

Università degli Studi di Napoli FEDERICO II

Dottorato di ricerca in Scienze Matematiche

A.A. 2008–2009

DISUGUAGLIANZE DI
HARDY-SOBOLEV
CON RESTO

Tesi di Dottorato

di

Adamaria Perrotta

TUTORE

Ch.mo Prof. A. Alvino

COORDINATORE

Ch.mo Prof. F. de Giovanni

Dipartimento di Matematica R. Caccioppoli

Università degli Studi di Napoli Federico II

Dottorato in Scienze Matematiche XX Ciclo

Indice

INTRODUZIONE	11
I PRELIMINARI	12
1.1 Disuguaglianza isoperimetrica e formula di Coarea	12
1.2 Simmetrizzazione secondo Schwarz	15
1.2.1 Riordinamenti e proprietà	15
II DISUGUAGLIANZE DI SOBOLEV ED HARDY-SOBOLEV CON RESTO	24
2.1 Spazi di Lorentz	25
2.2 Disuguaglianze di Sobolev e Sobolev con resto	28
2.2.1 La disuguaglianza di Sobolev	28
2.2.2 Disuguaglianze di Sobolev con resto	30
2.3 Disuguaglianze di Hardy e di Hardy con resto	32
III MIGLIORI COSTANTI IN DISUGUAGLIANZE DI HARDY CON RESTO	37
3.1 Disuguaglianza di Hardy con resto in spazi di Lorentz	38
3.2 Caso della disuguaglianza di Hardy con resto in uno spazio L^p	44
3.2.1 Determinazione della migliore costante	45

3.2.2	Alcune considerazioni applicative sugli schemi numerici . . .	50
IV	DISUGUAGLIANZA TIPO EGNELL	53
4.1	Una disuguaglianza di Egnell generalizzata	55
V	DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV CON RESTO PER FUN-	
	ZIONI CHE SI ANNULLANO SOLO SU UNA PARTE DEL	
	BORDO	61
5.1	α - simmetrizzazione	64
5.1.1	Definizione e disuguaglianza isoperimetrica	64
5.1.2	Esempi di calcolo della costante isoperimetrica relativa . . .	68
5.1.3	Risultati di confronto per problemi ellittici di tipo misto . .	69
5.2	Disuguaglianza di immersione nello spazio V^p . Questioni relative alla migliore costante.	74
5.3	Disuguaglianza con resto	79

Introduzione

La disuguaglianza di Sobolev è data da

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \geq S(N, p) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}, \quad (0.0.1)$$

dove u è una funzione che svanisce all'infinito, dotata di derivate nel senso delle distribuzioni, con gradiente in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Di essa sono noti il valore della migliore costante

$$S(N, p) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{N}} N^{\frac{1}{p}} (N-p)^{\frac{p-1}{p}} (p-1)^{\frac{1}{N} - \frac{p-1}{p}} p^{-\frac{1}{N}} \left[\frac{\Gamma(\frac{N}{p}) \Gamma(N - \frac{N}{p})}{\Gamma(N) \Gamma(\frac{N}{2})} \right]^{\frac{1}{N}},$$

e l'espressione esplicita delle funzioni estremali

$$u(x) = \frac{h}{\left[1 + k|x|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p}}}, \quad h, k > 0,$$

funzioni cioè in corrispondenza delle quali *tale costante viene raggiunta* (cfr. [14], [18] e [72]). Nel caso limite $p = 1$ la (0.0.1) assume la forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx \geq \pi^{\frac{1}{2}} N \left[\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx. \quad (0.0.2)$$

la miglior costante nella (0.0.2) è il limite per $p \rightarrow 1$ di $S(N, p)$ ed è la costante isoperimetrica, mentre le funzioni estremali sono le funzioni caratteristiche delle sfere (cfr. [39] e [40]).

Se al posto di \mathbb{R}^N si considera un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ed $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la disuguaglianza di Sobolev continua ad essere valida, la miglior costante è ancora $S(N, p)$ tuttavia essa *non viene raggiunta*.

Per questa motivazione numerosi autori si sono chiesti se fosse possibile inserire a secondo membro della (0.0.1) un termine correttivo, costituito da un'opportuna norma della funzione u : viene così introdotta una nuova famiglia di disuguaglianze

dette *disuguaglianze di Sobolev con resto*.

Il primo risultato in questo contesto è dovuto a Brezis e Nirenberg, i quali in [23] hanno ricavato un miglioramento della disuguaglianza di Sobolev per $p = 2$ tramite l'aggiunta a secondo membro di una norma L^s di u

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2, \quad (0.0.3)$$

con $s < \frac{N}{N-2}$. Tale risultato, generalizzabile al caso $1 < p < N$ ed $s < \frac{N(p-1)}{N-p}$, non vale in corrispondenza dell'esponente limite $s = \frac{N(p-1)}{N-p}$; in altre parole non è possibile inserire a secondo membro la norma $\|u\|_{\frac{N(p-1)}{N-p}}$. Questa difficoltà viene superata se si sostituisce alla norma $\|u\|_{\frac{N(p-1)}{N-p}}$ la norma di u nello spazio delle funzioni debolmente $L^{\frac{N(p-1)}{N-p}}$. Con un approccio differente da quello utilizzato in [23], Brezis e Lieb in [20] hanno infatti provato che

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C(\Omega) \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2, \quad (0.0.4)$$

dove $\|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}$ denota la norma di u nello spazio $L^{\frac{N}{N-2}} -$ debole.

E' possibile inoltre considerare disuguaglianze di Sobolev migliorate il cui termine resto dipende da un'opportuna norma del gradiente di u . Sempre in [20] Brezis e Lieb dimostrano che

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq D(\Omega) \|\nabla u\|_{\frac{N}{N-1}, w}^2. \quad (0.0.5)$$

Questione ancora aperta è la determinazione del valore ottimale delle costanti $C_s(\Omega)$ in (0.0.3), $C(\Omega)$ in (0.0.4), e $D(\Omega)$ in (0.0.5); l'unico risultato noto è quello relativo alla (0.0.4) per $N = 3$, $p = 2$ ed Ω sfera di centro l'origine e raggio R (cfr. [23]).

Problematiche analoghe possono essere affrontate anche a partire da una generalizzazione della disuguaglianza di Sobolev, ottenuta per funzioni che si annullano

solo su una parte Γ_0 del bordo di Ω . Più precisamente, in [62], [57] viene provato che esiste una costante $K(p, \Omega) > 0$ per la quale si ha

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq K(p, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}}, \quad \forall u \in V^p(\Omega), \quad (0.0.6)$$

dove

$$V^p(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ su } \Gamma_0\}, \quad \text{se } p > 1.$$

A differenza di quanto avviene per la costante di Sobolev $S(N, p)$, la costante $K(p, \Omega)$ dipende dal dominio Ω ed in particolare da come si sceglie la parte di bordo $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ (cfr. [57]). Per tale ragione viene introdotta *una classe* \mathcal{E}_{α_N} costituita dagli aperti Ω che godono di medesime proprietà geometriche relative a Γ_1 e viene determinato il valore ottimale della costante in (0.0.6) con $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$. La migliore costante nella (0.0.6) è

$$K(p, \alpha_N) = \left(\frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{-1},$$

con

$$B = \left[\frac{N(p-1)}{N-p} \right]^{\frac{N(p-1)}{N-p}} N \left(\frac{p-1}{p} \right) \left[\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(N-\frac{N}{p})} \right]^{-1},$$

(cfr [57]). In particolare risulta

$$K(p, \Omega) \geq K(p, \alpha_N),$$

dove α_N rappresenta la misura del settore unitario di \mathbb{R}^N di ampiezza α . Altra differenza sostanziale dal caso della disuguaglianza di Sobolev classica risiede nel fatto che $K(p, \alpha_N)$ può essere raggiunta anche in aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Per questa ragione in [57], [36] ed [4] sono state determinate delle condizioni sufficienti, legate sempre alla geometria di Ω , che stabiliscono quando $K(p, \alpha_N)$ non viene raggiunta. In particolare se $K(p, \alpha_N)$ non viene realizzata è possibile considerare stime con

resto ottenute a partire dalla (0.0.6). In [36] Egnell, Pacella, Tricarico dimostrano infatti che

$$\|\nabla u\|_{L^p}^p \geq [K(p, \alpha_N)]^p \|u\|_{L^{p^*}}^p + C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^p, \quad (0.0.7)$$

per ogni $0 < s < \frac{(p-1)N}{(N-p)}$, $1 < p < N$ ed $u \in V^p(\Omega)$. Inoltre, $C_s(\Omega)$ è una costante positiva che dipende solo da s ed Ω e l'esponente limite $s = \frac{(p-1)N}{(N-p)}$ non può essere raggiunto. Osserviamo esplicitamente che la (0.0.7) rappresenta una generalizzazione della (0.0.3) al caso di funzioni nello spazio $V^p(\Omega)$.

In letteratura sono state inoltre affrontate questioni concernenti stime con resto anche a partire dalla classica disuguaglianza di Hardy, nota per $p = 2$ come *principio di indeterminazione*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx, \quad (0.0.8)$$

con $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $1 < p < N$ (si vedano [48], [49] e [42]).

La costante $\left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ che compare nella (0.0.8) è la migliore possibile ma non è mai raggiunta, nè in \mathbb{R}^N nè in un Ω aperto di \mathbb{R}^N con $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Conseguentemente ha senso introdurre a secondo membro della (0.0.8) un termine resto.

Brezis e Vazquez in [24] provano che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}} \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (0.0.9)$$

con Λ_2 primo autovalore dell'operatore di Laplace nel cerchio unitario. La costante $\Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}$ che compare nel termine resto della (0.0.9) è ottimale ma non è mai raggiunta in $H_0^1(\Omega)$. Sempre in [24] il risultato (0.0.9) viene generalizzato tramite l'aggiunta a secondo membro una norma L^s di u

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2, \quad (0.0.10)$$

con $s < \frac{2N}{N-2}$.

La (0.0.10) può essere poi ulteriormente generalizzata se si introduce a secondo

membro di una norma di u in opportuni spazi di Lorentz. In particolare in [27] viene provato che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(q, \alpha, \Omega) \left(\int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^\alpha} dx \right)^{\frac{2}{q}}, \quad (0.0.11)$$

con $0 \leq \alpha < 2$ e $1 < q < \frac{2(N-\alpha)}{N-2} = 2_\alpha^*$; per $\alpha = 0$ la (0.0.11) si riduce ovviamente alla (0.0.10). Il valore ottimale di $C(q, \alpha, \Omega)$ non è noto. Ulteriori stime di questo tipo sono state ottenute anche in [46] e [11].

Per quanto concerne, invece, la disuguaglianza di Hardy per p qualsiasi, Gazzola, Granau e Mitidieri in [43] hanno provato che esiste una costante $C(p, |\Omega|) > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^p}^p, \quad (0.0.12)$$

per $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p < N$. Essi hanno inoltre effettuato una analisi del comportamento asintotico di $C(p, |\Omega|)$, ma non ne hanno calcolato il valore ottimale, questione, tra l'altro, ancora irrisolta.

E' possibile infine considerare dei miglioramenti della disuguaglianza di Hardy per $p = 2$ il cui termine resto dipendente da una opportuna norma del gradiente di u . Va menzionato in particolare il risultato dovuto a Vazquez e Zuazua, i quali in [78] ottengono

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^q}^2, \quad (0.0.13)$$

con $1 \leq q < 2$. Questione ancora aperta è la determinazione di una stima ottimale per la costante $C(\Omega)$; questo problema è stato parzialmente risolto in [11], dove viene determinato il valore della miglior costante nel caso $q = 1$ e viene mostrato che essa non è raggiunta.

Si osserva che, per ottenere le disuguaglianze con resto fin qui citate, si ricorre sempre ad una semplificazione del problema attraverso la nozione di simmetrizzazione secondo Schwarz e quella di α -simmetrizzazione per funzioni che si

annullano solo su parte del bordo. Senza ledere di generalità, questa tecnica consente di restringere lo studio al caso di funzioni a simmetria radiale.

I risultati conseguiti in questa tesi di dottorato si collocano nel contesto sopra descritto; più precisamente, sono state ricavate stime con resto a partire da entrambe le disuguaglianze, di Sobolev e di Hardy e, qualora possibile, sono state determinate le migliori costanti nei termini correttivi.

Per quanto concerne il caso della disuguaglianza di Sobolev, ci si è riferiti alla sua generalizzazione nello spazio $V^p(\Omega)$ ed è stata determinata la seguente stima

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq [K(2, \alpha_N)]^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2 \quad \forall u \in V^2(\Omega), \quad (0.0.14)$$

(cfr. [66]). E' stato infatti già evidenziato come nella stima con resto (0.0.7) non sia possibile inserire a secondo membro la norma $\|u\|_{\frac{N(p-1)}{N-p}}$. In analogia a quanto fatto da Brezis e Lieb nella (0.0.4), mostriamo qui di poter raggiungere, quando $p = 2$, l'esponente limite nella (0.0.7) a patto di sostituire la norma $\|u\|_{\frac{N}{N-2}}$ con la norma debole $\|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}$. Il primo passo da compiere per ottenere la (0.0.14) è, come appena osservato, quello di ridurre il problema a simmetria radiale e, a tal fine, viene utilizzata la nozione di α - *simmetrizzazione*. Successivamente si procede adottando una opportuna variante della tecnica contenuta in [20].

Per quanto riguarda invece il caso della disuguaglianza di Hardy, nel lavoro [31] vengono determinati i valori della migliori costanti nella (0.0.11) per $q = 2$ e nella (0.0.12) per $p = 3$. In particolare nel caso della (0.0.11) si ottiene

$$C(\alpha, \Omega) = w_0^{2-\alpha} \frac{\omega_N^{\frac{2}{N}}}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{N}}},$$

dove w_0 è il primo zero della funzione

$$W(r) = J_0 \left(\frac{r^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{(2-\alpha)k}}{(2-\alpha)^{2k} (k!)^2}, \quad (0.0.15)$$

con J_0 funzione di Bessel di ordine zero. Per ricavare tale risultato si riduce dapprima il problema a simmetria radiale, utilizzando stavolta la nozione di simmetrizzazione secondo Schwarz; successivamente si procede con classiche tecniche di calcolo delle variazioni unidimensionale. Osserviamo che un ruolo di particolare importanza ai fini della dimostrazione è rivestito dalla risoluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange di un opportuno funzionale associato alla disuguaglianza (0.0.11); si sceglie di procedere con una integrazione per serie e si ottiene che la soluzione di tale equazione è data dalla funzione $W(r)$ in (0.0.15).

Il valore ottimale di $C(p, \Omega)$ in (0.0.12) è invece dato da

$$C(p, \Omega) = v_0^3 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{3}{N}},$$

dove v_0 è, come per w_0 , il primo zero della soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange di un opportuno funzionale associato alla (0.0.12). Nuovamente, dopo aver ridotto il problema a simmetria radiale, si vogliono applicare tecniche classiche del Calcolo delle Variazioni; in questo caso, tuttavia, non è possibile determinare la soluzione dell'equazione di Eulero. L'integrazione per serie infatti fornisce una formulazione ricorsiva dei coefficienti, ma non la loro espressione esplicita. Per superare questa difficoltà l'equazione è stata allora analizzata con strumenti di natura numerica, che hanno restituito l'andamento qualitativo della soluzione. Le proprietà emerse da questa analisi sono state comunque sufficienti ad applicare alla (0.0.12) tecniche del Calcolo delle Variazioni unidimensionale e dunque ottenere la stima cercata.

Le disuguaglianze di Sobolev ed Hardy possono infine essere riviste come casi limite di una disuguaglianza più generale, dovuta ad Egnell

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq C(p, \nu) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} |x|^\nu dx \right)^{\frac{N-p}{p(N+\nu)}},$$

con $1 < p < N$, $-p < \nu \leq 0$. Essa restituisce la Sobolev quando $\nu = 0$. La miglior

costante $C(p, \nu)$ è nota e viene raggiunta in corrispondenza delle funzioni

$$u(x) = \frac{h}{\left[1 + k |x|^{\frac{p+\nu}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p+\nu}}}.$$

con h, k costanti positive. La disuguaglianza è stata studiata in [62], mentre il valore ottimale di $C(p, \nu)$ viene calcolato in [35] con metodi analoghi a quelli utilizzati da Talenti in [72] per stimare la miglior costante nella disuguaglianza di Sobolev (si veda anche [50]).

In [65] mostriamo come sia possibile ricavare la disuguaglianza di Egnell anche tramite la seguente disuguaglianza intermedia, che lega la norma L^p pesata di u con peso $|x|^\nu$ alla sua norma $L^p - debole$, vale a dire

$$\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, w} \|\nabla u\|_{L^p} \geq A(N, p) \|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu} + B(N, p) \|u\|_{w^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}},$$

con $A(N, p)$ e $B(N, p)$ costanti opportune. Essa può essere in un certo senso rivista come disuguaglianza di Egnell con resto.

La tesi è organizzata come segue. Nel capitolo I vengono dapprima richiamati alcuni risultati preliminari; successivamente si passa ad introdurre il concetto di simmetrizzazione secondo Schwarz. Nel capitolo II viene descritta in modo più accurato l'ampia letteratura relativa alle disuguaglianze di Sobolev e di Hardy con resto. Nel capitolo III vengono riportati i risultati ottenuti in merito al calcolo delle migliori costanti nei termini resto delle (0.0.11) ed (0.0.12). Nel capitolo IV dimostriamo la generalizzazione della disuguaglianza di Egnell appena richiamata. Nel capitolo V, infine, dopo aver introdotto la nozione di $\alpha - simmetrizzazione$, estendiamo il risultato (0.0.4) al caso di funzioni che si annullano solo su una parte del bordo.

Ringraziamenti Questa tesi di dottorato non costituisce semplicemente il risultato di anni di ricerca, ma rappresenta per me la prima tappa di un lungo percorso di vita iniziato molto tempo fa. Durante il cammino ho incontrato numerose persone cui oggi desidero dire grazie.

Il mio primo ringraziamento va al prof. Angelo Alvino, punto di riferimento continuo nella mia ricerca. Oltre all'Analisi Matematica, il prof. Alvino mi ha insegnato il valore di un lavoro vissuto con entusiasmo, costanza e serietà.

Un sentito e profondo grazie va alla prof. Anna Mercaldo, per l'attenzione che dedica al mio lavoro, per i suoi impagabili consigli e per l'affetto che ogni giorno mi dimostra.

Un grazie di cuore va alla prof. Mariarosaria Tricarico, per avermi sempre sostenuto ed incoraggiato, fin da quando ho avuto la fortuna di conoscerla.

Una particolare menzione di ringraziamento è indirizzata ai rappresentanti del gruppo di ricerca cui appartengo: prof. Vincenzo Ferone, prof. Maria Francesca Betta, prof. Adele Ferone, prof. Maria Rosaria Posteraro, prof. Cristina Trombetti, prof. Roberta Volpicelli, dott. Barbara Brandolini, dott. Francesco Chiacchio, dott. Francesco Della Pietra, dott. Giuseppina di Blasio, dott. Carlo Nitsch, dott. Nunzia Gavitone.

Un segno di stima ed affetto devo al prof. Ireneo Peral e a sua moglie Magdalena, per la dedizione e passione con cui abbiamo lavorato, ma soprattutto perchè a Madrid mi hanno fatta sentire come a casa.

Ancora grazie va al dott. Salvatore Cuomo, per le nostre utili e stimolanti discussioni scientifiche.

Desidero inoltre ringraziare con affetto Ana Primo e Fernando Charro, meravigliosi compagni di viaggio nella mia avventura spagnola, nonchè amici sinceri e leali.

Grazie grazie grazie a Marta Chinnici, Rosaria Di Nardo e Bruno Volzone, per aver gioito e sofferto ogni giorno insieme a me, per la loro indispensabile amicizia e per il loro affetto.

A Roberta De Luca, Filomena Feo, Assunta Tataranni e Flavia Ventriglia per aver reso allegri e gradevoli questi anni di dottorato.

Ai miei amici di Cortona, per aver condiviso una esperienza indimenticabile: Roberto Argiolas, Simone Cecchini, Maurizio Ceseri, Sandra Martinez.

A Giulio, perchè mi ha insegnato che il cielo è sempre più blu.

Alle mie amiche e sorelle Giulia ed Anna: non esistono parole per esprimere il bene che provo per loro.

Ai miei zii, cugini e nonni, per il loro sostegno, incoraggiamento ed affetto.

Un grazie particolare va a Sergio, per essermi sempre stato accanto con amore, allegria e pazienza e per aver creduto in me.

A mia madre e a mio padre va il mio più profondo grazie, per il loro infinito amore e per avermi insegnato, con il loro esempio, il significato delle parole coraggio, rispetto e lealtà.

Infine grazie a mio fratello Stefano, perchè con la sua allegria e con il suo affetto riesce sempre a farmi sorridere...

Capitolo I

PRELIMINARI

In questo capitolo vengono illustrati alcuni risultati preliminari. In particolare, nel primo paragrafo ci si sofferma sulla classica disuguaglianza isoperimetrica dovuta a De Giorgi (cfr. [32] e [33]) e sulla formula di Coarea di Fleming-Rishel. Successivamente nel secondo paragrafo viene introdotta la nozione di *riordinamento secondo Schwarz* di una funzione misurabile, assieme ad alcune delle sue principali proprietà.

1.1 *Disuguaglianza isoperimetrica e formula di Coarea*

Il presente paragrafo ha come scopo quello di fornire una rapida descrizione di due risultati fondamentali che intervengono in tale tesi: *la disuguaglianza isoperimetrica* e *la formula di Coarea*. Prima di entrare nello specifico, richiamiamo le definizioni di funzioni a variazione limitata e di perimetro di un insieme misurabile.

Definizione 1.1.1 *Siano Ω insieme aperto di \mathbb{R}^N ed $u \in L^1(\Omega)$. Allora $u \in BV(\Omega)$, cioè u è una funzione a variazione limitata su Ω se e solo se*

$$V_u = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} < \infty. \quad (1.1.1)$$

Si può dimostrare che se u è una funzione a variazione limitata allora esiste una misura di Radon λ su Ω a valori in \mathbb{R}^N a variazione limitata e tale che per ogni $i = 1, \dots, N$ e per ogni $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ risulti

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi d\lambda_i.$$

La misura λ è anche detta *gradiente misura di u* ed è denotata con il simbolo Du . Lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni a variazione limitata in Ω è denotato con $BV(\Omega)$ ed è dotato della norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega),$$

dove $|Du|(\Omega)$ denota la variazione totale della misura Du ; rispetto a tale norma si può provare che $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach. Inoltre V_u in (1.1.1) è uguale alla variazione totale $|Du|(\Omega)$ di Du in Ω ; per un'ampia trattazione sulle funzioni BV si faccia riferimento a [38], [45], [82], [37] ed [13].

Una volta introdotto lo spazio $BV(\Omega)$, è possibile richiamare la nozione di *perimetro di un insieme misurabile*, contenuta nel lavoro [32] di De Giorgi.

Definizione 1.1.2 *Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^N misurabile secondo Lebesgue ed Ω un insieme aperto. Il perimetro di E in Ω è definito come*

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}. \quad (1.1.2)$$

Se $P(E, \Omega) < \infty$, E è detto insieme di *perimetro finito in Ω* . Dalla definizione di funzione a variazione limitata segue che se E è un insieme di perimetro finito, allora la sua funzione caratteristica χ_E ha gradiente distribuzionale $D\chi_E$ che è una misura di Radon finita in \mathbb{R}^N e $P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$. Per semplicità di notazioni il perimetro di E in \mathbb{R}^N verrà indicato con $P(E)$. Osserviamo inoltre che se E è un insieme sufficientemente regolare, ad esempio un insieme misurabile con frontiera di classe C^2 , il perimetro di E in Ω coincide con la misura $(N - 1)$ -dimensionale di Hausdorff della parte della frontiera di E in Ω , $\partial E \cap \Omega$. Infatti in tal caso $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega) < \infty$; inoltre, mediante le formule di Gauss-Green e dalla definizione (1.1.2), si riesce a dimostrare che

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Denotiamo ora con ω_N il volume della sfera unitaria di \mathbb{R}^N , ossia $\omega_N = \frac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(1+\frac{N}{2})}$, dove $\Gamma(t)$ (con $t > 0$) è la funzione Γ di Eulero. La *disuguaglianza isoperimetrica* di De Giorgi è formulata nel seguente teorema (cfr. [32], [33], [82], [37] ed [13]).

Teorema 1.1.3 *Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^N . Allora si ha*

$$\min \left\{ N\omega_N^{\frac{1}{N}} |E|^{1-\frac{1}{N}}, N\omega_N^{\frac{1}{N}} |\mathbb{R}^N \setminus E|^{1-\frac{1}{N}} \right\} \leq P(E), \quad (1.1.3)$$

dove $|\cdot|$ denota la misura di Lebesgue N -dimensionale. Inoltre nella (1.1.3) vale l'uguaglianza se e solo se E è equivalente ad una sfera.

La *formula di Coarea*, dovuta a Federer (cfr. [38], [82], [37] ed [13]), è espressa come segue.

Teorema 1.1.4 *Data u funzione lipschitziana in \mathbb{R}^N , allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\} dt. \quad (1.1.4)$$

In particolare, se u è funzione lipschitziana in \mathbb{R}^N e $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la (1.1.4) diviene

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{u=\theta} g(x) d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (1.1.5)$$

La (1.1.4) può essere poi ulteriormente generalizzata per una classe di funzioni $u \in W^{1,1}(\Omega)$; tale generalizzazione è dovuta a Fleming e Rishel ed è contenuta in [40].

Teorema 1.1.5 *Se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, allora*

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{x \in \Omega : u(x) > t\}, \Omega) dt. \quad (1.1.6)$$

1.2 Simmetrizzazione secondo Schwarz

I riordinamenti di funzioni furono introdotti per la prima volta in maniera sistematica da Hardy, Littlewood e Polya in [49]. Essi sono stati largamente utilizzati in molti campi dell'Analisi, in particolare sono stati applicati allo studio di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico e parabolico (ci si può riferire a [77] per un'ampia rassegna sull'argomento).

Denotati con E un insieme misurabile di \mathbb{R}^N e con u una funzione misurabile definita in E e a valori reali, riordinare u significa costruire una nuova funzione a valori reali definita in un opportuno insieme misurabile, che goda di proprietà desiderate, quali ad esempio la monotonia e certe simmetrie, ma tale che si conservi la misura degli insiemi di livello. Per riordinare una funzione bisogna dunque riordinare i suoi insiemi di livello. In base al tipo di simmetrizzazione adottata, è possibile ottenere diversi riordinamenti della medesima funzione u .

In questo paragrafo ci si sofferma sulla nozione di *simmetrizzazione secondo Schwarz*: essa trasforma la funzione u in un'altra, denotata con $u^\#$, i cui insiemi di livello sono sfere.

1.2.1 Riordinamenti e proprietà

Per definire in modo rigoroso il riordinamento di u , introduciamo dapprima la nozione di *funzione distribuzione di u* .

Definizione 1.2.1 *Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) ed u una funzione reale misurabile su E : la funzione distribuzione μ_u di u è definita da*

$$\mu_u(t) = |\{x \in E : |u(x)| > t\}|, \quad t \geq 0. \quad (1.2.1)$$

Definizione 1.2.2 *Due funzioni misurabili $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : F \rightarrow \mathbb{R}$ con $E \subseteq \mathbb{R}^N$*

ed $F \subseteq \mathbb{R}^M$ insiemi misurabili, si dicono equimisurabili, o anche equidistribuite, se hanno la stessa funzione distribuzione, cioè $\mu_u(t) = \mu_v(t)$ per ogni $t \geq 0$.

Osserviamo esplicitamente che la funzione distribuzione μ_u di u decresce da $|\text{supp } u|$ a 0 al crescere di t da 0 a $\text{ess sup}_E |u|$. Il limite sinistro $\mu_u(t^-)$ di μ_u in $t > 0$ è uguale a

$$\mu_u(t^-) = |\{x \in E : |u(x)| \geq t\}|;$$

μ_u presenta un salto di discontinuità in corrispondenza di ogni livello t per il quale l'insieme $\{x \in E : |u(x)| = t\}$ ha misura positiva: il valore del salto in t è dato esattamente da

$$\mu_u(t^-) - \mu_u(t) = |\{x \in E : |u(x)| = t\}|.$$

Per ulteriori proprietà della funzione distribuzione si faccia riferimento a [75].

Tale nozione di funzione ci permette di introdurre il cosiddetto riordinamento decrescente di u :

Definizione 1.2.3 *Sia $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Il riordinamento decrescente di u , denotato con u^* , è la funzione da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty]$ definita da*

$$u^*(s) = \sup \{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\} = \inf \{t \geq 0 : \mu_u(t) \leq s\}, \quad s \geq 0, \quad (1.2.2)$$

con la convenzione $\sup \emptyset = 0$.

Definizione 1.2.4 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N ed u una funzione reale misurabile su Ω . La funzione*

$$u_*(s) = u^*(|\Omega| - s), \quad s \in [0, |\Omega|] \quad (1.2.3)$$

è chiamata riordinamento crescente di u .

Dalla definizione 1.2.3 segue subito che u^* è la funzione distribuzione di μ_u . Più precisamente, il valore di u^* in un punto $s \geq 0$ è l'estremo destro di $\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\}$ se tale intervallo non è vuoto, ed è zero altrimenti. Come tale u^* decresce monotonicamente da $\text{ess sup } |u|$ a 0 quando s cresce da 0 a $|\text{supp } u|$. Inoltre, se $|E| < \infty$, la funzione distribuzione μ_u è limitata da $|E|$, per cui $u^*(s) = 0$ per ogni $s \geq |E|$: in questo caso, possiamo riguardare u^* come una funzione definita solo sull'intervallo $[0, |E|)$.

Si osservi inoltre che, se μ_u è continua e strettamente decrescente, allora u^* non è altro che l'inversa di μ_u in un opportuno intervallo: infatti, se $t \in [0, \text{ess sup } |u|]$, allora

$$u^*(\mu_u(t)) = \sup \{\bar{t} \geq 0 : \mu_u(\bar{t}) > \mu_u(t)\} = t. \quad (1.2.4)$$

Ovviamente, essendo u^* la funzione di distribuzione di μ_u , per essa valgono proprietà analoghe a quelle di cui gode μ_u .

Fissiamo ora ψ un operatore definito su un insieme di funzioni misurabili che dipende solo dalla funzione distribuzione, allora ψ è invariante rispetto all'operazione di riordinamento. In conseguenza di ciò vale la seguente proposizione (cfr. [17]).

Proposizione 1.2.5 *Sia Ω un insieme misurabile di \mathbb{R}^N ed u una funzione reale misurabile su Ω . Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora si ha*

$$\int_{\Omega} F(|u(x)|) dx = \int_0^{\infty} F(t) (-d\mu_u(t)) = \int_0^{|\Omega|} F(u^*(s)) ds. \quad (1.2.5)$$

In particolare, se $0 < p < \infty$, si ha

$$\int_E |u|^p dx = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu_u(t) dt = \int_0^{\infty} u^*(s)^p ds. \quad (1.2.6)$$

La proposizione che segue esprime una disuguaglianza che interviene di sovente in tale tesi; in particolare, la disuguaglianza (1.2.7) è dovuta a *G.H. Hardy* e *J.E. Littlewood* ed è contenuta in [49].

Proposizione 1.2.6 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N . Si ha*

(a) *se $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili, vale la disuguaglianza*

$$\int_0^{|\Omega|} u_*(s) v^*(s) ds \leq \int_{\Omega} |uv| dx \leq \int_0^{|\Omega|} u^*(s) v^*(s) ds. \quad (1.2.7)$$

(b) *la mappa $u \rightarrow u^*$ applica $L^p(\Omega)$ in $L^p(0, |\Omega|)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$ ed è una contrazione, nel senso che per ogni $u, v \in L^p(\Omega)$ risulta*

$$\|u^* - v^*\|_{L^p(0, |\Omega|)} \leq \|u - v\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.2.8)$$

Per ulteriori proprietà dei riordinamenti decrescenti rimandiamo a [8], [29], [52] e [17].

Introduciamo ora la nozione di riordinamento sferico di una funzione u .

Definizione 1.2.7 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N ed u una funzione reale misurabile su Ω . Definiamo il riordinamento sferico decrescente di u come la funzione*

$$u^\#(x) = u^*(\omega_N |x|^N), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.2.9)$$

Osserviamo che il supporto di $u^\#$ è contenuto nella sfera $\Omega^\#$ centrata nell'origine ed avente la stessa misura di Ω , per cui se Ω è limitato, possiamo riguardare $u^\#$ come funzione definita solo su $\Omega^\#$. Inoltre, se $t \geq 0$, l'insieme di livello $\{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) > t\}$ è la sfera centrata nell'origine avente la stessa misura dell'insieme di livello $\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ di u . Da quest'ultima proprietà segue subito che $\mu_{u^\#} = \mu_u$, e cioè che u ed $u^\#$ sono equidistribuite.

Abbiamo già osservato che quando si passa da u al suo riordinamento sferico $u^\#$, la norma L^p , non cambia. Una analoga proprietà non vale in cui $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cioè la norma di u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ non si conserva bensì *decresce* nel passaggio di u ad $u^\#$. Infatti, vale il seguente risultato, noto come *principio di Pólya-Szegő*.

Teorema 1.2.8 Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^N , $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p \geq 1$, allora $u^\# \in W_0^{1,p}(\Omega^\#)$ e

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx. \quad (1.2.10)$$

La prima dimostrazione della (1.2.10), sebbene in ipotesi meno generali, è dovuta a Pólya e Szegő (cfr. [68]). La dimostrazione che segue, invece, è riconducibile a Talenti in [72].

Dimostrazione. Supponiamo, in prima istanza, che $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ sia non negativa e prolunghiamola a zero al di fuori di Ω : si può allora applicare la formula di Federer (1.1.5). Fissiamo dunque $1 \leq p < \infty$: vale la seguente disuguaglianza, per quasi ogni $t \geq 0$

$$\int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} \geq [-\mu'_u(t)]^{1-p} \cdot [\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\}]^p. \quad (1.2.11)$$

Per $p = 1$, la (1.2.11) è banale. Se $p > 1$, fissato $h > 0$ dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\frac{1}{h} \int_{t < u(x) \leq t+h} |\nabla u| dx \leq \left(\frac{1}{h} \int_{t < u(x) \leq t+h} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} \left[\frac{\mu_u(t) - \mu_u(t+h)}{h} \right]^{1-1/p},$$

per cui, passando a limite per $h \rightarrow 0$

$$-\frac{d}{dt} \int_{u(x)>t} |\nabla u| dx \leq [-\mu'_u(t)]^{1-1/p} \cdot \left[-\frac{d}{dt} \int_{u(x)>t} |\nabla u|^p dx \right]^{1/p}. \quad (1.2.12)$$

D'altronde, la (1.1.5) implica che

$$\int_{u(x)>t} |\nabla u| dx = \int_t^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t'\} dt',$$

e dunque

$$-\frac{d}{dt} \int_{u(x)>t} |\nabla u| dx = \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\}. \quad (1.2.13)$$

Analogamente

$$\int_{u(x)>t} |\nabla u|^p dx = \int (\chi_{\{u>t\}} |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u| dx = \int_t^{+\infty} dt' \int_{u(x)=t'} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1},$$

sicchè

$$-\frac{d}{dt} \int_{u(x)>t} |\nabla u|^p dx = \int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1}, \quad (1.2.14)$$

per q.o. $t \geq 0$. Utilizzando le (1.2.13)-(1.2.14), dalla (1.2.12) segue

$$\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\} \leq [-\mu'_u(t)]^{1-1/p} \cdot \left[\int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} \right]^{1/p},$$

ossia la (1.2.11). Dalla disuguaglianza isoperimetrica (1.1.3), risulta

$$N\omega_N^{1/N} [\mu_u(t)]^{1-1/N} \leq \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\}. \quad (1.2.15)$$

La (1.1.5) implica l'identità

$$\int |\nabla u|^p dx = \int_0^{+\infty} dt \int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1},$$

e, dunque, mediante la (1.2.11) e la (1.2.15), si ottiene

$$\begin{aligned} \int |\nabla u|^p dx &\geq \int_0^{+\infty} [-\mu'_u(t)]^{1-p} \cdot [\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\}]^p dt \quad (1.2.16) \\ &\geq \left(N\omega_N^{1/N}\right)^p \int_0^{+\infty} [\mu_u(t)]^{p(1-1/N)} \cdot |\mu'_u(t)|^{1-p} dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che nella (1.2.15) vale l'uguaglianza se si sostituisce ad u la $u^\#$, questo poichè gli insiemi di livello sono sfere centrate nell'origine, e quindi

$$N\omega_N^{1/N} [\mu_u(t)]^{1-1/N} = \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) = t\}. \quad (1.2.17)$$

Inoltre, la (1.2.11) vale con il segno di uguaglianza se $|\nabla u|$ è costante sulla superficie di livello $\{x : u(x) = t\}$: nel nostro caso, $|\nabla u^\#| = N\omega_N |x|^{N-1} \cdot |u^{*'}(\omega_N |x|^N)|$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e dunque

$$\int_{u^\#(x)=t} |\nabla u^\#|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} = (N\omega_N r^{N-1})^{p-1} |u^{*'}(\omega_N r^N)|^{p-1} \cdot \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) = t\},$$

dove $r = (\mu_u(t) / \omega_N)^{1/N}$ è il raggio dell'insieme di livello $\{u^\# > t\}$ di $u^\#$. Allora, dalla (1.2.17) otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_{u^\#(x)=t} |\nabla u^\#|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} & (1.2.18) \\
& = [\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) = t\}]^p \cdot \left[-\frac{1}{u^{*'}(\mu_u(t))} \right]^{1-p} \\
& = [-\mu'_u(t)]^{1-p} \cdot [\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) = t\}]^p.
\end{aligned}$$

D'altra parte, il riordinamento $u^\#$ di u è lipschitziano; infatti, dalla (1.1.5) si ha

$$\int_{t \geq u(x) > t-h} |\nabla u| dx = \int_{t-h}^t \mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t'\} dt'.$$

Allora, denotata con $L := \max |\nabla u|$ la costante di Lipschitz di u , dalla monotonia di μ_u e dalla disuguaglianza isoperimetrica segue

$$\begin{aligned}
L(\mu_u(t-h) - \mu_u(t)) &= L |\{x : t-h < u(x) \leq t\}| & (1.2.19) \\
&\geq \int_{t-h < u(x) \leq t} |\nabla u| dx \\
&\geq N\omega_N^{1/N} \int_{t-h}^t \mu_u(t')^{1-1/N} dt' \\
&\geq N\omega_N^{1/N} \mu_u(t)^{1-1/N} h,
\end{aligned}$$

per ogni t, h tali che $t > h > 0$. Dalla (1.2.19) discende subito che per q.o. t è

$$|u^{*'}(\mu_u(t))| \mu_u(t)^{1-1/N} \leq \frac{L}{N\omega_N^{1/N}},$$

per cui dall'espressione del gradiente di $u^\#$ esplicitata in precedenza, si ha

$$|\nabla u^\#| \leq L,$$

da cui

$$|u^\#(x) - u^\#(y)| \leq L|x - y|.$$

Dalla lipschitzianità di u , dalla (1.1.5) e dalle (1.2.17)-(1.2.18) discende

$$\begin{aligned} \int |\nabla u^\#|^p dx &= \int_0^{+\infty} dt \int_{u^\#(x)=t} |\nabla u^\#|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_0^{+\infty} [-\mu'_u(t)]^{1-p} \cdot [\mathcal{H}^{N-1} \{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) = t\}]^p dt \\ &= \left(N\omega_N^{1/N}\right)^p \int_0^{+\infty} [\mu_u(t)]^{p(1-1/N)} \cdot |\mu'_u(t)|^{1-p} dt, \end{aligned}$$

sicchè la (1.2.16) implica l'asserto per $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. E' inoltre evidente che la (1.2.10) continua a valere se u cambia di segno, a meno di sostituire u con $|u|$. Supponiamo ora che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e sia $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $u_n \rightarrow u$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u_n^\#|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx, \quad (1.2.20)$$

per ogni n , e dalla limitatezza di $\{u_n\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ discende che $\{u_n^\#\}$ è limitata in $W_0^{1,p}(\Omega^\#)$. Dunque, se $p > 1$, possiamo estrarre da $\{u_n\}$ una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, per la quale esiste una funzione $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tale che

$$\nabla u_n^\# \rightharpoonup v \quad \text{debole in } L^p(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Dalla proposizione 1.2.6 segue in particolare che

$$u_n^\# \rightarrow u^\# \quad \text{forte in } L^p(\Omega^\#);$$

d'altra parte, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega^\#)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la

$$\int_{\Omega^\#} u_n^\# \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega^\#} \frac{\partial u_n^\#}{\partial x_i} \varphi dx,$$

perciò passando a limite per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{\Omega^\#} u^\# \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega^\#} v_i \varphi dx,$$

cioè $u \in W_0^{1,p}(\Omega^\#)$, $\nabla u^\# = v$ e quindi

$$u_n^\# \rightharpoonup u^\# \quad \text{debole in } W_0^{1,p}(\Omega^\#).$$

Infine, passando a limite nella (1.2.20), segue

$$\|u^\#\|_{W_0^{1,p}(\Omega^\#)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n^\#\|_{W_0^{1,p}(\Omega^\#)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Se invece $p = 1$, dalla formula di Fleming Rishel (1.1.6) e la disuguaglianza isoperimetrica, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u| dx &= \int_0^{+\infty} P\{x \in \Omega : |u(x)| > t\} dt \\ &\geq N\omega_N^{1/N} \int_0^{+\infty} \mu_u(t)^{1-1/N} dt; \end{aligned}$$

applicando la (1.1.6) al riordinamento sferico $u^\#$ e notando che, in questo caso, la disuguaglianza isoperimetrica diviene un'uguaglianza, otteniamo

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#| dx = N\omega_N^{1/N} \int_0^{+\infty} \mu_u(t)^{1-1/N} dt,$$

e la (1.2.10) è completamente dimostrata. ■

Capitolo II

DISUGUAGLIANZE DI SOBOLEV ED HARDY-SOBOLEV CON RESTO

L'obiettivo di questo capitolo è quello di illustrare alcune classiche disuguaglianze note in letteratura come *disuguaglianze di immersione*. La prima cui si fa riferimento è la celebre *disuguaglianza di Sobolev*, che esprime l'immersione continua dello spazio delle funzioni che svaniscono all'infinito, dotate di derivate nel senso delle distribuzioni e con gradiente in $L^p(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, con $1 < p < N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$. In particolare, di essa sono noti il valore della miglior costante e l'espressione delle funzioni in corrispondenza delle quali tale costante viene raggiunta. Se al posto di \mathbb{R}^N si considera un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la disuguaglianza continua ad essere valida, l'espressione della miglior costante è la stessa ma essa non è mai raggiunta; per questa motivazione è possibile inserire al suo secondo membro un termine correttivo, costituito da una opportuna norma della funzione u . Le disuguaglianze ottenute in tale ambito sono dette *disuguaglianze di Sobolev migliorate o con resto*.

Altrettanto nota è la classica *disuguaglianza di Hardy*: essa esprime l'immersione continua di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ nello spazio di Lebesgue pesato $L^p(\mathbb{R}^N)$ con peso $|x|^{-p}$. Tale disuguaglianza, inoltre, non si riduce mai all'uguaglianza, nè in \mathbb{R}^N nè in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. In conseguenza di ciò sono state ricavate in letteratura numerose *disuguaglianze di Hardy migliorate o con resto*.

Prima di descrivere in modo più approfondito le disuguaglianze fin qui citate,

richiamiamo brevemente gli spazi di Lorentz e le loro principali proprietà.

2.1 Spazi di Lorentz

Introdotti da Lorentz in [58] e [59], gli spazi $L(p, q)$ possono essere definiti come segue

Definizione 2.1.1 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N e $0 < p, q \leq \infty$. Lo spazio di Lorentz $L(p, q)$ è costituito dalle funzioni misurabili in Ω per le quali risulta finita la seguente quantità*

$$\|u\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left[u^*(t) t^{\frac{1}{p}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{se } 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} u^*(t) t^{\frac{1}{p}} & \text{se } q = \infty \end{cases}. \quad (2.1.1)$$

Se al posto di u^* si utilizza il riordinamento a simmetria sferica, un calcolo diretto mostra che

$$\|u\|_{p,q} = \begin{cases} \omega_N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega^\#} \left[u^\#(x) |x|^{\frac{N}{p}} \right]^q \frac{dx}{|x|^N} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{se } 0 < q < \infty \\ \omega_N^{\frac{1}{p}} \sup_{t>0} u^\#(x) |x|^{\frac{N}{p}} & \text{se } q = \infty \end{cases};$$

inoltre

$$\sup_{0 < t < \infty} u^*(t) t^{\frac{1}{p}} = \sup_{t > 0} \mu_u(t)^{\frac{1}{p}} t,$$

dunque lo spazio di Lorentz $L(p, \infty)$ coincide con lo spazio di Marcinkiewicz L^p -debole¹ per $p \geq 1$ (cfr. [60]). Per quanto concerne invece il legame tra gli spazi di

¹E' possibile definire lo spazio L^p -debole come lo spazio delle funzioni u per le quali risulta finita

$$\|u\|_{p,w} = \sup_{r>0} \omega_N^{\frac{1}{p}} \left[r^{\frac{N}{p}} u^*(r) \right].$$

Osserviamo esplicitamente che quest'ultima risulta essere una seminorma e non una norma. Se si vuole considerare lo spazio L^p -debole come spazio normato, allora esso si può munire della norma equivalente

$$\|u\|_{p,w} = \sup_A |A|^{-\frac{1}{p'}} \int_A |u(x)| dx,$$

con A aperto limitato di p' esponente coniugato di p .

Lorentz e quelli di Lebesgue, dalla (1.2.5) segue che lo spazio $L(p, p)$ coincide con l'usuale spazio L^p e

$$\|u\|_{p,p} = \|u\|_{L^p}.$$

Gli spazi di Lorentz risultano essere poi spazi intermedi tra gli spazi di Lebesgue; per $1 < p < \infty$ e $0 < q \leq \infty$, valgono infatti le inclusioni

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &\subset L(r, q) \subset L^r(\Omega), & p > r, & 0 < q < r, \\ L^r(\Omega) &\subset L(r, q) \subset L^p(\Omega), & p < r, & r < q \leq \infty. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Questo risultato è descritto in modo più specifico nei seguenti teoremi.

Teorema 2.1.2 *Sia $0 < p \leq \infty$ e $0 < q < r \leq \infty$. Allora $L(p, q) \subset L(p, r)$ ed*

$$\|u\|_{p,r} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \|u\|_{p,q}.$$

Teorema 2.1.3 *Sia $0 < p < r \leq \infty$ e $0 < q, s \leq \infty$ ed Ω di misura finita. Allora*

$$L(r, s) \subset L(p, q). \tag{2.1.3}$$

Se si dota lo spazio $L(p, q)$ per $0 < p, q \leq \infty$ della topologia indotta dalla norma $\|u\|_{p,q}$, esso risulta essere uno spazio di Frechet (per la dimostrazione cfr. [51] e [83]); dal momento che il funzionale $u \rightarrow \|u\|_{p,q}$ non individua sempre una norma anche se $p, q \geq 1$, è interessante stabilire per quali indici tale spazio è anche uno spazio di Banach. Una risposta a tale questione è data dal seguente teorema (si veda ad es. [17]).

Teorema 2.1.4 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$ o $p = q = \infty$ allora $(L(p, q), \|\cdot\|_{p,q})$ è uno spazio di Banach.*

Osserviamo infine che, sebbene la restrizione $q \leq p$ sia necessaria nel precedente teorema, si può aggirare questo ostacolo facendo vedere che $\|\cdot\|_{p,q}$, nel caso $p > 1$

è equivalente, per ogni $q \geq 1$, ad una norma rispetto alla quale $L(p, q)$ è uno spazio di Banach. Tale norma si ottiene andando a sostituire nella (2.1.1) ad u^* la funzione massimale u^{**2} .

²Se u è una funzione misurabile in A , la funzione massimale di u è la funzione definita da

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds, \quad t > 0.$$

Assegnate due funzioni misurabili u e w , l'operatore massimale $u \rightarrow u^{**}$ gode delle seguenti proprietà:

1. u^{**} è non negativa, decrescente e continua su $]0, +\infty[$,
2. $u^{**} = 0 \iff u = 0$ q.o.,
3. $|u| \leq |w|$ q.o. $\implies u^{**} \leq w^{**}$,
4. $(u + w)^{**} \leq u^{**} + w^{**}$,
5. $u^* \leq u^{**}$.

2.2 Disuguaglianze di Sobolev e Sobolev con resto

In questo paragrafo ci soffermiamo a descrivere la disuguaglianza di Sobolev e le sue principali proprietà. Successivamente richiamiamo alcune disuguaglianze ottenute a partire da essa tramite l'aggiunta di termini correttivi.

2.2.1 La disuguaglianza di Sobolev

La celebre disuguaglianza di Sobolev stabilisce che

$$\|\|\nabla u\|\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \geq S(N, p) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.2.1)$$

dove u è una funzione che svanisce all'infinito, dotata di derivate nel senso delle distribuzioni, con gradiente in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Essa può essere riletta asserendo che l'immersione dello spazio cui u appartiene in $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ è continua. Determinare la miglior costante di immersione $S(N, p)$ equivale a determinare il minimo del funzionale

$$F(u) = \frac{\|\|\nabla u\|\|_{L^p}}{\|u\|_{L^{p^*}}}.$$

Tale questione è stata ampiamente discussa e risolta da Bliss in [18], Aubin in [14] e Talenti in [72], lavori in cui con metodi classici del calcolo delle variazioni e tecniche di simmetrizzazione viene ottenuta la seguente espressione per $S(N, p)$

$$S(N, p) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{N}} N^{\frac{1}{p}} (N-p)^{\frac{p-1}{p}} (p-1)^{\frac{1}{N} - \frac{p-1}{p}} p^{-\frac{1}{N}} \left[\frac{\Gamma(\frac{N}{p}) \Gamma(N - \frac{N}{p})}{\Gamma(N) \Gamma(\frac{N}{2})} \right]^{\frac{1}{N}}; \quad (2.2.2)$$

tale costante inoltre *viene raggiunta*, vale a dire la (2.2.1) si riduce all'uguaglianza in corrispondenza delle funzioni

$$u(x) = \frac{h}{\left[1 + k |x|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{N-p}{p}}}, \quad (2.2.3)$$

dove h e k sono costanti positive. Va ricordato che in letteratura gli stessi risultati sono stati ricavati anche con metodi differenti; ci riferiamo in particolare ai lavori

di Lieb [53] e di Cordero-Erausquin, Nazaret e Villani [30]. Recentemente, inoltre, la disuguaglianza di Sobolev è stata ottenuta anche attraverso una disuguaglianza intermedia che lega la norma L^p del gradiente di u alle norme L^{p^*} ed $L^{p^*} - debole$ di u (cfr. [7]).

Se consideriamo la disuguaglianza di Sobolev nel caso limite $p = 1$ essa assume la forma (cfr. [39] e [40])

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx \geq \pi^{\frac{1}{2}} N \left[\Gamma \left(\frac{N}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx, \quad (2.2.4)$$

e le funzioni estremali non sono date più dalla (2.2.3) ma sono le funzioni caratteristiche delle sfere. Va sottolineato che la miglior costante per $p = 1$ è il limite per $p \rightarrow 1$ di $S(N, p)$; essa inoltre è la costante isoperimetrica, la costante cioè che compare nella disuguaglianza isoperimetrica scritta nella formulazione

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) \geq \pi^{\frac{1}{2}} N \left[\Gamma \left(\frac{N}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{N}} [\mathcal{H}^N(E)]^{1-\frac{1}{N}}. \quad (2.2.5)$$

Se al posto di \mathbb{R}^N si considera un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la disuguaglianza di Sobolev continua ad essere valida, e la migliore costante è ancora $S(N, p)$, e dunque non dipende da Ω ma solo da N e p , tuttavia essa *non è mai raggiunta*. Questo viene dimostrato in [23] nel caso $p = 2$. L'idea è la seguente: supponiamo che $S(N, 2)$ sia raggiunta in Ω in corrispondenza di una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ e che $u \geq 0$ in Ω (se ciò non si verifica basta sostituire u con $|u|$). Fissata $\tilde{\Omega}$ una sfera contenente Ω , prolunghiamo u in $\tilde{\Omega}$ ponendo

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } \tilde{\Omega} \setminus \Omega \end{cases}; \quad (2.2.6)$$

ovviamente, $S(N, 2)$ è raggiunta anche in $\tilde{\Omega}$ lungo \tilde{u} . Giacchè \tilde{u} costituisce un minimo per $F(u)$, essa soddisfa l'equazione

$$-\Delta \tilde{u} = \mu \tilde{u}^{\frac{N+2}{N-2}}, \quad (2.2.7)$$

con $\mu > 0$, e quindi l'identità di Pohozaev³. Se esplicitiamo tale identità in corrispondenza di \tilde{u} , essa diviene

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right)^2 = 0.$$

Essendo $\tilde{\Omega}$ una sfera con centro nell'origine si ha che $(x \cdot \nu) > 0$ q.o. su $\partial\tilde{\Omega}$, e dunque affinché valga la precedente uguaglianza deve essere $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\tilde{\Omega}$. Dalla (2.2.7) unitamente a $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\tilde{\Omega}$ si ricava che

$$-\int_{\tilde{\Omega}} \Delta \tilde{u} = \int_{\tilde{\Omega}} \mu \tilde{u}^{\frac{N+2}{N-2}} = 0,$$

e dunque $\tilde{u} = 0$ in $\tilde{\Omega}$, il che è assurdo in base alla (2.2.6).

Concludiamo il paragrafo osservando che questo procedimento si generalizza ad ogni $1 < p < N$ a patto di utilizzare un'opportuna variante della identità di Pohozaev provata in [34] per il p -laplaciano.

2.2.2 Disuguaglianze di Sobolev con resto

Nel paragrafo precedente abbiamo sottolineato che, almeno negli aperti contenuti strettamente in \mathbb{R}^N , la disuguaglianza di Sobolev è sempre una disuguaglianza stretta. Per questa motivazione numerosi autori hanno inserito a secondo membro della (2.2.1) un termine correttivo, costituito da un'opportuna norma della funzione u ; ciò ha dato origine ad una nuova famiglia di disuguaglianze note come *disuguaglianze di Sobolev con resto*.

³Sia u una funzione regolare tale che

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove g è una funzione reale continua. Allora si ha

$$\left(1 - \frac{N}{2}\right) \int_{\Omega} g(u) \cdot u + N \int_{\Omega} G(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2,$$

dove ν è la normale esterna alla $\partial\Omega$ e $G(u) = \int_0^u g(t)dt$. Tale identità viene chiamata *Identità di Pohozaev* (vedi [67]).

Il primo risultato in questa direzione è dovuto a Brezis e Nirenberg i quali in [23] hanno ricavato un miglioramento della disuguaglianza di Sobolev per $p = 2$ tramite l'aggiunta a secondo membro di una norma L^s di u :

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2, \quad (2.2.8)$$

con $s < \frac{N}{N-2}$. L'esponente limite $s = \frac{N}{N-2}$ non può essere raggiunto, in altre parole non è possibile inserire nella (2.2.8) la norma $\|u\|_{\frac{N}{N-2}}$. successivamente Brezis e Lieb hanno mostrato di poter raggiungere l'esponente limite a patto di sostituire la norma L^s con la norma L^s - *debole* (cfr. [20]) Con un approccio differente da quello utilizzato in [23], essi hanno infatti provato che

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C(\Omega) \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2. \quad (2.2.9)$$

I valori ottimali delle costanti $C_s(\Omega)$ e $C(\Omega)$, nei termini resto non sono noti, nè tantomeno è stato stabilito se esse possano essere raggiunte o meno come accade per $S(N, p)$. L'unico risultato in merito è contenuto in [23], dove viene calcolato il valore della migliore costante nella (2.2.8) per $N = 3$, $s = 2$ ed Ω sfera di centro l'origine e raggio R . In tal caso si ottiene $C_2(\Omega) = \frac{\pi^2}{4R^2}$, e si dimostra che tale costante non è raggiunta.

Osserviamo poi che la (2.2.8) si generalizza al caso $1 < p < N$ ed $s < \frac{N(p-1)}{N-p}$ tramite il principio di compattezza-concentrazione (cfr. [55] ed [56]).

Infine, in letteratura sono state ricavate disuguaglianze di Sobolev migliorate il cui resto dipende dal gradiente di u . Sempre in [20] viene infatti dimostrato che

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq D(\Omega) \|\nabla u\|_{\frac{N}{N-1}, w}^2; \quad (2.2.10)$$

anche in questo caso il valore ottimale di $D(\Omega)$ non è noto.

2.3 Disuguaglianze di Hardy e di Hardy con resto

La celebre disuguaglianza di Hardy, nota anche come *principio d'indeterminazione* quando $p = 2$, è data da

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx, \quad (2.3.1)$$

con $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (per la dimostrazione si vedano [48], [49] ed [42]).

Riguardata nell'ottica di immersione tra spazi, essa esprime l'immersione continua di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ rispetto al peso $|x|^{-p}$. Inoltre, dalle (1.2.7), (1.2.10) ed (2.1.2), si deduce che la (2.3.1) costituisce una disuguaglianza più fine della disuguaglianza di Sobolev.

In [48], [49] ed [42] viene provato che la costante $\left(\frac{N-p}{p} \right)^p$ è la migliore possibile ma essa non è mai raggiunta, nè in \mathbb{R}^N nè se si considera Ω aperto di \mathbb{R}^N ed $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se infatti si riduce il problema a simmetria radiale e si considerano il funzionale associato ad (2.3.1) e la relativa equazione di Eulero, si ottiene che le soluzioni di tale equazione sono dilatazioni della funzione $u(x) = |x|^{-\frac{N-p}{p}}$. Tali funzioni, tuttavia, non appartengono a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (nè tantomeno a $W_0^{1,p}(\Omega)$), come tale la (2.3.1) non si riduce mai all'uguaglianza.

Conseguentemente, sono state affrontate questioni concernenti stime con resto anche a partire dalla disuguaglianza di Hardy. Il primo risultato è dovuto a Brezis e Vazquez i quali in [24] ottengono infatti un miglioramento della (2.3.1) dato da

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{2}{N}} \|u\|_{L^2}^2, \quad (2.3.2)$$

dove Λ_2 denota il primo autovalore dell'operatore di Laplace nel cerchio unitario ed $u \in H_0^1(\Omega)$. In particolare gli autori dimostrano che $\Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{2}{N}}$ è ottimale ma che tale costante non è mai raggiunta in $H_0^1(\Omega)$. Sempre in [24] la (2.3.2) viene

ulteriormente generalizzata tramite l'aggiunta a secondo membro della norma di u nello spazio L^s con $s < \frac{2N}{N-2}$; viene infatti ricavato che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2.$$

Le tecniche contenute in [24] sono state opportunamente modificate al fine di provare i risultati descritti nel capitolo III. Per questa motivazione, riportiamo qui la dimostrazione della (2.3.2).

Dimostrazione della disuguaglianza (2.3.2). Il primo passo consiste nel ricondurre lo studio del problema al caso di funzioni a simmetria radiale. Se sostituiamo u con $u^\#$ ed Ω con $\Omega^\#$, la disuguaglianza di Hardy-Litthewood (1.2.7) ed il principio di Pólya-Szego (1.2.10) implicano che il primo membro della (3.0.6) decresce, mentre il secondo membro resta invariato. Ciò assicura che è sufficiente provare l'asserto per u funzione a simmetria radiale decrescente. Successivamente va osservato che la (2.3.2) per $N = 2$ si riduce alla disuguaglianza di Poincaré e che

$$\Lambda_2 = z_0^2,$$

dove z_0 è il primo zero della funzione di Bessel $J_0(z_0 r)$. A questo punto si effettua una *riduzione di dimensione*, da N a 2, tramite il cambiamento di variabili

$$v(r) = u(r)r^{\frac{N-2}{2}}.$$

Effettuando tale sostituzione si ricava che

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{B_R} \frac{u^2}{|x|^2} dx = N\omega_N \left[\int_0^R (v')^2 r dr - (N-2) \int_0^R v v' dr \right].$$

Se si ipotizza che $u \in C_0^1(B_R)$, allora l'ultimo integrale nella precedente è nullo, e dunque

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{B_R} \frac{u^2}{|x|^2} dx = N\omega_N \int_0^R (v')^2 r dr.$$

Applicando la disuguaglianza di Poincarè in dimensione 2 si ottiene

$$\int_0^R (v')^2 r dr \geq \Lambda_2 \int_0^R v^2 r dr,$$

ma

$$N\omega_N \int_0^R v^2 r dr = \int_{B_R} u(x)^2 dx,$$

da cui si ha l'asserto. La restrizione $u \in C_0^1(B_R)$ può essere rimossa per densità.

Osserviamo infine che Λ_2 non è mai raggiunta; infatti se ciò si verificasse, nella (2.3.2) varrebbe l'uguaglianza, il che accade in corrispondenza della funzione $u(x) = J_0(zr)r^{-\frac{N-2}{2}}$, che non sta in $H_0^1(B_R)$. ■

Tornando alla disuguaglianza (2.3.2), il fatto che non solo la miglior costante di Hardy ma anche $\Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}$ non venga raggiunta ha portato molti autori a chiedersi se tali termini non fossero soltanto i primi due di una serie infinita di termini correttivi; in quest'ottica Adimurthi et al. in [5] hanno provato che per ogni intero k esiste una costante C dipendente solo da N, k, Ω tale che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(N, k, \Omega) \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^2} \left(\prod_{i=1}^j \log^{(i)} \frac{\rho}{|x|} \right)^{-2} dx,$$

con $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\rho = (\sup_{x \in \Omega} |x|) \left(e^{e^{e^{(k-volte)}}} \right)$. E' stata utilizzata la notazione $\log^{(1)}(\cdot) = \log(\cdot)$ e $\log^{(k)}(\cdot) = \log(\log^{(k-1)}(\cdot))$ per $k \geq 2$.

Sempre in quest'ambito Filippas e Tertikas in [41] hanno successivamente dimostrato che la precedente disuguaglianza può essere ulteriormente migliorata sommando a secondo membro degli opportuni potenziali portano ad una espansione in serie di potenze. In più essi hanno ricavato per tale stima il valore della miglior costante $C_{N,k,\Omega}$ la quale, ancora una volta, non è raggiunta in $H_0^1(\Omega)$.

E' possibile poi considerare dei miglioramenti della (2.3.1) che prevedono l'aggiunta a secondo membro della norma di u in opportuni Spazi di Lorentz. In

particolare in [27] viene provato che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(q, \alpha, \Omega) \left(\int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^\alpha} dx \right)^{\frac{2}{q}}, \quad (2.3.3)$$

con $0 \leq \alpha < 2$ e $1 < q < \frac{2(N-\alpha)}{N-2} = 2_\alpha^*$. Per ulteriori stime che prevedono l'aggiunta di termini correttivi dipendenti da norme negli spazi di Lorentz si vedano anche ([46] e [11]). Il valore della migliore costante $C(q, \alpha, \Omega)$ è stato calcolato in [11] per $q = 2$ ed $\alpha = 1$ e successivamente in [31] per $q = 2$ e $0 \leq \alpha < 2$. Ancora una volta, tali costanti non vengono raggiunte.

La disuguaglianza di Hardy per $p = 2$ può essere inoltre migliorata anche aggiungendo a secondo membro una opportuna norma del gradiente di u . Vazquez e Zuazua in [78] hanno infatti ricavato la seguente stima

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^q}^2, \quad (2.3.4)$$

con $1 \leq q < 2$. Il valore della migliore costante $C(\Omega)$ non è noto; tale questione è stata parzialmente risolta in [11], dove è stato determinato il valore della miglior costante $C(\Omega)$ nel caso $q = 1$ tramite tecniche di simmetrizzazione e metodi classici di Calcolo delle Variazioni. Nuovamente tale costante non viene raggiunta, tuttavia, se si considera la disuguaglianza (2.3.4) nella seguente formulazione

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - c \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \bar{C}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^1}^2,$$

con $c \in \left(0, \frac{(N-2)^2}{4}\right)$, allora è possibile determinare il valore ottimale di $\bar{C}(\Omega)$ e mostrare che essa viene raggiunta in $H_0^1(\Omega)$ (si veda [12]).

Per quanto concerne, invece, le disuguaglianze di Hardy migliorate per p qualsiasi, Gazzola, Granau e Mitidieri hanno mostrato in [43] di poter inserire nella (2.3.1) un resto costituito dalla norma L^p di u con $1 < p < N$; in particolare essi hanno provato che esiste una costante $C(p, \Omega) > 0$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^p}^p, \quad (2.3.5)$$

per $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si osserva che nel lavoro appena citato è stata effettuata solo una analisi del comportamento asintotico di $C(p, \Omega)$, ma non ne è stato calcolato il valore ottimale, questione, tra l'altro, ancora irrisolta. Un contributo in questa direzione è dato dal lavoro [31] dove viene calcolato il valore della migliore costante nella (2.3.5) per $p = 3$.

Problematiche della stessa natura seppur indipendenti sono state affrontate anche da Adimurthi, Chuadhuri and Ramaswamy in [5].

Per completezza vogliamo infine ricordare che esistono delle versioni più generali della disuguaglianza di Hardy, il cui peso è costituito dalla distanza del generico punto $x \in \Omega$ dalla $\partial\Omega$, vale a dire con peso $\delta(x) = d(x, \partial\Omega)$; per ulteriori approfondimenti ci si riferisca a [21], [22], [61] e [16].

Capitolo III

MIGLIORI COSTANTI IN DISUGUAGLIANZE DI HARDY CON RESTO

Nel capitolo precedente sono state richiamate le classiche disuguaglianze di Sobolev ed Hardy e, successivamente, sono state illustrate alcune disuguaglianze con resto ottenute a partire da esse. In questo capitolo vengono determinate le migliori costanti in due diverse disuguaglianze di Hardy con resto. Viene calcolato il valore ottimale di $C(\alpha, \Omega)$ in

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(\alpha, \Omega) \|u\|_{L(\frac{2N}{N-\alpha}, 2)}^2, \quad (3.0.6)$$

con $0 \leq \alpha < 2$, e quello della miglior costante $C(p, \Omega)$ nella (2.3.5)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^p}^p,$$

quando $p = 3$. Tale studio è oggetto del lavoro [31].

Per ottenere entrambi i risultati si riconduce come sempre lo studio al caso di funzioni a simmetria radiale. Si sostituisce infatti u con il suo riordinamento sferico $u^\#$, definito dalla (1.2.9), ed Ω con $\Omega^\#$; il principio di Pólya-Szego (1.2.10) e la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.2.7) assicurano che non è restrittivo dimostrare l'asserto sotto queste ipotesi.

Successivamente viene effettuato il cambiamento di variabili proposto da Brezis e Vazquez in [24] e richiamato nel capitolo II, paragrafo 2.3. Si procede quindi con metodi classici del Calcolo delle Variazioni: i valori ottimali delle costanti $C(\alpha, \Omega)$ e $C(p, \Omega)$ corrispondono infatti al minimo di opportuni funzionali associati alle

disuguaglianze (3.0.6) e (2.3.5). Per applicare tali metodi è però necessario esibire le soluzioni delle relative equazioni di Eulero. Ciò è possibile per il funzionale associato alla disuguaglianza (3.0.6) mentre per quanto riguarda quello relativo alla seconda non è possibile integrare suddetta equazione Eulero. Per superare questo ostacolo, allora, si procede con l'idea effettuare, tramite strumenti di natura numerica, una analisi qualitativa della soluzione. Le proprietà emerse da tale studio si dimostrano comunque sufficienti ad applicare le tecniche del Calcolo delle Variazioni.

3.1 Disuguaglianza di Hardy con resto in spazi di Lorentz

In questo paragrafo viene determinato il valore della miglior costante $C(\alpha, \Omega)$ nella (3.0.6) con $0 \leq \alpha < 2$.

Dal momento che il termine di resto può essere interpretato come la norma di u nello spazio di Lorentz $L\left(\frac{2N}{N-\alpha}, 2\right)$, la disuguaglianza (3.0.6) è stata già dimostrata nel lavoro [27]. Qui ci si occupa, invece, del calcolo del valore ottimale di $C(\alpha, \Omega)$ (cfr. [31]).

Teorema 3.1.1 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N con $N \geq 2$, allora esiste una costante positiva $C(\alpha, \Omega)$ per la quale vale la (3.0.6) per ogni $0 \leq \alpha < 2$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$. Il valore ottimale della costante $C(\alpha, \Omega)$ è dato da*

$$C(\alpha, \Omega) = w_0^{2-\alpha} \frac{\omega_N^{\frac{2}{N}}}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{N}}},$$

dove w_0 è il primo zero della funzione

$$W(r) = J_0\left(\frac{r^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{(2-\alpha)k}}{(2-\alpha)^{2k} (k!)^2};$$

J_0 denota la funzione di Bessel di ordine zero.

Dimostrazione. Come già detto all'inizio del capitolo, riduciamo il problema a simmetria radiale. Ciò si consegue facilmente osservando che, via il principio di Pólya-Szego (1.2.10) e la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.2.7), il primo membro della (3.0.6) decresce mentre il secondo cresce quando al posto di u ed Ω si inseriscono $u^\#$ ed $\Omega^\#$. Infatti

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \geq \int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^p dx,$$

mentre

$$\int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega^\#} \frac{(u^\#)^2}{|x|^2} dx,$$

ed

$$\int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx \leq \int_{\Omega^\#} \frac{(u^\#)^2}{|x|^\alpha} dx,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx &\geq \int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^p dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega^\#} \frac{(u^\#)^2}{|x|^2} dx \geq \\ &\geq C(\alpha, \Omega) \|u^\#\|_{L(\frac{2N}{N-\alpha}, 2)}^2 \geq C(\alpha, \Omega) \|u\|_{L(\frac{2N}{N-\alpha}, 2)}^2. \end{aligned}$$

Introduciamo ora una opportuna omotetia che ci consente di normalizzare la (3.0.6) rispetto alla costante $C(\alpha, \Omega)$, cioè ci trasforma la (3.0.6) nella più semplice disuguaglianza

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{B_R} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \int_{B_R} \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx, \quad (3.1.1)$$

dove u a simmetria radiale ed il raggio R è da determinarsi opportunamente. Posto quindi

$$y = kx, \quad (3.1.2)$$

con $k > 0$, se scegliamo

$$s = kr,$$

ed

$$z(s) = u\left(\frac{s}{k}\right), \quad (3.1.3)$$

allora la (3.0.6) diventa

$$\frac{1}{k^{N-2}} \int_0^{kR} (z')^2 s^{N-1} ds - \frac{(N-2)^2}{4} \frac{1}{k^{N-2}} \int_0^{kR} z^2 s^{N-3} ds \geq \frac{C(\alpha, \Omega)}{k^{N-\alpha}} \int_0^{kR} z^2 s^{N-\alpha} ds. \quad (3.1.4)$$

Fissato k in modo tale che

$$\frac{1}{k^{N-2}} = \frac{C(\alpha, \Omega)}{k^{N-\alpha}},$$

vale a dire

$$k^{2-\alpha} = C(\alpha, \Omega),$$

l'omotetia (3.1.2), la quale tra l'altro trasforma la sfera $\Omega^\#$ nella sfera B_R di centro l'origine e raggio $C(\alpha, \Omega)^{\alpha-2}R$, ci consente di ricondurre lo studio della (3.0.6) a quello della più semplice disuguaglianza (3.1.1). Con abuso di notazioni abbiamo continuato ad indicare con u la funzione denotata nella (3.1.3) con z .

Iniziamo col provare l'asserto in dimensione $N = 2$. Ponendo $N = 2$ nella (3.1.1) e rinominando u con v , la disuguaglianza si riduce a

$$\int_0^R (v')^2 r dr \geq \int_0^R v^2 r^{1-\alpha} dr, \quad \forall v \in H_0^1(0, R). \quad (3.1.5)$$

Procediamo ora con tecniche classiche del Calcolo delle Variazioni. Consideriamo perciò il funzionale associato alla (3.1.5)

$$J(v) = \int_0^R \left[(v')^2 r - v^2 r^{1-\alpha} \right] dr, \quad (3.1.6)$$

e la relativa equazione di Eulero

$$v''r + v' + v r^{1-\alpha} = 0. \quad (3.1.7)$$

Come ben noto, le funzioni lungo cui la (3.1.5) si riduce all'uguaglianza corrispondono alle soluzioni di tale equazione. Integrando la (3.1.7) ricaviamo la seguente

soluzione

$$W(r) = J_0 \left(\frac{r^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{(2-\alpha)k}}{(2-\alpha)^{2k} (k!)^2},$$

con J_0 funzione di Bessel di ordine zero. Dalle proprietà di cui gode J_0 , deduciamo che $W(r)$ è decrescente, soddisfa le condizioni iniziali $W(0) = 1$ ed $W'(0) = 0$ e possiede uno zero, cioè esiste $w_0 \in [0, R]$ tale che $W(w_0) = 0$.

Considerata ora la famiglia di estremali ad un parametro $v(r) = cW(r)$, con $c \in \mathbb{R}$, il passo successivo consiste nel provare che tale famiglia minimizza il funzionale (3.1.6). A tal fine scegliamo il raggio $R = w_0$ ed immergiamo $W(r)$ nel campo di estremali ottenuto ricoprendo la striscia $(0, R) \times \mathbb{R}$ con la famiglia di estremali $cW(r)$. Tale campo è definito da $(1, \Phi(r, v))$, dove $\Phi(r, v) = \frac{v(r)W'(r)}{W(r)}$ (si veda [69], Lemma 3.1).

Denota con $f(r, v, v')$ la funzione integranda nella (3.1.6), la forma differenziale

$$\zeta = P(r, v)dr + Q(r, v)dv$$

i cui coefficienti sono

$$P(r, v) = f(r, v, \Phi(r, v)) - \Phi(r, v)f_{v'}(r, v, \Phi(r, v)),$$

$$Q(r, v) = f_{v'}(r, v, \Phi(r, v)),$$

è esatta (si veda [69]), come tale è nullo l'integrale di ζ lungo il cammino chiuso rappresentato nella figura 1. Questo ci consente di esprimere, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $w \in H_0^1(0, R)$, $J(v)$ come segue

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_0^R [f(r, w, w') - f(r, w, \Phi(r, w)) + (\Phi(r, w) - w')f_{v'}(r, w, \Phi(r, w))] dr + \\ &+ \int_0^\varepsilon [f(r, W(\varepsilon), \Phi(r, W(\varepsilon))) - \Phi(r, W(\varepsilon))f_{v'}(r, W(\varepsilon), \Phi(r, W(\varepsilon)))] dr + \\ &+ \int_\varepsilon^R f(r, W, W') dr. \end{aligned}$$

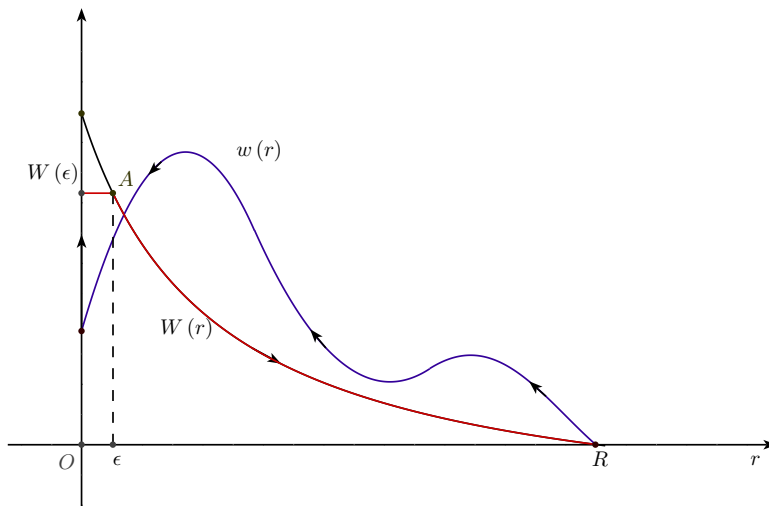


Figura 1

Si può provare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} [f(r, W(\varepsilon), \Phi(r, W(\varepsilon))) - \Phi(r, W(\varepsilon)) f_w(r, W(\varepsilon), \Phi(r, W(\varepsilon)))] dr = 0.$$

Inoltre viene soddisfatta la cosiddetta *condizione di Weierstass*: la funzione Eccesso di Weierstass

$$\mathcal{E}(r, w, y, y_1) = f(r, w, y) - f(r, w, y_1) + (y_1 - y) f_w(r, w, y_1),$$

risulta essere positiva per ogni y_1, y in \mathbb{R} . Questa condizione è banalmente soddisfatta in quanto si ha

$$\begin{aligned} & f(r, w, y) - f(r, w, y_1) + (y_1 - y) f_w(r, w, y_1) = \\ & = \left[(y')^2 - \frac{(N-2)^2 w^2}{4 r^2} - \frac{w^2}{r^2} - (y_1')^2 + \frac{(N-2)^2 w^2}{4 r^2} + \frac{w^2}{r^2} - 2(y - y_1) y_1 \right] = \\ & = \left[(y')^2 - (y_1')^2 \right]^2. \end{aligned}$$

Il fatto che $W(r)$ sia immergibile nel campo $(1, \Phi(r, v))$ unitamente alla condizione di Weierstass ci assicurano che

$$J(w) \geq J(W),$$

per ogni $w \in H_0^1(0, R)$ e dunque $W(r)$ costituisce un minimo per $J(v)$. In conclusione ricaviamo che per $N = 2$ la funzione $W(r)$ è ottimale anche nella (3.1.5) e quindi nella (3.1.1) a patto di scegliere $R = w_0$.

Siano ora $N \geq 3$. Effettuiamo cambio di variabili suggerito da Brezis e Vazquez in [24],

$$u(r) = r^{-\frac{N-2}{2}} v(r), \quad r = |x|, \quad (3.1.8)$$

assumendo che $v(0) = 0$; osserviamo che quest'ultima condizione è da imporre se si vuole che $u \in H_0^1(B_R)$. La (3.1.8) ci consente di ridurre la dimensione del problema al caso bidimensionale, e dunque di ricondurre lo studio della (3.1.1) a quello della (3.1.5) con u al posto di v . Supponiamo per semplicità che $u \in C_0^1(B_R)$; non è restrittivo provare il nostro risultato sotto questa ipotesi in quanto, per densità, esso si estende alle funzioni $u \in H_0^1(B_R)$. Tenuto conto di quanto già ottenuto per $N = 2$, deduciamo che la (3.1.1) viene soddisfatta a patto di scegliere $R = w_0$.

Una volta ottenuta la (3.1.1) per $R = w_0$, per ritornare alla (3.0.6) dobbiamo richiedere che $C(\alpha, \Omega)^{\alpha-2} R = w_0$, cioè

$$C(\alpha, \Omega) = w_0^{2-\alpha} \frac{\omega_N^{\frac{2}{N}}}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{N}}}.$$

In questo modo, infatti, ricaviamo la (3.0.6) effettuando nuovamente la sostituzione $z(s) = u\left(\frac{s}{k}\right)$ e successivamente il cambio di variabili $s = kr$.

Osserviamo infine che la costante $C(\alpha, \Omega) = w_0^{2-\alpha} \frac{\omega_N^{\frac{2}{N}}}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{N}}}$ è ottimale ma non è mai raggiunta; ciò è dovuto al fatto che se fosse raggiunta, nella (3.1.5) varrebbe l'uguaglianza, il che avviene in corrispondenza delle funzioni $v(r) = cW(r)$. Dalla (3.1.8) segue che le funzioni che realizzano la (3.0.6) con il segno di uguaglianza sono del tipo

$$u(|x|) = c|x|^{-\frac{N-2}{2}} W(|x|),$$

ma esse non appartengono ad H_0^1 giacchè $W(0) = 1$, come tale $C(\alpha, \Omega)$ non è mai raggiunta. ■

3.2 *Caso della disuguaglianza di Hardy con resto in uno spazio L^p*

I risultati descritti nel paragrafo precedente hanno portato a chiederci se fosse possibile applicare la stessa tecnica anche al fine di determinare la miglior costante $C(p, \Omega)$ nella (2.3.5), cioè nella disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^p}^p,$$

quando $p = 3$. Ricordiamo che tale disuguaglianza è stata dimostrata in [43] da Gazzola, Granau e Mitidieri; essi hanno ottenuto la stima per ogni $1 < p < N$ ed $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, nel lavoro appena citato è stata effettuata solo una analisi del comportamento asintotico di $C(p, \Omega)$, ma non ne è stato calcolato il valore ottimale. Il risultato descritto in questo paragrafo e contenuto nel lavoro [31] risolve questa problematica almeno nel caso $p = 3$, cioè nella disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^3 dx - \left(\frac{N-3}{3} \right)^3 \int_{\Omega} \frac{|u|^3}{|x|^3} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^3}^3. \quad (3.2.1)$$

Come nel teorema 3.1.1, il primo passo consiste nel ridurre il problema a simmetria radiale. Sostituiamo dunque u con $u^\#$ ed Ω con $\Omega^\#$. Il principio di Pólya-Szego (1.2.10) e la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.2.7) implicano che il primo membro della (3.2.1) decresce mentre il secondo resta invariato.

Utilizzando nuovamente l'omotetia (3.1.2), essa trasforma la sfera $\Omega^\#$ nella sfera B_R di centro l'origine e raggio $C(p, \Omega)^3 R$ e ci consente di riscrivere la disuguaglianza (3.2.1) come

$$\int_{B_R} |\nabla u|^3 dx - \left(\frac{N-3}{3} \right)^3 \int_{B_R} \frac{|u|^3}{|x|^3} dx \geq \int_{B_R} u^3 dx, \quad \forall u \in W_0^{1,3}(\Omega). \quad (3.2.2)$$

Effettuiamo il classico cambio di variabili

$$u(r) = r^{-\frac{N-3}{3}}v(r), \quad r = |x|, \quad (3.2.3)$$

con $v(0) = 0$ e prendiamo per semplicità $u \in C_0^1(B_R)$. La disuguaglianza (3.2.2) diventa

$$\int_0^R \left[r^2 (v')^3 + (N-3)rv (v')^2 \right] dr \geq \int_0^R r^2 v^3 dr, \quad v(R) = 0. \quad (3.2.4)$$

Il funzionale associato alla (3.2.4) è dato da

$$J(v) = \int_0^R \left[r^2 (v')^3 + (N-3)rv (v')^2 - r^2 v^3 \right] dr; \quad (3.2.5)$$

per determinare il valore della migliore costante nella (3.2.1) occorre minimizzare tale funzionale, come mostreremo nel teorema 3.2.1.

3.2.1 Determinazione della migliore costante

Teorema 3.2.1 *Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^N , con $N > 3$ e $p = 3$. Allora esiste una costante positiva $C = C(p, |\Omega|)$ per la quale vale la disuguaglianza (2.3.5) per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Il valore ottimale della costante C è dato da*

$$C(p, \Omega) = v_0^3 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{3}{N}},$$

dove ω_N è la misura N -dimensionale della sfera unitaria di \mathbb{R}^N e v_0 è il primo zero della soluzione dell'equazione di Eulero del funzionale (3.2.5).

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale (3.2.5) e la relativa equazione di Eulero

$$2r^2 v' v'' - \frac{2}{3}(N-3)rv v'' + \left(\frac{9-N}{3} \right) r (v')^2 - \frac{2}{3}(N-3)vv' - r^2 v^2 = 0. \quad (3.2.6)$$

Al fine di ottenere un minimo per $J(u)$ occorre risolvere tale l'equazione.

Procedendo dapprima tramite una integrazione per serie è possibile ricavare soltanto una formulazione ricorsiva dei coefficienti, ma non l'espressione esplicita della soluzione. Per questa motivazione la (3.2.6) viene riformulata in termini di un problema ai valori iniziali, i cui dati sono proprio i primi due coefficienti della serie. Posto $v(r) = y_1(r)$ e $v'(r) = y_2(r)$, la (3.2.6) diventa

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & \text{in } B_R \\ y_2' = \frac{\frac{y_1^2}{r} - \left(\frac{9-N}{3}\right)y_2^2 + \frac{2}{3}(N-3)\frac{y_1 y_2}{r}}{2r y_2 - \frac{2}{3}(N-3)y_1} & \text{in } B_R \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} . \quad (3.2.7)$$

Si può dimostrare che il problema (3.2.7) ammette un'unica soluzione. Infatti, se denotiamo con $g(r, y_1, y_2)$ il secondo membro della (3.2.7), cioè

$$g(r, y_1, y_2) = \left(y_2, \frac{\frac{y_1^2}{r} - \left(\frac{9-N}{3}\right)y_2^2 + \frac{2}{3}(N-3)\frac{y_1 y_2}{r}}{2r y_2 - \frac{2}{3}(N-3)y_1} \right),$$

allora la sua matrice jacobiana è data da

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{18t^2 y_1 y_2 - 3t(N-3)y_1^2 + (N-3)^2 y_2^2}{2[3t y_2 - (N-3)y_1]^2} & \frac{3t^2(N-9)y_2^2 - 2t(N-9)(N-3)y_1 y_2 - [2(N-3)^2 + 9t^3]y_1^2}{2t[3t y_2 - (N-3)y_1]^2} \end{pmatrix}.$$

Prolungando per continuità nell'origine sia g che J_g , il problema (3.2.7) soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy e dunque esso ammette un'unica soluzione.

A questo punto si effettua una analisi qualitativa di tale soluzione attraverso strumenti di natura numerica. In particolare, scelto un qualunque operatore *consistente* (cfr. [71]), si discretizza il problema (3.2.7) e se ne calcola una famiglia di soluzioni discrete. Successivamente viene utilizzato lo schema di Lax-Richtmyer per provare che la successione di soluzioni del problema discreto associato a (3.2.7) prodotta al variare del passo di discretizzazione converge a quella del problema

continuo (3.2.7).

L'idea che sta alla base dello schema è la seguente: dato un problema continuo P ed il problema discreto ad esso associato, se P verifica la condizione di Lipschitz allora, fissato un qualunque metodo numerico consistente, esso è anche *zero-stabile*, dunque la successione delle soluzioni discrete y_h converge alla soluzione y del problema continuo. Poichè il sistema (3.2.7) soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy,

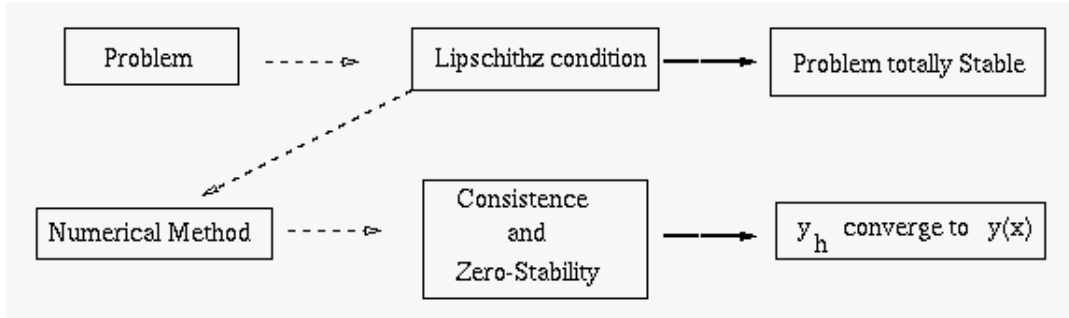


Figura 2: Schema di Lax-Richtmyer

allora per esso vale anche il teorema di Lax.

Lo studio delle approssimazioni discrete ci restituisce quindi un'analisi qualitativa della soluzione $V(r)$ del problema (3.2.6).

Per descrivere l'andamento di $V(r)$ si utilizza a titolo di esempio il metodo di Eulero. Esso fornisce la seguente versione discreta del problema (3.2.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{n+1} = z_n + hq_n \\ q_{n+1} = q_n + h \frac{\frac{z_n^2}{r_n} - \left(\frac{9-N}{3}\right)q_n^2 + \frac{2}{3}(N-3)\frac{z_n q_n}{r_n}}{2r_n q_n - \frac{2}{3}(N-3)z_n} \\ z_0 = 1 \\ q_0 = 0 \end{array} \right. ,$$

dove $r_i = r_0 + ih$, $i = 1, \dots, n$, $h = \frac{R}{n}$, $z_i = y_1(r_i)$ ed $q_i = y_2(r_i)$. Le successioni discrete z_n e q_n rappresentano rispettivamente un'approssimazione di $V(r) := y_1(r)$ e $V'(r) := y_2(r)$.

Da un calcolo diretto si deduce che

(1) la successione $q_n < 0$, ovvero l'approssimazione discreta della derivata prima è negativa, quindi $V(r)$ è decrescente;

(2) il valore iniziale di ciascuna approssimazione $z_0 = V(0) = 1$ è positiva ed esiste un valore $\bar{r} \in [0, R]$ per il quale si ha $z_n(\bar{r}) = V(\bar{r}) < 0$.

Le seguenti tabelle e grafico mostrano le proprietà (1) e (2) appena descritte nel caso esemplificativo $N = 11$:

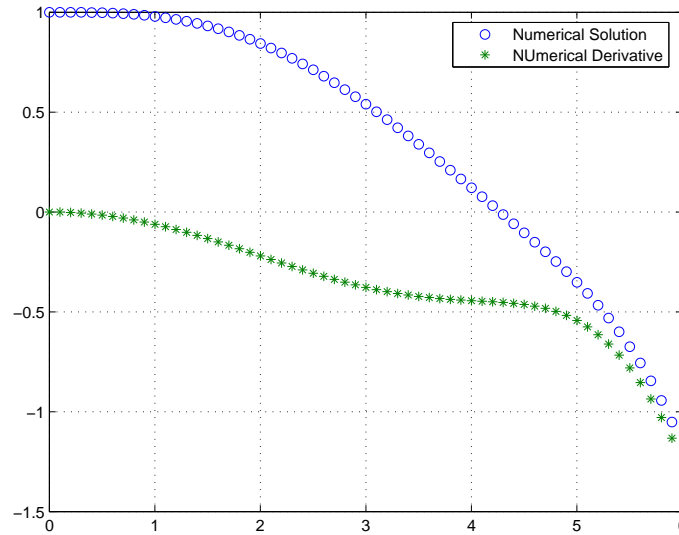


Figura 3: Andamento della soluzione numerica e della sua derivata

r_n	Soluzione numerica z_n	Derivata q_n
0.0010	1.0000	0
0.3010	0.9994	-0.0057
0.9010	0.9849	-0.0501
1.2010	0.9644	-0.0876
2.4010	0.7415	-0.2899
2.7010	0.6472	-0.3374
3.9010	0.1655	-0.4410
4.2010	0.0319	-0.4496
4.5010	-0.1048	-0.4633
5.1010	-0.4078	-0.5751

Tabella 1 : Sequenze nel Metodo di Eulero

Essendo la funzione $V(r)$ continua, le proprietà (1) e (2) implicano che essa ha uno zero nell'intervallo $[0, R]$, cioè esiste $v_0 \in [0, R]$ tale che $z_n(v_0) = V(v_0) = 0$. Dal momento che questa procedura è indipendente dalla dimensione N e dal metodo adottato, purchè esso sia consistente, allora concludiamo che la soluzione $V(r)$ dell'equazione di Eulero (3.2.6) ha uno zero v_0 ed è decrescente nell'intervallo $[0, R]$ per ogni $N > 3$.

Tali proprietà risultano sufficienti ad applicare i metodi classici del Calcolo delle Variazioni al fine di minimizzare il funzionale (3.2.5).

Scelto infatti $R = v_0$, in modo analogo a quanto fatto nel teorema 3.1.1 si prova che $V(r)$ è immergibile nel campo di estremali $(1, \Phi(r, v))$, con $\Phi(r, v) = \frac{v(r)V'(r)}{V(r)}$ (si veda [69], Lemma 3.1).

Denotata con $f(r, v, v')$ la funzione integranda (3.2.5), essa soddisfa inoltre la

condizione di Weierstass

$$\mathcal{E}(r, w, y, y_1) = f(r, w, y) - f(r, w, y_1) + (y_1 - y) f_w(r, w, y_1) \geq 0;$$

ciò consegue dalla decrescenza della funzione $V(r)$ in $[0, R]$, invero

$$\begin{aligned} f(r, w, y) - f(r, w, y_1) + (y_1 - y) f_w(r, w, y_1) &= \\ &= y_1^3 - y^3 - 3y_1^2(y_1 - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Il fatto che $V(r)$ sia immergibile nel campo $(1, \Phi(r, v))$ unitamente alla condizione di Weierstass ci assicurano che $V(r)$ costituisce un minimo per $J(v)$ (ci si riferisca a [69], teorema 3.3.1). Utilizzando nuovamente il cambiamento di variabili (3.2.3) e ritornando alla u , si ottiene la (3.2.2) con $R = v_0$. La restrizione $u \in C_0^1(B_R)$ può essere poi rimossa per densità.

Procedendo come nel teorema 3.1.1 attraverso l'omotetia (3.1.2) si ricava che il valore ottimale di $C(p, \Omega)$ in (2.3.5) quando $p = 3$ è dato da

$$C(p, \Omega) = v_0^3 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{3}{N}}.$$

Infine, osserviamo che la costante $C(p, \Omega) = v_0^3 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{3}{N}}$ è ottimale ma non è mai raggiunta; ciò è dovuto al fatto che se fosse raggiunta, nella (2.3.5) varrebbe l'uguaglianza, il che avviene in corrispondenza delle funzioni

$$u(|x|) = c |x|^{-\frac{N-3}{3}} V(|x|),$$

che non sono in $W_0^{1,3}$ giacchè $V(0) = 1$. ■

3.2.2 Alcune considerazioni applicative sugli schemi numerici

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di indagare da un punto di vista numerico l'analisi qualitativa descritta in precedenza. In primo luogo occorre precisare che

cosa si intenda da un punto di vista numerico per *zero di una funzione*; con l'espressione " $V(r)$ si annulla nel punto \bar{r} " s'intende infatti dire che V assume nel punto \bar{r} un valore prossimo allo zero, con un'approssimazione che dipende dal tipo di esperimento condotto. Inoltre \bar{r} rappresenta una approssimazione dello zero di $V(r)$, avente in comune con esso k cifre significative se $\frac{|r_0 - \bar{r}|}{r_0} < 10^{-k}$.

Dimostriamo quanto asserito nel paragrafo precedente relativamente al comportamento di $V(r)$ attraverso alcune simulazioni numeriche. Si utilizzano in particolare una collezione di solutori dell'ambiente ODE suite di Matlab per la risoluzione di problemi di equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali (si veda [70]).

In un primo esperimento si fissa $N = 7$ come caso esemplificativo, mentre l'intervallo di integrazione della ODE è $[0, 5]$. La seguente tabella riporta l'utilizzo dei nuclei computazionali basati sui metodi numerici Runge-Kutta (4,5), Adams-Bashforth-Moulton ed Gear (si veda [71]).

Risolutore Numerico	Approssimazione dello zero	Numero di passi
ode23	(3.671, 1.574e-02)	29
ode45	(3.677, 1.279e-02)	45
ode113	(3.706, 2.854e-05)	34

Tabella 2: Integrazione Numerica della ODE

La seconda colonna riporta l'approssimazione del valore che annulla $V(r)$ ed il valore ivi assunto da $V(r)$ nel senso prima precisato. Osserviamo che il solutore `ode23` è più efficiente in termini di passi necessari a raggiungere la accuratezza richiesta, mentre `ode113` è da preferire in termini di accuratezza dell'approssimazione dello zero in quanto $V(3.706)$ è dell'ordine di 10^{-5} .

Nella seguente tabella fissiamo infine come solutore numerico l' `ode113` e mostriamo che $V(r)$ si annulla per ogni N , ma che il valore v_0 dello zero della funzione $V(r)$ dipende da N .

N	v_0	Approssimazione dello zero
7	3.706	2.854e-05
9	3.795	9.634e-02
13	4.147	1.566e-01
15	4.810	3.403e-02

Tabella 3: Localizzazione di v_0

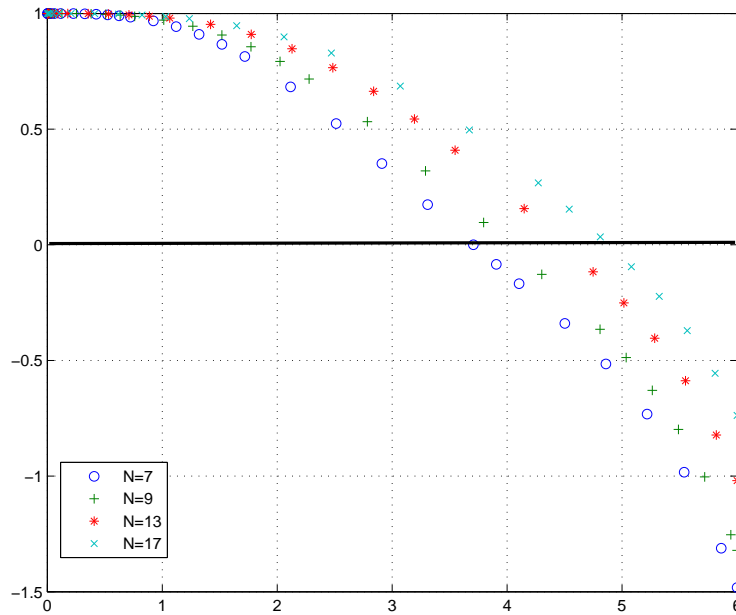


Figura 3: Andamento di $V(r)$ per differenti valori di N

Capitolo IV

DISUGUAGLIANZA TIPO EGNELL

Nel secondo capitolo sono state introdotte le disuguaglianze di Sobolev e di Hardy e ne sono state ricordate le principali caratteristiche. Entrambe le disuguaglianze possono essere pensate come caso particolare di una disuguaglianza più generale, dovuta ad Egnell (cfr. [62])

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq C(p, \nu) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} |x|^\nu dx \right)^{\frac{N-p}{p(N+\nu)}}, \quad (4.0.8)$$

con $1 < p < N$, $-p < \nu \leq 0$. Il valore ottimale della costante è stato calcolato in [35] con metodi analoghi a quelli utilizzati da Talenti in [72] per stimare la miglior costante nella disuguaglianza di Sobolev (si veda anche [50]). Esso corrisponde al minimo del funzionale¹

$$F(u) = \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu}},$$

il cui valore è dato da

$$C(p, \nu) = \pi^{\frac{N}{2}} \frac{p+\nu}{p(N+\nu)} 2^{\frac{p+\nu}{p(N+\nu)}} (N+\nu)^{\frac{1}{p}} (N-p)^{\frac{p-1}{p}} (p-1)^{-\frac{p-1}{p} + \frac{p+\nu}{p(N+\nu)}} \times \quad (4.0.9)$$

$$\times (p+\nu)^{-\frac{p+\nu}{p(N+\nu)}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)(p-1)}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N+\nu}{p+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)p}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right]^{\frac{p+\nu}{p(N+\nu)}};$$

¹Indichiamo con $\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu}$, $1 < p < N$, $-p < \nu \leq 0$, lo spazio costituito dalle funzioni per cui

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} |x|^\nu dx \right)^{\frac{N-p}{p(N+\nu)}} < \infty.$$

tale costante viene raggiunta, vale a dire la (4.0.8) viene realizzata con il segno di uguaglianza in corrispondenza delle funzioni

$$u(x) = \frac{h}{\left[1 + k |x|^{\frac{p+\nu}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p+\nu}}} \quad (4.0.10)$$

dove h e k sono costanti positive. Osserviamo esplicitamente che la disuguaglianza di Egnell si riduce a quella di Sobolev per $\nu = 0$ e $C(p, 0) = S(N, p)$.

Se riguardiamo poi la disuguaglianza di Egnell in termini di immersioni tra spazi, essa esprime l'immersione continua di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ nello spazio di Lebesgue $L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}(\mathbb{R}^N)$ pesato rispetto al peso $|x|^\nu$, con $1 < p < N$, $-p < \nu \leq 0$. A partire dalla disuguaglianza di Sobolev in Lorentz (si veda [6]) e dalle proprietà degli spazi di Lorentz (2.1.2), si può ricavare inoltre la seguente catena di inclusioni

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L(p^*, p) \hookrightarrow L\left(p^*, \frac{p(N+\nu)}{N-p}\right) \hookrightarrow L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}(\mathbb{R}^N, |x|^\nu),$$

come tale possiamo asserire che la disuguaglianza di Egnell risulta essere una disuguaglianza più fine di quella di Sobolev. Occorre infine ricordare che la disuguaglianza di Egnell può essere a sua volta rivista come caso particolare di una famiglia più generale di disuguaglianze, dette disuguaglianze di Caffarelli-Kohn-Nirenberg (cfr. [25]), di cui sono note l'espressione delle migliori costanti e delle funzioni estremali (cfr. [26]). Tali migliori costanti in \mathbb{R}^N non sono raggiunte, come tale in letteratura sono state determinate a partire da esse varie stime con resto; si vedano ad esempio [1], [2] e [80].

In questo capitolo la disuguaglianza di Egnell viene ricavata tramite una disuguaglianza intermedia che fa intervenire, oltre alle norme sopra considerate, la norma $L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}$ – *debole*. Tale disuguaglianza intermedia può essere in un certo senso rivista come disuguaglianza di Egnell con resto.

4.1 Una disuguaglianza di Egnell generalizzata

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di provare una disuguaglianza di tipo Egnell generalizzata, che coinvolge cioè le norme di u negli spazi $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}(\mathbb{R}^N, |x|^\nu)$ ed $L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} - \text{debole}$; come fatto nel caso delle disuguaglianze di tipo Hardy, iniziamo col ridurre il problema a simmetria radiale sostituendo infatti u con il suo riordinamento decrescente $u^\#$. Successivamente si deve risolvere un classico problema di Calcolo delle Variazioni unidimensionale. A tal fine si modifica opportunamente la tecnica impiegata in [7] per la disuguaglianza di Sobolev. I risultati che verranno descritti sono contenuti nel lavoro [65].

Teorema 4.1.1 *Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$ e $-p < \nu \leq 0$. Allora si ha*

$$\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, \infty} \|\nabla u\|_{L^p} \geq A(N, p) \|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu} + B(N, p) \|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, w}, \quad (4.1.1)$$

con

$$A(N, p) = \left(\frac{N-p}{p} \right)^p, \quad (4.1.2)$$

ed

$$B(N, p) = 2\pi^{\frac{N}{2}} (N-p)^{p-1} (p-1)^{2-p-\frac{(N-p)(p-1)}{p+\nu}} p^{\frac{p(N-p)}{p+\nu}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)(p-1)}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N+\nu}{p+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)p}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right]. \quad (4.1.3)$$

Dimostrazione. Il primo passo consiste nel ridurre il problema a simmetria radiale. Sostituiamo dunque u con u^* ed Ω con Ω^* . La disuguaglianza di Hardy-Litthewood (1.2.7) ed il principio di Pólya-Szego (1.2.10) implicano che il primo membro della (4.0.8) decresce, mentre il secondo membro cresce. Questo ci assicura che è sufficiente dimostrare il teorema nel caso di funzioni a simmetria radiale; i risultati ottenuti saranno validi anche sotto ipotesi generali.

Supponiamo inoltre che $u \in C_0^1(\Omega)$, tale restrizione sarà rimossa per densità.

Fissiamo $a > 0$ e consideriamo la seguente famiglia di estremali ad un parametro della (4.0.8)

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(|x|) = \frac{\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}}{\left[1 + (a\varepsilon |x|)^{\frac{p+\nu}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p+\nu}}}. \quad (4.1.4)$$

Se si calcola la norma delle funzioni u_ε nello spazio $L^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}}(\mathbb{R}^N, |x|^\nu)$, si osserva che essa non dipende da ε . Infatti si ha

$$\|u_\varepsilon\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu} = 2\pi^{\frac{N}{2}} \frac{p-1}{p+\nu} a^{-N-\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)(p-1)}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N+\nu}{p+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)p}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}. \quad (4.1.5)$$

Se consideriamo il funzionale

$$J(u) = \omega_N \int_0^\infty |u'|^p r^{N-1} dr - \omega_N \frac{(N-p)^p}{(p-1)^{p-1}} a^{p+\nu} \int_0^\infty u^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} r^{N-1+\nu} dr, \quad (4.1.6)$$

e la relativa equazione di Eulero

$$-\Delta_p u_\varepsilon = \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1} a^{p+\nu} (N+\nu) u_\varepsilon^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}-1}, \quad (4.1.7)$$

si può provare che le u_ε sono soluzioni di tale equazione.

Vogliamo dimostrare che $J(u)$ raggiunge il suo minimo in corrispondenza delle u_ε .

A tal fine denotiamo con $\gamma_a(r)$ la curva involuppo della famiglia delle u_ε . Essa è data da

$$\gamma_a(r) = \frac{(p-1)^{\frac{(p-1)(N-p)}{p(p+\nu)}}}{p^{\frac{N-p}{p+\nu}}} (ar)^{-\frac{N-p}{p}};$$

si può osservare che le u_ε ricoprono la regione di piano contenuta nel primo quadrante e giacente al di sotto di $\gamma_a(r)$. Chiamiamo tale regione T .

Fissiamo poi v una qualunque funzione radiale, non negativa, a supporto compatto e sufficientemente regolare e scegliamo

$$a = \frac{(p-1)^{\frac{p-1}{p+\nu}}}{p^{\frac{p}{p+\nu}}} \frac{1}{\|v\|_{\frac{p}{N-p}, w}}, \quad (4.1.8)$$

il più piccolo valore per il quale si abbia $v(r) \leq \gamma_a(r)$ per ogni r positivo; la curva involuppo in corrispondenza di tale a diviene

$$\gamma(r) = \|v\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, w} r^{-\frac{N-p}{p}}.$$

Consideriamo a questo punto la funzione $\gamma(r)$ e la famiglia (4.1.4). Il grafico di ciascuna delle funzioni u_ε tocca $\gamma(r)$ in un punto che divide il grafico stesso in due curve $C_1(\varepsilon)$ e $C_2(\varepsilon)$. Le due famiglie di curve così ottenute al variare di ε giacciono tutte nella regione T e generano due differenti campi di estremali per il funzionale (4.1.6). Denotiamo tali campi con $(1, q_1(r, y))$ e $(1, q_2(r, y))$ e per semplicità le due curve $C_1(\varepsilon)$ e $C_2(\varepsilon)$ con C_1 e C_2 . Nel contempo l'involuppo interseca in un punto $P(\alpha, \gamma(\alpha))$ anche il grafico della funzione $v(r)$, che risulta così diviso in due archi Γ_1 e Γ_2 .

Per minimizzare $J(u)$ procediamo con tecniche classiche del Calcolo delle Variazioni. Posto

$$f(r, v, v') = \omega_N r^{N-1} \left(|v'|^p - \frac{(N-p)^p}{(p-1)^{p-1}} a^{p+\nu} u^{\frac{p(N+\nu)}{N-p}} r^\nu \right),$$

il funzionale $J(u)$ si può esprimere come

$$J(u) = \int_0^\alpha f(r, v, v') dr + \int_\alpha^\infty f(r, v, v') dr = J_1(v) + J_2(v).$$

Stimiamo separatamente $J_1(v)$ e $J_2(v)$; in particolare mostriamo che $J_1(v)$ si immerge nel campo di estremali $(1, q_1(r, y))$, mentre $J_2(v)$ in $(1, q_2(r, y))$. Poichè la funzione $f(r, v, v')$ è convessa rispetto alla terza variabile, essa verifica la condizione di Weierstass

$$\mathcal{E}(r, w, y, y_1) = f(r, v, v') - f(r, v, q_1) + (q_1 - v') f_{v'}(r, v, q_1) \geq 0,$$

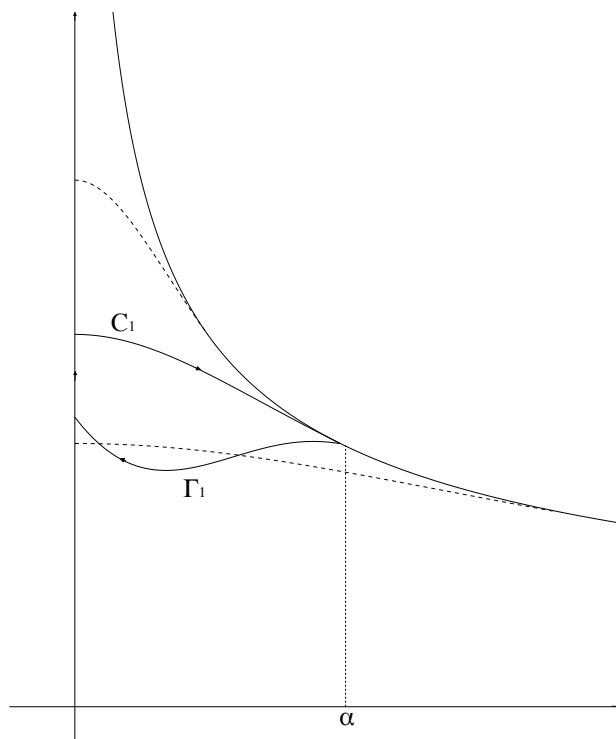
e quindi

$$J_1(v) \geq \int_0^\alpha f(r, v, q_1) + (v' - q_1) f_{v'}(r, v, q_1) dr.$$

Inoltre la forma differenziale

$$[f(r, v, q_1) - q_1 f_{v'}(r, v, q_1)] dr + f_{v'}(r, v, q_1) dv,$$

è esatta (si veda [69]), come tale è nullo il suo integrale lungo un qualsiasi cammino chiuso. Scegliamo come particolare cammino quello costituito dalla curva C_1 percorsa nel verso delle r crescenti tra 0 e α , la curva Γ_1 percorsa nel verso delle r decrescenti sempre tra 0 ed α , ed il segmento intercettato sull'asse y da C_1 e Γ_1 percorso nel verso delle y decrescenti e calcoliamo l'integrale della forma lungo



tale percorso. Essendo nullo l'integrale lungo il segmento verticale si ricava che

$$\int_0^\alpha f(r, v, q_1) + (v' - q_1) f_{v'}(r, v, q_1) dr = \int_0^\alpha f(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = J_1(u_\varepsilon),$$

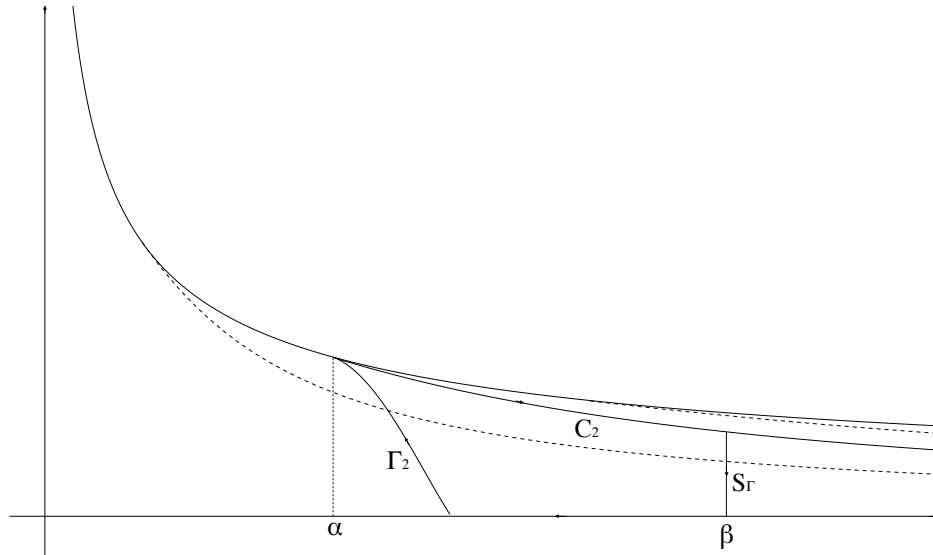
e dunque

$$J_1(v) \geq J_1(u_\varepsilon). \tag{4.1.9}$$

Procediamo in modo analogo per stimare $J_2(v)$. Consideriamo il secondo campo di estremali e la forma differenziale esatta

$$[f(r, v, q_2) - q_2 f_{v'}(r, v, q_2)] dr + f_{v'}(r, v, q_2) dv.$$

Questa volta calcoliamo l'integrale della forma lungo il cammino chiuso costituito da C_2 percorsa nel verso delle r crescenti tra α e β , dove β è un qualunque valore maggiore di α , la curva Γ_2 percorsa nel verso delle r decrescenti sempre tra α e β , ed il segmento verticale $r = \beta$ intercettato C_2 e Γ_2 percorso nel verso delle y decrescenti. Una analisi asintotica mostra che l'integrale della forma lungo il



segmento tende a zero per $\beta \rightarrow \infty$, come tale

$$J_2(v) \geq J_2(u_\varepsilon). \quad (4.1.10)$$

Dalle (4.1.9) e (4.1.10) segue che

$$J(v) \geq J(u_\varepsilon).$$

Andiamo ora a calcolare esplicitamente il valore di $J(u_\varepsilon)$ utilizzando l'espressione (4.1.5). Si ha

$$J(u_\varepsilon) = \|\|\nabla u_\varepsilon\|\|_{L^p}^p - \frac{(N-p)^p}{(p-1)^{p-1}} a^{p+\nu} \|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu} =$$

$$\begin{aligned}
&= C(p, \nu, |\Omega|) \|u_\varepsilon\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu}^p - \frac{(N-p)^p}{(p-1)^{p-1}} a^{p+\nu} \|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu} = \\
&= 2\pi^{\frac{N}{2}} a^{p-N} \frac{(N-p)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)(p-1)}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N+\nu}{p+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)p}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Essendo $J(v) \geq J(u_\varepsilon)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx \geq \frac{(N-p)^p}{(p-1)^{p-1}} a^{p+\nu} \|v\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, |x|^\nu}^p + 2\pi^{\frac{N}{2}} a^{p-N} \frac{(N-p)^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)(p-1)}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N+\nu}{p+\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{(N+\nu)p}{p+\nu}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Se sostituiamo nella precedente relazione ad a il valore dato dalla (4.1.8) e procediamo per densità ricaviamo la (4.1.1). ■

Osservazione 4.1.2 Una volta ottenuta la stima (4.1.1), la disuguaglianza di Egnell segue immediatamente da essa dividendo dapprima ambo i membri della (4.1.1) per la norma $\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, w}$ e andando poi a minimizzare rispetto a $\|u\|_{\frac{p(N+\nu)}{N-p}, w}$.

Capitolo V

DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV CON RESTO PER FUNZIONI CHE SI ANNULLANO SOLO SU UNA PARTE DEL BORDO

Lo studio di stime con resto per le disuguaglianze di Sobolev ed Hardy è stato ampiamente affrontato nei capitoli precedenti. Ci si chiede ora se sia possibile estendere tali risultati anche al caso di funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *che si annullano solo su una fissata parte* Γ_0 della frontiera di Ω , cioè funzioni appartenenti allo spazio

$$V^p(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ su } \Gamma_0\}, \quad \text{se } p > 1,$$

ed

$$V^1(\Omega) = \{u \in BV(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ su } \Gamma_0\}.$$

Per quanto concerne l'immersione tra gli spazi

$$V^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

la risposta alla questione è positiva, giacchè in [62] viene dimostrato che esiste una costante $K(p, \Omega) > 0$ per la quale vale

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq K(p, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}}, \quad \forall u \in V^p(\Omega). \quad (5.0.11)$$

Questa disuguaglianza rappresenta ovviamente l'analogo della Sobolev nello spazio $V^p(\Omega)$; la differenza sostanziale, però, tra le due disuguaglianze risiede nel fatto

che la miglior costante di Sobolev dipende solo da p e da N ; la costante ottimale nella (5.0.11), invece, dipende da Ω ed in particolare da come si sceglie la parte di bordo $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Inoltre in [57] viene dimostrato che non è possibile ottenere una stima dal basso per $K(p, \Omega)$ che valga in tutti gli aperti Ω .

Per tale ragione in [57] viene introdotta *una classe di aperti* caratterizzata in base alle proprietà geometriche di Γ_1 . Per caratterizzare tale classe si definisce dapprima la costante isoperimetrica $Q(\Gamma_1, \Omega)$ relativa Γ_1 :

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \sup_E \frac{|E|^{1-\frac{1}{N}}}{P_\Omega(E)},$$

dove l'estremo superiore è calcolato nell'insieme di tutti i sottoinsiemi misurabili E di Ω per i quali $\partial E \cap \Gamma_0$ non contiene alcun insieme di $(N-1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva, e $P_\Omega(E)$ denota il perimetro di E relativo ad Ω , (si veda [40], [64] ed il primo capitolo). Osserviamo inoltre che $Q(\Gamma_1, \Omega)$ non dipende solo da Ω , ma anche dalla scelta effettuata di Γ_1 .

Se poi Ω è un settore sferico $\Sigma(\alpha, R)$ di raggio R ed ampiezza $\alpha \in]0, \pi]$, posto $\tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \Sigma(\alpha, R) : |x| = R\}$ ed $\tilde{\Gamma}_1 = \partial\Sigma(\alpha, R) \setminus \tilde{\Gamma}_0$, allora la costante isoperimetrica relativa a $\tilde{\Gamma}_1$ assume il seguente valore (cfr. [57]):

$$Q(\tilde{\Gamma}_1, \Sigma(\alpha, R)) = \left(N\alpha^{\frac{1}{N}}\right)^{-1},$$

con α_N misura del settore di raggio unitario e ampiezza α . Inoltre, si può dimostrare che per ogni insieme Ω esiste un angolo $\alpha \in]0, \pi]$ tale che $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\alpha^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$. Tenuto conto di tutte queste considerazioni, è possibile definire la classe \mathcal{E}_{α_N} come quella costituita da tutti gli aperti Ω aventi costante isoperimetrica relativa a Γ_1 , $Q(\Gamma_1, \Omega)$, uguale a $\left(N\alpha^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$. Chiaramente, il settore $\Sigma(\alpha, R)$ appartiene a tale classe.

Fissato quindi $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, la miglior costante di immersione di $V^p(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$

è data da $K(p, \Omega)$:

$$K(p, \Omega) = \inf_{\substack{u \in V^p(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^{p^*}}};$$

in [57] viene dimostrato in particolare che

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq K(p, \alpha_N) \|u\|_{L^{p^*}}, \quad \forall u \in V^p(\Omega), \quad (5.0.12)$$

dove $K(p, \alpha_N)$ è la miglior costante relativa al settore $\Sigma(\alpha, R)$. Dalla (5.0.12) segue

$$K(p, \Omega) \geq K(p, \alpha_N).$$

Ulteriore differenza sostanziale con il caso della costante di Sobolev risiede nel fatto che $K(p, \Omega)$ può essere raggiunta. Come ci aspetta, ciò è legato ad opportune condizioni geometriche cui Γ_1 può o meno soddisfare. In particolare in [36], [57] e [4] sono elencate alcune di esse.

Nell'ipotesi in cui $K(p, \Omega)$ non viene raggiunta è possibile ricavare delle disuguaglianze con resto a partire dalla (5.0.12). Il primo risultato ottenuto in quest'ambito è stato contenuto in [36], dove viene ottenuto un miglioramento per la (5.0.12) tramite l'aggiunta a secondo membro di una norma L^s di u ,

$$\|\nabla u\|_{L^p}^p \geq [K(p, \alpha_N)]^p \|u\|_{L^{p^*}}^p + C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^p, \quad (5.0.13)$$

per $1 < p < N$, $u \in V^p(\Omega)$ e per ogni $0 < s < \frac{(p-1)N}{(N-p)}$; $C_s(\Omega)$ è una costante positiva che dipende solo da s ed Ω . Ovviamente la (5.0.13) rappresenta una generalizzazione della (2.2.8) quando $W_0^{1,p}(\Omega)$ viene sostituito da $V^p(\Omega)$.

Sempre in perfetta analogia con il caso $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la (5.0.13) non vale per l'esponente limite $s = \frac{(p-1)N}{(N-p)}$.

In questo capitolo viene esteso al caso delle funzioni $u \in V^p(\Omega)$ il risultato (2.2.9) di Brezis and Lieb; in altre parole mostriamo che è possibile raggiungere

l'esponente limite a patto di sostituire la norma L^p con la norma L^p – *debole*. Modificando opportunamente le tecniche introdotte nel lavoro [20], in [66] proviamo infatti che esiste una costante $C = C(\Omega)$ per cui si ha:

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq [K(2, \alpha_N)]^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2 \quad \forall u \in V^2(\Omega). \quad (5.0.14)$$

Questo risultato costituisce un miglioramento della (5.0.13) quando $p = 2$ and $N > 2$.

Prima di illustrare nel dettaglio quanto viene ricavato ci soffermiamo ad introdurre una nuova nozione di simmetrizzazione, l' α – *simmetrizzazione*, che si mostra essere la più adatta nello studio di funzioni che si annullano solo su una parte del bordo in quanto essa associa ad una funzione reale e misurabile u definita in Ω la funzione $C_\alpha u$ a simmetria sferica e definita in un settore di ampiezza α ed avente stessa misura di Ω .

5.1 α – *simmetrizzazione*

5.1.1 Definizione e disuguaglianza isoperimetrica

Denotiamo con $(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1})$ le coordinate polari in \mathbb{R}^N , dove $\vartheta_i \in [0, \pi]$, $1 \leq i \leq N - 2$ ed $\vartheta_{N-1} \in [0, 2\pi]$.

Definizione 5.1.1 *Si definisce settore di raggio R ed ampiezza $\alpha \in [0, 2\pi]$ l'insieme dato da*

$$\Sigma(\alpha, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq |x| \leq R, \quad \vartheta_i \in]0, \pi[, \quad \vartheta_{N-1} \in]0, \alpha[\}.$$

Fissato $\alpha \in [0, 2\pi]$ ed Ω un insieme aperto e limitato di \mathbb{R}^N , indichiamo con $C_\alpha(\Omega)$ il settore $\Sigma(\alpha, R)$ avente stessa misura di Ω ed ampiezza α . L' α – *simmetrizzazione* si definisce come segue:

Definizione 5.1.2 *Assegnata u funzione reale misurabile definita in Ω , l' α -simmetrizzazione è la trasformazione che ad u associa la funzione $C_\alpha u(x)$*

$$C_\alpha u(x) = u^*(\alpha_N |x|^N), \quad x \in C_\alpha(\Omega), \quad (5.1.1)$$

dove α_N indica la misura del settore unitario $\Sigma(\alpha, 1)$ di ampiezza α (cfr. [64]).

Le funzioni u e $C_\alpha u$ sono dunque equimisurabili, e gli insiemi di livello di $C_\alpha u$ sono settori aventi la stessa misura dei corrispondenti insiemi di livello di u . Osserviamo esplicitamente che tale definizione costituisce una generalizzazione di quella enunciata in [15] per funzioni di due variabili.

La funzione $C_\alpha u$ gode di proprietà analoghe a quelle del riordinamento sferico decrescente di u . In [64] si dimostra infatti che

Proposizione 5.1.3 *Supponiamo che u e v siano funzioni reali misurabili su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. L' α -simmetrizzata di u, $C_\alpha u$, è funzione non negativa e radiale decrescente nel settore $C_\alpha(\Omega)$. Inoltre,*

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega |u(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{C_\alpha(\Omega)} |C_\alpha u(x)|; \quad (5.1.2)$$

$$|v(x)| \leq |u(x)| \text{ q.o. su } \Omega \Rightarrow C_\alpha v(x) \leq C_\alpha u(x) \text{ in } C_\alpha(\Omega); \quad (5.1.3)$$

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_{C_\alpha(\Omega)} |C_\alpha u(x)|^p dx, \text{ per ogni } 0 < p < \infty. \quad (5.1.4)$$

Sia ora Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N la cui frontiera sia Lipschitz continua e sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 aventi $(N - 1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva. Il nostro obiettivo è quello di estendere la disuguaglianza isoperimetrica (1.1.3) per questo nuovo tipo di simmetrizzazione. La simmetrizzazione di Schwarz è legata alla disuguaglianza isoperimetrica (1.1.3), in accordo

con la quale tra tutti i domini di fissato perimetro, la sfera è quella che ha area di superficie minima. Per l' α -simmetrizzazione bisogna ricavare un'analoga disuguaglianza che si riduce all'uguaglianza in corrispondenza dei settori sferici, dal momento che gli insiemi di livello della funzione riordinata $C_\alpha u$ sono settori. A tal fine ricordiamo la definizione di *costante isoperimetrica di Ω relativa a Γ_1* (cfr. [64]).

Definizione 5.1.4 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N la cui frontiera sia Lipschitz continua e sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 aventi $(N - 1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva. Si definisce costante isoperimetrica di Ω relativa a Γ_1*

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \sup_E \frac{|E|^{1-\frac{1}{N}}}{P_\Omega(E)}, \quad (5.1.5)$$

dove l'estremo superiore è calcolato tra tutti i sottoinsiemi misurabili E di Ω tali che la frontiera $\partial E \cap \Gamma_0$ non contiene alcun insieme di $(N - 1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva.

Vale dunque la seguente disuguaglianza isoperimetrica:

Teorema 5.1.5 *Siano Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N la cui frontiera sia Lipschitz continua e sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 aventi $(N - 1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva ed E un sottoinsieme misurabile Ω tale che la frontiera $\partial E \cap \Gamma_0$ non contiene alcun insieme di $(N - 1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva. Allora*

$$|E|^{1-\frac{1}{N}} \leq Q(\Gamma_1, \Omega) P_\Omega(E), \quad (5.1.6)$$

sotto l'ipotesi $Q(\Gamma_1, \Omega) < \infty$.

In base alla definizione (5.1.5) l'insieme E può avere frontiera contenuta in Ω , come tale, dalle (1.1.3) e (5.1.6), deduciamo immediatamente un confronto tra la

costante isoperimetrica assoluta $\left(N\omega_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$ e quella relativa $Q(\Gamma_1, \Omega)$

$$\left(N\omega_{\frac{1}{N}}\right)^{-1} \leq Q(\Gamma_1, \Omega); \quad (5.1.7)$$

di conseguenza, se $+\infty > Q(\Gamma_1, \Omega) \neq \left(N\omega_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$, è possibile determinare un $\alpha \in]0, \pi[$ tale che

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\alpha_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}. \quad (5.1.8)$$

La costante isoperimetrica relativa $Q(\Gamma_1, \Omega)$ è caratterizzata dalle proprietà che seguono. Per le dimostrazioni dei risultati si rimanda a [64] e [57].

Proposizione 5.1.6 *Sia $\alpha \in]0, \pi[$ e $\Sigma(\alpha, R)$ il settore di \mathbb{R}^N di ampiezza α e raggio R . Posto*

$$\tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \partial\Sigma(\alpha, R) : |x| = R\}, \quad (5.1.9)$$

$$\tilde{\Gamma}_1 = \partial\Sigma(\alpha, R) \setminus \tilde{\Gamma}_0, \quad (5.1.10)$$

si ha

$$Q\left(\tilde{\Gamma}_1, \Sigma(\alpha, R)\right) = \left(N\alpha_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}. \quad (5.1.11)$$

Proposizione 5.1.7 *Se $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) = 0$, allora $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\omega_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$, la costante isoperimetrica assoluta.*

Proposizione 5.1.8 *Se $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega)$, allora $Q(\Gamma_1, \Omega) \rightarrow +\infty$.*

Osservazione 5.1.9 *Dalla Proposizione 5.1.6 e dalla (5.1.8) segue che per ogni Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N la cui frontiera sia Lipschitz continua e sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 aventi $(N-1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva, se $+\infty > Q(\Gamma_1, \Omega) \neq \left(N\omega_{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$, allora esiste un settore $\Sigma(\alpha, R)$ di ampiezza α opportuna tale che la costante isoperimetrica di Ω relativa a Γ_1 coincide con quella del settore $Q\left(\tilde{\Gamma}_1, \Sigma(\alpha, R)\right)$, purchè $\tilde{\Gamma}_0$ e $\tilde{\Gamma}_1$ siano scelti come in (5.1.9) ed (5.1.10).*

Osservazione 5.1.10 *La costante isoperimetrica relativa $Q(\Gamma_1, \Omega)$ tende a $+\infty$ non solo sotto le ipotesi della Proposizione 5.1.8, bensì in casi più generali; ciò si verifica, ad esempio, se Γ_1 presenta punti cuspidali.*

Concludiamo il paragrafo estendendo infine la classica diseguaglianza di Polya-Szëgo per questa nuova nozione di simmetrizzazione: ancora una volta, nel passaggio di u ad $C_\alpha u$, la norma L^p del gradiente *decresce*.

Proposizione 5.1.11 *Se $Q(\Gamma_1, \Omega) = (n\alpha_n^{\frac{1}{n}})^{-1}$ e $p \geq 1$, allora*

$$\int_{C_\alpha(\Omega)} |\nabla C_\alpha u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx. \quad (5.1.12)$$

5.1.2 Esempi di calcolo della costante isoperimetrica relativa

In questo paragrafo vogliamo mostrare, attraverso alcuni esempi, come calcolare la costante isoperimetrica $Q(\Gamma_1, \Omega)$ definita da (5.1.5) Per ulteriori esempi si rimanda a [64].

Esempio 5.1.12 *Sia Ω il sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^N costituito dalla parte compresa tra due sfere concentriche, e sia Γ_1 il bordo della sfera interna. Consideriamo E un qualunque sottoinsieme di Ω la cui frontiera abbia intersezione non vuota con Γ_1 ; effettuando su E una simmetrizzazione di tipo sferico si ricava:*

$$\frac{|E|^{1-\frac{1}{N}}}{P_\Omega(E)} \leq \frac{1}{N \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{N}}}.$$

D'altro canto, dal momento che Γ_1 presenta una regolarità di tipo C^∞ , è possibile considerare tutti i sottoinsiemi E di Ω che approssimano un settore di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Da ciò segue che

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \frac{1}{N \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{N}}},$$

qualunque siano i raggi delle due sfere.

La situazione invece è completamente differente se si inverte il ruolo di Γ_0 e di Γ_1 , come mostra l'esempio successivo.

Esempio 5.1.13 Sia Ω come nell'esempio precedente, ma sia Γ_1 il bordo della sfera interna. Per calcolare $Q(\Gamma_1, \Omega)$ vanno considerati sia sottoinsiemi E di Ω tali che $\partial E \subset \Gamma_1$ e il $P_\Omega(E)$ approssima $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_0)$, sia sottoinsiemi F il cui bordo contiene solo una parte di Γ_1 . Dunque, se denotiamo con R ed r i raggi delle due sfere e scegliamo R sufficientemente grande rispetto ad r , la costante $Q(\Gamma_1, \Omega)$ è ottenuta essenzialmente tramite i sottoinsiemi di tipo E . Ad esempio, se $N = 2$ si ottiene

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{2r\sqrt{\pi}},$$

il che mostra, tra l'altro, che $Q(\Gamma_1, \Omega) \rightarrow +\infty$ se $r \rightarrow 0$ (poichè in tal caso $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_0) \rightarrow 0$).

5.1.3 Risultati di confronto per problemi ellittici di tipo misto

L'idea di usare metodi di simmetrizzazione allo scopo di ottenere stime a priori è piuttosto antica, traendo essa origine dai problemi isoperimetrici. In particolare, l'applicazione della simmetrizzazione di Schwarz per ottenere stime a priori per soluzioni di equazioni ellittiche vede la sua prima apparizione nel lavoro del 1962 di Weinberger [81], dove si ottiene una stima precisa della soluzione u di un assegnato problema al contorno di tipo ellittico, attraverso il temine noto. Più precisamente, sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N e si consideri un operatore lineare ellittico del secondo ordine in forma di divergenza del tipo

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}, \quad (5.1.13)$$

ove i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ soddisfino la condizione di ellitticit 

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N; \quad (5.1.14)$$

allora, se f sia tale che esista un'unica soluzione debole u del problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1.15)$$

in [81] si ricava la miglior costante K nella stima

$$|u(x)| \leq K \|f\|_{L^p}, \quad p > \frac{N}{2}.$$

Tuttavia,   nel celebre lavoro [73] di G. Talenti che si utilizzano questo tipo di strumenti per ottenere un tipo di *confronto* tra la soluzione u di un fissato problema ai valori al contorno e la soluzione v di un opportuno problema a simmetria radiale. Allo scopo di descrivere il risultato principale, sostituiamo l'operatore (5.1.13) con quello in forma di divergenza

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x) u, \quad (5.1.16)$$

per il quale sia soddisfatta la (5.1.14), e supponiamo che

$$f \in L^t(\Omega), \text{ con } t \leq \frac{2N}{N+2} \text{ se } N > 2, \quad t > 1 \text{ se } N = 2, \quad (5.1.17)$$

ed

$$c(x) \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (5.1.18)$$

Se u   la soluzione del problema di Dirichlet (5.1.15) con condizione omogenea al contorno, si pu  provare che il riordinamento sferico $u^\#$ di u   puntualmente limitato dall'alto dalla soluzione di un opportuno problema a simmetria radiale.

Infatti, la funzione $u^\#$ viene confrontata con la soluzione v di un problema che sia essenzialmente della forma

$$\begin{cases} -\Delta v = f^\# & \text{in } \Omega^\# \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^\#, \end{cases} \quad (5.1.19)$$

e si prova che

$$u^\#(x) \leq v(x), \quad (5.1.20)$$

in ogni punto della sfera $\Omega^\#$. Si osservi come questo tipo di risultato consenta di ricondurre lo studio del problema (5.1.15) a quello del più semplice problema (5.1.19) rispetto al quale, essendo il dominio, i coefficienti ed i dati a simmetria radiale, la soluzione v risulta facilmente calcolabile. Questo risultato è ottimale, nel senso che il problema (5.1.19) fornisce la soluzione più grande nella classe dei problemi del tipo (5.1.15), al variare di Ω tra gli aperti limitati di \mathbb{R}^N , sufficientemente regolari, di misura fissata, di L tra gli operatori del tipo (5.1.16) i cui coefficienti verificano (5.1.14), (5.1.18), e di f in un opportuno insieme di funzioni non negative con assegnato riordinamento.

Un'estensione di risultati di questo genere per più generali equazioni lineari con termini di ordine inferiore, può essere trovata in [75], mentre l'applicazione di queste idee per trattare problemi ellittici non lineari trova una sua notevole esplicitazione in [74]. Per ulteriori risultati di confronto ci si riferisca a [15], [9], [10], [28], [54].

Ci si chiede ora se risultati analoghi continuino a valere anche per problemi con dato misto al bordo. Sia dunque Ω un insieme aperto e limitato di \mathbb{R}^N , la cui frontiera sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 con $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_0) > 0$.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_1, \end{cases} \quad (5.1.21)$$

ove Lu è un operatore di tipo ellittico in forma di divergenza (5.1.13), i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ soddisfano la condizione di ellitticità (5.1.14) ed f verifica la (5.1.17). La risposta alla questione appena posta è negativa: detta u l'unica soluzione debole di (5.1.21), non è possibile ottenere una stima del tipo (5.1.20) con v soluzione dell'equazione di Poisson nella sfera $\Omega^\#$ e con dato misto al bordo. Un approccio di tipo differente è stato suggerito in [63] da C. Maderna ed S. Salsa, i quali stimano la soluzione del problema di Neumann in termini della somma delle soluzioni di *due problemi* di Dirichlet nella sfera (ci si riferisca anche a [76] per il caso degenere).

Tali considerazioni portano a concludere che la simmetrizzazione di Schwarz non costituisce il tipo di simmetrizzazione appropriato nella trattazione di questa problematica. La questione viene invece affrontata e risolta positivamente attraverso l' α -simmetrizzazione. Si riesce infatti a ricavare un confronto puntuale tra la soluzione u del problema (5.1.21) e la soluzione v di un opportuno problema a simmetria radiale; viene così esteso il risultato (5.1.20) al caso di problemi di tipo ellittico con condizioni miste al bordo.

Più precisamente, sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N la cui frontiera sia Lipschitz continua e sia costituita dall'unione di due varietà Γ_0 e Γ_1 aventi $(N-1)$ -dimensionale misura di Hausdorff positiva; supponiamo inoltre che Ω goda della proprietà di cono. Come evidenziato nella (5.1.8) è possibile determinare, fissati Ω e Γ_1 , un opportuno $\alpha \in]0, \pi[$ tale che $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\alpha^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$. Indichiamo allora

con \mathcal{E}_{α_N} la classe di tutti i domini Ω aventi la stessa costante isoperimetrica relativa a Γ_1 , $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\alpha^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$; dalla Proposizione 5.1.6 segue ovviamente che il settore $\Sigma(\alpha, R)$ appartiene a tale classe.

Fissato $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, consideriamo il problema (5.1.21); tale problema ammette un'unica soluzione nello spazio $V^2(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ on } \Gamma_0\}$ (cfr. [44]). Denotato con $C_\alpha(\Omega)$ il settore di ampiezza α avente stessa misura di Ω , consideriamo il problema a simmetria sferica

$$\begin{cases} -\Delta v = C_\alpha f & \text{in } C_\alpha(\Omega) \\ v = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \partial C_\alpha(\Omega) : |x| = R_\alpha\} \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_1 = \partial C_\alpha(\Omega) \setminus \tilde{\Gamma}_0, \end{cases} \quad (5.1.22)$$

dove R_α è il raggio del settore $C_\alpha(\Omega)$.

Si dimostra che l' α -simmetrizzata $C_\alpha(\Omega)$ della u , unica soluzione del problema (5.1.21), è puntualmente limitata dall'alto dalla soluzione v di (5.1.22) in ogni punto del settore $C_\alpha(\Omega)$. Questo confronto costituisce l'estensione della (5.1.20) nel caso di condizioni miste al bordo; esso consente di ricondurre lo studio del problema (5.1.21), a quello del più semplice problema (5.1.22) rispetto al quale, essendo il dominio, i coefficienti ed i dati a simmetria radiale, la soluzione v risulta facilmente calcolabile. Per la dimostrazione si rimanda a [64]. Enunciamo il risultato appena descritto nel seguente teorema.

Teorema 5.1.14 *Sia $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$. Se u è soluzione debole del problema (5.1.21) e v è la soluzione debole del problema (5.1.22), allora*

$$C_\alpha u(x) \leq v(x) \text{ per q.o. } x \in C_\alpha(\Omega). \quad (5.1.23)$$

Come nel caso del riordinamento sferico, la (5.1.23) consente di stimare ogni norma L^p di u e del ∇u attraverso le corrispondenti norme L^p di v e ∇v :

Corollario 5.1.15 *Sotto le ipotesi del Teorema 5.1.14 si ha*

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)| &\leq \operatorname{ess\,sup}_{C_{\alpha}(\Omega)} |v(x)|, \\ \|u\|_{L^p} &\leq \|v\|_{L^p(C_{\alpha}(\Omega))}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ \|\nabla u\|_{L^q} &\leq \|\nabla v\|_{L^q(C_{\alpha}(\Omega))}, \quad 0 < q \leq 2. \end{aligned}$$

Osservazione 5.1.16 *Abbiamo già visto nella proposizione 5.1.7 che se $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) = 0$, si ha $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left(N\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{-1}$. In tal caso $C_{\alpha}(\Omega)$ si riduce alla sfera $\Omega^{\#}$ ed il teorema 5.1.14 restituisce esattamente il risultato ottenuto in [73] e [81] per il problema di Dirichlet (5.1.15). Al contrario, se $Q(\Gamma_1, \Omega) \rightarrow +\infty$, il che avviene, ad esempio, se il problema (5.1.21) degenera in un problema di tipo Neumann, allora $\alpha_N \rightarrow 0$ e quindi $C_{\alpha}(\Omega)$ tende al settore di ampiezza 0; in altre parole non esiste alcun problema limite.*

5.2 *Disuguaglianza di immersione nello spazio V^p . Questioni relative alla migliore costante.*

Abbiamo definito lo spazio $V^p(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni che si annullano solo su una parte del bordo di Ω ed abbiamo sottolineato come gran parte delle questioni sollevate relativamente alla disuguaglianza di Sobolev continuino a valere in quest'ambito. In particolare, fissato $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, il seguente teorema descrive il risultato ottenuto in [57] e fornisce una stima della migliore costante di immersione $K(p, \alpha_N)$.

Teorema 5.2.1 *Sia $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$ e $1 < p < N$, allora si ha*

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq K(p, \alpha_N) \|u\|_{L^{p^*}} \quad \forall u \in V^p(\Omega), \quad (5.2.1)$$

dove

$$K(p, \alpha_N) = \left(\frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N\alpha_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{-1},$$

$$B = \left[\frac{N(p-1)}{N-p} \right]^{\frac{N(p-1)}{N-p}} N \left(\frac{p-1}{p} \right) \left[\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(N-\frac{N}{p})} \right]^{-1}.$$

Inoltre la costante $K(p, \alpha_N)$ rappresenta la migliore costante relativa al settore $\Sigma(\alpha, R)$, vale a dire

$$K(p, \alpha_N) = \inf_{\substack{u \in V^p(\Sigma(\alpha, R)) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^{p^*}}}. \quad (5.2.2)$$

Diamo qui un'idea della dimostrazione del teorema.

Denotato con $C_\alpha(\mathbb{R}^N)$ l' α -simmetrizzato di \mathbb{R}^N , cioè il settore di ampiezza α e raggio infinito, iniziamo con l'osservare che la (5.0.11) si ottiene per ogni $u \in W^{1,p}(C_\alpha(\mathbb{R}^N))$ procedendo come in [72] nel caso della classica disuguaglianza di Sobolev. Si riduce infatti il problema a simmetria radiale: sostituendo u con $C_\alpha(u)$, dalle (5.1.4) ed (5.1.12) segue che la norma L^{p^*} di u resta invariata mentre la norma L^p del gradiente decresce; ciò assicura che non è restrittivo dimostrare il risultato in questa ipotesi. Successivamente si esprime la norma di u come

$$\|u\|_{p^*} = \left\{ \int_0^\infty |u^*(\alpha_N \rho^N)|^{p^*} N \alpha_N \rho^{N-1} d\rho \right\}^{\frac{1}{p^*}} = \left\{ \int_0^\infty \left[\int_s^\infty |u_t^*(t)| dt \right]^{p^*} ds \right\}^{\frac{1}{p^*}}.$$

Applicando la disuguaglianza di Bliss (cfr. [73]), si ottiene

$$\|u\|_{p^*} = \left\{ \int_0^\infty \left[\int_s^\infty u_t^*(t) dt \right]^{p^*} ds \right\}^{\frac{1}{p^*}} \leq B^{\frac{1}{p^*}} \left\{ \int_0^\infty \left[|u_t^*(t)| t^{\frac{N-1}{N}} \right]^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

D'altro canto

$$\|\nabla u\|_p = \left(N \alpha_N^{\frac{1}{N}} \right) \left\{ \int_0^\infty \left[|u_t^*(t)| t^{\frac{N-1}{N}} \right]^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

da cui si ha

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \frac{B^{\frac{1}{p^*}}}{N \alpha_N^{\frac{1}{N}}} \|\nabla u\|_{L^p}. \quad (5.2.3)$$

Per provare che $K(p, \alpha_N)$ costituisce la migliore costante, cioè

$$K(p, \alpha_N) = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(C_\alpha(\mathbb{R}^N)) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\|u\|_{L^{p^*}}},$$

si considera la funzione:

$$v(x) = \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}, \quad x \in C_\alpha(\mathbb{R}^N).$$

Si può dimostrare che la funzione v_t^* verifica l'uguaglianza nella disuguaglianza di Bliss, di conseguenza la (5.2.3) diviene un'uguaglianza in corrispondenza di tale v , e dunque

$$K(p, \alpha_N) = \frac{\|\nabla v\|_{L^p}}{\|v\|_{L^{p^*}}}.$$

Se al posto delle funzioni $u \in W^{1,p}(C_\alpha(\mathbb{R}^N))$ si considerano quelle appartenenti a $V^p(C_\alpha(\Omega))$ con Ω aperto limitato di \mathbb{R}^N , è ovvio che la (5.0.11) continua ad essere soddisfatta (basta estendere u a zero in $C_\alpha(\mathbb{R}^N) \setminus C_\alpha(\Omega)$).

Inoltre $K(p, \alpha_N)$ costituisce la migliore costante anche in $C_\alpha(\Omega)$; considerata infatti la seguente famiglia di funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(|x|)}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}} \quad \varepsilon > 0, \quad x \in C_\alpha(\Omega) = \Sigma(\alpha, R),$$

con $\varphi(t) \in C^\infty([0, +\infty[)$ funzione non negativa uguale ad 1 in un intorno di 0 ed uguale a 0 per $t \geq \frac{R}{2}$, posto

$$K_\varepsilon(p, \alpha_N) = \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p}}{\|u_\varepsilon\|_{L^{p^*}}},$$

si ottiene che $K_\varepsilon(p, \alpha_N) \rightarrow K(p, \alpha_N)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, il che completa la dimostrazione della (5.2.1).

Osserviamo che in [57] viene provato anche che la migliore costante relativa al settore è la più piccola costante al variare di Ω nella classe \mathcal{E}_{α_N} e $1 < p < N$, cioè

$$K(p, \Omega) \geq K(p, \alpha_N) = S^p(\Sigma(\alpha, R)), \quad \forall \Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}. \quad (5.2.4)$$

La disuguaglianza (5.0.11) rappresenta ovviamente l'analogo della Sobolev nello spazio $V^p(\Omega)$; tuttavia, la miglior costante di Sobolev dipende solo da p e da

N , mentre la costante ottimale nella (5.0.11) dipende da Ω ed in particolare da come si sceglie la parte di bordo $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Inoltre non è possibile ottenere una stima dal basso per $K(p, \Omega)$ che valga *in tutti gli aperti* Ω .

A differenza di quanto avviene per la disuguaglianza di Sobolev, la migliore costante $K(p, \Omega)$ può essere raggiunta anche negli aperti $\subset \mathbb{R}^N$. Sono state quindi determinate delle condizioni che stabiliscono quando ciò si verifichi o meno; ci soffermiamo ora ad enunciare alcune di esse nel caso in cui $p = 2$ e facciamo riferimento a quelle che ci hanno permesso di ottenere il risultato contenuto in [66].

Una prima condizione si può dedurre come segue. Se supponiamo che $K(2, \Omega)$ viene raggiunta, allora esiste una soluzione positiva u per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma_1. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Si può dimostrare inoltre che le soluzioni del precedente problema soddisfano la seguente identità di Pohozaev

$$-\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |Du|^2 (x \cdot \nu) ds = \frac{N-2}{2N} \int_{\Gamma_1} u^{2^*} (x \cdot \nu) ds.$$

Come tale se Ω gode delle seguenti proprietà geometriche

$$\begin{cases} x \cdot \nu = 0 & \text{su } \Gamma_1 \\ x \cdot \nu > 0 & \text{su } \Gamma_0. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

allora l'identità di Pohozaev non viene verificata da alcuna soluzione u del problema (5.2.5), e dunque $K(2, \Omega)$ non viene raggiunta. Esempi di domini che verificano le (5.2.6) sono

- un cono C_1 ottenuto intersecando un qualunque cono C , regolare e di vertice l'origine, con la sfera $B_1(0)$ di centro l'origine e raggio 1: la condizione (5.2.6) viene soddisfatta se si scelgono $\Gamma_0 = \partial B_1 \cap C$ e $\Gamma_1 = \partial C_1 \setminus \Gamma_0$;
- ogni settore sferico $\Sigma(\alpha, R)$;
- un qualunque insieme Ω convesso per il quale Γ_1 sia costituito da una zona piatta contenente l'origine.

Un'altra condizione sufficiente affinché $K(p, \Omega)$ non venga raggiunta è stata ottenuta in [36] come conseguenza di una stima con resto della (5.2.1). Infatti, in [36] è stato provato che

$$\|\nabla u\|_{L^p}^p \geq [K(p, \alpha_N)]^p \|u\|_{L^{p^*}}^p + C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^p,$$

per ogni $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, $1 < p < N$, $u \in V^p(\Omega)$ ed $0 < s < \frac{(p-1)N}{N-p}$; $C_s(\Omega)$ è una costante positiva che dipende solo da s e dalla classe \mathcal{E}_{α_N} . Ovviamente la (5.0.13) costituisce un miglioramento della (5.2.1) ottenuto tramite l'aggiunta del termine di resto $\|u\|_s^p$; in particolare esso rappresenta l'analogo del risultato (2.2.8) per funzioni $u \in V^p(\Omega)$.

Come corollario della precedente disuguaglianza, in [36] viene ricavata la seguente condizione sufficiente.

Corollario 5.2.2 *Sia $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$ e $1 < p < N$. Se $K(p, \Omega) = K(p, \alpha_N)$, allora $K(p, \Omega)$ non viene raggiunta.*

Un modo per controllare se valga o meno l'uguaglianza $K(p, \Omega) = K(p, \alpha_N)$, con $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, consiste nel calcolare la costante isoperimetrica relativa a Γ_1 , $Q(\Gamma_1, \Omega)$. Sempre in [36] si stabilisce infatti che

Proposizione 5.2.3 *Se $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left[N \left(\frac{\omega_N}{2} \right)^{\frac{1}{N}} \right]^{-1}$ (cioè Ω appartiene alla classe $\mathcal{E}_{\frac{\omega_N}{2}}$) allora $K(p, \Omega)$ non è raggiunta per ogni $1 < p < N$.*

Un esempio di dominio Ω per il quale si abbia $Q(\Gamma_1, \Omega) = \left[N \left(\frac{\omega_N}{2} \right)^{\frac{1}{N}} \right]^{-1}$ è contenuto in [64], esempio 3.3; esso è richiamato nella presente tesi nel V capitolo, paragrafo 1, esempio 5.1.12.

Per ulteriori condizioni si veda anche [3].

Ricordiamo infine che in letteratura sono state determinate anche delle condizioni sufficienti affinché $K(p, \Omega)$ venga raggiunta. In ([4], [79]) viene provato che

Teorema 5.2.4 *Siano Ω , Γ_0 , Γ_1 scelti come sopra. Assumiamo che esista un punto x_0 interno a Γ_1 tale che, in un intorno di x_0 , Ω sia contenuto tutto in uno dei due lati individuati dal piano tangente alla $\partial\Omega$ in x_0 e sia tale che la curvatura media rispetto alla normale esterna in x_0 sia positiva. Allora $K(p, \Omega)$ è raggiunta.*

In [47] è riportato un esempio di dominio per il quale le ipotesi del precedente teorema sono soddisfatte; sia infatti D un dominio limitato, e sia G una sfera tale che $\overline{G} \subset D$ e $0 \in \partial G$. Fissato un punto $x_0 \in D \setminus \overline{G}$, denotiamo con $B(x_0, R)$ la sfera di centro x_0 e raggio R , il dominio Ω è dato da $\Omega = D \setminus \left(\overline{G} \cup \lambda^2 \overline{B(x_0, R)} \right)$, con R ed x_0 scelti in modo che $\lambda^2 \overline{B(x_0, R)} \subset D \setminus \overline{G}$ per ogni $\lambda \in]0, 1[$.

5.3 Disuguaglianza con resto

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato la disuguaglianza (5.2.1) ed abbiamo posto particolare attenzione alle questioni concernenti il raggiungimento della migliore costante. In particolare, abbiamo visto che sotto opportune ipotesi tale costante non viene raggiunta, come tale ha senso aggiungere anche a secondo membro della (5.2.1) un resto. Abbiamo già sottolineato che Egnell, Pacella e

Tricarico in [36] hanno esteso il risultato ottenuto da Brezis e Nirenberg in [23]; essi dimostrano che

$$\|\nabla u\|_{L^p}^p \geq [K(p, \alpha_N)]^p \|u\|_{L^{p^*}}^p + C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^p,$$

per ogni $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$, $1 < p < N$, $u \in V^p(\Omega)$ ed $0 < s < \frac{(p-1)N}{N-p}$; in analogia al caso Sobolev, anche per le funzioni che si annullano solo su una parte del bordo l'esponente limite $s = \frac{(p-1)N}{N-p}$ non può essere raggiunto. In questo paragrafo ricaviamo l'analogo del risultato di Brezis e Lieb contenuto nel lavoro [20], in altre parole mostriamo di poter inserire a secondo membro della (5.2.1) la norma $L^{\frac{(p-1)N}{N-p}}$ – debole di u nel caso in cui $p = 2$ e $K(2, \Omega) = K(2, \alpha_N)$, ipotesi sotto cui $K(2, \Omega)$ non è raggiunta. I risultati ottenuti sono confluiti nel lavoro [66].

Teorema 5.3.1 *Sia $\alpha \in]0, \pi]$, $N > 2$ ed $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$. Allora esiste una costante positiva $C = C(\Omega)$ per la quale la (5.0.14)*

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq [K(2, \alpha_N)]^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2,$$

viene soddisfatta da ogni $u \in V^2(\Omega)$.

Dimostrazione. Proviamo il risultato modificando opportunamente la tecnica contenuta in [20]. Iniziamo con l'osservare che dalla (5.1.12), dalla (5.2.4) e dall'equimisurabilità di u e $C_\alpha u$, segue che è sufficiente provare l'asserto per $\Omega = \Sigma(\alpha, R)$, $u \in V^2(\Omega)$, ed u a simmetria radiale decrescente.

Fissiamo $g \in L^\infty(\Omega)$ e consideriamo v la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = C_\alpha g & \text{in } \Omega = \Sigma(\alpha, R) \\ v = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_0 = \{x \in \partial\Sigma(\alpha, R) \mid |x| = R\} \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{su } \tilde{\Gamma}_1 = \partial\Sigma(\alpha, R) \setminus \tilde{\Gamma}_0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Di v è nota l'espressione esplicita, data da (cfr. [64])

$$v(x) = \frac{1}{N^2 \alpha_N^{\frac{2}{N}}} \int_{\alpha_N |x|^N}^{|\Omega|} \left(r^{-2+\frac{2}{N}} \int_0^r g^*(s) ds \right) dr,$$

come tale v è una funzione radiale decrescente appartenente ad $L^\infty(\Omega)$.

Poniamo

$$\Phi(x) = \begin{cases} u + v + \|v\|_\infty & \text{in } \Omega \\ (R/|x|)^{N-2} \|v\|_\infty & \text{in } C_\alpha(\mathbb{R}^N) \setminus \Omega, \end{cases} \quad (5.3.2)$$

con $\Phi(x) = 0$ su $\tilde{\Gamma}_0$. Ovviamente anche Φ è una funzione radiale decrescente ed appartiene ad $H^1(C_\alpha(\mathbb{R}^N))$.

Applichiamo a Φ la (5.0.11) nel settore $C_\alpha(\mathbb{R}^N)$; dal momento che $u \geq 0$ e $v + \|v\|_\infty \geq 0$, ricaviamo

$$\int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 dx + k \|v\|_\infty^2 \geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2, \quad (5.3.3)$$

con $k = R^{N-2}(N-2)\sigma_N$ e $\sigma_N = N\alpha_N$ area di superficie del settore unitario di \mathbb{R}^N di ampiezza α .

Stimiamo il termine $\int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 dx$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2 \int_\Omega (C_\alpha g) u dx. \end{aligned}$$

La (5.3.3) diventa

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2 \int_\Omega (C_\alpha g) u dx + k \|v\|_\infty^2 \geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2. \quad (5.3.4)$$

Sostituendo nella (3.1.2) g con λg e v con $|\lambda|v$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + |\lambda|^2 \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + k \|v\|_\infty^2 \right) - 2|\lambda| \int_\Omega (C_\alpha g) u dx &\geq \\ &\geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Passando al minimo su λ si ricava

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2 + \frac{\left(\int_\Omega (C_\alpha g) u dx \right)^2}{\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + k \|v\|_\infty^2 \right)}. \quad (5.3.5)$$

Applicando la disuguaglianza di Hardy-Littlewood al termine $(\int_{\Omega} (C_{\alpha}g) u \, dx)^2$ si ha

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2 + \frac{(\int_{\Omega} gu \, dx)^2}{(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + k \|v\|_{\infty}^2)}. \quad (5.3.6)$$

Il nostro obiettivo è ora quello di introdurre a secondo membro della (5.3.6) la norma L^p – debole di u ; a tal fine scegliamo $g = \chi_A$, la funzione caratteristica di un qualunque sottoinsieme A di Ω e stimiamo tutti i termini che compaiono in $\frac{(\int_{\Omega} gu \, dx)^2}{(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + k \|v\|_{\infty}^2)}$. Denotiamo con $G(N)$ una generica costante dipendente solo da N . Banalmente

$$\int_{\Omega} ug \, dx = \int_A u \, dx, \quad (5.3.7)$$

Proviamo ora che

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \leq G(N) |A|^{1+\frac{2}{N}}. \quad (5.3.8)$$

Essendo v soluzione del problema (5.3.1) con $g = \chi_A$, essa in particolare verifica l'equazione $\Delta v = \chi_A$. Moltiplichiamo ad ambo i membri della precedente per v ed integriamo su Ω , si avrà

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = - \int_A v \, dx.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder e dalla (5.2.1) si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \leq [K(2, \Omega)]^{-1} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} |A|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}},$$

da cui segue la (5.3.8). Mostriamo infine che

$$\|v\|_{\infty} \leq G(N) |A|^{\frac{2}{N}}. \quad (5.3.9)$$

Comparando la v con la soluzione fondamentale in tutto \mathbb{R}^N , si ha

$$|v| \leq C |x|^{-N+2} * \chi_A.$$

La funzione $|x|^{-N+2}$ appartiene allo spazio di Lebesgue debole $L_w^{\frac{N}{N-2}}$, come tale

$$|v| \leq C |x|^{-N+2} * \chi_A \leq C' |A|^{\frac{2}{N}},$$

e dunque vale la (5.3.9).

Inserendo le (5.3.7), (5.3.8), (5.3.9) nella (5.3.6) ricaviamo la stima

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq [K(2, \Omega)]^2 \|u\|_{2^*, \Omega}^2 + \frac{1}{G(N)R^{N-2}} \left(\frac{1}{|A|^{\frac{2}{N}}} \int_A u dx \right)^2, \quad (5.3.10)$$

per ogni A sottoinsieme di Ω , e dunque la (5.0.14) quando $\Omega = \Sigma(\alpha, R)$. Infine, ricordando che siamo nell'ipotesi $K(2, \Omega) = K(2, \alpha_N)$, si ottiene la tesi per ogni aperto Ω . ■

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, Some remarks on elliptic equations with singular potentials and mixed boundary conditions, *Advanced Nonlinear Studies* (2004).
- [2] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, Some improved Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **23** (2005), 327-345.
- [3] B. Abdelloui, E. Colorado and I. Peral, Effect of the boundary conditions in the behavior of the optimal constant of some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. Application to some doubly critical nonlinear elliptic problems, *Adv. Diff. Eq.*, **11** (2006), 667-720.
- [4] Adimurthi, G. Mancini, The Neumann problem for the elliptic equations with critical non-linearity, *Scuola Norm. Sup. Pisa, volume in honour of G.Prodi* (1991), 9-25.
- [5] Adimurthi, N. Chaudhuri, M. Ramaswamy, An improved Hardy-Sobolev inequality and its application, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (2002), 485-505.
- [6] A. Alvino, Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz, *Boll. U.M.I.*, **5 14-A** (1977), 148-156.
- [7] A. Alvino, On a Sobolev type inequality, *Rend. Lincei Mat. Appl.*, **20** (2009), 333-340.

- [8] A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti, On optimization problem with prescribed rearrangements, *Nonlinear Anal. T.*, **13** (1989) no. 2, 185-220.
- [9] A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti, Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization, *Ann. Inst. Poincaré Anal Nonlinéaire*, **7** (1990), 37-65.
- [10] A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti, Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization: a new approach, *Differential and Integral Equations*, **4** (1) (1991), 25-50.
- [11] A. Alvino, R. Volpicelli, B. Volzone, On Hardy inequalities with a remainder term, Preprint N.41 - 2008, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, Università degli Studi di Napoli “Federico II”. preprint arXiv:0909.5690v1
- [12] A. Alvino, R. Volpicelli, B. Volzone: A remark on Hardy type inequalities with remainder terms, (2009), accettato per la pubblicazione su *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*.
- [13] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Functions of bounded variation and free discontinuity problems, *Oxford University Press*, Oxford, 2000.
- [14] T. Aubin, Problème isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Diff. Eq.*, **11** (1976), 573-598.
- [15] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Monographs and Studies in Math., No. 7, Pitman, London, 1980.

- [16] G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas, A unified approach to improved L^p Hardy inequalities with best constant, *Trans. Amer. Math. Soc.* (6), **356** (2004), 2169-2196.
- [17] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Appl. Math. Vol. 129, Academic Press, 1988.
- [18] G. A. Bliss, An integral inequality, *Journal London Math. Soc.*, **5** (1930), 40-46.
- [19] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44** (1991), 375-417.
- [20] H. Brezis, E.H. Lieb, Sobolev inequalities with remainder terms, *J. funct. Analysis* **62** (1985), 73-86.
- [21] H. Brezis, M. Marcus, Hardy's inequalities revisited, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **25** (1997), no. 1-2, 217-237 (1998).
- [22] H. Brezis, M. Marcus, I. Shafrir, Extremal functions for Hardy's inequality with weight, *J. Funct. Anal.*, **171** (2000), 177-191.
- [23] H. Brezis, L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure appl. Math.* **36** (1983), 437-477.
- [24] H. Brezis, J. L. Vazquez, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems, *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, (10), **2** (1997), 443-469.
- [25] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, First order interpolation inequality with weights, *Compositio Math.*, **53** (1984), 259-275.

- [26] F. Catrina, Z. Q. Wang, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **54** (2001), 229-258.
- [27] N. Chaudhuri, M. Ramaswamy, Existence of positive solutions of some semi-linear elliptic equations with singular coefficients, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **131**, **6** (2001), 1275-1295.
- [28] G. Chiti, Orlicz norms of the solutions of a class of Elliptic equations , *Boll. Un. Mat. Ital.*, **16-A**(5) (1979), 178-185.
- [29] K.M. Chong, N.M. Rice, *Equimeasurable rearrangements of functions*, Queen's papers in pure and applied mathematics, No.28, Queen's University, Ontario, 1971.
- [30] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Adv. Math.*, **182** (2004), 307-332.
- [31] S. Cuomo, A. Perrotta, On best constant in Hardy inequalities with a remainder term, Preprint N.29 - 2009, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II".
- [32] E. De Giorgi, Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, *Ann. Mat. Pura Appl.* **36** (1954), 191-213.
- [33] E. De Giorgi, Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat Sez. I* **5** (1958), 33-44.

- [34] H. Egnell, Existence and non existence results for m - laplace equations involving critical Sobolev exponents, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **104** (1988), 57-77.
- [35] H. Egnell, Elliptic boundary value problems with singular coefficients and critical nonlinearities, *Indiana Univ. Math. J.*, **38** (1989), 235-251.
- [36] H. Egnell, F. Pacella, M. Tricarico, Some remarks on Sobolev Inequalities, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **13** (1989), 671-681.
- [37] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [38] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, New York, 1969.
- [39] H. Federer, W. H. Fleming, Normal and integral currents, *Annals of Math.*, **72** (1960), 458-520.
- [40] H. Fleming, R. Rishel, An integral formula for total gradient variation, *Arch. Math.* **11**, (1960) 218-222.
- [41] S. Filippas, A. Tertikas, Optimizing improved Hardy inequalities, *J. Funct. Anal.*, **192** (2002), 186-233.
- [42] J. P. García Azorero, I. Peral Alonso, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, *J. Differential Equations*, **144** (1998), 441-476.
- [43] F. Gazzola, H. C. Granau, E. Mitidieri, Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms, *Trans. Amer. Math. Soc. (6)*, **356** (2004), 2149-2168.

- [44] D. Gilbard, N. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1977.
- [45] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [46] N. Ghoussoub, A. Moradifam, On the best possible remaining term in the Hardy inequality, preprint arXiv: math/0703506v1 [math.AP], 16 Mar. 2007.
- [47] M. Grossi, F. Pacella, Positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent and mixed boundary conditions, *Proc. Roy Soc. Edinburgh Sect.*, **116A** (1990), 23-43.
- [48] G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus, *Messenger Math.*, **48** (1919), 107-112.
- [49] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964.
- [50] T. Horiuchi, Best constant in weighted Sobolev inequality, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **72** (1996), 208-211.
- [51] R. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, *Enseignement Math.* **12** (1966), 249-276.
- [52] B. Kawhol, *Rearrangements and convexity of level sets in P.D.E.*, Lecture Notes in Mathematics, No. **1150** Springer (1985), Berlin.
- [53] E. Lieb, Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, *Ann. of Math.*, **118** (1983), 349-374.
- [54] P. L. Lions, *Quelques remarques sur la symétrisation de Schwarz*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminars, v.1, Pitman 1981.

- [55] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, Part 1 and 2, *Ann. I.H.P., Anal. Nonlin.* **1**(1984) 109-145 and 223-283.
- [56] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1 and 2 , *Riv. Mat. Iberoamericana* **1** (1985), 45-121 and 145-201.
- [57] P. L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988), 301- 324.
- [58] G. Lorentz, Some new functional spaces, *Ann. of Math.* **51** (2) (1950), 37-55.
- [59] G. Lorentz, On the theory of spaces Λ , *Pacific J. Math.* **1** (1951), 411-429.
- [60] J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérations, *C. R. Acad. Sci. Paris* **208** (1939), 1272-1273.
- [61] M. Marcus, I. Shafrir, An eigenvalue problem related to Hardy's L^p inequality, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. IV*, **29** (2000), 581-604.
- [62] V. G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, (1986) Berlin.
- [63] C. Maderna, S. Salsa, Symmetrization in Neumann problems, *Applicable Anal.* **9** (1979), 247-256.
- [64] F. Pacella, M. Tricarico, Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **34** (1985-86), 75-93.
- [65] A. Perrotta, A note on a generalized Egnell inequality, in preparazione.

- [66] A. Perrotta, B. Volzone, A note on a Sobolev Inequality with a remainder term for functions vanishing on part of the boundary, *Rend. Acc. Sci. fis. Mat. Napoli*, **LXXIV** (2007) 35-50.
- [67] S. I. Pohozaev, On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **165** (1965), 36-39.
- [68] G. Pólya, G. Szegő: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann.of Math. Studies, n.27, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [69] H. Sagan, Introduction to the calculus of variations, Dover Publications, Inc., New York (1969).
- [70] L. F. Shampine, M. W. Reichelt, The MATLAB ODE Suite, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18** (1997), 1-22.
- [71] L. F. Shampine, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hall, New York, 1994.
- [72] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.* **110** (4) (1976), 353-372.
- [73] G. Talenti, Elliptic equations and rearrangements, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **3** (4) (1976), 697-718.
- [74] G. Talenti, Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **120** (1979), 159-184.
- [75] G. Talenti, Linear elliptic P.D.E.'s: level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions, *Boll. Un. Mat. Ital.* **4-B** (1985), 917-949.
- [76] M. Tricarico, On the Neumann problem for a class of second order elliptic equations, *Matematiche (Catania)* **40** (1985), 63-82.

- [77] G. Trombetti, Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni a derivate parziali, *Boll. Un. Mat. Ital.* **3-B** (2000), 601-634.
- [78] J. L. Vazquez, E. Zuazua, The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse square potential, *J. Funct. Anal.*, **173** (2000), 103-153.
- [79] X.J. Wang, Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *J. Differential Equations*, **93**(1991) 283-310.
- [80] Z. Q. Wang, M. Willem, Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms, *J. Funct. Anal.*, **203** (2003), 550-568.
- [81] H. Weinberger, Symmetrization in uniformly elliptic problems, *Studies in Math. Anal. and Related Topics*, Stanford Univ. Press, (1962), 424-428.
- [82] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, Springer Verlag, New York, 1989.
- [83] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, 1968.