Introduzione

Il problema di determinare proprietà di stabilità incondizionata, a partire da proprietà di stabilità su varietà, è stato sempre molto studiato in letteratura. Un caso molto noto, ad esempio, riguarda il cosiddetto "center manifold". Naturalmente per la determinazione di proprietà di stabilità in questo caso, la parte lineare dell'equazione deve verificare determinate proprietà relative agli autovalori.

Altro strumento molto usato nella teoria della stabilità sono gli integrali primi (guarda per esempio [1,11,13,17,20]). In particolare questi possono essere usati come funzioni di Liapunov nell'ipotesi di definitezza in segno.

Possono essere però anche sfruttati in modo diverso. Infatti le superfici di livello degli integrali primi rispetto alla dinamica del moto rappresentano delle varietà invarianti. Tali varietà, se l'integrale primo soddisfa opportune condizioni, possono essere investigate relativamente al problema sopra indicato. Negli ultimi dieci anni diversi risultati sono stati provati a partire da queste considerazioni.

Relativamente "allo stato dell'arte", illustreremo parte dei risultati ottenuti più di recente.

Nel caso di un'equazione del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ f(t,0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

con $f \in C(R \times R^n, R^n)$ e localmente Lipschitziana in x, che sia w-periodica in t o autonoma e che ammetta un integrale primo $G \in C^1(R \times R^n, R^n)$, scelta la superficie di livello

$$\Gamma = \{(t,x) : G(t,x) = 0\}\,,$$

è stato provato che: nell'ipotesi che G abbia estremo superiore infinitesimo nel passato, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che l'essere $\|x\| \le \delta$ implichi $\|G(t,x)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in R$, e la soluzione nulla sia uniformemente asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni iniziali $(t_0, x_0) \in \Gamma$, allora essa è anche uniformemente incondizionatamente stabile [13].

Successivamente nel caso di equazioni differenziali del tipo (1), non necessariamente periodiche ma soddisfacenti una condizione di Lipschitz uniforme in t, cioè che per ogni compatto $K \subseteq R^n$ esiste una costante $L(K) > 0$ tale che (t, x_1), $(t, x_2) \in R \times K$ implica

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \le L\,\|x_2 - x_1\|\,,$$

è stata dimostrata la stessa proprietà di stabilità incondizionata se l'integrale primo G verifica la condizione di essere una funzione Γ-definita positiva, cioè se esiste $\gamma \in (0, \chi)$ tale che $\forall \alpha \in (0,\gamma)$ e $\forall t_0 \in R$ esiste $\beta = \beta(\alpha, t_0) > 0$ per il quale $(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \beta(\gamma)$ e $\rho(x, \Gamma(t)) \ge \alpha$ implicano che : $\|G(t,x)\| \ge \beta$, e se la soluzione nulla è uniformemente asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni iniziali $(t_0, x_0) \in \Gamma$ [20].

Successivamente questi risultati sono stati ampliati al caso di varietà non necessariamente definite da integrali primi, ma utilizzando per la dimostrazione la costruzione di integrali primi e le proprietà ottenute nei lavori ora descritti [21,22]. I risultati riguardano proprietà di stabilità di insiemi, ci limiteremo però ad illustrarli più in dettaglio nel caso particolare che l'insieme "campione" sia l'origine di R^n.

Sia Φ un insieme invariante in $R \times R^n$ contenente $R \times \{0\}$; consideriamo ancora l'equazione (1), nell'ipotesi che f verifichi una condizione uniforme di Lipschitz in t. Assumiamo inoltre che la varietà Φ soddisfi una delle seguenti condizioni:

(i) $\Phi = R \times Ker\varphi$, con $\varphi \in C^1(R^n, R^q)$, $1 \leq q \leq n$ e $rank \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = q$ per ogni $x \in Ker\varphi$.

(ii) $\Phi = \{(t, y, z) : z = g(t, y)\}$ con $(y, z) = x$, $y \in R^m$, $z \in R^{n-m}$ e $g \in C^1$ soddisfacente con le sue derivate una condizione di Lipschitz uniforme in t.

Allora se l'origine è asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni iniziali su Φ e se Φ è stabile (asintoticamente stabile) "vicino all'origine" (cioè rispetto a condizioni iniziali scelte in un intorno fisso dell'origine), allora l'origine è incondizionatamente stabile (asintoticamente stabile). Se f è w-periodica in t, sussiste l'equivalenza.

La mia tesi si inserisce in questa linea di ricerca. Una parte ha come obiettivo la riduzione delle ipotesi da richiedere sulla varietà Γ, definita da un integrale primo, in duplice modo:

1) In molti casi è interessante studiare il problema della stabilità parziale. Ad esempio nei casi della meccanica per sistemi olonomi con coordinate cicliche, la stabilità si ottiene solo rispetto alle coordinate acicliche. Sorge allora in modo naturale la questione: è possibile richiedere condizioni di stabilità asintotica parziale relativamente alla scelta di perturbazioni iniziali su Γ per ottenere risultati di stabilità parziale incondizionata.

Ho ottenuto risultati di questo tipo nel caso autonomo, in ipotesi abbastanza "forti", ma che permettono comunque di discutere il caso dei moti merostatici non solo per quanto riguarda la stabilità, ma anche per la stabilità totale, rispetto a particolari tipi di perturbazioni (illustrate in seguito) che distruggano i moti merostatici stessi, ma conservino la forma lagrangiana del sistema perturbato.

2) Nel caso di un'equazione periodica, sorge naturale un altro tipo di domanda: si può richiedere sulla varietà Γ la stabilità totale uniforme, invece della stabilità asintotica uniforme, per ottenere la proprietà di stabilità incondizionata? Ho dato una risposta positiva nell'ipotesi che l'integrale primo G sia periodico con lo stesso periodo dell'equazione e che la varietà Γ ammetta una rappresentazione del tipo (ii).

Questo risultato può essere esteso al caso di varietà invarianti soddisfacenti (ii) non necessariamente definiti da integrali primi, costruendo in base alle varietà stesse l'integrale primo.

Sganciarsi dagli integrali primi è molto importante nelle applicazioni. Un caso molto interessante in cui possono essere applicati i risultati già ottenuti, però su varietà di quest'ultimo tipo, è legato a problemi derivanti dalla teoria dei controlli.

1 Preliminari

Sia D un insieme aperto di R^n contenente l'origine. Indichiamo con $\|\cdot\|_n$ una norma in R^n e con ρ la distanza indotta. Sia $\chi = \rho(0, \partial D)$, con $\chi = +\infty$ se $D = R^n$. Per $\gamma > 0$ indichiamo con $B(\gamma)$ e $B[\gamma]$ rispettivamente gli insiemi $\{x \in R^n : \|x\|_n < \gamma\}$ e

$\{x \in R^n : \|x\|_n \leq \gamma\}$. Sia $\Lambda = \{f \in C(I \times D, R^n)\}$, denotiamo con $L(z)$ l'insieme delle funzioni $f(t,z)$ localmente lipschitziane in $z \in D$, e con $L_u(z)$ l'insieme delle funzioni $f(t,z)$ localmente lipschitziane in $z \in D$, con costante di Lipschitz uniforme in t, cioè delle funzioni $f(t,z)$ soddisfacenti la condizione:

$$\|f(t,z_2) - f(t,z_1)\|_n \leq k \|z_2 - z_1\|_n .$$

Infine denotiamo con $L_{ub}(z)$ l'insieme delle funzioni $f \in L_u(z)$ che siano limitate in $R \times K$, per ogni scelta del compatto $K \subseteq R^n$.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{z} = f(t,z), \quad f(t,0) \equiv 0, \tag{1.1}$$

con $f \in C(R \times D, R^n)$ e $f \in L(z)$. Per $(t_0, z_0) \in R \times D$ indichiamo con $z(t, t_0, z_0)$ la soluzione massimale di (1.1) di condizioni iniziali (t_0, z_0), con $J(t_0, z_0)$ l'intervallo in cui essa è definita e con $J_+(t_0, z_0)$ l'insieme $J(t_0, z_0) \cap [t_0, +\infty)$ e con $J_-(t_0, z_0)$ l'insieme $J(t_0, z_0) \cap (-\infty, t_0]$.

Sia $G \in C^1(R \times D, R^+)$, diremo che G è integrale primo se è costante lungo le soluzioni di (1.1). Notiamo che in alcuni dei lavori che vengono illustrati nel seguito sono stati utilizzati integrali primi vettoriali. Dato che però, se G è un integrale primo vettoriale $\|G\|_n$ è un integrale primo scalare a valori in R^+, possiamo sempre ricondurci a questo caso.

Ricordiamo brevemente alcune definizioni di stabilità che useremo nel corso di questa tesi.

Definizione 1.1. La soluzione $z = 0$ di (1.1) si dice

(i) uniformemente stabile se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $t_0 \in R$ e $\|z_0\| < \delta$ implicano $\|z(t, t_0, z_0)\|_n < \varepsilon$ per ogni $t \in J_+$.

(ii) uniformemente asintoticamente stabile se è uniformemente stabile ed esiste $\sigma \in]0, \delta(\chi)]$ tale che $z(t, t_0, z_0) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, uniformemente in $(t_0, z_0) \in R_+ \times B(\sigma)$.

(iii) uniformemente totalmente stabile se dato $\varepsilon > 0$, esistono due numeri δ_1, $\delta_2 > 0$ tali che per ogni $t_0 \in R$, $z_0 : \|z_0\|_n < \delta_1$ e $g \in C(R \times D, R^n) \cap L(z) : \|g(t, z) - f(t, z)\|_n < \delta_2$ in $[t_0, +\infty[\cap J_g(t_0, z_0)$ implicano $\|z_g(t, t_0, z_0)\|_n < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$.

Introduciamo inoltre il concetto di iperstabilità parziale che pure useremo in seguito.

Definizione 1.2. Sia $z = (x, y)$ con $x \in R^m$, $y \in R^{n-m}$, $m < n$. La soluzione $z = 0$ di (1.1) è

(i) x-iperstabile rispetto ad y se per ogni $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $y_0 \in B$, $\|x_0\|_n < \delta$ implica $\|x(t, x_0, y_0)\|_m < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

(ii) x-iperasintoticamente stabile rispetto ad y se essa è x-iperstabile rispetto ad y ed esiste $\sigma \in (0, \chi)$ tale che $y_0 \in B$, $\|x_0\|_n < \sigma$ implica $\|x(t, x_0, y_0)\|_m \longrightarrow 0$ per $t \to +\infty$ uniformemente in x_0, y_0.

Concetti analoghi di stabilità possono essere dati per un insieme compatto M invariante rispetto ad (1.1), basta sostituire alla norma la distanza dall'insieme. Si ottengono ovviamente le definizioni precedenti assumendo $M = \{0\}$.

Osserviamo inoltre che dato un qualunque insieme non vuoto C di R^n, gli intorni sferici di centro l'origine, per ogni fissato $\gamma > 0$ sono sostituiti dagli insiemi

$$B^n(C,\gamma) = \{x \in R^n : \rho(x,C) < \gamma\}\,, \quad B^n[C,\gamma] = \{x \in R^n : \rho(x,C) \leq \gamma\}\,.$$

Daremo ora alcune definizioni concernenti proprietà di insiemi che useremo per illustrare alcuni risultati più recenti [21,22] sul problema della determinazione di proprietà di stabilità non condizionata a partire da proprietà di stabilità su varietà.

Sia A un sottoinsieme in $R \times R^n$. Diremo che A è s-non vuoto se per ogni $t \in R$ la sezione $A(t) = \{z \in R^n : (t,z) \in A\}$ è non vuoto. Diremo che A è s-limitato se è s-non vuoto ed esiste un compatto $Q \subseteq R^n$ tale che $A(t) \subseteq Q$ per ogni $t \in R$. L'intersezione di tutti i compatti Q che verificano la suddetta proprietà viene indicata con $Q^k(A)$. Se poi A è s-limitato e ogni $A(t)$ è compatto, allora diremo che A è s-compatto.

Consideriamo ora l'applicazione $t \longrightarrow A(t)$, se essa è w-periodica per qualche $w > 0$ (o in particolare indipendente da t) allora diremo che A è w-periodica o indipendente da t.

Sia ora M un insieme s-compatto, invariante rispetto a (1.1). Anche i concetti di stabilità per M (sottoinsieme di $R \times R^n$) sono noti e derivati ovviamente dall'usuale concetto di stabilità di una traiettoria. Ad esempio diremo che M è stabile se per ogni $t_0 \in R$ e $\varepsilon \in (0,\chi)$ esiste $\delta = \delta(t_0,\varepsilon)$ tale che $\rho(z_0, M(t_0)) < \delta$ implica $\rho(x(t,t_0,z_0), A(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \in J_+(t_0,z_0)$ ed è attrattivo se per ogni $t_0 \in R$ esiste $\mu = \mu(t_0) > 0$ per cui $\rho(z_0, M(t_0)) < \mu$ implica $J_+(t_0,z_0) = [t_0,+\infty)$ e $\rho(z(t,t_0,z_0), M(t)) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$.

Sia ora $F \in C(R \times R^n, R^+)$ una funzione tale che l'insieme $A = KerF$ è invariante e contiene M.

Definizione 1.3. $\forall \gamma > 0$ sia $I[M, \gamma] = \{(t, x) : t \in R,\ x \in B^n[M(t), \gamma]\}$. Allora diremo che A ha una proprietà di stabilità vicino ad M se esiste $\gamma > 0$ tale che la proprietà è soddisfatta rispetto alle perturbazioni $(t_0, x_0) \in I[M, \gamma]$. Per esempio A è detto:

(i) stabile vicino ad M se esiste $\gamma > 0$ tale che $\forall t_0 \in R$ e $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ con la proprietà che $x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma]$ e $\rho(x_0, A(t_0)) < \delta$ implica $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) < \varepsilon$ $\forall t \in J^+(t_0, x_0)$;

(ii) attrattivo vicino ad M se esiste $\gamma > 0$ tale che $\forall t_0 \in R$ si ha $\mu = \mu(t_0) > 0$ per il quale $x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma]$ e $\rho(x_0, A(t_0)) < \mu$ implica $J^+(t_0, x_0) = [t_0, +\infty)$ e $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$.

In maniera analoga possono essere definite le altre proprietà di stabilità di A vicino ad M.

Osservazione 1.1. Poichè M è contenuto in A e $\rho(x_0, A(t_0)) \leq \rho(x_0, M(t_0))$ $\forall (t_0, x_0) \in R \times R^n$, l'uniforme attrattività di A vicino ad M può essere definita come segue: esiste $\sigma > 0$ tale che $t_0 \in R$ ed $x_0 \in B^n[M(t_0), \sigma]$ implicano che $x(t, t_0, x_0)$ esiste $\forall t \geq t_0$ e soddisfa $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, uniformemente in (t_0, x_0).

Definizione 1.4. La funzione F si dice A-definita positiva "vicino ad M" se esiste $\gamma > 0$ tale che $\forall t_0 \in R$, $\alpha > 0$ esiste $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ per il quale $t \in (t_0, +\infty)$, $x \in B^n[Q^*(M), \gamma]$ e $\rho(x, A(t)) \geq \alpha$ implicano $F(t, x) \geq \beta$.

Per la continuità di F, se $\beta(t_0, \alpha)$ esiste per un fissato t_0, allora esiste per ogni $t_0 \in R$ e per $t_0' > t_0$ si può assumere $\beta(t_0', \alpha) = \beta(t_0, \alpha)$.

Abbiamo infine bisogno di una definizione più debole di definitezza positiva che coinvolge le soluzioni di (1.1).

Per $\gamma > 0$ e $t_0 \in R$, consideriamo l'insieme

$$\Pi(t_0, \gamma) = \{(t, z) : t \geq t_0, z \in B^n[M(t), \gamma], t \in J_-(t, z), z(t_0, t, z) \in B^n[M(t), \gamma]\}.$$

Definizione 1.5. La funzione F si dice debolmente A-definita positiva "vicino ad M" (rispetto a (1.1)) se per qualche $\gamma > 0$ e per ogni $t_0 \in R$, $\alpha > 0$ esiste $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$ tale che se $(t, z) \in \Pi(t_0, \gamma)$ e $\rho(z, A(t)) \geq \alpha$ allora $F(t, z) \geq \beta$.

Osserviamo che se M non dipende da t, cioè $M(t) \equiv N$, allora si ha

$$\Pi(t_0, \gamma) = \{(t, z) : x \in B^n[N, \gamma], t \in P(t_0, z, \gamma)\}$$

con

$$P(t_0, z, \gamma) = \{t \geq t_0 : t_0 \in J_-(t, z), z(t_0, t, z) \in B^n[N, \gamma]\}.$$

2 Stabilità e integrali primi per sistemi meccanici

2.1 Introduzione alla stabilità

Cominciamo col dare alcuni risultati, che risalgono agli anni cinquanta, su questa linea di ricerca: ottenere proprietà di stabilità incondizionata a partire da condizioni su varietà definite da integrali primi.

Un metodo costruttivo per determinare una funzione di Liapunov, è quello di utilizzare, ove possibile, integrali primi. Diamo qui un teorema che pur risalendo a molti anni fa è nella linea descritta nella tesi di ottenere proprietà di stabilità a partire da condizioni su varietà definite da integrali primi.

Il teorema che segue dà anche un metodo costruttivo per determinare una funzione di Liapunov.

Teorema 2.1. Supponiamo che esistono $m+1$ (con $1 < m+1 < n$) funzioni continue:

$w(x) : D \to R$

$u_i(x) : D \to R \qquad (i = 1, 2, ..., m)$

nulle nell'origine (ovvero $w(0) = u_i(0) = 0$ con $i = 1, 2, ..., m$) tali che:

(i) w e u_i siano integrali primi dell'equazione (1.1)

(ii) w abbia un minimo proprio, oppure un massimo proprio, ristretta all'insieme

$$X = \{x \in D : u_i(x) = 0\}.$$

Allora, la soluzione x dell'equazione (1.1) è uniformemente stabile.

Dimostrazione **:** Il nostro scopo è cercare una funzione di Liapunov che soddisfi tutte le ipotesi del teorema sulla stabilità uniforme.

Consideriamo la funzione $V : D \to R$ tale che per ogni $x \in D$ sia:

$$v(x) = w^2(x) + \sum u_i^2(x). \tag{2.1}$$

In virtù delle ipotesi (i) e (ii) esiste un numero $\gamma \in]0, \rho(0, \partial D)[$ tale che posto

$$Y = \{x \in P_y : u_i(x) = 0 \text{ con } i = 1, 2, ..., m\}$$

si ha

$$w^2(x) > 0 \qquad \forall x \in Y - \{0\} \tag{2.2}$$

da cui segue

$$v(x) > 0 \qquad \forall x \in P_y - \{0\}\,; \tag{2.3}$$

infatti se $x \in P_y - \{0\}$ si ha che $x \in Y - \{0\}$ oppure $x \in P_y - Y$ nel primo caso per la (2.2) è valida la (2.3), nel secondo caso esisterà un indice $j \in \{j = 1, 2, ..., m\}$ tale che $u_j(x) \neq 0$ da cui $u_j^2(x) > 0$ e quindi la (2.3).

Inoltre si ha che $v(0) = 0$ e quindi si riconosce che la funzione v, continua e indipendente da t, è definita positiva in $I \times P_y$ ed inoltre che essa è ivi dotata di estremo superiore infinitesimo. Infine, per l'ipotesi (i) la funzione v risulta essere un integrale primo e quindi per il teorema precedente ha derivata prima nulla. Sono dunque verificate per la funzione v le ipotesi del teorema e quindi è provata la stabilità uniforme della soluzione $x = 0$ del (1.1). **C.v.d.**

Questo teorema permette di determinare proprietà di stabilità in casi interessanti della meccanica dei sistemi olonomi.

2.2 Sistemi olonomi

Sia S un sistema materiale a vincoli olonomi, lisci e indipendenti dal tempo, ad n gradi di libertà e sia $q \equiv (q_1, q_{2,....,}q_n)$ un sistema di coordinate lagrangiane riferito ad S, la cui forza viva T è espressa mediante una forma quadratica definita positiva in $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_{2,.....,}\dot{q}_n)$

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{2.4}$$

Assumiamo che S sia soggetto ad una sollecitazione posizionale conservativa di potenziale $U(q)$ e ad una sollecitazione addizionale di componenti lagrangiane $Q_i(t, q, \dot{q})$ (con $i = 1, 2, ..., n$), l'equazioni del moto di S sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} &= \frac{\partial U}{\partial q} + Q \\ \frac{dq}{dt} &= \dot{q} \end{aligned} \tag{2.5}$$

avendo assunto come funzioni incognite q e $\dot{q}$ ed avendo considerato $Q \equiv (Q_1, Q_{2,......,}Q_n)$. Imponendo che

- Il potenziale $U(q)$ sia una funzione di classe C^1, definita positiva in un aperto $\theta \subseteq R^n$ contenente l'origine;
- La forza viva $T(q, \dot{q})$ sia una funzione espressa mediante la (2.4) di classe C^1 rispetto a q;
- La sollecitazione addizionale $Q(t, q, \dot{q})$ sia una funzione definita e continua nell'insieme $I \times \theta \times \psi$ in cui $I =]\tau, +\infty[$ con $\tau \in R$ e ψ un aperto di R^n contenente l'origine.

Le equazioni (2.5) costituiscono un'equazione differenziale ordinaria in R^{zn} del primo ordine e di forma normale del tipo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.6}$$

avendo posto $x \equiv (q, \dot{q})$.

Occupiamoci ora del caso di moti olonomi a coordinate ignorabili.

2.3 Il problema della stabilità dei moti merostatici

Consideriamo il sistema S nel caso $Q \equiv 0$.

Definizione 2.1. Se il potenziale U ed i coefficienti della forza viva T non dipendono dalle coordinate $q_{m+1}, ...q_n$ (con $m < n$), tali coordinate si definiscono cicliche o ignorabili, mentre le coordinate $q_1, ..., q_m$ si definiscono acicliche o non ignorate.

La determinazione delle coordinate acicliche e di tutte le coordinate della velocità lagrangiana si può compiere attraverso il sistema di $n + m$ equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, ..., n) \\ \frac{dq_r}{dt} &= \dot{q}_r \qquad (r = 1, ..., m) \end{aligned} \tag{2.7}$$

mentre la determinazione delle coordinate cicliche potrà effettuarsi una volta integrato il sistema (2.7) ricorrendo al sistema

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \dot{q}_\alpha \qquad (\alpha = m + 1, ..., n) \tag{2.8}$$

nel quale le q_α si dovranno considerare funzioni note di t e dei valori iniziali delle q_r $(r = 1, ..., m)$ e delle q_i $(i = 1, ..., n)$.

Lungo ogni soluzione del sistema (2.7) si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = c_\alpha \qquad (\alpha = m + 1, ..., n) \tag{2.9}$$

con le c_α costanti dipendenti dalla soluzione considerata, ne segue che le $n-m$ funzioni $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ risultano essere integrali primi del sistema (1.9).

Le equazioni (2.9) sono univocamente risolubili rispetto alle $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = m+1, ..., n$), in quanto esse costituiscono un sistema di $n-m$ equazioni lineari nelle $n-m$ variabili $\dot{q}_\alpha$ con il determinante dei coefficienti diverso da zero in virtù del carattere di forma definita positiva in $\dot{q}$ posseduto da T.

Segue che le equazioni (2.9) risultano essere funzioni φ_α delle $q_r, \dot{q}_r, c_\beta$ (con $r = 1, ..., m$; $\beta = m+1, ..., n$). Ponendo

$$\bar{q}^* = (q_1, ..., q_m) \qquad \dot{q}^* = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m) \qquad \bar{c} = (c_{m+1}, ..., c_n)$$

e denotando con $\tau(q^*, \dot{q}^*, c)$ l'espressione assunta da T quando alle $\dot{q}_\alpha$ si sostituiscono le funzioni φ_α predette, infatti τ non contiene termini lineari in $\dot{q}^*$ e che più precisamente si ha

$$\tau = \tau_2 + \tau_0 \tag{2.10}$$

con τ_2 forma quadratica in $\dot{q}^*$ definita positiva a coefficienti funzioni di q^* e con τ_0 funzione di q^*.

Sia σ una soluzione statica del sistema (2.7) per la quale supporremo che si abbia $q = 0$, ovvero rappresenteremo σ con i valori costanti

$$q^* = 0 \qquad \dot{q}^* = 0 \qquad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha \qquad (\alpha = m+1, ..., n) \tag{2.11}$$

In virtù della (2.9) basta supporre che per una soluzione delle (2.7) sia q^* costante (e quindi $\dot{q}^* \equiv 0$) affinchè siano di conseguenza costanti tutte le $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = m+1, ..., n$).

Denotando con c il valore di $\bar{c}$ relativo a σ e ponendo $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(\bar{q}^*, \bar{c})$, si dimostra che

$$\left(\frac{\partial(U - \bar{\tau}_0)}{\partial \bar{q}^*}\right)_{\dot{q}} = 0. \tag{2.12}$$

Alla soluzione statica σ, in effetti corrispondono ∞^{n-m} moti di S per i quali sussistono i valori costanti (2.11), e che si differenziano in dipendenza dei diversi sistemi di valori iniziali delle coordinate cicliche $q_{m+1}, ..., q_n$.

Questi moti si dicono "*merostatici*" in quanto la condizione di staticità non è assicurata per le coordinate cicliche, essendo in genere variabili con il tempo, ma è assicurata soltanto per le coordinate non ignorate.

Effettuiamo il cambiamento di variabili

$$z_\alpha = \dot{q}_\alpha - \dot{q}_\alpha \qquad (\alpha = m+1, ..., n) \tag{2.13}$$

allo scopo di rappresentare la soluzione σ del sistema (2.7) mediante l'origine di $R^n \times R^m \times R^{n-m}$ e quindi espressa da

$$q^* \equiv 0 \qquad \dot{q}^* \equiv 0 \qquad z \equiv 0 \tag{2.14}$$

avendo posto $z = (z_{m+1}, ..., z_n)$.

Tale soluzione risulta essere stabile (rispettivamente instabile) quando i moti merostatici suddetti soddisfano la condizione di stabilità (rispettivamente di instabilità) ridotta alle variabili $q^*, \dot{q}^*, z$.

Forniamo adesso un teorema che è un ampliamento di una classica proposizione di

Routh e che ancora una volta da condizioni imposte su varietà individuate da integrali primi conduce a proprietà di stabilità incondizionata.

Teorema 2.2. Se la funzione $U - \bar{\tau}_0$ ha un massimo proprio in $q^* \equiv 0$, la soluzione (2.14) del sistema (2.7) (trasformato con il cambiamento di variabili (2.13)) è uniformemente stabile.

***Dimostrazione* :** La funzione

$$\tau_2 + \bar{\tau}_0 - U$$

ha un minimo proprio per $q^* \equiv 0$, $\dot{q}^* \equiv 0$. L'energia totale $H(q^*, \dot{q}^*, z)$ ha allora nell'origine $(0, 0, 0)$ di $R^m \times R^m \times R^n$ un minimo proprio subordinato alle condizioni

$$\frac{\partial T}{\partial z_\alpha} - \bar{c}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = m + 1, ..., n). \tag{2.15}$$

Disponendo opportunamente delle costanti a meno delle quali è definito il potenziale U, si ha poi $H(0, 0, 0) = 0$.

Infine H è un integrale del sistema (2.7).

In definitiva sono verificate per il sistema (2.7) e per la soluzione (2.11) tutte le ipotesi del *Teorema* 1.3, quando per w si assuma l'energia totale H e per le funzioni u si assumano i primi membri delle (2.15), i quali sono appunto integrali primi del sistema (2.7) aventi anch'essi valore nullo in $(0, 0, 0)$. **C.v.d.**

2.4 Stabilità nel moto alla Poinsot

Un esempio di applicazione del *Teorema* 2.2 si ha nello studio della stabilità relativa ai moti alla Poinsot.

Sia ζ un solido fissato, senza attrito, in un suo punto O rispetto al quale sia costantemente nullo il momento delle forze attive esterne. Sia $Oxyz$ una terna levogira solidale a ζ, costituita con assi principali di inerzia di ζ rispetto ad O. Siano A, B, C i momenti di inerzia di ζ rispetto agli assi x, y e z rispettivamente. Siano p, q, r le componenti della velocità angolare $\bar{\omega}$ di ζ rispetto a questi stessi assi ordinatamente.

La determinazione di $\bar{\omega}$ dipende dall'integrazione delle equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= 0 \\ B\dot{q} - (C - A)rp &= 0 \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Questo sistema ammette i due integrali primi, rispettivamente della forza viva e del momento delle quantità di moto

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2T \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k_0^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Come è noto il solido è suscettibile di rotazioni permanenti intorno ad un qualsiasi degli assi principali di inerzia di ζ rispetto ad O.

Consideriamo una qualsiasi σ di queste rotazioni permanenti di velocità angolare $\bar{\omega}$ e scegliamo la terna $Oxyz$ in maniera che l'asse x abbia la direzione ed il verso di $\bar{\omega}$. Per il moto σ si hanno allora i valori costanti

$$p \equiv \bar{p} > 0 \qquad q \equiv 0 \qquad r \equiv 0. \tag{2.18}$$

Posto $p - \bar{p} = \lambda$, le equazioni (2.16) possono scriversi

$$\begin{aligned} A\dot{\lambda} - (B - C)qr &= 0 \\ B\dot{q} - (C - A)r(\lambda + \bar{p}) &= 0 \\ C\dot{r} - (A - B)q(\lambda + \bar{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

e per il moto σ si ha:

$$\lambda \equiv 0 \qquad q \equiv 0 \qquad r \equiv 0. \tag{2.20}$$

Le funzioni

$$\begin{aligned} u &= A\lambda^2 + 2A\bar{p}\lambda + Bq^2 + Cr^2 \\ W &= A^2\lambda^2 + 2A^2\bar{p}\lambda + B^2q^2 + C^2r^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

sono integrali primi del sistema (2.19), aventi ciascuno valore nullo in corrispondenza del moto σ. La rotazione permanente σ si dice stabile se e solo se è stabile la soluzione (2.20) del sistema (2.21). Il problema della stabilità di questa soluzione è completamente risolto col seguente

Teorema 2.3. La soluzione σ è:

(a) stabile se è verificata una qualsiasi delle seguenti condizioni

(i) $A > max\{B, C\}$

(ii) $A < min\{B, C\}$

(iii) $A = B = C$.

(b) instabile se A, B e C non sono tutti uguali tra di loro ed è verificata una qualsiasi delle seguenti condizioni:

(j) $B \leq A \leq C$

(jj) $C \leq A \leq B$.

La parte (a) si dimostra immediatamente utilizzando il $Teorema$ 2.1 con gli integrali primi espressi da (2.21). La parte (b) si dimostra, invece, utilizzando il classico Teorema di Cetaev.

2.5 Teorema del Lagrange-Dirichlet

Definizione 2.2. Una sollecitazione Q, definita e continua in $I \times \theta \times \psi \subset R \times R^n \times R^n$, si dice dissipativa se risulta

$$Q(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \leq 0 \qquad \forall (t, q, \dot{q}) \in I \times \theta \times \psi \tag{2.22}$$

Supponiamo quindi che la sollecitazione Q sia dissipativa.

Nell'ipotesi di continuità formulata per Q la (2.22) implica che

$$Q(t, q, 0) = 0 \qquad \forall (t, q) \in I \times \theta$$

Definizione 2.3. Per la sollecitazione dissipativa $Q(t, q, \dot{q})$ si dice che la dissipazione è completa se nella (2.22) il segno di uguaglianza sussiste solo nei punti $(t, q, \dot{q}) \in I \times \theta \times \psi$ per i quali risulta $\dot{q} = 0$.

Consideriamo una posizione di equilibrio di S; senza alcuna restrizione si può supporre che per essa sia $q = 0$. Il sistema (1.1) ammette allora la soluzione statica $q \equiv 0$, $\dot{q} \equiv 0$, per la quale dato che $Q(t, q, 0) = 0$, occorre e basta che risulti $\frac{\partial U}{\partial q} = 0$ per $q = 0$. Una tale posizione di equlibrio si dice stabile se e solo se è stabile la corrispondente soluzione statica $q \equiv 0$, $\dot{q} \equiv 0$ del sistema (1.1).

Chiaramente per il sistema (1.1) sussiste il classico Teorema di Lagrange-Dirichlet:

Teorema (di Lagrange-Dirichlet) 2.3. Se Q è una sollecitazione dissipativa e se U ha un massimo proprio per $q = 0$, allora la soluzione $q \equiv 0$, $\dot{q} \equiv 0$ del sistema (1.1) è uniformemente stabile.

Passiamo ora in rassegna risultati per sistemi periodici che permettono di determinare la stabilità incondizionata della soluzione campione a partire da proprietà di stabilità su varietà definite da integrali primi.

Teorema 2.4. [13] Supponiamo che la funzione f in (1.1) sia w-periodica in t e sia $G \in C^1(R \times D, R^+)$ un integrale primo di (1.1) con $G(t, 0) \equiv 0$. Supponiamo inoltre che G sia continua in x, uniformemente in $R^- = (-\infty, 0]$ e che $x = 0$ sia uniformemente asintoticamente stabile per perturbazioni (t_0, x_0) tali che $G(t_0, x_0) = 0$.

Allora $x = 0$ è uniformemente stabile per il sistema (2.6).

Dimostrazione **:** Rappresentiamo la soluzione di $\dot{x} = f(t,x)$ da $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ attraverso $x(t, t_0, x_0)$ e denotiamo con $B_\varepsilon = \{x : \|x\|_n < \varepsilon\}$. Essendo f w-periodica è sufficiente mostrare che $x = 0$ è stabile. Procediamo per assurdo e supponiamo che $x = 0$ è instabile.

Allora esistono $\varepsilon > 0$ tale che $\bar{B}_\varepsilon \subset \Omega$ e una successione (t_i, x_i) con $t_i > 0$, $x_i \to 0$ quando $i \to 0$ tale che

$$\|x(t_i; 0, x_i)\|_n = \varepsilon, \tag{2.23}$$

senza perdita di generalità assumiamo che

$$\forall t \in (0, t_i) : \|x(t; 0, x_i)\|_n = \varepsilon \tag{2.24}$$

quando $\varepsilon > 0$ è fissato, l'ipotesi di asintotica stabilità condizionata può essere scritta come

$$\exists \delta > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists \sigma > 0,\ \forall t'' \in R,\ \forall x_0' : \left\|x_0'\right\|_n \leq \delta$$

$$G(t'', x_0') = 0$$

$$\forall t \geq t'',\ \ \left\|x(t; t'', x_0')\right\|_n < \varepsilon/2 \tag{2.25}$$

$$\forall t \geq t + \sigma,\ \ \left\|x(t; t'', x_0')\right\|_n < \eta \tag{2.26}$$

chiaramente $\delta < \varepsilon/2$ e possiamo assumere $\eta < \delta/2$, $\sigma > w$.

Consideriamo ora la successione di soluzioni $x(t;0,x_i)$; quando $x_i \to 0$, dalla (2.23), (2.24), esistono, per ogni i abbastanza grande,

$$t_i : 0 < t_i' < t_i \quad \text{tali che} \quad \left\|x_i'\right\|_n = \delta$$

dove $x_i' = x(t_i', 0, x_i)$, e $\forall t \in (t_i', t_i) : \delta < \|x(t;0,x_i)\|_n < \varepsilon$.

Ovviamente $t_i' \to \infty$ quando $i \to \infty$ e per i abbastanza grande si ha

$$t_i' = t_i'' + n_i T, \qquad n_i \in N \qquad t_i'' \in [0,T]\,.$$

La successione (t_i'', x_i') è limitata.

Consideriamo la successione estratta convergente

$$(t_i'', x_i') \to (t'', x_0') \qquad t \in [0,T] \quad : \quad \left\|x_0'\right\|_n = \delta.$$

Mostriamo prima che $G(t'', x_0') = 0$. Quando G è continua

$$G(t'', x_0') = \lim_{i\to\infty} G(t_i'', x_i') \tag{2.27}$$

e se f è w-periodica

$$x_i = x(0; t_i', x_i') = x(-n_i T; t_i'', x_i').$$

Allora essendo G un integrale primo si ha

$$\begin{aligned} G(t_i'', x_i') &= G(t_i'', x(t_i''; t_i'', x_i')) \\ &= G(-n_i T, x(-n_i T; t_i'', x_i')) \\ &= G(-n_i T, x_i). \end{aligned}$$

Dalle ipotesi $G \to 0$ quando $x \to 0$ uniformemente su R^-.

Allora

$$\lim_{i \to \infty} G(-n_i T, x_i) = 0$$

e quindi data la (2.27) si ha

$$G(t'', x_0') = 0.$$

Consideriamo ora la soluzione $x(t, t'', x_0')$.

Data la (2.25) esiste $\theta > 0$ tale che, per ogni t nell'intervallo compatto $[t'' - \theta, t'' + \sigma + \theta]$

$$\left\| x(t, t'', x_0') \right\|_n < \varepsilon/2$$

e per i grande, dalla continuità (condizioni iniziali)

$$\left\| x(t; t_i'', x_i') - x(t, t'', x_0') \right\|_n < \eta/2. \tag{2.28}$$

Chiaramente per i abbastanza grande

$$t'' - \theta < t_i'' < t_i'' + \sigma < t'' + \sigma + \theta$$

e si ha $\forall t \in [t_i'', t_i'' + \sigma]$

$$\left\| x(t, t_i'', x_i') \right\|_n < \varepsilon. \tag{2.29}$$

Quando

$$x(t, t_i'', x_i') = x(t + n_i T; t_i', x_i') = x(t + n_i T; 0, x_i) \tag{2.30}$$

dalla (2.29) segue che

$$\forall t \in \left[t_i', t_i' + \sigma\right], \qquad \| x(t; 0, x_i) \|_n < \varepsilon.$$

Ma $t_i' < t_i$ e la (2.24) implica

$$\|x(t;0,x_i)\|_n < \varepsilon \qquad \text{su } [0,t_i'].$$

Allora $\|x(t;0,x_i)\|_n < \varepsilon$ su $[0,t_i'+\sigma]$ e la (2.23) ora implica

$$t_i' + \sigma < t_i.$$

Sostituendo $t = t_i'' + \sigma$ in (2.30) si ha

$$\begin{aligned} \left\|x(t_i''+\sigma, t_i'', x_i')\right\|_n &= \left\|x(t_i'+\sigma; t_i', x_i')\right\|_n \\ &= \left\|x(t_i'+\sigma; 0, x_i)\right\|_n > \varepsilon. \end{aligned}$$

Insieme con la (2.28) l'ultima relazione diventa

$$\left\|x(t_i''+\sigma; t'', x_0')\right\|_n > \delta - \frac{\eta}{2} > \frac{3}{4}\delta$$

e dalla (2.26) si ha infine

$$\left\|x(t''+\sigma; t'', x_0')\right\|_n < \eta < \frac{\delta}{2}$$

che è assurdo; quindi da questo $x = 0$ è stabile e la dimostrazione è completata. **C.v.d.**

Osservazione 2.1. L'ipotesi che f sia w-periodica è chiaramente restrittiva ma non può essere abbandonata senza richiedere qualche condizione sostitutiva, come mostra il seguente esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \sin(ty) \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

con $(x,y) \in R^2$, $t \in R$. $G(x,y)$ integrale primo. L'origine $(x,y) = (0,0)$ è instabile sebbene essa sia asintoticamente stabile per le perturbazioni tali che $y = 0$.

Diamo ora una applicazione del $Teorema$ 2.1.

Esempio

1) Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -h(t)x(x\dot{x}+y^3\dot{y}^3)-kx \\ \ddot{y} &= -h(t)y(x\dot{x}+y^3\dot{y}^3)-ky\end{aligned}$$

con $k>0$, $h(t)>0$, h continua e periodica.

Quì la forza di attrito agisce solo in direzione radiale e la sua norma è scelta abbastanza artificialmente.

L'energia

$$E=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+kx^2+ky^2)$$

non può essere vista come funzione di Liapunov perchè

$$\dot{E}=-h(t)(x\dot{x}+y\dot{y})(x\dot{x}+y^3\dot{y}^3)$$

non è semi-definita negativa.

Ma il sistema ammette integrale primo

$$G(\dot{x},\dot{y},x,y)=x\dot{y}-\dot{x}y=K.$$

La condizione $K=0$ implica

1) $y=mx$

o

2) $x = my$

con $\|m\|_4 \leq 1$.

Considerando il primo caso si ha:

$$\ddot{x} = -h(t)\dot{x}x^2(1 + m^6x^2\dot{x}^2) - kx$$

e ora l'energia

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + kx^2)$$

soddisfa

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -h(t)\dot{x}^2x^2(1 + m^6x^2\dot{x}^2)$$

da cui l'asintotica stabilità dell'origine $(x, \dot{x}) = (0, 0)$; analogamente si trova la stabilità asintotica di $(y, \dot{y}) = (0, 0)$. Allora il $Teorema$ 2.1 assicura la stabilità dell'origine $(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = (0, 0, 0, 0)$ per il sistema.

3 Stabilità per sistemi non necessariamente periodici

Abbiamo visto come l'ipotesi di periodicità della funzione f in t non possa essere eliminata senza ulteriori condizioni. Nel caso in cui $f \in L_u(z)$ vale il seguente teorema.

Teorema 3.1. [20] Supponiamo $f \in L_u(z)$. Sia $G \in C^1(R \times D, R^+)$ un integrale primo. Supponiamo che la soluzione $x = 0$ di (1.1) sia uniformemente asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni $(t_0, z_0) \in \Gamma = \{(t,x) : G(t,x) = 0\}$. Supponiamo inoltre che G soddisfi la condizione

(b) G è Γ-definito positivo

Allora la soluzione $x \equiv 0$ di (1.1) è stabile.

***Dimostrazione* :** Sia $\gamma \in (0, \chi)$ scelta come nella condizione (C). Si ha:

(i) $\forall \varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $t_0 \in R$, $y_0 \in \Gamma(t_0)$, e $\|y_0\|_n < \delta$, allora $x(t, t_0, y_0)$ esiste e soddisfa $\|x(t, t_0, y_0)\|_n < \varepsilon \ \forall t \geq t_0$.

(ii) esiste $\sigma \in (0, \delta(\gamma))$ con la proprietà che $\forall \upsilon > 0$ un numero $T = T(\upsilon)$ può essere preso tale che se $y_0 \in \Gamma(t_0)$ e $\|y_0\|_n < \sigma$, allora $\|x(t, t_0, y_0)\|_n < \upsilon \ \forall t \geq t_0 + T(\upsilon)$.

Il termine $\delta(\varepsilon)$ in (i) può essere assunto strettamente crescente in ε. Sia ora $\varepsilon \in (0, \sigma)$, $\delta_1(\varepsilon) = (1/2)\delta(\varepsilon/2)$, $\tau(\varepsilon) = T((1/2)\delta_1(\varepsilon))$ e $\bar{\delta}(\varepsilon) = (1/2)\delta_1(\varepsilon)\exp(-k\tau)$ dove $k = L(B[\gamma])$.

Inoltre assumiamo $\alpha = \bar{\delta}$ nella condizione (C) e per $t_0 \in R$ sia $\eta = \beta(\bar{\delta}, t_0)$.

Quindi si ha

$$\|G(t,x)\|_n < \eta \text{ e } \|x\|_n < \gamma \ \Rightarrow \ \rho(x, \Gamma(t)) < \bar{\delta}$$

Supponiamo che $x_0 \in B(\delta_1(\varepsilon))$ e $G(t_0, x_0) < \eta$. Allora si ha $\rho(x_0, \Gamma(t_0)) < \bar{\delta}$ per cui esiste $y_0 \in \Gamma(t_0)$ con $\|x_0 - y_0\|_n < \bar{\delta}$. Così abbiamo $\|y_0\| < \frac{3}{2}\delta_1(\varepsilon) < \delta(\frac{3}{2})$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \|x(t, t_0, y_0)\|_n &< \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{per } t \in [t_0, t_0 + \tau) \\ \|x(t_0 + \tau, t_0, y_0)\|_n &< \frac{1}{2}\delta_1 \end{aligned}$$

Da cui

$$\|x(t,t_0,x_0)\|_n \le \|x_0 - y_0\|_n \exp(k\tau) + \|x(t,t_0,y_0)\|_n \tag{3.2}$$

$$< \bar{\delta}\exp(k\tau) + \|x(t,t_0,y_0)\|_n \tag{3.3}$$

$$< \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \quad \text{per } t \in [t_0, t_0+\tau)$$

e

$$\|x(t_0+\tau,t_0,x_0)\|_n < \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1 = \delta_1. \tag{3.4}$$

Ora $t_1 = t_0 + \tau$ e $x_1 = x(t_1, t_0, x_0)$ che G è un integrale primo, si ha allora $x_1 \in B(\delta_1(\varepsilon))$, $G(t_1, x_1) < \eta$. Il risultato espresso dalla (3.2) e dalla (3.4) vale con (t_0, x_0) attraverso (t_1, x_1), e così via.

In conclusione esistono due numeri positivi $\delta_1(\varepsilon)$ e $\eta(\varepsilon, t_0)$ tali che se $\|x_0\|_n < \delta_1$ e $G(t_0, x_0) < \eta$, allora

$$\|x(t,t_0,x_0)\|_n < \varepsilon \quad \forall t \ge t_0. \tag{3.5}$$

Consideriamo ora un numero $\lambda(\varepsilon, t_0)$ nell'intervallo $(0, \delta_1)$ tale che $G(t_0, x) < \eta$ $\forall x \in B(\lambda)$. Allora (3.5) vale per ogni x_0 in $B(\lambda)$ e questo prova che $x \equiv 0$ è stabile, e così la dimostrazione è completata. **C.v.d.**

Corollario 3.1. Sia $f \in L_u(x)$, se G è periodico in t e Γ è indipendente dal tempo, allora la condizione (b) è automaticamente soddisfatta e quindi se la soluzione nulla di (1.1) è uniformemente asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni su Γ è anche uniformemente incondizionatamente stabile.

Si verifica inoltre che il *Teorema* 2.1 conduce ad un'altra considerazione :

Proposizione 3.1. Se f è w-periodica in t, $G(t,x) \neq 0$ per $x \neq 0$ e G è continua in $x = 0$, uniformemente su $R^-(-\infty, 0]$, allora $x \equiv 0$ è stabile per la (3.1).

Che legame c'è fra le condizioni imposte nei *Teoremi* 2.1 e 3.1 ?

Daremo una risposta nel caso in cui

$$G(t,x) = h(t)\varphi(x) \tag{3.6}$$

cioè in cui G è prodotto di una funzione del tempo e di una di x, con $h(t) > 0$ $\forall t \in R$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \geq 0$ per $x \neq 0$ in ogni intorno dell'origine. Ora $\Gamma(t)$ è indipendente dal tempo t e sia $\Phi = \{x \in D : \varphi(x) = 0\}$.

Sussiste il seguente

Teorema 3.3. [20] Si ha che

(i) se $\forall t_0 \in R$ esiste $\gamma \in (0, \chi)$ e $x_0 \in D - \Phi$ tale che la soluzione $x(t, t_0, x_0)$ della (3.1) esiste e soddisfa $\|x(t, t_0, x_0)\|_n < \gamma$ $\forall t \geq t_0$, allora G verifica la condizione (c).

(ii) se f è w-periodica in t, allora (b) e (c) sono equivalenti.

***Dimostrazione* :** Per provare la (i) è sufficiente mostrare che

$$inf\,\{h(t) : t \in [t_0, +\infty)\} > 0 \quad \text{per ogni} \quad t_0 \in R.$$

Sia $t_0 \in R$ e scegliamo γ, x_0 in accordo con l'ipotesi della (i). Si ha $G(t_0, x_0) \neq 0$ e

$$h(t)\varphi(x(t, t_0, x_0)) = G(t_0, x_0) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

Poichè φ è continua e $\|x(t, t_0, x_0)\|_n < \gamma$ $\forall t \geq t_0$ segue che h è un numero positivo nell'intervallo $[t_0, +\infty)$. Così il punto (i) è provato.

Assumiamo ora che f sia w-periodica in t. Essendo G un integrale primo dalla (3.6) otteniamo

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = -\frac{1}{\varphi(x)}\langle \nabla\varphi(x), f(t,x)\rangle \tag{3.7}$$

per ogni $t \in R$ e $x \in D - \Phi$.

Questo implica che per ogni $t \in R$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \lambda(t), \tag{3.8}$$

dove λ è w-periodica. Denotiamo con m il valore di λ in un periodo.

Integrando la (3.8) vediamo subito che le condizioni (b) e (c) sono entrambe soddisfatte o entrambe non soddisfatte a seconda che sia $m \geq 0$ o $m < 0$ rispettivamente. Così la dimostrazione è completa. **C.v.d.**

Allora se f è w-periodica e (3.6) è soddisfatta i *Teoremi* 2.1 e 3.2 sono equivalenti.

Osserveremo che se f non è periodica la condizione (a) del *Teorema* 2.1 non assicura affatto la stabità di $x = 0$. Consideriamo infatti il seguente esempio

Esempio

Consideriamo le seguenti equazioni scalari

$$\dot{x} = -\frac{t}{2}(t^2+1)^{-1/2}x$$

e

$$\dot{x} = \frac{t}{2}(t^2+1)^{-1/2}x$$

con entrambi i membri a destra contenuti in $L_u(x)$. Queste equazioni ammettono, rispettivamente come integrali primi le funzioni

$$G(t,x) = z^2 \exp((t^2+1)^{1/2}) \tag{3.9}$$

$$G(t,x) = z^2 \exp(-(t^2+1)^{1/2}) \tag{3.10}$$

entrambe soddisfacenti la condizione

$$G(t,x) = h(t)\varphi(x).$$

In questo caso G si annulla solo in $z = 0$ e quindi la condizione che vi sia stabilità asintotica uniforme sulla varietà in cui G è nulla è banalmente verificata, ma la funzione (3.9) soddisfa (b) e non soddisfa (a), mentre la funzione (3.10) al contrario soddisfa (a) e non (b). L'esame diretto della soluzione mostra che l'origine è stabile solo per la prima equazione (in accordo con il *Teorema* 3.1) mentre è instabile per l'altra (che verifica la condizione del *Teorema* 2.1). Questo prova che il *Teorema* 2.1 non può essere applicato a funzioni $f \in L_u(z)$ che non siano periodiche.

4 Stabilità su varietà non definite da integrali primi

Daremo ora una estensione dei risultati del paragrafo 3 al caso di varietà non necessariamente definite da integrali primi. I risultati verranno illustrati nella loro generalità, nel caso cioè di un insieme invariante qualsiasi, anche se nel seguito li applicheremo per i nostri scopi nel caso della soluzione nulla di un'equazione del tipo (1.1). I risultati descritti in questo paragrafo sono tutti in ([21], [22]).

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = f(t, z), \tag{4.1}$$

con $f \in C(R \times D, R^n)$ e $f \in L_u(z)$. Sia M un insieme s-compatto invariante in $R \times R^n$, invariante rispetto a (4.1).

Sia $F \in C(R \times D, R^+)$ una funzione tale che $KerF = A$ sia invariante e contenuto in M.

Cominciamo con il dimostrare un lemma che lega la debole definitezza positiva di F con la stabilità di A "vicino ad M", precisamente vale il seguente

Lemma 4.1. Assumiamo che F sia un integrale primo dell'equazione (4.1), allora si ha che

(i) se A è stabile vicino ad M, allora F è A-definita positiva debolmente vicino ad M.

(ii) assumiamo che $A(t) \equiv M(t) \equiv N$; allora M è stabile se e solo se esiste $\gamma > 0$ tale che F è A-definita positiva debolmente vicino ad M.

Dimostrazione **:** (i) Per alcuni fissati $\gamma > 0$ e per qualche $t_0 \in R$, $\alpha > 0$ esiste $\eta = \eta(t_0, \alpha) > 0$ tale che se x_0 è in $B^n[M(t_0), \gamma]$ e $\rho(x_0, A(t_0)) < \eta$ allora $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) < \alpha$ per $t \geq t_0$. Per t_0 fissato consideriamo la funzione $F(t_0, \cdot)$. Si ha $F(t_0, x_0) > 0$ per $x_0 \notin A(t_0)$ e $F(t_0, x_0) = 0$ per $x_0 \in A(t_0)$. Ponendo

$$\beta(t_0, \alpha) = \min \{F(t_0, x_0) : x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma],\, \rho(x_0, A(t_0)) \geq \eta(t_0, \alpha)\} ,$$

facilmente otteniamo

$$x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma],\ F(t_0, x_0) < \beta(t_0, \alpha) \implies \rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) < \alpha\ \forall t \in J^+(t_0, x_0). \tag{4.2}$$

Dati alcuni $(t, x) \in \Pi(t_0, \gamma)$, sia $x_0 = x(t_0, t, x)$.

Dalla definizione $x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma]$ e così dalla (4.2) segue

$$\rho(x, A(t)) \geq \alpha \Longrightarrow F(t_0, x(t_0, t, x)) \geq \beta(t_0, \alpha).$$

In conclusione, poichè $F(t, x) = F(t_0, x(t_0, t, x))$ si ha che se

$$(t, x) \in \Pi(t_0, \gamma) \text{ e } \rho(x, A(t)) \geq \alpha,$$

allora $F(t, x) \geq \beta(t_0, \alpha)$. La dimostrazione della (i) è completa.

(ii) Poichè adesso $M = A$ la condizione necessaria segue dalla (i); rimane quindi, solo da provare la sufficienza. Questa è ottenuta attraverso gli argomenti usati per F definita positiva in senso classico. In vero, scegliamo $t_0 \in R$ e $\varepsilon \in (0, \gamma)$. Tenendo conto dei preliminari, per ogni $x \in S^n(N, \varepsilon)$ e $t \in P(t_0, x, \gamma)$ si ha $F(t, x) \geq \beta(t_0, \varepsilon) > 0$.

Sia $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che se $x \in B^n(N, \delta)$ allora $F(t_0, x) < \beta(t_0, \varepsilon)$. Supponiamo l'esistenza di x_0 in $B^n(N, \delta)$ e $t^* > t_0$ tale che $\rho(x(t, t_0, x_0), N) < \varepsilon$ per $t \in [t_0, t^*)$ e $\rho(x(t^*, t_0, x_0), N) = \varepsilon$. Allora necessariamente si ha $t^* \in P(t_0, x(t^*, t_0, x_0), \varepsilon)$ e

$$\beta(t_0, \varepsilon) > F(t_0, x_0) = F(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) \geq \beta(t_0, \varepsilon),$$

che è una contraddizione. Questo completa la dimostrazione della (ii). **C.v.d.**

Sia ora ϕ un insieme di $R \times R^n$ invariante rispetto a (4.1), contenente M e soddisfacente le due condizioni

(A) ϕ è il nucleo di una funzione $F \in C(R \times R^n, R^+) : \phi = KerF$;

(B) M è uniformemente asintoticamente stabile su ϕ, cioè rispetto a perturbazioni che giacciono su ϕ.

Denotiamo con (h)$_\phi$ l'insieme delle funzioni F che verificano (A) e (B). Se poi $F \in (h)_\phi$ è anche integrale primo di (4.1), scriveremo $F \in (H)_\phi$. Assumeremo inoltre nel seguito su ϕ una delle seguenti condizioni:

(u) L'insieme $(H)_\Phi$ è non vuoto;

(v) $\Phi = R \times Ker\varphi$, con $\varphi \in C^1(R^n, R^q)$, $1 \leq q \leq n$ e $rank \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = q$ per ogni $x \in Ker\varphi$;

(w) $\Phi = \{(t, y, z) : z = g(t, y)\}$ con $(y, z) = x$, $y \in R^m$, $z \in R^{n-m}$ e $g \in C^1$, $g \in L'_{ub}(y)$;

con $g \in L'_{ub}(y)$ intendiamo che $g \in L_{ub}(y)$ insieme con le sue derivate parziali.

Vale il seguente

Lemma 4.2. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_u(x)$. Assumiamo l'esistenza di una funzione $F \in (H)_\Phi$ che è Φ-definita positiva in senso debole vicino ad M. Allora M è stabile.

***Dimostrazione* :** Scegliamo $\gamma > 0$ come nella Definizione 4.3, con $A = \Phi$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che se $t_0 \in R$, $y_0 \in \Phi(t_0)$, e $\rho(y_0, M(t_0)) < \delta$, allora $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \geq t_0$. Sia $\sigma \in (0, \delta(\gamma))$ scelta con la condizione che per ogni $\nu > 0$ esiste un numero $T = T(\nu) > 0$ tale che se $y_0 \in \Phi(t_0)$, e $\rho(y_0, M(t_0)) < \sigma$, allora $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \nu$ per ogni $t \geq t_0 + T$.

Dati ogni $\varepsilon \in (0,\sigma)$, sia $\delta_1 = (1/2)\delta(\varepsilon/2)$, $\tau = T((1/4)\delta(\varepsilon))$ e $\bar{\delta} = (1/4)\delta(\varepsilon)\exp(-k\tau)$ dove $k = L(B^n[Q^*(M),\gamma])$. Dalla *Definizione* 4.3 esiste $\beta = \beta(t_0,\bar{\delta})$ tale che si ha:

$$(t,x) \in \Pi(t_0,\gamma) \text{ e } F(t,x) < \beta \text{ implicano } \rho(x,\Phi(t)) < \bar{\delta}. \tag{4.3}$$

Fissiamo t_0 in R e assumiamo $x_0 \in B^n(M(t_0),\delta_1)$, $F(t_0,x_0) < \beta$. Dal momento che $\delta_1 < \gamma$ e banalmente $(t_0,x_0) \in \Pi(t_0,\gamma)$, dalla (3.1) segue $\rho(x_0,\Phi(t_0)) < \bar{\delta}$. Quindi esiste $y_0 \in \Phi(t_0)$ con $\|x_0 - y_0\|_n < \bar{\delta}$. Allora otteniamo

$$\rho(y_0,M(t_0)) \le \|x_0 - y_0\|_n + \rho(x_0,M(t_0)) \le \frac{3}{2}\delta_1 < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

e allora in $[t_0,t_0+\tau]$ si ha

$$\rho(x(t,t_0,y_0),M(t)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \rho(x(t_0+\tau,t_0,y_0),M(t_0+\tau)) < \frac{\delta_1}{2}.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned}\rho(x(t,t_0,y_0),M(t)) &\le \|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,y_0)\|_n + \rho(x(t,t_0,y_0),M(t)) \\ &\le \|x_0 - y_0\|_n \exp(k\tau) + \rho(x(t,t_0,y_0),M(t)) \\ &< \frac{\delta_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned} \tag{4.4}$$

per ogni t in $[t_0,t_0+\tau]$ e

$$\rho(x(t_0+\tau,t_0,y_0),M(t_0+\tau)) < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1. \tag{4.5}$$

Ponendo ora $t_1 = t_0 + \tau$ e $x_1 = x(t_1,t_0,x_0)$, e tenendo conto che F è un integrale primo, si riconosce allora che $x_1 \in B^n(M(t_1),\delta_1)$ e $F(t_1,x_1) < \beta$. Essendo $(t_1,x_1) \in \Pi(t_0,\gamma)$, in virtù della (4.3) avremo anche $\rho(x_1, \Phi(t_1)) < \bar{\delta}$. Dunque il risultato espresso dalla (4.4), (4.5) vale con (t_0, x_0) ripresi da (t_1, x_1), e così via. In altre parole per ogni $\varepsilon \in (0, \sigma)$ e $t_0 \in R$ esistono due numeri positivi δ_1 e β tali che se $x_0 \in B^n(M(t_0), \delta_1)$ e $F(t_0, x_0) < \beta$, allora

$$\rho(x(t, t_0, x_0), M(t)) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.6}$$

Sia adesso $\lambda = \lambda(t_0, \varepsilon) \in (0, \delta_1)$ tale che $F(t_0, x) < \beta$ per ogni $x \in B^n(M(t_0), \lambda)$. Allora la (4.6) vale per ogni x_0 in $B^n(M(t_0), \lambda)$ e questo prova che M è stabile. **C.v.d.**

Teorema 4.1. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_u(x)$. Assumiamo (u). Allora, se Φ è stabile vicino ad M, M è stabile.

Dimostrazione **:** Sia $F \in (H)_\Phi$. Dal *Lemma* 4.1 vediamo che F è definita positiva in senso debole vicino ad M. Quindi il risultato segue dal *Lemma* 4.2. **C.v.d.**

Teorema 4.2. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_{ub}(x)$. Assumiamo (v). Allora, se Φ è stabile vicino ad M, M è stabile.

Dimostrazione **:** L'insieme Φ è t-indipendente ed il suo invariante è equivalente a quello di $Ker\varphi$. Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due insiemi aperti limitati di R^n con $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ and $Q^*(M) \subset \mathcal{B}$. Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = f(t, x)\alpha(x) \tag{4.7}$$

dove $\alpha \in C^\infty(R^n, [0, 1])$ è tale che $\alpha(x) = 1$ per $x \in \mathcal{B}$ e $\alpha(x) = 0$ per $x \notin \mathcal{B}'$. La r.h.s della (4.7) è in $L_{ub}(x)$ e quindi in $L_u(x)$. Dal carattere locale del nostro problema di stabilità, il sistema (4.7) può essere ripreso dal sistema originale (4.1). Denotiamo con $(x_{(2.5)}(t, t_0, x_0))$ la soluzione della (4.7) attraverso (t_0, x_0). Questa soluzione chiaramente esiste in tutto R.

La dimostrazione si divide in due passi:

(a) Proviamo che $\Phi = R \times Ker\varphi$ è invariante anche per la (4.7). Lungo le soluzioni della (4.7) si ha

$$\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]_{(2.5)} = \alpha(x)\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x), f(t,x)\right\rangle = 0 \quad \text{per ogni } t \in R,\, x \in Ker\varphi, \tag{4.8}$$

perchè $Ker\varphi$ è invariante sotto la (4.1). Per completare la dimostrazione dell'invarianza di cui abbiamo parlato sopra, poniamo

$$u = \varphi(x) \tag{4.9}$$

e consideriamo ogni $(t_0, x_0) \in \Phi$. L'equazione (4.9) è soddisfatta per $x = x_0$ e $u = 0$. Inoltre il determinante di almeno una matrice $q \times q$ contenuta in $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right](x_0)$ è diverso da zero. Supponiamo per esempio che questa matrice è quella contenuta nelle prime q colonne di $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right](x_0)$ e poniamo $x = (y, z)$, $x_0 = (y_0, z_0)$, con $y = (x_1, x_2, ..., x_q)$, $z = (x_{q+1}, x_{q+2}, ..., x_n)$. Allora la (4.9) definisce in un intorno $\mathcal{N}$ di $z = z_0$, $u = 0$, una funzione implicita $y = y(z, u)$, $y(z_0, 0) = y_0$. Quindi in $\mathcal{N}$ l'equazione (4.7) in termini di z, u può essere scritta come

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Z(t, z, u) \\ \dot{u} &= U(t, z, u) \end{aligned} \tag{4.10}$$

dove $U(t, z, 0) \equiv 0$ in virtù delle (4.8), (4.9). Sia $(z(t), u(t))$ la soluzione della (4.10) tale che $z(t_0) = z_0$, $u(t_0) = 0$. Allo stesso modo questa soluzione esiste in $\mathcal{N}$, si ha $u(t) \equiv 0$.

In vero $(4.10)_2$ è soddisfatta assumendo $u(t) \equiv 0$, mentre $(4.10)_1$ con $u = 0$ ammette una ed una sola soluzione tale che $z(t_0) = z_0$. Quindi, dal momento che (t_0, x_0) è ogni punto su Φ, l'invarianza di Φ sotto la (4.7) è chiaramente provata.

(b) Dal momento che ogni soluzione della (4.7) esiste per ogni t in R, possiamo definire una funzione $G \in C(R \times R^n, R^+)$ assumendo

$$G(t,x) \equiv \left\| \varphi(x_{(2.5)}(0,t,x)) \right\|_n .$$

Proviamo che $KerG = \Phi$. In verità $(t,x) \in KerG$ implica $(0,x_0) \in \Phi$, con $x_0 = x_{(4.7)}(0,t,x)$. L'invarianza di Φ sotto la (4.7) allora implica $(t,x) \in \Phi$. In modo simile si può provare che $(t,x) \in \Phi$ implica $(t,x) \in KerG$. Essendo G un integrale primo per la (4.7), per questa equazione si ha $G \in (H)_\Phi$. Inoltre Φ è stabile vicino ad M anche per la (4.7).

Dal *Teorema* 4.1 segue quindi che M è stabile per la (4.7) e allora stabile per l'equazione originale (4.1). La dimostrazione è completa. **C.v.d.**

Teorema 4.3. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_{ub}(x)$. Assumiamo (w). Allora, se Φ è stabile vicino ad M, M è stabile.

***Dimostrazione*:** Considerando $u = z - g(t,y)$, il sistema (4.1) in termini delle variabili y, u diventa

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Y(t,y,u) \\ \dot{u} &= U(t,y,u), \end{aligned} \tag{4.11}$$

dove Y, U sono funzioni continue tali che Y, $U \in L_{ub}(y,u)$ e $U(t,y,0) = 0$, mentre Φ

diventa l'insieme $\tilde{\Phi} = \{(t, y, u) : u = 0\}$ ed M diventa un insieme $\tilde{M}$. Il problema di stabilità di M per la (4.1) è equivalente al problema di stabilità di $\tilde{M}$ per il sistema (4.11). Ponendo $\varphi(y, u) \equiv u$ si ha $\tilde{\Phi} = R \times Ker\varphi$ e chiaramente φ soddisfa per la (4.11) le condizioni del $Teorema$ 4.2 con $q = n - m$. Dal momento che $\tilde{\Phi}$ è uniformemente stabile vicino ad $\tilde{M}$, il risultato segue dal $Teorema$ 4.2. La dimostrazione è così completa. **C.v.d.**

Teorema 4.4. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_u(x)$. Se M è uniformemente stabile, allora Φ è uniformemente stabile vicino ad M.

Dimostrazione : Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ il numero associato ad ε nella definizione di uniforme stabilità di M. Sia $\sigma > 0$ tale che $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, uniformemente in $\{(t_0, y_0) : t_0 \in R, y_0 \in \Phi(t_0) \cap B^n[M(t_0), \sigma]\}$. Quindi se $t_0 \in R$ e $y_0 \in \Phi(t_0) \cap B^n[M(t_0), \sigma]$, allora: (i) $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \sigma \quad \forall t \geq t_0$; (ii) per ogni $\nu > 0$, esiste $T = T(\nu) > 0$ tale che $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \nu \quad \forall t \geq t_0 + T$. Sia $\gamma \in (0, \delta(\sigma)/2)$. Fissando ora $\varepsilon \in (0, \gamma)$ e $\nu \in (0, \delta)$, scegliamo un numero $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ con la condizione

$$0 < \eta < \frac{\delta - \nu}{\exp(kT)}, \quad k = L(B^n[Q^*(M), \gamma]).$$

Sia $t_0 \in R$. Assumiamo $x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma]$ e $y_0 \in \Phi(t_0)$ tale che $\rho(x_0, \Phi(t_0)) < \eta$ e $\|x_0 - y_0\|_n < \eta$. Essendo

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)\|_n < \eta \exp(kT) < \delta - \nu < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \tag{4.12}$$

e Φ è un insieme invariante, si ha

$$\rho(x(t, t_0, x_0), \Phi(t)) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{4.13}$$

Si ha anche $\rho(y_0, M(t_0)) \le \|x_0 - y_0\|_n + \rho(x_0, M(t_0)) < \eta + \gamma < 2\gamma < \delta(\sigma)$ dal quale segue, in virtù della (ii)

$$\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \nu \ \forall t \le t_0 + T. \tag{4.14}$$

Di conseguenza in virtù della (4.12), (4.14),

$$\begin{aligned} & \rho(x(t_0 + T, t_0, x_0), M(t_0 + T) \\ \le \quad & \|x(t_0 + T, t_0, x_0) - x(t_0 + T, t_0, y_0)\|_n + \rho(x(t_0 + T, t_0, y_0), M(t_0 + T)) < \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Allora $\rho(x(t, t_0, x_0), M(t)) < \varepsilon$ per ogni $t \ge t_0 + T$. Quindi, poichè $M(t) \subseteq \Phi(t)$ per ogni t, la disuguaglianza (4.13) è soddisfatta anche per $t > t_0 + T$. In conclusione per ogni $\varepsilon \in (0, \gamma)$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$(t_0, x_0) \in R \times B^n[M(t_0), \gamma] \text{ e } \rho(x_0, \Phi(t_0)) < \eta \text{ implicano } \rho(x(t, t_0, x_0), \Phi(t)) < \varepsilon \ \ \forall t \ge t_0.$$

La dimostrazione è completa. **C.v.d.**

Teorema 4.5. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_u(x)$. Assumiamo (u). Allora, se Φ è asintoticamente stabile vicino ad M, M è asintoticamente stabile.

***Dimostrazione* :** Essendo $(H)_\Phi$ non vuoto e Φ stabile vicino ad M, M è stabile in virtù del *Teorema* 4.1. Rimane solo da provare che M è attrattiva. Denotiamo con $\delta(\varepsilon) > 0$ il numero associato ad ε nella definizione di uniforme stabilità di M su Φ. Essendo M uniformemente attrattivo su Φ, per alcuni fissati $\sigma > 0$ e per ogni $\nu > 0$ esiste $T = T(\nu) > 0$ tale che $\rho(x(t, t_0, y_0), M(t)) < \frac{\nu}{2}$ per ogni t_0 in R, $y_0 \in \Phi(t_0) \cap B^n[M(t_0), \delta(\sigma)]$, e $t \geq t_0 + T$. Per ogni $\nu \in (0, \delta(\sigma))$ scegliamo $\nu' = \nu'(\nu)$ con la condizione

$$0 < \nu' < \frac{\nu}{2\exp(kT)}, \quad k = L(B^n[Q^*(M), \sigma]). \tag{4.15}$$

Sia $\gamma \in (0, \delta(\sigma)/2)$ e $\mu(t_0) \in (0, \gamma)$ scelte come nella *Definizione* 4.1 (*ii*) per $A = \Phi$. Allora per ogni $\nu \in (0, \delta(\sigma))$ esiste $T' = T'(t_0, x_0, \nu) > 0$ tale che $x_0 \in B^n[M(t_0), \gamma]$ e $\rho(x_0, \Phi(t_0)) < \mu(t_0)$ implicano

$$J^+(t_0, x_0) = [t_0, +\infty) \text{ e } \rho(x(t, t_0, x_0), \Phi(t)) < \nu' \quad \forall t \leq t_0 + T'. \tag{4.16}$$

Dato ogni $x_0 \in B^n[M(t_0), \mu(t_0)]$, vogliamo adesso provare che

$$\rho(x(\tau_0 + T, \tau_0, \xi_0), M(\tau_0 + T)) < \nu \tag{4.17}$$

dove $\tau_0 \geq t_0 + T'$, $\xi_0 = x(\tau, t_0, x_0)$. Dal momento che $M(t_0) \subseteq \Phi(t_0)$ si ha $\rho(x_0, \Phi(t_0)) < \mu(t_0)$ e allora, in virtù della (4.16), $\rho(\xi_0, \Phi(\tau_0)) < \nu'$. Quindi esiste $y_0 \in \Phi(\tau_0)$ tale che $\|\xi_0 - y_0\|_n < \nu'$. Essendo poi

$$\rho(y_0, M(\tau_0)) \leq \|\xi_0 - y_0\|_n + \rho(\xi_0, M(\tau_0)) < \nu' + \gamma < \frac{\delta(\sigma)}{2} + \frac{\delta(\sigma)}{2} = \delta(\sigma)$$

e

$$\begin{aligned} \rho(x(\tau_0 + T, \tau_0, \xi_0), M(\tau_0 + T)) \quad &\leq \quad \|x(\tau_0 + T, \tau_0, \xi_0) - x(\tau_0 + T, \tau_0, y_0)\|_n \\ &\quad + \rho(x(\tau_0 + T, \tau_0, y_0), M(\tau_0 + T)), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\rho(x(\tau_0 + T, \tau_0, \xi_0), M(\tau_0 + T)) < \nu' \exp(kT) + \frac{\nu}{2} < \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} = \nu.$$

Quindi la (4.17) è provata. A causa dell'arbitrarietà di $\tau_0 \geq t_0 + T'$ otteniamo allora $\rho(x(t, t_0, x_0), M(t)) < \nu \quad \forall t_0 \in R, \forall x_0 \in B^n[M(t_0), \mu(t_0)], \forall t \geq t_0 + T(\nu) + T'(t_0, x_0, \nu)$. Questo completa la dimostrazione. **C.v.d.**

Usando il *Teorema* 4.5 e gli stessi argomenti assunti nelle dimostrazioni dei *Teoremi* 4.2, 4.3 possiamo facilmente trovare affermazioni corrispondenti per la stabilità asintotica:

Teorema 4.6. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_{ub}(x)$. Assumiamo (v) o (w). Allora, se Φ è asintoticamente stabile vicino ad M, M è asintoticamente stabile.

Per la stabilità asintotica il *Teorema* 4.4 può essere formulato come segue:

Teorema 4.7. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L_u(x)$. Se M è uniformemente asintoticamente stabile, allora Φ è uniformemente asintoticamente stabile vicino ad M.

Dimostrazione **:** In virtù del *Teorema* 4.4 l'insieme Φ è uniformemente stabile vicino ad M. Sia $\varepsilon > 0$ e denotiamo con $\delta(\varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ i numeri positivi rispettivamente associati a questa proprietà e all'uniforme stabilità di M. Sia $\gamma > 0$ e $\sigma \in \big[0, \min(\delta(\gamma), \delta'(\gamma))\big]$ tali che $t_0 \in R$ e $x_0 \in B^n[M(t_0), \sigma]$ implicano che $\rho(x(t, t_0, x_0), M(t)) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, uniformemente in (t_0, x_0). Essendo $M(t) \subseteq \Phi(t)$ per ogni $t \in R$, allora si ha

$$\rho(x(t, t_0, x_0), \Phi(t)) \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow +\infty,$$

uniformemente in $t_0 \in R$, $x_0 \in B^n[M(t_0), \sigma]$. Allora Φ è uniformemente attrattiva vicino ad M (guarda l'*Osservazione* 4.1). La dimostrazione è completa. **C.v.d.**

Osservazione 4.3. Ovviamente tutti i risultati appena mostrati sono validi anche se per il sistema differenziale e in ogni definizione l'asse t è sostituito dall'intervallo $(\tau, +\infty)$, con $\tau \in R$.

4.1 Caso periodico

Assumiamo che f di (1.1) è continua e $f \in L(x)$. Indicheremo con caso periodico il caso in cui f e M sono entrambe w-periodiche in t per alcune costanti $w > 0$. In particolare f, M o entrambe possono essere t-indipendenti. Nel cao periodico si ha: (i) $f \in L_{ub}(x)$; (ii) la stabilità e l'asintotica stabilità di M quando occorrono sono sempre uniformi. Di conseguenza sotto le condizioni (u) o (v) o (w) anche la stabilità o l'asintotica stabilità di Φ vicino ad M quando occorrono sono uniformi. In vero se queste condizioni sono soddisfatte e Φ è stabile vicino ad M, M è uniformemente stabile e allora in virtù del *Teorema* 4.4 Φ è uniformemente stabile vicino ad M. Allo stesso modo si può procedere per la stabilità asintotica con l'aiuto del *Teorema* 4.7. Dai *Teoremi* 4.4, 4.7, segue che nel caso periodico i *Teoremi* 4.1, 4.2, 4.3 e i *Teoremi* 4.5, 4.6 sono invertibili.

Sussiste allora il seguente teorema:

Teorema 4.8. Supponiamo che f di (4.1) è continua e $f \in L(x)$. Inoltre assumiamo che f e M siano entrambe w-periodiche in t per alcune costanti $w > 0$. Allora, sotto le condizioni (u) o (v) o (w), M è stabile (asintoticamente stabile) se e solo se Φ è stabile (asintoticamente stabile) vicino ad M.

5 Riduzione delle proprietà di stabilità su varietà che coinvolgono integrali primi nello studio della stabilità incondizionata: caso della iperasintotica stabilità

In questo paragrafo inizia la trattazione di risultati originali da me ottenuti nell'ambito del filone di ricerca descritto. L'obiettivo di questo paragrafo è dare alcuni risultati, nel caso di sistemi autonomi, di stabilità parziale incondizionata, riducendo in qualche modo le richieste sulla varietà Γ. Questi risultati sono applicabili in particolare a problemi di stabilità "totale" per sistemi olonomi a coordinate ignorabili.

Consideriamo l'equazione autonoma

$$\dot{z} = f(z) \quad f(0) = 0 \tag{5.1}$$

con $f : D \subseteq R^n \longrightarrow R^n$. Assumiamo di poter scrivere $D = A \times B$ con $A \subseteq R^m$, $m < n$, $B \subseteq R^{n-m}$ aperti e tali che f sia Lipschitz continua in $z = (x, y)$, uniformemente rispetto ad $y \in B$; cioè per ogni insieme compatto $K \subset A$ esiste una costante $L(K) > 0$ tale che per ogni $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in A \times B$ con $x_1, x_2 \in K$, si ha $\|F(z_1) - F(z_2)\|_n \leq L(K) \|z_1 - z_2\|_n$. Chiaramente possiamo scrivere la (5.2) nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{5.2}$$

con $z = (x, y)$, $f = (h, g)$, $f \in C(A, R^n)$, $g \in C(A, R^n)$, $h(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$. Ovviamente ogni soluzione $z(t, z_0)$ della (5.1) attraverso $z_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ può essere divisa in due componenti $(x(t, x_0, y_0),\ y(t, x_0, y_0))$.

Teorema 5.1. [11] Supponiamo che le x-componenti delle soluzioni della (5.2) sono precompatte (cioè sono tutte contenute in un fissato insieme compatto). Assumiamo che l'equazione (5.2) ammette un integrale primo $G \in C^1(A, R^+)$ e che la soluzione nulla della (5.2) è x-iperasintoticamente stabile rispetto ad y relativamente alle perturbazioni lungo l'insieme

$$\Gamma = \{(x, y) \in A \times B : G(x) = 0\}.$$

Allora la soluzione nulla della (5.2) è x-iperstabile.

Dimostrazione **:** Chiaramente possiamo scrivere l'insieme Γ nella forma $\Gamma = \Gamma' \times B$ con $\Gamma' = \{x \in A : G(x) = 0\}$ e G è Γ'-definita positiva in senso usuale. Allora esiste $\gamma \in (0, \chi)$ tale che le x-componenti delle soluzioni della (5.1) con valore iniziale $x_0 \in B^m(\gamma)$ sono contenute in $B^m(\gamma)$ e per ogni $\alpha \in (0, \gamma)$ esiste $\beta = \beta(\alpha) > 0$ per il quale $x \in B^m(\gamma)$, $\rho(x, \Gamma') \geq \alpha$ implica $G(x) \geq \beta$. Inoltre, dalla (i) e dalla (ii) abbiamo che

1) per ogni $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che se $y_0 \in B$ e $x_0 \in \Gamma'$, $\|x_0\|_m < \delta$ allora $x(t, x_0, y_0)$ esiste e soddisfa

$$\|x(t, x_0, y_0)\|_m < \varepsilon \quad \forall t \geq 0;$$

2) esiste $\sigma \in (0, \delta(\gamma))$ con la proprietà che per ogni $\upsilon > 0$ esiste $T = T(\upsilon) > 0$ tale che se $x_0 \in \Gamma'$ con $\|x_0\| < \sigma$ e $y_0 \in B$, quindi

$$\|x(t, x_0, y_0)\|_m < \upsilon \quad \forall t \geq T(\upsilon).$$

Sia adesso $\varepsilon \in (0,\sigma)$, $\delta_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$, $\tau(\varepsilon) = T\left(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)\right)$, e $\bar{\delta}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\delta_1(\varepsilon)\exp(-k\tau)$, dove $k = L(B^m(\gamma))$. Assumiamo $\alpha = \bar{\delta}$ e sia $\eta = \beta(\bar{\delta})$.

Allora

$$G(x) < \eta \quad \text{e} \quad \|x\|_m < \gamma \quad \text{implicano} \quad \rho(x,\Gamma') < \bar{\delta}.$$

Scegliamo $(x_0, y_0) \in A \times B$ con $\|x_0\|_m < \delta_1$ e $G(x_0) < \eta$.

Allora si ha

$$\rho(x_0,\Gamma') < \bar{\delta}.$$

Quindi esiste $\tilde{x}_0 \in \Gamma'$ tale che $\|x_0 - \tilde{x}_0\|_m < \bar{\delta}$.

Otteniamo

$$\|\tilde{x}_0\|_m < \frac{3}{2}\delta_1(\varepsilon) < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Di conseguenza

$$\|x(t,\tilde{x}_0,y_0)\|_m < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{per} \quad t \in [0,\tau) \quad \text{e} \quad \|x(\tau,\tilde{x}_0,y_0)\|_m < \frac{1}{2}\delta_1.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned} \|x(t,x_0,y_0)\|_m &\leq \|x(t,x_0,y_0) - x(t,\tilde{x}_0,y_0)\|_m + \|x(t,\tilde{x}_0,y_0)\|_m \\ &< \|x_0 - \tilde{x}_0\|_m \exp(k\tau) + \|x(t,\tilde{x}_0,y_0)\|_m \\ &< \bar{\delta}\exp(k\tau) + \|x(t,\tilde{x}_0,y_0)\|_m \\ &< \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \quad \text{per} \quad t \in [0,\tau) \end{aligned} \tag{5.3}$$

e

$$\begin{aligned}\|x(\tau,x_0,y_0)\|_m &< \|x_0-\tilde{x}_0\|_m \exp(k\tau)+\|x(\tau,\tilde{x}_0,y_0)\|_m \\ &< \bar{\delta}\exp(k\tau)+\frac{1}{2}\delta_1 \\ &< \frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_1=\delta_1.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ponendo adesso $x_1 = x(\tau, x_0, y_0)$, $y_1 = y\,(\tau, x_0, y_0)$, e tenendo conto che G è un integrale primo, abbiamo allora $(x_1, y_1) \in B^m(\delta_1) \times B$, $x(t, \tau, x_1, y_1) \in B^m(\gamma)$ per ipotesi e $G(x_1) < \eta$. Dunque il risultato espresso dalla (5.3) e dalla (5.4) vale con (x_0, y_0) ripreso da (x_1, y_1) e così via. In conclusione esistono due numeri positivi $\delta_1(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ tali che se

$$\|x_0\|_m < \delta_1 \quad \text{e} \quad G(x_0) < \eta$$

allora

$$\|x(t, x_0, y_0)\|_m < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \tag{5.5}$$

Consideriamo adesso un numero $\lambda\,(\varepsilon)$ nell'intervallo $(0, \delta_1)$ tale che $G(x) < \eta \;\; \forall x \in B^m(\lambda)$. Allora la (5.5) vale per ogni x_0 in $B^m(\lambda)$ e questo prova che la soluzione nulla della (5.2) e x-iperstabile. La dimostrazione è completa. **C.v.d.**

Osserviamo che, per le ipotesi su G e, dal momento che si richiede una proprietà di stabilità solo per le x-componenti, nelle disuguaglianze non abbiamo bisogno della limitatezza delle y-componenti. Diamo adesso un semplice esempio in cui si applica il *Teorema* 5.1 e in cui le y-componenti delle soluzioni del sistema sono illimitate.

Consideriamo in R^4 il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1x_2^2 + x_1x_2^2x_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) - x_1x_2^2x_4^2\left(x_2^2 - x_1^2\right) \\
\dot{x}_2 &= -x_1^2x_2 + x_1^2x_2x_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2x_2x_4^2\left(x_2^2 - x_1^2\right) \\
\dot{x}_3 &= -2x_3 + x_3\frac{x_4^2}{1+x_4^2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 \\
\dot{x}_4 &= x_4 + x_4\left(x_2^2 - x_1^2\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Il sistema (5.6) ammette l'integrale primo

$$G(x_1, x_2) = \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2.$$

Inoltre sull'insieme per cui $G(x_1, x_2) = 0$, (cioè nel quale $x_1^2 = x_2^2$), il sistema (5.6) si riduce alla forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= -x_2^3 \\
\dot{x}_3 &= -2x_3 \\
\dot{x}_4 &= x_4.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Quindi, ponendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = x_4$, la parte destra del sistema (5.6) è Lipschitz continua in (x, y), uniformemente in $y \in R$. Inoltre l'origine è x-iperasintoticamente stabile rispetto ad y sull'insieme su cui $G(x_1, x_2) = 0$. Proviamo adesso che la x-componente delle soluzioni della (5.6), partendo da un insieme appropriato, è limitata.

In vero lungo le soluzioni della (5.6) è

$$\left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 = c^2$$

e abbiamo da scegliere il valore del dato iniziale in modo che c sia sufficientemente piccolo da essere vicino all'insieme su cui $G = 0$. Quindi possiamo assumere $|c| \leq 1$. Allora, per ogni dato iniziale, su (x_1, x_2), $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ tale che $\left(x_2^0\right)^2 - \left(x_1^0\right)^2 = c \in [-1, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -2x_3 + \frac{c^2 x_4^2}{1 + x_4^2} x_3 \\ \dot{x}_4 &= (1 + c^2) x_4. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Di conseguenza, dalla (5.8) è

$$x_4 = x_4^0 \exp(1 + c^2)t$$

e

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + c^2 \frac{\left(x_4^0\right)^2 \exp 2(1 + c^2)t}{1 + \left(x_4^0\right)^2 \exp 2(1 + c^2)t} x_3.$$

Da questa ultima equazione segue banalmente che

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3^0 \exp(-2t) \exp \log \left[\frac{1 + \left(x_4^0\right)^2 \exp 2(1 + c^2)t}{1 + \left(x_4^0\right)^2} \right]^{\frac{c^2}{2(1+c^2)}} \\ &= x_3^0 \left[\frac{1 + \left(x_4^0\right)^2 \exp 2(1 + c^2)t}{1 + \left(x_4^0\right)^2} \right]^{\frac{c^2}{2(1+c^2)}} \exp(-2t). \end{aligned}$$

Un confronto sui termini dell'esponenziali nell'ultima disuguaglianza mostra che $x_3 \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow +\infty$, così risulta limitata per ogni scelta di x_4. Per le prime due componenti osserviamo che dalle prime due equazioni della (5.6) si ha

$$\begin{aligned} x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 &= -2x_1^2 x_2^2 + 2c x_3 x_1^2 x_2^2 \\ &= -2x_1^2 x_2^2 \left(1 - c x_3\right). \end{aligned}$$

Sapendo che $|c| < 1$, che x_3 è limitata e che tende a zero per $t \longrightarrow +\infty$ possiamo allora scegliere il dato iniziale su x_3 sufficientemente piccolo in modo da ottenere che $1 - cx_3 > 0$ lungo tutte le soluzioni. Quindi la funzione $V = x_1^2 + x_2^2$ è non crescente lungo le soluzioni della (5.6), si ha allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1^2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) + x_2^2(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \\ &\leq \left(x_1^0\right)^2 + \left(x_2^0\right)^2 \end{aligned}$$

ed anche quelle componenti risultano limitate. In conclusione se $\gamma > 0$ è sufficientemente piccolo e viene scelto $\|x_0\| < \gamma$, si ha $(\left(x_2^0\right)^2 - \left(x_1^0\right)^2)^2 = c^2 < 1$ e $\|x(t, x_0, y_0)\| < \gamma$ per qualsiasi scelta di $y_0 = x_4^0$. Di conseguenza vi si può applicare il *Teorema* 5.1.

Consideriamo adesso una famiglia di sistemi differenziali dipendenti da un parametro

$$\dot{z} = F(z, \lambda) \quad F(0, \lambda) = 0 \tag{5.9}$$

con $F \in C(D \times R, R^n)$ e $F \in L(z)$. Chiaramente ponendo $z = (x, y)$, $x \in A, y \in B$ ed usando le stesse notazioni viste per la (5.1) possiamo scrivere la (5.9) nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \quad f(x, y, 0) = 0 \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \quad g(x, y, 0) = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Possiamo affermare per il sistema (5.10) un risultato che useremo in seguito come *Corollario* al *Teorema* 5.1.

Corollario 5.1. Assumiamo che $F \in L(z)$ è uniformemente Lipschitz continua in y e che le x-componenti delle soluzioni del sistema (5.10) sono precompatte e supponiamo che per $\lambda = 0$ la soluzione nulla del sistema (5.10) è x-iperasintoticamente stabile rispetto ad y allora la soluzione $x = 0$, $y = 0$, $\lambda = 0$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, \lambda) \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

è x-iperstabile rispetto ad y.

Tenendo conto che il sistema (5.11) ammette l'integrale primo

$$G(x) = \lambda^2,$$

la dimostrazione del *Corollario* 5.1 è un'immediata conseguenza del *Teorema* 5.1.

Osserviamo che il risultato espresso dal *Corollario* 5.1 può essere visto in un contesto di stabilità totale. In vero, la x-iperstabilità della soluzione nulla del sistema (5.11) coincide con la x-ipertotale stabilità della soluzione nulla del sistema (5.10), condizionatamente all'insieme delle perturbazioni

$$U = \{F \in C(A \times B \times R, R^n) \cap L(z);\ \lambda \text{ sufficientemente piccolo}\}.$$

Notiamo che come x-ipertotale stabilità intendiamo la proprietà espressa dalla seguente definizione.

Definizione 5.1. La soluzione nulla della (5.2) è x-ipertotalmente stabile rispetto ad y e alle perturbazioni lungo un insieme U se per ogni $\varepsilon \in (0, \chi)$ esiste $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$

tali che

$$\|x_0\|_m < \delta_1, \quad y_0 \in B \quad \text{e} \quad F \in U : \|F(z,\lambda) - F(z,0)\|_n < \delta_2, \, z \in A \times B,$$

implicano

$$\|x(t, x_0, y_0)\|_m < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad t \geq 0.$$

Concludiamo il paragrafo osservando che nel caso particolare in cui le x-componenti della (5.2) non dipendono da y o che la proprietà di stabilità asintotica è soddisfatta rispetto a tutte le coordinate sull'insieme Γ, l'ipotesi di limitatezza delle x-componenti non è necessaria e così pure l'uniformità della condizione di Lipschitz in y. In particolare, relativamente alla limitatezza delle x-componenti, è possibile provarla passo dopo passo direttamente usando il $Teorema$ 5.1.

5.1 Applicazione a sistemi olonomi

Riprendiamo il sistema S precedentemente introdotto. Assumiamo che su S agiscano una forza conservativa posizionale e una forza dissipativa Q indipendente dal tempo. Assumiamo che le coordinate $q_{m+1}, ..., q_n$, con $m < n$, sono cicliche; cioè, l'energia potenziale Π, D, e i coefficienti dell'energia cinetica T sono indipendenti dalle $(q_{m+1}, ..., q_n)$. Sia poi $\xi = (q_1, ..., q_m)$, $\eta = (q_{m+1}, ..., q_n)$, $u = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m), v = (\dot{q}_{m+1}, ..., \dot{q}_n)$. Allora si ha $\Pi = \Pi(\xi)$, $Q = Q(\xi, u, v)$, $T = T(\xi, u, v) = 1/2 < (u, v), A(\xi)(u, v) >$, dove A è una matrice $n \times n$ simmetrica, definita positiva.

In fine assumiamo che le componenti $Q_{m+1}, ..., Q_n$ sono nulle, e poniamo $Q = (D, 0)$ con $D = (D_1, ..., D_m)$ una forza dissipativa tale che $< D, u > \leq 0$.

Nelle nostre ipotesi le equazioni del moto di S assumono la forma di

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\nabla \Pi + D \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = 0 \\
&\frac{d\xi}{dt} = u \\
&\frac{d\eta}{dt} = v
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Abbiamo bisogno di richiamare alcuni risultati ben noti:

(a) La determinazione delle coordinate (ξ, u, v) nella (5.12) può essere ottenuta risolvendo il sistema costituito dalle prime tre equazioni del sistema (5.12), che chiamiamo sistema (S) e che non dipende dalle coordinate cicliche. Qui in seguito Π e gli elementi di T sono supposti funzioni di classe C^1 definite in un insieme aperto Ω di R^m contenente l'origine e $D \in C(\Omega \times R^m, R^m)$. Inoltre A, Π e D sono assunte sufficientemente regolari per assicurare l'unicità delle soluzioni. Ovviamente quando il sistema (S) è integrato le coordinate cicliche si possono ottenere risolvendo la $(5.12)_4$ in cui la r.h.s. è adesso costituita da funzioni note di t e dalle condizioni iniziali di ξ, u, v.

(b) Le $n - m$ equazioni nella $(5.12)_3$ portano agli integrali dei momenti

$$\frac{\partial T}{\partial v_\alpha} = c_\alpha, \quad \alpha = m + 1, ..., n \tag{5.13}$$

con $c = (c_{m+1}, .., c_n)$ vettore costante in R^{n-m}. Dalla (5.13) otteniamo v come una funzione regolare di ξ, u, c:

$$v = v(\xi, u, c). \tag{5.14}$$

Sostituendo la (5.14) nelle prime due equazioni della (5.12) otteniamo il sistema Lagrangiano "ridotto"

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial u} - \frac{\partial T^*}{\partial \xi} = -\nabla \Pi^*(\xi, c) + D^*(\xi, u, v, c) \\ &\frac{d\xi}{dt} = u, \end{aligned} \tag{5.15}$$

dove le funzioni Π^*, D^* dipendono dalle costanti dei momenti. Inoltre

$$D^*(\xi, u, v, c) = D(\xi, u) + R^*(\xi, v, c)$$

dove R^* è una forza girostatica.

(c) Assumiamo che per un dato valore $\tilde{c}$ di c si ha $\nabla\Pi^*(0, \tilde{c}) = 0$. In questo caso per $c = \tilde{c}$ il sistema (5.15) ammette la soluzione $\xi = 0$, $u = 0$. Chiaramente, poi, il sistema (S) ammette la soluzione

$$\xi = 0, \quad u = 0, \quad \bar{v} = v(0, 0, \tilde{c}). \tag{5.16}$$

Sia σ uno degli ∞^{n-m} moti merostatici corrispondenti alla (5.16). In [17] è stato provato che se $\Pi^*(\xi, \tilde{c})$ ammette un minimo proprio in $\xi = 0$, allora σ è stabile rispetto a (ξ, u), incondizionatamente alle perturbazioni della costante c. Inoltre, se D è assunta completamente dissipativa ($< D, u > \leq 0$, $< D, u > = 0 \Longleftrightarrow u = 0$), in [18] è dimostrato che σ è asintoticamente stabile rispetto a (ξ, u), condizionatamente alle perturbazioni per cui $c = \tilde{c}$.

Consideriamo adesso un'applicazione del $Teorema$ 5.1 a sistemi meccanici con coordinate cicliche. Consideriamo di nuovo il sistema (5.12) e la sua forma ridotta, il sistema (5.13). Assumiamo che $\Pi^*(\xi, c)$ ammette un minimo proprio a $\xi = 0$, $c = \tilde{c}$ e supponiamo $Q = (D, 0)$, con D completamente dissipativa. Quindi il sistema (S) ammette la soluzione (5.16) ed ogni moto merostatico σ della (5.12) corrispondente alla (5.16) è (ξ, u)-asintoticamente stabile, condizionatamente alle perturbazioni per cui $c = \tilde{c}$.

Consideriamo adesso una famiglia di sistemi perturbati della (5.12) nella forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\nabla\Pi + D(\xi, u) + \Delta(\xi, u, v, c) \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = 0 \\
&\frac{d\xi}{dt} = u \\
&\frac{d\eta}{dt} = v.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Qui assumiamo $\Delta \in C^1(\Omega \times R^n \times R^{n-m}, R^n)$ tale che $\Delta(\xi, u, v, \tilde{c}) = 0$. Per $c = \tilde{c}$ il sistema (5.17) coincide col sistema (5.12), quindi ammette lo stesso sistema ridotto (5.15). Assumiamo che $\Pi(\xi, \tilde{c})$ ha un minimo proprio in $(0, \tilde{c})$.

Consideriamo ora il sistema ausiliario

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{\partial T}{\partial \xi}=-\nabla\Pi+D+\Delta \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}=0 \\
&\frac{d\xi}{dt}=u \\
&\frac{d\eta}{dt}=v \\
&\dot{c}=0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

e la funzione

$$G(\xi,u,\lambda)=\sum_{\alpha=m+1}^{n}\left(\frac{\partial T^*}{\partial v_\alpha}-\tilde{c}_\alpha\right)^2+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\left(c_\alpha-\tilde{c}_\alpha\right)^2, \tag{5.19}$$

dove in T^* abbiamo usato la funzione $v\left(\xi,u,\tilde{c}\right)$. Chiaramente G è un integrale primo per la (5.18) e l'insieme Γ' coincide con l'insieme $\left\{(\xi,u,c):\dfrac{\partial T}{\partial v}=\tilde{c},\ c-\tilde{c}=0\right\}$.

Possiamo applicare in questo caso il nostro *Teorema* 5.1 con alcune lievi modifiche. In vero nel nostro caso per ogni scelta di ξ,u,c si ha v come funzione di ξ,u,c che è almeno continua. Quindi per ogni $\varepsilon'\in(0,\gamma)$ esiste $\varepsilon\in(0,\varepsilon')$ tale che

$$\left\|v\left(\xi,u,c\right)-\tilde{v}\right\|_{n-m}<\varepsilon' \quad \text{per} \quad \left\|(\xi,u)\right\|_{2m}<\varepsilon \quad \text{e} \quad \left\|c-\tilde{c}\right\|_{n-m}<\varepsilon.$$

Inoltre, relativamente a $\delta_1\left(\varepsilon\right)$ possiamo trovare $\tilde{\delta}\left(\varepsilon\right)\in\left(0,\frac{1}{4}\delta_1\left(\varepsilon\right)\exp\left(-kt\right)\right)$ e $\delta_2\left(\varepsilon\right)\in(0,\varepsilon)$ tale che

$$\left\|v\left(\xi,u,c\right)-v\left(\xi^*,u^*,c^*\right)\right\|_{n-m}<\frac{1}{4}\delta_1\exp\left(-kt\right)$$

per ogni (ξ,u,c), $(\xi^*,u^*,c^*)\in\beta\left(\varepsilon\right)$ con $\left\|(\xi,u)-(\xi^*,u^*)\right\|_{2m}<\tilde{\delta}$ e $\left\|c-c^*\right\|_{n-m}<\delta_2$. Inoltre notiamo che $\left(\xi\left(t\right),u\left(t\right)\right)$ non dipende da η. Quindi la r.h.s della (5.18) è Lipschitz continua su (ξ, η, u, v) uniformemente in (η, v), per ogni c. Inoltre, per l'osservazione fatta non abbiamo bisogno della limitatezza della (ξ, u)-componente delle soluzioni della (5.18). Dal momento che sull'insieme Γ si ha l'(ξ, u)-iperasintotica stabilità rispetto a (η, v), possiamo usare da adesso la dimostrazione del *Teorema* 5.1 e del *Corollario* 5.1. Possiamo quindi concludere che ogni moto merostatico σ della (5.12) è x-ipertotalmente stabile rispetto ad y e all'insieme di perturbazioni

$$U = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \in C^1 \left(\Omega \times R^n \times R^{n-m}, R^n \right) : \Delta_\alpha \equiv 0, \alpha = m+1, ..., n \\ \text{e } \Delta_i(\xi, u, v, \tilde{c}) \equiv 0, i = 1, ..., m. \end{array} \right\}$$

con $x = (\xi, u)$, $y = (\eta, v)$.

6 Riduzione delle proprietà di stabilità su varietà che coinvolgono integrali primi nello studio della stabilità incondizionata: caso della stabilità totale

In questo paragrafo daremo risultati validi per sistemi periodici del tipo (1.1), con un integrale primo G, riducendo la richiesta di stabilità asintotica sulla varietà Γ.

Questo viene fatto con integrali primi che soddisfano una ulteriore condizione riconducibile alla condizione (w) del paragrafo 4.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{z} = f(t, z), \quad f(t, 0) = 0 \tag{6.1}$$

con $f \in C(R \times D, R^n) \cap L(z)$ e $T-$periodica in t, $T > 0$. Per ogni $g \in C(R \times D, R^m) \cap L(z)$ consideriamo l'equazione perturbata

$$\dot{z} = g(t, z). \tag{6.2}$$

Ricordiamo che la soluzione nulla di (6.1) è uniformemente totalmente stabile se vale la definizione 2.1 (iii).

Diamo ora una definizione che ci tornerà utile nel seguito:

Definizione 6.1. Sia $U \subset E$ un insieme compatto tale che $J_+ = [t_0, +\infty[$ per ogni $(t_0, z_0) \in R^+ \times U$.

U è detto quasi contraente rispetto all'equazione (6.1), se esistono un insieme compatto $V \subset \mathring{U}$ ed una successione divergente $(\theta_n) \subset R^+$ con $\theta_{n+1} > \theta_n$, $n \in N = \{1, 2, ...\}$ tale che:

(a) Sup $(\theta_{n+1} - \theta_n) < +\infty$.

(b) $z(\theta_{n+1}, \theta_n, z_0) \in V$ per ogni $z_0 \in U$ ed $n \in N$.

La definizione (6.1) è una generalizzazione del concetto di intorni contraenti data in [24] per sistemi autonomi.

Nel seguito faremo anche uso del seguente teorema dimostrato in [19] in un caso più generale di quello dell'equazione (6.1).

Teorema 6.1. [19] Condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione nulla di (6.1) sia uniformemente totalmente stabile è che l'origine ammetta un sistema fondamentale di intorni compatti quasi contraenti.

Osserviamo anche che nella dimostrazione del predetto teorema, in particolare, la costruzione degli intorni compatti quasi contraenti nella condizione necessaria è stata effettuata con una successione del tipo $\theta_n = t_0 + n\not{T}$, $n \in N$, per ogni scelta di $t_0 \in R$.

A questo punto siamo in grado di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 6.2. [12] Sia $G \in C^1(R \times D, R^+)$ un integrale primo per l'equazione (6.1), T -periodico in t e sia $\Gamma = \{(t, z) \in R \times D : G(t, z) = 0\}$. Inoltre supponiamo che:

(a$_1$) $\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)(t, 0)$ ha rango m con $m < n$, per ogni $t \in R$.

(b$_1$) G è Γ-definita positiva.

(c$_1$) La soluzione nulla della è uniformemente totalmente stabile per perturbazioni giacenti su Γ.

Allora la soluzione nulla di (6.1) è uniformemente stabile.

***Dimostrazione* :** Notiamo che essendo f T -periodica in t, si ha anche $f \in L_u(z)$. Proviamo l'asserto in diversi passi.

(i) Dal momento che $\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)$ in $z = 0$ e per $t \in [0, T]$ ha rango m, senza perdita di generalità possiamo assumere che il determinante di almeno uno dei minori $m \times m$ contenuti nelle prime m righe di $\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)(t, 0)$ è diverso da zero. Poniamo quindi $z = (x, y)$ con $x = (z_1, ..., z_m)$ e $y = (z_{m+1}, ..., z_n)$. Essendo $G(t, 0) = 0$, per il teorema sulle funzioni implicite esistono $\sigma > 0$ e una funzione C^1, T -periodica in t, $\varphi : R \times B^m(\sigma) \longrightarrow B^{n-m}(\sigma)$ tali che per ogni $x \in B^m(\sigma)$, $y \in B^{n-m}(\sigma)$ e $t \in [0, T]$, è $y = \varphi(t, x)$ e $G(t, z) = 0$ se e solo se $z = (x, \varphi(t, x))$.

Sia

$$\Gamma^* = \left\{(t,x,y) \in R \times B^m(\sigma) \times B^{n-m}(\sigma) : y = \varphi(t,x)\right\}.$$

Chiaramente Γ^* è un insieme T -periodico e per ogni $z = (x,y) \in B^m(\sigma) \times B^{n-m}(\sigma)$ si ha che

$$(t,z) \in \Gamma \Longleftrightarrow (t,z) \in \Gamma^*.$$

Consideriamo adesso il cambiamento di variabili

$$u = y - \varphi(t,x) \tag{6.3}$$

per $x \in B^m(\sigma)$, $y \in B^{n-m}(\sigma)$. Ovviamente anche u è T -periodica e varia in $R \times M$, dove M è un insieme limitato di R^{n-m}.

La (6.3) trasforma Γ^* nell'insieme

$$\Gamma_u^* = \{(t,x,u) \in R \times B^m(\sigma) \times M : u = 0\}$$

e comporta che $\Gamma_u^*(t) = \Gamma_u^*$ per ogni $t \in R$.

Inoltre, la posizione $z = (x,y)$ permette di decomporre l'equazione (6.1) nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y) \\ \dot{y} = f_2(t,x,y) \end{cases} \tag{6.4}$$

con $f_1 \in C(R \times R^n, R^m)$, $f_2 \in C(R \times R^n, R^{n-m})$, f_1,$f_2 \in L(x,y)$, T-periodiche in t e tali che $f = (f_1, f_2)$. Applicando il cambiamento di variabili (6.3), l'equazione (6.4) in termini di x,u, può essere scritta come

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi_1(t,x,u) \\ \dot{y} = \phi_2(t,x,u) \end{cases} \tag{6.5}$$

dove $\phi_2(t,x,0) = 0$ in virtù delle considerazioni fatte. Essendo i sistemi (6.4) e (6.5) equivalenti, G nelle nuove variabili risulta integrale primo anche per il (6.5). Inoltre, dato che

$$(t,z) \in \Gamma \text{ e } z = (x,u) \in R \times B^m(\gamma) \times B^{n-m}(\gamma) \Longleftrightarrow (t,z) \in \Gamma^*,$$

e Γ_u^* è la trasformata di Γ^* tramite (6.3), si ha che Γ_u^* è localmente invariante rispetto alla (6.5) nel senso che:

$$\begin{aligned}
z_0 &= (x_0,u_0) \in \Gamma_u^*,\ x_0 \in B^m(\gamma),\ u_0 = 0 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow z(t,t_0,z_0) = (x(t,t_0,z_0), u(t,t_0,z_0)) \text{ tale che} \\
u(t,t_0,z_0) &= 0\ \forall t \text{ per cui } x(t,t_0,z_0) \in B^m(\gamma) \text{ e } u(t,t_0,z_0) \in M.
\end{aligned}$$

Inoltre, il sistema (6.5) su Γ_u^* si riduce all'equazione

$$\dot{x} = h(t,x) \quad h(t,0) \equiv 0 \tag{6.6}$$

con $h(t,x) = \phi_1(t,x,0)$.

(ii) Assumiamo ora $\gamma \in (0,\sigma)$ tale che $M \subset B^{n-m}(\gamma)$. Sia L la costante uniforme di Lipschitz connessa ad f in $B[\gamma]$ (ricordando che $f \in L_u(z)$). L'assunzione (b_1) assicura che la condizione richiesta nella *Definizione* 1.4 è soddisfatta. Inoltre β può essere scelta indipendente da t_0, perchè G è T-periodica in t. Come conseguenza della *Definizione* 1.4, per ogni $\alpha \in (0,\gamma)$ esiste $\eta = \beta(\alpha)$ tale che $G(t,z) < \eta$ e $z \in B^n(\gamma)$ implicano $\rho(z, \Gamma_u^*) < \alpha$.

L'ipotesi (c_1) e la locale invarianza di Γ_u^* assicurano che la soluzione $x = 0$ della (6.6) è uniformemente totalmente stabile su Γ_u^*. Quindi dal *Teorema* 6.1 segue che $x = 0$

ammette un sistema fondamentale di intorni quasi contraenti. Chiaramente $x = 0$ è anche uniformemente stabile. Allora assumiamo $\varepsilon \in (0, \gamma)$ e consideriamo $\lambda \equiv \delta(\varepsilon/2)$ come nella *Definizione* 2.1 (i). Fissiamo $t_0 \in R$ e un sistema fondamentale di intorni quasi contraenti di $x = 0$ su R^m relativamente a t_0 (cioè con $\theta_n = t_0 + nT$). In particolare esistono due intorni compatti di $x = 0 : U \subset B^m(\lambda)$, $V \subset \mathring{U}$ per i quali $\theta_n = t_0 + nT$ e $x(t_0 + nT, t_0 + (n-1)T, (x_0, 0)) \in V$ per ogni $n \geq 1$ e $x_0 \in V$. Essendo $\rho(\partial V, \partial U) > 0$, possiamo trovare un altro insieme compatto $W \subset R^m$ tale che $V \subset \mathring{W} \subset \mathring{U}$.

Come conseguenza:

$$\rho(\partial V, \partial W) = \rho_1 > 0 \quad \text{e} \quad \rho(\partial W, \partial U) = \rho_2 > 0.$$

Siano $\mu = \min\{\rho_1, \rho_2, \varepsilon\}$ e $\alpha = \mu e^{-LT}$, allora $\exists\ \beta(\mu) = \eta$ tale che

$$G(t, z) < \eta, \|z\|_n < \gamma \Longrightarrow \rho(z, \Gamma_u^*) < \alpha < \mu.$$

(iii) Per provare che l'origine di R^n è stabile per il sistema (6.4) abbiamo bisogno di mostrare che scegliendo $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tale che la condizione richiesta nella *Definizione* 2.1 (i) è soddisfatta.

Scegliamo $z_0 = (x_0, u_0) \in W \times B^{n-m}(\mu)$ tale che $G(t_0, z_0) < \eta$. Chiaramente è $\rho(z_0, \Gamma_u^*) < \alpha$, allora esiste $z_0' = (x_0', 0)$ con $x_0' \in \Gamma_u^*$ tale che

$$\rho(z_0, z_0') = \left\|z_0 - z_0'\right\|_n < \alpha.$$

Essendo $\alpha < \mu$ si ha $x_0' \in U$, infatti in caso contrario risulterebbe $\|x_0 - x_0'\|_n \geq$

$\rho(\partial V, \partial U) = \rho_2 \geq \mu$ e questo è assurdo. Inoltre per ogni $t \in [t_0, t_0 + T]$ segue:

$$\begin{aligned}
\|z(t,t_0,z_0)\|_n &\leq \left\|z(t,t_0,z_0) - z(t,t_0,z_0')\right\|_n + \left\|z(t,t_0,z_0')\right\|_n \\
&< \left\|z_0 - z_0'\right\|_n e^{LT} + \left\|z(t,t_0,z_0')\right\|_n \\
&< \alpha e^{LT} + \left\|z(t,t_0,z_0')\right\|_n \\
&< \mu + \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proviamo adesso che

$$z(t_0 + T, t_0, z_0) \in W \times B^{n-m}(\mu),$$

quindi in particolare

$$x(t_0 + T, t_0, z_0) \in W.$$

Infatti, essendo $\|z(t_0 + T, t_0, z_0) - z(t_0 + T, t_0, z_0')\|_n < \mu$, risulta

$$\left\|x(t_0 + T, t_0, z_0) - x(t_0 + T, t_0, z_0')\right\|_m < \mu$$

e

$$\|u(t_0 + T, t_0, z_0)\|_{n-m} < \mu.$$

Quindi $u(t_0 + T, t_0, z_0) \in B^{n-m}(\mu)$ e $x(t_0 + T, t_0, z_0) \in W$, infatti se questo ultimo asserto non fosse vero risulterebbe

$$\left\|x(t_0 + T, t_0, z_0) - x(t_0 + T, t_0, z_0')\right\|_m \geq \rho(\partial W, \partial V) = \rho_1 \geq \mu$$

che è assurdo.

Ponendo $\tilde{z}_0 = z(t_0+T, t_0, z_0)$, possiamo scrivere $\tilde{z}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0)$ con $\tilde{x}_0 = x(t_0+T, t_0, z_0)$ e $\tilde{u}_0 = u(t_0+T, t_0, z_0)$.

Essendo G un integrale primo si ha

$$G(t_0+T, \tilde{z}_0) = G(t_0, z_0) < \eta,$$

e di conseguenza $\rho(\tilde{z}_0, \Gamma_u^*) < \alpha$. Quindi possiamo scegliere $\tilde{z}_0' = (\tilde{x}_0', 0)$ con $\tilde{x}_0' \in \Gamma_u^*$ tale che

$$\rho(\tilde{z}_0, \tilde{z}_0') = \left\|\tilde{z}_0 - \tilde{z}_0'\right\|_n < \alpha.$$

Procedendo come prima, nell'intervallo $[t_0+T, t_0+2T]$ otteniamo nuovamente

$$\|z(t, t_0+T, \tilde{z}_0)\|_n < \varepsilon$$

e

$$\left\|z(t_0+2T, t_0+T, \tilde{z}_0) - z(t_0+2T, t_0+T, \tilde{z}_0')\right\|_n < \mu.$$

Tenendo conto che f è T-periodica in t si ha

$$z(t_0+2T, t_0+T, \tilde{z}_0) = z(t_0+T, t_0, \tilde{z}_0)$$

e

$$z(t_0+2T, t_0+T, \tilde{z}_0') = z(t_0+T, t_0, \tilde{z}_0').$$

Possiamo allora considerare la stessa famiglia di intorni quasi contraenti e, con le stesse osservazioni fatte prima, otteniamo

$$z(t_0+2T, t_0+T, \tilde{z}_0) = z(t_0+2T, t_0, z_0) \in W \times B^{n-m}(\mu).$$

In conclusione possiamo dire che se

$$z_0 \in W \times B^{n-m}(\mu) \quad \text{e} \quad G(t_0, z_0) < \eta$$

risulta

$$\|z(t, t_0, z_0)\|_n < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Essendo $G(t,0) \equiv 0$ ed essendo G T-periodica, relativamente a $\eta(\varepsilon)$ esiste $\delta(\varepsilon)$ tale che $B^n(\delta) \subset W \subset B^{n-m}(\mu)$ e $G(t,z) < \eta$ per ogni z in $B^n(\lambda)$. Allora scegliendo $z_0 \in B^n(\delta)$ per ogni $t_0 \in R$ otteniamo $z(t, t_0, z_0) \in B^n(\varepsilon)$ quindi $z = 0$ è uniformemente stabile rispetto alla (1.1). La dimostrazione è ora completa. **C.v.d.**

7 Possibilità di sviluppi in teoria dei controlli

Cominciamo con la seguente considerazione:

Osservazione 7.1 Se φ è una funzione periodica soddisfacente (b_1), (c_1) del *Teorema* 6.2 e $\Gamma = \{(t,z) \in R \times R^n : \varphi(t,z) = 0\}$, allora dalla dimostrazione del *Teorema* 6.2 (i) segue che la (w) del paragrafo 4 è soddisfatta per $\Phi = \{(t,x,y) \in R \times R^m \times R^n : y = g(t,x)\}$ con g tale che $\varphi(t,x,g(t,x)) \equiv 0$ e quindi è possibile costruire un integrale periodico G tale che $KerG = \Phi$. Allora il *Teorema* 6.2 può essere applicato anche a varietà invarianti non necessariamente definiti da integrali primi.

Questa osservazione permette l'utilizzo del *Teorema* 6.2 in alcuni problemi di controllo.

La teoria dei controlli ha avuto ampia diffusione e sviluppo negli ultimi anni, citiamo diversi lavori in cui tale teoria fa uso di proprietà di stabilità per il sistema imperturbato, che possono essere assimilate a proprietà di stabilità su particolari varietà.

Un classico problema che si pone nella teoria dei controlli [8,23] è quello della ricerca di condizioni sufficienti per la stabilizzazione globale, per mezzo di funzioni di stato "feedback" di sistemi compositi della forma

$$\dot{x} = f(x,\xi) \qquad x \in R^n,\ \xi \in R^q \tag{*,1}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \qquad\qquad u \in R^n \tag{*,2}$$

con $f(x,\xi)$ sufficientemente regolare (ad esempio C^∞) e A, B matrici costanti.

Le ipotesi sul sistema sono le seguenti:

(H_1) La coppia (A, B) è stabilizzabile, esiste cioè una matrice K tale che gli autovalori di $A_K = A + BK$ sono a parte reale negativa.

(H_2) La soluzione nulla di $\dot{x} = f(x,0)$ è globalmente asintoticamente stabile (GAS) ed esiste ula funzione di Liapunov $V(x) \in C^1$ tale che $V(x) > 0$ per $x \neq 0$, $V(0) = 0$, $\nabla V(x) f(x,0) < 0\ \forall x \neq 0$ e $V(x) \longrightarrow +\infty$ se $\|x\| \longrightarrow +\infty$ (proprietà globale). In [23], nella ulteriore ipotesi $f(x,\xi) - f(x,0) = G(x,\xi)C\xi$ viene dimostrata l'esistenza di una funzione di controllo feedback

$$u = K\xi + v(x,\xi)$$

con K tale che $A_K = A + BK$ ammette autovalori tutti a parte reale negativa e viene provata la stabilità asintotica uniforme (globale) per la soluzione $x = 0$, $\xi = 0$ del sistema

$$\dot{x} = f(x,0) + G(x,\xi)C\xi \tag{**,1}$$

$$\dot{\xi} = (A + BK)\xi + Bv(x, \xi). \qquad (**,2)$$

Nel contesto dei teoremi precedenti possiamo dire che la varietà $\xi = 0$ è (esponenzialmente) asintoticamente stabile (vicino all'origine) e sulla varietà $\xi = 0$ risulta $x = 0$ asintoticamente stabile, quindi si trova subito il risultato richiesto e la proprietà è globale se si mantiene l'ipotesi (H_2) nel suo complesso.

Si può generalizzare anche la forma di (*,2), non richiedendo quindi che il sistema sia lineare, ma solo che la parte lineare sia stabilizzabile.

Riducendo l'ipotesi di stabilità asintotica a quella di stabilità totale si ottiene la stabilità del sistema controllato anche nell'ipotesi più generale di sistemi periodici e non necessariamente autonomi, utilizzando il *Teorema* 6.2 e l'*Osservazione* 7.1.

Un problema similare si pone nella stabilizzazione di sistemi a cascata che si può ridurre al problema della stabilità di sistemi triangolari:

$$\dot{x} = F(x) \qquad F(0) = 0 \qquad (***,1)$$

$$\dot{\xi} = G(x, \xi) \qquad G(0, 0) = 0 \qquad (***,2)$$

con $x \in R^n$, $\xi \in R^q$.

Il problema posto è il seguente se i sottosistemi $\dot{x} = F(x)$, $\dot{\xi} = G(x, \xi)$ ammettono la soluzione nulla globalmente asintoticamente stabile, ciò è vero anche per il sistema (***).

In generale ciò è vero solo per la proprietà locale e non per quella globale come mostra immediatamente il seguente esempio

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{\xi} &= \xi(x^2\xi^2 - 1)\end{aligned}$$

dove l'origine è solo localmente asintoticamente stabile, mentre per i due sottoinsiemi $x = 0$ e $\xi = 0$ sono GAS.

Nella condizione addizionale di limitatezza nel futuro delle soluzioni si prova la proprietà globale. In questo caso $x = 0$ è la varietà invariante per il sistema completo e applicando ancora il teorema precedente la stabilità asintotica uniforme locale della soluzione $x = 0$, $\xi = 0$ del sistema completo. La GAS segue poi ancora mantenendo l'ipotesi di limitatezza delle soluzioni.

Anche in questo caso si può pensare a generalizzazioni che coinvolgono la stabilità totale sulle varietà e la generalizzazione a funzioni periodiche. In conclusione i risultati a cui sono pervenuta in questa tesi possono essere utilizzati per ridurre le ipotesi cui i secondi membri delle equazioni e le funzioni di controllo devono soddisfare.

Bibliografia

[1] D. Aeyels, R. Sepulchre, Stability for dynamical systems with first integrals: a topological criterion, Systems and Control Letters, North-Holland, **19**, 461-465, 1992.

[2] N.P. Bathia, G.P. Szego, Dynamical Sistems: Stability Theory and Applications, Springer, 1967.

[3] G.N. Dubosin, On the problem of stability of a motion under constanctly acting perturbations, Trudy Gos. Astron. Inst. Sternberg, **14** (1), 1940.

[4] S. Gorsin, On the stability of motion under constanctly acting perturbations, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR **56**, Ser. Mat. Mekh. **2**, 1948.

[5] M. Jancovic, R. Sepulchre, P.V. Kotovic, Constructive Liapunov stabilization of nonlinear cascade systems, IEEE Trans. On Automatic Control, **41** (12), 1723-1735, 1996.

[6] A.V. Karapetyan, The Routh theorem and its extensions, in Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **53**, Qualitative Theory of Differential Equations, North-Holland, 271-290, 1990.

[7] A.V. Karapetyan, V.V. Rumyantsev, Stability of conservative and dissipative systems, in Appl. Mech. Soviet Reviews, **1**, Stability and Anal. Mech., Hemisphere, 3-144, 1990.

[8] P.V. Kokotovic, H.J. Sussmann, A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, Sistems and Control Letters, **13**, 125-133. 1989.

[9] M.A. Liapunov, Problème génèral de la stabilité du mouvement, Photo-reproduction in Annals of Mathematics, Studies n°17, Princeton University Press, Princeton, 1949, of the 1907 French translation of the fundamental Russian paper of Liapunov published in Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892.

[10] I.G. Malkin, Stability in the case of constanctly acting disturbances, PMM, **8**, 1944.

[11] C. Nitsch, Some stability properties involving first integrals, Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, Vol. **LXXII**, 29-40, 2005.

[12] C. Nitsch, Stability properties of an equilibrium of an ordinary periodic differential equations involving total stability on manifolds generated by first integrals, in corso di redazione.

[13] K. Peiffer, A stability criterion for periodic systems with first integrals, Rend. Sem. Mat. Univ., Padova, **92**, 165-178, 1944.

[14] E.J. Routh, The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, 1st Ed London: MacMillan, 1860.

[15] V.V. Rumiantsev, On the stability of steady state motions, Prikl. Math. Mech., **32**, 504-508, J. Appl. Math. Mech., **32**, 517-521, 1968.

[16] V.V. Rumiantsev, A.S. Oziraner, Stability and Stabilization of Motion With Respect to Part of Variables (in Russian), Moskow, 1987.

[17] L. Salvadori, Un'osservazione su un criterio di stabilità del Routh, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Nat., Napoli, **XX**, 269-272, 1953.

[18] L. Salvadori, Sulla stabilità del movimento, Le Matematiche, **XXIV**, 218-239, 1969.

[19] L. Salvadori, A. Schiaffino, On the problem of total stability, Nonlinear Analysis: TMA, **1** (3), 1977.

[20] L. Salvadori, F. Visentin, First integrals and stability problems, Math. Japonica, **49** (1), 1-7, 1999.

[21] L. Salvadori, F. Visentin, First and invariant integrals in stability problems, Nonlinear Analysis: TMA, **55**, 141-152, 2003.

[22] L. Salvadori, F. Visentin, Conditional and unconditional stability properties of time dependent sets, Scientiae Japoonicae, **62** (3), 381-392, 2005.

[23] A. Saberi, P.V. Kokotovic, H.J. Sussmann, Global stabilization of partially composite systems, SIAM J. Control and Optimization, **28** (6), 1491-1503, 1990.

[24] P. Seibert, Estabilidad bajo perturbaciones sostenidas y su generalizacion en flujios continuos, Acta Mexicana Cienc. y Tecnol., **11** (3), 1968.

[25] P. Seibert, R. Suarez, Global stabilization of nonlinear cascade systems, Sistems and Control Letters, **14**, 347-352, 1990.

[26] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, The Math. Soc. of Japan, Tokio, 1966.