaino che ci aggiungo”.*

6.2.3 Terza modalità di analisi: problem-solving

Un’ altra modalità di verifica riguarda la capacità dei bambini di saper evocare e usare strategie diverse per risolvere situazioni più complesse, combinandole variamente fra loro. Tipica di questo momento è stata una situazione di problem-solving in cui bisognava capire quali aspetti della struttura operativa dell’aritmetica (additiva e moltiplicativa, non pre-selezionata dal tipo di problema) poteva tornare utile: si trattava cioè di vedere quanto i bambini riuscivano a muoversi all’interno di una struttura matematica complessa proiettandola[114] su contesti diversi.

[114] Per metterli “in forma” (formalizzarli) con successo.

Per la struttura di compensazione[115] additiva questo momento è stato la risoluzione del **"problema dei mestoli"** (par. 5.3.4). In questa attività vi è stato un utilizzo esplicito dello schema di compensazione visibile nelle due rappresentazioni risolutive di Stefano e di Luca (cfr. figure 5.6 e 5.7). In questo caso sembra, quindi, che tale rappresentazione sia stata utile per risolvere il problema e che le attività costruite nel promuovere una risonanza con questo schema siano risultate efficaci.
Per la rappresentazione a schieramento una situazione più complessa con la quale i bambini si sono confrontati è stato il "**gioco dei viaggi con le pecore**"(par.5.4.3). In questo contesto vi è stato un gesto spontaneo di Luca mentre provava a rispondere al quesito (documentato da una videoregistrazione) che faceva riferimento allo schema a schieramento [*Luca nello spazio di fronte a sé, stringendo con la mano come se volesse afferrare qualcosa, ha disposto in colonna quattro oggetti (immaginari), per rappresentare i viaggi, e per ogni riga tre oggetti, per rappresentare le pecore per viaggio*].
Il riconoscimento della proprietà commutativa della moltiplicazione fa riferimento a quelle competenze cognitive di secondo ordine a cui ci si riferiva prima. Ragionare sulle operazioni come tali e sulle loro invarianze sintattiche e semantiche richiede infatti delle competenze che per svilupparsi hanno bisogno di una padronanza metacognitiva esplicita su base operatoria e linguistica. L'osservazione di Giorgio *"anche se si portano sempre dodici pecore, è praticamente il contrario! prima i viaggi erano quattro ed i posti per le pecore in ogni barca erano tre, adesso, invece, faranno tre viaggi ed in ogni barca entreranno quattro pecore"*, evidenzia un primo passaggio verso la costruzione di queste competenza. Lo stesso si può dire per l'osservazione di Gaia che girando il portauova, dice soddisfatta: *"Per portare dodici pecore si possono fare sei viaggi con una barca da due pecore, ma anche due viaggi con una barca da sei pecore".* L'utilizzo dello schieramento sui portauova anche nel riconoscimento della proprietà commutativa evidenzia, inoltre, un'appropriazione dello strumento

---

[115] La struttura di compensazione è alla base delle strutture additiva e moltiplicativa in maniera semanticamente intrecciata.

concettuale mediata da una gestione linguistica consapevole dell'evidenza percettiva.
Per il concetto di rapporto intrecciato a situazioni additive, le situazioni problematiche con cui i bambini si sono confrontati sono state due: il "**problema del maiale**" e il "**problema dei pani**" (par. 5.5.2 e 5.5.4). Per il primo, un intervento di mediazione dell'insegnante ha permesso di recuperare il ricordo dell'attività della fittezza stimolando l'intervento di Giulia: "*quindi potremmo dire che una salsiccia piccola da tre chili di carne e uno di grasso è fitta uguale a una salsiccia enorme da quindici chili di carne e cinque chili di grasso*". Nel "problema dei pani" il riconoscimento della struttura del rapporto è ancora più complesso. Le parole di Giorgio *"In questo modo un terzo di pagnotta equivale ad una moneta"* con l'uso appropriato, ma semanticamente e sintatticamente complesso (cfr. con la questione del *"come se"*, di cui questa è una versione più sofisticata), della parola *"equivale"*, sottolineano ancora una difficoltà, condivisa anche dal resto della classe, dal riconoscimento della struttura di rapporto.

6.2.4 Analisi delle schede risolte individualmente

Allo scopo di provare a valutare il grado di autonomia dei 21 bambini a questo punto del percorso, all'inizio della quinta, sono state proposte tre schede da risolvere individualmente. La percentuale delle risposte corrette (71,4%) nella risoluzione del problema del viale delle prima scheda risolta individualmente (cfr. par. 5.6), rivela delle buone competenze dei bambini nei ragionamenti di compensazione additiva. Inoltre nell'85,6% dei protocolli vi è l'utilizzo di una rappresentazione del tipo schema di compensazione. L'utilizzo della rappresentazione ci permette di valutare un'appropriazione strumentale (cfr. par. 2.2.6) in quanto i bambini sembrano recuperare e usare autonomamente questa particolare rappresentazione che quindi si immagina abbia agito e stia agendo da mediatore semiotico. I 3 quesiti moltiplicativi (il secondo e il terzo della prima scheda e il terzo della seconda) sono stati risolti correttamente da tutti i bambini, rivelando in molti protocolli (57,1% in quelli della prima scheda, 47,6% in quelli

della seconda scheda) un controllo semantico della situazione con l’utilizzo, accanto ai numeri, delle marche di significato. Inoltre in alcuni protocolli sono presenti delle rappresentazioni del tipo schieramento (57,1% nel secondo quesito della prima scheda, 38% nel terzo quesito della seconda scheda). Sia il giusto uso dell’operazione di moltiplicazione e di divisione, che, in alcuni protocolli, la codifica del significato dei numeri e le rappresentazioni a schieramento, mostrano un recupero e un uso autonomo della struttura moltiplicativa in caso di quantità intere e lasciano pensare ad sua appropriazione strumentale.
La bassa percentuale (19%) di risposte esatte del problema della cioccolata, seconda scheda, ha rilevato dei blocchi nel recupero della struttura moltiplicativa in situazione di quantità non intere. D’altra parte su questo punto non sono state proposte delle attività particolari, cosa che si progetta di fare durante il corso della V.
Nel secondo quesito della seconda scheda, nei protocolli che si concludono in maniera corretta (il 61,8%) sono utilizzate interessanti rappresentazioni che ricalcano le configurazioni del gioco della fittezza (cfr. par. 5.5.1). Questo sembra rivelare, per parte dei bambini, un’appropriazione strumentale di questo tipo di rappresentazione spaziale. Purtroppo solo nel 23,8% di questi protocolli vi è un utilizzo esplicito della scrittura di rapporto che per il momento quindi non sembra far presa su molti bambini.
Le ricche argomentazioni alla prima domanda aperta sono orientate nel 66,7% dei protocolli a riconoscere le due operazioni di addizione e sottrazione come una inversa dell’altra. In questi protocolli c’è un riferimento esplicito alla “ballata degli elefanti” (cfr. par. 5.3.1), gioco svolto in prima elementare, che appare quindi come un contesto di riferimento molto forte. Inoltre nel protocollo di Lorenza si parla dell’elemento neutro delle operazioni come *“il punto di riferimento comune”* alle due operazioni. La seconda domanda aperta non ha la stessa ricchezza argomentativa della prima, ma tutti i bambini parlano delle frazioni e dei decimali come della “stessa cosa”. In questi protocolli si fa riferimento nel 95,2% dei casi ad esempi di conversione in sottounità di misura di varia natura (moneta, pesi, litri). In

alcuni protocolli (19%) si trova un riferimento al problema del sale che però non viene né chiarito, né sviluppato. Queste domande aperte, oltre che confermare il buon orientamento nel caso della struttura additiva, aiutano a configurare delle future direzioni di progettazione e mediazione didattica, nel caso delle frazioni e dei decimali.

6.3 Conclusioni e problemi aperti

Uno degli obiettivi di questo lavoro di ricerca era quello di verificare se una progettazione didattica volta ad innescare una risonanza tra i modelli interpretativi dei bambini e le strutture aritmetiche riuscisse a costruire gradualmente un uso consapevole di tali strutture e aiutasse i bambini ad orientarsi in situazioni di problem solving. L’osservazione diretta dell’atteggiamento progressivamente sviluppato dai bambini di fronte a tali situazioni ha evidenziato una buona capacità di orientamento, graduale e complessivo. Sebbene a volte non ci sia stato ancora, nei tempi di sviluppo osservati, come nel caso della struttura di rapporto[116], un uso esplicito delle rappresentazioni che si intendevano passare come strumenti, i bambini hanno mostrato un buon livello di autonomia. Tutti i problemi, nonostante riguardassero situazioni piuttosto complesse, sono stati risolti sotto la guida di un’opportuna mediazione didattica (che non ha imposto, ma facilitato). Per progettare e gestire accuratamente e efficacemente una simile articolazione, c’è stato bisogno, infatti, di esercitare di continuo una consapevole mediazione didattica. Sono stati diversi i momenti in cui il ricercatore e l’insegnante hanno agito cercando di innescare o recuperare ragionamenti utili nel far risuonare il modello culturale da mediare.

L’analisi delle schede risolte individualmente ha rivelato dei buoni risultati per il

[116]Come evidenziato nel paragrafo precedente, questa struttura matematica passa attraverso un triplo passaggio cognitivo di cui l’ultimo riguarda proprio il riconoscimento della rappresentazione sintattica del rapporto come numero che marca la relazione tra le due grandezze in gioco in modo risonante. Probabilmente i bambini non hanno ancora raggiunto questa consapevolezza e per questo nei problemi inerenti, pur fornendo valutazione dei rapporti in termini linguistici, non hanno utilizzato esplicitamente la rappresentazione matematica di rapporto di due grandezze.

problema additivo più complesso e degli ottimi risultati per i quesiti moltiplicativi più immediati. I risultati del quesito sul rapporto (secondo quesito seconda scheda) ci impongono un ripensamento sull'azione di mediazione svolta e un riprogettazione degli interventi successivi. Anche per il problema moltiplicativo della cioccolata, che coinvolgendo anche quantità non intere ha destato non pochi problemi, va fatta una riflessione di questo tipo. In questo secondo caso, però, la classe non è stata esposta a nessun tipo di attività specifica; d'altra parte, una progettazione didattica coerente al modello della risonanza per situazioni moltiplicative con quantità non intere è un problema aperto, a cui si sta iniziando a pensare, ma i cui dettagli rimangono ancora da precisare. D'altra parte per la progettazione didattica della classe coinvolta nella sperimentazione, le risposte aperte alla seconda domanda ci aiutano a riconoscere un particolare gusto dei bambini di questa classe per i problemi di conversione. Questo contesto quindi potrà essere usato come contesto prototipo nel quale sviluppare discorsi relativi al rapporto. Inoltre il riferimento, non chiarito, in alcuni protocolli al problema del sale potrà essere utilizzato per chiarire e recuperare alcuni legami che questi bambini sembrano intuire, ma evidentemente non dominare, tra i numeri decimali, le frazioni e il problema del sale (cfr. par. 5.5.3).

Le analisi fatte, inoltre, stimolano anche delle riflessioni sulla costruzione di nuovi strumenti di analisi per le prossime sperimentazioni. L'intento descrittivo e qualitativo di questo studio non ha, infatti, considerato la possibilità di monitorare i singoli bambini in maniera più sistematica. Potrebbe essere interessante per le ricerche future a lungo termine somministrare regolarmente delle schede (simili, ad esempio, a quelle descritte nel par. 5.6) ai bambini in maniera tale da tracciare una mappa di correlazione su uno stesso individuo. Si potrebbe pensare anche di introdurre dei parametri quantitativi rispetto all'utilizzo o meno di un dato strumento. In questa direzione, in uno studio più sistematico, sarebbe utile confrontare i risultati, lungo l'intero percorso, dei soggetti coinvolti nella sperimentazione con quelli di una classe di controllo.

Vale ancora la pena di dire qualche parola su un problema di grande importanza, di cui tuttavia questo lavoro non si è fatto carico, ed è quello dell'eventuale trasferibilità di queste proposte didattiche ad altre classi. Porsi tale problema richiederebbe in primo luogo una rendicontazione di queste attività nell'ambito di un percorso didattico organizzato in corridoi per i diversi anni scolastici all'interno dei quali gli insegnanti possono definire le traiettorie dei singoli. Si ritiene, quindi, che uno dei primi passi di approfondimento delle tematiche sviluppate in questa tesi debba essere l'esplicitazione dei corridoi di apprendimento per i diversi anni del ciclo elementare. D'altra parte, all'obiettivo principale di questa tesi, consiste nella verifica e discussione di un'ipotesi teorica, è correlato l'altro obiettivo di costruire e testare un impianto didattico per l'insegnamento di alcuni aspetti delle strutture aritmetiche nella scuola primaria, che certamente possa risultare disponibile anche per l'utilizzazione e per l'adattamento ad altri soggetti interessati. Un tale obiettivo pone nei confronti di questi ultimi ancora una volta un problema di risonanza. La mediazione didattica da esercitare continuamente, in una scuola che si voglia priva di meccanicistiche "trasposizioni didattiche" del sapere e di condizionanti conformismi del pensare, passa innanzitutto attraverso una consapevolezza dell'insegnante, ma anche di riflesso dei bambini, dell'efficacia dell'innovazione che si sta promuovendo. Puntare ad una consapevolezza adulta delle possibili dinamiche di risonanza tra le potenzialità cognitive dei ragazzi e quelle culturali della disciplina pone d'altra parte delle serie questioni aperte rispetto ai possibili percorsi di formazione insegnanti. In particolare si pone una questione di risonanza per gli insegnanti con gli schemi che una ricerca di questo tipo ha valutato utili per configurare e articolare una padronanza "matura" delle strutture aritmetiche. In questa direzione va detto che l'eventuale sviluppo di ricerche di questo tipo con test oggettivi quantitativi da usare su più classi per avere campioni statisticamente significativi, passa in primo luogo per un'attenta azione di la formazione insegnanti. Infatti, non risulterebbe utile fare questo tipo di indagini su classi in cui gli insegnanti non siano essi per primi convinti della sensatezza di questo approccio teorico e metodologico.

Bibliografia

Arcavi A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning mathematics.* **25**, 2.

Baldrighi A., Bellinzona C. e Pesci A. (2005). L'evoluzione disciplinare e sociale in alcuni alunni in difficoltà durante esperienze di apprendimento cooperativo. *Matematica e difficoltà n. 13, Alunni, insegnanti, matematica.* Progettare, animare, integrare, A. Davoli. R. Imperiale, P. Sandri (a cura di), Pitagora, 104-109.

Baldrighi A., Fattori A. e Pesci A. (2004). Un'esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore: il teorema di Pitagora, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27b n. 2, 125-145.

Balzano E., Guidoni P. e Minichini C. (in press). Approcci e proposte per l'insegnamento-apprendimento della fisica a livello pre-universitatio, *dal Progetto PRIN-F21*. ISBN: 978-88-8420-452-3. In press, FORUM 2007 (Udine).

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (in press). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, in L. English et al. (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd edition), LEA – draft version.*

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M.A. (1999). Semiotic mediation: from history to mathematics classroom, *For the Learning of Mathematics,* 19 (2), 27-35.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (1998). 'From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment', in *Proceedings of the 22nd PME Conference*, Stellenbosh, pp. I- 180-95.

Butterworth B. (1999). *Intelligenza matematica*, Ed. Rizzoli.

Bachelard G. (1938). *La formazione dello spirito scientifico*. Ed. Cortina Raffaello.

Berzolari L., Vivanti G. e Gigli D. (1930). *Enciclopedoa delle Matematiche Elementari*, Vol. I, Ulrico Hoepli editore.

Boulet G. (1998). On the essente of Multiplication, *For the Learning Mathematics* **18**, 3.

Boero P.(1986). *Insegnare matematica nella scuola di tutti*, Flli Fabbri, Milano.

Carpenter T. P & Moser J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, (pp. 9-24) T. P. Carpenter, J. M Moser e T. A. Romberg (Ed.), Hillsdale, N. J. Erlbaum Associates.

Changeux J.-P. (2003). *L'uomo di verità*, Feltrinelli, Milano.

Cobb P. et al. (2003). Design experiments in educational research, *Educational Researcher*, n. 1, pp. 5-8.

Collins A., Joseph D. e Bielaczyc K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues, *The Journal of the Learning Sciences*, n. 1, pp. 15-42.

Confrey J. & Lachance A.(2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. *Handbook of research design in mathematics and sciente education*, A. E. Kelly & R. A. Lesh (eds), pp. 231-236.

Confrey J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. Chapter 9 of *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, ed. R. K. Sawyer-Cambridge, pp.135-151.

Contrill J., Dubinsky E., Nicholos D., Schwingendorf K., Thomas K. e Vidakovic D. (1996). Undertsanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scema, *Journal of Mathematical Behavior*, 15:167-192.

Correa J., Bryant P. & Nunes T. (1998). Young Children's Understanding of Division: The Relationship between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology*, Vol. **90**, No. 2, 321-329.

Damasio A.R. (1995). *L'errore di Cartesio*. Adelphi, Milano.

Davydov V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T.P. Carpenter, I.M. Moser & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective* (pp. 224-238). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Davydov V. V. (1992). The psycological analysis of multiplication procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics* **14**(1), 3-67.

Dehaene S. (1997). *Il pallino della matematematica*, Mondadori, Milano.

Dehaene S. (2001). Précis of " The number sense ", *Mind and Language*, Volume 16, 16-36.

Dehaene S., Piazza M., Pinel P. e Cohen L. (2004). Three Parietal Circuits for Number Processing. In *Handbook of Mathematical Cognition*, Psychological Press, New York.

Devlin K. (2002). *Il gene della matematica*, Longanesi, Milano,.

Di Martino P., Mellone M. e Morselli F. (2007). La visione della matematica e la scelta universitaria. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 30 B, n. 1, Feb. 2007, pp. 43 – 78.

Dowker A. (2005). *Individual Differences in Arithmetic, Inplications for Psycology, Neuroscience and Education*. Psychology Press, Taylor & Francis Group, Hove and New York.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Paris.

John-Steiner, V. e Souberman, E. (1987). *Postfazione* in (Vygotskij, 1987), edizione italiana, 173-193.

Kieran C., Forman E. e Sfard A. (2001). Guest editorial learning discorse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 46, pp.1–12.

Flavell J. H. (1971). *La mente dalla nascita all'adolescenza nel pensiero di Jean Piaget*, Astrolabio ed.

Ferrari P. L. (2004) Matematica ed educazione: Il ruolo fondamentale dei linguaggi. *XXI Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica.* Dal sito internet http://www.mfn.unipmn.it/%7Epferrari/SN.htm

Ferrari P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora.

Freudenthal H. (1983). *Didactical Phenomonology of Mathematical Structures.* Mathematics Education Library. D Reidel Publishing Company, Dordrechet/ Boston /Lancaster.

Gallese V. e Lakoff G. (2005). The Brain's Concepts: the Role of the Sensory-Motor System in Conceptual Knowledge, *Cognitive Neuropsychology*, 21.

Gallistel, C.R., Gelman, R. e Cordes, S. (2005). The cultural and evolutionary history of the real numbers. In Leventhal (ed) *Culture and Evolution*: MIT Press.

Gallistel C.R., Gelman R. (1978). *The child's understanding of number*, Harvard university Press, Cambridge (MA).

Geymonat L. (1971). *Storia del pensiero filosofico scientifico.* Garzanti.

Guidoni P. (2007 a). Cosa si conta quando si conta, cosa si moltiplica/divide quando si … : *spiegare e capire* - fra semantica e sintassi, fra discreto e continuo, *in stampa sugli atti del XI Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" a Castel San Pietro Terme (Bo).*

Guidoni P. (2007 b). PRESENTAZIONE SCHEMATICA di un MODELLO FENOMENOLOGICO DI DINAMICA COGNITIVA, primo versante di riorganizzazione dei risultati emersi da una linea di ricerca ormai multi-decennale, *XXIV Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica,* dal sito internet http://www.dm.unito.it/semdidattica/mat07.php

Guidoni P., Iannece D. e Tortora R. (2005). Forming teacher as resonance mediator. *Proc. of the 29th Conf. of the Intern. Group for the PME*, Melbourne, 3, 73-80.

Guidoni P., Mellone M. e Pezzia M. (2005). Understanding basic arithmetics by "Resonance" approach: from addition to multiplication in first grade, *SEMT '05*, 123.

Guidoni, P.; Iannece, D. e Tortora, R. (2003). *La formazione matematica dei futuri maestri. Appunti ed esempi di attività*. Progetto CNR, dal sito internet http://didmat.dima.unige.it/progetti/CNR/napoli/present.html.

Guidoni P. (1985). On natural thinking, *Eur. J. Sci. Educ.*, Vol.7, No. 2, 133-140.

Gutiérrez A. & Boero P. (a cura di) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Sense publishers, Rotterdam/Taipei.

Hadamard J.S. (1949). *The psychology of Invention in the Mathematics Field*, Princeton University Press, NJ.

Herman J., Ilucova L., Kremsova, Pribyl J., Ruppeldtova J., Simpson A., Stehlikova N., Sulista M., Ulrychova M. (2004). Images of fraction as processes and images of fraction in processes, *28th PME*, Vol 4, 249-256.

Hutchins E. (1995). *Cognition in the wild*. Cambridge MA, the MIT Press.

Iannece D. & Tortora R. (2001). Un tentativo di ricostruzione del pensiero matematico nella formazione dei maestri. In *Processi matematici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo* (a cura di) Malara N., Marchini C., Navarra G., Tortora R., Pitagora, Bologna.

Iannece D. & Tortora R. (2007 a). La risonanza nei processi di apprendimento, *XXIV Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica,* dal sito internet http://www.dm.unito.it/semdidattica/mat07.php

Iannece D. & Tortora R. (2007 b). Le neuroscienze, *XXIV Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica,* dal sito internet http://www.dm.unito.it/semdidattica/mat07.php

Kolmogorov A. N. & Lavrent'ev M. A. (1974). *Le matematiche*. Boringhieri.

Kuhn T.S. (2000). *Dogma contro critica*, Cortina, Milano.

Lakoff G. & Núñez R. (2000). *Where mathematics comes from*, Basics Books, New York.

Lebesgue H. (1933-36). *Sur le misure des grandeus,* L'enseignement mathématique.

Le Bohec P. (1995). *Il testo libero di matematica*, Movimento di Cooperazione Educativa, La nuova Italia, Firenze.

Leont'ev A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. New Jersey: Prentice-Hall.

Locatello S. & Meloni G., (2003). *Apprendimento collaborativo in matematica*, Pitagora, Bologna.

Mellone M. & Pezzia M. (2007). Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nella scuola di base, *XXIV Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*, dal sito internet http://www.dm.unito.it/semdidattica/mat07.php

Norman D. A. (1991). Cognitive artefacts. In J. M. Carroll (Ed.), Designing interaction, Cambridge, MA Cambridge University Press.

Norman D. A. (1993). *Things that make us smart*. New York, Addison-Wesley.

Pellerey M. (2005). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-Based Research). *Orientamenti Pedagogici,* ed. Erickson – Trento, Vol. 52, n. 5, settembre-ottobre 2005 (pp. 721-737).

Peirce C. S. (1931-1958). *CP = Collected Papers, vol. I-VIII*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Pezzia M. (2004). L'insegnamento come mediazione di una comprensione "risonante": lavorando in prima sulle strutture elementari dell'aritmetica, una ricerca sul campo. *Tesi non pubblicata*.

Piaget J. (1957). *Logic and psychology*. Basic Books, New York.

Price A. J. (2001). Atomistic and holistic approaches to the early primary mathematics curriculum for addition, PME 25, **4**-73.

Polya G. (1973). *How to solve it*. Princenton, NJ: University Press.

Radford L. (2006). 'The Anthropology of Meaning. In: Sáenz-Ludlow A., Presmeg N. (eds.) (2006). *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics.* Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 39-65.

Rizzo A. (2000). La natura degli artefatti e la loro progettazione. *Sistemi Intelligenti a. XII*, n. 3 Dicembre, pp 437-452.

Rizzolatti G. & Sinigaglia, C. (2006). *So quel che fai. Il cervello che agisce e i neuroni specchio*, Raffaello Cortina, Milano.

Rösken B. & Rolka K. (2006). A picture is worth 1000 words –the role of visualization in mathematics learning, PME 30, **4**-457.

San Diego P. J., Aczel J., Hodgson B. e Scanlon E. (2006). "There's more than meets the eye": analysing verbal protocols, gazes and sketches on external mathematical rapresentations, PME 30, **5**-17.

Seeger F. (2001). Research on discourse in the mathematics classroom: a commentary, *Educational Studies in Mathematics* 46, 287-297.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: reflection on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**: 1-36.

Sfard A. (2000). Steering (Dis)Course between metaphors and Rigor: Using Focal Analysis to Investigate an emergente of Mathematical Objects, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. **31**, No.3, 296-327.

Shavelson R. et al. (2003). On the science of education design studies, *Educational Researcher*, n. 1, 25-28.

Tahan M. (1996). *L'uomo che sapeva contare.* Salani.

Tobias S. (1990). *They're not dumb, they're different. Stalking the second tier*. Tucson, Arizona, Research corporation.

Vaccaro V. (2005). Research and learning environment: the role of the teacher. SEMT '05, 323.

Vergnaud G. (1983). Multiplicative structures. Lesh, R. and Landau, M.(eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Orlando, FL, Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud G. (1994). *Il Bambino, la matematica e la realtà*. Armando.

Verillon P. & Rabardel P. (1995). Cognition and Artifacts: a Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.

Vygotskij L.S. (1931/1987). *Il processo cognitivo*. Bollati-Boringheri, Torino.

Vygotskij L.S. (1934/1990). *Pensiero e Linguaggio.* A cura di L. Mecacci, Laterza.

Wittgenstein L. (1980). *Note sul "Ramo d'oro" di Frazer*, Milano.

Wynn K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-750.

Zan R. (2006). *Difficoltà in matematica - osservare, interpretare, intervenire*. Springer, Italia.