



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II**  
**Dottorato di Ricerca in Ingegneria Informatica ed Automatica**



Comunità Europea  
Fondo Sociale Europeo

**MODELLISTICA E CONTROLLO**  
**DEI SISTEMI MECCANICI RIGIDI E FLESSIBILI**

**Laura CELENTANO**

**Tesi di Dottorato di Ricerca**

**(XIX Ciclo)**

**Novembre 2006**

**Dipartimento di Informatica e Sistemistica**

# Ringraziamenti

---

I miei più sentiti ringraziamenti vanno sicuramente ai tutori che mi hanno seguito in questi tre anni di intensa attività di formazione e ricerca scientifica: il Prof. Bruno Siciliano per le numerose occasioni culturali promosse in ambito robotico e l'Ing. Raffaele Iervolino per la fattiva collaborazione, serenità ed amicizia mostratemi.

Ringrazio particolarmente il Prof. Franco Garofalo per il sostegno e l'appoggio concreto fornitomi nel portare avanti l'attività sperimentale di laboratorio da me svolta e coordinata in questi anni.

Sono, inoltre, profondamente grata al Prof. Giovanni Celentano per i suoi costanti stimoli, i suoi preziosi ed illuminanti consigli e per la notevole fiducia accordatami.

Un ringraziamento speciale va ai colleghi con cui ho collaborato, tra cui il Prof. Luigi Villani, e a tutto il gruppo di Automazione del Dipartimento di Informatica e Sistemistica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II per la sua vivacità culturale ed il clima di collaborazione che lo contraddistingue.

Sono, inoltre, immensamente grata alla mia famiglia perché mi ha fornito robuste fondamenta su cui costruire: solidità, sostegno, fiducia e senso del dovere, coraggio nel credere nei propri ideali e nella possibilità di migliorare noi stessi ed il mondo in cui viviamo con l'immenso potere delle idee, il rigore e l'onestà intellettuale.

# Indice

---

<b>RINGRAZIAMENTI</b>	<b>I</b>
<b>INDICE</b>	<b>II</b>
<b>PARTE I: MODELLISTICA DEI SISTEMI RIGIDI MOBILI E/O ARTICOLATI</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>2</b>
<b>1 METODI CLASSICI DI MODELLAZIONE</b>	<b>3</b>
<b>1.1 MODELLISTICA MATEMATICA DEI SISTEMI DINAMICI NELLO SPAZIO DI STATO</b>	<b>3</b>
<b>1.1.1 APPROCCIO NEWTONIANO</b>	<b>7</b>
<b>1.1.2 APPROCCIO LAGRANGIANO</b>	<b>7</b>
<b>1.2 MODELLISTICA DI UN SISTEMA ROBOTICO</b>	<b>8</b>
<b>2 NUOVI RISULTATI</b>	<b>10</b>
<b>2.1 INTRODUZIONE AL PROBLEMA</b>	<b>10</b>
<b>2.2 NUOVI RISULTATI SULLA MODELLISTICA E SIMULAZIONE DEI ROBOTS</b>	<b>11</b>
<b>2.2.1 UNA NUOVA FORMULAZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE</b>	<b>11</b>
<b>2.2.2 MODELLISTICA DEI ROBOTS PLANARI</b>	<b>15</b>
<b>2.2.2.1 IPOTESI E NOTAZIONI</b>	<b>15</b>
<b>2.2.2.2 RISULTATI FONDAMENTALI</b>	<b>17</b>
<b>2.2.2.3 CASO DI STUDIO</b>	<b>23</b>
<b>2.3 VANTAGGI DEI NUOVI RISULTATI RISPETTO AI METODI PRESENTI IN LETTERATURA</b>	<b>26</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>28</b>
<b>PARTE II: CENNI SULLA MODELLISTICA DEI SISTEMI FLESSIBILI</b>	<b>30</b>
<b>3 METODI CLASSICI DI MODELLAZIONE</b>	<b>31</b>
<b>3.1 METODI CLASSICI DI MODELLAZIONE</b>	<b>31</b>
<b>3.1.1 METODO PER SERIE O PER MODI</b>	<b>31</b>
<b>3.1.2 METODO ALLE DIFFERENZE</b>	<b>32</b>
<b>3.1.3 METODO AGLI ELEMENTI FINITI</b>	<b>33</b>
<b>4 NUOVI RISULTATI</b>	<b>34</b>
<b>4.1 UNA TECNICA MODULARE PER MODELLARE UNA STRUTTURA FLESSIBILE A CATENA</b>	<b>34</b>
<b>4.1.1 MODELLO DI UN BRACCIO FLESSIBILE</b>	<b>34</b>
<b>4.1.2 CASO DI STUDIO</b>	<b>36</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>40</b>

<b>PARTE III: CONTROLLO DEI SISTEMI LINEARI E NON ED A PARAMETRI INCERTI</b>	<b>41</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>42</b>
<b>5 METODI CLASSICI PER IL CONTROLLO DEI SISTEMI LINEARI E NON</b>	<b>43</b>
<b>5.1 METODI CLASSICI PER L'ANALISI DELLA STABILITÀ ROBUSTA E LORO UTILIZZO PER IL PROGETTO DI UN CONTROLLORE ROBUSTO</b>	<b>43</b>
<b>5.1.1 UTILIZZO DEI METODI DI ANALISI DELLA STABILITÀ ROBUSTA PER IL PROGETTO DI UN CONTROLLORE ROBUSTO</b>	<b>52</b>
<b>5.2 METODI PIÙ DIFFUSI IN LETTERATURA PER IL CONTROLLO DI SISTEMI LINEARI, TEMPO VARIANTI E/O A PARAMETRI INCERTI</b>	<b>55</b>
<b>5.3 CONTROLLO DEI SISTEMI CON DINAMICHE INCERTE</b>	<b>56</b>
<b>5.4 METODI PIÙ DIFFUSI IN LETTERATURA PER IL CONTROLLO DI SISTEMI NON LINEARI ED A PARAMETRI INCERTI</b>	<b>57</b>
<b>6 NUOVI RISULTATI</b>	<b>59</b>
<b>6.1 NUOVI RISULTATI SULLA STABILITÀ PRATICA</b>	<b>59</b>
<b>6.1.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA</b>	<b>59</b>
<b>6.1.2 CASO DEI SISTEMI LINEARI</b>	<b>64</b>
<b>6.1.3 CASO DEI SISTEMI NON LINEARI</b>	<b>67</b>
<b>6.2 UN METODO MOLTO EFFICIENTE DI STABILIZZAZIONE ROBUSTA PER UN'IMPORTANTE CLASSE DI SISTEMI NON LINEARI A PARAMETRI INCERTI</b>	<b>80</b>
<b>6.2.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA E PRELIMINARI</b>	<b>80</b>
<b>6.2.2 RISULTATI FONDAMENTALI</b>	<b>84</b>
<b>6.2.3 CASO DEI SISTEMI MECCANICI</b>	<b>88</b>
<b>6.3 UN METODO GENERALE ED EFFICIENTE DI CONTROLLO ROBUSTO PER I SISTEMI MECCANICI NON LINEARI A PARAMETRI INCERTI</b>	<b>90</b>
<b>6.3.1 RISULTATI TEORICI PRELIMINARI</b>	<b>90</b>
<b>6.3.2 RISULTATI FONDAMENTALI</b>	<b>93</b>
<b>6.3.3 CASO DI STUDIO</b>	<b>98</b>
<b>6.3.4 CONCLUSIONI</b>	<b>102</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>103</b>

# Parte I

---

## **Modellistica dei Sistemi Rigidi Mobili e/o Articolati**

# Introduzione

---

I sistemi meccanici rigidi e flessibili sono molto diffusi nel mondo civile ed industriale, in particolare nelle industrie manifatturiere.

Per poterne valutare il comportamento nelle varie condizioni operative più significative, per poter progettare efficienti leggi di controllo, implementarle e validarle, è necessario avere un buon modello.

Per quanto riguarda la modellazione dei sistemi rigidi mobili e/o articolati, anche se vi sono numerosi studi e alcuni metodi già assestati in merito, c'è ancora molto da fare, specie per quelli articolati, nel rendere semplice, generale ed efficiente tale modellazione.

In merito alla modellistica dei sistemi meccanici articolati flessibili non vi sono ancora in letteratura metodi assestati e generali in proposito.

In tal senso si sono orientati ed incanalati lo studio e la ricerca oggetto della Parte I e II della presente tesi di dottorato.

# 1 Metodi Classici di Modellazione

## 1.1 Modellistica Matematica dei Sistemi Dinamici nello Spazio di Stato

Verosimilmente, al tempo d'oggi, il principale compito di un *sistema di automazione*, sempre più programmabile e flessibile, consiste nel dotare un qualsiasi processo o impianto naturale o artificiale di sensori ed attuatori elettrici in modo da poterlo monitorare, diagnosticare, proteggere, gestire, velocizzare, identificare, controllare, far interagire con altri sistemi, etc., o da conferirgli "intelligenza artificiale", vitalità mediante circuiti analogici e/o digitali programmabili, posti a volte anche in luoghi remoti, grazie alle moderne tecnologie delle telecomunicazioni.

Per capire perché ciò sia credibile e come si possa concretamente realizzare si può far riferimento al seguente schema concettuale di un moderno sistema di supervisione e controllo

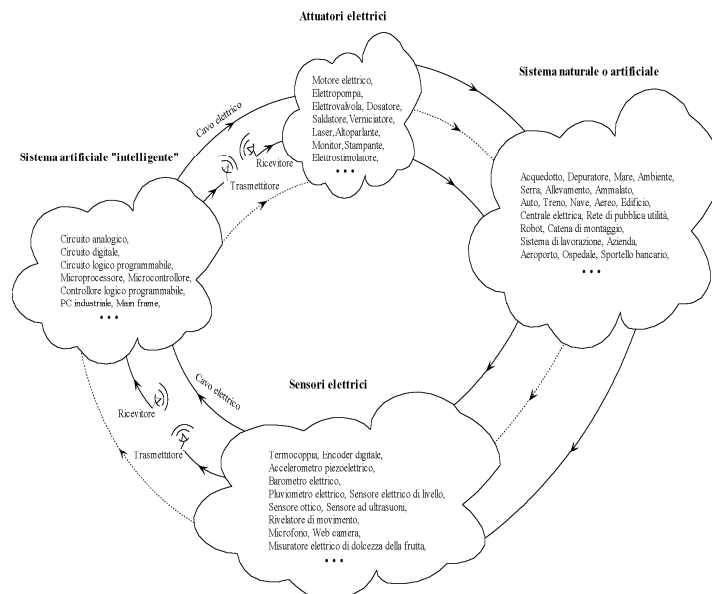


Fig. 1.1 Schema concettuale di un moderno sistema di supervisione e controllo.

o a quello più astratto che segue.

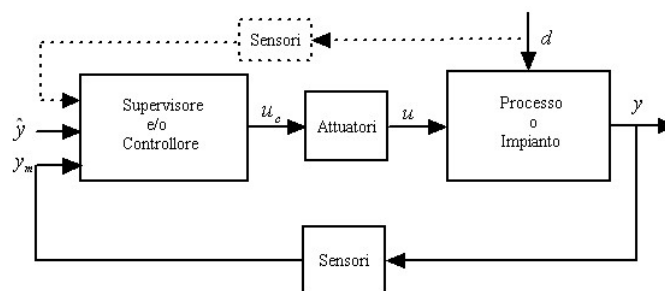


Fig. 1.2 Schema a blocchi di un sistema di supervisione e controllo.

A tal proposito, requisito indispensabile è quello di saper descrivere matematicamente sia il sistema o i sottosistemi che già esistono in natura, sia quelli realizzati dall'uomo, sia i circuiti intelligenti di integrazione.

La *modellistica matematica dei sistemi dinamici* gioca un ruolo fondamentale in molti problemi dell'ingegneria perché serve ad effettuare l'analisi delle prestazioni, la progettazione e la realizzazione di sistemi con le caratteristiche desiderate; infatti, non è pensabile che si possa intervenire su un ammalato, su un aereo, su una base dati senza averne una conoscenza più o meno dettagliata sia perché le nuove tecnologie, al tempo d'oggi, consentono di realizzare facilmente sofisticatissimi sistemi o sue parti partendo dal loro modello matematico, sia perché quest'ultimo consente di valutare le prestazioni di un sistema prima ancora che esso venga realizzato facilitandone in tal modo la sua ottimizzazione.

Più in generale, lo studio dei sistemi dinamici naturali o artificiali mediante modelli matematici risulta estremamente vantaggioso perché essi riescono a rappresentare in maniera molto sintetica (con poche formule o algoritmi e pochi dati) realtà molto complesse (basti pensare alle equazioni di Maxwell o, banalmente, all'equazione di una retta), sono più sintetici ed accurati rispetto ad altri modelli (verbali, testuali, grafici,...), consentono di unificare culture a prima vista diverse, vi sono molti risultati teorici di analisi e di sintesi di modelli matematici, vi sono svariati pacchetti software che consentono di studiare facilmente i modelli matematici; inoltre essi consentono di comprendere meglio il funzionamento dei sistemi dinamici che si propongono di descrivere, di ottimizzare la progettazione di nuove parti, di fare una scelta ottima dei componenti disponibili sul mercato e di sviluppare efficienti algoritmi di supervisione, diagnosi e controllo.

In linea generale un modello è un insieme di coppie di dati (ascissa, ordinata; input, output; causa, effetto) che descrivono il comportamento di un sottosistema o di un intero sistema (cfr. *schema concettuale di un moderno sistema di supervisione e controllo*).

Tale definizione, però, è poco operativa perché richiede molta memoria e fornisce un modello che mal si presta ad essere usato o modificato. Per cui si cerca sempre di trovare un legame di tipo ingresso-uscita basato su leggi scientifiche (fisiche, economiche,...) e/o su considerazioni di tipo logico.

In tal modo si riesce quasi sempre a mettere il modello in una forma del tipo

$$x(t)' = f(t, x(t), u(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \quad , \quad (1b)$$

ove (cfr. schema sottostante)

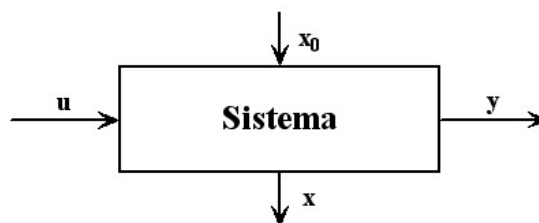


Fig. 1.3 Rappresentazione schematica di un sistema.

$t$  è una variabile ordinata, chiamata usualmente tempo

$u(t)$  è l'ingresso del sistema

$x(t)$  è lo stato del sistema

$y(t)$  è l'uscita del sistema



$x_0$  è lo stato iniziale del sistema

$x(t)'$  è la derivata di  $x(t)$  (rispetto al tempo) o, per i sistemi a tempo discreto, il “valore prossimo”

$f$ ,  $\eta$  sono operatori di tipo analitico (anche di derivazione parziale rispetto a coordinate spaziali), logico, tabellare, ... .

Da tutte queste considerazioni si comprende come il principale problema che si deve risolvere è quello di associare ad un dato oggetto, fenomeno o processo un modello matematico.

Questo problema può essere risolto usando uno dei seguenti metodi:

1. a scatola trasparente;
2. a scatola opaca;
3. a scatola nera.

Il *metodo di modellazione a scatola trasparente* viene applicato quando un dato oggetto o processo può essere scomposto in parti elementari di cui si conoscono le leggi che ne regolano il comportamento ed i legami tra tutte le variabili interagenti.

Il *metodo a scatola opaca* può essere applicato quando sono note le relazioni matematiche che legano tra loro le variabili di interesse ma risultano incogniti i parametri che in esse compaiono, in tal caso il metodo viene detto di identificazione parametrica.

Infine, il *metodo a scatola nera*, detto anche sperimentale, si applica quando non si riesce ad individuare una scomposizione del sistema in parti elementari per le quali si conoscono le relazioni matematiche tra le relative variabili e/o non si conoscono i legami tra le variabili interagenti ma quando si conoscono i dati di input-output relativi al funzionamento del sistema complessivo.

I metodi di modellazione più usuali sono i metodi a scatola trasparente e quella che viene abitualmente effettuata è la *modellistica matematica dei sistemi dinamici nello spazio di stato*, prendendo in considerazione varie classi di sistemi fisici quali i sistemi meccanici, elettrici, idraulici, pneumatici e termici.

L'associazione ad ognuno di questi sistemi di un modello implicito I-S-U del tipo presentato ( $X$ ,  $f$ ,  $\eta$ ) viene effettuata in quattro passi successivi:

1. individuazione delle variabili di ingresso ed uscita;
2. scelta delle variabili di stato;
3. scrittura delle relazioni costitutive;
4. elaborazione delle relazioni costitutive per pervenire alla scrittura dell'equazione di stato e della trasformazione d'uscita.

Tra queste operazioni particolare attenzione richiede la scelta delle variabili di stato; infatti essa è un'operazione abbastanza delicata per i seguenti motivi fondamentali:

1. essa è fortemente legata alla tipologia del sistema oggetto di studio e, talvolta, richiede una notevole esperienza operativa su di esso;
2. non è unica, per cui esistono più modelli associati ad uno stesso sistema;
3. il numero delle variabili di stato dipende dalla maggiore o minore accuratezza con cui si vuole descrivere il comportamento del sistema in esame;
4. il numero delle variabili di stato non sempre può essere fissato a priori per cui si possono porre questioni di ridondanza.

Un metodo a scatola trasparente, di portata abbastanza generale, che consente di associare una rappresentazione lineare ad alcuni usuali sistemi fisici è il metodo basato sui *Principi di Kirchhoff generalizzati*.

Infatti un sistema fisico usuale può essere scomposto in sistemi fisici elementari variamente interconnessi. A ognuno di tali elementi si possono associare tre variabili generalizzate  $q$ ,  $i$ ,

$v$ , con  $i = \frac{dq}{dt}$ , dette rispettivamente di quantità (variabile dell'elemento), di flusso (variabile

che attraversa l'elemento) e di forzamento (variabile agli estremi dell'elemento), che, nel caso di un elemento di tipo elettrico, sono la carica contenuta nell'elemento, la corrente che attraversa l'elemento e la tensione ai capi dell'elemento. Inoltre, tali elementi sono caratterizzati dal fatto che si può ritenere costante una delle grandezze  $q$ ,  $i$ ,  $v$  rispetto alle altre due, in tal caso l'elemento viene detto generatore, oppure ritenere costante uno dei tre rapporti  $\frac{v}{i}$ ,  $\frac{v}{\frac{di}{dt}}$ ,  $\frac{i}{\frac{dv}{dt}}$  ed in questo caso l'elemento viene detto utilizzatore e si può associare al

singolo elemento un parametro di facile misura che ne riesce a caratterizzare il comportamento esterno (nel caso di un elemento elettrico un parametro può essere una resistenza, un'induttanza, una capacità).

Per quanto riguarda i legami tra tutte le variabili interagenti, con riferimento ad una rete di elementi variamente collegati tra loro, si può mostrare che le variabili di flusso e di potenziale sono vincolate dai Principi di Kirchhoff generalizzati, enunciati allo stesso modo del caso elettrico.

Resta ora il problema della scelta delle variabili di stato; ad esempio, nell'ipotesi in cui gli ingressi siano generatori di flusso e/o di forza e le uscite siano variabili di flusso e/o di forza, si possono usare come variabili di stato le variabili di flusso per gli elementi per i quali risulta costante il rapporto  $\frac{v}{\frac{di}{dt}}$  e le variabili di forza per gli elementi per i quali  $\frac{i}{\frac{dv}{dt}}$  è costante.

Applicando opportunamente i Principi di Kirchhoff, con tale scelta delle variabili di stato, le equazioni che si ottengono possono essere messe nella ben nota forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2a)$$

$$y = Cx + Du \quad (2b)$$

L'approccio generale di modellazione usando il metodo a scatola trasparente si basa sull'*interazione tra i sottosistemi*.

Dati  $n$  sistemi, collegandoli tra loro si ottiene un sistema complessivo che, in genere, ha proprietà molto diverse rispetto ad ognuno dei sistemi componenti (ad esempio collegando in retroazione due sistemi stabili il sistema risultante può anche risultare instabile) ed inoltre il modello del generico sistema  $S_j$  in genere cambia perché interagisce con altri sistemi.

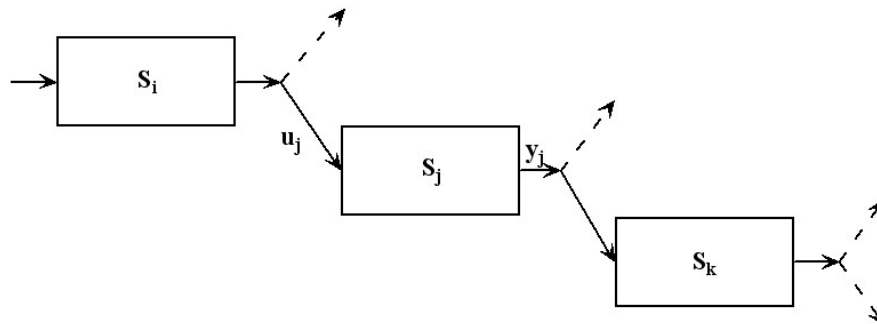


Fig. 1.4 Sistemi interagenti.

Nel caso in cui si interpongono tra i vari sistemi interagenti dei sistemi disaccoppianti, tipo amplificatori operazionali ideali per i sistemi elettrici, si parla di collegamento non interagente ed il modello del sistema complessivo si può ottenere facilmente a partire dai modelli dei singoli sottosistemi, altrimenti si parla di collegamento interagente ed il modello del sistema

complessivo non si può ottenere facilmente dal modello dei singoli sottosistemi ed, in generale, risulta molto oneroso da ottenere, a volte addirittura impossibile, da un punto di vista pratico.

Se si introducono per ogni sottosistema delle opportune variabili ausiliarie di ingresso e di uscita (ad esempio, per un doppio bipolo per tener conto della corrente assorbita dal doppio bipolo a valle, si considera un ingresso addizionale composto da un generatore di corrente e per portare in conto la corrente che assorbe dal doppio bipolo a monte si considera un'uscita addizionale composta dalla corrente assorbita), allora il modello del sistema complessivo si può ancora ottenere facilmente a partire dai modelli dei singoli sottosistemi [6, 7].

### 1.1.1 Approccio Newtoniano

Quando si applica il metodo di modellazione a scatola trasparente ai sistemi meccanici usuali l'*approccio* più utilizzato per modellare i singoli sottosistemi e le relative interazioni è quello *Newtoniano*.

A tal proposito si ricordi che le equazioni del moto di un corpo rigido si possono scrivere applicando la seconda legge di Newton nella prima o nella seconda forma a seconda che la massa e/o il momento d'inerzia degli elementi inerziali sia indipendente o dipendente dal tempo.

Per la *scrittura del modello matematico di un sistema meccanico* relativamente semplice con l'approccio Newtoniano si può procedere mediante i seguenti passi:

1. individuazione del numero di gradi di libertà del sistema;
2. scelta delle coordinate posizionali da utilizzare per la scrittura delle leggi di Newton;
3. scrittura delle equazioni del moto e/o di eventuali equazioni di vincolo ottenendo l'insieme delle relazioni costitutive del sistema;
4. scelta delle variabili di stato e manipolazione delle relazioni costitutive in modo da pervenire ad una rappresentazione I-S-U del sistema.

E' da tener presente, però, che questo approccio presenta una serie di inconvenienti tra cui quello fondamentale di portare in conto, per la scrittura della legge di Newton relativa a ciascun elemento, tutte le forze che agiscono sull'elemento, comprese le forze di interazione con altri componenti la cui scrittura richiede una certa esperienza e comporta un aumento del numero di incognite complessive rendendo necessaria l'aggiunta di altre equazioni (equazioni di vincolo) al sistema [1,2,6].

### 1.1.2 Approccio Lagrangiano

Per evitare gli inconvenienti che presenta l'approccio Newtoniano, soprattutto quando i sistemi meccanici sono complessi, in particolare per sistemi meccanici non lineari, tipo i sistemi articolati tra cui rientrano anche i robots, ed anche, come verrà illustrato in seguito, per ottenere facilmente un modello dinamico a dimensione finita del moto di un sistema meccanico deformabile, può essere usato l'*approccio Lagrangiano*.

Esso considera il sistema nel suo insieme piuttosto che nei suoi componenti individuali e lo caratterizza in termini di coordinate relative tra i vari corpi piuttosto che in termini di coordinate assolute.

Tale metodo si basa sulle seguenti *Equazioni di Eulero-Lagrange* scritte nella forma usuale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3)$$

ove

$L = T - U$  è la Lagrangiana del sistema, in cui  $T$  è l'energia cinetica ed  $U$  l'energia potenziale complessiva del sistema

$q_i$  sono le coordinate lagrangiane del sistema

$Q_i$  sono le componenti delle forze generalizzate (forze e/o coppie) lungo gli assi lagrangiani,

o nella forma alternativa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \gamma_i, \quad (4)$$

ove

$\gamma_i$  sono tutte le componenti lungo gli assi lagrangiani delle forze generalizzate, quelle applicate dall'esterno, quelle gravitazionali, elastiche e di attrito.

Una scelta sicuramente molto delicata ai fini della scrittura delle equazioni del moto di Lagrange è quella delle coordinate lagrangiane. In genere, si sceglie un sistema di coordinate posizionali che risulti essere comodo per il calcolo dell'energia cinetica e potenziale del sistema e poi si sceglie un insieme di coordinate lagrangiane indipendenti legate agevolmente al sistema di coordinate posizionali scelto.

Occorre tener presente, però, che l'approccio Lagrangiano, seppur semplice da applicare e sistematico, in genere dà luogo ad un modello analitico con molti termini, soprattutto nel caso di sistemi meccanici articolati. Inoltre, nel caso di robots reali con molti bracci un ingegnere non molto esperto può incontrare delle difficoltà nell'applicarlo, oltre al fatto che il modello analitico che ne deriva è molto oneroso [1,2,6].

## 1.2 Modellistica di un Sistema Robotico

La deduzione del modello dinamico di un robot è estremamente importante in relazione a problemi di simulazione del moto, di analisi delle strutture robotiche e di determinazione di algoritmi di controllo.

Ad esempio la simulazione del moto di un robot consente di provare strategie di controllo e tecniche di pianificazione di traiettoria senza la necessità di riferirsi ad una struttura fisicamente disponibile; l'analisi del modello dinamico può essere di ausilio al progetto meccanico di prototipi; la conoscenza di forze e coppie richieste per l'esecuzione di movimenti tipici fornisce informazioni utili al progetto di giunti e trasmissioni e alla scelta di attuatori.

Il modello dinamico di un robot può essere ricavato nello spazio dei giunti o direttamente nello spazio operativo.

In letteratura i metodi più usati per ricavare il modello dinamico di un robot sono quelli basati sulla *formulazione di Lagrange* e su quella di *Newton-Eulero*.

Relativamente alla determinazione del modello nello spazio dei giunti, la formulazione di Lagrange e la formulazione di Newton-Eulero consentono di calcolare le relazioni esistenti tra le coppie di attuazione ai giunti, ed eventualmente le forze all'organo terminale, ed il moto della struttura.

I metodi basati sulla formulazione di Lagrange presentano i vantaggi fondamentali di essere sistematici, di facile comprensione e di fornire le equazioni del moto in una forma analitica compatta.

I metodi basati sulla formulazione di Newton-Eulero sono intrinsecamente ricorsivi e risultano in generale efficienti da un punto di vista computazionale.

Nello studio della dinamica di un robot vi sono due principali tipologie di problemi.

Il *problema della dinamica diretta* che consente di determinare le accelerazioni risultanti ai giunti, quando siano assegnate le coppie ai giunti, ed eventualmente le forze all'organo terminale, e sia noto lo stato iniziale del sistema in termini di posizione e velocità iniziale ai giunti. La soluzione di questo problema risulta particolarmente utile in fase di simulazione del robot.

Il *problema della dinamica inversa* consiste nel determinare le coppie ai giunti necessarie alla generazione del movimento richiesto assegnando le accelerazioni, le velocità e le posizioni dei giunti, note le eventuali forze all'organo terminale. La soluzione del problema della dinamica inversa risulta utile ai fini della pianificazione di traiettorie e dell'implementazione di algoritmi di controllo.

I metodi basati sulla formulazione di Lagrange e sulla formulazione di Newton-Eulero sono utilizzati per la risoluzione di questi importanti problemi [4,5].

# 2 Nuovi Risultati

---

## 2.1 Introduzione al Problema

Il problema della modellistica e simulazione dei sistemi robotici è stato studiato intensamente negli ultimi tre decenni [8-15].

A riguardo sono stati ottenuti molti importanti risultati, a partire dalla formulazione delle dinamiche di un robot in termini di un insieme di equazioni di moto, metodo ben noto nel caso in cui il sistema robotico possa essere considerato come un sistema di corpi rigidi variamente connessi.

D'altro canto il problema della dinamica diretta in termini di efficienti algoritmi di calcolo, che siano anche semplici da sviluppare ed implementare è ancora di rilevante interesse, soprattutto per robots realistici e con molti bracci. Infatti, in tali casi i metodi basati sulla formulazione di Lagrange danno luogo ad un modello analitico con moltissimi termini e si possono incontrare delle difficoltà oggettive nel suo uso; i metodi basati sulla formulazione di Newton-Eulero non risultano molto semplici da applicare, non portano a formule analitiche semplici da gestire pur risultando efficienti da un punto di vista computazionale.

Quando sono considerate configurazioni meccaniche semplici, un approccio classico consiste nel derivare analiticamente l'espressione della lagrangiana del robot e, successivamente, delle sue derivate facendo uso del calcolo simbolico [13]. Questo metodo, che fu storicamente applicato per primo alle dinamiche di un robot in [14], che costituisce una generalizzazione della formulazione precedente in [9], attrae particolarmente per la sua natura intuitiva. Il fondamentale svantaggio dell'approccio simbolico è la crescita esplosiva della complessità delle equazioni all'aumentare del numero di corpi coinvolti. Inoltre le equazioni sono composte da un numero molto elevato di termini non facilmente semplificabili che porta ad un notevole ammontare di calcoli ridondanti. Quindi, è chiaro che una siffatta formulazione è computazionalmente inefficiente, anche se si può utilizzare una più recente formulazione ricorsiva del metodo Lagrangiano, che garantisce un miglioramento sostanziale dell'efficienza a fronte di uno sforzo di riformulazione non trascurabile [15].

In alternativa il *metodo composite-rigid-body* (o *metodo di Walker-Orin*), originariamente descritto in [10], può essere adottato per la sua caratteristica di essere un metodo di modellazione molto efficiente in svariate situazioni pratiche [8,11]. Si tenga presente però che questo metodo è relativo al calcolo della sola matrice d'inerzia; poi viene utilizzato un algoritmo ricorsivo di calcolo della dinamica inversa.

Infine un'altra categoria di approcci consente nel risolvere il problema della dinamica diretta mediante un'opportuna propagazione dei vincoli di forza e di moto lungo la struttura meccanica del robot. Un esempio di questi approcci è il *metodo articulated-body* che, anche se presenta notevoli difficoltà per la sua derivazione, garantisce una complessità computazionale relativamente bassa [8,11].

Nel paragrafo successivo e nelle pubblicazioni in merito [25] è stata proposta una nuova, semplice ed efficiente metodologia di analisi, valida per tutti i robots, che fa uso di un modello matematico contenente un minor numero di termini algebrici e che consente anche di calcolare, con prefissato errore massimo, il gradiente dell'energia cinetica a partire dalla conoscenza numerica della sola matrice d'inerzia anziché, come solitamente è in uso in letteratura, usare complessi sviluppi di tipo analitico dell'espressione in forma chiusa di tale matrice.

## 2.2 Nuovi Risultati sulla Modellistica e Simulazione dei Robots

In questo paragrafo viene dimostrata la possibilità di simulare un robot conoscendo solo la matrice d'inerzia ed il gradiente dell'energia cinetica. Poiché esistono efficienti metodi per calcolare la matrice d'inerzia, calcolando il gradiente dell'energia cinetica numericamente, si ha che un robot generico può essere simulato sapendo calcolare numericamente solo la matrice d'inerzia.

Tale metodologia risulta più semplice e più efficiente numericamente rispetto all'approccio classico.

Per robots planari con bracci con baricentro appartenente al piano passante per gli assi di rotazione dei giunti vengono formulati e dimostrati in modo molto semplice dei teoremi che consentono di calcolare velocemente analiticamente o numericamente sia la matrice d'inerzia che il gradiente dell'energia cinetica.

Ciò consente ad uno studente, ad un ricercatore e ad un professionista di modellare e simulare in maniera semplice ed efficiente robots realistici con bracci rigidi; inoltre può anche costituire un metodo particolarmente utile per studiare i robots a bracci flessibili.

Con l'ausilio di questi risultati è stato facilmente implementato il modello di un robot planare realistico, disegnato con l'utilizzo del CAD CATIA™.

Sono state messe a confronto anche le simulazioni ottenute calcolando il gradiente dell'energia cinetica analiticamente e numericamente e si è riscontrato che i costi computazionali sono relativamente bassi e l'accuratezza è elevata.

I risultati presentati in questo paragrafo sono stati pubblicati (cfr. 25).

### 2.2.1 Una Nuova Formulazione dell'Equazione di Eulero-Lagrange

Nel seguito è presentata una nuova formulazione del modello dinamico di un robot in una forma più efficiente per il suo studio analitico e/o numerico.

E' ben noto che di solito l'equazione di *Eulero-Lagrange* di un generico robot con  $n$  gradi di libertà è del tipo [3, 5]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = u_a + u, \quad (1)$$

ove:

$\beta$  è il vettore delle coordinate lagrangiane ,

$T$  è l'energia cinetica, data da  $T = \frac{1}{2} \dot{\beta}^T B(\beta) \dot{\beta}$  ,  $B$  = matrice d'inerzia,

$u_a$  è il vettore delle coppie di gravità e di quelle non conservative (e.g. coppie d'attrito, etc.),

$u$  è il vettore delle coppie di attuazione,

viene sviluppata come segue

$$B(\beta) \ddot{\beta} + C(\beta, \dot{\beta}) \dot{\beta} = u_a + u, \quad (2)$$

ove un'espressione della matrice  $C$  è la seguente:

$$C(\beta, \dot{\beta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial B}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\beta}^T \frac{\partial B}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dot{\beta}^T \frac{\partial B}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ponendo

$$B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{ij}\} \quad (4)$$

si ha anche

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial \beta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ik}}{\partial \beta_j} \right) \dot{\beta}_k. \quad (5)$$

Un'altra matrice  $C_c = \{c_{cij}\}$  equivalente, cioè tale che  $C_c \dot{\beta} = C \dot{\beta}$ , che fa uso dei simboli di Christoffel, è quella meno efficiente data da

$$c_{cij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial \beta_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial \beta_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial \beta_i} \right) \dot{\beta}_k. \quad (6)$$

Vi sono vari metodi per calcolare sia  $B(\beta)$  che  $C(\beta, \dot{\beta})$ . Quelli più semplici da un punto di vista concettuale, che usano le espressioni analitiche, sono estremamente complessi ed onerosi, anche se si fa ricorso a linguaggi di manipolazione simbolica. Altri metodi più efficienti richiedono conoscenze più approfondite di meccanica.

Il seguente teorema fornisce un metodo efficiente per modellare e simulare un robot.

**Teorema 2.1.** Se l'equazione di *Eulero Lagrange* viene sviluppata come segue

$$\frac{d}{dt}(B\dot{\beta}) = c + u_a + u, \quad (7)$$

ove  $c$  è il gradiente dell'energia cinetica rispetto a  $\beta$ , cioè

$$c = \frac{\partial T}{\partial \beta}, \quad (8)$$

essa può essere efficientemente integrata mediante l'innovativo schema d'integrazione di Fig. 2.1, in cui  $\dot{\beta}_g = B\dot{\beta}$  ed  $F$  è un'opportuna funzione che consente di calcolare  $\dot{\beta}$  e  $\ddot{\beta}_g$  a partire da  $u$ ,  $\beta$  e  $\dot{\beta}_g$ .



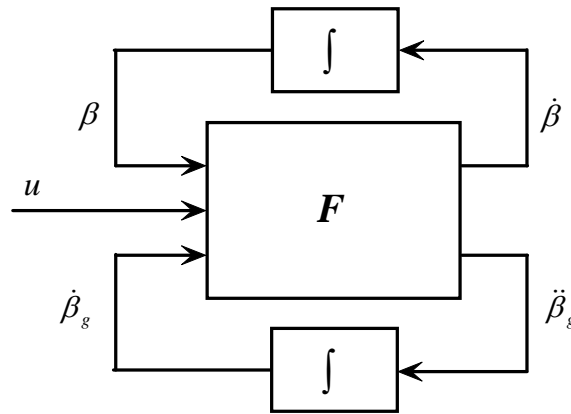


Fig. 2.1 Schema a blocchi di integrazione del modello di un robot.

**Dimostrazione.** È semplice verificare che l'algoritmo che descrive la funzione  $F$  dello schema a blocchi di Fig. 2.1 è:

*Passo 1*

Si calcola  $B(\beta)$  mediante uno dei metodi classici proposti in letteratura o, nel caso di robot planari, applicando i Teoremi 2.2 e 2.3 e la (32) della prossima sezione

*Passo 2*

Si calcola  $\dot{\beta}$  mediante la relazione  $\dot{\beta} = B^{-1}\dot{\beta}_g$

*Passo 3*

Si calcola  $c(\beta, \dot{\beta})$  ed  $u_a$

*Passo 4*

Si calcola  $\frac{d}{dt}(B\dot{\beta}) = \ddot{\beta}_g = c + u_a + u$ .

◆

**Osservazione 2.1.** La metodologia proposta consente di risparmiare il calcolo del primo addendo della (5) o dei primi due addendi della (6).

Tale risparmio è significativo perché l'onere computazionale di questo termine non è trascurabile rispetto a quello richiesto per il calcolo di  $B^{-1}$ .

Ciò emerge chiaramente dalla Fig. 2.2, ove vengono riportate le percentuali di flops risparmiati a fronte del numero di flops richiesti per il calcolo di  $B^{-1}$  (in ambiente MATLAB<sup>TM</sup>) con riferimento ai coefficienti in (5), calcolati per un considerevole numero di robots con bracci a parametri random alquanto realistici.

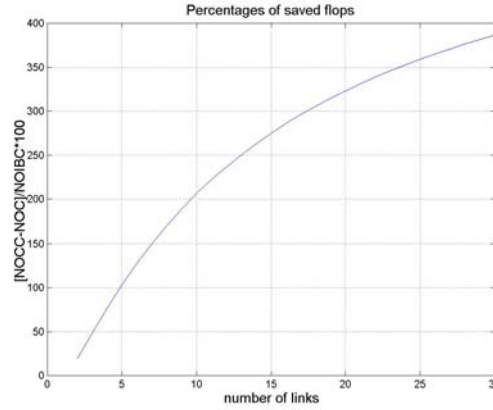


Fig. 2.2 Percentuali di flops risparmiati nel calcolo del modello di robots con bracci a parametri random.

**Osservazione 2.2.** Poichè in letteratura esistono molti algoritmi efficienti per calcolare numericamente la matrice  $B$ , il gradiente dell'energia cinetica  $c$ , anziché essere calcolato utilizzando una sua espressione simbolica, può essere calcolato in modo molto semplice e preciso numericamente.

A tal proposito si fa notare che, poiché l'energia cinetica per la maggioranza dei robots è una funzione quadratica rispetto a  $\dot{\beta}$ , i cui coefficienti sono termini costanti rispetto a  $\beta$  o dipendono da  $\beta_i$  secondo funzioni del tipo  $\sin(a\beta_i + \varphi)$ , con  $a=1$  per robots planari,  $a=2$  per robots spaziali, è utile il seguente

**Lemma 2.1.** La derivata di  $\sin(a\beta_i)$  può essere calcolata numericamente mediante la formula di derivazione a due (tre) punti:

$$\frac{d}{d\beta_i} \sin(a\beta_i) = \frac{\sin[a(\beta_i + \Delta)] - \sin(a\beta_i)}{\Delta} \quad (8)$$

$$\left[ \frac{d}{d\beta_i} \sin(a\beta_i) = \frac{\sin[a(\beta_i + \Delta)] - \sin[a(\beta_i - \Delta)]}{2\Delta} \right]$$

con errore pari a

$$e_2 = -\frac{1}{2} a^2 \sin(a\chi) \Delta, \quad |e_2| < a^2 \frac{\Delta}{2}, \quad \chi \in (\beta_i, \beta_i + \Delta), \quad (9)$$

$$\left[ e_3 = -\frac{1}{6} \Delta^2 a^3 \cos(a\chi), \quad |e_3| < a^3 \frac{\Delta^2}{6}, \quad \chi \in (\beta_i - \Delta, \beta_i + \Delta) \right]$$

**Dimostrazione.** Si consulti un qualunque libro di calcolo numerico. ◆

In virtù del Lemma 2.1 è possibile calcolare, con un prefissato errore massimo, il gradiente dell'energia cinetica partendo dalla conoscenza numerica della matrice d'inerzia  $B$  piuttosto che usare, come solitamente è in uso in letteratura, complessi sviluppi di tipo analitico

dell'espressione in forma chiusa di  $B$ . In dettaglio, un buon valore di  $\partial T/\partial \beta$  si può ottenere usando una formula a due (tre) punti con  $\Delta = 10^{-3} \div 10^{-4}$  [ con  $\Delta = 10^{-2} \div 10^{-3}$  ] e calcolando  $n-1$   $[2(n-1)]$  volte la matrice d'inerzia  $B$  numericamente.

## 2.2.2 Modellistica dei Robots Planari

Nel caso di robots planari con giunti rotoidali, vengono stabiliti e dimostrati dei teoremi che forniscono un metodo sufficientemente semplice ed efficiente per esprimere sia la matrice d'inerzia che il gradiente dell'energia cinetica in una forma analitica chiusa ed elegante.

### 2.2.2.1 Ipotesi e Notazioni

Nel seguito saranno considerati robots planari generalizzati costituiti da  $n$  bracci, ognuno dei quali con assi di rotazione paralleli  $C^-$ ,  $C^+$  e baricentro  $G$  appartenente al piano passante per i due assi di rotazione (cfr. Fig. 2.3). In Fig. 2.4 è mostrato un robot planare con tre bracci e piano di lavoro orizzontale.

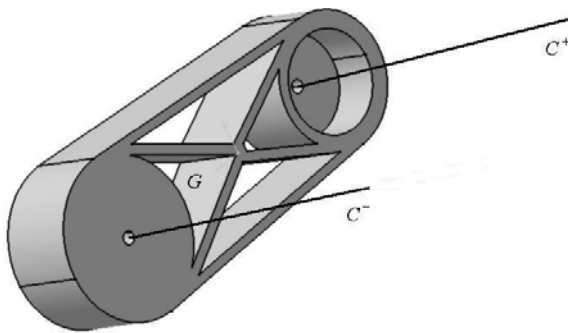


Fig. 2.3. Il generico braccio del robot planare considerato.

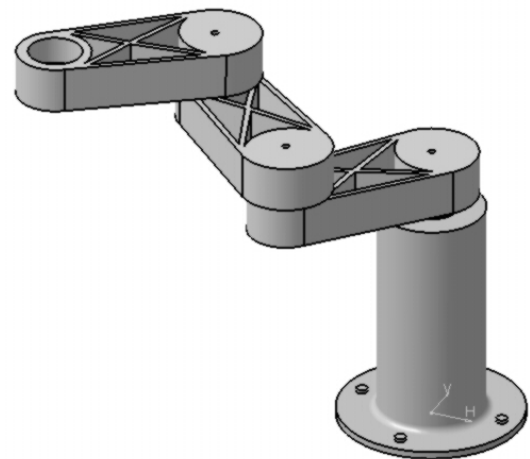
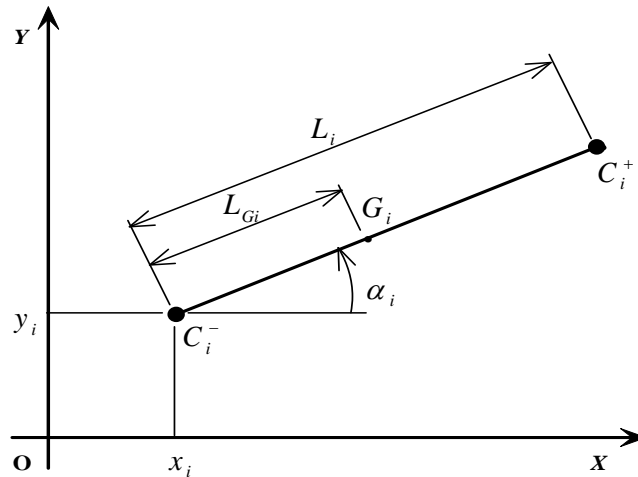
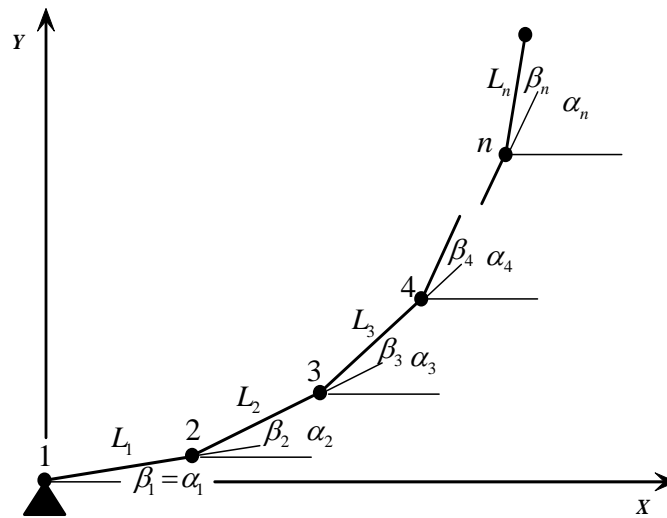


Fig. 2.4. Il robot planare considerato con tre bracci e piano di lavoro orizzontale.

Saranno inoltre utilizzate le seguenti notazioni (cfr. Fig. 2.5 e 2.6):

Fig. 2.5 Caratteristiche geometriche del braccio  $i$ -esimo.Fig. 2.6 Rappresentazione schematica di un robot planare con  $n$  bracci.

$q_i = [x_i \ y_i \ \alpha_i]^T =$  coordinate assolute del braccio  $i$ -esimo,

$I_i =$  matrice d'inerzia del braccio  $i$ -esimo rispetto alle coordinate  $q_i$ ,

$M_i =$  massa totale del braccio  $i$ -esimo,

$J_i =$  momento d'inerzia del braccio  $i$ -esimo rispetto all'asse di rotazione  $C_i^-$ ,

$\rho_i =$  raggio d'inerzia del braccio  $i$ -esimo rispetto all'asse di rotazione  $C_i^-$ ,

$N_i =$  momento statico del braccio  $i$ -esimo rispetto al piano passante per  $C_i^-$  e normale al piano passante per  $C_i^-$  e  $C_i^+$ ,

$L_{Gi} =$  distanza del baricentro  $G_i$  del braccio  $i$ -esimo dall'asse  $C_i^-$ ,

$\alpha_{1...i} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_i]^T =$  vettore delle coordinate angolari assolute della catena costituita dai primi  $i$  bracci,

$\beta_{1...i} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_i]^T =$  vettore delle coordinate angolari relative della catena costituita dai primi  $i$  bracci,

$A_i =$  matrice d'inerzia del braccio  $i$ -esimo rispetto alle coordinate  $\alpha_{1...i}$ ,

$B_i =$  matrice d'inerzia del braccio  $i$ -esimo rispetto alle coordinate  $\beta_{1...i}$ ,

$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$  = vettore delle coordinate angolari assolute del robot,

$\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T$  = vettore delle coordinate angolari relative del robot,

$A$  = matrice d'inerzia del robot rispetto alle coordinate  $\alpha$ ,

$B$  = matrice d'inerzia del robot rispetto alle coordinate  $\beta$ .

### 2.2.2.2 Risultati Fondamentali

Si consideri un generico braccio di un robot planare, con giunti rotoidali. Vale il seguente

**Teorema 2.2.** L'energia cinetica  $T_i$  del braccio di un robot planare, con assi di rotazione paralleli e baricentro appartenente al piano passante per i rispettivi assi di rotazione (cfr. Fig. 2.3 e 2.5), si può calcolare mediante la relazione

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{q}_i^T I_i \dot{q}_i, \quad (10)$$

ove:

$$I_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 & -N_i \sin \alpha_i \\ 0 & M_i & N_i \cos \alpha_i \\ -N_i \sin \alpha_i & N_i \cos \alpha_i & J_i \end{bmatrix} = M_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_{Gi} \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & L_{Gi} \cos \alpha_i \\ -L_{Gi} \sin \alpha_i & L_{Gi} \cos \alpha_i & \rho_i^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

**Dimostrazione.** Omettendo per semplicità di notazione il pedice  $i$ , le coordinate di un generico punto  $P$  del braccio  $L$  risultano (cfr. Fig. 2.7)

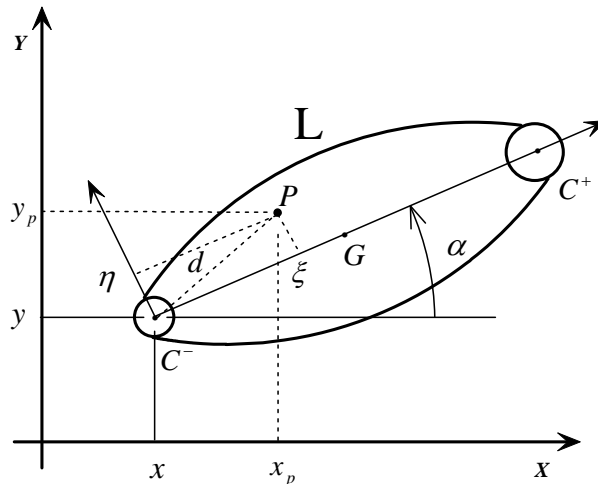


Fig. 2.7 Determinazione delle coordinate di un generico punto  $P$  del braccio  $L$ .

$$\begin{aligned} x_p &= x + \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y_p &= y + \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

da cui è facile dimostrare che il quadrato della velocità di  $P$  vale

$$\begin{aligned}
V_p^2 &= \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\alpha}^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\dot{x}\dot{\alpha}(\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + 2\dot{y}\dot{\alpha}(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha) = \\
&= V_c^2 + \dot{\alpha}^2 d^2 - 2\dot{x}\dot{\alpha}(\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + 2\dot{y}\dot{\alpha}(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha).
\end{aligned} \tag{13}$$

Poiché l'energia cinetica del braccio  $L$  risulta  $T = \frac{1}{2} \int_B V_p^2 dm$ , e per le ipotesi fatte sulle caratteristiche del braccio, segue facilmente la dimostrazione.  $\blacklozenge$

Si consideri ora un robot planare costituito da  $n$  bracci (cfr. Fig. 2.6). Vale il seguente

**Teorema 2.3.** L'energia cinetica del braccio  $i$ -esimo di un generico robot planare si può calcolare mediante la relazione

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_{12\dots i}^T A_i \dot{\alpha}_{12\dots i}, \tag{14}$$

ove la matrice d'inerzia rispetto alle coordinate angolari  $\alpha_{1\dots i}$ , espresse da  $A_i = \{a_{i,hk}\}$ , si può calcolare usando la formula:

$$A_i = R_i^T I_i R_i, \tag{15}$$

in cui:

$$R_i = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \alpha_1 & -L_2 \sin \alpha_2 & \dots & -L_{i-1} \sin \alpha_{i-1} & 0 \\ L_1 \cos \alpha_1 & L_2 \cos \alpha_2 & \dots & L_{i-1} \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

o più direttamente mediante le formule:

$$a_{i,hh} = \begin{cases} M_i L_h^2, & \text{se } h < i \\ J_i = M_i \rho_i^2, & \text{se } h = i \end{cases} \tag{17a}$$

$$a_{i,hk} = \begin{cases} M_i L_h L_k \cos(\alpha_k - \alpha_h), & \text{se } h < k < i \\ M_i L_h L_{Gi} \cos(\alpha_i - \alpha_h), & \text{se } h < k = i \end{cases} \tag{17b}$$

Un'espressione alternativa equivalente più mnemonica per le (17a)-(17b) è

1)  $\forall h \leq i$ ,

$$a_{i,hh} = M_i \tilde{L}_h^2, \quad \tilde{L}_h = \begin{cases} L_h, & \text{if } h < i \\ \rho_i, & \text{if } h = i \end{cases} \tag{18a}$$

2)  $\forall h < k \leq i$ ,

$$a_{i,hk} = M_i \tilde{L}_h \tilde{L}_k \cos(\alpha_k - \alpha_h), \quad \tilde{L}_{h,k} = \begin{cases} L_{h,k}, & \text{if } h, k < i \\ L_{Gi}, & \text{if } h, k = i \end{cases} \quad (18b)$$

**Dimostrazione.** Per il generico braccio  $i$ -esimo, nell'ipotesi che  $x_1 = y_1 = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} x_i &= L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos \alpha_2 + \dots + L_i \cos \alpha_i \\ y_i &= L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin \alpha_2 + \dots + L_i \sin \alpha_i, \\ \alpha_i &= \alpha_i \end{aligned} \quad (19)$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\dot{\alpha}_1 L_1 \sin \alpha_1 - \dot{\alpha}_2 L_2 \sin \alpha_2 - \dots - \dot{\alpha}_i L_i \sin \alpha_i \\ \dot{y}_i &= \dot{\alpha}_1 L_1 \cos \alpha_1 + \dot{\alpha}_2 L_2 \cos \alpha_2 + \dots + \dot{\alpha}_i L_i \cos \alpha_i, \\ \dot{\alpha}_i &= \dot{\alpha}_i \end{aligned} \quad (20)$$

ossia

$$\dot{q}_i = R_i \dot{\alpha}_{1\dots i}. \quad (21)$$

Ne segue che

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{q}_i^T I_i \dot{q}_i = \frac{1}{2} \dot{\alpha}_{12\dots i}^T R_i^T I_i R_i \dot{\alpha}_{1\dots i} \quad (22)$$

e quindi la (15).

Dalla (15) si ha

1)  $\forall h \leq k < i$

$$\begin{aligned} a_{i,hk} &= \begin{bmatrix} -L_h \sin \alpha_h & L_h \cos \alpha_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i & 0 & -N_i \sin \alpha_i \\ 0 & M_i & N_i \cos \alpha_i \\ -N_i \sin \alpha_i & N_i \cos \alpha_i & J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_k \sin \alpha_k \\ L_k \cos \alpha_k \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= M_i L_h L_k \cos(\alpha_k - \alpha_h); \end{aligned} \quad (23)$$

2)  $\forall h < k = i$

$$\begin{aligned} a_{i,hi} &= \begin{bmatrix} -L_h \sin \alpha_h & L_h \cos \alpha_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i & 0 & -N_i \sin \alpha_i \\ 0 & M_i & N_i \cos \alpha_i \\ -N_i \sin \alpha_i & N_i \cos \alpha_i & J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= L_h N_i \cos(\alpha_i - \alpha_h) \end{aligned} \quad (24)$$

3)  $h = k = i$

$$a_{i,ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i & 0 & -N_i \sin \alpha_i \\ 0 & M_i & N_i \cos \alpha_i \\ -N_i \sin \alpha_i & N_i \cos \alpha_i & J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = J_i \quad (25)$$

e quindi le (17a), (17b).

◆

In base al Teorema 2.3, l'energia cinetica del robot risulta

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^T A \dot{\alpha}, \quad (26)$$

ove

$$\alpha = \alpha_{1\dots n} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T \quad (27)$$

e la matrice d'inerzia  $A = A(\alpha)$  del robot rispetto alle coordinate angolari  $\alpha$  si ottiene assemblando le matrici  $A_i$  come mostrato in Fig. 2.8 (cioè sommando a tutti i minori principali di  $A_n$  di ordine  $i < n$  i rispettivi minori  $A_i$ ).

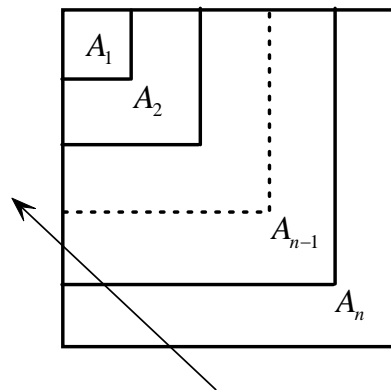


Fig. 2.8 Rappresentazione grafica dell'algoritmo che calcola la matrice d'inerzia del robot.

In Matlab-like l'algoritmo per calcolare la matrice d'inerzia risulta

```
A=An;
for i=n-1:-1:1
A(1:i,1:i)=A(1:i,1:i)+Ai;
end.
```

Inoltre, poiché  $\alpha = U\beta$ , dove

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

l'energia cinetica del robot si può calcolare anche mediante la relazione



$$T = \frac{1}{2} \dot{\beta}^T B \dot{\beta}, \quad (29)$$

ove la matrice d'inerzia  $B = B(\beta)$  del robot rispetto alle coordinate angolari  $\beta$  si ottiene mediante la relazione:

$$B = U^T A(\alpha)U = U^T A(U^{-1}(\beta))U. \quad (30)$$

Si noti che il calcolo della matrice d'inerzia viene effettuato usando congiuntamente le coordinate assolute e relative. Questo consente di semplificare, in maniera naturale, l'espressione algebrica del modello analitico.

Chiaramente, se per un dato  $\beta$  e quindi per un dato  $\alpha = U\beta$  interessa conoscere solo il valore numerico di  $B$  si può calcolare numericamente prima la matrice  $A$  (a partire da  $\alpha$  mediante il Teorema 2.3 e l'algoritmo illustrato in Fig. 2.8) e poi la matrice  $B$  mediante la relazione  $B=U^T A U$  o mediante il seguente algoritmo molto efficiente scritto in linguaggio Matlab-like:

```

for i=n-1:-1:1
    A(:,i)=A(:,i)+A(:,i+1);
end
for i=n-1:-1:1
    A(1:i,i+1)=A(i+1,1:i)';
    A(i,1:i)=A(i,1:i)+A(i+1,1:i);
end
B=A.
    
```

**Osservazione 2.3.** E' importante notare che, sebbene in virtù del Teorema 2.3 l'espressione analitica di  $A_i$  è relativamente semplice, per contro l'espressione analitica di  $A$  è molto complessa e quella di  $B$  risulta estremamente complessa (e.g. l'elemento  $B(1,1)$  di  $B$  è la somma di tutti gli elementi di tutte le matrici  $A_i$  !).

Una volta ottenuta la matrice d'inerzia  $B$ , il modello dinamico del robot si ottiene mediante l'equazione di *Eulero-Lagrange* nella forma usuale (1) o nella nuova forma (6). Nel caso di un robot planare, con bracci come richiesto dal Teorema 2, l'efficienza del metodo stabilito dal Teorema 2.1 può essere ulteriormente migliorata facendo uso del seguente

**Teorema 2.4.** Il gradiente dell'energia cinetica del braccio  $i$ -esimo rispetto a  $\alpha_{12\dots i}$   $[\beta_{12\dots i}]$  può essere calcolato mediante la relazione

$$\frac{\partial T_i}{\partial \beta_{12\dots i}} = c_i = - \begin{bmatrix} 0 \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_2} \tilde{L}_h \dot{\alpha}_h \tilde{L}_k \dot{\alpha}_k \sin(\alpha_k - \alpha_h) \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_3} \tilde{L}_h \dot{\alpha}_h \tilde{L}_k \dot{\alpha}_k \sin(\alpha_k - \alpha_h) \\ \vdots \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_i} \tilde{L}_h \dot{\alpha}_h \tilde{L}_k \dot{\alpha}_k \sin(\alpha_k - \alpha_h) \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial \beta_{12\dots i}} = c_i = - \begin{bmatrix} 0 \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_2} \tilde{L}_h \sum_{p=1}^h \dot{\beta}_p \tilde{L}_k \sum_{q=1}^k \dot{\beta}_q \sin\left(\sum_{r=h+1}^k \beta_r\right) \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_3} \tilde{L}_h \sum_{p=1}^h \dot{\beta}_p \tilde{L}_k \sum_{q=1}^k \dot{\beta}_q \sin\left(\sum_{r=h+1}^k \beta_r\right) \\ \vdots \\ M_i \sum_{h < k: \text{var } \beta_i} \tilde{L}_h \sum_{p=1}^h \dot{\beta}_p \tilde{L}_k \sum_{q=1}^k \dot{\beta}_q \sin\left(\sum_{r=h+1}^k \beta_r\right) \end{bmatrix}, \quad (31a)$$

dove

$$\tilde{L}_m = \begin{cases} L_m, & \text{se } m < i \\ L_{Gi}, & \text{se } m = i \end{cases}, \quad m = \{h, k\} \quad (31b)$$

e la scrittura  $h < k : \text{var } \beta_l$ ,  $l = 2, \dots, i$ , denota l'insieme delle coppie  $h, k$ , con  $h < k$ , tali che l'angolo  $\alpha_{hk} = \alpha_k - \alpha_h = \beta_{h+1} + \beta_{h+2} + \dots + \beta_k$  compreso tra i bracci  $h$  e  $k$  varia con  $\beta_l$ .

**Dimostrazione.** Per il Teorema 2.3, l'energia cinetica del generico braccio  $i$ -esimo risulta

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} M_i \sum_{h=1, \dots, i-1} L_h^2 \dot{\alpha}_h^2 + \frac{1}{2} M_i \dot{\alpha}_i^2 + M_i \sum_{\substack{h=1, \dots, i-1 \\ k=h+1, \dots, i}} \tilde{L}_h \tilde{L}_k \dot{\alpha}_h \dot{\alpha}_k \cos(\alpha_k - \alpha_h) = \\ &= T_c + M_i \sum_{\substack{h=1, \dots, i-1 \\ k=h+1, \dots, i}} \tilde{L}_h \tilde{L}_k \dot{\alpha}_h \dot{\alpha}_k \cos(\alpha_k - \alpha_h), \end{aligned} \quad (32)$$

ove  $T_c$  è l'aliquota di energia cinetica indipendente da  $\beta_{12\dots i}$ .

Dalla (32) segue facilmente l'espressione (31a) del gradiente di  $T_i$  rispetto a  $\alpha_{12\dots i} [\beta_{12\dots i}]$ . ◆

Il vettore  $c$  si può ottenere facilmente assemblando i vari vettori  $c_i$  (i.e. sommando progressivamente alle prime  $i$  componenti di  $c_n$ ,  $i < n$ , i rispettivi vettori  $c_i$ ).

In Matlab-like:

```
c=cn;
for i=n-1:-1:2
c(1:i)=c(1:i)+ci;
end.
```

Infine si fa notare che se il piano del robot è verticale, le coppie gravitazionali si possono facilmente calcolare usando il seguente risultato.

**Teorema 2.5.** Se il piano del robot è verticale, il peso del braccio  $i$ -esimo dà luogo ad una coppia sul giunto  $k$ -esimo,  $k \leq i$ , pari a:

$$u_{agk} = M_i g \sum_{m=k}^i \tilde{L}_m \cos \alpha_m, \quad (33)$$

ove  $g$  è l'accelerazione di gravità e le lunghezze  $\tilde{L}_m$  sono date dalla (31b).

**Dimostrazione.** Segue facilmente tenendo presente la Fig. 2.6.

**Osservazione 2.4.** L'efficienza del metodo proposto è stata esplicitamente confrontata con l'efficienza del metodo Articulated-Body in termini di numero di flops (in ambiente MATLAB<sup>TM</sup>), per eseguire lo stesso passo elementare di integrazione usando le coordinate lagrangiane assolute (cfr. Fig. 2.9). Da questa figura risulta che, per robots industriali con un limitato numero di bracci, il metodo proposto è più efficiente.

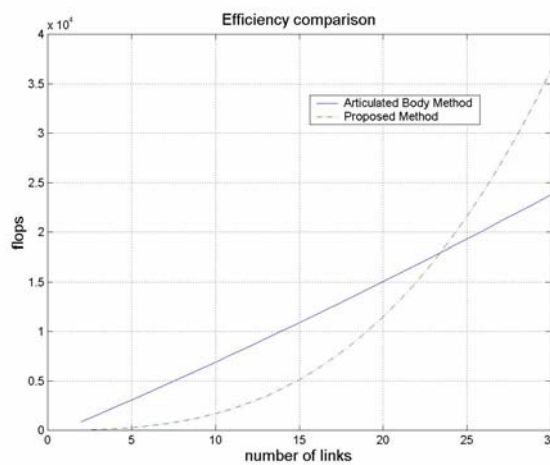


Fig. 2.9 Confronto tra l'efficienza del metodo Articulated-Body e quella del metodo proposto.

**Osservazione 2.5.** Le espressioni analitiche derivate sopra, in forma esplicita, di  $B$ ,  $c$  ed  $u_{ag}$  sono utili per velocizzare la simulazione, per confrontarle con l'approccio numerico proposto ed infine valutare quali termini possono essere semplificati o trascurati nel caso di robots con molti bracci e/o bracci flessibili. Per esempio, per modelli di robots a bracci flessibili, ottenuti discretizzando i bracci, i termini relativi agli angoli di deformazione possono essere semplificati sostituendo la funzione seno con il rispettivo argomento o perfino essere completamente trascurati, considerando soltanto i termini relativi al moto.

### 2.2.2.3 Caso di Studio

Sulla base dei Teoremi 2.2 e 2.3 e della (30), gli elementi  $B(i, j)$ , con  $i=1, \dots, n$  e  $j=1, \dots, n$ , della matrice d'inerzia di un robot planare con tre bracci risulta

$$\begin{aligned}
B(1,1) &= J_1 + J_2 + J_3 + M_2 L_1^2 + M_3 L_1^2 + M_3 L_1^2 + 2N_2 L_1 \cos \beta_2 + 2M_3 L_1 L_2 \cos \beta_2 + 2N_3 L_1 \cos(\beta_2 + \beta_3) \\
&\quad + 2N_3 L_2 \cos \beta_3 \\
B(1,2) &= J_2 + J_3 + M_3 L_2^2 + N_2 L_1 \cos \beta_2 + M_3 L_1 L_2 \cos \beta_2 + N_3 L_1 \cos(\beta_2 + \beta_3) + \\
&\quad + 2N_3 L_2 \cos \beta_3 \\
B(1,3) &= J_3 + N_3 L_1 \cos(\beta_2 + \beta_3) + N_3 L_2 \cos \beta_3 \\
B(2,2) &= J_2 + J_3 + M_3 L_2^2 + 2N_3 L_2 \cos \beta_3 \\
B(2,3) &= J_3 + N_3 L_2 \cos \beta_3 \\
B(3,3) &= J_3 \quad .
\end{aligned} \tag{34}$$

Inoltre le componenti del gradiente dell'energia cinetica, calcolate usando la (31a) del Teorema 2.4, sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \beta_1} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \beta_2} &= -N_2 L_1 \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) \sin \beta_2 - M_3 L_1 L_2 \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) \sin \beta_2 - N_3 L_1 \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3) \sin(\beta_2 + \beta_3) \\
\frac{\partial T}{\partial \beta_3} &= -N_3 L_1 \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3) \sin(\beta_2 + \beta_3) - N_3 L_2 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3) \sin \beta_3 \quad .
\end{aligned} \tag{35}$$

È importante notare che l'espressione del gradiente dell'energia cinetica  $\frac{\partial T}{\partial \beta}$  contiene un più

elevato numero di termini quando vengono usate le coordinate  $\beta$  piuttosto che le coordinate  $\alpha$ , come risulta dalla (35) e, più in generale, dalle (31a) e (31b).

L'efficienza del metodo proposto è illustrata implementando le espressioni (34) e (35) per modellare e simulare le dinamiche del robot planare realistico a tre bracci mostrato in Fig. 2.4. Ogni componente meccanica del robot è stata progettata usando il software CATIA<sup>TM</sup>, con il quale si sono calcolati i parametri inerziali dei bracci necessari per la modellazione del robot. Quando sono applicate le coppie di ingresso di Fig. 2.10, vengono riportati in Fig. 2.11 i risultati di simulazione, in termini di traiettoria dell'organo terminale nello spazio di stato.

È importante notare che come profili di coppia applicati ai giunti sono stati considerati dei segnali chirp caratterizzati da uno spettro relativamente ampio, che produce un movimento oneroso e significativo.

Per calcolare il gradiente dell'energia cinetica sono stati implementati sia un approccio analitico, cioè basato sulla (35), che un approccio numerico (cioè le derivate sono approssimate con i loro rapporti incrementali con un passo di  $10^{-3}$  rad). Nelle Fig. 2.12 e 2.13 sono riportate la percentuale degli errori normalizzati, rispettivamente in termini di angoli e velocità angolari dei bracci, quando è usato il metodo numerico a confronto con il metodo analitico; da ciò è possibile notare che i risultati dei due metodi sono praticamente coincidenti.

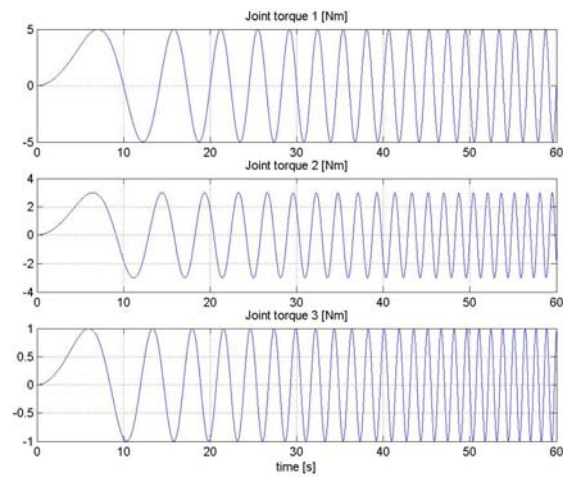


Fig. 2.10 Coppie d'ingresso applicate ai giunti.

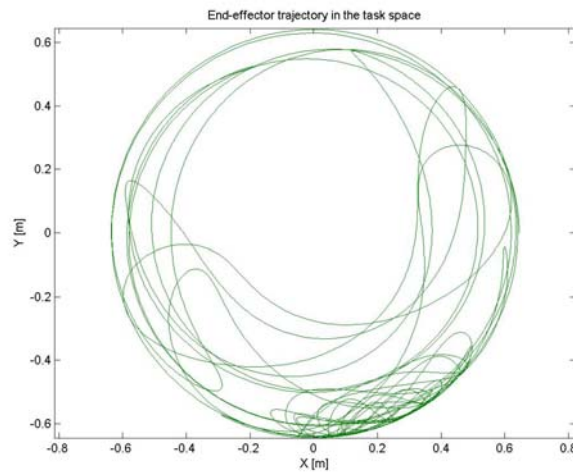


Fig. 2.11 Traiettoria dell'organo terminale nello spazio di stato.

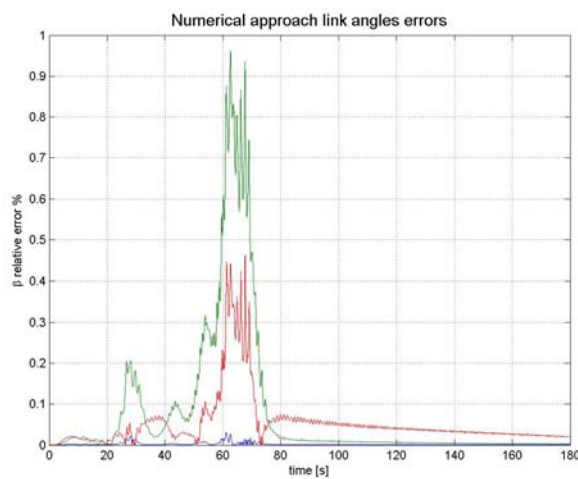


Fig. 2.12 Errori normalizzati in termini di angoli dei bracci quando è usato il metodo numerico a confronto con il metodo analitico.

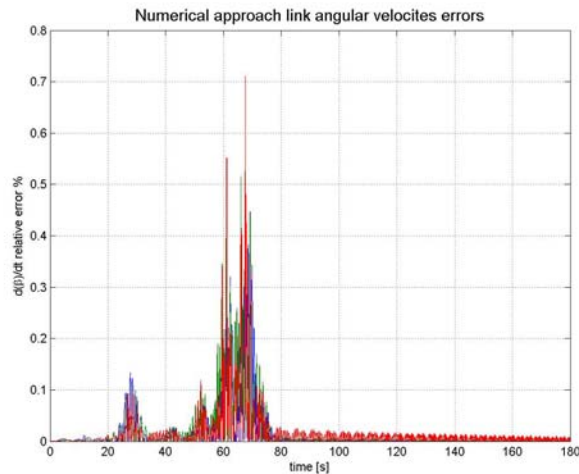


Fig. 2.13 Errori normalizzati in termini di velocità angolare dei bracci quando è usato il metodo numerico a confronto con il metodo analitico.

## 2.3 Vantaggi dei Nuovi Risultati Rispetto ai Metodi Presenti in Letteratura

I risultati del lavoro, che ben motivano la sua validità e consistenza, si possono sintetizzare come segue:

- 1) Viene presentato uno schema di integrazione innovativo che fa uso di un modello matematico contenente un minor numero di termini algebrici (cfr. Teorema 2.1: (7) e Figs. 2.1 e 2.2).
- 2) Viene fornito un efficiente metodo numerico che consente di calcolare, con prefissato errore massimo, il gradiente dell'energia cinetica a partire dalla conoscenza numerica della matrice d'inerzia  $B$  anziché, come solitamente è in uso in letteratura, usare complessi sviluppi di tipo analitico dell'espressione in forma chiusa di  $B$  (cfr. Lemma 2.1: (8) e (9)).

La precisione e l'efficienza di tale metodo viene messa in evidenza nel sottoparagrafo 2.4; a tal proposito si fa notare che i test effettuati per il confronto tra il metodo analitico e quello numerico risultano particolarmente significativi per la scelta opportuna delle coppie di ingresso: segnali chirp caratterizzati da spettri abbastanza ampi.

- 3) Dato che:
  - a) in letteratura esistono metodi veloci ed efficienti per calcolare la matrice d'inerzia,
  - b) ci sono molte situazioni in cui l'energia cinetica è praticamente stazionaria rispetto ad alcune variabili lagrangiane e/o alcune componenti delle forze centrifughe e di Coriolis danno luogo ad un effetto trascurabile, quali, ad esempio, quelle di deformazione,
  - c) i termini centrifughi e di Coriolis, calcolati usando le formule analitiche, sono molto onerosi,

può essere utile calcolare  $\frac{\partial T}{\partial \beta}$  numericamente ed in questo lavoro sono state fornite le formule numeriche per il suo calcolo con la relativa precisione.

- 4) Il calcolo della matrice d'inerzia viene condotto mediante l'uso congiunto di coordinate assolute e relative. Ciò consente di semplificare in modo naturale l'espressione algebrica del modello analitico (cfr. (26), (30) e Teorema 2.4: (31a,b)).
- 5) L'aver fornito un'espressione analitica dei termini del modello consente di semplificare il modello di un robot flessibile, ottenuto per discretizzazione dei bracci, in quanto i termini in *sin* degli angoli di deformazione si possono approssimare con i loro argomenti o addirittura trascurare e così i termini in *cos* degli angoli di deformazione si possono approssimare con i termini costante e del secondo ordine o addirittura con il solo termine costante dello sviluppo in serie (cfr. (26) e (31)).
- 6) Il metodo presentato, sebbene per comodità è illustrato per un robot planare con piano non necessariamente orizzontale (e, quindi, con modello contenente anche i termini di gravità (cfr. 33) consente ad uno studioso e/o ad un ingegnere non molto esperto di meccanica di modellare facilmente (cfr. Teorema 2.2) robots con bracci realistici (cfr. Fig. 2.4) e, con un minimo sforzo, anche robots spaziali. Inoltre si è anche mostrato che tale metodo è più efficiente, soprattutto quando il numero dei bracci non è molto elevato, rispetto ad uno dei metodi di ordine  $N$  ritenuti più efficienti in letteratura (vedi Osservazione 2.4).

# Bibliografia

---

- [1] A. D'Anna e P. Renno, 1987, *Elementi di Meccanica Razionale*, Edizioni GlauX, Napoli, I.
- [2] A. R. Guido e L. Della Pietra, 1991, *Lezioni di Meccanica delle Macchine*, CUEN.
- [3] R. Featherstone, 1987, *Robot Dynamics Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ Lancaster.
- [4] W. Khalil, and E. Dombre, 2002, *Modelling, Identification and Control of Robots*, Hermes Penton Science, London, UK.
- [5] L. Sciavicco and B. Siciliano, 2000, *Modelling and Control of Robot Manipulators*, Springer-Verlag, 2<sup>nd</sup> Ed., London, UK.
- [6] G. Celentano, 2004, *Dinamica e Controllo dei Sistemi*, in corso di pubblicazione.
- [7] G. Ambrosino, 2003, *Modellistica e Simulazione*, Rapporto Interno al D.I.S.
- [8] R. Featherstone and D.E. Orin, "Robot Dynamics: Equations and Algorithms," *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 826-834, 2000.
- [9] J.J. Uicker, 1965, *On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4x4 Matrices*, PhD thesis, Northwestern University, Evanston, IL.
- [10] M.W. Walker and D.E. Orin, "Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms," *Transaction of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 104, pp. 205-211, 1982.
- [11] A. Jain, "Unified formulation of dynamics for serial rigid multibody systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 3, pp. 531-542, 1991.
- [12] J.J. Uicker, "Dynamic Behavior of Spatial Linkages," *Transaction of the ASME Journal of Engineering for Industry*, vol. 91, pp. 251-258, 1969.
- [13] T.R. Kane, and D.A. Levinson, "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics," *International Journal of Robotics Research*, vol. 2, no. 3, pp. 3-21, 1983.
- [14] M.E. Kahn, "The Near Minimum-Time Control of Open-Loop Articulated Kinematic Chains," AI Memo 106, Stanford AI Lab.
- [15] J.M. Hollerbach, "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 10, no. 11, pp. 730-736, 1980.



- [16] L. Celentano, F. Garofalo, B. Siciliano, and L. Villani, "A Fire Fighting Robotic System for Road and Railway Tunnels", poster exhibited at *SSRR (Safety and Service Rescue Robots) 2004*, Bonn, Germany, May 2004.
- [17] L. Celentano, B. Siciliano, and L. Villani, "Design Issues for a Fire-Fighting Robot on Tunnel Intervention", presented at the *International Conference on Mechatronics & Robotics 2004*, sponsored by *IEEE Industrial Electronics Society*, APS-European Centre for Mechatronics, Aachen, Germany, September 2004.
- [18] L. Celentano, R. Iervolino, "Active Control of a Single-Point Moored Tanker", presented at *OMC 2005, Offshore Mediterranean Conference & Exhibition*, Ravenna, Italy, March 2005.
- [19] L. Celentano, B. Siciliano, and L. Villani, "A Robotic System for Fire Fighting in Tunnels", presented at *IEEE Conference SSRR05*, Kobe, Japan, June 2005.
- [20] L. Celentano, R. Iervolino, "Low Cost Control of an Offshore Oil Loading System", presentato al *49° Convegno Nazionale A.N.I.P.L.A. "Automazione per lo sviluppo e la competitività delle P.M.I."*, Napoli, Novembre 2005.
- [21] L. Celentano, F. Garofalo, B. Siciliano, and L. Villani, "A Robotic System for Fire Fighting and Prevention in Tunnels", presentato al *49° Convegno Nazionale A.N.I.P.L.A. "Automazione per lo sviluppo e la competitività delle P.M.I."*, Napoli, Novembre 2005.
- [22] L. Celentano, C. Fusco e R. Porso, "Un Simulatore Hardware-Software di un Sistema Robotizzato per lo Spegnimento di un Incendio Mobile e/o di Intensità Variabile", poster esposto al *49° Convegno Nazionale A.N.I.P.L.A. "Automazione per lo sviluppo e la competitività delle P.M.I."*, Napoli, Novembre 2005.
- [23] L. Celentano, F. Garofalo, B. Siciliano e L. Villani, "Un Sistema Robotizzato per lo Spegnimento e la Prevenzione di Incendi in Galleria", *Automazione e Strumentazione*, Luglio-Agosto 2006.
- [24] L. Celentano e R. Iervolino, "Controllo a Basso Costo di un Sistema Offshore di Caricamento del Petrolio", *Automazione e Strumentazione*, Ottobre 2006.
- [25] L. Celentano, R. Iervolino, "A New Method for Robot Modeling and Simulation", to appear on *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, December 2006.

# **Parte II**

---

## **Cenni sulla Modellistica dei Sistemi Flessibili Mobili e/o Articolati**

# 3 Metodi Classici di Modellazione

## 3.1 Metodi Classici di Modellazione

La maggior parte delle strutture flessibili può essere considerata come un sistema a parametri distribuiti.

Per i sistemi a parametri distribuiti, cioè quando la banda del segnale di ingresso è molto ampia e/o il sistema è composto da elementi distribuiti (ad esempio masse distribuite, induttanze e/o capacità distribuite, ...) o matematicamente quando il sistema è descritto da equazioni differenziali alle derivate parziali nello spazio e/o nel tempo, il problema della modellistica è sentito e abbastanza complesso.

Infatti, poiché i modelli con equazioni alle derivate parziali sono difficili da trattare sia analiticamente che numericamente (esistono dei metodi analitici, e.g. il *metodo per serie o per modi*, ma non sono sempre applicabili e quando lo sono risultano particolarmente difficili) nella pratica si sono sviluppati diversi metodi semplificati, che approssimano un sistema a parametri distribuiti o a dimensione infinita con uno a parametri concentrati o a dimensione finita effettuando una discretizzazione spaziale, tra cui il *metodo alle differenze* ed il *metodo agli elementi finiti*.

Questi metodi sono validi per i sistemi flessibili trattati dagli strutturisti ma per quanto riguarda i sistemi meccanici articolati flessibili il problema è ancora aperto in quanto non vi sono ancora in letteratura metodi assestati e generali in proposito [1-4].

### 3.1.1 Metodo per Serie o per Modi

Alla base del *metodo per serie o per modi* vi è l'idea di considerare il moto del sistema come la sovrapposizione di un'infinità numerabile di oscillazioni elementari dette modi.

In genere un sistema a parametri distribuiti è descritto da un sistema di equazioni alle derivate parziali del tipo:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i \left( t, \xi_1, \xi_2, \dots, \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1}, \frac{\partial \xi_1}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial s_1^2}, \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial s_1 \partial s_2}, \dots, \frac{\partial^p \xi_1}{\partial s_1^p}, \frac{\partial^p \xi_1}{\partial s_1^{p-1} \partial s_2}, \dots, u_d, u_c, \dots \right) \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

ove:

$\xi(t, s) \in R^n$  è il vettore delle incognite,

$s \in R^v$  è il vettore delle "coordinate spaziali",

$u_d(t, s) \in R^h$  è il vettore degli ingressi distribuiti,

$u_c(t) \in R^k$  è il vettore degli ingressi concentrati,

con opportune condizioni iniziali e/o al contorno che possono coinvolgere gli eventuali ingressi distribuiti e concentrati.

La determinazione delle soluzioni e delle proprietà del sistema considerato, di solito, presenta notevoli difficoltà anche quando esso è lineare.

In alcuni casi la soluzione viene cercata nella classe delle funzioni

$$\xi_i(t, s_1, s_2, \dots) = x_i(t) p_{1i}(s_1) p_{2i}(s_2) \dots, \quad (2)$$

ossia con il *metodo di separazione delle variabili*.

La soluzione per serie può essere ottenuta anche con sistemi completi di funzioni modali diverse da quelle trigonometriche. Di solito è opportuno operare con sistemi completi ortogonali.

Inoltre, è stato mostrato che esso risulta particolarmente utile per problemi in cui la geometria è sufficientemente semplice in modo da consentire una buona selezione dell'insieme delle funzioni spaziali [1].

Tale metodo, però, non è sempre agevole e/o applicabile, basti pensare che la determinazione dei modi, qualora essi esistano, presenta notevoli difficoltà, e quando lo è per avere una buona soluzione in genere occorre considerare molti modi a causa della debole convergenza della serie [3].

### 3.1.2 Metodo alle Differenze

Nei *metodi alle differenze* le derivate rispetto allo spazio che compaiono nel sistema vengono approssimate mediante operatori alle differenze.

Per esempio per una funzione regolare  $\xi$  la derivata spaziale  $\frac{\partial \xi(t_m, s_n)}{\partial s}$  può essere approssimata sia dalla differenza in avanti

$$\frac{\Delta_{+s}\xi}{\Delta s} = \frac{\xi(mh, (n+1)k) - \xi(mh, nk)}{k}, \quad (3)$$

che dalla differenza all'indietro

$$\frac{\Delta_{-s}\xi}{\Delta s} = \frac{\xi(mh, nk) - \xi(mh, (n-1)k)}{k}, \quad (4)$$

che, infine, dalla differenza centrata

$$\frac{\Delta_s \xi}{\Delta s} = \frac{\xi(mh, (n+1)k) - \xi(mh, (n-1)k)}{2k}. \quad (5)$$

Analogamente si procede nel caso di più variabili spaziali. In particolare la derivata seconda spaziale può essere ben approssimata dalla differenza seconda

$$\frac{\Delta_s^2 \xi}{(\Delta s)^2} = \frac{\xi(mh, (n+1)k) - 2\xi(mh, nk) + \xi(mh, (n-1)k)}{k^2}. \quad (6)$$

Ovviamente la scelta del passo di discretizzazione  $k$ , la convergenza e la consistenza di tali approssimazioni quando sono applicate ai sistemi flessibili da trattare rappresentano un problema rilevante [3-4].

### 3.1.3 Metodo agli Elementi Finiti

Il metodo agli elementi finiti consiste nel

1. suddividere il dominio “spaziale” di definizione dell’incognita in elementi di forma opportuna, generalmente semplice, quali ad esempio:
  - caso monodimensionale (1D): segmenti;
  - caso bidimensionale (2D): triangoli o quadrilateri;
  - caso tridimensionale (3D): tetraedri o esaedri;
2. considerare la funzione incognita, all’interno di ciascun elemento, come interpolazione, mediante funzioni note, dei valori incogniti nei punti nodali;
3. calcolare i valori incogniti nei punti nodali mediante un modello a dimensione finita ottenuto minimizzando un opportuno funzionale.

Per i sistemi meccanici questo metodo si applica come segue [3-4]:

1. come valori incogniti nei punti nodali si prendono, in generale, gli spostamenti e/o le rotazioni dei nodi;
2. come funzioni note si considerano quelle che, combinate linearmente con i valori incogniti, forniscono la soluzione statica all’interno dell’elemento soggetto al sistema di sollecitazione nodale associato ai valori incogniti;
3. come funzione da minimizzare si considera la Lagrangiana  $L = T - U$ , ove  $T$  è l’energia cinetica di tutti gli elementi ed  $U$  è l’energia potenziale totale (elastica, gravitazionale, ...).

La minimizzazione di  $L$  si ottiene risolvendo le ben note equazioni di Eulero-Lagrange.

I modelli dinamici che così si ottengono sono del tipo

$$M\ddot{q} + Kq = f \quad (7)$$

ove:

$M$  è la matrice d’inerzia del sistema,

$K$  è la matrice di rigidità del sistema,

$q$  è il vettore delle coordinate lagrangiane,

$f$  è il vettore delle forze generalizzate,

oppure nella forma I-S-U

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} f \quad (8)$$

$$\text{con } x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}.$$

# 4 Nuovi Risultati

## 4.1 Una Tecnica Modulare per Modellare una Struttura Flessibile a Catena

In questo paragrafo viene presentata una tecnica modulare per modellare una struttura composta da un numero finito di bracci flessibili. La tecnica consiste nel modellare in maniera efficiente il generico braccio flessibile (nel caso planare il suo asse deformato viene approssimato con una spline), soggetto a generiche forze e coppie terminali, in coordinate di movimentazione assolute e coordinate di deformazione relative. Il modello risultante viene ottenuto facilmente assemblando i modelli dei vari bracci mediante la tecnica della congruenza con l'ausilio del nuovo schema di integrazione proposto per i rigidi e/o con il metodo fornito per il calcolo del gradiente dell'energia cinetica. Il metodo viene illustrato derivando prima il modello di un braccio flessibile, poi tale modello viene utilizzato per ottenere il modello di un robot planare con due bracci flessibili, giunti anch'essi flessibili, con un carico di massa concentrato nella mano e due controllori PD.

Non sono state riportate la formulazione e la dimostrazione dei risultati presentati in questo paragrafo perché contenute in [12], che non è stato ancora pubblicato.

### 4.1.1 Modello di un Braccio Flessibile

Al fine di derivare il modello di una struttura flessibile a catena si consideri il generico braccio, per brevità supposto omogeneo, ad asse rettilineo e a sezione costante.

Si indichino con

$q_r$  le coordinate lagrangiane (rispetto ad un riferimento assoluto) che consentono di descrivere il movimento (cfr. Fig. 1.1),

$q_d$  le coordinate lagrangiane (rispetto ad un riferimento solidale al corpo rigido) che consentono di descrivere la deformazione (cfr. Fig. 1.2),

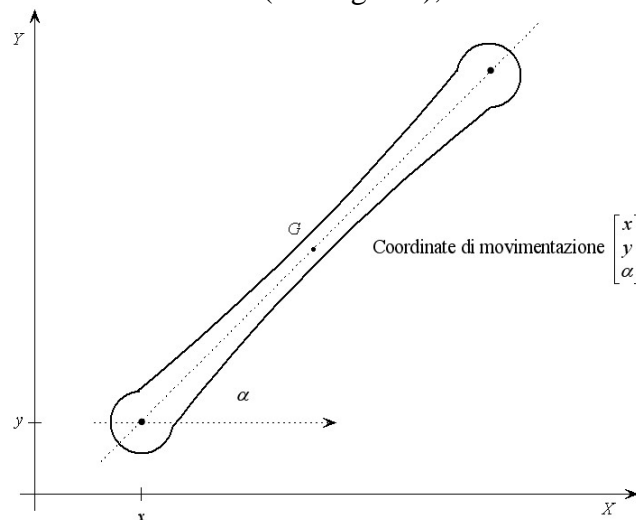


Fig. 1.1 Braccio flessibile e sue coordinate di movimentazione.

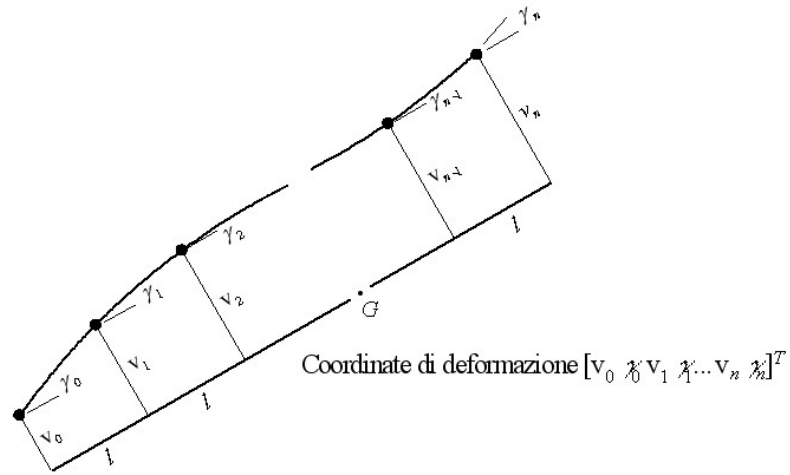


Fig. 1.2 Braccio flessibile e sue coordinate di deformazione.

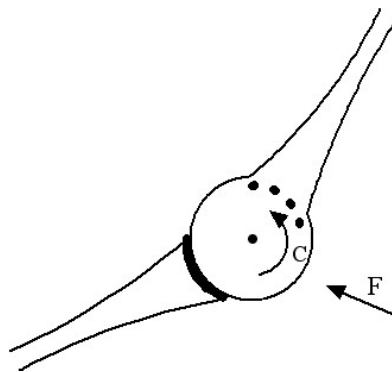


Fig. 1.3 Bracci collegati ad un motore con giunti elastici.

si veda per la deformata di un elemento di lunghezza  $l$  la Fig. 1.4,

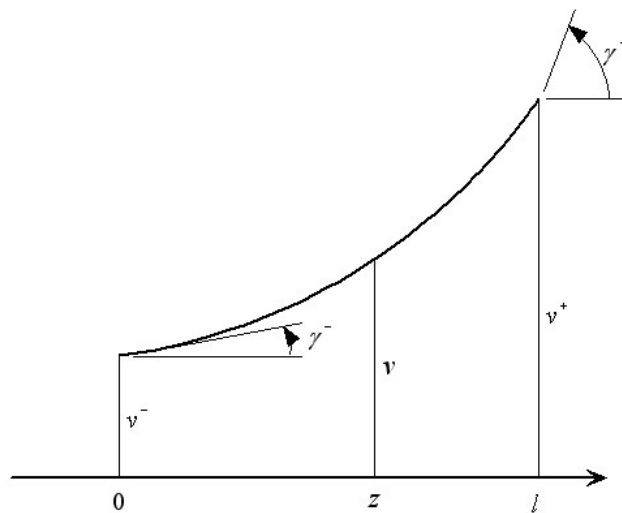


Fig. 1.4 Deformata di un elemento di lunghezza  $l$ .

si ricavi l'energia cinetica e l'energia elastica di un elemento di lunghezza  $l$  in funzione delle coordinate di deformazione.

Dividendo il braccio in  $n$  elementi, ciascuno di lunghezza  $l=L/n$ , prendendo come coordinate le grandezze di Fig. 1.2, ed utilizzando il metodo di Eulero-Lagrange si ottiene il modello del braccio nella forma classica.

A tale modello si può far corrispondere un blocco Simulink del tipo di Fig. 1.5, ove:



Fig. 1.5 Schema Simulink rappresentante il generico braccio flessibile.

$F_x^-, F_y^-, C^-, F_x^+, F_y^+, C^+$  sono le forze e le coppie agenti agli estremi,

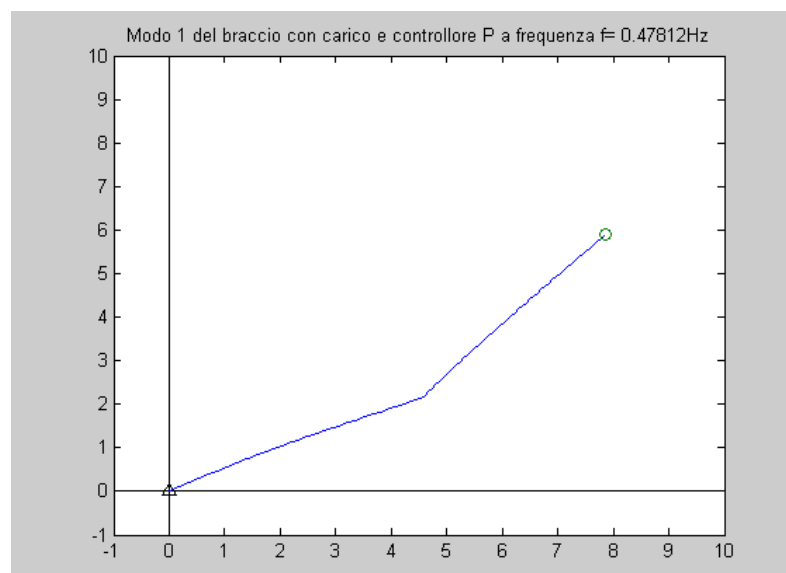
$q_r = (x^-, y^-, \alpha^-, x^+, y^+, \alpha^+)$ ,

$q_f = (v_1, \gamma_1, v_2, \gamma_2, \dots, v_n, \gamma_n)$ .

#### 4.1.2 Caso di Studio

Utilizzando la tecnica presentata è stato modellato un robot planare con due bracci flessibili, giunti anch'essi flessibili, con un carico di massa concentrato nella mano e due controllori PD.

Nelle Fig. 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 sono stati riportati gli andamenti di alcuni modi relativi ad una postura fissata.





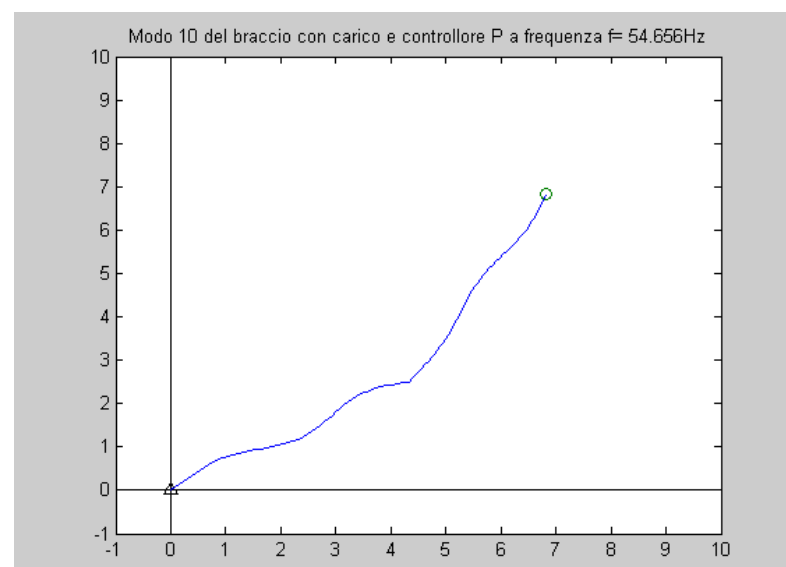
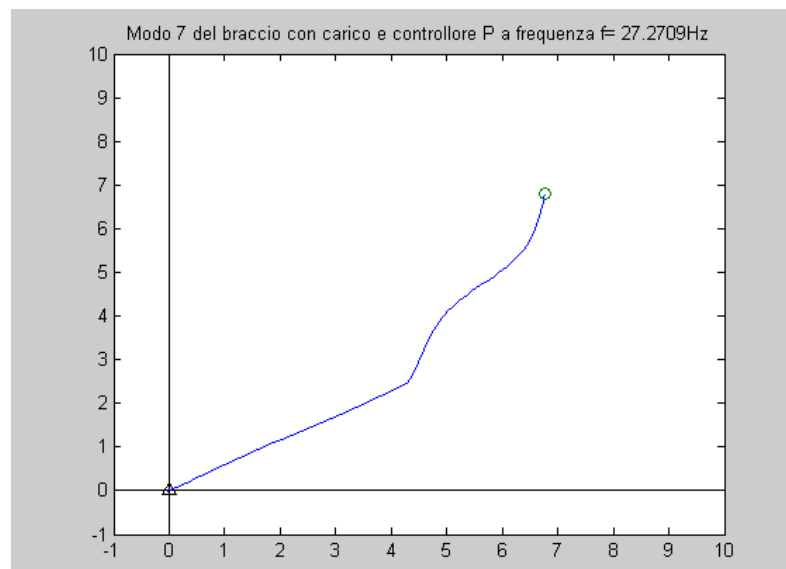
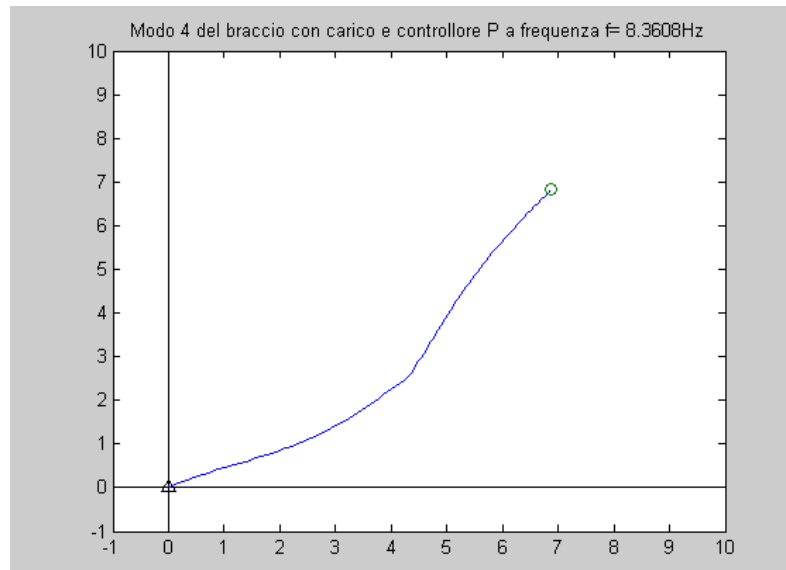


Fig. 1.6-1.9 Vari modi di evoluzione del braccio con carico e controllore.

Nella Fig. 1.10 è riportata la risposta in frequenza: spostamento verticale/coppia primo giunto.

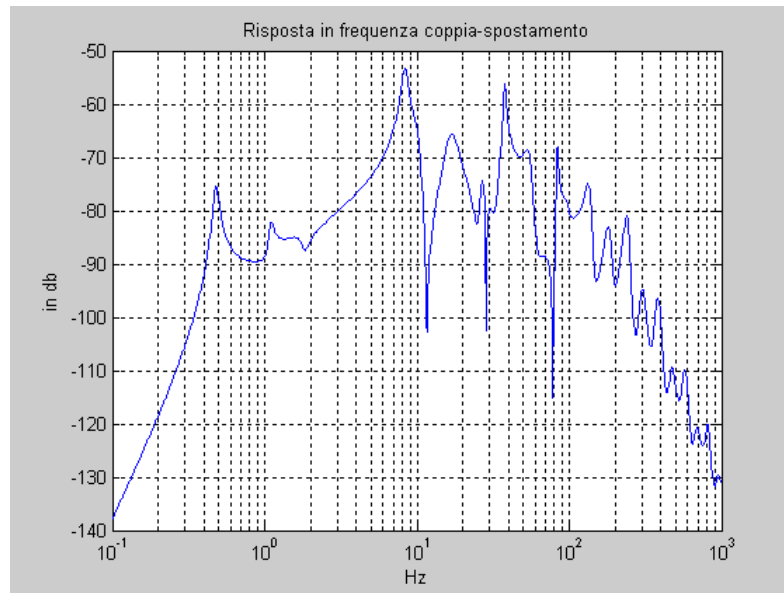


Fig. 1.10 Risposta in frequenza: spostamento verticale/coppia primo giunto.

Infine, nella Fig. 1.11 è riportata la risposta impulsiva: spostamento verticale/ coppia primo giunto.

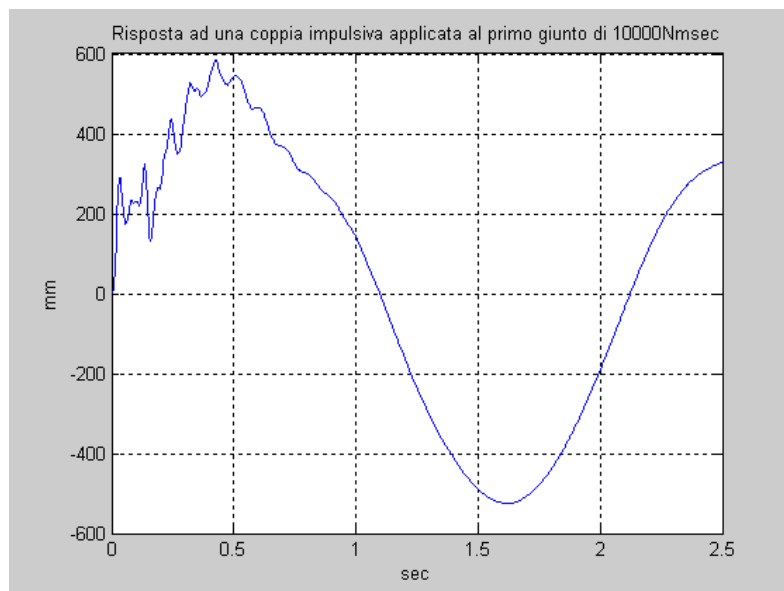


Fig. 1.11 Risposta impulsiva: spostamento verticale/ coppia primo giunto.

**Osservazione 1.1.** Dalla Fig. 1.10 (e da altri casi esaminati) segue che un robot flessibile può presentare dei picchi di risonanza notevoli anche alle basse frequenze e che possono quindi essere facilmente eccitati. Ciò comporta che l'errore di inseguimento di alcune traiettorie risulta alquanto elevato e che, inoltre, vengono richieste coppie ad elevato contenuto armonico, non sempre facili da ottenere con i normali motori di coppia (cfr. Fig. 1.12, 1.13).

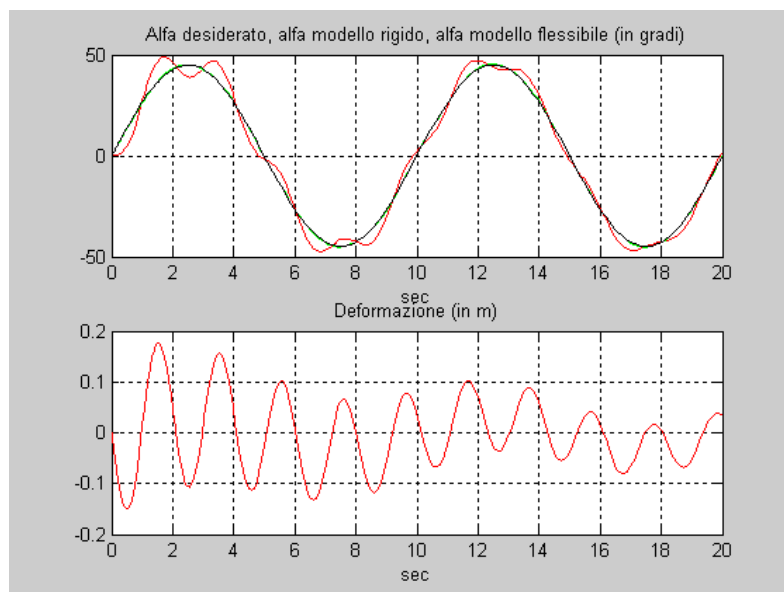


Fig. 1.12 Errore di inseguimento di traiettorie significative.

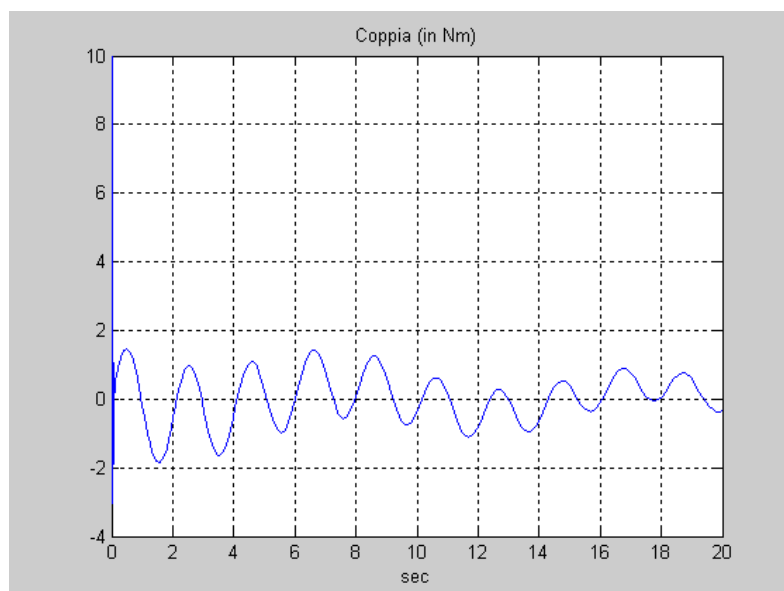


Fig. 1.13 Andamento di coppia.

# Bibliografia

---

- [1] J.L. Junkins and Y. Kim, 1993, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series.
- [2] R.D. Robinett III, C. Dohrmann, and others, 2002, *Flexible Robot Dynamics and Controls*, IFSR International Series on System Science and Engineering, vol. 19, Springer.
- [3] G. Celentano, 1998, *Modellistica e Controllo Attivo delle Strutture Flessibili*, Dispense per la II Scuola Nazionale CIRA per dottorandi in Automatica “Antonio Ruberti”, Bertinoro (Forlì).
- [4] G. Celentano, 2004, *Dinamica e Controllo dei Sistemi*, in corso di pubblicazione.
- [5] L. Nunziante, 2004, *Il problema di equilibrio elastico: Energia potenziale totale. Applicazioni alle travi inflesse*, Dispense del Ciclo di Seminari sugli Elementi Finiti, Napoli, I.
- [6] M. Fraldi, 2004, *Metodo degli spostamenti, matrice di rigidità, funzioni di forma per elementi finiti*, Dispense del Ciclo di Seminari sugli Elementi Finiti, Napoli, I.
- [7] L. Nunziante, 2004, *Elementi finiti per problemi bidimensionali. Il caso della lastra*, Dispense del Ciclo di Seminari sugli Elementi Finiti, Napoli, I.
- [8] M. Fraldi, 2004, *Applicazioni degli elementi finiti a strutture mono e bidimensionali. Esempi in ambito civile e biomeccanico*, Dispense del Ciclo di Seminari sugli Elementi Finiti, Napoli, I.
- [9] A. Tralli, 2004, *Gli elementi finiti in problemi tecnici dell'ingegneria civile: tunnels, edifici murari*, Dispense del Ciclo di Seminari sugli Elementi Finiti, Napoli, I.
- [10] G. Ambrosino, G. Celentano, and R. Setola, “A Spline Approach to State Reconstruction for Optimal Active Vibration Control of Flexible Systems”, Proceedings of the 4<sup>th</sup> IEEE Conference on Control Applications, 1995, New Orleans, Louisiana, USA.
- [11] F. Amato, G. Celentano, and R. Iervolino, “Tracking Control of Flexible Manipulators via an LMI Approach”, Proceedings of the 7<sup>th</sup> IEEE Conference on Control Applications, 1998, Trieste, I.
- [12] L. Celentano, “Una Tecnica Modulare per Modellare una Struttura Flessibile a Catena”, possibile sottomissione all'*ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2006.

# **Parte III**

---

## **Controllo dei Sistemi Lineari e Non ed a Parametri Incerti**

# Introduzione

---

Il controllo dei sistemi lineari e non soggetti a disturbi e ad incertezze è sicuramente il problema più importante e più studiato nella letteratura passata e recente del settore [1-46]. Quando il sistema è non lineare e anche quando esso è lineare ed il segnale di riferimento e/o il disturbo non è di tipo polinomiale i risultati teorici esistenti sono veramente pochi e non sempre di utilità pratica, sia perché l'errore di inseguimento, in generale, non può essere nullo, sia perché si riferiscono a classi di sistemi di scarsa rilevanza ingegneristica, sia perché tali metodi di progetto spesso sono complessi, poco robusti e non consentono facilmente di soddisfare più di una specifica [4-6], [11-22].

A riguardo si pensi ai problemi per ridurre le vibrazioni e/o le oscillazioni di strutture di ingegneria meccanica, civile, navale ed aeronautica e spaziale, al problema dell'inseguimento di una traiettoria da parte di un robot, di un veicolo o un velivolo [30-36], [43-46].

Ecco perché nasce l'esigenza di affrontare il problema a partire da nuove definizioni di stabilità pratica, di stabilità esponenziale, di velocità relativa pratica di convergenza ed occorrono nuovi risultati che siano validi per una categoria di sistemi abbastanza ampia, di rilevante interesse ingegneristico, per traiettorie di riferimento qualsiasi, semplici da applicare e poco conservativi e robusti.

In tal senso si sono orientati ed incanalati lo studio e la ricerca oggetto di questa fondamentale sezione della tesi di dottorato.

# 5 Metodi Classici per il Controllo dei Sistemi Lineari e non

## 5.1 Metodi Classici per l'Analisi della Stabilità Robusta e loro Utilizzo per il Progetto di un Controllore Robusto

Quasi tutti i sistemi “naturali” (presenti in natura) e/o non controllati sono stabili e soggetti a disturbi e/o incertezze parametriche e per annullare o ridurre il loro effetto vengono quasi sempre retroazionati.

Infatti, tenendo presente il classico sistema di controllo in controeazione rappresentato dal seguente schema a blocchi

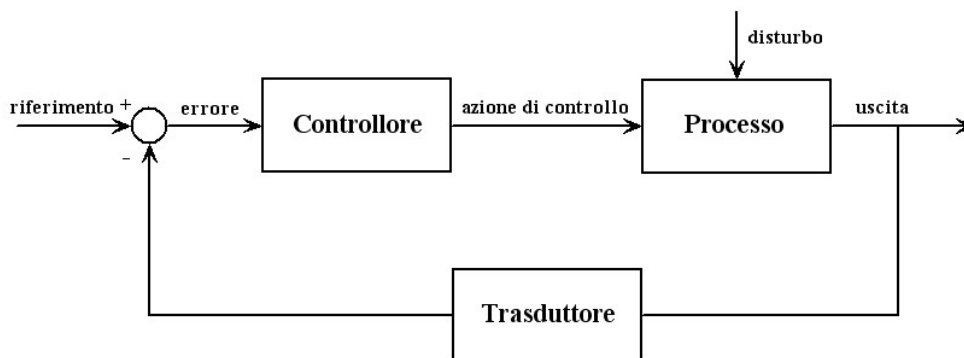


Fig. 1.1 Schema concettuale di un classico sistema di controllo in controeazione.

si comprende come la controeazione abbia un effetto linearizzante sul processo, faccia diminuire la sensibilità alle variazioni dei parametri del processo ed attenui notevolmente i disturbi.

E' importante, però, tener presente che la controeazione, se non opportunamente progettata, può essere causa di instabilità; ecco perché nella teoria del controllo lo studio della stabilità è di fondamentale importanza.

Le definizioni di stabilità più affermate ed utilizzate in letteratura sono la stabilità BIBO come stabilità esterna e quella nel senso di Lyapunov come stabilità interna.

Entrambe si enunciano a partire dalla rappresentazione esplicita di un sistema dinamico rispettivamente nella forma I-U

$$y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0, t]}) \quad (1)$$

e nella forma I-S-U

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0, t]}) \quad (2a)$$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \quad (2b)$$

ove

$t \in T; u \in U; y \in Y; x \in X$ .

**Definizione 5.1.** Un sistema S con rappresentazione esplicita nella forma I-U  $(X, \gamma)$  si dice *stabile ingresso limitato-uscita limitata nello stato*  $x_0$  se,  $\forall t_0 \in T$ , considerando le norme  $\|\cdot\|_u$  in  $U$  e  $\|\cdot\|_y$  in  $Y$ , si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, t_0} > 0 \text{ tale che } \|u(t)\|_u < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3)$$

implica

$$\|y(t)\|_y < \delta_{\varepsilon, t_0}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4)$$

**Definizione 5.2.** Uno stato di equilibrio  $x_e$ , corrispondente ad un ingresso  $\hat{u}$ , di una rappresentazione esplicita nella forma I-S-U  $(X, \varphi, \eta)$  di un sistema S si dice *localmente stabile* nel senso di Lyapunov se,  $\forall t_0 \in T$  e  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, t_0} > 0$  tale che

$$\|\varphi(t, t_0, x_0, \hat{u}) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall x_0 \text{ tale che } \|x_0 - x_e\| < \delta_{\varepsilon, t_0}, \quad \forall t \geq t_0; \quad (5)$$

se, inoltre, vale la seguente proprietà, detta di attrattività

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, t_0, x_0, \hat{u}) - x_e\| = 0, \quad (6)$$

lo stato  $x_e$  si dice *asintoticamente localmente stabile*.

Dalla precedente deriva poi la definizione di *regione di asintotica stabilità (RAS)* di uno stato di equilibrio localmente asintoticamente stabile per un sistema S.

**Definizione 5.3.** Data una rappresentazione esplicita I-S-U  $(X, \varphi, \eta)$  di un sistema S, si definisce *regione di asintotica stabilità di uno stato di equilibrio*  $x_e = \varphi(t, t_0, x_e, \hat{u})$  asintoticamente localmente stabile l'insieme  $S(x_e)$  degli stati  $x_0$  che soddisfano la proprietà di attrattività e la relazione per cui  $\varphi(t, t_0, x_0, \hat{u}) \in S(x_e)$ .

Nel caso in cui  $S(x_e) = X$  il sistema si dice *globalmente asintoticamente stabile*.

A partire da queste definizioni occorre chiarire cosa si intende per stabilità robusta di un generico sistema dinamico S.

La *robustezza di stabilità*, per grandi linee, può essere sia rispetto

1. a variazioni dei parametri di alcuni componenti del sistema (si pensi al momento d'inerzia di un sistema, al guadagno di un amplificatore, alla costante di tempo di un attuatore o di un sensore, ...) o a variazione di alcuni parametri globali del sistema (ad esempio il guadagno di anello, la fase di anello, ...) o alla presenza di nonlinearità non perfettamente note o ben modellate

sia rispetto

2. al soddisfacimento di determinate specifiche (ad esempio sulla velocità di convergenza, sulla precisione statica e/o dinamica, ...) nonostante la presenza di variazioni parametriche e/o disturbi.



Propedeutici per l'analisi della stabilità robusta di un sistema ed utili per il progetto di un sistema di controllo robusto sono i metodi di analisi di stabilità presenti in letteratura per i sistemi LTI e per i sistemi non lineari.

I metodi di analisi della stabilità per i sistemi lineari e stazionari possono dividersi in:

1. metodi legati ai poli della f.d.t. del sistema e/o agli autovalori della matrice dinamica,
2. metodi frequenziali, cioè legati all'analisi quasi sempre grafica della risposta in frequenza del sistema a ciclo aperto,
3. metodi che intrinsecamente tengono conto di variazioni di alcuni parametri del sistema.

Per quanto riguarda i *metodi di analisi della stabilità legati ai poli della f.d.t. del sistema e/o agli autovalori della matrice dinamica nel caso dei sistemi a tempo continuo*, valgono i seguenti risultati:

**Teorema 5.1 Condizione necessaria e sufficiente per la globale asintotica stabilità**

L'origine dello spazio di stato del sistema LTI

$$\dot{x} = Ax \tag{7}$$

è globalmente asintoticamente stabile se gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa, cioè se

$$\text{Re } \lambda_i(a) < 0; \tag{8}$$

è stabile se gli autovalori di  $A$  sono a parte reale non positiva,  $\text{Re } \lambda_i(a) \leq 0$ , e gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità geometrica unitaria.

**Criterio 5.1 Condizione necessaria per la globale asintotica stabilità**

Condizione necessaria per la globale asintotica stabilità di un sistema LTI  $\dot{x} = Ax$  è che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice dinamica  $A$  abbiano lo stesso segno.

**Criterio 5.2 Criterio di Routh**

Dato il polinomio monico di ordine  $n$

$$p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n \tag{9}$$

si costruisca la *tabella di Routh* nel seguente modo

$s^n$	1	$a_2$	$a_4$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...
·	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
·	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
·	...	...	...	...
1				

ove

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{-a_1}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{-a_1}, \quad \dots \quad (10a)$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad \dots \quad (10b)$$

fino ad ottenere  $n+1$  righe,

allora condizione necessaria e sufficiente affinché le radici del polinomio considerato abbiano tutte parte reale negativa è che gli elementi della prima colonna della Tabella di Routh siano positivi; più dettagliatamente il numero delle radici con parte reale positiva è dato dal numero delle variazioni di segno che si presentano nella prima colonna della tabella.

Occorre tener presente anche il caso in cui il primo elemento di una riga è nullo ma non quelli successivi della stessa riga ed il caso in cui risultano nulli tutti gli elementi di una riga.

Ovviamente se il polinomio considerato è il polinomio caratteristico della matrice dinamica  $A$  di un sistema LTI o il denominatore della f.d.t. di un sistema completamente controllabile ed osservabile, il Criterio di Routh fornisce un metodo operativo che dà anche una condizione necessaria e sufficiente per valutare la stabilità o l'asintotica stabilità dell'origine dello spazio di stato di un sistema LTI.

Un metodo più generale e più potente per l'analisi della stabilità dei sistemi è il metodo di Lyapunov, che consente di verificare la stabilità interna di un sistema dinamico qualsiasi a partire da una sua rappresentazione implicita senza bisogno di calcolare analiticamente, ammesso che ciò sia possibile, o numericamente l'insieme delle traiettorie, cioè senza conoscere il modello esplicito.

Per i sistemi LTI esiste una condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità basata sul metodo di Lyapunov più conveniente da utilizzare rispetto al Criterio di Routh quando si conosce la matrice dinamica del sistema e non esplicitamente il suo polinomio caratteristico.

### **Teorema 5.2 Equazione di Lyapunov dei sistemi continui**

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$\dot{x} = Ax \quad (11)$$

sia asintoticamente stabile è che per ogni matrice simmetrica  $P$  definita positiva esiste una sola matrice simmetrica  $Q$  definita positiva soluzione dell'equazione

$$A^T Q + QA = -P. \quad (12)$$

Analogamente, anche per *i sistemi a tempo discreto esistono dei metodi di analisi della stabilità legati ai poli della f.d.t. del sistema o agli autovalori della matrice dinamica.*

### **Teorema 5.3 Condizione necessaria e sufficiente per la globale asintotica stabilità**

L'origine dello spazio di stato del sistema LTI

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (13)$$

è globalmente asintoticamente stabile se gli autovalori della matrice  $A$  sono in modulo minore di 1, cioè  $\|\lambda_i(A)\| < 1$ ;

globalmente stabile se gli autovalori della matrice  $A$  sono in modulo minore o uguale di 1 e quelli con modulo unitario hanno molteplicità geometrica unitaria.

### **Criterio 5.3 Criterio di Routh esteso ai sistemi discreti**

Dato il polinomio in  $z$

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (14)$$

condizione necessaria e sufficiente affinché le radici del polinomio  $p(z)$  siano in modulo minore di uno è che le radici del polinomio  $q(s)$ , ottenute da  $p(z)$  applicando la seguente trasformazione conforme

$$q(s) = (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}\right), \quad (15)$$

siano a parte reale minore di zero.

Esiste anche il *Criterio di Jury*, analogo a quello di Routh, che non fa uso di alcuna trasformazione conforme.

### **Teorema 5.4 Equazione di Lyapunov dei sistemi discreti**

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (16)$$

sia asintoticamente stabile è che per ogni matrice simmetrica  $P$  definita positiva esista una sola matrice simmetrica  $Q$  definita positiva soluzione dell'equazione

$$A^T Q A - Q = -P. \quad (17)$$

Per quanto riguarda i *metodi frequenziali di analisi della stabilità* essi si prestano particolarmente per analizzare la stabilità di un sistema di controllo a ciclo chiuso a partire dalla conoscenza dei dati del sistema a ciclo aperto e la robustezza di stabilità del sistema di controllo complessivo rispetto al soddisfacimento di determinate specifiche o a variazione di alcuni parametri globali del sistema; quindi sono molto adatti per la sintesi di un sistema di controllo robusto.

Ricordando che lo schema a blocchi tipico e più semplice di un sistema di controllo in retroazione che si considera nella teoria classica del controllo è il seguente

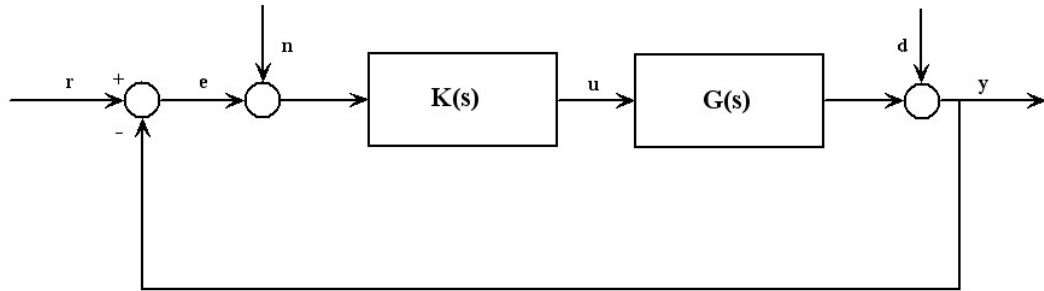


Fig. 1.2 Schema a blocchi di un semplice sistema di controllo in controeazione.

e tenendo presente i vari tipi di rappresentazione della risposta armonica di un sistema

1. diagrammi polari o di Nyquist,
2. diagrammi logaritmici o di Bode,
3. diagrammi di Nichols,

a partire dalla f.d.t. di anello  $F(s) = K(s)G(s)$  è possibile ottenere informazioni sull'asintotica stabilità del sistema di controllo.

#### Criterio 5.4 Criterio di Nyquist

Nell'ipotesi in cui la f.d.t. di anello  $F(s)$  non sia a fase minima, cioè senza zeri e poli a parte reale positiva e senza elementi di ritardo, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema di controllo a ciclo chiuso è che il diagramma polare della  $F(s)$  circonda il punto critico  $-1 + j0$  in senso antiorario tante volte quanti sono i poli di  $F(s)$  con parte reale positiva.

Uno strumento molto utile per l'analisi della stabilità di un sistema di controllo a ciclo chiuso al variare della costante di guadagno della f.d.t. di anello  $F(s)$  è il *luogo delle radici*.

Sia  $F(s)$  la f.d.t. di anello espressa nella forma poli-zeri

$$F(s) = K_1 \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)} = K_1 F_1(s) \quad (18)$$

il luogo delle radici di  $F(s)$  dà i poli di  $1 + K_1 F_1(s)$  al variare di  $K_1$  tra  $0$  e  $+\infty$ , quindi i poli del sistema di controllo a ciclo chiuso al variare della costante di guadagno di anello.

Esso è descritto da tante curve o rami nel piano dei numeri complessi quanti sono i poli di  $F(s)$ ; ogni ramo parte da un polo di  $F(s)$  e termina in uno zero di  $F(s)$  o all'infinito.

#### Criterio 5.5 Criterio di Bode

Nell'ipotesi in cui la f.d.t. di anello  $F(s)$  sia a fase minima, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di controllo sia asintoticamente stabile è che il margine di ampiezza  $k_m$  ed il margine di fase  $\varphi_m$  risultino entrambi positivi.

Nel caso di sistemi LTI affetti da incertezze parametriche, in particolare nel caso in cui la matrice dinamica del sistema dipende da parametri fissi ma incerti, oltre ai metodi di analisi della stabilità fin qui presentati che, opportunamente utilizzati, possono dare un contributo anche in questo caso, vi è un particolare criterio che può essere usato nel caso in cui i

coefficienti del polinomio caratteristico sono funzioni lineari di più parametri, il *Criterio di Karitonov*.

Tale criterio consente di verificare la stabilità del sistema applicando il Criterio di Routh soltanto ai quattro polinomi che si ottengono dando ai coefficienti i valori massimi (+ + +...+), i valori minimi (- - -...-), i valori massimi e minimi in maniera alternata (+ - + - ...) e minimi e massimi in maniera alternata (- + - +...).

C'è comunque da notare che anche in quest'ultimo caso di analisi di stabilità di un sistema LTI con incertezze parametriche di struttura nota ed abbastanza semplice i metodi classici (Routh, Kharitonov, Lyapunov) seppur applicabili diventano subito inefficienti con l'aumentare della complessità della matrice dinamica, del numero dei parametri e dell'ordine del sistema.

Da ciò si comprende come anche per il classico problema della stabilità dei sistemi LTI in realtà c'è ancora molto da fare.

*I metodi di analisi della stabilità per i sistemi non lineari possono essere classificati a seconda del tipo di nonlinearity come segue:*

1. il sistema presenta una sola nonlinearity appartenente ad un settore,
2. il sistema è debolmente non lineare,
3. il sistema è fortemente non lineare.

**Definizione 5.4**

Si consideri il seguente sistema

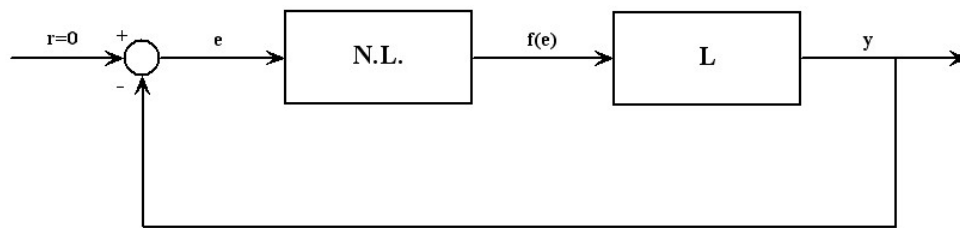


Fig. 1.3 Sistema oggetto di studio.

ove:

L è un sistema lineare con funzione di trasferimento del tipo  $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$

N.L. è una nonlinearity istantanea, ad un sol valore, passante per l'origine e contenuta nel settore  $[K_1, K_2]$  del tipo riportato in figura,

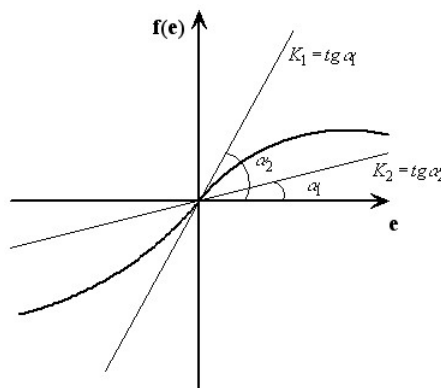


Fig. 1.4 Nonlinearity f.

si dice che tale sistema è *assolutamente stabile rispetto al settore*  $[K_1, K_2]$  se l'origine dello spazio di stato è globalmente asintoticamente stabile per ogni non linearità contenuta nel settore  $[K_1, K_2]$ .

A tal proposito il *Criterio di Popov* fornisce una condizione sufficiente per l'assoluta stabilità.

### Criterio 5.5 Criterio di Popov

Il sistema considerato, se  $L$  è stabile e la  $G(s)$  ha costante di guadagno positiva, è assolutamente stabile nel settore  $[0, K]$  se esiste un numero reale  $q$  finito tale che sia soddisfatta la condizione

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega q)G(j\omega)\} + \frac{1}{K} > 0 \quad \forall \omega \in (0, +\infty). \quad (19)$$

Se la non linearità contenuta nel settore  $[0, K]$  è qualsiasi la condizione di Popov deve essere verificata per  $q = 0$ , cioè la retta di Popov deve risultare verticale.

Se il sistema è debolmente non lineare nell'intorno di un suo punto di equilibrio, cioè quando nel suo sviluppo in serie attorno al punto di equilibrio le derivate seconde sono molto piccole rispetto alle derivate prime e le possibili condizioni iniziali non distano molto dal punto di equilibrio, la sua analisi di stabilità può essere fatta invocando la tecnica della linearizzazione mediante l'utilizzo del seguente

### Teorema 5.5 Stabilità via linearizzazione

Dato il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) = Jx + h(x) \quad (20)$$

ove

$$J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \quad \text{con} \quad f(0) = 0 \quad (21)$$

$h(x)$  infinitesimo di ordine superiore al primo,

se il suo modello linearizzato  $\dot{x} = Jx$  è stabile asintoticamente (instabile) il punto di equilibrio  $x_e = 0$  del sistema originale è asintoticamente localmente stabile (instabile).

Se il sistema è debolmente non lineare la RAS sarà grande e quindi comprende le possibili condizioni iniziali.

Si tenga presente che il risultato precedente in generale non consente di dire nulla circa la stabilità del modello originale se il sistema linearizzato risulta localmente stabile ma non localmente asintoticamente stabile.

Se il sistema è fortemente non lineare e/o le condizioni iniziali non sono molto distanti dal punto di equilibrio il metodo più utilizzato in letteratura è quello di Lyapunov.

Esso si basa sulla generazione di una funzione energia fittizia, detta funzione di Lyapunov, che, per definizione, deve essere definita positiva (d.p.) nel senso precisato di seguito

$$V(t, 0) = 0 \quad \forall t \quad (22a)$$

$$a(\|x\|) < V(t, x) < (b\|x\|) \quad \forall t, \quad \forall x \text{ tale che } \|x\| < r, \quad r > 0 \quad (22b)$$

ove  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  sono funzioni di classe  $K$  (nulle nell'origine e con derivate prime sempre positive)

e sulla variazione di  $V$  lungo le traiettorie del sistema, la funzione  $W$ .  
Considerate le rappresentazioni implicite

$$x_{k+1} = f(k, x_k) \quad \text{con } f(k, 0) = 0 \quad \forall k \quad (23a)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{con } f(t, 0) = 0 \quad \forall t, \quad (23b)$$

sia  $V$  una data funzione di Lyapunov, la  $W$  risulta

$$W(k, x_k) = \Delta V(k, x_k) = V(k+1, x_{k+1}) - V(k, x_k) = V(k+1, f(k, x_k)) - V(k, x_k) \quad (24a)$$

$$W(t, x) = \dot{V}(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} V(t, x)^T \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} V(t, x)^T f(t, x(t)). \quad (24b)$$

I teoremi di Lyapunov si basano sull'esame congiunto di  $V$  e  $W$  e forniscono delle condizioni sufficienti per la stabilità, asintotica stabilità ed instabilità.

### **Teorema 5.6 Condizione sufficiente per la locale stabilità**

Dato un sistema non lineare descritto da una rappresentazione implicita del tipo presentato, se esiste una funzione di Lyapunov  $V$  la cui variazione  $W$  sia minore o uguale a zero  $\forall t, \forall x$  tale che  $\|x\| < r, \quad r > 0$ , allora la rappresentazione è localmente stabile.

### **Teorema 5.7 Condizione sufficiente per la locale asintotica stabilità**

Dato un sistema non lineare descritto da una rappresentazione implicita del tipo presentato, se esiste una funzione di Lyapunov  $V$  la cui variazione  $W$  verifica la condizione

$$W < -g(\|x\|) \leq 0 \quad \forall t, \quad \forall x \text{ tale che } \|x\| < r, \quad r > 0, \quad (25)$$

ove  $g(\cdot)$  è una funzione di classe  $K$ , allora la rappresentazione è localmente asintoticamente stabile.

### **Teorema 5.8 Teorema di Cetaev**

Il punto di equilibrio  $x_e$  del sistema non lineare in esame non è asintoticamente stabile se esiste una funzione  $V$  che ammette le seguenti proprietà

1.  $V(0) = 0$  e l'insieme dei punti in cui  $V < 0$  è di accumulazione per  $x_e = 0$ ;
2.  $W \leq 0, \quad \forall x \in I_0$  ove  $I_0$  è un intorno di  $x_e$  in cui  $\frac{\partial V}{\partial x}$  è continuo;

è instabile se valgono le 1. e 2. e in aggiunta  $W$  è d.n. oppure non esiste una traiettoria  $x(t)$  tale che  $W(x(t)) = 0$ .

C'è da dire che poiché queste sono delle condizioni sufficienti la scelta della funzione di Lyapunov è determinante.

Una funzione di Lyapunov molto utilizzata è la norma quadratica

$$V(t, x) = x^T Q(t)x \quad (26)$$

con

$$Q = Q^T \quad (27)$$

ed un criterio molto semplice per stabilire se una matrice simmetrica è d.p. è dato dal *Test di Sylvester*.

L'elemento fondamentale che rende vincente il metodo di Lyapunov è che esso consente di dare in qualche modo una risposta al problema della stabilità riconducendo un problema differenziale, quale è quello della determinazione di tutte le traiettorie di un sistema e di valutare la loro evoluzione, a quello della risoluzione di una disuguaglianza di tipo algebrico che, in casi particolari quali ad esempio quello in cui la nonlinearietà è di tipo algebrico abbastanza semplice, può anche non essere risolta esplicitamente ma in maniera più semplice, però restrittiva, determinando il segno dei singoli fattori.

Se la nonlinearietà è più complicata e ci sono variazioni parametriche il metodo di Lyapunov può solo essere applicato numericamente valutando in un certo numero di punti abbastanza significativo ed elevato il valore di  $\dot{V}$  con i notevoli limiti che ciò comporta.

Nel caso della sintesi di un sistema di controllo l'applicabilità reale di questi risultati è ancora più difficile perché dei risultati non buoni da un punto di vista dell'analisi di stabilità potrebbero dipendere non dalla scelta della particolare funzione di Lyapunov ma dalla scarsa bontà del controllore che, quindi, deve essere riprogettato; inoltre, è difficile rendersi conto se ci si trova nell'uno o nell'altro caso.

### 5.1.1 Utilizzo dei Metodi di Analisi della Stabilità Robusta per il Progetto di un Controllore Robusto

Per quanto riguarda i metodi di analisi della stabilità robusta dei sistemi dinamici, tra quelli esposti finora sia per i sistemi lineari e stazionari che per i sistemi non lineari ve ne sono alcuni che danno direttamente un contributo alla risoluzione di specifici problemi di robustezza di stabilità ed altri che, opportunamente applicati e/o riformulati, forniscono delle metodologie generali per l'analisi della stabilità robusta.

Tra i primi si ricordi il metodo basato sul luogo delle radici che rientra nei metodi di analisi della stabilità robusta rispetto a variazione di alcuni parametri globali del sistema perché studia la stabilità di un sistema di controllo a ciclo chiuso al variare di una costante di guadagno, il Criterio di Kharitonov che anch'esso rientra nei metodi di analisi della stabilità robusta rispetto a variazione di alcuni parametri del sistema perché fornisce un criterio per l'analisi della stabilità dei sistemi LTI nel caso in cui i coefficienti del polinomio caratteristico sono funzioni lineari di più parametri ed, infine, il Criterio di Popov che dà un contributo alla risoluzione del problema della stabilità robusta rispetto alla presenza di nonlinearietà non perfettamente note o ben modellate perché fornisce una condizione sufficiente per l'assoluta stabilità.



I metodi di analisi della stabilità finora esposti, opportunamente applicati e/o riformulati, cioè con dei piccoli accorgimenti ed una certa abilità, costituiscono dei validi strumenti per l'analisi della robustezza di stabilità rispetto a variazioni dei parametri di alcuni componenti del sistema, a variazione di alcuni parametri globali del sistema o rispetto al soddisfacimento di determinate specifiche nonostante la presenza di variazioni parametriche e/o disturbi.

Ad esempio il Criterio di Routh può essere applicato anche quando il polinomio caratteristico ha uno o più coefficienti incerti, specie quando si tratta dei coefficienti di grado più basso, risolvendo o verificando opportune disuguaglianze.

Per quanto riguarda i metodi frequenziali, il Criterio di Bode ed il Criterio di Nyquist consentono di verificare facilmente se, a seguito di variazione dei parametri della f.d.t. di anello che producono variazione del diagramma dei moduli e/o delle fasi, la stabilità del sistema a ciclo chiuso si conserva.

Il luogo delle radici consente di verificare la stabilità del sistema a ciclo chiuso quando si hanno variazioni dei parametri della f.d.t. di anello che producono una variazione di poli e/o zeri e, naturalmente, della costante di guadagno.

I risultati basati sull'approccio via Lyapunov si possono facilmente applicare anche quando il sistema è dipendente da parametri; in particolare quando il sistema si può mettere nella forma

$$\dot{x} = A(x, p)x, \tag{28}$$

con  $A$  lineare o multilineare rispetto ad  $x$  e  $p$ ,

scegliendo opportunamente una funzione di Lyapunov di tipo quadratico  $V$ , la definita negatività di  $W$  deve essere verificata in un numero finito di punti particolari.

Per quanto riguarda l'analisi della stabilità robusta rispetto al soddisfacimento di determinate specifiche nonostante la presenza di variazioni parametriche applicando opportune

trasformazioni conformi, tipo  $\hat{s} = s - a \left( \hat{z} = \frac{z}{a} \right)$ , è possibile garantire l'appartenenza dei poli

della f.d.t. del sistema ad una regione del tipo

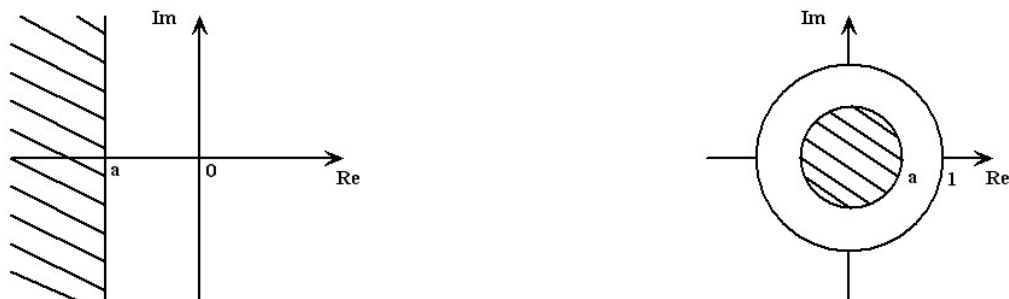


Fig. 1.5 Regioni di appartenenza degli autovalori per la stabilità robusta di sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto.

garantendo in tal modo un limite sulla massima costante di tempo.

In modo simile è possibile garantire un limite sul coefficiente di smorzamento del sistema.

I metodi frequenziali si prestano molto bene a questo tipo di analisi di stabilità robusta; infatti, utilizzando i diagrammi di Bode della f.d.t. di anello o il suo diagramma di Nichols riportato sulle rispettive Carte di Nichols è possibile garantire il soddisfacimento di determinate specifiche con una certa robustezza in termini di margini di fase e di ampiezza, banda passante e picco di risonanza.

Se il sistema è non lineare la sua robustezza rispetto alla velocità di convergenza può essere garantita imponendo la definita negatività di  $\dot{V} - \alpha x^T x$ ,  $\alpha < 0$ .

Per quanto riguarda la *robustezza di stabilità di un sistema rispetto alla presenza di disturbi*, se il disturbo lo si può generare con un sistema in evoluzione libera si può studiare la stabilità del sistema risultante che si ottiene sostituendo al disturbo il suo modello di generazione; in caso contrario, il problema può essere affrontato, se il sistema è lineare considerando la stabilità del sistema senza disturbo e poi verificando la poca influenza dell'effetto del disturbo, magari utilizzando l'approccio frequenziale, se il sistema è non lineare utilizzando la teoria della stabilità pratica per valutare se l'evoluzione del sistema converge verso un intorno sufficientemente piccolo dell'origine.

Se il disturbo è ben caratterizzato da un punto di vista frequenziale, un modo per poterlo fortemente contrastare è quello di inserire nel ciclo di controllo prima del disturbo uno o più integratori (reali) e/o un amplificatore ad elevato guadagno in modo che il guadagno di anello risulti molto elevato in corrispondenza delle frequenze del disturbo. Qualora il sistema a ciclo chiuso risultante non fosse asintoticamente stabile si possono inserire delle appropriate reti di correzione in modo da non alterare il guadagno in corrispondenza delle frequenze del disturbo e stabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

Si tenga presente che, data una traiettoria da inseguire, il sistema di controllo deve soddisfare la seguente proprietà: l'origine dello spazio di stato del sistema errore deve essere asintoticamente stabile o praticamente stabile nel caso in cui il sistema è non lineare e/o la traiettoria da inseguire è non polinomiale.

Pertanto, fissata la struttura del controllore, i suoi parametri devono essere scelti in modo che l'origine dello spazio di stato del sistema errore sia asintoticamente stabile o praticamente stabile e ciò può essere fatto utilizzando i metodi ed i criteri di analisi della stabilità robusta precedentemente richiamati applicati al sistema di controllo robusto.

Un altro requisito che il sistema di controllo deve possedere è che la durata pratica (tempo di assestamento pratico) dell'errore di inseguimento sia sufficientemente piccola e che la norma dell'errore presenti oscillazioni abbastanza piccole.

Quindi i parametri del controllore devono essere scelti anche in modo da soddisfare questo secondo requisito e ciò viene effettuato usando i metodi di studio della stabilità robusta rispetto alla modalità di convergenza dell'errore precedentemente presentati.

Un altro requisito fondamentale che il sistema di controllo deve soddisfare in presenza di disturbi è che il loro effetto deve essere molto limitato.

Per verificare o imporre ciò possono essere utili le indicazioni fornite in precedenza sull'analisi della stabilità robusta in presenza di disturbi.

## 5.2 Metodi più Diffusi in Letteratura per il Controllo di Sistemi Lineari Tempo Varianti e/o a Parametri Incerti

Un problema fondamentale, che ancora oggi impiega molte risorse nell'ambito della ricerca internazionale, è quello della stabilità e del controllo robusto di sistemi lineari tempo varianti e/o a parametri incerti, cioè di sistemi del tipo

$$\dot{x} = A(p, t)x + B(p, t)u \quad (29a)$$

$$y = C(p, t)x, \quad (29b)$$

senza controllo addizionale  $u$  o con controllo addizionale.

Se la matrice  $A$  è tempo-invariante e dipende da parametri fissi ma incerti il problema della stabilità robusta, se  $A$  dipende multilinearmente da più parametri può essere risolto applicando opportunamente il criterio di Routh, il metodo di Lyapunov, il criterio di Kharitonov e vari risultati abbastanza assestati in letteratura [1-3]. Essi, comunque, presentano svariati limiti (ad esempio, l'approccio via Routh diventa subito inefficiente con l'aumentare della complessità della matrice  $A$ , del numero dei parametri e dell'ordine del sistema; l'approccio che utilizza il criterio di Karithonov nella pratica è scarsamente applicabile e fornisce risultati fortemente restrittivi; ...).

Se la matrice  $A$  è tempo-variante e/o dipendente da parametri incerti e tempo varianti vi sono risultati in letteratura soprattutto quando i parametri sono lentamente variabili o comunque limitati in norma [1, 9].

Tra gli approcci più utilizzati per la stabilità ed il controllo robusto di tali sistemi vi è quello della quadratica stabilità e stabilizzazione ed il controllo  $H_\infty$ . Vi sono numerose tecniche in letteratura basate su tali approcci, di controllo robusto via retroazione di stato, via retroazione d'uscita, controllo stocastico, etc. [1-2] e [4-10].

### 5.3 Controllo dei Sistemi con Dinamiche Incerte

Le dinamiche incerte di un sistema possono essere classificate in due principali categorie: incertezze strutturate e non strutturate.

Si parla di incertezze strutturate quando alcuni parametri del sistema non sono perfettamente noti o sono lentamente tempo-varianti.

Mentre le incertezze non strutturate sono dovute principalmente a dinamiche non modellate a causa della estrema difficoltà nel modellare precisamente il sistema fisico a certe frequenze, solitamente alle alte frequenze.

Gli algoritmi di controllo delle dinamiche incerte possono essere classificati in due classi principali: algoritmi di controllo robusto e di controllo adattativo.

Dato un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad (30)$$

una tipica relazione tra l'incertezza  $\Delta_s$  ed il sistema è

$$f = f_0 + \Delta_s, \quad (31)$$

ove  $f_0$  rappresenta la parte nominale o modellata del sistema, che può essere lineare o non lineare, in genere con  $f \in \Delta(f_0, \mu) = \{f / \|f - f_0\| \leq \mu\}$ .

Il *controllo robusto* [5] e [11-12] si propone il difficile compito di progettare accurati sistemi di controllo a fronte di incertezze anche molto severe; quindi, dato  $\Delta(f_0, \mu)$ , mira a trovare un controllore che soddisfi le specifiche assegnate  $\forall f \in \Delta(f_0, \mu)$ .

Uno dei metodi di controllo robusto più studiati ed utilizzati in letteratura è sicuramente lo Sliding Mode Control [12-13], con tutte le varianti che ne seguono.

Una delle più accreditate definizioni di Sistema Adattativo [14] è quella di un sistema che monitora le sue prestazioni ed aggiusta i suoi parametri nella direzione di migliori prestazioni.

Il compito del *Controllo Adattativo* è, quindi, quello di trovare un controllore opportuno che consente di soddisfare le specifiche assegnate e sia applicabile per ogni valore dei parametri. Questo può essere ottenuto definendo una funzione di stima parametrica nel controllore ed adattandola opportunamente in risposta ai cambiamenti nelle dinamiche del processo.

Sicuramente per sistemi soggetti solo ad incertezze parametriche il controllo adattativo risulta la scelta migliore.

Alcuni controllori adattativi molto usati sono gli Switching Controllers ed, in particolare, sembrano essere particolarmente utili l'Hysteresis Dead-Zone [15], la Soft Projection [16], etc.

## 5.4 Metodi più Diffusi in Letteratura per il Controllo di Sistemi Non Lineari ed a Parametri Incerti

Anche se al tempo d'oggi le conoscenze teoriche e la notevole potenza computazionale degli elaboratori consentono di trattare in modo soddisfacente i sistemi non lineari a partire da opportune approssimazioni con sistemi lineari, è comunque indispensabile avere una teoria per i sistemi non lineari. Il motivo fondamentale di ciò è che le dinamiche dei sistemi lineari non sono abbastanza ricche per poter descrivere adeguatamente la maggior parte dei fenomeni presenti in natura [17].

Alcune classi esemplificative di siffatti sistemi sono:

- sistemi con punti di equilibrio o con punti di lavoro multipli;
- sistemi che hanno variazioni periodiche delle variabili di stato o hanno cicli limite;
- sistemi con biforcazioni;
- sistemi che hanno sincronizzazioni;
- sistemi con dinamiche complesse.

Al di là dei metodi classici per l'analisi della stabilità robusta dei sistemi non lineari ed a parametri incerti presentati nel Paragrafo 5.1, in letteratura sono stati proposti metodi di stabilizzazione e di controllo che non risultano sufficientemente generali, robusti e nella maggior parte dei casi risultano complessi da applicare.

Uno di questi metodi è la linearizzazione via retroazione di stato [17, 18, 20]. Essa non si riferisce all'usuale linearizzazione di un sistema non lineare mediante l'uso dello Jacobiano, ma all'azione di rendere lineare la risposta ingresso-uscita del sistema non lineare. Infatti, lo studio di un'ampia classe di sistemi non lineari può essere ricondotto a quello di un comportamento lineare ingresso-uscita attraverso la scelta di un'opportuna legge di controllo non lineare a retroazione di stato.

Poiché il processo di linearizzazione mediante retroazione di stato implica l'esatta cancellazione delle nonlinearità, esso richiede una descrizione piuttosto precisa delle funzioni non lineari e richiede un attento studio di robustezza rispetto a disturbi ed incertezze parametriche. Quindi il controllo robusto, ad esempio lo *sliding mode control* per i sistemi a fase minima ed i metodi di Devasia, Chen e Paden per i sistemi a fase non minima, ed il controllo adattativo rivestono un ruolo fondamentale in tale contesto.

Un approccio avanzato alternativo al controllo di sistemi non lineari è l'*Approccio Geometrico* [17].

Essa è una metodologia sviluppata, a partire dalle basi dell'algebra lineare, per favorire una comprensione facile ed intuitiva delle principali caratteristiche dei sistemi dinamici lineari multivariabili in relazione ai problemi di sintesi di compensatori e regolatori. La principale caratteristica dell'approccio geometrico consiste nel fatto che la maggior parte dei concetti sono sviluppati prescindendo dalla scelta di uno specifico sistema di coordinate nello spazio degli stati, il che consente di enunciare le proprietà ed i teoremi necessari per la soluzione dei problemi di controllo in maniera molto semplice ed elegante. L'approccio geometrico, proprio in quanto riferito allo spazio degli stati, è suscettibile di naturale estensione al caso dei sistemi non lineari, basti pensare ai problemi dell'espansione ingresso-uscita per i sistemi non lineari ed al disaccoppiamento delle azioni di disturbo risolti usando appropriatamente le definizioni di distribuzioni invarianti.

Pur essendo le procedure dell'approccio geometrico molto semplici e fin dall'inizio associate ad efficienti algoritmi computazionali, è relativamente difficile poter dedurre dalla letteratura una loro trattazione completa ed esauriente, in quanto la loro presentazione da parte di vari autori in un periodo di circa trent'anni è risultata frammentaria e disomogenea [40, 41].

Per quanto riguarda i sistemi meccanici non lineari sono stati proposti vari approcci per categorie particolari, quali ad esempio il *controllo a dinamica inversa* [22], utilizzato

soprattutto per i manipolatori con bracci e giunti rigidi, o i *sistemi di controllo Hamiltoniani* [18].

# 6 Nuovi Risultati

## 6.1 Nuovi Risultati sulla Stabilità Pratica

In questo capitolo vengono date nuove definizioni e stabiliti nuovi teoremi sulla stabilità pratica per un'importante classe di sistemi lineari e non con incertezze e/o nonlinearità addizionali e/o segnali esterni limitati. Per i sistemi lineari vengono stabiliti importanti teoremi ed algoritmi efficienti che consentono di calcolare per un qualsiasi istante appartenente ad un assegnato intervallo limitato i valori massimi e minimi dell'uscita per tutte le condizioni iniziali e per tutti i segnali esterni con valori appartenenti ad assegnati iper-rettangoli. Per un'importante classe di sistemi non lineari e a parametri incerti vengono altresì stabiliti, via Lyapunov, nuovi importanti teoremi ed algoritmi efficienti che consentono di stimare la velocità di convergenza e i valori massimi e minimi dell'uscita per tutte le condizioni iniziali appartenenti ad assegnati insiemi limitati e per tutti i segnali esterni e/o le nonlinearità addizionali e/o i valori dei parametri incerti appartenenti ad assegnati iper-rettangoli. Tali teoremi consentono di risolvere numerosi problemi sia di analisi che di sintesi, in particolare consentono di progettare leggi di controllo molto semplici per costringere un sistema lineare o non lineare e a parametri incerti di categoria abbastanza generale ad inseguire traiettorie sufficientemente regolari con prefissati errori e velocità di convergenza.

Le dimostrazioni dei risultati presentati in questo paragrafo non sono state riportate perché contenute in [44], che non è stato ancora pubblicato.

### 6.1.1 Formulazione del Problema

Si consideri, a titolo di esempio, il sistema di controllo di Fig. 1.1, ove

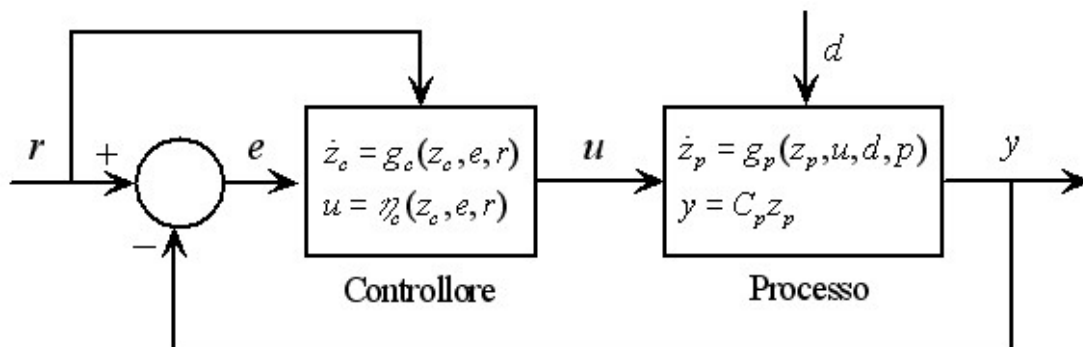


Fig. 1.1 Sistema di controllo considerato.

$z_c \in R^{n_c}$  è lo stato del controllore,  $z_p \in R^{n_p}$  è lo stato del processo,  $u \in R^h$  è il segnale di controllo del processo,  $d \in R^k$  è l'eventuale disturbo agente sul processo,  $y \in R^m$  è l'uscita del processo da controllare,  $r \in R^m$  è il segnale di riferimento,  $p \in R^v$  è il vettore dei parametri incerti del processo.

Si ha

$$\begin{aligned}\dot{z}_c &= g_c(z_c, r - C_p x_p, r) \\ \dot{z}_p &= g_p(z_p, \eta_c(z_c, r - C_p x_p, r), d, p)\end{aligned}\quad (1)$$

ovvero, in forma compatta

$$\begin{aligned}\dot{z} &= g(z, r, d, p), \\ \text{ove } z &= \begin{pmatrix} z_c \\ z_p \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2)$$

Nell'ipotesi che  $\text{rango}(C_p) = m$  si consideri una matrice  $T_2 \in \mathbb{R}^{(n_c+n_p-m) \times (n_c+n_p)}$  tale che la matrice quadrata

$$T = \begin{pmatrix} -C_p & 0 \\ T_2 \end{pmatrix}\quad (3)$$

sia non singolare.

Effettuando il cambiamento di variabile

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_c \\ z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} r = Tz + Vr\quad (4)$$

si ha

$$\dot{x} = T\dot{z} + V\dot{r} = Tg(T^{-1}(x - Vr), r, d, p) + V\dot{r}.\quad (5)$$

In definitiva il sistema di controllo di Fig. 1.1 può essere descritto da equazioni del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, p, w(t, x, p)) \\ e &= Cx\end{aligned},\quad (6)$$

ove  $w(t, x, p)$  è una opportuna funzione dipendente, in generale, dal particolare riferimento  $r(t)$ , dal particolare disturbo  $d(t)$ , da  $x$  e da  $p$  e  $C = (I \ 0)$ .

Per tale sistema è importante stabilire se per condizioni iniziali limitate e, quindi, realistiche e per tutti i segnali di riferimento  $r(t)$ , appartenenti ad una data classe di segnali limitati con la loro derivata, l'errore d'inseguimento  $e(t)$  risulta limitato e diventa definitivamente accettabile, da un punto di vista pratico, dopo un tempo finito  $T_a$ , nonostante l'azione di disturbi  $d(t)$ , appartenenti ad una data classe di segnali limitati, e di variazioni parametriche limitate.



Tale importante problema, il fatto che nella pratica spesso il riferimento ed il disturbo di un sistema di controllo non sono segnali polinomiali e/o sinusoidali, che anche un sistema lineare non sempre va a regime, ecc. inducono a dare le definizioni che seguono.

**Definizione 1.1.** Sia dato il sistema dinamico non lineare, tempo variante ed a parametri incerti

$$\dot{x} = f(t, x, p, w(t, x, p)) \tag{7a}$$

$$e = C(t, p)x, \tag{7b}$$

dove  $t \in \mathcal{T} = [0, T_f] \subset \mathbb{R}$  è il tempo,  $x \in \mathbb{R}^n$  è lo stato,  $p \in \wp \subset \mathbb{R}^v$  è il vettore dei parametri incerti, con  $\wp$  insieme compatto,  $w \in \mathbb{R}^l$  è una funzione, appartenente ad una data classe  $W$ , che modella eventuali segnali esterni e/o particolari nonlinearità del sistema ed  $e \in \mathbb{R}^m$  è l'uscita.

Tale sistema si dice *stabile praticamente nell'uscita e rispetto a*  $(X_0, W, E_{ea}, T_a)$ , ove  $X_0$  è un insieme compatto di possibili condizioni iniziali all'istante iniziale  $t_0$ , supposto nullo per semplicità,  $E_{ea} \subset \mathbb{R}^m$  è un insieme compatto di valori accettabili dell'uscita  $e$ ,  $T_a \in (0, T_f)$  è un istante finito di assestamento dell'uscita, se  $\forall t \in \mathcal{T}, \forall x_0 \in X_0, \forall p \in \wp, \forall w \in W$  (cfr. Fig. 1.2):

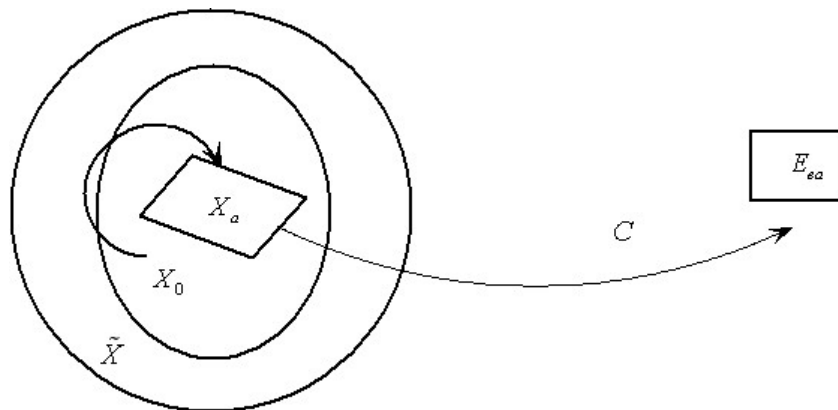


Fig. 1.2 Rappresentazione grafica della stabilità pratica nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, E_{ea}, T_a)$ .

$$x(t) \in \tilde{X}, \forall t \in \mathcal{T} \tag{8a}$$

$$e(t) \in E_{ea}, \quad \forall t \in [T_a, T_f], \tag{8b}$$

ove  $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme compatto.

◆

**Definizione 1.2.** Il sistema (7) si dice *stabile praticamente in tempo finito nell'uscita e rispetto a*  $(X_0, W, E_{ea})$  se esiste un istante  $T_a \in (0, T_f)$  finito tale che esso sia stabile praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, E_{ea}, T_a)$ .

◆

**Definizione 1.3.** Il sistema (7) si dice *stabile esponenzialmente praticamente nell'uscita  $e$*  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ , ove  $\rho_{ea} > 0$  e  $T_a \in (0, T_f)$ , se è stabile praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, S_{ea}, T_a)$ , dove  $S_{ea} = \{e \in R^m : \|e\| \leq \rho_{ea}\}$ , e se esiste un  $v > 0$  tale che (cfr. Fig. 1.3):

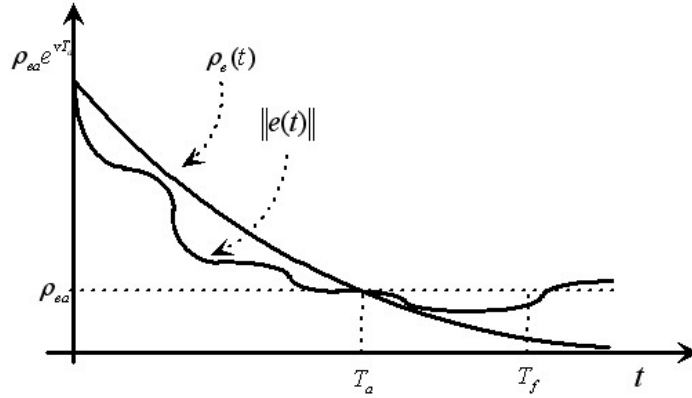


Fig. 1.3 Evoluzione di un sistema stabile esponenzialmente praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ .

$$\|e(t)\| \leq \rho_e(t) = \rho_{ea} e^{-v(t-T_a)} = \rho_{ea} e^{vT_a} e^{-vt}, \quad \forall t \in [0, T_a], \forall x_0 \in X_0, \forall p \in \wp, \forall w \in W. \quad (9)$$

**Definizione 1.4.** Il sistema (7) si dice *stabile esponenzialmente praticamente in tempo finito nell'uscita  $e$*  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea})$  se esiste un istante  $T_a \in (0, T_f)$  finito tale che esso sia stabile esponenzialmente praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ .

**Definizione 1.5.** Se il sistema (7) è stabile esponenzialmente praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ , allora il più piccolo  $v > 0$  per cui vale la (9), denotato con  $v_p$ , dicesi *velocità relativa pratica di convergenza (o tasso pratico di decadimento) di  $e(t)$  ad  $S_{ea}$* , rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ .

**Osservazione 1.1.** L'utilità e la convenienza della definizione 1.5 scaturiscono dal fatto che

$$v = - \frac{\dot{\rho}_e(t)}{\rho_e(t)} \quad (10)$$

e dalle considerazioni che seguono.

Se la maggiorazione  $\|e(t)\| \leq \rho_e(t)$ , anziché mediante la (9), venisse fatta usando una funzione più generale del tipo

$$\rho_e(t) = \rho_{e1} e^{-vt} + \rho_{e2} \quad (11)$$

vi sarebbero i seguenti inconvenienti:

1. se  $\rho_{e2} \neq 0$  allora si avrebbe  $-\frac{\dot{\rho}_e}{\rho_e} \neq v$  e, quindi, a  $v$  non si potrebbe dare il significato di velocità relativa pratica di convergenza;

2. di siffatte funzioni ne esisterebbero tantissime. Se tra le tante si scegliesse quella con la  $v$  massima, in generale la  $\rho_{e1}$  diventerebbe molto più grande di  $\rho_{e2}$  e, quindi, la maggiorazione risulterebbe poco significativa.

In merito si consideri il seguente esempio illustrativo.

**Esempio 1.1.** Si consideri il sistema lineare e stazionario positivo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w; \quad e = [1 \quad 0]x, \quad (12)$$

è facile dimostrare che

$$e(t) = e_0 e^{-t} + \dot{e}_0 t e^{-t} + \int_0^t \tau e^{-\tau} w(t-\tau) d\tau. \quad (13)$$

Se

$$x_0 = \begin{bmatrix} e_0 \\ \dot{e}_0 \end{bmatrix} \in \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{bmatrix} \right] \text{ e } w \in [0, 0.1] \quad (14)$$

è facile mostrare che si ha

$$e(t) \in [0, e^{-t} + t e^{-t} + 0.1] = [0, e^+(t)]. \quad (15)$$

Per  $T_a = 5$  ed un qualsiasi  $T_f > 5$  la maggiorazione di  $e(t)$  proposta risulta

$$m_p = 1.33 e^{-0.45t}. \quad (16)$$

Alcune possibili maggiorazioni del tipo (11) che fanno uso della costante di tempo del sistema risultano

$$\begin{aligned} m_1 &= 6e^{-t} + 0.1 \\ m_2 &= 8.97e^{-t} + 0.08 \end{aligned} \quad (17)$$

Tali maggiorazioni, come si vede chiaramente dalla Fig. 1.4, risultano nettamente peggiori di

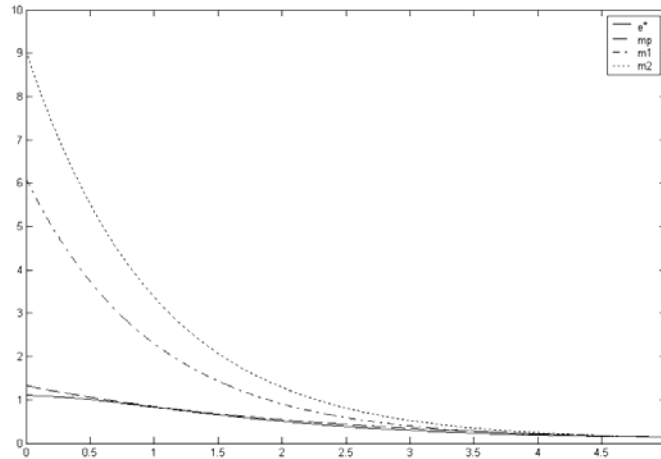


Fig. 1.4 Confronto tra alcune maggiorazioni di  $\|e(t)\|$  del tipo (11) e la maggiorazione proposta.

quella proposta, oltre al fatto che non godono della proprietà (10).

Le definizioni di stabilità pratica date trovano numerosissime ed importantissime applicazioni. Basta tener presente che se un sistema è stabile praticamente vuol dire che la sua evoluzione è sempre limitata e l'uscita diventa definitivamente accettabile dopo un tempo al più pari a  $T_a$ ; inoltre se il sistema (7) è un sistema di controllo e l'uscita è l'errore di inseguimento di una traiettoria di riferimento (che quasi sempre non è polinomiale) la stabilità pratica di tale sistema assicura che l'errore di inseguimento per errori di start realistici (limitati) è sempre contenuto e tende a valori accettabili da un punto di vista pratico in un tempo finito e per il restante tempo della sua "vita" rimane tale, nonostante l'azione dei disturbi e le variazioni parametriche.

Nel seguito verranno forniti alcuni metodi operativi per analizzare la stabilità pratica di sistemi del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t, x, p)x + B(t, x, p)w(t, x, p) \\ e(t) &= C(t, p)x \end{aligned} \quad (18)$$

### 6.1.2 Caso dei Sistemi Lineari

Si supponga che il sistema (18) sia lineare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)w(t) \\ e(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}, \quad (19)$$

ove  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times l}$  e  $C \in R^{m \times n}$  sono matrici continue rispetto a  $t$ . Vale il seguente

**Teorema 1.1.** Sia dato il sistema lineare (19) o equivalentemente il suo modello esplicito

$$\begin{aligned}
 e(t) &= C(t)\Phi(t,0)x_0 + \int_0^t C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)w(\tau)d\tau = \\
 &= \left\{ \psi_{ij}(t) \right\} x_0 + \int_0^t \left\{ h_{ij}(t) \right\} w(\tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{20}$$

e si supponga che

$$X_0 = \left\{ x_o : x_o^- \leq x_o \leq x_o^+ \right\} \tag{21a}$$

$$W = \left\{ w : w^- \leq w \leq w^+ \right\}; \tag{21b}$$

allora

$$e(t) \in [e^-(t), e^+(t)] \tag{22a}$$

ove:

$$\begin{aligned}
 e_i^-(t) &= \sum_j^n \psi_{ij}(t)x_{jo}^m + \sum_{k=1}^l [\varphi_{ik}^-(t)u_k^+ + \varphi_{ik}^+(t)w_k^-] \\
 e_i^+(t) &= \sum_j^n \psi_{ij}(t)x_{jo}^M + \sum_{k=1}^l [\varphi_{ik}^-(t)w_k^- + \varphi_{ik}^+(t)w_k^+]
 \end{aligned} \tag{22b}$$

in cui:

$$x_{jo}^m = \begin{cases} x_{jo}^-, & \text{if } \psi_{ij}(t) \geq 0 \\ x_{jo}^+, & \text{if } \psi_{ij}(t) < 0 \end{cases}, \quad x_{jo}^M = \begin{cases} x_{jo}^+, & \text{if } \psi_{ij}(t) \geq 0 \\ x_{jo}^-, & \text{if } \psi_{ij}(t) < 0 \end{cases} \tag{22c}$$

$$\varphi_{ik}^- = \int_0^t h_{ik}^-(t,\tau)d\tau, \quad \varphi_{ik}^+ = \int_0^t h_{ik}^+(t,\tau)d\tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, l, \tag{22d}$$

essendo  $h_{ik}^-(t,\tau)$  la componente non-positiva e  $h_{ik}^+(t,\tau)$  la componente non-negativa di  $h_{ik}(t,\tau)$  date da

$$\begin{aligned}
 h_{ik}^-(t,\tau) &= \frac{h_{ik}(t,\tau) - |h_{ik}(t,\tau)|}{2} \\
 h_{ik}^+(t,\tau) &= \frac{h_{ik}(t,\tau) + |h_{ik}(t,\tau)|}{2} = h_{ik}(t,\tau) - h_{ik}^-(t,\tau)
 \end{aligned} \tag{22e}$$

◆

Dal Teorema 1.1 seguono facilmente i seguenti

**Corollario 1.1.** Se gli insiemi  $X_o$  e  $W$  del Teorema 1.1 sono simmetrici, cioè se

$$x_o^+ = -x_o^- \tag{23a}$$

$$w^+ = -w^-, \quad (23b)$$

allora

$$e_i^- = -\{\psi_i(t,0)\}x_o^+ - \left\{ \int_0^t |h_i(t,\tau)| d\tau \right\} u^+; \quad e_i^+ = -e_i^-. \quad (24)$$

◆

**Corollario 1.2.** Se il sistema lineare (19) è positivo e

$$X_0 = \{x_o : 0 \leq x_o^- \leq x_o \leq x_o^+\} \quad (25a)$$

$$W = \{w : 0 \leq w^- \leq w \leq w^+\} \quad (25b)$$

allora

$$e_i^- = \{\psi_i(t,0)\}x_o^- + \varphi_i(t)w^-, \quad e_i^+ = \{\psi_i(t,0)\}x_o^+ + \varphi_i(t)w^+, \quad (26)$$

ove

$$\varphi_i(t) = \int_0^t h_i(t,\tau) d\tau. \quad (27)$$

◆

**Esempio 1.2.** Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & -56 & -26 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} w; \quad e = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x, \quad (28)$$

con

$$X_0 = \{x_o : [-5 \ -5 \ -5 \ -5]^T \leq x_o \leq [5 \ 5 \ 5 \ 5]^T\} \quad (29a)$$

e

$$W = \{w : -5 \leq w \leq 5\}, \quad (29b)$$

gli estremi dell'intervallo  $[e^-(t), e^+(t)]$ ,  $\forall t \in [0, 5]$ , risultano quelli in tratto continuo di Fig. 1.5 in cui vengono riportati in tratto e punto anche alcuni andamenti di  $e$  per  $x_0$  e  $w$  soddisfacenti le condizioni (30a,b).

Ne segue, ad esempio, che tale sistema è stabile praticamente rispetto a  $(X_0, E_a, T_a)$ , con  $T_a = 3.1$  ed  $E_{ea} = [-1, 1]$ . Ciò vuol dire che il valore assoluto dell'uscita del sistema,  $\forall x_0 \in X_0$  e per ogni segnale sinusoidale o onda quadra di qualsiasi frequenza e di ampiezza

massima pari a 5, o per un qualsiasi altro segnale in valore assoluto non maggiore di 5, dopo un tempo pari a 3.1, diventa

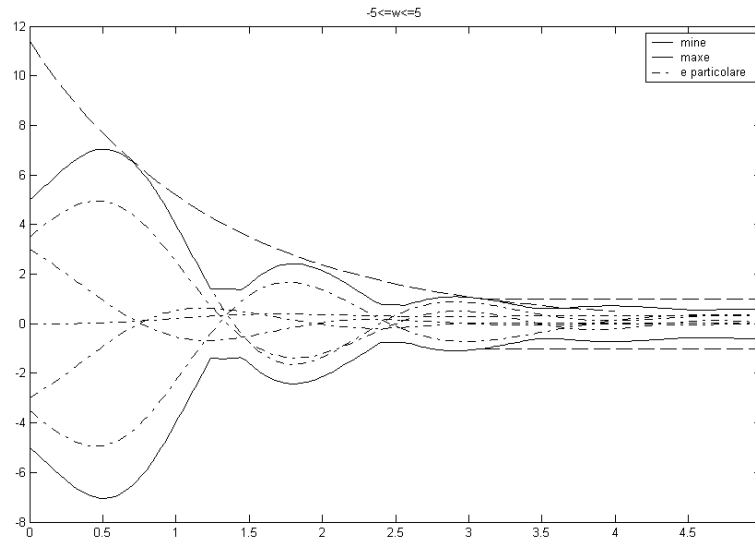


Fig. 1.5 Andamenti di  $e(t)$  per  $x_0$  e  $w$  soddisfacenti le (30a,b).

definitivamente minore di 1. Durante l'intervallo  $[0, 5]$  l'evoluzione avviene con un tasso pratico di decadimento del 78.4%.

Se il sistema lineare (19) è a parametri incerti, solo in alcuni casi particolari (ad esempio quando la matrice dinamica  $A$  è indipendente da  $p$  e le matrici  $C$  e  $B$  dipendono linearmente da  $p$ ) l'analisi della stabilità pratica può essere fatta agevolmente mediante il Teorema 1.1 ed i Corollari 1.1 e 1.2.

In generale l'analisi della stabilità pratica è molto complessa con l'approccio che fa uso del modello esplicito. Nel seguito verrà presentato un metodo abbastanza generale basato sul modello implicito.

### 6.1.3 Caso dei Sistemi non Lineari

Nel seguito si considera la classe di sistemi dinamici non lineari del tipo

$$\dot{x} = A(t, x, p)x + B(t, x, p)w(t, x, p) \tag{30a}$$

$$e = C(t, p)x, \tag{30b}$$

dove  $t \in \mathcal{T} = [0, T_f] \subset \mathbb{R}$  è il tempo,  $x \in \mathbb{R}^n$  è lo stato,  $p \in \wp \subset \mathbb{R}^v$  è il vettore dei parametri incerti, con  $\wp$  insieme compatto,  $w \in \mathbb{R}^l$  è una funzione, appartenente ad una data classe  $W$ , continua rispetto a  $x, p$  e generalmente continua rispetto a  $t$ , che modella eventuali segnali esterni e/o particolari nonlinearità del sistema,  $e \in \mathbb{R}^m$  è l'uscita ed  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sono matrici continue rispetto ai loro argomenti, con  $C$  di rango pieno.

Per chiarezza espositiva si premettono le seguenti notazioni:

$\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ , ove  $P$  è una matrice  $n \times n$  reale, simmetrica e d.p.

$\lambda(F)$ =autovalore generico di  $F \in R^{n \times n}$

$\lambda_{\min}(F)$ =minimo autovalore di  $F \in R^{n \times n}$

$\lambda_{\max}(F)$ =massimo autovalore di  $F \in R^{n \times n}$ .

Si premettono, inoltre, i seguenti lemma.

**Lemma 1.1.** Se  $P \in R^{n \times n}$  è una matrice simmetrica e d.p.,  $Q(x) \in R^{n \times n}$  è una matrice simmetrica e continua rispetto a  $x \in R^n$  e  $g(x) \in R^n$  è un vettore continuo rispetto ad  $x$  allora  $\forall \rho \geq 0$  si ha:

$$\min_{x \in \{x: x^T P x = \rho^2\}} x^T Q(x) x \geq \min_{x \in \{x: x^T P x = \rho^2\}} \lambda_{\min}(Q(x) P^{-1}) \rho^2 \quad (31)$$

$$\max_{x \in \{x: x^T P x = \rho^2\}} x^T g(x) \leq \max_{x \in \{x: x^T P x = \rho^2\}} \sqrt{g(x)^T P g(x)} \rho. \quad (32)$$

◆

**Osservazione 1.2.** Chiaramente se  $Q(x)$  e  $g(x)$  sono indipendenti da  $x$  le (31), (32) valgono con il segno di eguaglianza. Se  $Q(x)$  dipende da  $x$  il  $\min_{x \in \{x: x^T P x = \rho^2\}} x^T Q(x) x$  risulta alquanto difficile da calcolare in quanto  $x^T Q(x) x$ , con  $x \in \{x: x^T Q(x) x = \rho^2\}$ , presenta in generale diversi punti di massimo relativo, di minimo relativo e di “flesso”. Il secondo membro della (31) consente di calcolare più facilmente un minorante proporzionale a  $\rho^2$ , come si vedrà inseguito. Un discorso analogo vale se  $g(x)$  dipende da  $x$ .

**Lemma 1.2.** Si supponga che il sistema (30) goda della seguente proprietà:

esiste una matrice costante  $P$  d.p. ed un  $\rho_0 > 0$  tali che la matrice

$$Q = -(A^T P + P A) \quad (33)$$

risulta d.p.  $\forall t \in \mathcal{T}, \forall p \in \wp, \forall x \in S_{\rho_0}$ , ove

$$S_{\rho_0} = \left\{ x: x^T P x \leq \rho_0^2 \right\}, \quad (34)$$



e

$$\rho_0 > \rho_f = \frac{2 \sqrt{\max_{t \in \mathcal{T}, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\max}(B^T P B)}}{\min_{t \in \mathcal{T}, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\min}(QP^{-1})} \sup_{t \in \mathcal{T}, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp, w \in W} \|w\| ; \quad (35)$$

allora si ha

$$\|x(t)\|_p \leq e^{-v_{\min} t} (\rho_0 - \rho_f) + \rho_f, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall x_0 \in S_{\rho_0}, \forall p \in \wp, \forall w \in W \quad (36)$$

ove

$$v_{\min} = \frac{\min_{t \in \mathcal{T}, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\min}(QP^{-1})}{2}. \quad (37)$$

◆

**Osservazione 1.3.** Il Lemma 1.2, dimostrato utilizzando l'approccio di Lyapunov, è valido anche quando i parametri  $p$  sono tempo-varianti.

**Lemma 1.3.** Sia data una matrice  $P \in R^{n \times n}$  d.p. ed una matrice  $C \in R^{m \times n}$  di rango  $m$ . Se

$$\|x\|_p \leq \rho, \quad (38)$$

allora il più piccolo  $\alpha$  tale che

$$\|e\| \leq \alpha \|x\|_p \leq \alpha \rho, \quad (39)$$

ove  $e = Cx$ , risulta

$$\alpha = \sqrt{\lambda_{\max}(CP^{-1}C^T)}. \quad (40)$$

◆

Si possono ora stabilire i seguenti fondamentali Teoremi.

**Teorema 1.2.** Si supponga che il sistema (30) soddisfi le ipotesi del Lemma 1.2 e che per un dato  $\varepsilon$  tale che

$$(1 + \varepsilon)\rho_f < \rho_0 \quad (41)$$

si ha che

$$T_\alpha = \log \frac{1}{\varepsilon} \tau_{\max} + \tau_{\max} \log \frac{\rho_0 - \rho_f}{\rho_f} < T_f, \quad (42)$$

ove

$$\tau_{\max} = \frac{1}{v_{\min}} = \frac{2}{\min_{t \in T, x \in S_{\rho_0}, p \in \rho} \lambda_{\min}(QP^{-1})}. \quad (43)$$

Allora il sistema (30) è stabile esponenzialmente praticamente nell'uscita  $e$  rispetto a  $(X_0, W, \rho_{ea}, T_a)$ , ove

$$\rho_{ea} = (1 + \varepsilon) \sqrt{\max_{t \in T, p \in \rho} \lambda_{\max}(CP^{-1}C^T)} \tau_{\max} \sqrt{\max_{t \in T, x \in S_{\rho_0}, p \in \rho} \lambda_{\max}(B^T P B)} \sup_{t \in T, x \in S_{\rho_0}, p \in \rho, w \in W} \|w\|. \quad (44)$$

Inoltre una stima della velocità relativa pratica di convergenza risulta

$$v_p = \frac{\log \frac{\rho_0}{\rho_f} + \frac{\rho_0 - \rho_f}{\rho_f} \frac{T_a}{\tau_{\max}}}{T_a}. \quad (45)$$

(vedi anche la Fig. 1.6)

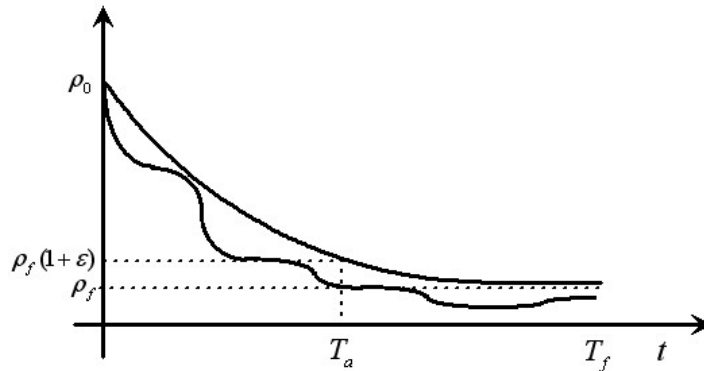


Fig. 1.6 Stima della velocità relativa pratica di convergenza. ◆

**Osservazione 1.4.** Se  $\varepsilon = 0.05$  si ha

$$T_a = T_{a-5\%} = 3\tau_{\max} + \tau_{\max} \log \frac{\rho_0 - \rho_f}{\rho_f}. \quad (46)$$

Se inoltre  $\rho_0 = 2\rho_f$  si ha

$$T_{a-5\%} = 3\tau_{\max}, \quad (47)$$

cioè se  $\|x_0\|_p \leq 2\rho_f$ , dopo un tempo al più pari a  $3\tau_{\max}$ , la norma dell'uscita del sistema, a meno del 5%, è non maggiore del “valore di regime” dato da

$$\rho_{e\infty} = \sqrt{\lambda_{\max}(CP^{-1}C^T)} \tau_{\max} \sqrt{\lambda_{\max}(B^T PB)} \sup \|w\|, \quad (48)$$

in cui per semplicità di notazione sono stati omessi gli insiemi rispetto a cui vengono calcolati i massimi e l'estremo superiore.

**Osservazione 1.5.** Dalla (48) segue facilmente che una stima per eccesso del “valore di regime” di ciascuna uscita  $e_i = C_i x$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ove  $C_i$  è la riga  $i$ -esima della matrice  $C$ , risulta

$$\rho_{e\infty i} = \sqrt{C_i P^{-1} C_i^T} \tau_{\max} \sqrt{\lambda_{\max}(B^T PB)} \sup \|w\|. \quad (49)$$

La (49) consente di avere informazioni molto più dettagliate circa i valori cui converge l'uscita del sistema  $e$  come risulta dal seguente esempio.

**Esempio 1.3.** Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w; \quad e = x. \quad (50)$$

Scegliendo

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

ed applicando le (43), (48) e (49) si ha:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= 1 \\ \rho_{e\infty} &= 1.06 \sup |w| \\ \rho_{e\infty 1} &= 0.333 \sup |w| \\ \rho_{e\infty 2} &= 1.05 \sup |w|. \end{aligned} \quad (52)$$

Quindi, ad esempio, per una qualsiasi  $w: |w| \leq 1$ , dipendente eventualmente anche da  $x$ , e per un qualsiasi stato iniziale  $x_0: \|x_0\|_p \leq 2.12$ , dopo un tempo al più pari a 3 sec, a meno del 5%,  $\|x(t)\| \leq 1.06$ ,  $|x_1(t)| \leq 0.333$ ,  $|x_2(t)| \leq 1.05$ . E' facile constatare per via numerica che se si applica un'onda quadra di ampiezza unitaria e periodo pari a 2sec, a regime, il valore massimo di  $|x_1|$  risulta pari a .205, mentre la maggiorazione calcolata risulta pari a 0.333.

Se invece  $w: |w| \leq 0.1$  e  $x_0: \|x_0\|_p \leq 2.12$ , applicando le (46) e (49), si ha che dopo un tempo al più pari a 11,83 sec, a meno del 5%,  $|e_1(t)| = |x_1(t)| \leq .0333$ .

**Osservazione 1.6.** Le approssimazioni fatte per determinare un minorante di  $-\dot{V}$  hanno consentito di “approssimare” un sistema lineare o non con un sistema del primo ordine caratterizzato da una “costante di tempo”  $\tau_{\max}$  data da

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\min \lambda_{\min}(QP^{-1})}, \quad (53)$$

e da un “guadagno” dato da

$$g_{e\infty} = \sqrt{\lambda_{\max}(CP^{-1}C^T)} \tau_{\max} \sqrt{\lambda_{\max}(B^T PB)}. \quad (54)$$

I seguenti risultati consentono di semplificare la determinazione di una buona matrice  $P$  ed il calcolo sia di  $\tau_{\max}$  che di  $g_{e\infty}$ .

**Teorema 1.3.** Si supponga che la matrice

$$\hat{A} = A(0, 0, \hat{p}), \quad (55)$$

ove  $\hat{p}$  è il valore nominale dei parametri del sistema, abbia  $\nu$  autovalori reali e distinti  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, \nu$ , ed  $\mu = \frac{n-\nu}{2}$  coppie distinte di autovalori complessi coniugati

$$\lambda_{h\pm} = \alpha_h \pm j\omega_h, \quad h=1, \dots, \mu.$$

Inoltre, siano  $u_i$ ,  $i=1, \dots, \nu$ , e  $u_{h\pm} = u_{ah} \pm ju_{bh}$ ,  $h=1, \dots, \mu$ , gli autovettori corrispondenti.

Allora, denotando con  $Z^*$  la trasposta coniugata di  $Z \in C^{n \times n}$ , le matrici:

$$P = (ZZ^*)^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^{\nu} u_i u_i^T + 2 \sum_{h=1}^{\mu} (u_{ah} u_{ah}^T + u_{bh} u_{bh}^T) \right]^{-1} \quad (56)$$

$$Q = - (Z^*)^{-1} (\Lambda + \Lambda^*) Z^{-1} = - \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_i} u_i u_i^T + \sum_{h=1}^{\mu} \frac{1}{\alpha_h} (u_{ah} u_{ah}^T + u_{bh} u_{bh}^T) \right]^{-1}, \quad (57)$$

con  $Z = [u_1 \dots u_\nu \ u_{a1} + ju_{b1} \ u_{a1} - ju_{b1} \dots \ u_{a\mu} + ju_{b\mu} \ u_{a\mu} - ju_{b\mu}]$ , soddisfano l'equazione di Lyapunov

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} = -Q \quad (58)$$

Inoltre, se gli autovalori di  $\hat{A}$  sono tutti a parte reale negativa allora le matrici  $P$  e  $Q$  sono entrambe d.p. e

$$\lambda_{\max}(Q^{-1}P) = - \frac{1}{2 \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} \{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}} = \frac{1}{2} \tau_{\max}(\hat{A}). \quad (59)$$

◆

**Lemma 1.4.** Siano  $P$  e  $Q$  due matrici simmetriche, con  $P$  d.p. Allora la matrice  $R = PQ^{-1}$ , in generale non simmetrica, è simile ad una matrice simmetrica, cioè esiste una matrice non singolare  $T$  tale che

$$T^{-1}RT = T^{-1}PQ^{-1}T = S, \quad \text{con } S^T = S. \quad (60)$$

◆

**Osservazione 1.7.** Dal Lemma 1.4 segue che gli autovalori di  $R = PQ^{-1}$  sono uguali a quelli di  $S$  e, quindi, reali.

**Esempio 1.4.** Date le matrici

$$P = \begin{bmatrix} 0.0931 & 0.2055 & 0.2472 \\ 0.2055 & 1.0216 & 0.7823 \\ 0.2472 & 0.7823 & 0.8436 \end{bmatrix} \text{ (d.p.)}, \quad Q = \begin{bmatrix} 18.3542 & 42.1349 & 38.6312 \\ 42.1349 & 82.6832 & 62.2943 \\ 38.6312 & 62.2943 & 55.6251 \end{bmatrix} \quad (61)$$

si ha

$$R = QP^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4033 & 0.0537 & -0.1222 \\ 1.3843 & 0.1954 & -0.5131 \\ 1.2403 & 0.1359 & -0.4236 \end{bmatrix} 1e3 \quad (62)$$

i cui autovalori sono

$$\text{eig}(R) = \begin{bmatrix} 262.1522 \\ -126.7492 \\ 39.70250 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

E' facile verificare che tali autovalori coincidono con quelli della matrice simmetrica

$$S = \begin{bmatrix} 51.5633 & -0.8417 & -193.5817 \\ -0.8417 & 39.6039 & -8.4681 \\ -193.5817 & -8.4681 & 83.9382 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

**Lemma 1.5.** Siano  $S_0$  ed  $S_1$  due matrici simmetriche e  $p \in [p^-, p^+] \subset R$  un parametro. Allora

$$\min_{p \in [p^-, p^+]} \lambda_{\min}(S_0 + pS_1) = \min_{p=p^-, p^+} \lambda_{\min}(S_0 + pS_1) \quad (65a)$$

$$\max_{p \in [p^-, p^+]} \lambda_{\max}(S_0 + pS_1) = \max_{p=p^-, p^+} \lambda_{\max}(S_0 + pS_1), \quad (65b)$$

cioè gli autovalori minimi e massimi di  $S(p) = S_0 + pS_1$  al variare di  $p \in [p^-, p^+] \subset R$  vengono assunti in uno degli estremi dell'intervallo  $[p^-, p^+]$ .

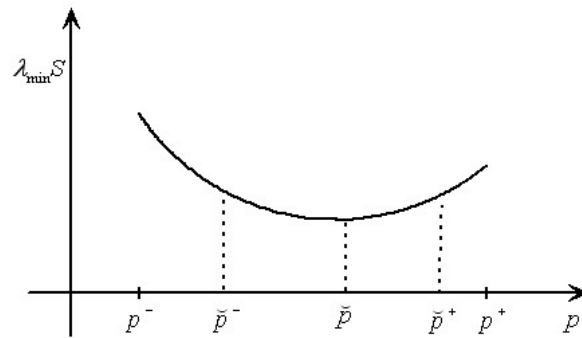


Fig. 1.7 Andamento di  $\lambda_{\min}(S)$  rispetto a  $p$ .

**Esempio 1.5.** Nella Fig. 1.8 vengono riportati tipici andamenti di  $\lambda_{\min}(S_0 + pS_1)$  rispetto a  $p$ .

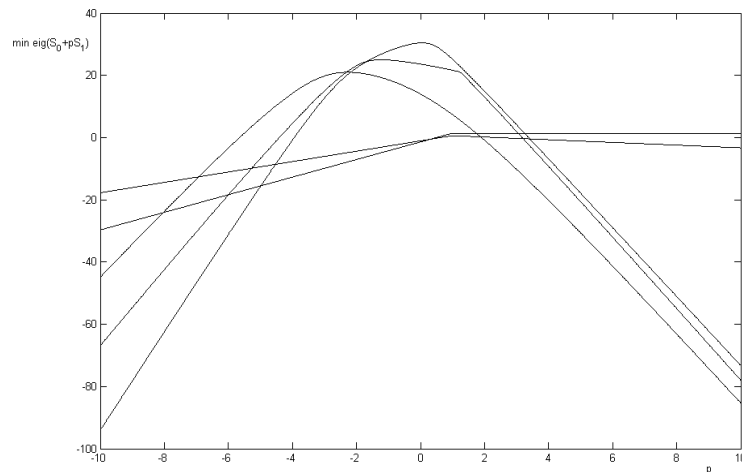


Fig. 1.8 Tipici andamenti di  $\lambda_{\min}(S_0 + pS_1)$  rispetto a  $p$ .

**Lemma 1.6.** Sia

$$A = A_0 + pA_1, \quad A_0, A_1 \in R^{n \times n}, \quad p \in R, \quad (66)$$

e  $P \in R^{n \times n}$  una matrice simmetrica *d.p.* Allora esistono due matrici simmetriche  $S_0$  ed  $S_1$  tali che la matrice

$$S = S_0 + pS_1 \quad (67)$$

ha gli stessi autovalori (reali) della matrice

$$R = QP^{-1}, \quad (68)$$

ove  $Q = -(A^T P + PA)$ .

Si può, infine, stabilire il seguente fondamentale risultato

**Teorema 1.4.** Sia

$$A = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\mu \in \{0,1\}} A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \pi_1^{i_1} \pi_2^{i_2} \dots \pi_\mu^{i_\mu} \quad (69)$$

una matrice reale  $n \times n$  dipendente multilinearmente dai parametri

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_\mu]^T = \pi \in \Pi = \{ \pi \in R^\mu : \pi^- \leq \pi \leq \pi^+ \} \quad (70)$$

e  $P \in R^{n \times n}$  una matrice simmetrica *d.p.* Allora il minimo (risp. il massimo) di  $\lambda_{\min}(QP^{-1})$  (risp. di  $\lambda_{\max}(QP^{-1})$ ), ove  $Q = -(A^T P + PA)$ , viene assunto in uno dei  $2^\mu$  vertici di  $\Pi$ .

◆

Il Teorema 1.4 si può generalizzare come segue

**Teorema 1.5.** Sia

$$A = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\mu \in \{0,1\}} A_{i_1 i_2 \dots i_\mu} g_1(\pi_1)^{i_1} g_2(\pi_2)^{i_2} \dots g_\mu(\pi_\mu)^{i_\mu} \quad (71)$$

una matrice reale  $n \times n$ , in cui

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_\mu]^T = \pi \in \Pi = \{ \pi \in R^\mu : \pi^- \leq \pi \leq \pi^+ \} \quad (72)$$

e ciascuna funzione  $g_i, i=1, \dots, n$ , è continua rispetto al suo argomento, e  $P \in R^{n \times n}$  è una matrice simmetrica *d.p.* Allora il minimo (risp. il massimo) di  $\lambda_{\min}(QP^{-1})$  (risp. di  $\lambda_{\max}(QP^{-1})$ ), ove  $Q = -(A^T P + PA)$ , viene assunto in uno dei  $2^\mu$  vertici di  $\Gamma$ , ove

$$\Gamma = \{ \gamma \in R^\mu : \min[g_1 \dots g_\mu] \leq \gamma \leq \max[g_1 \dots g_\mu] \}. \quad (73)$$

◆

**Osservazione 1.8.** Il Teorema 1.4 è particolarmente utile per l'applicazione del Teorema 1.2 nell'ipotesi che la matrice  $A$  del sistema (30) sia multilineare rispetto a  $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_{n+\nu+1}] = [t \ x_1 \ \dots \ x_n \ p_1 \ \dots \ p_\nu]$  o rispetto a funzioni continue  $g_i(\pi_i), i=1, 2, \dots, n+\nu+1, .$

Nel seguito viene riportato un semplice esempio che illustra abbastanza bene l'utilità e l'efficienza dei risultati stabiliti in questa sezione.

**Esempio 1.6.** Si supponga che il moto del braccio di un robot, del carico di una gru, del rollio di una nave sia descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_1(x_1)p_1 & -p_1p_2 - p_1p_3g_2(x_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0104p_1^2 \end{bmatrix} w; \quad e = x, \quad (74)$$

ove:

$$g_1(x_1) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1)}{x_1}, & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 1, & \text{se } x_1 = 0 \end{cases}, \quad g_2(x_2) = \operatorname{tg}^{-1}(100x_2)x_2, \quad (75a)$$

$$p_1 \in [0.9, 1.1], p_2 \in [0.95, 1.05], p_3 \in [0.09, 0.11]. \quad (75b)$$

Se

$$\hat{p}_1 = 1, \hat{p}_2 = 1, \hat{p}_3 = 0.1, \quad (76)$$

applicando il Teorema 1.3 si ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Per

$$x_1 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \quad (78)$$

calcolando, secondo il Teorema 1.5, solo in 32 punti l'autovalore minimo di  $QP^{-1}$  (cfr. Fig. 1.9 in cui

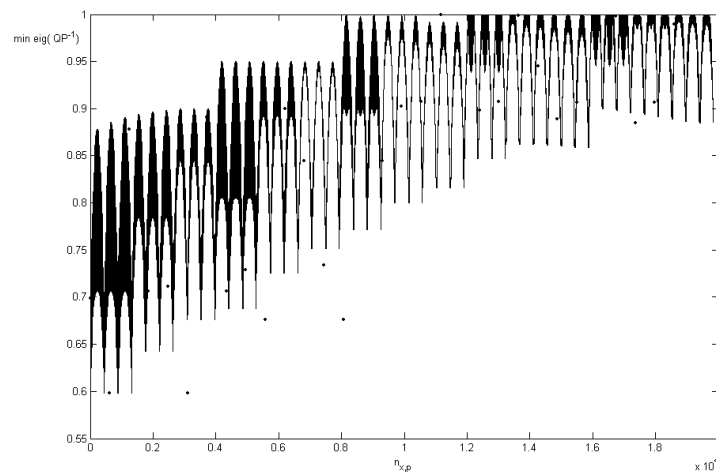


Fig. 1.9  $\lambda_{\min}(QP^{-1})$  al variare dei parametri e  $\lambda_{\min}(QP^{-1})$  calcolato in 32 punti.

vengono riportati tali valori insieme a quelli in circa 20000 punti) si ha

$$\tau_{\max} = 3.34. \quad (79)$$

Applicando la (54) i “guadagni  $|w| \rightarrow \|e\|$ ,  $|w| \rightarrow |e_1|$ ,  $|w| \rightarrow |e_2|$ ” risultano

$$g_{e\infty} = 0.0594, \quad g_{e_1\infty} = 0.0420, \quad g_{e_2\infty} = 0.0420. \quad (80)$$



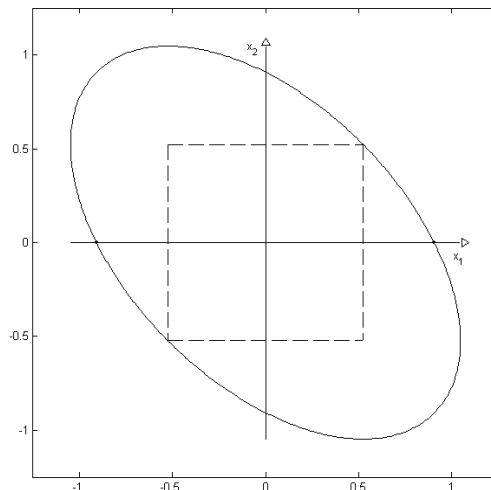


Fig. 1.10 Insieme degli stati iniziali.

Quindi per una qualsiasi  $w: |w| \leq 5$ , dipendente eventualmente anche da  $x$ , e per un qualsiasi stato iniziale (cfr. Fig. 1.10)  $x_0: \|x_0\|_P \leq 0.8225$  o, anche, per  $x_{10} \in [-\frac{\pi}{6} rad, \frac{\pi}{6} rad] = [-30^\circ, 30^\circ]$ ,  $x_{20} \in [-\frac{\pi}{6} rad/sec, \frac{\pi}{6} rad/sec] = [-30^\circ/sec, 30^\circ/sec]$  o, infine, con  $x_{10} \in [-52^\circ, 52^\circ]$ ,  $x_{20} = 0^\circ/sec$ , con una  $\tau_{max} = 3.34 sec$ ,  $|x_1(t)|$  tende ad un valore non maggiore di  $0.210 rad = 12.0^\circ$ .

**Osservazione 1.9.** Le stime dei guadagni  $g_{e\infty}, g_{e1\infty}, \dots, g_{em\infty}$  e della costante di tempo  $\tau_{max}$  che si ottengono con i risultati stabiliti dipendono dalla funzione di Lyapunov e, quindi, dalla matrice  $P$ . Se si considera più di una matrice  $P$  chiaramente conviene scegliere i valori più piccoli sia dei guadagni che della costante di tempo. Si vuol far notare che scegliendo  $P$  secondo il Teorema 1.3, in virtù anche dei Lemma 1.1 e 1.3, si ottengono in generale delle buone stime sia dei guadagni che della costante di tempo.

Per il sistema dell'Esempio 1.3, che è lineare e stazionario, la  $P$  data dalla (51), determinata con il Teorema 1.4, ha fornito proprio la  $\tau_{max}(A) = 1 sec$  ed un guadagno  $g_{e1\infty} = 0.333$ , che può ritenersi buono visto che il guadagno ad un'onda quadra di periodo pari a 2sec è di 0.205. Per tale esempio, considerando 1000 matrici  $P$  ottenute risolvendo 1000 volte l'equazione  $A^T P + PA = -S^T S = -Q$ , con  $S$  random non singolare, la più piccola  $\tau_{max}$  ottenuta è risultata pari a  $\tau_{max} = 1.10 sec$  ed il relativo  $g_{e1\infty}$  pari a  $g_{e1\infty} = 0.374$ , mentre il più piccolo guadagno  $g_{e1\infty}$  è risultato pari a  $g_{e1\infty} = 0.365$  e la relativa  $\tau_{max}$  uguale a  $\tau_{max} = 1.13 sec$ .

Per il sistema dell'Esempio 1.6, che non è lineare e stazionario, la  $P$  data dalla (77), determinata con il Teorema 1.4, ha fornito  $\tau_{max} = 3.34 sec$  ed un guadagno  $g_{e1\infty} = 0.0420$ . Per tale esempio, considerando 1000 matrici  $P$  ottenute risolvendo 1000 volte l'equazione  $\hat{A}^T P + P\hat{A} = -S^T S = -Q$ , con  $S$  random non singolare, solo in 438 casi si è ottenuta una  $Q(x, p)$  d.p. Per le  $P$  per cui le  $Q$  sono risultate d.p., la più piccola  $\tau_{max}$  ottenuta è risultata pari a  $\tau_{max} = 2.66 sec$  ed il relativo  $g_{e1\infty}$  pari a  $g_{e1\infty} = 0.0557$ , mentre il più piccolo guadagno  $g_{e1\infty}$  è risultato pari a  $g_{e1\infty} = 0.0501$  e la relativa  $\tau_{max}$  uguale a  $\tau_{max} = 3.07 sec$ .

**Esempio 1.7.** Si consideri il sistema di controllo di Fig. 1.11

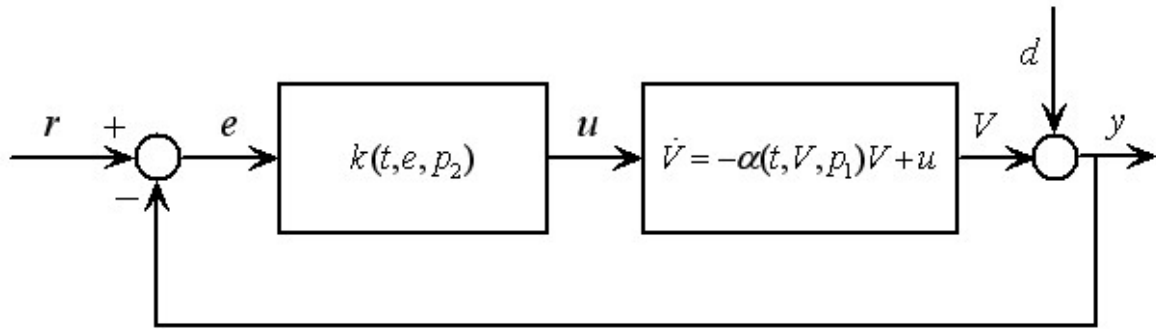


Fig. 1.11 Sistema di controllo considerato.

ove:

$r$  è il riferimento,

$d$  è il disturbo,

$y$  è l'uscita,

$e$  è l'errore,

$u$  è il segnale di controllo,

$p_1$  è un parametro incerto del processo,

$p_2$  è un parametro incerto del guadagno del controllore,

$\alpha \in [-1, 1]$ .

Dallo schema di Fig. 1.11 si ha

$$\dot{V} = -\alpha(t, V, p_1)V + k(t, e, p_2)(r - y) = -\alpha(t, V, p_1)V + k(t, e, p_2)e. \quad (81)$$

Ponendo

$$x = e = r - y = r - d - V, \quad (82)$$

si ha

$$\dot{x} = -[\alpha(t, r - d - x, p_1) + k(t, x, p_2)]x + \dot{r} - \dot{d} + \alpha(t, r - d - x, p_1)(r - d) = ax + bw; \quad (83a)$$

$$e = cx, \quad (83b)$$

ove:

$$a = -[\alpha + k],$$

$$b = 1,$$

$$c = 1,$$

$$w = \dot{r} - \dot{d} + \alpha(r - d). \quad (84)$$

Scegliendo

$$P = 1 \quad (85)$$

si ha, applicando la (43)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\min(\alpha + k)}, \quad (86)$$

ed applicando la (48)

$$|e| \leq \rho_{\infty} = \tau_{\max} \max|\dot{r} - \dot{d} + \alpha(r - d)|. \quad (87)$$

Per garantire la stabilità del sistema di controllo è necessario che  $k > 1$  e, per ottenere a regime un errore non maggiore del 5% , ad esempio per tutti i riferimenti ed i disturbi tali che

$$|r| \leq 1, \quad |\dot{r}| \leq 1; \quad (88)$$

$$|d| \leq 1, \quad |\dot{d}| \leq 1, \quad (89)$$

si deve avere

$$\min k > 81. \quad (90)$$

**Osservazione 1.10.** Dall'Esempio 1.7, come preannunciato nella Formulazione del Problema, si comprende come la teoria sviluppata sia estremamente utile per progettare controllori di sistemi non lineari che garantiscono prefissati errori massimi e velocità di convergenza per una classe di segnali e di disturbi abbastanza generale purché limitati con la loro derivata.

## 6.2 Un Metodo Molto Efficiente di Stabilizzazione Robusta per un'Importante Classe di Sistemi Non Lineari a Parametri Incerti

In questo paragrafo vengono stabiliti nuovi teoremi sulla stabilizzazione pratica per un'importante classe di sistemi non lineari ed a parametri incerti comprendente i sistemi meccanici articolati e non. Tali teoremi consentono di progettare facilmente leggi di controllo del tipo PD più un eventuale termine di compensazione imperfetta delle nonlinearità e/o dei disturbi che consentono di soddisfare specifiche di robustezza rispetto alle incertezze, rispetto alla velocità di convergenza e rispetto ai valori a "regime" dell'uscita e della sua derivata.

Le dimostrazioni dei risultati presentati in questo paragrafo non sono state riportate perché contenute in [45], che non è stato ancora pubblicato.

### 6.2.1 Formulazione del Problema e Preliminari

Si consideri il seguente

**Problema 2.1.** Dato il sistema dinamico non lineare

$$\ddot{y} = F(t, p, y, \dot{y})u + f(t, p, y, \dot{y}), \quad (1)$$

dove  $t \in R$  è il tempo,  $y \in R^m$  è l'uscita,  $u \in R^l$  è l'ingresso di controllo,  $p \in \wp \subset R^v$  è il vettore dei parametri incerti, con  $\wp$  insieme compatto,  $F \in R^{m \times l}$ ,  $f \in R^m$  sono rispettivamente una matrice ed un vettore non lineari, continui rispetto ai loro argomenti e limitati rispetto a  $t$  con

$$\text{rango}(F) = m, \quad (2)$$

un sottoinsieme compatto  $X_0 \subset R^{2m}$  di condizioni iniziali ammissibili, una costante di tempo massima  $\bar{\tau} > 0$ , dei valori  $\bar{y}_i > 0$ ,  $\bar{\dot{y}}_i > 0$  che  $|y_i(t)|$ ,  $|\dot{y}_i(t)|$ ,  $i = 1, \dots, m$ , per  $t \rightarrow \infty$ , non devono superare, si progetti una legge di controllo continua del tipo

$$u = -H(K_p y + K_d \dot{y}) + u_c, \quad (3)$$

dove  $K_p, K_d \in R^{m \times m}$  sono matrici costanti e  $H \in R^{l \times m}$ ,  $u_c \in R^l$  sono una matrice ed un vettore dipendenti in generale da  $t, y, \dot{y}, p$ , tale che (cfr. Fig. 2.1)

$$\begin{cases} |y_i(t)| \leq c_i e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} + \bar{y}_i \\ |\dot{y}_i(t)| \leq \dot{c}_i e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} + \bar{\dot{y}}_i \end{cases}, \quad \forall \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \in X_0, \forall p \in \wp, \forall t \geq 0, \quad (4)$$

con  $c_i$  e  $\dot{c}_i$  costanti opportune.

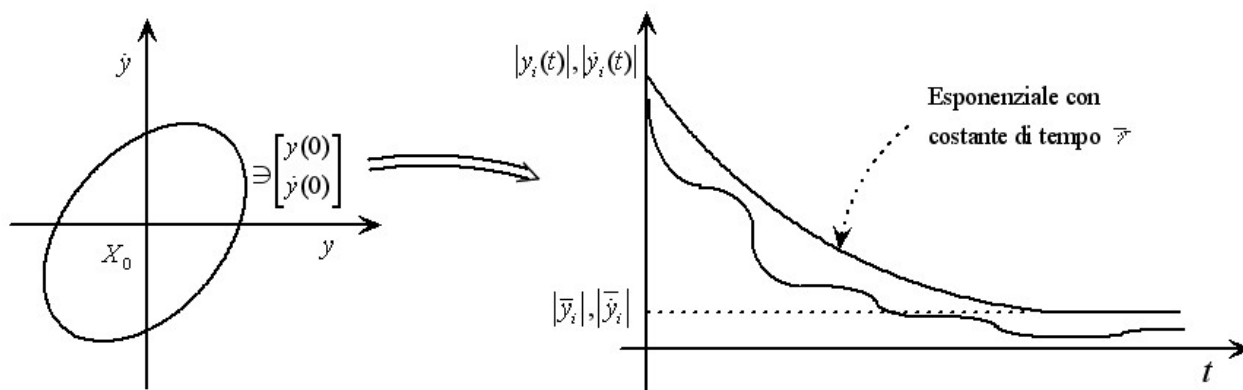


Fig. 2.1 Rappresentazione grafica del Problema 2.1.

Per risolvere il Problema 2.1 si noti che il sistema (1) retroazionato mediante la legge di controllo (3) può essere messo nella forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -GK_p & -GK_d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \tag{5}$$

ove:

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \tag{6a}$$

$$G = FH, \tag{6b}$$

$$w = Fu_c + f \tag{6c}$$

ed  $I$  è la matrice identità di ordine  $m$ .  
 Se la matrice  $F$  è perfettamente nota, scegliendo

$$H = F^+ = F^T (FF^T)^{-1}, \tag{7}$$

il sistema (5) diventa

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w, \tag{8}$$

che è lineare e stazionario, se  $w$  è indipendente da  $x$ .

Se si sceglie

$$K_p = a^2 I \tag{9a}$$

$$K_d = \sqrt{2} a I \tag{9b}$$

allora il sistema (8) è composto da  $m$  sottosistemi non interagenti identici ognuno descritto da

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -\sqrt{2}a \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_i \quad (10)$$

ove:

$$x_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix}, w_i = \text{componente } i\text{-esima di } w. \quad (11)$$

I parametri caratteristici di ciascun sottosistema lineare e stazionario (10) sono:

1. autovalori di Butterworth di modulo  $a$ , cioè

$$\lambda = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (12)$$

2. costante di tempo

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{a} \quad (13)$$

3. coefficiente di smorzamento

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (14)$$

- considerando come uscita  $y_i$ :

4. guadagno in continua

$$G = \frac{1}{a^2} \quad (15a)$$

5. banda passante

$$\omega_s = a \text{ rad/sec} \quad (15b)$$

6. sovraelongazione

$$s = 0.43\% \quad (15c)$$

7. risposta forzata massima

$$|y_i|_{\max} \leq \frac{1.09}{a^2} |w_i|_{\max} \quad (15d)$$

- considerando come uscita  $\dot{y}_i$ :

8. guadagno in continua nullo

9. pulsazione di risonanza

$$\omega_r = a \text{ rad/sec} \quad (16a)$$

10. picco di risonanza

$$M_r = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (16b)$$

11. banda passante

$$[\omega_i, \omega_s] = [0.518a, 1.93a] \text{ rad/sec} \quad (16c)$$

12. risposta forzata massima

$$|\dot{y}_i|_{\max} \leq \frac{0.95}{a} |w_i|_{\max} . \quad (16d)$$

Se  $F$  non è perfettamente nota allora il sistema (5) in generale è non lineare e non stazionario. Scegliendo  $K_p$  e  $K_d$  sempre secondo le (9) il sistema (5) diventa

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a^2 FH & -\sqrt{2a} FH \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (Fu_c + f) = A(t, x, p)x + Bw(t, x, p) \quad (17)$$

La stabilità pratica di tale sistema, una stima della costante di tempo di convergenza e delle uscite massime per  $t \rightarrow \infty$  per un qualsiasi  $w$  limitato possono essere ottenute via Lyapunov. A tale scopo sono necessari i seguenti risultati preliminari.

**Teorema 2.1.** Siano  $P$  e  $Q$  due matrici simmetriche, con  $P$  *d.p.* Allora  $Q$  è *d.p.* se e solo se la matrice  $R = QP^{-1}$ , in generale non simmetrica, ha tutti gli autovalori positivi.

◆

**Teorema 2.2.** Si supponga che il sistema (17) goda della seguente proprietà:

esiste una matrice costante  $P$  *d.p.* ed un  $\rho_0 > 0$  tali che la matrice

$$Q = -(A^T P + PA) \quad (18)$$

risulta *d.p.*  $\forall t \geq 0, \forall x \in S_{\rho_0}, \forall p \in \wp$ , ove

$$S_{\rho_0} = \left\{ x : x^T P x \leq \rho_0^2 \right\} \supseteq X_0 , \quad (19)$$

e

$$\rho_f = \frac{2\sqrt{\lambda_{\max}(B^T PB)}}{\min_{t \geq 0, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\min}(QP^{-1})} \sup_{t \geq 0, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \|w\| \quad (20)$$

è minore di  $\rho_0$ .

Allora si ha

$$\|x(t)\|_p \leq e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} (\rho_0 - \rho_f) + \rho_f, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in S_{\rho_0}, \forall p \in \wp \quad (21)$$

ove:

$$\|x\|_p = \sqrt{x^T P x}, \quad (22)$$

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\min_{t \geq 0, x \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\min}(QP^{-1})}. \quad (23)$$

◆

**Teorema 2.3.** Sia data una matrice  $P \in R^{n \times n}$  d.p. ed una matrice  $C \in R^{r \times n}$  di rango  $r$ . Se

$$\|x\|_p \leq \rho, \quad (24)$$

allora il più piccolo  $\alpha$  tale che

$$\|v\| \leq \alpha \|x\|_p \leq \alpha \rho, \quad (25)$$

ove  $v = Cx$ , risulta

$$\alpha = \sqrt{\lambda_{\max}(CP^{-1}C^T)}. \quad (26)$$

◆

## 6.2.2 Risultati Fondamentali

**Teorema 2.4.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a^2 F(t, x, p)H(t, x, p) & -\sqrt{2}aF(t, x, p)H(t, x, p) \end{bmatrix} = A(t, x, p) \in R^{2m \times 2m} \quad (27)$$

e

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}aI & I \\ I & \frac{\sqrt{2}}{a}I \end{bmatrix} \in R^{2m \times 2m}. \quad (28)$$

Allora la matrice  $P$  è d.p.  $\forall a > 0$ ; inoltre



$$\lambda_{\min}(QP^{-1}) = \begin{cases} \sqrt{2}a[\lambda_{\min}(H^T F^T + FH) - 1], & \text{se } \lambda_{\min}(H^T F^T + FH) < 2 \\ \sqrt{2}a, & \text{se } \lambda_{\min}(H^T F^T + FH) \geq 2 \end{cases}, \quad (29)$$

ove

$$Q = -(A^T P + PA). \quad (30)$$

◆

**Teorema 2.5.** Si consideri il sistema (1) retroazionato mediante la legge di controllo

$$u = -H(a^2 I y + \sqrt{2}a I \dot{y}) + u_c. \quad (31)$$

Si supponga che  $a, H, u_c$  siano tali che

$$l_{\min} = \min_{t \geq 0, (y_0, \dot{y}_0) \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \lambda_{\min}(H^T F^T + FH) > 1, \quad (32)$$

$$S_{\rho_0} = \left\{ (y_0, \dot{y}_0) : \sqrt{2}a y_0^T y_0 + 2y_0^T \dot{y}_0 + \frac{\sqrt{2}}{a} \dot{y}_0^T \dot{y}_0 \leq \rho_0^2 \right\} \quad (33)$$

contiene l'insieme delle condizioni iniziali ammissibili e

$$\rho_f = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}(l_{\min} - 1)} W, & \text{se } l_{\min} < 2 \\ \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}} W, & \text{se } l_{\min} \geq 2 \end{cases} \quad (34)$$

è minore di  $\rho_0$ , ove

$$w = F u_c + f, \quad (35a)$$

$$W = \sup_{t \geq 0, (y_0, \dot{y}_0) \in S_{\rho_0}, p \in \wp} \|w\|. \quad (35b)$$

Allora  $\forall (y_0, \dot{y}_0) \in S_{\rho_0}$  si ha

$$\begin{cases} |y_i(t)| \leq \|y\| \leq c_i e^{-\frac{t}{\tau}} + \bar{y}_i \\ |\dot{y}_i(t)| \leq \|\dot{y}\| \leq \dot{c}_i e^{-\frac{t}{\tau}} + \bar{\dot{y}}_i \end{cases}, \quad \forall p \in \wp, \forall t \geq 0 \quad (36)$$

ove:

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a(l_{\min} - 1)}, & \text{se } l_{\min} < 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{a}, & \text{se } l_{\min} \geq 2 \end{cases}, \quad (37)$$

$$\bar{y}_i = \begin{cases} \frac{2}{a^2(l_{\min} - 1)}W, & \text{se } l_{\min} < 2 \\ \frac{2}{a^2}W, & \text{se } l_{\min} \geq 2 \end{cases}, \quad (38)$$

$$\bar{\dot{y}}_i = a\bar{y}_i = \begin{cases} \frac{2}{a(l_{\min} - 1)}W, & \text{se } l_{\min} < 2 \\ \frac{2}{a}W, & \text{se } l_{\min} \geq 2 \end{cases}. \quad (39)$$

◆

**Osservazione 2.1.** Si noti che una delle condizioni sufficienti affinché si abbia convergenza è che  $\lambda_{\min}(H^T F^T + FH) > 1$ . Se è soddisfatta la condizione più forte

$$\lambda_{\min}(H^T F^T + FH) \geq 2, \quad (40)$$

detta condizione di stabilità robusta, si ha che

- $\bar{\tau}$  risulta

$$\bar{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad (41)$$

cioè dipende solo dal parametro di progetto  $a$  e coincide con la (13), che si ottiene scegliendo la  $H$  secondo la (7), la quale richiede la conoscenza esatta di  $F$ ;

- i legami ingresso uscita di “regime” risultano:

$$|y_i(t)| \leq \|y\| \leq \frac{2}{a^2}W \quad (42)$$

$$|\dot{y}_i(t)| \leq \|\dot{y}\| \leq \frac{2}{a}W, \quad (43)$$

mentre, se si sceglie la  $H$  secondo la (7), nell’ipotesi che  $w$  sia indipendente da  $y$  e  $\dot{y}$ , dalle (15d), (16d) si ha:

$$\|y\| \leq \frac{1.09}{a^2}W \quad (44)$$

$$\|\dot{y}\| \leq \frac{.95}{a} W, \quad (45)$$

dimostrando quanto le (42) e (43) siano poco conservative.

**Osservazione 2.2.** Dalle (3), (42) (43) si ha:

- se il sistema (1) non ha nonlinearità addizionali ( $f = 0$ ) o se si riesce a compensarle perfettamente,  $y(t)$  ed  $\dot{y}(t)$ , per  $t \rightarrow \infty$ , tendono a zero;
- i valori limite di  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$  si possono ridurre aumentando  $a$  e/o compensando maggiormente, con azioni di  $u_c$  semplici, la nonlinearità  $f$ .

Per quanto concerne la scelta di una matrice  $H$  che soddisfa la condizione di stabilità robusta (40) vale il seguente

**Teorema 2.6.** Alcune possibili scelte della matrice  $H$  che soddisfano la condizione (40) sono:

1. Se  $m = l$ ,  $F^T + F$  è *d.p.* e si desidera una legge di controllo (3) di tipo PD (o a reazione di stato, se è misurabile sia  $y$  che  $\dot{y}$ ) disaccoppiata, lineare e tempo invariante allora  $H$  si può scegliere pari a

$$H = hI, \quad (46)$$

con

$$h \geq \frac{2}{\lambda_{\min}(F^T + F)}, \quad (47)$$

oppure pari a

$$H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_m), \quad (48)$$

con  $h_1, h_2, \dots, h_m$  tali da soddisfare la (40).

2. Se si può far ricorso ad un controllore PD accoppiato allora  $H$  si può scegliere pari a

$$H = hF^T, \quad (49)$$

con  $h$  tale che:

$$h \geq \frac{1}{\lambda_{\min}(FF^T)}, \quad (50)$$

se  $F$  è perfettamente nota ed il suo calcolo in linea non è oneroso, pari a

$$H = h\tilde{F}^T, \quad (51)$$

con  $\tilde{F}$ , opportuna approssimazione di  $F$ , ed  $h$  tali che:

$$h \geq \frac{2}{\lambda_{\min}(F\tilde{F}^T + \tilde{F}F^T)}, \quad (52)$$

se  $F$  non è perfettamente nota e/o il suo calcolo in linea è oneroso. ◆

### 6.2.3 Caso dei Sistemi Meccanici

E' ben noto che il modello di un generico sistema meccanico, articolato o non, con eventuali elasticità che si possano ritenere concentrate, (ad esempio un robot, una struttura portante di un'opera di ingegneria civile, ...), può essere descritto da un'equazione del tipo

$$B(y, p)\ddot{y} = Tu + c(y, \dot{y}, p) + g(t, y, p), \quad (53)$$

ove  $y \in R^m$  è il vettore delle coordinate lagrangiane,  $B \in R^{m \times m}$  è la matrice d'inerzia, che è simmetrica e *d.p.*,  $c \in R^m$  è il vettore delle forze di Coriolis, di attrito viscoso ed isteretico,  $g \in R^m$  è il vettore delle eventuali forze elastiche, di gravità e delle varie azioni di disturbo,  $u \in R^l$  è il vettore delle forze sviluppate dagli attuatori e  $T \in R^{m \times l}$  è la matrice di trasmissione dell'azione di controllo. In questo lavoro, per brevità, si suppone che  $T = I$ .

Per tali sistemi, essendo

$$F = B^{-1}, \quad (54)$$

la determinazione di una matrice  $H$  che soddisfa la (40) è abbastanza semplice. Infatti valgono i seguenti teoremi.

**Teorema 2.7.** Un valore di  $h$  che soddisfa la (47) risulta

$$h \geq \lambda_{\max}(B). \quad (55)$$

◆

**Teorema 2.8.** Sia

$$B = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\mu \in \{0,1\}} B_{i_1 i_2 \dots i_\mu} g_1(\pi_1)^{i_1} g_2(\pi_2)^{i_2} \dots g_\mu(\pi_\mu)^{i_\mu} \quad (56)$$

una matrice reale, simmetrica, di dimensioni  $m \times m$ , ove

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_\mu]^T = \pi \in \Pi = \left\{ \pi \in R^\mu : \pi^- \leq \pi \leq \pi^+ \right\} \quad (57)$$

e ciascuna funzione  $g_i, i=1, \dots, \mu$ , è continua rispetto al suo argomento. Allora il massimo di  $\lambda_{\max}(B)$  viene assunto in uno dei  $2^\mu$  vertici di  $\Gamma$ , ove

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^{\mu} : \min[g_1 \dots g_{\mu}] \leq \gamma \leq \max[g_1 \dots g_{\mu}] \right\}. \quad (58)$$

◆

**Osservazione 2.3.** Poiché per un robot la matrice d'inerzia è funzione lineare dei parametri (cfr. [39]) e dei coseni degli angoli relativi tra i vari bracci (cfr. [46]), dal Teorema (2.8) segue che il  $\max_{p \in \emptyset, y \in \mathbb{R}^m} \lambda_{\max}(B(y, p))$  viene assunto in corrispondenza dei valori dei parametri estremali e per quella configurazione per cui il robot risulta più spiegato.

### 6.3 Un Metodo Generale ed Efficiente di Controllo Robusto per Sistemi Meccanici Non Lineari a Parametri Incerti

In questo paragrafo, tenendo conto che vi sono moltissimi sistemi meccanici lineari e non, soggetti a disturbi e ad incertezze, che necessitano di essere controllati efficacemente, viene presentata una nuova tecnica di progetto molto generale, che consente di determinare facilmente leggi di controllo semplici e robuste per costringere un sistema meccanico a seguire una preassegnata traiettoria, limitata in accelerazione, con prefissati errori massimi in posizione e in velocità e preassegnata velocità massima di convergenza. L'efficienza del metodo viene illustrata mediante la progettazione di una legge di controllo decentralizzata del tipo PD per un robot industriale a tre bracci che deve periodicamente effettuare lavorazioni in determinati punti di un corpo in rotazione.

I risultati presentati in questo paragrafo sono stati pubblicati (cfr. [43]).

#### 6.3.1 Risultati Teorici Preliminari

**Problema 3.1.** Dato il sistema dinamico non lineare

$$\ddot{y} = F(t, p, y, \dot{y})u + f(t, p, y, \dot{y}), \quad (1)$$

dove  $t \in R$  è il tempo,  $y \in R^v$  è l'uscita,  $u \in R^m$  è l'ingresso di controllo,  $p \in \wp \subset R^u$  è il vettore dei parametri incerti del sistema, con  $\wp$  insieme compatto,  $F \in R^{v \times m}$  e  $f \in R^v$  sono rispettivamente una matrice ed un vettore non lineari con

$$\text{rango}(F) = v, \quad (2)$$

e due sottoinsiemi compatti  $T^- \subset T^+ \subseteq R^{2v}$ ,

si progettano una legge di controllo continua del tipo:

$$u = H(K_p y + K_d \dot{y}) + u_c, \quad (3)$$

dove  $K_p, K_d \in R^{v \times v}$  sono matrici costanti e  $H \in R^{m \times v}$ ,  $u_c \in R^v$ , dipendenti in generale da  $t, p, y, \dot{y}$ , sono tali che (cfr. Fig. 3.1)

$$\forall x_0 \in T^+, x(t) \in T^+ \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in T^-, \quad (4)$$

dove

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

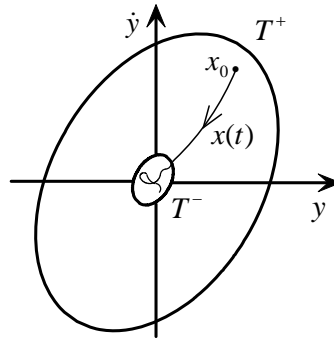


Fig. 3.1 Rappresentazione grafica di un sistema stabile praticamente.

Il Problema 3.1 può essere risolto usando il seguente teorema (cfr. Paragrafi 6.1 e 6.2).

**Teorema 3.1.** Il Problema 3.1 può essere risolto scegliendo la matrice  $H$  in modo che

$$\lambda_{\min}(FH + H^T F^T) < -1, \tag{6}$$

$K_p$  e  $K_d$  come segue:

$$K_p = a^2 I, \quad K_d = \sqrt{2} a I, \quad a > 0, \tag{7}$$

dove  $I$  denota la matrice identità  $n \times n$ ,  
 $u_c$  ed  $a$  tali che

$$\frac{w^T w}{\rho^2} = \left( \frac{\|w\|}{\rho} \right)^2 < \frac{a^3}{\sqrt{8}}, \quad \begin{cases} \forall \rho \in (\rho^-, \rho^+] \\ \forall x \in C_{\rho^+} - C_{\rho^-} \\ \forall p \in \emptyset \end{cases}, \tag{8}$$

dove

$$w = F u_c + f, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} C_{\rho^-} &= \{x : d(x) \leq \rho^-\} \subseteq T^- \\ C_{\rho^+} &= \{x : d(x) \leq \rho^+\} \supseteq T^+ \end{aligned} \tag{10}$$

in cui  $d(x)$  è la distanza di  $x$  dall'origine, definita dalla forma quadratica d.p.

$$\begin{aligned} d^2(x) &= d^2(y, \dot{y}) = \sqrt{2} a y^T y + \sqrt{2} / a \dot{y}^T \dot{y} + 2 y^T \dot{y} \\ &= \sqrt{2} y_n^T y_n + \sqrt{2} \dot{y}_n^T \dot{y}_n + 2 y_n^T \dot{y}_n, \end{aligned} \tag{11}$$

ove

$$y_n = \sqrt{a}y, \quad \dot{y}_n = \dot{y}/\sqrt{a}. \quad (12)$$

Inoltre, se

$$\lambda_{\min}(FH + H^T F^T) \leq -2 \quad (13)$$

La velocità di convergenza al generico iper-cerchio (secondo la metrica  $d$ )  $C_\rho$  di raggio  $\rho$  e centro  $(0,0)$

$$C_\rho = \{(y, \dot{y}) : d(y, \dot{y}) \leq \rho\}, \quad \rho^- < \rho \leq \rho^+ \quad (14)$$

è non maggiore di quella di un esponenziale caratterizzato da una costante di tempo (cfr. Fig. 3.2)

$$\tau_\rho = \frac{\tau_\infty}{1 - \frac{\rho^-}{\rho}}, \quad \tau_\infty = \frac{\sqrt{2}}{a}. \quad (15)$$

◆

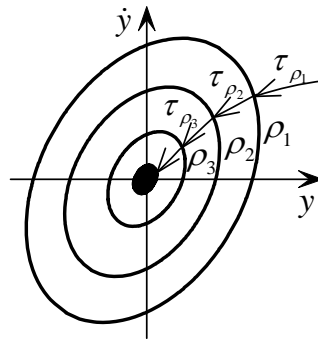


Fig. 3.2 Rappresentazione grafica della velocità di convergenza.

**Osservazione 3.1.** Mediante un teorema dimostrato in [42] e nel Paragrafo 6.1 l'iper-cerchio  $C_{\rho^-}$  può essere approssimato con il più pratico iper-rettangolo che lo contiene (cfr. Fig. 3.3):

$$R_{\rho^-} = \{(y, \dot{y}) : |y_i| < \bar{y}_i, \quad |\dot{y}_i| < \bar{\dot{y}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, v\}, \quad (16)$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{a}} \rho^- \\ \bar{\dot{y}}_i &= \sqrt[4]{2} \sqrt{a} \rho^- = a \bar{y}_i, \end{aligned} \quad (17)$$

in cui



$$\rho^- = \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}}W, \quad W = \max\|w\| \left| \begin{array}{l} \forall (y, \dot{y}) \in \Gamma_{\rho^-} \\ \forall p \in \wp \end{array} \right. , \quad (18)$$

ove  $\Gamma_{\rho^-}$  denota la frontiera di  $C_{\rho^-}$ , ossia l'iper-circonferenza di raggio  $\rho^-$

$$\Gamma_{\rho^-} = \{(y, \dot{y}) : d(y, \dot{y}) = \rho^-\}. \quad (19)$$

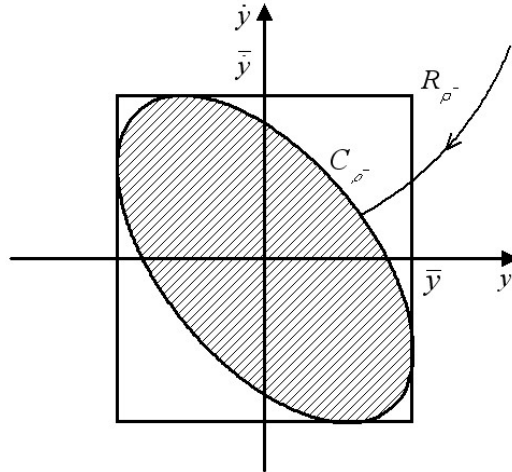


Fig. 3.3 Approssimazione di  $C_{\rho^-}$  con  $R_{\rho^-}$ .

### 6.3.2 Risultati Fondamentali

E' ben noto che un sistema meccanico eventualmente articolato (edificio, robot, ...) si può descrivere mediante l'equazione

$$B\ddot{q} = c + d + Tu, \quad (20)$$

ove:

$q \in S_L \subseteq R^v$  è il vettore delle coordinate lagrangiane, con  $S_L$  spazio di lavoro, delimitato da vincoli fisici dipendenti dal sistema e/o dal mondo circostante,

$B(p, q)$  è la matrice d'inerzia, in cui  $p \in \wp \subset R^u$  con  $\wp$  compatto, è il vettore dei parametri incerti del sistema meccanico,

$c = C(p, q, \dot{q})\dot{q}$  è il vettore delle forze generalizzate centrifughe, di Coriolis e d'attrito,

$d = d(t, p, q)$  è il vettore delle forze generalizzate gravitazionali e di eventuali azioni esterne,

$u$  è il vettore delle forze generalizzate di controllo sviluppate mediante attuatori,

$T$  è la matrice di trasmissione delle forze generalizzate di controllo.

In questa trattazione si suppone per brevità che  $T=I$ .

Sia  $\hat{q}(t)$  la traiettoria che il sistema meccanico deve seguire.

Ponendo

$$\begin{aligned} e &= \hat{q} - q, & q &= \hat{q} - e \\ \dot{e} &= \hat{\dot{q}} - \dot{q}, & \dot{q} &= \hat{\dot{q}} - \dot{e} \end{aligned} \quad (21)$$

ove  $e$  è l'errore in posizione ed  $\dot{e}$  è l'errore in velocità, il sistema (20) si può scrivere nella forma:

$$\ddot{e} = Fu + f, \quad (22)$$

ove:

$$\begin{aligned} F(t, p, e) &= -B^{-1} = -B^{-1}(p, q) = -B^{-1}(p, \hat{q} - e) \\ f(t, p, e, \dot{e}) &= \ddot{\hat{q}} - B^{-1}(c + d) \end{aligned} \quad (23)$$

Come si può notare il modello dell'errore di inseguimento (22), (23) è un caso particolare del sistema (1) e, quindi, anche per esso si può porre il Problema 3.1 ed applicare opportunamente il Teorema 3.1 per poterne determinare facilmente delle buone soluzioni.

A tal proposito si noti che, mediante la legge di controllo

$$u = H(K_p e + K_d \dot{e}) + u_c, \quad (24)$$

con

$$K_p = a^2 I, \quad K_d = \sqrt{2} a I, \quad a > 0, \quad (25)$$

la condizione (13) di robustezza della stabilità, che consente di avere una

$$\tau_\infty = \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad (26)$$

tenendo presente che la matrice d'inerzia  $B$  è simmetrica, diventa

$$\lambda_{\min}[B^{-1}(H + H^T)] \geq 2, \quad (27)$$

mentre il vettore  $w$  che consente di calcolare, mediante la (8), i raggi  $\rho^+$  e  $\rho^-$  e/o solo

$$\rho^- = \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}} W, \quad W = \max \|w\| \Big|_{\substack{\forall (y, \dot{y}) \in \Gamma_{\rho^-} \\ \forall p \in \rho^-}}, \quad (28)$$

che permette di stimare i valori massimi a regime degli errori  $\bar{e}_i$  in posizione ed  $\bar{\dot{e}}_i$  in velocità mediante le relazioni

$$\bar{e}_i = \frac{2}{a^2} W, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (29)$$

$$\bar{e}_i = \frac{2}{a} W = a\bar{e}_i$$

risulta

$$\begin{aligned} w &= w(t, p, e, \dot{e}) = \ddot{\hat{q}} - B^{-1}(u_c + c + d) = \\ &= B^{-1}(p, \hat{q} - e)(u_c + C(p, \hat{q} - e, \dot{\hat{q}} - \dot{e})(\dot{\hat{q}} - \dot{e}) + \\ &+ d(t, p, \hat{q} - e)). \end{aligned} \quad (30)$$

Ciò premesso si possono stabilire alcuni fondamentali risultati.

**Teorema 3.2.** Delle possibili scelte della matrice  $H$  che garantiscono la condizione (13) di robustezza della stabilità ed una  $\tau_\infty$  data dalla (26) sono:

- A. se si vuole un'azione PD della legge di controllo (24) (o di reazione dello stato se è disponibile oltre la misura di  $e$  anche quella di  $\dot{e}$ ) disaccoppiata, lineare e stazionaria:

$$A.1 \quad H = hI, \quad (31)$$

con

$$h \geq \lambda_{\max}(B); \quad (32)$$

$$A.2 \quad H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_\nu), \quad (33)$$

con  $h_1, h_2, \dots, h_\nu$  tali che

$$\lambda_{\max} \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \dots, \frac{1}{h_\nu} \right) B \right] \leq 1; \quad (34)$$

- B. se invece si decide di utilizzare un'azione PD accoppiata :

$$B.1 \quad H = B, \quad (35)$$

se  $B$  è perfettamente nota ed il suo calcolo in linea non è oneroso;

$$\begin{aligned} B.2 \quad H &= \tilde{B} \text{diag}(h_{10}, h_{20}, \dots, h_{\nu 0}) + \\ &+ \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_\nu), \end{aligned} \quad (36)$$

con  $\tilde{B}$  (opportuna approssimazione di  $B$ ),  $h_{i0}$  e  $h_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , tali che sia soddisfatta la (27),

se  $B$  non è perfettamente nota e/o il suo calcolo in linea è oneroso.

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue facilmente tenendo presente che la matrice d'inerzia  $B$  è sempre d.p. e che  $\text{eig}(A) = 1./\text{eig}(A^{-1})$ ,  $\forall A \in R^{n \times n}$  non singolare.

◆

**Osservazione 3.2.** Se  $H = B$  e  $w$  è indipendente da  $(e, \dot{e})$  (cfr. 6.2.1), il sistema (22) è lineare e stazionario composto da  $\nu$  sottosistemi non interagenti aventi tutti, considerando come uscita  $e_i$ , guadagno in continua  $1/a^2$ , pulsazione di taglio superiore  $a$ , costante di tempo  $\tau = \tau_\infty = \sqrt{2}/a$ , coefficiente di smorzamento  $\zeta = \sqrt{2}/2$ , sovranelongazione  $s = 0.43\%$  e, considerando come uscita  $\dot{e}_i$ , picco di risonanza  $1/\sqrt{2}a$ .

**Teorema 3.3.** Se le forze di attrito, centrifughe, di Coriolis, di gravità e di disturbo sono trascurabili, o vengono perfettamente compensate mediante un'azione

$$u_c = -c - d, \quad (37)$$

allora:

$$\begin{aligned} \rho^+ &= \infty \\ \rho^- &= \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}} \max \|\ddot{\hat{q}}\| \end{aligned} \quad (38)$$

e quindi:

$$|e_i| \leq \frac{2}{a^2} \max \|\ddot{\hat{q}}\| = \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (39)$$

$$|\dot{e}_i| \leq \frac{2}{a} \max \|\ddot{\hat{q}}\| = a\bar{e}_i$$

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue facilmente dalle (8), (28), (29), notando che  $B$  è sempre non singolare e che, se  $c + d = 0$  e  $u_c = 0$  o  $u_c$  è tale che  $c + d + u_c = 0$ , per la (30), si ha

$$w = \ddot{\hat{q}}, \quad \forall t, p, e, \dot{e}. \quad (40)$$

◆

**Osservazione 3.3.** Le ipotesi del Teorema 3.3 sono soddisfatte senza nessuna azione di compensazione in molti sistemi di rilevante interesse ingegneristico, quali diversi sistemi meccanici costituiti da corpi rigidi connessi con elementi elastici molto rigidi e di massa trascurabile (edifici, ...), diversi robot (cartesiani con opportuni contrappesi per annullare le forze di gravità, ...).

**Osservazione 3.4.** Le (24), (39) consentono di fare diverse importanti considerazioni. Ad esempio, per ridurre gli errori a regime bisogna aumentare i guadagni dei PD o ridurre l'accelerazione massima della traiettoria che si vuole seguire.

**Teorema 3.4.** Se  $\|\ddot{\hat{q}}\|$  e i disturbi sono limitati,  $u_c = 0$ , le forze d'attrito sono limitate in un intorno  $\mathfrak{T}_\delta$  di  $(\hat{q}, \dot{\hat{q}})$  di raggio  $\delta$  allora

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \rho^- = 0, \quad (41)$$

cioè gli errori a regime si possono rendere piccoli a piacere.

Se in aggiunta le forze d'attrito sono continue nell'intorno  $\mathfrak{T}_\delta$  ed  $a$  è sufficientemente grande allora

$$\rho^- \cong \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}} \max \|w_n\|, \quad (42)$$

ove:

$$w_n = w(t, p, 0, 0) = \ddot{\hat{q}} - B^{-1}(\hat{q})(C(p, \hat{q}, \dot{\hat{q}})\dot{\hat{q}} + d(t, \hat{q})). \quad (43)$$

**Dimostrazione.** Si noti che se  $\|\ddot{\hat{q}}\|$  e i disturbi sono limitati e  $u_c = 0$ , poiché la matrice d'inerzia e le forze di gravità sono continue rispetto ad  $e$ , le forze centrifughe e di Coriolis sono continue rispetto ad  $e, \dot{e}$  e quelle d'attrito sono limitate nell'intorno  $\mathfrak{T}_\delta$  di  $(\hat{q}, \dot{\hat{q}})$ , esiste sicuramente un  $W$  tale che

$$\|w\| < W, \quad \forall (e, \dot{e}) \in \mathfrak{T}_\delta. \quad (44)$$

Pertanto, per la (8), un possibile valore di  $\rho^-$  risulta

$$\rho^- = \frac{\sqrt[4]{8}}{a\sqrt{a}} W \quad (45)$$

se

$$\Gamma_{\rho^-} = \{(e, \dot{e}) : d(e, \dot{e}) = \rho^-\} \subseteq \mathfrak{T}_\delta. \quad (46)$$

Poiché per l'Osservazione 3.1 e la (29)  $\Gamma_{\rho^-} \subseteq R_{\rho^-}$ , ove

$$R_{\rho^-} = \left\{ (e, \dot{e}) : |e_i| \leq \frac{2}{a^2} W, |\dot{e}_i| \leq \frac{2}{a} W, i = 1, 2, \dots, \nu \right\} \quad (47)$$

si ha che la (46) può essere sicuramente soddisfatta se si sceglie  $a$  sufficientemente grande. Da ciò e dalla (45) segue la (41). Se le forze d'attrito sono continue rispetto ad  $e$ , è nell'intorno  $\mathfrak{S}_\delta$  di  $(\hat{q}, \dot{\hat{q}})$  si ha anche che se  $a \rightarrow \infty$ ,  $w \rightarrow w_n$  e quindi la (42).

◆

**Osservazione 3.5.** È possibile seguire traiettorie molto velocemente con piccoli errori anche con valori di  $a$  non molto grandi se si fa ricorso ad un'opportuna azione di compensazione  $u_c$  in modo da ridurre  $w$ .

**Osservazione 3.6.** Per quanto concerne il calcolo di  $\rho^+$ , per brevità di trattazione, si fa notare che esso aumenta con  $a$ , ossia con i guadagni dei PD, e/o con una maggiore azione di compensazione. Si fa tuttavia notare che nella pratica, per ridurre l'ampiezza delle forze di controllo, che non sempre sono sopportabili dal sistema e che richiedono attuatori costosi ed ingombranti, si preferisce avviare il sistema di controllo con errori non molto elevati.

### 6.3.3 Caso di Studio

I risultati presentati nei sottoparagrafi precedenti sono stati utilizzati per progettare un controllore di un robot planare a tre bracci il cui compito è quello di effettuare periodicamente una traiettoria di andata, costituita da un arco di circonferenza, ed una di ritorno, costituita da un arco di ellisse con profili di velocità trapezoidali (cfr. Fig. 3.4, 3.5). Tale tipologia di lavoro è molto frequente nella pratica ingegneristica, ad esempio per realizzare gabbie per pali in c.a., per effettuare lavorazioni su determinati punti di oggetti che si muovono su un nastro che presenta un tratto circolare, etc. (cfr. Fig. 6, 7).

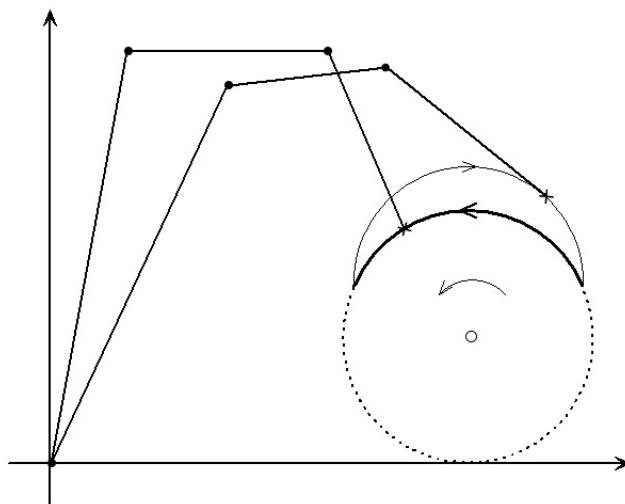


Fig. 3.4 Traiettoria di andata e di ritorno.

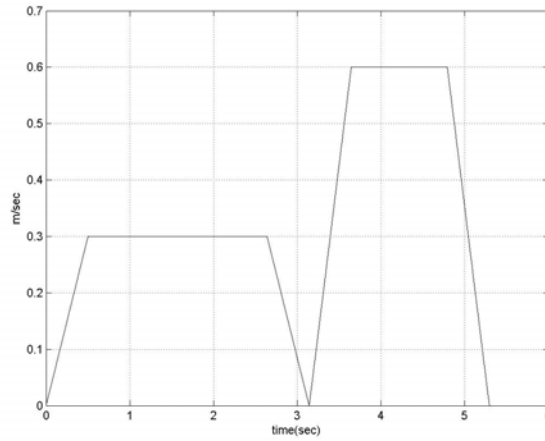


Fig. 3.5 Profilo della velocità.

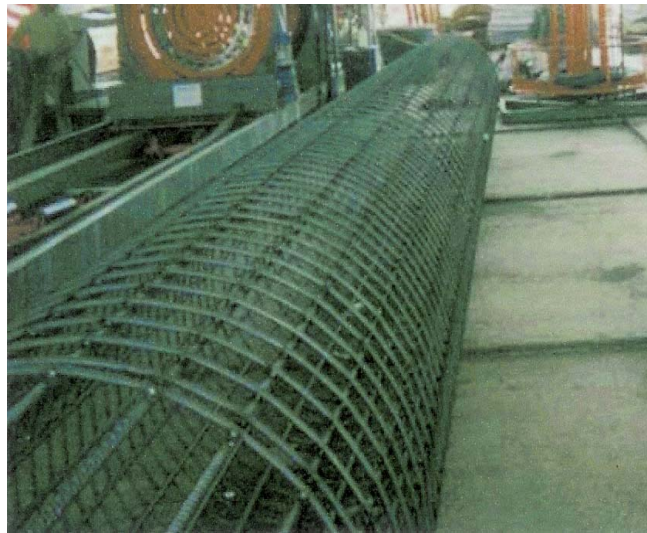


Fig. 3.6 Gabbia per pali in c.a.

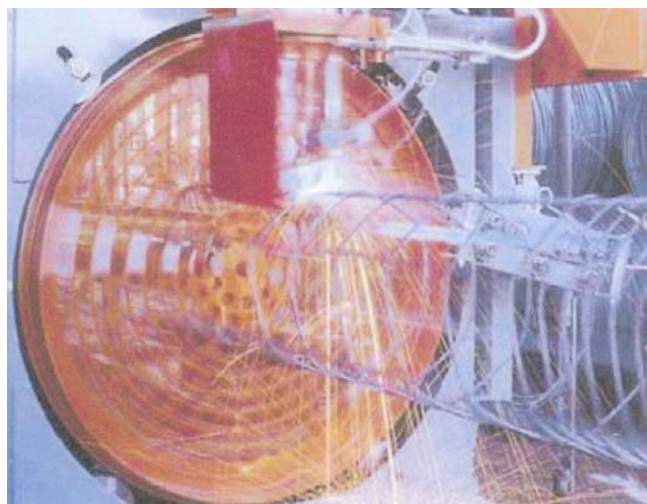


Fig. 3.7 Fase di saldatura dell'elica con una barra.

Per un robot con

$$\begin{aligned} L_1 &= 1m, m_1 = 1Kg/m, M_1 = 1Kg \\ L_2 = L_3 &= 0.5m, m_2 = m_3 = 0.5Kg/m, \\ M_2 = M_3 &= 0.5Kg \end{aligned} \quad (48)$$

ed un corpo da lavorare in un determinato punto che si muove su una circonferenza di raggio

$$R = 0.3m, \quad (49)$$

nell'ipotesi di compensazione delle sole coppie di gravità o di piano del robot orizzontale,  $\|w_n\|$  è riportato in Fig. 3.8. Con un controllore costituito da tre PD disaccoppiati con  $h = 5.7$  ed  $a = 10$  si ha:

$$\tau_\infty = .1414sec, \quad \bar{e}_i = 0.02W, \quad \bar{\dot{e}}_i = 0.2W, \quad (49)$$

ove  $W$  è il massimo di  $\|w_n\|$ .

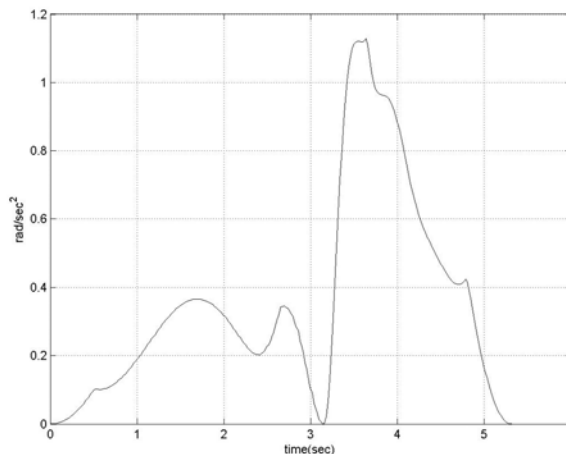


Fig. 3.8 Andamento di  $\|w_n\|$ .

Nella Fig. 3.9 vengono riportati gli errori in posizione ed in velocità del primo braccio partendo da errori nulli. Nella Fig. 3.10 vengono riportati gli errori in posizione ed in velocità del primo braccio partendo da un errore in posizione di detto braccio di  $0.1rad$ .

Tali risultati di simulazione ed altri ottenuti con disturbi tali che i massimi di  $\|w_n\|$  durante le fasi di andata e ritorno siano gli stessi confermano i risultati di previsione degli errori massimi e della velocità di convergenza.

In Fig. 3.11 è riportata la coppia di controllo applicata al primo braccio partendo da condizioni iniziali nulle. Si noti che, a causa della mancanza di chattering e a causa del valore di  $\zeta$  per il modello ideale, la massima coppia di controllo non è troppo elevata.



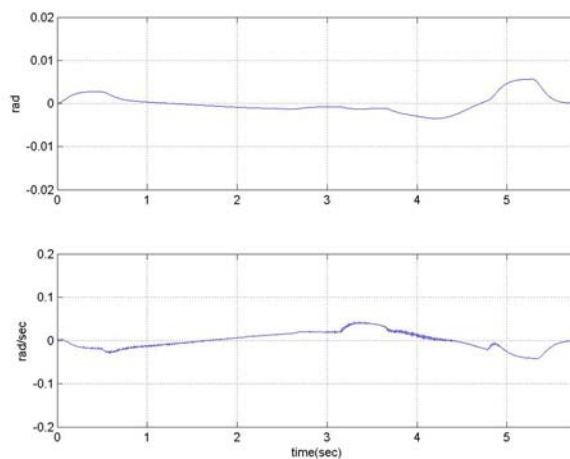


Fig. 3.9 Errore in posizione e velocità del primo braccio.

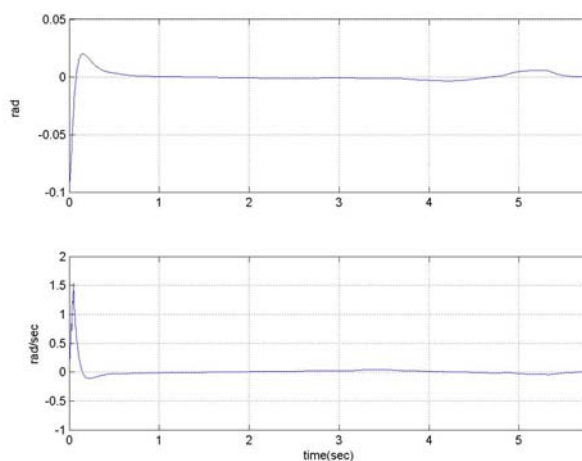


Fig. 3.10 Errore in posizione e velocità del primo braccio con errore iniziale non nullo.

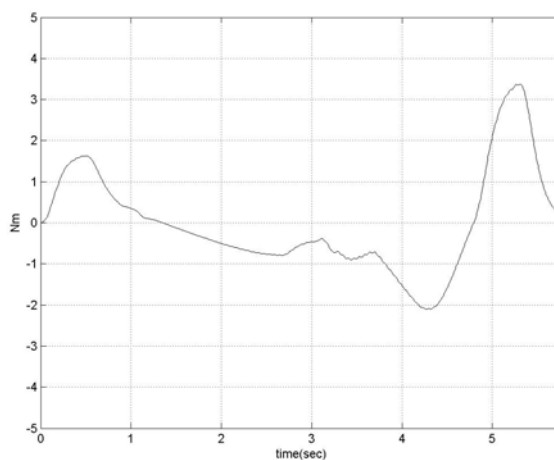


Fig. 3.11 Coppia di controllo applicata al primo braccio con condizioni iniziali nulle.

### **6.3.4 Conclusioni**

In questo paragrafo sono stati presentati e dimostrati alcuni teoremi che consentono di progettare leggi di controllo, del tipo PD più un'eventuale azione di compensazione, che consentono di soddisfare facilmente specifiche di progetto sulla robustezza della stabilità rispetto ad incertezze (agendo su  $H$ ), sulla velocità di convergenza dell'errore (agendo su  $a$ ), sulla precisione in posizione e in velocità (agendo su  $a$  ed eventualmente sull'azione di compensazione).

# Bibliografia

---

- [1] G. Celentano, "Robust Stability Bounds for Time-Varying Perturbations," *Proceedings of IEEE Workshop on Variable Structure and Lyapunov Techniques*, 7–9 Settembre 1994, Benevento, I.
- [2] F. Amato, 2006, *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*, Springer-Verlag, Heidelberg, D.
- [3] A. Cavallo, G. Celentano, and G. De Maria, "Robust stability analysis of polynomials with linearly dependent coefficient perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 380-384, 1991.
- [4] P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone, 1995, *Linear-Quadratic Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [5] 1987, *Robust Control*, edited by P. Dorato, IEEE Press.
- [6] A. Sanei, 2002, *Towards a Performance Theory of Robust Adaptive Control*, P.h.D. thesis, University of Southampton, UK.
- [7] F. Amato, G. Celentano, and F. Garofalo, "New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 1409-1411, 1993.
- [8] G. Celentano, F. Garofalo, and L. Glielmo, "Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 281-284, 1993.
- [9] F. Amato, G. Celentano, and F. Garofalo, "Stability robustness bounds for linear systems subject to slowly-varying parameter uncertainties", *Proceedings of the American Control Conference 1992*, 24-26 Giugno 1992, Chicago, US-IL.
- [10] F. Amato, M. Ariola, and P. Dorato, "Robust finite-time stabilization of linear systems depending on parametric uncertainties", *Proceedings of the 37<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Dicembre 1998, Tampa, US-FL.
- [11] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, 1996, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.
- [12] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [13] V.I. Utkin, 1978, *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR Publishers.
- [14] R.R. Drenick and R.A. Shahbender, "Adaptive servomechanism", *AIEE Transactions*, vol. 79, pp. 286-292, 1957.

- [15] J.B. Pomet and L. Praly, "Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 729-740, 1992.
- [16] B. Brogliato and A.T. Neto, "Practical stabilization of a class of nonlinear systems with partially known uncertainties", *Automatica*, vol. 31, no. 1, pp. 145-150, 1995.
- [17] S. Sastry, 1999, *Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control*, Springer-Verlag.
- [18] H. Nijmeijer and A.J. Van der Schaft, 1990, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag.
- [19] J.J.E. Slotine and W. Li, 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, US-NJ.
- [20] A. Isidori, 1999, *Nonlinear Control Systems II*, Springer-Verlag.
- [21] S. Arimoto, 1996, *Control Theory of Non-linear Mechanical Systems*, Oxford Engineering Science Series.
- [22] C.C. de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin, *Theory of Robot Control*, (2<sup>nd</sup> Ed.) Springer-Verlag, London, UK, 1997.
- [23] J.T. Spooner, 2002, *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems*, Wiley- Interscience.
- [24] S. Wiggins, 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag.
- [25] M. Corless and G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 26, pp. 1139-1144, 1981.
- [26] M. Corless and G. Leitmann, "Adaptive Control of Systems Containing Uncertain Functions and Unknown Functions with Uncertain Bounds," *J. of Optimization Theory and Application*, vol. 41, pp. 155-168, 1983.
- [27] G. Ambrosino, G. Celentano, and F. Garofalo, "Robust model tracking control for a class of nonlinear plants," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 30, no.3, pp. 275-279, 1985.
- [28] G. Ambrosino, G. Celentano, and F. Garofalo, "Tracking control of high performance robots via stabilizing controllers for uncertain systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol.50, pp. 239-255, 1986.
- [29] G. Celentano and R. Iervolino, "Finite-valued control law synthesis for nonlinear uncertain systems," *15<sup>th</sup> IFAC World Congress*, 2002, Barcellona, E.
- [30] S. Jayasuriya and C.N. Hwang, "Tracking Controllers for Robot Manipulators: a High Gain Perspective," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 110, pp. 39-45, 1988.

- [31] T.-L. Liao, L.-C. Fu, and C.-F. Hsu, "Adaptive Robust Tracking of Nonlinear Systems With an Application to a Robotic Manipulator," *Systems & Control Lett.*, vol. 15, pp. 339-348, 1990.
- [32] R. Shoureshi, M.E. Momot, and M.D. Roesler, "Robust Control for Manipulators With Uncertain Dynamics," *Automatica*, vol. 26, pp. 353-359, 1990.
- [33] C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato, and M. Jamshidi, "Survey of Robust Control for Rigid Robots," *IEEE Control Systems Mag.*, vol. 11, no. 2, pp. 24-30, 1991.
- [34] P. Tomei, "Adaptive PD Controller for Robot Manipulators," *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 7, pp. 565-570, 1991.
- [35] Y. Stepanenko and J. Yuan, "Robust Adaptive Control of a Class of Nonlinear Mechanical Systems With Unbounded and Fast Varying Uncertainties," *Automatica*, vol. 28, pp. 265-276, 1992.
- [36] G. Tao, "On Robust Adaptive Control of Robot Manipulators," *Automatica*, vol. 28, pp. 803-807, 1992.
- [37] B. Brogliato and A. Trofino-Neto, "Practical Stabilization of a Class of Nonlinear Systems With Partially Known Uncertainties," *Automatica*, vol. 31, pp. 145-150, 1995.
- [38] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, and B. Maschke, *Dissipative Systems Analysis and Control (Theory and Applications)*, Springer-Verlag, London, UK, 2000.
- [39] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, (2<sup>nd</sup> Ed.) Springer-Verlag, London, UK, 2000.
- [40] Wonham, 1974, *Linear Multivariable Control - A Geometric Approach*, Springer-Verlag.
- [41] Basile and G. Marro, 1992, *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Prentice Hall.
- [42] F. Calabrese and L. Celentano, "Practical Tracking via Finite-Valued Control for Uncertain SISO Plants," revised for publication, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005.
- [43] L. Celentano, "A General and Efficient Robust Control Method for Uncertain Nonlinear Mechanical Systems", *Proceedings of the 44<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, Seville, Spain, December 2005.
- [44] L. Celentano, "New Results on Practical Stability," Internal Report, possible submission to *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005.
- [45] L. Celentano, "A Very Efficient Robust Stabilization Method for an Important Class of Nonlinear Uncertain Systems," Internal Report, possible submission to *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005.
- [46] L. Celentano, R. Iervolino, "A New Method for Robot Modeling and Simulation", to appear on *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, December 2006.