Capitolo 3
Applicazioni moderne di tecniche di Matrice S

3.1 Introduzione

Gli sviluppi teorici degli anni sessanta portarono a dei concetti fondanti per la teoria delle stringhe, ma gli aspetti più radicali del programma di Chew in realtà, come ampiamente osservato, non si realizzarono mai. La teoria quantistica dei campi in qualche modo riassorbì completamente gli aspetti innovativi della teoria della matrice S, reintegrando completamente la teoria nell'antico *approccio lagrangiano* della descrizione delle interazioni. Divenne così uno strumento fisico-matematico di notevole portata teorica tutt'ora usato, ma sicuramente non in uno schema alternativo come l'avevano pensato, prima Heisenberg e poi Chew.

Per Chew risultò impossibile nelle quattro dimensioni ricostruire globalmente una funzione analitica che rappresentasse l'intera matrice S, a partire dalla sola conoscenza di un numero finito di suoi poli (che sostanzialmente erano i dati osservativi di scattering). Secondo Chew, le proprietà generali della matrice S avrebbero permesso di estendere analiticamente nel piano complesso tale funzione, e ciò fisicamente voleva dire inglobare in un'unica descrizione tutti i tipi di particelle e tutte le interazioni; ma questa sua idea portò a problemi matematici insormontabili.

Inoltre Chew inizialmente immaginava che dovessero esistere un numero finito di particelle, tutte interconnesse da un'unica matrice S *universale*. Ma già con i lavori di Veneziano si vide che in realtà un qualsiasi processo di scattering poteva essere descritto da ampiezze duali che erano il risultato di una somma numerabile di infiniti stati intermedi (particelle) e che questa somma era indipendente dal canale di reazione, nel senso che canali incrociati erano strettamente correlati. Se in un certo senso l'idea di dualità esaltava l'approccio di Chew, in particolar modo il concetto di democrazia nucleare, dall'altro poneva un problema di interpretazione al suo programma: il fisico americano infatti pensava invece a un numero finito di contributi che consentissero di estrapolare, per esempio con le relazioni di doppia dispersione di Mandelstam, l'intera matrice S; ma ciò non fu mai dimostrato.

Rimane ora da chiedersi se almeno a livello concettuale, nella fisica odierna, esistono applicazioni che richiamano quelle impostazioni teoriche sviluppatesi negli anni sessanta. La risposta è sì. Infatti, il campo della fisica teorica attuale dove l'applicazione della matrice S si avvicina in un certo senso allo spirito con cui la teoria nacque negli anni sessanta è quello che studia la descrizione di alcuni modelli di sistemi fisici bidimensionali: si tratta di sistemi a una dimensione spaziale e una temporale, che grazie alla notevole semplificazione introdotta dalle due sole dimensioni, possono essere risolti mediante tecniche di matrice S.

Le eccitazioni di alcuni sistemi termodinamici sono analiticamente determinate dall'applicazione di equazioni derivanti da un approccio tipo bootstrap. Queste tecniche portano alla costruzione effettiva di matrici S esatte e costituiscono nell'ambito della meccanica statistica delle soluzioni importanti per risolvere molti modelli di sistemi fisici e per determinare le loro grandezze termodinamiche caratteristiche, fino ad ora ricavate solo con metodi statistici.

Nel caso delle due dimensioni accade, in un senso più limitato, che il programma di Chew si realizza. Cioè è possibile ricostruire una matrice S nel suo complesso a partire da un numero limitato di singolarità, e il tutto a prescindere dalla conoscenza analitica dell'interazione e quindi dell'*azione*: ciò in un certo senso consente di scavalcare l'approccio lagrangiano. Vi è inoltre la possibilità di costruire delle *funzioni di correlazione* che permettono di ricavare analiticamente tutte le grandezze termodinamiche che caratterizzano questi sistemi bidimensionali. Per esempio la descrizione del *modello di Ising* e delle grandezze fisiche correlate sono ricavate esattamente in questo approccio. In definitiva queste tecniche consentono di calcolare non solo le masse di tutte le eccitazioni (particelle) in gioco ma di ottenere una descrizione completa del sistema analizzato; e in più le potenzialità predittive di questo approccio sono fortemente in accordo con i dati sperimentali e con i risultati ottenuti con i metodi classici dalla meccanica statistica.

In questo capitolo descriveremo brevemente queste tecniche grazie anche al contributo diretto di un'intervista a Giuseppe Mussardo, che attualmente lavora proprio allo studio di questi modelli bidimensionali. Il fine di quest'ultima panoramica è quello di chiudere questo percorso storico evidenziando come almeno a livello concettuale alcuni dei fondamenti del programma di Chew, se pur in una versione estremamente semplificata, vengono oggi usati e consentono di ottenere effettivamente dei risultati. Inoltre come risulterà chiaro dall'intervista con Mussardo, in realtà questi studi fanno da ponte tra l'approccio della teoria della matrice S e quello della teoria dei campi, per cui in una chiave moderna queste tecniche risulterebbero essere il frutto di una sintesi concettuale tra due facce di una stessa medaglia. Ciò restituirebbe un grande valore agli sforzi fatti dai teorici degli anni sessanta e inoltre ricomporrebbe quella visione unitaria della scienza che in quegli anni sembrava essersi perduta.

3.2 Matrici S esatte, teorie di campo integrabili e teorie conformi (in due dimensioni)

I principi alla base del programma di Chew per costruire la teoria della matrice S erano, come visto nel primo capitolo, essenzialmente quattro e cioè:

1) *Conservazione della probabilità (unitarietà)*
2) *Invarianza di Lorentz*
3) *Analiticità*
4) *Crossing symmetry*

Oltre a queste proprietà, nel caso *(1+1)-dimensionale*, si possono introdurre nuove restrizioni grazie al fatto che queste tecniche di matrici S esatte si applicano per risolvere quelle che si definiscono le *teorie di campo integrabili*. Cioè teorie che descrivono sistemi con un numero infinito di *cariche* conservate, quindi con infinite leggi di conservazione. Si può dimostrare (**1,** pag. 58) nel contesto di queste teorie, che l'integrabilità porta alle seguenti restrizioni:

a) *Assenza di produzione di particelle nello scattering*
b) *Conservazione dei momenti individuali delle particelle*
c) *Fattorizzazione della matrice di S in ampiezze a due particelle.*

L'ultima proprietà risulta essere cruciale perché riduce il problema a più particelle alla determinazione di matrici S per due particelle[1]. Inoltre, insieme alle altre condizioni, permette di determinare due insiemi di condizioni consistenti, le *equazioni di Yang-Baxter* e *le equazioni di bootstrap* (**1,** pag. 56), che permettono in alcuni casi di risolvere esattamente il problema, cioè in altri termini, di verificarlo a ogni ordine della teoria delle perturbazioni. Questo approccio di bootstrap sostituisce il convenzionale *approccio perturbativo*, evitando il

---

[1] E' interessante in proposito leggere il giudizio che diede Feynman durante la chiusura del Congresso Solvay del 1961 (**2**) che è stato già riportato nell'appendice 2 del primo capitolo, e che di seguito riproponiamo:

> "…c'è una caratteristica nello studio delle matrici S che sarà un problema da analizzare in futuro. Data la matrice S per lo scattering di due particelle A + B, per B + C e per C + A, ecc. possiamo dedurre lo scattering per A, B e C insieme. Possiamo capire la fisica di situazioni complicate combinando conoscenze relative a sistemi semplici. Il modo di fare ciò nel caso dell'elettrodinamica e per sistemi non relativistici è noto, cosicché noi possiamo trattare 'corpi' di 10^{23} particelle conoscendo lo scattering di due particelle, ma io non conosco l'analoga tecnica per una matrice S relativistica".

calcolo di alti ordini perturbativi e inoltre la *rinormalizzazione*. In secondo luogo la teoria è indipendente ed è costruita al di là dei suoi possibili sottostanti contenuti lagrangiani. Il vantaggio enorme rispetto alle 4 dimensioni è che la cinematica degli urti è radicalmente semplificata nell'unica dimensione spaziale. Lo scattering in questo caso può essere solo in *avanti* o *indietro* con due valori discreti dell'angolo di scattering pari a 0 o π. Nel contesto unidimensionale le particelle sono costrette a "vedersi" per forza prima o poi, ciò determina delle relazioni tra di esse che consentono di ricostruire tutto il sistema a partire da poche singolarità: un sistema quindi che, come nel programma di Chew, risulta autoconsistente.

La costruzione esatta della matrice di scattering è non solo di interesse in quanto da una conoscenza completa circa la struttura *on-shell*[2] di una teoria di campo (e quindi gli spettri di tutte le particelle massive), ma esso consente anche il calcolo di altre quantità misurabili del sistema, come le *funzioni di correlazione* e quindi dei *fattori di forma*.

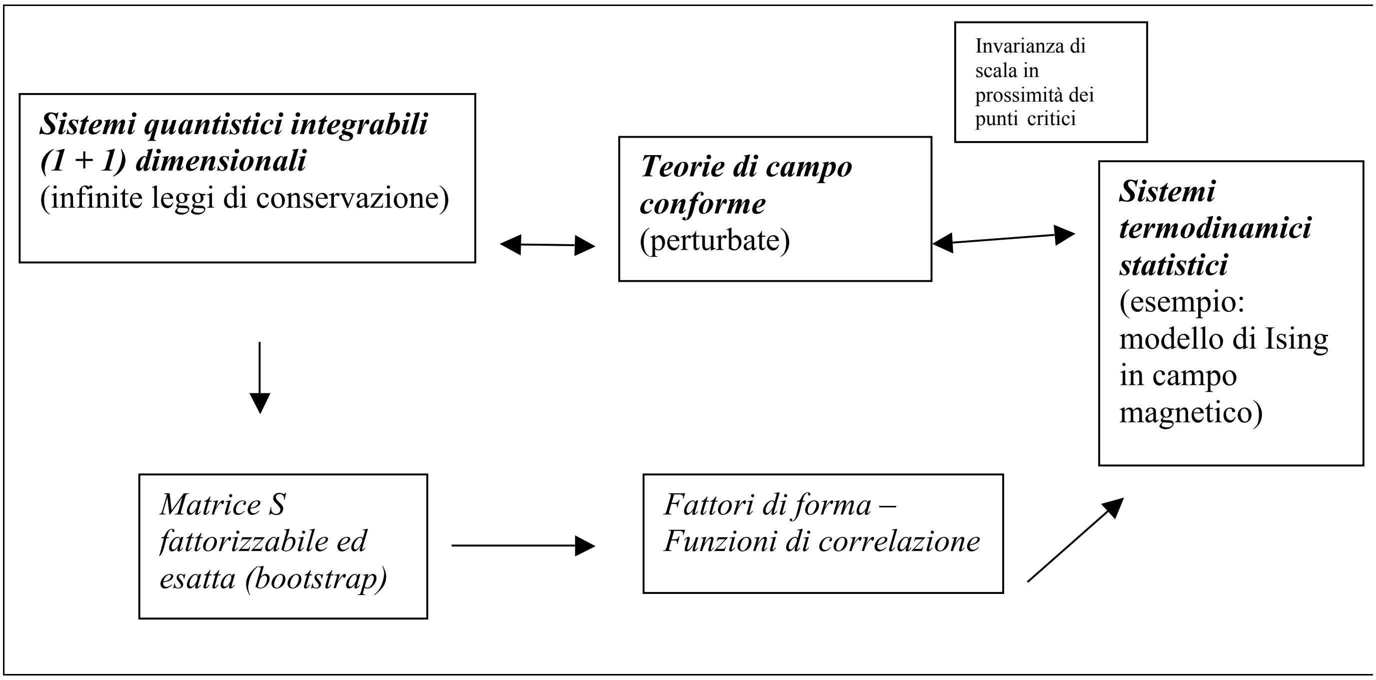
L'interesse sullo studio di modelli integrabili non solo gioca un ruolo essenziale per sviluppare metodi non perturbativi esatti della teoria quantistica dei campi, ma è anche utile perché più recentemente questi modelli sono stati interpretati come teorie di *campo conforme perturbate* (**3,** pag. 218), cioè teorie di campo descritte da una simmetria conforme dello spaziotempo in cui viene introdotta una perturbazione. Un'intensa attività in tal senso è iniziata negli anni ottanta grazie principalmente a A.B. Zamolodchikov e A.M. Polyakov (**4, 5** e **6**), i quali hanno mostrato che certe classi di teorie conformi, i così detti *modelli minimi*, costituiscono esempi particolari di teorie di campo risolubili. I lavori di Zamolodchikov e Polyakov erano anche motivati dal fatto che per sistemi fisici con interazioni locali a simmetria conforme vi è una sostanziale *invarianza di scala*. Per cui le tecniche applicate nell'ambito delle teorie di campo conforme possono essere trasportate a quei sistemi descritti dalla meccanica statistica e a sistemi di materia condensata in due dimensioni, che subiscono *transizioni di fase del secondo ordine* (**3,** pag. 218).

Infatti, nelle vicinanze di un punto di transizione di fase il comportamento termodinamico di un modello statistico è dominato da fluttuazioni su larga scala, e quindi in particolare la *lunghezza di correlazione* diverge al punto critico e si può dire che il sistema diventa invariante per scala: modelli statistici con la stessa simmetria interna e la stessa dimensionalità dello spazio condividono lo stesso insieme di esponenti critici e definiscono un unico comportamento (la stessa *classe di universalità*) che può essere studiato in termini di una teoria di campo. Inoltre lontano dalla criticità i modelli termodinamici possono essere studiati come teorie conformi perturbate.

---

[2] La condizione *on shell* si identifica con il verificarsi della relazione di dispersione $p_{\mu}p^{\mu} = m^2$.

Zamolodchikov ha mostrato (**5**) che ogni possibile deformazione di una teoria di campo conforme possiede un insieme infinito di integrali del moto commutanti, quindi individua una teoria di campo integrabile. Questi modelli possono allora essere risolubili lontano dai punti critici, e se *massivi*, essi possono essere caratterizzati in termini di una teoria di *scattering fattorizzata*. In questo caso gli integrali del moto restringono la possibile struttura di stati legati e dei rapporti di massa della teoria. Assumendo inoltre il principio del bootstrap, cioè che tutti gli stati legati derivano dallo stesso insieme di particelle asintotiche, è possibile costruire una matrice S esatta a partire da un numero finito di poli fisici[3]. Lo schema seguente (schema 1) rappresenta in sintesi i legami concettuali discussi che evidenziano le connessioni tra i sistemi integrabili, le teorie conformi perturbate e i sistemi termodinamici. Questi legami consentono di applicare molto spesso con successo le tecniche di matrice S esatta.



Schema 1: Legami concettuali tra i sistemi integrabili, le teorie di campo conforme e i sistemi termodinamici descritti dalla meccanica statistica.

[3] Un semplice esempio è costituito dal modello bidimensionale di Ising, che può essere descritto da una teoria di campo euclidea di fermioni la cui massa è proporzionale a $\left|1/T - 1/T_c\right|$, dove T rappresenta la temperatura e T_c il suo valore al punto critico. Lontano dalla criticità i fermioni sono massivi e le correlazioni diminuiscono fino al di sopra di una lunghezza finita di scala fissata dalla lunghezza d'onda Compton. Se il sistema approccia al punto critico a $T = T_c$, le particelle diventano senza massa e la lunghezza di correlazione associata diverge. In particolare, la teoria diventa invariante per scala (**1**, pag. 11).

3.3 Note sulla costruzione di una matrice S esatta

3.3.1 Cariche conservate e fattorizzazione

Una teoria di campo integrabile è definita dalla presenza di un insieme infinito di leggi di conservazione e quindi di *cariche conservate*. Si può dimostrare (**1,** pag. 58) che ciò porta a un insieme infinito di equazioni la cui soluzione banale implica che i singoli momenti delle particelle in ingresso e in uscita in un processo di scattering siano uguali e che quindi in sostanza non ci sia una *produzione di particelle*.

In generale poi, il fatto che ci sia una certa carica che si conserva, si traduce in un'invarianza del sistema sotto una determinata trasformazione. Per cui, per esempio, è possibile pensare a questa invarianza come a una trasformazione che produce uno spostamento di fase del pacchetto d'onda associato a ciascuna particella. Questo implica una descrizione diversa della sequenza degli urti associati alle particelle ma allo stesso tempo (a causa dell'invarianza) equivalente (figura 1). Da questa equivalenza nascono nel caso di tre particelle, le *equazioni di Yang-Baxter*, che descrivono la *fattorizzazione* della matrice S in tre matrici a due particelle, in due modi equivalenti.

$$S(p_2,p_3)S(p_3,p_1)S(p_1,p_2)=S(p_1,p_2)S(p_1,p_3)S(p_2,p_3);$$

dove $S(p_i,p_j)=\langle p_i,p_j|S|p_i,p_j\rangle$ denota l'ampiezza a due particelle.

La fattorizzazione è essenziale per implementare il procedimento di bootstrap, perché riconduce qualsiasi problema di scattering a più particelle a un prodotto di ampiezze di scattering di due sole particelle.

Se si impone inoltre che non ci sia nessuna riflessione e che lo spettro delle particelle sia non degenere, risulta che le matrici fattorizzate sono anche diagonali. In generale è quindi possibile scomporre l'ampiezza di scattering per un sistema di *n* particelle in $n(n-1)/2$ sottoprocessi che coinvolgono solo coppie di particelle:

$$S^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)={}^{out}\langle p_1,\ldots,p_n|p_1,\ldots,p_n\rangle^{in}=\prod_{i<j}S^{(2)}(p_i,p_j)$$

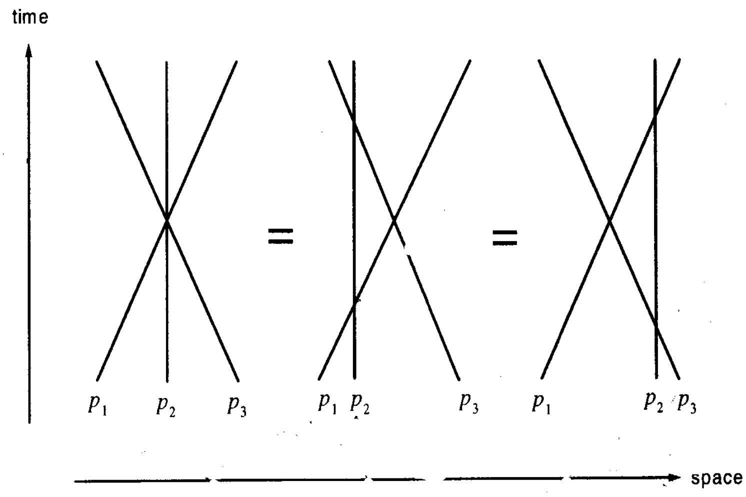


Figura 1: La sequenza di urti tra tre particelle può essere rappresentata equivalentemente nei tre modi descritti in figura, ciò genera le equazioni di Yang-Baxter.

3.3.2 Struttura di analiticità della matrice S

Nei modelli bidimensionali integrabili sarà possibile descrive la matrice S, relativa in questo caso allo scattering di due particelle, attraverso una sola variabile di Mandelstam, per esempio la variabile $s = (p_i + p_j)^2$. E’ conveniente però introdurre una nuova parametrizzazione che fa uso della variabile rapidità θ, che ci consente di discutere più facilmente la struttura analitica dell’ampiezza di scattering e inoltre di incorporare automaticamente la condizione di invarianza relativistica. In questa variabile il momento si scrive:

$$p_i = m_i(\cosh\theta_i, \mathrm{senh}\,\theta_i)$$

Ovviamente la condizione *on-shell*, $p_\mu p^\mu = m^2$ è automaticamente soddisfatta da questa parametrizzazione. Quindi la variabile di Mandelstam in termini di questa riparametrizzazione si scrive:

$$s = m_i^2 + m_j^2 + 2m_i m_j \cosh\theta_{ij}, \quad (1)$$

dove $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ è la differenza delle rapidità delle due particelle.

Per cui l'ampiezza di scattering per le due particelle può essere scritta in entrambi i modi seguenti:

1) $S^{(2)}(p_i, p_j) \equiv S_{ij}(s)$

2) $S^{(2)}(p_i, p_j) \equiv S_{ij}(\theta_{ij})$

L'ampiezza[4] a due particelle si interpreta ora come una funzione della variabile complessa s oppure $\theta \in C$. Il suo dominio di analiticità è rappresentato nelle due figure seguenti (figura 2), riferite rispettivamente alla variabile s e alla variabile θ.

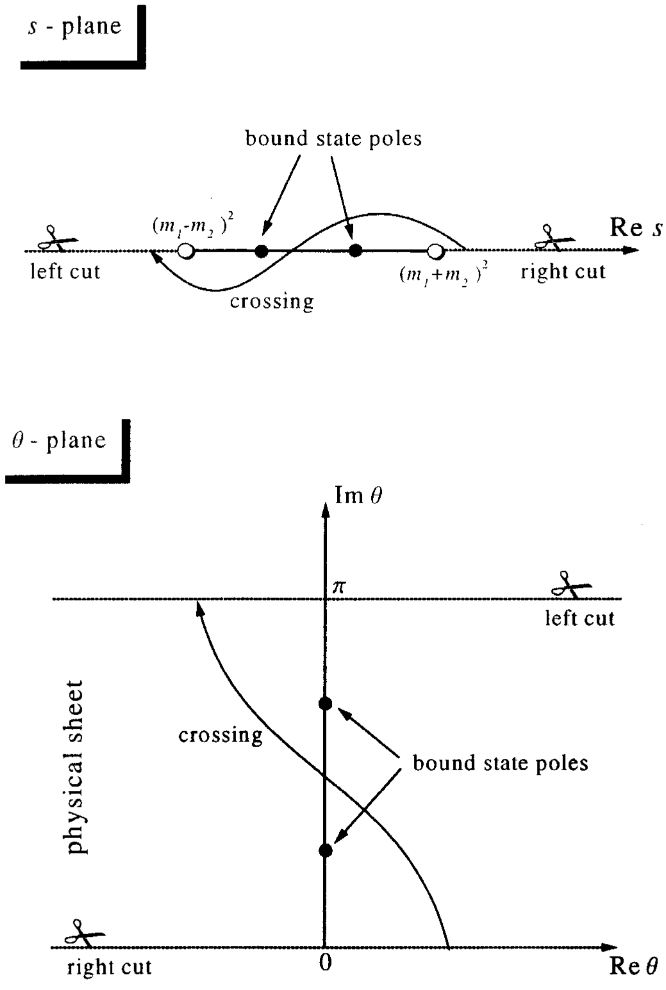


Figura 2: Dominio di analiticità della matrice S rispettivamente nelle variabili s e θ.

---

[4] Il valore fisico dell'ampiezza si ottiene come limite (con s in questo caso variabile reale):

$$S_{ij}(s) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} S_{ij}(s + i\varepsilon)$$

Se si guarda alla funzione $S_{ij}(s)$ si può dedurre dall'unitarietà (**1,** pag. 61) che l'ampiezza deve avere un punto di diramazione nel *canale s* al valore di soglia $s = (m_i + m_j)^2$, che quindi individua un taglio della funzione per $s \geq (m_i + m_j)^2$. Fisicamente questo valore dell'energia indica il valore minimo oltre il quale si realizzano *processi inelastici* con la produzione di particelle. A causa della proprietà del crossing, vi è anche un taglio a sinistra a partire dal valore $s = (m_i - m_j)^2$, dovuto dal considerare contemporaneamente anche il canale incrociato individuato dall'altra variabile di Mandelstam $t = (p_i - p_j)^2 = 2m_i^2 + 2m_j^2 - s$.

Perché l'ampiezza di scattering per continuazione analitica deve descrivere sia il processo del *canale s*: $\left| p_i, p_j \right\rangle^{in} \to \left| p_i, p_j \right\rangle^{out}$, sia quello *nel canale incrociato t*, in cui alla particella entrante *i* con impulso p_i si sostituisce la sua antiparticella $\bar{i}$ con impulso $-p_{\bar{i}}$: $\left| p_j, -p_{\bar{i}} \right\rangle^{in} \to \left| p_j, -p_{\bar{i}} \right\rangle^{out}$.

Nella variabile rapidità, questi tagli sono *mappati* dall'asse $\mathrm{Im}\,\theta = \pi$ e da $\mathrm{Im}\,\theta = 0$ rispettivamente. Questi due assi delimitano la regione di analiticità dell'ampiezza, ed è la sola regione che ha un senso fisico nella descrizione dei processi di scattering.

L'unitarietà e la proprietà del crossing nella variabile θ sono quindi espresse rispettivamente dalle relazioni funzionali:

1) $S_{ij}(\theta) S_{ji}(-\theta) = 1$,

2) $S_{ij}(i\pi - \theta) = S_{j\bar{i}}(\theta)$.

E' possibile dimostrare (**7**) che queste equazioni funzionali portano a delle forti restrizioni sulla forma della funzione $S_{ij}(\theta)$: questa deve quindi essere espressa mediante rapporti di *funzioni iperboliche* e deve avere una forma del tipo:

$$S_{ij}(\theta) = \frac{\sinh \frac{1}{2}(\theta + i\pi x)}{\sinh \frac{1}{2}(\theta - i\pi x)}, \qquad (2)$$

dove *x* è compreso nell'intervallo $[-1, +1]$.

Questa è una *funzione meromorfa*, che ha dei poli semplici $(\theta = ix\pi)$ nella regione fisica di analiticità compresa tra i valori $\mathrm{Im}\theta = \pi$ e $\mathrm{Im}\theta = 0$, a cui è possibile associare degli stati legati.

Nelle vicinanze di una singolarità la matrice S deve avere la forma:

$$S_{ij}(\theta) \simeq \frac{iR_{ij}^{k}}{\left(\theta - iu_{ij}^{k}\right)}, \qquad 0 < u_{ij}^{k} < \pi.$$

La grandezza R_{ij}^{k} è il residuo nel polo $\theta = iu_{ij}^{k}$, fisicamente è legata alla costante di accoppiamento tra le particelle *i* e *j*. Il polo rappresenta uno stato legato intermedio delle due particelle coinvolte nel processo di scattering, la cui massa sarà data, usando la relazione (1) da:

$$m_k^2 = m_i^2 + m_j^2 + 2m_i m_j \cos u_{ij}^{k}.$$

Il processo $i + j \to k$ è chiamato *risonanza* e la differenza di rapidità u_{ij}^{k}, *angolo di risonanza*. Da un punto di vista geometrico[5] il tutto può essere descritto da un triangolo (*mass triangle*; figura 3) con lati di lunghezza m_i, m_j ed m_k, i cui angoli devono soddisfare la relazione (figura 4):

$$u_{ij}^{k} + u_{ki}^{j} + u_{jk}^{i} = 2\pi.$$

[5] E' l'analogo del *teorema di Carnot* nel caso della trigonometria piana.

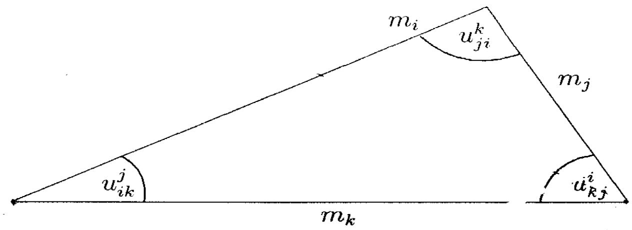


Figura 3: *Mass triangle*.

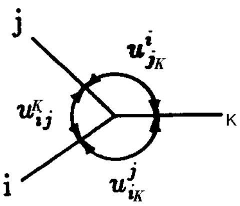


Figura 4: Rappresentazione della relazione tra gli angoli di risonanza.

Il punto cruciale è ora considerare il principio del bootstrap, secondo cui gli stati legati sono in un certo senso equivalenti agli stati asintotici (democrazia nucleare), ciò matematicamente si implementa mediante la seguente equazione funzionale (che può essere schematizzata anche attraverso la figura 5):

$$S_{l\bar{k}}(\theta) = S_{li}\left(\theta - i\overline{u^j_{ki}}\right) S_{lj}\left(\theta + i\overline{u^i_{jk}}\right) \quad \text{con} \quad \overline{u^k_{ij}} = \pi - u^k_{ij} \qquad (2)$$

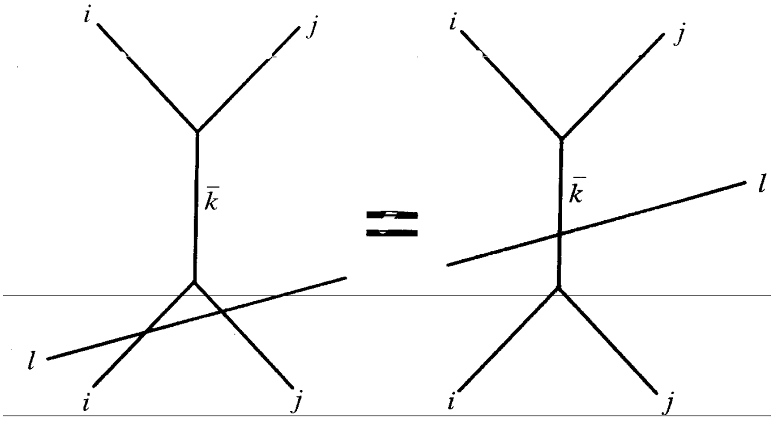


Figura 5: Rappresentazione delle equazioni di bootstrap.

Ciò significa che la descrizione del processo di scattering in cui la particella "*l*" urta prima con la particella i e poi con la j (prima che queste ultime due abbiano formato la risonanza $\bar{k}$), è equivalente al processo in cui le particelle i e j formano la risonanza $\bar{k}$ che a sua volta interagisce con la particella *l*. In molti casi l'espressione (3) consente di generare tutta la struttura esatta della matrice S partendo da un blocco iniziale, la funzione (2), che soddisfa l'unitarietà e il crossing.

3.4 Intervista a Giuseppe Mussardo[6]

Chiudiamo questo capitolo con l'intervista a Giuseppe Mussardo che ci consente di contestualizzare storicamente e approfondire teoricamente gli studi che abbiamo brevemente descritto nei tre paragrafi precedenti. Inoltre questo contributo originale ci consentirà di collegare concettualmente la storia del programma della matrice S degli anni sessanta con il significato di alcune delle tecniche che vengono modernamente usate nei contesti teorici in cui appunto opera Mussardo.

Perché il programma di Chew è fallito negli anni sessanta?

Sicuramente è fallito per la complessità dell'approccio nelle quattro dimensioni. Il programma di Chew si è spento non perché fosse falso, ma semplicemente perché era troppo complicato da portare a termine in tutte le sue conseguenze. Generava equazioni vere ma il più delle volte intrattabili. Si era tentato di ridurre i problemi con la tecnica delle relazioni di dispersione, cioè con delle relazioni molto generali fondate essenzialmente sull'*analiticità*, però anche in quel caso ci si trovava di fronte a problemi tecnicamente insormontabili. Trovare effettivamente una funzione che avesse il significato di *fase di scattering* o ampiezza di scattering attraverso un integrale su un piano complesso non era facilmente implementabile. Fare un integrale lungo particolari assi, chiudere poi il contorno e così via, in linea di principio era un procedimento esatto, ma implementarlo nella pratica non era affatto semplice. Si voleva di fatto estrapolare dei dati numerici da proprietà teoriche connesse all'analiticità. Ma in un certo senso questa proprietà mal si adatta al calcolo di implementazione numerica. Il *teorema di Cauchy* per esempio, secondo cui data una certa funzione, il suo valore in un punto z è uguale all'integrale sul contorno e così via, se questo procedimento lo si implementa numericamente, si producono delle discordanze ampie. Si è quindi di fronte a una formula vera che però se la si deve implementare numericamente, fornisce solo delle informazioni parziali.

Quindi le relazioni di dispersione erano un tentativo di uscire da queste grandi complicazioni che venivano dal trattare equazioni generalissime ma irresolubili. Alla fin fine probabilmente il bootstrap di Chew è morto perché in qualche modo la gente si era stremata,

[6] Giuseppe Mussardo è professore nel Settore di Fisica-Matematica della SISSA di Trieste.

non vedeva soluzioni. Contemporaneamente poi ci sono stati risultati sperimentali su quelli che all'epoca si chiamavano i *partoni*, che emergevano da situazioni di scattering ad altissima energia su protoni o su neutroni. Questi risultati evidenziavano che le particelle ad altissima energia erano tutto sommato libere, di lì poi c'è stata l'idea che le teorie di *gauge non abeliane* potessero presentare *libertà asintotica* (per questo sostanzialmente Gross e altri hanno appena preso il premio Nobel per la fisica nel 2004).

Quindi a quel punto si presentò agli occhi di tutti un formalismo che consentiva di fare calcoli, previsioni, di fare dei test sperimentali ben precisi, di andare a vedere come scalavano queste ampiezze di diffusione e quindi diventò immediatamente un approccio molto più efficace, in cui potevi fare dei calcoli e andare a verificare le cose, anziché andare a costituire forse un sistema esatto ma impossibile da risolvere.

Quindi la libertà asintotica fu osservata sperimentalmente?

Sì, sperimentalmente e anche in maniera molto ampia. Ma il problema delle teorie di campo e quindi delle teorie di gauge era in sostanza quello che va sotto il nome di problema del *confinamento*. Le teorie di gauge non abeliane presentano naturalmente fenomeni di libertà asintotica alle piccole distanze, *alias* energie enormi. Queste sono teorie asintoticamente libere e quindi possono essere trattare perturbativamente. Infatti una teoria alle alte energie più è libera più la si può trattare perturbativamente, perché vi sono dei parametri piccoli di espansione che consentono di controllare il tutto.

La libertà asintotica è una libertà che non è vera a tutte le scale, anzi sulle grandi scale che in fisica sono dette *scale infrarosse*, invece avviene l'opposto, cioè più si tendono a separare i quark più questi risultano legati. Questo appare come un comportamento controintuitivo, perché saremmo portati a pensare che più due cose sono lontane più la loro interazione decresce, in realtà in questo caso più aumenta la distanza più l'interazione cresce, tanto che dopo una certa scala diventa favorevole per il sistema creare delle coppie, quindi spezzarsi ma mai liberare le singole particelle. E' un po' come se si cercasse di spezzare una calamità. Una volta spezzata non accade che il *polo sud* si separa dal *polo nord* della calamita. Il polo sud richiamerà un altro polo nord e il polo nord un nuovo polo sud, formando due nuove calamite. Quindi i quark che poi sarebbero queste particelle soggette a questa interazione libera, non esistono liberi in natura, cioè non è possibile isolarli.

Ritornando alla matrice S, è da dire che il suo programma aveva una ambizione intellettuale enorme. Basandosi solo su principi molto generali della natura, se vogliamo di simmetria: l'*unitarietà* che rappresenta la conservazione della probabilità, l'*analiticità*, la *crossing symmetry*, l'ambizione era di arrivare a una teoria delle interazioni fondamentali che non avesse parametri liberi, cioè che dovesse fornire come *output* di tutte le equazioni ottenute mediante quegli assunti, le masse, quindi gli spettri delle particelle, le costanti di accoppiamento. La teoria doveva prevedere tutto, questa era la pretesa di Chew. Da qui l'idea di bootstrap, cioè il fatto che le particelle in realtà erano viste come eccitazioni di un'unica entità (la matrice S) che *stava in piedi* da sola in maniera autoconsistente.

La teoria dei campi invece prendeva e prende molto spesso costanti di accoppiamento e masse come dati, cioè come parametri esterni alla teoria, almeno nelle prime versioni più elementari della teoria; poi ci sono stati dei raffinamenti e delle versioni più sofisticate nel corso degli anni. Però essenzialmente la teoria dei campi non riesce mai a bloccare in maniera univoca tutte le costanti del modello. Per esempio la massa del *bosone di Higgs* la si deve introdurre a mano, è considerato un parametro sperimentale. Sicuramente poi la sua conoscenza ti consente di predire la massa dell'elettrone e questo comunque è già un risultato importante. Ma si tratta sempre di parametri esterni, la teoria non riesce a predire quanti parametri devono esserci. Se ce ne fossero 5 o 55, dal punto di vista della teoria, non cambierebbe niente.

Nell'ottica del programma del bootstrap invece tutto doveva essere autoconsistente, tutto doveva essere determinato univocamente. Se si vuol fare un paragone è un po' come un castello di carte in cui tutto si mantiene in equilibrio soltanto se ci sono precisi angoli tra le carte. La teoria dei campi invece faceva delle predizioni, consentendo di determinare alcuni degli angoli nella disposizione delle carte, certe geometrie, ma indipendentemente da tutto il contesto.

Quindi la teoria della matrice S era meglio fondata almeno dal punto di vista dei suoi fondamenti logici ed epistemologici?

Sicuramente, infatti la teoria delle stringhe, attualmente in gran voga, nata nel contesto teorico della matrice S, combina in maniera mirabile i due approcci, per quanto anche lì non si sono portate a termine tutte le conseguenze. Infatti nella teoria delle stringhe c'è un approccio di teoria dei campi che viene fuori come limite, nel senso che la stringa che è un oggetto composto, se lo si *osserva* da *molto lontano* sembra puntiforme e quindi in questo senso si applica la teoria dei campi, però se la si *osserva* da vicino è qualcosa di più complesso, che ha delle analiticità intrinseche, per cui la teoria delle stringhe in qualche modo è un formalismo che combina un po' i due approcci, quello di teoria dei campi e quello della matrice S. Evidenzia che le due visioni teoriche non sono così dicotomiche. Infatti dalla teoria perturbativa è possibile calcolare la matrice S, viceversa se si ha la matrice S esatta, come in alcuni modelli semplici, è possibile ricavare i grafici perturbativi, per cui le due cose possono coincidere, quindi in assoluto le due visioni del mondo non sono antitetiche.

E' possibile che la teoria dei campi è solo uno dei modi di implementare la teoria della matrice S?

Sì, è possibile. Solo che nella teoria dei campi difficilmente si riesce a fare la somma esatta di tutti i diagrammi, se si riuscisse a fare la somma esatta di tutti i diagrammi si arriverebbe alle ampiezze date dalla teoria della matrice S. Infatti in due dimensioni è avvenuto proprio questo, è questo il nodo della questione.

Può descrivere queste applicazioni moderne del bootstrap che si realizzano in modelli bidimensionali?

Negli anni sessanta la teoria della matrice S è fallita per quanto avesse avuto dei padri di altissimo livello, i primi a parlare di bootstrap erano stati Fermi e Yang (**8**), e poi Heisenberg e quindi Chew che era uno studente di Fermi per cui veniva da una certa scuola. Nonostante tutto ugualmente la teoria è morta per questa enorme proliferazioni di difficoltà matematiche. Ma in un certo senso alcune delle idee di quel programma sono risorte in maniera esplosiva quando tra la fine degli anni ottanta e gli inizi degli anni novanta sono stati sviluppati dei lavori nelle due dimensioni soprattutto da parte di Zamolodchikov.

La differenza tra le due e le quattro dimensioni è essenzialmente la cinematica. Perché in due dimensioni, intendendo in una dimensione spaziale e in una temporale, gli urti sono eventi molto facili da visualizzare, nel senso che non c'è un angolo da controllare. Due particelle che scorrono lungo una linea, si incontrano sempre, quindi a questo punto quello che può succedere è per esempio che si verifica un semplice *spostamento di fase*. Nelle tre dimensioni invece due particelle che si urtano, possono uscire dal processo secondo un certo angolo, che è difficile da controllare dal punto di vista dell'analiticità. In due dimensioni invece tutto si semplifica drasticamente, c'è una semplificazione della cinematica che permette di parametrizzare i processi in maniera efficientissima.

E' un po' come avere l'equazione delle circonferenza nel piano: $x^2 + y^2 = 1$. Se si pone $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, si vede che in realtà si ha solo una variabile con cui lavorare, "θ". Però la stessa configurazione di sfera, in 4 o 5 dimensioni, porta necessariamente all'uso di più angoli. Immediatamente il formalismo si complica enormemente perché non si deve più seguire una singola variabile nella sua evoluzione ma si devono controllare tutte nel loro insieme.

Se invece è possibile ridurre un problema a una dimensione effettiva si introduce una notevole semplificazione. Poi devono essere verificate anche delle condizioni imposte dalla relatività, cioè che gli oggetti della teoria devono soddisfare un'invarianza relativistica, per cui deve essere vera sempre la relazione di dispersione che lega l'impulso, la massa e l'energia di una particella ($E^2 - p^2 = m^2$). Inoltre, in questi modelli *(1+1)-dimensionali* anziché usare un angolo come variabile per parametrizzare il modello, è possibile usare un *angolo iperbolico*.

Quindi, se l'energia la si definisce come "$m\cosh\theta$" e il momento come "$m\sinh\theta$", si vede subito che la relazione di dispersione è verificata automaticamente e il problema si è ridotto a un problema unidimensionale. E in fisica i problemi unidimensionali moralmente si sanno risolvere tutti in una maniera o in un'altra.

Tutto ciò ha dato un grande impulso a un certo settore di ricerca e ha dimostrato che l'idea di bootstrap era assolutamente fondata. Ha consentito di risolvere modelli molto concreti nel contesto della meccanica statistica. Ricordiamo infatti che la meccanica statistica nel limite continuo può essere interpretata come una teoria di campo, infatti pur descrivendo sistemi con gradi discreti di libertà, in un certo limite può trattare questi sistemi mediante variabili continue.

Gli esempi di matrici S esatte, al di là della loro bellezza estetica dal punto di vista matematico e logico, sono importanti perché hanno consentito di risolvere dei modelli fino a quel momento irrisolvibili esattamente nell'ambito della meccanica statistica: problemi noti, come il *modello di Ising* in campo magnetico.

Risolvere un modello che cosa significa?

Risolvere un modello significa innanzitutto riuscire a capire quali sono le eccitazioni del sistema che il modello sta descrivendo. Le masse di queste eccitazioni sono determinate dal bootstrap perché sono associate ai poli di un'unica funzione analitica, che è alla base di tutto. Siccome in questi modelli è possibile determinare esattamente tutte le ampiezze come funzioni *meromorfe*, il passo successivo è quello di interpretare i poli di queste funzioni come particelle e inoltre si hanno delle relazioni immediate per calcolare la loro massa. Si scopre che tutte queste eccitazioni sono effettivamente stati legati di altre eccitazioni secondo uno schema chiuso e autoconsistente, per cui il concetto di democrazia nucleare di Chew viene soddisfatto in pieno.

Un secondo punto importante che consente di risolvere una teoria consiste nell'essere in grado di calcolare tutte le *funzioni di correlazione* del modello. Nel modello di Ising per esempio vuol dire tra l'altro riuscire a calcolare quale sia quella probabilità condizionata che lega le orientazioni degli stati di *spin* a una certa distanza x. In generale le funzioni di correlazione dipendono dalla distanza in maniera altamente non banale e possono essere oggetti anche molto complicati.

Calcolare i correlatori in teorie fortemente interagenti, come è il modello di Ising in campo magnetico, è più complesso. Ma in questo caso è possibile fare delle misure e osservare che i dati sperimentali sono perfettamente in accordo con il modello risolto attraverso le tecniche di matrice S esatta. In particolare in un lavoro fatto con G. Delfino nel '95[7], avendo a disposizione dei dati da *reticolo*, ho costruito una teoria di matrice S e ho calcolato tutta una serie di contributi intermedi, che erano oggetti complicati ma tutti analiticamente calcolabili in questo schema (**9**). Sono andato poi a confrontare questi risultati con i dati di partenza e ho riscontrato una coincidenza perfetta a tutte le possibili scale. Veramente un risultato importante dal punto di vista della meccanica statistica e della descrizione dei *fenomeni critici*, soprattutto perché quest'approccio ha permesso di fare dei calcoli esatti. In più questi studi hanno realizzato una sintesi logica, intellettuale e culturale con un altro approccio, che consiste nell'inquadrare i fenomeni critici in una nuovo *frame* teorico.

Se per esempio si ha un modello statistico, tipo il modello di Ising, quindi diciamo un modello di un magnete, cambiando la temperatura è possibile disordinare questo tipo di sistema. Viceversa se si modifica la temperatura, per esempio abbassandola, a un certo punto questo sistema si può ordinare: ecco, nel momento in cui il sistema inizia a ordinarsi, quello costituisce un *punto critico*.

Quindi un materiale simile (come quello delle nostre schede magnetiche) ha sicuramente due *fasi*, una fase ordinata per certi intervalli di temperatura e una fase disordinata per intervalli più alti di temperatura: va da sé che deve esistere un valore

[7] G. Delfino, G. Mussardo – *The spin spin correlation function in the two-dimensional Ising model in a magnetic field a* $T = T_c$ - "Nuclear Physics B" (455), 1995, p.724.

intermedio in cui le due fasi si equilibrano, e questo è il punto critico del sistema. E' il punto in cui si dice che la *lunghezza di correlazione* del sistema va a infinito: il sistema acquista una simmetria, che è una *invarianza di scala*.

Ora nella teoria dei campi l'equivalente della lunghezza di correlazione corrisponde all'inverso della massa più piccola presente nel sistema. Quindi risolvendo il modello mediante bootstrap e trovando la massa più piccola, questa può essere interpretata come l'equivalente dell'inverso della lunghezza di correlazione: quando questa va a zero si è ottenuto il punto critico.

Quindi avvicinarsi al punto critico, vuol dire poter descrivere per analogia sistemi di particelle a massa nulla?

Infatti, *massa nulla* vuol dire che le interazioni sono a *lungo raggio*. In teoria dei campi massa nulla vuol dire che le particelle sentono l'interazione a distanze grandissime. Per esempio nell'elettromagnetismo il fotone ha massa nulla, quindi l'elettromagnetismo si estende su scale infinite come $\frac{1}{r}$, ma se per esempio ci si sposta sulla fisica nucleare, l'equivalente del fotone è il *mesone*, tipo il mesone π, che ha una massa; e infatti se due nucleoni si allontanano, dopo poco, non si *vedono* più, perché la loro interazione *decade esponenzialmente*. Cioè la massa rientra nella forza come $\frac{e^{-mr}}{r}$, questo è il *potenziale di Yukawa*. Ciò equivale allo scambio di una particella che se è *massiva* induce quel comportamento esponenziale.

Se invece la particella scambiata fosse *mass less* avremmo un comportamento della forza di tipo *long range*. Quindi, ritornando al discorso precedente, nel senso statistico avere una massa nulla è equivalente ad avere correlazioni infinite. In quel caso si parla di un fenomeno critico, che è descritto in teoria dei campi dalle teorie conformi[8] .

Questo è un grossissimo capitolo della fisica teorica intorno agli anni novanta ed è strettamente legato anche alla teoria delle stringhe, perciò ha avuto un forte impulso. Infatti una stringa quando si evolve deve descrivere una superficie bidimensionale, per cui se fosse possibile seguire la sua evoluzione, essa sarebbe rappresentata da una superficie bidimensionale. Quindi tutto ciò che è possibile studiare in un ambito bidimensionale

[8] E' da notare che già agli inizi del Novecento Cunningham aveva dimostrato che il gruppo di invarianza più ampio possibile per le equazioni di Maxwell, e quindi per l'elettromagnetismo classico, era proprio il gruppo conforme. E. Cunningham - *The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof* – "Proc. London Math. Soc.", 8 (1910), pag. 77-98.

probabilmente lo si può applicare a una stringa; quindi alle sue rappresentazioni, ai suoi stati fisici e così via. Sono tutte grandezze in principio determinate da teorie di campo bidimensionali.

La stringa equivale in un certo senso a un fenomeno critico per i sistemi bidimensionali. Infatti descrivere una stringa è una pura convenzione che dipende dalla scelta delle coordinate. La libertà di cambiare coordinate equivale un po' a stare alla *criticità*. Quando un sistema si trova alla criticità perde di significato l'attribuire un senso preciso alle scale di grandezza con cui lo si osserva, perché il sistema è invariante per scala. In analogia, vi è una certa libertà nel parametrizzare una stringa, purché la parametrizzazione risulti invariante.

Da tutto ciò si deduce che le teorie conformi sono fondamentali. Ma una teoria conforme si classifica mediante le rappresentazioni dell'*algebra di Virasoro*. Ed è qui che si raggiunge un enorme successo concettuale, perché in natura i fenomeni critici sono i più diversi: l'acqua che si trasforma in ghiaccio o in vapore, ci sono i superfluidi ecc. Fenomenologicamente sembravano situazioni fisiche molto diverse e sembrava che non ci fosse uno schema per classificarle e cioè per capire questa enorme varietà. Invece si è visto che lo schema esiste, e consiste sostanzialmente nel trovare tutte le *rappresentazioni irriducibili di questa algebra*. Questo è un grande principio unificatore.

E' un po' come capire in che modo si comportano gli oggetti sotto rotazioni. Vi sono oggetti simmetrici, meno simmetrici e così via, in realtà possono essere visti non come oggetti diversi, ma come le rappresentazioni irriducibili di uno stesso *oggetto* che è il *gruppo delle rotazioni*. Per cui si è raggiunta un'unità di pensiero in cui la diversità non appare come una diversità concettuale, ma appare come un insieme di manifestazioni dello stesso gruppo di simmetria ma con rappresentazioni diverse, e questo è un enorme progresso.

Una volta che si è chiarito che i fenomeni critici sono rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Virasoro, in questo quadro teorico è possibile descrive la *criticalità*. Ci si può chiedere poi cosa succede se si aggiunge al sistema per esempio un campo magnetico o se si aumenta la temperatura, cioè se si esce dalla criticalità. Ci si può domandare cosa accade per esempio a tutte le eccitazioni del sistema. Ecco! La matrice S dà questa continuità di linguaggio tra un modello conforme e la sua deformazione. Perché le eccitazioni che ci sono in questo modello, divengono le particelle nella teoria di matrice S, e queste evolvono in nuovi stati che è possibile seguire. Tutto ciò è di grande utilità concettuale.

Quindi è possibile risolvere con tecniche di matrice S esatta, nel caso bidimensionale, questi modelli conformi deformati, cioè in campi esterni?

Alcune volte, non sempre. Perché si è scoperto che solo alcune *deformazioni* dai punti critici possono essere descritte in termini di una matrice S secondo opportune tecniche: solo nel caso di *teorie integrabili*. Questa è una distinzione fondamentale. Quello che Zamolodchikov ha mostrato, e le matrici S che ha risolto, corrispondono a particolari teorie di campo (vi è un vero e proprio *isomorfismo*) che sono dette *integrabili*. Cioè teorie che in pratica hanno un numero sufficiente di simmetrie che permettono di semplificare al massimo la dinamica. Queste teorie si sanno risolvere con le tecniche di bootstrap, però non è detto che una volta usciti dal punto critico si vada a finire necessariamente in una teoria integrabile. Molte volte sì, ma altra volte no.

Quando non si sa risolvere il modello, anche nelle due dimensioni, è perché si incappa in alcune difficoltà analoghe a quelle che si trovò ad affrontare Chew nel suo bootstrap; ma queste tecniche moralmente rimangono comunque in piedi perché si applicano con successo ad altri casi. In due dimensioni si ha sicuramente una semplificazione della cinematica ma alle volte si realizza anche una semplificazione della dinamica. Ciò vuol dire per esempio che, se si realizza uno scattering tra due particelle in una dimensione spaziale, è vero che queste particelle devono per forza incontrarsi, ma possono semplicemente interagire in un senso elastico per cui si produce solo un ritardo di fase, e ognuna poi procede per conto suo, oppure possono scontrarsi e dare vita a molte particelle. In questi casi *inelastici* si incorre nello stesso tipo di difficoltà del programma di Chew, con un minimo di semplificazione della cinematica, ma sempre tecnicamente insormontabile.

Come si fa a stabilire l'integrabilità di un sistema?

Il *check* dell'integrabilità lo si determina dalle teorie conformi: questo è un altro punto di grande unitarietà tra le teorie conformi e quello che accade fuori le teorie conformi. Queste teorie in un certo senso contengono già delle informazioni che permettono di capire a priori se l'uso di una certa deformazione, cioè di un qualche campo che *sposta* il sistema dal punto critico, porta a una teoria integrabile o meno. E' come se la teoria conforme lo prevedesse già.

Per esempio nel caso del modello di Ising in campo magnetico, già si sapeva prima da teorie conformi, che era un modello integrabile; dopodiché si è costruita questa "macchinetta" che automaticamente determina tutte le eccitazioni del sistema. Se invece si prendono altri modelli in campo magnetico, alcuni di questi possono non essere integrabili, e quindi queste tecniche non si possono applicare, per cui non si risolvono.

E' anche interessante osservare come molto spesso se si ha pure una descrizione *lagrangiana* del sistema studiato, a quel punto si possono fare i soliti *grafici di Feynman*, che fanno parte dell'usuale bagaglio della teoria dei campi, e controllare come effettivamente i due approcci sono completamente equivalenti.

E' vero anche che i diagrammi di Feynman individualmente non ti permettono mai di concludere molto sulla loro somma. Si sa qual è la loro struttura analitica ma molte volte i grafici vanno a costituire quelle che i matematici chiamano *serie asintotiche*. E' un po' come, per fare un esempio, il caso della funzione $e^{-\frac{1}{x}}$. La si può espandere in serie, viene … $\frac{1}{x}$ +…e così via, ma se si è interessati a conoscere la serie vicino allo zero, questo sviluppo non ha senso, perché lo zero non è un punto di analiticità della funzione di partenza. Con questo esempio però ci si rende conto del problema che c'è alla base. Nel caso precedente si sa da dove si è partiti e si conosce tutto della funzione che poi sviluppiamo. Ma se si suppone al contrario di conoscere solo dei termini della serie e si vuole ricostruire l'oggetto di partenza, diventa un problema: il punto è che quest'oggetto non lo si conosce per niente a priori, quindi non si sa se il procedimento ha un senso.

Questo è il problema tipico dei grafici di Feynman: c'è un vecchio *argomento di Dyson* per descrivere questa difficoltà. Le serie perturbative che si possono ottenere in elettrodinamica sono in un certo senso di questo tipo, perché se la funzione che si sta sviluppando in serie fosse analitica, espandendo intorno allo zero, cioè intorno alla *teoria libera*, dovrebbe esistere un intorno dell'origine in cui la funzione è analitica. Però succede che se si cambia il segno della carica la teoria diventa altamente instabile (perché o *collassa* tutto o si *respinge* tutto), quindi si conclude che per valori negativi della carica quest'oggetto non corrisponde a una situazione fisica stabile. Di conseguenza quest'oggetto non esiste, per cui la funzione che sta lì non può essere analitica.

L'analogo è se si considera *l'oscillatore armonico* e si aggiunge un termine x^4. Se il termine gx^4 è positivo (dove g è la costante di accoppiamento), il sistema ha un vuoto ed è stabile; allora è possibile sviluppare una teoria perturbativa in gx^4. Ma se si cambia il segno di *g*, l'andamento del potenziale cambia drasticamente e la teoria diventa instabile. Per cui se la somma che si sta calcolando perturbativamente, a vari ordine di *g*, fosse convergente, il punto $g = 0$ dovrebbe essere all'interno di una regione di analiticità; ma abbiamo visto che per *g* negativo la teoria non ha minimo, quindi non può essere una serie analitica convergente. Questa è una situazione tipica nei grafici di Feynman.

In altri casi invece, come nei modelli bidimensionali che descrivevamo prima, è possibile fare una teoria perturbativa, si può fare una *risommazione*, e il risultato esatto della convergenza è esattamente l'espressione della matrice S che si era costruita con la tecnica del bootstrap. In questi casi quindi si ha un perfetto accordo e una perfetta sintesi tra i due approcci che in passato erano stati effettivamente in forte contrasto.

La teoria delle stringhe è concettualmente vicina all'approccio di matrice S?

Ci sono varie sofisticazioni, ma la teoria delle stringhe è intrinsecamente una teoria di matrice S. L'ampiezza di Veneziano che ha dato luogo a tutti gli sviluppi della teoria delle stringhe è un'ampiezza di matrice S. Con delle proprietà ben precise, dualità ecc. e nasce nel contesto della teoria della matrice S.

Se poi però si considera una stringa da *grandissima distanza*, questa può *apparire* come un oggetto puntiforme, ma sempre nel senso di una espansione in cui più si raffinano i termini più ci si rende conto che puntiforme non è. Al primo ordine sono eccitazioni di una teoria di campo, ma poi ci sono delle correzioni e ce ne sono infinite: sono queste correzioni che consentono di osservare che non si tratta complessivamente di una teoria di campo, perché di fatto la stringa è un oggetto esteso.

La teoria di stringhe è quanto di più vicino c'è alla teoria di matrice S, ma c'è anche una linea di pensiero che cerca di trovare una *teoria di campo di stringa*, cioè tenta di usare degli operatori che si usano in teoria dei campi per creare non le particelle ma le stringhe. Ma tutto ciò è decisamente complicatissimo, perché la stringa non è un oggetto puntiforme, è più complicato descriverlo.

Quali sono le condizioni per generare matrici S esatte sempre nell'ambito di sistemi bidimensionali?

La condizione di integrabilità, di cui abbiamo parlato, e vi è poi la condizione per la chiusura del bootstrap, che dà luogo a un'equazione addizionale oltre a quelle solite dell'unitarietà e del crossing. Il bootstrap vuol dire implementare matematicamente il concetto secondo cui tutti gli stati legati sono equivalenti agli stati asintotici, che in un certo senso esprime, come detto, l'idea di democrazia nucleare di Chew. In ogni caso si deve sempre partire da una particella iniziale e poi il bootstrap genera automaticamente tutto il resto e anche la particella di partenza. In proposito, spesso ai miei seminari a me piace riformulare scherzosamente una famosa massima di Orwell, dicendo: "*tutte le particelle sono uguali tranne una che è più uguale delle altre*".

La matrice S si costruisce partendo da un'opportuna ampiezza iniziale costruita basandosi su altre idee, di simmetria ecc. Si parte da questo *seme* iniziale, che è una funzione analitica, il più delle volte semplicissima. E' infatti un rapporto tra *tangenti iperboliche* con dei poli ben precisi, che soddisfa l'unitarietà e il crossing in maniera esatta. L'unico assunto di base è quello di stabilire dove è il suo polo che rappresenta la particella da cui si parte. A questo punto proprio attraverso le *equazioni di bootstrap* è possibile generare automaticamente tutta la matrice S. Ogni polo trovato corrisponde a una nuova particella e allora la si include in un certo insieme di particelle e si continua il procedimento. Se tutto è consistente, questo meccanismo si interrompe quando i poli che si trovano cominciano a coincidere con quelli che si erano già messi da parte.

E' una *danza* di poli: da un punto di vista matematico accade per esempio che da una funzione di un polo si genera una funzione di due poli, e così via. Se si esegue una simulazione si può osservare la generazione di questi poli, che assomiglia a una specie di danza in cui di volta in volta si creano o si cancellano dei contributi. Ma a un certo punto non c'è più una proliferazione di poli in quanto si realizzano delle cancellazioni. In più ogni polo deve avere una sua interpretazione di particella, quindi di volta in volta si identificano delle particelle, finché dopo un po' tutti i poli che appaiono coincidono con tutte e sole le particelle che in precedenza si erano identificate, per cui non si ha più bisogno di includerne delle altre e a quel punto il processo è finito.

Quanto dipende tutto questo procedimento dall'ampiezza iniziale?

Tantissimo, perché è proprio l'*input* iniziale che determina tutto. Queste informazioni iniziali il più delle volte derivano dalla teoria conforme. Nel modello di Ising in campo magnetico per esempio, dal modello conforme si sa automaticamente che ci sarà una particella fondamentale che forma uno stato legato che rappresenta non solo se stessa ma anche una seconda particella, e inoltre si sa sempre dalla teoria conforme, che la seconda particella forma di nuovo come stato legato non solo se stessa ma anche la prima. A questo punto per un teorema sulle funzioni analitiche, per soddisfare l'unitarietà, si osserva che non è possibile avere una funzione analitica, cioè la mia matrice S, con solo due poli, corrispondenti alla particella iniziale e a questa seconda che la teoria conforme ha predetto, ma occorre almeno l'esistenza di un terzo polo, quindi si sa a priori che deve esistere una terza particella. Si prosegue quindi il procedimento e ci si accorge poi che il bootstrap si chiude con *otto* tipi di particelle.

Con Delfino nel 1995 avevamo fatto dei calcoli che costituivano un *check* non banale. Avevamo preso i dati statistici di un certo sistema di *spin* in un campo magnetico al punto critico: erano i dati numerici ottenuti da Vladimir Rittenberg. Abbiamo fatto una teoria di matrice S di quel sistema e abbiamo confrontato i dati, e le due cose erano in perfetto accordo.

Rittenberg invece aveva fatto un calcolo statistico?

Sì, aveva usato un classico *metodo Montecarlo*.

Nell'ambito della meccanica statistica quindi sono soprattutto usati questi metodi?

Sì, anche perché hanno fatto poi da unione tra due enormi scuole di pensiero, quella delle teorie conformi e dei modelli esattamente risolubili in meccanica statistica, e quella di Baxter, la scuola australiana, in cui sono nate tutta una serie di tecniche: la *Yang-Baxter*, i trucchi per diagonalizzare matrici infinite per estrarre gli autovalori. In ogni caso però questi ultimi partivano sempre da un reticolo, ed era molto complicato. Invece questi nuovi procedimenti hanno snellito la risoluzione di molti modelli, infatti si è avvalorata l'idea che in alcuni casi forse è meglio tralasciare i dettagli microscopici di un reticolo, che sono troppo complicati e non servono per capire il comportamento del sistema a grandi scale. Quello che serve, è soprattutto capire quali sono le eccitazione del sistema, che è qualcosa di più fondamentale. Per chi invece parte dal reticolo questo è un dato difficile da estrarre. Questi nuovi approcci hanno permesso di creare un formalismo che consente di fare i calcoli in maniera più veloce.

Quali sistemi fisici effettivamente vengono descritti da questi modelli? Si applicano alla fisica dello stato solido?

Sì, si applicano nell'ambito della fisica statistica in due dimensioni, nella fisica dello stato solido e in tutti quei campi in cui la dinamica è effettivamente bidimensionale. In effetti c'è una distinzione tra la *dimensione vera* e la *dimensione effettiva* di un sistema. Per esempio un sistema può essere tridimensionale ma poi effettivamente è bidimensionale, perché è sufficiente che l'interazione tra dei suoi piani di simmetria sia molto debole. Tanti sistemi magnetici sono di questo tipo, o anche le *pellicole di elio* per esempio. Anche molti sistemi di metalli tridimensionali con delle impurezze magnetiche al loro interno. Poiché queste impurezze sono estremamente localizzate, se si fa un'espansione in armoniche sferiche, siccome l'interazione è rappresentata da una funzione *delta*, rimane solo *l'onda s*, cioè qualcosa a *simmetria radiale*. Quindi di fatto si è ridotto il problema a un caso unidimensionale. E' possibile *mappare* molti modelli fisicamente tridimensionali mediante modelli *(1+1)-dimensionali*, e questo ha consentito enormi progressi. Tipico esempio è l'*effetto Kondo*, che è un effetto descritto della fisica dello stato solido per cui Kenneth Wilson ha vinto il premio Nobel nel 1983. Inoltre, molte applicazioni nelle *nanotecnologie* sono descritte proprio da questi modelli bidimensionali.

Quindi si possono osservare sperimentalmente certi risultati?

Si può andare in laboratorio e vedere per quei materiali che appartengono a una certa classe di universalità cosa accade. Per esempio è possibile creare delle pellicole con *l'elio 4*. Su queste pellicole si formano dei vortici che costituiscono un sistema statistico, che viene associato a una teoria di campo ben specifica sempre nei limiti termodinamici. In quel caso si possono fare dei calcoli teorici con questo formalismo, tirare fuori delle previsioni e verificarle in laboratorio. Finora ci sono stati degli ottimi accordi con i dati sperimentali. Ci sono anche delle previsioni fatte nello studio di modelli di *polimeri* di Sokal, Caracciolo e di altri, che sono estremamente accurate e addirittura più precise di quelle ottenute mediante reticolo.

Per finire le vorrei chiedere un giudizio storico complessivo sulle due visioni teoriche, quella della teoria della matrice S e quella della teoria dei campi. Epistemologicamente rappresentano due modelli di realtà diversi?

Il mio giudizio è un po' oscillante. Effettivamente la teoria dei campi sembrerebbe fondarsi su un approccio un po' più *riduzionista*: vuol conoscere i processi elementari con cui poi costruire tutto il resto. Mentre la *matrice S* è più vicina a una descrizione della realtà alla Mach, nella quale non si voleva conoscere come la materia era costituita a un livello elementare. Mach amava tantissimo la *termodinamica*. Quindi delle equazioni generalissime, per cui non gli interessava se vi erano atomi o meno. Mach pensava che la natura era superiore a questi dettagli, che erano considerati tra l'altro non *osservabili*. Ma in realtà oggi noi sappiamo che non è così.

Diciamo che i due approcci sono in un certo senso interconnessi. Infatti anche la stringa, che dovrebbe essere l'oggetto più fondamentale dell'Universo, poi nasce nel contesto della teoria della matrice S. Quindi i due campi non sono nettamente separati, non sono due visioni del mondo diverse, sono invece due aspetti della stessa medaglia: solo che alle volte è molto più comodo fare dei calcoli con un certo formalismo piuttosto che con un altro.

Sono in realtà due filosofie che anche storicamente si sono sempre intrecciate, per quanto alle volte sono nate punte polemiche che forse non avevano neanche senso, perché erano dovute allo *stressare* i problemi in una direzione piuttosto che in un'altra. Il punto è che nel momento in cui si prendevano certe posizioni radicali per evidenziare la supremazia di una teoria, non si faceva altro che evidenziarne le debolezze.

In effetti i sostenitori della teoria dei campi sostenevano che erano capaci di fare dei conti, e quindi delle predizioni. I loro avversari invece li accusavano di non avere un principio alla base delle loro risommazioni, per cui quello che si calcolava non aveva neanche un senso. A loro volta i *campisti* ribattevano che l'avere una teoria fondata su principi generali ma senza alcuna capacità predittiva, perché non si sapevano implementare i calcoli, non serviva a nulla. Quindi, effettivamente, c'erano dei conflitti, ma è anche vero che alle volte queste due strade si sono incontrate, evidenziando in certi casi le loro reciproche debolezze e in altri che i due approcci erano espressioni equivalenti di una stessa realtà.

Bibliografia del terzo capitolo

1) P. Dorey – *Exact S-matrices* – Hep-th/9810026 v1, 1998.
2) R. Stoops (ed.) – *The Quantum Theory of Fields* – Proceedings of the Twelfth Solvay Conference on Physics – New York, Interscience Publishers, 1961.
3) G. Mussardo – *Off-critical statistical models: factorised scattering theories and bootstrap program* – Physics Reports 1992 (218), p. 215-379.
4) A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov – Nuclear Physics B 1984 (241), p. 333.
5) A.B. Zamolodchikov – JETP Lett. – 1987 (46), p. 160.
6) A.B. Zamolodchikov – Nuclear Physics B - 1990 (342), p. 695.
7) P. Mitra – Phys. Lett. – 1977 (72 B), p.62.
8) E. Fermi, C.N. Yang – *Are Mesons Elementary Particles?* – Physical Review 1949 (76), p.1739.
9) G. Delfino, G. Mussardo – *The spin spin correlation function in the two-dimensional Ising model in a magnetic field a* $T = T_c$ - Nuclear Physics B 1995 (455), p.724.
10) O. A. Castro Alvaredo – *Bootstrap Methods in 1+1-Dimensional Quantum Field Theories: the Homogeneous Sine-Gordon Models* - Hep-th/0109212 v1, 2001.
11) H. Babujian, M. Karowski – *The "Bootstrap Program" for Integrable Quantum Field Theories in 1+1 Dim* - Hep-th/0110261 v2, 2001.

Conclusioni della tesi

Il percorso storico descritto in questa tesi oltre a rappresentare una presa di coscienza a tutti i livelli della problematica connessa allo sviluppo dei programmi della matrice S nel corso del Novecento, ha evidenziato l'importanza di dinamiche conflittuali all'interno del progresso del pensiero scientifico.

Questa tematica è stata spesso risolta il più positivisticamente possibile: vi era la convinzione che il processo di ricerca scientifica fosse sempre ricostruibile razionalmente e coscientemente dai protagonisti interni alla ricerca stessa, anche se il suo sviluppo era evidentemente generato da programmi di ricerca o paradigmi incommensurabili tra loro. Tendenzialmente vi era quindi il tentativo di poter sostenere una ragione scientifica unica davanti ai conflitti interni alla scientificità.

Ma dalle ricostruzioni storiche ed epistemologiche di Cushing, Cao e Redhead principalmente, e dalle interviste ad Amati, Cini, Regge, Veneziano e Mussardo è emerso un quadro ben più complesso.

Senza cadere nelle tesi del costruttivismo sociale della scienza di Pickering è emerso che nel caso degli anni sessanta, la ricerca fu fondamentalmente indirizzata da Chew, Goldberger, Gell-Mann e poi successivamente da Veneziano, che andarono a costituire un limitato e creativo gruppo di *leader*, il quale indirizzò di fatto la ricerca di quegli anni.

Quindi a monte della quotidiana pratica scientifica, della metodologia di ricerca e degli obiettivi di un programma, vi era una struttura piramidale capace nei suoi vertici di dare contributi originali, ma di determinare anche la fine di interi filoni di ricerca. Questa struttura che costituì e costituisce da un certo punto di vista un fattore chiave nella produzione di stabilità e convergenza dell'opinione scientifica, evidenzia anche una dinamica nella selezione di teorie e programmi di ricerca in competizione che va al di là dei semplici dati osservativi degli esperimenti. Vi è un'integrazione tra ciò che è l'apporto metodologico, in un paradigma comunemente accettato dagli scienziati di una certa epoca, e la verifica sperimentale che viene a essere più un criterio validante per una determinata teoria che un criterio falsificante, nel senso popperiano del termine.

Nel caso del conflitto tra la teoria della matrice S e la teoria dei campi, furono realizzate scelte di campo in favore della seconda, più per le difficoltà matematiche incontrare nell'implementare il programma di Chew che per il risultato di un qualche esperimento cruciale. In realtà poi, come si è visto per il caso dell'esperimento di Michelson e Morley, l'esistenza di un *esperimento cruciale,* che permetta di discernere tra la bontà di differenti modelli interpretativi in competizione, non sempre è stato percepito come cruciale nel momento in cui storicamente era effettuato.

Inoltre un dato importante è che a metà degli anni sessanta già cominciò a scemare l'interesse scientifico per la teoria della matrice S. Se ciò appare evidente considerando gli sviluppi teorici dei quarant'anni successivi, in quel momento al contrario questo cambiamento netto non era così facile da interpretare. Né ciò poteva essere giustificato dal nascente modello a quark che ancora doveva percorrere un po' di strada per potersi definitivamente affermare (anche per la sua singolare interpretazione ontologica).

La fisica nucleare della fine degli anni cinquanta era fortemente legata a un approccio di tipo fenomenologico e in questo contesto le tecniche usate nell'ambito della teoria della matrice S, come per esempio l'uso della descrizione dei poli di Regge o di alcune relazioni di dispersione, era estremamente produttivo. Come sostenuto da Amati e Regge, questo aspetto rimane tutt'ora valido. Il livello di realtà descritto dalla QCD, quella che in un ottica storica è stata considerata la teoria rivale della teoria della matrice S, era diverso dal mondo adronico che emergeva dagli acceleratori dell'epoca. Per cui in realtà entrambe le teorie hanno concorso a fornire spiegazioni importanti, per quanto la QCD e poi il modello standard ovviamente hanno fornito una rappresentazione unificata e fondamentale di una portata ben superiore.

Un altro aspetto importante che si ricava da questa analisi è che l'operazione di *assiomatizzazione* tentata da Chew si rivelò fallimentare, perché l'idea di sviluppare una teoria della matrice S completamente assiomatica si scontrò con la struttura puramente fenomenologica con cui quell'approccio era nato. Questo è un punto centrale che si evince anche dall'intervista ad Amati. L'atteggiamento quasi religioso del fisico americano produsse una radicalizzazione che evidenziò le debolezze della teoria della matrice S più che fornire argomentazioni in suo favore. Il ritenere che un numero minimo di principi, per deduzione, generassero l'intera matrice S, che avrebbe dovuto spiegare ogni caso fisico possibile, fu il limite del programma di Chew. Il bootstrap, almeno nella sua versione radicale e assiomatizzata, andava oltre la visione intuitiva e fenomenologica con cui la teoria nasceva negli anni quaranta grazie ad Heisenberg; in cui invece si tentava principalmente di capire come collegare analiticamente un "prima" e un "dopo" in un processo di scattering, facendo uso solo di principi metodologici e non di un approccio lagrangiano.

Infine, il contributo di Veneziano e quello di Mussardo ci hanno permesso di collegare concettualmente la fine del programma di Chew all'emergere della teoria delle stringhe in un caso, e all'uso di nuove tecniche per risolvere modelli fisici bidimensionali nell'altro. In un certo senso questi due passaggi hanno espresso una forma di convergenza epistemologica tra approcci in precedenza considerati antitetici, che invece restituiscono una struttura unitaria al pensiero scientifico, che comunque vive nel corso della sua storia di essenziali conflitti teorici.