

DOTTORATO DI RICERCA
in
SCIENZE COMPUTAZIONALI ED INFORMATICHE
Ciclo XXI

**Consorzio tra Università di Catania, Università di Napoli Federico II,
Seconda Università di Napoli, Università di Palermo, Università di Salerno**
SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITA' DI NAPOLI FEDERICO II

ROSSELLA ASCIONE

**PROFILI AFFETTIVI PER LA PERSONALIZZAZIONE DELL'APPRENDIMENTO
DELLA MATEMATICA IN AMBIENTI E-LEARNING**

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

Indice

Introduzione.....	4
Capitolo I Introduzione all'e-learning.....	9
1.1 Introduzione	9
1.2 L' e-learning oggi.....	13
1.2.1 Un po' di storia	14
1.2.2 Verso una definizione di e-learning	17
1.3 Le piattaforme di e-learning.....	20
1.3.1 Che cosa c'è dentro una piattaforma e-learning.....	20
1.4 E-learning e didattica della matematica	23
1.4.1 Apprendimento individuale e personalizzato.....	24
1.4.2 Autovalutazione	27
1.4.3 Apprendimento cooperativo.....	28
1.4.4 Comunicazione e discorso matematico.....	29
1.4.5 Rappresentazioni e semiosis	30
1.4.6 Risvolti affettivi: il rapporto con la matematica e il rapporto col docente	31
Capitolo II Personalizzazione in ambienti e-learning	34
2.1. Introduzione	34
2.2 Personalizzazione e apprendimento: un breve richiamo agli studi psico-pedagogici.....	35
2.3 Personalizzazione e i sistemi adattativi e intelligenti basati sul web.....	38
2.4 Un esempio di piattaforma intelligente e adattativa: IWT	41
2.4.1 Modellazione della conoscenza	42
2.4.2 Modellazione dello studente	46
2.5 La creazione intelligente del learning path	50
2.5.1 Un esempio elementare nell'ambito del calcolo.....	53
2.6 Aspetti critici dell'attuale approccio adattative and intelligent web based.....	54
2.7 Domande di ricerca e il piano di lavoro	59
Capitolo III La ricerca sui fattori affettivi in educazione matematica	62
3.1 Introduzione	62
3.2 Le prime ricerche	63
3.3 Emozioni, convinzioni e teorie del successo	69
3.4 L'atteggiamento nei confronti della matematica: verso una definizione multidimensionale ..	76
3.4.1 Cosa si intende realmente per atteggiamento positivo o negativo?	77
3.4.2 Uno progetto italiano sull'atteggiamento	78
3.4.3 Alcuni risultati del progetto sull'atteggiamento nei confronti della matematica	80
Capitolo IV Formalizzazione di un modello di profilo affettivo per l'apprendimento della matematica	84
4.1 Un modello di profilo affettivo: le scelte per la sua creazione	84
4.2 Uno strumento per l'assegnazione del profilo affettivo a ciascuno studente:il questionario...	91
4.3 Dal questionario al modello: l'algoritmo di modellazione	96
4.3.1 L'assegnazione del valore della disposizione emozionale.....	96
4.3.2 L'assegnazione del valore al senso di autoefficacia	97
4.3.3 L'assegnazione del valore alla visione della matematica	98
4.3.4 Le domande di controllo sulle relazioni tra i tre fattori	99
4.4 Come utilizzare il profilo per la creazione del learning path.....	100

Capitolo V La sperimentazione dello strumento di misurazione del profilo	103
5.1 Introduzione	103
5.2 Metodologia	103
5.3 Una prima descrizione sommaria delle risposte ai questionari	104
5.3.1 Le domande di controllo	108
5.4 Analisi delle risposte alle domande aperte: la creazione dei repository e i relativi cataloghi	110
 Capitolo VI La visione della matematica: un esempio di learning activities	 128
6.1 Introduzione	128
6.2 Alcune indicazioni di contesto: perché un'attività e-learning sulle dimostrazioni?	128
6.3 Descrizione dell'attività'	130
6.4 La metodologia	132
6.5 Analisi dei protocolli: prime considerazioni	133
6.6 Impatto sul piano dell'apprendimento: primi risultati	139
 Conclusioni.....	 145
 Riferimenti Bibliografici	 148
 Appendice.....	 159

Introduzione

La mia tesi di dottorato riguarda aspetti di formazione matematica in rete, e quindi aspetti di integrazione tra gli assunti derivanti dalla ricerca in ambito della educazione matematica e dell'e-learning. In particolare la tesi tratta la personalizzazione dei percorsi di apprendimento in ambienti e-learning per l'educazione matematica.

È ormai condiviso dai ricercatori in pedagogia che i processi di apprendimento sono strettamente legati alle differenze individuali: “non tutti imparano allo stesso modo”, ovvero non c'è un modello didattico “ottimale” in senso assoluto, ma ogni individuo è caratterizzato da un proprio stile cognitivo e necessita dunque di una soluzione formativa in grado di favorire i propri processi di apprendimento (Baldacci, 1999). La nuova generazione delle piattaforme di e-learning, i cosiddetti sistemi di didattica adattativi e intelligenti basati sul web, è stata progettata proprio in base a tale assunto. Essi, sfruttando le ricerche provenienti dall'ambito dell'intelligenza artificiale non fanno altro che, analizzare “automaticamente” in maniera più o meno dettagliata le “esigenze didattiche” dello studente e in base a queste creare percorsi di apprendimento personalizzati.

D'altronde la ricerca scientifica su come progettare e costruire un sistema artificiale capace di “adattarsi al mondo esterno” è una sfida in cui si sta cimentando un'ampia comunità scientifica internazionale costituita da ricercatori provenienti da discipline apparentemente distanti. Il settore di ricerca si presenta infatti sulla linea di confine tra un'istanza fondamentalmente teorica ed una prospettiva tecnologica: per realizzare un sistema capace di creare unità di apprendimento personalizzate è necessario sia definire una precisa teoria di apprendimento (campo di indagine di psicologi, pedagogisti, neurologi, esperti della disciplina che si intende insegnare ecc) che possedere il know-how tecnico-scientifico tipico degli ingegneri, degli informatici, dei fisici. Questa formidabile “ibridazione” tra saperi e metodi diversi, passando spesso per contenziosi provocati dai due modi differenti di guardare alle cose. D'altra parte, ci si trova tuttora immersi in un periodo di impetuoso sviluppo iniziale, dove i tecnici spesso esaltano a dismisura l'importanza e le potenzialità della piattaforma software (postulando il fatto che questa sarebbe stata condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per la messa a punto della formazione a distanza di nuova generazione) mentre i pedagogisti richiamano le loro teorie arroccandosi però spesso sul rifiuto pregiudiziale delle nuove tipologie formative e invocando l'impossibilità della rinuncia al contatto fisico/emotivo fra docente e discente. Nonostante ciò, è l'integrazione tra questi due modi di vedere le cose sta dando notevoli

risultati in ambedue i versanti (tecnologico e teoretico), ed è proprio in direzione di tale integrazione che la mia tesi di dottorato si è sviluppata.

Per il lavoro di ricerca, tra le piattaforme adattative e intelligenti disponibili, ho preso in esame la piattaforma IWT (Intelligent Web Teacher), realizzata presso il Polo d'Eccellenza "Learning & Knowledge" dell'Università di Salerno. IWT è in grado di offrire unità didattiche personalizzate in base ad una modellazione del dominio di conoscenza e dello studente (Albano *et al.*, 2007). La prima viene fatta attraverso l'uso di ontologie, intese come grafi che consentono di connettere tra loro i concetti del dominio in esame, con relazioni che sono prevalentemente di due tipi: prerequisito e sottoparte. La modellazione del discente viene fatta attraverso l'individuazione del cosiddetto "profilo utente" che contiene informazioni di vario tipo: anagrafico, didattico (tipo di scuola o università che si sta frequentando, preferenze ovvero parametri che riguardano lo stile cognitivo, come ad es. livello di interattività, tipo di media, ...), cognitivo (le conoscenze pregresse dello studente come lista di concetti e livello di conoscenza), tecnico (velocità di connessione). La piattaforma in esame, inoltre, nasce dalla considerazione che ogni contesto didattico necessita della propria soluzione di e-learning specifica. Particolare attenzione è stata data all'apprendimento della matematica, sviluppando applicativi e modelli specifici per facilitare l'apprendimento dei concetti scientifico-matematici (Albano *et al.*, 2004).

D'altra parte la ricerca in educazione matematica mostra come il processo di insegnamento-apprendimento sia caratterizzato da connotati complessi denunciando, in particolar modo la limitatezza dell'attuale modello di profilo studente sotteso alla piattaforma. In particolare ogni modello di apprendimento per l'educazione matematica dovrebbe tener conto che i comportamenti degli studenti sono influenzati da fattori che appartengono ad almeno tre distinti livelli (Di Martino & Zan, 2003): il livello cognitivo, che riguarda l'apprendimento di concetti e metodi specifici della disciplina, anche in relazione agli ostacoli individuati dalla ricerca e dalla pratica; il livello meta-cognitivo, che riguarda il controllo dei soggetti sui propri processi di apprendimento; il livello affettivo, che riguarda convinzioni, emozioni e atteggiamenti, che sono in molti casi cruciali nell'orientare le decisioni e i comportamenti del soggetto che apprende (Mc Leod, 1992).

L'attuale profilo utente, in particolare, prende in considerazione solo il piano cognitivo e gli aspetti motivazionali (attraverso le preferenze) del processo di apprendimento. Gli studi in educazione matematica hanno mostrato come questo sia riduttivo. L'obiettivo della mia tesi è dunque rivolto all'ampliamento dell'attuale profilo utente in modo da inglobare in particolare i fattori affettivi e ricavarne opportune indicazioni di attività o modalità didattiche più adeguate alle caratteristiche dell'individuo. Ho deciso di iniziare ad ampliare il profilo partendo dai fattori affettivi, poiché, come evidenziato dai numerosi lavori di ricerca in "math and affect", un qualcosa

genericamente denominato col nome di “atteggiamento negativo” nei confronti della matematica potrebbe provocare apriori barriere inibitorie all’apprendimento (Zan, 2006).

Ho sviluppato il lavoro di tesi in più fasi. Inizialmente mi sono posta l’obiettivo di formalizzare un modello di profilo utente che tenesse conto degli aspetti affettivi. Tale modello permetterà di avere un “quadro” dell’esperienza affettiva dello studente in matematica e di avere informazioni per una personalizzazione più efficace dei percorsi di apprendimento. In seguito ho previsto una fase di analisi ai fini di una implementazione del modello in piattaforma: ho definito e tarato lo strumento di misurazione del profilo, che consiste in un questionario (con domande sia aperte che chiuse), ed ho elaborato un algoritmo di modellazione del profilo affettivo. Infine ho previsto una fase di progettazione e validazione di possibili learning activities specifiche per i nuovi profili creati.

Nei primi tre capitoli presento i principali risultati del quadro teorico di riferimento. Per la particolarità dell’oggetto della tesi, tale quadro si riferisce alla ricerca tanto nel campo dell’e-learning, (dal punto di vista sia tecnico che teoretico) quanto in quello dell’educazione matematica.

Nel capitolo I esamo brevemente i punti caratteristici dell’e-learning e dei sistemi di gestione delle risorse di apprendimento. Passo quindi ad analizzare qual è il valore aggiunto che l’e-learning può dare nello specifico all’insegnamento/apprendimento della matematica.

Nel capitolo II ho preso in considerazione il problema della personalizzazione dell’apprendimento in ambienti di e-learning: in particolare espongo le caratteristiche e il funzionamento dei sistemi educativi intelligenti e adattativi basati su web, con particolare riferimento alla piattaforma IWT.

Nel capitolo III presento i risultati della ricerca in educazione matematica sugli aspetti affettivi del processo di apprendimento. In particolare ho esaminato il costrutto di atteggiamento verso la matematica proposto da Zan&DiMartino (2007), caratterizzato dai tre seguenti fattori: la disposizione emozionale, esplicitata dall’espressione “mi piace/non mi piace”, la visione della matematica, esplicitata dall’espressione “la matematica è...”, il senso di autoefficacia, esplicitato dall’espressione “riesco/non riesco”.

Il capitolo IV è incentrato sulla costruzione di un modello di profilo utente che inglobi gli aspetti affettivi. A tal fine, ho definito il “modello di profilo affettivo in matematica”, basato sul costrutto di atteggiamento di Zan&DiMartino. Il modello di atteggiamento proposto da Di Martino & Zan che mi sono trovata ad utilizzare però, è stato validato in condizioni di apprendimento “normali”, “standard” quali quelli gestiti da “esseri umani”. L’ambiente invece per cui ho avviato le mie ricerche e nel quale mi muovo, prevede la gestione automatica dei processi di apprendimento, con tutte le problematiche che ne conseguono. Basti pensare all’interpretazione dei discorsi, delle

composizioni degli studenti (utilizzati in maniera massiccia dagli autori), dell'analisi dei gesti, alla "lettura", alla deduzione di cose che pur non sembrano essere state dette. Il problema degli automatismi di cui è caratterizzata la piattaforma, derivante dalla mancanza di una gestione umana dei processi di apprendimento, mi ha costretto a rivedere i modelli proposti nel quadro teorico. A tal fine, ho sì basato la costruzione del modello di profilo affettivo sul costruito di atteggiamento di Zan&DiMartino ma lo ho ampliato in modo che contenesse con "certezza" le informazioni che in contesti "naturali" potrebbero essere dedotti da "fatti" non esplicitamente chiesti e/o menzionati e che sono necessari per i miei scopi. Questo è il motivo per cui il modello è stato arricchito con altre informazioni utili per la creazione dei learning path personalizzati.

Più in dettaglio, per quanto riguarda il senso di autoefficacia, particolarmente significative sono le attribuzioni causali cioè le convinzioni elaborate da una persona cercando di interpretare il proprio fallimento; per quanto riguarda la disposizione emozionale, è di interesse conoscere le emozioni associate al fare matematica; per quanto riguarda la visione della matematica, è da tenere in considerazione la distinzione, di Skemp (1976), tra matematica strumentale e matematica relazione. Ho opportunamente reso espliciti e incorporati questi dati aggiuntivi, relativi ai tre fattori caratterizzanti l'atteggiamento, nel modello di profilo affettivo definito.

Nel paragrafo 2 del capitolo ho poi definito lo strumento di misurazione del profilo. Non c'è dubbio che il miglior modo di investigare sui fattori affettivi sia la composizione libera, che evita il rischio di forzare la risposta dello studente in una o in un'altra direzione scelta dal ricercatore (Di Martino *et al.*, 2007). E' tuttavia evidente che tale modalità non è praticabile per l'assegnazione del profilo a ciascuno studente tramite piattaforma. Al contrario, i questionari a risposta chiusa sono gestiti bene dagli strumenti tecnologici. Pertanto ho previsto la creazione di un adeguato questionario misto che investighi su ciascuno dei fattori considerati nel modello creato, con domande a risposta sia chiusa, le cui risposte possono essere facilmente previste e classificate, sia aperta, che evitino il rischio di forzare la risposta.

Nel capitolo V ho poi presentato l'analisi dei risultati della sperimentazione del questionario su un campione di circa 870 studenti del primo anno di biologia, primo di ingegneria, ultimo anno di scuole superiori. Ho avviato tale sperimentazione sicuramente per poter analizzare le possibili risposte degli studenti al questionario, ma soprattutto in visione di una gestione automatica delle risposte alle domande aperte in piattaforma. Le risposte alle domande aperte infatti hanno permesso di creare un repository in vista della gestione automatica. Ho inoltre presentato i cataloghi di dette risposte rispetto ai parametri significativi individuati nel modello, che si riferiscono principalmente a una disposizione emozionale più o meno positiva e a una visione della matematica strumentale/relazionale.

Una volta definiti tutti gli strumenti per la creazione del profilo e aver previsto le modalità per la loro implementazione in piattaforma, nel capitolo VI, ho riportato la sperimentazione per la validazione dell'intero processo che fin'ora ho descritto. Per fare ciò ho elaborato e realizzando una opportuna learning activity, che mira a favorire una visione relazionale della matematica per l'apprendimento delle dimostrazioni: oggi infatti sempre più spesso si riscontra un'atteggiamento acritico nell'apprendere le dimostrazioni caratterizzato dalla memorizzazione più che dalla comprensione dei concetti che si utilizzano, che richiama una visione della matematica puramente strumentale (Ascione, 2008). Ho sperimentato l'attività fatta presso le Università di Salerno e del Piemonte Orientale su un campione di 85 studenti del primo anno di università, ai quali è stato chiesto di compilare il questionario, in maniera anonima, prima e dopo l'attività. Ho presentato le prime analisi dei protocolli e i risultati qualitativi e quantitativi della suddetta sperimentazione, compresa l'analisi delle differenze delle risposte ai questionari prima e dopo la sperimentazione. Ho corredato la tesi di appendici in cui vengono presentate le schede relative alle attività svolte. Mi piacerebbe ringraziare le persone che hanno contribuito in questo mio lavoro di ricerca. Ringrazio il mio tutor, la prof.ssa Elvira Russo, per le tante critiche e soprattutto per i consigli utilissimi che mi hanno consentito di rendere più chiara l'esposizione delle mie ricerche, se pur ancora in corso. Ringrazio Roberto Tortora e Donatella Iannece per avermi fatto entrare a far parte nella grande famiglia dei "didattici della matematica" e per avermi seguito in tutto questo percorso. Ma un ringraziamento particolare va Giovanna Albano, coautrice dei miei lavori, non solo per le tante correzioni apportate a questo testo, ma per avermi aiutato con pazienza infinita, per aver condiviso tutte le mie ansie, lavorative e non, per le notti passate a scrivere articoli e a ragionare su cose, per avermi fornito in questi anni di formazione "una visione della ricerca" e per non aver mai smesso di promuovere il mio "senso di autoefficacia", anche nei momenti in cui non raggiungeva valori proprio altissimi. Un grazie particolare va sicuramente a lei, alla mia "cara amica di ricerca". Un piccolo spazio per i ringraziamenti lo dedico infine alla mia famiglia, a mia madre, dalla quale eredito la passione per la matematica, a mio marito, per le tante serate in cui si è dovuto accontentare di "condividermi" col computer, per le tante volte in cui ha dovuto assecondare e minimizzare le mie ansie, per i tanti toast mangiati al posto di un pasto decente, per aver imparato ad amare, se pur con sacrificio, oltre me, il mondo di cui mi sento di far parte.

Capitolo I

Introduzione all'e-learning

1.1 Introduzione

In una intervista di Francesca Leoni a Derrick De Kerckhove (Frabboni, 2005) si legge:

“Per migliaia di anni, fin da quando il faraone rimproverò Toth per aver inventato la scrittura, perché, sosteneva, minacciava di distruggere la memoria, ogni nuova tecnologia basata sul linguaggio ha sempre suscitato ingiustificate reazioni ostili. Qualunque spostamento della sede della memoria sembra turbare profondamente l'uomo e ovviamente ogni tecnologia comporta una dislocazione di questo tipo: l'invenzione della scrittura ha trasferito la memoria dal corpo al testo, la televisione ne ha sancito il passaggio dalla mente allo schermo, e oggi Internet va trasformando la memoria in un ambiente virtuale al di fuori del corpo e degli schermi, negli inferi del non-spazio digitale. Non sorprende dunque che questi sviluppi creino un certo sconcerto. Tuttavia, quando la memoria e l'elaborazione dell'informazione (ossia il pensiero) mutano sede, di solito è per fare qualcosa di nuovo, qualcosa che non era mai stato fatto prima nelle società umane: così l'invenzione dell'alfabeto ha reso possibile il pensiero individuale; la televisione ha creato una mente collettiva e ora Internet offre la possibilità di connettere le menti dei singoli individui. I contenuti della memoria universale vengono riversati in Internet, così come molte facoltà mentali vengono delegate ai computer. Pensare e ricordare diventano processi collettivi che possono essere condivisi in tempo reale...”

Attraverso queste parole Derrick De Kerckhove, erede spirituale di McLuhan e direttore dell'omonima fondazione di Toronto, si rivolge a quanti guardano con scetticismo al diffondersi e all'affermarsi dell'utilizzo del computer come strumento per l'insegnamento e l'apprendimento, evidenziando la secolare barriera a ciò che è nuovo, che a volte spaventa e sottolineando la forte dicotomia tra due approcci all'e-learning, e più in generale all'utilizzo di nuovi artefatti in ambito educativo, storicamente contrapposti: quello innovativo-informatico e quello cauto-pedagogista.

In questo contenzioso i primi spesso esaltano a dismisura l'importanza e le potenzialità della piattaforma software (postulando il fatto che questa sarebbe stata condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per la messa a punto della formazione a distanza di nuova generazione); i secondi

si richiamano alle teorie della pedagogia arroccandosi però spesso sul rifiuto pregiudiziale delle nuove tipologie formative e invocando l'impossibilità della rinuncia al contatto fisico/emotivo fra docente e discente. Con una nota saliente in comune: in molti dei casi nessuna delle due categorie riesce a condividere con l'altra i propri punti di forza e di debolezza, chiave reale di svolta per lo sviluppo di ambienti e-learning efficaci per l'apprendimento.

D'altra parte, ci si trova tuttora immersi in un periodo di impetuoso sviluppo iniziale: mentre il libro è una tecnologia vecchia di cinque secoli, il cinema di un secolo e la televisione di oltre mezzo secolo, l'editoria multimediale interattiva off line ha solo poco più di dieci anni e ancora meno ne ha la diffusione di massa e l'utilizzo sistematico dell'editoria on line.

Nonostante la confusione iniziale, una forte fiducia è posta allo stato attuale in attività e-learning, come testimoniano sia le tante iniziative promosse a livello europeo in attività e-learning sia le molteplici aperture di pedagogisti alla possibilità di una "didattica mediata da computer".

La Commissione Europea nel 2003 ha lanciato l'eLearning Programme il cui obiettivo globale è di supportare e sviluppare ulteriormente l'uso efficace delle ICT nei sistemi educativi europei, come contributo a un'educazione di alta qualità e come elemento essenziale per adeguare tali sistemi alle richieste della società della conoscenza nel contesto della formazione permanente. In tale programma si sottolinea l'importanza strategica dell'elearning: *"E-learning ha la potenzialità di aiutare l'Unione a rispondere alle sfide della società della conoscenza, a migliorare la qualità dell'apprendimento, a facilitare l'accesso alle risorse didattiche, a dedicarsi a bisogni speciali, e a portare una formazione più efficace ed efficienti nel posto di lavoro."* (eLearning Programme).

E ancora: *"L'iniziativa eLearning sviluppa ulteriormente questi obiettivi da un punto di vista didattico, sottolineando la necessità di approcci pedagogici innovative e di obiettivi ambiziosi riguardanti la qualità dell'apprendimento e l'accesso facile a risorse e servizi di elearning"*.

Nel programma di lavoro Education and Training 2010 tra i temi chiave relativi agli obiettivi strategici possiamo ritrovare:

- a) l'attenzione alla formazione continua degli insegnanti, con particolare riguardo alle tecniche innovative di insegnamento-apprendimento basate sulle ICT e sui processi di e-learning (in questa direzione va l'azione europea eTwinning che si occupa di collaborazione tra le scuole in Europa per mezzo delle ICT allo scopo di portare avanti delle attività significative dal punto di vista pedagogico);
- b) l'attenzione a garantire che tutti accedano all'apprendimento e a rendere possibile il raggiungimento delle competenze di base a tutti, promuovendo percorsi flessibili di apprendimento per tutti;

c) l'attenzione alle competenze matematiche e ad attrarre più studenti verso studi scientifici e tecnici.

In effetti, attualmente, anche pedagogisti sono in parte convinti dei possibili benefici di una formazione a distanza, per la loro capacità di garantire modalità apprenditive “differenti” rispetto a quelle in presenza denunciando la tendenza, abbastanza diffusa, a “*reduplicare le pratiche didattiche tradizionali, favorendone solo un aggiornamento di formato*” (Marigliano, 2000).

Antonio Calvani (1998) in particolare mette in guardia dal non identificare la didattica e-learning “con semplice attività di didattica erogativa (vuoi attraverso videoconferenza, scelta o learning object)”, mentre individua nei modelli didattici problem o collaborative based il punto di forza dell'elearning. Secondo Calvani e Rotta, inoltre: “*di particolare importanza è l'evoluzione interna all'educazione a distanza verso modelli di open learning, la trasformazione della tecnologia multimediale verso il Web based training, la progressiva acquisizione dei modelli teorici ed epistemologici relativi alla formazione che valorizzano l'autonomia e una costruzione negoziale dei saperi (riportabili essenzialmente alla psicologia umanistica e al costruttivismo).*” (Calvani e Rotta, 2000).

Gli stessi autori ancora indicano otto tra fattori chiave di un'attività e-learning qui di seguito riportati(Calvani e Rotta, 2000).

:

- *Risparmio di tempo e denaro negli spostamenti:* Questo è un carattere di tutti i tipi di formazione a distanza, agli incontri in presenza invece bisogna essere presenti in un determinato luogo, in un determinato tempo. Il risparmio è forte, in particolare laddove l'utenza sia distribuita su un vasto territorio e raccogliera comportamenti disagi e costipi varia natura.
- *Autonomia di elaborazione:* Anche questo presente in qualsiasi tipo di formazione a distanza che permette una maggiore autonomia e la possibilità di trovare condizioni personali più adeguate alla formazione. In una lezione in presenza invece si lavora nel tempo messo a disposizione, non tutti elaborano allo stesso modo, nello stesso momento, nelle stesse condizioni.
- *Velocizzazione ed esplosione delle interazioni possibili:* Il tutor ha la possibilità di interagire con ogni singolo studente in modo quasi istantaneo, anche con parecchie decine di studenti dislocati ovunque. Il discorso si allarga ai partecipanti, tutti possono conoscere il pensiero di tutti gli altri, si parla contemporaneamente senza che nessuno copra l'altro.
- *Memoria del percorso didattico:* In rete è facile conservare il processo secondo il quale il singolo ha appreso. Ciò può essere particolarmente utile, vuoi per lo sviluppo

dell'autoconsapevolezza del soggetto, vuoi per il tutor che può adattare meglio i suoi apporti alle esigenze del soggetto.

- *Ampliamento dello scaffolding di supporto e dei materiali di lavoro:* In una classe virtuale lo studente può avvalersi dell'aiuto di altri esperti remoti, a cui può appellarsi anche in itinere. Il materiale può essere arricchito man mano con vari link, è soggetto a frequenti rifacimenti, di arricchimenti progressivi in itinere(editabilità)
- *Flessibilità delle forme di condivisione-cooperazione:* il rapporto tra i corsisti può essere modellato secondo varie tipologie:visibilità reciproca, aiuto occasionale, cooperazione vera e propria, e si può scegliere a seconda dei problemi da trattare la tipologia di iterazione. Rispetto alla attività in presenza il docente non ha la necessità di ripetere la stessa spiegazione a ogni alunno che in momenti diversi ponga la stessa richiesta, può semplicemente rimandare a spiegazioni già formulate.
- *Possibilità di avvalersi dell'expertise stessa dei partecipanti:* Il fatto che i partecipanti posseggano già un buon livello di expertise nel settore oggetto di formazione è una buona ragione per appoggiarsi a un sistema in rete giocando sul valore aggiunto che può derivare dalla dimensione cooperativa. In questo caso i discenti possono svolgere in parte ruolo di tutoring.
- *Esponibilità dei prodotti:* Il fatto di poter rendere visibili all'esterno i prodotti può rappresentare un fattore motivante tutt' altro che trascurabile.

Nonostante la forte speranza riposta nell'e-learning dai vari versanti, dalle varie direzioni pubblicizzate da molti autorevoli pedagogisti, i dati effettivi mostrano ancora come la maggior parte dei prodotti esistenti sia disegnata su un modello del processo di insegnamento- apprendimento di tipo trasmissivo che, oltre ad essere discutibile in generale (as esempio Bruner,1986) non utilizza appieno le potenzialità delle nuove piattaforme e-learning. In particolare, da un articolo pubblicato sul giornale La Repubblica si legge¹“*Secondo i dati rilevati dall'Associazione dei servizi e contenuti multimediali (Anee²) nel 2005 nelle 79 università italiane, su 57 che offrono formazione a distanza*

¹ La Repubblica, Dottori si diventa con un clic radiografia dell'e-learning in Italia, Monica Ellena

² all'Osservatorio sull'eLearning 2003 di ANEE, Commissione servizi e contenuti multimediali Assinform, che il 30 giugno 2003, nell'ambito del convegno “eLearning: stato dell'arte e prospettive di sviluppo”, ha presentato i risultati della seconda edizione dell'Osservatorio sull'eLearning. L'obiettivo era offrire una fotografia aggiornata delle dinamiche di mercato in atto nel settore, delineando possibili scenari futuri con un'attenzione particolare, oltre che alle imprese, anche al mondo universitario e alla pubblica amministrazione. La ricerca, unitamente ad aziende attive in ambito formativo (Banca Intesa, Sfera, Isvor Fiat, Microsoft, Telecom Italia Learning Services, Intesa Learning), fu realizzata in collaborazione con alcuni centri di ricerca e universitari (Fondazione Methis, LUISS Guido Carli, METID - Politecnico di Milano, e, appunto, il CTU - Università di Milano) coinvolgendo oltre 400 organizzazioni, tra cui assicurazioni, università, istituti finanziari e di credito, aziende di servizi, commerciali e di produzione. L'indagine,

solo 12 funzionano a pieno regime. Il risultato è che circa il 50 per cento delle università che dichiarano di fare e-learning sviluppano in realtà supporti informatici che permettono agli studenti di accedere al materiale didattico on-line. "E-reading piuttosto che e-learning" .

Sembra necessario a tal punto chiedersi, se tanta fiducia è posta oggi nell'e-learning, a quale dei tanti modelli, a quale delle pratiche messe in atto, a quali delle tante infrastrutture tecnologiche essa si riferisca. A tal proposito è sembrato utile riportare nel presente capitolo dei brevi richiami teorici sul significato che si attribuisce oggi all'e-learning derivante dalla storia del suo utilizzo, che qui sarà brevemente riportata, per poi introdurre il vero attore, dal punto di vista informatico, di un'attività e-learning: la piattaforma. In fine, si è ritenuto utile analizzare più in dettaglio l'uso che si fa di e-learning per la didattica della matematica essendo quest'ultima oggetto di studio della presente tesi di dottorato.

1.2 L' e-learning oggi

Il termine e-learning è oggi molto di moda, ma viene impiegato secondo accezioni diverse, riflettendo pratiche e visioni differenti. Anche da un punto di vista strettamente terminologico il termine viene comunemente usato quale sinonimo di altre espressioni, alcune delle quali già in uso nello scorso decennio (Ranieri, 2005): online learning, online education (Harasim, 1990), computer mediated distance learning (Palloff e Pratt, 1999), web based learning o web based training (WBT), distributed learning (Resnick, 1996) e distributed training, computer assisted learning, online resource based learning (ORBL), networked collaborative learning (NCL). Computer supported collaborative learning (CSCL), ecc (Anderson e Elloumi, 2004; Khan, 2004).

Maisie parla in particolare di "e"learning, non per riferirsi ad un "apprendimento elettronico", ma come "esperienza", richiamando la molteplicità dei fattori che oggi concorrono o dovrebbero concorrere a una ulteriore evoluzione delle dinamiche di insegnamento e dell'apprendimento grazie al diffondersi delle reti, o meglio, dello spazio della rete:

- Nuove forme di coinvolgimento dei discenti (engaged learning)

svoltasi attraverso questionari e successive interviste di approfondimento, ha sostanzialmente rilevato la costante crescita del settore, che sembrava destinata a continuare anche negli anni successivi. Si veda Liscia R. (ed.), (2004) E-learning stato dell'arte e prospettive di sviluppo, Apogeo, Milano.

- Aumento della curiosità e della voglia di esplorare
- Possibilità di simulare in rete situazioni con risvolti pratici
- Sviluppo di forme di educazione assistita (coaching)
- Crescita del tutorship tra pari (peer tutoring)
- Crescita delle attività formative legate ai bisogni specifici di ogni singolo individuo
- Sviluppo di pratiche formative come supporto alla produttività di chi opera in servizio
- Aumento di bisogno di intensità nelle esperienze formative
- Possibilità di garantire ai discenti feedback immediati e personalizzati sui loro bisogni formativi.

Janice Lawrence, presidente di *Learning Solutions*, ne parla come un sistema in cui si combinano tre elementi ritenuti fondamentali nella prospettiva del nuovo “mondo della conoscenza”:

- I contenuti, ovvero la necessità di disporre di informazioni continuamente arricchite e aggiornate e di conseguenza degli strumenti per elaborare, mantenere, organizzare, cercare, selezionare e mettere in relazione tra loro le conoscenze, le basi di dati, i materiali formativi;
- La personalizzazione dell’accesso ai contenuti, ovvero la possibilità, in un’ottica tipicamente modulare, di avere soluzioni specifiche ai propri bisogni formativi
- La connettività, ovvero la modalità attraverso cui i singoli discenti entrano in contatto con la “comunità che apprende”, sia in modo formale che informale, partendo dal presupposto che la maggior parte delle persone preferisce dedicarsi ad attività di apprendimento all’interno di un contesto sociale.

Ma tali caratterizzazioni, se pur pragmatiche, sembrano allo stato attuale non bastare a definirlo. Per dire che cosa si intenda oggi per “e-learning”, occorre far riferimento all’evoluzione della formazione a distanza. Ma come nasce l’insegnamento a distanza e quali sono le peculiarità che maggiormente lo caratterizzano?

1.2.1 Un po’ di storia

L’istruzione a distanza ha origini antiche. Si possono individuare le prime forme di istruzione a distanza nei casi di epistolari scritti a scopo di educazione-istruzione, un esempio ne è la lettera di Platone a Dionigi di Siracusa o quella di San Paolo rivolte alla comunità cristiana anche se, i sistemi di istruzione a distanza veri e propri nascono solo con la diffusione dei moderni sistemi postali. In definitiva la storia dell’istruzione a distanza vera e propria riguarda gli ultimi due secoli e attraverso un itinerario che, secondo i lavori di Garrison (1985) e Nipper (1989) e poi dopo dell’italiano Trentin (1998, 1999a) può essere schematizzato in tre “generazioni”:

- *Prima generazione:* le prime applicazioni di una certa significatività prendono piede nell'ottocento con lo sviluppo del sistema ferroviario che ha reso possibile la distribuzione estensiva di materiale di insegnamento nei riguardi di popolazioni disseminate: in questo caso ci si basa ovviamente sulla sola corrispondenza scritta.
- *Seconda generazione:* durante gli anni 60'-70' che l'istruzione a distanza acquisisce una maggiore consapevolezza. Tale generazione è distinta dall'impiego di soluzioni "multimediali" caratterizzate cioè da un uso integrato di materiale a stampa, registrazioni sonore, trasmissioni televisive e computer. La comunicazione è basata su un rapporto di uno-molti (in particolare attraverso l'emittenza televisiva). In particolare, negli anni '70, quando i computer erano già sufficientemente diffusi, si iniziò a parlare di CBT (Computer Based Training) e di CAI (Computer Aided Instruction), ovvero di formazione distribuita tramite il pc, con prodotti informatici pensati appositamente per l'auto-apprendimento. Si trattava generalmente di semplici dischetti con informazioni strutturate (sequenza di schermate), utilizzate soprattutto in ambito aziendale. Negli anni 80' e per buona parte degli anni 90' i CBT continuano a essere progettati e prodotti o per usi specifici (soprattutto training di personale di organizzazioni pubbliche o private, in particolare nell'ambito dell'autoapprendimento di abilità nell'uso di nuovi software o nuove procedure di lavoro) o sempre più spesso per usi più ampi e generalizzati (si pensi ad esempio ai corsi multimediali di lingue diffusi con la stampa). Essi sono stati sostenuti anche poiché molto vantaggiosi sul piano economico: la facile riproducibilità del prodotto informatico e l'abbassarsi dei costi di duplicazione hanno convinto molte aziende e agenzie a investire in questa direzione. Dal punto di vista pedagogico, i processi di feedback sono simili a quelli utilizzati nella prima generazione ma includono anche consulenza telefonica e faccia a faccia, mentre l'insegnamento viene identificato nel processo di strutturazione e distribuzione delle informazioni. *"L'apprendimento in questa fase è trasformato in un processo esclusivamente individuale anziché sociale"* (Nipper, 1989).
- *Terza generazione:* è caratterizzata dall'impiego delle reti telematiche. Con l'avvento delle reti e di internet, la sigla CBT ha lasciato spazio alla nuova WBT acronimo per *Web Based Training*. Apparentemente si potrebbe pensare a una semplice trasposizione delle tecniche di istruzione programmata o strutturata basata su prodotti multimediali in ambiente internet. In realtà non si è trattato solo di un salto su un nuovo canale di distribuzione, ma di una svolta sia metodologica che progettuale. Tra le ragioni della diffusione della formazione web-based vi sono certamente i vantaggi organizzativi e logistici, e conseguentemente economici, che un ambiente di apprendimento on-line garantisce. Ma l'elemento più importante, che per

molti ha indotto ad una corsa all'uso sempre più intenso del supporto telematico per i prodotti e per i progetti educativi, riguarda l'idea, oramai largamente acquisita, che per rispondere ai bisogni formativi reali, occorra una dose molto alta di flessibilità e di molteplicità dell'offerta. Il Web in tal senso, garantirebbe un "escursione" particolarmente ampia: dalla possibilità di erogare prodotti educativi legati ad una impostazione strutturata all'avvio di programmi informali e attività di educazione aperta. Secondo questa ottica, il Web Based Training si potrebbe caratterizzare come una strategia orientata a dare agli "studenti" la possibilità di plasmare lo spazio dell'apprendimento secondo i propri bisogni, o meglio ancora, di aumentare la possibilità di interagire in modo flessibile con i materiali formativi, e più in generale, con tutto ciò che "formazione" attraverso il supporto delle reti, dai veri e propri corsi a distanza all'imparare esplorando e navigando. Col tempo poi sorgono le prime piattaforme di e-Learning (LMC o CMS) con le quali, come sottolinea Trentin (1999a) si aggiunge a una tipologia comunicativa del tipo uno a molti³, che ha caratterizzato i modelli di prima e seconda generazione, una tipologia comunicativa del tipo molti a molti, in cui non solo il discente può interagire più rapidamente con il docente, ma può anche stabilire interazioni e rapporti cooperativi con tutti gli altri allievi partecipanti. Bisogna notare che le reti possono essere usate anche secondo un'ottica di seconda generazione, così semplicemente per inviare materiali e correggere le risposte degli studenti, secondo modalità che possono anche essere gestite da un computer. ciò che caratterizza la terza generazione, come sottolinea Nipper, è invece la rilevanza della "presenza sociale" che le nuove tecnologie consentono e che recupera dimensioni fondamentali delle nuove teorie educative. La capacità di creare un ambiente emotivamente valido, ricco di rapporti interpersonali e di supporti variegati diventa una componente di grande rilevanza, sottolineata in vari modi da diversi autori (Harasim, 1990, 1995; Palloff e Prat, 1999; White e Weight, 1999; Draves, 2000). È qui che fallisce l'istruzione a distanza di seconda generazione, in cui predomina il senso di un apprendimento come successione di operazioni condotte per lo più in isolamento. In questo contesto si rivaluta il ruolo del dialogo come funzione essenziale per l'apprendimento, in quanto capace di educare all'argomentazione, a valutare criticamente la conoscenza sollevata da altri, a riflettere criticamente e collaborativamente sulla conoscenza acquisita, procedere razionalmente e metodologicamente nella presentazione orale delle proprie idee (Peters, 1998). "Queste abilità non possono essere acquisite per mezzo di un apprendimento ricettivo. Non possono essere imparate da unità di materiale stampato, per quanto ingegnosamente ben costruito.

³ Secondo tale tipologia comunicativa gli scambi vanno da un punto di emissione centrale, cioè dal docente, a una moltitudine di allievi/riceventi, con eventuale comunicazione di senso inverso

Questo è il motivo per cui il dialogo nell'educazione a distanza è assolutamente essenziale”(Peters, 1998).

Recentemente, a traino delle nuove linee di sviluppo di internet, note come “web 2.0”, anche nell'e-learning sta prendendo avvio una nuova fase denominata appunto, “e-learning 2.0”. Oggi infatti, grazie alla semplificazione degli strumenti, la possibilità di avere uno spazio in rete non è più solo appannaggio di tecnici e di esperti, ma realmente di ogni utente. Conseguentemente anche nell'e-learning si è imposta l'esigenza di valorizzare la propensione spontanea della persona ad utilizzare in maniera attiva e creativa le risorse disponibili. Strumenti di produzione e di scambio di idee come i blog e i wiki; di condivisione delle risorse multimediali come i repository di immagini, audio e video; gli strumenti per la formazione in mobilità quali i podcast e i videopodcast, gli innumerevoli altri ambienti di espressione personale come ad esempio Second Life, rappresentano oggi la forza del *Social Networking*: ovvero della dimensione più rilevante del web inteso come spazio per lo sviluppo di pratiche spontanee di apprendimento.

1.2.2 Verso una definizione di e-learning

I brevi cenni storici riportati inducono ad una definizione di e-learning abbastanza generica che ingloba le varie e molto differenti modalità di utilizzo; in particolare con il termine e-learning ci si riferisce all'insieme di metodologie e tecnologie che consentono di attuare percorsi di “formazione a distanza”, avvalendosi prevalentemente, anche se non esclusivamente della rete. Tale definizione, risulta però abbastanza generale e poco indicata a descrivere tutte le peculiarità di cui l'e-learning può avvalersi. Facendo un passo avanti in tale direzione ci si può rifare alle tipologie di e-learning esistenti.

Mason (1998, 2002) della Open University fornisce due differenti, per quanto almeno in parte convergenti, definizioni/classificazioni basate sugli aspetti metodologici. Nella prima(1998) distingue tre diverse tipologie di e-learning, nella seconda invece (2002) allarga la prospettiva includendo le più recenti evoluzioni dell'e-learning distinguendo tra:

- *content and support*: si tratta della tipologia più diffusa ed economica (se il livello di multimedialità e interattività dei materiali è basso) e si basa sull'erogazione dei contenuti (materiali stampati o pagine web) e sul supporto minimale di un tutor (per e-mail o per computer conferencing); si caratterizza per la netta distinzione tra contenuto e supporto;
- *wrap around*: consiste nella combinazione di risorse Internet, attività e discussioni online con libri, cd-rom e tutorial; si lascia maggiore spazio e libertà allo studente , il

contenuto è meno strutturato e assume diverse connotazioni seconda delle attività; il tutor assolve il ruolo di facilitatore interagendo singolarmente o con piccoli gruppi;

- *integrated model*: si basa essenzialmente su attività collaborative in piccoli gruppi; i contenuti del corso sono fluidi e dinamici e in un certo senso viene meno la distinzione tra contenuto e supporto, poiché il contenuto nasce proprio dall'interazione e dalla negoziazione tra i partecipanti e con il tutor; in questo caso il tutor/docente diventa un moderatore e animatore di comunità di apprendimento
- *informal e-learning*: rinvia a forme di apprendimento che si collocano al di fuori di un corso istituzionale organizzato e che si basano sull'interazione tra colleghi e lo scambio tra esperienze. In tale ambito si possono includere anche forme di esplorazione libera per uso personale: il soggetto ricerca sul web risorse, accedendo ai siti, data base, documenti ecc.

Un'altra significativa classificazione ci viene da Bellier (2001) che, basandosi non tanto sugli aspetti metodologici quanto sulle pratiche correnti, distingue tra le seguenti cinque principali modalità di e-learning:

1. *completamente a distanza senza l'intervento di un tutor*: il discente è completamente autonomo, si iscrive, paga, accede ai contenuti e viene valutato completamente a distanza. I contenuti sono per l'ammagior parte procedurali (contabilità, informatica, internet ecc)
2. *completamente a distanza, ma con il supporto di un tutor*: si tratta di una categoria molto ampia, le modalità con le quali può essere attuato il tutoraggio sono le più disparate, dando luogo a dispositivi tecnici e pedagogici di natura differente. Il tratto comune sta nel fatto che l'apprendimento avviene completamente a distanza e che i discenti vengono seguiti individualmente da un tutor. Il tutor può avvalersi di strumenti di comunicazione sincrona (video-audio conferenze, chat ecc) o asincrona (e-mail, forum). Queste diverse modalità possono variamente integrarsi.
3. *Misto distanza/presenza (blended) con autoformazione a distanza*: In questo caso la formazione vera e propria avviene a distanza con incontri in presenza che vengono organizzate in base a un ritmo che può variare secondo diversi schemi. Alcuni corsi prevedono gli incontri face to face all'inizio per facilitare la conoscenza tra i partecipanti, altri invece utilizzano gli incontri in presenza a metà corso per verificare direttamente che gli apprendimenti abbiano avuto luogo mettendo i discenti in situazione; alcuni corsi ancora prevedono gli incontri alla fine dell'attività formativa per verificare se ciascuno è riuscito a rendere operative le conoscenze acquisite. Questa modalità mantiene tutti i

vantaggi dell'e-learning (quali l'autonomia organizzativa, riduzione degli spostamenti, aumento della possibilità di personalizzazione), inoltre gli incontri in presenza riducono il rischio del "senso di isolamento" e di abbandono che di solito si ascrive alla formazione a distanza.

4. *Misto distanza/presenza (blended) con attività complementari a distanza*: l'attività avviene perlopiù in presenza, mentre le attività a distanza sono concepite come complementari, per l'approfondimento. Si tratta in questo caso di arricchire e completare un insegnamento che si svolge essenzialmente in forma immediata. Il corsista può utilizzare le risorse per il lavoro a distanza come userebbe il manuale tradizionale, ma con un diverso formato, in molti dei casi figlio della multimedialità. Possono essere previste anche interazioni in classe virtuale.
5. *Lavoro collaborativo a distanza*: esso può essere presente anche nelle modalità precedentemente descritte (ad esempio nel caso di utilizzo di forum che durante il corso "funzionano"), ma in questo caso il lavoro collaborativo rappresenta un elemento all'interno di un dispositivo basato sulla trasmissione dei contenuti d'apprendere. In questo caso al contrario le conoscenze esterne al gruppo hanno minor valore e l'apprendimento stesso si genera a partire dalla partecipazione e dallo scambio. Il fatto stesso di lavorare assieme genera contenuto e apprendimento. Il tutor svolge la funzione di organizzatore e animatore di scambi e il suo ruolo consiste essenzialmente nel monitorare che il lavoro sia fonte di apprendimento per tutti.

Riprese le varie classificazioni, che come tutte le schematizzazioni tende per certi versi a semplificare la varietà e la complessità delle esperienze, è importante osservare che:

- l'e-learning non è ancora un oggetto definito in maniera stabile, bensì un insieme di metodologie e di tecnologie in continua evoluzione;
- non sempre queste tipologie esistono in forma "pura": ad esempio, all'interno di un percorso formativo basato principalmente su attività collaborative, potrebbe essere comunque necessario prevedere momenti di studio individuale di carattere più erogativo e direttivo;
- le diverse tipologie di e-learning a cui si è accennato possono essere variamente degradate in base alle differenti modalità di integrazione con incontri in presenza (sistema blended) generando una varietà di applicazioni.

1.3 Le piattaforme di e-learning

Dal punto di vista informatico, il vero protagonista di una attività e-learning è l'infrastruttura tecnologica, cioè la piattaforma. Per "piattaforma" si intende appunto l'insieme di tutti gli apparati tecnologici destinati ad accogliere e gestire un corso on-line, garantendo ed eventualmente anche integrando la messa a disposizione di ambienti e prodotti didattici, l'amministrazione delle attività di apprendimento, produzioni e verifiche a carico degli studenti, la gestione degli scambi e delle interazioni, più o meno formali, tra docenti e studenti o dentro a gruppi di apprendimento predisposti ad hoc (Maragliano, 2004). In altri termini è il mix di elementi hardware e software che consente di gestire un progetto di formazione in completa autonomia (cioè totalmente in rete) o in parallelo con interventi di carattere più tradizionale.

Le industrie specializzate si sono molto impegnate, negli ultimi tempi al fine di sviluppare e proporre sul mercato sistemi capaci di realizzare e coordinare tra loro queste funzioni, sistemi risultati poi diversi sia per il tipo di utenza preso in considerazione sia per le soluzioni tecniche prospettate. Ne consegue che gli impianti complessivi e i singoli strumenti messi a disposizione dalle varie piattaforme di e-learning possono presentare caratteristiche molto diverse tra loro: ci si può limitare ai livelli minimi di una semplice erogazione di contenuti in formato testuale, come si può raggiungere una complessità funzionale, semiotica, tecnologica e didattica anche molto elevata, sia per quanto riguarda la numerosità e la flessibilità dei gruppi di studenti gestiti contemporaneamente, sia per quanto riguarda le modalità di trattamento/reperimento dell'informazione, sia, infine, per quanto riguarda la tecnologia di comunicazione multimediale alla quale sono affidate le interazioni.

1.3.1 Che cosa c'è dentro una piattaforma e-learning

Una piattaforma e-learning è una complessa architettura di software costruita, con logica e struttura modulare, intorno a un data-base.

L'architettura delle piattaforme di e-learning è di tipo modulare: in questo senso una piattaforma di e-learning è identificabile come un insieme di moduli per l'apprendimento tra loro connessi, ogni modulo rappresentando un blocco funzionale, corrispondente a esigenze che possono essere didattiche, amministrative o gestionali in senso lato. Nei prodotti di ultima generazione sono presenti moduli che interfacciano la piattaforma con la rete e mettono a disposizione degli utenti i diversi modi della comunicazione interpersonale, quali la posta elettronica, la chat, il web forum, wiki, blog, la videconferenza ecc. A loro volta, anche i moduli presentano una struttura

modulare: ognuno si costituisce infatti a partire da funzionalità elementari, di livello base, e più moduli si aggregano tra loro per formare insiemi di livello più alto e di complessità superiore. La caratteristica peculiare di questa architettura modulare consiste nel poter aggregare alla struttura moduli dello stesso livello, o riordinare la disposizione dei moduli stessi, senza che vengano alterate le principali modalità di funzionamento interno degli elementi preesistenti, e dunque nel poter espandere il sistema, sia in orizzontale (aggiunta di moduli di pari livello) sia in verticale (aggregazione di più moduli per crearne uno “macro” con funzionalità più elevate e complesse). L’infrastruttura così creata assume un particolare rilievo strategico nell’orientare e guidare la progettazione dei corsi: il contenuto di un corso può essere pensato e realizzato in unità autonome e autoconsistenti, e le stesse unità modulari, aggregandosi diversamente o collegandosi ad altre, possono generare più corsi o attuare una reale personalizzazione che tenga conto della “history” di ciascuno studente.

Dunque la strategia modulare, applicata alla progettazione di corsi, partendo dalle unità elementari di contenuto e arrivando ad aggregazioni complesse di aree di sapere, può consentire una serie quasi illimitata di combinazioni di micro e macro-oggetti, il che vuol dire garantire il massimo livello di individualizzazione e ancor più di personalizzazione delle pratiche di apprendimento. Tale approccio vede una sua realizzazione nello sviluppo dei “learning objects⁴”, che la tendenza attuale sta cercando di sostituire con “learning activities⁵”.

Le più diffuse piattaforme Open Source attualmente presenti rispondono alle tipologie LMS e LCMS. Un *Learning Management System* (LMS) consente la gestione di attività quali la preparazione dei corsi e dei curricula, la creazione dei cataloghi e dei calendari degli insegnamenti, l’iscrizione degli studenti, il monitoraggio dello studio, la misurazione e la valutazione dei risultati. Un *Learning Content Management System* consente, invece, di creare e gestire i contenuti e gli utenti attraverso la condivisione di archivi digitali (*digital repository*); in pratica è il modulo software che permette di interagire con le basi di dati (*database*). Le piattaforme Open Source sono tutte *web based*; questo significa che sono accessibili tramite *Internet* su protocollo IP e pertanto utilizzabili mediante un *browser* (come Internet Explorer, Mozilla Firefox ed altri). Le piattaforme *Open Source* hanno tutte raggiunto un buon grado di sviluppo in termini software che si traduce in un buon livello delle funzionalità. Tutte le piattaforme consentono più o meno agevolmente la creazione e la fruizione di corsi via web attraverso modalità sincrone o asincrone.

⁴ Un learning object è una qualsiasi risorsa digitale che può essere riutilizzata per supportare l’apprendimento (Wiley, 2000). Un maggiore approfondimento su tale argomento può essere trovato nel capitolo II della presente tesi.

⁵ La caratteristica più importante dell’approccio learning activity è che il contenuto della sequenza di attività può essere facilmente cambiato e adattato alla disciplina lasciando inalterata la struttura della sequenza stessa. In questo modo la sequenza di learning activity fornisce un template pedagogico che può ritornare utile in differenti contesti (Dalziel., 2004)

Questi sistemi oggi, almeno in Italia, non costituiscono un' alternativa alla didattica tradizionale, ma piuttosto una integrazione ad essa. La tendenza attuale è di tipo *Blended Learning* , ovvero alla tradizionale lezione frontale in aula si affiancano i potenti strumenti messi a disposizione dalle varie piattaforme di *e-learning*. Tra le piattaforme di maggior rilievo descriviamo le seguenti, tanto per dare un'idea concreta delle possibilità che offrono:

Moodle (acronimo di *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*) è un piattaforma web open source per l'e-learning, chiamata anche *Course Management System*, progettato per aiutare gli insegnanti e gli educatori a creare e gestire corsi on-line con ampie possibilità di interazione tra studente e docente. Esso è stato creato da Martin Dougiamas⁶, un amministratore web alla Curtin University, in Australia, È scritto in PHP. La sua licenza libera e la sua progettazione modulare consentono alla comunità di sviluppare di continuo funzionalità aggiuntive. Le funzionalità di Moodle spaziano dalla creazione e all'organizzazione di corsi e lezioni on-line a strumenti per la comunità, come: forum, gestione dei contenuti, quiz, blog, wiki, chat, glossari. Moodle è progettato in modo modulare e per questo è possibile ad esempio il supporto di più lingue o l'installazione di temi grafici diversi da quello predefinito. L'attuale versione di Moodle (1.9) è stata rilasciata nel marzo del 2008. La citata filosofia di Moodle include un approccio costruzionista e sociale all'educazione. Le caratteristiche di Moodle riflettono questo in vari aspetti progettuali, come il rendere possibile agli studenti il commentare i contenuti in un database (o contribuire all'inserimento di dati) o lavorare collaborativamente in un wiki. Detto questo, Moodle è abbastanza flessibile per permettere una gamma completa di insegnamento. Può essere usato sia per la consegna introduttiva e avanzata di contenuti (ad esempio pagine HTML) o di giudizi e non è vincolato a un approccio di insegnamento costruzionista.

DoceboLMS [6] è una piattaforma Open Source per l'*e-learning* nata in Italia anche essa scritta in *PHP/MySQL*. Il progetto, chiamato inizialmente *Spaghetti Learning*, arrivato al terzo anno di vita, è stato riscritto completamente e grazie a collaborazioni con molte università italiane e straniere, include funzioni molto particolari. Tra queste funzioni c'è per esempio quella in cui il docente può personalizzare l'ambiente didattico abilitando e disabilitando voci di menu ed inoltre può assegnare voci personalizzate alle funzioni e gestirne i permessi; per la didattica collaborativa c'è il *project manager*, il forum con possibilità di allegare file e la *chat* con sistema di richiesta per poter parlare

⁶ ha lauree in informatica ed educazione. Il suo Ph.D. esaminò "L'uso dell'Open source per supportare un'epistemologia sociale costruttiva dell'insegnamento e dell'apprendimento nelle comunità di internet che fanno inchieste riflessive" ("The use of Open Source software to support a social constructionist epistemology of teaching and learning within Internet-based communities of reflective inquiry"). Questa ricerca ha fortemente influenzato il progetto di Moodle, procurando gli aspetti pedagogici che mancavano in molte altre piattaforme di e-learning.

e scambiare file all'interno di essa. Da sottolineare la presenza di marcatori semantici ossia la possibilità da parte del docente di poter valutare ogni singolo intervento del forum e averne una reportistica per studente. Il professore può scegliere la modalità di presenza *on air* che permette ai discenti di raggiungerlo in videoconferenza o in chat. Un orologio, presente anche nell'area discente, permette di monitorare il tempo di presenza in un dato corso. Si tratta di una funzionalità che in parte riprende la dinamica scolastica, in cui il tempo è scandito dal passaggio delle ore. Sono inoltre a disposizione del docente una serie di strumenti per la comunicazione: messaggistica, forum e chat. Infine è prevista anche la presenza di test di autovalutazione o verifica creati dal docente stesso. Esiste poi una categoria ben specifica di piattaforma e-learning che supportati da software intelligenti sono capaci di creare percorsi di apprendimento personalizzati, i cosiddetti **Intelligent and Adaptive web based educational system** il cui funzionamento sarà particolarmente approfondito nel prossimo capitolo.

1.4 E-learning e didattica della matematica

È anche ormai diffusa la consapevolezza che l'uso della tecnologia non è immediato, ma richiede la progettazione minuziosa di percorsi didattici e ancora di tanta ricerca per capire come sfruttare al meglio le diverse opportunità disponibili e come evitare effetti collaterali indesiderati. Anche la ricerca in educazione matematica ha ampiamente dimostrato la complessità dei processi di insegnamento e apprendimento, e quindi l'inaffidabilità di modelli di apprendimento unidimensionali. In particolare ogni modello di apprendimento per l'educazione matematica deve tener conto che i comportamenti degli studenti sono influenzati da fattori che appartengono ad almeno tre livelli distinti: il livello cognitivo, che riguarda l'apprendimento di concetti e metodi specifici della disciplina, anche in relazione agli ostacoli individuati dalla ricerca e dalla pratica; il livello meta-cognitivo, che riguarda il controllo dei soggetti sui propri processi di apprendimento; il livello affettivo o non-cognitivo, che riguarda convinzioni, emozioni e atteggiamenti, che sono in molti casi cruciali nell'orientare le decisioni e i comportamenti del soggetto che apprende (Zan, 2006).

La tecnologia può giocare un ruolo in ciascuno di questi livelli, compreso quello non-cognitivo, in quanto da un lato può influenzare profondamente convinzioni, emozioni e atteggiamenti di chi apprende, dall'altro è essa stessa oggetto di convinzioni radicate e può suscitare forti emozioni (Albano & Ferrari, 2008).

Anche la comunicazione gioca un ruolo fondamentale, sia dal punto di vista dei diversi tipi di interazione che possono essere associati ai processi educativi, sia da quello dei sistemi semiotici adottati. La tecnologia consente infatti di progettare e gestire forme di interazione originali e mirate, con l'uso integrato di diversi sistemi semiotici, quali la lingua, le notazioni simboliche, le rappresentazioni figurali.

In (Albano&Ferrari, 2008) è descritto un progetto, che si sta sviluppando nelle sedi di Alessandria e Salerno, orientato a sfruttare piattaforme di e-learning (Moodle ad Alessandria, IWT a Salerno) per offrire possibilità di apprendimento costruttivo, individuale o no, di interazioni finalizzate all'apprendimento, di conversioni fra sistemi semiotici. Le modalità di uso delle piattaforme sono orientate inoltre a influenzare le convinzioni degli studenti sulla matematica e sulla tecnologia stessa, e a suscitare emozioni più positive di quelle usualmente associate alle attività matematiche dalla maggioranza degli studenti.

Nel seguito riportiamo alcuni punti chiave del progetto messi in evidenza dagli autori e come le piattaforme possano dare un valore aggiunto al processo di insegnamento/apprendimento della matematica.

1.4.1 Apprendimento individuale e personalizzato

Una delle problematiche particolarmente avvertite nell'ambito delle pratiche formative è quella dell'*individualizzazione* dell'insegnamento. In prima istanza, si può asserire che l'individualizzazione concerne il grado di adeguatezza dell'istruzione rispetto alle caratteristiche degli studenti, la misura in cui vengono create condizioni di apprendimento adatte ai diversi alunni. Ci si riferisce in particolare all'*individualizzazione a livello didattico* intesa da Baldacci (1999, 2002) come l'adattamento dell'insegnamento alle caratteristiche individuali dei discenti, tramite specifiche e concrete procedure didattiche. Altrettanto importante obiettivo delle pratiche formative è la *personalizzazione* dell'insegnamento, intesa come quell'insieme di attività volte alla stimolazione e al raggiungimento del massimo delle capacità intellettive dell'individuo specifico.

E' chiaro che tanto l'individualizzazione quanto la personalizzazione è piuttosto impraticabile a livello di classi universitarie con la sola modalità tradizionale della lezione in aula, dato l'elevato numero di studenti, soprattutto del primo livello di laurea. In tale ambito, l'attività didattica effettuata dal docente viene progettata su parametri generali, come ad es. provenienza scolastica, conoscenze pregresse, attitudine allo studio della matematica, abilità di studio, che provengono da una media di dati, e che ha poco spazio per adattarsi alle esigenze o problematiche reali del singolo individuo.

In questa direzione invece la modalità del *blended learning*, ovvero l'affiancamento di attività on-line a quelle tradizionali, sembra portare un contributo notevole. E' ormai superata la convinzione pedagogica secondo cui esisterebbero trattamenti di istruzione migliori in assoluto e produttori di migliori risultati, l'apprendimento infatti è il risultato di un processo il cui fulcro è il binomio persona-situazione, in cui influiscono tanto i metodi di insegnamento quanto le differenze individuali (Boscolo, 2006).

Dal punto di vista dell'individualizzazione le procedure didattiche contenute nelle piattaforme dovranno assicurare agli allievi la conquista delle competenze basilari, attraverso una diversificazione dei percorsi di insegnamento. Dal punto di vista della personalizzazione, invece, si dovranno prevedere attività didattiche che garantiranno a ogni individuo il raggiungimento di una propria forma di eccellenza cognitiva, attraverso specifiche opportunità di coltivare le proprie potenzialità intellettive. Per far sì che si sviluppino specifici talenti per ciascun allievo, è necessario perciò lasciargli possibilità di movimento, di scelta, di progettazione e di gestione delle situazioni cognitive.

In quest'ottica, le piattaforme di e-learning permettono di creare *opportune* situazioni di apprendimento adatte a *ciascun* allievo e il docente, o meglio l'autore (figura complessa che contiene al suo interno più competenze che vanno da quelle didattiche a quelle tecnologiche), non è solo colui che redige dei contenuti, ma diventa un organizzatore di contesti in cui i contenuti possono servire a uno scopo preciso (Maragliano, 2004).

L'individualizzazione/personalizzazione è possibile grazie al fatto che lo studente ha a disposizione dei materiali didattici di diverso tipo, come testi di lezioni, file multimediali, esercizi interattivi etc., I percorsi didattici possono essere individualizzati in base al profilo dello studente, con riferimento in particolare alle competenze man mano acquisite e allo stile di apprendimento. Questa individualizzazione/personalizzazione può essere fatta in maniera automatica dalla piattaforma, impostando opportuni parametri, oppure può essere costruita dallo studente stesso in corso d'opera. Infatti per ogni unità didattica lo studente può richiedere al sistema l'elenco delle unità didattiche alternative legate allo stesso concetto in studio. Inoltre lo studente può inserire annotazioni personali sulle varie unità didattiche, che vanno da semplici note testuali a video, audio, immagini. Ha inoltre un'area per la condivisione di materiale di supporto al corso e di link utili con altri studenti. In questo modo lo studente interagisce con il materiale di studio in un rapporto *tridimensionale*: non si limita a ricevere ed elaborare degli oggetti (come avviene nel caso del libro), ma ne produce di nuovi a partire da quelli messi a disposizione dalla piattaforma (Maragliano, 2000). Nella risorsa 'lezione', alla fine di ogni unità per passare a quella successiva è richiesto di rispondere a un questionario. In caso di risposte soddisfacenti lo studente verrà automaticamente

ammesso all'unità successiva, altrimenti dovrà rimanere nell'unità in cui si trova, con l'invito a rivederla, oppure potrà essere diretto verso un'unità di recupero. Le domande potranno riguardare la sola comprensione del testo oppure anche i contenuti specifici e possono essere di tipologie diverse, dalle domande a risposta chiusa a quelle a risposta aperta e agli esercizi interattivi. Le domande possono mettere in gioco diversi sistemi semiotici, comprese le rappresentazioni figurali. Questo punto è fondamentale perché allo stato attuale, la modalità preferita per chi sviluppa le unità è quella più semplice di inserire domande di solo testo. In tal modo però verrebbero sprecate alcune delle opportunità offerte dalla tecnologia e alimentati alcuni pregiudizi sulla matematica. Un limite di queste attività è che si prestano meglio alle domande a risposta chiusa. È evidente che un percorso didattico che tenga conto di quanto illustrato all'inizio non può rinunciare a domande che richiedano allo studente la costruzione di un procedimento risolutivo e di un testo esplicativo, anche al costo di rinunciare alla valutazione automatica. Sono in corso di sperimentazione modalità di costruzione di questionari che consentano l'inserimento di domande a risposta aperta, chiaramente con forme di autovalutazione al posto della valutazione automatica o con attività collaborative di valutazione dell'errore (il docente presenta le risposte errate e stimola una discussione per portare gli studenti a individuare e correggere gli errori). Nel contesto della personalizzazione, le domande a risposta aperta e l'individuazione / osservazione / valutazione dell'"errore" costituiscono il punto di partenza di nuove situazioni problematiche con le quali l'allievo potrà confrontarsi. Tali opportunità permettono anche di dare all'"errore" un significato educativo, utilizzandolo produttivamente nella piattaforma e non riproponendo una semplice ripetizione di ciò che era già stato presentato precedentemente (interventi che di solito risultano inefficaci). *«L'errore non è solamente l'effetto dell'ignoranza, dell'incertezza, del caso (...), ma l'effetto di una conoscenza anteriore che aveva il suo interesse, i suoi successi, ma che ora si rileva falsa, o semplicemente inadeguata. Gli errori di questo tipo non sono erratici o imprevedibili, essi sono costituiti in ostacoli. Così tanto nel lavoro del maestro che in quello dell'allievo, l'errore è costruttivo del senso della conoscenza acquisita»* (Perrin Glorian, 1994). Lo scopo non è quello di cercare di evitare ogni possibile errore, dato che l'errore è connaturato con il processo di costruzione dei diversi saperi, ma piuttosto nel minimizzarne gli effetti, interpretandolo problematicamente e assumendone la necessaria consapevolezza.

Attività di questo tipo mettono in gioco processi costruttivi di risoluzione dei problemi, di interpretazione e conversione di rappresentazioni in diversi sistemi semiotici e anche aspetti metacognitivi, come il metodo adottato per studiare un testo. Un numero crescente di studenti sembra credere infatti che studiare significhi saper ripetere pezzi di testo, naturalmente con l'aiuto di parole-chiave, senza preoccuparsi di trarre almeno le inferenze più semplici dal testo.

1.4.2 Autovalutazione

Moodle, attraverso la risorsa *quiz*, offre la possibilità di progettare questionari con valutazione automatica delle risposte. Possibilità analoghe sono offerte anche da altre piattaforme. I formati ammessi per le voci del questionario includono:

- risposta multipla
- risposta sì/no
- corrispondenze
- riempimento
- risposta breve
- risposta numerica

Tranne gli ultimi due, si tratta di domande a risposta chiusa. Sono possibili diverse modalità di scelta delle domande (quiz mirati su un solo argomento, quiz di riepilogo di un intero corso, quiz le cui domande sono scelte casualmente su una o più categorie, ...) e diverse modalità di gestione da parte degli studenti. In generale, una volta completato il quiz, è previsto che lo studente abbia accesso alla risposta corretta eventualmente corredata di qualche parola di spiegazione. Le caratteristiche dei quiz presentano diverse opportunità didattiche, e anche qualche rischio. È compito di chi costruisce i questionari di sfruttare al massimo le opportunità e di rendere minimi i rischi. Queste due operazioni possono rendere molto laborioso il processo di costruzione dei questionari. Gli studenti, individualmente o a gruppo, possono utilizzare i questionari per valutare in tempo reale alcuni aspetti della loro preparazione. Questo può avere un forte impatto non solo sulle loro conoscenze, ma anche sulla loro sicurezza, sul cosiddetto *senso di autoefficacia*. La possibilità di provare e di sbagliare senza essere sottoposti al vaglio di un umano può sbloccare diversi studenti e contribuire a costruire un atteggiamento più positivo riguardo ai loro prodotti. Gli studenti possono anche usarli come strumenti di formazione: uno studente conscio di aver raggiunto una preparazione parziale o insufficiente può ugualmente rispondere a un questionario per integrare alcune conoscenze attraverso l'interazione con la risorsa.

I rischi nell'uso di risorse di questo tipo sono in parte legati alle modalità di preparazione delle domande. Infatti le domande che non contengono formule o immagini sono molto più facili e veloci da preparare. Inoltre il fatto che le domande sono prevalentemente a risposta chiusa richiede interventi di integrazione. Siamo convinti che questionari costituiti da sole domande a risposta chiusa non siano adeguati per valutare la preparazione degli studenti, in quanto le capacità di costruire una strategia risolutiva, di rappresentarla e di motivarla a parole sono fondamentali e vengono in questo modo trascurate. Inoltre questo avrebbe ricadute negative estremamente gravi: le

domande a risposta chiusa consentono in genere strategie poco legate alla comprensione dei temi oggetto di verifica (risposte a caso, per esclusione ecc.) con il rischio di indurre insegnanti e studenti a investire sempre meno sulle capacità di argomentare. Si tratta quindi da un lato di chiarire agli utenti dei quiz che le conoscenze e abilità valutate in quel modo sono soltanto una parte di quelle richieste in generale, dall'altro di fornire possibilità di autovalutazione anche per domande a risposta aperta. Questo potrebbe essere realizzato attraverso il modulo 'workshop', chiedendo agli studenti di inoltrare le loro risposte come documenti, mettendo poi a loro disposizione uno o più modelli di risposte adeguate per consentire l'autovalutazione.

1.4.3 Apprendimento cooperativo

Le piattaforme di e-learning forniscono in generale un numero di attività che coinvolgono interazione tra pari o tra studenti e tutori. Moduli come 'workshop', 'wiki' o 'task' di Moodle ben si prestano ad attività di questo tipo. Dal punto di vista della teoria della Didattica della Matematica, tutte queste attività possono essere collocate nel quadro del cosiddetto approccio "socioculturale" (o "discorsivo") (cfr. Kieran *et al.*, 2001).

L'idea è di supportare gli studenti con attività on-line, con vincoli di tempo, basate su gioco di ruolo, che li coinvolgano attivamente e li inducano ad affrontare gli argomenti di studio in una maniera più critica e meno mnemonica. E' ben noto che i processi cognitivi indotti dal parlare, discutere e spiegare ad altri (spesso in modi diversi) i concetti da apprendere promuovono un pensiero di più alto livello e di maggiore profondità (Johnson & Johnson, 1987). In questo quadro vogliamo porre l'accento sul cosiddetto "peer learning" (Boud *et al.*, 1999), inteso come l'uso di strategie di insegnamento/apprendimento in cui gli studenti imparano con e dagli altri senza l'intervento immediato del docente. Questo include anche il tutorato tra pari. Quando gli studenti in un gruppo agiscono sia nel ruolo di docente sia in quello di studente si parla di "reciprocal peer learning". Questo può includere anche processi di autovalutazione e di valutazione tra pari, dove gli studenti stessi sviluppano criteri per la valutazione. Falchiov (2001) ha analizzato le diverse tecniche di peer tutoring e i benefici ad esse legate, trovando che il "Guided Reciprocal Peer Questioning" porta miglioramento nella comprensione e nella memorizzazione dei contenuti delle lezioni, nel rendimento, nella facilità di rappresentazione e recupero di materiale.

In (Albano *et al.*, 2007) si può trovare un esempio di esperienza portata avanti nell'a.a. 2005-2006 nelle Università del Piemonte Orientale e di Salerno, che ben si inserisce nel quadro teorico appena descritto.

1.4.4 Comunicazione e discorso matematico

Le attività di tipo cooperativo mettono in gioco processi di comunicazione. Bisogna premettere una considerazione teorica: i processi di comunicazione e rappresentazione possono essere visti come successivi rispetto alla costruzione dei concetti, o come più strettamente collegati ad essa. Nel primo caso (ipotesi denotazionale) si ritiene che i concetti vengono costruiti indipendentemente e che i sistemi semiotici (comprese le lingue) servano per rappresentarli e comunicarli. Nel secondo caso (ipotesi strumentale) i concetti vengono costruiti anche grazie alla possibilità di utilizzare sistemi di segni e il pensiero stesso viene interpretato come una forma di comunicazione (Sfard, 2000, 2001). In un'ipotesi di questo tipo il linguaggio gioca un ruolo molto maggiore. Se infatti il pensiero è una forma di comunicazione e la formazione matematica è legata strettamente alla partecipazione a un discorso, allora anche il modo con cui i processi di rappresentazione e comunicazione sono realizzati diventa fondamentale. In altre parole la qualità del pensiero sarebbe fortemente influenzata dalla qualità del linguaggio. Una conseguenza didattica permanente di queste considerazioni è l'attenzione per la qualità dei linguaggi adottati e per la corrispondenza fra attività semiotiche e competenza linguistica dei partecipanti.

Questi punti di vista hanno anche altre conseguenze. Una è l'interesse per il linguaggio verbale (in termini tecnici, la lingua), che è centrale in tutte le attività matematiche, comprese quelle di ricerca, senza peraltro trascurare il ruolo di altri sistemi semiotici, come le notazioni simboliche, le figure o i grafici. Un'altra conseguenza è che tutte le analisi linguistiche vanno effettuate in un contesto di comunicazione tra persone, tenendo conto dei fenomeni che inevitabilmente si verificano e che sono studiati in modo efficace dalla pragmatica. La pragmatica, e in particolare la linguistica funzionale, forniscono strumenti in grado di interpretare in modo soddisfacente una grande quantità di comportamenti linguistici degli studenti, difficilmente spiegabili sul piano della sola logica o della grammatica. Un'analisi del linguaggio della matematica condotta dal punto di vista della pragmatica è stata sviluppata da Ferrari (2004) e ha messo in luce la debolezza di quelle posizioni che lo interpretano come il frutto dell'innesto di convenzioni specifiche e simboli su un non meglio identificato 'linguaggio naturale'. La componente verbale del linguaggio della matematica non è affatto 'naturale' ma è costituita da *registri* (cioè varietà d'uso) che presentano in forma massiccia ed estrema buona parte delle caratteristiche linguistiche dei registri evoluti, cioè delle forme usate in letteratura, nella saggistica e in generale nelle comunicazioni scritte (ma talvolta anche orali) fra persone colte. L'apprendimento della matematica non può però basarsi soltanto su registri evoluti: specie nella fase di concettualizzazione, sono necessarie forme linguistiche meno rifinite, tipiche dei registri colloquiali. Inoltre le funzioni cognitive dei testi orali e scritti sono profondamente diverse. Da questo punto di vista una piattaforma può fornire un'ampia gamma di possibilità di uso della

lingua, da usi molto vicini ai registri colloquiali (ad esempio in risorse del tipo 'forum') a usi più sofisticati (possibili in risorse del tipo 'workshop'). Va tenuto presente che il medium con cui viene realizzata la comunicazione gioca una funzione rilevante sia per le opportunità semiotiche che offre, sia per gli atteggiamenti che suscita; la modalità scritta, ad esempio, offre opportunità cognitive enormi ma può anche bloccare alcuni soggetti linguisticamente più deboli.

D'altronde l'e-learning attualmente trova nella comunicazione testuale (scritta) la sua forma prevalente, anche se tende progressivamente a incorporare elementi multimediali.

Il frame della comunicazione non è costituito dal corpo, dalla percezione posturale e dall'espressione fisionomica dei soggetti che interagiscono: la comunicazione è priva, o comunque povera, di elementi para-extralinguistici (Calvani & Rotta, 2003): ciò induce il linguaggio a una riconfigurazione nello sforzo di farsi carico della necessità di esplicitare attraverso la comunicazione scritta quanto nella comunicazione diretta passa in altre forme. In ogni caso oggi si assiste sempre in modo più forte alla nascita di un nuovo linguaggio caratterizzato da una propria specificità: il linguaggio utilizzato in una comunicazione mediata da computer è infatti a metà strada tra lo scritto e il parlato ad esempio per il ricorso a tratti iconografici quali smile o faccine, per l'approccio maggiormente dialogico, per la contrazione degli indici simbolici paralinguistici ed extralinguistici.

Per tal motivo attività e-learning, per le caratteristiche proprie del linguaggio del quale il pc risulta il maggiore artefice, può facilitare la mediazione per il passaggio ai registri colti e dunque all'interpretazione corretta di un testo matematico (Albano & Ascione, 2008).

1.4.5 Rappresentazioni e semiosis

La natura dei concetti matematici rende fondamentale la funzione delle rappresentazioni. Non solo non esistono accessi ai concetti della matematica che non siano mediati da rappresentazioni semiotiche, ma per alcuni concetti sono necessarie rappresentazioni particolarmente sofisticate. Nessuna rappresentazione visuale, ad esempio, può rappresentare, in modo puramente iconico e senza convenzioni esplicite, un insieme infinito, o la differenza fra una retta reale e una razionale. Duval (1995) sottolinea la necessità di non identificare i concetti con le loro rappresentazioni. Per ottenere questo è necessario disporre di almeno due rappresentazioni per ogni concetto. Naturalmente ciascuna rappresentazione svolge funzioni diverse e mette in luce proprietà diverse. Per Duval è fondamentale l'attività di conversione fra rappresentazioni. Il punto di arrivo è il coordinamento di rappresentazioni, cioè la capacità di gestire in modo veloce e flessibile più rappresentazioni di uno stesso concetto. Questo ha ricadute sia cognitive, in quanto consente di distinguere fra i concetti e le rappresentazioni, sia operative, in quanto consente di scegliere le

strategie risolutive più efficaci. Un problema che riguarda i numeri razionali, ad esempio, può essere risolto utilizzando la rappresentazione frazionaria o quella decimale, o entrambe allo stesso tempo. Un altro esempio è il concetto di funzione: una descrizione verbale, una formula o un grafico possono suggerire idee e metodi diversi. È importante che nei materiali didattici siano utilizzati diversi sistemi semiotici e siano frequentemente proposte attività di conversione, sia per le ragioni cognitive e operative menzionate sopra, sia per prevenire gli atteggiamenti di molti studenti (e non solo loro) che ritengono trascurabili le rappresentazioni visuali, o che le notazioni simboliche servano soltanto per eseguire algoritmi.

La tecnologia dell'informazione mette a disposizione in modo ampio e flessibile diversi sistemi semiotici. Questo vale a maggior ragione per le piattaforme. Per questo è necessario che i sistemi semiotici necessari per fare matematica (oltre alle lingue, ad esempio le notazioni simboliche, le figure geometriche e i grafici) siano facilmente accessibili e utilizzabili in modo flessibile dagli studenti.

1.4.6 Risvolti affettivi: il rapporto con la matematica e il rapporto col docente

È noto che l'apprendimento non è un processo puramente cognitivo, ma è influenzato da fattori affettivi, in particolare da convinzioni e aspettative. In (Albano, 2005) è presentata un'indagine a monte di corsi e-learning di tipo blended per indagare quali fossero le convinzioni e le aspettative rispetto a un corso non tradizionale per l'apprendimento della matematica. Si riportano brevemente alcuni risultati di interesse. Un'alta percentuale vede nel computer un maggiore *contatto* con il docente, il che sembrerebbe stridere col fatto che non si tratta di contatto fisico. Secondo l'autrice, la sensazione di maggiore contatto risiede nel fatto che il docente è sempre raggiungibile (tramite email per esempio) se lo si vuole contattare. Attraverso la presenza della piattaforma informatica il docente viene percepito più vicino, disponibile, etc. e questo ha influenza, a detta degli studenti, positiva sulla motivazione a studiare/partecipazione al corso. In ambito universitario questo è forse maggiormente sentito dato il gran numero di studenti rispetto alle classi delle scuole superiori e quindi a un rapporto quanto meno più anonimo tra docente e studenti. In effetti strumenti come quelli offerti dalle piattaforme di e-learning non solo avvicinano il docente, ma lo fanno in un modo meno formale, meno rigido, più "caldo" nel senso che il rapporto docente-studente diventa meno asimmetrico. L'aspettativa di maggior contatto col docente ha ripercussioni anche sul rapporto con la matematica, perché gli studenti vedono un'ulteriore opportunità di avere chiarimenti, quindi comprendere meglio la matematica..

A valle del corso blended, sono stati intervistati gli studenti che più si sono coinvolti nell'uso attivo della piattaforma e si è investigato anche sul se e in che modo una piattaforma di e-learning a

supporto di un corso tradizionale possa influenzare da un lato il rapporto con la disciplina del corso e dall'altro il rapporto col docente.

Dalle interviste emerge che il rapporto con il docente cambia, e cambia in meglio: in certi casi possono cambiare le convinzioni, l'idea che uno ha del docente, in altri casi addirittura la piattaforma aiuta a creare un rapporto che altrimenti è praticamente inesistente. Osserviamo che dal punto di vista motivazionale per lo studente è importante percepire che il docente abbia interesse a che lui impari, e che quindi senta in qualche modo che il docente mette in atto strategie che portino lo studente ad essere in grado di apprendere. Tra queste strategie viene ritenuta fondamentale la volontà del docente di comunicare con lo studente, volontà che non è affatto garantita dal semplice fatto che il docente va in aula e fa la sua lezione. Al contrario, proprio la modalità tradizionale di lezione universitaria, distante, poco interattiva, anonima, mista all'assenza di contatto (ovvero di comunicazione) col docente è da annoverarsi tra le cause di insuccesso e di abbandono degli studi.

Una piattaforma può costituire un canale aperto di comunicazione tra docente e studente. Il solo fatto che un docente affianchi al corso tradizionale uno su piattaforma di e-learning fa percepire quel docente come uno che ha a cuore l'apprendimento dei suoi studenti, che desidera comunicare con loro e a loro, e questo ha ovviamente un impatto positivo sulla motivazione dello studente ad apprendere. E' pur vero che il docente tradizionale ha comunque la disponibilità di un orario di ricevimento settimanale, ma questo ha dei vincoli che sono banalmente spazio-temporali, ma soprattutto ha dei vincoli dovuti all'asimmetria del rapporto docente-studente e al *contratto didattico*. Il portarsi nello studio del docente nel suo orario di ricevimento è di primo acchito percepito come "atto forte" che attiva dinamiche emozionali-affettive forti (ad es. la paura del giudizio, la timidezza, il senso di incapacità) che hanno a che fare con la percezione e la stima di sé. Non altrettanto si può dire del chiedere spiegazioni "al volo" a fine lezione o durante l'intervallo tra un'ora e l'altra. La differenza sostanziale tra i due momenti sta proprio nel diverso contesto in cui si realizza il rapporto docente-studente: in questo secondo caso, è come se lo studente andasse a chiedere chiarimenti a un "pari" che ha più esperienza, dove ciò che maggiormente conta è l'obiettivo cognitivo (capire, sciogliere i dubbi) che viene favorita da quello che comunemente viene descritto dallo studente come "vicinanza" del docente. La maggiore simmetria del rapporto col docente-on-line col tempo modifica atteggiamenti e convinzioni iniziali: accade che lo studente che interagisce molto on-line arrivi a *non avere più paura* di andare a chiedere spiegazioni durante l'orario di ricevimento e l'ansia stessa dell'esame (che non viene placata dalla sola padronanza della materia) si ridimensiona. Si crea così una sorta di piccola *comunità scientifica* costituita dagli studenti coinvolti attivamente nell'uso della piattaforma e dal docente, in cui sono cadute le barriere

non-cognitive a favore di atteggiamenti positivi che promuovono il raggiungimento di obiettivi cognitivi.

Capitolo II

Personalizzazione in ambienti e-learning

2.1. Introduzione

Oggi il tema della personalizzazione bene si intreccia con i profondi cambiamenti che stanno coinvolgendo i vari ambiti educativi: il passaggio da una didattica centrata sul docente a una didattica centrata sullo studente, porta ad allontanarsi sempre più da quei modelli di apprendimento stereotipati, dove gli studenti sono spinti a svolgere lo stesso compito con la stessa strategia e lo stesso metodo. In tale ottica sembra oramai superata la convinzione pedagogica secondo cui esisterebbero trattamenti di istruzione migliori in assoluto e produttori di migliori risultati, essendo l'apprendimento visto come il risultato di un processo il cui fulcro è il binomio persona-situazione, in cui influiscono tanto i metodi di insegnamento quanto le differenze individuali (Boscolo, 2006). L'attenzione alla dimensione personalizzata dell'apprendimento, sta, d'altro canto, portando a modifiche sostanziali nella gestione dei processi formativi: la cura nella progettazione didattica spinge a cogliere le complessità dei fattori che influenzano l'intero processo ed è maggiormente tesa a far emergere le caratteristiche peculiari di ciascuno.

È pur vero che allo stato attuale risulta poco praticabile la promozione di una didattica che tenga conto delle esigenze del fattore personalizzazione, soprattutto se si pensa alle modalità tradizionali di insegnamento in presenza per la gestione di un corposo numero di studenti. Il docente si troverebbe infatti da solo a costruire materiali ad hoc, a fornire in maniera immediata feedback specifici, ad interagire, ad personan con ogni singolo discente, a capirne le motivazioni, gli stati d'animo, i pensieri più intimi. È proprio all'interno di questa realtà, che l'eLearning ha tutte le carte in regola per divenire uno strumento in grado di concretizzare le esigenze richieste dagli attuali contesti formativi. Oggi infatti la rete e le tecnologie offrono opportunità uniche riguardo a questi aspetti, sia dal punto di vista dell'individualizzazione delle esigenze e profili anche per un numero qualsivoglia elevato di studenti, sia da quello dell'offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che possano dunque tener conto delle esigenze individuali di ciascun utente. In tale ottica, l'infrastruttura tecnologica potrebbe essere utilizzata non solo come fatto in maniera tradizionale, cioè *“per veicolare informazioni con tecnologie che abilitano la collaborazione, ma come mezzo*

capace di elaborare dati in maniera intelligente, in grado di supportare la gestione di processi di apprendimento dinamici che si evolvono e si adattano in relazione alle differenze cognitive individuali” (Adorni et al., 2007).

Dopo un’analisi sugli studi condotti in campo pedagogico sulla personalizzazione, il presente capitolo si concentrerà su cosa significa personalizzare l’eLearning, e sarà presentata una classificazione dettagliata degli artefatti che consentono tale personalizzazione in ambienti e-learning: gli adaptive web based educational system. Tra quelli disponibili, ne ho analizzato uno in particolare IWT (Intelligent Web Teacher), la piattaforma realizzata presso il Polo d’Eccellenza “Learning & Knowledge” dell’Università di Salerno. Infine, alla luce delle esistenti ricerche in ambito della didattica della matematica, ho avviato un’analisi critica dell’attuale approccio adaptive and web based, in particolare evidenziando la necessità di introdurre alcune specifiche che, per quanto riguarda l’apprendimento della matematica, risultano indispensabili nel processo di Instructional Design in percorsi formativi personalizzati.

2.2 Personalizzazione e apprendimento: un breve richiamo agli studi psico-pedagogici

Per meglio comprendere quanto sarà scritto nei successivi paragrafi, conviene richiamare alcuni concetti chiave legati allo studio sulla personalizzazione e sull’apprendimento in campo psico-pedagogico.

A tal proposito sembrano interessanti alcune citazioni, riportate in Calvani(2002): *“l’educatore avrà sempre da risolvere questo problema...qual’è la successione più naturale di idee, delle conoscenze e delle attività? In quale modo procedere meglio dal più semplice al più difficile? Come fare perché ogni testa e ogni cuore diventino ciò che sono in grado di diventare? come stimolare il pigro? Come domare il precipitoso?...e in particolar modo, come fare tutto questo con un mucchio di persone i cui talenti, capacità, facoltà, predisposizioni, determinazioni sono differenti ma che devono essere educati allo stesso tempo?”* (Trapp, tratto da Schorr 1979) o ancora *“il sistema della divisione per classi ha avuto per modello l’organizzazione militare. Si basa sul postulato che si possa ordinare e dirigere lo sviluppo di un certo numero di cervelli esattamente come un ufficiale dell’esercito ordina e dirige i movimenti di una compagnia di soldati”* (Burk). Tali citazioni, per alcuni versi, potrebbero apparire dei giorni nostri, ma si rivelano in realtà molto meno recenti. La prima è di un autore del 1780, la seconda è del 1912 e mostrano come già da tempo fosse viva la

consapevolezza che esistono differenze nei soggetti che apprendono e che di queste si dovrebbe tener conto per l'allestimento di ambienti di apprendimento. In effetti, anche se è una tematica che ha suscitato un notevole interesse nelle ricerche sui processi formativi di questi ultimi anni, l'argomento personalizzazione non è una novità negli studi pedagogici, poiché già nella cultura novecentesca è stato osservato e analizzato sotto il concetto di individualizzazione da autori autorevoli quali Claparède (1920), Decroly (1929), Montessori (1920). Essi, attraverso i loro lavori, hanno proposto, sia in prospettiva teorica che pratica, una "scuola su misura" costruita in funzione alle caratteristiche, alle esigenze degli alunni caratterizzata da un metodo di insegnamento basato sull'interesse-bisogno dell'apprendimento. Successivamente, altri autori hanno arricchito il quadro già tracciato: alle ricerche di Kilpatrick (1994), Dottrens (1936) e Freinet (1967) va riconosciuto il merito di aver formalizzato criteri di insegnamento che tenevano in considerazione la necessità di individualizzare la didattica senza renderla individualistica.

Il vero grande limite di questi primi studi centrati sull'individualizzazione, consiste però nel non avere considerato ed esaminato la complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui. In primo luogo il disegno di adeguati percorsi formativi, non può prescindere da un'attenta analisi nei confronti di quegli aspetti della mente che gli approcci cognitivisti hanno osservato. In tale prospettiva la mente umana viene considerata come un "processore capace di elaborare informazioni" (Lindsay et al. 1983) - e quindi la conoscenza - *"come l'insieme di forme, strutture e processi responsabili delle manifestazioni comportamentali"* (Santoianni et al. 2003). Sono i cognitivisti a puntare l'attenzione su fattori dell'apprendimento quali la percezione, l'attenzione, la memoria, il linguaggio, il pensiero, la creatività, gli stili cognitivi, gli stili intellettivi e le conoscenze possedute.

In secondo luogo è necessario considerare l'aspetto sociale dell'apprendimento, essendo esso stesso un processo situato, cioè inserito in uno specifico contesto e influenzato dalle complesse relazioni sociali che, nell'interazione fra discente e docente e fra discenti, si attuano. Studi prodotti da approcci costruttivisti e in particolare dal costruttivismo sociale, ritengono che le persone costruiscono attivamente nuova conoscenza solo quando interagiscono con gli altri all'interno di azioni collaborative (Vygotsky, 1978). L'apprendimento collaborativo è quindi *"l'acquisizione da parte degli individui di conoscenze, abilità e atteggiamenti che sono il risultato di un'interazione di gruppo"* (Kaye, 1992).

Da quanto emerge da questa veloce panoramica si può dire che l'individualizzazione, che ha caratterizzato la "storia" negli anni 60'-80' tiene conto del grado di adeguatezza dell'istruzione rispetto alle caratteristiche degli studenti, la misura in cui vengono create condizioni di apprendimento adatte ai diversi alunni. Baldacci (1999, 2002) in particolare la definisce come

l'adattamento dell'insegnamento alle caratteristiche individuali dei discenti, tramite specifiche e concrete procedure didattiche. La personalizzazione invece, a differenza dell'individualizzazione, tiene conto, nella sua realizzazione, di tutti quei fattori trascurati dall'individualizzazione e che la rendono capace di stimolare ogni singolo studente al raggiungimento del massimo delle proprie capacità intellettive, cioè al raggiungimento di una propria eccellenza cognitiva (Baldacci, 1999, 2002). La personalizzazione inoltre, oltre a tener conto della complessità degli elementi capaci di condizionare le modalità di apprendimento dei singoli individui necessita, per la sua realizzazione, che tali fattori siano espressi dagli stessi studenti che dunque vengono a possedere la consapevolezza di scegliere almeno in parte il loro percorso di apprendimento: *“ciò infatti che in particolar modo caratterizza la personalizzazione è la consapevolezza presente nel soggetto che il percorso intrapreso è congruente con istanze profonde della propria persona in modo che gli avanzamenti che si compiono comportano una crescita contestuale più ampia sul piano dell'autonomia e dell'identità personale... Il percorso di apprendimento si presenta agli occhi del soggetto come appartenente ad un orizzonte di senso di cui egli stesso, entro certi limiti contribuisce a determinare”* (Calvani, 2002). In tal senso in un percorso di apprendimento personalizzato le scelte vengono, almeno in parte poste in essere dal soggetto stesso del suo tragitto, se pur attraverso le necessarie negoziazioni con i suoi interlocutori che siano essi il docente, il tutor o, in una prospettiva più “tecnologica”, la stessa macchina.

Da quanto sopra riportato, progettare un percorso didattico che tenga conto del fattore personalizzazione, significa dunque individuare e quindi valorizzare quelle caratteristiche di apprendimento dei singoli, lavorando in modo che lo studente sia in grado di dichiararle, esplicitarle le proprie preferenze e dunque di operare in modo libero alcune scelte sul percorso.

E' chiaro, come è già stato accennato nell'introduzione, che tanto l'individualizzazione quanto la personalizzazione è piuttosto impraticabile per un numero elevato di allievi, con la sola modalità tradizionale della lezione in aula. In questa direzione invece la modalità del *blended learning*, ovvero l'affiancamento di attività on-line a quelle tradizionali, sembra portare un contributo notevole. Va infatti sottolineato il valore aggiunto che la tecnologia può offrire in termini di personalizzazione dell'apprendimento sia dal punto di vista dell'individuazione di esigenze e caratteristiche anche di un numero elevato di utenti (cioè la designazione per ciascun'utente di un “profilo studente”), sia da quello dell'offerta di percorsi formativi accessibili e flessibili che bene si modellano per la creazione di percorsi di apprendimento che tengano conto delle esigenze di ogni singolo utente (Albano & Ferrari, 2007).

2.3 Personalizzazione e i sistemi adattativi e intelligenti basati sul web

I sistemi di didattica “Adattativi e Intelligenti basati sul web”(AIWBES) sono sistemi che hanno garantito un approccio all’e-learning differente dal semplice “just-put-it-on-the-Web” che ha caratterizzato fino al 1990 i corsi tradizionali in piattaforma (Brusilovsky & Miller, 2001).

Essi sono particolari sistemi capaci di venire incontro alle esigenze di ciascun individuo a partire dal suo profilo che rappresenta l’insieme delle sue preferenze, delle sue conoscenze pregresse, e lo fanno svolgendo alle volte lavoro che prima era caratteristica peculiare dell’essere umano, quale l’analisi di difficoltà, di misconcezioni, attività di tutoring ecc.

Essi hanno preso vita intorno al 1995 e i pionieri sono stati Brusilowsky, Shwarz e Weber seguiti immediatamente da De Bra, Nakabayashy, Okazaky, Watanabe e Kondo, che incrociarono i loro lavori e le loro idee l’un l’altro negli anni fino a arrivare a una stesura di varietà diverse di AIWBES e il loro inserimento nel campo dell’ “intelligenza artificiale nell’educazione” (AI ED Artificial Intelligence In Education).

La prima riflessione che viene spontaneamente da fare è sul nome, esso infatti utilizza due parole che sembrano sinonimi ma che in realtà non lo sono affatto. Il primo è “Adattativo” parola che ci porta a capire che il sistema si adatta alle esigenze dello studente, il secondo “intelligente” fa invece riferimento alle tecniche usate nel campo dell’AI (Artificial Intelligence– Intelligenza Artificiale).

Come ho appena riportato, essi sembrano sinonimi ma non lo sono affatto anzi esistono sistemi che sono adattativi ma non intelligenti e viceversa. In particolare, i sistemi solo “intelligenti” da un lato offrono lo stesso percorso di apprendimento a persone differenti, mentre i sistemi solo “adattativi” utilizzano tecniche che difficilmente possono essere connotate come “intelligenti”.

Gli AIWBES esistenti sono molto diversi comprendendo tutte le possibili tecnologie adattabili ed intelligenti con le quali si intendono i modi essenzialmente diversi di aggiungere la funzionalità adattabile e/o intelligente ad un sistema istruttivo (Brusilovsky, 1996).

Essi sono stati classificati, in una prima pubblicazione di Brusilovsky (1999) che è stata successivamente arricchita da Brusilovsky and Peylo (2003) e ancora dallo stesso Brusilovsky (1999/2001).

In base a tale classificazione, qui di seguito riassumo brevemente le loro caratteristiche che ho trovato dettagliatamente descritte nell’articolo di Brusilovsky & Miller (2001).

ITS (Intelligent Tutoring System) è un sistema intelligente che ha lo scopo di rappresentare la conoscenza e garantire l’interazione con lo studente. Un sistema ITS comprende: un modello cognitivo dello studente (student model) che permette al sistema di adattarsi progressivamente alle esigenze dello studente; un modello pedagogico (tutor model) ossia una rappresentazione delle

strategie di insegnamento che il sistema è in grado di attuare; una rappresentazione del dominio (domain model) oggetto dell'insegnamento; una componente per la comunicazione del programma con l'utente (Interface). I tipi più importanti di tecnologie di questo tipo sono: curriculum sequencing, intelligent solution analysis, and problem solving support. Li descrivo brevemente:

- Il *Curriculum Sequencing* ha come obiettivo quello di fornire allo studente la sequenza appropriata e individualmente progettata di temi e compiti da imparare (esempio: domande, problemi ecc.) aiutando lo studente a trovare un “percorso ottimale” attraverso il materiale di insegnamento. Esso è stato uno dei primi metodi ad essere implementato in AIWBES. Buoni esempi di Curriculum Sequencing sono ELM-ART (Brusilovsky, 1996) e CALAT (Nakabayashy et al., 1996), o ancora la piattaforma IWT che ho analizzato più in dettaglio nel paragrafo successivo.
- L'*Intelligent Solution Analysis* (analisi di soluzione intelligente) analizza le soluzioni di problemi istruttivi svolte dagli alunni. Diversamente dai verificatori “non-intelligenti” che possono dire solamente se la soluzione è vera o falsa, gli analizzatori intelligenti possono dire ciò che è sbagliato o incompleto e ciò che manca o lacune di conoscenza che possono essere responsabili dell'errore. Il sistema SQL-Tutor (Mitrovic, 2003), German Tutor (Heift, et al., 2001) e le più recenti versioni di ELM-ART (Weber, et al. 2001) le soluzioni migliori di questa tipologia
- L'*Interactive Problem Solving Support* ha come obiettivo quello di fornire allo studente aiuto intelligente in ogni passo del problem solving - dando un suggerimento e facendo eseguire il passo successivo allo studente. Comunque allo stato attuale una tale tecnologia non è molto utilizzata in un sistema Web a causa di problemi di realizzazione. ActiveMath (Melis, et al., 2001) perfeziona il supporto al problem solving interattivo col suo Omega proof planer.

AHS (Adaptive Hypermedia System) è un sistema che costruisce un modello di obiettivi, preferenze e conoscenze per ogni utente e usa questo modello per l'erogazione dei contenuti didattici. Il sistema supporta gli utenti nella loro navigazione all'interno del sistema suggerendo i link rilevanti per l'utente e fornendo commenti adattativi su link visibili all'utente.

le due tecnologie più diffuse dall' *AdaptiveHypertext and Hypermedia Systems* sono:

- L'*Adaptive Presentation* che ha come obiettivo quello di adattare il contenuto presentato in ogni nodo dell' hypermedia agli obiettivi degli studenti. In un sistema con presentazione adattabile, le pagine non sono statiche ma adattabilmente generate o assemblate per ogni utente. ActiveMath (Melis, et al., 2001) ha le caratteristiche di essere uno degli esempi esistenti e più avanzati di presentazione adattabile.

- L'*Adaptive Navigation* che ha come obiettivo quello di assistere lo studente nell'orientarsi nell'ipertesto e navigare modificando l'aspetto dei collegamenti visibili. Per esempio, un sistema di ipermedia adattativo può, nello stesso tempo, ordinare, annotare o in parte può nascondere i collegamenti della pagina corrente per più facilmente far scegliere allo studente dove andare successivamente. Tali azioni hanno lo stesso obiettivo del *Curriculum Sequencing* - aiutare cioè gli studenti a trovare un "percorso ottimale" attraverso il materiale di insegnamento porgendosi però in modo meno direttivo e più "cooperativo" :guida gli studenti mentre lascia loro la scelta del successivo articolo che vogliono imparare e del successivo problema da risolvere. Essa è la prima tecnologia introdotta negli AIWBES. Esempi ne sono KBS-Hyperbook (Henze, et al., 2001), ActiveMath (Melis, et al., 2001), ed ELM-ART (Weber, et al., 2003)

ICL (Intelligent Collaborative Learning) è un gruppo interessante di tecnologie che utilizzano le tecniche di AI per sostenere la cultura collaborativa. Per ora sono stati sviluppati tre tipi di tecnologie:

- Le tecnologie di *Adaptive Collaboration Support* e *Peer Help* tentano formare gruppi di persone affini per diversi generi di compiti che prevedano la collaborazione. I primi esempi includono la formazione di un gruppo per la soluzione dei problemi collaborativi (Hoppe, 1995; Ikeda et al. , 1997) e la ricerca del pari più competente per rispondere ad una domanda (McCalla, et al., 1997).
- Le tecnologie di *Adaptive Collaboration Support* tentano di offrire solo un appoggio interattivo in un processo di collaborazione che assista un singolo studente nel risolvere un problema. Un esempio di questa tecnologia si può trovare in Frasson, Mengelle, Aïmeur & Gouardères (1996).

ICM (Intelligent Class Monitoring): é un sistema che usa l'Intelligenza Artificiale per monitorare le azioni dell'utente e aiuta il docente nell'interpretazione dei comportamenti degli utenti stessi all'interno del sistema. In un contesto classe standard infatti il docente ha la possibilità di monitorare i comportamenti dello studente, cosa che non è semplice fare quando viene a mancare la presenza fisica. Gli Intelligent class monitoring systems cercano di utilizzare Ai per aiutare l'insegnante in questo contesto. Esempi di queste tecnologie sono HyperClassroom (Oda, et al., 1998).

2.4 Un esempio di piattaforma intelligente e adattativa: IWT

La piattaforma IWT è un sistema di didattica adattativa e intelligente italiano, che può essere classificato come tutoring system, nato dalle esperienze di ricerca del Polo di Eccellenza per l'apprendimento⁷ condotte in Europa e capaci di inglobare tecnologie all'avanguardia, idee innovative e standard emergenti nel settore dell'e-learning. La piattaforma IWT è attualmente distribuita come prodotto commerciale da MOMA.

Essa nasce dalla considerazione che ogni contesto didattico necessita della propria soluzione di e-learning specifica. In particolar modo il suo sviluppo, essendo utilizzato in modo massiccio ad ingegneria su corsi scientifici, con una particolare attenzione per la matematica, è stato molto spinto per apprendimento di questa materia; al suo interno infatti sono stati sviluppati molti applicativi per facilitare l'apprendimento dei concetti matematici.

La caratteristica peculiare della piattaforma è la sua capacità di creare, gestire e aggiornare in itinere, in maniera automatica, per ogni studente, unità di apprendimento personalizzate⁸ sulla base delle seguenti caratteristiche principali (Albano et. al. 2007a, Albano et. Al. 2006):

- *Il modello di conoscenza (KM)* che rappresenta il computer e tutte le informazioni associate al materiale didattico disponibile. Questo modello viene realizzato in piattaforma grazie all'uso di ontologie che formalizzano il dominio di conoscenza attraverso la definizione dei concetti ad esso appartenenti e le relazioni sussistenti tra questi ultimi, in sinergia con i metadata e i learning object associati.
- *Il modello (o profilo) studente (LM)* che rappresenta le informazioni che il pc "immagazzina" su ogni singolo studente, sulle sue conoscenze pregresse e su quelle gradualmente acquisite durante i percorsi di apprendimento, sulle sue preferenze di apprendimento (ovvero informazioni che riguardano lo stile cognitivo, come ad es. livello di interattività, tipo di media, l'approccio didattico, la densità semantica, ...). È composto da

⁷ Il Polo di Eccellenza nel settore ICT si è sviluppato nella Valle dell'Irno (Salerno – Avellino) notevolmente negli ultimi dieci anni riuscendo a ricoprire l'intera filiera dell'innovazione dalla ricerca di base alla ricerca industriale, dallo sviluppo precompetitivo allo sviluppo industriale e alla commercializzazione. Esso nasce sulla base di un modello nazionale di sviluppo e occupazione per il Mezzogiorno, si afferma in Europa con progetti di grande prestigio e rilievo, mantiene un costante rapporto scientifico con gli USA e con i paesi dell'EST attraverso programmi di cooperazione internazionale, si candida ad assumere un ruolo centrale nella cooperazione coi paesi che si affacciano sul Mediterraneo. Il Polo si caratterizza per la profonda sinergia tra il mondo universitario, il mondo della ricerca industriale e le PMI High-Tech. Il mondo universitario è rappresentato dal DIIMA, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università di Salerno, dal Centro di Eccellenza su Metodi e Sistemi per l'Apprendimento e la Conoscenza. Il mondo della Ricerca Industriale è rappresentato principalmente dal CRMPA, Centro di Ricerca in Matematica Pura ed Applicata e da Siemens Informatica.

⁸ Una unità di apprendimento è un qualsiasi "oggetto educativo" delimitato, come ad esempio un corso, un modulo o una lezione strutturata come una sequenza di learning objects o più futuristicamente di learning activities.

tre elementi: lo stato cognitivo, l'insieme delle preferenze cognitive e l'insieme regole di evoluzione

Nel seguito spiegherò più in dettaglio in cosa essi consistono e quali sono i tools per la loro implementazione in piattaforma.

2.4.1 Modellazione della conoscenza

IWT consente ai docenti di definire e strutturare i domini di conoscenza attraverso la costruzione di ontologie e l'associazione dei contenuti alle risorse, (costituite per la gran parte da learning objects) tramite l'ausilio di metadata. Cerchiamo di esprimere il significato di ciascuno di questi elementi sopra menzionati.

Ontologia: Il significato della parola "Ontologia"⁹ crea molte controversie¹⁰. Nell'ambito dell'information technology viene intesa come una rappresentazione generale della conoscenza di uno specifico dominio in termini di entità e interazioni tra di esse. Nella piattaforma sono utilizzate per formalizzare il dominio di conoscenza attraverso la definizione di concetti e di relazioni tra essi. Gli ingredienti chiave di un'ontologia infatti sono un dizionario di termini di base e un insieme di relazioni che consentono di connetterli. Il dizionario, in particolare, è l'insieme dei concetti del dominio di conoscenza dove per concetti si intendono gli argomenti della materia oggetto dell'apprendimento. Ad esempio della materia "Aritmetica" i concetti sono "Addizione", "Sottrazione", "Moltiplicazione" e "Divisione". Inoltre un'ontologia è caratterizzata da un insieme di relazioni ben definite che legano tra loro gli elementi del vocabolario che la caratterizzano. Esempi di relazioni binarie includono: essere sottoparagrafo, essere prerequisito.

In IWT il docente può definire e strutturare al suo interno il dominio di conoscenza attinente al suo insegnamento, semplicemente costruendo il suo dizionario, composto dalla lista di termini che stanno a rappresentare i concetti rilevanti dell'ambito disciplinare. A partire da tale dizionario può essere costruita una ontologia attraverso l'uso di una schematizzazione grafica. In figura 2.1 è mostrato un esempio di ontologia in IWT per l'algebra lineare, nella quale i nodi del grafo stanno a

⁹ "Ontologia" branca fondamentale della metafisica, è lo studio dell'essere in quanto tale, nonché delle sue categorie fondamentali. Il termine deriva dal greco οντος, "ontos" (participio presente di ειναι, "einai", il verbo essere) più λογος, "lògos". Significa letteralmente "discorso sull'essere",

¹⁰ Informazioni sulle Ontologie e sulla condivisione della conoscenza possono essere reperite al sito del *Knowledge Systems Laboratory* dell'Università di Stanford: <http://www.ksl.stanford.edu>. In particolare le diverse accezioni del termine vengono spiegate in: <http://www.ksl.stanford.edu/kst/what-is-an-ontology.html>. Un approccio più formale allo studio delle ontologie è dato nell'articolo **Formal Ontology and Information Systems** reperibile all'indirizzo: <http://www.ladseb.pd.cnr.it/infor/Ontology/Papers/FOIS98.pdf>.

rappresentare i concetti (scelti tra quelli definiti nel dizionario) mentre gli archi rappresentano le relazioni tra i concetti.

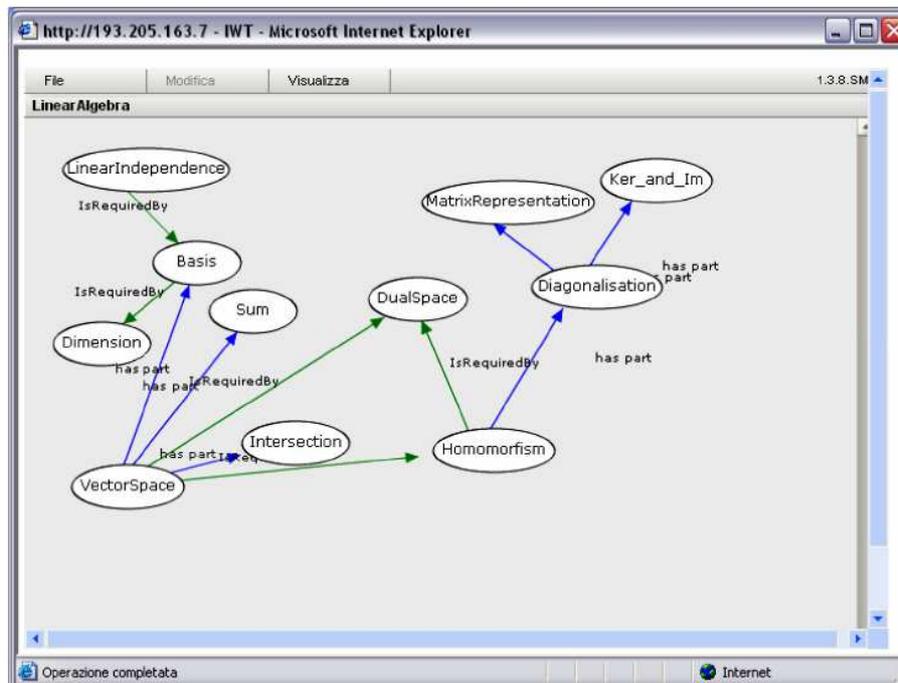


fig. 2.1 Un esempio di ontologia in IWT

IWT prevede la possibilità di collegare due o più concetti del dizionario del dominio di conoscenza in esame tramite l'ausilio di vari tipi di relazioni, che però si possono ricondurre essenzialmente a due classi che sono "decomposizione" (essere sottoparagrafo di....) e "ordine" (essere prerequisito di...). Per la rappresentazione delle ontologie IWT utilizza un linguaggio di descrizione standard: SHOE. Data però la non immediata accessibilità di tale linguaggio da parte ogni singolo docente, nella piattaforma è stato previsto un visual tool che consente di creare in maniera semplice e immediata le ontologie.

Metadata: i metadata¹¹ sono molto difficili da definire, vi sono infatti parecchie definizioni che sottolineano uno o un altro aspetto degli oggetti in questione. Nonostante ciò la definizione più comune dei metadata sembra essere quella ottenuta dalla traduzione alla lettera del suo corrispondente in lingua greca: "Data about data are referred to as metadata."¹² Essi sono utilizzati, come ho sopra accennato, per facilitare la gestione e l'utilizzo dei dati attraverso la catalogazione delle loro caratteristiche. Nel contesto specifico della piattaforma in esame i metadata possono

¹¹ Deriva da una antica parola greca che significa letteralmente "circa la sua categoria" per cui metadata viene a significare "informazioni sui dati"

¹² Per esempio: "12345" è una stringa, che senza alcuna altra informazione di contesto non ha significato. Se invece alla stringa "12345" si dà un nome che le dia significato (metadata) ad esempio il codice di avviamento postale, si può pensare che tale numero si riferisca ad una particolare città.

essere considerati come etichette che contengono informazioni descrittive riguardanti la risorsa e vengono usati per: condivisione e riuso della risorsa e per associare la risorsa al dominio di conoscenza. Un esempio di metadata in IWT è quello riportato in fig. 2.2 dove si trovano vari campi divisi in informazioni didattiche e informazioni tecniche. Tra le informazioni didattiche vi sono i campi che qui di seguito brevemente descrivo:

- **Concetto:** che è il campo che permette l'associazione della risorsa con il dominio della conoscenza (ontologia). Esso contiene il nome del dizionario di riferimento (in qualche senso è il nome della materia=dominio di conoscenza) e il nome del concetto del dizionario scelto, a cui si riferisce il LO.
- **Tipologia di risorsa didattica:** che può essere un testo, una lezione, un esperimento, una simulazione, un esame, un grafico, una autovalutazione, una figura, delle slide, un esercizio, un questionario ecc.
- **Contesto didattico:** È l'ambiente di apprendimento tipico dove si intenda che l'uso del LO abbia luogo. Può assumere valore: scuola media inferiore, superiore, altro.
- **Fascia di età:** È l'età tipica degli utenti a cui è consigliata la risorsa
- **Tempo:** È il tempo tipico o approssimativo che serve per lavorare con la risorsa
- **Tipo di interazione:** È il tipo di interazione supportato dal LO. Può assumere valore: espositivo, misto, attivo, non definito. In una risorsa *espositiva*, il flusso di informazioni va dalla risorsa al discente, seguendo il paradigma del learning- by- reading. Esempi sono saggi, videoclip, tutti i tipi di materiale grafico, documenti ipertestuali. In una risorsa *attiva*, l'informazione va invece generalmente dal discente alla risorsa seguendo il paradigma del learning- by- doing. Esempi sono esercizi, questionari, simulazioni
- **Livello di interazione:** È il livello di interattività tra l'utente finale e il LO. Varia da un livello di interazione molto basso and un livello alto.
- **Difficoltà:** Indica quanto difficile è il lavoro da fare con il LO rispetto al target tipico di audience. Varia da molto difficile a molto facile.
- **Densità Semantica:** È la misura dell'utilità del LO comparata rispetto alla sua grandezza (size) o durata. Anch'essa varia da molto alto a molto basso.

The screenshot shows a web-based interface for managing metadata. At the top, it indicates the user is in 'Risorse: Gestione' and viewing 'DI-TeoremaSpettrale'. Below this, there are tabs for 'Informazioni Generali', 'Contenuto', and 'Metadata', with 'Metadata' being the active tab. The main area is titled 'Informazioni didattiche' and contains several fields:

- Concetto*:** A dropdown menu with 'AlgebraLineare2' selected and a secondary dropdown with 'TeoremaSpettrale' selected.
- Tipologia risorsa didattica*:** A dropdown menu with 'TESTO' selected.
- Contesto didattico*:** A dropdown menu with 'ALTRO' selected.
- Fascia d'età*:** A dropdown menu with '18-30' selected.
- Tempo impiegato su un Learning Object*:** Input fields for 'hh 00', 'mm 10', and 'ss 00'.
- Tipo di interazione:** A dropdown menu.
- Livello di interazione:** A dropdown menu.
- Difficoltà:** A dropdown menu.
- Densità semantica:** A dropdown menu.
- Note didattiche:** A dropdown menu with 'IT' selected and a text input field.

fig. 2.2 Un esempio di metadata in IWT

Tra le informazioni tecniche troviamo i campi:

- **Dimensione:** È la grandezza della risorsa digitale reale (non compressa) misurata in byte
- **Tipo di file associato:** È il formato del file associato alla risorsa. Può essere usato per identificare il software necessario per accedere alla risorsa.
- **Durata:** È il tempo (in secondi) che prende la risorsa fruita in modo continuo. È particolarmente utile per suoni, filmati, animazioni.

Le risorse, i learning object: Negli anni si sono avute numerose definizioni di questi “oggetti di apprendimento”, non sempre condivise da tutti, tra le quali la più accreditata sembra essere quella di David Wiley che considera i learning object come “*any digital resource that can be reused to support learning*”. Essi sono elementi creati sotto il paradigma della programmazione ad oggetti, che esalta la creazione di componenti, chiamati oggetti, che possono essere utilizzati e riutilizzati (Dahl & Nygaard, 1966) in più contesti.

Le caratteristiche essenziali che un LO deve necessariamente avere sono la combinazione e la granularità. Per combinazione si intende la possibilità dei computer agents di comporre in modo semplice, efficace, automatico e dinamico lezioni, anche personalizzate a seconda delle esigenze del singolo utente. Per granularità si intende la durata e quindi le dimensioni che deve avere un LO. Dalla combinazione e dalla granularità conseguono altre caratteristiche, ovvero un Learning Object deve essere Condivisibile, Riutilizzabile, Digitale, Modulare, Portabile, Facilmente rintracciabile.

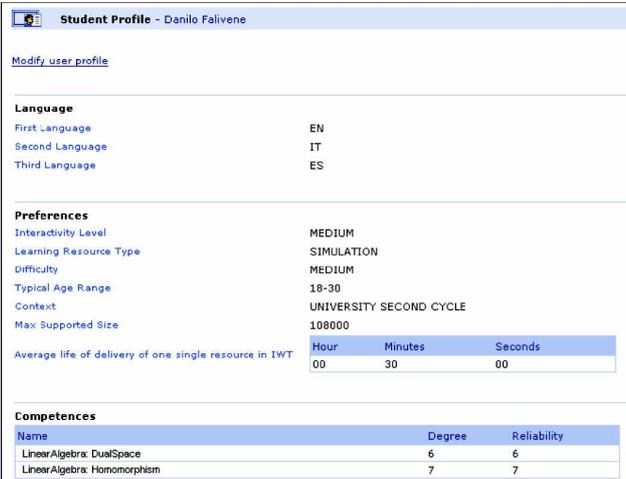
Organizzando opportunamente sequenze di vari LO si può giungere ad un percorso formativo "personalizzato", che rappresenta poi lo scopo della particolare piattaforma in esame. Lo slogan dei learning object infatti è quello che sottolinea la possibilità di essere utilizzati per modellare il

percorso sulle esigenze di chi apprende (Just for you) di essere facilmente raggiungibili (Just in time) e di prendere solo quello che serve (Just enough).

In IWT sono presenti dei tools che consentono di creare o importare LO da altri ambienti come Microsoft Office suite – power point, Word e da un qualsiasi SCORM package esistente che utilizza IMS-Content Packaging v1.1.3 (IMS-CP, 2003). Ma per garantire che i LO siano aggregati e riutilizzati è necessario che essi siano “metadatabili” cioè che sia possibile standardizzare la loro descrizione. Per “metadattare” i LO, in IWT è attualmente in uso la versione 1.2.1 IMS Learning Resource Metadata standard (IMS-LRM, 2004). Attraverso IMS-LRM i LO sono catalogati come visto in fig 2. secondo alcune informazioni, quali il livello di interattività, la densità semantica, la difficoltà e la tipologia di del LO. Inoltre IWT prevede che il metadata che “etichetta” il LO, specifichi uno o più concetti del dominio di conoscenza in esame al quale il LO si riferisce. In tal modo, associando al LO uno o più concetti, si può supporre che il contenuto di tale LO lo “spieghi” con le modalità più o meno riportate nel metadata.

2.4.2 Modellazione dello studente

Molti dei sistemi adattativi e intelligenti prevedono la cosiddetta “modellizzazione dello studente” che avviene attraverso l’associazione a ciascuno studente di un “profilo” cioè di una collezione di alcune informazioni generali sullo studente quali ad esempio, le conoscenze acquisite, le preferenze dello studente concernenti la tipologia di contenuti, l’approccio didattico, il livello di interattività desiderata, la densità semantica, ecc(Koch, 1999). In fig. 2.3 ho riportato un esempio di profilo studente in IWT.



Student Profile - Danilo Falivene		
Modify user profile		
Language		
First Language	EN	
Second Language	IT	
Third Language	ES	
Preferences		
Interactivity Level	MEDIUM	
Learning Resource Type	SIMULATION	
Difficulty	MEDIUM	
Typical Age Range	18-30	
Context	UNIVERSITY SECOND CYCLE	
Max Supported Size	108000	
Average life of delivery of one single resource in IWT	Hour	Minutes
	00	30
		00
Competences		
Name	Degree	Reliability
Linear Algebra: DualSpace	6	6
Linear Algebra: Homomorphism	7	7

fig. 2.3 Il profilo utente

Ma come tali sistemi mettono in atto tal processo? come il profilo viene associato ad ogni singolo studente?

L'analisi da parte della piattaforma dei fattori caratterizzanti ciascun profilo è un processo in cui possono essere identificati due momenti: la profilazione esplicita e quella implicita. La profilazione esplicita deriva da dichiarazioni esplicite da parte dell'utente, tramite ad esempio la compilazione di un opportuno questionario; la profilazione implicita si definisce invece a partire dalle informazioni che il sistema utilizzato è in grado di "catturare" durante l'interazione con l'utente (History) e attraverso il suo comportamento (Behaviour). Le piattaforme eLearning aderenti agli standard del settore possono fornire una quantità enorme di dati per la profilazione implicita. Citiamo ad esempio alcuni parametri che vanno a costituire il log della sessione in una piattaforma: tempo trascorso all'interno di una lezione, risultati conseguiti se sono previste attività di valutazione automatica, controllo delle propedeuticità per garantire o negare l'accesso a moduli successivi, interventi nei forum, partecipazione alle sessioni sincrone.

In IWT la profilazione tanto esplicita quanto implicita dell'utente prevede l'analisi di due fattori:

- Preferenze cognitive: dati che spiegano come allo studente piace imparare, Consiste delle preferenze di ogni utente in relazione a parametri pedagogici . Esempi si trovano in fig. 2.4

The screenshot shows a 'Preferenze' (Preferences) window with a 'Competenze' (Competences) tab. The settings are as follows:

Lingua	IT
Contesto didattico*	ALTRO
Fascia d'età*	18-30
Tempo impiegato su un Learning Object	min. hh 00 mm 01 ss 00 max. hh 01 mm 00 ss 00
Difficoltà	MOLTO FACILE (selected) MOLTO DIFFICILE
Densità semantica	MOLTO BASSO (selected) MOLTO ALTO
Massima Dimensione Supportata	75000000 bytes
Velocità di connessione	1 Mbps
Tempo di attesa	10 minuti
Tipologia risorsa didattica*	ESERCIZIO
Tipo di interazione*	ATTIVO
Livello di interazione	MEDIO (selected) MOLTO ALTO

fig. 2.4 le preferenze dello studente

- Stato cognitivo: dati che comunicano cosa lo studente conosce del dominio in esame. Consiste dei concetti, relativi a un dominio, per cui lo studente ha la sufficienza e ne conserva la votazione. Esempi si trovano in fig. 2.5

Dizionario	Concetto	Voto
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	Determinante	5
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	MatriceAScalini	8
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	Matrici	7
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	MetodoDiCramer	8
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	MetodoDiGauss	9
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	OperazioniMatrici	6
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	Rango	7
<input type="checkbox"/> AlgebraLineare2	SistemaLineare	5

Numero di righe da visualizzare: 10

Pag. 1 di 1 Vai a pagina 1 Vai

fig. 2.5 lo stato cognitivo dello studente

Anche per il profilo utente esistono diverse iniziative e differenti standard che specificano gli elementi per descrivere le caratteristiche degli individui e i loro interessi. I più generici sono Friend Of A Friend¹³ e vCARD¹⁴; nell'ambito dell'e-Commerce è stato creato Interoperability of data for e-commerce systems¹⁵ e nel contesto Educational - dove numerose organizzazioni¹⁶ che operano nel settore dell'eLearning lavorano per la standardizzazione della profilazione e modellazione degli utenti - molti sono in modelli realizzati (ad esempio eduPerson¹⁷, Universal Learning Format¹⁸, Gestalt¹⁹), ma due sono i più significativi: *IEEE Public and Private Information (PAPI)*²⁰ e *IMS*

¹³ G. Grimnes, P. Edwards, A. Preece: "Learning Meta-Descriptions of the FOAF Network", Computing Science Dept. King's College, University of Aberdeen, Scotland, 2004

¹⁴ <http://www.imc.org/pdi/>

¹⁵ <http://www.indecs.org>.

¹⁶ Le maggior organizzazioni che operano oggi nel settore dell'eLearning sono: **IMS Global Consortium (IMS)**: è un consorzio che produce specifiche basate su XML descrittive caratteristiche chiavi di corsi, lezioni, esercitazioni e gruppi di lavoro. Il lavoro dell'IMS è descrivere in modo uniforme le risorse di apprendimento con l'intento di facilitare la ricerca, la memorizzazione e lo scambio di informazioni. Le specifiche più note sono: IMS Meta-data, IMS Content Packaging, IMS QTI (Question and Test Interchange); **Advanced Distributed Learning (ADL)**: è un'organizzazione finanziata dal governo americano che realizza ricerca e sviluppo nel campo dell'eLearning. La pubblicazione maggiormente rilevante è lo SCORM (Shareable Content Object Reference Model: combina elementi di specifiche IEEE, IMS e AICC ed è il "pilastro" dell'istruzione a distanza odierna; **Aviation Industry CBT Committee (AICC)**: è un gruppo internazionale che crea linee guida per i CBT destinati all'aviazione. Hanno prodotto le linee guida CMI (Computer Managed Instruction); **IEEE Learning Technology Standards Committee (IEEE LTSC)**: all'interno dell'IEEE (Institute for Electrical and Electronic Engineers) è stata fondata una commissione LTSC atta a produrre specifiche e standard sulle tecnologie orientate al learning. La specifica più nota è il LOM (Learning Object Metadata) usata sia da ADL sia da IMS.

¹⁷ <http://www.educause.edu/eduperson/>

¹⁸ <http://xml.coverpages.org/ulfSpecification20001204.pdf>

¹⁹ <http://www.fdggroup.co.uk/gestalt/>

²⁰ <http://edutool.com/papi/>

*Learner Information Package (LIP)*²¹. Ho trovato una dettagliata descrizione di questi ultimi in Adorni et al. (2007) che qui di seguito riporto. Tali standard definiscono delle specifiche per descrivere le informazioni sull'allievo e sono finalizzati all'interscambio di queste informazioni tra sistemi diversi. I progettisti di entrambi gli standard, si sono concentrati su dati essenziali dell'utente garantendo la possibilità di estendere le informazioni e ampliare le specifiche.

Possiamo qui sottolineare alcune correlazioni fra le categorie degli standard PAPI e LIP.

Gli standard IEEE Public and Private Information (PAPI) e IMS Learner Information Package - (LIP) considerano le seguenti macro-categorie.

PAPI struttura le informazioni sull'utente in 6 categorie: Personal information, Relations information, Security, Preference, Performance, Portfolio.

LIP struttura le informazioni sull'utente in 11 categorie: Identification, Goal, Qualifications, Certifications and Licenses (qcl): Activity, Transcript, Interest, Competency, Affiliation, Accessibilità, Securitykey, Relationship.

È possibile individuare correlazioni fra le categorie dei due standard, e nel seguito tali correlazioni vengono evidenziate:

(PAPI) Information – (LIP) Identification. Dati identificativi ed anagrafici dell'utente: Nome e Cognome, Età, Indirizzo Contatti informativi, Agente (rappresentati che possono agire in favore dello studente).

(PAPI) Security – (LIP) Securitykey. Dati specifici che riguardano le informazioni all'accesso dell'utente: password, rilevazioni biometriche.

(PAPI) Preference – (LIP) Accessibilità, Competency. Dati che riguardano l'accessibilità alle informazioni dell'utente definite da: linguaggio (competenze linguistiche dello studente), preferenze (cognitive, fisiche e tecnologiche), competenze (generali dello studente).

(PAPI) Performance – (LIP) Activity, Goal, Transcript. Dati che tengono aggiornate le informazioni specifiche sulla formazione dell'utente: riferimenti esterni alle attività svolte nel processo didattico, definizione dei materiali studiati, materiali sviluppati dagli studenti nel processo didattico, giudizi attestanti le capacità dello studente, risultati delle prove intraprese nel processo didattico.

(PAPI) Portfolio – (LIP) qcl, Interest, Affiliation. Dati che illustrano la storia dell'utente: qualifiche, certificazioni, licenze, hobby, interessi, affiliazioni professionali con organizzazioni dell'utente ed i ruoli associati.

(PAPI) Relations. Dati che forniscono informazioni dello studente in relazione ad altre persone coinvolte nel processo formativo: studente- studente, studente- docente

21 <http://www.imsproject.org/profiles/>

(LIP) Relationship. Dati che riguardano l'insieme delle relazioni definite tra lo studente e la sua identificazione, accessibilità, qualifica, competenze, obiettivi e interessi.

In particolare IWT adotta per la profilazione studente IMS-Learner Information Package (IMS-LIP, 2005) standard che, oltre a tener conto delle informazioni usuali sulle conoscenze acquisite e sulle preferenze, consente anche di memorizzare informazioni di tipo demografico e biografico. L'utilizzo di tale standard consente di riconoscere e dunque di esportare e importare profili studenti da altre piattaforme che lo adottano.

2.5 La creazione intelligente del learning path

Nel presente paragrafo, a partire da quanto riportato fin'ora, mostrerò come IWT crea un percorso di apprendimento personalizzato sulla base del profilo utente e sulla modellizzazione della conoscenza creati.

Il processo di costruzione di un percorso di apprendimento personalizzato è attivato da un docente che decide di creare un corso. I passaggi principali attraverso i quali tale processo viene messo in atto sono:

1. Fissare l'obiettivo cognitivo: la selezione del obiettivo cognitivo del percorso di apprendimento

In tale fase, l'insegnante sceglie una ontologia, rispetto a quelle esistenti in piattaforma, contenente l'obiettivo cognitivo del corso che si è prefissato. All'interno di quest'ultima egli seleziona, usufruendo del visual tool, gli "obiettivi cognitivi" per il proprio corso. La fig. 2.6 mostra l'utilizzo del visual tool in IWT per la scelta di questi ultimi che sono rappresentati dagli "ovali pieni".

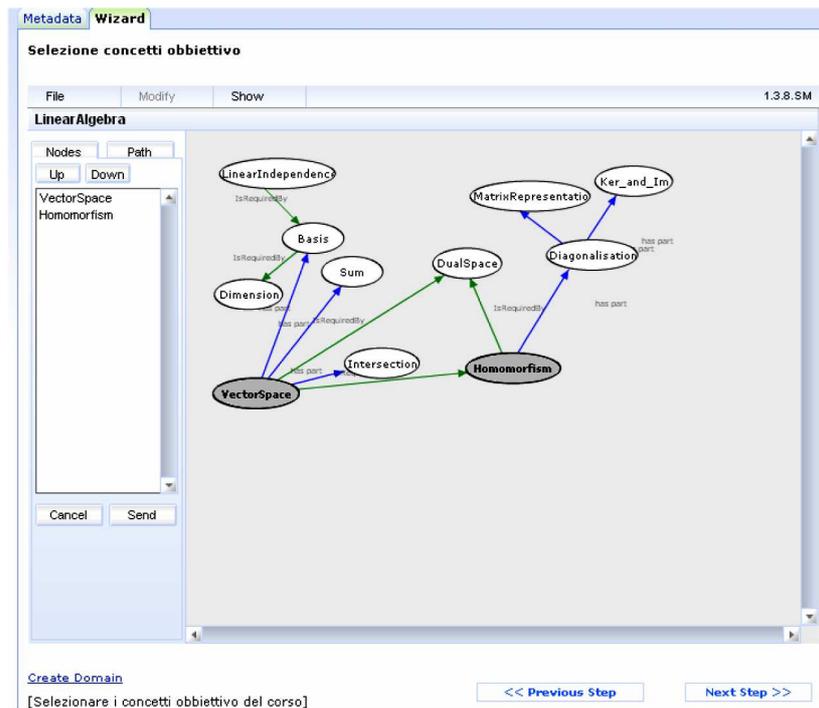


fig. 2.6 La creazione del learning path

Eventualmente in tale fase l'insegnante può decidere di aggiungere anche delle prove durante il corso, ad esempio a metà, alla fine o all'inizio dello stesso.

Bisogna però osservare come alcuni concetti del dominio di conoscenza specifico sono molto importanti per alcuni contesti educativi, ma possono essere considerati meno importanti per altri, così come il livello di approfondimento o il metodo didattico sono influenzati dall'ambiente e dagli obiettivi specifici del contesto di apprendimento. Per tale motivo a partire dalla ontologia e dal contesto scelti dal docente la piattaforma costruisce quella che si chiama "ontologia contestualizzata", che sarà caratterizzata dalla stessa struttura della ontologia di partenza ma con i concetti etichettati con metadata contenenti informazioni derivanti dal contesto. In tal modo, alla fine di questa fase, il dominio di conoscenza sarà opportunamente adattato al contesto nel quale l'esperienza didattica è condotta.

2. La creazione del learning path

Dopo la selezione da parte del docente degli obiettivi cognitivi, la piattaforma, sulla base dell'ontologia scelta, creerà il learning path, che consiste nell'elenco i concetti obiettivi del corso e di tutti i concetti che bisogna conoscere per arrivare a tali obiettivi cognitivi, ma non sarà ancora formalizzato in una sequenza di contenuti, e dunque di risorse, atte a creare il percorso di apprendimento personalizzato per ciascuno studente; tale realizzazione rappresenta infatti lo scopo della terza e più importante fase di questo percorso.

3. La creazione del percorso di apprendimento personalizzato

Quando uno studente accede ad un corso per la prima volta, IWT avvia un software chiamato LIA (Learner Intelligent Advisor) (Capuano et al., 2002, 2003) capace di generare in maniera automatica per ogni studente un percorso di apprendimento personalizzato in base alle informazioni raccolte dal profilo studente, dalle specifiche del corso, dai LO trovati nel repository della piattaforma. In particolare, la prima operazione eseguita da LIA è quella di usare l'ontologia contestualizzata, caratterizzata, come più volte ripetuto, dai concetti del dizionario e dalle relazioni esistenti tra essi che sono fondamentalmente di ordine e di decomposizione. In particolare, i concetti, obiettivi cognitivi del corso saranno preceduti da tutti i concetti collegati ad essi dalla relazione d'ordine "essere prerequisito". A partire da ciò la seconda operazione che LIA esegue è quella di eliminare dal percorso di apprendimento quei concetti che, lo studente, per il quale si progetta il percorso personalizzato, già conosce. Tale conoscenze pregresse sono dedotte da LIA attraverso l'analisi del profilo studente. In tal modo la piattaforma costruirà, a partire dall'ontologia contestualizzata, una sequenza di concetti necessari da apprendere per lo specifico studente per arrivare agli obiettivi cognitivi prefissati, cioè andrà a ricavare da una ontologia contestualizzata una personalizzata. L'ultima operazione eseguita da LIA è la selezione e la composizione di una sequenza di opportuni LO capaci di spiegare, tutti i concetti contenuti nell'ontologia personalizzata. LIA deve associare, ad ogni concetto contenuto nel percorso, un LO scelto all'interno del repository. In generale, all'interno della repository, sono presenti più LO capaci di spiegare lo stesso concetto. LIA sceglierà tra i tanti, quello che meglio incontra le preferenze dello studente esplicitate nel profilo. Alla fine di questo processo si otterrà il percorso di apprendimento personalizzato caratterizzato da una sequenza di concetti che lo studente ancora non conosce che si traduce in una sequenza di risorse che spiegano tali concetti avvicinandosi alle preferenze cognitive dello studente. Alla fine di questo percorso IWT avvierà la sequenza di LO assemblata da LIA, fornendo agli studenti un particolare ambiente riportato in fig. 2.7, nel quale essi possono studiare i contenuti proposti dalla piattaforma ma nel quale anche collaborare con altri studenti e con il tutor. Inoltre il learning path personalizzato può, qualora necessario, essere aggiornato in maniera automatica considerando i feedback prodotti dagli studenti nella fase di assestamento, se prevista. In caso di fallimento, è anche prevista una procedura automatica per sviluppare un percorso di apprendimento alternativo. In questo caso, il processo fin'ora descritto può ripartire generando e aggiornando il percorso di apprendimento.

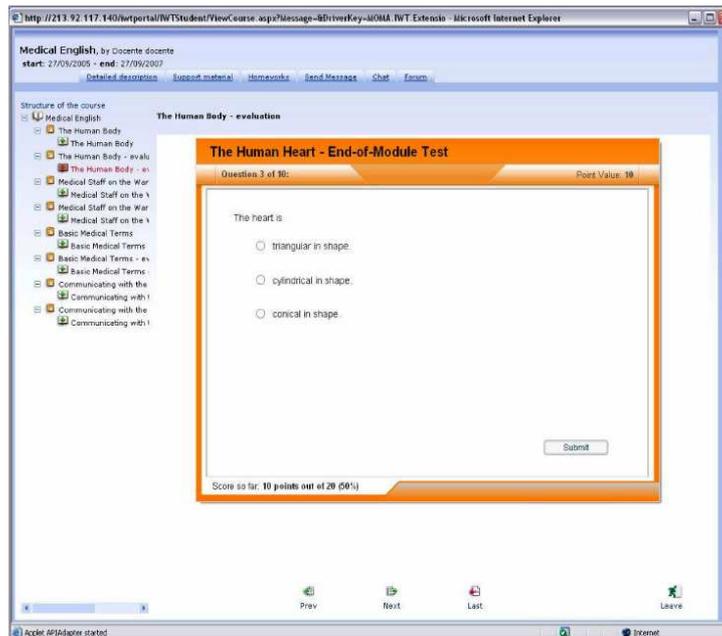


fig. 2.7 l'ambiente d'apprendimento personalizzato

2.5.1 Un esempio elementare nell'ambito del calcolo

La figura 2.8 fornisce un esempio di come la piattaforma costruisce un percorso di apprendimento personalizzato, a partire dalla ontologia sui concetti matematici elementari quali addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

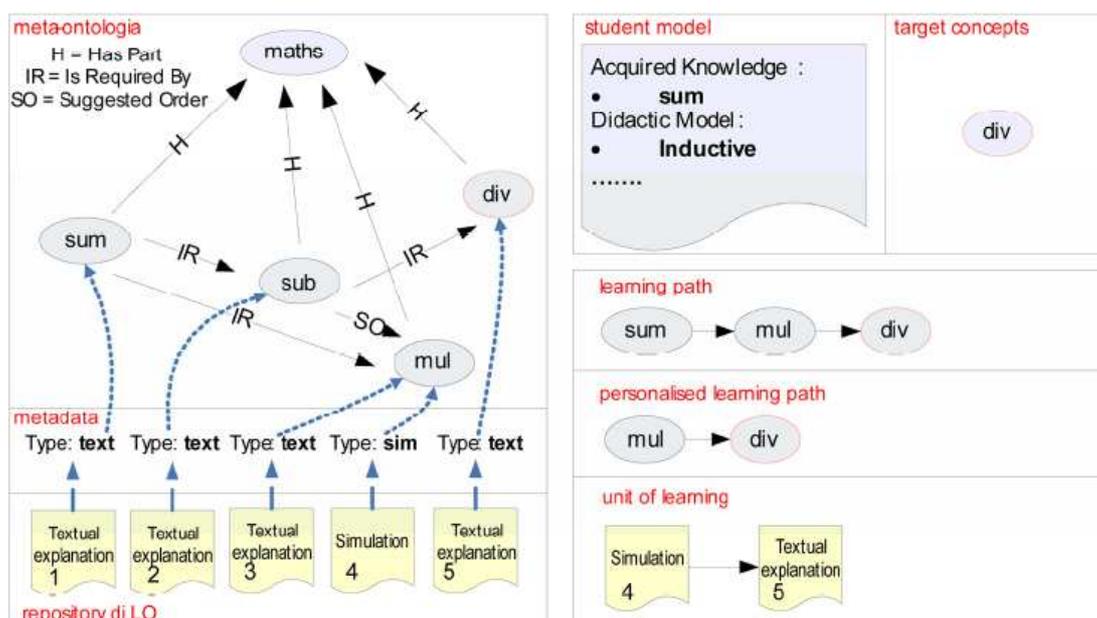


fig. 2.8 La creazione della unit of learning in IWT

L'ontologia riportata in figura 2.7 è caratterizzata da due relazioni d'ordine quali 'è prerequisito di' e 'ordine suggerito', e una relazione di decomposizione chiamata 'ha come parte'. Mi metto ovviamente nel caso più semplice in cui la repository di IWT contenga già alcune LO che possono spiegare i concetti della ontologia, in particolare suppongo che il concetto di moltiplicazione sia spiegato da due LO di tipologie differenti, come "spiegazione testuale" e "simulazione". In tale contesto suppongo ad esempio che l'insegnante scelga di costruire un corso che ha come obiettivo cognitivo la "divisione". Alla prima fruizione da parte di ciascun singolo studente, LIA crea un percorso di apprendimento e poi lo rifinisce utilizzando la conoscenza già acquisita dallo studente. Nell'esempio riportato lo studente già conosce il concetto di somma che per tale motivo viene eliminato dal percorso di apprendimento; si ottiene così dall'ontologia contestualizzata quella personalizzata. Il passo successivo compiuto da LIA è quello di costruire la sequenza dei LO e dunque la realizzazione del vero e proprio percorso di apprendimento personalizzato. LIA cerca i giusti LO per ogni singolo concetto. In particolare, per il concetto di moltiplicazione vi è la possibilità di scegliere tra i LO 3 e 4. LIA sceglierà LO 4, essendo costituito da una simulazione che risulta essere in assonanza con le preferenze didattiche dedotte dal profilo studente(fig. 2.7).

2.6 Aspetti critici dell'attuale approccio adattative and intelligent web based

Come ho mostrato nei paragrafi precedenti, le tecnologie alla base dei sistemi di didattica intelligenti e adattativi quali ad esempio IWT, offrono l'opportunità di realizzare "automaticamente" dei percorsi di apprendimento personalizzati, grazie sia alla loro capacità di evidenziare i bisogni formativi di ogni singolo studente, tramite la creazione e delineazione di opportuni profili, sia alla loro offerta di un variegato numero di percorsi di apprendimento flessibili e accessibili. Essi, utilizzando una metafora, in ambito medico, non fanno altro che stilare, in maniera "automatica", la diagnosi della "situazione del paziente", sulla base della quale creare, la cura più adeguata per il suo "male", che, ovviamente, nel caso specifico, va a influire sull'apprendimento più o meno sensato di un determinato concetto.

Le opportunità che le tecnologie e-learning possono offrire al processo di apprendimento, in particolar modo per la personalizzazione, riguardano, come ho ampiamente mostrato, tanto gli aspetti cognitivi quanto la realizzazione pratica di certi aspetti che, in presenza, con molta fatica e

difficoltà si riesce a mettere in atto; basti pensare alla problematica del superamento della distanza fisica o ancora (e più attinente alle problematiche caratterizzanti la mia tesi) a quella della gestione di una vasta platea di allievi per la quale intraprendere interventi personalizzati. In particolare la “barriera” della gestione dei grandi numeri viene ben affrontata da questi sistemi proprio grazie agli automatismi che sono capaci di mettere in atto. Ma se gli automatismi da un lato aiutano ad affrontare situazioni concrete che molto probabilmente senza certi strumenti rinunceremmo a fronteggiare, è pur vero che dall’altro lato allo stato attuale il loro uso non tiene conto di tutti quei pericoli ai quali l’applicazione di un automatismo per la gestione dei comportamenti umani potrebbe condurre. D’altronde la ricerca scientifica su come progettare e costruire un sistema artificiale capace di “adattarsi al mondo esterno” è una sfida tuttora aperta in cui si sta cimentando un’ampia comunità scientifica internazionale costituita da ricercatori provenienti da discipline apparentemente distanti.

Prima di ogni cosa è doveroso tener conto, per l’analisi di tale approccio, che il processo di insegnamento-apprendimento è caratterizzato da connotati complessi dove entrano in gioco, un numero estremamente elevato di fattori che descrivono la mente umana e i modi di gestire rapporti tra essere umani che difficilmente possono essere schiacciati in aspetti inferenziali, se non perdendone dei pezzi e producendo banali conclusioni. Non a caso, l’intelligenza classica artificiale prima e le reti neurali poi, nell’ipotizzare che le funzioni del cervello potessero essere in qualche modo separate dalla struttura sottostante, cioè dalla struttura neuronale umana, ed essere trasferite mediante una trasformazione in algoritmi su un altro supporto quale quello delle macchine elettroniche e dei calcolatori, hanno più volte evidenziato, producendo risultati discutibili, come i due gradi di complessità non fossero per niente paragonabili. Non a caso le imitazioni dell’intelligenza artificiale classica, che riuscivano molto bene in compiti tipicamente formali, in compiti che riguardavano certe funzioni che l’uomo compie con grande disinvoltura invece fallivano (basti pensare al riconoscimento immediato delle immagini o il ragionamento di senso comune) (Corbi, 2002). Per i motivi suddetti l’uso di tali sistemi deve essere mediato da una continua e profonda tensione che sempre ricorda che la macchina non può sostituirsi completamente all’uomo, quindi ad una continua attenzione ai suoi limiti da gestire con accortezza.

Una volta esaminata la grossa difficoltà di gestione dei processi umani da parte della macchina, problema, come ho spora citato, del tutto aperto, mi sono soffermata sui particolari limiti di questi sistemi e come in qualche modo potessero essere arricchiti in modo da poter facilitare e rendere meno problematica la loro gestione didattica. Tali sistemi infatti, se pur ampiamente sviluppati dal punto di vista tecnologico, mancano ancora di una profonda analisi pedagogica delle loro potenzialità, sia per quanto riguarda le risorse didattiche adottate sia per quanto riguarda i fattori

considerati per la creazione dei profili. D'altronde, la storia della nascita e dell'evoluzione dell'e-learning in ambito educativo ha abbondantemente mostrato come in molti casi la tecnologia preceda i bisogni pedagogici.

Il primo problema abbastanza evidente è che sia la creazione delle risorse utilizzate (LO e LA) quanto dei profili risulta domain independent, cioè del tutto generali e dunque non inglobando le problematiche provenienti dal disciplinare richiamando così alla mente la parodia sui medici di Postman e Weingartner (1969) che consideravano la “pennicellina” come un ottimo rimedio, con la conseguente somministrazione della stessa per la guarigione di una qualsiasi malattia. Non è in dubbio l'esistenza di costrutti pedagogici invariati per ambito disciplinare di cui tener conto, ma risulterebbe riduttivo riferirsi a questi soli. Come infatti si tende alla personalizzazione poiché “la stessa cura” non è adeguata per ogni persona, così non è pensabile che lo stesso approccio, lo stesso intervento, sia pedissequamente applicabile per ogni disciplina. Nel caso particolare della piattaforma presa in esame nella mia tesi, come ho accennato nei paragrafi precedenti, essa è stata sviluppata con una particolare tensione per l'apprendimento della matematica e quindi dovrebbe tener conto degli assunti provenienti dalle ricerche in educazione per tale disciplina. D'altro canto, come ho mostrato nei capitoli precedenti, la ricerca in educazione matematica ha mostrato ampiamente la complessità del processo di insegnamento-apprendimento e dunque l'inadeguatezza di modelli di apprendimento unidimensionali. Come ben sottolinea Rogers, il processo di apprendimento «è un processo dai connotati emotivi e di percezione del sé, non è solo con l'intelligenza e la razionalità che si ha successo nell'apprendimento, ma un ruolo altrettanto importante è giocato dai risvolti emotivi e metacognitivi associati a tale processo» (Rogers, 1961). In effetti, un qualsiasi modello di apprendimento della matematica dovrebbe tener conto che i comportamenti degli studenti è influenzata da fattori che appartengono ad almeno tre livelli distinti (Di Martino & Zan, 2003): *il livello cognitivo*, che riguarda l'apprendimento di concetti e metodi specifici della disciplina, anche in relazione agli ostacoli individuati dalla ricerca e dalla pratica; *il livello metacognitivo*, che riguarda il controllo dei soggetti sui propri processi di apprendimento; *il livello non cognitivo²² o affettivo²³*, che riguarda convinzioni, emozioni e atteggiamenti, e tutti quei fattori che sono in molti casi cruciali nell'orientare le decisioni e i comportamenti del soggetto che apprende (McLeod, 1992).

²² è interessante notare come gli studi sulla relazione tra fattori affettivi e apprendimento sono nati proprio nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, ovviamente supportata da collaborazioni provenienti dai più svariati ambiti di ricerca in campo psico-pedagogico.

²³ Il termine “livello affettivo” o “livello non cognitivo” utilizzato da Di Martino e Zan è stato in seguito sostituito dal termine “peri-cognitivo” in Abano & Ascione (2007) per sottolineare il fatto che tale livello include fattori “affettivi”, ma anche cognitivi.

La tecnologia può giocare un ruolo in ciascuno di questi livelli, compreso quello affettivo, in quanto da un lato può influenzare profondamente convinzioni, emozioni e atteggiamenti di chi apprende, dall'altro è essa stessa oggetto di convinzioni radicate e può suscitare forti emozioni (Albano & Ferrari, 2008). Allo stato attuale però, come ho dettagliatamente riportato nei paragrafi precedenti, le piattaforme che prevedono la creazione del profilo studente, si riferiscono, in maniera più o meno profonda, essenzialmente allo stato cognitivo dello studente e alle sue preferenze (Albano et al., 2007), mentre non tengono in alcun modo in considerazione il livello affettivo.

In ambito tecnologico l'introduzione del tema dell'"affetto" e delle "emozioni" è avvenuto con la nascita dell'affective computing (Picard, 1998), che si prefigge come scopo quello di dare al computer l'abilità di riconoscere, capire e persino esprimere stati emozionali più disparati. In tale direzione sembrano interessanti le intenzioni di Anolli et al(2005) i quali aspirano a creare una piattaforma e-learning caratterizzata da "capacità affettive", create tramite l'utilizzo di un tutor virtuale in 3D, in grado di esprimere emozioni e sensazioni attraverso la mimica facciale, e di un sistema multimodale di riconoscimento di emozioni, capace di fornire alla piattaforma le informazioni sullo stato motivazionale e emotivo dello studente (quale interesse, curiosità, frustrazione, soddisfazione, tristezza, gioia). In ogni caso ancora molti sono i punti critici di tale approccio che è comunque tuttora agli stadi iniziali. In prima istanza, mi sembra giusto sottolineare che in tali lavori l'emotional recognition viene messa in atto attraverso l'individuazione, con macchinari abbastanza sofisticati (quali sensori che monitorano la temperatura della schiena, i movimenti incontrollati delle dita e degli occhi) di emozioni sporadiche, legate cioè ad un singolo momento apprenditivo, per questo non necessariamente stabili e dunque non necessariamente cause di un mancato apprendimento. Inoltre, allo stato attuale, l'approccio adottato nell'abito dell'affective computing, tiene conto, per la creazione dei feedback da produrre per gli studenti, solo degli aspetti puramente motivazionali del processo di insegnamento-apprendimento. Sicuramente gli aspetti motivazionali sono importanti e l'uso dell'e-learning, come ho ampiamente evidenziato nel capitolo introduttivo (Albano, 2005), impatta in modo ponderante sulla motivazione; le ricerche in didattica della matematica e più in particolare quelle su "mathematics & affect" però hanno ampiamente mostrato come l'importanza delle emozioni nel processo di insegnamento-apprendimento non possa essere ridotta ai soli aspetti motivazionali: *«un bimbo che impara a camminare, cade, si rialza, riprova di nuovo a camminare, nonostante cada e sbatta di nuovo, nonostante non abbia stimoli positivi, ma solo una gran colpo nel di dietro»* (Guidoni, 1985). Gli studi sugli aspetti affettivi in educazione matematica hanno radici relativamente non recenti. La necessità d'analisi della relazione tra fattori affettivi e apprendimento infatti sembra essere nata proprio nell'abito della ricerca in didattica della matematica, anche se poi il loro studio è stato

arricchito da collaborazioni con ricercatori dei più svariati ambiti di ricerca in campo psico-pedagogico. In Italia, Rosetta Zan si è interessata, in tutte le sue ricerche, agli aspetti affettivi nella loro visione globale, in particolare per prevenire e recuperare difficoltà in matematica. La Zan(2006), nello specifico, nei suoi studi ha mostrato come i fattori affettivi possono creare, se non opportunamente gestiti, delle formidabili “barriere affettive” all’apprendimento con la conseguente necessità di tenerli in considerazione contemporaneamente se non prima degli aspetti cognitivi.

Per quanto ho finora riportato sembra necessario arricchire i profili studente in modo che tengano conto dei fattori affettivi che finora sono stati trascurati per la loro creazione; quest’ultimo obiettivo rappresenta il cuore delle ricerche caratterizzanti la mia tesi di dottorato.

Ovviamente, una volta arricchiti i profili, è doveroso chiedersi, che tipo di percorso di apprendimento e dunque di risorse assegnargli. Sembra infatti alquanto inefficace migliorare di molto i profili per poi associare gli stessi feedback, cioè gli stessi learning path.

Inoltre, è doveroso sottolineare, come le risorse utilizzate da questi sistemi, essenzialmente caratterizzate da LO, riproducano il disegno implicito di tanti docenti basato sul modello di *trasmissione della conoscenza*, che si è dimostrato non solo non produrre risultati a livello locale della didattica della matematica, ma da tempo essere un modello fallimentare in generale. L’approccio LO infatti ha come focus primario l’erogazione (delivery) del contenuto, nel quale ogni singolo allievo viene visto come isolato; non a caso la piattaforma fornisce servizi per la collaborazione e l’interazione con il docente o tra pari, ma solo “fuori” dal Learning Path. Essendo un approccio basato sulla delivery dei contenuti il vero attore del percorso formativo diviene il Computer, unica autorità da cui viene il sapere (Koper, 2003). La ricerca cognitiva e quella socio-costruttiva d’altro canto hanno di molto cambiato questa visione dell’apprendimento. In particolare la ricerca cognitiva ha messo in evidenza come la conoscenza non possa essere trasferita, ma che per un apprendimento reale, debba essere ri-costruita all’interno di un quadro cognitivo (schema, modello mentale) da ogni individuo (Neisser, 1967). Inoltre la ricerca socio-costruttivista ha sottolineato come il dialogo e il contesto giocano un ruolo determinante per l’apprendimento (Vygotskij, 2001). Implicazioni di questi assunti sul “learning design” per ambienti e-learning sono molto prevedibili. Oggi infatti la tendenza è quella di porre maggiore enfasi sul *disegno di attività per i discenti* piuttosto che l’elaborazione di contenuto da trasferire attraverso la “lezione” del docente, facendo così spazio all’idea di “learning activity”²⁴ (Dalziel, 2006).

²⁴ Learning Activity (LA) vedono l’apprendimento come frutto di interazione con il docente e con i pari piuttosto che con il solo contenuto (LO), essa riconosce che l’apprendimento può avvenire con o senza LO cioè che l’apprendimento è diverso dal “consumo” di contenuti. L’utilizzo di LA prevede un riuso e adattamento a un livello superiore al semplice riuso e adattamento dei contenuti (LO). Una delle caratteristiche principali dell’approccio LA è infatti che il contenuto di una sequenza può essere facilmente cambiato per adattarsi a diverse discipline o argomenti, mentre la struttura

Tuttavia ancora non è chiaro come, e se sia realmente possibile, sfruttare le LA per la creazione automatica di learning path personalizzati. Non sono stati tuttora definiti standard per la creazione di LA, con la conseguente mancata possibilità di etichettarli con metadata e dunque di farli rientrare nella creazione “intelligente” di un percorso di apprendimento.

In definitiva, una volta creato un modello di profilo utente che tenga conto dei fattori affettivi e aver creato opportuni strumenti per l’implementazione dello stesso in piattaforma, mi sembra necessario progettare, possibili percorsi personalizzati per i nuovi profili creati, che tengano conto delle criticità esposte e dunque maggiormente orientati all’avvio di attività piuttosto che all’erogazione di contenuti .

2.7 Domande di ricerca e il piano di lavoro

Le domande di ricerca caratterizzanti la mia tesi di dottorato sono volte all’ampliamento dell’attuale modello utente in modo che contenga i fattori affettivi fino a questo momento non tenuti in considerazione per la sua realizzazione. Poiché mi concentrerò prevalentemente su questi ultimi aspetti (trascurando il resto già esistente) parlerò più indebitamente di “formalizzazione di un modello di profilo affettivo per l’apprendimento della matematica”. È ovvio che tutti i risultati delle mie ricerche andranno poi ad integrarsi con l’esistente, fornendo così un modello globale utente che tenga conto anche dei fattori affettivi. La creazione di tale modello di profilo affettivo mi consente ovviamente poi di creare più profili affettivi. I problemi di ricerca in una seconda fase mi hanno indotto a chiedere, una volta creati i profili, che tipo di percorso di apprendimento e dunque di risorse assegnare a ciascun di essi . Sembra infatti alquanto inefficace migliorare di molto i profili per poi associare ad essi gli stessi feedback, cioè gli stessi learning path senza tener conto dei cambiamenti apportati. Per tali motivi le domande caratterizzanti la mia ricerca, avranno anche come obiettivo la progettazione di learning activities specifiche per i profili affettivi individuati.

In definitiva le domande di ricerca caratterizzante la mia tesi sono volte alla:

- Formalizzazione di un modello di profilo affettivo e alla conseguente creazione di profili affettivi per l’apprendimento della matematica;
- Progettazione di learning activities specifiche per i profili affettivi individuati.

La realizzazione del primo punto sopra riportato mi ha spinto all’analisi del quadro teorico sui fattori affettivi in matematica, dettagliatamente riportata nel terzo capitolo, al fine di individuare i

dell’attività resta invariata. La sequenza di LA può fornire così un “template pedagogico” che può essere usato in molti contesti cambiando i “contenuti” per adattarli a diverse aree disciplinari (Conole & Fill, 2005).

fattori da tenere in considerazione per la creazione del modello. In particolare, tra tutti i fattori affettivi, ho esaminato e utilizzato per la creazione del modello, il costrutto di atteggiamento verso la matematica proposto da Zan&DiMartino (2007). Negli studi riportati infatti è evidente come in molti dei casi un “atteggiamento negativo” nei confronti della matematica può creare una vera e propria “barriera affettiva” producendo effetti inibitori sull’apprendimento. Tali studi suggeriscono dunque, nel caso si rilevi un atteggiamento negativo nei confronti della matematica, la necessità di un intervento didattico che consenta di migliorare prima di tutto quest’ultimo, in modo da debellare e/o evitare la formazione di una qualsivoglia barriera affettiva per l’apprendimento.

In base alle ricerche sui fattori affettivi che ho riportato nel terzo capitolo, con una metodologia di ricerca ad hoc, ho cercato di rendere concreti i riferimenti teorici affrontando, nel quarto capitolo, il problema di realizzare il modello di profilo affettivo.

Il problema che mi sono trovata a fronteggiare è abbastanza complesso, poiché i riferimenti teorici, e più in particolare i modelli che mi sono trovata ad utilizzare, quale ad esempio quello di atteggiamento, sono stati validati in condizioni di apprendimento “normali”, “standard” quali quelli gestiti da “esseri umani”. L’ambiente invece per cui ho avviato le mie ricerche e nel quale mi muovo, prevede la gestione automatica di tali processi con tutte le problematiche che ne conseguono. Basti pensare all’interpretazione dei discorsi, delle composizioni degli studenti, dell’analisi dei gesti, alla “lettura”, alla deduzione di cose che pur non sembrano essere state dette. Il problema degli automatismi di cui è caratterizzata la piattaforma, derivante dalla mancanza di una gestione umana dei processi di apprendimento, mi ha costretto a rivedere i modelli proposti nel quadro teorico. A tal fine, ho basato la costruzione del modello di profilo affettivo sul costrutto di atteggiamento di Zan&DiMartino ma lo ampliato in modo che contenesse con “certezza” le informazioni che in contesti “naturali” potrebbero essere dedotti da “fatti” non esplicitamente chiesti e/o menzionati.

In particolare il modello da me creato, individua l’atteggiamento dello studente nei confronti della matematica, determinando quando e se esso è o meno “negativo”, e in quest’ultimo caso da indicazioni sulle attività da associare per migliorare il profilo. Esso dunque deve contenere le giuste informazioni che consentano di individuare l’atteggiamento dello studente e di capire quando questo sia negativo (in questo caso si può parlare di profilo affettivo “negativo”), cioè dovrà contenere quelli che ho definito *indicatori di difficoltà* (Abano & Ascione 2007). Inoltre, il modello deve contenere le giuste informazioni che consentano in caso di bisogno, cioè in caso di profilo negativo, di associare opportune attività di “recupero affettivo” a ciascuno studente, individuate tramite l’inserimento nel modello di quelli che ho chiamato “*indicatori di azione*”. Ho dettagliatamente esplicitato la scelta sia degli indicatori di difficoltà quanto di quelli di azione nel

quarto capitolo.

Una volta creato il modello di profilo utente, è sorta la necessità di creare opportuni strumenti che consentissero l'implementazione e dunque l'utilizzo del modello da me creato in piattaforma: per questo ho definito e tarato lo strumento di misurazione del profilo (paragrafo 2 del quarto capitolo), che consiste in un questionario con domande sia aperte che chiuse. Ho dettagliatamente descritto le motivazioni e la formalizzazione di tale questionario nel terzo paragrafo del quarto capitolo. Questo consente di associare ad ogni studente un profilo affettivo (che consiste nell'elenco delle risposte che lo studente ha dato al proprio questionario). Una volta creato il questionario ho elaborato un algoritmo di modellazione del profilo affettivo, che consente di associare automaticamente il profilo a ciascuno studente. In tale prospettiva, per la gestione automatica delle risposte alle domande aperte, ho previsto una sperimentazione che ha visto coinvolto un campione di circa 800 studenti universitari e di scuole superiori che mi ha permesso di creare un repository delle risposte possibili. Ho riportato i risultati di tale sperimentazione nel quinto capitolo. L'algoritmo da me creato, inoltre, associando a ogni risposta data dallo studente al questionario, una serie di valori numerici, consente di "valutare" ciascun profilo. Tale strumento quindi può essere utilizzato anche per monitorare in itinere i profili. Esso infatti consente di valutare il profilo prima e dopo una certa attività didattica ad esso associata e di stabilire dunque se il profilo nel frattempo sia migliorato.

Una volta individuati i profili, ho ipotizzato, in base agli spunti riportati nel quadro teorico, una serie di "suggerimenti" didattici per la creazione di attività atte a migliorarli (quarto paragrafo del quarto capitolo).

Una volta definiti tutti gli strumenti sopra descritti e aver previsto le modalità per la loro implementazione in piattaforma, ho creato un'opportuna sperimentazione per la validazione dell'intero processo sopra descritto. Per fare ciò, tra i suggerimenti didattici da me proposti, ne ho elaborato uno realizzando una opportuna learning activity, che mira a favorire una visione relazionale della matematica (la visione è uno degli item che caratterizza il modello di profilo affettivo), accuratamente descritta del capitolo 6. Ho sperimentato l'attività su un campione di 85 studenti del primo anno di università, ai quali è stato chiesto di compilare il questionario, in maniera anonima, prima e dopo l'attività. Nel capitolo 6 ho presentato le prime analisi dei protocolli e i risultati qualitativi e quantitativi della suddetta sperimentazione avviata presso le Università di Salerno e del Piemonte Orientale.

Capitolo III

La ricerca sui fattori affettivi in educazione matematica

3.1 Introduzione

A primo impatto sembra assurda l'idea di associare la matematica ad una emozione, la matematica è infatti vista come una disciplina fredda, non capace di trasmettere alcuna sensazione. È bene, matematici del calibro di Poincaré, Hadamard e Hardy hanno più volte sottolineato il ruolo dell'emozione per apprendere e soprattutto per “scoprire la matematica” (Zan, 2006).

Come scrive Poincaré: *“Ci si può stupire di vedere invocare la sensibilità a proposito di dimostrazioni matematiche che sembrerebbero interessare solo l'intelligenza. Sarebbe dimenticare la sensazione della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme, dell'eleganza geometrica. È una vera sensazione estetica che tutti i veri matematici conoscono. Ed è proprio questione di sensibilità.”* (Poincaré, 1989).

Certo il punto di vista dei matematici al primo impatto non sembra concordare con una visione della matematica condivisa da una gran parte di allievi che la caratterizza come disciplina fondata su regole, conclusa, fredda e per questo ritenuta all'antitesi del dominio delle emozioni. Come emerge ad esempio da alcuni temi pubblicati nel volumetto “Matematica e poesia: un tema difficile” (U. Cattabrigini e V. Di Paola, 1997): *“Matematica e poesia (...) sono e resteranno agli antipodi perché materie proprie di uomini dalla condotta di vita radicalmente diversa. Il matematico, infatti, è una persona fredda, precisa e ordinata in tutte le sue azioni e bisognoso di saldi punti di riferimento nella vita. Il poeta, invece, è una persona espansiva che scrive per esprimere e comunicare agli altri i propri sentimenti, è abbastanza disordinato ed è un sognatore.”*

Ma questa visione della matematica come disciplina “fredda” per eccellenza è del tutto opposta alla percezione emozionale associata da molti studenti e adulti: *“è infatti unanimemente riconosciuto che questa disciplina “fredda” è in realtà quella che, almeno in contesto scolastico, riesce a scatenare negli studenti le emozioni più disparate, quali la rabbia, l'ansia, la frustrazione, infelicità, noia”* (Zan, 2000). Si tratta per lo più di emozioni percepite come negative, anche se non mancano, in contesto scolastico quelle positive quali felicità, eccitazione, divertimento, orgoglio. Un esempio particolarmente espressivo dell'intensità che possono raggiungere tali emozioni è dato

da una delle tante composizioni raccolte dalla Zan (2000) svolta da un allievo di terza elementare: *“Per me la matematica è solo una perdita di tempo perché una volta imparati i numeri si può anche smettere, invece no, si continua e le lezioni incominciano a torturarti piano piano ed è una sensazione bruttissima quando scrivo e non capisco, e mi sembra di scendere all’inferno: il sudore scende dalla testa ai piedi, divento tutto rosso e mi sembra di esplodere. Le lezioni sono un supplizio e mi sembra che la maestra rida su di me e mi dica: Non lo sai fare! Bene! Bene!...Ed io avrei voglia di strappare il quaderno ma prevedo sempre quello che mi accadrebbe: la maestra urlerebbe: Piniii... Che cosa è questa schifezza! Ma il peggio è che dopo la sgridata ho tutti i capelli ritti e mi vergogno davanti a tutte le altre maestre.”* (Andrea, 3a elementare).

La Zan, analizzando la composizione sopra riportata, sottolinea come tale tema sia caratterizzato da una gran quantità di emozioni scatenate dalla matematica, tutte le emozioni negative tipicamente associate alla disciplina quali frustrazione, rabbia, noia e ansia.

E pure la stessa ricercatrice mette ancora in evidenza la correttezza ortografica, grammaticale, sintattica e la notevole espressività utilizzata da Andrea che richiama l’immagine di un bambino sensibile e pieno di risorse i cui problemi con la matematica non possono certo essere affrontati con diagnosi quali “poca capacità”, “non comprensione”.

È fuori dubbio il fatto che il caso di Andrea non sia da considerarsi tipico: ma le esperienze emozionali da lui descritte con estrema efficacia sono esperienze vissute anche da molti allievi che hanno difficoltà in matematica (Zan, 2000). Da qui la necessità messa in evidenza dalla ricercatrice, non di rinuncia all’intervento, ma di delineazione di opportune attività didattiche che tenendo conto dei “fattori affettivi”, tendano a promuovere una “disposizione emozionale positiva” nei confronti della disciplina.

Dopo una breve analisi dei maggiori risultati di ricerca sui fattori affettivi in educazione matematica, nel presente capitolo, ho riportato un esame dettagliato di come essi influenzino il processo di apprendimento a breve e a lungo termine, per poi soffermarmi più in dettaglio sui risultati di ricerca sul costrutto di “atteggiamento” nei confronti della matematica. Tale definizione infatti metterà le basi nel successivo capitolo per la creazione del profilo affettivo dello studente.

3.2 Le prime ricerche

La ricerca sui fattori affettivi²⁵ e la loro influenza nell'apprendimento in matematica ha radici piuttosto lontane nel tempo. Uno dei primi ricercatori il cui lavoro in questo campo diventa un punto di riferimento è Aiken. Già nel 1961 partendo dall'ipotesi (supportata anche da altre ricerche) che la performance in matematica sia influenzata non solo da fattori cognitivi ma anche da fattori che chiama "non intellettivi"²⁶, cerca di dimostrare statisticamente alcune relazioni tra l'atteggiamento nei confronti della matematica e il successo (che identifica con il voto), l'abilità, le esperienze avute con la matematica.

In questo periodo, non esiste ancora una vera e propria classificazione dei fattori affettivi, si parla quasi sempre di un generico atteggiamento nei confronti della matematica, si cerca di misurarlo con questionari spesso basati su scale di Likert²⁷ e di confrontare statisticamente la significatività della relazione tra il punteggio dell'atteggiamento e il successo, di cui non si dice molto, spesso limitandosi a misurarlo in base alla votazione dello studente.

Man mano, la ricerca stessa si fa più articolata: non si parla più solo di atteggiamento, ma, con gli studi sul problem solving soprattutto, si comincia a parlare di convinzioni e anche a studiare le emozioni e la loro influenza sui processi cognitivi. Inizialmente, seguendo le origini di costrutti tipici della psicologia sociale, lo studio dei fattori affettivi era analizzato a prevedere scelte: si prestava quindi ad affrontare problemi semplici come, per esempio, la prosecuzione o meno di studi matematici. Proprio negli anni ottanta la ricerca si fa più ambiziosa, definisce i suoi obiettivi più chiaramente e si comincia a credere che i fattori affettivi possano influire non solo su scelte di adesione, ma anche su decisioni più articolate e quindi in particolare che possano influire sull'attività di problem solving. Si evidenziano dunque tre filoni di ricerca:

1. Il primo continua a interessarsi alla relazione tra fattori affettivi e scelte di evitamento di matematica e in particolari di sottorappresentanza, ovvero di spiegare perchè particolari gruppi di persone siano statisticamente poco rappresentati in matematica. L'importanza di queste ricerche (Fennema e Behr, 1980; Leder, 1982; Fennema et altri, 1990) è testimoniata dal fatto che ancora pochi anni prima Aiken a proposito delle gender-differences affermi (1976; p:296): *“è probabile che l'insuccesso in matematica sia dovuto, almeno in parte, ad una scarsa abilità in matematica determinata a livello*

²⁵ L'espressione 'fattori affettivi' fa riferimento a sistemazioni teoriche relativamente recenti, quale quella di McLeod (1992). E' chiaro quindi che parlare di 'ricerca sui fattori affettivi' porta ad unificare a posteriori anche studi che in effetti hanno origini e storie molto diverse.

²⁶ E come esempio porta la paura che alcune persone hanno di affrontare problemi di matematica, che chiama matemafobia.

²⁷ Le scale di Likert sono questionari con una serie di proposizioni a cui bisogna assegnare un valore, solitamente da 0 a 5, in una scala che va dal completo disaccordo al completo accordo. Ogni assegnazione risulta in un punteggio negativo o positivo a seconda che la risposta sia considerata rivelatrice di un atteggiamento negativo o positivo. Il punteggio finale è la somma totale.

genetico". I lavori citati e altri dello stesso tipo hanno contribuito a cancellare quell' "è probabile", cioè a dare una spiegazione diversa da quella genetica.

2. Il secondo, partendo dalla convinzione che i fattori affettivi, e in particolare alcune reazioni emozionali come l'ansia, inibiscono alcune attività cognitive e quindi, in particolare, influiscono sulla prestazione matematica spesso in modo negativo, cercano di dimostrare questa correlazione e di suggerire strategie didattiche mirate a diminuire i livelli di ansia. Questo tipo di ricerca ha risultati contraddittori ma ha l'importanza di introdurre nella ricerca in didattica della matematica l'influenza di fattori puramente emozionali e quindi un sostegno all'idea che lo studio della sfera affettiva (anche quella emozionale) sia fondamentale per comprendere un processo complesso come quello dell'apprendimento.
3. Il terzo ha cominciato a studiare l'importanza specifica dei fattori affettivi (e in particolare delle convinzioni che proprio in questo contesto cominciano ad essere studiate) in ambito problem-solving, partendo da studi sulla metacognizione, e quindi ad interessarsi a processi decisionali più complessi di quelli di scelta o evitamento tipici delle ricerche di mercato, nel contesto delle quali è nata, in psicologia sociale, la ricerca su convinzioni e atteggiamenti o di quelli legati alla componente emozionale vista solo come fattore inibitore di comportamenti.

Negli anni 80 si comincia a parlare di influenza dei fattori affettivi e si approda alla convinzione che la sfera cognitiva e affettiva siano indissolubilmente legate. Particolarmente significativo è il volume edito da Silver (1985) il cui titolo è di per sé eloquente: *“Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives”*. In questo stesso volume McLeod parlando dell'influenza dei fattori affettivi in matematica, comincia a classificarli, distinguendo tra emozioni, convinzioni e atteggiamenti e attacca un approccio puramente cognitivo affermando che *“Limiting one's research perspective to the purely cognitive seems acceptable for those interested mainly in the performance of machines; however, researchers who are interested in human performance need to go beyond the purely cognitive if their theories and investigations are to be important for math education”*.

Se McLeod introduce molte osservazioni interessanti e per la prima volta tenta di classificare e descrivere i vari costrutti dell'area affettiva, l'articolo di Schoenfeld nello stesso volume non solo descrive l'influenza delle convinzioni sull'attività decisionali di problem-solving ma soprattutto va oltre il tentativo di dimostrare questa influenza e cerca di sottolineare alcuni aspetti importanti della ricerca sulle convinzioni. Così per la prima volta sottolinea il fatto che si deve fare attenzione non

alle singole convinzioni, ma anche al legame tra esse. Nei lavori successivi ancora Schoenfeld studia (1989a) l'importanza dell'ambiente e più in generale del contesto nella formazione delle convinzioni²⁸ e (1989b) introduce la differenza tra *belief espoused* e *beliefs in action*²⁹.

Anche i lavori di Cobb (1985, 1986) centrano il focus sulle convinzioni che lo studente ha sulla matematica, sulle richieste dell'insegnante e sulle loro motivazioni e come queste guidino l'interpretazione di una richiesta e la presa di una decisione. Da qui l'importanza di conoscere il contesto in cui una persona opera in modo da capire comportamenti a prima vista irrazionali e inoltre che *“to say that cognition is context-bounded is to say that beliefs are intimately involved in the meaning-making process”*.

Molti dei lavori di ricercatori che si occupano di questo filone di ricerca sono raccolti nel volume edito da Adams e McLeod (1989). Importante è notare come la parte teorica si avvalga di contributi di studiosi provenienti da campi di ricerca diversi da quelli della didattica della matematica come quello della psicologia (Mandler; McDonald 1989) da cui molti dei costrutti usati provengono originariamente. Anche l'attenzione all'influenza dei fattori affettivi non solo nell'apprendimento della matematica ma anche nell'insegnamento è una novità e ha due aspetti (Thompson, 1985), come sottolinea Nespor (1987) *“da una parte si comincia a studiare come le convinzioni degli insegnanti influenzino quelle degli studenti e quindi ad interessarsi anche alla possibilità di cambiare, o comunque influenzare, tramite la pratica didattica le convinzioni e gli atteggiamenti nei confronti della matematica degli studenti stessi”*³⁰.

Anche la scuola francese (Brousseau, 1980) con l'idea di *contratto didattico* si occupa in qualche modo di un particolare tipo di convinzioni: quelle dello studente sulle aspettative dell'insegnante e le aspettative stesse dell'insegnante sullo studente. In particolare l'importanza di questa idea sta nel riuscire ad interpretare comportamenti e situazioni che non sono spiegabili limitandosi al puramente cognitivo: per esempio i comportamenti dei bambini di fronte ai cosiddetti problemi assurdi quali

²⁸ In particolare Schoenfeld mostra la convinzione che un certo tipo di insegnamento, volto soprattutto a dare senso a quello che si impara e quindi dove le procedure non sono un fine ma un mezzo dell'istruzione matematica, possa in qualche modo prevenire convinzioni *pericolose* sulla matematica

²⁹ In particolare Schoenfeld affronta il problema di spiegare alcuni fenomeni apparentemente inspiegabili, ovvero quelli di studenti con convinzioni in qualche senso ritenute corrette sulla matematica, ma che si comportano, in un contesto di problem solving, all'opposto di quello che le loro convinzioni professate farebbero prevedere. Schoenfeld ipotizza che non sempre le convinzioni professate siano quelle che guidano il comportamento, e che spesso certe risposte a questionari su convinzioni siano dovute alla consapevolezza di quali sono considerate le risposte buone. In pratica si comincia a dubitare della affidabilità dei questionari per l'osservazione delle convinzioni.

³⁰ Questo dipende anche da come definiamo i costrutti considerati: per esempio Haladyna, Shaughnessy J. e M. (1983) trovano che l'insegnante e il suo atteggiamento siano variabili che incidono profondamente sull'atteggiamento degli studenti, dove per atteggiamento si intende la disposizione emozionale nei confronti della disciplina (mi piace/ non mi piace), mentre Ernest (1988) sostiene che questa influenza non è così marcata anche a causa della complessità di un costrutto multidimensionale come l'atteggiamento nei confronti della matematica, di cui individua varie componenti.

*l'età del capitano*³¹ o altri simili vengono spiegati con la clausola tipica del contratto didattico che un problema scolastico *debba poter essere risolto*. L'idea di contratto didattico è importante anche perchè viene evidenziato come molte clausole del contratto didattico siano implicite e spesso non volute dall'insegnante: un'ulteriore conferma della teoria costruttivista dell'apprendimento, secondo la quale lo studente interpreta le proprie esperienze scolastiche. Nonostante questo l'idea di contratto didattico è più attenta all'ambiente *classe*, piuttosto che al singolo individuo.

1. La crescita di interesse per i fattori affettivi nel periodo che parte dai primi anni 80 del secolo scorso ai primi anni 90, è sicuramente dovuta anche ad una nuova concezione dell'apprendimento che nel campo dell'educazione matematica viene sviluppata in quegli anni (von Glasersfeld, 1983, 1991): è sempre più superato un modello di apprendimento di tipo trasmissivo per far spazio ad un modello dove l'apprendimento è visto come un processo di costruzione della propria conoscenza da parte di chi apprende. Questa nuova visione dell'apprendimento come attività costruttiva alimenta l'interesse per il terzo filone di ricerca che tende a descrivere l'influenza dei fattori affettivi su decisioni complesse come quelle da prendere in ambito problem solving, e contribuisce anche al lento abbandono dei primi due filoni di ricerca ancorati ad un rapporto causa-effetto poco compatibile appunto con le differenze individuali. Interessante da questo punto di vista è il lavoro di Weiner (1983), uno psicologo cognitivista che studia le emozioni, legandole a fattori cognitivi e in particolare a quelle che chiama attribuzioni causali, ovvero quello che l'individuo crede siano i motivi per cui si è verificato un dato evento.

La ricerca in psicologia ha dimostrato l'influenza di tali attribuzioni sulla motivazione e anche sulle reazioni emozionali del soggetto (che a loro volta ovviamente influiscono sul comportamento).

Un momento di svolta nella ricerca sui fattori affettivi in matematica è sicuramente l'uscita dell'*Handbook of research on mathematics teaching and learning* nel 1992. In questo volume i contributi di Thompson, Schoenfeld e McLeod diventano presto un punto di riferimento per la ricerca sui fattori affettivi in matematica: i tre lavori cominciano a dare risposte alle problematiche emerse dalla ricerca fino a quel momento:

Si comincia a definire i costrutti usati in quanto ci si rende conto che (Thompson, p.129): *For the most part, researchers have assumed that readers know what beliefs are*. Le definizioni date spesso non sono *dirette*, ma descrivono caratteristiche peculiari dei costrutti e differenze tra costrutti oppure usando metafore per descrivere come questi costrutti siano organizzati.

31 Il problema del capitano, a meno di piccole modifiche che non cambiano la struttura del problema, è il seguente: Su un battello ci sono 36 pecore. 10 muoiono affogate. Quanti anni ha il capitano?

La cosa interessante è che molti bambini rispondono a questa domanda combinando i dati a seconda delle operazioni conosciute e inoltre che la percentuale di risposte alla domanda aumenta nelle ultime classi.

Si sottolinea la difficoltà di osservare e descrivere questi costrutti (McLeod, p.576): *affect is generally more difficult to describe and measure than cognition* e quindi la necessità di passare da un approccio puramente quantitativo all'osservazione di questi costrutti (con l'uso massiccio di questionari a risposta chiusa e scale di Likert) all'uso di metodi qualitativi (che permettano per esempio di minimizzare la differenza tra *beliefs espoused* e *beliefs in action* descritta da Schoenfeld) o comunque integrare le due metodologie con un approccio multiplo (Leron e Hazzan 1997, Cooney, Shealy e Arvold 1998, Cifarelli 2001, Burton 2002, Hannula 2002).

Si comincia a descrivere (McLeod) l'interazione tra fattori affettivi e tra fattori affettivi e cognitivi e si incoraggia a proseguire nella descrizione di questa interazione. In particolare Schoenfeld descrive le convinzioni come un *ponte* tra fattori affettivi e cognitivi, osservazione in qualche modo ripresa da McLeod che, come visto, descrive le convinzioni come il fattore affettivo con la componente cognitiva più marcata.

Un altro segnale importante del cambiamento della ricerca sui fattori affettivi è il fatto che crescono gli studi sull'interazione tra fattori affettivi e fattori cognitivi: ovvero i due domini non sono visti più come distinti e complementari. Questa interazione viene rappresentata attraverso modelli (per esempio Goldin, 2000) e viene spiegata da vari punti di vista: dalla psicologia sociale fino alla neuro-scienza (Evans, 2000; SchlÄoglmann, 2002).

D'altra parte un parere autorevole sull'importanza di non separare fattori affettivi e cognitivi lo aveva già dato Vygotskij molti anni prima(1954) *“Consideriamo il rapporto tra intelletto ed affettività. La loro separazione come materia di studio è la maggior debolezza della psicologia tradizionale poiché essa fa apparire il processo del pensiero come un flusso autonomo di 'pensieri pensanti se stessi', separati dalla pienezza della vita, dagli interessi e dai bisogni personali, dalle inclinazioni e dagli impulsi di colui che pensa. Tale pensiero separato deve essere considerato o come un epifenomeno insignificante, incapace di cambiare alcuna cosa nella vita o nella condotta di una persona, o come una specie di forza primordiale che esercita un'influenza sulla vita personale in modo inspiegabile e misterioso. Non esiste soluzione al problema della causa e dell'origine dei nostri pensieri, poichè l'analisi deterministica richiederebbe una chiarificazione delle forze motrici che dirigono il pensiero in questo o in quel canale. Nello stesso modo, la vecchia maniera di accostarsi al problema preclude ogni studio fecondo del processo opposto, l'in°uenza del pensiero sulla vita affettiva e sulla volizione. L'analisi per unità indica il modo di risolvere questi problemi di importanza vitale. Dimostra l'esistenza di un sistema dinamico del significato nel quale si uniscono l'affettivo e l'intellettuale. Dimostra che ogni idea comporta un mutamento nell'atteggiamento affettivo verso la parte di realtà cui si riferisce. Ci permette inoltre di tracciare*

il percorso che va dai bisogni e dagli impulsi di una persona fino alla direzione specifica dei suoi pensieri, ed il percorso inverso, dai pensieri al suo comportamento ed alla sua attività”.

Potremmo dire che per un certo periodo la ricerca ha cercato di mostrare che il dominio affettivo non è un *epifenomeno insignificante, incapace di cambiare alcuna cosa nella vita o nella condotta di una persona* e poi in un secondo momento, quando anche nuovi modelli di apprendimento (come quello costruttivista) hanno facilitato l'accettazione di questa idea, si è concentrata a cercare di rendere meno *inspiegabile e misterioso* il modo in cui i fattori affettivi influenzano attività come l'apprendimento o l'insegnamento.

3.3 Emozioni, convinzioni e teorie del successo

La ricerca degli ultimi anni, come ho ampiamente mostrato nel paragrafo precedente, hanno messo in evidenza la complessità del processo di insegnamento-apprendimento, e come esso sia fortemente influenzato da una varietà di fattori, in particolar modo dai “fattori affettivi”.

In particolare il ruolo riconosciuto ai fattori “non cognitivi” o più propriamente “affettivi”, conquista piuttosto recente della ricerca in problem solving e in psicologia dell'apprendimento, è quello, come recita Mandler, di *“interagire in modo importante con le tradizionali funzioni cognitive”* (Mandler, 1989).

In questa direzione una prima considerazione è che le ricerche in neurofisiologia hanno evidenziato un rapporto estremamente profondo fra processi cognitivi ed emozionali, scoprendo la stretta relazione che intercorre fra la “capacità” di provare emozioni, e la capacità di prendere decisioni. Esempio esplicativo a tal proposito sembra quello del caso di Elliot riportato da Damasio, nel suo libro “L’errore di Cartesio” (1995). Elliot è un giovane paziente la cui personalità si era trasformata in modo radicale dopo un intervento di rimozione di una massa tumorale al cervello, al punto da perdere il posto di lavoro e di non essere più in grado di mantenersene un altro. Nonostante questo, tutti gli esami fatti mettevano in evidenza che le sue “facoltà mentali” erano rimaste intatte, compreso le capacità motorie e espressive. L’analisi di Damasio sottolinea come, nonostante le conoscenze di Elliot *“erano sopravvissute all’intervento...e le sue facoltà mentali erano in massima parte integre, ma era menomata la sua capacità di giungere a una decisione...l’elaborazione dei suoi processi decisionali era talmente compromessa che egli non poteva più porsi come un essere sociale efficiente. Anche di fronte ai risultati catastrofici delle sue decisioni, Elliot non imparava dai suoi errori: sembrava che fosse oltre ogni possibile redenzione,*

come il malfattore incallito che dichiara il proprio sincero rincrescimento, ma subito dopo torna a commettere l'ennesimo reato.” (Damasio, 1995)

Il nesso di tutto ciò con le emozioni però non sembra ancora palese. Damasio lo scorge in modo del tutto casuale. Il paziente infatti appariva particolarmente freddo e distaccato anche nel parlare delle tristi vicende che lo avevano colpito, come se in qualche modo non lo scuotesse nessun tipo di emozione, sensazione. A conferma di questa ipotesi, le dichiarazioni del paziente dopo un esperimento psicofisiologico, durante il quale, a Elliot venivano mostrati stimoli visivi di catastrofi capaci di suscitare emozioni. Egli infatti dichiara apertamente che *“il suo modo di sentire era cambiato, dopo il male: avvertiva come argomenti che prima avevano suscitato in lui una forte emozione ora non provocavano più alcuna reazione, né positiva né negativa”* (Damasio, 1995).

Dunque, l'esempio che ho appena riportato mostra, *“un legame fortissimo fra una capacità che abbiamo caratterizzato come cruciale nell'attività matematica di problem solving, un'attività a sua volta considerata estremamente raffinata dal punto di vista dei processi cognitivi - cioè la capacità di prendere decisioni – e d'altra parte la “capacità” di provare emozioni”*(Zan, 2006).

Nonostante la forte influenza che i fattori affettivi hanno sulla sfera cognitiva, e in particolar modo per l'apprendimento della matematica, la Zan, (2000b), ha sottolineato come l'insegnamento tradizionale della matematica, non preveda la gestione esplicita degli aspetti emozionali. *“Le emozioni negative in particolare sono considerate un male inevitabile e vengono chiamate in causa per lo più per spiegare il fallimento di interventi di recupero centrati sulle conoscenze: ecco che allora si fa riferimento genericamente a blocchi psicologici, a comportamenti irrazionali, a stati d'ansia, comunque a fattori che l'insegnante avverte come estranei al proprio controllo e alla propria professionalità. Quando l'insegnante dice: “Quel ragazzo ha un blocco, è troppo ansioso, ha problemi emotivi...” significa spesso: “Io ho fatto quello che potevo come insegnante di matematica, ma su questo non posso far niente: non sono uno psicologo!” È il momento della rinuncia all'intervento”*(Zan, 2000)

Gli aspetti emotivi invece, avendo un forte impatto sulla sfera cognitiva, possono essere molto utili per fornire un'interpretazione alternativa del fallimento di soggetti che pure possiedono, o sembrano possedere, le conoscenze necessarie (Lester 1987) e dunque per progettare interventi per la prevenzione e il recupero delle difficoltà in matematica (Zan, 2000b). Ma cosa sono i fattori affettivi? In cosa essi consistono? Come essi influenzano la sfera cognitiva? Come possono essere utilizzati per prevenire e recuperare difficoltà in matematica?

Come è stato sottolineato nel paragrafo precedente, ci sono stati numerosi tentativi da parte di psicologi e ricercatori nel campo dell'educazione matematica, per convergere in una terminologia comune (Hart, 1989) che descrivesse tali fattori. Nel contesto della ricerca in didattica della

matematica, e più nello specifico sul problem solving, la definizione più accreditata di fattori affettivi è quella di McLeod (1992), uno dei ricercatori che ha dato contributi più significativi in questo campo, secondo il quale i fattori emozionali o affettivi comprendono (fig 1):

- **le emozioni** (esempi sono: gioia o frustrazione nel risolvere problemi non di routine, valutazioni estetiche in matematica)
- **le convinzioni** sulla matematica, su di se, sull'insegnante e il suo insegnamento (esempi sono convinzioni quali: "la matematica è fatta di regole", "io sono capace di risolvere problemi" o ancora "la teoria non serve per svolgere gli esercizi")
- **gli atteggiamenti** (esempi sono: scarso apprezzamento per le dimostrazioni geometriche, divertimento nel risolvere problemi, preferenza per l'apprendimento per scoperta).

Le emozioni vengono definite come "reazioni soggettive a situazioni specifiche" : tipici esempi sono la gioia, la paura, l'ansia, la frustrazione. Esse possono essere, come ho mostrato, "motore di azioni" (con effetti stimolanti o debilitanti) e/o "causate da azioni".

Gli psicologi cognitivisti (Weiner, 1983; Mandler, 1989; Ortony ed al., 1988), descrivono come esse vengono generate, e in particolare sostengono che *"non è l'evento in sé che genera un'emozione, ma l'interpretazione che il soggetto dà dell'evento stesso"* (Zan, 2006).

L'esempio tipico proposto dalla Zan a tal riguardo è il seguente: immaginiamo di essere costretti ad assumerci un incarico per noi spiacevole dovuto all'assenza di un collega. L'emozione che deriva da tale situazione dipende sostanzialmente dalla nostra interpretazione di tale assenza: se la imponiamo ad una volontà del collega di evitare il lavoro proveremo rabbia se invece attribuiamo la stessa assenza a cause incontrollabili o spiacevoli come una malattia grave, o problemi famigliari l'emozione che proveremo sarà ben diversa.

Quindi non è l'esperienza *in sé* che suscita un'emozione, ma l'interpretazione che ne viene data.

Da qui un primo suggerimento per la prevenzione e il recupero di una disposizione emozionale negativa nei confronti della matematica: *"le emozioni associate alla matematica, anche quelle più "negative", non appaiono necessariamente degli ostacoli incontrollabili al naturale processo d'apprendimento, ma piuttosto dei segnali che danno informazioni su come il soggetto interpreta l'esperienza matematica. E dunque l'insegnante di matematica, proprio in quanto insegnante di matematica, può utilizzare tali messaggi per conoscere quale interpretazione della matematica ha costruito l'allievo e per strutturare situazioni didattiche che modifichino tale interpretazione"*(Zan, 2000b).

Questo processo di interpretazione dell'esperienza matematica, che può essere più o meno articolato, naturalmente evolve con il passare del tempo. Le prime esperienze matematiche provocano

emozioni semplici che sono associate all'insegnante, al particolare argomento trattato, alle relazioni con i compagni, cioè a quelli che vengono chiamati *fattori mediatori*. Esse provengono da una interazione diretta con questi fattori mediatori che danno luogo ad una reazione positiva/negativa. *“Ma poco per volta il bambino comincia a dare un senso alle diverse esperienze, a mettere in relazione l'una con l'altra, ad anticipare, secondo gli schemi così costituiti, esperienze future. In particolare interpreta i comportamenti dell'insegnante e dei compagni, e si costruisce delle vere e proprie teorie interpretative, all'interno delle quali tali comportamenti trovano una spiegazione coerente (sono un incapace, l'insegnante non mi considera in grado di portare a termine un compito, i miei compagni sono più capaci di me), costruisce così degli standard di riferimento in base ai quali riconosce il successo e il fallimento, si forma cioè delle **convinzioni** su cosa vuol dire andare bene in matematica, e quali ne sono le cause (teorie del successo); nasce così anche la percezione del proprio fallimento, cioè l'interpretazione delle proprie esperienze come fallimentari”* (Zan, 2006).

Il costrutto di convinzione ha radici nella psicologia sociale (ad es. Rokeach, 1960), cosa abbastanza usuale in educazione matematica, anche se viene introdotto proprio negli studi di problem solving per spiegare il fallimento di soggetti che sembrano possedere le risorse necessarie per riuscire. Per convinzione, in questo ambito si intende *“la conoscenza soggettiva (quindi non necessariamente vera) di un soggetto su di se', sulle discipline oggetto dell'apprendimento, sull'ambiente”*(Zan, 2006). Esse, come ho precedentemente riportato, nascono dal continuo tentativo di interpretare la realtà e nello stesso tempo danno vita a schemi con cui l'individuo interpreta l'esperienza futura. Per tale motivo esse agiscono da guida nella selezione delle risorse da attivare; in particolare possono inibire a priori l'utilizzazione delle risorse adeguate (Silver, 1982).

Basti pensare ad un allievo che è convinto di non essere in grado di risolvere i problemi che molto probabilmente rinuncerà apriori ad affrontarne uno, oppure a uno studente che pensa che la matematica è fatta di formule che presumibilmente si bloccherà avanti ad esercizi che non prevedono l'applicazione di una procedura tra quelle che ha ben memorizzato.

Possiamo dunque affermare che *“le convinzioni, o meglio i sistemi di convinzioni, costituiscono la cornice all'interno del quale un individuo seleziona e impegna le risorse cognitive, cioè prende le decisioni”* (Schoenfeld, 1983a). Esse dunque influenzano le decisioni di utilizzare certe strategie e testimoniano il legame profondo fra aspetti cognitivi e affettivi (Lester, 1987). Oltre a coinvolgere aspetti cognitivi (ad esempio: "Se si moltiplicano due numeri il risultato è senz'altro maggiore di ognuno dei due."), e convinzioni influenzano anche aspetti metacognitivi ("I problemi con un testo

lungo sono piu' difficili dei problemi con un testo corto."), e aspetti piu' propriamente affettivi ("Non sono abbastanza intelligente per risolvere problemi.")³² (Zan, 2000).

L'espressione sistemi di convinzioni è introdotta nel modello di Green(1971) che descrive la natura delle interazioni fra le varie convinzioni. Secondo Green, i sistemi di convinzioni sono caratterizzate da alcune proprietà:

- *Una struttura quasi-logica*: le relazioni fra convinzioni non sono necessariamente logiche, in quanto si possono trovare alcune che possono essere in contraddizione con altre. Nonostante questo, alcune seguono logicamente da altre (convinzioni primarie e convinzioni secondarie).
- *La centralità psicologica*: questo aspetto ha a che fare con la forza psicologica delle convinzioni, cioè il grado di fiducia che le caratterizza. In questo senso si possono distinguere convinzioni centrali(quelle con maggior forza psicologica e più difficili da sradicare), e convinzioni periferiche.
- *La struttura a grappolo*: le convinzioni sono organizzate in settori relativamente isolati, hanno cioè una struttura a grappolo: questo permette ad un individuo di avere convinzioni tra loro contraddittorie.

La contraddizione in particolare avviene fra le convinzioni dichiarate, cioè quelle che un soggetto manifesta (ad esempio rispondendo alle domande poste dall'insegnante) e quelle che invece pratica, cioè quelle che sembrano guidare i suoi processi decisionali. Questa contraddizione è messa in evidenza da parecchi ricercatori (v. in particolare Schoenfeld, 1989) che puntano l'attenzione sugli strumenti di osservazione: "*se le convinzioni centrali sono quelle che dirigono i comportamenti, per portarle alla luce occorre però privilegiare contesti naturali, liberi, quali temi, piuttosto che artificiosi come la compilazione di un questionario*"(Zan, 2006).

Schoenfeld(1983a) e più recentemente la Zan(2006), hanno catalogato le convinzioni che influenzano i processi di controllo in :

- Le convinzioni sul compito (ad esempio: l'esercizio con il testo più lungo o con "grosse formule" è il più difficile)
- Le teorie del successo (ad esempio: per riuscire in matematica basta saper fare gli esercizi, per andare bene in matematica occorre molta memoria)
- Le convinzioni sulla matematica (ad esempio: la matematica è fatta di regole, la matematica è fatta di ragionamenti)

³²Non a caso l'aspetto più controverso riguarda la collocazione delle convinzioni: fattori metacognitivi per alcuni ricercatori, o addirittura metacognitivi o affettivi a seconda del contesto cui fanno riferimento (metacognitive quelle sulla matematica, affettive quelle su di sé, o altre differenziazioni).

- Le convinzioni su di se (ad esempio: ho poca memoria, non sono in grado di risolvere problemi)

Le *convinzioni sul compito*, richiamano e sono dipendenti dalla convinzione sulla matematica e sull'insegnante. Le *teorie del successo* invece comprendono le convinzioni sugli obiettivi dell'insegnamento e sulle aspettative dell'insegnante, le convinzioni su cosa vuol dire aver successo in matematica (che ancor una volta richiamano le convinzioni sulla matematica) e quali sono le cause del successo o le strategie da attivare per avere successo.

Inoltre la Zan (2000) porta a riflettere come anche il successo possa essere connotato in modi diversi. Ad esempio alcuni allievi identificano il successo in matematica con il rendimento, cioè con i buoni voti, altri identificano il successo con la percezione del capire. Ad ognuno di questi modi di vedere il successo corrisponde naturalmente una diversa teoria del successo. Se il successo è identificato con un buon rendimento, l'allievo dirigerà l'impegno nella direzione che a suo parere l'insegnante ritiene giusta: giocano quindi un ruolo cruciale in questo caso le convinzioni sulle aspettative dell'insegnate. Inoltre diventano indicatori di successo i comportamenti che in generale vengono premiati dall'insegnate (quali ad esempio la velocità, e la capacità di produrre risultati corretti). Quando il successo è identificato col "capire" è la percezione di non capire che viene associata al fallimento.

La Zan inoltre sottolinea il fatto che non ci sono convinzioni giuste o errate, ma meglio ci sono convinzioni vincenti e perdenti: basti pensare alla convinzione abbastanza diffusa nelle scuole secondarie e per la maggior parte dei casi vincente, quale "per andare bene in matematica basta saper fare gli esercizi", che non trova riscontro nel passaggio alle scuole superiori o ancor di più all'università. Così i problemi di raccordo possono essere legati proprio ad una mancata evoluzione delle teorie del successo al nuovo contesto.

Le *convinzioni sulla matematica* quanto quelle, in maniera meno determinante, del successo denunciano la visione che gli studenti hanno della matematica. La convinzione che la matematica sia fatta di regole o ancora quella che per andare bene in matematica basta saper fare gli esercizi rimandano alla visione della matematica che Skemp definisce "strumentale", che la vede come un insieme di formule da memorizzare e applicare. Tale visione viene contrapposta da Skemp ad una "relazionale" secondo la quale la matematica è caratterizzata da relazioni e anche l'applicazione di formule prevede la comprensione del perché tali regole funzionano.

Per quanto riguarda le *convinzioni su di sé* esse dirigono in maniera preponderante le azioni dell'allievo in quanto egli stesso agisce in base alle risorse che ritiene possedere. In tale direzione sembra interessante l'esempio di Daniele riportato da Brown et al. (1991) che di fronte a un

compito da svolgere dice “è una cosa di memoria?, non ti hanno detto che io non so fare queste cose?, non ti hanno detto che io non ho memoria?”. Convinzioni di questo tipo possono costituire una formidabile “barriera affettiva” producendo un effetto paralizzante sull’apprendimento (Shaughnessy, 1985). È necessario affinché l’allievo investa le energie per l’attivazione delle risorse opportune che creda di avere i mezzi (che ritiene) necessari, deve credere cioè di potercela fare, cioè deve avere ciò che viene detto un *sensò di autoefficacia* alto.

È chiaro che le convinzioni sono strettamente intrecciate con le teorie del successo e dunque con la percezione di fallimento: gioca un ruolo cruciale in questa interazione il processo di attribuzione causale che è quello attraverso il quale l’allievo interpreta il proprio successo o fallimento, attribuendolo a possibili cause che solitamente hanno come protagonista uno dei tre fattori mediatori dell’attività educativa: il docente, se stessi, la matematica.

. Come ho accennato nel paragrafo precedente, la teoria delle attribuzioni causali ha individuato alcune dimensioni significative per tali cause quali (Weiner, 1982):

1. *Il locus*: ovvero le cause possono essere interne o esterne alla persona. Per esempio posso pensare che un compito non mi è riuscito perchè non sono capace (locus interno) o perchè il professore lo ha dato particolarmente difficile (locus esterno).
2. *Controllabilità*: cause controllabili dal soggetto versus cause non controllabili. Per esempio solitamente l’impegno è visto come controllabile mentre l’intelligenza come incontrollabile.
3. *Stabilità*: cause stabili versus cause instabili nel tempo. Questa tra le tre dimensioni è forse quella che più di tutte risente delle convinzioni della persona: per esempio l’impegno può essere considerato un fattore sia stabile che instabile a seconda della persona, la stessa cosa vale per l’incapacità.

Queste distinzioni appaiono fondamentali per migliorare il senso di autoefficacia dello studente: è infatti sufficiente far slittare le attribuzioni causali da interne e stabili (quali l’incapacità) a non stabili e controllabili (quali ad esempio l’impegno), in modo da incrementare la motivazione e la persistenza nell’obiettivo. Dal processo di attribuzione causale dell’allievo è inoltre possibile ricavare, attraverso l’esplicitazione dei perché alcuni tra “i fattori mediatori” siano vissuti come cause del fallimento, informazioni importanti sulle convinzioni dello studente.

Infine, il costrutto d’atteggiamento. L’atteggiamento si può definire come *“la conseguenza di un’organizzazione di diverse emozioni e convinzioni su un oggetto o una situazione specifici, che predispone un individuo a rispondere in qualche modo preferenziale”*. (Rokeach in Kulm , 1980). Esempi di atteggiamenti nei confronti della matematica sono: motivazione, interesse, fiducia in se stessi. È interessante l’osservazione di McLeod(1992) sul rapporto fra emozioni, convinzioni e

atteggiamenti: *“una reazione emozionale ripetuta a un oggetto o a una situazione tende a perdere le caratteristiche di forte intensità ma breve durata nel tempo, produce convinzioni e si consolida in atteggiamento verso quell'oggetto o quella situazione, meno intenso ma più persistente”*. Dunque Nel passaggio dalle emozioni alle convinzioni e agli atteggiamenti diminuisce il livello di intensità, e la componente emozionale, mentre aumenta la stabilità nel tempo.

Per i motivi sopra citati gli atteggiamenti differiscono dalle emozioni e dalle convinzioni per essere caratterizzati da una maggiore persistenza nel tempo e da una minore intensità: possono quindi essere considerati, a differenza delle emozioni, tratti caratteristici di un soggetto, anche se non immutabili.

L'atteggiamento, essendo più stabile, è quello dal quale possono essere dedotte maggiori informazioni sulla dimensione affettiva dello studente. Esso dunque è quello che più di tutti può mettere in luce la necessità di un intervento di “recupero affettivo”, cioè di un intervento didattico che tenga conto della disposizione emozionale dell'allievo nei confronti della matematica .

Inoltre, Per quanto finora detto il maggior numero di fallimenti è dovuto a convinzioni errate su di se, sulla disciplina, sugli obiettivi dell'insegnante, che vengono ad essere la causa del cosiddetto atteggiamento negativo nei confronti della matematica. Una volta individuato un atteggiamento negativo nei confronti della matematica, un intervento didattico che promuova un cambiamento di tale atteggiamento dovrebbe quindi prima di tutto essere mirato ad individuare le cause di insuccesso e dunque le convinzioni che lo hanno generato per poi debilitare tali convinzioni slittando su convinzioni vincenti (Zan, 2006). Nel successivo paragrafo il costrutto di atteggiamento sarà analizzato più in dettaglio per la creazione del profilo affettivo dello studente.

3.4 L'atteggiamento nei confronti della matematica: verso una definizione multidimensionale

Qui di seguito riporto gli studi condotti dalla Di Martino e Zan (2007) sul costrutto di atteggiamento. Come ho mostrato nei paragrafi precedenti, tale costrutto ha origini nel campo della psicologia sociale (Allport 1935). Nel campo dell'insegnamento della matematica, esso è stato introdotto dalla convinzione che *“qualcosa chiamato atteggiamento gioca un ruolo cruciale nell'apprendimento della matematica”* (Neale 1969).

Le prime analisi in educazione matematica sono state condotte per analizzare la correlazione tra atteggiamento e decisioni di tipo scelta / evitamento di un determinato corso, e in particolare per un

corso di matematica (di Martino & Zan, R. 2002). La definizione implicita di atteggiamento cui questi studi fanno riferimento è quella di disposizione emozionale, che si riflette nel giudizio “mi piace/non mi piace”. Questi studi hanno evidenziato come un atteggiamento negativo nei confronti della matematica (ovvero una disposizione emozionale negativa) caratterizzi il ben noto fenomeno della mathematics avoidance.

Ma se gli studi sull'atteggiamento hanno dato risultati incoraggianti sulla correlazione tra atteggiamento positivo/negativo e scelta/evitamento, il successivo filone di ricerca che prevede la possibilità di interpretare l'origine della disposizione emozionale degli studenti per la previsione di un recupero ha incontrato molti più problemi (Di Martino & Zan, 2001).

Per tale motivo il costrutto di atteggiamento verso la matematica è stato introdotto in letteratura con definizioni diverse (Di Martino & Zan, 2001), a volte assunte implicitamente, che possono però essere ricondotte a tre tipologie:

- definizione semplice di atteggiamento, che identifica l'atteggiamento con la disposizione emozionale positive o negative (mi piace / non mi piace) nei confronti della matematica (McLeod, 1992; Haladyna, Shaughnessy J. & Shaughnessy M., 1983)..
- Una definizione multidimensionale, che ha tre componenti: cognitiva, affettiva e comportamentale (Eagly & Chaiken, 1998). e che da chiavi interpretative sull'origine della disposizione emozionale. che riconosce tre componenti caratterizzanti dell'atteggiamento: risposta emotiva, convinzioni relative all'argomento, comportamento scaturito dall'argomento. Da questo punto di vista, l'atteggiamento di un individuo nei confronti della matematica è definito in maniera più complessa dalle emozioni che egli/ella associa alla matematica (che, tuttavia, ha un valore positivo o negativo), dalle credenze individuali nei confronti della matematica, e da come egli/ella si comporta.
- Una definizione bidimensionale, in cui i comportamenti non appaiono esplicitamente (Daskalogianni & Simpson, 2000): l'atteggiamento nei confronti della matematica è vista come un insieme di convinzioni ed emozioni associate alla matematica.

3.4.1 Cosa si intende realmente per atteggiamento positivo o negativo?

Il termine atteggiamento è usato sia nella pratica che nella ricerca assieme con gli aggettivi positivo / negativo. Per esempio, gli studi sul rapporto tra atteggiamento e senso di autoefficacia esplorano la relazione tra l'atteggiamento positivo e il successo. Allo stesso modo, gli studi che mirano a

cambiare l'atteggiamento in realtà finiscono col porsi l'obiettivo di cambiare un atteggiamento negativo in uno positivo.

La definizione di atteggiamento positivo o negativo nei confronti della matematica dipende chiaramente dalla definizione stessa di atteggiamento.

Secondo la definizione semplice, è evidente che un atteggiamento positivo o negativo non è nient'altro che una disposizione emozionale positiva o negativa nei confronti della materia.

Se si sceglie una definizione bidimensionale o multidimensionale, non è così chiaro cosa possa significare una "atteggiamento positivo".

Se nelle definizioni multidimensionali ci si riferisce ad una componente cognitiva, ad una affettiva e ad una comportamentale, il significato di "atteggiamento positivo" dunque cambia in base al fatto che la parola "positivo" si riferisca alle convinzioni, alle emozioni o ai comportamenti (Middleton & Spanias, 1999). Così ad esempio un atteggiamento può essere valutato come "positivo" per quel che riguarda la dimensione emotiva, ma "negativo" per quel che riguarda la dimensione cognitiva o viceversa. Altri affrontano il problema valutando la somma algebrica delle singole componenti.

Le differenze nell'uso dell'aggettivo "positivo" porta non solo la scelta di diversi strumenti di verifica/valutazione, ma genera anche una diversa formulazione del problema di ricerca da affrontare. Per esempio il problema di scegliere come incentivare una "atteggiamento positivo", che spesso troviamo in questo campo di ricerca, richiede un approccio completamente differente in base al fatto che l'atteggiamento positivo si riferisca solo alla componente emotiva o ad un particolare insieme di convinzioni ed emozioni.

3.4.2 Uno progetto italiano sull'atteggiamento

Dal 2004 al 2006 è stato avviato da diversi ricercatori italiani³³ il Progetto autonomo Firb (RBAU01S427, coordinato da Rosetta Zan) dal titolo "L'atteggiamento negativo verso la matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del terzo millennio". L'obiettivo principale di tale progetto era proprio quello di studiare il fenomeno dell'atteggiamento negativo nei confronti della matematica, visto non solo come qualcosa connesso all'apprendimento della matematica, ma che influenza anche vari aspetti del contesto sociale: il rifiuto di molti studenti di iscriversi a facoltà scientifiche dovuto alla presenza di esami di matematica, uno spaventoso analfabetismo matematico, un rifiuto esplicito e generalizzato di applicare il pensiero scientifico e razionale, o, viceversa una tendenza ad accettare acriticamente modelli che sono solo apparentemente razionali.

³³ Autori del Progetto sono: Rosetta Zan, Pietro Di Martino, Pier Luigi Ferrari, Fulvia Furinghetti, Donatella Iannece, Paolo Lorenzi, Nicolina Malara, Maria Mellone, Francesca Morselli, Maria Polo, Roberto Tortora.

In Particolare il progetto si prefiggeva come obiettivi quello di fornire una definizione di atteggiamento "positivo" o "negativo" nei confronti della matematica, che fosse in grado di dare agli insegnanti ed ai ricercatori strumenti teorici per osservare ed interpretare le molte difficoltà incontrate dagli studenti nell'approcciarsi alla matematica e possibilmente fornire metodi per superarle. Per raggiungere i sopra citati obiettivi si è lavorato parallelamente sia sugli studenti che sugli insegnanti.

La metodologia ha comportato l'utilizzo di vari strumenti di osservazione: dai questionari, ai diari e alle interviste.

Per quanto riguarda le indagini sugli insegnanti esse erano volte a verificare se i docenti utilizzassero o meno il concetto di atteggiamento negativo e, nel caso, in che modo e per quali motivi. I primi risultati di queste indagini hanno evidenziato come la maggior parte degli insegnanti sembra avere un'idea multidimensionale di atteggiamento, sebbene, non esplicitino chiaramente gli indicatori per la rilevazione di tale atteggiamento, rendono così una qualsiasi valutazione inefficace. Le cause di un atteggiamento negativo di solito vengono ricondotte dagli insegnanti alle caratteristiche e ai comportamenti degli studenti, più che alla visione della matematica che essi abbiano contribuito a determinare negli studenti. In alcuni casi diagnosi di atteggiamento negativo, vengono utilizzate per la creazione di opportune attività di intervento.

Questi risultati hanno suggerito come il costrutto di atteggiamento, così come usato dagli insegnanti, non sembra possedere le caratteristiche di uno strumento teorico capace di dirigere i loro lavori (in particolare in quello di aiutare gli studenti a recuperare le loro difficoltà): piuttosto, gli insegnanti sembrano riconoscere una situazione che è difficile da gestire e modificare. Da qui l'importanza di fornire una definizione di atteggiamento nei confronti della matematica in grado di rendere questo costrutto uno strumento teorico che possa dirigere l'osservazione degli insegnanti, la loro interpretazione e le loro azioni di recupero.

Per tali scopi la ricerca è continuata con l'osservazione degli studenti che è stata realizzata soprattutto tramite l'analisi di composizioni degli studenti sulla matematica dal titolo: "Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica fino ad oggi".

Con questo strumento, il progetto ha superato l'approccio normativo che caratterizza molte delle ricerche sull'atteggiamento, considerato da Di Martino & Zan (2007) una delle cause della mancanza di chiarezza teorica e della mancanza di risultati significativi. L'idea sottostante questo approccio è quella di non assumere a priori una definizione di atteggiamento ma di ricavarne una indagando sul rapporto degli studenti con la matematica "dal fondo", cercando di sottolineare i fattori che secondo gli studenti determinano un certo "atteggiamento" nei confronti della matematica.

Il saggio è stato proposto a tutti gli ordini di scuola (per le elementari il titolo è stato abbreviato in: "Io e la matematica"). È stata raccolta una gran quantità di materiale, proveniente da differenti zone geografiche e scuole (1304 saggi: 741 dalle elementari, 256 dalle scuole medie, 306 dalle superiori). Il risultato finale di questo processo analitico è la costruzione di una serie di categorie, proprietà, relazioni: *“una teoria fondata”* (Glaser & Strauss, 1967), *“sarebbe a dire una teoria basata su di una serie di dati raccolti, la cui costruzione richiede un continuo andirivieni tra le differenti parti della ricerca”* (Di Martino & Zan, 2007).

3.4.3 Alcuni risultati del progetto sull'atteggiamento nei confronti della matematica

Di seguito riporto alcuni risultati provenienti dalla ricerca suddetta dettagliatamente riportati in Di Martino & Zan (2007), che hanno fornito la base per la creazione di una definizione multidimensionale di atteggiamento nei confronti della matematica.

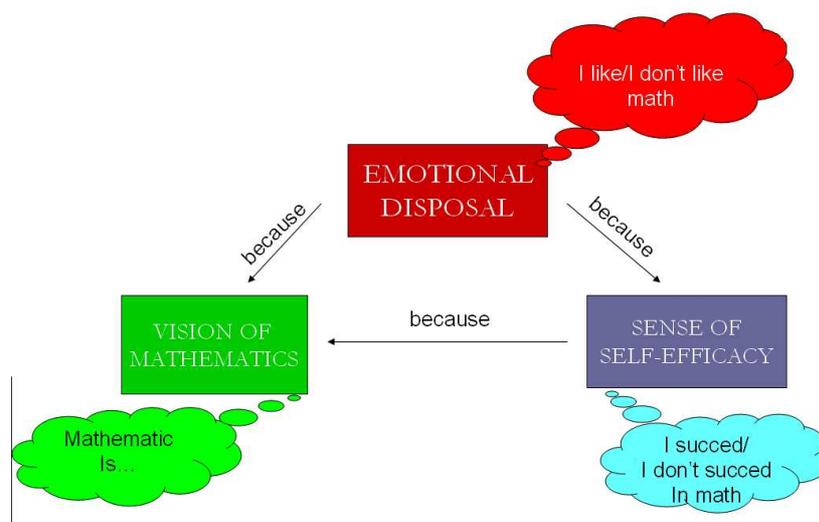
Leggendo i saggi, sono stati identificati tre nuclei tematici che vanno a caratterizzare la definizione di atteggiamento. Più precisamente:

- La disposizione emozionale nei confronti della matematica, ben sintetizzata da espressioni quali "mi piace/ non mi piace la matematica"
- La sensazione di essere / non essere portati per la matematica (senso di autoefficacia), ben sintetizzata da espressioni quali "riesco/non riesco"
- La visione della matematica, ben sintetizzata da espressioni quali "la matematica è..."

L'ipotesi suggerita dalla lettura dei saggi è confermata da molte analisi statistiche fatte grazie al software T-lab: l'espressione più frequente negli oltre 1330 saggi è "mi piace" (nelle sue diverse forme "mi piace/non mi piace/mi piaceva"), seguita da "riesco/non riesco" e "la matematica è..."

I saggi nella maggior parte dei casi si sviluppano attorno ad uno dei 3 temi sopra citati: spesso si fa riferimento a tutti i temi, sebbene si concentri su uno di essi (che per questo viene chiamato "nucleo centrale" del saggio). È interessante osservare come nella totalità dei saggi il mi piace/ non mi piace non compaia mai da solo, ma sempre accompagnato da almeno una delle altre due espressioni. Viene fuori chiaramente dalla lettura dei saggi il fatto che questi 3 temi siano strettamente connessi. La connessione più frequente viene effettuata tramite l'uso della congiunzione "perché": cominciando dal tema ricorrente "mi piace/non mi piace" la congiunzione conduce ad uno degli altri 2 temi: la visione della matematica o al senso di autoefficacia. Anche questi ultimi due fattori vengono solitamente collegati: solitamente una visione della matematica negativa viene vista come

causa di un senso di autoefficacia basso. In definitiva la definizione di atteggiamento che deriva dalle sperimentazioni può essere schematizzata come in fig. 3.1



fi. 3.1 la definizione multidimensionale di atteggiamento di Di Martino e Zan (2007)

Qui di seguito riporto brevemente alcuni stralci delle composizioni che testimoniano l'esistenza di tali connessioni.

Per quanto riguarda la connessione tra la **disposizione emozionale e la visione della matematica**, l'analisi delle composizioni ha evidenziato come spesso la frase "mi piace la matematica" sia stata associata ad una visione relazionale e "non mi piace la matematica" ad una visione strumentale: *“Non mi è mai piaciuto imparare le cose a memoria (eccetto alcune formule) e questa materia, assieme a Fisica, mi dà la possibilità di pensare e discutere. Mi piace perché è una materia che necessita di ragionamento”*

Nonostante ciò sono presenti, anche se meno frequenti, casi in cui a una visione strumentale sia associata una disposizione emozionale positiva mentre ad una visione relazionale sia associata una disposizione emozionale negativa: *“È affascinante perché non è un'opinione, è una materia razionale (così come lo sono io), che non ha bisogno di nessuna interpretazione”*.

Questi dati sottolineano il fatto che le 2 dimensioni quali la visione della matematica e il piacere/non piacere sono da considerarsi indipendenti.

La connessione tra **disposizione emozionale e senso di autoefficacia** viene fuori dalle composizioni in maniera preponderante tanto che l'espressione "Mi piace" ("non mi piace") e "riesco" ("non riesco") sono usate come sinonimi: *“Sin dalle scuole elementari, mi ricordo quando l'insegnante ci chiedeva di numerare per 2, 3, 6, 9, fino ad 800, 900 ... non mi piaceva. Poi ho cambiato scuola e ho cominciato ad odiarla ancora di più a causa delle espressioni. Per non parlare delle scuole medie, ho cambiato 4 insegnanti in 3 anni e per questo se non capivo niente prima, ora non capisco assolutamente zero”*.

Nella maggior parte dei saggi in cui le dimensioni "mi piace/non mi piace" e "riesco/non riesco" sono strettamente connesse, esse si presentano con espressioni del tipo "Mi piace perché ci riesco" oppure "non mi piace perché non ci riesco". Solo in rari casi sono state trovate combinazioni del tipo "mi piace nonostante non ci riesca" e "Ci riesco, ma non mi piace". In questo caso dunque le due variabili possono essere considerate come "statisticamente" dipendenti.

Quando il senso di autoefficacia (posso/non posso farcela) è il nucleo fondamentale del saggio, allora l'alunno descrive esplicitamente il perché del proprio successo/fallimento: le motivazioni fornite sono le cosiddette attribuzioni causali del successo/fallimento (Weiner, 1974). Queste motivazioni spesso ci permettono di individuare le convinzioni dell'alunno su se stesso e sulla matematica, a volte attraverso le cosiddette teorie sul successo, cioè quelle teorie che l'alunno ha sul successo in matematica.

Dalle composizioni emerge un'un'ampia gamma di modi di vedere la matematica. Per esempio, le teorie del successo che si basano sul ruolo della memoria, suggeriscono una visione strumentale della matematica *"Non è che non capisco la matematica, ma faccio pasticci perché ci sono molte regole e teoremi ed è quasi impossibile ricordarli tutti, inoltre, quando finalmente sono in corsa con una materia, sembra fatto apposta: andiamo avanti con il programma e resto fregato"*.

mentre le teorie del successo che si basano sul bisogno di comprendere ciò che si sta facendo, suggeriscono una visione relazionale della matematica: *"Fino alle scuole medie sono sempre andato bene in matematica, perché ho sempre capito il ragionamento sottostante"*.

In definitiva, i risultati che ho riportato, oltre ad introdurre una definizione di atteggiamento mettono in evidenza come la descrizione del proprio atteggiamento nei confronti della matematica da parte di un alunno non sia in generale identificabile con la sola disposizione emozionale (positiva/negativa) nei confronti della materia e dunque non sia descrivibile dalla sola definizione semplice di atteggiamento: è necessario sottolineare a quale visione della matematica e che grado di auto-efficacia è associata questa disposizione emotiva. Tali studi sottolineano dunque la necessità di una definizione multidimensionale.

Da cui Secondo Di Martino e Zan (2007) una definizione semplice di atteggiamento comporta dei limiti sia da un punto di vista educativo che teorico: questa può portare a valutare come "positivo" l'atteggiamento di un alunno che considera la matematica come una materia fatta di regole da memorizzare ed applicare rigidamente, solo perché la materia lo appassioni. *"Così è possibile introdurre diversi tipi di atteggiamenti "negativi", diversi "profili attitudinali" che dipendono dall'accezione del termine "negativo". Esso può riferirsi ad una visione della matematica distorta ed epistemologicamente sbagliata...ma può anche far riferimento alle convinzioni su di se, individuando come negative quelle convinzioni caratterizzate da un scarso senso di*

autoefficacia(non sono capace, non posso riuscirci, sono senza speranza)” (Di Martino e Zan, 2007).

In definitiva *“questa visione dell'atteggiamento nei confronti della matematica , può diventare un utile strumento per per la costruzione, da parte del docente, di un intervento mirato a modificare i componenti individuati come negativi per quell'alunno” (Di Martino e Zan, 2007).*

Capitolo IV

Formalizzazione di un modello di profilo affettivo per l'apprendimento della matematica

4.1 Un modello di profilo affettivo: le scelte per la sua creazione

Sulla base di quanto riportato nel quadro teorico sui fattori affettivi, in questo capitolo andrò a definire un modello per la profilazione affettiva dello studente per l'apprendimento della matematica. L'idea è quella di utilizzare questo modello, da una parte per avere un quadro completo dell'esperienza "affettiva" dello studente nel fare matematica, dall'altro di ottenere informazioni per costruire opportuni learning path (una sequenza di learning activities e learning object personalizzata) che permettano, in caso di bisogno di migliorare tale profilo. Ciò equivale a dire che il modello conterrà sia gli "indicatori di difficoltà" che gli "indicatori di azione" che ho dettagliatamente descritto nel paragrafo sulle domande di ricerca.

Per la creazione del mio modello ho deciso di utilizzare il costrutto di atteggiamento nei confronti della matematica (Albano & Ascione, 2008a), che per i miei scopi sembra essere il più adeguato per due motivi:

1. il costrutto di atteggiamento, essendo definito come la conseguenza dell'organizzazione delle emozioni e delle convinzioni che predispone un individuo a rispondere in una maniera preferenziale (Zan, 2000), contiene il maggior numero di informazioni "affettive" sullo studente;
2. l'atteggiamento è considerato, tra i fattori affettivi, quali le emozioni e le convinzioni, il più stabile (Lester, 2002) e questa è anche una caratteristica del profilo, la cui creazione non può essere legata ad eventi sporadici descrivendo esso stesso la relazione generale che lo studente ha con la matematica.

Ho considerato la definizione di atteggiamento proposta da Di Martino e Zan (2007), dettagliatamente descritta nel capitolo precedente. Essa infatti, a differenza delle altre presenti nel vasto quadro teorico caratterizzante l'ambito di ricerca sembra la più attinente alla realtà poiché non è stata creata assumendo a priori una definizione di atteggiamento (considerato da Di Martino & Zan (2007) una delle cause della mancanza di chiarezza teorica e della mancanza di risultati

significativi) , ma è stata ricavata “dal fondo” indagando sui i fattori che secondo gli studenti determinano un certo “atteggiamento” nei confronti della matematica. Come ho mostrato nel quadro teorico, a partire da tale definizione, Di Martino & Zan(2007) progettano attività atte a prevenire e/o recuperare l’apprendimento di studenti in difficoltà.

Secondo tale definizione il modello che propongo terrà in considerazione i seguenti fattori e relazioni tra essi individuati (fig 4.1):

- la disposizione emotionale dello studente, descritta dall’espressione “mi piace/non mi piace”;
- la visione della matematica dello studente riflessa dall’espressione “la matematica è ...”;
- il senso di autoefficacia dello studente , denunciato dall’espressione “riesco/non riesco”.

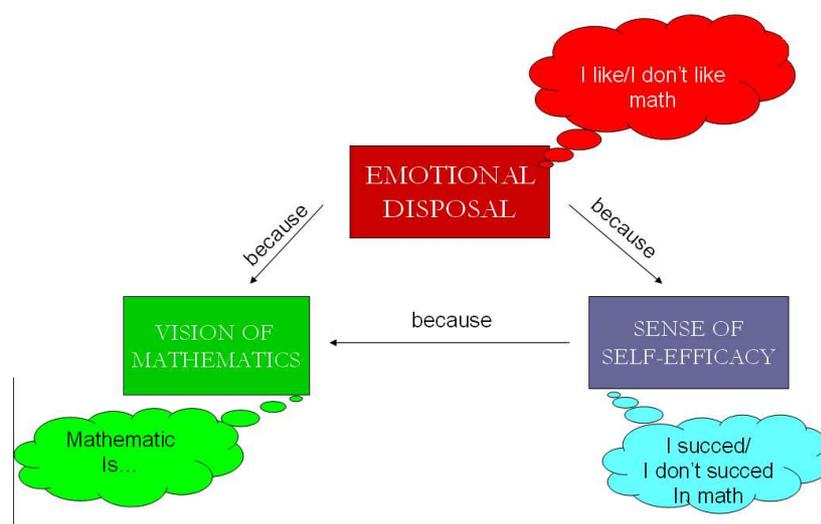


fig. 4.1 la definizione multidimensionale di atteggiamento di Di Martino e Zan (2007)

Tali fattori e le relazioni esistenti tra di essi descrivono l’atteggiamento dello studente nei confronti della matematica e dunque li considererò all’interno del mio modello come “indicatori di difficoltà”. Dalla fig 4.1 inoltre, osservando le relazioni tra i tre fattori raffigurati si evince come sia la visione che il senso di autoefficacia sono considerate cause di una disposizione emotionale più o meno positiva. Non a caso Di Martino e Zan (2007) sottolineano il fatto che in tutte le composizioni da loro analizzate una disposizione emotionale negativa non compare mai da sola. Da tali considerazioni segue che per migliorare una disposizione emotionale di uno studente, sarà sufficiente migliorare uno o entrambi i due fattori, quali visione e senso di autoefficacia. Per tali motivi considererò tanto la visione della matematica quanto il senso di autoefficacia come i “indicatori di azione” del mio modello.

Il modello di atteggiamento proposto da Di Martino & Zan che mi sono trovata ad utilizzare però, come ho descritto nel terzo capitolo, è stato validato in condizioni di apprendimento “normali”, “standard” quali quelli gestiti da “esseri umani”. L’ambiente invece per cui ho avviato le mie ricerche e nel quale mi muovo, prevede la gestione automatica dei processi di apprendimento, che significa inserire la “semplificazione” nella “complessità”, con tutte le problematiche che ne conseguono. Basti pensare all’interpretazione dei discorsi, delle composizioni degli studenti (utilizzati in maniera massiccia dagli autori), dell’analisi dei gesti, alla “lettura”, alla deduzione di cose che pur non sembrano essere state dette. Il problema degli automatismi di cui è caratterizzata la piattaforma, derivante dalla mancanza di una gestione umana dei processi di apprendimento, mi ha costretto a rivedere i modelli proposti nel quadro teorico. A tal fine, ho basato la costruzione del modello di profilo affettivo sul costruito di atteggiamento di Zan&DiMartino ma lo ho ampliato in modo che contenesse con “certezza” le informazioni che in contesti “naturali” potrebbero essere dedotti da “fatti” non esplicitamente chiesti e/o menzionati e che sono necessari per i miei scopi. Questo è il motivo per cui il modello è stato arricchito con altre informazioni utili per la creazione dei learning path personalizzati.

In particolare rispetto alla *disposizione emozionale* il modello da me creato è stato ampliato in modo da investigare sulle emozioni associate alla matematica. Le emozioni infatti, come ho mostrato nel quadro teorico sui fattori affettivi, possono essere utili per capire la disposizione emozionale dello studente. Emozioni negative stabili quali ad esempio paura, frustrazione, ansia, sono sicuramente da legare ad una disposizione emozionale molto negativa. Meno negative invece è la disposizione legata a emozioni non stabili ma relative a singoli eventi, quali ad esempio “ansia se non riesco” (espresso con l’uso della particella *se*). Una disposizione positiva invece è sottesa all’uso di emozioni positive quali gioia, adrenalina, felicità, pace ecc. Per quanto ho riportato sopra, ho deciso di utilizzare nel mio modello le emozioni come indicatori di difficoltà.

Rispetto al senso di autoefficacia, particolarmente significative sono le attribuzioni causali di successo o fallimento, che sono le convinzioni che la persona costruisce ed elabora per cercare di interpretare il proprio successo o fallimento. Esse si riferiscono ai tre “agenti” del processo educativo quali se stesso, l’insegnante, la materia. Come riportato nel quadro teorico sui fattori affettivi, esse sono utili per scegliere l’intervento didattico più adeguato e per questo motivo le ho considerate come “indicatori di azione” del mio modello. In particolare Weiner(1983) distinguendo tra cause interne stabili e controllabili da delle indicazioni che appaiono fondamentali per migliorare il senso di autoefficacia dello studente: “*è infatti sufficiente far slittare le attribuzioni causali da interne e stabili (quali l’incapacità) a non stabili e controllabili (quali ad esempio l’impegno), in modo da incrementare a motivazione e la persistenza nell’obiettivo*”(Zan, 2006).

Rispetto alla visione della matematica il modello distingue tre livelli differenti che partono dalla visione della matematica puramente strumentale a quella relazionale (Skemp, 1976). In particolare la visione relazionale è quella dei matematici, quella cioè condivisa dalla maggioranza della comunità scientifica come positiva, (maggioranza alla quale mi sento di appartenere) e per questo motivo quella più attesa e sospirata dagli insegnanti ed alla quale l'intervento dovrebbe essere mirato. Le scelte sottese al modello sono schematizzate in figura 4.2:

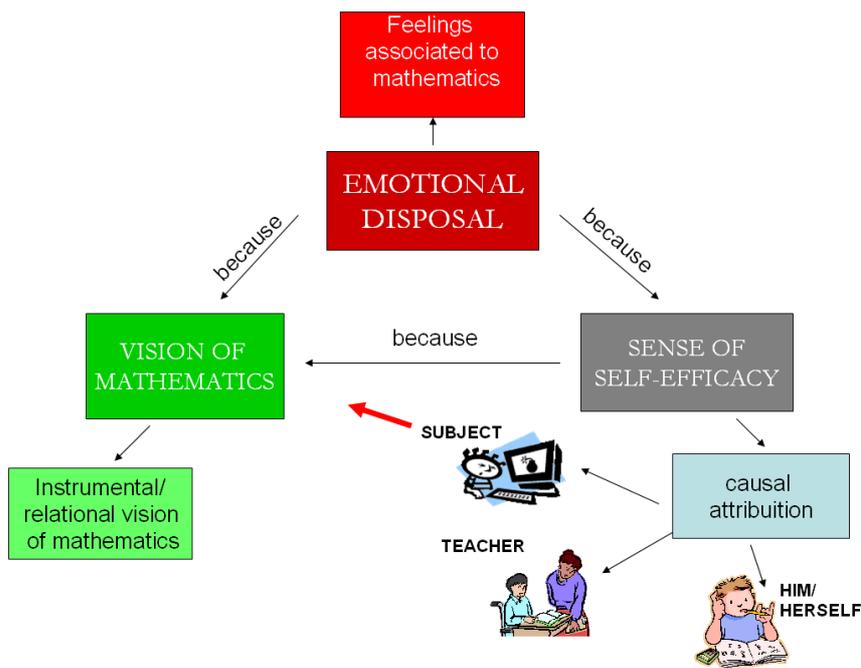


fig. 4.2 le scelte sottese al modello di profilo affettivo

Partendo dallo schema in figura 4.1, la combinazione delle dimensioni sopra citate possono essere visti come costituenti di uno “spazio di apprendimento” tridimensionale, che ho definito *mathematical affective space* (Albano & Ascione, 2008) (fig. 4.3), i cui assi sono la visione della matematica, il senso di autoefficacia, la disposizione emozionale. Questo strumento matematico mi consentirà di monitorare il profilo durante e dopo la fase di apprendimento. Ovviamente, per tale scopo è necessario che ad ogni singolo studente sia associato un punto in tale spazio che rappresenti il suo atteggiamento nei confronti della matematica. A tal fine ho introdotto una metodologia che consenta di associare ad ogni studente una terna di valori numerici che rappresenti la sua visione della matematica, il suo senso di autoefficacia, la sua disposizione emozionale nei confronti della matematica. Ho descritto questa metodologia dettagliatamente nei paragrafi successivi.

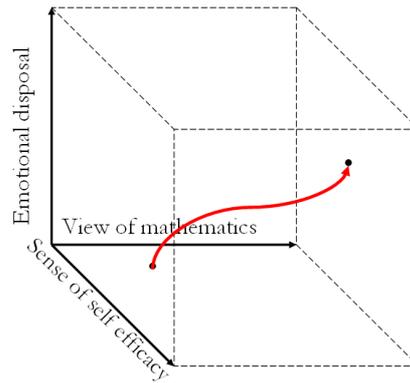


fig. 4.3 the mathematical affective space

Ho deciso di utilizzare un range di valori sugli assi compresi tra 0 e 1, dunque il profilo di ciascuno studente sarà rappresentato da un punto interno al cubo con vertice (1, 1, 1), che è chiaramente il profilo ottimale al quale tutti gli interventi dovrebbero mirare. Qui di seguito descriverò in maniera più dettagliata i tre assi e la loro funzione per la fase di apprendimento.

- ASSE DELLA VISIONE DELLA MATEMATICA

Il valore 1 su questo asse rappresenta la visione considerata positiva dalla comunità dei matematici che lo studente dovrebbe possedere, che è quella relazionale. Partendo da questa assunzione ho distinto tre macro livelli della visione della matematica che qui vi illustro (fig. 3):

- 1) livello puramente strumentale: gli studenti con questa visione considerano la matematica come una materia strumentale (cfr. Skemp) ed al più essi possiedono una comprensione strumentale.
- 2) livello misto: studenti appartenenti a questo livello hanno ancora una visione strumentale della matematica, (cfr. Skemp) ma sono portati a chiedersi e cercare di darsi le giuste motivazioni per gli strumenti matematici che utilizzano, e al massimo essi possiedono una comprensione relazionale della disciplina.
- 3) livello relazionale: gli studenti appartenenti a questo livello hanno una visione relazionale della matematica fino ad ottenere lo stesso tipo di comprensione.

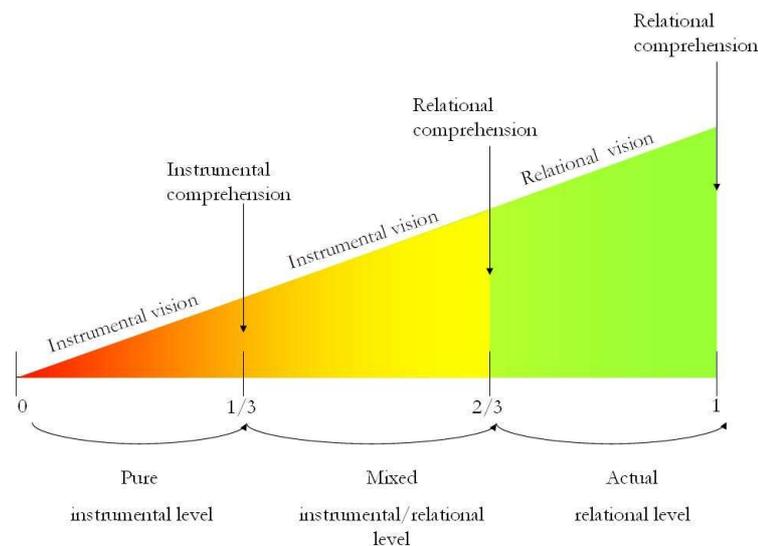


fig. 4.4 Asse della visione della matematica

- ASSE DEL SENSO DI AUTOEFFICACIA

Il valore su questo asse rappresenta il senso di autoefficacia percepito dallo studente. Essendo una percezione, è da ritenersi differente dalle reali abilità dello studente (che possono essere separatamente valutate tramite opportuni test). Il valore 1 dell'asse rappresenta ovviamente lo studente che percepisce se stesso vincente con la matematica.

Utilizzando il range di valori decisi, lo studente può dare un valore al suo senso di autoefficacia che va da 0 a 10. Tale valore, opportunamente normalizzato nell'intervallo $[0,1]$, darà anche il corrispondente valore sull'asse. Ho dato la scelta di 11 valori possibili poiché più la grana è fine più è alta la possibilità di osservare i cambiamenti essendo lo strumento più sensibile, e tale fattore è importante soprattutto se si pensa al senso di autoefficacia come indicatore di difficoltà. Ho deciso di dividere gli assi nei seguenti tre intervalli, che corrispondono a livelli differenti di senso di autoefficacia:

INTERVALLO	SENSO DI AUTOEFFICACIA CORRISPONDENTE
$[0, 0,5]$	Basso senso di autoefficacia
$]0,5, 0,6]$	Senso di autoefficacia medio
$]0,6,1]$	Senso di autoefficacia alto

- ASSE DELLA DISPOSIZIONE EMOZIONALE

Il valore su questo asse rappresenta quanto la matematica piace allo studente e sarà , come ho prima accennato, rappresentato da un valore compreso tra 0 (per niente) e 1 (molto). Lo studente con una disposizione emozionale neutra sarà rappresentato su questo asse al centro di esso. L'asse può essere diviso nei seguenti quattro intervalli, che corrispondono a differenti disposizioni emozionali:

INTERVALLI DELL'ASSE	DISPOSIZIONE EMOZIONALE CORRISPONDENTE
[0, 1/4]	Una disposizione emozionale molto negativa
]1/4, 1/2]	Una disposizione emozionale negativa che arriva all'indifferenza
]1/2,3/4]	Una disposizione emozionale positiva
]3/4,1]	Una disposizione emozionale molto positiva

Inoltre penso che l'affective mathematical space possa essere utilizzato anche come utile strumento di ricerca per l'esplorazione dell'atteggiamento dello studente nei confronti della matematica. Penso infatti che esso possa dare informazioni oltre che sui tre fattori costituenti la definizione di atteggiamento, anche sulle relazioni tra questi che potrebbero essere dedotti osservando i valori assegnati alle coppie (visione, disposizione) e (visione, senso di autoefficacia)³⁴. In particolare qui di seguito riporto le informazioni che penso possono essere dedotte osservando la coppia (visione, disposizione):

VALORI DELLA COPPIA (DISPOSIZIONE EMOZIONALE, VISIONE)	INFORMAZIONI DEDOTTE SULLA RELAZIONE TRA LA DISPOSIZIONE EMOZIONALE E VISIONE
(molto positiva, visione relazionale)	Allo studente piacciono sia gli esercizi che i problemi
(positiva, visione relazionale o mista)	Allo studente piacciono i problemi ma non gli esercizi
(negativa, indiff, visione mista o strumentale)	Allo studente piacciono gli esercizi ma non i problemi
(molto negativa, visione strumentale)	Allo studente non piacciono ne i problemi ne la teoria

³⁴ Non ha senso considerare la coppia (senso di autoefficacia, disposizione) poiché i due fattori sono mutuamente dipendenti come riportato nel capitolo terzo.

Nella seconda tabella qui di seguito riportata invece presento le informazioni che potrebbero essere dedotte osservando la coppia (visione, senso di autoefficacia).

(VISIONE, SENSO DI AUTOEFFICACIA)	INFORMAZIONI DEDOTTE SULLA RELAZIONE TRA LA VISIONE E IL SENSO DI AUTOEFFICACIA
(visione strumentale, senso di autoefficacia medio o basso)	Lo studente pensa di non riuscire a fare sia gli esercizi che i problemi
(visione mista, senso di autoefficacia medio o basso)	Lo studente pensa di riuscire a fare solo gli esercizi (solo i problemi)
(visione relazionale, senso di autoefficacia medio o alto)	Lo studente pensa di riuscire a fare sia gli esercizi che i problemi

4.2 Uno strumento per l'assegnazione del profilo affettivo a ciascuno studente: il questionario

Poiché l'atteggiamento verso la matematica è fortemente influenzato dall'esperienza dello studente con la materia, non c'è dubbio che il miglior modo di investigare su tale aspetto, come riportato nel quadro teorico sui fattori affettivi, sia la composizione, o comunque domande aperte che lascino libero lo studente di esprimere le proprie sensazioni, convinzioni e i propri stati d'animo. Non a caso, nella ricerca condotta da Zan e Di Martino (2007), da me dettagliatamente riportata nel capitolo 3, gli autori, per dedurre il costrutto di atteggiamento, utilizzano il tema autobiografico "Maths and me", esaminando in tal modo un gran numero di temi, di ogni grado di scuola, che descrivono la storia della relazione tra gli studenti e la matematica. Questo, dal punto di vista della ricerca sui fattori affettivi, è il miglior modo di analizzare tali fattori, poiché si evita il rischio, che corrono i questionari a risposta chiusa, di forzare la risposta dello studente in una o in un'altra direzione scelta dal ricercatore (Di Martino et al., 2007). Basti pensare a quanto sia complessa l'analisi delle convinzioni per la sussistente contraddizione fra le convinzioni che un soggetto dichiara, quando risponde ad un questionario appositamente preparato e quelle che invece pratica cioè quelle che sembrano guidare i suoi processi decisionali (Schoenfeld, 1989). Purtroppo tale metodologia, anche se la migliore dal punto di vista della ricerca non è praticabile nella gestione

giornaliera delle classi e ancor più nella gestione degli studenti mediata da tecnologie e-learning. Al contrario, i questionari a risposta chiusa sono gestiti bene dagli strumenti tecnologici. Cercando di tenere in considerazione entrambe le problematiche, ho deciso di creare un questionario misto, che investighi su ciascuno dei fattori considerati nel nostro modello con domande a risposta sia chiusa che aperta.

Il questionario suddetto è composto da alcune domande a risposta chiusa, le cui risposte possono essere semplicemente previste e classificate, e da alcune domande a risposta aperta, che evitino il rischio di forzare la risposta. Nella gestione di una piattaforma infatti devono necessariamente coesistere entrambe le modalità. Le risposte chiuse da sole infatti non eviterebbero il rischio della forzatura della risposta, le sole risposte aperte, dall'altro lato, non sono necessariamente comprese in modo chiaro dalla piattaforma. La loro gestione in piattaforma infatti è avviata con l'uso di un opportuno database (che sarà nel mio caso ottenuto dall'analisi delle risposte pervenute dalla sperimentazione del questionario riportata nel quinto capitolo) che potrebbe fallire nell'interpretazione di una risposta specifica.

Tutte le informazioni ottenute dal questionario contribuiranno ad individuare il profilo affettivo dello studente che consisterà proprio nella lista delle sue risposte al questionario.

Riferendoci al modello, il questionario, riportato nelle pagine successive, riflette le tre dimensioni suddette: la disposizione emozionale (domande 1, 2); la visione della matematica (domande 8/10,14); il senso di autoefficacia (domande 6,7/9,11).

Infine nel questionario sono presenti delle domande, non attinenti per la valutazione del profilo, che servono a vagliare la possibilità che la relazione tra i tre fattori possa essere dedotta dall'analisi delle coppie (disposizione, visione), (disposizione, senso di autoefficacia). Esse sono atte a valutare esplicitamente le suddette relazioni. Una volta validata tale ipotesi tali domande infatti potranno essere escluse dal questionario. Le ho chiamate "domande di controllo": in particolare le 3, 4, 5 consentono di valutare la relazione tra la disposizione emozionale e la visione mentre le domande 12 e 13 consentono di fare lo stesso per la relazione tra il senso di autoefficacia e la visione. Non ho previsto alcuna domanda a controllo della relazione tra il senso di autoefficacia e la disposizione emozionale. Questo perché, come sottolineato dalla Zan nei suoi lavori, un basso senso di autoefficacia, è sempre causa di una disposizione emozionale negativa.

Qui di seguito vi mostrerò dettagliatamente ogni specifica domanda del questionario ed il ruolo che essa ha per la creazione del profilo.

1. Ti piace la matematica?

a. per niente!

- b. no, solo un poco*
- c. mi è indifferente*
- d. si, abbastanza*
- e. si, molto!*

2. *che sensazioni provi quando fai matematica?*

3. *Quando fai matematica, quanto ti piacciono le seguenti attività?*

- a. fare esercizi :per niente, poco, abbastanza, molto*
- b. fare problemi : per niente, poco, abbastanza, molto*

4. *che tipologia di esercizi/problemi ti piace di più?*

5. *che tipologia di esercizi/problemi ti piace di meno?*

6. *Pensi di riuscire in matematica?*

datti un voto da 0 a 10:

(da 0 a 5., vai al blocco B, altrimenti vai al blocco A)

BLOCCO A

7. *da cosa deduci di riuscire in matematica?(puoi scegliere a, b, o entrambe)*

- a. Prendo buoni voti*
- b. Quando faccio matematica capisco*

8 *come ti rendi conto di aver capito?*

- a. Mi tornano i conti*
- b. Applico correttamente le regole*
- c. Seguo i ragionamenti*

BLOCCO B

9. *da cosa deduci di non riuscire in matematica?(puoi scegliere a, b, o entrambe)*

- a. Prendo cattivi voti*
- b. Quando faccio matematica non capisco*

10. *come ti rendi conto di non aver capito?*

- d. *Non mi tornano i conti*
- e. *Non applico correttamente le regole*
- f. *Non seguo i ragionamenti*

11. *il tuo fallimento in matematica è dovuto:*

- a. *alla materia*
 - i. *perché?*
- b. *All'insegnante*
 - ii. *perché?*
- c. *Tue difficoltà*
 - iii. *quali?*

(fine del blocco B)

12. *che cosa pensi di fare avanti a un problema mai visto prima?*

- a. *penso di saperlo risolverlo*
- b. *Penso di provarci anche se non sono sicuro di riuscirci*
- c. *Penso di provarci ma di abbandonare al primo fallimento*
- d. *Non penso di essere capace a risolvere problemi*

13. *pensi di essere capace a:*

- a. *risolvere esercizi* *Si/No*
- b. *Risolvere problemi* *Si/No*

14. *scegli tre aggettivi per descrivere la matematica.*

le domande 1, 2 riguardano rispettivamente la disposizione emozionale dello studente rispetto alla matematica. La prima è chiusa e consente di dividere gli studenti in cinque gruppi rispetto a differenti disposizioni emozionali : MN (molto negativa) corrispondente alla risposta a., N (negativa) corrispondente alla risposta b., I (disinteressato) corrispondente alla risposta c., P (positiva) corrispondente alla risposta d., MP (molto positiva) corrispondente alla risposta e. La domanda 2 ha lo stesso ruolo della domanda 1 ma è aperta. L'analisi delle risposte aperte sarà utilizzata per confermare o meno l'assegnazione precedente fatta con la domanda a risposta chiusa. In particolare, per la domanda 2, come per il resto delle domande a risposta aperta, ho invece

previsto una sperimentazione in modo ottenere un elenco delle emozioni più frequenti da catalogare poi rispetto alle cinque possibilità di risposta previste dalla domanda 1. È ovvio che potrebbero essere utilizzati sensazioni non previste in piattaforma, per questo motivo in piattaforma potrebbe essere utilizzato un software per il riconoscimento di sinonimi.

Per quanto riguarda il senso di autoefficacia, la domanda 6 consente di dividere gli studenti in 10 gruppi in accordo con la loro risposta.

Le domande 7/9 analizzano le attribuzioni causali in maniera chiusa. In particolare esse consentono di capire da quale oggetto lo studente diviene consapevole di riuscire o di non riuscire. In particolare in questa domanda viene enfatizzato il valore di causa interna (capire) o esterna (voti).

La domanda 11 è aperta e ci consente di avere per ogni studente una lista di cause che ascrive al proprio insuccesso in matematica. È molto importante che questa domanda rimanga aperta, e sarà considerata quando possibile più importante di quelle chiuse, per la sussistente contraddizione fra le convinzioni che un soggetto dichiara, quando risponde ad un questionario appositamente preparato e quelle che invece pratica cioè quelle che sembrano guidare i suoi processi decisionali (Schoenfeld, 1989). Ho distinto tre blocchi principali: la materia, l'insegnante, proprie difficoltà e allo studente viene chiesta di dare una motivazione per la propria scelta.

Le domande 8/10 e la 14 riguardano la visione della matematica. In particolare le domande 8/10 è a risposta chiusa e investiga sulle convinzioni dello studente sulla disciplina. Le opzioni previste dalla domanda corrispondono ai tre macrolivelli dell'asse della visione nello spazio affettivo. La domanda 14 è a risposta aperta e consente di confermare o meno la precedente assegnazione. A tal proposito gli aggettivi collezionati durante la sperimentazione saranno divisi nei quattro gruppi corrispondenti ai macrolivelli.

Infine come ho prima accennato, ho introdotto delle domande di controllo in particolare: le 3, 4, 5 saranno utilizzate in termini di controllo dello strumento in termini di coerenza tra la visione e disposizione emozionale. In particolare le domande 3, 4/5 differiscono per tipologia, le 4 e 5 infatti sono aperte mentre la 3 è chiusa. Anche per questo sarà creato un repository di risposte possibili che mi consentirà di dividere il catalogo rispetto alle tre categorie caratterizzanti la visione.

In modo simile, le domande 12 e 13 saranno utilizzate come controllo dello strumento in termini di coerenza tra la visione e il senso di autoefficacia relativa a quella visione (ad esempio studenti con un alto senso di autoefficacia e con una visione strumentale dovrebbero rispondere positivamente alla 13.a e negativamente alla 12 e 13.b).

4.3 Dal questionario al modello: l'algoritmo di modellazione

In questo paragrafo descriverò in cosa consiste il profilo affettivo e come settarlo allo scopo di implementarlo nella piattaforma e-learning. Secondo il modello descritto nei paragrafi precedenti, ho costruito uno spazio tridimensionale rappresentato dal cubo di vertice (1,1,1). Ogni studente, a ogni momento fissato della sua esperienza di apprendimento, può essere identificato con un punto di questo cubo. Nel presente paragrafo andrò a descrivere come associare un punto nel cubo a ciascuno studente tramite l'analisi delle sue risposte al questionario. Il questionario può essere sottomesso in differenti momenti, in modo da ottenere una immagine del trend del profilo dello studente. Ovviamente, a seconda della posizione dello studente nel cubo, possono essere associate attività atte a migliorare la sua posizione.

Per quanto fin'ora detto il profilo affettivo di ciascuno studente sarà rappresentato da un array numerico $v=(v_1, v_2, v_3)$. Nel caso in cui lo studente abbia un senso di autoefficacia medio basso, il profilo conterrà anche una lista di cause che lo studente associa al proprio insuccesso. La metodologia per tale assegnazione sarà dettagliatamente descritta nei prossimi sottoparagrafi.

4.3.1 L'assegnazione del valore della disposizione emozionale

Questa analisi darà il valore v_1 del primo elemento dell'array. Tale assegnazione sarà fatta considerando le risposte alle domande 1, 2. La prima consente di dividere gli studenti in cinque gruppi rispetto a differenti disposizioni emozionali : MN (molto negativa) corrispondente alla risposta a., N (negativa) corrispondente alla risposta b., I (disinteressato) corrispondente alla risposta c., P (positiva) corrispondente alla risposta d., MP (molto positiva) corrispondente alla risposta e. Un valore reale sarà associato a ciascuna categoria: rispettivamente 0, 1/4, 1/2, 3/4 e 1, che saranno i valori iniziali di v_1 .

L'analisi della risposta alla domanda aperta 2 sarà utilizzata per aggiustare l'assegnazione precedente. Per fare ciò sarà utilizzata la categorizzazione (riportata nel capitolo 5) rispetto alle succitate disposizioni emozionali. In particolare, a ciascuna delle cinque categorie create sarà assegnato uno dei cinque valori corrispondenti alla valutazione delle domanda chiusa. Se i due valori ottenuti coincidono, a v_1 sarà associato quest'ultimo, altrimenti, non conoscendo, quali delle due domande abbia fallito nella valutazione, a v_1 si assocerà la media tra i due. Nella figura 4 ho riportato il flow chart dell'algoritmo descritto.

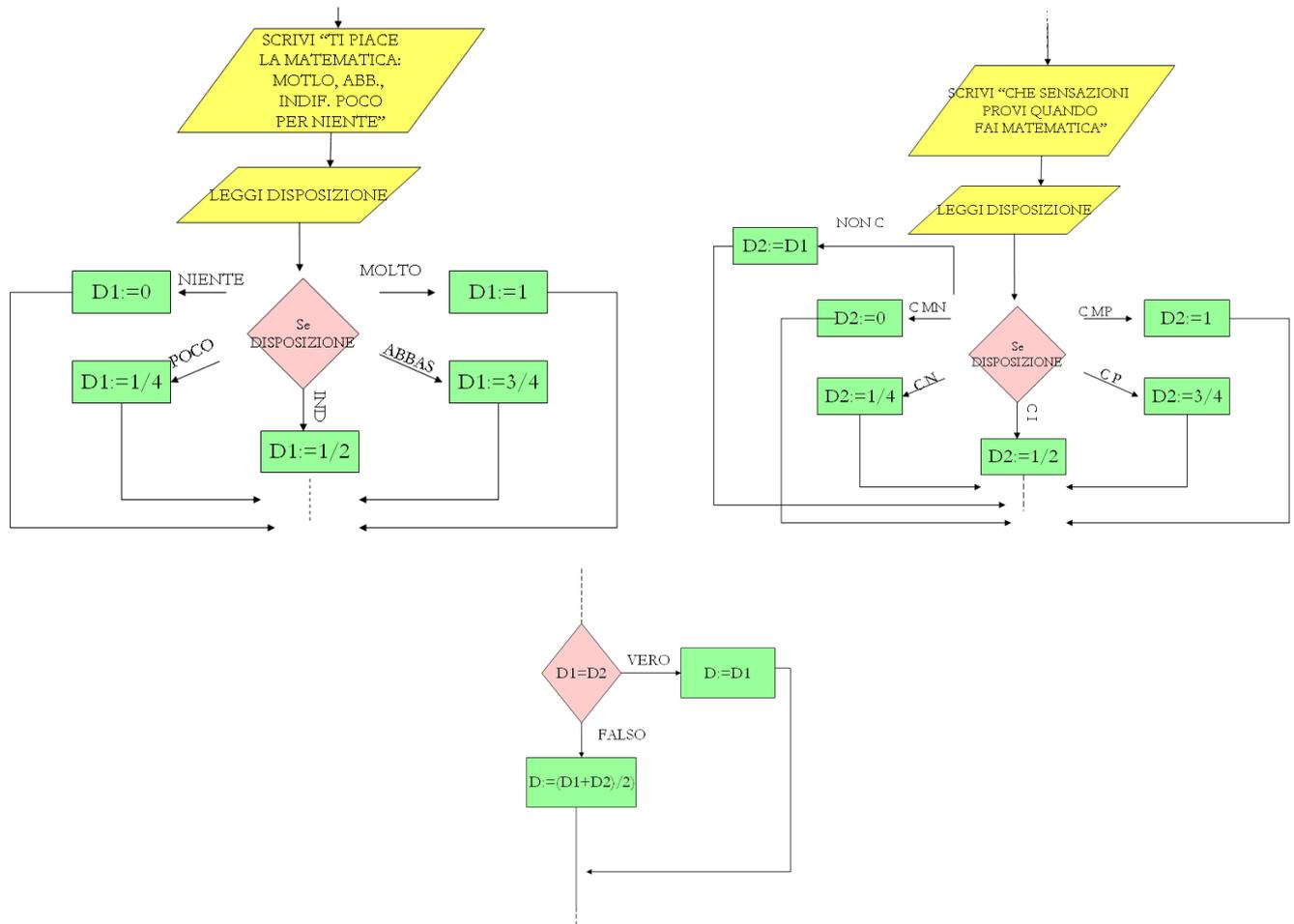


fig. 4.5 Algoritmo per l'assegnazione del valore della disposizione emozionale

4.3.2 L'assegnazione del valore al senso di autoefficacia

Questa analisi darà il valore v_2 del secondo elemento dell'array. Ciò sarà fatto considerando le risposte alla domanda 6, che prevede un voto da 0 a 10 al proprio senso di autoefficacia. Questo valore sarà normalizzato nella scala da 0 a 1, e il nuovo valore sarà immagazzinato in v_2 . Ho ritenuto i valori da 0 a 4 corrispondere a un basso senso di autoefficacia, 5 e 6 come un medio senso di autoefficacia, da 7 a 10 come un alto senso di autoefficacia. Se il senso di autoefficacia è medio basso, la piattaforma procederà con l'analisi delle cause di insuccesso tramite l'analisi delle risposte alle domande 11 e 2. Le cause saranno immagazzinate dalla piattaforma in una matrice e saranno utilizzati per dirigere l'intervento a migliorare il senso di autoefficacia.

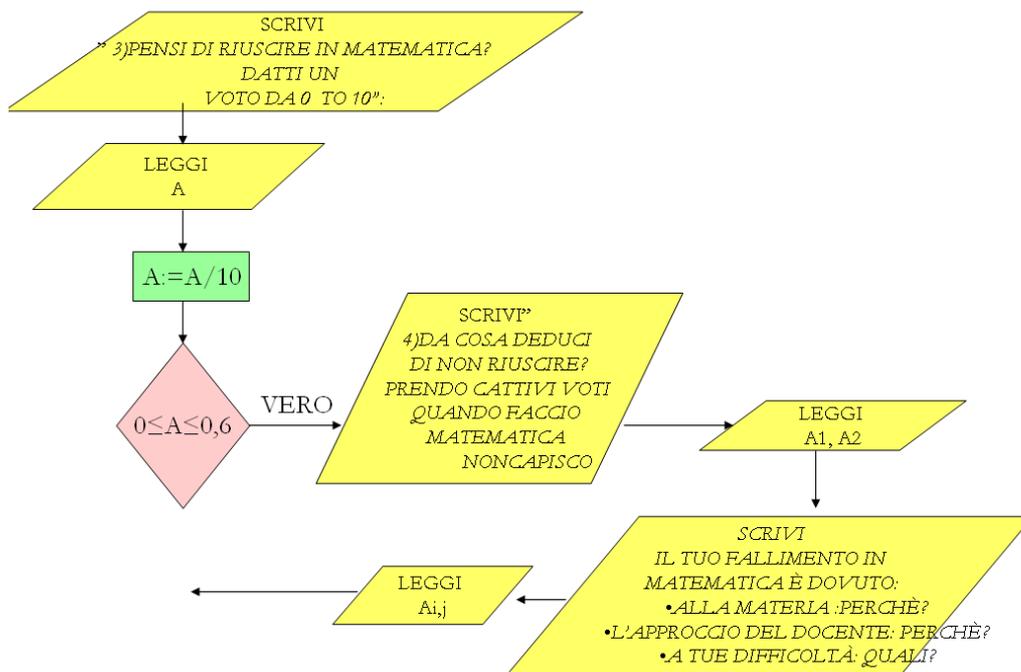


fig. 4.6 Algoritmo per l'assegnazione del valore del senso di autoefficacia

4.3.3 L'assegnazione del valore alla visione della matematica

Questa analisi darà il valore v_3 del terzo elemento dell'array. Tale assegnazione sarà fatta utilizzando le risposte alle domande 8/10, e 14.

Le risposte previste dalle domande 8/10 corrispondono a vari gradi di visione della matematica che vanno dallo strumentale al relazionale i cui valori numerici corrispondenti sull'asse saranno 0, 1/3, 2/3 e 1. Gli aggettivi ottenuti dalla risposta alla domanda 1° saranno classificati secondo le tre visioni succitate e a ciascuno dei cataloghi ottenuti saranno associati gli stessi valori numerici nella domanda alla risposta chiusa. Dei tre richiesti dalla domanda, si considererà come risposta la classe alla quale la maggioranza dei tre appartiene. In particolare se due o tre aggettivi appartengono alla stessa categoria si procederà al seguente modo:

- se 2 o 3 aggettivi appartengono alla categoria relazionale: si assocerà alla risposta il valore 1
- se 2 o 3 aggettivi appartengono alla categoria strumentale: si assocerà alla risposta il valore 0
- se 2 aggettivi appartengono alla categoria misti e il terzo è relazionale: si assocerà alla risposta il valore 2/3
- se 2 aggettivi appartengono alla categoria misti e il terzo è strumentale: si assocerà alla risposta il valore 1/3

I due valori ottenuti, il primo dalla risposta chiusa il secondo dalla risposta aperta saranno confrontati: se sono uguali a v_3 sarà associato quest'ultimo, altrimenti a v_3 sarà associata la media dei due valori.

Nel caso invece in cui si presenti un aggettivo per ogni catalogo, la risposta alla domanda aperta non risulterà significativa e dunque non potrà essere utilizzata per l'assegnazione del valore di v_3 che rimarrà così invariato.

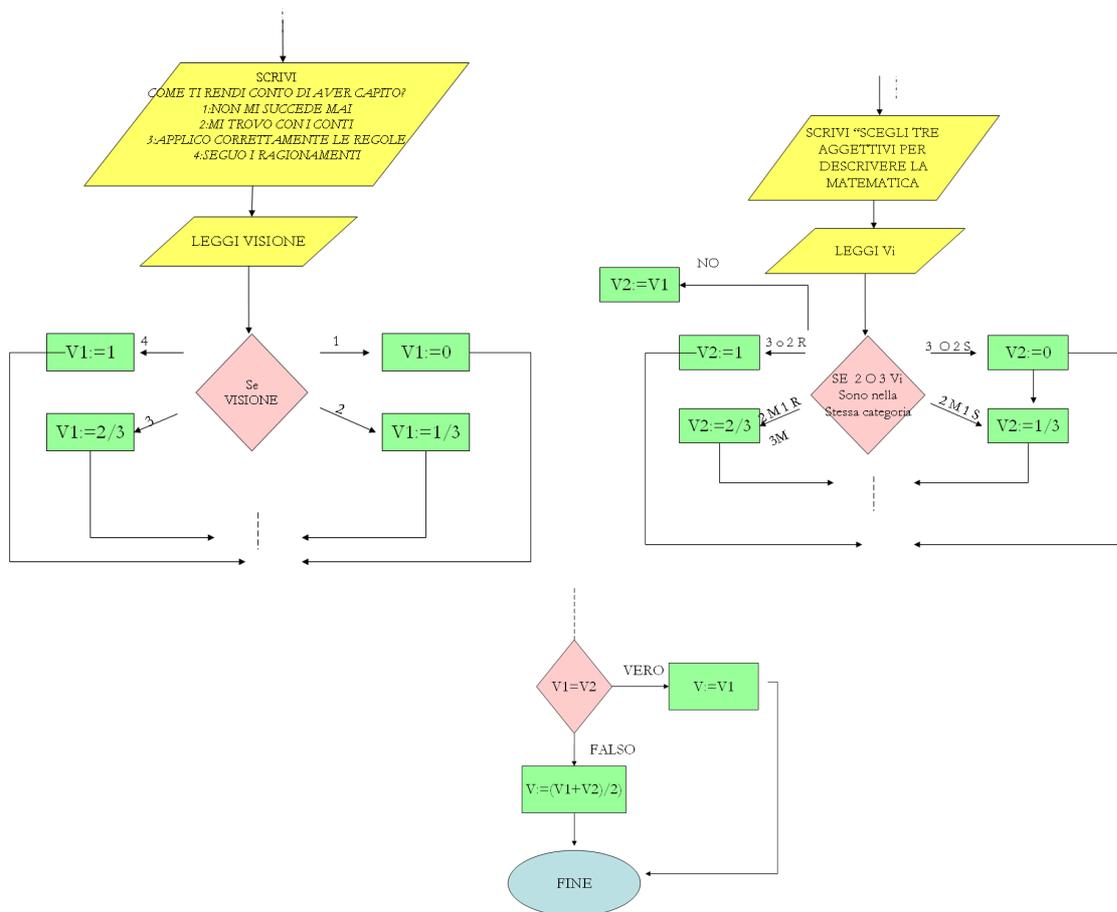


fig. 4.7 Algoritmo per l'assegnazione del valore per la visione della matematica

4.3.4 Le domande di controllo sulle relazioni tra i tre fattori

le risposte alle domande 3, 4/5 saranno utilizzate a controllo dello strumento tramite la coerenza tra la visione e la disposizione emozionale legata a tale visione.

Dalle domande 3, 4 and 5 possono uscir fuori le seguenti 4 possibilità che corrispondono per coerenza alle seguenti coppie (disposizione emozionale, visione):

POSSIBILI RISULTATI DELLE DOMANDE 3, 4, 5	(DISPOSIZIONE EMOZIONALE, VISIONE) ESPRESSA IN VALORI
Mi piacciono sia i problemi che gli esercizi	(da $\frac{3}{4}$ a 1, da $\frac{2}{3}$ a 1)
Mi piacciono i problemi ma non gli esercizi	(da $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$, da $\frac{1}{3}$ a 1)
Mi piacciono gli esercizi ma non i problemi	(da $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$, da 0 a $\frac{2}{3}$)
Non mi piacciono ne gli esercizi ne i problemi	(da 0 a $\frac{1}{4}$, da 0 a $\frac{1}{3}$)

Le risposte alle domande 12 e 13 saranno utilizzate a controllo dello strumento tramite la coerenza tra la visione e il senso di autoefficacia legato a quella visione.

In particolare dalla media dei due valori 12 e 13 possono scaturire le seguenti tre possibilità che corrispondono, per coerenza, alle seguenti possibilità della coppia (visione, senso di autoefficacia):

POSSIBILI RISULTATI DELLE DOMANDE 12 AND 13	(VISIONE, SENSO DI AUTOEFFICACIA)
Non riesco sia nei problemi che negli esercizi	(da 0 a $\frac{1}{3}$, da 0 a 0,6)
riesco solo a fare gli esercizi (problemi)	(da $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$, da 0 a 0,6)
riesco a fare sia gli esercizi che i problemi	(da $\frac{2}{3}$ a 1, da 0,7 a 1)

4.4 Come utilizzare il profilo per la creazione del learning path

Secondo le informazioni contenute nel modello, per ogni studente sarà individuato il profilo affettivo, che ci darà informazioni sul suo atteggiamento nei confronti della matematica. Il modello, conterrà anche informazioni sulle relazioni tra i tre fattori che lo caratterizzano che sono dedotte dal profilo analizzando le coppie (disposizione emozionale, visione della matematica) e (visione della matematica, senso di autoefficacia). Inoltre, nel caso in cui il senso di autoefficacia associato allo studente risulti medio basso, il profilo conterrà la lista contenente le attribuzioni causali.

Ma come utilizzare queste informazioni per la creazione del learning path?

Bisogna ricordare che il livello cognitivo metacognitivo e affettivo sono strettamente correlati. Per tale motivo lo spazio affettivo darà informazioni che saranno utili per la scelta di attività cognitive e metacognitive. più in particolare l'ordinamento sugli assi può essere associato a varie metodologie di insegnamento e tipi di contenuto.

Il punto che rappresenta il profilo studente individua un rettangolo che rappresenta la zona dove lo studente è valutato positivamente dal punto di vista affettivo e la zona dove si sente vincente in matematica dal punto di vista cognitivo e metacognitivo. L'idea è quella di proporre agli studenti attività che sono coerenti con la zona vicino il loro rettangolo affettivo, muovendosi lungo una delle due direzioni rappresentate dalla visione o dal senso di autoefficacia.

Infatti la relazione tra la disposizione emozionale e i rimanenti fattori, come ho sottolineato nel paragrafo precedente, mi consente di escludere la disposizione emozionale da un qualsivoglia intervento, ma di focalizzare l'attenzione sulla visione della matematica e sul senso di autoefficacia. Considerando la visione della matematica, secondo i valori ottenuti, le attività associate avranno come obiettivo quello di passare da una visione strumentale ad una relazionale, che significa passare da pure applicazioni di regole e algoritmi alla comprensione del perché di tali applicazioni. Esempi di attività in tale direzione possono essere trovate in Zan (1996)

Per quanto riguarda il senso di autoefficacia, le attività atte a promuoverlo devono essere organizzate tenendo in considerazione due fattori:

- La coppia (visione, senso di autoefficacia) per scegliere il tipo di contesto (ad esempio la coppia (Strumentale, basso) suggerisce di creare attività centrate sullo svolgimento di esercizi in modo da far sentire gli studenti "vincenti");
- la lista di cause per scegliere la metodologia più adatta al tipo di intervento.

Le seguenti possono essere alcuni esempi di attività possibili.

Rispetto al primo valore:

- il valore della visione è utilizzato per scegliere la tipologia di esercizi, tra esercizi standard fino a problemi non standard
- il valore del senso di autoefficacia è utilizzato per dare indicazioni del grado di difficoltà delle attività

Rispetto al secondo fattore, tra le cause la piattaforma inizierà a lavorare su quelle considerate stabili dallo studente. e si assocerà a questa una metodologia opportuna. Esempi possono essere:

- se lo studente ascrive come causa del suo insuccesso alla difficoltà della matematica (ciò vuol dire che egli sente come incontrollabili le cause del suo fallimento. Ciò ci suggerisce di fargli fare attività che modifichino la sua visione e muovere le cause a qualcosa che lui senta controllabile (ad esempio il metodo di studio);
- se lo studente ascrive il suo fallimento agli errori che commette molto probabilmente ciò vuol dire che non è in grado di controllare la correttezza dei propri prodotti e quindi le attività dovrebbero mirare, a livello metacognitivo, in modo da permettere allo studente di mettere in atto strategie

di controllo sui propri processi. A tal proposito potrebbe essere utile l'utilizzo del blog come portfolio;

- se lo studente vede come causa del proprio fallimento la paura di commettere errori, ciò potrebbe voler dire che lo studente ha una visione completamente negativa degli errori ,e ciò suggerisce di creare attività atte a rivalutare il valore positivo dell'errore;
- se lo studente vede come causa del proprio fallimento l'insegnante, ciò potrebbe voler dire che lo stile di insegnamento dell'insegnante non fitta bene con quello di apprendimento dello studente. Su questo fattore si potrà intervenire cambiando le learning activities o il LO nel learning path in accordo con lo stile di apprendimento dello studente;
- se lo studente vede la matematica come una materia astratta, non legata alla realtà, potrebbe essere utile un approccio alla matematica di tipo esperienziale che preveda l'utilizzo di laboratori virtuali;
- se lo studente sottolinea come causa la mancanza di basi, in tal caso potrebbero essere previsto il supporto personale di un tutor e la creazione di learning path personalizzati per il recupero degli argomenti non noti;
- se lo studente sottolinea come causa lo stile di insegnamento, allora la piattaforma può offrire learning path e attività che ne offrano uno differente
- se lo studente sente come causa del proprio fallimento un senso di frustrazione molto probabilmente vuol dire che ha una visione globale del suo fallimento quindi bisognerebbe pensare a delle attività che tengano traccia dei suoi miglioramenti (ad esempio ancora un e-portfolio) .

Questi sono solo alcuni esempi e suggerimenti, ma c'è ancora molto lavoro da fare per la creazione di una corrispondenza forte tra i profili affettivi, cause e learning activities.

Alcune attività sono già state progettate. Le ho descritte insieme alla loro analisi e ho presentato i primi risultati delle loro sperimentazioni nel sesto capitolo.

Capitolo V

La sperimentazione dello strumento di misurazione del profilo

5.1 Introduzione

In questo capitolo mostrerò i risultati di una sperimentazione del questionario, strutturato e utilizzato per associare a ogni studente un opportuno profilo affettivo, su un campione di 873 studenti del primo anno di università (prevalentemente di biologia e ingegneria) e dell'ultimo anno di scuole superiori. Ho avviato tale sperimentazione da un lato per poter analizzare le possibili risposte degli studenti al questionario, ma soprattutto per poter creare un repository di risposte alle domande aperte che possano prevedere una gestione automatica delle stesse. Come ho infatti riportato nel capitolo precedente, il questionario, strumento da me creato per associare a ogni studente un opportuno profilo affettivo, è composto da domande a risposta sia chiusa che aperta, gestite in piattaforma tramite l'utilizzo di un opportuno algoritmo che ho riportato nel capitolo precedente. Tale algoritmo, per la gestione delle risposte alle domande aperte prevede l'utilizzo di repository di possibili risposte alle stesse. Per tale motivo in questo capitolo, una volta presentata la metodologia utilizzata per la sperimentazione del questionario, e una prima descrizione "in liberta" delle risposte date dagli studenti, mi sono soffermata sulla creazione dei repository delle possibili risposte alle domande aperte per poi classificarli così come ho descritto nel capitolo precedente.

5.2 Metodologia

Il questionario è stato distribuito a studenti del primo anno di ingegneria dell'università di Salerno, studenti del primo anno di Biologia dell'Università del Piemonte Orientale, e a studenti dell'ultimo anno delle scuole superiori. In totale sono stati raccolti 862 questionari di cui 623 (circa il 70%) di studenti di ingegneria, 150 di biologia (circa il 18% del campione) e 90 dell'ultimo anno di scuole superiori (circa il 12%).

La scelta di popolazioni di livello scolastico differente mi consente di analizzare se si evidenziano o meno differenze quantitativamente significative nelle risposte ai questionari tra tali popolazioni.

Questo non tanto per l'analisi delle differenze tra i campioni, che non è comunque oggetto della discussione che qui proporrò, ma perché i risultati della ricerca che sto portando avanti possono essere di particolare interesse nel raccordo tra la scuola secondaria e l'università, e dunque è auspicabile che tenga conto delle possibili differenze di risposte, (in modo da prevederne quante più è possibile) qualora esistano, tra le popolazioni alla quale essa è indirizzata.

La distribuzione dello stesso campione è stata resa possibile dai docenti dei corsi che si sono resi disponibili a partecipare e a collaborare alla ricerca, ma sono comunque costretta a parlare di “*campione di convenienza*” poiché tale campione pur non essendo soddisfacentemente distribuito rispetto alle variabili considerate, risulta “conveniente” per i miei scopi.

La sperimentazione è stata avviata utilizzando il metodo di “*self-fulfilling interview*” (Brusati, 2003). Il questionario è stato distribuito durante le ore di lezione. Agli studenti è stato chiesto di compilarlo velocemente e di consegnarlo dopo mezz'ora. E' stato creato un database grazie al quale è stata avviata la trattazione statistica dei dati. Ai ragazzi è stato richiesto di mantenere l'anonimato, e di contrassegnare il questionario con un apposito nickname.

Voglio sottolineare che lasciando libertà di scelta e anche di inventiva a chi risponde alla domande aperte mi sono trovata dinnanzi ad una ricchezza e una pluralità di descrizioni che ovviamente non si potevano cogliere con i questionari tradizionali. Il *prezzo* di una tale scelta è stato ovviamente una maggiore difficoltà ad analizzare tutti i dati: per questo mi sono avvalsa anche dell'aiuto del database.

5.3 Una prima descrizione sommaria delle risposte ai questionari

Nel seguente paragrafo mostro alcuni dei dati che vengono dall'analisi delle risposte ai questionari e le conseguenti interpretazioni che ne possono essere dedotte.

La domanda 1 (*Ti piace la matematica?*), a risposta chiusa, permette di suddividere il campione in cinque gruppi a seconda della disposizione emozionale dichiarata nei confronti della matematica: MP (molto positiva), P (positiva), I(indifferente), N (negativa), MN (molto negativa). La seguente tabella riassume le percentuali di rappresentanza in cui è suddiviso il campione e indicano che poco meno del 40% del campione ha una disposizione emozionale negativa o molto negativa nei confronti della matematica:

disposizione emozionale	MP	P	I	N	MN
Totale campione	169(20%)	396(45%)	74(9%)	170(20%)	54(6%)

Può sembrare in parte sorprendente (almeno per le mie *convinzioni*) che la maggioranza degli studenti dichiarò un atteggiamento (in senso semplice) positivo nei confronti della matematica. A mio avviso questo risultato non è poi così inaspettato! Infatti la domanda 1 era (e io ne ero consapevole) quella più a rischio, in quanto (nonostante la forma anonima) la più influenzabile dall'idea che ci sia una risposta *giusta, corretta*.

Non a caso l'analisi delle risposte aperte dichiarano ben altro. L'interesse maggiore è per le polarità estreme (*molto, per nulla*) che sono abbastanza consistenti. È importante notare come ben un quarto degli studenti infatti si auto-colloca nei gruppi con atteggiamento molto positivo o molto negativo nei confronti della matematica, a conferma di quanto la matematica possa suscitare emozioni forti.

Diamo un'occhiata alle differenze tra i vari campioni. Tale differenza è sembrata, a mio parere importante per mostrare quanto la popolazione avesse una disposizione emozionale abbastanza variegata nei confronti della matematica. In particolare, le posizioni estreme sono più evidenti per il campione di scuola superiore e si vanno ad affievolire analizzando le risposte degli studenti universitari.

disposizione emozionale	MP	P	I	N	MN
scienze biologiche	21(14%)	48(32%)	24(16%)	42(28%)	15 (10%)
ingegneria	124(20%)	330(53%)	44(7%)	112(18%)	13(2%)
Scuola superiore	24(27%)	18(20%)	6(6%)	16(18%)	26(29%)
Totale campione	169(20%)	396(45%)	74(9%)	170(20%)	54(6%)

Dalle risposte alla domanda 2, ho classificato 76 emozioni mediamente positive e 54 emozioni mediamente negative. La presenza di molte sensazioni positive è in linea con il tipo di popolazione fatta per la maggioranza di studenti di Ingegneria, che sono notoriamente "portati" per la

matematica. Voglio sottolineare come il 46% degli studenti che utilizzano sensazioni positive lo fanno solo “sub conditione”, cioè associano un’emozione positiva solo se riescono (*le stesse emozioni utilizzate per il 27% indipendentemente dalla riuscita*). Ho notato inoltre come ben il 37% delle persone nel gruppo P hanno associato alla matematica emozioni negative. Questo ci fa capire l’importanza di una risposta aperta, rispetto ad una chiusa, nella quale lo studente si sente maggiormente libero di esprimere le proprie sensazioni senza essere influenzato dal fattore “risposta esatta”. Il catalogo di tali sensazioni sarà riportato nel paragrafo successivo, insieme con alcune ulteriori osservazioni sulle sensazioni espresse dagli studenti.

Per quanto riguarda il senso di autoefficacia dall’analisi delle risposte alla domanda 6 ho trovato che il 42% della popolazione hanno dato a se stessi un voto tra il 5 e 6, come si nota dalla tabella di seguito riportata

Senso di autoefficacia	alto (7-10)	medio (5,6)	Basso (0-4)
Totale campione	329(38%)	363(42%)	171(20%)

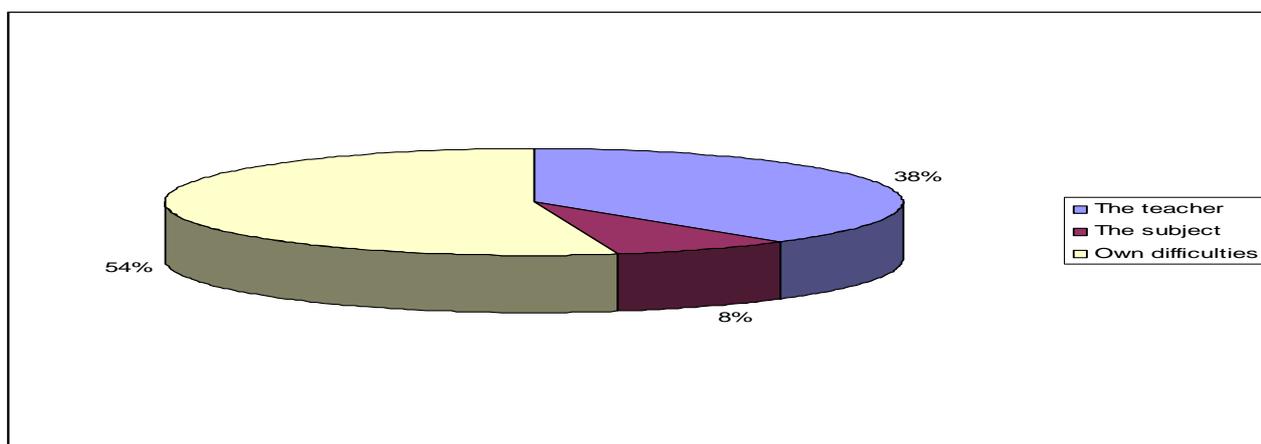
Ho inoltre analizzato le corrispondenti possibili risposte alle domande 7.a e 7.b e le relative correlazioni, mostrate nella seguente tabella:

	Capisco	Non capisco	senza risposta
buoni voti	39%	2%	5%
cattivi voti	20%	11%	5%
senza risposta	5%	11%	2%

Come si può notare, la più alta percentuale corrisponde a una situazione molto positiva (studenti che capiscono la matematica e che hanno buoni voti) e ciò è in contraddizione con la risposta alla domanda 6 focalizzata sul fallimento. Questo fa capire che la domanda 6 rispetto alla 7 è più rivolta a testare il senso di autoefficacia poiché permette di esprimere la propria percezione di riuscita o di fallimento mentre la 7 è volta più ad una misura oggettiva. Questo mi ha fatto pensare che anche

quando entrambi i fattori sono presenti in maniera positiva (capisco e ho buoni voti), il successo viene percepito dall'allievo come sancito all'esterno dal docente (dando così meno importanza al capire).

Consideriamo in fine l'analisi delle risposte relative alle cause di fallimento. La figura sottostante mostra la distribuzione della cause:



Come si può notare, pochi studenti hanno percepito come causa del proprio fallimento la materia. Più a fondo, anche se la causa è stata identificata con la materia, realmente le loro risposte rendono evidente una correlazione con loro proprie difficoltà (e.g. la "matematica richiede molto studio" si può leggere anche come "io non studio abbastanza", spostando così dalle difficoltà causata dalla materia alle difficoltà personali). Accade lo stesso quando le cause sono state identificate con difficoltà personali che invece trasmettono le convinzioni dello studente sulla materia: per esempio, "non essere capace di imparare la teoria a memoria" o "non essere capace di applicare la matematica a problemi pratici" sono legati alla visione della matematica (nel primo caso mostra la convinzione che per imparare matematica ci vuole memoria, nel secondo caso che la matematica è importante perché è applicabile in contesti reali)

Infine si può osservare come molti problemi legati all'insegnante sono dovuti allo stile di insegnamento che è differente dallo stile di apprendimento dello studente. Questo problema può essere facilmente superato dalla piattaforma e-learning grazie alla flessibilità del learning path che può essere adattato allo stile di apprendimento dello studente e alle sue preferenze. Inoltre le modalità e-learning consentono allo studente di seguire i propri tempi di apprendimento.

Per quanto riguarda infine le risposte alla domanda 13, ho utilizzato le analisi già avviate da Di Martino, Mellone e Morselli (2007) che hanno catalogato 833 espressioni. Essi osservano come le occorrenze di espressioni siano state 833 invece di 863 previste: (tre per ogni rispondente). Sottolineando la difficoltà di alcune persone a trovarne tre aggettivi da associare alla matematica.

Gli autori così supportano ancora una volta l'importanza della risposta aperta poiché molto probabilmente con un questionario a risposta chiusa laddove fosse presentata una lista di aggettivi da scegliere probabilmente ogni studente avrebbe scelto comunque 3 aggettivi anche se non convinto. Gli autori hanno collezionato ben 490 aggettivi differenti.

A parte il numero totale di risposte è significativo il fatto che i diversi aggettivi utilizzati siano stati ben 490. Gli autori propongono alcune "considerazione in libertà" sugli aggettivi utilizzati dagli studenti che qui di seguito schematizzo:

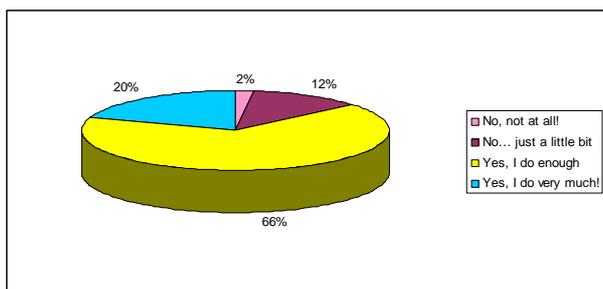
- Alcuni utilizzano la parola matematica per descrivere la stessa matematica, e questa viene utilizzata sempre con un'accezione positiva
- c'è anche chi si sposta nei contesti più diversi per trovare l'aggettivo adatto: da quello musicale a quello politico
- l'uso di alcuni aggettivi non è catalogabile per disposizione emozionale poiché esso dipende dai gusti personali di chi li utilizza (esempi possono essere fascista o comunista)
- aggettivi opposti comunicano atteggiamenti opposti (armoniosa comunica un atteggiamento positivo, stonata uno negativo)
- c'è un abbondante uso di aggettivi tipicamente usati per descrivere persone (accattivante, ammaliante, sensuale, subdola ecc)

Ho riportato il catalogo di tutti gli aggettivi collezionati nel paragrafo successivo.

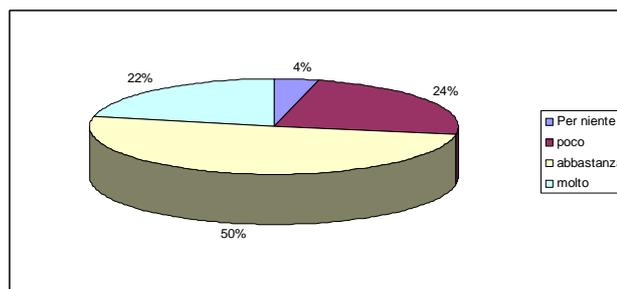
5.3.1 Le domande di controllo

Infine nel questionario sono presenti, come ho riportato nel capitolo precedente, delle domande, che servono a valutare la possibilità che la relazione tra i tre fattori possa essere dedotta dall'analisi delle coppie (disposizione, visione), (disposizione, senso di autoefficacia), che ho chiamato "domande di controllo": in particolare le 3, 4, 5 consentono di valutare la relazione tra la disposizione emozionale e la visione mentre le domande 12 e 13 consentono di fare lo stesso per la relazione tra il senso di autoefficacia e la visione.

Nelle figure sottostanti sono rappresentate le percentuali di risposte alle domande 3.a e 3.b, corrispondenti a studenti che preferiscono rispettivamente la matematica strumentale e relazionale.



Domanda 2.a



Domanda 2.b

Si può notare in questo caso, come passando dallo strumentale al relazionale, aumentino le risposte di tipo “poco” o “per niente”. Questo è significativo in quanto supporta l’idea secondo la quale una disposizione emozionale negativa sia dovuta ad una visione strumentale della matematica.

Le domande 4 e 5 hanno la stessa valenza della domanda 2 ma si presentano in una formulazione aperta. Dall’analisi dei questionari ho potuto notare che circa nel 85% dei casi gli studenti utilizzano come esempi esercizi di tipo strumentale/relazionale in contrapposizione, denunciando come essi stessi percepiscano questa visione dicotomica della matematica. È da notare che il 45% degli studenti che non hanno espresso una posizione estrema di disposizione emozionale nei confronti della matematica strumentale e relazionale esprimono quest’ultima nelle risposte alle domande 4 e 5. Questo ancora una volta ci sottolinea l’importanza delle risposte aperte, rispetto alle chiuse, sicuramente da tenere in considerazione, qualora questo sia possibile.

Andando avanti con la domanda 3, mi è sembrato analizzare la correlazione tra la domanda 1 e 3a e 3b. In particolare ho osservato:

- Degli studenti che hanno risposto per niente, poco o mi è indifferente, alla domanda 1, nessuno ha dichiarato una disposizione emozionale positiva per i problemi. Questi dati supportano l’idea per la quale gli studenti che non amano la matematica sicuramente non ne amano la parte relazionale.
- Degli studenti che hanno risposto poco o abbastanza alla domanda 1 la maggioranza (circa il 76%) ha espresso la preferenza per gli esercizi sui problemi e dunque ancora una volta una preferenza per la parte strumentale della matematica.
- Degli studenti che hanno risposto molto o abbastanza alla domanda 1 quasi tutti dichiarano una disposizione emozionale positiva sia per gli esercizi che per la teoria (solo il 3% del campione ha dichiarato una disposizione bassa per gli esercizi a confronto con la teoria) Questo ci dice che a chi piace molto la matematica piace sia la parte strumentale che quella relazionale.

Al fine di validare o rigettare l'ipotesi di leggere la relazione tra visione e disposizione tramite l'analisi della coppia (disposizione, visione) ho analizzato la possibile corrispondenza tra il valore della coppia (disposizione, visione) e le risposte alle domande 3, 4, 5. Ho osservato che per la quasi totalità del campione (98%) i risultati delle domande 3, 4, 5 concordavano con quanto dichiarato nella domanda 14, meno con i risultati della domanda 8 (74%).

Ho anche analizzato la relazione tra le risposte alla domanda 6 e quelle alle domande 12 e 13, che correlano il senso di autoefficacia con la visione della matematica dalle quali risulta:

- Degli studenti che dalla risposta alla domanda 6 esprimono un senso di autoefficacia basso, il 25% da voto 2 agli esercizi (nessuno ha dato voto 3), mentre l'7% da voto 2 a problemi (nessuna occorrenza del 3). Questo vuol dire che studenti con un basso senso di autoefficacia lo hanno sia per la matematica strumentale che relazionale.
- Degli studenti che dalla risposta alla domanda 6 esprimono un senso di autoefficacia medio, l'87% da il voto 2 o 3 agli esercizi (88% da 3) mentre 76% da il voto 2 o 3 ai problemi (7% da 3). Questo significa che gli studenti che dichiarano un senso di autoefficacia medio lo mantengono sia per la matematica relazionale che strumentale se pur nella maggior parte dei casi più alto per la matematica strumentale
- Degli studenti che dalla risposta alla domanda 6 esprimono un senso di autoefficacia il 98% da il voto 2 o 3 agli esercizi (88% da 3) mentre 87% da il voto 2 o 3 ai problemi (68% da tre). Questi risultati mostrano che gli studenti con un senso di autoefficacia alto lo hanno sia per la matematica strumentale che per quella relazionale.

Al fine di validare o rigettare l'ipotesi di leggere la relazione tra visione e e senso di autoefficacia tramite l'analisi della coppia (senso di autoefficacia, visione) ho analizzato la possibile corrispondenza tra il valore della coppia (senso di autoefficacia, visione) e le risposte alle domande 12 e 13. Ho osservato che per la circa il 71% del campione i risultati delle domande tali domande concordavano con il valore della coppia.

5.4 Analisi delle risposte alle domande aperte: la creazione dei repository e i relativi cataloghi

Come ho sopra accennato, il mio questionario è caratterizzato da domande aperte che per essere gestite automaticamente in piattaforma necessitano della creazione di un repository di dati. In molti casi la raccolta e classificazione dei dati è stata semplice (domande 3, 4, 5 and 14) poiché le risposte

erano caratterizzate da singole parole. (ad esempio integrali, derivate, soddisfazione, gioia, bello, importante.) . Per la domanda 13 invece, ho notato che gli studenti hanno utilizzato uno stile narrativo la cui gestione automatica è più difficile e per questo sarà previsto ulteriore lavoro. Per i suddetti motivi sarà possibile e semplice prevedere una gestione automatica delle prime risposte, tramite l'uso dei repository e opportuni software che riconoscano i sinonimi; ciò invece non è vero per la domanda 13, per la quale dovrà essere pensato qualche altro tipo di approccio.

Iniziamo con l'analisi delle risposte alla domanda 2. La prima cosa che colpisce è il numero elevato di emozioni legati alla riuscita (emozioni che trasmettono una carica emozionale positiva) o alla non riuscita (emozioni che trasmettono una carica emozionale negativa), utilizzate da un po' meno della metà del campione in esame. Altri (7%) legano emozioni positive o negative al capire o al non capire. Legando la sensazione alla riuscita, o al capire, queste assumono l'aspetto di minore intensità emozionale, trasmettendo una disposizione emozionale mediamente positiva o negativa. Inoltre quando esse vengono utilizzate, in molti dei casi vengono usate con l'accezione positiva e negativa in contrapposizione, esempi tipici sono, soddisfazione se riesco, ansia se non riesco, felicità se capisco, frustrazione se non capisco ecc. Ho anche notato come alcuni associno emozioni positive alla riuscita di compiti "difficili", assumendo in questo caso la riuscita una connotazione decisamente positiva. Ho inoltre notato con interesse la connotazione che molti studenti hanno dato alla sensazione di "interesse", una delle sensazioni con maggiore occorrenza. A primo impatto sembrerebbe infatti una sensazione positiva, invece, dall'analisi dell'accoppiamento con altre sensazioni, ho potuto notare come ad essa venga associata una disposizione neutra o addirittura negativa, come per dire, "la matematica è notoriamente interessante, ma a me provoca sensazioni sgradevoli". Altre sensazioni quali calma, relax, esprimono l'idea di matematica come passatempo e pure non trasmettendo una sensazione negativa, esprimo comunque un coinvolgimento debole e dunque una carica emozionale mediamente positiva se non addirittura neutra. Carine infine mi sono sembrate alcune espressioni, che seppur poco frequenti, appaiono cariche di forza, come nel caso di "*orgasmo matematico*" oppure di una triste speranza come "*niente ma mi piacerebbe tanto provare qualcosa*".

Ma veniamo al catalogo delle emozioni. Ho collezionato in tutto 151 emozioni differenti, che qui di seguito riporto. Essi andranno a formare il repository che serve per l'automatizzazione della creazione del profilo in piattaforma. Sono qui di seguito riportati in ordine alfabetico, con le relative frequenze.

A: adrenalina (1), angoscia(3), appagamento(4), appagamento se riesco(3), appagamento se mi appassiono(1), autostima(1), aggressività(2), autocompiacimento specie se è difficile(1),

B: benessere(2), benessere se riesco(1)

C: calarsi totalmente nell'esercizio(1), caparbia(2), coinvolgimento(2), concentrazione (12), confusione(4), contentezza se riesco(2), curiosità (11), coinvolgimento a volte(1), calma(1)

D: delusione(2), depressione(4), divertimento (16), divertimento a volte(4), divertimento nell'affrontare problemi nuovi(1), divertimento se riesco (11), difficoltà(4), difficoltà a volte(2), disorientamento(4)

E: eccitato(8) eccitazione(8), essere capace(7), eccitazione se riesco(2)

F: felice se capisco(1), felice se riesco(9), felice, forte benessere(2), forte benessere specialmente se è difficile(1), frustrazione (16), frustrazione se non riesco(15)

G: gioia se riesco(9), gioia se capisco(2), gioia(1)

I: intrigo(2), interesse(41), interesse per il ragionamento(1), interesse se riesco(8), invogliato a risolvere(7), incapace(4), incapace se non riesco(1), indifferenza (20), intense concentrazione(2), impegno(5), irritazione(5), irritazione se non riesco(8), insoddisfazione(15), incitamento(1)

M: mi demoralizzo(1), mal di testa(8), mi monto la testa se riesco(1), motivato(3), mi ingrippa se non riesco(1),

N: nervosismo(11), nervosismo se non riesco senza teoria(2), n.c., nervosismo se non capisco(5), nervosismo se non riesco(19), nervosismo se non mi sento capace(1), nessuna(96), nessuna sensazione(2), niente(16), niente (ma mi piacerebbe provare qualcosa) (1), no comment(1), noia (24), noia a volte(1), noia se fallisco(1), non gioia(1), non letizia(1), non saprei(1), non essere capace(2)

O: odio(2), odio e amore(1), oppressione(1), orgasmo matematico(1)

P: passione(22), passione per più metodi risolutivi(1), partecipazione(2), paura(17), paura di sbagliare(8), paura di sbagliare I calcoli(7), piacere(44), piacere lieve(2), piacere se riesco(4), piacevole poiché ragiono e rifletto(1), piacevole se riesco a risolvere(1), piacevole se riesco a capire(1), piacevoli, positive(2)

R: rabbia(17), rabbia se non riesco(10), relax(12), relax(passatempo) (1), rilassamento (14), rilassamento a volte(2)

S: soddisfazione(64), soddisfazione se riesco(26), soddisfatto se riesco(7), soddisfatto se riesco specie se è difficile(1), soddisfazione a volte(1), soddisfazione sporadica(1), stress(18), stress se non capisco(1), stress se non riesco(5), stanchezza(23), stanchezza a volte(1), sollievo se riesco(2), sconforto(5), depressione(3), smarrimento(7), scocciatura(7), scocciatura se non riesco(1), svago(12), sensazione di infinito(1), sensazione utilitaristica(1), senso del dovere(2), senso di vuoto

(17), serenità(6), sfida(26), sfida con me stesso/a, (1) sforzo(1), senso di sfida(1), seccatura(3), seccatura se non riesco(1), spensieratezza(1), stimolo a fare sempre di più (4), stimolante(2), stimolato(1), stimolo(2), speranza di riuscire(1)

T: tranquillità a volte(1), tensione(1), timore di non riuscire(1), tranquillità(3)

V: volontà di riuscire(4), voglia di riuscire fioca(1), voglia di perfezionarmi(1), voglia di riuscire iniziale(1), voglia di capire(16), voglia di farcela(1), voglia di mettersi alla prova(1), voglia di risolvere(24), voglia di raggiungere lo scopo(1), voglia di risolvere problemi(1)

Per chiudere questa prima parte di analisi evidenzio le emozioni che hanno avuto più di 15 occorrenze: divertimento(16), frustrazione (16), frustrazione se non riesco(15), interesse(41), indifferenza (20), insoddisfazione(15), nervosismo se non riesco(19), niente(16), noia (24), nessuna(96), passione(22), paura(17), piacere(44), rabbia(17), soddisfazione(64), soddisfazione se riesco(26), stress(18), stanchezza(23), senso di vuoto (17), sfida(26), voglia di capire(16).

Questa hit-list di emozioni mi ha fatto riflettere sul fatto che 24 studenti provino noia nel fare matematica a dispetto dei 16 che si divertono, e questo è un dato sconcertante se si pensa che la maggior parte del campione ha dichiarato una disposizione mediamente positiva alla domanda 1. Essi possono essere divisi in emozioni che trasmettono una disposizione emozionale più o meno positive o negative. La categorizzazione è qui di seguito riportata. Eccezione è fatta per l'indifferenza che comunque viene vista come una disposizione emozionale mediamente negativa.

Disposizione emozionale positiva	molto	Disposizione emozionale mediamente positiva	Disposizione emozionale neutra	Disposizione emozionale mediamente negativa	Disposizione emozionale molto negativa
adrenalina	appagamento	appagamento	se calma	impegno	angoscia
autostima		riesco	interesse	irritazione	se aggressività
autocompiacimento		appagamento	se interesse	se non riesco	confusione
specie se è difficile		mi appassiono	riesco	rabbia se non	delusione
benessere	calarsi	benessere	se relax(passate	riesco	depressione
totalmente nell'esercizio		riesco	mpo)	incapace	se difficoltà
caparbietà		contentezza	se rilassamento	non riesco	difficoltà a volte
coinvolgimento		riesco	rilassamento a	frustrazione	disorientamento
concentrazione	curiosità	coinvolgimento	a volte nessuna	se non riesco	frustrazione

divertimento volte nessuna nervosismo se incapace
 divertimento divertimento a sensazione non riesco irritazione,
 nell'affrontare problemi volte niente niente senza teoria, insoddisfazione
 nuovi eccitato/a divertimento se (ma mi nervosismo se rabbia mi
 eccitazione essere riesco eccitazione piacerebbe non capisco demoralizzo mal
 capace felice forte se riesco felice se tanto provare nervosismo se di testa
 benessere forte capisco felice se qualcosa) non non riesco, nervosismo n.c.,
 benessere specialmente riesco gioia se saprei nerovsismo se no comment noia
 se è difficile gioia riesco gioia se partecipazione non mi sento non gioia non
 intrigo interesse per il capisco relax mi sollievo se capace, stress letizia non essere
 ragionamento invogliato monto la testa se riesco se non capace odio
 a risolvere intense riesco mi ingripo tranquillità capisco stress oppressione paura
 concentrazione se non riesco spensieratezza se non riesco paura di sbagliare
 incitamento motivato piacere lieve fioca voglia di scocciatura se paura di sbagliare
 orgasmo matematico piacere se riesco riuscire non riesco insoddisfazione
 passione passione per piacevole se indifferenza tranquillità a stress sporadica
 più metodi risolutivi riesco a risolvere volte voglia di calcoli stanchezza
 piacere piacevole poichè piacevole se riuscire sconforto
 ragiono e rifletto riesco a capire iniziale noia a scocciatura senso
 piacevoli, soddisfazione soddisfazione se volte noia se di vuoto senso del
 positive soddisfatto se riesco soddisfatto fallisco odio e dovere timore di
 riesco specie se è se riesco amore a volte non riuscire
 sensazione di infinito soddisfazione a stanchezza, tensione seccatura
 difficile sensazione sfida volte svago smarrimento
 utilitaristica sfida con serenità seccatura
 me stesso/a sforzo senso se non riesco
 di sfida stimolo a fare speranza di
 sempre di più stimolato riuscire
 stimolante stimolo
 volontà di riuscire voglia
 di perfezionarmi voglia
 di capire voglia di
 farcela voglia di mettersi
 alla porva voglia di

risolvere voglia di
raggiungere lo scopo
voglia di risolvere
problemi

Per quanto riguarda l'analisi delle risposte alle domande 4 e 5 mi permetto prima di fare alcune considerazioni "libere". La prima è che la maggior parte degli studenti (87%) utilizza gli esercizi strumentali e relazionali in netta contrapposizione (ad esempio la coppia che compare in netta maggioranza è quella di integrali, derivate, oppure esercizi algebrici e problemi), e questo va in accordo con i nostri scopi. La restante parte invece focalizza le proprie risposte su esercizi specifici rendendo così vano il tentativo di utilizzare le risposte per i miei fini. Altri invece pongono in contrapposizione termini quali "esercizi difficili" e "esercizi semplici". E' proprio in questi casi che le risposte alle domande chiuse servono maggiormente. È di notevole interesse anche il fatto che circa il 13% della popolazione lega il piacere di certi esercizi alla riuscita mentre l'11% al capire. Mi è sembrato anche molto interessante notare come a differenza della maggior parte degli esercizi, che vengono utilizzati equivalentemente con connotazione positiva o negativa, alcuni, quale teoremi, dimostrazioni, radici, esercizi meccanici, ripetitivi, mnemonici, pieni di conti, radicali, compaiono sempre a indicare qualcosa che non piace. Altri invece, come trigonometria e logaritmi pur essendo esercizi con una occorrenza molto alta (circa 145 occorrenze per la trigonometria e 127 per logaritmo) compaiono solo 3 volte il primo, 6 volte il secondo con una connotazione positiva. Questi dati un po' confortano: ci fanno capire che tutto ciò che è connotato come meccanico, senza capire non piace mai! Un po' differente è il caso della trigonometria o dei logaritmi. Molto probabilmente, essendo utilizzati per la maggioranza dei casi con una accezione negativa, sarà correlata ad una idea mnemonica e ricca di formule delle stesse. Non mi sono meravigliata del fatto che teoria, dimostrazioni comparisse *sempre* con una accezione negativa. In effetti alle scuole superiori, come sostiene la Zan (2000), la teoria è legata all'idea di un numero spropositato di formule da memorizzare, ad una sequenza di proposizioni da ripetere in un ordine prestabilito da tenere a mente ecc. Alcuni, infine, utilizzano i termini tutti e nessuno, quasi tutti o quasi nessuno. Questi corrispondono ai casi di una disposizione emozionale decisamente positiva o negativa. Ma veniamo al catalogo degli esercizi. Ho collezionato in tutto 140 esercizi differenti, che qui di seguito riporto. Essi andranno a formare il repository che serve per l'automatizzazione della creazione del profilo in piattaforma. Sono qui di seguito riportati in ordine alfabetico.

A:Analisi(7), analisi matematica(4), applicazioni(24), applicazioni alla pratica(1), algebra(45)

C: calcolo(17), calcoli(12), campi_di_esistenza(1),

D:derivate(74), disequazioni(55), discussione di disequazioni(3), disequazioni razionali(1), dimostrazioni di teoremi(13), dimostrazioni(3), dimostrazioni di formule di trigonometria(1), disequazioni con il valore assoluto(3), disequazioni con le radici(1), dimostrazioni geometriche(4), disequazioni logaritmiche(1), disequazioni goniometriche(2), disequazioni fratte(3)

E: equazioni(47). Equazioni esponenziali(3), equazioni logaritmiche(7), equazioni binarie(1), equazioni di primo grado(4), equazioni di secondo grado(1), equazioni trigonometriche(3), esercizi algebrici(21), esercizi con procedimenti non troppo laboriosi(1), esercizi algebrici(16), esercizi geometrici(18), esercizi di geometria(3), espressioni(16), esercizi di analisi(2), esercizi che richiedono ragionamento(4), esercizi che riesco a risolvere(6), esercizi con complessi processi logici(1), esercizi di cui ho capito lo svolgimento(1), esercizi di cui ho capito l'utilità(1), esercizi immediati(1), esercizi di logica(2), esercizi applicativi(3), esercizi che non richiedono troppi prerequisiti(1), esercizi pratici(2), esercizi semplici(4), esercizi semplici che capisco(1), esercizi svolgibili in vari modi(1), esercizi con deduzione(1), esercizi di ragionamento(3), equazioni razionali(1), equazioni parametriche(1), equazioni differenziali(1), equazioni goniometriche(3), esercizi che richiedono troppi prerequisiti(1), esercizi complessi(6), esercizi laboriosi(2), esercizi complicati che non capisco(1), esercizi con molte regole da applicare(1), esercizi con regole complesse da applicare(1), esercizi con calcoli lunghi(1), esercizi con calcoli complessi(1), esercizi con calcoli lunghi e dispersivi(1), esercizi con calcoli astrusi(1), esercizi con interminabili calcoli numerici(1), esercizi di cui non ho capito lo svolgimento(1), esercizi meccanici(16), esercizi non immediati(1), esercizi ripetitivi(3), esercizi di trigonometria(13), esercizi trigonometrici(2), esercizi mnemonico(1), equazioni fratte(1), esponenziali(4), esercizi teorici(4), espressioni algebriche(12), equazioni di grado superiore al secondo(1)

F: funzioni(7), funzioni trigonometriche(2), funzioni esponenziali(5), funzioni logaritmiche(7), funzioni goniometriche(3), figure(3), formule(13), formule trigonometriche(14)

G: geometria analitica(19), geometria piana(1), geometria(18), giochi di nash(1)

I: integrali(82), insiemistica(4), integrali indefiniti(1)

L: limiti(52), logaritmi(33), logica(7)

M: matematica finanziaria(1), matrici(10), matematica applicata(2), metodi di approssimazione(1)

N: nessuno(44), numeri complessi(3),

P: probabilità(12), problemi(43), problemi algebrici(12), problemi geometrici(15), problemi trigonometrici(3), problemi di geometria analitica(13), problemi di geometria solida(3), problemi di

geometria trigonometrica(1), problemi di geometria piana(1), problemi logici(2), problemi di scelta(1), problemi vari(1), problemi di geometria euclidea(1), problemi economici(1)

Q: quasi tutto(13), quasi tutti(12), quelli che riesco a risolvere(5), quelli che non riesco a risolvere(7), quelli che non so fare(8)

R: rappresentazioni grafiche(3), radicali(46)

S: serie(19), serie numeriche(12), sistemi(9), sistemi di disequazioni(3), sistemi di equazioni(2), studio di funzioni(52), statistica(12), successioni(2), serie di Fourier(1)

T: tutti(32), trigonometria(125), teoremi(31), trasformata di laplace(1).

Per chiudere questa prima parte di analisi evidenzio gli esercizi che hanno avuto più di 15 occorrenze: applicazioni(24), algebra(45), calcolo(17), derivate(74), disequazioni(55), equazioni(47), esercizi algebrici(16), esercizi geometrici(18), espressioni(16), esercizi meccanici(16), geometria analitica(19), geometria(18), integrali(82), limiti(52), nessuno(44), problemi(43), radicali(46) serie(19), studio di funzioni(52), tutti(32), trigonometria(125), teoremi(31),

Sono poi passata alla suddivisione di tali esercizi in strumentali, relazionali e misti. Quando questi non risultavano facilmente catalogabili, mi sono aiutata con l'analisi dalle coppie nelle quali esse si presentavano.

Esercizi strumentali	Esercizi misti	Esercizi relazionali
Analisi, analisi matematica	discussione di disequazioni,	applicazioni, applicazioni alla
algebra, calcolo, calcoli	disequazioni con il valore	pratica, geometria analitica,
campi_di_esistenza, derivate	assoluto funzioni, funzioni	geometria piana, geometria,
disequazioni, , disequazioni	trigonometriche, funzioni	giochi di nash, integrali,
razionali , dimostrazioni di	esponenziali, funzioni	integrali indefiniti
teoremi, dimostrazioni,	logaritmiche, funzioni	probabilitàproblemi, problemi
dimostrazioni di formule di	goniometriche, figure,	algebrici, problemi geometrici,
trigonometria, disequazioni con	insiemistica logica matrici,	problemi trigonometrici,
le radici dimostrazioni	matematica applicata	problemi di geometria analitica,
geometriche disequazioni	rappresentazioni	problemi di geometria solida,
logaritmiche disequazioni	statistica,grafiche	problemi di geometria
goniometriche disequazioni		trigonometrica, problemi di
fratte formule, formule		geometria piana, problemi logici,

trigonometriche limiti, logaritmi
matematica finanziaria metodi di
approssimazione, numeri
complessi, radicali sistemi,
sistemi di disequazioni, sistemi
di equazioni, studio di funzioni
trigonometria, teoremi
trasformata di laplace

problemi di scelta, problemi
vari, problemi di geometria
euclidea, problemi economici:
serie, serie numeriche
successioni, serie di Fourier

Analizziamo ora le risposte all'undicesima domanda, che analizza le cause di insuccesso e dunque le convinzioni su cosa voglia dire andare bene in matematica. Qui di seguito riporto il catalogo delle convinzioni con le relative frequenze:

Convinzioni su di sé	Convinzioni sulla disciplina	Convinzioni sull'insegnante
Troppi teoremi(2), teoremi complessi da ricordare tutti(1), svogliatezza(3), poca memoria(22), scarso studio(2), argomenti non noti, scarso impegno aVolte(1), scarsa memoria(15), scarsa concentrazione negli esercizi(1), procedimenti che mi risultano astratti(1), poco tempo da dedicare allo studio(3), poco studio(12), poco studio a casa(2), poco impegno (33), poca esercitazione(22), la non comprensione (17), non comprensione degli esercizi(1), non comprensione a volte(1), poca attenzione(12), errori distrazione(8), ansia di velocità(1), poca applicazione (12), poca attenzione in classe(1), poca applicazione perché non mi piace(1), pigrizia mentale(1), non concentrazione(27), scarso senso del dovere(1), mancanza basi(97), perdo la	Richiede molto impegno(248), richiede impegno (12), richiede molta esercitazione(4), è Complicata (76), alcuni argomenti risultano ostici(5), complessa(6), necessita di ragionamento(3), necessita di pazienza(7), necessita di continuità(5), difficile nelle applicazioni pratiche(1), richiede molta	Approccio(15), danno troppe cose per scontato(1), difficoltà nel trasmettere(1), difficoltà di comunicazione(2), il metodo di insegnamento(3), disinteresse verso gli studenti(3), disinteresse verso la lezione(1), dispersivo(5), il docente corre(18), il docente corre per svolgere il programma(1), docente incompetente(36), docente non in grado di spiegare(1), il docente non è in grado di tenere una lezione di matematica(1), docente non in grado di indirizzare alla materia(1), docente con poca voglia di lavorare(1), docente ignorante(2), non umile(2), non

pazienza se non capisco(1), vado in concentrazione(2), preparato(8), docente non
 confusione se non capisco(1), paura di richiede molta aperto al confronto(7), docente
 sbagliare(3), ansia(15), paura di conoscenza(2), che non valuta le difficoltà(15),
 commettere errori(2), insicurezza(3), non è Fatta Di Più Parti docente non serio nella
 studio per troppe ore di seguito(1), non tutte valutazione(1), simpatie(1),
 riesco a risolvere(1), non sono costante DaComprendere(1), docente non capace di
 nell'esercitazione(2), non ha contatto con non si saltano gli trasmettere la materia(1),
 la vita (13), non capisco alla prima argomenti(1), docente ostile agli studenti(1),
 spiegazione(1), non riesco ad applicare le esercizi non il docente deve far piacere la
 regole(5), non riesco a capire le comprensibili(4), materia(1), incompatibilità con
 spiegazioni del docente(2), non ricordo la bisogna conoscere i il metodo di insegnamento(22),
 regola che serve(3), difficoltà prerequisiti(3), incapace a spiegare(1),
 incontrate(1), non prolungata molte cose da incomprendione(7), mancanza
 concentrazione(1), molta distrazione(3), ricordare(4), natura di chiarezza(3), mancanza di
 molta insicurezza(2), mancato studio rigida(4), è ascolto (4), metodo di
 teorico(1), mancanza di volontà(3), irreali(5), non ha insegnamento inadatto(5),
 mancanza di tempo rispetto alla mole di un contatto con metodo di insegnamento poco
 lavoro(1), mancanza di vita(6), pesantezza fruibile(1), non favorisce alla
 tempo(4), mancanza studio(4), ,mancanza della teoria(1), comprensione(1), non è
 attenzione nelle spiegazioni(1), mancanza teoria(5), troppe motivante(4), non aiuta gli
 di memoria (29), mancanza di costanza(2), regole da studenti in difficoltà(5), non è
 mancanza di concentrazione(4), mancanza ricordare(15) in grado di far apprendere la
 di comprensione senza tutor(1), mancanza materia(1), non vede le doti ed
 di applicazione(2), alcuni argomenti poco evidenza le carenze(1), poca
 assimilati(1), incostanza(2), chiarezza(144), docente
 distrazione(31), lentezza(4), minaccioso verso lo studio(1),
 presunzione(1), incomprendione che incompetenza(1),
 implica più tempo(1), impostare i presunzione(2), non è sempre
 problemi(1), ricordare le regole(4), impegno presente(1), poca
 più tempo di quello che ho a disponibilità(6), poca
 disposizione(1), imparo a memoria(3), preparazione(2), poca
 imparare la teoria(4), imparare a memoria semplicità(2), non è diretto(5),
 la teoria(1), facilità di distrazione(2), poco esauriente(2),
 distrazione se troppo astratta(1), superficialità(1), rapporto

disinteresse(1), difficoltà a riconoscere le regole da applicare(2), difficoltà di memoria(2), Difficoltà ad applicare le regole(13), difficoltà con la teoria(3), difficoltà di comprensione(2), difficoltà a capire le regole(4), difficoltà ad apprendere la teoria da applicare alla pratica(1), difficoltà ad individuare errori commessi(2), capire la teoria ma non saperla applicare(1), capire la domanda(1), calo di attenzione per fretta(1), calo di attenzione per panico(1), calcoli complessi(2), buchi di memoria(8), non associazione di regole al problema(1), bisogno di più tempo(4), bisogno di più pratica(!), argomenti compresi male(1), poca sicurezza nei miei mezzi(1), apprendimento (17), applicare regole (16), affrontare i test con leggerezza(1).

problematico(1)

Rispetto ai cataloghi precedenti, si nota in questo caso un maggiore uso, seppur sintetico , di uno stile narrativo, con una conseguente varietà di frasi che molte volte sono accomunate dallo stesso significato. Basti pensare, che in questo catalogo, non vi è la presenza di un gran numero di espressioni con alta frequenza., bensì con un numero maggiormente variegato di espressioni con frequenze basse (la frequenza media è di 4 occorrenze). Qui di seguito ho ritenuto opportuno, per un futuro utilizzo di tale catalogo in piattaforma, accomunarli per significato.

Le convinzioni su di sé possono essere così accomunate :

1) **PROBLEMI DI MEMORIA:**Troppi teoremi(2), teoremi complessi da ricordare tutti(1), poca memoria(22), scarsa memoria(15), mancanza di memoria (29), imparo a memoria(3), imparare la teoria(4), imparare a memoria la teoria(1), difficoltà di memoria(2), difficoltà con la teoria(3), buchi di memoria(8),

2) **SCARSO IMPEGNO:** svogliatezza(3), scarso studio(2), scarso impegno aVolte(1), poco tempo da dedicare allo studio(3), poco studio(12), poco studio a casa(2), poco impegno (33), poca

esercitazione(22), poca applicazione (12), poca attenzione in classe(1), poca applicazione perché non mi piace(1), pigrizia mentale(1), scarso senso del dovere(1), non studio per troppe ore di seguito(1), non sono costante nell'esercitazione(2), mancato studio teorico(1), mancanza di volontà(3), mancanza attenzione nelle spiegazioni(1), mancanza di costanza(2), mancanza di applicazione(2), incostanza(2), affrontare i test con leggerezza(1).

3)MANCANZA DEI PREREQUISITI: argomenti non noti, mancanza basi(97), alcuni argomenti poco assimilati(1),

4)MANCANZA DI COMPrensIONE: procedimenti che mi risultano astratti(1), la non comprensione (17), non comprensione degli esercizi(1), non comprensione a volte(1), non capisco alla prima spiegazione(1), non riesco a capire le spiegazioni del docente(2), difficoltà incontrate(1), mancanza di comprensione senza tutor(1), incomprensione che implica più tempo(1), difficoltà di comprensione(2), difficoltà a capire le regole(4), capire la domanda(1), argomenti compresi male(1), apprendimento (17),

5)EMOZIONI: ansia di velocità(1), perdo la pazienza se non capisco(1), vado in confusione se non capisco(1), paura di sbagliare(3), ansia(15), paura di commettere errori(2), insicurezza(3), molta insicurezza(2), calo di attenzione per fretta(1), calo di attenzione per panico(1), poca sicurezza nei miei mezzi(1),

6)PROBLEMI DI CONCENTRAZIONE/ DISTRAZIONE: poca attenzione(12), errori distrazione(8), non concentrazione(27), non prolungata concentrazione(1), molta distrazione(3), mancanza di concentrazione(4), scarsa concentrazione negli esercizi(1), distrazione(31), facilità di distrazione(2),

7)CARATTERISTICA ASTRATTA DELLA MATEMATICA: non ha contatto con la vita (13), distrazione se troppo astratta(1),

8)PROBLEMI CON LE REGOLE: non riesco ad applicare le regole(5), non ricordo la regola che serve(3), , ricordare le regole(4), difficoltà a riconoscere le regole da applicare(2), impostare i problemi(1), Difficoltà ad applicare le regole(13), difficoltà a capire le regole(4), non associazione di regole al problema(1), applicare regole (16),

9)MANCANZA DI TEMPO: mancanza di tempo rispetto alla mole di lavoro(1), mancanza di tempo(4),mancanza studio(4)

9)PROBLEMI CON LA TEORIA: difficoltà ad apprendere la teoria da applicare alla pratica(1), capire la teoria ma non saperla applicare(1), Troppi teoremi(2), teoremi complessi da ricordare tutti(1), difficoltà con la teoria(3),

10)LENTEZZA: lentezza(4), impegno più tempo di quello che ho a disposizione(1), bisogno di più tempo(4),

10)ALTRE CARATTERISTICHE PROPRIE: presunzione(1), disinteresse(1), difficoltà ad individuare errori commessi(2), calcoli complessi(2), bisogno di più pratica(1),

Le convinzioni sulla disciplina hanno richiesto minore impegno, poiché non ricoprono un numero alto di occorrenze e sono state raggruppate come segue:

1)RICHIEDE IMPEGNO: Richiede molto impegno(48), richiede impegno (12), richiede molta esercitazione(4), necessita di continuità(5), richiede molta conoscenza(2), èFatta Di Più Parti tutte DaComprendere(1), non si saltano gli argomenti(1), bisogna conoscere i prerequisiti(3), richiede molta concentrazione(2), necessita di pazienza(7),

2)COMPLICATA: è Complicata (76), alcuni argomenti risultano ostici(5), complessa(6), necessita di ragionamento(3), difficile nelle applicazioni pratiche(1), esercizi non comprensibili(4),

3)RICHIEDE MEMORIA: molte cose da ricordare(4), troppe regole da ricordare(15)

4)E' ASTRATTA: natura rigida(4), è irrealista(5), non ha un contatto con vita(6)

5)PROBLEMI CON LA TEORIA: pesantezza della teoria(1), teoria(5)

Infine le convinzioni sull'insegnante sono state raggruppate come di seguito riportato:

1) METODO DI INSEGNAMENTO: Approccio(15), difficoltà nel trasmettere(1), difficoltà di comunicazione(2), il metodo di insegnamento(3), docente non capace di trasmettere la materia(1), il docente deve far piacere la materia(1), incompatibilità con il metodo di insegnamento(22), incomprensione(7), mancanza di chiarezza(3), metodo di insegnamento inadatto(5), metodo di insegnamento poco fruibile(1), non è in grado di far apprendere la materia(1), poca chiarezza(144), docente minaccioso verso lo studio(1),

2) ASPETTI MOTIVAZIONALI: disinteresse verso gli studenti(3), disinteresse verso la lezione(1), docente che non valuta le difficoltà(15), docente ostile agli studenti(1), mancanza di ascolto (4), non favorisce alla comprensione(1), non è motivante(4), non aiuta gli studenti in difficoltà(5), non vede le doti ed evidenzia le carenze(1), poca disponibilità(6), rapporto problematico(1)

3) ERRORI DEL DOCENTE: danno troppe cose per scontato(1), dispersivo(5), il docente corre(18), il docente corre per svolgere il programma(1) non umile(2), docente non aperto al confronto(7), docente non serio nella valutazione(1), simpatie(1), presunzione(2), poca semplicità(2), non è diretto(5), poco esauriente(2), superficialità(1),

4) INCOMPETENZA DEL DOCENTE: docente incompetente(36), docente non in grado di spiegare(1), il docente non è in grado di tenere una lezione di matematica(1), docente non in grado di indirizzare alla materia(1), docente con poca voglia di lavorare(1), docente ignorante(2),

non preparato(8), incapace a spiegare(1), incompetenza(1), non è sempre presente(1), poca preparazione(2),

In fine riporto di seguito il catalogo degli aggettivi creato da Di Martino et Al.(2007):

A: abbondante 1, abitua al ragionamento 1, accattivante 3, accessibile1, accessoria 1, affascinante 81, affaticante 1, affliggente 1, affrontabile 1, aiuta a ragionare 1, ambiziosa 1, ammaliante 1, ampia 12, analitica 4, angosciante 3, angosciosa 1, annoiante 2, ansia 1, antica 1, antipatica 8, antiquata 1, appagante 7, appassionante 37, appassionata 1, applicabile 6, applicata 1, applicativa 12, apre 1, arcana 1, ardua 1, arida 3, aritmetica 1, armonica 1, armoniosa 1, articolata 7, arzigogolata 2, assoluta 4, assuefante 1, assurda 6, astratta 70, astrusa 1, attraente 1, automatica 1, autoreferenziale 1, avventurosa 1, avvincente 8.

B: balorda 1, basilare 9, bastarda 1, bella 42, bellissima 2, boriosa 1, brillante 1, da brucià³⁵ 1, brutta 4, buona

C: calcolabile 1, calcolatrice 1, calcoli 1, calcolosa 1, caotica 1, capacità 1, capibile 1, carina 2, categoria 1, categorica 2, cavillosa 2, certa 3, cervellotica 8, chiara 6, chiusa 1, circolare 1, classica 2, claustrofobica 1, coinvolgente 36, collegata 3, comatosa 1, compatibile 1, complessa 225, completa 5, completezza 1, complicata 415, comprensibile 3, comunista 1, concatenata 1, concettuale 3, concreta 2, confonde 1, confortante 1, congeniale 1, congettiosa 1, consecutiva 1, consequenziale 4, continuativa 2, contorta 22, controllabile 1, corale 1, costruttiva 10, creativa 10, cruda 1, crudele 1, curiosa 16.

D: debilitante 1, deduttiva 7, depravata 1, deprimente 6, destabilizzante 1, determinante 1, detestabile 1, diabolica 1, didascalica 1, difficile 359, difficoltosa 7, dilettevole 1, dimenticabile 1, dimostrabile 1, dinamica 2, disciplinare 1, dispersiva 1, distorcente 1, distruttiva 2, divertente 60, dogmatica 1, dura 1.

E: eccessiva 2, edificante 1, efficace1, effimera 1, elaborata 6, elastica 1, elevata 1, elevativa 1, elitaria 3, emicranica 1, emozionante 2, empirica 2, energizzante 1, enigmatica 16, enigmistica 1, enorme 2, entusiasmante 5, esagerata 1, esaltante 2, esasperante 1, esatta 14, esercitativa 1, esercitazione 1, essenziale 10, estenuante 1, estesa 2, estrosa 1, evanescente 1.

F: facile 11, fantasiosa 14, fascista 1, fastidiosa 2, faticosa 11, fattibile 1, fiscale 3, flessibile 1, fondamentale 24, fondativa 1, formale 1, formativa 7, forte 1, fredda 5, frustrante 1, funzionale 1, fuorviante 1, furba 1, futile 2, futuristica 1.

G: ganza 1, geniale 7, giusta 2, grassa 1, gratificante 5.

³⁵ Da bruciare (*da brucià* è la versione scritta del tipico intercalare toscano che tronca il verbo all'infinito e mette l'accento sull'ultima vocale).

I: ideografica 1, ignobile 1, illimitata 3, illogica, illuminante 1, illustrativa 1, immaginativa 1, immediata 2, immensa 2, impegnativa 430, impensabile 1, importante 110, impossibile 7, impostata 1, improponibile 1, inapplicabile 3, inarrivabile 1, inattuabile 1, incantevole 1, incapibile 1, incasinata 4, incommensurabile 1, incommentabile 1, incompleta 2, incomprendibile 34, incomprendiva 1, indefinibile 1, indescrivibile 1, indifferente 3, indigesta 2, indiscutibile 2, indispensabile 26, indubitabile 1, induce al ragionamento 1, inequivocabile 2, inesorabile 1, inesplorata 1, inevitabile 2, infallace 1, infallibile 2, infida 1, infinita 33, influente 1, ingannatrice 1, ingarbugliata 1, ingegnosa 13, ingombrante 1, ingrata 1, ininfluyente 1, innovativa 2, inquadrata 1, insignificante 3, insoddisfacente 1, insopportabile 1, inspiegabile 1, insulsa 2, insuperabile 1, intellettuale 1, intelligente 2, interdisciplinare 1, interessante 596, intorta 1, intrecciata 2, intricata 5, intrigante 41, intrinseca 1, intrippante 1, intuitiva 31, inutile 91, irraggiungibile 1, irreali 3, irriducibile 1, irritante 1, istantanea 1, istruttiva 8.

K: kafkiana 1.

L: laboriosa 8, legge 1, legnosa 1, lenta 1, limitante 1, limitativa 4, lineare 6, linguaggio 1, logica 184, logorante 1, longeva 1, lunga 14.

M: macchinosa 5, maledetta 1, masochista 1, matematica 4, meccanica 22, meccanicistica 2, memoria (studiare a) 1, mente 1, meravigliosa 2, merda 1, merdona 1, metafisica 1, metodica 5, minuziosa 1, misteriosa 16, mistica 1, molto_utile 1, monotona 20, morbosa 1, mortificata 1, motivata 1, multidimensionale 1.

N: naturale 1, nauseante 3, necessaria 17, nemica 2, nevrotica 7, noiosa 333, non coinvolgente 1, non comprensibile 1, non immediata 1, non impossibile 1, non interessante 2, non intuitiva 1, non è un'opinione 4, non opinabile 1, non si studia 1, non stimolante 1, nozionistica 3, numerica 4.

O: obbligata 2, odiosa 14, oggettiva 9, onesta 1, onnipresente 5, operativa 1, opinabile 1, opprimente 1, ordinante 1, ordinata 3, organica 1, organizzata 2, orrenda 7, orribile 3, oscura 6, ostica 3, ostile 2, ovvia 1.

P: pallosa 8, paranoia 1, paranoica 1, particolare 9, passiva 1, perfetta 10, periodica 1, pesante 52, pessima 1, petulante 1, piacevole 28, pianeta a parte 1, pignola 2, per pochi 1, poco attuale 2, poco chiara 1, poco coinvolgente 1, poco comprensibile 2, poco creativa 1, poco divertente 1, poco fantasiosa 1, poco fisica 1, poco interessante 4, poco stimolante 1, poco utile 9, polivalente 1, positiva 3, potente 1, pragmatica 3, pratica 22, precisa 60, precisione 1, preoccupante 1, presuntuosa 1, prevedibile 1, preziosa 1, priva di creatività 1, problematica 7, profonda 1, programmatica 1, prolissa 1, pulita 1, puntigliosa 1, pura 1.

Q: quotidiana 1.

R: raccapricciante 1, ragionamento 4, ragionata 21, ragionevole 3, rassicurante 3, razionale 130, razionalità 1, razionata 1, reale 1, realizzante 3, regolare 2, restrittiva 2, ricca 1, ridicola 1, riflessiva 24, riflettua 1, rigida 11, rigorosa 20, rilassante 7, ripetitiva 19, risolutiva 1, risolvibile 1, rognosa 1, rompicapo 1.

S: sacrificante 1, salubre 1, sbizzarrire 1, scassaballe 1, scervellante 6, schematica 26, schemi 1, schifo 1, schifosa 6, scientifica 3, scienza 1, scioccante 1, scoccante 5, scontata 1, sconvolgente 1, seccante 6, seducente 1, selettiva 2, semplice 4, sensuale 1, senza senso 1, seria 1, severa 1, sfondata 1, sicura 2, sillogistica 1, simpatica 17, sintetica 2, sistematica 7, snervante 6, soddisfacente 18, sofisticata 1, soggettiva 1, sonnolenta 1, soporifera 1, sopportabile 2, sorprendente 3, spaccatesta 1, specifica 1, spettacolo 1, spossante 1, spremete 1, spronante 1, squallida 1, stabile 1, stancante 9, sterile 3, stimolante 76, stonata 1, stramba 1, strana 6, straordinaria 1, straziante 3, stressante 45, strizzacervelli 1, strutturata 1, stupefacente 1, stupenda 3, subdola 1, superba 1, superflua 2, surreale 1, svalutata 1.

T: tanta roba 2, tautologica 1, tecnica 1, tediosa 1, teorica 8, terrorizzante 1, tortuosa 1, tosta 1, totale 1, traditrice 1, tragica 1, tranquilla 2, trascendente 1, travolgente 1, tremenda 1, troppa 1, troppo impegnativa 1.

U: unica 3, universale 15, univoca 3, usufruibile 1, utile 376.

V: vaga 1, varia 13, variabile 1, variegata 1, variopinta 1, vasta 31, vastissima 1, veloce 2, vera 1, versatile 1, vitale 1, vomitevole 1, vomitosa 1, vuota 1.

Li ho divisi, laddove possibile, in strumentale e relazionale, misto tenendo in conto il seguente criterio: nel caso in cui l'aggettivo possa essere inserito con più scelte possibili ho deciso di attribuirgli il livello più basso, in modo da aver minor margine di errore di valutazione del profilo in positivo.

strumentale	misto		relazionale						
abbondante	affaticante	affliggente	ampia	affrontabile	accessibile	abituata	al	ragionamento	
angosciante	angosciosa	annoiante	ansia	analitica	applicabile,	accattivante		affascinante	
antica	antipatica	antiquata	arcana	ardua	applicativa	aiuta	a	ragionare	
arida	aritmetica	arzigogolata	assurda	armonica	armoniosa	ambiziosa		ammaliante	
astratta	astrusa	automatica	articolata	basilare	buona	appagante		appassionante	
autoreferenziale	balorda	bastarda	boriosa	capibile	carina	cavillosa	appassionata	apre	assoluta
da brucià	brutta	calcolabile	calcolatrice	certa	circolare	collegata	assuefante		attraente

calcoli calcolosa caotica categorica compatibile complessa avventurosa avvincente
 chiusa classica claustrofobica comatosa completa completezza bella bellissima brillante
 complicata confonde consecutiva comprensibile capacità cervelotica chiara
 consequenziale continuativa contorta concatenata concettuale coinvolgente concreta
 corale cruda crudele debilitante depravata confortante controllabile congeniale congettua
 deprimente destabilizzante detestabile dilettevole dimostrabile costruttiva creativa curiosa
 diabolica didascalica difficile difficoltosa disciplinare divertente deduttiva determinante
 dimenticabile dispersiva distortente edificante efficace dinamica elastica elevata
 distruttiva dogmatica dura eccessiva enigmatica enigmistica elevativa elitaria
 effimera emicranea empirica esagerata elaborata essenziale emozionante energizzante
 esasperante esercitatile esercitativa facile fattibile funzionale entusiasmante esaltante
 esercitazione estenuante estesa gratificante immediata estrosa fantasiosa flessibile
 evanescente fastidiosa faticosa fiscale importante impostata fondamentale fondativa
 formale, fredda frustrante fuorviante indifferente forte furba futuristica
 futile ignobile illogica impensabile indiscutibile , ganza geniale giusta,
 impossibile, improponibile inapplicabile indubitabile, illimitata illuminante
 inarrivabile, inattuabile, incapibile inequivocabile infallace immaginativa immensa
 incasinata incommentabile infallibile inquadrata impegnativa incantevole,
 incomprendibile incomprendiva interdisciplinare incommensurabile
 indefinibile indigesta inevitabile infida interessante intrecciata indispensabile induce al
 ingannatrice ingarbugliata, ingombrante intricata intrinseca ragionamento, inesorabile
 ingrata insignificante, insoddisfacente istruttiva legge, lineare inesplorata infinita
 insopportabile, inspiegabile insulsa logica longeva ingegnosa innovativa
 inutile irraggiungibile irriducibile, matematica minuziosa insuperabile, intellettuale,
 irritante, irreal laboriosa legnosa lenta molto utile motivata intelligente, intrigante
 limitante limitativa logorante, lunga necessaria non immediata intrippante intuitiva
 macchinosa maledetta masochista non impossibile non è istantanea linguaggio
 meccanica meccanicistica memoria un'opinione non mente meravigliosa
 merda merdona metodica mistica opinabile oggettiva metafisica misteriosa
 monotona morbosa mortificata nauseante onesta organica multidimensionale
 nemica nevrotica noiosa non organizzata ovvia naturale onnipresente
 coinvolgente non comprensibile non periodica piacevole poco perfetta positiva potente
 interessante non intuitiva non si studia fisica polivalente pratica preziosa profonda pura
 non stimolante nozionistica numerica pragmatica precisa ragionamento ragionata

obbligata odiosa operativa opinabile precisione pulita ragionevole realizzante
 opprimente ordinante ordinata orrenda quotidiana rassicurante ricca riflessiva riflettua
 orribile oscura ostica ostile pallosa razionale razionalità sbizzarrire scientifica
 paranoia paranoica passiva pesante raziionata reale rigorosa scienza sconvolgente
 pessima petulante pianeta a parte pignola rilassante risolutiva seducente sensuale
 per pochi poco attuale poco chiara poco risolvibile rompicapo sofisticata sorprendente
 coinvolgente poco comprensibile poco scervellante semplice spettacolo straordinaria
 creativa poco divertente poco fantasiosa seria severa sicura stupefacente stupenda
 poco interessante poco stimolante poco sillogistica simpatica travolgente unica,
 utile preoccupante presuntuosa sintetica soddisfacente universale varia variegata
 prevedibile priva di creatività spremente spronante variopinta vasta ,
 problematica programmatica stabile stimolante teorica vastissima vitale
 raccapricciante regolare restrittiva tortuosa tranquilla
 ridicola rigida ripetitiva rognosa usufruibile utile veloce
 sacrificante scassaballe schematica vera
 schemi schifo schifosa scioccante
 scontata scoccante seccante selettiva
 senza senso sistematica snervante
 sonnolenta soporifera sopportabile
 spaccatesta specifica spossante, squallida
 stancante sterile stonata stramba strana
 straziante stressante strizzacervelli
 strutturata subdola superflua svalutata
 tanta roba tautologica tecnica tediosa
 terrorizzante traditrice tragica tremenda
 troppa troppo impegnativa vaga
 vomitevole vomitosa vuota

Capitolo VI

La visione della matematica: un esempio di learning activities

6.1 Introduzione

Una volta definiti tutti gli strumenti per la creazione del profilo e aver previsto le modalità per la loro implementazione in piattaforma, in questo capitolo riporto la sperimentazione per la validazione dell'intero processo che fin'ora ho descritto. Per fare ciò, tra i suggerimenti didattici da me proposti nel capitolo precedente, ne ho elaborato uno realizzando una opportuna learning activity, che mira a favorire una visione relazionale della matematica e che descrivo dettagliatamente nel presente capitolo. Tra tutti gli argomenti possibili da trattare ho deciso di realizzare la learning activity sull'apprendimento delle dimostrazioni: come riporto nel primo paragrafo di questo capitolo, oggi sempre più spesso si riscontra un'atteggiamento acritico nell'apprendere le dimostrazioni caratterizzato dalla memorizzazione più che dalla comprensione dei concetti che si utilizzano, che richiama una visione della matematica puramente strumentale. Ho dunque creato un'attività e-learning sulle dimostrazioni atta a favorire una visione relazionale.

Ho sperimentato l'attività su un campione di 85 studenti del primo anno di università, ai quali è stato chiesto di compilare il questionario, in maniera anonima, prima e dopo l'attività. In questo capitolo presento le prime analisi dei protocolli e i risultati qualitativi e quantitativi della suddetta sperimentazione, compresa l'analisi delle differenze delle risposte ai questionari prima e dopo la sperimentazione.

6.2 Alcune indicazioni di contesto: perché un'attività e-learning sulle dimostrazioni?

I docenti di matematica sono sempre più spesso spettatori di una tendenza alquanto diffusa da parte degli studenti ad un apprendimento poco critico basato sull'acquisizione mnemonica di formule,

risultati, enunciati e intere dimostrazioni, che si riflette dal punto di vista pratico nell'esecuzione meccanica di procedure algoritmiche, nella recita di dimostrazioni ben memorizzate, di concetti "senza senso" ripetuti allo stesso modo in cui sono riportati dal testo di riferimento (Conradie & Frith, 2000).

la risposta a questi dati sconcertanti è la completa eliminazione delle dimostrazioni dai programmi di scuola superiore e universitari: "...Le conseguenze di questo processo sulle capacità argomentative diffuse sono facilmente verificabili e costituiscono la controprova dell'antico rapporto tra dimostrazioni, capacità argomentative e democrazia..." (Malara N. 2002).

La Dimostrazione infatti "è un argomento trasparente, in cui tutte le informazioni usate e tutte le leggi di ragionamento sono chiaramente espresse e aperte alla critica. E' proprio per la natura stessa della dimostrazione che la validità della conclusione scaturisce non da alcuna autorità esterna ma dalla dimostrazione stessa. La dimostrazione veicola agli studenti il messaggio che essi possono ragionare da se stessi, che non hanno bisogno di piegarsi alla autorità. Dunque l'uso della dimostrazione in classe è in realtà anti-autoritario" (Hanna 1995).

Molti autori quali Hanna, ma anche Davis e Hersh (1981) richiamano il valore sociale della dimostrazione, per il costante processo di critica e di conferma cui è sottoposta, che ne suggella la rispettabilità e l'autorità.

Va poi osservato che le dimostrazioni sono pervasive nella pratica matematica, non compaiono soltanto in associazione ai teoremi riconosciuti come tali ma anche in una varietà di situazioni quali ad esempio la soluzione di un problema, l'esecuzione di un calcolo o la verifica di un enunciato. Le dimostrazioni non sono quindi soltanto certificazioni esterne alla matematica o strumenti di convincimento. Per i motivi succitati il tema della dimostrazione in matematica è stato sempre considerato come rilevante sul piano didattico e va affrontato con strumenti specifici.

Ma se le dimostrazioni sono così dichiaratamente importanti tanto da affermare di riuscire ad educare alla libertà e all'antiautorità, come è poi possibile che studenti sottoposti al loro studio si trovino a ripetere frasi senza ricercarne un senso, assumendo un atteggiamento del tutto opposto a quello che ci si aspetta da una persona critica e "intellettualmente libera"?

In effetti "Lo sviluppo dell'attitudine alla ricerca di senso è legata fortemente al metodo di insegnamento che può sopprimerla quanto supportarla e non è una mera questione di abilità matematica innata" (Arcavi, 2005). Una forte influenza sulla ricerca di senso la ha il metodo di insegnamento che dovrebbe essere orientato allo sviluppo adeguato ed autonomo delle abilità metacognitive, che consentono di distinguere gli oggetti "rilevanti" di una discussione (Ascione & Mellone, 2007), di porre in modo autonomo il focus sulle "argomentazioni chiave" per l'interpretazione di un testo matematico.

Una prima difficoltà che incontrano i ragazzi nel leggere una dimostrazione è il rendere esplicito ciò che è implicito nel testo, compresa la fitta rete di collegamenti fra le varie informazioni (Zan 1996). D'altra parte, Ferrari (2004) osserva che molte delle difficoltà degli studenti che incontrano nell'interpretare un testo matematico, possono essere ricondotte alla loro incapacità di riconoscere i due modi di usare il linguaggio (matematico e quotidiano) e *di passare opportunamente dall'uno all'altro*. Egli sostiene che i registri abitualmente usati in matematica avanzata hanno diverse caratteristiche in comune con i registri colti (in particolare testi scritti) e possono essere visti come loro forme estreme, e quindi conclude che *diventare familiari con i registri colti e il loro uso* (che non è una condizione “naturale”, ma va costruita), è un buon punto di partenza, se non un prerequisito, per apprendere a usare il linguaggio matematico.

Invero, come ho sottolineato nel primo capitolo a proposito di matematica e linguaggio, attività e-learning, per le caratteristiche proprie del linguaggio del quale il pc risulta il maggiore artefice, che si sforza di farsi carico della necessità di esplicitare attraverso la comunicazione scritta quanto nella comunicazione diretta passa in altre forme, può, come riportato in Albano&Ascione (2008) facilitare la mediazione per il passaggio ai registri colti e dunque all'interpretazione corretta di un testo matematico. Dunque un'attività e-learning, per le caratteristiche proprie del linguaggio del quale è caratterizzata, potrebbe facilitare il superamento di alcune delle difficoltà di linguaggio sottolineate da Ferrari.

6.3 Descrizione dell'attività'

L'attività di seguito descritta ha come scopo quello di offrire un'introduzione appropriata alla comprensione delle dimostrazioni, che in prima istanza induca lo studente alla richiesta di senso (focalizzando l'attenzione sui punti da esplicitare, sulle scritte da “trasformare” ecc.), per poi educarlo a farlo in maniera autonoma.

Tale introduzione prevede l'utilizzo di “centrature di attenzione” (Guidoni, 1985) sui “fattori fondanti” dell'attività dimostrativa quali:

- la lettura e la comprensione di un enunciato (attraverso l'individuazione di ipotesi e tesi, e loro diverse riformulazioni, ecc.)
- lettura e comprensione di una dimostrazione (nell'andare a guardare dove vengono usate le ipotesi, perché si è in grado di applicare certi risultati noti ecc);
- dare senso al teorema nel contesto nel quale lo si sta studiando .

Le centrature in prima istanza servono per indurre lo studente ad una lettura sensata della dimostrazione, “costringendolo” a soffermarsi a riflettere lì dove spontaneamente molto probabilmente non sosterebbe. In un secondo momento l’attività prevede il riconoscimento delle centrature come invarianti per la comprensione di una dimostrazione, in modo da indurre lo studente ad utilizzarle in maniera autonoma e così di attivare le proprie abilità metacognitive.

A tal fine ho previsto che lo studio dei teoremi fosse guidato attraverso delle schede, contenenti domande di comprensione raggruppate in tre sezioni, descritte di seguito:

1. *guida all’analisi dell’enunciato*: in questa sezione la centratura d’attenzione è posta sull’individuazione all’interno di un enunciato di ipotesi e tesi. A tal proposito vengono proposte una serie di domande a completamento in termini di condizione necessaria e/o sufficiente, in modo da indurre la necessità sia di distinzione tra ipotesi e tesi sia di non vincolarsi a un’unica formulazione di un teorema. Tale aspetto viene fortemente marcato da una successiva richiesta di una riformulazione di ipotesi e tesi al fine di renderle maggiormente utili per il contesto dimostrativo in esame: questo serve da un lato ad abituare ed esercitare lo studente a problemi di conversione/trattamento di oggetti e proprietà (Ferrari, 2004) e dall’altro lato a far percepire che una diversa formulazione (ovvero rappresentazione) mette in evidenza caratteristiche diverse degli oggetti in gioco che possono talvolta venire più utili alla dimostrazione. La centratura di attenzione qui è dunque spostata dalla individuazione di ipotesi e tesi ad una loro determinazione pragmatica di utilizzo.
2. *guida alla dimostrazione*: si centra l’attenzione sul procedimento dimostrativo e sulla giustificazione dei passi di detto procedimento. In particolare la centratura di attenzione è spostata sul riconoscimento della necessità delle ipotesi nel contesto dimostrativo, sull’applicabilità di eventuali teoremi analizzati, sul metodo dimostrativo utilizzato.
3. *uno sguardo d’insieme*: in quest’ultima sezione si sposta la centratura di attenzione dall’aspetto microscopico, su cui nelle precedenti sezioni si è posta l’attenzione, all’aspetto “macroscopico” definito dal “filo logico” della dimostrazione. In particolare si richiede allo studente di “dare un qualche senso” al teorema nel contesto di studio e, nel caso di condizioni solo sufficienti, si richiedono contro esempi per la necessità.

Allo scopo di indirizzare lo studente ad un utilizzo autonomo delle centrature d’attenzione, le schede, pur mantenendo la struttura sopra descritta, sono variate nei contenuti. Sono stati individuati tre livelli, come descritto di seguito:

I livello (appendice a): le domande sui singoli teoremi sono specifiche, e dunque diverse da teorema a teorema. In particolare nelle domande viene fatto riferimento ai risultati noti che vengono sfruttati nella dimostrazione e allo studente viene chiesto di giustificarne l'uso;

II livello (appendice b): sono state proposte domande standard, ovvero indipendenti dal contenuto specifico del teorema in esame, allo scopo di evidenziare cos'è invariante nello studio di un teorema. Dalla prima alla seconda sottoattività in particolare l'allievo ha un numero maggiore di "gradi di libertà". Basti pensare ad esempio come in questo secondo gruppo di teoremi spetta allo studente individuare quali risultati precedenti vengono usati e perché, a differenza del primo;

III livello: in questo caso, è stato chiesto agli studenti di formulare loro stessi le domande "calandosi nei panni del docente che verifica l'apprendimento del teorema in esame", sfruttando quello che hanno fatto nelle prime due sottoattività precedenti. Tale livello, può essere utilizzato dal docente anche come verifica che il percorso di apprendimento sia andato a buon fine.

In questa terza fase, c'è un ulteriore salto di autonomia, perché gli studenti non devono più rispondere ma fare domande e "una volta che un qualsiasi individuo impara a porre domande, domande essenziali, rilevanti, appropriate, ha imparato "come imparare", e a quel punto nessuno potrà mai dissuaderlo dall'imparare qualsiasi cosa egli voglia o di cui necessiti" (Postman & Weingartner, 1969).

6.4 La metodologia

Ho sperimentato l'attività durante l'anno accademico 2007/2008 che è stata espletata durante il corso di Geometria con 85 studenti del primo anno di ingegneria dell'università di Salerno. Ho previsto il suo svolgimento in un corso e-learning in modalità blended, cioè con l'utilizzo sia di lezioni tradizionali in presenza sia di un supporto a distanza attraverso la piattaforma di e-learning IWT.

Ho utilizzato la piattaforma per condurre l'attività descritta, attraverso la funzionalità "Compiti a casa". Tale modalità consente che ad ogni studente venga assegnata una scheda, permettendogli di compilarla, consegnarla al docente nei tempi previsti, riceverne la correzione, eventualmente risottometterla e averne la nuova correzione, e mantenere traccia di tutto il carteggio con il docente.

Ho deciso di lasciar libero ciascuno studente di decidere di svolgere l'attività in gruppo o singolarmente. Si sono infatti formati alcuni gruppi autonomamente.

Ogni passo dell'attività, ovvero l'esame di un singolo teorema, è stato svolto nel tempo di una settimana. Per l'espletamento di tale attività ho scelto i seguenti teoremi: per la prima fase, i teoremi

di Cramer, di Rouché-Capelli e il lemma di Steinitz; per la seconda fase, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e il teorema di Gram-Schmidt; per la terza fase i teoremi della dimensione, della caratterizzazione della diagonalizzazione e il teorema spettrale.

Ho previsto, per ogni scheda due modalità di correzione:

- la prima collettiva, rendendo accessibile e scaricabile da un'area condivisa un file preparato dal docente contenente una traccia di risposte corrette. L'uso di tale file era diretto sia ad una auto-valutazione da parte del studente sia ad una eventuale discussione collettiva su forum tratta su "errori ripetuti";
- la seconda personalizzata, fornendo al singolo studente feedback specifici relativi al proprio elaborato.

In entrambi i casi, lo studente poteva richiedere chiarimenti al docente e risottomettere al docente una nuova versione del proprio elaborato.

Inoltre, prima dell'inizio dell'attività e alla fine della stessa ho chiesto agli studenti di compilare il questionario sui profili affettivi.

6.5 Analisi dei protocolli: prime considerazioni

La necessità durante l'attività di individuare e riformulare concetti riportati nel testo dei teoremi in esame ha "costretto" lo studente a "mettersi in gioco", svelando le proprie difficoltà, le proprie interpretazioni, i propri bisogni. Nei primi protocolli infatti si sono notati, in maniera molto frequente, alcuni errori, in parte riconducibili ad un uso massiccio del linguaggio naturale a dispetto di quello formale

I primi errori riscontrati sono quelli dovuti in genere a poca riflessività: nella figura 6.1, ad esempio, possiamo osservare che lo studente approssima la scrittura della forma matriciale di un sistema lineare con la matrice dei suoi coefficienti, così come parla di n-upla di soluzioni intendendo l'n-pla delle componenti e trascurando il fatto che altrove si parla di una sola soluzione.

Data di consegna: 29/10/2007 18.07.33 Svolgimento: |

1) $Ax=b$ sia una matrice quadrata con determinante non nullo

G.A.: $Ax=b$ è un sistema lineare quadrato e non una matrice quadrata. La Matrice dei coefficienti di tale sistema è invece quadrata per ipotesi del teorema.

2) esiste una sola n-pla di soluzioni con $x_i = \det(A_i) / \det(A)$ con x_i ottenuto sostituendo alla colonna i-esima la colonna dei termini noti.

G.A.: Il sistema, sotto le ipotesi del teorema di Cramer, ammette un'unica soluzione e non una n-pla di soluzioni. Quelle a cui lei si riferisce sono invece le componenti della soluzione.

fig. 6.1

Errori più ricorrenti sono quelli di confusione tra linguaggio naturale e matematico: basti pensare alla confusione che nasce su un enunciato in cui una data condizione è necessaria e sufficiente per qualcosa, ma per la quale gli studenti spesso negano la validità delle singole condizioni prese *separatamente*; Sono inoltre presenti numerosi usi del linguaggio in maniera del tutto approssimata (ad esempio portare dall'altra parte, far scomparire la A dal primo membro ecc)

Possono ancora essere segnalati errori di ambiguità del linguaggio. La fig. 6.2 mostra un esempio di risposta alla domanda “Dato il teorema *Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo*, cosa ti garantisce l'applicabilità del teorema?”. La risposta data dallo studente sembra essere determinata dall'interpretazione della domanda posta come se fosse stata “[...] cosa deduci dall'applicazione del teorema?” piuttosto che “[...] cosa ti permette di applicare il teorema?” com'era nelle intenzioni del docente.

11a) i, alla matrice dei coefficienti ii, che la matrice sia invertibile iii, per trovare la colonna delle incognite x.

G.A.: La ii non è corretta. L'applicabilità del teorema è garantita dal fatto che valgono le ipotesi dello stesso; in particolare dal fatto che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero.

fig. 6.2

Spesso poi è stata riscontrata una mancanza di coerenza nella compilazione delle schede. Come era prevedibile la determinazione delle ipotesi e delle tesi nel rispondere alle prime domane delle schede proposte, non è stata unica. Alcuni studenti infatti hanno dato formulazione di ipotesi e tesi ancora legata alla formulazione del teorema in “linguaggio naturale” ,altri invece hanno utilizzato una schematizzazione delle stesse che potesse essere più utile ai fini dimostrativi. La cosa particolare da notare è come nel procedere con la compilazione della scheda, gli studenti, nella scrittura del teorema in termini di condizione necessaria e/o sufficiente utilizzavano formulazioni delle ipotesi e tesi differenti da quelle espresse alla domanda precedente, senza rendersi conto della

mancanza di coerenza. Un esempio di questo si può trovare nelle schede sul teorema di Steinitz riportato in fig.6.3 o in quelle sul teorema della base. Questo ha comportato non poche difficoltà nella correzione sia globale che puntuale dei compiti.

Lemma di Steinitz

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V . Allora ogni insieme di V contenente più di n vettori è linearmente dipendente.

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
Abbiamo uno spazio vettoriale con una base che contiene n vettori.
2. Qual è la tesi del teorema?
Ogni insieme contenente più di n vettori è linearmente dipendente

e. L'esistenza di una base dello spazio vettoriale V è condizione sufficiente per ...;
...perché gli insiemi di V che contengono più vettori della base siano linearmente dipendenti
f. Il fatto che un insieme di V contenga più di quelli di una base di V è condizione necessaria per ...;
...l'esistenza di una base dello spazio vettoriale V

fig. 6.3

Per questo tipo di errori sono stati previsti feedback specifici atti a sottolineare l'importanza della coerenza tra quello che si esprime rispondendo ad una domanda e alla sua successiva. L'allenamento al controllo di coerenza è sembrata una buona opportunità per porre l'attenzione sull'importanza dell'attivazione dei processi di controllo, competenza quest'ultima che va bene al di là della compilazione della semplice scheda.

Durante la correzione di questi errori, ci si è trovati ad analizzare le proprie riflessioni da insegnante. In particolare, tale approccio ha messo in risalto alcune delle interpretazioni del testo matematico da parte degli studenti alle quali, in presenza, difficilmente si sarebbe dato un gran peso e in particolare ha sorpreso quanto queste fossero molto frequenti (es: applicabilità, condizione necessarie e sufficiente ecc). Tali osservazioni hanno anche indotto a fornire agli studenti le risposte in maniera molto più "riflettuta" perché scrivendo si faceva molta più attenzione a quale potesse essere l'interpretazione degli studenti di ciò che si stava comunicando.

L'andirivieni tra errori, discussioni sugli errori tra gli studenti e feedback successivi ha dato la possibilità di porre un forte focus sul passaggio tra rappresentazioni diverse, delle quali gli studenti sono divenuti in molti casi consapevoli, anche se continuando a gestirli in alcuni casi con non poca difficoltà. Un esempio di tale trasformazione può essere fornito dal passaggio dalla formulazione verbale dell'enunciato del teorema, ad una formulazione più schematica con l'esplicitazione di ipotesi e tesi che risulti utile ai fini dimostrativi.

Un esempio chiaro è quello della prima scheda nelle quali gli studenti si sono trovati a convertire, per i fini dimostrativi l'ipotesi A invertibile in $\det(A) \neq 0$. Si può notare come molti studenti non

hanno esplicitato la seconda espressione come caratterizzazione utilizzata ai fini dimostrativi, ma poi l'hanno utilizzata nella guida alla dimostrazione, molto probabilmente però senza coglierne la pragmatica (a che serve? Perché sto convertendo? A che mi può servire?). I nostri feedback sono serviti proprio a sottolineare questo aspetto.

Un secondo esempio particolarmente evidente ed interessante è il caso di enunciati che coinvolgono quantificatori universali, com'è il caso dell'enunciato del teorema della base (fig. 6.4), che esaminiamo negli esempi di seguito riportati.

Teorema della base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori.

fig. 6.4

Il problema che sorge in questo caso dipende dal fatto che nell'enunciato dato si parla di “tutte” le basi di uno spazio vettoriale e questo chiaramente vuol dire provare che due qualsiasi basi verificano la tesi data. Dal punto di vista pratico quindi la dimostrazione considera “due” basi, e non “tutte”. Questo porta a risposte diverse degli studenti quando viene chiesto loro di scrivere ipotesi e tesi del teorema: alcuni si rifanno all'enunciato dato, mantenendo il quantificatore universale (fig. 6.4) e altri si riferiscono invece a quanto usato nella dimostrazione, eliminando il quantificatore universale (fig. 6.5).

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?

V è uno spazio vettoriale finitamente generato.

2. Qual è la tesi del teorema?

tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori.

fig. 6.5

1. Ipotesi: Siano $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ due basi di uno spazio vettoriale V .

2. Tesi: Sia il numero di vettori di B uguale al numero di vettori di B' ($n=m$)

fig. 6.6

Coloro che hanno mantenuto il quantificatore universale, lo eliminano solo in una fase successiva, cioè quando viene chiesto loro di rifarsi alla dimostrazione e indicare eventuali enunciati

equivalenti di ipotesi e tesi usati, come si vede dalla figura seguente (fig. 6.7) dando conferma che i feedback alle schede precedenti abbia in qualche modo aiutato a capire il senso di tali domande.

6. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?

l'ipotesi che V sia finitamente generato ci permette di considerare due basi costituite da un numero finito di vettori.

7. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale

per dimostrare che tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori, ho riformulato la tesi come un nuovo enunciato che sostituisce quello del teorema in esame:

Ipotesi: siano $B=(u_1, \dots, u_n)$ e $B'=(v_1, \dots, v_m)$ basi di uno stesso spazio vettoriale (Nota: il fatto di considerare basi con n e m vettori sottintende già che V sia finitamente generato);

Tesi: $n=m$

fig. 6.7

Osserviamo ancora che l'attività pone un forte focus su trattamento di rappresentazioni, anche se già nelle prime schede la gran parte degli studenti riusciva a applicare procedure in maniera adeguata, cosa che non meraviglia poiché il trattamento si riconduce all'applicazione di algoritmi ai quali sono già avvezzi.

Per quanti riguarda il terzo blocco delle schede, cioè quello relativo a uno sguardo d'insieme al teorema in esame, si è notato che spesso gli studenti hanno difficoltà a estrapolare il "filo logico" della dimostrazione, per cui si limitano a riscrivere la dimostrazione, eventualmente in linguaggio verbale, come mostrato nella figura seguente (fig. 6.8), anche se non mancano esempi di sintesi ben condotte (fig. 6.9):

18) data una base $B=(u_1, \dots, u_n)$ e un insieme $T=(w_1, \dots, w_m)$ con $m>n$ e siano B e $T \in V$, spazio vettoriale. Dimostriamo che i vettori di T siano linearmente dipendenti, e scriviamo i suoi vettori come combinazione lineare dei vettori di B . Fatto ciò sostituiamo i vettori (w_1, \dots, w_m) con le sue combinazioni lineari trovare e uguagliamo tutto al vettore nullo. Per la proprietà distributiva mettiamo in evidenza i vettori (u_1, \dots, u_n) , e otteniamo così nelle parentesi, prodotte ai vettori di T , degli scalari, che uguagliamo a 0 in un sistema (omogeneo) poiché i vettori u fanno parte della base (e per definizione sono linearmente indipendenti). Fatto il sistema, osserveremo che ha n equazioni e m incognite, e come sappiamo $n<m$, quindi il rango della matrice associata al sistema è minore a n (il minimo del sistema). Quindi il sistema ammette ∞ soluzioni. Ciò implica che l'equazione $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ (vettore nullo) ammette qualche $\lambda_i \neq 0$. Dunque T è linearmente dipendente.

fig. 6.8

18. Racconta brevemente il “filo logico” (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli. Lo scopo è provare che esiste una combinazione lineare uguale a zero dei vettori di T con scalari non tutti nulli. In una combinazione lineare dei vettori di T si scrivono i vettori come combinazione lineare dei vettori della base. Applicando le proprietà delle operazioni degli spazi vettoriali si riguarda questa combinazione lineare dei vettori della base. Poiché questi sono linearmente indipendenti gli scalari devono essere nulli. Da ciò si ricava un sistema di n equazioni in cui le m incognite sono i coefficienti dei vettori di T . L'esistenza di una soluzione non nulla del sistema mi fornisce la tesi.

fig. 6.9

Per il futuro, sarà forse preferibile usare per tale domanda schemi tipo diagrammi di flusso o alberi (nello stile della deduzione naturale), che pure forse potrebbero tornare utili per afferrare la struttura complessiva di una dimostrazione.

Analoghe considerazioni possono essere fatte riguardo la domanda “Seconda te, a che serve questo teorema?”. La figura 6.10 mostra una risposta tipica: molto spesso gli studenti hanno fornito una risposta che concentra il senso del teorema al teorema stesso, senza allargare lo sguardo alle conseguenze che il risultato provato può portare. I feedback forniti durante l'attività erano proprio atti ad indirizzare gli allievi verso questa ultima direzione.

17) Serve a dimostrare che dati due vettori u e v di uno spazio euclideo reale V , il quadrato del loro prodotto è minore o uguale al prodotto scalare $u \cdot u$ per il prodotto scalare $v \cdot v$.

fig. 6.10

I protocolli relativi alla terza fase sono stati i meno significativi. L'intenzione era quella di utilizzarli anche per valutare se gli altri due livelli avessero dato buoni risultati ai fini dell'apprendimento. Per questo ci si aspettava che gli studenti rispondessero utilizzando gli invarianti da noi evidenziati nel secondo livello ma applicandoli nel contesto specifico del teorema che mano mano si era assegnato (come fatto per il livello 1). I ragazzi invece si sono limitati a ricopiare le domande presentate nelle schede del livello 2. Sono state chieste le motivazioni di un tale comportamento, che sono da ricercarsi da un lato nell'ansia da fine corsi e avvicinarsi degli esami e dall'altro nell'essersi “troppo” fidati e affidati a quanto fatto dal docente “Abbiamo preso le domande del prof... meglio di così?”.

Infine sembra doveroso sottolineare la grande difficoltà che si trova a correggere ogni scheda prevista dall'attività in maniera personalizzata, soprattutto se si pensa a un numero molto elevato di studenti. Tale scelta infatti è stata utile ai fini della ricerca ma non è pensabile per la pratica didattica giornaliera. Per ovviare a tali problematiche sembra opportuno, per un avvio futuro di tale attività, stressare maggiormente il fattore “correzioni collettive” con ausilio di attività di peer tutoring supervisionate dal docente.

6.6 Impatto sul piano dell'apprendimento: primi risultati

Qui di seguito riporto le prime analisi dei risultati della sperimentazione. Ho prima di tutto valutato se ci fosse stato o meno un cambiamento di atteggiamento (in particolare della visione) degli studenti nei confronti della matematica dopo la sperimentazione di quest'attività. Sono riuscita però a raccogliere un numero non elevato di questionari, i cui risultati, per la bassa numerosità del campione non mi sono sembrati affidabili. Per tale motivo ho deciso di valutare l'influenza di tale attività sull'apprendimento: ho analizzato i risultati dal punto di vista sia qualitativo (qualità delle prove di esame) che quantitativo (percentuale di superamento, votazione nelle prove di esame).

Inizio col riportare i risultati provenienti dal confronto dei questionari compilati dagli studenti prima e dopo l'attività. In particolar modo, essendo l'attività svolta atta a migliorare la visione della matematica, ho focalizzato la mia attenzione soprattutto su quella.

Purtroppo solo il 34% del campione ha deciso di consegnare il questionario dopo la sperimentazione (circa 30 alunni), il che ha inficiato di molto la valutazione totale del percorso. Il campione infatti è sicuramente da ritenersi poco significativo per la bassa numerosità, ma mi è sembrato lo stesso utile estrapolare i dati che potessero dare maggiori informazioni in modo da formulare nuove ipotesi e prevedere sperimentazioni più adeguate. Devo inoltre sottolineare come, dei trenta studenti che hanno deciso di consegnare il questionario, ben 11 studenti presentavano già una visione relazionale della disciplina che è comunque rimasta immutata durante l'attività. Tale fattore abbassa ulteriormente il numero di persone su cui valutare l'eventuale cambiamento di visione. Dei rimanenti 19, per 2 studenti la visione è risultata peggiorata, per 7 studenti è rimasta pressochè invariata, per il resto del campione la visione della matematica sembra essere migliorata. In particolare nella gran parte dei casi tale cambiamento è stato evidenziato dalla domanda aperta rispetto quella chiusa, che ha nella gran parte dei casi, continuato a denunciare lo stesso tipo di visione. Questo d'altronde non mi ha particolarmente scosso: come al solito, le domande aperte, rispetto alle chiuse non forzano la risposta verso una delle scelte proposte nel questionario, favorendo l'esplicitazione di "cio che si vorrebbe sentir dire", ma hanno una funzione maggiormente introspettiva. Vorrei inoltre sottolineare il ruolo che gioca in questo contesto la memoria: è infatti molto più semplice ricordare una risposta ad una domanda chiusa rispetto ad una aperta. Infine vorrei sottolineare come, per necessità di cose, i questionari siano stati somministrati dagli stessi professori che hanno tenuto il corso: nonostante l'assoluto anonimato dei questionari (gli studenti si firmavano con un nick a loro scelta), questo fattore potrebbe aver inficiato su questi,

se pur poveri, dati. Nonostante l'anonimato infatti, gli studenti potrebbero aver risposto per "gratificare" il grosso lavoro del docente. Per i motivi suddetti non mi sono soffermata sulla sola analisi dei questionari ma sono andata a valutare le possibili opportunità che quest'attività potrebbe apportare ai fini apprenditivi. Un miglioramento della visione infatti, sicuramente influisce positivamente sulla sull'apprensimento.

Iniziamo col riportare alcuni risultati qualitativi. In particolare su di un totale di 99 studenti che hanno frequentato il corso istituzionale, 36 studenti non hanno partecipato all'attività on-line. In tale gruppo ho compreso anche coloro che hanno svolto un numero di schede minore o uguale a 2. Nella seguente tabella riporto le percentuali di superamento dell'esame del gruppo che ha seguito le learning activities e quelli che invece si sono limitati a seguire il solo corso istituzionale.

	Learning activity	Corso istituzionale
Primo appello	67%	28%
Secondo appello	89%	39%

Ovviamente sono consapevole che tali differenze possono essere influenzate da altri tipi di fattori compreso il fatto che gli studenti che hanno seguito l'attività sono forse i più motivati all'apprendimento e al successo universitario. Per tale motivo, infatti ho analizzato altri fattori, che mettono in risalto l'aspetto qualitativo dell'apprendimento.

Qui di seguito presento qualche esempio di protocolli per mostrare come le attività fatte non hanno chiaramente avuto come impatto semplicemente un risultato "locale", ovvero nello specifico intendo dire che non hanno solo migliorato l'apprendimento dei contenuti (teoremi) particolari presi in considerazione, ma l'esercizio del senso critico ha portato conseguenze una migliore qualità dello studio in generale. Mostro come esempio qualche compito d'esame svolto. Il quesito di cui prendo in considerazioni le risposte è mostrato nella fig. 6.11:

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO
 ESAME DI GEOMETRIA
 C.L. Ing. Edile-Architettura - Prof. G. Albano
 18 gennaio 2008

Per ogni quesito dare adeguate spiegazioni. Tempo: 5h.

1. Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 4y + z - t = 3x + 6y - z + 2t = 0\}$$

e

$$V = \langle (-1, 0, 7, 5), (0, -1, 3, 1), (-2, 3, 5, 7) \rangle$$

a) Calcolare la dimensione e una base di $V \cap W$.

b) Calcolare la dimensione e una base di $V + W$.

Figura 6.11

Si osservi preliminarmente che la prima richiesta del compito è quella di “dare adeguate spiegazioni” per ogni quesito.

Nella fig. 6.12 riporto un esempio tipico di svolgimento in accordo alla visione molto diffusa tra gli studenti di ingegneria che “la matematica è conti” e che “in matematica non si scrive ma si fanno calcoli”.

$$W = \begin{cases} 2x + 4y + z - t = 0 \\ 3x + 6y - z + 2t = 0 \end{cases} \quad \text{rk} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad (\text{2 parametri})$$

$$W = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -5z = -7t \\ 2x - z = -4y + t \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{7}{5}t \\ x = -2y - \frac{1}{5}t \end{cases}$$

$$\left\{ \left(-2y - \frac{1}{5}t, y, \frac{7}{5}t, t \right) \mid \forall y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Base } W = \left\{ \begin{matrix} t=0 & y=1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} t=1 & y=0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{7}{5} & 1 \end{matrix} \right\}$$

(dim $W = 2$)

$$\text{dim } V+W = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{il } \mathbb{R}^4 \text{ vett. è linearmente dipen.}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 \rightarrow 2r_2 - r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + r_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_3 \rightarrow r_3 + r_2 \\ r_1 \rightarrow r_1 + r_2 \end{matrix} \quad D' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } D' = 3$$

$$\text{Base } V+W = \left\{ \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\}$$

dim $V+W = 3$

Figura 6.12

Come si può vedere, la risposta data è solo una pagina di conti senza una sola riga di commento o spiegazione. L'interpretazione dei conti o il processo che ad essi soggiace e la stessa risposta puntuale al quesito è completamente mancante e lasciata alla cooperazione del docente.

Nella fig. 6.13 invece mostro un esempio tipico di risposta allo stesso quesito mostrato in fig. 6.11, data da studenti che hanno partecipato alle attività sperimentali:

(b) Dalla relazione di Grassman sappiamo che
 $\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$ noi sappiamo che
 $\dim V = 2$ $\dim V \cap W = 1$ ci rimane da calcolare la dimen-
 sione di W .
 Scriviamo la matrice dei coefficienti A .
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ effettuiamo la riduzione a scalari oltre
 verso l'algoritmo di Gauss
 $r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1$ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ $\text{rk} A = 2 \Rightarrow \dim W = m - \text{incognite} - \text{rk}$
 ovvero $\dim W = 4 - 2 = 2^*$

Quindi otteniamo $\dim W+V = 2+2-1 = 3$ ed una sua base è
 data dall'unione di $\langle B_V \cup B_W \rangle$ ovvero
 $B_{V+W} = \langle B_V \cup B_W \rangle$
 Rimane da calcolare se tutti i vettori sono linearmente indipen-
 denti ovvero se il rango della matrice è massimo.

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Effettuiamo la riduzione a scalari e
 otteniamo (CONTINUA ALL'ALTRA PAGINA)

* Per calcolare una base devo risolvere tale sistema:
 $\begin{cases} 2x + 4y + z - t \\ -5z + 7t \end{cases}$ scegliendo t come parametro in quanto è situa-
 to sulla colonna senza pivot otteniamo

$\begin{cases} 2x + z = -4y + t \\ z = \frac{7}{5}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{7}{5}t - 4y + t \\ z = \frac{7}{5}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}t - 2y \\ z = \frac{7}{5}t \end{cases}$

Le soluzioni parametriche sono: $W = \left\{ -\frac{1}{5}t - 2y, y, \frac{7}{5}t, t \right\}$
 Una sua base sarà $B_W = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{7}{5}, 1\right), (-2, 1, 0, 0) \right\}$

$r_3 \rightarrow r_3 - \frac{1}{5}r_2$ $B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{pmatrix}$ $r_4 \rightarrow r_4 + r_2$ $B'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}$

Eliminando la terza riga perché è nulla otteniamo che
 $\text{rk} B = 3$ e quindi una base di $W+V$ è formata dai tre vettori
 che non si annullano ovvero:
 $B_{W+V} = \left\{ (-1, 0, 7, 5), (0, -1, 3, 1), (-2, 1, 0, 0) \right\}$ oppure dai tre vetto-
 ri ruotati a scalari.

Figura 6.13

E' evidente la netta differenza qualitativa tra i due compiti. Chiaramente in questo secondo esempio, si possono attestare le capacità metacognitive dello studente, che è consapevole del processo che sta andando a fare e che si traduce nei conti (che nella sostanza sono presenti anche nel primo esempio). Si può altresì attestare anche la capacità di giustificare i passaggi tecnici che vengono effettuati e di argomentare le conclusioni a cui si giunge grazie ai conti fatti.

Nella fig. 6.14 mostro invece un quesito per rispondere al quale non è necessario fare conti, ma semplicemente collegare il significato di quanto chiesto con caratterizzazioni dello stesso e dedurre i risultati da calcoli già effettuati in quesiti precedenti (mio riferimento al 3.c) della fig. 6.14):

3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x - y + hx, hx - y - z)$$

- Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(-3, 2, 2)$ appartiene a $\text{Im } f$ e in tali casi calcolare $f^{-1}(-3, 2, 2)$.
- Per $h = 1$ calcolare la dimensione e una base di $(\ker f)^\perp$.
- Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, f non è suriettiva.

Figura 6.14

Proprio per le caratteristiche sopra esposte necessarie per dare la risposta, mediamente gli studenti con una visione strumentale della matematica lasciano tale quesito non risolto. Questo non è accaduto per gli studenti che hanno partecipato alle attività sperimentali. Nelle fig. 6.15 e 6.16 mostriamo due esempi tipici di risposte date:

(c) Un ~~funto~~ omomorfismo si dice suriettivo $\Leftrightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^3$ sapendo che $\dim \text{Im } f$ è uguale al rango della matrice e avendo precedentemente trovato che non si annulla mai il suo determinante concludiamo che $\text{Im } f$ sarà sempre suriettivo, $\forall h \in \mathbb{R}$

Figura 6.15

c) f risulta essere non suriettiva quando $\text{Im} f \neq \mathbb{R}^3$
Dato che $\forall h \in \mathbb{R}$ $\dim \text{Im} f = r/kA = 3$ e quindi risulta
sempre che $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$, f ~~non~~ ~~non~~ non è suriettiva per
nessun valore di $h \in \mathbb{R}$ cioè f è suriettiva $\forall h \in \mathbb{R}$

Figura 6.16

I due esempi differiscono per l'impostazione del ragionamento: nel primo caso si parte dalla definizione di suriettività e si vede che è sempre verificata nel caso in esame, nel secondo invece si parte dalla negazione della definizione di suriettività e si vede che tale negazione non è mai verificata. In entrambi i casi, il ragionamento è ben esplicitato e le tesi bene argomentate.

Conclusioni

Le prime conclusioni riguardano le domande di ricerca e dunque il modello creato. Come ho scritto più volte nel corso della stesura di questa tesi, la ricerca scientifica su come progettare e costruire un sistema artificiale capace di “adattarsi al mondo esterno” rappresenta una sfida in cui si sta cimentando un’ampia comunità scientifica internazionale costituita da ricercatori provenienti da discipline apparentemente distanti. In particolare, progettare un sistema di intelligenza artificiale capace di individuare, riconoscere e persino gestire la sfera affettiva sembra addirittura ai confini della realtà, anche se ricerche provenienti da campi differenti stanno raccogliendo tale sfida. Il problema della modellizzazione di un “profilo affettivo”, come preannunciato dall’ambito di ricerca, è un problema realmente grosso, e i miei studi che qui vi ho presentato rappresentano solo un piccolo iniziale pezzo di ricerca che spero a lungo possa andare a dare il suo contributo. Per quanto riguarda la discussione dei risultati di ricerca mi sembra necessario sottolineare il fatto che la mia tesi sia caratterizzata da due sperimentazioni: la prima, indirizzata maggiormente agli aspetti informatici, atta a “testare il questionario” al fine di implementare il suo utilizzo in piattaforma (capitolo 5), la seconda, più prettamente didattica, atta a valutare la validità dell’intero prodotto “profilo-attività” da me disegnato (capitolo 6).

Per quanto riguarda la prima sperimentazione la prima cosa che mi ha sorpreso è stata una ricchezza e una pluralità di descrizioni ottenute dalle domande a risposta aperta che lasciano libertà di scelta e anche di inventiva a chi risponde. Il *prezzo* di una tale scelta è però una maggiore difficoltà, per alcune di esse, nel prevedere la gestione di queste domande da parte della piattaforma. Questa difficoltà sono state parecchio evidenti soprattutto per le risposte alla domanda aperta atta a valutare le cause di insuccesso, che è quella poi sulla quale più ho contato per associare il profilo alle attività. Ho infatti notato in questo caso un maggiore uso, seppur sintetico, di uno stile narrativo, con una conseguente varietà di frasi che molte volte sono accomunate dallo stesso significato. Basti pensare, che nel catalogo ottenuto dalla sperimentazione, non vi è la presenza di un gran numero di espressioni con alta frequenza, ma di un numero maggiormente variegato di espressioni con frequenze basse (la frequenza media è di 4 occorrenze). Tale fattore ovviamente alza il rischio che la risposta a tale domanda possa essere male interpretata dalla piattaforma. Nonostante i rischi, più volte però le domande a risposta aperta hanno dimostrato di evidenziare cose che le sole risposte alle domande chiuse non riuscivano a percepire o che addirittura portavano a valutazioni errate. Basti pensare alla differenza di valutazione della disposizione emozionale che ho riscontrato tra la domanda a risposta chiusa e quella a risposta aperta, o ancora alla differenza di valutazione del senso di autoefficacia esposte nel capitolo 5 o infine il cambiamento della visione

riscontrato dopo l'attività didattica riportata nel sesto capitolo, riconosciute dalle domande a risposta aperta, e non da quelle a risposta chiusa. Questi dati mi fanno continuare a credere che quello della scelta di domande a risposta aperta sia una buona direzione da seguire al fine di rendere "più umano" il sistema e dunque mi suggerisce di continuare ad approfondire modalità sempre più precise per la loro gestione automatica. Molto probabilmente una prima soluzione potrebbe essere sicuramente la creazione di repository più ampie. In tale ottica, mi sembra anche giusto notare come la sperimentazione sia stata fatta su un campione di soli campani (con il conseguente utilizzo di termini anche appartenenti al dialetto), peraltro che rientrano in una fascia d'età ben delimitata (dai 17 ai 20 anni). Forse per far sì che l'utilizzo di questi sistemi sia efficace per un'utenza più ampia, sarebbe opportuno prevedere nuove sperimentazioni ben distribuite per fascia d'età (considerando ad esempio anche bambini più piccoli o guardando in prospettiva al life long learning, alla formazione degli adulti) e per città di provenienza.

Inoltre mi sembra giusto sottolineare come, dai dati rilevati dalla sperimentazione in esame, il modello da me creato sembra essere anche un buono strumento di ricerca sul costruito di atteggiamento.

La sperimentazione del questionario, in particolare dati collezionati, mi hanno fatto capire come, in molti dei casi, le domande a risposta aperta risultino più fini allo scopo di valutare il profilo, ma non mi ha dato una vera e propria valutazione oggettiva dello strumento. Per tale scopo mi piacerebbe continuare a studiare le risposte degli allievi per capire quali sono i suoi limiti, magari confrontando per uno stesso alunno interviste o composizioni libere (sul suo rapporto con la matematica) con il questionario, e verificare nel caso se denunciano gli stessi comportamenti.

Per quanto riguarda la seconda sperimentazione, sono stata delusa dal fatto che la gran parte degli studenti che ha partecipato all'attività atta a promuovere una visione relazionale della matematica, non abbia consegnato il questionario dopo l'intervento didattico, inficiando così gravemente i risultati della mia sperimentazione. I risultati ottenuti infatti, per la bassa numerosità del campione non mi sono sembrati affidabili. Per tale motivo ho deciso di valutare l'influenza di tale attività sull'apprendimento, andando a verificare dopo l'attività che tipo di matematica in realtà gli studenti utilizzavano: in effetti, la valutazione dei vari protocolli raccolti analizzata con quest'altra "lente" mi ha fornito conferme che con i soli questionari non sono riuscita ad ottenere.

Sicuramente, per una futura validazione di nuove learning activities potrebbe essere utile accompagnare il questionario con delle interviste o con delle composizioni in modo da confrontarli.

Questa prima analisi ha evidenziato, come ho sottolineato nel corso di questo paragrafo parecchi problemi aperti, per la maggior parte provenienti dalla difficoltà di gestire in maniera automatica i fattori affettivi, e spiragli per direzioni future.

Prima di tutto mi piacerebbe ampliare lo spettro di attività possibili rispetto ai profili individuati creandone di nuove, che potrei provare a validare con le nuove modalità sopra citate. Nell'ottica della gestione automatica di tali attività in piattaforma ci tengo però a sottolineare come per esse allo stato attuale non sia prevista alcun tipo di gestione automatica da parte della piattaforma; tale gestione è infatti lasciata al "tutor umano" che continua ad avvalersi della tecnologia ma con la creatività, sensibilità, accortezza della quale è caratterizzato.

In ogni caso, indipendentemente dall'introduzione dei fattori affettivi in piattaforma penso che il tentativo di "schematizzare" il vastissimo e complesso quadro sui tali fattori possa avere implicazioni che seguano anche direzioni differenti. Basti pensare alla formazione insegnanti sulla gestione di tali aspetti. I fattori affettivi infatti risultano una novità non solo per la gestione didattica delle piattaforme e-learning ma anche per gli insegnanti. Come sottolineato dalla Zan, nella maggior parte dei casi l'insegnante non prevede nella propria gestione didattica l'analisi dell'influenza di tali fattori sui comportamenti degli alunni, o in ogni caso non li utilizza come strumenti di intervento, e ho mostrato quanto questo possa essere dannoso ai fini dell'apprendimento.

Le schematizzazioni da me create per la modellizzazione del profilo affettivo e per la conseguente creazione di attività potrebbe dunque essere utile a costruire e sperimentare un percorso di formazione per insegnanti finalizzato all'uso consapevole delle proposte didattiche elaborate.

Riferimenti Bibliografici

- Adams V., McLeod D. (Eds.) (1989): *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.
- Adorni, G., Battigelli, S., Coccoli, M., Sugliano A., (2007). Personalizzare l' e-learning: un primo approccio sulla profilazione dell'utente, *Proc. di Didamatica 2007*
- Aiken L. (1961): 'The effect of attitudes on performance in mathematics', *Journal of Educational Psychology*, vol.52, n.1.
- Aiken L. (1970): 'Attitudes toward mathematics', *Review of Educational Research*, n.40.
- Albano, G. (2005). Mathematics and E-learning: students' beliefs and waits. In *International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education 57 Congress, Changes in Society: A Challenge for Mathematics Education* (pp. 153-157). Piazza Armerina: Università di Palermo Press.
- Albano, G., Ascione, R. (2008a). On the affective profiling in mathematics e-learning. *Post-Proc. of the International Conference on Technology, Training and Communication. Extended Papers. Salamanca, Spain, September 12-14, 2007, CEUR Workshop Proceedings, ISSN 1613-0073, Vol. 361.*
- Albano, G., Ascione, R. (2008e). Un modello per il "profilo affettivo in matematica" di uno studente. (sottomesso a rivista).
- Albano, G., De Luca, R., Desiderio, M., Gaeta, M., Iovane, G., Salerno, S., Sbaragli, S. (2004) - Un modello teorico per gli Esperimenti Scientifici Virtuali. Il caso del piano inclinato. *Didattica delle scienze e informatica nella scuola*. Brescia: La Scuola. 238, 7-13
- Albano, G., Ferrari, P.L. (2008). Integrating technology and research in mathematics education: the case of e-learning. In Garcia Peñalvo (ed.): *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies*. - pp. 132-148.
- Albano, G., Ferrari, P.L. (2007). Integrating technology and research in mathematics education: the case of e-learning. (to appear) In Garcia Peñalvo (ed.): *Advances in E-Learning: Experiences and Methodologies*
- Albano, G., Gaeta, M., Ritrovato, P. (2007a). IWT: an innovative solution for AGS e-Learning model. *International Journal of Knowledge and Learning*, Volume 3, (double) Issue 2&3, 2007 (to appear), Inderscience Publisher, ISSN (Online): 1741-1017 - ISSN (Print): 1741-1009.

- Albano, G., Gaeta, M., Salerno, S. (2006). E-learning: a model and process proposal. *International Journal of Knowledge and Learning* Vol. 2, Nos. 1/2, 2006
- Anderson, T., Elloumi, F. (2004). *Theory and Practice of Online Learning*, Athabasca University.
- Arcavi, A. (2005) - Developing and using symbol sense in mathematics, *For the learning mathematics* 25, 2, pp.42-47.
- Ascione R., Mellone M. (2007) - Driving spontaneous processes in mathematical tasks, *Proc. of CERME V*
- Baldacci, M. (1999). *L'individualizzazione. Basi psicopedagogiche e didattiche*. Bologna: Pitagora.
- Baldacci M. (2002). 'L'individualizzazione: una strategia didattica da ridefinire'. In: D'Amore, Sbaragli (a cura di) *Sulla didattica della matematica e sulle sue applicazioni. Atti del convegno "Incontri della matematica n. 16"*, 8-9-10 novembre 2002. 3-12.
- Bellier, S. (2001), *Le e-learning*. Paris, Editions Liaisons
- Boscolo P. (2006). *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali*. Torino: Utet.
- Boud, D., Cohen, R., & Sampson, J. (1999). Peer learning and assessment. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 24 (4), 413-426.
- Brousseau G. (1980): 'L'echec et le contract', *Recherches en didactique des mathematiques*, vol.2, n.1.
- Brown S. e Cooney T. (1991): 'Stalking the dualism between theory and practice', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.4.
- Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge: Harvard University Press.
- Brusati, E. (2003). Come si fanno i sondaggi. *INDUZIONI. Demografia, probabilità, statistica a scuola*. n.26 <http://matematica.uni-bocconi.it/statistica/SONDAGGI.htm>
- Brusilovsky, P. (1996). Methods and techniques of adaptive hypermedia. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 6(2-3), 87-129.
- Brusilovsky, P. (1999). *Adaptive and Intelligent Technologies for Web-based Education. Künstliche Intelligenz*, (4), 19-25.
- Brusilovsky, P., & Miller, P. (2001). Course Delivery Systems for the Virtual University. In T. Tschang, & T. Della Senta (Eds.) *Access to Knowledge: New Information Technologies and the Emergence of the Virtual University*, (pp. 167-206.). Amsterdam: Elsevier Science. Available online at <http://www2.sis.pitt.edu/~peterb/papers/UNU.html>.
- Brusilovsky, P., & Peyo, C. (2003). Adaptive and Intelligent Web-based Educational Systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education* 13 (2003) 156–169. IOS press.
- Burton L. (2002): 'Confidence is everything: perspectives of teachers and students on the learning of mathematics', Lecture given to ICMI, Maggio 2002 Singapore.

- Calvani A., 1998, Ricerca Azione on line: Nuovi modelli per l'innovazione e sperimentazione educativa, Td. Rivista dell'Istituto Tecnologie Didattiche, 15, pp. 27-42
- Calvani A., 2002, Manuale di tecnologia dell'educazione, Edizioni Etas, Firenze.
- Calvani A., Rotta M., 2000, Fare formazione in internet. Manuale di didattica online, Erickson, Trento
- Cattabrigini U., Di Paola V. (1997) Matematica e poesia: un tema difficile? IRRSAE Toscana.
- Cifarelli V., Goodson T. (2002): 'The role of mathematical beliefs in the problem solving actions of college algebra students', in van den Heuvel M. (Ed.) Proceedings of the 25th PME, vol.2, Utrecht.
- Cleparède E. (1920), La scuola su misura, La Nuova Italia, Firenze (trad. it 1952)
- Cobb P. (1985): 'Two children's anticipations, beliefs, and motivations', Educational Studies in Mathematics, n.16.
- Cobb P. (1986): 'Contexts, goals, beliefs and learning mathematics', For the Learning of Mathematics, vol.6, n.2.
- Cooney T., Shealy B., Arvold B. (1998): 'Conceptualizing beliefs structures of preservice secondary mathematics teachers', Journal for Research in Mathematics Education, vol.29, n.3.
- Corcoran M., Gibb E. (1961) 'Appraising attitudes in the learning of mathematics', Evaluation in Mathematics. 26th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Corbi E., (2002) – La formazione a distanza di terza generazione, nuove frontiere per l'educazione degli adulti. Liguori Editore, Napoli
- Conradie J., Frith J. (2000) - Comprehension tests in mathematics, Educational Studies in Mathematics 42, 225–235
- Dahl, O. & Nygaard K. (1966). SIMULA – An ALGOL-Based Simulation Language. Communications of the ACM, September 1966, pp. 671-677.
- Damasio A. R. L'errore di Cartesio. Emozione, ragione e cervello umano. Adelphi, 1995.
- Dalziel, J. (2003) 'Implementing learning design: the learning activity management system (LAMS)', ASCILITE 2003, Adelaide, 1-10 December, Retrieved on 22 January 2004, Available at: <http://www.melcoe.mq.edu.au/documents/ASCILITE2003%20Dalziel%20Final.pdf>.
- Daskalogianni, K. & Simpson, A. (2000). Towards a definition of attitude: the relationship between the affective and the cognitive in pre-university students. Proceedings of PME 24, vol.2, 217-224, Hiroshima, Japan.
- Decroly O., (1929), La funzione di globalizzazione e l'insegnamento, La Nuova Italia, Firenze (trad. it. 1974)

- Di Martino, P., Mellone, M., Morselli, F. (2007). La visione della matematica e la scelta universitaria. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 30 B, n. 1, Feb. 2007, pp. 43 – 78
- Di Martino P., Zan R. (2001a) 'Attitude toward mathematics: some theoretical issues', in van den Heuvel M. (Ed.) *Proceedings of the 25th PME*, vol.3, Utrecht.
- Di Martino P., Zan R. (2001b) 'The problematic relationship between beliefs and attitudes', in Soro R. (Ed.) *Proceedings of the Mavi X*, Kristianstad.
- Di Martino P., Zan R. (2007). attitude toward mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, 2007, 157-168
- Doxiadis A. (2005) – Zio Petros e la congettura di Goldbach. Bologna – Bompiani
- Dottrens R., (1936), *L'insegnamento individualizzato*, Armando, Roma (trad. it. 1961)
- Draves, W. (2000). *Teaching online*, River Falls, Wisconsin, LERN Books.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.
- Ernest P. (1988): 'The attitudes and practices of student teachers of primary school mathematics', in Borbas (Ed.) *Proceedings of the 12th PME*, Veszprem.
- Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions*. London: Routledge Falmer .
- Falchikov N. (2001). *Learning Together: Peer Tutoring in Higher Education*. Falmer Press.
- Fennema, E. (1989). The Study of Affect and Mathematics: A Proposed Generic Model for Research. In McLeod & Adams (Eds.) *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 205-219). New York: Springer Verlag.
- Fennema E., Behr M. (1980): 'Individual differences and the learning of mathematics', in Shumway R. (Ed.) *Research in mathematics education*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ferrari, Pier L. (2004). *Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning*. In Johnsen Høines, M. & Berit Fuglestad, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp.383-390), Bergen (Norway), Bergen University College.Press.,
- Frabboni F., (2005). *Società della conoscenza e scuola*, Erickson, Trento.
- Frasson, C., Mengelle, T., Aïmeur, E., & Gouardères, G. (1996). An actor-based architecture for intelligent tutoring systems. In C. Frasson, G. Gauthier, & A. Lesgold (Eds.), *Third International Conference on Intelligent Tutoring Systems, ITS-96* (Vol. 1086, pp. 57-65). Berlin: Springer Verlag.
- Freinet C., (1967), *Le mie tecniche*, La Nuova Italia, Firenze (trad. it. 1969)

- Furinghetti F., Pehkonen E. (2002): 'Rethinking characterizations of beliefs', in Leder G., Pehkonen E., TÄorner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.
- Garrison G.R. (1985), three generation of thecnological innovation. *Distance Education* n.6, pp.235-241
- Glaser, B.G. & Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine.
- Goldin G. (2000): 'Affective pathways and representation in mathematical problem solving', *Mathematical Thinking and Learning*, n.2.
- Green T. (1971): *The activities of teaching*, McGraw-Hill Book Company.
- Guidoni, P., (1985) - On Natural Thinking. *Eur. J. Sci. Educ.*, 7, 133-140
- Hadamard J. *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Raffaello Cortina Editore, 1997.
- Haladyna T., Shaughnessy J., Shaughnessy M. (1983): 'A causal analysis of attitude toward mathematics', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.14, n.1.
- Hannula M. (2002): 'Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values', *Educational Studies in Mathematics*, n.49.
- Harasim L. (1990), *Online education: Perspective on a new enviroment*, New York, Praeger.
- Hart L. 'Describing the Affective Domain: Saying What We Mean'. In McLeod, Adams (Eds.) *Affect and Mathematical Problem Solving*, Springer Verlag, 1989.
- Hembree R. (1991): 'The nature, effects, and relief of mathematics anxiety', *Journal for Research in Mathematics Education*, n.21.
- Henze, N., & Nejdil, W. (2001). Adaptation in open corpus hypermedia. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 12(4), 325-350.
- Hoppe, U. (1995). Use of multiple student modeling to parametrize group learning. In J. Greer (Ed.), *Artificial Intelligence in Education, Proceedings of AI-ED'95, 7th World Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 234-249). 16-19 August 1995. Washington, DC, AACE.
- Hunsley J. (1987): 'Cognitive processes in mathematics anxiety and test anxiety: the role of appraisals, internal dialogue, and attributions', *Journal of Educational Psychology*, vol. 79, n.4.
- Ikeda, M., Go, S., & Mizoguchi, R. (1997). Opportunistic group formation. In B. d. Boulay, & R. Mizoguchi (Eds.), *AI-ED'97, 8th World Conference on Artificial Intelligence in Education* Amsterdam: IOS.
- Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1987). *Learning together and alone: Cooperative, competitive, and individualistic*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Kaye, A. (1992), *Collaborative Learning Through Computer Conferencing*, Springer-Verlag, Berlin

- Khan, B. (2004). *E-learning: progettazione e gestione*. Trento, Erikson.
- Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 1-12.
- Kirkpatrick, D. L. (1994), *Evaluating training programs: The four levels*, Berrett-Koehler., San Francisco
- Koch N. (1999). *A Comparative Study of Methods for Hypermedia Development*. Technical Report 9905, Institute of Computer Science, Ludwig-Maximilians-University Munich.
- Koper, E.J.R. (2003). Combining re-usable learning resources and services to pedagogical purposeful units of learning. In A. Littlejohn (Ed.), *Reusing Online Resources: A Sustainable Approach to eLearning* (pp. 46-59). London: Kogan Page.
- Kulm G. (1980): 'Research on mathematics attitude', in Shumway R. (Ed.) *Research in Mathematics Education*, Reston.
- Leder, G. (1985). Measurement of attitude to mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 34 (5), 18-21.
- Leder G., Forgasz H. (2002): 'Measuring mathematical beliefs and their impact on the learning of mathematics: a new approach', in Leder G., Pehkonen E., TÄorner G. (Eds.) *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?*, Kluwer Academic Publishers.
- Leron U., Hazzan O. (1997): 'The world according to Johnny: a coping perspective in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics*, n.32.
- Lester F. (1987): 'Why is problem solving such a problem?', in Bergeron J., Herscovics N., Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11th PME*, Montreal.
- Lester, F. K. Jr. (2002). Implications of Research on Students' Beliefs for Classroom Practice. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp.345-353). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Lindsay P.H., Norman D.A. (1977). *Human Information Processing*, Academic Press, New York. (Tr.it. *L'uomo elaboratore di informazioni*. Giunti-Barbèra, Firenze, 1983).
- Ma X., Kishor N. (1997): 'Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.28, n.1.
- Mandler G. (1984): *Mind and body: psychology of emotion and stress*, New York: Norton.
- Mandler G. (1989): 'Affect and learning: causes and consequences of emotional interactions', in McLeod D., Adams V. (1989) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.
- Maragliano R. (2000). *Nuovo manuale di didattica multimediale*. Editori Laterza

- Maragliano R. (a cura di) (2004) *Pedagogie dell'e-learning*. Editori Laterza
- Mason, R. (1998). Models of online courses, in *ALN Magazine*, 2.
- Mason, R. (2000). Review of E-learning for education and training, Paper presentato alla Networked Learning Conference 2002.
- McDonald B. (1989): 'Psychological conceptions of mathematics and emotion', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.
- McLeod D. (1985): 'Affective issues in research on teaching mathematical problem solving', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- McLeod D. 'Research on affect in mathematics education: a reconceptualization'. In D.A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*, Mc Millan Publishing Company, 1992.
- McLeod D. (1989a): 'The role of affect in mathematical problem solving', in McLeod D., Adams V. (Eds.) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.
- McLeod D. (1992): 'Research on affect in mathematics education: a reconceptualization', in Grows D. (Ed.) *Handbook of research on mathematics learning and teaching*, New-York: MacMillan.
- McCalla, G. I., Greer, J. E., Kumar, V. S., Meagher, P., Collins, J. A., Tkatch, R., & Parkinson, B. (1997). A peer help system for workplace training. In B. d. Boulay, & R. Mizoguchi (Eds.), *AI-ED'97, 8th World Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 183-190). Amsterdam: IOS.
- Melis, E., Andrès, E., Büdenbender, J., Frishauf, A., Gogvadse, G., Libbrecht, P., Pollet, M., & Ullrich, C. (2001). ActiveMath: A web-based learning environment. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 12(4), 385-407.
- Mitrovic, A. (2003). An Intelligent SQL Tutor on the Web. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 13(2-4), 171-195
- Moore G. M. (1995). The death of distance. *AJDE*, vol. 9, n.3. in internet, URL: <http://www.ed.psu.edu/acsde/ajde/ed113.asp>
- Montessori M., (1920) *Dr. Montessori's Own Handbook*, London, W. Heinemann, (trad. it. *Manuale di pedagogia scientifica*, Alberto Morano Editore, Napoli)
- Morris J. (1981): 'Math anxiety: teaching to avoid it', *Mathematics Teacher*, September.
- Nakabayashi, K., Maruyama, M., Koike, Y., Fukuhara, Y., & Nakamura, Y. (1996). An intelligent tutoring system on the WWW supporting interactive simulation environments with a multimedia viewer control mechanism. In H. Maurer (Ed.), *Proceedings of WebNet'96, World Conference of*

- the Web Society, (pp. 366-371). October 15-19, 1996. San Francisco, CA, AACE. Available online at <http://www.contrib.andrew.cmu.edu/~plb/WebNet96.html>.
- Neisser, U., (1997). *Cognitive Psychology*. New York: Appleton-Century-Croft, 1967.
- Nipper S. (1989), third generation distance learning and computer conferencing. In R.D. Mason e A.R. Kaye (a cura di), *Mindweave: Communication, computers and distance education*, Oxford, UK, Pergamon Press.
- Oda, T., Satoh, H., & Watanabe, S. (1998). Searching deadlocked Web learners by measuring similarity of learning activities. *Proceedings of Workshop "WWW-Based Tutoring" at 4th International Conference on Intelligent Tutoring Systems (ITS'98)*, August 16-19, 1998. San Antonio, TX.
- Ortony A., Clore G.L., Collins A. *The cognitive structure of emotions*. Cambridge University Press, 1988.
- Palloff R.M. e Pratt K. (1999). *Building learning communities in cyberspace: Effective strategies for the online classroom*, San Francisco, CA, Jossey-Bass.
- Pajares, F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62 (3), 307-332.
- Pellerey M., Orio F. (1996) 'La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica', ISRE, n.2,
- Perrin Glorian M. J. (1994). *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives*. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (eds). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage. 97-147.
- Peters, O. (1998). *Learning and teaching in distance education*. London, Kogan
- Poincaré H. 'L'invenzione matematica' In *Opere epistemologiche*, vol.II. Piovani Editore, Abano Terme, 1989.
- Polya G. (1957) - *How to Solve It*, 2nd ed., Princeton University Press, ISBN 0-691-08097-6
- Postman N., Weingartner C. (1969) - *Teaching as a Subversive Activity*. New York - Dell
- Ranieri, M. (2005). *E-learning: modelli e strategie didattiche.*, I quaderni di Form@re, n 3 - Erickson
- Reigeluth, C. M., & Nelson, L. M. (1997). A new paradigm of ISD? In R. Branch & B. Minor (Eds.), *Educational Media and Technology Yearbook*, 22,24-35.
- Resnick M. (1996). *Distributed constructionism*, *Proceeding of the International Conference on the Learning Science*, Association for the Advancement of Computing Education, Northwestern University, July.

- Ruffell, M., Mason, J., Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 1-18.
- Santojanni F., Striano M., (2003), *Modelli teorici dell'apprendimento*, Laterza, Bari-Roma
- SchlÄoglmann (2002): 'Affect and mathematics learning', in Cockburn A. e Nardi E. (Eds) *Proceedings of 26th PME*, vol.4, Norwich.
- Schoenfeld A. (1983a): Theoretical and pragmatic issues in the design of mathematical problem solving, report at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal.
- Schoenfeld A. (1989a): 'Problem solving in context(s)', in Charles R. e Silver E. (Eds.) *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.
- Schoenfeld A. (1989): 'Explorations of students'mathematical beliefs and behaviour', *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.20, n.4.
- Schoenfeld A. (2002): 'Research methods in (mathematics) education', in English L. (Ed.) *Handbook of International Research in Matheatics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Schorr, N.L.K.E. (1979): 'Il sistema educativo. Problemi di riflessività', Armando, Roma.
- Shaughnessy J. (1985): 'Problem-solving derailers: the in°uence of mis- conceptions on problem-solving performance', in Silver E. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Sfard, A. (2000). *Symbolizing Mathematical Reality Into Being--Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other*. In Cobb, P., E.Yackel and K.McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- Skemp R. (1976): 'Relational understanding and instrumental understand- ing', *Mathematics Teaching*, vol.77.
- Skemp R. (1979): *Intelligence, learning and action*, New York: Wiley.
- Silver E. (Ed.) (1985): *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

- Thompson A. (1985): 'Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving', in Silver E. (Ed.) Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Trap, E. C. (1780). Versuch einer Pädagogik. Leipzig, Neuausgabe ohne Verlag. Berlin
- Trentin G. (1998). Insegnare e apprendere in rete, Bologna, Zanichelli.
- Trentin G. (1999a). telematica e formazione a distanza: il caso di Polaris, Milano, Angeli.
- Trentin G. (1999b). Qualità nella formazione a distanza, TD.Tecnologie didattiche, vol. 16, n. 1, pp. 10-23
- Vygotsky, L. S., (1978) Mind in society: the development of higher psychological processes, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.
- von Glasersfeld E. (1983): 'Learning as a constructive activity', Proceedings of the 5th PME, vol.1, Montreal.
- von Glasersfeld E. (Ed.) (1991): Radical constructivism in mathematics, Kluwer Academic Publishers.
- Weber, G., & Möllenberg, A. (1995). ELM-Programming-Environment: A Tutoring System for LISP Beginners. In K. F. Wender, F. Schmalhofer, & H.-D. Böcker (Eds.), Cognition and Computer Programming (pp. 373-408). Norwood, NJ: Ablex.
- Weiner B. (1983): 'Some thoughts about feelings', in Paris, Olson, Steven- son (Eds.) Learning and motivation in the classroom, Lawrence Erlbaum Associates.
- White, K.W., Weight, B. (1999). Ht online teaching guide: An handbook of attitudes, strategies and thecniques for the virtual classroom, Needham Heights, MA, Allyn and Bacon, Inc.
- Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy in D. A. Wiley, ed., The Instructional Use of Learning Objects: Online Version. Retrieved May 18, 2001, from Web: <http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>
- Yusof M., Tall D. (1999): 'Changing attitudes to university mathematics through problem solving', Educational Studies in Mathematics, n.37.
- Zan R. (1996): 'Un intervento metacognitivo di 'recupero' a livellouniversitario', La matematica e la sua didattica, n.1.
- Zan R., (2000): 'A metacognitive intervention in mathematics at university level', International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31 (1), 143-150
- Zan R. (2000a): 'Le convinzioni', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.23A, n.1.

Zan R. (2000b): 'Emozioni e difficoltà in matematica', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.23A, n.3 e 4.

Zan, R., (2006). Difficoltà in matematica, osservare, interpretare, intervenire. Springer.

Appendice

Lemma di Steinitz

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
2. Qual è la tesi del teorema?
3. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
4. In riferimento all'enunciato del Lemma di Steinitz, quando opportuno, completa i seguenti enunciati:
 - a. La lineare dipendenza di un insieme con più vettori di quelli di una base dello spazio, è condizione sufficiente per ...;
 - b. La lineare dipendenza di un insieme con più vettori di quelli di una base dello spazio, è condizione necessaria per ...;
 - c. ...è condizione sufficiente per la lineare dipendenza di un insieme di m vettori, con $m > n$;
 - d. L'esistenza di una base dello spazio vettoriale V è condizione necessaria per ...;
 - e. L'esistenza di una base dello spazio vettoriale V è condizione sufficiente per ...;
 - f. Il fatto che un insieme di V contenga più vettori di quelli di una base di V è condizione necessaria per ...;
 - g. Il fatto che un insieme di V contenga più vettori di quelli di una base di V è condizione sufficiente per ...;

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

5. In riferimento all'enunciato del Lemma di Steinitz, quando opportuno, completa i seguenti enunciati:
 - h. La lineare dipendenza di un insieme con più vettori di quelli di una base dello spazio, è condizione necessaria e sufficiente per ...;
 - i. Il fatto che un insieme di V contenga più di quelli di una base di V è condizione necessaria e sufficiente per ...;

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

1. Dai una formulazione equivalente delle ipotesi che potrebbe essere utile nel contesto dimostrativo.
2. Dai una formulazione equivalente della tesi che potrebbe essere utile nel contesto dimostrativo.

Guida alla dimostrazione

9. Questa dimostrazione è diretta o per assurdo?
10. Questa dimostrazione è costruttiva?
11. Nell'ambito della dimostrazione si fa uso dei seguenti teoremi/proprietà precedenti:
 - a. Proprietà di una base di essere sistema di generatori per lo spazio
 - i. A che scopo lo utilizzi?
 - ii. In che punto della dimostrazione?
 - b. Proprietà di una base di essere linearmente indipendente:
 - i. In che punto della dimostrazione?
 - ii. Quali conseguenze ti porta l'applicazione di tale proprietà?
 - c. Proprietà delle operazioni dello spazio vettoriale
 - i. Quali?
 - ii. In che punto della dimostrazione?
 - d. Proprietà dei sistemi lineari
 - i. Quali?
 - ii. In che punto della dimostrazione?
12. Perché il sistema lineare che costruisci all'interno della dimostrazione è omogeneo?
13. Perché il sistema lineare omogeneo che viene fuori nella parte finale della dimostrazione ha n equazioni?
14. Perché il sistema lineare omogeneo che viene fuori nella parte finale della dimostrazione ha m incognite?
15. Perché il sistema lineare omogeneo che viene fuori nella parte finale della dimostrazione ha matrice dei coefficienti con rango al massimo pari a n ?
16. Perché il sistema lineare omogeneo che viene fuori nella parte finale della dimostrazione ha infinite soluzioni?
17. Giustifica perché aver trovato che il sistema suddetto ha infinite soluzioni equivale ad aver dimostrato la tesi del lemma.

Uno sguardo d'insieme...

18. Racconta brevemente il “filo logico” (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.
19. Fornire, se possibile, un controesempio per l’implicazione non valida.
20. Secondo te, a che serve questo teorema?

Teorema di Cramer

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
2. Qual è la tesi del teorema?
3. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
4. Facendo riferimento al teorema di Cramer, completa i seguenti enunciati in modo che siano veri:
 - a. In un sistema quadrato, $|A| \neq 0$ è condizione sufficiente per ...;
 - b. In un sistema quadrato, $|A| \neq 0$ è condizione necessaria per ...;
 - c. $|A| \neq 0$ è condizione sufficiente per ...;
 - d. $|A| \neq 0$ è condizione necessaria per ...;
 - e. $|A| = 0$ è condizione sufficiente per ...;
 - f. $|A| = 0$ è condizione necessaria per ...;
 - g. L'unicità della soluzione di un sistema quadrato è condizione necessaria per ...;
 - h. L'unicità della soluzione di un sistema è condizione necessaria per ...;
 - i. L'esistenza di infinite soluzioni di un sistema è condizione necessaria per ...;
 - j. L'esistenza di infinite soluzioni di un sistema è condizione sufficiente per ...

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

5. Facendo riferimento al teorema di Cramer, quando e se opportuno, completa i seguenti enunciati in modo che siano veri:
 - a. $|A| \neq 0$ è condizione necessaria e sufficiente per ...;
 - b. L'unicità della soluzione di un sistema quadrato è condizione necessaria e sufficiente per ...

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

6. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?
7. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale?

Guida alla dimostrazione

8. La dimostrazione fatta è diretta, per assurdo?
9. La dimostrazione fatta è costruttiva?
10. Nell'ambito della dimostrazione:
- dove utilizzi il fatto che A sia una matrice quadrata?
 - dove utilizzi il fatto che $|A| \neq 0$?
11. Nell'ambito della dimostrazione si fa uso dei seguenti teoremi/proprietà precedenti:
- Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.
 - A quale oggetto applichi il teorema detto?
 - Cosa ti garantisce l'applicabilità di tale teorema?
 - A che scopo lo utilizzi?
 - Il I teorema di Laplace:
 - Cosa ti garantisce l'applicabilità di tale teorema?
 - A che scopo lo utilizzi?
 - Su quale/quali matrici applichi il teorema di Laplace?
 - Per ogni matrice su cui applichi il teorema di Laplace, rispetto a quale riga o colonna operi?
 - Esistenza e definizione dell'inversa di una matrice
 - A che scopo lo utilizzi?
 - Proprietà associativa del prodotto righe per colonne
 - Dove lo utilizzi?
 - Perché?
 - Proprietà commutativa del prodotto righe per colonne
 - Perché moltiplichiamo per A^{-1} a sinistra della formula $Ax=b$?
 - E' equivalente riscrivere come $A^{-1}(Ax) = b A^{-1}$?
 - E' equivalente riscrivere come $(Ax) A^{-1} = b A^{-1}$?
 - Esistenza dell'elemento neutro del prodotto righe per colonne
 - Dove lo utilizzi?
 - Perché?

Uno sguardo d'insieme...

12. Dopo aver visto la dimostrazione, dai una formulazione matriciale equivalente alle formule di calcolo delle componenti della soluzione al sistema lineare.

13. Racconta brevemente il “filo logico” (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.
14. E' vero il viceversa del teorema di Cramer? Come lo puoi dimostrare?
15. Secondo te, a che serve questo teorema?

Teorema di Rouché-Capelli

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
2. Qual è la tesi del teorema?
3. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
4. Facendo riferimento al Teorema di Rouché-Capelli, quando opportuno, completa i seguenti enunciati in modo che siano veri:
 - a. $rk(A)=rk(A')$ è condizione sufficiente per ...;
 - b. $rk(A)=rk(A')$ è condizione necessaria per ...;
 - c. $rk(A)\neq rk(A')$ è condizione sufficiente per ...;
 - d. $rk(A)\neq rk(A')$ è condizione necessaria per ...;
 - e. La compatibilità di un sistema lineare è condizione necessaria per ...;
 - f. La compatibilità di un sistema lineare è condizione sufficiente per ...;
 - g. L'incompatibilità di un sistema lineare è condizione necessaria per ...;
 - h. L'incompatibilità di un sistema lineare è condizione sufficiente per ...;

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

5. Quando opportuno, completa i seguenti enunciati:
 - a. $rk(A)=rk(A')$ è condizione necessaria e sufficiente per ...;
 - b. $rk(A)\neq rk(A')$ è condizione necessaria e sufficiente per ...;
 - c. La compatibilità di un sistema lineare è condizione necessaria e sufficiente per ...
 - d. L'incompatibilità di un sistema lineare è condizione necessaria e sufficiente per ...

Nei casi in cui si è ritenuto non opportuno completare, giustificare o motivare la scelta (eventualmente con controesempi).

6. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?
7. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale?

Guida alla dimostrazione

21. Questa dimostrazione è diretta o per assurdo?

22. Questa dimostrazione è costruttiva?
23. Nell'ambito della dimostrazione:
- dove utilizzi il fatto che A sia una matrice quadrata?
 - a che serve il fatto che $|A| \neq 0$?
24. Nell'ambito della dimostrazione si fa uso dei seguenti teoremi/proprietà precedenti:
- Se S è la forma a scalini di A , allora $\text{rk}(A) = \text{rk}(S)$.
 - A che scopo lo utilizzi?
 - Il rango di una matrice a scalini è pari al numero di righe non nulle:
 - A quale/quale matrice lo applichi?
 - In che modo lo utilizzi ai fini dimostrativi?
25. Perché dire che la riga $(0 \dots 0 \ b)$, con b non nullo, della matrice S' , è equivalente a:
- Incompatibilità del sistema lineare di matrice completa S' ?
 - $\text{rk}(S')$ diverso da $\text{rk}(S)$?
26. Dimostra l'implicazione: dato un sistema a scalini, se è incompatibile, allora $\text{rk}(S) \neq \text{rk}(S')$
27. Dimostra l'implicazione: dato un sistema a scalini, se $\text{rk}(S) \neq \text{rk}(S')$, allora esso non ha soluzioni.
28. Le dimostrazioni di 13 e 14 danno una dimostrazione alternativa del teor. di Rouché-Capelli?

Uno sguardo d'insieme...

29. Racconta brevemente il "filo logico" (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.
30. Se hai risposto positivamente alla 15., esplicita le differenze di schema tra la dimostrazione data in aula e l'unione delle 13 e 14.
31. Secondo te, a che serve questo teorema?
32. Che relazione c'è tra il teorema di Cramer e questo teorema?

Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
2. Qual è la tesi del teorema?
3. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
4. In caso di risposta negativa al quesito precedente, riscrivi il teorema in termini di:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A;
5. In caso di risposta positiva al quesito 3., riscrivi il teorema in termini di condizione necessaria e sufficiente esplicitando le due formulazioni:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A.
6. Nella dimostrazione fatti utilizzare una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?
7. Nella dimostrazione fatti utilizzare una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale?

Guida alla dimostrazione

8. Questa dimostrazione è diretta o per assurdo?
9. Questa dimostrazione è costruttiva?
10. Nell'ambito della dimostrazione, in quali punti utilizzi ciascuna delle ipotesi?
11. Nell'ambito della dimostrazione, usi proprietà degli elementi che sono nelle ipotesi?
12. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. A che scopo li utilizzi?
13. Nell'ambito della dimostrazione, utilizzi teoremi precedenti?
14. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. Cosa ti garantisce l'applicabilità di detti teoremi?
 - c. A che scopo li utilizzi?

Uno sguardo d'insieme...

15. Racconta brevemente il “filo logico” (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.
16. E' vero il viceversa della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz?
 - a. Se sì, come lo puoi dimostrare?
 - b. Se no, riesci a dare un contro-esempio?
17. Secondo te, a che serve questo teorema?

Teorema della base

Guida all'analisi dell'enunciato

3. Quali sono le ipotesi del teorema?
4. Qual è la tesi del teorema?
5. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
6. In caso di risposta negativa al quesito precedente, riscrivi il teorema in termini di:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A;
7. In caso di risposta positiva al quesito 3., riscrivi il teorema in termini di condizione necessaria e sufficiente esplicitando le due formulazioni:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A.
8. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?
9. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale

Guida alla dimostrazione

33. Questa dimostrazione è diretta o per assurdo?
34. Questa dimostrazione è costruttiva?
35. Nell'ambito della dimostrazione, in quali punti utilizzi ciascuna delle ipotesi?
36. Nell'ambito della dimostrazione, usi proprietà degli elementi che sono nelle ipotesi?
37. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. A che scopo li utilizzi?
38. Nell'ambito della dimostrazione, utilizzi teoremi precedenti?
39. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. Cosa ti garantisce l'applicabilità di detti teoremi?
 - c. A che scopo li utilizzi?

Uno sguardo d'insieme...

40. Racconta brevemente il “filo logico” (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.

41. E' vero il viceversa del teorema della base?

- a. Se sì, come lo puoi dimostrare?
- b. Se no, riesci a dare un controesempio?

17. Secondo te, a che serve questo teorema?

Teorema di Gram-Schmidt

Guida all'analisi dell'enunciato

1. Quali sono le ipotesi del teorema?
2. Qual è la tesi del teorema?
3. Il teorema in esame è una caratterizzazione o meno?
4. In caso di risposta negativa al quesito precedente, riscrivi il teorema in termini di:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A;
5. In caso di risposta positiva al quesito 3., riscrivi il teorema in termini di condizione necessaria e sufficiente esplicitando le due formulazioni:
 - a. A è condizione sufficiente per B;
 - b. B è condizione necessaria per A.
6. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione delle ipotesi (ovvero un enunciato equivalente alle ipotesi)? Se sì, quale?
7. Nella dimostrazione fatta utilizzi una caratterizzazione della tesi (ovvero un enunciato equivalente alla tesi)? Se sì, quale?

Guida alla dimostrazione

8. Questa dimostrazione è diretta o per assurdo?
9. Questa dimostrazione è costruttiva?
10. Nell'ambito della dimostrazione, in quali punti utilizzi ciascuna delle ipotesi?
11. Nell'ambito della dimostrazione, usi proprietà degli elementi che sono nelle ipotesi?
12. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. A che scopo li utilizzi?
13. Nell'ambito della dimostrazione, utilizzi teoremi precedenti?
14. In caso di risposta affermativa al quesito precedente:
 - a. Quali?
 - b. Cosa ti garantisce l'applicabilità di detti teoremi?
 - c. A che scopo li utilizzi?

Uno sguardo d'insieme...

15. Racconta brevemente il "filo logico" (o schema) della dimostrazione, senza entrare in dettagli.

16. E' vero il viceversa del teorema di Gram-Schmidt?
 - a. Se sì, come lo puoi dimostrare?
 - b. Se no, riesci a dare un controesempio?

17. Secondo te, a che serve questo teorema?