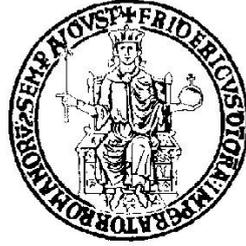


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II



POLO DELLE SCIENZE E DELLE TECNOLOGIE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dottorato in Ingegneria dei Sistemi Idraulici, di Trasporto e Territoriali

XXII ciclo

coordinatore: prof. ing. Bruno Montella

TESI DI DOTTORATO

*Aspetti entropici di correnti a pelo libero.*

*Nuovo approccio teorico proposto per i profili di velocità*

**Relatori**

ch.mo prof. ing. Giuseppe De Martino

ch.mo prof. ing. Mauro Fiorentino

ch.mo prof. ing. Nicola Fontana

**Candidato**

dott. ing. Gustavo Marini

ANNO ACCADEMICO 2008-2009

*ai miei genitori e*

*ai miei fratelli*

## **Sommario**

Nella tesi viene proposto un nuovo approccio teorico basato sul principio della massima entropia definita da Shannon per la valutazione della variabilità di una generica funzione, definita in un dominio bidimensionale. Sulla base di tale approccio è stato poi messo a punto un modello teorico per la stima della distribuzione di velocità in una corrente a pelo libero. I valori ottenuti dal modello sono stati successivamente confrontati con misure sperimentali ricavate sia nell'ambito di un'estesa indagine di laboratorio all'uopo attivata, sia a partire da misure in sito su corsi d'acqua naturali. Il confronto mostra che il metodo proposto fornisce risultati generalmente più accurati (o comunque analoghi) rispetto a quelli forniti dai modelli di letteratura, pur richiedendo una minore quantità di informazioni per essere applicato.

## **Abstract**

A new theoretical approach based on principle of maximum Shannon entropy is proposed to estimate the variability of a function defined in two-dimensional space. This approach is applicable to whatever variable defined in a two dimensional domain when you need understand how that varies. By means of this approach an analytical model for two-dimensional velocity distribution, in open channel flow, is developed. The model-derived velocity data are compared with experimental data derived by laboratory tests, on purpose carried out, and by river measures. This comparison shows that the accuracy of the method is bigger or comparable to that obtained by using other literature methods and needs less information to be applied.

## Introduzione

L'obiettivo della tesi è volto alla definizione di un approccio teorico basato sul principio della massima entropia definita da Shannon per la valutazione della variabilità di una funzione definita in un dominio bidimensionale e della messa a punto di un modello teorico per la stima della distribuzione di velocità in una corrente a pelo libero. I valori ottenuti dal modello sono stati successivamente confrontati con misure sperimentali ricavate sia nell'ambito di un'estesa indagine di laboratorio all'uopo attivata, sia a partire da misure in sito su corsi d'acqua naturali.

Sebbene nell'idraulica classica la velocità puntuale di una corrente venga trattata come una variabile deterministica, l'intuizione fisica, peraltro confermata dall'indagine sperimentale, ne evidenzia la variabilità nel tempo, denotandone il carattere di variabile aleatoria. Dal momento che il concetto di entropia ben si lega alla probabilità e crea un proficuo ponte tra le conoscenze consolidate della meccanica classica e l'approccio stocastico di cui si necessita, nel lavoro l'approccio entropico viene applicato per ricavare un modello analitico per valutare la distribuzione di velocità.

In maggior dettaglio, nel primo capitolo viene richiamato il concetto di entropia nelle diverse discipline scientifiche in cui viene introdotto. L'entropia nasce in fisica, ad opera del tedesco Clausius, per meglio chiarire il secondo principio della termodinamica, definita come il rapporto tra la somma dei piccoli incrementi (infinitesimi) di calore, e la temperatura assoluta durante l'assorbimento del calore. Lo studio di tale grandezza consente, nella meccanica statistica, di ottenere informazioni macroscopiche a partire da configurazioni microscopiche. Intuitivamente si immagina che ad una certa condizione macroscopica di equilibrio del sistema corrispondano diverse configurazioni microscopiche una volta che siano stati definiti, in termini probabilistici, posizione e velocità di tutte le molecole del sistema.

Formalmente analoga alla precedente è la formulazione di entropia fornita da Shannon (1948) nell'ambito della teoria dell'informazione; in questa disciplina l'entropia assume i contorni di una misura dell'incertezza, che si riduce all'aumentare delle conoscenze (ovvero delle informazioni) di cui si dispone. Di poco successivo è il principio della massima entropia formulato da Jaynes (1957), che afferma che lo stato di equilibrio verso il quale i sistemi reali evolvono spontaneamente, e che quindi possiede caratteristiche di stabilità, è caratterizzato da un valore massimo dell'entropia.

Accoppiando la formulazione dell'entropia di Shannon con il principio della massima entropia si ottiene uno strumento analitico molto utile per la ricerca degli stati di equilibrio di un qualsiasi sistema fisico. Tra gli altri, tale approccio è stato utilizzato in idraulica per la stima dei

profili di velocità di una corrente in un canale a pelo libero, grazie ai lavori di C. L. Chiu, il quale si è dedicato, a partire dagli anni settanta, all'interpretazione entropica delle correnti a pelo libero, con particolare riferimento alla stima dei profili di velocità. Le conoscenze in merito, già note in letteratura, ed esposte diffusamente nel secondo capitolo, presuppongono che la distribuzione di velocità può essere definita fissando, in modo opportuno, una funzione distribuzione di probabilità cumulata della variabile aleatoria nonché i vincoli del problema e, successivamente, massimizzandone l'entropia, ad esempio tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Le soluzioni già presenti in letteratura sono relative al caso di moto monodimensionale di una corrente, rappresentativo di casi quali, ad esempio, gli alvei larghissimi, in cui la distribuzione di velocità non varia sensibilmente in senso trasversale alla sezione retta. È inoltre presente la soluzione della distribuzione di velocità in un dominio bidimensionale di forma generica, supponendo, però, noto a priori l'andamento delle isotachie, la cui espressione analitica viene fornita in forma parametrica. Tale equazione necessita di calibrazione specifica caso per caso.

Dal momento che l'andamento delle isotachie è generalmente di difficile determinazione, nel terzo capitolo viene presentato il modello teorico proposto per la stima della distribuzione di velocità in un canale, che consente di trattare domini bidimensionali senza fissare a priori l'equazione delle isotachie. Nell'approccio presentato, quindi, l'impostazione del problema risulta di tipo bidimensionale già a partire dalla definizione della funzione di distribuzione di probabilità cumulata e consente, pur con la maggiore complessità analitica derivante dalla soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, di ricavare equazioni finali di minore complessità rispetto a quelle note in letteratura.

Oltre alla sezione rettangolare e a quella trapezoidale, la soluzione proposta consente anche di definire la distribuzione di velocità in una sezione di forma qualsiasi, purché il contorno sia definito da un'equazione analitica (ad es. un polinomio). I grafici utili per l'applicazione del modello teorico sono stati riportati, per semplicità di lettura, nell'appendice A alla tesi.

Nel quarto capitolo viene validato il modello analitico proposto, attraverso il confronto tra le stime teoriche e i valori sperimentali di profili di velocità di correnti a pelo libero, sia reperiti in letteratura (nel caso delle misure di velocità in corsi d'acqua naturali), sia raccolti attraverso un'ampia campagna di misure di laboratorio. All'uopo, parte integrante del lavoro di ricerca è stata volta ad acquisire misure di velocità in canaletta mediante un'accurata ed estesa campagna sperimentale su una canaletta rettangolare, variandone portata, tirante, pendenza e scabrezza di fondo. Il confronto tra i dati acquisiti e le stime teoriche ha evidenziato che il modello proposto fornisce una interpretazione soddisfacente della realtà. Tutti i dati relativi alle misure di laboratorio e di campo, unitamente alle stime teoriche ricavate con il modello proposto e con quelli di

letteratura, sono riportati nelle appendici B e C, in cui i dati vengono presentati in forma tabellare e sintetizzati in grafici di immediata comprensione.

Nell'appendice D, invece, viene riportata una possibile interpretazione dell'entropia per le correnti a pelo libero che prende le mosse da alcune considerazioni di carattere generale in merito all'entropia termodinamica. Tale aspetto è riportato in appendice in quanto ha i caratteri di una trattazione preliminare e necessita di successivi approfondimenti.

Infine è opportuno evidenziare che l'approccio seguito presenta caratteri di assoluta generalità, e pertanto può essere applicato con relativa semplicità non solo a problematiche tipiche dell'ingegneria, ma anche ad altre discipline, quali l'economia o le scienze sociali. Con specifico riferimento alle tematiche proprie dell'ingegneria idraulica, l'elasticità dell'approccio proposto potrebbe fornire una risposta nuova e più utile a problemi quali il trasporto di un soluto in una corrente, la diffusione dell'umidità in un terreno o l'escavazione del suolo a valle di una pila in alveo.

## **Indice**

<b>RINGRAZIMENTI</b>	<b>iii</b>
<b>SOMMARIO</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iv</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>v</b>
<b>CAPITOLO 1</b>	
<b>L'ENTROPIA NELLE DISCIPLINE SCIENTIFICHE</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemi fisici e loro caratteristiche	1
1.1.1 Categorie di sistemi	1
1.1.2 Configurazione dei sistemi	1
1.1.3 Entropia termodinamica	3
1.1.4 L'entropia in meccanica statistica	5
1.1.5 Significato evolutivo dell'entropia	7
1.2 Entropia dell'informazione	7
1.2.1 Entropia di Shannon	8
1.2.2 Negentropy	11
1.2.3 Entropia esponenziale	12
1.2.4 Entropia di Tsallis	12
1.2.5 Entropia di Renyi	13
1.3 Entropia, informazione e incertezza	14
1.4 Tipologie di incertezza	15
1.5 L'entropia ed alcuni concetti idraulici e idrologici ad essa correlati	16
1.5.1 Rischio ed entropia	17
1.6 Bibliografia	18
<b>CAPITOLO 2</b>	
<b>TRACCIAMENTO DEI PROFILI DI VELOCITÀ DI UNA CORRENTE SECONDO IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA ENTROPIA</b>	<b>20</b>
2.1 Introduzione	20
2.2 L'entropia di Shannon	20
2.3 Distribuzione di velocità lungo una verticale	23
2.4 Distribuzione di velocità in un dominio bidimensionale	27
2.4.1 Derivazione dell'espressione della velocità in un dominio 2D	27
2.4.2 Espressione delle isotachie e posizione delle velocità massima e media	30
2.5 Parametro entropico M	32

2.6 Relazione tra la posizione del punto a velocità massima e parametro entropico M	38
2.7 Confronto con misure sperimentali	43
2.8 Bibliografia	49

## **CAPITOLO 3**

### **NUOVO APPROCCIO TEORICO PROPOSTO SUL TRACCIAMENTO DEI PROFILI DI VELOCITÀ IN DOMINI BIDIMENSIONALI** **51**

3.1 Introduzione	51
3.2 La funzione entropia e i vincoli del problema	52
3.3 Espressione della variabile velocità	53
3.4.1 Dominio bidimensionale rettangolare con asse di simmetria verticale: funzione distribuzione di probabilità	56
3.4.2 Dominio bidimensionale rettangolare: determinazione parametro entropico G	59
3.5.1 Dominio bidimensionale rettangolare senza asse di simmetria verticale: funzione distribuzione di probabilità	60
3.5.2 Dominio bidimensionale rettangolare senza asse di simmetria verticale: determinazione parametro entropico G	63
3.6.1 Dominio bidimensionale trapezoidale: funzione distribuzione di probabilità	64
3.6.2 Dominio bidimensionale trapezoidale: determinazione parametro entropico G	66
3.7.1 Dominio bidimensionale con contorno definito da una generica espressione: funzione distribuzione di probabilità	67
3.7.2 Dominio bidimensionale di forma qualsiasi: determinazione parametro entropico G	71
3.7.3 Alcune considerazioni in merito alla funzione $G(u_{med}/u_{max})$	72
3.8 Bibliografia	73

## **CAPITOLO 4**

### **VALIDAZIONE DEL MODELLO ANALITICO TRAMITE MISURE SPERIMENTALI E DI LETTERATURA DI PROFILI DI VELOCITÀ.** **74**

4.1 Introduzione	74
4.2 Confronto con misure di velocità di letteratura per sezione rettangolare	74
4.3 L'indagine sperimentale	79
4.3.1 La canaletta sperimentale	79
4.3.2 Misuratore acustico Doppler di velocità (ADV)	81
4.3.2.1 Principio di funzionamento dell'ADV Bidimensionale:	81
4.3.2.2 Caratteristiche di funzionamento	82
4.4 L'indagine sperimentale e la validazione del modello di stima proposto	84
4.5 Un'analisi sintetica e organica del confronto tra risultati teorici e sperimentali relativi al dominio rettangolare	91
4.6 Conclusioni sulla validazione del modello su dominio rettangolare	96
4.7 Validazione del modello teorico proposto con applicazione a casi di corsi d'acqua naturali	97
4.8 Un'analisi sintetica e organica del confronto tra risultati teorici e sperimentali relativi al dominio di forma qualsiasi	104
4.9 Conclusioni sulla validazione del modello su dominio di forma qualsiasi	106
4.10 Bibliografia	106

<b>CONCLUSIONI</b>	<b>107</b>
<b>APPENDICE A</b>	
<b>GRAFICI PER LA DETERMINAZIONE DEL PARAMETRO ENTROPICO G</b>	<b>109</b>
<b>APPENDICE B</b>	
<b>SCHEDE SINTETICHE RIASSUNTIVE DEI RISULTATI RELATIVI ALLA VALIDAZIONE DEL MODELLO PROPOSTO PER DOMINIO RETTANGOLARE</b>	<b>160</b>
<b>APPENDICE C</b>	
<b>SCHEDE SINTETICHE RIASSUNTIVE DEI RISULTATI RELATIVI ALLA VALIDAZIONE DEL MODELLO PROPOSTO PER DOMINIO DI FORMA GENERICA</b>	<b>220</b>
<b>APPENDICE D</b>	
<b>UNA POSSIBILE INTERPRETAZIONE DELL'ENTROPIA PER LE CORRENTI A PELO LIBERO</b>	<b>262</b>
D.1 Premessa	262
D.2 L'entropia in idraulica	265
D.3 Discussione su un caso esemplificativo classico.	268
D.4 Possibili sviluppi	270

# CAPITOLO 1

## L'ENTROPIA NELLE DISCIPLINE SCIENTIFICHE

Nel presente capitolo viene presentato, iniziando da un breve richiamo ai sistemi e ai sistemi di stato, il concetto di entropia in termodinamica, in meccanica statistica e nella teoria dell'informazione. Successivamente ci si sofferma sulle possibili applicazioni del concetto di entropia stesso.

### 1.1 Sistemi fisici e loro caratteristiche

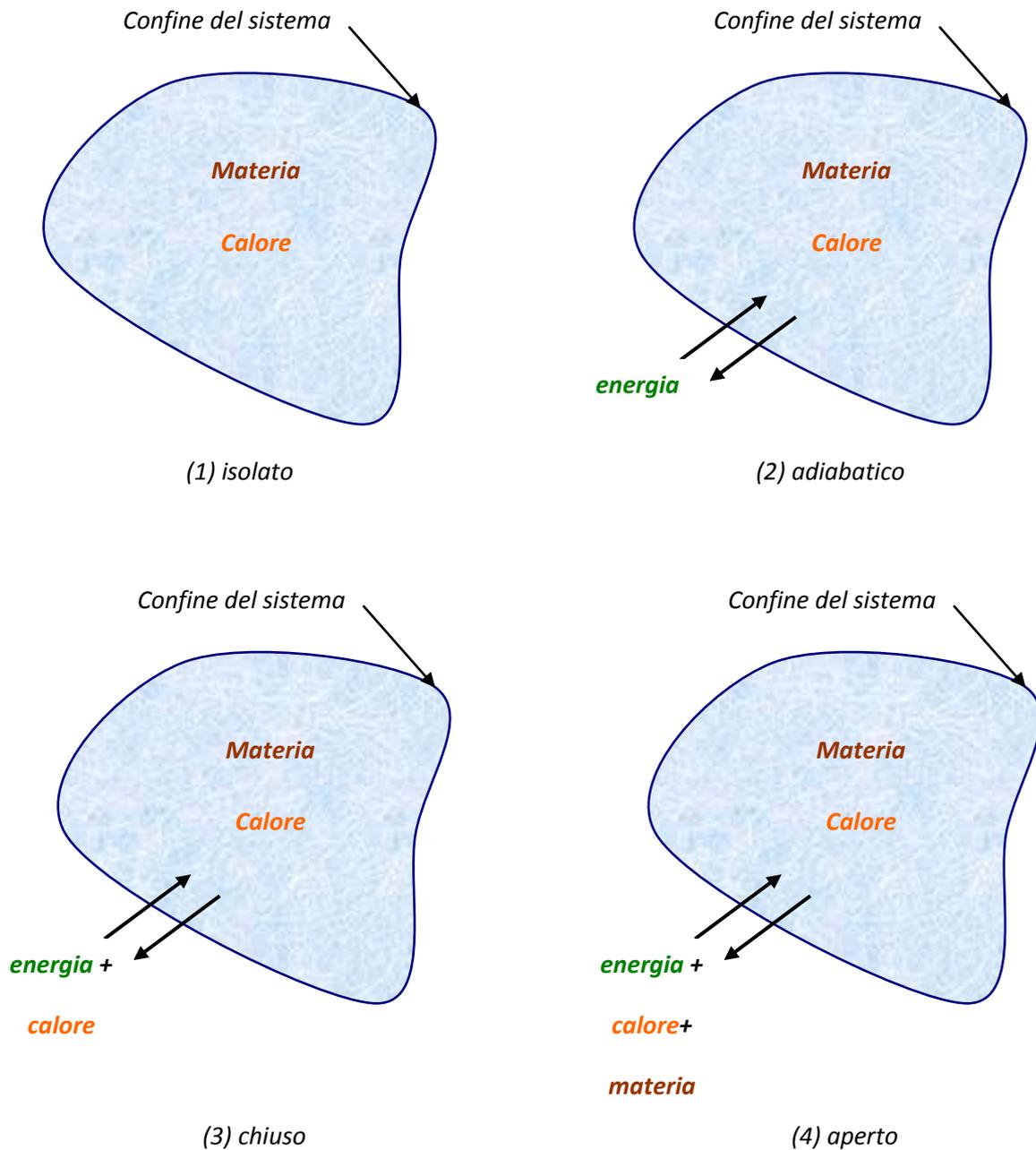
#### 1.1.1 Categorie di sistemi

In termodinamica un sistema è definito come una parte dell'universo composta da un ampio numero di particelle. La parte rimanente è definita ambiente esterno. Si distinguono quattro classi di sistemi in funzione dei vincoli ad essi imposti. La classificazione dei sistemi è basata sulla possibilità che gli stessi hanno di trasferire (a) materia, (b) calore, e/o (c) energia (Denbigh, 1989). Le quattro classi di sistema sono mostrate in Fig. 1.1 e sono: (1) sistema isolato: non permette lo scambio di materia o energia con l'ambiente esterno; (2) sistema adiabatico: non permette lo scambio di materia e di calore ma permette lo scambio di energia; (3) sistema chiuso: non permette lo scambio di materia ma permette il trasferimento di energia e calore; (4) sistema aperto: permette il trasferimento di tutte le caratteristiche ed è definito semplicemente dai suoi limiti geometrici.

#### 1.1.2 Configurazione dei sistemi

I sistemi possono essere visti sotto due differenti stati: lo stato microscopico (o microstato) e lo stato macroscopico (o macrostato). Si consideri un sistema e il proprio ambiente isolati da ciascun altro e si consideri, inoltre, che tale sistema non può scambiare calore o materia con il relativo ambiente. Un tale sistema raggiunge eventualmente uno stato di equilibrio in termini termodinamici, allorquando non avvengono significativi cambiamenti rispetto alle condizioni in cui si trova. Lo stato del sistema cui ci si riferisce quando si parla di equilibrio è il macrostato e non il microstato, il quale rappresenta il sistema a livello molecolare, che, invece, cambia continuamente.

Il macrostato è uno stato termodinamico che può essere completamente descritto attraverso le variabili termodinamiche quali pressione, volume, temperatura ecc



**Fig. 1.1** Classificazione dei sistemi

Pertanto nella termodinamica classica un sistema è descritto attraverso il suo stato macroscopico caratterizzato da proprietà osservabili sperimentalmente e non si distinguono gli infiniti microstati nei quali un sistema può trovarsi e quindi non si tratta il problema alla scala

dell'atomo (Fast, 1968). Per un assegnato stato termodinamico possono esserci molti stati microscopici nei quali il sistema può trovarsi. In altre parole si può parlare di stato termodinamico quando i suoi cambiamenti sono misurabili attraverso la variazione delle sue variabili termodinamiche.

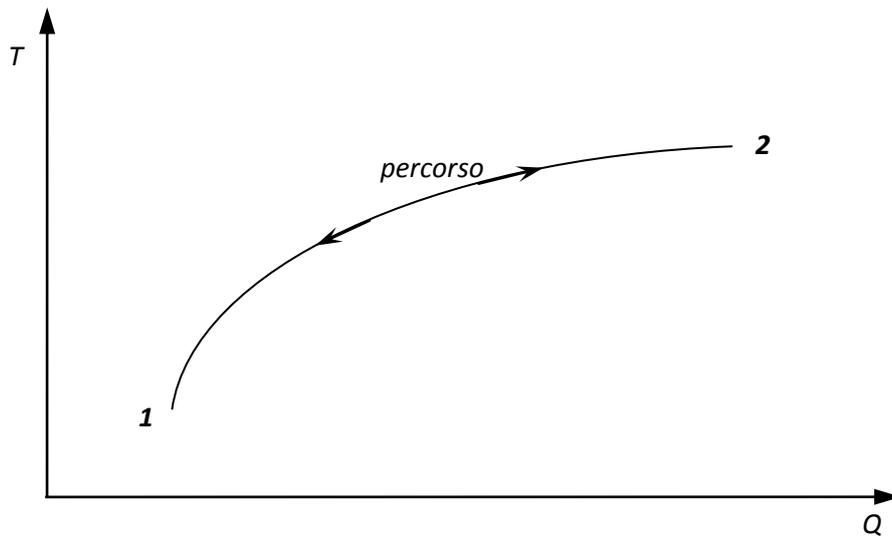
### 1.1.3 Entropia termodinamica

Si definisca  $Q$  la quantità di calore che un sistema scambia con l'ambiente esterno. Per un sistema che passa dallo stato 1 allo stato 2, la quantità di calore  $\int_1^2 dQ$  richiesta non è univocamente definita, ma dipende dal percorso che la particella segue per passare dallo stato iniziale a quello finale. Possono esserci due tipologie di percorsi: un percorso reversibile (a) in cui il passaggio dallo stato 1 allo stato 2 è identico a quello da 2 verso 1, e un percorso irreversibile (b) in cui si passa da 1 a 2 in modo diverso che da 2 a 1 come mostrato in Fig. 1.2. La quantità di calore contenuta nel sistema, sotto assegnate condizioni, non è significativa a questo punto del ragionamento. D'altra parte definita  $T$  la temperatura assoluta, espressa in gradi Kelvin, la quantità  $\int_1^2 dQ/T$  è univocamente definita e pertanto è indipendente dal percorso che il sistema compie per passare dallo stato 1 allo stato 2, ovvero la trasformazione è reversibile (Fig. 1.2 a). Si noti che l'integrazione prevede che ciascuna infinitesima variazione di calore è divisa per la temperatura a cui tale variazione avviene. Il sistema per compiere la trasformazione spende una certa quantità di calore che si definisce perdita di calore.

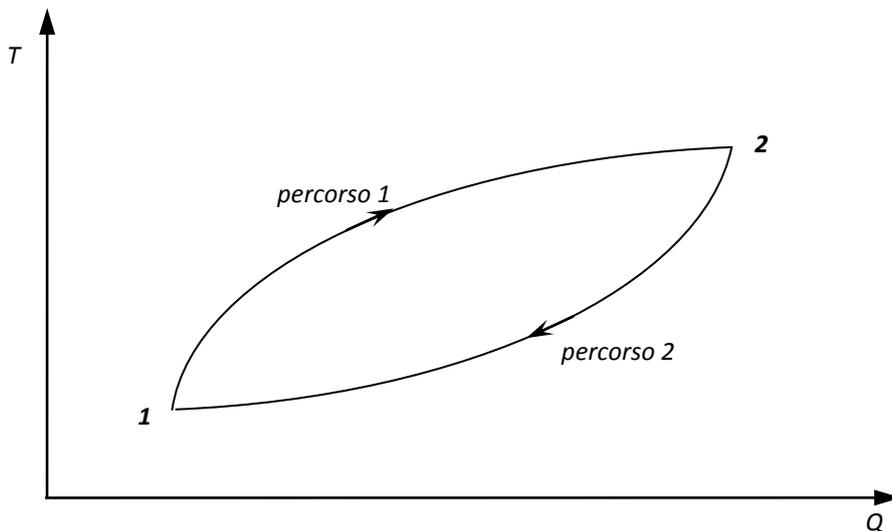
Si definisce entropia  $S$  di un sistema l'integrale tra zero e la temperatura assoluta  $T$ , in una trasformazione reversibile, della quantità  $dQ/T$ :

$$S = \int_0^T \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (1.1)$$

In effetti la quantità  $S$  nell'equazione (1.1) è, più propriamente, la differenza di entropia  $\Delta S$  rispetto ad uno stato di riferimento corrispondente alla condizione di temperatura pari allo zero assoluto. Tale equazione venne introdotta da Clausius per spiegare il secondo principio della termodinamica come legge di incremento dell'entropia di un sistema. Essa mostra che la misura dell'entropia di un sistema dipende dalla misura della quantità di calore ceduta o acquistata durante la trasformazione



(a) trasformazione reversibile



(b) trasformazione irreversibile

**Fig. 1.1** (a) trasformazione reversibile: passaggio dallo stato 1 allo stato 2 e (b) trasformazione irreversibile: passaggio dallo stato 1 allo stato 2 lungo il percorso 1 e da 2 a 1 lungo il percorso 2.

Nel 1865 studiando i motori termici, Clausius, scoprì che, sebbene l'energia totale in un sistema isolato si conservi, una parte di essa si converte in modo irreversibile in altre forme quali il calore, l'attrito, ecc. e che tale energia è irrecuperabile e non è utilizzabile per altri scopi; questo concetto è interpretabile in termini entropici. Clausius sottolineò che l'energia dell'universo è costante e che l'entropia dello stesso è in continuo aumento. È per questo che il fisico Eddington definì l'entropia la freccia del tempo proprio perché tale grandezza aumenta col trascorrere del tempo.

### 1.1.4 L'entropia in meccanica statistica

La meccanica statistica tratta del comportamento di sistemi alla scala dell'atomo e, pertanto, concerne lo stato microscopico di un sistema. Dal momento che il numero di particelle in un sistema è molto elevato diventa impossibile trattare il microstato di ciascuna particella e pertanto si fa ricorso ad approcci stocastici per caratterizzare la funzione di distribuzione di uno stato microscopico. Come già detto possono esserci molti microstati alla scala dell'atomo indistinguibili tra loro al livello di stato termodinamico ovvero possono esserci diverse possibili configurazioni microscopiche di uno specifico stato termodinamico. Se si definisce  $N$  il numero di questi microstati, allora l'entropia statistica è definita come:

$$S = k \ln N \quad (1.2)$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann ( $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2/\text{K}$ )), che, per esempio, per un gas è pari a:

$$k = \frac{R}{N_0} \quad (1.3)$$

dove  $R$  è la costante dei gas relativa ad una mole ed  $N_0$  è il numero di Avogadro ( $6.0246 \cdot 10^{23}$  per ogni mole). L'equazione (1.2) è anche chiamata equazione dell'entropia di Boltzmann e afferma che tutti i microstati hanno uguale probabilità di verificarsi. Chiaramente  $S$  aumenta all'aumentare di  $N$  e il suo massimo rappresenta lo stato più probabile. Pertanto ciò può essere considerato come una diretta misura della probabilità di accadimento relativa ad uno stato termodinamico. Va aggiunto che l'entropia, come definita dall'equazione (1.2), ha tutte le proprietà attribuibili all'entropia termodinamica definita tramite la (1.1).

L'equazione (1.2) può essere generalizzata considerando un insieme di sistemi. Il sistema si troverà in differenti microstati e se il numero di sistemi che si trovano nell' $i$ -esimo microstato si definisce  $n_i$  allora l'entropia statistica dell' $i$ -esimo microstato è  $S_i = k \cdot \log \cdot n_i$ . Per un insieme discreto e non continuo l'entropia è espressa come una somma pesata:  $S = k \sum_{i=1}^N n_i \log n_i$  in cui  $N$  è il numero totale di microstati nei quali tutti i sistemi sono organizzati. Dividendo per  $N$  ed esprimendo la frazione del sistema  $p_i = n_i/N$ , il risultato è l'entropia statistica dell'insieme, espressa come:

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (1.4)$$

dove  $k$  è ancora la costante di Boltzmann. La misura di  $S$  qui dipende dal numero dei microstati. L'equazione (1.2) può essere ottenuta dall'equazione (1.4), assumendo che l'insieme dei sistemi è distribuito su  $N$  stati ovvero che la probabilità  $p_i$  è uguale a  $1/N$  pertanto la (1.4) diventa::

$$S = -kN \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = k \ln N \quad (1.5)$$

che è proprio la (1.2).

L'entropia di un sistema è una proprietà termodinamica estensiva, come la massa, l'energia, il volume, il momento o il numero di atomi di un composto chimico, ma a differenza di queste quantità non sottostà ad una legge di conservazione. Le quantità termodinamiche estensive sono quelle che si dimezzano quando un sistema in equilibrio viene diviso in due parti uguali, mentre restano invariate le grandezze intensive.

L'entropia totale di un sistema è uguale alla somma dell'entropia delle singole parti di cui esso è composto. La più probabile distribuzione di energia in un sistema è quella cui corrisponde la massima entropia del sistema stesso. Ciò accade sotto le condizioni di equilibrio dinamico. Durante l'evoluzione verso uno stato stazionario, il tasso di produzione di entropia per unità di massa dovrebbe essere minimo, compatibilmente con i vincoli esterni.

L'entropia di un sistema chiuso o isolato, tende sempre ad aumentare verso il suo valore massimo. In idraulica una porzione di energia (o di energia meccanica) è spesa dal sistema idraulico per vincere l'attrito che poi è dissipato nell'ambiente esterno. L'energia così trasformata seguendo una sola direzione (non reversibile) è spesso chiamata perdita di carico. Una misura della quantità dell'energia irrecuperabile è l'entropia che è in continuo aumento. Anche le equazioni che governano i processi idraulici e che esprimono le perdite di carico potrebbero, in quest'ottica, legarsi al concetto di entropia. È proprio in merito a tale aspetto che nell'appendice D viene riportata una possibile interpretazione dell'entropia in idraulica.

L'entropia può essere impiegata in termodinamica come una misura del grado di ignoranza che si ha in merito al reale stato di un sistema. In un sistema idraulico se non ci fossero perdite di energia il sistema sarebbe ordinato e organizzato. Le perdite di carico e le loro cause rendono, invece, il sistema caotico e disordinato. Algebricamente l'entropia è proporzionale al logaritmo della probabilità associata allo stato in cui si trova il sistema. La costante di proporzionalità è la costante di Boltzmann.

### **1.1.5 Significato evolutivo dell'entropia**

Parlando di entropia nel mondo macroscopico, Prigogine (1989) mise in evidenza l'aspetto evolutivo dell'entropia e definì tre condizioni che devono essere soddisfatte: irreversibilità, probabilità e coerenza.

Irreversibilità significa che passato e presente non possono avere la stessa evoluzione. Per un qualsiasi sistema caratterizzato da un processo irreversibile, l'entropia può essere considerata come la somma di due componenti una relativa allo scambio di entropia con l'ambiente esterno e l'altra relativa alla produzione di entropia interna che è una quantità sempre positiva. Per un sistema isolato, la prima componente è nulla siccome non c'è scambio di entropia, e la seconda può solo aumentare raggiungendo un valore massimo. La produzione di entropia, pertanto, è relativa a quei processi irreversibili che, per esempio, sono molto diffusi in idraulica.

Seguendo il ragionamento di Prigogine (1989), la produzione di entropia gioca un doppio ruolo. Essa non necessariamente conduce al disordine, ma può spesso essere un meccanismo per la produzione di ordine. Nel caso della diffusione termica, per esempio, la produzione di entropia è associata al flusso di calore che produce disordine ma è anche associata alla anti-diffusione che produce ordine. La legge dell'incremento di entropia e la generazione di ordine non sono necessariamente opposti tra loro, l'irreversibilità conduce all'organizzazione come si vede nello sviluppo di una città.

Lontano dall'equilibrio i sistemi sono non lineari e le equazioni che ne descrivono il comportamento hanno molteplici soluzioni. Anche il passaggio dall'instabilità alla probabilità porta all'irreversibilità. L'entropia stabilisce che il mondo è caratterizzato da sistemi dinamici instabili. In accordo con Prigogine (1989) lo studio dell'entropia deve essere condotto su tre livelli. Il primo è il livello fenomenologico in cui i processi irreversibili hanno un ruolo costruttivo. Il secondo consiste nell'incorporare l'irreversibilità nella dinamica classica nella quale l'instabilità incorpora l'irreversibilità. Il terzo livello è la teoria dei quanti e la teoria della relatività generale e le sue modifiche per tenere in conto del secondo principio della termodinamica.

La coerenza sta nel fatto che esistono alcuni meccanismi di coerenza che consentirebbero una stima delle condizioni dell'universo evolutivo allorquando capitano nuovi e organizzati fenomeni.

## **1.2 Entropia dell'informazione**

Esistono diversi tipi di entropia dell'informazione (Kapur, 1989), come l'entropia di Shannon (Shannon, 1948), l'entropia di Tsallis (Tsallis, 1988), l'entropia esponenziale (Pal & Pal,

1991a), l'entropia epsilon (Rosenthal & Binia, 1988), l'entropia algoritmica (Zurek, 1989), l'entropia di Hartley (Hartley, 1928), l'entropia di Renyi (Renyi, 1961), l'entropia di Kapur (Kapur, 1989), e così via.

Di queste le più importanti sono di certo quella di Shannon, quella di Tsallis, quella di Renyi e quella esponenziale. Questi quattro tipi di entropia sono descritti brevemente nel prosieguo.

### 1.2.1 Entropia di Shannon

Nel 1948 Shannon introdusse nella teoria dell'informazione quella che oggi viene chiamata entropia dell'informazione o, appunto, entropia di Shannon. Si tenga presente che quando viene specificata un'informazione supplementare, relativa ad un sistema, si riduce o si elimina l'incertezza ad esso connessa. Per una distribuzione di probabilità  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ , dove  $p_1, p_2, \dots, p_N$  sono le probabilità delle  $N$  estrazioni ( $x_i, i=1, 2, \dots, N$ ) di una variabile aleatoria  $X$  o di un esperimento aleatorio, Shannon definì la seguente misura  $H$  in termini probabilistici:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad \text{con } \sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (1.6)$$

che soddisfa una serie di vincoli. L'equazione (1.6) ha la stessa forma dell'espressione dell'entropia termodinamica e proprio per questo motivo venne definita entropia alla sua scoperta. L'equazione (1.6) stabilisce che  $H$  è una misura dell'incertezza di un risultato sperimentale o una misura dell'informazione ottenuta da un esperimento che ne riduce l'incertezza. Specifica anche il valore atteso della quantità di informazioni trasmesse da una fonte con una distribuzione di probabilità ( $p_1, p_2, \dots, p_N$ ).

L'entropia di Shannon potrebbe essere vista come l'indecisione di un osservatore che cerca di indovinare il risultato di un esperimento o come il disordine di un sistema che può trovarsi sotto diverse configurazioni. Tale misura, definita come indice d'informazione o contenuto di informazione, considera la sola possibilità che un evento accada o meno e non il suo significato o il suo valore, e questo è il principale limite del concetto di entropia (Marchand, 1972).

È evidente che l'equazione (1.6) porterebbe alla massima entropia se tutte le probabilità fossero uguali:  $p_i=p \ i=1, 2, \dots, N$ ; la massima entropia può essere considerata come una misura della incertezza totale. Lo stato statisticamente più probabile in cui un sistema può trovarsi è quello cui corrisponde la massima entropia. Se esistono due distribuzioni di probabilità con risultati equiprobabili, il primo, ad esempio è tale per cui  $p_i=p \ i=1, 2, \dots, N$  e l'altro  $q_i=q \ i=1, 2, \dots, M$  allora è possibile determinare le differenze del contenuto informativo  $\Delta H$  delle due distribuzioni

come:  $\Delta H = H_p - H_q = \log_2 p - \log_2 q = \log_2(p/q)$ , dove  $H_p$  è il contenuto d'informazioni o l'entropia di  $p_i$  e  $H_q$  è l'analogo relativo a  $q_i$ ; si può osservare che se  $q > p$  o  $M > N$  allora  $\Delta H < 0$ .

In questo caso il contenuto informativo si perde a causa dell'incrementarsi dell'incertezza sui risultati. D'altra parte se  $q < p$  o  $M < N$  allora  $\Delta H > 0$ . Tale caso corrisponde ad un aumento dell'informazione poiché diminuisce il numero di possibili risultati o dell'incertezza.

Nell'equazione (1.6) il logaritmo è in base 2 poiché risulta più conveniente, nell'ambito della teoria dell'informazione, del logaritmo in base  $e$  o in base 10, ma dal punto di vista concettuale non cambierebbe niente. Trattandosi di entropia dell'informazione, l'entropia può misurarsi in bit. Un bit può essere fisicamente interpretato in termini di frazione di alternative che vengono ridotte da una certa informazione. Ciò significa che ogni volta che il numero di alternative si riduce alla metà, ci sarà un incremento di un bit d'informazione.

Per comprendere meglio tale concetto si consideri un caso in cui si hanno a disposizione quattro alternative; se questo numero si riduce a due allora si trasmette 1 bit di informazione. Nel caso di due messaggi alternativi la quantità di informazioni è pari a  $\log_2 2$  ovvero a 1. La stessa quantità d'informazioni viene trasmessa se 100 alternative si riducono a 50 e così via. Analogamente, se si hanno a disposizione 8 alternative tra cui scegliere, la quantità d'informazione necessaria per conoscere l'evento che si verificherà è pari a  $\log_2 8$  ovvero a 3 bit.

In generale si può dire che il logaritmo in base 2 di  $x$  è la quantità, espressa in bit, di informazione trasmessa se le  $N$  alternative di partenza si riducono a  $N/x$ . Se 100 alternative si riducono a 50 e poi a 25 allora  $x=4$ , e il  $\log_2 4$  è uguale a 2 ovvero 2 bit.

Se il logaritmo è in base  $e$ , invece che in base 2, l'unità di misura dell'entropia si definisce nits (o nats) e nel caso di base 10 logits (o decibel). Se si fissa che  $n^x = y$  allora  $x \log n = \log y$ , che significa che  $x$  è il logaritmo di  $y$  in base  $n$  difatti vale  $x \log_n n = \log_n y$  ovvero  $x = \log_n y$ ; significa che la quantità di informazioni si misura come il logaritmo del numero di scelte a disposizione.

Dalla discussione precedente è chiaro che il valore di  $H$  sarà pari a 1 anche in funzione della base che si assegna al logaritmo: bit (binary digit) per  $\log_2$  e dit (decimal digit) per  $\log_{10}$ . Quindi un dit esprime l'incertezza di un esperimento che ha 10 possibili esiti equiprobabili. Allo stesso modo un bit corrisponde all'incertezza relativa ad un esperimento che ha 2 possibili esiti equiprobabili. Se  $p=1$  allora l'entropia è nulla poiché l'esito dell'evento è certo e non esistono incertezze. La stessa cosa accade quando  $p=0$  poiché si assume per convenzione che il logaritmo di 0 è pari a 0.

In teoria della comunicazione ogni rappresentazione di una variabile aleatoria  $X$  può essere vista come un messaggio. Se  $X$  è una variabile aleatoria continua allora essa potrebbe portare una quantità infinita di informazioni. In pratica  $X$  potrebbe essere intesa come una variabile discreta che può assumere infiniti valori e quindi può essere scritta come:

$$X = \{x_i, i = 0, \pm 1, \dots, \pm N\} \quad (1.7)$$

Dove  $x_i$  è un numero discreto e  $(2N + 1)$  è il numero totale di possibili valori che  $x$  può assumere. Intuitivamente sembrerebbe che il guadagno in termini di informazioni da un evento è inversamente proporzionale alla sua probabilità di verificarsi. Sia questo guadagno rappresentato dalla seguente quantità  $\Delta I$  di seguito calcolata (Shannon, 1948):

$$G(p) = \Delta I = \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\log(p_i) \quad (1.8)$$

che può anche indicarsi con  $G(p)$ : funzione di guadagno (Pal and Pal, 1991a).

La funzione di guadagno non è nient'altro che un ulteriore misura dell'informazione, in termini di incertezza che viene rimossa da l sistema allorquando viene introdotto un messaggio.

Se un evento è molto raro, ovvero la sua probabilità è molto piccola, la si fissi, ad esempio,  $p_i=0.01$ , allora l'informazione parziale trasmessa da quest'evento è molto ampia  $\Delta I= 2$ . Se sono possibili  $n$  eventi, si può calcolare il guadagno totale in termini di informazione come:

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta I_i = -\sum_{i=1}^N \log(p_i) \quad (1.9)$$

Ciascun evento avviene con una differente probabilità; l'entropia o l'informazione globale di un evento  $i$ -esimo è espressa come un valore pesato:

$$H(p_i) = -p_i \log p_i$$

Siccome  $0 \leq p_i \leq 1$  allora  $H$  è sempre positiva. Comunque il valore medio o atteso di incremento di informazione può essere ottenuto sviluppando una media pesata dei singoli incrementi e dunque:

$$H = E(\Delta I) = -\sum_{i=1}^N p_i (\Delta I_i) = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad (1.10)$$

che è analoga all'equazione (1.6). Ciò che è interessante notare è che si possono definire differenti tipi di entropia semplicemente cambiando la funzione di guadagno o, analogamente, quella di incertezza. Per esempio nel seguito saranno definiti altri tipi di entropia.

L'equazione (1.10) può essere vista in un altro modo se si pensa che, definito un esperimento che può avere diversi esiti indipendenti tra loro (e quindi la cui intersezione è nulla), l'entropia globale di un esperimento è la somma delle entropie elementari degli  $N$  esiti:

$$\begin{aligned}
H &= H_1 + H_2 + \dots + H_N = \sum_{i=1}^N H_i \\
&= -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_N \log p_N = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

che è, appunto, l'equazione (1.10), scritta partendo da un altro presupposto. Chiaramente  $H$  è massimo quando tutti gli eventi sono equiprobabili, per esempio  $p_i=1/N$ .

## 1.2.2 Negentropy

L'entropia di Shannon è una misura statistica del disordine relativo ad un insieme più o meno ordinato, mentre l'entropia termodinamica di un sistema è proporzionale alla capacità dello stesso di produrre lavoro.

Il secondo principio della termodinamica o di Carnot, esprime il passaggio dell'energia da un livello superiore (energia elettrica o meccanica) a un livello intermedio (energia chimica) a un livello inferiore (energia di calore). Se un sistema subisce un incremento di calore  $dQ$  allora il corrispondente incremento di entropia  $dS$  è ormai noto che può essere espresso come:  $dS = dQ/T$ .

Conviene a questo punto richiamare i primi due principi della termodinamica il primo sulla conservazione dell'energia  $W - Q = 0$  e il secondo, scritto in termini entropici,  $dS \geq 0$ . Ciò mostra che l'entropia può sempre essere incrementata e i sistemi possono tendere nel tempo ad uno stato di perfetta omogeneità (disordine perfetto) in cui, di conseguenza, non è possibile produrre più lavoro. Tale concetto è esattamente l'opposto di quello esplicitato in fisica da Maxwell (1872) ovvero che l'entropia di un sistema è il lavoro meccanico che il sistema stesso può svolgere senza scambi di calore o variazioni di volume; in altri termini quando la temperatura e la pressione diventano costanti allora l'entropia del sistema si esaurisce.

Brillouin (1956) ha riscritto l'entropia di Maxwell, conservando l'espressione dell'entropia di Shannon, in termini di negentropy: un sistema isolato contiene negentropy se ha la possibilità di compiere lavoro meccanico o elettrico. Se un sistema non è ad una temperatura uniforme, allora contiene una certa quantità di negentropy e può ancora produrre lavoro. Marchand spiegò che l'entropia significa omogeneità e disordine e la negentropy significa eterogeneità e ordine in un sistema, ovvero vale la relazione:

$$\text{negentropy} = - \text{entropia}$$

L'entropia è sempre positiva e ha un massimo, mentre, di conseguenza, la negentropy è sempre negativa o al massimo è nulla. Si noti che la capacità da parte di un sistema di produrre lavoro non è misurabile attraverso la sua energia che è una costante, ma attraverso la negentropy;

per esempio un sistema perfettamente disordinato, con una temperatura costante contiene una certa quantità di energia ma è incapace di produrre alcun lavoro poiché la sua entropia è massima e la sua negentropia è al minimo. Si può anche concludere che l'informazione (o disordine) e la negentropia (o ordine) sono interscambiabili.

L'acquisizione di informazioni si traduce in un aumento di entropia e in una diminuzione di negentropia; parimenti a una diminuzione di entropia corrisponde un aumento di negentropia.

### 1.2.3 Entropia esponenziale

Se il guadagno in termini di informazioni che si ha da un evento che si verifica con una probabilità  $p_i$  è definito dalla seguente espressione (1.8) che si può riscrivere come segue:

$$G(p) = \Delta I = \exp[(1 - p_i)] \quad (1.12)$$

allora l'entropia esponenziale, definita da Pal & Pal (1991a), può essere espressa come segue:

$$H = E(\Delta I) = \sum_{i=1}^N p_i \exp[(1 - p_i)] \quad (1.13)$$

L'entropia definita dalla (1.12) possiede alcune interessanti proprietà. Per esempio seguendo Pal & Pal (1991a), l'equazione (1.12) è definita per tutte le  $p_i$  comprese tra 0 e 1, è continua in questo intervallo e, come è ovvio, possiede infiniti valori. All'aumentare di  $p_i$ ,  $\Delta I$  diminuisce esponenzialmente. Inoltre l'entropia  $H$  definita dalla (1.13) è massima quando tutte le  $p_i$  per ogni  $i$  sono uguali tra loro. Pal & Pal (1992) hanno matematicamente dimostrato queste e altre proprietà. Questa entropia, che non è molto diversa dall'entropia di Shannon, è stata usata da Pal & Pal (1991b) e da Pal & Bedzek (1994) al trattamento delle immagini in termini di individuazione dei campioni e creazione di funzioni di estrazione e di valutazione.

### 1.2.4 Entropia di Tsallis

Tsallis (1988) propose la seguente formulazione che esprime l'acquisizione delle informazioni da un evento che si verifica con una probabilità  $p_i$ :

$$G(p) = \Delta I = \frac{k}{q-1} [(1 - p_i^{q-1})] \quad (1.14)$$

dove  $k$  è una costante convenzionalmente positiva, e  $q$  è un numero qualsiasi. L'entropia di Tsallis può, come sempre, essere definita come il valore atteso della funzione di guadagno espressa dalla (1.14):

$$H = E(\Delta I) = \frac{k}{q-1} \sum_{i=1}^N p_i [(1 - p_i^{q-1})] \quad (1.15)$$

L'equazione (1.15) mostra che  $H$  è sempre maggiore o uguale a zero. Questa entropia può essere considerata una generalizzazione dell'entropia di Shannon o di Boltzmann-Gibbs. L'entropia di Tsallis gode di alcune interessanti proprietà che ha in comune con quella di Shannon. La (1.15) raggiunge il suo massimo quando tutte le probabilità sono uguali. Essa è pari a zero quando  $N=1$ , ovvero quando esiste un solo evento, oppure quando ci sono molti eventi di cui solo uno ha probabilità di accadimento non nulla. Per  $q$  che tende a 1 essa tende a diventare l'entropia di Shannon.

### 1.2.5 Entropia di Renyi

Nel 1961 Renyi (1961) definì l'entropia come:

$$H(X) = \frac{1}{1-a} \ln \frac{\sum_{i=1}^N p_i^a}{\sum_{i=1}^N p_i}, a \neq 1, a > 0 \quad (1.16)$$

Questa è un'entropia di ordine  $a$ . Se  $a$  tende ad uno l'equazione (1.16) tende all'entropia di Shannon. Perciò l'entropia di Shannon può essere considerata come un caso particolare dell'entropia di Renyi. L'entropia di Kapur (Kapur, 1989) è un'ulteriore generalizzazione dell'entropia di Renyi e ha la seguente espressione:

$$H(X) = \frac{1}{1-a} \ln \frac{\sum_{i=1}^N p_i^a}{\sum_{i=1}^N p_i^b}, a \neq 1, b > 0, a+b-1 > 0 \quad (1.17)$$

Se  $b = 1$ , l'equazione (1.17) si riduce alla precedente (1.16). Per  $b = 1$  e  $a = 0$  l'equazione si riduce a  $\log N$  che è la classica misura di entropia totale anche detta misura di Hartley (Hartley, 1928).

### 1.3 Entropia, informazione e incertezza

L'informazione può essere intesa come la libertà di qualcuno nel fare una scelta piuttosto che un'altra. I messaggi, le informazioni che si hanno a disposizione devono considerarsi, però, tutti uguali ovvero, al limite, due messaggi, uno pieno di significato e l'altro senza senso, sono equivalenti.

L'informazione si riferisce non tanto a ciò che uno dice ma a ciò che si potrebbe dire. Se esiste un'alternativa tra due messaggi e se ne deve scegliere uno solo, allora è arbitrariamente affermato che le informazioni associate a questo caso sono semplicemente l'unità che indica la quantità di libertà che si ha nell'effettuare la scelta di un messaggio. I messaggi, ovviamente, sono, in generale, di qualsiasi natura.

Se l'entropia è uguale a zero e la probabilità del generico evento  $i$ -esimo è 1 ( $p_i=1$ ) allora ad un qualsiasi altro evento  $j \neq i$  è associata una probabilità nulla ( $p_j=0$ ) e quindi l'informazione è nulla e dunque non c'è libertà di scelta; l'evento  $i$  è un evento certo e tutti gli altri sono impossibili. Quando invece si è completamente liberi di scegliere un qualsiasi evento allora  $H$  è massima; pertanto si può affermare che l'entropia aumenta all'aumentare del numero di alternative o all'aumentare dell'equiprobabilità delle alternative se il numero di alternative è fissato. In altre parole c'è una maggiore informazione se il numero di alternative tra cui scegliere è alto. Tale affermazione presenta dei risvolti anche socio-politici di evidente importanza e attualità.

Il concetto di informazione è strettamente legato al concetto di incertezza o di sorpresa. La quantità  $-\log(1/p_i)$  può essere usata per denotare analiticamente sorpresa o imprevedibilità (Watanabe, 1969). Quando tutte le probabilità degli eventi sono uguali, è impossibile stabilire che una eventualità è migliore di un'altra. Questo significa che c'è completa incertezza. Ogni informazione circa la natura di un evento, sotto certe condizioni, può fornire nuovi spunti per l'introduzione di una condizione, di un vincolo aiutando ad avvicinarsi all'esito che sarà. La massima entropia è ormai chiaro essere una misura della completa incertezza.

Si assuma che l'evento  $X = x_i$  sia un evento certo ovvero la sua probabilità di accadimento è 1,  $p_i=1$ ; ciò significa che per ogni altro evento  $j \neq i$  la  $p_j = 0$ . L'accadimento dell'evento  $X = x_i$  non desta stupore in quanto non c'è incertezza. Ora consideriamo un valore di  $x_i$  che avviene con probabilità  $p(x_i)$ . Se  $p$  è molto bassa, ad esempio 0.01, e se  $x_i$  in effetti poi si verifica, ciò desta molto stupore poiché come è chiaro al suo accadimento era connessa una bassa probabilità. Ciò significa che l'effettiva osservazione di questo evento ha un alto contenuto informativo. Se  $p_i$  tende a zero allora significa che l'evento è quasi impossibile; ma se si verifica allora la sorpresa sarà enorme e parimenti è il contenuto informativo che si ricava osservando tale evento o l'incertezza

connessa alla previsione di tale evento. Queste due grandezze, il contenuto informativo e, parimenti, l'incertezza, allora sono funzioni decrescenti della probabilità  $p_i$ . Più è probabile l'esito di un certo evento, minore è il contenuto informativo che si ricava dall'osservazione di tale evento. Informazione, incertezza e sorpresa sono strettamente legate; si guadagna informazione circa un evento solo se ad esso è connessa una certa incertezza e l'incertezza suggerisce che un dato evento potrebbe avere valori differenti. Un valore che si verifica con un alta probabilità ha un basso contenuto informativo e vice versa. Le informazioni guadagnate sono una misura indiretta di quanto si riduce l'incertezza o l'entropia.

Tutti questi concetti suggeriscono che l'incertezza può essere intesa come una forma di carenza di informazioni perché magari le stesse sono inaffidabili, parziali, contraddittorie, vaghe, incomplete, imprecise, errate, frammentarie o infondate.

Si consideri, per esempio, una previsione di alluvioni, relative ad un periodo di 100 anni, fatta sulla base di 20 anni di registrazioni. Tale previsione è certamente affetta da una certa incertezza, detta  $u_1$ . Se il periodo di registrazioni è di 50 anni, la previsione  $u_2$  sarà meno incerta. La riduzione di incertezza dovuta ad una più completa serie di dati è pari a  $u_1 - u_2$  che è uguale all'aumento di informazione.

Klir (2006) parla di questa incertezza come di una informazione basata sull'incertezza e spiega che questo tipo di informazione non comprende il concetto di incertezza nella sua interezza ma solo in parte. D'altro canto l'informazione è intesa a ridurre l'incertezza o rispecchia una riduzione d'incertezza. Klir (2006) chiama tale incertezza, incertezza basata sull'informazione.

#### **1.4 Tipologie di incertezza**

L'incertezza può apparire in forme diverse. Essa può apparire sia nei fenomeni stocastici che in quelli deterministici. In quelli deterministici, dato un fenomeno, si manifesta come confusione negli esiti, nei dati a disposizione o nelle relazioni tra le variabili in gioco, e solitamente può essere trattata con la logica fuzzy. L'incertezza probabilistica, invece, è associata alla probabilità relativa agli esiti di un fenomeno e all'entropia.

I modelli propri dell'ingegneria idraulica e ambientale, che esprimono le relazioni tra diverse variabili, sono costruiti per diverse finalità: la previsione, la modellazione, la pianificazione, la programmazione, il controllo, la simulazione, la stima, l'estrapolazione e il progetto. Ciascuna di queste finalità è soggetta ad una certa incertezza. In funzione dell'obiettivo, i valori, non noti, di alcune variabili vengono determinati partendo dai valori noti di altre variabili conoscendo le

relazioni che legano i due gruppi di grandezze. Se le relazioni sono uniche, il modello è deterministico, altrimenti il modello è non-deterministico e deve tenere in conto dell'incertezza. L'incertezza riguarda la finalità per la costruzione del modello e può dunque essere distinta in incertezza predittiva, incertezza postdittiva, incertezza di previsione, incertezza di diagnosi, incertezza prescrittiva, incertezza di pianificazione, incertezza di programmazione, incertezza di controllo, incertezza di simulazione, incertezza di rivelazione, incertezza di stima, di estrapolazione e di progetto. È logico che tale incertezza è incorporata all'interno del modello di descrizione. Una decisione è un'azione tra una serie di azioni possibili, presa sulla base delle singole relative conseguenze.

Per una incertezza probabilistica, il valore di  $p(x)$  rappresenta il grado di evidenza che  $x$  è, tra le tante  $x \in X$ , l'alternativa esatta. Una misura della quantità di incertezza può essere proprio l'entropia di Shannon che la esplicita attraverso la distribuzione di probabilità  $P$  di un certo numero di alternative.

### **1.5 L'entropia ed alcuni concetti idraulici e idrologici ad essa correlati**

I sistemi idrologici e ambientali sono intrinsecamente complessi e la comprensione che di essi si può avere non può essere completa. Molti dei sistemi sono completamente o parzialmente stocastici. La loro natura stocastica può essere attribuita alla casualità di uno o più dei seguenti elementi che li costituiscono: struttura del sistema (geometria), dinamica del sistema, funzioni obbligate (sorgenti o pozzi), le condizioni al contorno e iniziali. Una descrizione stocastica di questi sistemi è necessaria per una corretta valutazione dei risultati del modello e in questo la teoria dell'entropia consente lo sviluppo di una tale descrizione.

Fondamentali per la pianificazione, la progettazione, lo sviluppo, il funzionamento e la gestione di progetti ambientali e di risorse idriche sono i dati che si osservano sia sul campo che sperimentalmente, e le informazioni che ne derivano.

Le decisioni ingegneristiche relative ai sistemi idrologici sono frequentemente prese con una quantità di dati a disposizione scarsa, non adeguata. Tali decisioni potrebbero spesso essere basate sull'esperienza, su regole pratiche di progettazione, su analisi approssimate, su norme di riferimento, o su metodi probabilistici. Abbastanza spesso, non è disponibile un numero sufficiente di dati per descrivere il comportamento casuale di tali sistemi. Anche se i metodi probabilistici consentono una maggiore esplicita e quantitativa valutazione dell'incertezza, la loro maggiore difficoltà è dovuta alla mancanza di dati sufficienti o completi. Campioni di piccole dimensioni e

con un limitato numero di informazioni rendono difficile la stima delle distribuzioni di probabilità delle variabili del sistema, con i metodi tradizionali.

Laddove la scarsità dei dati è diffusa, cosa frequente, la teoria dell'entropia può essere di grande aiuto.

Ma per risolvere un problema si pone la questione di quale modello usare; infatti solitamente si possono considerare più modelli e pertanto è necessario sceglierne uno in modo adeguato. Akaike (1973) ha formulato un criterio, detto Criterio di informazione di Akaike (AIC), per scegliere il miglior modello tra tanti:

$$AIC = -2 \log (\text{maximized likelihood}) + 2k \quad (1.18)$$

dove  $k$  è il numero di parametri del modello. L'AIC fornisce un metodo per l'identificazione del modello e può essere espresso come meno due volte il logaritmo della massima verosimiglianza più due volte il numero dei parametri utilizzati per trovare il modello migliore. La massima verosimiglianza e l'entropia sono univocamente collegate. Quando ci sono diversi modelli a disposizione, quindi, dovrebbe essere scelto quello che restituisce il valore minimo di AIC. Quando la massima verosimiglianza è identica tra due modelli, dovrebbe essere scelto quello con il minor numero di parametri che poi sarà appunto quello cui corrisponde il valore minore di AIC.

### 1.5.1 Rischio ed entropia

Ci sono differenti tipi di rischio quali il rischio d'affari, quello economico, di sicurezza, d'investimento, occupazionale, ecc. Nel linguaggio comune, rischio è la possibilità di perdere qualcosa e il livello di probabilità che ciò accada. Per prendere una decisione in modo razionale c'è bisogno di esprimere in modo chiaro e quantitativo tale rischio. In generale il rischio non può essere nullo e una scelta va effettuata considerando più possibilità di rischio. Per chiarire meglio come può impostarsi una trattazione analitica di questo aspetto è utile suddividere il rischio, a parità di scenario di riferimento e quindi fissato il danno esposto, in incertezza e il pericolo (o hazard).

La nozione di rischio implica sia l'incertezza sia qualche tipo di danno o di perdita. L'incertezza riflette la variabilità dello stato di conoscenza apriori o lo stato di fiducia in una valutazione preliminare. Pertanto, il rischio è la somma di incertezza più danno.

L'hazard è comunemente definito come una fonte di pericolo e comporta una identificazione dello scenario (rottura di una diga, ad esempio) e una misura della conseguenza di questo scenario o di una misura dei danni che ne derivano. Il rischio comprende la probabilità di conversione di tale fonte in un danno effettivo, perciò il rischio è il rapporto tra pericolo e sicurezza. Aumentando le

disposizioni di sicurezza il rischio può essere attenuato ma non può mai essere nullo. Dal momento che la consapevolezza del rischio riduce il pericolo, la consapevolezza stessa è parte del controllo della sicurezza. Kaplan & Garrick (1981) hanno analizzato il rischio usando l'entropia. Luce (1960) ha dimostrato che l'entropia deve essere descritta come una misura media del rischio e non dell'incertezza.

## 1.6 Bibliografia

Akaike, H. (1973) Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Proceedings, 2nd International Symposium on Information Theory, B.N. Petrov and F. Csaki, eds., Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary.

Brillouin, L. (1956) Science and Information Theory (New York: Academic)

Denbigh, K.G. (1989) Note on entropy, disorder and disorganization. British Journal of Philosophical Science, Vol. 40, pp. 323-332.

Fast, J.D. (1968) Entropy: The Significance of the Concept of Entropy and its Application in Science and Technology. Gordon and Breach, Science Publishers Inc., New York.

Hartley, R.V.L. (1928) Transmission of information. The Bell System Technical Journal, Vol. 7, No. 3, pp. 535-563.

Kaplan, S. & Garrick, B.J. (1981) On the quantitative definition of risk. Risk Analysis, Vol. 1, No. 1, pp. 11-27.

Kapur, J.N. (1989) Maximum Entropy Models in Science and Engineering. Wiley Eastern Ltd., New Delhi, India.

Klir, G. J. (2006) Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. John Wiley & Sons, New York.

Luce, R.D., (1960) The theory of selective information and source of its behavioral applications. In: Developments in Mathematical Psychology, edited by R.D. Luce, The Free Press, Glencoe.

Marchand, B. (1972) Information theory and geography. Geographical Analysis, Vol. 4, pp. 234-257.

Maxwell J. C. (1872) Theory of Heat

Pal, N.R. & Pal, S.K. (1991a) Entropy: A new definition and its applications. IEEE: Transactions on Systems, man, and Cybernetics, Vol. 21, No. 5, pp. 1260-1270.

Pal, N.R. & Pal, S.K. (1991b) Image model, Poisson distribution and object extraction. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol. 5, No. 3, pp. 459-483.

- Pal, N.R. & Pal, S.K. (1992) Some properties of the exponential entropy. *Informational Sciences*, Vol. 66, pp. 119-137.
- Pal, N.R. & Bezdek, J.C. (1994) Measuring fuzzy uncertainty. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 2, No. 2, pp. 107-118.
- Prigogine, I. (1989). What is entropy? *Naturwissenschaften*, Vol. 76, pp. 1-8.
- Renyi, A. (1961) On measures of entropy and information. *Proceedings, 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, Vol. 1, pp. 547-561.
- Rosenthal, H. and Binia, J. (1988) On the epsilon entropy of mixed random variables. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 34, No. 5, pp. 1110-1114.
- Shannon, C.E. (1948) A mathematical theory of communications, I and II. *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379-443.
- Tsallis, C. (1988) Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 32, No. ½, pp. 479-487.
- Watanabe S. (1969) *Knowing and Guessing*, John Wiley, New York
- Zurek, W.H. (1989) Algorithmic randomness and physical entropy. *Physical Review A*, Vol. 40, No. 8, pp. 4731-4751.

## **CAPITOLO 2**

### **TRACCIAMENTO DEI PROFILI DI VELOCITÀ DI UNA CORRENTE SECONDO IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA ENTROPIA**

#### **2.1 Introduzione**

Nello studio di alcuni aspetti dell'idraulica quali, ad esempio, la distribuzione di velocità o la distribuzione della concentrazione dei sedimenti di una corrente esistono sempre delle incertezze legate alla definizione delle variabili o dei parametri che si usano nei modelli.

Tali incertezze sono principalmente dovute a due ragioni la prima è che il valore di una grandezza fisica è, per sua natura, un valore affetto da casualità e, pertanto, non può ricondursi ad un valore deterministico; la seconda è relativa al fatto che può essere di difficile o, talvolta di impossibile, interpretazione perché, ad esempio, difficilmente misurabile.

I tradizionali approcci allo studio dell'idraulica, che seguono le note leggi della conservazione della massa o dell'energia sono approcci di tipo deterministico che non contemplano tale incertezza. Nonostante gli sviluppi della ricerca fatti nel campo dell'idraulica, utilizzando un approccio deterministico, esistono problemi e argomenti oscuri che ancora attendono una soluzione. Tale soluzione potrebbe essere trovata seguendo la strada dell'approccio probabilistico (Chiu, 1987).

Il concetto di entropia ben si lega con la probabilità, basti pensare alla definizione che della stessa viene data nella teoria dell'informazione (Shannon, 1948); l'introduzione di tale concetto in idraulica crea un ponte tra le consolidate conoscenze, figlie di un approccio deterministico, e quell'approccio stocastico di cui si necessita.

Nel presente capitolo viene effettuata una sintesi delle conoscenze già note in letteratura relative all'applicazione del concetto di entropia all'idraulica, per la determinazione dei profili di velocità di una corrente. Vengono illustrate dapprima le basi, i presupposti teorici dai quali si parte e, successivamente, alcune applicazioni ai casi reali.

#### **2.2 L'entropia di Shannon**

Il concetto di entropia è già consolidato ed è già stato usato in meccanica statistica e nella teoria dell'informazione; in quest'ultima scienza l'entropia è quantitativamente definita in termini di probabilità, per un sistema discreto, come (Shannon, 1948):

$$H(X) = -\sum_j p(X_j) \ln p(X_j) \quad (2.1)$$

in cui:  $p(X_j)$  è la funzione massa di probabilità di un sistema che si trova nello stato  $X_j$  che appartiene all'insieme  $\{X_j, j=1, 2, \dots\}$ .

Secondo il concetto di entropia, in una condizione di equilibrio stabile un sistema tende a massimizzare l'entropia sotto certi fissati vincoli.

Per dare un senso fisico al concetto di entropia sia  $p(X_j|X^{\wedge}_j)$  la probabilità a posteriori che un sistema ha di trovarsi in uno stato  $X_j$  dopo aver effettuato un'estrazione che indica che il sistema si trova nello stato  $X_j$ .  $X^{\wedge}_j$  è una stima del valore  $X_j$  il quale può essere affetto da un errore tale che lo stato reale del sistema è  $X_j + v_j$  dove  $v_j$  è l'errore connesso alla stima  $X^{\wedge}_j$  di  $X_j$ .

In accordo con la teoria dell'informazione, il contenuto dell'informazione di un dato è definito come:

$$\ln \frac{p(X_j/\hat{X}_j)}{p(X_j)} \quad (2.2)$$

Se l'estrazione ha una certa attendibilità,  $p(X_j|X^{\wedge}_j)$  dovrebbe essere più grande di  $p(X_j)$ . Maggiore è il rapporto di  $p(X_j|X^{\wedge}_j)$  su  $p(X_j)$ , maggiore è il contenuto informativo dei dati.

Se la misura è esatta e quindi l'errore della misura è nullo allora  $p(X_j|X^{\wedge}_j)$  è pari ad uno e l'informazione dei dati come definito dall'equazione (2) diventa  $-\ln p(X_j)$ .

Siccome  $0 \leq p(X_j) \leq 1$ , minore è la probabilità  $p$ , maggiore è il contenuto informativo dei dati. Pertanto, l'entropia  $H$  come definita dalla (2.1) rappresenta il contenuto informativo medio per estrazione.

Se la variabile  $X$  è continua, l'entropia è espressa, invece che dalla (1) da:

$$H(X) = -\int p(X) \ln p(X) dX \quad (2.3)$$

in cui  $p(X)$  è la funzione densità di probabilità e quindi  $p(X)dX$  esprime la probabilità che la variabile di stato sia compresa nell'intervallo  $X, X+dX$ .  $p(X)$  di per sé non è una probabilità pertanto il suo valore potrebbe essere maggiore dell'unità e, di conseguenza,  $\ln p(X)$  potrebbe essere positivo.

Pertanto l'entropia per una distribuzione continua, come definita dall'equazione (2.3), potrebbe diventare negativa al contrario del caso di distribuzione discreta in cui l'entropia definita dall'equazione (1) deve essere positiva dal momento che  $p(X_j)$  è una probabilità e, dunque,  $\ln p(X_j)$  è sempre negativo.

Entropia massima significa massimo contenuto di informazioni circa i dati ottenuti sulla variabile di stato  $X$ , che, in accordo con le equazioni (2.1) e (2.3), è, a sua volta, equivalente alla massima incertezza che si ha su  $X$  prima di aver effettuato misurazioni.

Quindi, una funzione distribuzione di probabilità (a priori) uniforme oltre i limiti di  $X$  dovrebbe dare massima entropia.

In realtà, a causa di diversi vincoli, la probabilità di distribuzione spesso non può essere uniforme.

L'entropia (come definita dalle equazioni (2.1) e (2.3)) è una misura dell'incertezza, della casualità o di quanto una distribuzione di probabilità a priori sia vicina all'essere uniforme.

Essa è pari a zero in un caso puramente deterministico in cui la funzione massa di probabilità  $p(X_i) = 1$  e  $p(X_j) = 0$  per ogni  $i$  diverso da  $j$ .

La massimizzazione dell'entropia di un sistema renderà la funzione distribuzione di probabilità il più uniforme possibile nel rispetto dei vincoli.

La legge di probabilità che governa un sistema e la corrispondente intensità d'entropia dipenderà, dunque, dai vincoli imposti.

Per chiarire ulteriormente il concetto di entropia, si prenda in considerazione un sistema idraulico e si supponga che una persona voglia stimare lo stato in cui esso si trova. In accordo con il concetto di entropia il sistema tende a massimizzare l'entropia (massimizzazione dell'incertezza, della casualità o del disordine). La persona dovrebbe usare il principio di massimizzazione dell'entropia per la modellazione della distribuzione di probabilità a priori di possibili stati del sistema. I dati potranno poi essere raccolti in modo da essere utilizzati per stimare la distribuzione di probabilità a posteriori, per migliorare la distribuzione di probabilità a priori.

Il parametro di stima coinvolto nel processo riguarda i "residui" o le deviazioni della distribuzione di probabilità (adattata) rispetto ai dati a disposizione. Vari metodi sono disponibili per la stima della minima incertezza come il metodo dei minimi quadrati. In accordo con la definizione di entropia, ciò è equivalente alla minimizzazione dell'entropia della distribuzione di probabilità dei residui. Pertanto il principio della minimizzazione dell'entropia dovrebbe anche essere un'alternativa al metodo della stima dei parametri di una funzione rappresentativa di un fenomeno.

Il metodo del calcolo delle variazioni potrebbe essere applicato per determinare  $p(X)$  nell'eq. (3) che assume la forma generale:

$$H(X) = \int_a^b I(X, p) dX \quad (2.4)$$

Per massimizzare (o minimizzare) l'entropia  $H(X)$  soggetta a un numero  $n$  di vincoli

$$\int_a^b \phi_i(X, p) dX = E_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

la forma della funzione densità di probabilità  $p(X)$  può essere ottenuta risolvendo:

$$\frac{\partial I(X, p)}{\partial p} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i(X, p)}{\partial p} = 0 \quad (2.6)$$

Nell'eq. (2.6)  $\lambda_i$  sono i moltiplicatori di Lagrange che possono essere determinati sostituendo la  $p(X)$  ottenuta, nel sistema di equazioni vincolari (2.5).

### 2.3 Distribuzione di velocità lungo una verticale

Si consideri un canale di profondità  $D$  con deflusso a pelo libero in condizioni di moto uniforme. Si ipotizzi che la velocità media delle particelle lungo una generica verticale cresca monotonicamente lungo la direzione verticale passando da zero in corrispondenza del fondo alveo al valore massimo  $u_{max}$  in corrispondenza della superficie libera.

In tali condizioni, scelta una verticale,  $u$  è la velocità ad una distanza  $y$  dal fondo e pertanto ad una certa distanza minore di  $y$ , la velocità è minore di  $u$ .

Assumendo che tutti i valori di  $y$  compresi tra 0 e  $D$  sono ugualmente probabili, si può affermare che la probabilità che la velocità sia uguale o minore di  $u$  è pari a  $y/D$  o, in altre parole, che la funzione di distribuzione cumulata è:

$$F(u) = \frac{y}{D} \quad (2.7)$$

Di conseguenza la funzione densità di probabilità è:

$$p(u) = \left( D \frac{du}{dy} \right)^{-1} \quad (2.8)$$

Inoltre dalla definizione di funzione densità di probabilità si può scrivere che:

$$p(u) = \frac{dF(u)}{du} = \frac{dF(u)}{dy} \frac{dy}{du} \quad (2.9)$$

Si noti che  $p(u) du$  è la probabilità che la velocità sia compresa nell'intervallo  $u, u + du$  e, pertanto, che la funzione di densità  $p(u)$  stessa non è una probabilità in sé e ha la dimensione di  $1/u$ .

Si passi ora a definire i vincoli della distribuzione di probabilità.

La funzione di densità  $p(u)$  da identificare deve soddisfare il vincolo

$$\int_0^{u_{max}} p(u) du = 1 \quad (2.10)$$

dove  $u_{max}$  è il massimo valore di  $u$ , che si attinge sulla superficie dell'acqua ovvero quando  $y = D$ .

Un vincolo aggiuntivo relativo alla distribuzione di velocità è il valore medio di  $u$  che può essere espresso come:

$$\int_0^{u_{\max}} u p(u) du = \bar{u} \quad (2.11)$$

nel quale  $\bar{u}$  è la media della distribuzione di probabilità relativa alle velocità. Conviene soffermarsi rapidamente su questo termine che, in linea di principio, non coincide con la media dei valori di velocità appartenenti al dominio che si può indicare con  $u_{med}$  (che analiticamente può scriversi come  $I/A \int_A u dA$  dove con A si indica genericamente l'estensione del dominio). Nel caso in esame, però queste due quantità coincidono perché la  $u_{med}$  può scriversi come:

$$u_{med} = \frac{I}{D} \int_0^D u dy \quad (2.12)$$

e, tenendo presente la definizione (2.8) di  $p(u)$  la (2.12) diventa:

$$\bar{u} = \int_0^{u_{\max}} u p(u) du = \int_0^{u_{\max}} u \frac{I}{D} \frac{dy}{du} du = \int_0^D u \frac{I}{D} dy = u_{med} \quad (2.13)$$

Nel caso di domini differenti da quello monodimensionale preso in esame tale uguaglianza non è garantita.

Per identificare la funzione densità di probabilità  $p(u)$ , potrebbe essere applicato il principio di massimizzazione dell'entropia.

L'entropia  $H$  è espressa da:

$$H(u) = - \int_0^{u_{\max}} p(u) \ln p(u) du \quad (2.14)$$

Volendo massimizzare l'entropia espressa dalla (2.14) soggetta ai vincoli rappresentati dall'equazioni (2.10) e (2.11), è possibile ricorrere alla teoria del calcolo delle variazioni.

L'applicazione di tale tecnica restituisce la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial p} [- p(u) \cdot \ln p(u) + \lambda_1 \cdot p(u) + \lambda_2 \cdot u \cdot p(u)] = 0 \quad (2.15)$$

da cui sviluppando si ottiene:

$$-\frac{\partial}{\partial p} p(u) \ln p(u) + \lambda_1 \frac{\partial p(u)}{\partial p(u)} + \lambda_2 \frac{\partial u p(u)}{\partial p(u)} = 0 \quad (2.16)$$

da cui semplificando:

$$-[1 + \ln p(u)] + \lambda_1 + \lambda_2 u = 0 \quad (2.17)$$

dalla quale è possibile ricavare l'espressione della funzione densità di probabilità:

$$p(u) = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \quad (2.18)$$

Sostituendo l'equazione (2.18) nella (2.10) si ottiene:

$$\int_0^{u_{\max}} \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) du = 1 \quad (2.19)$$

o, analogamente, integrando:

$$\lambda_2 = \exp(\lambda_1 - 1) \cdot (\exp(\lambda_2 u_{\max}) - 1) \quad (2.20)$$

Sostituendo la (2.19) nell'equazione (2.11) relativa al vincolo rimanente si ottiene:

$$\int_0^{u_{\max}} u \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) du = \bar{u} \quad (2.25)$$

o, analogamente, integrando:

$$\bar{u} = \frac{u_{\max} \exp(\lambda_2 u_{\max})}{\exp(\lambda_2 u_{\max}) - 1} - \frac{1}{\lambda_2} \quad (2.22)$$

L'espressione dell'entropia  $H(u)$  si ottiene sostituendo le equazioni (2.20) e (2.22) nell'equazione (2.14):

$$H(u) = 2 - \lambda_1 - u_{\max} \exp(\lambda_1 - 1 + u_{\max} \lambda_2) \quad (2.23)$$

Uguagliando i secondi membri della (2.8) e della (2.18) che rappresentano  $p(u)$  si ottiene:

$$\exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \frac{du}{dy} = \frac{1}{D} \quad (2.24)$$

che rende la velocità  $u$  dipendente dalla variabile spaziale  $y$ .

Usando l'equazione (2.20), ponendo la condizione al contorno  $u = 0$  per  $y = 0$ , l'integrazione dell'equazione (2.24) restituisce la seguente equazione:

$$u = \frac{1}{\lambda_2} \ln \left( 1 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_1 - 1}} \frac{y}{D} \right) \quad (2.25)$$

che rappresenta l'espressione della velocità  $u$  lungo una verticale relativa alla funzione densità di probabilità  $p(u)$  fissata ed espressa dalla (2.8).

Se la velocità media  $\bar{u}$  e la velocità massima  $u_{\max}$  sono grandezze note (ad esempio sono misurate in una sezione fluviale) è possibile stimare  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tramite le (2.20) e (2.22), altrimenti, se sono noti i profili di velocità, è possibile stimare i due parametri  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  mediante, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati.

Il termine  $\exp(\lambda_1 - 1)$ , con riferimento alla (2.18), è il valore della funzione densità di probabilità  $p(u)$  per  $u = 0$ , ed è legato a  $\lambda_2$  e  $u_{\max}$  tramite l'equazione (2.20); pertanto l'equazione (2.25) può essere espressa come:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \right] \quad (2.26)$$

dove  $M = \lambda_2 u_{\max}$  è un parametro adimensionale che prende il nome di parametro entropico. Facendo riferimento alla (2.18) è possibile esprimere la probabilità nei due casi limite  $u = u_{\max}$  e  $u = 0$ :

$$\begin{aligned} p(u = u_{\max}) &= \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u_{\max} - 1) \\ p(u = 0) &= \exp(\lambda_1 - 1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

accorpare le due espressioni e riscrivendo si ottiene la seguente espressione di  $M$ :

$$M = \lambda_2 u_{\max} = \ln \frac{p(u_{\max})}{p(0)} \quad (2.28)$$

che, facendo riferimento all'espressione (2.8), diventa, anche:

$$M = \ln \frac{\left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}}{\left( \frac{du}{dy} \right)_{y=D}} \quad (2.29)$$

Pertanto il parametro  $M$  può essere interpretato come una misura dell'uniformità delle distribuzioni di probabilità (dalla (2.28)) e di velocità (dalla (2.29)).

D'altra parte dividendo entrambi i membri della (2.22) per  $u_{\max}$  si ottiene (Chiu, 1988):

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{\exp(\lambda_2 u_{\max})}{\exp(\lambda_2 u_{\max}) - 1} - \frac{1}{u_{\max} \lambda_2} \quad (2.30)$$

la quale, tenendo presente la definizione di  $M$  e la (2.20) si può riscrivere come:

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{\exp(M)}{\exp(M) - 1} - \frac{1}{M} \quad (2.31)$$

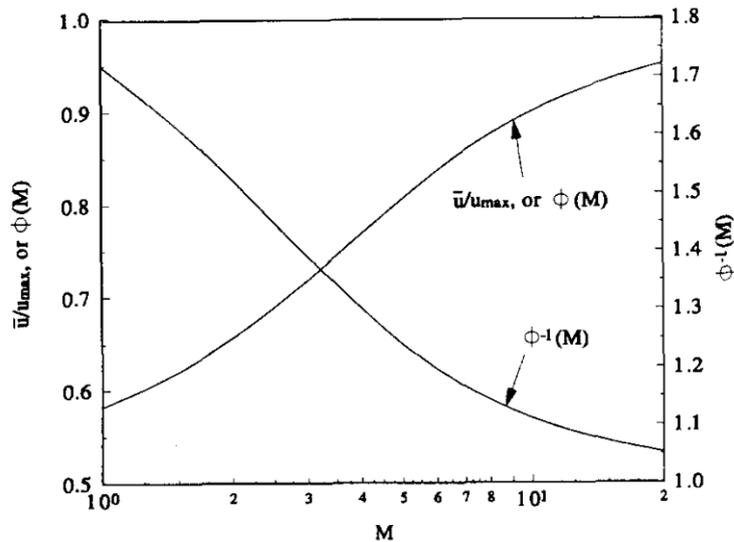
L'equazione (2.30) esprime il legame di linearità che esiste tra la velocità media e la velocità massima espresso sinteticamente dalla seguente equazione:

$$\bar{u} = \Phi(M) u_{\max} \quad (2.32)$$

dove  $\Phi(M)$  è, necessariamente:

$$\Phi(M) = \frac{\exp(M)}{\exp(M) - 1} - \frac{1}{M} \quad (2.33)$$

Per avere un'idea dell'andamento di questa funzione in Fig. 2.1 sono tracciate le curve  $\bar{u}/u_{\max}$  o  $\Phi$  in funzione di  $M$  congiuntamente all'inversa  $u_{\max}/\bar{u}$  o  $\Phi^{-1}$  sul cui significato si discuterà nei paragrafi a venire.



**Fig. 2.1** andamento della funzione  $\bar{u}/u_{max}(M)$  o  $\Phi(M)$ , e della sua inversa  $\Phi^{-1}(M)$  (Chiu & Said, 1995)

Il parametro entropico  $M$  riveste un ruolo centrale, sia dal punto di vista concettuale sia dal punto di vista operativo, per il calcolo dei profili di velocità. Esso analiticamente è legato al solo rapporto  $\bar{u}/u_{max}$  ma da alcune indagini, anche sperimentali, è stato osservato che può essere un indice sintetico per caratterizzare una sezione idrica di un corso d'acqua al pari, se non meglio, di un coefficiente di scabrezza o di conducibilità idraulica. Le considerazioni in merito necessitano di una descrizione estesa e ordinata che troverà spazio, dopo la trattazione di letteratura dei domini bidimensionali, in uno dei seguenti paragrafi.

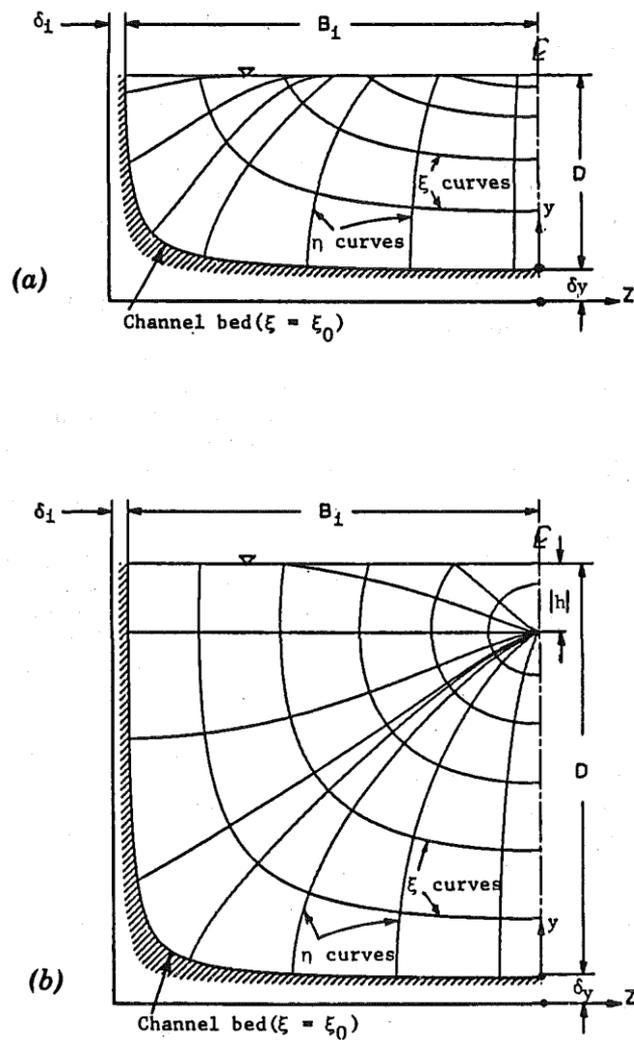
## 2.4 Distribuzione di velocità in un dominio bidimensionale

In un canale naturale non molto largo la velocità media temporale varia in modo apprezzabile sia nella direzione verticale che in quella orizzontale. Le isotachie, ovvero le curve luogo dei punti a egual velocità, hanno una forma influenzata dall'effetto combinato delle due variazioni e il punto a velocità massima può trovarsi sia sulla superficie, sia al di sotto di essa.

### 2.4.1 Derivazione dell'espressione della velocità in un dominio 2D

Per modellare la distribuzione di velocità è opportuno cambiare il sistema di coordinate, rispetto al caso precedente di variazione monodimensionale, passando ad un sistema di coordinate curvilinee  $\xi, \eta$  come quello rappresentato in Fig. 2.2. Il vantaggio di usare questo sistema di coordinate sta nel fatto che vi è una correlazione biunivoca diretta tra velocità e coordinata  $\xi$ ,

ovvero ad ogni valore di  $\xi$  corrisponde uno e un solo valore di velocità e viceversa. Le coordinate  $\eta$  rappresentano le traiettorie ortogonali alle isotachie.



**Fig. 2.2** Schema della distribuzione delle velocità e sistema di coordinate curvilinee. (a) velocità massima sul pelo libero; (b) velocità massima al di sotto del pelo libero (Chiu, 1988)

È chiaro che, però, avendo introdotto un nuovo sistema di coordinate, diventa necessario conoscere le equazioni di trasformazione dal sistema cartesiano al sistema di coordinate curvilinee, in particolare, basta conoscere l'equazione che lega  $\xi$  alle coordinate cartesiane  $y$  e  $z$  per poi ricavare da questa quella relativa ad  $\eta$ . Conoscere tale equazione può presentare qualche difficoltà, come si vedrà in seguito.

Ci si soffermi ora sullo schema di riferimento di Fig. 2.2 per meglio chiarire l'impostazione del problema. Il canale di riferimento ha altezza massima pari a  $D$ , larghezza in superficie pari a  $B_1$ , il punto a velocità massima si trova a una profondità al di sotto del pelo libero definita  $h$  che può

essere, quindi, un valore non minore di zero. Il valore di  $\xi$  può variare tra  $\xi_0$ , che rappresenta il contorno del canale (sponde e fondo), e  $\xi_{\max}$  che rappresenta la isotachia a velocità massima.

Il valore di velocità  $u$ , pertanto, può variare tra zero quando  $\xi$  vale  $\xi_0$  e  $u_{\max}$  quando  $\xi$  vale  $\xi_{\max}$  cosa che può accadere sulla superficie o al di sotto di essa. La velocità, pertanto, aumenta monotonamente al crescere di  $\xi$  ma ciò non vuol dire che accada lo stesso al variare della coordinata verticale  $y$ , ovvero spostandosi, fissata un ascissa  $z$ , dal fondo verso la superficie. In altre parole, si può affermare che, per qualsiasi valore inferiore a  $\xi$ , cui corrisponde una velocità  $u$ , il valore di velocità che si riscontra è minore di  $u$ .

Potrebbe esistere una espressione deterministica, la si chiami  $G$ , che lega la velocità  $u$  alla coordinata curvilinea  $\xi$  (Chiu, 1988):

$$u = G(\xi) \quad (2.34)$$

Se invece si cerca una relazione probabilistica bisogna considerare che  $\xi$  e  $u$  siano due variabili aleatorie ciascuna delle quali è caratterizzata da una propria funzione densità di probabilità, rispettivamente  $q$  e  $p$ . Si supponga che tutti i valori di  $\xi$  compresi tra  $\xi_0$  e  $\xi_{\max}$  abbiano uguale probabilità di accadere, ovvero che la funzione densità di probabilità  $q$  sia uniforme nell'intervallo  $\xi_0 < \xi < \xi_{\max}$ , ovvero sia:

$$q(\xi) = \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (2.35)$$

e valga zero al di fuori dell'intervallo su specificato.

Inoltre, la probabilità che la velocità sia minore o uguale a  $u$ , ovvero la funzione di distribuzione cumulata  $F$  di  $u$ , può essere derivata come segue:

$$F(u) = \int_0^u p(u) du = \int_0^u p[G(\xi)] du = \int_{\xi_0}^{G(u)^{-1}} q(\xi) d\xi = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (2.36)$$

Ciò significa che, se  $\xi$  è casualmente preso tra  $\xi_0$  e  $\xi_{\max}$  e si ricava il relativo valore di  $u$ , allora la probabilità che la velocità sia compresa nell'intervallo  $u, u+du$  è uguale a  $p(u)du$ .

Tenendo presente la (2.36) e ricordando la definizione di funzione densità di probabilità si ricava:

$$p(u) = \frac{dF(u)}{du} = \frac{dF(u)}{d\xi} \frac{d\xi}{du} = \left[ (\xi_{\max} - \xi_0) \frac{du}{d\xi} \right]^{-1} \quad (2.37)$$

Le equazioni (2.36) e (2.37) indicano che, una volta che le equazioni di  $p(u)$  e  $\xi$  sono state determinate, può essere determinata una equazione di distribuzione di velocità che esprime la

variazione di  $u$  con  $\xi$ , e, quindi, nota l'equazione di trasformazione delle coordinate, che lega  $u$  a  $z$  e  $y$ .

Analogamente a quanto fatto per il caso monodimensionale precedentemente illustrato, è valida l'equazione (2.14) che esprime l'entropia in un dominio continuo, sotto i vincoli espressi dalle equazioni (2.10), (2.11). Di conseguenza è inutile riportare i passaggi, che sono analoghi ai precedenti e che restituiscono una espressione della  $p(u)$  che è la (2.18).

Uguagliando i secondi membri della (2.37) e della (2.18) che rappresentano  $p(u)$  si ottiene:

$$\exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (2.38)$$

Usando l'equazione (2.20), ponendo la condizione al contorno  $u = 0$  per  $\xi = 0$ , l'integrazione dell'equazione (2.38) restituisce la seguente equazione:

$$u = \frac{1}{\lambda_2} \ln \left( 1 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_1 - 1}} \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right) \quad (2.39)$$

Che, può essere riscritta, ricordando la definizione analitica del parametro entropico  $M$ , come segue:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{M} \ln \left( 1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right) \quad (2.40)$$

La (2.40) esprime la variazione di velocità in un dominio bidimensionale in funzione della coordinata curvilinea  $\xi$ , noto il valore del parametro entropico  $M$  di cui si dirà nel seguito.

È necessario dunque per rendere applicabile la (2.40) conoscere qual è il legame che esiste tra la generica isotachia  $\xi$  e le coordinate cartesiane nel dominio  $z, y$ .

## 2.4.2 Espressione delle isotachie e posizione delle velocità massima e media

La distribuzione delle velocità nella sezione trasversale di un canale a pelo libero può essere ben descritto dalle isotachie, dal punto in cui si attinge la velocità massima, e da quello in cui si attinge la velocità media.

Certamente, l'equazione rappresentativa delle isotachie può avere diverse espressioni, quella proposta da Chiu & Lin (1983), e riportata anche da Chiu & Chiou (1986) è la seguente:

$$\xi = Y(1 - Z)^{\beta_i} \exp(\beta_i Z - Y + 1) \quad (2.41)$$

in cui:

$$Y = \frac{y + \delta_y}{D + \delta_y + h} \quad (2.42)$$

$$Z = \frac{|z|}{B_i + \delta_i} \quad (2.43)$$

Il termine  $B_i$  per  $i$  uguale o a 1 o a 2 è la distanza trasversale sulla superficie dell'acqua tra l'asse  $y$  e, o la riva sinistra, o la riva destra;  $z$  è l'ascissa e  $y$  l'ordinata con asse rivolto verso l'alto e passante per il punto a velocità massima;  $h$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_i$  e  $\beta_i$  sono coefficienti che caratterizzano la geometria delle isotachie. Il coefficiente  $h$  può variare tra  $-D$  e  $+\infty$ ; quando è maggiore di zero  $h$  non ha alcun particolare significato fisico, ma è semplicemente un coefficiente che caratterizza le isotachie nel caso in cui la velocità massima si attinga sul pelo libero (Fig. 2.1(a)). Nel caso in cui  $h$  è minore di zero, invece, ovvero per tutti quei valori tra  $-D$  e zero, il suo valore assoluto rappresenta la profondità, al di sotto del pelo libero, alla quale si attinge il valore  $u_{max}$  (Fig. 2.1(b)).

La pendenza di una isotachia è espressa dalla seguente derivata ottenuta dalla (2.41):

$$s_\xi = \frac{dy}{d|z|} = \beta_i \frac{D + \delta_y + h}{B_i + \delta_i} \frac{YZ}{(1-Y)(1-Z)} \quad (2.44)$$

I termini  $Y$ ,  $Z$  e  $(1-Z)$  sono sempre positivi. Per  $h > 0$ , o per  $h < 0$  e  $y < D+h$ , anche  $(1-Y)$  è maggiore di zero, ovvero  $Y$  è minore di 1, e quindi la pendenza dell'isotachia è maggiore o uguale a zero, tendendo a zero all'aumentare di  $z$ . Quando  $h < 0$ , invece, la  $u_{max}$  si attinge al di sotto del pelo libero e per  $y$  compresa tra  $D+h$  e  $D$  vale  $Y > 1$  e quindi  $s_\xi \leq 0$ , ovvero le isotachie tendono a curvare verso l'asse  $y$ . Se  $h = 0$  le isotachie sono perpendicolari alla superficie dell'acqua.

I parametri dell'equazione (2.41) possono essere stimati direttamente se sono note le misure di velocità o, indirettamente, a partire da caratteristiche come la portata, la pendenza, la scabrezza, e la forma della sezione del canale.

Se si hanno a disposizione misure di velocità si possono calibrare i parametri attraverso, ad esempio, il metodo della minimizzazione degli scarti. D'altra parte, invece, i metodi indiretti (Chiu & Chiou, 1986) si basano su tecniche di simulazione che possono essere usate per generare un certo numero di possibili distribuzioni di velocità al variare, in un ampio intervallo, di caratteristiche quali la portata, la pendenza, la scabrezza, e la forma del canale.

Nelle Figg. 2.3 e 2.4 sono riportati, a titolo esemplificativo, i risultati grafici (Chiu e Chiou, 1986) dell'applicazione di un metodo indiretto per la determinazione rispettivamente del parametro  $\beta_i$  e  $\delta_y$ , per una sezione rettangolare con pendenza pari a 0.0016, al variare del rapporto di forma  $B/D$  (rapporto base altezza) e del coefficiente di scabrezza di Manning  $n$ . Come propongono gli autori, grafici analoghi a quelli presentati nella nota possono essere realizzati a mezzo di simulazioni numeriche analoghe.

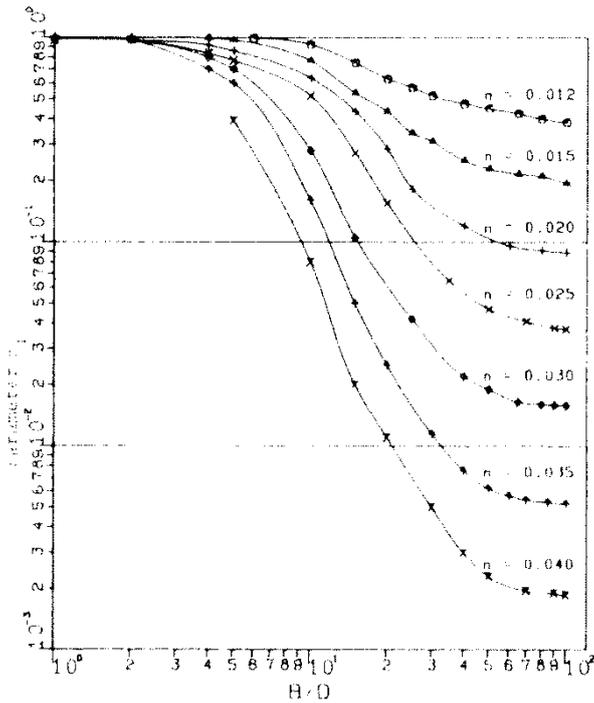


Fig. 2.3 Parametro  $\beta_i$  in funzione di  $B/D$  e  $n$  di Manning (Chiu & Chiou, 1986)

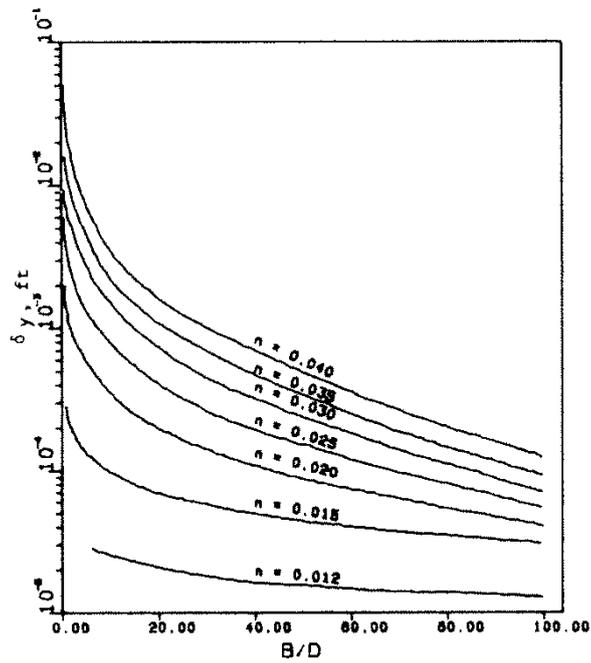


Fig. 2.4 Parametro  $\delta_y$  in funzione di  $B/D$  e  $n$  di Manning (Chiu & Chiou, 1986)

## 2.5 Parametro entropico $M$

È stato visto in precedenza che il rapporto tra velocità media e velocità massima è legato al parametro entropico  $M$  tramite la relazione (2.30). Come già è stato accennato ciò significa che

esiste una funzione  $\Phi(M)$ , definita dalla (2.33), che rappresenta proprio il valore del rapporto tra velocità media e massima.

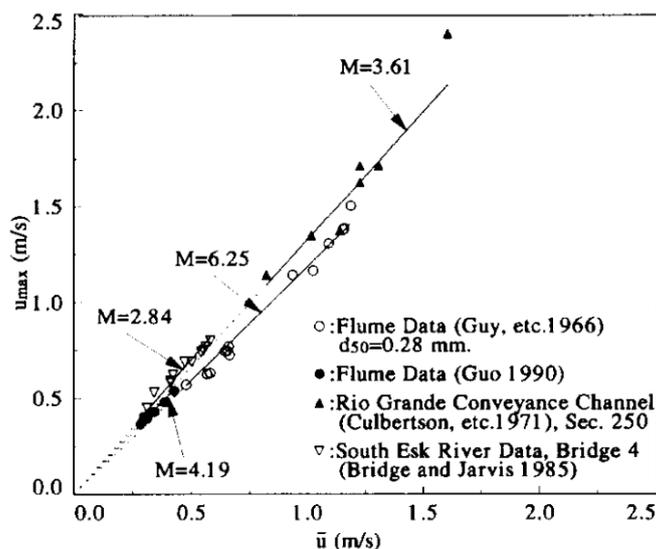
Diversi autori hanno indagato in merito alla relazione che lega velocità media e velocità massima facendo riferimento a misure sperimentali di velocità su corsi d'acqua naturali. I risultati a cui tali autori sono pervenuti vengono brevemente riassunti nel seguito.

Chiu & Said (1995), fanno riferimento a misure di velocità effettuate da altri autori su quattro corsi d'acqua le cui caratteristiche sono riportate in Tab. 2.1; è riportata la fonte (1), l'intervallo di portata che ha interessato le misure (2), l'intervallo relativo alla pendenza del canale (3), quello relativo al rapporto tra larghezza in superficie e profondità (4), quello relativo ai tiranti (5), e il posizionamento della sezione di misura (6) in un tratto rettilineo o in curva.

Come gli Autori evidenziano il range di variabilità di tutte le caratteristiche è sufficientemente ampio per poter trarre conclusioni degne di nota.

Data sets (1)	Discharge (m <sup>3</sup> /s) (2)	Channel slope × 10 <sup>5</sup> (3)	B/D ratio (4)	Water depth (m) (5)	Alignment (6)
Guy et al. (1966)	0.05–0.64	55–1,500	7–29	2.60–10.51	Straight
Guo (1990)	0.000669	156	4.2–8.5	0.0118–0.0237	Straight
Culbertson et al. (1972)	17.87–41.99	52–110	16–30	0.69–1.48	Straight
Bridge and Jarvis (1985)	3.00–30.00	3–95	12–30	0.46–3.25	Curved

**Tab. 2.1** Descrizione dei dati usati da Chiu & Said (Chiu & Said,1995)



**Fig. 2.5** Relazione tra  $\bar{u}$  e  $u_{max}$  basata su misure sperimentali su corsi d'acqua (Chiu & Said, 1995)

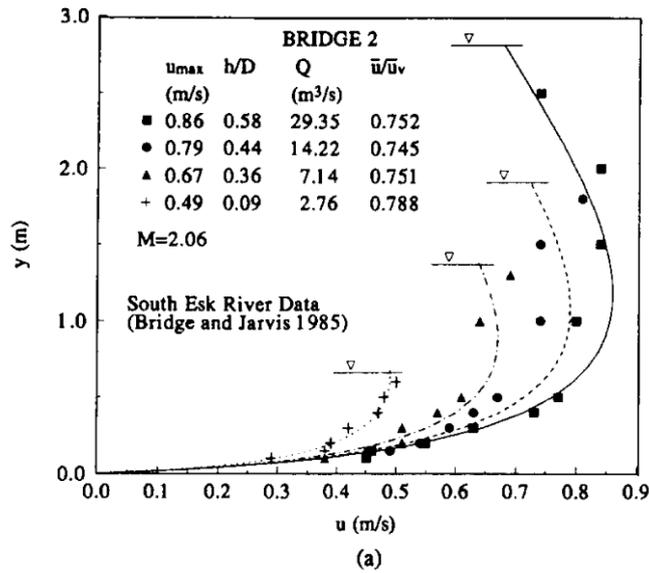
Sulla base di tali dati, gli Autori redigono un diagramma (Fig. 2.5) in cui riportano, per ciascuna misura, la coppia di punti  $(\bar{u}, u_{max})$ . Come è possibile notare i punti relativi a ciascun set di misure, ovvero relativi a ciascun corso d'acqua, si allineano molto bene lungo una linea retta di una certa inclinazione; difatti nel diagramma di Fig. 2.5 sono evidenziate le quattro rette di allineamento ciascuna relativa a uno dei quattro corsi d'acqua.

Il fatto che i punti si allineino bene lungo una linea retta evidenzia che il rapporto tra  $\bar{u}, u_{max}$  ovvero il coefficiente angolare della retta che interpola i dati, resta costante al variare delle velocità per ciascun canale. Pertanto, sapendo che dal punto di vista entropico, vale la (2.32) il coefficiente angolare della retta è l'inverso della funzione  $\Phi(M)$  definita appunto nella (2.32). Ciò significa che, ricordando la (2.33), ad una specifica pendenza corrisponde uno specifico valore del parametro entropico  $M$  e, quindi, che  $M$  è costante per ciascuna sezione e invariante con la portata e con il tirante. Nella Fig. 2.5, infatti, per ciascun canale è riportato il valore di  $M$  corrispondente.

L'eccellente correlazione lineare mostrata indica che  $M$  è un valore che può essere ottenuto a partire da una singola coppia di valori  $\bar{u}, u_{max}$ , e quindi da un singolo valore di portata, ed essere poi valido per qualsiasi altro valore di portata.

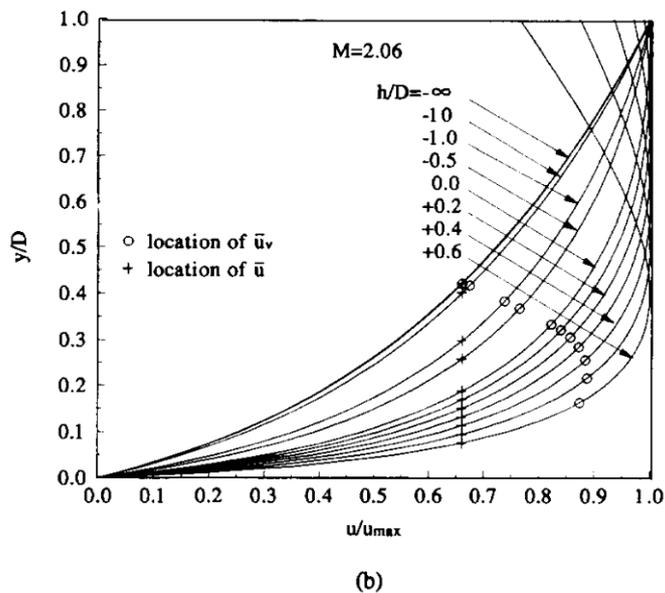
Inoltre, si evince che il sistema fisico, anche al variare, in un range alquanto ampio, delle sue caratteristiche principali, quali portata, tirante, pendenza e forma della sezione, tende a stabilire e mantenere una condizione di equilibrio caratterizzata dal parametro  $M$ , e, quindi, a un valore preciso di entropia della distribuzione di probabilità  $p(u/u_{max})$ .

Per conservare una condizione di equilibrio stabilita, che corrisponde ad uno specifico valore di  $M$ , un canale in materiale sciolto corregge le sue caratteristiche come la forma del fondo, la scabrezza, la forma della sezione, la pendenza, al variare della portata e del tirante. In un canale non erodibile, invece, per conservare lo stesso valore di  $M$  al variare di portata e tirante, varia la distribuzione di portata in particolare si modifica il valore di  $u_{max}$  e la posizione di quest'ultima ( $h$ ) nella sezione. Tale concetto è supportato dai risultati riportati nella Fig. 2.6 che mostra quattro profili di velocità, misurati su un corso d'acqua naturale, in cui il valore di  $M$  si mantiene costante e pari a 2.06 proprio grazie al fatto che la distribuzione di velocità si modifica attraverso l'intensità e la posizione di  $u_{max}$  al variare di portata e tirante. Tale concetto è ulteriormente supportato dai dati riportati in Fig. 2.7 in cui viene mostrata, attraverso elaborazioni numeriche che applicano la (2.40) lungo la verticale ad ascissa nulla, come varia la distribuzione di velocità, relativa a  $M=2.06$ , al variare del rapporto  $h/D$ . Nelle Figg. 2.6 e 2.7 sono anche riportate alcune informazioni relative alla velocità media lungo la verticale  $\bar{u}_v$  e della velocità media totale  $\bar{u}$ . Come si può notare (Fig. 2.7) fissato  $M$  la posizione di  $\bar{u}_v$  e  $\bar{u}$  lungo l'asse  $y$  tende a variare al variare di  $h/D$  e ciò spiega la tendenza del rapporto  $\bar{u}/\bar{u}_v$  a variare con  $h/D$  e  $Q$ .

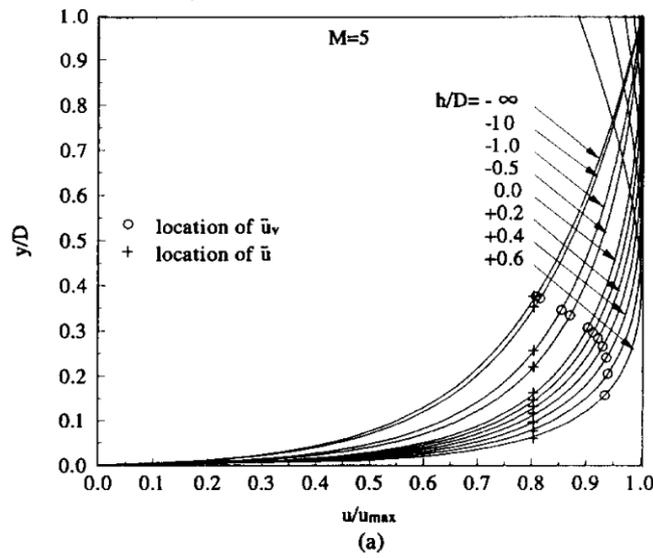


**Fig. 2.6** Variazione della distribuzione di velocità per  $M=2.06$  - misure dal fiume South Esk (Chiu & Said, 1995)

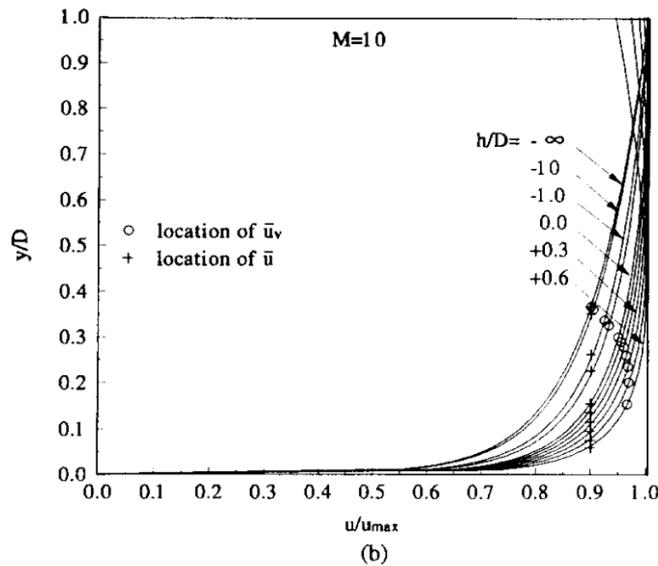
Risultati analoghi a quelli esposti in Fig. 2.7 sono riportati nelle Figg. 2.8 e 2.9 per differenti valori di  $M$ . Come si può notare, il profilo di velocità può modificarsi, anche significativamente, al fine di mantenere costante l'entropia ad esso connesso.



**Fig. 2.7** Variazione della distribuzione di velocità per  $M=2.06$  - simulazioni numeriche (Chiu & Said, 1995)

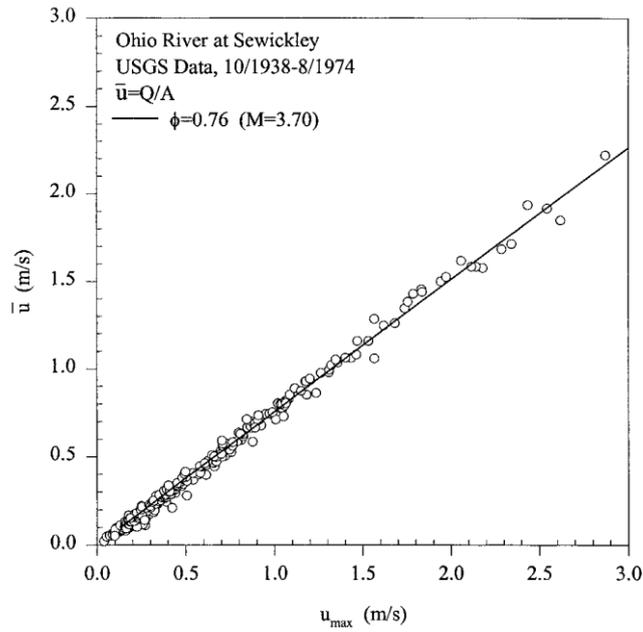


**Fig. 2.8** Variazione della distribuzione di velocità per  $M=5$  – simulazioni numeriche (Chiu & Said, 1995)



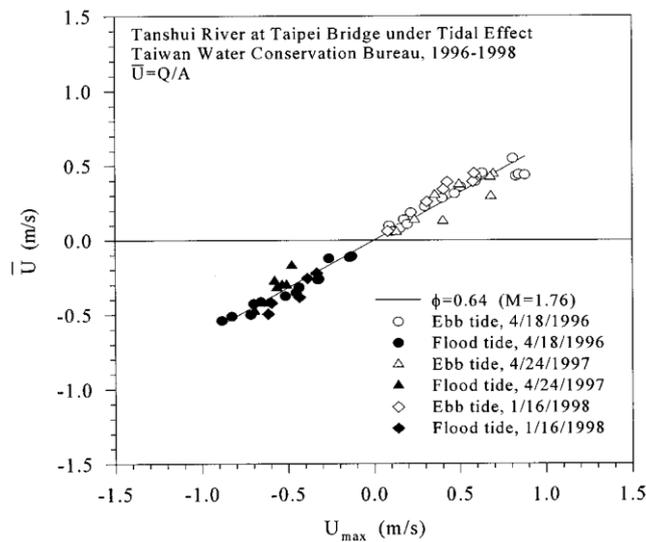
**Fig. 2.9** Variazione della distribuzione di velocità per  $M=10$  – simulazioni numeriche (Chiu & Said, 1995)

In Chiu, et al. (2000) una grande quantità di misure effettuate sul fiume Ohio restituisce un ottimo allineamento (Fig. 2.10) intorno alla retta caratterizzata da  $M=3.70$ .



**Fig. 2.10** relazione tra  $\bar{u}$ ,  $u_{max}$  – misure sperimentali sull’Ohio a Sewickley (Chiu, et al., 2000)

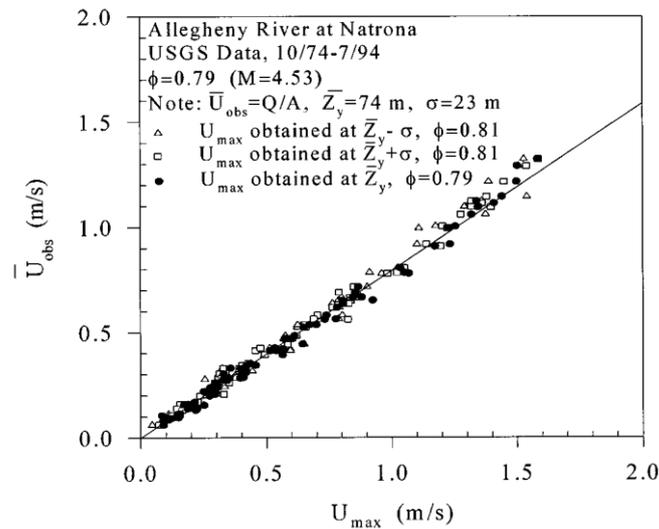
L’allineamento rimane molto buono (Fig. 2.11) utilizzando misure effettuate su un corso d’acqua dove la corrente è molto instabile e cambia la propria direzione durante il giorno a causa di effetti di marea (Chiu, et al., 2000).



**Fig. 2.11** relazione tra  $\bar{u}$ ,  $u_{max}$  – misure sperimentali sull’Tanshui al ponte Taipei (Chiu, et al., 2000)

Chiu & Tung (2002) fanno riferimento ai valori di velocità misurati sperimentalmente (Chiu & Chen, 1999) sul fiume Allegheny, al variare della portata in un ampio intervallo, in un periodo di circa venti anni. Anche in questo caso (Fig. 2.12) vengono riportate le coppie di punti ( $\bar{u}$ ,  $u_{max}$ ) che si allineano molto bene lungo una retta individuando un valore di M pari a 4.53 costante al variare

della portata in un ampio range di valori. Sono riportati i valori della media ( $Z_y$ ) e della deviazione standard ( $\sigma$ ) relativi alla posizione dell'asse  $y$  rispetto a un punto di riferimento.



**Fig. 2.12** relazione tra  $\bar{u}$ ,  $u_{max}$  – misure sperimentali sull'Allegheny a Natrona (Chiu & Tung, 2002)

Da tutti questi dati sperimentali si evince che il valore del rapporto tra velocità media e massima, rappresentato dalla pendenza della retta che interpola i dati, è invariante con il tempo e con la portata e rimane costante in condizioni sia di moto stazionario che non stazionario. Ciò significa che il parametro  $M$  può essere considerato un'effettiva misura della totalità delle caratteristiche di un canale quali la forma di fondo, il materiale di cui è composto, la pendenza, la forma della sezione e può essere usato per classificare diverse sezioni di canali nonché il loro stato d'equilibrio.

Solitamente in canali naturali e non, un parametro come il coefficiente di scabrezza, ad esempio il coefficiente di Gaukler-Strickler, se non ci si trova in condizioni di moto uniforme, in linea di principio varia al variare della portata, della velocità media o del tirante.  $M$ , invece, è una quantità che rimane costante e, pertanto, può risultare un parametro più rappresentativo del coefficiente di scabrezza. Una periodica stima, in un corso d'acqua, del parametro  $M$  può condurre a individuare significativi cambiamenti delle caratteristiche del canale stesso dovute, ad esempio, ad attività antropica che mutano l'equilibrio che il sistema aveva raggiunto (Chiu & Tung, 2002).

## 2.6 Relazione tra la posizione del punto a velocità massima e parametro entropico $M$

Per quanto è stato detto in precedenza appare chiaro che la posizione del punto a velocità massima e il parametro entropico sono legati intimamente. Al fine di mantenere costante  $M$  al

variare di caratteristiche quali, ad esempio, la portata, il sistema varia la distribuzione di velocità ed in particolare la posizione, al di sotto del pelo libero, del punto a velocità massima; un chiaro esempio di tale aspetto è riportato nelle Figg. 2.7 - 2.9.

Si consideri un caso di moto monodimensionale con la possibilità che la velocità massima si trovi anche al di sotto del pelo libero; per tale caso vale la (2.40) in cui  $\xi_0$  vale 0 e  $\xi$  è definita come segue:

$$\xi = \frac{y}{D-h} \exp\left(1 - \frac{y}{D-h}\right) = \frac{y/D}{1-h/D} \exp\left(1 - \frac{y/D}{1-h/D}\right) \quad (2.45)$$

avendo usato la ormai nota simbologia per cui:  $y$  è la distanza verticale dal fondo,  $D$  è il tirante, e  $h$  è la profondità al disotto della superficie del punto a velocità massima. La (2.40) si può riscrivere come segue:

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{M} \ln \left( 1 + (e^M - 1) \frac{1}{\xi_{max}} \frac{y/D}{1-h/D} \exp\left(1 - \frac{y/D}{1-h/D}\right) \right) \quad (2.46)$$

la quale rappresenta l'espressione del profilo di velocità nel caso di moto monodimensionale con  $u_{max}$  non obbligatoriamente sul pelo libero.

Per approfondire, dunque, l'aspetto relativo alla determinazione della posizione della  $u_{max}$  al di sotto del pelo libero si consideri lo sforzo di taglio al fondo relativamente all'asse  $y$  (Chiu & Tung, 2002):

$$\rho g s_f (D-h) = \rho \varepsilon_0 \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} \quad (2.47)$$

in cui  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $s_f$  è il coefficiente d'attrito ed  $\varepsilon_0$  è il coefficiente di momento di trasporto rispetto al fondo, ovvero la viscosità cinematica del fluido se il flusso è laminare. La (2.47) soddisfa la condizione per cui lo sforzo di taglio è zero quando  $y = D - h$  ovvero quando  $u = u_{max}$ . L'angolo d'attrito e anche lo sforzo di taglio sulle pareti sono legati alla velocità media della sezione retta e al coefficiente d'attrito dall'equazione di Darcy-Weisbach che può essere espressa come segue:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (2.48)$$

nella quale  $f$  è il coefficiente d'attrito e  $u_*$  è la velocità di taglio definita come:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2.49)$$

dove  $\rho$  è la densità del liquido e  $\tau_0$  è lo sforzo di taglio alla parete. Assumendo che lo sforzo di taglio al fondo sia approssimativamente uguale allo sforzo di taglio alla parete e usando un gradiente di velocità ottenuto derivando la (2.46) rispetto a  $y$ , la (2.47) può risciversi come segue (Chiu & Tung, 2002):

$$\left(1 - \frac{h}{D}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{\nu} \left(\frac{R_h}{D}\right)^2 \frac{8e}{fN_R} G(M) \quad (2.50)$$

dove  $R_h$  è il raggio idraulico,  $N_R$  è il numero di Reynolds definito come

$$N_R = \frac{\bar{u}R_h}{\nu} \quad (2.51)$$

e  $G(M)$  è una funzione definita come segue:

$$G(M) = \frac{e^M - 1}{M\Phi} \quad (2.52)$$

dove  $\Phi$  è la funzione di  $M$  definita dalla (2.33).

L'equazione (2.50) fornisce diverse informazioni relative alla determinazione del punto a velocità massima.

Si consideri dapprima il caso semplice in cui la  $u_{max}$  si trova sul pelo libero, ovvero il caso in cui la velocità è espressa dalla (2.26); in tale situazione, inoltre, lo sforzo di taglio alla parete può scriversi come  $\tau_0 = \rho g D s_f$  e la relazione (2.50) si semplifica nella seguente (Chiu & Tung, 2002):

$$1 = \frac{\varepsilon_0}{\nu} \frac{8}{fN_R} G(M) \quad (2.53)$$

In condizioni di moto laminare  $\varepsilon_0/\nu = 1$  e il prodotto  $fN_R$  è una costante, come mostrato sulla base di dati sperimentali da Chow (1959), quindi  $G(M)$  è una costante e di conseguenza lo sono  $\Phi$  ed  $M$ . Ciò intuitivamente porta a pensare che la funzione  $\Phi$  e il parametro  $M$  governino le variazioni di  $\varepsilon_0/\nu, f, N_R, R_h$  e  $h$ .

Lo studio della (2.50) può restituire informazioni circa la relazione che esiste tra  $h/D$  e  $G(M)$  e, quindi,  $M$  quando  $u_{max}$  si trova sotto il pelo libero.

Chiu & Tung (2002), sulla scorta di alcuni dati sperimentali, effettuano una analisi di regressione di  $h/D$  in funzione di  $G(M)$ ; riportano su un grafico (Fig. 2.13) i punti sperimentali unitamente alla seguente relazione empirica ottenuta:

$$\frac{h}{D} = -0.2 \ln \frac{G(M)}{58.3} \quad (2.54)$$

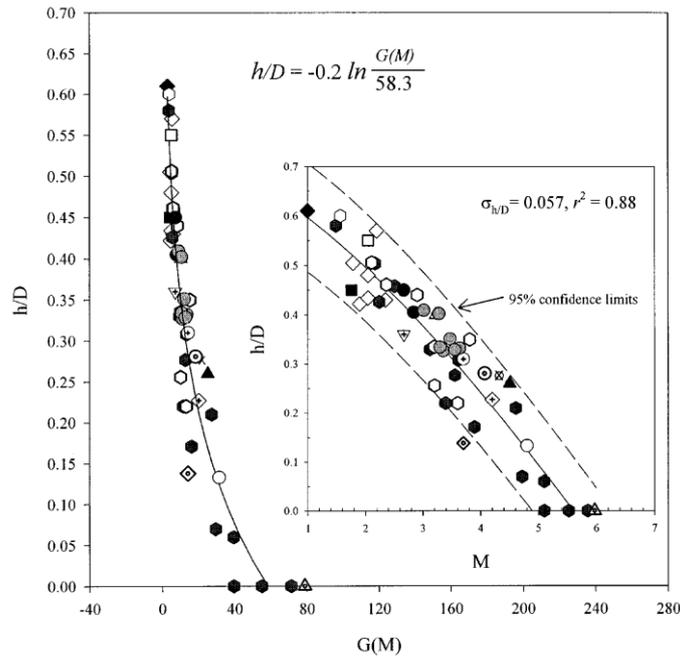
La (2.54) ha un campo di validità connesso all'intervallo di valori che i dati coprono ovvero  $1.0 \leq M \leq 5.6$  e  $0 \leq h/D \leq 0.61$ .

Può essere trasformata nella corrispondente che lega  $h/D$  ad  $M$  la quale è graficamente inserita all'interno del grafico di Fig. 2.13. I diversi simboli riportati in figura indicano un gran numero di prove di laboratorio e prove di campo effettuate e raccolte per valori di portata variabili in un ampio range, per differenti caratteristiche del canale e in condizioni di moto stazionario e non.

Utilizzando l'inversa della (2.54) potrebbe ricavarsi il valore di  $M$  in funzione della posizione di  $u_{max}$  e ciò significa che la posizione e l'intensità di  $u_{max}$  contengono molte utili informazioni circa la distribuzione di probabilità. Chiu & Hsu (2006) mostrano (Fig. 2.14) come al variare di  $M$  da 1 a 10 cambi il profilo di velocità e con esso la posizione della velocità massima  $u_{max}$ , di quella media verticale  $\bar{u}_v$  e di quella media di sezione  $\bar{u}$ . Inoltre evidenziano che, nei corsi d'acqua naturali, quando  $M$  è pari a 5.6 la velocità massima si attinge in corrispondenza del pelo libero e le isotachie in una sezione trasversale sono ortogonali al pelo libero. Per  $M$  minore di 5.6 la velocità massima si attinge al di sotto del pelo libero e per  $M$  maggiore di 5.6 la  $u_{max}$  è sul pelo libero e il valore di  $\xi$  può essere approssimato a  $y/D$ ; in questo ultimo caso i valori di  $\bar{y}/D$  e  $\bar{y}_v/D$  rapidamente aumentano all'aumentare di  $M$  fino a convergere al valore di 0.368 ovvero di  $e^{-1}$ .

Ciò accade perché (Chiu & Hsu, 2006) la densità di probabilità  $p(u/u_{max})$  è una funzione esponenziale di  $M$ . Per  $M$  maggiore di circa 5.6 la probabilità che  $u$  sia minore o uguale alla velocità media  $\bar{u}$  attinge proprio il valore di  $e^{-1}$  ovvero 0.368.

Per stimare  $M$ ,  $u_{max}$  e  $h$  esistono diverse possibilità in funzione dei dati che si hanno a disposizione; se si conosce  $\bar{u}$ , magari perché è nota la portata, possono essere effettuate delle misure per trovare il valore di  $u_{max}$ , dal cui valore si ricava  $\bar{u}/u_{max}$  e quindi  $M$  e poi  $h/D$ . Se, ancora,  $\bar{u}$  è disponibile, il valore di  $u_{max}$  può essere sostituito con il rapporto  $\bar{u}/\Phi$  e pertanto rimarrebbero da determinare, a mezzo di misure di velocità, sono  $M$  e  $h$ . Se, invece,  $\bar{u}$  non è disponibile allora tutti i parametri possono essere determinati con un'analisi di regressione dei dati di velocità disponibili.

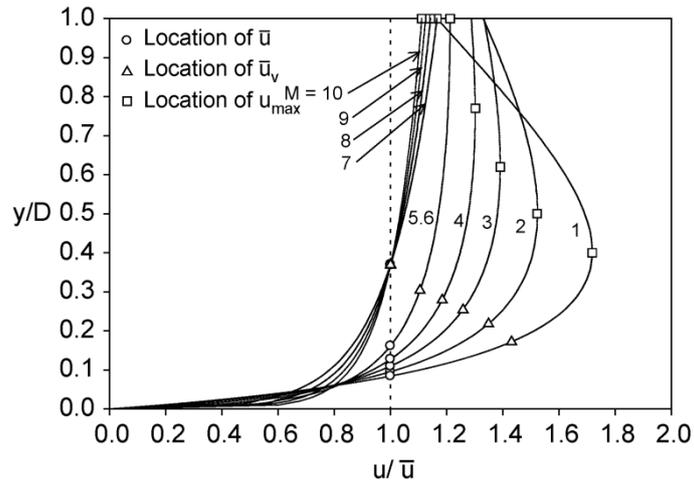


- ▲ Flume Data (Einstein and Chien 1965)
- ◇ South Esk River at Bridges 2 to 7, 10 Sets for each Bridge (Bridge and Jarvis 1985)
- Alluvial Flume (Guy, et al. 1956-61)
- ⊙ Ohio River at Sewickley (USGS 1942-43)
- ▽ Ohio River at Neville Island (Spectrum 1999)
- Tanshui River at Taipei Bridge under Tidal Effects (Taiwan water Conservation Bureau 1996-98)
- Rio Grande Conveyance Channel (Culbertson et al. 1965-69)
- △ Missouri River at Omaha, 26 Sets (USGS 1976-81)
- Middle Rio Grande Channel, New Mexico (Nordin et al. 1963)
- × Missouri River at Sioux City, 12 Sets (USGS 1976-81)
- ◇ Rectangular Flume Data, 40 Runs (Coleman 1986)
- ◆ Unstead Flow in Vegetated Channel, 7 Runs (Jayaratne, et al. 1995)
- Unsteady Flow in Unvegetated Channel, 10 Runs (Tu, et al. 1995)
- 2-foot Wide Flume with Rigid Boundary (McQuivey 1973)
- Missouri River at Nebraska City, 12 Sets (USGS 1976-81)
- Trapezoidal Flume at Section π0 (Yen 1965)
- ⊙ Trapezoidal Flume at Section π/8 (Yen 1965)
- ◇ Trapezoidal Flume at Section π/4 (Yen 1965)
- ▲ Trapezoidal Flume at Section s0 (Yen 1965)

**Fig. 2.13** relazione tra  $h/D$ ,  $G(M)$  e  $M$  (Chiu & Tung, 2002)

Se è noto il valore di  $\Phi$  e quindi lo sono  $M$  e  $h/D$ , ad esempio grazie a misure storiche, ed è nota anche la funzione che lega tali parametri, allora rimane da valutare solo  $u_{max}$ ; in tal caso la  $\bar{u}$  può essere determinata mediante la relazione  $\Phi u_{max}$ . Tali indicazioni sono utili per ottimizzare le misure di velocità da effettuare su canali già strumentati.

Per quanto riguarda le stazioni di misura di nuova installazione la procedura più semplice è quella di collocare l'asse verticale ad una certa ascissa, stimare la posizione di  $u_{max}$ , attraverso misure di campo, e ricavare, poi, il valore di  $M$  tramite la relazione che lo lega al parametro  $h/D$ .



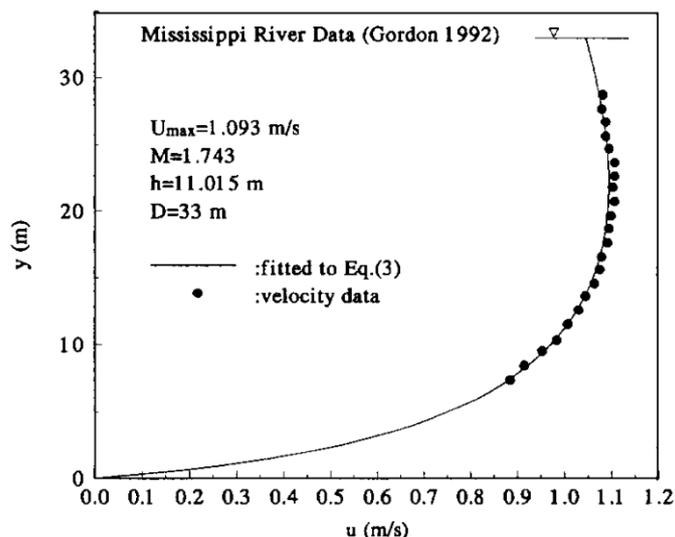
**Fig. 2.14** Variazione della distribuzione di velocità e della posizione di  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_v$  e  $u_{max}$  al variare di  $M$  (Chiu & Hsu, 2006)

## 2.7 Confronto con misure sperimentali

Diversi Autori hanno applicato le teorie esposte nel presente capitolo a casi reali di corsi d'acqua, o di canali di laboratorio strumentati, di cui sono disponibili delle misure di velocità, al fine di validare il modello proposto.

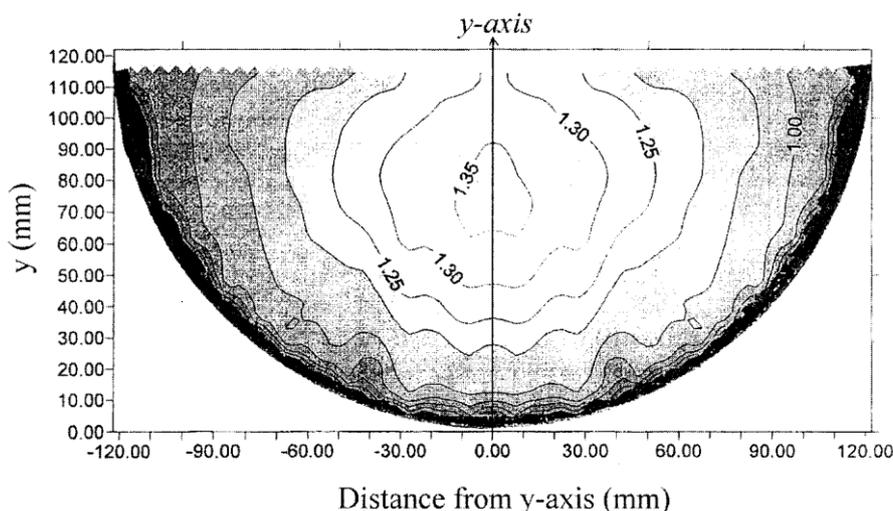
Chiu & Said (1995) sulla scorta di misure di velocità effettuate da Gordon (1992) sul fiume Mississippi stimano il profilo di velocità lungo una delle verticali più profonde della sezione di misura. La stima delle velocità unitamente ai punti relativi alle misure sperimentali sono riportati in Fig. 2.15. Gli Autori determinano il parametro  $M$ , pari a 1.743 in funzione del rapporto  $\bar{u}/u_{max}$  che è noto in quanto  $\bar{u}$  è calcolato come media ponderata delle velocità sulle aree d'influenza (ovvero per integrazione delle  $u$  si ricava la portata e poi si divide per la sezione trasversale della corrente) e  $u_{max}$  è misurato. Come si può notare in tal caso la velocità massima si attinge ad una profondità pari a circa un terzo del tirante del corso d'acqua. Inoltre va ricordato che essendo piuttosto basso il valore di  $M$  l'entropia connessa al sistema in esame è molto ampia; ciò significa che la sezione potrebbe essere caratterizzata da un ampio numero di distribuzioni di velocità differenti. In ogni caso la corrispondenza tra dati teorici e misure sperimentali è molto buona.

Chiu & Tung (2002) sulla scorta di alcune misure di velocità effettuate in un canale sperimentale circolare (Knight & Sterling, 2000), di cui sono riportate le isotachie in Fig. 2.16, ricavano la distribuzione di velocità teorica (Fig. 2.17) lungo l'asse verticale.



**Fig. 2.15** Un profilo di velocità sul fiume Mississippi (Chiu & Said, 1995)

In particolare effettuano un'analisi di regressione dei dati di velocità ottenendo un valore di  $h/D$  pari a 0.29 con  $u_{max}$  pari a 0.643 m/s. Noto il valore di  $h/D$  ricavano  $M$  utilizzando la relazione (2.54). Successivamente noto  $M$  ricavano  $\Phi$  e stimano la velocità media come prodotto di  $\Phi$  per  $u_{max}$  ovvero 0.484 m/s concludendo che tale valore è molto prossimo a quello reale pari a 0.493 m/s.



**Fig. 2.16** Isotachie sperimentali in un canale sperimentale circolare (Chiu & Tung, 2002)

Moramarco et., al (2004) prendono in esame una grande quantità di misure di velocità effettuate per un periodo di vent'anni su quattro sezioni del fiume Tevere. In Fig. 2.18 è riportato uno schema della collocazione delle stazioni di misura con annesse caratteristiche fondamentali di ciascuna stazione. In particolare sono riportati il numero delle misure a disposizione per ciascuna

stazione, il range di portate e quello dei massimi tiranti misurati nel periodo di osservazione. Come si può notare queste ultime due caratteristiche hanno un campo di variazione piuttosto ampio.

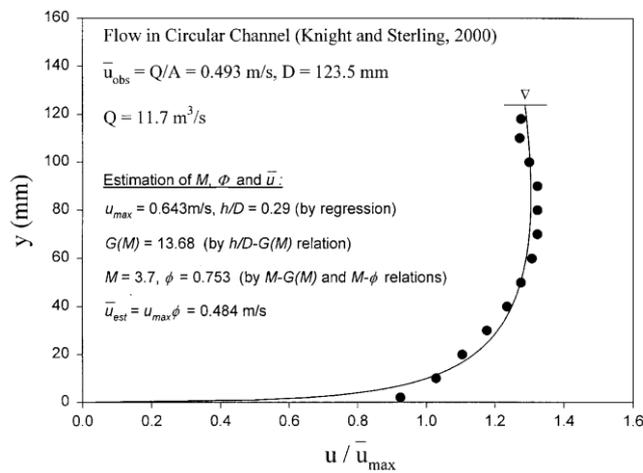


Fig. 2.17 Distribuzione di velocità lungo l'asse y di Fig. 2.16 (Chiu & Tung, 2002)

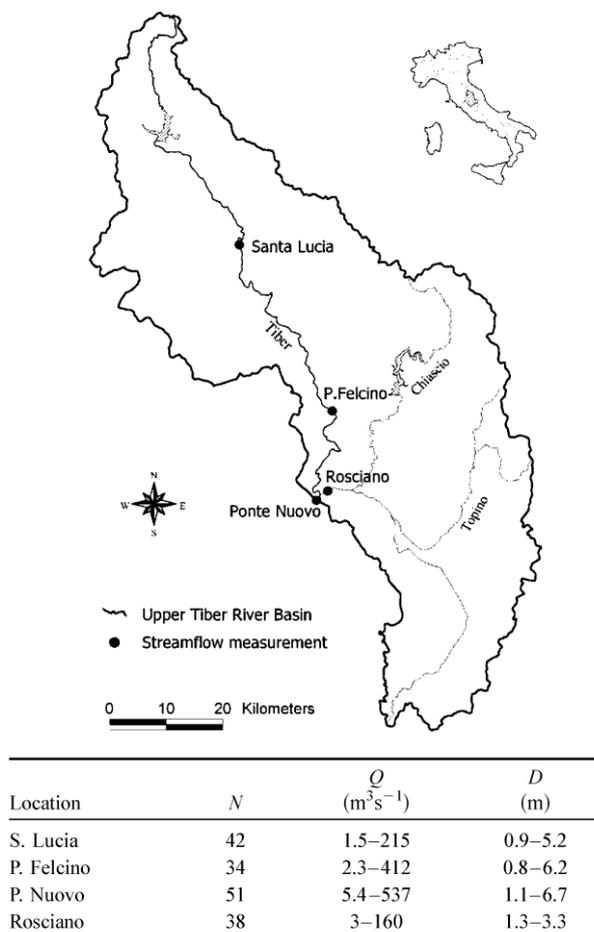
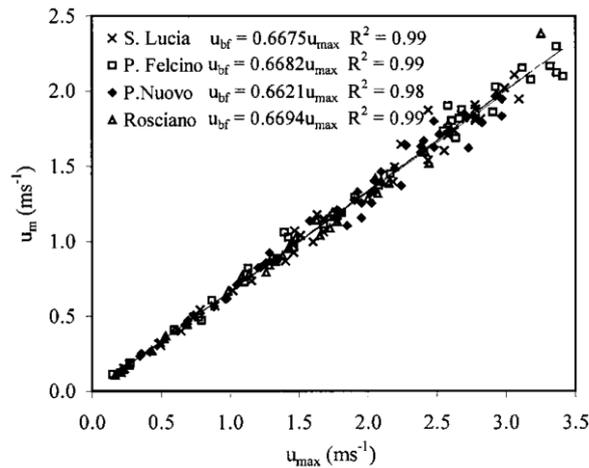


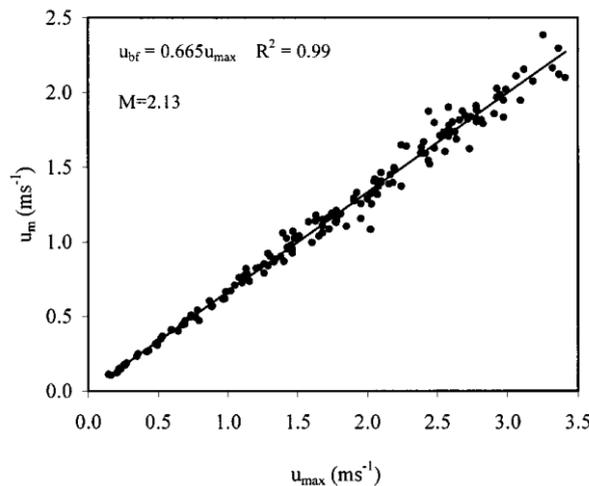
Fig. 2.18 Collocazione stazioni di misura e caratteristiche fondamentali (Moramarco et. al., 2004)

Gli Autori dapprima analizzano la relazione tra la velocità media  $\bar{u}$  e quella massima  $u_{max}$  riscontrando che per ciascuna sezione la relazione è di tipo lineare e che il rapporto tra le due grandezze è praticamente costante indipendentemente dalla sezione considerata (Fig. 2.19).

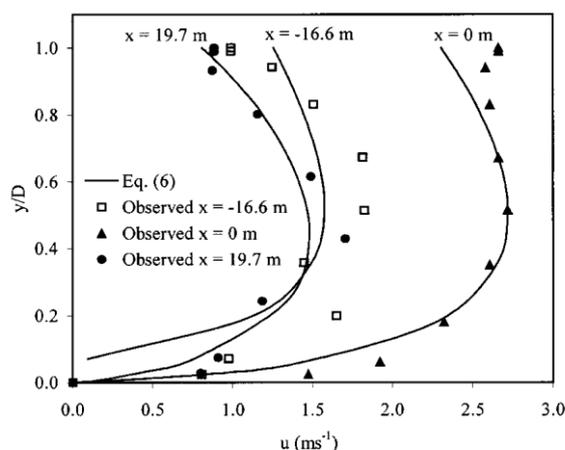


**Fig. 2.19** Relazione tra velocità media e massima (Moramarco et, al., 2004)

Viene pertanto calcolato il valore del parametro entropico  $M$  accorpando tutti i dati di misura a disposizione (Fig. 2.20). Successivamente viene applicata l'equazione per la distribuzione bidimensionale (2.40), vengono minimizzati gli scarti tra valori misurati e valori teorici per stimare i coefficienti della (2.41) e si considera per  $u_{max}$  il valore massimo misurato. In Fig. 2.21, vengono riportati, per un singolo evento, tre profili di velocità relativi a tre differenti verticali. Come è possibile notare la (2.40) stima bene il campo di velocità in corrispondenza della parte centrale del canale, e molto meno bene quello delle zone laterali. Inoltre l'equazione contiene molti parametri, la cui calibrazione è, a volte, non agevole.



**Fig. 2.20** Calcolo del valore di  $M$  considerando accorpati tutti i dati (Moramarco et, al., 2004)



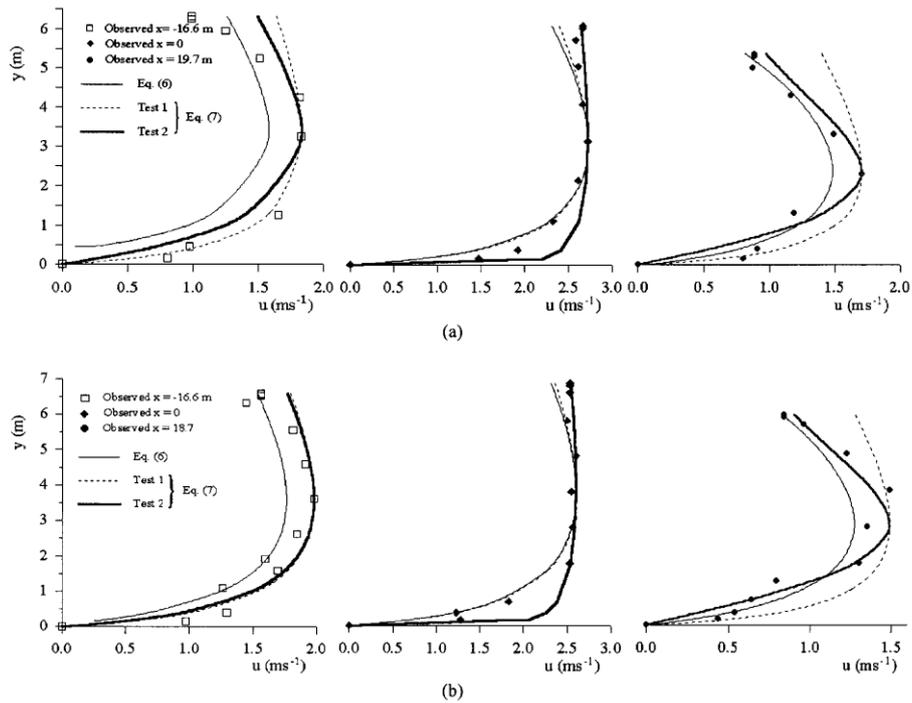
**Fig. 2.21** Confronto tra i profili di velocità stimati con la (2.40) e i dati misurati per uno degli eventi presi in considerazione (Moramarco et, al., 2004)

Gli Autori propongono di utilizzare la formula più semplice (2.46), relativa al caso monodimensionale, e di applicarla indipendentemente a ciascuna verticale. Tale approccio prevede che il parametro da stimare è semplicemente  $M$ , una volta che siano noti il tirante  $D$  e l'intensità e la posizione  $h$  al disotto del pelo libero della velocità massima  $u_{max}$ .

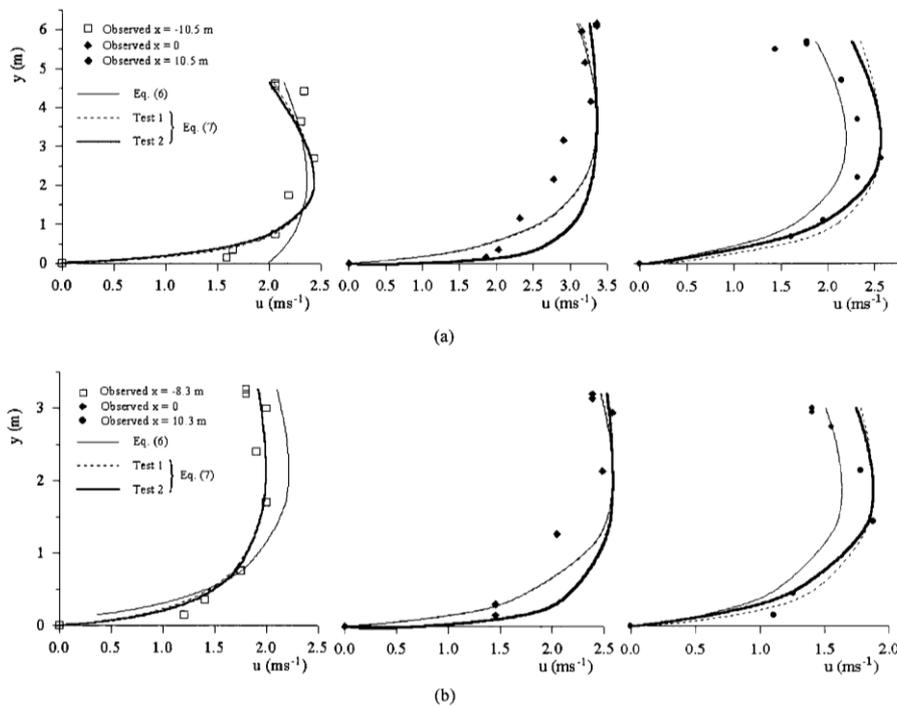
Per il tracciamento dei profili si seguono due Test: nel Test 1  $M$  viene stimato considerando accorpate i dati di misura relativi a tutte le sezioni (Fig. 2.20), nel Test 2, invece, viene stimato considerando i dati riferiti a ciascuna stazione singolarmente.

I risultati grafici di tale confronto sono riportati nelle Figg. 2.22 e 2.23; risulta evidente che l'approccio di considerare indipendenti tra loro tutti i profili di velocità porta dei miglioramenti nella stima delle velocità; ciò accade in particolare in prossimità delle pareti pertanto sembrerebbe confermarsi l'affermazione di Chiu & Said (1995) per cui il parametro  $M$  può essere considerato un indice degli effetti di parete cui è sottoposta una corrente.

Pertanto, a giudicare dalle conclusioni di Moramarco et, al. (2004) l'equazione (2.40) proposta da Chiu per il dominio bidimensionale sembrerebbe non restituire risultati apprezzabili e avere, inoltre, lo svantaggio di necessitare di una gran mole di parametri da calibrare in modo, a volte, non semplice. Di conseguenza sembrerebbe utile utilizzare l'approccio da loro proposto di considerare indipendenti i profili di velocità e di stimarli con l'equazione ricavata per il caso monodimensionale (2.46). Tale approccio comporta la necessità di conoscere, per ciascuna verticale di cui si vuol tracciare il profilo, i valori di  $\bar{u}$ ,  $h$  e  $u_{max}$ , cosa che non servirebbe in un approccio bidimensionale valido, in cui servirebbe solo la velocità media e intensità e coordinate della velocità massima.



**Fig. 2.22** Confronto tra i profili di velocità stimati con la (2.40) e con la (2.46) Test1 e 2 in confronto con le misure effettuate lungo tre verticali. Stazione di P. Nuovo durante l'evento di piena del giugno 1997 (a) e novembre 1996 (b) (Moramarco et al., 2004)



**Fig. 2.23** Confronto tra i profili di velocità stimati con la (2.40) e con la (2.46) Test1 e 2 in confronto con le misure effettuate lungo tre verticali. Stazione di P. Felicino durante l'evento di piena del aprile 1997 (a) e stazione di Rosciano durante l'evento di piena del novembre 1996 (b) (Moramarco et al., 2004)

È per tale motivo che risulta utile approfondire l'aspetto relativo al tracciamento dei profili di velocità considerando un dominio bidimensionale in cui si possa affrontare il problema in modo completo e sintetico evitando l'utilizzo di un numero di parametri non comodo nelle pratiche applicazioni. È questo l'aspetto che, nel dettaglio verrà trattato nel capitolo seguente.

## **2.8 Bibliografia**

Chiu, C. L. (1987). Entropy and probability concepts in hydraulics, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 113, No 5, May

Chiu C. L. (1988) Entropy and 2-D velocity distribution in open channel, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 114, No 7, July

Chiu, C. L. (1989), Velocity distribution in open channel flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 115, No 5, May

Chiu, C. L., & Chen, Y.-C. (1999) Efficient methods of measuring discharge and reservoir-sediment inflow. *Risk Analysis in Dam Safety Assessment*, J.-T. Kuo and B.-C. Yen, eds., Water Resources Pub., Inc., Highlands Ranch, Colo., 97–116.

Chiu C. L., & Chiou J. D. (1986) Structure 3D flow in rectangular open channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 112, No 11, 1050-1068

Chiu C. L., & Hsu S. H. (2006) Probabilistic approach to modeling of velocity distributions in fluid flows, *Journal of Hydrology*, vol. 316, 28-42

Chiu, C. L., Jin, W. & Chen Y. C. (2000) Mathematical models of distribution of sediment concentration, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 126, No. 1, January

Chiu C. L., & Murray D. W., (1992) Variation of velocity distribution along nonuniform open-channel flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 118, No 7, July

Chiu, C. L. & Lin, G. F. (1983) Computation of 3-D flow and shear in open Channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol 109, No. 11, November

Chiu C. L., & Said, C. A. A. (1995) Maximum and mean velocities and entropy in open-channel flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 121, No 1, January

Chiu C. L., & Tung N. C. (2002) Maximum velocity and regularities in open-channel flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, No 4, April

Chow, V. T. (1959) *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York

Gordon (1992) *Mississippi river discharge*. RD Instrument, San Diego, California

Knight, D. W., & Sterling, M. (2000). 'Boundary shear in circular pipes running partially full' *Journal of Hydraulic Engineering* vol. 126, No. 4, pp. 263–275

Moramarco T., Saltalippi C. and Singh V. P. (2004) Estimation of mean velocity in natural channels based on Chiu's velocity distribution equation, *Journal of Hydrologic Engineering*, vol. 9, No 1, January

Renjie X. (1997) Relation between mean and maximum velocities in a natural river, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 123, No 8, August

Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communications, I and II. *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379-443

## CAPITOLO 3

### NUOVO APPROCCIO TEORICO PROPOSTO SUL TRACCIAMENTO DEI PROFILI DI VELOCITÀ IN DOMINI BIDIMENSIONALI

#### 3.1 Introduzione

Un applicazione del principio della massima entropia finalizzata al tracciamento dei profili di velocità in un dominio bidimensionale è presente in letteratura ed è stata richiamata nel capitolo precedente.

In tale trattazione, fissato un dominio bidimensionale di forma qualsiasi, si considera nota a priori l'espressione analitica delle isotachie a meno di alcuni parametri di calibrazione del modello. In tal modo è possibile adottare la trattazione monodimensionale sostituendo alla coordinata di posizione verticale l'equazione delle isotachie.

Parte dell'attività di ricerca nell'ambito del dottorato è stata incentrata sullo sviluppo di una nuova soluzione teorica del problema della distribuzione delle velocità in un dominio bidimensionale; tale soluzione viene descritta nel presente capitolo.

La soluzione trovata presenta diversi vantaggi rispetto a quelle di letteratura; in primo luogo è una soluzione squisitamente teorica e non fa riferimento ad equazioni ricavate interpolando dati sperimentali come quelle presenti in letteratura. Inoltre non è necessario conoscere a priori l'equazione parametrica delle isotachie e, pertanto, si elimina il problema della calibrazione dei parametri delle stesse con il risultato di usare una semplice espressione della distribuzione di velocità che dipende solo dalle caratteristiche geometriche del dominio e dal rapporto tra velocità media e velocità massima della corrente. Infine, come si evince da un confronto con misure di letteratura e di laboratorio, la soluzione trovata approssima meglio di quelle di letteratura i dati sperimentali.

L'impostazione del problema è differente da quella di letteratura infatti si impostare a monte una funzione di distribuzione di probabilità definita in un dominio bidimensionale e si ricava, di conseguenza, l'espressione della distribuzione delle velocità nel dominio stesso.

Trattare, però, una funzione distribuzione di probabilità bidimensionale comporta una maggiore complessità per la risoluzione del problema analitico.

### 3.2 La funzione entropia e i vincoli del problema

Anche nel caso di dominio bidimensionale l'espressione analitica dell'entropia è analoga a quella ricavata nel capitolo precedente. La si richiama brevemente qui di seguito.

Applicando, infatti, il principio della massima entropia è possibile scrivere che, l'entropia  $H$  relativa alla funzione  $u$  (che nel caso in esame rappresenta la funzione velocità) è espressa da:

$$H(u) = -\int_0^{u_{\max}} p(u) \ln p(u) du \quad (3.1)$$

È possibile massimizzare la (3.1), come già è stato ampiamente spiegato nel capitolo precedente, giungendo ad un'espressione in forma chiusa della funzione densità di probabilità  $p(u)$  che è la seguente:

$$p(u) = \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \quad (3.2)$$

In tale espressione compaiono i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  le cui espressioni sono fornite dalle equazioni vincolari (2.18) e (2.20) che qui di seguito sono richiamate.

$$\exp(\lambda_2 u_{\max}) = \frac{\lambda_2}{\exp(\lambda_1 - 1)} + 1 \quad (3.3)$$

$$\bar{u} = \frac{u_{\max} \exp(\lambda_2 u_{\max})}{\exp(\lambda_2 u_{\max}) - 1} - \frac{1}{\lambda_2} \quad (3.4)$$

Il ragionamento effettuato fino a questo punto non ha necessitato di introdurre il concetto di dominio bidimensionale.

Detto ciò, è utile soffermarsi sulle espressioni dei vincoli (3.3) e (3.4). La (3.3) discende dalla definizione stessa di funzione densità di probabilità sintetizzata dalla (2.10) e in essa compare il termine  $u_{\max}$  di chiaro significato fisico (il valore massimo della funzione  $u$ ); la (3.4) rappresenta l'espressione di quella che, in teoria della probabilità, viene definita media della legge di probabilità ( $\bar{u}$ ) la quale, nel caso di dominio monodimensionale, coincide con la media dei valori che la funzione  $u$  assume nel dominio stesso (che si indicherà con  $u_{med}$ ), nel caso di dominio bidimensionale, invece, i due concetti non si equivalgono.

Il valore medio di maggiore significato fisico è, certamente, quello rappresentativo della media della funzione, e non già quello della media della legge di probabilità; in altre parole, se si considera un canale in cui scorre una certa portata un valore medio fisicamente rappresentativo del

fenomeno è la velocità media, ovvero il rapporto portata su sezione idrica, e non già la media della legge di probabilità della distribuzione di velocità.

Pertanto risulta più comodo e certamente più interessante sostituire, senza intaccare la generalità del ragionamento fatto finora, il vincolo (3.4) con il seguente vincolo che esprime la media della funzione  $u$ :

$$u_{\text{med}} = \frac{1}{A} \int_A u \, dA \quad (3.5)$$

in cui  $A$  rappresenta l'area del dominio di riferimento.

Come è possibile notare tale vincolo, di immediato significato fisico, risulta più articolato del precedente (3.4) in quanto in esso compare la variabile  $u$  e non già la  $p(u)$  ed inoltre esso dipende dal dominio di riferimento.

Riassumendo, quindi, l'espressione della  $p(u)$  è la (3.2), le espressioni dei due moltiplicatori di Lagrange sono date dalla (3.3) e (3.5).

### 3.3 Espressione della variabile velocità

Per definire l'espressione della variabile  $u$  è necessario definire le proprietà che deve possedere la funzione di distribuzione di probabilità  $F(u)$ :

- deve essere definita in  $x, y$  e assumere valori compresi tra 0 e 1;
- deve essere continua e derivabile in  $x, y$ ;
- deve valere 0 sulla frontiera del dominio e avere un punto di massimo di coordinate note in cui attinge il valore 1.

Formalmente tale funzione è una  $F(u(x, y))$ , ovvero è la funzione di distribuzione di probabilità della velocità  $u$  che è una funzione di  $x$  ed  $y$ . Per brevità di notazione nel seguito si riporterà semplicemente come  $F(u)$  o come  $F$ .

Sviluppando le derivate parziali rispetto ad  $x$  ed  $y$  si ottiene un sistema di equazioni in cui compare la funzione densità di probabilità  $p(u)$  definita come  $dF/du$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u)}{\partial x} &= \frac{dF(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = p(u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial F(u)}{\partial y} &= \frac{dF(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = p(u) \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dall'applicazione del principio della massima entropia, richiamato nel capitolo precedente e, in particolare con riferimento alla (3.2), del tutto valida anche in questo ambito, il sistema (3.6) si riscrive come segue:

$$\begin{aligned}\exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial F(u)}{\partial x} \\ \exp(\lambda_1 + \lambda_2 u - 1) \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F(u)}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.7}$$

in cui  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono i moltiplicatori di Lagrange, come definito in precedenza.

Il sistema (3.7) può essere opportunamente riordinato come segue:

$$\begin{aligned}\exp(\lambda_2 u) \frac{\partial u}{\partial x} &= \exp(1 - \lambda_1) \frac{\partial F(u)}{\partial x} \\ \exp(\lambda_2 u) \frac{\partial u}{\partial y} &= \exp(1 - \lambda_1) \frac{\partial F(u)}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Si effettui la posizione  $\exp(\lambda_2 u) = w$  e si scrivano le derivate parziali di  $w$  rispetto ad  $x$  e a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial \exp(\lambda_2 u)}{\partial x} = \lambda_2 \exp(\lambda_2 u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial \exp(\lambda_2 u)}{\partial y} = \lambda_2 \exp(\lambda_2 u) \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Sostituendo il sistema (3.8) nel (3.9) e riordinando si ottiene il seguente sistema lineare di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \lambda_2 \exp(1 - \lambda_1) \frac{\partial F(u)}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \lambda_2 \exp(1 - \lambda_1) \frac{\partial F(u)}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.10}$$

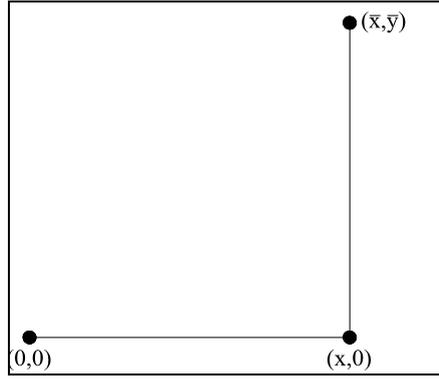
Tale sistema lineare di equazioni differenziali può essere risolto considerando che dalla teoria delle forme differenziali segue:

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = w(x, y) - w(0,0)\tag{3.11}$$

Considerando ora che il punto  $(0,0)$  è un punto giacente sul contorno del dominio e, pertanto,  $u = 0$ , allora il secondo membro della (3.11) diventa:

$$w(x, y) - w(0,0) = w(x, y) - \exp(\lambda_2 u) = w(x, y) - \exp(0) = w(x, y) - 1\tag{3.12}$$

Si calcola, a questo punto, l'integrale definito dalla forma differenziale a primo membro della (3.11) lungo la poligonale riportata schematicamente nella seguente figura (Fig. 3.1):



**Fig. 3.1** Poligonale di riferimento per l'integrazione della (4.7)

ottenendo:

$$\int_{(0,0)}^{(\bar{x},\bar{y})} \frac{\partial F(u)}{\partial y} \lambda_2 e^{1-\lambda_1} dy + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \lambda_2 e^{1-\lambda_1} dx = \int_0^{\bar{y}} \frac{\partial F(u)}{\partial y} \lambda_2 e^{1-\lambda_1} dy = \lambda_2 \exp(1-\lambda_1) F(u) \quad (3.13)$$

e, in conclusione, uguagliando l'ultimo membro della (3.12) con l'ultimo della (3.13) si ottiene:

$$w(x, y) = 1 + \lambda_2 e^{1-\lambda_1} F(u) \quad (3.14)$$

Richiamando la posizione precedente  $w = \exp(\lambda_2 u)$  si ricava l'espressione di  $u$  che è soluzione del sistema iniziale (3.6):

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda_2} \ln[1 + \lambda_2 \cdot e^{1-\lambda_1} \cdot F(u)] \quad (3.15)$$

La (3.15) può anche essere riscritta, dividendo primo e secondo membro per  $u_{max}$  e tenendo conto dell'equazione vincolare (3.3) nel seguente modo:

$$\frac{u(x, y)}{u_{max}} = \frac{1}{\lambda_2 u_{max}} \ln[1 + (e^{\lambda_2 u_{max}} - 1) \cdot F(u)] \quad (3.16)$$

e infine, definendo il parametro  $G$  come:

$$G = \lambda_2 u_{max} \quad (3.17)$$

la funzione  $u$  assume la seguente semplice espressione:

$$\frac{u(x, y)}{u_{max}} = \frac{1}{G} \ln[1 + (e^G - 1) \cdot F(u)] \quad (3.18)$$

Come appare evidente questa espressione è del tutto analoga a quella già nota in letteratura; qui è stato dimostrato che la stessa è valida anche per il caso bidimensionale così come proposto in questo capitolo.

Una differenza sostanziale che deve considerarsi è che il parametro entropico  $G$  che può essere associato al parametro  $M$  di Chiu, non ha la stessa definizione analitica, in quanto il primo deve soddisfare il vincolo dell'equazione (3.5), il secondo la (3.4).

In definitiva per utilizzare la (3.18) è necessario conoscere l'espressione della  $F(u)$  e il valore che il parametro  $G$  può assumere al variare della configurazione in esame. In particolare:

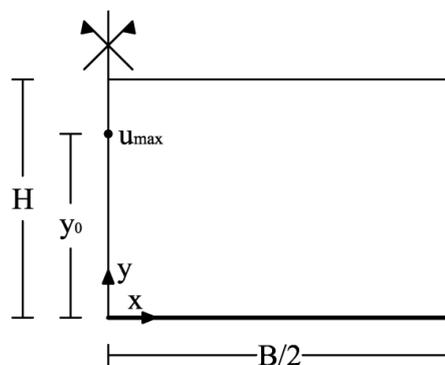
- l'espressione della  $F(u)$  deve rispettare le proprietà elencate all'inizio del paragrafo, e dipende dalla forma del dominio;
- il valore di  $G$  deve rispettare il vincolo (3.5) e, pertanto, è, fissato il dominio, una funzione del rapporto  $u_{med}/u_{max}$ ;

Su tali aspetti ci si soffermerà nei successivi paragrafi esplicitando le espressioni delle  $F(u)$  e quelle di  $G$  relativamente a tre tipologie di domini bidimensionali.

### 3.4.1 Dominio bidimensionale rettangolare con asse di simmetria verticale: funzione distribuzione di probabilità

Si consideri un dominio bidimensionale rettangolare con asse di simmetria verticale come quello rappresentato in Fig. 3.2. La simmetria del dominio rappresenta il fatto che la distribuzione di velocità in un semipiano si ripete simmetricamente nell'altro semipiano.

Tale dominio ha altezza pari ad  $H$  semilarghezza pari a  $B$  e la velocità massima  $u_{max}$  si attinge nel generico punto di coordinate  $(0, y_0)$ . Il sistema di coordinate  $x, y$  è fissato come da figura.



**Fig. 3.2** Dominio rettangolare simmetrico

Per generalizzare la trattazione si può passare a coordinate adimensionali  $\xi, \psi$  così definite:

$$\xi = 2x/B$$

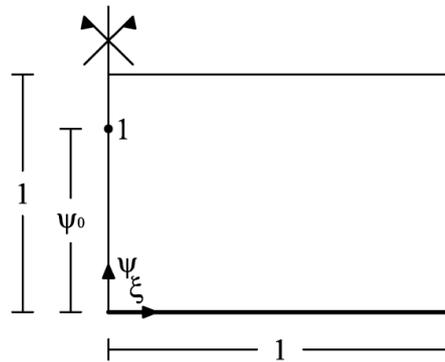
$$\psi = y/H$$

Si adimensionalizza, inoltre, la coordinata verticale del punto a velocità massima, come di seguito riportato:

$$\psi_0 = y_0/H$$

e si fa riferimento, in tal caso, alle velocità  $u$  adimensionalizzate rispetto alla velocità massima.

Pertanto il dominio adimensionale di riferimento è quello riportato di seguito in Fig. 3.3.



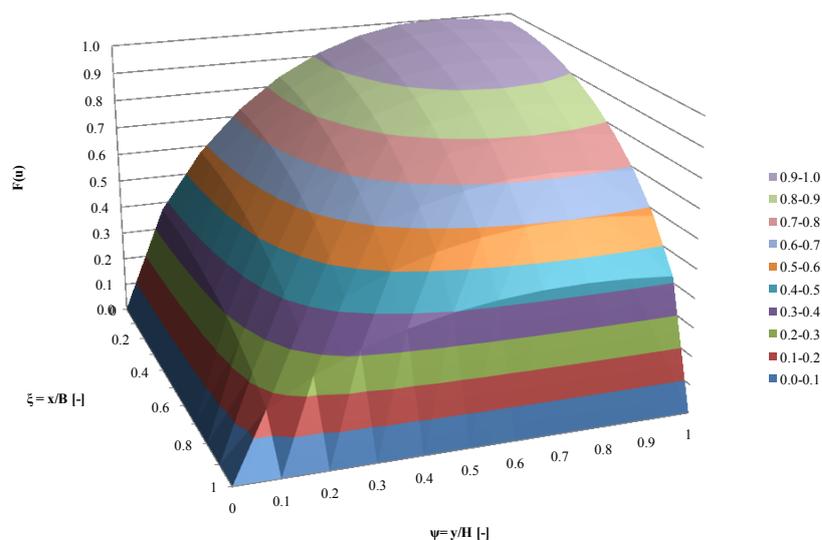
**Fig. 3.3** Dominio rettangolare simmetrico in coordinale e velocità adimensionalizzate

Definite le variabili, la  $F(u)$  può scriversi nel seguente modo:

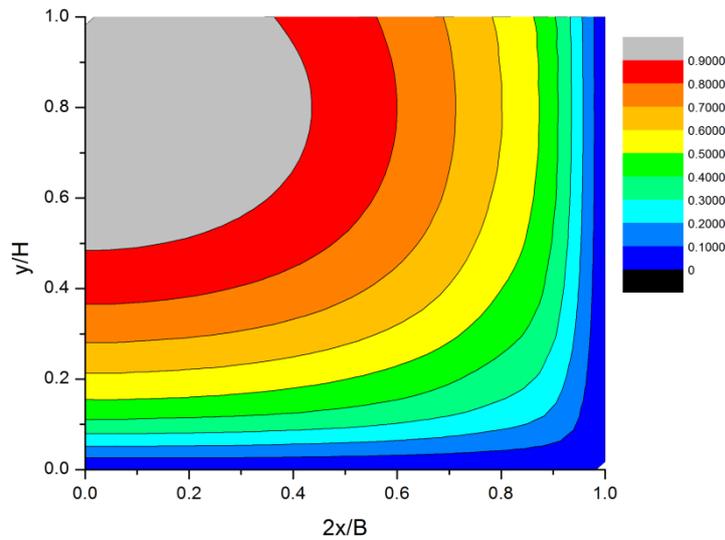
$$F(u) = \left[1 - \xi^2\right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left(\frac{\psi}{2}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|} \right] \quad (3.19)$$

Come è possibile notare la  $F(u)$  possiede tutte le proprietà necessarie: è definita tra 0 e 1 infatti vale, al minimo, 0 lungo il contorno del dominio e, al massimo, 1 nel punto di coordinate (0,  $\psi_0$ ), ed è continua e derivabile.

In Fig. 3.4 è riportata una riproduzione tridimensionale della  $F(u)$  in funzione delle coordinate adimensionali  $\xi$  e  $\psi$  e fissato un valore esemplificativo di  $\psi_0$  pari a 0.8 e di  $H/B = 0.5$ ; la stessa funzione è fornita mediante rappresentazione bidimensionale a curve di livello in Fig. 3.5.



**Fig. 3.4** Riproduzione 3D della funzione distribuzione di probabilità per dominio bidimensionale con asse di simmetria verticale, in coordinate adimensionali (fissato  $H/B=0.5$  e  $\psi_0=0.8$ )



**Fig. 3.5** Riproduzione 2D a curve di livello della funzione distribuzione di probabilità per dominio bidimensionale a simmetria verticale, in coordinate adimensionali (fissato  $H/B=0.5$ ;  $\psi_0=0.8$ )

È opportuno soffermarsi su un aspetto relativo all'espressione (3.19). Come sarà chiaro la (3.19) è una tra le possibili espressioni che la  $F(u)$  può assumere rispettando i vincoli imposti. Quella fornita, rispetto alle altre possibili, presenta i vantaggi di essere semplice, e di non avere coefficienti da calibrare.

Come è possibile notare l'espressione è formata da una prima parte ( $[1-\xi^2]^{H/B}$ ) che esprime la dipendenza dall'ascissa  $\xi$  e da una seconda parte che esprime la dipendenza dall'ordinata  $\psi$ . Nella prima parte compare, come esponente, il rapporto  $H/B$  ovvero il rapporto tra altezza e base del dominio. Ciò significa che per domini molto allungati, ovvero per canali larghissimi, tale rapporto tende a 0 e quindi la prima parte della  $F(u)$  tende a 1. In altre parole la  $F(u)$  non varia al variare dell'ascissa e pertanto il valore della  $F(u)$  che si ha in asse al dominio si ripete identicamente ad ogni valore di  $\xi$ .

Pertanto nel caso di canali larghissimi la (3.19) si trasforma nella seguente espressione:

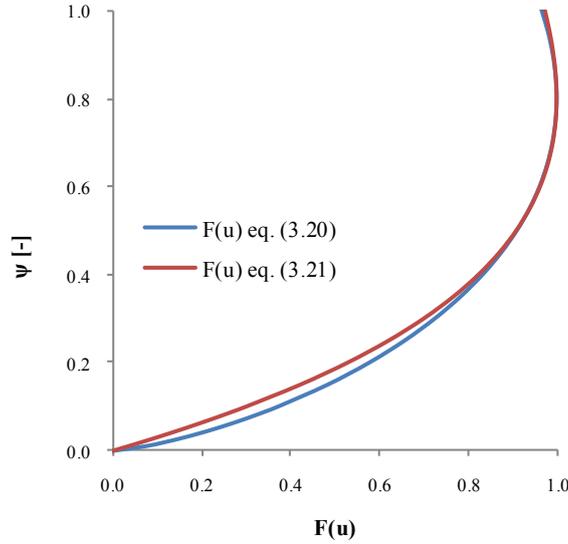
$$F(u) = 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} \right] \quad (3.20)$$

che come è possibile vedere contempla, grazie alla presenza di  $\psi_0$ , la possibilità che la velocità massima si attinga anche al di sotto della superficie superiore del dominio.

Lo stesso caso è stato trattato da Chiu (Chiu & Hsu, 2006) che forniva l'espressione della  $F(u)$  attraverso la (2.42) riportata nel capitolo precedente; qui di seguito si riscrive la  $F(u)$  con la stessa simbologia che si sta adoperando in questo paragrafo:

$$F(u) = \frac{\Psi}{\Psi_0} \exp\left(1 - \frac{\Psi}{\Psi_0}\right) \quad (3.21)$$

Gli andamenti della  $F(u)$  secondo l'espressione proposta e secondo quella di Chiu sono riportati in Fig. 3.6 per un valore di  $\Psi_0$  fissato pari a 0.8. Come si può notare, i due andamenti sono molto simili pertanto si può affermare che la trattazione bidimensionale che si sta facendo, quando degenera in un caso monodimensionale riconduce alla soluzione trovata da Chiu.



**Fig. 3.6** Confronto tra la  $F(u)$  qui ricavata (3.20) e la  $F(u)$  di Chiu (3.21)

### 3.4.2 Dominio bidimensionale rettangolare: determinazione parametro entropico $G$

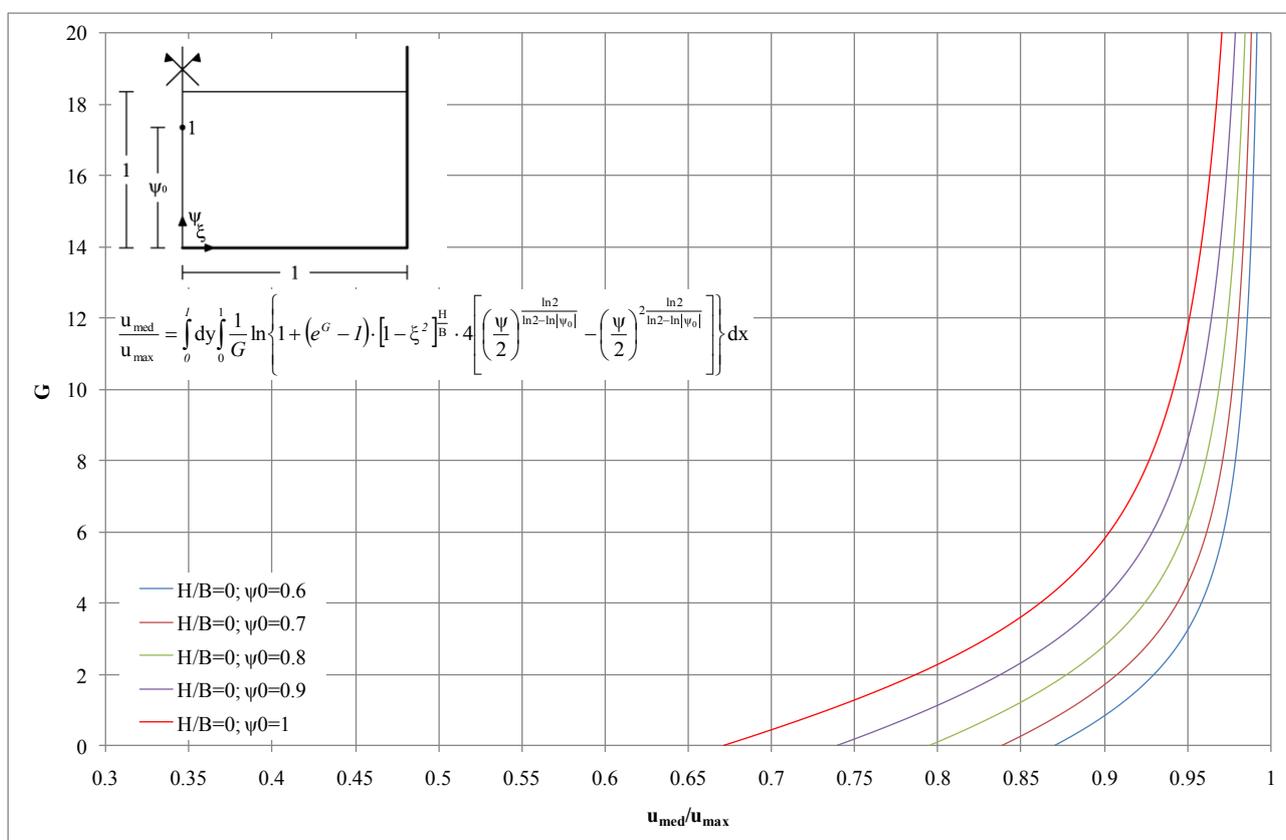
Come già accennato in precedenza la determinazione del parametro  $G$  può avvenire mediante la risoluzione dell'equazione vincolare (3.4), tuttavia ciò comporterebbe la necessità di conoscere la media della legge di probabilità della distribuzione di velocità, ovvero  $\bar{u}$ . Tale valore, non ha un significato fisico rilevante e, solitamente nelle pratiche applicazioni non è noto. Ciò induce a far ricorso ad una differente equazione vincolare, che è la (3.5), in cui compare un parametro fisico molto usato nelle pratiche applicazioni, che è la velocità media ( $u_{med}$ ).

Per risolvere la (3.5) è necessario esplicitare la variabile  $u$  a mezzo della (3.18) nonché la  $F(u)$  a mezzo della (3.19), al fine di ottenere la seguente equazione:

$$\frac{u_{med}}{u_{max}} = \int_0^l dy \int_0^1 \frac{1}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot [1 - \xi^2]_B^H \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{2 \ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|}} \right] \right\} dx \quad (3.22)$$

L'integrazione della (3.22) nell'incognita  $G$ , non è semplice da effettuare analiticamente ma può essere effettuata per via numerica. Qui di seguito, in Fig. 3.7, viene riportato il grafico sintetico della soluzione trovata per il caso di canale larghissimo ( $H/B=0$ ) per diversi valori di  $\psi_0$ . In appendice (Appendice A) sono riportati gli altri grafici relativi a differenti valori di  $H/B$ .

Come si può notare dall'analisi dell'abaco proposto la variazione di  $G$  in funzione del rapporto  $u_{med}/u_{max}$  è sempre più accentuata ovvero all'aumentare del valore del rapporto tra le velocità, ad per un fissato incremento del rapporto stesso si hanno incrementi via via crescenti del valore di  $G$ . Inoltre si nota che il parametro  $\psi_0$  influenza in modo modesto l'andamento di  $G$ , in particolare, sempre più modesto al diminuire di  $\psi_0$ .

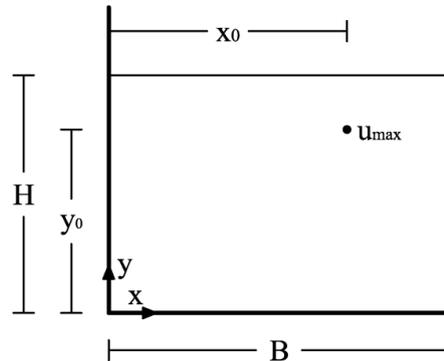


**Fig. 3.7** Abaco per la determinazione del parametro  $G$  – dominio rettangolare, canale larghissimo ( $H/B=0$ )

### 3.5.1 Dominio bidimensionale rettangolare senza asse di simmetria verticale: funzione distribuzione di probabilità

In alcuni casi può accadere che, nonostante la geometria della sezione sia simmetrica, la distribuzione di velocità non lo sia. Basti pensare al caso di un canale in curva in cui la forza centrifuga gioca un ruolo a volte non trascurabile.

Modificando leggermente la struttura della (3.19) è possibile ricavare una soluzione in cui il punto a velocità massima non si trova in corrispondenza dell'asse ma si trova decentrato e in particolare, con riferimento allo schema di Fig. 3.8 ha coordinate  $(x_0, y_0)$ .



**Fig. 3.8** Dominio rettangolare non simmetrico

Per generalizzare la trattazione si può passare, come al solito, a coordinate adimensionali  $\xi, \psi$  così definite:

$$\xi = x/B$$

$$\psi = y/H$$

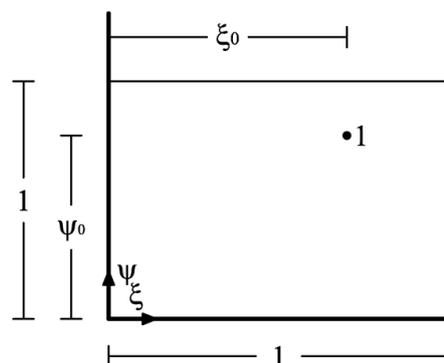
Si adimensionalizza, inoltre, la coordinata verticale del punto a velocità massima, come di seguito riportato:

$$\psi_0 = y_0/H$$

$$\xi_0 = x_0/H$$

e si fa riferimento, in tal caso, alle velocità  $u$  adimensionalizzate rispetto alla velocità massima.

Pertanto il dominio adimensionale di riferimento è quello riportato di seguito in Fig. 3.3.



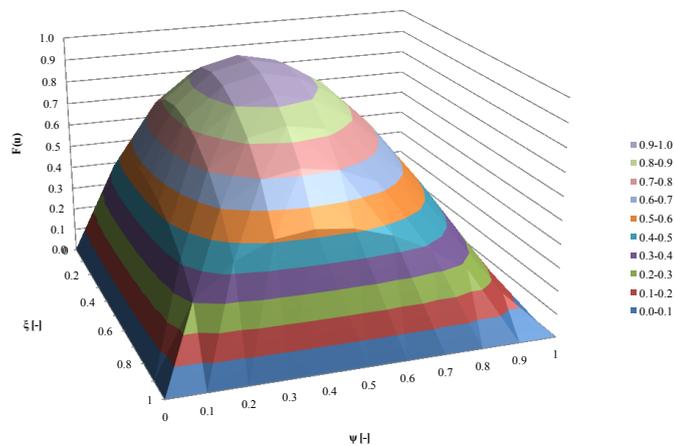
**Fig. 3.9** Dominio rettangolare non simmetrico in coordinate e velocità adimensionalizzate

Definite le variabili, la  $F(u)$  può scriversi nel seguente modo:

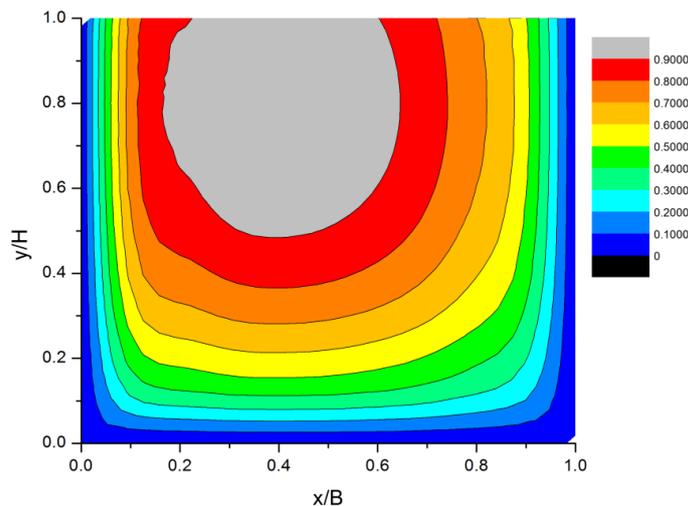
$$F(\mathbf{u}) = \left[ 4 \left( \xi^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \xi^{\frac{-2 \ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|} \right] \quad (3.23)$$

La la  $F(u)$  possiede tutte le proprietà necessarie: è definita tra 0 e 1 infatti vale, al minimo, 0 lungo il contorno del dominio e, al massimo, 1 nel punto di coordinate  $(0, \psi_0)$ , ed è continua e derivabile.

In Fig. 3.10 è riportata una riproduzione tridimensionale della  $F(u)$  in funzione delle coordinate adimensionali  $\xi$  e  $\psi$  e fissato un valore esemplificativo di  $\xi_0$  pari a 0.4 e  $\psi_0$  pari a 0.8 e; la stessa funzione è fornita mediante rappresentazione bidimensionale a curve di livello in Fig. 3.11.



**Fig. 3.10** Riproduzione 3D della funzione distribuzione di probabilità per dominio bidimensionale con asse di simmetria verticale, in coordinate adimensionali ( $H/B=0.5$ ;  $\xi_0=0.4$ ;  $\psi_0=0.8$ )



**Fig. 3.11** Riproduzione 2D a curve di livello della funzione distribuzione di probabilità per dominio bidimensionale con asse di simmetria verticale, in coordinate adimensionali ( $\xi_0=0.4$ ;  $\psi_0=0.8$ )

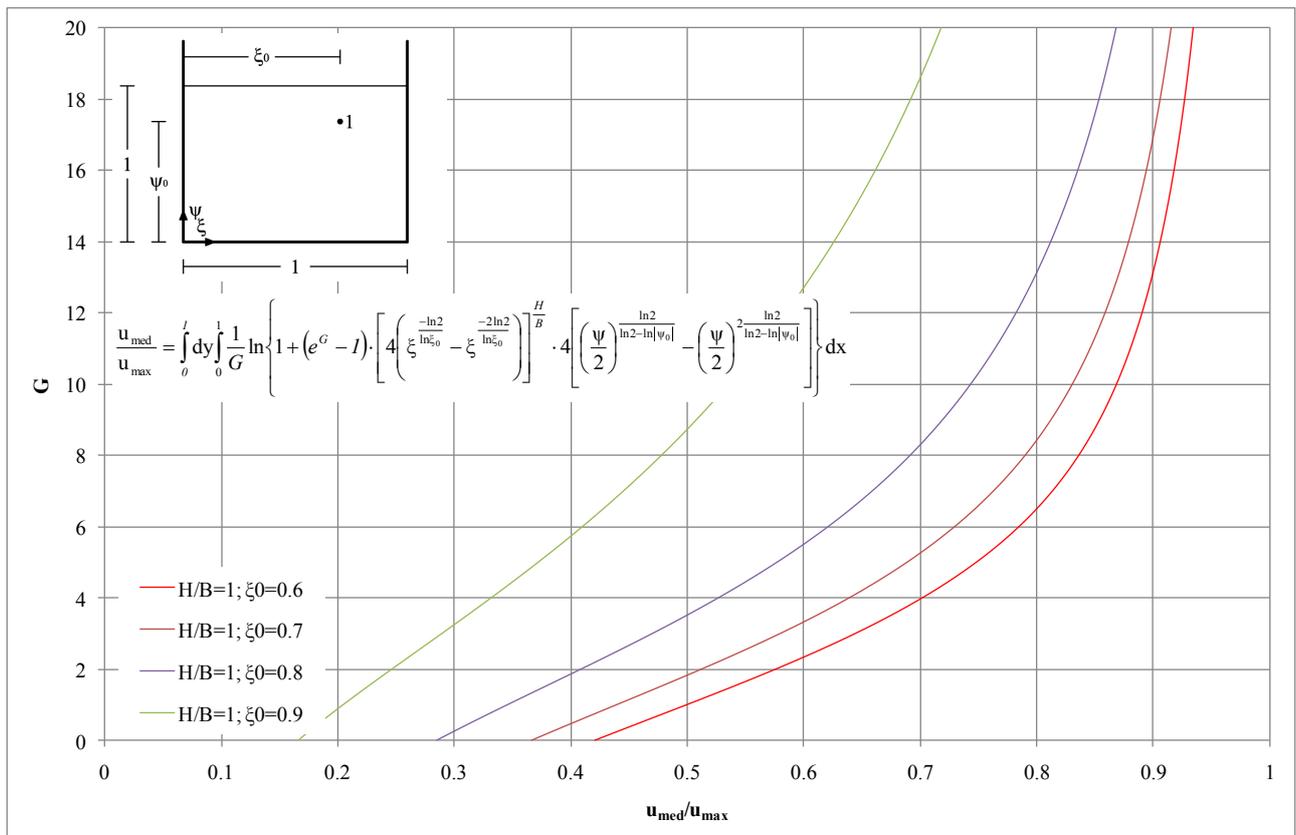
### 3.5.2 Dominio bidimensionale rettangolare senza asse di simmetria verticale: determinazione parametro entropico G

Analogamente a quanto fatto per il dominio rettangolare simmetrico è necessario ricavare l'espressione del parametro  $G$  risolvendo l'equazione (3.5), la quale, per dominio rettangolare con distribuzione non simmetrica assume la seguente espressione:

$$\frac{u_{med}}{u_{max}} = \int_0^l dy \int_0^1 \frac{1}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \xi^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \xi^{\frac{-2\ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\Psi_0|}} \right] \right\} dx \quad (3.24)$$

La soluzione della (3.24) non può che avvenire per via numerica e, a titolo esemplificativo viene riportato qui di seguito, in Fig. 3.12 il grafico relativo alla soluzione ricavata per  $H/B=1$  fissato il valore di  $\Psi_0=1$ , al variare di  $\xi_0$  tra 0.6 e 1.

I grafici relativi ad altri valori dei parametri che compaiono nella (3.24) sono riportati in appendice (Appendice A)



**Fig. 3.12** Abaco per la determinazione del parametro  $G$  – dominio rettangolare non simmetrico, per  $H/B=1$ ;  $\Psi_0=1$ .

### 3.6.1 Dominio bidimensionale trapezoidale: funzione distribuzione di probabilità

Analogamente a quanto fatto per il dominio rettangolare, è possibile ricavare un funzione di distribuzione cumulata di probabilità relativa ad un dominio trapezoidale. Tale dominio ha altezza pari ad  $H$  larghezza della base maggiore  $B$  e i lati obliqui inclinati di un angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale come mostrato in Fig. 3.13.

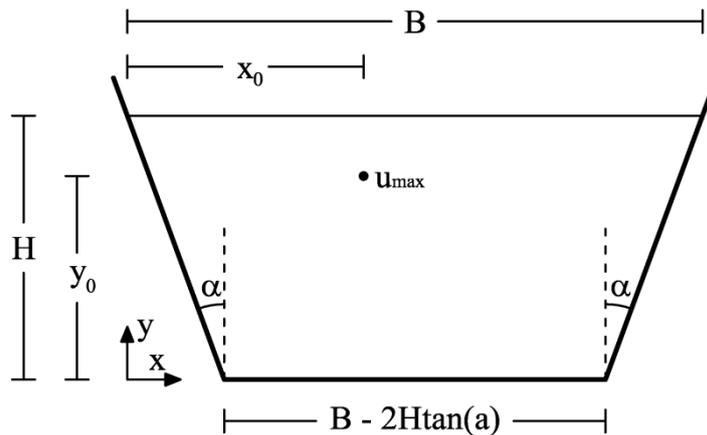


Fig. 3.13 Dominio trapezoidale

Il punto a velocità massima ha coordinate  $(x_0, y_0)$ .

Per generalizzare la trattazione si può passare a coordinate adimensionali  $\xi, \psi$  così definite:

$$\xi = x/B$$

$$\psi = y/H$$

Si introduce il rapporto  $d$  tra altezza e semiampiezza di base e si adimensionalizza, inoltre, la coordinata verticale del punto a velocità massima come di seguito riportato:

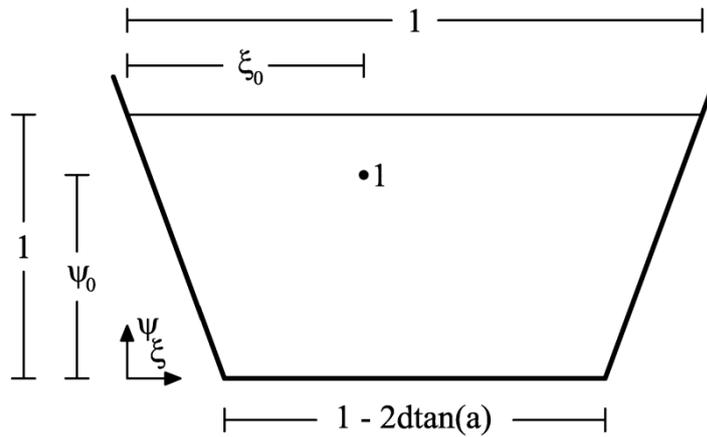
$$d = H/B$$

$$\xi_0 = x_0/B$$

$$\psi_0 = y_0/H$$

si fa riferimento alle velocità  $u$  rapportate alla velocità massima.

Pertanto il dominio adimensionale, analogamente al caso del dominio rettangolare, è quello riportato di seguito in Fig. 3.14.



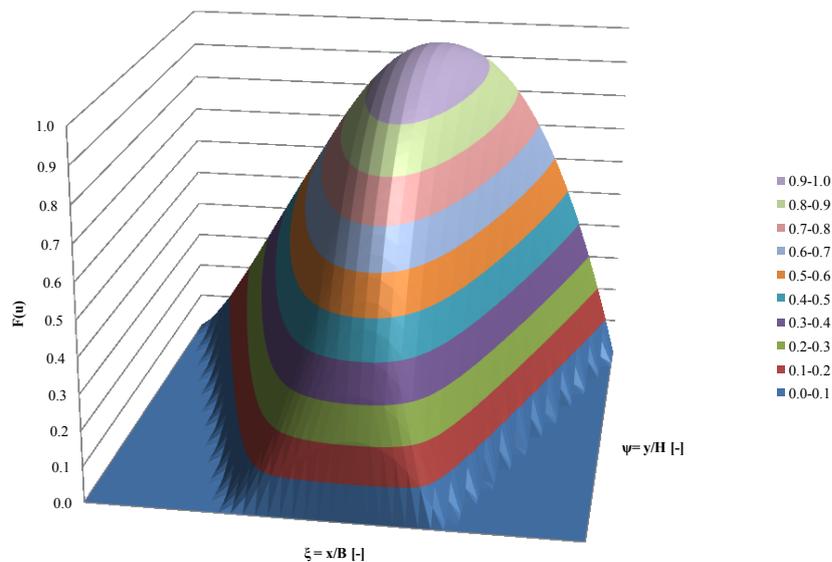
**Fig. 3.14** Dominio trapezoidale in coordinale e velocità adimensionali

Definite le variabili, la  $F(u)$  può scriversi nel seguente modo:

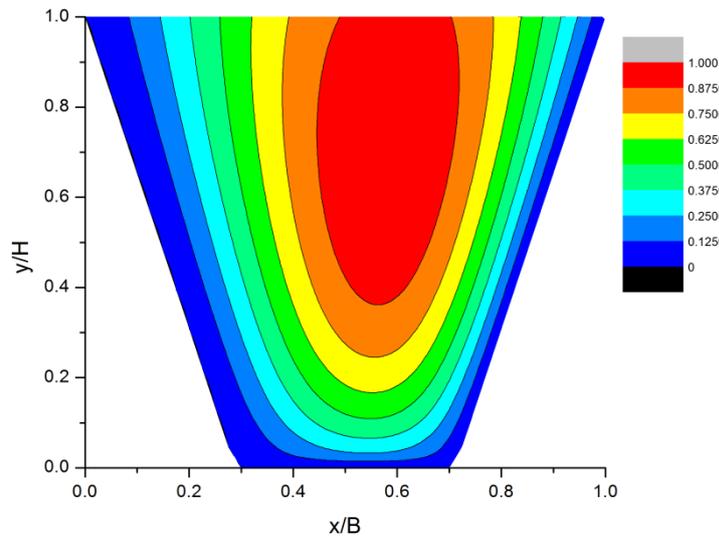
$$F(\mathbf{u}) = \left[ 4 \left( \left( \frac{\xi - 1 + d\psi \tan \alpha}{1 - 2d\psi \tan \alpha} \right)^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \left( \left( \frac{\xi - 1 + d\psi \tan \alpha}{1 - 2d\psi \tan \alpha} \right) \right)^{\frac{-2\ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^d \cdot 4 \left[ \left( \frac{\psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\psi}{2} \right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|} \right] \quad (3.25)$$

La  $F(u)$  rispetta tutte le condizioni necessarie infatti è definita tra 0 e 1, vale, al minimo, 0 lungo il contorno del dominio e, al massimo, 1 nel punto di coordinate  $(\xi_0, \psi_0)$ , è continua e derivabile.

In Fig. 3.15 è riportata una riproduzione tridimensionale della  $F(u)$  in funzione delle coordinate adimensionali  $\xi$  e  $\psi$  e fissati dei valori esemplificativi di  $d=0.5$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $\xi_0=0.6$  e  $\psi_0=0.7$ ; la stessa funzione è rappresentata in modo bidimensionale a curve di livello in Fig. 3.16.



**Fig. 3.15** Riproduzione 3D della funzione distribuzione di probabilità (3.25) per dominio bidimensionale trapezoidale, in coordinate adimensionali (fissati  $d=0.5$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $\xi_0=0.6$  e  $\psi_0=0.7$ )



**Fig. 3.16** Riproduzione 2D a curve di livello della funzione distribuzione di probabilità per dominio bidimensionale trapezoidale, in coordinate adimensionali (fissati  $d=0.5$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $\xi_0=0.6$  e  $\psi_0=0.7$ )

È utile notare, inoltre, che la formula di  $F(u)$  appena fornita, nel caso di angolo  $\alpha$  nullo, ovvero nel caso di dominio rettangolare, si semplifica nella seguente espressione:

$$F(u) = \left[ 4 \left( \xi^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \xi^{\frac{-2\ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|} \right] \quad (3.26)$$

che è proprio la (3.23) fornita precedentemente per il dominio rettangolare.

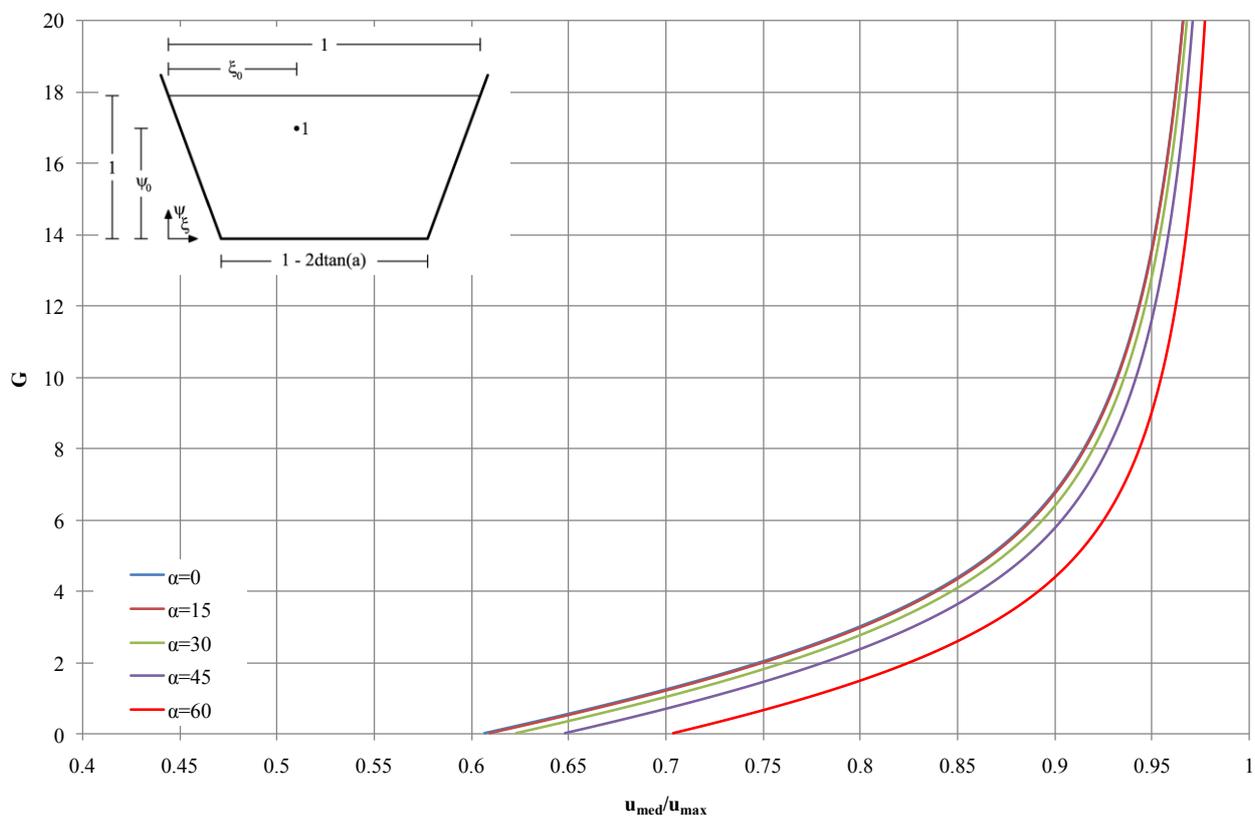
### 3.6.2 Dominio bidimensionale trapezoidale: determinazione parametro entropico G

Analogamente a quanto fatto per dominio rettangolare è necessario ricavare l'espressione del parametro  $G$  risolvendo l'equazione (3.5), la quale, per dominio trapezoidale assume la seguente espressione:

$$\frac{u_{med}}{u_{max}} = \int_{\psi=0}^1 \int_{\xi=0}^1 \frac{1}{G} \ln \left[ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \left( \frac{\xi - 1 + d\psi \tan \alpha}{1 - 2d\psi \tan \alpha} \right)^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \left( \left( \frac{\xi - 1 + d\psi \tan \alpha}{1 - 2d\psi \tan \alpha} \right) \right)^{\frac{-2\ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|} \right] \right] d\xi d\psi \quad (3.27)$$

L'integrazione della (3.27) nell'incognita  $G$  può essere sviluppata per via numerica, tenendo conto del fatto che, rispetto al dominio rettangolare i parametri geometrici che possono variare sono il rapporto tra altezza e base del dominio  $d$ , la coordinata verticale del punto a velocità massima  $\delta$  e l'inclinazione del lato obliquo rispetto alla verticale  $\alpha$ . Possono variare, poi, i due coefficienti numerici  $n$  ed  $m$  con conseguente necessità di calcolare il valore di  $G$  corrispondente.

Come risultato dell'integrazione numerica della (3.27) sono stati ricavati alcuni abachi che esprimono, fissati alcuni parametri, la dipendenza del parametro  $G$  dal rapporto  $u_{med}/u_{max}$ . Qui di seguito, a scopo esemplificativo, viene riportato quello relativo al caso di simmetria verticale ovvero per  $\xi_0=0.5$ , velocità massima in superficie, ovvero  $\psi_0=1$  e rapporto  $H/B=0.25$ , al variare dell'angolo  $\alpha$ . Gli altri abachi sono riportati in appendice (Appendice A).



**Fig. 3.17** Abaco per la determinazione di  $G$  per dominio trapezoidale al variare dell'angolo  $\alpha$  e fissati  $\xi_0=0.5$ ,  $\psi_0=1$ ,  $H/B=0.25$

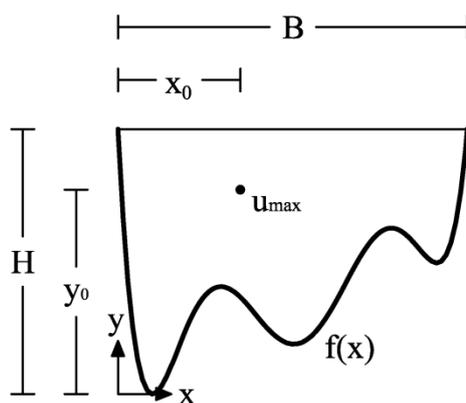
### 3.7.1 Dominio bidimensionale con contorno definito da una generica espressione: funzione distribuzione di probabilità

I domini trattati fino ad ora, rettangolare e trapezio, sono relativi a canali che, nella realtà, non possono che essere artificiali. Se si vuole stimare la distribuzione di velocità in un canale naturale, un corso d'acqua, è difficile, a meno di approssimazioni talvolta molto spinte, modellarne la sezione trasversale con un dominio di forma rettangolare o trapezoidale.

Ecco perché nasce la necessità di ricercare una soluzione analitica relativa ad un dominio di forma qualsiasi. Resta inteso che, volendo trovare una soluzione analitica esatta, si debba fare riferimento ad un dominio che ha un contorno di forma qualsiasi ma pur sempre definibile

attraverso un'espressione matematica. Ciò comporta che, in fase di modellazione della forma reale del corso d'acqua, si debba ricercare una espressione analitica, qualsiasi essa sia, tale da approssimare in modo adeguato il contorno di riferimento.

Detto ciò, fissato un sistema di coordinate  $(x, y)$  si consideri un dominio di forma qualsiasi, il cui contorno è rappresentato dall'espressione analitica  $f(x)$ . Tale dominio ha altezza massima  $H$ , larghezza massima  $B$  e il punto a velocità massima  $u_{max}$  ha coordinate  $(x_0, y_0)$ .



**Fig. 3.18** Dominio di riferimento di forma qualsiasi.

Si passa alle coordinate adimensionali  $\xi, \psi$  così definite:

$$\xi = x/B$$

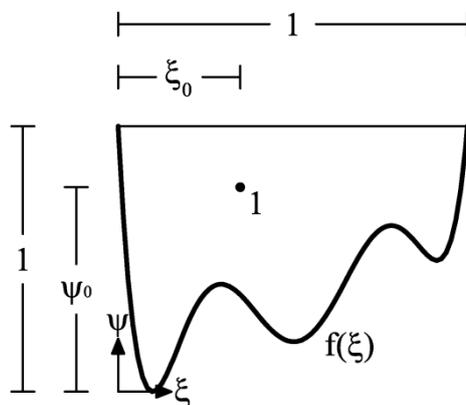
$$\psi = y/H$$

Di conseguenza il punto a velocità massima ha coordinate adimensionali  $(\xi_0, \psi_0)$  dove:

$$\xi_0 = x_0/B$$

$$\psi_0 = y_0/H$$

Pertanto il dominio adimensionale, analogamente al caso del dominio rettangolare, è quello riportato di seguito in Fig. 3.19.



**Fig. 3.19** Dominio di riferimento di forma qualsiasi in coordinate e velocità adimensionali

Definite le variabili, la  $F(u)$  può scriversi nel seguente modo:

$$F(u) = \left\{ 4 \left[ \begin{array}{cc} \frac{-\ln 2}{\ln \xi_0} & \frac{-2\ln 2}{\ln \xi_0} \\ \xi & -\xi \end{array} \right] \right\}^m \cdot \left\{ 4 \left[ \begin{array}{c} \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|} - \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|} \end{array} \right] \right\} \quad (3.28)$$

con  $m = \frac{H}{B} \left( \frac{Ar}{A} \right)^{13}$

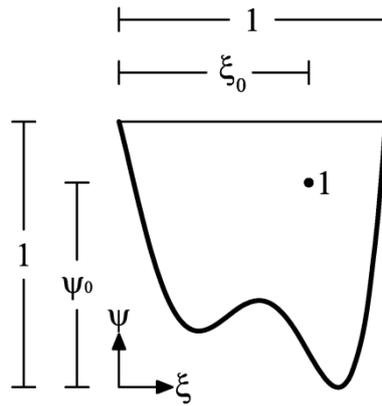
La  $F(u)$  rispetta tutte le condizioni necessarie infatti è definita tra 0 e 1, vale, al minimo, 0 lungo il contorno del dominio e, al massimo, 1 nel punto di coordinate  $(\xi_0, \psi_0)$ , ed è continua e derivabile.

Come è possibile notare all'interno della (3.28) compare, nella parte che esprime la dipendenza dalla coordinata verticale, l'espressione  $f(\xi)$  che caratterizza il contorno del dominio; nella parte relativa alla dipendenza da  $\xi$ , invece, compare un esponente che è diverso da  $H/B$  che invece era presente nel caso di dominio rettangolare; difatti, per tenere conto della variabilità della sezione l'esponente è stato posto pari ad  $m = H/B \cdot (Ar/A)^{13}$ , in cui,  $H/B$  è il rapporto tra altezza massima e larghezza in superficie,  $Ar/A$  è il rapporto tra due aree:  $Ar$ : area della sezione rettangolare circoscritta alla sezione in esame ( $H \cdot B$ ), e  $A$  area della sezione in esame. In effetti in merito alla definizione di questo esponente  $m$ , che può essere definito un coefficiente di forma, si dovrà effettuare qualche riflessione più approfondita in futuro al fine, eventualmente, di trovarne un'espressione che abbia qualche fondamento fisico di rilievo.

Come è possibile notare l'espressione (3.28) nel caso di dominio rettangolare degenera nella (3.23) in quanto  $f(\xi)$  vale zero; se poi, oltre a questa condizione si pone anche  $\xi_0 = 0.5$ , ovvero distribuzione simmetrica, la (3.28) degenera nella già citata (3.20), effettuata la dovuta traslazione di riferimento.

La forza e la flessibilità di tale espressione sta nel fatto che è valida per una qualsiasi sezione. Ciò però esclude la possibilità di sintetizzare tutti i casi possibili come fatto per la sezione rettangolare e quella trapezoidale. È per questo che di seguito, a titolo esemplificativo, verrà illustrata una sezione di forma nota con contorno espresso da una equazione polinomiale che potrebbe essere assimilata alla sezione trasversale di un corso d'acqua.

Si consideri quale dominio di riferimento un dominio il cui contorno è definito da un polinomio di sesto grado, come quello riportato in Fig. 3.20, in coordinate adimensionali.

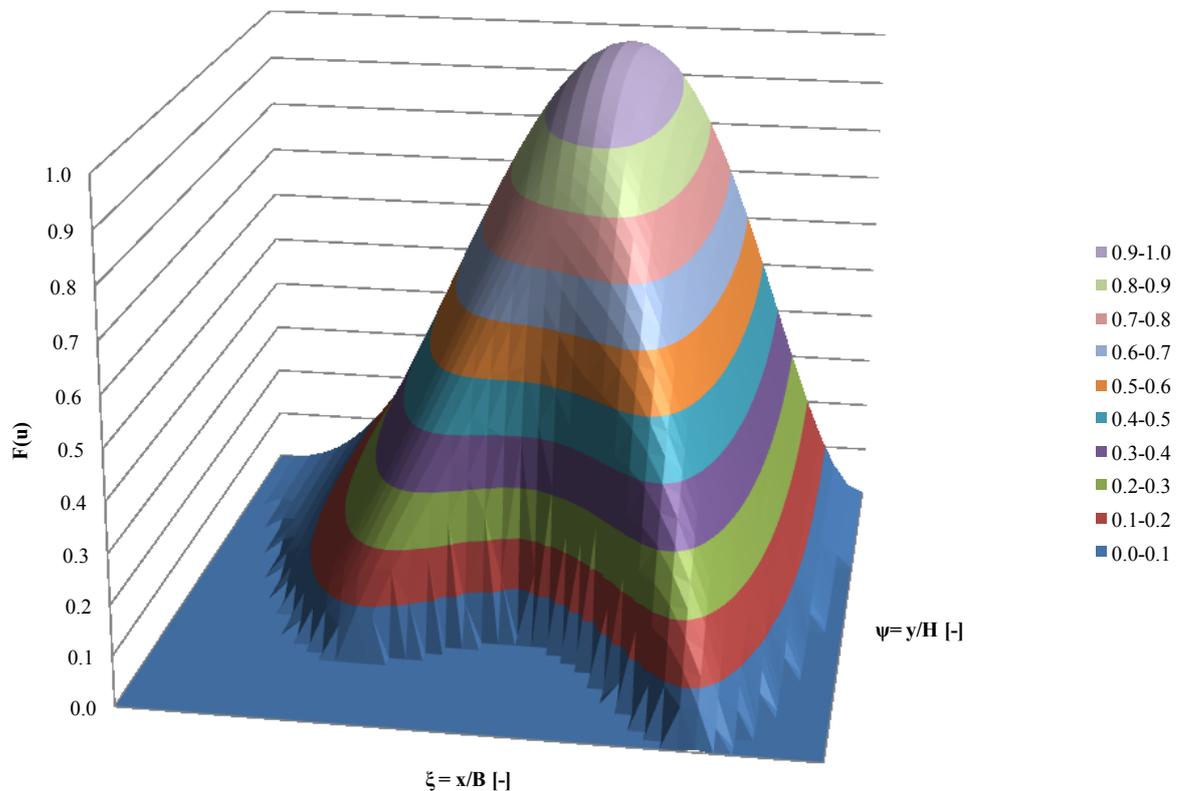


**Fig. 3.20** Dominio di riferimento in coordinate adimensionali

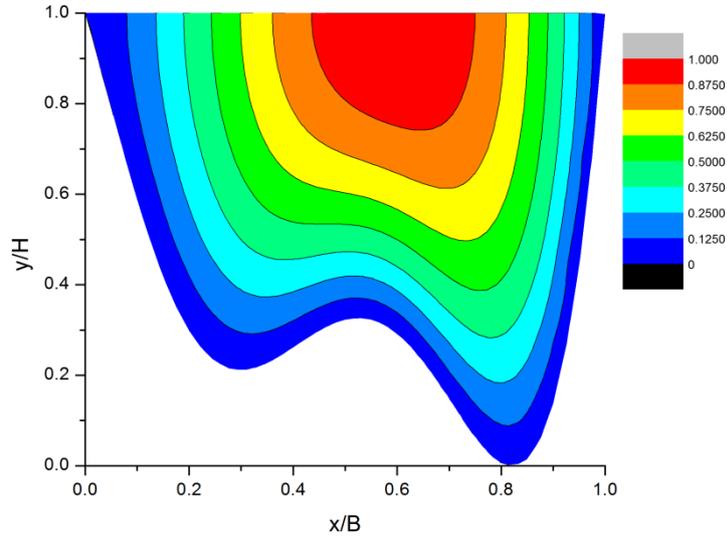
L'espressione del contorno del caso in esame è la seguente:

$$f(\xi) = -21.604\xi^6 + 110.658\xi^5 - 159.492\xi^4 + 83.797\xi^3 - 9.503\xi^2 - 3.856\xi + 1 \quad (3.29)$$

In Fig. 3.21 è riportata una riproduzione tridimensionale della  $F(u)$  in funzione delle coordinate adimensionali  $\xi$  e  $\psi$  e fissati i valori esemplificativi di  $m=2$ ;  $\xi_0=0.6$ ,  $\psi_0=0.8$ ; la stessa funzione è rappresentata in modo bidimensionale a curve di livello in Fig. 3.22.



**Fig. 3.21** Riproduzione 3D della funzione distribuzione di probabilità cumulata (3.28) per dominio definito dalla (3.29) (fissati  $m=2$ ;  $\xi_0=0.6$ ,  $\psi_0=0.8$ )



**Fig. 3.22** – Riproduzione 2D a curve di livello della funzione distribuzione di probabilità cumulata (3.28) per dominio definito dalla (3.29) (fissati  $m=2$ ;  $\xi_0=0.6$ ,  $\psi_0=0.8$ )

Per passare dalla funzione di distribuzione di probabilità alla distribuzione di velocità è necessario conoscere, come sempre, l'andamento del parametro entropico  $G$ , in funzione del rapporto  $u_{med}/u_{max}$ . Su tale aspetto si dirà nel paragrafo seguente.

### 3.7.2 Dominio bidimensionale di forma qualsiasi: determinazione parametro entropico $G$

Nel trattare un dominio bidimensionale di forma qualsiasi diventa impossibile fornire una sintesi, attraverso, ad esempio, abachi o diagrammi, della funzione  $G(u_{med}/u_{max})$  relativa a tutti i casi che possono essere trattati.

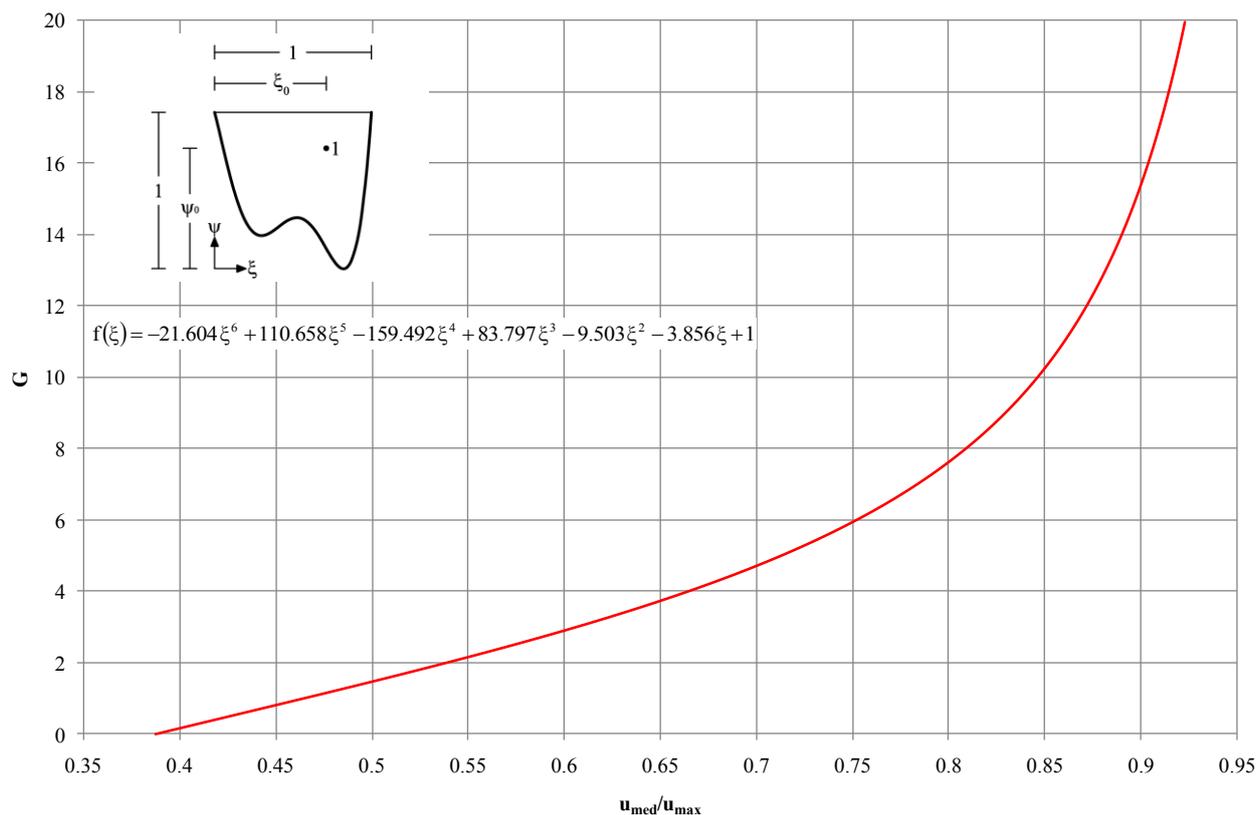
Pertanto nel presente paragrafo si richiamerà la procedura per il calcolo della funzione  $G(u_{med}/u_{max})$ , illustrandone l'applicazione ad un caso esemplificativo. Va da se che in un caso differente da quello illustrato si procederà in modo del tutto analogo.

Si consideri il caso riportato nel paragrafo precedente del dominio di Fig. 3.20 il cui contorno è definito nel sistema adimensionale dalla (3.29).

Per la determinazione di  $G$  si procede all'integrazione dell'equazione vincolare (3.5) che, nel caso in esame, diventa:

$$\frac{u_{med}}{u_{max}} = \int_{\xi=0}^1 \int_{\psi=f(\xi)}^1 \frac{1}{G} \ln \left[ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \frac{-\ln 2}{\xi \ln \xi_0} - \frac{-2 \ln 2}{-\xi \ln \xi_0} \right)^m \right] \cdot 4 \left[ \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|} - \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|} \right] \right] d\psi d\xi \quad (3.30)$$

Dall'abaco di Fig. 3.23, fissato il rapporto  $u_{med}/u_{max}$  si ricava il valore di  $G$  e si può utilizzare la (3.18) accoppiata alle (3.28) e (3.29) per ottenere l'espressione della distribuzione di velocità.



**Fig. 3.23** Abaco per la determinazione di  $G$  – dominio esemplificativo di Fig. 3.24

### 3.7.3 Alcune considerazioni in merito alla funzione $G(u_{med}/u_{max})$

Per ricostruire la distribuzione di velocità in un dominio bidimensionale, sia esso rettangolare, trapezoidale, o di forma qualsiasi, è necessario conoscere la geometria della sezione stessa la velocità media e quella massima.

Spesso è utile, per avere un quadro più completo, e per ottenere dei risultati più vicini alla realtà, conoscere anche la posizione del punto a velocità massima, il quale, altrimenti, può essere posto, in modo verosimile, sul pelo libero.

Fissata la geometria della sezione il parametro  $G$  è, quindi, una funzione del rapporto  $u_{med}/u_{max}$  e difatti negli abachi presentati precedentemente si riscontra proprio tale dipendenza.

È certamente utile e vantaggioso, anche ai fini pratici, capire se esiste una dipendenza di  $G$  da altre caratteristiche della sezione o della corrente quali ad esempio la scabrezza o il grado di cineticità.

### **3.8 Bibliografia**

Chiu C. L., & Hsu S. H. (2006) Probabilistic approach to modeling of velocity distributions in fluid flows, *Journal of Hydrology*, vol. 316, 28-42

Fusco N., Marcellini P., Sbordone C. (2002) *Elementi di Analisi Matematica Due - Liguori*

Marcellini P., Sbordone C. (2002) *Elementi di Analisi Matematica Uno - Liguori*,

## **CAPITOLO 4**

### **VALIDAZIONE DEL MODELLO ANALITICO TRAMITE MISURE SPERIMENTALI E DI LETTERATURA DI PROFILI DI VELOCITÀ.**

#### **4.1 Introduzione**

Il modello analitico proposto nel capitolo precedente necessita di essere testato al fine di poter essere utilizzato per una stima attendibile della distribuzione di velocità in un corso d'acqua. La validazione del modello è stata eseguita mediante confronto con reali misure di velocità effettuate in laboratorio o in sito.

In particolare, per quanto riguarda il dominio rettangolare, sono state utilizzate alcune misure di letteratura nonché sono state effettuate delle misure in canale in laboratorio; per quanto riguarda il dominio di forma qualsiasi sono state prese a riferimento alcune misure di velocità effettuate su corsi d'acqua reali.

Nella prima parte del presente capitolo si illustrano i risultati ottenuti dal confronto tra le misure di velocità di letteratura su canale rettangolare e le stime ottenute con il modello proposto nel capitolo precedente. Successivamente viene descritta la campagna di misure sperimentali effettuate in laboratorio su canali rettangolari e il relativo confronto con i valori di velocità desunti dal modello teorico. Successivamente si illustra il confronto teorico-sperimentale relativamente ad alcune misure di velocità effettuate su corsi d'acqua reali.

#### **4.2 Confronto con misure di velocità di letteratura per sezione rettangolare**

Al fine di validare il modello analitico sviluppato nell'ambito del dottorato di ricerca sono stati stimati i profili di velocità in alcune configurazioni riportate in letteratura, relativamente alle quali si dispone delle misure effettive di velocità. Nei seguenti paragrafi viene illustrato tale confronto riportando per ciascun caso una breve descrizione della configurazione in esame, una tabella con i dati effettivamente misurati, una tabella analoga alla precedente con i dati stimati, i profili di velocità di confronto ed un grafico sintetico utile per sintetiche considerazioni.

I casi che vengono presentati sono tutti casi di canali rettangolari senza asse di simmetria verticale; pertanto, si ricorda che, l'equazione che verrà applicata per la stima della distribuzione di

velocità è quella in cui compare la  $F(u)$  definita dalla (3.24) che, per chiarezza espositiva, viene richiamata qui di seguito:

$$u = \frac{u_{\max}}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \xi^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \xi^{\frac{-2 \ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} \right] \right\} \quad (4.1)$$

in cui il parametro  $G$  viene determinato, nota la geometria della sezione e il rapporto tra velocità media e velocità massima, risolvendo l'equazione (3.18) che qui di seguito viene specificamente richiamata:

$$\frac{u_{\text{med}}}{u_{\max}} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{G} \ln \{ 1 + (e^G - 1) \cdot F(u) \} dx \quad (4.2)$$

Chiu & Hsu (2006) riportano alcune misure fatte in una canaletta larga 2 piedi (61 cm) e con un tirante pari a 0.6 piedi (18.3 cm). I dati sperimentali ricavati dalla nota originale sono riportati in Tab. 4.1.

x=-15.25 cm		x=0 cm		x=+15.25 cm	
y [cm]	u [cm/s]	y [cm]	u [cm/s]	y [cm]	u [cm/s]
0.7	26.5	0.9	65.0	0.8	32.0
1.2	79.3	1.8	89.7	1.5	69.2
1.8	87.2	2.5	90.3	2.2	83.9
2.5	91.5	3.3	100.0	3.0	80.2
3.1	102.8	4.8	105.8	3.7	87.2
4.4	102.5	7.9	121.7	5.3	97.9
6.9	112.2	10.9	123.8	8.3	110.7
9.5	112.9	14.0	126.3	11.4	121.4
12.0	123.5	17.0	120.8	14.4	121.7
14.6	120.8			17.5	111.9

**Tab. 4.1** Misure di velocità in canale rettangolare (Chiu & Hsu, 2006)

La  $u_{\max}$  misurata è pari a 4.13 piedi/s (126.3 cm/s) e quella media, riportata dagli Autori, è 2.95 piedi/s (90.0 cm/s) presumibilmente ricavata nota la portata. La velocità massima si attinge in mezzzeria pertanto  $\xi_0=0.5$  e all'incirca ad una quota pari a 0.6 volte  $H$  ovvero  $\psi_0=0.6$ . Pertanto risolvendo la (4.2) si ottiene un valore di  $G$  pari a 0.632.

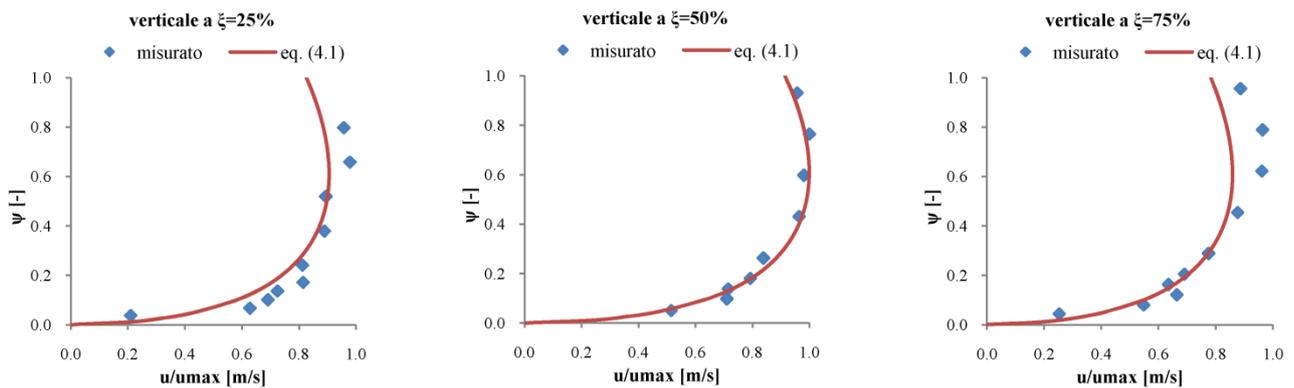
Noto  $G$  è possibile ricavare i valori di velocità utilizzando la (4.1).

Nella Fig. 4.2, inoltre, sono riportati, per ciascuna verticale, utilizzando coordinate e velocità adimensionali sia i punti di misura sperimentali sia i profili di velocità ricavati con la (4.1). Come è possibile notare la stima dei dati sperimentali è molto buona.

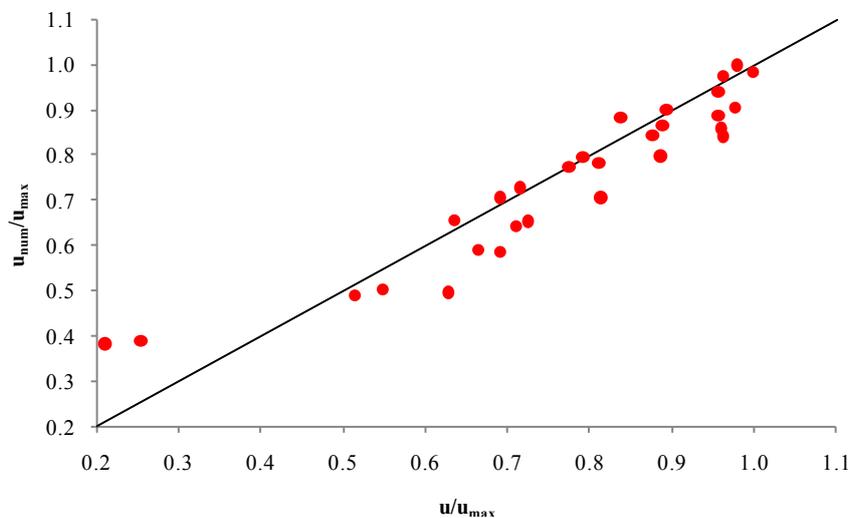
Tale buon accordo si evince anche osservando il grafico di Fig. 4.3 in cui in ascissa sono riportati i valori di velocità misurata e in ordinata quelli di velocità stimata, entrambe adimensionalizzate.

x=-15.25 cm		x=0 cm		x=+15.25 cm	
y [cm]	u [cm/s]	y [cm]	u [cm/s]	y [cm]	u [cm/s]
0.7	48.2	0.9	61.7	0.8	49.0
1.2	62.6	1.8	81.1	1.5	63.4
1.8	73.7	2.5	91.9	2.2	74.6
2.5	82.4	3.3	100.3	3.0	82.8
3.1	89.0	4.8	111.5	3.7	89.0
4.4	98.6	7.9	122.9	5.3	97.7
6.9	109.3	10.9	126.1	8.3	106.3
9.5	113.7	14.0	124.2	11.4	108.4
12.0	114.2	17.0	118.6	14.4	106.2
14.6	111.9			17.5	100.8

**Tab. 4.2** Valori di velocità stimati in canale rettangolare



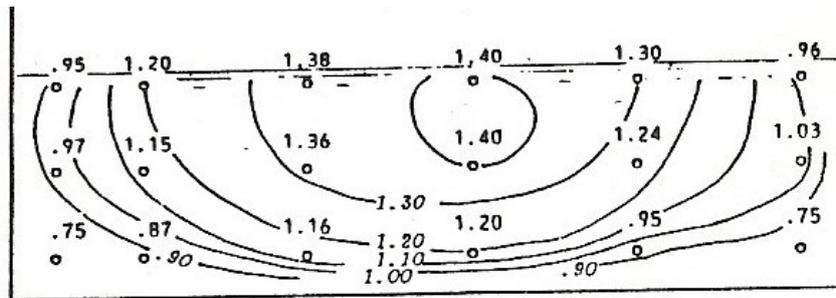
**Fig. 4.2** Confronto tra valori misurati e valori stimati – coordinate e velocità adimensionali



**Fig. 4.3** Confronto sintetico tra valori misurati e valori stimati

Come si può notare i profili di velocità stimati con la (4.1) approssimano bene i dati misurati.

Un confronto analogo è stato effettuato con i dati misurati e pubblicati in (Marchi, 1988); i dati misurati sono solo 3 per ogni verticale, forse un po' pochi per un confronto adeguato; inoltre la posizione dei punti di misura e delle dimensioni del canale sono state ricavate da una figura abbastanza vecchia (Fig. 4.4) con tutte le approssimazioni e le incertezze che ne derivano.



**Fig. 4.4** Misure di velocità in canale rettangolare (Marchi, 1988)

Le misure di velocità estrapolate dalla figura sono riportate nella seguente tabella (Tab. 4.3) in cui le coordinate sono adimensionali e le velocità sono espresse in m/s.

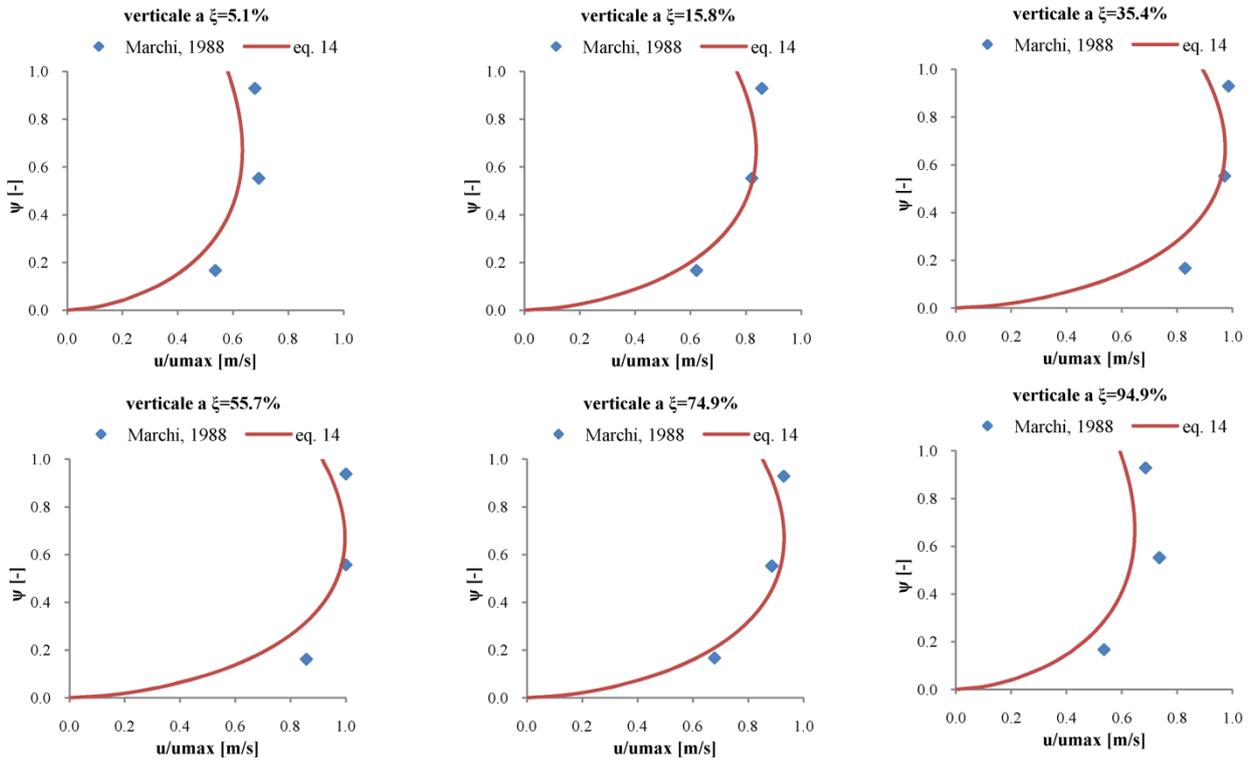
$\psi \backslash \xi$	5%	16%	35%	56%	75%	95%
93%	0.95	1.20	1.38	1.40	1.30	0.96
55%	0.97	1.15	1.36	1.40	1.24	1.03
17%	0.75	0.87	1.16	1.20	0.95	0.75

**Tab. 4.3** Misure di velocità in canale rettangolare (Marchi, 1988)

Il rapporto  $H/B$  è pari a 0.27, la  $u_{\max}$  misurata è pari a 1.40 m/s e quella media è 1.03 m/s. La velocità massima si attinge, a giudicare dalla figura, approssimativamente per  $\xi_0=0.55$  e all'incirca a  $\psi_0=0.7$ . Pertanto, risolvendo la (4.2) si ottiene un valore di  $G$  pari a 0.01. Utilizzando la (4.1) possono ricavarsi i valori di velocità riportati nella seguente tabella 4.4 e i relativi profili riportati in Fig. 4.5.

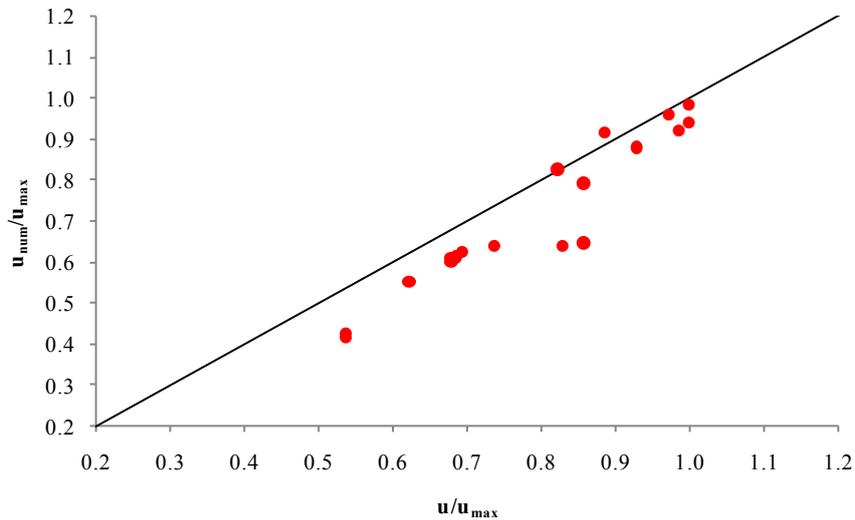
$\psi \backslash \xi$	5%	16%	35%	56%	75%	95%
93%	0.84	1.11	1.29	1.32	1.23	0.86
55%	0.88	1.16	1.35	1.38	1.28	0.89
17%	0.58	0.77	0.90	0.91	0.86	0.60

**Tab. 4.4** Valori di velocità stimati in canale rettangolare



**Fig. 4.5** Confronto tra valori misurati e valori stimati

Anche in questo caso il confronto è buono, il modello analitico approssima bene i valori sperimentali il che si evince anche osservando il grafico di Fig. 4.6.



**Fig. 4.6** Confronto sintetico tra valori misurati e valori stimati

Attesa l'esigua quantità di misure sperimentali reperite in letteratura si è ritenuto necessario procedere ad effettuare delle misure di velocità in canale al fine di avere dati che, sia in termini di

quantità che in termini di qualità fossero adeguati per testare la validità del modello analitico. Ai paragrafi seguenti è rimandato tale aspetto.

### 4.3 L'indagine sperimentale

L'installazione sperimentale utilizzata per lo sviluppo delle prove è situata presso il Laboratorio di Ingegneria Ambientale dell'Università degli Studi di Cassino.

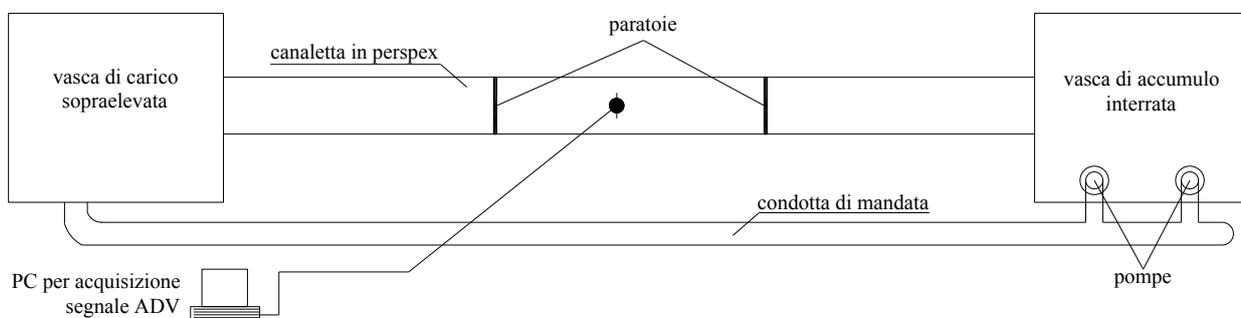
Consta di una canaletta a pendenza variabile ricavata su una struttura reticolare in acciaio che ne garantisce la solidità e la stabilità e di diverse apparecchiature di controllo e di misura.

#### 4.3.1 La canaletta sperimentale

La canaletta che ha le pareti in perspex, è lunga 9 m e ha sezione rettangolare larga 40 cm e alta 70. La portata viene sollevata, a mezzo di due pompe, dalla portata massima di 16 l/s ciascuna, da una vasca di accumulo posta al di sotto del piano di calpestio; la condotta di mandata è in acciaio e ha un diametro DN100; sulla condotta è installato un misuratore di portata elettromagnetico ISOIL. Attraverso la condotta di mandata la portata confluisce in una vasca di calma a monte della canaletta per poi confluire, attraverso la canaletta, alla vasca di accumulo per essere ricircolata.

La canaletta è provvista di un sistema pneumatico che comanda sia i pistoni di appoggio della struttura, consentendo di variarne la pendenza, sia il movimento di due paratoie che si trovano nella parte centrale del canale a distanza di circa 3 metri l'una dall'altra e che consentono di intervenire sul profilo di corrente.

In Fig. 4.7 è riportato uno schema dell'installazione sperimentale, mentre in Fig. 4.8 è riportata un'immagine della stessa.



**Fig. 4.7** Schema rappresentativo dell'installazione sperimentale.



**Fig. 4.8** Immagine dell'installazione sperimentale

Nel corso delle esperienze è stato possibile variare la scabrezza del fondo del canale applicando sulle pareti di perspex dei pannelli all'uso realizzati con pietrisco di varia pezzatura.

Pertanto sono state effettuate diverse prove sperimentali al variare di caratteristiche quali la portata, il tirante, la pendenza e la scabrezza del canale, misurando il valore di velocità in diversi punti, opportunamente scelti, all'interno della sezione idrica.

Le misure di velocità sono state effettuate con ADV installato su un coordinatometro provvisto di motori elettrici e comandato da PC; qualche misura a campione è stata anche acquisita con tubo di Pitot per avere conferma del buon funzionamento del misuratore elettronico. Relativamente a ciascuna prova è stata monitorata periodicamente anche la portata attraverso il misuratore elettromagnetico installato sulla condotta di mandata.

Una descrizione dettagliata dello strumento di misura adottato per misurare le velocità è riportato nel paragrafo seguente.

### 4.3.2 Misuratore acustico Doppler di velocità (ADV)

Il velocimetro acustico è uno strumento in grado di misurare due o tre componenti del vettore velocità; pertanto, tale strumento può essere considerato come alternativa a misuratori di velocità di uso più tradizionale, come per esempio il misuratore ad elica (mulinello), il tubo di Pitot, l'anemometro laser Doppler (LDV), l'anemometro a film caldo.

L'ADV utilizzato nella campagna sperimentale è uno strumento della Nortek in grado di misurare due componenti di velocità.

#### 4.3.2.1 Principio di funzionamento dell'ADV Bidimensionale:

Lo strumento rileva due componenti del vettore velocità all'interno del volume di misura individuato dall'intersezione del raggio di trasmissione con quelli di ricezione.

Di seguito si illustra la tecnica utilizzata dal misuratore ADV detta "bistatica" e in Fig. 4.9 se ne riporta lo schema di funzionamento.

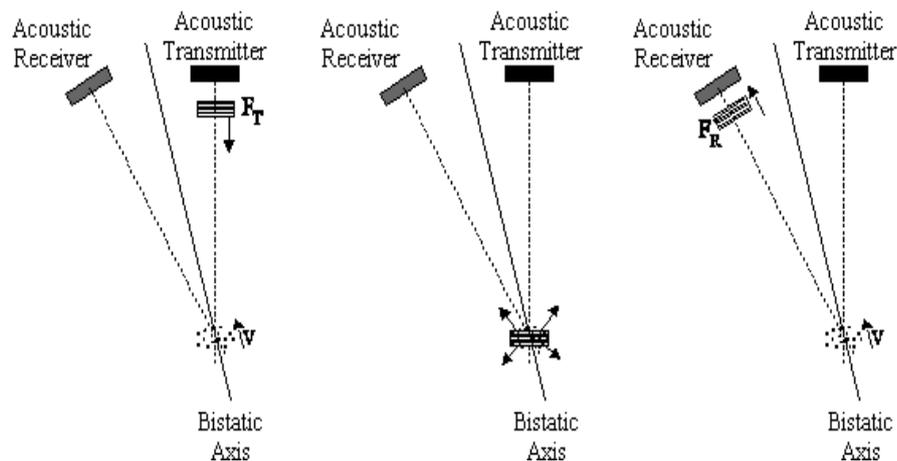


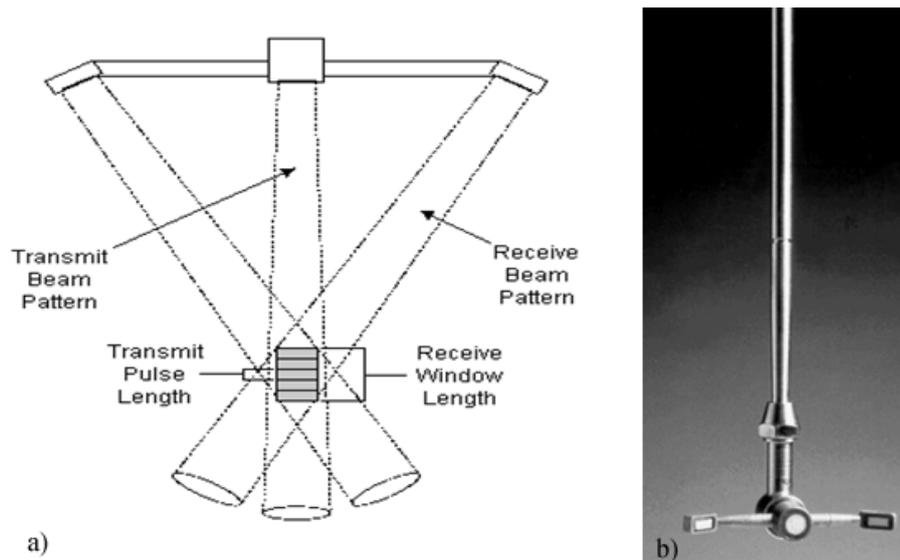
Fig. 4.9 Schema di funzionamento con asse bistatico.

All'interno del volume di misura, il salto di frequenza (Doppler) osservato da ogni ricevitore è proporzionale alla componente di velocità lungo la bisettrice dell'asse di trasmissione e di ricezione.

Il sistema presenta tre moduli: la sonda per la misurazione, il modulo di condizionamento del segnale acquisito ed infine la scheda di acquisizione ed elaborazione del segnale.

La sonda bidimensionale (Fig. 4.10) è formata da due ricevitori posizionati a  $180^\circ$  su di una circonferenza del diametro di 7.5 cm, nel cui centro è situato un emettitore. I due ricevitori vengono orientati parallelamente alla direzione della corrente, (configurazione side-looking), e pertanto il fascio di emissione è diretto ortogonalmente alla direzione del moto. L'angolo formato tra l'asse di ricezione di ogni singolo ricevitore e quello di emissione è  $30^\circ$ .

Il sistema emette un segnale costituito da un pacchetto di onde di frequenza pari a 10 MHz. Il volume di misura si trova ad una distanza di circa 5 cm dalla sonda.



**Fig. 4.10** Sonda acustica NDV “side-looking” a) intersezione del fascio di emissione con quelli di ricezione b) vista fotografica.

Il trasduttore, come si osserva nella Fig. 4.10(b), è montato all’estremità di un gambo sottile, per facilitarne l’installazione in alcune tipiche configurazioni di laboratorio, e per minimizzare l’interferenza con il liquido, mantenendo la gran parte del volume dello strumento (modulo di condizionamento) al di fuori del campo di moto.

La seconda estremità del gambo è attaccata ad un cilindro (che può essere immerso fino a 30 metri di profondità), di diametro pari a 5 cm e lunghezza pari a 30 cm, all’interno del quale risiedono le apparecchiature di amplificazione del segnale retro diffuso.

Il segnale amplificato viene successivamente mandato alla scheda di acquisizione, che contiene un processore capace di acquisire le due componenti con una frequenza di circa 200-250 Hz. Il segnale digitale in uscita dalla scheda presenta invece una frequenza non superiore ai 100 Hz.

La sonda ed il modulo di condizionamento sono alimentati elettricamente, direttamente attraverso la scheda di acquisizione.

#### 4.3.2.2 Caratteristiche di funzionamento

Il volume di misura (risoluzione spaziale) può essere approssimativamente rappresentato da un cilindro la cui sezione trasversale è pari alla sezione dell’emettitore (per la sonda in esame, un cerchio di diametro 6 mm), e la cui altezza può essere impostata dall’utente (3, 6 o 9 mm).

Come sopra osservato, il misuratore acquisisce il segnale retro diffuso con una frequenza di 200-250 Hz (risoluzione temporale).

Il rumore contenuto nel singolo impulso ricevuto è troppo alto per consentire una misura accurata della velocità; pertanto, è necessario mediare un certo numero di segnali per ottenere una buona stima della velocità.

Il numero di segnali mediato dipende dalla frequenza di campionamento scelta dall'utente (che rappresenta quindi la scansione temporale dell'output dello strumento). In genere, l'intervallo è limitato ai 25 Hz; esiste, tuttavia, un'opzione avanzata che permette l'utilizzo di un campo di frequenze più ampio, fino a 100Hz.

Va però ricordato che aumentando la frequenza di campionamento si incrementa il rumore per ogni misura di velocità, poiché diminuisce il numero di segnali mediati per ogni misura (Gordon et al. 2000).

Un parametro operativo piuttosto importante è l'intervallo di velocità nominale; questo determina la massima velocità che può essere misurata dallo strumento (valore di fondo scala).

Ad ogni intervallo di velocità nominale corrisponde un valore massimo della velocità che lo strumento può misurare. Nella Tab 4.10 si riportano i diversi intervalli e le corrispettive velocità massime orizzontali misurabili, per condizioni ordinarie di installazione.

Il rumore della strumentazione cresce con l'ampiezza dell'intervallo di velocità. L'utilizzatore, per contro, dovrà scegliere il più basso intervallo di velocità che contiene la massima velocità misurabile durante l'esperimento.

L'accuratezza dello strumento di misura dipende dalla scelta dei parametri di settaggio, e dalla concentrazione di particelle con potere riflettente contenute in acqua.

Per una frequenza di campionamento fino a 25 Hz, e con una concentrazione di materiale riflettente superiore ai 10 mg/l la casa costruttrice garantisce un'accuratezza dell'1% sul valore massimo di velocità.

La potenza del segnale, registrata per ogni ricevitore rappresenta l'intensità del segnale acustico riflesso dalle particelle.

Intervallo di velocità nominale	Massima velocità orizzontale
± 3 cm/s	± 30 cm/s
± 10 cm/s	± 60cm/s
± 30 cm/s	± 120 cm/s
± 100 cm/s	± 300 cm/s
± 250 cm/s	± 360 cm/s

**Tab. 4.10** - Intervalli di velocità misurabile che è possibile scegliere, e corrispettivi valori massimi misurabili.

In primo luogo tale misura consente di verificare che nel liquido ci sia una sufficiente concentrazione di particelle capaci di riflettere il segnale emesso. Se l'acqua è eccessivamente pulita, il rumore generato dai circuiti elettronici dell'apparato di amplificazione diventa confrontabile con il segnale retro diffuso, lo strumento quindi non è in grado di effettuare misure di velocità. In generale la casa costruttrice consiglia di utilizzare materiale di insemminazione nelle concentrazioni di alcune decine di mg/l.

La potenza dell'eco è espressa in termini di rapporto segnale/rumore (SNR), è misurata in dB e valutata separatamente lungo i due fasci di ricezione.

La casa costruttrice raccomanda di effettuare misure a frequenza più elevata (intorno ai 25 Hz) quando il rapporto segnale/rumore supera il valore di 15 dB.

Il coefficiente di correlazione può rappresentare, di fatto, un parametro di qualità della misura. Viene calcolato un coefficiente per ogni fascio bistatico. La correlazione è espressa in termini percentuali; buone misure di velocità si ottengono con valori dei coefficienti di correlazione superiori al 70%.

Quando il volume di misura è in vicinanza di una parete il sistema analizza automaticamente la distanza tra il volume di misura e la parete, per modificare di conseguenza l'algoritmo di acquisizione del segnale.

Questa operazione risulta utile per minimizzare l'interferenza all'interno del volume di misura col segnale riflesso dalla parete stessa.

Lo strumento rileva la parete ad una distanza non superiore ai 25 cm. La casa costruttrice afferma che in buone condizioni operative l'estremità del volume di misura può essere posta anche a solo 2-5 mm dalla parete.

Come già accennato tale strumento è stato utilizzato per la campagna sperimentale che di seguito viene illustrata.

#### **4.4 L'indagine sperimentale e la validazione del modello di stima proposto**

Il misuratore ADV effettua una misura in continuo della velocità. Ciò comporta la necessità di valutare, fissato il punto di misura, una velocità media temporale. La finestra temporale di campionamento deve essere scelta in modo tale che la velocità media temporale relativa, sia sufficientemente rappresentativa della velocità media temporale che si valuterebbe in una finestra temporale indefinita. A seguito di vari rilievi sperimentali si è visto che, fissando una finestra

temporale di 30 secondi, si ricava un valore della velocità che, praticamente, rimane lo stesso anche aumentando di decine di volte il tempo di acquisizione.

Per ciascuna prova è stata misurata la portata a mezzo del misuratore elettromagnetico installato sulla condotta di mandata della pompa a servizio della canaletta, la pendenza del canale, il valore del tirante della corrente relativo alla sezione di misura, a mezzo di idrometro, il valore di velocità in differenti punti della sezione di misura. Data la simmetria verticale della sezione sono state effettuate le misure nella sola metà in sinistra idraulica della sezione di misura.

Per ciascuna prova è stata redatta una scheda riassuntiva contenente tutte le informazioni relative alle misure e alle stime.

Nella scheda viene riportato il numero progressivo della prova con data e schema della sezione di misura in cui è evidenziata la presenza di scabrezza con un semplice retino sul fondo, inoltre vengono riportati nell'ordine:

a) le caratteristiche di seguito elencate o misurate direttamente o stimate tramite le misure effettuate:

$B$  = la larghezza della sezione;

$H$  = il tirante idrico;

$Q_{\text{misurata}}$  = la portata misurata attraverso misuratore elettromagnetico;

$Q_{\text{integrata}}$  = la portata stimata attraverso integrazione sulla sezione dei valori puntuali di velocità;

$u_{\text{med}}$  = la velocità media di sezione valutata come  $Q_{\text{misurata}}/B/H$

$u_{\text{max}}$  = la velocità massima tra le velocità misurate, considerata la velocità massima della sezione;

scabrezza = la scabrezza del fondo della sezione dove: 0 rappresenta fondo in perspex, 1 fondo in pietrisco di diametro medio 5mm, 2 fondo in pietrisco con diametro medio 10 mm.

$p$  = la pendenza del canale;

$\psi_0$  = la posizione verticale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto al tirante;

$F$  = numero di Froude della corrente calcolato come:  $u_{\text{med}}/(g \cdot H)^{1/2}$ ;

$R$  = raggio idraulico della sezione calcolato come:  $B \cdot H / (2H + B)$ ;

$Re$  = numero di Reynolds della corrente calcolato come:  $u_{\text{med}} \cdot 4 \cdot R / \nu$ ;

$u_{\text{med}}/u_{\text{max}}$  = rapporto tra velocità media e velocità massima;

$H/B$  = rapporto tra tirante e larghezza della sezione;

$M$  = il parametro entropico relativo al modello 2D proposto da Chiu (cfr punto c);

$N_i$  = il secondo parametro del modello 2D di Chiu (cfr punto c);

$G$  = il parametro entropico relativo al modello 2D messo a punto durante il dottorato (cfr punto d);

- b) le tabelle relative alle velocità misurate in canaletta: la prima riportata con coordinate e velocità dimensionali, la seconda riportata con coordinate adimensionali ( $\xi, \psi$ ) e velocità adimensionali ( $u/u_{max}$ );
- c) le tabelle relative alle velocità stimate adottando il modello di Chiu bidimensionale come descritto al paragrafo 2.3.1 i cui parametri fondamentali M ed Ni sono riportati nella tabella di cui al punto A;
- d) le tabelle relative alle velocità stimate adottando il modello sviluppato durante il dottorato di ricerca; attesa la simmetria della distribuzione la formula da utilizzare per stimare le velocità è quella ricavata in funzione della F(u) espressa dalla (3.19); la formula completa, per chiarezza, viene di seguito riportata:

$$u = \frac{u_{max}}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot [1 - \xi^2]_B^H \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} \right] \right\} \quad (4.3)$$

in cui G si ricava risolvendo l'espressione 4.2.

- e) grafici relativi al confronto tra i valori di velocità puntuale misurati, i profili ricavati con il modello bidimensionale sintetizzato nell'equazione (4.3) e quelli ricavati col modello di Chiu;
- f) una figura che riporta le isotachie ricavate interpolando i valori di velocità misurati;
- g) una figura che riporta le isotachie ricavate a mezzo della (4.3);
- h) un diagramma che riporta due serie di dati una relativa alle velocità stimate con il modello di Chiu e l'altra relativa a quelle stimate con la (4.3); in ascisse ci sono le velocità misurate e in ordinata quelle stimate entrambe rapportate a quella massima; il grafico evidenzia la corrispondenza velocità misurata e velocità stimata che è tanto maggiore quanto più i punti si avvicinano alla retta bisettrice.

Per motivi di spazio qui di seguito viene riportata la scheda relativa a una sola prova, mentre tutte le altre sono riportate, in ordine cronologico, in appendice (Appendice B).

Per quanto riguarda la prova qui presentata, in primo luogo bisogna osservare che le misure di velocità possono ritenersi attendibili in quanto la portata ricavata dall'integrazione della distribuzione di velocità ( $Q_{integrata}$ ) è sostanzialmente uguale a quella misurata con il misuratore elettromagnetico ( $Q_{misurata}$ ) installato sulla condotta di mandata.

Nelle tabelle, come già anticipato, sono riportati i valori numerici delle misure, quelli delle stime fatte con il modello 2D di Chiu e quelle fatte con il modello 2D messo a punto durante il dottorato di ricerca. La scelta di riportare tutti i valori misurati è opportuna sia per valutare analiticamente gli scostamenti teorico-sperimentali, come sarà fatto in seguito, sia per dare comoda diffusione dei risultati che potrebbero essere utili alla comunità scientifica.

Assunto ciò qualche considerazione qualitativa può farsi dall'osservazione dei profili di velocità i quali mostrano che l'accordo tra i dati sperimentali e le stime teoriche è molto buono.

Osservando le rappresentazioni delle isotachie si nota che quelle sperimentali presentano un andamento a tratti irregolare dovuto proprio alla natura delle misure che possono essere affette da errori di misura e modeste oscillazioni intorno ad un valor medio. Le isotachie teoriche hanno un andamento regolare e riproducono abbastanza fedelmente quelle sperimentali.

L'ultimo grafico, proposto per una visione d'insieme della stima dell'affidabilità dei due modelli utilizzati, evidenzia che il modello messo a punto restituisce dei risultati migliori rispetto a quelli che si ottengono con il modello di Chiu e ciò è evidente in quanto i dati relativi alla (4.1) sono più concentrati nei pressi della retta bisettrice del diagramma.

Al di là delle considerazioni qualitative che possono essere fatte in merito a tali grafici (profili, isotachie e grafico sintetico) è opportuno calcolare analiticamente lo scostamento tra i valori sperimentali e quelli teorici. Affinché si possano confrontare i dati relativi a prove differenti si fa riferimento alle velocità adimensionali e si può calcolare, per ciascuna prova, il valor medio  $e_m$  e il valor massimo  $e_{max}$  dello scarto tra i valori di velocità stimati e quelli misurati semplicemente come:

$$e_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \frac{u_i - u_{num,i}}{u_{max}} \right)^2}; \quad e_{max} = \max \left( \sqrt{\left( \frac{u_i - u_{num,i}}{u_{max}} \right)^2} \right) \quad \forall i \in [1, n] \quad (4.4)$$

dove:  $u_i$  è il valore dell' $i$ -esima velocità misurata,  $u_{num,i}$  è il valore dell' $i$ -esima velocità stimata, o con Chiu o con eq. (4.3),  $n$  è il numero di valori di velocità acquisiti in una prova e  $u_{max}$  è la massima velocità misurata in una prova.

Relativamente alla prova n° 19 riportata, gli scarti così calcolati sono i seguenti:

per il modello di Chiu:  $e_m=8.3\%$ ;  $e_{max}=29.4\%$

per il modello proposto eq. (4.3):  $e_m=2.5\%$ ;  $e_{max}=11.8\%$

Nel leggere e valutare tali risultati bisogna tenere presente che, mentre lo scarto medio fornisce effettivamente un'idea verosimile della concordanza complessiva tra valori stimati e valori misurati lo scarto massimo è un indicatore che molto spesso esprime la situazione di pochissimi o al limite un solo punto, in cui la stima potrebbe non essere buona a causa anche di errori di misura o effetti locali. Ciò non esclude comunque la possibilità di esprimersi sul confronto tra gli scarti massimi ottenuti con i due modelli, che rimane valido anche se il punto di misura è affetto da errore.

Inoltre va osservato che le zone in cui i profili di velocità più si scostano dalle misure sperimentali sono quelle vicine alle pareti; per avere conferma di ciò si può osservare l'ultimo profilo, quello relativo alla verticale  $\xi=0.95$ , che è chiaramente quello che si scosta di più dai punti

sperimentali. Ciò in effetti potrebbe essere dovuto agli effetti locali che si creano in prossimità della parete a seguito della riflessione delle onde acustiche emesse dall'ADV che, nonostante le rassicurazioni della casa produttrice, potrebbero prodursi.

Va peraltro considerato un altro aspetto di tipo teorico ovvero che entrambi i modelli di stima qui proposti sono di tipo stocastico e tale natura non bene si adatta alla stima di un valore che, in vicinanza di un ostacolo fisso: la parete, è certamente da esso influenzato. In altre parole la presenza della parete fa sì che la velocità del punto ad essa prossimo sia un valore deterministico piuttosto che probabilistico perché dipendente dall'evento "certo" che è l'esistenza della parete. Tale concetto è più chiaro se portato al limite difatti il punto immediatamente prossimo alla parete, come è noto, ha velocità nulla (per ovvie ragioni di equilibrio), ebbene il valore della velocità di quel punto non è un valore affetto da una probabilità ma è un valore certo, deterministico.

Come già accennato si rimanda all'appendice per un'analisi specifica dei risultati relativi alle specifiche prove, i quali verranno esaminati, invece, in modo organico e completo nel paragrafo successivo.

a) prova n°19 del 10 luglio 2009; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.908
	H =	13.2 cm	p =	0.25 %	H/B =	0.330
	$Q_{misurata} =$	30.70 l/s	$\psi_0 = y_0/H =$	0.735	M =	2.758
	$Q_{integrata} =$	30.59 l/s	F =	0.509	Ni =	1.655
	$u_{med} =$	57.93 cm/s	R =	7.95 cm	G =	6.020
	$u_{max} =$	63.82 cm/s	Re =	184256		

Tab. 4.6 Dati caratteristici relativi alla prova in esame

b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	53.70	51.60	52.51	50.76	51.48	47.57	0.076	0.841	0.809	0.823	0.795	0.807	0.745
2.0	57.82	56.16	56.43	55.75	54.69	49.98	0.152	0.906	0.880	0.884	0.873	0.857	0.783
3.0	59.67	58.34	57.36	58.14	56.79	50.66	0.227	0.935	0.914	0.899	0.911	0.890	0.794
4.0	60.72	59.14	59.63	60.22	57.91	52.07	0.303	0.951	0.927	0.934	0.944	0.907	0.816
6.0	62.35	60.11	61.38	61.36	59.26	53.20	0.455	0.977	0.942	0.962	0.961	0.928	0.834
8.0	62.71	62.24	61.61	61.36	60.13	51.85	0.606	0.983	0.975	0.965	0.961	0.942	0.812
10.0	62.66	62.24	60.65	60.11	58.08	50.39	0.758	0.982	0.975	0.950	0.942	0.910	0.789
11.0	63.82	61.74	60.63	58.69	56.84	49.76	0.833	1.000	0.967	0.950	0.920	0.891	0.780
12.0	62.65	61.20	59.87	57.46	54.34	47.89	0.909	0.982	0.959	0.938	0.900	0.851	0.750

Tab. 4.7 valori di velocità misurati sperimentalmente

c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	35.97	35.72	34.84	33.94	32.69	31.02	0.076	0.564	0.560	0.546	0.532	0.512	0.486
2.0	47.34	47.06	46.09	45.09	43.69	41.80	0.152	0.742	0.737	0.722	0.706	0.685	0.655
3.0	53.55	53.25	52.25	51.21	49.76	47.79	0.227	0.839	0.834	0.819	0.802	0.780	0.749
4.0	57.43	57.13	56.11	55.05	53.57	51.56	0.303	0.900	0.895	0.879	0.863	0.839	0.808
6.0	61.69	61.38	60.35	59.27	57.76	55.72	0.455	0.967	0.962	0.946	0.929	0.905	0.873
8.0	63.45	63.14	62.10	61.02	59.50	57.44	0.606	0.994	0.989	0.973	0.956	0.932	0.900
10.0	63.81	63.51	62.47	61.38	59.86	57.80	0.758	1.000	0.995	0.979	0.962	0.938	0.906
11.0	63.65	63.34	62.30	61.21	59.70	57.63	0.833	0.997	0.992	0.976	0.959	0.935	0.903
12.0	63.30	62.99	61.95	60.87	59.35	57.29	0.909	0.992	0.987	0.971	0.954	0.930	0.898

Tab. 4.8 valori di velocità stimati con il modello 2D di Chiu

d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s						coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	53.38	53.16	52.38	51.47	49.83	45.32	0.076	0.836	0.833	0.821	0.806	0.781	0.710
2.0	57.66	57.44	56.66	55.75	54.10	49.57	0.152	0.903	0.900	0.888	0.873	0.848	0.777
3.0	59.91	59.69	58.91	58.00	56.35	51.81	0.227	0.939	0.935	0.923	0.909	0.883	0.812
4.0	61.33	61.11	60.33	59.42	57.77	53.22	0.303	0.961	0.957	0.945	0.931	0.905	0.834
6.0	62.94	62.72	61.94	61.03	59.38	54.83	0.455	0.986	0.983	0.970	0.956	0.930	0.859
8.0	63.66	63.43	62.65	61.74	60.09	55.54	0.606	0.997	0.994	0.982	0.967	0.942	0.870
10.0	63.82	63.59	62.82	61.90	60.26	55.70	0.758	1.000	0.996	0.984	0.970	0.944	0.873
11.0	63.74	63.51	62.73	61.82	60.17	55.62	0.833	0.999	0.995	0.983	0.969	0.943	0.871
12.0	63.55	63.33	62.55	61.64	59.99	55.44	0.909	0.996	0.992	0.980	0.966	0.940	0.869

Tab. 4.9 valori di velocità stimati con il modello 2D proposto

e) profili di velocità; valori adimensionali.

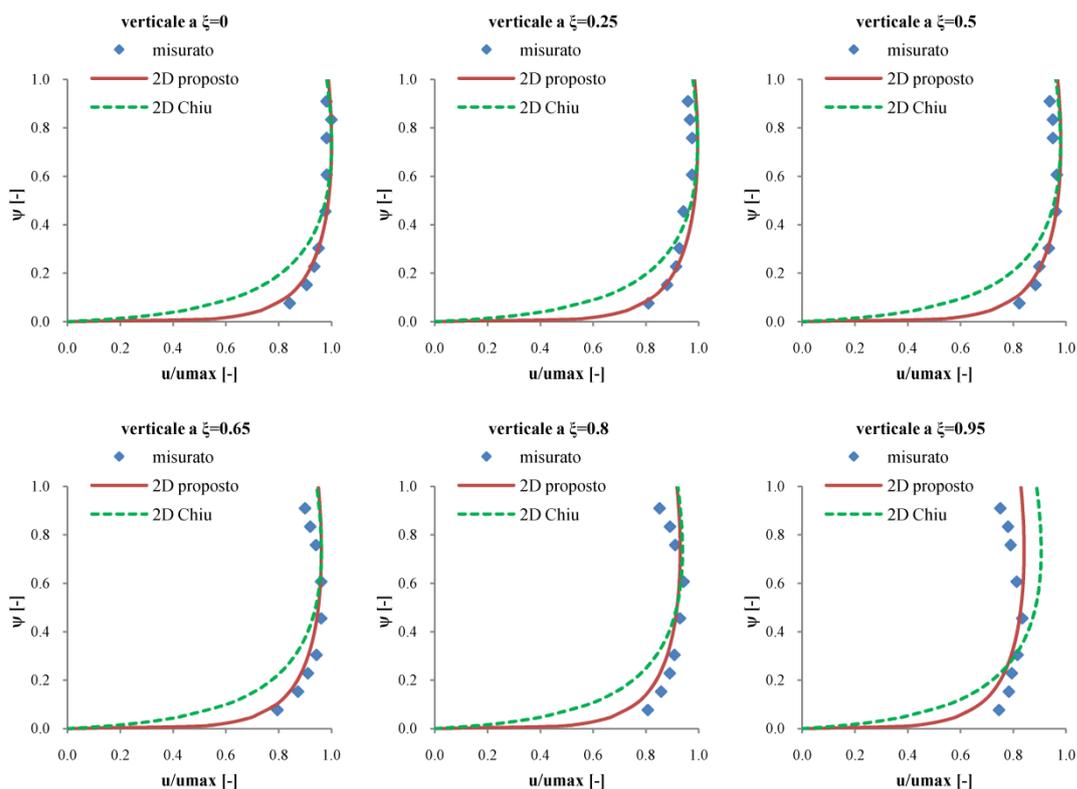


Fig. 4.11 Profili di velocità in valori adimensionali

f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali

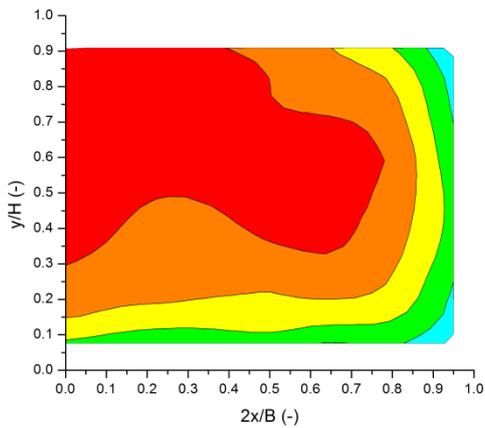


Fig. 4.12 Isotachie sperimentali

g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali

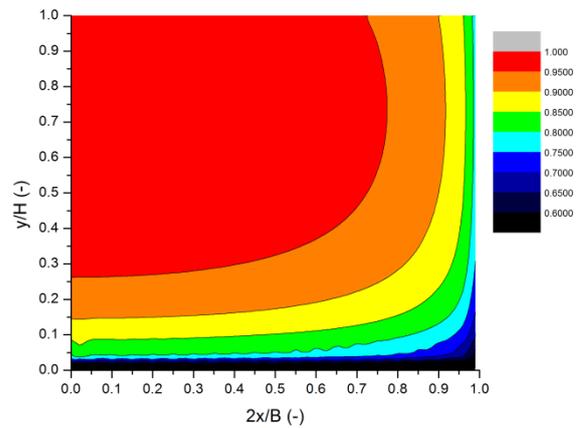


Fig. 4.13 Isotachie teoriche

h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu

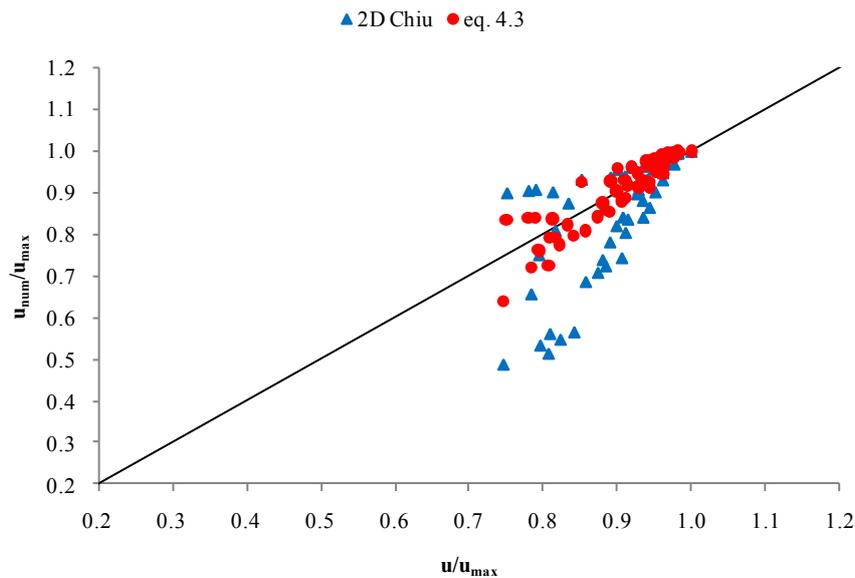


Fig. 4.14 Confronto tra valori teorici e sperimentali

#### 4.5 Un'analisi sintetica e organica del confronto tra risultati teorici e sperimentali relativi al dominio rettangolare

Al fine di avere un quadro complessivo dei risultati ottenuti per tutte le prove a seguito del confronto tra dati sperimentali e dati teorici, si faccia riferimento alla tabella riportata qui di seguito (Tab. 4.10) in cui sono riportate, per ciascuna prova, alcuni dati di interesse. In particolare sono

riportati gli scostamenti teorico-sperimentali medi e massimi che si riscontrano in ogni prova sia per il modello messo a punto (eq. (4.3)) sia per il modello già noto di Chiu. Come si può notare gli scarti che si ottengono applicando la (4.3) sono contenuti e sempre, a parte rari casi, inferiori rispetto a quelli che si ottengono seguendo l'approccio di Chiu.

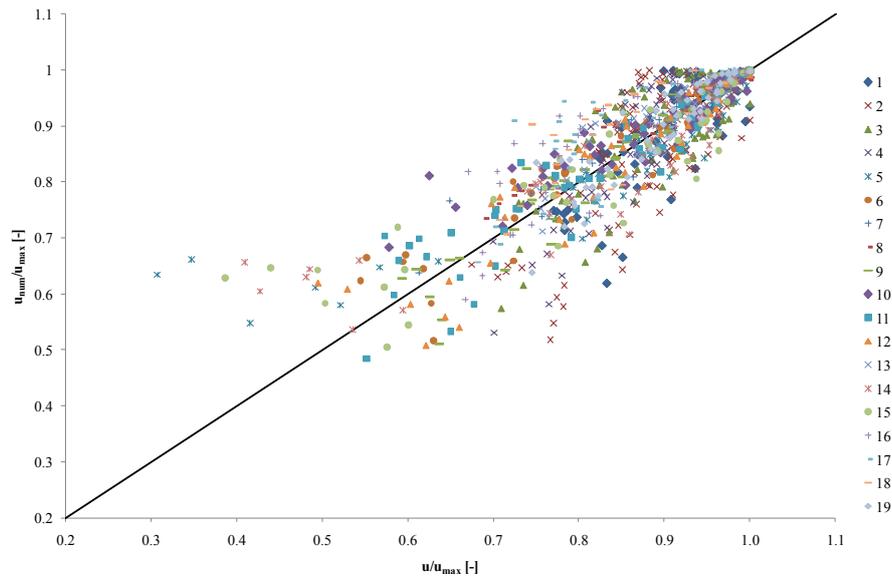
Una considerazione analoga di tipo qualitativo si può fare osservando la Fig. 4.15, che è analoga a quelle relative al punto h) della scheda descritta precedentemente, ma riporta i punti relativi a ciascuna prova, richiamata in legenda. Come è possibile notare la nuvola di punti è molto addensata attorno alla retta bisettrice a parte che per alcuni punti che si discostano maggiormente e che ricadono nella zona relativa alle velocità più basse ( $u/u_{max} < 0.5$ ).

Ebbene per approfondire tale aspetto, per il quale sembrerebbe che il modello in alcuni casi non stima bene i valori sperimentali è opportuno considerare le prove differenziandole per scabrezza del fondo. Si ricorda che le prove sono state condotte in tre condizioni: fondo del canale praticamente liscio (scabrezza 0), fondo con pietrisco con diametro medio 5 mm (scabrezza 1) e fondo con diametro medio 10 mm (scabrezza 2).

In Fig. 4.16, 4.11 e 4.12 sono riportati rispettivamente i grafici relativi alle tre differenti scabrezze del fondo: 0, 1 e 2.

n°	prova	scabrezza	B [cm]	H [cm]	H/B [-]	Q [l/s]	u <sub>max</sub> [cm/s]	u <sub>med</sub> [cm/s]	ψ <sub>0</sub> [-]	G [-]	eq. (4.3)		eq. Chiu	
											ε <sub>m</sub>	ε <sub>max</sub>	ε <sub>m</sub>	ε <sub>max</sub>
1	180509a	0	40.0	9.4	0.2350	21.6	64.7	57.4	0.93	5.25	6.3%	21.5%	6.9%	23.9%
2	180509b	0	40.0	9.0	0.2250	19.4	62.9	53.8	0.99	4.68	6.7%	24.9%	5.0%	16.1%
3	180509c	0	40.0	9.2	0.2300	17.0	52.4	46.3	0.75	3.22	6.0%	15.1%	6.4%	22.7%
4	280509a	0	40.0	9.3	0.2325	20.2	63.2	54.3	0.70	2.10	6.0%	18.4%	6.7%	18.9%
5	280509b	2	40.0	8.2	0.2050	20.2	71.5	61.5	0.91	3.75	5.1%	32.7%	4.3%	31.6%
6	100609a	2	40.0	8.0	0.2000	20.7	77.3	64.7	0.81	2.23	3.1%	11.3%	4.7%	14.3%
7	100609b	2	40.0	10.2	0.2550	24.9	68.7	61.0	0.76	3.58	2.3%	11.8%	4.1%	15.7%
8	100609c	0	40.0	5.4	0.1350	20.4	107.9	94.6	1.00	5.21	2.8%	10.6%	2.9%	11.0%
9	100609d	2	40.0	9.6	0.2400	28.6	87.8	74.5	0.85	3.01	2.9%	12.6%	4.0%	18.3%
10	120609a	2	40.0	9.2	0.2300	26.1	76.8	71.0	0.60	3.89	3.3%	18.6%	8.9%	32.3%
11	120609b	2	40.0	11.3	0.2825	35.7	91.4	78.9	0.80	3.21	3.5%	13.0%	5.1%	23.6%
12	120609c	2	40.0	8.5	0.2125	26.7	94.9	78.5	1.00	3.79	4.6%	12.5%	10.6%	31.9%
13	120609d	0	40.0	6.0	0.1500	25.9	121.9	107.8	0.83	3.53	3.0%	9.3%	3.4%	10.9%
14	060709a	1	40.0	9.1	0.2275	18.0	58.3	49.3	0.94	3.82	5.6%	24.7%	5.4%	26.8%
15	060709b	1	40.0	9.3	0.2325	17.0	54.2	45.6	0.90	3.23	5.7%	24.2%	6.7%	26.9%
16	060709c	0	40.0	6.5	0.1625	30.9	142.3	118.8	0.77	1.61	6.7%	14.8%	8.9%	24.0%
17	060709d	0	40.0	5.5	0.1375	26.1	138.3	118.6	0.79	2.21	6.0%	18.7%	6.8%	20.3%
18	060709e	0	40.0	5.1	0.1275	26.5	149.7	129.9	0.84	2.89	5.6%	15.8%	5.8%	17.6%
19	100709a	0	40.0	13.2	0.3300	30.6	63.8	57.9	0.73	4.75	2.9%	10.7%	8.3%	29.4%

**Tab. 4.10** Dati riassuntivi di tutte le prove effettuate

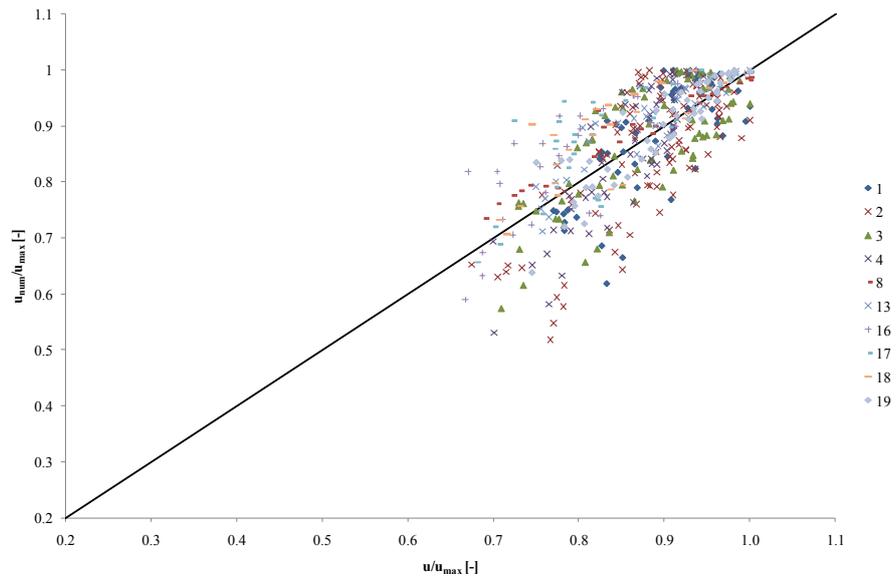


**Fig. 4.15** Confronto tra dati sperimentali e stime teoriche con la (4.3)

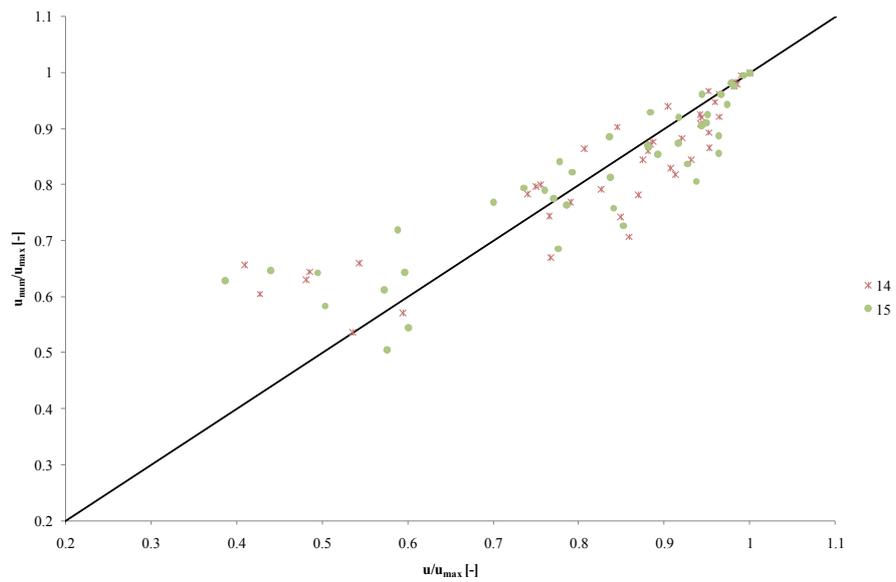
Si osserva che per quanto riguarda le prove su fondo liscio (Fig. 4.16) la nuvola di punti rimane abbastanza compatta attorno alla retta bisettrice e non presenta punti particolarmente decentrati. Il che significa dire che il modello proposto stima in modo buono la distribuzione di velocità senza situazioni di particolari scostamenti.

I punti più decentrati, invece, si ritrovano nelle figure relative alle altre due configurazioni a scabrezza 1 e 2 (Figg. 4.11 e 4.12) e sono, come già detto, quelli relativi alle velocità più basse. Le velocità minori, come è noto si trovano nella parte inferiore della sezione ovvero sul fondo e, pertanto, dato che tali elevati scostamenti si riscontrano in questi casi, ma non nel caso liscio, è presumibile pensare che ci sia un qualche effetto di disturbo sulla misura, dovuto alla presenza del pietrisco. In effetti può capitare che, attesa la configurazione irregolare del fondo, la sonda di misura interferisca con la presenza di oggetti solidi (il pietrisco) e che, quindi, la misura sia falsata.

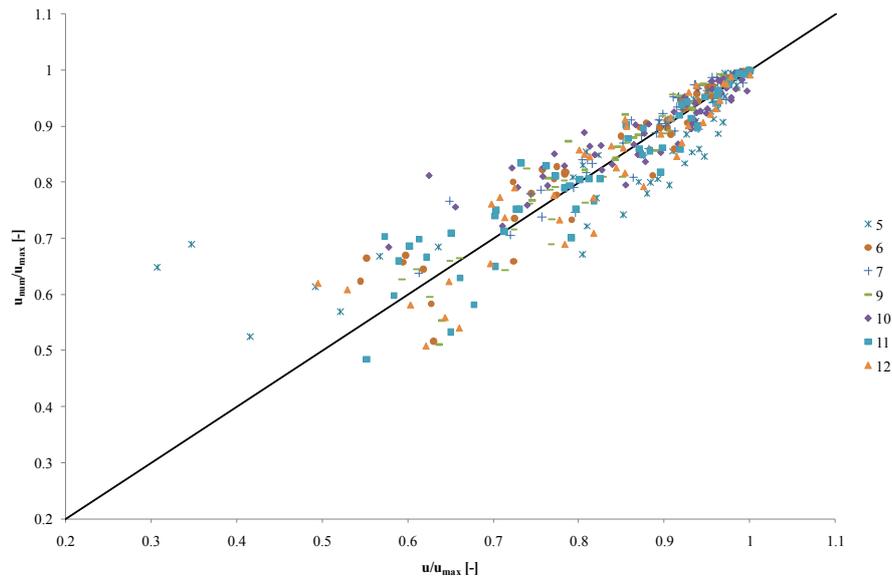
Tuttavia ad esclusione di questi punti particolari le stime fatte risultano non solo attendibili, ma sembrano avere la stessa attendibilità di quelle ricavate per sezione a fondo liscio. Ciò porterebbe a pensare che la scabrezza di fondo non incide sulla distribuzione di velocità, ma, necessariamente, tale affermazione necessiterà di una più vasta indagine sperimentale, per essere confermata.



**Fig. 4.16** Confronto tra dati sperimentali e stime teoriche con la (4.3) – scabrezza 0



**Fig. 4.17** Confronto tra dati sperimentali e stime teoriche con la (4.3) – scabrezza 1



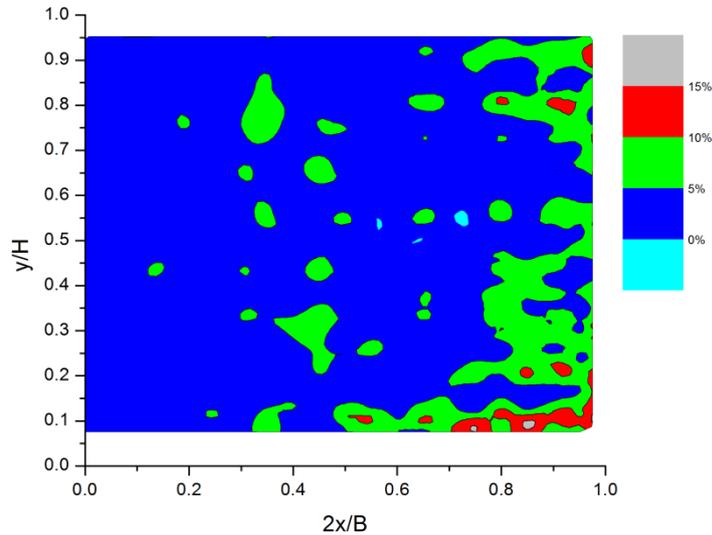
**Fig. 4.18** Confronto tra dati sperimentali e stime teoriche con la (4.3) – scabrezza 2

Un'ulteriore analisi in merito agli scarti che si ottengono utilizzando come modello di stima la (4.1) può farsi osservando la Fig. 4.19. In tale figura viene riportata una media degli scarti teorico-sperimentali relativi a tutte le prove effettuate, in funzione del punto di misura. In altre parole tale figura comunica qual è l'errore medio (medio su tutte le prove) in ciascun punto del dominio.

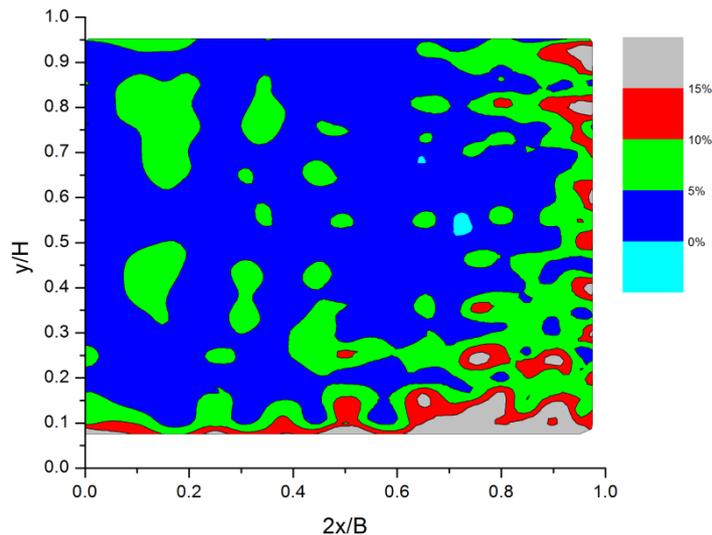
La prima osservazione è che in gran parte del dominio gli scarti che si riscontrano sono contenuti al di sotto del 5% mentre le zone di maggiore scarto ovvero quelle rosse e quelle grigie, in particolare, sono addensate vicino ai bordi laterale e inferiore.

Il fatto che ci siano scarti maggiori in corrispondenza dei bordi sembra appunto confermare le considerazioni fatte precedentemente ovvero che, in corrispondenza sia della parete che del fondo possono esserci errori di misura connessi sia con l'interferenza dello strumento con oggetti solidi che possono essere sia la semplice parete, che riflette le onde sonore, sia il pietrisco, che interferisce con le stesse.

A titolo di confronto si è ricavata una figura analoga utilizzando le stime ottenute applicando il modello di Chiu (Fig. 4.20); si osserva che, anche in questo caso, gli scarti più rilevanti si hanno lungo i bordi ma si osserva anche che rispetto al modello proposto con la presente tesi gli scarti sono evidentemente maggiori.



**Fig. 4.19** Media locale su tutte le prove degli scarti teorico sperimentali per la eq. (4.3)



**Fig. 4.20** Media locale su tutte le prove degli scarti teorico sperimentali per modello di Chiu

#### 4.6 Conclusioni sulla validazione del modello su dominio rettangolare

Sulla base di una serie di misure di velocità collazionate mediante prove sperimentali in laboratorio è stato possibile effettuare un ampio confronto tra i valori misurati e le stime degli stessi mediante il modello entropico proposto in questo elaborato di tesi.

Le configurazioni di riferimento sono caratterizzate da un'ampia variabilità delle caratteristiche quali la portata, il tirante, la pendenza del canale e la scabrezza del fondo dello stesso. L'analisi dei risultati porta a concludere che il modello proposto fornisce una buona stima

della distribuzione di velocità indipendentemente dalla configurazione di riferimento. Gli scarti maggiori si registrano lungo i bordi del dominio, ma ciò è dovuto, almeno in parte, al fatto che nella vicinanza delle pareti o del fondo, in particolar modo se scabro, lo strumento di misura non lavora in modo corretto. Ciò può essere dovuto inoltre al fatto che il modello utilizzato è di tipo probabilistico e in corrispondenza dei bordi i valori di velocità appaiono variabili deterministiche poiché influenzate in modo marcato dalla presenza di elementi fissi.

È stato messo in evidenza, inoltre, che il modello proposto fornisce delle stime migliori del modello di Chiu bidimensionale il quale, peraltro, necessita di due parametri per essere utilizzato e si avvale di curve ricavate su base empirica e non analitica.

#### **4.7 Validazione del modello teorico proposto con applicazione a casi di corsi d'acqua naturali**

Nei paragrafi precedenti sono stati presentati i risultati del confronto tra stime teoriche e dati sperimentali relativi ad un dominio rettangolare con distribuzione simmetrica delle velocità. Qui di seguito viene presentato un confronto analogo al precedente relativo, però, a domini di forma qualsiasi e in particolare ad alcune sezioni trasversali di corsi d'acqua naturali.

I dati di misura sono stati forniti dal prof. V. J. Singh dell'Università Texas A&M di College Station, TX, USA e sono gli stessi che sono stati utilizzati per la stesura di una nota già più volte richiamata nella presente tesi (Moramarco et al., 2004). Nella nota questi dati vengono utilizzati per effettuare un confronto con le stime fatte applicando il modello di Chiu. Tali stime verranno richiamate nel seguito al fine di fornire un ulteriore confronto con il modello messo a punto nella tesi.

Per ciascuna applicazione, analogamente a quanto è stato fatto nel caso di sezione rettangolare, è stata redatta una scheda riassuntiva contenente tutte le informazioni relative alle misure e alle stime.

Nella scheda viene riportato un numero progressivo, la data e luogo in cui sono state effettuate le misure, e uno schema indicante il sistema di riferimento utilizzato per il modello analitico; inoltre vengono riportati nell'ordine:

a) le caratteristiche di seguito elencate o misurate direttamente o stimate tramite le misure effettuate:

B = la larghezza in superficie della sezione;

H = il tirante idrico massimo;

$u_{med}$  = la velocità media di sezione valutata durante le misure;

$u_{max}$  = la velocità massima tra le velocità misurate, considerata la velocità massima della sezione;

$\xi_0$  = la posizione orizzontale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto alla larghezza in superficie;

$\psi_0$  = la posizione verticale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto al tirante;

$A$  = l'area della sezione;

$C$  = il contorno bagnato della sezione;

$A_r$  = l'area della sezione rettangolare circoscritta alla sezione effettiva calcolata come:  $B \cdot H$ ;

$u_{med}/u_{max}$  = il rapporto tra velocità media e velocità massima;

$H/B$  = il rapporto tra tirante e larghezza della sezione;

$A_r/A$  = il rapporto tra area della sezione rettangolare circoscritta alla sezione effettiva e area della sezione effettiva;

$G$  = il parametro entropico relativo al modello 2D proposto nella tesi (cfr punto c);

- b) un grafico che rappresenta la sezione del corso d'acqua rilevata durante le misure e la curva che interpola la sezione; l'equazione della curva viene riportata e sarà necessaria per l'applicazione del modello proposto nella tesi per sezione qualsiasi (cfr. punto c);
- c) una tabella che riporta le coordinate di ciascun punto di misura sia dimensionali ( $x, y$ ) che adimensionali ( $\xi, \psi$ ), la velocità misurata sia dimensionale che rapportata a quella massima ( $u$  e  $u/u_{max}$ ), le velocità stimate con il modello di Chiu ( $u_{Chiu}$  e  $u_{Chiu}/u_{max}$ ) e con il modello proposto nella tesi ( $u_{stima}$  e  $u_{stima}/u_{max}$ ).

Per quanto riguarda le stime dei valori di velocità con il modello di Chiu si è seguito l'approccio consigliato da Moramarco et, al. (2004) ovvero quello di non applicare l'equazione bidimensionale (2.37) che darebbe stime non accettabili, ma considerare ogni verticale della sezione e applicare l'equazione monodimensionale (2.43) stimando un unico parametro entropico  $M$  per sezione. Una descrizione più dettagliata di tale approccio è riportata nel capitolo 2, qui ci si limita a riportare la (2.43) riscritta utilizzando il sistema di riferimento e le notazioni definite al punto a):

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\psi}{\psi_0} \exp \left( 1 - \frac{\psi}{\psi_0} \right) \right] \quad (4.5)$$

in cui  $M$  viene valutato risolvendo il sistema di equazioni (2.30), (2.49) accoppiato alla relazione empirica (2.51).

Per quanto riguarda, invece, la stima della distribuzione di velocità con il metodo messo a punto nella presente tesi, la sezione di un corso d'acqua è una sezione di forma qualsiasi

pertanto si è applicata l'equazione generale definita mediante la (3.28) che viene qui di seguito riportata:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \frac{-\ln 2}{\xi \ln \xi_0} - \frac{-2 \ln 2}{\xi \ln \xi_0} \right) \right]^{\frac{H}{B} \left( \frac{A_r}{A} \right)^{1.3}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|}} - \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\frac{2 \ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|}} \right] \right\} \quad (4.6)$$

in cui  $f(\xi)$  è l'equazione che interpola la sezione reale del corso d'acqua che viene riportata al punto a) e il parametro  $G$  viene calcolato risolvendo la (3.30).

- d) i grafici relativi al confronto tra i valori di velocità puntuale misurati, i profili ricavati con il modello bidimensionale sintetizzato nell'equazione (4.6), e quelli ricavati applicando il modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al (2004);
- e) una figura che riporta le isotachie ricavate interpolando i valori di velocità misurati;
- f) una figura che riporta le isotachie ricavate a mezzo della (4.6);
- g) un diagramma che riporta due serie di dati una relativa alle velocità stimate con il modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al (2004) e l'altra relativa a quelle stimate con la (4.6); in ascisse ci sono le velocità misurate e in ordinata quelle stimate entrambe rapportate a quella massima; il grafico evidenzia la corrispondenza velocità misurata e velocità stimata che è tanto maggiore quanto più i punti si avvicinano alla retta bisettrice.

Per motivi di spazio qui di seguito viene riportata la scheda relativa a un solo caso applicativo, mentre tutte le altre sono riportate in appendice (Appendice C)

1.a) (SantaLucia) n°1, del 28 maggio 1984, fiume Tevere, stazione di Santa Lucia

	$B =$	21.19 m	$A =$	55.4 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.662
	$H =$	3.29 m	$C =$	23.4 m	$H/B =$	0.155
	$u_{med} =$	1.61 m/s	$Ar =$	69.7 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.259
	$u_{max} =$	2.44 m/s			$G =$	4.172
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.51				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.93				

Tab. 4.11 Dati caratteristici relativi alla prova in esame

1.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione

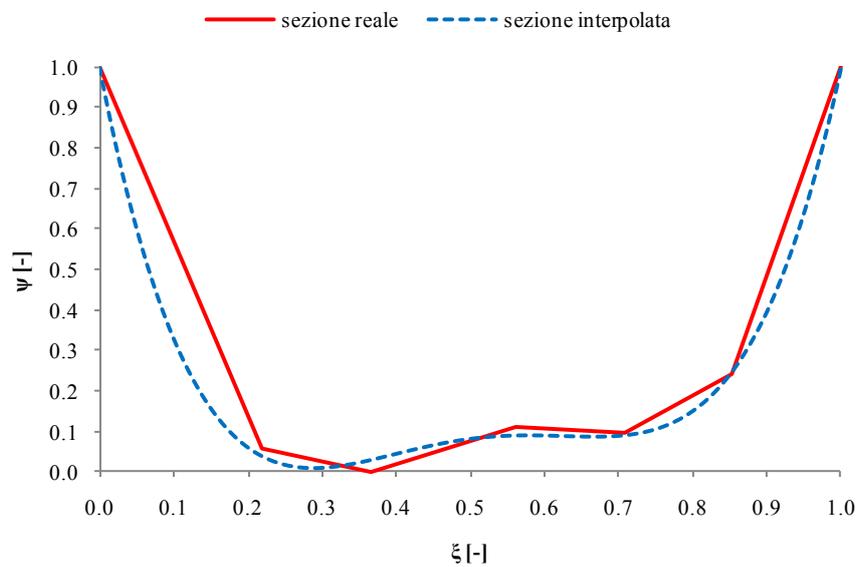


Fig. 4.21 Sezione trasversale reale e interpolata

L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

$$p(\xi) = 21.279\xi^4 - 43.529\xi^3 + 31.723\xi^2 - 9.480\xi + 1$$

I.c) valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente

x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	u/u <sub>max</sub> [-]	u <sub>stima</sub> [m/s]	u <sub>stima</sub> /u <sub>max</sub> [-]	u <sub>Chiu</sub> [m/s]	u <sub>Chiu</sub> /u <sub>max</sub> [-]
4.65	3.29	1.68	0.219	1.000	0.689	1.68	0.688	2.06	0.843
4.65	3.23	1.68	0.219	0.982	0.689	1.68	0.689	2.06	0.845
4.65	3.09	1.70	0.219	0.939	0.697	1.68	0.689	2.07	0.850
4.65	2.49	2.10	0.219	0.757	0.861	1.67	0.683	2.10	0.861
4.65	1.79	2.00	0.219	0.544	0.820	1.59	0.653	2.05	0.840
4.65	0.84	1.45	0.219	0.255	0.594	1.32	0.539	1.64	0.670
4.65	0.34	0.71	0.219	0.103	0.291	0.87	0.355	0.78	0.319
7.76	3.29	2.24	0.366	1.000	0.918	2.27	0.931	2.35	0.962
7.76	3.23	2.24	0.366	0.982	0.918	2.27	0.932	2.35	0.964
7.76	3.09	2.24	0.366	0.939	0.918	2.28	0.932	2.36	0.969
7.76	2.49	2.34	0.366	0.757	0.959	2.26	0.926	2.39	0.980
7.76	1.91	2.39	0.366	0.581	0.980	2.20	0.902	2.36	0.966
7.76	1.00	2.29	0.366	0.304	0.939	1.97	0.808	2.08	0.853
7.76	0.15	1.50	0.366	0.046	0.615	0.83	0.339	0.84	0.345
11.89	3.29	2.39	0.561	1.000	0.980	2.42	0.991	2.38	0.976
11.89	3.23	2.39	0.561	0.982	0.980	2.42	0.992	2.39	0.979
11.89	3.09	2.44	0.561	0.939	1.000	2.42	0.992	2.41	0.986
11.89	2.49	2.44	0.561	0.757	1.000	2.40	0.985	2.44	1.000
11.89	1.95	2.35	0.561	0.593	0.963	2.35	0.964	2.40	0.984
11.89	0.96	2.29	0.561	0.292	0.939	2.07	0.847	1.90	0.778
11.89	0.51	1.90	0.561	0.155	0.779	1.63	0.667	0.95	0.389
15.00	3.29	1.75	0.708	1.000	0.717	2.11	0.867	2.24	0.917
15.00	3.23	1.75	0.708	0.982	0.717	2.12	0.867	2.24	0.920
15.00	3.09	1.85	0.708	0.939	0.758	2.12	0.868	2.26	0.926
15.00	2.49	2.29	0.708	0.757	0.939	2.10	0.861	2.29	0.939
15.00	1.79	2.29	0.708	0.544	0.939	2.02	0.830	2.23	0.912
15.00	0.93	1.75	0.708	0.283	0.717	1.75	0.718	1.79	0.733
15.00	0.46	1.55	0.708	0.140	0.635	1.24	0.508	0.88	0.360
18.10	3.29	1.28	0.854	1.000	0.525	1.23	0.505	1.28	0.526
18.10	3.23	1.28	0.854	0.982	0.525	1.23	0.506	1.29	0.528
18.10	3.09	1.23	0.854	0.939	0.504	1.23	0.506	1.30	0.533
18.10	2.49	1.33	0.854	0.757	0.545	1.22	0.500	1.33	0.545
18.10	1.79	1.13	0.854	0.544	0.463	1.14	0.467	1.26	0.518
18.10	1.29	1.06	0.854	0.392	0.434	0.98	0.402	1.05	0.431
18.10	0.94	1.13	0.854	0.286	0.463	0.66	0.269	0.60	0.244

Tab. 4.12 Valori di velocità sperimentali e teorici

1.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*

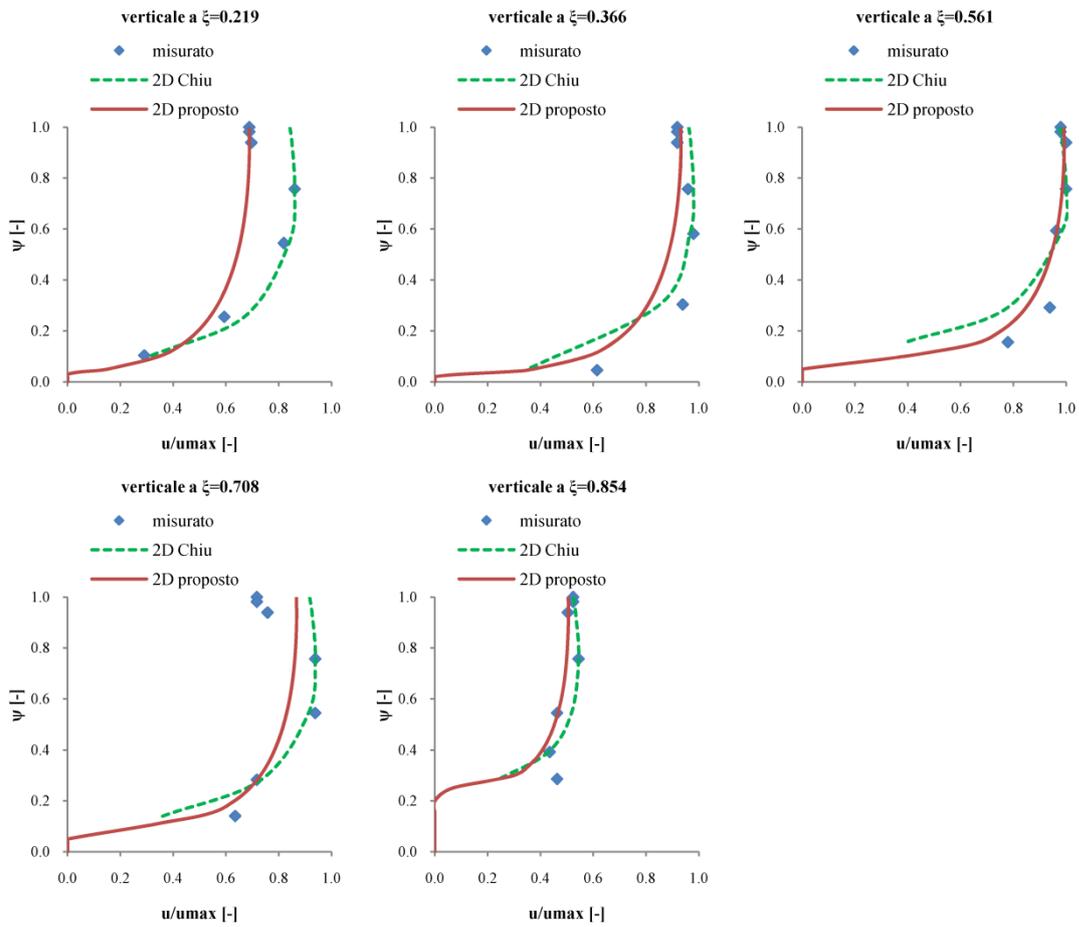


Fig. 4.22 profili di velocità in valori adimensionali

1.e) *isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali*

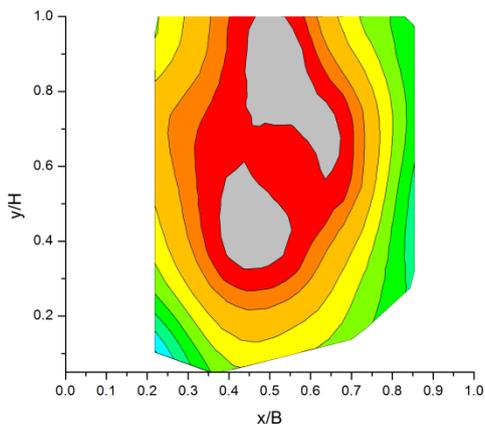


Fig. 4.23 Isotachie sperimentali

1.f) *isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali*

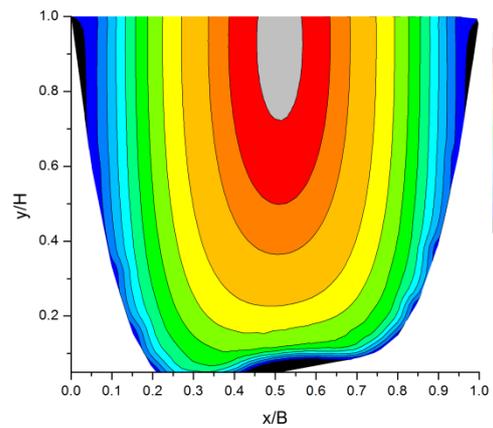
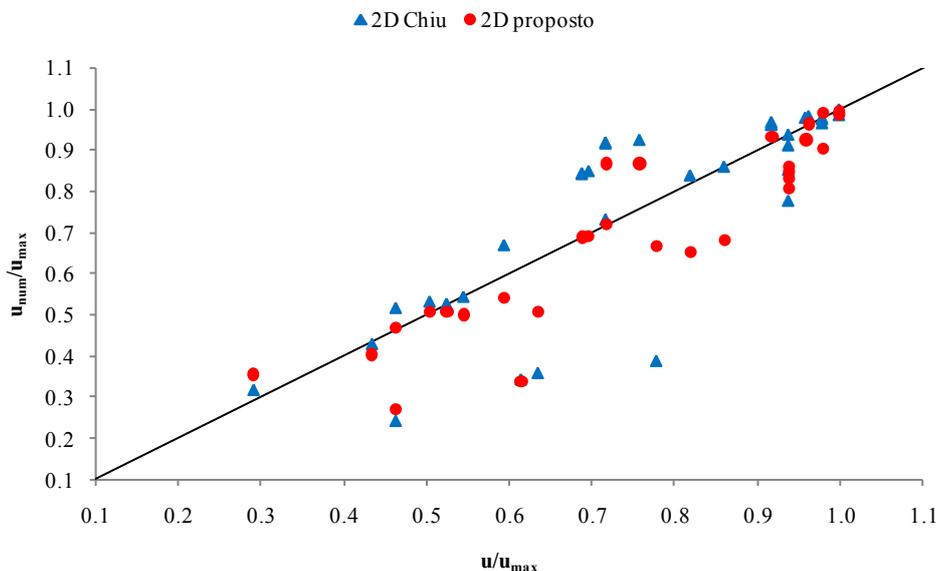


Fig. 4.24 Isotachie teoriche

*l.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)*



**Fig. 4.25** Confronto valori teorico-sperimentali

Osservando sia i dati numerici riportati in tabella sia i profili di velocità si può affermare che l'accordo tra i dati sperimentali e le stime teoriche è buono.

Le isotachie sperimentali hanno un andamento a tratti irregolare il che è normale trattandosi di misure sperimentali per di più effettuate in un corso d'acqua naturale. Le isotachie teoriche hanno un andamento regolare e riproducono abbastanza fedelmente quelle sperimentali.

Nel grafico che riporta le due serie di dati una relativa alle stime fatte con la (4.6) e l'altra con le stime fatte con il modello di Chiu si nota che in generale i punti sono più dispersi di quanto lo fossero nel caso di canale rettangolare e ciò probabilmente è dovuto anche al fatto che solitamente, le misure in sito hanno sempre un margine di incertezza maggiore rispetto a quelle di laboratorio e pertanto possono esserci piccoli errori di misura; nonostante ciò, però, va evidenziato che la concordanza teorico-sperimentale può essere considerata buona e sembra leggermente migliore nel caso di stima con la (4.6).

Tale affermazione è suffragata dai valori degli scarti medi e massimi calcolati come definito dalla (4.4) che risultano essere:

per il modello di Chiu:  $e_m=8.3\%$ ;  $e_{max}=38.9\%$

per il modello proposto eq. (4.6):  $e_m=6.6\%$ ;  $e_{max}=27.6\%$

Come sempre il valore medio degli scarti è un valore rappresentativo, anche se i punti a disposizione sono appena sufficienti per fare una stima sulle caratteristiche medie della sezione; il valore massimo però è un valore che può essere affetto da errori di misura o da altri problemi riscontrati in sito e pertanto va recepito in quest'ottica.

Nel caso in esame, inoltre, non è stata prodotta la figura relativa alla distribuzione degli scarti poiché il numero di dati a disposizione non è sufficiente a coprire in modo adeguato la sezione stessa.

Va osservato, peraltro, che, ancorché gli scarti tra i due modelli utilizzati siano pressoché uguali, il modello di Chiu necessita di conoscere  $u_{med}$ ,  $u_{max}$  e la posizione di  $u_{max}$  per ogni verticale, ovvero una quantità di informazioni di molto superiore rispetto a quelle necessarie per applicare il metodo sviluppato e presentato in questa tesi che necessita di sole quattro informazioni relative alla sezione ( $u_{med}$ ,  $u_{max}$ ,  $\xi_0$ ,  $\psi_0$ ). Tale aspetto fa del metodo qui proposto uno strumento affidabile e versatile per conoscere la distribuzione di velocità anche in un corso d'acqua naturale.

Come già accennato si rimanda all'appendice (Appendice C) per un'analisi specifica dei risultati relativi alle singole prove, i quali verranno esaminati, invece, in modo organico e completo nel paragrafo successivo.

#### **4.8 Un'analisi sintetica e organica del confronto tra risultati teorici e sperimentali relativi al dominio di forma qualsiasi**

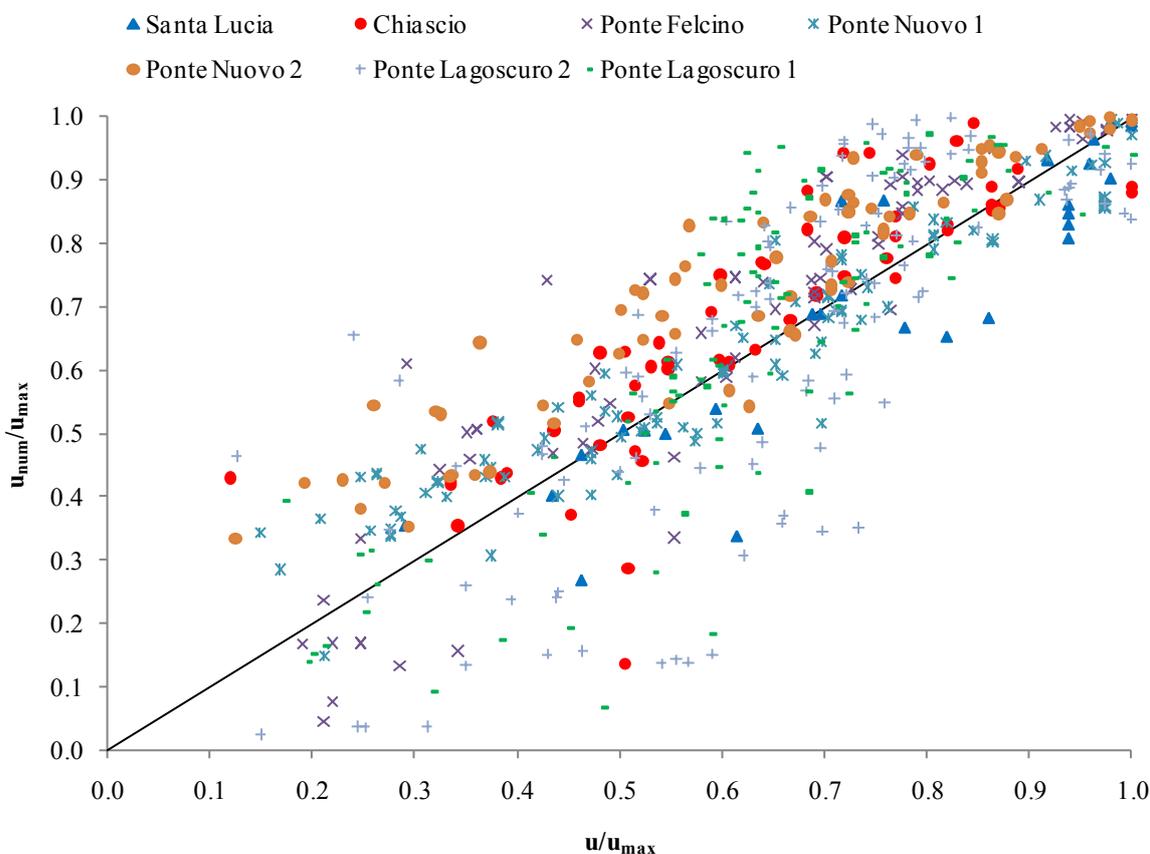
Al fine di avere un quadro complessivo dei risultati ottenuti per tutte le prove a seguito del confronto tra dati sperimentali e dati teorici si faccia riferimento alla tabella riportata qui di seguito (Tab. 4.13) in cui sono elencate, per ciascuna prova, le caratteristiche principali. In particolare sono riportati gli scostamenti teorico-sperimentali medi che si riscontrano in ogni prova sia per il modello messo a punto (eq. (4.6)) sia per il modello già noto di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004). Come si può notare gli scarti che si ottengono applicando la (4.5) e applicando il metodo di Chiu sono sempre sostanzialmente uguali. Tuttavia, come era già stato precedentemente messo in evidenza, l'approccio sviluppato e proposto nella presente tesi risulta essere molto versatile e pratico in quanto abbisogna di soli quattro valori per poter conoscere la distribuzione di velocità sull'intera sezione.

Dall'osservazione della Fig. 4.26, la quale riporta la corrispondenza teorico-sperimentale relativa a tutte le sezioni prese in esame, si evince che nella zona delle velocità alte i punti rimangono abbastanza raccolti attorno alla bisettrice e pertanto c'è una buona corrispondenza teorico-sperimentale. Nella zona, invece, delle velocità più basse ci sono talvolta forti scostamenti

che lascerebbero supporre che il modello sviluppato presenta qualche incongruenza con la realtà. In realtà questi forti scostamenti in parte potrebbero essere dovuti al fatto che, trattandosi delle velocità più basse ci si trova in corrispondenza dei contorni dove, solitamente possono esserci delle difficoltà operative nell'effettuare una buona misura; tuttavia è evidente che la stima in corrispondenza delle pareti resta non molto buona ma tale aspetto era già stato messo in evidenza per la sezione rettangolare, e anche in questo caso si può affermare che, i valori in corrispondenza delle pareti sono valori che per loro natura non sono variabili aleatorie e dunque diventa difficile stimarle con un metodo probabilistico.

	B [m]	H [m]	A [mq]	C [m]	$\xi_0$ [-]	$\Psi_0$ [-]	$u_{med}$ [m/s]	$u_{max}$ [m/s]	$u_{med}/u_{max}$ [-]	G [-]	$\epsilon_{m,stim}$ [%]	$\epsilon_{m,Chiu}$ [%]
<b>Santa Lucia</b>	21.19	3.29	55.19	23.37	0.51	0.93	1.61	2.44	0.662	4.17	6.6	8.3
<b>Chiasco</b>	35.94	3.11	92.21	37.81	0.45	1.00	1.64	2.45	0.669	1.98	7.4	6.9
<b>Ponte Felcino</b>	42.05	6.15	202.80	46.88	0.62	0.72	2.10	3.36	0.625	4.74	7.6	8.1
<b>Ponte Nuovo 1</b>	55.73	6.71	315.98	60.30	0.51	0.67	1.74	2.60	0.670	1.55	6.0	9.1
<b>Ponte Nuovo 2</b>	66.74	6.31	310.72	68.94	0.51	0.50	1.82	2.72	0.669	3.09	11.0	10.3
<b>Ponte Lagoscuro 2</b>	292.62	9.12	1956.53	293.97	0.44	1.00	1.21	1.80	0.671	0.78	12.1	9.3
<b>Ponte Lagoscuro 1</b>	299.20	9.60	2072.49	300.48	0.41	1.00	1.17	1.80	0.650	0.65	9.4	9.1

**Tab. 4.13** Dati riassuntivi di tutte le prove effettuate



**Fig. 4.26** Confronto tra dati sperimentali e stime teoriche con la (4.6)

#### **4.9 Conclusioni sulla validazione del modello su dominio di forma qualsiasi**

Sulla scorta di alcune misure di velocità effettuate su corsi d'acqua naturali è stato testato il modello di stima delle distribuzioni di velocità in una sezione di forma generica messo a punto durante il dottorato di ricerca.

Tale modello, ricavato sulla base di considerazioni entropiche, permette di stimare la velocità in un qualsiasi punto di una nota sezione trasversale di un corso d'acqua, definite la velocità media della corrente, la massima e la sua posizione.

Le sezioni considerate sono molto variabili tra loro in dimensioni, forma e caratteristiche idrauliche e il metodo può essere applicato tal quale a ciascuna di essa. L'analisi dei risultati porta a concludere che il modello proposto è un buon strumento di stima della distribuzione di velocità e, almeno nell'ambito delle elaborazioni effettuate, ha restituito scarti teorico-sperimentali medi al massimo del 12%. Le zone in cui la stima delle velocità appare non molto buona sono quelle prospicienti ai bordi del dominio; ciò si spiega con due aspetti concomitanti, uno apparente, dovuto ai possibili errori di misura, frequenti allorché si indaga nelle vicinanze dei bordi, l'altro, sostanziale, dovuto al fatto che in queste zone i valori di velocità sono fortemente influenzati dalla presenza di un corpo rigido, i bordi appunto, che rende i valori stessi dei dati deterministici, non valutabili correttamente con un metodo stocastico, quale è quello proposto.

Rispetto ai modelli di letteratura, quello proposto, a fronte di un'approssimazione dei valori reali analoga, abbisogna di un numero molto ridotto di informazioni, e pertanto si presenta di più semplice applicazione e di pari efficacia.

#### **4.10 Bibliografia**

Chiu C. L., & Hsu S. H. (2006) Probabilistic approach to modeling of velocity distributions in fluid flows, *Journal of Hydrology*, vol. 316, 28-42

Gordon L. & Cox J.(2002) Acoustic Doppler Velocimeter Performance in a Laboratory Flume, [www.nortek.com](http://www.nortek.com)

Marchi E. (1988) *L'Energia Elettrica*

Nortek, 10 MHz Velocimeter, Operations Manual, November 1, 2000

## Conclusioni

La ricerca svolta, di cui la presente tesi è momento di sintesi, ha consentito la messa punto di un nuovo approccio teorico, basato sul concetto della massima entropia, per la stima della variabilità di una generica funzione definita in un dominio bidimensionale e la successiva applicazione per la definizione di un modello teorico della distribuzione di velocità in una corrente a pelo libero.

L'approccio proposto presenta una struttura analoga a quella utilizzata nei modelli di letteratura per la stima delle velocità in alveo, ma considera la bidimensionalità del dominio già a partire dalla definizione della funzione di distribuzione di probabilità cumulata.

Sebbene tale impostazione complichino la struttura matematica del problema, comportando la risoluzione di un sistema lineare di equazioni differenziali, è tuttavia possibile pervenire ad una soluzione in forma chiusa. Le soluzioni analitiche della distribuzione delle velocità sono state ricavate, oltre che per sezione rettangolare e trapezoidale, anche nel caso di una sezione di forma qualsiasi, purché il contorno sia esprimibile attraverso una funzione continua, in modo da coprire la quasi generalità dei casi che possono presentarsi nelle applicazioni reali.

La validazione del modello proposto è stata effettuata sulla scorta di numerose misure di velocità di laboratorio e di campo su corsi d'acqua naturali. Con riferimento alle prime, è stata condotta un'estesa campagna di misure di laboratorio nel caso di canale rettangolare, analizzando configurazioni caratterizzate da un'ampia variabilità di portata, tirante, pendenza e scabrezza del fondo. L'analisi dei risultati evidenzia che il modello fornisce una stima soddisfacente della distribuzione di velocità, indipendentemente dalla configurazione considerata. Gli scarti maggiori si registrano lungo i bordi del dominio, in conseguenza del fatto che nella vicinanza delle pareti o del fondo, in particolar modo se scabro, le misure risultano affette da errori di maggiore entità. Inoltre, va considerato che in corrispondenza dei bordi le velocità sono variabili essenzialmente deterministiche, poiché influenzate in modo marcato dalla presenza di elementi fissi, per cui un modello di tipo probabilistico non è in grado di riprodurre accuratamente tale condizione. Tuttavia, il modello proposto fornisce delle stime migliori dei modelli presenti in letteratura, per alcuni dei quali si rende anche necessario calibrare alcuni parametri.

Nel caso di domini di forma generica il modello è stato applicato a numerose sezioni di corsi d'acqua naturali, molto variabili tra loro in dimensioni, forma e caratteristiche idrauliche, evidenziando, almeno nell'ambito delle elaborazioni effettuate, scarti teorico-sperimentali medi contenuti. Ancora una volta le zone in cui la stima delle velocità appare meno attendibile sono

quelle prospicienti ai bordi del dominio, per le quali, come nel caso di sezione rettangolare, si evidenzia l'inadeguatezza di un modello puramente probabilistico.

Si evidenzia inoltre che il modello proposto, a fronte di scarti rispetto ai valori misurati non superiori a quelli desumibili di analoghi modelli presenti in letteratura, richiede un numero molto ridotto di informazioni, risultando quindi di più semplice applicazione.

Per quanto riguarda il primo risultato raggiunto con l'attività di ricerca, ovvero, la definizione del modello teorico bidimensionale, è opportuno soffermarsi sul fatto che,

Si vuole infine osservare che, attesa la generalità delle ipotesi a partire dalle quali è stato ricavato il modello, lo stesso approccio consente di interpretare la variabilità di una generica funzione in un dominio bidimensionale, una volta che il problema specifico sia stato adeguatamente inquadrato e siano state fissate le opportune condizioni al contorno. In quest'ottica il modello è applicabile non solo a diversi ambiti dell'ingegneria, ma anche a discipline apparentemente più lontane, come l'economia o le scienze sociali. Limitatamente al caso di problemi tipici dell'ingegneria idraulica, traendo giovamento dall'impostazione stocastica del modello è possibile fornire una risposta nuova e più utile a problemi quali il trasporto di un soluto in una corrente, la diffusione dell'umidità in un terreno o l'escavazione del suolo a valle di una pila in alveo.

## **Ringraziamenti**

È diffusa consuetudine ringraziare per il contributo offerto per il raggiungimento di agognati obiettivi; io avverto un desiderio che va oltre: grazie per quant'altro riuscirò in avvenire.

A *Mauro Fiorentino* per l'incisivo, vivace stimolo;

a *Nicola Fontana* per l'esempio di costante abnegazione nello studio;

a *Vijay Singh* per avermi introdotto alla ricerca globale;

a *Carlo Sbordone* e *Nicola Fusco* per essere stati i miei preziosi “numeri primi”;

infine,

a *Giuseppe De Martino* per essere stato il seme del mio sapere e, ancor più, del mio saper fare.

## APPENDICE A

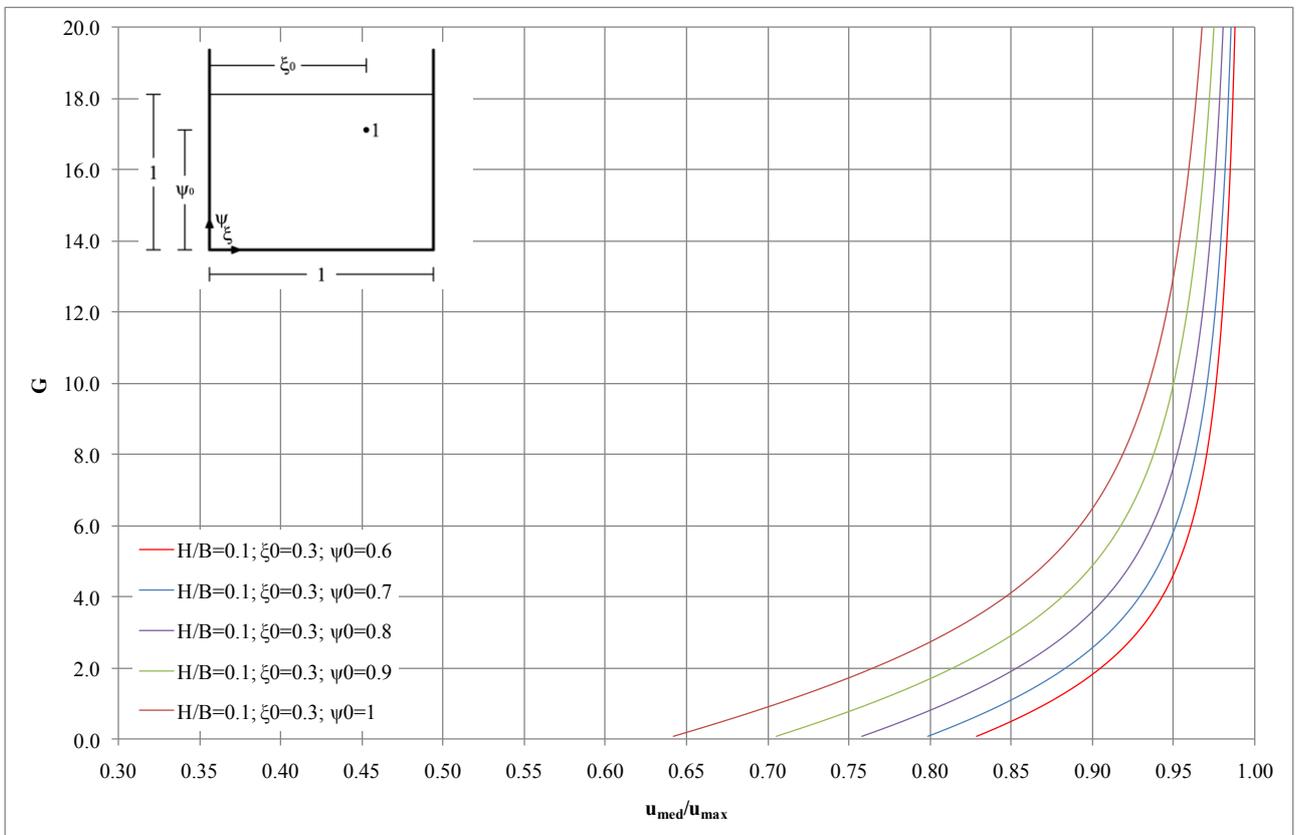
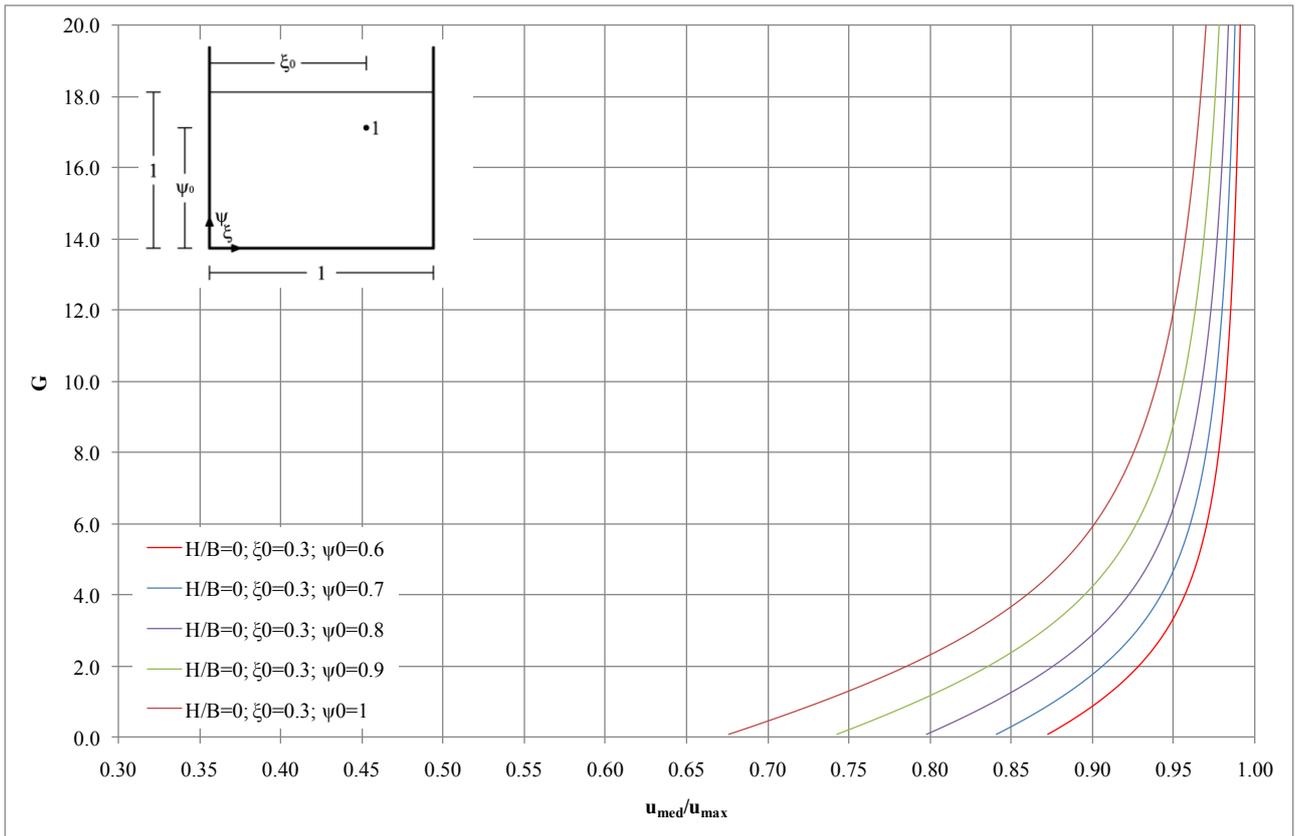
### GRAFICI PER LA DETERMINAZIONE DEL PARAMETRO ENTROPICO G

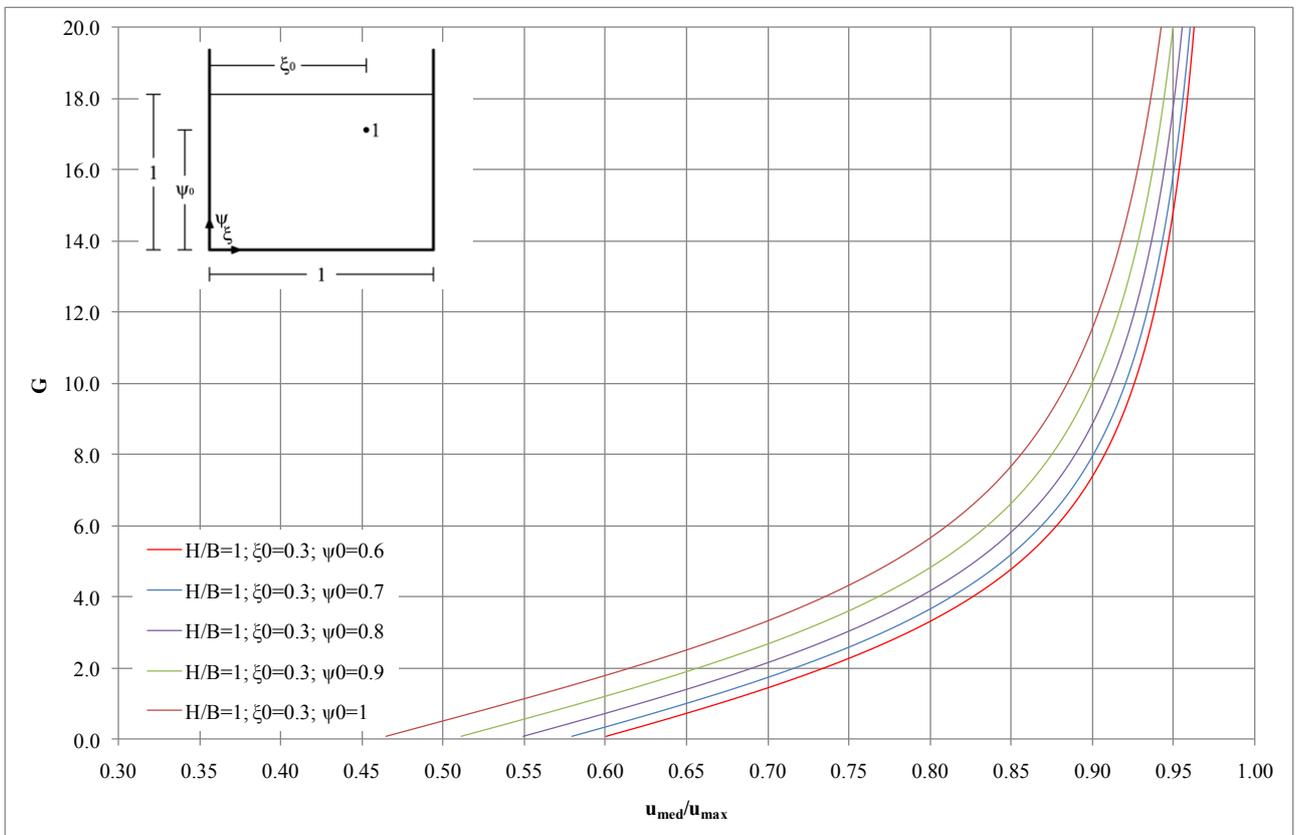
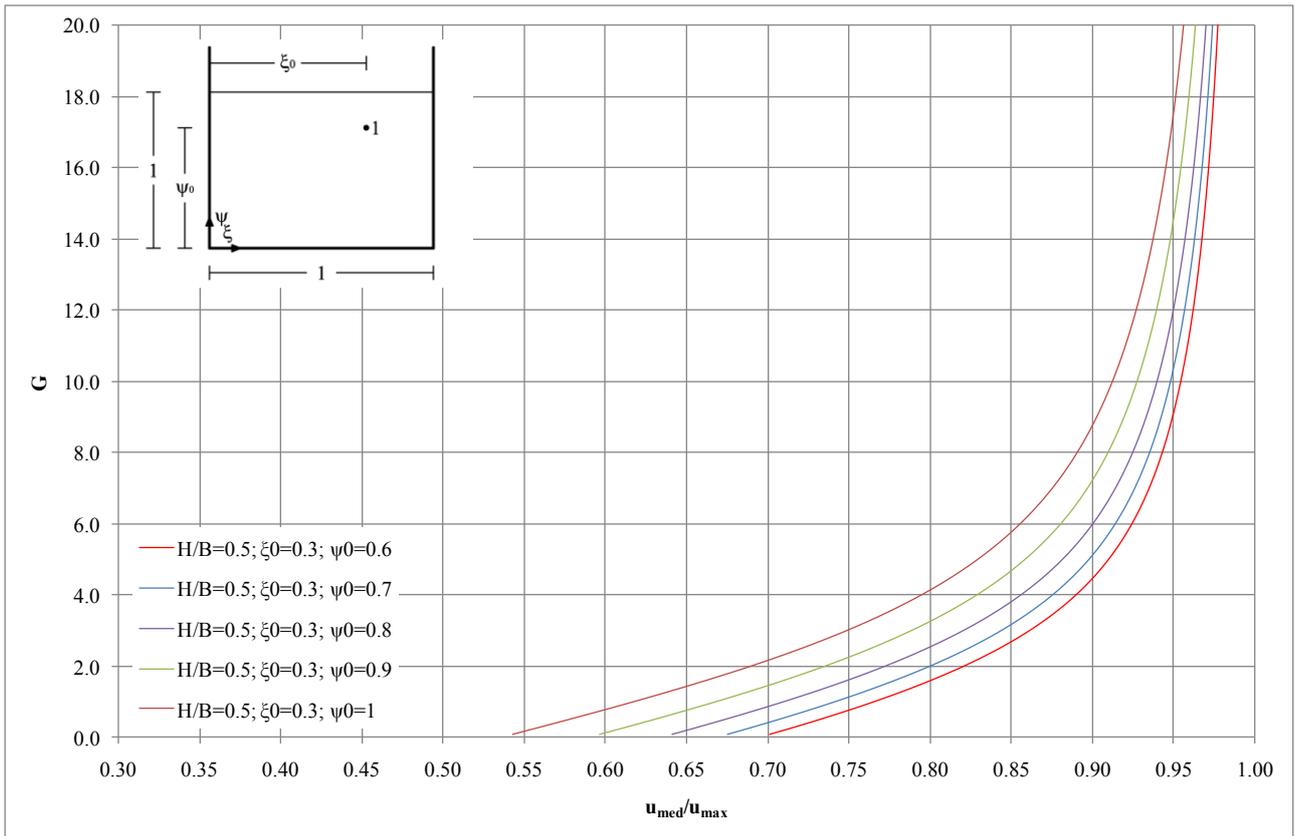
Qui di seguito vengono riportati i grafici che rappresentano la soluzione grafica dell'equazione (3.5) relativa ai diversi domini bidimensionali considerati ovvero rettangolare e trapezoidale. Va da se che la soluzione relativa al dominio rettangolare simmetrico va ricercata come soluzione particolare del dominio rettangolare con distribuzione delle velocità asimmetrica.

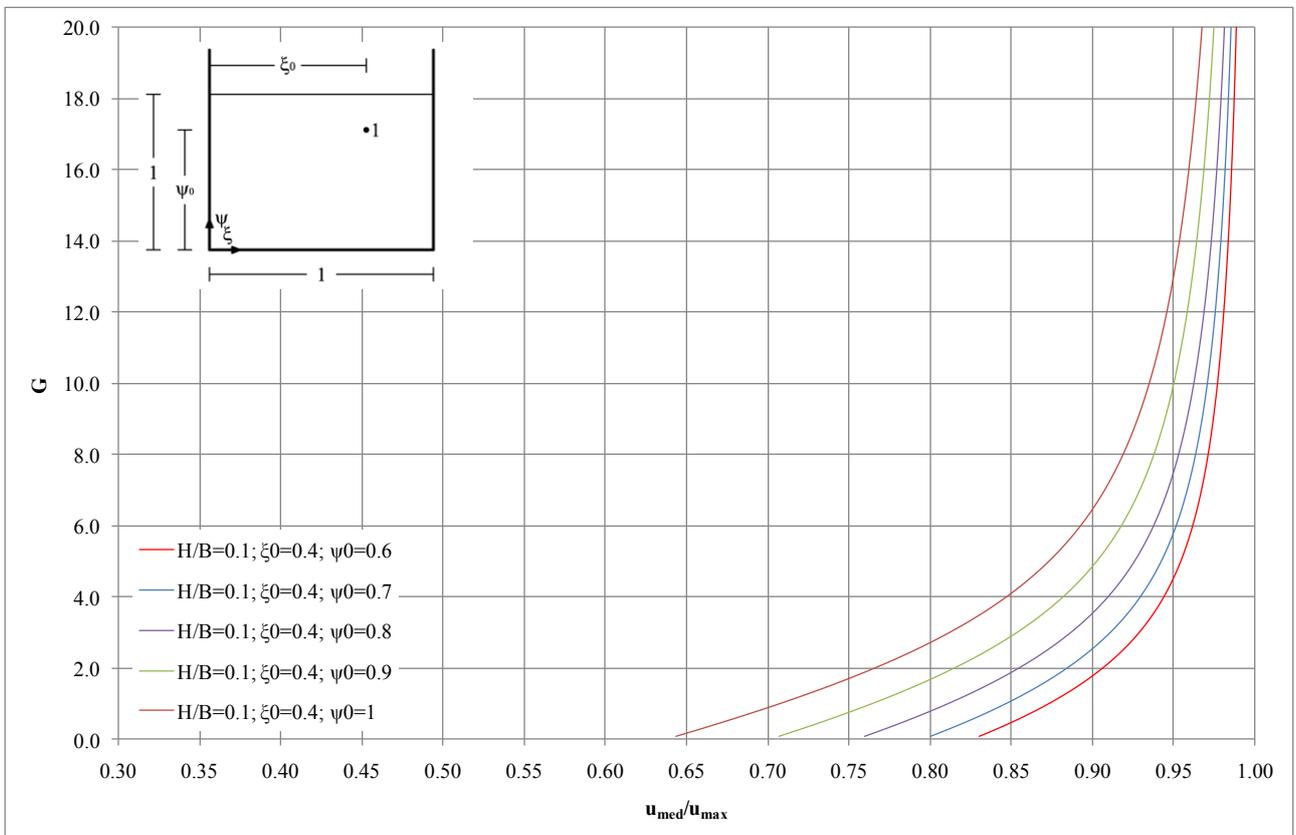
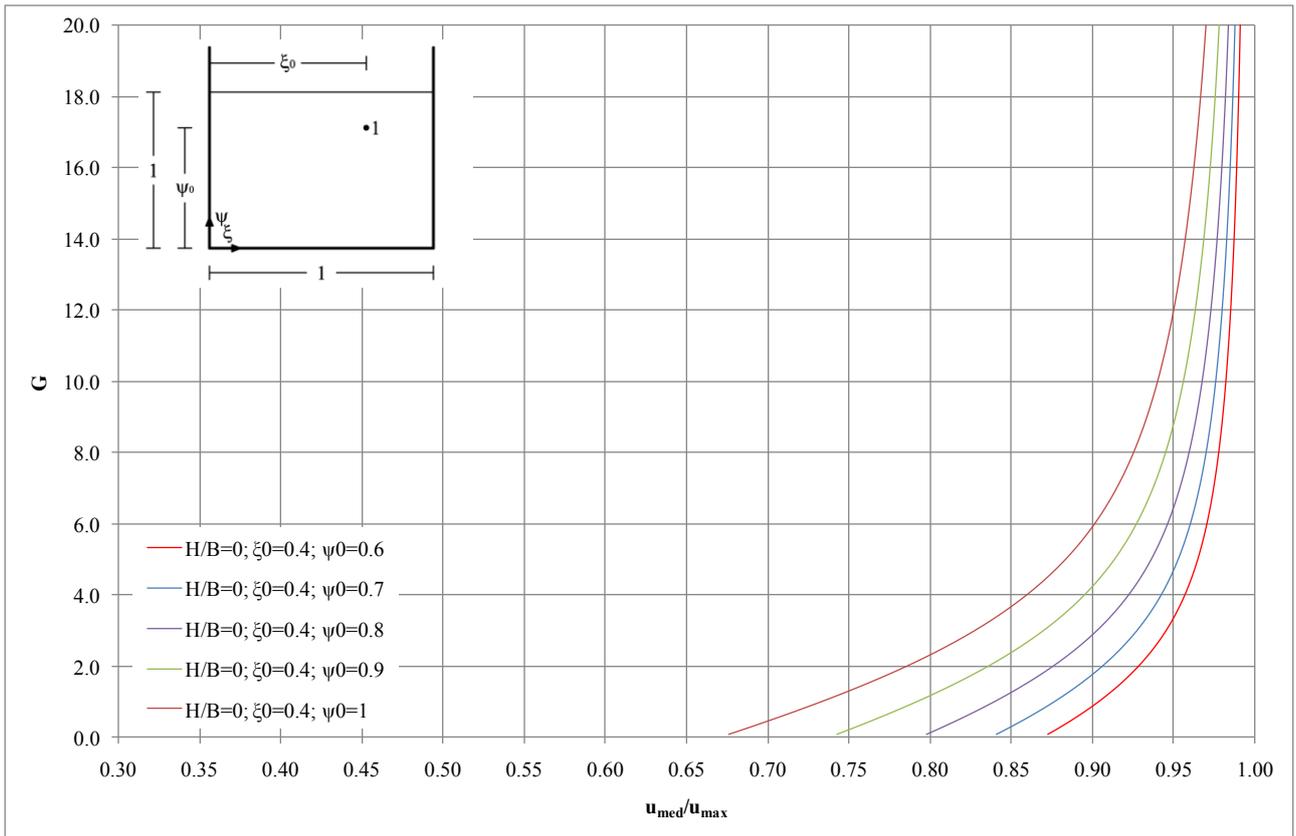
Per ciascun grafico viene riportato lo schema del dominio di riferimento in alto a sinistra, nonché una legenda in cui compaiono i valori dei parametri caratteristici della funzione densità di probabilità relativa.

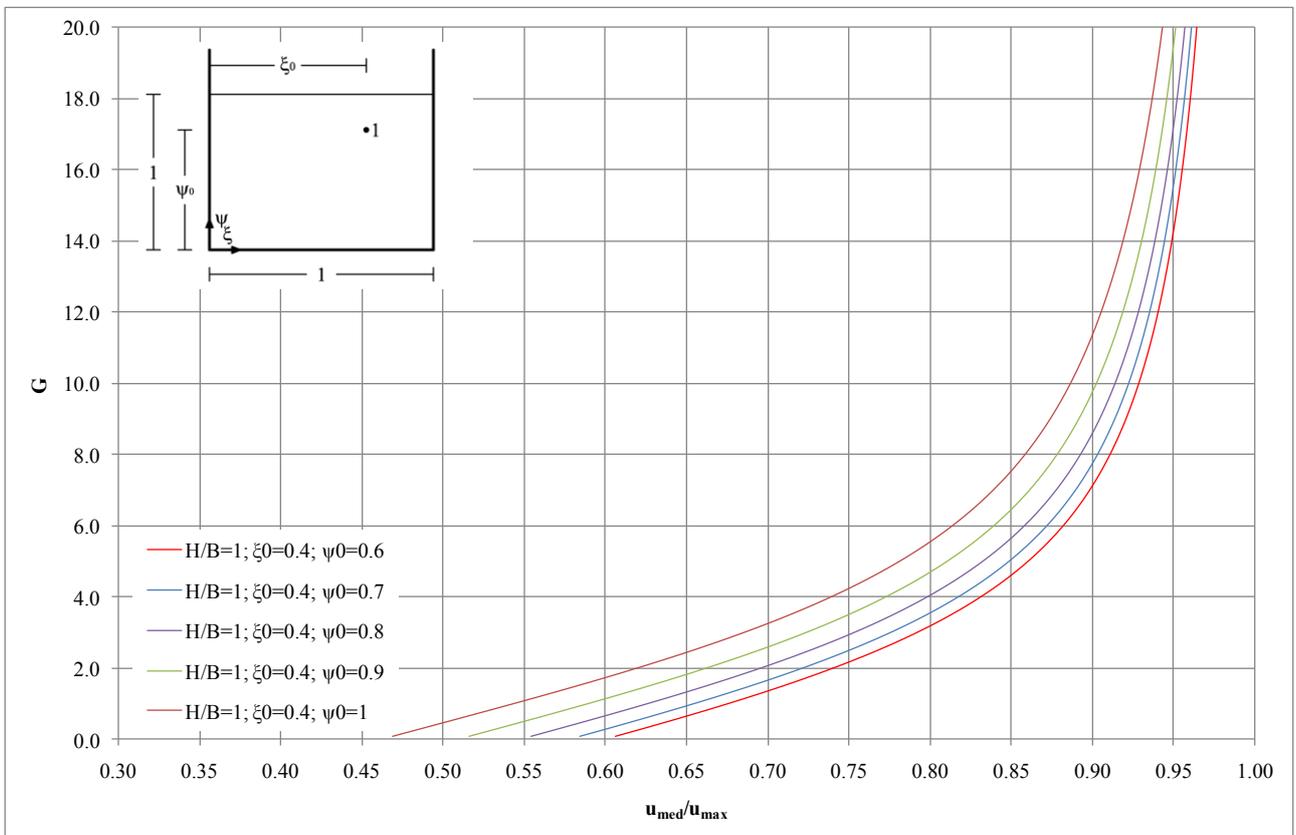
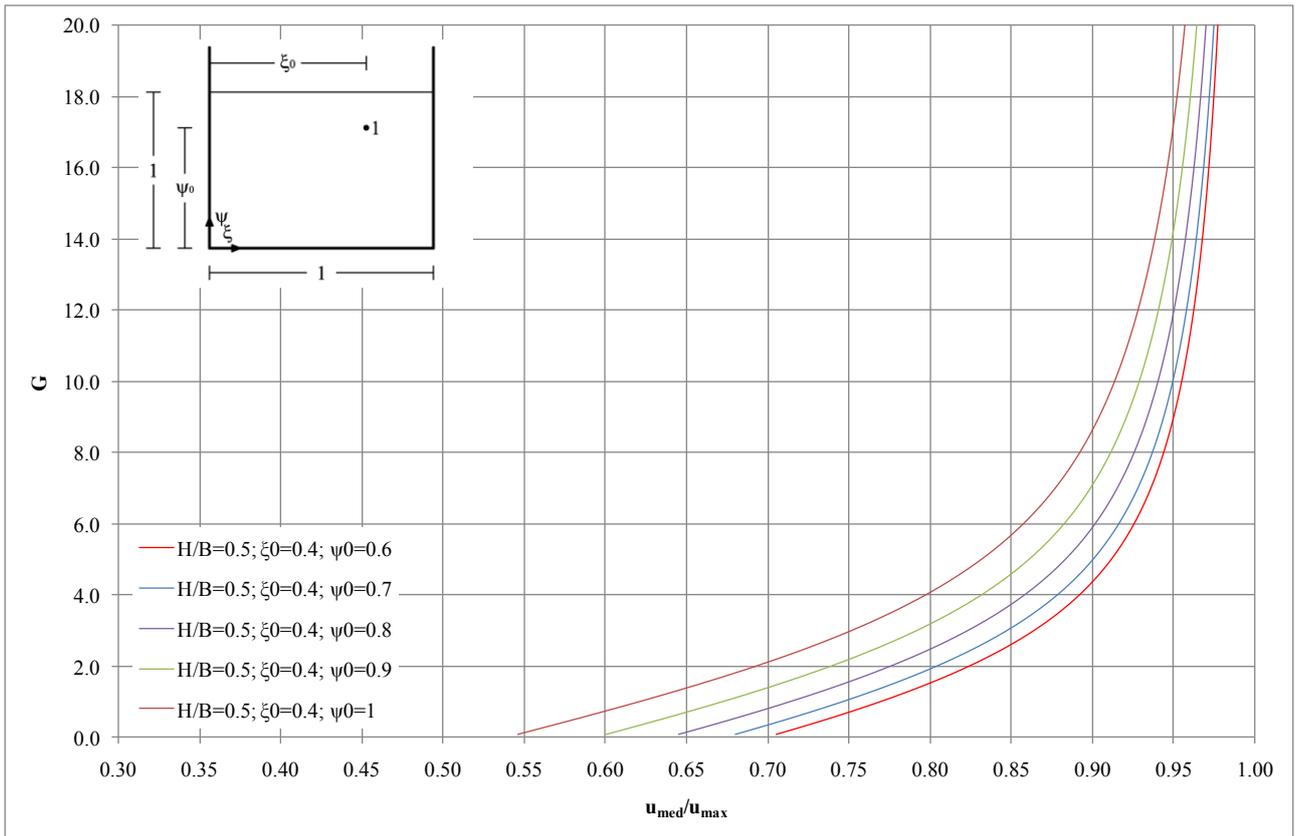
L'utilizzo dei grafici è semplice, nota la forma del dominio, le coordinate del punto a velocità massima, il rapporto  $H/B$ , nonché l'angolo  $\alpha$  d'inclinazione della sponda, nel caso di dominio trapezoidale, si può ricavare in funzione del rapporto  $u_{med}/u_{max}$  il valore di  $G$ .

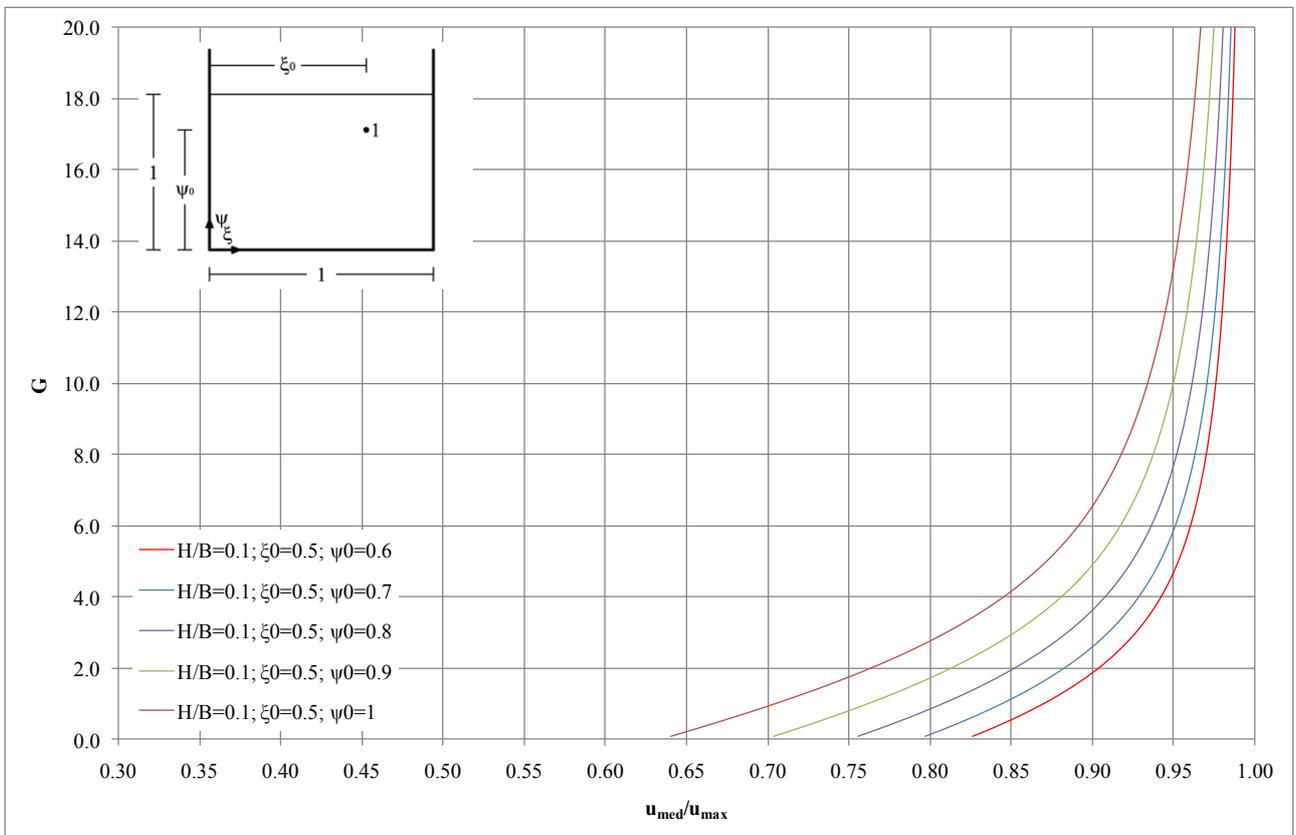
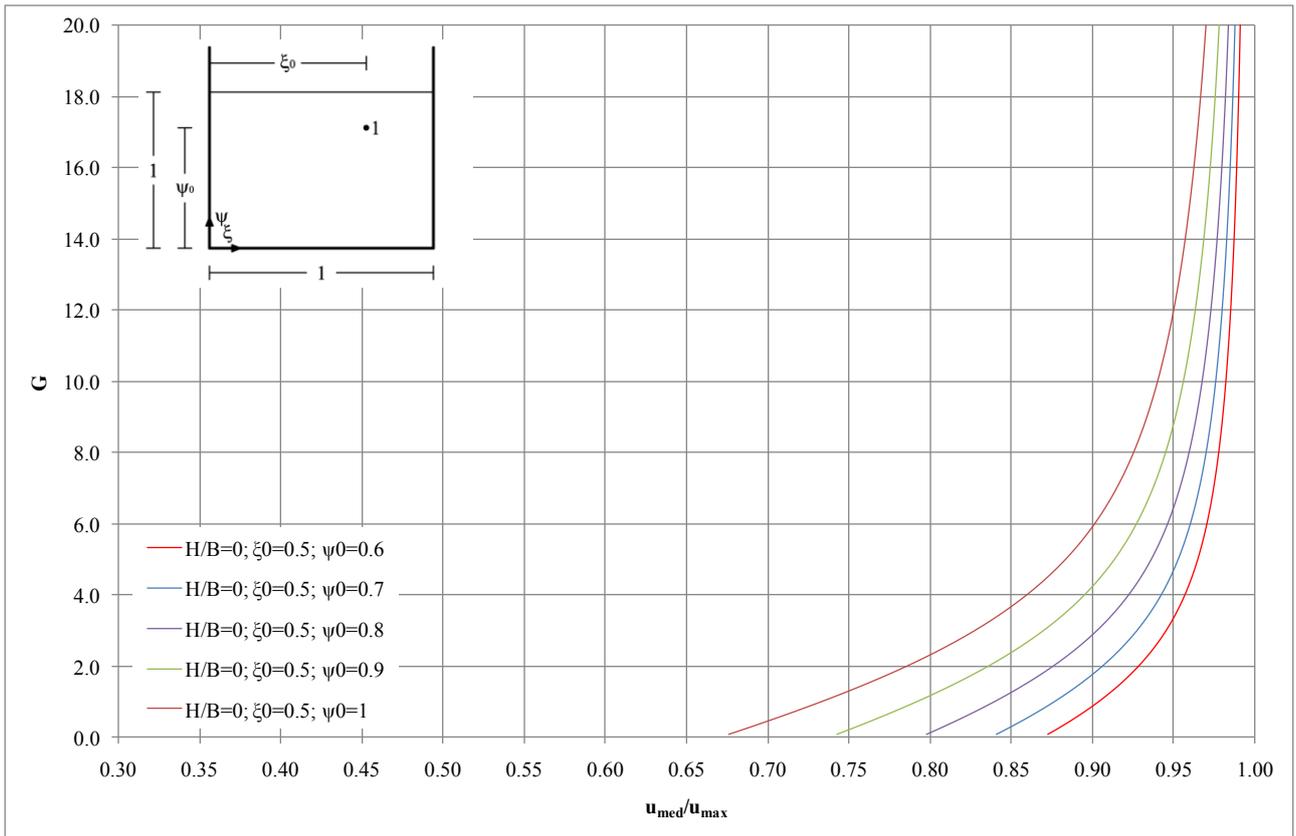
Eventualmente, poi, per valori dei parametri non esattamente presenti nei grafici proposti, si può effettuare una interpolazione multipla.

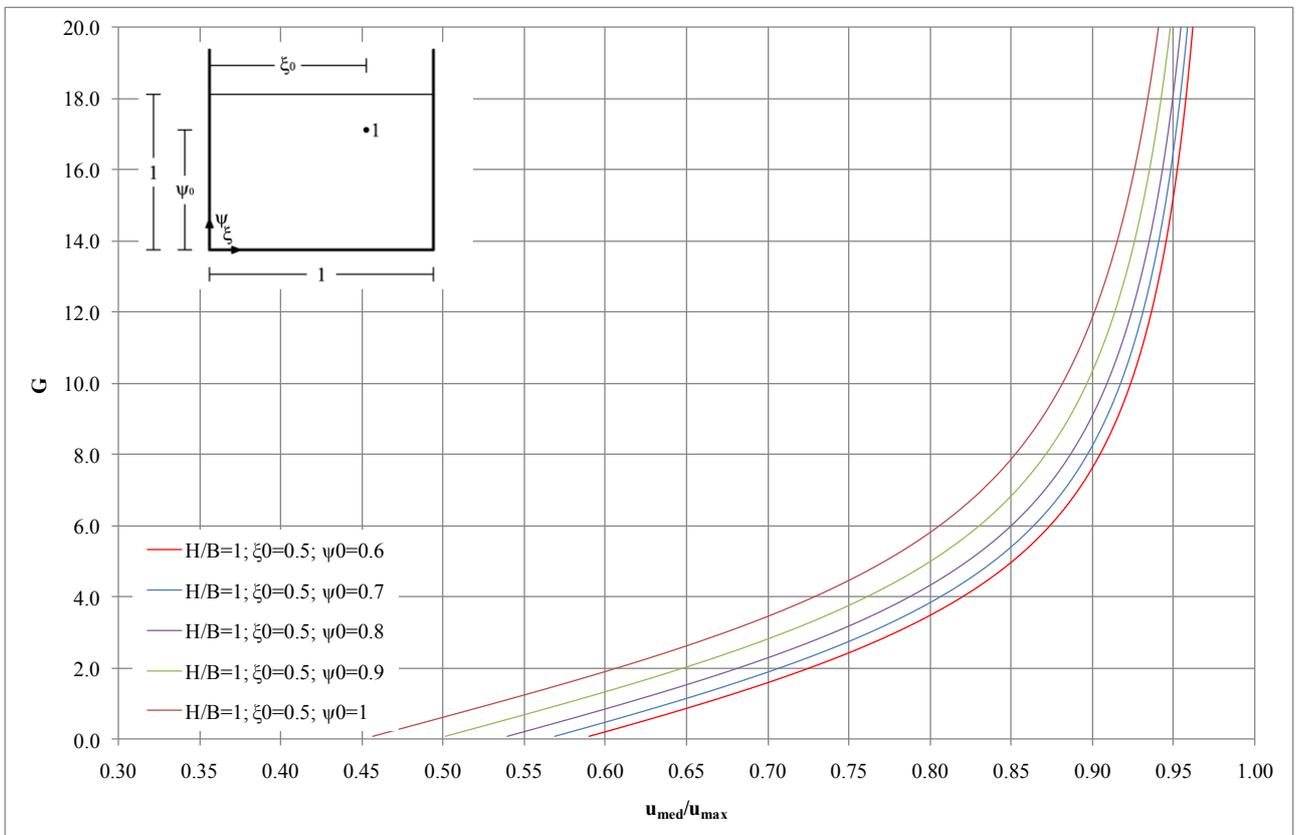
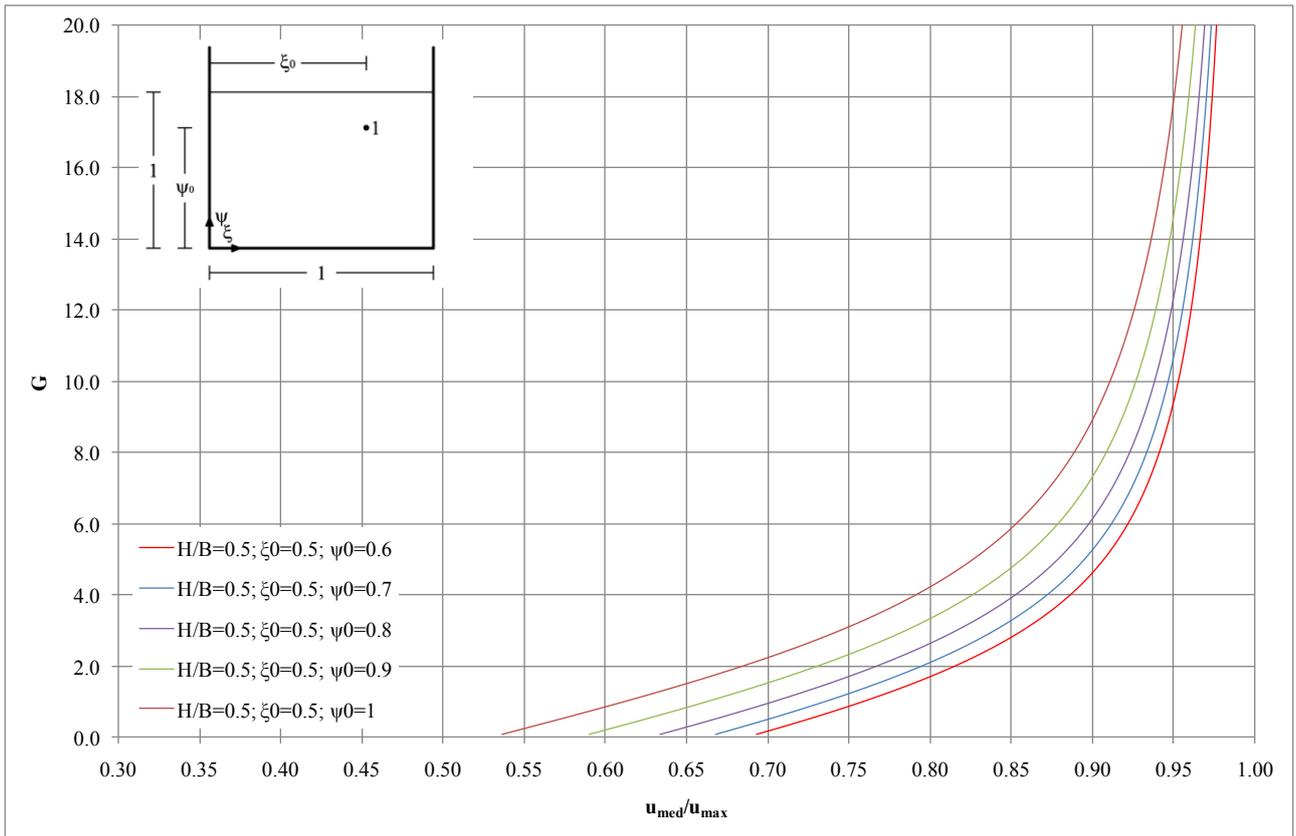


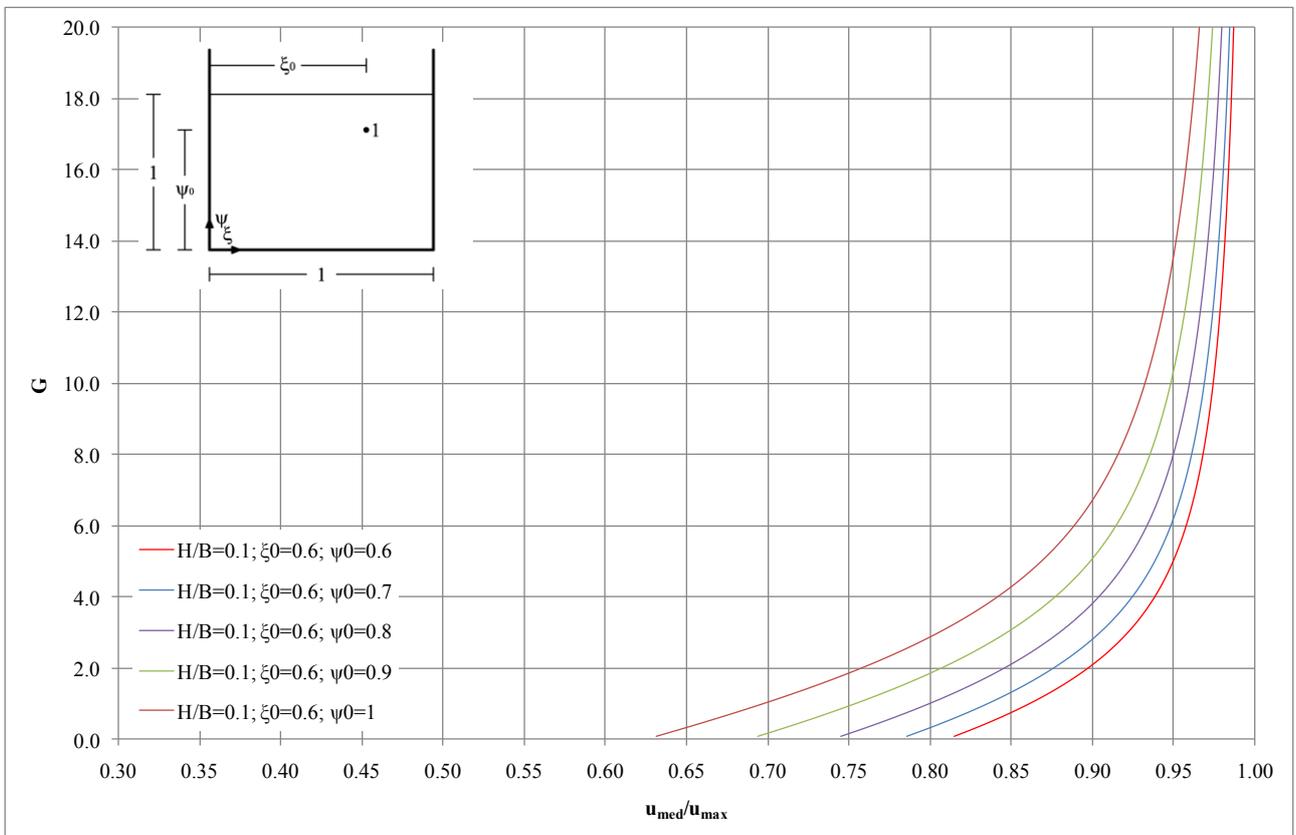
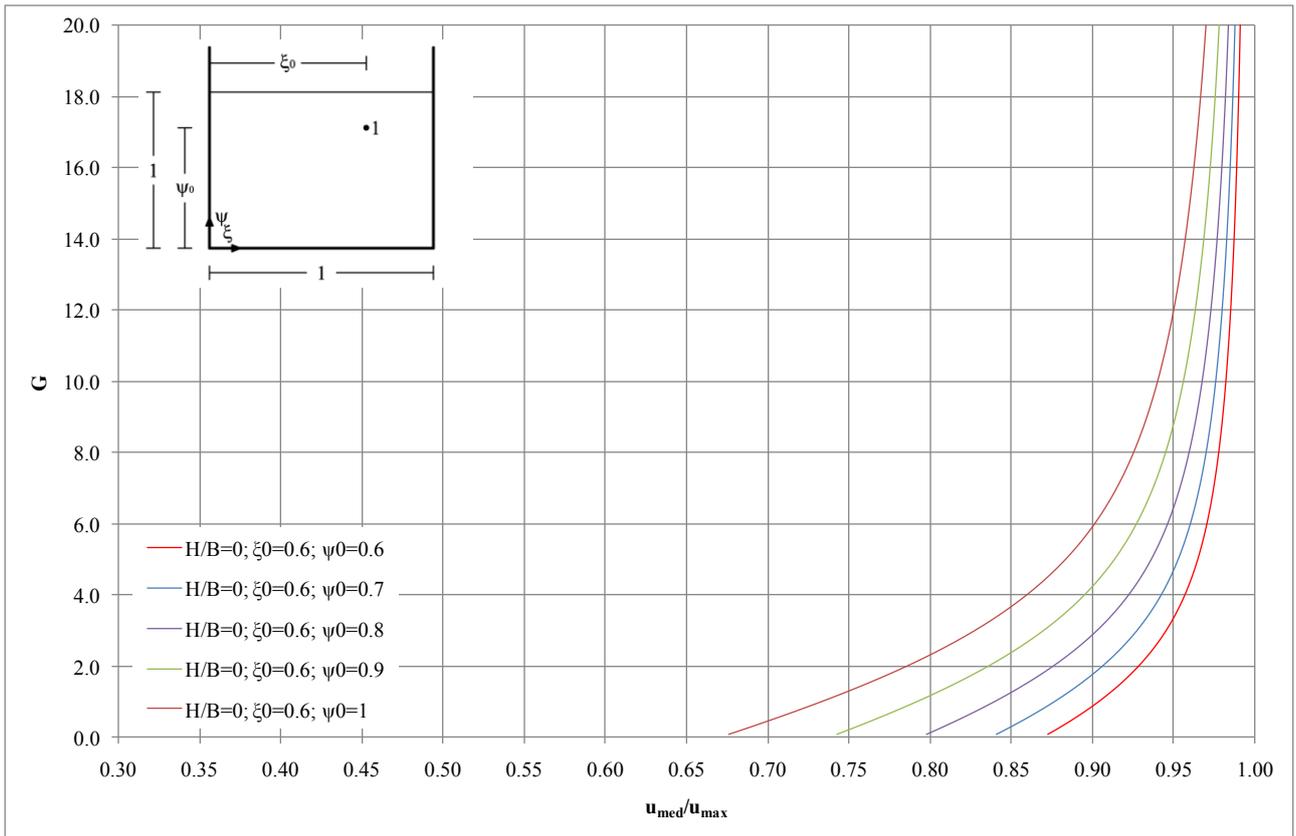


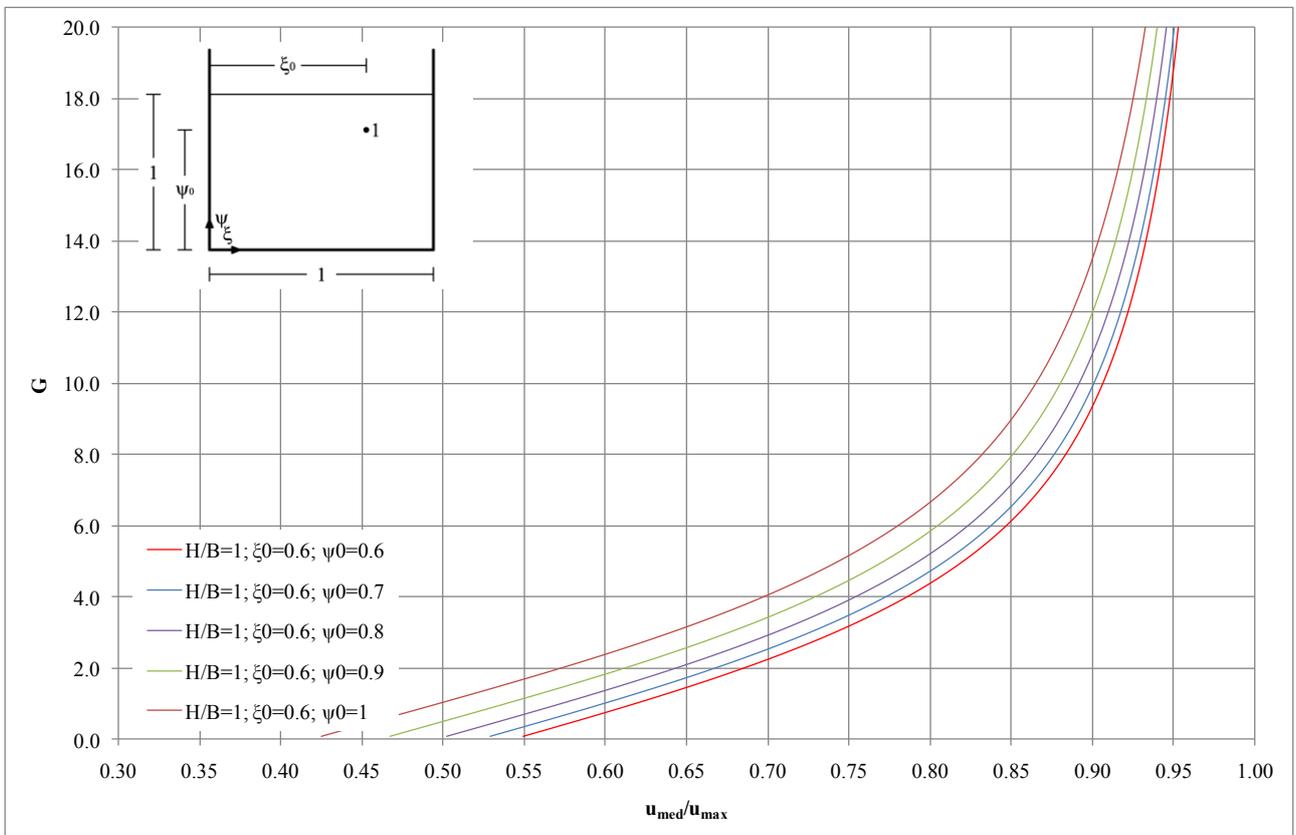
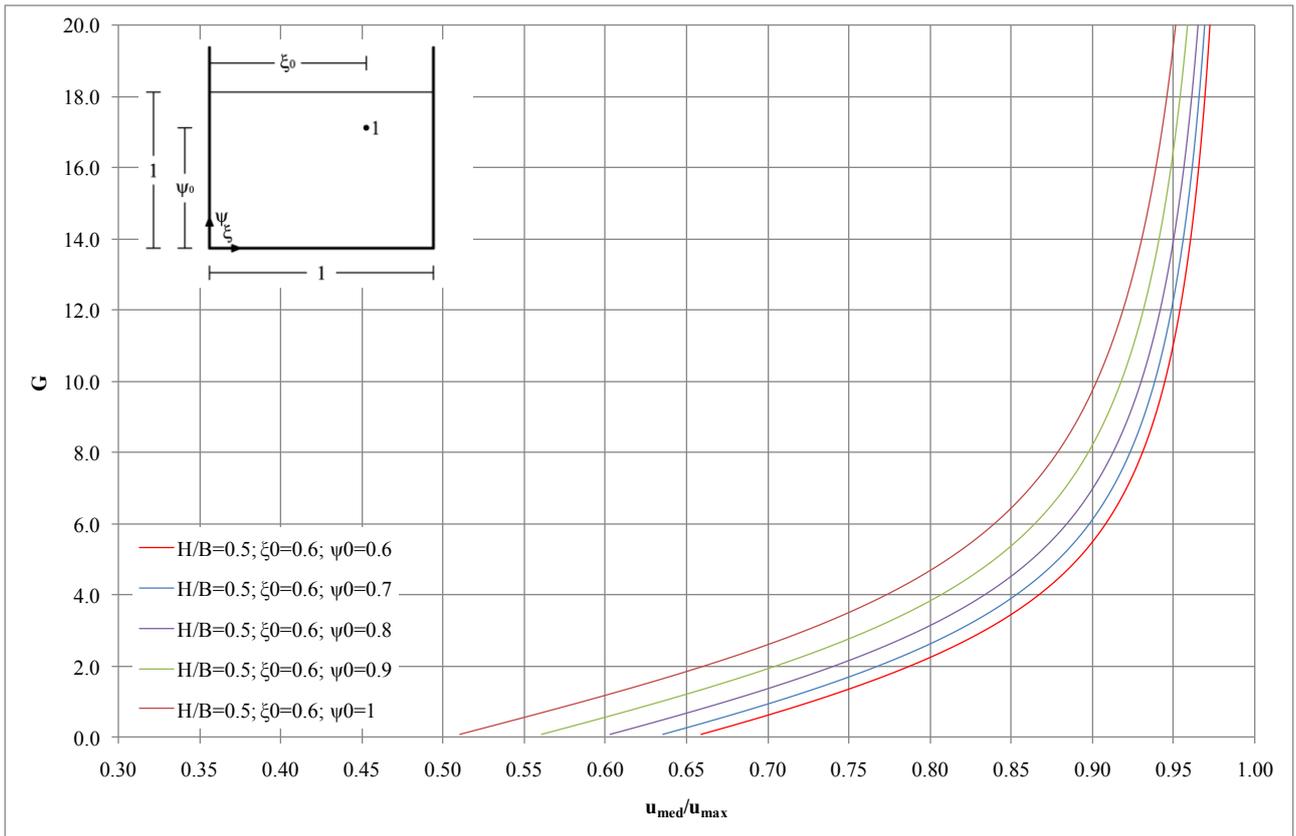


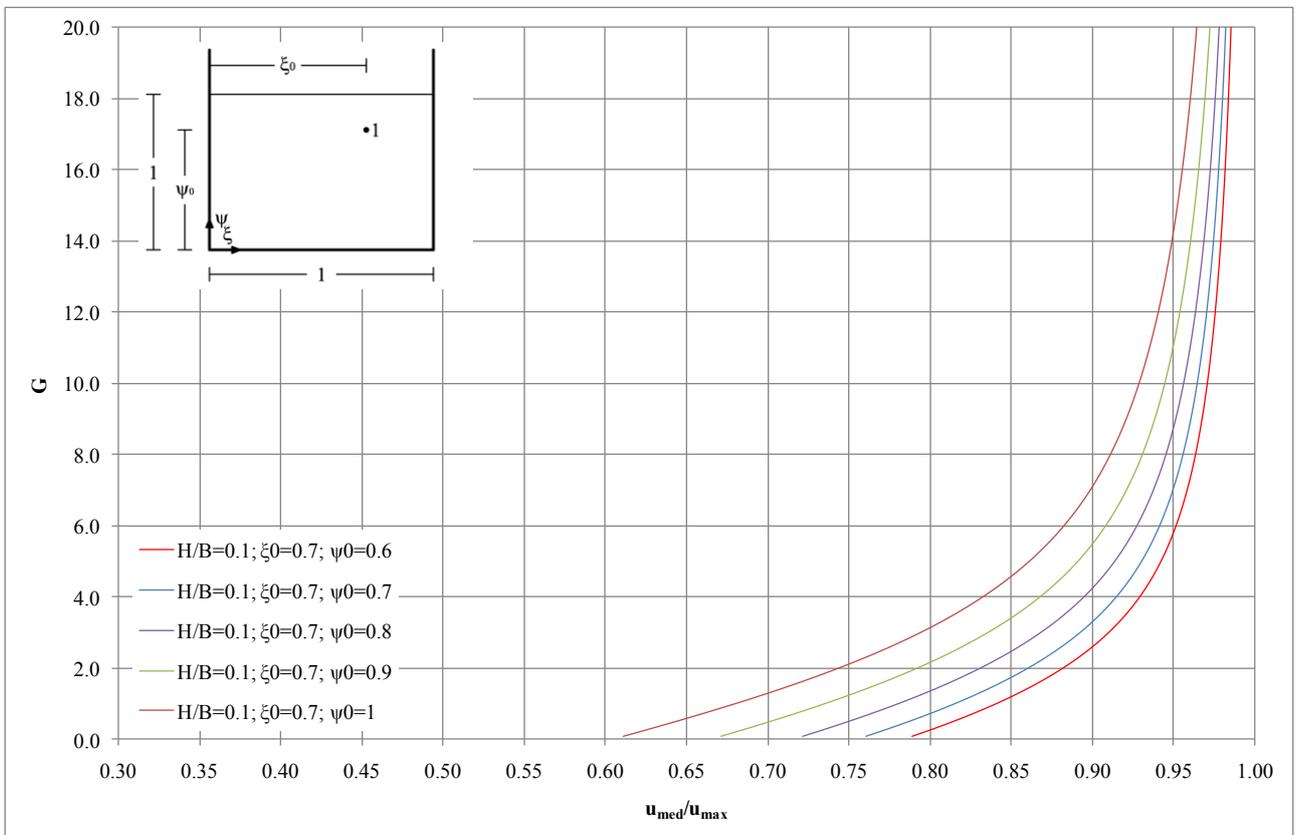
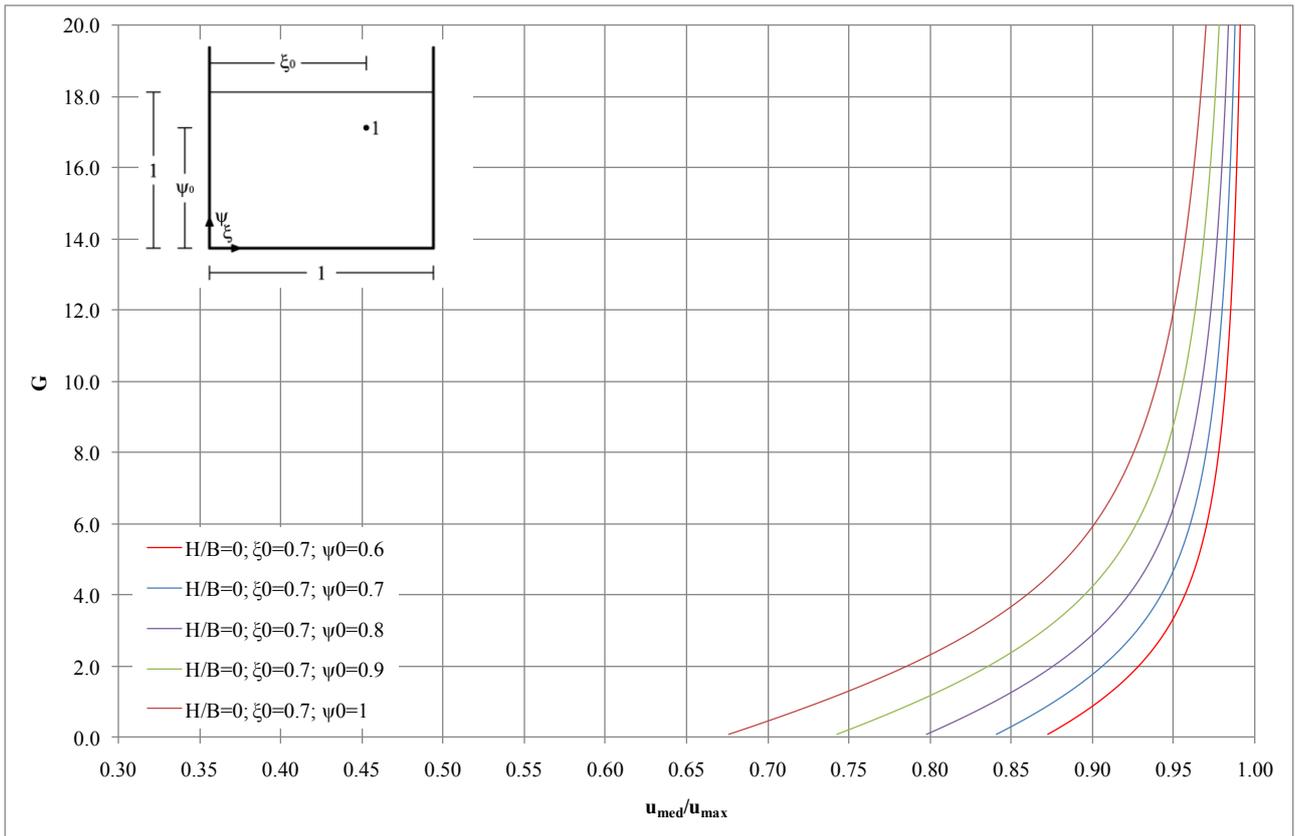


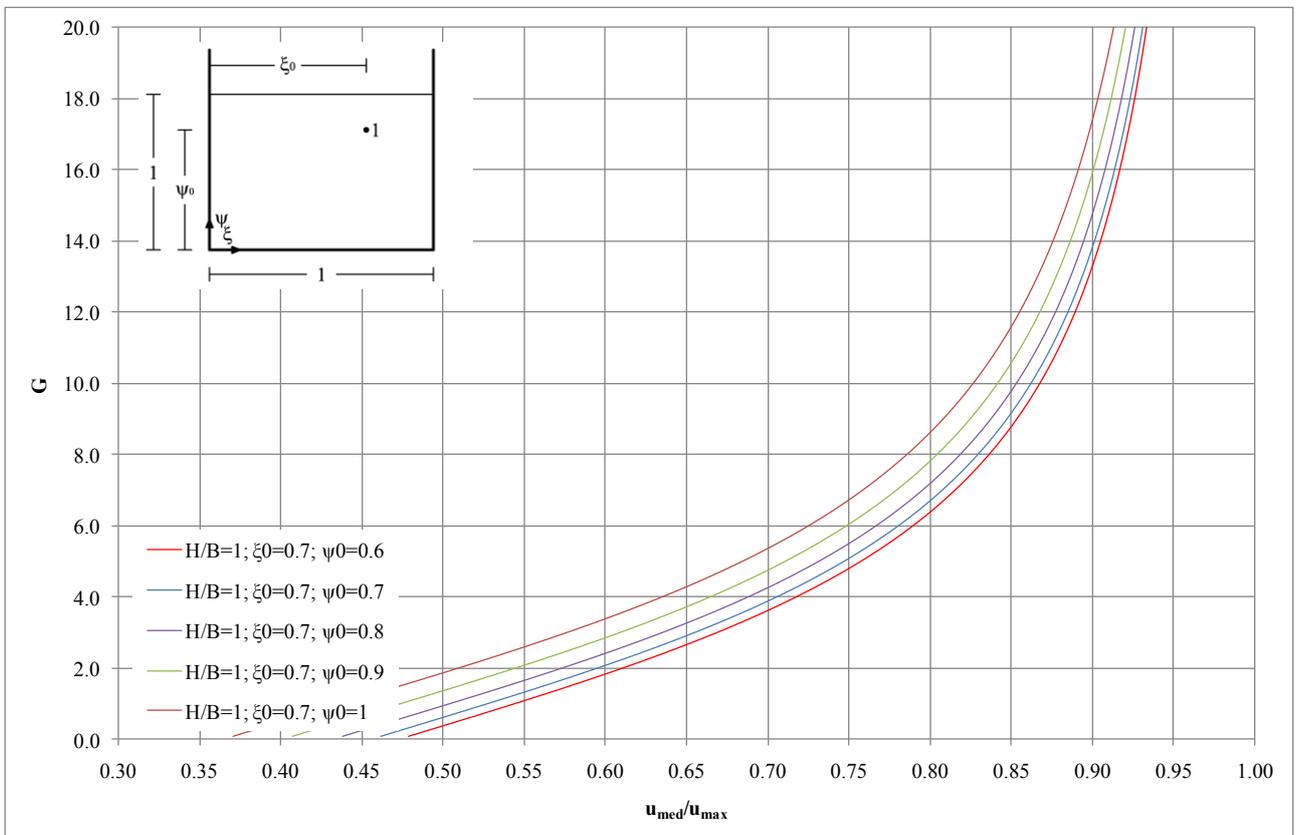
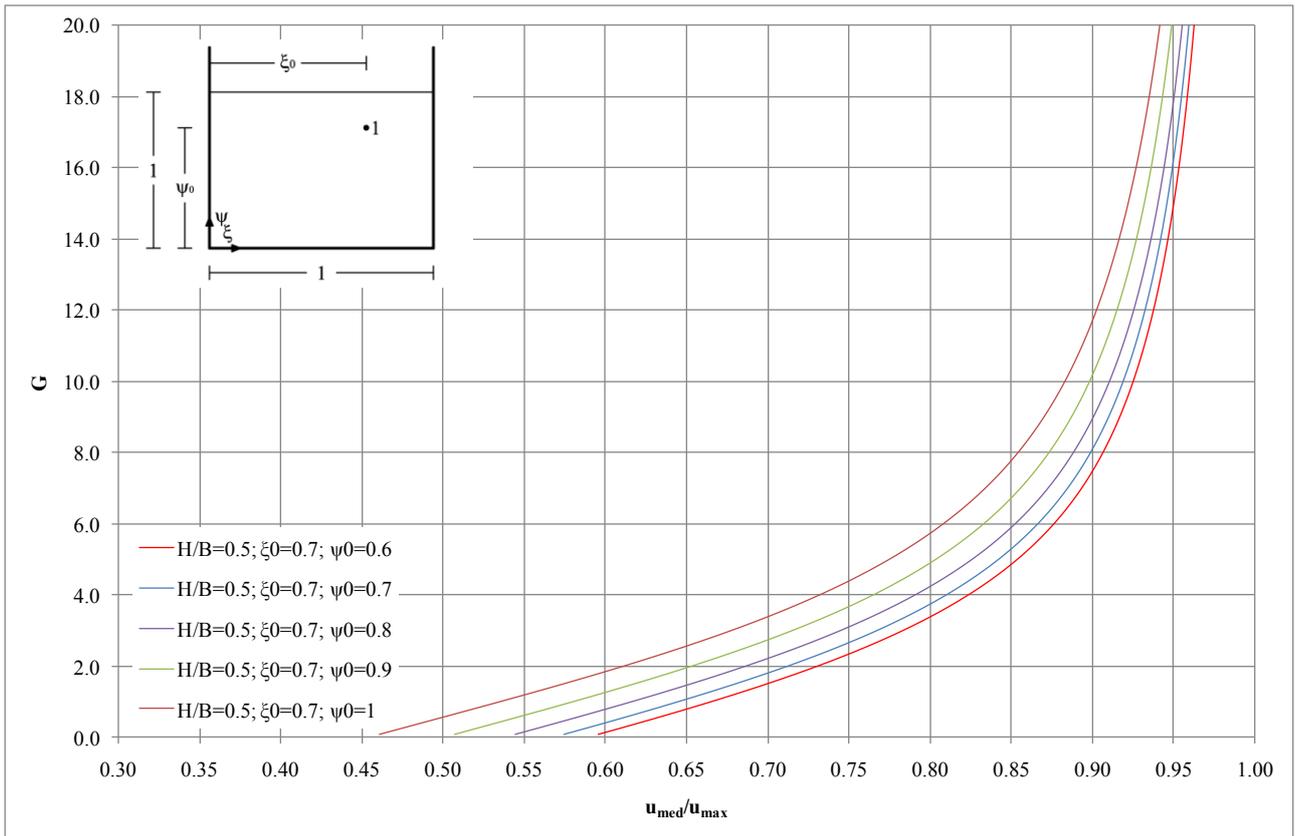


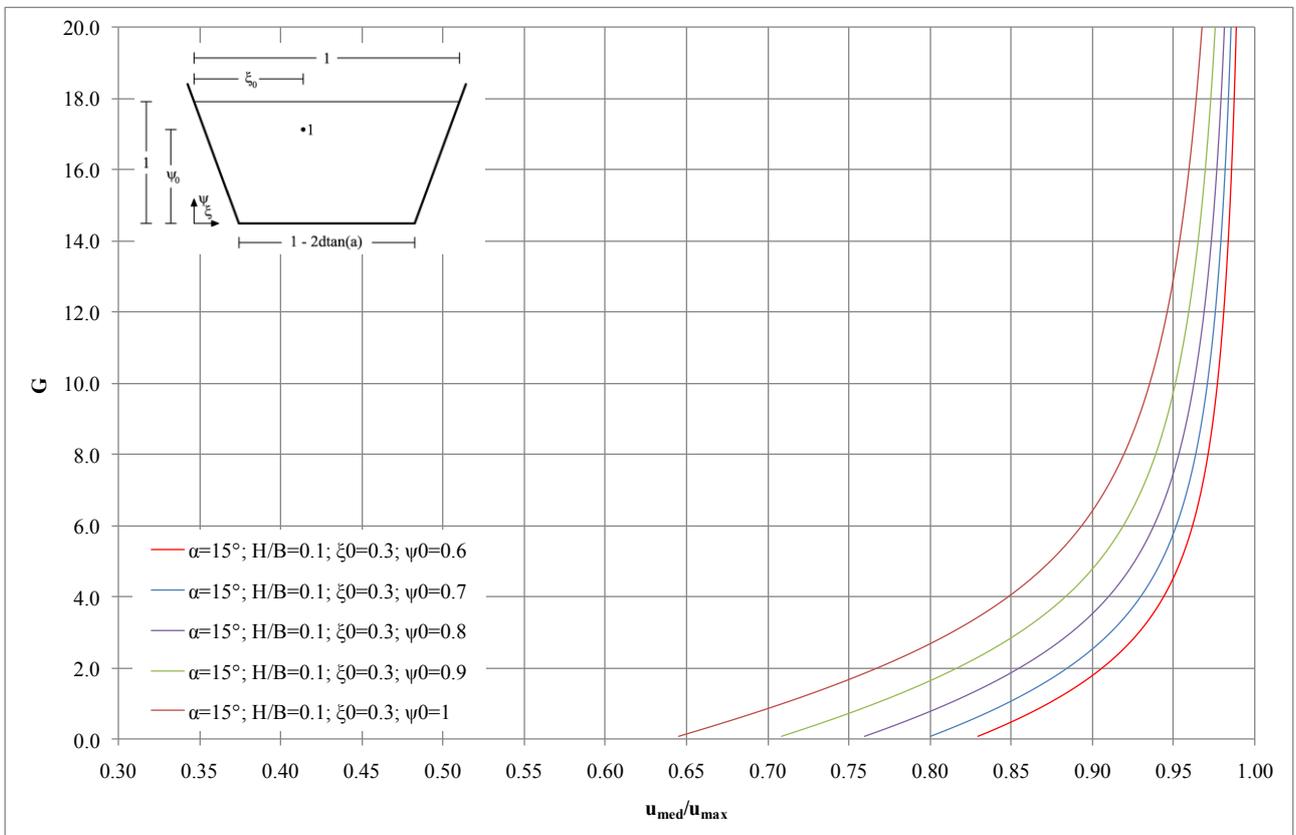
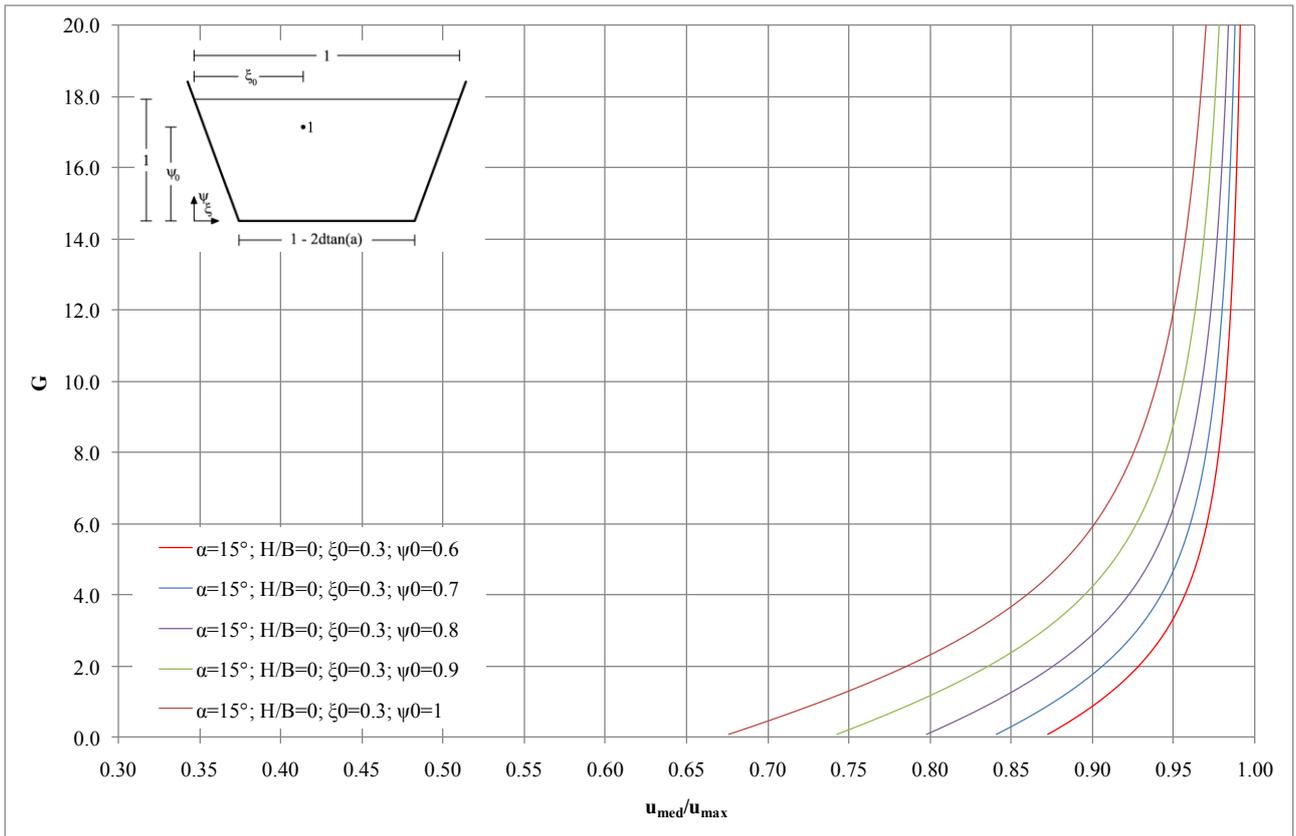


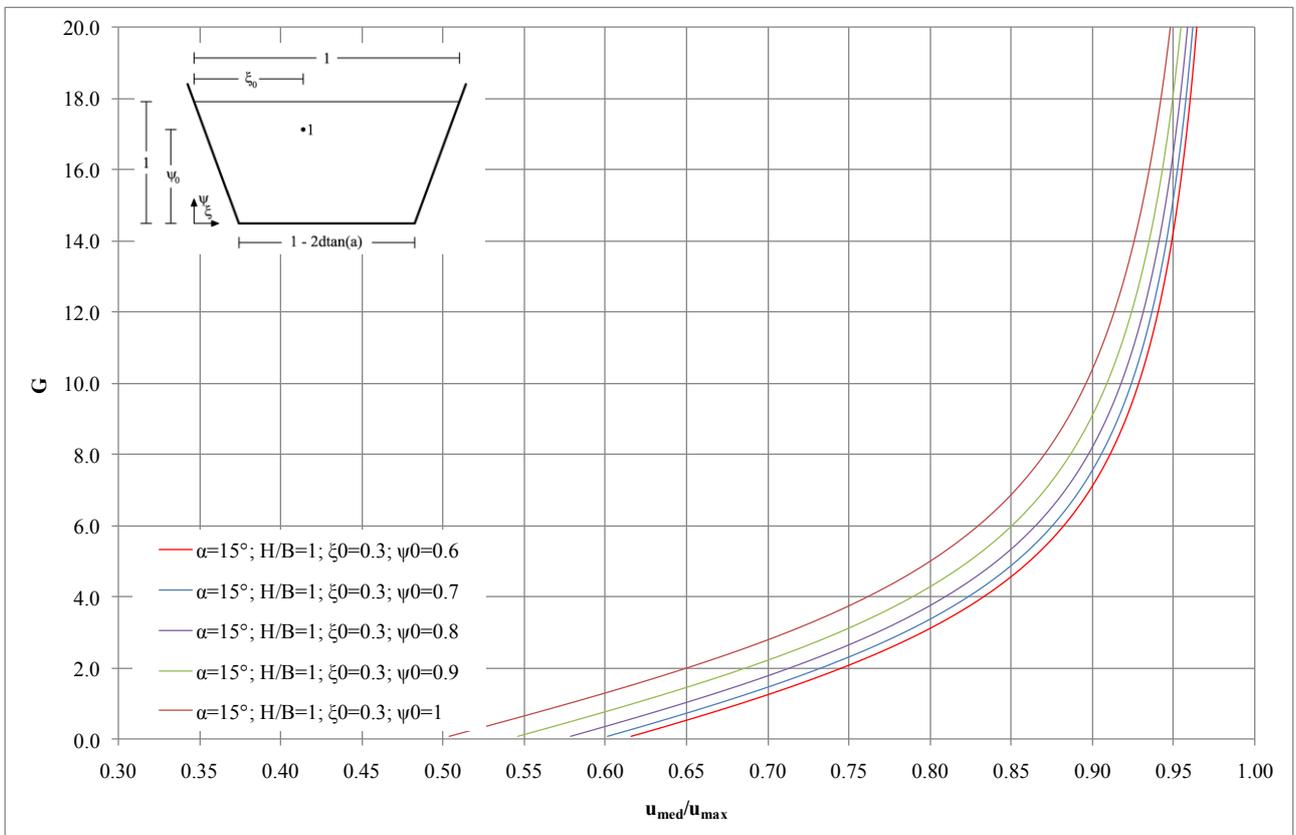
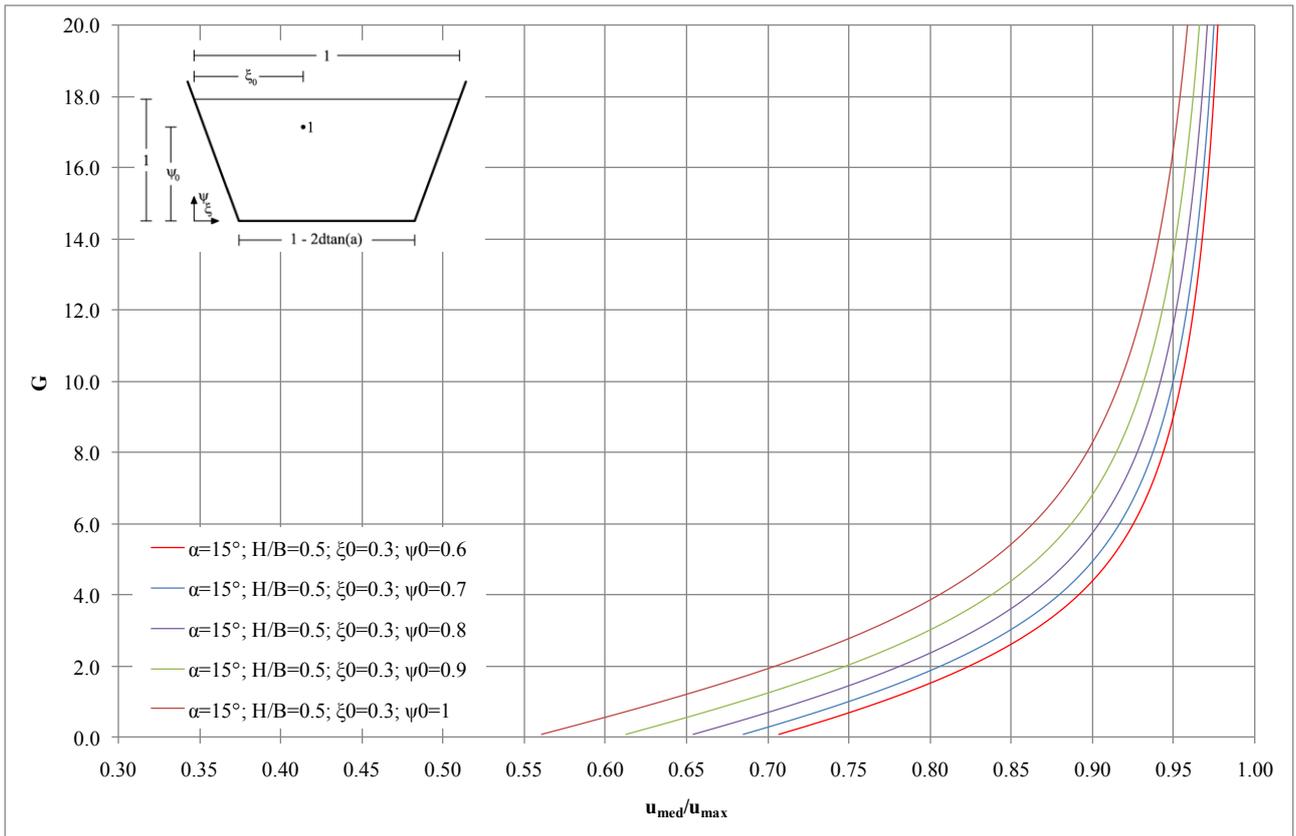


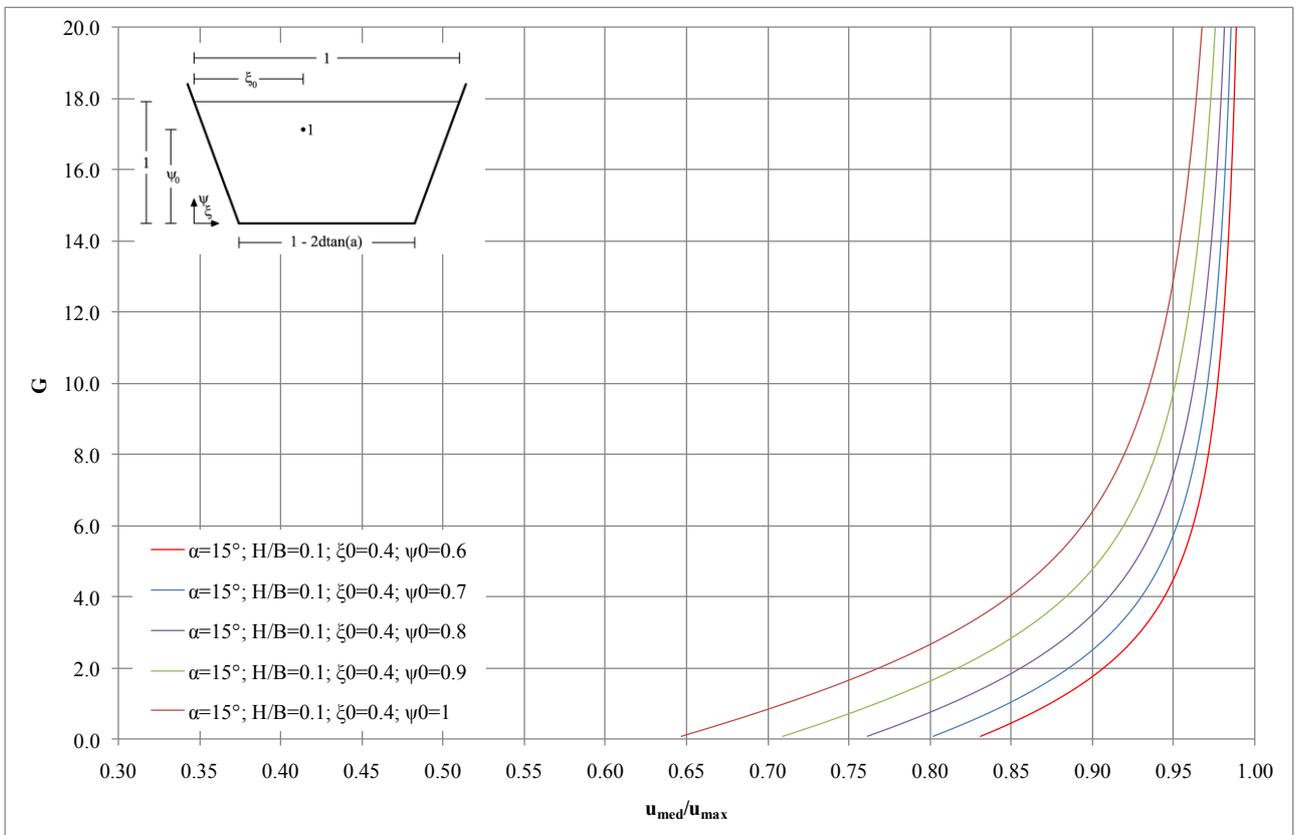
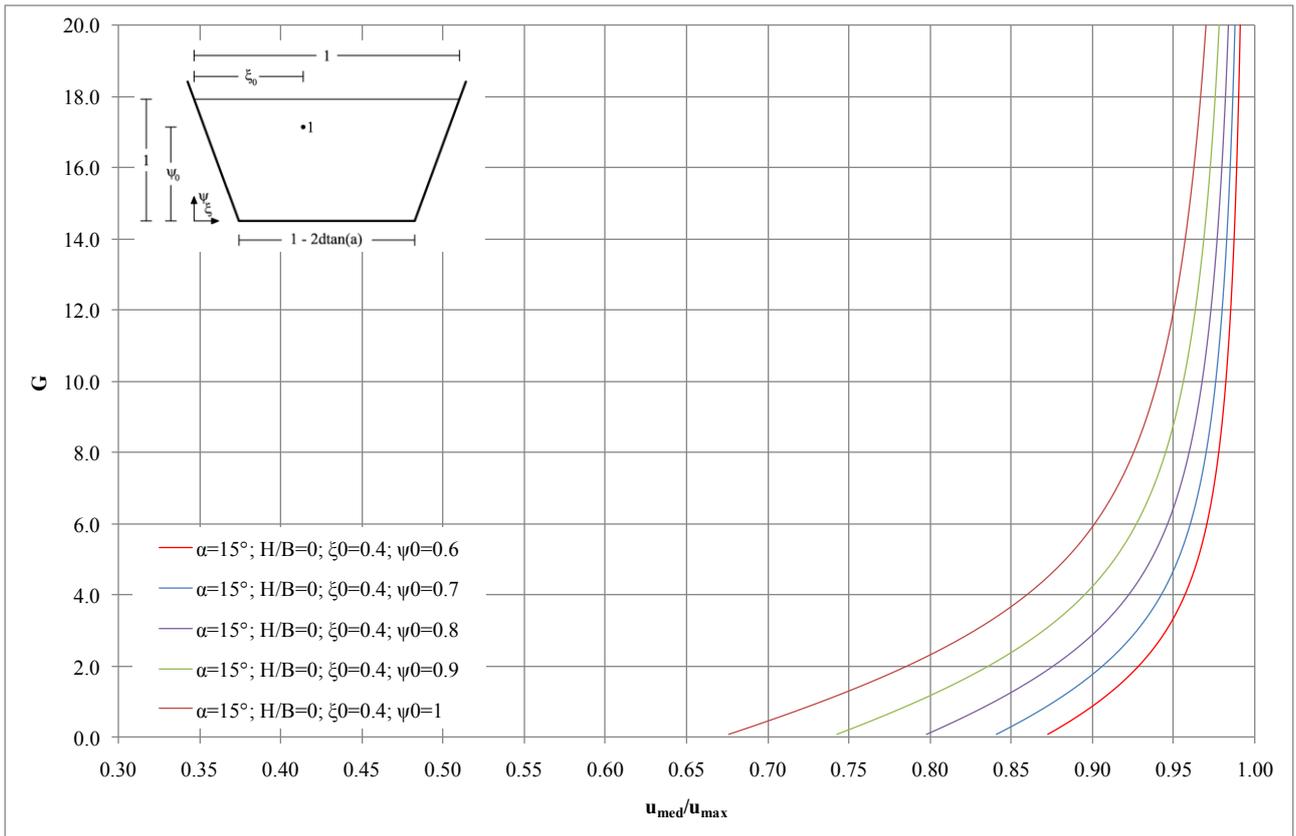


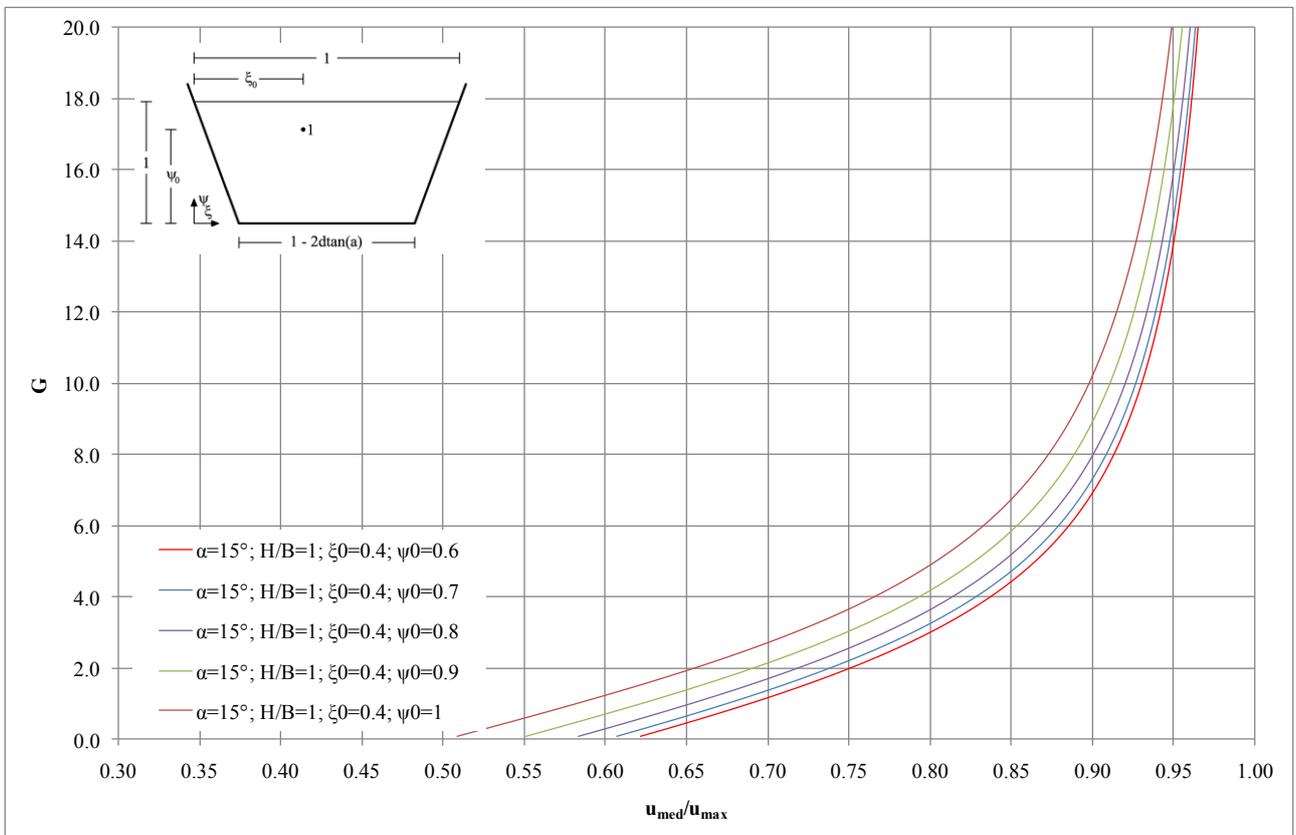
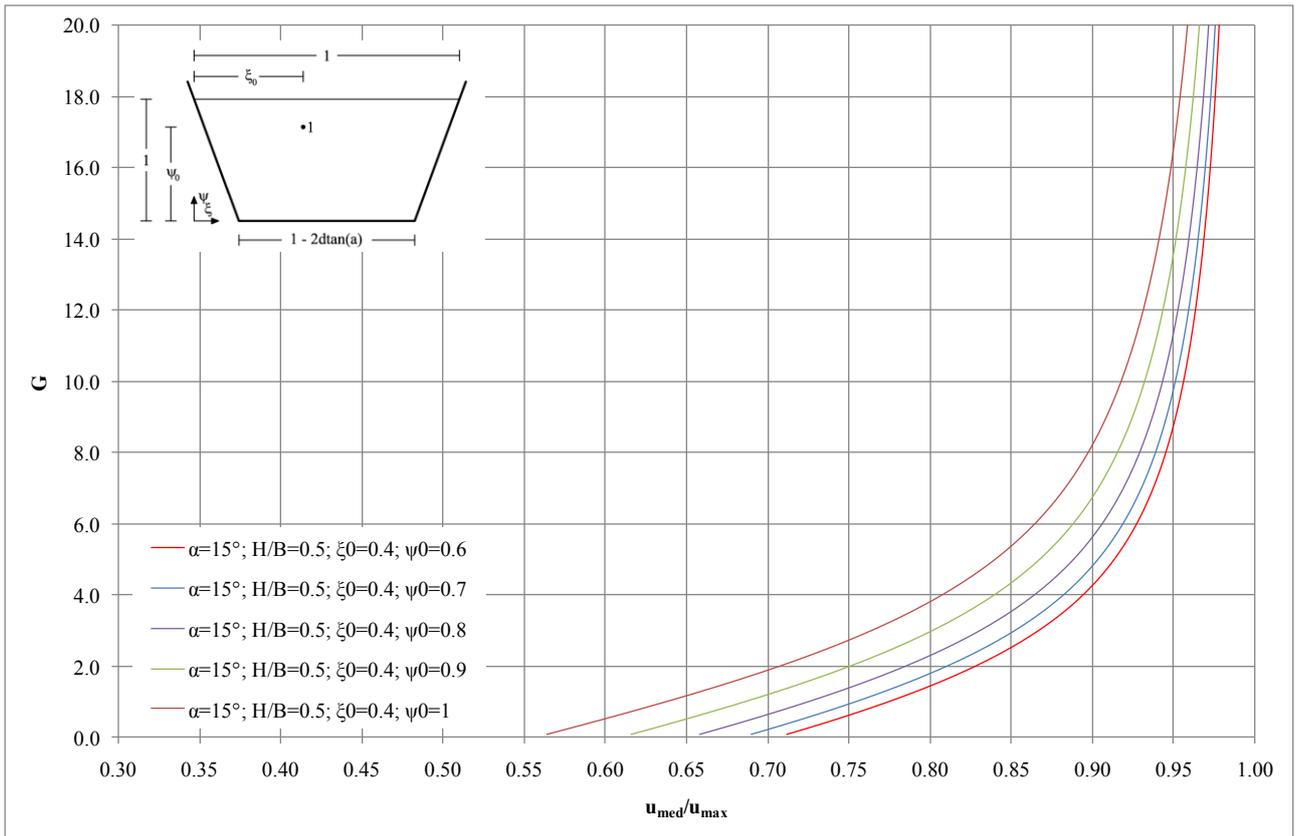


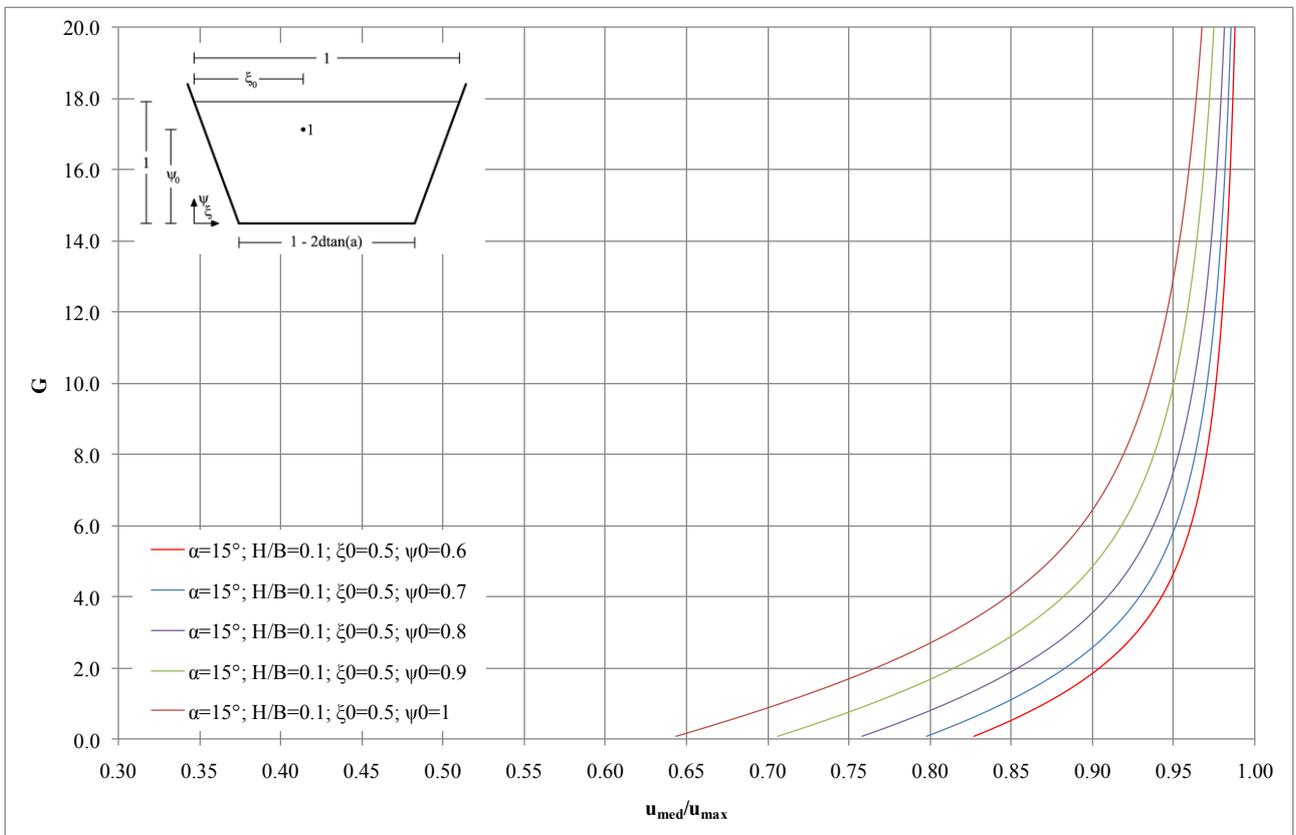
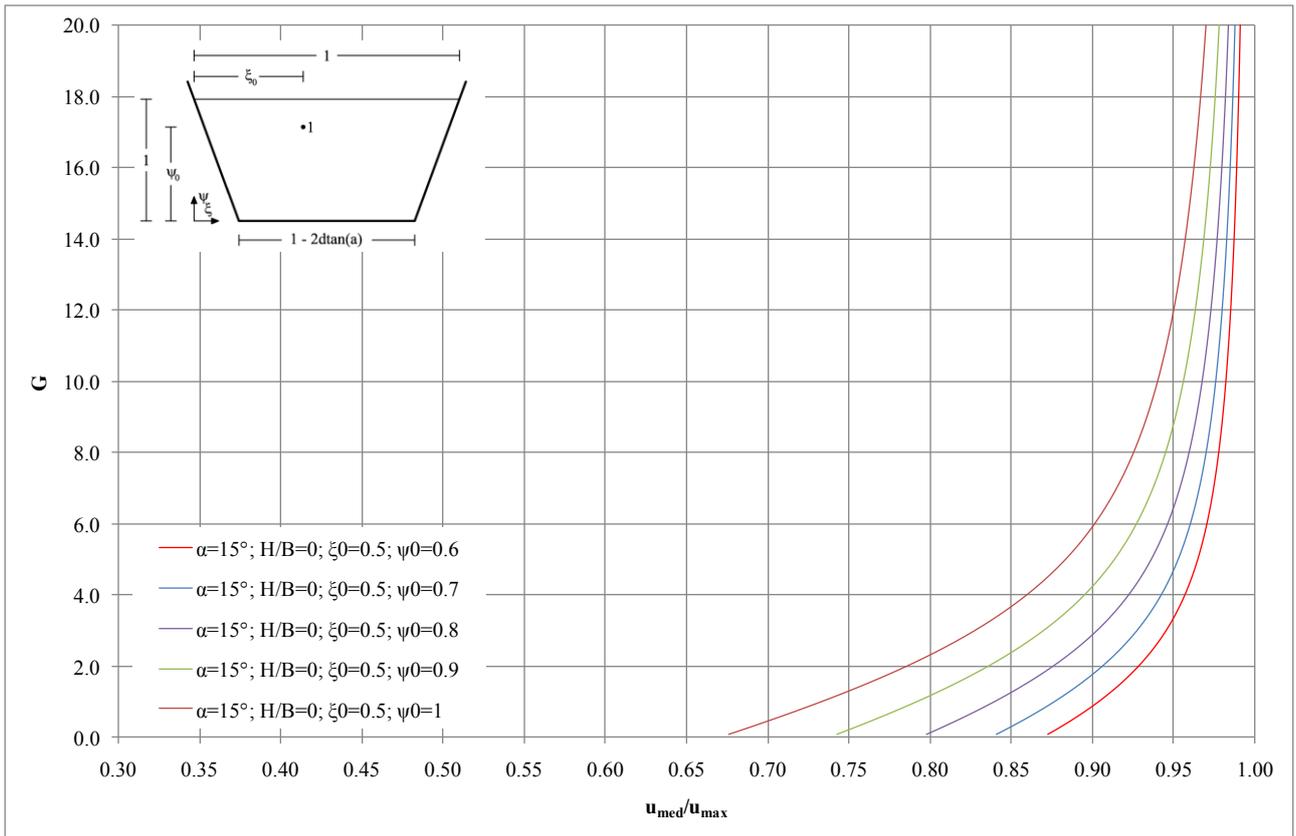


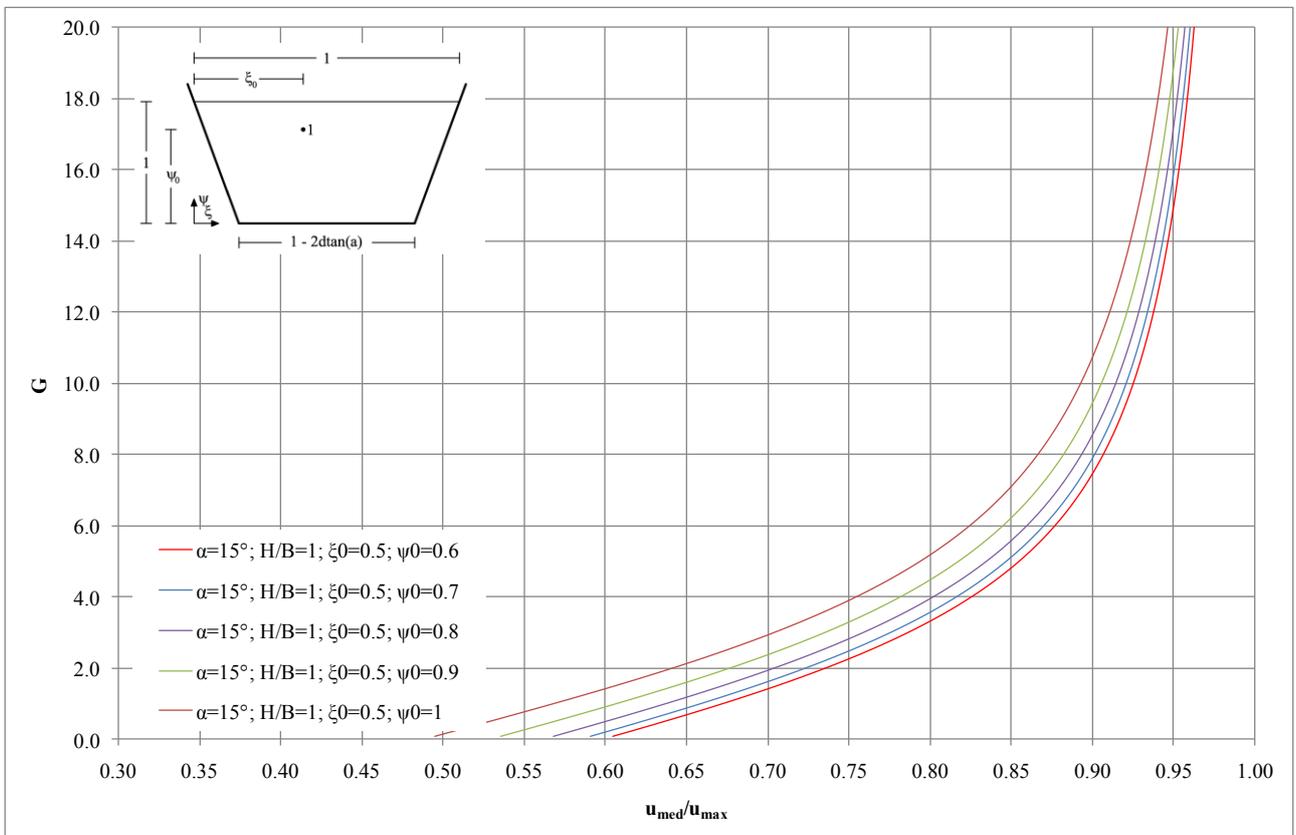
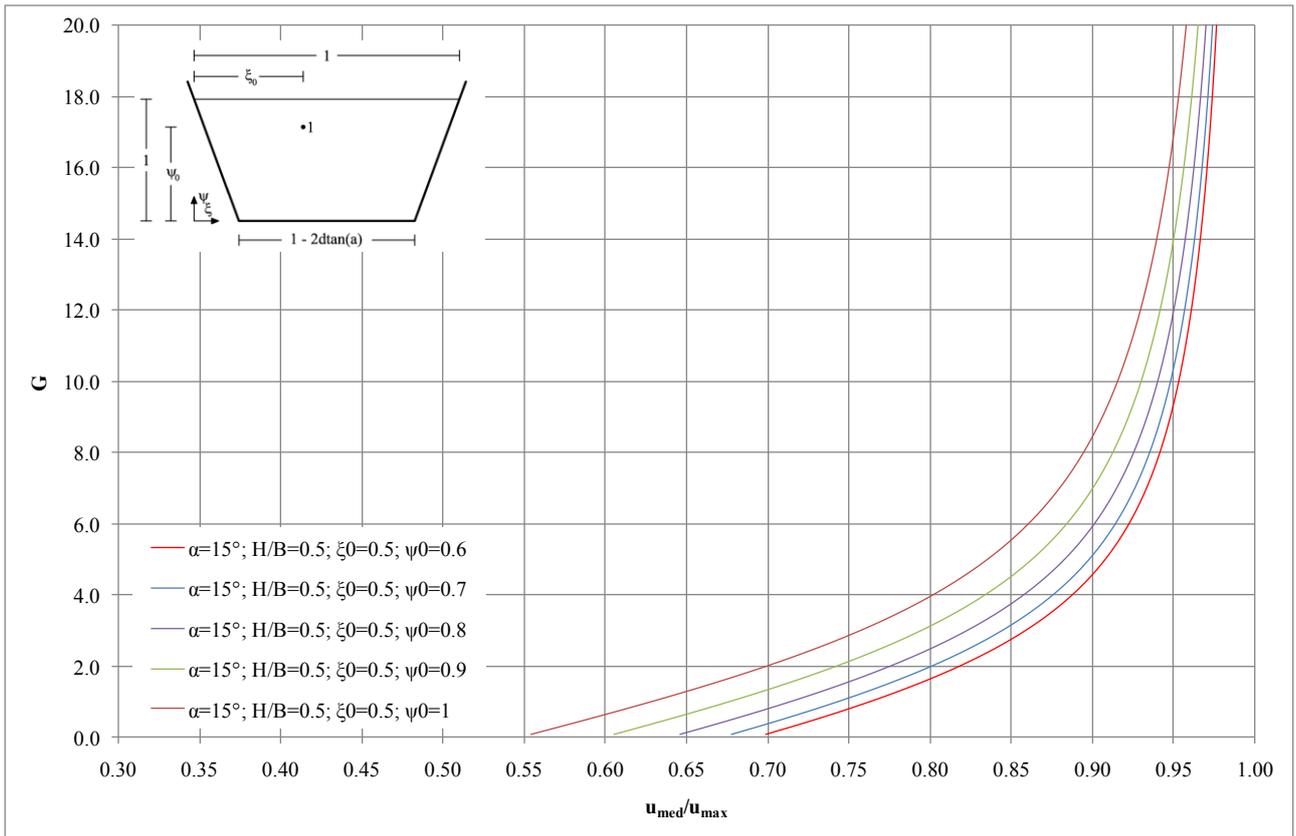


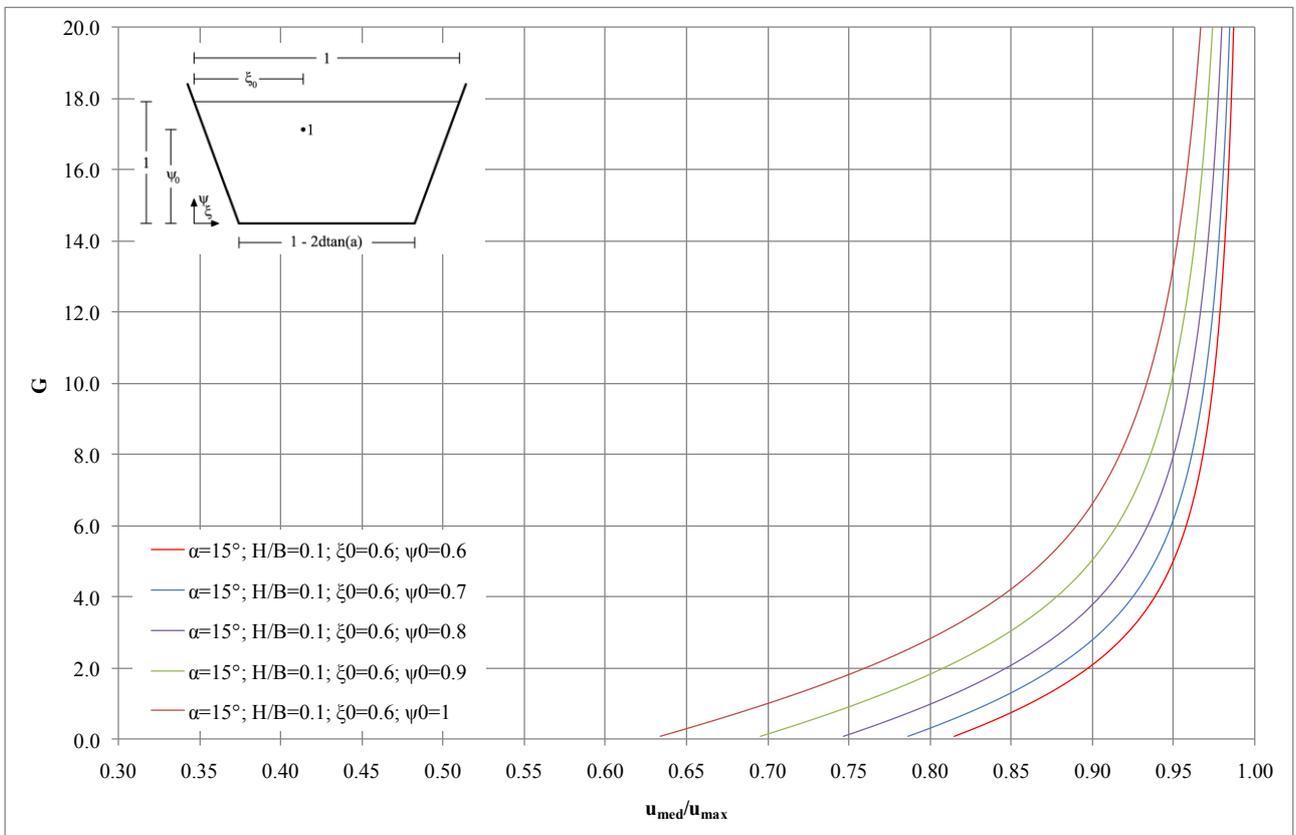
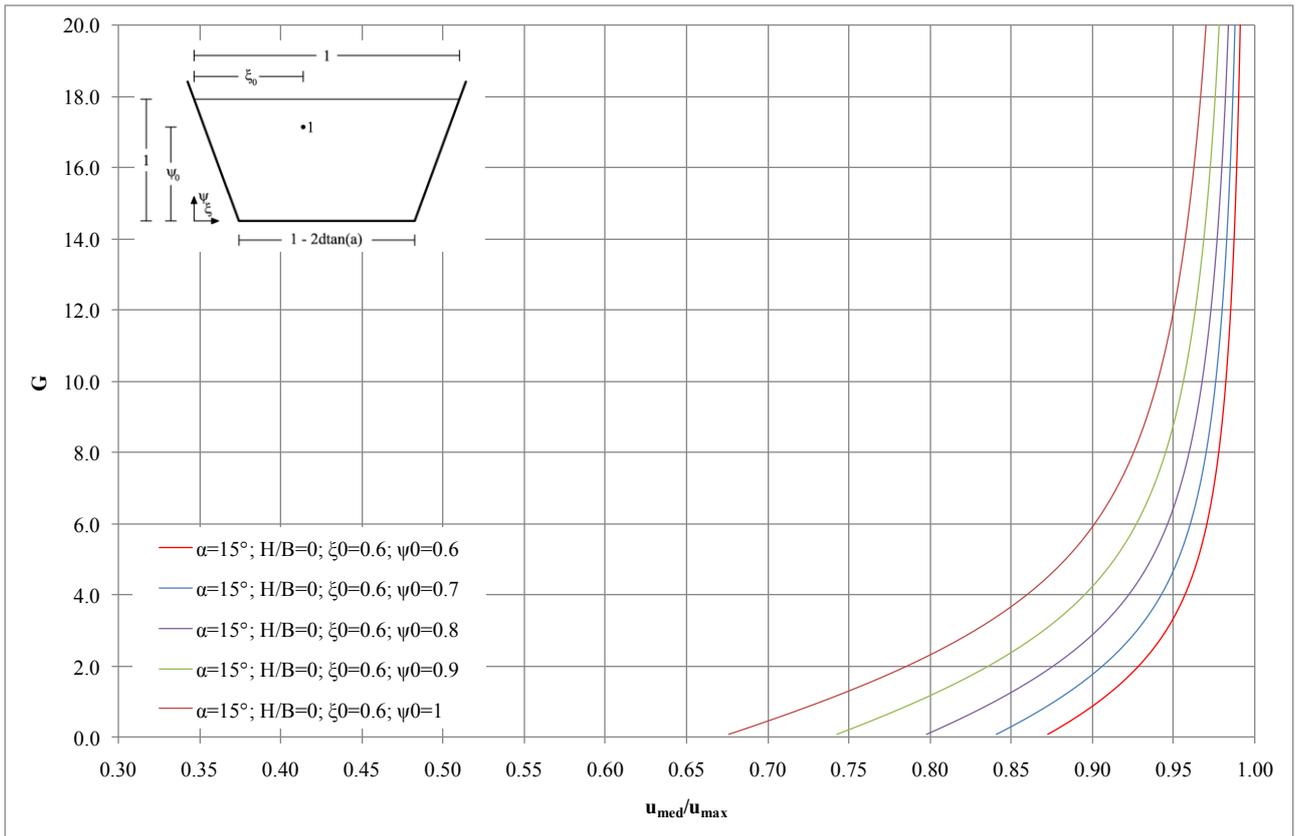


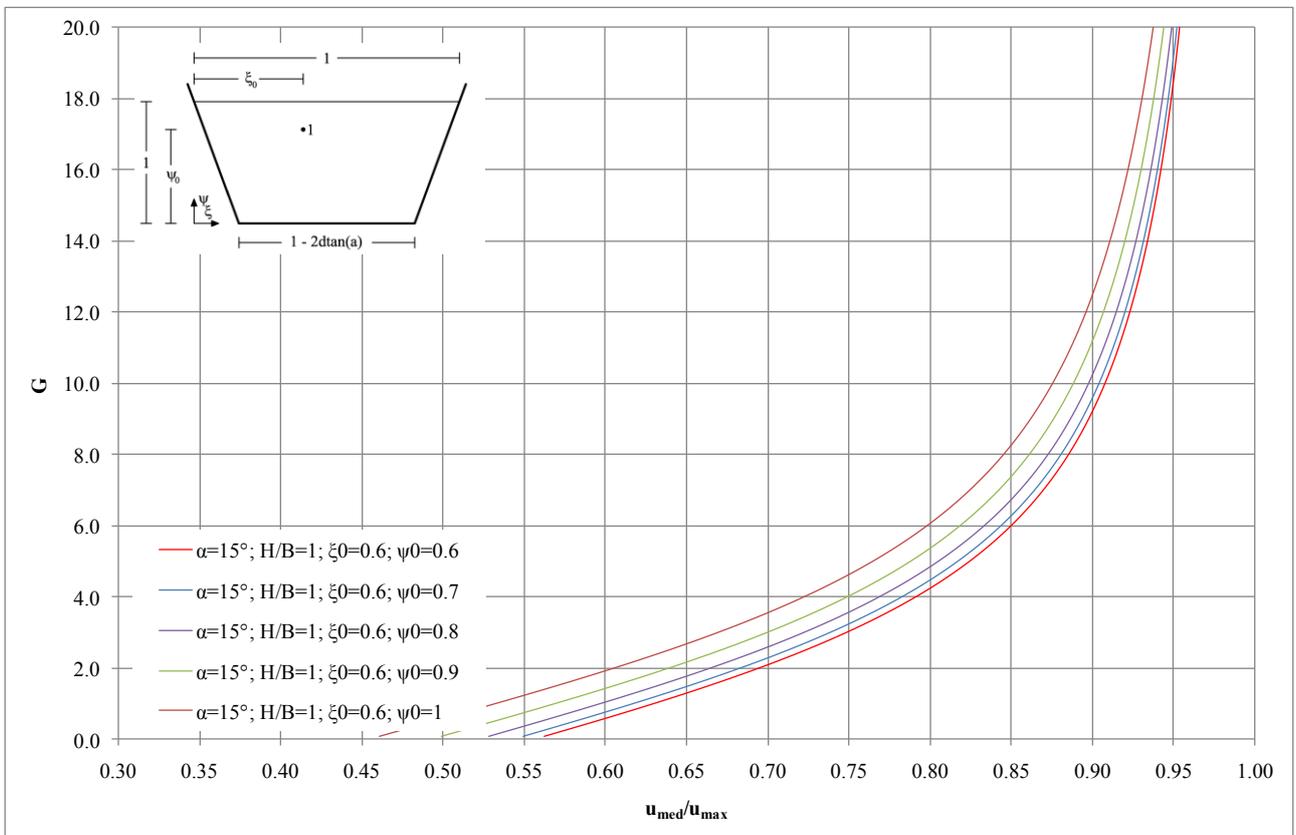
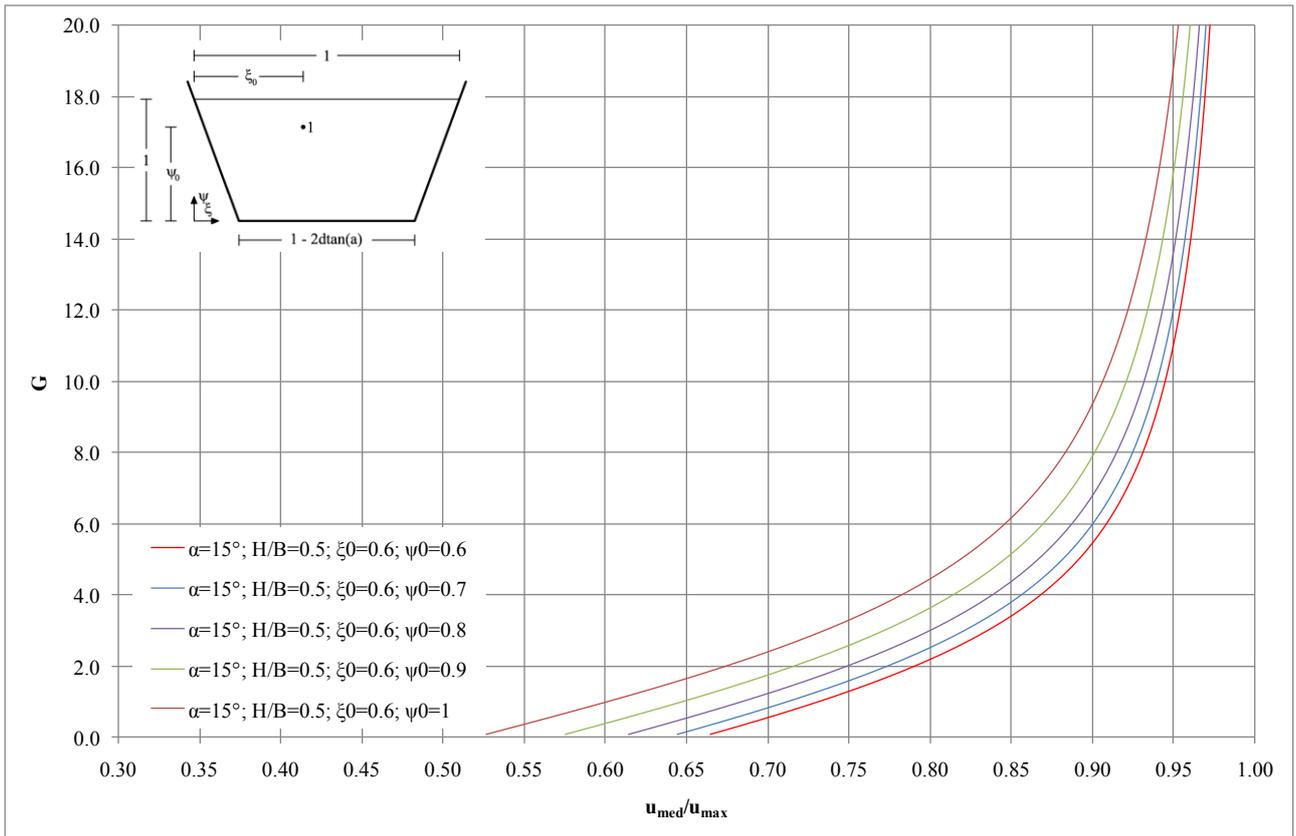


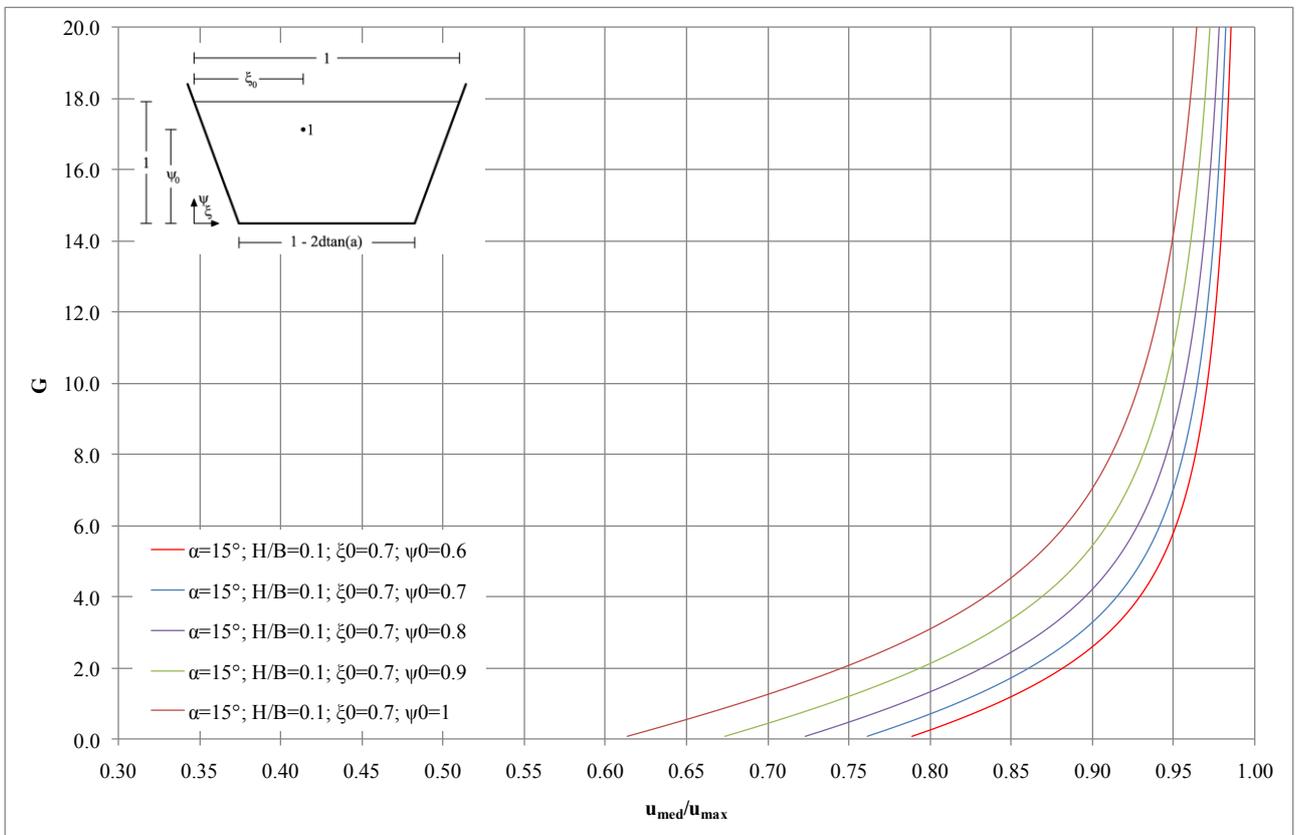
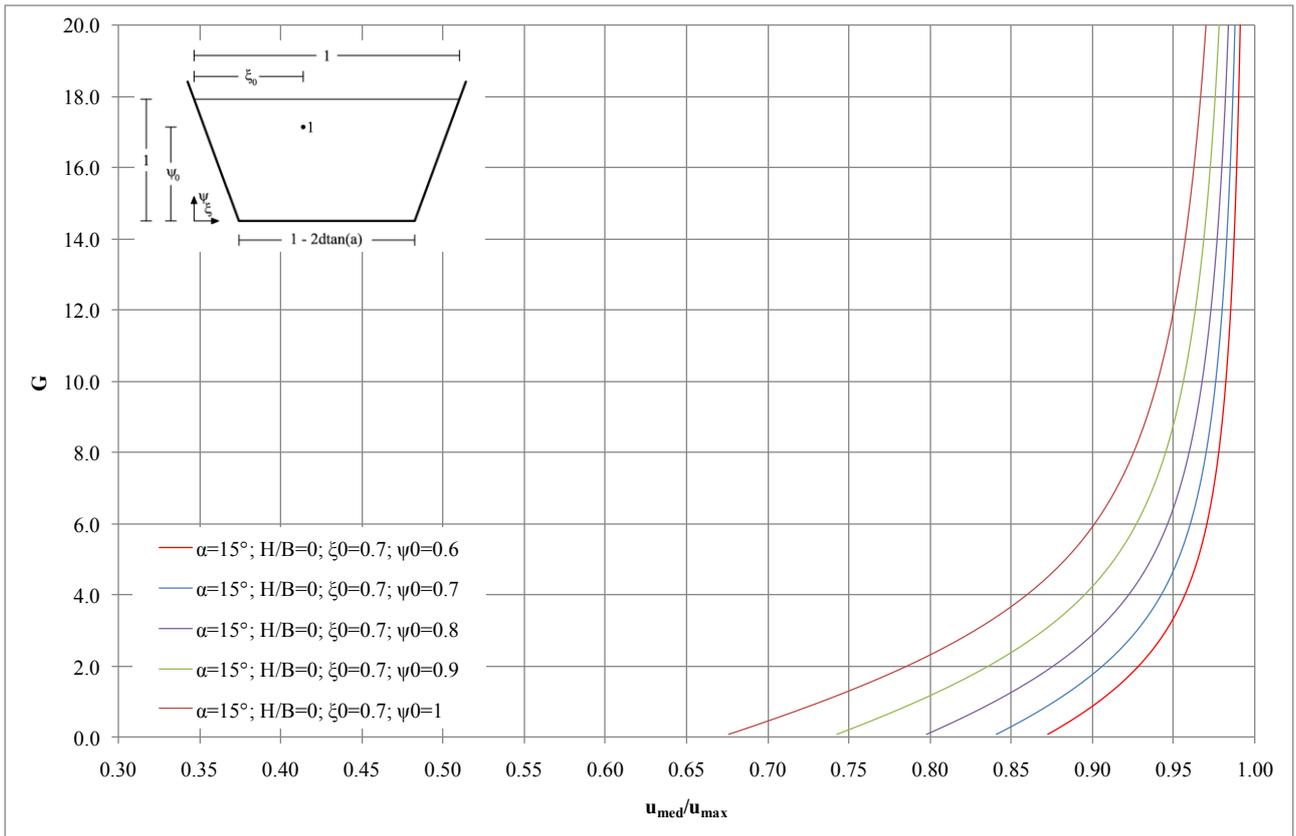


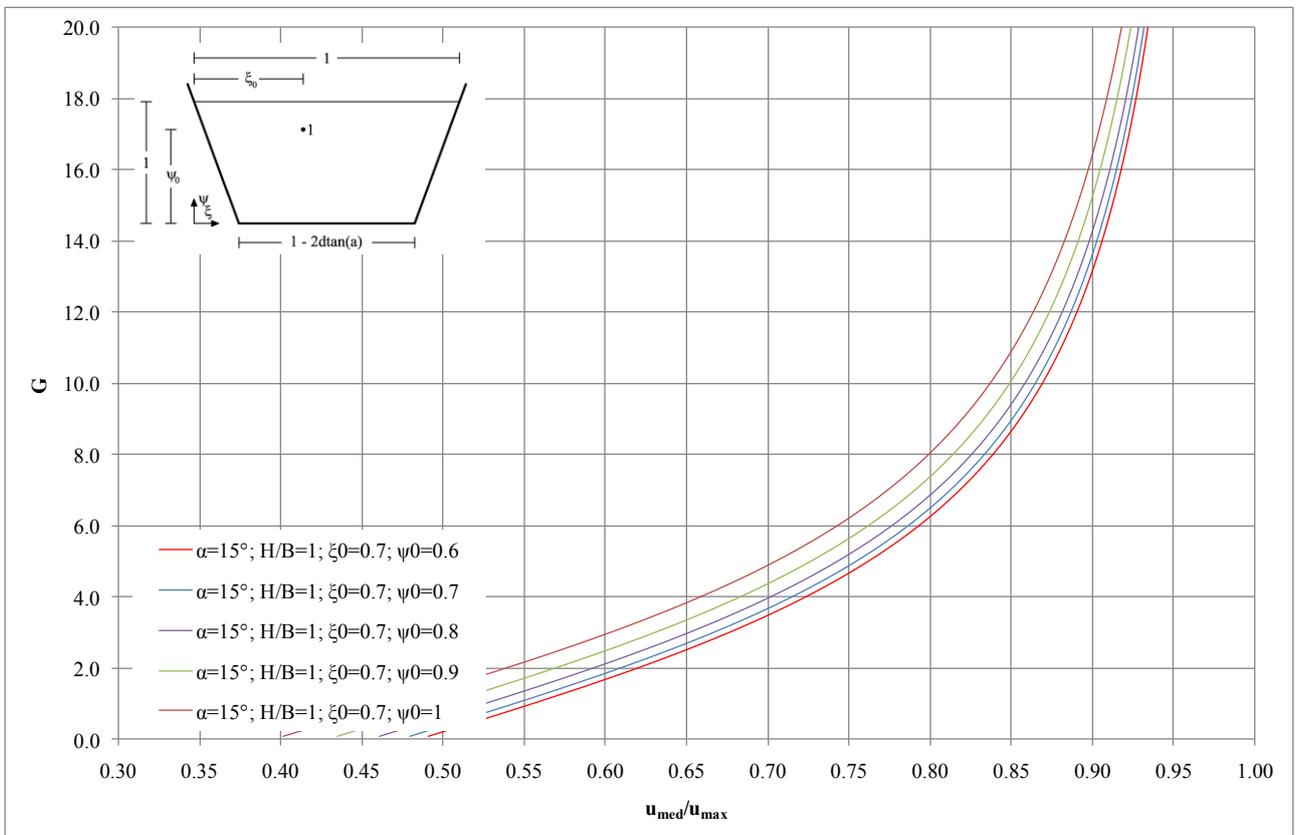
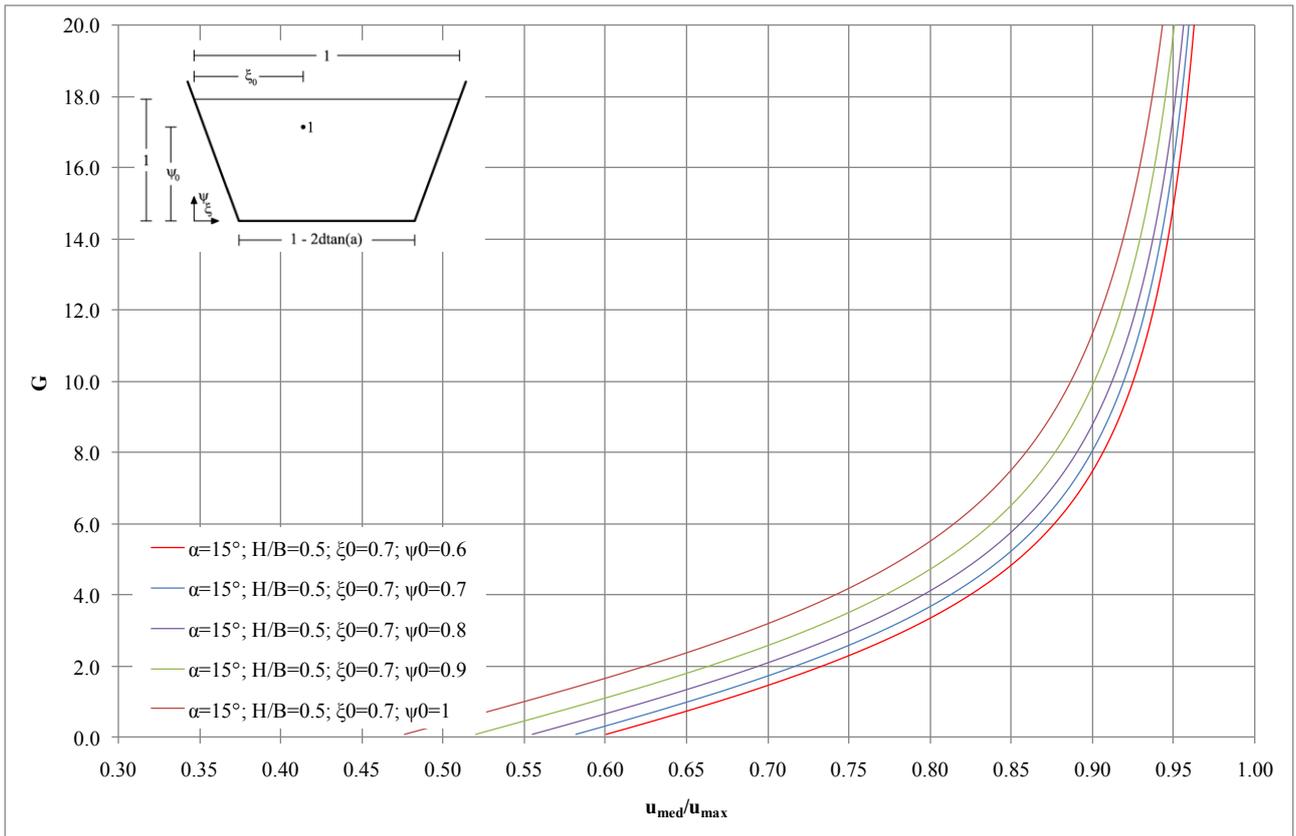


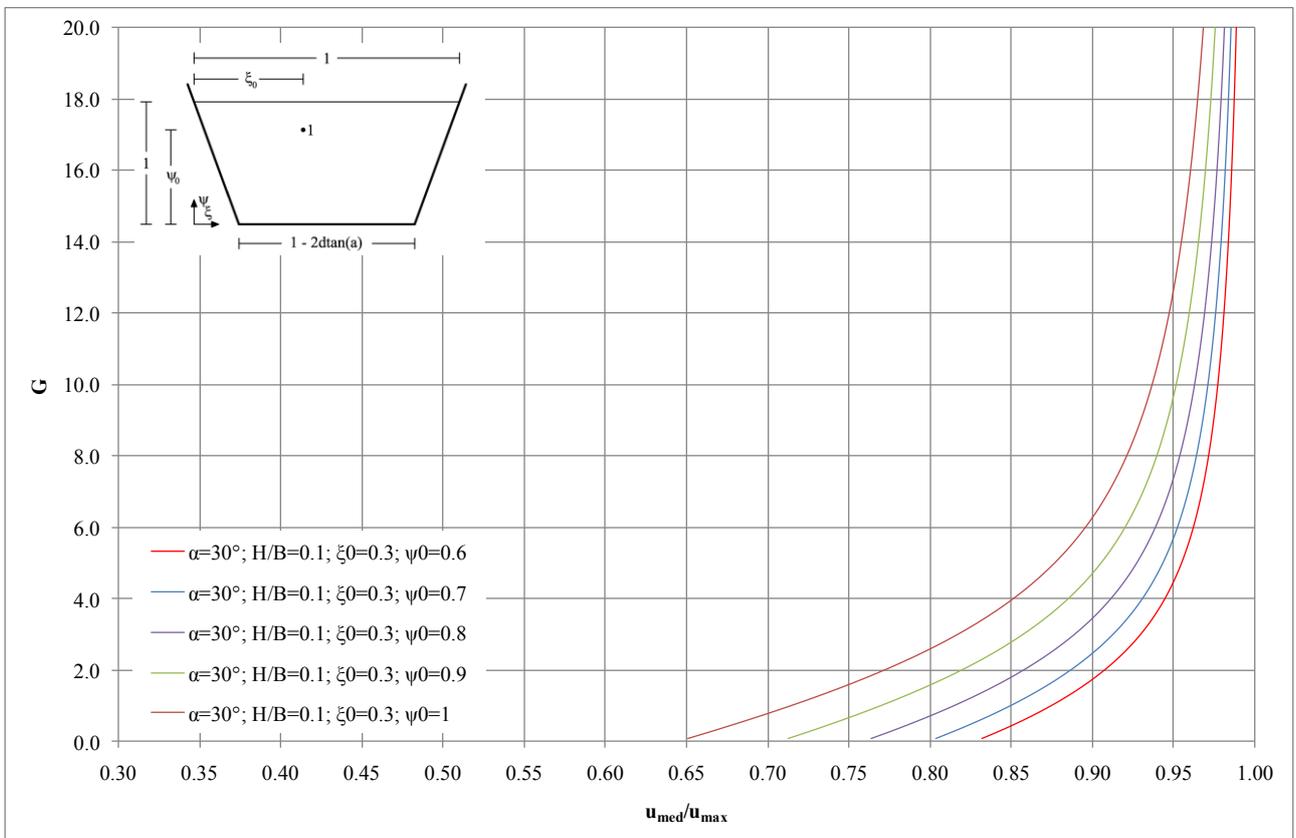
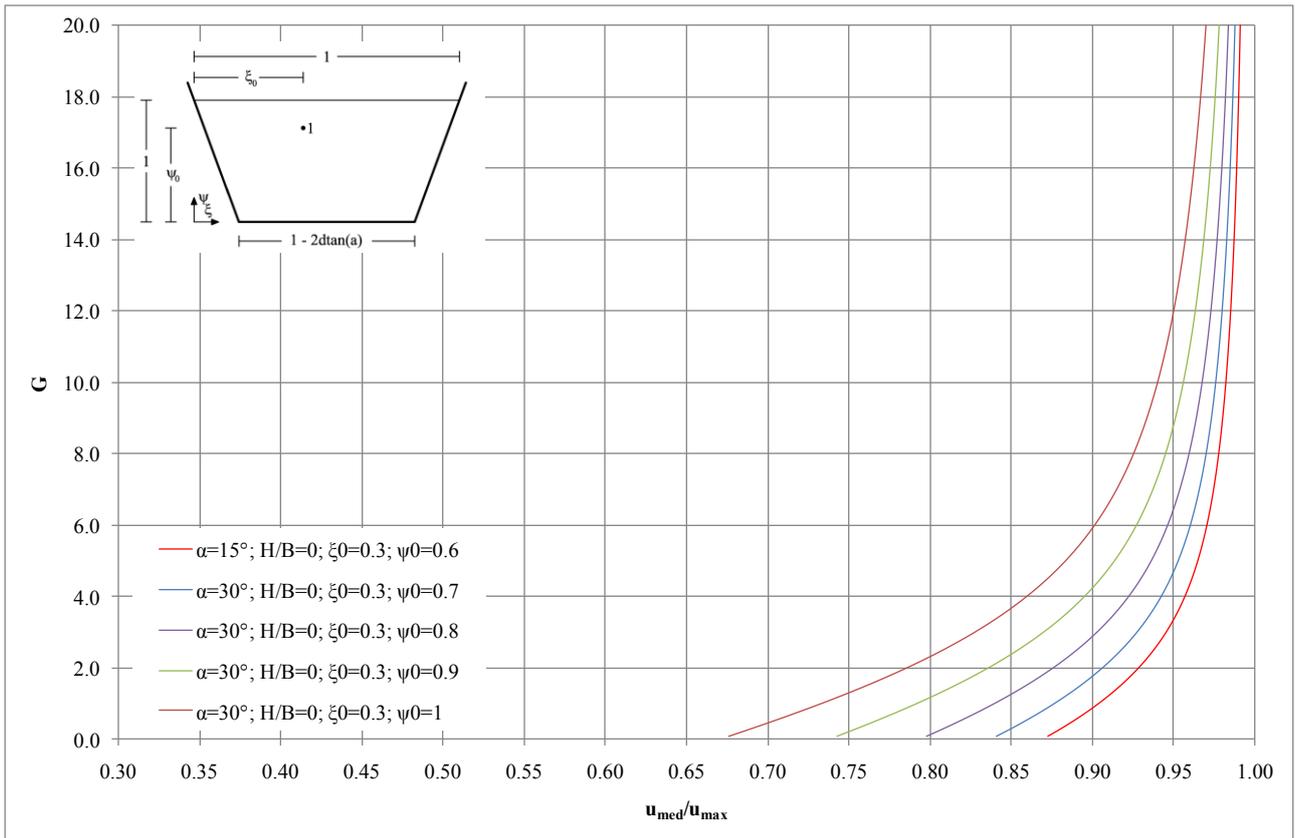


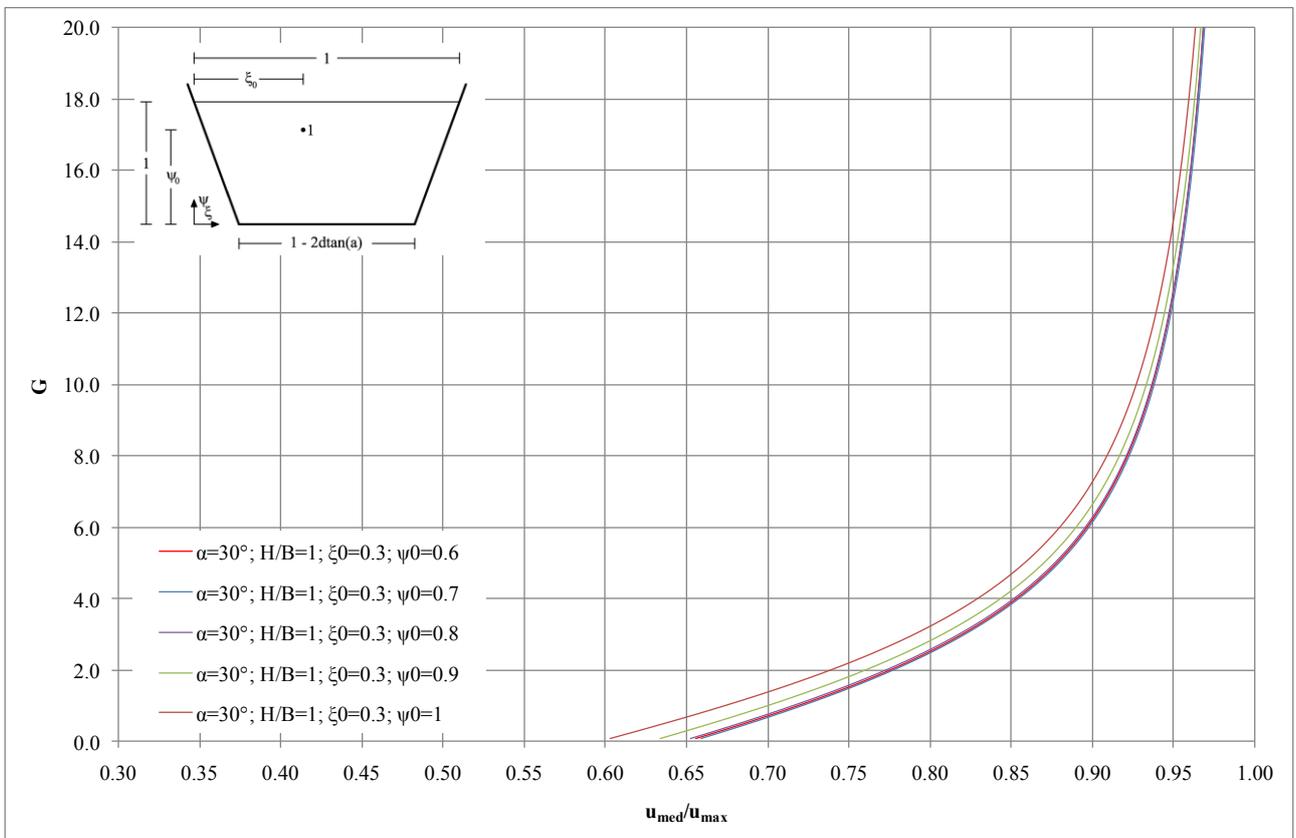
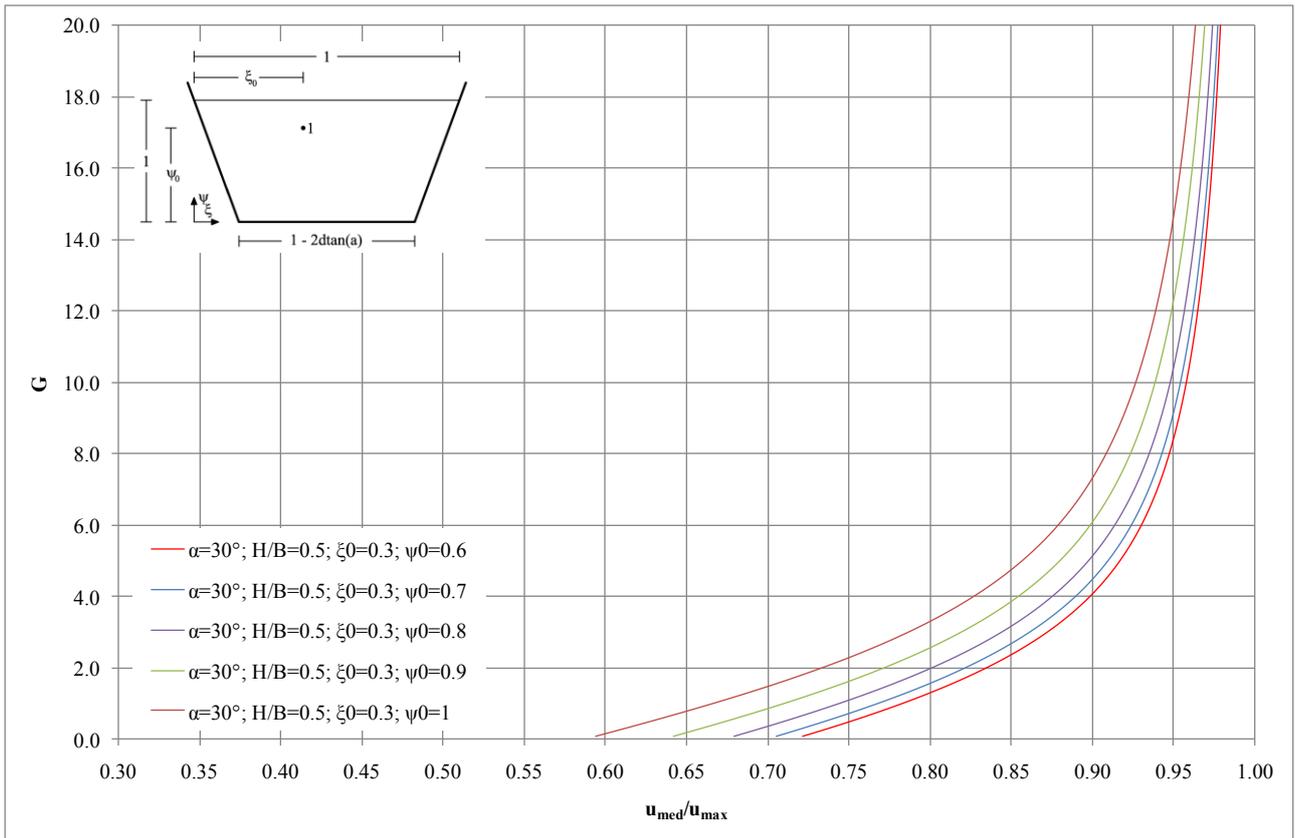


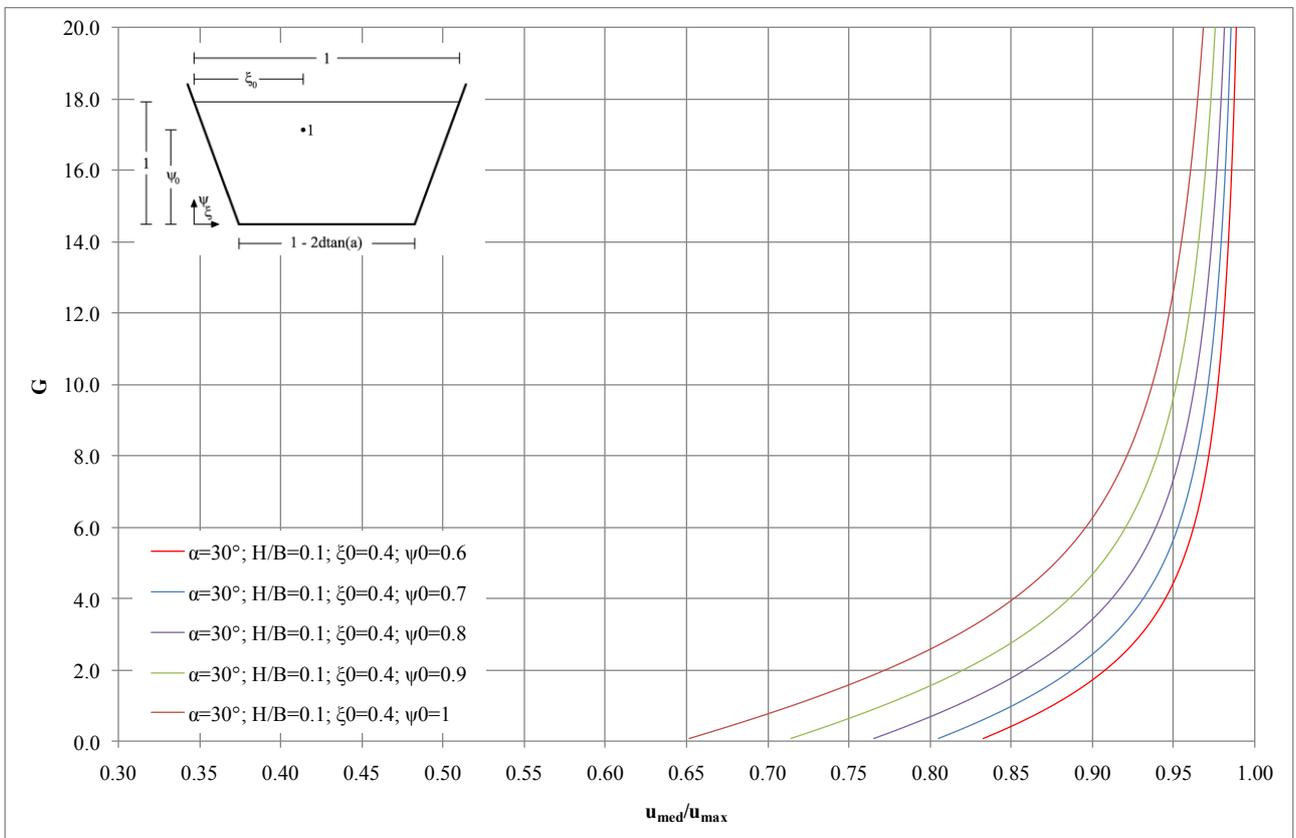
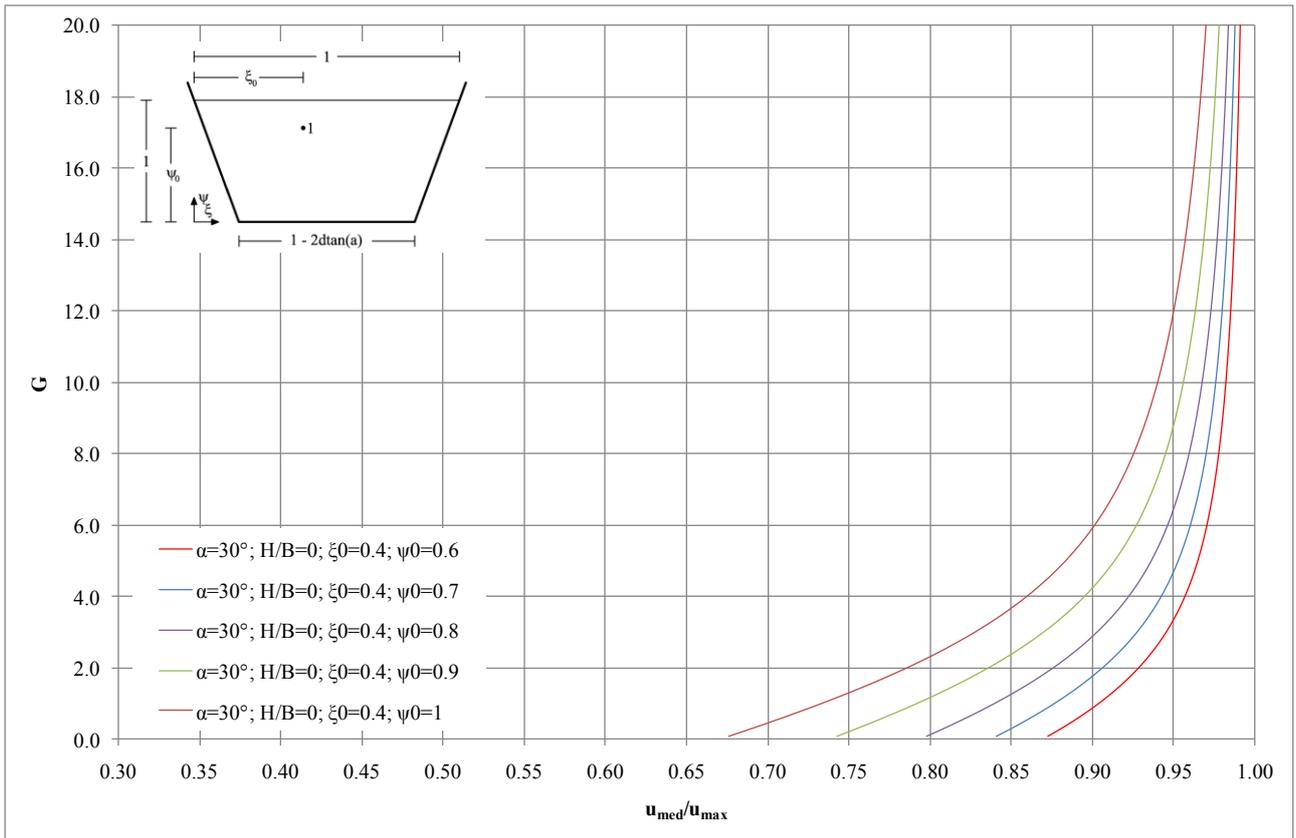


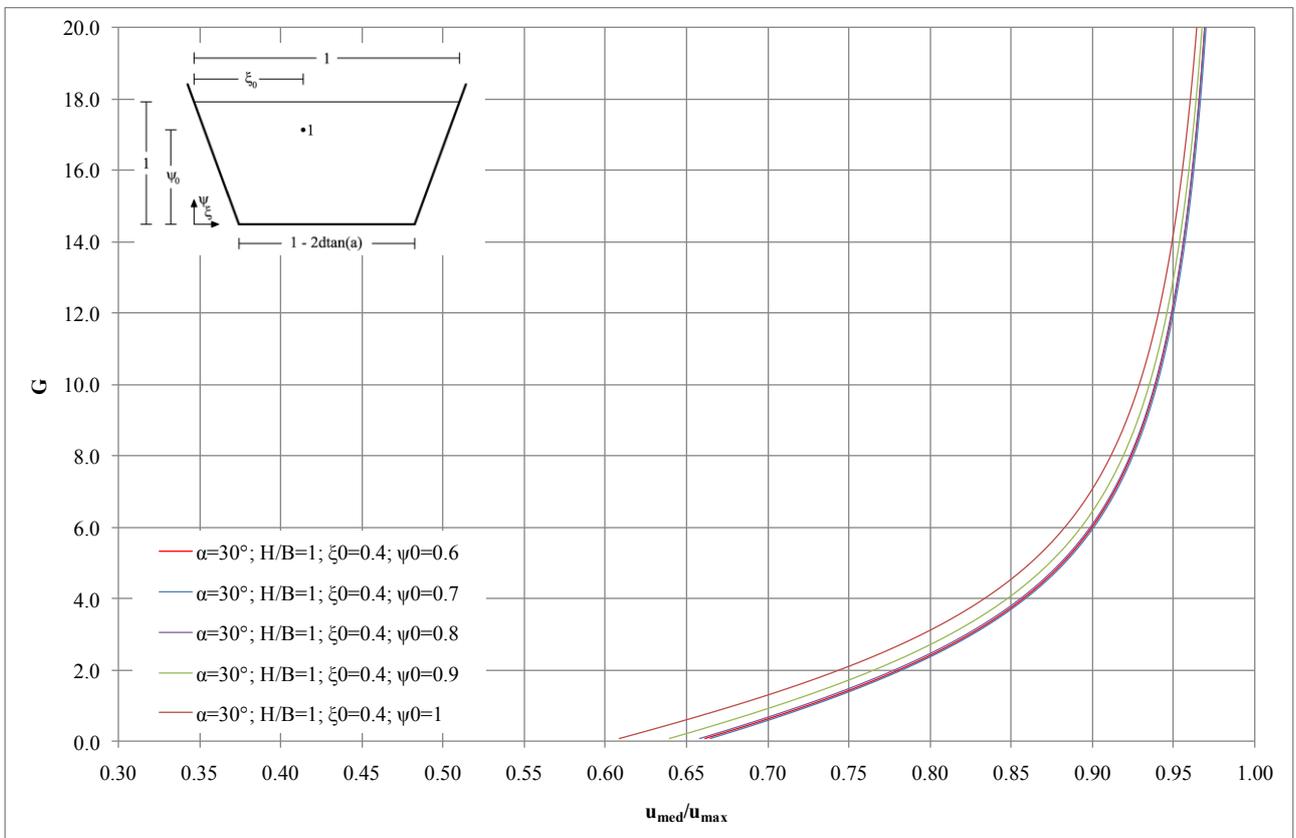
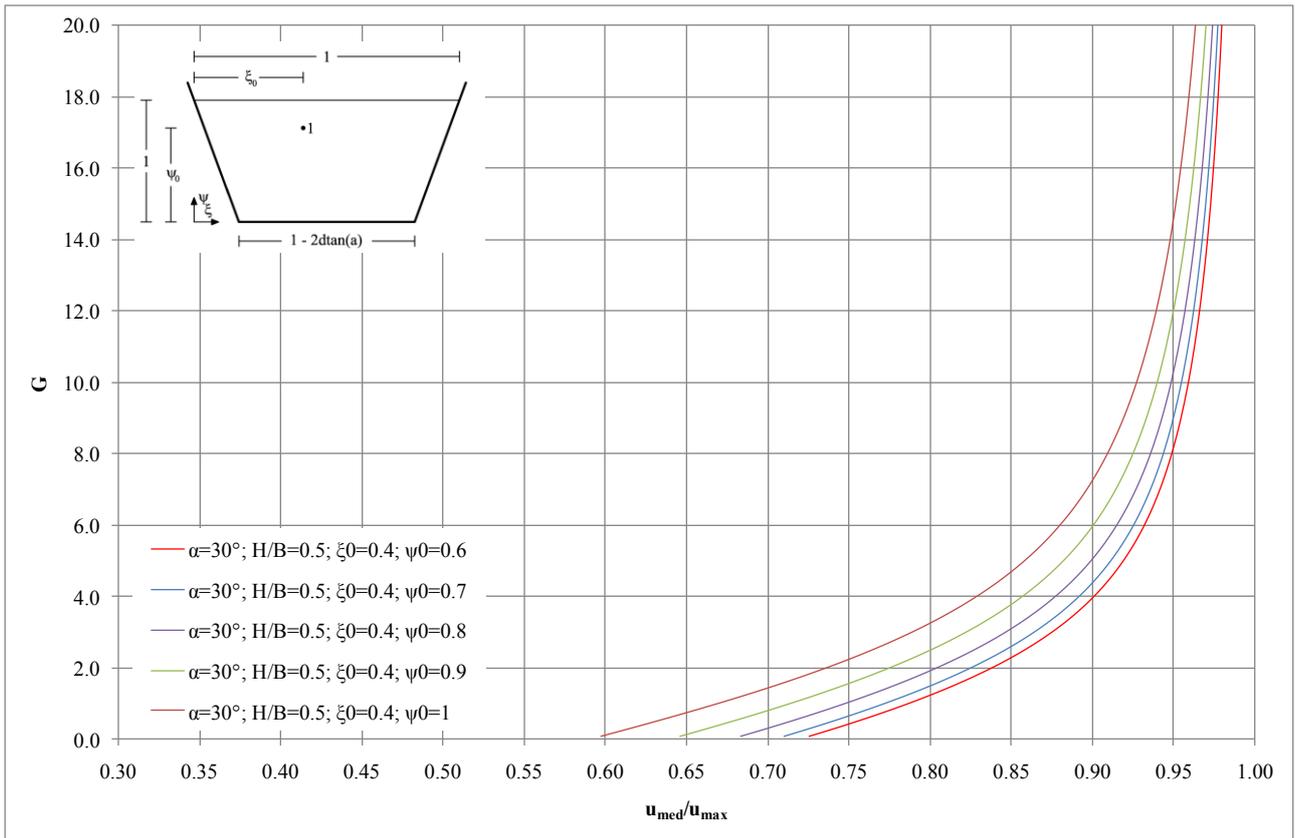


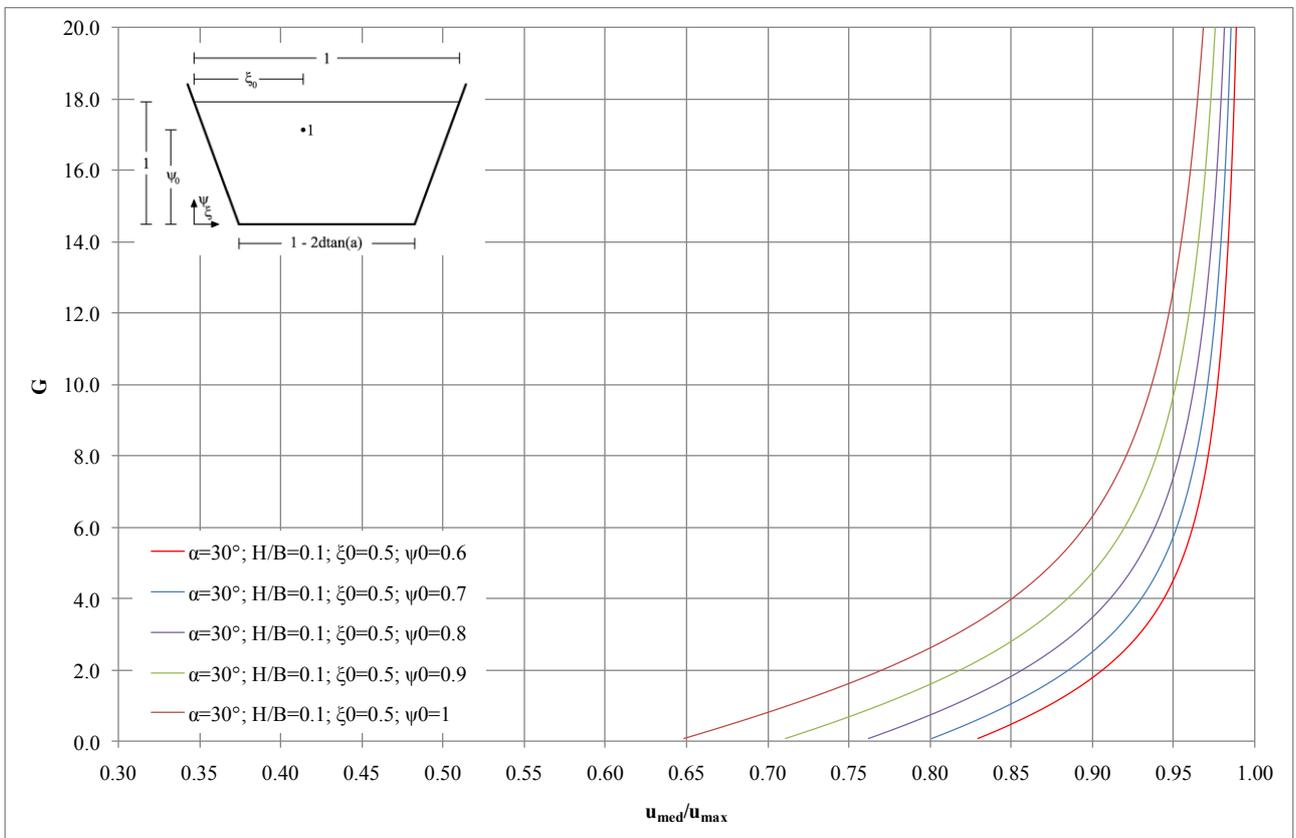
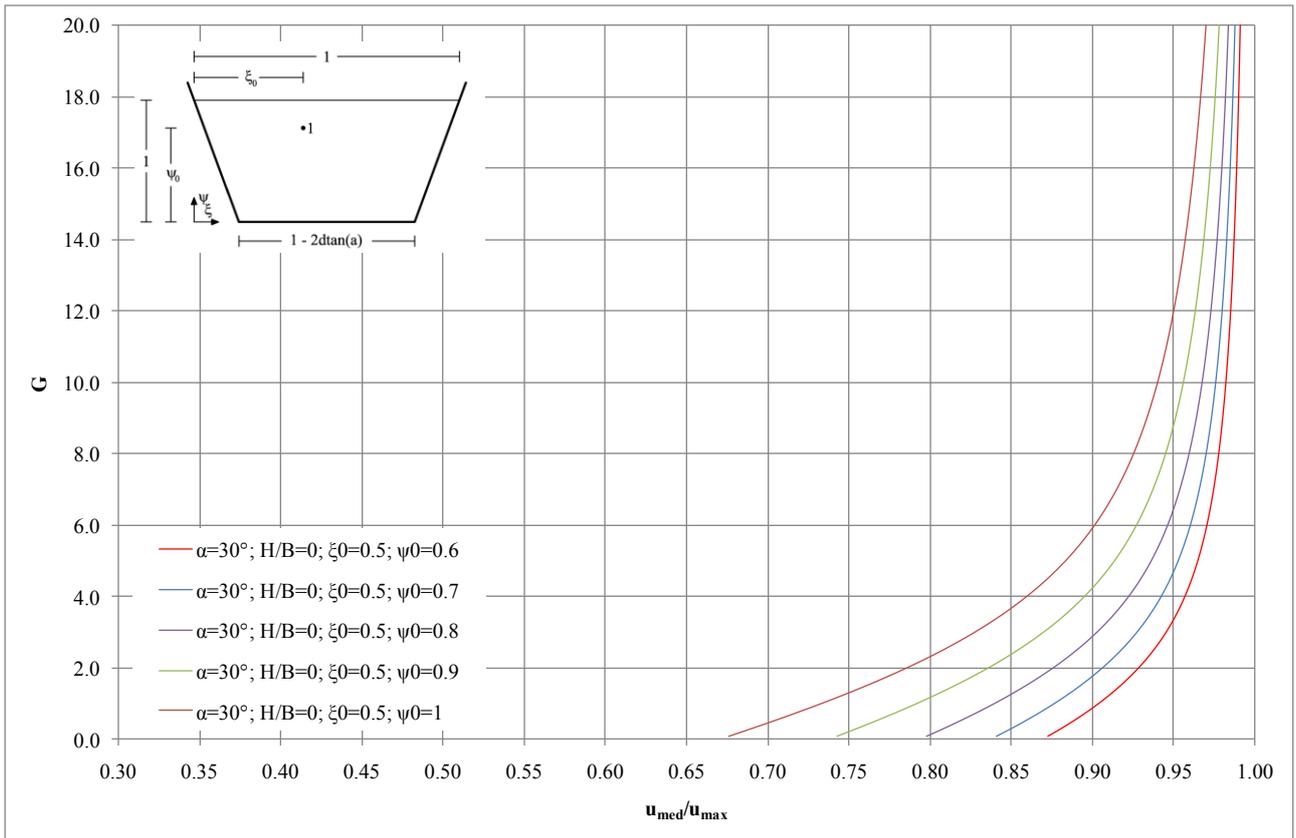


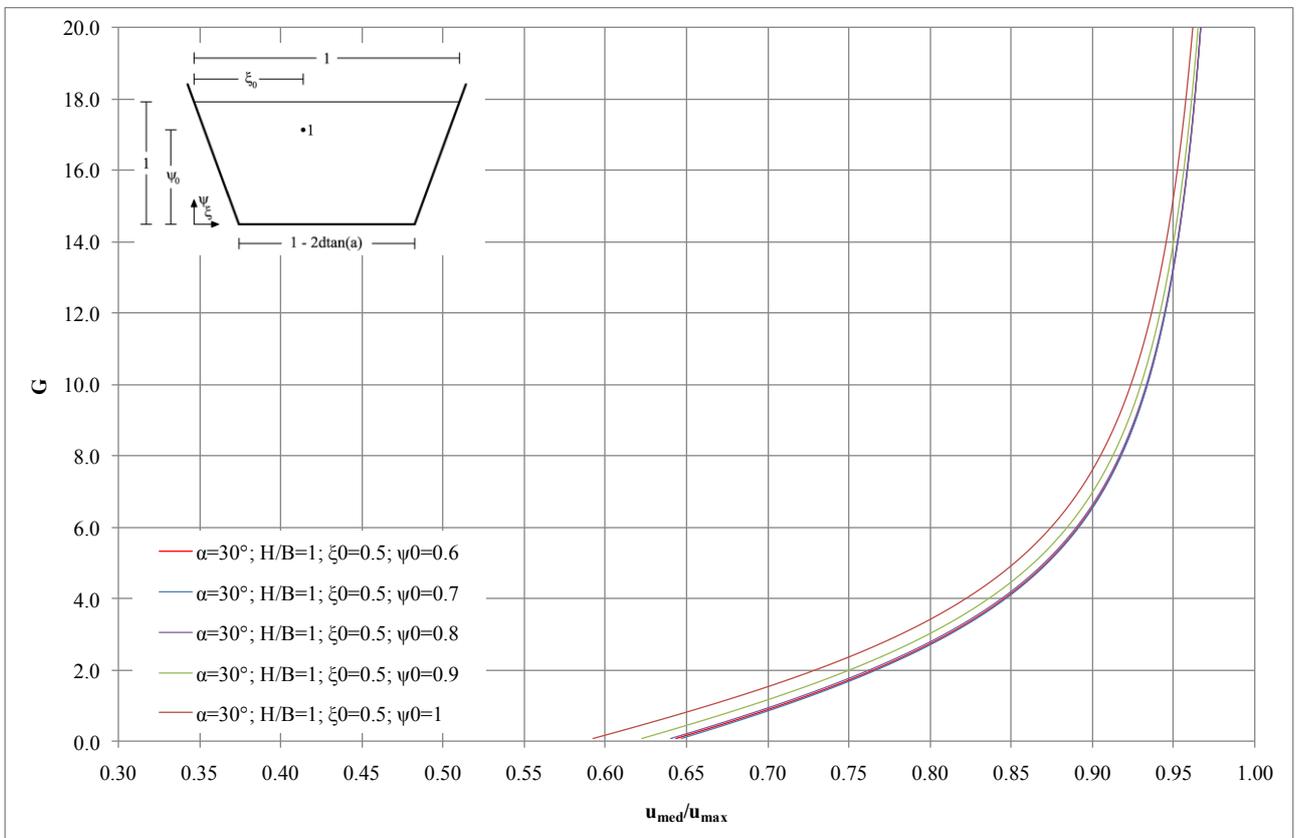
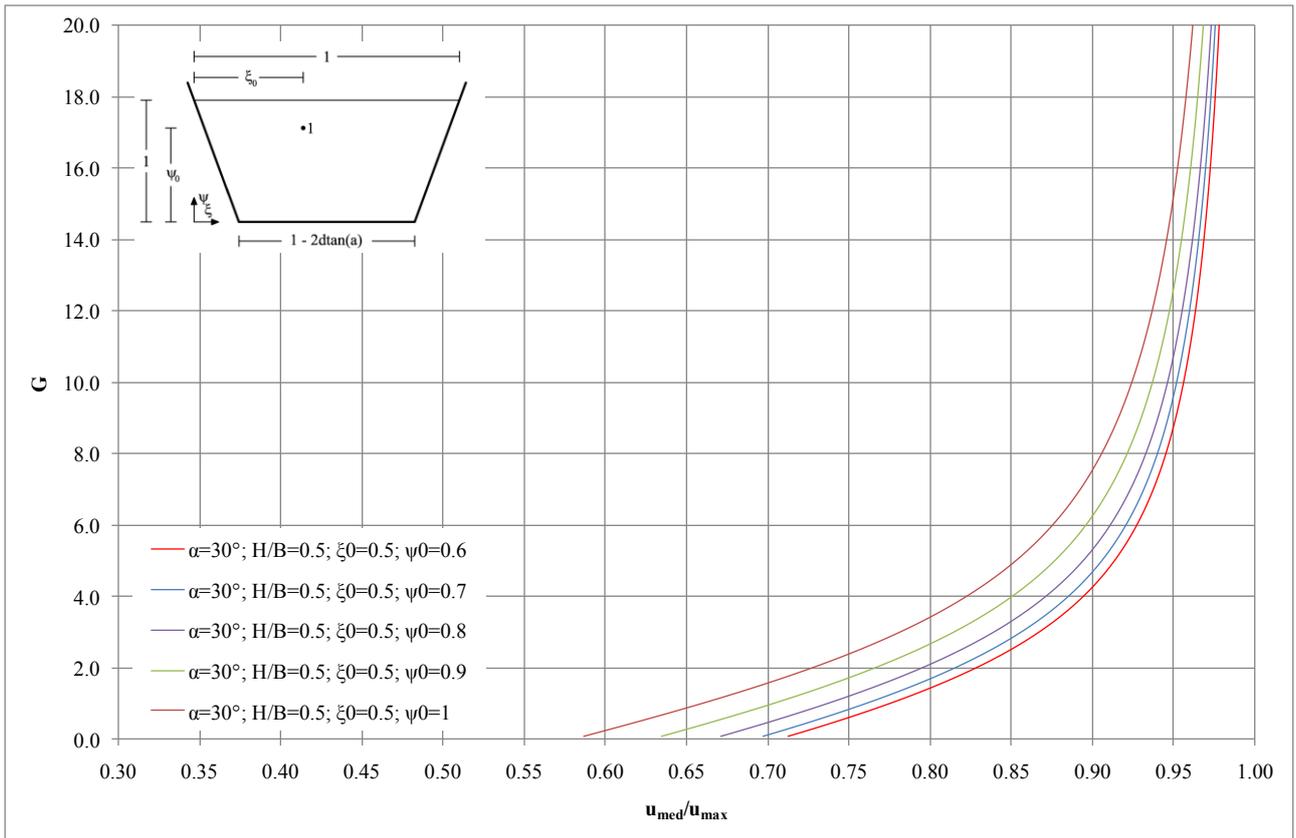


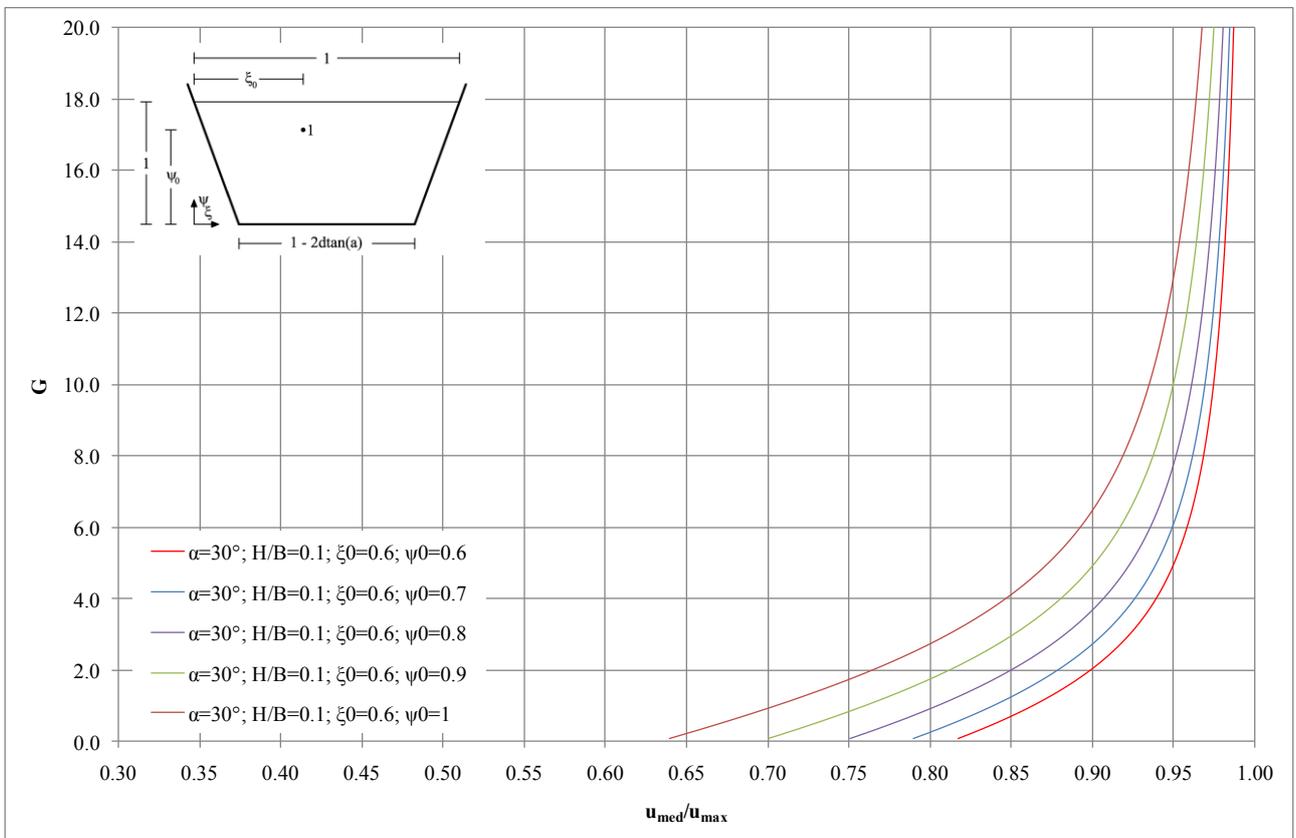
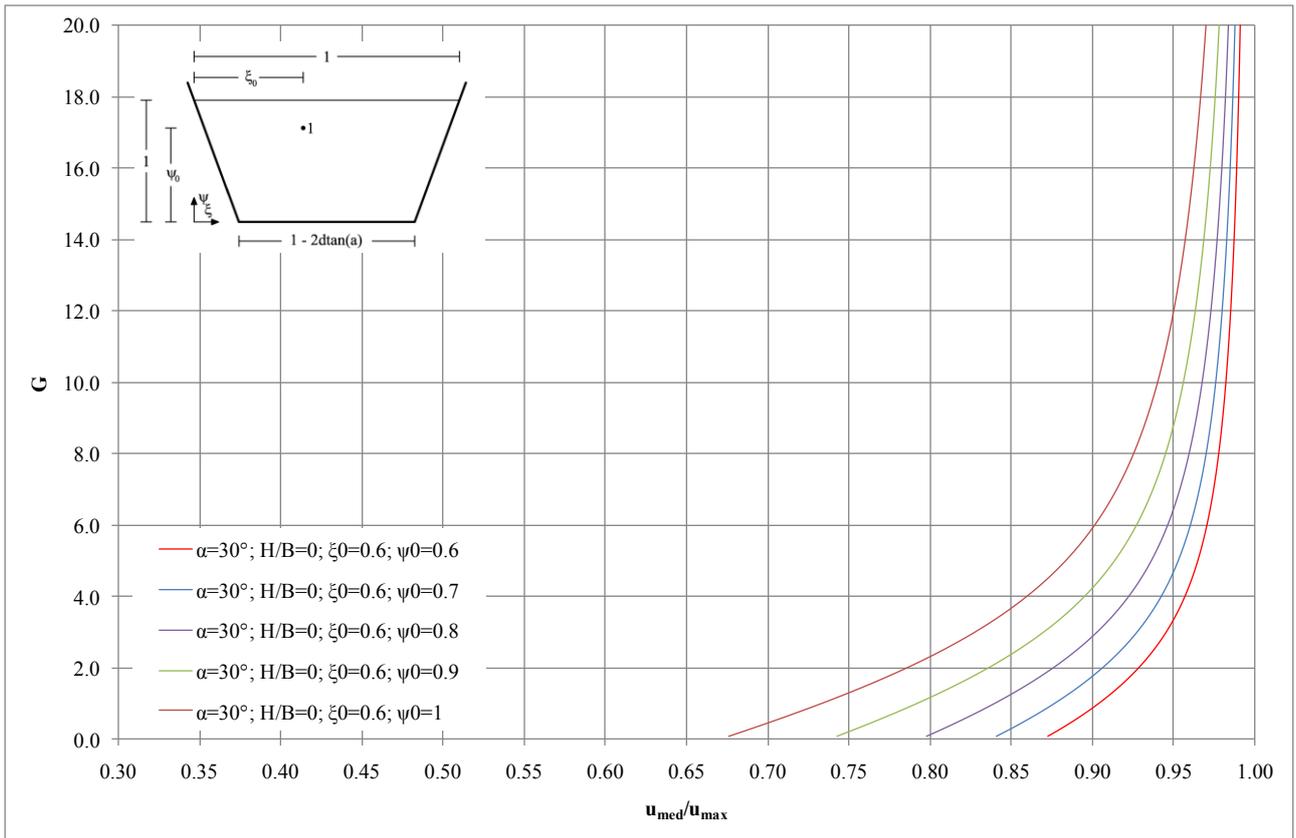


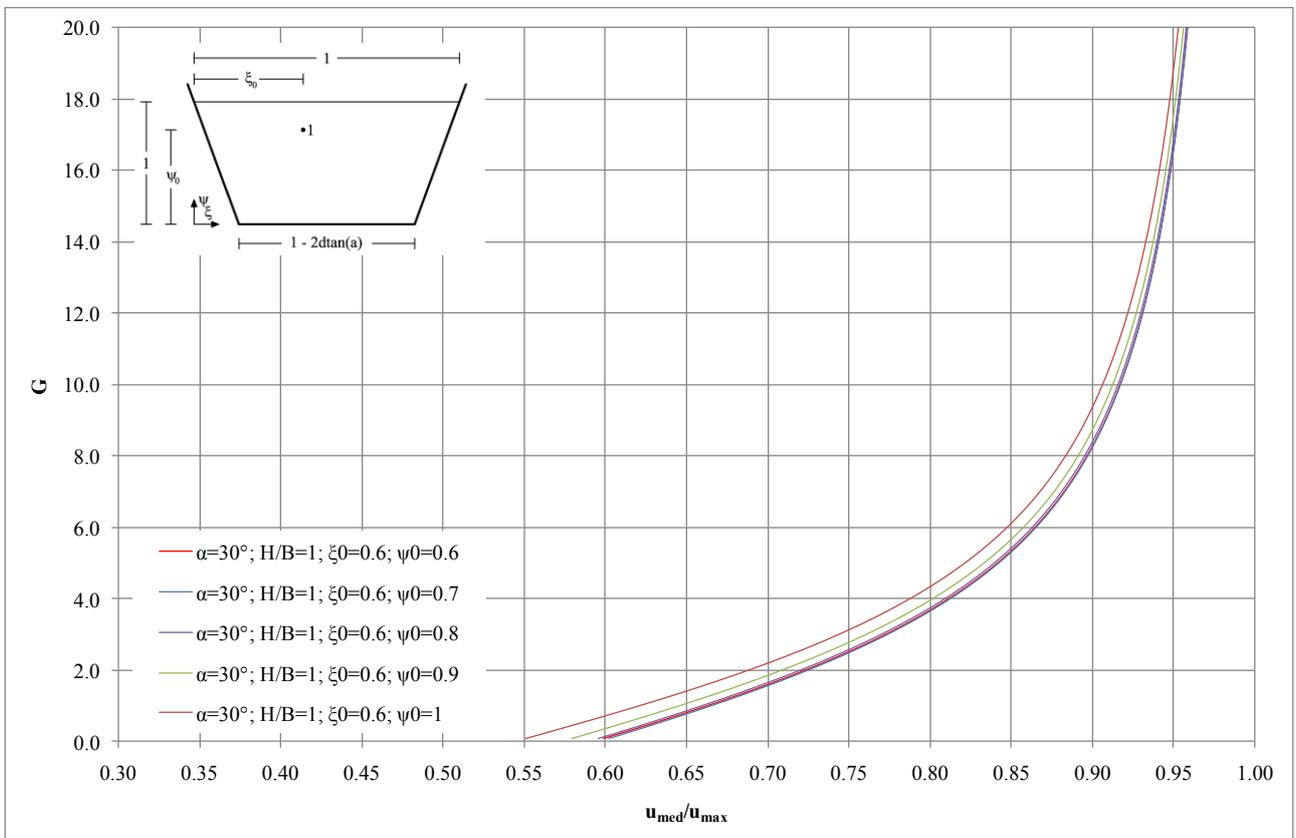
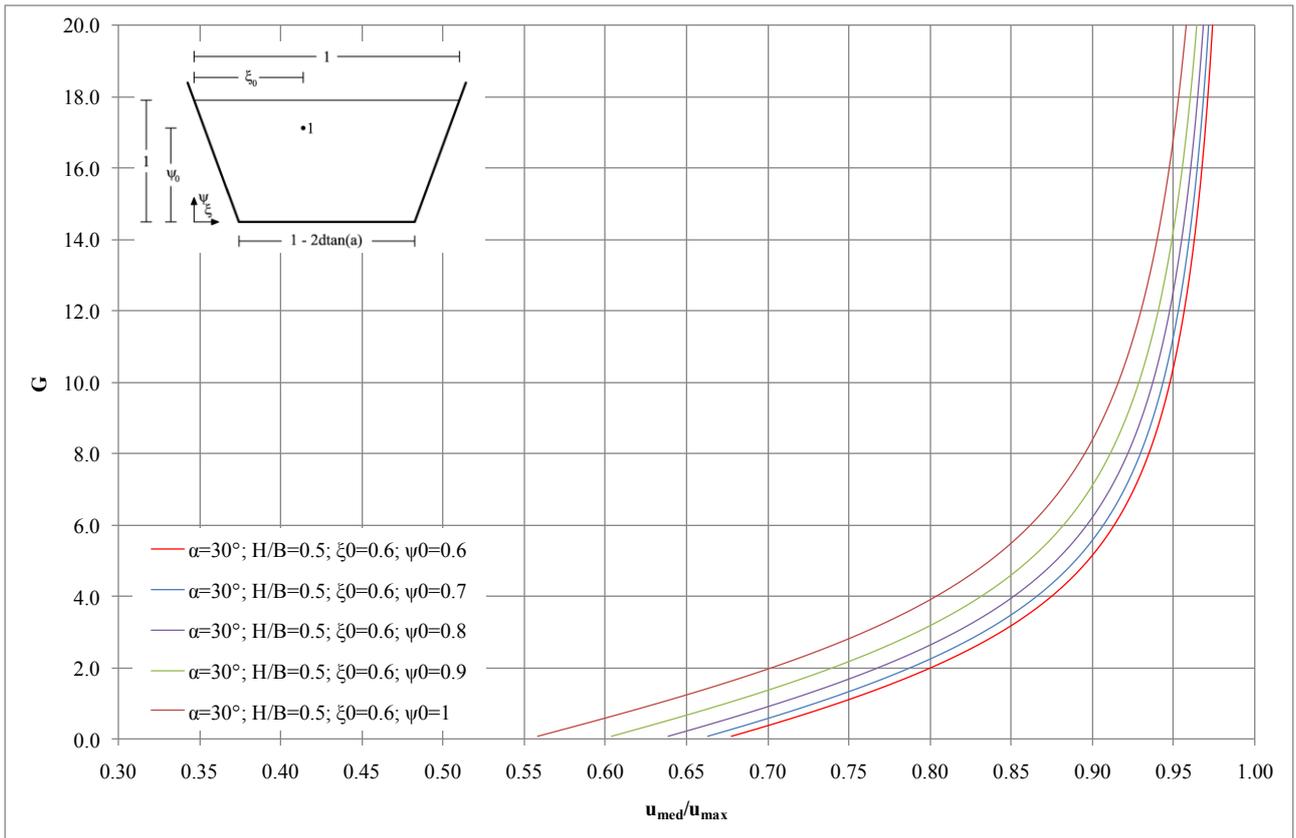


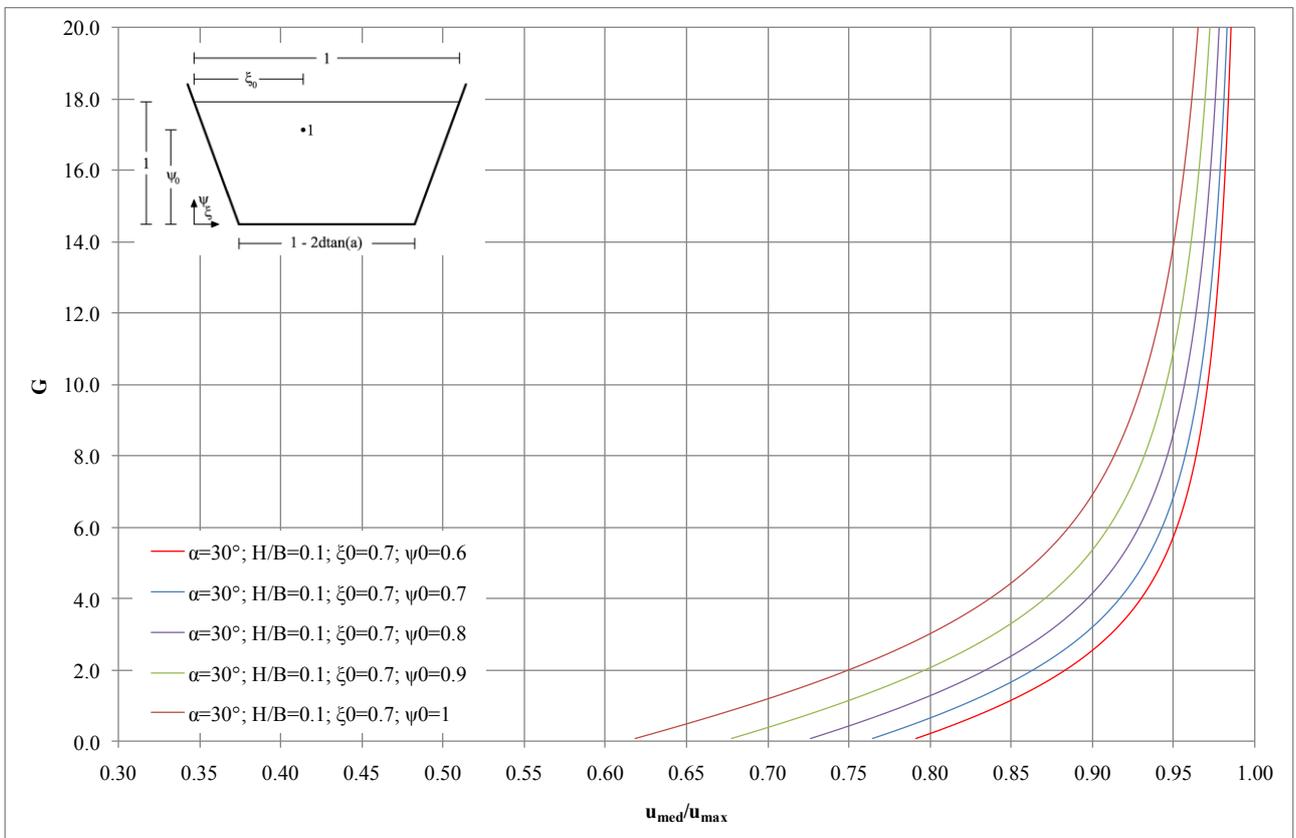
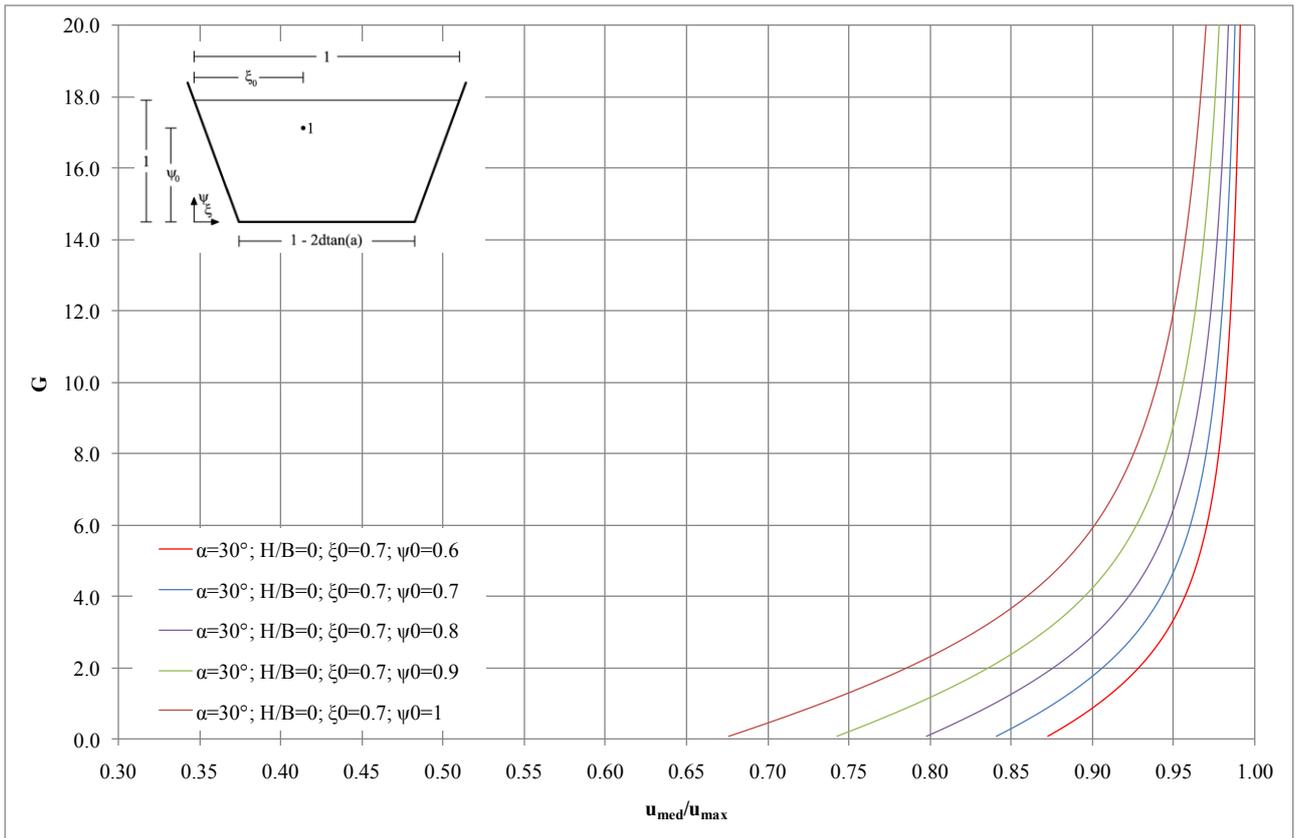


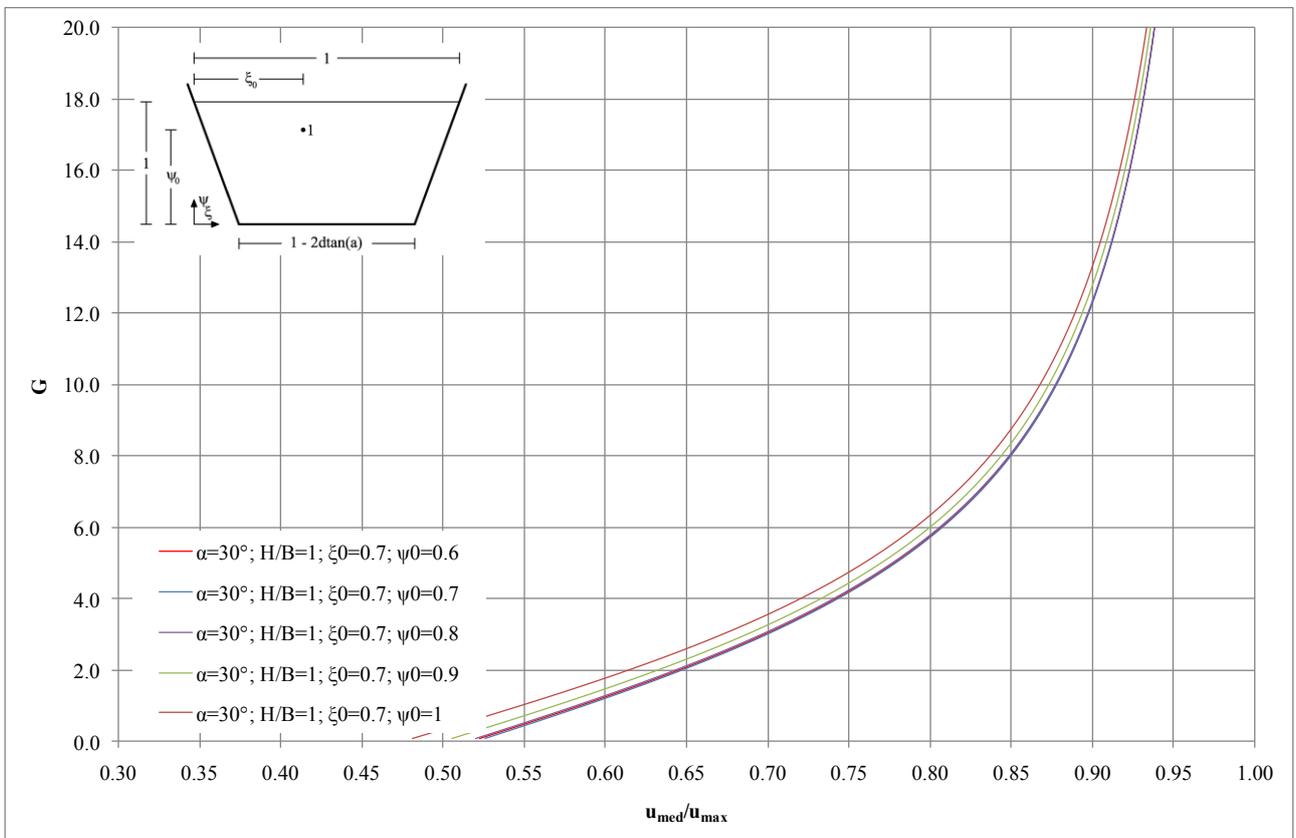
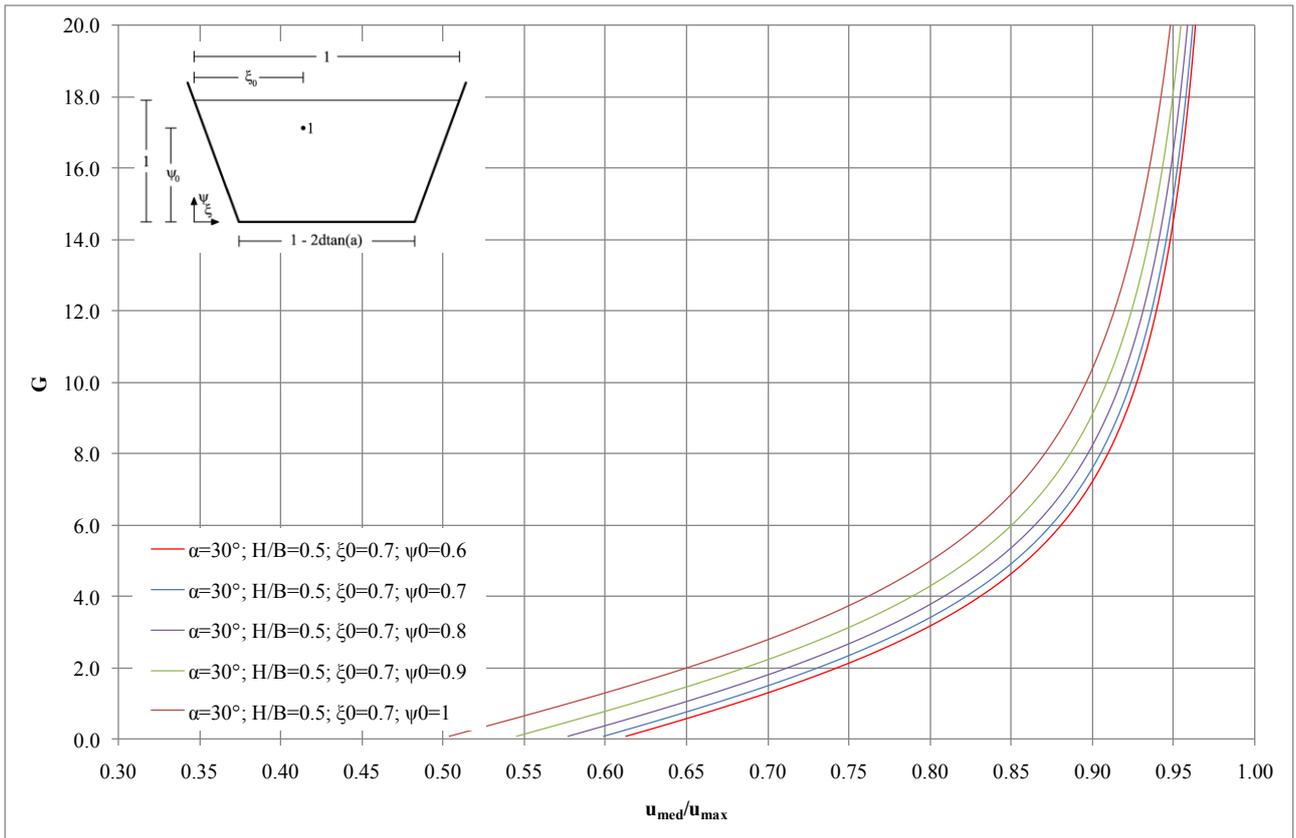


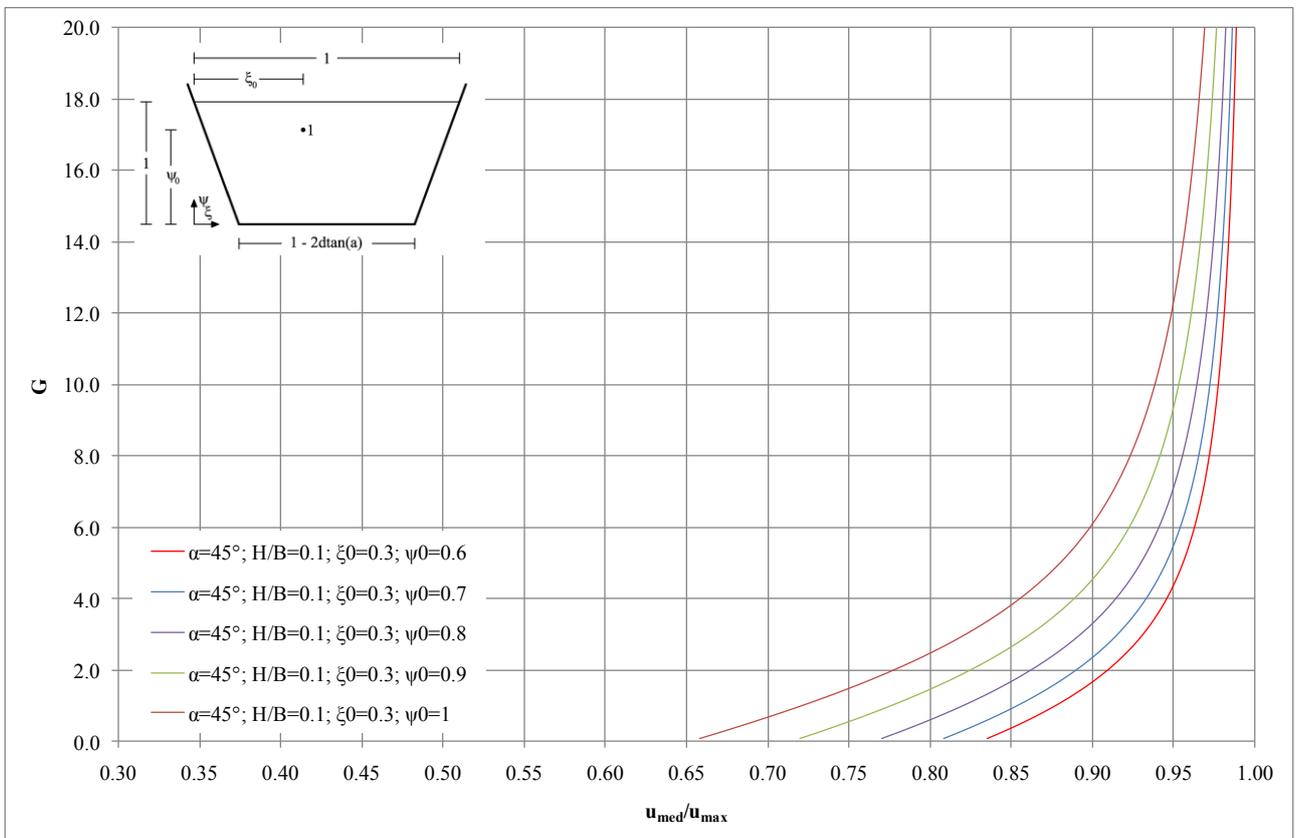
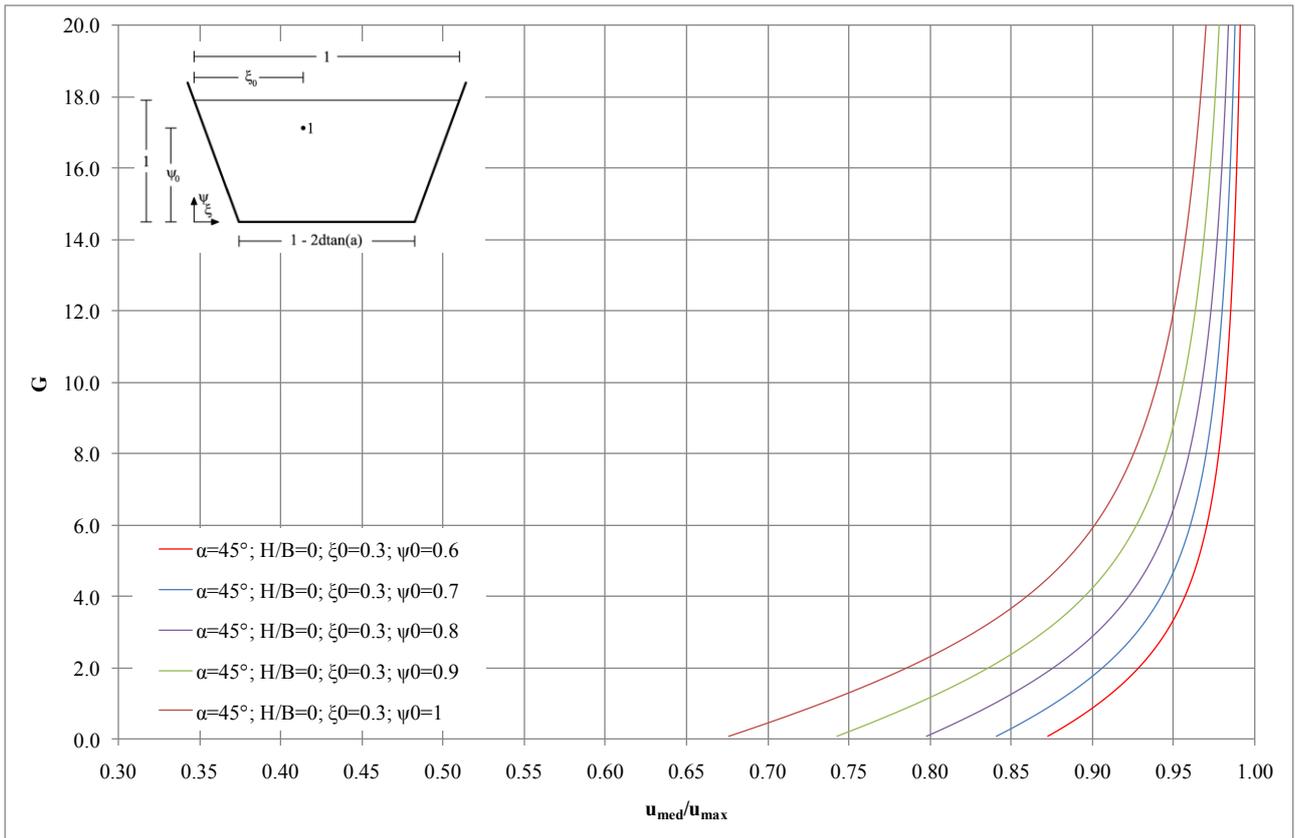


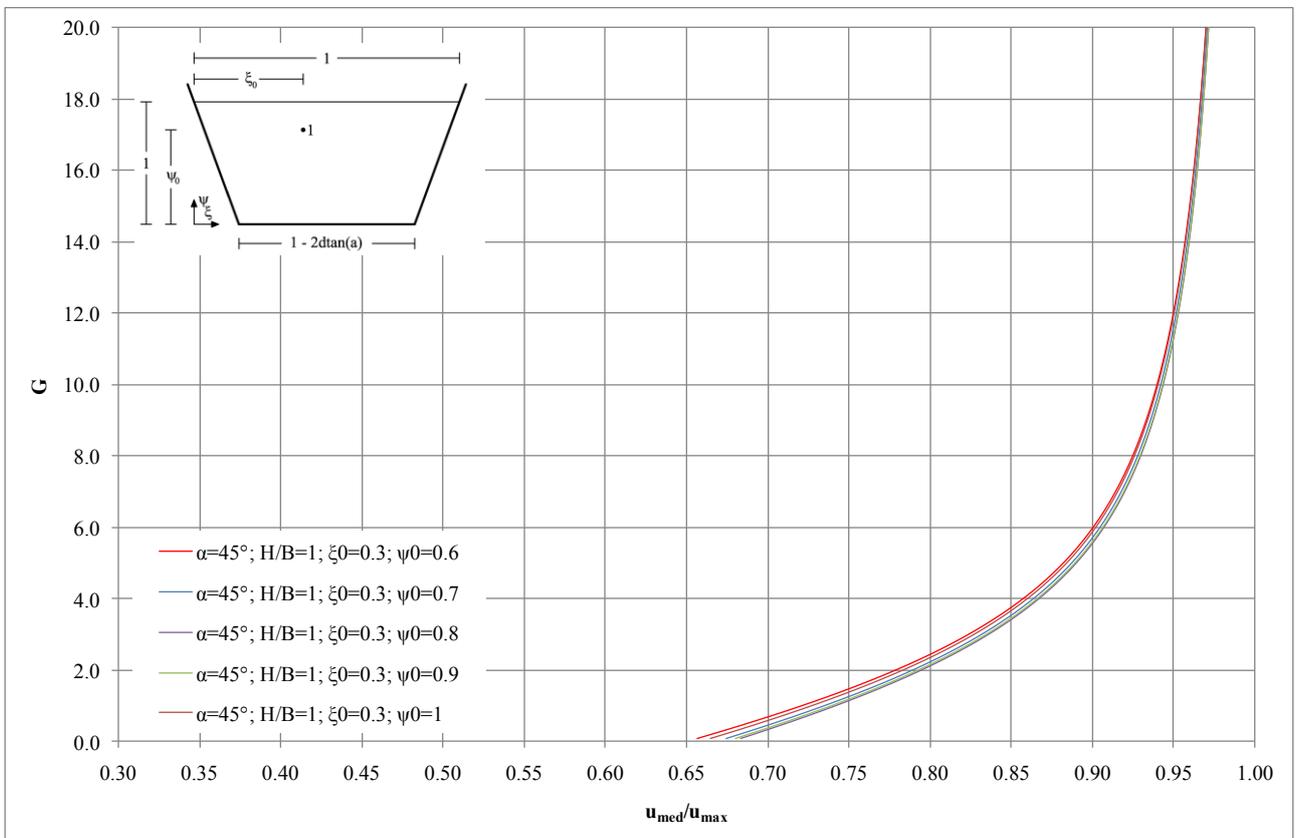
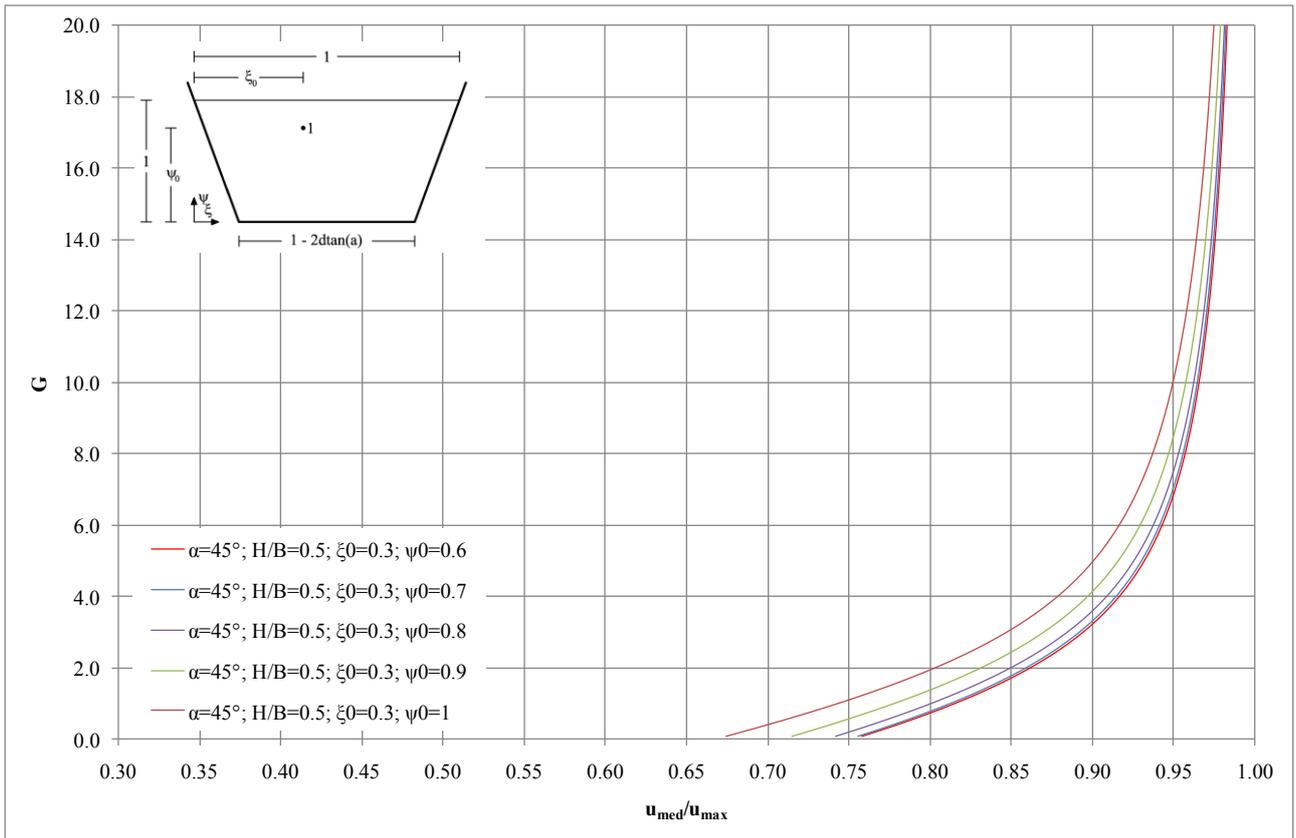


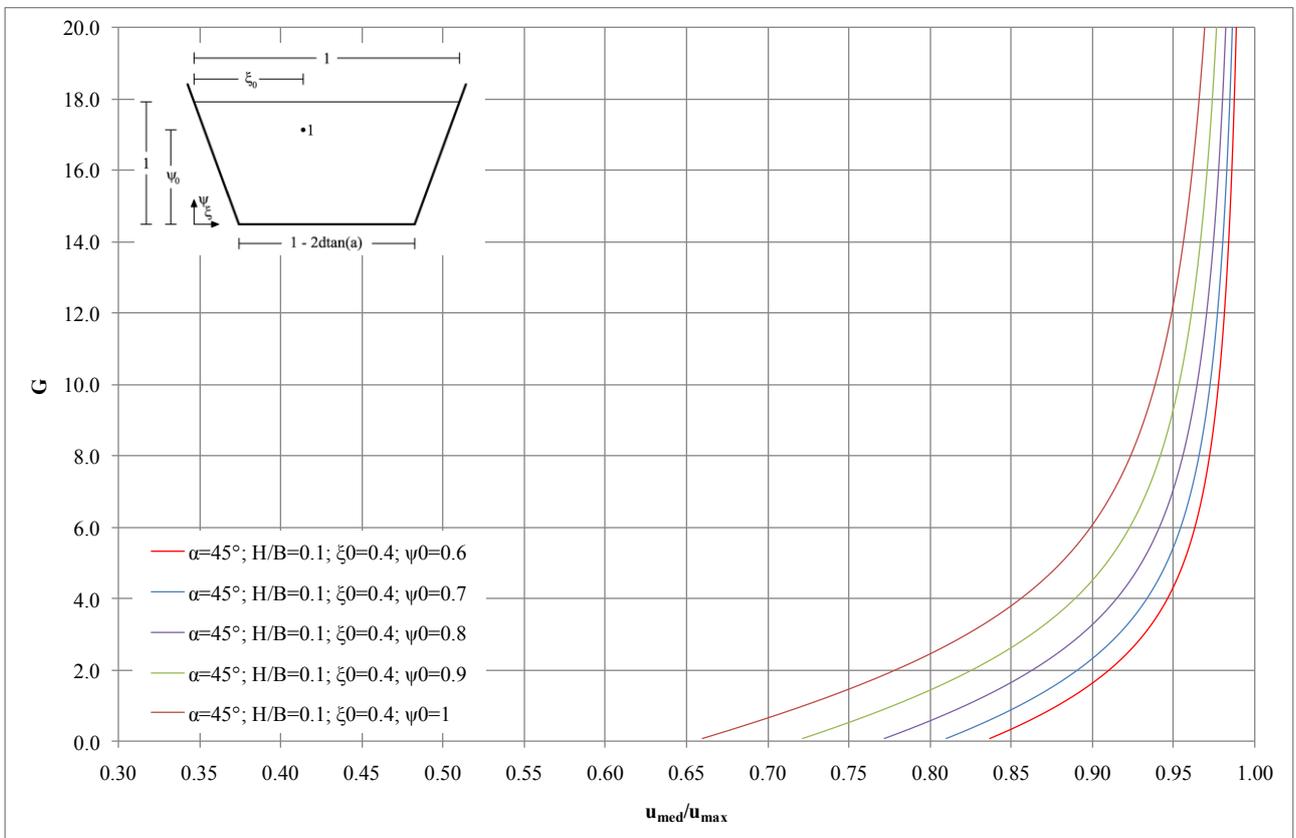
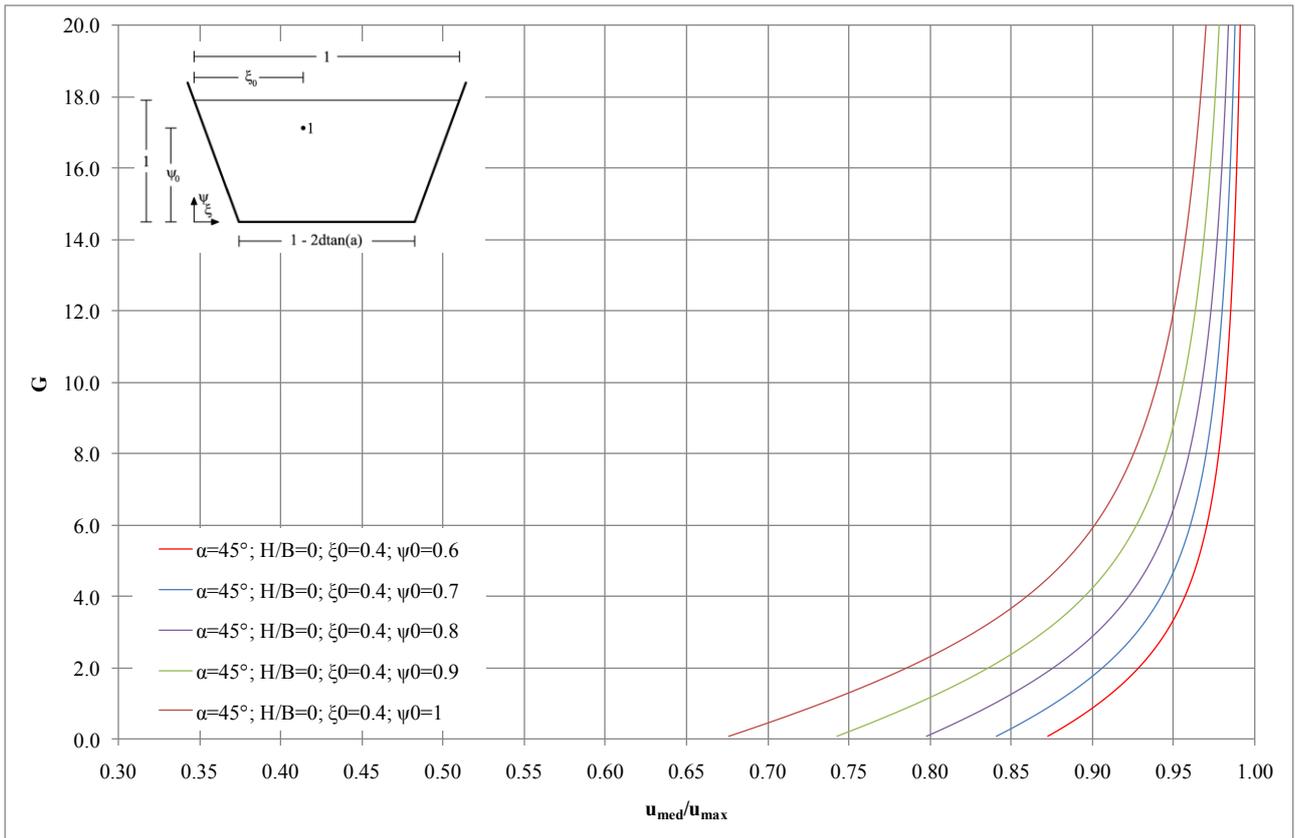


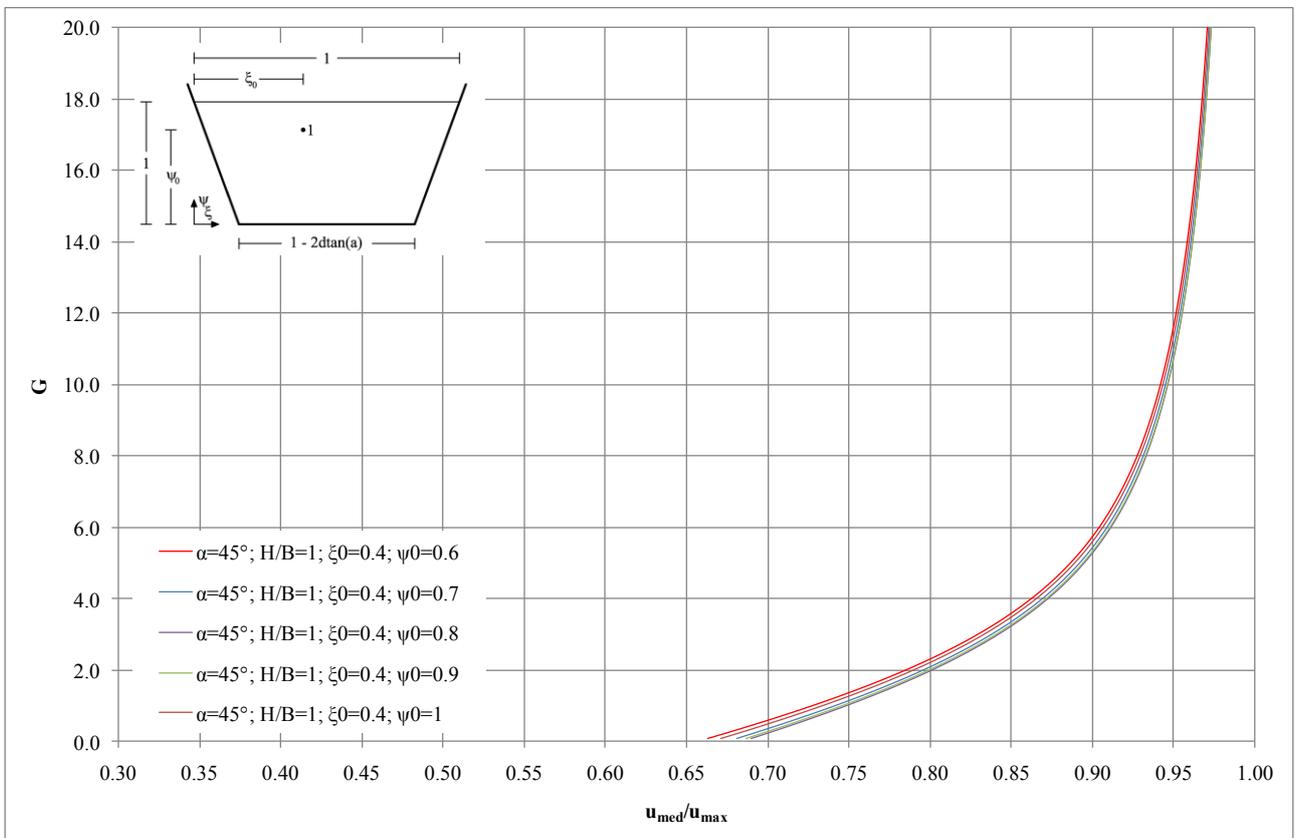
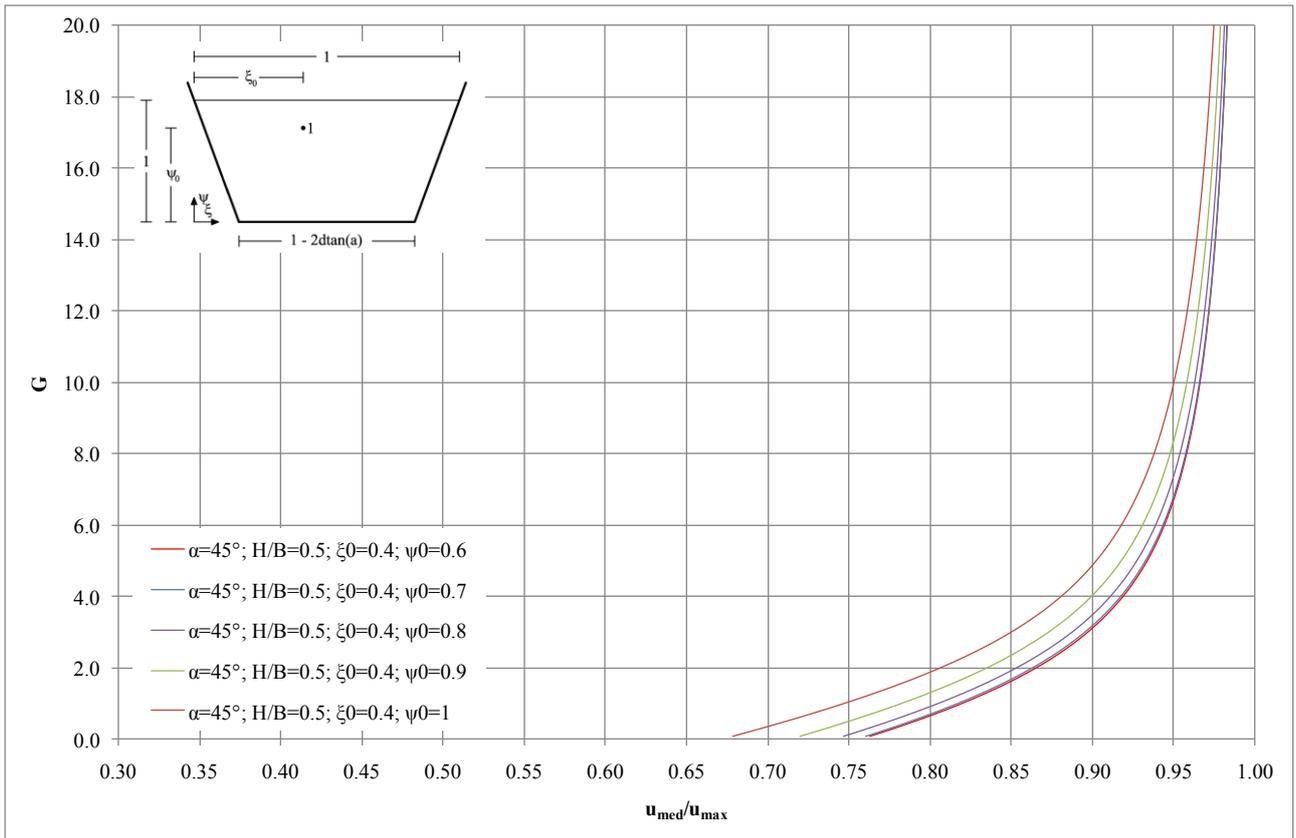


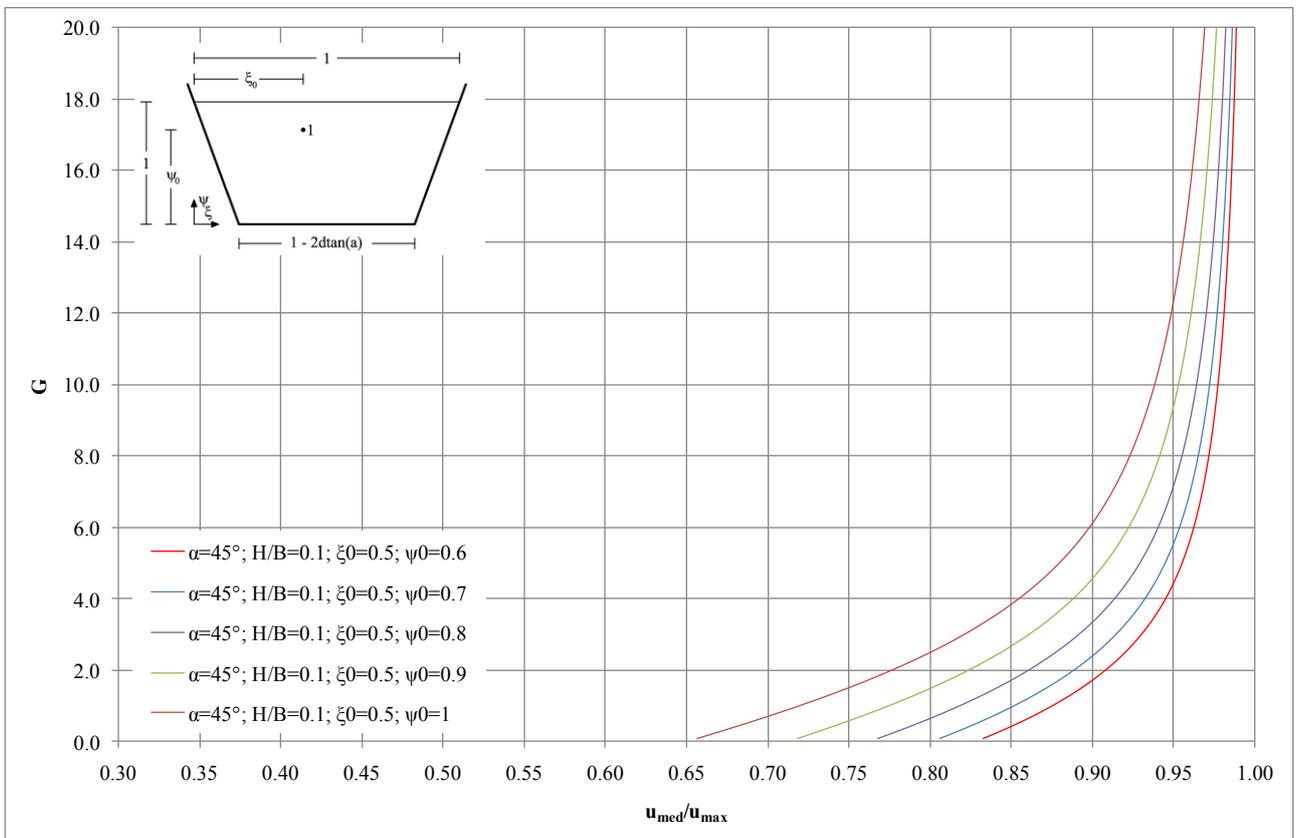
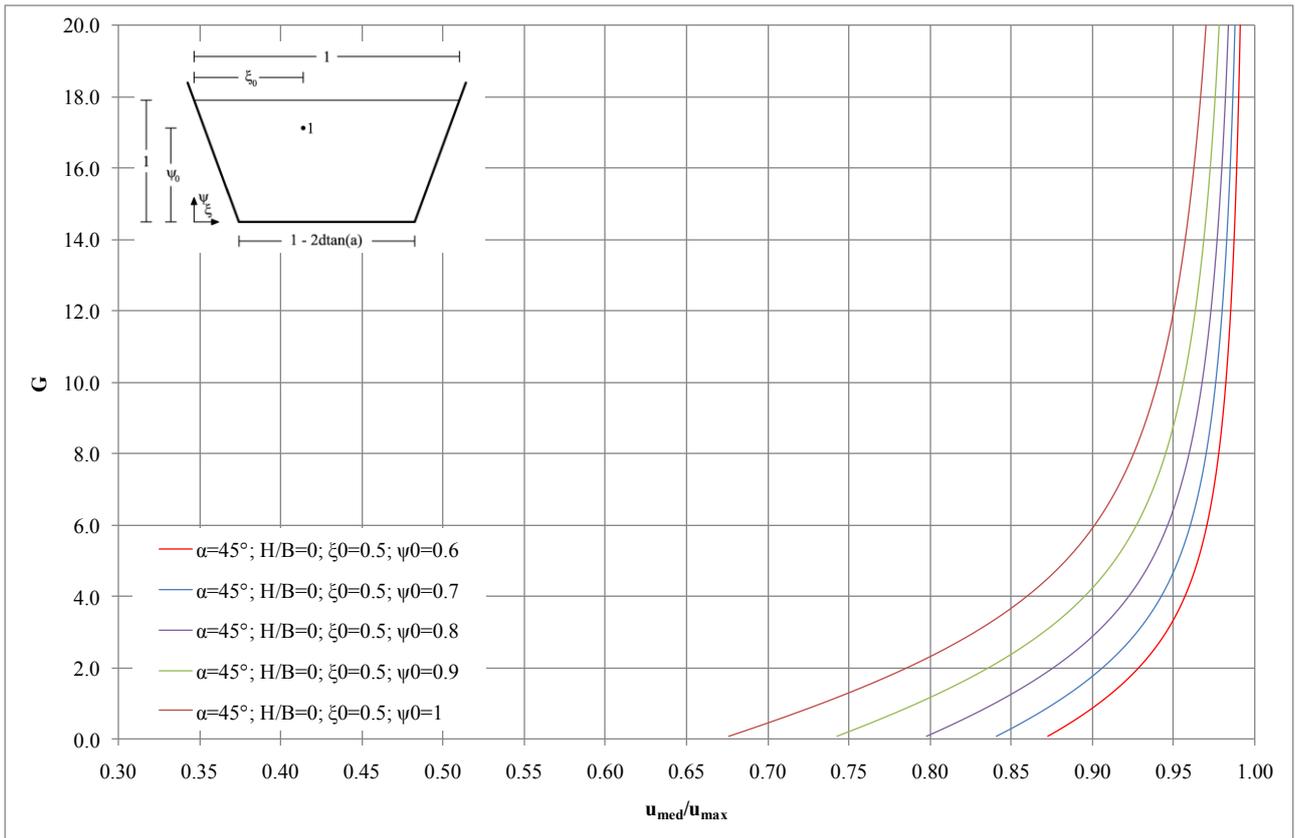


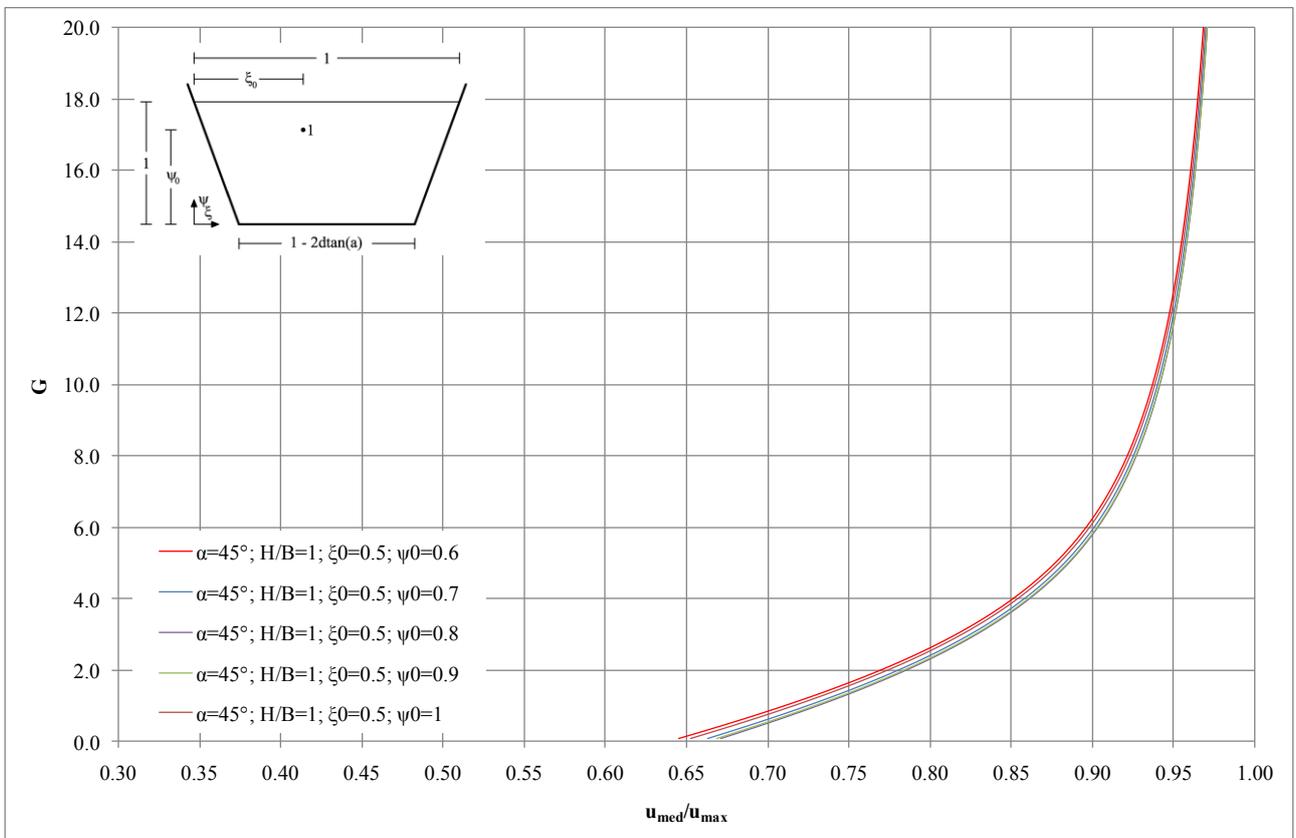
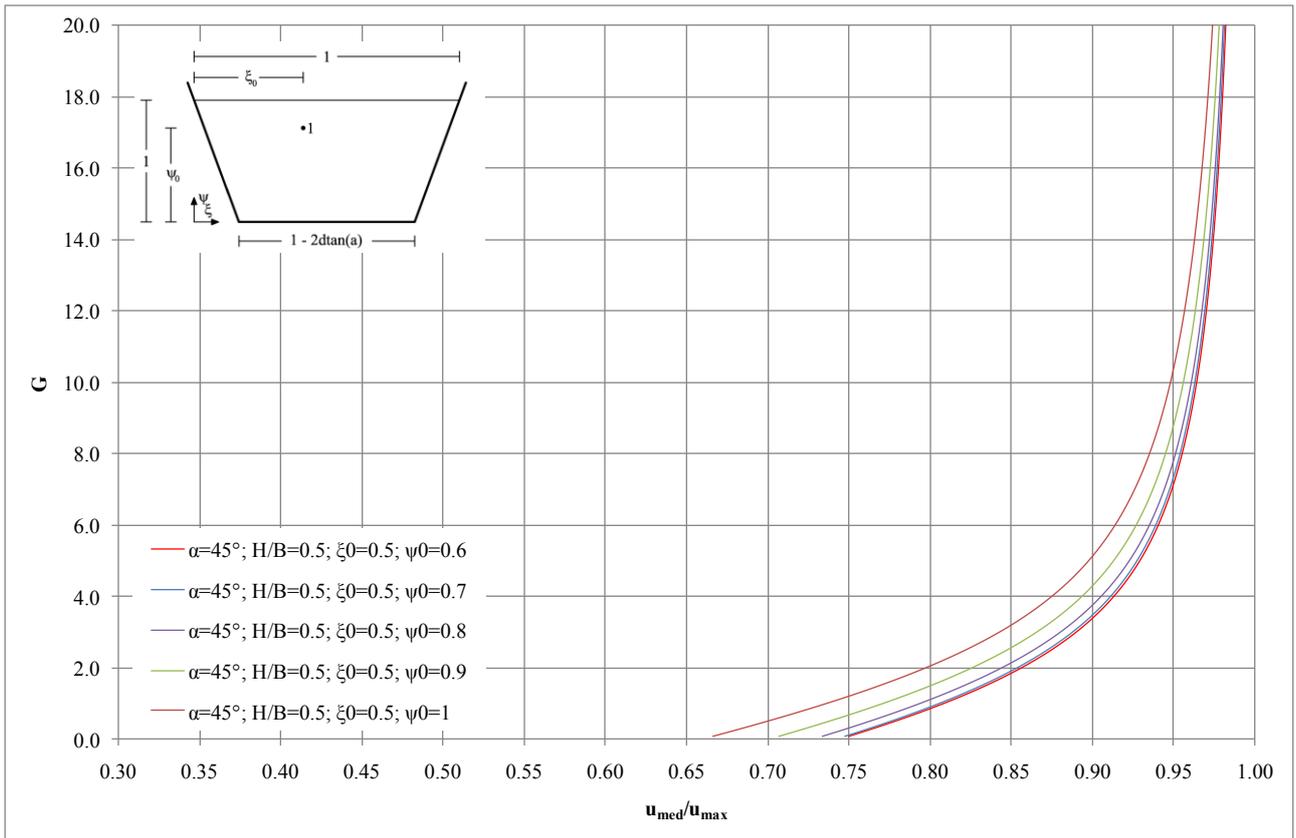


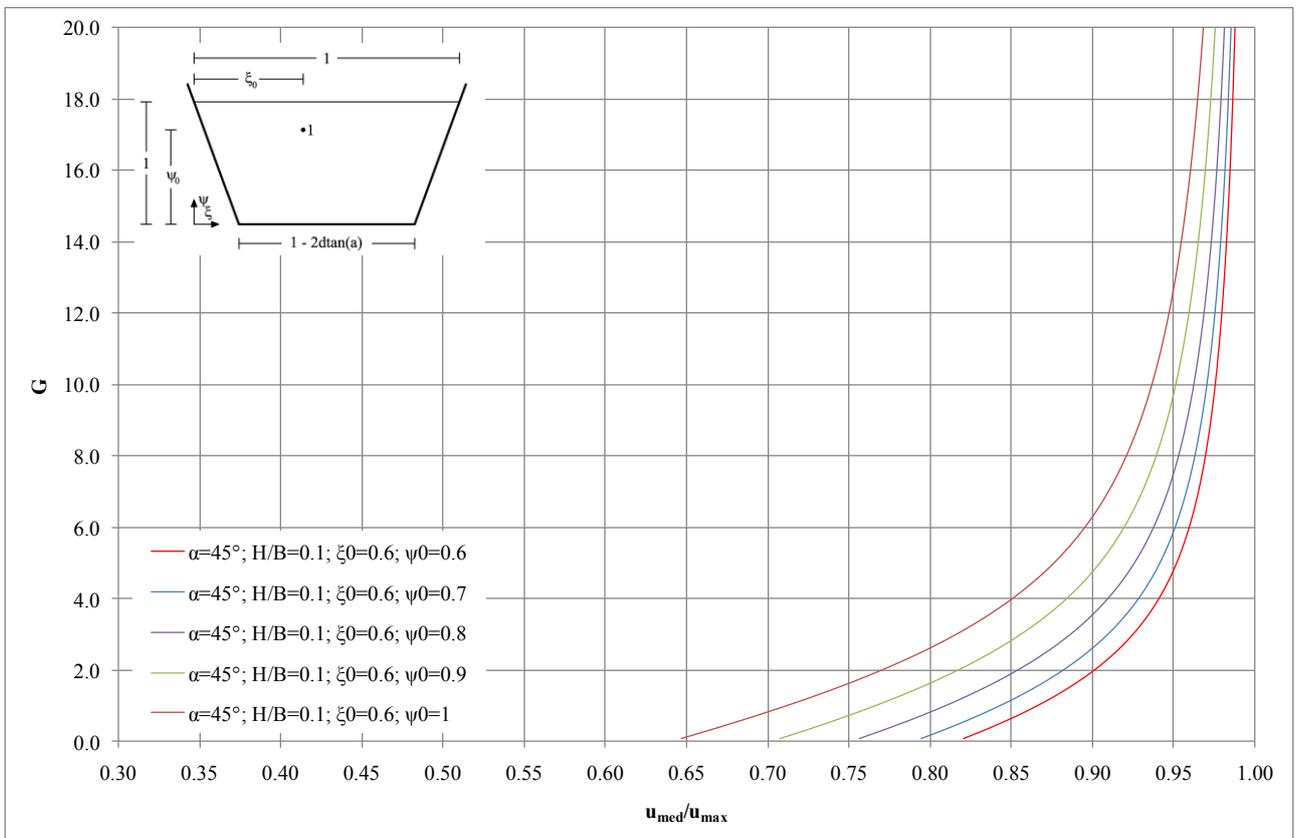
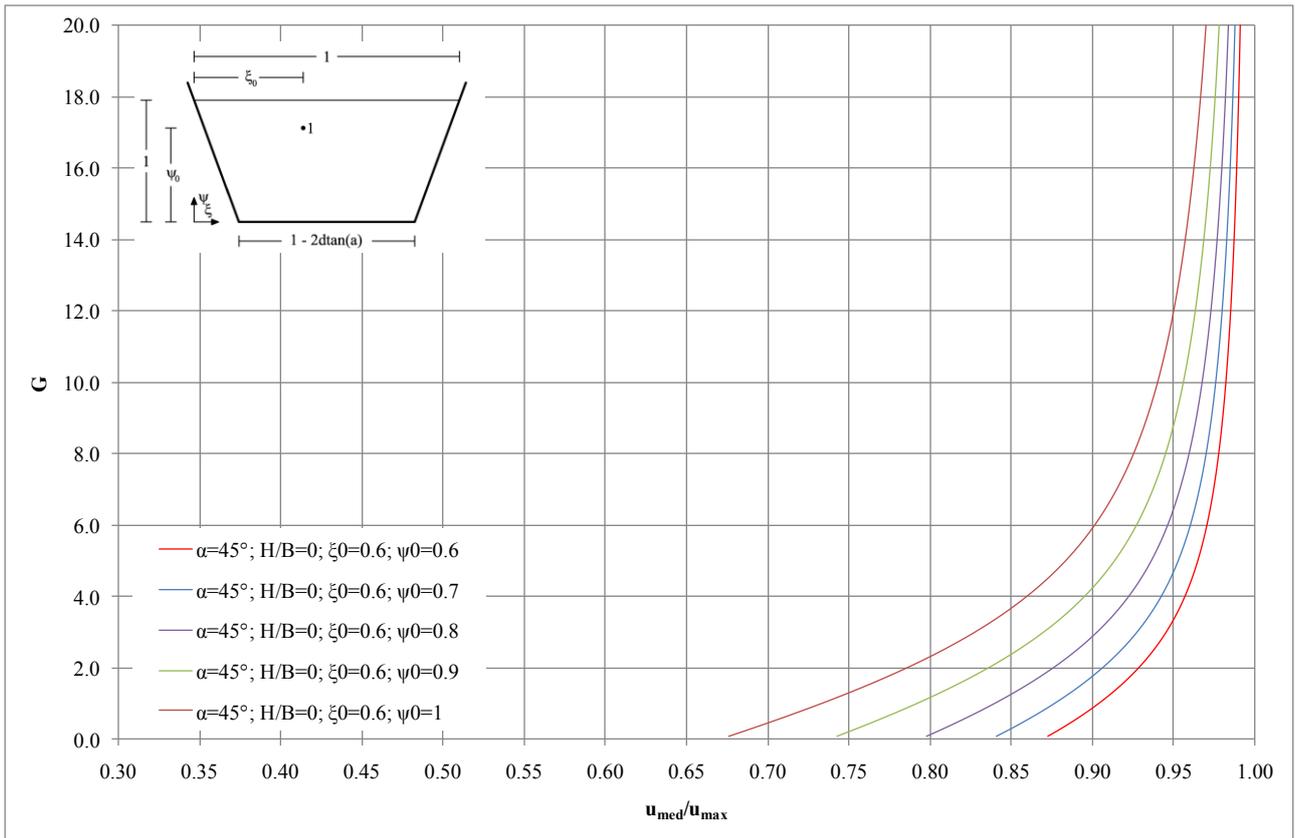


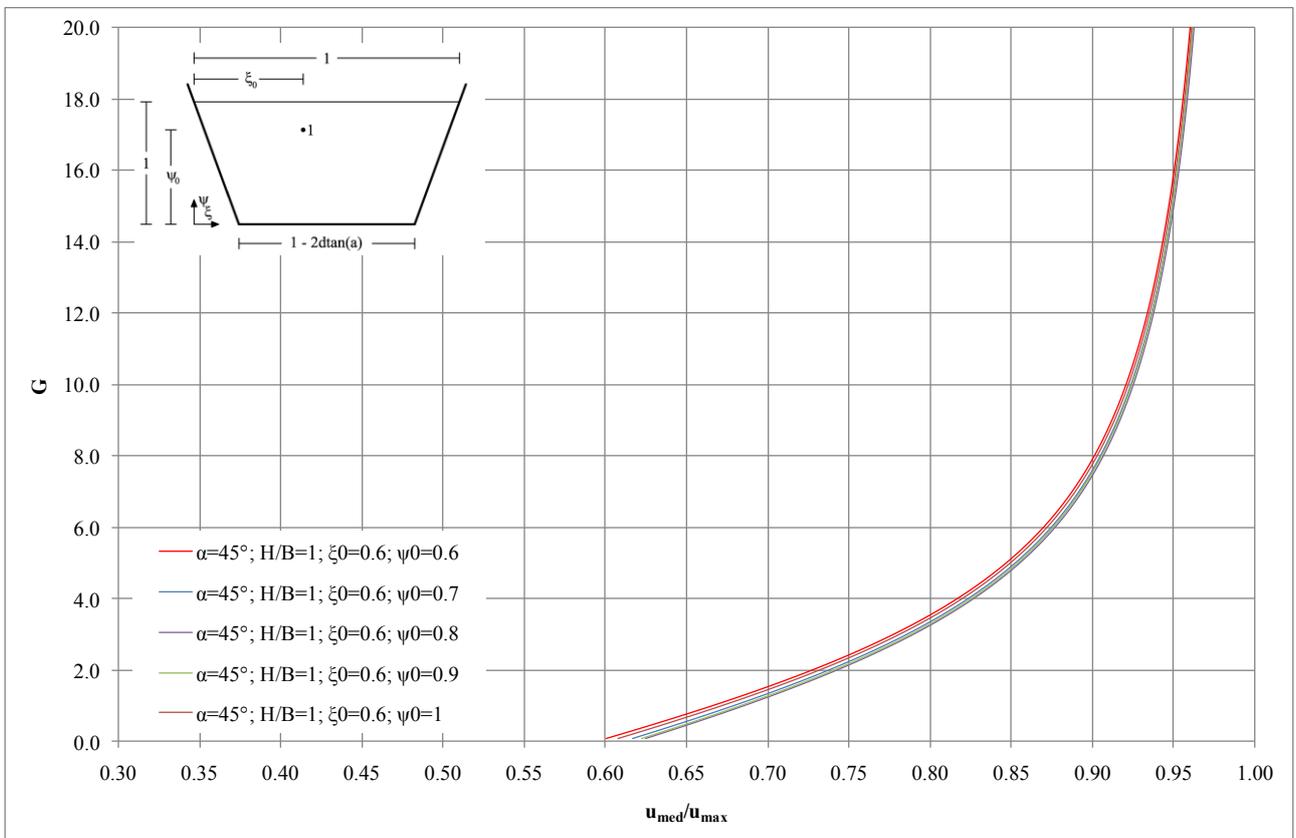
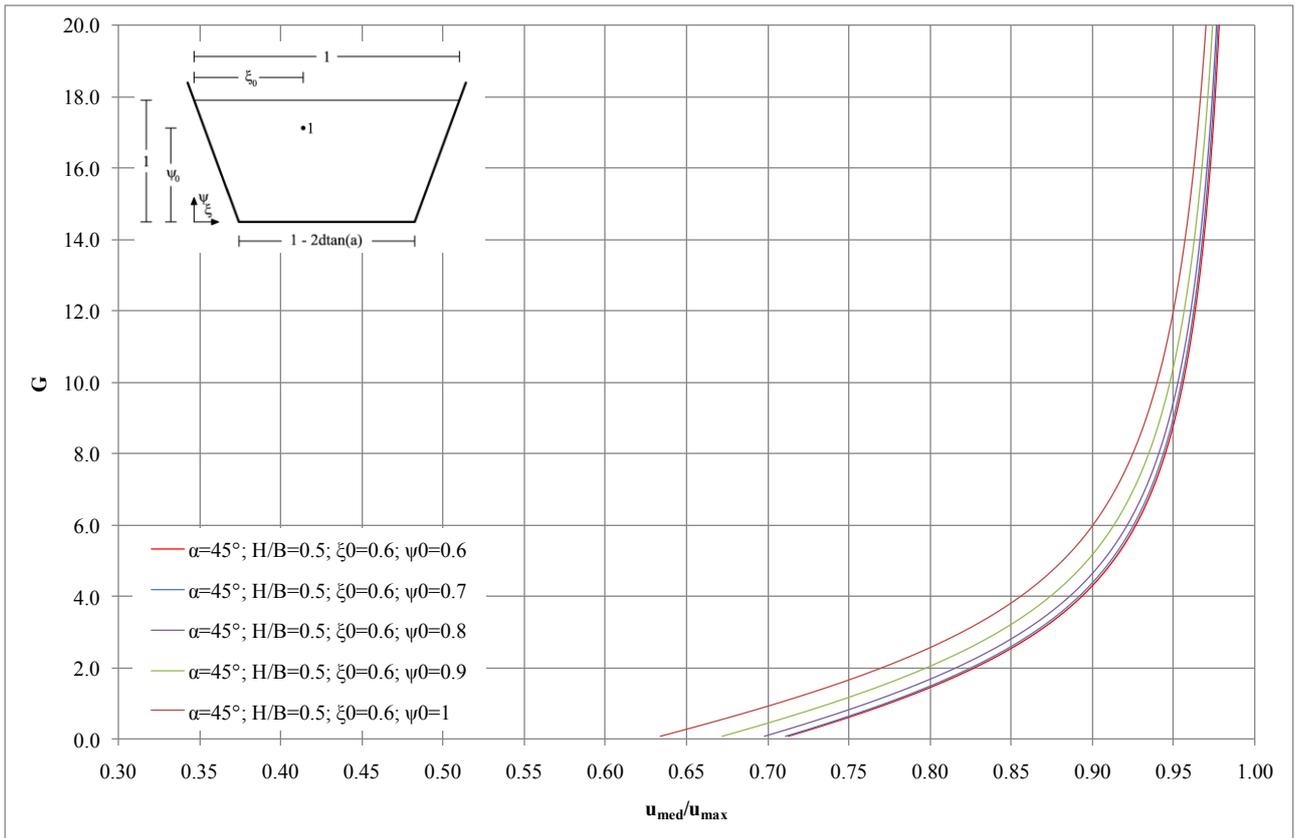


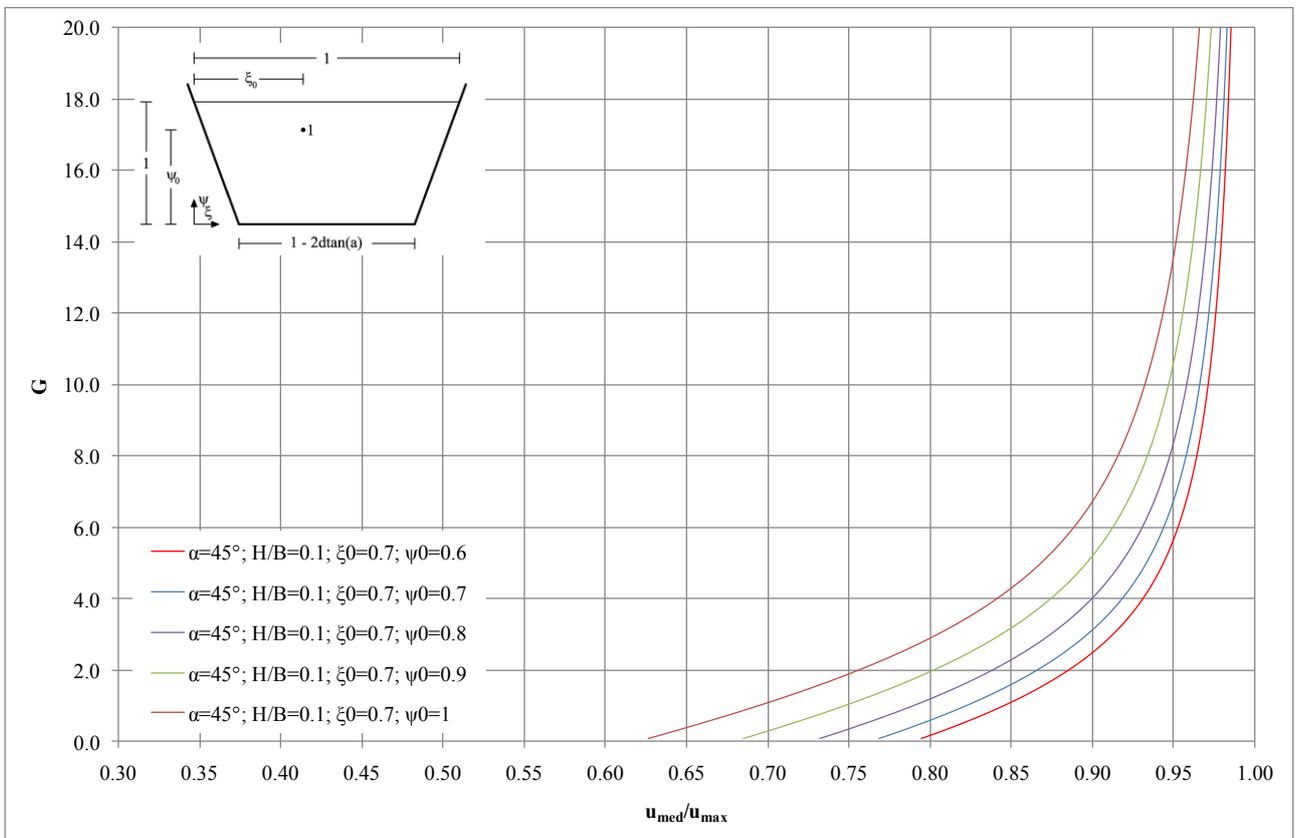
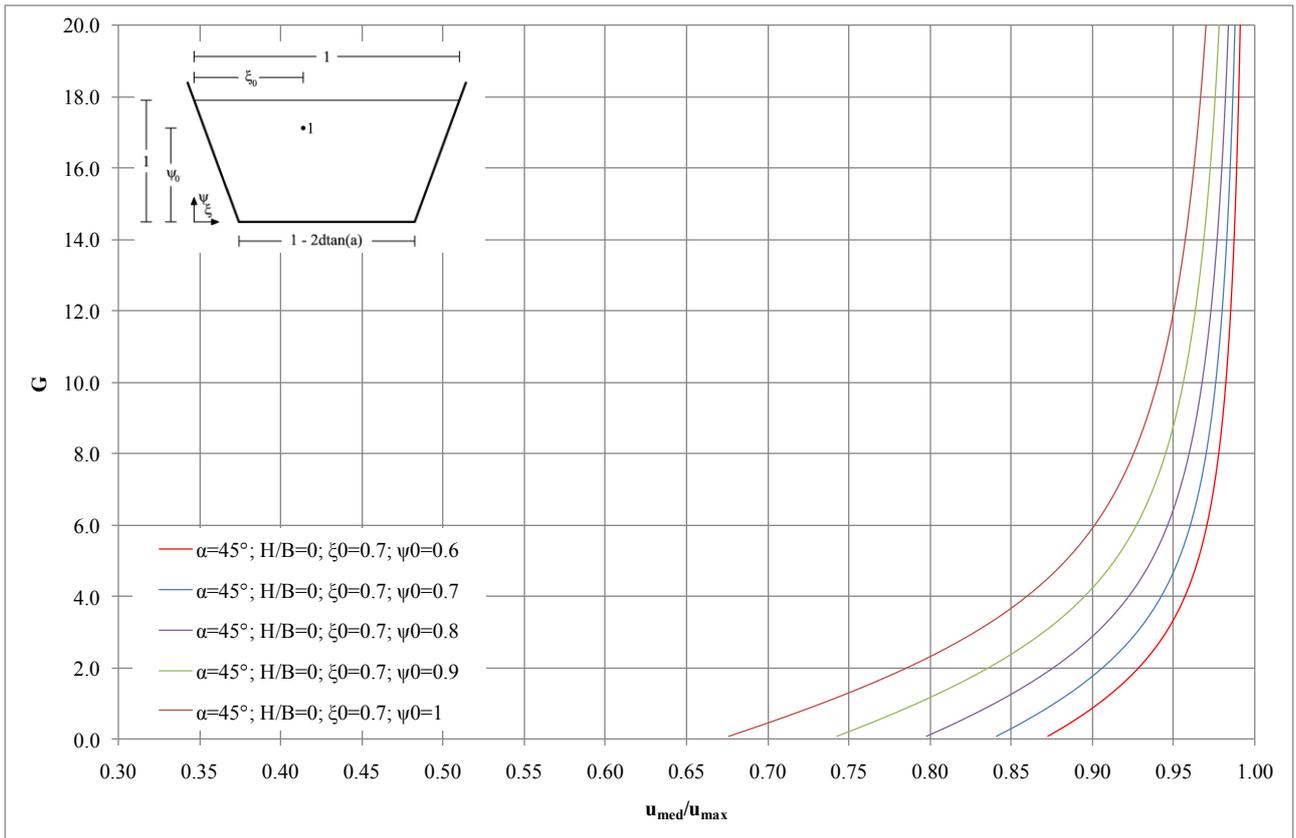


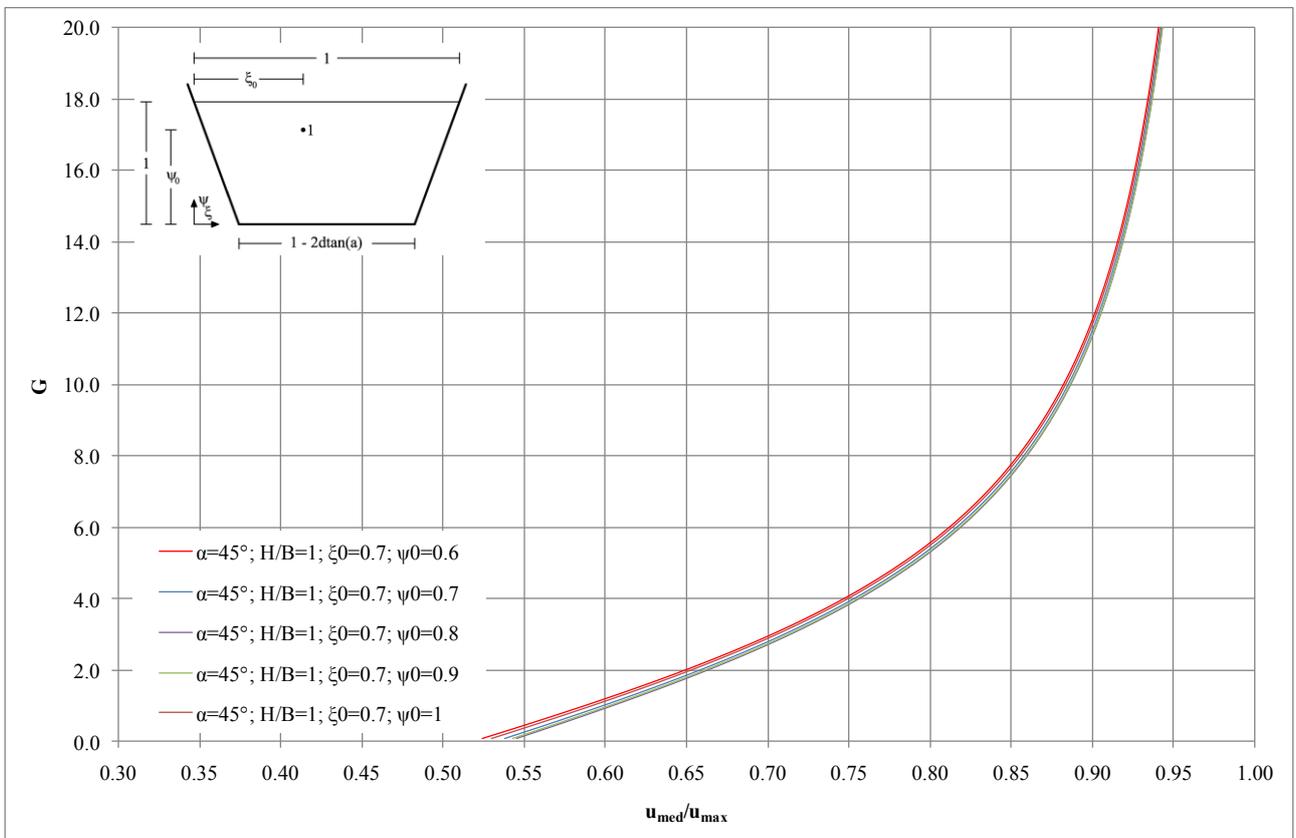
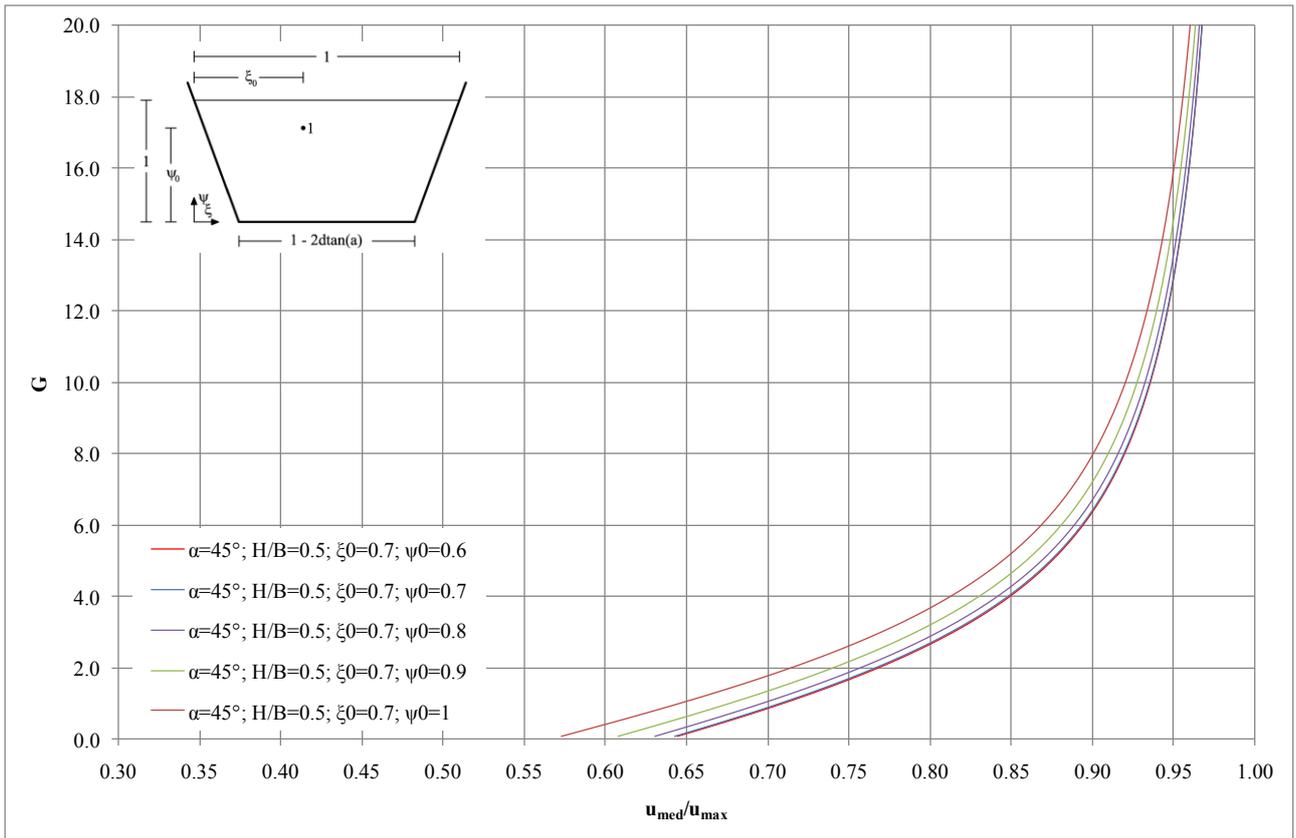


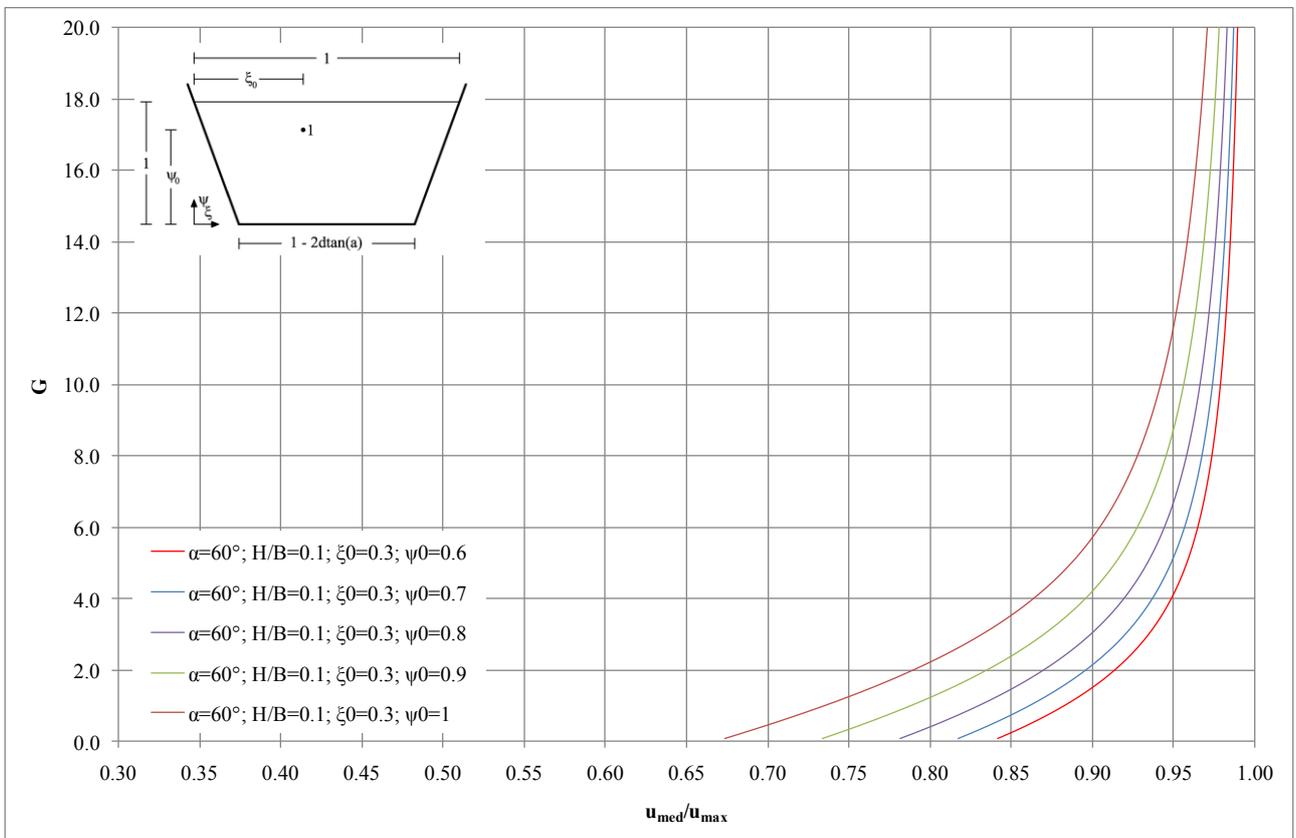
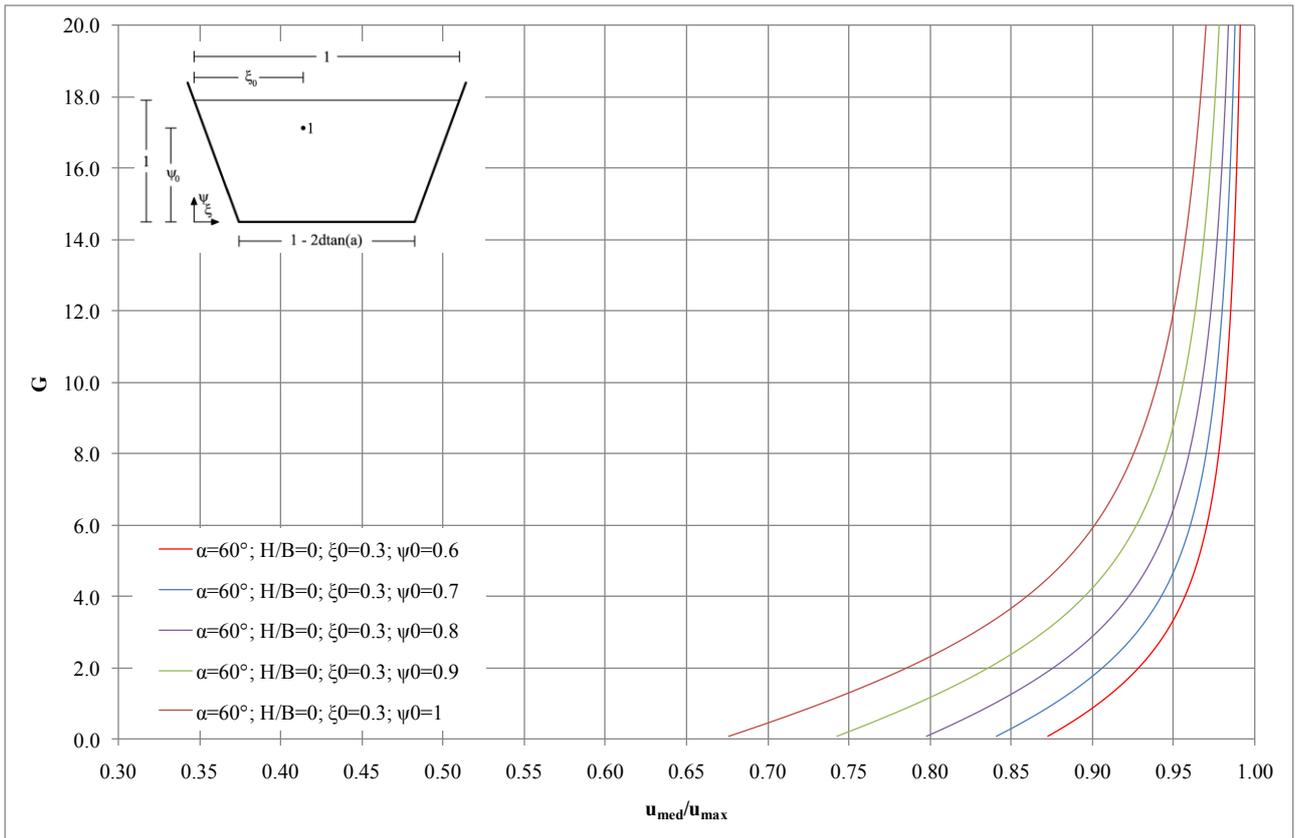


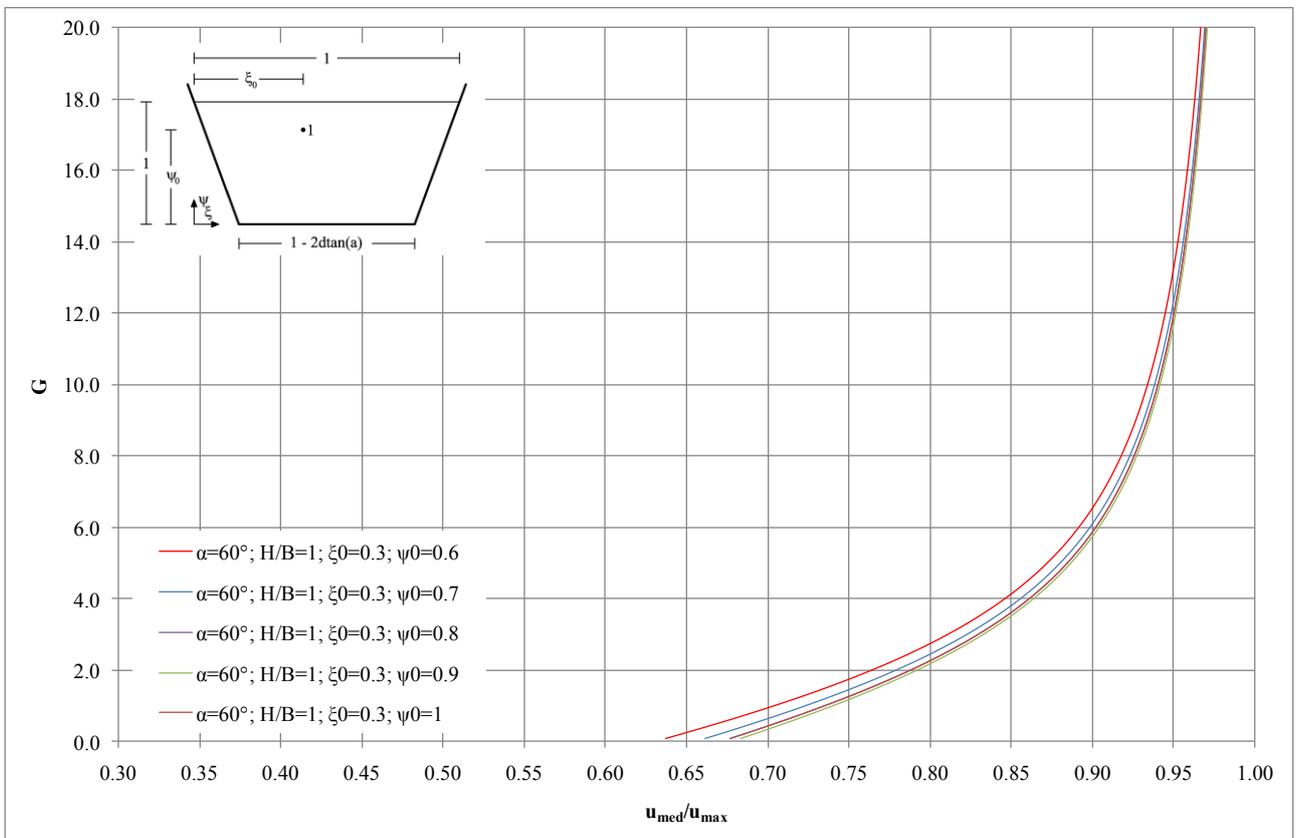
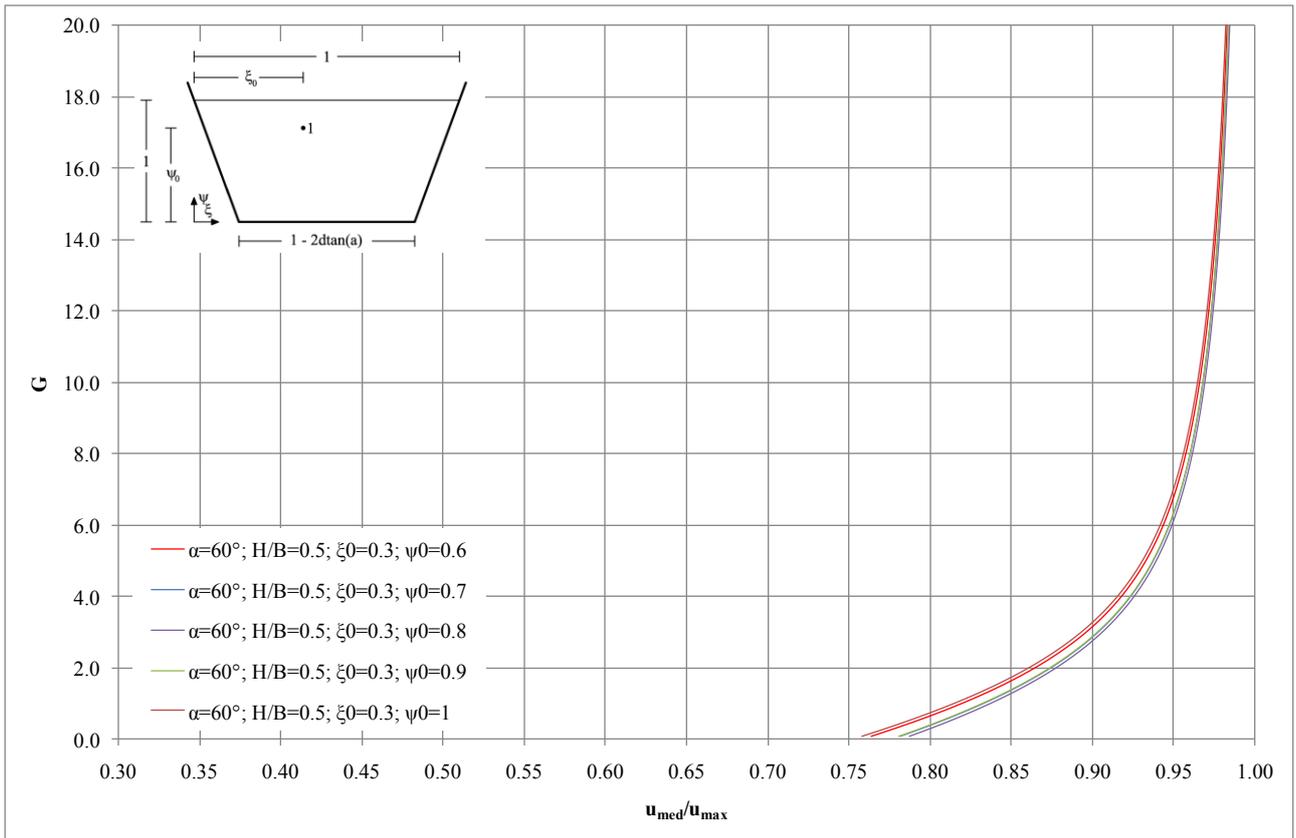


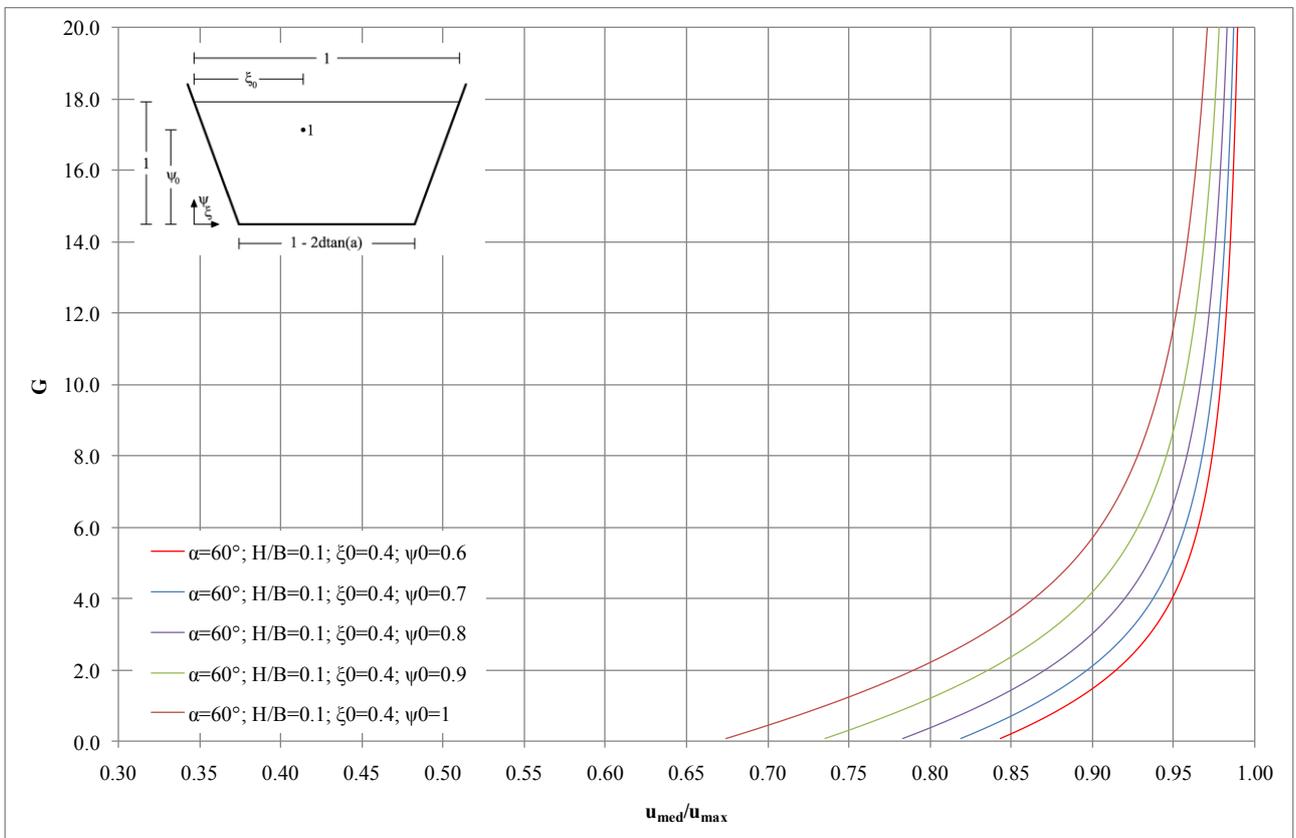
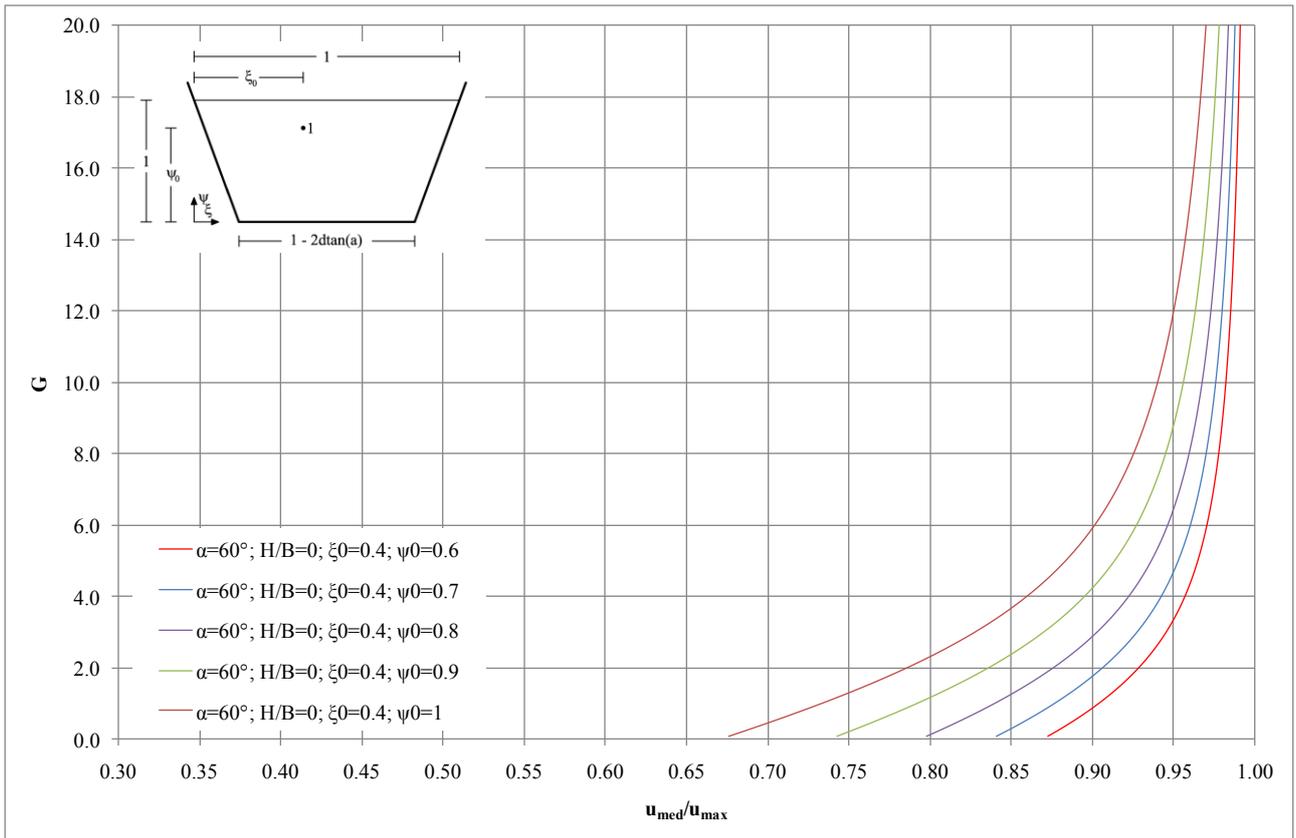


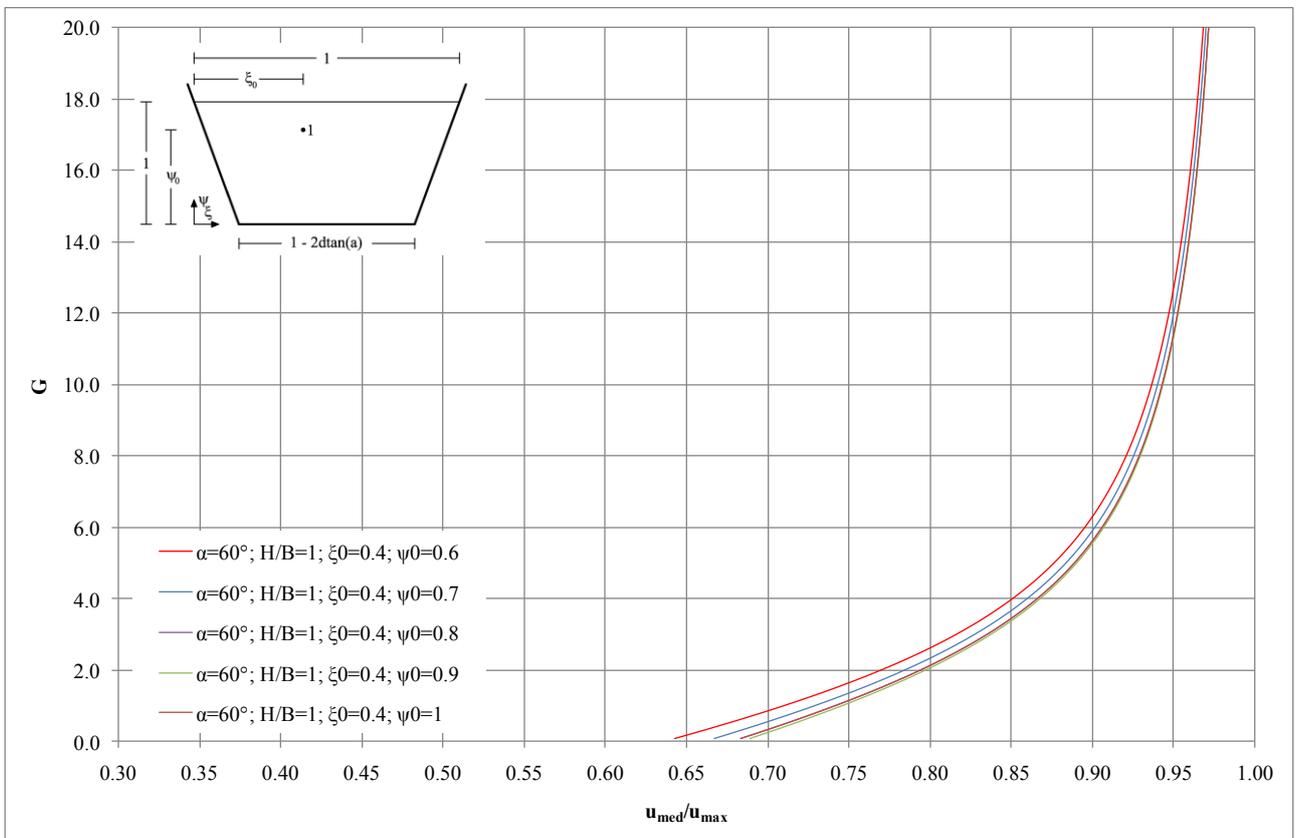
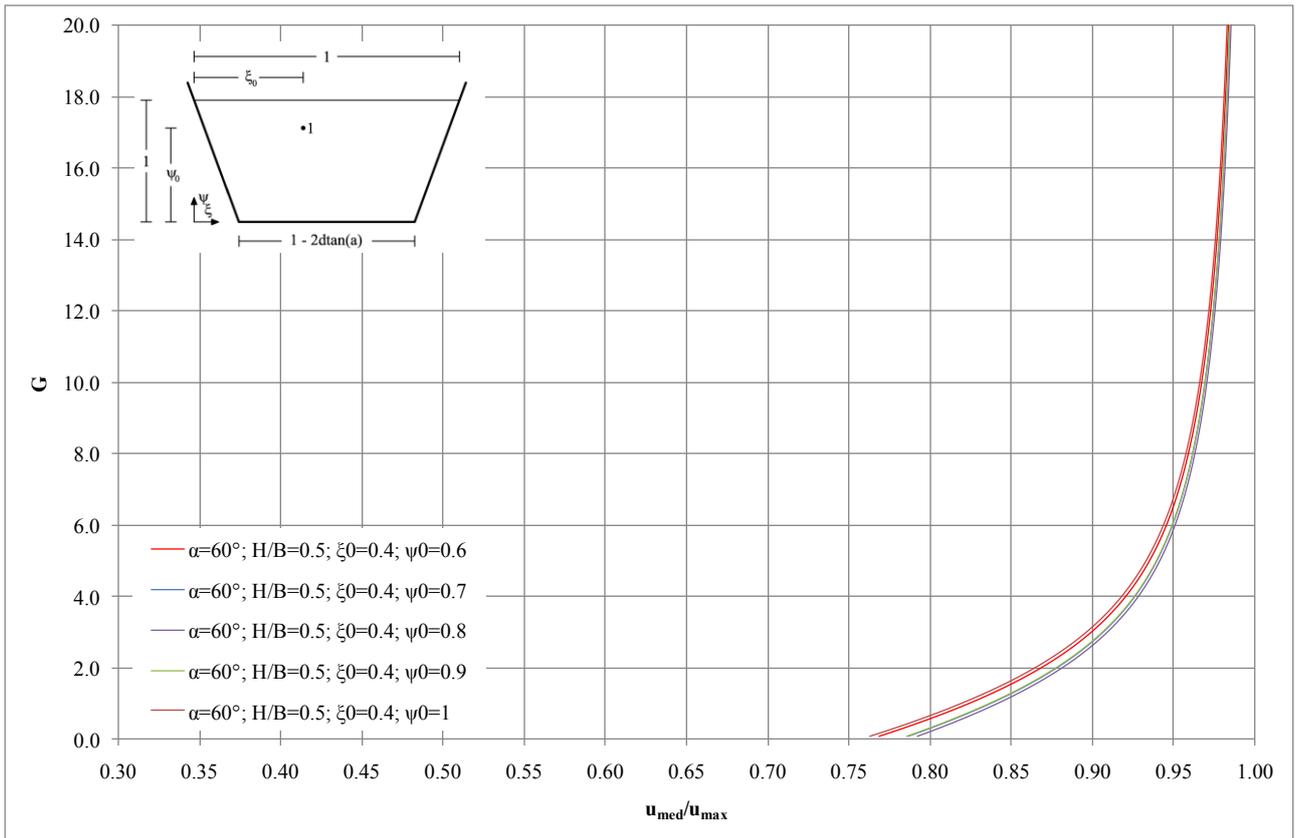


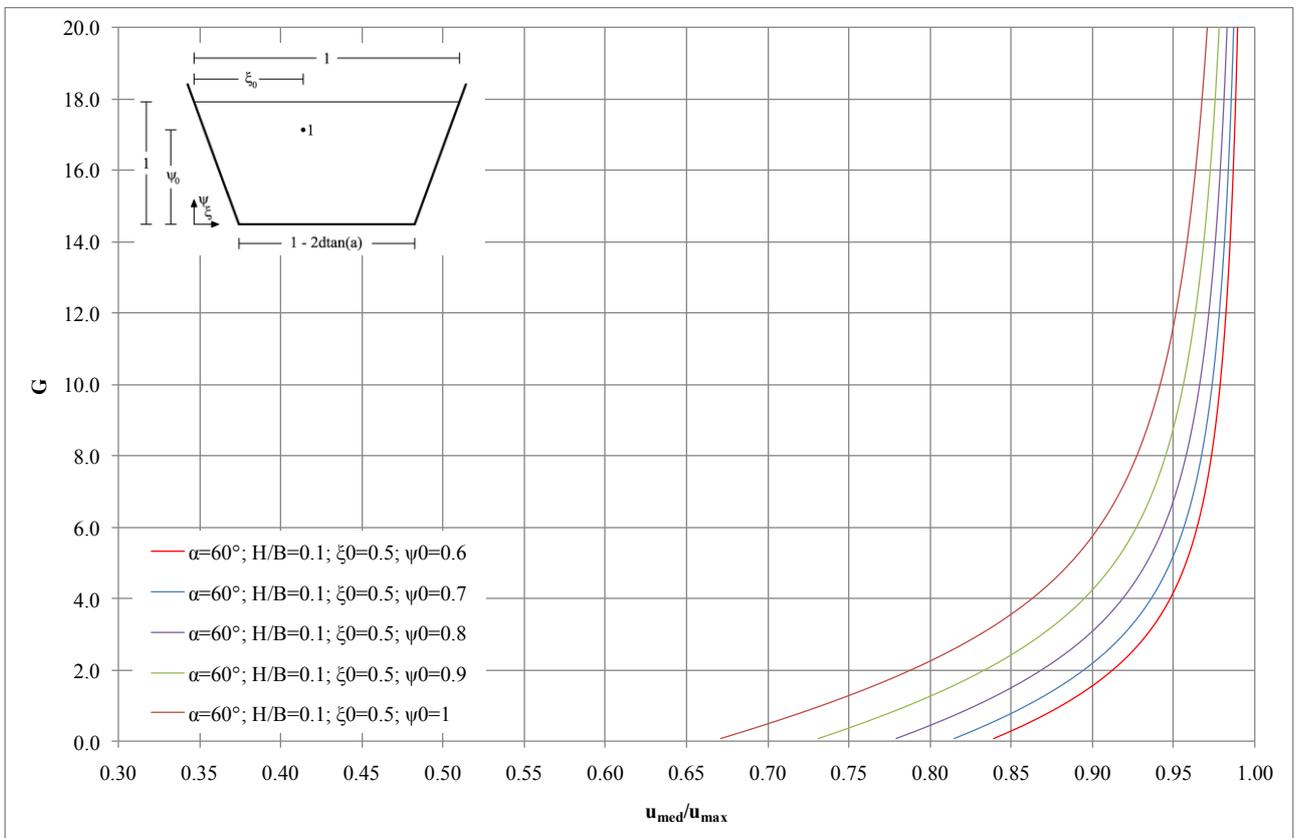
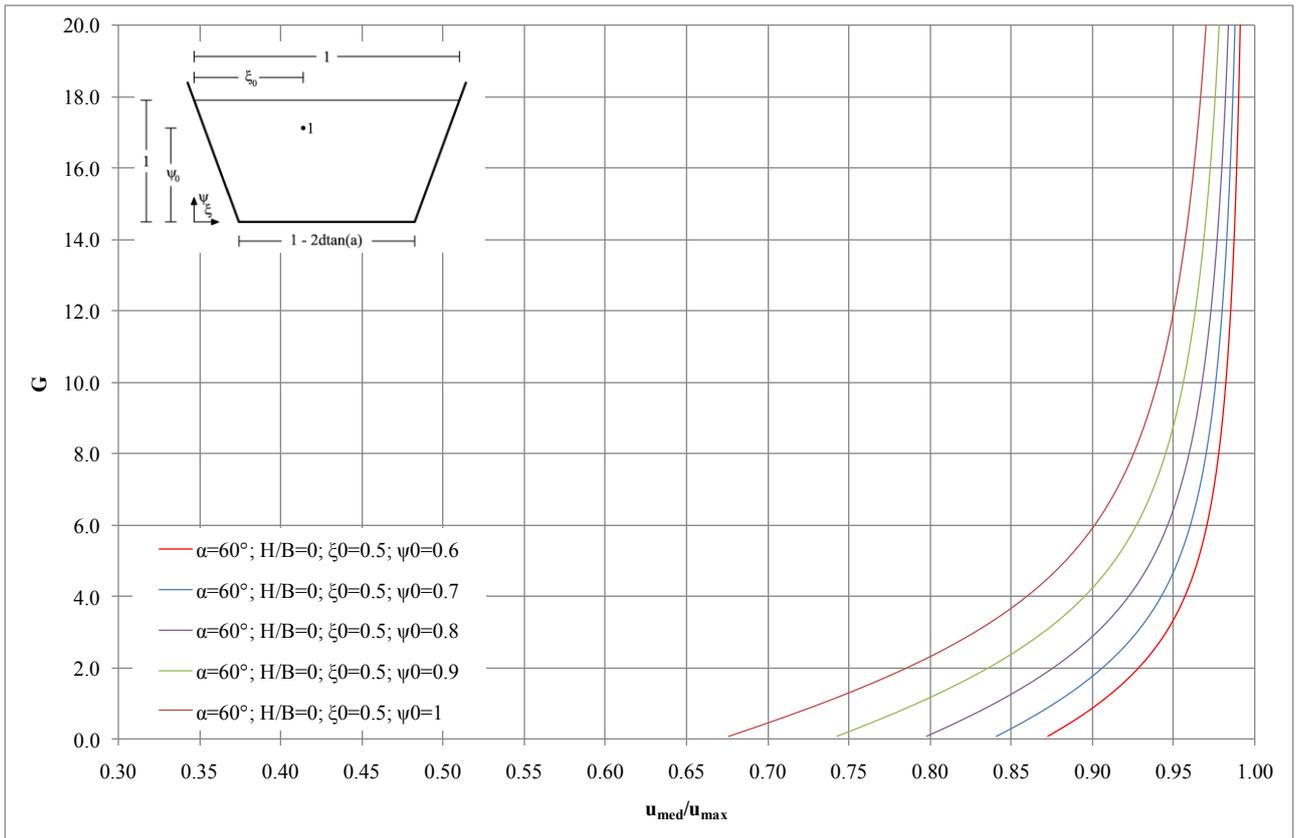


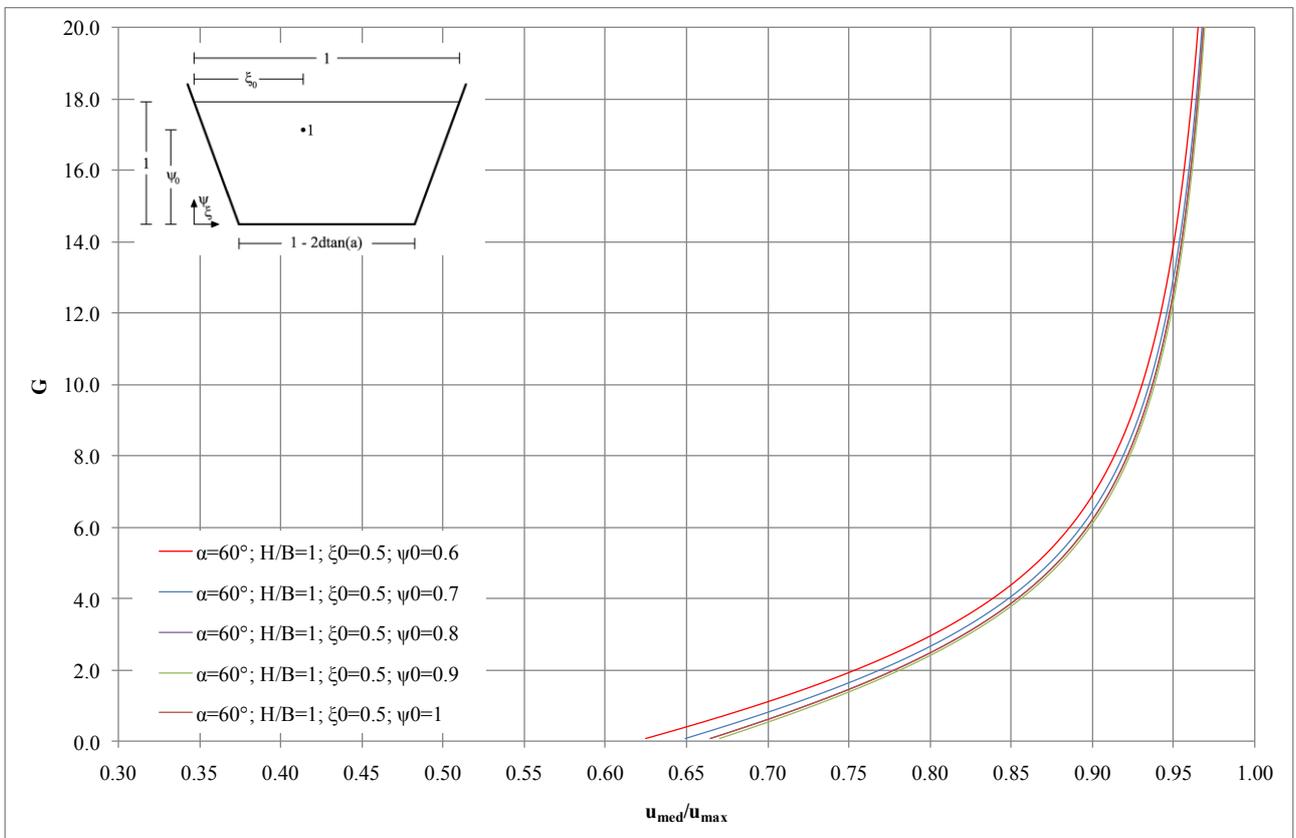
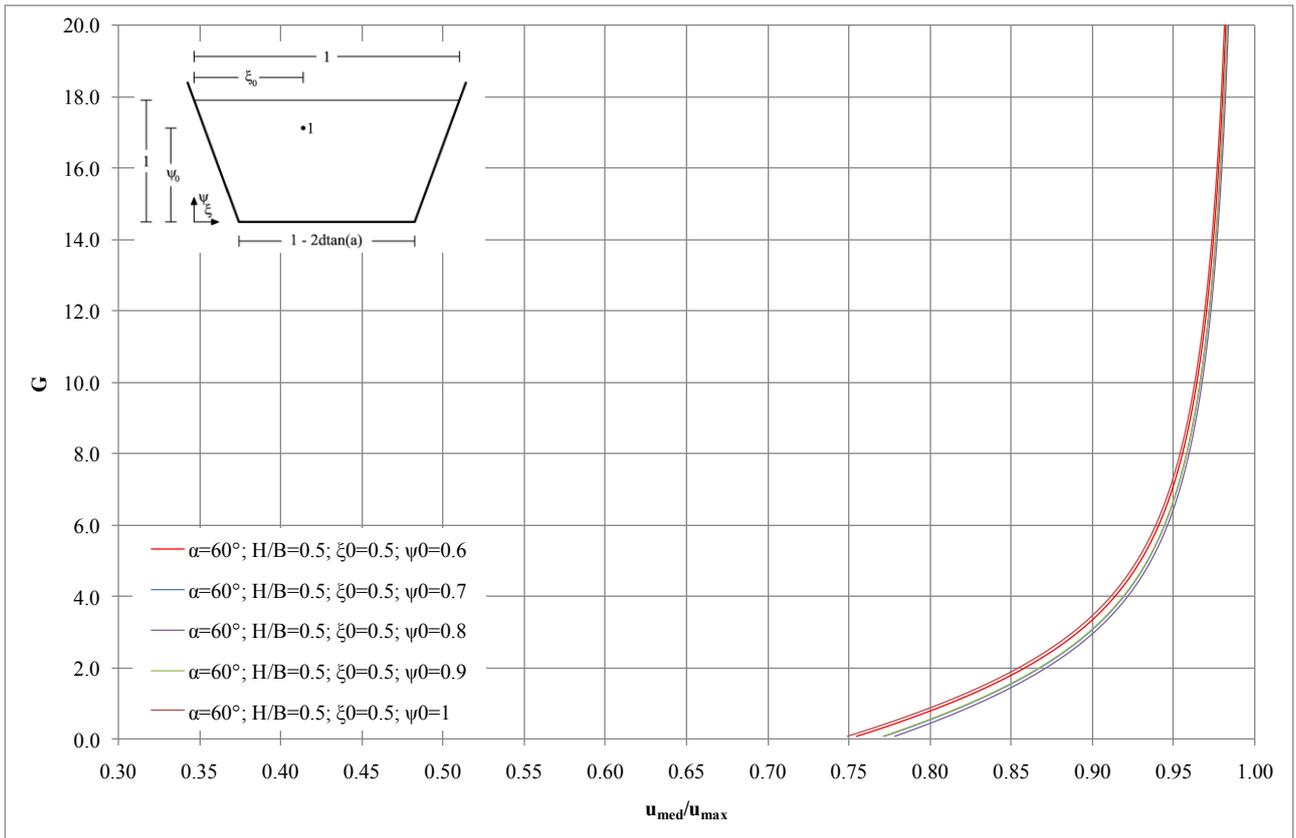


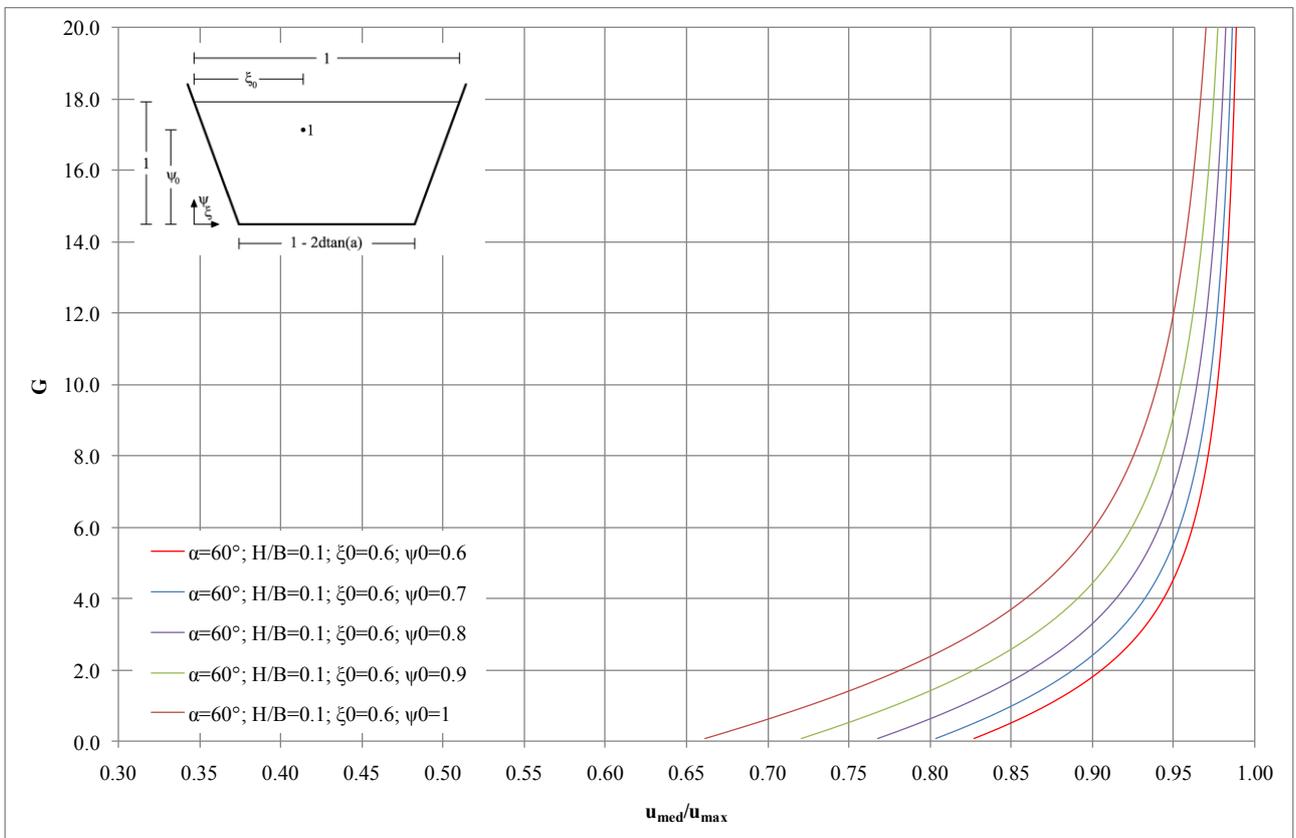
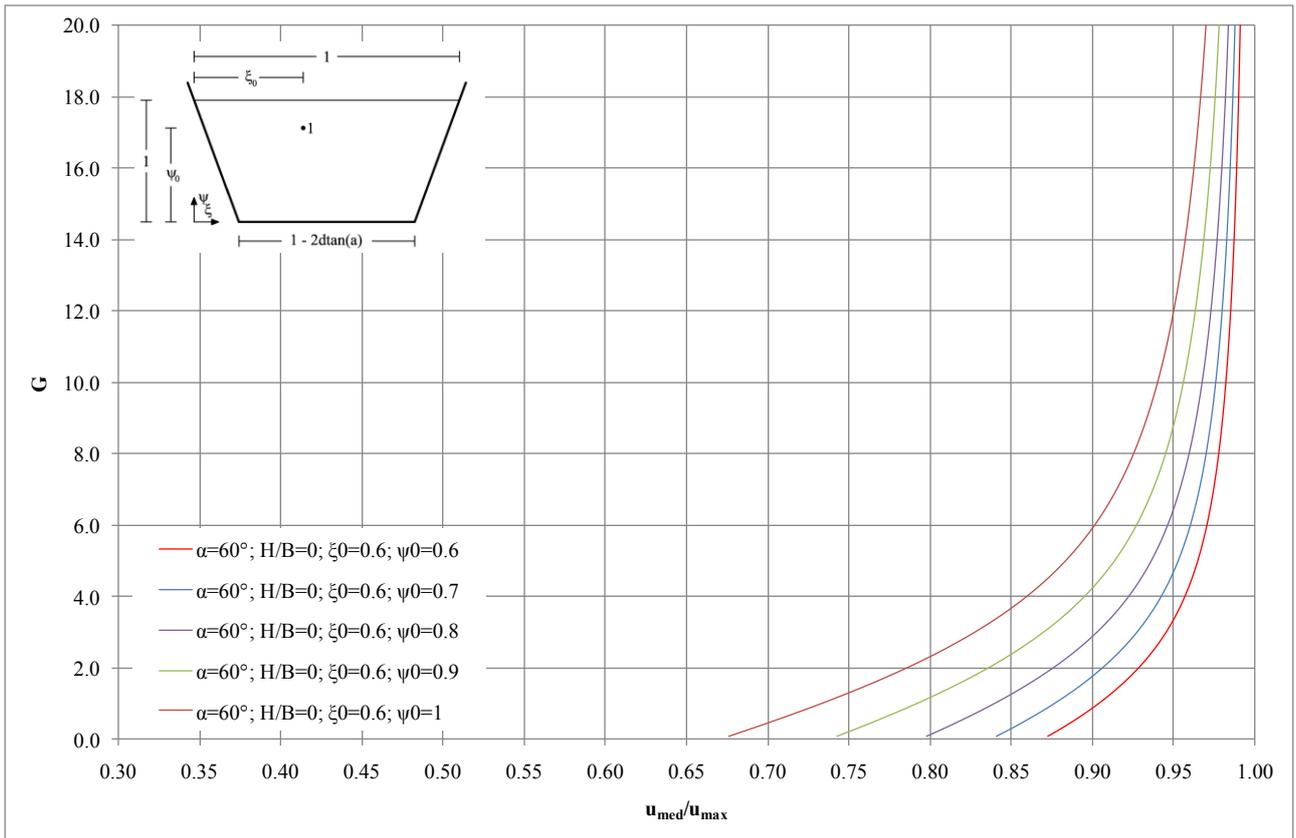


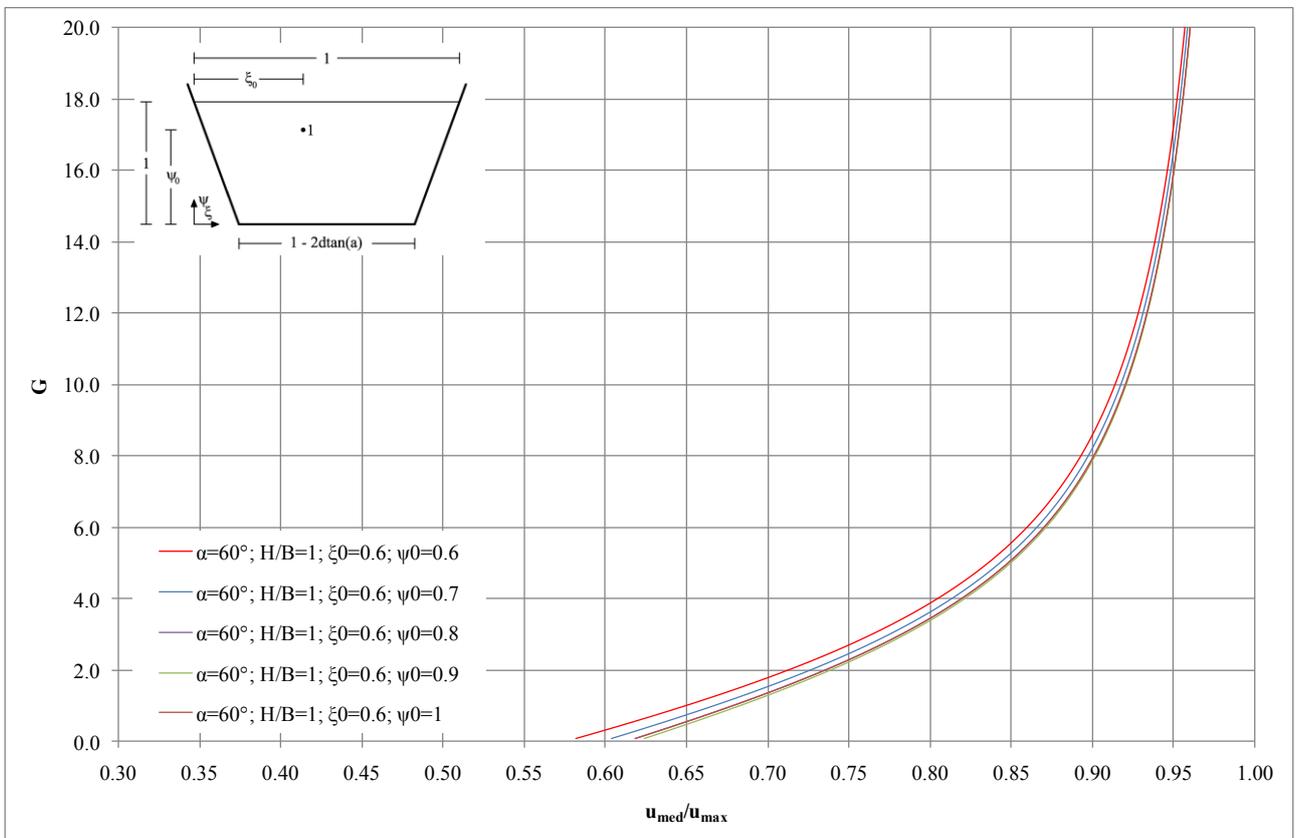
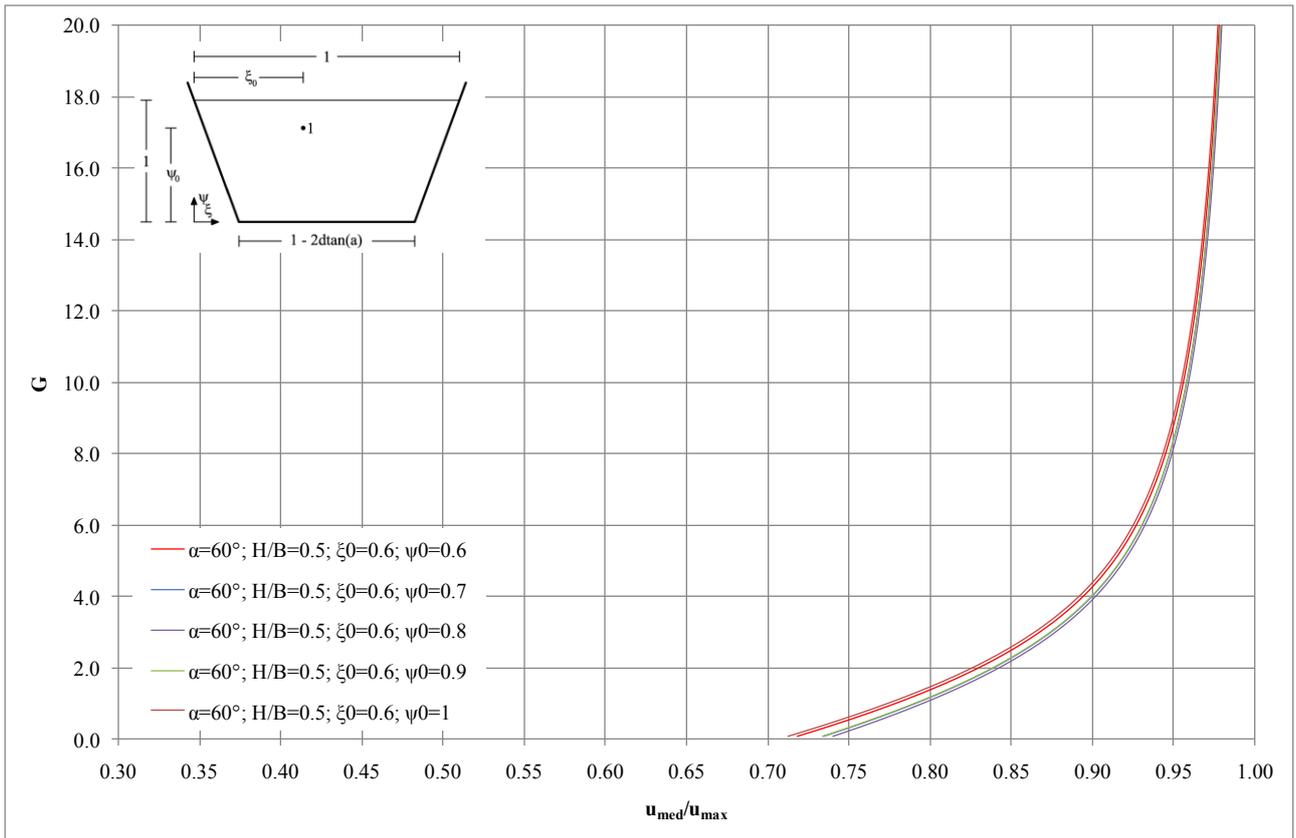


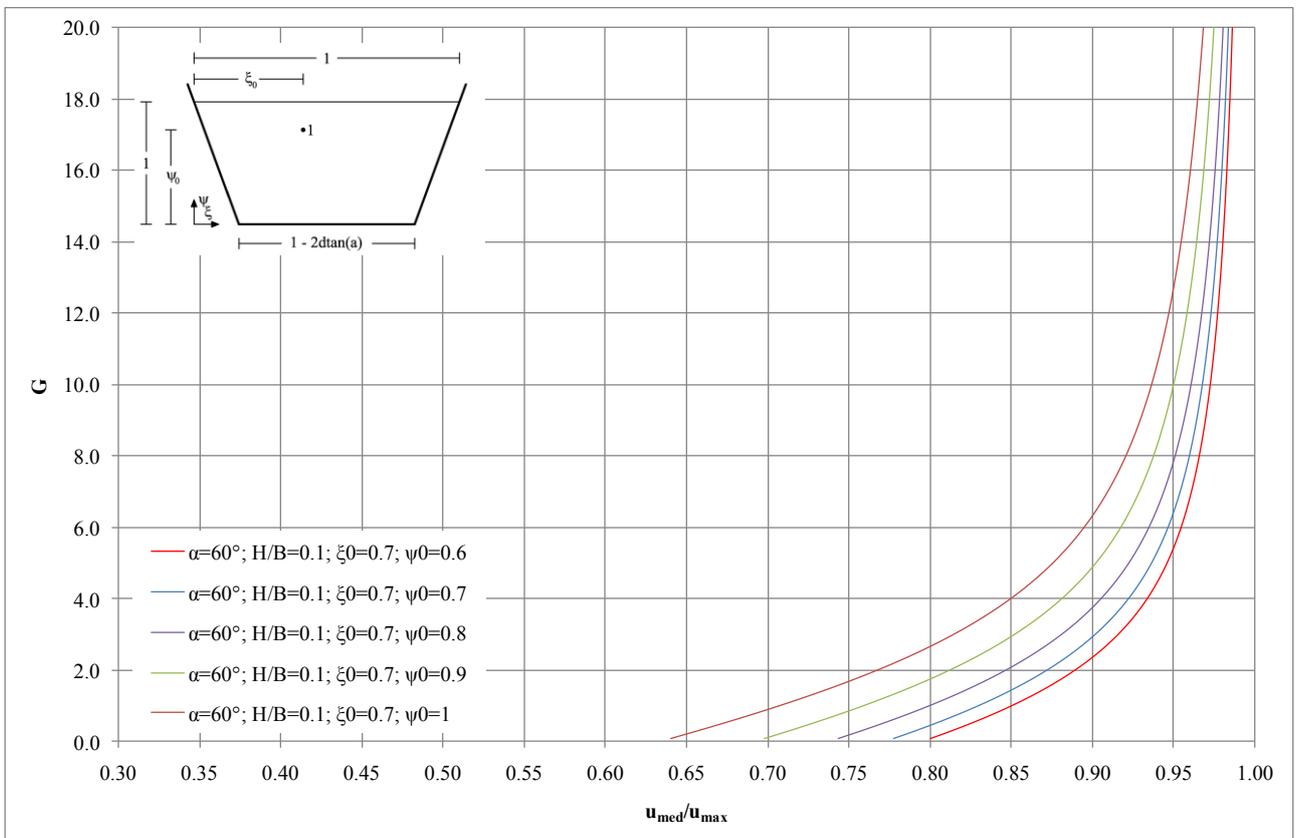
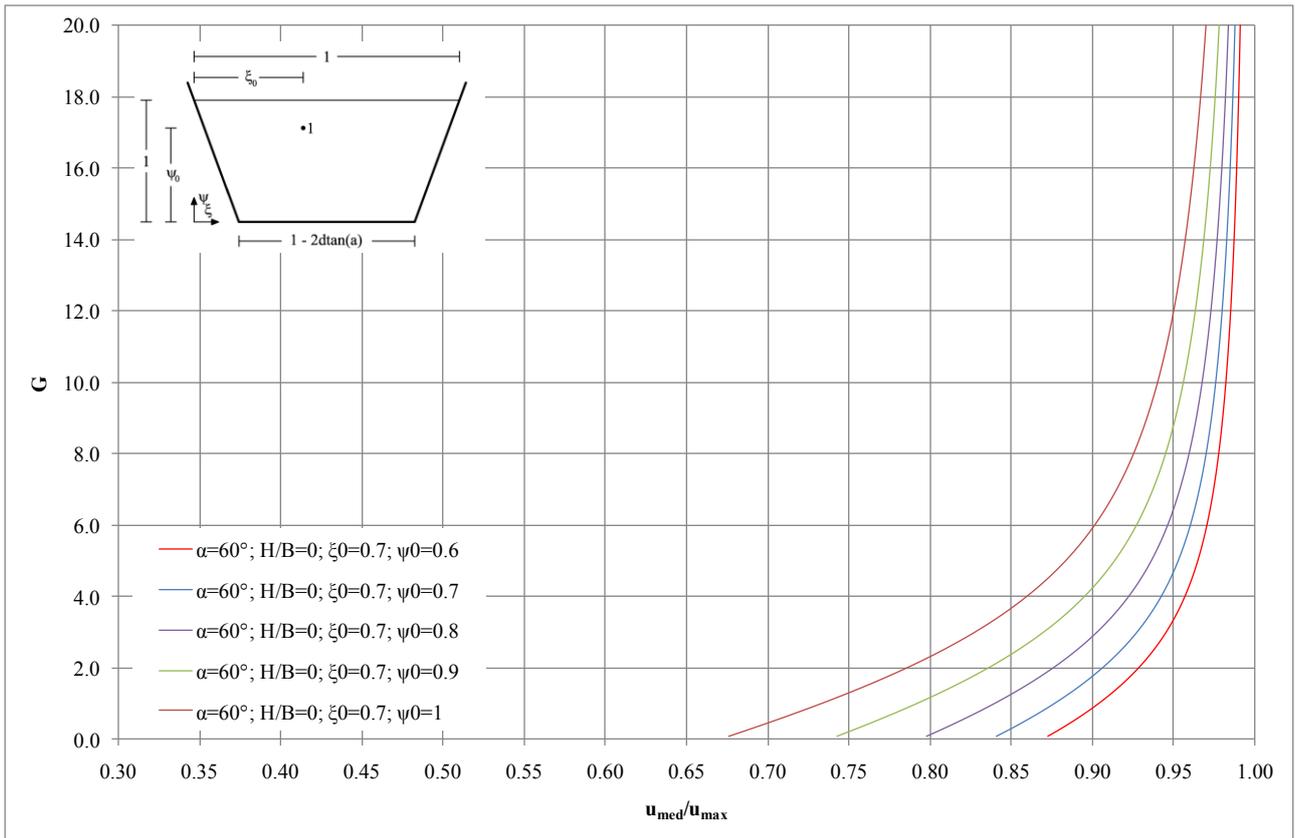


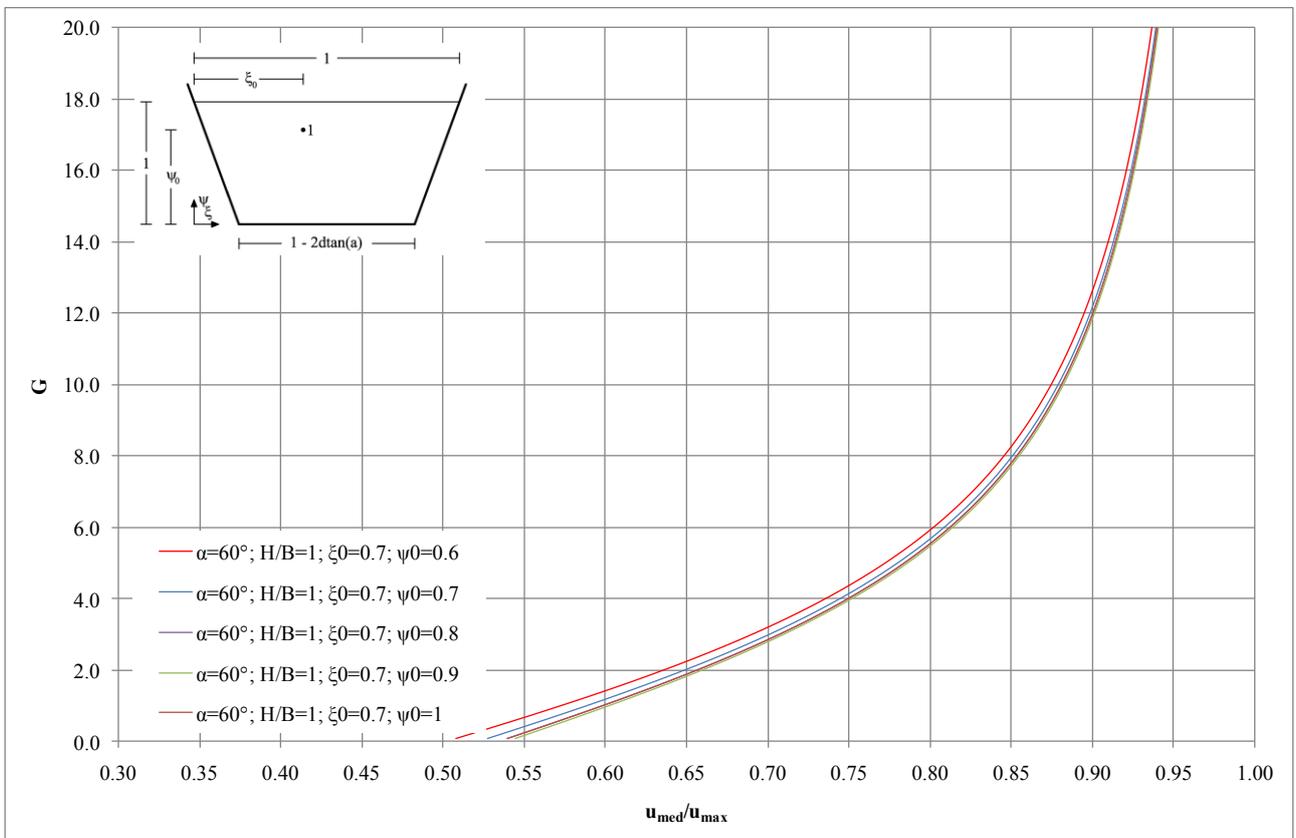
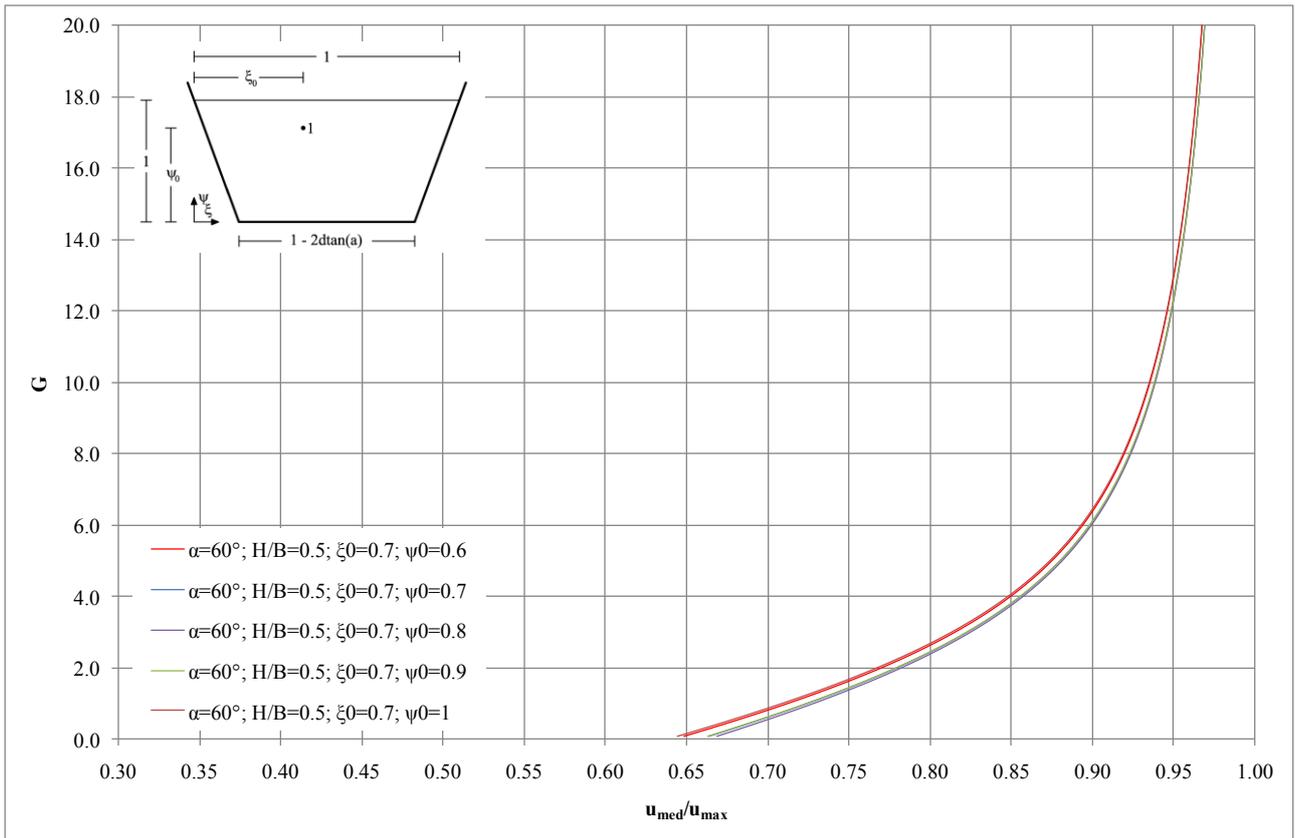












## APPENDICE B

### SCHEDE SINTETICHE RIASSUNTIVE DEI RISULTATI RELATIVI ALLA VALIDAZIONE DEL MODELLO PROPOSTO PER DOMINIO RETTANGOLARE

Nella presente appendice sono riportati i risultati della campagna di misure sperimentali effettuate per validare il modello teorico proposto. Come già indicato nel capitolo 4 per ciascuna prova è stata redatta una scheda riassuntiva contenente tutte le informazioni relative alle misure e alle stime effettuate. La descrizione sintetica della scheda che è stata effettuata nel capitolo 4, viene riportata integralmente qui di seguito per maggiore chiarezza espositiva della presente appendice.

Nella scheda viene riportato il numero progressivo della prova con data e schema della sezione di misura in cui è evidenziata la presenza di scabrezza con un semplice retino sul fondo, inoltre vengono riportati nell'ordine:

a) le caratteristiche di seguito elencate o misurate direttamente o stimate tramite le misure effettuate:

$B$  = la larghezza della sezione;

$H$  = il tirante idrico;

$Q_{\text{misurata}}$  = la portata misurata attraverso misuratore elettromagnetico;

$Q_{\text{integrata}}$  = la portata stimata attraverso integrazione sulla sezione dei valori puntuali di velocità;

$u_{\text{med}}$  = la velocità media di sezione valutata come  $Q_{\text{misurata}}/B/H$

$u_{\text{max}}$  = la velocità massima tra le velocità misurate, considerata la velocità massima della sezione;

scabrezza = la scabrezza del fondo della sezione dove: 0 rappresenta fondo in perspex, 1 fondo in pietrisco di diametro medio 5mm, 2 fondo in pietrisco con diametro medio 10 mm.

$p$  = la pendenza del canale;

$\psi_0$  = la posizione verticale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto al tirante;

$F$  = numero di Froude della corrente calcolato come:  $u_{\text{med}}/(g \cdot H)^{1/2}$ ;

$R$  = raggio idraulico della sezione calcolato come:  $B \cdot H / (2H + B)$ ;

$Re$  = numero di Reynolds della corrente calcolato come:  $u_{\text{med}} \cdot 4 \cdot R / \nu$ ;

$u_{\text{med}}/u_{\text{max}}$  = rapporto tra velocità media e velocità massima;

$H/B$  = rapporto tra tirante e larghezza della sezione;

$M$  = il parametro entropico relativo al modello 2D proposto da Chiu (cfr punto c);

$Ni$  = il secondo parametro del modello 2D di Chiu (cfr punto c);

$G$  = il parametro entropico relativo al modello 2D messo a punto durante il dottorato (cfr punto d);

- b) le tabelle relative alle velocità misurate in canaletta: la prima riportata con coordinate e velocità dimensionali, la seconda riportata con coordinate adimensionali  $(\xi, \psi)$  e velocità adimensionali  $(u/u_{max})$ ;
- c) le tabelle relative alle velocità stimate adottando il modello di Chiu bidimensionale come descritto al paragrafo 2.3.1 i cui parametri fondamentali  $M$  ed  $N_i$  sono riportati nella tabella di cui al punto A;
- d) le tabelle relative alle velocità stimate adottando il modello sviluppato durante il dottorato di ricerca; attesa la simmetria della distribuzione la formula da utilizzare per stimare le velocità è quella ricavata in funzione della  $F(u)$  espressa dalla (3.19); la formula completa, per chiarezza, viene di seguito riportata:

$$u = \frac{u_{max}}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot [1 - \xi^2]^{\frac{H}{B}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} - \left( \frac{\Psi}{2} \right)^{2 \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0|}} \right] \right\} \quad (4.3)$$

in cui  $G$  si ricava risolvendo l'espressione 4.2.

- e) i grafici relativi al confronto tra i valori di velocità puntuale misurati, i profili ricavati con il modello bidimensionale sintetizzato nell'equazione (4.3) e quelli ricavati col modello di Chiu;
- f) una figura che riporta le isotachie ricavate interpolando i valori di velocità misurati;
- g) una figura che riporta le isotachie ricavate a mezzo della (4.3);
- h) un diagramma che riporta due serie di dati una relativa alle velocità stimate con il modello di Chiu e l'altra relativa a quelle stimate con la (4.3); in ascisse ci sono le velocità misurate e in ordinata quelle stimate entrambe rapportate a quella massima; il grafico evidenzia la corrispondenza velocità misurata e velocità stimata che è tanto maggiore quanto più i punti si avvicinano alla retta bisettrice.

1.a) prova n°1 del 18 maggio 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	<b>B</b> =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max}$ =	0.887
	<b>H</b> =	9.4 cm	p =		H/B =	0.235
	$Q_{misurata}$ =		$\psi_0$ =	0.927	M =	3.704
	$Q_{integrata}$ =	21.57 l/s	F =	0.597	Ni =	1.500
	$u_{med}$ =	57.36 cm/s	R =	6.39 cm	G =	5.247
	$u_{max}$ =	64.67 cm/s	Re =	146704		

1.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\x	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	18.5	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	0.925	0.975
1.0	50.91	49.84	50.07	50.61	51.60	50.69	50.67	53.50	55.07	53.87	0.106	0.787	0.771	0.774	0.783	0.798	0.784	0.784	0.827	0.852	0.833
2.0	55.14	53.51	53.93	53.42	53.36	55.99	54.71	56.18	58.74	59.40	0.213	0.853	0.827	0.834	0.826	0.825	0.866	0.846	0.869	0.908	0.919
3.0	57.08	53.91	55.33	54.58	54.99	56.09	57.56	58.47	60.58	61.29	0.319	0.883	0.834	0.856	0.844	0.850	0.867	0.890	0.904	0.937	0.948
5.0	57.97	59.51	59.05	58.92	58.78	58.97	60.00	62.24	62.65	63.19	0.532	0.896	0.920	0.913	0.911	0.909	0.912	0.928	0.963	0.969	0.977
7.0	59.16	59.37	60.13	60.70	60.56	61.84	61.00	61.84	64.38	62.79	0.745	0.915	0.918	0.930	0.939	0.937	0.956	0.943	0.956	0.996	0.971
8.0	58.92	58.18	60.77	62.42	62.01	61.73	63.81	64.71	62.25	62.84	0.851	0.911	0.900	0.940	0.965	0.959	0.955	0.987	1.001	0.963	0.972

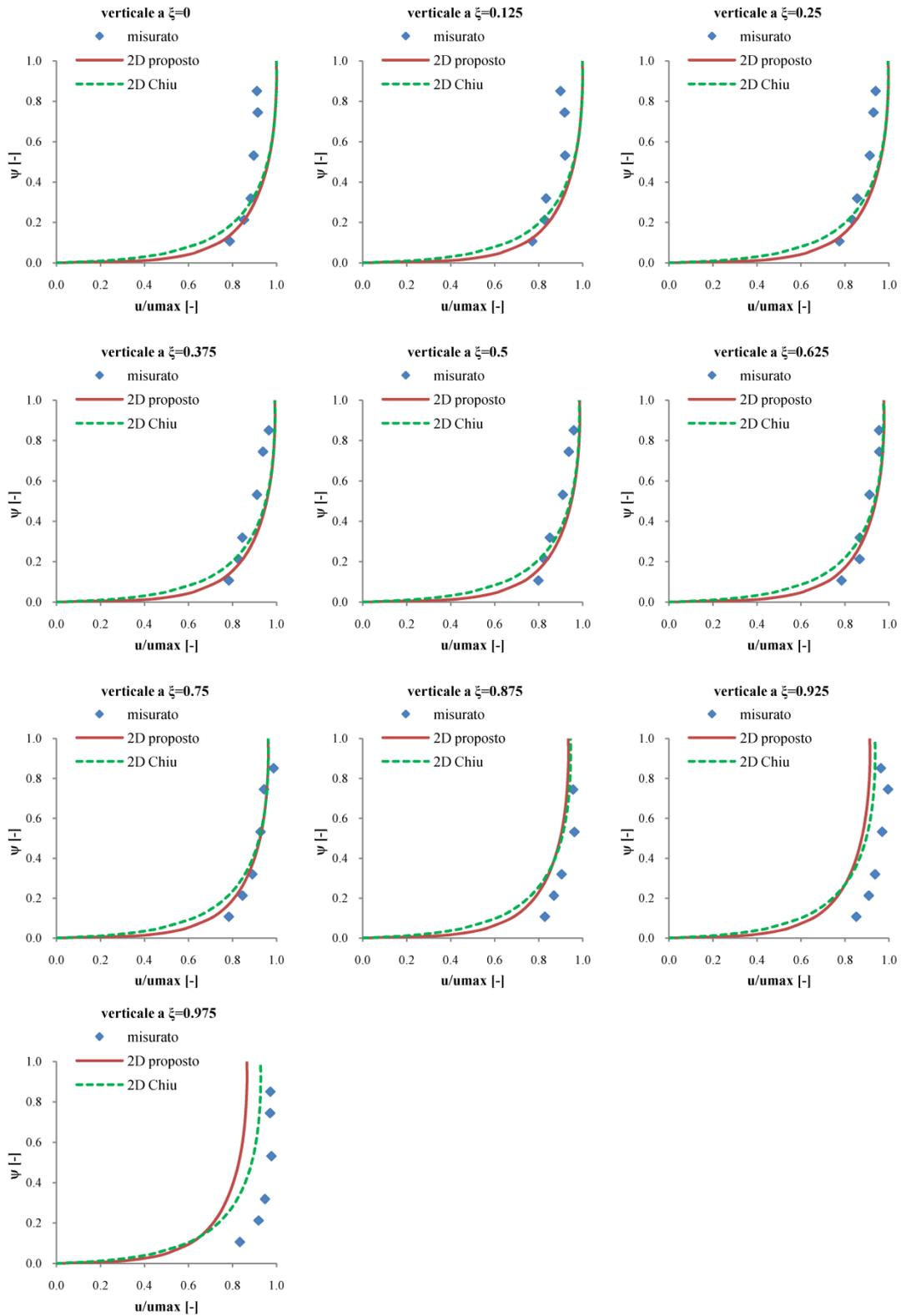
1.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\x	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	18.5	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	0.925	0.975
1.0	43.41	43.36	43.21	42.93	42.51	41.93	41.15	40.13	39.65	39.12	0.106	0.281	0.280	0.279	0.278	0.275	0.271	0.266	0.260	0.256	0.253
2.0	52.86	52.81	52.65	52.36	51.92	51.31	50.50	49.44	48.94	48.38	0.213	0.817	0.817	0.814	0.810	0.803	0.794	0.781	0.765	0.757	0.748
3.0	57.72	57.67	57.50	57.21	56.77	56.15	55.33	54.26	53.74	53.18	0.319	0.893	0.892	0.889	0.885	0.878	0.868	0.856	0.839	0.831	0.822
5.0	62.47	62.42	62.25	61.96	61.51	60.89	60.06	58.97	58.46	57.88	0.532	0.966	0.965	0.963	0.958	0.951	0.942	0.929	0.912	0.904	0.895
7.0	64.29	64.24	64.07	63.77	63.33	62.70	61.87	60.78	60.26	59.69	0.745	0.994	0.993	0.991	0.986	0.979	0.970	0.957	0.940	0.932	0.923
8.0	64.61	64.55	64.39	64.09	63.64	63.02	62.18	61.09	60.57	60.00	0.851	0.999	0.998	0.996	0.991	0.984	0.975	0.962	0.945	0.937	0.928

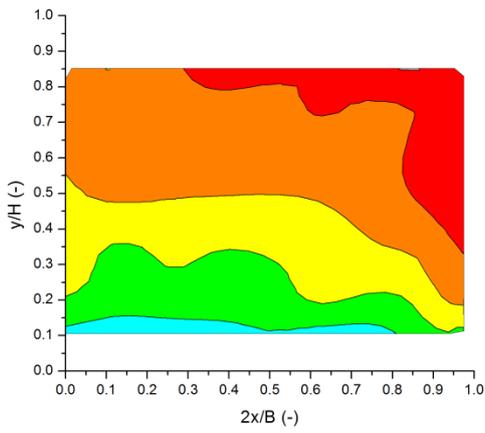
1.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\x	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	18.5	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	0.925	0.975
1.0	48.45	48.40	48.26	48.02	47.63	47.04	46.10	44.34	42.98	39.98	0.106	0.749	0.749	0.746	0.743	0.737	0.727	0.713	0.686	0.665	0.618
2.0	55.19	55.15	55.01	54.76	54.37	53.77	52.83	51.05	49.67	46.62	0.213	0.854	0.853	0.851	0.847	0.841	0.832	0.817	0.789	0.768	0.721
3.0	58.80	58.75	58.61	58.36	57.97	57.37	56.42	54.64	53.25	50.19	0.319	0.909	0.909	0.906	0.903	0.896	0.887	0.873	0.845	0.823	0.776
5.0	62.60	62.56	62.42	62.17	61.78	61.18	60.23	58.43	57.04	53.97	0.532	0.968	0.967	0.965	0.961	0.955	0.946	0.931	0.904	0.882	0.835
7.0	64.27	64.22	64.08	63.83	63.44	62.84	61.89	60.09	58.70	55.62	0.745	0.994	0.993	0.991	0.987	0.981	0.972	0.957	0.929	0.908	0.860
8.0	64.60	64.55	64.41	64.16	63.77	63.17	62.22	60.42	59.03	55.95	0.851	0.999	0.998	0.996	0.992	0.986	0.977	0.962	0.934	0.913	0.865

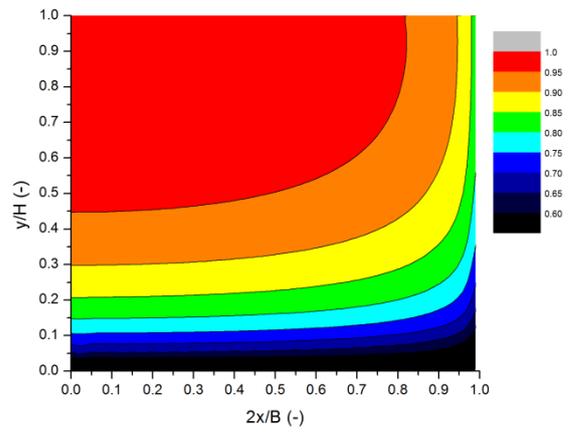
1.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



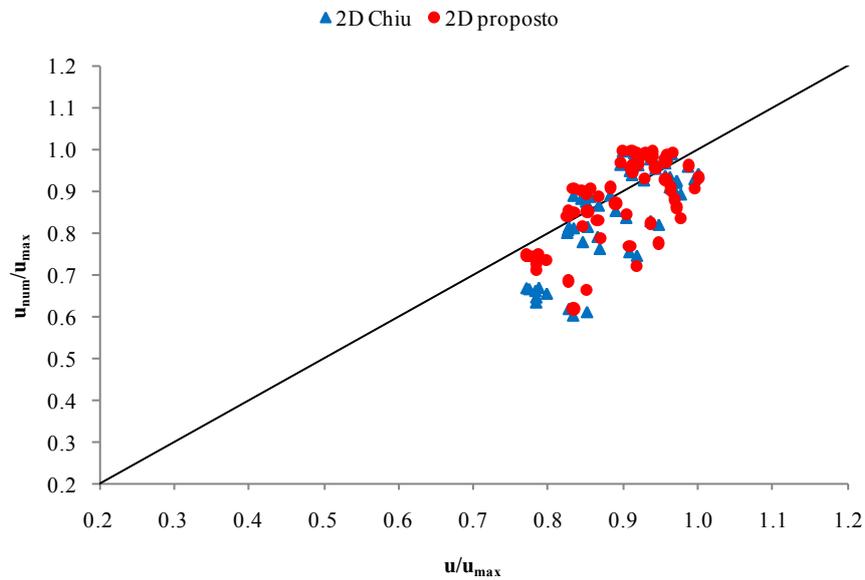
1.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



1.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



1.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



2.a) prova n°2 del 18 maggio 2009b; caratteristiche generali relative alla prova

	<b>B =</b> 40 cm	scabrezza 0	$u_{med}/ u_{max} =$ 0.856
	<b>H =</b> 9 cm	p = 0.1 %	H/B = 0.225
	$Q_{misurata} =$	$\psi_0 =$ 0.990	M = 4.020
	$Q_{integrata} =$ 19.37 l/s	F = 0.573	Ni = 1.450
	$u_{med} =$ 53.8 cm/s	R = 6.21 cm	G = 4.683
	$u_{max} =$ 62.85 cm/s	Re = 133560.2	

2.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\X	0.0	4.0	7.0	10.0	12.5	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	y\X	0.000	0.200	0.350	0.500	0.625	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
0.9	42.40	45.11	46.12	44.93	44.33	49.22	48.68	49.15	48.45	48.19	0.095	0.675	0.718	0.734	0.715	0.705	0.783	0.774	0.782	0.771	0.767
1.7	49.27	50.41	47.59	49.74	49.77	51.52	53.19	54.04	52.96	53.52	0.190	0.784	0.802	0.757	0.791	0.792	0.820	0.846	0.860	0.843	0.852
2.6	51.75	51.80	52.32	52.09	53.47	54.42	55.34	57.22	56.21	52.56	0.286	0.823	0.824	0.832	0.829	0.851	0.866	0.881	0.910	0.894	0.836
3.4	52.99	54.81	54.33	54.18	54.42	57.14	57.21	58.85	56.03	54.55	0.381	0.843	0.872	0.864	0.862	0.866	0.909	0.910	0.936	0.891	0.868
4.3	53.36	54.27	56.99	54.05	57.55	58.33	57.67	58.19	58.41	55.52	0.476	0.849	0.863	0.907	0.860	0.916	0.928	0.918	0.926	0.929	0.883
5.1	53.85	56.41	56.32	56.47	58.00	57.22	58.51	60.69	59.79	56.01	0.571	0.857	0.897	0.896	0.898	0.923	0.910	0.931	0.966	0.951	0.891
6.0	54.74	56.23	58.99	57.94	59.15	59.68	60.57	60.43	57.64	56.95	0.667	0.871	0.895	0.939	0.922	0.941	0.950	0.964	0.962	0.917	0.906
6.9	55.18	54.86	56.44	58.66	60.81	60.46	60.63	62.85	62.26	56.99	0.762	0.878	0.873	0.898	0.933	0.968	0.962	0.965	1.000	0.991	0.907
7.7	54.64	56.48	58.22	59.96	58.99	60.27	61.16	60.62	57.02	55.97	0.857	0.869	0.899	0.926	0.954	0.939	0.959	0.973	0.965	0.907	0.891
8.6	55.50	57.25	59.18	60.71	59.26	61.73	60.48	57.41	53.12	58.15	0.952	0.883	0.911	0.942	0.966	0.943	0.982	0.962	0.913	0.845	0.925

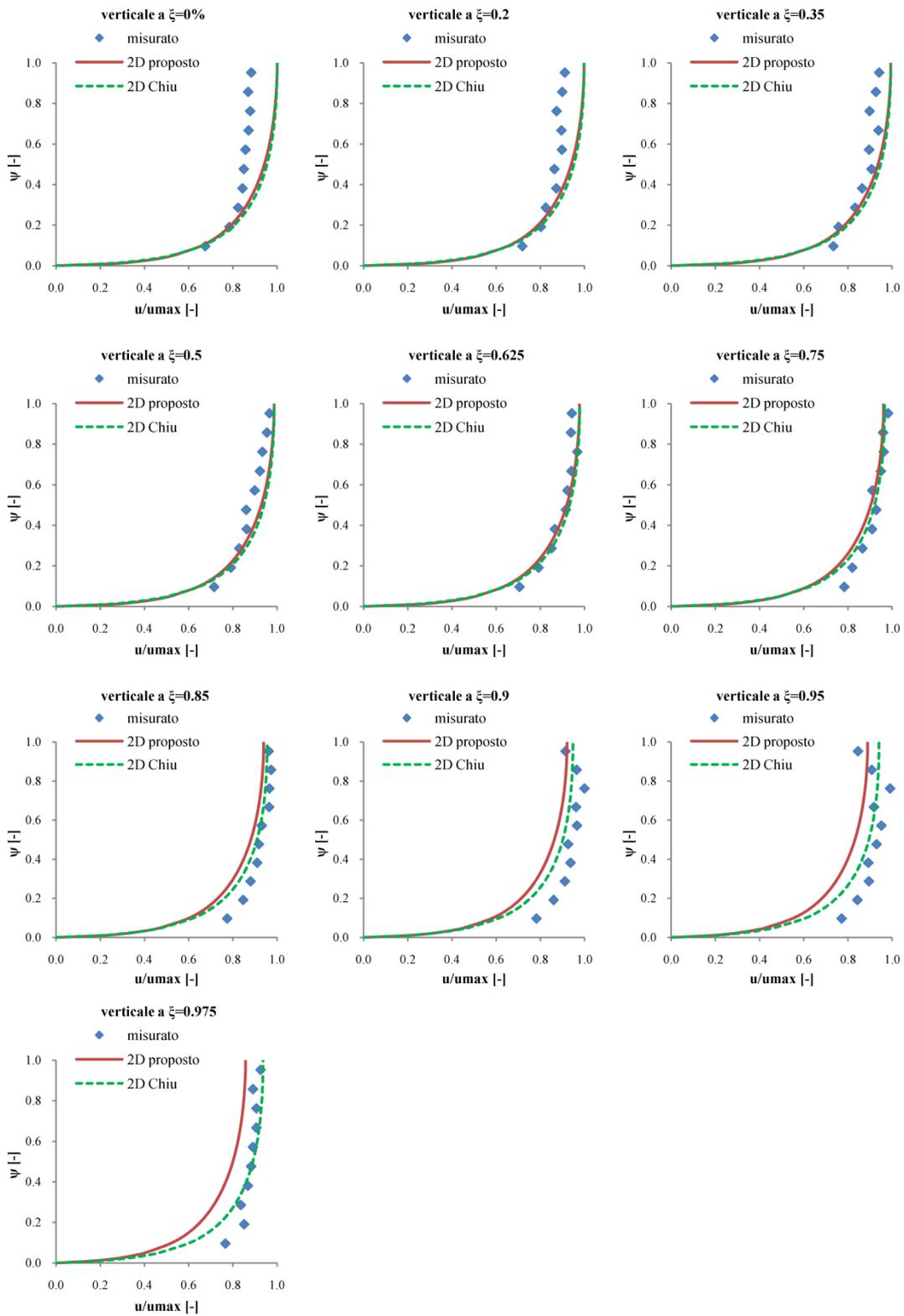
2.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\X	0.0	4.0	7.0	10.0	12.5	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	0	0.000	0.200	0.350	0.500	0.625	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
0.9	41.25	41.14	40.88	40.46	39.95	39.26	38.57	38.16	37.72	37.48	0.095	0.656	0.655	0.651	0.644	0.636	0.625	0.614	0.607	0.600	0.596
1.7	50.07	49.96	49.70	49.25	48.72	48.01	47.29	46.87	46.41	46.16	0.190	0.797	0.795	0.791	0.784	0.775	0.764	0.752	0.746	0.738	0.734
2.6	54.74	54.62	54.36	53.91	53.37	52.65	51.92	51.50	51.03	50.78	0.286	0.871	0.869	0.865	0.858	0.849	0.838	0.826	0.819	0.812	0.808
3.4	57.65	57.53	57.27	56.82	56.28	55.55	54.82	54.39	53.92	53.66	0.381	0.917	0.915	0.911	0.904	0.895	0.884	0.872	0.865	0.858	0.854
4.3	59.59	59.47	59.20	58.75	58.21	57.49	56.75	56.32	55.84	55.59	0.476	0.948	0.946	0.942	0.935	0.926	0.915	0.903	0.896	0.889	0.884
5.1	60.91	60.79	60.52	60.07	59.53	58.80	58.06	57.63	57.16	56.90	0.571	0.969	0.967	0.963	0.956	0.947	0.936	0.924	0.917	0.909	0.905
6.0	61.79	61.68	61.41	60.96	60.41	59.69	58.95	58.51	58.04	57.78	0.667	0.983	0.981	0.977	0.970	0.961	0.950	0.938	0.931	0.923	0.919
6.9	62.37	62.25	61.98	61.53	60.98	60.26	59.52	59.08	58.61	58.35	0.762	0.992	0.990	0.986	0.979	0.970	0.959	0.947	0.940	0.932	0.928
7.7	62.70	62.58	62.31	61.86	61.32	60.59	59.85	59.41	58.94	58.68	0.857	0.998	0.996	0.991	0.984	0.976	0.964	0.952	0.945	0.938	0.934
8.6	62.84	62.72	62.45	62.00	61.46	60.73	59.99	59.55	59.08	58.82	0.952	1.000	0.998	0.994	0.986	0.978	0.966	0.954	0.948	0.940	0.936

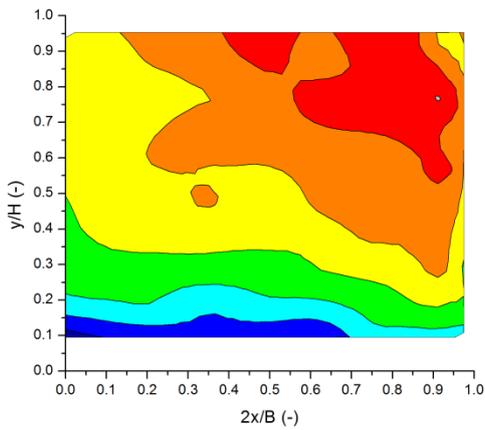
2.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
$y \setminus x$	0.0	4.0	7.0	10.0	12.5	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.200	0.350	0.500	0.625	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
<b>0.9</b>	41.02	40.90	40.64	40.19	39.59	38.65	37.35	36.28	34.41	32.53	<b>0.095</b>	0.653	0.651	0.647	0.639	0.630	0.615	0.594	0.577	0.548	0.518
<b>1.7</b>	49.18	49.06	48.80	48.33	47.72	46.75	45.42	44.32	42.38	40.42	<b>0.190</b>	0.782	0.781	0.776	0.769	0.759	0.744	0.723	0.705	0.674	0.643
<b>2.6</b>	53.70	53.58	53.32	52.85	52.24	51.26	49.91	48.80	46.84	44.85	<b>0.286</b>	0.854	0.853	0.848	0.841	0.831	0.816	0.794	0.776	0.745	0.714
<b>3.4</b>	56.68	56.56	56.29	55.82	55.21	54.22	52.87	51.75	49.78	47.78	<b>0.381</b>	0.902	0.900	0.896	0.888	0.878	0.863	0.841	0.823	0.792	0.760
<b>4.3</b>	58.78	58.66	58.39	57.92	57.30	56.32	54.96	53.84	51.86	49.86	<b>0.476</b>	0.935	0.933	0.929	0.922	0.912	0.896	0.875	0.857	0.825	0.793
<b>5.1</b>	60.30	60.17	59.91	59.44	58.82	57.83	56.47	55.35	53.37	51.36	<b>0.571</b>	0.959	0.957	0.953	0.946	0.936	0.920	0.899	0.881	0.849	0.817
<b>6.0</b>	61.39	61.27	61.00	60.53	59.91	58.92	57.56	56.44	54.45	52.44	<b>0.667</b>	0.977	0.975	0.971	0.963	0.953	0.937	0.916	0.898	0.866	0.834
<b>6.9</b>	62.14	62.02	61.75	61.28	60.66	59.67	58.32	57.19	55.20	53.19	<b>0.762</b>	0.989	0.987	0.983	0.975	0.965	0.949	0.928	0.910	0.878	0.846
<b>7.7</b>	62.62	62.49	62.22	61.76	61.13	60.14	58.79	57.66	55.67	53.65	<b>0.857</b>	0.996	0.994	0.990	0.983	0.973	0.957	0.935	0.917	0.886	0.854
<b>8.6</b>	62.83	62.71	62.44	61.97	61.35	60.36	59.00	57.87	55.89	53.87	<b>0.952</b>	1.000	0.998	0.993	0.986	0.976	0.960	0.939	0.921	0.889	0.857

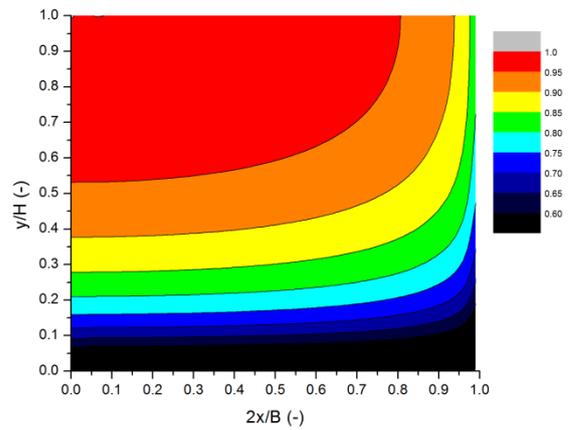
2.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



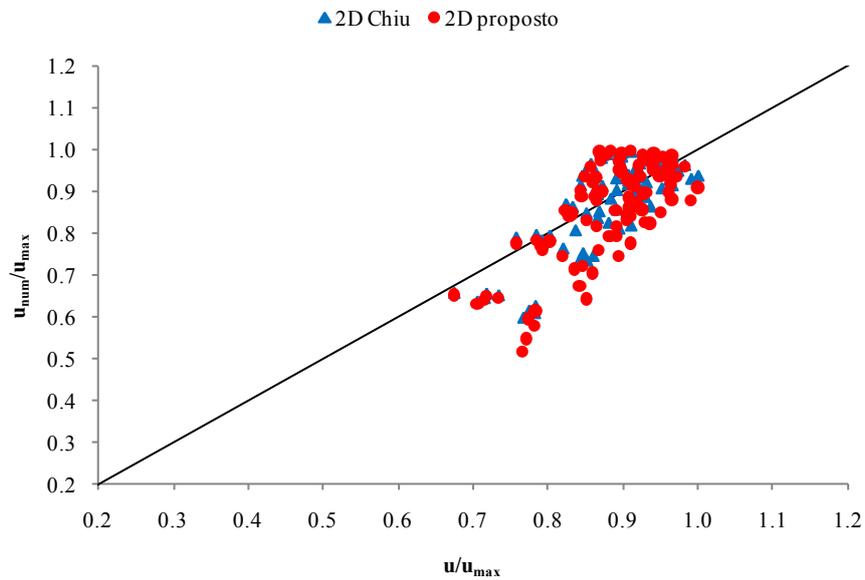
2.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



2.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



2.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



3.a) prova n°3 del 18 maggio 2009c; caratteristiche generali relative alla prova

	<b>B</b> =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max}$ =	0.884
	<b>H</b> =	9.2 cm	p =	0.2 %	H/B =	0.230
	$Q_{misurata}$ =		$\psi_0$ =	0.752	M =	2.841
	$Q_{integrata}$ =	17.04 l/s	F =	0.488	Ni =	1.695
	$u_{med}$ =	46.31 cm/s	R =	6.3 cm	G =	3.219
	$u_{max}$ =	52.39 cm/s	Re =	116731.1		

3.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\lx	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.150	0.300	0.450	0.600	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
1.0	38.23	38.52	38.22	39.30	40.70	43.77	43.04	42.31	38.52	37.17	0.109	0.730	0.735	0.729	0.750	0.777	0.835	0.821	0.807	0.735	0.709
2.0	42.74	42.71	42.37	41.83	44.09	47.70	47.03	45.32	40.99	38.29	0.217	0.816	0.815	0.809	0.798	0.842	0.911	0.898	0.865	0.782	0.731
3.0	44.15	44.60	42.93	43.52	46.21	49.01	48.91	45.50	41.88	40.49	0.326	0.843	0.851	0.819	0.831	0.882	0.935	0.933	0.868	0.799	0.773
4.0	45.83	45.20	44.53	45.93	47.14	48.85	49.50	48.20	44.01	40.87	0.435	0.875	0.863	0.850	0.877	0.900	0.932	0.945	0.920	0.840	0.780
6.0	48.19	47.95	48.83	47.29	49.55	51.22	50.72	50.33	46.42	44.57	0.652	0.920	0.915	0.932	0.903	0.946	0.978	0.968	0.961	0.886	0.851
7.0	47.92	48.51	49.34	48.58	49.82	51.37	51.10	49.29	48.88	41.31	0.761	0.915	0.926	0.942	0.927	0.951	0.980	0.975	0.941	0.933	0.789
8.0	49.98	49.52	51.16	51.76	51.07	52.39	49.61	49.74	46.29	43.18	0.870	0.954	0.945	0.976	0.988	0.975	1.000	0.947	0.949	0.883	0.824

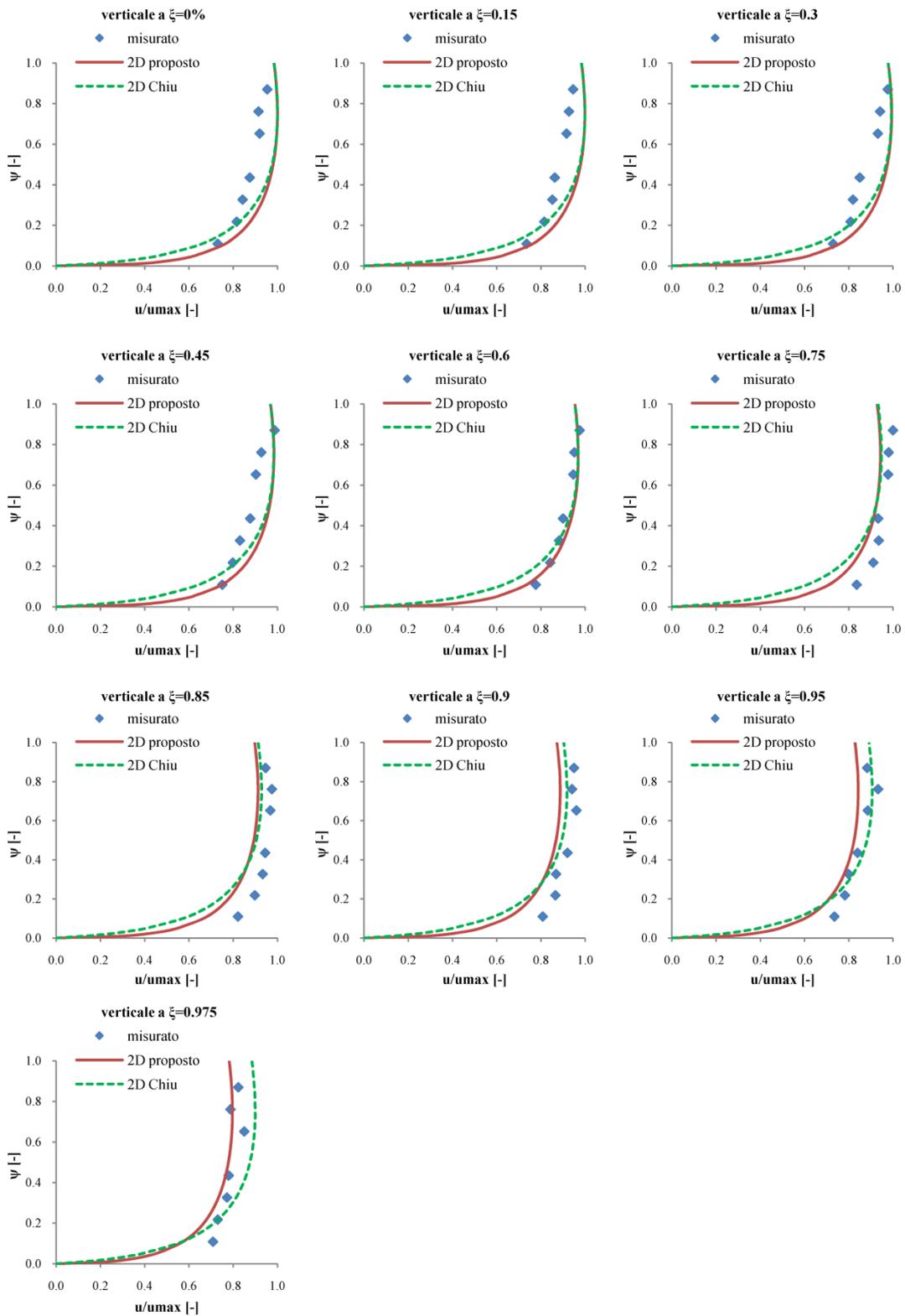
3.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\lx	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.150	0.300	0.450	0.600	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
1.0	34.48	34.40	34.15	33.69	32.99	32.00	31.15	30.65	30.11	29.82	0.109	0.658	0.657	0.652	0.643	0.630	0.611	0.595	0.585	0.575	0.569
2.0	43.36	43.27	43.00	42.51	41.76	40.69	39.77	39.23	38.64	38.32	0.217	0.828	0.826	0.821	0.811	0.797	0.777	0.759	0.749	0.737	0.731
3.0	47.76	47.68	47.40	46.90	46.13	45.03	44.08	43.53	42.92	42.59	0.326	0.912	0.910	0.905	0.895	0.880	0.860	0.841	0.831	0.819	0.813
4.0	50.21	50.13	49.85	49.34	48.56	47.46	46.49	45.93	45.32	44.99	0.435	0.958	0.957	0.951	0.942	0.927	0.906	0.887	0.877	0.865	0.859
6.0	52.23	52.14	51.86	51.35	50.56	49.44	48.47	47.91	47.29	46.95	0.652	0.997	0.995	0.990	0.980	0.965	0.944	0.925	0.914	0.903	0.896
7.0	52.39	52.30	52.02	51.51	50.73	49.61	48.64	48.07	47.45	47.12	0.761	1.000	0.998	0.993	0.983	0.968	0.947	0.928	0.918	0.906	0.899
8.0	52.20	52.11	51.83	51.32	50.54	49.42	48.45	47.88	47.26	46.93	0.870	0.996	0.995	0.989	0.980	0.965	0.943	0.925	0.914	0.902	0.896

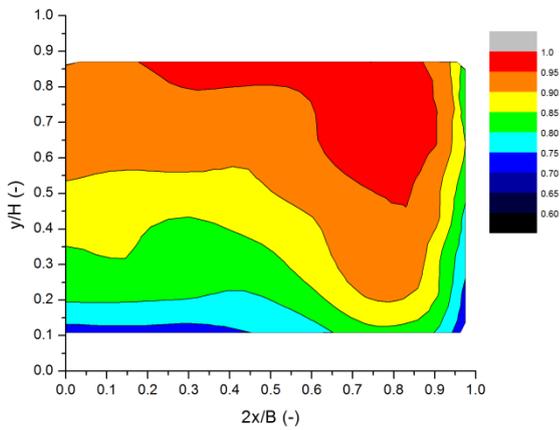
3.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s											coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$										
y\lx	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	17.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.150	0.300	0.450	0.600	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975
1.0	39.97	39.89	39.64	39.19	38.45	37.16	35.64	34.39	32.21	30.04	0.109	0.763	0.761	0.757	0.748	0.734	0.709	0.680	0.656	0.615	0.573
2.0	45.92	45.84	45.59	45.12	44.35	43.03	41.45	40.15	37.88	35.60	0.217	0.876	0.875	0.870	0.861	0.847	0.821	0.791	0.766	0.723	0.679
3.0	48.93	48.85	48.60	48.13	47.35	46.01	44.41	43.09	40.78	38.46	0.326	0.934	0.932	0.928	0.919	0.904	0.878	0.848	0.822	0.778	0.734
4.0	50.69	50.61	50.36	49.88	49.10	47.75	46.14	44.81	42.48	40.14	0.435	0.968	0.966	0.961	0.952	0.937	0.911	0.881	0.855	0.811	0.766
6.0	52.25	52.17	51.91	51.44	50.65	49.29	47.67	46.33	43.99	41.63	0.652	0.997	0.996	0.991	0.982	0.967	0.941	0.910	0.884	0.840	0.795
7.0	52.39	52.31	52.05	51.58	50.79	49.43	47.81	46.47	44.13	41.77	0.761	1.000	0.998	0.994	0.984	0.969	0.944	0.913	0.887	0.842	0.797
8.0	52.21	52.12	51.87	51.39	50.61	49.25	47.63	46.29	43.95	41.59	0.870	0.996	0.995	0.990	0.981	0.966	0.940	0.909	0.884	0.839	0.794

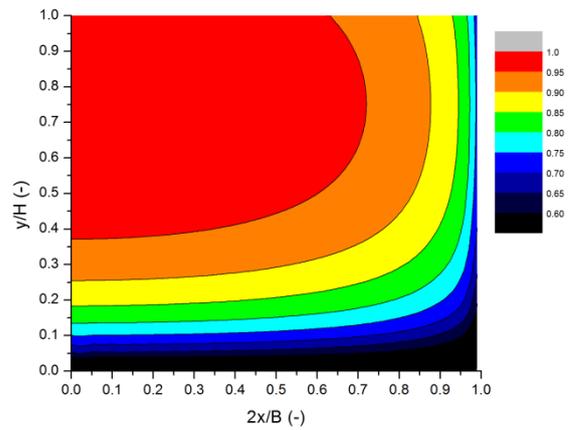
3.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



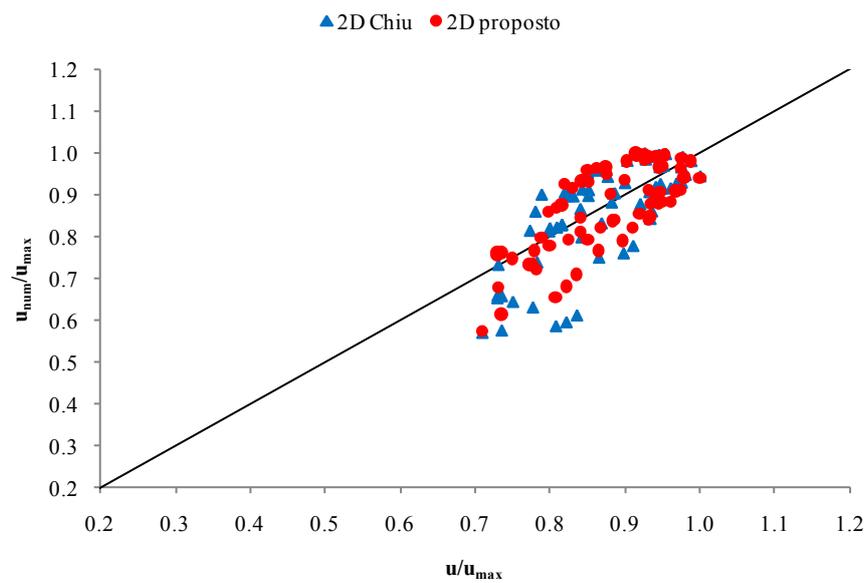
3.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



3.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



3.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



4.a) prova n°4 del 28 maggio 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.908
	H =	9.3 cm	p =	0.1 %	H/B =	0.233
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.705	M =	2.613
	$Q_{integrata} =$	20.19 l/s	F =	0.568	Ni =	1.675
	$u_{med} =$	54.27 cm/s	R =	6.35 cm	G =	2.100
	$u_{max} =$	59.78 cm/s	Re =	137806.6		

4.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	52.65	49.98	44.22	48.21	49.30	48.36	44.30	0.108	0.881	0.836	0.740	0.806	0.825	0.809	0.741
2.0	57.09	54.37	48.98	52.34	54.58	51.30	47.13	0.215	0.955	0.910	0.819	0.876	0.913	0.858	0.788
3.0	58.84	55.82	51.44	54.71	56.32	52.66	48.71	0.323	0.984	0.934	0.861	0.915	0.942	0.881	0.815
4.0	59.51	57.79	53.99	55.71	56.87	55.62	50.02	0.430	0.996	0.967	0.903	0.932	0.951	0.930	0.837
5.0	59.78	57.53	53.78	54.78	57.59	55.97	51.06	0.538	1.000	0.962	0.900	0.916	0.963	0.936	0.854
6.0	58.54	57.30	55.10	56.54	57.56	55.91	52.45	0.645	0.979	0.959	0.922	0.946	0.963	0.935	0.877
7.0	59.01	57.67	55.91	57.64	56.71	55.30	51.52	0.753	0.987	0.965	0.935	0.964	0.949	0.925	0.862
8.0	58.69	56.36	55.74	56.29	54.90	52.30	49.86	0.860	0.982	0.943	0.933	0.942	0.918	0.875	0.834

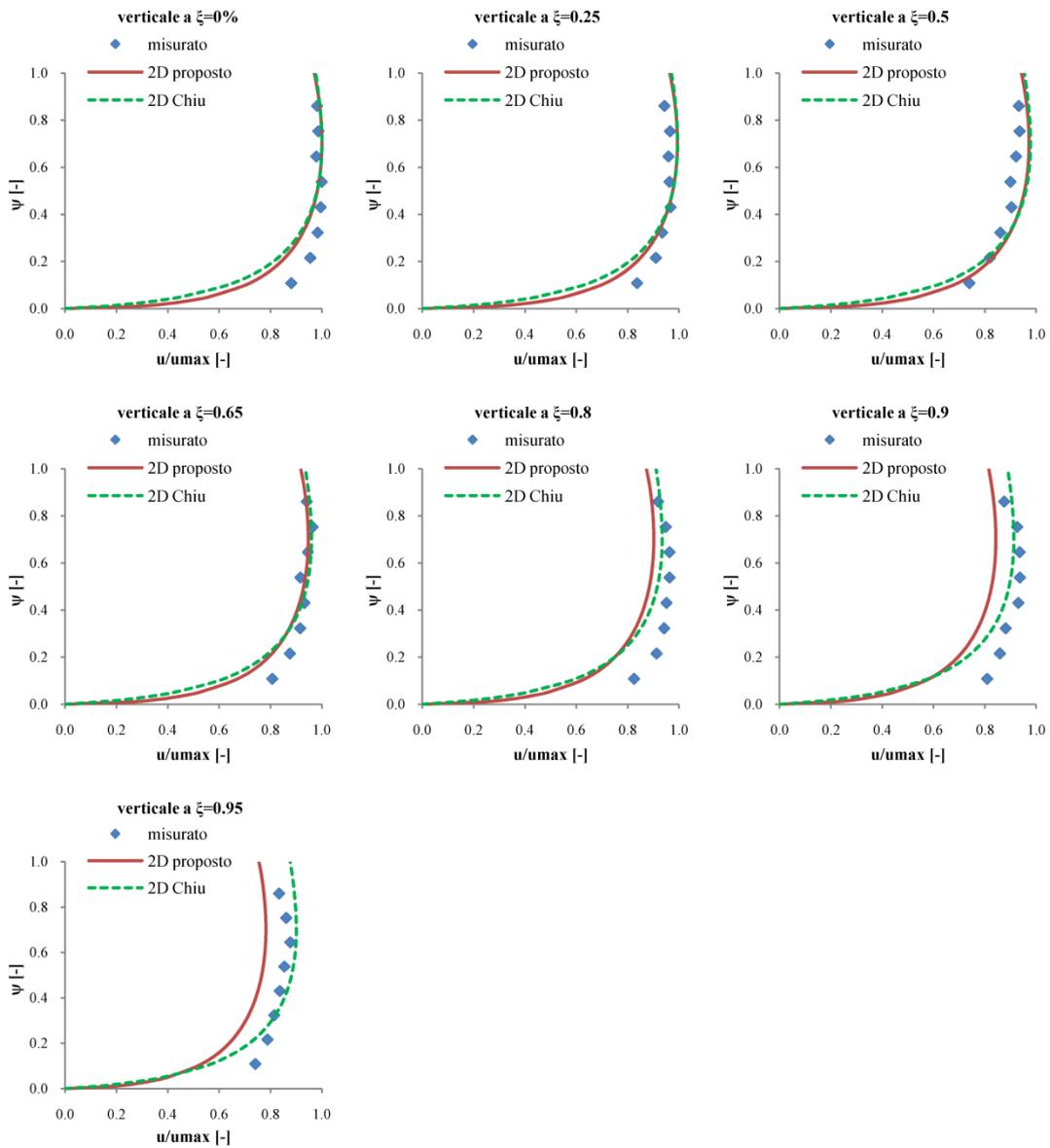
4.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	y\x	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	39.00	38.73	37.82	36.89	35.58	34.47	33.83	0.108	0.652	0.648	0.633	0.617	0.595	0.577	0.566
2.0	49.56	49.27	48.28	47.27	45.84	44.62	43.91	0.215	0.829	0.824	0.808	0.791	0.767	0.746	0.735
3.0	54.75	54.45	53.44	52.39	50.93	49.67	48.94	0.323	0.916	0.911	0.894	0.877	0.852	0.831	0.819
4.0	57.58	57.28	56.25	55.19	53.70	52.42	51.69	0.430	0.963	0.958	0.941	0.923	0.898	0.877	0.865
5.0	59.07	58.76	57.73	56.67	55.17	53.88	53.14	0.538	0.988	0.983	0.966	0.948	0.923	0.901	0.889
6.0	59.70	59.39	58.36	57.29	55.79	54.50	53.75	0.645	0.999	0.994	0.976	0.958	0.933	0.912	0.899
7.0	59.73	59.43	58.40	57.32	55.82	54.53	53.79	0.753	0.999	0.994	0.977	0.959	0.934	0.912	0.900
8.0	59.33	59.03	57.99	56.93	55.43	54.14	53.39	0.860	0.992	0.987	0.970	0.952	0.927	0.906	0.893

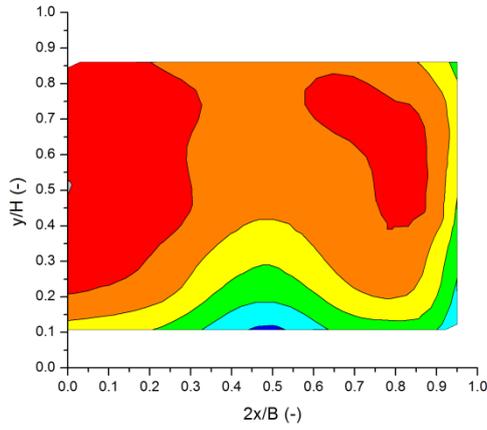
4.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	y\x	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	42.93	42.60	41.46	40.14	37.81	34.76	31.72	0.108	0.718	0.713	0.694	0.671	0.632	0.582	0.531
2.0	51.15	50.80	49.57	48.15	45.63	42.30	38.95	0.215	0.856	0.850	0.829	0.806	0.763	0.708	0.652
3.0	55.35	54.98	53.72	52.26	49.66	46.21	42.72	0.323	0.926	0.920	0.899	0.874	0.831	0.773	0.715
4.0	57.75	57.38	56.10	54.62	51.97	48.47	44.91	0.430	0.966	0.960	0.939	0.914	0.869	0.811	0.751
5.0	59.09	58.72	57.43	55.94	53.27	49.73	46.14	0.538	0.989	0.982	0.961	0.936	0.891	0.832	0.772
6.0	59.69	59.32	58.03	56.53	53.85	50.30	46.69	0.645	0.999	0.992	0.971	0.946	0.901	0.842	0.781
7.0	59.73	59.35	58.06	56.56	53.89	50.33	46.72	0.753	0.999	0.993	0.971	0.946	0.901	0.842	0.782
8.0	59.27	58.90	57.61	56.12	53.45	49.90	46.30	0.860	0.992	0.985	0.964	0.939	0.894	0.835	0.775

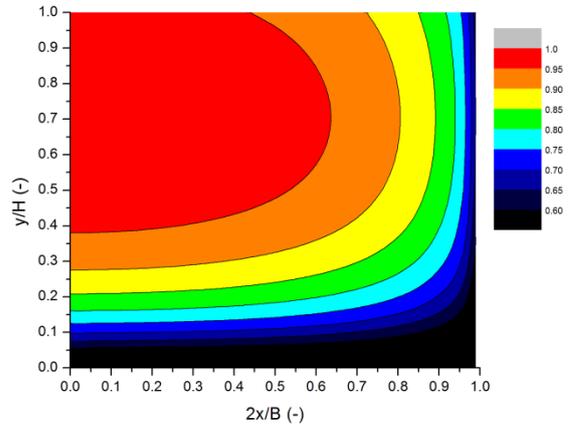
4.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



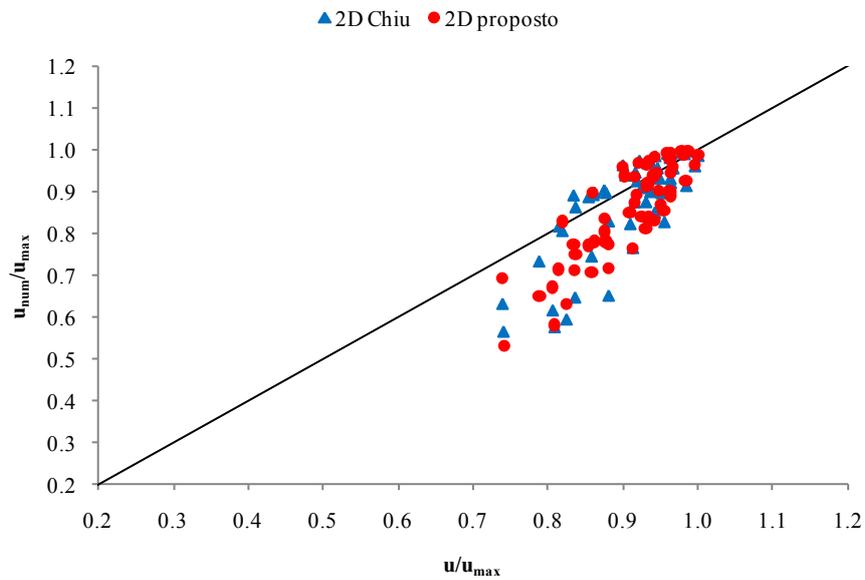
4.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



4.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



4.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



5.a) prova n°5 del 28 maggio 2009b; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.861
	H =	8.2 cm	p =	0.1 %	H/B =	0.205
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.906	M =	3.604
	$Q_{integrata} =$	20.19 l/s	F =	0.686	Ni =	1.520
	$u_{med} =$	61.54 cm/s	R =	5.82 cm	G =	3.751
	$u_{max} =$	71.51 cm/s	Re =	143157.8		

5.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.8</b>	24.82	45.47	40.57	21.98	35.19	37.27	29.73	<b>0.098</b>	0.347	0.636	0.567	0.307	0.492	0.521	0.416
<b>1.8</b>	57.85	58.87	57.57	56.73	58.74	57.89	57.54	<b>0.220</b>	0.809	0.823	0.805	0.793	0.821	0.810	0.805
<b>2.8</b>	68.85	68.24	63.93	66.24	67.74	64.81	60.94	<b>0.341</b>	0.963	0.954	0.894	0.926	0.947	0.906	0.852
<b>3.8</b>	70.43	69.05	66.85	67.53	68.87	66.09	62.94	<b>0.463</b>	0.985	0.966	0.935	0.944	0.963	0.924	0.880
<b>4.8</b>	71.26	69.24	68.09	68.38	69.29	66.70	63.22	<b>0.585</b>	0.997	0.968	0.952	0.956	0.969	0.933	0.884
<b>5.8</b>	71.51	69.45	68.27	69.42	68.48	67.29	63.80	<b>0.707</b>	1.000	0.971	0.955	0.971	0.958	0.941	0.892
<b>6.8</b>	69.97	69.40	68.60	68.99	67.00	65.09	62.23	<b>0.829</b>	0.979	0.971	0.959	0.965	0.937	0.910	0.870

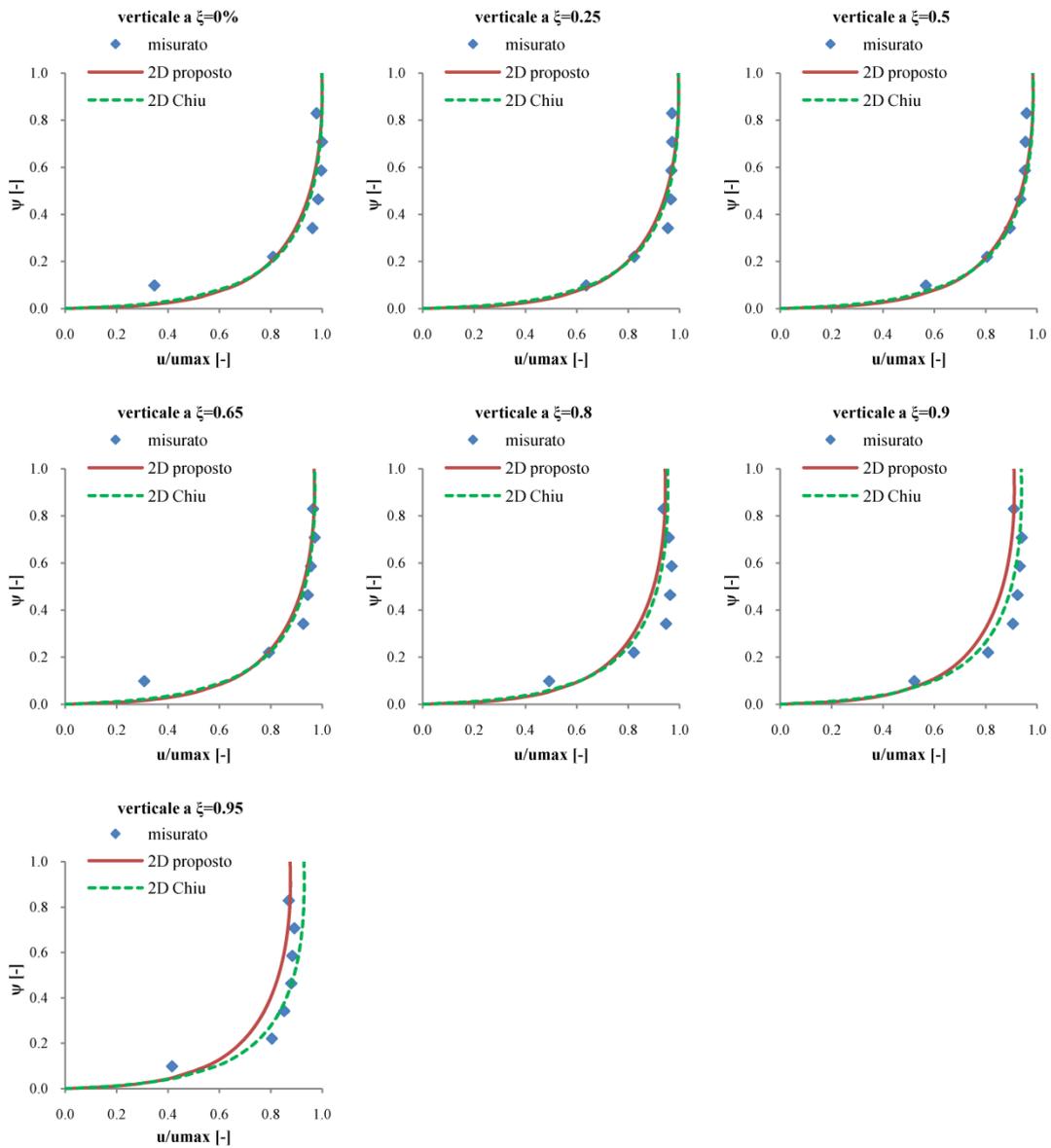
5.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.8</b>	46.45	46.21	45.42	44.60	43.45	42.46	41.89	<b>0.098</b>	0.650	0.646	0.635	0.624	0.608	0.594	0.586
<b>1.8</b>	58.90	58.66	57.83	56.96	55.75	54.70	54.09	<b>0.220</b>	0.824	0.820	0.809	0.797	0.780	0.765	0.757
<b>2.8</b>	64.73	64.48	63.64	62.76	61.53	60.46	59.84	<b>0.341</b>	0.905	0.902	0.890	0.878	0.860	0.846	0.837
<b>3.8</b>	68.00	67.75	66.90	66.02	64.78	63.70	63.08	<b>0.463</b>	0.951	0.947	0.936	0.923	0.906	0.891	0.882
<b>4.8</b>	69.90	69.65	68.80	67.92	66.67	65.59	64.97	<b>0.585</b>	0.978	0.974	0.962	0.950	0.932	0.917	0.909
<b>5.8</b>	70.96	70.71	69.85	68.97	67.72	66.64	66.01	<b>0.707</b>	0.992	0.989	0.977	0.964	0.947	0.932	0.923
<b>6.8</b>	71.43	71.18	70.33	69.44	68.19	67.11	66.48	<b>0.829</b>	0.999	0.995	0.984	0.971	0.954	0.939	0.930

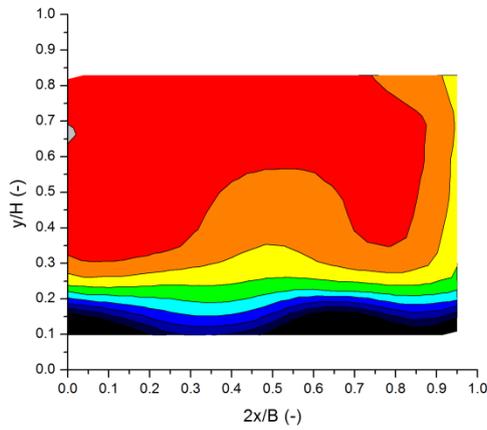
5.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.8</b>	47.32	47.08	46.29	45.36	43.69	41.46	39.17	<b>0.098</b>	0.662	0.658	0.647	0.634	0.611	0.580	0.548
<b>1.8</b>	58.53	58.29	57.45	56.49	54.74	52.39	49.96	<b>0.220</b>	0.818	0.815	0.804	0.790	0.766	0.733	0.699
<b>2.8</b>	64.08	63.84	63.00	62.02	60.24	57.86	55.39	<b>0.341</b>	0.896	0.893	0.881	0.867	0.843	0.809	0.775
<b>3.8</b>	67.42	67.18	66.33	65.34	63.56	61.16	58.66	<b>0.463</b>	0.943	0.940	0.928	0.914	0.889	0.855	0.820
<b>4.8</b>	69.52	69.28	68.43	67.44	65.65	63.23	60.73	<b>0.585</b>	0.972	0.969	0.957	0.943	0.918	0.884	0.849
<b>5.8</b>	70.78	70.54	69.69	68.69	66.90	64.48	61.97	<b>0.707</b>	0.990	0.986	0.975	0.961	0.936	0.902	0.867
<b>6.8</b>	71.40	71.15	70.30	69.31	67.51	65.09	62.58	<b>0.829</b>	0.999	0.995	0.983	0.969	0.944	0.910	0.875

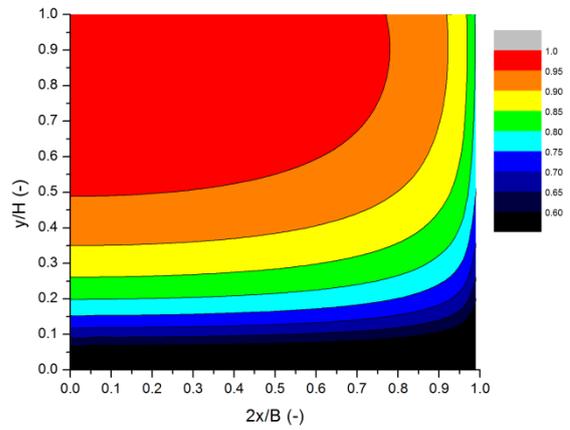
5.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



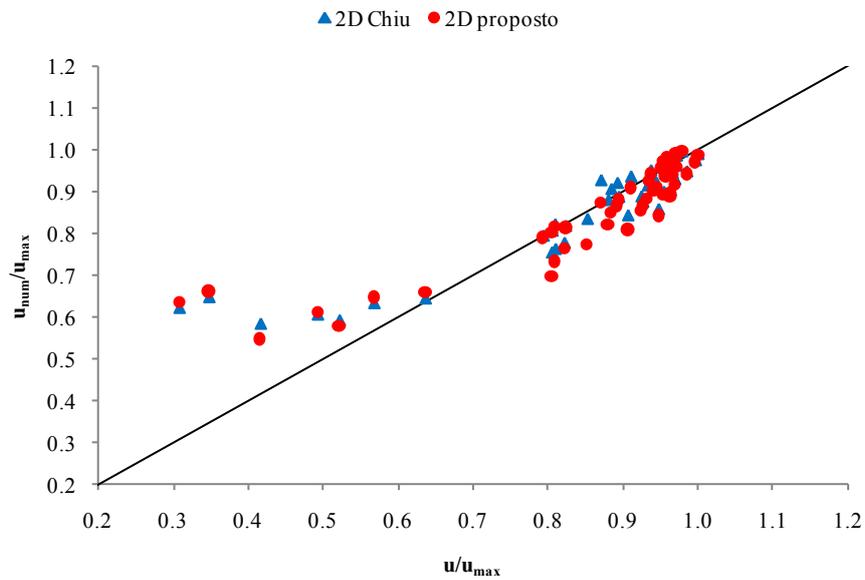
5.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



5.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



5.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



6.a) prova n°6 del 10 giugno 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.838
	H =	8 cm	p =	0.175 %	H/B =	0.200
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.815	M =	3.151
	$Q_{integrata} =$	20.72 l/s	F =	0.731	Ni =	1.600
	$u_{med} =$	64.75 cm/s	R =	5.71 cm	G =	2.233
	$u_{max} =$	77.27 cm/s	Re =	147993.5		

6.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	46.19	42.64	45.90	47.80	42.09	48.49	48.68	0.125	0.598	0.552	0.594	0.619	0.545	0.628	0.630
2.0	59.84	58.53	60.56	55.89	59.84	61.18	55.92	0.250	0.774	0.757	0.784	0.723	0.774	0.792	0.724
3.0	69.84	67.93	69.12	65.64	68.26	68.50	56.04	0.375	0.904	0.879	0.894	0.849	0.883	0.887	0.725
4.0	73.52	73.89	72.64	71.30	71.68	70.45	57.53	0.500	0.951	0.956	0.940	0.923	0.928	0.912	0.745
5.0	75.30	74.77	73.95	72.52	71.63	70.16	59.59	0.625	0.975	0.968	0.957	0.938	0.927	0.908	0.771
6.0	76.71	76.18	74.93	73.49	71.59	69.82	60.52	0.750	0.993	0.986	0.970	0.951	0.926	0.904	0.783
7.0	77.27	76.06	75.11	73.59	71.07	67.39	60.66	0.875	1.000	0.984	0.972	0.952	0.920	0.872	0.785

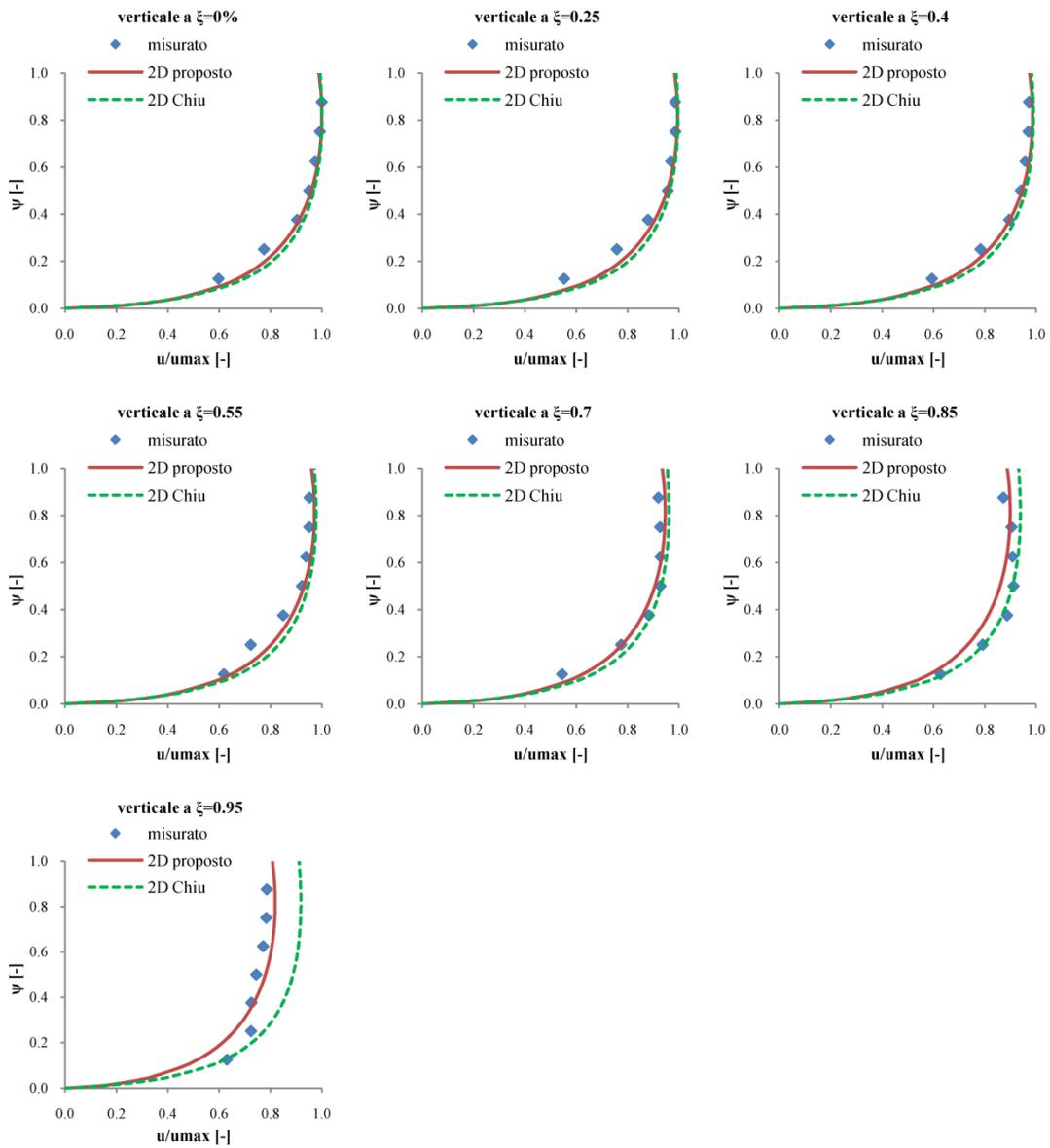
6.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	53.88	53.58	53.07	52.26	51.08	49.46	48.07	0.125	0.697	0.693	0.687	0.676	0.661	0.640	0.622
2.0	65.95	65.64	65.11	64.25	63.01	61.29	59.82	0.250	0.853	0.849	0.843	0.832	0.815	0.793	0.774
3.0	71.76	71.44	70.90	70.03	68.77	67.02	65.52	0.375	0.929	0.925	0.918	0.906	0.890	0.867	0.848
4.0	74.88	74.56	74.02	73.15	71.87	70.11	68.60	0.500	0.969	0.965	0.958	0.947	0.930	0.907	0.888
5.0	76.52	76.20	75.65	74.77	73.49	71.72	70.21	0.625	0.990	0.986	0.979	0.968	0.951	0.928	0.909
6.0	77.19	76.87	76.32	75.45	74.17	72.39	70.87	0.750	0.999	0.995	0.988	0.976	0.960	0.937	0.917
7.0	77.21	76.89	76.34	75.46	74.19	72.41	70.89	0.875	0.999	0.995	0.988	0.977	0.960	0.937	0.917

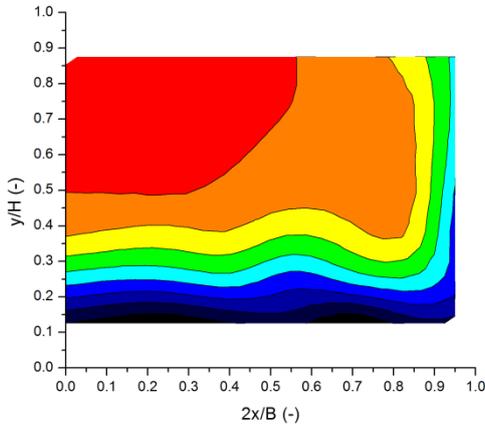
6.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	51.72	51.38	50.79	49.80	48.16	45.05	39.93	0.125	0.669	0.665	0.657	0.645	0.623	0.583	0.517
2.0	63.95	63.57	62.94	61.86	60.07	56.63	50.93	0.250	0.828	0.823	0.814	0.801	0.777	0.733	0.659
3.0	70.35	69.96	69.30	68.19	66.34	62.78	56.83	0.375	0.910	0.905	0.897	0.883	0.858	0.812	0.735
4.0	74.08	73.69	73.02	71.89	70.00	66.38	60.30	0.500	0.959	0.954	0.945	0.930	0.906	0.859	0.780
5.0	76.20	75.80	75.13	73.99	72.08	68.42	62.28	0.625	0.986	0.981	0.972	0.958	0.933	0.886	0.806
6.0	77.15	76.75	76.08	74.94	73.02	69.35	63.18	0.750	0.998	0.993	0.985	0.970	0.945	0.898	0.818
7.0	77.17	76.77	76.10	74.96	73.04	69.37	63.20	0.875	0.999	0.994	0.985	0.970	0.945	0.898	0.818

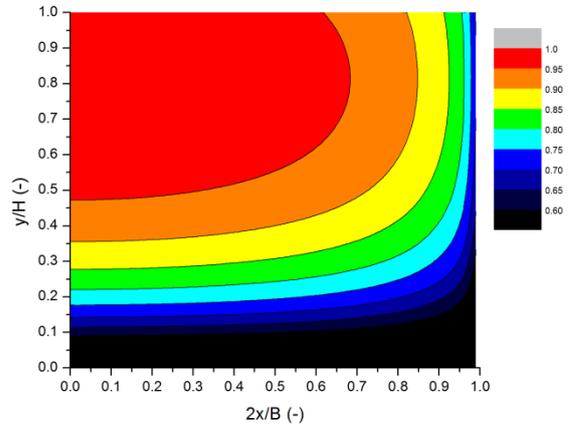
6.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



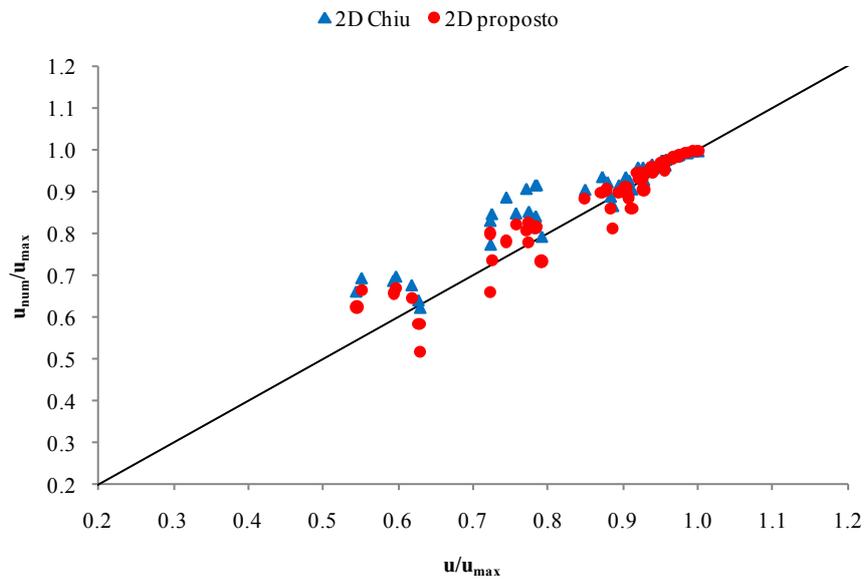
6.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



6.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



6.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



7.a) prova n°7 del 10 giugno 2009b; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.887
	H =	10.2 cm	p =	0.175 %	H/B =	0.255
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.759	M =	2.876
	$Q_{integrata} =$	24.89 l/s	F =	0.610	Ni =	1.630
	$u_{med} =$	61 cm/s	R =	6.75 cm	G =	3.579
	$u_{max} =$	68.73 cm/s	Re =	164812.6		

7.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.2	54.57	51.97	51.15	44.61	54.73	49.49	42.14	<b>0.118</b>	0.794	0.756	0.744	0.649	0.796	0.720	0.613
2.4	64.59	62.71	60.04	58.57	60.17	59.40	52.05	<b>0.235</b>	0.940	0.912	0.873	0.852	0.875	0.864	0.757
3.6	66.84	65.78	62.91	61.75	61.99	60.63	53.96	<b>0.353</b>	0.973	0.957	0.915	0.898	0.902	0.882	0.785
4.8	68.21	66.82	65.33	62.97	63.30	61.21	55.61	<b>0.471</b>	0.992	0.972	0.950	0.916	0.921	0.891	0.809
6.0	68.11	67.66	66.16	64.57	63.76	61.98	56.10	<b>0.588</b>	0.991	0.984	0.963	0.939	0.928	0.902	0.816
7.2	68.73	67.74	66.14	64.40	63.03	61.43	55.69	<b>0.706</b>	1.000	0.986	0.962	0.937	0.917	0.894	0.810
8.4	68.57	67.53	65.73	64.31	62.60	59.19	55.28	<b>0.824</b>	0.998	0.983	0.956	0.936	0.911	0.861	0.804

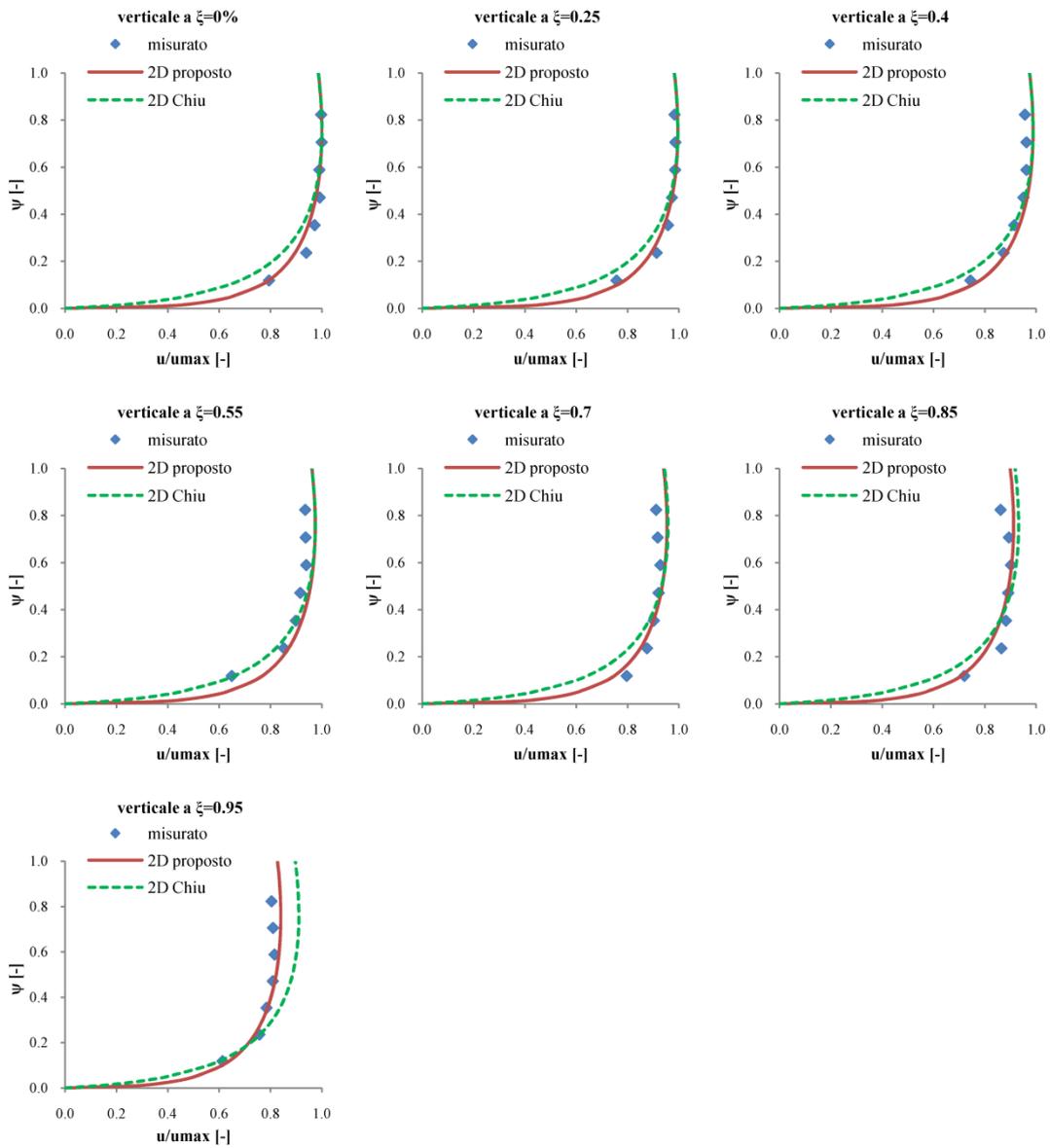
7.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.2	46.65	46.36	45.88	45.10	43.98	42.43	41.11	<b>0.118</b>	0.679	0.675	0.667	0.656	0.640	0.617	0.598
2.4	58.05	57.75	57.23	56.40	55.20	53.54	52.12	<b>0.235</b>	0.845	0.840	0.833	0.821	0.803	0.779	0.758
3.6	63.57	63.26	62.73	61.88	60.65	58.95	57.50	<b>0.353</b>	0.925	0.920	0.913	0.900	0.882	0.858	0.837
4.8	66.53	66.22	65.68	64.83	63.59	61.87	60.40	<b>0.471</b>	0.968	0.963	0.956	0.943	0.925	0.900	0.879
6.0	68.06	67.75	67.21	66.35	65.11	63.38	61.90	<b>0.588</b>	0.990	0.986	0.978	0.965	0.947	0.922	0.901
7.2	68.67	68.36	67.83	66.97	65.72	63.99	62.50	<b>0.706</b>	0.999	0.995	0.987	0.974	0.956	0.931	0.909
8.4	68.66	68.34	67.81	66.95	65.70	63.97	62.48	<b>0.824</b>	0.999	0.994	0.987	0.974	0.956	0.931	0.909

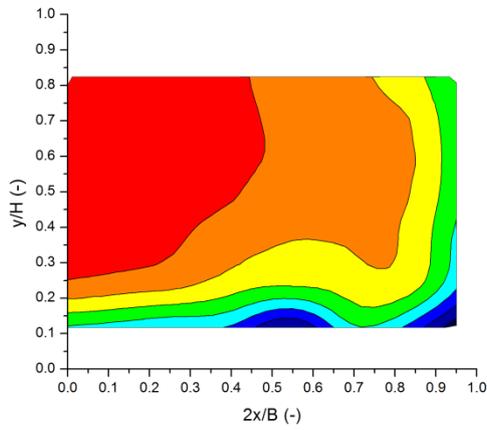
7.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.2	54.34	54.04	53.54	52.69	51.26	48.50	43.84	<b>0.118</b>	0.791	0.786	0.779	0.767	0.746	0.706	0.638
2.4	61.52	61.22	60.71	59.84	58.37	55.55	50.75	<b>0.235</b>	0.895	0.891	0.883	0.871	0.849	0.808	0.738
3.6	65.09	64.78	64.26	63.38	61.91	59.06	54.20	<b>0.353</b>	0.947	0.943	0.935	0.922	0.901	0.859	0.789
4.8	67.10	66.79	66.27	65.39	63.91	61.04	56.17	<b>0.471</b>	0.976	0.972	0.964	0.951	0.930	0.888	0.817
6.0	68.21	67.90	67.38	66.50	65.01	62.14	57.25	<b>0.588</b>	0.992	0.988	0.980	0.967	0.946	0.904	0.833
7.2	68.68	68.38	67.86	66.97	65.49	62.61	57.71	<b>0.706</b>	0.999	0.995	0.987	0.974	0.953	0.911	0.840
8.4	68.67	68.36	67.84	66.95	65.47	62.59	57.69	<b>0.824</b>	0.998	0.983	0.956	0.936	0.911	0.861	0.804

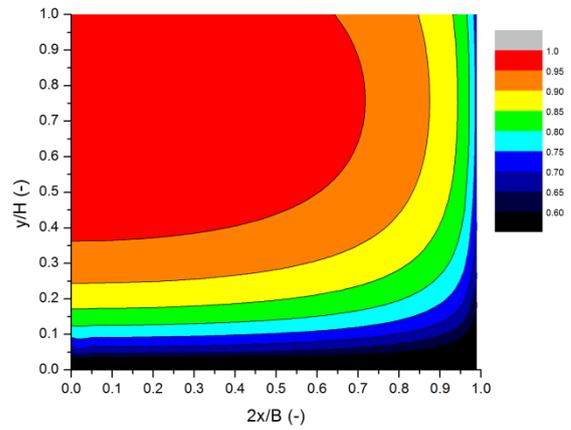
7.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



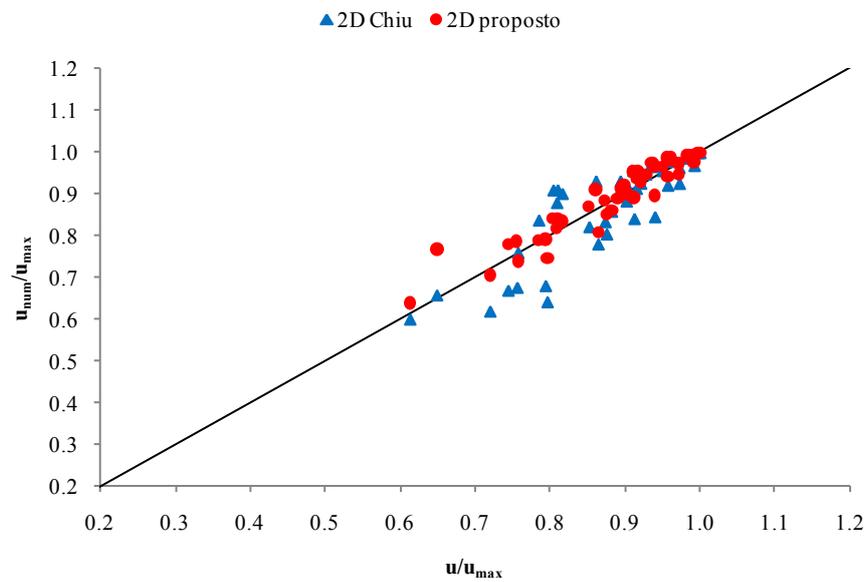
7.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



7.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



7.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



8.a) prova n°8 del 10 giugno 2009c; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.876
	H =	5.4 cm	p =	0.175 %	H/B =	0.135
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.999	M =	4.064
	$Q_{integrata} =$	20.42 l/s	F =	1.299	Ni =	1.450
	$u_{med} =$	94.55 cm/s	R =	4.25 cm	G =	5.212
	$u_{max} =$	107.91 cm/s	Re =	160812.3		

8.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	80.08	81.91	83.45	78.89	77.95	76.03	74.42	<b>0.185</b>	0.742	0.759	0.773	0.731	0.722	0.705	0.690
2.0	90.69	92.85	95.83	93.93	95.48	91.23	88.04	<b>0.370</b>	0.840	0.860	0.888	0.870	0.885	0.845	0.816
3.0	101.27	102.99	101.95	102.48	101.40	100.16	89.23	<b>0.556</b>	0.938	0.954	0.945	0.950	0.940	0.928	0.827
4.0	107.91	107.43	107.86	106.45	104.76	100.27	88.58	<b>0.741</b>	1.000	0.996	1.000	0.986	0.971	0.929	0.821

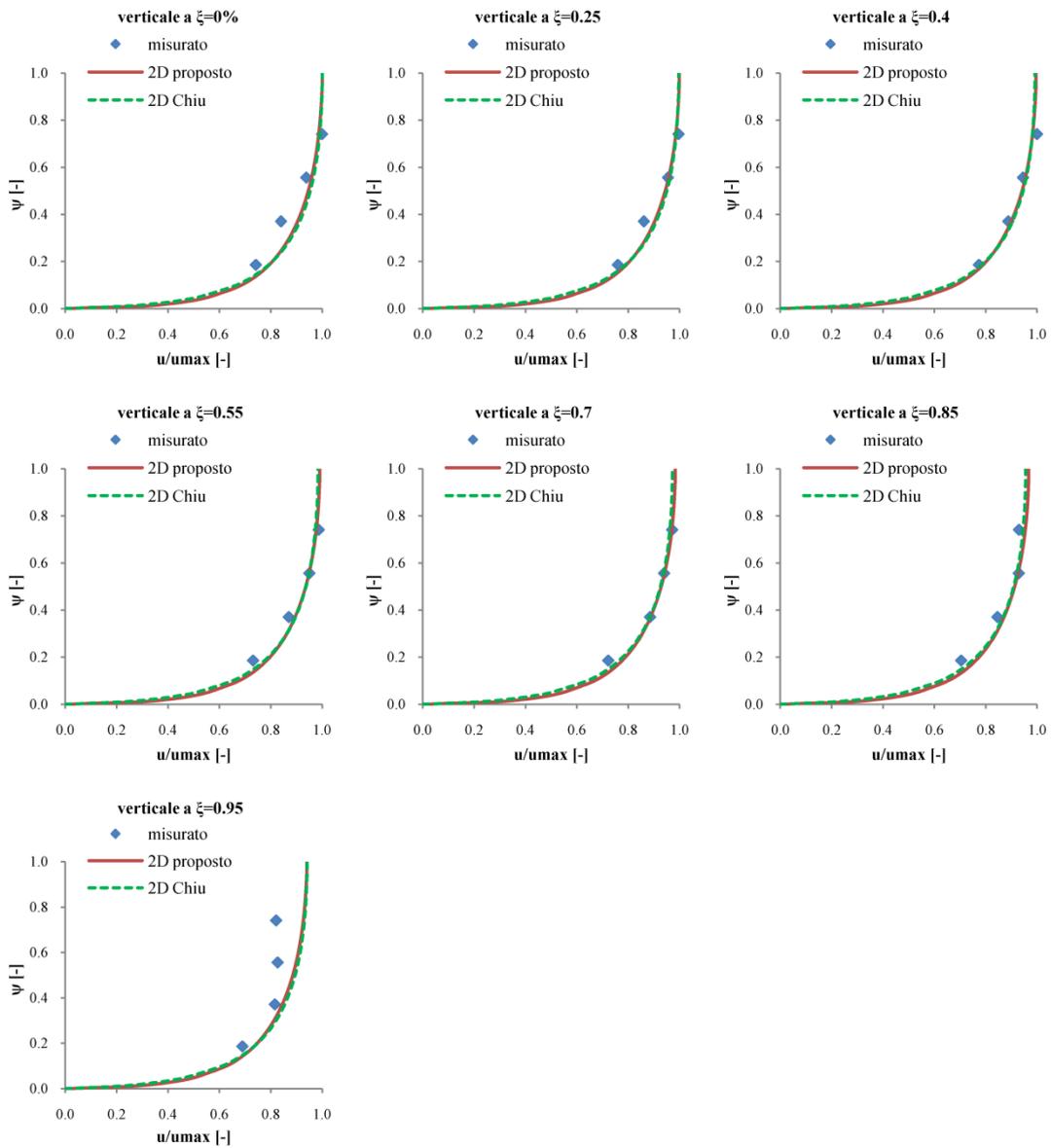
8.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	85.42	85.10	84.56	83.70	82.44	80.69	79.19	<b>0.185</b>	0.792	0.789	0.784	0.776	0.764	0.748	0.734
2.0	98.47	98.15	97.60	96.72	95.44	93.66	92.13	<b>0.370</b>	0.913	0.910	0.904	0.896	0.884	0.868	0.854
3.0	104.19	103.87	103.31	102.43	101.14	99.35	97.81	<b>0.556</b>	0.965	0.963	0.957	0.949	0.937	0.921	0.906
4.0	106.85	106.53	105.98	105.09	103.80	102.01	100.46	<b>0.741</b>	0.990	0.987	0.982	0.974	0.962	0.945	0.931

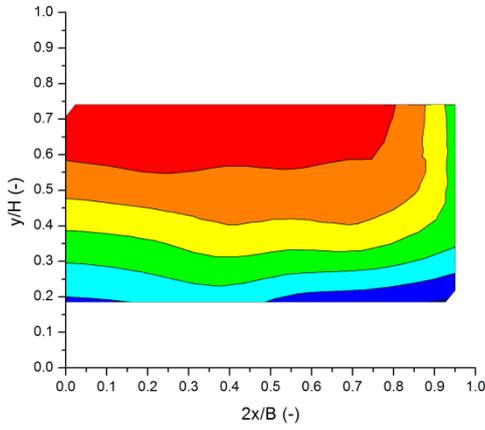
8.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	8.0	11.0	14.0	17.0	19.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.400	0.550	0.700	0.850	0.950
1.0	85.62	85.44	85.14	84.63	83.77	82.10	79.23	<b>0.185</b>	0.793	0.792	0.789	0.784	0.776	0.761	0.734
2.0	97.57	97.39	97.09	96.57	95.70	94.02	91.13	<b>0.370</b>	0.904	0.903	0.900	0.895	0.887	0.871	0.844
3.0	103.41	103.23	102.92	102.41	101.54	99.85	96.95	<b>0.556</b>	0.958	0.957	0.954	0.949	0.941	0.925	0.898
4.0	106.49	106.31	106.01	105.49	104.62	102.93	100.03	<b>0.741</b>	0.987	0.985	0.982	0.978	0.970	0.954	0.927

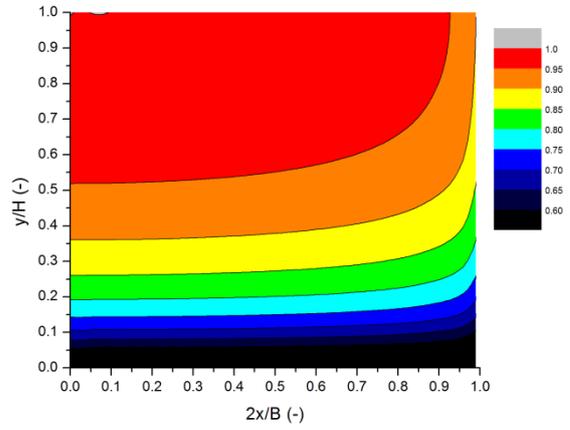
8.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



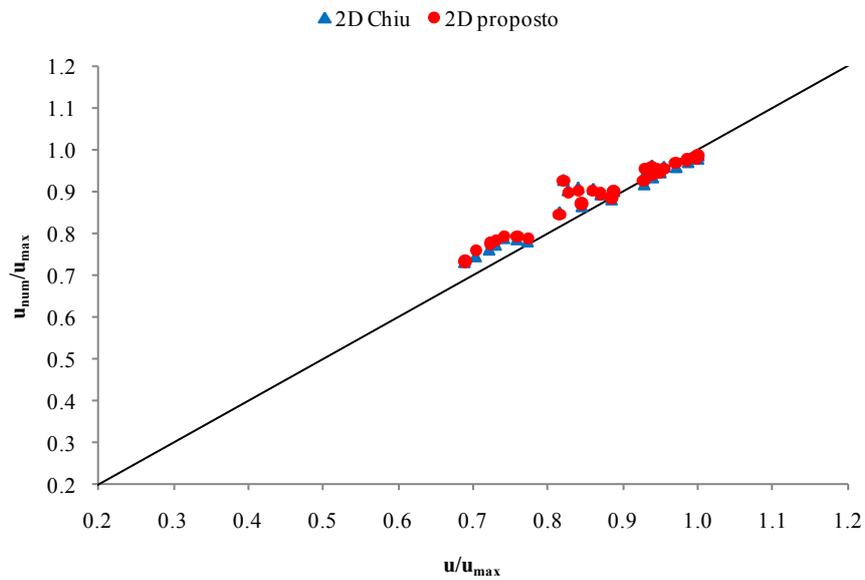
8.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



8.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



8.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



9.a) prova n°9 del 10 giugno 2009d; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.849
	H =	9.6 cm	p =	0.175 %	H/B =	0.240
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.850	M =	3.325
	$Q_{integrata} =$	28.62 l/s	F =	0.768	Ni =	1.570
	$u_{med} =$	74.53 cm/s	R =	6.49 cm	G =	3.005
	$u_{max} =$	87.78 cm/s	Re =	193365.3		

9.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	58.01	57.01	53.54	52.05	54.97	56.16	55.88	0.104	0.661	0.649	0.610	0.593	0.626	0.640	0.637
2.0	67.11	68.74	67.27	65.48	67.48	67.40	62.69	0.208	0.764	0.783	0.766	0.746	0.769	0.768	0.714
3.0	76.29	75.87	74.22	74.06	74.75	70.87	63.60	0.313	0.869	0.864	0.845	0.844	0.852	0.807	0.725
4.0	81.90	81.97	79.61	79.56	78.24	72.76	65.22	0.417	0.933	0.934	0.907	0.906	0.891	0.829	0.743
5.0	86.51	84.00	82.00	80.51	78.95	73.95	67.87	0.521	0.985	0.957	0.934	0.917	0.899	0.842	0.773
7.0	87.68	85.01	82.85	80.62	78.87	75.18	70.85	0.729	0.999	0.968	0.944	0.918	0.898	0.856	0.807
9.0	87.78	84.78	83.02	79.90	74.99	69.21	64.88	0.938	1.000	0.966	0.946	0.910	0.854	0.788	0.739

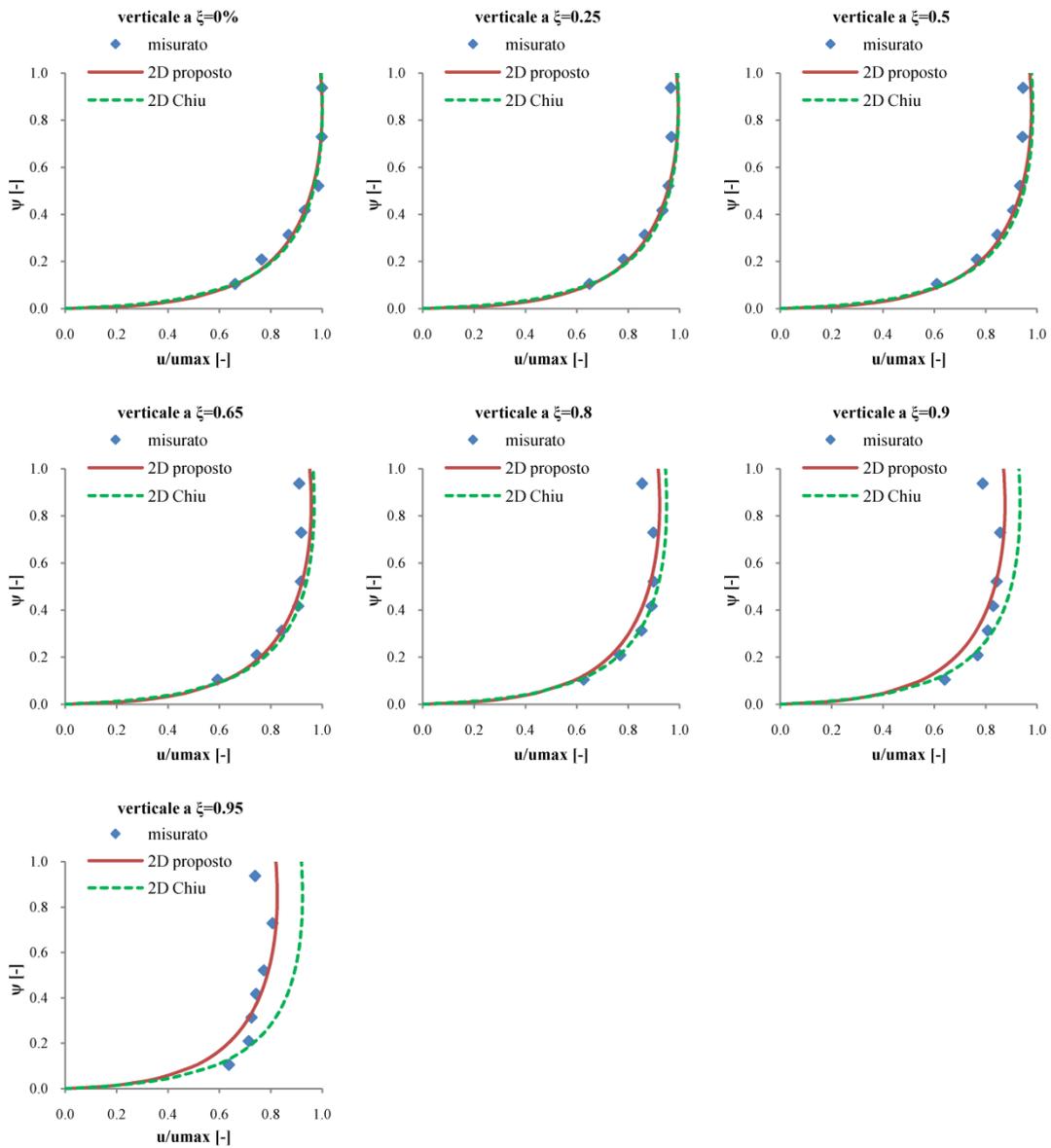
9.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	57.71	57.39	56.33	55.22	53.67	52.34	51.58	0.104	0.657	0.654	0.642	0.629	0.611	0.596	0.588
2.0	71.45	71.12	69.99	68.83	67.19	65.78	64.96	0.208	0.814	0.810	0.797	0.784	0.765	0.749	0.740
3.0	78.48	78.14	77.00	75.81	74.14	72.70	71.87	0.313	0.894	0.890	0.877	0.864	0.845	0.828	0.819
4.0	82.63	82.29	81.14	79.94	78.26	76.80	75.96	0.417	0.941	0.937	0.924	0.911	0.891	0.875	0.865
5.0	85.18	84.84	83.68	82.48	80.78	79.32	78.48	0.521	0.970	0.966	0.953	0.940	0.920	0.904	0.894
7.0	87.50	87.16	85.99	84.79	83.09	81.62	80.77	0.729	0.997	0.993	0.980	0.966	0.947	0.930	0.920
9.0	87.66	87.32	86.15	84.94	83.24	81.78	80.93	0.938	0.999	0.995	0.981	0.968	0.948	0.932	0.922

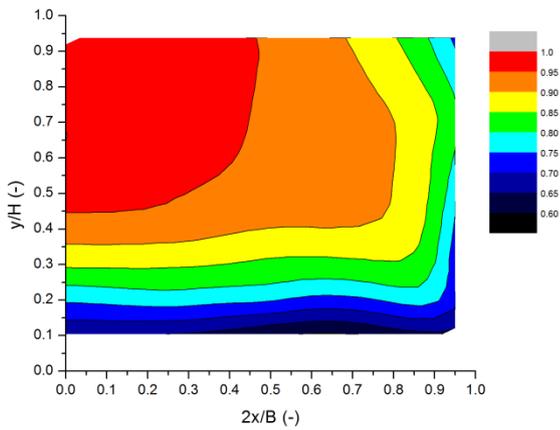
9.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	58.34	57.95	56.60	55.04	52.26	48.57	44.84	0.104	0.665	0.660	0.645	0.627	0.595	0.553	0.511
2.0	70.88	70.47	69.05	67.39	64.43	60.47	56.43	0.208	0.807	0.803	0.787	0.768	0.734	0.689	0.643
3.0	77.65	77.23	75.78	74.08	71.05	66.99	62.82	0.313	0.885	0.880	0.863	0.844	0.809	0.763	0.716
4.0	81.88	81.46	79.99	78.28	75.21	71.09	66.86	0.417	0.933	0.928	0.911	0.892	0.857	0.810	0.762
5.0	84.64	84.21	82.74	81.02	77.92	73.78	69.50	0.521	0.964	0.959	0.943	0.923	0.888	0.840	0.792
7.0	87.40	86.97	85.49	83.76	80.64	76.47	72.16	0.729	0.996	0.991	0.974	0.954	0.919	0.871	0.822
9.0	87.59	87.16	85.68	83.95	80.83	76.65	72.34	0.938	0.998	0.993	0.976	0.956	0.921	0.873	0.824

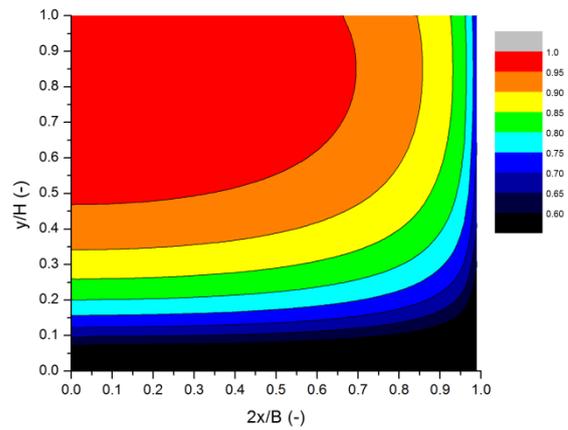
9.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



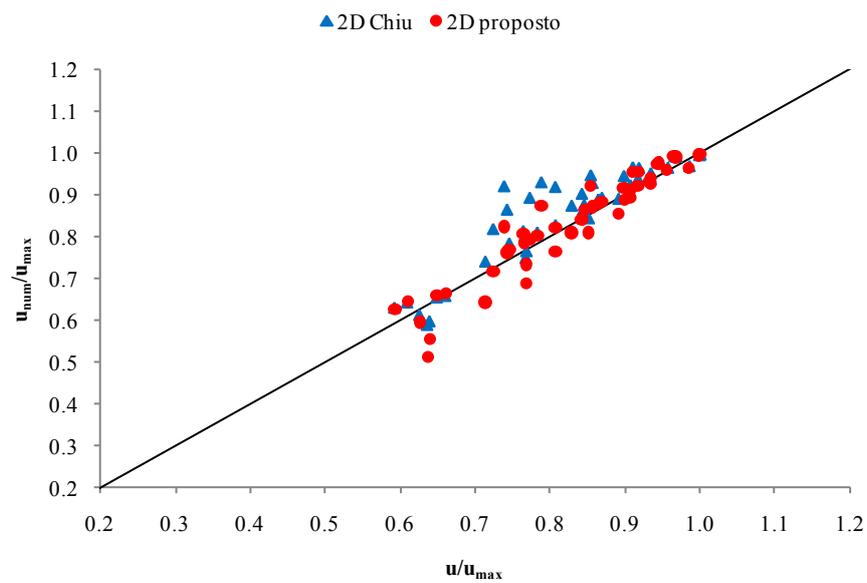
9.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



9.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



9.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



10.a) prova n°10 del 12 giugno 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.925
	H =	9.2 cm	p =	0.225 %	H/B =	0.230
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.600	M =	2.108
	$Q_{integrata} =$	26.14 l/s	F =	0.748	Ni =	1.720
	$u_{med} =$	71.04 cm/s	R =	6.3 cm	G =	3.890
	$u_{max} =$	76.82 cm/s	Re =	179057.2		

10.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900
0.8	68.81	66.75	67.43	63.53	65.66	56.83	0.088	0.896	0.869	0.878	0.827	0.855	0.740
1.6	72.35	72.89	71.86	71.54	70.36	64.46	0.177	0.942	0.949	0.935	0.931	0.916	0.839
2.4	76.55	74.23	75.12	72.99	71.63	66.40	0.265	0.997	0.966	0.978	0.950	0.933	0.864
3.3	76.07	74.23	75.54	75.13	72.01	67.33	0.354	0.990	0.966	0.983	0.978	0.937	0.877
4.9	76.73	76.82	76.09	74.70	71.89	67.73	0.531	0.999	1.000	0.991	0.972	0.936	0.882
6.5	75.96	75.50	73.97	73.42	71.15	66.55	0.708	0.989	0.983	0.963	0.956	0.926	0.866
8.1	74.43	73.40	72.11	70.96	70.00	61.95	0.885	0.969	0.955	0.939	0.924	0.911	0.806

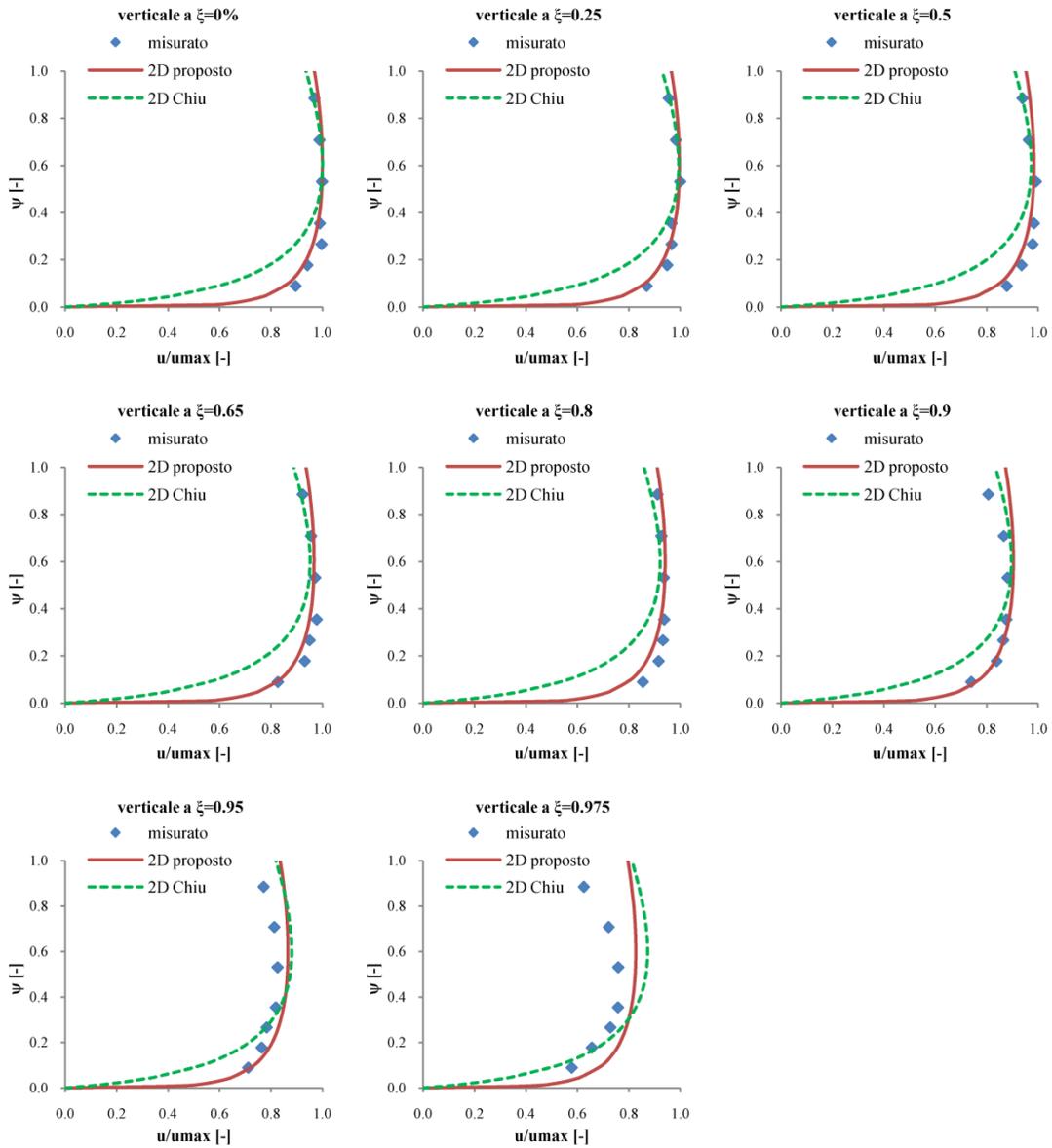
10.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900
0.8	45.67	45.29	44.00	42.67	40.84	39.30	0.088	0.595	0.590	0.573	0.556	0.532	0.512
1.6	60.89	60.46	58.99	57.47	55.36	53.56	0.177	0.793	0.787	0.768	0.748	0.721	0.697
2.4	68.70	68.25	66.71	65.11	62.90	61.00	0.265	0.894	0.888	0.868	0.848	0.819	0.794
3.3	73.08	72.61	71.04	69.42	67.15	65.20	0.354	0.951	0.945	0.925	0.904	0.874	0.849
4.9	76.59	76.12	74.52	72.87	70.56	68.59	0.531	0.997	0.991	0.970	0.949	0.919	0.893
6.5	76.35	75.88	74.29	72.64	70.34	68.36	0.708	0.994	0.988	0.967	0.946	0.916	0.890
8.1	74.07	73.60	72.02	70.39	68.11	66.16	0.885	0.964	0.958	0.938	0.916	0.887	0.861

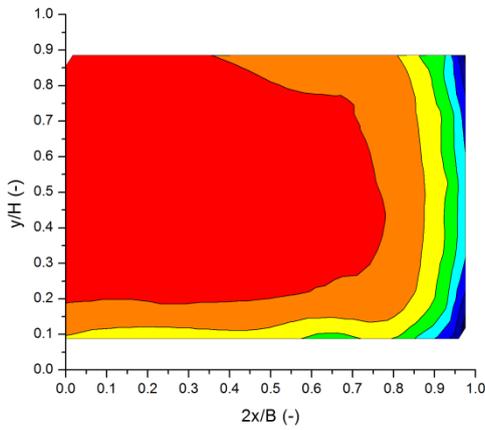
10.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900
0.8	65.48	65.20	64.22	63.08	61.03	58.27	0.088	0.852	0.849	0.836	0.821	0.794	0.759
1.6	71.14	70.86	69.88	68.72	66.65	63.85	0.177	0.926	0.922	0.910	0.895	0.868	0.831
2.4	73.90	73.61	72.62	71.46	69.38	66.57	0.265	0.962	0.958	0.945	0.930	0.903	0.867
3.3	75.44	75.16	74.16	73.01	70.92	68.10	0.354	0.982	0.978	0.965	0.950	0.923	0.887
4.9	76.73	76.44	75.45	74.29	72.19	69.37	0.531	0.999	0.995	0.982	0.967	0.940	0.903
6.5	76.62	76.33	75.34	74.18	72.09	69.27	0.708	0.997	0.994	0.981	0.966	0.938	0.902
8.1	75.56	75.27	74.28	73.13	71.03	68.22	0.885	0.984	0.980	0.967	0.952	0.925	0.888

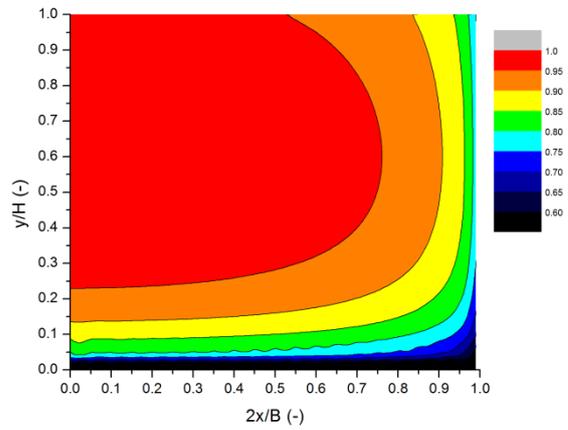
10.e) profili di velocità; valori adimensionali.



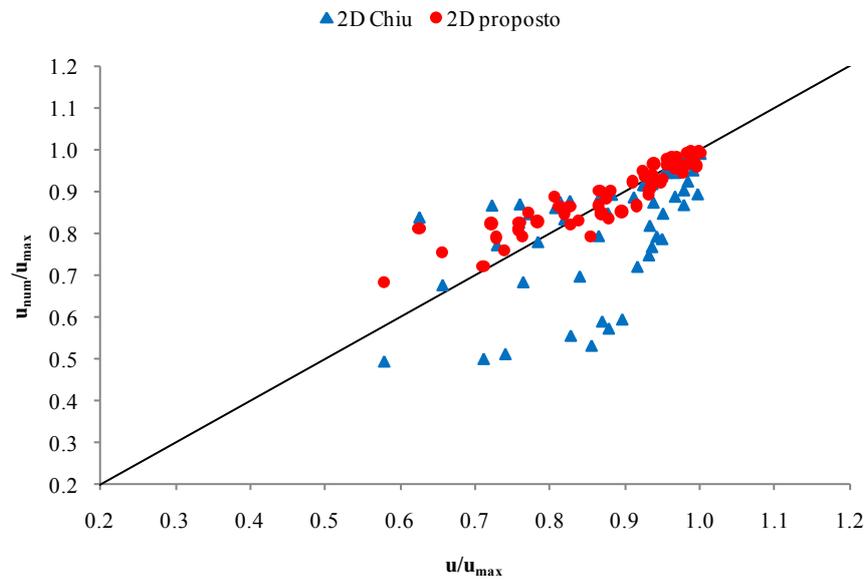
10.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



10.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



10.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



11.a) prova n°11 del 12 giugno 2009b; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.864
	H =	11.3 cm	p =	0.225 %	H/B =	0.283
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.800	M =	3.079
	$Q_{integrata} =$	35.67 l/s	F =	0.750	Ni =	1.600
	$u_{med} =$	78.91 cm/s	R =	7.22 cm	G =	3.215
	$u_{max} =$	91.37 cm/s	Re =	227895.3		

11.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s									coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$								
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950	0.975
1.1	59.50	52.39	55.02	56.85	60.43	61.92	59.45	50.45	<b>0.098</b>	0.651	0.573	0.602	0.622	0.661	0.678	0.651	0.552
2.2	66.96	69.63	70.65	71.58	72.78	72.34	64.21	53.36	<b>0.196</b>	0.733	0.762	0.773	0.783	0.797	0.792	0.703	0.584
3.3	78.17	80.01	78.38	80.70	81.86	74.75	65.13	53.85	<b>0.294</b>	0.856	0.876	0.858	0.883	0.896	0.818	0.713	0.589
4.4	84.64	84.10	83.83	85.77	83.97	75.39	66.44	56.05	<b>0.392</b>	0.926	0.920	0.917	0.939	0.919	0.825	0.727	0.613
6.6	89.75	89.22	88.06	87.90	85.85	79.92	72.12	64.15	<b>0.588</b>	0.982	0.976	0.964	0.962	0.940	0.875	0.789	0.702
8.9	91.29	90.20	89.00	87.92	85.16	82.05	74.22	66.79	<b>0.784</b>	0.999	0.987	0.974	0.962	0.932	0.898	0.812	0.731
10.0	91.37	90.93	89.13	86.66	82.97	79.54	73.19	64.26	<b>0.882</b>	1.000	0.995	0.975	0.948	0.908	0.870	0.801	0.703

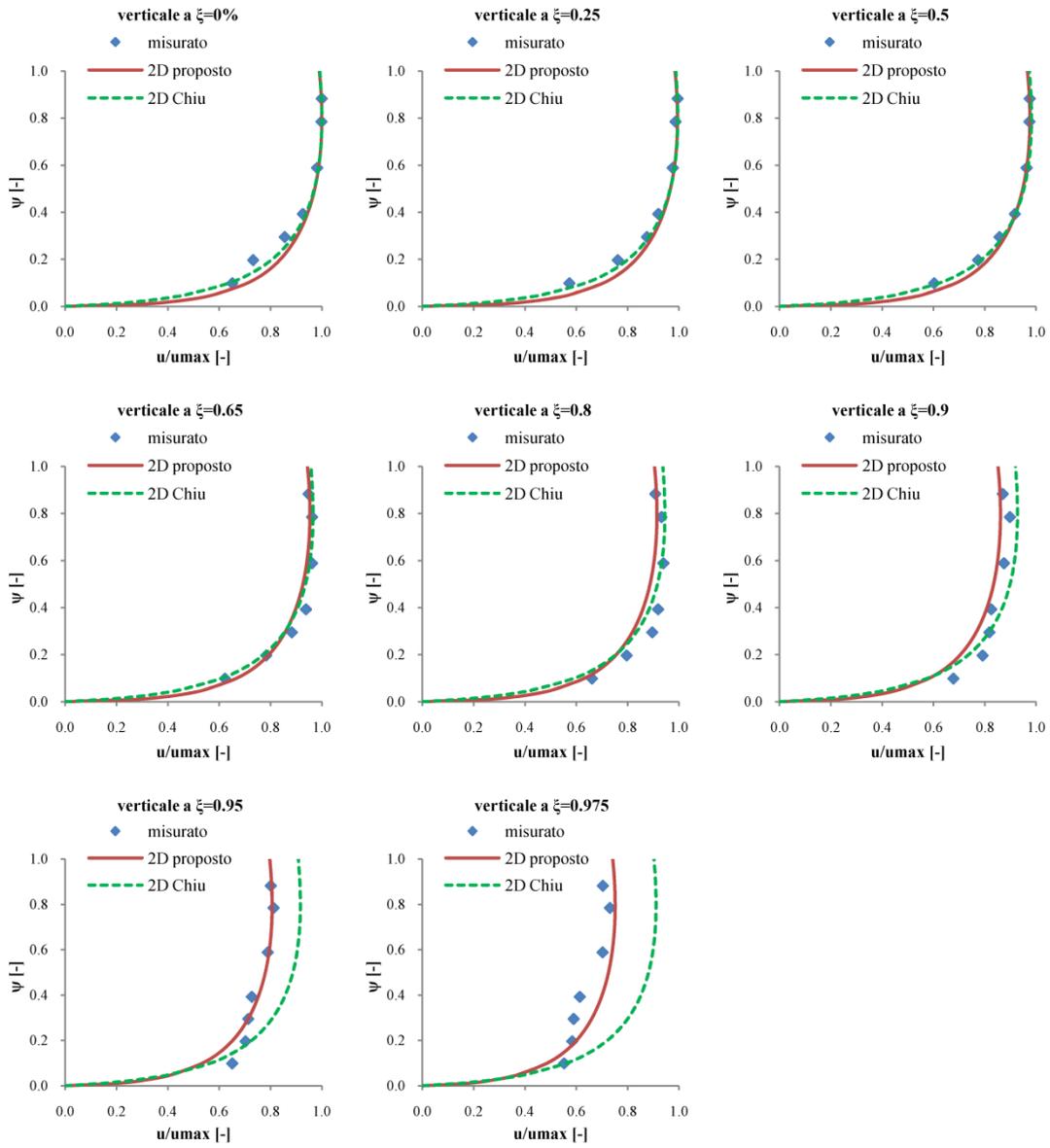
11.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s									coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$								
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950	0.975
1.1	58.21	57.86	56.68	55.46	53.75	52.28	51.44	50.99	<b>0.098</b>	0.637	0.633	0.620	0.607	0.588	0.572	0.563	0.558
2.2	73.27	72.90	71.64	70.33	68.49	66.91	66.00	65.51	<b>0.196</b>	0.802	0.798	0.784	0.770	0.750	0.732	0.722	0.717
3.3	81.04	80.66	79.37	78.03	76.15	74.53	73.60	73.09	<b>0.294</b>	0.887	0.883	0.869	0.854	0.833	0.816	0.805	0.800
4.4	85.65	85.26	83.96	82.61	80.70	79.07	78.12	77.61	<b>0.392</b>	0.937	0.933	0.919	0.904	0.883	0.865	0.855	0.849
6.6	90.16	89.78	88.46	87.09	85.17	83.52	82.56	82.04	<b>0.588</b>	0.987	0.983	0.968	0.953	0.932	0.914	0.904	0.898
8.9	91.37	90.98	89.66	88.29	86.37	84.71	83.75	83.23	<b>0.784</b>	1.000	0.996	0.981	0.966	0.945	0.927	0.917	0.911
10.0	91.23	90.85	89.53	88.16	86.24	84.58	83.62	83.10	<b>0.882</b>	0.998	0.994	0.980	0.965	0.944	0.926	0.915	0.909

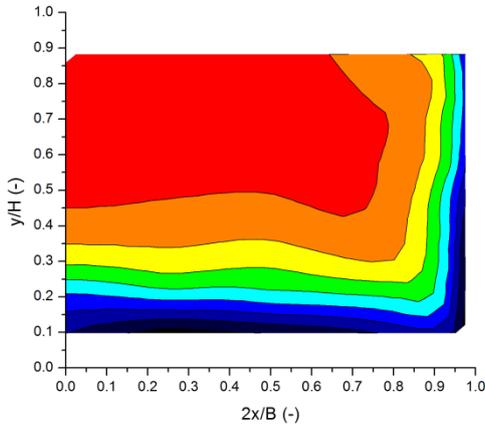
11.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s									coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$								
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	19.5	$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950	0.975
1.1	64.76	64.30	62.70	60.84	57.52	53.12	48.66	44.26	<b>0.098</b>	0.709	0.704	0.686	0.666	0.629	0.581	0.533	0.484
2.2	76.29	75.81	74.14	72.20	68.73	64.09	59.35	54.62	<b>0.196</b>	0.835	0.830	0.811	0.790	0.752	0.701	0.650	0.598
3.3	82.40	81.91	80.22	78.25	74.71	69.99	65.13	60.27	<b>0.294</b>	0.902	0.896	0.878	0.856	0.818	0.766	0.713	0.660
4.4	86.18	85.69	83.99	82.00	78.43	73.65	68.74	63.80	<b>0.392</b>	0.943	0.938	0.919	0.897	0.858	0.806	0.752	0.698
6.6	90.17	89.67	87.96	85.96	82.36	77.54	72.56	67.57	<b>0.588</b>	0.987	0.981	0.963	0.941	0.901	0.849	0.794	0.739
8.9	91.37	90.87	89.15	87.15	83.54	78.71	73.72	68.70	<b>0.784</b>	1.000	0.994	0.976	0.954	0.914	0.861	0.807	0.752
10.0	91.21	90.71	89.00	86.99	83.39	78.56	73.57	68.55	<b>0.882</b>	0.998	0.993	0.974	0.952	0.913	0.860	0.805	0.750

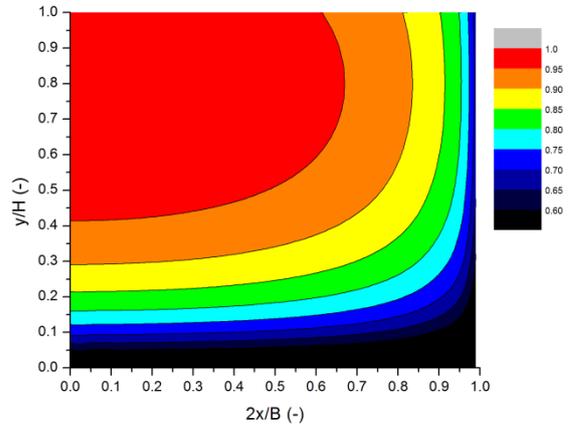
11.e) profili di velocità; valori adimensionali.



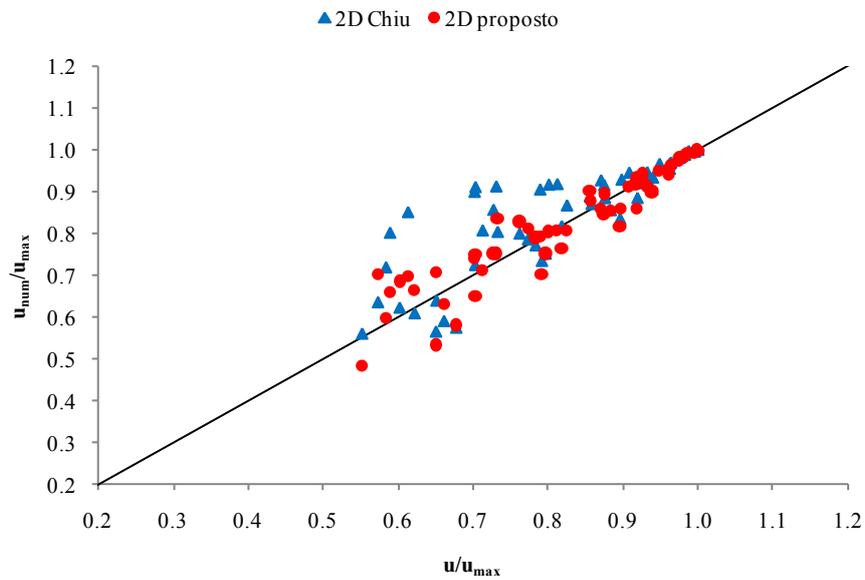
11.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



11.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



11.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



12.a) prova n°12 del 12 giugno 2009c; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	2	$u_{med}/u_{max} =$	0.827
	H =	8.5 cm	p =	0.5 %	H/B =	0.213
	$Q_{misurata} =$		$\psi_0 =$	0.999	M =	1.073
	$Q_{integrata} =$	26.69 l/s	F =	0.860	Ni =	1.450
	$u_{med} =$	78.49 cm/s	R =	5.96 cm	G =	3.790
	$u_{max} =$	94.86 cm/s	Re =	187273.5		

12.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0	$\psi\backslash\xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
1.0	61.47	46.93	50.20	57.20	61.03	62.61	58.92	<b>0.118</b>	0.648	0.495	0.529	0.603	0.643	0.660	0.621
2.0	73.08	67.12	66.19	73.73	77.52	74.31	66.07	<b>0.235</b>	0.770	0.708	0.698	0.777	0.817	0.783	0.696
3.0	80.81	75.92	77.08	80.99	83.06	77.48	67.66	<b>0.353</b>	0.852	0.800	0.813	0.854	0.876	0.817	0.713
4.0	86.05	81.00	81.18	87.30	86.74	80.02	68.75	<b>0.471</b>	0.907	0.854	0.856	0.920	0.914	0.844	0.725
6.0	91.94	88.89	88.07	91.06	89.66	84.96	76.50	<b>0.706</b>	0.969	0.937	0.928	0.960	0.945	0.896	0.806
7.0	94.86	92.75	92.25	91.49	90.47	88.01	79.48	<b>0.824</b>	1.000	0.978	0.972	0.964	0.954	0.928	0.838

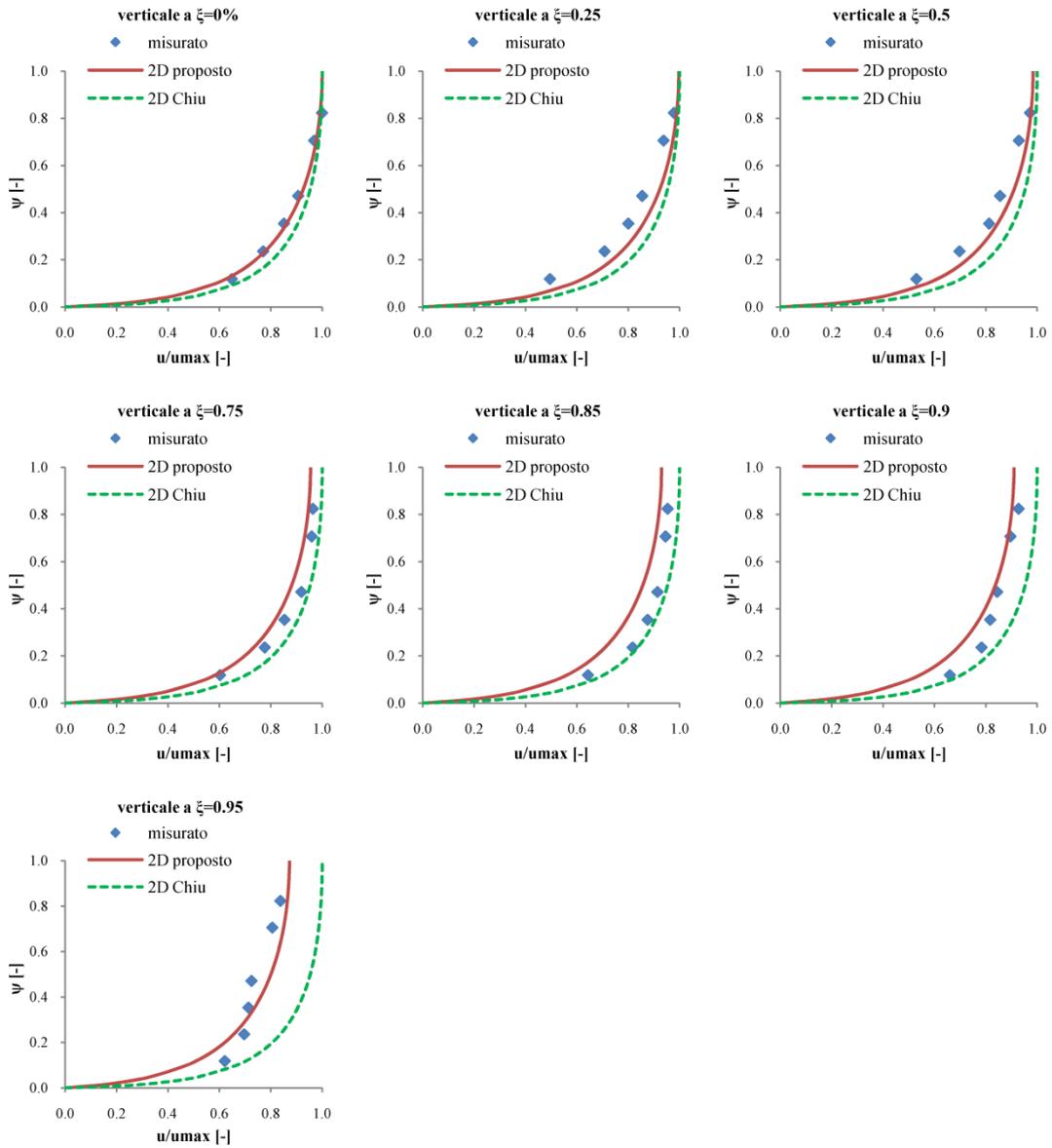
12.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0	$\psi\backslash\xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
1.0	40.69	40.28	38.92	36.35	34.91	34.10	33.22	<b>0.118</b>	0.429	0.425	0.410	0.383	0.368	0.359	0.350
2.0	63.35	62.78	60.87	57.23	55.19	54.02	52.76	<b>0.235</b>	0.668	0.662	0.642	0.603	0.582	0.570	0.556
3.0	77.53	76.89	74.69	70.50	68.13	66.78	65.30	<b>0.353</b>	0.817	0.810	0.787	0.743	0.718	0.704	0.688
4.0	86.81	86.11	83.76	79.24	76.68	75.22	73.62	<b>0.471</b>	0.915	0.908	0.883	0.835	0.808	0.793	0.776
6.0	96.72	95.98	93.47	88.64	85.89	84.32	82.60	<b>0.706</b>	1.020	1.012	0.985	0.934	0.905	0.889	0.871
7.0	98.93	98.18	95.63	90.73	87.95	86.35	84.61	<b>0.824</b>	1.043	1.035	1.008	0.956	0.927	0.910	0.892

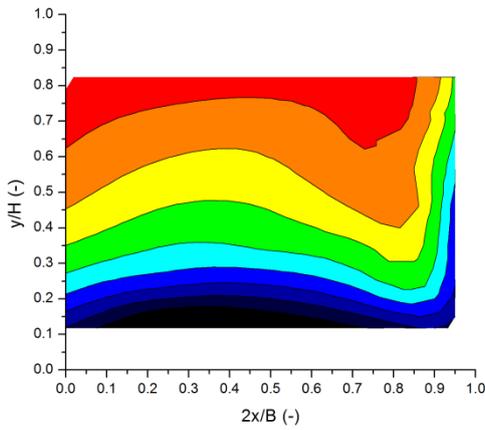
12.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0	$\psi\backslash\xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
1.0	59.13	58.82	57.75	55.18	53.04	51.27	48.21	<b>0.118</b>	0.623	0.620	0.609	0.582	0.559	0.540	0.508
2.0	73.71	73.38	72.26	69.56	67.30	65.43	62.16	<b>0.235</b>	0.777	0.774	0.762	0.733	0.709	0.690	0.655
3.0	81.74	81.41	80.27	77.52	75.21	73.30	69.96	<b>0.353</b>	0.862	0.858	0.846	0.817	0.793	0.773	0.737
4.0	86.88	86.55	85.40	82.64	80.31	78.38	75.00	<b>0.471</b>	0.916	0.912	0.900	0.871	0.847	0.826	0.791
6.0	92.67	92.33	91.18	88.39	86.04	84.09	80.68	<b>0.706</b>	0.977	0.973	0.961	0.932	0.907	0.886	0.850
7.0	94.10	93.76	92.61	89.81	87.46	85.51	82.09	<b>0.824</b>	0.992	0.988	0.976	0.947	0.922	0.901	0.865

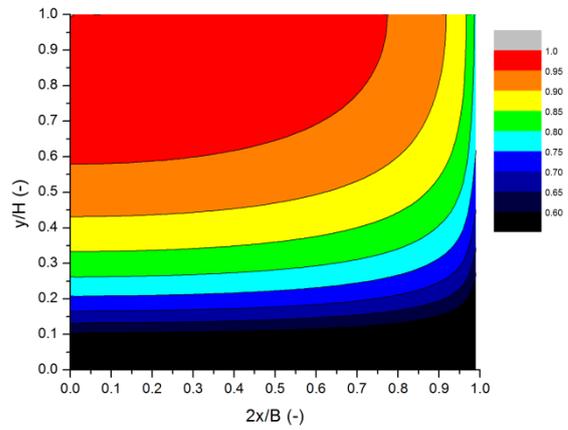
12.e) profili di velocità; valori adimensionali.



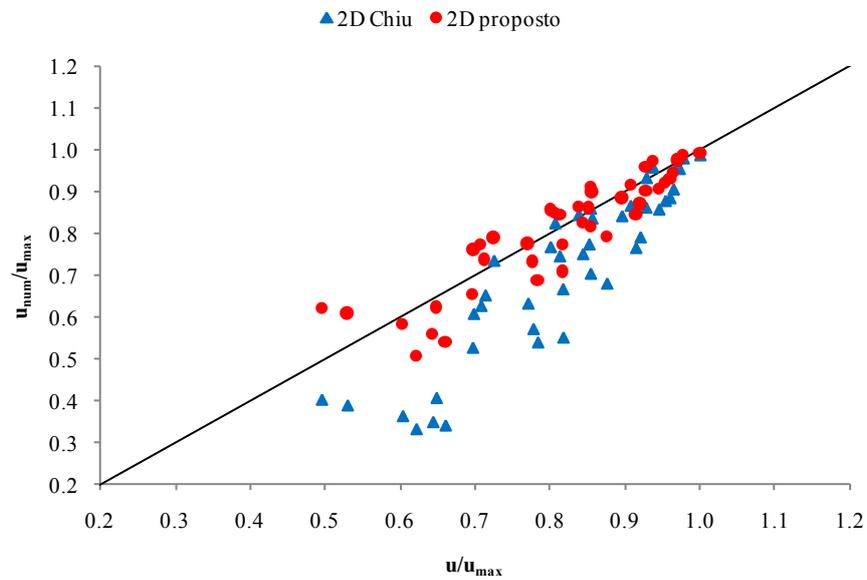
12.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



12.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



12.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



13.a) prova n°13 del 12 giugno 2009d; caratteristiche generali relative alla prova

	$B =$	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.885
	$H =$	6 cm	$p =$	0.5 %	$H/B =$	0.150
	$Q_{misurata} =$	26.2 l/s	$\psi_0 =$	0.830	$M =$	3.226
	$Q_{integrata} =$	25.88 l/s	$F =$	1.406	$Ni =$	1.590
	$u_{med} =$	107.84 cm/s	$R =$	4.62 cm	$G =$	3.530
	$u_{max} =$	121.89 cm/s	$Re =$	199088.4		

13.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0
1.0	95.82	94.25	91.46	92.73	92.14	93.27	92.38
2.0	107.13	105.42	103.15	110.09	108.87	105.83	98.33
3.0	112.61	112.84	111.70	115.30	113.14	108.49	98.95
4.0	120.01	116.34	115.89	118.53	114.07	108.16	98.04
5.0	121.89	119.91	119.25	116.30	111.55	106.89	99.87

coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
0.167	0.786	0.773	0.750	0.761	0.756	0.765	0.758
0.333	0.879	0.865	0.846	0.903	0.893	0.868	0.807
0.500	0.924	0.926	0.916	0.946	0.928	0.890	0.812
0.667	0.985	0.954	0.951	0.972	0.936	0.887	0.804
0.833	1.000	0.984	0.978	0.954	0.915	0.877	0.819

13.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0
1.0	93.24	92.77	91.17	88.05	86.24	85.20	84.04
2.0	110.58	110.09	108.44	105.20	103.32	102.23	101.02
3.0	117.93	117.44	115.77	112.49	110.59	109.49	108.27
4.0	121.08	120.58	118.91	115.62	113.71	112.60	111.37
5.0	121.89	121.39	119.71	116.42	114.51	113.40	112.17

coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
0.167	0.765	0.761	0.748	0.722	0.708	0.699	0.690
0.333	0.907	0.903	0.890	0.863	0.848	0.839	0.829
0.500	0.968	0.964	0.950	0.923	0.907	0.898	0.888
0.667	0.993	0.989	0.976	0.949	0.933	0.924	0.914
0.833	1.000	0.996	0.982	0.955	0.939	0.930	0.920

13.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

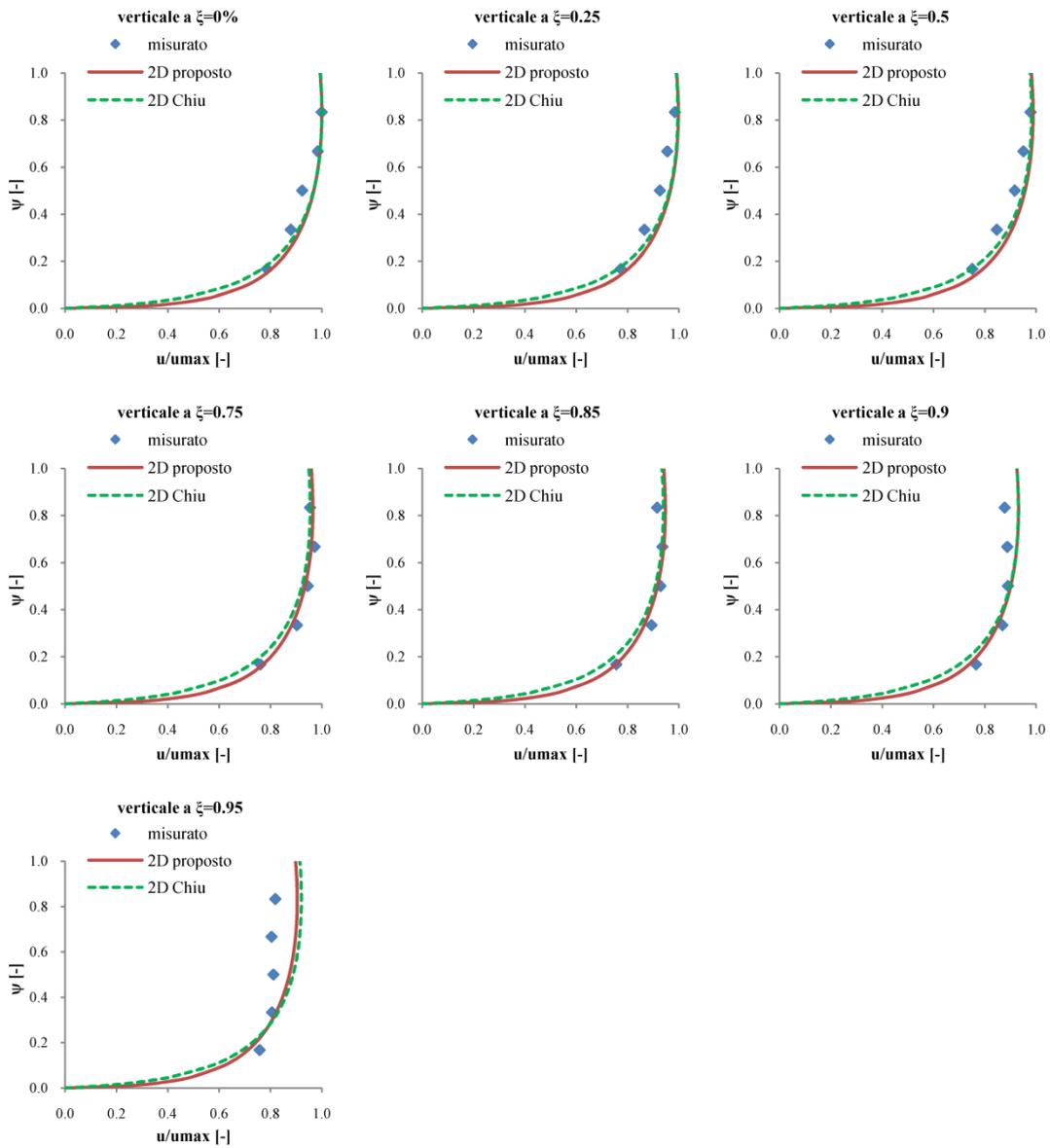
coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	15.0	17.0	18.0	19.0
1.0	97.94	97.62	96.54	93.92	91.73	89.91	86.72
2.0	111.71	111.39	110.28	107.61	105.36	103.49	100.22
3.0	118.05	117.72	116.61	113.91	111.65	109.76	106.46
4.0	121.03	120.71	119.59	116.89	114.61	112.72	109.41
5.0	121.89	121.56	120.44	117.74	115.46	113.57	110.25

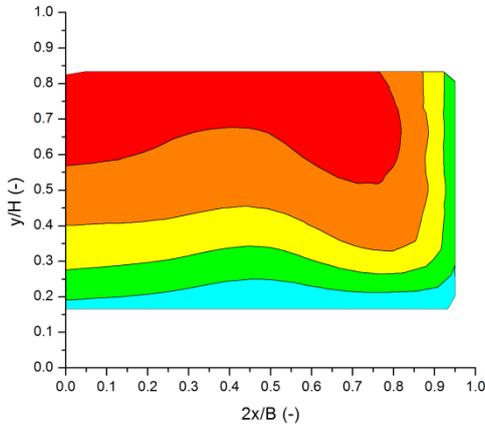
coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.850	0.900	0.950
0.167	0.804	0.801	0.792	0.771	0.753	0.738	0.711
0.333	0.917	0.914	0.905	0.883	0.864	0.849	0.822
0.500	0.968	0.966	0.957	0.935	0.916	0.901	0.873
0.667	0.993	0.990	0.981	0.959	0.940	0.925	0.898
0.833	1.000	0.997	0.988	0.966	0.947	0.932	0.905

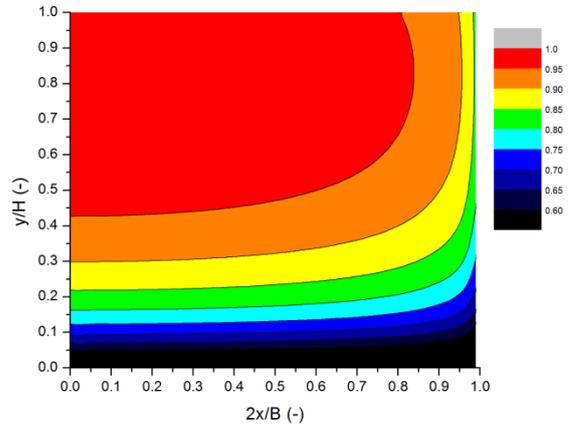
13.e) profili di velocità; valori adimensionali.



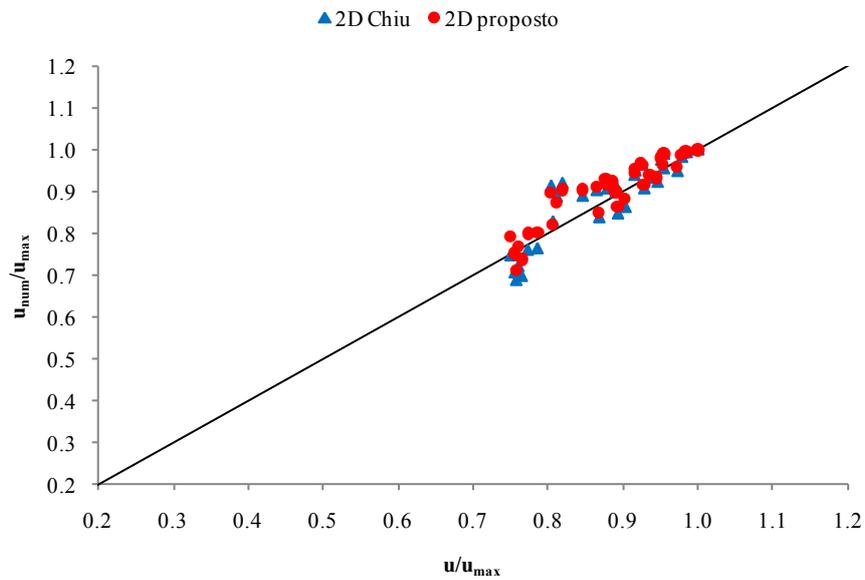
13.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



13.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



13.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



14.a) prova n°14 del 6 luglio 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	1	$u_{med}/u_{max} =$	0.846
	H =	9.1 cm	p =	0.2 %	H/B =	0.228
	$Q_{misurata} =$	17.2 l/s	$\psi_0 =$	0.943	M =	3.784
	$Q_{integrata} =$	17.96 l/s	F =	0.522	Ni =	1.500
	$u_{med} =$	49.34 cm/s	R =	6.25 cm	G =	3.816
	$u_{max} =$	58.34 cm/s	Re =	123424.2		

14.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	31.71	23.89	28.32	28.09	24.93	34.69	31.25	0.110	0.544	0.410	0.486	0.482	0.427	0.595	0.536
2.0	44.09	43.74	43.19	46.14	49.55	50.12	44.75	0.220	0.756	0.750	0.740	0.791	0.849	0.859	0.767
3.0	51.75	51.57	51.40	54.34	53.26	50.75	44.68	0.330	0.887	0.884	0.881	0.932	0.913	0.870	0.766
4.0	54.97	56.27	55.00	55.56	55.59	52.96	48.21	0.440	0.942	0.965	0.943	0.952	0.953	0.908	0.827
6.0	57.51	57.28	56.22	55.98	55.04	53.71	51.04	0.659	0.986	0.982	0.964	0.960	0.943	0.921	0.875
8.0	58.34	57.76	57.31	55.54	52.77	49.32	47.07	0.879	1.000	0.990	0.982	0.952	0.904	0.845	0.807

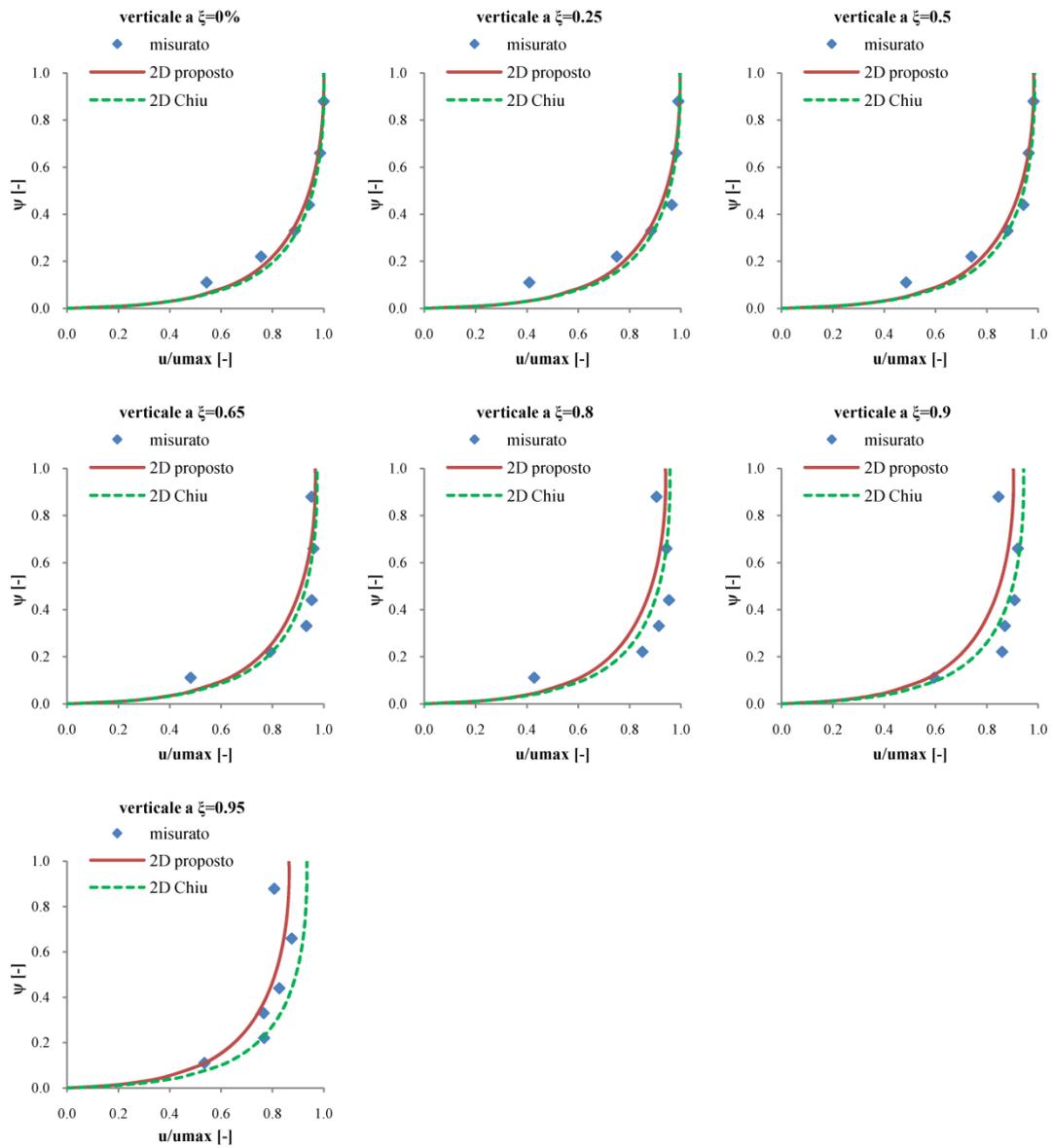
14.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	39.69	39.51	38.89	38.24	37.34	36.56	36.11	0.110	0.680	0.677	0.667	0.656	0.640	0.627	0.619
2.0	48.06	47.87	47.22	46.56	45.62	44.81	44.34	0.220	0.824	0.821	0.810	0.798	0.782	0.768	0.760
3.0	52.34	52.15	51.50	50.82	49.87	49.05	48.57	0.330	0.897	0.894	0.883	0.871	0.855	0.841	0.833
4.0	54.89	54.70	54.05	53.37	52.41	51.58	51.10	0.440	0.941	0.938	0.926	0.915	0.898	0.884	0.876
6.0	57.48	57.29	56.63	55.95	54.98	54.15	53.67	0.659	0.985	0.982	0.971	0.959	0.943	0.928	0.920
8.0	58.30	58.11	57.45	56.76	55.80	54.97	54.49	0.879	0.999	0.996	0.985	0.973	0.957	0.942	0.934

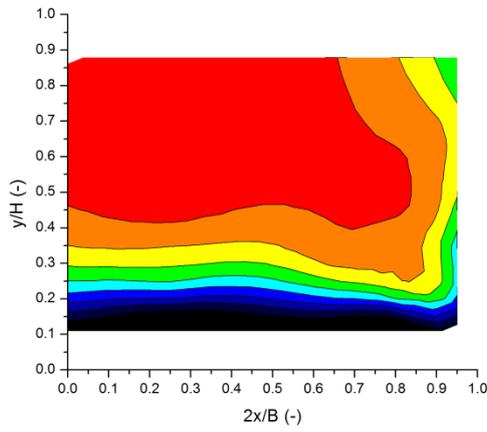
14.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	38.51	38.30	37.59	36.76	35.27	33.29	31.25	0.110	0.660	0.657	0.644	0.630	0.605	0.571	0.536
2.0	46.68	46.47	45.73	44.87	43.31	41.23	39.08	0.220	0.800	0.797	0.784	0.769	0.742	0.707	0.670
3.0	51.12	50.91	50.16	49.29	47.71	45.59	43.40	0.330	0.876	0.873	0.860	0.845	0.818	0.782	0.744
4.0	53.95	53.73	52.98	52.10	50.52	48.38	46.17	0.440	0.925	0.921	0.908	0.893	0.866	0.829	0.791
6.0	57.11	56.89	56.14	55.25	53.65	51.50	49.27	0.659	0.979	0.975	0.962	0.947	0.920	0.883	0.845
8.0	58.28	58.06	57.30	56.41	54.81	52.66	50.42	0.879	0.999	0.995	0.982	0.967	0.940	0.903	0.864

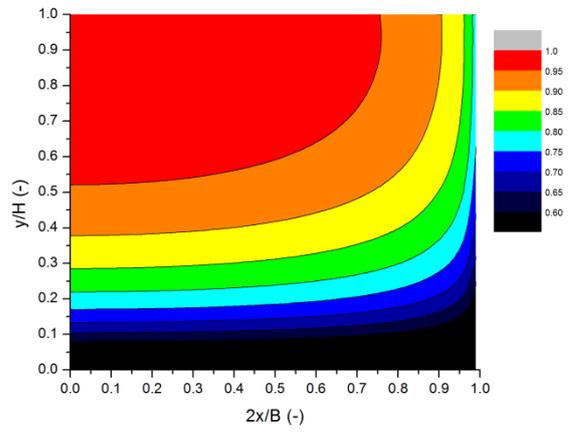
14.e) profili di velocità; valori adimensionali.



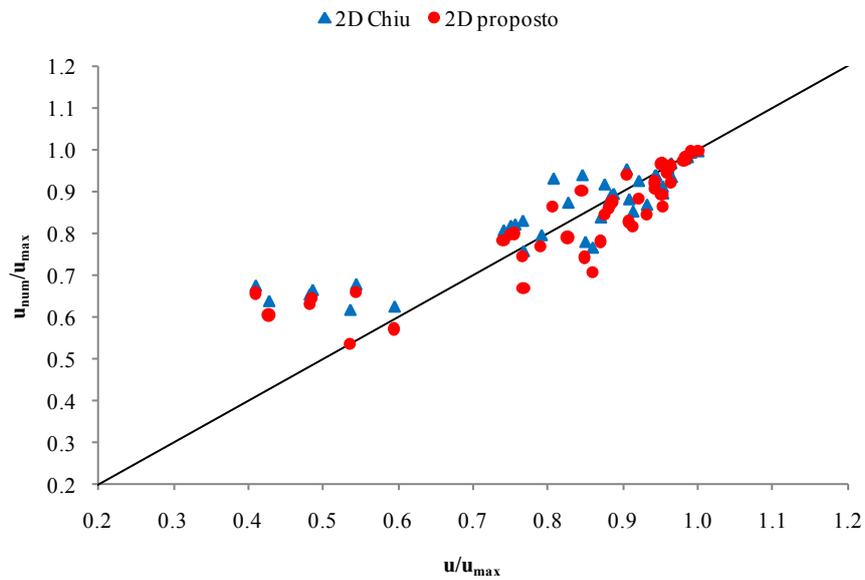
14.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



14.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



14.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



15.a) prova n°15 del 6 luglio 2009b; caratteristiche generali relative alla prova

	B =	40 cm	scabrezza	1	$u_{med}/u_{max} =$	0.842
	H =	9.3 cm	p =	0.2 %	H/B =	0.233
	$Q_{misurata} =$	17.2 l/s	$\psi_0 =$	0.900	M =	3.573
	$Q_{integrata} =$	16.98 l/s	F =	0.478	Ni =	1.520
	$u_{med} =$	45.64 cm/s	R =	6.35 cm	G =	3.230
	$u_{max} =$	54.21 cm/s	Re =	115901.7		

15.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y \ x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	23.83	26.82	20.97	31.04	27.30	32.56	31.23	<b>0.108</b>	0.440	0.495	0.387	0.572	0.503	0.601	0.576
2.0	39.88	41.22	41.79	45.60	46.21	42.09	32.33	<b>0.215</b>	0.736	0.760	0.771	0.841	0.852	0.776	0.596
3.0	49.68	47.74	48.37	50.26	50.83	42.59	31.89	<b>0.323</b>	0.916	0.881	0.892	0.927	0.938	0.786	0.588
4.0	51.55	49.72	51.18	52.26	52.25	45.38	37.98	<b>0.430</b>	0.951	0.917	0.944	0.964	0.964	0.837	0.701
6.0	53.03	53.27	52.42	52.79	51.47	47.82	42.95	<b>0.645</b>	0.978	0.983	0.967	0.974	0.949	0.882	0.792
8.0	54.21	53.81	53.09	51.20	47.91	45.34	42.16	<b>0.860</b>	1.000	0.993	0.979	0.944	0.884	0.836	0.778

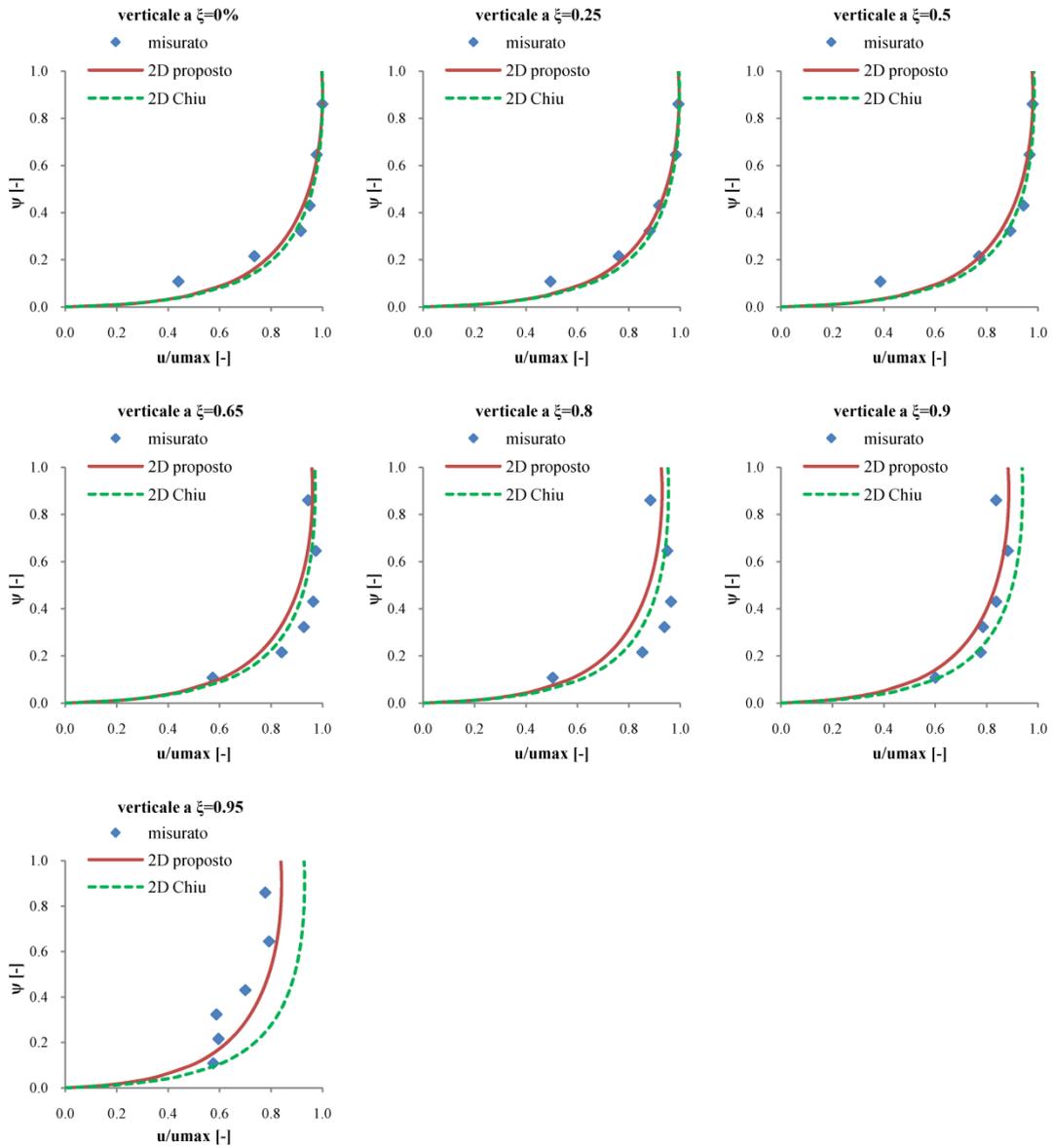
15.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y \ x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	36.35	36.17	35.56	34.93	34.05	33.29	32.85	<b>0.108</b>	0.671	0.667	0.656	0.644	0.628	0.614	0.606
2.0	44.44	44.26	43.62	42.96	42.03	41.23	40.77	<b>0.215</b>	0.820	0.816	0.805	0.792	0.775	0.761	0.752
3.0	48.58	48.39	47.75	47.08	46.14	45.32	44.85	<b>0.323</b>	0.896	0.893	0.881	0.868	0.851	0.836	0.827
4.0	51.04	50.85	50.20	49.52	48.57	47.76	47.28	<b>0.430</b>	0.941	0.938	0.926	0.913	0.896	0.881	0.872
6.0	53.48	53.29	52.64	51.96	51.01	50.18	49.71	<b>0.645</b>	0.986	0.983	0.971	0.958	0.941	0.926	0.917
8.0	54.20	54.01	53.36	52.68	51.72	50.90	50.42	<b>0.860</b>	1.000	0.996	0.984	0.972	0.954	0.939	0.930

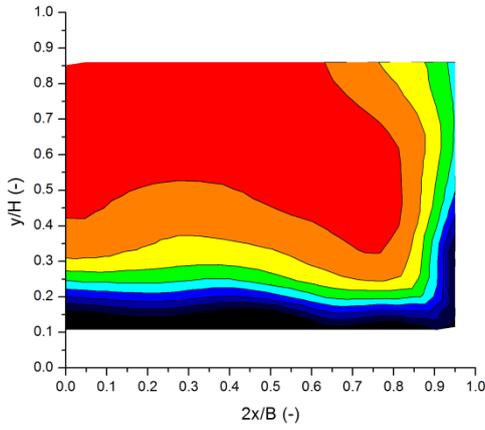
15.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y \ x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	35.05	34.83	34.07	33.19	31.61	29.52	27.40	<b>0.108</b>	0.647	0.642	0.628	0.612	0.583	0.545	0.505
2.0	43.04	42.81	42.01	41.08	39.40	37.16	34.86	<b>0.215</b>	0.794	0.790	0.775	0.758	0.727	0.685	0.643
3.0	47.39	47.16	46.34	45.39	43.67	41.38	39.01	<b>0.323</b>	0.874	0.870	0.855	0.837	0.806	0.763	0.720
4.0	50.15	49.91	49.09	48.12	46.39	44.06	41.66	<b>0.430</b>	0.925	0.921	0.905	0.888	0.856	0.813	0.768
6.0	53.17	52.93	52.09	51.12	49.37	47.02	44.58	<b>0.645</b>	0.981	0.976	0.961	0.943	0.911	0.867	0.822
8.0	54.19	53.95	53.11	52.14	50.38	48.02	45.58	<b>0.860</b>	1.000	0.995	0.980	0.962	0.929	0.886	0.841

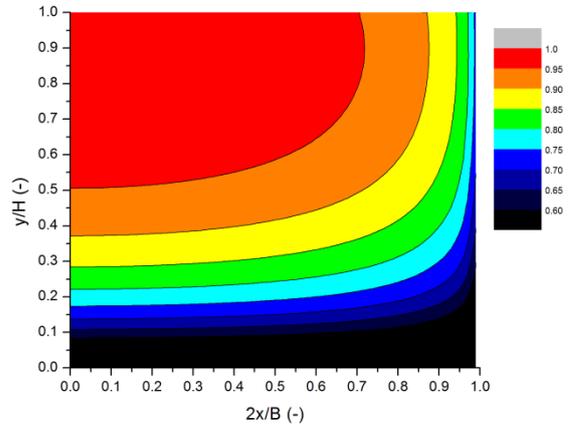
15.e) profili di velocità; valori adimensionali.



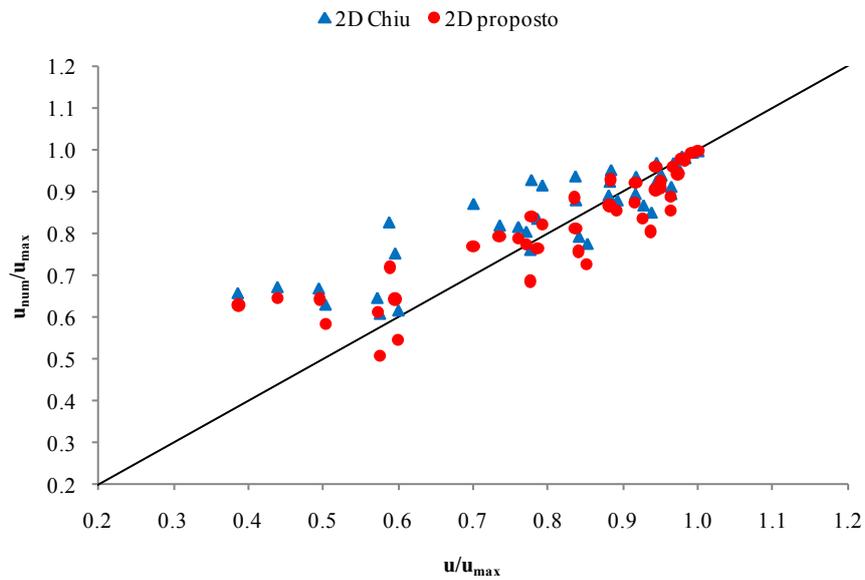
15.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



15.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



15.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



16.a) prova n°16 del 6 luglio 2009c; caratteristiche generali relative alla prova

	<b>B</b> =	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max}$ =	0.834
	<b>H</b> =	6.5 cm	p =	0.2 %	H/B =	0.163
	$Q_{misurata}$ =	25.5 l/s	$\psi_0$ =	0.770	M =	2.931
	$Q_{integrata}$ =	30.88 l/s	F =	1.487	Ni =	1.630
	$u_{med}$ =	118.75 cm/s	R =	4.91 cm	G =	1.606
	$u_{max}$ =	142.32 cm/s	Re =	233020.6		

16.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0
1.2	115.59	117.45	106.01	102.97	97.86	97.83	95.01
2.4	125.90	129.99	113.84	111.87	107.48	108.37	101.25
3.5	129.29	137.39	123.70	117.97	114.08	110.59	100.71
4.7	133.35	141.55	130.37	122.99	114.08	107.87	100.32
5.3	133.48	142.32	133.05	123.04	110.65	103.13	95.47

coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.182</b>	0.812	0.825	0.745	0.724	0.688	0.687	0.668
<b>0.364</b>	0.885	0.913	0.800	0.786	0.755	0.761	0.711
<b>0.545</b>	0.908	0.965	0.869	0.829	0.802	0.777	0.708
<b>0.727</b>	0.937	0.995	0.916	0.864	0.802	0.758	0.705
<b>0.818</b>	0.938	1.000	0.935	0.865	0.777	0.725	0.671

16.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0
1.2	111.78	111.18	109.11	106.96	103.96	101.39	99.90
2.4	132.16	131.53	129.38	127.15	124.01	121.32	119.76
3.5	139.88	139.24	137.07	134.81	131.64	128.92	127.33
4.7	142.24	141.61	139.43	137.16	133.98	131.25	129.66
5.3	142.23	141.59	139.41	137.15	133.97	131.23	129.65

coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.182</b>	0.785	0.781	0.767	0.752	0.731	0.712	0.702
<b>0.364</b>	0.929	0.924	0.909	0.893	0.871	0.852	0.841
<b>0.545</b>	0.983	0.978	0.963	0.947	0.925	0.906	0.895
<b>0.727</b>	0.999	0.995	0.980	0.964	0.941	0.922	0.911
<b>0.818</b>	0.999	0.995	0.980	0.964	0.941	0.922	0.911

16.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

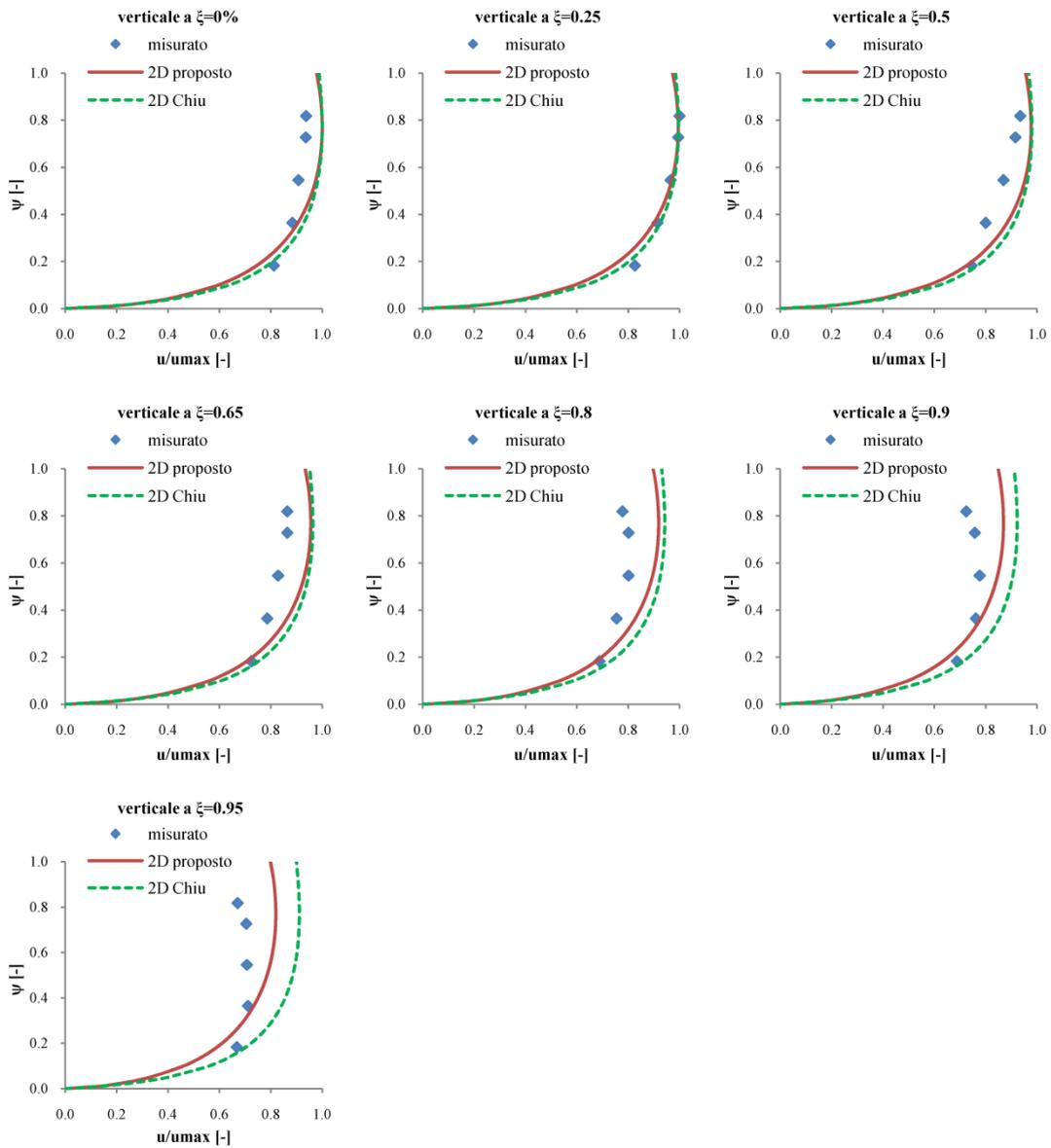
coordinate in cm, velocità in cm/s

y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0
1.2	105.89	105.24	103.02	100.45	95.90	89.92	83.92
2.4	128.85	128.14	125.69	122.85	117.80	111.13	104.37
3.5	138.77	138.04	135.51	132.58	127.34	120.42	113.38
4.7	142.20	141.46	138.91	135.94	130.65	123.64	116.51
5.3	142.17	141.43	138.88	135.91	130.62	123.61	116.49

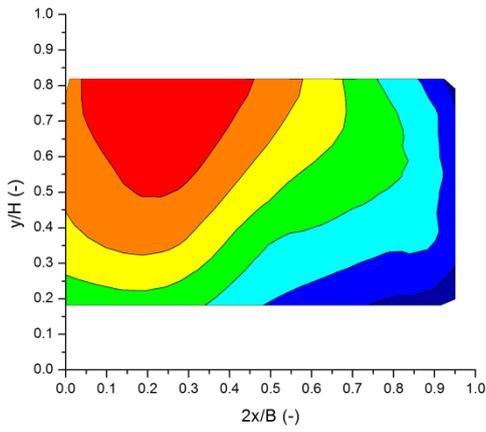
coordinate adimensionali, velocità rapportate a  $u_{max}$

$\psi/\xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
<b>0.182</b>	0.744	0.739	0.724	0.706	0.674	0.632	0.590
<b>0.364</b>	0.905	0.900	0.883	0.863	0.828	0.781	0.733
<b>0.545</b>	0.975	0.970	0.952	0.932	0.895	0.846	0.797
<b>0.727</b>	0.999	0.994	0.976	0.955	0.918	0.869	0.819
<b>0.818</b>	0.999	0.994	0.976	0.955	0.918	0.869	0.818

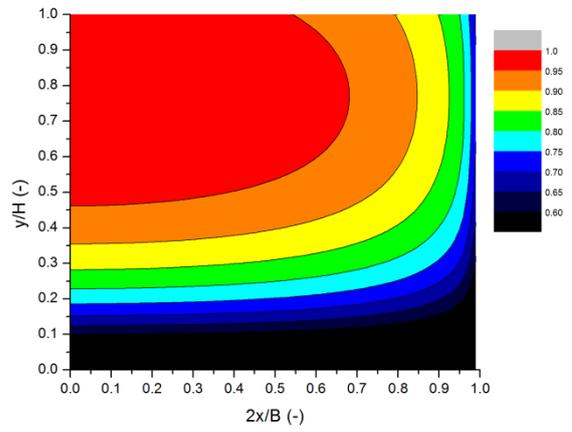
16.e) profili di velocità; valori adimensionali.



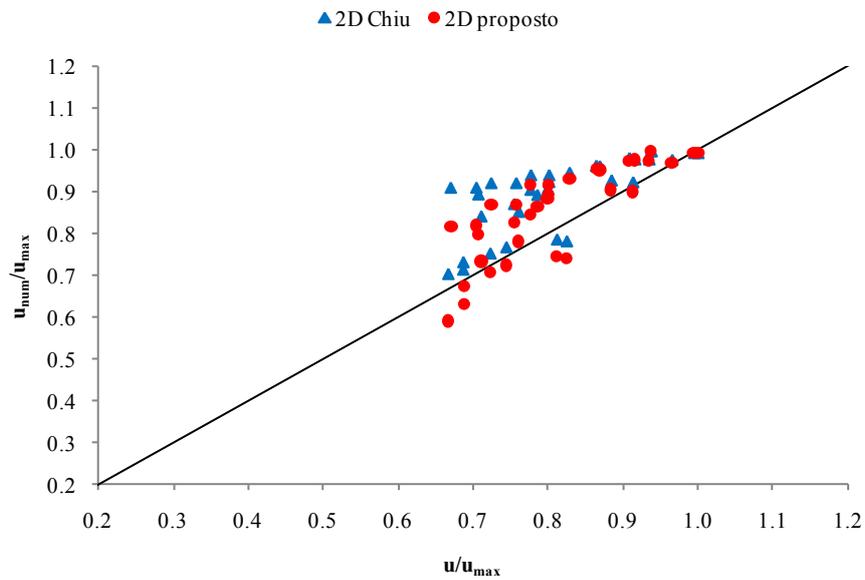
16.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



16.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



16.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



17.a) prova n°17 del 6 luglio 2009d; caratteristiche generali relative alla prova

	$B =$	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.857
	$H =$	5.5 cm	$p =$	0.2 %	$H/B =$	0.138
	$Q_{misurata} =$	25.5 l/s	$\psi_0 =$	0.792	$M =$	3.041
	$Q_{integrata} =$	26.09 l/s	$F =$	1.615	$Ni =$	1.620
	$u_{med} =$	118.59 cm/s	$R =$	4.31 cm	$G =$	2.214
	$u_{max} =$	138.34 cm/s	$Re =$	204622.3		

17.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	113.03	113.52	113.90	104.64	96.90	97.68	94.06	<b>0.182</b>	0.817	0.821	0.823	0.756	0.700	0.706	0.680
2.0	122.47	126.15	125.29	112.57	106.54	108.77	106.81	<b>0.364</b>	0.885	0.912	0.906	0.814	0.770	0.786	0.772
3.0	125.65	133.31	130.31	117.96	114.03	109.73	109.60	<b>0.545</b>	0.908	0.964	0.942	0.853	0.824	0.793	0.792
4.0	128.46	138.04	131.30	121.18	112.65	107.15	109.60	<b>0.727</b>	0.929	0.998	0.949	0.876	0.814	0.775	0.792
4.5	130.18	138.34	131.63	120.10	107.99	99.93	106.70	<b>0.818</b>	0.941	1.000	0.951	0.868	0.781	0.722	0.771

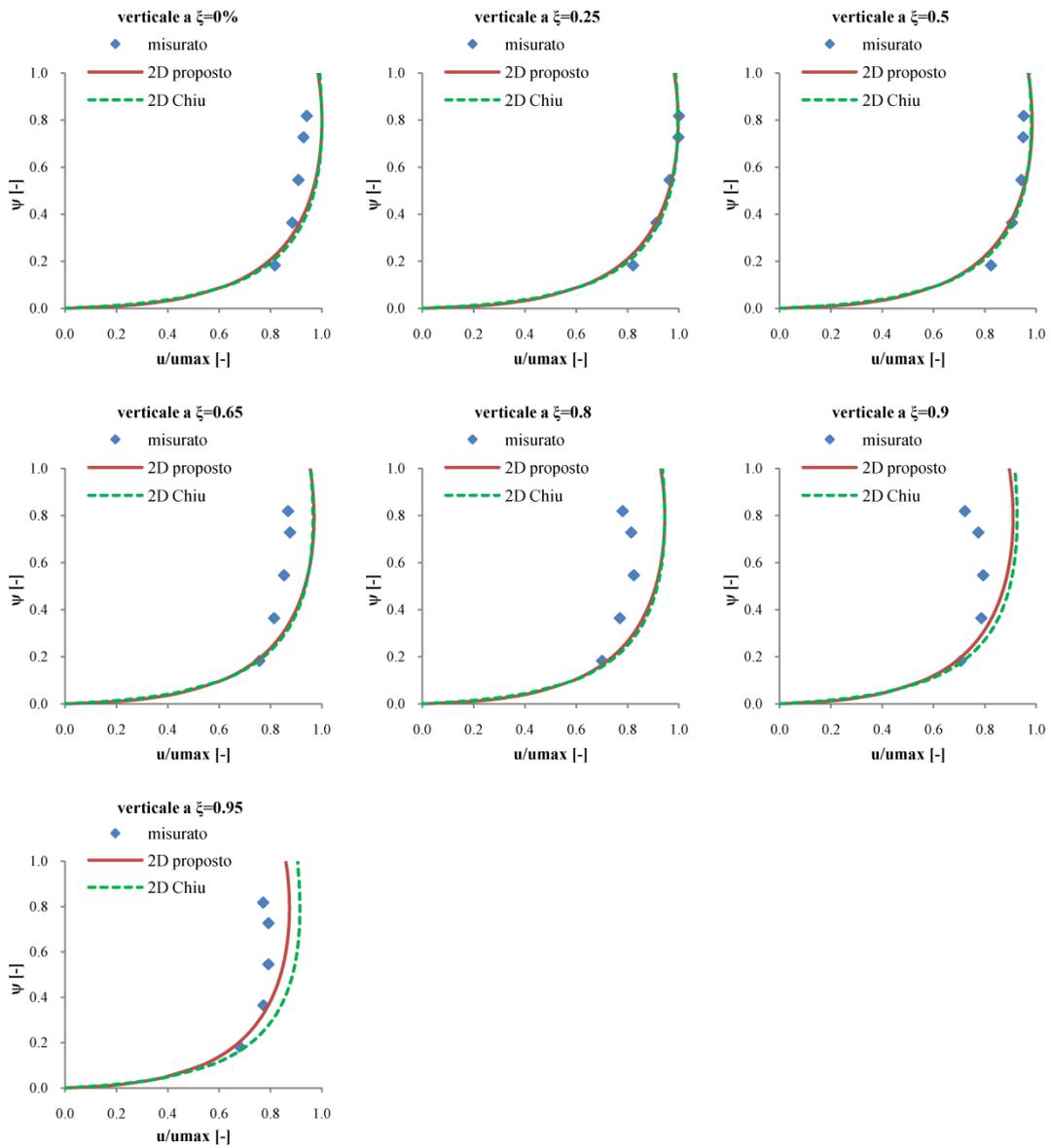
17.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	108.58	108.01	106.07	104.05	101.23	98.81	97.40	<b>0.182</b>	0.785	0.781	0.767	0.752	0.732	0.714	0.704
2.0	128.10	127.51	125.49	123.40	120.46	117.93	116.47	<b>0.364</b>	0.926	0.922	0.907	0.892	0.871	0.853	0.842
3.0	135.66	135.07	133.03	130.92	127.95	125.39	123.91	<b>0.545</b>	0.981	0.976	0.962	0.946	0.925	0.906	0.896
4.0	138.18	137.58	135.54	133.42	130.44	127.87	126.39	<b>0.727</b>	0.999	0.995	0.980	0.964	0.943	0.924	0.914
4.5	138.32	137.72	135.68	133.55	130.57	128.01	126.52	<b>0.818</b>	1.000	0.996	0.981	0.965	0.944	0.925	0.915

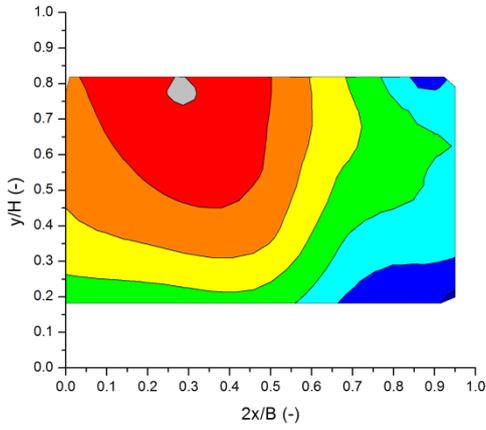
17.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	106.70	106.24	104.68	102.86	99.60	95.27	90.83	<b>0.182</b>	0.771	0.768	0.757	0.744	0.720	0.689	0.657
2.0	126.40	125.92	124.26	122.32	118.85	114.21	109.44	<b>0.364</b>	0.914	0.910	0.898	0.884	0.859	0.826	0.791
3.0	134.93	134.44	132.75	130.78	127.23	122.49	117.60	<b>0.545</b>	0.975	0.972	0.960	0.945	0.920	0.885	0.850
4.0	138.12	137.63	135.93	133.94	130.37	125.59	120.65	<b>0.727</b>	0.998	0.995	0.983	0.968	0.942	0.908	0.872
4.5	138.31	137.81	136.11	134.12	130.55	125.76	120.83	<b>0.818</b>	1.000	0.996	0.984	0.970	0.944	0.909	0.873

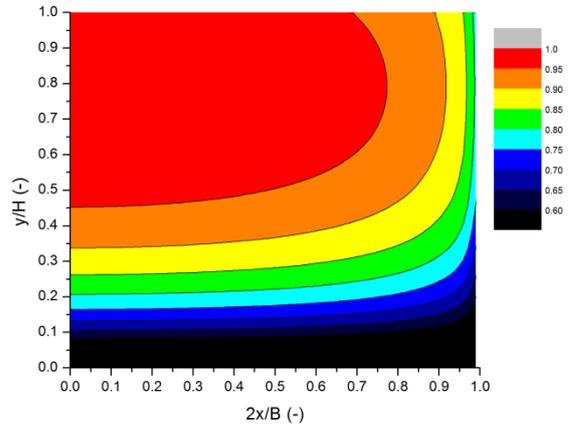
17.e) *profili di velocità; valori adimensionali.*



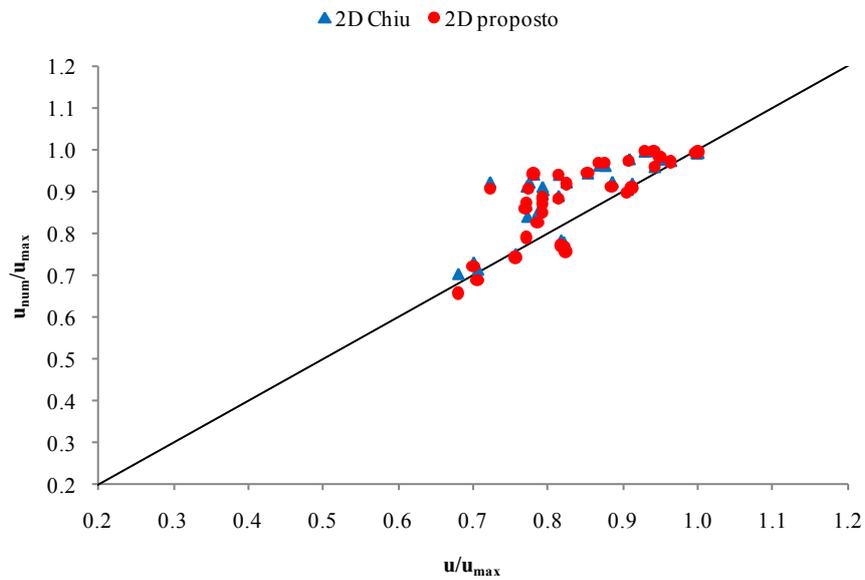
17.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



17.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



17.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



18.a) prova n°18 del 6 luglio 2009e; caratteristiche generali relative alla prova

	<b>B =</b> 40 cm	scabrezza 0	$u_{med}/u_{max} =$ 0.868
	<b>H =</b> 5.1 cm	p = 0.2 %	H/B = 0.128
	$Q_{misurata} =$ 25.5 l/s	$\psi_0 =$ 0.837	M = 3.259
	$Q_{integrata} =$ 26.5 l/s	F = 1.837	Ni = 1.580
	$u_{med} =$ 129.91 cm/s	R = 4.06 cm	G = 2.889
	$u_{max} =$ 149.74 cm/s	Re = 211171.8	

18.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	y\x	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	115.62	127.54	125.41	116.15	109.60	105.95	107.21	<b>0.196</b>	0.772	0.852	0.837	0.776	0.732	0.708	0.716
2.0	129.99	138.81	138.46	125.36	122.27	118.07	115.93	<b>0.392</b>	0.868	0.927	0.925	0.837	0.817	0.789	0.774
3.0	133.85	145.23	142.58	129.57	125.01	120.92	115.38	<b>0.588</b>	0.894	0.970	0.952	0.865	0.835	0.808	0.771
4.0	139.99	149.74	143.45	134.50	129.55	122.93	111.61	<b>0.784</b>	0.935	1.000	0.958	0.898	0.865	0.821	0.745

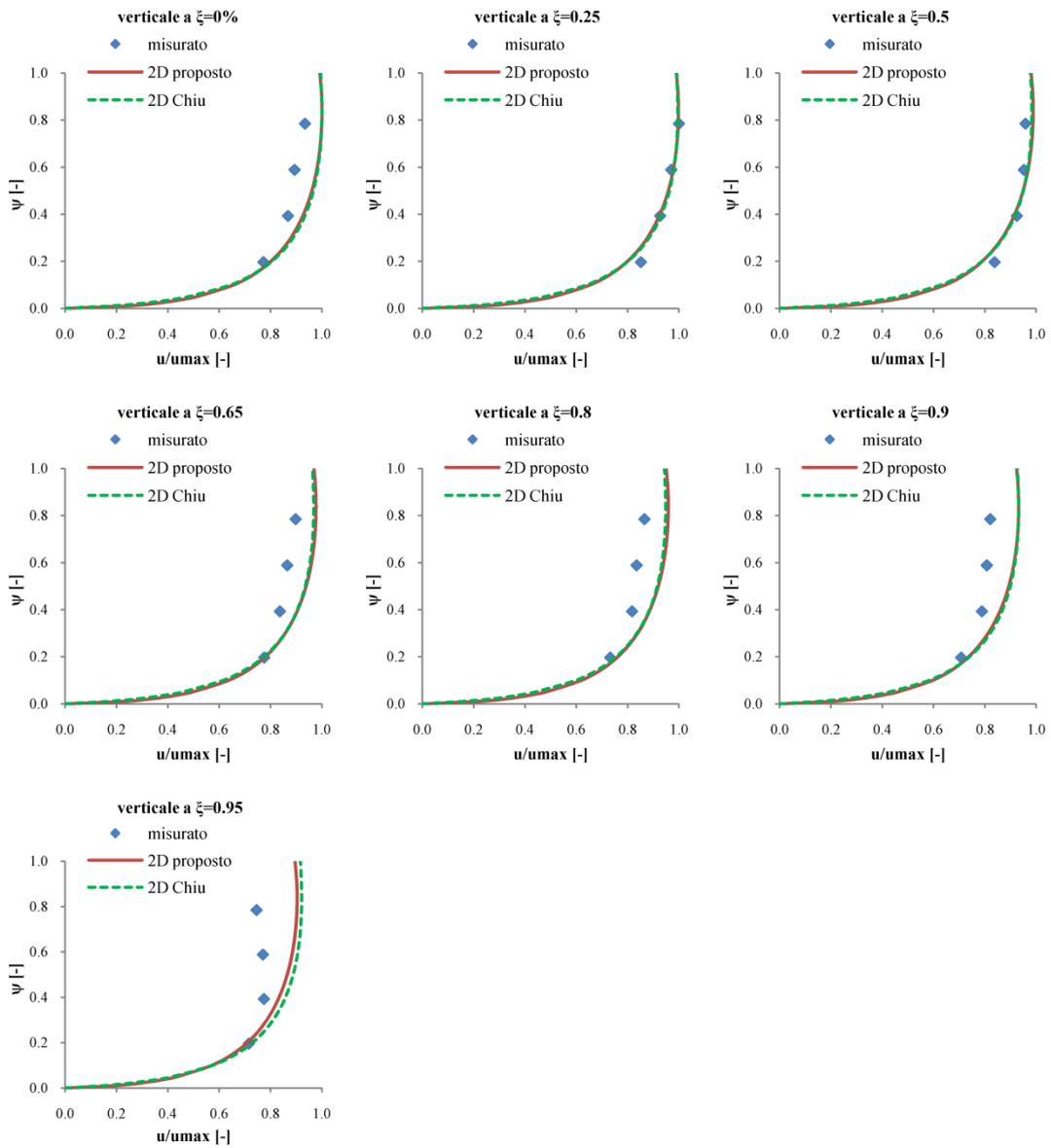
18.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	y\x	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	119.96	119.39	117.43	115.40	112.55	110.11	108.69	<b>0.196</b>	0.801	0.797	0.784	0.771	0.752	0.735	0.726
2.0	139.78	139.19	137.18	135.09	132.15	129.62	128.15	<b>0.392</b>	0.933	0.930	0.916	0.902	0.883	0.866	0.856
3.0	147.30	146.70	144.67	142.57	139.60	137.05	135.57	<b>0.588</b>	0.984	0.980	0.966	0.952	0.932	0.915	0.905
4.0	149.65	149.05	147.02	144.91	141.94	139.38	137.89	<b>0.784</b>	0.999	0.995	0.982	0.968	0.948	0.931	0.921

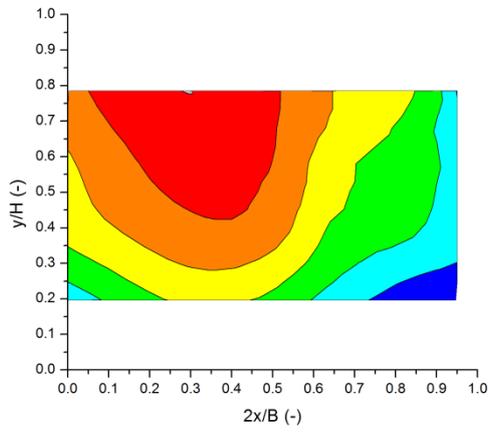
18.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s								coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$							
y\x	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	18.0	19.0	y\x	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.900	0.950
1.0	119.45	119.07	117.74	116.20	113.41	109.68	105.82	<b>0.196</b>	0.798	0.795	0.786	0.776	0.757	0.732	0.707
2.0	138.60	138.20	136.83	135.23	132.34	128.46	124.43	<b>0.392</b>	0.926	0.923	0.914	0.903	0.884	0.858	0.831
3.0	146.73	146.33	144.95	143.33	140.40	136.47	132.39	<b>0.588</b>	0.980	0.977	0.968	0.957	0.938	0.911	0.884
4.0	149.62	149.21	147.82	146.20	143.27	139.32	135.22	<b>0.784</b>	0.999	0.996	0.987	0.976	0.957	0.930	0.903

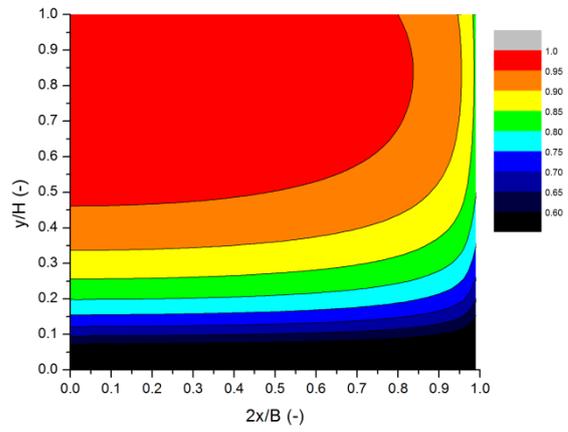
18.e) profili di velocità; valori adimensionali.



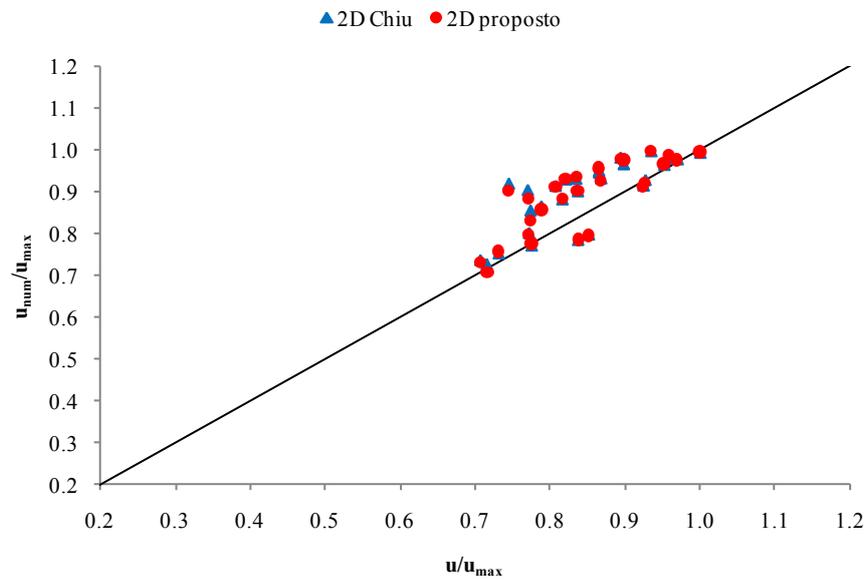
18.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



18.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



18.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



19.a) prova n°19 del 10 luglio 2009a; caratteristiche generali relative alla prova

	$B =$	40 cm	scabrezza	0	$u_{med}/u_{max} =$	0.908
	$H =$	13.2 cm	$p =$	0.25 %	$H/B =$	0.330
	$Q_{misurata} =$	30.7 l/s	$\psi_0 =$	0.735	$M =$	2.758
	$Q_{integrata} =$	30.59 l/s	$F =$	0.509	$N_i =$	1.655
	$u_{med} =$	57.93 cm/s	$R =$	7.95 cm	$G =$	4.748
	$u_{max} =$	63.82 cm/s	$Re =$	184256.2		

19.b) valori di velocità misurati

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	53.70	51.60	52.51	50.76	51.48	47.57	0.076	0.841	0.809	0.823	0.795	0.807	0.745
2.0	57.82	56.16	56.43	55.75	54.69	49.98	0.152	0.906	0.880	0.884	0.873	0.857	0.783
3.0	59.67	58.34	57.36	58.14	56.79	50.66	0.227	0.935	0.914	0.899	0.911	0.890	0.794
4.0	60.72	59.14	59.63	60.22	57.91	52.07	0.303	0.951	0.927	0.934	0.944	0.907	0.816
6.0	62.35	60.11	61.38	61.36	59.26	53.20	0.455	0.977	0.942	0.962	0.961	0.928	0.834
8.0	62.71	62.24	61.61	61.36	60.13	51.85	0.606	0.983	0.975	0.965	0.961	0.942	0.812
10.0	62.66	62.24	60.65	60.11	58.08	50.39	0.758	0.982	0.975	0.950	0.942	0.910	0.789
11.0	63.82	61.74	60.63	58.69	56.84	49.76	0.833	1.000	0.967	0.950	0.920	0.891	0.780
12.0	62.65	61.20	59.87	57.46	54.34	47.89	0.909	0.982	0.959	0.938	0.900	0.851	0.750

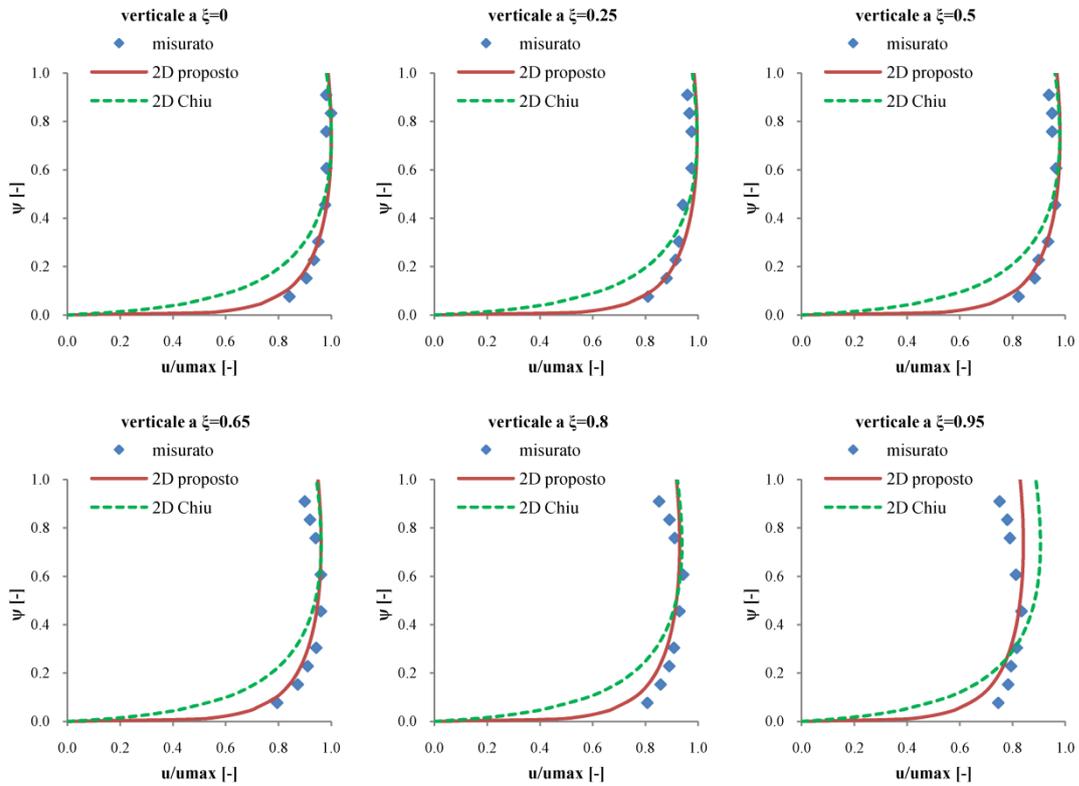
19.c) valori di velocità stimati con modello di Chiu

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	35.97	35.72	34.84	33.94	32.69	31.02	0.076	0.564	0.560	0.546	0.532	0.512	0.486
2.0	47.34	47.06	46.09	45.09	43.69	41.80	0.152	0.742	0.737	0.722	0.706	0.685	0.655
3.0	53.55	53.25	52.25	51.21	49.76	47.79	0.227	0.839	0.834	0.819	0.802	0.780	0.749
4.0	57.43	57.13	56.11	55.05	53.57	51.56	0.303	0.900	0.895	0.879	0.863	0.839	0.808
6.0	61.69	61.38	60.35	59.27	57.76	55.72	0.455	0.967	0.962	0.946	0.929	0.905	0.873
8.0	63.45	63.14	62.10	61.02	59.50	57.44	0.606	0.994	0.989	0.973	0.956	0.932	0.900
10.0	63.81	63.51	62.47	61.38	59.86	57.80	0.758	1.000	0.995	0.979	0.962	0.938	0.906
11.0	63.65	63.34	62.30	61.21	59.70	57.63	0.833	0.997	0.992	0.976	0.959	0.935	0.903
12.0	63.30	62.99	61.95	60.87	59.35	57.29	0.909	0.992	0.987	0.971	0.954	0.930	0.898

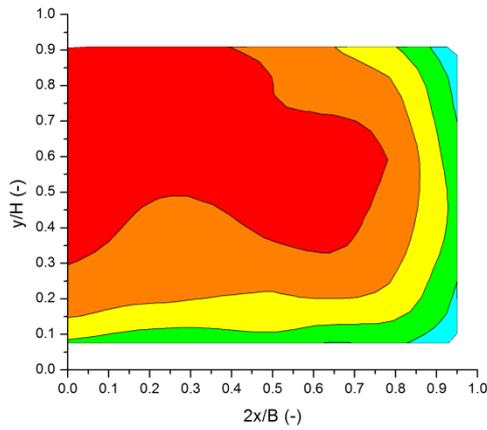
19.d) valori di velocità stimati con modello proposto (eq. 4.3)

coordinate in cm, velocità in cm/s							coordinate adimensionali, velocità rapportate a $u_{max}$						
$y \setminus x$	0.0	5.0	10.0	13.0	16.0	19.0	$\psi \setminus \xi$	0.000	0.250	0.500	0.650	0.800	0.950
1.0	50.72	50.44	49.48	48.35	46.31	40.75	0.076	0.795	0.790	0.775	0.758	0.726	0.638
2.0	56.08	55.79	54.82	53.68	51.63	45.99	0.152	0.879	0.874	0.859	0.841	0.809	0.720
3.0	58.90	58.62	57.64	56.50	54.44	48.77	0.227	0.923	0.918	0.903	0.885	0.853	0.764
4.0	60.68	60.40	59.42	58.28	56.21	50.53	0.303	0.951	0.946	0.931	0.913	0.881	0.792
6.0	62.71	62.43	61.45	60.30	58.23	52.53	0.455	0.983	0.978	0.963	0.945	0.912	0.823
8.0	63.62	63.33	62.35	61.20	59.13	53.42	0.606	0.997	0.992	0.977	0.959	0.926	0.837
10.0	63.82	63.53	62.55	61.41	59.33	53.63	0.758	1.000	0.995	0.980	0.962	0.930	0.840
11.0	63.71	63.43	62.45	61.30	59.23	53.52	0.833	0.998	0.994	0.978	0.960	0.928	0.839
12.0	63.48	63.20	62.22	61.07	59.00	53.29	0.909	0.995	0.990	0.975	0.957	0.924	0.835

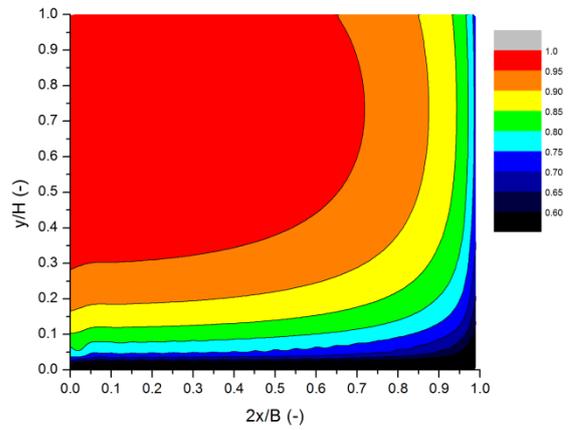
19.e) profili di velocità; valori adimensionali.



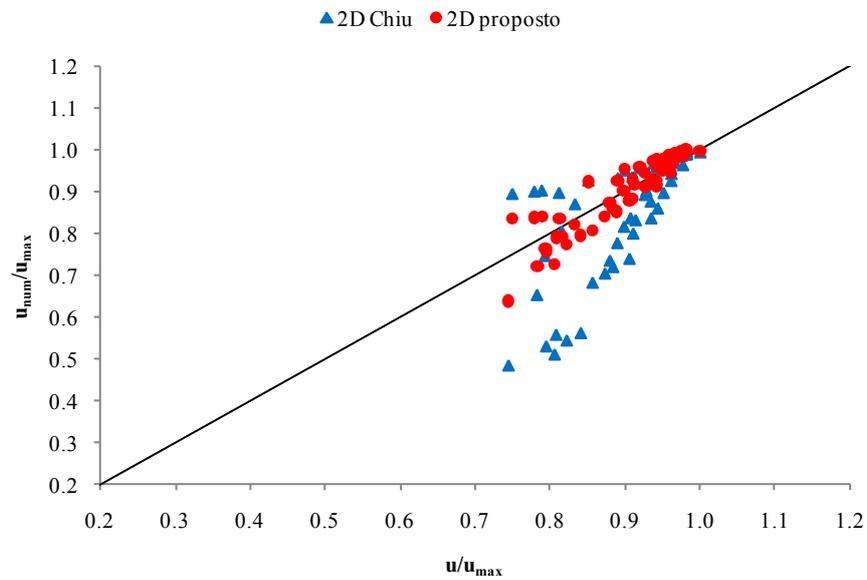
19.f) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



19.g) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



19.h) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu



## APPENDICE C

### SCHEDE SINTETICHE RIASSUNTIVE DEI RISULTATI RELATIVI ALLA VALIDAZIONE DEL MODELLO PROPOSTO PER DOMINIO DI FORMA GENERICA

Nella presente appendice sono riportati le misure effettuate su diversi corsi d'acqua che sono state utilizzate per validare il modello analitico proposto relativo a una sezione di forma qualsiasi. Unitamente alle misure sono riportate le stime di velocità effettuate sia con un modello di letteratura che con il modello sviluppato e proposto nella presente tesi.

Come già indicato nel capitolo 4 per ciascun caso di studio è stata redatta una scheda riassuntiva contenente tutte le informazioni relative alle misure e alle stime effettuate. La descrizione sintetica della scheda che è stata effettuata nel capitolo 4, viene riportata integralmente qui di seguito per maggiore chiarezza espositiva della presente appendice.

Nella scheda viene riportato un numero progressivo, la data e luogo in cui sono state effettuate le misure, e uno schema indicante il sistema di riferimento utilizzato per il modello analitico; inoltre vengono riportati nell'ordine:

a) le caratteristiche di seguito elencate o misurate direttamente o stimate tramite le misure effettuate:

$B$  = la larghezza in superficie della sezione;

$H$  = il tirante idrico massimo;

$u_{med}$  = la velocità media di sezione valutata durante le misure;

$u_{max}$  = la velocità massima tra le velocità misurate, considerata la velocità massima della sezione;

$\xi_0$  = la posizione orizzontale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto alla larghezza in superficie;

$\psi_0$  = la posizione verticale del punto a velocità massima adimensionalizzata rispetto al tirante;

$A$  = l'area della sezione;

$C$  = il contorno bagnato della sezione;

$A_r$  = l'area della sezione rettangolare circoscritta alla sezione effettiva calcolata come:  $B \cdot H$ ;

$u_{med} / u_{max}$  = il rapporto tra velocità media e velocità massima;

$H/B$  = il rapporto tra tirante e larghezza della sezione;

$A_r/A$  = il rapporto tra area della sezione rettangolare circoscritta alla sezione effettiva e area della sezione effettiva;

$G$  = il parametro entropico relativo al modello 2D proposto nella tesi (cfr punto c);

- b) un grafico che rappresenta la sezione del corso d'acqua rilevata durante le misure e la curva che interpola la sezione; l'equazione della curva viene riportata e sarà necessaria per l'applicazione del modello proposto nella tesi per sezione qualsiasi (cfr. punto c);
- c) una tabella che riporta le coordinate di ciascun punto di misura sia dimensionali ( $x, y$ ) che adimensionali ( $\xi, \psi$ ), la velocità misurata sia dimensionale che rapportata a quella massima ( $u$  e  $u/u_{\max}$ ), le velocità stimate con il modello di Chiu ( $u_{\text{Chiu}}$  e  $u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ ) e con il modello proposto nella tesi ( $u_{\text{stima}}$  e  $u_{\text{stima}}/u_{\max}$ ).

Per quanto riguarda le stime dei valori di velocità con il modello di Chiu si è seguito l'approccio consigliato da Moramarco et, al. (2004) ovvero quello di non applicare l'equazione bidimensionale (2.37) che darebbe stime non accettabili, ma considerare ogni verticale della sezione e applicare l'equazione monodimensionale (2.43) stimando un unico parametro entropico  $M$  per sezione. Una descrizione più dettagliata di tale approccio è riportata nel capitolo 2, qui ci si limita a riportare la (2.43) riscritta utilizzando il sistema di riferimento e le notazioni definite al punto a):

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\Psi}{\Psi_0} \exp \left( 1 - \frac{\Psi}{\Psi_0} \right) \right] \quad (4.5)$$

in cui  $M$  viene valutato risolvendo il sistema di equazioni (2.30), (2.49) accoppiato alla relazione empirica (2.51).

Per quanto riguarda, invece, la stima della distribuzione di velocità con il metodo messo a punto nella presente tesi, la sezione di un corso d'acqua è una sezione di forma qualsiasi pertanto si è applicata l'equazione generale definita mediante la (3.28) che viene qui di seguito riportata:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{G} \ln \left\{ 1 + (e^G - 1) \cdot \left[ 4 \left( \xi^{\frac{-\ln 2}{\ln \xi_0}} - \xi^{\frac{-2 \ln 2}{\ln \xi_0}} \right) \right]^{\frac{H}{B} \left( \frac{Ar}{A} \right)^{13}} \cdot 4 \left[ \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|}} - \left( \frac{\psi - f(\xi)}{2} \right)^{\frac{2 \ln 2}{\ln 2 - \ln |\psi_0 - p(\xi)|}} \right] \right\} \quad (4.6)$$

in cui  $f(\xi)$  è l'equazione che interpola la sezione reale del corso d'acqua che viene riportata al punto a) e il parametro  $G$  viene calcolato risolvendo la (3.30).

- d) i grafici relativi al confronto tra i valori di velocità puntuale misurati, i profili ricavati con il modello bidimensionale sintetizzato nell'equazione (4.6), e quelli ricavati applicando il modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al (2004);
- e) una figura che riporta le isotachie ricavate interpolando i valori di velocità misurati;
- f) una figura che riporta le isotachie ricavate a mezzo della (4.6);

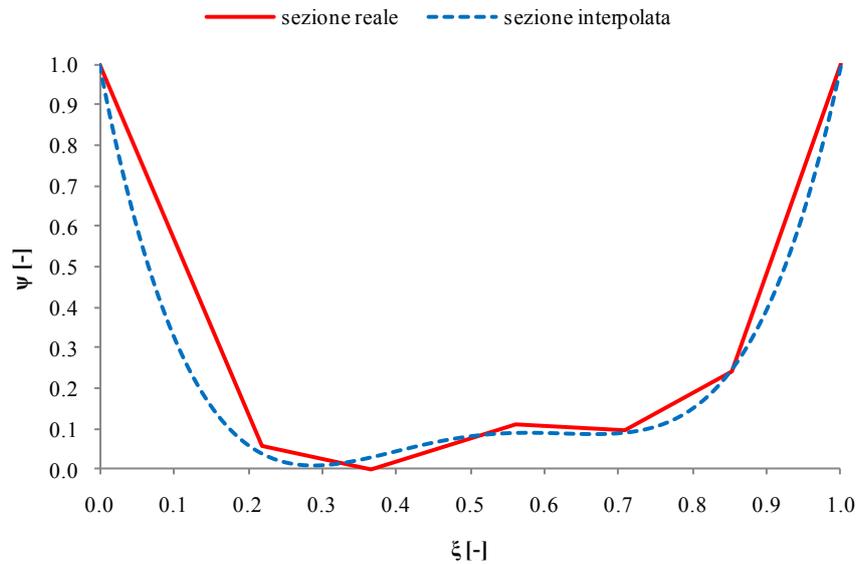
g) un diagramma che riporta due serie di dati una relativa alle velocità stimate con il modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al (2004) e l'altra relativa a quelle stimate con la (4.6); in ascisse ci sono le velocità misurate e in ordinata quelle stimate entrambe rapportate a quella massima; il grafico evidenzia la corrispondenza velocità misurata e velocità stimata che è tanto maggiore quanto più i punti si avvicinano alla retta bisettrice.

Per motivi di spazio qui di seguito viene riportata la scheda relativa a un solo caso applicativo, mentre tutte le altre sono riportate in appendice (Appendice C)

1.a) (SantaLucia) n°1, del 28 maggio 1984, fiume Tevere, stazione di Santa Lucia

	$B =$	21.19 m	$A =$	55.19 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.662
	$H =$	3.29 m	$C =$	23.37 m	$H/B =$	0.155
	$u_{med} =$	1.61 m/s	$Ar =$	69.72 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.263
	$u_{max} =$	2.44 m/s			$G =$	5.637
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.55				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.75				

1.b) sezione idrica e sua interpolazione



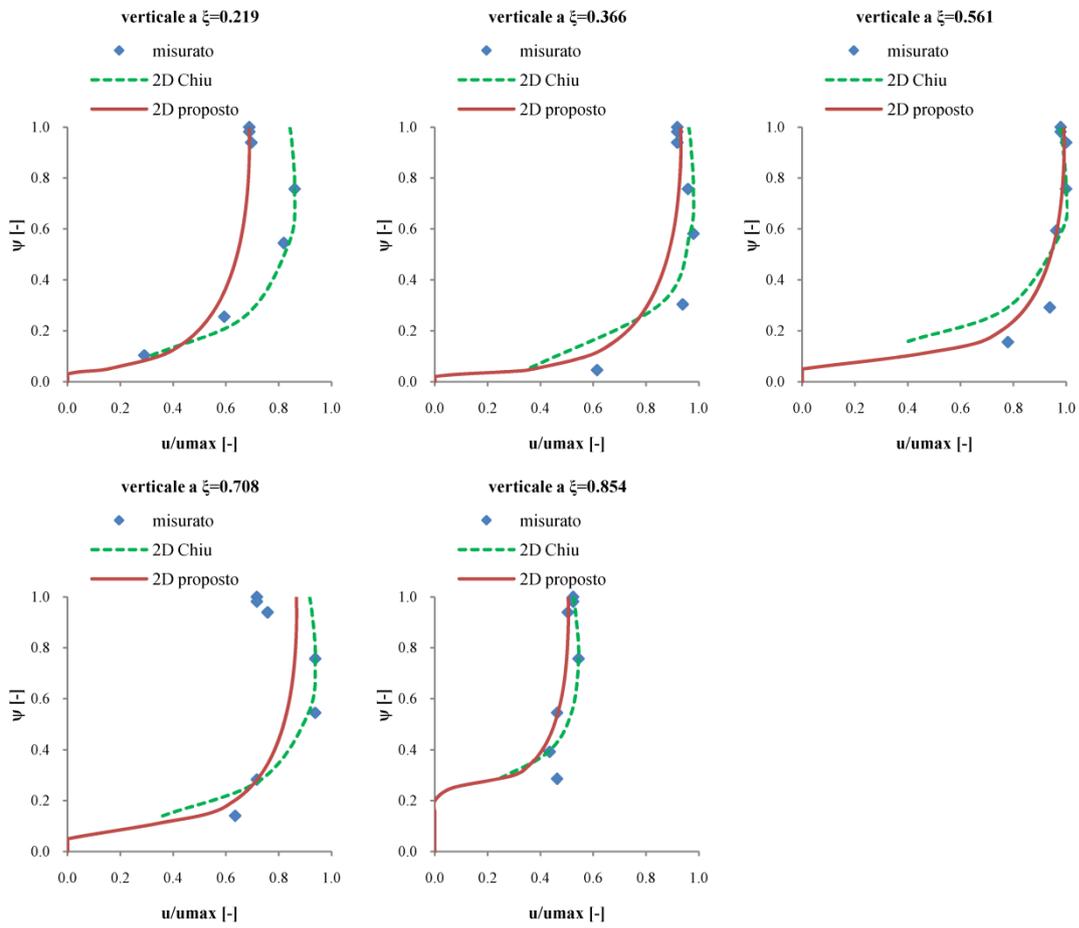
L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

$$p(\xi) = 21.279 \xi^4 - 43.529 \xi^3 + 31.723 \xi^2 - 9.480 \xi + 1$$

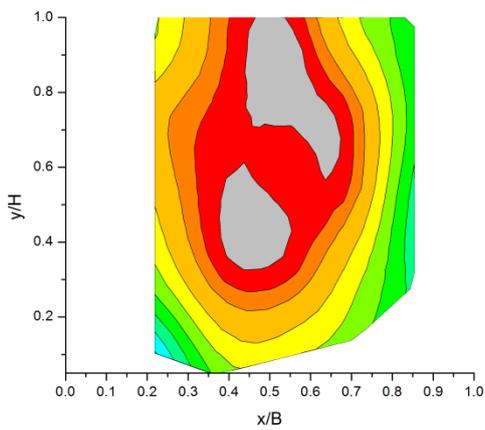
I.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
4.65	3.29	1.68	0.219	1.000	0.689	1.68	0.688	2.06	0.843
4.65	3.23	1.68	0.219	0.982	0.689	1.68	0.689	2.06	0.845
4.65	3.09	1.70	0.219	0.939	0.697	1.68	0.689	2.07	0.850
4.65	2.49	2.10	0.219	0.757	0.861	1.67	0.683	2.10	0.861
4.65	1.79	2.00	0.219	0.544	0.820	1.59	0.653	2.05	0.840
4.65	0.84	1.45	0.219	0.255	0.594	1.32	0.539	1.64	0.670
4.65	0.34	0.71	0.219	0.103	0.291	0.87	0.355	0.78	0.319
7.76	3.29	2.24	0.366	1.000	0.918	2.27	0.931	2.35	0.962
7.76	3.23	2.24	0.366	0.982	0.918	2.27	0.932	2.35	0.964
7.76	3.09	2.24	0.366	0.939	0.918	2.28	0.932	2.36	0.969
7.76	2.49	2.34	0.366	0.757	0.959	2.26	0.926	2.39	0.980
7.76	1.91	2.39	0.366	0.581	0.980	2.20	0.902	2.36	0.966
7.76	1.00	2.29	0.366	0.304	0.939	1.97	0.808	2.08	0.853
7.76	0.15	1.50	0.366	0.046	0.615	0.83	0.339	0.84	0.345
11.89	3.29	2.39	0.561	1.000	0.980	2.42	0.991	2.38	0.976
11.89	3.23	2.39	0.561	0.982	0.980	2.42	0.992	2.39	0.979
11.89	3.09	2.44	0.561	0.939	1.000	2.42	0.992	2.41	0.986
11.89	2.49	2.44	0.561	0.757	1.000	2.40	0.985	2.44	1.000
11.89	1.95	2.35	0.561	0.593	0.963	2.35	0.964	2.40	0.984
11.89	0.96	2.29	0.561	0.292	0.939	2.07	0.847	1.90	0.778
11.89	0.51	1.90	0.561	0.155	0.779	1.63	0.667	0.95	0.389
15.00	3.29	1.75	0.708	1.000	0.717	2.11	0.867	2.24	0.917
15.00	3.23	1.75	0.708	0.982	0.717	2.12	0.867	2.24	0.920
15.00	3.09	1.85	0.708	0.939	0.758	2.12	0.868	2.26	0.926
15.00	2.49	2.29	0.708	0.757	0.939	2.10	0.861	2.29	0.939
15.00	1.79	2.29	0.708	0.544	0.939	2.02	0.830	2.23	0.912
15.00	0.93	1.75	0.708	0.283	0.717	1.75	0.718	1.79	0.733
15.00	0.46	1.55	0.708	0.140	0.635	1.24	0.508	0.88	0.360
18.10	3.29	1.28	0.854	1.000	0.525	1.23	0.505	1.28	0.526
18.10	3.23	1.28	0.854	0.982	0.525	1.23	0.506	1.29	0.528
18.10	3.09	1.23	0.854	0.939	0.504	1.23	0.506	1.30	0.533
18.10	2.49	1.33	0.854	0.757	0.545	1.22	0.500	1.33	0.545
18.10	1.79	1.13	0.854	0.544	0.463	1.14	0.467	1.26	0.518
18.10	1.29	1.06	0.854	0.392	0.434	0.98	0.402	1.05	0.431
18.10	0.94	1.13	0.854	0.286	0.463	0.66	0.269	0.60	0.244

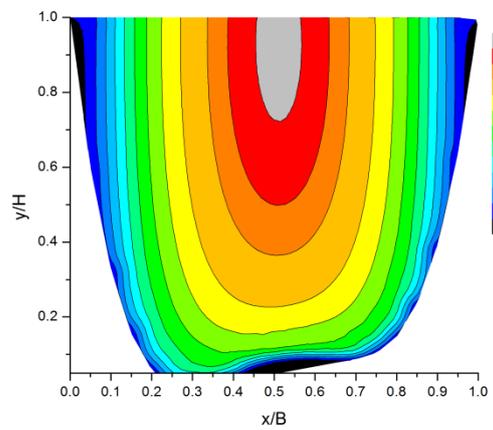
1.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*



1.e) *isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali*



1.f) *isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali*

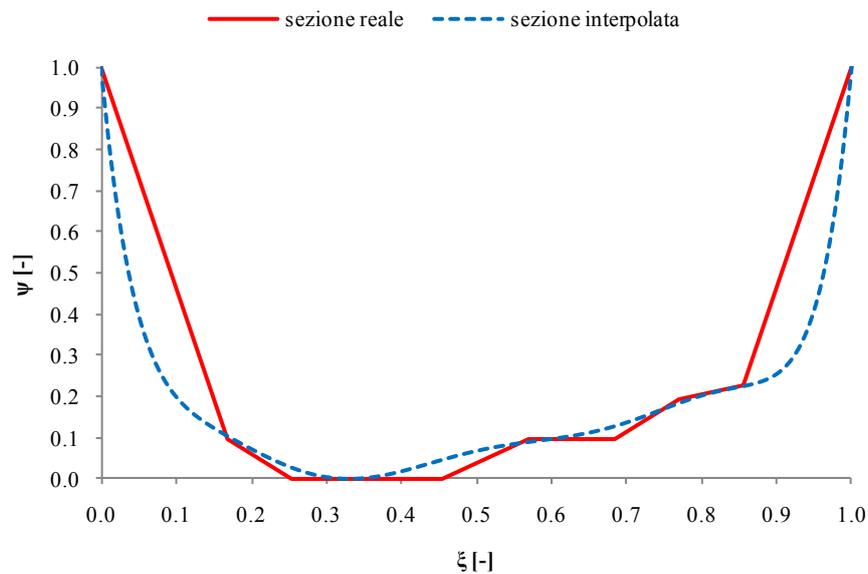




2.a) (Chiasco) n°2, del 28 maggio 1984, fiume Chiasco, stazione di Rosciano

	$B =$	35.94 m	$A =$	92.2 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.669
	$H =$	3.11 m	$C =$	37.8 m	$H/B =$	0.087
	$u_{med} =$	1.64 m/s	$Ar =$	111.8 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.212
	$u_{max} =$	2.45 m/s			$G =$	0.312
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.48				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.56				

2.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

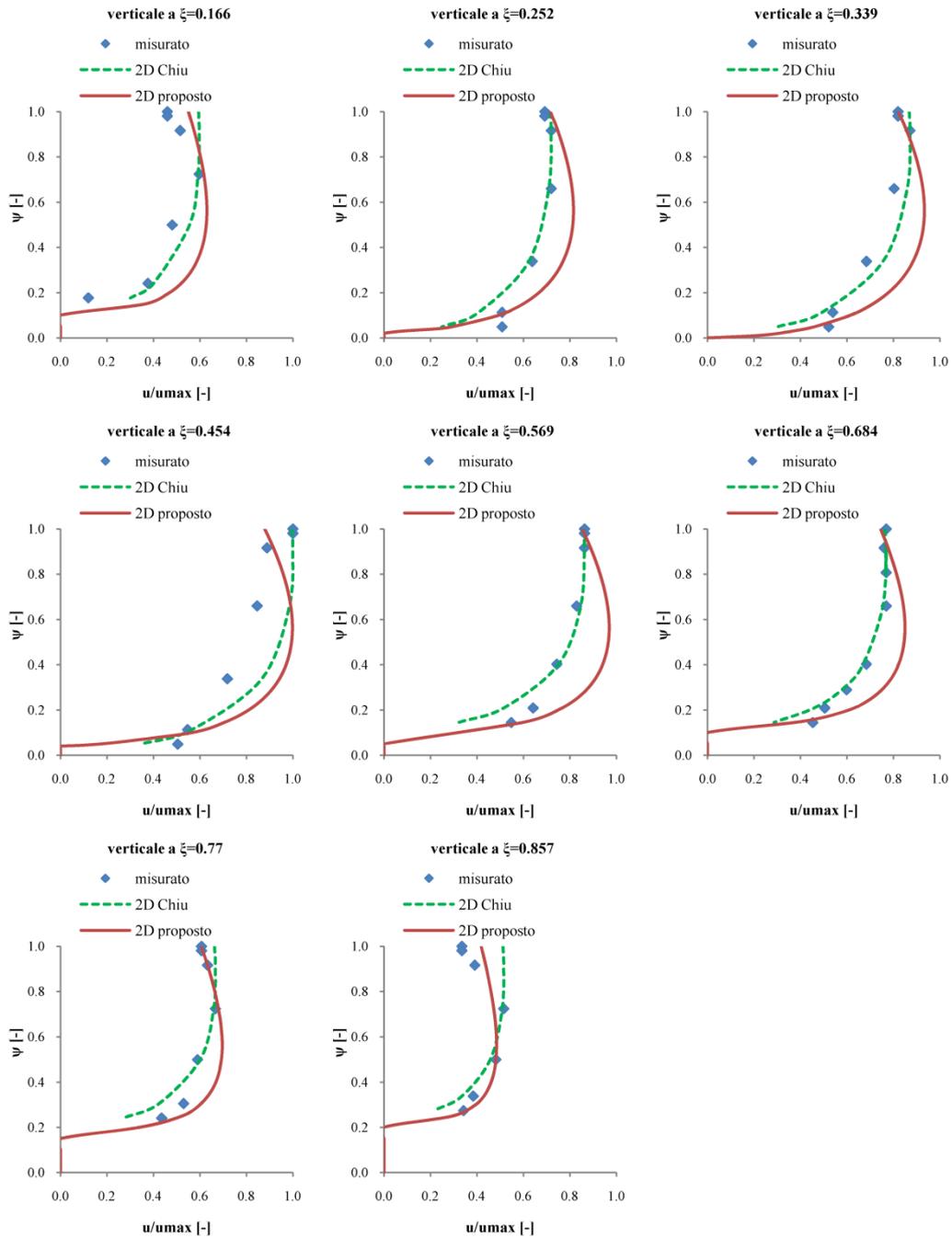
$$p(\xi) = 1241.916 \xi^8 - 4936.247 \xi^7 + 8132.502 \xi^6 - 7182.985 \xi^5 + 3679.45 \xi^4 - 1109.771 \xi^3 + 194.533 \xi^2 - 19.397 \xi + 1$$

2.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

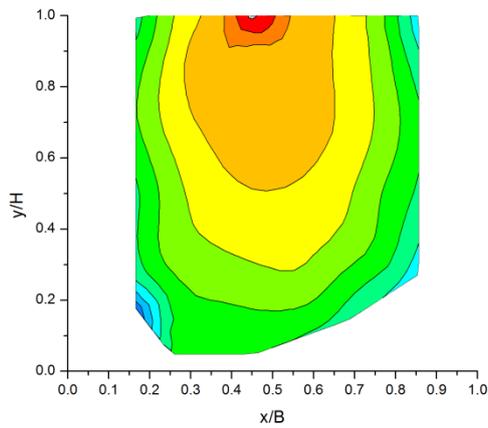
x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
-10.34	0.00	1.13	0.166	1.000	0.460	1.35	0.551	1.45	0.594
-10.34	0.06	1.13	0.166	0.981	0.460	1.36	0.557	1.46	0.595
-10.34	0.26	1.26	0.166	0.916	0.515	1.41	0.575	1.46	0.597
-10.34	0.86	1.46	0.166	0.723	0.597	1.51	0.617	1.45	0.592
-10.34	1.56	1.18	0.166	0.498	0.481	1.54	0.628	1.36	0.555
-10.34	2.36	0.92	0.166	0.241	0.377	1.27	0.520	0.98	0.400
-10.34	2.56	0.29	0.166	0.177	0.120	1.05	0.430	0.74	0.301
-7.25	0.00	1.70	0.252	1.000	0.693	1.75	0.716	1.75	0.717
-7.25	0.06	1.70	0.252	0.981	0.693	1.77	0.724	1.76	0.718
-7.25	0.26	1.76	0.252	0.916	0.720	1.83	0.747	1.76	0.720
-7.25	1.06	1.76	0.252	0.659	0.720	1.98	0.809	1.74	0.710
-7.25	2.06	1.56	0.252	0.338	0.638	1.88	0.770	1.53	0.624
-7.25	2.76	1.24	0.252	0.113	0.508	1.28	0.525	1.00	0.407
-7.25	2.96	1.24	0.252	0.048	0.508	0.70	0.286	0.61	0.248
-4.14	0.00	2.01	0.339	1.000	0.821	2.01	0.821	2.12	0.868
-4.14	0.06	2.01	0.339	0.981	0.821	2.03	0.830	2.13	0.869
-4.14	0.26	2.13	0.339	0.916	0.872	2.10	0.857	2.13	0.871
-4.14	1.06	1.97	0.339	0.659	0.803	2.27	0.926	2.10	0.859
-4.14	2.06	1.67	0.339	0.338	0.684	2.16	0.884	1.85	0.755
-4.14	2.76	1.32	0.339	0.113	0.539	1.57	0.643	1.21	0.493
-4.14	2.96	1.28	0.339	0.048	0.522	1.12	0.456	0.74	0.301
0.00	0.00	2.45	0.454	1.000	1.000	2.15	0.880	2.44	0.996
0.00	0.06	2.45	0.454	0.981	1.000	2.17	0.889	2.44	0.997
0.00	0.26	2.18	0.454	0.916	0.889	2.24	0.917	2.45	0.999
0.00	1.06	2.07	0.454	0.659	0.846	2.43	0.991	2.41	0.986
0.00	2.06	1.76	0.454	0.338	0.718	2.31	0.943	2.12	0.867
0.00	2.76	1.34	0.454	0.113	0.548	1.50	0.614	1.38	0.565
0.00	2.96	1.24	0.454	0.048	0.505	0.33	0.135	0.84	0.345
4.13	0.00	2.11	0.569	1.000	0.863	2.09	0.853	2.10	0.859
4.13	0.06	2.11	0.569	0.981	0.863	2.11	0.862	2.10	0.860
4.13	0.26	2.11	0.569	0.916	0.863	2.18	0.890	2.11	0.863
4.13	1.06	2.03	0.569	0.659	0.829	2.36	0.963	2.07	0.847
4.13	1.86	1.82	0.569	0.402	0.744	2.31	0.942	1.84	0.752
4.13	2.46	1.57	0.569	0.209	0.642	1.88	0.767	1.26	0.516
4.13	2.66	1.34	0.569	0.145	0.548	1.47	0.602	0.79	0.321
8.27	0.00	1.88	0.684	1.000	0.770	1.82	0.745	1.87	0.766
8.27	0.60	1.88	0.684	0.807	0.770	1.99	0.811	1.88	0.768
8.27	0.26	1.86	0.684	0.916	0.761	1.90	0.777	1.88	0.769
8.27	1.06	1.88	0.684	0.659	0.770	2.06	0.843	1.85	0.755
8.27	1.86	1.67	0.684	0.402	0.684	2.01	0.822	1.64	0.670
8.27	2.21	1.47	0.684	0.289	0.599	1.83	0.750	1.42	0.578
8.27	2.46	1.24	0.684	0.209	0.505	1.54	0.630	1.13	0.460
8.27	2.66	1.11	0.684	0.145	0.453	0.91	0.372	0.70	0.287

11.37	0.00	1.49	0.770	1.000	0.607	1.48	0.606	1.62	0.663
11.37	0.06	1.49	0.770	0.981	0.607	1.50	0.613	1.62	0.664
11.37	0.26	1.55	0.770	0.916	0.633	1.55	0.633	1.63	0.666
11.37	0.86	1.63	0.770	0.723	0.667	1.66	0.680	1.61	0.659
11.37	1.56	1.44	0.770	0.498	0.590	1.69	0.693	1.47	0.601
11.37	2.16	1.30	0.770	0.305	0.530	1.48	0.606	1.04	0.424
11.37	2.36	1.07	0.770	0.241	0.436	1.23	0.504	0.66	0.270
14.47	0.00	0.82	0.857	1.000	0.335	1.02	0.418	1.25	0.512
14.47	0.06	0.82	0.857	0.981	0.335	1.03	0.423	1.25	0.513
14.47	0.26	0.96	0.857	0.916	0.391	1.07	0.437	1.26	0.515
14.47	0.86	1.26	0.857	0.723	0.515	1.16	0.472	1.25	0.509
14.47	1.56	1.18	0.857	0.498	0.481	1.18	0.482	1.12	0.457
14.47	2.06	0.94	0.857	0.338	0.384	1.05	0.429	0.82	0.335
14.47	2.26	0.84	0.857	0.273	0.342	0.87	0.354	0.53	0.215

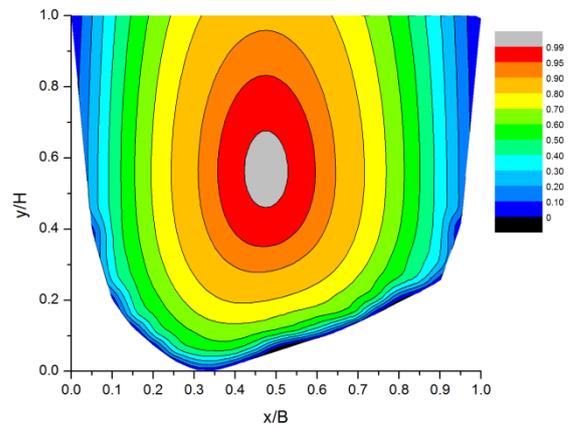
2.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*



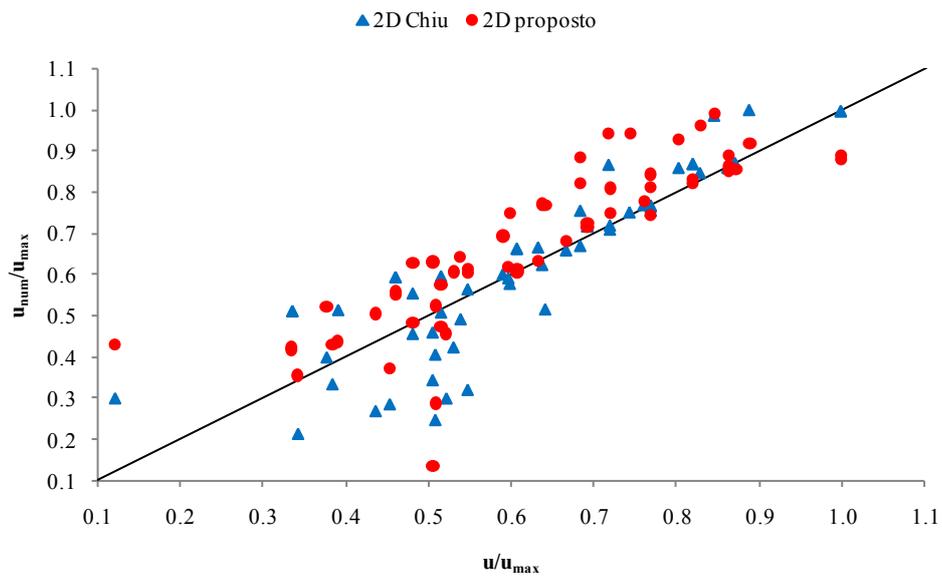
2.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



2.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



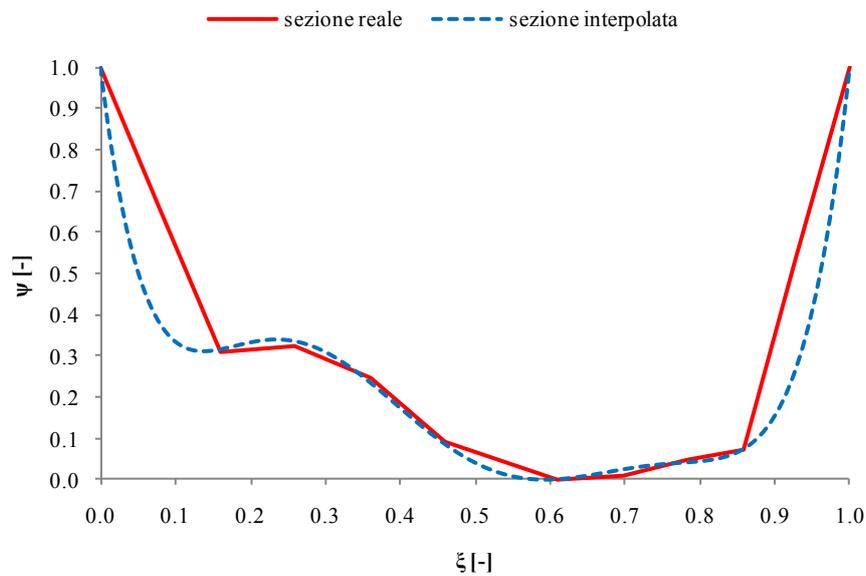
2.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)



3.a) (PonteFelcino)n°3, del 21 aprile 1997, fiume Tevere, stazione di Ponte Felcino

	$B =$	42.05 m	$A =$	202.8 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.625
	$H =$	6.15 m	$C =$	46.9 m	$H/B =$	0.146
	$u_{med} =$	2.1 m/s	$Ar =$	258.6 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.275
	$u_{max} =$	3.36 m/s			$G =$	5.522
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.63				
	$\psi_0 = y_0/H =$	1.00				

3.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



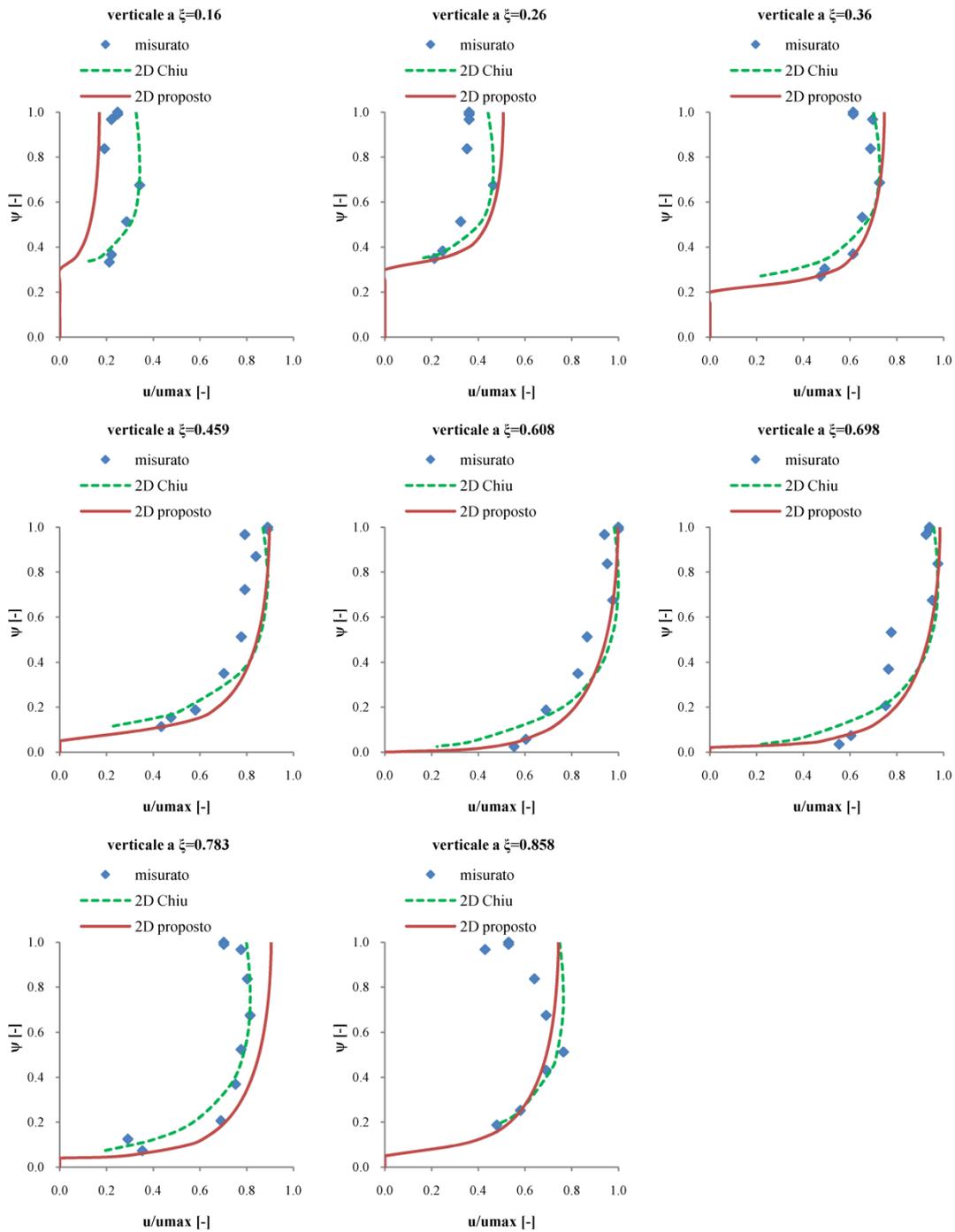
L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:  
 $p(\xi) = 2.987 \xi^7 + 200.218 \xi^6 - 625.084 \xi^5 + 740.945 \xi^4 - 420.561 \xi^3 + 116.256 \xi^2 - 14.761 \xi + 1$

3.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

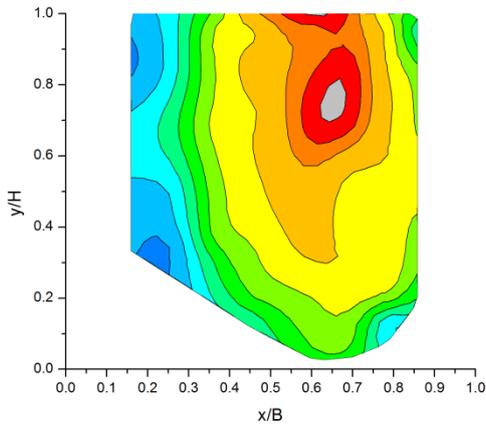
x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
-18.86	0.00	0.83	0.160	1.000	0.247	0.57	0.169	1.10	0.326
-18.86	0.06	0.83	0.160	0.990	0.247	0.57	0.169	1.10	0.328
-18.86	0.20	0.74	0.160	0.967	0.220	0.57	0.169	1.11	0.330
-18.86	1.00	0.64	0.160	0.837	0.190	0.56	0.166	1.14	0.340
-18.86	2.00	1.15	0.160	0.675	0.342	0.52	0.156	1.14	0.340
-18.86	3.00	0.96	0.160	0.512	0.286	0.44	0.132	1.03	0.308
-18.86	3.90	0.74	0.160	0.366	0.220	0.26	0.076	0.63	0.188
-18.86	4.10	0.71	0.160	0.333	0.211	0.15	0.045	0.38	0.113
-14.66	0.00	1.21	0.260	1.000	0.360	1.70	0.507	1.48	0.441
-14.66	0.06	1.21	0.260	0.990	0.360	1.70	0.507	1.49	0.443
-14.66	0.20	1.21	0.260	0.967	0.360	1.70	0.507	1.50	0.447
-14.66	1.00	1.18	0.260	0.837	0.351	1.69	0.502	1.55	0.461
-14.66	2.00	1.56	0.260	0.675	0.464	1.63	0.485	1.55	0.460
-14.66	3.00	1.09	0.260	0.512	0.324	1.49	0.442	1.39	0.413
-14.66	3.80	0.83	0.260	0.382	0.247	1.12	0.333	0.87	0.260
-14.66	4.00	0.71	0.260	0.350	0.211	0.79	0.236	0.53	0.157
-10.46	0.00	2.06	0.360	1.000	0.613	2.51	0.746	2.35	0.700
-10.46	0.06	2.06	0.360	0.990	0.613	2.51	0.746	2.36	0.701
-10.46	0.20	2.34	0.360	0.967	0.696	2.51	0.746	2.37	0.705
-10.46	1.00	2.31	0.360	0.837	0.688	2.49	0.742	2.43	0.723
-10.46	1.93	2.44	0.360	0.686	0.726	2.44	0.728	2.43	0.723
-10.46	2.88	2.19	0.360	0.532	0.652	2.34	0.696	2.30	0.684
-10.46	3.88	2.06	0.360	0.369	0.613	2.08	0.620	1.79	0.532
-10.46	4.28	1.65	0.360	0.304	0.491	1.84	0.547	1.25	0.372
-10.46	4.48	1.59	0.360	0.272	0.473	1.59	0.474	0.73	0.218
-6.29	0.00	2.99	0.459	1.000	0.890	3.01	0.897	2.92	0.870
-6.29	0.06	2.99	0.459	0.990	0.890	3.01	0.897	2.93	0.871
-6.29	0.20	2.66	0.459	0.967	0.792	3.01	0.897	2.94	0.874
-6.29	0.80	2.82	0.459	0.870	0.839	3.00	0.894	2.97	0.885
-6.29	1.71	2.66	0.459	0.722	0.792	2.97	0.883	2.99	0.889
-6.29	3.00	2.61	0.459	0.512	0.777	2.85	0.848	2.88	0.856
-6.29	4.00	2.36	0.459	0.350	0.702	2.66	0.791	2.58	0.769
-6.29	5.00	1.95	0.459	0.187	0.580	2.21	0.659	1.76	0.524
-6.29	5.20	1.60	0.459	0.154	0.476	2.02	0.602	1.42	0.422
-6.29	5.45	1.46	0.459	0.114	0.435	1.57	0.469	0.74	0.220
0.00	0.00	3.36	0.608	1.000	1.000	3.35	0.998	3.30	0.982
0.00	0.06	3.36	0.608	0.990	1.000	3.35	0.998	3.30	0.983
0.00	0.20	3.16	0.608	0.967	0.940	3.35	0.997	3.31	0.986
0.00	1.00	3.20	0.608	0.837	0.952	3.34	0.993	3.35	0.998
0.00	2.00	3.28	0.608	0.675	0.976	3.28	0.977	3.35	0.997
0.00	3.00	2.91	0.608	0.512	0.866	3.19	0.949	3.27	0.972
0.00	4.00	2.78	0.608	0.350	0.827	3.02	0.898	3.03	0.903
0.00	5.00	2.32	0.608	0.187	0.690	2.70	0.803	2.49	0.741

0.00	5.80	2.03	0.608	0.057	0.604	2.03	0.605	1.36	0.406
0.00	6.00	1.86	0.608	0.024	0.554	1.55	0.462	0.75	0.224
3.78	0.00	3.16	0.698	1.000	0.940	3.31	0.985	3.22	0.958
3.78	0.06	3.16	0.698	0.990	0.940	3.31	0.985	3.22	0.959
3.78	0.20	3.11	0.698	0.967	0.926	3.31	0.984	3.23	0.962
3.78	1.00	3.28	0.698	0.837	0.976	3.29	0.980	3.27	0.974
3.78	2.00	3.20	0.698	0.675	0.952	3.24	0.965	3.27	0.974
3.78	2.88	2.61	0.698	0.532	0.777	3.16	0.940	3.20	0.953
3.78	3.88	2.57	0.698	0.369	0.765	3.00	0.892	2.99	0.890
3.78	4.88	2.53	0.698	0.207	0.753	2.69	0.799	2.49	0.741
3.78	5.70	2.03	0.698	0.073	0.604	1.98	0.588	1.43	0.427
3.78	5.94	1.86	0.698	0.034	0.554	1.13	0.336	0.74	0.221
7.34	0.00	2.36	0.783	1.000	0.702	3.04	0.905	2.68	0.799
7.34	0.06	2.36	0.783	0.990	0.702	3.04	0.905	2.69	0.800
7.34	0.20	2.61	0.783	0.967	0.777	3.04	0.905	2.70	0.803
7.34	1.00	2.70	0.783	0.837	0.804	3.02	0.900	2.73	0.813
7.34	2.00	2.74	0.783	0.675	0.815	2.97	0.885	2.73	0.813
7.34	2.93	2.61	0.783	0.524	0.777	2.88	0.859	2.66	0.792
7.34	3.88	2.53	0.783	0.369	0.753	2.73	0.812	2.46	0.733
7.34	4.88	2.32	0.783	0.207	0.690	2.40	0.714	1.95	0.580
7.34	5.38	0.98	0.783	0.125	0.292	2.05	0.610	1.38	0.410
7.34	5.70	1.19	0.783	0.073	0.354	1.54	0.460	0.65	0.192
10.49	0.00	1.78	0.858	1.000	0.530	2.50	0.743	2.51	0.748
10.49	0.06	1.78	0.858	0.990	0.530	2.50	0.743	2.52	0.749
10.49	0.20	1.44	0.858	0.967	0.429	2.50	0.743	2.53	0.752
10.49	1.00	2.15	0.858	0.837	0.640	2.48	0.739	2.56	0.763
10.49	2.00	2.32	0.858	0.675	0.690	2.43	0.724	2.56	0.762
10.49	3.00	2.57	0.858	0.512	0.765	2.33	0.694	2.48	0.738
10.49	3.50	2.32	0.858	0.431	0.690	2.26	0.672	2.39	0.711
10.49	4.60	1.95	0.858	0.252	0.580	1.96	0.583	1.95	0.580
10.49	5.00	1.61	0.858	0.187	0.479	1.75	0.520	1.61	0.480

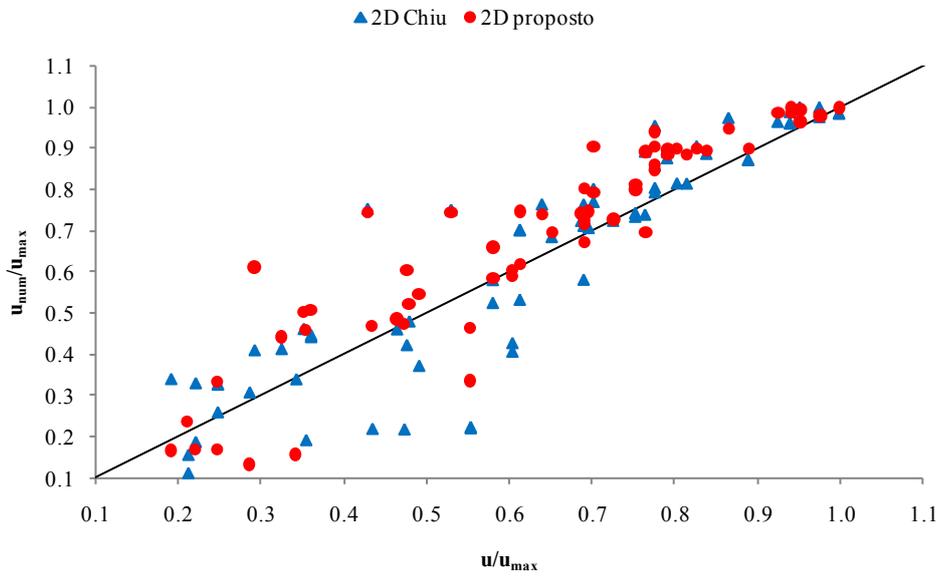
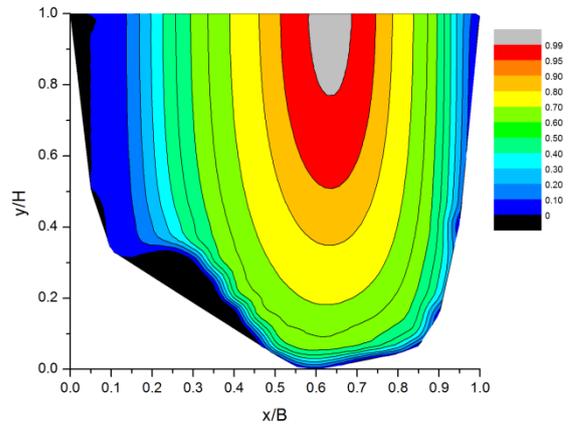
3.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*



3.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



3.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali

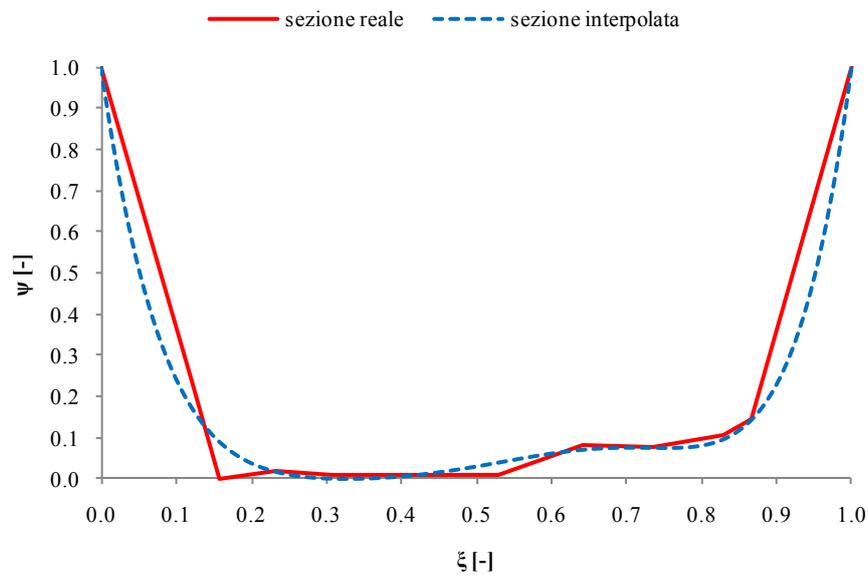


3.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)

4.a) (PonteNuovo1) n°2, del 18 novembre 1996, fiume Tevere, stazione di Ponte Nuovo

	$B =$	55.731 m	$A =$	310.7 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.670
	$H =$	6.71 m	$C =$	68.9 m	$H/B =$	0.120
	$u_{med} =$	1.74 m/s	$Ar =$	374 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.204
	$u_{max} =$	2.6 m/s			$G =$	0.387
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.51				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.50				

4.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

$$p(\xi) = 94.416 \xi^6 - 274.329 \xi^5 + 321.869 \xi^4 - 197.43 \xi^3 + 68.19 \xi^2 - 12.716 \xi + 1$$

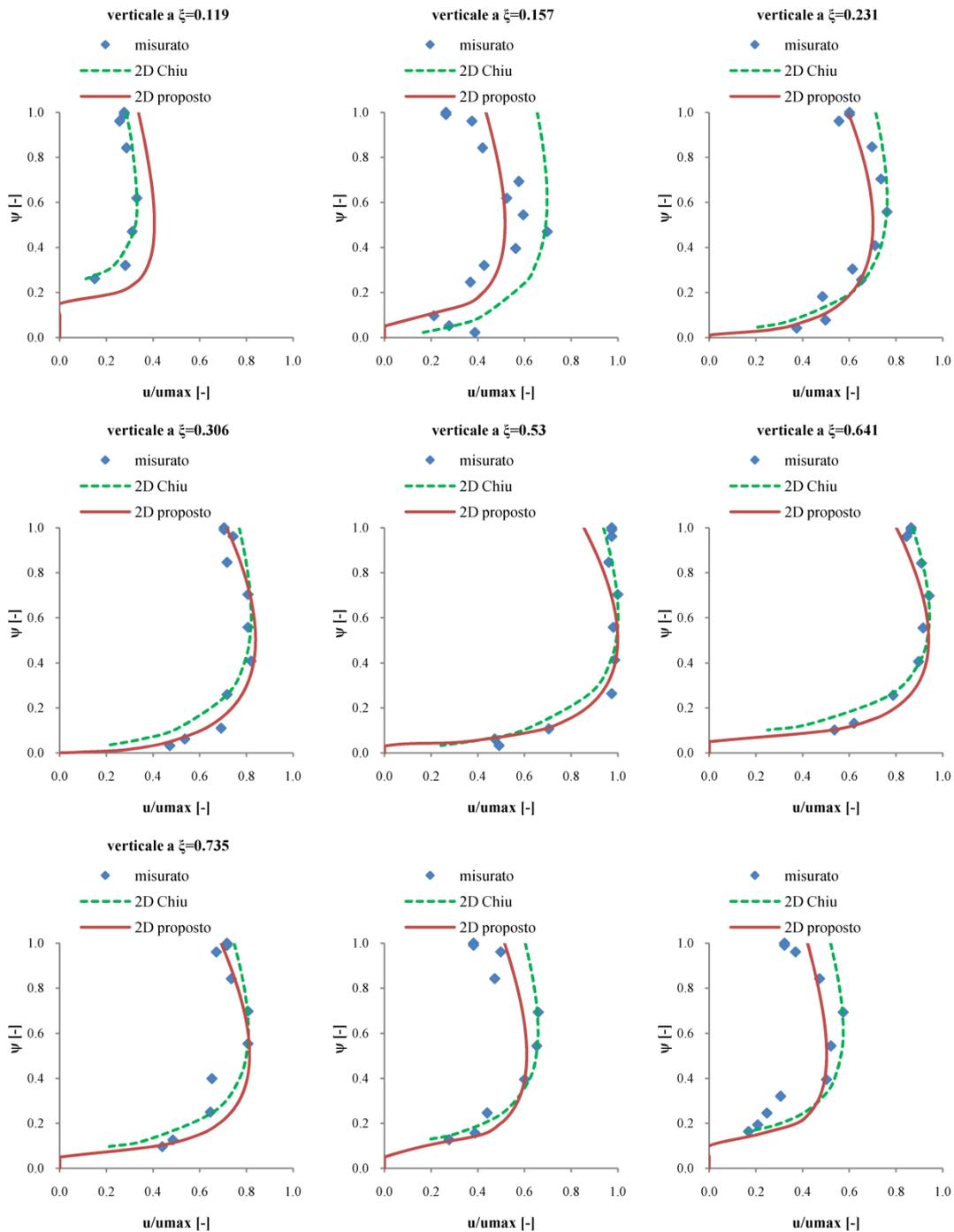
4.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
-22.88	5.11	0.72	0.119	1.000	0.276	0.88	0.338	0.74	0.286
-22.88	5.05	0.72	0.119	0.991	0.276	0.88	0.340	0.75	0.287
-22.88	4.85	0.67	0.119	0.961	0.257	0.90	0.346	0.76	0.293
-22.88	4.05	0.74	0.119	0.842	0.286	0.96	0.369	0.81	0.312
-22.88	2.55	0.86	0.119	0.618	0.331	1.04	0.401	0.86	0.331
-22.88	1.55	0.81	0.119	0.469	0.311	1.05	0.406	0.82	0.317
-22.88	0.55	0.73	0.119	0.320	0.281	0.98	0.379	0.60	0.232
-22.88	0.15	0.39	0.119	0.261	0.149	0.89	0.343	0.29	0.113
-20.80	6.71	0.68	0.157	1.000	0.263	1.13	0.435	1.70	0.655
-20.80	6.65	0.68	0.157	0.991	0.263	1.14	0.437	1.70	0.656
-20.80	6.45	0.97	0.157	0.961	0.375	1.16	0.445	1.72	0.662
-20.80	5.65	1.09	0.157	0.842	0.420	1.23	0.474	1.77	0.680
-20.80	4.65	1.50	0.157	0.693	0.576	1.30	0.501	1.80	0.695
-20.80	4.15	1.36	0.157	0.618	0.524	1.33	0.510	1.81	0.697
-20.80	3.65	1.55	0.157	0.544	0.595	1.34	0.516	1.80	0.695
-20.80	3.15	1.81	0.157	0.469	0.698	1.34	0.516	1.78	0.687
-20.80	2.65	1.46	0.157	0.395	0.563	1.32	0.509	1.75	0.672
-20.80	2.15	1.11	0.157	0.320	0.427	1.28	0.492	1.68	0.646
-20.80	1.65	0.96	0.157	0.246	0.368	1.19	0.458	1.57	0.605
-20.80	0.65	0.55	0.157	0.097	0.211	0.38	0.148	1.09	0.421
-20.80	0.35	0.72	0.157	0.052	0.276	0.00	0.000	0.78	0.299
-20.80	0.15	1.01	0.157	0.022	0.388	0.00	0.000	0.43	0.167
-16.64	6.58	1.56	0.231	1.000	0.601	1.54	0.595	1.85	0.713
-16.64	6.52	1.56	0.231	0.991	0.601	1.55	0.598	1.86	0.715
-16.64	6.32	1.44	0.231	0.961	0.556	1.58	0.609	1.87	0.721
-16.64	5.55	1.81	0.231	0.846	0.698	1.68	0.646	1.93	0.742
-16.64	4.59	1.91	0.231	0.703	0.736	1.77	0.680	1.97	0.759
-16.64	3.61	1.98	0.231	0.557	0.762	1.82	0.699	1.98	0.761
-16.64	2.61	1.85	0.231	0.408	0.710	1.80	0.695	1.91	0.737
-16.64	1.91	1.60	0.231	0.304	0.614	1.74	0.669	1.80	0.693
-16.64	1.59	1.70	0.231	0.256	0.653	1.68	0.647	1.72	0.660
-16.64	1.09	1.26	0.231	0.182	0.486	1.54	0.594	1.52	0.583
-16.64	0.39	1.29	0.231	0.077	0.498	1.13	0.434	0.93	0.356
-16.64	0.15	0.97	0.231	0.042	0.375	0.80	0.307	0.48	0.187
-12.48	6.64	1.83	0.306	1.000	0.704	1.86	0.715	2.00	0.769
-12.48	6.58	1.83	0.306	0.991	0.704	1.87	0.719	2.00	0.771
-12.48	6.38	1.93	0.306	0.961	0.743	1.90	0.732	2.02	0.777
-12.48	5.61	1.86	0.306	0.846	0.717	2.01	0.775	2.07	0.799
-12.48	4.65	2.10	0.306	0.703	0.807	2.12	0.815	2.12	0.817
-12.48	3.67	2.10	0.306	0.557	0.807	2.17	0.837	2.13	0.819
-12.48	2.67	2.13	0.306	0.408	0.820	2.16	0.832	2.06	0.794
-12.48	1.67	1.86	0.306	0.259	0.717	2.03	0.781	1.86	0.717
-12.48	0.67	1.80	0.306	0.110	0.691	1.63	0.626	1.32	0.507

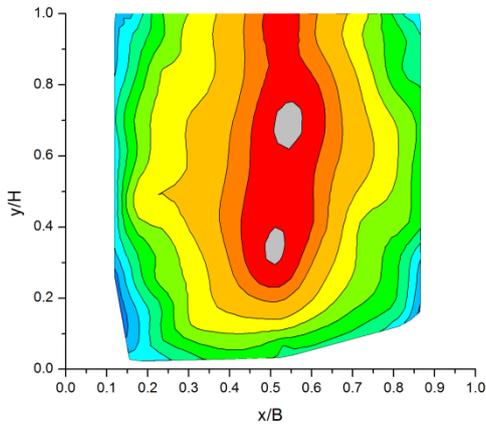
-12.48	0.35	1.39	0.306	0.063	0.537	1.34	0.517	0.92	0.356
-12.48	0.15	1.23	0.306	0.033	0.472	1.05	0.403	0.52	0.199
0.00	6.64	2.53	0.530	1.000	0.974	2.22	0.854	2.44	0.938
0.00	6.58	2.53	0.530	0.991	0.974	2.23	0.859	2.44	0.941
0.00	6.38	2.53	0.530	0.961	0.974	2.27	0.873	2.46	0.949
0.00	5.61	2.50	0.530	0.846	0.961	2.40	0.923	2.53	0.975
0.00	4.65	2.60	0.530	0.703	1.000	2.52	0.971	2.59	0.997
0.00	3.67	2.55	0.530	0.557	0.981	2.59	0.997	2.59	0.999
0.00	2.70	2.56	0.530	0.413	0.987	2.57	0.991	2.52	0.970
0.00	1.70	2.53	0.530	0.264	0.974	2.41	0.928	2.29	0.880
0.00	0.65	1.83	0.530	0.107	0.704	1.77	0.683	1.58	0.610
0.00	0.35	1.23	0.530	0.063	0.472	1.22	0.470	1.13	0.435
0.00	0.15	1.28	0.530	0.033	0.492	0.00	0.000	0.63	0.242
6.20	6.18	2.25	0.641	1.000	0.865	2.08	0.802	2.26	0.871
6.20	6.12	2.25	0.641	0.991	0.865	2.09	0.806	2.27	0.874
6.20	5.92	2.20	0.641	0.961	0.846	2.13	0.820	2.29	0.883
6.20	5.12	2.36	0.641	0.842	0.910	2.26	0.869	2.37	0.914
6.20	4.15	2.45	0.641	0.697	0.942	2.37	0.914	2.44	0.939
6.20	3.19	2.38	0.641	0.554	0.916	2.44	0.938	2.44	0.941
6.20	2.19	2.33	0.641	0.405	0.897	2.42	0.931	2.34	0.902
6.20	1.19	2.05	0.641	0.256	0.788	2.23	0.859	2.01	0.772
6.20	0.35	1.61	0.641	0.131	0.621	1.69	0.651	1.14	0.440
6.20	0.15	1.39	0.641	0.101	0.537	1.36	0.524	0.65	0.250
11.44	6.21	1.86	0.735	1.000	0.717	1.80	0.692	1.94	0.747
11.44	6.15	1.86	0.735	0.991	0.717	1.81	0.695	1.95	0.750
11.44	5.95	1.75	0.735	0.961	0.672	1.84	0.707	1.97	0.757
11.44	5.15	1.91	0.735	0.842	0.736	1.95	0.751	2.04	0.784
11.44	4.18	2.10	0.735	0.697	0.807	2.05	0.791	2.09	0.805
11.44	3.22	2.10	0.735	0.554	0.807	2.11	0.812	2.09	0.806
11.44	2.18	1.70	0.735	0.399	0.653	2.09	0.804	2.00	0.771
11.44	1.18	1.68	0.735	0.250	0.646	1.91	0.736	1.71	0.658
11.44	0.35	1.26	0.735	0.127	0.486	1.39	0.536	0.98	0.375
11.44	0.15	1.14	0.735	0.097	0.440	1.04	0.401	0.55	0.213
16.64	6.01	0.99	0.828	1.000	0.381	1.34	0.515	1.57	0.604
16.64	5.95	0.99	0.828	0.991	0.381	1.34	0.517	1.57	0.606
16.64	5.75	1.29	0.828	0.961	0.498	1.37	0.527	1.59	0.612
16.64	4.95	1.23	0.828	0.842	0.472	1.45	0.560	1.65	0.636
16.64	3.95	1.71	0.828	0.693	0.659	1.54	0.592	1.70	0.655
16.64	2.95	1.70	0.828	0.544	0.653	1.58	0.609	1.70	0.656
16.64	1.95	1.56	0.828	0.395	0.601	1.56	0.601	1.61	0.622
16.64	0.95	1.14	0.828	0.246	0.440	1.41	0.541	1.32	0.507
16.64	0.35	1.01	0.828	0.156	0.388	1.12	0.431	0.82	0.316
16.64	0.15	0.72	0.828	0.127	0.276	0.91	0.350	0.47	0.181
18.72	5.76	0.84	0.866	1.000	0.322	1.10	0.422	1.35	0.520
18.72	5.70	0.84	0.866	0.991	0.322	1.10	0.424	1.35	0.522
18.72	5.50	0.96	0.866	0.961	0.370	1.12	0.432	1.37	0.528
18.72	4.70	1.23	0.866	0.842	0.472	1.19	0.460	1.43	0.552

18.72	3.70	1.49	0.866	0.693	0.574	1.27	0.487	1.48	0.570
18.72	2.70	1.35	0.866	0.544	0.521	1.30	0.502	1.48	0.571
18.72	1.70	1.30	0.866	0.395	0.502	1.29	0.495	1.39	0.535
18.72	1.20	0.80	0.866	0.320	0.306	1.23	0.475	1.27	0.490
18.72	0.70	0.64	0.866	0.246	0.247	1.12	0.430	1.05	0.404
18.72	0.35	0.54	0.866	0.194	0.208	0.95	0.364	0.75	0.288
18.72	0.15	0.44	0.866	0.164	0.169	0.74	0.285	0.43	0.167

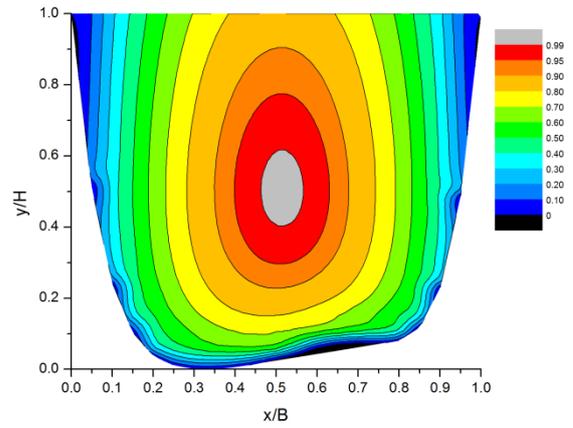
4.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*



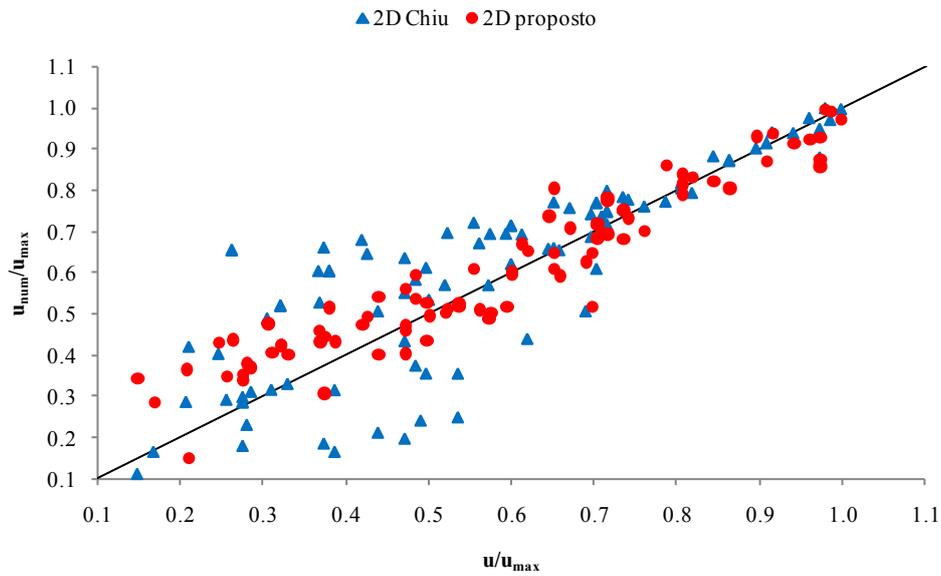
4.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



4.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



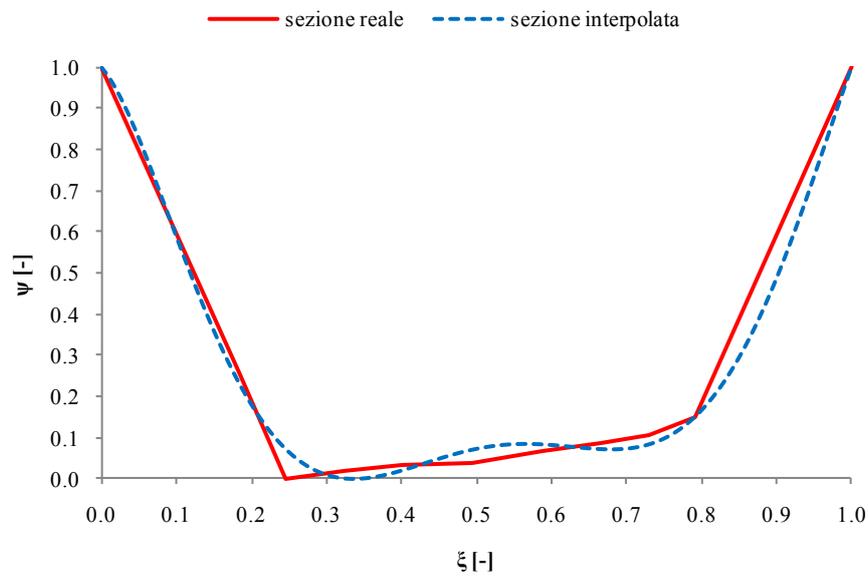
4.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)



5.a) (PonteNuovo2) n°5, del 3 giugno 1997, fiume Tevere, stazione di Ponte Nuovo

	$B =$	66.742 m	$A =$	310.7 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.669
	$H =$	6.31 m	$C =$	68.9 m	$H/B =$	0.095
	$u_{med} =$	1.82 m/s	$Ar =$	421.1 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.355
	$u_{max} =$	2.72 m/s			$G =$	4.278
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.50				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.67				

5.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

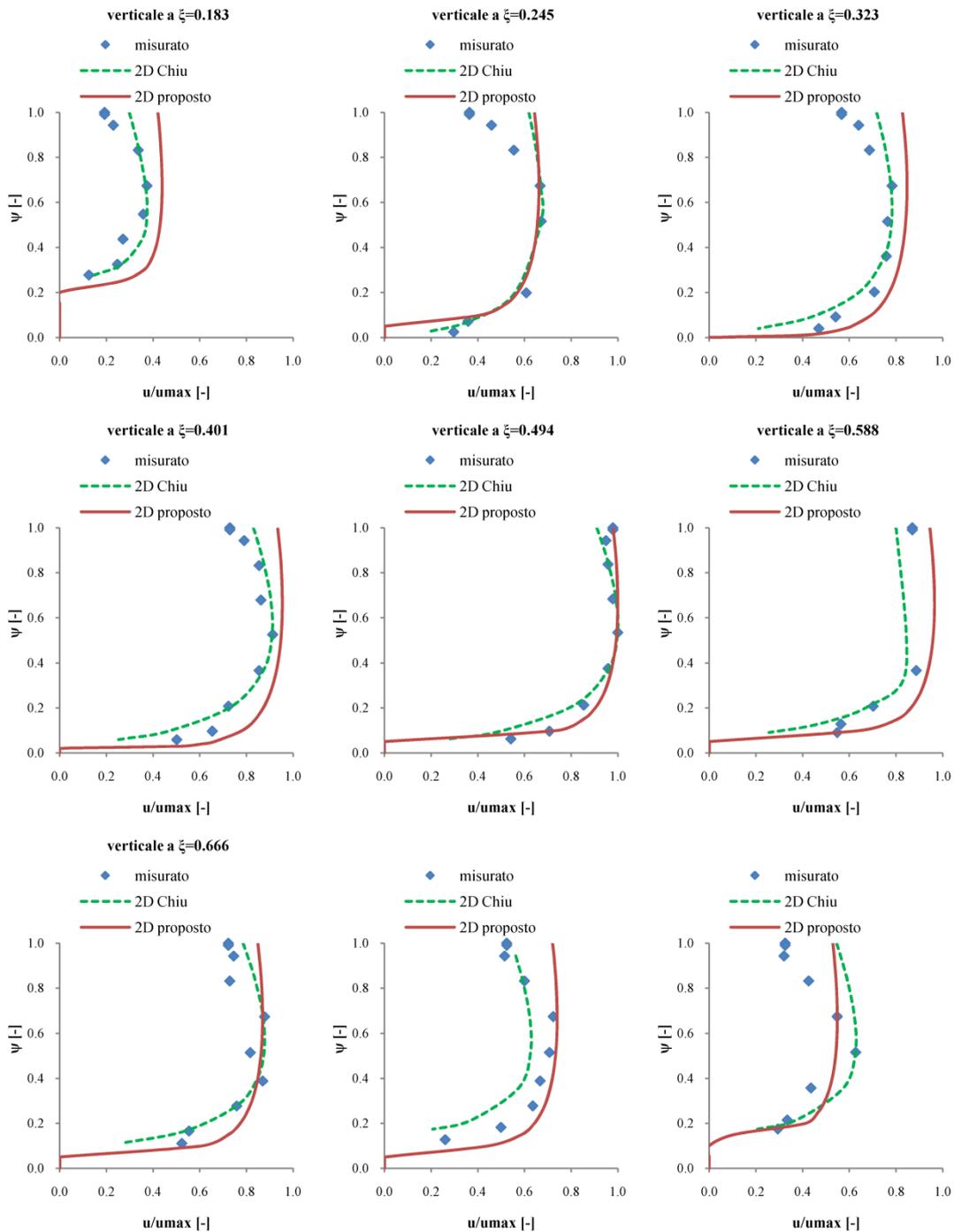
$$p(\xi) = - 104.227 \xi^6 + 330.801 \xi^5 - 384.562 \xi^4 + 196.683 \xi^3 - 36.644 \xi^2 - 2.051 \xi + 1$$

5.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

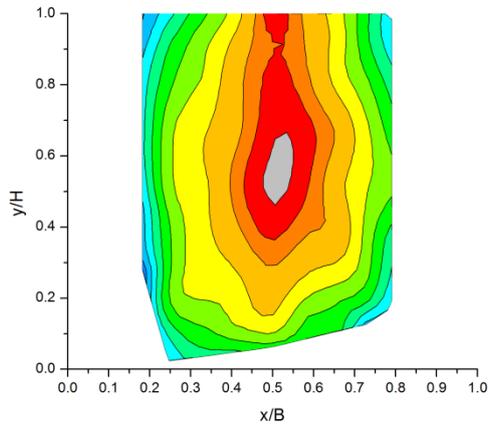
x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
-20.80	4.71	0.52	0.183	1.000	0.192	1.15	0.421	0.81	0.298
-20.80	4.65	0.52	0.183	0.990	0.192	1.15	0.422	0.82	0.301
-20.80	4.35	0.63	0.183	0.943	0.230	1.16	0.426	0.85	0.313
-20.80	3.65	0.92	0.183	0.832	0.337	1.18	0.434	0.92	0.340
-20.80	2.65	1.02	0.183	0.674	0.374	1.19	0.439	1.00	0.368
-20.80	1.85	0.97	0.183	0.547	0.358	1.18	0.435	1.02	0.375
-20.80	1.15	0.74	0.183	0.436	0.271	1.14	0.421	0.96	0.354
-20.80	0.45	0.67	0.183	0.325	0.247	1.03	0.380	0.72	0.265
-20.80	0.15	0.34	0.183	0.277	0.125	0.90	0.333	0.40	0.148
-16.64	6.31	0.99	0.245	1.000	0.364	1.75	0.643	1.68	0.619
-16.64	6.25	0.99	0.245	0.990	0.364	1.75	0.644	1.69	0.621
-16.64	5.95	1.25	0.245	0.943	0.459	1.76	0.649	1.71	0.630
-16.64	5.25	1.51	0.245	0.832	0.554	1.79	0.657	1.77	0.650
-16.64	4.25	1.81	0.245	0.674	0.667	1.80	0.662	1.82	0.669
-16.64	3.25	1.83	0.245	0.515	0.672	1.78	0.656	1.83	0.671
-16.64	1.25	1.65	0.245	0.198	0.608	1.54	0.568	1.52	0.558
-16.64	0.45	0.97	0.245	0.071	0.358	0.00	0.000	0.98	0.360
-16.64	0.15	0.81	0.245	0.024	0.296	0.00	0.000	0.48	0.177
-11.44	6.21	1.54	0.323	1.000	0.567	2.25	0.827	1.95	0.717
-11.44	6.15	1.54	0.323	0.990	0.567	2.25	0.828	1.96	0.720
-11.44	5.85	1.74	0.323	0.943	0.640	2.27	0.833	1.99	0.731
-11.44	5.15	1.87	0.323	0.832	0.687	2.29	0.842	2.05	0.755
-11.44	4.15	2.13	0.323	0.674	0.783	2.30	0.847	2.12	0.778
-11.44	3.15	2.08	0.323	0.515	0.764	2.29	0.842	2.12	0.781
-11.44	2.18	2.06	0.323	0.361	0.758	2.24	0.822	2.04	0.751
-11.44	1.18	1.92	0.323	0.203	0.707	2.10	0.772	1.75	0.644
-11.44	0.48	1.47	0.323	0.092	0.542	1.86	0.685	1.20	0.440
-11.44	0.15	1.28	0.323	0.040	0.470	1.58	0.581	0.57	0.211
-6.24	6.09	1.98	0.401	1.000	0.729	2.54	0.934	2.26	0.830
-6.24	6.03	1.98	0.401	0.990	0.729	2.54	0.935	2.27	0.833
-6.24	5.73	2.15	0.401	0.943	0.790	2.56	0.940	2.31	0.848
-6.24	5.03	2.32	0.401	0.832	0.854	2.58	0.949	2.39	0.877
-6.24	4.06	2.34	0.401	0.678	0.862	2.59	0.954	2.46	0.905
-6.24	3.09	2.48	0.401	0.525	0.912	2.58	0.949	2.48	0.910
-6.24	2.09	2.32	0.401	0.366	0.854	2.53	0.929	2.37	0.873
-6.24	1.09	1.97	0.401	0.208	0.723	2.38	0.877	2.01	0.739
-6.24	0.39	1.78	0.401	0.097	0.654	2.12	0.778	1.27	0.467
-6.24	0.15	1.37	0.401	0.059	0.502	1.89	0.695	0.68	0.252
0.00	6.07	2.66	0.494	1.000	0.979	2.66	0.980	2.47	0.910
0.00	6.01	2.66	0.494	0.990	0.979	2.67	0.981	2.48	0.913
0.00	5.71	2.58	0.494	0.943	0.949	2.68	0.986	2.53	0.929
0.00	5.04	2.61	0.494	0.837	0.959	2.70	0.994	2.61	0.960
0.00	4.07	2.66	0.494	0.683	0.979	2.72	1.000	2.70	0.992

0.00	3.13	2.72	0.494	0.534	1.000	2.71	0.995	2.72	0.999
0.00	2.13	2.61	0.494	0.376	0.959	2.65	0.975	2.61	0.961
0.00	1.10	2.32	0.494	0.212	0.854	2.48	0.912	2.21	0.814
0.00	0.37	1.92	0.494	0.097	0.707	1.98	0.728	1.36	0.499
0.00	0.15	1.47	0.494	0.062	0.542	0.00	0.000	0.75	0.277
6.24	5.89	2.37	0.588	1.000	0.870	2.57	0.945	2.17	0.799
6.24	5.83	2.37	0.588	0.990	0.870	2.57	0.946	2.18	0.802
6.24	1.89	2.41	0.588	0.366	0.887	2.55	0.937	2.29	0.842
6.24	0.89	1.91	0.588	0.208	0.702	2.36	0.870	1.86	0.683
6.24	0.39	1.53	0.588	0.128	0.564	2.08	0.764	1.28	0.469
6.24	0.15	1.49	0.588	0.090	0.548	1.49	0.548	0.70	0.256
11.44	5.76	1.97	0.666	1.000	0.723	2.31	0.850	2.14	0.786
11.44	5.70	1.97	0.666	0.990	0.723	2.31	0.851	2.15	0.789
11.44	5.40	2.03	0.666	0.943	0.746	2.33	0.856	2.19	0.805
11.44	4.70	1.98	0.666	0.832	0.729	2.35	0.864	2.28	0.839
11.44	3.70	2.39	0.666	0.674	0.878	2.36	0.869	2.37	0.872
11.44	2.70	2.22	0.666	0.515	0.817	2.35	0.864	2.38	0.876
11.44	1.90	2.37	0.666	0.388	0.870	2.30	0.847	2.29	0.842
11.44	1.20	2.06	0.666	0.277	0.758	2.22	0.816	2.06	0.757
11.44	0.50	1.51	0.666	0.166	0.554	2.02	0.744	1.47	0.540
11.44	0.15	1.42	0.666	0.111	0.524	1.76	0.648	0.71	0.261
15.60	5.66	1.42	0.728	1.000	0.524	1.96	0.720	1.75	0.644
15.60	5.60	1.42	0.728	0.990	0.524	1.96	0.721	1.76	0.646
15.60	5.30	1.40	0.728	0.943	0.515	1.97	0.726	1.80	0.660
15.60	4.60	1.63	0.728	0.832	0.600	2.00	0.735	1.87	0.689
15.60	3.60	1.97	0.728	0.674	0.723	2.01	0.740	1.95	0.718
15.60	2.60	1.92	0.728	0.515	0.707	2.00	0.734	1.96	0.722
15.60	1.80	1.81	0.728	0.388	0.667	1.95	0.717	1.88	0.692
15.60	1.10	1.73	0.728	0.277	0.636	1.86	0.686	1.67	0.614
15.60	0.50	1.36	0.728	0.182	0.499	1.70	0.626	1.23	0.452
15.60	0.15	0.71	0.728	0.127	0.260	1.48	0.545	0.60	0.221
19.76	5.36	0.88	0.791	1.000	0.325	1.44	0.530	1.48	0.546
19.76	5.30	0.88	0.791	0.990	0.325	1.44	0.531	1.49	0.548
19.76	5.00	0.87	0.791	0.943	0.321	1.46	0.535	1.53	0.563
19.76	4.30	1.16	0.791	0.832	0.426	1.48	0.543	1.61	0.592
19.76	3.30	1.49	0.791	0.674	0.548	1.49	0.548	1.69	0.622
19.76	2.30	1.71	0.791	0.515	0.627	1.47	0.542	1.70	0.626
19.76	1.30	1.19	0.791	0.357	0.436	1.40	0.516	1.56	0.574
19.76	0.40	0.91	0.791	0.214	0.334	1.17	0.432	1.01	0.371
19.76	0.15	0.80	0.791	0.174	0.294	0.96	0.354	0.56	0.206

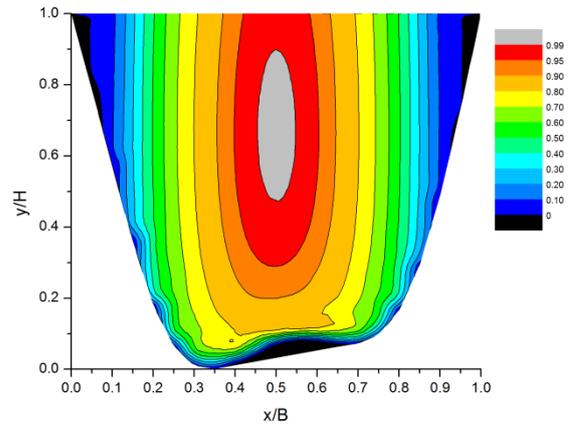
5.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*



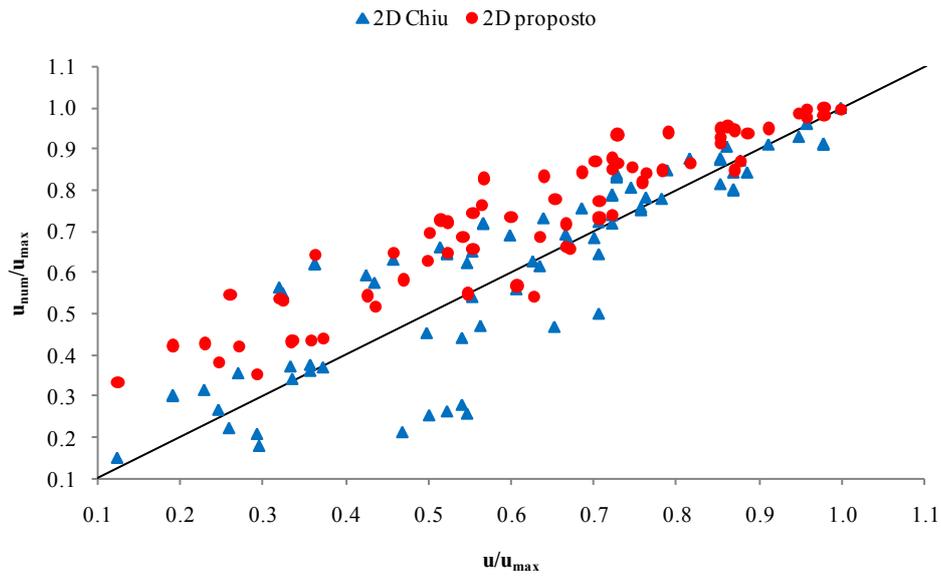
5.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



5.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



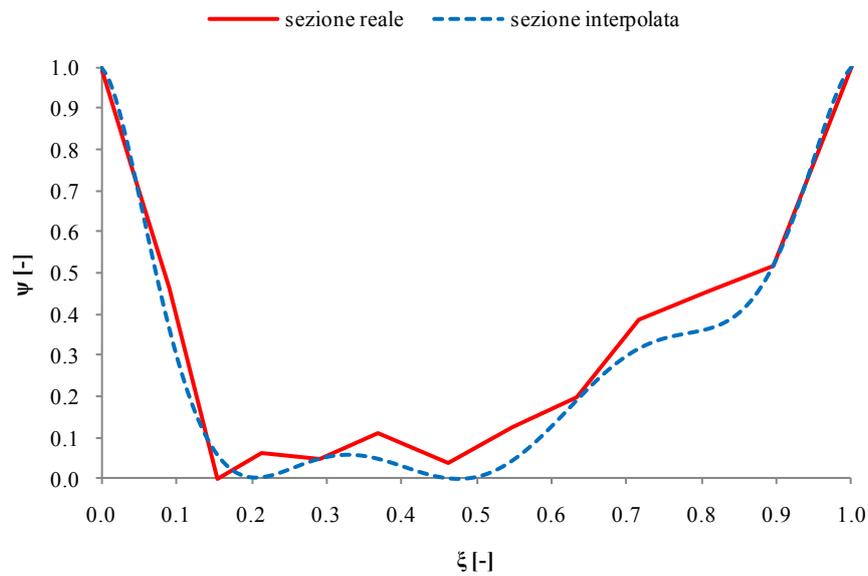
5.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et. al. (2004)



6.a) (Pontelagoscuro2) n°6, del 27 marzo 1991, fiume Po, stazione di Pontelagoscuro

	$B =$	292.62 m	$A =$	1956.5 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.671
	$H =$	9.12 m	$C =$	294 m	$H/B =$	0.031
	$u_{med} =$	1.21 m/s	$Ar =$	2668.7 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.364
	$u_{max} =$	1.8 m/s			$G =$	0.838
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.38				
	$\psi_0 = y_0/H =$	0.66				

6.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

$$p(\xi) = -1980.862 \xi^8 + 8114.659 \xi^7 - 13503.569 \xi^6 + 11686.299 \xi^5 - 5566.506 \xi^4 + 1400.45 \xi^3 - 148.915 \xi^2 - 1.556 \xi + 1$$

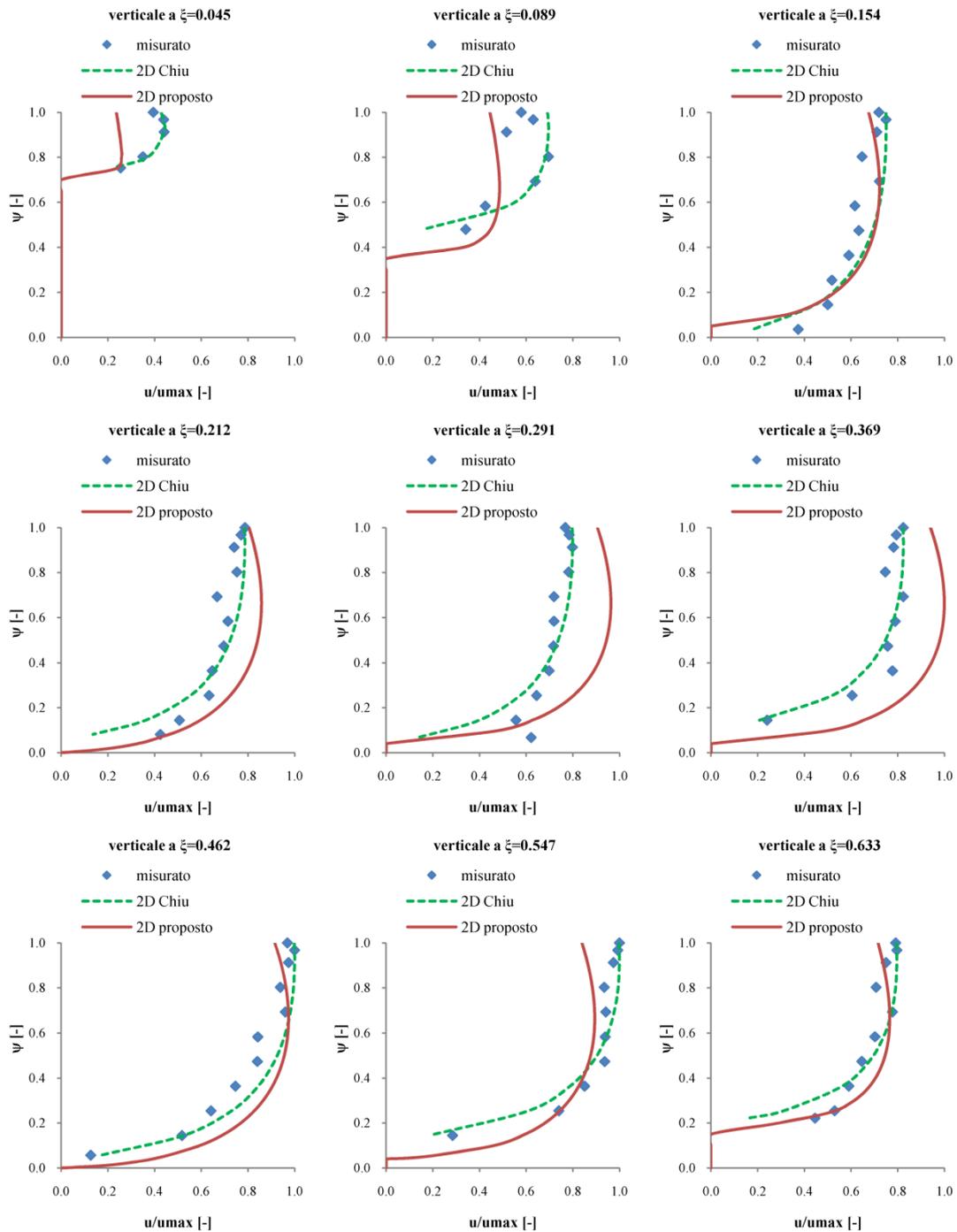
6.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

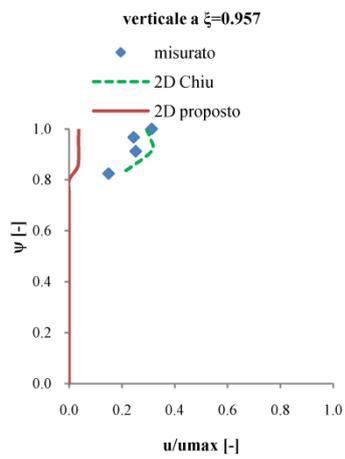
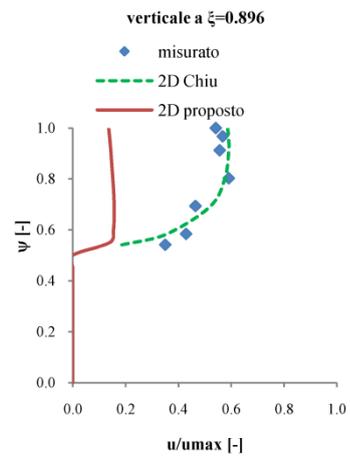
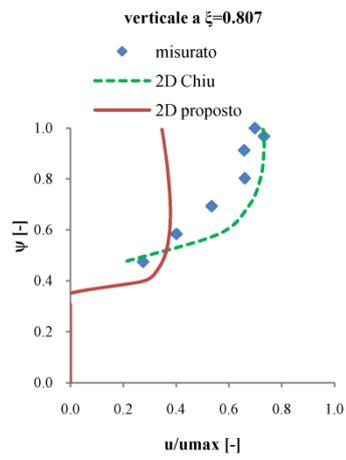
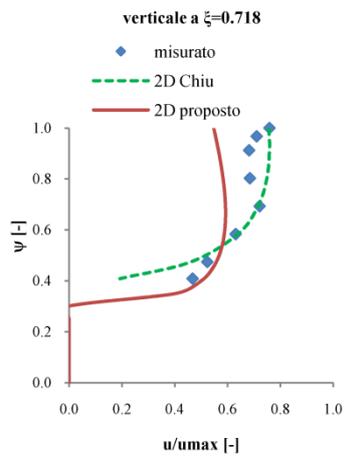
x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{stima}}$ [m/s]	$u_{\text{stima}}/u_{\max}$ [-]	$u_{\text{Chiu}}$ [m/s]	$u_{\text{Chiu}}/u_{\max}$ [-]
-122.00	2.46	0.71	0.045	1.000	0.394	0.43	0.236	0.77	0.429
-122.00	2.16	0.79	0.045	0.967	0.439	0.44	0.241	0.79	0.437
-122.00	1.66	0.80	0.045	0.912	0.441	0.45	0.249	0.79	0.441
-122.00	0.66	0.63	0.045	0.803	0.350	0.47	0.259	0.67	0.374
-122.00	0.20	0.46	0.045	0.752	0.254	0.43	0.240	0.40	0.221
-109.00	4.90	1.04	0.089	1.000	0.579	0.80	0.445	1.25	0.692
-109.00	4.60	1.14	0.089	0.967	0.631	0.81	0.452	1.25	0.695
-109.00	4.10	0.93	0.089	0.912	0.516	0.83	0.461	1.25	0.696
-109.00	3.10	1.26	0.089	0.803	0.696	0.86	0.477	1.23	0.683
-109.00	2.10	1.15	0.089	0.693	0.639	0.88	0.486	1.15	0.638
-109.00	1.10	0.77	0.089	0.583	0.425	0.87	0.481	0.94	0.521
-109.00	0.15	0.61	0.089	0.479	0.341	0.81	0.447	0.29	0.159
-90.00	9.12	1.30	0.154	1.000	0.719	1.22	0.675	1.35	0.749
-90.00	8.82	1.35	0.154	0.967	0.750	1.23	0.683	1.35	0.749
-90.00	8.32	1.28	0.154	0.912	0.710	1.25	0.695	1.35	0.750
-90.00	7.32	1.17	0.154	0.803	0.647	1.29	0.713	1.35	0.747
-90.00	6.32	1.30	0.154	0.693	0.722	1.30	0.721	1.33	0.738
-90.00	5.32	1.11	0.154	0.583	0.616	1.29	0.718	1.30	0.720
-90.00	4.32	1.14	0.154	0.474	0.633	1.26	0.700	1.25	0.691
-90.00	3.32	1.07	0.154	0.364	0.591	1.19	0.661	1.16	0.645
-90.00	2.32	0.93	0.154	0.254	0.518	1.06	0.588	1.03	0.572
-90.00	1.32	0.90	0.154	0.145	0.500	0.79	0.440	0.80	0.446
-90.00	0.32	0.67	0.154	0.035	0.373	0.00	0.000	0.33	0.180
-73.00	8.58	1.42	0.212	1.000	0.787	1.45	0.804	1.42	0.786
-73.00	8.28	1.39	0.212	0.967	0.770	1.47	0.814	1.42	0.787
-73.00	7.78	1.34	0.212	0.912	0.740	1.49	0.828	1.42	0.787
-73.00	6.78	1.36	0.212	0.803	0.752	1.53	0.848	1.41	0.783
-73.00	5.78	1.20	0.212	0.693	0.668	1.55	0.857	1.39	0.772
-73.00	4.78	1.29	0.212	0.583	0.714	1.54	0.854	1.35	0.750
-73.00	3.78	1.26	0.212	0.474	0.696	1.51	0.835	1.29	0.714
-73.00	2.78	1.17	0.212	0.364	0.647	1.43	0.795	1.18	0.654
-73.00	1.78	1.14	0.212	0.254	0.633	1.31	0.724	1.00	0.554
-73.00	0.78	0.91	0.212	0.145	0.506	1.07	0.596	0.66	0.364
-73.00	0.20	0.77	0.212	0.081	0.425	0.84	0.466	0.25	0.137
-50.00	8.71	1.39	0.291	1.000	0.768	1.63	0.905	1.44	0.797
-50.00	8.41	1.42	0.291	0.967	0.785	1.65	0.915	1.44	0.798
-50.00	7.91	1.44	0.291	0.912	0.799	1.68	0.930	1.44	0.799
-50.00	6.91	1.41	0.291	0.803	0.783	1.72	0.952	1.43	0.795
-50.00	5.91	1.30	0.291	0.693	0.719	1.74	0.962	1.41	0.784
-50.00	4.91	1.30	0.291	0.583	0.719	1.73	0.959	1.38	0.763
-50.00	3.91	1.29	0.291	0.474	0.717	1.69	0.937	1.31	0.728
-50.00	2.91	1.26	0.291	0.364	0.698	1.61	0.891	1.21	0.670
-50.00	1.91	1.16	0.291	0.254	0.644	1.45	0.803	1.04	0.575

-50.00	0.91	1.00	0.291	0.145	0.556	1.13	0.628	0.72	0.401
-50.00	0.20	1.12	0.291	0.067	0.621	0.55	0.307	0.25	0.137
-27.00	8.10	1.49	0.369	1.000	0.824	1.70	0.941	1.48	0.823
-27.00	7.80	1.43	0.369	0.967	0.794	1.71	0.951	1.49	0.824
-27.00	7.30	1.41	0.369	0.912	0.783	1.74	0.966	1.49	0.824
-27.00	6.30	1.35	0.369	0.803	0.747	1.78	0.989	1.48	0.820
-27.00	5.30	1.49	0.369	0.693	0.824	1.80	0.999	1.45	0.806
-27.00	4.30	1.42	0.369	0.583	0.789	1.79	0.995	1.41	0.780
-27.00	3.30	1.36	0.369	0.474	0.757	1.75	0.973	1.32	0.734
-27.00	2.30	1.40	0.369	0.364	0.778	1.67	0.925	1.18	0.657
-27.00	1.30	1.09	0.369	0.254	0.605	1.51	0.836	0.94	0.519
-27.00	0.30	0.43	0.369	0.145	0.240	1.18	0.655	0.38	0.208
0.00	8.80	1.75	0.462	1.000	0.969	1.65	0.915	1.80	0.998
0.00	8.50	1.80	0.462	0.967	1.000	1.67	0.926	1.80	0.999
0.00	8.00	1.76	0.462	0.912	0.974	1.70	0.941	1.80	1.000
0.00	7.00	1.69	0.462	0.803	0.939	1.74	0.963	1.79	0.996
0.00	6.00	1.73	0.462	0.693	0.960	1.75	0.973	1.77	0.982
0.00	5.00	1.52	0.462	0.583	0.843	1.75	0.970	1.72	0.956
0.00	4.00	1.52	0.462	0.474	0.841	1.71	0.949	1.65	0.913
0.00	3.00	1.35	0.462	0.364	0.747	1.63	0.906	1.52	0.844
0.00	2.00	1.16	0.462	0.254	0.642	1.49	0.828	1.32	0.731
0.00	1.00	0.93	0.462	0.145	0.518	1.24	0.688	0.95	0.525
0.00	0.20	0.23	0.462	0.057	0.126	0.84	0.464	0.31	0.170
25.00	8.00	1.80	0.547	1.000	1.000	1.51	0.839	1.80	0.998
25.00	7.70	1.79	0.547	0.967	0.993	1.53	0.849	1.80	0.999
25.00	7.20	1.76	0.547	0.912	0.974	1.56	0.863	1.80	1.000
25.00	6.20	1.69	0.547	0.803	0.935	1.59	0.884	1.79	0.994
25.00	5.20	1.70	0.547	0.693	0.941	1.61	0.893	1.76	0.977
25.00	4.20	1.69	0.547	0.583	0.939	1.60	0.890	1.70	0.944
25.00	3.20	1.69	0.547	0.474	0.937	1.57	0.869	1.60	0.886
25.00	2.20	1.53	0.547	0.364	0.850	1.49	0.826	1.42	0.788
25.00	1.20	1.34	0.547	0.254	0.740	1.34	0.744	1.10	0.609
25.00	0.20	0.51	0.547	0.145	0.285	1.05	0.584	0.33	0.185
50.00	7.30	1.43	0.633	1.000	0.791	1.29	0.716	1.43	0.795
50.00	7.00	1.44	0.633	0.967	0.796	1.31	0.724	1.43	0.796
50.00	6.50	1.35	0.633	0.912	0.750	1.33	0.737	1.44	0.796
50.00	5.50	1.28	0.633	0.803	0.708	1.36	0.756	1.43	0.791
50.00	4.50	1.40	0.633	0.693	0.778	1.38	0.765	1.40	0.774
50.00	3.50	1.27	0.633	0.583	0.703	1.37	0.761	1.33	0.739
50.00	2.50	1.17	0.633	0.474	0.647	1.33	0.738	1.22	0.677
50.00	1.50	1.07	0.633	0.364	0.591	1.23	0.680	1.01	0.563
50.00	0.50	0.96	0.633	0.254	0.530	0.96	0.530	0.56	0.312
50.00	0.20	0.80	0.633	0.221	0.446	0.77	0.425	0.29	0.160
75.00	5.60	1.37	0.718	1.000	0.759	0.99	0.548	1.36	0.756
75.00	5.30	1.28	0.718	0.967	0.710	1.00	0.555	1.37	0.758
75.00	4.80	1.23	0.718	0.912	0.682	1.02	0.566	1.37	0.759
75.00	3.80	1.23	0.718	0.803	0.684	1.05	0.584	1.35	0.749

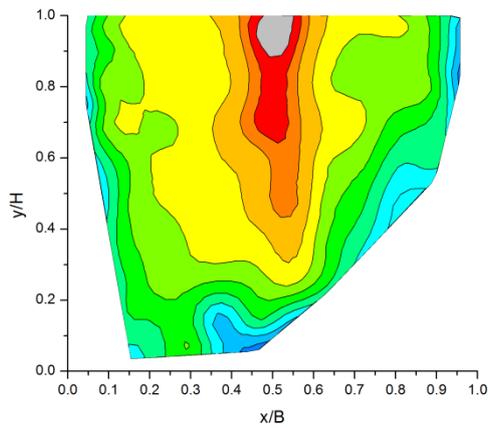
75.00	2.80	1.30	0.718	0.693	0.722	1.07	0.593	1.29	0.715
75.00	1.80	1.14	0.718	0.583	0.631	1.06	0.588	1.15	0.639
75.00	0.80	0.94	0.718	0.474	0.523	1.01	0.558	0.83	0.461
75.00	0.20	0.84	0.718	0.408	0.467	0.92	0.510	0.35	0.193
101.00	5.00	1.26	0.807	1.000	0.698	0.62	0.346	1.32	0.729
101.00	4.70	1.32	0.807	0.967	0.733	0.63	0.351	1.32	0.732
101.00	4.20	1.19	0.807	0.912	0.658	0.65	0.358	1.32	0.733
101.00	3.20	1.19	0.807	0.803	0.661	0.67	0.371	1.30	0.720
101.00	2.20	0.96	0.807	0.693	0.535	0.68	0.378	1.22	0.675
101.00	1.20	0.72	0.807	0.583	0.402	0.67	0.374	1.01	0.562
101.00	0.20	0.50	0.807	0.474	0.275	0.63	0.347	0.37	0.205
127.00	4.39	0.98	0.896	1.000	0.541	0.25	0.136	1.06	0.587
127.00	4.09	1.02	0.896	0.967	0.567	0.25	0.139	1.06	0.589
127.00	3.59	1.00	0.896	0.912	0.556	0.26	0.143	1.06	0.591
127.00	2.59	1.07	0.896	0.803	0.591	0.27	0.151	1.04	0.576
127.00	1.59	0.84	0.896	0.693	0.464	0.28	0.156	0.94	0.521
127.00	0.59	0.77	0.896	0.583	0.429	0.27	0.151	0.64	0.355
127.00	0.20	0.63	0.896	0.541	0.350	0.24	0.133	0.33	0.185
145.00	1.80	0.56	0.957	1.000	0.312	0.07	0.037	0.53	0.293
145.00	1.50	0.44	0.957	0.967	0.245	0.07	0.037	0.55	0.305
145.00	1.00	0.45	0.957	0.912	0.252	0.07	0.036	0.56	0.312
145.00	0.20	0.27	0.957	0.825	0.150	0.04	0.024	0.36	0.200

6.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*

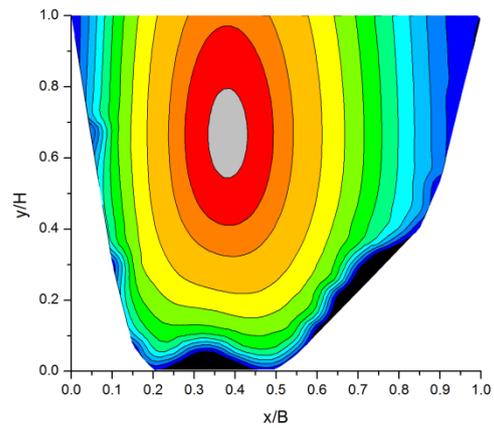




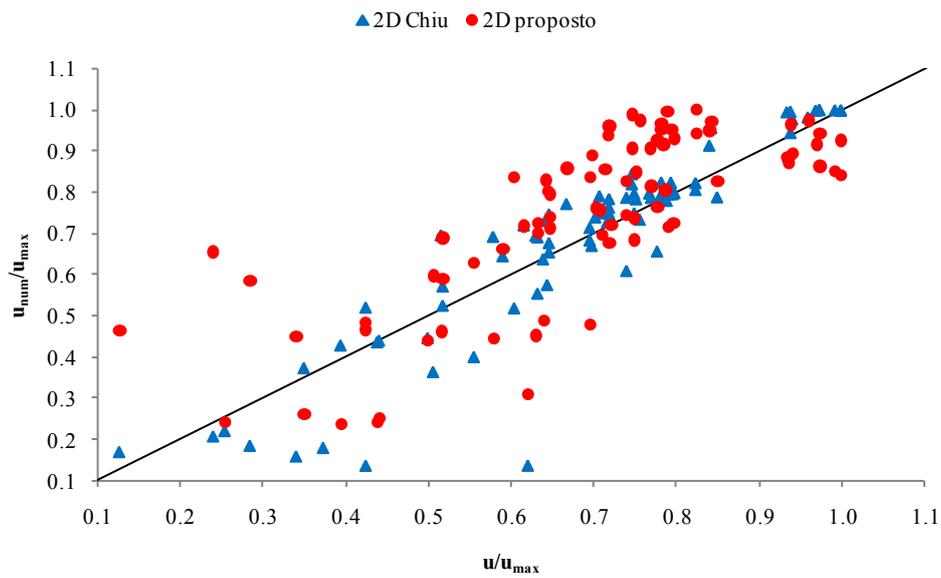
6.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



6.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



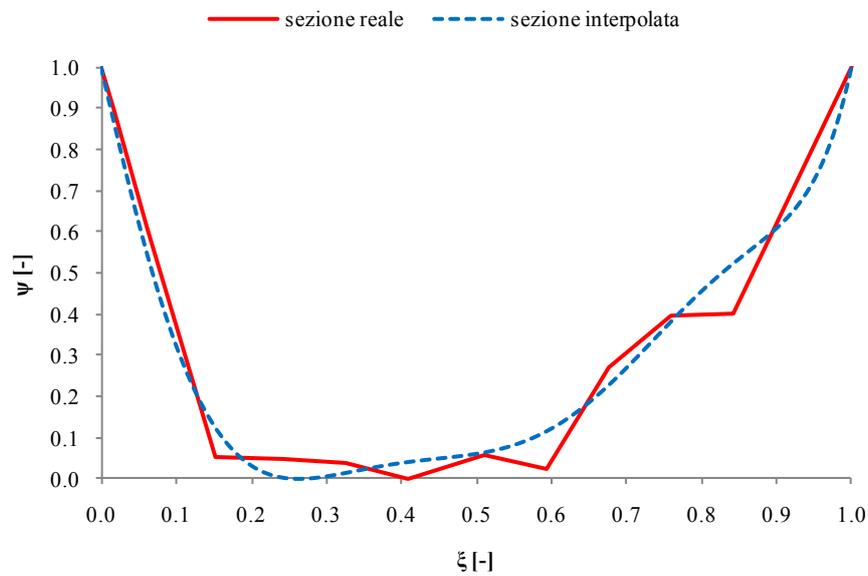
6.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)



7.a) (Pontelagoscuro1) n°7, del 2 febbraio 1995, fiume Po, stazione di Pontelagoscuro

	$B =$	299.2 m	$A =$	2072.5 m <sup>2</sup>	$u_{med}/u_{max} =$	0.650
	$H =$	9.6 m	$C =$	300.5 m	$H/B =$	0.032
	$u_{med} =$	1.17 m/s	$Ar =$	2872.3 m <sup>2</sup>	$Ar/A =$	1.386
	$u_{max} =$	1.8 m/s			$G =$	4.688
	$\xi_0 = x_0/B =$	0.41				
	$\psi_0 = y_0/H =$	1.29				

7.b) sezione trasversale reale e sua interpolazione



L'espressione della curva che interpola la sezione trasversale reale dell'alveo è la seguente:

$$p(\xi) = 265.119 \xi^7 - 887.468 \xi^6 + 1144.428 \xi^5 - 695.942 \xi^4 + 183.329 \xi^3 - 1.622 \xi^2 - 7.843 \xi + 1$$

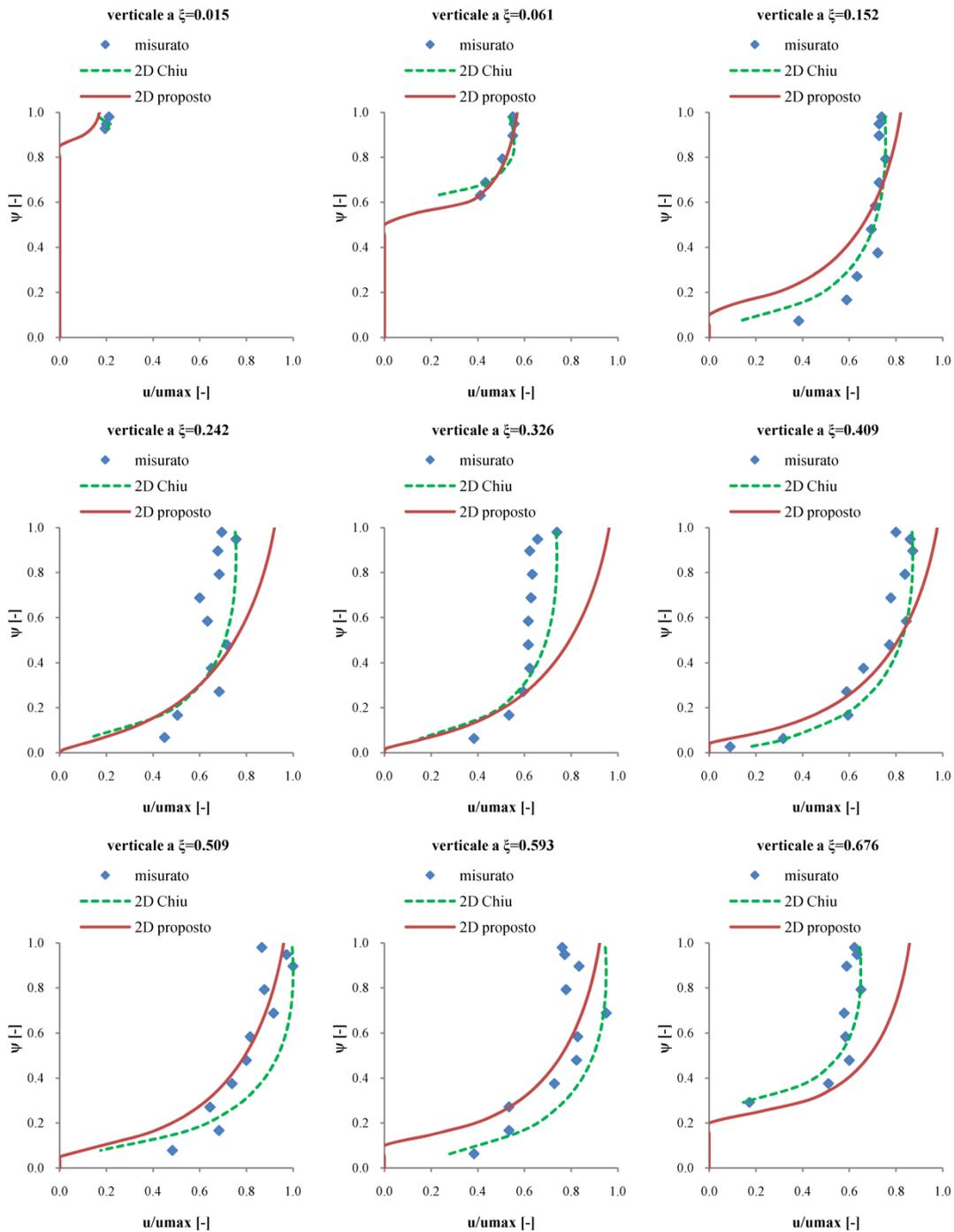
7.c) *valori di velocità misurati sperimentalmente e ricavati teoricamente*

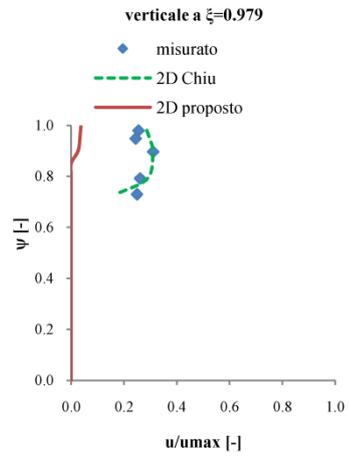
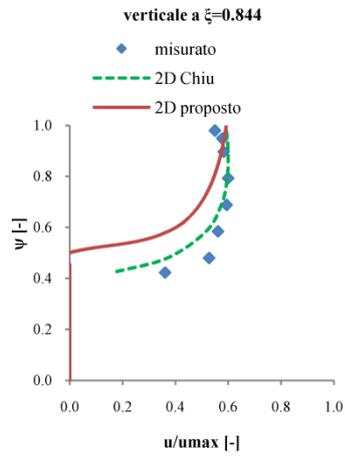
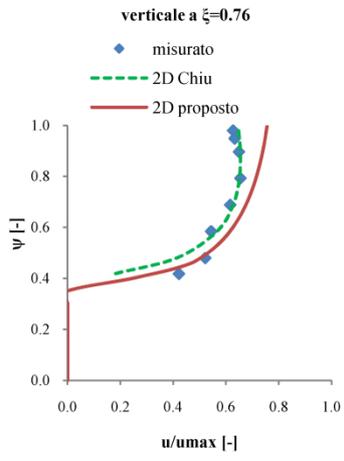
x [m]	y [m]	u [m/s]	$\xi$ [-]	$\psi$ [-]	$u/u_{max}$ [-]	$u_{stima}$ [m/s]	$u_{stima}/u_{max}$ [-]	$u_{Chiu}$ [m/s]	$u_{Chiu}/u_{max}$ [-]
-148.00	0.70	0.38	0.015	0.979	0.211	0.30	0.165	0.30	0.168
-148.00	0.40	0.36	0.015	0.948	0.200	0.27	0.152	0.37	0.207
-148.00	0.20	0.35	0.015	0.927	0.194	0.25	0.138	0.37	0.204
-134.00	3.55	0.99	0.061	0.979	0.550	1.02	0.566	0.97	0.537
-134.00	3.25	1.00	0.061	0.948	0.556	1.01	0.561	0.98	0.545
-134.00	2.75	0.99	0.061	0.896	0.550	0.99	0.550	1.00	0.554
-134.00	1.75	0.91	0.061	0.792	0.506	0.93	0.519	0.98	0.543
-134.00	0.75	0.78	0.061	0.688	0.433	0.83	0.462	0.79	0.440
-134.00	0.20	0.74	0.061	0.630	0.411	0.73	0.405	0.41	0.229
-107.00	8.90	1.33	0.152	0.979	0.739	1.47	0.818	1.35	0.753
-107.00	8.60	1.31	0.152	0.948	0.728	1.46	0.813	1.36	0.754
-107.00	8.10	1.31	0.152	0.896	0.728	1.45	0.803	1.36	0.755
-107.00	7.10	1.36	0.152	0.792	0.756	1.40	0.778	1.36	0.754
-107.00	6.10	1.31	0.152	0.688	0.728	1.34	0.746	1.34	0.746
-107.00	5.10	1.28	0.152	0.583	0.711	1.26	0.703	1.31	0.729
-107.00	4.10	1.25	0.152	0.479	0.694	1.16	0.645	1.26	0.700
-107.00	3.10	1.30	0.152	0.375	0.722	1.01	0.563	1.17	0.652
-107.00	2.10	1.14	0.152	0.271	0.633	0.79	0.436	1.03	0.571
-107.00	1.10	1.06	0.152	0.167	0.589	0.33	0.183	0.77	0.426
-107.00	0.20	0.69	0.152	0.073	0.383	0.00	0.000	0.24	0.133
-80.00	8.95	1.25	0.242	0.979	0.694	1.65	0.917	1.35	0.753
-80.00	8.65	1.36	0.242	0.948	0.756	1.64	0.911	1.36	0.754
-80.00	8.15	1.22	0.242	0.896	0.678	1.62	0.900	1.36	0.755
-80.00	7.15	1.23	0.242	0.792	0.683	1.57	0.873	1.36	0.754
-80.00	6.15	1.08	0.242	0.688	0.600	1.51	0.838	1.34	0.746
-80.00	5.15	1.14	0.242	0.583	0.633	1.43	0.794	1.31	0.730
-80.00	4.15	1.29	0.242	0.479	0.717	1.33	0.738	1.26	0.701
-80.00	3.15	1.17	0.242	0.375	0.650	1.20	0.666	1.18	0.653
-80.00	2.15	1.23	0.242	0.271	0.683	1.02	0.567	1.03	0.575
-80.00	1.15	0.91	0.242	0.167	0.506	0.76	0.423	0.78	0.435
-80.00	0.20	0.81	0.242	0.068	0.450	0.35	0.193	0.24	0.132
-55.00	9.05	1.33	0.326	0.979	0.739	1.73	0.960	1.32	0.736
-55.00	8.75	1.18	0.326	0.948	0.656	1.72	0.954	1.33	0.737
-55.00	8.25	1.12	0.326	0.896	0.622	1.70	0.943	1.33	0.739
-55.00	7.25	1.14	0.326	0.792	0.633	1.65	0.916	1.33	0.738
-55.00	6.25	1.13	0.326	0.688	0.628	1.59	0.882	1.31	0.730
-55.00	5.25	1.11	0.326	0.583	0.617	1.51	0.838	1.29	0.715
-55.00	4.25	1.11	0.326	0.479	0.617	1.41	0.782	1.24	0.687
-55.00	3.25	1.12	0.326	0.375	0.622	1.27	0.708	1.16	0.642
-55.00	2.25	1.07	0.326	0.271	0.594	1.09	0.607	1.02	0.569
-55.00	1.25	0.96	0.326	0.167	0.533	0.82	0.454	0.79	0.441
-55.00	0.25	0.69	0.326	0.063	0.383	0.31	0.175	0.28	0.153
-30.00	9.40	1.44	0.409	0.979	0.800	1.75	0.973	1.56	0.869

-30.00	9.10	1.55	0.409	0.948	0.861	1.74	0.967	1.57	0.871
-30.00	8.60	1.57	0.409	0.896	0.872	1.72	0.957	1.57	0.872
-30.00	7.60	1.51	0.409	0.792	0.839	1.67	0.930	1.57	0.871
-30.00	6.60	1.40	0.409	0.688	0.778	1.61	0.896	1.55	0.863
-30.00	5.60	1.52	0.409	0.583	0.844	1.53	0.853	1.52	0.846
-30.00	4.60	1.39	0.409	0.479	0.772	1.43	0.796	1.47	0.817
-30.00	3.60	1.19	0.409	0.375	0.661	1.30	0.721	1.39	0.771
-30.00	2.60	1.06	0.409	0.271	0.589	1.11	0.615	1.25	0.697
-30.00	1.60	1.07	0.409	0.167	0.594	0.80	0.446	1.03	0.573
-30.00	0.60	0.57	0.409	0.063	0.317	0.16	0.092	0.60	0.332
-30.00	0.25	0.16	0.409	0.026	0.089	0.00	0.000	0.31	0.175
0.00	8.85	1.56	0.509	0.979	0.867	1.72	0.957	1.79	0.996
0.00	8.55	1.75	0.509	0.948	0.972	1.71	0.951	1.80	0.998
0.00	8.05	1.80	0.509	0.896	1.000	1.69	0.941	1.80	1.000
0.00	7.05	1.58	0.509	0.792	0.878	1.65	0.915	1.80	0.998
0.00	6.05	1.65	0.509	0.688	0.917	1.59	0.882	1.78	0.988
0.00	5.05	1.47	0.509	0.583	0.817	1.51	0.838	1.74	0.965
0.00	4.05	1.44	0.509	0.479	0.800	1.41	0.781	1.67	0.925
0.00	3.05	1.33	0.509	0.375	0.739	1.27	0.705	1.55	0.860
0.00	2.05	1.16	0.509	0.271	0.644	1.07	0.594	1.35	0.751
0.00	1.05	1.23	0.509	0.167	0.683	0.73	0.408	0.99	0.552
0.00	0.20	0.87	0.509	0.078	0.483	0.12	0.065	0.32	0.177
25.00	9.20	1.37	0.593	0.979	0.761	1.65	0.919	1.70	0.946
25.00	8.90	1.39	0.593	0.948	0.772	1.64	0.914	1.71	0.948
25.00	8.40	1.50	0.593	0.896	0.833	1.63	0.904	1.71	0.950
25.00	7.40	1.40	0.593	0.792	0.778	1.58	0.879	1.71	0.948
25.00	6.40	1.71	0.593	0.688	0.950	1.52	0.846	1.69	0.939
25.00	5.40	1.49	0.593	0.583	0.828	1.44	0.802	1.66	0.920
25.00	4.40	1.48	0.593	0.479	0.822	1.34	0.744	1.60	0.886
25.00	3.40	1.31	0.593	0.375	0.728	1.19	0.662	1.50	0.832
25.00	2.40	0.96	0.593	0.271	0.533	0.96	0.535	1.34	0.744
25.00	1.40	0.96	0.593	0.167	0.533	0.51	0.282	1.07	0.593
25.00	0.40	0.69	0.593	0.063	0.383	0.00	0.000	0.50	0.278
50.00	6.80	1.12	0.676	0.979	0.622	1.54	0.855	1.16	0.645
50.00	6.50	1.14	0.676	0.948	0.633	1.53	0.850	1.17	0.647
50.00	6.00	1.06	0.676	0.896	0.589	1.51	0.841	1.17	0.650
50.00	5.00	1.17	0.676	0.792	0.650	1.47	0.817	1.17	0.648
50.00	4.00	1.04	0.676	0.688	0.578	1.41	0.783	1.14	0.634
50.00	3.00	1.05	0.676	0.583	0.583	1.33	0.737	1.08	0.602
50.00	2.00	1.08	0.676	0.479	0.600	1.21	0.670	0.97	0.540
50.00	1.00	0.92	0.676	0.375	0.511	1.01	0.562	0.74	0.409
50.00	0.20	0.31	0.676	0.292	0.172	0.71	0.394	0.26	0.147
75.00	5.60	1.13	0.760	0.979	0.628	1.36	0.754	1.17	0.648
75.00	5.30	1.14	0.760	0.948	0.633	1.35	0.749	1.17	0.651
75.00	4.80	1.17	0.760	0.896	0.650	1.33	0.739	1.18	0.655
75.00	3.80	1.18	0.760	0.792	0.656	1.28	0.714	1.17	0.652
75.00	2.80	1.11	0.760	0.688	0.617	1.22	0.676	1.13	0.628

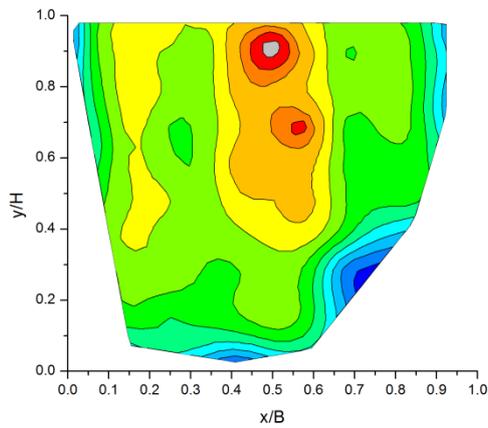
75.00	1.80	0.98	0.760	0.583	0.544	1.11	0.615	1.02	0.566
75.00	0.80	0.94	0.760	0.479	0.522	0.90	0.502	0.75	0.415
75.00	0.20	0.76	0.760	0.417	0.422	0.61	0.341	0.32	0.177
100.00	5.55	0.99	0.844	0.979	0.550	1.06	0.590	1.07	0.593
100.00	5.25	1.04	0.844	0.948	0.578	1.05	0.585	1.07	0.596
100.00	4.75	1.05	0.844	0.896	0.583	1.03	0.574	1.08	0.599
100.00	3.75	1.08	0.844	0.792	0.600	0.98	0.544	1.07	0.596
100.00	2.75	1.07	0.844	0.688	0.594	0.88	0.491	1.03	0.574
100.00	1.75	1.01	0.844	0.583	0.561	0.67	0.373	0.93	0.516
100.00	0.75	0.95	0.844	0.479	0.528	0.00	0.000	0.67	0.370
100.00	0.20	0.65	0.844	0.422	0.361	0.00	0.000	0.29	0.164
124.00	2.60	0.46	0.924	0.979	0.256	0.57	0.314	0.52	0.286
124.00	2.30	0.44	0.924	0.948	0.244	0.56	0.309	0.53	0.297
124.00	1.80	0.56	0.924	0.896	0.311	0.54	0.298	0.56	0.309
124.00	0.80	0.47	0.924	0.792	0.261	0.47	0.261	0.52	0.289
124.00	0.20	0.45	0.924	0.729	0.250	0.39	0.219	0.31	0.170

7.d) *profili di velocità; valori adimensionali.*

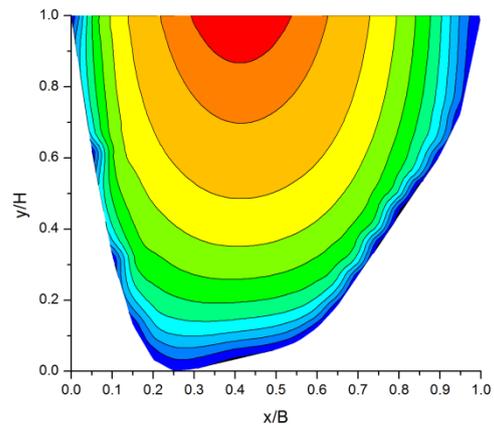




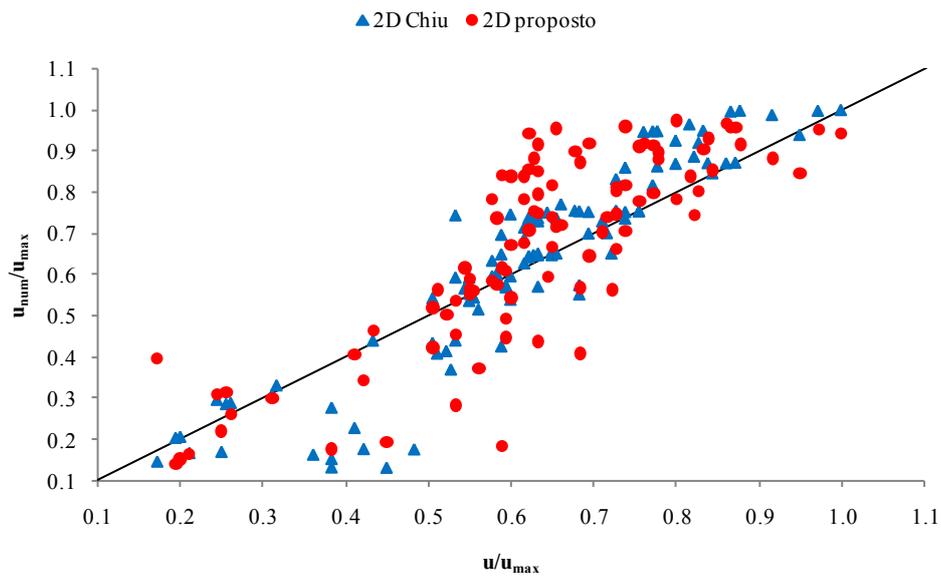
7.e) isotachie ricavate con i valori misurati; valori adimensionali



7.f) isotachie ricavate con il modello proposto; valori adimensionali



7.g) confronto tra i valori ricavati con il modello proposto e quelli relativi al modello di Chiu secondo l'approccio di Moramarco et, al. (2004)



## **APPENDICE D**

### **UNA POSSIBILE INTERPRETAZIONE DELL'ENTROPIA PER LE CORRENTI A PELO LIBERO**

Lo studio dell'idraulica delle correnti a pelo libero parte, sostanzialmente, da considerazioni di carattere energetico che hanno permesso, nel passato, la definizione di solide basi su cui si fondano gli approcci risolutivi dei problemi di idraulica più vari.

Rari sono i riferimenti in letteratura alla possibilità di definire una grandezza che caratterizzi il grado di disordine del fluido analogamente a quanto è stato fatto in termodinamica per studiare il comportamento dei gas. Tale grandezza, che va sotto il nome di entropia, è alla base della teoria cinetica dei gas e potrebbe ricoprire, in idraulica, un importante ruolo sia per affinare lo studio dei fenomeni già spiegati con gli approcci classici sia per approfondire quegli aspetti che al giorno d'oggi sono interpretati parzialmente o approssimativamente.

In idraulica una porzione di energia (o di energia meccanica) è spesa dal sistema idraulico per vincere l'attrito che poi è dissipato nell'ambiente esterno. L'energia così trasformata seguendo una sola direzione (non reversibile) è spesso chiamata perdita di carico. Una misura della quantità dell'energia irrecuperabile è l'entropia che è in continuo aumento. Anche le equazioni che governano i processi idraulici e che esprimono le perdite d'energia potrebbero, in quest'ottica, legarsi al concetto di entropia.

Dopo un breve richiamo al concetto di entropia in termodinamica, viene presentata una possibile definizione della grandezza stessa in idraulica a cui segue un sintetico excursus dei concetti di base di idraulica rivisti in chiave entropica.

#### **D.1 Premessa**

La grandezza entropia fu introdotta dal fisico tedesco R. J. Clausius nel tentativo di chiarire meglio il 2° principio della termodinamica. Egli mise in luce che, se un sistema termodinamico, attraverso una successione di trasformazioni elementari reversibili, passa da uno stato A ad uno stato B e da questo ritorna in A, corrispondendo alla generica trasformazione elementare una quantità di calore  $\partial Q$  ceduta o assorbita alla temperatura termodinamica  $T$ , si ha:

$$\int_{ABA} \frac{\partial Q}{T} = 0 \quad (1)$$

Analogamente si può affermare che se il sistema passa, con le stesse modalità da uno stato A ad uno stato B, il valore della quantità:

$$\int_{AB} \frac{\partial Q}{T} \quad (2)$$

non dipende dalla successione degli stati intermedi ma soltanto dagli stati estremi; ciò equivale a stabilire l'esistenza di una grandezza  $S$ , definita in corrispondenza di ogni stato del sistema, la cui variazione tra uno stato A e uno stato B uguaglia l'integrale suddetto.

In termini equivalenti si può dire che il rapporto  $\partial Q/T$  si presenta come il differenziale totale di  $S$ :

$$dS = \frac{\partial Q}{T} \quad (3)$$

dove  $1/T$  è il fattore integrante di  $\partial Q$ , che non è un differenziale esatto. Tale funzione  $S$  così introdotta è l'entropia.

La variazione di entropia di un sistema che comunque compia una trasformazione da uno stato A ad uno stato B è data da:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\partial Q}{T} \quad (4)$$

dove l'integrale va calcolato per una qualsiasi trasformazione reversibile che faccia passare il sistema dallo stato A allo stato B.

Come l'energia interna, come il potenziale, ecc... l'entropia è una funzione di stato (o quantità di stato) ovvero una proprietà di un sistema che dipende solamente dallo stato iniziale e finale, e non dal particolare cammino seguito per arrivarvi pertanto risulta definita a meno di una costante additiva. Ciò significa che si possono calcolare le variazioni di  $S$  a partire da uno stato di riferimento, ma il valore di  $S$  che si attribuisce a tale stato resta arbitrario.

Clausius nel parlare di entropia intende riferirsi al legame tra movimento interno (al corpo o sistema) ed energia interna o calore, legame che esplicita la grande intuizione che in qualche modo il calore dovesse riferirsi al movimento di particelle meccaniche interne al corpo. Egli infatti la definisce come il rapporto tra la somma dei piccoli incrementi (infinitesimi) di calore, divisa per la temperatura assoluta durante l'assorbimento del calore.

In analogia con una trasformazione termodinamica può essere possibile definire la grandezza entropia nel campo dell'idraulica. Anche in idraulica, in linea di principio, se si passa da

uno stato A ad uno stato B e successivamente si ritorna in A, e a ciascuna generica trasformazione elementare corrisponde una quantità di energia  $dH$  persa o acquistata, si ha:

$$\int_{ABA} \frac{\partial H}{h} = 0 \quad (5)$$

in cui è stato introdotto  $1/h$  come fattore integrante di  $\partial H$ .

Tale analogia, già postulata da Yang (1971) nello studio della morfologia dei sistemi idrografici, permette di riscrivere le trasformazioni termodinamiche, in termini idraulici, considerando il tirante equivalente alla temperatura e l'energia, il carico idraulico, equivalente al calore. In questi termini è possibile definire la variazione di entropia in un sistema idraulico come:

$$dS = \frac{dH}{h} \quad (6)$$

Tuttavia la definizione (6) non è accettabile in quanto in quanto  $dH/h$  non è un differenziale esatto come, invece, dovrebbe essere per definizione. Ciò è dovuto in particolare al fatto che, mentre nella definizione della termodinamica le grandezze  $T$  e  $Q$  sono slegate tra loro, in questo caso  $H$  ed  $h$  sono intimamente connesse.

Affinché, quindi, la quantità a secondo membro sia un differenziale esatto è possibile apportare una piccola correzione all'espressione (6) e riscriverla come segue:

$$dS = \frac{dH}{h} - \frac{1}{3} \frac{q}{gh^3} dq \quad (7)$$

Certamente va rilevato che la grandezza entropia in sé potrebbe dipendere da una serie di proprietà dei fluidi: densità, viscosità, temperatura, ecc... tutte caratteristiche che nella (7) non compaiono ma che nella gran parte delle applicazioni idrauliche rimangono costanti. In questi termini pertanto si potrebbe affermare che tutte le grandezze al di fuori del tirante, rimanendo costanti, non concorrono alla variazione di entropia ma solo alla definizione dell'entropia come grandezza assoluta e, quindi, della costante additiva a meno della quale solitamente  $S$  viene definita.

In altre parole, la variazione di una qualsiasi di tali grandezze non considerate nella (7) produrrebbe comunque una variazione di  $h$  e quindi, indirettamente, concorrerebbe alla variazione di  $S$  analogamente a quanto accade in termodinamica per un gas dove, pur comparando nella (3) la sola  $T$ , anche la pressione e il volume giocano un ruolo fondamentale attraverso le note leggi di trasformazione.

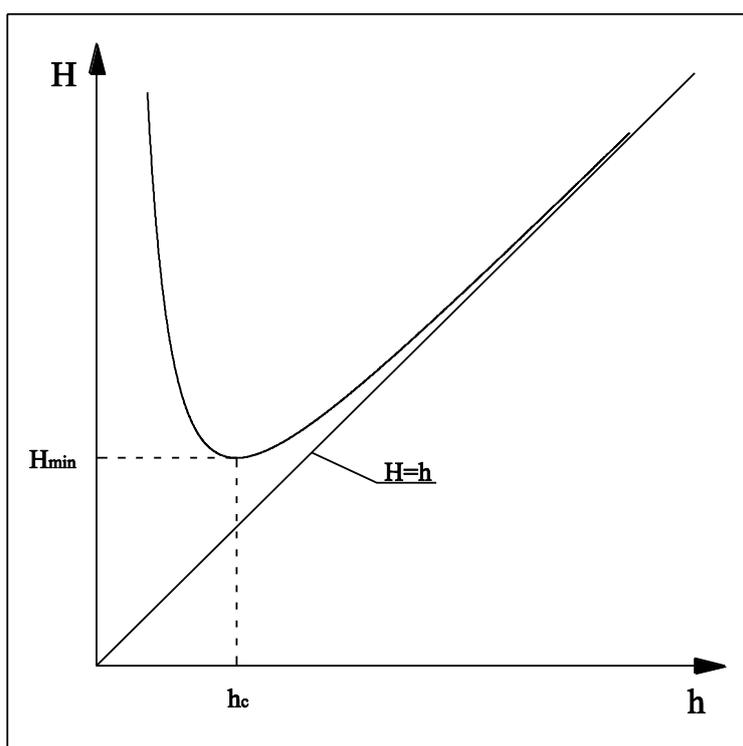
Assunta attendibile l'equazione (7) è di notevole interesse caratterizzare una corrente a pelo libero, in termini di entropia, relativamente alle diverse configurazioni che la stessa può assumere.

## D.2 L'entropia in idraulica

Si consideri una generica sezione trasversale di una corrente per la quale si faccia la sola ipotesi che sia gradualmente variata, potendo il moto essere uniforme, permanente non uniforme o eventualmente anche vario. Assegnata una generica forma della sezione l'area bagnata  $\sigma$  così come l'altezza cinetica  $V^2/2g$  sono funzioni univoche del tirante  $h$  come anche il carico idraulico rispetto al fondo del canale che può esplicitarsi come:

$$H = h + \frac{Q^2}{2g\sigma^2} \quad (8)$$

L'andamento di tale funzione è ben noto ed è rappresentato in figura 1; si riconosce che per  $h$  tendente a zero l'altezza cinetica tende all'infinito, così come il carico, viceversa tendendo all'infinito il tirante, l'altezza cinetica tende a zero e pertanto il carico tende al tirante. La curva rappresentata in figura, pertanto, presenta due asintoti il primo coincidente con l'asse delle ordinate e l'altro con la retta bisettrice del quadrante, di equazione  $H=h$ .



**Fig. 1** – curva  $H(h)$

Come è noto tale curva presenta un minimo, che rappresenta le condizioni di stato critico e che si trova annullando la derivata di  $H$  rispetto a  $h$ , operazione che conduce alla esplicitazione della seguente relazione:

$$\frac{\sigma^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad (9)$$

Si voglia ora definire, invece, la grandezza entropia partendo dall'espressione (7), già data, del suo differenziale, che viene qui di seguito riscritta per sezione rettangolare larghissima:

$$dS = \frac{dH}{h} - \frac{1}{3} \frac{q}{gh^3} dq \quad (10)$$

dove: S= entropia; H= carico idraulico; h= tirante idrico; q= portata per unità di larghezza del canale.

Considerando l'espressione (8) del carico idraulico e passando al differenziale si ottiene:

$$dH = dh + \frac{V}{g} dV \quad (11)$$

Si esprima il differenziale della velocità considerando che vale l'equazione di continuità:  $V = q/h$ :

$$dV = \frac{dq}{h} - \frac{q}{h^2} dh \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella (11) e sviluppando si ottiene:

$$dH = dh + \frac{q}{gh} \left( \frac{dq}{h} - \frac{q}{h^2} dh \right) = dh \left( 1 + \frac{q}{gh^2} \frac{dq}{dh} - \frac{q^2}{gh^3} \right) \quad (13)$$

e quindi:

$$dH = dh(1 - Fr^2) + \frac{q}{gh^2} dq \quad (14)$$

dove con  $Fr$  si esprime il numero di Froude della corrente pari a:  $Fr = V/(gh)^{1/2}$

Sostituendo infine la (14) nella (10) si ottiene un'espressione della variazione di entropia in funzione delle grandezze caratteristiche della corrente:

$$dS = \left( \frac{1}{h} - \frac{q^2}{gh^4} \right) dh + \frac{2}{3} \frac{q}{gh^3} dq \quad (15)$$

La (15) simbolicamente può scriversi come:

$$dS = M(h,q) dh + N(h,q) dq \quad (16)$$

dove  $M(h,q)$  e  $N(h,q)$  sono due funzioni nelle variabili  $h$  e  $q$ ;  $dS$  è un differenziale esatto se è il differenziale di una funzione  $S$  delle variabili  $h$  e  $q$  in una semplicemente connessa. Ciò significa che è possibile determinare una funzione che soddisfi la condizione precedente con una integrazione

$$S = \int M(h,q) dh + \int N(h,q) dq \quad (17)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista  $S$  è che:

$$\frac{\partial M(h,q)}{\partial q} = \frac{\partial N(h,q)}{\partial h} \quad (18)$$

Ciò è verificato per la (15) pertanto la forma proposta è un differenziale esatto.

Integrando la (15), come simbolicamente indicato con la (17), si ottiene l'espressione dell'entropia  $S$  a meno di una costante  $C$ .

$$S = \int \left( \frac{1}{h} - \frac{q^2}{gh^4} \right) dh + \int \frac{2}{3} \frac{q}{gh^3} dq = \ln(h) + \frac{1}{3} \frac{q^2}{gh^3} + C \quad (19)$$

Pertanto, a meno di una costante, l'entropia assume la seguente espressione:

$$S = \ln(h) + \frac{1}{3} \frac{q^2}{gh^3} \quad (20)$$

dalla quale si evince la dipendenza dell'entropia stessa dalle due variabili  $h$  e  $q$ . In figura 2 è disegnata la superficie che rappresenta  $S$  nel dominio  $h, q$ ; nella figura stessa sono riportati due diagrammi in cui si nota la variazione di  $S$  rispetto ad  $h$  e rispetto a  $q$ . Lo studio della funzione porta ad affermare che, a  $q$  costante, si dimostra che per  $h$  tendente a zero la funzione tende a più infinito<sup>1</sup> e che per  $h$  tendente a più infinito la funzione tende al  $\ln(h)$ <sup>2</sup>. La funzione, pertanto, presenta due asintoti il primo coincidente con l'asse delle ordinate, e il secondo coincidente con la curva  $\ln(h)$ .

<sup>1</sup> Senza ledere la generalità si può trascurare la presenza della costante moltiplicativa  $q^2/3g$ , e ricordando che:

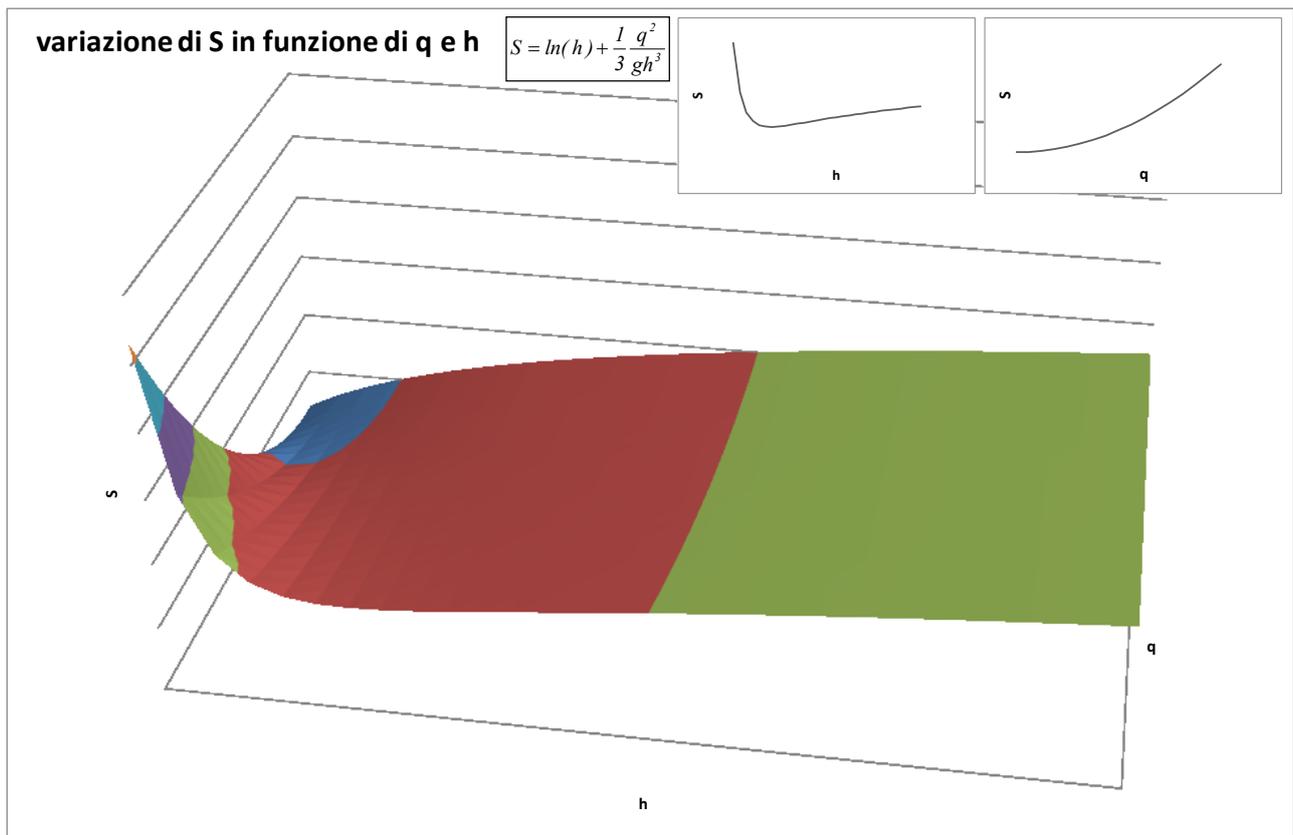
$$\lim_{h \rightarrow 0} h^3 \ln h = 0, \text{ risulta: } \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \ln h + \frac{1}{h^3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h^3 \ln h + 1}{h^3} \right) = \frac{1}{0+} = +\infty$$

<sup>2</sup> Senza ledere la generalità si può trascurare la presenza della costante moltiplicativa  $q^2/3g$ , e ricordando che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \ln h = +\infty, \text{ risulta: } \lim_{h \rightarrow +\infty} S(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \ln h + \frac{1}{h^3} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

Inoltre è possibile affermare che,

$$\frac{S(h) - \ln(h)}{1/h^3} \rightarrow 1 \quad \Leftrightarrow \quad S(h) - \ln(h) = O\left(\frac{1}{h^3}\right) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$



**Fig. 2** – superficie  $S(h,q)$

Analogamente a quanto accade per il carico  $H$  la funzione  $S(h)$  presenta un minimo ( $S_{\min}$ ), che si individua annullando la derivata di  $S$  rispetto ad  $h$ .

Si può dire che si attinge il minor contenuto di entropia quando si verificano le condizioni di stato critico.

In altre parole, una corrente di assegnata portata che scorre con il minimo contenuto energetico ( $H_{\min}$ ), ovvero con tirante di stato critico  $h_c$ , è caratterizzata anche dalla minima quantità di entropia ( $S_{\min}$ ).

### **D.3 Discussione su un caso esemplificativo classico.**

Una applicazione delle equazioni generali dell'entropia presentate in precedenza viene sviluppata qui di seguito con riferimento ad uno schema di riferimento classico.

---

In particolare  $S(h)$  è infinito del 3° ordine per  $h$  che tende a zero. Ciò corrisponde al fatto che  $S(h)/(1/h^3)$  tende ad una costante per  $h$  che tende a zero  
 Infine  $S(h)$ , per  $h$  che tende all'infinito, è un infinito di ordine infinitamente piccolo. Ciò corrisponde al fatto che per  $h$  che tende a + infinito,  $S(h)/\ln(h)$  tende ad una costante.

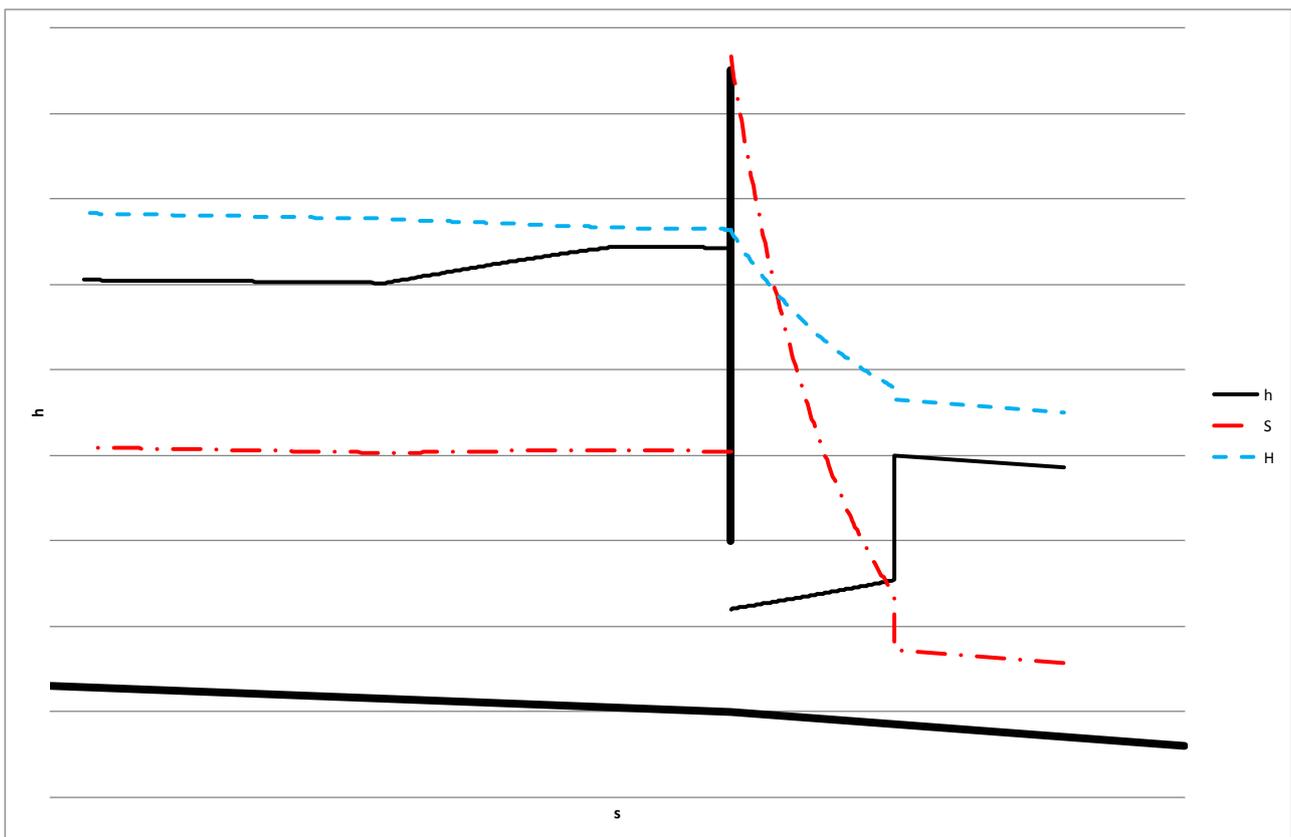
Si consideri il caso di un canale costituito da due tronchi cilindrici di differente pendenza forte a monte, debole a valle. Nel punto di cambio pendenza è presente una paratoia a monte della quale è presente uno sfioratore laterale.

In Fig. 3 è riportato uno dei profili di corrente classici che si presenta in una condizione del genere. Unitamente al profilo di corrente è riportata la linea dell'energia con linea tratteggiata e la linea dell'entropia a tratto e punto.

Come è possibile notare l'entropia:

- si mantiene costante, come del resto l'energia, in condizione di moto uniforme (profilo di valle);
- subisce una brusca diminuzione, come del resto l'energia, in presenza di risalto idraulico;
- subisce una variazione lungo il profilo sullo sfioratore, il quale è stato tracciato in ipotesi di perdite di carico nulle, ovvero energia costante.

Quest'ultima considerazione permette di ipotizzare la possibilità di tracciare un profilo di corrente diverso dal precedente in ipotesi di  $S$  costante in luogo dell'ipotesi di  $H$  costante.



**Fig. 3** – caso esemplificativo classico - profilo di corrente, linea dell'energia e linea dell'entropia

#### **D.4 Possibili sviluppi**

Una conclusione obbligatoria è relativa alla definizione di entropia che, nel campo dell'idraulica, è stata data precedentemente. La definizione è proposta in analogia con la definizione nota in termodinamica e correggendo la definizione più intuitiva  $dS=dH/h$  di modo che  $dS$  fosse un differenziale esatto. Ciò non garantisce che la definizione data sia esatta ma permette di iniziare a ragionare in merito alla possibilità di trovare una grandezza che possa essere di supporto, in affiancamento a quelle già note in idraulica, per la soluzione di problemi che oggi vengono risolti in modo più o meno approssimato.

Più in generale un approccio entropico allo studio delle correnti a pelo libero potrebbe portare ad affinare l'interpretazione dei fenomeni idraulici già modellati con le consolidate teorie dell'idraulica classica e ad approfondire quegli aspetti che oggi giorno vengono spiegati solo in parte o con approssimazioni più o meno valide.