

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II**  
**Facoltà di Ingegneria**  
**Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Geotecnica ed Ambientale**



**DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DEI SISTEMI  
IDRAULICI, DI TRASPORTO E TERRITORIALI**  
Ingegneria Idraulica ed Ambientale  
XXI ciclo

**La propagazione delle piene negli alvei a fondo mobile**

**Dottoranda:** Anna Palumbo

**Tutor:** Prof.Ing. Domenico Pianese, Prof.Ing. Renata Della Morte

**Controrelatore:** Prof.Ing. Giacomo Rasulo

**Coordinatore di indirizzo:** Prof. Ing. Guelfo Pulci Doria

**Coordinatore di dottorato:** Prof.Ing. Bruno Montella

<b>Introduzione .....</b>	<b>4</b>
<b>1 Modellazione dei fenomeni di trasporto solido .....</b>	<b>8</b>
<b>1.1 Introduzione .....</b>	<b>8</b>
<b>1.2 Modelli 1D, 2D e 3D .....</b>	<b>11</b>
<b>1.3 Trasporto solido in condizioni di equilibrio e di non equilibrio dinamico.....</b>	<b>12</b>
1.3.1 Approccio a tre equazioni .....	12
1.3.2 Approccio a quattro equazioni .....	22
<b>1.4 Modello disaccoppiato e accoppiato .....</b>	<b>29</b>
<b>1.5 Modelli a tre layer .....</b>	<b>33</b>
<b>1.6 Resistenza al moto negli alvei a fondo mobile.....</b>	<b>41</b>
<b>1.7 Frazioni granulometriche.....</b>	<b>46</b>
1.7.1 Generalità dei modelli matematici per l'evoluzione d'alveo nel caso di materiali eterogenei.....	46
1.7.2 Valutazione delle portate solide.....	48
<b>2 Descrizione Modello Numerico .....</b>	<b>51</b>
<b>2.1 Introduzione .....</b>	<b>51</b>
<b>2.2 Schematizzazione della corrente in alveo.....</b>	<b>52</b>
<b>2.3 Equazioni alla base del modello .....</b>	<b>54</b>
2.3.1 Equazioni di bilancio .....	54
2.3.2 Equazione della conservazione della quantità di moto .....	55
2.3.3 Equazione di adattamento .....	58
2.3.4 Sistema completo delle equazioni alla base del modello .....	60
<b>2.4 Metodo ai Volumi Finiti.....</b>	<b>61</b>
<b>2.5 Risoluzione numerica delle equazioni .....</b>	<b>66</b>
<b>2.6 Predictor-Corrector .....</b>	<b>67</b>
<b>2.7 Calcolo dei flussi.....</b>	<b>70</b>
2.7.1 Il problema di Riemann .....	70
2.7.2 Solutori approssimati del problema di Riemann: HLL .....	72
2.7.3 Solutori approssimati del problema di Riemann: HLLC .....	75
2.7.4 Valutazione approssimata delle celerità estreme ed intermedia.....	79
<b>2.8 Condizioni al contorno.....</b>	<b>83</b>
2.8.1 Condizioni di inflow .....	84
2.8.2 Condizioni di outflow .....	86
<b>2.9 Variazione della sezione trasversale .....</b>	<b>88</b>
2.9.1 Deposito .....	89
2.9.2 Erosione .....	91
2.9.3 Ricostruzione della pendenza di fondo .....	94
<b>2.10 Trattamento della geometria complessa .....</b>	<b>95</b>
<b>3 Descrizione del software HEC-RAS® 4.....</b>	<b>97</b>
<b>3.1 Introduzione .....</b>	<b>97</b>
<b>3.2 Generalità sul software HEC-RAS® 4.....</b>	<b>97</b>
<b>3.3 Steady Flow Analysis .....</b>	<b>99</b>

<b>3.4</b>	<b>Unsteady Flow Analysis.....</b>	<b>106</b>
<b>3.5</b>	<b>Sediment Transport Analysis.....</b>	<b>108</b>
<b>3.6</b>	<b>Differenze tra HEC-RAS 4.0 ed HEC-6.....</b>	<b>117</b>
<b>3.7</b>	<b>Simulazioni effettuate per il confronto tra HEC-RAS 4.0 e HEC-6.....</b>	<b>119</b>
3.7.1	Confronto 1: HEC-6 ed HEC-RAS(1) .....	121
3.7.2	Confronto 2: HEC-6 ed HEC-RAS(2) .....	125
3.7.3	Confronto 3: HEC-6 ed HEC-RAS(3) .....	128
3.7.4	Sintesi confronti .....	131
<b>4</b>	<b><i>Applicazioni del modello.....</i></b>	<b><i>134</i></b>
<b>4.1</b>	<b>Introduzione .....</b>	<b>134</b>
<b>4.2</b>	<b>Casi di fenomeni di erosione/deposito che si sviluppano in un canale a pelo libero.....</b>	<b>134</b>
4.2.1	Test 1: deflusso in condizioni di equilibrio dinamico .....	135
4.2.2	Test 2: fenomeno erosivo in un canale rettangolare.....	136
4.2.3	Test 3: confronto, per i test 1 e 2, con i risultati ottenuti con HEC-RAS 4.....	139
4.2.4	Soni et al. (1980).....	141
<b>4.3</b>	<b>Casi di Dam-Break.....</b>	<b>145</b>
4.3.1	Capart e Young (1998).....	147
4.3.2	Spinewine e Zech (2007): sabbia .....	150
4.3.3	Spinewine e Zech (2007): PVC .....	154
4.3.4	Dam-break su fondo bagnato .....	156
<b>5</b>	<b><i>Esperimenti Dam-Break su fondo mobile.....</i></b>	<b><i>159</i></b>
<b>5.1</b>	<b>Introduzione .....</b>	<b>159</b>
<b>5.2</b>	<b>Caratteristiche del canale.....</b>	<b>160</b>
5.2.1	Dimensioni.....	160
5.2.2	Paratoia .....	160
5.2.3	Caratteristiche del materiale solido .....	162
5.2.4	Condizioni iniziali.....	162
<b>5.3</b>	<b>Strumentazioni di misura.....</b>	<b>162</b>
5.3.1	Sonde ad ultrasuoni.....	163
5.3.2	Acquisizione di immagini digitali con l'ausilio di un foglio laser .....	164
<b>5.4</b>	<b>Risultati degli esperimenti.....</b>	<b>167</b>
5.4.1	Descrizione fenomeno .....	167
5.4.2	Misura dei livelli idrici.....	168
5.4.3	Misura della topografia finale .....	172
<b>5.5</b>	<b>Applicazione del modello al caso del brusco allargamento .....</b>	<b>175</b>
<b>5.6</b>	<b>Confronto dei risultati del modello con quelli sperimentali.....</b>	<b>176</b>
5.6.1	Livelli idrici .....	176
5.6.2	Topografia finale.....	180
	<b><i>Conclusioni.....</i></b>	<b><i>185</i></b>
	<b><i>Bibliografia.....</i></b>	<b><i>190</i></b>
	<b><i>Appendici.....</i></b>	<b><i>199</i></b>
	Appendice 1 .....	199
	Appendice 2 .....	200
	Appendice 3 .....	201
	Appendice 4 .....	202
	Appendice 5 .....	206

## ***Introduzione***

I fenomeni di erosione e deposito del materiale costituente il fondo e le pareti di un alveo naturale dovuti al trasporto solido che nasce per effetto dell'azione idrodinamica della corrente, possono, talvolta, essere amplificati da fattori antropici, quali:

- Il prelievo di inerti dal fondo alveo;
- Le sistemazioni idrauliche e idraulico-forestali eseguite sui tronchi d'alveo e/o sui bacini a monte;
- La costruzione di sbarramenti;
- La realizzazione di attraversamenti ferroviari e stradali.

Poiché tali processi possono arrecare numerosi danni di carattere tecnico-economico, come:

- la compromissione della stabilità di eventuali opere presenti lungo le sponde di tratti d'alveo eventualmente interessati da fenomeni di erosione;
- il sovralluvionamento dell'alveo in seguito al deposito di materiale solido sul fondo dello stesso;

è necessario mettere a punto degli strumenti in grado di analizzare i fenomeni di trasporto solido che si generano all'interno di un corso d'acqua naturale e la conseguente variazione dell'alveo, sia sulla breve che sulla lunga scala temporale.

A tale scopo, si può fare riferimento a strumenti che si basano o su una modellazione fisica del fenomeno o su una modellazione matematica. La modellazione fisica dei fenomeni di evoluzione d'alveo, usualmente attuata con modelli in scala ridotta e, spesso, distorta, pone numerose difficoltà, di ordine sia concettuale (conseguente soprattutto al ridotto numero di Reynolds del trasporto solido che, di norma, si riesce ad ottenere in laboratorio), sia pratico

(per la difficoltà, che sovente sfocia in una concreta impossibilità, di approvvigionamento del tipo di materiale solido necessario per il rispetto delle condizioni di similitudine tra modello e prototipo, e per la difficoltà di cambiare, in modo agevole, le condizioni al contorno). Inoltre, si sono potuti osservare, soprattutto negli ultimi vent'anni, notevoli progressi sia nella comprensione dei fenomeni fisici che sovrintendono alla dinamica evolutiva dei corsi d'acqua, sia nella proposizione ed implementazione di metodi numerici in grado di portare agevolmente in conto anche la presenza di discontinuità nel campo di moto, sia, infine, nella diffusione, anche in campo tecnico, di strumenti di calcolo che, seppure a basso costo, sono comunque dotati di notevoli capacità computazionali. Per questi motivi, l'uso di modelli matematici, in grado di simulare l'evoluzione dei corsi d'acqua naturali, si configura come uno strumento utile in tutte le analisi in cui intervengano fenomeni di erosione e deposito.

Le analisi che possono essere condotte con l'ausilio di uno strumento di questo tipo sono di diverso tipo:

- analisi di previsione; che permettano di valutare, a priori, gli effetti di un dato intervento che debba essere realizzato lungo un alveo naturale, e che si pensa possa introdurre un fattore di disturbo alla sua naturale evoluzione;
- analisi di monitoraggio; volte a valutare e controllare periodicamente lo stato evolutivo del fondo di un corso d'acqua naturale, in modo tale da poter, eventualmente, intervenire sul corso d'acqua stesso ed evitare l'insorgere di danni;
- analisi di pronto intervento; volte a valutare le problematiche che possono insorgere nel caso dell'improvvisa sopraggiunta di uno stato di emergenza e si debbano individuare le strategie più idonee finalizzate alla risoluzione dell'emergenza.

Un modello matematico, finalizzato allo studio del trasporto solido e dell'evoluzione del fondo per correnti a pelo libero, potrà quindi essere utilizzato per analisi su grande e su piccola scala temporale, potendo, da un lato, simulare il lento modellamento di un alveo soggetto ad azioni naturali o ad interventi antropici o, dall'altro, l'evolversi di un fenomeno rapido come quello che insorge a seguito della rottura di una diga.

Motivi di carattere economico, sociale e ambientale, rendono una ricerca di questo tipo di grande interesse per l'intera comunità, compresa quella scientifica, la quale, inoltre, risulta ulteriormente motivata dall'elevata complessità dello studio di fenomeni di questo tipo, in cui i fattori in gioco sono numerosi; il che rende la sfida ardua e, allo stesso tempo, affascinante.

Il proposito dell'elaborato di tesi è stato quello di poter realizzare una ricerca non solo puramente speculativa, ma che avesse una forte connessione con la realtà.

A tale scopo, l'elaborato di tesi sarà suddiviso in cinque capitoli.

Un capitolo introduttivo nel quale verrà illustrato lo stato dell'arte sulla modellazione matematica finalizzata alla valutazione dell'evoluzione dell'alveo.

Un secondo capitolo nel quale sarà spiegato, in dettaglio, il modello numerico sviluppato nell'elaborato di tesi.

Un terzo capitolo nel quale verrà descritto, brevemente, il software HEC-RAS 4.0, uno dei software disponibili gratuitamente in rete in grado di effettuare analisi di trasporto solido, del quale verrà testata la sua capacità nel riprodurre casi di cui è ben nota la soluzione numerica.

Un quarto capitolo, nel quale saranno presentati i test numerici effettuati con il modello numerico proposto e le sue applicazioni a casi sperimentali e ideali.

In un quinto capitolo verranno, infine, descritte le sperimentazioni effettuate presso il laboratorio di Ingegneria Civile dell'Università cattolica di Louvain

[Louvain-la-Neuve (Belgio)] e verranno mostrati i confronti tra i dati ottenuti dagli esperimenti con le simulazioni numeriche effettuate con il modello oggetto della tesi.

# ***1 Modellazione dei fenomeni di trasporto solido***

## ***1.1 Introduzione***

Essendo molteplici le problematiche connesse allo studio del trasporto solido, risulta, di fatti, quasi impossibile riuscire a realizzare un modello che affronti contemporaneamente, tutti gli aspetti coinvolti nel fenomeno. In letteratura è possibile ritrovare numerosi studi di modellistica di trasporto solido, ognuno dei quali è volto alla risoluzione di una particolare problematica. In questo primo capitolo, l'attenzione è stata rivolta alla descrizione delle principali problematiche connesse alla modellistica di trasporto solido e al modo in cui queste vengono affrontate.

I modelli matematici (a breve o a lunga scala temporale) realizzati negli ultimi decenni cercano di portare in conto i diversi fenomeni che si verificano in natura mediante un approccio di tipo fisico-matematico che prevede dapprima l'individuazione, poi l'utilizzazione e, infine, quasi sempre, la risoluzione per via numerica di bilanci di massa e di quantità di moto totali (o di energia). Sebbene tali modelli siano caratterizzati da differenti scale di dettaglio nella scrittura delle equazioni di bilancio (a causa di differenti livelli di semplificazione della realtà fisica) e, quindi, da un diverso grado di complessità sia da un punto di vista formale che da un punto di vista computazionale, va osservato che essi, una volta implementati, non danno luogo, di norma, a risultati notevolmente differenti l'uno dall'altro, né, tantomeno, sono in grado di modificare sostanzialmente gli andamenti fenomenologici individuati a partire dai modelli più semplificati, almeno quando questi ultimi sono realizzati avendo cura di portare in conto i fattori che giocano un ruolo fondamentale nello sviluppo di un fenomeno. Ciò, in particolare, è quanto è accaduto, almeno a partire dai lavori di Hsu & Chu

(1964) e di de Vries (1965), per i modelli matematici orientati alla valutazione delle modificazioni del profilo longitudinale di fondo alveo conseguenti ad eventi naturali (piene, rapide immissioni di materiale solido, ecc.) o alla realizzazione di interventi antropici (sbarramenti, delimitazioni d'alveo, ecc.).

A partire da questi lavori, infatti, le analisi fisico-matematiche proposte ed utilizzate dalla maggior parte dei ricercatori hanno fatto tutte riferimento, seppure con analisi via via più dettagliate, a tre diversi bilanci, effettuati: il primo, in relazione alla quantità di moto (o, in alternativa, all'energia) posseduta dalla corrente defluente nell'alveo del fiume (*equazione del moto della massa di miscuglio*); il secondo, con riferimento alle masse d'acqua contenute in e transitanti attraverso un preassegnato volume di controllo in un preassegnato intervallo di tempo (*equazione di continuità della massa liquida*); il terzo, con riferimento alle masse di sedimenti, presenti in e transitanti attraverso lo stesso volume di controllo precedentemente considerato per il bilancio delle masse liquide, nonché ai sedimenti che si depositano sul fondo o, viceversa, vengono estratti dal fondo (*equazione di continuità dei sedimenti*).

Alcuni studi successivi (ad esempio: Armanini e Di Silvio, 1988, Pianese e Rossi, 1990) hanno poi cercato di estendere analisi di questo tipo a casi in cui sia i sedimenti trasportati dalla corrente, sia quelli presenti sul fondo dell'alveo, sia quelli immessi in alveo dall'esterno fossero considerati, in aderenza alla realtà fenomenologica, costituiti da più classi granulometriche: per cui, oltre all'equazione globale di bilancio dei sedimenti, risulta necessario effettuare un bilancio delle masse relative alle singole frazioni. Altri approcci, proposti a partire dalla metà degli anni '60, si sono indirizzati nel considerare che la portata solida, trasportata dalla corrente fosse in condizioni di non equilibrio, nel senso che il suo valore non è calcolabile, istante per istante e sezione per sezione, a partire da una formula di trasporto solido tarata per la condizione di

equilibrio dinamico (cioè in assenza di fenomeni di erosione o di deposito e in presenza di trasporto solido al fondo e/o in sospensione).

Ovviamente, i numerosi modelli matematici d'evoluzione d'alveo proposti ed utilizzati in campo tecnico si differenziano tra loro in relazione al problema tecnico preso in esame: in generale, si può affermare che, affinché un modello possa dare risultati soddisfacenti, è necessario che esso venga tarato a seconda della realtà a cui lo si vuole applicare. Questo discorso riguarda, ad esempio, la scelta tra un modello 1D, 2D e 3D, ma riguarda anche la scelta della formula di trasporto solida più opportuna. Inoltre, a seconda del caso esaminato, cambia la scala temporale a cui fare riferimento: nel caso in cui ci si trovi di fronte a situazioni in cui è necessario analizzare l'evoluzione di un alveo conseguente ad eventi di breve durata (alcune ore o, al più, qualche giorno), come, per esempio, una piena, si parla di modelli "a breve scala temporale"; invece, nel caso in cui l'evoluzione dell'alveo è conseguente ad eventi di lunga durata, come, per esempio, erosioni e depositi indotti da interventi antropici (che si sviluppano in un arco di tempo molto lungo), si parla di modelli a "lunga scala temporale".

Un altro problema rispetto al quale si differenziano i modelli, come già visto precedentemente, è la distinzione tra capacità di trasporto dei solidi da parte della corrente e portata solida effettiva: molti modelli, infatti, rinunciano ad affrontare il problema, proponendo soluzioni valide nel solo caso di "equilibrio dinamico", altri, invece, cercano di riprodurre, in diversi modi, situazioni di "non equilibrio". Inoltre, è possibile ritrovare modelli che fanno riferimento a sedimenti aventi caratteristiche omogenee ed uniformi o che, viceversa, permettono di tener conto di materiali di differenti peso specifico e/o di diverse frazioni granulometriche, così come è possibile tener conto insieme o separatamente del trasporto solido al fondo e in sospensione.

## 1.2 Modelli 1D, 2D e 3D

Il sistema di coordinate di norma utilizzato nei modelli mono-dimensionali è mostrato nella Figura 1.1:

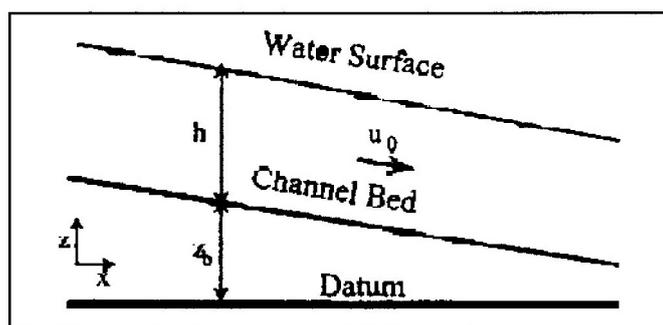


Figura 1.1 Schema di riferimento

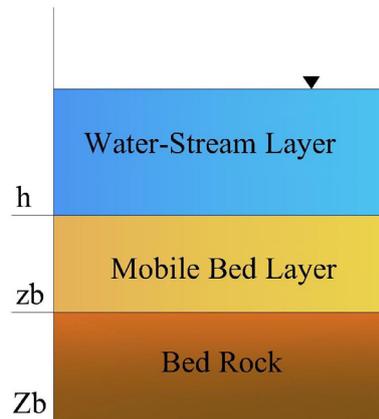
In tali modelli, tutte le equazioni sono scritte con riferimento all'unica ascissa curvilinea  $x$  diretta lungo l'asse del canale. In una modellazione di questo tipo, il campo di moto è assunto mono-dimensionale e, pertanto, la velocità e tutti i parametri caratteristici del campo di moto presentano solo la componente lungo l'ascissa curvilinea. Rispetto ad un modello 2D o 3D, il numero di equazioni e di incognite introdotte nel caso in cui si ricorra ad un modello 1D è, ovviamente, inferiore: ciò comporta una maggiore semplicità nell'applicazione di un tale modello, che risulta essere senza'altro il più utilizzato quando è necessario conoscere le caratteristiche di una corrente solo lungo un'assegnata ascissa curvilinea oppure l'evoluzione del profilo di un canale dovuta a processi di erosione o di deposito di materiale solido indotti da eventi meteorici eccezionali o da interventi antropici, quali la costruzione di uno sbarramento.

### ***1.3 Trasporto solido in condizioni di equilibrio e di non equilibrio dinamico***

#### **1.3.1 Approccio a tre equazioni**

I modelli basati su di un approccio a tre equazioni fanno implicitamente riferimento a condizioni di “equilibrio dinamico” del trasporto solido; quindi, istante per istante e punto per punto, la corrente è in equilibrio dinamico, nel senso che, mediamente nel tempo e nello spazio, non si osservano né fenomeni di erosione né fenomeni di deposito, e la portata solida in arrivo dai tratti a monte riesce ad essere trasportata ai tratti più a valle. In tali circostanze, non solo non si dovrebbero osservare modifiche delle quote e delle pendenze di fondo, ma queste pendenze dovrebbero risultare “consistenti” con quelle fornite dalla specifica formula di trasporto solido utilizzata nel modello.

Il modello si basa sulla scrittura di tre equazioni: rispettivamente, di conservazione della massa della fase liquida, di conservazione della massa della fase solida e di conservazione della quantità di moto della fase liquida (o del miscuglio acqua+sedimenti). Considerando poi il trasporto solido totale (somma di quello di fondo e di quello in sospensione) come se fosse costituito dal solo trasporto solido in sospensione, la corrente viene assimilata ad un miscuglio costituito da una fase liquida (acqua) e da una fase solida completamente dispersa e mescolata, di classe granulometrica coincidente con quella del materiale di fondo alveo. Si riporta, in Figura 1.2, la schematizzazione della sezione per cui si ha lo strato di acqua (WSL), e quello di materiale solido (MBL), oltre al bed-rock.



*Figura 1.2 Modello a 2 layer*

Le tre equazioni di bilancio vengono così a specificarsi: il bilancio della quantità di moto della corrente defluente in alveo (1.1), cioè il bilancio della quantità di moto del miscuglio, e due bilanci delle masse di liquido (1.2) e di solido (1.3) (o, in modo equivalente, delle masse di miscuglio e di solido) inizialmente presenti, e poi defluenti in un assegnato intervallo di tempo, in un volume di riferimento compreso tra due sezioni poste a preassegnata distanza, (i bilanci si riferiscono agli strati WSL e MBL).

Accanto alle tre equazioni di bilancio, sono utilizzate tre relazioni aggiuntive, al fine di ottenere il pareggiamento tra il numero di incognite e di equazioni, che esprimono:

- la coincidenza tra il trasporto solido effettivo in condizioni non stazionarie e non uniformi e la capacità di trasporto, valutata a partire da una formula valida in condizioni di equilibrio dinamico (formula di trasporto solido (1.4));
- la coincidenza tra le forze resistenti che si realizzano in alveo, in condizioni di moto vario e non uniforme, per effetto degli attriti sul fondo e sulle pareti, e quelle che possono valutarsi a partire da formule valide per condizioni di moto stazionario ed uniforme (formula di resistenza (1.5));

- la densità del miscuglio (1.6) in funzione della densità del liquido e del materiale solido trasportato, nonché della concentrazione con cui quest'ultimo è presente nel miscuglio.

Il sistema di equazioni più le relazioni ausiliarie è, quindi, il seguente:

(1.1)	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m UBh) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m \beta U^2 Bh) + gBh \frac{\partial}{\partial x}(K\rho_m h) =$ $-g\rho_m Bh \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) - \frac{\tau_0}{B+2h} + \rho_m \beta_L U_m (q_s + q_w)$
(1.2)	$\frac{\partial}{\partial x} [(1-C)UBh] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-C)Bh] + p \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = q_w$
(1.3)	$\frac{\partial}{\partial x} (CUBh) + \frac{\partial}{\partial t} (CBh) + (1-p) \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = q_s$
(1.4)	$C = C(U, h, d, \dots)$
(1.5)	$S_f = S_f(U, h, d, \dots)$
(1.6)	$\rho_m = \rho_s \cdot C + \rho_w \cdot (1-C)$

In cui i simboli introdotti rappresentano:

$x$  = progressiva, contata a partire da una sezione di riferimento;

$t$  = tempo, calcolato a partire da un istante iniziale;

$U = U(x, t)$  = velocità media di deflusso della corrente liquida;

$h = h(x, t)$  = tirante idrico della corrente;

$z_b = z_b(x, t)$  = quota del Mobile-Bed layer (strato soggetto ad erosione/deposito), misurato, lungo la verticale a partire dal “bedrock” originale;

$Z_b = Z_b(x)$  = quota del “bedrock” originale, misurato lungo la verticale;

$C = C(x, t)$  = concentrazione volumetrica di riferimento dei sedimenti convogliati dalla corrente liquida (rapporto tra la portata solida e la portata del

miscuglio, a sua volta pari alla somma della portata liquida e della portata solida);

$\tau_0 = \tau_0(x,t) = g\rho_m R S_f$  = sforzo tangenziale medio agente sul contorno;

$S_f$  = Slope-friction;

$R$  = raggio idraulico;

$g$  = accelerazione di gravità;

$p$  = porosità dei sedimenti presenti nello strato mobile;

$U_m = U_m(x,t)$  = velocità media di deflusso della portata immessa lateralmente;

$q_w = q_w(x,t)$  = portata liquida entrante lateralmente (positiva se la corrente entra nel fiume);

$q_s = q_s(x,t)$  = portata solida in ingresso lateralmente (positiva se il materiale entra nel fiume);

$\beta$  = coefficiente correttivo (coefficiente di Boussinesq), che tiene conto della distribuzione non uniforme della componente longitudinale della velocità media locale;

$\beta_A$  = coefficiente correttivo (coefficiente di Boussinesq) che tiene conto della distribuzione non uniforme della componente longitudinale della velocità media locale della portata entrante lateralmente;

$K$  = coefficiente correttivo della distribuzione idrostatica delle pressioni;

$\rho_m = \rho_m(x,t)$  = densità media del miscuglio acqua-sedimenti.

### *Analisi delle caratteristiche del modello 2Layer-3Equazioni*

Sostituendo le relazioni (1.4)-(1.6) nelle equazioni di bilancio (1.1)-(1.3), si ottengono tre equazioni differenziali alle derivate parziali nelle tre incognite  $U$ ,  $h$  e  $z_b$ . Aggiungendo a queste tre equazioni differenziali le espressioni delle derivate totali di  $U$ ,  $h$ ,  $z_b$  in funzione delle derivate parziali rispetto al tempo e allo spazio, vale a dire le espressioni:

(1.7)	$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x}$ $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x}$ $\frac{dz_b}{dt} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + c \frac{\partial z_b}{\partial x}$
-------	---

e procedendo in modo analogo a quello riportato da Mosselmann (1989 e 1992) e da Pianese (1994), il sistema di sei equazioni differenziali costituito dalle (1.1)-(1.3) e dalle (1.7) può essere riscritto nella forma matriciale

(1.8)	$\{\mathbf{A}\}\mathbf{f} = \mathbf{w}$
-------	---

dove

(1.9)	$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\dots a_{1,6} \\ a_{2,1}a_{2,2}\dots a_{2,6} \\ a_{3,1}\dots a_{3,6} \\ \dots \\ a_{6,1}\dots a_{6,6} \end{Bmatrix}$
-------	---

è la matrice dei coefficienti (adimensionali)  $a_{i,j}$  moltiplicativi di termini in cui compaiono le derivate parziali delle incognite principali rispetto a  $x$  e  $t$ , raccolte nel vettore colonna  $\mathbf{f}$ , le cui componenti vengono specificate qui di seguito:

(1.10)	$\mathbf{f} = \left[ \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial z_b}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial z_b}{\partial x} \right]^T$
--------	--

Nella (1.8) compare, infine, il vettore colonna dei termini noti  $\mathbf{w}$ , che è costituito, riga per riga, dai termini delle singole equazioni che non moltiplicano alcuna delle derivate parziali delle incognite principali:

(1.11)	$\mathbf{w} = \left[ \begin{array}{l} \beta_L \frac{U_m q_m}{U Bh} - \beta \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{g}{U} (S_0 - S_f), \frac{q_w}{Bh} - (1-C) \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \\ \frac{q_m}{Bh} - C \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{1}{U} \frac{dU}{dt}, \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, \frac{1}{h} \frac{dz_b}{dt} \end{array} \right]^T$
--------	---

I termini del vettore  $\mathbf{w}$  hanno, ovviamente, le stesse dimensioni dei termini del vettore  $\mathbf{f}$ .

Le espressioni analitiche dei coefficienti  $a_{i,j}$  che compaiono nella matrice  $\{\mathbf{A}\}$  sono riportate in Pianese (1994). Per completezza esse sono state altresì riportate in appendice alla presente Tesi di Dottorato (Appendice 1). Per brevità, si indica qui solo che essi risultano costituiti, in generale, da una combinazione lineare di gruppi adimensionali, a loro volta formati a partire dalle grandezze e dai coefficienti presenti nelle equazioni (1.1)-(1.3) e (1.7). La loro struttura è, pertanto, del tipo:

(1.12)	$a_{i,j} = a_{i,j} \left( \frac{U^2}{gh}, p, U \frac{\partial C}{\partial U}, h \frac{\partial C}{\partial h}, \beta, K, \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_m} \right)$
--------	--

Le inclinazioni, nel piano  $(x,t)$ , delle direzioni caratteristiche relative al sistema di equazioni differenziali (1.1)-(1.3) possono interpretarsi come le celerità di propagazione di piccole perturbazioni indotte nelle grandezza assunte a caratterizzare il fenomeno. Esse possono essere trovate, come è noto, imponendo la condizione di annullamento del determinante della matrice Jacobiana  $\{\mathbf{A}\}$ . La condizione

(1.13)	$\det\{\mathbf{A}\} = 0$
--------	--------------------------

porge, infatti, un'equazione algebrica di terzo grado nella celerità adimensionale incognita  $\Phi = c/U$  del tipo

(1.14)	$b_0 \Phi^3 + b_1 \Phi^2 + b_2 \Phi + b_3 = 0$
--------	--

nella quale i coefficienti  $b_r$  ( $r=0,1,2,3$ ) sono funzione, a loro volta, degli stessi raggruppamenti adimensionali di cui sono funzione gli  $a_{i,j}$ . Le espressioni

analitiche dei coefficienti  $b_r$ , sono riportati in Pianese (1994) e, per completezza, in calce alla presente Tesi di Dottorato (Appendice 2).

### *Risultati dell'analisi*

L'equazione algebrica di terzo grado (1.14) può essere agevolmente risolta, in forma chiusa, con il ben noto metodo di Tartaglia-Cardano. Più in particolare, l'analisi preventiva dei segni delle soluzioni fornite dalla (1.14) può essere effettuata in base alla ben nota regola di Cartesio, individuando il numero di variazioni di segno che si verificano nei coefficienti delle equazioni.

Attesa la struttura analitica dei coefficienti  $b_r$ , le espressioni analitiche delle tre soluzioni  $\Phi_n$  ( $n=1,2,3$ ) presentano una forma del tipo

(1.15)	$\Phi_n = \Phi_n \left( \frac{\beta U^2}{gKh}, p, U \frac{\partial C}{\partial U}, h \frac{\partial C}{\partial h}, \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_m} \right)$
--------	---

nella quale compaiono anche le derivate parziali della concentrazione  $C$  rispetto ad  $U$  e ad  $h$ , ovviamente variabili in relazione alla particolare scelta effettuata per l'espressione (1.6).

Al solo scopo di fornire una rappresentazione grafica dei risultati ottenibili con la soluzione analitica dell'equazione (1.15) è utile prendere a riferimento, per semplicità, (de Vries, 1965) la seguente espressione:

(1.16)	$C = \beta_o U^{\beta_1} h^{\beta_2}$
--------	---------------------------------------

Gli andamenti delle celerità di propagazione adimensionali  $\Phi_n$ , in funzione del numero di Froude  $F_r = (U \sqrt{\beta}) / \sqrt{gKh}$ , per preassegnati valori della porosità  $p$  e dei coefficienti  $\beta_o, \beta_1, \beta_2$ , tratti da Pianese (1994), mostrano che:

1. In accordo con quanto fatto già in precedenti lavori (de Vries, 1965; Jansen et al. o de Vries et al., 1979), ci sono tre differenti celerità di

- propagazione reali. Indipendentemente dal numero di Froude, due celerità sono sempre positive, mentre la terza è negativa;
2. I parametri  $p$ ,  $\beta$ , e  $K$  giocano un piccolo ruolo nei valori delle celerità. Specificamente, in accordo con Rahuel (1993) e in opposizione a Stevens (1988) e Correia et al. (1992), il valore assunto dalla porosità  $p$  appare un parametro di secondaria importanza nello sviluppo dei fenomeni;
  3. In accordo con Morris & Williams (1996), la concentrazione di sedimenti gioca il ruolo più importante nel disaccoppiamento delle equazioni relative all'acqua da quelle per il trasporto solido e le variazioni di fondo;
  4. Poiché due delle tre celerità di propagazione coincidono, a meno di poche unità per cento, con quelle ottenibili con un approccio simile, ma riferito al caso di canali a fondo fisso e ad acqua limpida, la presenza della terza celerità di propagazione è da attribuire alla presenza di un fondo mobile e di un trasporto solido. In quest'ottica, seppure con un discorso non rigoroso da un punto di vista matematico, le tre celerità di propagazione possono essere attribuite, da un punto di vista pratico: due, alla fase liquida (e, quindi, alle grandezze  $U=U(x,t)$  e  $h=h(x,t)$  ad esse relative); la terza, alla fase solida (e, quindi, alla concentrazione solida  $C=C(x,t)$ , o alla quota del Mobile-Bed Layer,  $z_b=z_b(x,t)$ , o a entrambe);
  5. per numeri di Froude sufficientemente minori dell'unità, le tre celerità di propagazione assumono ordini di grandezza molto differenti tra di loro. In particolare, per valori del numero di Froude minori di un valore limite che, in dipendenza dal valore assunto dalla concentrazione solida, risulta compreso tra 0.6 e 0.7, la celerità di propagazione attribuibile, per quanto detto al punto precedente, alla concentrazione solida  $C$  (e/o alla

variazione della quota di fondo alveo  $z_b$ ) risulta molto più piccola di quelle relative alla fase liquida.

Da quanto sopra detto si ha che:

- a. per numeri di Froude minori a 0.6-0.7, nell'ambito di uno stesso intervallo di calcolo  $dt$ , è possibile ritenere del tutto secondari, e quindi trascurabili, gli effetti, sullo sviluppo del fenomeno di propagazione dell'onda di piena, derivanti dall'evoluzione delle quote di fondo alveo e dalla presenza, nella corrente, di materiale solido. Dal punto di vista pratico, ciò da la possibilità di risolvere, nell'ambito di uno stesso intervallo temporale di calcolo, dapprima le equazioni che esprimono i bilanci di quantità di moto e di massa relativi alla fase liquida e, solo successivamente, a partire dai valori di  $h$ ,  $U$ ,  $S_f$  e  $\tau_0$  in tal modo calcolati, procedere alla risoluzione dell'equazione di bilancio dei sedimenti e, attraverso questa, alla valutazione della nuova quota di fondo alveo. Tale tecnica, definita in letteratura come “disaccoppiata” o, meglio definibile, per i suoi risvolti numerici, “a passo (temporale) frazionato”, è quindi utilizzabile, nel caso di applicazione di un approccio 2Layer-3Equazioni, solo per numeri di Froude minori di 0.6-0.7.
- b. congruentemente con: l'utilizzazione del modello 2Layer-3Equazioni, col segno delle inclinazioni delle direzioni caratteristiche relative al sistema di equazioni costitutive del modello, con l'attribuzione delle celerità di propagazione effettuata al punto 4., l'assegnazione (posizionamento e tipologia) delle condizioni al contorno può avvenire come di seguito riportato (Tabella 1.1):

	<b>CORRENTI LENTE</b>	<b>CORRENTI VELOCI</b>
<b>MONTE</b>	portata liquida e concentrazione solida	portata liquida e quota di pelo libero
<b>VALLE</b>	quota di pelo libero o relazione h-Q	quota di fondo alveo o concentrazione solida

*Tabella 1.1 Tipologia e posizionamento delle condizioni al contorno*

### *Inadeguatezze del modello 2Layer-3Equazioni*

Modelli di analisi analoghi a questo, fondamentalmente basati sull'ipotesi di quasi-equilibrio del trasporto solido, sono stati ampiamente usati nel passato, soprattutto al fine di valutare le modificazioni del profilo longitudinale che si verificano in alvei di pianura, caratterizzati da sedimenti sufficientemente uniformi, da basse pendenze e, quindi, da condizioni di moto generalmente subcritiche. I risultati forniti da questi modelli nelle suddette condizioni, quando confrontati con dati di campo e di laboratorio, hanno di norma dimostrato una buona capacità sia interpretativa che predittiva. Alla luce di ciò, è possibile concludere che questi modelli, una volta tarati, possono essere applicati nel caso in cui si abbia a che fare con numeri di Froude sufficientemente al di sotto dell'unità e per granulometrie di sedimenti abbastanza uniformi.

Tuttavia, date le modalità con cui si tiene in conto del trasporto dei sedimenti, questi modelli non sembrano idonei a simulare condizioni di non-equilibrio, che facilmente possono riscontrarsi nel caso di elevato apporto solido dai bacini a monte o in casi di dam-break. Inoltre, soprattutto alla luce di una serie di risultati sperimentali (Aparicio e Berezowsky, 1988; Fiori e Guercio, 1992),

non sembra affatto possibile fissare a valle, in condizioni ipercritiche, una condizione al contorno per il livello del fondo o per la concentrazione solida, come invece deriverebbe (vedi Tabella 1.1) dall'utilizzazione di un modello a tre sole equazioni di bilancio.

Di conseguenza, per superare queste difficoltà, appare assolutamente necessario far riferimento ad altri tipi di approcci, in grado di portare in conto condizioni di non equilibrio del trasporto solido: tali nuovi approcci saranno oggetto dei successivi paragrafi.

### 1.3.2 Approccio a quattro equazioni

Uno degli approcci che permette il superamento del problema connesso al portare in conto condizioni di non equilibrio del trasporto solido, condizione che si sviluppa nel caso di transitori rapidi e di notevoli immissioni di portata solida, è quello basato sull'utilizzazione di quattro equazioni: alle tre equazioni viste nel precedente approccio, si può affiancare la scrittura di una quarta equazione, di natura semi-empirica, proposta da altri autori (Armanini e Di Silvio, 1988).

L'espressione utilizzata per questa equazione (Forster et al. 1972), detta equazione di "lag" o di "adattamento", è del tipo:

(1.17)	$-(1-p) \frac{\partial Bz_b}{\partial t} = B \cdot \Psi$
--------	--

dove

(1.18)	$\Psi = \frac{Uh}{\lambda} (C_* - C)$
--------	---------------------------------------

rappresenta il flusso netto di sedimenti dal Mobile-bed layer al Water-Stream layer (assunto positivo se diretto verso l'alto), con  $\lambda$  parametro avente dimensioni di una lunghezza definito come "lunghezza di adattamento" e  $C_*$  concentrazione di equilibrio, variabile nel tempo e nello spazio in funzione

della velocità media della corrente e del tirante idrico (o dello sforzo tangenziale) e calcolabile, ad esempio, in base alla (1.6), dopo aver sostituito in essa i valori via via assunti da  $U$  e  $h$ .

In questo tipo di approccio, al sistema costituito dalle tre equazioni, viste nel paragrafo 1.3.1, ed all'equazione di adattamento, sono associate le medesime relazioni "di chiusura", viste già nel caso dell'approccio a tre equazioni, per consentire il pareggiamento tra equazioni ed incognite. Di seguito si riporta il sistema di equazioni e le relazioni ausiliarie:

(1.19)	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m UBh) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m \beta U^2 Bh) + gBh \frac{\partial}{\partial x}(K\rho_m h) =$ $-g\rho_m Bh \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) - \frac{\tau_0}{B+2h} + \rho_m \beta_L U_m (q_s + q_w)$
(1.20)	$\frac{\partial}{\partial x} [(1-C)UBh] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-C)Bh] + p \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = q_w$
(1.21)	$\frac{\partial}{\partial x} (CUBh) + \frac{\partial}{\partial t} (CBh) + (1-p) \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = q_s$
(1.22)	$-(1-p) \frac{\partial Bz_b}{\partial t} = B \cdot \frac{Uh}{\lambda} (C_* - C)$
(1.23)	$C_* = C_*(U, h, d, \dots)$
(1.24)	$S_f = S_f(U, h, d, \dots)$
(1.25)	$\rho_m = \rho_s \cdot C + \rho_w \cdot (1-C)$

Il significato dei simboli introdotti è lo stesso definito nel paragrafo precedente (paragrafo 1.3.1).

*Analisi delle caratteristiche del modello 2Layer-4Equazioni*

Sostituendo le relazioni (1.24) e (1.25) nelle equazioni di bilancio (1.19)-(1.21) e la relazione (1.23) nell'equazione di adattamento (1.22), si ottengono quattro equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite  $U$ ,  $h$ ,  $z_b$  e  $C$  che, insieme alle espressioni (1.7) e alla definizione di derivata totale della concentrazione volumetrica  $C$

(1.26)	$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + c \frac{\partial C}{\partial x}$
--------	---

consentono di risolvere completamente il problema di valutare le inclinazioni delle direzioni caratteristiche e, quindi, le possibilità di disaccoppiamento delle equazioni relative alla fase solida da quelle relative alla fase liquida.

Ragionando analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.3.1, anche nel caso del modello 2Layer-4Equazioni, si perviene ad una forma matriciale del tipo:

(1.27)	$\{\mathbf{A}'\} \mathbf{f}' = \mathbf{w}'$
--------	---

dove

(1.28)	$\{\mathbf{A}'\} = \begin{Bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} & \dots & a'_{1,8} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \dots & \dots & a'_{2,8} \\ a'_{3,1} & \dots & \dots & \dots & a'_{3,8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{8,1} & \dots & \dots & \dots & a'_{8,8} \end{Bmatrix}$
--------	--

è la matrice dei coefficienti (adimensionali)  $a'_{i,j}$ ;

(1.29)	$\mathbf{f}' = \left[ \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial z_b}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial t}, U \frac{\partial C}{\partial x} \right]^T$
--------	---

è il vettore colonna dei termini contenenti le derivate parziali delle incognite principali;

(1.30)	$\mathbf{w}' = \left[ \begin{array}{l} \beta_L \frac{U_m}{U} \frac{q_m}{Bh} - \beta \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{g}{U} (S_0 - S_f) \frac{q_w}{Bh} - (1-C) \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \\ \frac{q_m}{Bh} - C \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{U}{\lambda} (C_* - C) - C \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{1}{U} \frac{dU}{dt}; \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \frac{1}{h} \frac{dz_b}{dt}; \frac{dC}{dt} \end{array} \right]^T$
--------	---

è il vettore colonna dei termini noti.

I coefficienti adimensionali  $a'_{i,j}$  contenuti nella (1.28) sono, a loro volta, funzione di raggruppamenti adimensionali contenenti le grandezze assunte a caratterizzare i fenomeni di propagazione e di evoluzione del fondo alveo, tali che

(1.31)	$a'_{i,j} = a'_{i,j} \left( \frac{U^2}{gh}, \Phi, C, p, \beta, K, \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_m} \right)$
--------	---

Le espressioni analitiche dei coefficienti  $a'_{i,j}$  sono riportate in Pianese (1994).

Per completezza esse sono state altresì riportate in appendice alla presente Tesi di Dottorato (Appendice 3).

### *Risultati dell'analisi*

Le inclinazioni delle direzioni caratteristiche calcolarsi imponendo la condizione

(1.32)	$\det\{\mathbf{A}'\} = 0$
--------	---------------------------

che fornisce un'equazione algebrica di quarto grado nell'incognita  $\Phi$

(1.33)	$b'_0 \Phi^4 + b'_1 \Phi^3 + b'_2 \Phi^2 + b'_3 \Phi = 0$
--------	---

nella quale i coefficienti  $b'_r$  ( $r=0,1,2,3$ ) sono solo funzione del rapporto  $U^2 / gh$  e dei coefficienti  $\beta$  e  $K$  (Pianese 1994).

Dato che l'equazione (1.33) è omogenea, una celerità è sempre uguale a zero (i.e., una linea caratteristica, quando viene disegnata sul piano  $(x,t)$ , è sempre verticale). Risolvendo la (1.33), si ottengono i seguenti valori di  $\Phi$  :

(1.34)	$\Phi_1 = 1 - \frac{1}{F_r} \Leftrightarrow c_1 = U - \sqrt{\frac{gKh}{\beta}}$ $\Phi_2 = 1 + \frac{1}{F_r} \Leftrightarrow c_2 = U + \sqrt{\frac{gKh}{\beta}}$ $\Phi_3 = 1 \Leftrightarrow c_3 = U$ $\Phi_4 = 0 \Leftrightarrow c_4 = 0$
--------	---

Gli andamenti delle celerità di propagazione adimensionali  $\Phi_n$ , in funzione del numero di Froude, riportati in Pianese (1994), mostrano che:

1. utilizzando questo modello è possibile disaccoppiare le equazioni relative alla fase solida da quelle relative alla fase liquida solo per valori molto ridotti del numero di Froude ( $F_r < 0.4$ );
2. le pendenze di due delle curve caratteristiche sono sempre positive, indipendentemente dal valore del numero di Froude, mentre la terza assume segno (negativo o positivo) in relazione alle condizioni del moto: negativo, se la corrente è lenta, positivo nel caso di corrente veloce. Di conseguenza nel caso di corrente veloce le pendenze non nulle delle tre curve caratteristiche sono tutte positive. Invece, nel caso di corrente lenta, due celerità con cui si propagano i “piccoli disturbi” sono positive, mentre la terza è negativa. Praticamente, questo significa che, in accordo con le ipotesi fatte, quando si usa il modello 2Layer-4Equazioni è necessario fissare le condizioni al contorno in modo differente dal caso del modello 2Layer-3Equazioni. In particolare tenendo a mente che due delle tre pendenze delle curve caratteristiche praticamente coincidono, in segno e valore, con quelle che possono essere determinate considerando le equazioni del de Saint Venant (e quindi nel caso di fondo fisso ed assenta di trasporto solido), mentre la terza è praticamente la stessa di quella per la propagazione di piccoli disturbi nel trasporto di sedimenti (Armanini e Di

Silvio, 1989), da ciò può concludersi che il disturbo nella quota di fondo  $z_b$  non si propaga.

3. Alla luce di ciò, per l'uso di questo modello, le condizioni al contorno devono essere fissate in relazioni alle condizioni del moto, differenziando il caso di corrente lenta da quello di corrente veloce: in particolare l'assegnazione (posizionamento e tipologia) delle condizioni al contorno può avvenire come di seguito riportato (Tabella 1.1):

	<b>CORRENTI LENTE</b>	<b>CORRENTI VELOCI</b>
<b>MONTE</b>	portata liquida e concentrazione solida	portata liquida, quota di pelo libero e concentrazione solida
<b>VALLE</b>	quota di pelo libero o relazione h-Q	NESSUNA

**Tabella 1.2 Tipologia e posizionamento delle condizioni al contorno**

Si può osservare come, con una modellazione più aderente alla realtà fisica, come quella proposta nel modello 2Layer-4Equazioni, in grado di portare in conto, seppure ancora a livello semi-empirico, condizioni di non-equilibrio del trasporto solido, nel caso di correnti ipercritiche possano essere fissati a monte non solo il tirante idrico ed l'idrogramma in ingresso, ma anche il sedimentogramma relativo al materiale solido immesso nel tronco in esame. Si osservi per altro come, risultando sempre nulla la quarta celerità di propagazione e non occorrendo più fissare in alcun punto il Mobile-Bed level, il valore di quest'ultimo risulti variabile solo in conseguenza delle variazioni intervenute in  $U$ ,  $h$  e  $C$ .

Il modello di analisi appena illustrato è idoneo a descrivere il trasporto solido in condizioni non stazionarie solo in modo complessivo. Esso, infatti, non è capace di simulare differenti tipologie di trasporto: non è in grado, in

particolare, di distinguere il trasporto di fondo da quello in sospensione, differenza che può giocare un ruolo molto importante nei processi di erosione/deposito. Di conseguenza, se si vuole portare in conto, oltre a condizioni di non-equilibrio dinamico del trasporto solido, anche la distinzione tra trasporto solido al fondo ed in sospensione, è necessario fare riferimento ad un'altra tipologia di modellazione, che verrà descritta nei paragrafi successivi.

### ***1.4 Modello disaccoppiato e accoppiato***

Un'ulteriore differenza, riguardante la soluzione dei problemi di evoluzione d'alveo schematizzati attraverso modelli mono-dimensionali, riguarda l'approccio secondo cui sono risolti i sistemi di equazioni; dal punto di vista numerico, é possibile, infatti, adoperare sia un approccio "disaccoppiato", sia un approccio "accoppiato".

In un approccio disaccoppiato (che potrebbe anche essere definito "a passo temporale frazionato"), con riferimento ad un intervallo di tempo  $\Delta T$ , si considera, dapprima, l'alveo a fondo fisso e rispetto ad esso si ricavano le caratteristiche idrauliche della corrente, quali: velocità, sforzi tangenziali,...; note tali caratteristiche, si valuta il trasporto solido "al fondo e in sospensione", passando poi a determinare la variazione della sezione dell'alveo in base all'equazione di bilancio della massa dei sedimenti.

L'approccio è, di fatto, caratterizzato da due step consecutivi, in cui gli output del primo step (quello per il calcolo idraulico) rappresentano gli input del secondo step (quello che consente il calcolo della portata solida e della variazione della quota di fondo).

Come visto nei paragrafi precedenti, per un approccio a tre equazioni, con riferimento ad uno schema a due layer, l'utilizzo di una tecnica disaccoppiata è possibile nel caso in cui si abbiano valori del numero di Froude minori di 0.6-0.7 (punto a. del paragrafo 1.3.1); invece, per un approccio a quattro equazioni, sempre con riferimento ad uno schema a due layer, è possibile disaccoppiare le equazioni relative alla fase liquida da quelle relative alla fase solida solo per valori del numero di Froude minori di 0.4 (punto 1. del paragrafo 1.3.2).

Il secondo approccio è definito “accoppiato” perché, fissato un  $\Delta T$ , si eseguono, contemporaneamente, tutti i calcoli necessari per la risoluzione di tutte le equazioni, questo, come è intuitivo, se da un lato comporta una maggiore precisione nei calcoli eseguiti, dall’altro determina un aggravio in termini computazionali.

La più recente letteratura disponibile (Pianese, 1994; Cao et al., 2002; Bellal et al. 2005; Barbiero et al., 2006) appare fortemente orientata all’uso di modelli accoppiati, che siano in grado di portare in conto condizioni di non equilibrio nel trasporto solido. In particolare nel lavoro di Barbiero et al., 2006, in cui al modello “disaccoppiato” è stato associato l’approccio a “tre equazioni”, mentre al modello accoppiato è stato associato l’approccio a “quattro equazioni”, sono stati messi a confronto i risultati ottenuti dall’utilizzo degli approcci a tre e quattro equazioni applicati ad uno studio di evoluzione d’alveo a lunga scala temporale. I risultati dello studio hanno mostrato come il raggiungimento della condizione di equilibrio (che nel caso specifico consiste nel raggiungimento della pendenza di equilibrio dinamico) sia stata più veloce nel caso del modello accoppiato a seguito della diversa modalità di risoluzione del sistema. Dallo studio è, altresì, emerso come l’evoluzione del fondo riprodotta dai due modelli è differente. Infatti, nel modello accoppiato, si ha, più realisticamente, un fondo dell’alveo caratterizzato da un’evoluzione più uniforme nell’intera lunghezza, mentre l’uso del modello disaccoppiato restituisce un fondo caratterizzato da fenomeni di erosione e deposito localizzati.

Anche nel lavoro di Cao et al. (2002) vengono confrontati modelli di tipo accoppiato e disaccoppiato: i test eseguiti mettono in evidenza la maggiore accuratezza dei risultati ottenuti con una modellazione di tipo accoppiato. In particolare, in questo lavoro viene fatta un’analisi anche riguardo le scale temporali dei fenomeni di propagazione della corrente  $T_F = h/U$  (dove  $h$  è il tirante idrico e  $U$  la velocità di deflusso della corrente) e di propagazione

dell'evoluzione del fondo  $T_B = h/C\omega$  (dove  $C$  è la concentrazione solida e  $\omega$  la velocità di sedimentazione delle particelle solide), determinando, con riferimento ai test eseguiti, i valori della scala temporale relativa per l'evoluzione del fondo  $R_T = T_B/T_F = U/C\omega$ . In generale si ha  $T_B > T_F$  (in quanto risulta  $U > C\omega$ ), non esistono, però, in letteratura analisi quantitative sui valori di  $R_T$  necessari affinché il disaccoppiamento delle equazioni possa essere ammissibile. Quello che Cao et al. (2002) esprimono a tal riguardo è che, siccome per i test da loro eseguiti, caratterizzati da un  $R_T \approx 10^4$ , un modello di tipo disaccoppiato non permette l'ottenimento di risultati accurati, un approccio di tipo accoppiato risulta necessario quando la scala temporale relativa dell'evoluzione del fondo  $R_T$  è dell'ordine di grandezza di  $10^4$ . Partendo da questa considerazione, inoltre, osservano come nel processo di evoluzione d'alveo indotto da una piena carica di sedimenti per il tratto intermedio e finale del Fiume Giallo in Cina, assumendo dei valori tipici per la concentrazione solida, la velocità di sedimentazione e la velocità di deflusso della corrente, il valore di  $R_T$  ottenuto risulta essere più basso di  $10^4$ , il che mette in luce la necessità, in questo caso, di adoperare una tecnica di tipo accoppiato per la risoluzione delle equazioni del modello, giungendo, inoltre, alla conclusione che, probabilmente, questa è la principale ragione del fatto che molti modelli numerici di evoluzione del fondo (di tipo disaccoppiato) hanno fallito nel momento in cui sono stati utilizzati per il Fiume Giallo.

Quanto detto suggerisce come sia preferibile, nel caso in cui si affrontino studi di evoluzione d'alveo a lunga scala temporale, utilizzare un modello accoppiato.

Inoltre l'utilizzo di tale modello è necessario, per ottenere risultati più accurati, qualora si vogliano analizzare fenomeni di "dam-break" (Capart & Young, 2002; Caleffi & Valiani, 2002; Cao et al., 2004; Costabile et al., 2004;

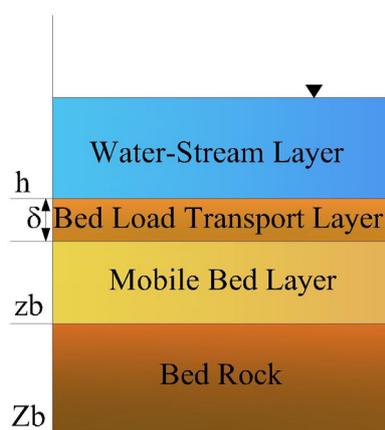
Iervolino et al., 2005; Costabile & Macchione, 2006, Palumbo et al., 2006) , in cui l' evoluzione d'alveo si sviluppa su breve scala temporale.

### ***1.5 Modelli a tre layer***

Diverse sono le modalità con cui, nella modellazione dei processi di evoluzione dei corsi d'acqua, risulta possibile schematizzare il trasporto solido al fondo e quello in sospensione.

Per quanto concerne le equazioni riportate nel paragrafo 1.3.1, si è fatto riferimento ad uno schema a due layer (si veda la Figura 1.2 e la relativa spiegazione) per cui, di fatto, si fa riferimento al trasporto solido totale.

Un'altra possibilità è quella di suddividere il trasporto solido totale in trasporto al fondo e in sospensione: in questo caso, si fa riferimento allo schema riportato in Figura 1.3, che considera uno strato di fondo, in cui il trasporto di materiale avviene per fenomeni di strisciamento, rotolamento e per salto (Bed-Load Transport layer), uno strato in cui il trasporto avviene per l'azione diretta della corrente (Water-Stream layer), a cui va aggiunto un ulteriore strato (Mobile-Bed layer). Nella Figura 1.3 si riporta la schematizzazione a tale scopo utilizzabile:



***Figura 1.3 Modello a 3 Layers***

Le equazioni di bilancio che possono essere scritte con riferimento allo schema riportato nella Figura 1.3 sono cinque, vale a dire:

equazione della conservazione della quantità di moto per il miscuglio acqua-sedimenti, scritta con riferimento sia al Water-Stream layer che al Bed-Load Transport layer

(1.35)	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m UBh) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m \beta U^2 Bh) + gBh \frac{\partial}{\partial x}(K\rho_m h) =$ $-g\rho_m Bh \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) - \frac{\tau_0}{B + 2h} + \rho_m \beta_L U_m (q_s + q_w) ;$
--------	---

equazione di continuità per la fase liquida, scritta con riferimento sia al Water-Stream layer che al Bed-Load Transport layer

(1.36)	$\frac{\partial}{\partial x} [(1 - C_b) UB \delta] + \frac{\partial}{\partial x} [(1 - C_s) Bh] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - C_b) UB \delta] +$ $+ \frac{\partial}{\partial t} [(1 - C_s) Bh] + p \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = q_w ;$
--------	--

equazione di continuità per la fase solida nel Bed-Load Transport layer, scritta considerando insieme il Bed-Load Transport layer e il Mobile-Bed layer, e considerando sia il flusso netto di sedimenti che passa in sospensione sia quello proveniente dal Mobile-Bed layer

(1.37)	$\frac{\partial}{\partial x} (C_b u_b B \delta) + \frac{\partial}{\partial t} (C_b B \delta) + (1 - p) \frac{\partial (Bz_b)}{\partial t} = B(\psi_b - \psi_s) ;$
--------	---

equazione di continuità per la fase solida nel Water-Stream layer, scritta trascurando gli effetti della dispersione turbolenta e della diffusione

(1.38)	$\frac{\partial}{\partial x} (C_s UBh) + \frac{\partial}{\partial t} (C_s Bh) = q_s + B \psi_s ;$
--------	---

equazione di “lag” o “adattamento”

(1.39)	$\frac{\partial}{\partial x}(C_b u_b B \delta) + \frac{\partial}{\partial t}(C_b B \delta) + \frac{\partial}{\partial x}(C_s U B h) + \frac{\partial}{\partial t}(C_s B h) = B(\psi_b - \psi_s).$
--------	---

Per avere il pareggiamento tra equazioni ed incognite, è necessario aggiungere alle equazioni appena viste delle ulteriori relazioni tra le variabili in gioco.

Queste ultime esprimono:

il flusso netto di sedimenti che sono erosi dal fondo (Mobile-Bed layer) o si depositano sul fondo (assunto positivo verso l’alto)

(1.40)	$\psi_b = \frac{U h}{\lambda_b} (C_{beq} - C_b)$
--------	--

il flusso netto di sedimenti che salgono dal Bed-Load Transport layer (assunto positivo verso l’alto)

(1.41)	$\psi_s = \frac{U h}{\lambda_s} (C_{seq} - C_s)$
--------	--

dove:

$C_b$  = concentrazione volumetrica del materiale solido contenuto nel Bed-Load Transport layer;

$C_s$  = concentrazione volumetrica del materiale solido contenuto nel Water-Stream layer;

$u_b$  = velocità media di trasporto con cui si muovono le particelle presenti nel Bed-Load Transport layer;

$\lambda_b$  = lunghezza di adattamento relativa al trasporto solido al fondo;

$\lambda_s$  = lunghezza di adattamento relativa al trasporto solido in sospensione;

$C_{beq}$  = valore della concentrazione solida al fondo, valutabile in base ad una delle tradizionali formule di trasporto solido disponibili in letteratura;

$C_{seq}$  = valore della concentrazione solida in sospensione, valutabile in base ad una delle tradizionali formule di trasporto solido disponibili in letteratura.

Si ricorda, inoltre, che, per portare in conto sia il trasporto solido al fondo che quello in sospensione, è necessario considerare una particolare espressione della densità del miscuglio:

(1.42)	$\rho_m = \left\{ \frac{1}{1 + \delta/h} [\rho_w + (\rho_s - \rho_w)C_s] + \frac{\delta/h}{1 + \delta/h} [\rho_w + (\rho_b - \rho_w)C_b] \right\}$
--------	--

che si riduce alla forma “classica” (cioè l’equazione (1.6) del paragrafo 1.3.1) qualora lo spessore  $\delta$  si riduca a zero.

Riguardo al valore che può assumere lo spessore  $\delta$  si può osservare che questo dipende dal diametro caratteristico  $d$  dei sedimenti presenti sul fondo, dalla velocità della corrente, dal tirante idrico  $h$ , dalla densità del materiale solido e dalla viscosità cinematica del fluido (Van Rijn, 1984). In prima approssimazione, il rapporto  $\delta/d$  risulta variabile tra uno e cinque, a seconda dei valori assunti dalle grandezze precedentemente specificate (Van Rijn, 1984).

A sua volta, la velocità media di trasporto del materiale solido presente nel Bed-Load Transport layer,  $u_b$ , dipende dalla velocità e dal tirante idrico della corrente, nonché dal diametro e dalla densità dei granuli. Si osservi che, a seconda delle condizioni che si realizzano in alveo, il rapporto  $\omega = u_b/U$  risulta variabile tra 0.1 e 0.4.

#### *Analisi delle caratteristiche del modello 3Layer-5Equazioni*

Sostituendo le relazioni (1.41)-(1.43) nelle equazioni di bilancio (1.35)-(1.38) e le relazioni (1.41) e (1.42) nell’equazione di adattamento (1.39), si ottengono cinque equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite  $U$ ,  $h$ ,  $z_b$ ,  $C_b$  e  $C_s$  che, insieme alle espressioni (1.7) e alle definizioni di derivata totale delle concentrazioni volumetriche  $C_b$  e  $C_s$ :

(1.43)	$\frac{dC_b}{dt} = \frac{\partial C_b}{\partial t} + \frac{\partial C_b}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial C_b}{\partial t} + c \frac{\partial C_b}{\partial x}$ $\frac{dC_s}{dt} = \frac{\partial C_s}{\partial t} + \frac{\partial C_s}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial C_s}{\partial t} + c \frac{\partial C_s}{\partial x}$
--------	---

consentono di valutare le inclinazioni delle direzioni caratteristiche relative al modello 3Layer-5Equazioni e di valutare le possibilità di disaccoppiamento delle equazioni relative alla fase solida da quelle relative alla fase liquida.

Ragionando analogamente a quanto fatto nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2, anche nel caso del modello 3Layer-5Equazioni, si perviene ad una forma matriciale del tipo:

(1.44)	$\{\mathbf{A}''\}\mathbf{f}'' = \mathbf{w}''$
--------	---

dove

(1.45)	$\{\mathbf{A}''\} = \begin{Bmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} & \dots & a''_{1,6} \\ a''_{2,1} & a''_{2,2} & \dots & \dots & a''_{2,6} \\ a''_{3,1} & \dots & \dots & \dots & a''_{3,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{6,1} & \dots & \dots & \dots & a''_{6,6} \end{Bmatrix}$
--------	--

è la matrice dei coefficienti (adimensionali)  $a''_{i,j}$ ;

(1.46)	$\mathbf{f}'' = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{g}{U^2} \frac{\partial z_b}{\partial t}, \frac{g}{U} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \frac{\partial C_b}{\partial t}, U \frac{\partial C_b}{\partial x}, \\ \frac{\partial C_s}{\partial t}, U \frac{\partial C_s}{\partial x} \end{array} \right]^T$
--------	--

è il vettore colonna dei termini contenenti le derivate parziali delle incognite principali;

(1.47)	$\mathbf{w}'' = \left[ \begin{array}{l} \beta_L \frac{U_m}{U} \frac{q_m}{Bh} - \beta \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{g}{U} (S_0 - S_f) \frac{q_w}{Bh} - \left[ 1 - C_s + \frac{\delta}{h} (1 - C_b) \right]^T \\ \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{U}{\lambda_b} (C_{beq} - C_b) - \frac{U}{\lambda_s} (C_{seq} - C_s) - \omega \frac{\delta}{h} C_b \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{q_s}{Bh} + \\ - C_s \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{U}{\lambda_s} (C_{seq} - C_s); \frac{U}{\lambda_s} (C_{seq} - C_s) - \frac{U}{\lambda_b} (C_{beq} - C_b) + \\ - \left( C_s + \omega \frac{\delta}{h} C_b \right) \frac{U}{B} \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{1}{U} \frac{dU}{dt}; \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}; \frac{1}{h} \frac{dz_b}{dt}; \frac{dC_b}{dt}; \frac{dC_s}{dt} \end{array} \right]^T$
--------	---

è il vettore colonna dei termini noti.

I coefficienti adimensionali  $a''_{i,j}$  contenuti nella (1.45) sono, a loro volta, funzione di raggruppamenti adimensionali contenenti le grandezze assunte a caratterizzare i fenomeni di propagazione e di evoluzione del fondo alveo, tali che

(1.48)	$a''_{i,j} = a''_{i,j} \left( \frac{U^2}{gh}, \Phi, C_b, C_s, p, \frac{\delta}{h}, \omega, \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U}, \frac{\partial \delta}{\partial h}, U \frac{\partial \omega}{\partial U}, h \frac{\partial \omega}{\partial h}, \beta, K, \frac{\rho_b - \rho_w}{\rho_m}, \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_m} \right)$
--------	---

### Risultati dell'analisi

Le inclinazioni delle direzioni caratteristiche calcolarsi imponendo la condizione

(1.49)	$\det\{\mathbf{A}''\} = 0$
--------	----------------------------

che fornisce un'equazione algebrica di quinto grado nell'incognita  $\Phi$

(1.50)	$b''_0 \Phi^5 + b''_1 \Phi^4 + b''_2 \Phi^3 + b''_3 \Phi^2 + b''_4 \Phi = 0$
--------	--

nella quale i coefficienti  $b''_r$  ( $r=0,1,2,3,4$ ) sono funzione degli stessi raggruppamenti adimensionali di cui sono funzione gli  $a''_{i,j}$ . Le espressioni analitiche dei coefficienti  $b''_r$  sono riportate in Pianese (1994). Per

completezza esse sono state altresì riportate in appendice alla presente Tesi di Dottorato (Appendice 3).

A partire dall'equazione (1.50) si ottengono cinque distinti valori della celerità di propagazione adimensionale  $\Phi$ , uno dei quali nullo. Le espressioni analitiche delle cinque soluzioni  $\Phi_n$  ( $n=1,2,3,4$ ) presentano una forma del tipo

(1.51)	$\Phi_n = \Phi_n \left( \frac{U^2}{gh}, C_b, C_s, p, \frac{\delta}{h}, \omega, \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U}, \frac{\partial \delta}{\partial h}, U \frac{\partial \omega}{\partial U}, h \frac{\partial \omega}{\partial h}, \beta, K, \frac{\rho_b - \rho_w}{\rho_m}, \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_m} \right) \quad n = 1, \dots, 4$ $\Phi_5 = 0 \Leftrightarrow c_5 = 0$
--------	--

Gli andamenti delle celerità di propagazione adimensionali  $\Phi_n$ , in funzione del numero di Froude  $F_r = (U \sqrt{\beta}) / \sqrt{gKh}$ , per preassegnati valori di  $h$ ,  $C_b$ ,  $C_s$  e  $p$ , riportati in Pianese (1993), mostrano che:

1. analogamente al caso di utilizzazione del modello 2Layer-4Equazioni, per il modello 3Layer-5Equazioni è possibile disaccoppiare le equazioni relative alla fase solida da quelle relative alla fase liquida solo per valori molto ridotti del numero di Froude ( $F_r < 0.4$ );
2. la prima e la terza celerità di propagazione risultano pari, a meno di qualche unità per cento, a quelle valutabili per condizioni di alveo fisso ed assenza di trasporto solido, con errori più accentuati, nel caso della terza celerità, in corrispondenza di valori del rapporto  $(U \sqrt{\beta}) / \sqrt{gKh}$  prossimi all'unità, ed errori via via ancora più consistenti all'aumentare dello stesso rapporto;
3. la seconda celerità di propagazione risulta pari, a meno di errori quasi del tutto trascurabili, alla velocità media  $U$  della corrente;
4. la quarta celerità di propagazione risulta pari, a meno di qualche unità per cento, alla velocità media di trasporto del materiale solido presente

nel Bed-Load Transport layer,  $u_b$ , con scarti via via crescenti all'aumentare del rapporto  $(U\sqrt{\beta})/\sqrt{gKh}$ ;

5. tre celerità di propagazione sono sempre positive, indipendentemente dal valore assunto dal numero di Froude, mentre al quarta assume segno diverso a seconda delle condizioni di moto: in particolare, se la corrente è ipocritica, il suo segno è negativo; viceversa, esso è positivo se la corrente è ipercritica. Di conseguenza, nel caso di correnti ipercritiche, le quattro celerità di propagazione non nulle sono tutte positive. Invece, nel caso di correnti ipocritiche, tre delle quattro celerità non nulle sono positive, mentre la quarta è negativa.
6. Alla luce di quanto detto, nell' utilizzazione del modello 3Layer-5Equazioni occorrerà fissare le condizioni al contorno secondo le modalità riportate di seguito in Tabella 1.3:

	<b>CORRENTE LENTA</b>	<b>CORRENTE VELOCE</b>
<b>MONTE</b>	portata liquida, concentrazione solida del trasporto di fondo e del trasporto in sospensione	portata liquida, quota di pelo libero e concentrazione solida del trasporto di fondo e del trasporto in sospensione
<b>VALLE</b>	quota di pelo libero o relazione h-Q	NESSUNA

*Tabella 1.3 Tipologia e posizionamento delle condizioni al contorno*

## ***1.6 Resistenza al moto negli alvei a fondo mobile***

Il trasporto solido, di fondo o in sospensione, induce sulla superficie dell'alveo delle strutture organizzate che hanno forme relativamente regolari e che dipendono dal regime idrico della corrente. Conseguenza di questo fenomeno è l'aumento della resistenza negli alvei a fondo mobile, rispetto agli alvei a fondo fisso, a parità di sedimenti costituenti l'alveo. Le forme di fondo costituiscono quindi una scabrezza che va ad aggiungersi ai singoli grani. Risulta fondamentale, per un'opportuna simulazione del fenomeno tener conto e saper calcolare correttamente questo secondo contributo alla scabrezza complessiva dell'alveo, ma questo problema non è di facile soluzione, in quanto il regime delle forme di fondo dipende dal regime idrodinamico della corrente, il quale a sua volta dipende dalle resistenze. Quello che si provvede a fare è di considerare lo sforzo tangenziale dell'alveo come somma di due contributi: uno sforzo dovuto alla resistenza di grano e uno dovuto alla resistenza delle forme di fondo. In realtà si dovrebbe tener conto di un ulteriore sforzo aggiuntivo, quello dovuto all'interazione tra i grani, che però può essere trascurato nel trasporto solido ordinario. Lo sforzo tangenziale al fondo  $\tau_0$  è quindi dato dalla:

(1.52)	$\tau_0 = \tau_0' + \tau_0''$
--------	-------------------------------

dove  $\tau_0'$  è la resistenza dovuta alla scabrezza dei grani costituenti l'alveo e  $\tau_0''$  è la resistenza di forma. Separando l'effetto della scabrezza da quello della forma di fondo, attraverso le pendenze della linea del carico totale  $j'$  e  $j''$ , e tenendo conto che  $\tau_0 = \gamma j R$  (con  $\gamma$  = peso specifico dell'acqua e  $R$  = raggio idraulico), è possibile scrivere la relazione come:

(1.53)	$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot (j' + j'')$
--------	--

Nella (1.53) la pendenza  $j$  è stata divisa in due, la  $j'$  che rappresenta l'aliquota dovuta alla sola resistenza dei grani, e la  $j''$  che è l'aliquota dovuta alla conformazione del fondo (forme di fondo). Per la valutazione di  $j'$  Meyer-Peter & Muller hanno proposto la seguente relazione che tiene conto del parametro di scabrezza di Gauckler-Strickler ( $k_s$ ) totale, e del medesimo parametro, ma che si riferisce ai soli granuli del materiale mobile ( $k'_s$ ):

(1.54)	$\frac{j'}{j} = \left( \frac{k_s}{k'_s} \right)^{3/2}$
--------	--

Muller suggerisce la seguente relazione, in funzione del diametro del materiale solido, per il calcolo del parametro  $k'_s$ :

(1.55)	$k'_s = 26 / d_{90}^{1/6}$
--------	----------------------------

Se si tiene conto dell'espressione della velocità d'attrito  $v_*$ :

(1.56)	$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot j}$
--------	--

e considerando la divisione di  $j'$  e  $j''$ , si può scrivere:

(1.57)	$v_*' = \sqrt{\tau_0' / \rho} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot j'}$
--------	---

(1.58)	$v_*'' = \sqrt{\tau_0'' / \rho} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot j''}$
--------	--

Da cui si può scrivere la (1.56) come:

(1.59)	$v_*^2 = v_*'^2 + v_*''^2$
--------	----------------------------

In condizioni di moto uniforme ( $i_f = j$ ), quando cioè la pendenza della linea del carico totale  $j$  è pari alla pendenza di fondo  $i_f$ , è possibile scrivere l'equazione:

(1.60)	$U = C \cdot \sqrt{g \cdot R \cdot i_f}$
--------	--

dove U è la velocità della corrente.

Tendendo conto della relazione:

(1.61)	$\frac{U}{v_*} = C$
--------	---------------------

dove C è il coefficiente adimensionale di resistenza, si possono trovare, in modo analogo, con riferimento a  $v_*'$  e  $v_*''$ , le espressioni dei coefficienti adimensionali di resistenza  $C'$  e  $C''$ , relativi, rispettivamente, alla scabrezza dei grani e alle forme di fondo:

(1.62)	$\frac{U}{v_*'} = C'$
--------	-----------------------

(1.63)	$\frac{U}{v_*''} = C''$
--------	-------------------------

Come è possibile immaginare anche tra le C, C', e C'' vige una relazione simile alle (1.52)e (1.59):

(1.64)	$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C'^2} + \frac{1}{C''^2}$
--------	--

Per il calcolo dei coefficienti di scabrezza ( $k_s'$ ) oltre alla citata espressione di Muller (1.55); risulta essere molto usata e più attendibile, una formula di Strickler per cui  $k_s' = 24 / (m \cdot d_{90})^{1/6}$  con  $m = 1 \div 2 \text{ mm}$ ; altri suggerimenti sono stati dati da Einstein e Barbarossa (1952) che consigliavano di considerare come parametro di scabrezza  $\varepsilon = d_{65}$ , mentre Engelund (1966) suggeriva  $\varepsilon = 2d_{65}$ . Altri autori suggeriscono di considerare il  $d_{90}$ , e dunque il parametro di scabrezza risulta essere  $\varepsilon = (1.5 \div 2)d_{90}$ , Kamphuis (1974)

suggerisce  $\varepsilon = (1.5 \div 2.5)d_{90}$  rispettivamente per  $Y/d_{90} \rightarrow 10$  e per  $Y/d_{90} \rightarrow 100 \div 200$ .

I valori risultano molto oscillanti, in generale risulta consigliabile assumere come parametro di scabrezza quelli compresi tra  $2d_{50}$  e  $2d_{90}$ .

Il valore di  $C''$ , coefficiente di resistenza dovuto al modellamento del fondo, si presenta di difficile determinazione. In generale, nel caso di regime inferiore ( $F_r < 1$ ) l'effetto dell'incremento della resistenza risulta sensibile quando la configurazione del fondo è a ripples e si accentua se essa passa a dune. Nella fase di transizione ( $F_r \approx 1$ ), invece, il comportamento del fondo quasi-piano è praticamente quello di un contorno puramente scabro, cioè con  $C = C'$ . Infine nella fase delle antidune ( $F_r > 1$ ) il comportamento è incerto, ma sembra evidente un progressivo aumento della resistenza.

Einstein (1950) ed Einstein e Barbarossa (1952) suggeriscono una relazione funzionale tra  $C''$  ed il parametro  $\psi_{35}$ :

(1.65)	$\psi_{35} = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot \frac{d_{35}}{R' j}$
--------	--

La dipendenza di  $C''$  dal parametro  $\psi_{35}$  è stata ottenuta graficamente, ma, da successive applicazioni, è risultata insufficiente alla comparazione con dati sperimentali reali: da qui la necessità di far dipendere  $C''$  da un secondo parametro:

(1.66)	$\text{Re}_s = w_s d_s / \nu$
--------	-------------------------------

La relazione

(1.67)	$C'' = f(\psi_{35}, \text{Re}_s)$
--------	-----------------------------------

è stata proposta da Shen in forma grafica attraverso il confronto con numerosi risultati su corsi d'acqua naturali.

Infine diverse proposte sono state avanzate per rappresentare la resistenza globale  $C$ :

- relazioni logaritmiche analoghe a quelle usate per il calcolo di  $C'$  per gli alvei a fondo fisso, tra cui quelle di Richardson e al. (1967), Vanoni e al. (1967);
- formule del tipo Manning-Gauckler-Strickler, come quelle di Liu e Hwang (1959) e Garde e Ranga Raju (1966);
- dipendenza funzionale tra la tensione totale adimensionalizzata, e la tensione dovuta alla scabrezza superficiale, come quella ottenuta e rappresentata graficamente da Engelund e Hansen (1967).

## 1.7 Frazioni granulometriche

Finora si sono descritti gli approcci esistenti per la modellazione del trasporto solido con riferimento a materiale solido monogranulare ed omogeneo (paragrafi 1.3 e 1.5). Vediamo ora che approccio seguire nel caso di un materiale eterogeneo.

### 1.7.1 Generalità dei modelli matematici per l'evoluzione d'alveo nel caso di materiali eterogenei

Considerando un materiale solido costituito da N frazioni granulometriche, il sistema di equazioni che descrive il modellamento del fondo dovrà tener conto delle diverse frazioni granulometriche considerando N equazioni di continuità delle stesse, accanto alle classiche equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto per la massa liquida.

Come riportato da Pianese e Rossi (1990), in generale, se si trascurano le variazioni nel tempo della porosità del materiale costitutivo del fondo e delle concentrazioni del materiale solido convogliato al fondo ed in sospensione, e si considerano gli intervalli di calcolo tanto grandi da poter approssimare il trasporto solido effettivo con la capacità di trasporto, il sistema di equazioni che potrà essere utilizzato per l'analisi dei processi evolutivi sarà costituito da:  
equazione di continuità della massa liquida

(1.68)	$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L;$
--------	---

equazione di bilancio delle quantità di moto

(1.69)	$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{\sigma} \right) + g \sigma \frac{\partial h}{\partial x} + g \sigma S_f - g \sigma S_0 = q_L U_L;$
--------	---

N equazioni di continuità dei sedimenti, del tipo

(1.70)	$\frac{\partial}{\partial t} [(1-p) \cdot F_i \cdot \sigma_m] + \frac{\partial Q_i}{\partial x} + (1-p) \cdot f_{oi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_b - \sigma_m);$
--------	--

equazione di evoluzione della sezione trasversale (equazione di continuità globale dei sedimenti)

(1.71)	$\frac{1}{B \cdot (1-p)} \cdot \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q_i}{U} \right) \right] + \frac{\partial z_f}{\partial t} = 0.$
--------	---

I simboli riportati nelle equazioni sono quelli già visti nel paragrafo 1.3.1, a cui si aggiungono:

$F_i = F_i(x, t)$  è la percentuale volumetrica con cui il materiale costituito dalla frazione  $i$ -esima è presente nello strato superficiale del fondo (strato di mescolamento), vedi Figura 1.4;

$\sigma_m = \sigma_m(x, t)$  è l'area della zona in cui il materiale convogliato dalla corrente è mescolato con quello presente sul fondo (area di mescolamento);

$Q_i = Q_i(x, t)$  è la portata solida relativa alla  $i$ -esima frazione granulometrica, essa risulta pari alla somma delle portate solide al fondo  $Q_{fi}(x, t)$  e in sospensione  $Q_{si}(x, t)$  per la medesima frazione granulometrica (si precisa che le portate solide complessive, al fondo ed in sospensione, sono date, rispettivamente, dalla sommatoria delle  $Q_{fi}$  e  $Q_{si}$  per  $i=1, \dots, N$ );

$z_f = z_f(x, t)$  è la quota di fondo alveo;

$f_{0i} = f_{0i}(x, t)$  è la percentuale volumetrica della frazione  $i$ -esima scambiata tra la zona di mescolamento e il substrato (Figura 1.4).

Per quanto concerne i valori di  $f_{0i}$ , si ha che nel caso di deposito ( $\partial z_f / \partial t > 0$ ):

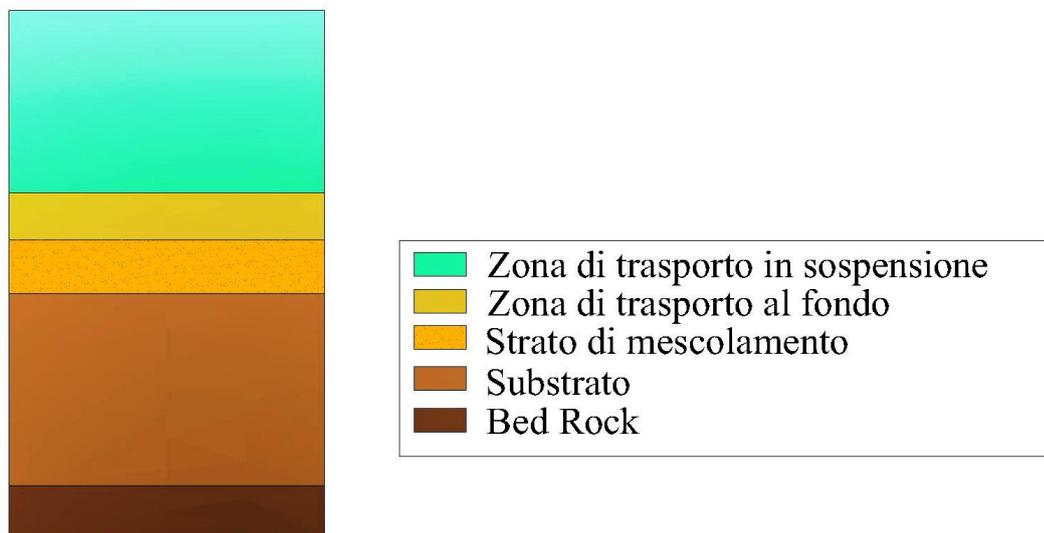
(1.72)	$f_{0i} = F_i(x, t)$
--------	----------------------

mentre nel caso di erosione ( $\partial z_f / \partial t < 0$ ):

(1.73)	$f_{0_i} = f_i(x, z, t) _{z=z_s}$
--------	-----------------------------------

con  $f_i = f_i(x, z, t)$  percentuale volumetrica con cui la generica frazione è contenuta nel substrato, in corrispondenza della quota  $z_s$ .

Alle equazioni di bilancio (1.68)-(1.71), vanno aggiunte una formula di resistenza per la valutazione della slope friction e una formula di trasporto solido per la valutazione della portata solida (al fondo ed in sospensione) relativa a ciascuna classe granulometrica.



**Figura 1.4** Schema di riferimento del modello nel caso di materiale solido eterogeneo

### 1.7.2 Valutazione delle portate solide

Il materiale solido che ritroviamo all'interno di un corso d'acqua naturale si presenta, di norma, costituito da granuli, di diverse dimensioni e peso specifico, che vengono messi in movimento e trasportati in maniera differente dalla corrente idrica defluente in alveo.

In condizioni di equilibrio dinamico, i quantitativi di materiale ricadenti nelle singole classi che tendono a depositarsi sul fondo sono mediamente bilanciati

da quelli che sono estratti dal fondo, per cui è come se non si avesse alcuna selezione granulometrica. In condizioni di non-equilibrio, cioè in condizioni per le quali il materiale che arriva da monte è differente per granulometria e quantità dalla capacità di trasporto dei tronchi di valle, si osservano differenti condizioni di trasporto in relazione alle diverse granulometrie: questo fenomeno è noto in letteratura come “progressive hydraulic sorting”. In particolare, quando il disequilibrio tra monte e valle determina un alluvionamento dell'alveo, il fenomeno si manifesta come una tendenza a depositare, nei tratti più a monte, le particelle aventi diametro e peso specifico maggiori, mentre a valle arrivano le particelle più leggere. Nel caso in cui la portata solida in arrivo da monte diminuisca, ad esempio a seguito di interventi antropici, la condizione di erosione si esplica con una tendenza della corrente a rimuovere dal fondo le particelle più piccole, lasciando sulla zona più superficiale dell'alveo uno strato costituito da particelle di diametro maggiore, detto “paviment” (pavimento) o “armour” (corazza). Questo strato ha un effetto benefico rispetto ai fenomeni erosivi in quanto tende a proteggere le particelle più fini contenute nel substrato dall'azione di rimozione esercitata dalla corrente, diminuendo, se non addirittura eliminando del tutto, ulteriori escavazioni dell'alveo.

Studi condotti da Parker & Andrews (1987) e Parker & Sutherland (1990) hanno mostrato come questo fenomeno, noto come “corazzamento” del fondo, presenti delle continue fluttuazioni spaziali e temporali, dovute a variazioni sia della portata liquida che dell'apporto solido di sedimenti; per questo motivo il fenomeno di corazzamento si presenta come fenomeno dinamico (dynamic armouring), e solo in casi particolari, e veramente rari, si presenta come fenomeno statico (static armouring).

Si osserva che, al benefico effetto del corazzamento superficiale, si contrappone il fenomeno dell' “hiding”(nascondimento), secondo cui vista

l'intrinseca scarsa mobilità delle particelle di dimensioni maggiori, queste tendono ad essere messe in moto più facilmente a causa della loro maggiore sporgenza dal fondo, e, dunque, risentono maggiormente dell'effetto della corrente, al contrario delle piccole particelle che ne risentono meno a causa del cono d'ombra delle particelle più grandi; inoltre, parallelamente, in relazione alla maggiore percentuale di materiale di maggiori dimensioni presente sullo strato più superficiale, risulta aumentata la probabilità che, per valori della componente istantanea di agitazione dovuta all'azione della turbolenza, le particelle di maggiore dimensione possano essere estratte dal fondo, mentre quelle più sottili, presenti in percentuale via via più ridotta, tendano ad essere messe in moto meno frequentemente.

A parità di condizioni di alimentazione liquida e solida, la tendenza ad una maggiore o minore erosione del fondo dipenderà dal prevalere del fenomeno dell' "armouring" o dell' "hiding". Pertanto, in un'analisi dell'evoluzione delle quote di fondo di un corso d'acqua naturale, interessato dalla presenza di granulometrie sufficientemente disuniformi, non si può prescindere dal portare in conto i due fenomeni sopra indicati.

In particolare, così come indicato in Biggiero et al. (1992) il fenomeno del corazzamento si può portare in conto attraverso le equazioni di continuità (1.70), mentre, modificando opportunamente le formule di trasporto solido attraverso un coefficiente detto "hiding correction factor", è possibile tener conto sia dei fenomeni di corazzamento che di nascondimento.

## ***2 Descrizione Modello Numerico***

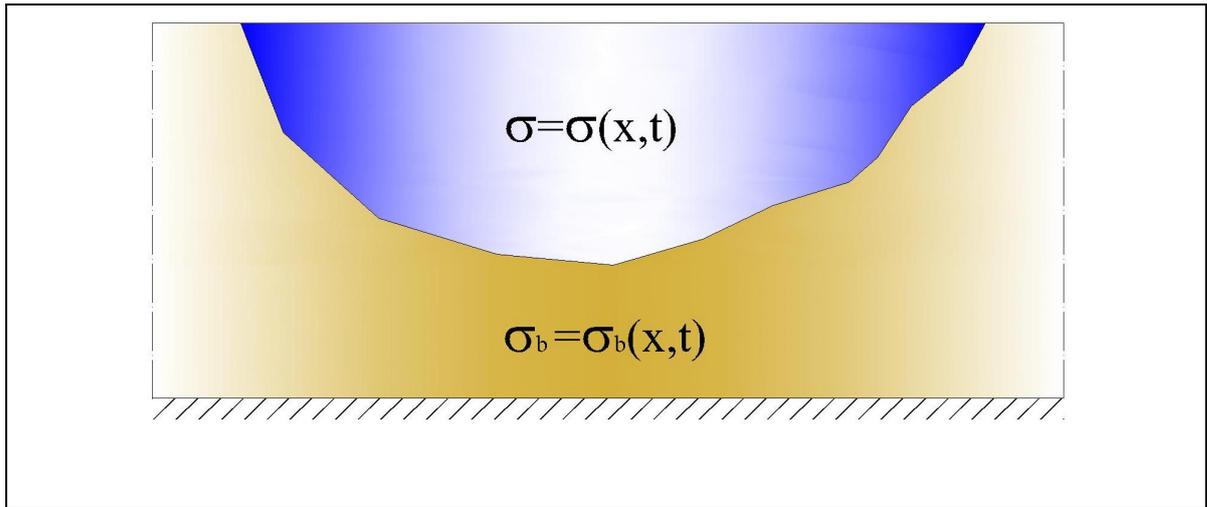
### ***2.1 Introduzione***

Dopo aver illustrato le principali problematiche che intercorrono laddove si voglia effettuare uno studio del trasporto solido e della conseguente evoluzione del fondo alveo e in che modo queste problematiche vengono affrontate in letteratura, sottolineando l'impossibilità nella pratica di riuscire a portare in conto tutti gli aspetti in gioco contemporaneamente, in questo capitolo si procede alla descrizione in dettaglio del modello numerico oggetto della Tesi di Dottorato. Il modello implementato, mono-dimensionale, vuole porsi come un valido strumento per la simulazione e l'analisi di eventi di evoluzione d'alveo che sussistono in corsi d'acqua naturale e allo stesso tempo vuole essere un modello robusto, capace di portare in conto, oltre a fenomeni con riferimento a lunga scala temporale, anche transitori rapidi (fenomeni di dam-break), caratterizzati da discontinuità delle grandezze idrauliche e da condizioni di trasporto solido marcatamente di "non equilibrio". Per quanto concerne il primo aspetto si è fatto in modo che il modello fosse in grado di effettuare le sue analisi per canali non prismatici, di qualsivoglia sezione trasversale, ed inoltre si è provveduto a determinare una metodologia per la redistribuzione dell'area depositata/erosa lungo i contorni della sezione trasversale: questo sopperisce, in parte, al fatto che il modello sia mono-dimensionale, e quindi intrinsecamente incapace di valutare le variazioni delle grandezze in esame (tirante, velocità, sforzi tangenziali) che si hanno lungo la sezione trasversale. Il secondo aspetto viene, invece, tenuto in conto facendo riferimento ad un approccio a quattro equazioni e implementando un modello numerico ai volumi finiti, accurato al I ordine nello spazio e al II ordine nel

tempo, di tipo accoppiato, in grado di portare in conto transitori rapidi, caratterizzati da discontinuità delle grandezze idrauliche e da condizioni di trasporto solido marcatamente di “non equilibrio”. Concentrando l’attenzione sugli aspetti di tipo numerico e geometrico, il modello, di contro, effettua semplificazioni relativamente alla modalità di considerare il trasporto solido, infatti non si fa distinzione tra trasporto di fondo e sospensione: il modello porta in conto il trasporto totale (somma del trasporto al fondo e quello in sospensione). Un’altra semplificazione riguarda il materiale costituente il fondo e le pareti dell’alveo che è considerato omogeneo e mono-granulare.

## ***2.2 Schematizzazione della corrente in alveo***

Il modello proposto permette di portare in conto il solo trasporto totale, che viene trattato come fosse in sospensione, considerando un valore unico della concentrazione solida di sedimenti uniformemente distribuita sulla sezione trasversale alla direzione del moto. Lo schema a cui si fa riferimento è quello a due layer (già visto nel paragrafo 1.3.1): il primo layer costituito da una fase liquida (acqua) e da una fase solida completamente dispersa e mescolata e il secondo layer costituito dal materiale solido. Con riferimento alla Figura 2.1, è possibile individuare nella sezione trasversale due parti distinte: la prima, interessata dal trasporto del miscuglio di acqua e sedimenti, di area  $\sigma = \sigma(x, t)$ ; l’altra, disposta su un bedrock, collocato ad una profondità arbitraria, costituita dal materiale presente sul fondo e sulle sponde, di area  $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$ , dove con i simboli  $x$  e  $t$  si sono indicati, rispettivamente, l’ascissa longitudinale del canale e il tempo.



**Figura 2.1 Schema di riferimento**

Il materiale solido presente sul fondo e sulle sponde del canale è caratterizzato da una porosità  $n$  e da una concentrazione volumetrica della fase solida  $C_b = 1 - n$  supposte invarianti nel tempo e nello spazio.

Il materiale solido trasportato dalla corrente, avente le stesse caratteristiche sedimentologiche e granulometriche di quello presente sul fondo e sulle sponde, è supposto, per semplicità, monogranulare, omogeneo e completamente disperso e mescolato nella fase liquida. Il miscuglio, composto da acqua e sedimenti, è caratterizzato da una densità media  $\rho_m$  variabile nello spazio e nel tempo. In particolare, indicando con  $C = C(x,t) = Q_S / Q$  (dove  $Q_S$  è la portata solida totale e  $Q$  è la portata complessiva del miscuglio acqua+sedimenti) il valore della concentrazione volumetrica della fase solida, mediata all'interno della sezione idrica, e con  $\rho_w$  e  $\rho_s$  le densità, rispettivamente, dell'acqua e dei sedimenti, si ha che l'espressione di  $\rho_m$  è la seguente:

(2.1)	$\rho_m = \rho_s \cdot C + \rho_w \cdot (1 - C)$
-------	--

## 2.3 Equazioni alla base del modello

Il modello oggetto del seguente lavoro di Tesi, si basa su di un approccio a quattro equazioni, come quello visto nel paragrafo 1.3.2. Le equazioni poste alla base del modello sono quattro: tre equazioni di bilancio ed una quarta equazione di tipo semi-empirico (Armanini e Di Silvio, 1988), detta equazione di “adattamento”.

### 2.3.1 Equazioni di bilancio

Le equazioni alla base del modello numerico sviluppato sono costituite da tre equazioni di bilancio che esprimono: il principio di conservazione della massa del miscuglio (2.2), della massa solida (2.3) e della quantità di moto del miscuglio (2.4). Più in particolare, le espressioni differenziali delle tre equazioni di bilancio, possono scriversi nella forma:

(2.2)	$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L - \frac{\partial \sigma_b}{\partial t}$
(2.3)	$\frac{\partial(\rho_m Q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_m \frac{Q^2}{\sigma} + g \rho_m \sigma \zeta \right) = g \rho_m \sigma (i_0 - S_f) + g \rho_m I_2$
(2.4)	$\frac{\partial(C\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(CQ)}{\partial x} = C_L q_L - (1-n) \frac{\partial \sigma_b}{\partial t}$

Il significato dei simboli è il seguente:

$Q = Q(x, t)$  = portata del miscuglio (acqua+sedimenti) defluente in alveo,  
 $\sigma = \sigma(x, t)$  = area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti,  $C = C(x, t)$  = concentrazione volumetrica della fase solida,  $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$  = area della sezione trasversale del materiale solido presente sul fondo e sulle sponde,  $\rho_m = \rho_m(x, t)$  = densità del miscuglio,  $S_f = S_f(x, t)$  = Slope Friction,  $i_0$  = pendenza del fondo,  $\zeta$  = affondamento del

baricentro di  $\sigma$ ,  $I_2$ =variazione del momento  $I_1$ ,  $I_1$ = momento primo della sezione bagnata rispetto alla superficie libera,  $q_L$ = la portata liquida uniformemente ed ortogonalmente immessa lungo il percorso,  $C_L$ = la concentrazione volumetrica di sedimenti relativa alla portata  $q_L$ .

### 2.3.2 Equazione della conservazione della quantità di moto

Qui di seguito vengono riportate due considerazioni riguardo l'equazione della conservazione della quantità di moto che possono ritrovarsi in letteratura; nello specifico, la prima riguarda la possibilità di poter accoppiare i termini sorgente strettamente legati alla non-prismaticità del canale (Capart et al., 2003); la seconda, invece, riguarda una diversa scrittura dell'equazione che permetta di isolare la densità del miscuglio all'interno del termine sorgente (Brufau et al., 2000), rendendo più agevole la risoluzione dell'equazione, soprattutto per quanto concerne la determinazione dei flussi intercella mediante l'applicazione dell'HLLC.

Analizziamo il primo aspetto.

Riprendendo quanto fatto in alcuni studi, riguardo una nuova schematizzazione delle shallow water equation nel caso di canali non prismatici, nelle quali vengono ad essere accoppiati i termini sorgente, si vuole estendere questo discorso anche al caso in esame, in cui le equazioni di conservazione sono relative al miscuglio acqua+ sedimenti, e non alla sola acqua limpida. A tal proposito, viene dapprima brevemente esposto quando riportato in letteratura per le shallow water equations e, poi, si provvede a spiegare in che modo le equazioni vengono a caratterizzarsi nel caso in esame.

La forma conservativa delle shallow water equations per un canale di arbitraria sezione trasversale è:

(2.5)	$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$
-------	---

(2.6)	$\frac{\partial Q}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\sigma} + gI_1 \right) = g\sigma(i_0 - S_f) + gI_2$
-------	--

con:

(2.7)	$I_1 = \int_{z_b}^z (z - \eta) b(\eta) d\eta = \int_0^h (h - \eta) b(\eta) d\eta$
-------	---

(2.8)	$I_2 = \int_{z_b}^z (z - \eta) \frac{\partial b}{\partial x} d\eta = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial b}{\partial x} d\eta$
-------	---

dove  $I_1$  e  $I_2$  sono, rispettivamente, il momento del primo ordine della sezione idrica rispetto alla superficie libera e la variazione del momento del primo ordine.

La topografia influisce sul moto dell'acqua attraverso la pendenza del fondo  $i_0$  e la variazione spaziale della forma della sezione trasversale  $I_2$  (allargamento e restringimento della sezione). In particolare,  $I_2$  è il contributo delle pressioni idrostatiche longitudinali dovuto alla non prismaticità del canale, mentre  $g\sigma i_0$  è la componente delle forze di gravità lungo la direzione parallela al fondo.

Come sottolineato da Capart et al. (1996), questa formulazione non è la più efficiente, specialmente per topografie caratterizzate da brusche variazioni delle sezioni trasversali, per le quali, in generale, non è sempre facile individuare una netta distinzione tra non-prismaticità e pendenza di fondo.

Effettuando dei semplici passaggi è possibile pervenire alla seguente:

(2.9)	$I_2 + \sigma i_0 = \frac{\partial}{\partial x} (I_1 _z)$
-------	---

Da cui si ottiene:

(2.10)	$\frac{\partial Q}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\sigma} + gI_1 \right) = g \left( \frac{\partial I_1 _z}{\partial x} - \sigma S_f \right)$
--------	---

Considerando ora l'equazione di conservazione della quantità di moto per il miscuglio acqua+sedimenti:

$$(2.11) \quad \frac{\partial(\rho_m Q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_m \frac{Q^2}{\sigma} + g \rho_m \sigma \zeta \right) = g \rho_m \sigma (i_0 - S_f) + g \rho_m I_2$$

Applicando alla (2.11) le considerazioni sopra fatte per l'equazione (2.3), perveniamo alla seguente equazione:

$$(2.12) \quad \frac{\partial(\rho_m Q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_m Q^2}{\sigma} + \rho_m g I_1 \right) = \rho_m g \left( \frac{\partial I_1|_z}{\partial x} - \sigma S_f \right)$$

Ora, utilizzando le equazioni (2.2) e (2.4), è possibile riscrivere la (2.12), in modo tale che la densità del miscuglio compaia solo nel termine sorgente:

$$(2.13) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\sigma} + g I_1 \right) = g \left( \frac{\partial I_1|_z}{\partial x} - \sigma S_f \right) - \frac{Q}{\sigma} \frac{(\rho_b - \rho_m)}{\rho_m} \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} - \frac{1}{\rho_m} g \sigma \zeta \frac{\partial \rho_m}{\partial x}$$

Questa diversa scrittura dell'equazione è stata già proposta in letteratura da Brufau et al. (2000), con riferimento all'equazione (2.3) per canale prismatico (senza cioè tener conto del termine  $I_2$ ):

$$(2.14) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\sigma} + g I_1 \right) = g \sigma (i_0 - S_f) - \frac{Q}{\sigma} \frac{(\rho_b - \rho_m)}{\rho_m} \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} - \frac{1}{\rho_m} g \sigma \zeta \frac{\partial \rho_m}{\partial x}.$$

Nel lavoro di Brufau et al. (2000), effettuato con riferimento a casi di debris-flow, veniva messa in luce la possibilità di poter trascurare gli ultimi due termini al secondo membro, in quanto le variazioni della densità, nel caso di debris flow, non sono tali da modificare il valore delle variabili (praticamente la densità del miscuglio può essere assunta costante e non variabile nello spazio e nel tempo). In altri lavori (Cao et al., 2004) relativi a modelli rivolti all'analisi di fenomeni di dam-break, è stata invece messa in luce la necessità di tener conto anche di questi due ulteriori termini.

### 2.3.3 Equazione di adattamento

Alle equazioni di bilancio, come detto, si affianca l'equazione di "adattamento". Come visto nel paragrafo 1.3.2 questa equazione permette di tener conto del trasporto solido effettivo, rendendo il modello, di fatto, idoneo anche in condizioni di non-equilibrio del trasporto solido.

L'equazione di adattamento esprime la variazione nel tempo di  $\sigma_b$  in funzione della differenza tra la concentrazione volumetrica effettiva della fase solida in acqua e la capacità di trasporto della corrente. Vediamo in che modo è espressa questa equazione.

Per prima cosa si introduce l'espressione generale del flusso netto  $\Psi$  di sedimenti che dallo strato di fondo entreranno nella corrente idrica

(2.15)	$\Psi = \frac{1}{L_*\omega}(C_* - C)$
--------	---------------------------------------

dove il parametro  $L_*$ , definito "lunghezza di adattamento", ha la dimensione di una lunghezza,  $\omega$  è la lunghezza della parte del contorno della sezione direttamente interessata da fenomeni di erosione e/o deposito di materiale solido,  $C$  è il valore effettivo della concentrazione di materiale solido e  $C_*$  è la capacità di trasporto la quale esprime il valore che la contrazione di materiale solido avrebbe nel caso in cui le condizioni morfologiche e di moto permanessero per un tempo ed una distanza infinite.

La (2.15) ha una forma analoga ad una tipica equazione di reazione del I ordine della fisica e della chimica; essa afferma che non occorre alcun flusso di sedimenti, se la concentrazione effettiva del materiale solido è uguale alla capacità di trasporto. Al contrario si ha la presenza di un fenomeno di erosione ( $\Psi > 0$ ) o di deposito ( $\Psi < 0$ ) se, rispettivamente, si ha un sottocarico ( $C < C_*$ ) o un sovraccarico ( $C > C_*$ ) di sedimenti nella corrente idrica.

Tenendo conto che

(2.16)	$-(1-n)\frac{\partial\sigma_b}{\partial t} = \omega \cdot \Psi$
--------	---

e considerando la lunghezza di adattamento nella sua forma adimensionale

(2.17)	$\Lambda = \frac{L_* w}{hU}$
--------	------------------------------

l'equazione di adattamento, a partire dalla (2.15), viene a caratterizzarsi come segue

(2.18)	$-(1-n)\frac{\partial\sigma_b}{\partial t} = \omega \frac{w}{\Lambda} (C_* - C)$
--------	--

Il meccanismo d'evoluzione nel tempo della sezione  $\sigma_b$  descritto dalla (2.18) è accettato sia nel caso in cui il fenomeno di trasporto solido prevalente è quello al fondo (in questo caso l'ordine di grandezza della lunghezza d'adattamento è quello della lunghezza dei salti delle particelle solide sul fondo) sia nel caso in cui il fenomeno di trasporto solido prevalente è quello in sospensione (in questo caso l'ordine di grandezza è quello della lunghezza di deposizione delle particelle solide).

La lunghezza di adattamento, in generale, dipende dalle caratteristiche della corrente e del materiale solido; per valutare la lunghezza di adattamento adimensionale  $\Lambda$  si può utilizzare l'espressione proposta da Armanini e Di Silvio (1988)

(2.19)	$\Lambda = \frac{a}{h} + \left(1 - \frac{a}{h}\right) \exp \left[ -1.5 \left(\frac{a}{h}\right)^{-\frac{1}{6}} \frac{w}{U_*} \right]$
--------	---

dove:

$a$  è lo spessore del layer interessato dal trasporto di fondo (nel presente lavoro si pone  $a = 2d$  dove  $d$  è il diametro dei grani);

$h$  è il tirante idrico;

$U_*$  è la velocità di attrito;

$w$  è la velocità di sedimentazione dei grani.

### 2.3.4 Sistema completo delle equazioni alla base del modello

Riassumendo, si ha che le equazioni alla base del modello sono quattro:

(2.2)	$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L - \frac{\partial \sigma_b}{\partial t}$
(2.3)	$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\sigma} + gI_1 \right) = g \left( \frac{\partial I_1}{\partial x} - \sigma S_f \right) - \frac{Q}{\sigma} \frac{(\rho_b - \rho_m)}{\rho_m} \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} - \frac{1}{\rho_m} g \sigma \zeta \frac{\partial \rho_m}{\partial x}$
(2.4)	$\frac{\partial(C\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(CQ)}{\partial x} = C_L q_L - (1-n) \frac{\partial \sigma_b}{\partial t}$
(2.18)	$-(1-n) \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} = \omega \frac{w}{\Lambda} (C_* - C)$

In queste equazioni si hanno quattro variabili dipendenti principali, rappresentate, rispettivamente:

a) dalla portata del miscuglio defluente in alveo,  $Q = Q(x, t)$ ;

b) dall'area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti,  $\sigma = \sigma(x, t)$ ;

c) dall'area della sezione trasversale del materiale solido presente sul fondo e sulle sponde,  $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$ ;

d) dal prodotto della concentrazione volumetrica della fase solida per l'area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti  $C \cdot \sigma = C(x, t) \cdot \sigma(x, t)$ .

A queste quattro variabili principali, si affiancano tre variabili dipendenti secondarie, rappresentate:

e) dalla Slope-Friction  $S_f = S_f(x, t)$ , valutabile, seppure in modo approssimato, attraverso una classica formula di resistenza;

- f) dalla densità del miscuglio,  $\rho_m = \rho_m(x, t)$ , espressa dalla (2.1);
- g) dalla concentrazione solida in condizioni di equilibrio dinamico,  $C_* = C_*(x, t)$ , individuabile mediante una formula di trasporto solido specificamente prescelta.

## 2.4 Metodo ai Volumi Finiti

Le equazioni (2.2)-(2.4), esprimenti rispettivamente la conservazione della massa del miscuglio (acqua + sedimenti), la conservazione della quantità di moto del miscuglio e la conservazione della massa della fase solida, possono essere riscritte nella seguente forma generale

(2.20)	$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial y} = S(U)$
--------	--

la quale esprime, in forma differenziale, un principio di conservazione. La variabile  $U$  è la variabile conservata, mentre  $f$  e  $g$  sono i flussi della variabile conservata lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente, e  $S$  è un termine sorgente. In questa scrittura l'accento è stato posto proprio sul fatto che le variazioni della quantità conservata nel volumetto elementare dipendono dai flussi di quantità conservata che si realizzano in corrispondenza delle pareti del volumetto stesso, e pertanto tale forma si dice *divergente* (giacchè l'insieme delle derivate spaziali al primo membro possono essere espresse in termini di divergenza di un opportuno vettore  $\vec{F}$ ) e *conservativa*. Derivando i flussi rispetto alla variabile conservata, si ottengono formulazioni *quasi-lineari* come la seguente:

(2.21)	$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} = S(U)$
--------	--

La forma conservativa e la forma quasi-lineare sono solo apparentemente equivalenti, in quanto la seconda, in presenza di discontinuità della soluzione,

conduce a valutazioni errate della celerità di propagazione dello shock e della sua intensità (per una discussione del problema, si veda Hirsch, 1988). Un'espressione più fondamentale dei principi di conservazione viene ottenuta facendo riferimento non alla forma divergente, ma alla forma integrale, valida in regioni di dimensione finita del piano:

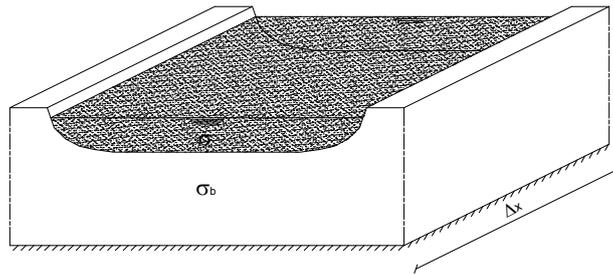
(2.22)	$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} U d\Omega + \oint_{\Gamma(t)} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma = \int_{\Omega(t)} S d\Omega$
--------	--

L'equazione appena scritta esprime il fatto che la variazione della quantità conservata  $U$  all'interno di un volume di controllo, di misura finita  $\Omega$ , eventualmente mobile nello spazio, deve essere messa in relazione con i termini sorgente  $S$  nonché con il flusso  $\vec{F} \equiv (f \quad g)$  che attraversa le pareti del volume di controllo. Espresso in questa forma, il principio di conservazione vale ovunque e comunque, indipendentemente dal fatto che la soluzione sia continua o meno: in particolare, si osserva che, nella validità delle ipotesi di continuità e derivabilità, l'applicazione del teorema di Gauss conduce con naturalezza dalla (2.22) alla (2.20).

Se particolarizziamo la (2.22) al caso in cui l' $i$ -esimo volume di controllo non cambi forma e posizione nello spazio, si ottiene la seguente equazione:

(2.23)	$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} U d\Omega + \oint_{\Gamma_i} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma = \int_{\Omega_i} S d\Omega$
--------	---

Il Metodo ai Volumi Finiti (FVM) è un procedimento di discretizzazione di sistemi di equazioni differenziali esprimenti principi di conservazione. Questo metodo consiste nel discretizzare il dominio fisico in un numero finito di volumi di controllo (Figura 2.2) di misura  $\Omega_i$ , i quali saranno considerati non sovrapposti e aventi contorno di misura  $\Gamma_i$ , e, successivamente, di integrare le equazioni di conservazione, espresse nella forma integrale (2.23), in ciascun volume.



**Figura 2.2 Volume di controllo**

Per potere operativamente procedere con la discretizzazione, bisogna approssimare in qualche maniera ognuno degli integrali che appaiono nell'equazione (2.23). A questo proposito, si può osservare che il valore medio  $\bar{U}_i$  della quantità conservata  $U$  nell' $i$ -esimo volume di controllo è definibile come

(2.24)	$\bar{U}_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} U d\Omega$
--------	--

Pertanto il principio di conservazione espresso in forma integrale dalla (2.23) mette in relazione la quantità media della variabile conservata in ogni volume di controllo con i termini sorgente nello stesso volume di controllo e i flussi attraverso i suoi contorni secondo la:

(2.25)	$\Omega_i \frac{d\bar{U}_i}{dt} = - \oint_{\Gamma_i} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma + \int_{\Omega_i} S d\Omega$
--------	---

Consegue che, se fosse disponibile un'espressione dei due integrali a secondo membro della (2.25) come funzione collettiva del valore medio delle variabili conservate nei volumi di controllo, si otterrebbe un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite  $\bar{U}_i = \bar{U}_i(t)$  che potrebbe essere risolto con un opportuno algoritmo di marcia nel tempo (approccio *semi-discreto*).

La soluzione del sistema formato dalle equazioni (2.25), al variare dell'indice  $i$ , viene usualmente rappresentata da una funzione polinomiale  $U_i^k$  di grado  $k$

della posizione nel volume di controllo  $i$ -esimo, che viene ricostruita a partire dall'insieme dei valori medi  $\bar{U}_i$ : se non viene forzata la continuità della ricostruzione nel passare da un volume di controllo all'altro, è possibile portare in conto discontinuità che eventualmente insorgono nella soluzione, almeno all'interfaccia tra i volumi di controllo. In particolare, nel caso in cui il grado  $k$  del polinomio usato per la ricostruzione sia nullo, si ammette che in ogni punto del volume di controllo la soluzione coincida con il valore medio nello stesso volume di controllo.

Dato che il flusso  $\vec{F}$  fisico è una funzione dei valori della variabile conservata  $U$  in corrispondenza dei contorni dei volumi di controllo, anch'esso in generale ammette una discontinuità in corrispondenza di tali contorni: ciò, tuttavia, contrasta con il rispetto del principio di conservazione in forma discreta. Il Metodo dei Volumi Finiti forza tale principio imponendo ad ogni livello temporale che il flusso uscente da una cella sia uguale al flusso entrante nelle celle ad essa circonvicine, e dunque calcolando un valore univoco del flusso ad ogni interfaccia: ciò può essere fatto effettuando in maniera opportuna, con metodi che più avanti verranno chiariti, una media pesata dei due flussi fisici distintamente calcolati a partire dai valori della variabile conservata ricostruita ai lati dell'interfaccia. Il flusso così ottenuto si dice “flusso numerico”. Un'ulteriore proprietà che deve essere rispettata dal flusso numerico è quella di congruenza (*Ghidaglia & Pascal, 2003*): se i valori delle variabili conservate ai due lati dell'interfaccia, e che vengono usati per il calcolo dei flussi fisici ai due lati, sono uguali tra di loro, anche i flussi fisici devono essere uguali tra loro, ed il flusso numerico deve coincidere con essi.

In definitiva i passi che conducono all'applicazione del Metodo dei Volumi Finiti sono i seguenti (*Lomax et al., 2001*):

1. Dato l'insieme dei valori  $\bar{U}_i$ , mediati nelle celle, della variabile conservata, viene ricostruita una approssimazione polinomiale  $U_i^k$  alla soluzione in ognuna delle celle. Ai due lati di ogni interfaccia tra le celle vengono calcolati, attraverso opportune formule di quadratura, i flussi, in genere distinti.
2. Viene applicata una strategia per eliminare la discontinuità dei flussi all'interfaccia, ossia viene applicata una media di tali flussi, pesati in maniera opportuna.
3. In ogni volume di controllo, la somma dei flussi attraverso le sue interfacce con il termine sorgente fornisce la variazione nell'unità di tempo di  $\bar{U}_i$ .
4. Viene applicato un opportuno algoritmo per la soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite  $\bar{U}_i = \bar{U}_i(t)$  che così consegue.

Il grado di accuratezza, temporale e spaziale, della soluzione, dipende dal tipo di approssimazioni fatte per eseguire ognuno dei passi sopra indicati.

L'applicazione di un metodo quali quelli di Godunov per la valutazione dei flussi convettivi all'interfaccia tra i volumi finiti, facendo uso diretto delle variabili mediate nei volumi di controllo, equivale ad ammettere la costanza delle variabili stesse all'interno del volume di controllo. Si può dimostrare che ciò conduce ad algoritmi che hanno accuratezza non superiore al primo ordine nello spazio. E' possibile aumentare l'accuratezza della soluzione effettuando la ricostruzione dei dati all'interno della singola cella: si ammette, cioè, per le variabili primitive, o per le variabili conservate, una approssimazione polinomiale di grado  $k$  del tipo  $U^k(x, y)_i$ , al posto dell'approssimazione costante.

## 2.5 Risoluzione numerica delle equazioni

Introducendo una notazione matriciale, il sistema costituito dalle tre equazioni di conservazione (2.2), (2.13) e (2.4), può essere scritto nel modo seguente:

(2.26)	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}$
--------	--

dove, con i loro usuali significati, i simboli rappresentano, rispettivamente:

(2.27)	$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \\ C\sigma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\sigma} + gI_1 \\ CQ \end{bmatrix}$ $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} q_L - \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} \\ g \left( \frac{\partial I_1}{\partial x} \Big _{\bar{z}} - \sigma S_f \right) - \frac{Q}{\sigma} \frac{(\rho_b - \rho_m)}{\rho_m} \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} - \frac{1}{\rho_m} g \sigma \zeta \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \\ C_L q_L - (1-n) \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} \end{bmatrix}$
--------	---

Alle equazioni (2.26) deve poi essere aggiunta l'equazione di adattamento:

(2.18)	$-(1-n) \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} = \omega \frac{w}{\Lambda} (C_* - C)$
--------	--

L'integrazione numerica del sistema di equazioni costituito dalle (2.26) e (2.18) è stata effettuata ricorrendo al Metodo dei Volumi Finiti. Il dominio di calcolo viene quindi suddiviso in  $N$  volumi di controllo e, in ciascuno di questi, le variabili conservate  $\sigma, Q$  e  $(C \cdot \sigma)$  sono assunte costanti. Si ricorda che tale ipotesi, così come visto nel paragrafo precedente, particolarmente semplificativa della realtà fenomenologia, ma di facile utilizzazione, consente di attingere, nello spazio, solo una precisione al primo ordine.

## 2.6 Predictor-Corrector

L'avanzamento nel tempo delle variabili è stato realizzato mediante un procedimento di predizione e correzione in qualche modo simile a quello a suo tempo adottato da Olesen (1981). Tale metodo, sostanzialmente esplicito, permette, tuttavia, con un'opportuna scelta del coefficiente di peso, di attingere, nel tempo, una precisione prossima al secondo ordine. In particolare, con riferimento ad un assegnato istante iniziale,  $j-1$ , e ad una generica cella  $i$ , il valore di primo tentativo delle variabili conservate all'istante temporale successivo,  $j$ , è stato valutato (passo di predizione) mediante il metodo esplicito di Eulero, avvalendosi del seguente gruppo di relazioni algebriche:

(2.28)	$\mathbf{U}_i^{*j} = \mathbf{U}_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{V_i}^{j-1} - \mathbf{F}_{M_i}^{j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int \mathbf{S}_i^{j-1} dx$
--------	---

in cui con  $\mathbf{U}_i^{*j}$ , sono indicati i valori predetti delle variabili conservate e con  $\mathbf{F}_{M_i}^{j-1}$  e  $\mathbf{F}_{V_i}^{j-1}$  sono stati indicati, rispettivamente, i flussi a monte e a valle della cella  $i$ -esima. Sia i flussi che i termini sorgente, nella fase di predizione, sono calcolati a partire dai valori che le variabili assumono nell'istante  $j-1$ . Partendo, poi, dai valori individuati con la (2.28), si è preceduto alla fase di correzione, nella quale è stata adottata una procedura implicita del tipo Crank-Nicholson. In tale fase, pesando opportunamente, attraverso un parametro  $\mathcal{G}$  ( $0 \leq \mathcal{G} \leq 1$ ), i valori dei flussi ottenuti, rispettivamente, con i valori delle variabili conservate predette ( $\mathbf{F}_{M_i}^{j-1}, \mathbf{F}_{V_i}^{j-1}$ ) e quelli calcolati all'istante precedente  $j-1$  ( $\mathbf{F}_{M_i}^{*j}, \mathbf{F}_{V_i}^{*j}$ ), si hanno i valori corretti  $\mathbf{U}_i^{**j}$  delle variabili conservate

(2.29)	$\mathbf{U}_i^{**j} = \mathbf{U}_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (1 - \mathcal{G})(\mathbf{F}_{V_i}^{j-1} - \mathbf{F}_{M_i}^{j-1}) + \mathcal{G}(\mathbf{F}_{V_i}^{*j} - \mathbf{F}_{M_i}^{*j}) \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int \mathbf{S}_i^{j-1} dx$
--------	---

A questo punto, è possibile effettuare un confronto tra i valori predetti e quelli corretti, verificando che:

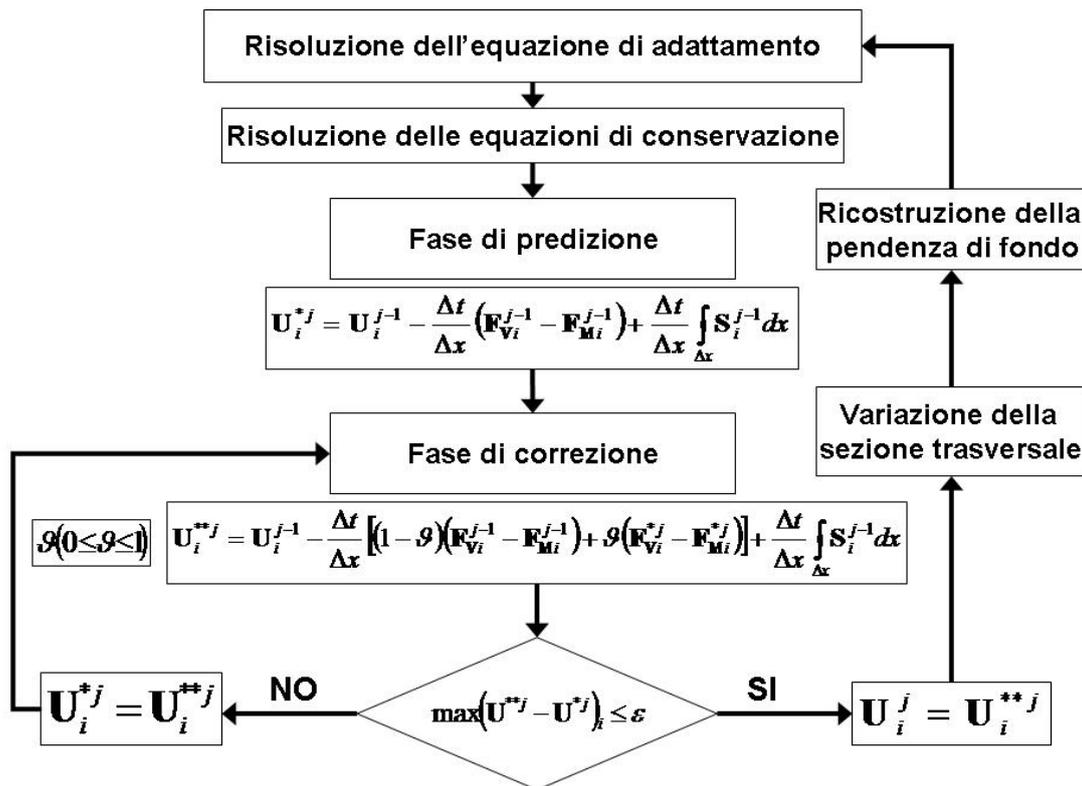
(2.30)	$\begin{aligned} \max(\sigma^{**} - \sigma^*)_i &\leq \varepsilon_1 \\ \max(Q^{**} - Q^*)_i &\leq \varepsilon_2 \\ \max(C^{**} - C^*)_i &\leq \varepsilon_3 \end{aligned}$
--------	--

dove le tolleranze  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono numeri molto piccoli (che, nei casi presi in esame nel presente lavoro, sono stati assunti costantemente pari a  $10^{-25}$ ).

Se le relazioni (2.30) sono soddisfatte, i valori assunti dalle variabili conservate  $U_i^j$ , all'istante  $j$ , sono proprio quelli ottenuti nella fase di correzione; se, invece, le (2.30) non sono soddisfatte, è necessario ricorrere ad una nuova fase di correzione, nella quale i valori predetti sono via via sostituiti da quelli corretti. La fase di correzione si ripeterà fino a che non si avrà il soddisfacimento delle relazioni (2.30) o sarà stato raggiunto il numero massimo di iterazioni prefissato (nel caso in esame posto pari a 100).

Come può osservarsi, nella fase di predizione e correzione non entra in gioco l'equazione d'adattamento (2.18), la quale, trattandosi di un'equazione semi-empirica atta a descrivere, sostanzialmente, una reazione cinetica del primo ordine, viene risolta, una volta per tutte, con riferimento ai valori che le variabili conservate presentano all'inizio dell'intervallo di calcolo.

Qui di seguito, in Figura 2.3, è riportato un diagramma di flusso che schematizza il processo di predizione-correzione adottato.



*Figura 2.3 Schema del procedimento di predizione e correzione*

Si può notare come la particolare scelta del valore di  $\mathcal{G}$  possa determinare un avanzamento spaziale con un metodo puramente esplicito ( $\mathcal{G} = 0$ ) o con un metodo di tipo implicito ( $\mathcal{G} = 1$ ); nelle simulazioni effettuate in questo lavoro si è fatto riferimento ad un valore di  $\mathcal{G} = 0.6$ , sia per evitare il rigoroso rispetto della condizione di Courant, sia per acquisire precisioni, nel tempo, prossime al secondo ordine. È bene precisare che il primo vantaggio risulta essere di interesse nel caso di fenomeni che si sviluppano su lunga scala temporale, mentre per transitori particolarmente rapidi, quali quelli susseguenti a fenomeni di dam-break, questo vantaggio diventa di scarsa importanza: in questo caso, infatti, gli intervalli temporali di calcolo saranno scelti, di norma, molto più piccoli rispetto a quelli che soddisfano la condizione di Courant, in modo tale da rendere il modello in grado di cogliere un fenomeno che si sviluppa in un breve arco temporale.

## 2.7 Calcolo dei flussi

L'applicazione del Metodo dei Volumi Finiti, come già detto, comporta la suddivisione dell'alveo in un certo numero  $N$  di tratti in ciascuno dei quali si assume un unico valore delle variabili conservate (quello di centro tratto) e anche dell'evoluzione della quota di fondo. Tuttavia, tale suddivisione implica un problema che si manifesta tra due tratti contigui: le variabili conservate, infatti, assumono, in generale, un valore diverso a sinistra e a destra, pari a quello di centro tratto. Tali discontinuità potrebbero essere significative, come accade in corrispondenza dei risalti idraulici o in conseguenza della propagazione di fronti di shock che si osservano durante un fenomeno di "dam-break". Un problema di questo tipo, connesso alla presenza di questa discontinuità, è un "problema alla Riemann" la cui risoluzione risulta necessaria per calcolare il vettore "flusso" tra due tratti contigui.

L'individuazione della soluzione esatta del problema di Riemann è cosa molto complessa, pertanto, nel presente elaborato di Tesi si ricorre ad un solutore approssimato del problema di Riemann: il metodo tipo HLL indicato come HLLC (come proposto da Fraccarollo e Toro nel 1995). L'applicazione di tale metodo restituisce direttamente le espressioni dei vettori "flusso" a sinistra ed a destra di ogni tratto in cui è stato suddiviso il dominio di calcolo.

### 2.7.1 Il problema di Riemann

Si consideri un sistema di equazioni di equazioni differenziali del tipo:

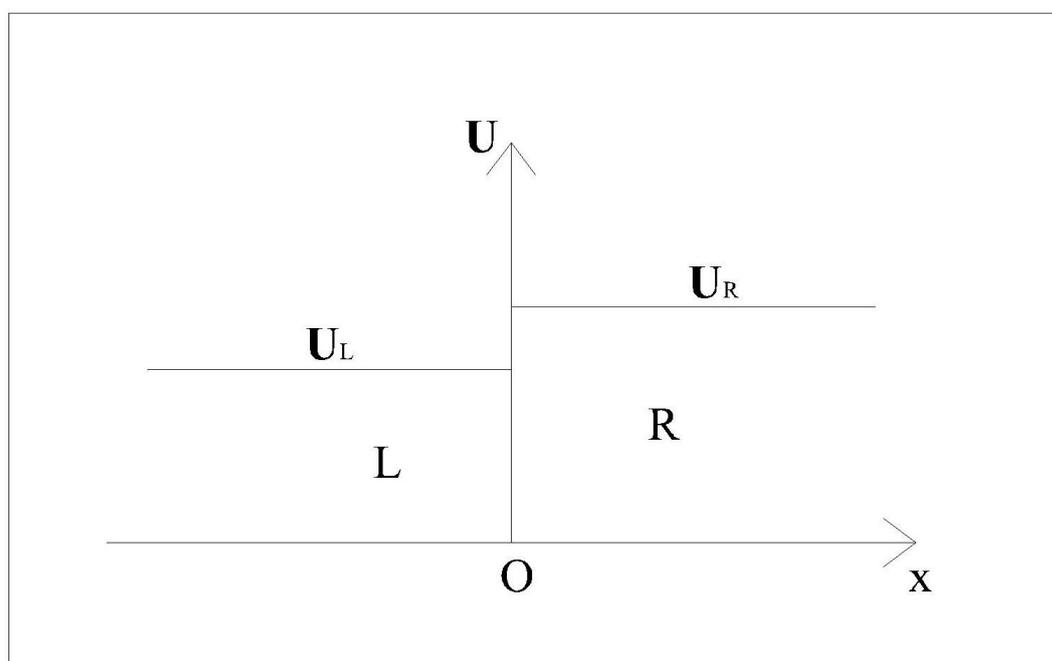
(2.31)	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,$
--------	--

questo può essere riscritto in forma quasi-lineare:

(2.32)	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial (\mathbf{U})}{\partial x} = 0.$
--------	--

Il sistema è iperbolico se gli autovalori dello jacobiano  $\partial F/\partial U$  sono reali e i corrispondenti auto vettori sono linearmente indipendenti. Si consideri ora il seguente insieme di condizioni iniziali, consistenti in due stati sinistro e destro, rispettivamente costanti, e che presentano una discontinuità in corrispondenza dell'origine del riferimento O (Figura 2.4):

(2.33)	$U(x,0) = \begin{cases} U_L, x < 0 \\ U_R, x > 0 \end{cases}$
--------	---



**Figura 2.4 Problema di Riemann**

È detto *problema di Riemann* il problema al valore iniziale costituito dalle equazioni (2.31) e (2.33), che consiste nella “rottura” di una discontinuità in corrispondenza dell'origine dell'asse: in particolare la soluzione dipende dagli stati sinistro  $U_L$  e destro  $U_R$  e dal rapporto  $x/t$ .

Nel caso specifico dei volumi finiti un problema di questo tipo, come già detto, si presenta in corrispondenza di ogni superficie di separazione tra due tratti contigui: in questo caso, per convenzione, l'elemento in considerazione si trova

alla sinistra dell'interfaccia e l'elemento adiacente alla destra, pertanto  $U_L$  e  $U_R$  (che sono i vettori delle incognite i cui valori sono presi rispettivamente a sinistra ed a destra della superficie di separazione tra le due celle contigue) sono, rispettivamente, il vettore delle variabili conservate valutato nell'elemento in considerazione ed in quello adiacente alla destra (ovviamente, per ogni coppia di tratti contigui, si usa un piano orario locale in cui l'asse dei tempi coincide con l'interfaccia tra i due tratti e, quindi, l'ascissa  $x=0$  corrisponde all'interfaccia stessa).

Secondo il procedimento di Goudonov, la valutazione dei flussi numerici nel metodo dei volumi finiti può essere fatta facendo riferimento ai flussi risultanti dalla soluzione del problema di Riemann all'interfaccia tra le celle.

Generalmente, dato un sistema di equazioni, la soluzione esatta del problema di Riemann non è esprimibile in forma semplice, e può essere approssimata solo attraverso un procedimento iterativo fino al livello di accuratezza desiderato (Toro, 1999): questo procedimento iterativo è gravoso dal punto di vista delle risorse consumate, e per questo motivo in letteratura si fa per lo più riferimento a risolutori approssimati del problema di Riemann, cioè a solutori che, con un numero piccolo di operazioni, forniscono un'approssimazione accettabile della soluzione esatta del problema di Riemann.

Qui di seguito verrà fatta una disamina sui solutori approssimati del problema di Riemann del tipo HLL e HLLC.

### **2.7.2 Solutori approssimati del problema di Riemann: HLL**

Nel caso in cui si faccia riferimento alle equazioni di bilancio (della massa e della quantità di moto) per acqua limpida e si ricorra ad una modellazione mono-dimensionale, il problema di Riemann è il problema del valore iniziale per il sistema d'equazioni

(2.34)	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$
--------	---

dove

(2.35)	$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\sigma} + \sigma \zeta g \end{bmatrix}$
--------	--

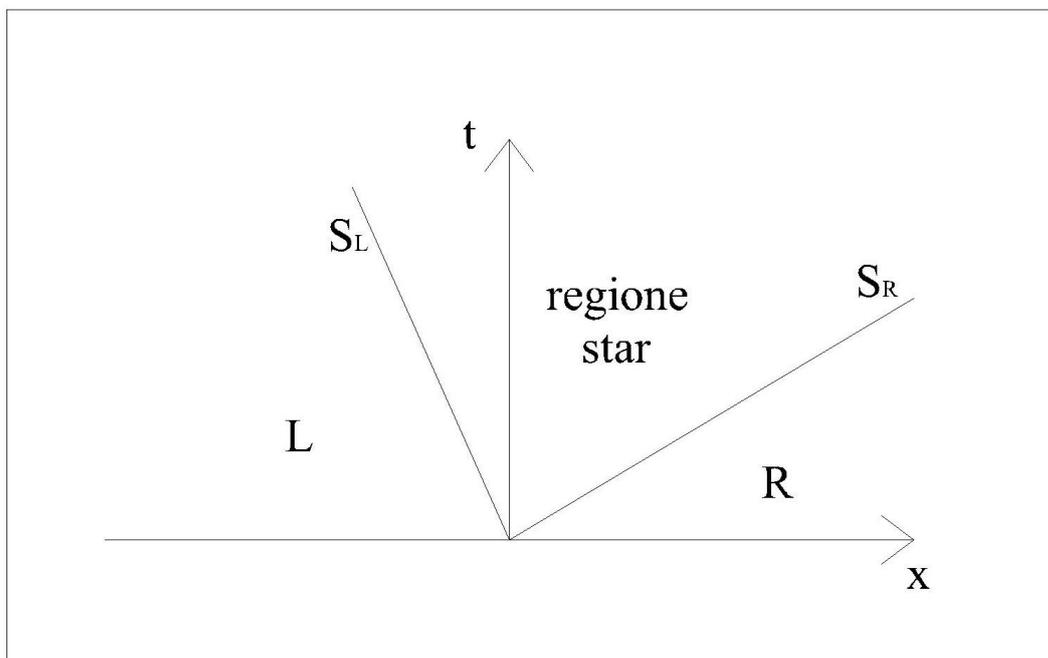
con la condizione iniziale:

(2.36)	$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}$
--------	---

Nel piano orario  $x$ - $t$  il dominio d'interesse è definito dalle coppie di punti  $(x, t)$  per i quali  $-\infty < x < +\infty$  e  $t > 0$ .

In realtà, applicando il metodo ai volumi finiti al dominio di calcolo, un problema definito dalle (2.34) e (2.36) si presenta per ogni coppia celle, quindi  $x$  varia nell'intervallo chiuso  $[x_i, x_{i+1}]$ , dove con  $i$  si indica il generico volume di controllo, attorno al punto  $x=0$ .

La struttura delle onde corrispondente a questo problema è riportata in Figura 2.5.



**Figura 2.5** *Struttura delle onde nell'HLL*

Si può osservare come siano presenti tre regioni (regione di sinistra-L, *regione star*, regione di destra-R) del piano  $Oxt$ , nelle quali il vettore delle variabili conservate  $\mathbf{U}$  è costante, separate dalle curve caratteristiche (assimilate a rette, dato che il problema viene risolto localmente, avendo assunto passi temporali di avanzamento nel tempo sufficientemente piccoli) cui corrispondono le celerità  $S_L$  e  $S_R$ .

Risolvere il problema di Riemann significa ricercare la struttura completa delle onde rappresentate nella Figura 2.5, cioè il tipo di onde presenti, le rispettive intensità e celerità, e la *regione star*.

Harten, Lax e van Leer hanno proposto un modo di risoluzione approssimata del problema di Riemann per un generale sistema d'equazioni iperbolico tipo il (2.34). Con questo approccio è ricavato, direttamente, un'approssimazione del flusso numerico all'intercella. Il flusso d'intercella dipende dalle celerità di propagazione delle onde  $S_L$  ed  $S_R$  (Figura 2.5), infatti in funzione del loro segno il vettore flusso  $\mathbf{F}_{i+1/2}$ , all'interfaccia  $i-i+1$ , assume la seguente espressione:

(2.37)	$\mathbf{F}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, S_L \geq 0 \\ \mathbf{F}^*, S_L < 0, S_R > 0 \\ \mathbf{F}_R, S_R \leq 0 \end{cases}$
--------	---

dove  $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$ ,  $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$ , (cioè sono vettori flusso in cui le variabili conservate assumono rispettivamente i valori assunti nel tratto a sinistra dell'interfaccia ed in quello a destra) e  $\mathbf{F}^*$  è il flusso numerico nella *regione star*.

L'approccio HLL fornisce un'espressione approssimata per  $\mathbf{F}^*$  valida per tutte le tipologie di flusso (che variano in funzione del segno delle celerità di sinistra e di destra):

(2.38)	$\mathbf{F}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{(S_R - S_L)}$
--------	--

Con riferimento quindi al metodo dei volumi finiti, considerando la cella  $i$ -esima, il flusso all'interfaccia  $i+1/2$ , valutato con l'HLL sarà:

(2.39)	$\mathbf{F}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{se } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{(S_R - S_L)} & \text{se } S_L \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{se } 0 \geq S_R \end{cases}$
--------	---

### 2.7.3 Solutori approssimati del problema di Riemann: HLLC

Nel caso in cui si faccia riferimento alle equazioni di bilancio per miscuglio acqua+sedimenti (in particolare: bilancio di massa e quantità di moto per il miscuglio e bilancio di massa per la fase solida) e si ricorra ad una modellazione mono-dimensionale, il problema di Riemann è il problema il problema del valore iniziale per il sistema d'equazioni:

(2.40)	$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$
--------	---

dove

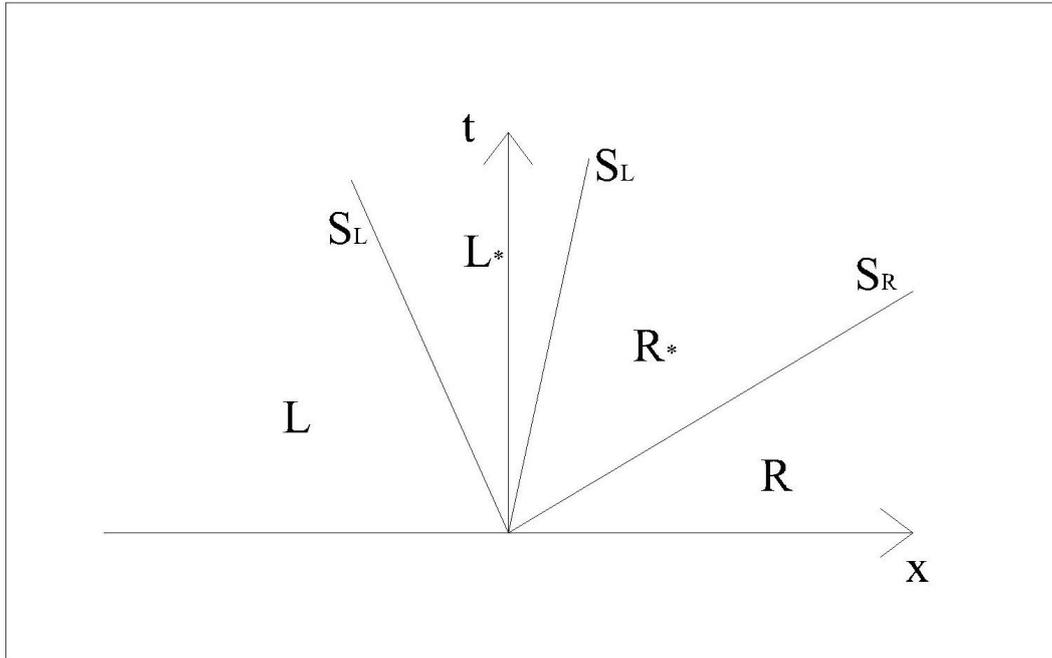
(2.41)	$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \\ \sigma C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma U \\ \sigma C \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\sigma} + \sigma \zeta g \\ \sigma Q \end{bmatrix}$
--------	---

con la condizione iniziale

(2.42)	$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, x < 0 \\ \mathbf{U}_R, x > 0 \end{cases}$
--------	---

Nel piano orario  $x-t$  il dominio d'interesse è definito, come nel caso precedente, dalle coppie di punti  $(x,t)$  per i quali  $-\infty < x < +\infty$  e  $t > 0$ . In realtà, anche in questo caso, facendo riferimento al metodo ai volumi finiti, un problema definito dalle (2.42)(2.40) e (2.42) si presenta per ogni coppia di celle, quindi  $x$  varia nell'intervallo chiuso  $[x_i, x_{i+1}]$  attorno al punto  $x=0$ .

La struttura delle onde corrispondente a questo problema è riportata nella Figura 2.6.



**Figura 2.6** *Struttura delle onde nell'HLLC*

In particolare si può osservare come, in questo caso, siano presenti quattro regioni ( $L, L^*, R^*, R$ ) del piano  $Oxt$  nelle quali  $\mathbf{U}$ , vettore delle variabili conservate, è costante, separate dalle curve caratteristiche (assimilate a rette, dato che il problema viene linearizzato localmente, avendo assunto passi temporali di avanzamento nel tempo sufficientemente piccoli) cui corrispondono le celerità  $S_L$ ,  $S_M$  e  $S_R$ . Per le celerità vale sempre, per posizione,  $S_R \geq S_M \geq S_L$ . La presenza di una terza celerità  $S_M$ , intermedia tra  $S_L$  e  $S_R$ , rappresenta la differenza introdotta dallo schema HLLC (la cui struttura è rappresentata nella Figura 2.6), rispetto allo schema HLL.

Con riferimento, quindi, al metodo dei volumi finiti, considerando la cella  $i$ -esima, il flusso all'interfaccia  $i+1/2$ , tenendo conto della struttura dello schema HLLC, sarà:

(2.43)	$\mathbf{F}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{se } S_L \geq 0 \\ \mathbf{F}_L^* & \text{se } S_M \leq 0 < S_L \\ \mathbf{F}_R^* & \text{se } S_R \leq 0 < S_M \\ \mathbf{F}_R & \text{se } S_R < 0 \end{cases}$
--------	--

Considerando le tre variabili primitive in esame ( $\sigma, U, C$ ) si deve tener conto che l'analisi degli autovettori mostra che:

- la sezione idrica  $\sigma$  e la velocità  $U$ , si conservano attraverso l'onda centrale, caratterizzata da una celerità di propagazione  $S_M$ , quindi la soluzione per queste due variabili è la medesima di quella che si ha nel caso di acqua limpida (in pratica  $\mathbf{F}_L^{*(k)} = \mathbf{F}_R^{*(k)}$  con  $k=1,2$ ) ed è sufficiente, di fatto, rifarsi a quanto fatto per lo schema HLL;
- la concentrazione volumetrica  $C$  della fase solida cambia solo attraverso l'onda centrale.

In particolare per la concentrazione  $C$ , la soluzione è:

(2.44)	$C(x,t) = \begin{cases} C_L, & x/t \leq S_M = U_* \\ C_R, & x/t > S_M = U_* \end{cases}$
--------	--

che, osservando che il problema di Riemann è in corrispondenza dell'interfaccia tra due tratti contigui assunta all'ascissa  $x=0$  (nel riferimento locale), diventa:

(2.45)	$C(x,t) = \begin{cases} C_L, & U_* \geq 0 \\ C_R, & U_* < 0 \end{cases}$
--------	--

I flussi  $\mathbf{F}_{i+1/2,L}^*$  e  $\mathbf{F}_{i+1/2,R}^*$  si caratterizzano, quindi, come segue:

(2.46)	$\mathbf{F}_{i+1/2,L}^* = \begin{bmatrix} F_{i+1/2}^{*(1)} \\ F_{i+1/2}^{*(2)} \\ F_{i+1/2}^{*(1)} \cdot C_L \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{i+1/2,R}^* = \begin{bmatrix} F_{i+1/2}^{*(1)} \\ F_{i+1/2}^{*(2)} \\ F_{i+1/2}^{*(1)} \cdot C_R \end{bmatrix}$
--------	--

dove le componenti del vettore flusso sono quelle indicate nella (2.41).

In pratica, conservando la soluzione fornita dall'HLL, il flusso di intercella dato dall'HLLC per le prime due componenti del vettore flusso  $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$  sono sempre espresse dalla (2.38), invece, la terza componente di tale vettore è pari al prodotto della prima componente di  $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$  per la concentrazione volumetrica  $C$  della fase solida che, a seconda del segno di  $U_*$ , è pari a  $C_L$  o a  $C_R$  (valori assunti dalla concentrazione volumetrica della fase solida rispettivamente nel tratto considerato ed in quello adiacente alla sua destra).

L'HLLC fornisce quindi le seguenti espressioni per le componenti del vettore  $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$ :

(2.47)	$\mathbf{F}_{i+1/2}^{*(k)} = \frac{S_R \mathbf{F}_L^{(k)} - S_L \mathbf{F}_R^{(k)} + S_L S_R (\mathbf{U}_R^{(k)} - \mathbf{U}_L^{(k)})}{(S_R - S_L)} \quad k = 1, 2$ $\mathbf{F}_{i+1/2}^{*(3)} = \begin{cases} \mathbf{F}_{i+1/2}^{*(1)} \cdot C_L & \text{se } U^* \geq 0 \\ \mathbf{F}_{i+1/2}^{*(1)} \cdot C_R & \text{se } U^* < 0 \end{cases}$
--------	--

#### 2.7.4 Valutazione approssimata delle celerità estreme ed intermedia

Come visto nei paragrafi precedenti la valutazione dei flussi all'interfaccia con i metodi HLL e HLLC può essere fatta solo dopo aver valutato le celerità estreme  $S_L$  e  $S_R$  e intermedia  $S_M$  (nel caso in cui si adotti il risolutore HLL bisogna valutare solo le due celerità estreme). A tal proposito si osserva che, in generale, per un sistema iperbolico di  $m$  equazioni in  $m$  incognite, la soluzione

del problema di Riemann è composta da  $m+1$  stati costanti del tipo  $\mathbf{U}_k$ , con  $k=1,2,\dots,m$ , separati da onde cui corrispondono le celerità  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , ordinate in senso crescente.

Nel caso in cui si faccia riferimento alle equazioni di bilancio per il miscuglio acqua+sedimenti (2.40)-(2.41), come già visto nel paragrafo 2.7.3, sono presenti tre onde di cui la centrale è caratterizzata da celerità  $\lambda_2(\mathbf{U})=U$ , mentre le onde estreme sono caratterizzate rispettivamente dalle celerità  $\lambda_1(\mathbf{U})=U - \sqrt{gh}$  e  $\lambda_3(\mathbf{U})=U + \sqrt{gh}$ . Ovviamente tale valutazione può essere utile nel caso di soluzione continua. Nel caso di discontinuità della soluzione le celerità assumerebbero due distinti valori a cavallo di ognuna delle discontinuità, ed in generale potrebbe verificarsi uno dei seguenti casi:

1.  $\lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) = \lambda_k(\mathbf{U}_k)$ , e si avrebbe una discontinuità di contatto, che si muove alla velocità  $\lambda_k$  (ed è il caso che si verifica nell'equazione della pura convezione uni-dimensionale);
2.  $\lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) < \lambda_k(\mathbf{U}_k)$ , e si avrebbe un'onda di rarefazione, rappresentante una transizione continua tra gli stati a cavallo dell'onda;
3.  $\lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) > \lambda_k(\mathbf{U}_k)$ , e si avrebbe un'onda di shock, che si muove con velocità  $s$  tale che  $\lambda_k(\mathbf{U}_{k-1}) > s > \lambda_k(\mathbf{U}_k)$ .

Nel caso delle equazioni (2.40)-(2.41) la discontinuità centrale è sempre di contatto, come già visto in precedenza.

Una scelta del tipo

(2.48)	$\begin{cases} S_L = \lambda_1(\mathbf{U}_L) \\ S_R = \lambda_3(\mathbf{U}_R) \end{cases}$
--------	--

in grado di aumentare le celerità nel caso delle onde di rarefazione, tuttavia comporterebbe una sottostima sistematica delle celerità nel caso di onde di shock, e non sarebbe assicurata la stabilità dell'algoritmo, specie se esplicito.

A questo proposito è stata suggerita la correzione

(2.49)	$\begin{cases} S_L = \min[\lambda_1(\mathbf{U}_L), \lambda_1(\mathbf{U}_R)] \\ S_R = \max[\lambda_3(\mathbf{U}_L), \lambda_3(\mathbf{U}_R)] \end{cases}$
--------	--

la quale tuttavia è poco accurata, e conduce a notevole diffusione numerica, in quanto sovrastima in maniera eccessiva le celerità.

Nella pratica è invalso l'uso (Fraccarollo e Toro, 1995; Caleffi et al., 2002; Valiani et al., 2002) di valutare in maniera approssimata, tramite la conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema dato dalle equazioni (2.40)-(2.41) (rappresentata in Figura 2.6), i valori di  $\sigma$  e  $U$  nella regione intermedia. Si ha dunque (Toro, 1999)

(2.50)	$\begin{cases} R_L^+ = R_*^+ \Rightarrow U_L + 2\sqrt{gh_L} = U_* + 2\sqrt{gh_*} \\ R_R^- = R_*^- \Rightarrow U_R - 2\sqrt{gh_R} = U_* - 2\sqrt{gh_*} \end{cases}$
--------	--

cui conseguono le relazioni

(2.51)	$\begin{cases} U_* = \frac{U_R + U_L}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \\ \sqrt{gh_*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(U_L - U_R) \end{cases}$
--------	--

da cui è possibile calcolare le tre celerità:

(2.52)	$\begin{cases} S_L = \min[\lambda_1(\mathbf{U}_L), \lambda_1(\mathbf{U}_*)] = [U_L - \sqrt{gh_L}, U_* - \sqrt{gh_*}] \\ S_M = U_* \\ S_R = \max[\lambda_3(\mathbf{U}_*), \lambda_3(\mathbf{U}_R)] = [U_* + \sqrt{gh_*}, U_R - \sqrt{gh_R}] \end{cases}$
--------	---

Si osserva che l'ipotesi di conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema può, a rigore, essere applicata solo nel caso di onde di rarefazione e di discontinuità di contatto, ma non nel caso di onde di shock. Pertanto, nel caso in cui sia presente uno shock, l'errore commesso sulle variabili comprese nella regione intermedia potrebbe essere rilevante. Si osserva, tuttavia, che lo scopo del procedimento non è stimare in maniera

affidabile  $h_*$  e  $U_*$ , ma stimare (possibilmente per eccesso, ai fini di garantire la stabilità numerica dell'algoritmo) le celerità estreme, in modo da potere calcolare i flussi numerici: l'esperienza (Fraccarollo e Toro, 1995) dimostra che con il procedimento mostrato questo obiettivo viene raggiunto.

Quanto detto sinora si riferisce al caso di una sezione rettangolare. Nel caso di sezioni mistilinee alcuni autori (Giuliani et al., 2004) introducono per il calcolo dei flussi il concetto di sezione rettangolare equivalente (sezione avente la medesima area bagnata, quota di pelo libero e spinta idrostatica della sezione reale associata); altri autori (Batten et al., 1997; Leon et al., 2006), invece, stimano le celerità (2.52) utilizzando come valore del tirante idrico, non quello reale della sezione idrica  $\sigma$  (determinato, nota la geometria dell'alveo, per tentativi), ma quello ottenuto come rapporto tra l'area e la larghezza in superficie della sezione idrica: questa seconda procedura è stata adottata anche nel modello oggetto della Tesi.

Vediamo ora, infine, come si determinano i valori delle celerità nel caso in cui, per l'interfaccia considerata, in uno dei due tratti (quello di monte o quello di valle) il tirante sia nullo (caso di fondo asciutto).

Ricorrendo anche in questa situazione al metodo HLLC così come proposto da Toro (1999), è da osservarsi che si possono avere due casi:

- *right dry bed*, se  $h_L > 0$  e  $h_R = 0$ ;
- *left dry bed*, se  $h_L = 0$  e  $h_R > 0$ .

In entrambi i casi le due onde principali si riducono ad una sola e, quindi, le espressioni delle celerità si particolarizzano.

Nel primo caso (*left dry bed*) si ha:

(2.53)	$\begin{cases} S_L = U_L - \sqrt{gh_L} \\ S_M = S_R \\ S_R = U_L + 2\sqrt{gh_L} \end{cases}$
--------	--

Nel secondo caso (*right dry bed*) si ha:

(2.54)	$\begin{cases} S_L = U_R - 2\sqrt{gh_R} \\ S_M = S_L \\ S_R = U_R + \sqrt{gh_R} \end{cases}$
--------	--

## **2.8 Condizioni al contorno**

È stato mostrato come la conoscenza degli stati sinistro e destro permetta di calcolare il flusso all'interfaccia tra le due celle, per mezzo di un solutore approssimato del problema di Riemann. In linea di principio, questo può essere fatto anche sul contorno del dominio di calcolo, previa specificazione delle variabili, che permettono la soluzione del problema di Riemann, anche all'esterno del dominio, in appositi volumi di controllo dette celle fantasma. Rimane il problema di determinare il valore delle variabili nelle celle fantasma affinché il problema matematico, sia da un lato, ben posto e, dall'altro, la soluzione sia fisicamente corretta.

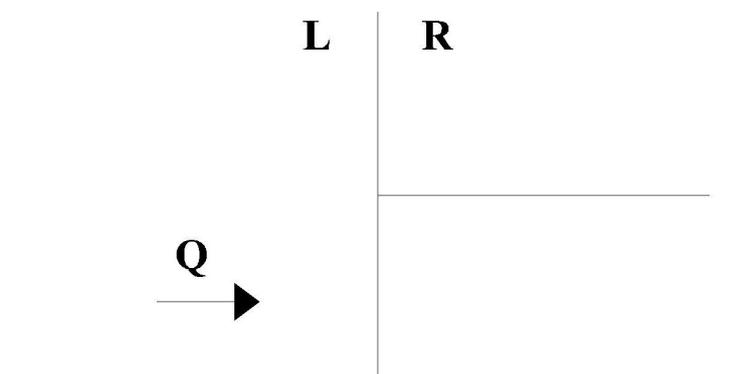
Dall'analisi delle caratteristiche del sistema di equazioni relativo all'approccio a quattro equazioni, vista nel paragrafo 1.3.1, si sono determinata la tipologia e la posizione delle condizioni al contorno da assegnare (Tabella 1.2).

Dato che nel Metodo ai Volumi Finiti, le condizioni al contorno devono essere specificate in termini di flussi, e non in termini di valori delle variabili primitive o caratteristiche, vediamo ora in che modo si è proceduto per tener conto delle condizioni al contorno nel modello qui implementato, ricordando

che le condizioni al contorno, nel caso di successioni di canali, vengono poste in corrispondenza dei canali di estremità: in particolare si hanno sempre condizioni di *inflow* per il canale di monte e condizioni di *outflow* per il canale di valle, e che in ingresso al canale si ha che lo stato  $R$  è situato all'interno e quello  $L$  all'esterno, mentre viceversa in uscita dal canale si ha che lo stato  $L$  è situato all'interno e  $R$  all'esterno.

### 2.8.1 Condizioni di inflow

Consideriamo dapprima le condizioni di inflow (Figura 2.7):



**Figura 2.7** *Ingresso al canale, condizioni di inflow*

siano  $h_R$  e  $U_R$  le variabili estrapolate all'interfaccia dall'interno del canale, calcoliamo poi il numero di Froude tramite la seguente:

(2.55)	$F_r = \frac{U_R}{\sqrt{gh_R}}$
--------	---------------------------------

dove  $h_R = \sigma_R / B_R$  e  $B_R$  è la larghezza in superficie della sezione idrica  $\sigma_R$ .

A seconda del valore di  $F_r$  possiamo avere due diversi casi:

1.  $F_r \geq 1$ , corrente veloce: in questo caso dominano le condizioni esterne, essendo stati preventivamente fissati i valori del tirante (e quindi della

sezione idrica), della portata liquida e della portata solida, sono noti  $\sigma_L$ ,

$U_L = \frac{Q}{\sigma_L}$  e  $C_L = \frac{Q_s}{Q}$ , a partire da questi è possibile determinare i flussi :

(2.56)	$\mathbf{F} = \mathbf{F}_L = \begin{cases} \sigma_L U_L \\ \sigma_L U_L^2 + g \zeta_L \sigma_L \\ \sigma_L C_L \end{cases}$
--------	---

2.  $F_r < 1$ , corrente lenta: se la corrente è lenta, l'asse dei tempi è compreso nella regione intermedia della struttura delle onde del problema di Riemann (Figura 2.6), e dunque andrebbe posto  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$ . Ammettendo che non si abbia la formazione di onde di shock vale la conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema, valgono cioè le seguenti:

(2.57)	$\begin{cases} U_L + 2\sqrt{gh_L} = U_* + 2\sqrt{gh_*} \\ U_R - 2\sqrt{gh_R} = U_* - 2\sqrt{gh_*} \end{cases}$
--------	--

In questo caso sono noti  $h_R$  (pari a  $\sigma_R/B_R$ ) e  $U_R$ , e quindi è noto  $U_R - 2\sqrt{gh_R}$ . Essendo  $Q = U_* \sigma_*$ , la seconda delle (2.57) può risciversi come

(2.58)	$\frac{Q}{\sigma_*} - 2\sqrt{gh_*} = U_R - 2\sqrt{g\sigma_R}$
--------	---

Inoltre, essendo nota la geometria dell'alveo nella cella fantasma (posta uguale a quella della prima cella "vera" del canale), è possibile, esprimere la  $\sigma_*$  in funzione di  $h_*$  (cioè  $\sigma_* = \sigma_*(h_*)$ ); quindi si può risolvere la (2.58) ottenendo il valore di  $h_*$ .

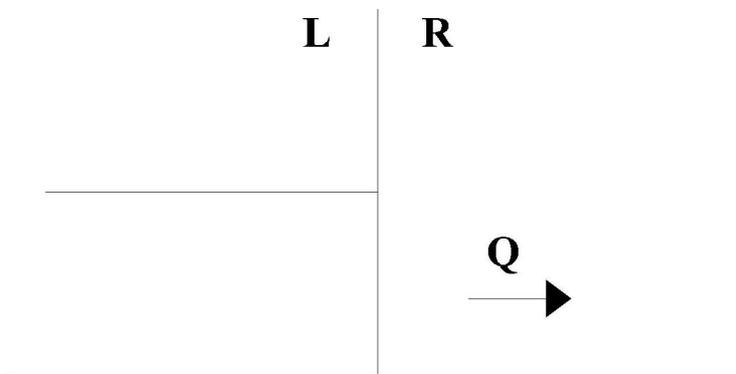
Noto  $h_*$  (e di conseguenza  $B_*$ ) è possibile calcolare  $U_*$  dalla seguente:

(2.59)	$U_* = \frac{Q}{h_* B_*}$
--------	---------------------------

A questo punto è possibile determinare  $F^*$ .

### 2.8.2 Condizioni di outflow

Consideriamo ora le condizioni di outflow (Figura 2.8):



*Figura 2.8 Uscita del canale, condizioni di outflow*

siano  $h_L$  e  $U_L$  le variabili estrapolate all'interfaccia dall'interno del canale, calcoliamo poi il numero di Froude tramite la seguente:

(2.60)	$F_r = \frac{U_L}{\sqrt{gh_L}}$
--------	---------------------------------

dove  $h_L = \sigma_L / B_L$  e  $B_L$  è la larghezza in superficie della sezione idrica  $\sigma_L$ .

A seconda del valore di  $F_r$  possiamo avere due diversi casi:

1.  $F_r \geq 1$ , corrente veloce: in questo caso dominano le condizioni interne, essendo noti  $\sigma_L$  e  $U_L$  e  $C_L$ , a partire da questi è possibile determinare i flussi:

(2.61)	$\mathbf{F} = \mathbf{F}_L = \begin{cases} \sigma_L U_L \\ \sigma_L U_L^2 + g \zeta_L \sigma_L \\ \sigma_L C_L \end{cases}$
--------	---

2.  $F_r < 1$ , corrente lenta: se la corrente è lenta, l'asse dei tempi è compreso nella regione intermedia della struttura delle onde del problema di Riemann, e dunque andrebbe posto  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$ . Ammettendo che non si abbia la formazione di onde di shock vale la conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema, valgono cioè le seguenti:

(2.62)	$\begin{cases} U_L + 2\sqrt{gh_L} = U_* + 2\sqrt{gh_*} \\ U_R - 2\sqrt{gh_R} = U_* - 2\sqrt{gh_*} \end{cases}$
--------	--

dove  $h_*$  è pari alla condizione al contorno di a valle; infatti  $h_* = h_R$ , dove  $h_R$  è il valore del tirante idrico fissato a valle. Dalla prima delle (2.62) è possibile calcolare  $U_*$  attraverso la seguente

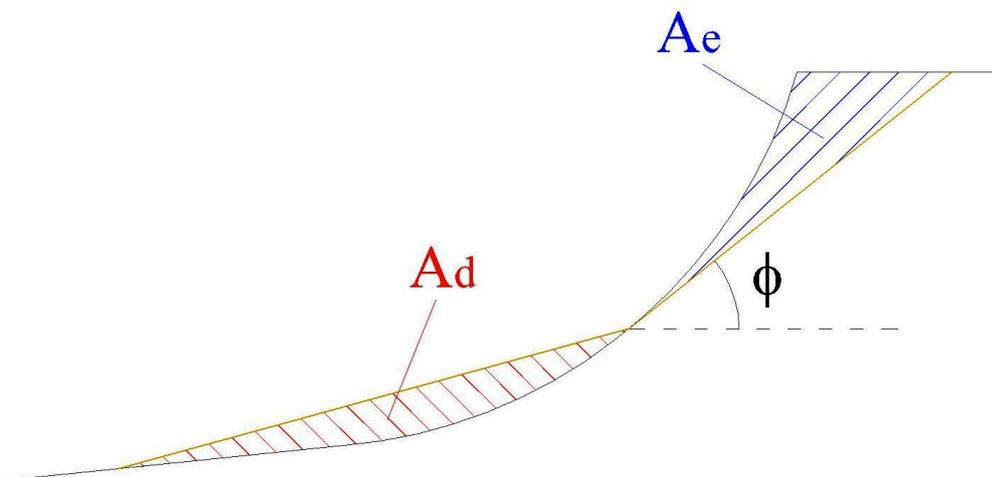
(2.63)	$U_* = U_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{gh_*}$
--------	---

Noti così  $h_*$  e  $U_*$ , è possibile determinare  $\mathbf{F}^*$ .

## ***2.9 Variazione della sezione trasversale***

Vediamo ora in che modo modellare la variazione della sezione trasversale per effetto dei fenomeni di erosione/deposito indotti dal trasporto solido. Nonostante siano differenti gli approcci che si ritrovano in letteratura, in tutti i casi, per capire in che modo i fenomeni di erosione e deposito si vanno a distribuire lungo il contorno mobile della sezione, si fa riferimento alla distribuzione degli sforzi tangenziali lungo il contorno mobile della sezione.

Alcuni modelli rivolgono la loro attenzione ai fenomeni erosivi delle sponde, a cui consegue l'allargamento della sezione dell'alveo. Questo è il caso del lavoro di Pizzuto (1990): il modello di Pizzuto, partendo dalla valutazione della distribuzione degli sforzi tangenziali (valutati come somma degli sforzi  $\gamma R S_f$  e degli sforzi indotti dalla turbolenza) al contorno e della portata solida transitante nella sezione idrica, determina l'evoluzione della topografia del fondo. Nel momento in cui, a seguito di un fenomeno erosivo, la nuova pendenza della sponda è maggiore dell'angolo di riposo si ha l'allargamento della sezione. In particolare, nel caso in cui la tangente della pendenza della sponda è superiore localmente alla tangente dell'angolo di riposo (posta uguale al coefficiente d'attrito  $\varphi$  del materiale solido), le particelle solide poste sulla sponda si muovono verso il basso lungo una superficie lineare di rottura, formando un deposito avente una superficie superiore lineare. Nella Figura 2.9 è riportato lo schema che rappresenta il meccanismo di allargamento dell'alveo, dove con  $A_e$  è indicata l'area erosa dalla sponda e con  $A_d$  l'area che si viene a depositare: naturalmente si deve avere che  $A_e = A_d$ .



**Figura 2.9 Meccanismo di allargamento del canale (Pizzuto, 1990)**

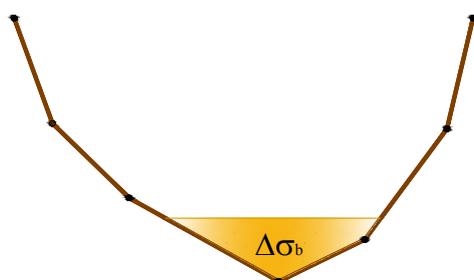
In altri lavori (Chang, 1988; El Kadi Abderrezzak et al., 2007), invece, una volta calcolata l'intera area di materiale solido  $\Delta\sigma_b$ , da erodere o da depositare, ci si occupa di distribuire questa area lungo la sezione, considerando solo variazioni in verticale delle quote del contorno alveo, non tenendo conto di eventuali meccanismi di allargamento della sezione. Questo tipo di approccio si basa sull'osservazione che la deposizione di materiale solido, avviene per successivi strati orizzontali, che vengono via via a disporsi a partire dal punto più basso della sezione idrica; mentre la distribuzione del materiale da erodere viene effettuata in relazione alla distribuzione delle tensioni tangenziali lungo il contorno della sezione.

Il modello oggetto di questa Tesi, fa riferimento a questa seconda modalità di valutazione della variazione della sezione trasversale: nei successivi paragrafi si provvederà a descrivere, più in dettaglio, in che modo sono stati modellati i meccanismi di erosione e di deposito.

### **2.9.1 Deposito**

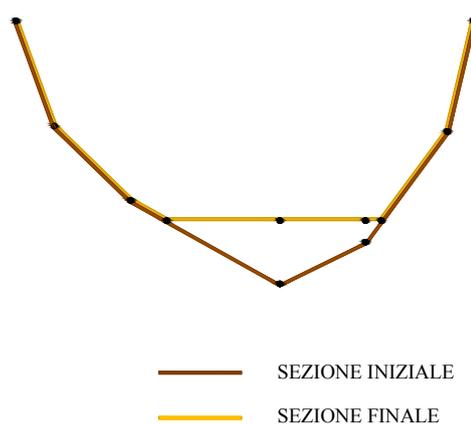
Nel caso di deposito, a partire dal valore di  $\Delta\sigma_b$ , supponendo che gli strati di materiale solido si dispongono orizzontalmente a partire dal punto più basso

della sezione, così come mostrato in Figura 2.10, si calcola per quale altezza di fondo, valutata a partire dalla quota di fondo della sezione, si ottiene un'area di materiale solido pari a  $\Delta\sigma_b$ .



*Figura 2.10 disposizione sul fondo dell'area di materiale solido depositato*

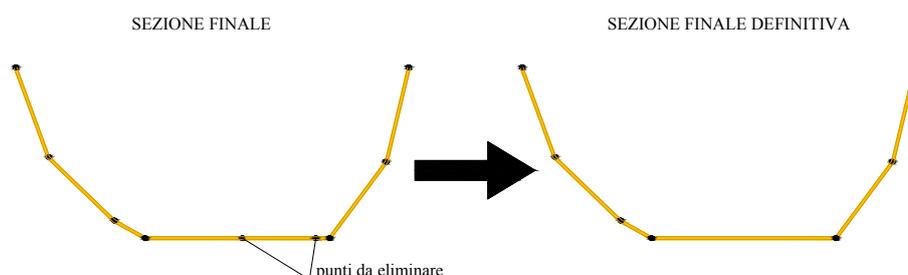
In questo modo si conosce il nuovo valore della quota di fondo, tuttavia è necessario effettuare una modifica della sezione esistente: infatti, come mostrato in Figura 2.11 ci si trova, il più delle volte (tranne nel caso in cui l'altezza del deposito sia pari alla coordinata  $z$  di un punto costituente la sezione) a dover creare dei nuovi punti nella sezione trasversale.



*Figura 2.11 sezione prima e dopo un fenomeno di deposito*

Naturalmente, nel caso in cui vi sia una successione di più fenomeni di deposito, si avrebbe un accrescimento cospicuo del numero di punti costituenti

la sezione. Per questo motivo si preferisce, una volta creato il nuovo assetto della sezione, eliminare i punti compresi tra due punti caratterizzati dalla medesima altezza  $z$  (Figura 2.12).



*Figura 2.12 schema della sezione finale che determina il modello a seguito del deposito*

## 2.9.2 Erosione

Una delle metodologie più usate in letteratura (Chang, 1988; El Kadi Abderrezzak et al., 2007) per la ripartizione della  $\Delta\sigma_b$  lungo la sezione trasversale, nel caso di erosione, consiste nel dividere la sezione in strisce, ognuna delle quali caratterizzata da una larghezza  $\Delta y_i$ , e valutare, per ciascuna striscia  $i$ , il corrispondente abbassamento  $\Delta z_i$  a partire dalla differenza tra lo sforzo tangenziale in corrispondenza del contorno  $\tau_{0,i}$  e lo sforzo tangenziale critico  $\tau_c$ , attraverso la seguente formula:

(2.64)	$\Delta z_i = \frac{(\tau_{0,i} - \tau_c)^m}{\sum_i (\tau_{0,i} - \tau_c)^m \cdot \Delta y_i} \cdot \Delta \sigma_b$
--------	--

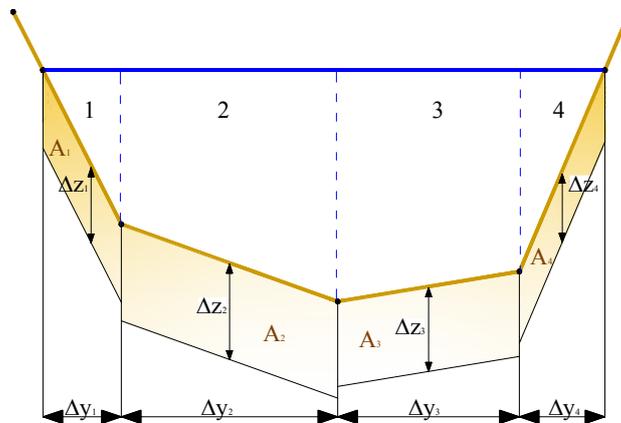
Per l'esponente  $m$  in letteratura sono stati adottati diversi valori: Chang (1988) propone un valore compreso tra 0 e 1: dove lo scegliere un valore piccolo di  $m$  (come 0.1) significa avere una distribuzione ragionevolmente uniforme di  $\Delta z$  lungo la sezione; mentre scegliere un valore di  $m$  pari a 1 significa dare una

distribuzione meno uniforme di  $\Delta z$ . Altri autori (El Kadi Abderrezzak et al., 2007) hanno invece adottato un valore di 1.5.

Per poter utilizzare la (2.64) è necessario che il valore dello sforzo tangenziale  $\tau_0$ , utilizzato per il calcolo della capacità di trasporto nell'equazione di adattamento, sia quello effettivo, calcolato cioè come media pesata delle  $\tau_{0,i}$  nel modo seguente:

(2.65)	$\tau_0 = \frac{\sum_i \tau_{0,i} \cdot \chi_i}{\sum_i \chi_i}$
--------	---

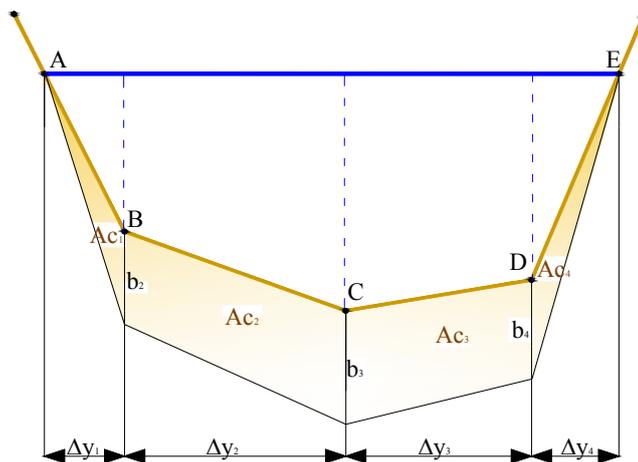
Con la (2.64), quindi, è possibile, divisa la sezione idrica in strisce, a partire dai punti noti della sezione trasversale e da quelli individuati dall'intersezione del pelo libero con le pareti della sezione, valutare l'abbassamento uniforme di ciascuna striscia, così come mostrato in Figura 2.13.



**Figura 2.13** *abbassamenti delle strisce della sezione trasversale nel caso di erosione*

Determinati gli abbassamenti per ogni striscia si ottiene una sezione discontinua; risulta, quindi, necessario provvedere ad una ricostruzione lineare del contorno della sezione bagnata, tale, comunque, da avere complessivamente un'area erosa pari alla  $\Delta\sigma_b$ . Vediamo qui di seguito come viene realizzata questa ricostruzione della sezione erosa.

La sezione ricostruita linearmente è caratterizzata dall'andamento riportato in Figura 2.14. Vi sono abbassamenti nulli corrispondenza dei punti estremi del contorno bagnato (i punti A e E della Figura 2.14), mentre gli abbassamenti degli altri punti sono calcolati in modo tale che i trapezi della Figura 2.14 siano equivalenti ai parallelogrammi della Figura 2.13.



**Figura 2.14 Ricostruzione lineare della sezione trasversale nel caso di erosione**

Con riferimento alla prima striscia, ponendo l'uguaglianza  $Ac_1 = A_1$ , si ha che:

(2.66)	$b_2 = \frac{Ac_1 \cdot 2}{\Delta y_1} - b_1$
--------	---

Analogamente si procede per calcolare gli altri abbassamenti  $b_i$ :

(2.67)	$b_i = \frac{Ac_{i-1} \cdot 2}{\Delta y_{i-1}} - b_{i-1}$
--------	---

Il problema è che i trapezi così calcolati non rispettano l'equivalenza con l'area erosa complessiva (in particolare, con riferimento al caso della Figura 2.14, non è rispettata l'equivalenza  $Ac_4 = A_4$ ):

(2.68)	$Ac = \sum_i Ac_i = \Delta \sigma_b$
--------	--------------------------------------

Bisogna, quindi, ridistribuire sull'intera sezione la differenza  $\Delta \sigma_b - Ac$ ; per fare ciò introduciamo un coefficiente correttivo  $\omega$  tale che:

(2.69)	$\Delta\sigma_b = \sum_i \frac{\omega(b_i + b_{i+1})\Delta y_i}{2}$
--------	---

dove i valori di  $b_i$  sono quelli calcolati con la (2.67) e dove  $\omega$  è pari a:

(2.70)	$\omega = \frac{\Delta\sigma_b}{\sum_i Ac_i}$
--------	---

A questo punto moltiplicando per  $\omega$  i valori di  $b_i$  calcolati con la (2.67) è possibile determinare gli abbassamenti effettivi che subiscono punti costituenti la sezione bagnata. Si perviene, così, al nuovo assetto della sezione.

### 2.9.3 Ricostruzione della pendenza di fondo

Una volta determinate le nuove sezioni, e le relative nuove quote di fondo, si deve procedere con la ricostruzione delle pendenze di fondo. Per la stima delle pendenze di fondo si è adottata la tecnica delle derivate centrate. Si riporta, qui di seguito, l'espressione utilizzata per il calcolo del valore della pendenza, al generico istante  $j$ , per l' $i$ -esima cella:

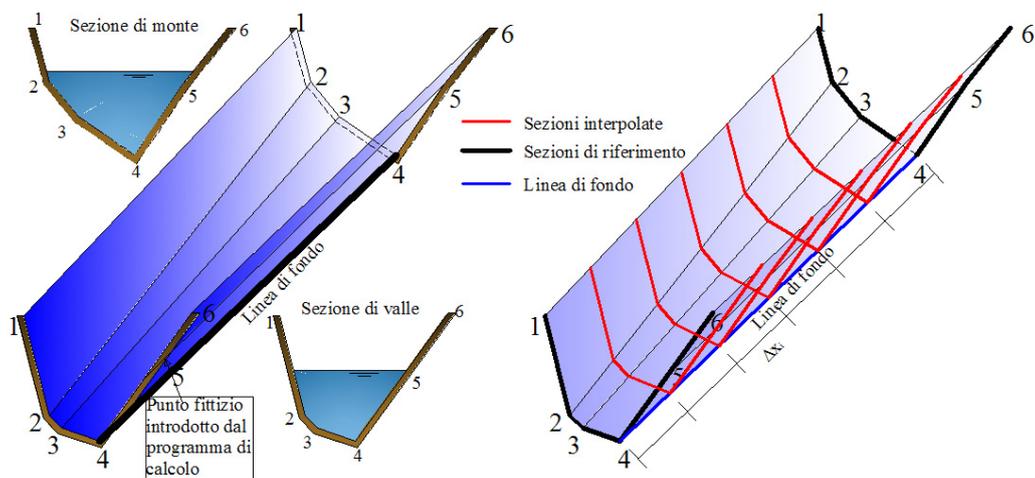
(2.71)	$i_0^j = \frac{z_{b_{i-1}}^j - z_{b_{i+1}}^j}{2\Delta x}$
--------	---

L'utilizzo di questa tecnica permette una ricostruzione del fondo più accurata.

## ***2.10 Trattamento della geometria complessa***

Dato che il modello proposto permette di trattare sezioni di qualsivoglia forma, assume un ruolo fondamentale in tutta la modellazione numerica, sinora vista, il modo in cui viene trattata la geometria complessa dell'alveo. Appare, dunque, opportuno sottolineare in che modo si perviene alla determinazione delle sezioni degli  $N$  volumi di controllo in cui il dominio di calcolo viene suddiviso. Il codice di calcolo messo a punto è in grado, mediante l'interpolazione spaziale dei dati a disposizione, di generare automaticamente, a partire dalla conoscenza della topografia e delle caratteristiche di scabrezza di un qualsiasi numero di sezioni effettivamente rilevate in sito, la geometria e le caratteristiche di conducibilità idraulica delle sezioni utilizzate per i calcoli idraulici. A tale scopo, il software si avvale di una specifica interfaccia grafica, che permette, preliminarmente, di inserire (o di modificare o di integrare), all'interno di un apposito data-base, le coordinate  $(x, y, z)$  dei punti appartenenti alla sezione e (opzionalmente con la scelta di un unico valore, costante per tutta la sezione) i valori del parametro di Strickler relativi a ciascun lato della sezione stessa. Note, a questo punto, le coordinate dei punti delle due sezioni, di monte e di valle, che individuano un generico tratto del corso d'acqua, è possibile, innanzi tutto, individuare l'asse della sezione, determinandolo o come l'asse verticale passante per il punto più depresso o, nel caso in cui i punti più depressi risultassero più di uno, come l'asse verticale passante per il punto medio tra quelli più distanti; dopodiché, unendo i punti in cui gli assi di tali sezioni intersecano i rispettivi contorni, è possibile tracciare la linea di fondo alveo. Introducendo, poi, all'interno di una o di entrambe le sezioni, dei punti fittizi, in modo tale che il numero dei punti ubicati a sinistra e a destra dell'asse di ciascuna sezione sia identico, e pari al massimo tra quelli

presenti, nelle due sezioni, a sinistra e, rispettivamente, a destra dell'asse, congiungendo i punti corrispondenti delle due sezioni, si perviene all'individuazione di una superficie poliedrica nello spazio, rappresentativa del reale andamento del corso d'acqua (Figura 2.15). L'intersezione di tale superficie con un generico piano verticale distante  $x$  dalla sezione iniziale permette, analiticamente, di individuare le caratteristiche geometriche della sezione trasversale posta all'ascissa  $x$  stessa; a sua volta, i valori del parametro di Strickler possono ricavarsi in base ad un'interpolazione lineare tra i corrispondenti valori relativi alle due sezioni che delimitano il tratto in esame .



**Figura 2.15** *Rappresentazione spaziale, utilizzata del codice di calcolo, del contorno dell'asta fluviale*

### ***3 Descrizione del software HEC-RAS® 4***

#### ***3.1 Introduzione***

In questo capitolo si vuole effettuare una breve descrizione del software HEC-RAS® 4.0, un programma, disponibile gratuitamente in rete, molto diffuso in campo tecnico per lo studio della propagazione delle piene in una rete di canali naturali o artificiali. In particolare la versione 4.0, rispetto alle precedenti, permette di effettuare anche analisi di trasporto solido: proprio a questo modulo è stata rivolta, principalmente, l'attenzione in questo capitolo. Nel descrivere HEC-RAS, si sono effettuati richiami anche a software precedenti: HEC-2 (per il modulo relativo al calcolo idraulico) e HEC-6 (per la il modulo relativo all'analisi di trasporto solido), dei quali HEC-RAS è una derivazione. Infine HEC.RAS e HEC-6 sono confrontati con riferimento all'applicazione ad un caso reale: in particolare, si è effettuata un'analisi di trasporto solido, con i due programmi sopracitati, per il fiume Alento.

#### ***3.2 Generalità sul software HEC-RAS® 4***

HEC-RAS è un sistema integrato di software, la versione originale risale al 1995 e fu sviluppata dall' Hydrologic Engineering Center's River Analysis System (da cui l'acronimo). HEC-RAS® 4.0, la più recente versione attualmente disponibile, permette di eseguire analisi mono-dimensionali con riferimento al moto dell'acqua sia limpida che caratterizzata dalla presenza di trasporto solido e di contaminanti: a tal riguardo si indica che il software presenta quattro moduli:

1. modulo per l'analisi dei profili di corrente in condizioni di moto permanente;

2. modulo per il calcolo in condizioni di moto vario;
3. modulo per l'analisi del trasporto solido e le conseguenti variazioni d'alveo;
4. modulo per l'analisi di qualità.

Il modulo 1 (*Steady Flow Analysis*) è predisposto per l'analisi di una corrente gradualmente variata; essa può far riferimento ad canale singolo o ad una rete di canali, inoltre, l'analisi del profilo può essere condotta con riferimento ad una corrente lenta, veloce o mista.

Il modulo 2 (*Unsteady Flow Analysis*) permette di effettuare un'analisi in condizione di moto vario, per una rete di canali a pelo libero.

Il modulo 3 (*Sediment Transport Analysis*) restituisce l'analisi di variazione del fondo, a seguito di depositi o di erosioni dello stesso, dovuti alla presenza di trasporto solido; in genere l'analisi si riferisce a simulazioni su lunga scala temporale (solitamente in termini annuali).

Il modulo 4 (*Water Quality Analysis*) consente di valutare la qualità di un fiume, effettuando analisi della temperatura e di una limitata classe di materiali trasportati (ossigeno disciolto, materiale organico,...).

Nei paragrafi successivi l'attenzione è rivolta principalmente al modulo 3, ma si è ritenuto opportuno effettuare una descrizione anche del modulo 1 (in quanto la parte idraulica nell'analisi dei sedimenti viene effettuata per una successione di moti permanenti); invece, del modulo 2 viene effettuata solo una breve descrizione.

### 3.3 Steady Flow Analysis

Questo modulo consente l'analisi ed il tracciamento di un profilo di corrente in condizioni di moto permanente per correnti stazionarie e gradualmente variate in canali naturali ed artificiali. Possono essere calcolati i profili per correnti lente, veloci, o miste, con riferimento a correnti mono-dimensionali.

I profili di corrente vengono computati da una sezione trasversale alla successiva risolvendo l'equazione di conservazione dell'energia attraverso un procedura iterativa chiamata "standard step method".

Qui di seguito si riporta l'equazione di conservazione dell'energia, scritta con riferimento a due sezioni consecutive (indicate con i pedici 1 e 2):

(3.1)	$Z_2 + Y_2 + \frac{a_2 V_2^2}{2g} = Z_1 + Y_1 + \frac{a_1 V_1^2}{2g} + h_e$
-------	---

nella quale le variabili introdotte (rappresentate anche in Figura 3.1) hanno il seguente significato:

$Z_1, Z_2$  = quota di fondo nelle due sezioni considerate;

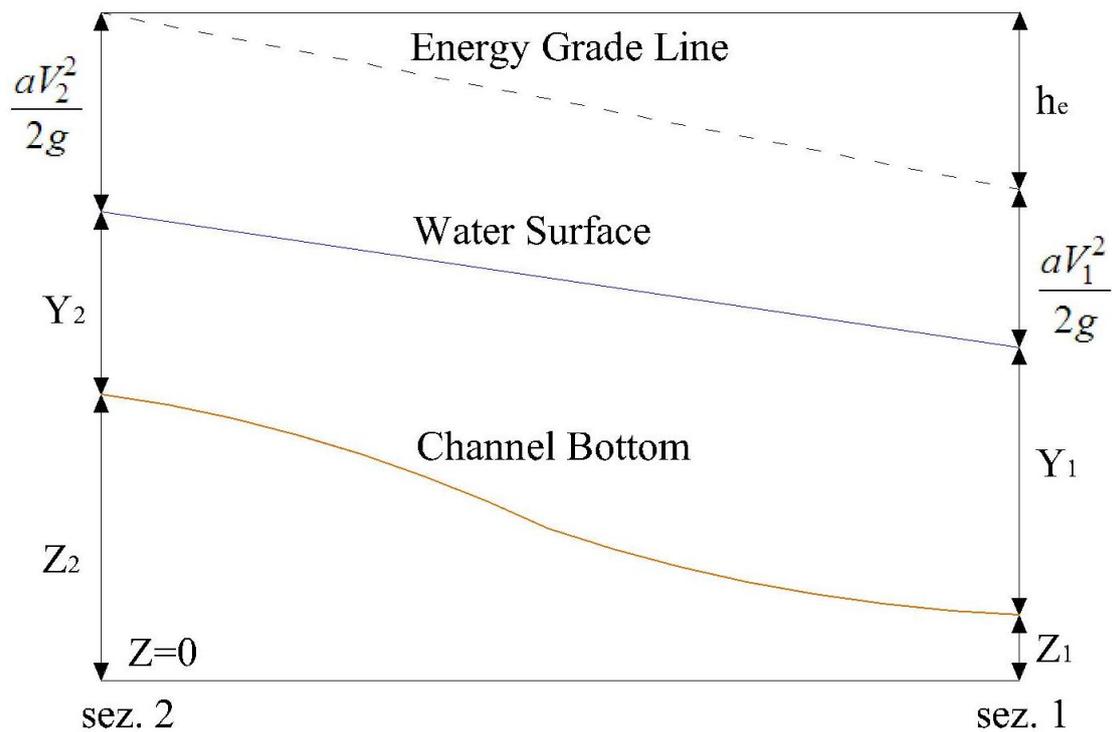
$Y_1, Y_2$  = tirante idrico nelle due sezioni considerate;

$V_1, V_2$  = velocità media nelle due sezioni considerate;

$a_1, a_2$  = coefficiente di ragguglio delle velocità;

$g$  = accelerazione di gravità;

$h_e$  = perdita di energia.



**Figura 3.1** Schema di riferimento per la scrittura dell'equazione dell'energia

La perdita di energia  $h_e$  tra due sezioni è comprensiva delle perdite dovute alla scabrezza e delle perdite dovute ad eventuali contrazioni o espansioni

(3.2)	$h_e = LS_f + C \left  \frac{a_2 V_2^2}{2g} - \frac{a_1 V_1^2}{2g} \right $
-------	---

dove:

$\bar{S}_f$  = Slope Friction relativa al tratto compreso tra le sezioni 1 e 2;

$C$  = coefficiente di espansione o contrazione;

$L$  = lunghezza media del tratto compreso tra le due sezioni pesata rispetto alla distribuzione delle portate nelle sezioni trasversali, questa è calcolata come:

(3.3)	$L = \frac{L_{lob} \bar{Q}_{lob} + L_{ch} \bar{Q}_{ch} + L_{rob} \bar{Q}_{rob}}{\bar{Q}_{lob} + \bar{Q}_{ch} + \bar{Q}_{rob}}$
-------	--

con:

$L_{lob}, L_{ch}, L_{rob}$  = lunghezze delle distanze tra le due sezioni trasversali in corrispondenza, rispettivamente, della banchina destra, del canale principale e della banchina di sinistra;

$\bar{Q}_{lob}, \bar{Q}_{ch}, \bar{Q}_{rob}$  = media aritmetica delle portate delle due sezioni specificate con riferimento, rispettivamente, alla banchina destra, al canale principale e alla banchina di sinistra.

Dato che le sezioni trasversali considerate da HEC-RAS, possono essere costituite da parti aventi diversi valori del coefficiente di scabrezza (il coefficiente di Manning  $n$ ) è necessario al fine di valutare la Slope Friction della sezione, quanto vale il “conveyance” (cioè il deflusso per unità di perdita di carico nell’unità di lunghezza) totale. Per fare ciò la sezione trasversale è suddivisa in strisce, ognuna delle quali caratterizzata da uno stesso valore di  $n$ , e per ciascuna di queste determina il relativo valore di “conveyance”. Con riferimento alla formula di Manning

(3.4)	$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S_f^{1/2}$
-------	--------------------------------------

Il “conveyance”, per ogni striscia, sarà espresso dalla seguente

(3.5)	$K = \frac{1}{n} AR^{2/3}$
-------	----------------------------

dove:

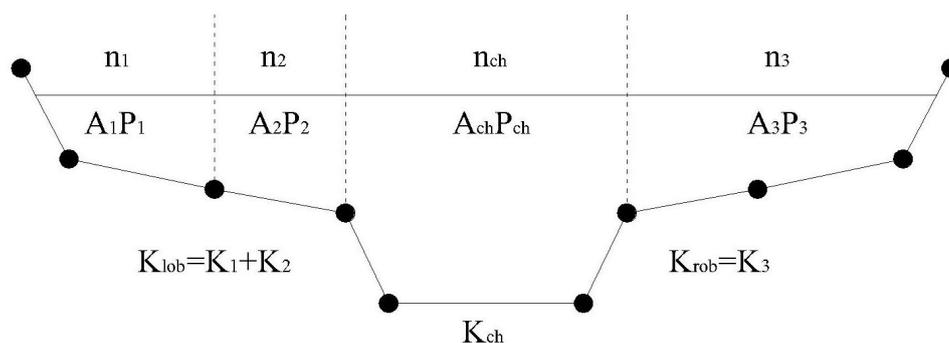
$n$  = coefficiente di Manning per ogni striscia;

$A$  = sezione idrica per ogni striscia;

$R$  = raggio idraulico di ogni striscia.

I “conveyance” determinati per ciascuna striscia vengono raggruppati per macro-area: si ottengono così i “conveyance” per la banchina sinistra  $K_{lob}$  e per la banchina destra  $K_{rob}$ , mentre il “conveyance” per il canale principale

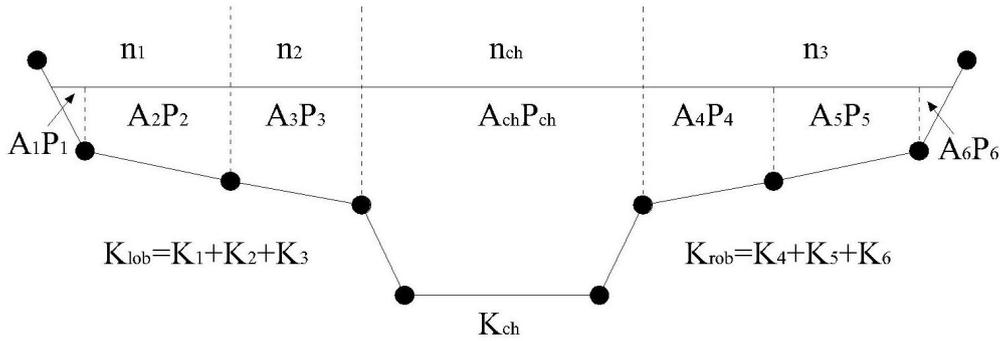
$K_{ch}$  è valutato con riferimento ad un'unica striscia centrale. Lo schema della sezione trasversale a cui fa riferimento la metodologia appena descritta è riportato in Figura 3.2. Il “conveyance” totale  $K_t$  per l'intera sezione trasversale è dato dalla somma dei “conveyance” per le tre aree (banchina sinistra, canale principale e banchina destra).



**Figura 3.2 Schema del calcolo del “conveyance” totale con il metodo di default di HEC-RAS**

Determinati i “conveyance” per tutte le strisce che compongono la sezione, la somma di questi fornisce il valore del “conveyance” totale.

Il metodo appena descritto, di default in HEC-RAS 4.0, non è l'unico possibile; di fatti vi è un secondo metodo, presente in HEC-2, dove il “conveyance” totale è sempre calcolato come somma dei “conveyance” delle strisce, ma la suddivisione in strisce avviene in maniera differente: in questo caso sono i punti che costituiscono la sezione trasversale a determinare i limiti delle strisce, a tal proposito si può osservare la Figura 3.3.



**Figura 3.3 Schema del calcolo del “conveyance” totale con il metodo di HEC-2**

Seppure i risultati ottenuti con i due metodi appaiono differenti, il confronto di questi non ha permesso di stabilire quale dei due metodi sia il più accurato.

Anche il coefficiente di ragguglio delle velocità  $a$  è calcolato con riferimento ai “conveyance” di destra, centrale e di sinistra:

(3.6)	$a = \frac{(A_t)^2 \left[ \frac{K_{lob}^3}{A_{lob}^2} + \frac{K_{ch}^3}{A_{ch}^2} + \frac{K_{rob}^3}{A_{rob}^2} \right]}{K_t^3}$
-------	--

dove

$A_t$  = sezione idrica totale;

$A_{lob}, A_{ch}, A_{rob}$  = sezione idrica relativa, rispettivamente, alla banchina sinistra, al canale principale e alla banchina destra.

Il valore di  $\bar{S}_f$  che compare nella (3.1) viene valutato a partire dai valori della Slope Friction calcolati con la (3.4) per le sezioni trasversali ( $S_{fi} \quad i = 1,2$ ) che delimitano il tratto considerato.

HEC-RAS fornisce quattro diverse alternative per il calcolo della  $\bar{S}_f$  :

(3.7)	$\bar{S}_f = \left( \frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2} \right)^2$ $\bar{S}_f = \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2}$ $\bar{S}_f = \sqrt{S_{f1} + S_{f2}}$ $\bar{S}_f = \frac{2(S_{f1} \cdot S_{f2})}{S_{f1} + S_{f2}}$
-------	--

Nella (3.2) compare anche il coefficiente  $C$  dovuto alla contrazione o espansione a cui è soggetta la corrente a causa dei cambiamenti della sezione trasversale, che comportano una perdita ulteriore di energia all'interno del tratto. Per tener conto di questa perdita a ciascuna sezione dovranno essere attribuiti i valori dei coefficienti di contrazione ed espansione. Nel caso di corrente lenta, se il cambiamento della sezione trasversale è modesto, si considerano coefficienti di contrazione ed espansione, rispettivamente, dell'ordine di 0.3 e 0.5. Quando il cambiamento della sezione è più brusco vengono assunti coefficienti di contrazione ed espansione, rispettivamente, di 0.3 e 0.5; talvolta questi valori, ad esempio in presenza di ponti, possono essere anche più alti: 0.6 per la contrazione e 0.8 per l'espansione. I valori dei coefficienti non possono essere superiori all'unità e qualora non si voglia tener conto di questa ulteriore perdita di energia i coefficienti possono essere posti entrambi pari a 0. Per le correnti veloci sarebbe meglio considerare dei coefficienti di contrazione ed espansione inferiori rispetto a quelli utilizzati per le correnti lente. In una corrente veloce i valori in gioco delle altezze cinetiche  $(aV^2 / 2g)$  sono molto più grandi e piccole variazioni dei tiranti possono causare grandi variazioni delle altezze cinetiche. Usando i valori dei coefficienti di contrazione ed espansione che tipicamente si adottano nel caso

delle correnti lente, si può avere una sovrastima delle perdite di energia e oscillazioni nel profilo di corrente calcolato. Per questo motivo si preferisce, nel caso di correnti veloci, per variazioni graduali della geometria delle sezioni trasversali, assumere come valori dei coefficienti di contrazione ed espansione, rispettivamente, 0.01 e 0.03. Per variazioni della geometria un po' più repentine si usano valori dei coefficienti un po' più alti: 0.05 per la contrazione e 0.2 per l'espansione. Il programma assume la presenza di una contrazione laddove la velocità a valle è maggiore della velocità a monte; viceversa se la velocità a monte è più grande di quella a valle il programma ipotizza la presenza di un'espansione.

Per la determinazione del profilo è, naturalmente, necessario assegnare le condizioni al contorno le quali saranno definite: a valle, nel caso di corrente lenta, a monte, nel caso di corrente veloce e, sia a valle che a monte, per una corrente mista. Diverse sono le tipologie di condizioni che possono essere scelte (quota del pelo libero, altezza di stato critico, tirante di moto uniforme, scala di deflusso).

A questo punto si descrive il procedimento iterativo con cui viene risolta la (3.1) per la determinazione della quota di pelo libero ( $WS$ ) incognita, dove  $WS=Z+Y$ .

Con riferimento al tratto compreso tra le sezioni 1 e 2 (Figura 3.1), la procedura risolutiva si compie attraverso i seguenti step:

- 1) Si assegna un valore alla quota di pelo libero  $WS_2$  nella sezione a monte (o nella sezione a valle, nel caso di una corrente veloce);
- 2) In funzione del valore assunto  $WS_2$  al punto 1), si determinano i valori di “conveyance” e dell'altezza cinetica nella sezione 2;
- 3) Con i valori ottenuti al punto 2) si calcola la  $\bar{S}_f$  dall'equazione (3.2) si ricava la perdita di carico energetico  $h_e$ ;

- 4) Noti i valori di cui al punto 2) e 3), si risolve l'equazione (3.1), ottenendo un nuovo valore della quota di pelo libero nella sezione 2:  $WS_2^I$ ;
- 5) Il valore ottenuto di  $WS_2^I$  viene confrontato il valore  $WS_2$  assegnato al punto 1): la procedura dal punto 1) al punto 5) viene ripetuta fino a che la differenza tra  $WS_2^I$  e  $WS_2$  non risulta minore di 0.003 m, nel SI, o di 0.01 feet, nell'US Customary.

Nel momento in cui il tirante idrico attraversa lo stato critico, non è più possibile applicare l'equazione di conservazione dell'energia (3.1). L'equazione dell'energia è applicabile solo per correnti gradualmente variate e la transizione da corrente veloce a lenta o da corrente lenta a veloce costituisce una situazione di corrente rapidamente variata. Sono diversi i casi in cui può realizzarsi un passaggio della corrente attraverso lo stato critico, esempi sono: variazioni significative della pendenza di fondo del canale; la presenza di salti di fondo, di soglie di sfioro, di pile di ponti e di punti di confluenza di più rami. Per alcuni di questi è possibile risolvere il problema servendosi di equazioni ad hoc (ad esempio per le soglie di sfioro), per la risoluzione degli altri casi è, invece, necessario utilizzare e risolvere l'equazione del moto. In particolare, in HEC-RAS l'equazione del moto può essere applicata per i seguenti problemi: risalto idraulico, presenza di un ponte e confluenze di canali.

### ***3.4 Unsteady Flow Analysis***

Le leggi fisiche che regolano il moto vario di una corrente a pelo libero sono un'equazione di conservazione della massa e un'equazione di conservazione della quantità di moto:

(3.8)	$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q_l = 0$
(3.9)	$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial QV}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial z}{\partial x} + S_f \right) - q_l V_l = 0$

in cui le variabili introdotte hanno il seguente significato:

$Q$  = è la portata defluente in alveo;

$q_l$  = è la portata immessa lateralmente per unità di lunghezza;

$A$  = sezione idrica della corrente;

$g$  = accelerazione di gravità;

$V$  = velocità media di deflusso della corrente;

$V_l$  = velocità media di deflusso della portata immessa lateralmente;

$S_f$  = Slope Friction;

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \right)$  = la pendenza della superficie libera, dove si sono indicate

con  $z$  la quota di pelo libero,  $h$  il tirante idrico e  $z_0$  la quota di fondo.

La risoluzione del sistema di equazioni (3.8)-(3.9) è affidata al metodo delle Differenze Finite, il quale permette di riscrivere le equazioni in termini di differenze finite, evitando di dover risolvere delle derivate parziali: si passa così da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali ad un sistema di equazioni algebriche. In particolare, la procedura di risoluzione che viene adottata nell'ambito di HEC-RAS, che è una delle più diffuse e affermate, è lo schema, di tipo implicito, a quattro punti, noto come "box scheme". L'utilizzo di questo schema risulta molto conveniente anche quando si fa riferimento a intervalli di distanze non regolari.

Per testare la stabilità di questo schema sono state condotte diverse analisi (Fread, 1974; Ligget e Cunge, 1975) che hanno dimostrato l'incondizionata stabilità (teorica) nel caso in cui il fattore di peso  $\mathcal{G}$  delle derivate spaziali valga  $0.5 < \mathcal{G} < 1$ , una stabilità condizionata per  $\mathcal{G} = 0.5$  e un'instabilità per

$\mathcal{G} < 0.5$ . Da alcuni studi successivi sull'analisi di convergenza si è visto che ad un aumento dello smorzamento tra soluzione reale (analitica) e quella numerica corrisponde la diminuzione del rapporto  $\lambda/\Delta x$  dove  $\lambda$  è la lunghezza dell'onda nel sistema idraulico. Ciò comporta che la condizione di instabilità dello schema, oltre che dal valore di  $\mathcal{G}$ , può dipendere da altri fattori quali, ad esempio, le improvvise variazioni delle caratteristiche delle sezioni trasversali, il brusco cambiamento della pendenza del canale, la presenza di strutture idrauliche complesse (argini, ponti, soglie di sfioro). Dato che le equazioni (3.8) e (3.9) sono non lineari, applicando lo schema alle differenze finite implicito, si ottiene un sistema non lineare di equazioni algebriche. Questa tipologia di sistemi può essere risolta utilizzando la procedura iterativa di Newton-Raphson, la quale, però, oltre ad essere lenta, può comportare problemi nella convergenza in presenza di discontinuità geometriche del canale. Al fine di evitare soluzioni di tipo non lineare Preismann (come riportato da Liggett e Cunge, 1975) and Chen (1973) hanno sviluppato una tecnica per linearizzare le equazioni: questa viene adottata nell'ambito di HEC-RAS.

### ***3.5 Sediment Transport Analysis***

L'analisi di trasporto solido che effettua HEC-RAS parte da quello che eseguiva il programma HEC-6. L'approccio utilizzato è di tipo disaccoppiato, per cui, a monte della valutazione della portata solida trasportata dalla corrente, è necessario determinare le caratteristiche idrauliche della corrente. HEC-RAS si serve di un approccio idrodinamico semplificato: in particolare fa riferimento al caso di *Quasi-Unsteady Flow*. Nell'analisi di *Quasi-Unsteady Flow* si considera una successione di moti permanenti rispetto ai quali è calcolato il profilo di corrente; a partire dal profilo di corrente sono determinate la portata

solida e la conseguente variazione del fondo. L'utilizzo della *Quasi-Unsteady Flow Analysis* rende l'esecuzione del programma molto più veloce, in quanto i profili di corrente in moto permanente sono molto più semplici da sviluppare rispetto ad un modello di moto vario.

Per i calcoli relativi all'analisi di trasporto solido tre differenti intervalli temporali vengono definiti:

- Flow Duration;
- Computational Increment;
- Bed Mixing Time Step.

Nell'ambito della successione di moti permanenti si definisce il *Flow Duration*: l'intervallo temporale durante il quale portata, temperatura o massa di sedimenti, si mantiene costante. Il *Flow Duration* viene poi suddiviso in *Computational Increment*, che indica l'intervallo di tempo alla fine del quale le caratteristiche idrodinamiche e geometriche del fondo vengono calcolate. La stabilità del modello è influenzata dalla scelta di questo intervallo temporale, in quanto la geometria del fondo cambia solo alla fine di questo; quindi, qualora il *Computational Increment* sia troppo lungo, la geometria dell'alveo non viene aggiornata frequentemente e i risultati del modello potrebbero variare. Il *Computational Increment* a sua volta è suddiviso in *Bed Mixing Time Step* che rappresentano gli intervalli temporali utilizzati per il calcolo delle erosioni e dei depositi delle particelle solide e alla fine di questi possono aversi dei cambiamenti nella composizione del "bed mixing layer" (strato del materiale posto sul fondo costituito dal layer attivo e/o dal layer inattivo, a tal riguardo si può far riferimento alla Figura 3.5).

Per l'analisi dei sedimenti il programma risolve un'equazione di continuità dei sedimenti nota come equazione di Exner:

(3.10)	$(1 - \lambda_p)B \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial Q_s}{\partial x}$
--------	---

nella quale:

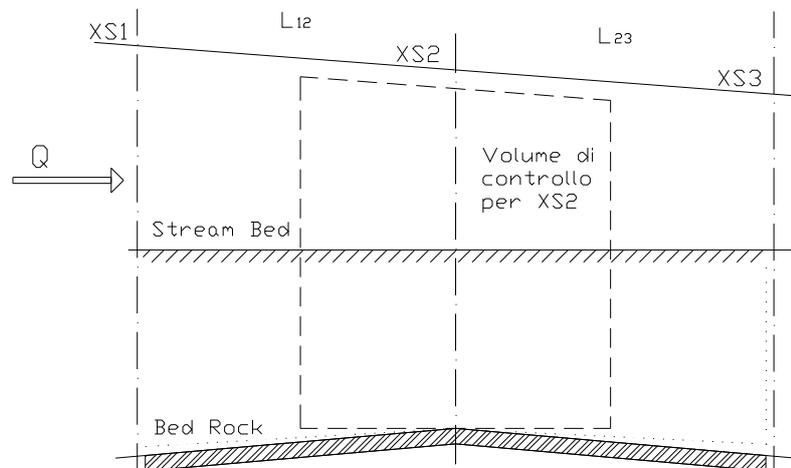
$B$  = larghezza del canale;

$\eta$  = quota di fondo del canale;

$\lambda_p$  = porosità del layer attivo;

$Q_s$  = portata solida.

L'equazione (3.10) stabilisce che la variazione del volume di sedimenti in un dato volume di controllo, rappresentato in Figura 3.4, (in termini di deposito o erosione) è dato dalla differenza tra il carico di sedimenti entrante e uscente dal volume di controllo. L'ingresso di sedimenti nel volume di controllo è dato dalla quantità di sedimenti in uscita dal volume di controllo posto a monte e ad eventuali ingressi laterali di sedimenti; mentre la massima quantità di sedimenti che può uscire dal volume di controllo è funzione della quantità di sedimenti che può essere trasportata dalla corrente (capacità di trasporto).



**Figura 3.4 Volume di controllo**

L'equazione di continuità è, quindi, risolta calcolando la capacità di trasporto per il volume di controllo associato a ogni sezione trasversale (che è compreso tra la mezzera di  $L_{12}$  ed  $L_{23}$ , così come rappresentato in Figura 3.4) e confrontandola con la quantità di sedimenti in arrivo da monte al volume di controllo (apporto solido). Se la capacità di trasporto è maggiore dell'apporto solido c'è un deficit di materiale trasportato dalla corrente che viene

compensato con l'erosione di parte dei sedimenti posti sul fondo; viceversa, se l'apporto solido supera la capacità di trasporto, si ha un surplus di sedimenti in arrivo al volume di controllo che viene a depositarsi sul fondo.

Dato che HEC-RAS è in grado di far riferimento a particelle solide di diversa granulometria, il materiale solido viene suddiviso in classi granulometriche. Per ciascuna di queste classi viene definita la capacità di trasporto potenziale, con riferimento alle condizioni idrodinamiche della corrente. La capacità di trasporto potenziale può essere valutata con una delle formule di trasporto solido presenti nel programma, le formule disponibili sono:

- Acker e White
- England Hansen
- Laursen-Copeland
- Meyer-Peter Muller
- Toffaleti
- Yang
- Wilcock.

Nota la capacità di trasporto potenziale di ogni classe granulometrica, si determina un unico valore della capacità di trasporto, rappresentativo di tutto il materiale solido, attraverso la formula:

(3.11)	$T_c = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot T_j$
--------	--

nella quale:

$T_c$  = è la capacità di trasporto totale,

$T_j$  = è la capacità di trasporto potenziale di ogni classe granulometrica,

$\beta_j$  = è la percentuale di presenza della  $j$ -esima classe granulometrica nel layer attivo .

La differenza tra capacità di trasporto e apporto solido non può essere direttamente convertita in variazione del fondo, in quanto esistono delle

restrizioni fisiche ai fenomeni di erosione e deposito; HEC-RAS modella queste restrizioni con l'introduzione di:

- Un limite temporale di deposito
- Un limite temporale di erosione
- Il Sorting and Armoring

Il *limite temporale di deposito* si basa su una definizione della velocità di sedimentazione delle particelle, in particolare si confronta la distanza verticale che una particella deve percorrere per raggiungere il fondo con la distanza che una particella percorre in un dato intervallo di tempo, ottenuta come prodotto della velocità di sedimentazione per l'intervallo temporale considerato. Questo confronto comporta la definizione, per ogni classe granulometrica, di un coefficiente di efficienza di deposizione  $C_d$  definito dalla seguente:

(3.12)	$C_d = \frac{V_s(i) \cdot \Delta t}{D_e(i)}$
--------	--

dove:

$V_s(i)$  = è la velocità di sedimentazione di ogni classe granulometrica,

$D_e$  = altezza della colonna liquida all'interno della quale sono trasportate le particelle solide appartenenti alla classe granulometrica considerata,

$\Delta t$  = intervallo temporale considerato.

Nel caso in cui il denominatore è più grande del numeratore si ha che non tutto il materiale, costituente il surplus di sedimenti trasportati dalla corrente, riesce a sedimentare nel  $\Delta t$  considerato e, quindi, l'aliquota di materiale che effettivamente si depositerà sul fondo è determinata proporzionalmente a  $C_d$ . Naturalmente se  $C_d$  è maggiore dell'unità tutto il surplus di sedimenti si trasformerà in deposito.

In HEC-RAS per il calcolo della velocità di sedimentazione è possibile scegliere tra quattro formule:

- Rubey: tale relazione è valida sia per particelle molto piccole, come il limo, che per particelle di dimensioni maggiori;
- Toffaletti: questa relazione è valida per un fattore di forma pari a 0.9;
- Van Rijn: la relazione fa riferimento a particelle non sferiche con fattore di forma pari a 0.7;
- Report 12: metodo iterativo (di default in Hec-6) che valuta la velocità di sedimentazione in funzione della variazione del numero di Reynolds.

Per il calcolo della profondità effettiva di trasporto  $D_e$ , dato che i sedimenti in sospensione non sono uniformemente distribuiti lungo la colonna d'acqua, si tiene conto del profilo di concentrazione che ciascuna classe granulometrica ha all'interno della corrente idrica. In particolare, HEC-RAS, per calcolare l'effettiva profondità di trasporto per ogni classe granulometrica, fa riferimento allo studio condotto da Toffaletti che, partendo dall'andamento dei profili di concentrazione individuati per via teorica da Rouse, individua lungo la colonna idrica, a seconda della dimensione dei sedimenti, quattro diverse zone di trasporto, che vengono adottate come le profondità effettive di trasporto per le diverse granulometrie.

Il *limite temporale di erosione* parte dalla constatazione che l'erosione è un processo che, come quello del deposito, dipende dal tempo e che, naturalmente, non è possibile pensare che vi possa essere un'erosione illimitata in un dato intervallo temporale. Poiché, sfortunatamente, il processo fisico che conduce alla limitazione temporale dell'erosione non è ben compreso come quello del deposito, le relazioni utilizzate sono più empiriche e generalmente meno accurate. In particolare HEC-RAS fa riferimento al concetto della "lunghezza caratteristica della portata", che permette di definire un coefficiente di asportazione il quale, moltiplicato per il deficit di materiale solido calcolato per

la corrente idrica, consente di valutare la quantità di materiale che viene effettivamente erosa.

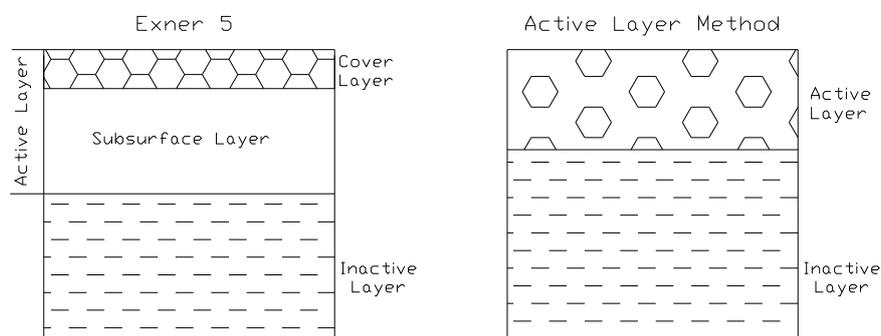
Un'altra limitazione al processo erosivo è legata ai fenomeni di *sorting* e *armouring* (già descritti nel paragrafo 1.7.2): questi conducono alla formazione di “un’armatura” sul fondo, costituita dal materiale più grossolano, che protegge dall’erosione le particelle di granulometria più fine che sono poste al di sotto di questa. Al fine di modellare questa “armatura”, in HEC-RAS sono presenti due algoritmi per simulare i fenomeni di *armoring* e *sorting*. Entrambi gli algoritmi si basano sulla divisione del fondo in due strati: l’active layer (layer attivo) e l’inactive layer (layer inattivo). In particolare, il layer attivo è quella parte dello strato di fondo la cui granulometria definisce le percentuali della classe granulometrica che compaiono nella relazione (3.11) per il calcolo della la capacità di trasporto totale.

I due algoritmi a cui si fa riferimento sono:

- 1) *Exner 5*;
- 2) *Active Layer Method*.

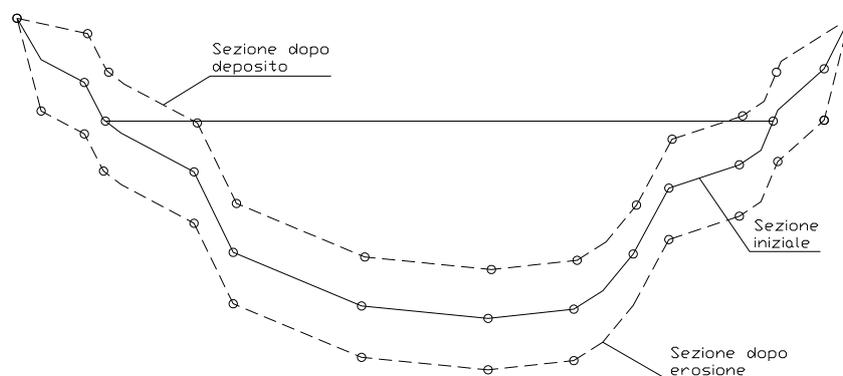
Il primo algoritmo, così come mostrato in Figura 3.5, effettua un’ulteriore suddivisione del layer attivo, si ha così complessivamente uno schema a tre layer: il cover layer, il subsurface layer e, poi, il layer inattivo. Anche gli spessori degli strati si differenziano tra i due algoritmi, in particolare nel caso dell’algoritmo 2) viene assegnato uno spessore maggiore al layer inattivo rispetto all’algoritmo 1): questo aspetto è importante, in quanto nel calcolo della capacità di trasporto per conoscere le percentuali delle diverse granulometrie presenti è necessario far riferimento, come detto, al layer attivo. La differente schematizzazione dello strato di fondo permette all’*Exner 5* di tener conto anche dello “static armouring” (fenomeno descritto nel paragrafo 1.7.2); mentre con l’utilizzo dell’*Active Layer Method*, visto lo schema a due

layer a cui fa riferimento, si ottiene una semplificazione dal punto di vista computazionale.



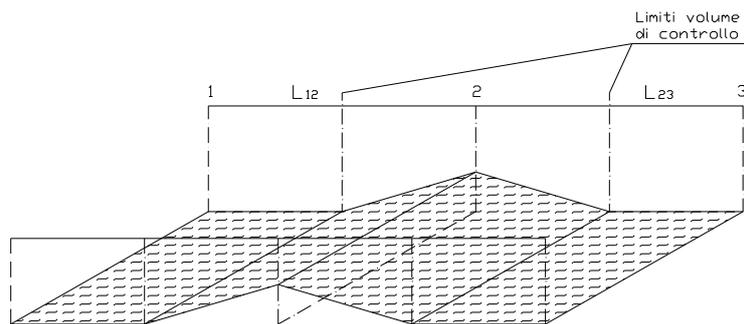
**Figura 3.5** Schema layers metodi di sorting ed armouring per HEC-RAS

Una volta visto in che modo si determina la quantità di materiale eroso o depositato è necessario capire come questa sia distribuita nella sezione trasversale rispetto alla quale è stata calcolata. Questa massa di materiale può essere aggiunta o sottratta al volume di controllo relativo ad una data sezione trasversale, determinando, poi, una variazione della sezione stessa. La massa di materiale solido è espressa in termini volumetrici ed è distribuita in modo uniforme in direzione trasversale (Figura 3.6); mentre è distribuita rispetto ad un “cuneo” (wedge) in direzione longitudinale (Figura 3.7), questo cuneo si sviluppa a partire dalla sezione di interesse e per tutto il volume di controllo, per cui arriva a metà tra la sezione precedente e quella di interesse e a metà tra la sezione di interesse e quella successiva.



**Figura 3.6** Schema variazione del fondo nella sezione trasversale

Come detto il volume si distribuisce uniformemente nella sezione trasversale e determina un innalzamento o un abbassamento (rispettivamente in caso di deposito e di erosione) dei punti rappresentativi della sezione, questo movimento costante è limitato alle zone che si è indicato siano soggette a variazioni (movable bed limits). La distribuzione del materiale eroso/depositato nella direzione longitudinale, avvenendo secondo il cuneo, tende a distribuire il materiale dando maggiore peso alla sezione di interesse.



**Figura 3.7 Schema variazione del fondo in direzione longitudinale (Wedge)**

### ***3.6 Differenze tra HEC-RAS 4.0 ed HEC-6***

Come già accennato il software HEC-RAS 4 è la versione più aggiornata di un pacchetto di programmi capaci di eseguire, in maniera separata, sia analisi di moto vario per correnti a pelo libero (HEC-2), sia analisi di trasporto solido con conseguenti variazioni del fondo (HEC-6). HEC-RAS, pur mantenendone le funzionalità, presenta delle differenze rispetto ai programmi originali, alle quali si accennerà in questo paragrafo.

La prima differenza che si riscontra riguarda la modalità di calcolo del “conveyance” infatti, come visto nel paragrafo (3.3) il “conveyance” totale della sezione viene calcolato per strisce che in HEC-2 vengono individuate a partire dai punti che costituiscono la sezione (Figura 3.3), mentre in HEC-RAS sono individuate a partire dai diversi valori del numero di Manning che si possono assegnare alla sezione trasversale (Figura 3.2); in entrambi i casi, nota la singola aliquota di “conveyance” per ogni striscia, la somma di queste restituisce il “conveyance” totale.

Un'altra differenza è legata al diverso modo di calcolare la profondità di stato critico. HEC-RAS fornisce la possibilità di poter scegliere tra due metodi per il calcolo dell'altezza di stato critico: un metodo “parabolico” e un metodo “secante”; HEC-2, invece, ha un unico metodo, molto simile a quello parabolico. Il metodo parabolico, più veloce dal punto di vista computazionale, è in grado di individuare un solo punto di minimo sulla curva dell'energia. Dato che nella maggior parte delle sezioni esaminate vi è un solo punto di minimo sulla curva dell'energia, il metodo parabolico è settato di default in HEC-RAS; ma qualora questo sia utilizzato e non riesca a convergere, HEC-RAS, automaticamente, utilizzerà il metodo secante.

Per l'analisi dei sedimenti, nei programmi HEC-RAS ed HEC-6, si fa riferimento ad un volume di controllo che si definisce a partire dalla sezione di interesse ed arriva a metà tra la sezione precedente e quella di interesse, e a metà tra la sezione di interesse e quella successiva (Figura 3.4). Con riferimento a questo volume di controllo (determinato in maniera equivalente nei due programmi) viene risolta l'equazione di continuità dei sedimenti e di conseguenza viene calcolata l'eventuale quantità di materiale solido che deve essere erosa o depositata. Quello che differisce nei due programmi è, invece, la modalità con cui la massa di materiale solido (eroso o depositato) viene a distribuirsi longitudinalmente lungo il volume di controllo. In HEC-6 la quantità di materiale solido (da erodere o depositare) è uniformemente distribuita sia in senso trasversale che in senso longitudinale; in HEC-RAS, invece, la quantità di materiale solido, mentre risulta essere sempre distribuita uniformemente in senso trasversale (determinando un abbassamento o un innalzamento costante dei punti costituenti al sezione trasversale, a seconda si tratti di erosione o deposito), lungo la direzione longitudinale è distribuita secondo un cuneo "wedge" che si sviluppa a partire dalla sezione di interesse per tutto il volume di controllo (Figura 3.7).

Un'ulteriore differenza è rappresentata dalle diverse formule presenti per il calcolo della portata solida e della velocità di sedimentazione: in HEC-RAS si hanno più formule tra cui scegliere alcune anche abbastanza recenti, rispetto a quelle previste da HEC-6.

### ***3.7 Simulazioni effettuate per il confronto tra HEC-RAS 4.0 e HEC-6***

Nel capitolo successivo si provvederà a testare HEC-RAS 4.0 con riferimento a casi di cui, a priori, è nota la soluzione numerica, confrontando, inoltre, i risultati ottenuti con quelli derivanti dall'applicazione del modello oggetto della Tesi di Dottorato. In questo paragrafo, invece, si vuole porre l'attenzione sulle differenze dei risultati ottenuti con HEC-RAS 4.0 e HEC-6: il confronto dei due modelli è effettuato con riferimento alla simulazione di un caso reale relativa all'analisi del trasporto solido per il fiume Alento.

Del corso d'acqua è nota l'intera geometria delle sezioni oltre che la composizione granulometrica, grazie a delle campagne di rilievi eseguite. Il corso d'acqua è soggetto a immissioni laterali di portata solida in corrispondenza di confluenze di corsi d'acqua minori.

Avendo a disposizione i risultati della simulazione di trasporto solido eseguita con HEC-6, si è provveduto ad eseguire una simulazione con HEC-RAS. Dopo aver inserito i dati geometrici e le informazioni relative alla composizione granulometrica delle immissioni laterali, si è proceduto all'inserimento delle informazioni necessarie per l'esecuzione dell'analisi di trasporto solido; a seguito di tali operazioni, una volta eseguita la simulazione, si è proceduto ad effettuare tre confronti, che si differenziano in relazione alle impostazioni utilizzate in HEC-RAS 4.0 (sintetizzate in Tabella 3.1).

<b>n° confronto</b>	<b>Calcolo del conveyance</b>	<b>Scelta dei fattori di peso</b>
<b>(1)</b>	HEC-6	HEC-6
<b>(2)</b>	HEC-RAS	HEC-RAS
<b>(3)</b>	HEC-6	HEC-RAS

***Tabella 3.1 Impostazioni di HEC-RAS utilizzate nei tre confronti effettuati con HEC-6***

In particolare la scelta delle impostazioni in HEC-RAS riguarda la metodologia utilizzata per il calcolo del “conveyance”, di cui già si è parlato nel paragrafo 3.3, e la scelta dei fattori di peso (riportati in Tabella 3.2) per la valutazione dei parametri idraulici effettivamente utilizzati per il calcolo della capacità di trasporto.

	<b>DBI</b>	<b>DBN</b>	<b>XID</b>	<b>XIN</b>	<b>XIU</b>	<b>UBI</b>	<b>UBN</b>
<b>HEC-6</b>	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0
<b>HEC-RAS</b>	0.5	0.5	0.25	0.5	0.25	0.0	1.0

**Tabella 3.2** *Tabella dei fattore di peso per la determinazione dei parametri idraulici usati ai fini del calcolo della capacità di trasporto*

I parametri idraulici, determinati per ciascun volume di controllo associato ad una generica sezione  $K$ , non sono quelli che effettivamente vengono adoperati per il calcolo della capacità di trasporto; infatti, nella formula di trasporto solido si considerano dei valori del tirante idrico ( $EFD$ ), della larghezza in superficie ( $EFW$ ), della velocità ( $VEL$ ) e della Slope Friction ( $SLO$ ), pesati con i valori assunti da questi parametri nei volumi posti a monte e a valle del tratto considerato. Le relazioni utilizzate per determinare i parametri idraulici effettivi ai fini del calcolo della capacità di trasporto nel tratto associato alla sezione  $K$  si specificano, a seconda che  $K$  sia una sezione interna, di monte o di valle, rispettivamente, nel seguente modo:

(3.13)	$EFD = XID \cdot EFD(K - 1) + XIN \cdot EFD(K) + XIU \cdot EFD(K + 1)$ $EFW = XID \cdot EFW(K - 1) + XIN \cdot EFW(K) + XIU \cdot EFW(K + 1)$ $VEL = XID \cdot VEL(K - 1) + XIN \cdot VEL(K) + XIU \cdot VEL(K + 1)$ $SLO = 0.5[SLO(K) + SLO(K + 1)]$
--------	---

(3.14)	$EFP = UBN \cdot EFP(K) + UBI \cdot EFP(K + 1)$ $EFW = UBN \cdot EFW(K) + UBI \cdot EFW(K + 1)$ $VEL = UBN \cdot VEL(K) + UBI \cdot VEL(K + 1)$ $SLO = SLO(K)$
(3.15)	$EFP = DBN \cdot EFP(K) + DBI \cdot EFP(K - 1)$ $EFW = DBN \cdot EFW(K) + DBI \cdot EFW(K - 1)$ $VEL = DBN \cdot VEL(K) + DBI \cdot VEL(K - 1)$ $SLO = SLO(K)$

dove:

$XID, XIN, XIU$  = sono i pesi da inserire, con riferimento ad una sezione interna, rispettivamente, per la sezione posta a valle, per quella in esame e per quella posta a monte;

$UBN, UBI$  = sono i pesi da inserire, con riferimento ad una sezione di monte, rispettivamente, per la sezione in esame e per quella posta a valle;

$DBN, DBI$  = sono i pesi da inserire, con riferimento ad una sezione di valle, rispettivamente, per la sezione in esame e per quella posta a monte.

### 3.7.1 Confronto 1: HEC-6 ed HEC-RAS(1)

Il primo confronto tra i risultati ottenuti con HEC-6 e con HEC-RAS è stato effettuato impostando in HEC-RAS le medesime proprietà che si ritrovano in HEC-6, in particolare con riferimento ai valori dei pesi da assegnare per la determinazione dei parametri idraulici ai fini della valutazione della capacità di trasporto e alla modalità di calcolo del “conveyance”.

Le condizioni imposte sono state:

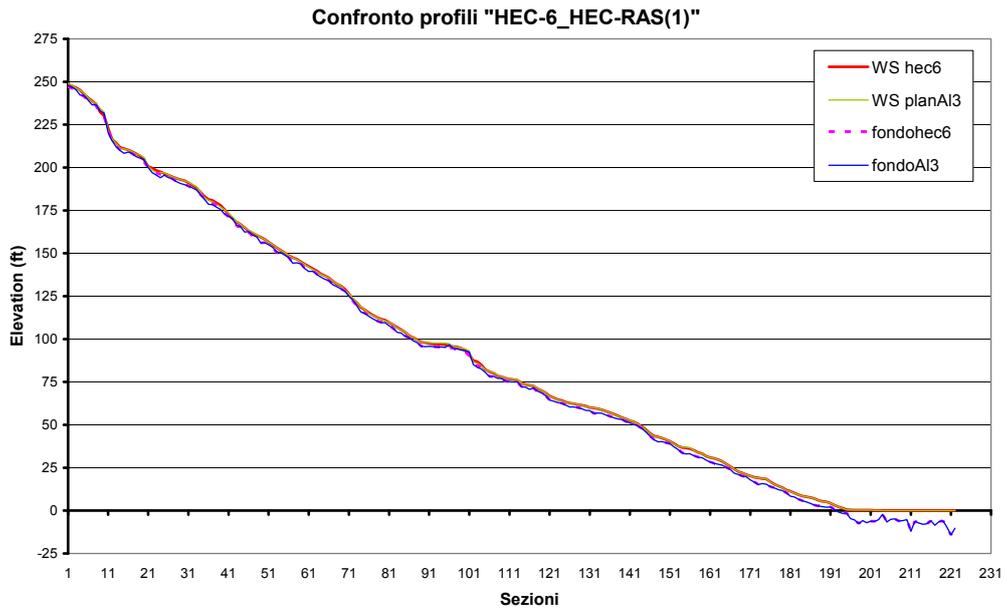
- a) Per il *Quasi-Unsteady Flow* si sono assegnate le condizioni al contorno in corrispondenza della sezione di monte (valore della portata liquida immessa), della sezione di valle (valore del tirante idrico) ed infine in

corrispondenza delle sezioni in cui si hanno immissioni laterali (nelle quali si inserisce il valore della portata liquida immessa);

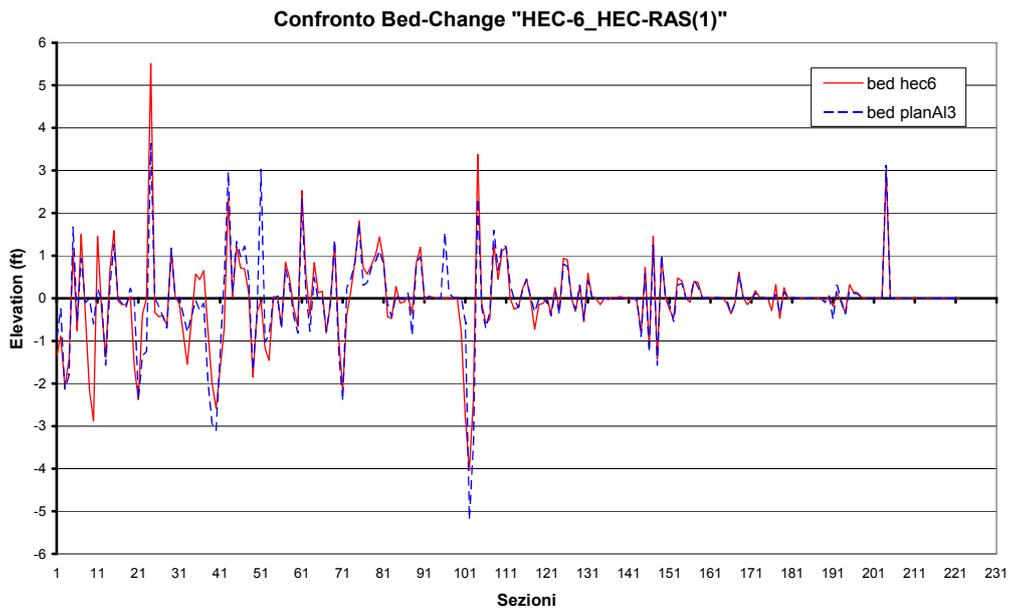
- b) Per i *Sediment Data* è stato necessario inserire le informazioni circa la formula di trasporto solido (in questo caso si è fatto riferimento alla formula di Meyer-Peter e Muller), l'algoritmo per la modellazione del *sorting* e dell'*armouring* (Exner 5), il metodo per il calcolo della velocità di sedimentazione (Report 12, metodo di default in HEC-6), le condizioni al contorno in corrispondenza della sezione di monte e nei punti di immissione (dove vengono assegnati i valori di portata solida immessa).

Inserite tutte le informazioni necessarie si è proceduto alla simulazione. I risultati, ottenuti con i due programmi, mostrano un andamento simile dei profili di corrente (che appaiono quasi sovrapposti) imputabile al fatto che si sono impostate in HEC-RAS le condizioni più simili a quelle di default in HEC-6. Per quanto riguarda le variazioni del fondo, invece, pur in presenza di un andamento simile dei profili, si ottengono valori differenti di erosione/deposito: questo si ritiene sia dovuto al differente modo in cui i due programmi distribuiscono la quantità di materiale eroso /depositato (a tal proposito si veda il paragrafo 3.5 e la Figura 3.7).

In Figura 3.8 si riportano gli andamenti di profili di corrente e di fondo alla fine della simulazione, mentre in Figura 3.9 si riportano le entità delle variazioni del fondo che si registrano al termine della simulazione.

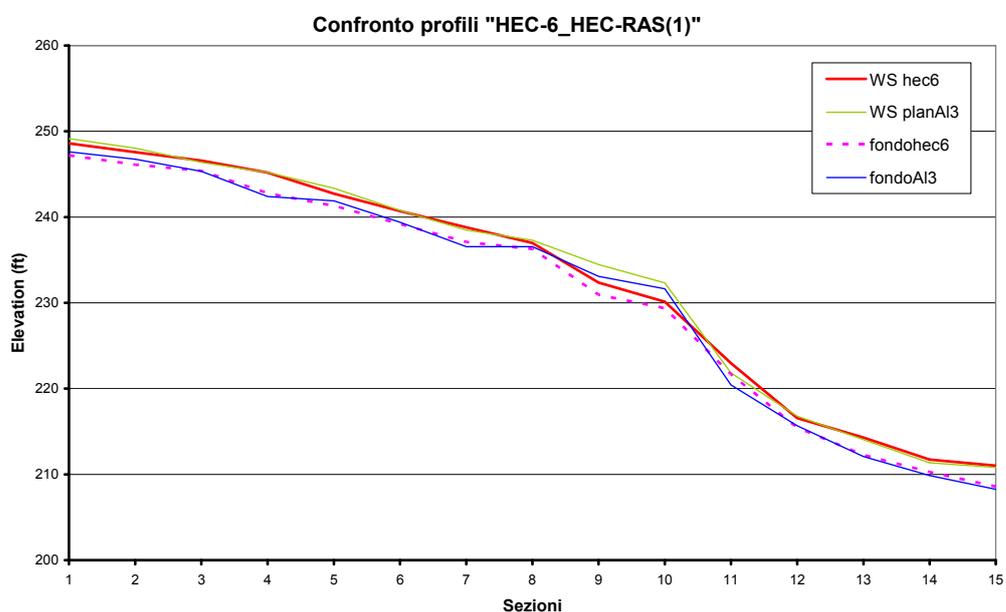


**Figura 3.8** Confronto tra i profili di corrente e di fondo ottenuti con *HEC-6* e *HEC-RAS (1)*

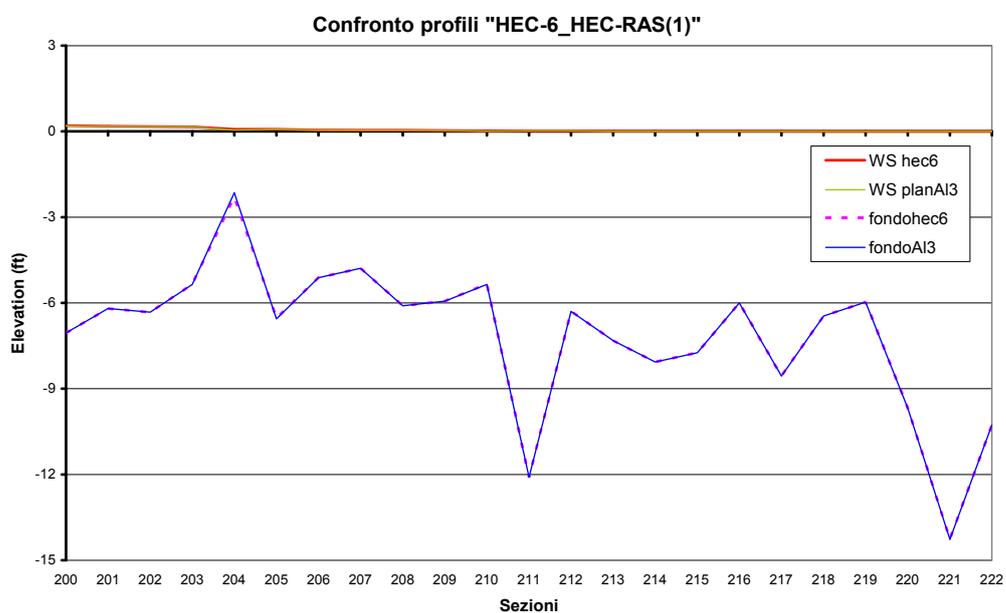


**Figura 3.9** Confronto delle variazioni finali del fondo ottenute con *HEC-6* e *HEC-RAS (1)*

Per evidenziare meglio da un punto di vista grafico quanto detto sul confronto dei risultati ottenuti si riporta un particolare dei profili di corrente e di fondo tra le sezioni 1-15 (Figura 3.10) e le sezioni 200-222 (Figura 3.11).



**Figura 3.10** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 1-15



**Figura 3.11** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 200-222

### 3.7.2 Confronto 2: HEC-6 ed HEC-RAS(2)

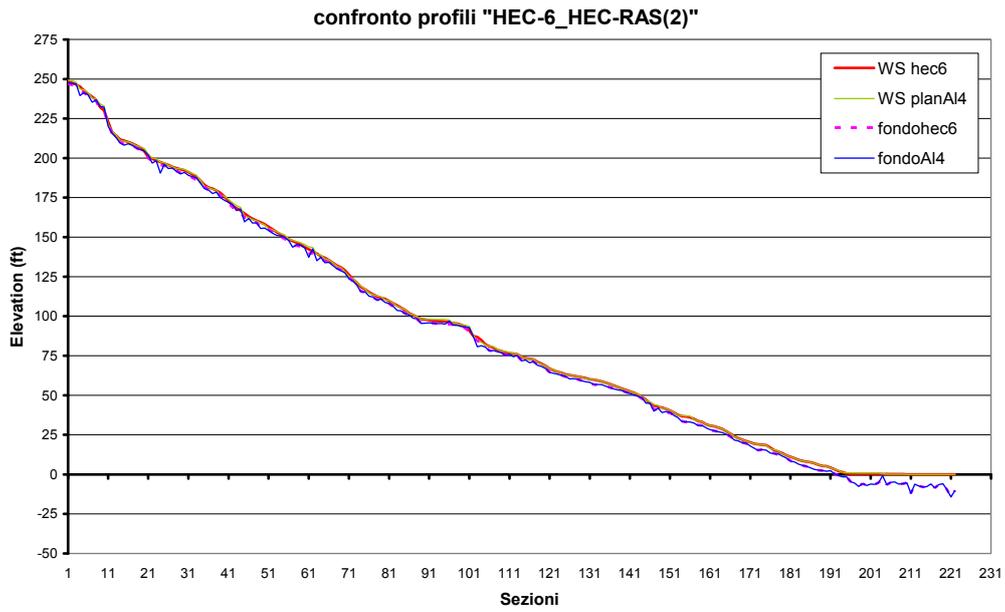
Il secondo confronto tra i risultati ottenuti con HEC-6 e con HEC-RAS è stato effettuato impostando in HEC-RAS le sue proprietà di default, in particolare con riferimento ai valori dei pesi da assegnare per la determinazione dei parametri idraulici ai fini della valutazione della capacità di trasporto e alla modalità di calcolo del “conveyance”.

Le condizioni impostate per il *Quasi-Unsteady Flow* e i *Sediment Data* sono le medesime indicate nei punti a) e b) del paragrafo 3.7.1.

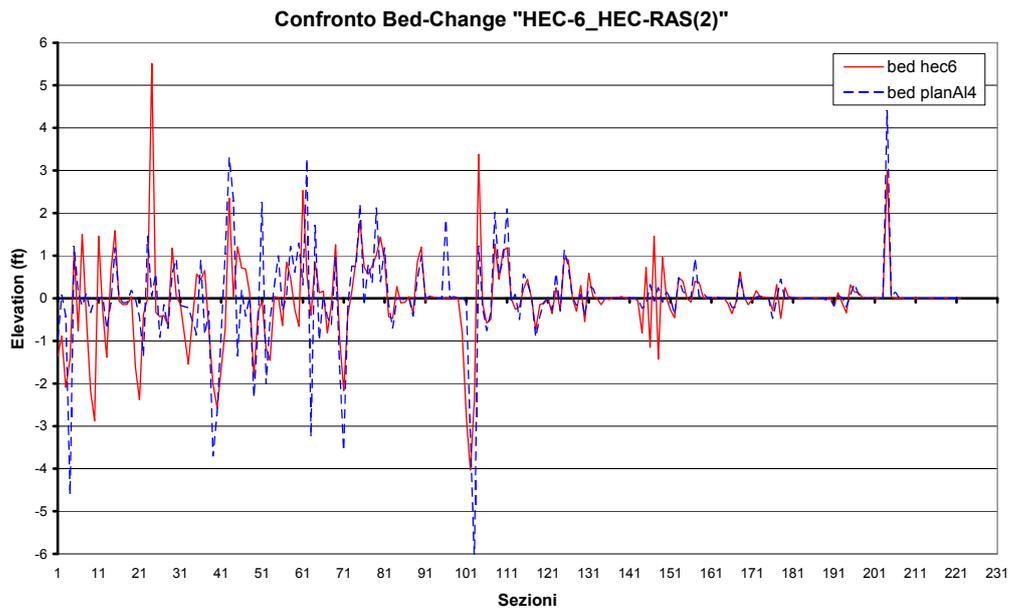
Il confronto dei risultati ottenuti con i due modelli evidenzia che i profili di corrente e di fondo determinati con HEC-RAS risultano differenti da quelli calcolati con HEC-6. In particolare, i profili di HEC-RAS presentano un andamento più spezzato e meno uniforme: ciò si ritiene imputabile, oltre che al diverso modo di distribuire la quantità di materiale eroso/depositato all’interno del volume di controllo, anche ai diversi valori assegnati ai pesi per il calcolo dei parametri idraulici da usare nella formula di trasporto solido (in questo caso, per la determinazione dei parametri idraulici, si tiene conto anche dei valori assunti dagli stessi parametri a monte e a valle della sezione di interesse).

Si può inoltre notare come la variazione finale del fondo presenti un andamento particolarmente disuniforme con picchi molto alti nelle sezioni iniziali e meno evidenti nelle sezioni finali; probabilmente ciò è attribuibile al fatto che a monte i volumi di materiale solido coinvolti nei processi di erosione/deposito risultano maggiori di quelli che si registrano nel tratto di valle.

In Figura 3.12 si riportano gli andamenti di profili di corrente e di fondo alla fine della simulazione, mentre in Figura 3.13 si riportano le entità delle variazioni del fondo che si registrano al termine della simulazione.

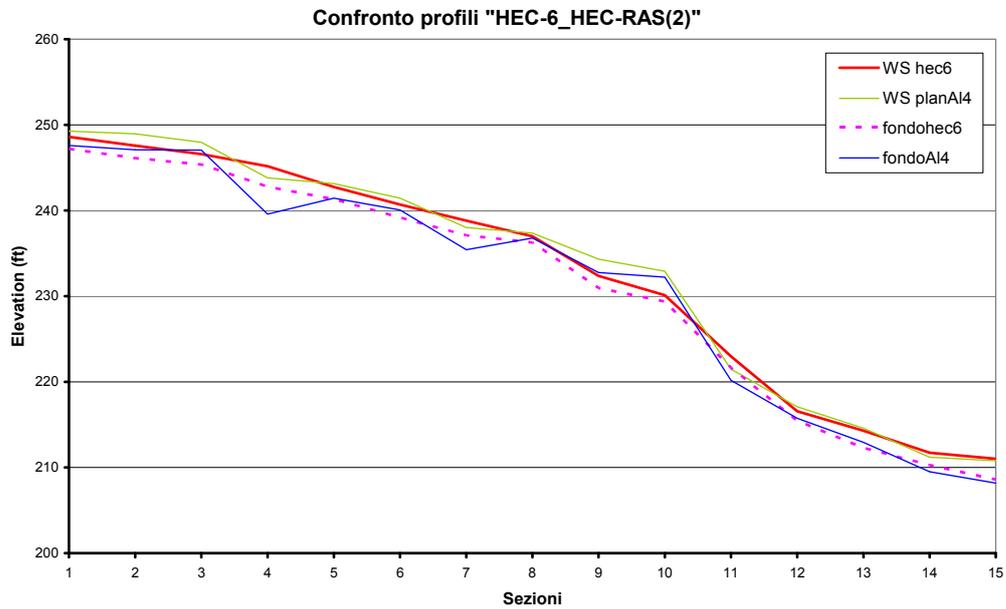


*Figura 3.12 Confronto tra i profili di corrente e di fondo ottenuti con HEC-6 e HEC-RAS (2)*

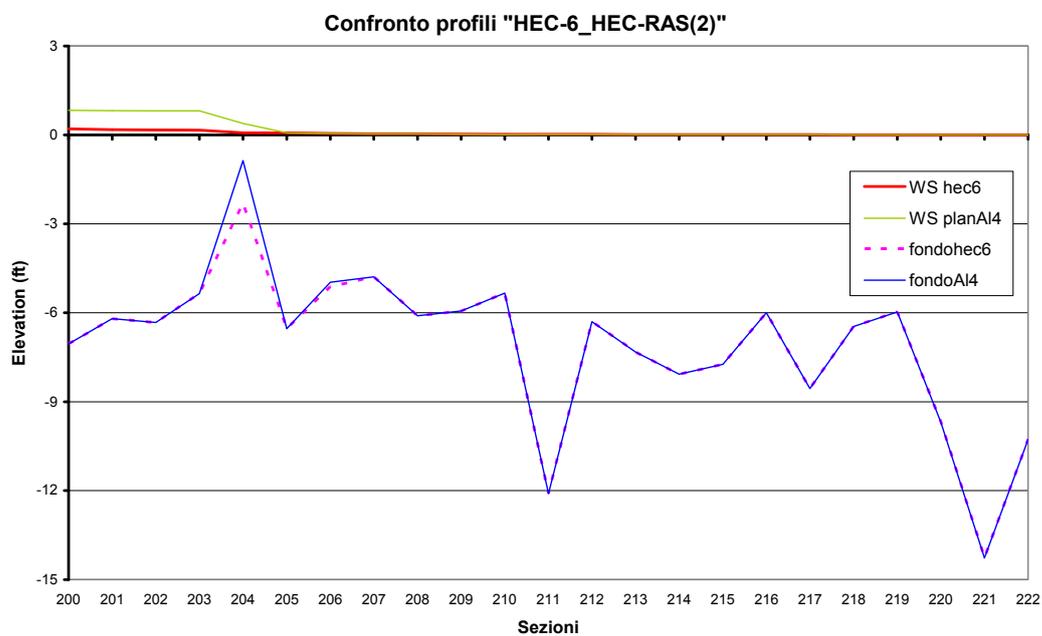


*Figura 3.13 Confronto delle variazioni finali del fondo ottenute con HEC-6 e HEC-RAS (2)*

Per evidenziare meglio da un punto di vista grafico quanto detto sul confronto dei risultati ottenuti si riporta un particolare dei profili di corrente e di fondo tra le sezioni 1-15 (Figura 3.14) e le sezioni 200-222 (Figura 3.15).



**Figura 3.14** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 1-15



**Figura 3.15** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 200-222

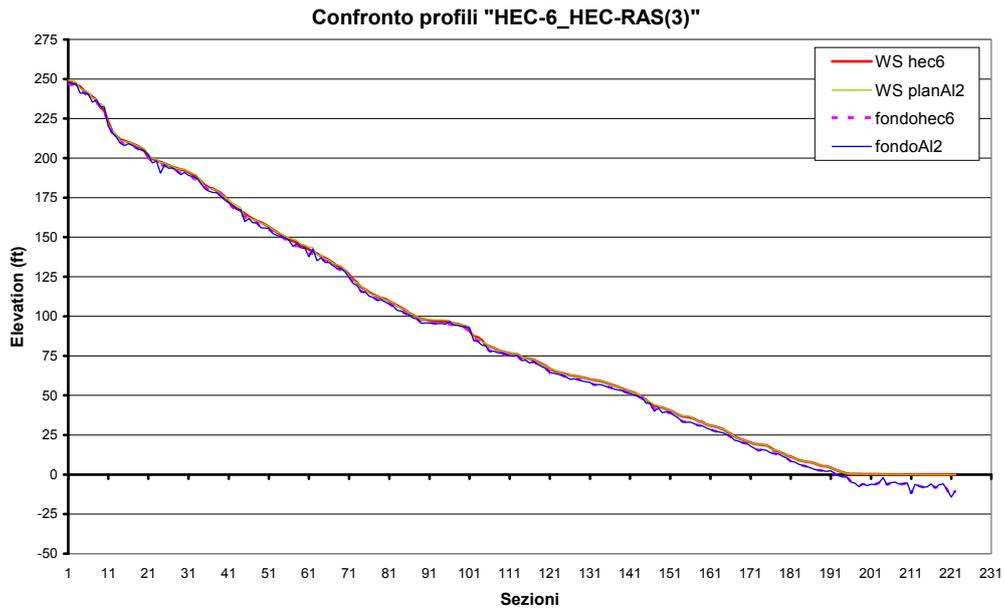
### 3.7.3 Confronto 3: HEC-6 ed HEC-RAS(3)

Il terzo confronto tra i risultati ottenuti con HEC-6 e con HEC-RAS è stato effettuato impostando in HEC-RAS le medesime proprietà che si ritrovano in HEC-6, eccetto che per i valori dei pesi da assegnare per il calcolo dei parametri idraulici, per i quali si è fatto riferimento ai valori definiti di default in HEC-RAS.

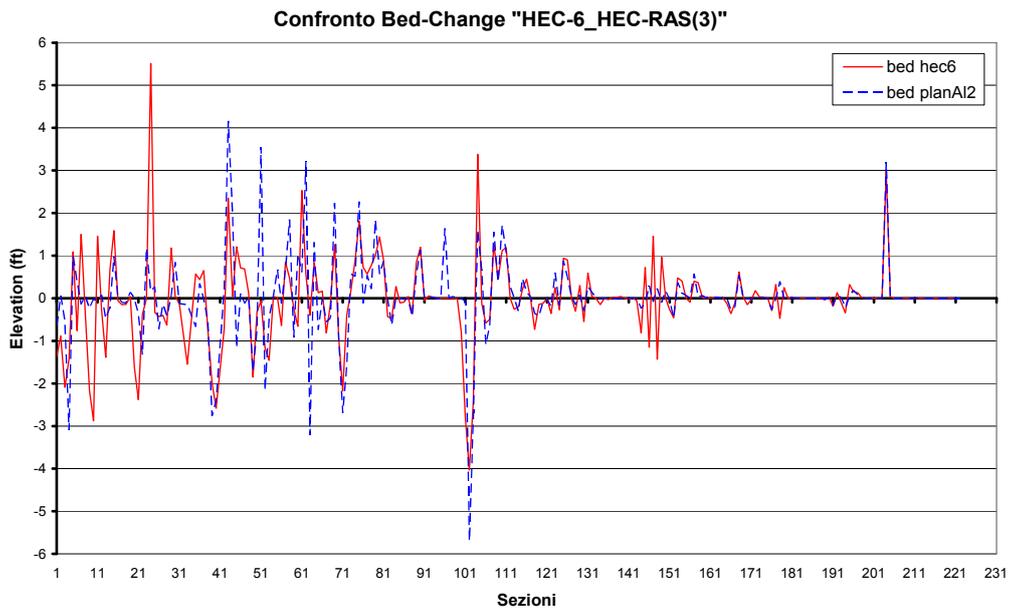
Le condizioni impostate per il *Quasi-Unsteady Flow* e i *Sediment Data* sono le medesime indicate nei punti a) e b) del paragrafo 3.7.1.

Il confronto dei risultati ottenuti con i due programmi mostra come i profili, di corrente e di fondo, seguano andamenti diversi: in particolare, l'andamento dei profili di HEC-RAS risulta essere più spezzato rispetto a quello di HEC-6 (differenza imputabile alla diversa modalità di distribuire la quantità di materiale eroso/depositato all'interno del volume di controllo). Inoltre, gli andamenti dei diagrammi che rappresentano l'entità finale della variazione del fondo, per i due programmi, sono differenti; anche qui vale l'osservazione, già fatta nel paragrafo precedente, riguardo ad un maggiore distacco osservato tra i due diagrammi nella parte iniziale del canale, laddove i volumi in gioco di materiale eroso/depositato risultano più ingenti.

In Figura 3.16 si riportano gli andamenti di profili di corrente e di fondo alla fine della simulazione, mentre in Figura 3.17 si riportano le entità delle variazioni del fondo che si registrano al termine della simulazione.

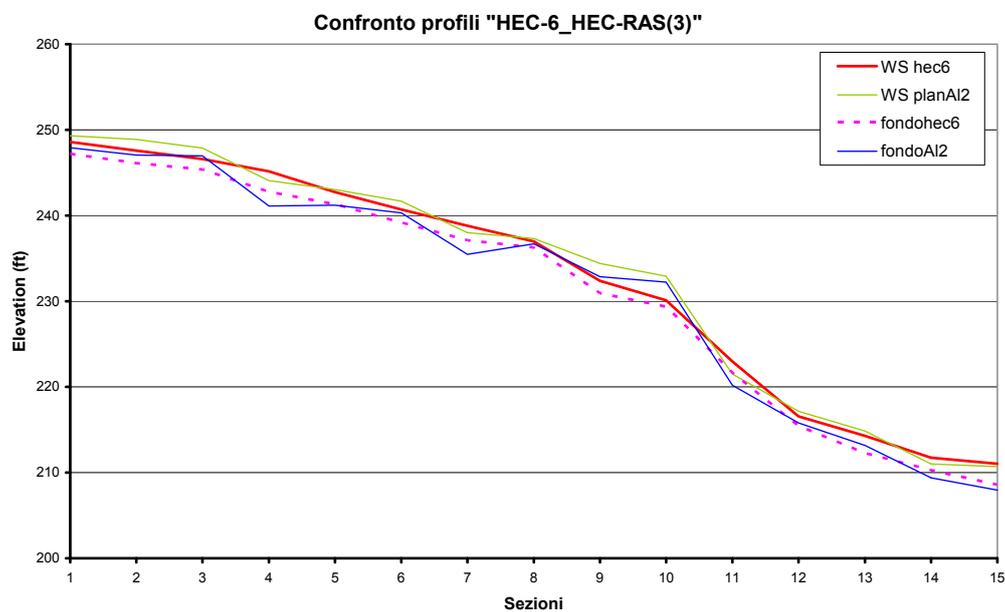


*Figura 3.16 Confronto tra i profili di corrente e di fondo ottenuti con HEC-6 e HEC-RAS (3)*

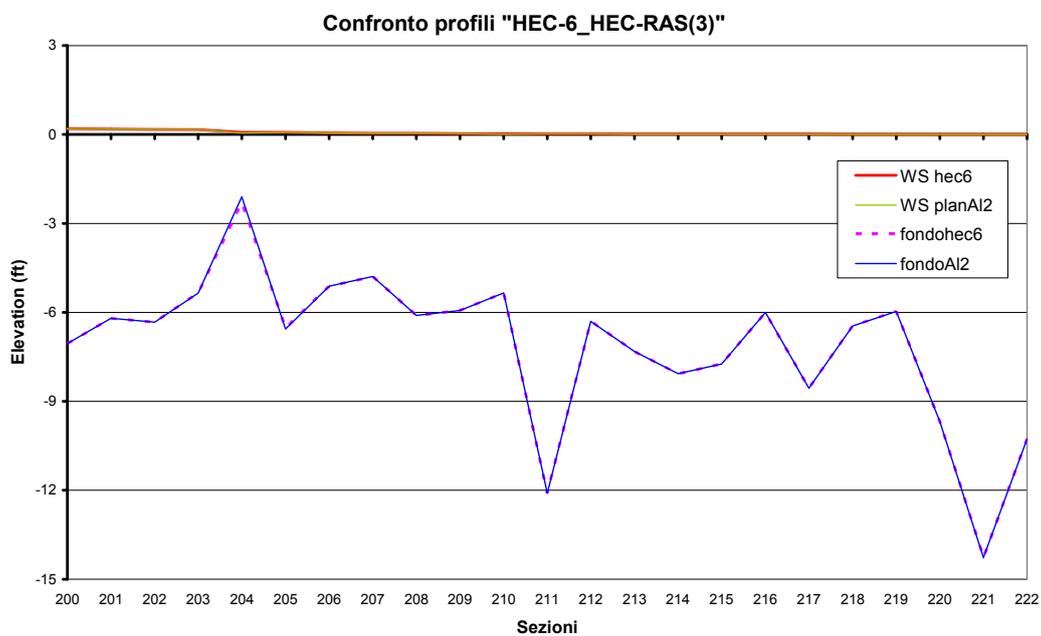


*Figura 3.17 Confronto delle variazioni finali del fondo ottenute con HEC-6 e HEC-RAS (3)*

Per evidenziare meglio da un punto di vista grafico quanto detto sul confronto dei risultati ottenuti si riporta un particolare dei profili di corrente e di fondo tra le sezioni 1-15 (Figura 3.18) e le sezioni 200-222 (Figura 3.19).



**Figura 3.18** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 1-15

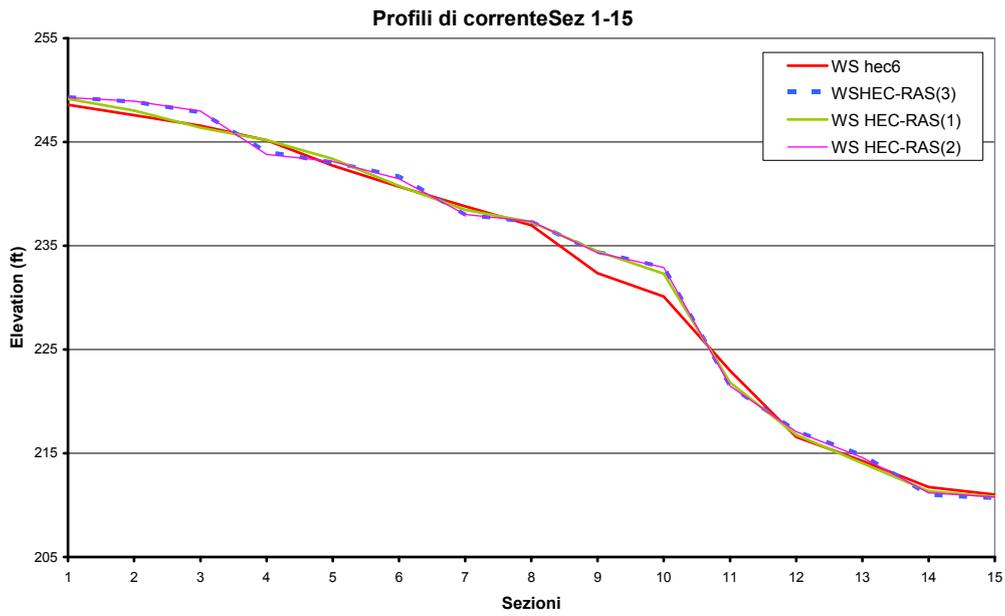


**Figura 3.19** Particolare dei profili di corrente e di fondo nelle sezioni 200-222

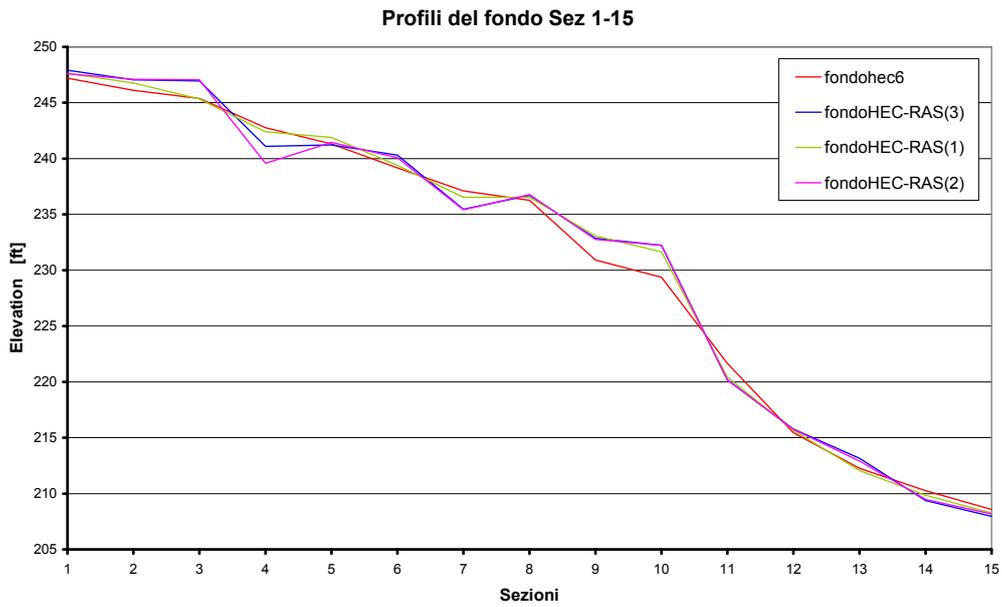
### 3.7.4 Sintesi confronti

Dal confronto effettuato tra le diverse simulazioni appare evidente che la condizione che maggiormente determina una variazione del profilo di corrente e del profilo che descrive la variazione del fondo è legata ai valori assegnati ai fattori di peso usati per la determinazione dei parametri idraulici impiegati nel calcolo della capacità di trasporto. Infatti, è possibile osservare, sia per i profili di corrente, sia per i profili di fondo, sia per gli andamenti delle variazioni finali del fondo, come le linee in rosa e blu, riferite, rispettivamente, alle simulazioni effettuate con HEC-RAS (2) e HEC-RAS (3), siano quasi sovrapposte e si distacchino dalle linee verde e rossa, riferite, rispettivamente, alle simulazioni effettuate con HEC-RAS (1) e HEC-6, che, a loro volta, presentano degli andamenti molto prossimi tra loro. Dato che questi due raggruppamenti di simulazioni (quello relativo all'utilizzo di HEC-RAS (2) - (3) e quello relativo all'utilizzo di HEC-RAS (1) - HEC-6), si differenziano per i valori assegnati ai pesi dei parametri idraulici, sembra opportuno indicare questa come la proprietà che più influisce sui risultati ottenuti.

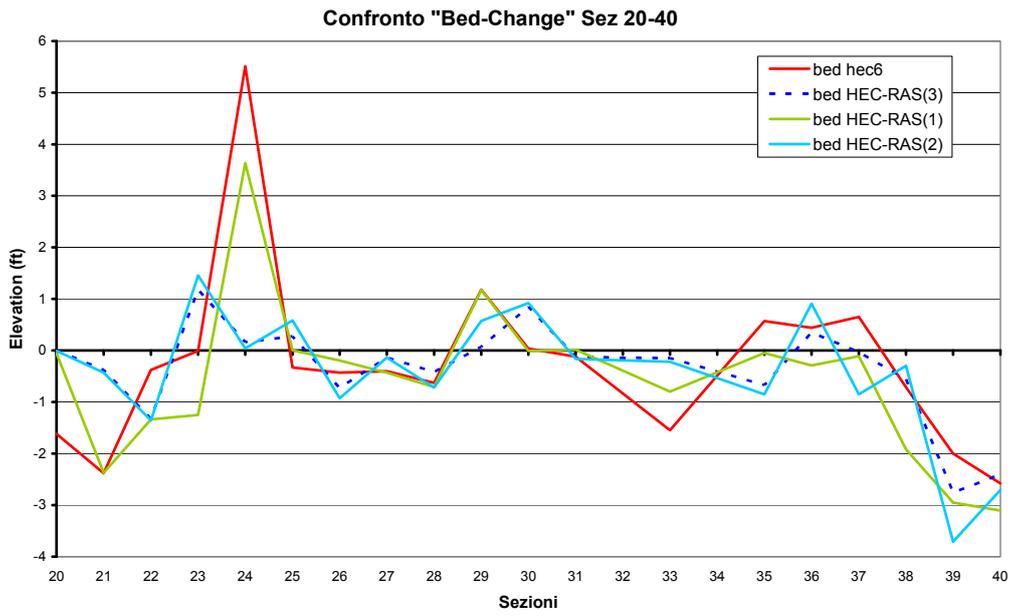
Qui di seguito si riportano dei particolari per i profili di corrente (Figura 3.20) e di fondo (Figura 3.21), tra le sezioni 1-15, e le entità delle variazioni di fondo finali (Figura 3.22), tra le sezioni 20-40.



*Figura 3.20 Particolare dei profili di corrente nelle sezioni 1-15*



*Figura 3.21 Particolare dei profili di fondo nelle sezioni 1-15*



**Figura 3.22 Particolare delle variazioni finali del fondo nelle sezioni 20-40**

## ***4 Applicazioni del modello***

### ***4.1 Introduzione***

In questo capitolo si presentano una serie di simulazioni effettuate con riferimento sia a fenomeni di erosione/deposito che si sviluppano in un canale a pelo libero sia a fenomeni di dam-break su fondo mobile. In particolare, i risultati ottenuti con il codice di calcolo messo a punto vengono confrontati, laddove è possibile, con dati sperimentali e risultati di altri modelli disponibili in letteratura.

### ***4.2 Casi di fenomeni di erosione/deposito che si sviluppano in un canale a pelo libero***

Applicazioni del modello, per fenomeni che si sviluppano su media-lunga scala temporale, sono state effettuate soprattutto ai fini di valutare il corretto funzionamento del modello in casi di cui è ben nota la soluzione numerica. In tale gruppo rientrano:

- Test 1: caso di deflusso in condizioni di equilibrio dinamico, per un canale prismatico di sezione rettangolare;
- Test 2: Sviluppo di un fenomeno erosivo, dovuto ad un apporto solido inferiore alla capacità di trasporto, per un canale prismatico di sezione rettangolare;
- Test 3: Confronto dei risultati ottenuti nei Test 1 e 2 con quelli ottenuti, per i medesimi fenomeni, con HEC-RAS 4.

Altre applicazioni riguardano, invece, il confronto dei risultati del modello, sempre con riferimento all'innescò e allo sviluppo di fenomeni di erosione/deposito in canali a pelo libero, con altri risultati numerici e dati

sperimentali presenti in letteratura. In particolare, si è fatto riferimento ai dati sperimentali ottenuti da Soni et al. (1980), che riguardano lo sviluppo di un fenomeno di deposito in un canale rettangolare, dovuto ad un apporto solido da monte superiore alla capacità di trasporto.

#### **4.2.1 Test 1: deflusso in condizioni di equilibrio dinamico**

Per prima cosa si è voluto effettuare un semplice test per verificare la capacità del modello di rispettare la condizione di equilibrio dinamico del trasporto solido, nel caso di una portata solida immessa congruente con le caratteristiche geometriche e idrauliche dell'alveo in esame e con le caratteristiche fisiche (diametro, densità) del materiale solido considerato. In condizioni di equilibrio dinamico, infatti, ci si aspetta la presenza di un trasporto solido nella corrente idrica pari alla capacità di trasporto con conseguente mancanza di fenomeni di erosione/deposito (nell'equazione di adattamento (2.18) essendo  $C_* = C$  si ha  $\partial\sigma_b / \partial t = 0$ ).

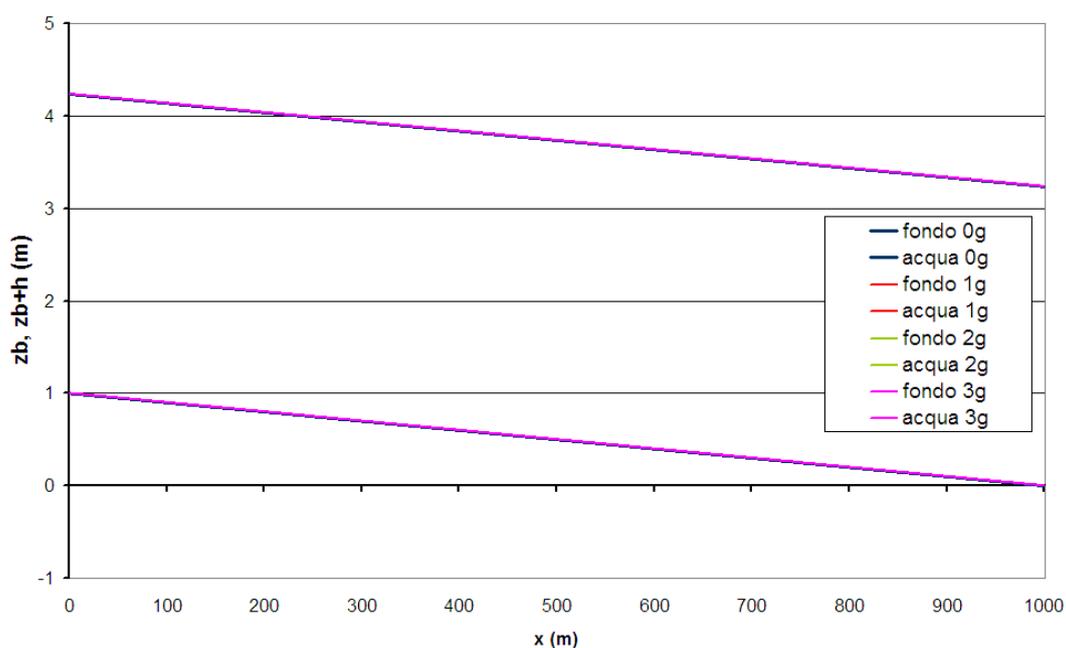
Quindi con riferimento ad un canale di sezione rettangolare in condizioni di equilibrio dinamico del trasporto solido, si vuole verificare l'immodificabilità del profilo di fondo nel caso in cui persistano al contorno delle condizioni (in termini di portata liquida, portata solida e tirante idrico) consistenti con quelle dello stato iniziale di equilibrio dinamico.

In particolare, si è fatto riferimento al caso di un canale prismatico lungo 1000m, avente una sezione rettangolare di larghezza 6m e altezza 5m e caratterizzato da una pendenza del fondo dello 0.1%. Le caratteristiche del materiale solido posto sul fondo sono: diametro ( $d_{50}$ ) di 1.5mm, densità ( $\rho_s$ ) di 2650 kg/m<sup>3</sup> e porosità ( $p$ ) di 0.53. Come condizioni al contorno si considerano: a monte, una portata liquida immessa di 25 m<sup>3</sup>/s e una portata solida immessa di 0.00498 m<sup>3</sup>/s (pari alla capacità di trasporto per il canale in esame); a valle, un tirante di 3.2367 m (pari al tirante di moto uniforme per il canale in esame).

Le condizioni iniziali assegnate sono quelle di moto uniforme e di concentrazione solida di equilibrio dinamico.

Inoltre nell'ambito del modello è stata utilizzata la formula di Meyer-Peter e Muller per la valutazione della capacità di trasporto e la formula di Gauckler-Strickler per la valutazione della Slope Friction.

I risultati ottenuti dalla simulazione, per un arco temporale di 3 giorni, sono di seguito qui mostrati (Figura 4.1)



*Figura 4.1 Profili di corrente e di fondo a 0g, 1g, 2g e 3g*

La condizione iniziale di equilibrio dinamico si mantiene nel tempo, così come si evidenzia dai risultati ottenuti: i profili del pelo libero e del fondo, riferiti a diversi istanti temporali (1 giorno, 2 giorni e 3 giorni) vengono a sovrapporsi perfettamente con i profili relativi alla condizione iniziale.

#### **4.2.2 Test 2: fenomeno erosivo in un canale rettangolare**

In questa seconda applicazione del programma si è voluta testare la capacità del modello nel riprodurre il comportamento fisico atteso nel caso di un ingresso di portata solida, in un canale rettangolare, diverso dal valore della

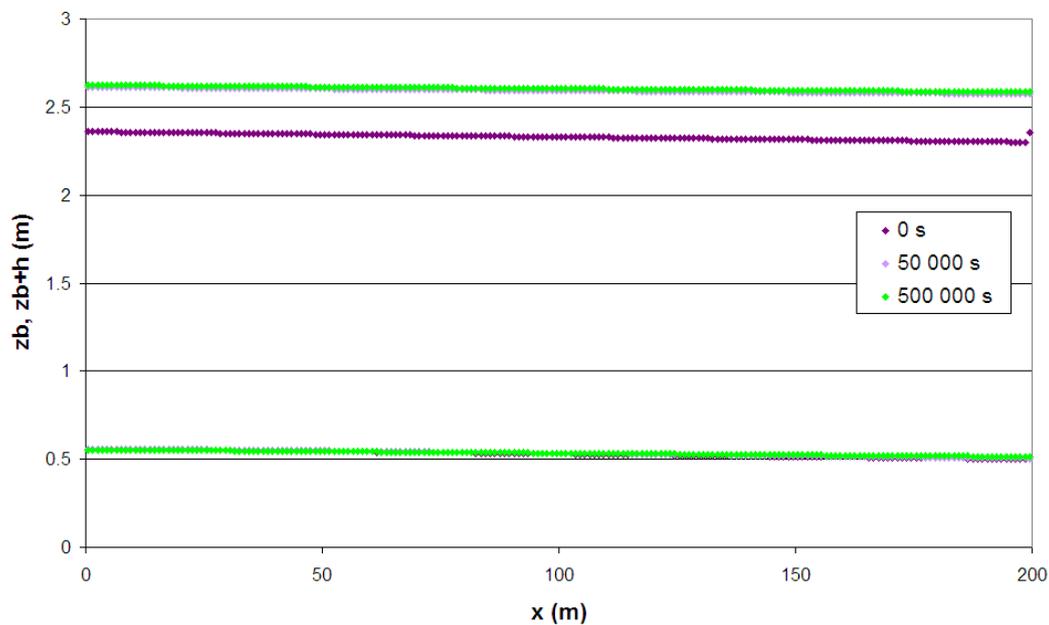
portata solida d'equilibrio. È noto, infatti, che se immettiamo a monte una portata solida maggiore o minore della capacità di trasporto, legata alle caratteristiche geometriche ed idrauliche del canale, si perturberanno le condizioni di equilibrio del canale e si innescheranno, dunque, fenomeni di deposito o di erosione. Introducendo questo valore di portata solida in maniera costante nel tempo, il sistema, in disequilibrio, tenderà a riportarsi in una nuova condizione di equilibrio, consistente con il valore di portata solida immessa. Con riferimento, quindi, ad una sezione rettangolare, si avrà una modifica del profilo di fondo tale che, dopo un certo intervallo di tempo, da un valore di pendenza di equilibrio (pendenza iniziale) si raggiungerà un nuovo valore di pendenza di equilibrio.

Il canale considerato, caratterizzato da una sezione rettangolare di larghezza 9m e altezza 10m, è lungo 200m e la pendenza del fondo è dello 0.03%. Le caratteristiche del materiale solido posto sul fondo sono: diametro ( $d_{50}$ ) di 1.4mm, densità ( $\rho_s$ ) di 2650 kg/m<sup>3</sup> e porosità ( $p$ ) di 0.53. Come condizioni al contorno si considerano: a monte, una portata liquida immessa di 25 m<sup>3</sup>/s e una portata solida immessa di 0.000316 m<sup>3</sup>/s (pari alla capacità di trasporto per un canale analogo a quello considerato, ma avente una pendenza del fondo dello 0.02%); a valle, un tirante di 2.07 m (pari al tirante di moto uniforme per un canale analogo a quello considerato, ma avente una pendenza del fondo dello 0.02%). Le condizioni iniziali assegnate sono quelle di moto uniforme e di concentrazione solida di equilibrio dinamico per il canale considerato (con pendenza dello 0.03%).

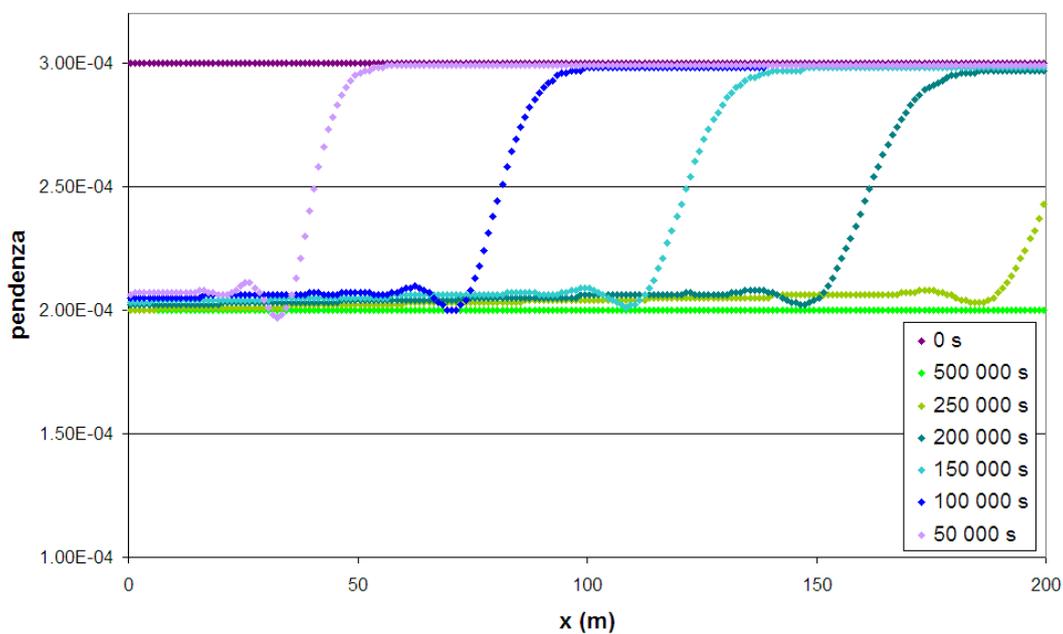
Inoltre nell'ambito del modello è stata utilizzata la formula di Meyer-Peter e Muller, per la valutazione della capacità di trasporto, e la formula di Gauckler-Strickler, per la valutazione della Slope Friction.

Quello che ci si attende in questa simulazione è il raggiungimento, dopo un certo intervallo di tempo, di una nuova condizione di equilibrio dinamico

(quella per il canale avente pendenza dello 0.02%). I risultati della simulazione vengono mostrati qui di seguito sia in termini di profili di pelo libero e di fondo (Figura 4.2) sia in termini di pendenza di fondo (Figura 4.3)



*Figura 4.2 Evoluzione dei profili di corrente e di fondo*



*Figura 4.3 Evoluzione nel tempo della pendenza del fondo*

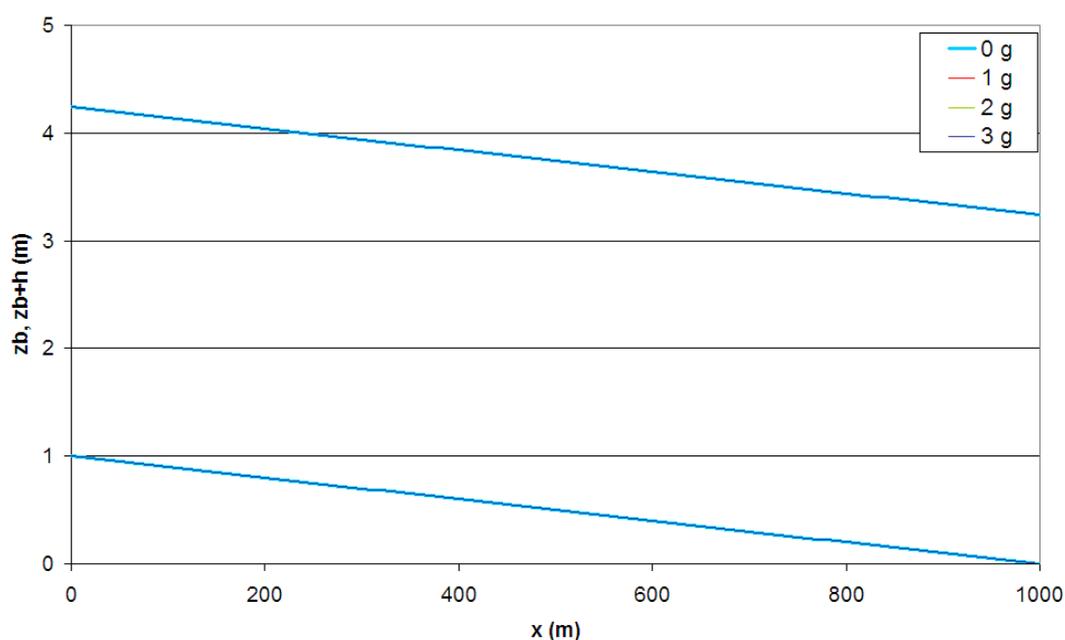
Dalla Figura 4.3 si evince come dopo un intervallo temporale di 500000 s (pari a circa 6 giorni) si assiste al raggiungimento di una pendenza dello 0.02% (nuova pendenza di equilibrio dinamico), così come ci si aspettava.

#### 4.2.3 Test 3: confronto, per i test 1 e 2, con i risultati ottenuti con HEC-RAS 4

Si fa riferimento al test 1; si vuole simulare il medesimo fenomeno con l'ausilio di HEC-RAS 4.

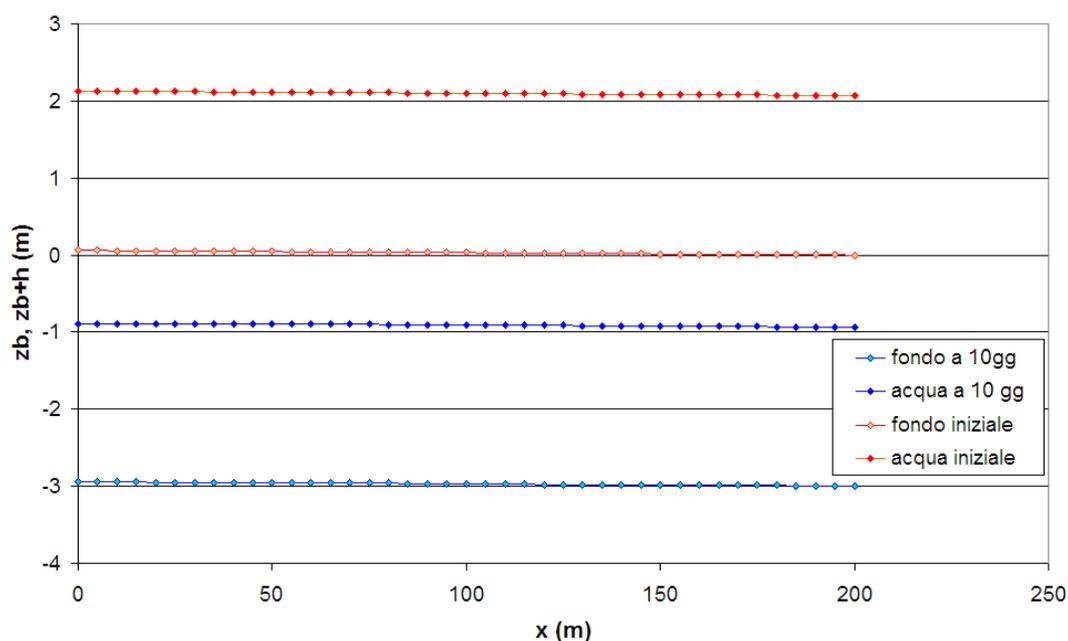
Per quanto concerne il caso considerato nel test 1, assegnando in HEC-RAS come condizioni al contorno: a monte, portata liquida di  $25 \text{ m}^3/\text{s}$  e portata solida pari alla capacità di trasporto del canale (calcolata con la formula di Meyer-Peter e Muller) e, a valle, il tirante di moto uniforme, otteniamo i risultati di seguito riportati in Figura 4.4.

Dalla Figura 4.4 è possibile osservare come la condizione di equilibrio dinamico per il trasporto solido permanga nel tempo, in accordo con le condizioni al contorno assegnate al sistema.



**Figura 4.4** Evoluzione dei profili di pelo libero e di fondo ottenuti con HEC-RAS

Consideriamo poi il caso analizzato nel test 2. Per quanto concerne questo secondo caso applicativo, assegnando in HEC-RAS come condizioni al contorno: a monte, portata liquida di  $25 \text{ m}^3/\text{s}$  e portata solida di  $0.000316 \text{ m}^3/\text{s}$  (pari alla capacità di trasporto, calcolata con la formula di Meyer-Peter e Muller, con riferimento ad una pendenza del fondo dello 0.02%) e, a valle, il tirante di moto uniforme (per una pendenza del fondo dello 0.02%), otteniamo i seguenti risultati in termini di profili di corrente e di fondo, mostrati in Figura 4.5. I risultati finali della simulazione mostrano un'elevatissima escavazione (di circa 3m) che si realizza lungo l'intero canale, la quale appare poco ammissibile fisicamente. Inoltre, nonostante le condizioni al contorno assegnate siano relative ad un valore di pendenza di equilibrio dinamico dello 0.02%, il valore della pendenza finale non cambia: anche se si registra un fenomeno erosivo, la pendenza è sempre dello 0.03%.



**Figura 4.5** Evoluzione dei profili di pelo libero e di fondo ottenuti con HEC-RAS

Questo secondo test mette in luce le attuali difficoltà di HEC-RAS 4 nell'effettuare correttamente analisi di trasporto solido; difficoltà dovute, molto probabilmente, alla recente introduzione del modulo di trasporto solido

all'interno di HEC-RAS e che potranno essere superate nelle eventuali future versioni del programma.

#### 4.2.4 Soni et al. (1980)

Gli esperimenti condotti da Soni et al. nel 1980 nel Hydraulics Laboratory della University of Roorke, fanno riferimento al caso di un fenomeno di deposito che si realizza in un canale a seguito di un sovraccarico di materiale solido immesso a monte.

Il canale utilizzato è largo 0.2m e lungo 30m. I sedimenti sono caratterizzati da un diametro medio di 0.32 mm, porosità 0.4.

La capacità di trasporto per unità di larghezza  $q_{seq}$  viene calcolata in funzione della velocità  $U$ , in particolare è stata adottata una formula del tipo:

(4.1)	$q_{seq} = aU^b$
-------	------------------

con i parametri, calibrati a partire dagli esperimenti realizzati, che valgono:

(4.2)	$a = 0.00145$ $b = 5$
-------	--------------------------

Il fenomeno di deposito, che si genera nel canale, si realizza considerando a monte una portata solida immessa per unità di larghezza  $q_s$ , ottenuta incrementando il valore della portata solida d'equilibrio per unità di larghezza,  $q_{seq}$ , di una quantità  $\Delta q_s$  pari a:

(4.3)	$\Delta q_s = 4 \cdot q_{seq}$ ;
-------	----------------------------------

quindi, la portata solida effettiva immessa a monte è:

(4.4)	$Q_s = (q_{seq} + \Delta q_s)B$ ;
-------	-----------------------------------

dove con  $B$  si indica la larghezza del canale.

La portata d'equilibrio  $q_{seq}$  è calcolata mediante la (4.1) con riferimento ai valori iniziali di tirante  $h_o$ , velocità  $U_o$  e pendenza  $S_o$  di:

(4.5)	$h_o = 0.05m$
	$U_o = 0.4m/s$
	$S_o = 0.00356$

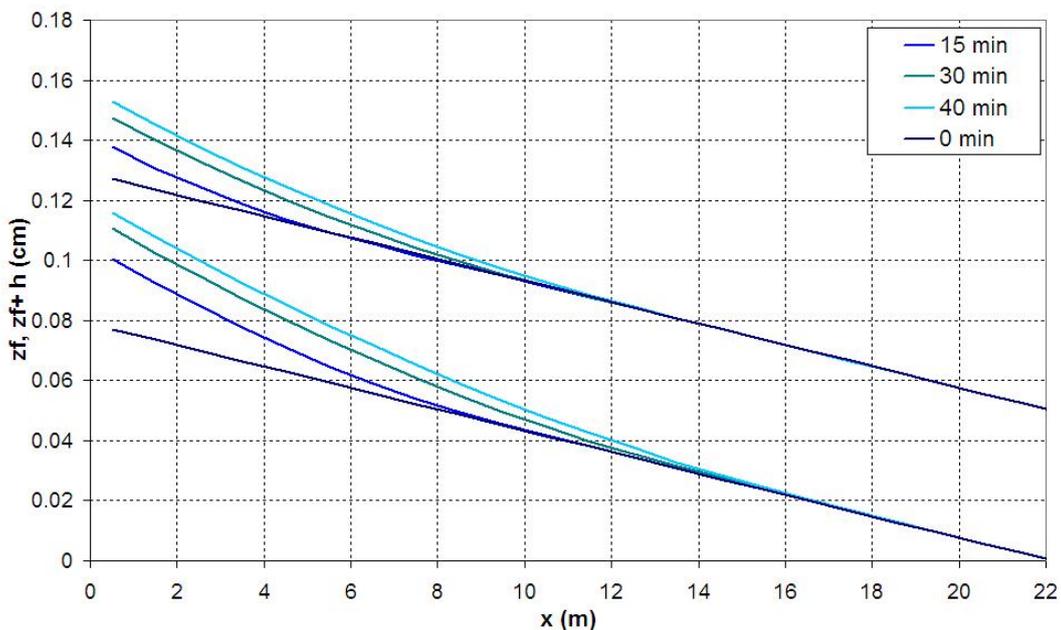
La Slope Friction  $S_f$  viene determinata attraverso la relazione di Darcy-Weisbach:

(4.6)	$S_f = \frac{U^2 f}{8gh}$ ;
-------	-----------------------------

dove il coefficiente di resistenza  $f$  è costante ed è pari a  $f_o$ , valore del coefficiente di resistenza valutato con riferimento alle condizioni idrauliche iniziali ( $h_o, U_o, S_o$ ).

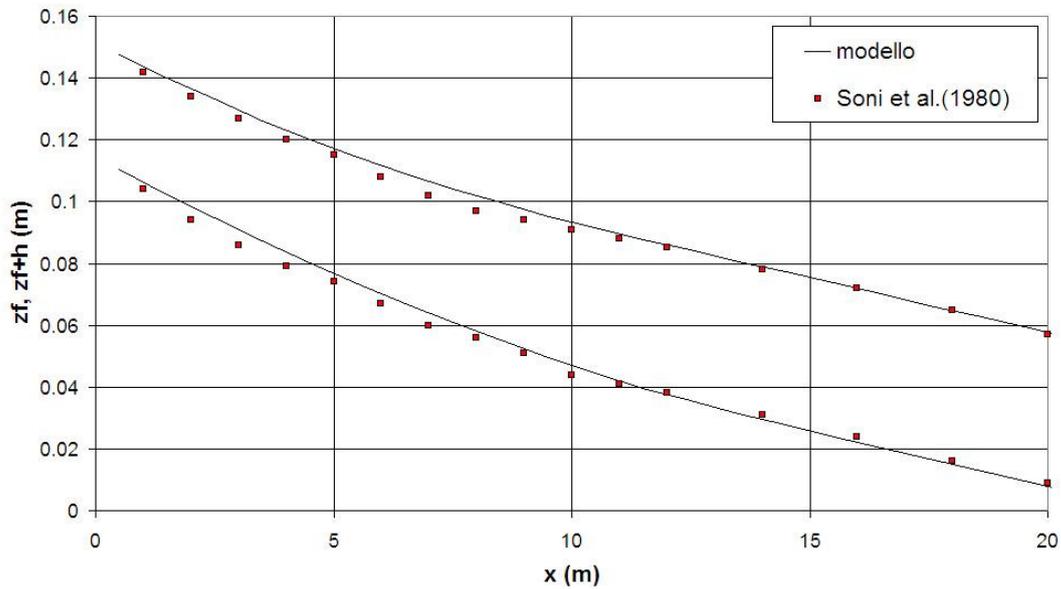
Come condizioni al contorno, per l'acqua, si considera una portata liquida immessa, a monte, pari a  $Q_l = 0.004m^3/s$  e un tirante, a valle, pari a  $h_o$ .

Qui di seguito in Figura 4.6 è riportata l'evoluzione nel tempo dei profili di pelo libero e di fondo, ottenuti con il modello numerico.

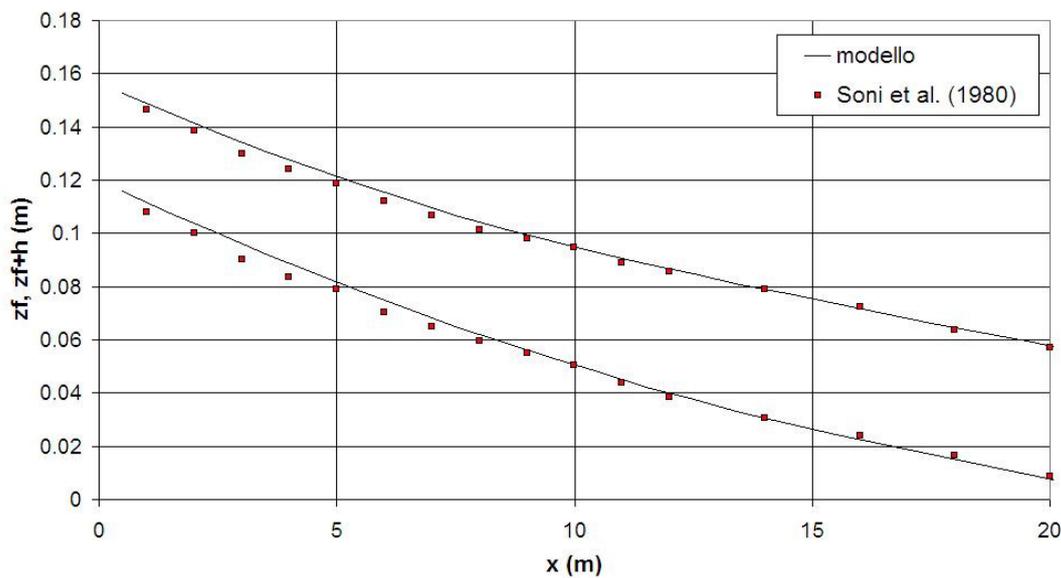


**Figura 4.6** Evoluzione nel tempo dei profili di pelo libero e di fondo

I risultati numerici ottenuti sono poi confrontati con i risultati sperimentali osservati dopo 30 minuti (Figura 4.7) e 40 minuti (Figura 4.8) di simulazione.



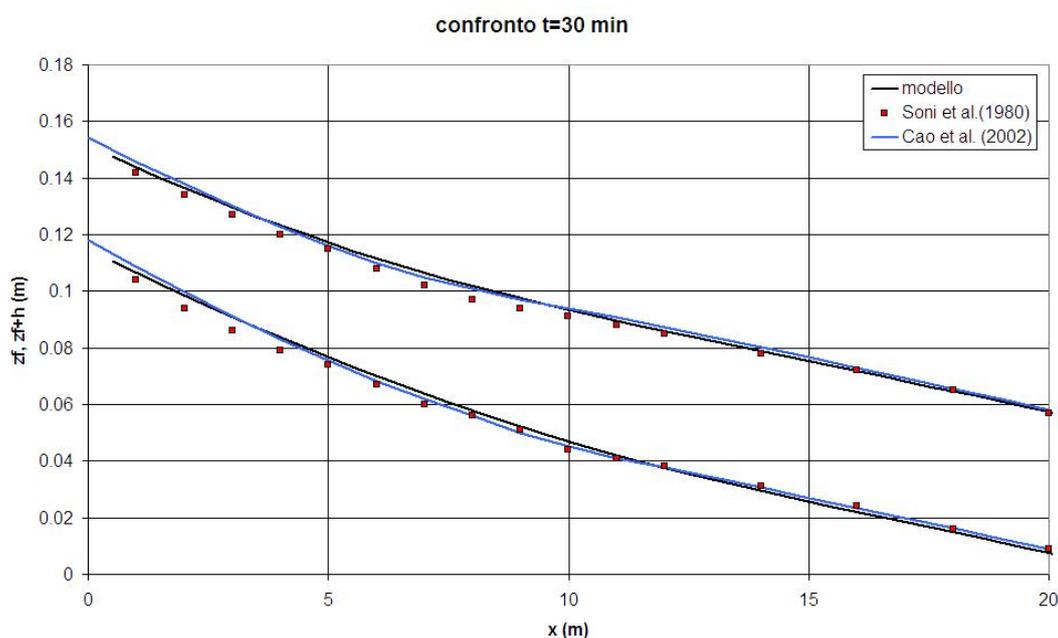
**Figura 4.7 -Confronto tra i risultati e i dati sperimentali dopo 30 minuti di simulazione**



**Figura 4.8 Confronto tra i risultati e i dati sperimentali dopo 40 minuti di simulazione**

Il confronto tra dati sperimentali e numerici mostra la buona capacità del modello nel riprodurre i dati sperimentali per quanto riguarda l'andamento sia del profilo di corrente del profilo di fondo.

Effettuando, poi, il confronto anche con i risultati numerici ottenuti con in modello numerico di Cao et al., (2002), mostrato in Figura 4.9, viene confermata la buona attendibilità dei risultati ottenuti con il modello oggetto della Tesi di Dottorato, anche in relazione ad altri modelli numerici.



**Figura 4.9** Confronto tra i risultati numerici, ottenuti con il modello oggetto della tesi con il modello di Cao et al. (2002), e i dati sperimentali dopo 30 minuti di simulazione

### ***4.3 Casi di Dam-Break***

Tra i fenomeni, in campo idraulico, più analizzati in letteratura scientifica, vi sono quelli di dam-break; le analisi di dam-break si effettuano in fase di progettazione di una diga e sono volte allo studio degli effetti che si hanno a seguito della rottura di una diga e della propagazione a valle della conseguente onda di piena che viene a generarsi, tutto ciò al fine di salvaguardare l'incolumità di persone e cose nel caso di un evento così catastrofico. In analisi di questo tipo si rende, inoltre, necessario considerare la possibilità che l'onda di piena dia vita, su di un fondo mobile (così come in generale è nella realtà), dapprima a forti fenomeni erosivi, con una forte escavazione ed un'elevata quantità di materiale solido che viene ad essere trasportato all'interno della corrente idrica, e poi, più a valle, a seguito di una riduzione della velocità della corrente, a rilevanti fenomeni di deposito, i quali possono costituire un'aggravante ai danni già causati dalla sola propagazione dell'onda di piena.

Da qui la necessità, nel campo tecnico e della ricerca, di studiare in maniera opportuna tali fenomeni e di mettere a punto degli strumenti in grado di simularne il comportamento. In particolare per quanto concerne lo studio di fenomeni di dam-break sono diverse le analisi effettuate in laboratorio con l'ausilio di modelli fisici su piccola scala (Capart e Young, 1998; Spinewine e Zech, 2007; Palumbo et al., 2008) nelle quali la rottura della diga è simulata con la rapida apertura di una paratoia. Numerosi sono poi, in letteratura, i modelli numerici atti a simulare fenomeni di questo tipo, il più delle volte testati attraverso la riproduzione dei dati sperimentali derivanti dagli studi sopra citati (Caleffi e Valiani, 2002; Fracarollo et al., 2003; Cao et al., 2004; Palumbo et al. 2006).

I modelli di trasporto solido per l'analisi di dam-break su fondo mobile sono di diverso tipo: alcuni sono caratterizzati da una suddivisione della corrente in più strati, costituiti, dall'alto verso il basso, da acqua limpida, da un miscuglio di acqua e sedimenti e dal materiale solido al fondo (Capart e Young, 2002; Fraccarollo e Capart, 2002; Fraccarollo et al., 2003; Leal et al., 2003; Spinewine e Zech, 2005; Ferreira et al. 2006); altri modelli (Cao et al., 2004; Costabile e Macchione, 2006), data l'elevata concentrazione di materiale solido che caratterizza la corrente liquida nel caso di dam break, fanno riferimento a studi relativi all'analisi dei fenomeni di erosione e deposito nei casi di debris flow (Rickenmann, 1989; Jin, Fread, 1997; Ghilardi et al., 1999; Brufau et al., 2000).

Appare comunque abbastanza evidente, dai lavori sopracitati, che una corretta simulazione di fenomeni di questo tipo richiede l'utilizzo di modelli in grado di tener conto del trasporto solido in condizioni di non equilibrio e caratterizzati dall'adozione di una tecnica di tipo accoppiato per la risoluzione delle equazioni alla base del modello.

Da quanto detto è facile intuire della necessità di un modello di moto vario molto robusto per la simulazione di fenomeni di questo tipo ed, inoltre, è evidente che la metodologia con cui si realizza in HEC-RAS un'analisi di trasporto solido (attraverso una successione di moti permanenti) non è idonea a simulare un fenomeno come quello di dam-break che si sviluppa in un arco di tempo molto breve e nel quale si assiste ad una variazione repentina dei parametri idraulici caratteristici della corrente defluente in alveo (velocità, tiranti, concentrazioni solide, ecc.).

Per mostrare la capacità del modello nel simulare un fenomeno di dam-break su fondo mobile si è provveduto ad effettuare delle simulazioni tese alla riproduzione dei dati ottenuti nelle esperienze realizzate da Capart e Young (1998) e da Spinewine e Zech (2007). Accanto al confronto con i dati

sperimentali, presenti nei lavori sopracitati, facenti tutti riferimento a fenomeni di dam-break su fondo asciutto, si è voluto applicare il modello anche al caso di un fenomeno di dam-break su fondo bagnato: in questo caso, data l'assenza di dati sperimentali in merito, si è effettuato un confronto con i risultati ottenuti da modelli numerici (Caleffi e Valiani, 2002).

#### **4.3.1 Capart e Young (1998)**

Il primo caso di dam-break simulato fa riferimento agli esperimenti condotti da Capart e Young (1998).

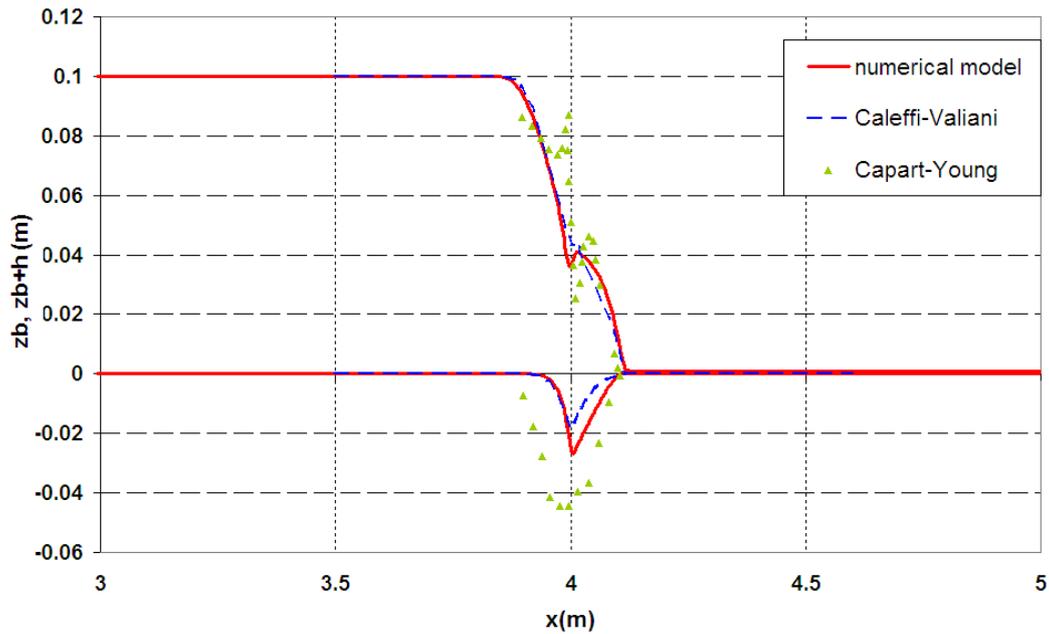
Tali esperimenti sono stati eseguiti in una canaletta lunga 12 m, alta 0.7 m e larga 0.2 m.

Il dam-break viene simulato mediante l'apertura, supposta istantanea, di una paratoia, posta a 4m dall'inizio del canale.

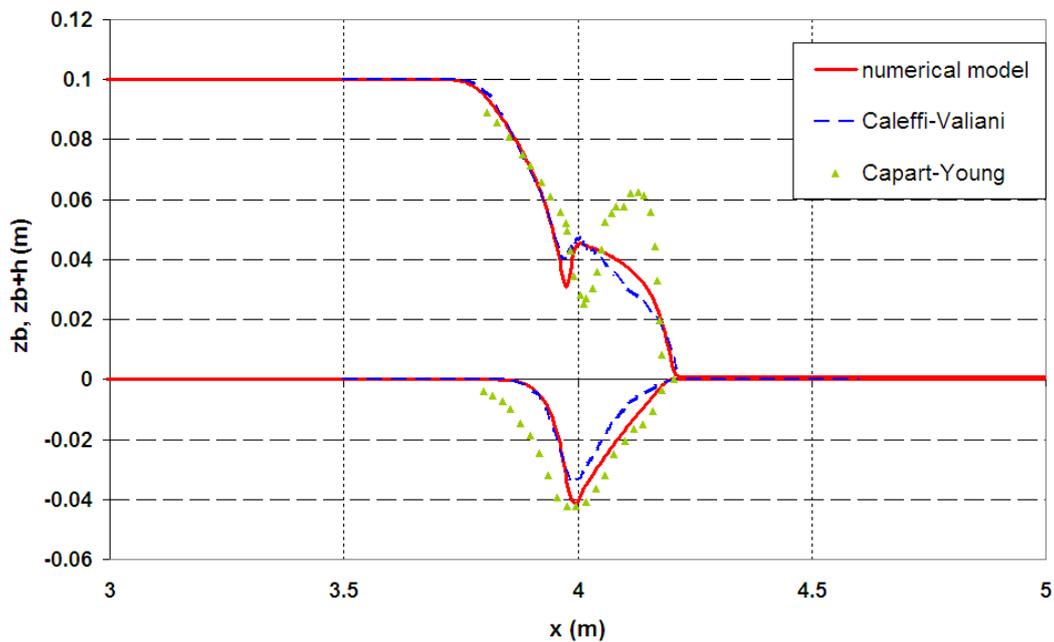
Il materiale solido trasportato e costituente il fondo è costituito da sfere artificiali di diametro di 6.1mm il cui peso specifico rapportato a quello dell'acqua è pari a 1.048 e la cui velocità di sedimentazione è pari a 7.6 cm/s. Si assume uno strato iniziale di particelle solide alto 0.06 m e caratterizzato da una porosità pari a 0.6 .

Nella modellazione del fenomeno di dam-break su fondo asciutto il livello iniziale dell'acqua è assunto: a monte della paratoia, pari a 0.10m, mentre a valle è considerato coincidente con quello più alto dello strato di materiale solido che riveste il fondo del canale.

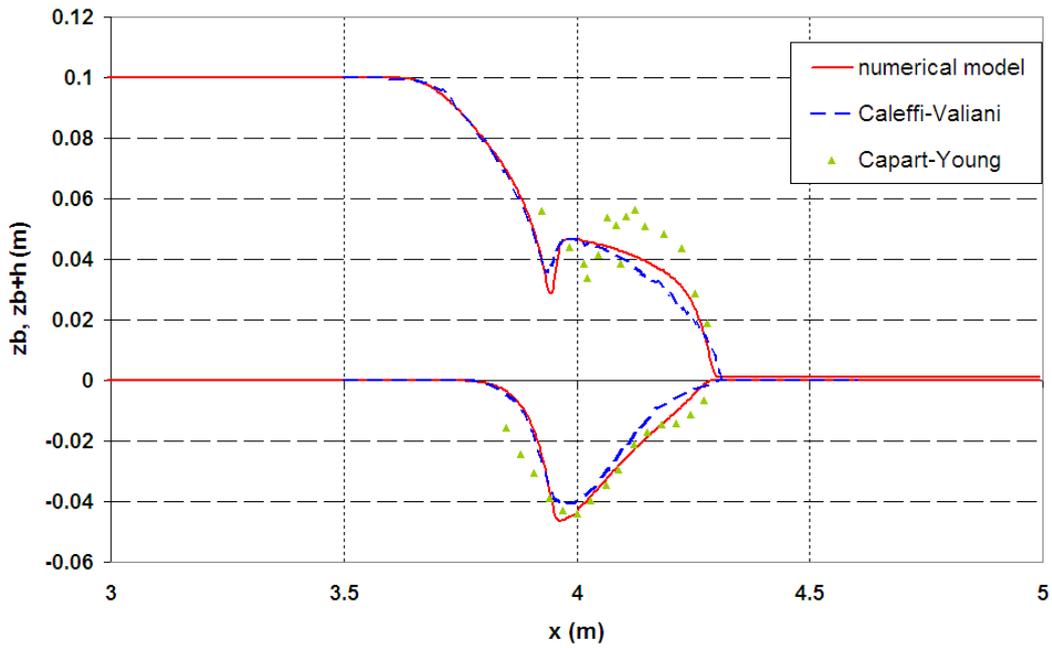
Qui di seguito (Figura 4.10-Figura 4.13) si riportano i risultati del modello confrontati con i dati sperimentali di Capart e Young (1998) e con i risultati numerici ottenuti da Caleffi e Valiani (2002). In particolare vengono mostrati i confronti con riferimento all'andamento del profilo idraulico ( $z_b + h$ ) e delle quote di fondo ( $z_b$ ) che si registrano in determinati istanti temporali a seguito dell'apertura della paratoia.



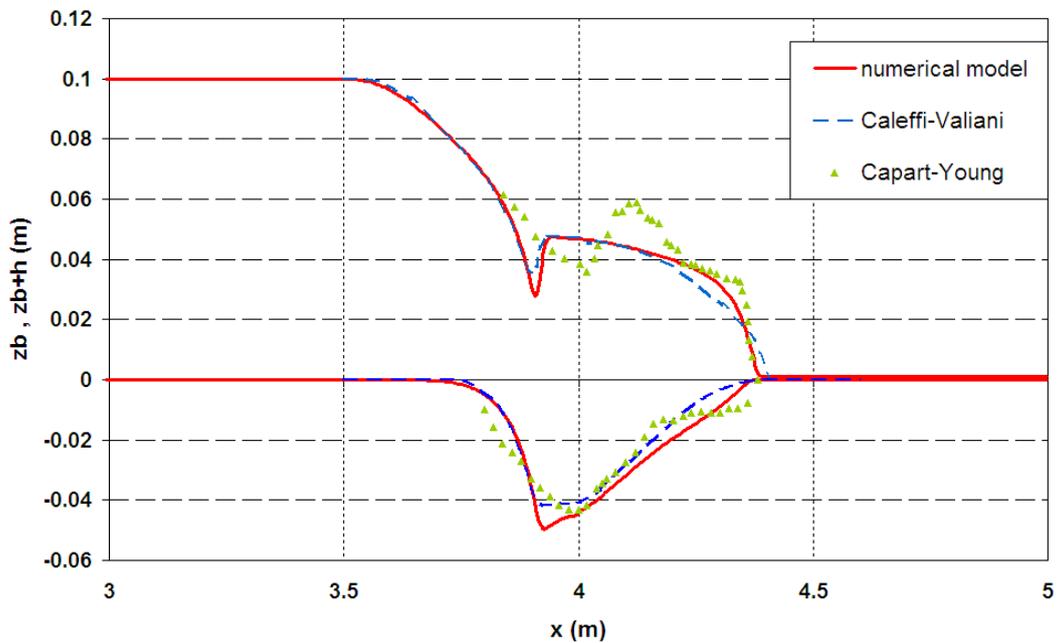
*Figura 4.10 Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi, con il modello di Caleffi e Valiani (2002) e con gli esperimenti di Capart e Young (1998), dopo 0.1s dall'apertura della paratoia*



*Figura 4.11 Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi, con il modello di Caleffi e Valiani (2002) e con gli esperimenti di Capart e Young (1998), dopo 0.2s dall'apertura della paratoia*



**Figura 4.12** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi, con il modello di Caleffi e Valiani (2002) e con gli esperimenti di Capart e Young (1998), dopo 0.3s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.13** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi, con il modello di Caleffi e Valiani (2002) e con gli esperimenti di Capart e Young (1998), dopo 0.4s dall'apertura della paratoia

Come si può osservare dalle figure (Figura 4.10-Figura 4.13), nonostante il modello proposto sia caratterizzato da una minore precisione nello spazio (precisione al primo ordine, nel caso del modello qui presentato, contro una precisione al secondo ordine nel caso del modello adottato da Caleffi e Valiani) esso riesce, comunque, a riprodurre, in modo altrettanto valido al modello di Caleffi e Valiani, i dati sperimentali. In particolare, è possibile riscontrare come il modello oggetto del presente lavoro riproduca in maniera più efficace il fronte ripido dell'onda di piena, per quanto riguarda l'andamento del profilo del pelo libero, e ricrei, più efficacemente del modello di Caleffi e Valiani, l'andamento e l'entità dello scavo del fondo riscontrato nelle sperimentazioni effettuate da Capart e Young. Il modello, inoltre, riesce a simulare abbastanza correttamente le caratteristiche del flusso, riproducendo bene il “fenomeno del ritardo” osservato in casi analoghi, col fronte dell'onda più avanzato rispetto all'escavazione del fondo (Fraccarollo e Capart, 2002; Leal et al., 2003).

È bene precisare che i dati sperimentali di Capart e Young presentano dei limiti dovuti ad alcuni problemi legati alla realizzazione degli esperimenti: in particolare, il fatto che il crollo dello sbarramento sia simulato attraverso il movimento verso l'alto della paratoia, comporta, nonostante gli accorgimenti tesi a far avvenire questo movimento quanto più rapidamente possibile, un disturbo nella propagazione a valle dell'onda. Questo problema viene superato nelle esperienze di dam-break condotte da Spinewine e Zech nel 2007, alle quali si farà riferimento nei successivi paragrafi.

#### **4.3.2 Spinewine e Zech (2007): sabbia**

Spinewine e Zech (2007) hanno condotto degli esperimenti di dam-break su fondo mobile presso l'*Université catholique de Louvain* (Belgio).

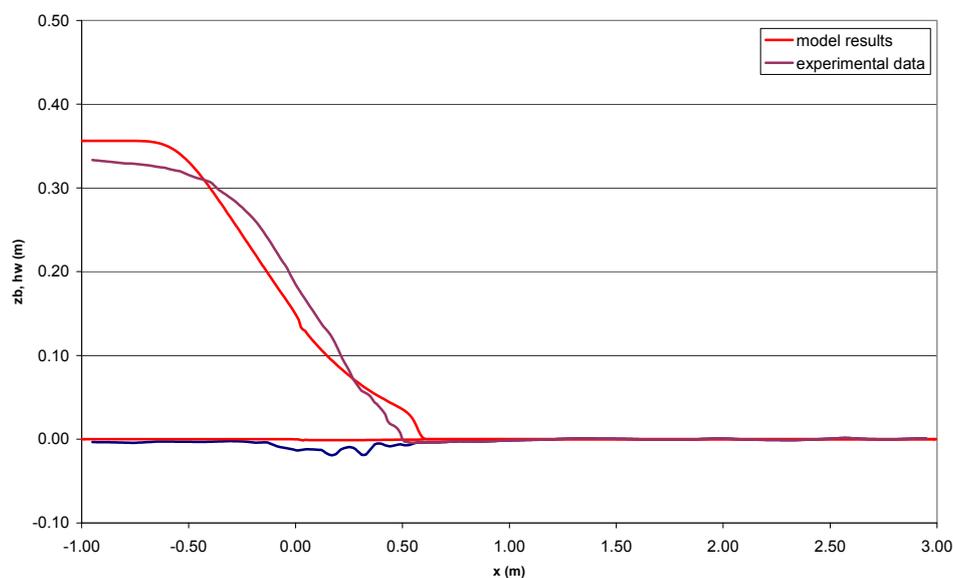
Gli esperimenti sono stati realizzati in un canale lungo 6m, largo 0.25m e alto 0.7m. La rottura della diga è stata simulata attraverso il rapido movimento verso il basso di una paratoia posta al centro del canale.

Uno strato di fondo di 0.125m di materiale incoerente è posto sull'intera lunghezza del canale, uno strato d'acqua di 0.35m è inizialmente presente a monte della paratoia.

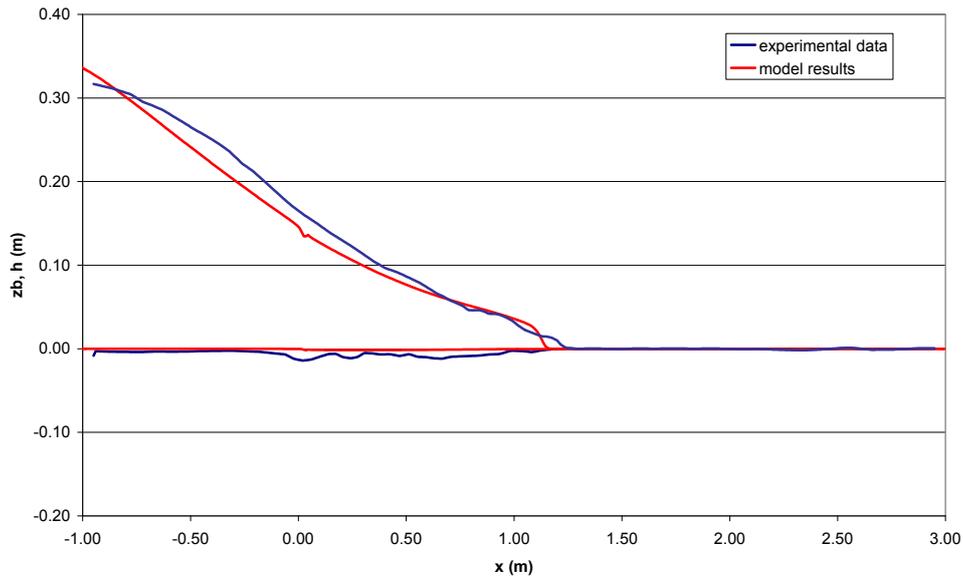
Due serie di test sono state condotte, con due diversi materiali costituenti lo strato di fondo: sabbia e PVC.

In questo paragrafo vedremo il confronto con i dati sperimentali relativi alla sabbia. Le particelle solide di sabbia sono caratterizzate da un  $d_m$  di 1.82mm, una densità  $\rho_s$  di 2680 Kg/m<sup>3</sup> e una porosità  $p$  del 53%.

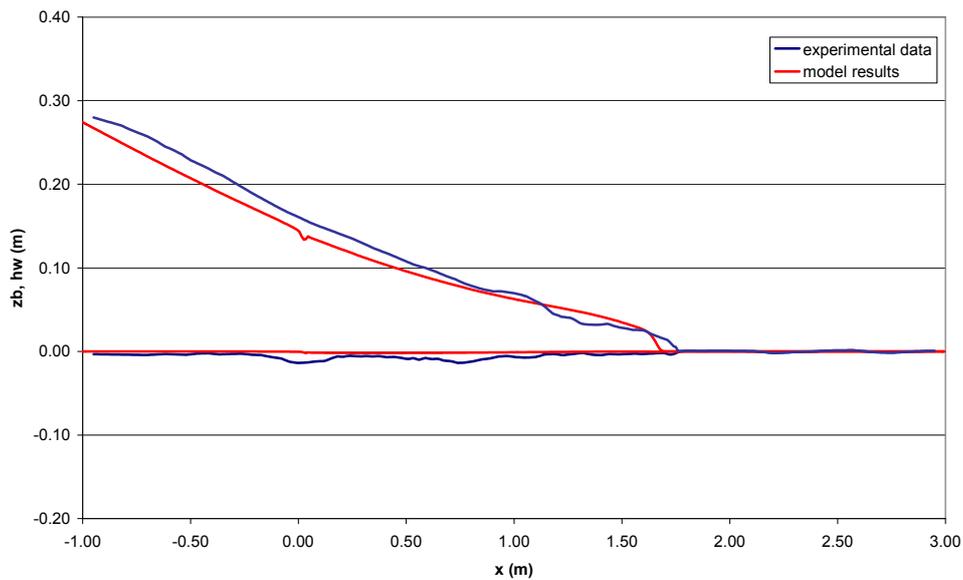
I confronti tra i risultati numerici e i dati sperimentali sono qui di seguito mostrati.



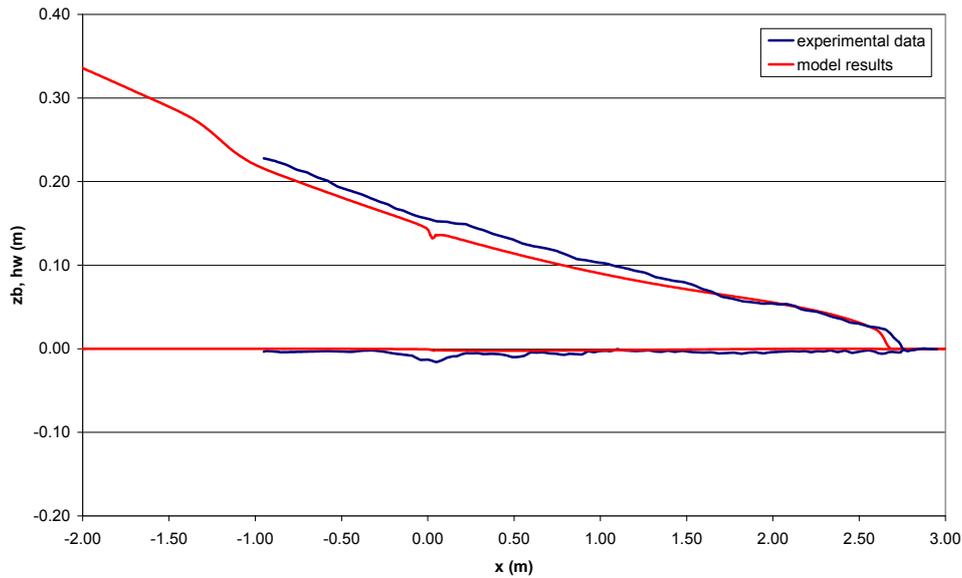
**Figura 4.14** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 0.25s dall'apertura della paratoia



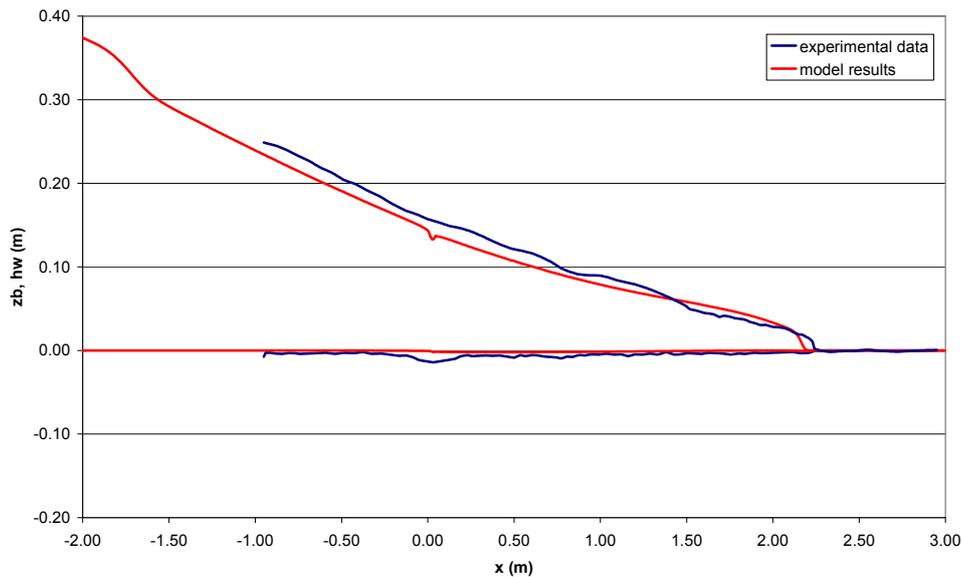
**Figura 4.15** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 0. 5s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.16** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 0.75s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.17** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 1s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.18** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 1.25s dall'apertura della paratoia

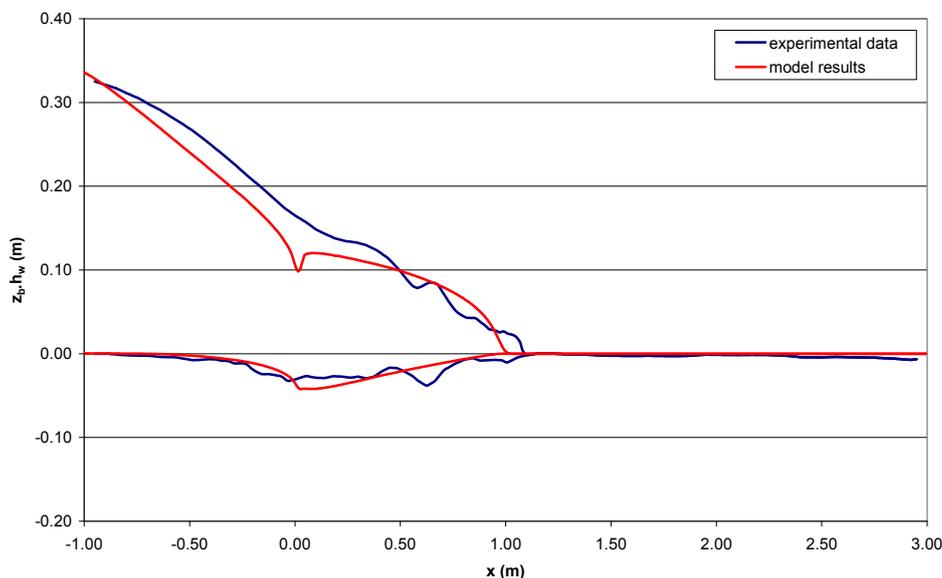
Dalle figure (Figura 4.14-Figura 4.18) si può osservare come il modello riproduca bene il profilo di pelo libero e l'avanzamento del fronte dell'onda; per quanto concerne l'evoluzione del fondo si può, invece, notare una sottostima del fenomeno erosivo da parte del modello.

### 4.3.3 Spinewine e Zech (2007): PVC

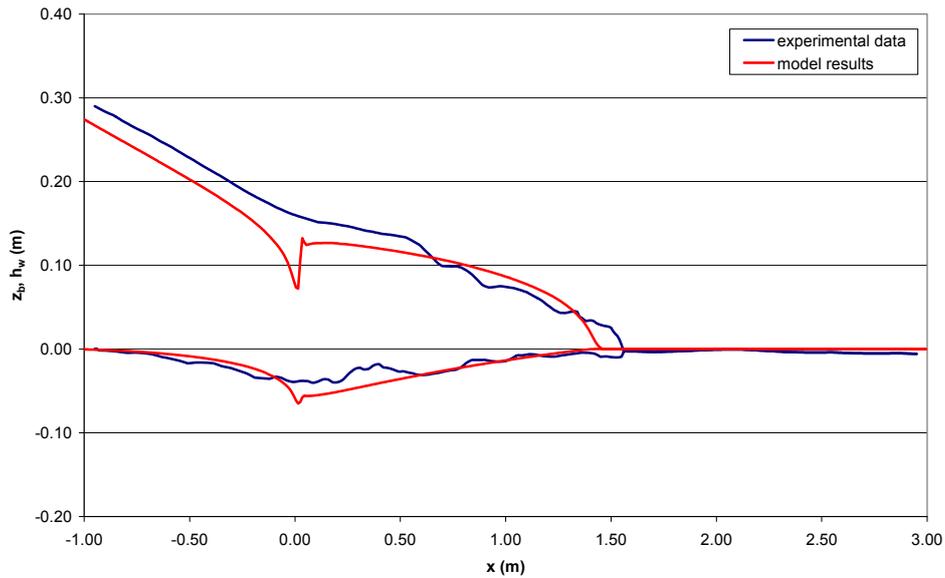
In questo paragrafo si considerano gli esperimenti di dam-brak realizzati da Spinewine e Zech (2007) con riferimento ad uno strato di fondo costituito da particelle di PVC. Lo schema impiantistico e le condizioni iniziali sono le stesse viste nel paragrafo precedente.

Le particelle di PVC sono caratterizzate da un  $d_m$  di 3.9mm, una densità  $\rho_s$  di 1580 Kg/m<sup>3</sup> e una porosità  $p$  del 58%.

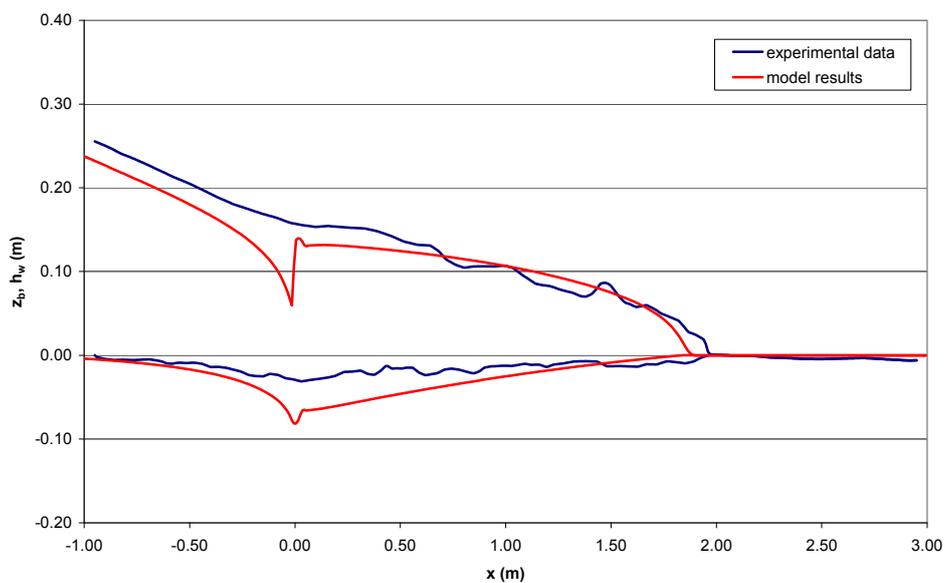
I confronti tra i risultati numerici e i dati sperimentali sono qui di seguito mostrati.



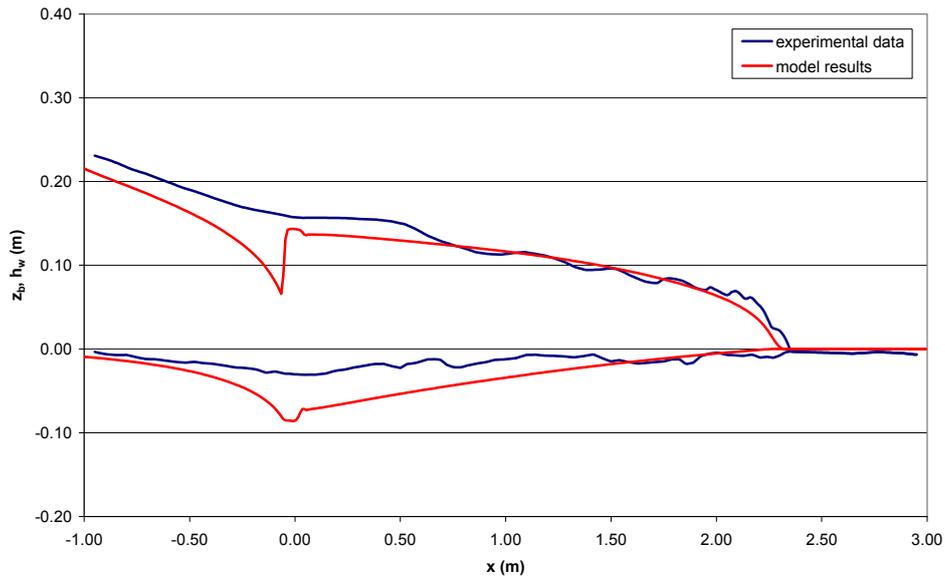
**Figura 4.19** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 0.5s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.20** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 0.75s dall'apertura della paratoia



**Figura 4.21** Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 1s dall'apertura della paratoia



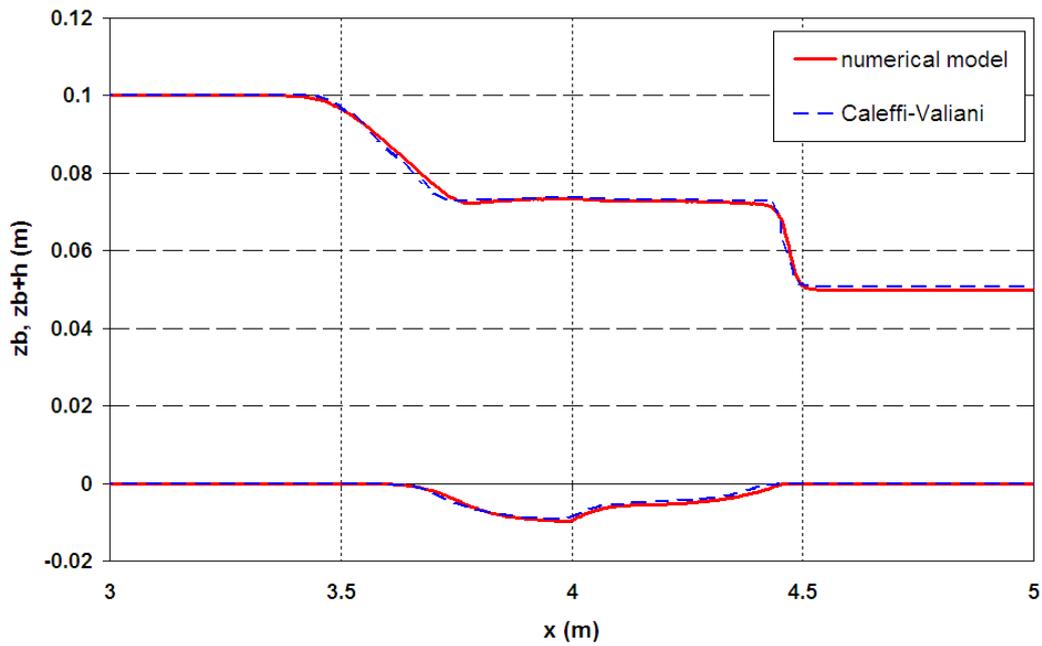
**Figura 4.22** *Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico e con gli esperimenti di Spinewine e Zech (2007), dopo 1.25s dall'apertura della paratoia*

Dalle figure (Figura 4.19-Figura 4.22) si può osservare come il modello, pur riproducendo abbastanza bene l'avanzamento del fronte dell'onda, dia vita ad un risalto non presente nei dati sperimentali; l'entità dello scavo è discretamente riprodotta, soprattutto nei primi istanti di sviluppo del fenomeno.

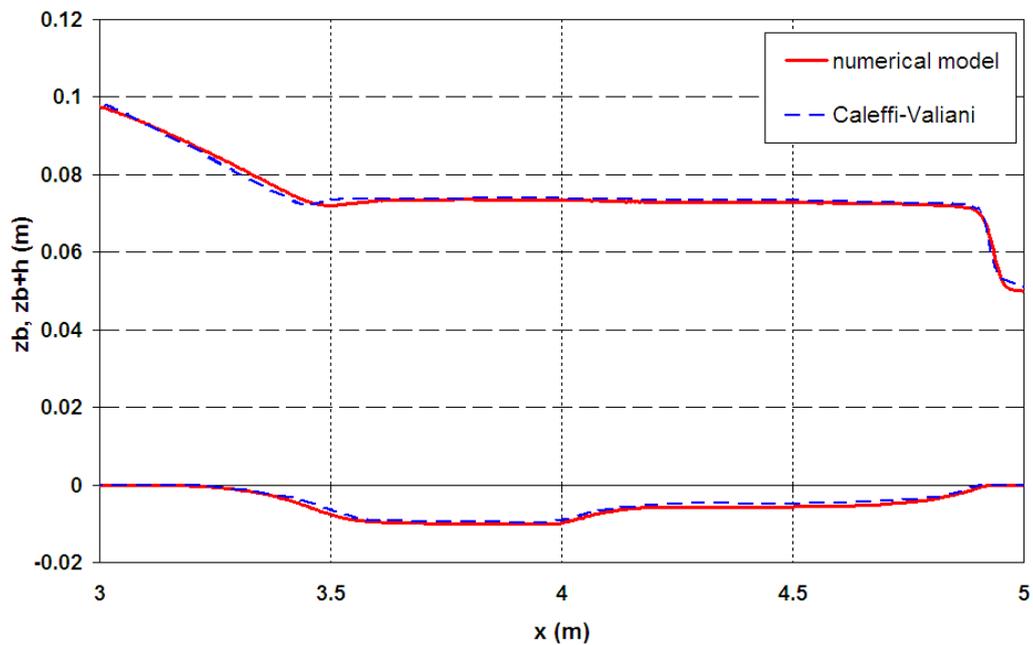
#### **4.3.4 Dam-break su fondo bagnato**

Un'applicazione del modello al caso di un fenomeno di dam-break su fondo mobile inizialmente bagnato è qui di seguito mostrata. In assenza di esperienze di laboratorio a tal riguardo, si è fatto riferimento al caso simulato da Caleffi e Valiani (2002), i quali hanno considerato le medesime caratteristiche del canale e del materiale solido degli esperimenti realizzati da Capart e Young (1998), descritti nel paragrafo 4.3.1. La differenza tra i due schemi sta nel considerare a valle della paratoia uno strato d'acqua pari alla metà di quello presente a monte della paratoia.

Qui di seguito (Figura 4.23 e Figura 4.24) è mostrato il confronto tra i risultati numerici del modello oggetto della Tesi di Dottorato e quelli ottenuti con il modello di Caleffi e Valiani (2002).



*Figura 4.23 Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi e con il modello di Caleffi e Valiani (2002), dopo 0.5s dall'apertura della paratoia*



*Figura 4.24 Confronto tra i profili di pelo libero e di fondo ottenuti con il modello numerico oggetto della tesi e con il modello di Caleffi e Valiani (2002), dopo 1s dall'apertura della paratoia*

Dal confronto dei risultati dei due modelli è possibile osservare come, nel caso di fondo bagnato, il modello messo a punto restituisca degli andamenti del pelo libero e del profilo del fondo piuttosto simili a quelli restituiti dal modello di Valiani e Caleffi, pur essendo quest'ultimo caratterizzato da una maggiore accuratezza nello spazio.

## ***5 Esperimenti Dam-Break su fondo mobile***

### ***5.1 Introduzione***

Gli esperimenti effettuati riguardano l'analisi di un fenomeno di dam-break su fondo mobile, in un canale, di sezione rettangolare, caratterizzato a valle da un brusco allargamento.

Gli esperimenti sono stati condotti nel laboratorio di Ingegneria Civile dell'Università cattolica di Louvain, a Louvain-la-Neuve (Belgio), sotto la supervisione dei Proff. Yves Zech e Sandra Soares Frazao.

Per poter simulare in laboratorio un fenomeno di dam-break risulta fondamentale l'attenzione ad alcuni degli elementi costituenti l'impianto e agli strumenti utilizzati per la misura delle grandezze caratteristiche del fenomeno.

Lo sbarramento è costituito da una paratoia, la quale è stata realizzata in modo tale che la sua apertura possa simulare la rottura di una diga,: questo ha fatto sì che particolare attenzione fosse posta alla modalità di discesa della paratoia e al suo funzionamento.

Per la misura delle grandezze fisiche coinvolte nel processo, tiranti idrici e quote di fondo, si sono utilizzate diverse tipologie di strumentazioni. In particolare, per la misura dei tiranti si sono adoperate sonde ad ultrasuoni, mentre per la valutazione dell'evoluzione finale del fondo si è fatto uso di tecniche di acquisizione digitale delle immagini.

## 5.2 Caratteristiche del canale

### 5.2.1 Dimensioni

Il modello in scala (ridotto) utilizzato è un canale prismatico rettangolare, lungo 6 m, alto 50cm, largo 25 cm, per 4 m, e 50 cm per i restanti 2 m (Figura 5.1). Il fondo del canale è orizzontale. Le pareti del canale di vetro permettono l'osservazione laterale del flusso. La struttura che circonda e sostiene le pareti di vetro del canale è metallica (Figura 5.2).

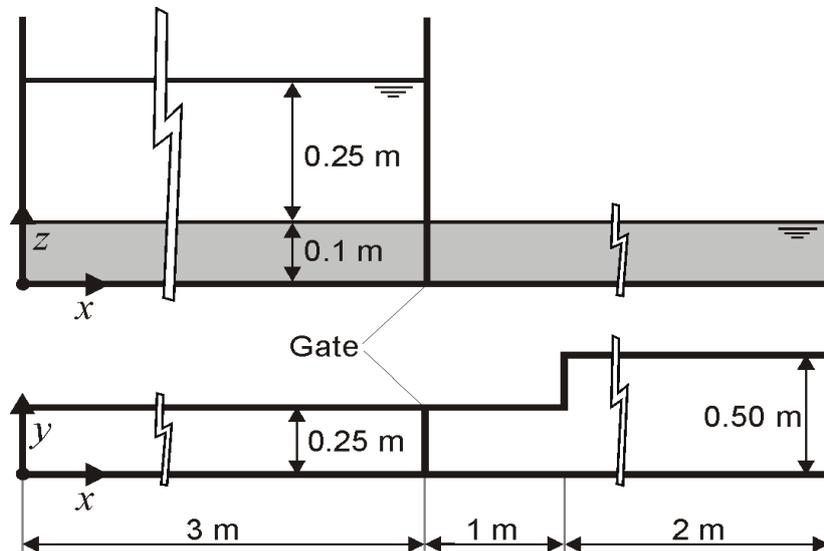


Figura 5.1 pianta e sezione del dispositivo sperimentale utilizzato

### 5.2.2 Paratoia

La paratoia rappresenta la diga, questa è posizionata al centro della lunghezza del canale (a 3m) così come si vede anche nella Figura 5.1. Il suo spessore è di 7 mm. In posizione chiusa due giunti laterali assicurano la tenuta stagna tra il serbatoio a monte e il tratto di valle.

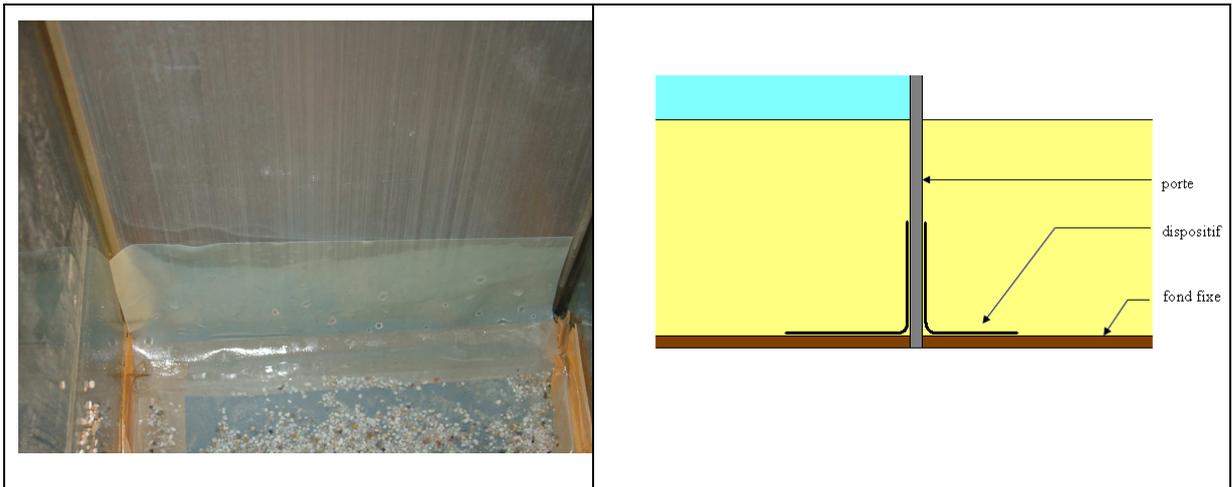
Un comando elettrico permette di abbassare la paratoia, la quale teoricamente viene a introdursi nel fondo del canale. Questa paratoia, azionata da un pistone ad aria compressa, discende in 0.1s. Un compressore alimenta questo pistone

con dell'aria. Un manometro permette di verificare questa pressione. Nei test effettuati si è lavorato con una pressione di circa 6 bars (6.105 Pa).



*Figura 5.2 Dispositivo sperimentale utilizzato*

Per essere completi, si sottolinea che, in seguito a problemi di bloccaggio della paratoia dovuta all'introduzione di sedimenti nella scanalatura tra la paratoia e la lastra del fondo del canale, durante la discesa della paratoia, un dispositivo supplementare è stato posto. Questo dispositivo (vedi Figura 5.3) è realizzato mediante il posizionamento, da una parte e dall'altra della paratoia, ad una distanza di circa 10 cm dalla paratoia, di due pezzi rettangolari di un telo di plastica non rigida, che vengono poi disposti verso l'alto sulle due pareti della paratoia. Questo sistema limita l'entrata di sedimenti nella scanalatura nel momento in cui vi è la discesa della paratoia. Inoltre non vi è alcuna influenza sullo strato di fondo mobile, perché il foglio di plastica non sale lungo la paratoia oltre i 5 cm.



**Figura 5.3** *Dispositivo per evitare il bloccaggio della paratoia a seguito dell'entrata dei sedimenti*

### 5.2.3 Caratteristiche del materiale solido

I sedimenti utilizzati, data la loro granulometria, rientrano nelle sabbie. La curva granulometrica fornisce un diametro medio  $d_{50}$  di 1.82 mm. La sabbia è considerata uniforme, in quanto il suo coefficiente di uniformità CU ( $d_{60}/d_{10}$ ) è inferiore a 2, dove  $d_{60}=2.41$  mm e  $d_{10}=1.15$  mm. La densità  $\rho_s$  è di 2680 Kg/m<sup>3</sup> e la porosità  $n$  è pari a 0.53.

### 5.2.4 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali consistono in uno strato di sabbia, dello spessore di 10 cm, opportunamente saturato di acqua, costipato e livellato, e in uno strato d'acqua limpida, a monte della paratoia, di 25 cm.

## 5.3 Strumentazioni di misura

Nelle sperimentazioni realizzate sono state effettuate misure dei livelli idrici e delle quote di fondo finali, attraverso delle tecniche di misura non intrusive, quali:

- Sonde ad ultrasuoni
- Acquisizione di immagini digitali.

### 5.3.1 Sonde ad ultrasuoni

I livelli idrici sono misurati attraverso delle sonde ad ultrasuoni.

La sonda ad ultrasuoni è uno strumento che contiene allo stesso tempo un emittente e un ricevente. L'onda acustica emessa si riflette sulla superficie dell'acqua. Conoscendo la posizione dell'emittente, la frequenza dell'onda e il tempo di andata e ritorno, è possibile determinare il livello dell'acqua in un serbatoio. Il livello d'acqua si deduce da un'espressione del tipo:

(5.1)	$L = D - \frac{\Delta t}{C}$
-------	------------------------------

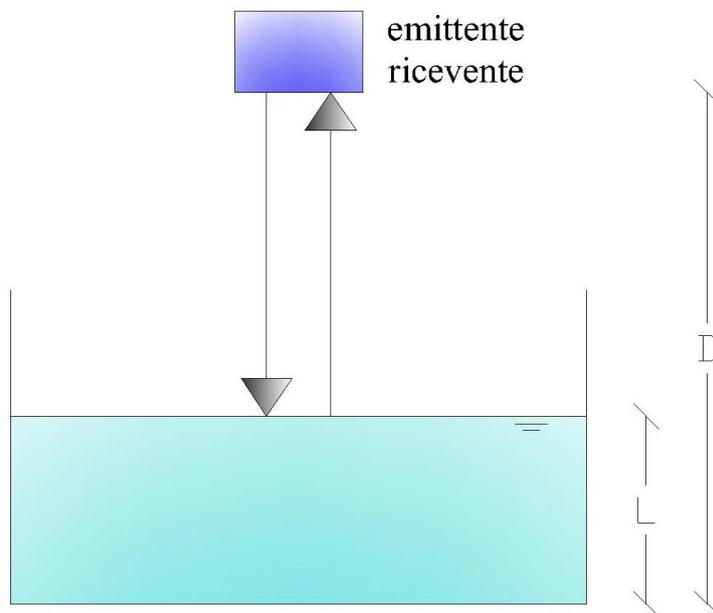
dove:

$C$  è la celerità dell'onda

$D$  è la distanza tra l'emittente e il fondo (vedi Figura 5.4)

$L$  è l'altezza dell'acqua da determinare (vedi Figura 5.4)

$\Delta t$  è il tempo necessario all'onda per coprire la distanza  $D-L$  (andata-ritorno).



**Figura 5.4 schema del funzionamento della sonda ad ultrasuoni**

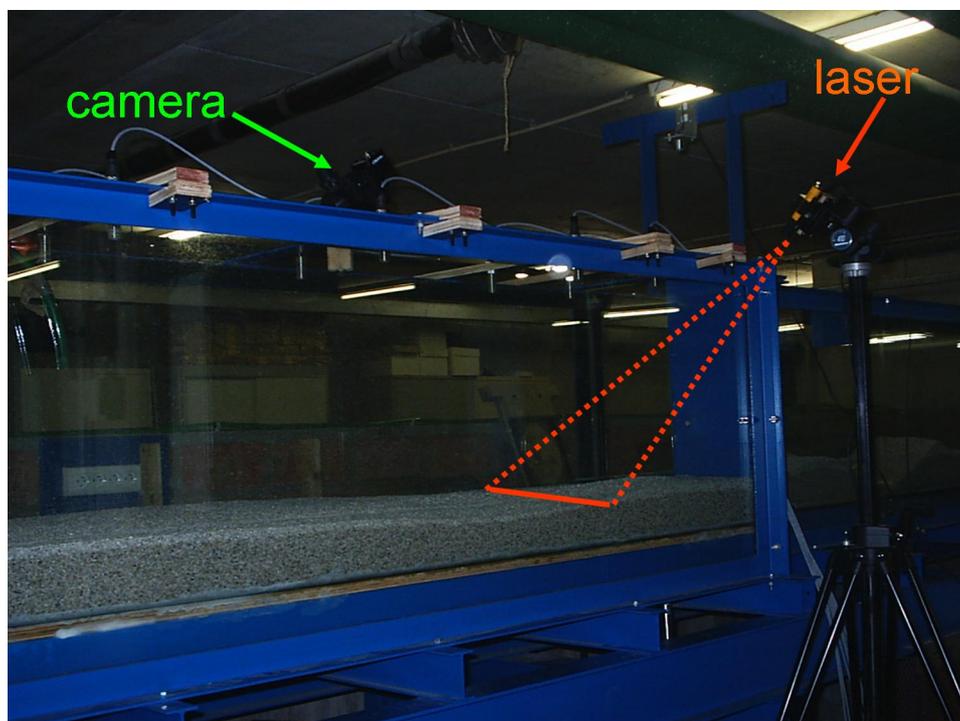
Test condotti su strumentazioni di questo tipo, in presenza di sedimenti e non, in un caso idrostatico e in uno idrodinamico hanno messo in luce che:

- per quanto riguarda la presenza di sedimenti questa non influisce in alcun modo sulla misura ottenuta del livello idrico, dato che l'onda viene riflessa direttamente dalla superficie dell'acqua;
- bisogna posizionare la sonda in un range di distanza dalla superficie dell'acqua, per poter acquisire la misura del livello idrico la sonda non deve essere né troppo vicina né troppo lontana dalla superficie dell'acqua: le distanze investigate nelle sperimentazioni effettuate rientrano nel range utile delle sonde utilizzate;
- la presenza di una parete verticale molto prossima all'onda acustica emessa dalla sonda può influenzare la risposta della sonda; analogamente, la vicinanza di due sonde può comportare fenomeni di interferenza tra queste: nel posizionare le sonde nel canale si è tenuto conto di questi due aspetti;
- possono nascere problemi nella misura dei livelli idrici qualora la superficie idrica risulti essere molto inclinata (per angoli di inclinazione superiore ai 20°).

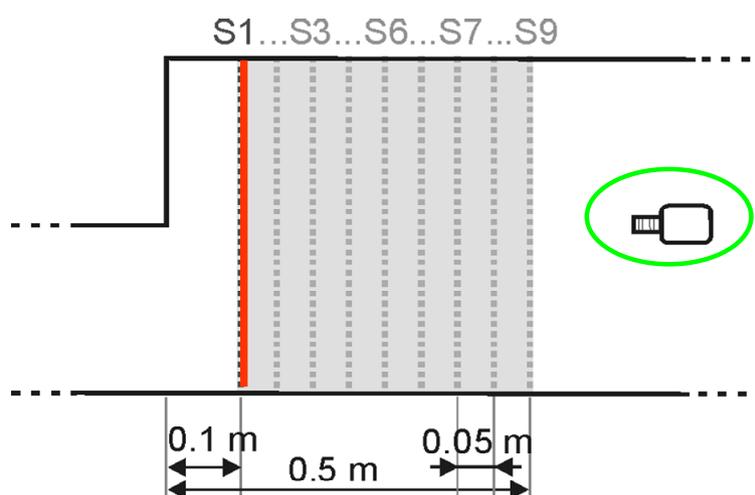
### **5.3.2 Acquisizione di immagini digitali con l'ausilio di un foglio laser**

La tecnica di misura adottata per la valutazione della topografia finale del fondo nell'allargamento si è basata sull'utilizzo combinato di camera digitale e di un laser: la cosiddetta "tecnica del foglio laser" già utilizzata in altri lavori (Soares Frazao et al., 2007). In particolare, in un certo numero di sezioni di interesse, si è provveduto ad acquisire le immagini del profilo di fondo con la camera digitale, mentre con un foglio laser si illumina una sezione trasversale di interesse. Come mostrato in Figura 5.5, la camera è posta in modo tale da

acquisire frontalmente l'immagine per una data sezione trasversale, mentre il foglio laser, posto ortogonalmente alle pareti del canale, illumina la sezione trasversale di interesse.

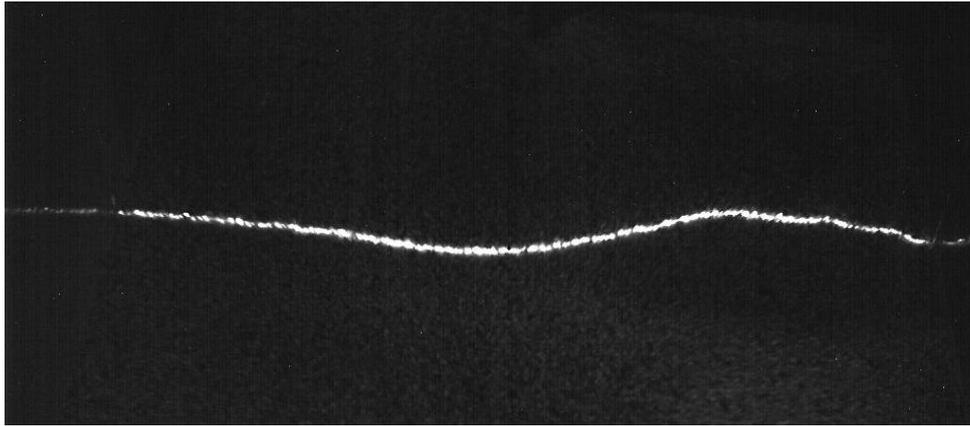


*Figura 5.5 Posizionamento della camera digitale e del laser*



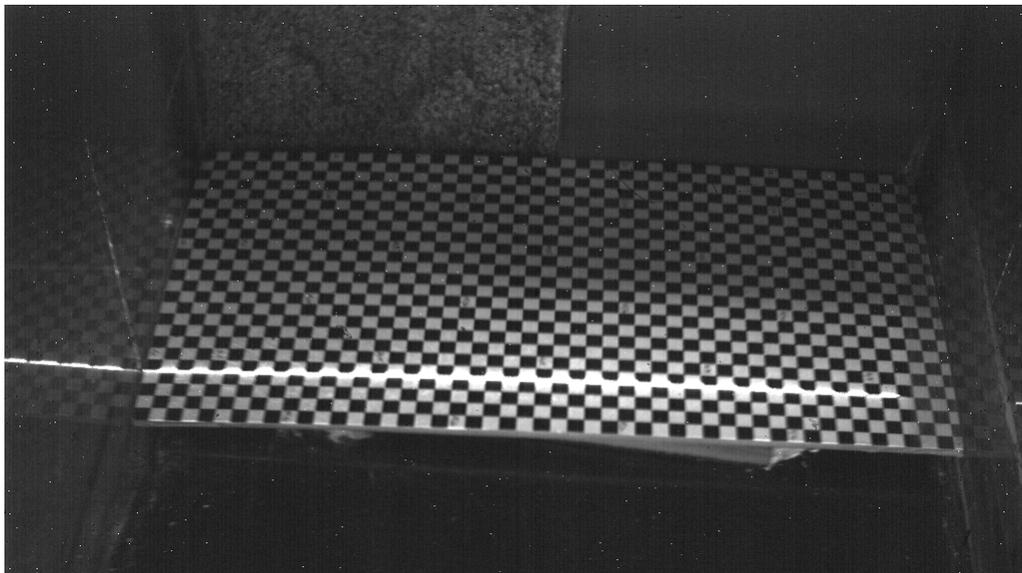
*Figura 5.6 Sezioni trasversali investigate con la "tecnica del foglio laser"*

In Figura 5.7 sono indicate le sezioni investigate, mentre in Figura 5.8 è riportata l'immagine acquisita dalla camera per la sezione S9.



*Figura 5.7 Profilo finale del fondo per la sezione S9*

Le immagini digitali acquisite, in coordinate 2D, devono poi essere trasformate in immagini in coordinate 3D reali: per fare ciò si effettua una trasformazione affine. Per ottenere la matrice della trasformazione affine è necessario operare una procedura di calibrazione: in particolare sono utilizzate delle immagini di una scacchiera di dimensioni 25x50 cm e caratterizzata da quadrati aventi il lato di 1 cm. La scacchiera è stata posta nella zona in cui ricadevano le sezioni di interesse. In Figura 5.8 si riporta un'immagine utilizzata per la calibrazione, per il tratto subito a valle dell'allargamento.



*Figura 5.8 Immagine di calibrazione*

Individuate sulle immagini di calibrazione le coordinate pixel, di almeno sei punti, e considerando le corrispondenti coordinate reali 3D, facilmente

individuabili nota l'altezza alla quale la scacchiera è posta, è possibile determinare la matrice di trasformazione affine.

#### ***5.4 Risultati degli esperimenti***

Qui di seguito, dopo una descrizione del fenomeno a cui si assiste a seguito dell'apertura della paratoia, vengono mostrati e discussi i risultati ottenuti dalle sperimentazioni con riferimento ai livelli idrici e alla topografia finale che si sono misurati.

##### **5.4.1 Descrizione fenomeno**

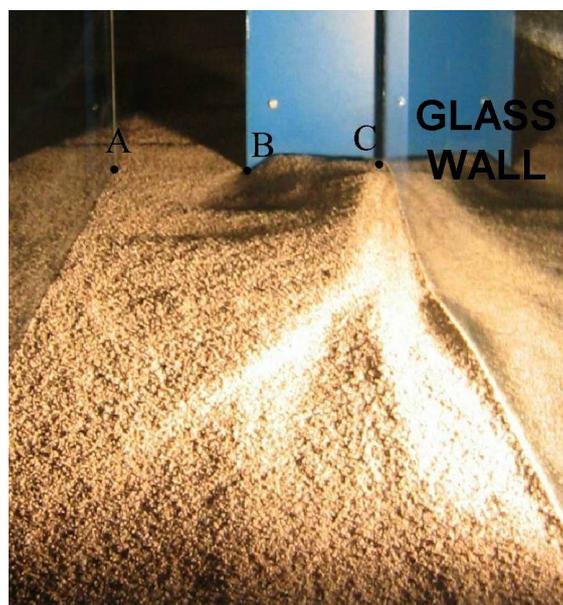
Nei primi istanti successivi all'apertura della paratoia, subito a valle dell'allargamento, è possibile osservare come l'onda generata dal dam-break si propaghi lungo il prolungamento del canale di monte (tra i punti A e B della Figura 5.9).



***Figura 5.9 Avanzamento dell'onda dopo 0.8s dall'apertura della paratoia***

Questo rapido movimento genera un intenso fenomeno di erosione che comporta lo sviluppo di uno scavo in corrispondenza dell'angolo interno

dell'allargamento, visibile nell'immagine della topografia finale (punto B della Figura 5.10)



*Figura 5.10 Topografia finale*

In corrispondenza dell'allargamento si ha che la corrente, costituita dal miscuglio acqua + sedimenti, viene a rallentare bruscamente, il che comporta la sedimentazione di tutte le particelle solide. Dato che un'area di ricircolo può essere osservata in corrispondenza dell'angolo esterno dell'allargamento (punto C della Figura 5.10), il deposito che si realizza non è uniforme lungo la sezione trasversale.

#### **5.4.2 Misura dei livelli idrici**

L'evoluzione nel tempo dei livelli idrici è stata effettuata attraverso l'utilizzo di 8 sonde ad ultrasuoni, posizionate a valle della paratoia. Nella Figura 5.11 è riportata la foto del canale con le sonde utilizzate, mentre nella Figura 5.12 è riportato lo schema con le posizioni delle sonde nel canale.



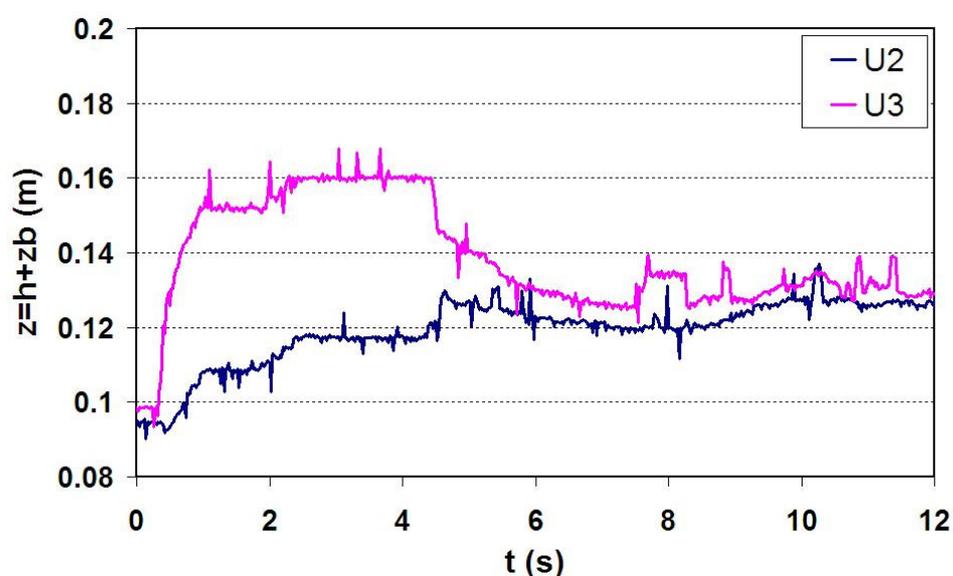
trasformare i Volt misurati dallo strumento in metri di acqua: in particolare si è adottata una relazione del tipo:

$$(5.2) \quad y = ax + b$$

dove con  $x$  si indica la misura in volt misurata dalla sonda e con  $y$  i corrispondenti livelli idrici, espressi in metri;  $a$  e  $b$  sono le due costanti che devono essere determinate e che risultano diverse per ciascuna sonda. Le relazioni del tipo (5.2) ricavate per ciascuna sonda a partire dalle coppie (volt,m) misurate sono riportate in Appendice 5.

Introducendo nel software la relazione del tipo (5.2), ottenuta per ognuna delle otto sonde utilizzate, è possibile far registrare al software direttamente l'evoluzione dei livelli idrici in metri.

Qui di seguito in Figura 5.13 si riporta il grafico con gli andamenti dei livelli idrici misurati dalle sonde U2 e U3:

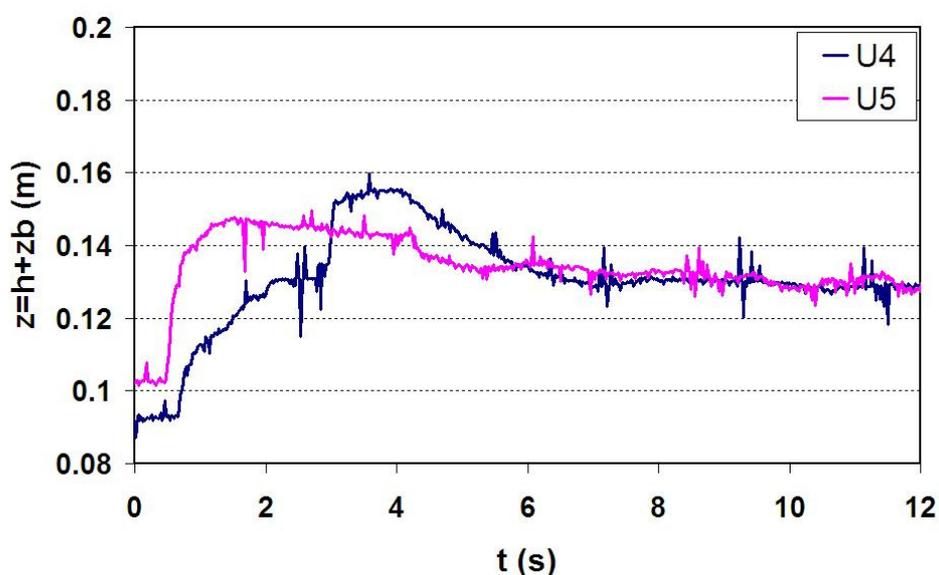


*Figura 5.13 Livelli idrici registrati dalle sonde U2 e U3*

Dalla Figura 5.13 è possibile osservare come il livello idrico registrato dalla sonda U3, posta sul lato del prolungamento del canale di monte, sia, nei primi secondi di registrazione, maggiore di quello che si può osservare sul lato dell'allargamento (registrato dalla sonda U2). Dopo circa 5 secondi,

dall'apertura della paratoia, i livelli tendono a convergere: l'asimmetria del fenomeno, che si osserva nell'allargamento, tende a placarsi, con il ripristino di un valore costante dell'altezza idrica lungo la sezione trasversale.

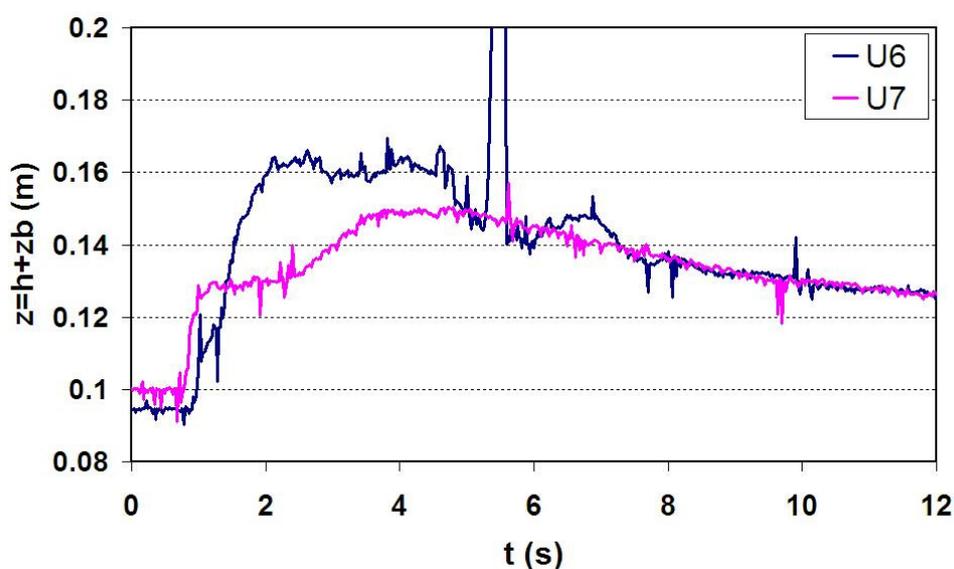
Osservando, poi, i valori dei livelli idrici registrati più a valle, dalle sonde U4 e U5 (Figura 5.14), è possibile notare un ulteriore fenomeno che viene a generarsi nell'allargamento: la riflessione dell'onda sulla parete di vetro nel lato dell'allargamento con la conseguente generazione di un risalto idraulico obliquo, diretto dall'angolo interno, all'inizio dell'allargamento, fino alla parete.



*Figura 5.14 Livelli idrici registrati dalle sonde U4 e U5*

Infatti può osservarsi come dopo circa 3 secondi dall'apertura della paratoia, istante di tempo fino al quale si registra un livello idrico minore dal lato dell'allargamento, vi è un repentino innalzamento di tale livello idrico, che supera quello che si registra nel lato opposto, dovuto all'effetto di riflessione dell'onda sulla parete di vetro del canale. Naturalmente, poi, anche in questo caso, con il tempo e con l'avanzare dell'onda generata dal dam-break, un livello costante tenderà a realizzarsi lungo la sezione trasversale.

Muovendoci ancora di più verso valle è possibile osservare, così come si evince dalla Figura 5.15 (che riporta gli andamenti nel tempo registrati dai livelli idrici dalle sonde U6 e U7), come tale risalto si registri temporalmente ancora prima, dopo circa 1 secondo dall'apertura della paratoia e come l'effetto dell'innalzamento del livello idrico dovuto alla riflessione dell'onda prevalga sia in intensità che in durata su quello legato al fatto che ci si trovi nel lato che costituisce il prolungamento del canale di monte.



*Figura 5.15 Livelli idrici registrati dalle sonde U6 e U7*

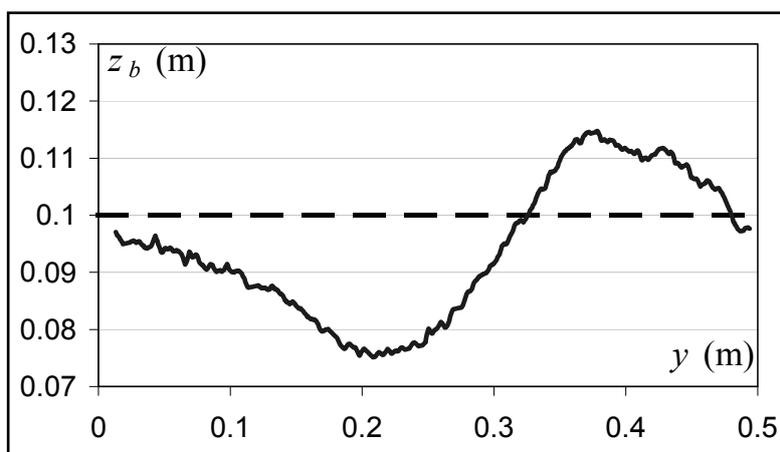
### **5.4.3 Misura della topografia finale**

La misura della topografia finale, effettuata con la tecnica illustrata nel paragrafo 5.3.2, è stata valutata in nove sezioni trasversali, così come indicato nella Figura 5.6, collocate nella prima parte dell'allargamento, laddove si hanno fenomeni erosivi e di deposito di maggior intensità.

Naturalmente l'evoluzione del fondo è strettamente connessa ai fenomeni idrodinamici che si generano a seguito dell'apertura della paratoia.

Così come si è potuto osservare dall'analisi dell'evoluzione dei livelli idrici, nella zona posta in prossimità dell'inizio dell'allargamento, si ha che l'onda di

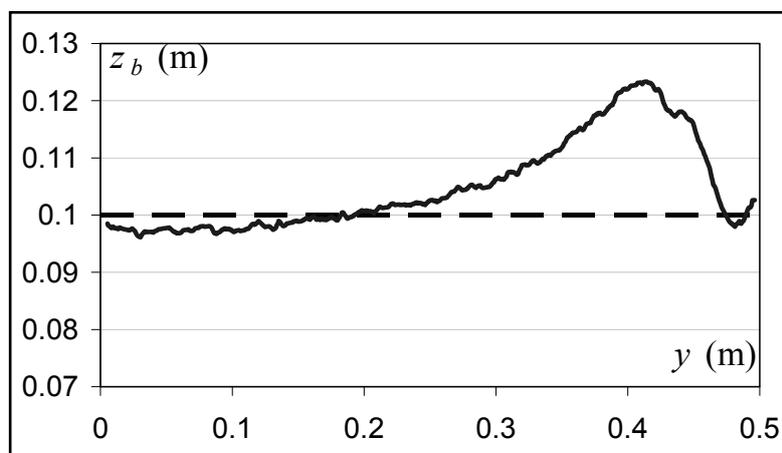
piena tende a propagarsi nel lato “non-allargato”; mentre nel lato “allargato” si assiste ad un brusco rallentamento della corrente, con conseguente deposito sul fondo del materiale eroso subito a valle della paratoia. In particolare osservando la Figura 18, che riporta l’andamento della topografia finale nella sezione S3 (cioè 20 cm a valle dell’inizio dell’allargamento e in corrispondenza delle due sonde U2 e U3), si assiste, così come prima descritto, ad un fenomeno erosivo nel lato “non-allargato”, con il raggiungimento di un valore massimo di erosione (di circa 2.5cm ) al centro del canale (in prossimità dell’angolo interno dell’allargamento). Viceversa, sul lato opposto (quello “allargato”) vi è la presenza di un deposito. Inoltre la figura mostra anche la presenza di un fenomeno erosivo in prossimità della parete del lato “allargato”, dovuto a carattere turbolento della corrente e della riflessione dell’onda sulla parete.



**Figura 5.16 Topografia finale nella sezione S3**

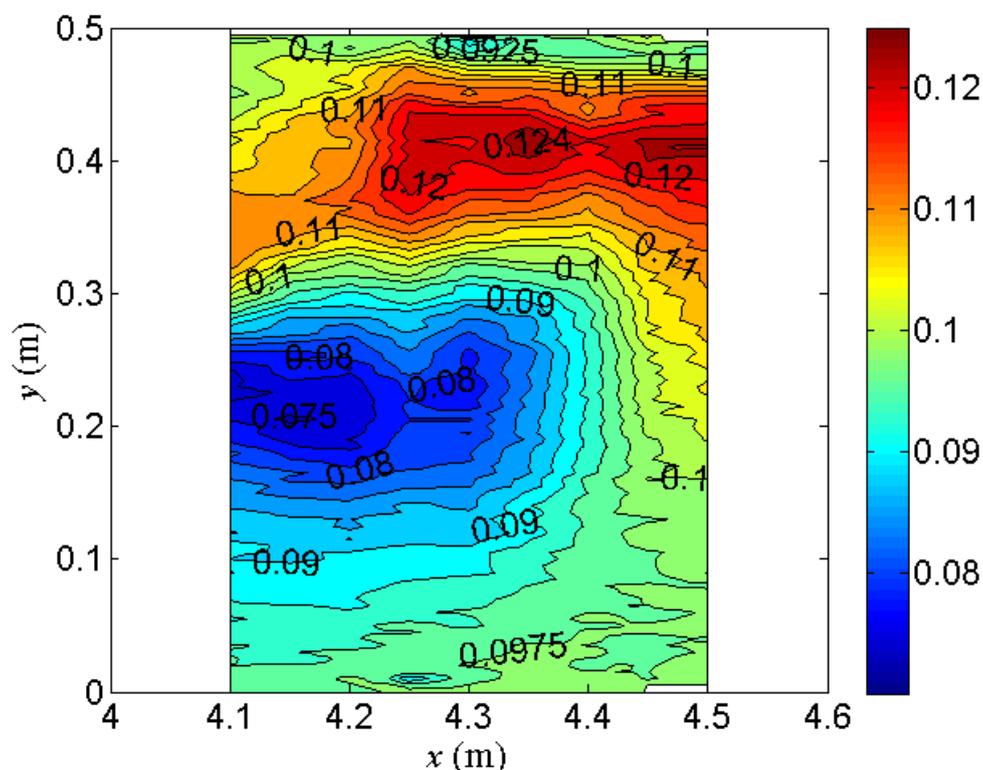
Andando più a valle, nella sezione S8, si assiste, come mostrato nella Figura 19, ad un minor fenomeno erosivo, mentre il fenomeno di deposito cresce di intensità (il valore massimo di deposito che si registra è all’incirca di 1.23cm), dovuto al forte rallentamento della corrente, anche per effetto dei fenomeni di riflessione dell’onda di piena sulle pareti. Anche in questo caso, sempre in

corrispondenza della parete del lato “allargato”, per effetto della turbolenza è possibile osservare un fenomeno erosivo localizzato.

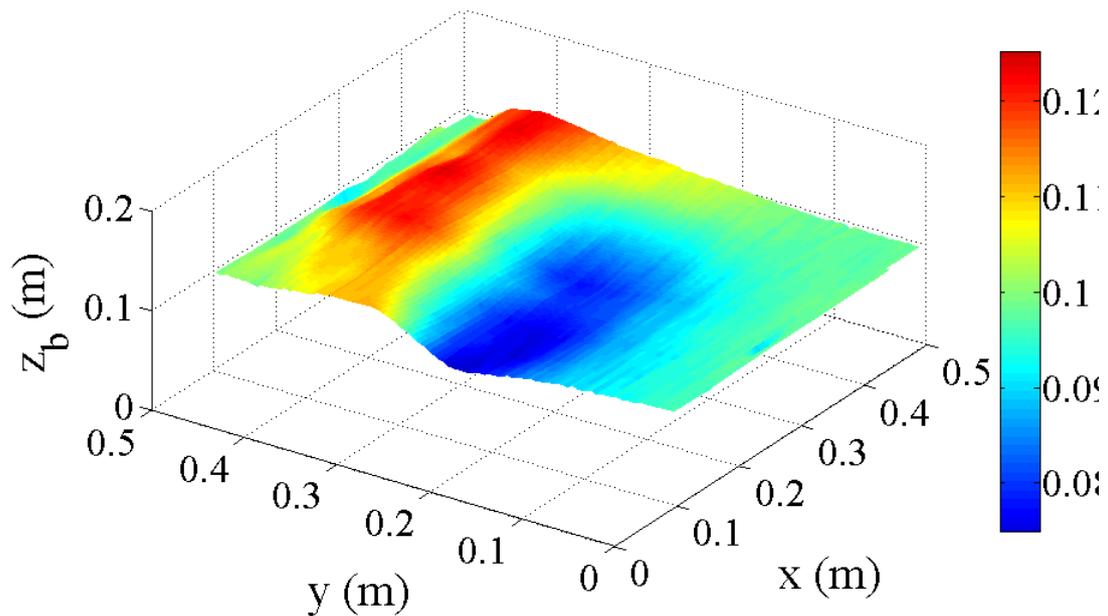


*Figura 5.17 Topografia finale nella sezione S8*

Nelle figure seguenti si riportano, infine, delle rappresentazioni grafiche 2D (Figura 5.18) e 3D (Figura 5.19) della topografia finale per l'intero allargamento, ricostruita a partire dai profili di fondo misurati nelle nove sezioni investigate.



*Figura 5.18 Vista 2D della topografia finale misurata*



*Figura 5.19 Vista 3D della topografia finale misurata*

### ***5.5 Applicazione del modello al caso del brusco allargamento***

Il modello implementato nella tesi è mono-dimensionale, e quindi per sua natura non risulta essere in grado di poter riprodurre un fenomeno fortemente bidimensionale, come quello della propagazione di un'onda, a seguito di un dam-break, in un canale che presenta a valle un brusco allargamento. Ciò nonostante si è ritenuto opportuno utilizzare il modello implementato anche in questo caso: in questo modo è possibile, da un lato mostrare, i limiti del modello, dall'altro, valutare dove, invece, dove il modello sembra riprodurre il fenomeno abbastanza bene. Se, infatti, non è possibile, data la natura del modello, poter riprodurre il comportamento non costante nelle sezioni trasversali del livello idrico e della quota di fondo; si può valutare se il modello riesce a cogliere, almeno mediamente, il fenomeno registrato nelle esperienze condotte.

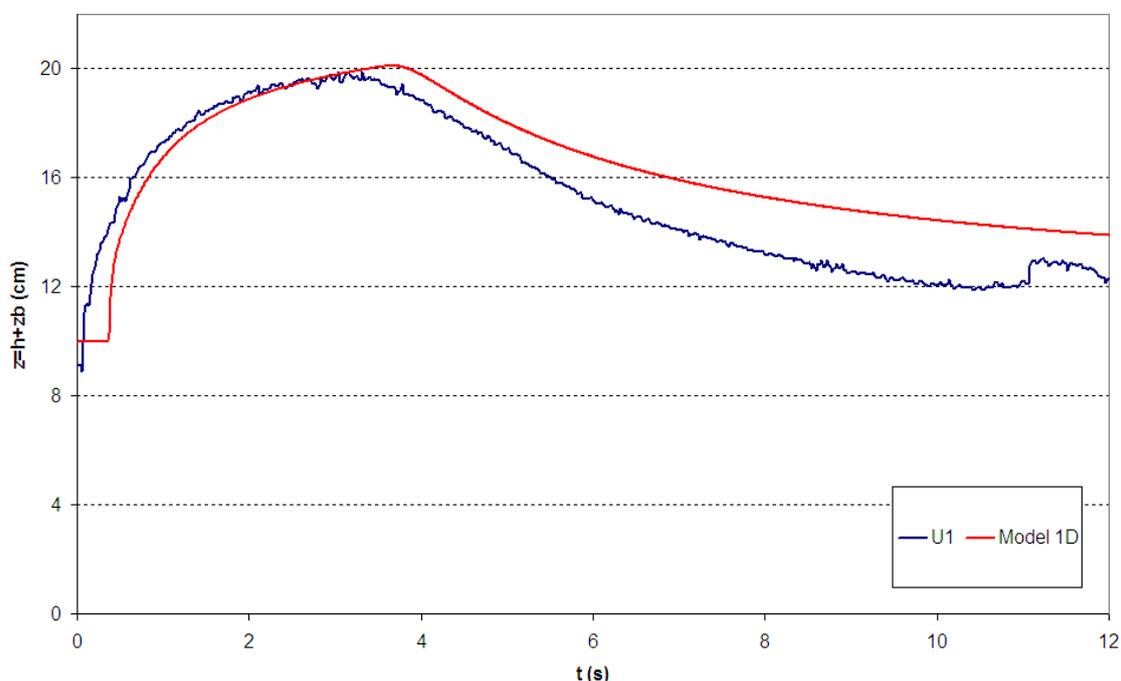
## ***5.6 Confronto dei risultati del modello con quelli sperimentali***

### **5.6.1 Livelli idrici**

Per prima cosa si confrontano i risultati numerici ottenuti con il modello con quelli sperimentali in relazione agli andamenti dei livelli idrici registrati durante il fenomeno di dam-break dalle otto sonde ad ultrasuoni indicate in Figura 5.12.

Il confronto, riportato in Figura 5.20, con riferimento alla sonda U1, posizionata a monte dell'allargamento, è possibile notare un discreto accordo tra i risultati numerici e i dati sperimentali, soprattutto nella fase di innalzamento del pelo libero; è possibile, però, notare come il modello sovrastimi il valore massimo raggiunto del livello idrico e, inoltre, si può riscontrare un ritardo nell'andamento dei livelli "numerici" rispetto a quelli "sperimentali". A tal riguardo, però, è opportuno precisare che le misure effettuate sono comunque affette da errori: legati allo strumento, causati da un eventuale errata trasformazione del segnale nella fase di acquisizione dei dati durante il passaggio nel condizionatore di segnale, dovuti ad eventuali sbagli commessi nella fase di calibrazione dello strumento e/o connessi a condizioni ambientali non idonee all'utilizzazione degli strumenti. Inoltre altre inesattezze nei dati sperimentali possono celarsi nell'individuazione dell'istante di innesco del fenomeno di dam-break, sebbene in tal senso siano stati adottati degli accorgimenti. Infatti, poiché i dati misurati dalle sonde vengono acquisiti già prima dell'apertura della paratoia, è necessario, poi, individuare a quale istante temporale corrisponde l'inizio del fenomeno: per fare ciò ci si serve di un dispositivo composto da una elettrocalamita che invia un segnale elettrico nel momento in cui la paratoia si abbassa, questo segnale elettrico viene poi trasmesso ad un flash, collegato al sistema di acquisizione, che, accendendosi, determina un cambio nel valore acquisito dal software, e che, così, permette di

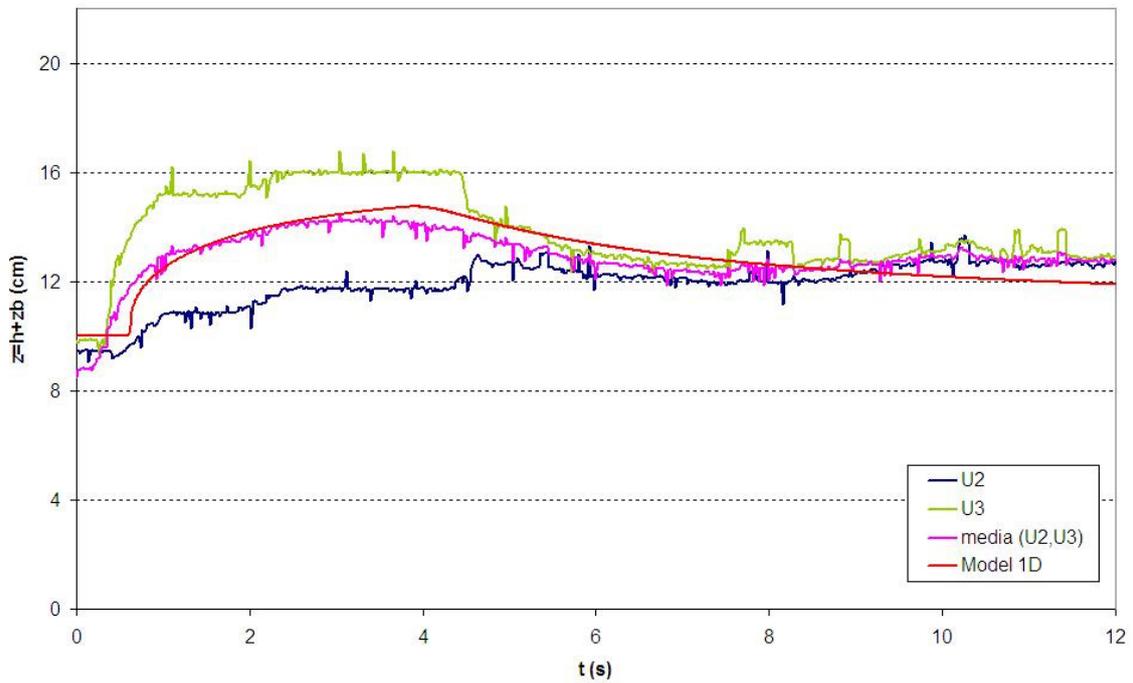
individuare da che istante in poi iniziare a considerare i dati misurati dalle sonde.



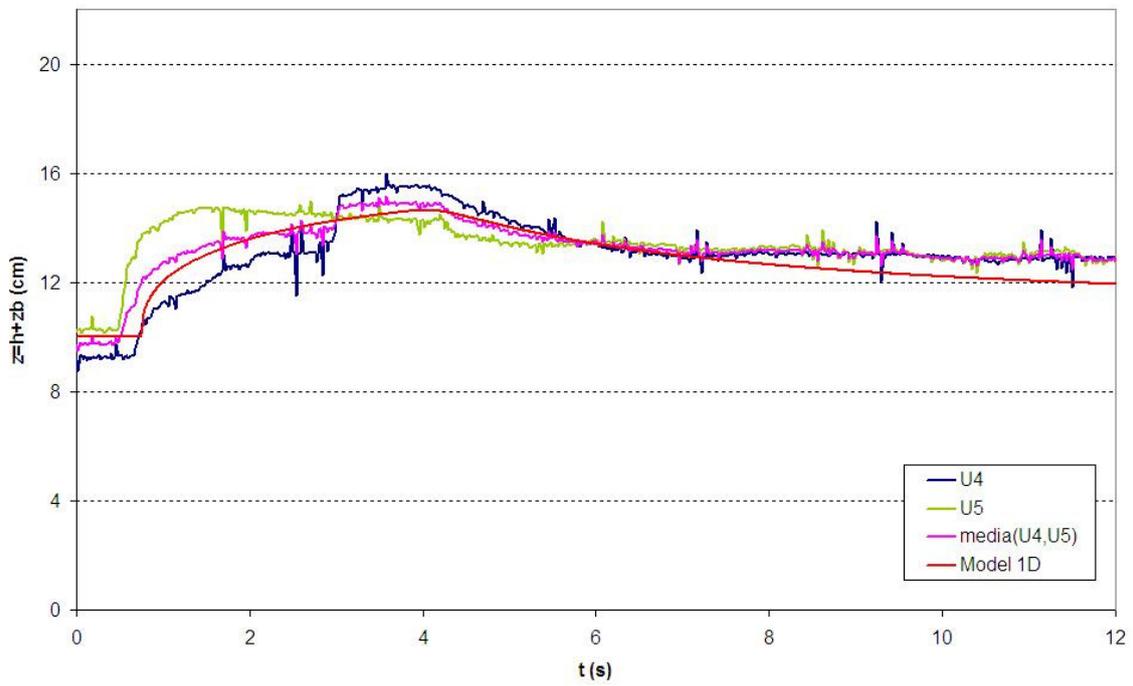
**Figura 5.20** Confronto tra i risultati del modello e i valori registrati dalla sonda U1

Per quanto riguarda invece i confronti relativi ai livelli idrici registrati nell'allargamento, come detto già nel paragrafo 5.5, il modello implementato, essendo mono-dimensionale, non può che cogliere, solo mediamente, il fenomeno registrato dalle sonde. Per questo motivo, nei diagrammi di confronto tra dati sperimentali e dati numerici si è pensato bene di aggiungere, agli andamenti registrati dalle sonde, anche un terzo andamento valutato come media aritmetica dei livelli idrici misurati: questo è quanto è stato fatto per le sonde U2 e U3 (Figura 5.21), U4 e U5 (Figura 5.22) e U6 e U7 (Figura 5.23).

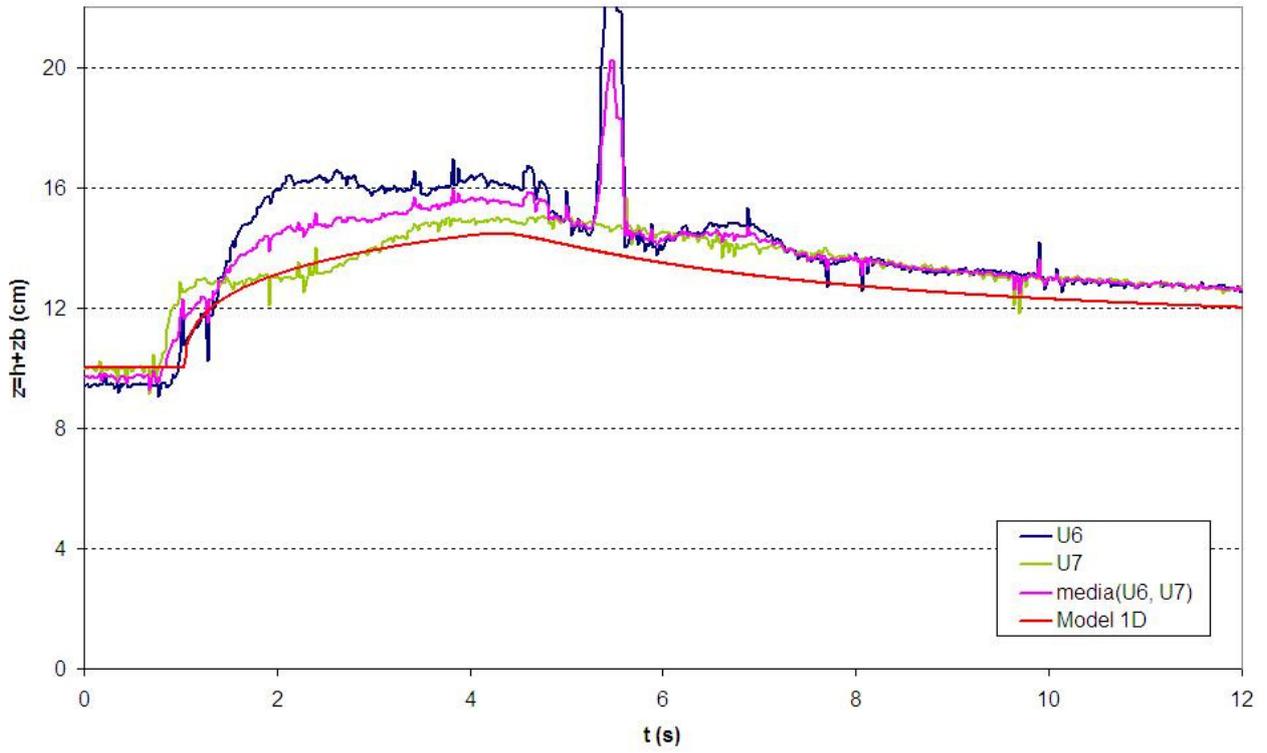
Naturalmente man mano che si procede verso valle, dato che le differenze tra i livelli idrici misurati ai due lati dell'allargamento tendono a diminuire, gli andamenti reali, quello medio e quello ottenuto dal modello numerico tenderanno a coincidere.



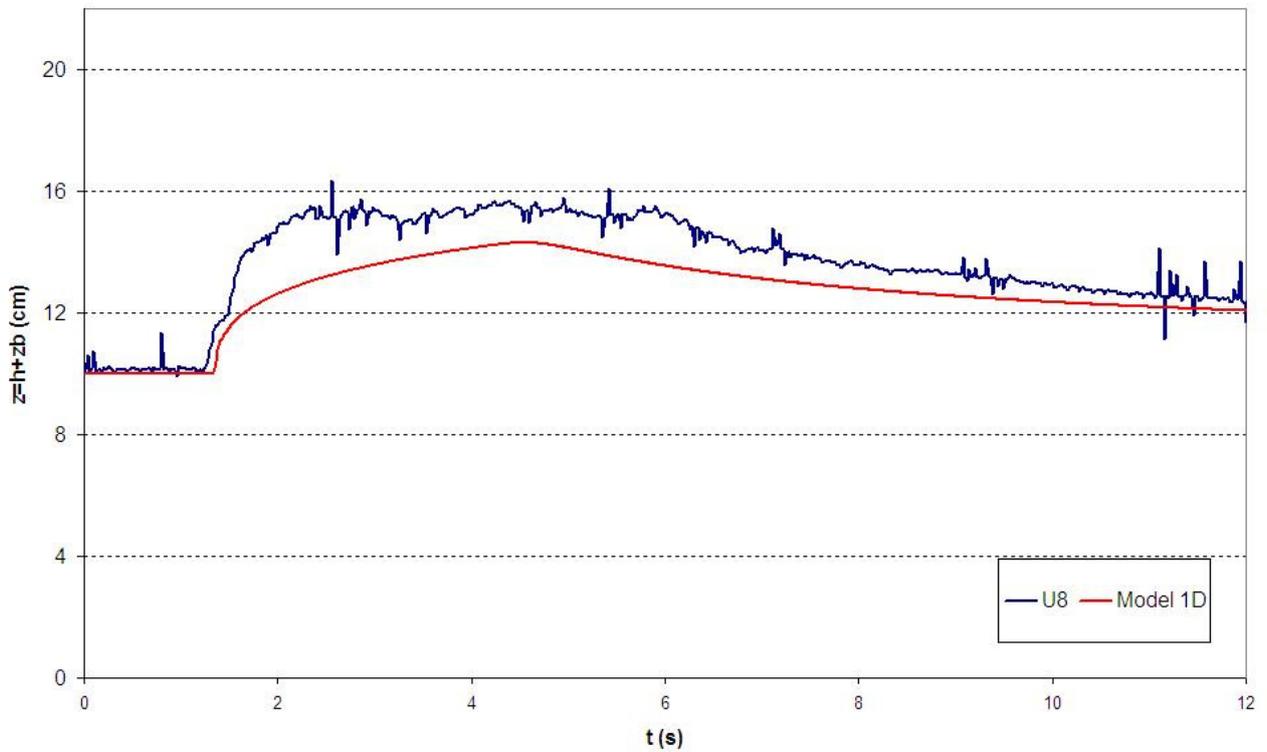
**Figura 5.21** Confronto tra i risultati del modello e i valori registrati dalle sonde U2 e U3



**Figura 5.22** Confronto tra i risultati del modello e i valori registrati dalle sonde U4 e U5



**Figura 5.23** Confronto tra i risultati del modello e i valori registrati dalle sonde U6 e U7

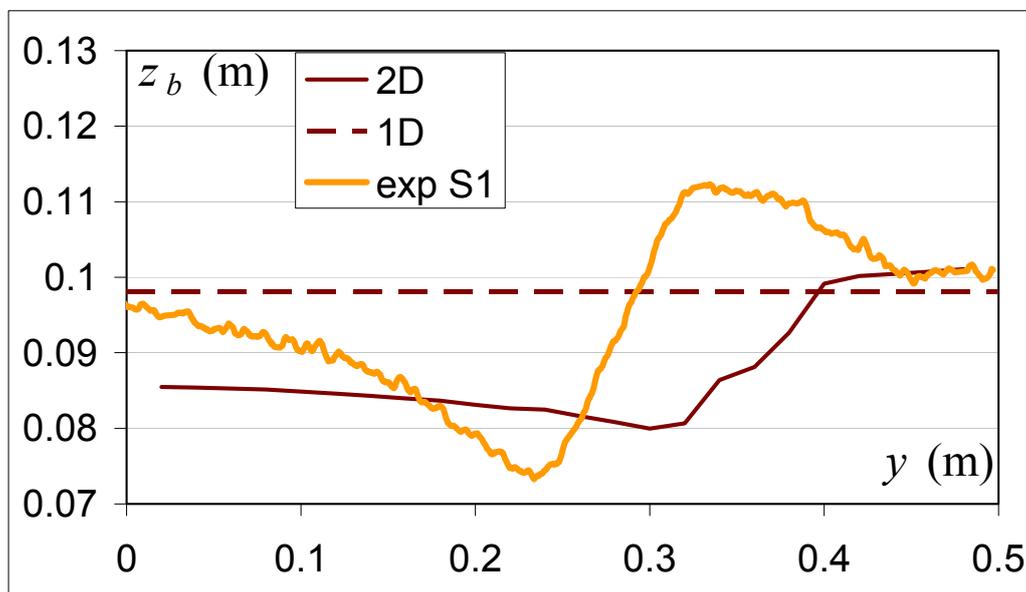


**Figura 5.24** Confronto tra i risultati del modello e i valori registrati dalla sonda U8

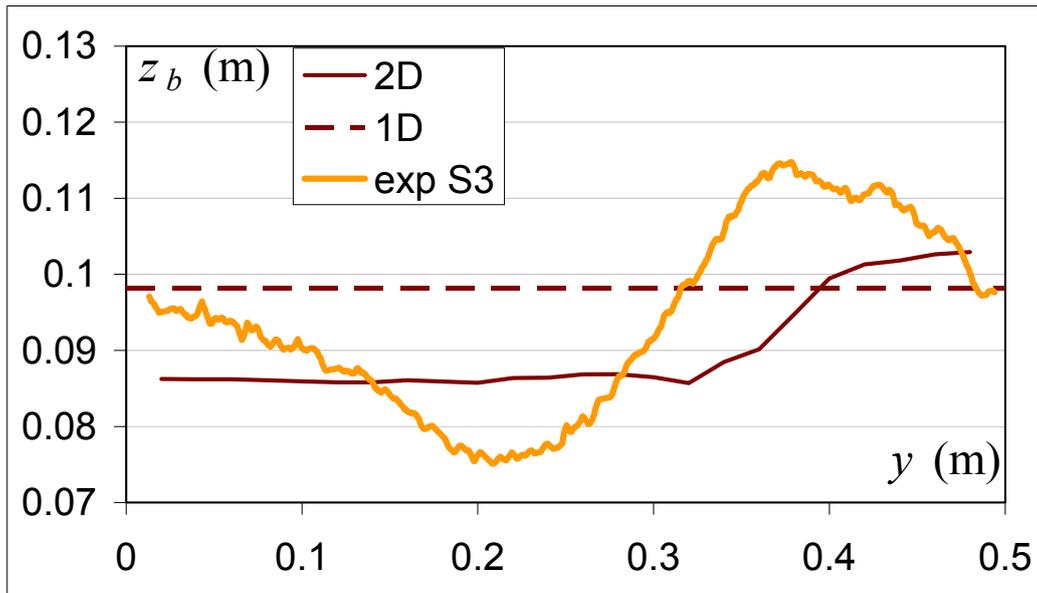
### 5.6.2 Topografia finale

Per quanto riguarda il confronto tra risultati numerici e dati sperimentali, con riferimento all'andamento della topografia finale, va subito precisato che il modello mono-dimensionale oggetto della Tesi, nel caso di sezione rettangolare, non riesce a far altro che valutare un valore costante di innalzamento o abbassamento della quota in ciascuna sezione trasversale. Qui di seguito, per cinque delle sezioni investigate rappresentate in Figura 5.25, vengono riportati i confronti tra i dati sperimentali ed i risultati numerici ottenuti. Nei diagrammi è possibile osservare anche l'andamento dei profili di fondo ottenuti con il modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008).

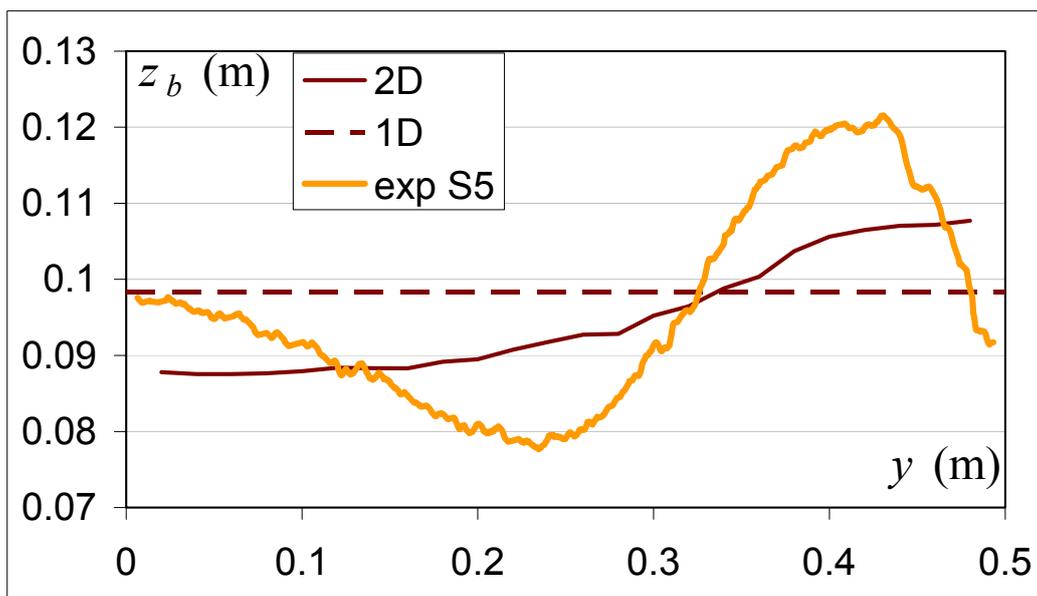
Nelle figure successive (Figura 5.25-Figura 5.29) sono riportati i confronti tra i risultati sperimentali (in arancione), i risultati numerici ottenuti con il modello mono-dimensionale (linea marrone tratteggiata) e quelli ottenuti con il modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) (linea marrone continua).



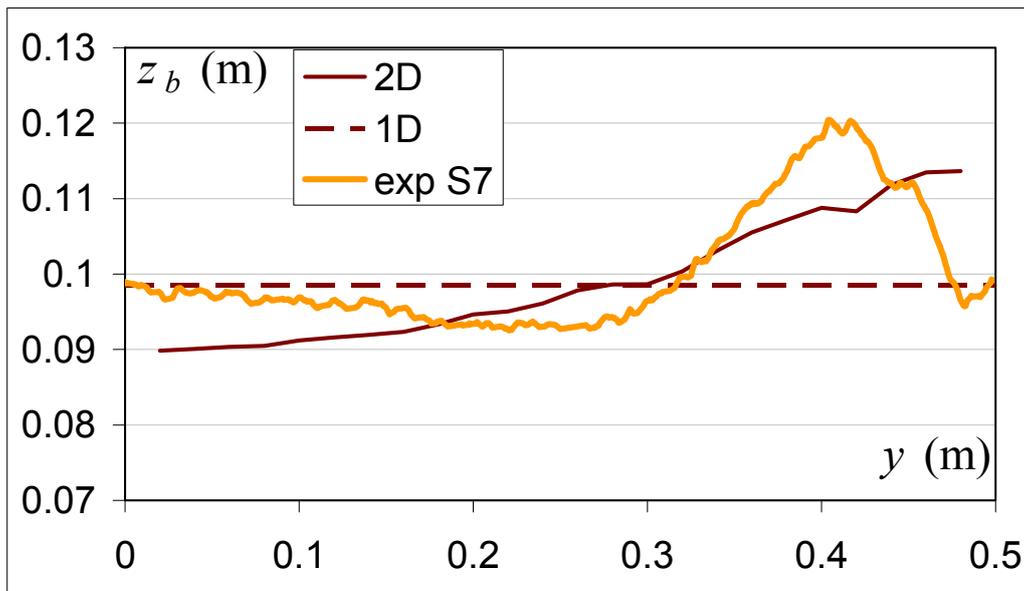
**Figura 5.25** Confronto tra dati sperimentali e risultati numerici del modello mono-dimensionale e del modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) per la sezione S1.



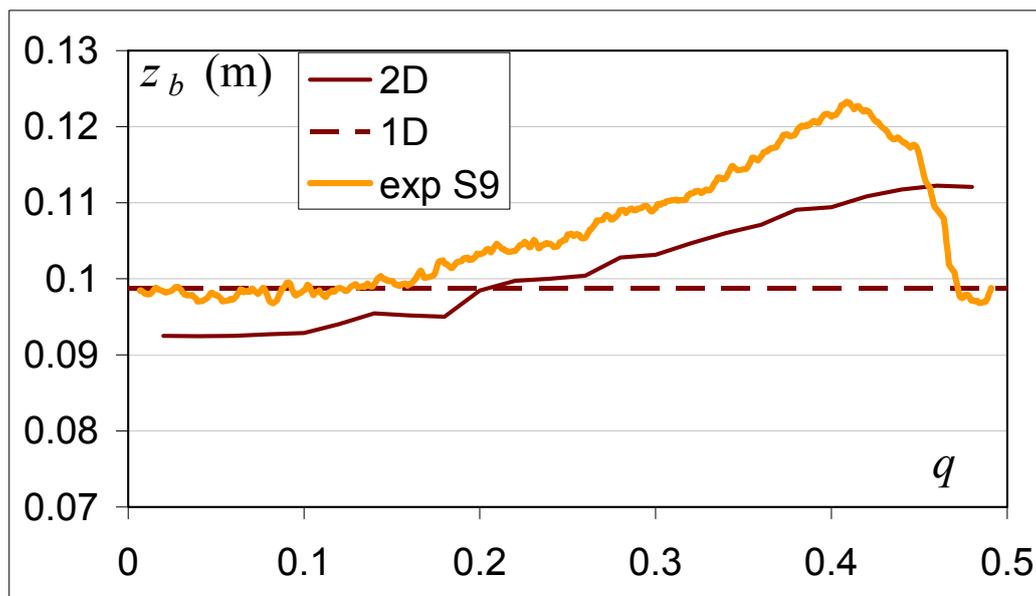
**Figura 5.26** Confronto tra dati sperimentali e risultati numerici del modello mono-dimensionale e del modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) per la sezione S3.



**Figura 5.27** Confronto tra dati sperimentali e risultati numerici del modello mono-dimensionale e del modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) per la sezione S5.



**Figura 5.28** Confronto tra dati sperimentali e risultati numerici del modello mono-dimensionale e del modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) per la sezione S7.



**Figura 5.29** Confronto tra dati sperimentali e risultati numerici del modello mono-dimensionale e del modello bi-dimensionale di Goutière et al. (2008) per la sezione S8.

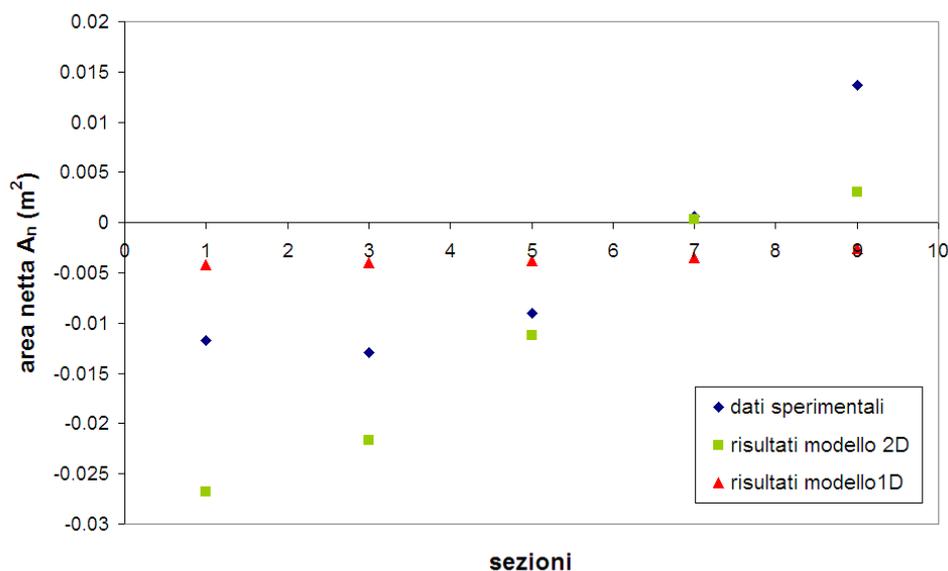
Come è facile osservare dalle figure (Figura 5.25-Figura 5.29), il modello monodimensionale, così come ci si aspettava, è totalmente incapace di rappresentare la topografia finale in corrispondenza dell'allargamento, in termini sia di andamento del profilo (cosa prevedibile vista la procedura utilizzata per la variazione della sezione trasversale la quale assegna un unico

valore costante di abbassamento o innalzamento del fondo nel caso di sezione trasversale rettangolare) sia in termini di entità dei fenomeni erosivi ottenuti con il modello, che risultano essere sempre molto ridotti. Proprio con riferimento a questo secondo aspetto si è voluto fare un altro confronto in termini di aree nette erose o depositate registrate nelle cinque sezioni sopra indicate. A tal proposito si riportano nella Tabella 5.1 i valori di area erosa  $A_e$ , di area depositata  $A_d$  e di area netta  $A_n$  (dove  $A_n = A_d - A_e$ ) in relazione, rispettivamente, ai dati sperimentali, ai risultati numerici del modello 2D e a quelli del modello 1D.

sezione		area erosa totale $A_e$ [m <sup>2</sup> ]	area depositata totale $A_d$ [m <sup>2</sup> ]	area netta erosa o depositata $A_n$ [m <sup>2</sup> ]
S1	Dati Sperimentali	0.0169	0.0052	-0.0117
	Modello 2D	0.0271	0.0003	-0.0268
	Modello 1D	0.0042	0	-0.0042
S3	Dati Sperimentali	0.0192	0.0063	-0.0129
	Modello 2D	0.0226	0.0009	-0.0217
	Modello 1D	0.004	0	-0.004
S5	Dati Sperimentali	0.0181	0.0091	-0.009
	Modello 2D	0.0148	0.0036	-0.0112
	Modello 1D	0.0038	0	-0.0038
S7	Dati Sperimentali	0.0069	0.0075	0.0006
	Modello 2D	0.0066	0.0069	0.0003
	Modello 1D	0.0035	0	-0.0035
S9	Dati Sperimentali	0.0013	0.015	0.0137
	Modello 2D	0.0054	0.0084	0.003
	Modello 1D	0.0026	0	-0.0026

**Tabella 5.1** Valori delle aree erose, depositate e nette ottenute dagli esperimenti e dalle simulazioni con i modelli 1D e 2D (Goutière et al., 2008)

I valori di area netta (rappresentanti un'erosione, in caso di segno negativo, e un deposito, in caso di segno positivo) riportati nella Tabella 5.1 sono poi diagrammati in Figura 5.30.



**Figura 5.30** Confronto tra i valori di area netta (erosa/depositata) ottenuti sperimentalmente e con i modelli 1D e 2D (Goutière et al., 2008)

Dalla Figura 5.30 si evince come il modello 1D restituisca sempre un'erosione di entità molto modesta: se questo risultato, in termini di area netta erosa, non si discosta di molto nel caso delle sezioni poste più a monte (S1, S3, S5), questo è completamente errato nelle sezioni poste più a valle (S7, S9) dove, nella realtà, si registra un deposito netto. Queste errate valutazioni (soprattutto in termini di intensità del fenomeno registrato) potrebbero essere legate alla formula di trasporto solido utilizzato (nel caso in esame quella di Meyer-Peter e Muller). D'altro canto è possibile osservare che anche un modello bidimensionale, come quello di Goutière et al. (2008), certamente per sua natura più idoneo a riprodurre il fenomeno sperimentale, non riesce a cogliere al meglio non solo l'andamento del profilo del fondo nelle sezioni esaminate, ma anche i valori dei volumi di materiale solido complessivamente eroso o depositato.

## *Conclusioni*

In conseguenza dell'apporto solido dai bacini e dai versanti, dei fenomeni di erosione/deposito che si sviluppano sul fondo e sulle sponde, e del trasporto solido indotto dall'azione della corrente, i corsi d'acqua sono soggetti a continue variazioni, più o meno rapide ed evidenti, della configurazione del fondo e delle sponde. Tali processi, di per se stessi del tutto naturali, quando vengono ad essere amplificati da eventuali fattori antropici (prelievo di inerti dal fondo alveo, sistemazioni idrauliche e idraulico-forestali eseguite sui tronchi d'alveo o sul bacino a monte, sbarramenti, attraversamenti ferroviari e fluviali, ecc.), possono arrecare numerosi problemi di carattere tecnico ed economico, quali, ad esempio, la compromissione della stabilità di eventuali opere presenti lungo le sponde di tratti d'alveo eventualmente interessati da fenomeni di erosione generalizzata del profilo di fondo d'alveo o, al contrario, il sovralluvionamento dell'alveo in seguito al deposito di materiale solido sul fondo dello stesso, con conseguente riduzione delle sezioni trasversali ed accentuazione della pericolosità del corso d'acqua nei confronti dei fenomeni di esondazione.

Dato che la modellazione fisica di tali fenomeni pone numerose difficoltà, sia di tipo concettuale che pratico, tenendo conto dei numerosi progressi fatti sia nella comprensione dei fenomeni fisici che sovrintendono alla dinamica evolutiva dei corsi d'acqua, sia nella proposizione e nell'implementazione di metodi numerici in grado di portare in conto, agevolmente, anche la presenza di discontinuità del campo di moto, sia nella diffusione di strumenti di calcolo che, seppure eventualmente a basso costo, risultano comunque caratterizzati da notevoli capacità computazionali, la modellazione matematica viene a porsi, sempre di più, come un valido strumento sia ai fini della previsione dei

fenomeni di erosione e di deposito che di un'eventuale programmazione di interventi finalizzati al contenimento dei danni indotti dai processi stessi.

A tale scopo, a partire dalla fine degli anni '50, sono stati proposti e sviluppati numerosissimi modelli matematici, che, seppure con riferimento ad approcci più o meno semplificati, si basano, comunque, indipendentemente dalla natura e dalle caratteristiche del materiale solido trasportato (supposto, per semplicità, omogeneo ed uniforme, oppure costituito da granulometrie disuniformi e/o non omogenee) su bilanci di massa e di quantità di moto totale (o, in alternativa a quest'ultimo, su bilanci di energia).

Nel presente lavoro di tesi, è stato proposto (ed implementato in uno specifico software) un nuovo tipo di modello numerico, di tipo mono-dimensionale. Tale modello è stato implementato in modo tale che fosse, allo stesso tempo, sia un valido strumento per la simulazione e l'analisi di eventi di evoluzione d'alveo che sussistono in corsi d'acqua naturali, sia un modello robusto, capace di portare in conto, oltre a fenomeni che si sviluppano su lunga scala temporale, anche transitori rapidi (quali, ad esempio, fenomeni di "dam-break"), caratterizzati da discontinuità delle grandezze idrauliche e da condizioni di trasporto solido marcatamente di "non equilibrio".

Per questo motivo, tenendo conto dello stato dell'arte della modellazione del trasporto solido, per soddisfare il primo obiettivo si è fatto in modo che il modello fosse applicabile anche a canali non prismatici, di qualsivoglia sezione trasversale; in tale ottica, si è altresì provveduto a mettere a punto una metodologia per la redistribuzione dell'area depositata/erosa lungo i contorni della sezione trasversale, in modo tale da sopperire, in parte, al fatto che il modello sia mono-dimensionale e, quindi, intrinsecamente, incapace di valutare le variazioni delle grandezze in esame (quali tirante, velocità, sforzi tangenziali) che si hanno lungo la sezione trasversale.

Per tenere in conto, invece, del secondo obiettivo, si è fatto riferimento ad un approccio a quattro equazioni e si è implementato un modello numerico ai volumi finiti, accurato al I ordine nello spazio e al II ordine nel tempo (attraverso l'introduzione di un procedimento di predizione e correzione per l'avanzamento nel tempo delle variabili), di tipo accoppiato, in grado di portare in conto anche transitori rapidi, caratterizzati da discontinuità delle grandezze idrauliche e da condizioni di trasporto solido marcatamente di "non equilibrio". In particolare, le condizioni di "non-equilibrio" vengono tenute in conto, nel modello, affiancando alle tre equazioni di bilancio che esprimono, rispettivamente, il principio di conservazione della massa del miscuglio, della massa solida e della quantità di moto del miscuglio, un'equazione di "adattamento", la quale tiene conto di un andamento nel tempo della concentrazione della fase solida tendente, asintoticamente, alla concentrazione d'equilibrio. Il modello numerico fa uso dell'HLLC come solutore approssimato del problema di Riemann per valutare i flussi di massa e di quantità di moto all'interfaccia tra i volumi di controllo.

Avendo, di fatto, concentrato l'attenzione sugli aspetti di tipo numerico e geometrico, il modello effettua, di contro, semplificazioni relative alla modalità con cui viene portato in conto il trasporto solido. Esso, infatti, non opera una distinzione tra trasporto solido al fondo e trasporto solido in sospensione: il modello, nella sua versione attuale, è infatti in grado di portare in conto solo il trasporto solido totale (somma del trasporto al fondo e quello in sospensione). A tale scopo, il trasporto solido totale è trattato, all'interno del modello, come se fosse costituito dal solo trasporto solido in sospensione, considerando un valore unico della concentrazione solida di sedimenti uniformemente distribuita sulla sezione trasversale alla direzione del moto.

Il modello numerico proposto è stato successivamente validato mediante una serie di test eseguiti con riferimento a casi di cui è noto, a priori, il

comportamento fisico del fenomeno e/o la soluzione, e ad esperienze condotte in laboratorio. I test effettuati hanno riguardato la simulazione sia di fenomeni di erosione/deposito che si sviluppano in un canale a pelo libero, sia di fenomeni di dam-break su fondo mobile. In particolare, i risultati ottenuti con il codice di calcolo messo a punto sono stati confrontati, laddove è stato possibile, con dati sperimentali e con risultati di altri modelli disponibili in letteratura.

Per quanto riguarda i test eseguiti con riferimento a casi teorici, si è visto che il modello riesce a riprodurre perfettamente quanto ci si poteva attendere. Quanto mostrato nella Tesi di Dottorato non risulta essere ovvio, data la non attendibilità di altri strumenti attualmente disponibili in rete: in particolare, è stata messa in luce la non idoneità del software Hec-Ras 4 (messo a punto da un Centro di Ricerca statunitense operante, nello specifico settore, da circa una trentina di anni) per lo studio dei fenomeni di erosione e deposito dovuti al trasporto solido.

Inoltre, i confronti dei risultati numerici ottenuti con il modello mostrano un buon accordo con i dati sperimentali presenti in letteratura, anche nel caso di transitori rapidi, come i fenomeni di dam-break.

Nell'elaborato di tesi, si sono riportati, inoltre, i risultati ottenuti nell'ambito di attività sperimentali condotte dalla scrivente, sotto la supervisione dei Proff. Yves Zech e Sandra Soares Frazao, presso il laboratorio di Ingegneria Civile dell'Università cattolica di Louvain, a Louvain-la-Neuve (Belgio), finalizzate all'analisi di un fenomeno di dam-break su fondo mobile in un canale caratterizzato, a valle, dalla presenza di un brusco allargamento.

Le esperienze condotte hanno portato alla valutazione, in particolari punti dell'allargamento, dell'evoluzione, nel tempo, dei livelli idrici, e alla misura, in particolari sezioni, della topografia finale del fondo.

Nonostante il modello implementato nella tesi sia mono-dimensionale e, quindi, per sua natura, intrinsecamente non in grado di poter riprodurre un fenomeno fortemente bidimensionale come quello della propagazione di un'onda, a seguito di un dam-break, in un canale che presenta a valle un brusco allargamento, si è voluto utilizzare il modello implementato anche in questo caso, in modo tale da mostrare, da un lato, i limiti del modello e da valutare, dall'altro, dove il modello sembra riprodurre il fenomeno abbastanza bene.

L'applicazione del modello al caso di dam-break in presenza di brusco allargamento ha messo in luce la sua capacità di cogliere, almeno mediamente, il fenomeno registrato nelle esperienze condotte, soprattutto con riferimento ai livelli idrici.

In definitiva, alla luce dei risultati conseguiti, appare possibile affermare che il modello numerico messo a punto, ancorché ulteriormente espandibile per poter essere in grado di portare in conto granulometrie disuniformi, materiali trasportati eventualmente non omogenei e le differenti modalità con cui si sviluppa il trasporto solido al fondo e quello in sospensione, appare pienamente rispondente agli obiettivi che si intendevano conseguire all'inizio del lavoro di Tesi: giungere ad un modello in grado di portare in conto, nel miglior modo possibile, la complessa realtà che ci circonda, e dotato di una robustezza in grado di poterne consentire una concreta applicabilità anche in campo tecnico.

## *Bibliografia*

- Aparicio, J., e Berezowsky, M. (1988). Reply to the discussions on the paper “A mathematical model for unsteady supercritical flow on a mobile sandy bed.” J. of Hydrol. Sciences, Vol. 33, No. 4, 416-418.
- Armanini, A. (1999) “Principi di idraulica Fluviale” BIOS.
- Armanini, A., e Di Silvio, G. (1988). “A one-dimensional model for the transport of a sediment mixture in non-equilibrium conditions.” J. of Hydr. Res. Vol. 26, No. 3, 275-292.
- Armanini, A., e Di Silvio, G. (1989). Reply to discussions on the paper “A one-dimensional model for the transport of a sediment mixture in non-equilibrium conditions”. J. of Hydr. Res., Vol. 27, No. 3, 459-462.
- Barbiero, L., Tellez, L.C., Di Ruocco, A., e Pianese, D., (2006) “Modellazione numerica, attraverso la tecnica dei volumi finiti, dei fenomeni di evoluzione d’alveo” Proc. II Congr. A.I.G.A., Bari.
- Batten P., Clarke N., Lambert C. e Causon D.M. (1997a), "On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver", SIAM J. Sci. Comp. 18(6), 1553-1570
- Batten P., Leschziner M.A. e Goldberg U.C. (1997b), "Average-state jacobians and implicit methods for compressible viscous and turbulent flows", J. Comp. Phys. 137, 38-78
- Bellal, M., Savary, C., e Zech, Y., (2005) “Morphological evolution of steep-sloped river beds in the presence of a hydraulic jump: numerical and experimental analysis” Proc. of XXXI IAHR Congress, Seoul, Korea
- Biggiero, V., Fiorentino, M., e Pianese, D., (1992) “Analisi dell’evoluzione d’alveo del tronco vallivo del fiume Volturno” Atti meeting annuale unità operative ricerca MURST 40%, Padova

- Brufau, P., Garcia-Navarro, P., Ghilardi, P., Natale, L., e Savi, F. (2000) "1D mathematical modelling of debris flow" *Journal of Hydraulic Research*, 38 (6), pp. 435-446.
- Caleffi, V., e Valiani, A. (2002) "A mathematical model for dam-break over movable bed" *River flow 2002*, edited by D. Bousmar & Y. Zech, Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Louvain la Neuve, Belgium, 4-6 Settembre 2002, A.A. Balkema Publisher, The Netherlands.
- Caleffi, V., Valiani, A., e Zanni, A. (2002), "Finite volume method for simulating extreme floods events in natural channels", *J. Hydr. Res.* 41(2), pp.167-177.
- Cao, Z., Day, R., e Egashira, S. (2002) "Coupled and decoupled numerical modelling of flow and morphological evolution in alluvial rivers" *J. Hydr. Eng.*, 128 (3), pp. 306-321.
- Cao, Z., Pender, G., Wallis, S., e Carling, P. (2004) "Computational dam-break hydraulics over erodible sediment bed" *J. Hydr. Eng.*, vol.130 (7), pp.689-703.
- Capart, H., e Young, D.L. (1998) "Formation of a jump by the dam-break wave over a granular bed" *Journal Fluid Mechanic* 372, pp. 165-187.
- Capart, H., e Young, D.L. (2002) "Two-layer shallow water computations of torrential geomorphic flows" *River flow 2002*, edited by D. Bousmar & Y. Zech, Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Louvain la Neuve, Belgium, 4-6 Settembre 2002, A.A. Balkema Publisher, The Netherlands.
- Capart, H., Young, D.L., Huang S.Y, e Pan, J.M. (1996) "A lateralized flux-predictor scheme for a computations of open-channel flow in arbitrary topography" *Proceedings of the XX national Conference on Theoretical and Applied Mechanics*, National Taiwan University, Tapei, Taiwan, pp.406-413.
- Capart, H., Eldho, T.I., Huang S.Y., Young, D.L., e Zech, Y. (2003) "Treatment of natural geometry in finite volume river flow computation" *J. Hydr. Eng.*, vol.129 (5), pp.385-393.
- Chang (1988) "Fluvial processes in river engineering" Wiley-Interscience.

- Correia, L.R.P., Krishnappan, B.G., and Graf, W.H. (1992). "Fully Coupled Unsteady Mobile Boundary Flow Model." J. of Hydr. Engrg. , ASCE, 118(3), March, 476-494.
- Chen, Y.H. (1973) "Mathematical modeling of water and sediment routing in natural channels" Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, Colorado State University Ft. Collins, Co.
- Costabile, P., Macchione, F., e Rinaldi, L. (2004) "Schema monodimensionale per il calcolo dell'erosione di rilevati in materiale sciolto" Atti del XXIX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Trento.
- Costabile, P, e Macchione, F. (2006) "One dimensional modelling of dam break flow over erodible sediment bed" River flow 2006, edited by Ferreira, Alves, Leal & Cardoso, Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Lisbon, Portugal, 6-8 Settembre 2006, Taylor & Francis Group, London.
- de Vries, M. (1965). "Considerations about Non-Steady Bed-Load-Transport in Open Channels." Proc. XI Congr. I.A.H.R., Vol. 3, paper 3.8. Leningrad, U.R.S.S.
- El Kadi Abderrezzak, K., Paquier, A., e Jodeau, M. (2007) "Use of 1D sediment transport model to simulate evolution of river bed" .Proceedings of XXXII IAHR Congress, Venice, Italy.
- Ferreira, Amaral, Leal, Spinewine (2006) "Discontinuities in geomorphic dam-break flows" River flow 2006, edited by Ferreira, Alves, Leal & Cardoso, Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Lisbon, Portugal, 6-8 Settembre 2006, Taylor & Francis Group, London.
- Fiori, A., and Guercio, R. (1992). "Sulla tracimazione dei rilevati omogenei non coesivi: risultati sperimentali e modellistica numerica." Internal Report. Dipartimento di Idraulica, Trasporti e Strade. Università "La Sapienza", Roma (in italian).

- Forster, G.R., e Meyer, L.D. (1972) "A closed-form soil erosion equation for upland areas" in Sedimentation Symposium to Honour Professor H.A. Einstein, ed. By H. W. Shen, Colorado State University, Fort Collins.
- Fraccarollo, L., e Toro, E.F. (1995) "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems" *Journal of Hydraulic Research*, 33 (6), pp.843-864.
- Fraccarollo, L., e Capart, H. (2002) "Riemann wave description of erosional dam-break flows" *Journal Fluid Mechanic* 461, pp. 183-228.
- Fraccarollo, L., Capart, H., e Zech, Y. (2003) "A Godunov method for the computation of erosional shallow water transients" *J. Numer. Meth. Fluids* 41, pp.951–976 *Journal of Fluid Mechanics*.
- Fread, D.L.,(1974) "Numerical Properties of the implicit four point finite difference equations of unsteady flow" NOAA Technical memorandum NWS Hydro-18, U.S. Departemente of Commerce, NOAA, NWS, Silver Spring, MD.
- Goutière, L., Soares-Frazaõ, S., Savary, C., Laraichi, T., and Zech, Y. (2008) "One-dimensional model for transient flows involving bedload sediment transport and changes in flow regimes", *Journal of Hydraulic Engineering*, in press.
- Ghidaglia J.M. & Pascal F. (2003) "On boundary conditions for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws in the finite volume framework" Report CMLA, ENS Cachan.
- Ghilardi, Savi, Brufau, Garcia-Navarro "Mathematical modelling of debris flows with a finite volume scheme" *Proc. XXVIII IAHR Conference, Graz (1999)*
- Giuliani, M., Rosatti, G., e Fraccarollo, L. (2004) "Calcolo delle onde di piena in alvei naturali a fondo mobile" *Atti del XXIX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Trento*.
- Hirsch, C. (1988) "Numerical Computation of internal and external flows", Vol. 1, John Wiley & Sons, Inc.

- Hsu, H.-C., and Chu, P.-C. (1964). "Study of river bed degradation and aggradation by the method of characteristics." Chinese Journal of Hydraulic Engineering (Shuili Xuebao), No. 5, October. English translation by C.-T. Lai, 1967.
- Iervolino, M., Greco, M., e Leopardi, A. (2005) "Numerical simulation of dam break on erodible bed" Proc. of XXXI IAHR Congress, Seoul, Korea.
- Jin, Fread (1997) "One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV model" Debris Flow Hazards mitigation, San Francisco.
- Leal, Ferreira, Cardoso, Almeida (2003) "Comparison between numerical and experimental results on dam-break waves over dry mobile beds" Proceedings of the 3rd IMPACT Project Workshop, Louvain-la Neuve, Belgium.
- Leon, A.S., Ghidaoni, M.S., Schmidt, A.R., e Garcia, M.H. (2006) "Godunov-type solutions for transient flows in sewers" J. Hydr. Eng., vol.132 (8).
- Liggett, J.A., e Cunge, J.A. (1975) "Numerical methods of solutions of the unsteady flows equations" in Unsteady flow in open channels, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich Vol.1, Chapter 4, Water Resources Publications, Ft. Collins, Co
- Lomax H., Pulliam T.H. & Zingg D.W. (2001), "Fundamentals of Computational Fluid Dynamics", Springer-Verlag, Berlino.
- Marchi, Rubatta (1981) "Meccanica dei Fluidi" UTET
- Montuori (1996) "Complementi di Idraulica" Liguori Editore, Napoli (1996)
- Morris, P.H., and Williams, D.J. (1996). "Relative Celerities of Mobile Bed Flows with Finite Solids Concentrations." J. of Hydr. Engrg., ASCE, 122(6), June, 311-315.
- Mosselmann, E. (1989). "Theoretical Investigation on Discharge-Induced River-Bank Erosion." Comm. on Hydr. and Geotechn. Engrg., Report N0. 89-3. Faculty of Civil Engineering. Delft Univers. of Tech. The Netherlands.
- Mosselmann, E. (1992). "Mathematical modelling of morphological processes in rivers with erodible cohesive banks." Comm. on Hydr. and Geotech. Engrg., Report No. 92-3. Delft University of Technology. The Netherlands.

- Olesen, (1981) “A numerical model for morphological computations in rivers with non-uniform sediment”, Report R/1981/6H, Dept. of Civ. Eng., Delft Univ. of Techn.
- Palumbo, A., Di Ruocco, A., Cozzolino, L., e Pianese, D. (2006) “Un’applicazione del metodo dei volumi finiti per l’analisi di transitori rapidi in alvei a fondo mobile” Atti del XXX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Roma.
- Palumbo, A., Soares-Frazae, S., Goutiere, L., Pianese, D., Zech, Y. (2008) “Dam-break flow on mobile bed in a channel with a sudden enlargement”. Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics, River Flow 2008 , 3-8 Settembre 2008, Izmir, Turchia.
- Parker, G. e Andrews, E.D., (1987) “Formation of a coarse surface layer as the response to gravel mobility” In Thorne, C.R., Bathurst, J.,C., e Hey, R.D. (Ed), Sediment transport in Gravel-bed Rivers, J.Wiley & sons, New York, pp. 269-325.
- Parker, G. e Sutherland, A.J., (1990) “Fluvial Armor” Journal of Hydraulic Research Vol.28 (5) pp.529-544.
- Pianese, D., (1994) “Influenza della non stazionarietà e non uniformità del trasporto solido sui processi di evoluzione d’alveo” Collana del Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale “Girolamo Ippolito” dell’Università di Napoli Federico II, pubbl. n. 725 pp.24.
- Pianese, D., and Rossi, F. (1990). “Mathematical modelling of morphological variations in mountain streams.” Excerpta, Vol. 5, Libreria Progetto, Padova (Italy), 99-150.
- Pizzuto, J.E. (1990) “Numerical simulation of gravel river widening” Water Resources Research, Vol.26 (9), pp.1971-1980.

- Rahuel, J.L. (1993). Discussion on the paper “Fully Coupled Unsteady Mobile Boundary Flow Model.”, by Correia, L.R.P., Krishnappan, B.G., and Graf, W.H. (1992). *J. of Hydr. Engrg., ASCE*, 119(4), April, 528-530.
- Ribberink, (1987) “Mathematical modelling of one-dimensional morphological changes in rivers with non-uniform sediment”, Report 87/2, Dept. of Civ. Eng., Delft Univ. of Techn.
- Rickenmann (1989) “Bed load transport and hyperconcentrated flow at steep slopes” International Workshop on fluvial hydraulics of mountain regions, Trento 1989.
- Soares-Frazão, S., Le Grelle, N., Spinewine, B., Zech, Y. (2007) “Dam-break induced morphological changes in a channel with uniform sediments: measurements by a laser-sheet imaging technique” *Journal of Hydraulic Research Vol.45 Extra Issue*.
- Soni, J.P., Garde, R.J., e Ranga Raju, K.G. (1980) “Aggradation in streams due to overloading”, *Journal of Hydraulic Division Vol.106 (1)*, pp. 117-132.
- Spinewine, B., Zech, Y. (2005) “Dam-break on a movable bed in presence of an initial bed discontinuity: laboratory experiments and simulations with a multi-layer shallow water model” *Proc. of XXXI IAHR Congress, Seoul, Korea*
- Spinewine, B., Zech, Y. (2007) “Small-scale laboratory dam-break waves on a movable beds” *Journal of Hydraulic Research Vol.45 Extra Issue*
- Stevens, M.A. (1988). Discussion on the paper “Unsteady Sediment-Transport Modeling.”, by D.A. Lyn, 1987. *J. of Hydr. Engrg., ASCE*, 114(8), August, 955-956.
- Toro, E.F. (1999) “Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics”, Springer-Verlag. Berli.
- US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, HEC-RAS River Analysis System, (2006) “User’s Manual”.

- US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center, HEC-RAS River Analysis System, (2008) “Hydraulic Reference Manual”.
- Van Rijn, L. C. (1984) “Sediment Transport. Part I: Bed Load Transport.” J. of Hydr. Engrg., ASCE, 110(10), October, 1431-1456.
- Van Rijn, L. C. (1984) “Sediment transport, Part. II: Suspended load transport”. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110 (11).
- Van Rijn, L. C. (1984) “Sediment transport, Part. III: Bed forms and alluvial roughness”. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110 (12).

## **RINGRAZIAMENTI**

Un particolare ringraziamento va ai Proff. Yves Zech e Sandra Soares- Frazão per il loro prezioso contributo allo sviluppo del mio elaborato di Tesi e all'Ing. Laurent Goutière per la sua fondamentale collaborazione alla realizzazione delle attività sperimentali in laboratorio.

# Appendici

## Appendice 1

Espressioni dei coefficienti  $a_{ij}$  per il modello 2L-3Eq

$a_{11} = 1 + \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U}$ $a_{12} = 2\beta + \left( \beta + K \frac{gh}{U^2} \right) \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U}$ $a_{13} = \left( 1 + \sigma_s h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} \right) \frac{U^2}{gh}$ $a_{14} = \left( K + \beta \frac{U^2}{gh} \right) \left( 1 + \sigma_s h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} \right)$ $a_{15} = 0$ $a_{16} = 1$	$a_{21} = -U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U}$ $a_{22} = \left[ -U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} + (1 - C_s) \right]$ $a_{23} = \frac{U^2}{gh} \left[ -h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} + (1 - C_s) \right]$ $a_{24} = \frac{U^2}{gh} \left[ -h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} + (1 - C_s) \right]$ $a_{25} = p \frac{U^2}{gh}$ $a_{26} = 0$	$a_{31} = U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U}$ $a_{32} = \left[ U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} + C_s \right]$ $a_{33} = \frac{U^2}{gh} \left[ U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} + C_s \right]$ $a_{34} = \frac{U^2}{gh} \left[ U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} + C_s \right]$ $a_{35} = (1 - p) \frac{U^2}{gh}$ $a_{36} = 0$
$a_{41} = 1$ $a_{42} = \Phi$ $a_{43} = 0$ $a_{44} = 0$ $a_{45} = 0$ $a_{46} = 0$	$a_{51} = 0$ $a_{52} = 0$ $a_{53} = \frac{U^2}{gh}$ $a_{54} = \frac{U^2}{gh} \Phi$ $a_{55} = 0$ $a_{56} = 0$	$a_{61} = 0$ $a_{62} = 0$ $a_{63} = 0$ $a_{64} = 0$ $a_{65} = \frac{U^2}{gh}$ $a_{66} = \frac{U^2}{gh} \Phi$

## Appendice 2

Espressioni dei coefficienti  $b_r$  per il modello 2L-3Eq

$$b_o = \frac{U^2}{gh} \left\{ \left( 1 + \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) [C_s - (1-p)] + \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \square b_1 = & -\beta \frac{U^2}{gh} \left\{ [C_s - (1-p)] \left( 2 + \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) + \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) + h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} \right\} + \\ & + \sigma_s C_s \left[ \frac{U^2}{gh} \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) - KU \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right] - \frac{U^2}{gh} \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) [1 + \sigma_s (1-p)] + \square \\ & - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \{ 1 - K[1 + \sigma_s (1-p)] \} \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 = & -\beta \frac{U^2}{gh} \left\{ C_s \left[ \sigma_s \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) - 1 \right] - h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} [2 + \sigma_s (1-p)] + (1-p) \left( 1 + \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) \right\} + \\ & - C_s K \left[ 1 + \sigma_s \left( h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) \right] - h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} [1 - K \sigma_s (1-p)] + \\ & + K \left[ (1-p) \left( 1 - \sigma_s U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right) - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \right] + 2U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U} \square \end{aligned}$$

$$\square b_3 = h \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial h} - U \frac{\partial \mathcal{C}_s}{\partial U}$$

### Appendice 3

Espressioni dei coefficienti  $a'_{ij}$  per il modello 2L-4Eq

$a'_{11} = 1$ $a'_{12} = 2\beta$ $a'_{13} = \frac{U^2}{gh}$ $a'_{14} = K + \beta \frac{U^2}{gh}$ $a'_{15} = 0$ $a'_{16} = 1$ $a'_{17} = \sigma_s$ $a'_{18} = \left( \beta + K \frac{gh}{U^2} \right) \sigma_s$	$a'_{21} = 0$ $a'_{22} = (1 - C_s)$ $a'_{23} = \frac{U^2}{gh} (1 - C_s)$ $a'_{24} = \frac{U^2}{gh} (1 - C_s)$ $a'_{25} = p \frac{U^2}{gh}$ $a'_{26} = 0$ $a'_{27} = -1$ $a'_{28} = -1$	$a'_{31} = 0$ $a'_{32} = C_s$ $a'_{33} = \frac{U^2}{gh} C_s$ $a'_{34} = \frac{U^2}{gh} C_s$ $a'_{35} = (1 - p) \frac{U^2}{gh}$ $a'_{36} = 0$ $a'_{37} = 1$ $a'_{38} = 1$	$a'_{41} = 0$ $a'_{42} = C_s$ $a'_{43} = \frac{U^2}{gh} C_s$ $a'_{44} = \frac{U^2}{gh} C_s$ $a'_{45} = 0$ $a'_{46} = 0$ $a'_{47} = 1$ $a'_{48} = 1$
$a'_{51} = 1$ $a'_{52} = \Phi$ $a'_{53} = 0$ $a'_{54} = 0$ □ $a'_{55} = 0$ $a'_{56} = 0$ $a'_{57} = 0$ $a'_{58} = 0$	$a'_{61} = 0$ $a'_{62} = 0$ $a'_{63} = \frac{U^2}{gh}$ $a'_{64} = \frac{U^2}{gh} \Phi$ □ $a'_{65} = 0$ $a'_{66} = 0$ $a'_{66} = 0$ $a'_{66} = 0$	$a'_{71} = 0$ $a'_{72} = 0$ $a'_{73} = 0$ $a'_{74} = 0$ $a'_{75} = \frac{U^2}{gh}$ □ $a'_{76} = \frac{U^2}{gh} \Phi$ $a'_{77} = 0$ $a'_{78} = 0$	$a'_{81} = 0$ $a'_{82} = 0$ $a'_{83} = 0$ $a'_{84} = 0$ □ $a'_{85} = 0$ $a'_{86} = 0$ $a'_{87} = 1$ $a'_{88} = \Phi$

## Appendice 4

Espressioni dei coefficienti  $b_r''$  per il modello 3L-5Eq

Ponendo:

$x_1 = \omega (1-p) - 2h \frac{\partial \omega}{\partial h} (1-p) + p(1 - U \frac{\partial \omega}{\partial U}) + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1$	$x_{74} = \frac{\partial \delta}{\partial h} \frac{U^2}{gh} (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1)$
$x_2 = -C_b^2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p)$	$x_{75} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega \frac{U^2}{gh} + x_{69}) + x_{44}$
$x_3 = -\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p)$	$x_{76} = 2 \frac{\partial \delta}{\partial h} (2\omega + 1) + 3\omega + 1$
$x_4 = \beta \frac{U^2}{gh}$	$x_{77} = \frac{\partial \delta}{\partial h} \frac{U^2}{gh} (2\omega + 1) + \omega \frac{U^2}{gh} - K$
$x_5 = C_s \sigma_s (1-p) (1 - \omega - U \frac{\partial \omega}{\partial U}) + x_3 + x_1$	$x_{78} = \frac{\partial \delta}{\partial h} x_{52} + \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} \omega x_{33}$
$x_6 = x_2 - C_b x_5 + (1-p) [\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega + 2) + 1] (C_s \sigma_s - 1)$	$x_{79} = C_b \sigma_b (x_{74} + x_{75}) + x_{66}$
$x_7 = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (K + 2 \frac{U^2}{gh})$	$x_{80} = C_b [C_s \sigma_s (h \frac{\partial \omega}{\partial h} - U \frac{\partial \omega}{\partial U}) - x_{63} - x_{61} + U \frac{\partial \omega}{\partial U}]$
$x_8 = h \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{U^2}{gh}$	$x_{81} = \beta \frac{U^2}{gh} [C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b (\omega + 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1) - x_{72} - x_{65} + x_{76}]$
$x_9 = \omega (K + \frac{U^2}{gh})$	$x_{82} = (1-p) [\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega x_{38} + K) + x_9 + K]$
$x_{10} = K (U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1)$	$x_{83} = \omega (1-p) (\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} + 1) (C_s \sigma_s - 1)$
$x_{11} = \omega (1-p) (K + \frac{U^2}{gh})$	$x_{84} = -K (1-p) [C_b^2 x_{61} (\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} + 1) + x_{80} + \omega x_{60}]$
$x_{12} = -C_b^2 h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p)$	$x_{85} = U \frac{\partial \omega}{\partial U} (K + 2 \frac{U^2}{gh})$
$x_{13} = x_4 x_6 + x_{12} (x_7 + \frac{U^2}{gh})$	$x_{86} = -\beta \frac{U^2}{gh} (1-p) x_{31} + x_{34}$
$x_{14} = x_9 - x_8 + x_{10} + \frac{U^2}{gh} (2U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1)$	$x_{87} = C_b [-C_s \sigma_s (1-p) x_{37} + x_{53} - K(p x_{19} - 2U \frac{\partial \omega}{\partial U} + 1) + x_{21}]$
$x_{15} = (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1)$	$x_{88} = \omega (K + 2 \frac{U^2}{gh})$
$x_{16} = C_b^2 h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} + 1)$	$x_{89} = \beta \frac{U^2}{gh} x_{51} + C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b x_{52}$
$x_{17} = [K \sigma_b + \frac{U^2}{gh} (\sigma_b + 1)]$	$x_{90} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega \frac{U^2}{gh} + x_{69})$
$x_{18} = \frac{\partial \delta}{\partial h} x_{15} + \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega + 2) + \omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{91} = (x_{90} + \frac{U^2}{gh}) (C_s \sigma_s - 1)$

$x_{19} = (2 U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I)$	$x_{92} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \frac{U^2}{gh} \sigma_b (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I)$
$x_{20} = C_s \sigma_s (\omega - h \frac{\partial \omega}{\partial h} + 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I)$	$x_{93} = \frac{\delta}{h} (I - p) x_{59} + x_{42}$
$x_{21} = \frac{U^2}{gh} U \frac{\partial \omega}{\partial U} (I - p)$	$x_{94} = [C_b \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} \sigma_b - 2 (\frac{\partial \delta}{\partial h} + I)]$
$x_{22} = x_{20} + 2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b$	$x_{95} = (\beta \frac{U^2}{gh} x_{94} - x_{92} + x_{79})$
$x_{23} = x_3 (K + 2 \frac{U^2}{gh})$	$x_{96} = C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s x_{68}$
$x_{24} = -C_s \sigma_s (I - p) x_{14} + x_{23} + x_{11} - x_8 (\sigma_b + 2) (I - p)$	$x_{97} = -C_s \sigma_s (I - p) (h \frac{\partial \omega}{\partial h} - U \frac{\partial \omega}{\partial U}) + x_{63} (I - p)$
$x_{25} = p (U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I) - U \frac{\partial \omega}{\partial U} + I$	$x_{98} = h \frac{\partial \omega}{\partial h} (\sigma_b + 2) (I - p) + p U \frac{\partial \omega}{\partial U} - U \frac{\partial \omega}{\partial U}$
$x_{26} = C_b \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b (I - p) [\beta \frac{U^2}{gh} (\omega + I) + x_9 + K]$	$x_{99} = \frac{\delta}{h} (I - p) (x_{81} + x_{64})$
$x_{27} = C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s (x_9 + K)$	$x_{100} = [x_{86} - x_{87} + x_{82} (C_s \sigma_s - I)]$
$x_{28} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (2 \omega + I) + \omega + I$	$x_{101} = [(\frac{\delta}{h})^2 x_{100} + x_{99} + x_{26}]$
$x_{29} = \frac{\partial \delta}{\partial h} \omega \frac{U^2}{gh} - K (\omega + I)$	$x_{102} = \{x_{13} - C_b x_{46} + (\frac{\delta}{h}) (I - p) [x_{89} - C_b \sigma_b (x_{78} + x_{88} - x_8 + x_{85}) - x_{96} + x_{77}] + x_{73}\}$
$x_{30} = x_{22} - \omega + h \frac{\partial \omega}{\partial h} (\sigma_b + 4) - 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U} + I$	$x_{103} = (\frac{\delta}{h}) x_{95} + x_{67}$
$x_{31} = x_{16} - C_b x_{30} + x_{28} (I - C_s \sigma_s)$	$x_{104} = (\frac{\delta}{h}) \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (C_s \sigma_s - I)$
$x_{32} = -\frac{U^2}{gh} (I - 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U}) (I - p)$	$x_{105} = C_b \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} \sigma_b$
$x_{33} = (K + 2 \frac{U^2}{gh}) + 2K + \frac{U^2}{gh}$	$x_{106} = (x_{104} - x_{105} + \frac{\partial \delta}{\partial h} + I)$
$x_{34} = x_{12} [\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (2K + \frac{U^2}{gh}) + K + \frac{U^2}{gh}]$	$x_{107} = C_s \sigma_s (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I) + x_{49}$
$x_{35} = (2K + \frac{U^2}{gh}) U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{108} = (x_{78} + x_{88} - x_8 + x_{85})$
$x_{36} = h \frac{\partial \omega}{\partial h} (K + \frac{U^2}{gh})$	$x_{109} = x_{89} - C_b \sigma_b x_{108} - x_{96} + x_{77}$
$x_{37} = \omega K - x_{36} + K x_{19} + \frac{U^2}{gh} U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{110} = C_b \frac{U^2}{gh} x_{107}$
$x_{38} = 2K + \frac{U^2}{gh}$	$x_{111} = (x_{47} - x_{48} + x_{110} + x_{91})$
$x_{39} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega x_{38} + K) + \omega x_{38} - x_{36} + x_{35}$	$x_{112} = (I - p) [(\frac{\delta}{h})^2 x_{111} - x_{103}]$

$x_{40} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} U \frac{\partial \omega}{\partial U} \sigma_b$	$x_{113} = C_b (x_{97} + x_{98}) + x_{83}$
$x_{41} = \frac{\partial \delta}{\partial h} U \frac{\partial \omega}{\partial U} + \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} \omega + \omega - h \frac{\partial \omega}{\partial h} + U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{114} = \beta \frac{U^2}{gh} (x_{70} + x_{113}) + x_{84}$
$x_{42} = C_b \frac{\partial \delta}{\partial h} \omega \sigma_b (1-p) \left( \beta \frac{U^2}{gh} + K \right)$	$x_{115} = \left[ \left( \frac{\delta}{h} \right)^2 x_{114} + x_{93} \right]$
$x_{43} = C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s - \frac{\partial \delta}{\partial h} (\omega + 2) - \omega - 1$	$x_{116} = \omega (1-p) - 2h \frac{\partial \omega}{\partial h} (1-p) + p(1-U \frac{\partial \omega}{\partial U}) + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1$
$x_{44} = \frac{U^2}{gh} (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U})$	$x_{117} = C_s \sigma_s (p-1) (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1) - \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p)$
$x_{45} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega x_{33}) + \omega \frac{U^2}{gh} + K + \frac{U^2}{gh}$	$x_{118} = (1-p) \left[ \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega + 2) + 1 \right] (C_s \sigma_s - 1)$
$x_{46} = x_{24} - K x_{25} + x_{32} + (1-p) x_{45} (C_s \sigma_s - 1)$	$x_{119} = [-C_b^2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p) - C_b (x_{117} + x_{116}) + x_{118}]$
$x_{47} = \beta \frac{U^2}{gh} \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (C_s \sigma_s - 1)$	$x_{120} = K (U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1) + \frac{U^2}{gh} (2U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1)$
$x_{48} = C_b^2 \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{U^2}{gh} \sigma_b$	$x_{121} = [\omega (K + \frac{U^2}{gh}) - h \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{U^2}{gh} + x_{120}]$
$x_{49} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b - \omega + h \frac{\partial \omega}{\partial h} - U \frac{\partial \omega}{\partial U} + 1$	$x_{122} = -\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p)$
$x_{50} = 2 \frac{\partial \delta}{\partial h} (\omega + 2) + 2\omega + 3$	$x_{123} = x_{122} (K + 2 \frac{U^2}{gh})$
$x_{51} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b x_{15} - C_b \sigma_b x_{18} - C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s + x_{50}$	$x_{124} = \omega (1-p) (K + \frac{U^2}{gh})$
$x_{52} = x_9 + x_{10} + \frac{U^2}{gh} x_{19}$	$x_{125} = -h \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{U^2}{gh} (\sigma_b + 2) (1-p)$
$x_{53} = x_3 x_{38} + \omega K (1-p) + h \frac{\partial \omega}{\partial h} (p-1) x_{17}$	$x_{126} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b [\omega (K + \frac{U^2}{gh}) + x_{120}]$
$x_{54} = \omega K + K x_{19} + \frac{U^2}{gh} U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{127} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} [\omega (K + 2 \frac{U^2}{gh}) + 2K + \frac{U^2}{gh}]$
$x_{55} = \omega (C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s + 1)$	$x_{128} = \omega (K + 2 \frac{U^2}{gh})$
$x_{56} = K (x_{40} - C_b \sigma_b x_{41} - x_{55})$	$x_{129} = \omega \frac{U^2}{gh} + K + \frac{U^2}{gh}$
$x_{57} = \omega (C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s - 2 \frac{\partial \delta}{\partial h} - 1)$	$x_{130} = C_b \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b (1-p) \left( \beta \frac{U^2}{gh} + x_{129} \right)$
$x_{58} = (x_{40} - C_b \sigma_b x_{41} - x_{57})$	$x_{131} = -C_b^2 h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b (1-p) \left[ \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (K + 2 \frac{U^2}{gh}) + \frac{U^2}{gh} \right]$
$x_{59} = \left( \beta \frac{U^2}{gh} x_{58} + x_{56} \right)$	$x_{132} = -\frac{U^2}{gh} (1 - 2U \frac{\partial \omega}{\partial U}) (1-p)$
$x_{60} = \left( \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} + 1 \right) (1 - C_s \sigma_s)$	$x_{133} = -C_s \sigma_s (1-p) x_{121} + x_{123} + x_{124} + x_{125} - K [p (U \frac{\partial \omega}{\partial U} - 1) - U \frac{\partial \omega}{\partial U} +$

	I]
$x_{61} = h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b$	$x_{134} = \frac{\partial \delta}{\partial h} \frac{U^2}{gh} (2 \omega + I) + \omega \frac{U^2}{gh} - K$
$x_{62} = C_b \sigma_b \left( \frac{\partial \delta}{\partial h} x_{54} + x_{39} \right)$	$x_{135} = C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s x_{129}$
$x_{63} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} h \frac{\partial \omega}{\partial h} \sigma_b$	$x_{136} = U \frac{\partial \omega}{\partial U} \left( K + 2 \frac{U^2}{gh} \right)$
$x_{64} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b x_{54} - x_{62} - x_{27} + x_{29}$	$x_{137} = \left[ \omega \left( K + \frac{U^2}{gh} \right) + x_{120} \right]$
$x_{65} = C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s (\omega + I)$	$x_{138} = C_b \sigma_b \left( \frac{\partial \delta}{\partial h} x_{137} + x_{127} + x_{128} - h \frac{\partial \omega}{\partial h} \frac{U^2}{gh} + x_{136} \right)$
$x_{66} = \frac{U^2}{gh} x_{43}$	$x_{139} = 2 \frac{\partial \delta}{\partial h} (\omega + 2) + 2 \omega + 3$
$x_{67} = C_b \frac{\partial \delta}{\partial h} \frac{U^2}{gh} \sigma_b$	$x_{140} = \frac{\partial \delta}{\partial h} (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I) + \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (\omega + 2) + \omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U}$
$x_{68} = \omega \frac{U^2}{gh} + K + \frac{U^2}{gh}$	$x_{141} = C_b^2 \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b (\omega + U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I)$
$x_{69} = K + 2 \frac{U^2}{gh}$	$x_{142} = (x_{141} - C_b \sigma_b x_{140} - C_s \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_s + x_{139})$
$x_{70} = -C_b^2 x_{61} (I - p) \left( \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} + I \right)$	$x_{143} = \left( \beta \frac{U^2}{gh} x_{142} + x_{126} - x_{138} - x_{135} + x_{134} \right)$
$x_{71} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial U} (2 \omega + I) + 2 \omega - h \frac{\partial \omega}{\partial h} + 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U}$	$x_{144} = (I - p) (x_{127} + x_{129}) (C_s \sigma_s - I)$
$x_{72} = C_b \sigma_b \left[ \frac{\partial \delta}{\partial h} (\omega + 2 U \frac{\partial \omega}{\partial U} - I) + x_{71} \right]$	$x_{145} = \left[ \beta \frac{U^2}{gh} x_{119} + x_{131} - C_b (x_{133} + x_{132}) + x_{144} \right]$
$x_{73} = C_b \frac{\partial \delta}{\partial h} \sigma_b (I - p) \left( \beta \frac{U^2}{gh} + x_{68} \right)$	$x_{146} = \left[ \left( \frac{\delta}{h} \right)^2 x_{145} + \left( \frac{\delta}{h} \right) (I - p) x_{143} + x_{130} \right]$

Le espressioni dei coefficienti  $b_r''$  per il modello 3L-5Eq diventano:

$b_0'' = -\frac{\delta}{h} \cdot \left( \frac{U^2}{gh} \right)^4 \cdot (I - p) \cdot x_{106}$	$b_1'' = \left( \frac{U^2}{gh} \right)^3 \cdot x_{112}$
$b_2'' = -\left( \frac{U^2}{gh} \right)^3 \cdot x_{146}$	$b_3'' = \left( \frac{U^2}{gh} \right)^3 \cdot x_{101}$
$b_4'' = -\left( \frac{U^2}{gh} \right)^3 \cdot x_{115}$	

## Appendice 5

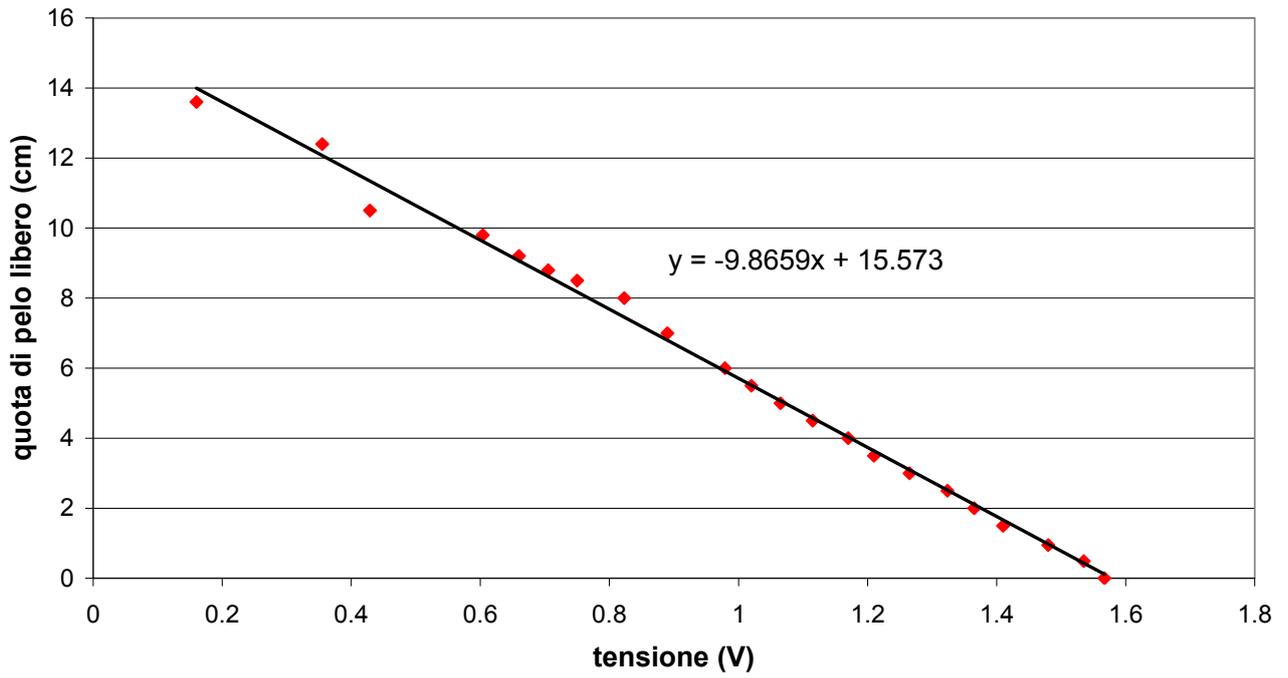
Qui di seguito sono riportate le espressioni della funzione  $f$ , del tipo (5.2), ricavate a partire dai dati misurati in fase di calibrazione.

La denominazione delle sonde fa riferimento allo schema rappresentato in Figura 5.12.

### Sonda U1

<b>U1 (V)</b>	<b>zb+h (cm)</b>
1.567	0
1.535	0.49
1.48	0.95
1.41	1.5
1.365	2
1.324	2.5
1.265	3
1.21	3.5
1.17	4
1.115	4.5
1.065	5
1.02	5.5
0.979	6
0.89	7
0.823	8
0.75	8.5
0.705	8.8
0.66	9.2
0.604	9.8
0.429	10.5
0.355	12.4
0.16	13.6

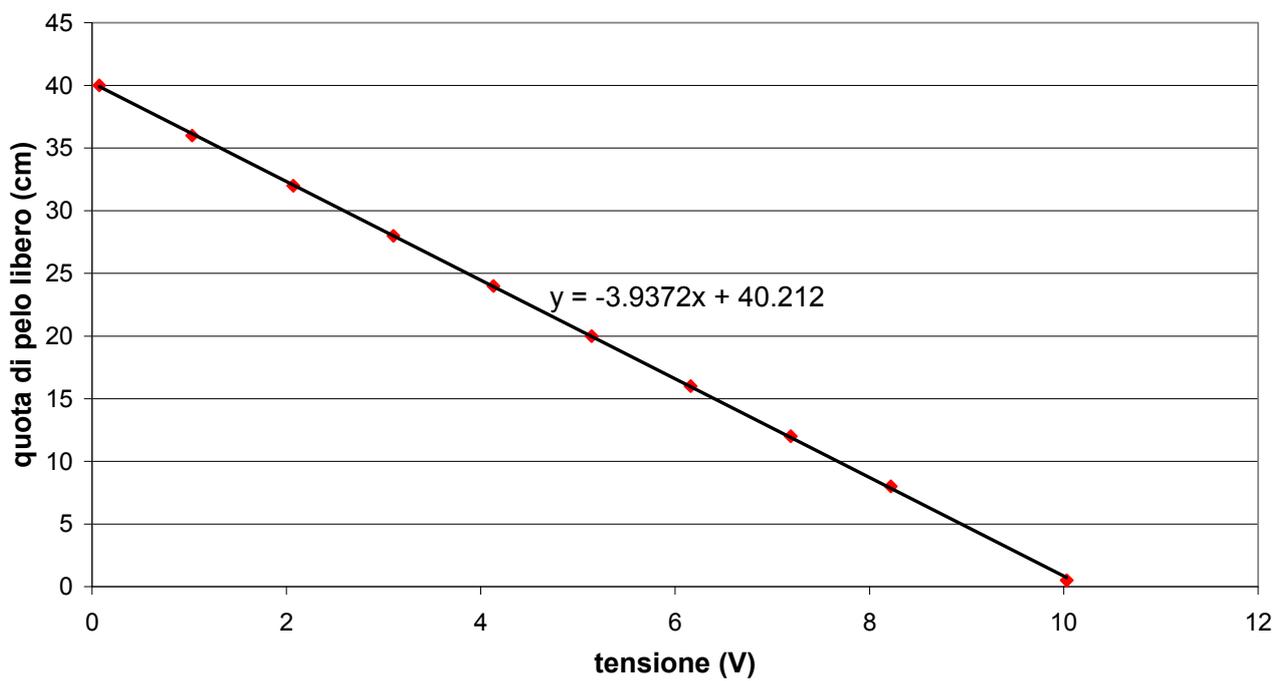
### sonda U1



## Sonda U2

U2 (V)	zb+h (cm)
0.075	40
1.03	36
2.07	32
3.1	28
4.13	24
5.14	20
6.16	16
7.19	12
8.22	8
10.03	0.5

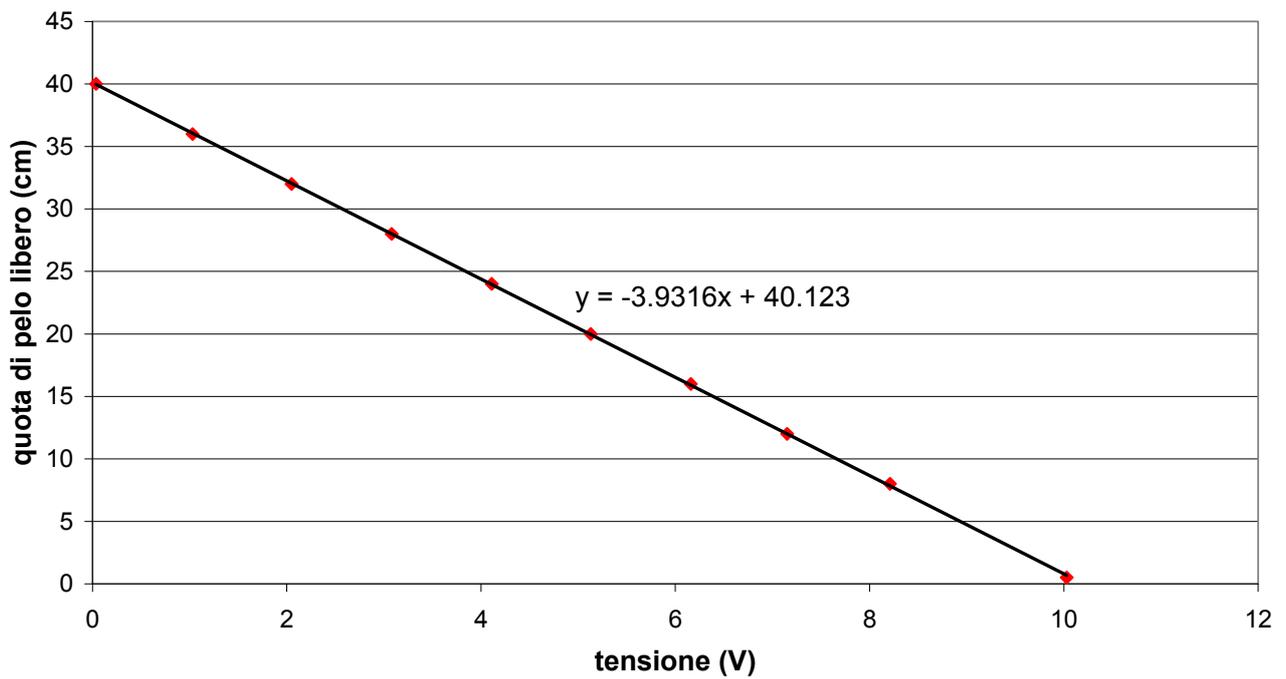
## sonda U2



### Sonda U3

U3 (V)	zb+h (cm)
0.037	40
1.03	36
2.05	32
3.08	28
4.11	24
5.13	20
6.16	16
7.15	12
8.21	8
10.03	0.5

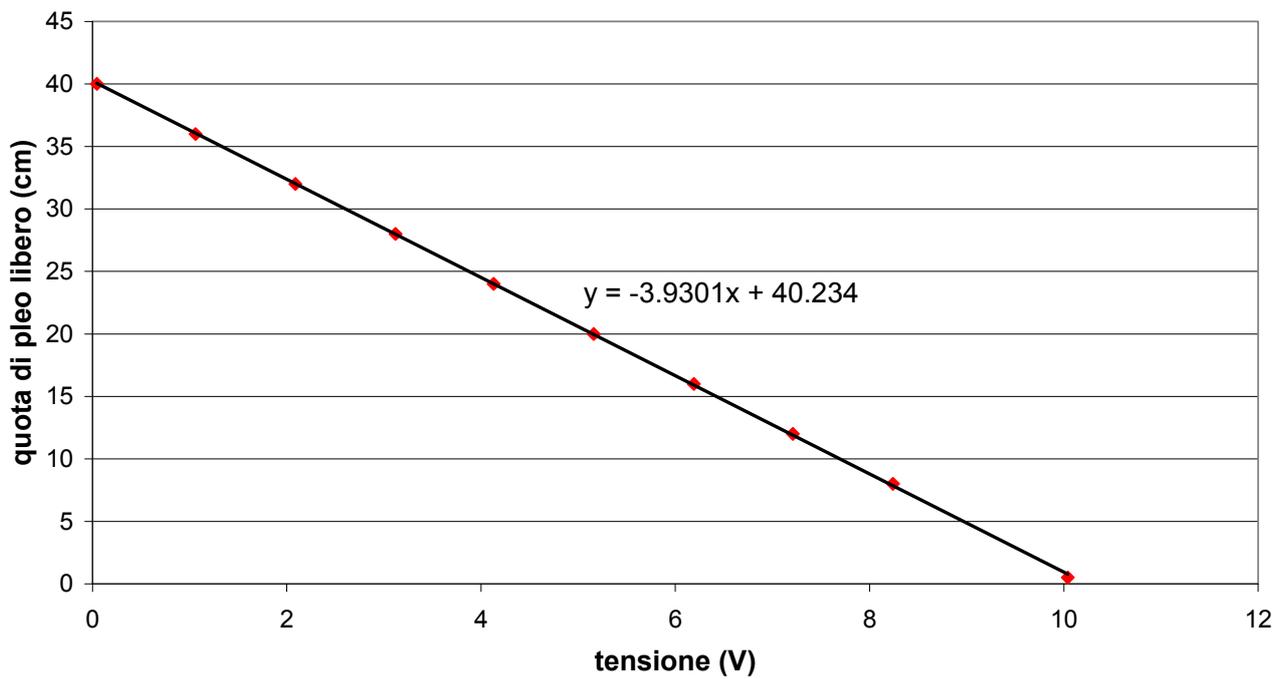
### sonda U3



## Sonda U4

U4 (V)	zb+h (cm)
0.045	40
1.06	36
2.09	32
3.12	28
4.13	24
5.16	20
6.19	16
7.21	12
8.24	8
10.04	0.5

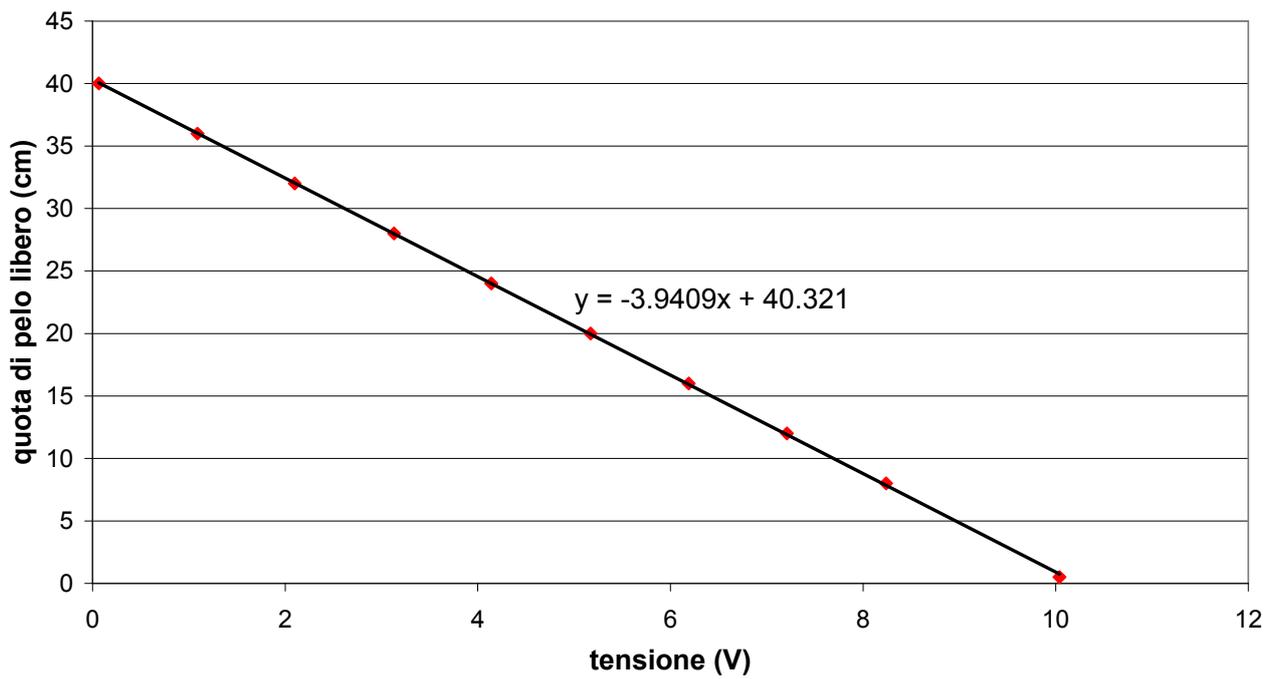
## sonda U4



## Sonda U5

U5 (V)	zb+h (cm)
0.067	40
1.09	36
2.1	32
3.13	28
4.14	24
5.17	20
6.19	16
7.21	12
8.24	8
10.04	0.5

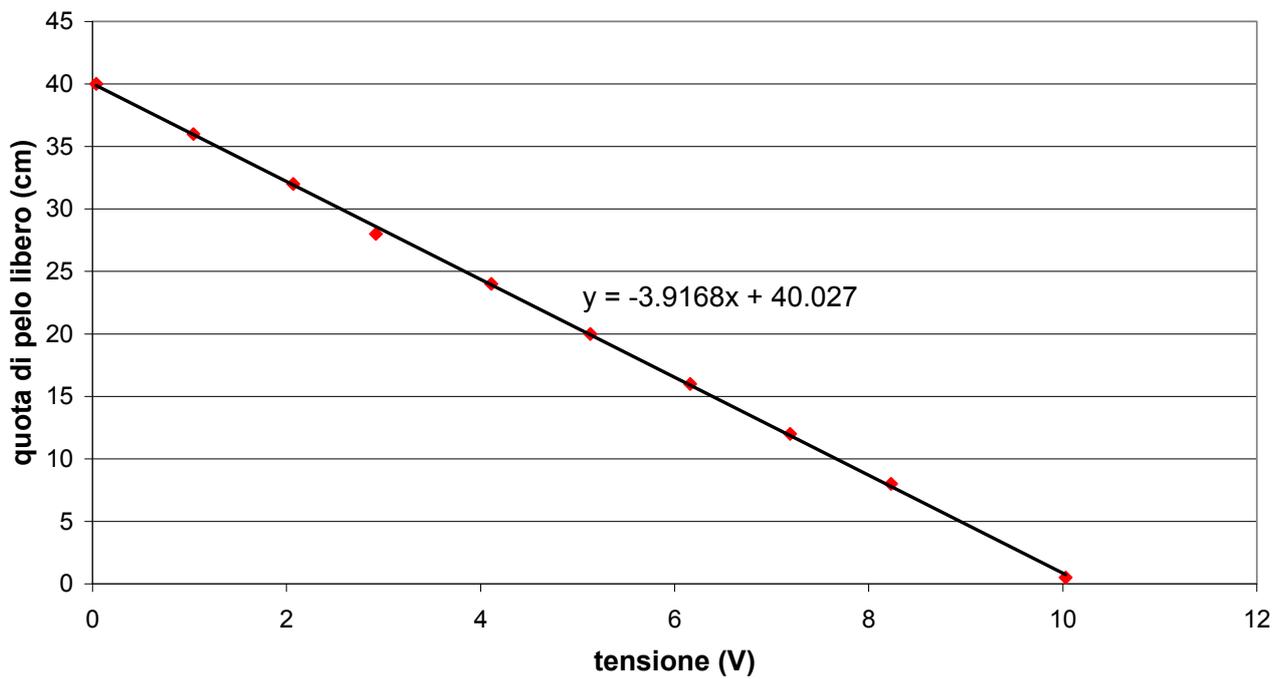
## sonda U5



## Sonda U6

U6 (V)	zb+h (cm)
0.039	40
1.04	36
2.07	32
2.92	28
4.11	24
5.13	20
6.16	16
7.19	12
8.23	8
10.03	0.5

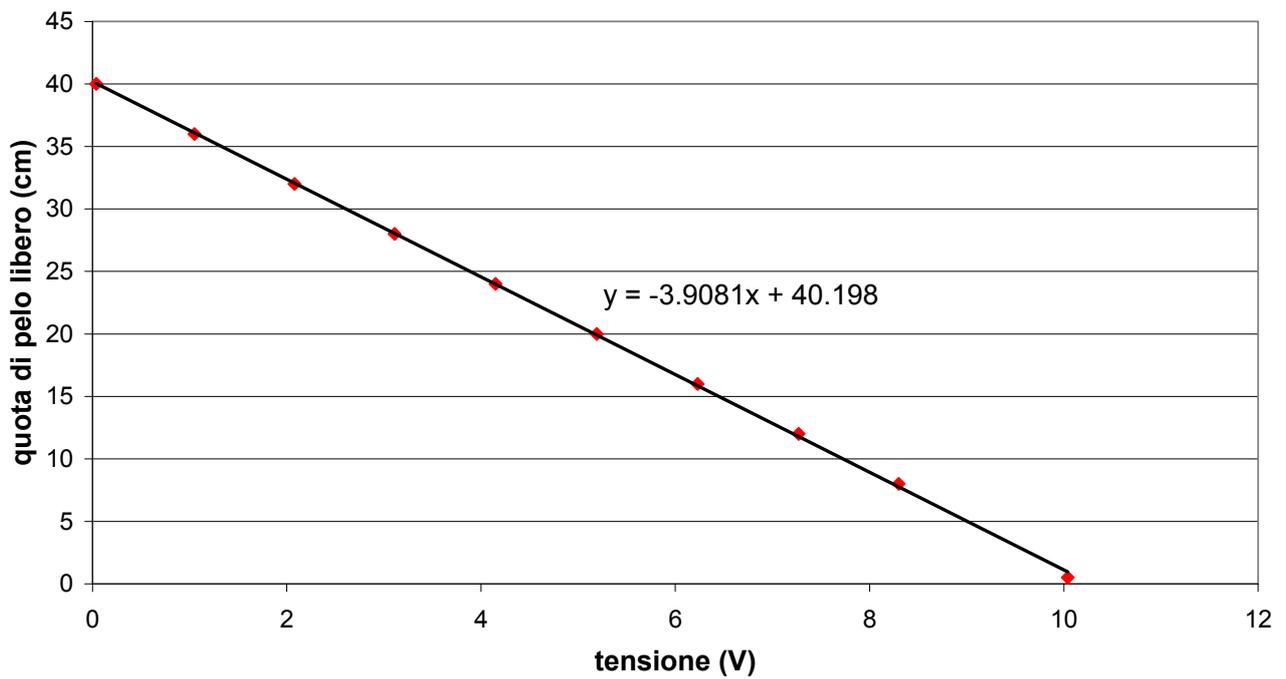
## sonda U6



## Sonda U7

U7 (V)	zb+h (cm)
0.04	40
1.05	36
2.08	32
3.11	28
4.15	24
5.19	20
6.23	16
7.27	12
8.3	8
10.04	0.5

## sonda U7



## Sonda U8

U8 (V)	zb+h (cm)
0.095	40
1.12	36
2.15	32
3.19	28
4.22	24
5.24	20
6.28	16
7.3	12
8.33	8
10.04	0.5

## sonda U8

