

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II



Tesi di Dottorato in
Matematica per l'Analisi Economica e la Finanza

XXI Ciclo

**I fondi pensione Pay-As-You-Go:
rischio demografico e solvibilità**

Roberta Melis

Coordinatore: Prof.ssa Emilia Di Lorenzo

Tutor: Dott. Alessandro Trudda

Anno Accademico 2007/2008

Ai miei genitori

Indice

Introduzione	5
1 Schemi di funzionamento dei sistemi previdenziali	7
1.1 Introduzione	8
1.2 Enti previdenziali privati e fondi pensione	9
1.2.1 Tipologie di rischio di un fondo pensione	12
1.3 Gli Enti Privatizzati dei liberi professionisti in Italia	14
2 Fondi chiusi finanziati a ripartizione: il rischio demografico nuovi ingressi	19
2.1 Introduzione	20
2.2 Evoluzione del fondo	25
2.2.1 Nuovi ingressi ed evoluzione della popolazione.	25
2.2.2 Contributi	27
2.2.3 Pensioni	28
2.3 Il modello matematico	32
2.3.1 Tasso globale di rendimento	33
2.3.2 Il tasso di variazione dei nuovi ingressi	35
2.3.3 Valore del fondo	37
2.4 Una semplificazione del modello	39
2.4.1 Contributi e pensioni	39

2.4.2	Analisi delle componenti stocastiche	43
2.4.3	Il modello	45
3	Dinamiche evolutive del fondo: analisi di sensitività	47
3.1	Introduzione	48
3.2	Assunzioni e metodologia adottata	50
3.3	Scenario demografico e finanziario	52
3.3.1	Ipotesi sui nuovi ingressi	52
3.3.2	Tasso di interesse	55
3.3.3	Mortalità	56
3.4	Misure di rischio utilizzate	57
3.5	Applicazione numerica e risultati	59
3.6	Conclusioni	65
4	Un modello di monitoraggio della solvibilità del fondo	66
4.1	Introduzione	67
4.2	Meccanismi automatici di controllo per i sistemi PAYG pubblici .	67
4.3	Un indicatore di rischio per la solvibilità del fondo	69
4.4	Un'applicazione	71
4.5	Conclusioni	73
	Conclusioni	74
	Bibliografia	77

Elenco delle figure

3.1	Struttura della popolazione per età e genere	50
3.2	Tasso di variazione dei nuovi ingressi femmine 1977-2006	53
3.3	Tasso di variazione dei nuovi ingressi maschi 1977-2006	53
3.4	Nuovi ingressi nel fondo anni 2007 – 2046	59
3.5	Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici	61
3.6	Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici-Contributo integrativo 0%)	62
3.7	Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici-Contributo integrativo 2% per tutto il periodo)	63
3.8	Evoluzione del fondo con nuovi ingressi deterministici e tassi di interesse stocastici	63
3.9	Evoluzione del fondo con tassi di interesse deterministici e nuovi ingressi stocastici	64
3.10	VaR del fondo al 95%	64
4.1	indice CPr , VaR 95% e valore atteso	71
4.2	cVar al 95% del valore del fondo e cVar al 95% dell'indice CPR	72

Elenco delle tabelle

3.1	Tasso di variazione nuovi ingressi femmine 1977-2006	54
3.2	Tasso di variazione nuovi ingressi maschi 1977-2006	54
3.3	Nuovi ingressi nel fondo (valori attesi) anni 2007-2046	60

Introduzione

L'obiettivo principale del presente lavoro è quello di analizzare i rischi demografici che gravano sui fondi pensione chiusi finanziati a ripartizione, Pay-As-You-Go (PAYG) secondo la terminologia anglosassone.

La letteratura in materia è quasi del tutto assente in quanto si tratta di sistemi molto particolari: solitamente i sistemi PAYG sono applicati a gruppi aperti, ed i fondi pensione chiusi delle aziende sono obbligati a seguire un meccanismo di finanziamento a capitalizzazione. Un esempio di tali sistemi è costituito dalle Casse di Previdenza degli Ordini Professionali in Italia.

In particolare l'attenzione viene incentrata sulla variabile demografica nuovi ingressi e sull'influenza che esercita sui cash-flows prospettici del fondo.

Attraverso un'analisi marginale, si analizza l'incidenza delle due variabili aleatorie considerate, valutando quale, tra quella demografica nuovi ingressi e quella finanziaria tasso globale di rendimento, ha un impatto maggiore sulle dinamiche del fondo.

Si propone un modello di controllo periodico della solvibilità del fondo già utilizzato nel campo della previdenza pubblica: a tal fine si introduce un indice di rischiosità.

Vengono presentate delle applicazioni numeriche utilizzando i dati forniti dalla Cassa Nazionale di Previdenza e Assistenza in favore dei Dottori Commercialisti.

Il lavoro è strutturato nella seguente maniera:

- Nel capitolo 1 vengono descritti gli schemi di funzionamento dei sistemi previdenziali.
- Nel capitolo 2 si presenta un modello matematico per l'evoluzione di un fondo pensione chiuso finanziato col sistema Pay-As-You-Go (PAYG) in presenza di tassi di rendimento e di nuovi ingressi stocastici.
- Nel capitolo 3 si presenta un'analisi marginale sul valore del fondo per analizzare l'influenza delle singole componenti. Le applicazioni numeriche sono sviluppate con i dati della Cassa Nazionale di Previdenza e Assistenza a favore dei Dottori Commercialisti (CNPADC).
- Il capitolo 4 propone un modello di monitoraggio per la solvibilità di un fondo pensione chiuso, attraverso l'utilizzo di un indice costruito ad hoc, che può essere utilizzato sia a scopo di controllo della stabilità finanziaria del fondo che a fini previsivi. Infine viene presentata un'applicazione alla CNPADC.

Capitolo 1

Schemi di funzionamento dei sistemi previdenziali

1.1 Introduzione

La funzione principale di uno schema pensionistico è quella di fornire un reddito ai lavoratori al raggiungimento della pensione, nella forma di una rendita vitalizia, regolando i meccanismi redistributivi rispetto alla determinazione dei versamenti contributivi da effettuarsi in età lavorativa e/o alle erogazioni delle prestazioni pensionistiche.

Esistono diverse classificazioni degli schemi pensionistici. In particolare i sistemi previdenziali sono solitamente classificati rispetto ai metodi di calcolo delle prestazioni (o dei contributi) e rispetto al sistema di finanziamento adottato.

Con il termine meccanismo di finanziamento di un sistema previdenziale ci si riferisce in senso lato alle modalità attraverso le quali si reperiscono le entrate, come vengono redistribuiti i flussi finanziari nel tempo tenendo conto che si tratta di cicli temporali molto lunghi, pari minimo alla sommatoria della vita lavorativa previdenziale dell'individuo.

Da un punto di vista del meccanismo di finanziamento, possiamo distinguere gli schemi pensionistici tra due distinte tipologie: a ripartizione (pay-as-you-go da ora in avanti PAYG- utilizzando la terminologia anglosassone) o a capitalizzazione (funded). In un sistema a capitalizzazione i contributi versati durante la vita lavorativa vengono raccolti ognuno in uno specifico conto individuale e sono cumulativamente investiti nel mercato dei capitali per l'acquisto di attività, i cui rendimenti dovranno garantire il pagamento dei futuri benefici. Il sistema a ripartizione, invece, è basato sull'utilizzo immediato dei contributi previdenziali versati dagli iscritti per la corresponsione delle rendite ai pensionati in essere.

In un sistema PAYG invece le pensioni correnti sono finanziate attraverso i contributi contemporanei, per cui c'è una redistribuzione tra generazioni. I lavoratori attuali pagano le pensioni dei pensionati attuali, assumendo che i la-

voratori futuri finanzino le loro pensioni. In questo modo c'è un trasferimento tra generazioni, ma non necessariamente redistribuzione, in quanto un sistema PAY può anche essere actuarial fair se il valore attuale dei contributi di ciascuna coorte eguaglia il valore attuale dei futuri benefici.

Un sistema PAYG può consentire di fornire immediatamente le pensioni, senza dover aspettare l'accumulazione delle risorse necessarie ed è molto più favorevole per la prima generazione rispetto ad un sistema a capitalizzazione. I vantaggi offerti da uno schema a ripartizione sono la protezione dal rischio di inflazione per i pensionati, in quanto le pensioni sono ancorate ai salari; i sistemi a capitalizzazione, invece, sono particolarmente esposti ai rischi di interesse.

Il passaggio da un sistema PAYG ad uno funded può essere molto difficile in quanto una generazione dovrebbe pagare due volte, una per i pensionati attuali attraverso il PAYG e un'altra per la propria pensione attraverso la capitalizzazione.

1.2 Enti previdenziali privati e fondi pensione

In ambito previdenziale è da tempo acquisita la locuzione di sistema cosiddetto a tre pilastri, con la quale si intende designare un sistema basato su varie forme previdenziali, raggruppabili in tre categorie fondamentali, che concorrono a fornire a ciascun cittadino di un Paese un'adeguata copertura a fronte di diversi rischi collegati alla vita umana. I tre pilastri designano rispettivamente il sistema previdenziale pubblico, i sistemi previdenziali complementari e l'assicurazione privata individuale.

I fondi pensione sono il principale strumento della previdenza integrativa collettiva e rappresentano il secondo pilastro del sistema pensionistico. Questi

enti sono degli intermediari finanziari che raccolgono ed investono su base collettiva i risparmi dei lavoratori per l'erogazione al momento del pensionamento di un trattamento pensionistico, complementare rispetto a quello pubblico, che è obbligatorio.

I benefici o prestazioni rientranti nella previdenza complementare sono quelli in caso vita di tipo rendita vitalizia (pensione), in caso di decesso (capitale o rendita a favore dei superstiti) ed in caso di invalidità. Per quanto riguarda i benefici è rilevante la differenza tra benefici retributivi e benefici contributivi. Si parla di beneficio retributivo quando l'ammontare dello stesso è legato all'ultima retribuzione spettante al lavoratore prima dell'ingresso in quiescenza o ad un'opportuna media delle ultime retribuzioni essendo indipendente dall'entità dei contributi versati. In questo caso non vi è per definizione legame tra contributi e prestazioni relativi a ciascun aderente. Lo schema retributivo si adatta, in particolare a sistemi previdenziali pubblici. Il termine beneficio contributivo denota, invece, qualunque tipo di prestazione legata ai contributi versati. Ovviamente, questo è il tipo di beneficio che interessa gli schemi di previdenza complementare¹.

Non esiste un'unica tipologia di fondi pensione, ma al loro interno è possibile effettuare diverse classificazioni.

La prima distinzione è quella tra fondo pensione a beneficio definito e a contributo definito; essa riguarda la distribuzione del rischio tra l'aderente e lo sponsor. Uno schema previdenziale è poi detto a contribuzione definita quando è stabilita la sequenza dei contributi mentre l'ammontare della prestazione è determinato, secondo un'assegnata formula, in funzione di tale sequenza.

Uno schema a contribuzione definita può o meno prevedere una garanzia di

¹Il nuovo testo del d.lgs 124/1993, così come modificato dalla Legge 335/1995, stabilisce che i fondi di nuova costituzione operano secondo il sistema finanziario di gestione della capitalizzazione, realizzata secondo il principio della corrispettività.

rendimento, consistente nell'applicazione, ai contributi versati, di un tasso di rendimento non inferiore al livello garantito; tale garanzia trasferisce il rischio finanziario dall'assicurato al gestore.

In uno schema a prestazione definita, invece, i contributi sono calcolati in modo da finanziare un predeterminato livello di beneficio.

L'assegnazione del livello di beneficio può aver luogo, tipicamente, secondo due criteri che portano alla definizione dei concetti di beneficio aggiuntivo e beneficio integrativo. In uno schema a beneficio aggiuntivo, l'obiettivo dello schema previdenziale è la sola prestazione erogata dallo schema stesso, cioè la pensione complementare: questa, sommata alla pensione ricevuta dal sistema pubblico, determina la pensione totale.

Nel caso di beneficio integrativo, è invece oggetto di definizione l'ammontare totale della pensione, ivi inclusa la prestazione ricevuta dal sistema di base, sicché la prestazione erogata dallo schema complementare all'assicurato opera come strumento per raggiungere il voluto livello di pensione totale.

I fondi pensione possono essere inoltre distinti, in base alla modalità di accesso al fondo, in fondi pensione chiusi e fondi pensione aperti.

I fondi pensione chiusi, o negoziali, sono riservati a lavoratori omogenei dal punto di vista della categoria professionale, del comparto di accesso e della zona territoriale. Essi sono promossi da accordi bilaterali tra associazioni rappresentative dei datori di lavoro e dei lavoratori o da loro iniziative unilaterali. Sono definiti chiusi perché sono accessibili soltanto solo agli appartenenti a determinate categorie ed aziende. I fondi pensione aperti sono invece fondi a cui possono aderire quei lavoratori, sia autonomi che dipendenti, per i quali non sussistono o non siano ancora operanti fondi chiusi. Sono appunto aperti a tutte le categorie di lavoratori e promossi dalle istituzioni finanziarie abilitate per legge alla gestione dei fondi chiusi (banche, SIM, Sgr e compagnie

di assicurazione) che aprono un fondo patrimoniale di destinazione, autonomo e separato dal patrimonio dell'istituzione promotrice, nel quale affluiscono i contributi raccolti ed i relativi frutti generati dalla gestione finanziaria.

1.2.1 Tipologie di rischio di un fondo pensione

I fondi pensione sono soggetti a rischi demografici, economici e finanziari.

Si definisce rischio demografico ogni rischio collegato alle durate aleatorie di vita degli assicurati. È possibile individuare due tipologie di rischio demografico: il rischio assicurativo, derivante dagli scostamenti aleatori del numero effettivo dei decessi rispetto al numero previsto (i suoi effetti sono mitigati all'aumentare degli aderenti) ed il rischio di longevità (*longevity risk*), connesso al trend migliorativo della funzione di sopravvivenza.

Concretamente, esso è originato dai possibili scostamenti della mortalità nella collettività appartenente allo schema previdenziale rispetto all'ipotesi di mortalità utilizzata nel calcolo dei contributi, cioè rispetto alla tavola demografica adottata. Tale rischio, che costituisce la componente di rischio sistematica, può essere attenuato attraverso l'utilizzo di opportune tavole di mortalità proiettate, determinate cioè attraverso delle proiezioni delle aspettative di vita attuali, il cui uso permette di limitare il margine di errore tenendo conto degli andamenti attesi delle prospettive di vita.

Il rischio demografico, naturalmente, risulta a carico del gestore. Questi può peraltro trasferirlo ad un assicuratore, che, in questo caso, opera da riassicuratore.

Il rischio finanziario è connesso all'investimento dei contributi e delle riserve che si formano, investimento che può produrre rendimenti inferiori a quelli attesi e, in particolare, a quelli eventualmente garantiti. Il rischio finanziario può essere a carico dell'assicurato nel caso di uno schema previdenziale a

contribuzione definita senza garanzia di rendimento, o del gestore nel caso di uno schema a contribuzione definita con garanzia di rendimento o a prestazione definita, qualora le integrazioni eventualmente necessarie a seguito di una diminuzione di tasso siano a carico del gestore.

Con il termine rischio economico indichiamo ogni rischio generato dall'evoluzione aleatoria dello scenario economico nel quale si sviluppa la dinamica dello schema previdenziale. I rischi finanziari rientrano pertanto nella categoria dei rischi economici.

Un primo tipo di rischio economico è collegato all'andamento dei salari e si materializza nel legame tra l'ammontare della rendita vitalizia e salario finale. Tale legame è prefissato negli schemi a beneficio definito aggiuntivo, nei quali il rischio collegato alla dinamica salariale viene scaricato sul livello dei contributi, mentre dipende dal livello dei contributi versati negli schemi a contributo definito.

Un altro rischio economico è rappresentato dal rischio di inflazione, che si materializza nella perdita di potere d'acquisto della pensione. Dal punto di vista temporale tale rischio riguarda sia il periodo di attività, durante il quale si accumula un capitale di copertura, che generalmente non è indicizzato all'andamento dell'inflazione, sia il periodo di quiescenza, durante il quale la rendita pensionistica può progressivamente perdere il suo potere d'acquisto.

1.3 Gli Enti Privatizzati dei liberi professionisti in Italia

In Italia ogni Ordine Professionale (medici, avvocati, ingegneri, dottori commercialisti, etc.) amministra un proprio fondo previdenziale. Questi Enti possono essere assimilati a fondi pensione chiusi, in quanto essi prevedono una restrizione, perché possono aderire al fondo soltanto coloro i quali sono stati ammessi all'ordine professionale, dopo aver superato un esame di Stato. Fino al 1995 questi Enti che gestivano la previdenza dei lavoratori autonomi erano amministrati dallo Stato che interveniva in caso di insolvenza; dal 1995 essi gestiscono in maniera privata la previdenza di un numero sempre maggiore di liberi professionisti senza che sia previsto l'intervento dello Stato in caso di insolvenza. Per quanto riguarda il loro sistema di finanziamento, è rimasto PAYG nonostante la privatizzazione.

In Italia le Casse di Previdenza dei liberi professionisti sono state privatizzate con il D. Lgs. 509/94 che ha disposto a partire dal 1° Gennaio 1995 la privatizzazione di 16 enti previdenziali e la loro trasformazione in associazioni o fondazioni, al fine di consentire un incisivo riordino degli istituti di previdenza e assistenza già esistenti.

I due interventi legislativi fondamentali immediatamente successivi sono la Legge n. 335/1995 ed il Decreto Legislativo n. 103/1996. In tal modo si è consentito a tali istituti di acquisire personalità giuridica, rendendo i propri assistiti indipendenti dalla previdenza pubblica.

A seguito della privatizzazione gli Enti Previdenziali godono di autonomia gestionale, organizzativa e contabile, adottano uno Statuto e un regolamento nel rispetto di criteri di trasparenza nei rapporti con gli iscritti e nella composizione degli organi sociali; di determinazione dei requisiti per l'esercizio dell'atti-

vità istituzionale, soprattutto per quanto riguarda l'onorabilità e la professionalità dei componenti degli organi collegiali; di previsione di una riserva legale, allo scopo di assicurare la continuità nell'erogazione delle prestazioni.

Si è così cercato di creare un moderno sistema di previdenza privata in una realtà in continua evoluzione con regole e caratteristiche variabili, assicurando la tutela previdenziale ai soggetti che svolgono attività autonoma di libera professione senza vincolo di subordinazione, il cui esercizio è condizionato all'iscrizione in appositi albi o elenchi.

Inizialmente la privatizzazione incontrò il favore dei liberi professionisti interessati perché ritenuta in grado di eliminare una serie di vincoli e di controlli pubblici, in un'ottica di autonomia nella gestione della previdenza e dell'assistenza delle singole categorie. L'esperienza ultradecennale ha modificato le aspettative in quanto si è potuto verificare come l'effetto realmente conseguito è stato l'abbandono dello Stato delle diverse problematiche finanziarie legate alla previdenza dei liberi professionisti, mentre sono rimasti sempre attivi i sistemi di vigilanza interministeriali rispetto alle gestioni tecniche degli enti di previdenza privati.

A differenza del sistema previdenziale pubblico in cui l'eventuale deficit viene coperto dallo Stato attraverso l'imposizione fiscale, a seguito della privatizzazione, per le Casse, tutti gli interventi legislativi prevedono esplicitamente l'assenza di oneri aggiuntivi a carico dello Stato.

Successivamente la citata Legge 335/1995 ha nuovamente delegato il Governo ad emanare norme volte ad estendere la tutela previdenziale a tutti i soggetti che svolgono attività autonoma, il cui esercizio è subordinato all'iscrizione ad appositi albi o elenchi, in conformità a ben individuati principi e criteri. L'ente privatizzato è a tutti gli effetti un soggetto di diritto privato; tuttavia presenta degli elementi pubblicistici che ne disciplinano le finalità ed una par-

te dell'attività. A tale riguardo ricordiamo: obbligatorietà dell'iscrizione e della contribuzione; continuazione dello svolgimento dell'attività previdenziale e assistenziale in atto riconosciuta alle categorie di professionisti per cui gli enti sono stati originariamente istituiti.

La previdenza dei liberi professionisti non è una realtà marginale all'interno del sistema pensionistico italiano; circa un milione e trecentomila lavoratori, pari a oltre il 6% degli occupati sono contribuenti delle casse dei liberi professionisti.

Per quanto riguarda il sistema di finanziamento, abbiamo già evidenziato che è rimasto PAYG nonostante la privatizzazione.

Questi tipi di fondi mostrano un'anomalia in quanto generalmente i sistemi PAYG sono applicati a gruppi aperti e non chiusi, diversamente dagli enti privatizzati dei liberi professionisti che presentano una barriera all'entrata, in quanto soltanto chi supera un esame di Stato può esercitare la libera professione e di conseguenza iscriversi al fondo.

Esistono per le casse di previdenza due tipi di contributi: un contributo soggettivo ed uno integrativo. Il primo è dovuto in misura percentuale rispetto al reddito ai fini IRPEF con l'obbligo di versamento di un contributo annuo minimo. Il contributo integrativo invece è calcolato in misura percentuale sul volume di affari IVA dichiarato per l'anno precedente.

Alcune casse hanno mantenuto per il calcolo dei benefici il sistema retributivo, mentre altre, come la Cassa Dottori Commercialisti e quella dei Ragionieri, hanno effettuato il passaggio dal sistema retributivo a quello contributivo.

Attraverso l'analisi dei bilanci riclassificati delle Casse di previdenza è possibile osservare l'effettiva allocazione delle risorse; in particolare l'attivo di bilancio sarà composto da investimenti in valori nominali, investimenti in valori reali e investimenti non tradizionali.

Nella prima tipologia di investimenti rientrano i conti correnti, i depositi a termine, i certificati di deposito, le ipoteche, i prestiti e le obbligazioni; tali strumenti sono caratterizzati da un valore facciale e dal pagamento di interesse e si differenziano almeno sotto tre profili: durata, sicurezza e rapporto debitore creditore.

Nella seconda tipologia rientrano i diritti di proprietà riferiti ad imprese (nel caso di azioni), a immobili o a beni strumentali. Il valore del diritto non è influenzato da fattori monetari quali tassi di interesse o di cambio, ma soprattutto dal valore del bene sottostante. Gli immobili rappresentano una componente di investimento importante nell'ottica di investitore di lungo periodo tipica delle Casse di previdenza.

Nell'ultima categoria infine rientrano gli impieghi in fondi comuni di investimento; ci si riferisce con tale termine a patrimoni collettivi costruiti attraverso la raccolta di capitali tra una pluralità di piccoli e medi risparmiatori, ciascuno dei quali detiene un numero di quote proporzionale al capitale investito. Essi si distinguono in fondi mobiliari, quando il fondo è costituito da strumenti e prodotti finanziari, e fondi immobiliari nel caso in cui investa in immobili. Nel caso delle casse di previdenza potrebbe essere utilizzata anche la seconda tipologia poiché consentirebbe di eliminare gli svantaggi organizzativi derivanti dagli investimenti diretti in immobili.

La sostenibilità finanziaria degli enti previdenziali dei liberi professionisti deve essere rafforzata. Al momento della privatizzazione i difetti strutturali del sistema sono stati ignorati dal legislatore. Non sembra aver ignorato il problema il Nucleo di Valutazione della Spesa Previdenziale.

Preso coscienza dell'insostenibilità di lungo periodo del sistema le Casse hanno avviato un percorso di riforma intervenendo sulle aliquote contributive e di computo delle prestazioni, nonché sul periodo di riferimento della media reddi-

tuale alla quale è parametrato l'importo della pensione.

Nel capitolo che segue sono descritti e analizzati i meccanismi che regolano l'evoluzione di questi fondi previdenziali che si caratterizzano per il fatto di essere chiusi e finanziati a ripartizione.

Capitolo 2

Fondi chiusi finanziati a

ripartizione: il rischio

demografico nuovi ingressi

2.1 Introduzione

In questo capitolo si presenta un modello matematico che descrive l'evoluzione di un fondo pensione chiuso finanziato a ripartizione (PAYG) in presenza di tassi di rendimento e di nuovi ingressi stocastici.

Come già evidenziato, queste tipologie di fondi sono caratterizzate da una barriera all'ingresso in quanto soltanto gli appartenenti ad una determinata categoria professionale possono aderirvi. In uno schema pensionistico PAYG puro il valore totale dei contributi deve uguagliare il valore totale delle pensioni ad ogni valutazione (Towerbridge 1952); per questo i contributi devono essere fissati in modo da coprire gli oneri per il pagamento delle pensioni ed il valore del fondo deve essere uguale a zero ad ogni valutazione.

In questo lavoro consideriamo uno schema unfunded, in cui sono previste delle riserve parziali. Si tratta di un sistema PAYG in quanto i contributi correnti vengono in primo luogo utilizzati per pagare le pensioni e solo in via residuale vengono investiti nel mercato dei capitali. È un sistema PAYG spurio in quanto la differenza tra contributi ricevuti dal fondo e spesa per le pensioni va ad incrementare (o diminuire) il valore del fondo, la cui consistenza è diversa da zero. Nella fase iniziale, cioè quella di accumulazione, c'è un esubero di capitali che va ad incrementare il valore del fondo (che è produttivo di rendimenti), mentre nella fase finale, quella di decumulo, la situazione è opposta essendo il numero dei pensionati maggiore rispetto a quello degli attivi.

Un sistema a ripartizione ha bisogno di un equilibrio tra entrate e uscite ogni anno: è necessario che gli attivi appartenenti al fondo versino un ammontare di contributi capaci di coprire gli esborsi pensionistici per i pensionati correnti. La popolazione attiva evolve in base al processo dei nuovi ingressi. Il problema principale consiste pertanto nell'analizzare il flusso dei nuovi ingressi nel fondo, per valutare se il numero dei futuri contribuenti sia sufficiente a mantenere

il sistema in equilibrio, anche nella fase di decumulo, e quindi a garantirne la solvibilità.

L'evoluzione temporale del fondo associato ad un ente previdenziale (in regime finanziario a ripartizione calcolato con il metodo di calcolo retributivo) ha un andamento tipico: esso è caratterizzato da un accumulo iniziale di risorse (in quanto nei primi anni non vengono erogate prestazioni) che si mantiene fino a quando le evoluzioni demografiche, in termini di calo dei nuovi ingressi o di diminuzione della mortalità con un conseguente innalzamento della speranza di vita, non determinano un'inversione del trend con un conseguente rapido annullamento di quanto accumulato, tanto più veloce quanto più generoso è stato il sistema e quanto più ridotte sono state le entrate contributive apportate dai nuovi ingressi.

Il problema attuariale consiste nel valutare se il valore attuale delle attività di mercato inerenti il fondo, insieme con il valore dei contributi futuri a carico degli assicurati, siano in grado di coprire gli impegni del fondo.

Utilizziamo dei metodi di gestione individuali in cui sia i contributi che le pensioni vengono calcolati separatamente per ogni appartenente al fondo, e poi sommati per ottenere i valori relativi a tutta la popolazione.

Il fondo associato allo schema pensionistico può essere visto come una riserva in cui affluiscono i contributi ed i rendimenti delle attività del fondo e da cui vengono pagati le pensioni ed i benefici relativi ad eventi riguardanti la vita dell'assicurato (invalidità, morte). In questa sede consideriamo soltanto la pensione che si consegue al raggiungimento dell'età pensionabile, mentre non si considerano le pensioni di reversibilità e di invalidità.

Per i fondi pensione, le componenti di rischio maggiori sono tipicamente quelle finanziarie, legate all'andamento del tasso di rendimento delle attività del fondo. Questa problematica è stata oggetto di numerosi lavori.

Dufresne (1988), Haberman (1994,1996), Cairn e Parker (1997) analizzano il rischio di investimento per un fondo pensioni a beneficio definito. Parker (1997) analizza il rischio di investimento in un portafoglio di rendite pensionistiche, utilizzando la varianza come misura di rischiosità e separa il rischio di investimento dal rischio assicurativo.

Blake, Cairns e Dowd (2001), (2003) propongono un modello per un fondo pensione a contributo definito in presenza di salari e rendimenti stocastici, rispettivamente a tempo discreto e a tempo continuo.

Otranto e Trudda (2007) propongono una procedura statistica per classificare i fondi pensione in diverse classi di rischio, al fine di monitorare i fondi basandosi sullo studio delle dinamiche della volatilità GARCH associata ai rendimenti dei fondi. In Otranto e Trudda (2008) il rischio finanziario associato agli Enti Previdenziali è stato distinto in *constant risk* e *time-varying risk*, classificando i fondi attraverso tecniche di clustering sviluppate con test basati sui parametri GARCH. Con le stesse finalità Bianchi e Trudda (2008) propongono l'utilizzo di moti browniani multifrazionari al fine di individuare un sistema di classi di rischio legato alla volatilità del tasso globale di rendimento, implementando un impianto di *benchmarking* per il monitoraggio del rischio.

Un'altra componente di rischio in un fondo pensione è costituita dal *longevity risk*; esso si configura a fronte dei miglioramenti nel trend futuro della mortalità, che possono causare una deviazione sistematica del numero dei decessi dal valore atteso; tale rischio può essere attenuato mediante l'utilizzo di tavole di mortalità proiettate, determinate cioè attraverso delle proiezioni delle prospettive di vita attuali, il cui uso permette di limitare il margine di errore tenendo conto degli andamenti attesi delle prospettive di vita. Su questo tema una trattazione esaustiva è presentata da Pitacco (2002) e (2004). Marocco e Pitacco (1998) analizzano il *longevity risk* in portafogli di rendite vi-

talizie; Olivieri (2001) analizza l'impatto del longevity risk sulle assicurazioni vita. Un'analisi congiunta del rischio finanziario e assicurativo viene proposta in Coppola, Di Lorenzo e Sibillo (2000). Olivieri e Pitacco (2003) analizzano la solvibilità di portafogli di rendite pensionistiche soffermandosi soprattutto sul longevity risk.

Per i fondi PAYG precedentemente descritti, in cui per la stabilità del fondo assume una fondamentale importanza il mantenimento di un equilibrio tra la popolazione attiva e quella pensionata, un ulteriore fattore di rischio demografico è costituito dalla variabilità del numero dei nuovi ingressi e di conseguenza dal rischio che vengano meno i flussi monetari necessari ad assicurare i pagamenti delle pensioni future. Questo rischio è collegato alla variabile demografica nuovi ingressi e alla loro futura capacità contributiva.

Per quanto riguarda la struttura demografica, la letteratura attuariale sull'evoluzione della popolazione dei piani pensionistici si basa soprattutto su modelli deterministici (Bower et al. (1976) e Winklevoss (1992)) che considerano l'ipotesi di stazionarietà della popolazione. Una popolazione è definita stazionaria (Winklevoss (1992)) quando la sua età e la sua distribuzione rimangono costanti nel tempo. Se i tassi di decremento associati alla popolazione sono costanti, e vi è un numero costante di nuovi ingressi, si raggiungerà una condizione di stazionarietà dopo n anni, dove n è pari alla differenza tra l'età maggiore della popolazione e quella più giovane.

Nei lavori di seguito indicati sono utilizzati dei modelli in cui il numero dei nuovi ingressi è stocastico.

Mandle e Mazurova (1995) usano la decomposizione spettrale di sequenze casuali stazionarie per analizzare uno schema pensionistico a beneficio definito, nell'ipotesi di tassi di interesse e numero di nuovi ingressi fluttuanti casualmente. Chang et al. (2002) usano processi semi-markoviani per la struttura

degli stati di transizione della popolazione. Ferrara (2002) analizza l'equilibrio di un fondo pensione PAYG con beneficio retributivo, in cui i nuovi ingressi sono variabili aleatorie dipendenti dal tasso di occupazione. Iyer (2003) deriva delle espressioni algebriche per le varianze e le covarianze degli importanti aggregati che caratterizzano lo sviluppo di uno schema considerando la variazione stocastica dei nuovi ingressi. Colombo e Haberman (2005) analizzano l'impatto dell'evoluzione stocastica della popolazione attiva sulla mancata corrispondenza tra le attività e le passività di uno schema pensionistico a beneficio definito. Menoncin (2005) studia il problema dell'allocazione per un fondo pensione finanziato a ripartizione, considerando il numero totale dei lavoratori e dei pensionati delle variabili stocastiche. Gabay e Grasselli (2008) studiano il rischio demografico a cui è esposto un fondo pensione a contributo definito, in presenza di un processo stocastico generale di ingresso all'interno del fondo .

In questo lavoro si analizza il rischio demografico a cui è esposto un fondo pensione PAYG chiuso, in cui la popolazione non è stazionaria, ed i nuovi ingressi evolvono secondo un tasso di variazione stocastico rappresentato da un processo autoregressivo e a media mobile. Per quanto riguarda la mortalità, è considerata deterministica, utilizzando, però delle tavole proiettate. Il longevity risk non viene da noi sottovalutato in quanto si tratta di una componente importante per i fondi analizzati. Non viene in questa sede presentato un modello in cui anche la mortalità è stocastica in quanto il l'obiettivo principale è analizzare quale tra la variabile nuovi ingressi e quella rappresentata dai rendimenti sulle attività ha un peso maggiore sulla rischiosità del fondo. Per non sottostimare il rischio a cui è esposto l'ente si utilizzano delle tavole proiettate.

2.2 Evoluzione del fondo

In questo paragrafo studiamo l'evoluzione del fondo attraverso l'analisi dinamica delle sue principali componenti. Lo schema pensionistico è modellato da un processo stocastico a tempo discreto. L'ammontare totale delle attività che appartengono allo schema pensionistico in uno specifico istante, rappresenta il valore del fondo.

Vengono fatte le seguenti assunzioni:

- il valore iniziale del fondo è noto;
- il fondo è aperto ai nuovi ingressi;
- le valutazioni sono effettuate ad intervalli periodali annuali.

Escludendo i costi fissi amministrativi l'evoluzione del fondo può essere rappresentata dalla seguente equazione ricorsiva:

$$F_{t+1} = F_t(1 + r_{t+1}) + C_{t+1} - B_{t+1}, \quad (2.1)$$

dove F_t è il valore del fondo alla fine dell'anno t , r_{t+1} è il tasso globale di rendimento durante l'anno $(t, t + 1)$, C_{t+1} e B_{t+1} rappresentano rispettivamente i contributi annuali riscossi e le pagate ai pensionati (assumendo che tutti i cash flows siano pagati alla fine di ciascun anno).

Rispetto al modello proposto da Dufresne (1988), nella (2.1) tutti i cash flows vengono considerati alla fine di ogni periodo, in quanto più aderente alla realtà operativa.

2.2.1 Nuovi ingressi ed evoluzione della popolazione.

Come già asserito il nostro obiettivo è quello di analizzare l'evoluzione dei nuovi ingressi in un fondo pensione chiuso finanziato con il sistema PAYG. Esistono

differenti approcci per modellare l'evoluzione dei nuovi ingressi in un fondo pensione chiuso. Uno è quello di studiare le variabili relative all'andamento demografico della popolazione, alla diffusione e durata del ciclo universitario e all'attrattività della professione, attraverso l'analisi delle probabilità di transizione degli stati della popolazione (studenti universitari, laureati, abilitati, iscritti alla cassa di previdenza). Tale approccio è utile per previsioni di breve periodo (5-10 anni).

Poiché il nostro scopo è quello di studiare le dinamiche del fondo nel lungo periodo, in questo lavoro proponiamo un modello per l'evoluzione dei nuovi ingressi basato sull'analisi della variabile tasso di variazione dei nuovi ingressi, che indica la variazione che intercorre nel numero dei nuovi ingressi da un anno al successivo.

Nel nostro modello la variabile aleatoria numero dei nuovi ingressi di età x all'epoca t , $ne_{(x,t)}$, dipende dal numero dei nuovi ingressi all'epoca precedente come segue:

$$ne_{(x,t)} = ne_{(x,t-1)}(1 + \eta_{(x,t)}) \quad (2.2)$$

dove $\eta_{(x,t)}$ rappresenta il tasso di variazione dei nuovi ingressi tra il tempo $t - 1$ e il tempo t , cioè la variazione che intercorre tra l'epoca $t - 1$ e l'epoca t nel numero dei nuovi ingressi per ogni età x . Pertanto al tempo generico t si ha:

$$ne_{(x,t)} = ne_{(x,t-1)}(1 + \eta_{(x,t)}) = ne_{(x,0)}(1 + \eta_{(x,1)}) \dots (1 + \eta_{(x,t)}) \quad (2.3)$$

Questo significa che il numero dei nuovi ingressi per ogni età x e ad ogni epoca t è dato dal suo valore passato, moltiplicato per l'attuale tasso di variazione.

Denotiamo con $n_{(x,t)}$ la funzione di appartenenza (membership function) che esprime il numero di persone di età x al tempo t , appartenenti allo schema.

Per il calcolo delle pensioni è necessario prendere in considerazione anche il nu-

mero di anni di servizio durante i quali ciascun membro ha pagato i contributi nel fondo. A tal proposito la funzione di appartenenza può essere ulteriormente decomposta utilizzando la funzione $n_{(x,c,t)}$ (Colombo-Haberman (2005)) nella seguente formula:

$$n_{(x,t)} = \sum_c n_{(x,c,t)} \quad (2.4)$$

dove c rappresenta il numero degli anni di servizio. Questa variabile influenza essenzialmente il calcolo delle prestazioni; al fine di studiare il processo dei nuovi ingressi utilizziamo per chiarezza espositiva la funzione $n_{(x,t)}$.

La funzione di appartenenza è esprimibile in funzione dei nuovi ingressi come segue:

$$n_{(x,t)} = n_{(x-1,t-1)} \cdot p_{x-1} + ne_{(x,t)} \quad (2.5)$$

dove p_{x-1} è la probabilità che un membro di età $x - 1$ sia vivo nell'anno successivo.

La funzione di appartenenza, che descrive l'evoluzione della popolazione del fondo può essere espressa in funzione dei valori ottenuti per membri e nuovi ingressi al tempo $t - 1$:

$$n_{(x,t)} = n_{(x-1,t-1)} \cdot p_{x-1} + ne_{(x,t-1)}(1 + \eta_{(x,t)}) \quad (2.6)$$

2.2.2 Contributi

Si utilizzano metodi di gestione individuali in cui sia i contributi che le pensioni vengono calcolati singolarmente per ogni appartenente al fondo, e poi sommati per ottenere i valori complessivi.

Usiamo la seguente notazione:

- $R_{(x,t)}$: variabile che esprime il reddito in funzione dell'età e del tempo;

- α : età minima di ingresso;
- π : età della pensione; di conseguenza $\pi - \alpha$ è la lunghezza massima della vita lavorativa;
- γ : aliquota contributiva fissa.

È possibile studiare i contributi totali pagati al fondo all'epoca t , decomponendo la quantità totale in base all'età e scrivendola come l'ammontare di contributi individuali moltiplicato per il numero di iscritti appartenenti a quella classe di età:

$$C_t = \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} g_{x,t} \quad (2.7)$$

dove $g_{x,t}$ rappresenta l'ammontare totale di contributi pagati al tempo t da tutti gli appartenenti di età x . Esso è espresso come segue:

$$g_{x,t} = n_{x,t} \gamma R_{(x-1,t-1)} \quad (2.8)$$

I contributi totali dipendono dal numero di attivi, il tasso di contribuzione γ ed il reddito medio (ad ogni età) come segue:

$$C_t = \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} n_{(x,t)} \gamma R_{(x-1,t-1)} \quad (2.9)$$

Sostituendo l'equazione (2.6) nella (2.9) otteniamo:

$$C_t = \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n_{(x-1,t-1)} p_{x-1} + n e_{(x,t-1)} (1 + \eta_{(x,t)})] \gamma R_{(x-1,t-1)} \quad (2.10)$$

2.2.3 Pensioni

Anche per le pensioni, similmente ai contributi, si procede al calcolo del beneficio individuale, per poi sommarlo ottenendo il valore complessivo per il fondo.

Utilizziamo un metodo misto in cui la pensione ricevuta (per le persone già appartenenti allo schema) è la somma di due componenti: la prima calcolata con il metodo retributivo, la seconda con il metodo contributivo.

Per quanto riguarda la prima componente, essa si applica soltanto per i contributi versati precedentemente all'epoca $(-k)$ a coloro che appartenevano allo schema pensionistico all'epoca $t = -k$, dove $-k$ indica l'epoca nella quale è avvenuto il cambiamento di calcolo delle pensioni, e quindi il passaggio dal sistema retributivo a quello contributivo¹. Per il calcolo di questa quota si utilizza la seguente formula:

$$br = iR_P N \quad (2.11)$$

dove i rappresenta il coefficiente di rivalutazione medio, R_P il reddito pensionabile ed N il numero degli anni di contribuzione maturati nel sistema retributivo.

Per quanto riguarda invece la seconda componente (le pensioni degli aderenti entrati successivamente all'epoca $(-k)$ sono calcolate interamente con questo metodo), essa viene calcolata mediante la conversione in rendita dell'ammontare del conto nozionale che ciascun lavoratore ha accumulato.

Pertanto la quota contributiva della pensione sarà:

$$bc = M_c * cdt_\pi \quad (2.12)$$

dove M_c è il montante contributivo calcolato associato all'anzianità, cdt il coefficiente di trasformazione, cioè il coefficiente utilizzato per la conversione in rendita dell'ammontare totale di capitale nozionale accumulato da ciascun lavoratore. Esso varia in funzione dell'età, ma dal momento che nel nostro modello c'è un'età fissa per la pensione π , cdt è una costante.

¹Nelle applicazioni numeriche l'epoca $(-k)$ coincide con l'anno 2003; dal 1/1/2004 infatti è entrata in vigore la riforma del regime previdenziale del fondo oggetto di analisi.

Indicando con $b_{x,t,c}$ è la pensione media per ciascun membro di età x al tempo t con c anni di servizio, può essere calcolata come segue:

$$b_{x,t,c} = br + bc \quad (2.13)$$

Le pensioni totali saranno:

$$B_t = \sum_{x=\pi+1}^{\omega-1} \sum_{c=m}^{\pi-\alpha} n_{(x-1,t-1,c)} p_{x-1} b_{x,t,c} \quad (2.14)$$

dove m è il numero minimo di anni di contribuzione necessari per avere diritto alla pensione; $b_{x,t,c}$ è la pensione media per ciascun membro di età x al tempo t con c anni di servizio.

Al crescere di t , il numero di nuovi ingressi influenza anche le pensioni totali, quando gli attivi diventeranno pensionati.

Il coefficiente di trasformazione

Il coefficiente di trasformazione è una costante che moltiplicata al montante contributivo maturato nel corso dell'attività lavorativa consente di determinare la rendita pensionistica annua spettante a ciascun individuo dal raggiungimento della pensione sino alla morte. I coefficienti di trasformazione sono definiti come l'inverso del valore attuale della rendita unitaria reversibile a favore del nucleo familiare superstite con riferimento alle tavole di mortalità ISTAT per il 1990 e ad un tasso di interesse dell'1,5%, e devono essere rivalutati ogni 10 anni sulla base delle rilevazioni demografiche. Questa situazione produce un gap crescente tra i coefficienti applicati e quelli che corrispondono alle tavole più recenti, situazione risolvibile determinando annualmente tali coefficienti.

Janssen e Manca (2006) propongono un metodo per la costruzione dei coef-

ficienti di trasformazione per un sistema a capitalizzazione nozionale ed effettuano una comparazione con le regole previste dalla normativa italiana². Il metodo proposto consente di ottenere una trasformazione in rendita dei capitali accumulati, che sia corretta dal punto di vista attuariale.

I coefficienti della Riforma Dini³ sono stati costruiti mediante la seguente formula:

$$TC_x = \frac{1}{\Delta_x}, \quad \Delta_x = \frac{\sum_{s=m,f} (a_{x,s}^{v(t)} + A_{x,s}^{v(t)})}{2} - k$$

dove TC_x è il coefficiente di trasformazione per l'età x ; Δ_x è il valore attuale di una rendita pensionistica media unitaria. Si tratta di una media in quanto non è possibile attribuire pensioni diverse a maschi e femmine.

$a_{x,s}^{v(t)}$ e $A_{x,s}^{v(t)}$ rappresentano, rispettivamente, il valore attuale medio del beneficio pagato al pensionato ed il valore attuale medio della pensione che sarà pagata al vedovo/a di età x e sesso s ; k è un correttivo che tiene conto delle modalità in cui avviene il pagamento della pensione (mensile, bimensile, etc.); nel caso italiano il pagamento è bimensile e $k = 0.423$.

$$a_{x,s}^t = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+t,s}}{l_{x,s}} \left(\frac{1+r}{1+\sigma} \right)^{-t}$$

$$A_{x,s}^t = \zeta \delta_s \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+t,s}}{l_{x,s}} q_{x+t,s} \left(\frac{1+r}{1+\sigma} \right)^{-t} \theta_{x+t,s} \sum_{t=1}^{\omega-x-t+\varepsilon_s} \frac{l_{x+t+\tau-\varepsilon_s,s}^{ved}}{l_{x+t+1-\varepsilon_s,s}^{ved}} \left(\frac{1+r}{1+\sigma} \right)^{-\tau}$$

dove:

- $l_{x,t}$ è il numero di sopravvivenenti di età x e sesso s ;
- ω è la massima età raggiungibile;

²Legge Dini

³descritti nel documento pubblicato dal Ministero del Lavoro e delle Politiche Sociali (2001)

- $q_{x,s}$ è la probabilità di morire all'età x ;
- $\theta_{x,s}$ è la probabilità di lasciare famiglia all'età x ;
- $l_{x,s}^{ved}$ è il numero di sopravvissuti vedovi di età x e sesso s ;
- ε_s è la differenza di età tra gli sposi;
- ζ è la percentuale di pensione che spetta alla vedova senza figli (in Italia 0,6);
- δ_s è la percentuale di vedovi che hanno diritto alla pensione di reversibilità; δ_s ha un valore di 0,9 per i vedovi e 0,7 per le vedove;
- r è il tasso interno di rendimento;
- σ è il tasso di inflazione;
- $\left(\frac{1+r}{1+\sigma}\right)$ è supposto costante nel tempo e considerato uguale a 1,015.

2.3 Il modello matematico

L'evoluzione del fondo (equazione 2.1) è riscrivibile in funzione della variabile nuovi ingressi. Sostituendo le espressioni ottenute nel precedente paragrafo per i contributi e le pensioni nella (2.1) otteniamo l'espressione per il fondo:

$$\begin{aligned}
 F_{t+1} = & F_t(1 + r_{t+1}) + \\
 & + \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n_{(x-1,t)}p_{x-1} + ne_{(x,t)}(1 + \eta_{(x,t+1)})]\gamma R_{(x-1,t)} + \\
 & - \sum_{x=\pi+1}^{\omega-1} \sum_{c=m}^{\pi-\alpha} n_{(x-1,t)}p_{x-1} b_{x,t+1,c}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Come possiamo notare, sia i contributi che le pensioni totali sono influenzati dalla variabile aleatoria nuovi ingressi, i primi immediatamente, mentre le pensioni nel lungo periodo, allorquando i nuovi attivi diventano pensionati. Nel seguito sono analizzate singolarmente le componenti stocastiche del modello usate per descrivere le variabili demografiche e finanziarie.

2.3.1 Tasso globale di rendimento

Il tasso globale di rendimento può essere rappresentato in modi differenti a seconda dell'ipotesi scelta sulla composizione delle attività del portafoglio di investimento del fondo ed il conseguente grado di rischio associato. I fondi analizzati nel presente lavoro appartengono al primo pilastro del sistema pensionistico, per cui sono caratterizzati solitamente da portafogli prudentiali. I tassi di rendimento associati, presentano delle limitate oscillazioni attorno al loro trend storico. Per questa ragione, utilizzeremo per rappresentare la dinamica del tasso di interesse il seguente modello:

$$r_t = \hat{r}_t + X_t \quad (2.16)$$

dove il tasso di interesse è dato dalla somma di una componente deterministica \hat{r}_t , ed una stocastica X_t , descritta da un processo autoregressivo del primo ordine (AR1), rappresentato dalla seguente equazione non omogenea:

$$X_t = \varphi_r X_{t-1} + \sigma_a a_t, \quad (2.17)$$

che esprime la dipendenza autoregressiva del primo ordine, dove φ_r e σ_a sono i parametri del processo e le variabili a_t sono variabili aleatorie assunte indipendenti fra loro nei vari istanti e normalmente distribuite con media 0 e varianza

1. Questo tipo di *regressione condizionata* consente di stimare i parametri del processo attraverso l'applicazione dei minimi quadrati condizionati.

Questo processo ben si adatta a rappresentare l'evoluzione temporale del tasso globale di rendimento di questo tipo di fondi.

Il modello descritto dall'equazione (2.16) rappresenta una versione discreta del modello di Vasicek. Nel modello di Vasicek il tasso di interesse può raggiungere un valore negativo. Questo non è accettabile se si considera il tasso privo di rischio, che non può assumere valori negativi; è invece accettabile se si considerano i rendimenti sulle attività, essendo infatti possibili delle perdite di capitale. Il processo stocastico r_t è di tipo *mean reverting*, il suo valore dunque tende ad essere riportato nel tempo ad un livello di lungo periodo.

La scelta di un modello in cui la distribuzione dei rendimenti è normale, è dovuta al fatto che i fondi analizzati si caratterizzano per portafogli prudentziali composti da attività a basso rischio (addirittura il patrimonio è composto in buona parte anche da immobili). Quando i rendimenti sono normali, non sono possibili delle grandi deviazioni dai loro valori attesi. Le recenti e passate crisi finanziarie hanno dimostrato che queste deviazioni sono possibili e si verificano molto più spesso di quanto previsto da una distribuzione Gaussiana. Nel nostro caso si tratta di una scelta motivata dalle caratteristiche dei portafogli dei fondi analizzati.

Con la (2.17) il modello presenta X_t come somma di una quantità dipendente da X_{t-1} attraverso φ_r e di una indipendente da essa. Si comprende dunque il significato di φ_r : a piccoli (grandi) valori di φ_r corrisponderà una debole (forte) dipendenza. Il caso estremo di $\varphi_r = 0$ riduce il sistema ad un $AR(0)$ (white

noise), cioè ad una successione di stati indipendenti e non correlati ($X_t = \sigma_a a_t$) dove il valore di una osservazione non dà indicazioni circa il valore della successiva. A tendere di φ_r ad 1 il sistema si muoverà sempre più in funzione delle determinazioni della componente a_t tendendo verso un processo *random walk* ($X_t = X_{t-1} + \sigma_a a_t$): in questo caso per ammortizzare grandi shocks occorrerà molto tempo. Nei casi di $\varphi_r > 1$ o $\varphi_r < -1$ la varianza finita delle a_t non riesce a contenere il sistema che diventa esplosivo.

La condizione affinché il sistema presenti varianza finita è $-1 < \varphi_r < 1$. Per tali valori la funzione di Green, che esprime la memoria del sistema in termini delle a_t , tende asintoticamente a zero. Dopo un intervallo opportuno di tempo, il sistema tornerà nella sua posizione di equilibrio ed è per tale motivo detto *asintoticamente stabile*.

Applicando il metodo dei minimi quadrati condizionati, si ottengono i valori dei parametri caratterizzanti il processo:

$$\hat{\varphi}_r = \frac{\sum_{t=2}^N (X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=2}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad (2.18)$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{t=2}^N [(X_t - \bar{X}) - \hat{\varphi}_r (X_{t-1} - \bar{X})]^2}{N - 1} = \frac{RSS}{N - 1} \quad (2.19)$$

dove N é il numero di osservazioni ed rappresenta la media delle X_t . Le determinazioni di $\hat{\varphi}_r$ e di $\hat{\sigma}_a^2$ caratterizzano completamente il modello.

2.3.2 Il tasso di variazione dei nuovi ingressi

Come detto la nostra proposta è di rappresentare il tasso di variazione dei nuovi ingressi con un processo Autoregressivo e a Media Mobile di ordine (p,q).

X_t è un modello Autoregressivo di ordine p e Media Mobile di ordine q , $X_t \approx ARMA(p, q)$, se esso soddisfa la relazione:

$$\begin{aligned}\phi(B) X_t &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = \\ &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t\end{aligned}\quad (2.20)$$

ovvero, esplicitando gli operatori

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.21)$$

Pertanto, l'operatore Autoregressivo Media Mobile (ARMA) di ordini p e q sarà definito da

$$\phi^{-1}(B) \theta(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p} \quad (2.22)$$

E' evidente che gli operatori ARMA includono quelli AR ed MA come casi particolari

$$\begin{aligned}X_t &\approx ARMA(p, 0) \equiv AR(p) \\ X_t &\approx ARMA(0, q) \equiv MA(q) \\ X_t &\approx ARMA(0, 0) \equiv AR(0) \equiv MA(0) \equiv WN\end{aligned}\quad (2.23)$$

Il processo ARMA è stazionario se $\phi(B) = 0$ possiede le p radici in modulo superiore a uno ed è invertibile se $\theta(B) = 0$ possiede le q radici in modulo superiore a uno. Essendo tali vincoli fra loro indipendenti, la regione ammissibile di un processo ARMA è il prodotto cartesiano delle regioni di stazionarietà e di invertibilità.

Il processo ARMA(1,1) può essere introdotto partendo dall'espressione generale

dei processi ARMA ricavata. Se si considera l'equazione

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.24)$$

ponendo

$$\phi_r = 0 \quad r > 1 \quad \theta_s = 0 \quad s > 1$$

si ottiene

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (2.25)$$

Attraverso un'accurata analisi dei dati reali abbiamo riscontrato che, dividendo la popolazione tra maschi e femmine, per i fondi analizzati il processo ARMA(1,1) è adatto a descrivere il tasso di variazione dei nuovi ingressi.

Assumiamo pertanto che il tasso di variazione dei nuovi ingressi segua un ARMA(1,1) descritto dalla seguente equazione :

$$\eta_{x,t} = \varphi_{0_x} + \varphi_{1_x} \eta_{x,t-1} + \varepsilon_t - \theta_{1_x} \varepsilon_{t-1} \quad (2.26)$$

dove φ_{0_x} , φ_{1_x} e θ_{1_x} sono rispettivamente i parametri autoregressivi e moving average del processo, per ogni età x , e le ε_t sono variabili aleatorie assunte indipendenti fra loro nei vari istanti e normalmente distribuite con media 0 e varianza σ_ε^2 .

2.3.3 Valore del fondo

Considerate le assunzioni del precedente paragrafo, sostituendo la (2.16), la (2.17) e la (2.26) l'equazione generale del fondo può essere riscritta nel modo

seguinte:

$$\begin{aligned}
F_{t+1} = & F_t [1 + \hat{r}_{t+1} + \varphi_r X_t + \sigma_a a_{t+1}] + \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n_{(x-1,t)} p_{x-1} + \\
& + n e_{(x,t)} (1 + \varphi_{0_x} + \varphi_{1_x} \eta_{(x,t)} + \varepsilon_{t+1} - \theta_{1_x} \varepsilon_t)] \gamma R_{(x-1,t)} + \\
& - \sum_{x=\pi+1}^{\omega-1} \sum_{c=m}^{\pi-\alpha} n_{(x-1,t)} p_{x-1} b_{x,t+1,c}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

L'evoluzione temporale del fondo, come mostrato nell'equazione 2.27 può essere rappresentata in base alle assunzioni illustrate nel paragrafo precedente.

Inoltre assumendo che la variabile casuale tasso di variazione dei nuovi ingressi sia indipendente dalla variabile casuale global asset return, il valore atteso condizionato al set informativo disponibile al tempo t sarà:

$$\begin{aligned}
E [F_{t+1} | I_t] = & F_t [1 + \hat{r}_{t+1} + \varphi_r X_t] + \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n_{(x-1,t)} p_{x-1} + \\
& + n e_{(x,t)} [1 + \varphi_{0_x} + \varphi_{1_x} \eta_{(x,t)}]] \gamma R_{(x-1,t)} + \\
& - \sum_{x=\pi+1}^{\omega-1} \sum_{c=m}^{\pi-\alpha} n_{(x-1,t)} p_{x-1} b_{x,t+1,c}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Mentre la varianza condizionata sarà:

$$VAR [F_{t+1} | I_t] = [F_t]^2 \sigma_a^2 + \sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n e_{(x,t)}]^2 \sigma_\varepsilon^2 [\gamma R_{(x-1,t)}]^2 \tag{2.29}$$

2.4 Una semplificazione del modello

Consideriamo ora un caso particolare rispetto al modello presentato in precedenza: il caso in cui i nuovi ingressi entrano ad un'unica età α . In questo modo possiamo agevolmente separare la popolazione dei nuovi ingressi, da quella preesistente. Saranno inoltre inserite delle ulteriori ipotesi di semplificazione riguardanti le pensioni ed i contributi. Consideriamo che tutti i cash flows siano pagati all'inizio del periodo. Seguendo l'impostazione di Dufresne (1988) l'evoluzione del fondo può essere rappresentata dalla seguente equazione:

$$f(t+1) = [f(t) + C(t) - B(t)][1 + r(t, t+1)] \quad (2.30)$$

2.4.1 Contributi e pensioni

Contributi

In questo paragrafo analizziamo l'evoluzione dei contributi annuali partendo da un istante generico 0 e adottando una dinamica ricorsiva anno dopo anno. Come già asserito nell'introduzione il sistema PAYG necessita di un flusso di nuovi ingressi tale da assicurare il pagamento delle pensioni future in quanto essi dipendono dal numero degli attivi che (pagando i contributi) permettono di pagare gli esborsi pensionistici. L'analisi è basata sull'ammontare di contributi relativi ai membri attivi di età x ($\alpha \leq x \leq \pi$, dove α è l'età di ingresso nel sistema e π l'età del pensionamento). La loro evoluzione è considerata in conformità alle tavole di mortalità utilizzate: ogni classe di età è moltiplicata per la probabilità annuale di sopravvivenza (${}_1p_x$) in modo da ottenere il numero degli appartenenti nell'anno successivo.

Sono considerate le seguenti assunzioni:

- $d = \pi - \alpha$ è il periodo massimo di contribuzione;

- $s = \omega - \pi$ è il periodo massimo della pensione, dove ω è l'età estrema;
- lo schema eroga la pensione soltanto all'età del pensionamento (le pensioni di invalidità o di reversibilità non sono considerate);
- i costi amministrativi non sono considerati;
- per semplificare la notazione consideriamo la stessa anzianità contributiva per gli appartenenti allo schema che hanno la stessa età.

In questo modo è possibile studiare l'ammontare di contributi $C(t)$, pagati al tempo t , decomponendo la quantità totale per l'età e scrivendola come l'ammontare di contributi individuale moltiplicato per il numero di membri appartenenti a quella classe di età:

$$C(t) = \sum_{x=\alpha}^{\pi-1} c_{x,t} \quad (2.31)$$

dove $c_{x,t}$ rappresenta l'ammontare totale di contributi pagati al tempo t da tutti gli appartenenti di età x . Esso è espresso come segue:

$$c_{x,t} = A_{x,t-1} \bar{R}_{x,t-1} \gamma \quad (x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \pi - 1)$$

dove $A_{x,t-1}$ rappresenta tutti i membri di età x al tempo $(t - 1, t)$, $\bar{R}_{x,t-1}$ è il reddito medio e γ la aliquota fissa di contribuzione. Naturalmente i contributi pagati all'inizio dell'anno t sono misurati sul numero degli attivi nell'anno precedente $(t - 1)$ e sul reddito medio percepito durante lo stesso periodo $(t - 1)$. In questa maniera è possibile analizzare il valore totale dei contributi pagati nei periodi successivi utilizzando un approccio ricorsivo: nel periodo 1 abbiamo

$$C(1) = \sum_{x=\alpha}^{\pi-1} A_{x,0} \bar{R}_{x,0} \gamma \quad (2.32)$$

L'evoluzione del reddito annuale assume differenti dinamiche che possono essere collegate a variabili differenti (come il tasso di inflazione, l'evoluzione del PIL e così via): questo ci permette di considerare la sua evoluzione sulla base di differenti funzioni (costante, crescente, etc.).

Nel caso di reddito costante, indicando con $\bar{C}_0 = R_0\gamma$ l'entrata contributiva media e considerando A^{Ti} come i membri totali iniziali (al tempo 0), possiamo scrivere:

$$C(1) = \sum_{x=\alpha}^{\pi-1} A_{x,0} R_0\gamma = \bar{C}_0 \sum_{x=\alpha}^{\pi-1} A_{x,0} = \bar{C}_0 A^{Ti}$$

pertanto il contributo nel periodo 1 corrisponde alla somma di tutti gli attivi iniziali moltiplicata per l'entrata media contributiva.

In base alle considerazioni appena fatte, possiamo valutare l'evoluzione dei contributi al tempo 2 nella seguente maniera:

$$C(2) = \bar{C}_0 \left(\sum_{x=\alpha+1}^{\pi-1} A_{x,1} + A'_{\alpha,1} \right) \quad (2.33)$$

dove A rappresenta il numero totale degli attivi già presenti nello schema al tempo 0 e A' i nuovi ingressi nell'anno successivo. Al tempo 2, gli attivi di età $\pi - 1$ al tempo 1 diventano pensionati; i più giovani tra i membri iniziali (popolazione originaria) hanno l'età di $\alpha+1$, in quanto i membri di età α saranno nuovi ingressi. In generale, si ha $A_{x+1,1} = (A_{x,0})({}_1\rho_x)$ secondo l'evoluzione della popolazione stabilita nella tavola di mortalità. Questo genere di evoluzione è seguita anche dai nuovi ingressi: dopo un anno, i membri entrati al tempo 1 ($A'_{\alpha,1}$) subiscono una filtrazione rispetto al tasso di sopravvivenza, con $A'_{\alpha+1,2} = A'_{\alpha,1}({}_1\rho_x)$.

Pertanto in un generico periodo t abbiamo:

$$C(t) = \bar{C}_0 \left(\sum_{x=\alpha+t-1}^{\pi-1} A_{x,t-1} + A'_{\alpha+t-2,t-1} + \dots + A'_{\alpha,t-1} \right)$$

e separando la popolazione originaria dai nuovi ingressi:

$$C(t) = \bar{C}_0 \sum_{x=\alpha+t-1}^{\pi-1} A_{x,t-1} + \bar{C}_0 \sum_{x=\alpha}^{\alpha+t-2} A'_{x,t-1} \quad (2.34)$$

Ponendo $\bar{C}_0 = 1$, la (2.34) può essere riscritta nel modo seguente:

$$C(t) = \sum_{x=\alpha}^{\pi-1} A_{x,t} 1_{(x \geq \alpha+t-1) \wedge (t \leq d)} + \sum_{x=\alpha+1}^{\pi-1} A'_{x,t} 1_{(x < \alpha+t-1)} \quad (2.35)$$

dove la funzione indicatrice $1_{(x \geq \alpha+t-1) \wedge (t \leq d)}$ assume valore 1 se $(x \geq \alpha + t - 1)$ e $(t < d)$, 0 altrimenti; mentre la funzione indicatrice $1_{(x < \alpha+t-1)}$ assume il valore 1 se $(x < \alpha + t - 1)$, 0 altrimenti.

Pensioni

L'esborso pensionistico è ottenuto considerando il numero dei pensionati e l'ammontare medio della pensione. Esso dipende dall'ammontare dei contributi accumulati e dal coefficiente di trasformazione basato sull'età. Assumiamo che gli aderenti al fondo vadano in pensione tutti alla stessa età π con lo stesso ammontare di contributi accumulati: di conseguenza ricevono lo stesso beneficio periodico \bar{B} . La durata massima dell'età pensionabile è pari a $s (= \omega - \pi)$, così l'importo totale delle pensioni pagate è espresso come segue:

$$B(t) = \sum_{x=\pi}^{\omega} P_{x,t} \bar{B} \quad (2.36)$$

dove $P_{x,t}$ rappresenta il numero totale di pensionati di età x in un generico tempo t . L'ammontare totale di benefici pensionistici è influenzato dalla variabile aleatoria nuovi ingressi nel lungo periodo, quando gli attivi diventeranno pen-

sionati ed i nuovi ingressi raggiungeranno l'età $x \geq \pi$. In altri termini quando la proiezione è maggiore rispetto al periodo di contribuzione ($t > d$), i membri sopravvissuti entrati nel sistema al tempo 1 diventano pensionati: cioè i nuovi ingressi al tempo 1 ($A'_{\alpha,1}$) diventano pensionati ($P_{\tau,d}$) al tempo $t = d$ e così via per gli anni successivi. Di conseguenza, analogamente ai nuovi ingressi, indicheremo con $P'_{x,t}$ il numero dei pensionati di età x al tempo t che non erano ancora nello schema al tempo 0. L'ammontare dei benefici pensionistici può essere riscritto utilizzando la funzione indicatrice come segue:

$$B(t) = \bar{B} \left[\sum_{x=\pi}^{\omega} P_{x,t} + \sum_{x=\pi}^{\omega} P'_{x,t} 1_{(x < \alpha + \Pi) \wedge (t > d)} \right] \quad (2.37)$$

dove la funzione indicatrice $1_{(x < \alpha + \Pi) \wedge (t > d)}$ assume valore 1 se $x < \alpha + \Pi$ e $t > d$, 0 altrimenti.

2.4.2 Analisi delle componenti stocastiche

Come asserito nell'introduzione un sistema a ripartizione ha bisogno di un equilibrio tra entrate e uscite ogni anno: è necessario che i membri attivi all'interno del fondo versino un ammontare di contributi capaci di coprire gli esborsi pensionistici per i pensionati correnti. La popolazione attiva evolve in base al processo dei nuovi ingressi: l'obiettivo di questo paragrafo è studiare la dinamica della variabile aleatoria nuovi ingressi in un fondo pensione PAYG. Osserviamo che la variabile aleatoria numero dei nuovi ingressi all'epoca k dipende dal numero dei nuovi ingressi all'epoca precedente e può essere scritta come segue: $A'_{x,k} = A'_{x,k-1}(1 + \lambda_k)$ dove λ_k rappresenta il tasso di variazione dei nuovi ingressi al tempo k . Pertanto, al tempo generico t otteniamo:

$$A'_{\alpha,t} = A'_{\alpha,t-1}(1 + \lambda_t) = A'_{\alpha,0}(1 + \lambda_1) \cdots (1 + \lambda_t),$$

in tal modo i nuovi ingressi sono dati dal loro valore passato, moltiplicato per l'attuale tasso di variazione.

Nuovi ingressi

Il tasso di variazione può essere rappresentato da un processo Autoregressivo a Media Mobile di ordine (p, q) . Un ARMA (p, q) può essere visto come una generalizzazione dei due singoli modelli AR (p) e MA (q) dove:

$$\lambda_t = \varphi_0 + \varphi_1\lambda_{t-1} + \varphi_2\lambda_{t-2} + \dots + \varphi_p\lambda_{t-p} + Z_t - \theta_1Z_{t-1} - \theta_2Z_{t-2} - \dots - \theta_qZ_{t-q}$$

dove $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ e $\phi + \theta \neq 0$

Utilizziamo l'operatore ritardo L per scrivere il modello ARMA più concisamente:

$$\phi(L)\lambda_t = \theta(L)Z_t \quad (2.38)$$

Utilizzando la (9) e ponendo $\bar{C}_0 = 1$ i contributi indicati nella (4) diventano:

$$C(2) = \sum_{x=\alpha+1}^{\pi-1} A_{x,1} + A'_{\alpha,0}[1 + (\varphi(L)\lambda_1 - \theta(L)Z_1)]$$

pertanto, nel generico periodo t avremo:

$$C(t) = \sum_{x=\alpha+t-1}^{\pi-1} A_{x,t-1} + \sum_{x=\alpha}^{\alpha+t-2} A'_{\alpha,t-1}[1 + (\varphi(L)\lambda_t - \theta(L)Z_t)] \quad (2.39)$$

Come possiamo osservare l'ammontare totale dei contributi è direttamente influenzato dalla variabile casuale nuovi ingressi, come pure le prestazioni pensionistiche quando i nuovi attivi diventano pensionati.

Global asset return

Per rappresentare il tasso globale di rendimento applichiamo il modello descritto nella (2.16), in cui la componente stocastica è rappresentata da un processo AR(1) (2.17).

2.4.3 Il modello

Come già evidenziato nel primo paragrafo, la variabile demografica tasso di variazione dei nuovi ingressi può essere rappresentata attraverso un modello ARMA. Nelle nostre applicazioni abbiamo verificato che, dividendo tra maschi e femmine nella popolazione attiva, l'evoluzione del tasso di variazione dei nuovi ingressi segue un processo ARMA (1, 1).

Considerate le assunzioni del precedente paragrafo, l'espressione generale del fondo (2.1) può essere rappresentata come

$$\begin{aligned}
 f(t+1) = & \left[f(t) + \sum_{x=\alpha+t-1}^{\pi-1} (A_{x,t-1}^M + A_{x,t-1}^F) + \right. \\
 & + \sum_{x=\alpha}^{\alpha+t-2} (A_{x,0}^M + A_{x,0}^F) [1 + \varphi_1^{(M,F)} \lambda_t + Z_{t+1} - \theta_1^{(M,F)} Z_t] + \\
 & \left. - (\bar{B} \sum_{x=\pi}^{\omega} P_{x,t}^{(M,F)}) \right] [1 + \hat{r}_{t+1} + \varphi_r X_r(t) + \sigma_a a_{t+1}]
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

dove $A_{x,t-1}^M$ and $A_{x,t-1}^F$ sono rispettivamente il numero di maschi e femmine di età x appartenenti allo schema e $A_{x,0}^M$ e $A_{x,0}^F$ rappresentano i nuovi ingressi, maschi e femmine, la cui evoluzione dipende dal tasso di variazione dei nuovi ingressi attraverso $\varphi_1^{M,F}$ che indica i 2 differenti parametri per maschi e femmine (φ_1^M e φ_1^F). Se la proiezione si estende oltre all'epoca d , allora anche la componente delle pensioni deve considerare i nuovi ingressi.

Laddove indichiamo:

$$\begin{aligned}\bar{A}_t &= \sum_{x=\alpha+t-1}^{\pi-1} (A_{x,t-1}^M + A_{x,t-1}^F) \\ \bar{A}'_t &= \sum_{x=\alpha}^{\alpha+t-2} (A'_{x,0}{}^M + A'_{x,0}{}^F) \\ \bar{P}_t &= \sum_{x=\pi}^{\omega} P_{x,t}^{(M,F)} \bar{B} \\ \Phi_t &= [1 + \hat{r}_{t+1} + \varphi_r X(t)] \\ H_t &= 1 + \varphi_1 \lambda_t + Z_{t+1} - \theta_1 Z_t,\end{aligned}$$

il valore atteso condizionato al set informativo disponibile al tempo t (I_t) sarà:

$$E[f(t+1) | I_t] = \Phi_t \left[f(t) + \bar{A}_t + \bar{A}'_t (1 + \varphi_1^{(M,F)} \lambda_t) - \bar{P}_t \right]. \quad (2.41)$$

Capitolo 3

Dinamiche evolutive del fondo: analisi di sensitività

3.1 Introduzione

Scopo del capitolo è quello di studiare l'impatto delle singole variabili tasso globale di rendimento e nuovi ingressi sull'evoluzione del fondo.

Nei seguenti paragrafi presentiamo delle applicazioni numeriche con i dati di un fondo previdenziale chiuso finanziato con il sistema PAYG: la Cassa Nazionale di Previdenza e Assistenza a favore dei Dottori Commercialisti (CNPADC), uno degli enti previdenziali privatizzati ex D.Lgs 509/1994. Prima di esaminare lo sviluppo dell'applicazione numerica, in questo paragrafo descriviamo brevemente il fondo e le sue caratteristiche essenziali.

La CNPADC è stata istituita nel 1963 come parte della pubblica amministrazione e successivamente a seguito del D.Lgs. 509/1994 si è trasformata assumendo la forma giuridica di associazione privata. Sono obbligatoriamente iscritti alla Cassa i Dottori Commercialisti iscritti agli albi professionali che esercitano la libera professione con carattere di continuità.

Il meccanismo che regola il finanziamento del fondo è rimasto a ripartizione anche successivamente alla privatizzazione. Nel 2004 la Cassa ha approvato l'introduzione di una riforma del regime previdenziale animata dallo scopo di garantire la sostenibilità finanziaria nel lungo periodo. La riforma, con decorrenza dal 1° Gennaio 2004, ha introdotto il metodo di calcolo contributivo delle prestazioni pensionistiche (confermando il sistema PAYG per il finanziamento). La pensione è calcolata con un metodo misto (pro-rata) ed è data dalla somma di due componenti: la prima calcolata con il sistema a beneficio definito per i contributi pagati fino al 2003, mentre la seconda per i contributi pagati successivamente al 2004 è calcolata con il contributivo.

La Cassa è alimentata da due tipi di contributi:

un contributo soggettivo dovuto in misura percentuale rispetto al reddito ai fini IRPEF con l'obbligo di versamento di un contributo annuo minimo

un contributo integrativo calcolato in percentuale sul volume di affari IVA dichiarati per l'anno precedente.

Per quanto riguarda la struttura demografica la CNPADC conta più di 42.500 iscritti di cui circa il 53% ha meno di 40 anni di età; i pensionati, invece, sono circa 4.100.

L'asset allocation della Cassa è composto nella seguente maniera: proprietà immobiliari, titoli obbligazionari e azioni, partecipazioni, crediti e altri titoli (Distribuzione del patrimonio immobiliare per destinazione d'uso: 65% commerciale, 21% industriale, 14% abitativo.

Investimenti immobiliari: obbligazionari 67,1%, azioni 23,1%, hedge funds 8,9%, liquidità 0,9%.

L'obiettivo principale delle applicazioni numeriche consiste nell'impiegare il modello presentato nel Capitolo 2 per determinare i cash flows futuri del fondo, allo scopo di valutare l'influenza della della variabile demografica nuovi ingressi sull'evoluzione del fondo.

Attraverso delle simulazioni con il metodo Monte Carlo viene determinata la struttura probabilistica del fondo nel caso di tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici. Per valutare l'impatto delle singole componenti stocastiche sull'evoluzione del fondo, viene proposta un'analisi marginale, facendo variare soltanto una variabile alla volta.

Vengono prese in considerazione diverse misure di rischio come il Value at Risk ed il Conditional Value at Risk.

3.2 Assunzioni e metodologia adottata

La CNPADC è un fondo giovane, in quanto si caratterizza per l'elevata presenza delle coorti: la classe di età più numerosa è rappresentata dalla categoria dei 35/45-enni. La figura 3.1 mostra la distribuzione della popolazione per età e sesso. A partire da questa situazione demografica si è sviluppata l'evoluzione dinamica del fondo.

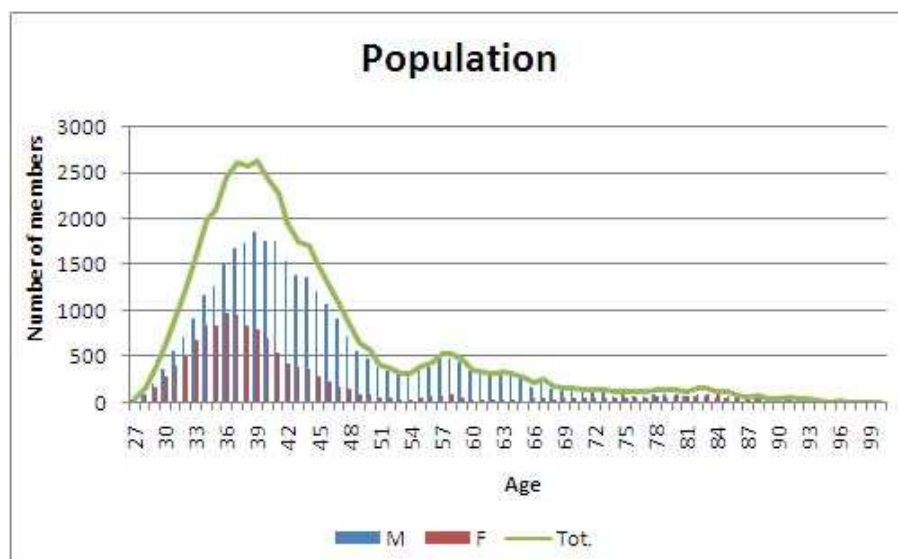


Figura 3.1: Struttura della popolazione per età e genere

Vengono fatte le seguenti assunzioni:

- la popolazione iniziale è quella della CNPADC al 1° Gennaio 2006;
- l'evoluzione della popolazione basata sulle tavole di mortalità IPS55 maschili e femminili;
- per i nuovi ingressi età fissa di entrata $\alpha = 30$, età della pensione $\pi = 65$;
- per la popolazione di partenza è considerata la reale età di ingresso e l'anzianità contributiva;

- il valore iniziale del fondo è noto ed è quello risultante dal bilancio del 2005 della cassa;
- l'inflazione è fissa al 2%;
- il contributo soggettivo γ è uguale al 10,7% del reddito professionale annuo¹;
- il contributo integrativo, dove non diversamente specificato, è pari al 4% fino al 2010, successivamente al 2% (così come previsto dalla Riforma della Cassa);
- i coefficienti di trasformazione impiegati sono quelli della legge 335/1995 (Dini);
- i redditi professionali sono rivalutati del tasso di inflazione;
- le pensioni sono calcolate con il metodo misto (pro-rata);
- i costi amministrativi A_t sono calcolati come dal bilancio del 2005, rivalutati al tasso nominale annuo del 3%. In questo modo l'equazione generale del fondo diventa:

$$F_{t+1} = F_t(1 + r_{t+1}) + C_{t+1} - B_{t+1} - A_{t+1}. \quad (3.1)$$

Tutte le variabili (nuovi ingressi, contributi, pensioni) sono stati calcolati separatamente per maschi e femmine, perché le due categorie sono caratterizzate da differenti tassi di variazione, mortalità diversa, redditi differenti e di conseguenza differenti pensioni.

¹Il contributo soggettivo varia tra il 10% e il 17%. Nel 2005 l'aliquota media è stata di 10,71%. (Fonte (Angrisani (2006))

3.3 Scenario demografico e finanziario

3.3.1 Ipotesi sui nuovi ingressi

Nel capitolo 2 per rappresentare la dinamica del fondo nel lungo periodo abbiamo proposto un modello per l'evoluzione dei nuovi ingressi basato sull'analisi della variabile tasso di variazione dei nuovi ingressi. Abbiamo ipotizzato che la variabile aleatoria tasso di variazione dei nuovi ingressi sia rappresentata da un processo $ARMA(1, 1)$, rappresentata dalla seguente equazione:

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \quad (3.2)$$

Poichè nelle assunzioni abbiamo ipotizzato che tutti i nuovi ingressi entrano alla stessa età α nella (3.2) la variabile η è in funzione del tempo, ma non dell'età.

Per la stima dei parametri caratterizzanti il modello $ARMA(1,1)$ abbiamo utilizzato un dataset contenente le serie storiche del tasso di variazione dei nuovi ingressi costruito sulla base delle elaborazioni dei dati sui nuovi ingressi forniti dalla CNPADC. Le serie storiche relative al tasso di variazione dei nuovi ingressi femmine e maschi sono rappresentate nelle figure 3.2 e 3.3 e nelle tabelle 3.1 e 3.2.

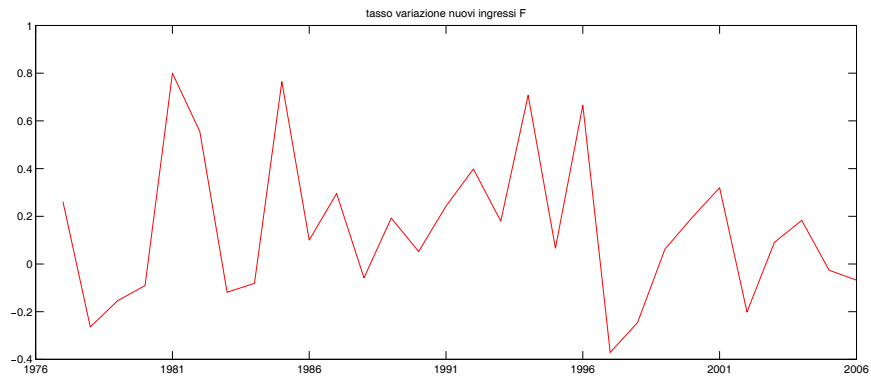


Figura 3.2: Tasso di variazione dei nuovi ingressi femmine 1977-2006

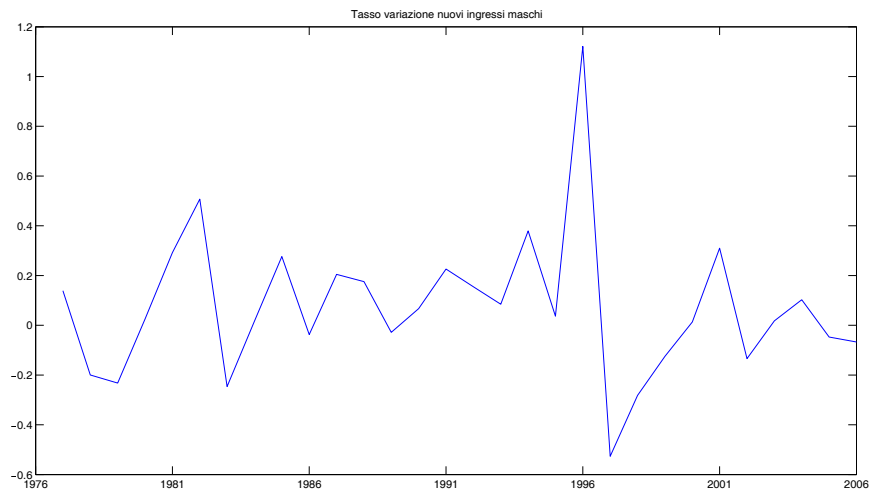


Figura 3.3: Tasso di variazione dei nuovi ingressi maschi 1977-2006

Tabella 3.1: Tasso di variazione nuovi ingressi femmine 1977-2006

anno	$\eta^{(F)}$	anno	$\eta^{(F)}$
1977	0,261904762	1992	0,398406375
1978	-0,264150943	1993	0,179487179
1979	-0,153846154	1994	0,707729469
1980	-0,090909091	1995	0,066478076
1981	0,8	1996	0,665782493
1982	0,555555556	1997	-0,371019108
1983	-0,119047619	1998	-0,24556962
1984	-0,081081081	1999	0,062080537
1985	0,764705882	2000	0,195892575
1986	0,1	2001	0,319682959
1987	0,295454545	2002	-0,201201201
1988	-0,058479532	2003	0,090225564
1989	0,192546584	2004	0,182758621
1990	0,052083333	2005	-0,026239067
1991	0,242574257	2006	-0,067864271

Tabella 3.2: Tasso di variazione nuovi ingressi maschi 1977-2006

anno	$\eta^{(M)}$	anno	$\eta^{(M)}$
1977	0,139072848	1992	0,154706431
1978	-0,199612403	1993	0,084745763
1979	-0,232445521	1994	0,379464286
1980	0,025236593	1995	0,036677454
1981	0,292307692	1996	1,121227888
1982	0,507142857	1997	-0,526612705
1983	-0,246445498	1998	-0,281865285
1984	0,016771488	1999	-0,124819625
1985	0,27628866	2000	0,013190437
1986	-0,037156704	2001	0,310008137
1987	0,204697987	2002	-0,134161491
1988	0,175487465	2003	0,017934003
1989	-0,028436019	2004	0,102889359
1990	0,067073171	2005	-0,047284345
1991	0,226285714	2006	-0,067069081

3.3.2 Tasso di interesse

Il tasso di interesse può essere rappresentato in modi differenti a seconda dell'ipotesi sulla asset allocation del portafoglio di investimento del fondo ed il conseguente grado di rischio associato. Come già evidenziato, la tipologia di fondi analizzati appartiene al primo pilastro del sistema pensionistico, che privilegiando la funzione previdenziale su quella speculativa, è caratterizzato da portafogli prudentziali. I tassi di rendimento associati presentano delle limitate oscillazioni intorno al trend storico, per cui abbiamo scelto di rappresentarli attraverso l'equazione (2.16) la cui componente stocastica è descritta da un processo AR(1):

$$X_t = \varphi_r X_{t-1} + \sigma_a a_t \quad (3.3)$$

che esprime la dipendenza della variabile da se stessa in una relazione di regressione, essendo X_t dipendente da X_{t-1} , X_{t-1} da X_{t-2} e così via. Le variabili a_t sono variabili aleatorie assunte tra loro indipendenti e normalmente distribuite con media 0 e varianza σ_a^2 . Questo tipo di *regressione condizionata* consente di procedere alla stima dei parametri applicando il metodo dei minimi quadrati condizionati.

Con la (2.17) il modello presenta X_t come somma di una quantità dipendente da X_{t-1} attraverso φ e di una indipendente da essa. Si comprende dunque il significato di φ : a piccoli (grandi) valori di φ corrisponderà una debole (forte) dipendenza. Il caso estremo di $\varphi = 0$ riduce il sistema ad un $AR(0)$ (white noise), cioè ad una successione di stati indipendenti e non correlati ($X_t = \sigma_a a_t$) dove il valore di una osservazione non dà indicazioni circa il valore della successiva. A tendere di φ ad 1 il sistema si muoverà sempre più in funzione delle determinazioni della componente a_t tendendo verso un processo *random walk* ($X_t = X_{t-1} + \sigma_a a_t$): in questo caso per ammortizzare grandi shocks occorrerà

molto tempo. Nei casi di $\varphi > 1$ o $\varphi < -1$ la varianza finita delle a_t non riesce a contenere il sistema che diventa esplosivo (Sibillo-Trudda (2000)).

La condizione affinché il sistema presenti varianza finita è $-1 < \varphi < 1$. Per tali valori la funzione di Green, che esprime la memoria del sistema in termini delle a_t , tende asintoticamente a zero; dopo un intervallo opportuno di tempo, il sistema tornerà nella sua posizione di equilibrio ed è per tale motivo detto *asintoticamente stabile*.

Per la stima dei parametri relativi al tasso di interesse è stato utilizzato un dataset di fondi obbligazionari con dati annuali (periodo 1988-2006). Applicando il metodo dei minimi quadrati condizionati si ottengono i valori dei parametri caratterizzanti il processo:

$$\hat{\varphi} = \frac{\sum_{t=2}^N (X_t - \bar{X}) (X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=2}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad (3.4)$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\sum_{t=2}^N [(X_t - \bar{X}) - \hat{\varphi} (X_{t-1} - \bar{X})]^2}{N - 1} = \frac{RSS}{N - 1} \quad (3.5)$$

dove N è il numero di osservazioni ed rappresenta la media delle X_t . Le determinazioni di $\hat{\varphi}$ e di $\hat{\sigma}_a^2$ caratterizzano completamente il modello.

I risultati hanno condotto ad ottenere i seguenti valori: $\hat{\varphi} = -0,612$ e $\hat{\sigma}_a = 0,03667$.

3.3.3 Mortalità

Per la mortalità sono state utilizzate le tavole IPS55 maschili e femminili. Le IPS55 sono delle tavole di mortalità proiettate costruite dall'*Associazione Nazionale tra le Imprese Assicuratrici (ANIA)* nel 2005 e sostituiscono le tavole

RG48 (pubblicate nel 1998, basate su un rapporto della Ragioneria Generale dello Stato del 1996).

Le IPS55 si basano sul rapporto dell'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT) del 2002. Le proiezioni effettuate dall'Istat sono state elaborate utilizzando il metodo di Lee-Carter. Le tavole dell'ANIA sono state elaborate sulla base di due elementi: la proiezione della mortalità nei prossimi 50 anni e la cosiddetta selezione della popolazione. La popolazione di coloro che oggi e in futuro percepiranno una pensione complementare non è uguale alla popolazione generale, ma è selezionata per l'assenza di soggetti che percepiscono altre pensioni per situazioni di disagio fisico o sociale. Senza considerare tali soggetti il tasso di sopravvivenza aumenta. L'ANIA ha considerato anche un secondo aspetto: dalle analisi statistiche risulta che chi gode di un reddito più elevato abbia anche una maggiore durata di vita.

Questi considerazioni ci hanno indotto ad utilizzare le tavole IPS55. Pur appartenendo l'ente previdenziale oggetto di analisi al primo pilastro, i suoi iscritti hanno delle caratteristiche, sia dal punto di vista reddituale (redditi elevati) che in termini di speranza di vita (non svolgono lavori usuranti) più simili a quelle dei soggetti che ricorrono alle assicurazioni individuali.

3.4 Misure di rischio utilizzate

Descriviamo in questo paragrafo alcune misure di rischiosità cosiddette *quantile based* utilizzate nelle applicazioni : il *Value at Risk (CVaR)* ed il *conditional Value at Risk (cVaR)*.

Fissata una probabilità α (ad esempio $\alpha = 0,95$), il (*VaR*) a livello α è definito

come l'importo VaR_α per cui risulta

$$Pr \{F_t \geq VaR_\alpha\} = 1 - \alpha$$

Si tratta quindi dell' α -percentile della distribuzione di F_t . Si noti che la definizione del VaR richiede la scelta della probabilità $1 - \alpha$.

L'interpretazione della quantità VaR_α è immediata. Si denotino qui come estremi quegli eventi che comportano i più elevati valori di perdita, cui corrisponde complessivamente una probabilità $1 - \alpha$. La quantità VaR_α rappresenta allora la massima perdita che si rischia di subire se non si verifica un evento estremo. In altri termini l'allocatione, all'inizio del periodo di riferimento, di un capitale pari a VaR_α garantisce la totale copertura di una perdita non dovuta ad un evento estremo).

Il VaR non fornisce alcuna informazione circa la perdita che si ci può attendere qualora si verifichi un evento estremo. Può accadere infatti che due diverse distribuzioni di probabilità abbiano, per un fissato livello di probabilità α , lo stesso VaR ma diverse aspettative di perdita causata da un evento estremo, cioè di perdita eccedente il VaR.

Un'informazione sintetica sul livello di perdita causata da eventi estremi è fornita dal *Conditional Value at Risk*, noto anche come *Expected Shortfall*, *Tail VaR*, *Mean Excess* o *Mean Shortfall*. Esso può essere calcolato come segue:

$$CVaR = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_p dp \quad (3.6)$$

dove q_p è il p -quantile della distribuzione del fondo.

Il CVaR è definito come il valore atteso dei peggiori $1 - \alpha$ casi al di sotto dell' α -quantile:

$$CVaR = E[F_t | F_t \leq Q_\alpha(t)] \quad (3.7)$$

Il CVaR, a differenza del VaR prende in considerazione anche gli eventi estremi (più sfavorevoli), consentendo in tal modo di superare un limite del VaR.

3.5 Applicazione numerica e risultati

La struttura probabilistica del fondo è stata ottenuta attraverso una simulazione numerica di tipo Monte-Carlo, con 10.000 simulazioni, per un periodo di 40 anni.

I nuovi ingressi sono stati stimati separatamente per maschi e femmine attraverso un ARMA (1.1). Sono state effettuate 10.000 simulazioni, in cui i valori negativi minori di zero, sono stati posti uguali a zero. I risultati sono riassunti nella figura (3.4) e tabella (3.3).

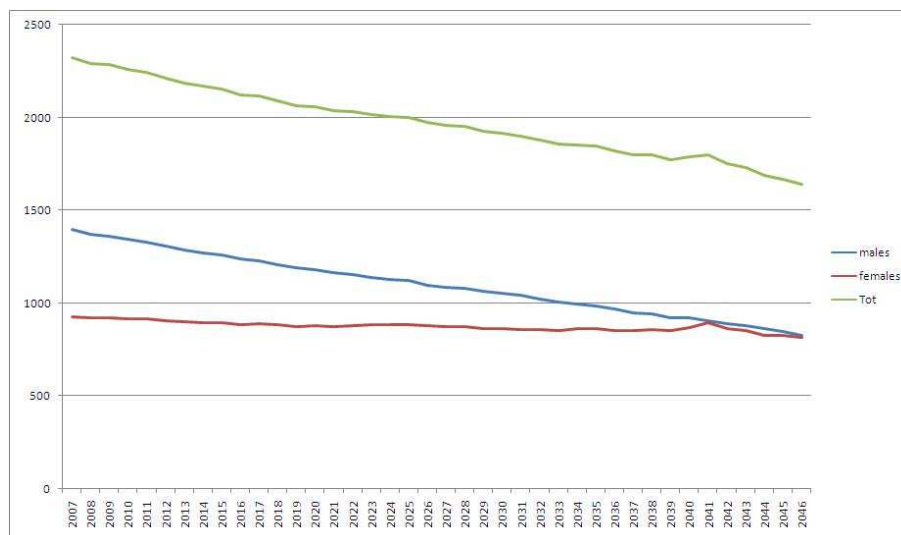


Figura 3.4: Nuovi ingressi nel fondo anni 2007 – 2046

Osservando la figura 3.4 notiamo come il numero dei nuovi ingressi maschi inizia a decrescere, mentre quello delle femmine aumenta leggermente. Alla

Tabella 3.3: Nuovi ingressi nel fondo (valori attesi) anni 2007-2046

year	M	F	Tot	year	M	F	Tot
2007	1397	927	2324	2027	1085	872	1957
2008	1371	921	2292	2028	1078	875	1953
2009	1361	924	2285	2029	1064	864	1928
2010	1343	918	2261	2030	1052	863	1915
2011	1327	916	2243	2031	1043	858	1901
2012	1305	908	2213	2032	1022	858	1880
2013	1285	903	2188	2033	1007	854	1861
2014	1272	897	2169	2034	992	864	1856
2015	1260	895	2155	2035	982	864	1846
2016	1236	887	2123	2036	969	853	1822
2017	1230	889	2119	2037	946	855	1801
2018	1207	883	2090	2038	940	860	1800
2019	1188	876	2064	2039	920	856	1776
2020	1180	878	2058	2040	920	871	1791
2021	1163	877	2040	2041	905	895	1800
2022	1151	881	2032	2042	891	864	1755
2023	1135	885	2020	2043	877	855	1732
2024	1126	883	2009	2044	860	830	1690
2025	1119	885	2004	2045	845	826	1671
2026	1096	878	1974	2046	825	817	1642

fine del periodo di osservazione, il numero dei nuovi ingressi tende ad equilibrarsi tra i due generi. L'analisi mostra come il numero complessivo dei nuovi ingressi decresce nel corso del tempo.

Sono state effettuate 10.000 simulazioni con entrambe le componenti stocastiche (nuovi ingressi e tassi di interesse) con le assunzioni del paragrafo 3.2. La figura 3.5 mostra i percentili della distribuzione ed il valore atteso (tutti i valori sono espressi in milioni di euro).

Dall'analisi del grafico emerge che c'è la probabilità, per i percentili più bassi, che il fondo raggiunga un picco, iniziando poi a discendere fino a raggiungere lo zero. Se i nuovi ingressi nel fondo non apportano sufficienti contributi, il fondo tenderà a decrescere raggiungendo lo stato di insolvenza. Questa è una conseguenza della struttura iniziale della popolazione. Quando la gobba dei 35/45-enni della figura 3.1 raggiungerà la pensione tra il 2026 ed il 2036, allora il fondo inizierà a decrescere a causa dell'aumentato esborso pensionistico.

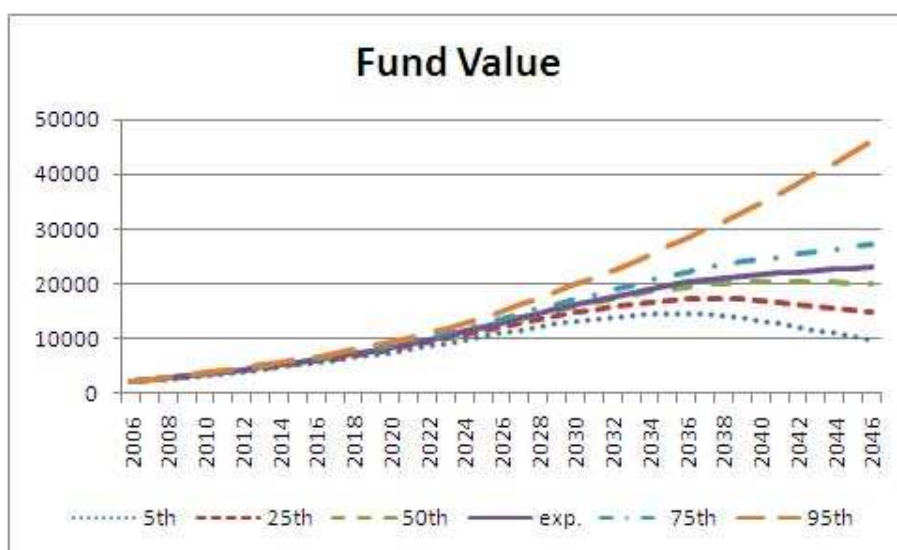


Figura 3.5: Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici (percentili della distribuzione di frequenza e valore atteso)

Se non c'è un flusso sufficiente di nuovi ingressi, e di conseguenza un flusso sufficiente di contributi, il fondo tenderà a decrescere in quanto i contributi ed i redditi da capitale non sono sufficienti per coprire le pensioni ed i costi amministrativi.

Mostriamo a mero scopo esemplificativo, anche il caso in cui il contributo integrativo non sia considerato, oppure sia fisso al 2% per tutto il periodo di analisi (rispettivamente figure 3.6 e 3.7).

Confrontando le figure 3.5, 3.6 e 3.7 è evidente come il contributo integrativo influenzi il valore del fondo, essendo molto più evidente, nel caso in cui non sia pagato il contributo integrativo, la tendenza dello stesso ad azzerarsi.

Allo scopo di analizzare singolarmente l'influenza delle 2 variabili, abbiamo effettuato due ulteriori simulazioni, considerando soltanto una variabile stocastica e fissando l'altra sul valore atteso. I risultati sono illustrati nelle figure 3.8 e 3.9.

Nel primo caso (nuovi ingressi fissi e tassi di interesse stocastici) il fondo raggiunge un picco dopo 30 anni e successivamente inizia a decrescere per tutti

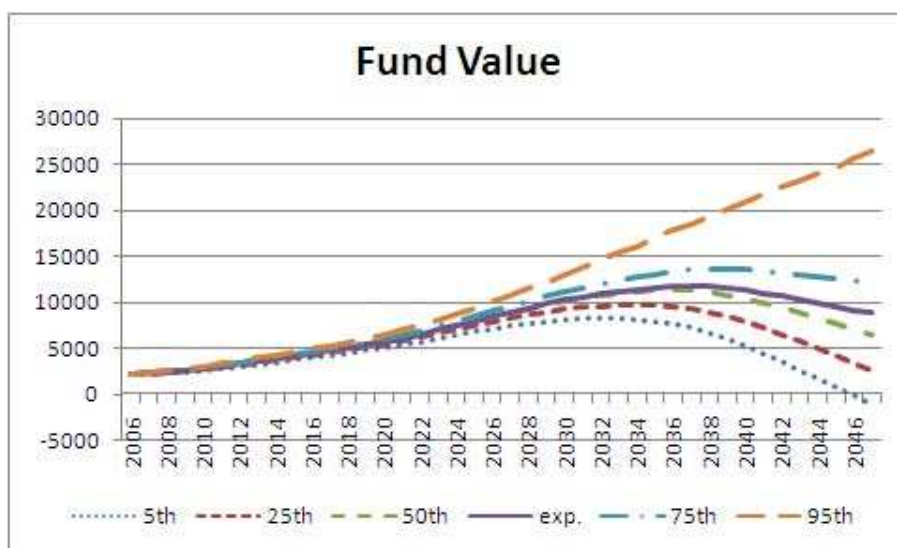


Figura 3.6: Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici (percentili della distribuzione di frequenza e valore atteso-Contributo integrativo 0%)

i percentili. Nel secondo (tassi di interesse fissi e nuovi ingressi stocastici) il fondo continua a crescere ed inizia a decrescere intorno al 2035, ma solo nei percentili più bassi. La comparazione mostra come nella nostra applicazione la variabile nuovi ingressi abbia una maggiore influenza sul valore del fondo rispetto al tasso globale di rendimento.

Per confrontare l'elevata influenza della variabile nuovi ingressi sulla probabilità di default, abbiamo calcolato il VaR al 95% del valore del fondo pensione per quattro casi: nel primo caso, abbiamo considerato sia i tassi di interesse che i nuovi ingressi stocastici; negli altri due abbiamo considerato soltanto una variabile stocastica e l'altra fissa sul valore atteso; infine abbiamo considerato il caso di popolazione chiusa ai nuovi ingressi: i risultati sono mostrati nella figura 3.10. Come si può notare, l'influenza dei nuovi ingressi è maggiore rispetto a quella della variabile finanziaria anche in questo caso. In assenza di un adeguato numero di nuovi ingressi, il fondo tende all'insolvenza.

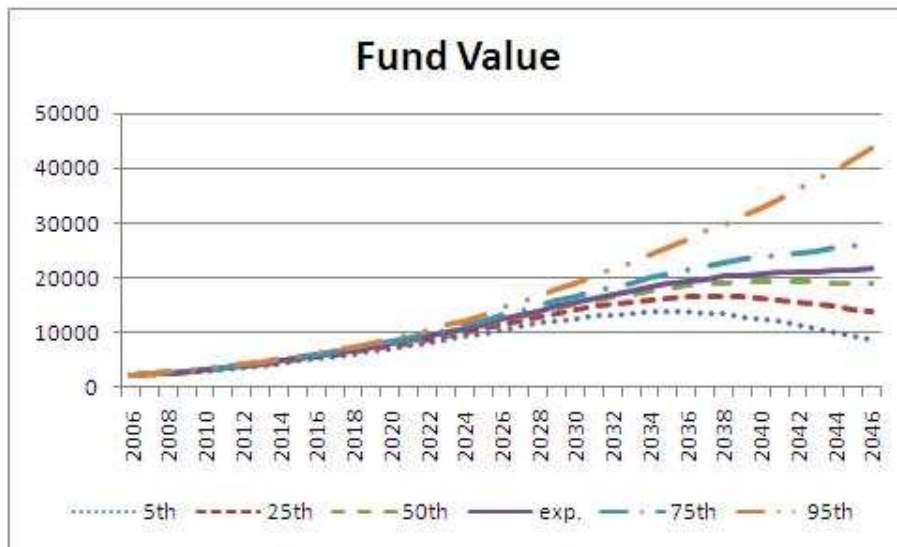


Figura 3.7: Evoluzione del fondo con tassi di interesse e nuovi ingressi stocastici (percentili della distribuzione di frequenza e valore atteso-Contributo integrativo 2% per tutto il periodo)

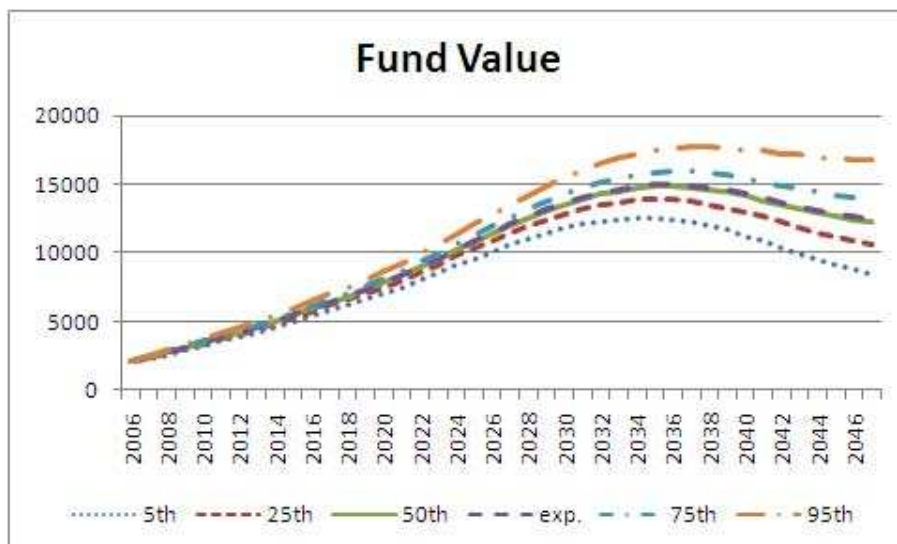


Figura 3.8: Evoluzione del fondo con nuovi ingressi deterministici e tassi di interesse stocastici (percentili della distribuzione di frequenza e valore atteso)

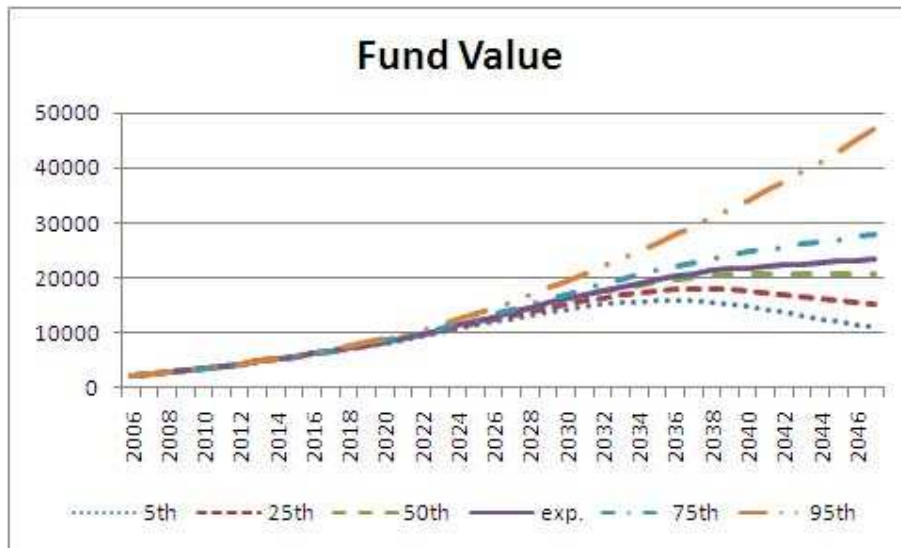


Figura 3.9: Evoluzione del fondo con tassi di interesse deterministici e nuovi ingressi stocastici (percentili della distribuzione di frequenza e valore atteso)

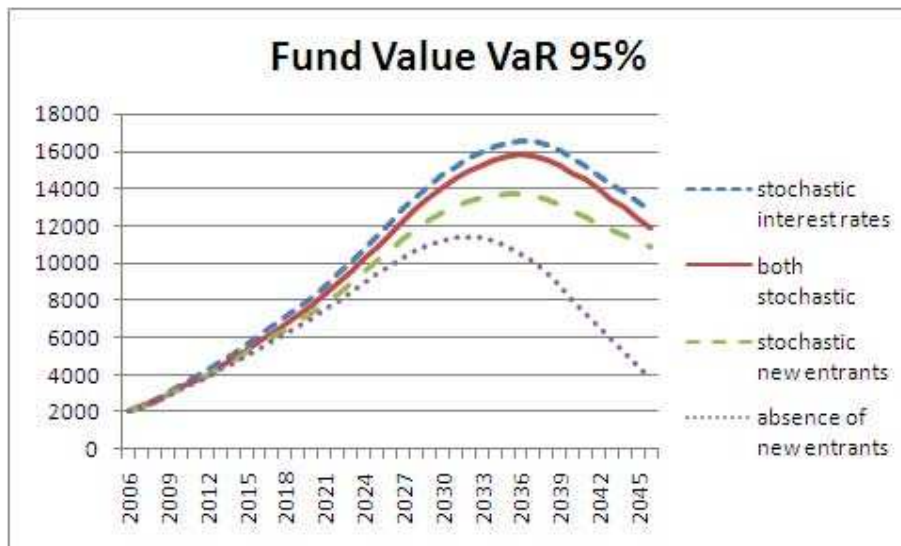


Figura 3.10: VaR del fondo al 95%

3.6 Conclusioni

Alcune applicazioni numeriche sono state sviluppate utilizzando i dati della Cassa dei Dottori Commercialisti. La struttura demografica della cassa è caratterizzata da una popolazione giovane (la classe di età più numerosa è quella dei 35-45enni) ed una limitata presenza di pensionati. Questo significa che il fondo analizzato si trova in una fase di forte crescita senza problemi di equilibrio finanziario, grazie alle entrate dei contributi che sono molto più alti rispetto alle uscite per le pensioni. Sviluppando una proiezione su un orizzonte ampio (40 anni) possiamo osservare come, in caso di assenza di un sufficiente numero di nuovi ingressi e conseguentemente di un flusso sufficiente di contributi, il fondo tenderà a decrescere in quanto i contributi ed i redditi da capitale non sono sufficienti a coprire le pensioni ed i costi amministrativi. È dimostrato come, nel caso analizzato, l'incidenza della variabile nuovi ingressi sia più forte rispetto a quella della variabile finanziaria tasso globale di rendimento, nonostante gli alti investimenti e la fase di sviluppo del fondo.

Si evidenzia l'importanza di studiare il processo dei nuovi ingressi per monitorare la probabilità che il fondo tenda ad azzerarsi e quindi all'insolvenza.

Nel capitolo seguente proponiamo un sistema di monitoraggio attraverso l'introduzione di un indice di rischio basato sul rapporto tra contributi e benefici.

Capitolo 4

Un modello di monitoraggio della solvibilità del fondo

4.1 Introduzione

In questo capitolo viene presentato un modello modello per la gestione del rischio riferito ad uno schema pensionistico chiuso finanziato a ripartizione (PAYG).

La metodologia proposta può essere utilizzata sia per il monitoraggio della solvibilità del fondo, che a scopi previsivi, per capire in anticipo quando per il fondo si possa configurare una fase di instabilità finanziaria.

Nel capitolo 2 (paragrafo 2.1) abbiamo descritto il funzionamento della particolare tipologia di fondi analizzati che si caratterizza nella fase iniziale per un esubero di capitali, mentre nella fase finale, di decumulo, i contributi riscossi sono inferiori alle pensioni da pagare. D'altro canto, trattandosi di fondi PAYG è necessario che ci sia un equilibrio tra le entrate e le uscite ogni anno. Pertanto, dopo aver esaminato la letteratura sui PAYG pubblici e sui fondi pensione privati a capitalizzazione, proponiamo un indice di rischiosità che si basa sul rapporto tra contributi ricevuti dal fondo e pensioni erogate.

4.2 Meccanismi automatici di controllo per i sistemi PAYG pubblici

La letteratura sui sistemi pensionistici pubblici PAYG ha di recente tentato di applicare una metodologia di analisi della solvibilità attuariale utilizzata in campo assicurativo ai sistemi pubblici PAYG attraverso l'introduzione di un meccanismo di bilanciamento automatico (automatic balance mechanism) ABM.

I sistemi pensionistici pubblici PAYG stanno attraversando una fase di instabilità nella maggior parte dei Paesi, dovuta a diversi fattori: invecchiamento

della popolazione, diminuzione della mortalità e declino nella crescita della produttività, ma queste riforme sono decise e stabilite attraverso un processo politico che non è socialmente ottimale.

In alcuni Paesi (Svezia, Canada, Germania, Finlandia, Giappone) è stato introdotto un meccanismo di bilanciamento automatico (automatic balance mechanism) ABM. Esso è costituito da un insieme di misure predeterminate stabilite per legge che deve essere attivato immediatamente, come richiesto dall'indicatore di solvibilità. Indicando con A_t le attività, C_t le entrate contributive e PL la passività pensionistica, l'indicatore di solvibilità S è dato dalla seguente formula:

$$S = \frac{A_t + C_t}{PL}$$

L'indicatore di solvibilità serve a ristabilire la solvibilità o sostenibilità finanziaria dei sistemi PAYG, attraverso successive applicazioni.

Questo meccanismo è utile per ristabilire l'equilibrio finanziario in un sistema PAYG senza dover ricorrere all'intervento del legislatore; inoltre immunizza il sistema da rischi politici e conferisce un maggiore credibilità del rispetto del pagamento delle pensioni future (Boado et al.).

Il metodo attraverso il quale garantire la stabilità finanziaria di un sistema economico è quello di assicurarsi che le passività non eccedano le attività. Solitamente i sistemi fully-funded, ovvero a capitalizzazione totale, sono designati in questa maniera. Il problema dell'applicazione del principio sopra esposto ai sistemi PAYG è la mancanza di metodi di valutazione delle attività principali consistenti in un flusso perpetuo di contributi. La valutazione delle passività pensionistiche comporta le stesse difficoltà concernenti il giusto fattore di sconto nel caso delle assicurazioni a capitalizzazione. Dal momento che non esiste alcun metodo di valutazione delle attività per compararle con una passività pensionistica che è anche di un valore incerto, generalmente questo tipo di

passività nei sistemi PAYG ha suscitato un limitato interesse.

L'ABM è essenzialmente un metodo di valutazione dei contributi in un sistema PAYG che rende possibile la comparazione tra le attività e le passività di tali sistemi.

4.3 Un indicatore di rischio per la solvibilità del fondo

Nella letteratura attuariale e finanziaria sono stati proposti diversi indicatori per esprimere la rischiosità dei fondi pensione. Tra questi (Van Galen (2004)) il *funding ratio*, definito come il rapporto tra le attività ed le passività del fondo: $FR(t) = A(t)/L(t)$. Nel caso in cui questo rapporto è inferiore a uno, il fondo è detto *unfunded* in quanto le attività non sono sufficienti alla copertura delle passività.

Orlando e Politano (2008) analizzano i requisiti di solvibilità per un fondo pensione a contributo definito in un contesto stocastico, basandosi sullo studio del *funding ratio* attraverso delle misure *quantile based*. Applicando i principi contabili internazionali (IFRS4) previsti per le assicurazioni, anche ai fondi pensione, propongono di considerare il *funding ratio*, inteso come il rapporto tra il valore di mercato delle attività ed il valore di mercato delle passività. In particolare, utilizzano il CVaR come misura di rischio per la variabilità del fondo. Nonostante il *funding ratio* si trovi al di sopra di 1, è importante considerare il CVaR di questo rapporto, per verificare il grado di rischio, in termini di solvibilità, al quale il fondo è esposto.

In uno schema PAYG, in cui le pensioni correnti sono finanziate attraverso i contributi correnti, è molto importante monitorare il rapporto tra contributi

ricevuti e pensioni erogate ed il rapporto demografico, cioè il rapporto tra attivi e pensionati (Iyer 2003).

Uno scopo del lavoro è quello di utilizzare un meccanismo di controllo simile all'ABM per monitorare la solvenza del fondo rispetto alla variabile nuovi ingressi. Per questo motivo, utilizziamo il rapporto tra contributi e pensioni per monitorare la solvibilità del fondo:

$$CPr(t) = \frac{\sum_{x=\alpha+1}^{\pi} [n_{(x-1,t-1)}p_{x-1} + ne_{(x,t-1)}(1 + \eta_{(x,t)})]\gamma R_{(x-1,t-1)}}{\sum_{x=\pi+1}^{\omega-1} \sum_{c=m}^{\pi-\alpha} n_{(x-1,t-1)}p_{x-1} b_{x,t,c}} \quad (4.1)$$

dove $CPr(t)$ è il rapporto tra contributi e pensioni del fondo ogni anno. L'indice può essere visto come un indicatore della liquidità del fondo. Se il rapporto è al di sotto del valore 1, il fondo si trova in una fase di instabilità finanziaria e deve essere monitorato adeguatamente.

Se non sono state accantonate le riserve necessarie durante la fase iniziale, quella di accumulazione del fondo, in caso in cui non siano presi dei provvedimenti da parte del gestore del fondo, quest'ultimo non sarà in grado di pagare le le pensioni, raggiungendo il default. L'equazione generale del fondo (2.1) può essere espressa come segue:

$$\frac{F_{t+1} - F_t(1 + r_{t+1})}{B_{t+1}} = \frac{C_{t+1}}{B_{t+1}} - 1 \quad (4.2)$$

Dalla (4.2) si evince che se il rapporto contributi pensioni è sopra 1, allora il fondo sta incrementando il suo valore (in aggiunta ai redditi da capitale), mentre se è inferiore ad 1, il fondo decresce in quanto la spesa pensionistica è maggiore dell'entrata contributiva. L'indice può essere utilizzato sia ai fini di controllo, per verificare la liquidità del fondo, che a scopi previsivi, per proiettare i ca-

sh flows futuri del fondo e verificare se, in base alle assunzioni considerate, il fondo si trovi in una situazione di instabilità, ed è richiesto il suo controllo periodico.

4.4 Un'applicazione

In questo paragrafo si presenta un'applicazione dell'indice presentato ai dati della CNPADC. Le assunzioni relative alla mortalità, allo scenario per i tassi di interesse e sull'evoluzione della variabile demografica nuovi ingressi sono le stesse del capitolo precedente.

Attraverso la stessa procedura descritta nel capitolo precedente è stata calcolata la struttura probabilistica dell'indice CPr che indica il rapporto tra contributi e benefici. Nella figura 4.1 sono rappresentati il valore atteso ed il Conditional VaR al 95% dell'indice CPr .

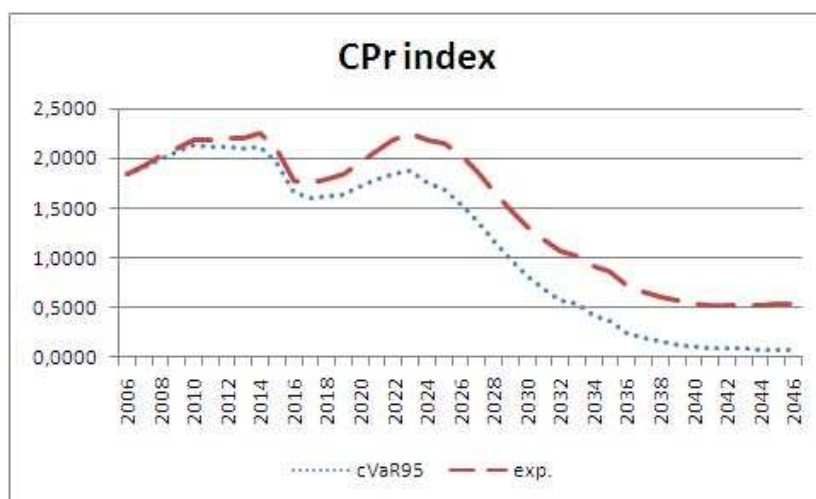


Figura 4.1: indice CPr , VaR 95% e valore atteso

Osservando l'indice Cpr in figura 4.1 si nota la sua forma particolare, dovuta

alla struttura demografica iniziale della popolazione. Il grafico mette in evidenza che il valore atteso dell'indice CPr è sempre al di sopra del valore 1 soltanto fino al 2036, mentre successivamente decresce fino a stabilizzarsi attorno al valore 0,7. Dall'analisi del cVaR si nota che quest'indice è al di sotto dello zero già nel 2030 e assume valori prossimi allo zero (circa 0,1). Ciò conferma che il fondo è fortemente esposto al rischio di default. Infatti se l'indice CPr è stabile sotto 1, questo significa che il fondo sta progressivamente riducendo le risorse accumulate durante la fase iniziale, cioè quella di accumulazione.

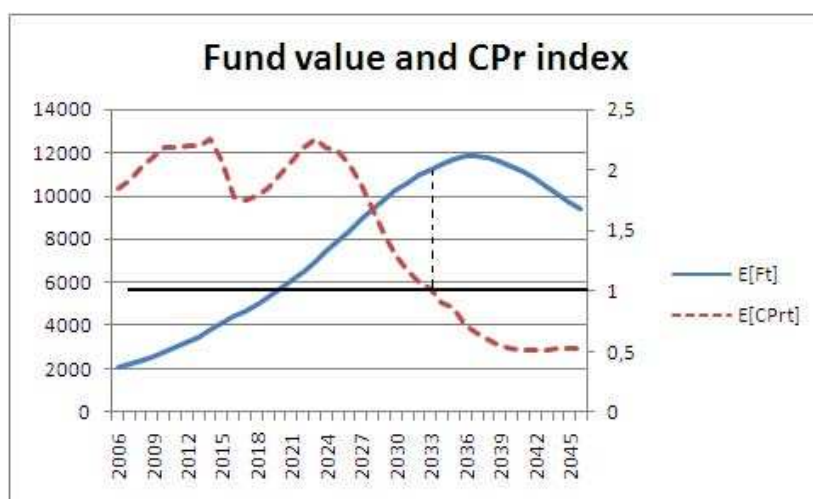


Figura 4.2: cVar al 95% del valore del fondo e cVar al 95% dell'indice CPr

Nella figura 4.2 e sono rappresentati il cVaR al 95% del valore del fondo e dell'indice CPr. È evidente che quando l'indice raggiunge il valore 1, il fondo inizia a decrescere; questo non accade immediatamente, in quanto le entrate non sono costituite soltanto dai contributi, ma anche dagli incrementi dovuti alla redditività del patrimonio, per cui il fondo inizia a decrescere dopo 2 o 3 anni. L'analisi prospettica effettuata mostra come il il fondo nel medio/lungo periodo sarà esposto ad una situazione di instabilità finanziaria per cui se non vengono stabilite delle modifiche, il fondo sarà esposto al rischio di default.

4.5 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo proposto un modello per la gestione del rischio riferito ad uno schema pensionistico chiuso PAYG. È stato presentato un indice di rischiosità per la stabilità del fondo. Esso può essere utilizzato sia per monitorare il fondo che a scopi previsivi.

Abbiamo realizzato un'applicazione con i dati della CNPADC. Dalle proiezioni sviluppate è emersa l'esposizione al rischio da parte del fondo, dovuta nel medio-lungo periodo, all'insufficienza dei contributi a coprire le pensioni.

Conclusioni

Nel presente lavoro abbiamo analizzato le principali variabili aleatorie caratterizzanti le dinamiche evolutive dei fondi previdenziali chiusi finanziati col sistema PAYG. In particolare è stato esaminato il sistema di funzionamento delle Casse di previdenza dei liberi professionisti in Italia. Questi Enti sono considerati Fondi chiusi in quanto soltanto gli appartenenti ad un determinato ordine professionale possono aderirvi.

Si è evidenziato come, per studiare l'evoluzione del fondo (e il correlato rischio di default), sia indispensabile analizzare le dinamiche di sviluppo relative ai futuri lavoratori autonomi della singola professione considerata.

Pertanto l'attenzione è stata focalizzata sulla variabile demografica nuovi ingressi e sulla sua influenza sui cash flows prospettici del fondo. Dall'analisi è emerso che essa esercita un ruolo fondamentale per gli equilibri di stabilità finanziaria del fondo.

Per analizzare le dinamiche aleatorie legate al processo evolutivo del Fondo chiuso finanziato PAYG è stato proposto un modello in cui il sistema di sviluppo dei nuovi ingressi è determinato dalla variabile aleatoria tasso di variazione dei nuovi ingressi. Si è verificato come tale dinamica possa essere ben spiegata attraverso l'utilizzo di un processo ARMA(1,1) nel caso di separazione della popolazione per sesso.

Per valutare l'impatto delle singole variabili aleatorie abbiamo effettuato delle

simulazioni numeriche e l'analisi VaR. La verifica dei risultati è stata convalidata dall'analisi marginale sviluppata sulla funzione Fondo, $F(t)$, come descritta dal modello.

Le applicazioni numeriche sono state sviluppate utilizzando i dati della Cassa di Previdenza e Assistenza dei Dottori Commercialisti.

La struttura demografica della cassa è caratterizzata da una popolazione giovane e da una limitata presenza di pensionati. Il fondo analizzato si trova in una fase di forte crescita senza problemi di equilibrio finanziario, grazie alle entrate dei contributi che sono molto più alti rispetto alle uscite per le pensioni. Sviluppando una proiezione su un orizzonte ampio (40 anni) abbiamo riscontrato che, in caso di assenza di un sufficiente numero di nuovi ingressi e conseguentemente di un flusso sufficiente di contributi il fondo tenderà a decrescere in quanto i contributi ed i redditi da capitale non sono sufficienti a coprire le pensioni ed i costi amministrativi.

Dall'analisi è emerso che, date le assunzioni ipotizzate, l'incidenza della variabile nuovi ingressi è più forte rispetto a quella del tasso globale di rendimento, nonostante gli alti investimenti e la fase di sviluppo del fondo.

Allo scopo di monitorare la solvibilità del fondo è stato proposto un indice di rischio basato sul rapporto tra contributi e benefici, che può essere utilizzato sia a fini di controllo della stabilità finanziaria del fondo, che a scopi previsivi.

Le applicazioni numeriche del sistema di controllo così sviluppato hanno confermato come il fondo in questione sia esposto, nel medio-lungo periodo, al rischio di default dettato dalle possibili evoluzioni negative del differenziale tra entrate contributive future (legate ai nuovi ingressi) e pensioni erogate. L'utilizzo dell'indicatore di stabilità proposto permette di individuare immediatamente le possibili inversioni di tendenza demografica anticipando così il manifestarsi di situazioni finanziarie sfavorevoli e consentendo pertanto al ge-

store di intervenire per tempo al fine del ripristino delle condizioni di equilibrio finanziario.

Bibliografia

- [1] Angrisani M. (2006), Bilancio tecnico della Cassa Nazionale di Previdenza e Assistenza a favore dei Dottori Commercialisti. Proiezioni: 2006-2045, Roma.
- [2] ANIA, 2005, IPS55 Basi demografiche per le assicurazioni di rendita. Documento di consultazione, Roma.
- [3] Auerbach A., Lee R. (2007), Notional Defined Contribution Pension Systems in a Stochastic Context: Design and Stability, Berkeley Program in Law and Economics, Working Paper Series, (University of California, Berkeley)
- [4] Bianchi S., Trudda A. (2008), Global Asset Return in Pension Funds: a Dynamical Risk Analysis, in Proceeding of International Conference *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, Venezia.
- [5] Biffis E., Denuit M. (2005), Lee Carter Goes Risk-Neutral. An Application to the Italian Annuity Market. *Actuarial Research Paper* 166, Cass Business School.
- [6] Blake D., Cairns A., Dowd K. (2001), Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase, *Insurance: Mathematics and Economics* 29, 187-215.

- [7] Blake D., Cairns, A.J.G., Dowd, K. (2003), Pensionmetrics II: Stochastic pension plan design during the distribution phase, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 29-47.
- [8] Boado M., Valdes S. and Vidal C. (2008) The Actuarial Balance Sheet for Pay-As-You- Go Finance: Solvency Indicators for Spain and Sweden, *Fiscal Studies*, vol. 29, no. 1, pp. 89-134.
- [9] Bowers, N.L., Hickman, J.C., Nesbitt, C.J. (1976), Introduction to the dynamics of pension funding, *Trans. Soc. Actuaries* 28, 177-203.
- [10] Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A. (1997), Nesbitt C. J., Actuarial Mathematics (second edition). *Society of Actuaries*.
- [11] Box G., Jenkins G. and Gregory Reinsel (1994), Time Series Analysis Forecasting and Control, 3rd ed., Practice Hall.
- [12] Cairn A. (2003), Pension-Fund Mathematics, Discussion Paper PI-0315, *The Pension Institute*.
- [13] Cairns, A.J.G., Parker, G., 1997. Stochastic pension fund modelling. *Insurance: Mathematics and Economics* 21, 43-79.
- [14] Chang S., Cheng H. (2002) Pension Valuation Under Uncertainties: Implementation of a Stochastic and Dynamic Monitoring System, *The Journal of Risk and Insurance*, 2002, Vol. 69, No. 2, 171-192.
- [15] Colombo L., Haberman S. (2005), Optimal contribution in a defined benefit pension scheme with stochastic new entrants, *Insurance: Mathematics and Economics* 37, 335-354.

- [16] Coppola M., Di Lorenzo E., Sibillo M. (2000), Risk sources in a life annuity portfolio: decomposition and measurements tools, *Journal of Actuarial Practice*, 8 (1,2): 43-61.
- [17] Davis E. Philip (1995), *Pension Funds*, Clarendon Press Oxford.
- [18] Di Lorenzo E., Sibillo M.(2002), Longevity Risk: Measurement and Application Perspectives; Proceedings of the 2nd Conference in Actuarial Science and Finance, Samos, Greece.
- [19] Dufresne, D. (1988) Moments of pension contributions and fund levels when rates of return are random. *J. Inst. Actuaries* 115, 535-544.
- [20] Ferrara C. (2002), Pay-as-you-go financing: the volatility of the financial equilibrium of the Pension Funds, IAA Pension Seminar, www.actuaries.org.
- [21] Gabay D., Grasselli M. (2008), Fair Demographic Risk Sharing in Defined Contribution Pension Funds, MAF Conference 2008.
- [22] Gismondi F., Micocci M. (2004), La gestione finanziaria dei fondi pensione, *Il Sole 24 Ore*.
- [23] Gronchi S., Nisticò S. (2008) Theoretical Foundations of Pay-As-You-Go Defined-Contribution Pension Schemes, *Metroeconomica* 1-29.
- [24] Haberman S. (1994), Autoregressive Rates of Return and the variability of Pension Contributions and Fund Levels for a Defined Benefit Pension Scheme, *Insurance: Mathematics and Economics* n. 14, pp. 219-240.
- [25] Haberman (1997), A Short Note on ARMA(1,1) Investment Rates of Return and Pension Funding, *Actuarial Research Paper* n. 97, Department of Actuarial Science and Statistics. City University. London.

- [26] Hamilton J.D. (1994), *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [27] Huang H.C., Cairns A.J.C., On the control of defined-benefit pension plans, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38 (2006) 113-131.
- [28] Iyer S. (2003), Application of Stochastic Methods in the evaluation of Social Security Pension Schemes, *Actuarial Research Paper* 151, Cass Business School.
- [29] Janssen J., Manca R. (2006), Notional Defined Contribution Pension Method and the Construction of Annuitization Coefficients, *Proceedings ICA 2006*, Paris
- [30] Mandl P., Mazurova L. (1995), Harmonic analysis of pension funding methods, *Insurance: Mathematics and Economics* 17, 203-214.
- [31] Marocco P., Pitacco E. (1998), Longevity risk and life annuity reinsurance, *Transactions of the 26th International Congress of Actuaries*, Birmingham, vol. 6: 453- 479.
- [32] Menoncin F. (2005), Cyclical risk exposure of pension funds: A theoretical framework, *Insurance: Mathematics and Economics* 36, 469-484.
- [33] Ministero del Lavoro e delle Politiche Sociali, (2001). Commissione per la valutazione degli effetti della legge n. 335/95 e successivi procedimenti. Verifica del sistema previdenziale ai sensi della legge 335/95 e successivi provvedimenti, nell'ottica della competitività, dello sviluppo e dell'equità. Roma
- [34] Olivieri A. (2001), Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective, *Insurance: Mathematics and Economics*, 29 (2): 231-245.

- [35] Olivieri A. (2001), Rischi demografici negli schemi previdenziali per collettività, *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università di Trieste*, n.6/2001.
- [36] Olivieri A., Pitacco E. (2003), Solvency requirements for pension annuities, *Journal of Pension Economics and Finance*, Cambridge University Press.
- [37] Olivieri A., Pitacco E. (2005), La valutazione nelle assicurazioni vita, Egea.
- [38] Orlando A., Politano M. (2008), The riskiness of defined contribution pension funds in a stochastic solvency perspective, MAF Conference 2008.
- [39] Orlando A., Trudda A. (2004), Some remarks on First and second order stochastic processes choice, *Journal of Investment Management and Financial Innovations*, n. 3, 118-131
- [40] Otranto E., Trudda A., (2007), Classifying the Italian pension funds via GARCH distance - in *Mathematical and Statistical Methods for Insurance and Finance*, Springer, 189-197.
- [41] Otranto E., Trudda A., (2008), Evaluating the risk of Pension Funds by Statistical Procedures - In: *Transition Economies: 21st Century Issues and Challenges*. (G.M. Lakatos Ed.), Ch. 7, 189-204, Nova Science Publisher, Hauppauge, NY.
- [42] Parker G. (1997), Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks, *North American Actuarial Journal* 1 (2), 55-84.

- [43] Pitacco E. (2000), *Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*, *Lint*, Trieste.
- [44] Pitacco E. (2004), Longevity risks in living benefits. In: Fornero E., Luciano E. (Eds.), *Developing an annuity market in Europe*, Edward Elgar, Cheltenham, pp. 132-167.
- [45] Pitacco E. (2004), Survival model in a dynamic context: a survey, *Insurance: Mathematic and Economics*, 35(2): 279-298.
- [46] Rubinstein V.R. (1981), *Simulation and Monte Carlo method*, volume 51. Wiley & Sons, Chichester.
- [47] Settergren, O. (2001) The Automatic Balance Mechanism of the Swedish Pension System - A Non-technical Introduction, *Wirtschaftspolitische Blätter* 4/2001. p. 399-349.
- [48] Sibillo M., Trudda A. (2000), Alcune osservazioni sulla stima dei parametri in processi per il tasso di interesse, *Atti del VII Convegno sulla Teoria del Rischio, Campobasso*.
- [49] Tomassetti et al. (1994), *Tecnica Attuariale per Collettività*, Edizioni Kappa.
- [50] Towerbridge C. (1952), Fundamentals of pension funding, *Transactions of Society of Actuaries* IV, 17-43.
- [51] Trudda A. (2008) *Casse di previdenza: analisi delle dinamiche attuariali*. Giappichelli, Torino, 2nd ed.
- [52] Van Gaalen R. (2004), Pension Funds: funding index, mismatch risk premium and volatility, *14th Afir Colloquium*, Boston.

- [53] Vasicek O.A. (1977), An equilibrium characterisation of the termstructure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.
- [54] Vidal C., Boado M. and Settergren O. (2008), Automatic Balance Mechanism in Pay-As-You-Go Pension System, Electronic copy available at: <http://ssrn.com/abstract=1132686>.
- [55] Winklevoss H.E. (1993), Pension Mathematics with Numerical Illustrations, 2nd ed., University of Pennsylvania Press.