

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI  
FEDERICO II



Scuola di Dottorato di Scienze della Terra

Ciclo XXI

**Analisi e Modellazione dei Sistemi Ambientali**

*Coordinatore Prof. Barattolo*

Titolo della tesi

**Analisi Multiscala dei Campi di Potenziale per  
Applicazioni Ambientali**

*Presentata dal dott. Lorenzo Cascone*

*Tutore Prof. Maurizio Fedi*

Anno Accademico 2007 / 2008



*Accadono cose che sono come  
domande. Passa un minuto, oppure  
anni, e poi la vita risponde...*

A. Baricco

## SOMMARIO

<b>STATO DELL' ARTE</b>	<b>2</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>2</b>
CONTESTO SCIENTIFICO DELLA TESI	3
FINALITÀ DEL LAVORO DI TESI	4
<b>CAPITOLO 1 - ANALISI MULTISCALA</b>	<b>7</b>
1.1 CENNI TEORICI E CONTINUAZIONE ARMONICA DEI CAMPI DI POTENZIALE	8
1.2 GLI ERRORI DI BORDO NELL'ANALISI MULTISCALA	9
1.3 TEST DI CONTINUAZIONE SUL MODELLO DI BISHOP	13
1.4 DISCUSSIONE DEI RISULTATI	19
1.5 CONCLUSIONI	31
<b>CAPITOLO 2 - L' ANALISI LUNGO RIDGE E LA FUNZIONE DI SCALA</b>	<b>33</b>
2.1 L'EQUAZIONE DI OMOGENEITÀ DI EULERO COME BASE TEORICA	34
2.2 DEFINIZIONE DI RIDGE E L' APPROCCIO GEOMETRICO	35
2.3 SORGENTI ONE-POINT	37
2.4 LA FUNZIONE DI SCALA	38
2.5 CRITERIO DI CONSISTENZA LUNGO I RIDGE	41
2.6 APPLICAZIONE AL MODELLO DI BISHOP	45
2.7 METODO MULTIRIDGE	52
2.8 IL BACINO NORDKAPP	53
2.9 ANALISI E DISCUSSIONE DEI DATI DEL BACINO DI CAPO NORD	55
<b>CAPITOLO 3 - RIDGE 3D ED ANALISI DELL' AREA TEST DI STANFORD</b>	<b>63</b>
3.1 L' AREA TEST DELLA UNIVERSITÀ DI STANFORD (CA)	64
3.2 RIDGE 3D	67
3.3 APPLICAZIONE AI DATI DI STANFORD	68
<b>CAPITOLO 4 - CWT E METODO FWPPFA</b>	<b>73</b>
4.1 LA TRASFORMATA CONTINUA DI WAVELET (CWT)	74
4.2 IL RUOLO DELLE ONDINE NELLA TRASFORMATA	76
4.3 ANALISI DEI CAMPI DI POTENZIALE CON LA CWT	78
4.4 ANALISI DI SINGOLARITÀ DEL CAMPO	79
4.5 TEORIA E METODO FWPPFA	83
4.6 APPLICAZIONE DEL METODO AD ALCUNE SORGENTI ONE-POINT	94
4.7 VANTAGGI E LIMITI DEL METODO FWPPFA	108
4.8 APPLICAZIONE DEL METODO FWPPFA AI DATI DI STANFORD	110
<b>CONCLUSIONI</b>	<b>117</b>

**RINGRAZIAMENTI** **120**

---

**RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI** **121**

---



# Stato dell' Arte

## Introduzione

Da lungo tempo, l' interpretazione dei campi magnetico e gravimetrico terrestri (campi di potenziale), è stata di supporto ad un gran numero di teorie e lavori scientifico-letterari di grande interesse, che spaziano dalla tettonica a zolle all' interpretazione di sistemi geologici complessi come quelli vulcanici.

Sin dalla fine della Seconda Guerra Mondiale, l' interesse, nato dapprima in campo militare, verso l' acquisizione e l' interpretazione di questi campi è stato suffragato dalla necessità di localizzare e mappare alcune sorgenti di particolare interesse, come ad esempio può essere un sottomarino o un giacimento minerario.

Data l' introduzione di strumenti ad elevata risoluzione e allo sviluppo della tecnologia informatica avvenuta nell' ultimo decennio, l' evoluzione del filone interpretativo dei campi di potenziale è stata notevole. L' interpretazione è notevolmente migliorata data lo sviluppo di programmi avanzati di modellizzazione e l' introduzione in letteratura di metodologie d' analisi in grado, non solo di localizzare su mappa le sorgenti, ma di determinarne anche forma e profondità. Recentemente, queste metodologie vengono applicate con successo nelle esplorazioni minerarie e petrolifere data la loro capacità di localizzare e descrivere strutture geologiche più e meno profonde quali ad esempio faglie, dicchi, depositi salini.

Data la capacità di questi metodi di localizzare con un certo grado di precisione le sorgenti, è possibile estendere l' applicazione di queste tecniche anche al campo ambientale. Sulla terra infatti, un grosso numero di sostanze pericolose per l' ambiente e per le popolazioni che vi abitano è stato abbandonato o volutamente occultato. Negli ultimi anni l' individuazione e la precisa localizzazione di queste sostanze o oggetti, tra cui anche residuati bellici, sta diventando un obiettivo di primaria importanza per molti enti locali ponendo l' argomento all' attenzione della comunità scientifica internazionale. Per fortuna molti oggetti abbandonati hanno spesso un elevato contrasto di magnetizzazione o di densità tale da facilitarne l' individuazione, e molte di queste sostanze nocive sono stoccate in fusti o container proprio con queste caratteristiche. Tra le diverse tecniche geofisiche per l' individuazione di oggetti metallici, il metodo magnetico è da

lungo tempo considerato uno dei migliori. Anche il metodo microgravimetrico può essere efficacemente impiegato come per la ricerca di cavità nel sottosuolo, o per la ricerca di vaste discariche non autorizzate.

Con le attuali tecniche e con quelle ancora in via di sperimentazione è possibile mappare la distribuzione delle sorgenti e determinarne la profondità con un certo grado di precisione. Recentemente, anche in campo archeologico, si rileva un crescente interesse per l'applicazione di questi metodi per la localizzazione di mura e città sepolte.

Tra i principali motivi di un così ampio spettro di applicazione ci sono il carattere non invasivo dei sondaggi magnetico e gravimetrico e la capacità di fornire informazioni in tempi e costi relativamente ridotti, anche su vaste aree.

Tuttavia è da considerare che i campi di potenziale sono il risultato della sovrapposizione di effetti dovuti a sorgenti poste a profondità e di estensione diverse. L'interpretazione delle anomalie dei campi di potenziale è un classico problema inverso che solo sotto alcune condizioni permette di determinare in modo relativamente univoco l'insieme delle sorgenti che hanno prodotto il campo osservato.

## **Contesto scientifico della tesi**

In letteratura sono state proposte diverse metodologie in grado di risolvere, a partire dalle misure del campo, dapprima il problema della stima della profondità della sorgente, poi anche quello della stima della forma. I parametri determinati con queste metodologie sono legati da relazioni matematiche, che in parte sono già dimostrate e disponibili in letteratura recente ed in parte costituiscono attualmente oggetto di ricerca. La più nota di queste metodologie è la Deconvoluzione di Eulero che studia funzioni omogenee. In questo contesto si innesta un filone particolare delle varie metodologie d'analisi dei campi di potenziale che ci proponiamo di sviluppare. I metodi che ne derivano seguono un approccio definito *multiscala* in quanto utilizzano misure del campo a più quote, ovvero a più scale. Molti di questi metodi permettono di ottenere informazioni sulle sorgenti e sono basati sull'analisi del campo prolungato e delle sue derivate (Fedi e Rapolla, 1999; Fedi et. al. 2006; Fedi 2007; Florio et al. 2006).

In questo tipo di analisi *multiscala* i campi di potenziale sono studiati a livelli di scala diversi. Tali metodi si basano sulla stima delle proprietà delle sorgenti dei campi a partire dalle relazioni che sussistono nei campi considerati a scale diverse, o in termini più sintetici, a livello tridimensionale (3D). Se, ad esempio, osserviamo una foto satellitare con gradi di zoom diversi probabilmente riconosceremo geometrie diverse ma che possono essere legate da opportune leggi matematiche.

Le prime metodologie *multiscala* sono state proposte fin dagli anni '60 per affrontare problemi via via sempre più complessi (Paul et. al 1966). Nella

categoria dei metodi *multiscala* sono inclusi anche e soprattutto, gli algoritmi basati sulla *Trasformata Continua di Wavelet*. La *Trasformata Continua di Wavelet* o *CWT* funziona come un microscopio matematico ed è stata introdotta nei primi anni '80 da Morlet e Grossmann (1984) che la proposero per l'analisi del segnale sismico. La *Trasformata Continua di Wavelet (CWT)*, come già la deconvoluzione di Eulero, assume che il campo sia omogeneo. Essa porta allo studio del segnale nel dominio spazio-scala, attraverso il cosiddetto scalogramma, e consente di caratterizzare e localizzare nella regione delle sorgenti le *singolarità*<sup>1</sup> presenti in un segnale. Le caratteristiche delle *singolarità* dei campi di potenziale sono legate al tipo di sorgente che le determina. Grazie alla *CWT*, funzioni e/o segnali che contengono *singolarità* possono essere caratterizzati da uno studio del grado di regolarità.

Nell' ambito della teoria dell' analisi delle immagini Mallat e Hwang (1992) hanno dimostrato che l' andamento delle linee dei massimi del modulo della *CWT* (*WTMML* Wavelet Transform Modulus Maxima Lines) alle varie scale dipende dal grado di regolarità di una funzione (regolarità di Lipschitz). Moreau et al. (1997) hanno applicato questo tipo di analisi ai campi di potenziale e, utilizzando come ondina analizzante le derivate della *Poissoniana*, hanno adottato l'equivalenza tra il parametro di scala e la quota di prolungamento del campo di potenziale. Lo scalogramma fornisce, quindi, una rappresentazione delle caratteristiche delle derivate del campo prolungato a diverse quote. In particolare, per una sorgente isolata che dà luogo ad un campo che soddisfa le condizioni di omogeneità di Eulero, le linee dei coefficienti della *CWT* di massima ampiezza (*WTMML*), sono delle rette che convergono, al di sotto dello scalogramma, alla profondità di sorgente, ossia alla singolarità stessa.

Fedi e Florio hanno introdotto una serie di metodologie che usano i valori del campo a più quote per la determinazione della forma e della posizione nello spazio delle sorgenti. I metodi si basano sullo studio del grado di omogeneità del campo lungo i ridge, applicando l' equazione di Eulero. Contemporaneamente è stato introdotto da Fedi nella teoria della DEXP, il concetto di funzione di scala (Fedi et. al 2006, Fedi 2007). Dal concetto di funzione di scala, una legge analiticamente determinata per il rescaling del campo alle diverse quote, scaturiscono diverse metodologie tra cui il metodo *ScalFun* che consente di stimare con estrema facilità i parametri che caratterizzano le sorgenti del campo.

## **Finalità del lavoro di tesi**

In questo lavoro di tesi sono stati esplorati diversi aspetti relativi all' *analisi multiscala* dei campi di potenziale per la determinazione dei parametri della sorgente, anche al fine di perfezionare alcuni aspetti di questo tipo di analisi,

---

<sup>1</sup> Singolarità: punto nel quale la derivata di una funzione non esiste. Proprietà base delle singolarità è che la loro presenza è rilevabile anche a grandi scale.

anche con nuovi approcci metodologici, in modo da ottenere una maggiore accuratezza delle stime. Sono state effettuate molte applicazioni a casi di interesse ambientale tra cui anche la localizzazione nello spazio di fusti, volutamente occultati, contenenti sostanze inquinanti.

Il proposito del primo capitolo della tesi è quello di fornire alcuni fondamenti teorici per l'analisi dei campi di potenziale e di affrontare il problema generale del trattamento dei dati per un'interpretazione multiscala del campo e delle sue derivate. Questo aspetto risulta un punto cruciale nell'analisi multiscala, in quanto un corretto trattamento dei dati ci consente di ridurre notevolmente gli errori, introdotti soprattutto alle scale più elevate, e di migliorare così l'accuratezza delle stime. A tal proposito saranno mostrati alcuni test eseguiti sul campo generato da un modello sintetico complesso, noto in letteratura come modello di Bishop, e sulle sue derivate. Questo tipo di considerazioni è necessario soprattutto in un contesto ambientale dove l'interpretazione richiede un grado di accuratezza elevato.

Il secondo capitolo è dedicato all'introduzione ed all'applicazione di una recente metodologia multiscala, denominata *ScalFun* (Fedi et. al. 2006, Fedi 2007), per la determinazione indipendente e simultanea dei parametri delle sorgenti del campo. Il metodo è veloce e stabile e si basa anch'esso sull'analisi dei massimi relativi del campo alle diverse quote o scale. In questo capitolo, viene proposto inoltre un criterio di consistenza per la discriminazione delle soluzioni ottenute con il metodo *ScalFun* la cui applicazione è stata testata sul modello magnetico complesso del basamento di Bishop. Il risultato ottenuto è una ricostruzione di alto profilo della morfologia del basamento. Dal punto di vista della modellazione ambientale, la ricostruzione della morfologia di un basamento o di un particolare livello stratigrafico rappresenta un punto chiave nella caratterizzazione del sistema stesso e di una sua eventuale bonifica.

Lo stesso criterio applicato ad un approccio definito multiridge è stato testato su di un ben più complesso caso reale, i dati magnetici relativi al bacino di Capo Nord. L'applicazione ai dati magnetici di questo bacino rappresenta forse il primo caso in letteratura di interpretazione di dati magnetici relativi ad un'area interessata da intenso diapirismo salino. I risultati sono consistenti con alcuni profili sismici effettuate nell'area circostante ed evidenziano un approfondimento del bacino stesso, seguendo un particolare livello a contatto con i diapiri salini. Anche i risultati ottenuti da un'analisi multiscala, tesa ad evidenziare gli effetti correlati al basamento profondo, sono in accordo con quanto riportato in letteratura. Anche questo risultato è molto importante dal punto di vista ambientale in quanto dimostra su un caso reale la capacità del metodo di localizzare sorgenti di difficile interpretazione come possono essere i duomi salini o un qualsiasi altro corpo intrusivo naturalmente imposto o volutamente occultato.

Nel terzo capitolo è mostrata invece una applicazione di grande interesse ambientale. È stato affrontato il problema di localizzare precisamente nello spazio la posizione di fusti contenenti sostanze inquinanti. È ormai noto infatti, che

specialmente nella nostra regione, molte sostanze inquinanti sono state volutamente occultate in container, fusti o interi camion e sepolte in aree agricole. In questo capitolo sono stati analizzati con il metodo *ScalFun* i dati magnetici relativi a fusti sepolti nell' area test della Università di Stanford (USA). Per questa applicazione è stato sviluppato un nuovo tool grafico che consente di visualizzare, isolare e scegliere direttamente i *ridge* (*WTMML*) da analizzare direttamente con una visualizzazione 3D. Le stime ottenute sono molto accurate, più di quelle ottenute con altri metodi, e rappresentano sicuramente un notevole progresso in campo ambientale data la rapidità con cui è possibile acquisire i dati, anche su vaste aree, e la facilità di analisi.

Il quarto capitolo è dedicato all' introduzione teorica ed all' applicazione pratica di un' inedita metodologia d'analisi, denominata *FWPFA* (*Full Wavelet Potential Fields Analysis*). La metodologia qui proposta è basata sulla teoria della *Trasformata Continua di Wavelet* e permette di ottenere stime molto accurate grazie alla possibilità di scegliere molte più ondine analizzanti rispetto alla sola *Poissoniana*. Il metodo *FWPFA* è molto innovativo in quanto supera il limite imposto in letteratura di effettuare l' analisi dei campi di potenziale con le sole ondine *Poissoniane*. Il metodo è veloce e stabile e si basa sull' analisi dei massimi del modulo della *CWT* costruita con una qualsiasi ammissibile ondina.

Oltre a diversi test effettuati su modelli sintetici semplici, questa innovativa metodologia è stata testata sui dati magnetici relativi all' area test della Università di Stanford. Le stime ottenute dimostrano l' applicabilità del metodo anche su un caso reale di notevole interesse ambientale.

Lo scopo della tesi è dunque quello di fornire un' ampia panoramica sulle applicazioni e sulle notevoli potenzialità dell' approccio multiscala per l' analisi dei campi di potenziale, soprattutto in campo ambientale.

# Capitolo 1

---

## Analisi multiscala

## 1.1 Cenni teorici e continuazione armonica dei campi di potenziale

Il campo gravitazionale newtoniano in un punto  $P(\vec{r}')$ , dovuto ad una sorgente qualsiasi non puntiforme, cioè una distribuzione di massa  $\rho(\vec{r})$  in un volume  $V$  di un origine arbitraria, viene definito come:

$$\vec{G}(\vec{r}') = -\gamma \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}|^2} \vec{e}_R dv \quad (1.1)$$

Dove  $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$  e  $\rho(\vec{r})$  è la densità di massa.

Il campo gravitazionale Newtoniano appartiene ad una particolare classe, detta di campi conservativi, che ammette una particolare formulazione in funzione di un campo di grandezze scalari, detto potenziale scalare. Inoltre l'equazione (1.1) soddisfa l'equazione di Laplace e quindi il campo gravitazionale è una funzione armonica.

I potenziali gravitazionale  $V$  e quello magnetico  $U$  di una stessa sorgente con contrasti di densità ( $\Delta\rho$ ) e magnetizzazione ( $\Delta J$ ) costanti sono inoltre legati dal teorema di Poisson.

In un contesto di analisi multiscala, dove gli algoritmi usano misure del campo a quote diverse, sembra poco realistico, sia per costi che per logistica, effettuare un sondaggio gravimetrico o magnetico nel quale vengono acquisiti contemporaneamente dati a più quote.

A questo proposito introduciamo l'algoritmo della continuazione armonica dei campi di potenziale con cui costruiamo il campo nello spazio, a partire da quello misurato alla quota minore. La continuazione verso l'alto è una ben nota trasformazione derivante dalla teoria dei campi di potenziale basata sull'equazione (Baranof, 1976):

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_S \int G(\xi, \eta, z_m) \frac{z - z_m}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - z_m)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (1.2)$$

dove  $G(x, y, z_m)$  è il campo di potenziale misurato,  $z > z_m$  è la quota di continuazione,  $z_m$  è la quota di misura e  $S$  è una regione infinitamente estesa sulla quale è noto il campo in modo continuo. Questa equazione è un integrale di convoluzione e lega linearmente i valori del campo alla quota  $z_m$  con quelli alle quote  $z$  della regione armonica del campo. La continuazione verso l'alto può essere implementata molto semplicemente nel dominio delle frequenze ed è molto importante per le metodologie d'analisi multiscala.

## 1.2 Gli errori di bordo nell'analisi multiscala

Tutti i metodi che si basano sulla continuazione verso l'alto, e quindi anche quelli basati sulla *Trasformata Continua di Wavelet con ondine Poissoniane* (vedi cap. 2-4), hanno il vantaggio di essere dei processi stabili e quindi consentono di ottenere buoni risultati anche in presenza di segnali relativamente disturbati. Intrinsecamente la continuazione verso l'alto permette dunque di determinare le coordinate della sorgente e la stima di un parametro che è riconducibile alla forma della sorgente (Paul, 1966; Fedi e Rapolla, 1999).

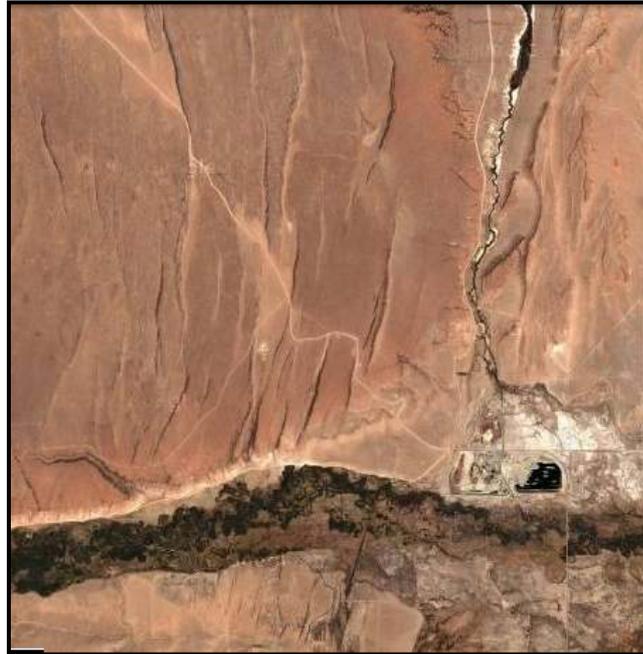
In ogni caso, alcuni accorgimenti devono essere presi affinché le su citate trasformazioni applicate ad un set di dati, discreto e acquisito su una regione finita, diano accurate stime del campo continuato.

Gli algoritmi di analisi multiscala sono generalmente implementati nel dominio di Fourier e l'errore maggiore che si commette usando la convenzionale convoluzione circolare, usando cioè l'algoritmo della Fast Fourier Transform (FFT) limitatamente all'intervallo di misura del segnale, consiste nell'introdurre un effetto di aliasing legato al campionamento nel dominio delle frequenze che inficia il contenuto del segnale ai bordi dell'area via via che la quota  $z > z_m$  diventa maggiore.

Fortunatamente questo errore può essere ridimensionato applicando la convoluzione circolare (FFT) su un'area maggiore rispetto a quella di interesse (Oppenheim and Schafer, 1975). Il campo da analizzare può essere esteso con dati reali, nel caso in cui essi siano disponibili ed anche a risoluzione minore, oppure è possibile estendere i dati usando degli estrapolatori matematici.

Oltre a questo problema di natura tecnica, la finitezza della area di misura implica un altro errore nel continuare i dati a quote più alte. Esso è dovuto al fatto che, né il contributo e né la distribuzione spaziale di eventuali sorgenti che si trovano al di fuori del campo misurato, sono noti. Per ovviare a questo errore è possibile pianificare un sondaggio su un'area più vasta rispetto a quella di interesse o comunque usare algoritmi che tengano conto delle variazioni del campo nelle immediate vicinanze del bordo. Un discorso analogo sussiste per le sorgenti che producono effetti non rilevabili con la discretizzazione dei dati adottata, ma questo effetto risulta minore perché da una certa altezza in poi gli effetti ad alta frequenza perdono significativamente energia.

In questo capitolo metteremo a fuoco il problema di un corretto trattamento dei dati per l'analisi multiscala. Per fare questo testeremo diversi algoritmi estrapolatori avvalendoci di un modello sintetico complesso di un basamento profondo magnetizzato, calcolato a più quote, in modo da identificare quale algoritmo possa essere più indicato per effettuare una continuazione verso l'alto ottimale anche con l'uso di derivate orizzontali e verticali del campo.



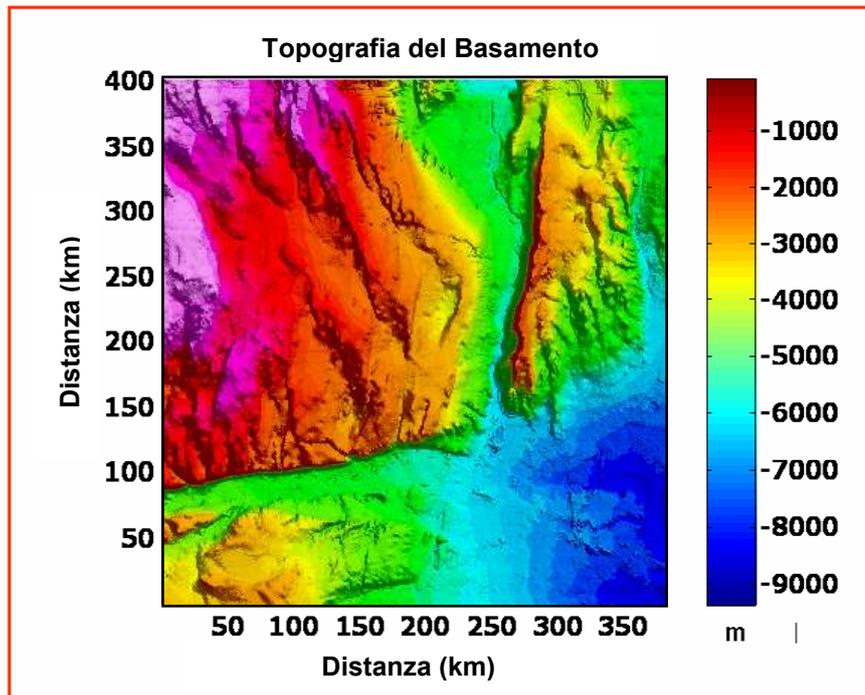
**Figura 1.1.** Foto aerea dell' area usata per creare il modello di Bishop.

Il modello sintetico complesso usato nei nostri test è noto in letteratura col nome di modello di Bishop (Williams et al. 2002). Questo modello rappresenta un basamento magnetico profondo ed è assimilabile ad un caso reale in quanto è stato prodotto usando i dati topografici di un tavolato vulcanico degradato dagli agenti atmosferici situato a nord di Bishop in California (USA) (fig. 1.1). La topografia, riscalata di un fattore 30 nelle tre dimensioni, è stata assunta come superficie del basamento magnetico. Il modello è stato così traslato in profondità ed assume una potente copertura di sedimenti non magnetizzati a densità variabile<sup>2</sup> in modo che le strutture appaiano sepolte (Williams et al. 2002, 2005).

L'area è stata scelta in quanto contiene una varietà di strutture geologiche che complicano il modello. Sono presenti due faglie relativamente lunghe con offset elevato, un andamento ad echelon a piccola scala, faglie orientate nord-sud ed est-ovest, zone di trasferimento tra le faglie, un area profonda priva di faglie nell'angolo sud-ovest. Il modello assume che ci siano anche cambi litologici e corpi intrusivi e per questo sono stati aggiunti bruschi cambi di suscettività (Fairhead et al. 2004).

---

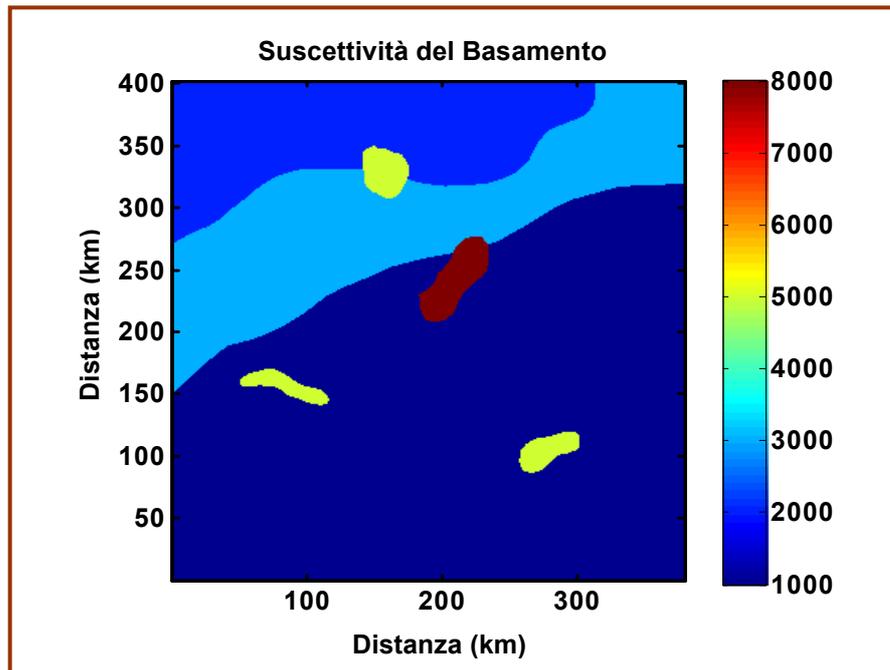
<sup>2</sup> La copertura sedimentaria influenza solo il modello gravimetrico di Bishop non trattato in questo lavoro di tesi.



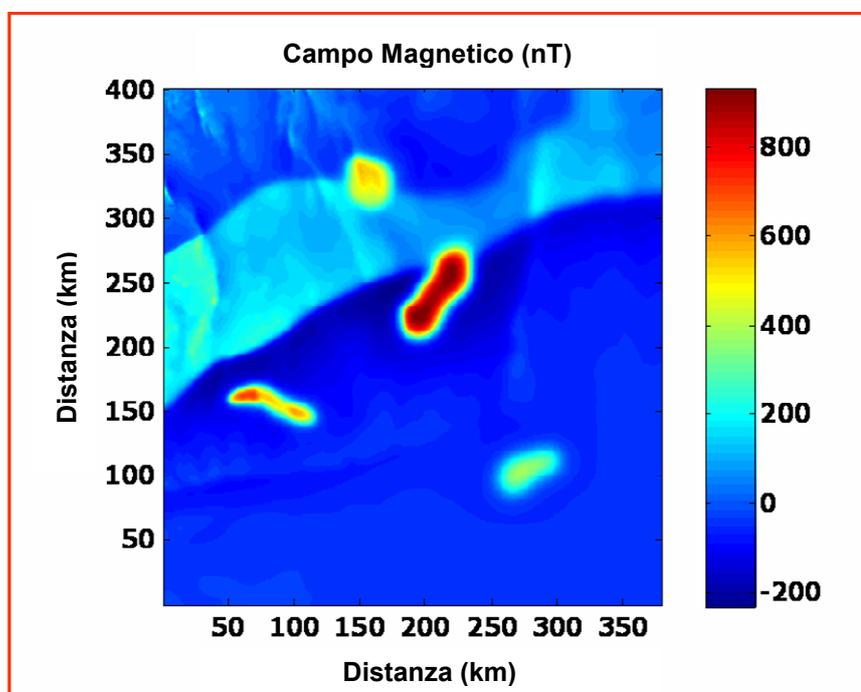
**Figura 1.2.** Topografia riscalata di un fattore 30 e spostata in profondità in modo da rendere le strutture del modello di Bishop sub-superficiali.

In modo da completare un modello già di per se abbastanza realistico, sono stati aggiunti gli effetti dovuti al contrasto di densità tra i valori medi della crosta inferiore e il Mantello superiore, lungo la cosiddetta superficie di Mohorovicic, variabile tra 22 e 33 km di profondità; inoltre è stato anche perturbato il campo con l'aggiunta di un rumore gaussiano (ad alta frequenza).

I dati relativi al modello sintetico di Bishop ci sono stati gentilmente concessi da G. Connard della Northwest Geophysical Associates, Inc. e da G. Flanagan della Conoco Phillips Corp., nell'ambito della realizzazione di un workshop sull'interpretazione di dati di modelli sintetici complessi tenutosi al SEG 2006 (Fedi et al., 2006).



**Figura 1.3.** Mappa dei cambi litologici e dei corpi intrusivi identificati con cambi di suscettività.

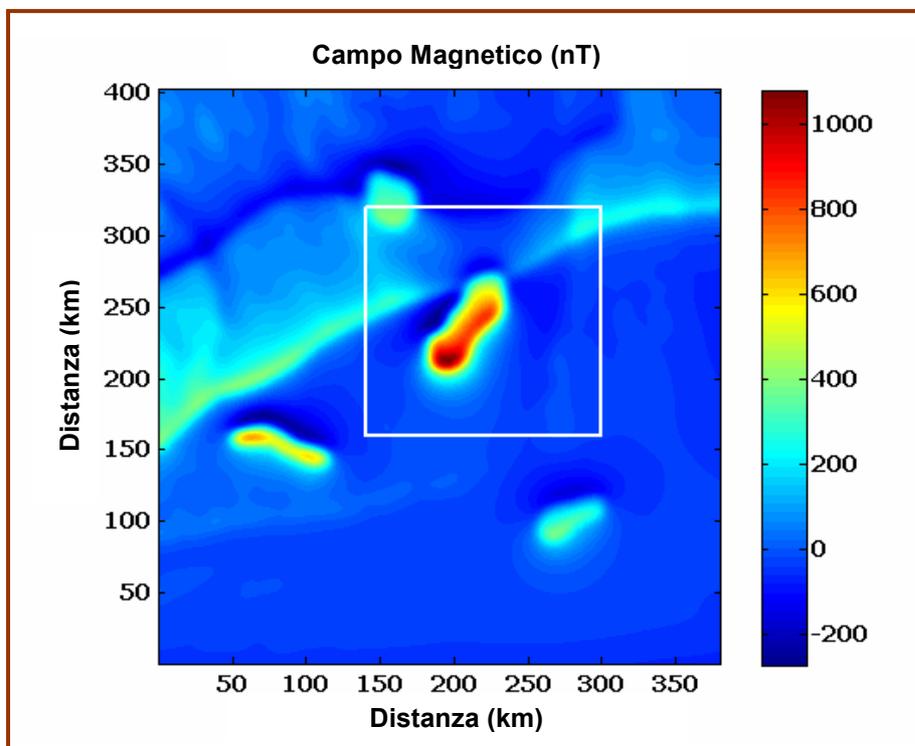


**Figura 1.4.** Mappa del campo magnetico ridotto al polo generata dalla topografia del modello di Bishop e dall'aggiunta di variazioni litologiche.

### 1.3 Test di continuazione sul modello di Bishop

Il primo passo per usare una metodologia d'analisi multiscala è quello di generare un set 3D di dati usando la continuazione verso l'alto. In questo paragrafo mostriamo diversi test effettuati sulla parte centrale del modello di Bishop per capire quale algoritmo di estrapolazione dati è più indicato per effettuare una corretta continuazione verso la regione armonica del campo, riducendo al minimo gli errori di bordo.

I test sulla continuazione sono stati effettuati sul campo magnetico generato al livello del mare ed inclinato a  $60^\circ$ , identificato dagli autori del modello col nome file: "bishop5x\_mag\_base\_moho\_i60.grd"

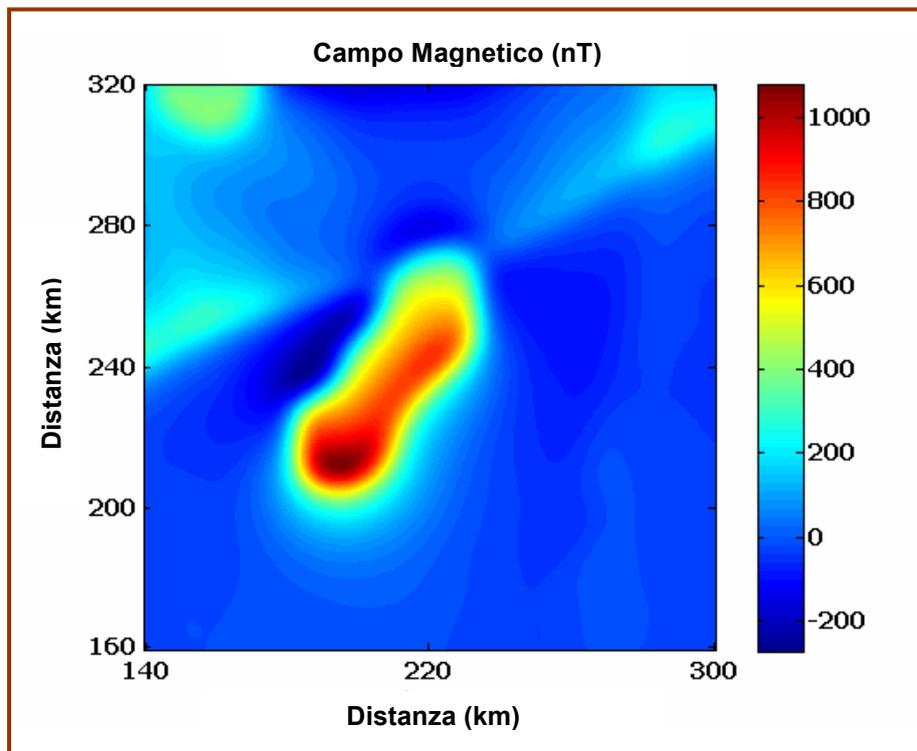


**Figura 1.5.** Mappa del campo magnetico relativa al modello di Bishop al livello del mare con inclinazione del campo  $i=60^\circ$  e parte centrale su cui sono stati effettuati i test di continuazione.

Di questo modello magnetico, che ha un passo di campionamento pari a 200 metri, ne è stata estratta una porzione centrale di  $800 \times 800$  punti ( $160 \text{ km} \times 160 \text{ km}$ ) che taglia una importante anomalia nei bordi a nord ed a ovest, similmente ad un caso di misura reale di campi di potenziale. Infatti nel nostro test assumiamo che la porzione estratta sia il risultato di un ipotetico sondaggio magnetico.

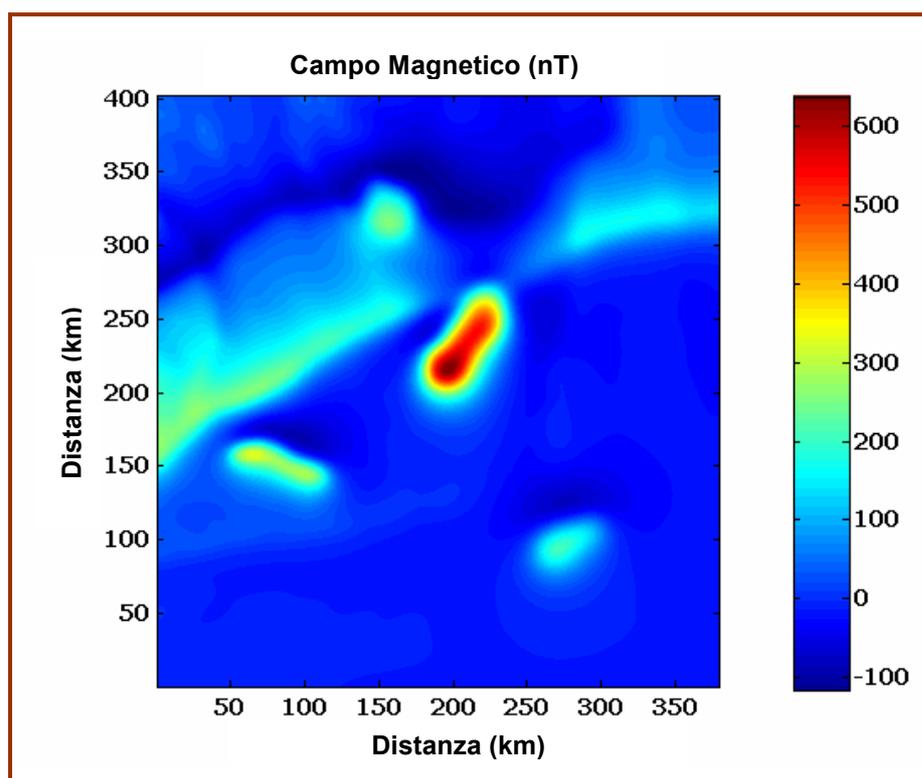
Il nostro scopo è quello di confrontare il risultato ottenuto dalla continuazione verso l'alto di questa piccola porzione, con il campo del modello di Bishop calcolato alle quote 5 km e 10 km s.l.m., identificati dagli autori col nome file "bishop5x\_mag\_base\_moho\_i60\_up5" e "bishop5x\_mag\_base\_moho\_i60\_up10.grd" (figg. 1.7 – 1.9), in modo da valutare quale algoritmo di estrapolazione dati è più indicato per effettuare una corretta continuazione.

Il test prende in considerazione i due aspetti critici per la continuazione verso l'alto: la mancanza di conoscenza né della distribuzione delle sorgenti né dell'andamento del campo al di fuori dell'area campionata. Nel test infatti è stato preso in esame il caso di una importante anomalia disturbata da altre minori, troncate improvvisamente, eseguendo così l'algoritmo della continuazione su un'area ridotta del modello di Bishop. La quota di continuazione 10 km è da considerarsi abbastanza elevata in quanto è 50 volte il passo di campionamento.

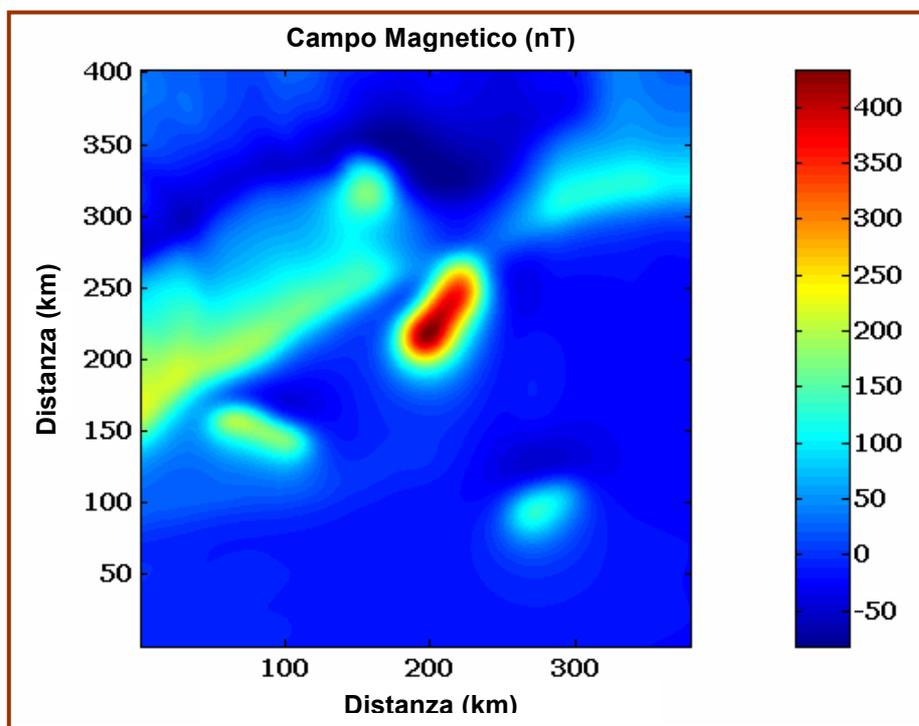


**Figura 1.6.** Mappa del campo magnetico relativa alla parte centrale del modello di Bishop al livello del mare con inclinazione del campo  $i=60^\circ$  su cui sono stati effettuati i test di continuazione.

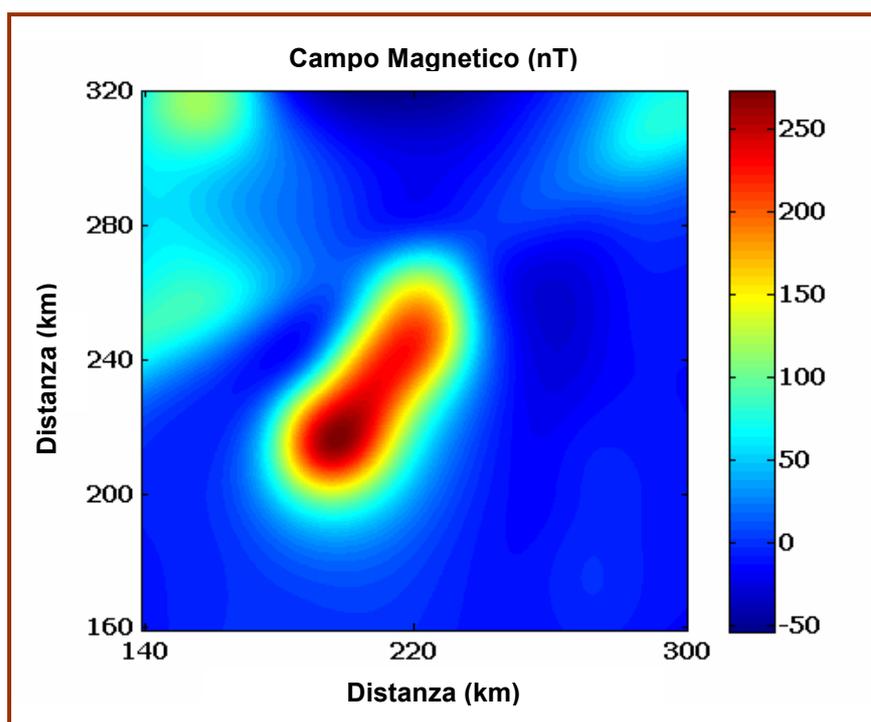
Nel caso in cui si decidesse di non trattare il problema dell'estensione delle matrici da analizzare, allora si assumerebbe che il campo sia una funzione periodica di periodo pari all'area. Le conseguenze di un'assunzione del genere sono la non continuità sui bordi della trasformata discreta di Fourier ed una non corretta approssimazione delle frequenze durante il processo di scomposizione del segnale, il che influenzerebbe il calcolo del campo alle quote più alte.



**Figura 1.7.** Mappa del campo magnetico del modello di Bishop con inclinazione del campo  $i=60^\circ$  calcolata a 5 km di quota.



**Figura 1.8.** Mappa del campo magnetico del modello di Bishop con inclinazione del campo  $i=60^\circ$  calcolata a 10 km di quota.



**Figura 1.9.** Mappa del campo magnetico relativo alla parte centrale del modello di Bishop calcolata a 10 km di quota, con inclinazione del campo  $i=60^\circ$ , usata per confrontare i risultati della continuazione.

Inoltre, nei casi in cui ci siano anomalie troncate, la conoscenza di come il campo continua al di fuori dell'area campionata è un'incognita che inevitabilmente influenza la stima del campo alle diverse quote nell' area periferica. Quindi, la conseguenza di una tale assunzione, data la somma degli errori di stima che si produrrebbero, sarebbe quella di avere una stima accettabile del campo continuato solo nella parte centrale della matrice di dati di partenza.

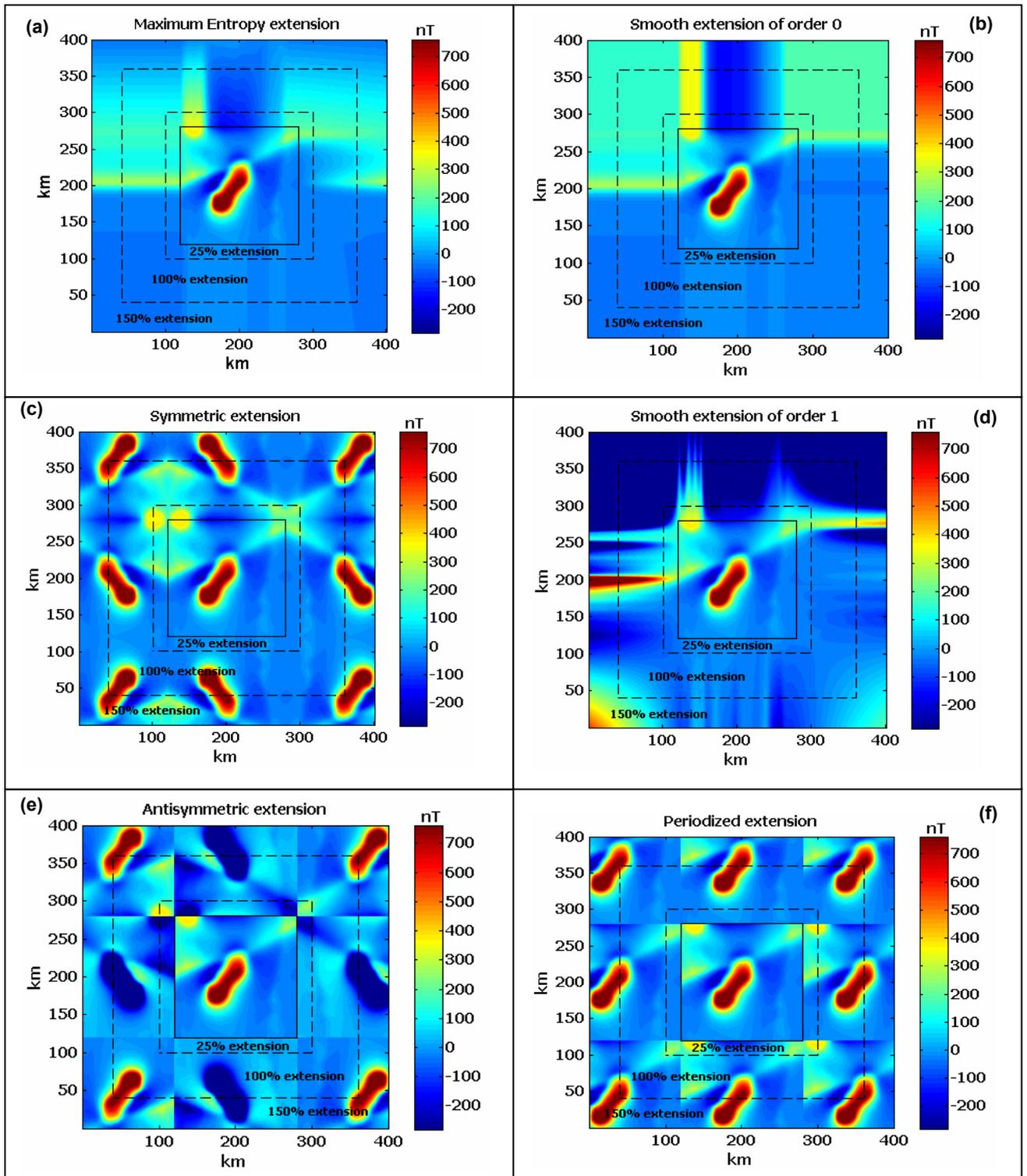
A questo punto, il miglior modo per ottenere stime accettabili campo alle diverse quote è quello di usare un set di dati più ampio dell' area di interesse. L' ideale sarebbe il poter disporre di dati reali del campo anche se a risoluzione minore. In molti casi però, non è possibile disporre di dati reali quindi bisogna estrapolare matematicamente i dati al di fuori dell'area di misura. A questo proposito si noti che il bordo esterno viene creato sinteticamente per consentire la corretta applicazione dell' algoritmo, ma non viene ovviamente considerato nell' ambito dell' analisi multiscala.

Molti metodi per l'estrapolazione dei dati sono stati proposti nell'ambito della teoria della *CWT* (Cohen et al. 1993). Spesso è preferibile usare schemi semplici d' estensione ai bordi basati sull'informazione legata al segnale stesso. E' da notare che tale estrapolazione risulta utile in ogni fase del processo di scomposizione (Strang e Nguyen 1996).

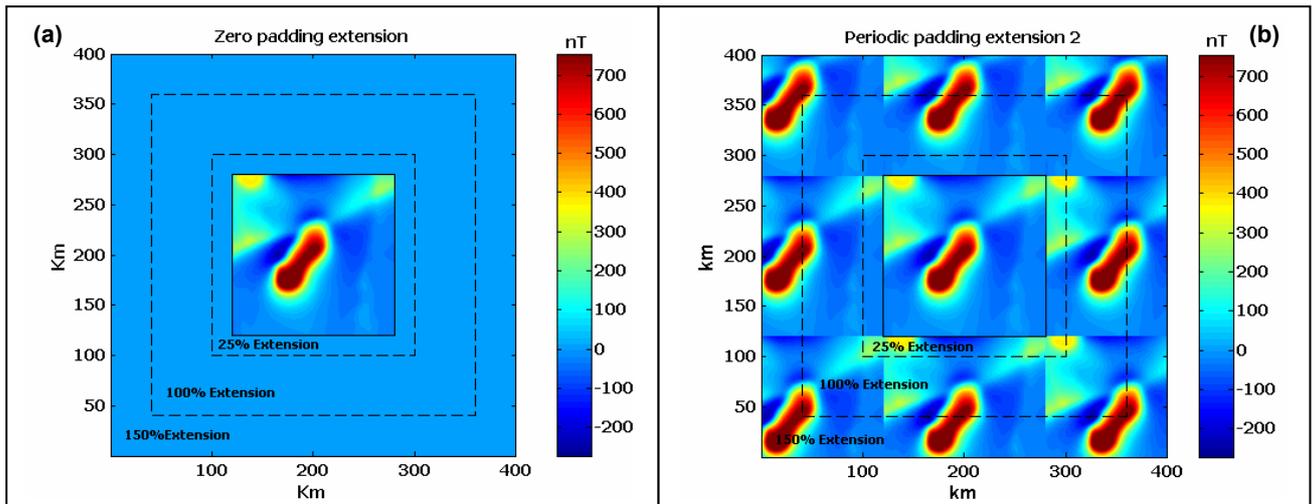
Al fine di valutare il modo migliore per ottenere un prolungamento del campo ottimale, si è deciso di effettuare diversi test sul calcolo del campo a diverse quote

(continuazione verso l'alto). In questi test diversi algoritmi di estrapolazione del bordo sono stati presi in esame per allargare il set di dati (fig. 1.10), tra cui quello della massima entropia (Maximum Entropy Extension, Gibert e Galdeano, 1985) ed altri algoritmi disponibili in ambiente MatLab:

1. **Maximum Entropy Algorithm.** Il metodo effettua l'extrapolazione dei dati con un algoritmo basato su un filtro predittivo derivato dall'Analisi Spettrale della Massima entropia di Burg (Gibert e Galdeano, 1985). L'algoritmo prevede l'extrapolazione dei dati che sia la più possibile scorrelata con il segnale stesso (fig. 1.10 a).
2. **Smooth extension of order 0 ('sp0').** Questo metodo implementa una semplice extrapolazione mediante un valore costante al di fuori dell'area di misura. Ad es. per i segnali 1D, l'estensione è rappresentata dalla ripetizione del primo valore a sinistra e dell'ultimo a destra (fig. 1.10 b).
3. **Smooth extension of order 1 ('spd' or 'sp1').** Questo metodo implementa una semplice extrapolazione basandosi sull'andamento della derivata del primo ordine. Gli algoritmi di smooth padding vanno bene in generale per segnali smooth (fig. 1.10 d).
4. **Symmetric extension ('sym').** Il metodo assume che il segnale possa essere ricostruito al di fuori dell'area di misura creando un bordo in cui i valori seguano una legge di simmetria rispetto a quelli all'interno dell'area (fig. 1.10 c).
5. **Antisymmetric extension ('asym').** Il metodo usa al di fuori dell'area di misura un algoritmo di replicazione antisimmetrico. I metodi simmetrico ed antisimmetrico hanno lo svantaggio di creare sui bordi discontinuità del primo ordine (fig. 1.10 e).
6. **Periodized extension ('ppd').** Questo metodo usa un algoritmo di replicazione periodico del campo. Lo svantaggio degli algoritmi di replicazione periodica è quello di creare artificialmente delle discontinuità sui bordi, specialmente al lato di anomalie troncate improvvisamente (fig. 1.10 f).
7. **Zero padding ('zpd').** Questo metodo costruisce il bordo ponendo valori tutti pari a zero. L'evidente svantaggio di questo algoritmo è che ai bordi sono create discontinuità artificialmente. Questo effetto può essere ridotto extrapolando con un valore medio del campo anziché usando il valore zero (fig. 1.11 a).
8. **Periodic-padding ('per').** Il segnale, nel caso in cui la sua lunghezza non sia adatta per la FFT, prima viene esteso automaticamente aggiungendo un valore costante con l'algoritmo Smooth Extension 0, poi su tutti i lati viene aggiunto una estensione periodica minimale. Le stesse regole valgono per segnali 2D. Questo modo di estendere il segnale produce la più piccola scomposizione di lunghezza d'onda (fig. 1.11 b).



**Figura 1.10.** Campi generati dagli algoritmi Maximum Entropy (a), Smooth extension di ordine 0 (b), Symmetric extension (c), Smooth extension di primo ordine (d), Antisymmetric extension (e), Periodized extension (f), a partire dalla parte centrale del modello di Bishop.



**Figura 1.11.** Campi generati dagli algoritmi Zero Padding extension (a), Periodic extension (b), a partire dalla parte centrale del modello di Bishop. E' bene notare che, per le nostre applicazioni, gli algoritmi 'per' e 'ppd' di MatLab risultano equivalenti i.

Per ognuno dei metodi descritti sono stati effettuati dei test cambiando la estensione dei dati estrapolati, che varia dal 25% fino al 150% della dimensione dei dati originali (figg. 1.10, 1.11). I risultati ottenuti dall' applicazione dell' algoritmo della continuazione sono stati poi confrontati con la porzione di campo del modello di Bishop calcolato a 5 km e a 10 km. In questo modo è stato possibile vedere di quanto si discostano i campi continuati senza conoscere le condizioni al contorno, similarmnte a quello che succede in un caso reale, dai campi reali relativi al modello di Bishop stesso test è stato ripetuto a 5 km e a 10 km considerando la derivata prima lungo  $z$  ed orizzontale lungo  $x$  ed  $y$  in modo da valutare, osservando come variano gli errori di bordo, quale tipo di estensione è più indicata anche nel caso in cui i metodi per l' analisi multiscala si usino derivate del campo continuato.

## 1.4 Discussione dei risultati

Dall' osservazione delle differenze tra i dati del modello a 5 km e a 10 km ed i risultati ottenuti continuando il campo dalla quota 0, rispettivamente alle quote 5 km e 10 km, ci si rende conto che la scelta dell'algoritmo per l'estrapolazione dei dati alla quota di partenza è molto importante ai fini di una corretta analisi multiscala.

Sulla base delle tre grandezze dei bordi effettuati e cioè il 25%, il 100% ed il 150% della dimensione dei dati originali, è possibile affermare che l'algoritmo di estrapolazione più indicato per un corretto calcolo del campo a quote diverse è quello della massima entropia (Maximum Entropy, fig. 1.10 a, 1.12 b).

La differenza tra il campo a quella quota e quello continuato nella finestra selezionata mostra che un'ampia parte centrale è interessata da un errore vicino ai 5 nT. Un errore del genere può essere considerato basso (1,6 %) se si pensa che il campo a 10 km nella finestra selezionata varia tra -50 and 270 nT (fig. 1.9).

Come ci saremmo aspettati, gli errori maggiori si trovano concentrati sui bordi, specialmente a nord ed ad ovest, in corrispondenza delle importanti anomalie incomplete (fig. 12 b). L'errore medio al centro ed ai bordi si riduce con l'aumentare dell'estensione del bordo.

Un risultato simile si ottiene usando l'algoritmo di MatLab 'Smooth extension of order 0' (fig. 1.13 a). Con l'aumentare dell'estensione del bordo si nota un aumento dell'area di minor errore, la quale resta pressoché invariata per bordi di grandezza superiore al 100% delle dimensioni dei dati di campo.

I risultati ottenuti usando gli altri algoritmi di estrapolazione sono simili nella parte centrale, con errori sempre intorno ai 5 nT, ma mostrano maggiori errori di bordo. Usando l'algoritmo smooth extension di ordine 1 con un bordo del 25% gli errori al bordo e nella parte centrale sono ulteriormente ridotti (< di 3 nT), ma allargando il bordo, un valore costante non trascurabile viene aggiunto alle anomalie continuate (fig. 1.13 b).

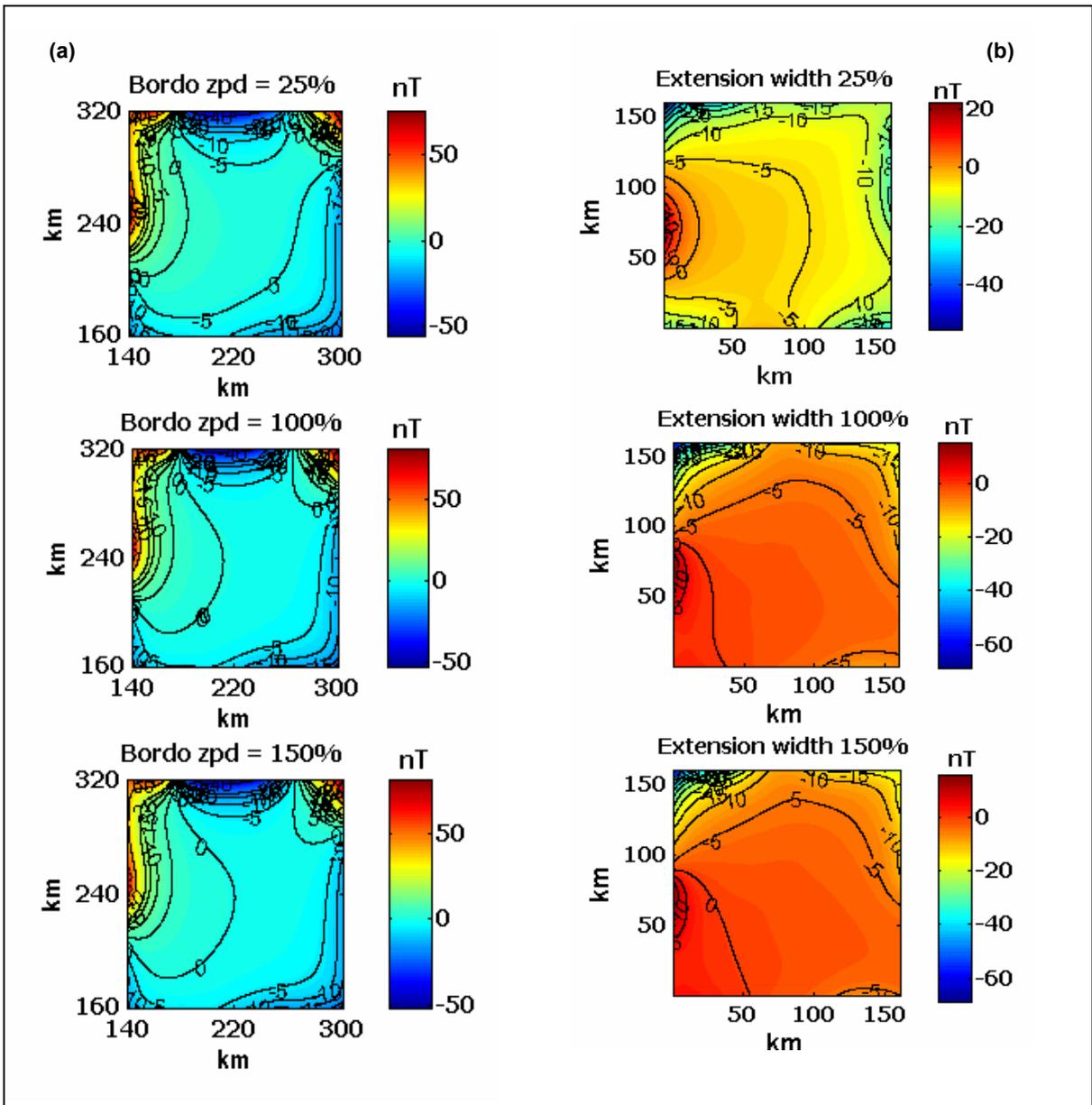
Questo succede perché, quando la larghezza del bordo aumenta fino a raggiungere una grandezza comparabile con la finestra di dati, l'informazione legata ai valori estrapolati tende ad essere importante come quella legata ai dati originali del segnale; questi possono produrre errori a bassa frequenza via via maggiori se l'estrapolazione non è coerente con il campo reale al di fuori del bordo. L'ampiezza degli errori di continuazione, quindi, aumenta in special modo quando è presente un'anomalia incompleta sui bordi e quando è usato un algoritmo di estrapolazione basato sulle derivate del primo ordine, come 'sp1' ad esempio.

Usando l'algoritmo Zero Padding invece, quindi assumendo i valori al di fuori del bordo uguali a zero, non si vedono grosse differenze cambiando l'estensione del campo. I valori della continuazione al centro sono abbastanza accettabili ma sui bordi sono presenti degli errori non trascurabili con ampiezze che variano tra i +/- 50 nT (16 % di errore). Anche aumentando l'estensione del bordo gli errori restano pressoché invariati in quanto aggiungendo degli zero il contenuto in frequenza del segnale non cambia in modo sensibile (fig. 1.12 a). Nel nostro caso specifico, lo stesso discorso vale se viene creato un bordo con il valore medio dei dati all'interno della finestra, anziché usare il valore zero.

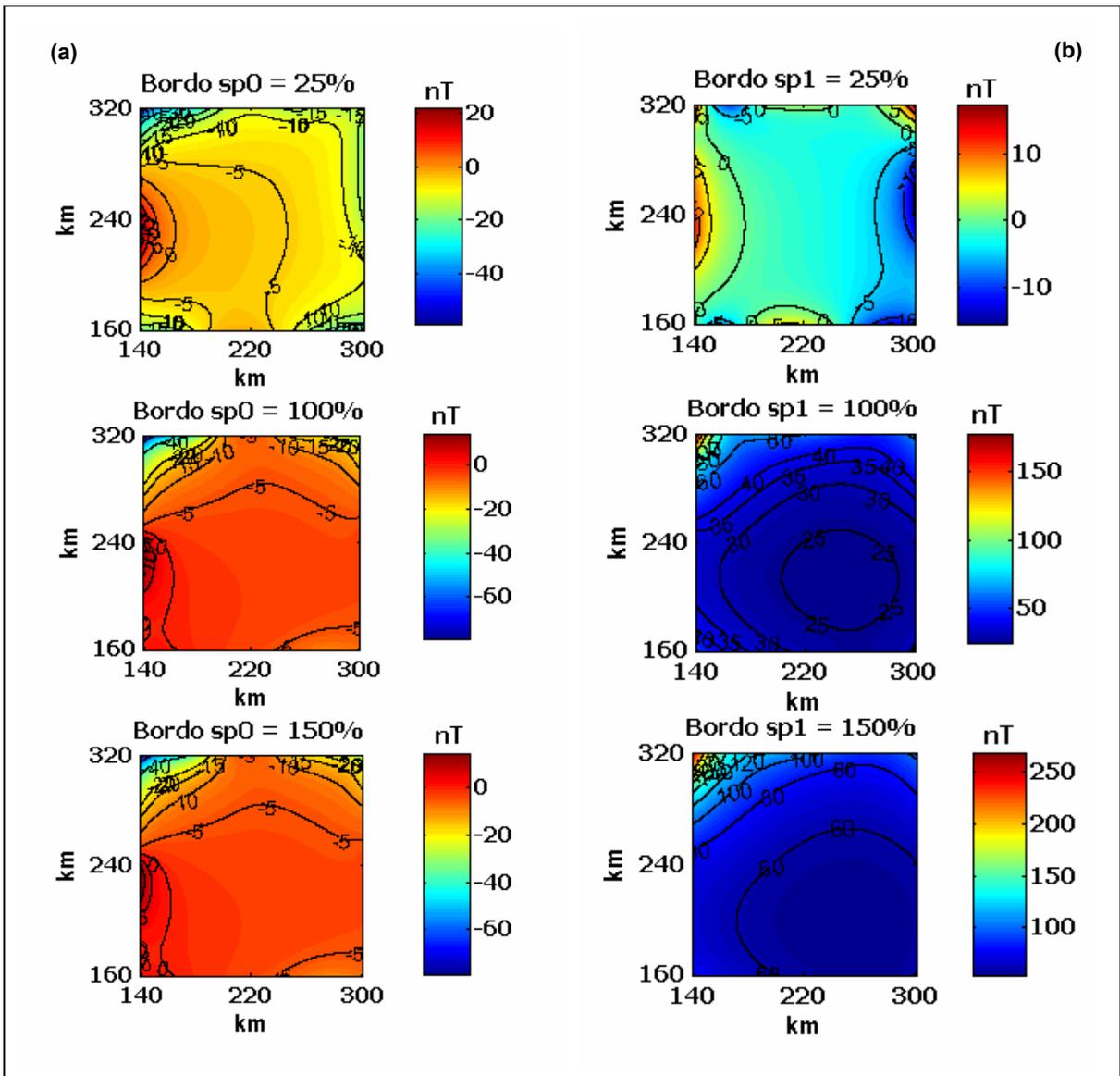
Come già accennato prima, gli algoritmi di smooth padding (fig. 1.13) riescono ad approssimare in modo abbastanza realistico il campo al di fuori del bordo, anche se bisogna porre particolare attenzione se si decide di usare un algoritmo di estrapolazione del primo ordine come sp1. In questo caso bisognerà accertarsi di non avere rilevanti anomalie incomplete, oppure, nel caso in cui si decidesse di usare un algoritmo del genere proprio per completare le anomalie, bisogna non eccedere nella dimensione del bordo.

L'effetto sortito usando gli algoritmi simmetrico ed antisimmetrico, invece, è abbastanza diverso tra loro. Mentre usando un'estensione simmetrica (figg. 1.10, 1.14) dal 100% della lunghezza originale del segnale in poi si ottiene un valore del campo continuato accettabile, con valori di scarto lungo una intera fascia centrale intorno ai 5 nT (1,6 %), usando un algoritmo di replicazione antisimmetrica invece, il risultato non è ottimale, con errori di bordo molto evidenti e pressoché immutati a seconda dell'estensione del bordo. L'unica somiglianza tra gli algoritmi testati, che si basano entrambi su un sistema di replicazione simmetrica, è quella che dal 100% in poi il risultato non sembra cambiare affatto.

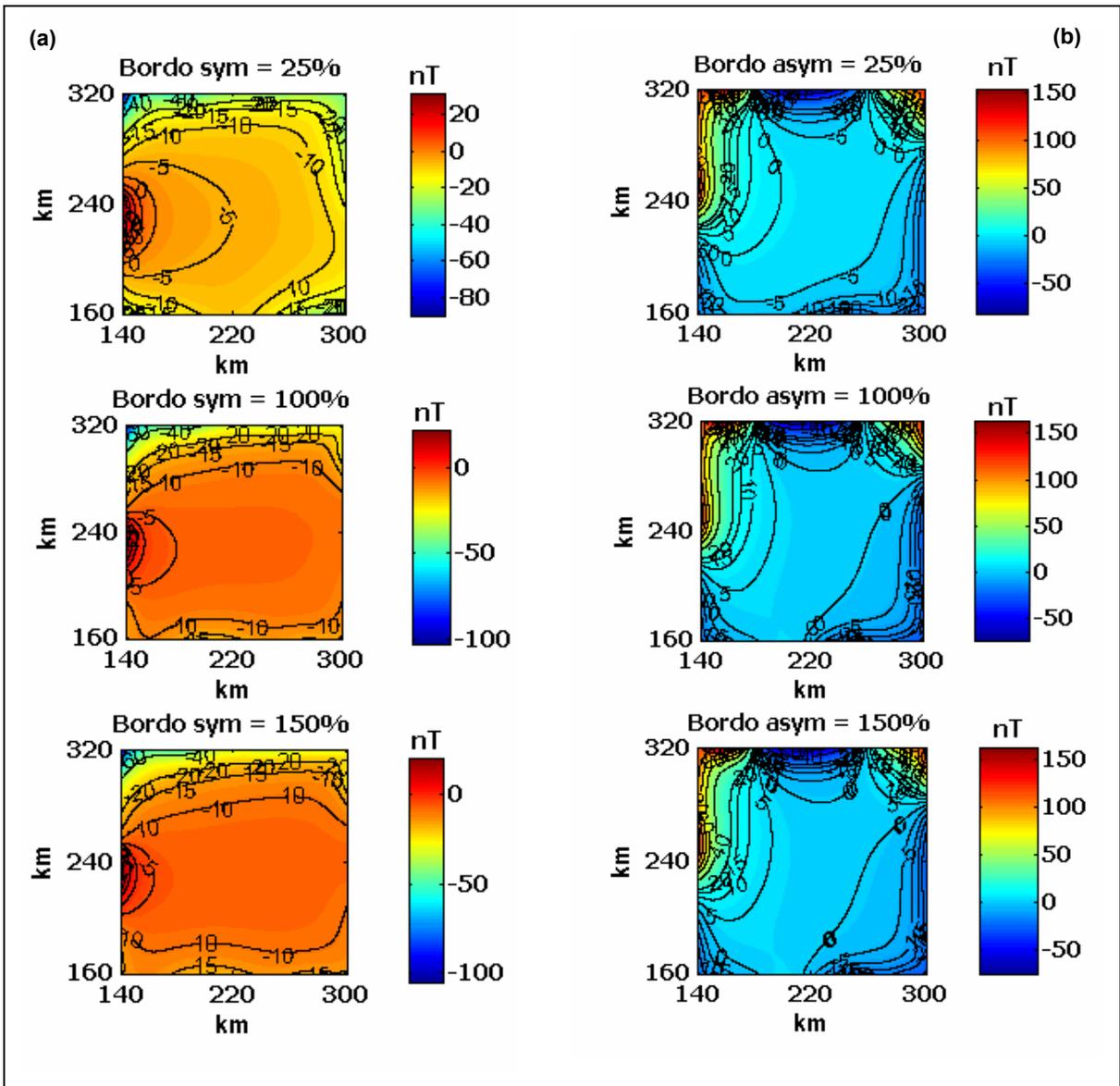
Gli algoritmi di MatLab che assumono una replicazione periodica ('per' e 'ppd') non sembrano mostrare alcuna differenza né nella replicazione (figg. 1.10, 1.11) né nel risultato della continuazione (fig. 1.15). I risultati di questo tipo di estensione non sono ottimali, molto simili ai risultati che si ottengono non usando alcun bordo, come è ovvio per la continuazione periodica. Gli errori ai bordi sono molto accentuati e solo una piccola parte al centro si mantiene intorno ai 5 nT di scarto (1,6 %).



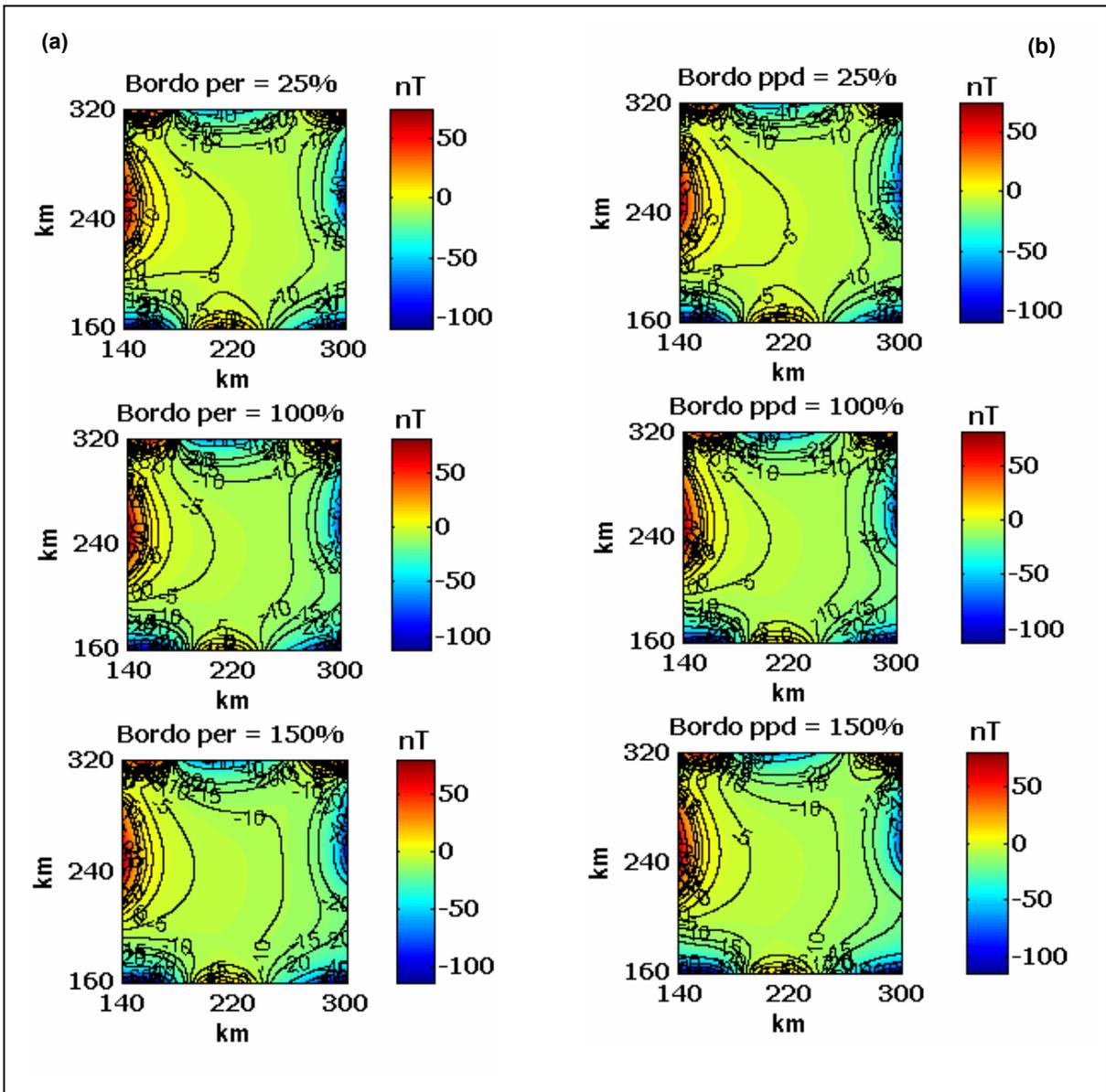
**Figura 1.12.** Scarti in nT tra le continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop, con estensioni di diversa lunghezza, ed il campo a 10 km. L' algoritmo di replicazione 'zpd' (a) non mostra effetti evidenti in base alla lunghezza del bordo; usando invece l' algoritmo Maximum Entropy (b) per estendere la matrice, i risultati sono tra i migliori ottenuti. Con una estensione del bordo uguale al 100% della dimensione del campo si riducono sensibilmente gli effetti dovuti alle anomalie incomplete.



**Figura 1.13.** Scarti in nT tra le continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop con estensioni di diversa lunghezza ed il campo a 10 km. Gli algoritmi smooth padding, 'sp0' (a) e 'sp1' (b), sono da considerarsi molto buoni anche se particolare attenzione deve essere posta quando si usa 'sp1'. In caso di anomalie troncate una eccessiva estensione del bordo può portare all'aggiunta di un importante valore costante nel campo continuato.



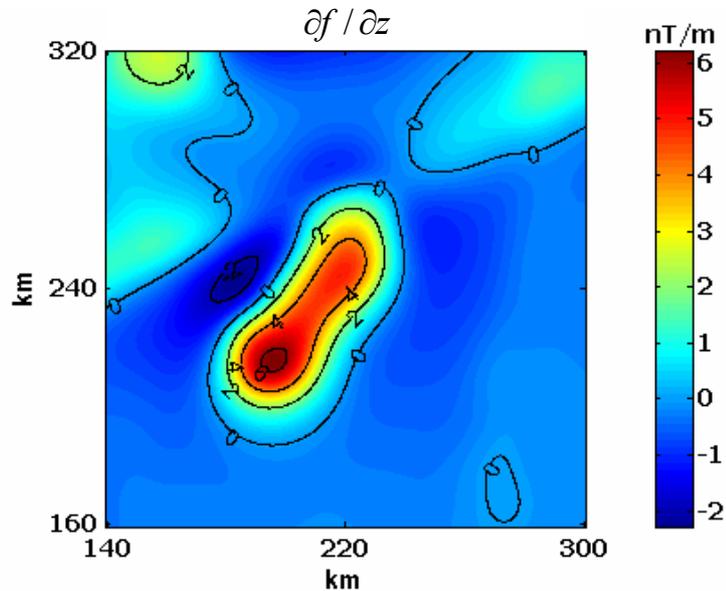
**Figura 1.14.** Scarti in nT tra le continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop con estensioni di diversa lunghezza ed il campo a 10 km. Gli algoritmi simmetrico (a) ed antisimmetrico (b) mostrano risultati abbastanza diversi tra loro. Il primo è da considerarsi accettabile (a), con un ampia fascia centrale di valori di scarto intorno ai 5 nT. Il secondo non è ottimale, con errori di bordo molto evidenti indipendenti dall' estensione del bordo (b).



**Figura 1.15.** Scarti in nT tra le continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop con estensioni di diversa lunghezza ed il campo a 10 km. Gli algoritmi periodici di MatLab, 'per' (a) e 'ppd' (b), non sembrano mostrare alcuna differenza negli scarti sulla continuazione. I risultati di questo tipo di estensione non sono ottimali, molto simili ai risultati che si ottengono non estendendo il campo. Gli errori ai bordi sono molto accentuati e solo una piccola parte al centro si mantiene intorno ai 5 nT.

Al fine di valutare quale tipo di estensione sia più indicata, anche al fine di effettuare un'analisi multiscale sulle derivate del campo, lo stesso test è stato ripetuto a 5 km e a 10 km considerando la derivata prima verticale ed orizzontale, lungo  $x$  ed  $y$ , del campo continuato. Una volta stabilito che, in generale, un'estensione del campo del 100% può essere adeguata per ottenere una buona approssimazione delle frequenze e ridurre gli errori di continuazione, il test è stato effettuato considerando per tutti gli algoritmi un'estensione del

100%. Analogamente al test precedente mostreremo i risultati del confronto con il campo calcolato e derivato a 10 km di altezza.

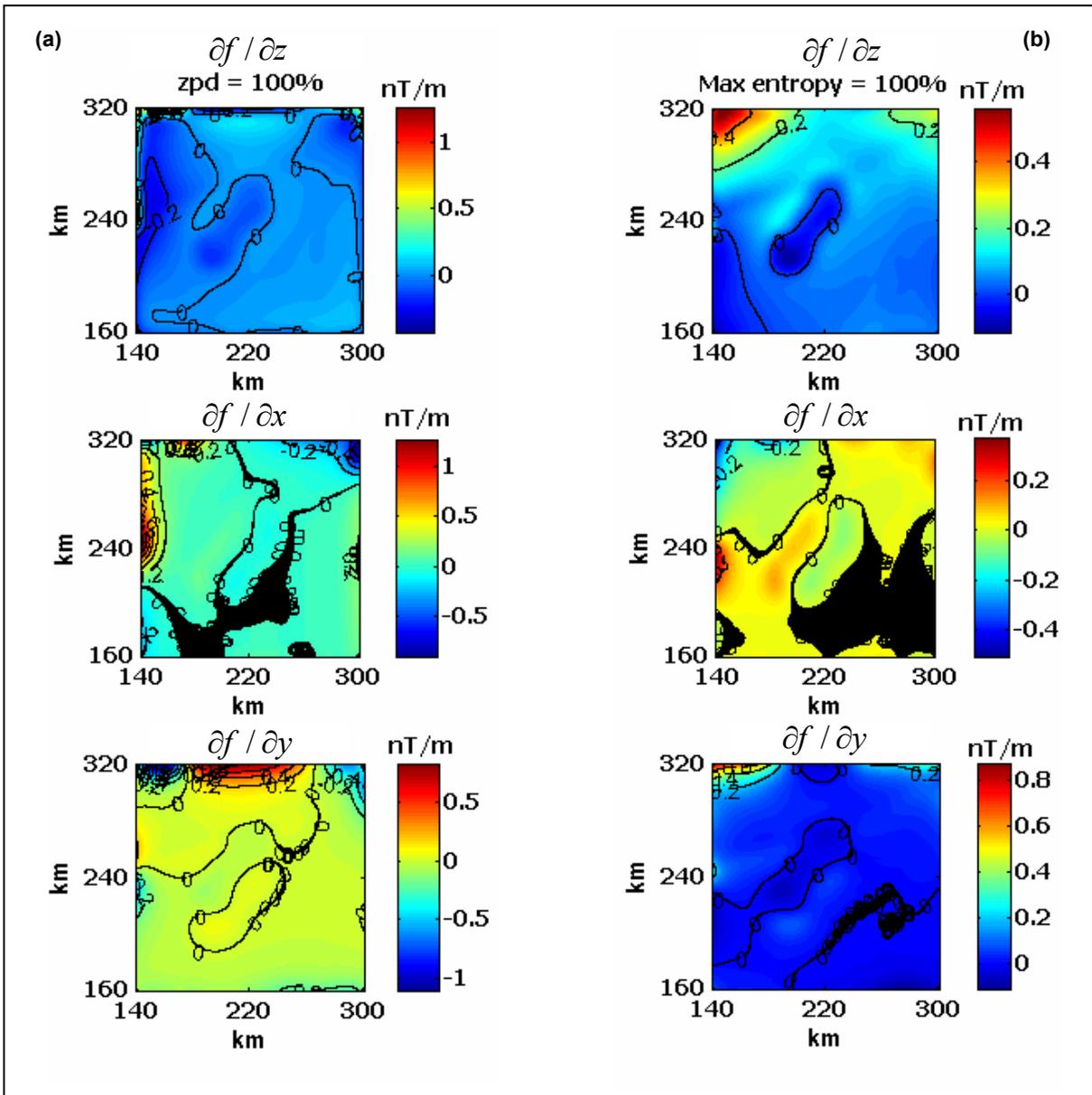


**Figura 1.16.** Derivata lungo  $z$  del campo ( $\partial f / \partial z$ ) calcolato a 10 km di quota. I valori della derivata variano tra -2 e 6 nT/m.

A differenza del test precedente, la prima cosa che salta all'occhio, è che con tutti i tipi di estensione e per i tre tipi di derivata gli errori al bordo sembrano essere notevolmente ridotti. Ovviamente, tra i diversi algoritmi di estrapolazione, ci sono delle differenze nei risultati che ci inducono a fare delle considerazioni sul tipo di estensione utilizzato.

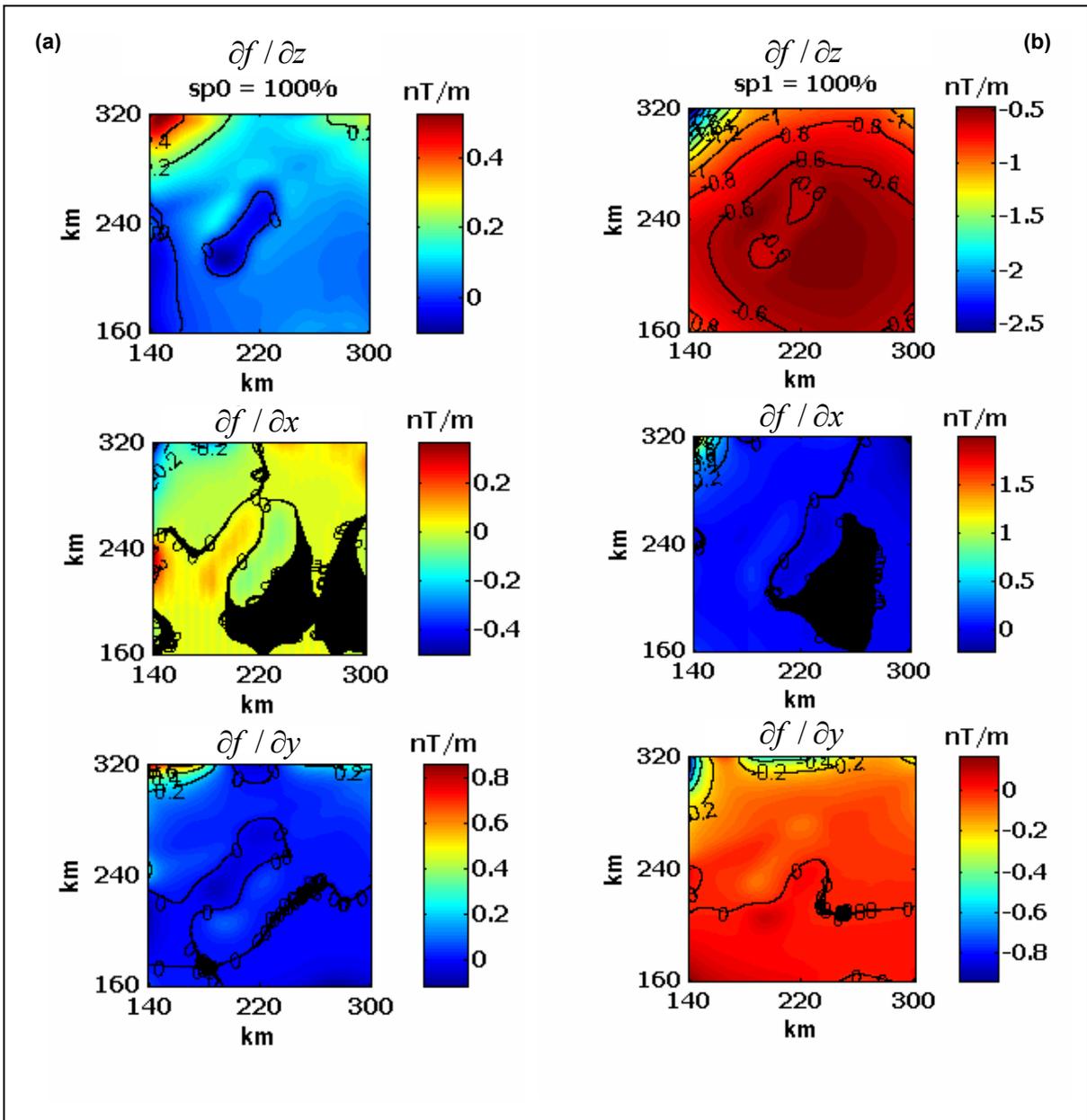
Come nel test precedente, gli algoritmi Maximum Entropy (fig. 1.17 b) e Smooth Padding di ordine 0 (fig. 1.18 a) si sono rivelati molto indicati anche nel caso delle derivate. I valori di scarto per le continuazioni, effettuate con i bordi generati da questi due algoritmi, sono minimi e solo nella parte centrale del campo, con tutte le derivate, è evidente una leggerissima discordanza in corrispondenza dell'anomalia principale. Questo potrebbe dipendere da un lisciamiento maggiore del campo continuato rispetto a quello effettivo.

Usando l'algoritmo Zero Padding invece, quindi assumendo i valori al di fuori del bordo uguali a zero, non si notano grossi problemi causati dalle anomalie incomplete ai bordi (fig. 1.17 a). Gli scarti tra i valori della derivata lungo  $z$  della continuazione al centro sono minimi. Anche le derivate lungo  $x$  ed  $y$  mostrano questo buon accordo al centro del campo, anche se gli errori causati dalle anomalie incomplete sui bordi sono leggermente più evidenti con valori intorno al nT/m. Come per l'esempio precedente, nel nostro caso specifico, i risultati non cambiano molto se il campo viene prolungato con il valor medio dei dati all'interno della finestra al posto degli zero.



**Figura 1.17.** Scarti in nT/m tra le derivate delle continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop e le derivate del campo a 10 km. Usando l' algoritmo di replicazione 'zpd' (a) non si notano grossi problemi causati dalle anomalie incomplete ai bordi. Gli scarti tra i valori della derivata lungo  $z$  della continuazione al centro sono molto vicini allo zero. Usando invece l' algoritmo Maximum Entropy (b) per estendere la matrice i risultati, nel complesso, sono tra i migliori ottenuti, con scarti ridotti anche sui bordi.

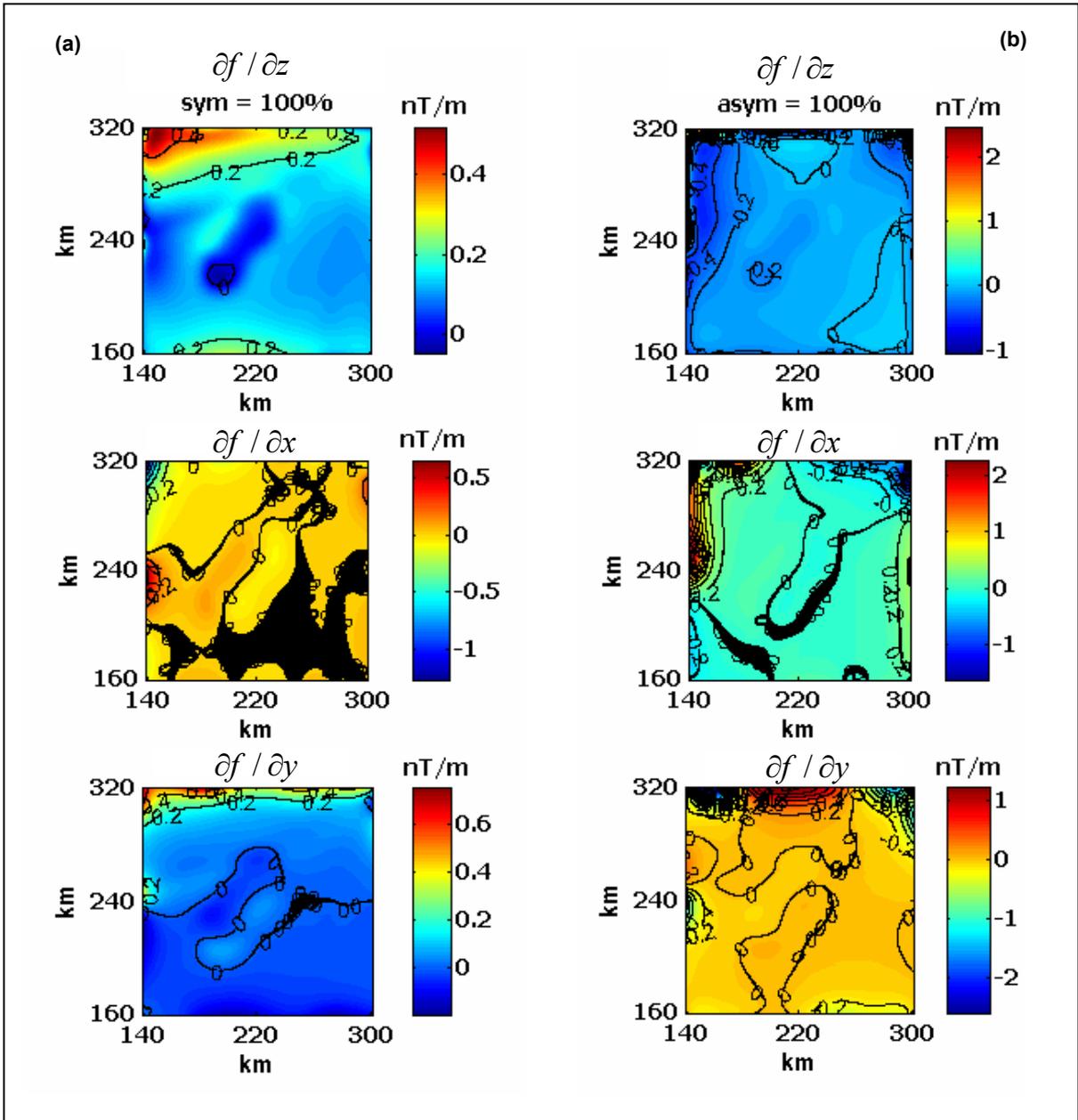
Come nel test precedente, l' algoritmo smooth padding 1 (fig. 1.18 b) mostra risultati della derivata lungo  $z$  poco accettabili mentre i valori delle derivate lungo  $x$  ed  $y$  su una vasta area centrale sono molto buoni, confrontabili con quelli ottenuti da Maximum Entropy e smooth padding di ordine 0.



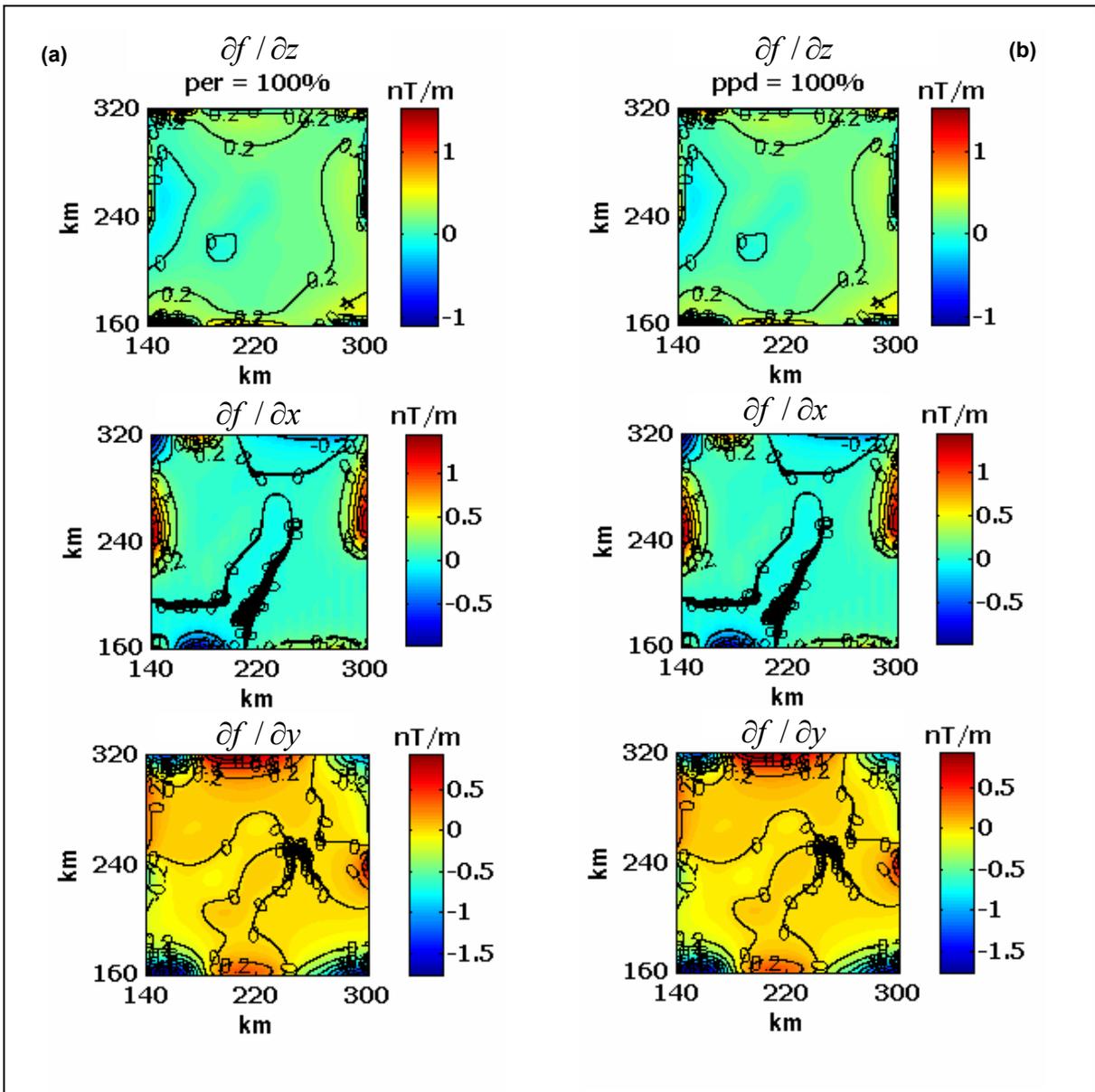
**Figura 1.18.** Scarti in nT/m tra le derivate delle continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop e le derivate del campo a 10 km. Gli algoritmi di Smooth Padding danno risultati abbastanza accettabili. Solo i valori della derivata prima lungo  $z$  usando l' algoritmo Smooth Padding 1 (b) sono poco accettabili. I valori delle derivate lungo  $x$  ed  $y$  su una vasta area centrale sono molto buoni, confrontabili con quelli ottenuti da Smooth Padding 0 (a).

Anche in questo test, usando gli algoritmi simmetrico ed antisimmetrico il risultato è abbastanza diverso tra loro. Usando un estensione simmetrica (fig. 1.19 a) si ottengono valori accettabili delle derivate con scarti non accentuati, intorno ai 0.2 nT/m (2,5 %), anche sui bordi. Usando invece un algoritmo di replicazione antisimmetrica il risultato non è ottimale (fig. 1.19 b), con errori di

bordo molto più evidenti anche sulla derivata lungo  $z$  che mantiene anche al centro uno scarto non trascurabile.



**Figura 1.19.** Scarti in nT/m tra le derivate delle continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop e le derivate del campo a 10 km. Usando un'estensione simmetrica (a) si ottengono valori accettabili delle derivate con scarti intorno ai 0.2 nT/m anche sui bordi. Usando invece un algoritmo di replicazione antisimmetrica il risultato non è ottimale (b), con evidenti errori di bordo anche per la derivata lungo  $z$ .



**Figura 1.20.** Scarti in nT/m tra le derivate delle continuazioni a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop e le derivate del campo a 10 km. Gli algoritmi che assumono una replicazione periodica 'per' (a) e 'ppd' (b) non sembrano mostrare alcuna differenza nel risultato delle derivate della continuazione. I risultati di questo tipo di estensione sono molto simili ai risultati che si ottengono non usando alcun bordo. Gli errori ai bordi sono molto accentuati e nelle derivate lungo  $x$  ed  $y$  sono anche più estesi. Solo nella parte centrale della derivata lungo  $z$  si nota un buon accordo in corrispondenza dell'anomalia principale.

Come per l'esempio precedente anche qui gli algoritmi che assumono una replicazione periodica ('per' e 'ppd') non sembrano mostrare alcuna differenza nel risultato delle derivate della continuazione (fig. 1.20). I risultati di questo tipo di estensione non sono ottimali, molto simili ai risultati che si ottengono non usando

alcun bordo. Gli errori ai bordi sono molto accentuati e nelle derivate lungo  $x$  ed  $y$  sono anche più estesi. Solo nella parte centrale della derivata lungo  $z$  si nota un buon accordo in corrispondenza dell'anomalia principale.

## 1.5 Conclusioni

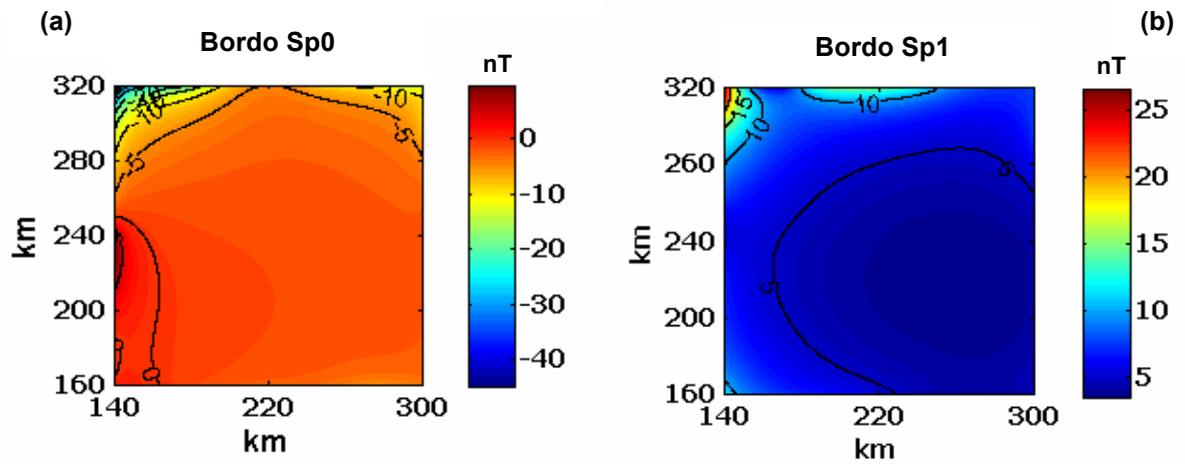
Dall'osservazione delle differenze tra i dati della parte centrale del modello di Bishop a 5 km e a 10 km ed i risultati ottenuti continuando il campo dalla quota 0, rispettivamente alle quote 5 km e 10 km, e dall'osservazione degli scarti delle rispettive derivate alle quote 5 km e 10 km possiamo affermare che ai fini di una corretta analisi multiscala è indicato:

1. Evitare se possibile che il campo da analizzare abbia anomalie troncate improvvisamente.
2. Quando possibile completare le anomalie troncate con dati reali anche a bassa risoluzione (vedi par. 2.8)
3. Nel caso non sia possibile estendere il campo o completare le anomalie con dei dati reali, avvalersi di un algoritmo di estrapolazione per creare dei dati sintetici al bordo di una lunghezza pari a perlomeno quella del campo da analizzare (estensione del 100%).
4. Prestare attenzione al tipo di bordo estrapolato, infatti dai test effettuati è emerso che è indicato usare l'algoritmo di replicazione Maximum Entropy o in alternativa Smooth Padding di ordine 0, 'sp0' di MatLab. Questi algoritmi garantiscono una ricostruzione molto buona al di fuori del bordo anche per l'uso di derivate.
5. Nel caso in cui non si disponesse di un algoritmo di estrapolazione è comunque indicato estendere i dati del campo con valori pari a zero o al valor medio del campo.

E' anche chiaro che tutti gli errori di estrapolazione diminuiscono se il campo è più liscio.

La figura 1.21a mostra che nel nostro caso, effettuando la continuazione verso l'alto della parte centrale del modello di Bishop da 5 km a 10 km ed usando un bordo ottenuto con l'algoritmo di estrapolazione 'sp0' pari alla larghezza del campo (estensione del 100%), l'area continuata è priva di errori di bordo dovuti ad improvvisi tagli di anomalie ed è interessata solo da un piccolo errore di continuazione  $< 5$  nT (1,6 %). Questi risultati suggeriscono che la conoscenza di dati di campo perlomeno a due quote migliorerebbe la continuazione, introducendo solo errori trascurabili anche per continuazioni a livelli molto alti. In alcuni casi l'acquisizione dati a più livelli già esiste, basti pensare al fatto che alcune volte, quando possibile, i sondaggi a quota da aereo sono ripetuti anche al

livello del mare e quindi possono essere considerati per una migliore interpretazione multiscala.



**Figura 1.21.** Scarti in nT tra le continuazioni da 5 km a 10 km effettuate sulla parte centrale del modello di Bishop ed il campo a 10 km, usando un'estensione pari al 100%. Partendo da quote più alte, gli errori di bordo sono notevolmente ridotti, sia usando una estensione di tipo 'sp0' (a) che di tipo 'sp1' (b). Il campo è interessato solo da un piccolo errore di continuazione intorno ai 5 nT.

## Capitolo 2

---

L'analisi lungo ridge e la Funzione di Scala

## 2.1 L'equazione di omogeneità di Eulero come base teorica

In questo lavoro di tesi l'analisi multiscala dei campi di potenziale è finalizzata alla determinazione dei parametri che caratterizzano le sorgenti del campo: forma e profondità.

Le metodologie d'analisi dei campi di potenziale e gli algoritmi d'inversione più diffusi usano le misure del campo ad una sola quota, la quale può variare a seconda del tipo di sondaggio. Questo genere di approccio è definito mono-scala in quanto il campo è analizzato ad una sola quota o scala. Una di queste metodologie d'analisi, molto conosciuta in letteratura, è la Deconvoluzione di Eulero. Essa è una tecnica basata sulla soluzione dell'equazione:

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y} + z \frac{\partial T}{\partial z} = -NT \quad (2.1)$$

che è legata da una condizione necessaria e sufficiente alla relazione di omogeneità di Eulero:

$$T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\beta T(x, y, z) \quad (2.2)$$

dove  $T$  è il campo misurato nella posizione  $(x, y, z)$ . Le funzioni che soddisfano la (2.1) e/o la (2.2) sono dette funzioni omogenee.

$N$  è un parametro chiamato Indice Strutturale (SI) ed è legato al grado di omogeneità del campo ( $\beta$ ):  $N = -\beta$ . Quindi esso è anche legato da una relazione lineare:

$$N = -\beta - \gamma \quad (2.3)$$

al grado di omogeneità della sorgente,  $\alpha = \beta + \gamma$  (Moreau et al. 1999), dove  $\gamma$  è l'ordine di derivazione. L'Indice Strutturale rappresenta l'indice di decadimento del campo con la distanza, indica cioè se il campo decade seguendo una legge lineare (SI=1), quadratica (SI=2) o cubica (SI=3), e così via. l'Indice Strutturale può essere importante per l'interpretazione dei campi di potenziale in quanto la sorgente dell'anomalia è in tal caso caratterizzata come una forma semplice (tipo cilindro, sfera ecc.), il che può essere visto anche come guida nel costruire modelli interpretativi più raffinati (forward modeling). Inoltre, dalla conoscenza della posizione e della forma della sorgente, altri parametri, come la suscettività ad esempio, possono essere determinati.

Negli anni, la Deconvoluzione di Eulero è diventata uno strumento standard per le rapide applicazioni semi-automatizzate delle metodologie di interpretazione. Il suo successo deriva dalla sua flessibilità, fornendo la posizione della sorgente e dell'Indice Strutturale ( $N = -\beta$ ) per vari tipi di sorgenti "one-point" (sorgente puntiforme, linea di dipoli orizzontale e verticale, piano infinto orizzontale e verticale, contatto magnetico semi infinto, par. 2.3).

Gli algoritmi della Deconvoluzione di Eulero, però, sono particolarmente sensibili ai campi regionali ed al noise (FitzGerald et al., 2004). La presenza di campi regionali è stata la principale causa per la formulazione di una strategia proposta da Thompson (1982), con un approccio basato sull'uso di una finestra mobile nella quale il campo regionale può essere approssimato da un valore costante. Questa costante di fondo ( $B$ ) e l'Indice Strutturale sono accoppiati nella equazione di Eulero:

$$(x - x_0) \frac{\partial T}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial T}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial T}{\partial z} = -NT - BT \quad (2.4)$$

dove  $(x_0, y_0, z_0)$  è la posizione della sorgente. Con questo approccio però, si è notato che la stima simultanea di  $N$ ,  $B$  and  $z_0$  non è stabile. Per questo motivo Reid (1990) suggerì di inserire a priori il valore dell'Indice Strutturale per ottenere la posizione  $(x_0, z_0)$  della sorgente ed il valore di  $B$ . In ogni caso questo approccio soffre di un certo grado di soggettività perchè la scelta di  $N$  influenza direttamente la stima della profondità. Di qui diversi approcci sono stati proposti per risolvere il problema del campo di fondo ed ottenere anche  $N$  come incognita (Reid et al. 1990; Stavrev, 1997; Hsu, 2002; Nabighian and Hansen, 2001). Da allora, sono stati proposti altri metodi che stimano gli stessi parametri di campi associabili a funzioni omogenee, quali la profondità della sorgente e la forma tra i quali menzioniamo i lavori di Smith et al., 1998; Salem and Ravat, 2003, i metodi della *Trasformata Continua di Wavelet* (p. es.: Moreau et al., 1997, Hornby et al., 1999), i metodi DEXP (Fedi, 2007), ScalFun (Fedi et al. 2006), EULZ (Florio et al. 2006) ed il metodo di Multiridge analysis e Reduced Euler Deconvolution (Florio et al. 2007). Questi metodi usano simultaneamente dati a diverse altezze per stimare i parametri della sorgente; esiste in letteratura un approccio geometrico per la stima di  $z_0$  ed una varietà di altri approcci per la determinazione indipendente di  $N$ , o simultanea di  $N$  e di  $z_0$ . Questi metodi, confrontati con la Deconvoluzione di Eulero, hanno ridotta sensibilità al noise, perchè nel campo continuato il noise ad alta frequenza è naturalmente attenuato.

## 2.2 Definizione di ridge e l'approccio geometrico

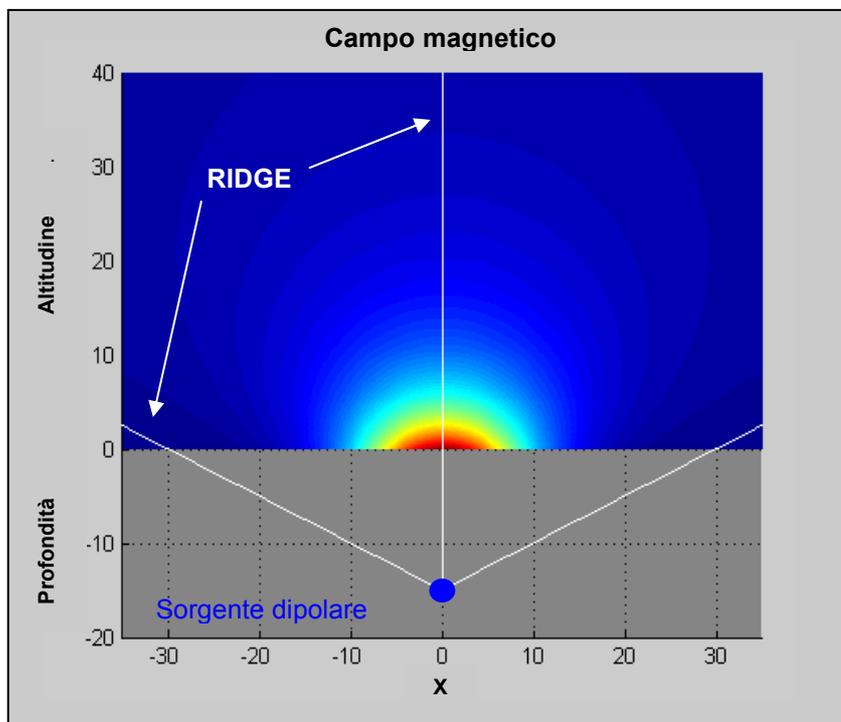
Dalla teoria delle Wavelet, selezionando i massimi del gradiente orizzontale del campo continuato ad ogni altezza lungo un piano verticale, è possibile ottenere una stima della profondità della sorgente. Questa procedura è molto simile a quella introdotta da Mallat e Hwang, (1992), per visualizzare i bordi di un oggetto (edges) nell'analisi delle immagini. Gli autori definirono edges di un oggetto i massimi locali del modulo del gradiente ad una data scala e mostrarono che le linee che uniscono questi massimi ai diversi livelli di risoluzione (ridge), puntano verso le singolarità sui bordi dell'oggetto alla scala di misura. Quindi, i così detti ridge sono definiti come linee verticali che uniscono i massimi del campo a più quote e puntano direttamente sulla singolarità. Nel caso dei campi di

potenziale le singolarità non sono al livello di misura ma generalmente si trovano ad una quota più profonda. In ogni caso i ridge possono essere definiti nella regione armonica e poi prolungati verso il basso, verso la posizione della singolarità sulla sorgente (Moreau et al., 1997). Come conseguenza della dilatazione dei campi di potenziale con la quota il modulo del campo sviluppa i propri ridge come strutture di tipo conico. Ad esempio (Florio et al. 2007), nel caso un'anomalia magnetica generata da una sorgente puntiforme, situata in  $Q(x_0, y_0, z_0)$  i ridge lungo il piano  $y=y_0$  avranno equazione:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 \\
 x &= -2z_0 + 2z - x_0 \\
 x &= 2z_0 - 2z - x_0
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

L'approccio geometrico consiste sostanzialmente in:

1. Individuare i massimi relativi del campo ad ogni scala.
2. concatenare verticalmente i massimi usando un algoritmo appropriato che tenga conto della minima distanza.
3. Tracciare le rette di regressione tra i massimi del campo concatenati.
4. Individuare i punti di intersezione tra le rette: la posizione della sorgente.



**Figura 2.1.** Sezione verticale del campo magnetico generato da una sorgente monopolare e relativi ridge. Il prolungamento dei ridge (eq. 2.5) converge verso il punto singolare del campo identificando la posizione della sorgente.

Come notato da Mallat e Hwang (1992) le singolarità o le zone di improvvisa variazione dell' intensità del segnale spesso portano importanti informazioni sul segnale stesso. Quindi, analizzare il campo lungo uno dei suoi ridge può essere una strategia vincente, inoltre, lungo i ridge l' ampiezza del campo è massima e quindi c' è un buon rapporto segnale/rumore.

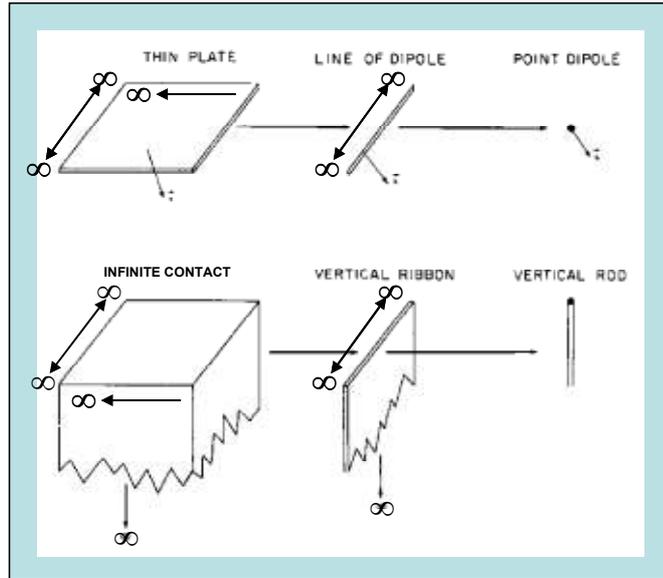
### 2.3 Sorgenti one-point

In questo contesto si innesta il filone particolare delle varie metodologie d'analisi dei campi di potenziale che ci proponiamo di analizzare. Esso si applica alle funzioni omogenee e i metodi che ne derivano seguono un approccio multiscala. Tutti questi metodi derivano da metodologie di inversione e/o analisi che basano le proprie tecniche, come del resto anche la Deconvoluzione di Eulero, su teorie che assumono sorgenti così dette one-point. Queste sorgenti generano un campo che è riconducibile a quello generato da sorgenti puntiformi equivalenti (one-point appunto) situate, a seconda dei casi, al centro della sorgente stessa (sorgente sferica) o sulla superficie superiore della stessa. Strutture geologiche riconducibili a sorgenti one-point sono tutte quelle di tipo sferico (cavità, reservoir magmatici, masse sepolte, ecc), cilindrico (tubazioni, canali sotterranei, infiltrazioni di inquinanti), planare (dicchi, sill e contatti geologici) tutti con contrasti di densità o suscettività apprezzabili. La geometria semplice di queste sorgenti ha permesso altresì, di ricavare facilmente le formule teoriche del tasso di decadimento del campo con la distanza. Stavrev (1997) fornisce una descrizione dettagliata dei tipi di sorgenti omogenee e dei relativi campi. Quindi, l' uso delle sorgenti one-point è particolarmente apprezzato sia per la varietà di sorgenti reali che può rappresentare ma anche perché è possibile ricavare delle stime semplici dell' indice strutturale, le quali possono essere poi prese in considerazione durante i successivi processi di inversione e procedere verso forme di modeling più dettagliate (Barbosa et al. 1999).

Sorgente	Dim. Infinite	SI Mag.	SI Grav.
Contatto	3	0	--
Sill, Dicco	2	1	0
Cilindro	1	2	1
Sfera	0	3	2

**Tabella 2.1.** Indici Strutturali di sorgenti one-point per il caso magnetico e gravimetrico.

In tabella 2.1 sono riassunti i principali tipi di sorgenti one-point con i relativi Indici Strutturali. Esse sono sorgente puntiforme (sfera), linea di dipoli orizzontale (cilindro) e verticale (dicco), piano infinito orizzontale(sill) e verticale (dicco), piano semi infinito (contatto magnetico).



**Figura 2.2.** Esempio di sorgenti one-point e relative dimensioni infinite, modificato da Sailach et. al 2003.

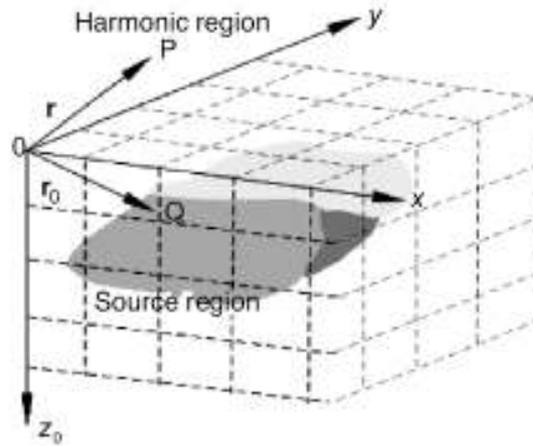
## 2.4 La funzione di scala

In letteratura recente è stata introdotta la teoria della DEXP (Fedi, 2007) dalla quale derivano diversi algoritmi multiscala per la stima della profondità e dei parametri di forma della sorgente. La DEXP si basa sullo “scaling” del campo a diverse altezze, seguendo una specifica legge analiticamente determinata e, nei casi reali, stimabile da un’analisi dei dati stessi. In questo contesto si innesta il concetto di funzione di scala (Fedi et al. 2006, Fedi 2007) che permette, oltre ad una stima simultanea della profondità e dell’indice strutturale, anche una stima indipendente di quest’ultimo dalla profondità. L’immediato vantaggio di questa tecnica è la rapidità e la stabilità d’analisi, dato l’uso di dati a più quote, lungo i ridge del campo. In questo capitolo mostreremo alcune applicazioni di questa metodologia lungo sezioni verticali del campo continuato ma prima daremo alcuni cenni sulla teoria del metodo ScalFun (Fedi, 2007).

Consideriamo un qualsiasi campo di potenziale Newtoniano, compreso le sue derivate di grado  $n$ , il campo magnetico, quello gravimetrico e così via:

$$f(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{M(\mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|_2} d^3 \mathbf{r}_0, \quad (2.6)$$

dove  $k$  è una costante fisica legata alla natura del campo,  $M$  è la densità della sorgente, e  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_0$  sono i vettori posizione ai punti  $P$  e  $Q$  nelle regioni armoniche e delle sorgenti rispettivamente (fig. 2.3).



**Figura 2.3.** I vettori posizione  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}_0$  indicano i punti del campo nella regione armonica  $P_r$  e delle sorgenti  $Q_{r_0}$ . Da Fedi et al. 2007.

Consideriamo adesso una qualsiasi derivata ennesima lungo  $z$  del potenziale Newtoniano di una sorgente puntiforme in  $\mathbf{r}_0=(0,0, z_0)$  ed un piano passante per la sorgente ( $x=x_0, y=y_0$ )

$$f_n(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (2.7)$$

La funzione di scala  $\tau_n$  è definita come:

$$\tau_n = \frac{\partial \log(f_n(z))}{\partial \log(z)} \quad (2.8)$$

Tali funzioni sono omogenee di grado  $(n+1)$  e sviluppando si ha:

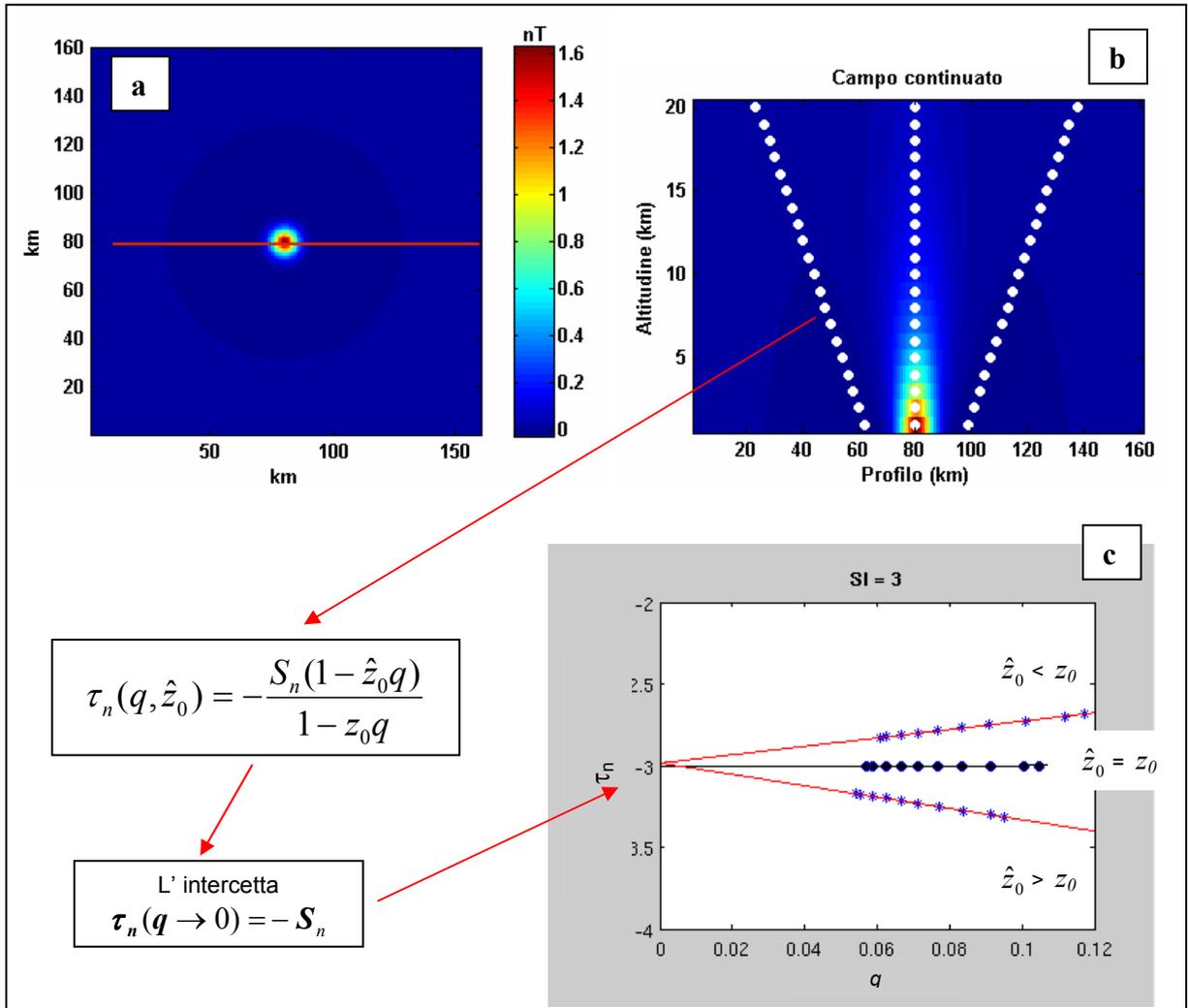
$$\tau_n = -\frac{(n+1)z}{z - z_0} = \frac{-S_n z}{z - z_0} \quad (2.9)$$

Dove  $S_n = n+1$  corrisponde all'Indice Strutturale della Deconvoluzione di Eulero, pari cioè all'opposto del grado di omogeneità del campo. Si noti che  $S_1$  è l'Indice Strutturale per il caso gravimetrico,  $S_2$  per il magnetico caso e che  $S_{n+1} = S_n + 1$ . La funzione di scaling è quindi funzione della profondità della sorgente  $z_0$ , di  $S_n$  e della quota  $z$ .

Seguendo Fedi (2007) è possibile effettuare il cambio di variabile  $z=1/q$ . In tal caso la (2.9) diventa:

$$\tau_n(q) = -\frac{S_n}{1 - z_0 q} \quad (2.10),$$

Quindi l'intercetta [ $\tau_n(q \rightarrow 0) = -S_n$ ] della funzione di scala (2.10) fornisce una stima indipendente dell' Indice Strutturale per un qualsiasi valore della profondità (fig. 2.4).



**Figura 2.4.** Esempio schematico dell' applicazione del metodo ScalFun. Dal profilo selezionato passante sull' anomalia (a) si estrae la sezione verticale del campo continuato 3D dove vengono messi in evidenza i ridge (b). I valori del campo lungo il ridge selezionato,  $z=1/q$ , sono analizzati con l' equazione 2.9. Il risultato dell' analisi (c) mostra che il metodo permette la stima indipendente dell' Indice Strutturale.

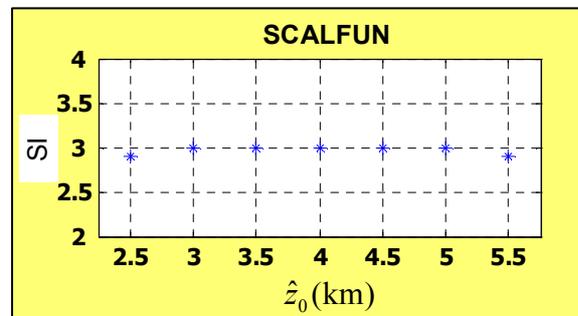
La stima della profondità invece avviene usando il fatto che la quota del livello zero è arbitraria e quindi le quote possono essere riscalate come  $z - \hat{z}_0$ .

Per ogni dato  $\hat{z}_0$  la corrispondente funzione di scala è:

$$\tau_n(q, \hat{z}_0) = -\frac{S_n(1 - \hat{z}_0 q)}{1 - z_0 q} \quad (2.11)$$

Essa sarà una funzione di  $q$  crescente, decrescente o costante rispettivamente per valori di  $\hat{z}_0$  minori, maggiori o uguali al vero valore di  $z_0$ , (Fedi et al., 2006). Il valore della profondità della sorgente si otterrà quindi variando i valori delle profondità supposte, indipendentemente dall'Indice Strutturale, e scegliendo il valore di  $\hat{z}_0$  che rende costante la funzione di scaling.

I vantaggi di questo metodo sono la facilità di implementazione, la velocità di esecuzione e la grande stabilità che permette di utilizzare efficacemente anche derivate dei campi di potenziale di ordine elevato, il che garantisce un'elevata risoluzione a livello interpretativo. Inoltre come mostrato in figura 2.5 esiste una buona stabilità nella stima dell'Indice Strutturale al variare di  $\hat{z}_0$ .



**Figura 2.5.** Stime dell'indice strutturale di una sorgente dipolare posta a 4 km di profondità. La figura mostra che per differenti valori di  $\hat{z}_0$  la stima dell'Indice Strutturale è molto stabile.

## 2.5 Criterio di consistenza lungo i ridge

Durante lo sviluppo della tesi è stato introdotto un approccio particolare per la determinazione dei parametri della sorgente. Il metodo si basa sullo studio dei massimi del campo e su di un particolare criterio per la discriminazione delle soluzioni.

Come già spiegato nel paragrafo 2.2 i massimi del campo alle diverse altezze si allineano lungo delle linee più o meno rette, dette ridge, che convergono verso la posizione della sorgente. La via migliore per determinare le coordinate della singolarità è quella di prolungare i ridge ed unirli fino a trovare il punto d'intersezione: la posizione della sorgente. Riassumendo, l'analisi lungo ridge può essere sia di tipo geometrico per la stima della posizione della sorgente, che analitico per la determinazione di forma e profondità (par. 2.4). Data la stabilità nella stima dell'Indice Strutturale con il metodo ScalFun è stato possibile

considerare un particolare approccio del metodo in combinazione con quello geometrico.

Il metodo consiste nel determinare, in un primo momento, la profondità della sorgente lungo sezioni verticali con l'approccio geometrico descritto in precedenza, e di stimare in un secondo momento l'Indice Strutturale inserendo il valore di profondità suggerito dal metodo geometrico nell'equazione 2.9. E' doveroso aggiungere, che le stime di profondità e di indice strutturale possono essere anche effettuate in modo indipendente con gli altri metodi basati sulla funzione di scala (Fedi e Florio, 2006).

Quando il campo è sufficientemente indisturbato, le stime dell'Indice Strutturale ottenute applicando il metodo ScalFun a tutti i ridge che convergono verso la stessa sorgente sono pressoché uguali. Questa consistenza delle soluzioni è indice di una buona credibilità delle stime. Invece, nel caso di un campo più disturbato, dove la presenza di rumore e gli effetti di interferenza tra più sorgenti non sono trascurabili, l'analisi dei ridge relativi alla stessa sorgente può dare stime non consistenti dei parametri della sorgente. Questa inconsistenza tra le soluzioni relative alla stessa sorgente fornisce una ambiguità nella stima dell'Indice strutturale. In ogni caso è da tener presente che in questo caso, dato che comunque i ridge potrebbero apparire curvati, anche la profondità stimata con il metodo geometrico è inficiata da un errore non trascurabile.

Alle volte non c'è consistenza tra le stime perché, i diversi ridge concorrenti verso la stessa sorgente sono interessati, a vario modo, dagli effetti dovuti ai corpi vicini e dal rumore, spesso presente nei casi più realistici. Infatti, i corpi vicini possono produrre nel campo analizzato effetti che sono diversi alle diverse quote. Ad esempio i campi prodotti da due corpi con masse diverse e posti a profondità diverse hanno decadimenti diversi per lo stesso set di quote. Il noise invece, dovuto a errori strumentali ed a sorgenti superficiali, è maggiore soprattutto alle quote più basse, mentre gli effetti di bordo sono maggiori alle quote più alte. Data la dilatazione del campo con l'altezza, man mano che aumentano le quote si introduce un errore dovuto alla mancanza di informazione sulle sorgenti all'esterno del campo (cap. 1).

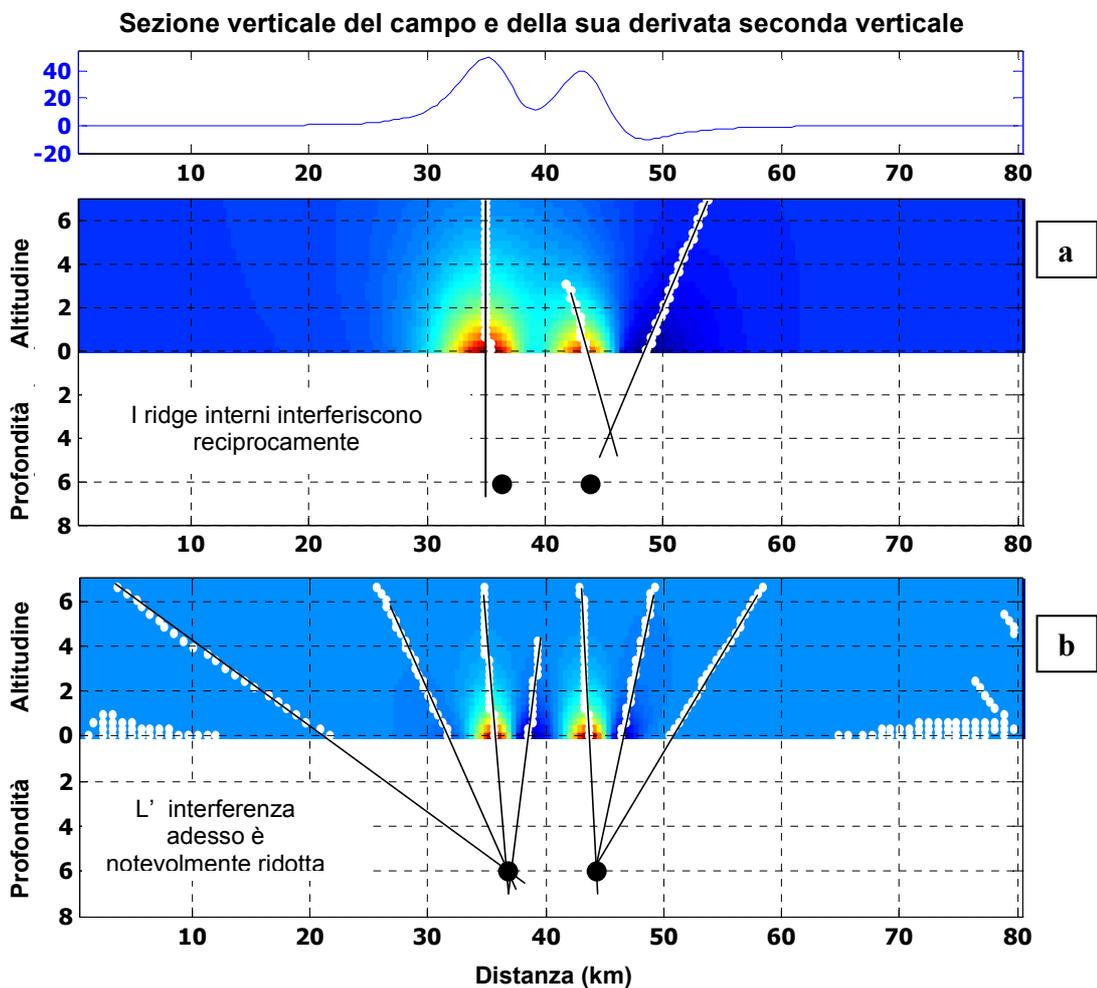
Per questi motivi è stato necessario definire e testare un nuovo criterio per la valutazione dell'attendibilità delle soluzioni e conseguente discriminazione delle stesse: il criterio di consistenza per l'analisi lungo ridge (Fedi et al. 2007).

Il criterio stabilisce che le stime accettabili degli Indici Strutturali dei ridge che convergono verso la stessa sorgente debbano coincidere. Seguendo questo criterio è possibile discriminare le soluzioni non attendibili ed incrementare la qualità delle stime degli Indici Strutturali e le stime della profondità ottenute con il metodo geometrico.

A questo punto è chiaro che per migliorare la consistenza delle stime bisogna ridurre il grado di interferenza. Il primo passo per migliorare la consistenza è quello di creare un buon set di dati multiscala dove gli effetti di bordo siano minimi; per questo è opportuno creare un bordo esterno di una certa dimensione usando un algoritmo adeguato per l'estrapolazione (Fedi et al. 2006). Nel capitolo

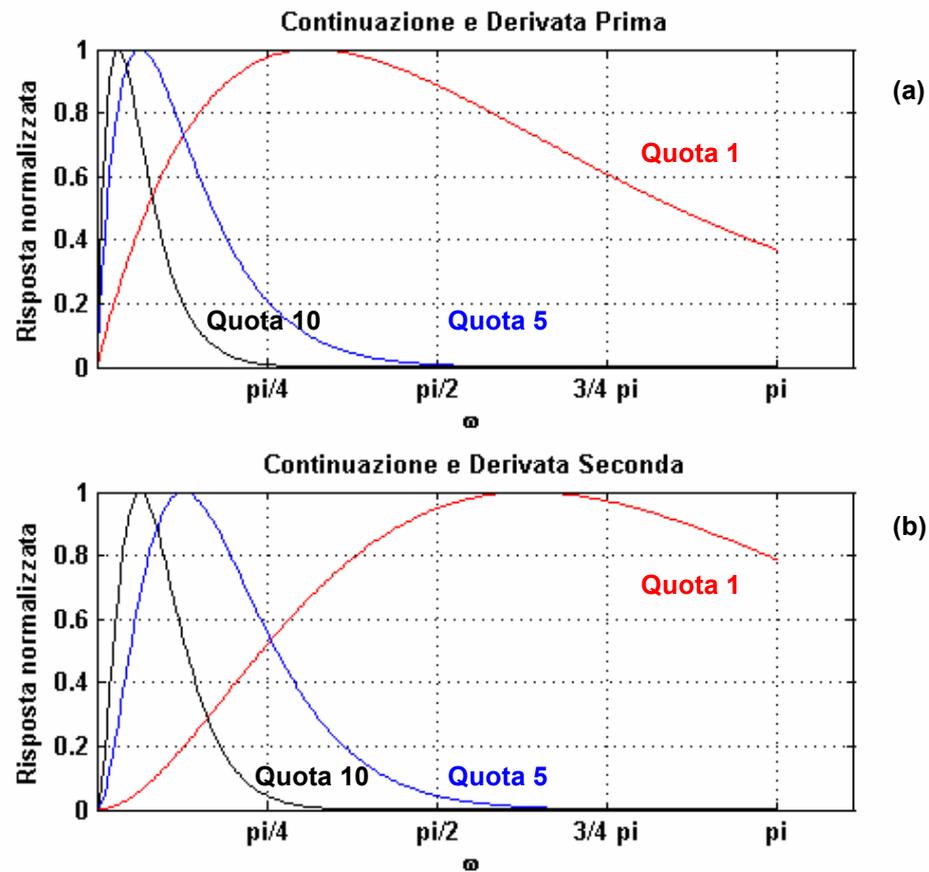
precedente abbiamo mostrato che la scelta di un'extrapolazione adeguata e delle giuste dimensioni è necessario per ridurre gli errori di continuazione.

Un passo successivo per il pre-processing dei dati può essere quello di usare derivate direzionali del campo per ridurre le interferenze reciproche tra le sorgenti vicine ed isolare così le anomalie (fig. 2.6). E' bene ricordare che l'uso di derivate nell'analisi multiscala dei campi di potenziale è possibile anche per casi relativamente disturbati da noise in quanto questo metodo è dotato di grande stabilità. L'analisi multiscala si avvantaggia delle proprietà di filtro passa bassa della continuazione verso l'alto ed infatti il prodotto dei due operatori matematici, continuazione e derivata, è un passa banda (fig. 2.7).

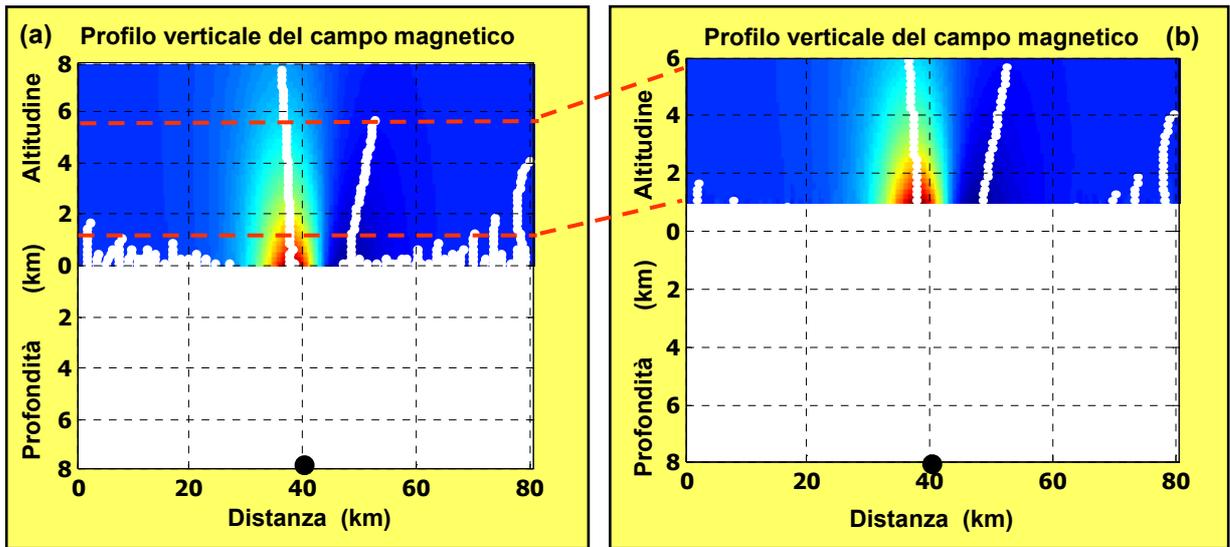


**Figura 2.6.** Anomalie magnetiche ( $i = 60^\circ$ ) generate da due sorgenti sferiche vicine. La sezione verticale del campo mostra che l'interferenza tra le sorgenti non permette ai ridge interni di svilupparsi (a). Questa interferenza porta ad una inconsistenza delle stime effettuate dall'analisi sui ridge e anche la profondità stimata col metodo geometrico è errata. La sezione della derivata verticale seconda del campo invece mostra il maggior potere risolutivo delle derivate (b). Le anomalie adesso sono ben separate e i ridge indicano chiaramente la profondità delle sorgenti.

L'ultimo passo è quello di scegliere il miglior set di quote da analizzare. E' infatti utile trovare il giusto compromesso tra le proprietà liscianti della continuazione verso l'alto e gli effetti di bordo. A tal fine è possibile scartare le quote più basse che sono generalmente disturbate da noise e quelle più alte se hanno sensibili errori di continuazione (fig. 2.8).



**Figura 2.7.** Risposte in frequenza normalizzate della continuazione con derivate verticali di ordine primo (a) e secondo (b) alle quote 1 km, 5 km e 10 km. Dalle figure si evince che a seconda della quota di continuazione l'operatore unico è un filtro passa-banda che tende al passa-bassa all'aumentare delle quote.



**Figura 2.8.** In figura è mostrato l' intervallo di quote che da il giusto compromesso tra effetti dovuti al noise, che influenzano soprattutto le quote più basse (a), e gli errori di continuazione.

Nei paragrafi successivi mostreremo una particolare applicazione della metodologia ScalFun lungo sezioni verticali del campo continuato in combinazione con il metodo geometrico. Il nostro approccio consiste nello stimare la profondità con il metodo geometrico e nell' applicare il metodo ScalFun ai ridge che convergono verso la stessa sorgente cercando di risolvere le interferenze e raggiungere stime coerenti dell' Indice Strutturale. Se non si riesce a raggiungere una buona consistenza allora entrambe le soluzioni, quella dell' Indice Strutturale trovata con ScalFun e quella di profondità determinata con il metodo geometrico, saranno considerate non accettabili.

## 2.6 Applicazione al modello di Bishop

Questo nuovo approccio è stato testato sul modello magnetico di Bishop (cap. 1) ridotto al polo, dove sono state effettuate stime indipendenti dell' Indice Strutturale considerando le profondità suggerite dal metodo geometrico.

Per comodità computazionale il modello, che ha una estensione molto ampia (160000 km<sup>2</sup> circa), è stato diviso in 18 finestre di area ridotta nelle quali il metodo è stato applicato a più di 100 profili (fig. 2.9). A titolo di esempio la figura 2.10 mostra l' applicazione del metodo su una parte disturbata del modello dove gli effetti dovuti al bordo della finestra selezionata e alle sorgenti vicine interferiscono la stima dei parametri della sorgente. La linea rossa indica il profilo lungo cui è stata estratta la sezione verticale del campo (fig. 2.10 a). Nei casi complessi, come quello in esame, dove le anomalie non hanno una forma

semplice, deve essere posta particolare attenzione nella scelta del profilo in modo che tagli le anomalie in modo simmetrico rispetto al massimo ed al minimo. Questa buona norma, che aiuta a mantenere alto il rapporto segnale rumore, è stata presa in considerazione durante tutto il processo di analisi.

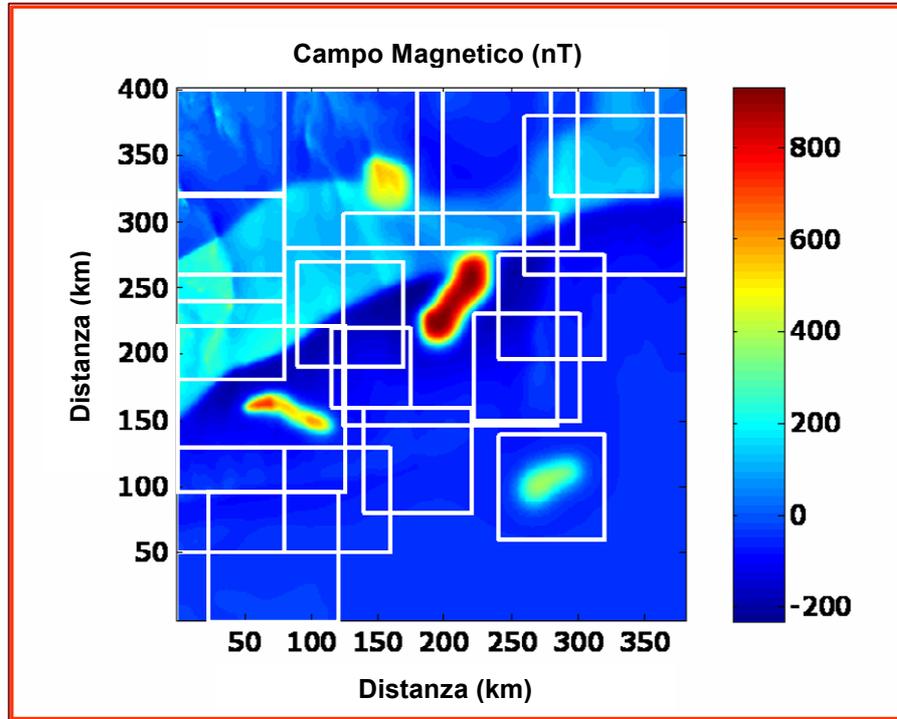


Figura 2.9. Schematizzazione delle finestre nelle quali è stata svolta l'analisi.

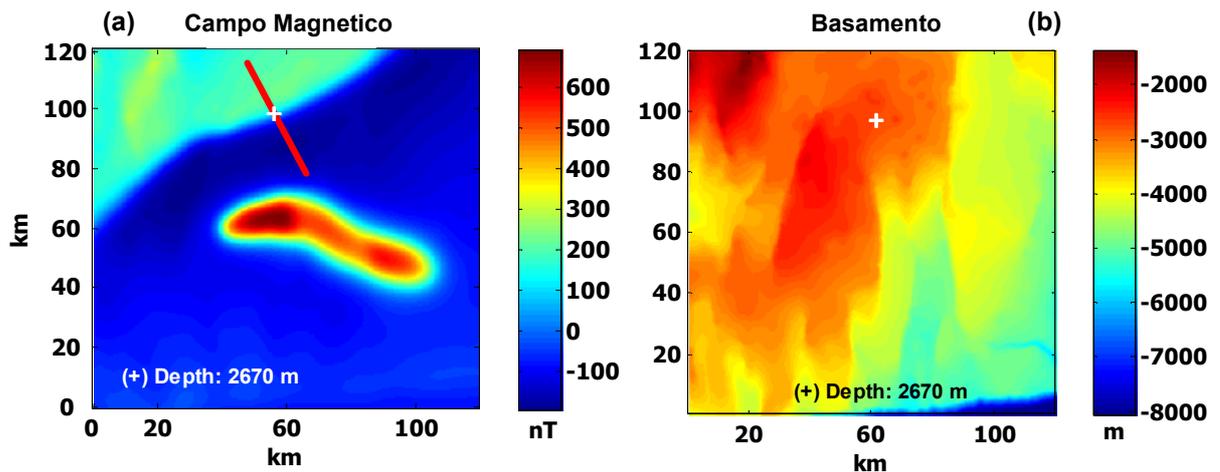
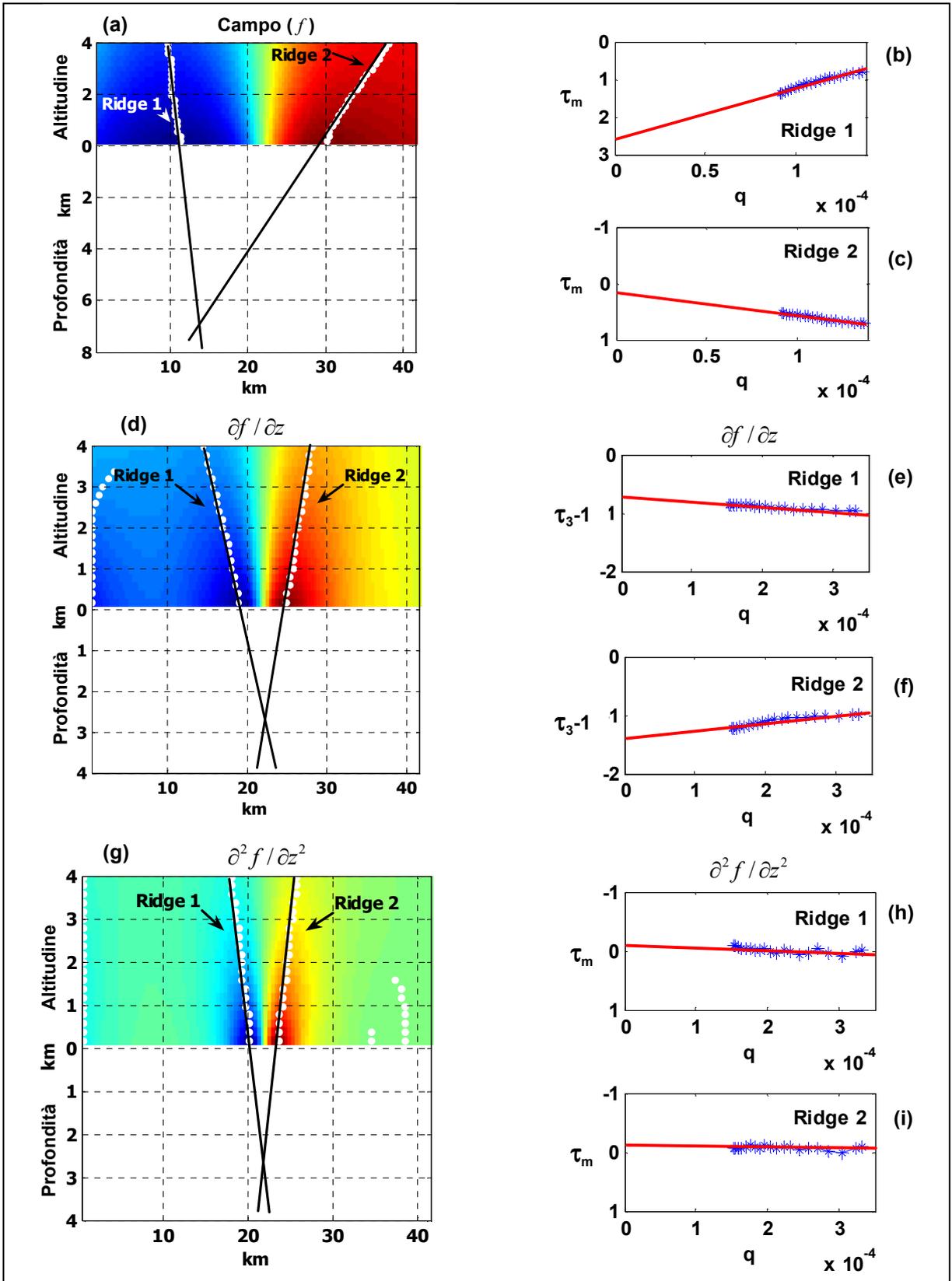


Figura 2.10. Profilo sul campo magnetico (a) lungo il quale è stato estratta la sezione del campo continuato. La profondità dell'intersezione tra il profilo ed il contatto magnetico è indicata da un marker nella corrispondente porzione di basamento (b).



**Figura 2.11.** Sezioni verticali del campo e delle sue derivate lungo il profilo mostrato in figura 2.10. Le derivate aiutano ad aumentare la consistenza delle stime dei parametri della sorgente ottenute con ScalFun.

L'anomalia analizzata (fig. 2.10 a), generata da un contatto magnetico, è disturbata da un'altra evidente anomalia sulla destra e dagli errori di continuazione dovuti al bordo<sup>3</sup>, come ci si aspetta che sia in un'area periferica.

La figura 2.10 b invece, mostra la porzione di basamento relativa alla finestra selezionata dove un marker (croce bianca) evidenzia la profondità del basamento in corrispondenza dell'anomalia, l'intersezione cioè tra il profilo ed il contatto magnetico. La figura mostra come il metodo geometrico (fig. 2.11 a), quando non supportato da una stima consistente dell'indice strutturale (fig. 2.11 b-c) può dare stime di profondità errate a causa delle interferenze. Dall'analisi lungo i ridge del campo non derivato e dal confronto con gli Indici Strutturali attesi (0 per il contatto magnetico tab. 2.1) è evidente che è il ridge 1 (fig. 2.11 b) a soffrire maggiore interferenza. Nonostante il ridge sembri poco disturbato, dato l'andamento abbastanza lineare, le stime dell'Indice Strutturale, basate sui valori dei massimi del campo e non sulle posizioni, mostrano che il campo continuato è evidentemente disturbato dall'anomalia presente nella parte centrale.

Derivando il campo è possibile isolare l'anomalia analizzata dagli effetti delle sorgenti vicine e dagli effetti di bordo, in questo modo si ottiene una stima consistente dell'Indice Strutturale. La figura mostra come già con la derivata lungo  $z$  del primo ordine, le stime dell'Indice Strutturale migliorano e di conseguenza anche quelle di profondità (fig. 2.11 d-f), ma la consistenza non è raggiunta perché gli effetti di interferenza non sono ancora del tutto eliminati. Anzi questa volta anche il ridge 2 mostra una evidente interferenza alle quote più alte dovuta ad effetti di bordo (fig. 2.11 f).

Usando la derivata lungo  $z$  del secondo ordine invece le interferenze sono risolte e le stime sono consistenti (fig. 2.11 g-i); allora, seguendo il criterio di consistenza delle soluzioni così stabilito, le stime dell'Indice Strutturale e di profondità ottenuta col metodo geometrico sono accettate. La consistenza è mantenuta anche per ordini di derivata superiori fino a che il noise introdotto da ordini di derivata troppo elevati non sporca il particolare set di quote scelto per le stime. La figura 2.11 mostra che la profondità così stimata è prossima a quella reale e che l'Indice Strutturale è in accordo con il tipo di sorgente che ha generato l'anomalia (tab. 2.1).

I risultati ottenuti dall'analisi condotta sul modello di Bishop sono stati sintetizzati nella figura 2.12, dove abbiamo notato un buon accordo tra gli Indici Strutturali trovati e quelli attesi. Le stime di profondità e dell'Indice Strutturale più accurate, quindi molto prossime alla profondità reale del basamento e coerenti con il tipo di sorgente associata all'anomalia, sono state ottenute lungo i contrasti di suscettività aggiunti per dare differente magnetizzazione al basamento. Questi contrasti di magnetizzazione sono stati aggiunti dagli autori del modello per rappresentare anche corpi intrusivi profondi, geologicamente

---

<sup>3</sup> In questo esempio a scopo illustrativo gli errori di bordo sono stati volontariamente accentuati non eseguendo una estensione della matrice con i dati reali.

dicchi verticali, per i quali l'Indice Strutturale atteso è prossimo ad 1. In realtà l'Indice Strutturale trovato è però, nella maggior parte dei casi, prossimo a 0 dato che i corpi intrusivi sono abbastanza estesi da essere risolti lungo i bordi come contatti magnetici (fig. 2.12).

Una così accurata stima dei parametri della sorgente è dovuta al basso rapporto segnale rumore dato a sua volta dall'elevato contrasto di magnetizzazione tra i corpi adiacenti. E' possibile notare anche come alle volte l'SI relativo ad alcuni contatti sia uguale ad 1, soprattutto dove i corpi intrusivi sono più sottili (tipo dicco) come nella parte più a est dell'anomalia di sud est e in quella di sud ovest (fig. 2.12). Anche lungo il contatto magnetico nella parte nord - nord ovest del modello l'Indice Strutturale è prossimo ad 1 a causa della maggiore interferenza dovuta alla topografia (articolata e più superficiale) ed alla particolare geometria del contatto.

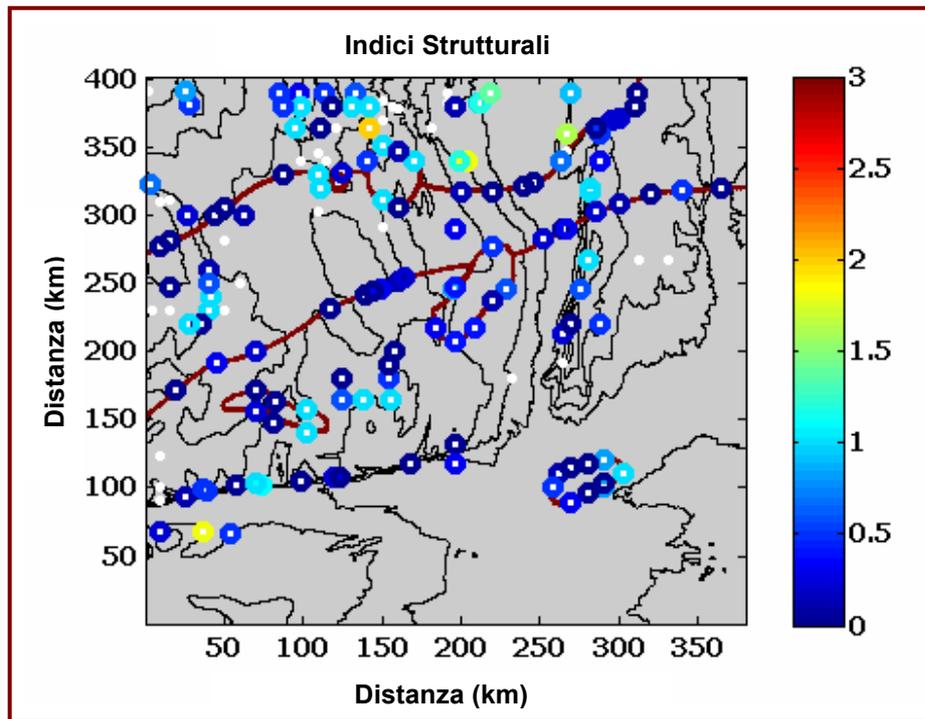
Lungo le faglie principali, cioè quelle orientate nord sud ed est ovest, l'Indice Strutturale è generalmente uguale a 0, perchè il grande rigetto e la mancanza di materiale magnetizzato lungo i piani di faglia, rendono il caso simile ad un contatto con un corpo meno magnetizzato.

Qualche volta gli alti topografici sono contraddistinti da un Indice Strutturale uguale ad 1, altre volte, se le anomalie hanno una forma allungata a causa della topografia, l'SI è vicino a 2, assimilando la sorgente ad un cilindro, come ad esempio nella parte sud ovest. Questo è vero anche per la parte nord del modello dove le interferenze reciproche tra le anomalie impediscono una corretta stima dell'Indice Strutturale.

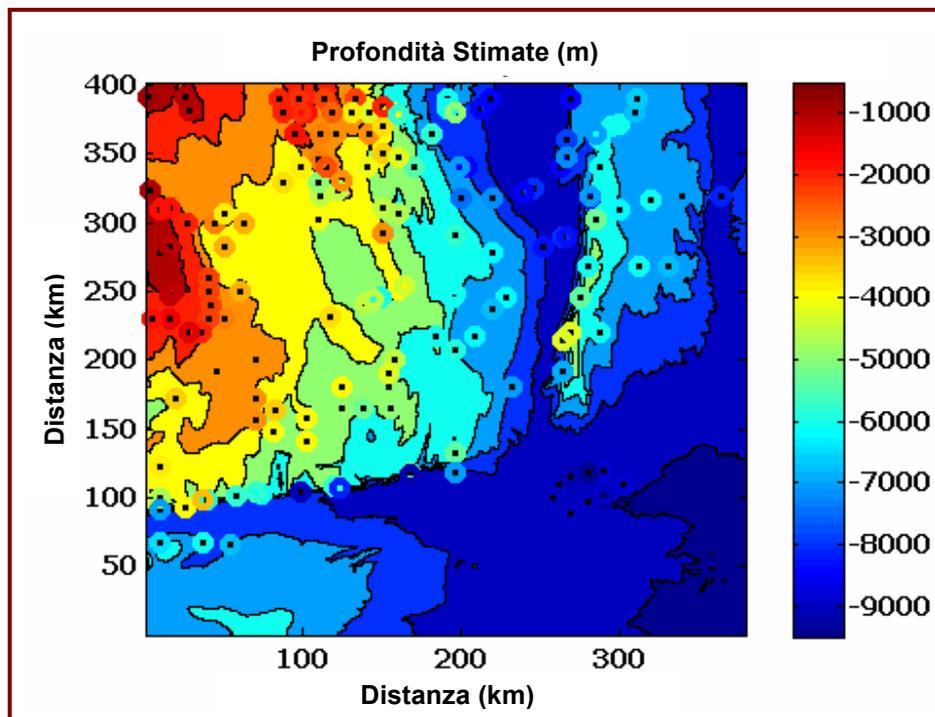
Nella figura 2.12, i punti bianchi indicano la posizione dove è stato possibile raggiungere una stima della profondità attraverso stime consistenti dell'Indice Strutturale ma con valori non realistici: SI negativi o maggiori di tre. Nel resto del basamento l'Indice Strutturale è vicino a 0.6 in accordo con altri studi effettuati sul modello magnetico di Bishop (citare reid).

L'analisi effettuata con l'approccio descritto, non dà nessuna informazione consistente riguardo la profondità della parte sud est del modello magnetico di Bishop. Questo avviene probabilmente perchè non vi è un apprezzabile contrasto di magnetizzazione dovuto alla topografia che è molto profonda e poco articolata.

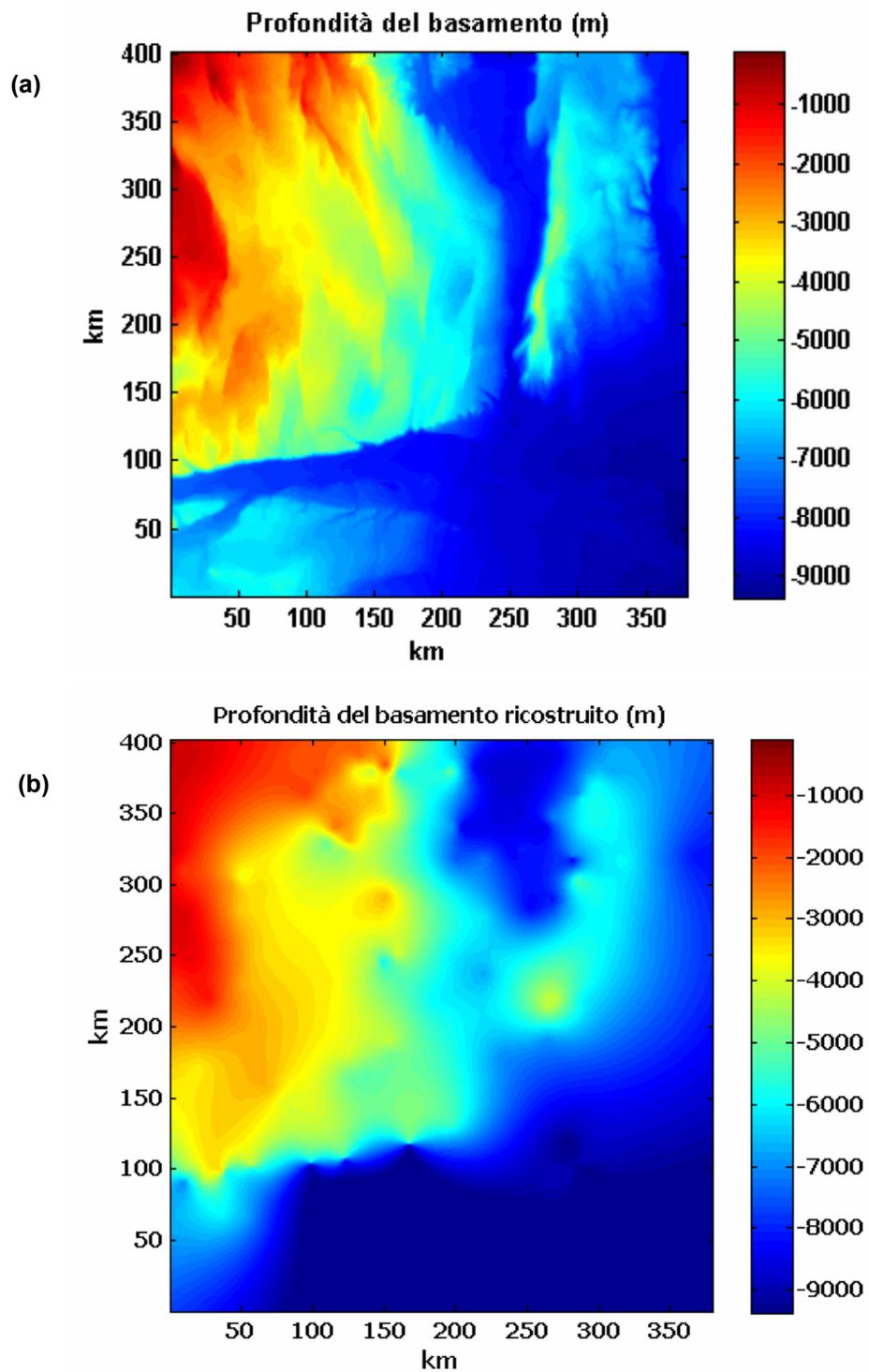
La figura 2.13 invece mostra le ottime stime di profondità ottenute seguendo questo approccio e graficate sulla reale profondità del basamento. Interpolando bidimensionalmente le stime di profondità ottenute è stato possibile effettuare una ricostruzione del basamento abbastanza coerente con la reale topografia del basamento (fig. 2.14).



**Figura 2.12.** Posizione delle stime degli Indici Strutturali. I valori accettabili sono compresi tra 0 e 3. I punti bianchi indicano dove è stato comunque possibile stimare la profondità.



**Figura 2.13.** Confronto tra le stime di profondità e la reale profondità del basamento. I valori derivano tutti da una stima consistente dell' Indice Strutturale.



**Figura 2.14.** Confronto tra profondità reale del basamento di Bishop (a) e del basamento ricostruito a partire dai valori di profondità stimati con l'approccio basato sul criterio di consistenza (b).

## 2.7 Metodo Multiridge

Recentemente è stato introdotto in letteratura un approccio basato sullo studio simultaneo dei ridge di ordine differente (Florio et al., 2007). Il metodo, denominato Multiridge, consiste nell' applicare le equazioni ridotte di Eulero lungo i ridge formati dai massimi del campo e della sua derivata prima orizzontale e dai valori che annullano la derivata prima verticale. Il metodo prevede anche un approccio geometrico per la stima della profondità della sorgente, con i ridge così formati. Il metodo si applica a sezioni verticali del campo e delle sue derivate e gode di grande stabilità nonostante l' uso di derivate di ordine elevato (par. 2.2 e 2.4).

In questo lavoro di tesi è stata applicata una variante del metodo. Il principio è semplice, in quanto si tratta di visualizzare simultaneamente i ridge formati dai massimi del campo, della sua derivata prima verticale e della sua derivata prima orizzontale ed applicare il metodo geometrico Multiridge.

Le considerazioni che scaturiscono dall' applicazione del metodo geometrico fino al raggiungimento di stime consistenti dell' Indice Strutturale suggeriscono che è possibile applicare questo particolare approccio, basato sullo studio simultaneo dei ridge che corrispondono a campi di vario ordine di derivazione. Dallo studio delle variazioni della stima di profondità con l' aumentare degli ordini di derivata, si evince che la stima di profondità con il metodo geometrico varia fino al raggiungimento della consistenza ottenuta dallo studio analitico dei ridge. Da questa osservazione si è posta la base per valutare l' applicabilità del solo metodo geometrico Multiridge, basato esclusivamente sulla posizione dei massimi del campo e delle sue derivate alle diverse quote.

Una volta scelto il profilo lungo cui effettuare l'analisi Multiridge possiamo graficare contemporaneamente i massimi del campo e delle sue derivate. I ridge così prolungati si intersecano nella posizione della sorgente come per il metodo geometrico descritto nei paragrafi precedenti. Il vantaggio è che questo metodo usa un numero maggiore di ridge concorrenti verso la stessa sorgente ed originati da campi diversi in modo da fornire stime di profondità consistenti anche senza analisi analitica.

La stima di profondità così determinata è più accurata in quanto sfrutta l'informazione ridondante rispetto alla stessa sorgente, molto utile soprattutto nei casi ad elevato disturbo dove la formazione di ridge ben sviluppati non è favorita.

Questo metodo è stato testato sui dati del campo magnetico relativo ad un area interessata da diapirismo salino, nel bacino di Capo Nord (Nordkapp bacin) nel mare di Barents, di fronte le coste Norvegesi (fig. 2.15).

## 2.8 Il Bacino Nordkapp

Il bacino di Nordkapp, situato nella parte sud ovest del mare di Barents, di fronte le coste Norvegesi, si estende per circa 300 km con una orientazione Nord – NordEst Sud - SudOvest. Il bacino è legato alla fase di rift che ha interessato la regione nel tardo Paleozoico ed è caratterizzato da numerosi diapiri salini e strutture a cuscino lungo i margini. (Johansen et al. 1992; Gudlaugsson et. al. 1998, Bugge et al. 2002).



**Figura 2.15.** Bacino di Capo Nord (linea tratteggiata). Il riquadro indica l' area analizzata.

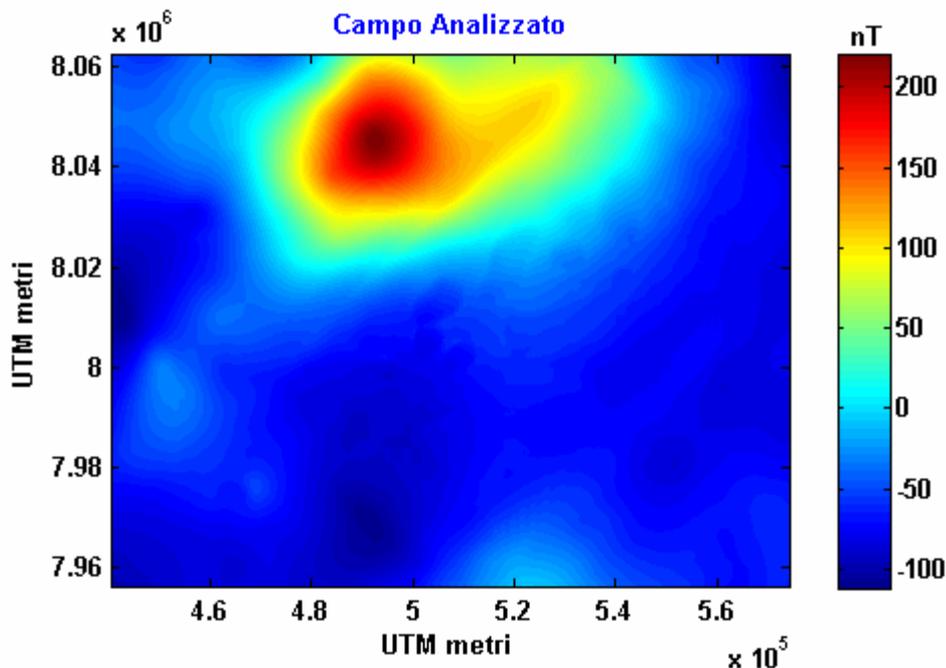
Il bacino originario fu probabilmente formato durante l' estensione regionale del tardo Devoniano. Una nuova fase di rift ha interessato l'area durante il Carbonifero, nella quale su di un area più grande dell'attuale bacino, si sono depositate le prime evaporati. Durante il triassico il bacino è stato interessato da condizioni sedimentarie di acque poco profonde e con apporti di sedimenti da sud dovute alla formazione delle piattaforme di Barents. Dalla stratigrafia si evince che la zona fu interessata da subsidenza, una delle cause dei primi movimenti degli strati di sale e della formazione di lenti saline. Molti altri episodi di riattivazione salina sono avvenuti dal giurassico ad oggi, ma il principale evento responsabile delle attuali geometrie dei duomi è una tettonica regionale di compressione riconducibile al terziario medio (Nielsen et al. 1995). Come conseguenza il bacino fu portato allo scoperto e profondamente eroso durante il Pliocene ed il Pleistocene. Si stima che possano essere stati erosi tra i 500 ed i 1200 metri di sedimenti e che l'erosione abbia rimosso tutti gli strati terziari fino a portare rocce mesozoiche a contatto con i diapiri salini. L'area da allora è stata nuovamente interessata da subsidenza e si stima che ci sia una sottile copertura quaternaria dai circa 20 fino ai 50 metri. Nel bacino, l' attuale fondo marino si trova tra i 300 ed i 500 metri sotto il livello del mare (Johansen et al. 1992, Nielsen et al. 1993, Gudlaugsson et. al. 1998).

Le esplorazioni petrolifere in questo bacino sono iniziate negli anni '80, dove un ruolo di primaria importanza è svolto dalle trappole di sale la cui presenza è stata confermata dagli ultimi sondaggi in foro. La localizzazione e la determinazione della profondità di queste strutture può essere molto importante ai fini esplorativi.

I dati magnetici dell' area, che sono ad alta risoluzione con un passo di campionamento di 200 metri, sono stati usati per testare il nuovo approccio Multiridge su di un caso reale di particolare interesse economico-scientifico. I dati si riferiscono alla parte Sud-Ovest del bacino di Capo Nord e ci sono stati forniti dalla Dr. Fichler della Statoil Hydro insieme a dati a bassa risoluzione dell' area circostante, in modo da poter costruire un set di dati multiscala ideale (cap. 1).

I dati dell' area ad alta e a bassa risoluzione, infatti, sono stati uniti usando una funzione ad hoc di GeoSoft, chiamata Grid Knitting (fig. 2.16).

Come si vede dalla figura, l' area analizzata è interessata da un trend magnetico orientato NW SE dovuto alla geometria del basamento magnetico profondo, che in quella parte del bacino è stimato essere intorno ai 14 km di profondità (Joahnsen et al 1992). A questo punto è necessario fare una considerazione in proposito e cioè che gli effetti dovuti alla geometria del basamento sono visibili soprattutto a grande scala, mentre a scale più piccole è possibile analizzare gli effetti originatosi negli strati più superficiali (Fedi et. al., 2004).



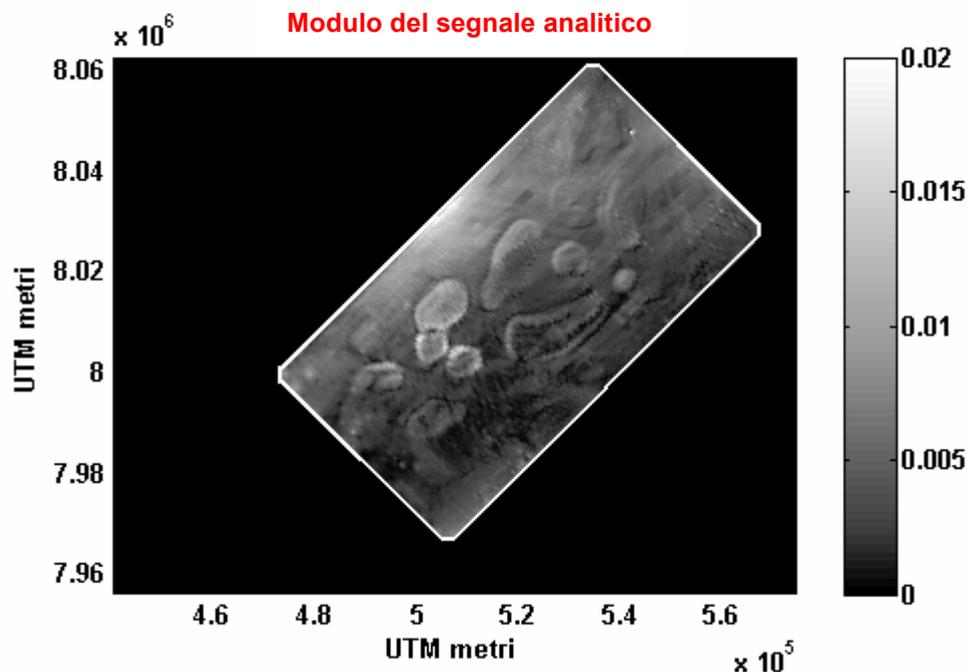
**Figura 2.16.** Mappa del campo risultante dall' unione dei dati a scala regionale e di quelli ad alta risoluzione al di sopra dei diapiri salini.

Dalla stratigrafia dell' area si evince che i contrasti di magnetizzazione più evidenti per le strutture superficiali si hanno a contatto con i duomi salini la cui magnetizzazione è leggermente negativa (-2  $\mu\text{gs}$ ). Inoltre, è di particolare interesse la presenza di pirite e siderite nelle formazioni del cretaceo inferiore (Bugge et al. 2002) che aumentano la suscettività magnetica degli strati che la contengono. Di formazione idrotermale, la si trova infatti laddove la circolazione di fluidi era più abbondante, soprattutto a contatto con i duomi salini che in quel periodo iniziavano a collocarsi.

## 2.9 Analisi e discussione dei dati del bacino di Capo Nord

Una prima analisi dell' area applicando il metodo Multiridge, è stata eseguita a bassa scala per evidenziare gli effetti dovuti al contrasto di magnetizzazione delle strutture più superficiali, come i duomi salini, con gli strati circostanti considerato che il basamento magnetico nell' area si trova a circa 14 km di profondità (Joanshen, 1992).

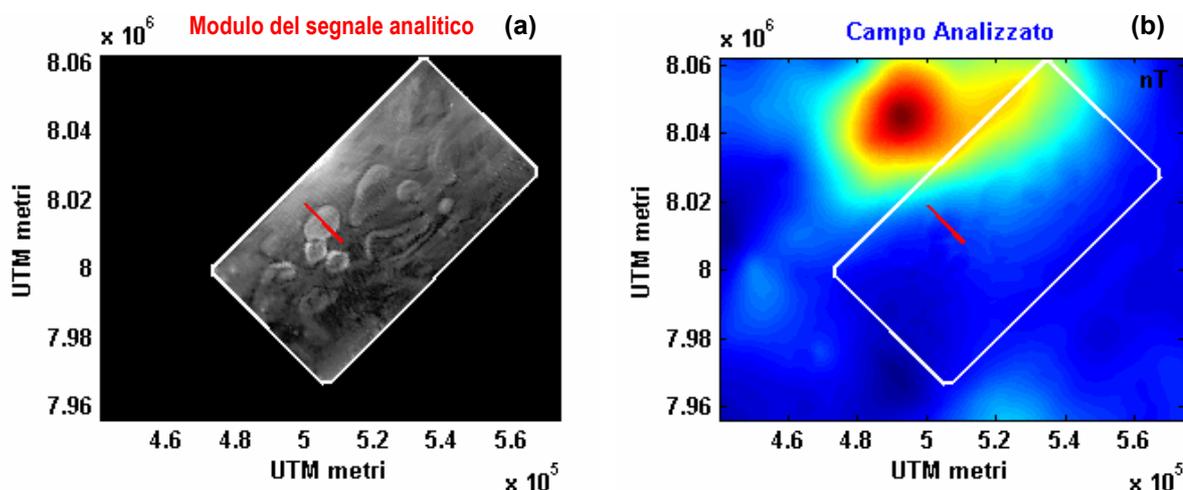
La figura 2.16 mostra che la scelta del profilo da cui estrarre le sezioni verticali del campo è ostacolata da un trend dominante e dal basso contrasto di magnetizzazione tra le strutture superficiali. Quindi, al fine di evidenziare al meglio le anomalie più superficiali e favorire la scelta delle sezioni verticali è stato calcolato il segnale analitico dei dati ad alta risoluzione (fig. 2.17).



**Figura 2.17.** Mappa del modulo del segnale analitico dei dati ad alta risoluzione al di sopra dei diapiri salini. Buona parte delle strutture individuate sono con ogni probabilità legate al diapirismo.

L' algoritmo del metodo Multiridge permette di scegliere il profilo sulla mappa del segnale analitico, alla quota di misura, e di estrarre le sezioni verticali del campo continuato e delle sue derivate dalla mappa del campo, estesa con i dati a bassa risoluzione (fig. 2.18).

Con questo approccio è stato possibile concentrare l' analisi sulle aree di maggiore contrasto magnetico in modo da tenere il più alto possibile il rapporto segnale rumore. Queste aree, difficilmente valutabili altrimenti, molto probabilmente coincidono con i bordi dei diapiri salini data la sensibile differenza di suscettività tra le strutture e gli strati circostanti.



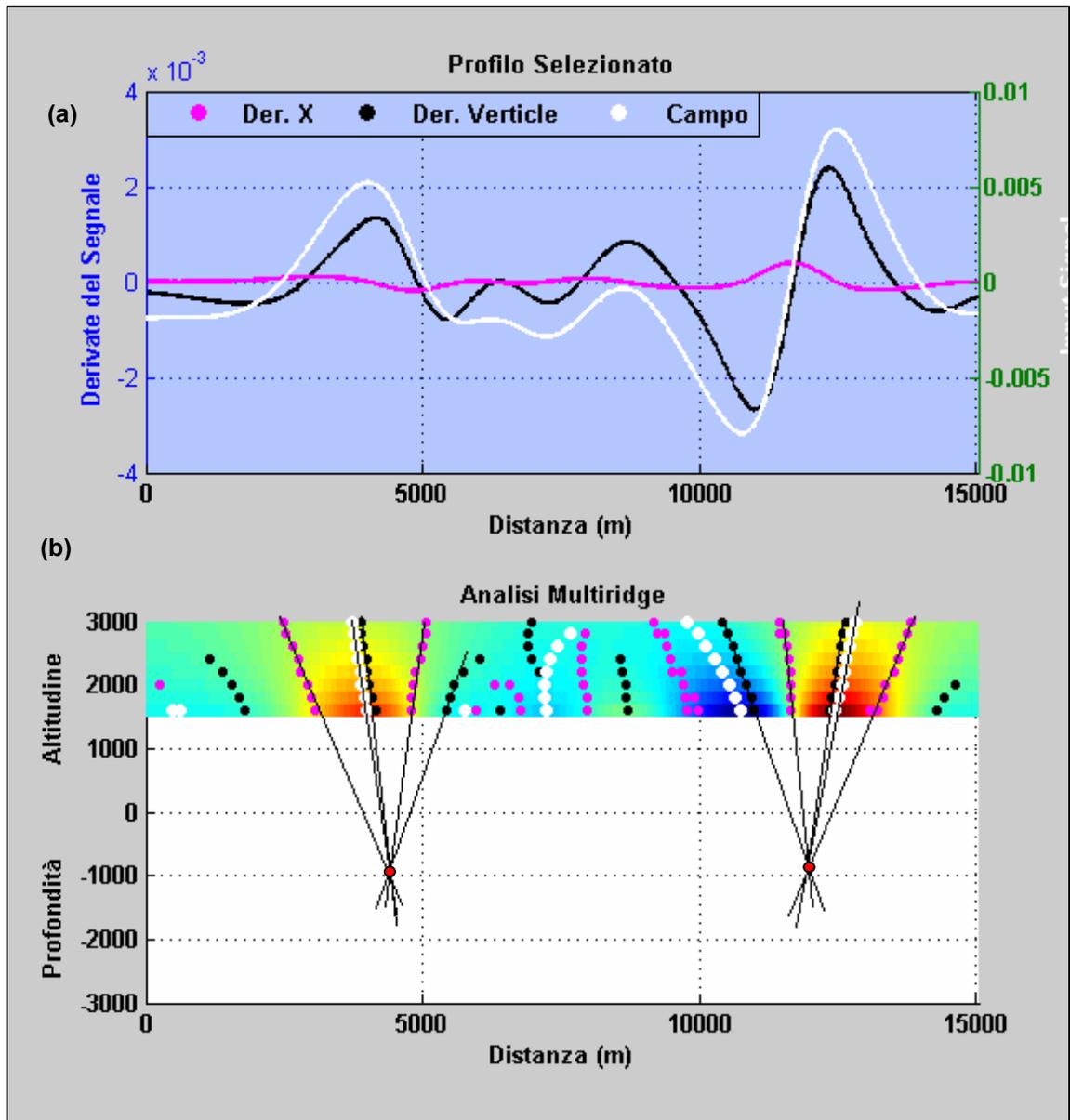
**Figura 2.18.** Profilo sulla mappa del modulo del segnale analitico (a) e corrispettivo sulla mappa del campo (b).

La figura 2.19 invece mostra come è stata condotta l' analisi multiridge prendendo ad esempio la sezione estratta dal profilo della figura 2.18. Come si vede la scelta del profilo è la più meticolosa possibile cercando di tagliare l' anomalia in modo da creare una simmetria bidimensionale. Anche la scelta del giusto intervallo di quote è determinante, sia per eliminare il noise abbondantemente presente in un caso reale e visibile soprattutto alle quote più basse, sia per indirizzare l' analisi sulle sorgenti più superficiali. Infatti, alle quote più alte gli effetti delle sorgenti più profonde sono predominanti rispetto a quelli generati da questo tipo di sorgenti. Particolare attenzione va tenuta anche alle quote intermedie dove, per gli effetti di sorgenti vicine e a causa della dilatazione del campo con l' altezza, la formazione dei ridge non è favorita. In casi come questo, l' uso di derivate è fondamentale per separare gli effetti di interferenza reciproci tra i bordi della stessa sorgente. Nell' esempio mostrato il segnale analizzato è la derivata lungo  $z$  di terzo ordine del campo magnetico, più le sue rispettive derivate lungo  $x$  e lungo  $z$  di ordine superiore.

Come nel principio di consistenza dell' analisi lungo ridge (par. 2.5), l' analisi delle derivate del campo aiuta a raggiungere una certa coerenza nelle stime di

profondità con il metodo geometrico combinato. Infatti come si vede dalla figura 2.19 tutti i ridge di ordine diverso convergono alla stessa profondità: la profondità stimata della sorgente.

In figura 2.19 il campo analizzato alla quota di partenza è identificato dal colore bianco, la sua rispettiva derivata lungo  $z$  dal nero e la derivata orizzontale dal fucsia. I rispettivi massimi lungo la sezione verticale mantengono gli stessi colori.



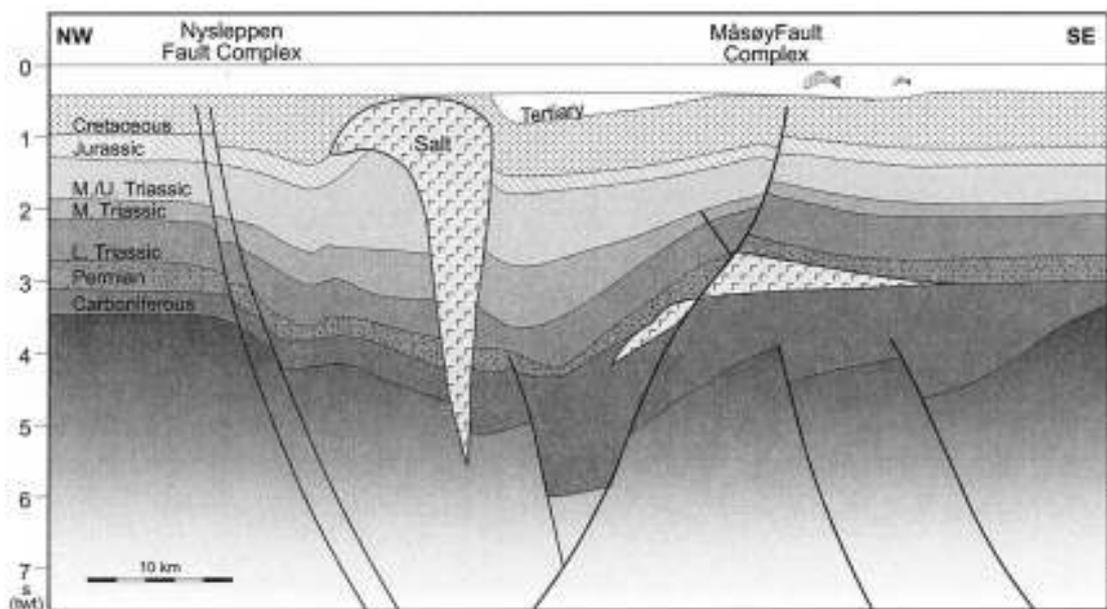
**Figura 2.19.** (a) Derivata lungo  $z$  del terzo ordine (bianco) relativa al profilo mostrato in figura 2.18, sue rispettive derivate lungo  $x$  (fucsia) e di nuovo lungo  $z$  (nero). (b) Sezione verticale della derivata lungo  $z$  del terzo ordine e massimi delle derivate.

Dall'analisi lungo questo particolare profilo si nota che i ridge sono ben sviluppati e che tutti indicano la stessa profondità a meno dei più esterni che

sono inficiati dal rumore che, in un caso reale, può essere comunque presente anche alle quote intermedie.

La profondità stimata per questa sorgente, con ogni probabilità un duomo salino (fig. 2.20), è intorno ai 900 metri sotto il livello del mare. Se si considera che la profondità del fondo marino nella zona è intorno ai 300 m e che la copertura quaternaria nell' area non supera i 40 m di spessore, la discontinuità magnetica allora è localizzata intorno ai 600 m di profondità rispetto alla incoformità quaternaria. Dagli studi stratigrafici condotti nella regione si sa che la copertura terziaria è stata quasi totalmente erosa e che alla profondità stimata ci troviamo nelle formazioni del cretaceo inferiore (Joahnsen et al 1992) . Questo risultato conferma che gli effetti magnetici generati dal contatto dei diapiri salini con gli strati del cretaceo che contengono minerali ferrosi, come la siderite, è predominante rispetto a quelli generati dalle discontinuità negli altri strati che hanno una bassa suscettività magnetica.

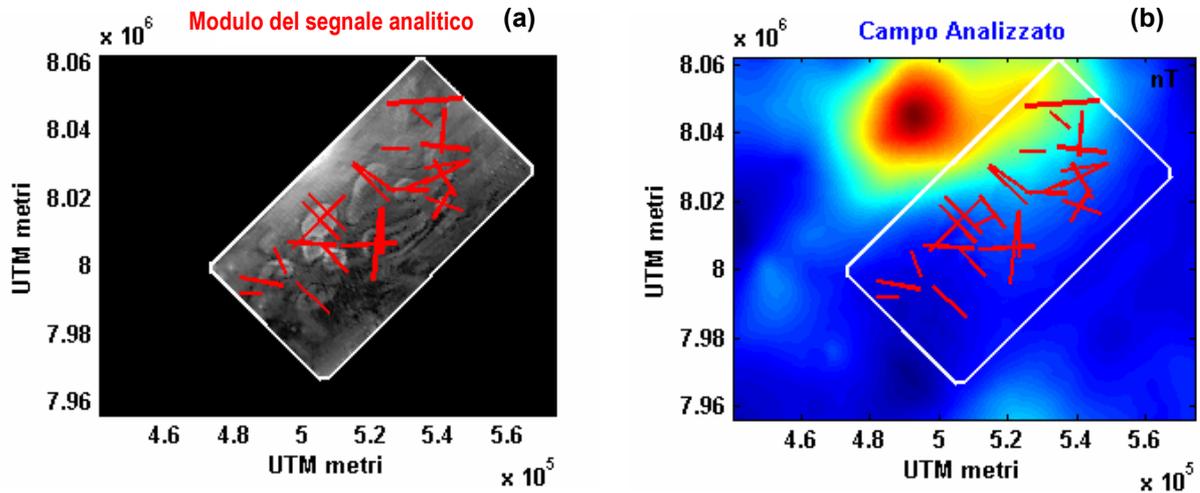
L' analisi effettuata con il metodo multiridge su tutte le anomalie evidenziate dal segnale analitico dei dati ad alta risoluzione (fig. 2.21), ha messo in evidenza che la profondità stimata delle sorgenti è mediamente intorno a 1000 m sotto il livello del mare. Di particolare interesse è che le stime effettuate nella parte sud ovest sono più superficiali di quelle effettuate nella parte centrale (fig. 2.22). Un ulteriore approfondimento è stato stimato nella parte centrale-est. Le profondità stimate nella porzione nord dell' area sono simili a quelle stimate nell' area sud ovest. Questo andamento delle profondità è probabilmente correlato all' andamento delle discontinuità tra gli strati del cretaceo e i diapiri salini che hanno un sensibile contrasto di suscettività. L' andamento stimato delle formazioni cretache suggerisce che la stratigrafia (non la giacitura degli strati) nel bacino si approfondisce al centro con un trend verso est.



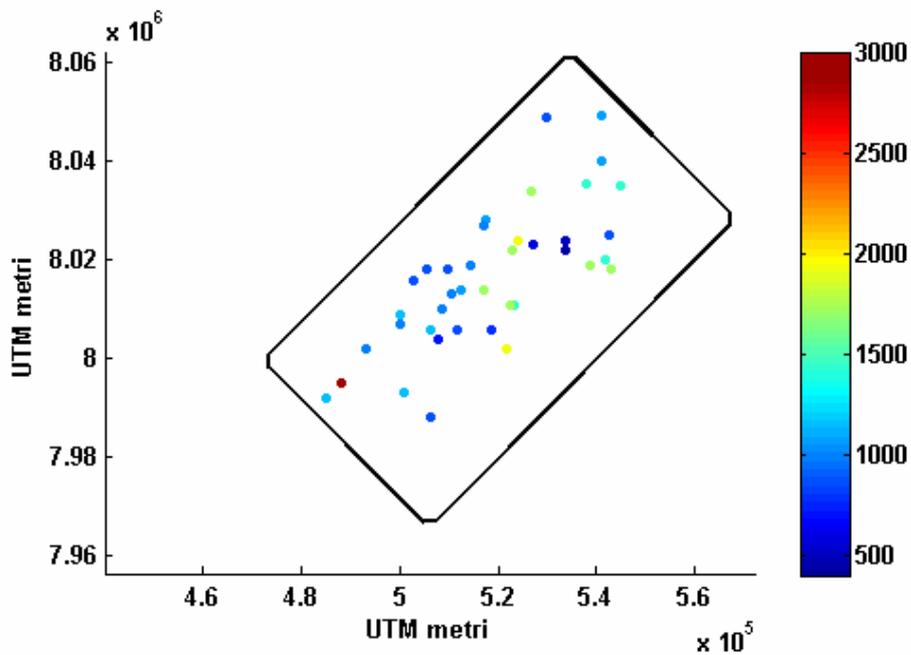
**Figura 2.20.** Geometria delle formazioni saline nell' area del Bacino di Capo Nord. La sezione sismica mostra strutture saline superficiali e sistemi di faglie associate ad una

tettonica distensiva che porta ad un approfondimento degli strati nella parte centrale. Da Bugge et. al. 2002.

Questa ipotesi è molto plausibile se si pensa alla geometria delle formazioni messa in evidenza da alcuni profili sismici che interessano la regione del bacino di Capo Nord, anche se non direttamente l' area analizzata (fig. 2.20).



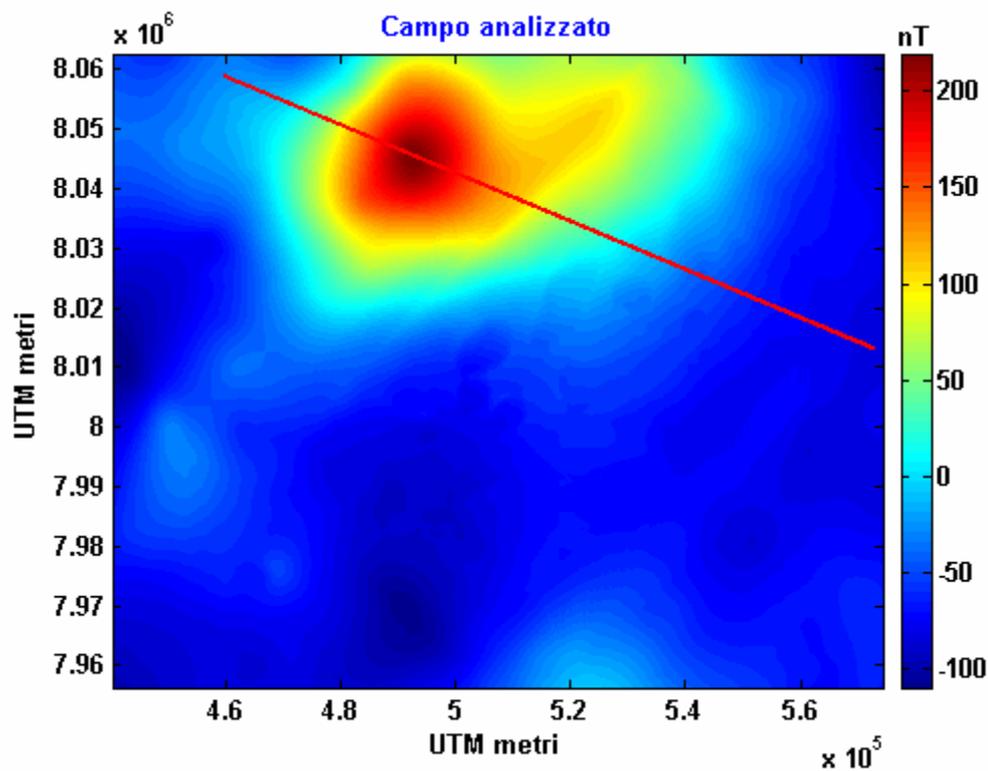
**Figura 2.21.** Totale dei profili utili eseguiti sulle mappe del modulo del segnale analitico (a) e del campo (b).



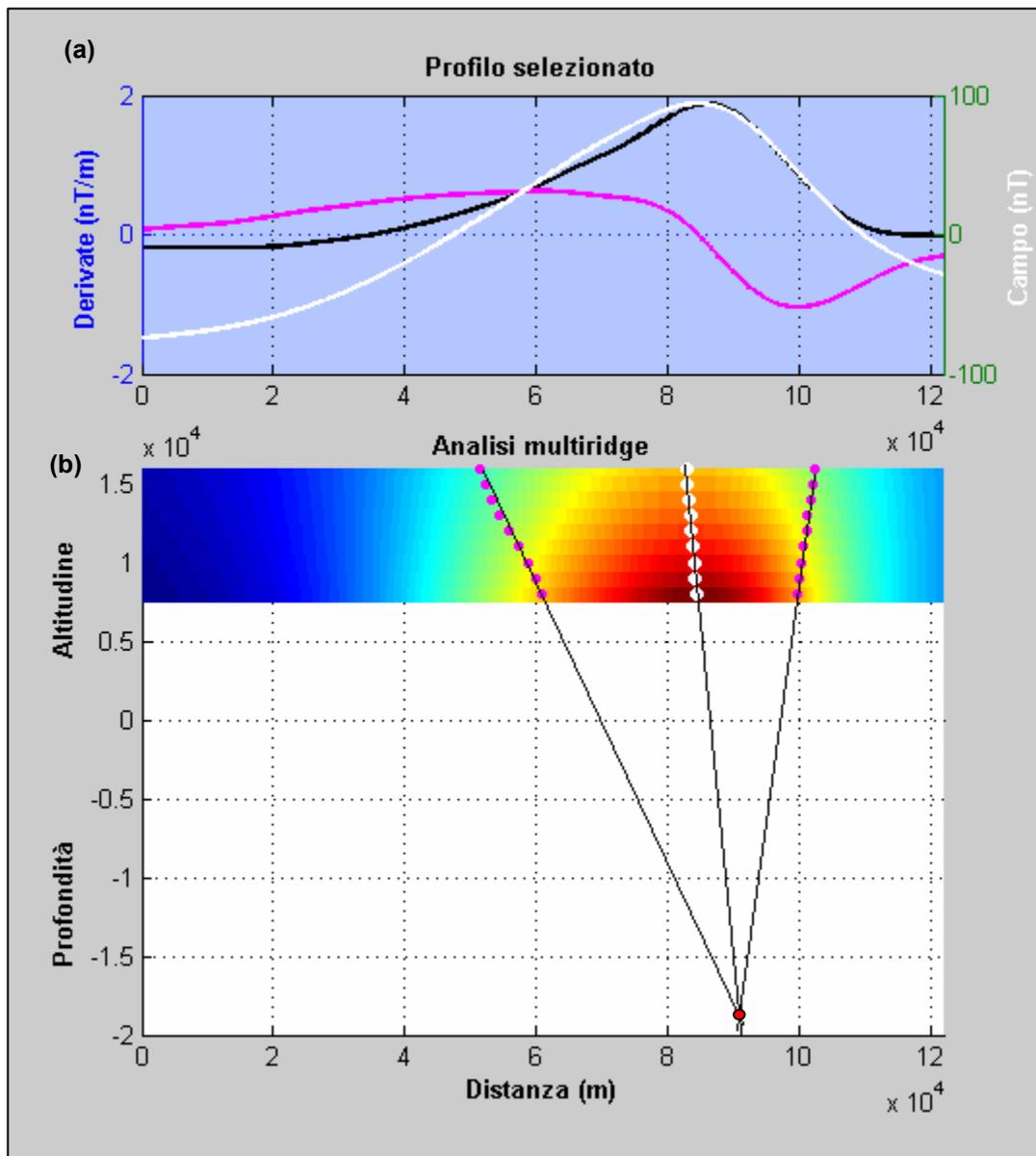
**Figura 2.22.** Totale delle stime di profondità ottenute dai profili in figura 2.21 con il metodo Multiridge.

Una seconda analisi dell' area applicando il metodo Multiridge, è stata eseguita a grandi scale e con ordini bassi di derivazione per evidenziare gli effetti dovuti al basamento profondo. La figura 2.23 mostra il profilo lungo cui è stata estratta la sezione verticale del campo e della sua derivata lungo  $z$ . Il profilo è stato scelto in modo da intercettare la anomalia principale, a grande lunghezza d' onda, originata con ogni probabilità, da sorgenti a profondità elevata.

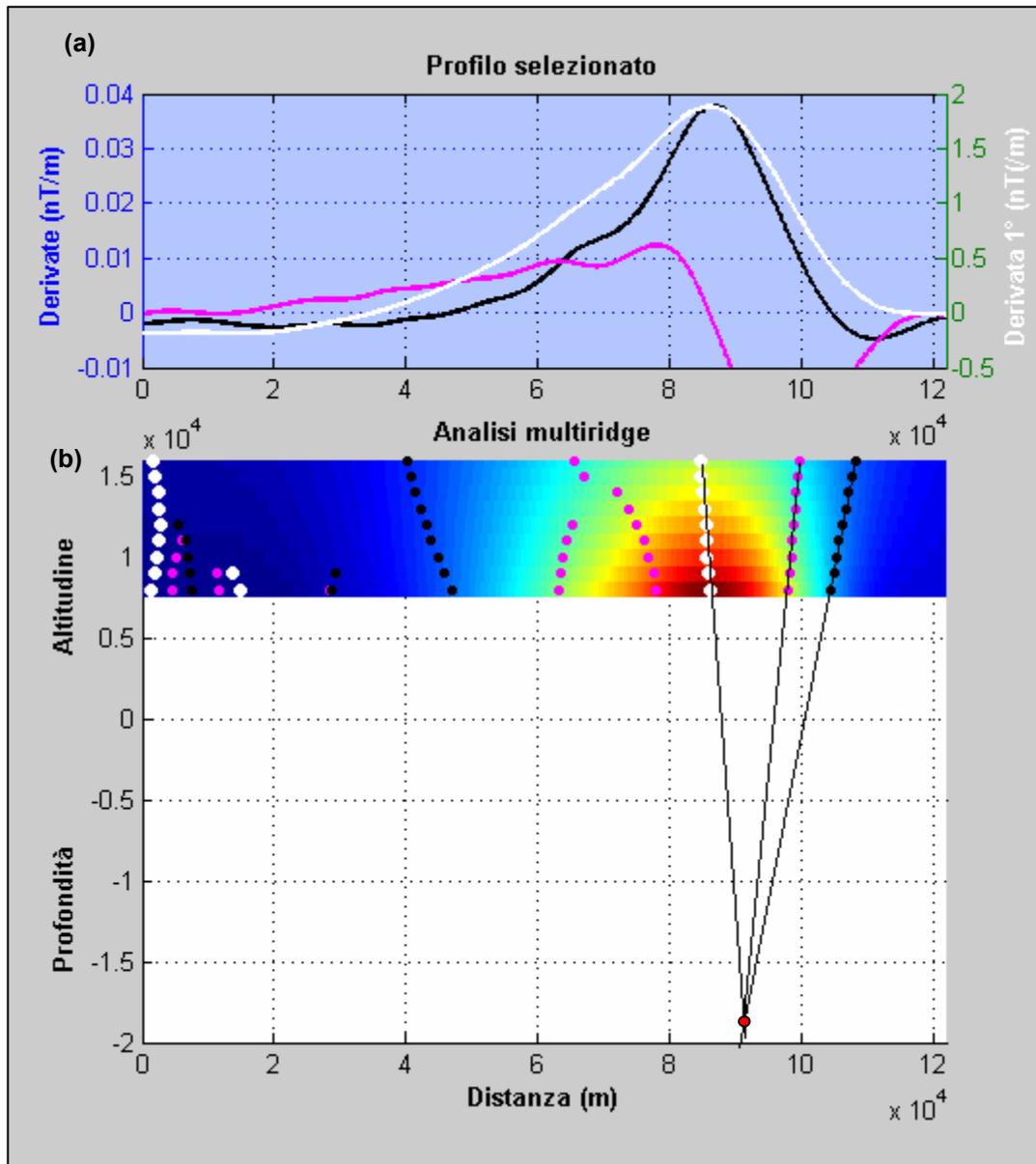
Dall' analisi lungo la sezione verticale del campo della sua derivata lungo  $z$  (fig. 2.24) la profondità stimata per questa sorgente è pari a circa 18 km. Questo risultato è confermato anche dall' analisi lungo la sezione verticale della derivata lungo  $z$  del campo e delle sue rispettive derivate lungo il profilo e di nuovo lungo  $z$  (fig. 2.25). La profondità stimata è in accordo con quanto riportato in letteratura dove diversi autori ritengono che il basamento magnetico nell' area sia intorno ai 14 km di profondità (Joahnsen et al., 1992).



**Figura 2.23.** Profilo sulla mappa del campo magnetico a bassa risoluzione. Il profilo è stato scelto in modo da intercettare la anomalia principale a grande lunghezza d' onda ed effettuare l' analisi Multiridge ad alte scale in modo da evidenziare i contributi a bassa frequenza.



**Figura 2.24.** (a) Campo lungo il profilo in figura 2.23 (bianco) e sue derivate orizzontale (fucsia), lungo  $z$  (nero). (b) Sezione verticale del campo e massimi relativi al campo e alle su e derivate.



**Figura 2.25.** (a) Derivata lungo  $z$  di primo ordine del campo lungo il profilo in figura 2.23 (bianco) e sue derivate orizzontale (fucsia), lungo  $z$  (nero). Sezione verticale (b) della derivata lungo  $z$  di primo ordine e massimi relativi al segnale e alle su e derivate.

## **Capitolo 3**

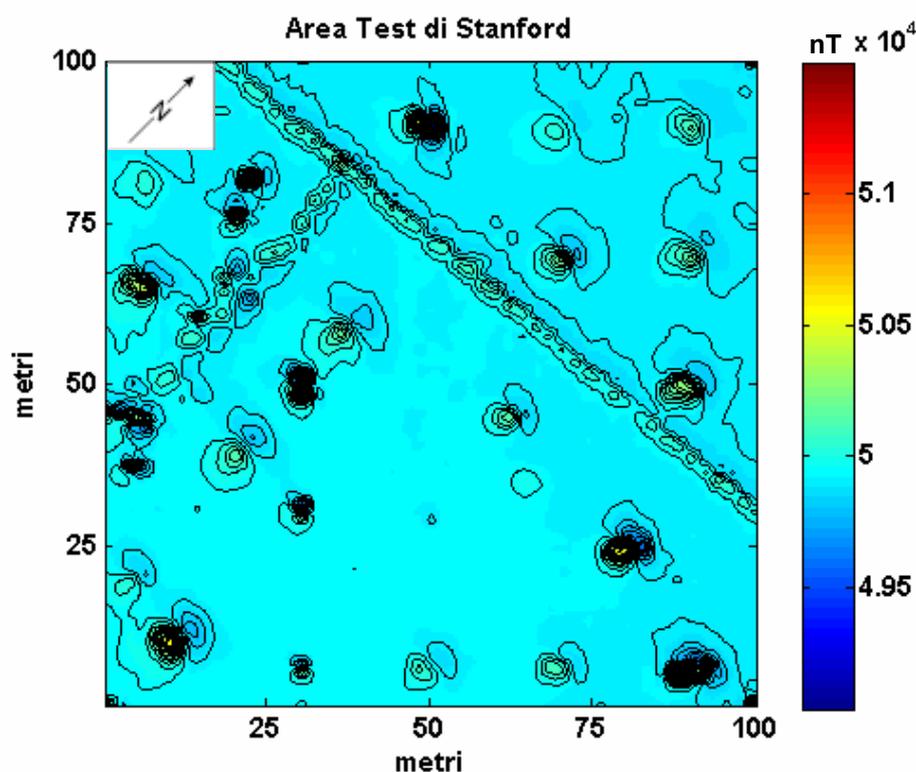
---

Ridge 3D ed Analisi dell' Area Test di Stanford

### 3.1 L' area test della Università di Stanford (CA)

Sulla terra un grosso numero di sostanze nocive per l'ambiente e per le popolazioni che vi abitano è stato abbandonato o volutamente occultato. Negli ultimi anni l'individuazione e la precisa localizzazione di queste sostanze o oggetti sta diventando un obiettivo di primaria importanza per molti enti locali ponendo l'argomento all'attenzione della comunità scientifica internazionale. Per fortuna molti oggetti abbandonati hanno spesso caratteristiche ferrometalliche e molte di queste sostanze nocive sono stoccate in fusti o container proprio con queste caratteristiche. Tra le diverse tecniche geofisiche per l'individuazione di tali oggetti il metodo magnetico è da lungo tempo considerato uno dei migliori. Con le attuali tecniche e con quelle ancora in via di sperimentazione è possibile mappare la distribuzione degli oggetti ferrometallici e determinarne la profondità con un certo grado di precisione.

Per queste ragioni l'Università di Stanford in California ha creato una area test dove sono stati sotterrati diversi oggetti ferrometallici di forma e posizione nota, tra cui lastre, tubi e fusti.



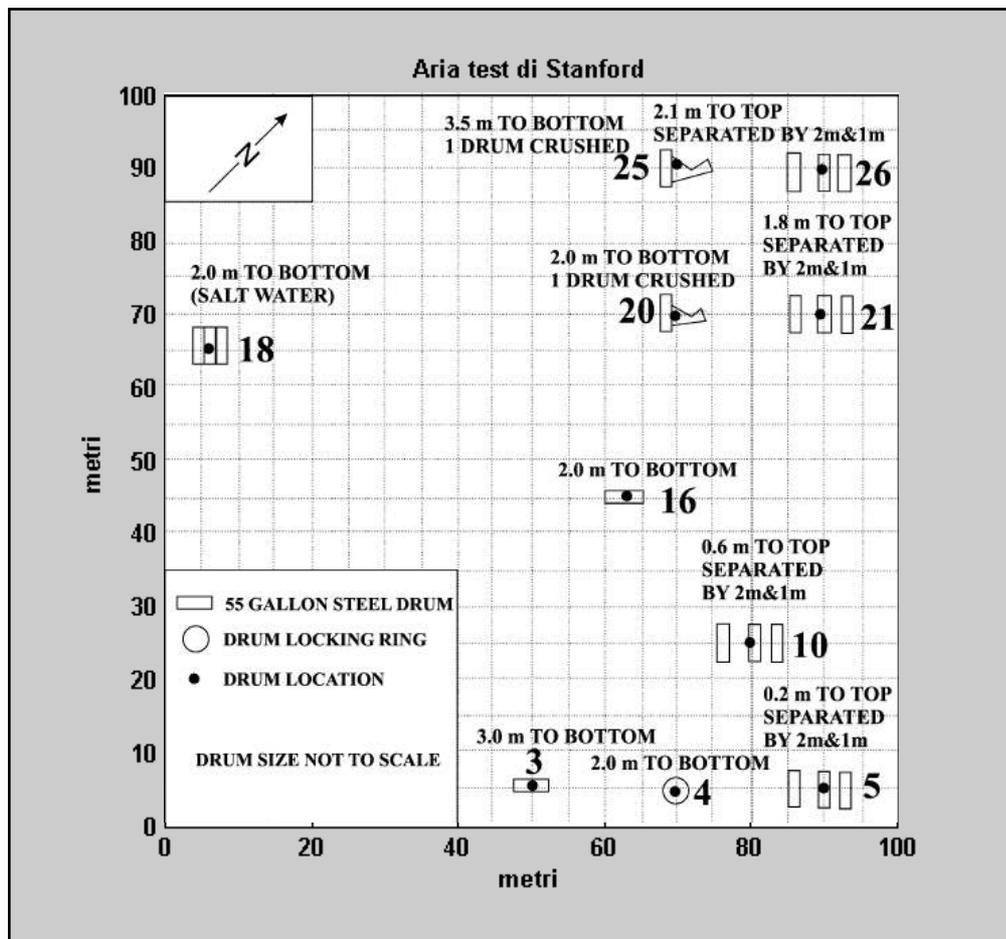
**Figura 3.1.** Mappa del campo magnetico totale relativo all' area test dell' Università di Stanford.

Le osservazioni magnetiche al di sopra dell' area test dell' Università di Stanford sono state effettuate lungo una serie di profili orientati N45° W con una distanza tra le tracce pari a 2 m. Il passo di campionamento lungo i profili è pari a 0.3048

m (1 piede). I dati sono stati campionati con un magnetometro al vapore di cesio modello G858 che ha una sensibilità di 0.01 nT; il sensore del magnetometro è stato collocato a circa 1 m davanti l'operatore e a circa 0.9 m dalla superficie del suolo. In sito è stata predisposta una stazione di riduzione per misurare e correggere le variazioni magnetiche diurne.

I valori del campo sono stati poi ricampionati con un passo pari a 0.5 metri lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ . I dati, così corretti e ricampionati, sono stati gentilmente concessi da Ahmed Salem e da J. Derek Fairhead della Getech ltd. di Leeds (UK).

La mappa del campo mostra evidenti anomalie generate da differenti tipi di sorgenti (fig. 3.1). Dalla letteratura che concerne il sito le uniche informazioni disponibili sugli oggetti sepolti riguardano i soli fusti. I fusti che sono stati interrati nel sito sono dei barili standard nell'industria petrolchimica da 55 galloni (circa 200 litri), sotterrati a differente profondità e con diversa inclinazione e configurazione (fig. 3.2 modificata da Salem et al. 2002). Il diametro dei fusti è di 0.59 m e sono alti 0.98 metri.



**Figura 3.2.** Distribuzione e configurazione dei fusti sepolti nell'area test dell'Università di Stanford da Salem et al. 2002. I fusti sono posizionati in diverse configurazioni e profondità. Oltre alle posizioni orizzontale (3, 16) e verticale (4), i fusti sono anche stati raggruppati (5, 10, 21, 26), rotti (20, 25) ed immersi in acqua salata (18).

Come da riferimento a precedenti studi svolti nell' area e riportati in letteratura i fusti seguono una numerazione non lineare, infatti nella figura 3.2 la numerazione dei fusti segue quella delle anomalie, come da Salem et al. 2002.

Oltre le diverse anomalie isolate è evidente quella prodotta da una sorgente allungata che attraversa l' area da Est ad Ovest ed un' altra piccola diramazione che segue la direzione Nord Sud nella parte occidentale dell'area. Queste sono con ogni probabilità generate da un lungo tubo sepolto di cui non si conosce la profondità. Altri oggetti di diverse dimensioni creano le altre anomalie. Data l' assenza in letteratura di materiale descrittivo relativo a queste altre sorgenti e quindi data la non diretta conoscenza della profondità di tutti gli oggetti sepolti l' analisi è stata indirizzata solo sui fusti metallici di cui sono note posizione e profondità (fig. 3.2).

I fusti sono stati sepolti nell' area test seguendo diverse configurazioni poste a profondità diverse in modo da approssimare casi realmente possibili. Vi sono tre fusti isolati collocati sia in posizione orizzontale (numeri 3 e 16) che verticale (fusto 4). Queste configurazioni creano effetti diversi tra loro soprattutto nella stima dell' Indice Strutturale, data la posizione reciproca delle superfici di base. Altri fusti isolati sono presenti nell' area (numeri 20 e 25) ma sono stati volutamente danneggiati per simulare una condizione di scarica poco accorta.

Altre configurazioni prevedono un raggruppamento di tre fusti posti ad una distanza reciproca di 1 e 2 metri (numeri 5, 10, 21, 26; fig. 3.2). Questa particolare configurazione è utile per valutare gli effetti di reciproca interferenza alle diverse altezze, in quei casi dove i fusti vengono disseminati in un fossato e poi occultati. Altra configurazione interessante proposta nel sito di Stanford è un insieme di fusti immersi in acqua salata, una soluzione elettrolitica assimilabile, dal punto di vista magnetico, ad un percolato inquinante di scarica.

Salem et al. (2002) propongono un metodo per la sola stima della profondità delle sorgenti. I risultati dell' applicazione del metodo, detto del rapporto del segnale analitico, sono riportati tabella 3.1.

Il metodo del segnale analitico si basa sul rapporto del modulo del segnale analitico del campo  $AAS_0$  con il modulo del segnale analitico  $AAS_1$  della derivata prima verticale:

$$z_0 = 4 \frac{|AAS_0|_{(x_0, y_0)}}{|AAS_1|_{(x_0, y_0)}} \quad (\text{Salem et al., 2002})$$

Studiare i dati dell' area test di Stanford ci consente di avere un riscontro pratico, di particolare interesse ambientale, delle metodologie di analisi multiscale dei campi di potenziale. L' analisi condotta sull' area test dell' Università di Stanford è stata effettuata con l' ausilio di un nuovo algoritmo implementato durante il lavoro di tesi che definisce e visualizza i ridge in senso tridimensionale. Data la relativamente poco complicata distribuzione delle anomalie, è stato possibile

applicare uno strumento di calcolo che in forma semi automatica effettua la selezione grafica dei ridge e li analizza con il metodo ScalFun.

## 3.2 Ridge 3D

Nelle applicazioni viste nel precedente capitolo, i metodi per la determinazione dei parametri delle sorgenti sono stati applicati lungo sezioni verticali del campo continuato. Pur essendo un campo tridimensionale gli algoritmi ne estraggono sezioni verticali lungo dei profili selezionati a priori secondo la buona norma di tagliare le anomalie in modo simmetrico. I ridge così determinati sono formati dai massimi relativi nella sezione verticale del campo ad ogni quota. Questo è ammissibile perchè si assume che la sezione del campo centrata sui massimi dell'anomalia è comunque la porzione di campo con i valori del modulo più elevati. Nella migliore delle ipotesi è anche possibile che la sezione del campo sull'anomalia sia equivalente al campo formato da una sorgente bidimensionale, come nel caso di sorgenti allungate (cilindro, contatto infinito, ecc.).

Molte volte però, soprattutto nei casi reali dove le sorgenti sono molteplici e a differente profondità, tracciare il giusto profilo non è semplice. La molteplicità di sorgenti crea effetti che sono diversi alle diverse quote ed i vari ridge possono deviare e fondersi a quote diverse. Questo fenomeno è molto più comprensibile se si pensa ad una distribuzione di sorgenti diverse nelle tre dimensioni e poste a profondità diverse

Altra considerazione da fare è che la preselezione del profilo lungo cui estrarre la porzione di campo può introdurre un grado di soggettività e di errore maggiore nell'interpretazione.

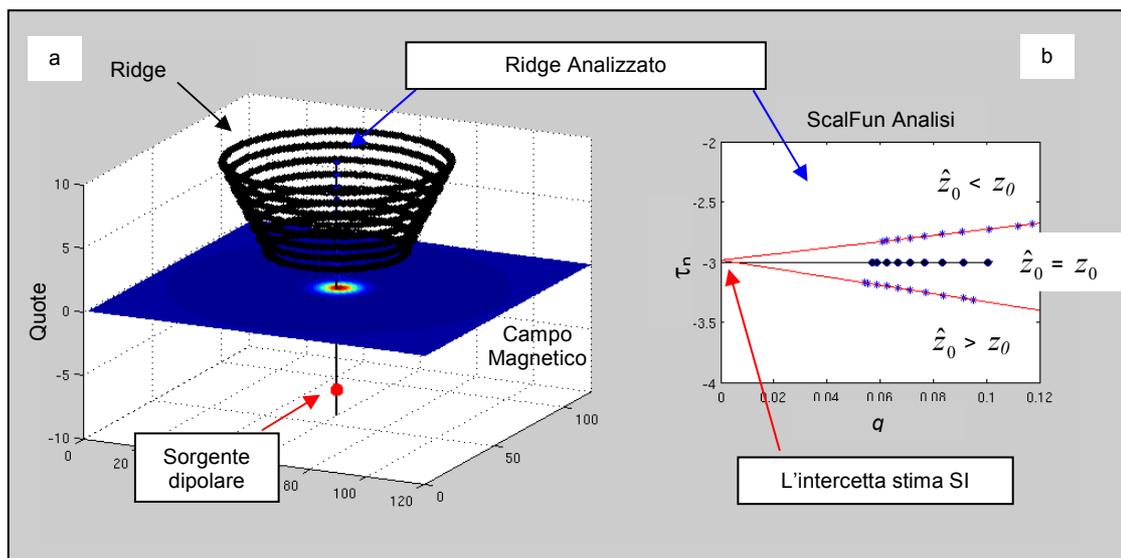
A questo proposito, durante il lavoro di tesi è stato sviluppato un nuovo algoritmo per la definizione e l'estrazione dei ridge nelle tre dimensioni unitamente al metodo ScalFun.

Durante l'implementazione di questo nuovo strumento si è tenuto presente sia della difficoltà di visualizzare e quindi di scegliere i ridge in condizioni di rumore elevato, sia della difficoltà di concatenare i massimi del campo su piani verticali consecutivi. I ridge vengono scelti dal programma al livello di partenza e poi sono sviluppati concatenando il massimo del campo alla quota successiva che si trova alla minima distanza spaziale. La completa visualizzazione dei ridge, senza discriminare quelli connessi a noise, può rendere più complicata la scelta dei ridge da analizzare. In questi casi possono anche insorgere problemi nel processo di concatenazione verticale in quanto i valori lungo i ridge generati dalle anomalie possono risentire di interferenze a causa del rumore.

L'algoritmo è stato concepito in modo da visualizzare tridimensionalmente solo i ridge formati alla quota di partenza in modo da eliminare effetti di interferenze da alta quota. Inoltre, prima dell'analisi con il metodo ScalFun, l'algoritmo

implementa un filtro molto efficace teso ad eliminare gli effetti di interferenza dovuti a rumore elevato. Infine, durante il processo di concatenazione verticale, nel caso in cui i ridge delle anomalie fossero molto ravvicinati, è possibile discriminare quelli generati dai massimi e dai minimi del campo. Nel caso in cui, anche con tutti questi accorgimenti, non fosse possibile identificare con chiarezza i ridge delle anomalie, è comunque possibile selezionare una zona di maggiore interesse e visualizzare solo i ridge provenienti da quella particolare area.

L'analisi lungo ridge viene effettuata sostanzialmente come descritto nel paragrafo 2.4. La sostanziale differenza è che i ridge vengono definiti e ovviamente graficati tridimensionalmente in modo da velocizzare la scelta del ridge lungo cui effettuare l'analisi con il metodo ScalFun (fig. 3.3).



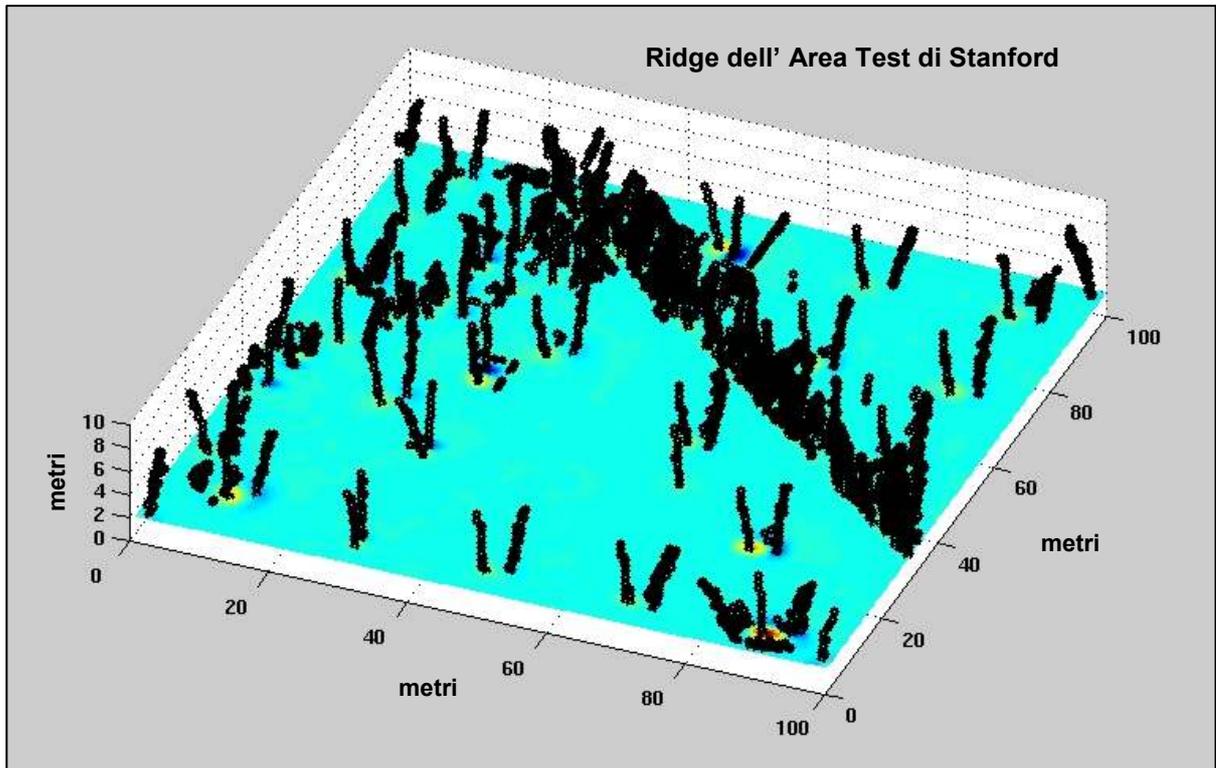
**Figura 3.3.** Applicazione del nuovo tool per la completa visualizzazione ed estrazione 3D dei ridge e del metodo ScalFun ad una sorgente di tipo dipolare.

### 3.3 Applicazione ai dati di Stanford

In questo paragrafo descriviamo l'applicazione del metodo ScalFun (Fedi 2007, Cap. 2), unitamente al nuovo algoritmo per la completa visualizzazione 3D dei ridge ai dati magnetici dell'area test della Università di Stanford. Ai fini di un riscontro oggettivo l'applicazione è stata limitata alle sole anomalie generate dai fusti sepolti di cui si conosce la posizione. Le stime di profondità ottenute con questo tool sono molto accurate e la stima della forma delle sorgenti è in relazione con la configurazione dei fusti sepolti. Data la particolare configurazione dei fusti nel sito è comunque possibile fare delle considerazioni in merito, dato che generano anomalie riconducibili a quelle di sorgenti "one-point".

In accordo con quanto stabilito nel capitolo 1 e 2, la matrice di dati è stata correttamente estesa in modo da non creare effetti di bordo; inoltre l'analisi è

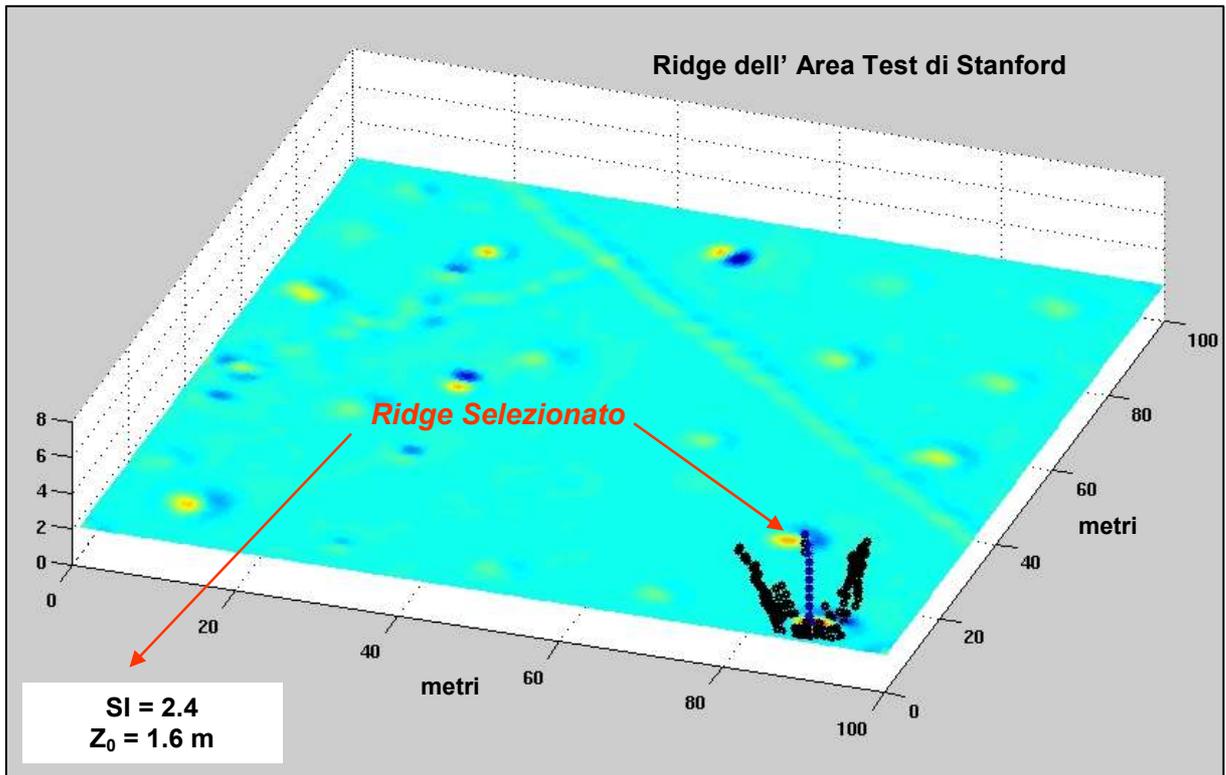
stata effettuata su di un intervallo adeguato di quote ed il campo è stato derivato fino al raggiungimento di una certa consistenza nelle stime. Come già mostrato nel capitolo 2, l'uso di derivate è consigliato per isolare al meglio le anomalie e ridurre gli errori di reciproca interferenza, mentre la scelta del giusto intervallo di quote è indicato per ridurre gli effetti delle alte frequenze visibili soprattutto alle quote più basse.



**Figura 3.6.** Visualizzazione tridimensionale completa dei ridge associati alle anomalie dell' area test di Stanford.

La figura 3.6 mostra la totalità dei ridge ottenuti dall' analisi dei dati magnetici. Per ogni anomalia associata ai fusti, si è ritenuto di isolarne i ridge in modo da ridurre ulteriormente le interferenze e rendere più semplice la selezione del ridge da analizzare (fig. 3.7). L' algoritmo è implementato in modo da fornire, con il metodo ScalFun, la stima simultanea dei parametri della sorgente per ogni ridge selezionato. Quindi, l' interpretazione del campo è stata resa più immediata dalla possibilità di selezionare direttamente i ridge tridimensionalmente.

Dall' analisi dei risultati riportati in tabella 3.1 si evince che l' accuratezza delle stime varia da sorgente a sorgente, a seconda della configurazione e della posizione. In tabella sono riportate il numero dell' anomalia corrispondente, la profondità stimata con il metodo ScalFun, lo scarto percentuale tra la stima di profondità e quella reale dei fusti, ed infine l' Indice Strutturale corrispondente (SI).



**Figura 3.7.** Visualizzazione tridimensionale dei ridge associati all' anomalia 5 dell' area test di Stanford. L' algoritmo concatena automaticamente i massimi dei ridge su piani diversi consecutivi e fornisce la stima simultanea di profondità ed Indice Strutturale.

Lo scarto tra la profondità stimata e quella reale per i fusti 3, 4 e 16 è minimo in quanto le anomalie, oltre ad essere isolate, sono generate da una configurazione semplice fatta di un solo fusto (fig. 3.2). Dato il rapporto tra l' altezza dei fusti e il diametro (pari a 1,3) e considerando la distanza a cui viene effettuata l'analisi, il campo generato da un fusto isolato può essere assimilato a quello di una sorgente puntiforme. Dall' analisi degli indici strutturali si evince che per un fusto isolato, la configurazione orizzontale è quella che meglio identifica la condizione di sorgente puntiforme, data la maggiore distanza dal piano di misura rispetto alla configurazione verticale.

Anche nel caso di fusti danneggiati, se isolati, lo scarto percentuale nella stima della profondità è minimo (anomalia 20 e 25) e l' Indice Strutturale corrispondente è quello di una sorgente puntiforme, circa pari a 3.

La configurazione di più fusti paralleli, anomalie 5, 10, 21 e 26, è quella con uno scarto leggermente maggiore nella stima della profondità. Gli scarti sono più elevati data l' interferenza reciproca tra le sorgenti che sono molto ravvicinate. Anche l' Indice Strutturale corrispondente a questo tipo di sorgente è diverso, ha valori frazionari, come ci aspettiamo che sia nei casi dove le interferenze non sono completamente risolte. Le interferenze reciproche generate dalla configurazione di fusti paralleli sono difficili da eliminare data la piccola distanza che separa li separa.

Invece, la stima della profondità relativa ai fusti immersi in acqua salata (anomalia 18), data la particolare configurazione che li assimila ad un corpo unico, è molto accurata. L'errore percentuale è molto basso, solo la stima dell'Indice Strutturale non è ottimale. Da ciò deduciamo che il metodo risulta molto efficiente anche per sorgenti immerse in soluzione elettrolitica.

**Tab. 3.1** – Stime di profondità ed SI con ScalFun su tutte le anomalie associate a fusti sepolti descritte in Salem et al. (2002).

Fusto	Profondità reale <sup>a</sup>	Stime da Salem et. al. (2002)	Scarto % sulle stime	Profondità stimata con ScalFun	Scarto % con ScalFun	SI
3 <sup>b</sup>	3.6 m	2.42 m	32 %	3.6 m	0 %	3.4
4 <sup>b</sup>	2.4 m	2.67 m	11 %	2.3 m	4 %	2.6
5	1.4 m	1.96 m	40 %	1.6 m	14 %	2.4
10	1.8 m	2.27 m	26 %	2.0 m	11 %	2.5
16 <sup>b</sup>	2.6 m	2.27 m	13 %	2.5 m	4 %	3.0
18	2.6 m	2.43 m	6 %	2.5 m	4 %	2.5
20	2.6 m	2.55 m	2 %	2.5 m	4 %	2.9
21	3.0 m	2.57 m	14 %	3.5 m	16 %	3.2
25	4.1 m	3.54 m	14 %	4.3 m	5 %	3.1
26	3.3 m	2.89 m	12 %	2.9 m	12 %	2.4

(a) Profondità calcolata dall'altezza del sensore al centro della sorgente.  
(b) Anomalia prodotta da un fusto isolato.

Nella maggior parte dei casi il grado di accuratezza delle stime è superiore a quello ottenuto da altri autori. In tabella 3.1 è anche mostrato il confronto tra le stime di profondità ottenute con il metodo ScalFun e quelle ottenute con il metodo del rapporto dei massimi del segnale analitico. Il metodo descritto in Salem et al. (2002), stima solo la profondità delle sorgenti e non anche l'Indice Strutturale, quindi in tabella sono riportati solo i valori di SI stimati con ScalFun.

Le stime di profondità ottenute con questo metodo sono molto accurate ma non quanto quelle ottenute con ScalFun (tab. 3.1); inoltre non è fornita alcuna informazione sulla forma delle sorgenti.

In conclusione è possibile affermare, che l'applicazione della metodologia multiscala ScalFun alle anomalie associate a fusti descritti in Salem et. al. (2002), ha fornito stime di profondità molto accurate, anche per sorgenti non isolate, e stime degli Indici Strutturali in accordo con la configurazione dei fusti sepolti.

Questo conferma che è possibile usare i metodi multiscala con successo in campo ambientale. La rapidità di esecuzione dei sondaggi ed i costi relativamente ridotti

di queste metodologie rispondono alle esigenze di molte amministrazioni locali che vorrebbero agire con tempestività nella bonifica di molte aree del nostro territorio.

## Capitolo 4

---

### CWT e Metodo FWPFA

## 4.1 La Trasformata Continua di Wavelet (CWT)

Nell'ultimo decennio è stata introdotta in letteratura l'applicazione di una specifica trasformazione matematica dei campi di potenziale per la determinazione dei parametri delle sorgenti (Moreau et al. 1997-1999; Sailach et al. 2000-2003; Fedi et al. 2004). Questo operatore è conosciuto come Trasformata Continua di Wavelet (CWT), una sorta di microscopio matematico dove le onde, wavelet appunto, usate nella trasformata rappresentano le lenti.

La CWT permette la scomposizione di un segnale nel dominio spazio-scala, detto scalogramma, e consente di caratterizzare e localizzare nel dominio dello spazio le singolarità presenti in un segnale. Le singolarità nei segnali sono punti nei quali, in senso strettamente matematico, la loro derivata non esiste. A seconda della loro tipologia, le singolarità hanno una forma che va da uno spike ad un gradino e così via.

Data una funzione 2D  $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$  ed una ondina analizzante  $\psi(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ , la sua Trasformata Continua di Wavelet  $Wf$  di norma  $L^1$ , nel dominio dello spazio è definita come:

$$Wf(\mathbf{b}, a, \theta) = \frac{1}{a^2} \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{r}) \tilde{\psi}\left(\frac{r_{-\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{b})}{a}\right) d\mathbf{r} \quad (4.1)$$

Dove  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $a \in \mathbf{R}^+$  è la scala o dilatazione della ondina  $\tilde{\psi}$ ,  $\theta$  e  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$  sono l'angolo e la posizione della ondina in  $\mathbf{R}^2$  rispettivamente. In questa espressione la scala gioca un ruolo fondamentale in quanto è la dilatazione dell'ondina e come tale rappresenta lo zoom del nostro microscopio matematico. Più le scale sono piccole tanto maggiore sarà la risoluzione.

L'equazione (4.1) significa che nello spazio la trasformata di wavelet può essere espressa come un prodotto di convoluzione della funzione (o del campo)  $f$  per una qualsiasi ammissibile ondina  $\psi_a$ :

$$W_{x,a}^k f = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f * \psi_a) \quad (4.2)$$

Che nel dominio di Fourier è:

$$\hat{W}f(k, a) = \hat{f} \hat{\psi}_a^k \quad (4.3)$$

Ad oggi, l'analisi di campi di potenziale con la trasformata continua di wavelet proposta in letteratura è stata considerata solo utilizzando le onde analizzanti  $\tilde{\psi}$  usate nella (4.1) sono costruite col semigruppato del Kernel di Poisson (Moreau et al., 1997;1999). Alcune proprietà inerenti ai campi di potenziale sono state

attribuite all' analisi con questa particolare ondina, questo perché la CWT di  $f$  è equivalente in tutto e per tutto alla ben nota continuazione verso l' alto della derivata di ordine  $k$  di  $f$  (Baranov, 1976), moltiplicato per un fattore di scala.

Per renderci conto della corrispondenza tra la continuazione verso l' alto e la CWT ad una data scala costruita con questa particolare funzione di scala, consideriamo le ondine  $\psi_x^k(\mathbf{r}) = \frac{\partial^k p}{\partial x^k}$  del kernel di Poisson  $p$ :

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{z_1}{\left[z_1^2 + x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4)$$

Se poniamo la quota di misura  $z_1 = a$ , la sua forma dilatata diventa:

$$p_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\left(a^2 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.5)$$

che nel dominio di fourier è:

$$\hat{P}(\rho) = e^{-a\rho} \quad (4.6).$$

Dato che:

$$\psi_{x,a}^k(\mathbf{r}) = \frac{1}{a^2} \psi_x^k\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right). \quad (4.7)$$

La trasformata continua di wavelet di  $f$  rispetto a  $\psi_{x,a}^k$  può essere scritta come:

$$\begin{aligned} W_{x,a}^k f &= f * \psi_{x,a}^k = \\ &= f * \left( a^k \frac{\partial^k p_a}{\partial x^k} \right) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f * p_a) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(\mathbf{r}, a) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Quindi la CWT,  $W_{x,a}^k f$  non è altro che la derivata lungo  $x$  della continuazione verso l'alto da  $z_1$  a  $z_1+a$ , di  $f$ , a parte un fattore di scala  $a^k$ .

Uguualmente abbiamo:

$$W_{y,a}^k f = a^k \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{r}, a) \quad (4.9)$$

E così via.

Da questo esempio si vede chiaramente come utilizzare semplicemente la CWT con le ondine del kernel di Poisson sui dati di campagna significhi farne il prolungamento nella regione armonica, cioè la continuazione verso l'alto.

## 4.2 Il ruolo delle ondine nella CWT

Nella teoria della Trasformata Continua di Wavelet, la possibilità di scegliere le ondine analizzanti è un passo chiave in questo tipo di analisi (Hagelberg et al. 1994; Foufoula, 1997).

Al fine di rendere meglio l'idea del ruolo dell'ondina nella CWT, consideriamo l'ondina  $\psi_{r,a,\theta}$  come un supporto molto adattabile traslato di  $\mathbf{b}$ , ruotato di  $\theta$  e dilatato di  $a$ . Poiché l'equazione 4.3 è essenzialmente una convoluzione con una funzione  $\psi$  a media nulla, la trasformata  $Wf$  assume valori apprezzabili solo nelle regioni di spazio dove la forma del segnale  $f$  è approssimata dalla forma dell'ondina  $\psi$  (Antoine, 1998).

L'ondina analizzante  $\psi$  nel dominio dello spazio ha come supporto essenziale una sorta di "disco" di diametro  $T$  centrato sul valore 0, mentre  $\hat{\psi}$  ha come supporto essenziale un "disco" di diametro  $\Omega$  centrato sul valore  $\omega_0$ .

Quindi, per le ondine trasformate  $\psi_{r,a,\theta}$  e  $\hat{\psi}_{r,a,\theta}$  abbiamo rispettivamente che:

$\psi_{r,a,\theta}$  è circa uguale ad un disco di diametro  $a^*T$ , centrato sulla posizione indicata da  $\vec{r}$ , ruotato di  $\theta$ .

$\hat{\psi}_{r,a,\theta}$  invece è circa uguale ad un disco di diametro  $\Omega/a$ , centrato su  $\omega_0/a$ , ruotato di  $\theta$ .

È possibile notare che il prodotto dei diametri nei due domini è costante. Quindi le wavelet operano con una larghezza di banda relativa costante,  $\Delta\omega/\omega = \text{costante}$  (Antoine, 1998). È possibile anche notare che a basse scale si evidenziano i contributi del segnale a frequenze più alte e quindi i contributi delle sorgenti più superficiali, mentre a scale più alte si evidenziano i contributi delle sorgenti più profonde.

È bene ribadire che le proprietà di localizzazione di un'ondina non dipendono dalla scala, bensì principalmente dai suoi momenti nulli. Infatti è richiesto che le ondine abbiano un certo numero di momenti nulli perché questa condizione determina la capacità della CWT di evidenziare e caratterizzare le singolarità indipendentemente dalla scala. Infatti se  $\psi$  ha  $n$  momenti nulli, la trasformata filtrerà tutti i comportamenti polinomiali di grado  $k > n$  (Antoine, 1998).

In generale, se l'ondina ha momenti nulli, alla parte più liscia del segnale corrisponderanno valori bassi della trasformata, mentre alle parti più spiky del

segnale, quindi dove sono localizzate le singolarità, corrisponderanno i massimi della CWT. Questo comportamento spiega perché l'analisi con le wavelet è particolarmente efficace nel localizzare le discontinuità nel segnale.

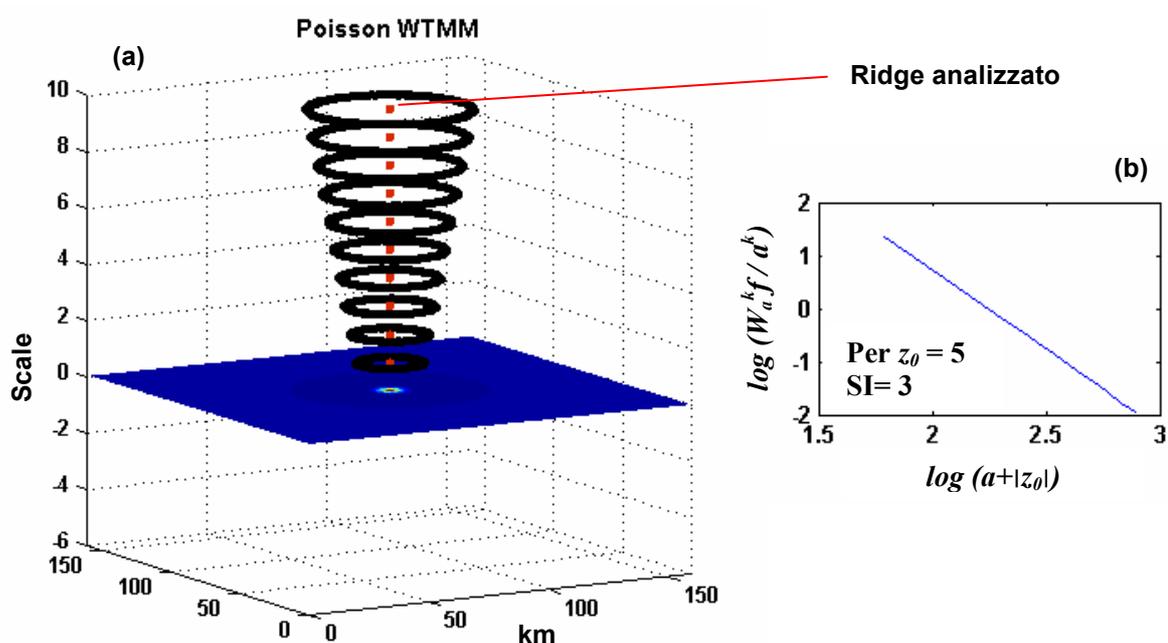
Nella tabella 4.1 sono riportate le equazioni di alcune ondate note in letteratura, ed usualmente usate in analisi di tipo CWT.

**Tabella 4.1.** Equazioni di alcune ondate note in letteratura espresse nel dominio dello spazio e di Fourier.

Wavelet	Dominio spazio	Dominio Fourier
Gauss	$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\hat{\psi}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
Dog	$\psi(x) = \frac{\partial e^{-\frac{x^2}{2}}}{\partial x^n}$	$\hat{\psi}(\omega) = (i\omega)^n e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
Mexican	$\psi(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\hat{\psi}(\omega) = -\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
Poisson	$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[1+x^2]^{\frac{3}{2}}}$	$\hat{\psi}(\omega) = e^{- \omega }$
Pet Hat	-----	$\hat{\psi}(\omega) = -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \log_2 \frac{ \omega }{2\pi}\right)$ $\pi <  \omega  < 4\pi$ 0 elsewhere
Wheel	-----	$\hat{\psi}(\omega) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \log(\omega)\right)$ $\pi <  \omega  < 4\pi$ 0 elsewhere
Cauchy	$\psi(x) = \Gamma(n+1)(1-ix)^{-(1+n)}$ $n > 0$	$\hat{\psi}_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0 \\ \omega^n e^{-\omega}, & \omega > 0 \end{cases}$
Morlet	$\psi(x) = \left( e^{-i\omega_0 x} - e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\hat{\psi}(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

### 4.3 Analisi dei campi di potenziale con la CWT

Nella teoria dei campi di potenziale, l' applicazione della trasformata continua di Wavelet  $W_{x,a}^k f$  per la determinazione dei parametri della sorgente è stata limitata all' uso esclusivo di un solo gruppo di ondine, quello delle Poissoniane. Moreau et al. (1997) hanno dimostrato che le CWT costruite col semigruppò del nucleo di Poisson permettono di determinare il grado di omogeneità della sorgente e quindi l' Indice Strutturale. Da qui è stata proposta dagli stessi autori una metodologia, detta di "best depth" per la determinazione dei parametri della sorgente, forma e profondità, basata sulla CWT costruita con queste particolari ondine. I parametri sono ricavati dal grafico ottenuto mettendo  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  sulle ordinate e  $\log(a+z_0)$  sulle ascisse; nel caso in cui la profondità  $z_0$  è uguale alla profondità della sorgente, allora la pendenza della curva è uguale all' opposto dell' Indice Strutturale. Il valore di profondità attribuito a  $z_0$  che meglio linearizza la curva è considerato essere la profondità della sorgente e di conseguenza, la pendenza ottenuta con quel valore di profondità ne determina l' Indice Strutturale associato (Moreau et al. 1997-1999).



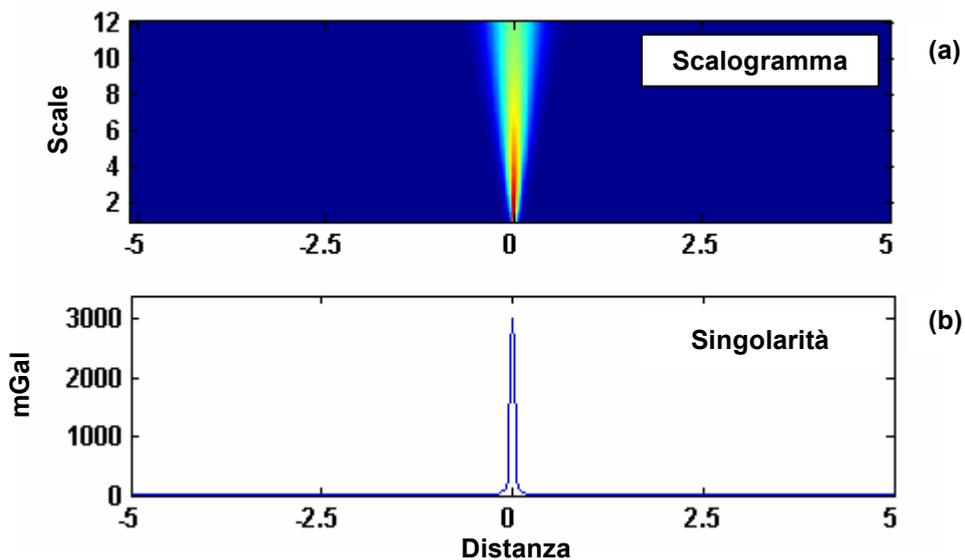
**Figura 4.1.** Analisi multiscala del campo magnetico ridotto al polo di una sorgente di tipo sferico. I valori dei massimi del modulo della CWT alle diverse scale (WTMM) sono alla base dell' analisi multiscala (a). La pendenza della curva  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  è uguale all' opposto dell' Indice Strutturale (b). Con questo metodo, solo l' ondina Poissoniana dà stime coerenti con il tipo di sorgente.

C'è da dire però che, come dimostrato nel paragrafo 4.1, la trasformata di wavelet costruita con ondine Poissoniane e riscalate per un fattore di scala  $a^k$ , quindi proprio  $W_{x,a}^k f / a^k$ , non è altro che la continuazione verso l'alto della sua derivate di ordine  $k$  (Baranof, 1976).

In questo contesto proponiamo una nuova metodologia d'analisi (Fedi and Cascone, 2008), denominata *FWPFA (Full Wavelet Potential Fields Analysis)*, che permette di ottenere stime accurate dei parametri delle sorgenti grazie alla possibilità di poter usare qualsiasi ondina analizzante e di non limitarci nell'analisi alla sola Poissoniana.

#### 4.4 Analisi di singolarità del campo

Come già accennato, la CWT permette di caratterizzare e localizzare, nel dominio dello spazio, le singolarità presenti in una data regione del segnale. Nel caso dei campi di potenziale le singolarità corrispondono alla posizione della sorgente; infatti, il valore del campo a ridosso di una sorgente tende all'infinito e non è derivabile in quel punto. La figura 4.2 mostra come l'intensità del campo aumenta all'avvicinarsi della sorgente di un campo gravimetrico, situata in  $x_0 = 0$ , dato che decade come  $1/r^2$ .



**Figura 4.2.** Scalogramma prodotto da un'analisi di singolarità con le CWT (a). I valori del modulo della trasformata (scalogramma) sono massimi in corrispondenza della singolarità, generata nel campo gravimetrico (b) per misure effettuate a ridosso delle sorgenti. Anche se le singolarità non sono presenti direttamente nei campi misurati, il loro effetto è comunque visibile con un'analisi multiscala.

Nel caso dei campi di potenziale però, spesso succede che le misure del campo vengano effettuate ad una quota tale che le singolarità non sono contenute nel piano d'analisi della CWT. Infatti solitamente le misure sono fatte nella regione armonica del campo e non in quella delle sorgenti.

Consideriamo ad esempio il campo magnetico  $f(x,y,a_1)$  generato da una sorgente dipolare posta in  $Q(x_0,y_0,z_0)$  dove  $a_1 > z_0$  è la scala o quota di misura.

Dalle equazione 1.3 è possibile riscrivere il campo alla scala  $a_0$ , che contiene la sorgente puntiforme  $f_{a_0}$ , in questo modo:

$$f(x,y,a_1) = f_0(x,y,a_0) * p_{a_1} \quad (4.10)$$

Quindi troviamo che:

$$\begin{aligned} W_{x,a}^k f(p) &= a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 * p_{a-a_1}) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_0 * p_{a_1} * p_{a-a_1}) = \\ &= a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_0 * p_a) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Questa equazione mostra che la trasformata del campo  $W_{x,a}^k f$  alla scala  $a$ , non dipende da quanti passaggi vengono effettuati per calcolarla, se con una convoluzione multipla anziché singola, del campo con l'ondina Poissoniana.

Al fine di intendere se è possibile analizzare un campo di potenziale con una qualsiasi ondina, definiamo con  $\psi_a$  una qualsiasi altra ammissibile ondina analizzante:

$$\psi_x^k(\mathbf{r}) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad (4.12)$$

dove  $u$  è la funzione di scala scelta per costruire l'ondina.

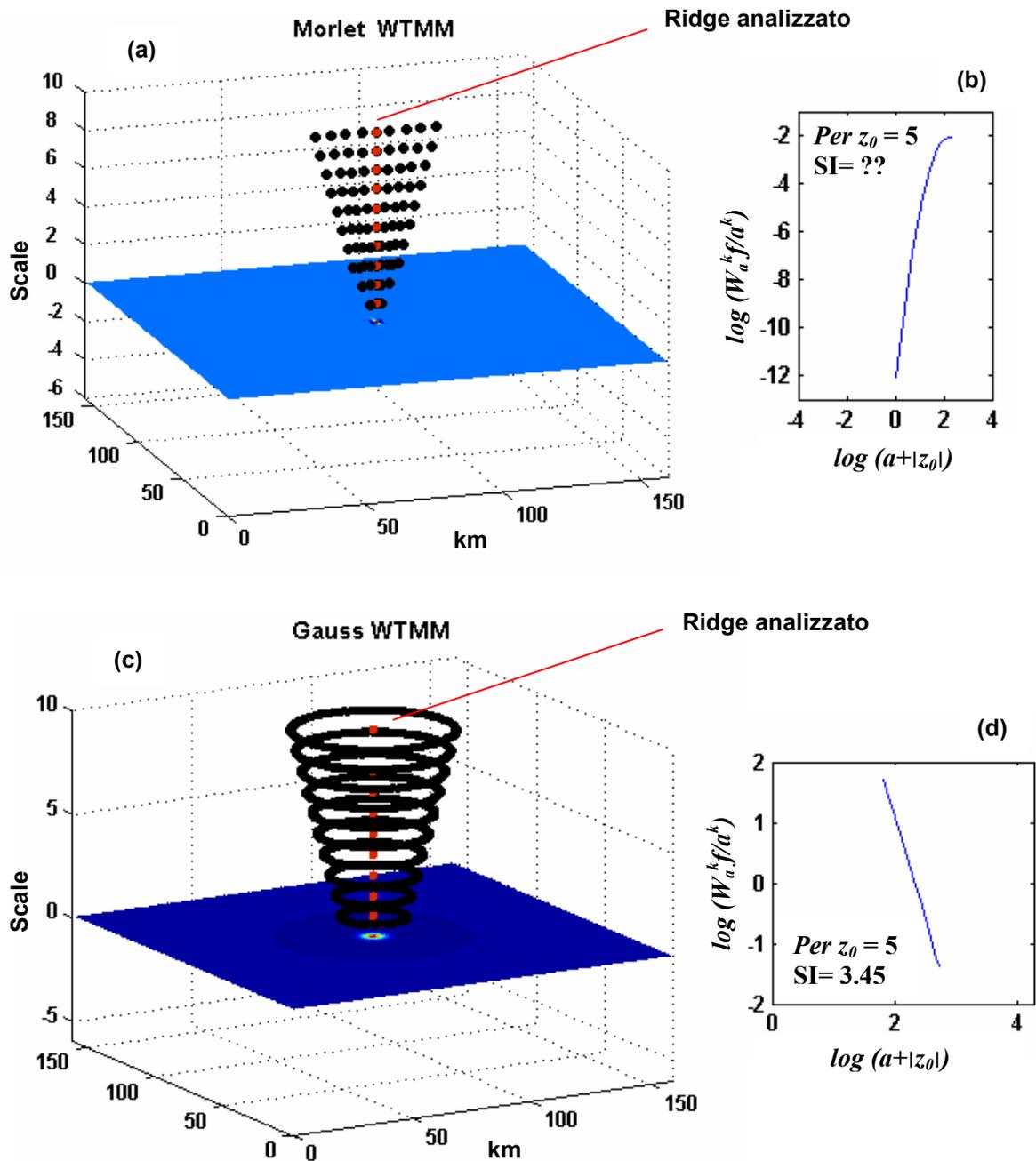
Nel caso volessimo analizzare il campo misurato alla quota  $a_1$  con questa particolare ondina, la trasformata diventerebbe:

$$W_{x,a}^{k,u} f(u,p) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 * u_a) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_0 * p_{a_1} * u_{a_1-a}) \quad (4.13)$$

Questa volta la trasformata Continua di Wavelet può essere solo definita nel dominio dello spazio come una convoluzione multipla ed include ondine diverse.

Una proprietà base delle singolarità è che sono visibili anche a grandi scale il che, nel caso dei campi di potenziale, permette di analizzarle anche se le misure del campo sono effettuate ad una scala che non le contiene. Questa proprietà da un lato ci consente di capire perché è possibile effettuare un'analisi di singolarità

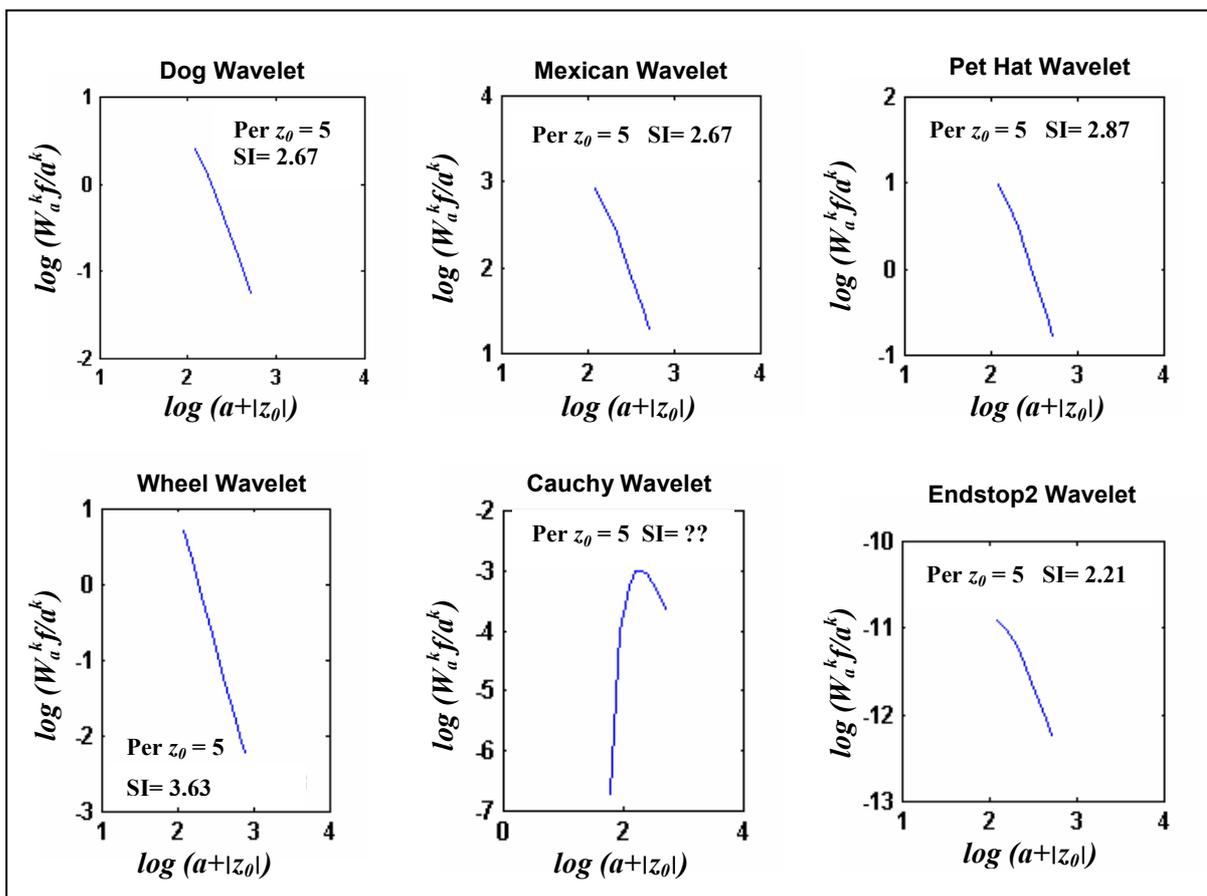
sui campi di potenziale che non contengono direttamente singolarità, anzi sono solitamente campi molto regolari. Dall'altro ci suggerisce che non è possibile ottenere un'analisi soddisfacente con una qualsivoglia ondina perché il campo misurato è già naturalmente dilatato (dalla sorgente fino al piano di misura) con ondine di tipo Poissoniano.



**Figura 4.3.** Analisi multiscale del campo magnetico ridotto al polo di una sorgente di tipo sferico. La pendenza della curva  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  ottenuta dai valori dei massimi della CWT alle diverse scale usando ondine diverse dalla Poissoniana, Morlet (a,b) e Gauss (c,d), non danno stime dell'Indice Strutturale coerenti con il tipo di sorgente.

Come visto nella figura 4.1 i parametri della sorgente possono essere facilmente stimati usando la trasformata  $W_{x,a}^k f(p)$  costruita con ondine Poissoniane ed il metodo proposto da Moreau et al. (1999). La figura 4.3 invece, mostra che usando la trasformata  $W_{x,a}^k f(u, p)$  ottenuta con una qualsiasi altra ondina, come la Gauss o la Morlet ad esempio, la stima dell' Indice Strutturale con il metodo proposto da Moreau et al. (1999), ponendo  $z_0$  uguale alla profondità della sorgente, non è soddisfacente.

Consideriamo ad esempio, il campo magnetico ridotto al polo generato da una sorgente dipolare posta a 5 km di profondità. La pendenza della curva, ottenuta mettendo  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  sulle ordinate e  $\log(a+z_0)$  sulle ascisse e ponendo  $z_0=5$ , relazionata a questo tipo di sorgente deve essere pari a -3 (SI=3).



**Figura 4.4.** Analisi multiscala del campo magnetico ridotto al polo di una sorgente di tipo sferico. La figura mostra che analizzando direttamente il campo con ondine diverse dalla Poissoniana le stime dell' Indice Strutturale ottenute dalla pendenza del  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  non sono coerenti con il tipo di sorgente.

Con il metodo proposto da Moreau, quando si usano le ondine Poissoniane la stima dell' Indice Strutturale è corretta (fig. 4.1), mentre quando si usano ondine

differenti le stime non sono corrette (fig. 4.3, 4.4). Per alcune onde la stima addirittura non è accettabile in quanto i valori sono negativi, come ad esempio per la Morlet e la Cauchy.

A questo punto è chiaro che, mentre l'onda Poissoniana consente stime corrette dei parametri, la CWT implementata con altre onde causa distorsioni dovute al fatto che la trasformata  $W_{x,a}^k f(u, p)$  sviluppa il campo, naturalmente dilatato, con una legge diversa dalla precedente.

## 4.5 Teoria e metodo FWPFA

Nell'analisi dei campi di potenziale con le wavelet, la possibilità di usare solo un tipo di onda è una limitazione che ne impedisce una piena analisi. Al fine di superare questo limite introduciamo un nuovo metodo, denominato FWPFA (Full Wavelet Potential Fields Analysis), che consiste nel modificare la definizione di  $W_{x,a}^k f(u)$  introducendo l'operatore:

$$v_{a_1} = p^{-1}_{a_1} * u_{a_1} \quad (4.14)$$

Questo operatore è il prodotto di convoluzione tra l'inverso della continuazione verso l'alto (detta continuazione verso il basso) ed una qualsiasi altra onda  $u$ . Applicando questa trasformazione al campo misurato alla scala  $a_1$ , possiamo sostituire il campo  $f$ , naturalmente dilatato alla scala  $a_1$  con la Poissoniana, con un'altra funzione ottenuta a quella scala dalla dilatazione con altre onde diverse dalla Poissoniana.

Come detto, il campo al piano di misura è un campo già dilatato usando implicitamente onde costruite sul nucleo di Poisson; questo significa che le singolarità non sono presenti nel piano di misura. L'operatore così definito permette di ritornare sulla singolarità del campo e di ricalcolare la CWT come prodotto di una singola convoluzione con una qualsiasi altra onda  $u$ .

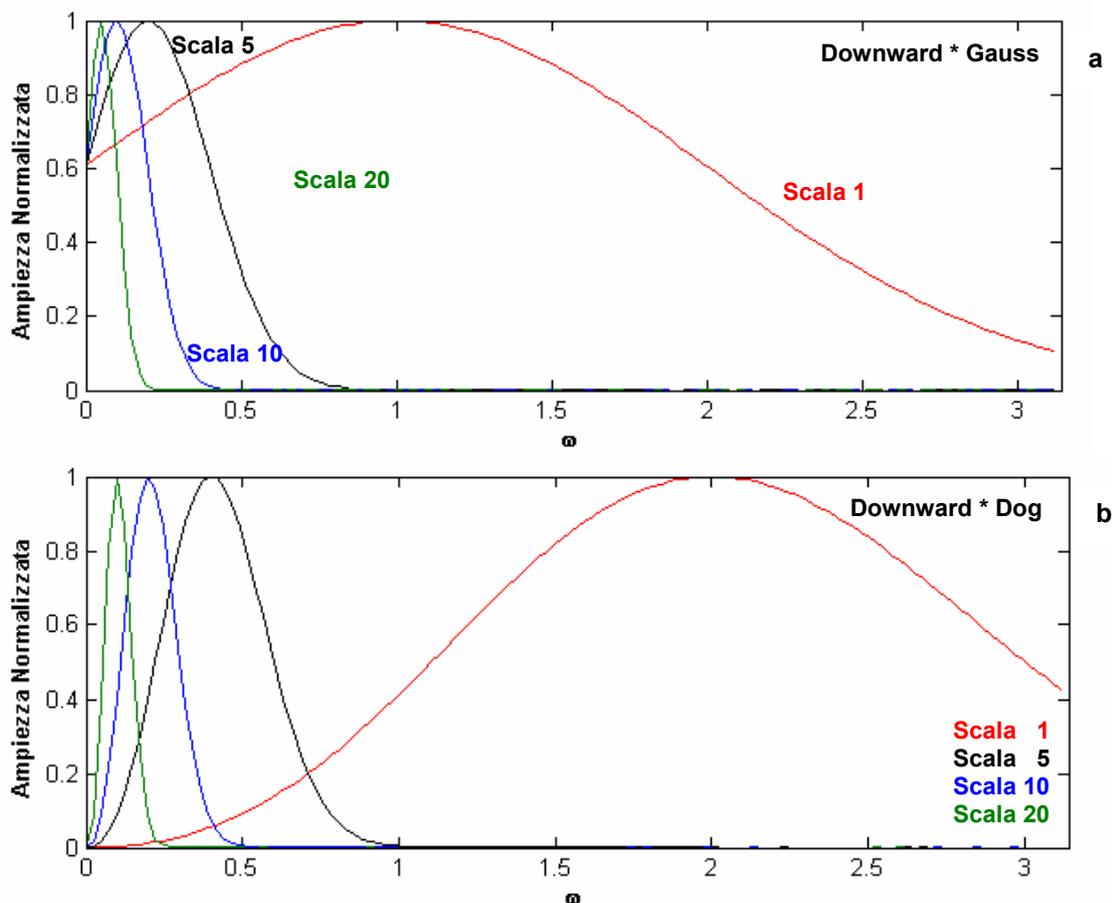
Infatti, avendo ridefinito  $W_{x,a}^k f(u)$  troviamo che:

$$\begin{aligned} W_{x,a}^{k,\{u,p,v\}} f(u) &= a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 * v_{a_1} * u_{a-a_1}) = \\ &= a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_0 * p_{a_1} * p^{-1}_{a_1} * u_{a_1} * u_{a-a_1}) = a^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_0 * u_a) \end{aligned} \quad (4.15)$$

E' bene tener presente qui che l' operatore  $v_{a_1}$  è costruito con l' operatore continuazione verso il basso  $p^{-1}_{a_1}$  che è molto instabile e con una qualsiasi ondina  $u_{a_1}$  dilatata alla scala  $a_1$  che è invece un processo molto stabile. Da qui si evince che le proprietà filtranti e la stabilità dell' operatore  $v_{a_1}$  dipendono dalla profondità della sorgente e dalla funzione di smoothing scelta U. In letteratura è noto che la continuazione verso il basso vada usata con molta cautela, data la sua instabilità.

Nel nostro metodo gli operatori  $p^{-1}_{a_1}$  e  $u_{a_1}$  sono relativi allo stesso intervallo di scale, che varia tra  $a_0$  ed  $a_1$ , quindi la loro convoluzione è un operatore molto più stabile della semplice continuazione verso il basso.

Per sciogliere ogni dubbio ed esplorare la fattibilità del metodo sono state calcolate le risposte in frequenza dell' operatore  $v_{a_1}$  costruito con diverse ondine, a differente profondità della sorgente  $z_0$  (fig. 4.5).

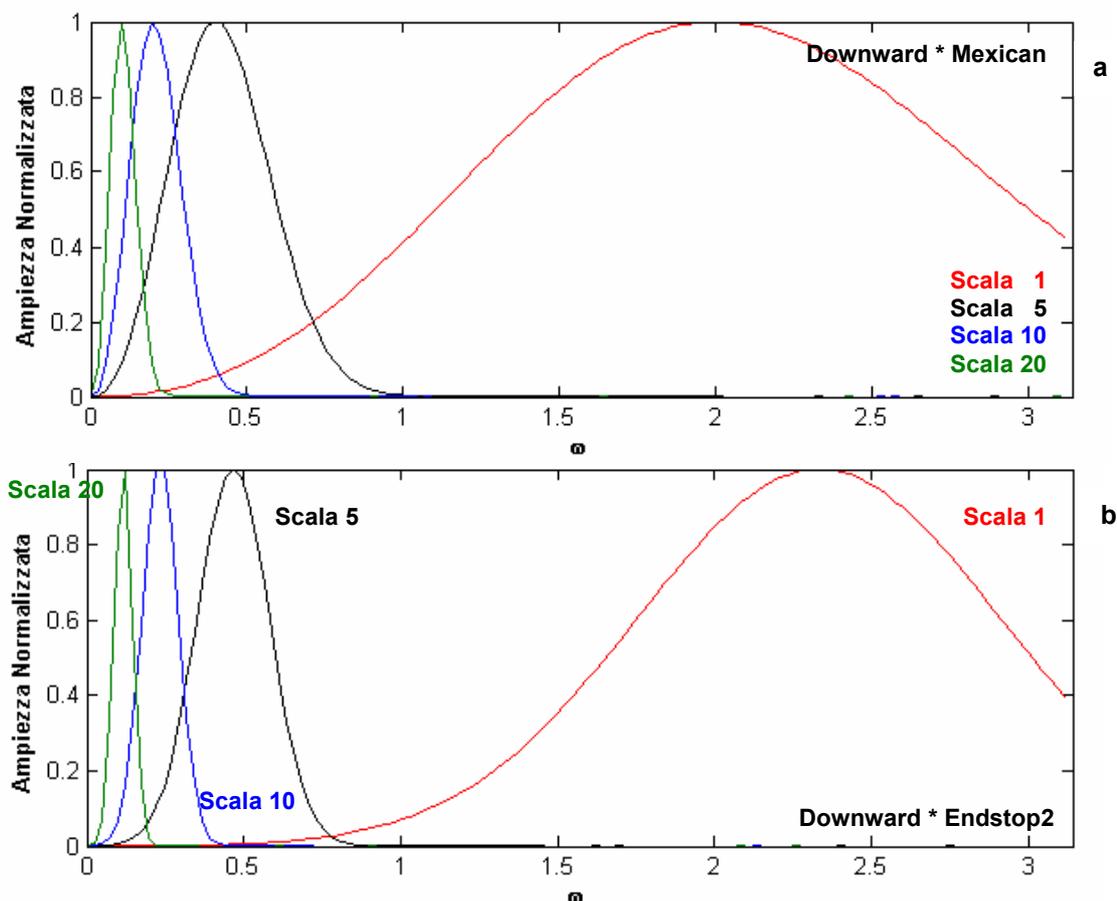


**Figura 4.5.** Risposta in frequenza dell' operatore  $v_{a_1}$  costruito con la Gauss wavelet (a) e con la Dog wavelet (b). Le proprietà filtranti dell' operatore tendono al passa bassa all' aumentare della profondità supposta della scale.

E' cosa ben nota che le proprietà filtranti della CWT dipendono dalla scala di analisi e dalla funzione di smoothing scelta per costruire l'ondina analizzante.

Per l'operatore  $v_{a_1}$  introdotto in questo lavoro le scale giocano un ruolo doppio. Uno è proprio della CWT ed è essenzialmente un ruolo di filtro passa bassa; l'altro è collegato alla continuazione verso il basso che introduce rumore ad alta frequenza all'aumentare delle scale.

Le figure 4.5-4.8 mostrano la risposta in frequenza dell'operatore implementato con diverse ondine molto note in letteratura, con una profondità supposta della sorgente pari a 1, 5, 10 e 20 volte il passo di campionamento.

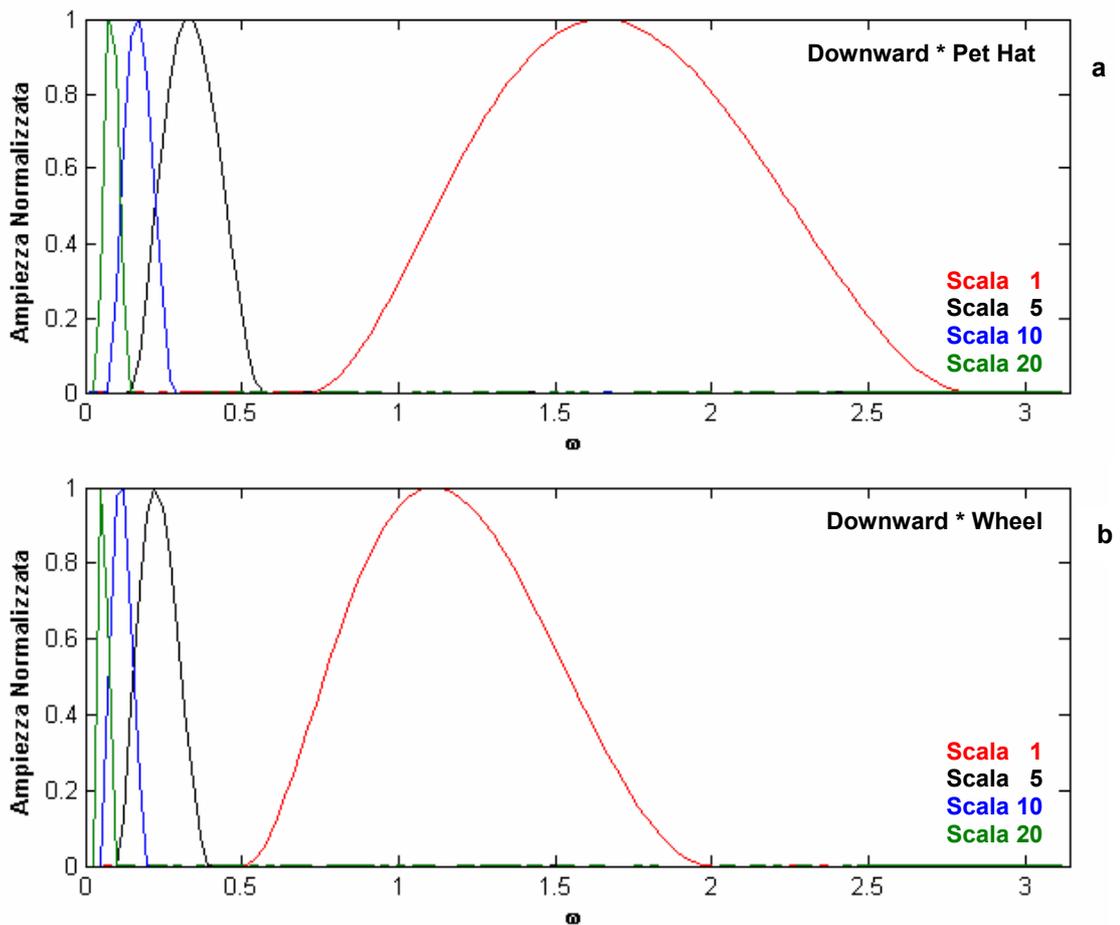


**Figura 4.6.** Risposta in frequenza dell'operatore  $v_{a_1}$  costruito con la Mexican wavelet (a) e con la Endstop wavelet (b). Le proprietà filtranti dell'operatore tendono al passa bassa all'aumentare della profondità supposta della scale.

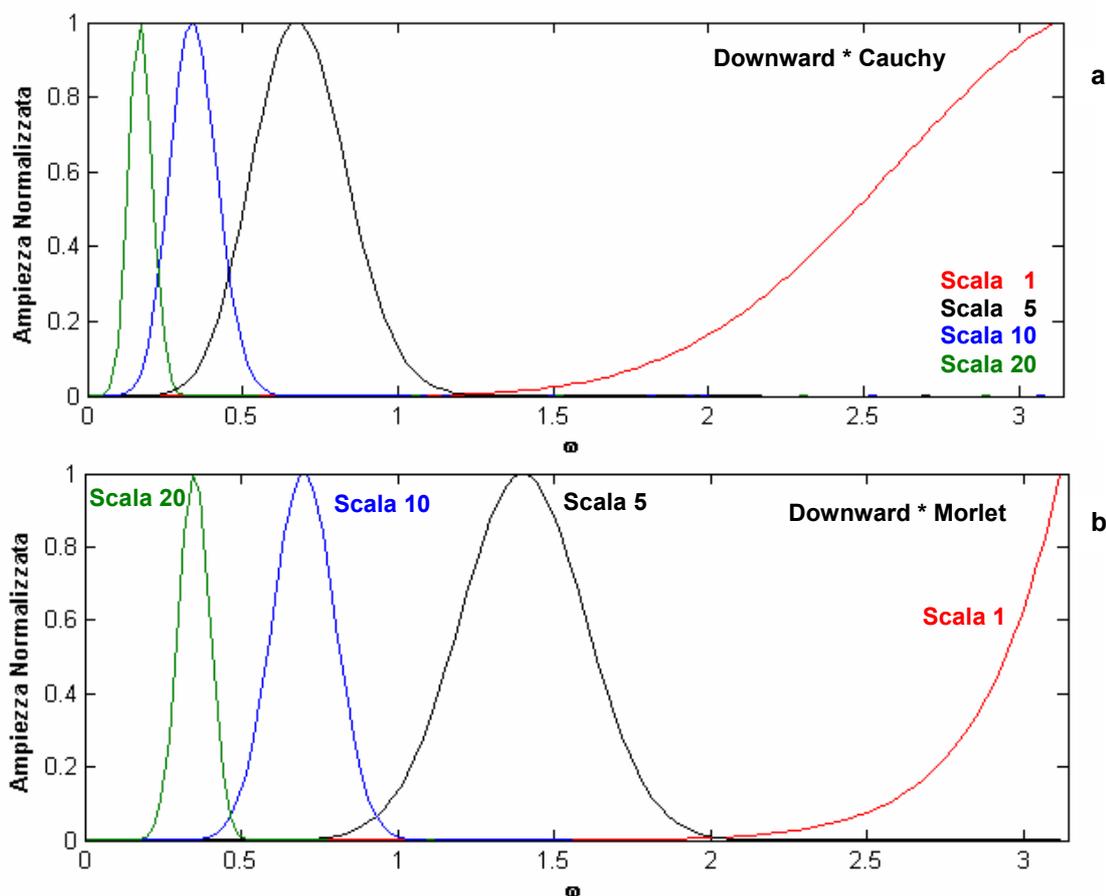
Gli esempi mostrano che le proprietà filtranti della CWT prevalgono sulla instabilità introdotta dalla continuazione verso il basso a seconda dell'ondina prescelta. In tutti gli esempi è possibile notare come all'aumentare della profondità supposta della singolarità (quindi della sorgente), la risposta dell'operatore  $v_{a_1}$  tende a spostarsi verso le basse frequenze.

Ad esempio, il prodotto della continuazione verso il basso con la ondina Morlet (fig. 4.8 b) mostra che alle basse scale l'operatore  $v_{a_1}$  è un filtro passa alta mentre già dalle prime scale diventa un filtro passa banda. Le risposte in frequenza mostrate in questi esempi non fanno altro che confermare che, con un operatore congiunto, gli effetti di instabilità introdotti per ritornare sulla singolarità del segnale sono compensati dalla trasformata alla scala di misura  $a_1$  ottenuta con una qualsiasi altra ondina  $u$ .

Come detto, nell'analisi con la CWT anche la scelta della wavelet analizzatrice gioca un ruolo importante. Infatti, da caso a caso, bisogna trovare il giusto equilibrio tra proprietà filtranti e di localizzazione delle singolarità. Alcune funzioni di smoothing hanno un grado di localizzazione maggiore rispetto ad altre, al contrario queste ultime hanno proprietà filtranti maggiori. Tra queste, alcune hanno proprietà filtranti maggiori rispetto alle stesse Poissoniane dando all'operatore  $v_{a_1}$ , implementato con queste ondine, doti superiori di filtro passa bassa.



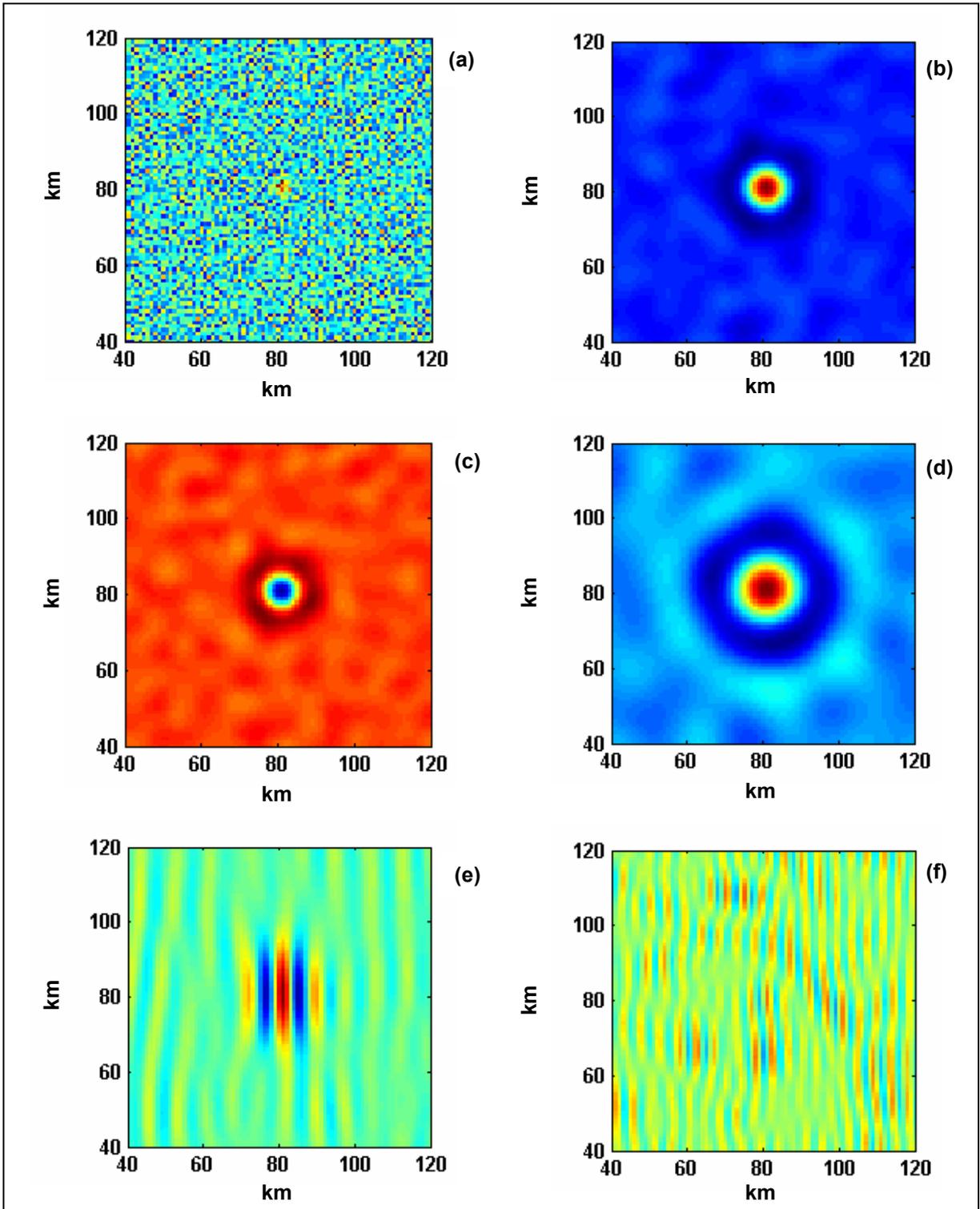
**Figura 4.7.** Risposta in frequenza dell'operatore  $v_{a_1}$  costruito con la Pethat wavelet (a) e con la Wheel wavelet (b). Le proprietà filtranti dell'operatore tendono al passa bassa all'aumentare della profondità supposta della scala



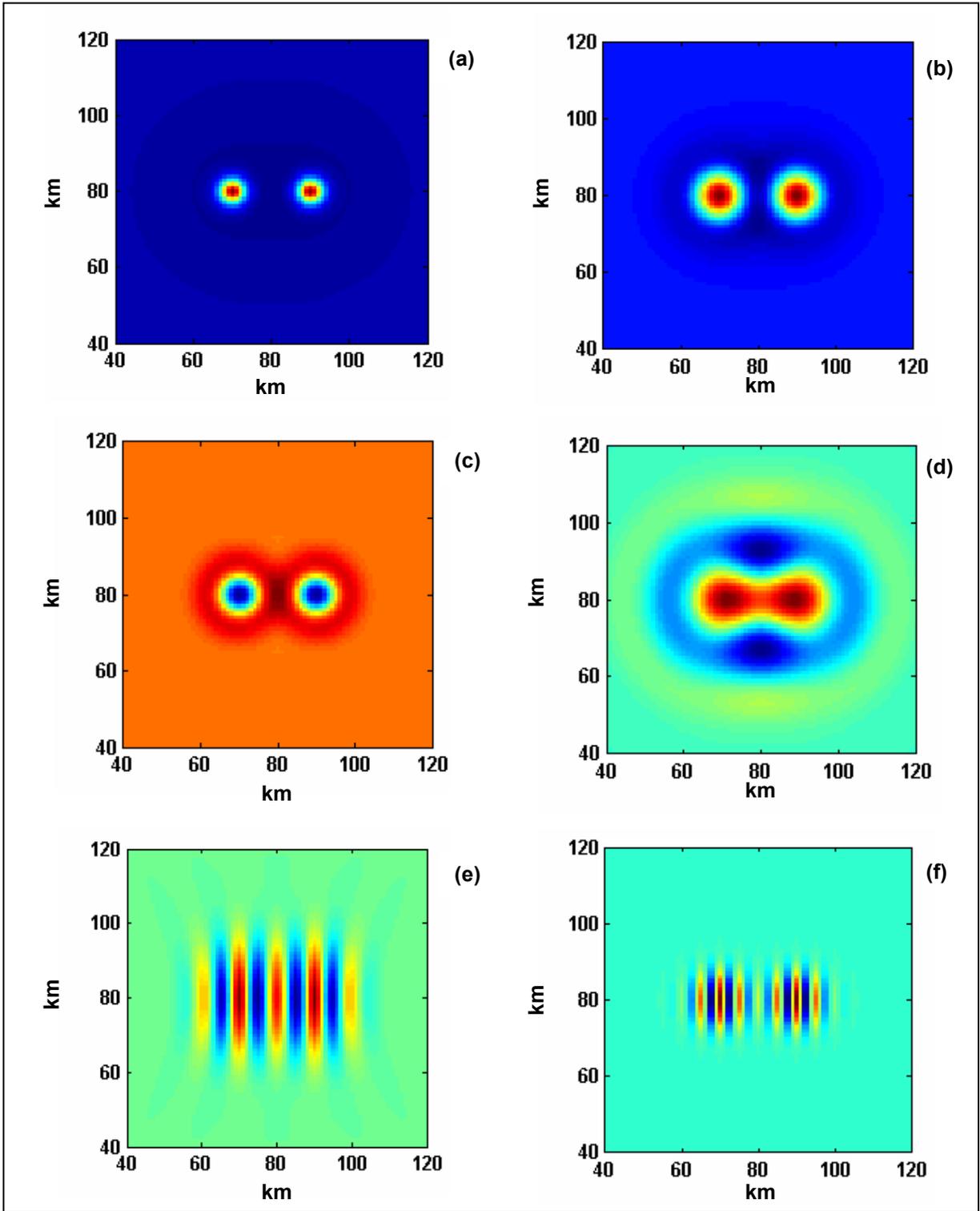
**Figura 4.8.** Risposta in frequenza dell' operatore  $v_{a_1}$  costruito con la Cauchy wavelet (a) e con la Morlet wavelet (b). Le proprietà filtranti dell' operatore tendono al passa bassa all' aumentare della profondità supposta della scale

La figura 4.9 a mostra il gradiente verticale di un campo magnetico originato da una sorgente dipolare posta a 5 km sotto il piano campagna, corrotto da intenso noise random, rendendo l' anomalia a malapena riconoscibile. E' possibile notare come la trasformazione effettuata con l'operatore  $v_{a_1}$  per tornare alla scala della singolarità  $a_0$  e calcolare la CWT alla scala originaria di misura  $a_1$ , scala 5 in questo caso, ha proprietà filtranti diverse a seconda dell' ondina scelta.

Usando quelle del gruppo delle Gaussianne (fig. 4.9 b,c), la trasformazione possiede un grado di filtraggio elevato, quindi la semplice operazione di "cambio ondina" già ci consente di migliorare il campo da analizzare. Usando invece ondine con un grado di localizzazione elevato, come la Cauchy o la Morlet ad esempio, il noise crea un disturbo che non permette una buona identificazione dell' anomalia (fig. 4.9 e,f). La figura 4.10 invece mostra che, a seconda dell' ondina utilizzata, il campo subisce una dilatazione diversa, avvolta maggiore della stessa Poissoniana e quindi se l' operazione di cambio ondina da un lato ha un effetto filtrante dal lato può aumentare gli effetti di interferenza reciproci tra sorgenti vicine.

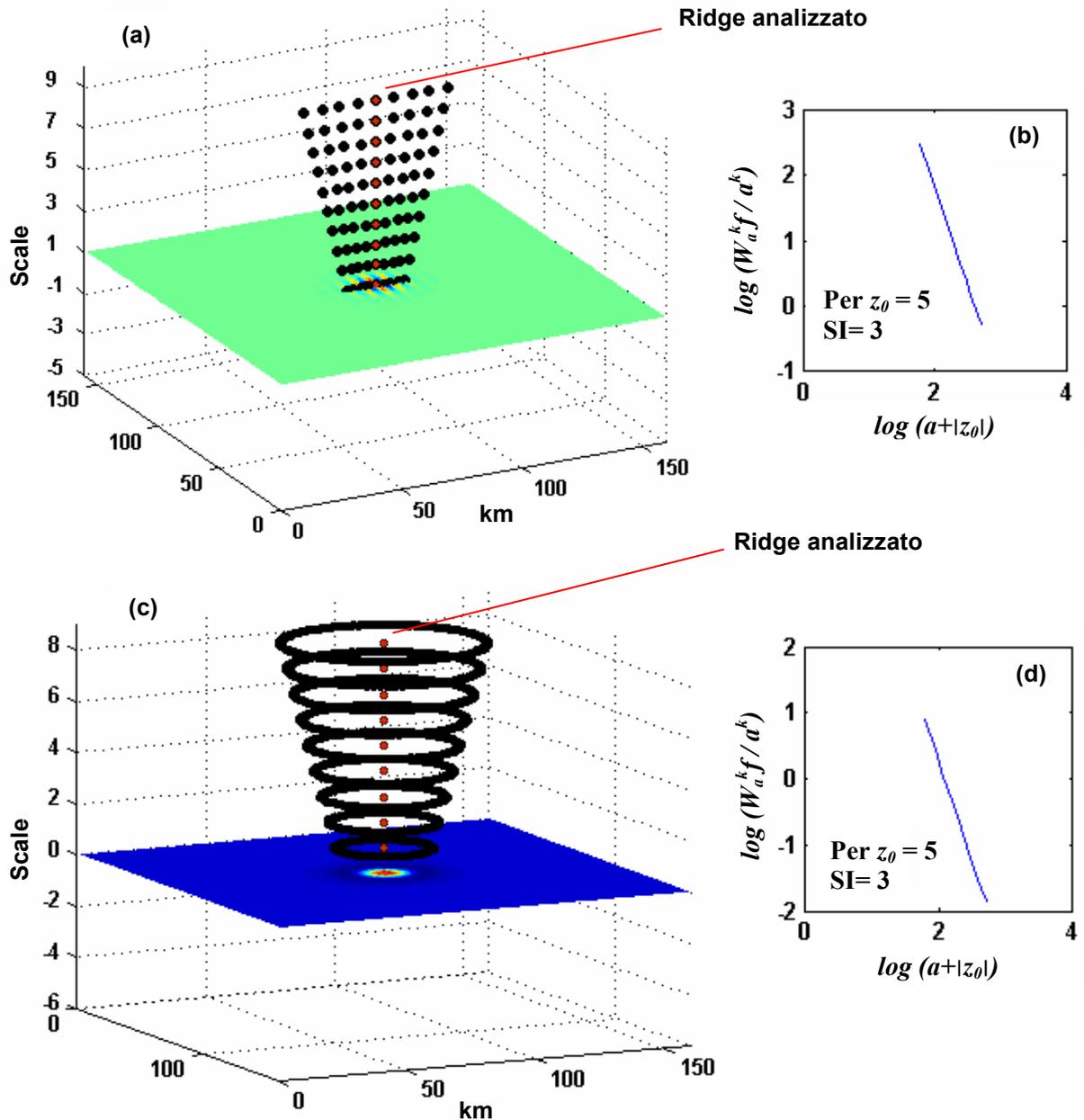


**Figura 4.9.** Campo magnetico di una anomalia di sorgente dipolare al polo corrotto da intenso noise (a). La semplice operazione di raggiungere la singolarità e ritornare alla scala di misura attribuisce all'operatore importanti proprietà di filtro passa bassa. Il campo ottenuto dopo l'applicazione dell'operatore con la Gauss (b), la Mexican (c), la Pethat (d), la Cauchy (e), la Morlet (f) mostra i pro ed i contro della CWT condotta con una determinata ondina.



**Figura 4.10.** Campo magnetico al polo di due sorgenti dipolari collocate a 5 km di profondità (a). La scelta delle ondine influisce sul potere risolutivo della CWT. Le anomalie, dopo l'operazione di cambio ondina, con la Gauss (b), la Mexican (c), la Wheel (d), la Cauchy (e), la Morlet (f) alle volte sono troppo dilatate fino all'aumento degli errori di interferenza.

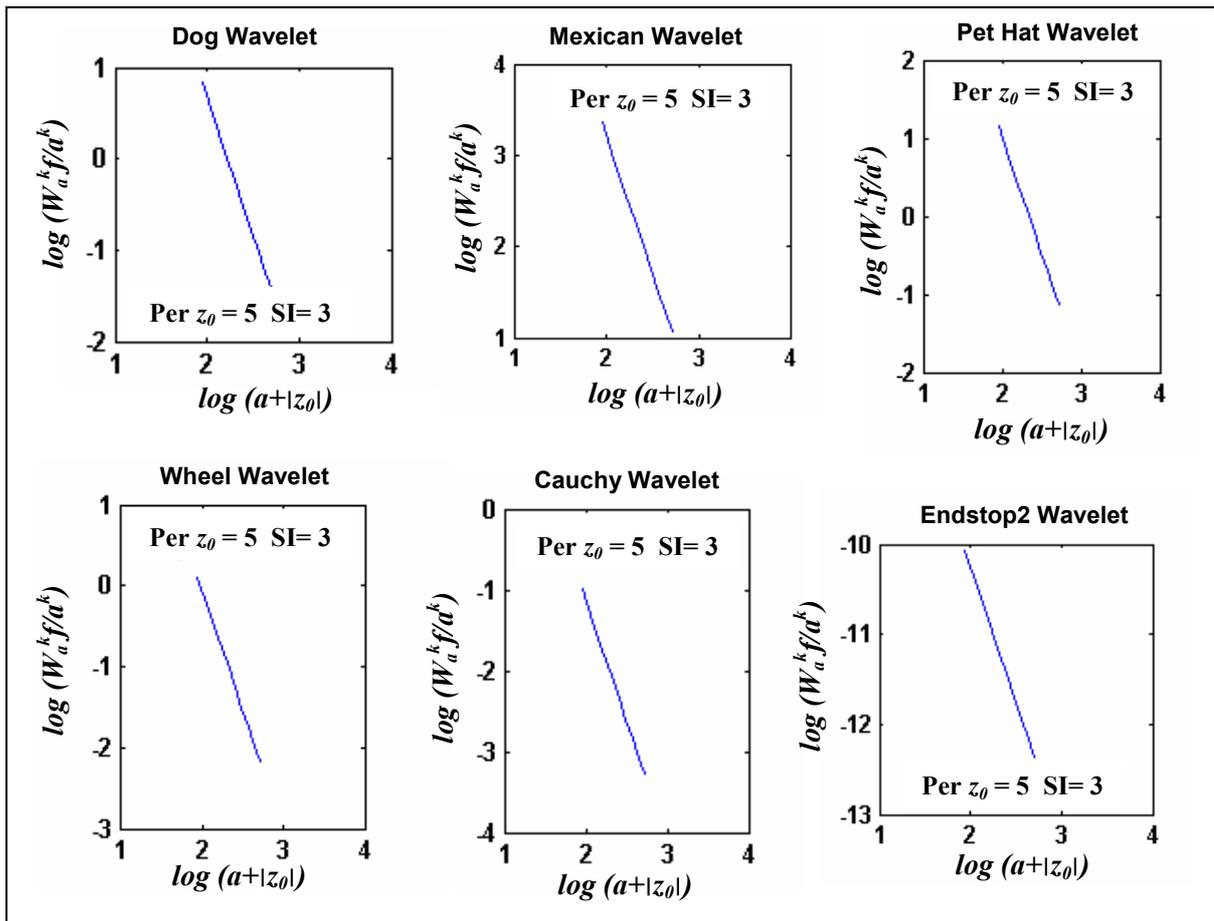
Dopo aver valutato la possibilità di usare un operatore che includa la continuazione verso il basso di diverse volte il passo di campionamento, è possibile effettuare la CWT con l'operatore  $v_{a_1}$  in modo da poter usare molti più tipi di ondi oltre la Poissoniana senza introdurre instabilità elevata nel sistema.



**Figura 4.11.** Analisi multiscala del campo magnetico ridotto al polo di una sorgente di tipo sferico. Applicando l'operatore  $v_{a_1}$  la pendenza della curva  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  ottenuta dai valori dei massimi della CWT fornisce stime dell'Indice Strutturale coerenti con il tipo di sorgente anche per ondi diverse dalla Poissoniana, come la Morlet (a,b) e la Gauss (c,d).

Le figure 4.11 e 4.12 mostrano come, avendo ridefinito  $W_{x,a}^k f(u)$ , usando l'operatore  $v_{a_1}$ , è possibile ottenere stime stabili dell'Indice Strutturale di una sorgente dipolare usando diverse ondinie analizzanti.

Adesso le stime ottenute con qualsiasi ondinia prescelta sono accurate: alla profondità a cui si trova la sorgente il valore stimato corrisponde a quello della sorgente analizzata.

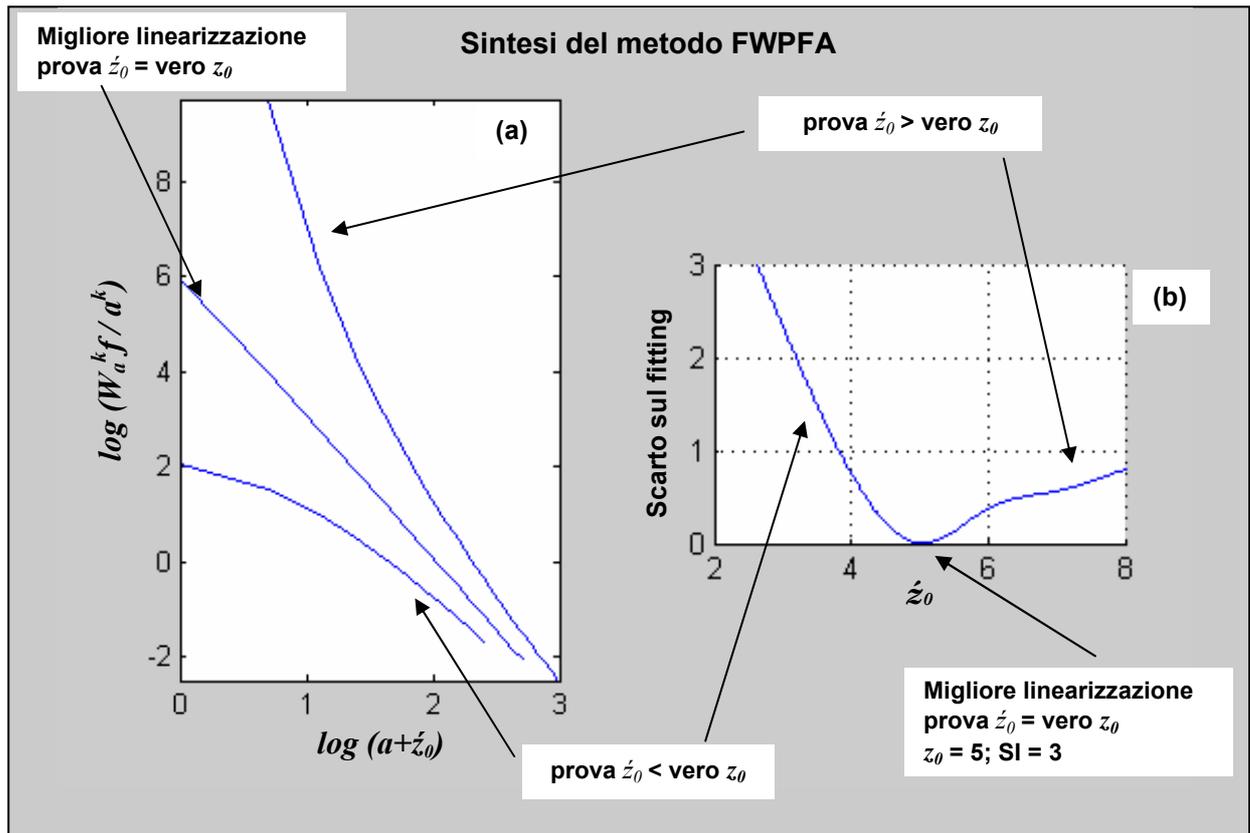


**Figura 4.12.** Analisi multiscala del campo magnetico ridotto al polo di una sorgente di tipo sferico. La figura mostra come applicando l'operatore  $v_{a_1}$  con ondinie diverse dalla Poissoniana le stime dell'Indice Strutturale ottenute dalla pendenza del  $\log(W_{x,a}^k f/a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$ , a differenza della figura 4.4, adesso sono coerenti con il tipo di sorgente.

Dato che l'analisi per la determinazione dei parametri della sorgente con la CWT non è possibile senza tornare alla scala  $a_0$  che contiene la singolarità, a meno di usare una wavelet Poissoniana, durante lo sviluppo dell'algoritmo FWPPFA è stata proposta una strategia per la stima della profondità della sorgente. Il metodo consiste nel far variare un valore prova della profondità della sorgente  $z_0$  nell'operatore  $v_{a_1}$  e scegliere quella che meglio linearizza la curva ottenuta

mettendo  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  sulle ordinate e  $\log(a+z_0)$  sulle ascisse; la stessa curva che ci permette di stimare il grado di omogeneità della sorgente.

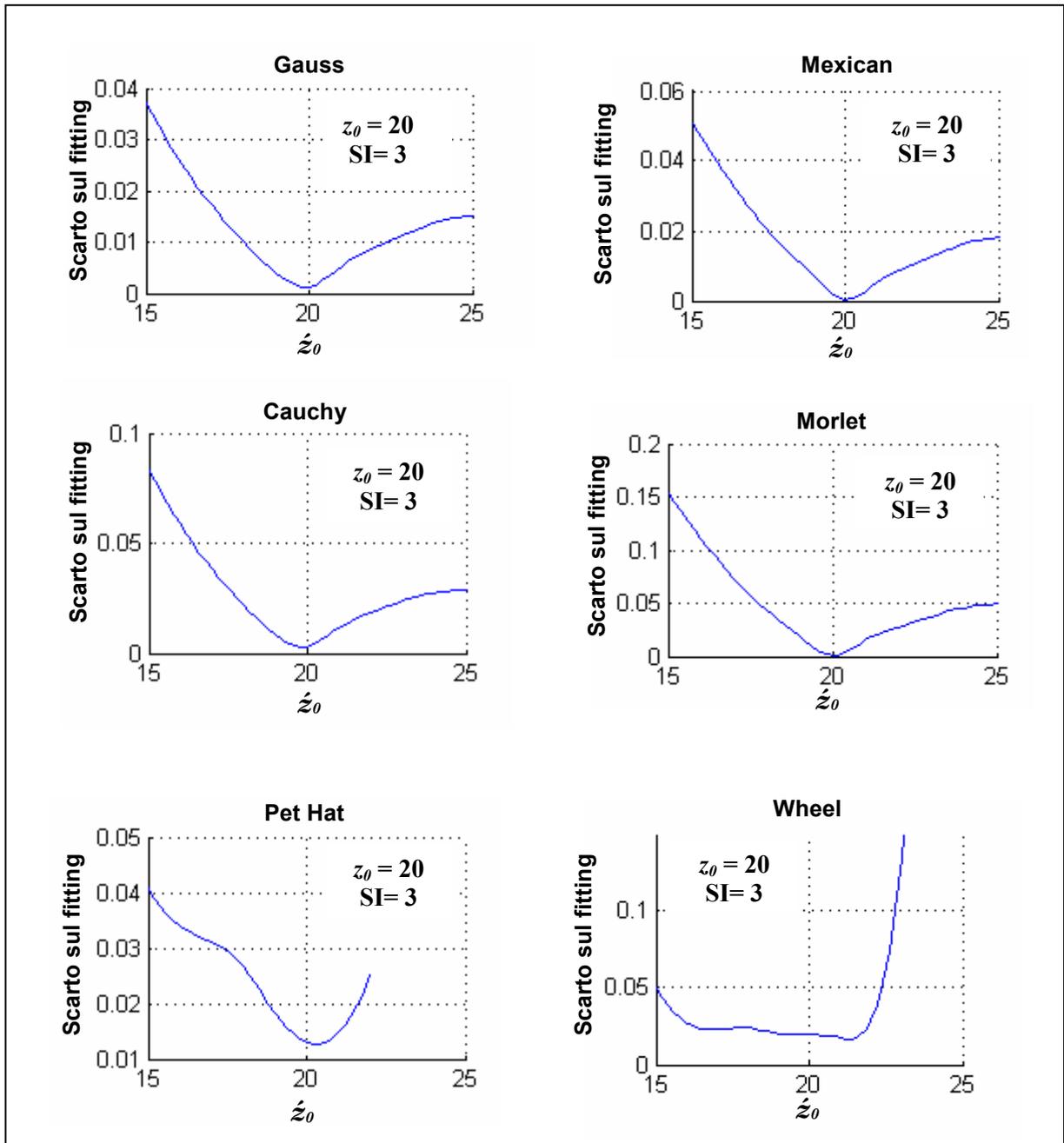
Infatti solo nel caso in cui ci si trovi effettivamente alla scala che contiene la singolarità  $W_{x,a}^k f(u)$  può essere ottenuta come convoluzione di una singola ondana e non risentire degli effetti dovuti a dilatazioni multiple. Nel caso contrario l'equazione 4.6 non potrà essere soddisfatta dato che la CWT dipenderà ancora da entrambe le ondate  $p$  ed  $u$ .



**Figura 4.13.** Applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico di una sorgente di tipo sferico collocata a 5 km di profondità. Il  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  per diversi valori prova  $\dot{z}_0$ , mostra come la migliore linearizzazione si ha quando si ritorna sulla singolarità (a). La curva più lineare possibile è associata alla profondità della sorgente (b), la pendenza fornisce la stima dell'Indice strutturale.

La figura 4.13 mostra come avviene la stima simultaneamente dei parametri di una sorgente dipolare situata a 5 km di profondità con il metodo FWPPFA. L'algoritmo procede in modo da calcolare una serie di dati multiscala effettuando la CWT, con una qualsiasi ondana da noi prescelta, variando il valore prova della profondità della sorgente  $\dot{z}_0$ . Quindi ad ogni profondità di prova  $\dot{z}_0$  possiamo usare il data set associato per calcolare la pendenza della curva  $\log(W_{x,a}^k f / a^k)$  contro  $\log(a+z_0)$  e stimarne lo scarto sul fitting ( $L^2$  Misfit). Gli scarti corrispondenti ad

ogni valore di prova della profondità  $\hat{z}_0$  sono graficati sulle ordinate (fig. 4.12 b). La profondità di prova che corrisponde allo scarto minore sul fitting è considerata la profondità a cui la singolarità è risolta al meglio. Questa è la profondità della sorgente, la profondità  $\hat{z}_0 = z_0$  dove l'equazione 4.6 è soddisfatta e la pendenza della retta di regressione associata a questa profondità è proprio l'opposto dell'Indice Strutturale.



**Figura 4.14.** Applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico di una sorgente di tipo sferico collocata a 20 km di profondità. Il metodo mostra che è possibile ottenere stime accurate anche per sorgenti poste a profondità elevata. La Pet Hat e la Wheel risentono del fatto che dopo la ventiduesima scala l'anomalia è appiattita e non è possibile ottenere alcun ridge da analizzare associato alla sorgente.

Il metodo FWPPFA fornisce stime stabili dei parametri della sorgente anche se questa è posta a profondità elevata (fig. 4.14). La stima dei parametri con alcune ondi può essere effettuata a profondità molto elevate, come per la Gaussiana e quelle da lei derivate, ma per alcune come la Pet Hat e la Wheel il limite per una sorgente elementare è intorno a 20 volte il passo in quanto la CWT, con queste ondi e a queste scale, filtra troppo il campo fino a dissolvere l'anomalia.

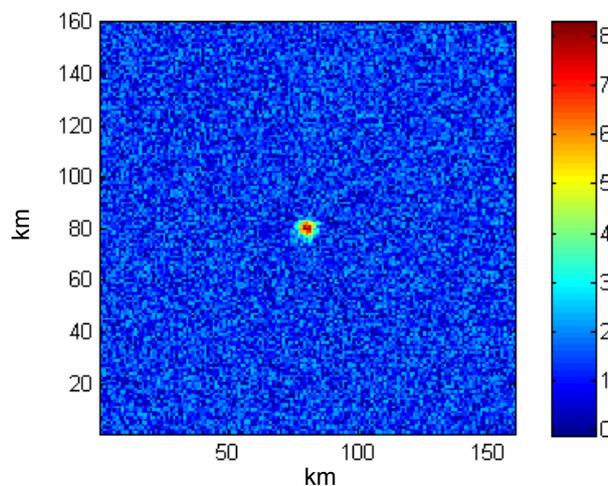
## 4.6 Applicazione del metodo ad alcune sorgenti one-point

L'algoritmo FWPPFA, basato sulla CWT e sulla strategia descritta nel paragrafo precedente, fornisce stime simultanee dei parametri della sorgente con il vantaggio di poter scegliere un maggior numero di ondi, oltre quelle basate sul kernel di Poisson.

In questo paragrafo saranno descritte alcune applicazioni a dati sintetici generati da diverse configurazioni di sorgenti one-point, anche in presenza di noise, al fine di esplorare la funzionalità del metodo, di capirne i reali vantaggi e discuterne i limiti rispetto all'uso delle ondi Poissoniane.

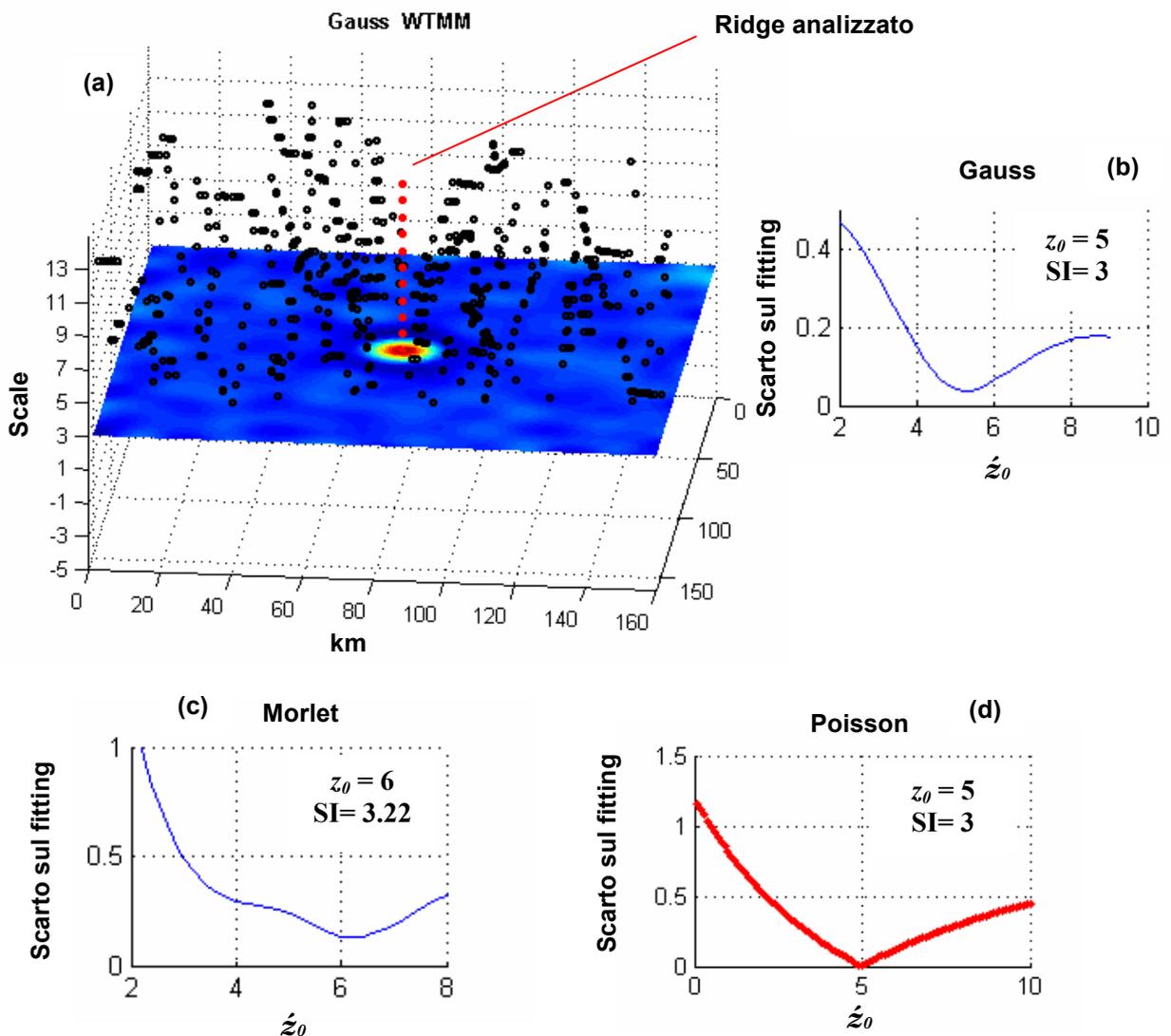
E' stato proposto il caso di:

1. Sorgente dipolare con elevata interferenza ad alta frequenza (noise random).
2. Contatto magnetico semi-infinito, interferito anche con noise random.
3. Contatti magnetici ravvicinati per simulare una geometria ad horst e graben.
4. Dico infinitamente profondo
5. Sorgente prismatica
6. Sorgenti polari poste a profondità diversa.
7. Sorgente dipolare collocata al centro di un basamento magnetizzato.



**Figura 4.15.** Anomalia al polo magnetico di una sfera posta a 5 km di profondità con noise random pari al 50 %.

Per il caso del campo magnetico di una sorgente dipolare con una quantità non trascurabile di noise, l'analisi con il metodo FWPPFA fornisce stime accurate dei parametri della sorgente usando sia le Poissoniane che altre ondin come le Gaussiane. Il metodo risulta molto stabile dato che si avvantaggia delle proprietà filtranti della CWT. Per il test è stato considerato il campo di una sorgente dipolare situata a 5 km di profondità con una quantità di rumore random pari al 50% (fig. 4.15). Data la grande quantità di noise, analizzando semplicemente il campo non si ottengono stime corrette dei parametri della sorgente. Per ottenere stime accurate bisogna usare un appropriato grado di derivazione del campo. Ricordiamo infatti, che nei casi ad elevata interferenza l'uso delle derivate è consigliato per isolare al meglio le anomalie. Il rumore, amplificato dalle derivate, viene drasticamente abbattuto dalla CWT che ha grandi doti di stabilità (fig. 4.5-4.9).

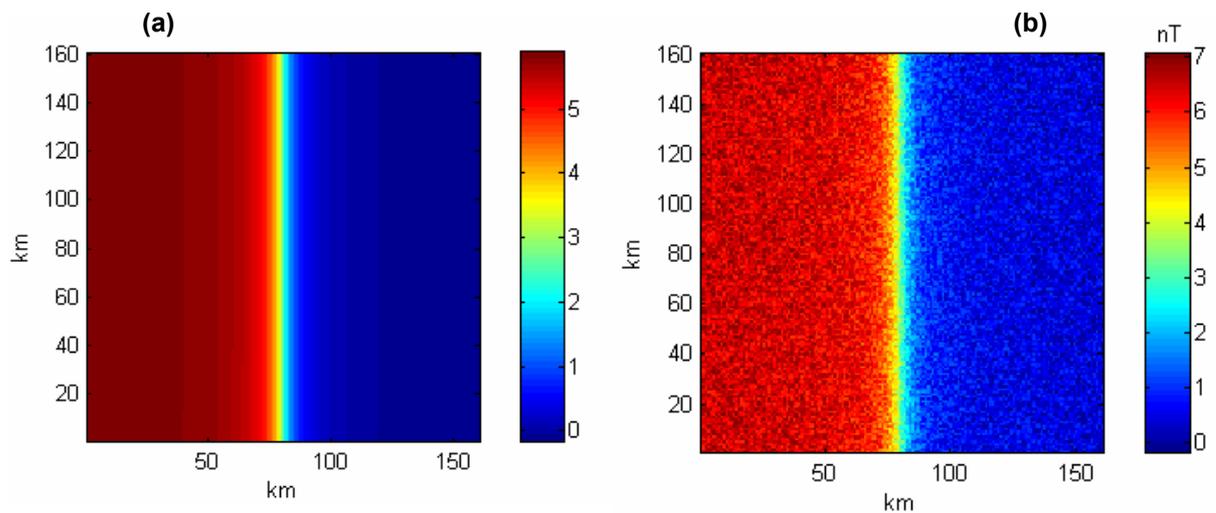


**Figura 4.16.** Applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico in figura 4.13. Nei casi ad elevata interferenza non tutte le ondin sono indicate in quanto l'alto potere risolutivo risente molto delle alte frequenze (c).

E' bene sottolineare anche che, nell' analisi con il metodo FWPPFA, usare le derivate di una particolare funzione di scala come ondine analizzanti, equivale ad analizzare il campo derivato con la funzione di scala stessa. Questo accade perché il metodo è basato sull' analisi con le CWT implementate nel dominio di Fourier. I prodotti convoluzionali equivalgono a prodotti scalari nel dominio delle frequenze. Quindi, derivare l' ondina analizzante è equivalente a derivare il campo.

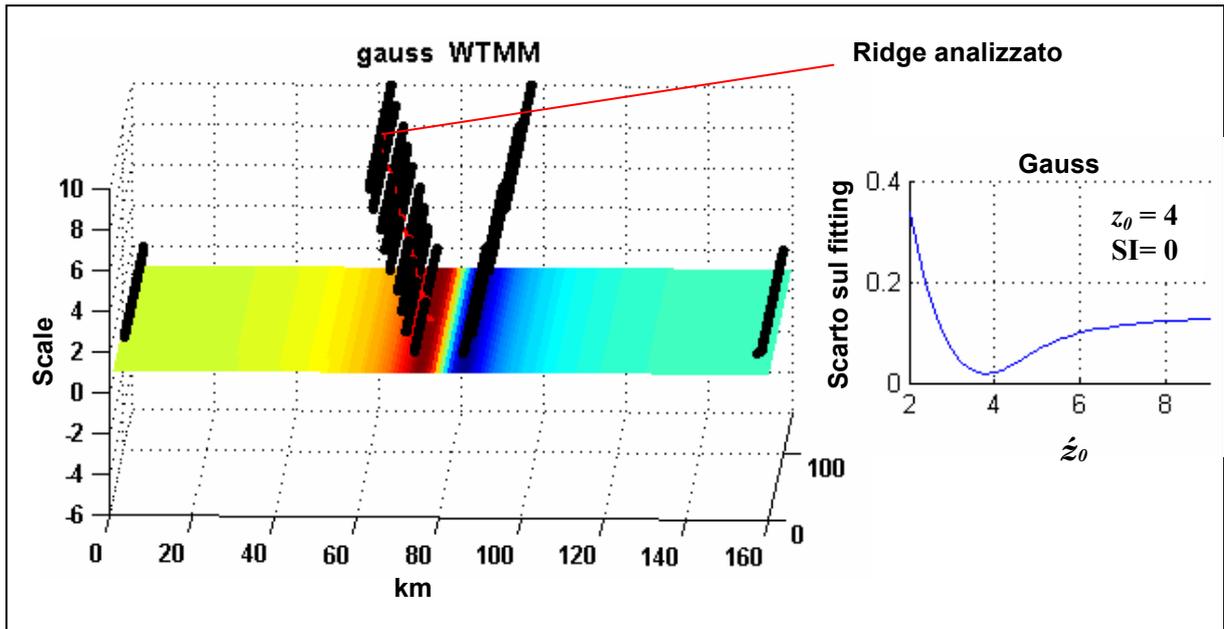
In ogni caso non tutte le ondine sono consigliate con la presenza di noise random. Infatti, se analizziamo lo stesso campo con la Morlet o la Cauchy ad esempio, non si ottengono stime corrette come con la Mexican ad esempio. Quindi, al fine di ottenere stime corrette nel caso di basso rapporto segnale rumore, si deve prestare molta attenzione nella scelta dell' ondina.

Nei test è stato poi considerato il caso di un contatto magnetico semi infinito collocato a 4 km di profondità (fig. 4.17). L' indice strutturale per questo particolare tipo di sorgente è pari a 0 ed indica la superficie superiore della sorgente (top).



**Figura 4.17.** Campo magnetico (a) e campo con noise (b) generato da un contatto magnetico semi-infinito situato a 4 km di profondità.

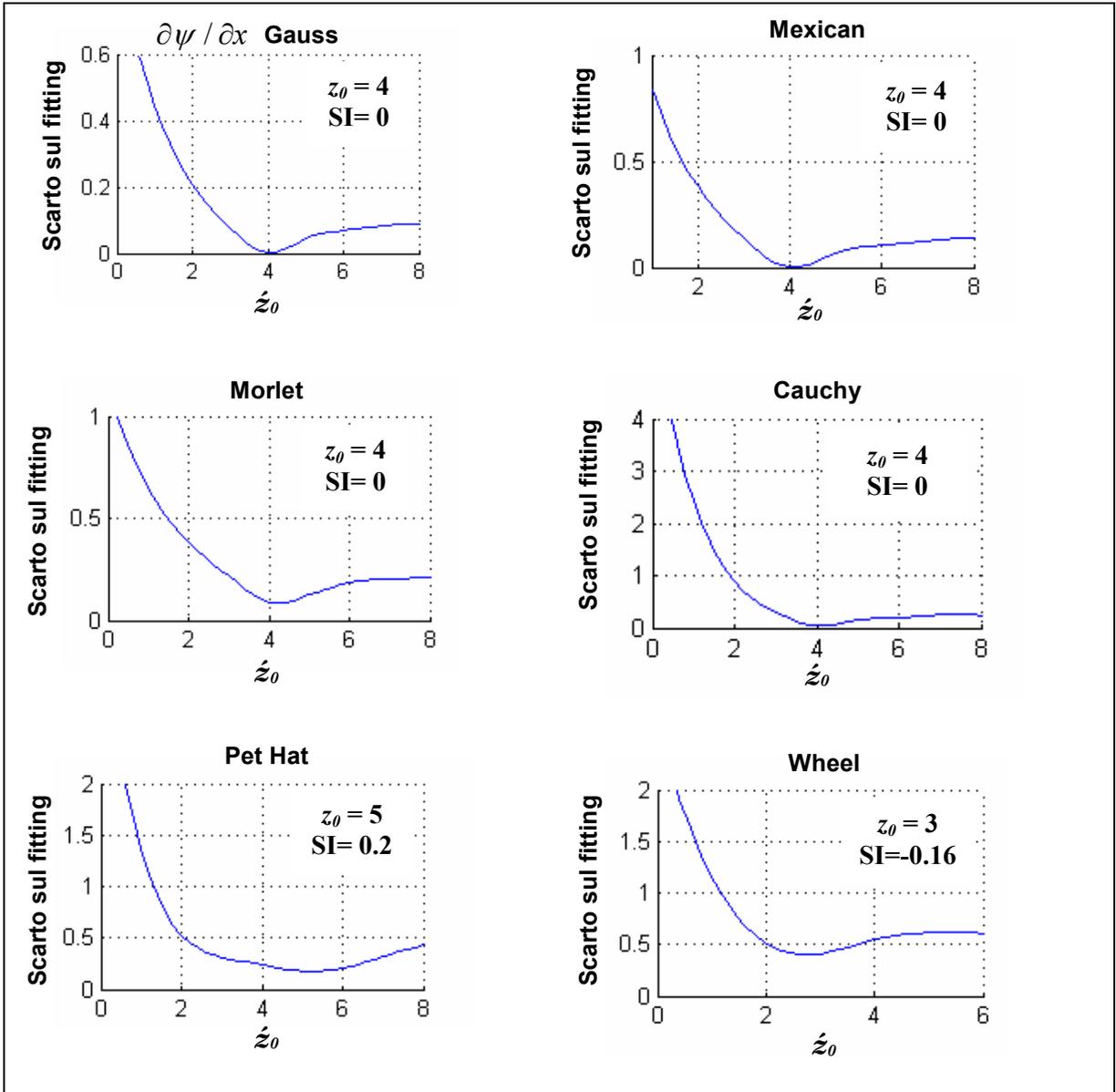
Nel caso del contatto magnetico semi infinito non tutte le ondine forniscono stime molto accurate dei parametri della sorgente. Usando quelle con maggior potere risolutivo, come la Morlet o la Cauchy, le stime sono molto accurate. Questo è dovuto al fatto che il contatto semi infinito è una sorgente allungata e le ondine in questione sono direzionali, cioè durante l'analisi possono essere orientate a piacimento. Anche le derivate della Gauss e della Poissoniana danno stime molto accurate, pur non essendo tutte direzionali.



**Figura 4.18.** Applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico in figura 4.17 (a). La figura mostra il risultato dell' applicazione del metodo sulla derivata prima verticale della Gaussiana.

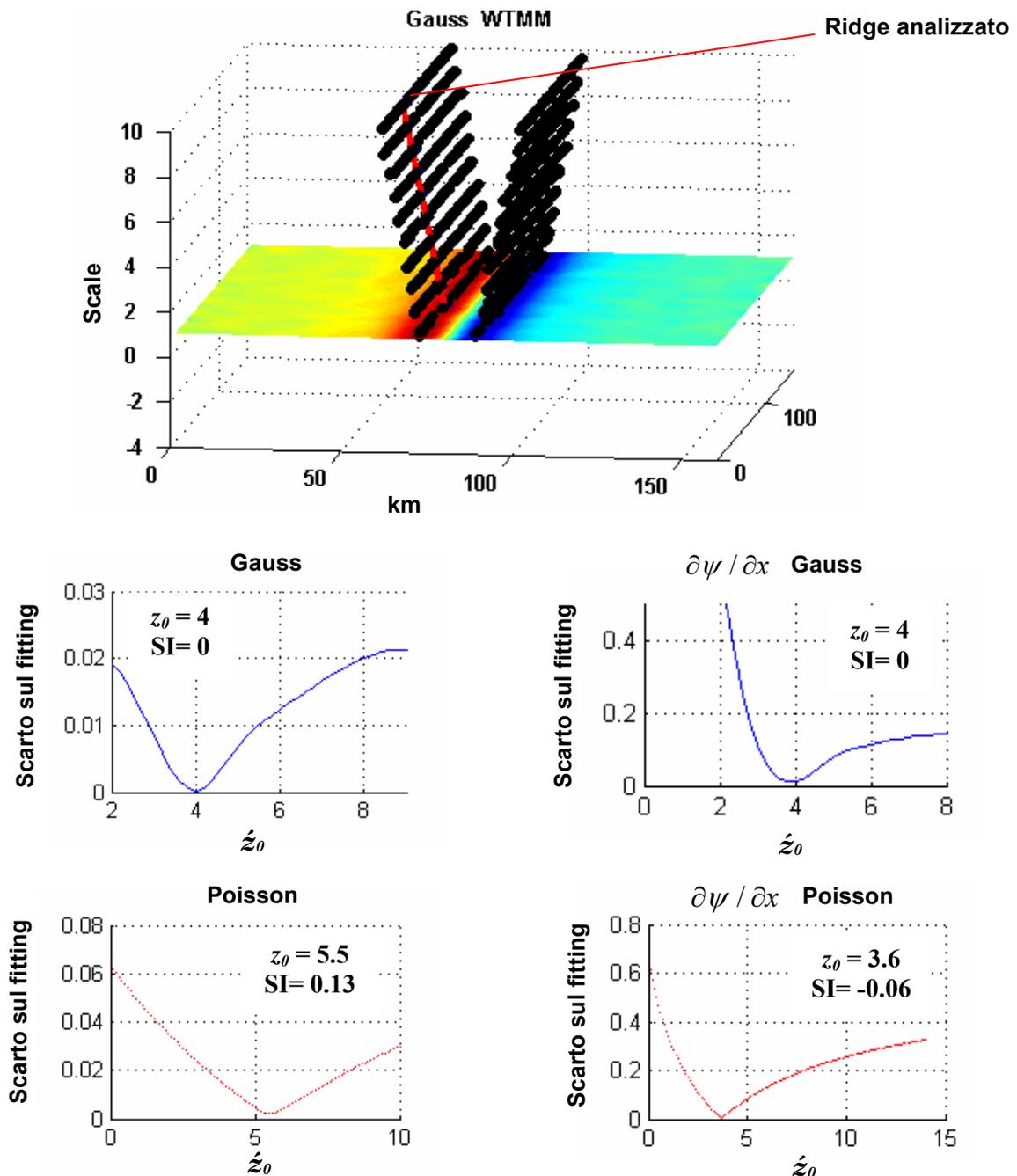
Data la forma del campo, la Gauss in se come la Poisson non generano ridge e quindi l' analisi con queste ondine non è possibile. Discorso diverso per la Pethat e la Wheel che sviluppano ridge ma non forniscono stime accurate dei parametri della sorgente.

Per effettuare l' analisi di questo campo, non è necessario invece derivare la Morlet, la Cauchy e tutte quelle ondine che hanno almeno due momenti nulli.



**Figura 4.19.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico in figura 4.17 (a) con alcune ondi. La Pethat e la Wheel non forniscono stime accurate per questo tipo di sorgente.

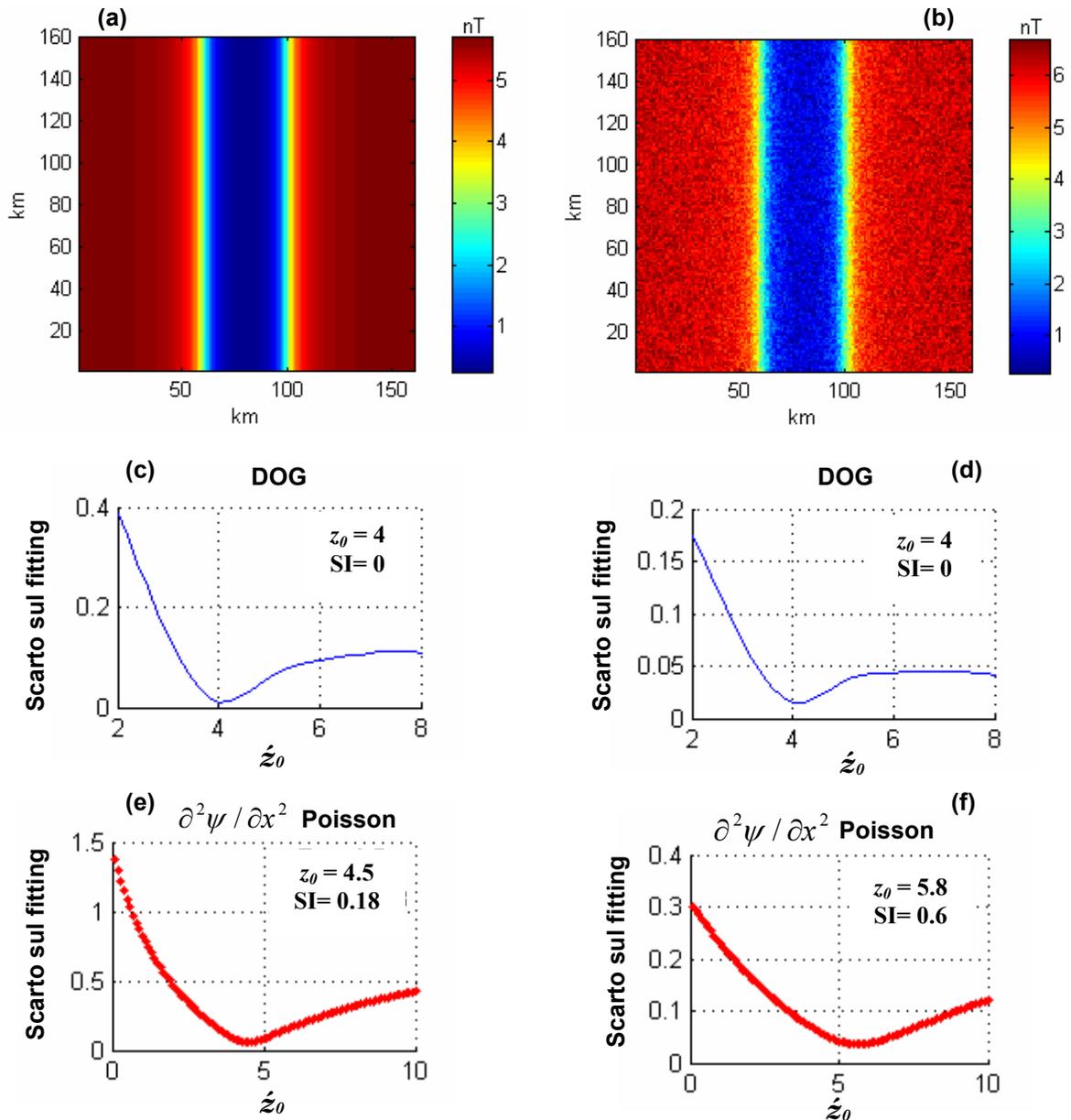
Nel caso in cui venga, però, aggiunto del rumore ad alta frequenza l' analisi con ondi con troppi momenti nulli è penalizzata; in alcuni casi è comunque possibile cercare l' intervallo di scale più appropriato. Nell' esempio mostrato in figura è stato aggiunto del rumore ad alta frequenza pari al 25%.



**Figura 4.20.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico in figura 4.17 (b). La Poissoniane non forniscono stime accurate quanto le Gaussiane dato il disturbo introdotto dal rumore ad alta frequenza.

La figura 4.20 mostra che l' analisi effettuata con le Gaussiane fornisce stime più accurate rispetto a quella effettuata con le Poissoniane. Con la Gaussianiana, già dal primo ordine di derivata, le stime sono molto accurate, dato l' elevato potere filtrante di queste ondine.

Le stime ottenute dalle derivate della Poissoniana non sono così accurate come quelle ottenute nel caso senza noise. A parità di intervallo di scale e di ordine di derivata, le Gaussiane riescono a risolvere meglio questo tipo di anomalia.

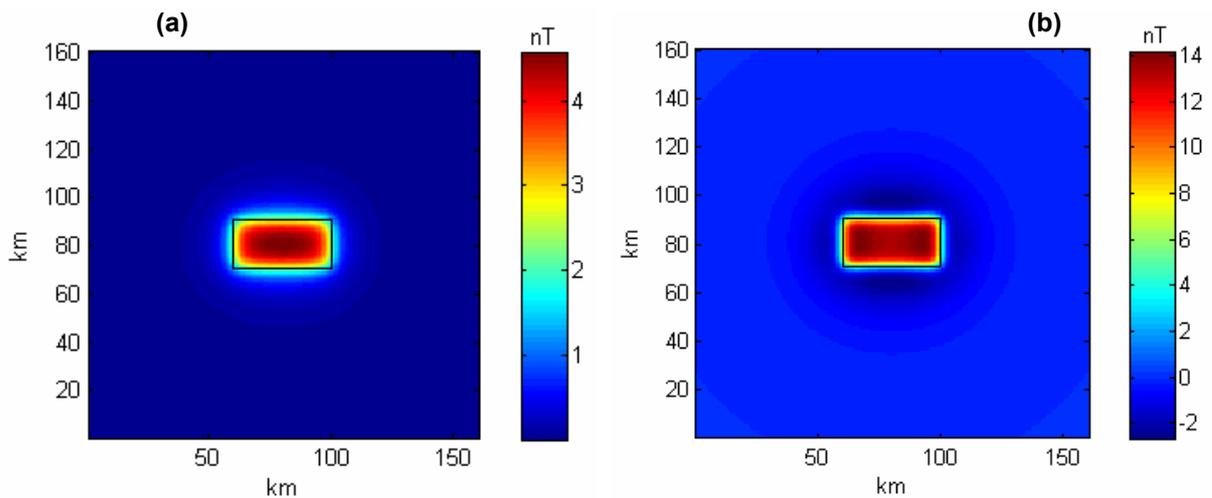


**Figura 4.21.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo di due contatti magnetici (a) anche con noise ad alta frequenza (b). A differenza delle Gaussiane (c-d), le Poissoniane non forniscono stime accurate dei parametri della sorgente (e-f).

In un altro esempio è stato aumentato il livello di interferenza nel campo magnetico simulando una geometria ad horst e graben. Il campo è originato da due contatti magnetici ravvicinati posti alla profondità di 4 km (fig. 4.21). I due contatti ravvicinati creano un' interferenza che inficia in maniera sensibile l' analisi con le Poissoniane anche senza l' aggiunta di noise. A parità di ordine di

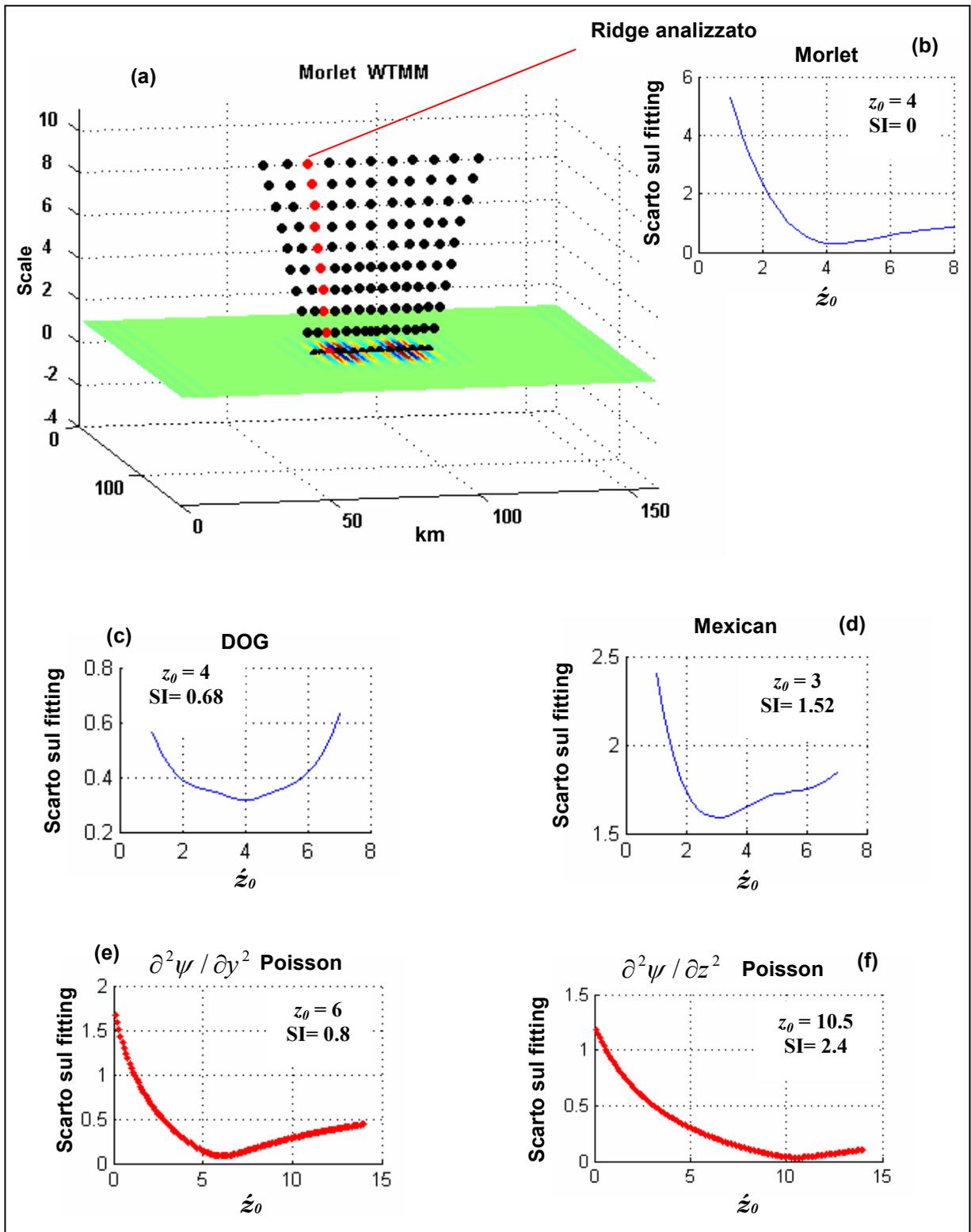
derivazione, le stime ottenute con la Poissoniana sono meno accurate, sia delle precedenti nel caso di un singolo contatto, che di quelle ottenute con le Morlet, le Cauchy o le Gaussiane. La figura mostra un confronto delle Poissoniane con le Gaussiane anche nel caso con noise ad alta frequenza. Le proprietà filtranti delle Gaussiane sono maggiori e la stima dei parametri è più accurata.

In un altro test è stato invece analizzato il caso di un corpo intrusivo infinitamente profondo, il cui top è situato a 4 km di profondità (fig. 4.22a). Questo tipo di sorgente, anche se ha le caratteristiche geologiche di un dicco, non può essere assimilato al piano infinito verticale che è indicato in letteratura come dicco, appunto. La larghezza non è infinita rispetto all' altezza e le dimensioni infinite non sono 2, come nel caso di un piano infinito, quindi ci sono interferenze generate dagli spigoli superiori. In questi casi è possibile indirizzare l' analisi sui bordi della sorgente dove il contrasto è più accentuato. A seconda del grado di risoluzione dell' ondina, che aumenta con le derivate, i bordi possono essere assimilati a dei contatti magnetici anche se in realtà non lo sono. L' analisi condotta in questo modo dovrebbe portare alla stima del top della sorgente con un parametro di forma simile ad un contatto, cioè pari a 0.



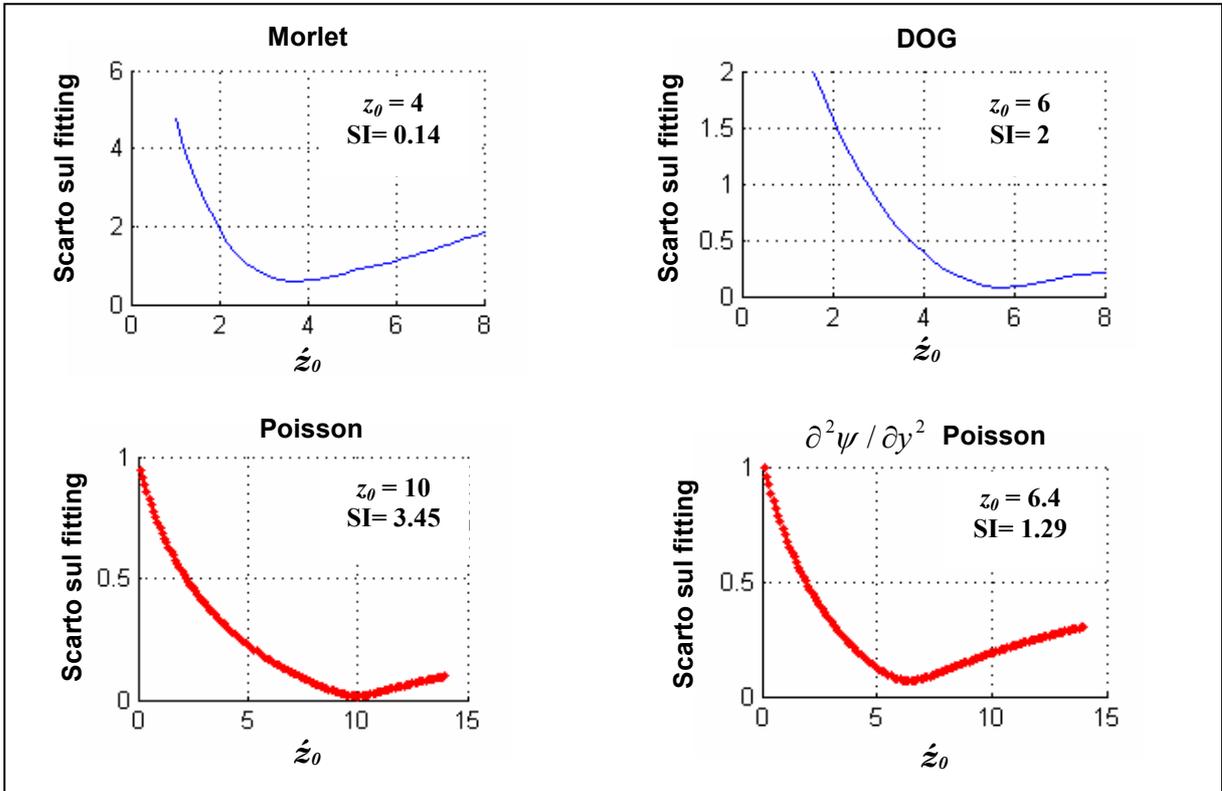
**Figura 4.22.** Campo magnetico ridotto al polo generato da un dicco a 4 km di profondità (a). Il dicco è stato troncato creando una sorgente di tipo prismatico con base inferiore posta a 8 km di profondità (b).

I risultati riassunti nella figura 4.23 mostrano che le stime migliori sono state ottenute con le wavelet direzionali, come la Morlet, la Cauchy e la Dog; le direzionali del gruppo delle Poissoniane danno stime accettabili a partire dal 2° ordine di derivata. La Poissoniana non risolve bene i bordi di questo tipo di sorgente e per ottenere stime accurate bisogna aumentare notevolmente il grado di derivazione. In ogni caso, a parità di ordine di derivazione, le migliori stime si ottengono con la Morlet e la Cauchy. L' esempio mostra anche che, pur non essendo direzionale, la Mexican fornisce stime meno accurate ma comunque accettabili.



**Figura 4.23.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo magnetico in figura 4.22 (a). Le ondirie direzionali sono più indicate per ottenere stime accurate (b,c,e). A parità di ordine di derivazione, le stime ottenute dalle Poissoniane sono meno accurate delle Gaussiane.

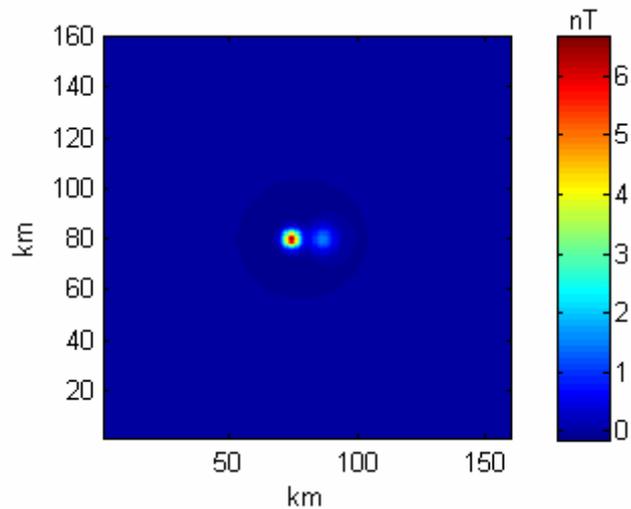
Questa differenza diventa più marcata se si analizza il caso di un dicco troncato, cioè un prisma il cui top è a 4 km di profondità mentre la base è ad 8 km (fig. 4.22b). In questo esempio gli effetti di interferenza sono maggiori; a quelli dovuti agli spigoli superiori si aggiungono quelli dovuti alla parte bassa del prisma che crea un sensibile contrasto di magnetizzazione.



**Figura 4.24.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo di un prisma in figura 4.22 (b). Le ondirie direzionali sono le uniche che forniscono stime accettabili, la poissoniana in se fornisce stime non accettabili.

In questo caso, solo le ondirie direzionali danno stime accettabili dei parametri della sorgente, tra cui solo la Morlet ha le caratteristiche di risoluzione per ottenere una stima accurate del top della sorgente senza necessità di derivare (fig. 4.24). La derivata direzionale della Poissoniana fornisce stime accurate a partire dal terzo ordine di derivata.

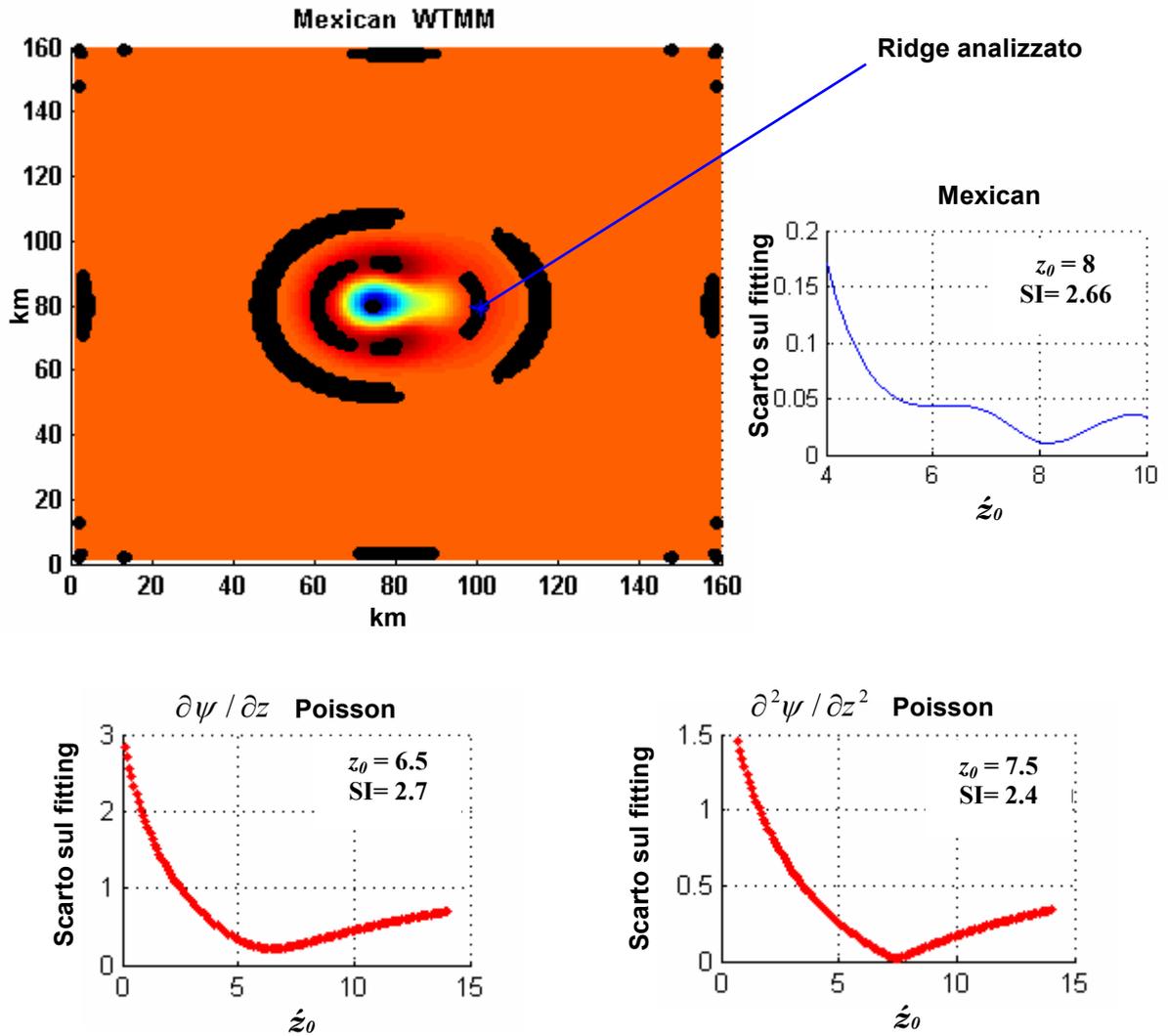
In un altro esempio è stato analizzato il caso in cui un'anomalia generata da una sorgente di tipo sferico è interferita da un'altra simile generata a profondità diversa. E' il caso del campo magnetico ridotto al polo originato da due sorgenti puntiformi poste a 5 km e 8 km di profondità (fig. 4.25).



**Figura 4.25.** Campo magnetico ridotto al polo generato da due sorgenti sferiche collocate a 5 km ed 8 km di profondità.

In questo caso l'anomalia generata dalla sorgente superficiale è ben risolta e, con il metodo FWPPFA, è possibile determinarne facilmente i parametri. L'anomalia generata dalla sorgente più profonda invece è meno intensa ed è mascherata da quella più superficiale. Questo caso crea non pochi problemi al metodo che, basandosi sulla continuazione verso il basso, risente maggiormente degli effetti della sorgente più superficiale. La stima dei parametri della sorgente più profonda è inficiata dagli effetti distortivi generati dalla continuazione verso il basso una volta superata la profondità della sorgente superficiale. Se la sorgente profonda è posta particolarmente vicino a quella più superficiale, la risoluzione è compromessa per profondità  $z_1 > z_0$ .

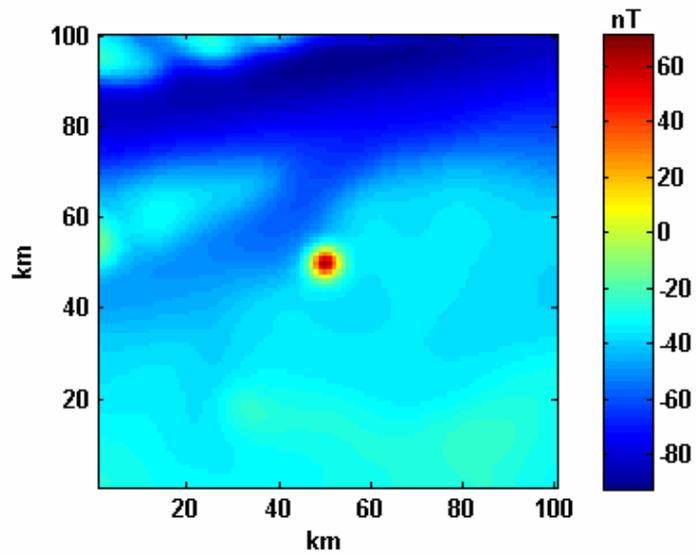
Nonostante queste difficoltà, la stima dei parametri della sorgente più profonda è comunque possibile limitando l'intervallo delle profondità di investigazione alle sole che forniscono una stima dell'Indice Strutturale compresa tra 0 e 3. La figura 4.26 mostra che seguendo questa particolare indicazione, le stime dei parametri relativi alla sorgente più profonda, ottenute con la Mexican, sono più accurate rispetto a quelle ottenute con le stesse Poissoniane, le quali non basano la loro applicazione sulla continuazione verso il basso.



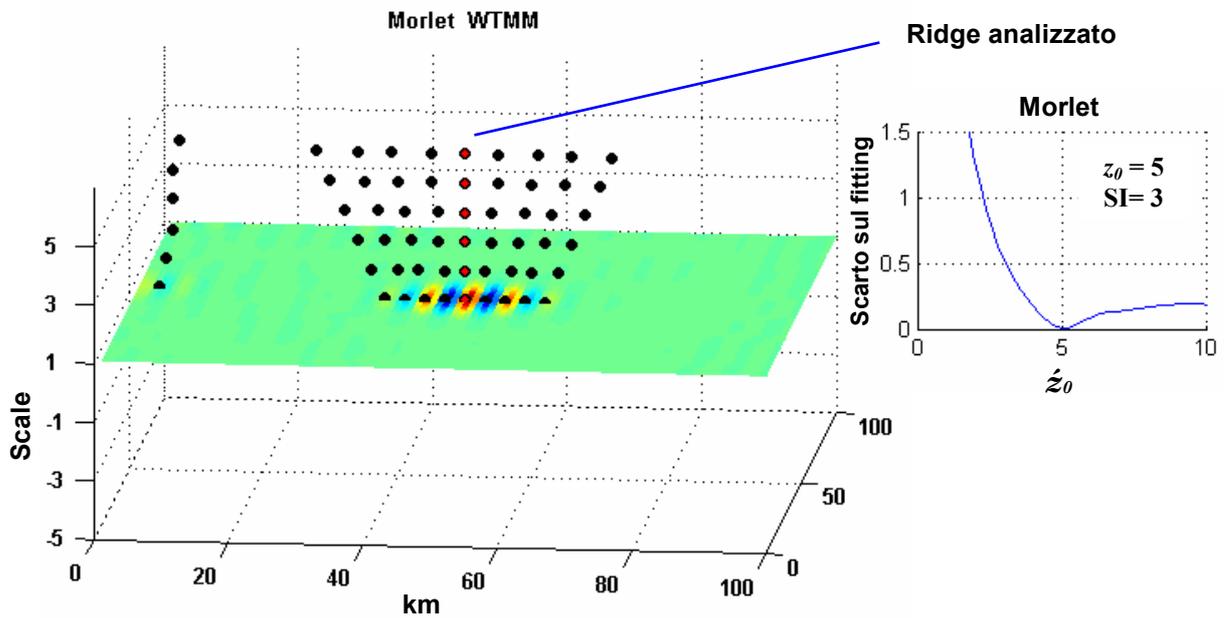
**Figura 4.26.** Risultati dell' applicazione del metodo FWPPA relativi alla sfera profonda collocata ad 8 km di profondità (fig. 4.25). A parità di ordine di derivazione, le stime ottenute dalle Poissoniane sono meno accurate di quelle ottenute con la Mexican.

Un altro caso molto interessante è quello ottenuto da una sorgente di tipo sferico collocata all' interno di una topografia complessa di un basamento cristallino magnetizzato. Per l' esempio è stata utilizzata la parte sud ovest del campo magnetico ridotto al polo del modello di Bishop. La profondità del basamento nell' area usata per il test varia approssimativamente tra 4 km e 8 km; a questo è stato aggiunto il campo di una sfera collocata a 5 km di profondità (fig. 4.27).

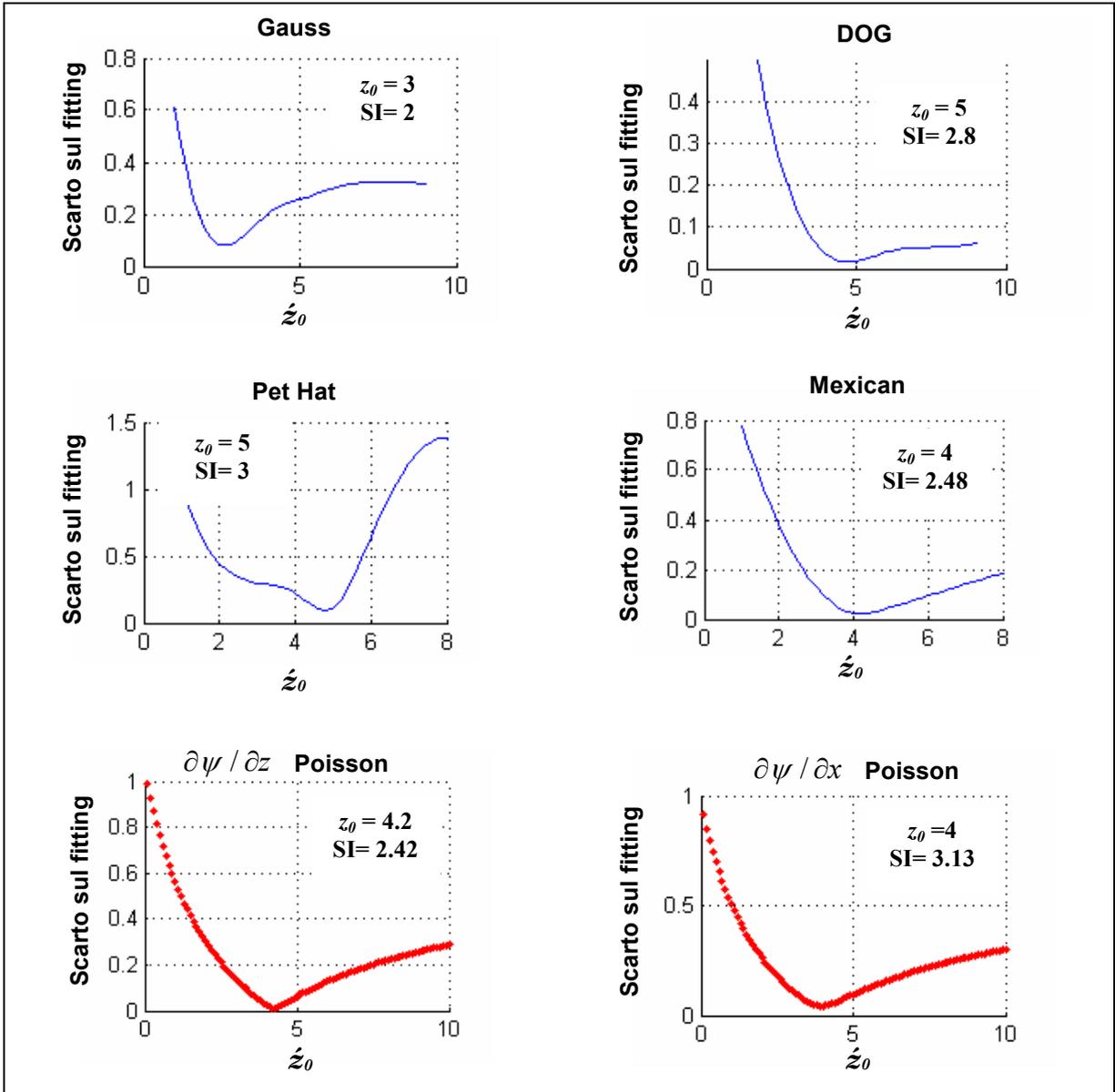
La figura 4.28 mostra che la Morlet è la migliore ondina per ottenere stime accurate dei parametri della sorgente. Senza usare derivate è in grado di isolare gli effetti generati dalla sorgente dagli effetti di trend e di rumore generati dal basamento.



**Figura 4.27.** Campo magnetico ridotto al polo originato da una sorgente dipolare collocata a 5 km di profondità all' interno di un basamento magnetizzato.



**Figura 4.28.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA al campo di una sorgente dipolare all' interno di un basamento magnetizzato. L' unica ondina in grado di risolvere bene l' anomalia ed ottenere stime accurate dei parametri della sorgente è la Morlet.



**Figura 4.29.** Risultati ottenuti dall' applicazione del metodo FWPPFA alla derivata lungo  $z$  del campo in figura 4.27. L' analisi effettuata con ondine diverse dalla Morlet non ha un pari grado di accuratezza.

Questa ondina rappresenta il giusto compromesso tra le proprietà di localizzazione e stabilità richieste; le basse frequenze che disturbano notevolmente l' analisi con le altre ondine, sono tagliate e l' anomalia è analizzata con un alto grado di risoluzione. Con altre ondine è comunque necessario usare derivate per ottenere la formazione di ridge sull' anomalia oggetto dello studio, eccetto per la Pethat. Il risultato è accettabile ma le stime non sono accurate come quando si usa la Morlet. Anche le derivate delle Gaussiane e delle Poissoniane danno stime accettabile ma non raggiungono il livello di accuratezza ottenuto usando una ondina come la Morlet che è in grado di isolare al meglio l' anomalia.

## 4.7 Vantaggi e limiti del metodo FWPPFA

Nel paragrafo precedente è stata mostrata l' applicazione del metodo FWPPFA a diverse configurazioni di sorgenti semplici. Si è potuto accertare che il metodo effettivamente è in grado di fornire stime accurate della profondità e dell' Indice Strutturale delle diverse tipologie di sorgenti, con un ampio numero di ondine oltre alla Poissoniana.

I casi ad elevata interferenza hanno confermato che un primo vantaggio del metodo è la grande stabilità. L' algoritmo FWPPFA si basa sulla CWT con l' operatore  $v_{a_i}$  che è dotata di proprietà filtranti variabili a seconda dell' ondina utilizzata (fig. 4.5 - 4.8). Con molte ondine si ottiene una riduzione del noise già con la sola trasformazione effettuata per tornare sulla scala corrispondente al piano di misura (fig. 4.9).

Un secondo vantaggio nell' analisi con l' algoritmo FWPPFA, è la possibilità che offre il metodo di considerare più ondine per la determinazione dei parametri della sorgente. Come sappiamo infatti, la possibilità di scegliere la funzione analizzante è un passo chiave nell' analisi con le CWT.

A questo proposito, sulla base degli esempi mostrati nel paragrafo precedente, è possibile fare delle importanti considerazioni sull' applicazione delle diverse ondine.

Le Gaussiane ad esempio, ma anche la Pet Hat e la Wheel, hanno proprietà di filtro passa bassa maggiori rispetto alle Poissoniane. Quindi, una prima considerazione è che nei casi ad elevata interferenza, a parità di ordine di derivazione, si ottiene una maggiore accuratezza nelle stime usando queste ondine rispetto alle Poissoniane. L' elevato potere filtrante della Pethat e della Wheel, per l' analisi dei campi di potenziale, alle volte fa sì che l' uso di queste ondine distorca l' informazione sulle sorgenti (fig. 4.10; 4.14 - 4.19).

Un vantaggio delle Poissoniane invece è quello di non dover necessariamente tornare sulla singolarità, in molti casi però, pur essendo l' analisi con le Poissoniane accettabile, le stime dei parametri non raggiunge un grado di accuratezza elevato. Invece, analizzando lo stesso campo con altre ondine ed usando il metodo proposto si è visto che è possibile ottenere stime più accurate (fig. 4.20 - 4.29).

Un' altra considerazione da fare è che, nel caso di sorgenti che creano anomalie allungate, ad esempio un contatto, le ondine direzionali forniscono stime migliori. Tra queste ondine la Morlet e la Cauchy, dato il loro potere risolutivo anche senza bisogno di essere derivate, forniscono le stime più accurate (fig. 4.17 - 4.21).

E' possibile aggiungere che, a differenza delle Poissoniane, alcune Gaussiane come la Mexican, forniscono stime abbastanza accurate. La differenza è più marcata quando all' aumentare dell' interferenza a bassa ed alta frequenza,

dovuta a rumore ed all' introduzione di un' altra sorgente simile, le derivate delle Gaussiane hanno dimostrato di fornire stime più accurate (fig. 4.20 – 4.21).

Dai test si è avuto modo di osservare che nei casi multi sorgente, come quello di un corpo intrusivo infinitamente profondo o di un prisma, è consigliato dirigere l' analisi sui bordi della sorgente in modo da ottenere stime che trovino una corrispondenza fisica con i punti singolari del campo. Per ottenere stime accurate è indicato usare ondine direzionali ad alto potere risolutivo come le Morlet ad esempio (fig. 4.22 – 4.24). Nel caso vi sia un disturbo ad alta frequenza le derivate delle Gaussiane sono comunque indicate.

Oltre alle ondine direzionali, anche le Gaussiane isodirezionali, come la Mexican ad esempio, hanno un buon potere risolutivo. Questa ondina ha un buon compromesso tra proprietà filtranti e di risoluzione. L' uso di questa ondina si è dimostrato particolarmente efficace per risolvere interferenze generate da sorgenti polari poste a profondità diverse (fig. 4.25 – 4.26).

A questo punto è possibile fare anche un' altra considerazione e cioè che, il vantaggio relazionato alla scelta delle ondine è dato anche dalla possibilità di separare, in base alla lunghezza d' onda delle anomalie, gli effetti dovuti a più sorgenti. Un' altro esempio è dato dalla Morlet che, con le sue proprietà di filtro passa banda, è in grado di isolare l' anomalia generata nel basamento dagli effetti di trend e di rumore generati dalla topografia dello stesso (fig. 4.27 – 4.29).

Al fine di ottenere stime quanto più accurate possibile, la possibilità di estendere l' analisi con le CWT all' uso di più ondine è molto vantaggiosa, bisogna aggiungere però che il metodo FWPPFA è basato sull' operatore  $v_{a_1}$  che usa la continuazione verso il basso anche per diverse volte il passo di campionamento.

L' uso di un processo notoriamente instabile, come la continuazione verso il basso, rappresenta un limite intrinseco per il metodo, nella determinazione dei parametri di sorgenti poste a profondità molto elevata. A seconda dell' ondina e del campo da analizzare, l' operatore  $v_{a_1}$  non consente di ritornare su singolarità poste a profondità eccessive e di ricalcolarne il campo alla scala di misura senza distorcere i parametri della sorgente. Fortunatamente questo limite è molto elevato e comunque varia a seconda dell' ondina utilizzata.

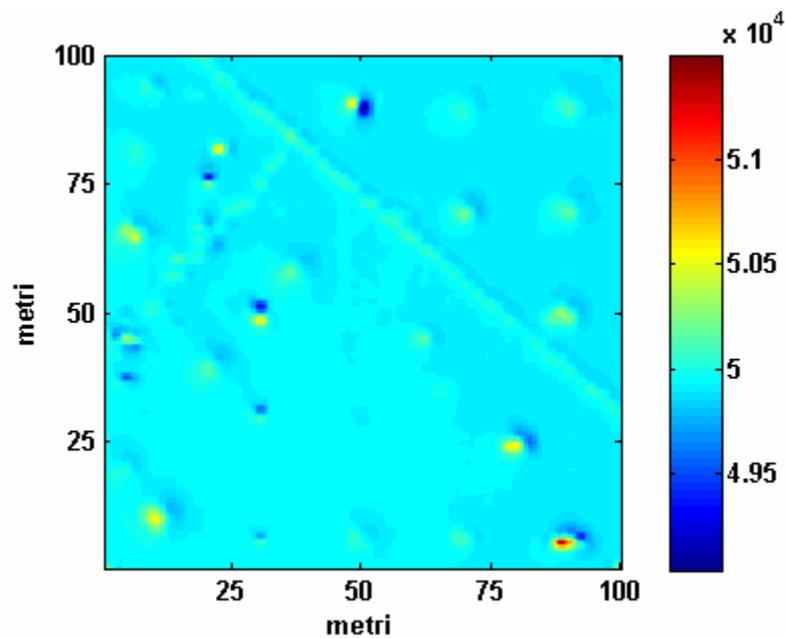
Un altro limite, sempre legato alla continuazione verso il basso, è che, nel caso di sorgenti vicine poste a profondità diverse, la stima delle più profonde può essere inficiata dalle distorsioni introdotte dal superamento delle sorgenti più superficiali. L' esempio discusso nella figura 4.25 mostra che con la scelta dell' ondina giusta e considerando solo le profondità che danno stime accettabili dell' Indice Strutturale è possibile comunque ottenere stime accurate dei parametri della sorgente.

Inoltre è meglio ribadire che, contrariamente a quanto si possa pensare, il metodo, pur basandosi sulla continuazione verso il basso, è molto stabile anche in caso di rumore ad alta frequenza. Il noise è notevolmente amplificato dalla continuazione verso il basso nelle sue componenti ad alta ed altissima frequenza,

ma queste sono totalmente tagliate grazie alla convoluzione dell' operatore inverso di Poisson con l'operatore corrispondente alla ondina considerata.

## 4.8 Applicazione del metodo FWPPFA ai dati di Stanford

Al fine di valutarne a pieno le potenzialità, il metodo FWPPFA è stato testato su un caso reale di interesse ambientale: i dati magnetici dell' area di Stanford (fig. 4.30). Come introdotto nel capitolo 3, il sito di Stanford è caratterizzato dalla presenza di fusti di acciaio da 55 galloni sepolti in differenti configurazioni e a profondità nota (Salem et al. 2002).

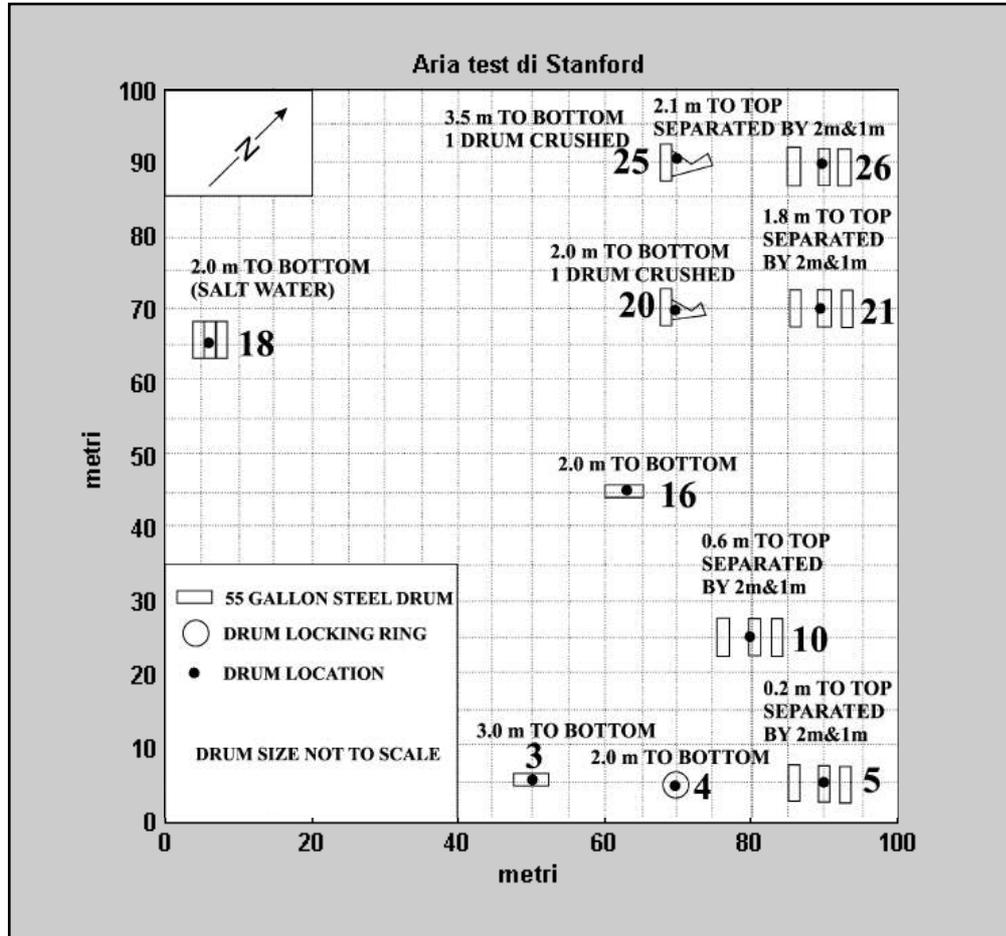


**Figura 4.30.** Mappa magnetica del campo totale relativo all' area test dell' Università di Stanford (cap. 3).

Al fine di ridurre gli effetti di interferenza reciproci ed isolare al meglio i contributi di ogni singola anomalia, l' analisi con il metodo FWPPFA è stata effettuata sulla derivata verticale di secondo ordine del campo magnetico. Per la maggior parte delle anomalie generate dai fusti, data la particolare geometria delle sorgenti e quindi delle rispettive anomalie (per approfondimenti sull' area test di Stanford vedi cap. 3), le stime più accurate si sono ottenute con l' ondina Gaussiana. Le stime ottenute con le ondine Poissoniane anche sono accurate e sono riassunte nel capitolo 3 in quanto, è bene ricordare, che i metodi basati sulla CWT con ondina Poissoniana sono equivalenti a quelli che usano la continuazione nella regione armonica dei campi di potenziale.

Le stime di profondità ottenute dal metodo FWPPFA e le stime dell' Indice Strutturale, insieme con le relative ondine usate sono riassunte nella tabella 4.2.

In tabella sono riportate il numero del fusto corrispondente, la profondità delle sorgenti, le stime di profondità come da Salem et al. (2002), e con il metodo FWPPFA, lo scarto sulle stime ottenute con ambedue i metodi e le stime dell' Indice Strutturale con il metodo FWPPFA.



**Figura 4.31.** Distribuzione e configurazione dei fusti sepolti nell' area test dell' Università di Stanford da Salem et al. 2002. I fusti sono posizionati in diverse configurazioni e profondità. Oltre alle posizioni orizzontale (3, 16) e verticale (4), i fusti sono anche stati raggruppati (5, 10, 21, 26), rotti (20, 25) ed immersi in acqua salata (18).

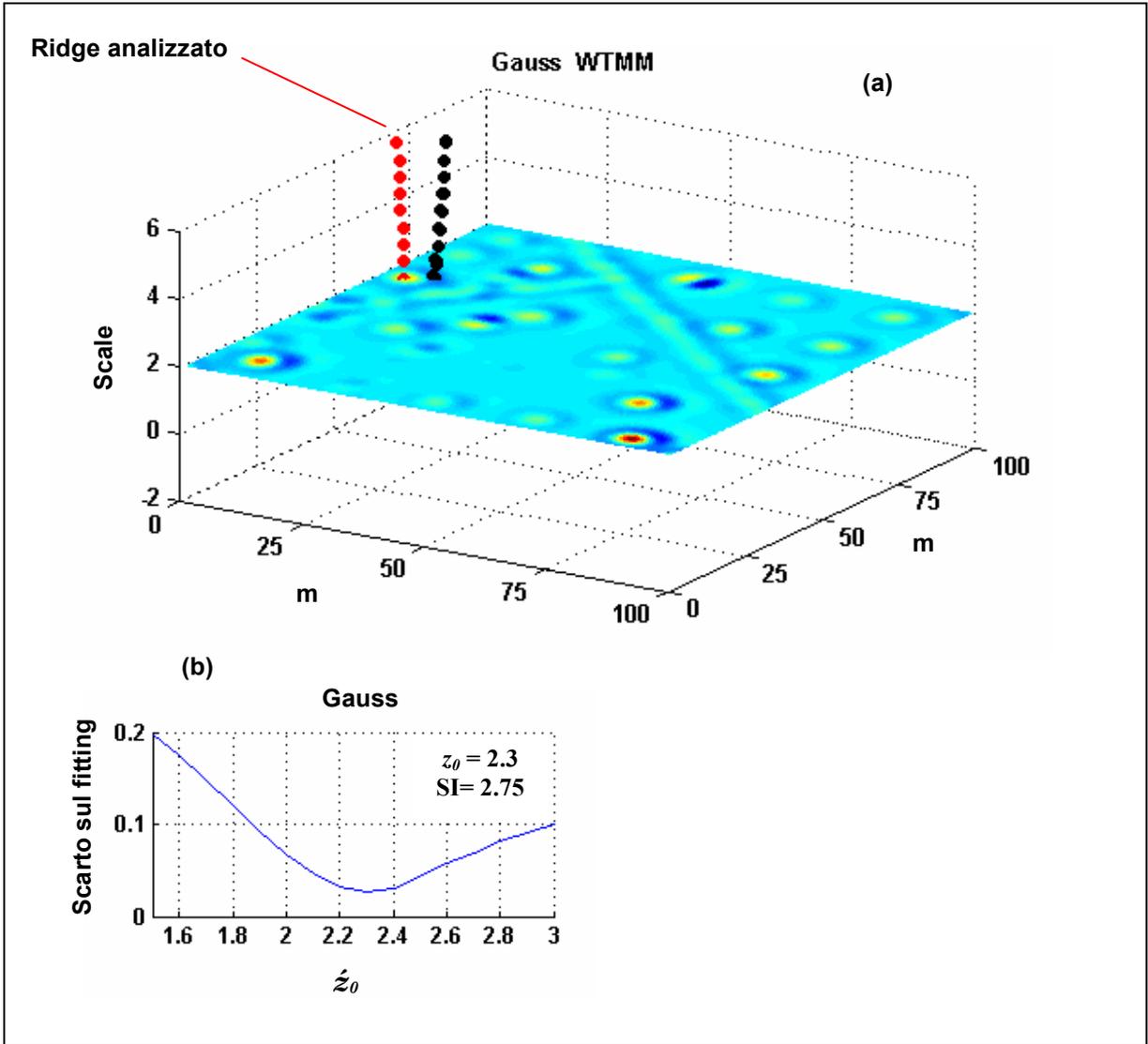
I risultati mostrano una maggiore accuratezza del metodo rispetto ad altri usati per analizzare le stesse anomalie. Anche la stima dell' Indice Strutturale è molto accurata, assimilando quasi tutte le sorgenti ad una one-point di tipo sferico. Anche in questo caso le stime di profondità con il maggiore grado di accuratezza si ottengono per le anomalie relative a fusti isolati (vedi anche cap. 3). L' accuratezza delle stime relative alle altre configurazioni di fusti è in linea con quella riscontrata nell' analisi con il metodo ScalFun. La stima dell' indice strutturale con il metodo FWPPFA invece è più coerente con una configurazione delle sorgenti sferiformi.

**Tabella 4.2** – Stime di profondità ed SI con il metodo FWPPFA su tutte le anomalie associate a fusti sepolti descritte in Salem et al. (2002).

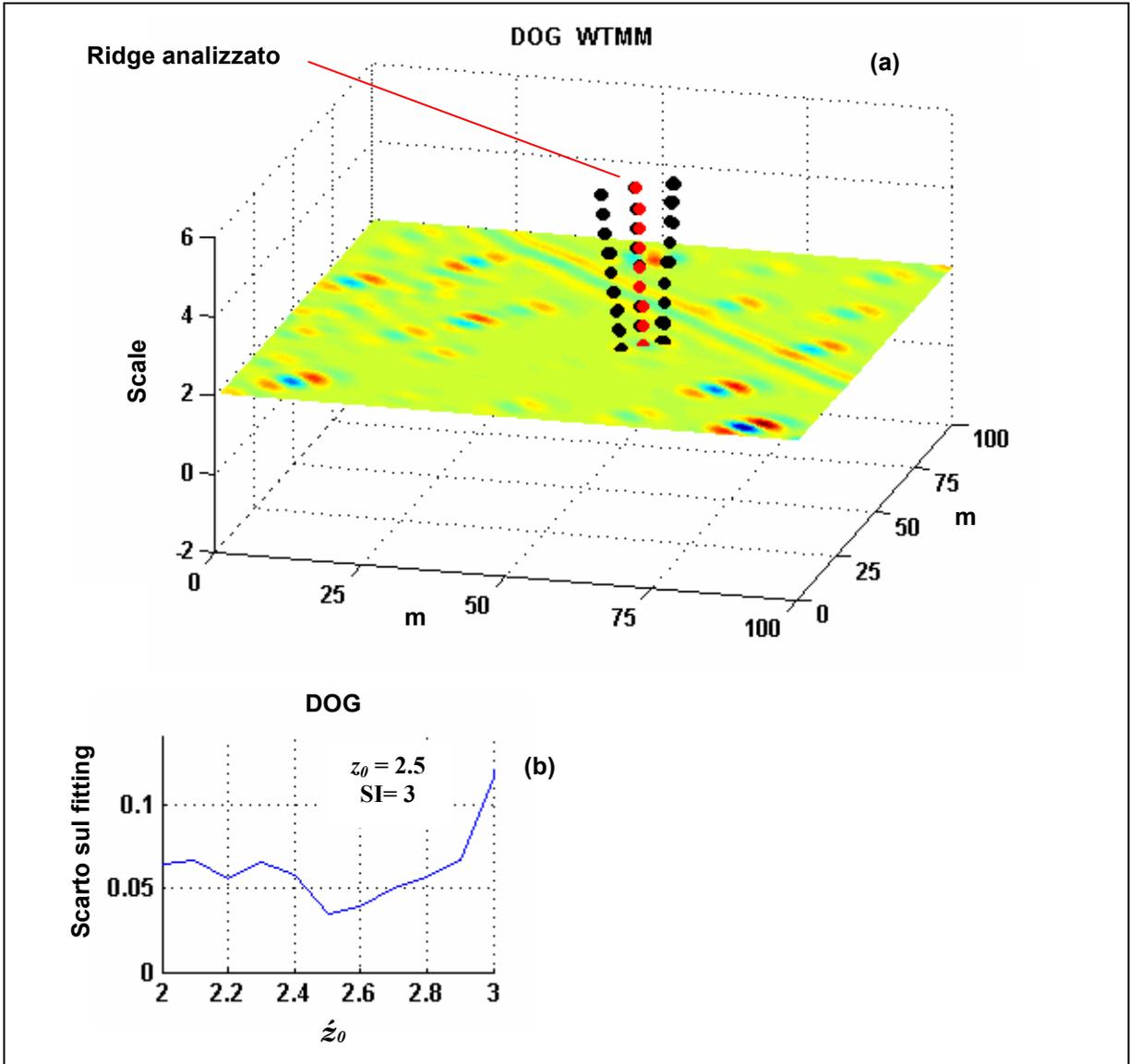
Fusto	Profondità reale <sup>a</sup>	Stime da Salem et. al. (2002)	Scarto % sulle stime	Profondità stimata con FWPPFA	Ondina usata per l'analisi	Scarto % con FWPPFA	SI
3 <sup>b</sup>	3.6 m	2.42 m	32 %	3.6 m	Gauss	0 %	2.6
4 <sup>b</sup>	2.4 m	2.67 m	11 %	2.3 m	Gauss	4 %	2.9
5	1.4 m	1.96 m	40 %	1.7 m	Gauss	21 %	3.0
10	1.8 m	2.27 m	26 %	2.2 m	Gauss	22 %	3.0
16 <sup>b</sup>	2.6 m	2.27 m	13 %	2.5 m	DOG	4 %	3.0
18	2.6 m	2.43 m	6 %	2.3 m	Gauss	11 %	2.7
20	2.6 m	2.55 m	2 %	2.5 m	Pethat	4 %	3.2
21	3.0 m	2.57 m	14 %	2.8 m	Mexican	7 %	2.7
25	4.1 m	3.54 m	14 %	4.3 m	Gauss	5 %	2.2
26	3.3 m	2.89 m	12 %	2.9 m	Pethat	12 %	3.0

(a) Profondità calcolata dall'altezza del sensore al centro della sorgente.  
(b) Anomalia prodotta da un fusto isolato.

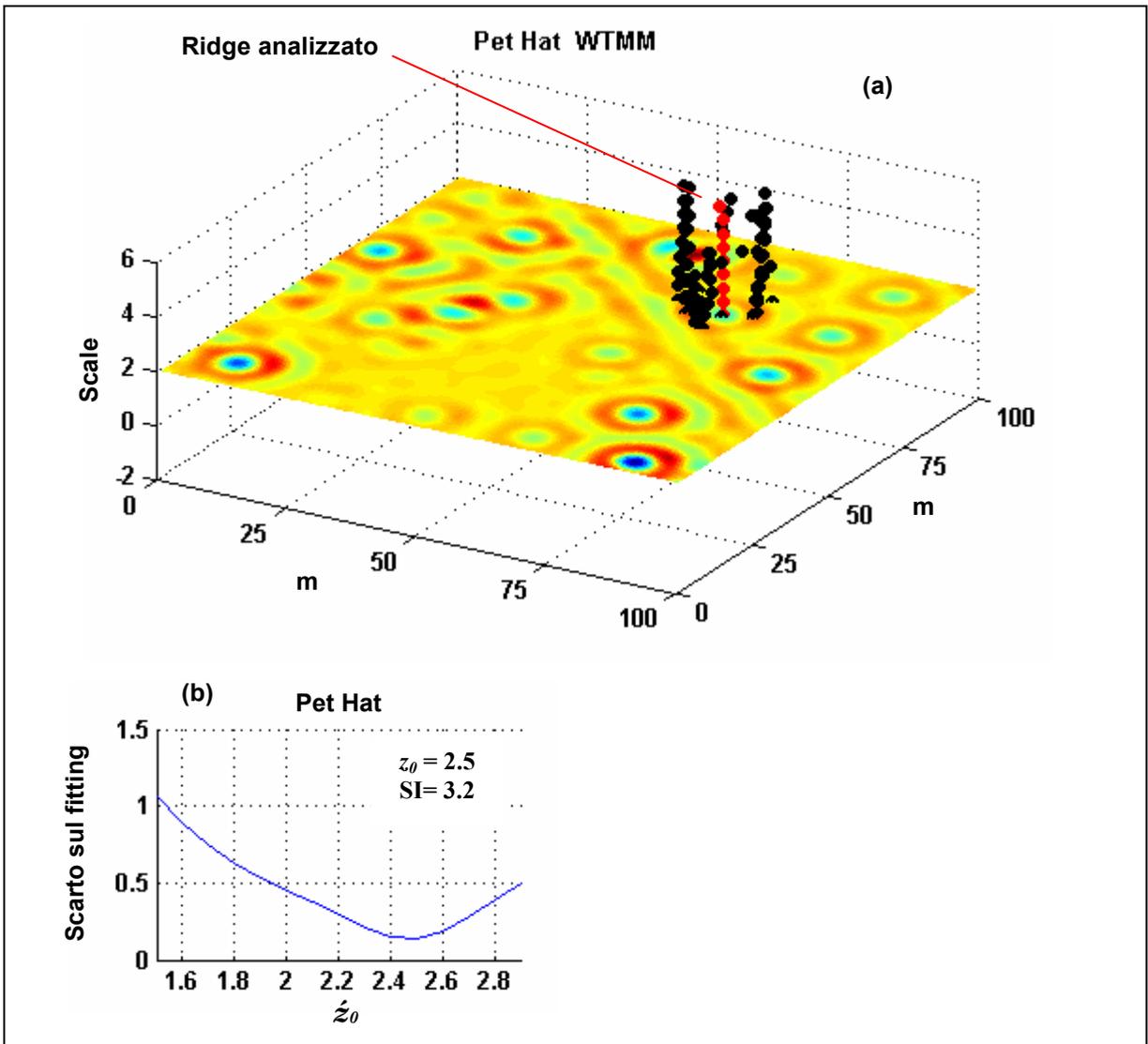
Le figure da 4.32 a 4.35 (pagine successive) mostrano alcuni passi dell'analisi effettuata sui dati dell'area test di Stanford. In pratica mostrano come cambia il campo quando cambia la sua legge di dilatazione; ricordiamo infatti che usare il metodo FWPPFA significa appunto trovare il piano sorgente, cioè la scala che contiene le singolarità e dilatarle nuovamente con una legge diversa dalla Poissoniana, ad esempio Gauss, Morlet ecc. ecc.



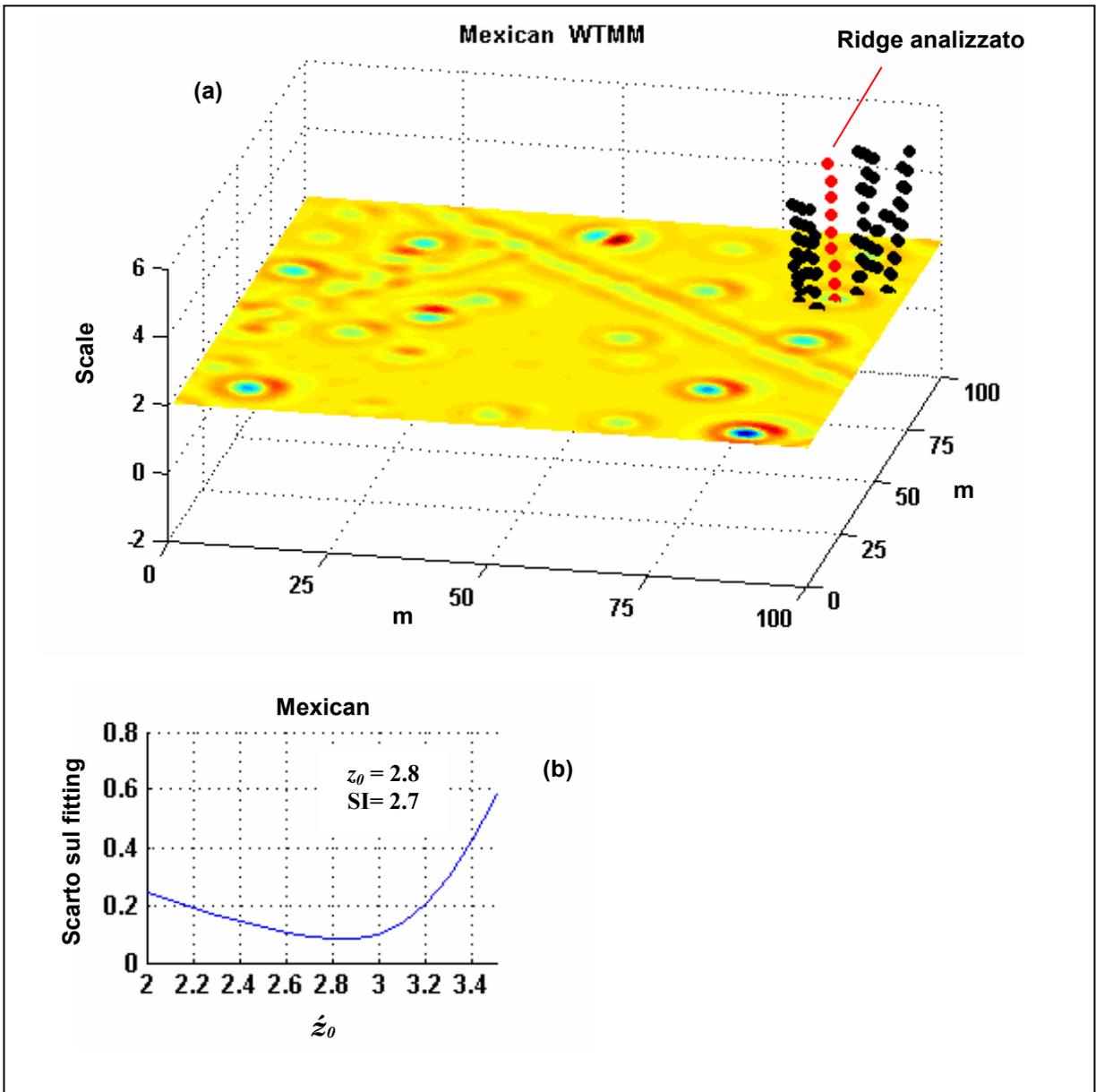
**Figura 4.32.** Analisi con il metodo FWPPA condotta sul campo relativo all' area test dell' Università di Stanford. Il pannello mostra i ridge generati dal fusto n. 18 (a) e il risultato dell' analisi con ondina Gauss (b).



**Figura 4.33.** Analisi con il metodo FWPPA condotta sul campo relativo all' area test dell' Università di Stanford. Il pannello mostra i ridge generati dal fusto n. 16 (a) e il risultato dell' analisi con ondina Gauss (b).



**Figura 4.34.** Analisi con il metodo FWPPFA condotta sul campo relativo all' area test dell' Università di Stanford. Il pannello mostra i ridge generati dal fusto n. 20 (a) e il risultato dell' analisi con ondina Pet Hat (b).



**Figura 4.35.** Analisi con il metodo FWPPFA condotta sul campo relativo all' area test dell' Università di Stanford. Il pannello mostra i ridge generati dal fusto n. 20 (a) e il risultato dell' analisi con ondina Mexican (b).

## Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati esplorati diversi aspetti relativi all'analisi multiscala dei campi di potenziale applicata a problematiche ambientali. Da un punto di vista metodologico questo ha comportato l'approfondimento di aspetti sia teorici che di procedura per la determinazione dei parametri della sorgente, aspetti tutti inerenti i metodi multiscala di analisi dei campi di potenziale.

E' stato affrontato il problema generale di definire gli aspetti essenziali relativi al trattamento dati di un data set multiscala. Questo aspetto risulta un punto cruciale nell'analisi multiscala, in quanto ci consente di ridurre notevolmente gli errori di bordo e di migliorare così l'accuratezza delle stime. Una stima accurata dei parametri delle sorgenti è richiesta nell'analisi di sistemi ambientali per ridurre i costi nelle opere di bonifica.

Lo studio dei dati prodotti dal modello sintetico complesso di Bishop e dalle loro derivate ha reso possibile fare le seguenti considerazioni:

1. Scegliere il campo da analizzare in modo che non abbia anomalie troncate improvvisamente.
2. Quando possibile completare le anomalie troncate con dati reali anche a bassa risoluzione.
3. Nel caso non sia possibile estendere il campo o completare le anomalie con dei dati reali, avvalersi di un algoritmo di estrapolazione per creare dei dati sintetici al bordo di una lunghezza pari a perlomeno quella del campo da analizzare (estensione del 100%).
4. Prestare attenzione al tipo di bordo estrapolato, infatti dai test effettuati è emerso che è indicato usare l'algoritmo di replicazione Maximum Entropy o in alternativa Smooth Padding di ordine 0, 'sp0' di MatLab. Questi algoritmi garantiscono una ricostruzione molto buona al di fuori del bordo anche per l'uso di derivate.
5. Nel caso in cui non si disponesse di un algoritmo di estrapolazione è comunque indicato estendere i dati del campo con valori pari a zero o al valor medio del campo.

Molte applicazioni sono state effettuate a casi di interesse ambientale, tra cui anche la precisa localizzazione di fusti, volutamente occultati, contenenti sostanze inquinanti. Unitamente alle diverse applicazioni di interesse ambientale è stata introdotta altresì un'inedita metodologia d'analisi, basata sull'analisi di singolarità con le *CWT*, che permette di sfruttare a pieno le potenzialità della Trasformata Continua di Wavelet.

Nel secondo capitolo è stata applicata la metodologia ScalFun ed è stato proposto un criterio di consistenza per la discriminazione delle soluzioni. Dall'applicazione

di questo criterio sono stati considerati diversi aspetti per migliorare la consistenza delle stime tra cui:

1. Effettuare una corretta estensione al bordo.
2. Considerare un adeguato grado di derivazione per ridurre gli effetti di interferenza reciproci.
3. Scegliere il giusto intervallo di quote da analizzare, come compromesso tra riduzione di rumore alle basse quote e stabilità alle alte.

Il metodo è stato applicato al modello magnetico complesso del basamento di Bishop ed il risultato ottenuto è una ricostruzione della morfologia del basamento di alto profilo. Dal punto di vista della modellazione ambientale, la ricostruzione della morfologia di un basamento o di un particolare livello stratigrafico rappresenta un punto chiave nella caratterizzazione del sistema stesso e di una sua eventuale bonifica.

E' stato inoltre proposto l' approccio Multiridge per la determinazione della profondità delle sorgenti. Il metodo è di facile implementazione ed è stato applicato ai dati magnetici relativi al bacino di Capo Nord. L' applicazione ai dati magnetici di questo bacino rappresenta forse il primo caso in letteratura di interpretazione di dati magnetici relativi ad un' area interessata da intenso diapirismo salino. I risultati sono consistenti con alcuni profili sismici effettuate nell' area circostante ed evidenziano un approfondimento del bacino stesso, seguendo un particolare livello a contatto con i diapiri salini.

Inoltre, è stata effettuata un' analisi a grande scala tesa ad evidenziare gli effetti correlati al basamento profondo. I risultati sono in accordo con le profondità del basamento cristallino riportate in letteratura.

Anche questa applicazione è molto importante dal punto di vista ambientale, in quanto dimostra su un caso reale la capacità del metodo di localizzare sorgenti di difficile interpretazione, come possono esserlo i duomi salini, o un qualsiasi altro corpo intrusivo naturalmente imposto o volutamente occultato.

In questo lavoro è stata mostrata una applicazione di grande interesse ambientale. E' stato affrontato il problema di localizzare precisamente nello spazio la posizione di fusti contenenti sostanze inquinanti. Sono stati analizzati con il metodo ScalFun i dati magnetici relativi a fusti sepolti nell' area test della Università di Stanford (USA). E' stato altresì, sviluppato un nuovo tool grafico che consente di visualizzare, isolare e scegliere direttamente i ridge da analizzare direttamente con una visualizzazione 3D. Questo stesso tool è stato fondamentale nello sviluppo e nell' implementazione della metodologia FWPPFA. Le stime ottenute sono molto accurate, più di quelle ottenute con altri metodi riportati in letteratura, e rappresentano sicuramente un notevole progresso in campo ambientale data la rapidità con cui è possibile acquisire i dati, anche su vaste aree, e la facilità di analisi.

Altro risultato importante ottenuto in questo lavoro di tesi, è stato appunto lo sviluppo di una nuova metodologia d' analisi basata sulla CWT. La teoria di

questo metodo, denominato *FWPFA (Full Wavelet Potential Fields Analysis)*, supera, con alcune limitazioni, il gap relativo all'analisi dei campi di potenziale con la Trasformata Continua di Wavelet tramite un qualsiasi tipo di ondata ammissibile.

La metodologia permette di ottenere stime molto accurate grazie proprio alla possibilità di scegliere molte più onde analizzanti rispetto alla sola Poissoniana.

Il metodo, oltre a rappresentare una innovazione notevole per la teoria dei campi di potenziale, è veloce ed anche abbastanza stabile.

Dall'applicazione di questa metodologia a diverse configurazioni di sorgenti one-point è emerso che le stime dei parametri della sorgente sono più accurate anche in caso di interferenza elevata. La chiave di un tale miglioramento è proprio la possibilità di scegliere onde con caratteristiche di localizzazione e risposta in frequenza diverse tra loro.

Oltre ai diversi casi sintetici, ottime stime sono state raggiunte anche nell'analisi dei dati magnetici dell'area test della Università di Stanford. Le stime ottenute dimostrano l'applicabilità del metodo anche su un caso reale di notevole interesse ambientale.

In conclusione è possibile stabilire che lo sviluppo delle metodologie d'analisi multiscala dei campi di potenziale qui discusso ha portato ad ottenere stime dei parametri delle sorgenti sempre accurate in tutti i casi considerati. Molti degli sviluppi di questi metodi sono stati presentati in congressi di livello internazionale suscitando notevole interesse e richieste di pubblicazione su riviste di ottima collocazione internazionale, anche grazie alle applicazioni dirette in contesti geologico-esplorativo e minerario di notevole interesse. E' bene osservare inoltre che, dati i costi relativamente bassi dei sondaggi magnetici e gravimetrici, può essere vantaggioso da parte delle amministrazioni locali applicare queste metodologie per la ricerca di oggetti potenzialmente dannosi per l'ambiente. Esempio sono container e camion interamente sepolti, fusti metallici, residuati bellici, ipogei e cavità.

## Ringraziamenti

Questo lavoro rappresenta la chiusura di un ciclo di studi e di ricerca che non sarebbe stato possibile senza l' aiuto di alcune persone. Per questo motivo vorrei ringraziare in particolar modo mia madre e la mia famiglia per avermi dato innanzitutto, la possibilità di proseguire gli studi universitari. Un altro ringraziamento particolare va alla mia metà, K.B., per essermi stata vicino nei momenti difficili ed avermi dato il supporto morale necessario a proseguire.

E' doveroso ringraziare inoltre, il mio tutor, il professor Maurizio Fedi per avermi guidato in questo percorso con simpatia e professionalità ed aver ampliato le mie conoscenze. Ringrazio inoltre il professor Florio che, con il professor Fedi, mi ha fornito gli strumenti di base per iniziare l' avventura del dottorato di ricerca.

Nello sviluppo della tesi è stato di fondamentale importanza il supporto esterno per la fornitura dei dati. Per questo un particolare ringraziamento va a Ahmed Salem e J. Derek Fairhead per aver cordialmente fornito, i dati magnetici relativi all' area test della Università di Stanford.

Si ringraziano anche G. Connard della Northwest Geophysical Associates, Inc. e G. Flanagan della Conoco Phillips Corporation per aver fornito i dati, anche a più quote, relativi al modello sintetico di Bishop (CA).

Altro ringraziamento particolare va a Christine Fichler della StatOil Hydro per aver gentilmente concesso i dati magnetici ad alta risoluzione relativi al bacino di Capo Nord.

Ringrazio ancora Pierre Kestener per avermi ospitato presso il CEA di Parigi e di aver discusso su teoria ed applicazioni della CWT.

Ringrazio inoltre tutti i colleghi di dipartimento e di segreteria per la loro simpatia e disponibilità. Un particolare ringraziamento va al mio collega ed amico di stanza, Mauro, per avermi sempre sostenuto con la sua simpatia. Ringrazio anche gli amici della sezione italiana EAGE-SEG, tra cui Eugenio Loinger e Aldo Vesnaver, per avermi coinvolto nelle tante iniziative dedicate agli studenti.

## Riferimenti Bibliografici

Antoine J-P., The Continuous Wavelet Transform in Image Processing. Quarterly, 11(4), 323-345, (1998).

Baranov W., Potential fields and their transformations in applied geophysics. Gebruder-Borntraeger, (1976).

Barbosa V. C. F., Silva J. B. C., Medeiros W. E., Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution. Geophysics, 64, 48-60. 1999

Bugge T., Elvebakk G., Fanavoll S., Mangerud G., Smelror M., Weiss H.M. Gjelberg J., Kristensen S.E., Nilsen K., Shallow stratigraphic drilling applied in hydrocarbon exploration of the Nordkapp Basin, Barents Sea. Marine and Petroleum geology, 19, 13-37, (2002).

Canny J., A computational approach to edge detection, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8, 679-698, (1986)

Cascone L., Fedi M., Stima dei parametri delle sorgenti associate alle anomalie magnetiche dei fusti sepolti nell' area test della Stanford University. Riassunti estesi delle comunicazioni, 27° Convegno Nazionale GNGTS (2008).

Cohen A., Daubechies I., Jawerth B., Vial P., Multiresolution analysis, wavelets and fast wavelet transform on an interval. CRAS Paris, Ser. A, t. 316, pp. 417-421, (1993).

Fairhead, J. D., Bennett K. J., Gordon D. R. H., and Huang D., Euler: Beyond the 'Black Box': 64<sup>th</sup> Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 422-424, (1994).

Fairhead J.D., Williams S.E., Flanagan G., Testing magnetic local wavenumber depth estimation methods using a complex 3D test model, 74<sup>th</sup> Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 742-745, (2004).

Fedi M., Cascone L., Continuous wavelet transform of potential field with different choices of analyzing wavelets. 78<sup>th</sup> SEG Annual Meeting SEG, Expanded Abstracts, (2008).

Fedi M., DEXP: a fast method to determine the depth and the structural index of potential fields sources. Geophysics, 72, I1-I11, (2007).

Fedi M., Florio G., Cascone L., Improved SCALFUN Analysis of Potential Fields by a Criterion of Ridge–Consistency, 69<sup>th</sup> EAGE Conference & Exhibition, Expanded Abstracts, (2007).

Fedi M., Florio G., Cascone L., Upward continuation and multilevel methods: tests on the Bishop 5 model. 76<sup>th</sup> SEG, Expanded Abstracts, (2006).

Fedi M., Florio G., Quarta T., Multyridge Analysis and Reduced Euler Deconvolution. 77<sup>th</sup> SEG Annual International Meeting, Expanded Abstracts, (2007).

Fedi M., Florio G., SCALFUN: 3D analysis of potential field scaling function to determine independently or simultaneously Structural Index and depth to source. 76<sup>th</sup> SEG Annual Meeting, 963-967, (2006).

Fedi M., Global and Local Multiscale Analysis of Magnetic Susceptibility Data. *Pageoph.* 160, 2399-2417 (2003.).

Fedi M., Multiscale Derivative Analysis: a new tool to enhance gravity source boundaries at various scales, *Geophysical Research Letters*, 29, 16-1 to 16-4, (2002).

Fedi M., Primiceri R., Quarta T., Villani A.V., Joint application of continuous and discrete wavelet transform on gravity data to identify shallow and deep sources. *Geophysical Journal International*, 156, 7-21, (2004).

Fedi M., Lenarduzzi L., Primiceri R. and Quarta T.. Localized denoising filtering using the wavelet transform. *PAGEOPH* 157(9), (2000)

Fedi M., Quarta T., Wavelet analysis for the regional-residual and local separation of potential field anomalies. *Geophysical Prospecting*, 46, 507-525, (1998).

FitzGerald D., Reid A.B., McInerney P., New discrimination techniques for Euler deconvolution: *Computers & Geosciences*, 30, 461-469, (2004).

Florio G., Fedi M., Euler Deconvolution of vertical profiles of potential field data. 76<sup>th</sup> SEG Annual International Meeting, Expanded Abstracts, (2006).

Florio G., Fedi M., Pasteka R., On the application of Euler deconvolution to the analytic signal: *Geophysics*, 71, 6, L87-L93, (2006).

Foufoula Georgiou E. and Kumar P. *Wavelets in Geophysics*, p. 373. Academic Press, Inc. (1994)

Gudlaugsson S.T., Faleide J.I., Johansen S.E., Breivik A.J., Late Palaeozoic structural development of the South-western Barents Sea. *Marine and Petroleum Geology*, 15, 73-102, (1998).

Hagelberg C., Gamage N.K.K., Application of structure-preserving wavelet decomposition to intermittent turbulence: A case study, in *Wavelets in Geophysics*, edited by E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, 45–80, Academic, San Diego, Calif., (1994).

Hornby P., Boschetti F., Horowitz F.G., Analysis of potential field data in the wavelet domain. *Geophys. J. Int.*, 137, 175-196, (1999)

Hsu S., Imaging magnetic sources using Euler's equation. *Geophysical Prospecting*, 50, (2002)

Johansen S.E., Ostistiy B.K., Birkeland O., Fedorovsky Y.F., Martirosjan V.N. et al., Hydrocarbon potential in the Barents Sea region: play distribution and potential. *Arctic Geology and petroleum potential*, SP2, 273-320, (1992).

Keating P., Pilkington M., Euler deconvolution of the analytic signal and its application to magnetic interpretation. *Geophysical Prospecting*, 52, 165-182, (2004).

Kestener P., Arneodo A., Generalizing the Wavelet-Based Multifractal Formalism to Random Vector Fields: Application to Three-Dimensional Turbulence Velocity and Vorticity Data. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 044501, (2004).

Kestener P., Arneodo A., Three-Dimensional Wavelet-Based Multifractal Method: The Need for Revisiting the Multifractal Description of Turbulence Dissipation Data. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 194501 (2003).

Mallat S. 1998. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Inc.

Grossman A., Morlet J., Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *Siam Jour. Of Math. Anal.* July (1984).

Mallat S., Hwang W.L., Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. On Information Theory*, 38(2), 617-643, (1992).

Mandelbrot B.B., *The fractal Geometry of Nature*. Edited by W. H. Freeman and Comp. New York (1982).

Martelet G., Sailhac P., Moreau F., Diament M., Characterization of geological boundaries using 1-D Wavelet transform on gravity data: Theory and application to the Himalayas. *Geophysics*, 66(4), (2001).

Moreau F., Gibert D., Holschneider M., Saracco G., Wavelet analysis of potential fields. *Inverse Problem*, 13, 165-178, (1997).

Moreau F., Gibert D., Identification of sources of potential fields with the continuous Wavelet transform: Basic theory. *J. Geoph. Res.*, 104, (1999).

Nabighian, M. N., Hansen R O., Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via the generalized Hilbert transform: *Geophysics*, 66, 1805-1810, (2001).

Nilsen, K. T., Henriksen, E., Larssen, G. B., Exploration of the Late Palaeozoic carbonates in the southern Barents Sea: a seismic stratigraphic study. *Arctic Geology and Petroleum Potential*, (1993)

Oppenheim A.V., Schafer R.W., *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall. 1975

Paul, M.K., Sukumar, D. & Buddhadeb, B., 1966. Direct interpretation of two-dimension structural faults from gravity data, *Geophysics*, **XXXI**, 940–948.

Reid A.B., Allsop J., Granser H, Millett A. J., Somerton I. W., Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution: *Geophysics*, **55**, 80-91, (1990).

Reid, A., D. FitzGerald, G. Flanagan, 2005, Hybrid Euler magnetic basement depth estimation: Bishop 3D tests, 75th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 671-673.

Reid A.B., Allsop J.M., Granser H., Millett A.J., Somerton I.W., Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution, *Geophysics*, 55, 80-91, (1990).

Sailhac, P., Gibert, D., Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Two dimensional wavelets and multipolar approximations. *Journal of Geophysical Research*, 108, B5, 2262, (2003).

Salem A., Ravat D., A combined analytic signal and Euler method (AN-EUL) for automatic interpretation of magnetic data. *Geophysics*, 68, 1952-1961, (2003).

Salem A., Ravat D., Gamey G., Ushijima K., Analytic signal approach and its applicability in environmental magnetic investigations, *Journal of Applied Geophysics*, 49, 231-244, (2002).

Silva J.B.C., Barbosa V.C.F., 3D Euler deconvolution: Theoretical basis for automatically selecting good solutions: *Geophysics*, 68, 1962-1968, (2003).

Smith R. S., Thurston J.B., Dai T., MacLeod I. N., iSPI – The improved source parameter imaging method: *Geophysical Prospecting*, 46, 141-151, (1998).

Stavrev P.Y., Euler deconvolution using differential similarity transformations of gravity and magnetic anomalies: *Geophysical Prospecting*, 45, 207-246, (1997).

Strang G., Nguyen T., *Wavelets and filter banks*, Wellesley-Cambridge Press, (1996).

Thompson D. T., EULDPH: A new technique for making computer assisted depth estimates from magnetic data: *Geophysics*, 47, 31-37, (1982).

Thurston J., Smith R., Source location using total-field homogeneity: Introducing the SLUTH method for depth estimation: *The Leading Edge*, 1272-1277, (2007).

Williams S.E., Fairhead D., Flanagan G., Comparison of grid Euler deconvolution with and without 2D constraints using a realistic 3D magnetic basement model: *Geophysics*, 70, 3, L13–L21, (2005).

Williams S.E., Fairhead J. D., Flanagan G., Realistic models of basement topography for depth to magnetic basement testing. *Soc. Expl. Geophys, Expanded Abstracts*, 814-817, (2002).