UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche

XXII Ciclo

TESI

Gruppi con condizioni di normalità su certi sistemi di sottogruppi subnormali

DI

Natascia Tortora

Indice

Introduzione

E' noto che la normalità non è una relazione transitiva, basti pensare al gruppo diedrale D_8 in cui ogni sottogruppo di ordine 2 non centrale è normalizzato dal sottogruppo di ordine 4 che lo contiene, tuttavia non risulta normale in D_8; un sottogruppo di questo tipo si dice *subnormale di difetto* 2.

In generale, un sottogruppo H di un gruppo G si dice *subnormale* in G se esiste una serie finita di G contenente H e G; inoltre, la minima lunghezza di una serie siffatta si dice *difetto* di H in G.

Pertanto i sottogruppi normali coincidono con i sottogruppi subnormali di difetto al più 1. Nei gruppi finiti il significato dei sottogruppi subnormali è evidente, dal momento che essi costituiscono i termini delle serie di composizione, i cui fattori sono rilevanti al fine di caratterizzare la struttura dell'intero gruppo.

Dato un gruppo G, si dice che *G ha la proprietà T*, o piú brevemente che è un *T-gruppo*, se ogni suo sottogruppo subnormale è anche normale.

Pertanto in questa classe di gruppi la relazione di normalità è una relazione transitiva.

I T-gruppi finiti sono stati oggetto di studio di Best Tausski, Gaschüzt e Zacher. Esibiamo a tal proposito un importante risultato dimostrato da Gaschüzt che caratterizza i T-gruppi risolubili finiti : *Se G è un T-gruppo risolubile finito e L è il più piccolo sottogruppo normale di G tale che G/L sia nilpotente allora G/L è dedekindiano e L è un gruppo abeliano di oridine dispari coprimo col suo indice in G.*

La struttura dei T-gruppi risolubili infiniti è stata invece studiata e completamente descritta da D.J.S. Robinson. Nel secondo capitolo di questa tesi sono riportati alcuni dei principali teoremi di struttura dei T-gruppi risolubili, i quali, essenzialmente, stabiliscono quanto segue: *Un T-gruppo risolubile è metabeliano e iperciclico e se finitamente generato è finito oppure abeliano.*

Si ottengono possibili generalizzazioni della proprietà T richiedendo, in un gruppo, la normalità di particolari sistemi di sottogruppi subnormali verificanti determinate condizioni. Una prima generalizzazione della proprietà T può essere individuata nella classe degli IT-gruppi, ovvero, dei gruppi in cui è richiesta la normalità dei sottogruppi subnormali *infiniti*: tali gruppi, studiati da S. Franciosi, F. de Giovanni e successivamente da H. Heineken, verranno descritti nel terzo capitolo di questa tesi.

Nell'ultimo capitolo si mostrerà come risultati analoghi possano essere ottenuti per i gruppi risolubili in cui si richiede la normalità dei sottogruppi subnormali *finiti*, ossia in cui solo particolari catene di normalità, quali quelle con l'ultimo termine finito, sono transitive. Tale classe di gruppi rappresenta l'oggetto di studio di questa tesi.

Notazioni e terminologia sono quelle usuali in Teoria dei Gruppi, in particolare ci si riferisce a [19]

Capitolo 1

Automorfismi che fissano i sottogruppi

1.1 Automorfismi Potenza

Sia G un gruppo. Un automorfismo ϕ di G è detto *automorfismo potenza* se fissa tutti i sottogruppi di G, ossia se $\phi(H) = H$, $\forall H \leq G$. L'insieme degli automorfismi potenza di G si denota con $PAutG$ e costituisce un sottogruppo normale del gruppo $AutG$ degli automorfismi di G, in quanto evidentemente contiene i coniugati di ogni suo elemento. Le proprietà di tale gruppo sono state studiate da C.D.H. Cooper ([5]), in particolare sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.1.1 *Sia G un gruppo. Allora $PAutG$ é un gruppo abeliano e residualmente finito.*

Dimostrazione $-$ Siano ϕ e ψ automorfismi potenza di G e sia x un elemento di G. Per definizione allora esistono due interi n e m tali che $\phi(x) = x^n$ e $\psi(x) = x^m$. Pertanto si ha

$$\psi(\phi(x)) = \psi(x^n) = (\psi(x))^n = x^{mn} = x^{nm} = (\phi(x))^m = \phi(x^m) = \phi(\psi(x)).$$

Resta così provata l'abelianità di $PAutG$.

Ora verrà esibito un sistema di sottogruppi normali di $PAutG$ di indice finito ad intersezione identica concludendo così la dimostrazione. Siano x un elemento di G e C_x il centralizzante in $PAutG$ di $\langle x \rangle$. Il quoziente $PAutG/C_x$ è finito in quanto isomorfo ad un gruppo di automorfismi del gruppo ciclico

$\langle x \rangle$. Dal momento che il sistema di sottogruppi C_x ha intersezione identica l'asserto risulta provato.

□

Nel seguito della trattazione, incontreremo di frequente gruppi che agiscono su determinati sottogruppi come gruppi di automorfismi potenza, pertanto osserviamo di quali particolari proprietà gode il gruppo degli automorfismi potenza di un gruppo abeliano.

Teorema 1.1.2 *Sia A un gruppo abeliano e sia $\phi \in PAutA$.*

(i) *Se A è non periodico, allora ϕ è l'identità oppure l'inversione*

(ii) *Se A è periodico e $p \in \pi(A)$, allora per ogni intero positivo r esiste un intero positivo $m_{p,r} < p^r$ coprimo con p e congruo a $m_{p,r-1}$ modulo p^{r-1} tale che $a^\phi = a^{m_{p,r}}$ per ogni elemento a di A di periodo al più p^r.*

Inversamente ogni applicazione di A in sè che verifica (i) e (ii) è un automorfismo potenza di A.

Dimostrazione − Sia A un gruppo non periodico. Siano a e b elementi aperiodici di A e siano ϵ e $\delta \in \{1, -1\}$ tali che $a^\phi = a^\epsilon$ e $b^\phi = b^\delta$. Nel caso in cui $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$ allora l'elemento ab è aperiodico per cui esiste $\eta \in \{1, -1\}$ tale che $(ab)^\phi = (ab)^\eta$. Pertanto

$$a^\epsilon b^\delta = a^\phi b^\phi = (ab)^\phi = (ab)^\eta = a^\eta b^\eta$$

da cui $\epsilon = \eta = \delta$. Si supponga ora che il sottogruppo $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ contenga un elemento $c = a^\eta = b^\nu$ non identico ; esiste $\lambda \in \{1, -1\}$ tale che $c^\phi = c^\lambda$; si ha

$$a^{\eta\lambda} = (a^\eta)^\lambda = c^\lambda = c^\phi = (a^\eta)^\phi = (a^\phi)^\eta = a^{\epsilon\eta}$$

e quindi $\eta\lambda = \eta\epsilon$ per cui $\lambda = \epsilon$. Analogamente si ha $\lambda = \delta$, da cui $\epsilon = \delta$. Così si è provato che esiste un intero $\epsilon \in \{1, -1\}$ tale che per ogni elemento aperiodico g di A risulta $g^\phi = g^\epsilon$, ossia che l'automorfismo ϕ agisce come l'identità oppure come l'inversione, come richiesto nella (i).

Sia ora A un gruppo periodico, $p \in \pi(G)$ ed r un intero positivo. Per il noto teorema di struttura dei gruppi abeliani periodici, si può supporre che A sia un p-gruppo. Si proverà che esiste un intero $m_{p,r}$ con le proprietà enunciate nella (ii). Siano a e a' elementi di A tali che $o(a) = p^r$ e $o(a') \leq p^r$. Siccome ϕ è un automorfismo potenza allora esiste un intero $m \leq p^r$ coprimo con p tale che $a^\phi = a^m$. Sia $m := m_{p,r}$. Si consideri il sottogruppo $\langle a, a' \rangle$; esso si spezza sul suo sottogruppo di Sylow $\langle a \rangle$ e quindi $\langle a, a' \rangle = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ con b elemento di $\langle a, a' \rangle$ di periodo al piú p^r. Se $b^\phi = b^l$ e $(ab)^\phi = (ab)^n$ si ha

$$a^n b^n = (ab)^n = (ab)^\phi = a^\phi b^\phi = a^m b^l$$

Da cui essendo $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$ si ha $a^{n-m} = b^{l-n} = 1$. Quindi $n \equiv m\ (mod\ p^r)$ e $l \equiv n\ (mod\ o(b))$ e poichè $o(b)$ divide p^r segue $l \equiv m\ (mod\ o(p))$. Pertanto $b^\phi = b^l = b^m$. Ora $a' = a^t b^s$ per opportuni interi t ed s e quindi $(a')^\phi = a^{tm} b^{sm} = (a')^m$ come richiesto. Infine si consideri ora a^p, tale elemento ha ordine p^{r-1}, per cui per quanto visto

$$(a^p)^\phi = (a^p)^{m_{p,r-1}} = a^{pm_{p,r}}$$

da cui segue $m_{p,r} \equiv m_{p.r-1}(mod\ p^{r-1})$.

Inversamente in entrambi i casi l'asserto è ovvio, in quanto le condizioni date implicano che ϕ fissa i sottogruppi ciclici.

□

In particolare segue che se G è un gruppo abeliano allora $PAutG$ è un sottogruppo centrale del gruppo degli automotfismi $AutG$.

Sia p un numero primo, A un p-gruppo abeliano e $\phi \in PAutA$. Sia a un elemento di A di periodo al piú p^r, allora per il teorema precedente risulta $a^\phi = a^{m_{p,r}}$ dove $(m_{p,r}, p) = 1$, $0 < m_{p,r} < p^r$ e $m_{p,r} \equiv m_{p,r-1}(mod\ p^{r-1})$. Queste condizioni implicano che per $r \geq 1$ risulta

$$m_{p,r} = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + ... + \alpha_{r-1} p^{r-1}$$

dove $0 < \alpha_0 < p$ e $0 \leq \alpha_i < p$. Pertanto a ϕ corrisponde l'unità p-adica

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + ...$$

Viceversa data l'unità p-adica α esiste un unico automorfismo ϕ di A determinato da α così definito:

$$a^\phi = a^\alpha = a^{\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + ... + \alpha_{r-1} p^{r-1}}$$

per ogni elemento a di A di periodo al piú p^r.

Inoltre, se A ha esponente infinito, α è univocamente determinata da ϕ, mentre se A ha esponente finito p^r, allora α è determinata da ϕ a meno di un multiplo di p^r.

Pertanto sussiste il seguente risultato.

Corollario 1.1.3 *Sia G un gruppo abeliano.*

(i) *Se G è non periodico, allora $PAutG$ ha ordine 2 ed é generato dall'automorfismo inversione di G.*

(ii) *Se G è periodico, allora $PAutG$ è isomorfo al prodotto cartesiano dei gruppi $PAut(G_p)$ al variare di p in $\pi(G)$. In particolare se G_p ha esponente infinito, $PAutG_p$ è isomorfo al gruppo moltipilicativo dell'anello dei p-adici invertibili; se G_p ha esponente finito p^n, $PAutG_p$ é isomorfo a $AutC_{p^n}$ e cioè al gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili dell'anello degli interi modulo p^n.*

Si ricordino alcune proprietà dei gruppi sopracitati: detto p un numero primo, il gruppo moltiplicativo delle unità p-adiche è prodotto diretto di un gruppo ciclico di ordine 2 oppure $p-1$, a seconda che p sia rispettivamente pari oppure dispari, e del gruppo additivo delle unità p-adiche $F(p)$; mentre $AutC_{p^n}$, se p è dispari, ha ordine $(p-1)p^{n-1}$ e se $p=2$, è prodotto diretto di un gruppo di ordine 2 e di un gruppo ciclico di ordine 2^{n-2}. Inoltre si osservi che un gruppo periodico di automorfismi potenza di un p-gruppo abeliano di esponente infinito è ciclico finito di ordine 2 oppure $p-1$.

Capitolo 2

Gruppi in cui la relazione di normalità è transitiva

2.1 T-gruppi

Un gruppo si dice T*-gruppo* o che gode della proprietà T, se ogni sottogruppo subnormale è normale, il che, come è facile provare, equivale a considerare i gruppi G con la seguente proprietà: $H \lhd K \lhd G$ implica che $H \lhd G$. Notiamo quindi esplicitamente che è sufficiente considerare i sottogruppi subnormali di difetto 2 per verificare se vale la proprietà T in un gruppo; a titolo di curiosità, si osservi che, come si può immaginare, la lettera T sta per transitività.

E' evidente che ogni gruppo semplice è un T-gruppo e il gruppo diedrale di ordine 8 è il più piccolo gruppo finito che non sia un T-gruppo.

Nel seguito verranno esposti i risultati che caratterizzano i T-gruppi risolubili infiniti ottenuti da D.J.S. Robinson.

Per definizione la classe dei T-gruppi è chiusa per immagini omomorfe e per sottogruppi subnormali, ma in generale non è chiusa per sottogruppi. Si pensi al gruppo alterno di grado 5 A_5, esso è semplice e contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo alterno di grado 4 A_4; quest'ultimo contiene un sottogruppo normale di ordine 4 isomorfo al gruppo quadrinomio V_4, ma è privo di sottogruppi normali di ordine 2. E' importante osservare che la proprietà T non si conserva per sottogruppi nemmeno se ci si restringe alla classe dei T-gruppi risolubili finiti.

Prima di esibire il prossimo risultato riguardante la lunghezza della serie centrale inferiore di un T-gruppo, si noti che evidentemente un T-gruppo nilpotente è dedekindiano (ossia ogni sottogruppo è normale).

Si osservi che un noto risultato caratterizza completamente i gruppi dedekindiani come segue:*un gruppo dedekindiano o è abeliano oppure è, prodotto di un gruppo di quaternioni di ordine* 8 *e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di periodo* 4.

Lemma 2.1.1 *Sia G un T-gruppo, allora la serie centrale inferiore termina con $L = [G, G']$ ossia $[L, G] = L$. Inoltre l'indice di L in G' è al piú* 2.

Dimostrazione – Sia n un intero positivo. Si consideri il quoziente $G/\gamma_n(G)$. Tale gruppo è nilpotente e quindi per le ipotesi su G è dedekindiano, per cui ha classe di nilpotenza è al piú 2 e quindi $\gamma_n(G)$ contiene $L = \gamma_3(G)$. In particolare per ogni $n \geq 4$ si ha $\gamma_n(G) = L$.

Inoltre, poichè G/L è un T-gruppo nilpotente, il suo derivato G'/L ha ordine al più 2.

□

Facciamo una breve digressione per riportare alcune definizioni che possono risultare utili ai fini di rendere più agevole la comprensione dei prossimi risultati.

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, si dice che un gruppo G è un gruppo *iper*-$\mathfrak{X}$ se esiste una serie normale ascendente di G, contenente i sotogruppi banali, i cui fattori sono $\mathfrak{X}$-gruppi.

Un gruppo G si dice *supersolubile* se esiste una serie normale finita di G contenente i sottogruppi banali a fattori ciclici.

Di seguito è riportato un risultato di carattere generale che servirà per dimostrare alcune importanti proprietà nella classe dei T-gruppi.

Lemma 2.1.2 *Sia G un gruppo e sia F il sottogruppo di Fitting di G. Se tutti i sottogruppi di F sono normali in G, allora $F = C_G(G')$. In particolare se G è iperabeliano allora esso è metabeliano e iperciclico.*

Dimostrazione – Si osservi che una delle due inclusioni è sempre verificata: infatti il centralizzante $C_G(G')$ è chiaramente normale in G e nilpotente (di classe al più 2). Pertanto è $C_G(G') \leq F$. Per le ipotesi sul sottogruppo di Fitting, G induce automorfismi potenza su F, quindi, per il teorema 1.1.1, si ha $G' \leq C_G(F)$. Per cui F è contenuto nel centralizzante $C_G(G')$. Ora, se G è iperabeliano risulta $C_G(F) \leq F$ e quindi $C_G(F) = Z(F)$ e G' è abeliano e iperciclicamente immerso in G.

□

Si osservi che in generale, per il teorema di Fitting, i sottogruppi ciclici del sottogruppo di Fitting di un gruppo G sono subnormali in G. Pertanto nella classe dei T-gruppi vale il seguente risultato

Teorema 2.1.3 *Sia G un T-gruppo e sia F il sottogruppo di Fitting di G allora $F = C_G(G')$. In particolare F è un gruppo dedekindiano.*

DIMOSTRAZIONE – Dal momento che G ha la proprietà T, ciascun sottogruppo ciclico di F viene ad essere normale in G, per cui tutti i sottogruppi del sottogruppo di Fitting sono normali in G. Pertanto direttamente dal lemma precedente $F = C_G(G')$ ed in particolare F è dedekindiano.

□

Segue, pertanto, dall'ultima osservazione sul sottogruppo di Fitting e dal lemma 2.1.2, il seguente risultato sui T-gruppi risolubili

Teorema 2.1.4 *Ogni T-gruppo iperabeliano è metabeliano e iperciclico.*

Come conseguenze dirette dell'ultimo teorema si ottengono i seguenti due risultati:

Corollario 2.1.5 *Sia G un T-gruppo, allora la serie derivata termina con G'' ossia $G'' = G'''$.*

Teorema 2.1.6 *Ogni T gruppo risolubile è localmente supersolubile*

2.2 Classificazione dei T-gruppi risolubili

La presenza di elementi di periodo infinito in un T gruppo risolubile può incidere fortemente sulla struttura del gruppo. Per questa ragione è naturale trattare separatamente i T-gruppi risolubili periodici e quelli non periodici. La classe dei T-gruppi risolubili è stata suddivisa da D.J.S. Robinson in quattro sottoclassi mutuamente disgiunte:

(1) la classe dei gruppi abeliani;

(2) la classe dei T-gruppi risolubili periodici non abeliani;

(3) la classe dei T-gruppi risolubili di tipo 1: un T-gruppo risolubile G si dice *di tipo 1* se G non è abeliano e il centralizzante $C_G(G')$ non è periodico;

(4) la classe dei T-gruppi risolubili di tipo 2: Un T-gruppo risolubile G si dice *di tipo 2* se G non è abeliano e non é periodico e il centralizzante $C_G(G')$ è periodico.

2.2.1 T-gruppi risolubili di tipo 1

Si prenda in esame la struttura di un T-gruppo risolubile di tipo 1. Sia G un T-gruppo risolubile di tipo 1. Dalla definizione $C = C_G(G')$ contiene un elemento aperiodico x e ciò comporta, avendo mostrato che C è un gruppo dedekindiano, che C è un gruppo abeliano. Sia $y \in C$ e $z \in G$. Poichè $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ sono normali in G, si ha $x^z = x^\epsilon$ e $y^z = y^\eta$ per opportuni interi ϵ e η. Se $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$ allora esiste un elemento $t = x^\delta = y^\nu$ con δ e ν interi non nulli. Si ha

$$x^{\epsilon\delta} = (x^z)^\delta = (x^\delta)^z = (y^\nu)^z = (y^z)^\nu = y^{\eta\nu} = (y^\nu)^\eta = x^{\delta\eta}.$$

Pertanto poiché x è aperiodico risulta $\epsilon = \eta$ e $y^z = y^\epsilon$ per ogni $y \in C$. Supponiamo ora che $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$; poiché il sottogruppo $\langle xy \rangle$ è normale in G esiste un intero θ tale che $(xy)^z = (xy)^\theta$. Perciò essendo C abeliano segue

$$x^\epsilon y^\eta = x^\theta y^\theta.$$

Per cui per quanto supposto, si ha $x^\epsilon = x^\theta$ e $y^\eta = y^\theta$. Analogamente a quanto visto prima segue $\epsilon = \theta$ e $y^z = y^\epsilon$ per ogni $y \in C$.

Ora si osservi che poichè G non è abeliano si può supporre che z non appartenga a C e quindi che non lo centralizzi. Pertanto $\epsilon \neq 1$; ora poiché x è aperiodico deve essere $\epsilon = -1$, per cui $y^z = y^{-1}$ per ogni $y \in C$. Quindi, per l'ultimo risultato del capitolo precedente su $PAutG$, l'indice di C in G è esattamente 2, da cui segue che $G = \langle z, C\rangle$ e che z^2 appartiene a C. Dall'azione di z su C risulta $z^4 = 1$, $[z, C] = C^2$ e analogamente $[z, C^2] = C^4$ da cui, poichè $[z, C] = [z, G]$ si ha $\langle z\rangle^G = \langle z, C^2\rangle$ e $\langle z\rangle^{\langle z, C^2\rangle} = \langle z, C^4\rangle$ e quindi per la proprietà T, $\langle z, C^2\rangle = \langle z, C^4\rangle$.

Infine intersecando con C si ottiene, per l'identità di Dedekind, $\langle z^2, C^2\rangle = \langle z^2, C^4\rangle$.

Il prossimo risultato assicura che le proprietà appena ottenute per un T-gruppo risolubile di tipo 1 sono caratteristiche di questi gruppi.

Teorema 2.2.1 *Siano G un gruppo, C un suo sottogruppo abeliano e z un elemento di G non appartenente a C tale che*

(i) $|G : C| = 2$

(ii) *per ogni* $c \in C$, $c^z = c^{-1}$

(iii) $\langle z^2, C^2\rangle = \langle z^2, C^4\rangle$

Allora G è un T-gruppo risolubile e C coincide con il centralizzante $C_G(G')$. In particolare se C ha un elemento di periodo infinito, G è T-gruppo risolubile di tipo 1. Viceversa ogni T-gruppo risolubile di tipo 1 ha questa struttura.

Dimostrazione − La discussione che precede l'enunciato assicura che un T-gruppo risolubile di tipo 1 rispecchia la struttura suddetta.

Reciprocamente si supponga che G verifichi le ipotesi enunciate. Si supponga $H \triangleleft K \triangleleft G$. Poichè ogni sottogruppo di C è normale in G si può suppporre che esiste un elemento $y \in H \setminus C$. Sia $y = zc$ con $c \in C$. Allora K, essendo normale in G, contiene $[C, zc] = [C, z] = C^2$ (dove l'ultima uguaglianza deriva dalla (ii)), ossia C^2 è un sottogruppo di K. Pertanto analogamente per H (normale in K), risulta che H contiene $[C^2, zc] = [C^2, z] = C^4$.

Segue che $H \geq \langle (zc)^2, C^4\rangle$, dove, per come agisce z sugli elementi di C, $(zc)^2 = z^2$; dalla (iii) segue allora che H contiene $\langle z^2, C^2\rangle$.

Ora dalla (i) risulta $G = \langle z, C\rangle$ e quindi $G' = [z, C]$. Si ricordi, d'altra parte, che per la (ii) $[C, z] = C^2$, per cui H, contenendo il derivato di G, è normale in G. Questo prova che G è un T-gruppo.

È chiaro che G sia risolubile in quanto estensione di C mediante il quoziente G/C. Inoltre, poichè G non è abeliano e ha un elemento non periodico, per la (i), C è il massimo sottogruppo normale e nilpotente di G, ossia, per il Teorema 2.1.3, $C = C_G(G')$.

Infine nelle ipotesi che C contenga un elemento di periodo infinito, G viene ad essere un T-gruppo risolubie di tipo 1.

□

Corollario 2.2.2 *Sia G un T-gruppo risolubile finitamente generato. Allora G è finito oppure abeliano.*

Dimostrazione − - Dapprima si osservi che in tali ipotesi, per il Teorema 2.1.6, il gruppo G è supersolubile, ciò comporta che G ha tutti i sottogruppi finitamente generati.

Si supponga che G non sia abeliano e che il sottogruppo di Fitting F di G non sia periodico, ossia che G sia un T-gruppo risolubile di tipo 1. Allora, dal teorema precedente, esiste un elemento z di G che agisce come linversione su F tale che $G = \langle z, F \rangle$, $z^2 \in F$ e $\langle z^2, F^2 \rangle = \langle z^2, F^4 \rangle$. Sia T il sottogruppo di torsione di F. Il fattore F/T, in quanto T-gruppo nilpotente senza torsione finitamente generato, è abeliano libero di rango finito. Daltra parte, essendo z^2 un elemento periodico di F e $\langle z^2, F^2 \rangle = \langle z^2, F^4 \rangle$, si ha $F^2T/T = F^4T/T$, pertanto $F = T$, il che è assurdo.

Questo prova che se G non è abeliano il sottogruppo F deve essere periodico. Ora poichè G è supersolubile, F viene ad essere finito e quindi tale è anche G, in quanto G è risolubile.

□

2.2.2 Costruzione di un T-gruppo risolubile di tipo 1

Sia $C_\infty = \{c_1, c_2, ...\}$ un 2-gruppo di Prüfer, dove ${c_i}^2 = c_{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ e $c_0 = 1$. Sia $C_i = \langle c_i \rangle$. Sia $D_i = \langle C_i, z \rangle$ dove $c^z = c^{-1}$, $\forall c \in C_i$ e $z^2 = 1$ se $i = 0$, mentre $z^2 = c_1$ per $i = 1, 2, \infty$. Sia A un gruppo abeliano 2-divisibile e se $i = 0, 1, 2$ un gruppo non identico. Sia $E_i = D_i \ltimes A$ dove $[C_i, A] = \{1\}$ e $a^z = a^{-1}$, $\forall a \in A$. Infine sia B un gruppo di esponente al più 2 e dimensione r (che può essere anche non finita).

Si consideri il gruppo $G := G(i, A, r)$ definito come segue

$$G = E_i \times B.$$

Si osservi che se $i = O, 1$, $D_i = \langle z \rangle$, ossia, D_0 e D_1 sono gruppi ciclici rispettivamente di ordine 2 e 4; mentre il gruppo $D_2 = \langle z, c_2 \rangle$ è un gruppo generato da due elementi di ordine 4 tali che $z^2 = {c_2}^2 = (zc_2)^2$, pertanto D_2 è isomorfo al gruppo dei quaternioni. Infine $D_\infty = \langle C_\infty, z \rangle$ è un gruppo infinito non abeliano.

Dalla definizione si ottiene $C_G(G') = A \times B \times C_i$. Sia $C = C_G(G')$. Allora $G = \langle z, C \rangle$ e naturalmente C è normale in G. Poichè $G/C \simeq \langle z \rangle / \langle z \rangle \cap C$, si ha in ogni caso $|G/C| = 2$. Inoltre $\forall c \in C$ si ha $c^z = c^{-1}$, infatti: il generico elemento c di C si può scrivere $c = abc_i$ con a, b, c_i opportuni elementi rispettivamente di A, B, C_i, così

$$c^z = a^z b^z {c_i}^z = a^{-1} b {c_i}^{-1} = a^{-1} b^{-1} {c_i}^{-1} = c^{-1}.$$

Infine $\langle z^2, C^2 \rangle = \langle z^2, C^4 \rangle$. Dal Teorema 2.1.1 allora G è un T-gruppo risolubile e se A non è periodico, è di tipo 1.

Si noti che affinchè, G non sia nilpotente è necessaria la richiesta che A non sia identico per $i = 0, 1, 2$.

Al fine di dimostrare il prossimo teorema che caratterizza i T-gruppi risolubili di tipo 1 si esibisce il seguente lemma che esprime una proprietà di alcuni gruppi abeliani.

Lemma 2.2.3 *Sia A un gruppo abeliano tale che $A^2 = A^4$. Allora A si spezza nel prodotto diretto di due sottogruppi B e C tali che $B^2 = B$ e $C^2 = \{1\}$. Inoltre se $A_1 = B_1 \times C_1$ e $A_2 = B_2 \times C_2$ sono due gruppi di questo tipo, allora $A_1 \simeq A_2$ se e solo se $B_1 \simeq B_2$ e $C_1 \simeq C_2$.*

Dimostrazione $-$ Sia $a \in A$; allora per le ipotesi esiste $b \in A^2$ tale che $a^2 = b^2$. Pertanto per ogni elemento a di A esiste un elemento b di A^2 tale che l'elemento ab^{-1} appartiene ad $A[2]$ (si ricordi che $A[2]$ è il sottogruppo di A costituito dagli elementi x di A tali che $x^2 = 1$). Segue che il generico elemento a di A si può scrivere come il prodotto di un opportuno elemento b di A^2 e dell' elemento ab^{-1} di $A[2]$.

Si consideri il sottogruppo $A[2] \cap A^2$: esso è un fattore diretto di $A[2]$. Sia C il suo complemento in $A[2]$ e $B = A^2$. Allora $A = B \times C$ e risulta $B^2 = B$ (per le ipotesi su A) e $C^2 = \{1\}$. L'ultima parte dell'asserto è ovvia.

$\square$

Come conseguenza di questo lemma si ottiene la seguente caratterizzazione che ritornerà utile nei capitoli successivi.

Teorema 2.2.4 *Sia G un gruppo*

(i) *Se $G = G(i, A, r)$ è un gruppo del tipo appena definito, allora G è un T-gruppo risolubile non nilpotente. In particolare, se A non è periodico, G è di tipo* 1.

(ii) *Ogni T-gruppo risolubile di tipo* 1 *è isomorfo ad un gruppo di tipo $G(i, A, r)$.*

(iii) *$G(i_1, A_1, r_1) \simeq G(i_2, A_2, r_2)$ se e solo se $i_1 = i_2$, $A_1 \simeq A_2$ ed $r_1 = r_2$. Pertanto la terna (i, A, r) determina completamente il gruppo $G(i, A, r)$ a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione $-$ La (i) è stata provata nella discussione antecedente il lemma. Restano perciò da dimostrare le ultime due affermazioni.

Sia G un T-gruppo risolubile di tipo 1 allora per il teorema 2.2.1 $G = \langle z, C \rangle$ dove $C = C_G(G')$ e risulta $\langle z^2, C^2 \rangle = \langle z^2, C^4 \rangle$.

Si supponga dapprima $z^2 = 1$. Allora $C^2 = C^4$ e quindi per il lemma appena enunciato risulta $C = A \times B$ dove $A^2 = A$ e $B^2 = \{1\}$. Ora per la proprietà T, $B \lhd G$ e per quanto supposto $\langle z \rangle \cap C = \{1\}$. Segue che $G = \langle z, A \rangle \times B \simeq G(0, A, r)$ dove r è la dimensione di B.

Ora si supponga $z^2 \neq 1$ e che z^2 appartenga ad un sottogruppo C_∞ di C, isomorfo a $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Perciò, poichè C_∞ è divisibile, si ha $C = C_\infty \times C^*$ e quindi $(C^*)^2 = (C^*)^4$. Applicando di nuovo il lemma 2.2.3 si ha $C^* = A \times B$ dove $A^2 = A$ e $B^2 = \{1\}$. Segue che $G = \langle z, C_\infty \times A \rangle \times B \simeq G(\infty, A, r)$ dove r è la dimensione di B.

D'altra parte, se z^2 non appartiene ad alcun sottogruppo di C di tipo C_{2^∞}, si può considerare il quoziente $C/\langle z^2 \rangle$. Analogamente a quanto fatto finora ripetendo il ragionamento, si ottiene $C/\langle z^2 \rangle = \bar{A}/\langle z^2 \rangle \times \bar{B}/\langle z^2 \rangle$ dove $(\bar{A}/\langle z^2 \rangle)^2 = \bar{A}/\langle z^2 \rangle$ e $(\bar{B}/\langle z^2 \rangle)^2 = \{1\}$.

Sia $A = \bar{A}^2$. Dal momento che $\bar{A} = \bar{A}^2\langle z^2\rangle$ e $z^4 = 1$ si ha $\bar{A}^2 = A^2$, ossia $A = A^2$. Pertanto per quanto supposto, z^2 non appartiene ad A e quindi $\bar{A} = A \times \langle z\rangle^2$. Si distinguano due casi:

(I) $\bar{B}$ ha esponente al più 2. Allora $\bar{B}$ si spezza su $\langle z^2\rangle$ e quindi $\bar{B} = B \times \langle z^2\rangle$, $C = A \times B \times C_1$ dove $C_1 = \langle z^2\rangle$ e $G = \langle z, A \times C\rangle \times B \simeq G(1, A, r)$ dove r è la dimensione di B.

(II) $\bar{B}$ non ha esponente 2. Allora esiste un elemento c_2 di $\bar{B}$ di periodo 4 tale che ${c_2}^2 = z^2$. Pertanto $\bar{B}$ si spezza su $C_2 = \langle c_2\rangle$ e quindi $\bar{B} = B \times C_2$, $C = A \times B \times C_2$ e $G = \langle z, A \times C_2\rangle \times B \simeq G(2, A, r)$ dove r la dimensione di B. Resta così provata la (ii).

Sia α un isomorfismo di $G_1 = G(i_1, A_1, r_1)$ in $G_2 = G(i_2, A_2, r_2)$. Si ha allora

$$G_k = \langle z_k, C(k)\rangle, \text{ dove } C(k) = C_{G_k}({G_k}') = C_{i_k} \times A_k \times B_k \text{ per } k = 1, 2$$

Allora α manda $C(1)$ in $C(2)$. Inoltre si ha ${z_1}^\alpha = z_2c_2$ con $c_2 \in C_{i_2}$, pertanto $({z_1}^2)^\alpha = (z_2c_2)^2 = {z_2}^2$. Sicchè $i_1 = i_2$, e distinguendo i casi per $i = 0, 1, 2, \infty$, si può concludere anche $A_1 \simeq A_2$ e $r_1 = r_2$.

□

2.2.3 T-gruppi risolubili periodici

Si inizi col considerare i due seguenti lemmi riguardanti p-gruppi (p numero primo) con la proprietà T. Si osservi che, per motivi di chiarezza di esposizione, si è scelto di separare in due lemmi il caso pari dal caso dispari.

Lemma 2.2.5 *Sia p un numero primo, $p > 2$.*

Sia G un p-gruppo iperabeliano con la proprietà T. Allora G è abeliano.

Dimostrazione − Si distinguano due casi:

(I) il gruppo G ha esponente finito p^n. Si inizi con l'osservare che ogni sottogruppo del derivato di G di esponente p è contenuto nel centro di G; infatti, dal momento che G' è abeliano, per la proprietà T i suoi sottogruppi sono normali in G, in particolare quelli di ordine p sono centrali. Pertanto l'$n+2$-esimo termine della seria centrale inferiore di G è identico e G è nilpotente e quindi dedekindiano. D'altra parte G è un p-gruppo con $p > 2$, per cui G deve essere abeliano;

(II) il gruppo G ha esponente infinito. Per quanto visto nel caso (I), si può supporre che G' abbia indice infinito. Ora, dal corollario 1.1.3, segue che $PAutG'$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo delle unità p-adiche. Pertanto, ricordando la struttura di tale gruppo, si deduce che il quoziente $G/C_G(G')$ è finito e il suo ordine divide $p-1$. Si può concludere quindi che $G = C_G(G')$ e ragionando analogamente al caso (I) l'asserto resta completamente dimostrato.

□

Lemma 2.2.6 *Sia G un 2-gruppo.*

G è un T-gruppo risolubile se e solo se G è dedekindiano oppure è isomorfo ad un gruppo di tipo $G(i, A, r)$ (definito nel paragrafo precedente).

Dimostrazione − *La condizione è chiaramente sufficiente.*

Inversamente, procedendo come nel lemma precedente, poichè ora G è un 2-gruppo, se il gruppo G ha esponente finito, si può solo asserire che G è un 2-gruppo di Dedekind. Si supponga allora che G abbia esponente infinito; in tal caso anche il centralizzante $C_G(G')$, avrà esponente infinito, ed essendo per la proprietà T un gruppo dedekindiano, sarà abeliano. Ora, dal corollario 1.1.3 segue che il quoziente G/C ha ordine 2 e quindi esiste $z \in G \setminus C$ tale che $G = \langle z, C \rangle$ e $c^z = c^{-1}$ $\forall c \in C$. Ripercorrendo i ragionamenti effettuati nei paragrafi precedenti, dall'azione di z su C, risulta $z^4 = 1$ e

$\langle z^2, C^2\rangle = \langle z^2, C^4\rangle$. *Pertanto, procedendo come nel teorema* 2.2.4 *(ii), si ha* $G \simeq G(i, A, r)$ *dove* $i = 0, 1, 2, \infty$, *r è un certo cardinale e A é un* 2*-gruppo abeliano divisibile, non identico se* $i = 0, 1, 2$.

□

Prima di passare al prossimo risultato si facciano le seguenti considerazioni:

detto G un gruppo, $\pi(G)$ denota l'insieme dei numeri primi p per i quali esiste almeno un elemento di G di periodo p.

Inoltre si osservi che in un T-gruppo vale il seguente enunciato.

Lemma 2.2.7 *Siano* G *un* T*-gruppo risolubile ed* $L = [G', G]$; *allora* L_2 *è un* 2*-gruppo abeliano divisibile.*

DIMOSTRAZIONE − *Chiaramente, essendo* G *metabeliano,* L *è un sottogruppo abeliano di* G. *E' possibile perciò condiderare il quoziente* G/L^2. *Dalla proprietà* T *segue che i sottogruppi del fattore* L/L^2 *sono normali in* G. *D'altra parte é noto che un gruppo di esponente* 2 *è prodotto diretto di gruppi di ordine* 2, *pertanto* L/L^2 *risulta essere un fattore centrale e* G/L_2 *nilpotente. Segue, dal lemma* 2.1.1, $\{1\} = [L/L^2, G/L^2] = L/L^2$, *il che implica* $L = L^2$ *e quindi* $L_2 = {L_2}^2$ *come volevasi dimostrare.*

□

Si è giunti ad un importante risultato, nel quale viene completamente descritta la struttura di Sylow di un T-gruppi risolubile periodico.

Teorema 2.2.8 *Sia* G *un* T*-gruppo risolubile periodico. Siano* L *il terzo termine della serie centrale inferiore di* G, $p \in \pi(L)$ *e* $C(p) = C_G(L_p)$. *Si possono ottenere i seguenti casi:*

(i) *Se* p *è dispari, allora* $p \notin \pi(G/L)$, *il quoziente* $G/C(p)$ *è un gruppo ciclico finito non identico il cui ordine divide* $p - 1$ *e si ha che un elemento di* G *o permuta con tutti gli elementi di* L_p *oppure non permuta con alcun elemento di* L_p *non identico.*

(ii) *Se* $p = 2$, *allora* $2 \in \pi(G/L)$, *il quoziente* $G/C(2)$ *ha ordine* 2 *e per ogni elemento* x *di* G *non appartenente a* $C(2)$ *si ha* $l^z = l^{-1}$ $\forall l \in L_2$.

Dimostrazione − Sia p un numero primo dispari appartenente a $\pi(L)$ e sia $K(p)/L$ la p-componente di G/L. Dal momento che il fattore $K(p)/L_{p'}$ è un p-gruppo risolubile con la proprietà T, dal lemma 2.2.5 segue che $K(p)/L_{p'}$ è abeliano. Pertanto l'interderivato $[K(p), L_p]$ è contenuto in $L_{p'}$ e quindi $K(p) \leq C(p)$. Ora $G/C(p)$, essendo un quoziente di $G/K(p)$, è un p'-gruppo, perciò, dalla struttura di $PAutL_p$, è ciclico di ordine divisore di $p-1$. Inoltre, poichè $L/L_{p'} \leq Z(C(p)/L_{p'})$, il quoziente $C(p)/L_{p'}$ è nilpotente; dall'ipotesi su p risulta $L_{p'} < L$ e quindi $C(p) < G$. Sia x un elemento di $G \setminus C(p)$, allora per quanto visto nel capitolo 1, x induce su L_p un automorfismo potenza $\bar{x}$ che associa a ciascun elemento a di L_p l'elemento a^ω dove ω è un'unità p-adica tale che $\omega \not\equiv 1(mod\ p)$, pertanto x non permuta con alcun elemento di L_p diverso dall'unità. Quindi l'applicazione $a \mapsto [a, x]$ è un automorfismo di $K(p)/L_{p'}$ e $[K(p), x]L_{p'} = K(p)$. D'altra parte $K(p)/L$ è incluso nel centro di G/L, pertanto $K(p) = L$ e quindi $p \notin \pi(G/L)$.

Si supponga ora che $2 \in \pi(L)$; allora, dal lemma precedente, L_2 è prodotto diretto di copie di $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ e quindi dalla struttura di $PAutL_2$ risulta che il quoziente $G/C(2)$ ha ordine 2. Infine poichè L è contenuto in $C(2)$, si ha $p \in \pi(G/L)$. E' chiaro poi che ogni elemento di $G \setminus C(2)$ induce in L_2 l'automorfismo inversione.

□

Capitolo 3

Gruppi in cui ogni sottogruppo subnormale infinito è normale

3.1 IT-gruppi

Un gruppo si dice un *IT-gruppo* o che *gode della proprietá IT* se ogni sottogruppo subnormale infinito è normale.

Ovviamente, nel caso finito, la proprietà è banalmente verificata, e priva di significato. La classe degli IT-gruppi, chiaramente, costituisce una generalizzazione della classe dei T-gruppi; tale classe è stata trattata nel caso risolubile da F. de Giovanni e S. Franciosi e successivamente da H, Heineken.

Nel corso di questo capitolo verrà esibito un esempio di IT-gruppo risolubile non avente la proprietà T. E' utile osservare che la classe degli IT-gruppi è ovviamente chiusa per quozienti e per sottogruppi subnormali (infiniti); in particolare passando al quoziente tramite un sottogruppo normale infinito, il gruppo che si ottiene è un T-gruppo.

Vale la pena menzionare una notevole proprietà che sussiste in questa classe di gruppi: il join di due sottogruppi subnormali (e quindi di un numero finito) è ancora subnormale. Infatti, se almeno uno dei due sottogruppi fosse infinito, si otterrebbe il caso più semplice di un sottogruppo generato da un sottogruppo normale e uno subnormale che chiaramente è ancora subnormale; in caso contrario, è di nuovo un fatto noto che il sottogruppo generato da due sottogruppi subnormali finiti è ancora subnormale (finito).(teorema 1.3.3. [14])

I prossimi due enunciati saranno di ausilio nel seguito.(per le dimostrazioni si rimanda a [19] (Parte 1, teorema 4.25 e teorema 3.13).

Lemma 3.1.1 *Sia G un gruppo. Se l'i-esimo termine della serie centrale inferiore $\gamma_{i+1}(G)$ di G è finito, per qualche intero positivo i, allora il quoziente $G/Z_{2i}(G)$ è finito.*

Lemma 3.1.2 *Sia G un gruppo e siano A un sottogruppo normale abeliano divisibile di G e H un sottogruppo di G tale che $[A,_n H] = \{1\}$. Se H/H' é periodico, allora $[A, H] = \{1\}$*

Richiamo. In un gruppo il sottogruppo generato dai sottogruppi ciclici subnormali prende il nome di *radicale di Baer* e si denota con $\rho_B(G)$. Un gruppo si dice *gruppo di Baer* se coincide con il suo radicale di *Baer*.

E' noto che un gruppo di Baer è localmente nilpotente; inoltre evidentemente un T-gruppo di Baer è nilpotente. Il prossimo risultato generalizza l'ultima affermazione nella classe degli IT-gruppi.

Proposizione 3.1.3 *Ogni IT-gruppo di Baer è nilpotente.*

Dimostrazione – Sia G un IT-gruppo di Baer. E' chiaro, per quanto premesso che si può supporre che G sia infinito. Si supponga dapprima che G contenga un elemento aperiodico x. Si ponga $X = \langle x \rangle$. Per le ipotesi su G, X è normale in G, per cui, fissato un intero $k > 2$, il quoziente G/X^{2^k} gode della proprietà T, perciò per quanto suddetto, è dedekindiano. D'altra parte, qualunque sia k, G/X^{2^k} contiene almeno l'elemento $x^{2^{k-3}}$ di periodo 8, da cui segue che G/X^{2^k} è abeliano. Pertanto

$$G' \leq \bigcap_{k>2} X^{2^k} = \{1\}$$

e quindi G è abeliano.

Si può quindi supporre che G sia periodico e non abeliano. Sia x un elemento non centrale di G; poichè $\langle x \rangle$ è un sottogruppo subnormale proprio di G risulta $x^G < G$. D'altra parte il $C_G(x^G)$ è anch'esso un sottogruppo proprio di G. Se x^G fosse finito, allora, essendo $G/C_G(x^G)$ finito, risulterebbe $C_G(x^G)$ infinito; pertanto almeno uno dei due sottogruppi x^G oppure $C_G(x^G)$ deve essere infinito. Occorre osservare che $\gamma_3(G)$ non contiene nessun sottogruppo proprio normale infinito di G, in quanto i quozienti di G mediante questo tipo di sottogruppi, essendo T-gruppi, hanno classe di nilptenza al più 2.

Nel caso in cui $\gamma_3(G)$ fosse finito, dal lemma 3.1.1 e dal fatto che, come già osservato, un gruppo di Baer è localmnte nilpotente, si avrebbe che $G/Z_4(G)$ sarebbe nilpotente e quindi anche G.

Quindi si supponga che $\gamma_3(G)$ sia infinito. Sia $L = \gamma_3(G)$ e sia x un elemento di LCome prima si ha x^L oppure $C_G(x^L)$ è infinito. Se x^L fosse infinito allora, per quanto provato, si avrebbe $L = \langle x \rangle^L$, contro il fatto che $\langle x \rangle$ è un sottogruppo subnormale proprio di G. Allora il centralizzante $C_G(x^L)$ è infinito, sicchè, analogamente a quanto appena visto, si ha $L = C_G(x^L)$, da cui x è centrale in L. Dall'arbitrarietà di x, segue che L è abeliano.

Dall'ipotesi di periodicità su G, L è prodotto diretto delle sue p-componenti primarie al variare di p in $\pi(L)$. Si noti che $\pi(L)$ deve essere finito altrimenti, per ogni numero primo $q \in \pi(L)$, si avrebbe che il sottogruppo $\mathrm{Dr}_{p\in\pi(L)\setminus\{q\}} L_p$ sarebbe un sottogruppo normale infinito proprio, il che sarebbe una contraddizione. Sia $\pi(L) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Per ogni $i \in \{1, 2, ..., n\}$, si ha L_{p_i} finito, oppure $L_{p_i} = L$. Poichè si è nelle ipotesi che L sia infinito, L è un p-gruppo per qualche $p \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Inoltre si osservi che L non ha sottogruppi propri di indice finito, in quanto se M fosse un sottogruppo proprio di indice finito di L, allora M sarebbe un sottogruppo proprio di L infinito e normale in G, per la proprietà IT. Si può quindi affermare che L è di tipo p^∞.

Ora, dal momento che, per ogni elemento g di G, il sottogruppo $\langle g \rangle$ è subnormale in G, esiste un intero positivo n tale che $[G,_n g] = \{1\}$ ed in particolare $[L,_n g] = \{1\}$. Applicando il lemma 3.1.2 si ha $[L, g] = \{1\}$, per ogni $g \in G$, che equivale a dire che $L = \gamma_3(G) \leq Z(G)$. Segue subito che G è nilpotente.

□

Ripercorrendo ragionamenti utilizzati nella dimostrazione dell'ultimo risultato si giunge a due interessanti conseguenze: *un IT-gruppo di Baer non abeliano è necessariamente periodico* e *un IT-gruppo di Baer periodico e privo di sottogruppi propri G-ivarianti infiniti è di tipo* p^∞ *per qualche primo* p. Il seguente teorema fornisce una completa descrizione degli IT-gruppi nilpotenti

Teorema 3.1.4 *Sia G un gruppo infinito. Allora i seguenti enunciati sono equivalenti:*

(i) *G è un IT-gruppo nilpotente.*

(ii) *G è dedekindiano oppure estensione centrale di un p-gruppo di Prüfer mediante un gruppo di Dedekind finito, per qualche primo p.*

In particolare se G è un IT-gruppo nilpotente allora il derivato di G è finito e $\gamma_4(G) = \{1\}$.

Dimostrazione – Sia vera la (i). Se G non è dedekindiano allora per quanto prima osservato G è periodico e pertanto localmente finito. E' evidente che, dalle ipotesi su G, ogni sottogruppo infinito di G è G-invariante. Discende subito, da un risultato di Černicov (rif. [19] Parte 1), che G contiene un sottogruppo normale di tipo p^∞ per qualche primo p, si dica A, tale che G/A è un gruppo di Dedekind finito. Applicando nuovamente il lemma 3.1.2, analogamente a quanto fatto nella dimostrazione precedente, essendo G nilpotente e periodico, si ha che A è un sottogruppo centrale in G. In particolare il quoziente $G/Z(G)$ è finito e quindi lo è anche G' ([Schur]).

Supponiamo ora che sia vera la (ii) e che G non sia di Dedekind. Sia A un sottoruppo centrale di G isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ per qualche primo p, tale che G/A sia un gruppo di Dedekind finito. Se H è un sottogruppo infinito di G, dal momento che

$$H/H \cap A \simeq AH/A \leq G/A,$$

si ha che $H \cap A$ è infinito e quindi $A = H \cap A$. Pertanto $A \leq H$, e perciò, essendo G/A un gruppo di Dedekind, H è normale in G. Segue, naturalmnte, che G è un IT-gruppo.

□

E' doveroso osservare che esistono IT-gruppi nilpotenti che non godono della proprietà T, come mostra il seguente esempio:

Siano A un gruppo di tipo p^∞, $B = \langle b \rangle$ un gruppo ciclico di ordine primo p e a_1 un elemento di A di periodo p. Si consideri il prodotto diretto $C = A \times B$ e l'automorfismo α di C definito dalle relazioni $b^\alpha = a_1 b$ e $a^\alpha = a$, $\forall a \in A$. Si osservi, ora, che il p-gruppo $G = \langle \alpha \rangle \ltimes C$ è un IT-gruppo nilpotente, in quanto A è un sottogruppo centrale in G e G/A è un p-gruppo di ordine p^2, ossia è abeliano; tuttavia G non è un T-gruppo, in quanto B non è normale in G.

Prima di procedere nella prossima osservazione si ricordi la seguente definizione:

un gruppo G si dice *subsolubile* se ha una serie ascendente a fattori abeliani i cui termini sono sottgruppi subnormali in G.

Ora si noti che, come accade nei T-gruppi subsolubili, la lunghezzza derivata di un IT-gruppo è limitata ma, come è ragionevole che sia, si riesce ad ottenere un risultato, seppur lievemente, più debole. Infatti sussiste quanto segue:

Corollario 3.1.5 *Sia G un IT-gruppo subsolubile infinito. Allora G è risolubile e $G^{(3)} = \{1\}$.*

Dimostrazione – Dapprima si osservi che, dal momento che G è iperabeliano infinito, il suo radicale di Baer deve essere infinito e quindi, seguendo il ragionamento fatto all'inizio della dimostrazione del teorema precedente, si ha che G contiene un sottogruppo normale abeliano infinito, diciamolo A. Allora il quoziente G/A è un T-gruppo subsolubile e quindi $G'' \leq A$ e $G^{(3)} = \{1\}$.

□

Discende subito:

Corollario 3.1.6 *Sia G un IT-gruppo infinito; allora $G^{(3)}$ è l'ultimo termine della serie derivata di G.*

Dimostrazione – Il gruppo $G/G^{(4)}$ è ovviamente un IT-gruppo risolubile, pertanto $G^{(3)} = G^{(4)}$ e la serie derivata risulta stazionaria.

□

Il prossimo esempio mostra che quanto appena provato è quanto di più era possibile ottenere. Infatti, ora, esibiremo un IT-gruppo risolubile non metabeliano.

Sia p un numero primo, $p > 2$. Siano A un gruppo di tipo p^∞, $B = \langle b \rangle$ un gruppo di ordine p, $C = A \times B$ e a_1 un elemento di A di periodo p. Si considerino i due automorfismi di C, ϕ e ψ, definiti dalle relazioni

$$b^\phi = a_1 b \text{ e } a^\phi = a, \forall a \in A$$

$$b^\psi = b^{-1} \text{ e } a^\psi = a, \forall a \in A.$$

Allora si ha $\phi^p = \psi^2 = 1$ e $\phi^\psi = \phi^{-1}$. Il prodotto semidiretto $\langle \phi, \psi \rangle \ltimes C$ è naturalmente risolubile, inoltre, tale gruppo ha la proprietà IT, essendo G/A un T-gruppo. Pertanto G è un IT-gruppo risolubile ma non è metabeliano, infatti $[b, \psi] = b^{-2}$ e $[\phi, \psi] = \phi^{-2}$, da cui segue $[b^{-1}, \phi^{-1}] = a_1^{-1}$, sicchè G' non è abeliano.

Intanto sussistono le seguenti ulteriori proprietà, relative ai termini non banali della serie derivata di un IT-gruppo subsolubile.

Teorema 3.1.7 *Sia G un IT-gruppo subsolubile infinito allora G' è nilpotente e G'' è ciclico di ordine potenza di primo.*

Dimostrazione – Sia F il sottogruppo di Fitting di G. Poichè G è risolubile infinito, F deve essere infinito. Pertanto il quoziente G/F è un T-gruppo risolubile, il che implica che G'' è contenuto in F. Ripetendo lo stesso ragionamento per ogni sottogruppo normale infinito di G, si ha che G'' è privo di sottogruppi G-invarianti infiniti.

Si osservi in primo luogo che, essendo, ovviamente, un IT-gruppo di Baer, F è nilpotente e quindi è tale anche G''.

Si supponga per assurdo che G'' non sia periodico, sicchè F sarebbe abeliano, in accordo con alcune osservazioni fatte in precedenza. Pertanto ogni sottogruppo G'' sarebbe G-invariante e di conseguenza finito. In particolare G'' sarebbe periodico contro quanto supposto. Segue che G'' è periodico.

Si mostrerà che G'' è addirittura finito: infatti se per assurdo fosse infinito, per quanto osservato in precedenza, G'' sarebbe di tipo p^∞, per qualche primo p. In tal caso il quoziente $G/C_G(G'')$ sarebbe abeliano e quindi $\gamma_3(G') = [G'', G'] = \{1\}$. Allora G', essendo un IT-gruppo nilpotente, per il teorema 3.1.4, avrebbe derivato finito, il che è una contraddizione. Resta così provato che G'' è finito; cosicchè dal lemma 3.1.1 il quoziente $G'/Z_2(G')$ è finito. D'altra parte quest'ultimo è il derivato del gruppo $G/Z_2(G')$, pertanto, riapplicando il lemma 3.1.1, si ottiene che $N/Z_2(G') = Z_2(G)/Z_2(G'))$ ha indice finito in $G/Z_2(G')$. Perciò N è infinito e G/N è un T-gruppo risolubile finito e quindi supersolubile. Allora $G'N/N \simeq G'/G' \cap N$ è nilpotente; inoltre $G' \cap N$ è contenuto in $Z_4(G')$ e quindi G' è nilpotente.

Infine $G' \leq F$ e $G'' \leq F'$. Ora la struttura di F è completamente descritta dal teorema 3.1.4: se F è dedekindiano allora $|G''| \leq 2$, altrimenti, per precedenti osservazioni, F contiene un sottogruppo $A \simeq Z_{p\infty}$ per qualche primo p, e quindi, dovendo essere G'' propriamente incluso in A, G'' è un p-gruppo ciclico finito.

□

Allo scopo di esibire una caratterizzazione degli IT-gruppi risolubili non periodici, iniziamo col capire cosa succede se in un IT-gruppo risolubile il cui sottogruppo di *Fitting* non è periodico.

Lemma 3.1.8 *Sia G un IT-gruppo risolubile. Se il sottogruppo di Fitting $F(G)$ non è periodico allora G è un $T-$ gruppo.*

Dimostrazione – Basta provare che i sottogruppi subnormali finiti sono normali in G. Sia x un elemento non periodico di F e sia H un sottogruppo subnormale finito di G. Naturalmente $H\langle x\rangle$ è subnormale in G e infinito e quindi normale. E' chiaro che $H \cap \langle x \rangle = \{1\}$ e quindi H è il massimo sottogruppo periodico di $H\langle x \rangle$. Pertanto $H\ ch\ H\langle x \rangle \lhd G$ da cui segue che H è normale in G.

□

Dall'ultimo risultato, segue, in particolare, che il sottogruppo di Fitting di un IT-gruppo risolubile che non gode della proprieta T deve essere periodico.

Teorema 3.1.9 *Sia G un gruppo risolubile infinito periodico. G è un IT-gruppo se e solo se G è un T-gruppo oppure è estensione di un p-gruppo di Prüfer mediante un T-gruppo finito.*

Dimostrazione − Chiaramente la condizione è sufficiente. Sia G un IT-gruppo. Dapprima si supopnga che lo zoccolo S del sottogruppo di Fitting F di G sia infinito. Sia H un sottogruppo subnormale finito di G e sia $H_0 = H \cap S$. Si ha $S/H_0 = \mathrm{Dr}_{i \in I}\, S_i/H_0$, con ogni S_i/H_0 di ordine primo e I un insieme infinito; se $V_i/H_0 = \mathrm{Dr}_{i \in I}\, S_i/H_0$, i sottogruppi V_i e V_iH sono normali in G ($\forall i \in I$). Allora $H_0 = \bigcap_{i \in I} V_i$ è normale in G, quindi si può assumere $H_0 = \{1\}$ e $HS = H \ltimes S$ e conseguentemente $H = \bigcap_{i \in I} HV_i$ è normale in G; in tal caso G è un T-gruppo.

Ora si supponga che S sia finito. Dal momento che F è infinito, il massimo sottogruppo normale abeliano divisibile di F non è banale. Si distinguono due casi. Si assuma, in primo luogo, che D non sia un gruppo di Prüfer, e sia H un sottogruppo subnormale finito di G; se $H_0 = H \cap D$, D/H_0 è un gruppo divisibile che non è un gruppo di Prüfer, allora H_0 è intersezione di sottogruppi subnormali infiniti e quindi è normale. Denotando con s il difetto di H in G, si ha $[D,_s H] \leq D \cap H = H_0$ e applicando il lemma 3.1.2 al quoziente G/H_0, si ha che $[D, H] \leq D \cap H$ e quindi H è normale in HD, e come prima H è normale in G. Sicchè anche in questo caso G è un T-gruppo. Si supponga infine che D sia di tipo p^∞ per qualche primo p; poichè lo zoccolo è finito, D ha indice finito in F. D'altra parte il quoziente $G/C_G(F)$ è finito [rif [19]Part 1, pag 85]; poichè $C_G(F) \leq F$, segue che il T-gruppo G/D è finito.

□

Sebbene il caso non periodico esula dagli studi di questa tesi, è interessante osservare che gli IT-gruppi risolubili sono stati completamente descritti anche in tali ipotesi (S. Franciosi F. de Giovanni [8]), come segue:

Teorema 3.1.10 *Sia G un gruppo risolubile infinito. Se G non è periodico allora G è un IT-gruppo se e solo se G è T-gruppo oppure il sottogruppo di Fitting è periodico e G' è di tipo p^∞ per qualche primo p e ha indice finito nel massimo sottogruppo di torsione*

A tal punto, per sottolineare la rilevanza del precedente risultato, esibiamo un esempio di gruppo che proverà che esistono IT-gruppi risolubili non periodici che non sono T-gruppi.

Sia p un numero primo, A un gruppo di tipo p^∞, $B = \langle b \rangle$ un gruppo ciclico di ordine p, $C = A \times B$, a_1 un elemento di A di periodo p, α un automorfismo di C definito come segue

$$\alpha(b) = a_1 b \text{ e } \alpha(a) = a^{p^2+1} \ \forall a \in A$$

Sia G il prodotto semidiretto $\langle \alpha \rangle \ltimes C$. Allora C concide col Fitting di G e risulta $G' = A$; pertanto, poichè il massimo sottogruppo di torsione coincide anch' esso con C, per il teorema appena enunciato, G ha la proprietà IT. Tuttavia B è un sottogruppo subnormale non normale, perciò G non è un T-gruppo.

Come stabilisce il corollario 2.2.2 un T-gruppo risolubile finitamente generato è finito oppure abeliano.

Si osservi che tale risultato non può essere esteso al caso di T-gruppi *risolubili-per-finiti* finitamente generati basta infatti considerare il prodotto diretto tra un gruppo semplice finito non abeliano e un gruppo ciclico infinito.

Tuttavia sussiste il seguente risultato:

Teorema 3.1.11 *Sia G un IT-gruppo risolubile-per-finito finitamente generato. Allora il quoziente $G/Z(G)$ è finito. Inoltre se G è risolubile allora G è finito oppure abeliano.*

DIMOSTRAZIONE − Si supponga dapprima che G sia risolubile. Sicchè G' non può essere di tipo p^∞: pertanto, il gruppo G è finito oppure abeliano (teorema 1.11 [8]).

Sia ora G un IT-gruppo risolubile-per-finito finitamente generato e sia K un sottogruppo normale risolubile di G di indice finito. Allora, per quanto osservato nella prima parte della dimostrazione ed essendo K un IT-gruppo risolubile finitamente generato infinito, K risulta essere abeliano.

Dal momento che K, per una nota caratterizzazione sui gruppi abeliani e finitamente generati, può essere scelto senza torsione, K ha tutti is sottogruppi normali in G e quindi il quoaziente $G/C_G(K)$ è abeliano. Segue che il sottogruppo derivato commuta con K e quindi $K \cap G' \leq Z(G')$. Il quoziente $G'/K \cap G'$ è finito in quanto isomorfo ad un sottogruppo di G/K per cui tale è anche $G'/Z(G')$. Pertanto anche G'' è finito (Schur); poich G/G'' è un IT-gruppo risolubile finitamente generato infinito, G/G'' è abeliano, ossia $G' = G''$.

Allora G' finito, per cui anche $G/Z(G)$ è finito.

$\square$

Capitolo 4

Gruppi in cui ogni sottogruppo subnormale finito è normale

4.1 FT-gruppi

Un'altra possibile generalizzazione della classe dei T-gruppi nasce dalla dualizzazione della proprietà IT esposta nel capitolo precedente. Un gruppo si dice un *FT-gruppo* o che *gode della proprietà FT* se ogni suo sottogruppo subnormale finito è normale.

Escludendo il caso finito, che ovviamente si ridurrebbe allo studio della classe dei T-gruppi finiti, si prenderanno in considerazione FT-gruppi risolubili infiniti. Più in generale si farà riferimento a gruppi *subsolubili* infiniti: un gruppo G si dice *subsolubile* se ha una serie ascendente di sottorguppi subnormali a fattori abeliani.

Si osservi che un gruppo senza torsione è banalmente un FT-gruppo, ci soffermeremo pertanto nello studio di gruppi periodici.

Chiaramente la proprietà FT si conserva per sottogruppi subnormali. A differenza della classe dei T-gruppi, la nuova classe in questione non è chiusa per immagini omomorfe, verrà esibito nel seguito un controesempio; in particolare il quoziente di un FT-gruppo mediante un sottogruppo normale finito è ancora un FT-gruppo.

Ai fini dello studio di questo tipo di gruppi introduciamo una classe di gruppi ausiliaria, definita al seguente modo:

un gruppo G si dice un *AT-gruppo* o che *gode della proprietà AT* se ogni sottogruppo abeliano subnormale di G è normale.

Lemma 4.1.1 *Un gruppo G è un AT-gruppo se e solo se G agisce come un gruppo di automorfismi potenza sul suo radicale di Baer.*

DIMOSTRAZIONE – Sia B il radicale di Baer di G. Se G è un AT-gruppo, segue immediatamente che G agisce come un gruppo di automorfismi potenza su B, dal momento che ogni sottogruppo ciclico di B è subnormale in G.

Reciprocamente si supponga che ogni elemento di G induce un automorfismo potenza su B. Siccome tutti i sottogruppi subnormali abeliani di G sono contenuti in B, tali sottogruppi sono normali in G e quindi G ha la proprietà AT. □

Teorema 4.1.2 *Sia G un AT-gruppo subsolubile. Allora G è metabeliano.*

DIMOSTRAZIONE – Sia B il radicale di Baer di G. Poichè il gruppo G è subsolubile, B contiene il suo centralizzante $C_G(B)$. D'altra parte, il quoziente $G/C_G(B)$, per il lemma precedente, è isomorfo ad un gruppo di automorfismi potenza di B e quindi è abeliano. Pertanto il sottogruppo derivato di G è contenuto nel centralizzante di B, $C_G(B) = Z(B)$ e quindi G è metabeliano. □

Prima di esporre il prossimo lemma, si ricordi un risultato generale: sia G un gruppo e H un sottogruppo normale di G, se il quoziente G/H è nilpotente allora il centralizzante $C_G(H)$ di H in G è nilpotente e normale in G

Lemma 4.1.3 *Sia G un AT-gruppo. Allora il centralizzante $C = C_G(G')$ è il sottogruppo di Fitting di G. Inoltre sia $L = [G, G']$; si ha $C = C_G(L)$ e C è un gruppo dedekindiano.*

DIMOSTRAZIONE – Si osservi dapprima che, il sottogruppo di Fitting di G contiene il centralizzante $C_G(G')$ del sottogruppo derivato di G. Ora sia H un sottogruppo normale nilpotente di G e sia $x \in H$. Allora il sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$, in quanto subnormale in G e abeliano, risulta normale in G e per l'abelianità dell'automorfo di un gruppo ciclico, il sottogruppo derivato G' è contenuto nel centralizzante del sottogruppo $\langle x \rangle$. Pertanto, per l'arbitrarietà di x, C contiene H. Segue che C è il massimo sottogruppo normale nilpotente di G. Inoltre, di nuovo per quanto osservato prima del lemma, il centralizzante di $L = [G, G']$ è nipotente e normale; allora il centralizzante $C_G(L)$ è contenuto in C e quindi i due sottogruppi coincidono. □

Corollario 4.1.4 *Sia G un AT-gruppo subsolubile. Allora G è iperciclico e quindi anche localmente supersolubile.*

Dimostrazione – Poichè, per il teorema 4.1.2, G è metabeliano, il sottogruppo derivato G' di G è iperciclicamente immerso in G, e quindi G è iperciclico. Infine, è ben noto che un gruppo iperciclico è localmente supersolubile □

Si noti che, secondo quanto asserisce il precedente corollario, nel caso finitamente generato un AT-gruppo subsolubile con il radicale di Baer periodico è finito.

Il prossimo risultato costituisce un criterio per riconoscere un T-gruppo, considerando le immagini omomorfe di un gruppo.

Teorema 4.1.5 *Sia G un gruppo subsolubile. Allora G è un T-gruppo se e solo se ogni quoziente di G ha la proprietà AT.*

Dimostrazione – La condizione è ovviamente necessaria poichè la proprietà T è ereditata dalle immagini omomorfe. Reciprocamente sia H un sottogruppo subnormale di G. Poichè G è un AT-gruppo subsolubile, il sottogruppo derivato H' di H è contenuto nel sottogruppo di Baer B di G. Quindi H' è normale in G. Ora consideriamo il quoziente G/H'; dalle ipotesi il fattore H/H' è normale in G/H' e il risultato risulta provato. □

Si osservi, esplicitamente, che naturalmente la proprietà AT non si conserva per quozienti, in caso contrario per quanto appena provato ogni AT-gruppo sarebbe un T-gruppo.

Lemma 4.1.6 *Sia G un FT-gruppo e sia H un sottogruppo subnormale periodico di G con sottogruppo derivato finito. Allora H è normale in G.*

Dimostrazione – Sia $x \in H$. Dal momento che è H un sottogruppo di G il cui sottogruppo derivato è finito, il sottogruppo $\langle x, H' \rangle$ è finito e quindi normale in G. Quimdi, come sottogruppo generato da sottogruppi normali in G, H è normale in G. □

Il lemma appena enunciato ha la seguente immediaata conseguenza:

Corollario 4.1.7 *Sia G un FT-gruppo. Se il sottogruppo di Baer B di G è periodico allora G è un AT-gruppo.*

Congiuntamente al corollario 4.1.4, il precedente corollario conduce alla seguente conclusione:

Teorema 4.1.8 *Sia G un FT-gruppo subsolubile. Se il sottogruppo di Baer B di G è periodico allora G è metabeliano.*

Dal momento che, nel caso periodico, è stato possibile estendere i primi risultati relativi ai T-gruppi risolubili, il nostro studio si concentrerà, in particolare, su p-gruppi subsolubili aventi la proprietà FT.

Il prossimo lemma costituisce una caratterizzazione di questo tipo di gruppi, che ritornerà utile più avanti.

Lemma 4.1.9 *Un p-gruppo è un FT-gruppo se e solo se è un AT-gruppo.*

DIMOSTRAZIONE – Un verso della dimostrazione deriva subito dal corollario 4.1.7.

Ora supponiamo che G sia un AT-gruppo e sia H un sottogruppo finito subnormale in G; allora H è nilpotente. Quindi ogni sottogruppo abeliano di H è normale in G. In particolare i sottogruppi ciclici di H sono normali in G e quindi H è normale in G.

□

Il seguente esempio mostra che esiste un FT-gruppo risolubile periodico che non gode della proprietà T.

Si consideri il prodotto diretto $C = A \times B$ dove A è un gruppo di tipo 2^∞ e B è un gruppo isomorfo al gruppo additivo degli interi modulo 4. Sia x un automorfismo di C definito da

$$c^x = c^{-1} \textit{ per ogni } c \in C.$$

Pertanto il prodotto semidiretto $G = \langle x \rangle \ltimes C$ è un FT-gruppo risolubile periodico che, avendo un quoziente isomorfo a D_8, non è un T-gruppo.

Teorema 4.1.10 *Sia p un numero primo dispari. Sia G un p-gruppo subsolubile con la proprietà FT. Allora G è abeliano.*

Dimostrazione $-$ Essendo un p-gruppo, il gruppo G ha la proprietà AT. E' chiaro che tutti i sottogruppi del sottogruppo di Fitting di G sono normali in G. In particolare F è abeliano, sicchè $F = C_G(F)$ e il quoziente G/F è un gruppo di automorfismi potenza di F.

Si distinguono due casi.

Se F ha esponente infinito allora l'ordine del quoziente G/F divide $p-1$ e $G = F$. In tal caso l'asserto risulta provato.

Se F ha esponente finito allora il quoziente G/F è finito e G risulta nilpotente, quindi abeliano.

□

Il prossimo risultato descrive i 2-gruppi aventi la proprietà FT che non rientrano nella classe dei T-gruppi e che quindi vanno trattati in maniera differnte, coerentemente con la loro struttura.

Teorema 4.1.11 *Sia G un 2-gruppo subsolubile e sia F il sottogruppo di Fitting di G. Allora G è un FT-gruppo non avente la proprietà T se e solo se G soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) *F è un sottogruppo abeliano non divisibile di G con esponente infinito e di indice 2 in G.*

(ii) *G contiene un elemento z tale che $a^z = a^{-1}$ per ogni $a \in F$*

(iii) *$F = D \times R$ con D un gruppo divisibile e R un gruppo ridotto con esponente almeno 4 tale che se R è prodotto diretto di un gruppo ciclico $\langle w \rangle$ di ordine 4 e di un gruppo E con esponente finito al più 2 allora $\langle w \rangle \cap \langle z \rangle = \{1\}$.*

Dimostrazione $-$ Si supponga dapprima che G soddisfi le condizioni dell'asserto. Si osservi che poichè G è un p-gruppo, basterà provare che G è un AT-gruppo. Dal momento che il sottogruppo di Fitting F ha indice 2 in G, il sottogruppo di Baer di G conincide con F e quindi ogni sottogruuppo subnormale abeliano di G è normale.

Ora verifichiamo che G non ha la proprietà T. Si assuma per assurdo che G sia un T-gruppo. In tal caso G risulta isomorfo ad un gruppo di tipo $G(i, A, r)$ (vedi definizione paragrafo 2.2.2).

Esaminiamo caso per caso

(i=0) $G = G(0, A, r) = (\langle z \rangle \ltimes A) \times B$ dove A è un gruppo non identico abeliano tale che $A = A^2$, B è un gruppo di esponente finito al più 2 e dimensione r e $z^2 = 1$. Pertanto $F = A \times B$ ma questa è una contraddizione in quanto l'esponente di B è al più 2.

Nel seguito A e B sono definiti come nel caso precedente.

(i=1) $G = G(1, A, r) = (\langle z\rangle \ltimes A) \times B$ dove $z^2 = c_1$. Ora si ha $F = \langle c_1\rangle \times A \times B$ dove $\langle c_1\rangle$ ha ordine 2. Nuovamente si è giunti ad una contraddizione relativamente all'esponente del prodotto $B \times \langle c_1\rangle$.

(i=2) $G = G(2, A, r) = (H \ltimes A) \times B$ dove $H = \langle c_2, z\rangle$ dove $c_2^x = c_2^{-1}$ e $z^2 = 1$. Pertanto $F = \langle c_2\rangle \times A \times B$ e quindi in questo caso si ha $R = B \times \langle c_2\rangle$ ma z^2 appartiene a $\langle c_2\rangle$ che è una contraddizione. Infine

(i=∞) $G = G(\infty, A, r) = \langle C_\infty, z\rangle \times B$ dove $z^2 = c_1$. Quindi $F = C_\infty \times A \times B$ e $R = B$. L'ultima contraddizione prova che G non è un T-gruppo.

Inversamente si noti che se F avesse esponente finito G sarebbe nilpotente (G. Baumslag [19] Parte II); pertanto questa contraddizione mostra che F deve avere esponente infinito e per un ben noto terorema di struttura dei gruppi dedekindiani F risulta essere abeliano. Sicchè $F = C_G(F)$ e il quoziente G/F ha ordine 2 (vedi capitolo 1). Tuttavia esiste un elemento z di G che non appartiene a F tale che $a^z = a^{-1}$ per ogni $a \in F$.

Allora per un ben noto teorema dei gruppi abeliani F risulta essere un prodotto diretto di un gruppo divisibile D e un gruppo ridotto R. Ora si supponga per assurdo che l'esponente di R sia al più 3, allora non può essere che 2. Segue che F^2 è divisibile, $F^2 = F^4$ e G sarebbe un T-gruppo (vedi teorema 2.2.1) e questa contraddizione prova il teorema.

$\square$

Bibliografia

[1] E. Best – O. Taussky. “A class of groups ”, *Proc. Roy. Irish. Aead Sect. A* 47 (1942), 55–62.

[2] J.C. Beidleman – M.R. Dixon – D.J. Robinson: “The generalized Wielandt subgroup of a group”, *Can. J. Math.* 47, (1995), 246–261

[3] C. Casolo: “Subgroups of finite index in generalized T-groups”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 80 (1988), 265–277

[4] S. N. Černikov: “Groups with given properties of system of infinite subgroups”, *Ukrainian Math J.* 19 (1967), 715–731

[5] C. D. H. Cooper : “Power automorphisms of a group ”, *Math Z.* 107 (1968), 335–356.

[6] M. Curzio – S. Franciosi – F. de Giovanni : “On automorphisms fixing infinite subgroups of groups”, *Arch. Math. (Basel)* 54 (1990), 4–13.

[7] G. Cutolo : “On a class of generalized of T-groups”, *Ricerche Mat.* , 42 (1993), 331–351.

[8] S.Franciosi – F. de Giovanni: “Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal”, *J. Algebra* 96 (1985), 566–580.

[9] S. Franciosi – F. de Giovanni: “Groups with finite quotients have a transitive normality relation”, *Bollettino U. M. I.* (7) 6-B (1992), 329–350.

[10] L. Fuchs: “Infinite Abelian Groups”, *Academic Press*, New York (1973).

[11] H. Heineken: “Groups with restrictions on their infinite subnormal subgroups”, *Proc. Edimburg Math Soc.* 31 (1988), 231-241.

[12] W. Gaschütz: “Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist”, *J. Reine Angew Math.* 198 (1957), 87–92.

[13] J.C. Lennox – S.E. Stonehewer: "Subnormal Subgroups of Groups", *Oxford University Press* Oxford (1986).

[14] I.D. Macdonald: "The Theory of Groups", *Oxford - At the Clarendom Press* Oxford (1968).

[15] E.A. Ormerod: "A note on the Wielandt subgroup of a metabelian p-group", *Comm. Algebra* 27(2), (1999), 621–627.

[16] D.J.S. Robinson: "Groups in which normality is a transitive relation", *Proc. Cambridge Philos.* 60 (1964), 21–38.

[17] D.J.S. Robinson: "Groups whose homomorphic images have a transitive normality relation", *Trans. Amer. Math. Soc.* 176 (1973), 181–213.

[18] D.J.S. Robinson: "On the theory of subnormal subgroups", *Math. Z.* 89 (1965), 30–51.

[19] D.J.S. Robinson: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups", *Springer*, Berlin (1972).

[20] D.J.S. Robinson: "A Course in the Theory of Groups", *Springer*, Berlin (1982).

[21] G. Zacher: "Caratterizzazione dei T-gruppi finiti risolubil", *Ricerche Mat* 1 (1952), 287–294.

[22] G. Zappa: "Sui gruppi di Hirsch supersolubili I", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 12 (1941), 1–11.