Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche
XVII ciclo

tesi

Gruppi con molti sottogruppi normali

di

Fausto De Mari

Indice

Introduzione

Un gruppo *semplice* è un gruppo privo di sottogruppi normali non-banali. Differentemente da quanto il termine semplice possa indurre a pensare, più agevole, ma non banale, è la descrizione dei gruppi cha hanno una struttura normale ricca.

Un gruppo in cui ogni sottogruppo è normale è chiamato un *gruppo di Dedekind* (o anche gruppo dedekindiano). Esempi di gruppi dedekindiani sono ovviamente i gruppi abeliani ed è noto che un gruppo non-abeliano è dedekindiano se e soltanto se esso è prodotto diretto di un gruppo dei quaternioni di ordine 8 e di un gruppo abeliano periodico privo di elementi di periodo 4. Chiaramente, richiedere che tutti i sottogruppi di un gruppo sono normali è una condizione molto forte, ma quasi altrettanto forte può essere richiedere che l'insieme dei sottogruppi non-normali sia "piccolo". Nel 1990, N.S. Hekster e H.W. Lenstra [22] studiano i gruppi con un numero finito di sottogruppi non-normali, provando che un gruppo infinito non-dedekindiano G ha questa proprietà se e soltanto se $G = A \times B$ con B estensione centrale finita di un p-gruppo di Prüfer (p primo) ed A un gruppo finito dedekindiano privo di elementi di periodo p. Una condizione più debole rispetto a quella considerata da N.S. Hekster e H.W. Lenstra che assicuri che un gruppo sia dotato di "molti" sottogruppi normali, può essere sicuramente una condizione di catena imposta all'insieme dei sottogruppi non-normali. Le condizioni di catena sui sottogruppi non-normali sono l'oggetto del primo capitolo di questa tesi. Si mostrerà come sia la condizione minimale che la condizione massimale imposta all'insieme dei sottogruppi non-normali di un gruppo vincola di molto la struttura di questo, inoltre si introdurrà la nozione di condizione delle catene doppie e si proverà che un gruppo localmente radicale verifica questa condizione imposta all'insieme dei suoi sottogruppi non-normali se e solo se esso verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.

E' semplice accorgersi che un gruppo risolubile dotato di un numero finito di sottogruppi subnormali è finito. Questo suggerisce che, almeno nell'universo dei gruppi risolubili, la presenza di "molti" sottogruppi normali può essere garantita da restrizioni imposte all'insieme dei sottogruppi subnormali non-normali. Secondo questo punto di vista, la condizione più estrema è chiaramente quella che richiede che ogni sottogruppo subnormale è normale: un gruppo in cui la relazione di normalità è transitiva si dice un *T-gruppo.* I T-gruppi risolubili sono stati studiati da W. Gaschütz [20] e G. Zacher [33], nel caso finito, e da D.J.S. Robinson [28], nel caso di gruppi infiniti. Un ruolo fondamentale nello strudio dei T-gruppi è svolto dagli *automorfismi potenza* ovvero da quegli automorfismi che fissano tutti i sottogruppi. Nel secondo capitolo di questa tesi, si inizia con la descrizione del gruppo degli automorfismi potenza e di altri gruppi di automorfismi che saranno un utile strumento per la trattazione degli argomenti che verrano sviluppati nei paragrafi successivi. Si passa poi a descrivere la struttura dei T-gruppi risolubili infiniti e si discuterà di alcune generalizzazioni di questa classe.

I gruppi risolubili con un numero finito di sottogruppi subnormali non-normali sono stati descritti da G. Cutolo [7], mentre i gruppi che verificano la condizione minimale o la condizione massimale sull'insieme dei sottogruppi subnormali non-normali sono stati considerati da F. De Mari e F. de Giovanni in [10] e [11]. L'imposizione di una tale condizione finitaria all'insieme dei sottogruppi subnormali non-normali permette di ottenere, per un gruppo risolubile, delle limitazioni strutturali molto simili a quelle che soddisfano i gruppi in cui la relazione di normalità è transitiva. Nel terzo paragrafo del Capitolo 2, si mostra come analoghi risultati possono essere ottenuti per i gruppi risolubili che verificano la condizione delle catene doppie sui sottogruppi subnormali non-normali; si lascia aperta la questione di stabilire se si possa o meno caratterizzare la classe dei gruppi (risolubili) che verificano la condizione delle catene doppie sui sottogruppi subnormali non-normali come la classe dei gruppi (risolubili) che verificano la condizione minimale oppure massimale sullo stesso insieme.

Se G è un gruppo, l'intersezione $\omega(G)$ dei normalizzanti dei sottogruppi subnormali di G è un sottogruppo (caratteristico) chiamato *sottogruppo di Wielandt* di G. Recentemente, C. Casolo [3] ha provato che in un gruppo risolubile G in cui ogni sottogruppo subnormale ha un numero limitato di coniugati il quoziente $G/\omega(G)$ è finito. Nella parte finale di questa tesi si considereranno i gruppi risolubili G che hanno un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali (infiniti) e si proverà che il quoziente $G/\omega(G)$ è finito quando $G/Z(G)$ è periodico.

Notazioni e terminologia sono quelle usuali in Teoria dei Gruppi, in particolare ci si riferisce a [29].

Capitolo 1

Restrizioni sui sottogruppi non-normali

1.1 Condizione minimale e massimale sui sottogruppi non-normali

Se χ una proprietà pertinente i sottogruppi di un gruppo, spesso accade che un gruppo verifica la condizione minimale sui sottogruppi che non godono della proprietà χ se e solo se esso verifica la condizione minimale su tutti sottogruppi oppure ogni suo sottogruppo verifica χ. Quando la proprietà per un sottogruppo è quella di essere normale, nella classe dei gruppi localmente graduati (cioè dei gruppi in cui ogni sottogruppo finitamente generato non identico ha un sottogruppo proprio di indice finito) si ottiene, infatti, il seguente:

Teorema 1.1.1 (Phillips - Wilson [27]) *Sia G un gruppo localmente graduato. Allora G verifica la condizione minimale sui sottogruppi non-normali se e soltanto se G è un gruppo di Černikov oppure è dedekindiano.*

Dimostrazione – Chiaramente, sia i gruppi di Černikov che i gruppi dedekindiani verificano la condizione minimale sui sottogruppi non-normali. Viceversa, supponiamo che G verifichi la condizione minimale sui sottogruppi non-normali. Sia x un elemento aperiodico di G. Se p è un numero primo è possibile considerare la catena

$$\langle x\rangle > \langle x^p\rangle > \ldots > \langle x^{p^n}\rangle > \langle x^{p^{n+1}}\rangle > \ldots$$

per cui esiste un intero non-negativo i tale che $\langle x^{p^i}\rangle$ è un sottogruppo normale di G. Analogamente, se q è un primo distinto da p, esiste un intero non-negativo j tale che $\langle x^{q^j}\rangle$ è un sottogruppo normale di G. Pertanto $\langle x\rangle = \langle x^{p^i}, x^{q^j}\rangle$ è normale in G. In particolare, ogni sottogruppo ciclico infinito di G è normale.

Ora, sia a un elemento periodico di G. Se $ax \neq xa$, allora $x^a = x^{-1}$ e quindi

$$\langle a, x^4 \rangle > \ldots > \langle a, x^{2^n} \rangle > \langle a, x^{2^{n+1}} \rangle > \ldots$$

è una catena infinita di sottogruppi non-normali di G. Questa contraddizione prova che $ax = xa$, sicchè ax è aperiodico e quindi $\langle a, x \rangle = \langle ax, x \rangle$ è un sottogruppo normale di G; essendo $\langle a \rangle$ caratteristico in $\langle a, x \rangle$ segue che anche $\langle a \rangle$ è normale. Pertanto se G è non periodico, ogni sottogruppo ciclico è normale e quindi G è abeliano in questo caso.

Supponiamo che G sia periodico. Per assurdo, G contenga un sottogruppo infinito e finitamente generato H. Poiché G è localmente graduato, esiste una catena di sottogruppi normali

$$H = H_1 > H_2 > \ldots > H_n > H_{n+1} > \ldots$$

con H_i/H_{i+1} finito e non-identico per ogni intero positivo i; in particolare, ogni H_i è finitamente generato (cfr. [29] Part 1, Theorem 1.41). Siccome G verifica la condizione minimale sui sottogruppi non-normali, esiste un intero positivo n tale che H_i è un sottogruppo normale di G per ogni $i \geq n$. Sia $m \geq n$ un intero positivo tale che ogni sottogruppo di H_m/H_t sia normale in G/H_t, per ogni $t > m$. Allora

$$\gamma_3(H_m) \leq \bigcap_{t>m} H_t =: L,$$

e quindi H_m/L e un gruppo finitamente generato periodico e nilpotente contro l'essere esso infinito. Pertanto, per ogni intero positivo $m \geq n$ esiste un intero $t > m$ ed un sottogruppo di H_m contenente H_t e non-normale in G ed è così possibile costruire una catena discendente infinita di sottogruppi non-normali di G. Questa contraddizione prova che G è localmente finito.

Supponiamo che G non sia di Černikov, e sia X sia un sottogruppo ciclico di G. Per un noto risutato di Šunkov (cfr. [31]), G contiene un sottogruppo abeliano che non verifica la condizione minimale sui sottogruppi e quindi contiene un sottogruppo del tipo $A = \operatorname*{Dr}_{n\in\mathbb{N}} A_n$ con ogni A_n ciclico d'ordine primo. Chiaramente, esiste un insieme finito F di interi positivi tale che $A \cap X$ sia contenuto nel sottogruppo $\langle A_i \mid i \in F \rangle$ e quindi, a meno di rimpiazzare A con il sottogruppo $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus F \rangle$, si può supporre che $A \cap X = \{1\}$. Allora posto

$$B_n = \operatorname*{Dr}_{m\geq n} A_m,$$

per ogni intero positivo n, si ottiene la catena decrescente infinita di sottogruppi $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e pertanto, poiché G verifica la condizione minimale sui sottogruppi non-normali, deve esistere un intero positivo r tale che B_k sia un sottogruppo normale di G per ogni $k \geq r$. La legge modulare assicura, quindi, che la catena

$$B_r X > B_{r+1} X > \ldots > \bigcap_{s\geq r} B_s X = X$$

è infinita e pertanto X è un sottogruppo normale di G. Segue così che ogni sottogruppo ciclico di G è normale e quindi G è dedekindiano. □

Passiamo ora ad esaminare la struttura dei gruppi che verificano la condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Ricordiamo che un gruppo si dice un $\mathfrak{D}$*-gruppo* se ogni suo sottogruppo è finitamente generato oppure normale. Il prossimo risultato mostra la relazione che sussiste tra i gruppi a condizione massimale sui sottogruppi non-normali e i $\mathfrak{D}$-gruppi.

Lemma 1.1.2 *Sia G un gruppo che verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Allora G è un $\mathfrak{D}$-gruppo il cui derivato verifica la condizione massimale. In particolare, G verifica localmente la condizione massimale.*

Dimostrazione – Sia H un sottogruppo non-normale di G e supponiamo che H non sia finitamente generato. Allora esiste un sottogruppo K di H massimale rispetto all'essere finitamente generato e non-normale in G. Quindi K è contenuto propriamente in H e $\langle K, x\rangle$ è normale in G per ogni elemento $x \in H \setminus K$. Pertanto

$$H = \langle \langle K, x\rangle | x \in H \setminus K\rangle$$

è un sottogruppo normale di G. Questa contraddizione prova che G è un $\mathfrak{D}$-gruppo.

Ora, al fine di provare che G' verifica la condizione massimale, si può supporre che G non sia dedekindiano. Sia K un sottogruppo ciclico di G. Poiché l'insieme dei sottogruppi X tali che $K \leq X \leq K^G$ verifica la condizione massimale, K^G verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali nonché la condizione massimale sui sottogruppi essendo G a condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Sia H un sottogruppo di G massimale rispetto all'essere non-normale. Allora H è finitamente generato e, per quanto provato poco fa, H^G verifica la condizione massimale. Inoltre, per la scelta di H, il gruppo G/H^G è dedekindiano e quindi $G'H^G/H^G \simeq G'/G' \cap H^G$ è finito. Segue che G' verifica la condizione massimale. □

I $\mathfrak{D}$-gruppi sono stati studiati da G. Cutolo [6], nel caso nilpotente, e da G. Cutolo e L.A. Kurdachenko [8] nel caso di gruppi verificanti una condizione di risolubilità generalizzata. Le dimostrazioni dei prossimi due risultati si possono trovare in [6].

Lemma 1.1.3 *Sia G un $\mathfrak{D}$-gruppo non-dedekindiano. Allora $Z(G) = T \times K$ con K senza torsione di rango finito e T finito oppure estensione finita di un p-gruppo di Prüfer. Inoltre:*

(i) se T è infinito, allora K è finitamente generato e ogni p'-sottogruppo di G è normale in G;

(ii) se G ha un sottogruppo finito e non-normale, allora K è finitamente generato.

Lemma 1.1.4 *Un $\mathfrak{D}$-gruppo nilpotente e senza torsione è abeliano oppure finitamente generato.*

Ricordiamo che un gruppo è detto *radicale* se è dotato di una serie (normale) ascendente a fattori localmente nilpotenti. Siamo ora in grado di caratterizzare i gruppi localmente radicali che verificano la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.

Teorema 1.1.5 (Cutolo [6]) *Sia G un gruppo localmente radicale. Allora G verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali se e solo se è di uno dei seguenti tipi*

(i) *G verifica la condizione massimale;*

(ii) *G è dedekindiano;*

(iii) *G è estensione centrale di un gruppo di Prüfer mediante un gruppo dedekindiano finitamente generato;*

(iv) *G è prodotto diretto di un gruppo finito dedekindiano non-abeliano e del gruppo additivo $\mathbb{Q}_2$ dei numeri razionali il cui denominatore è potenza di 2.*

Dimostrazione – Chiaramente, ogni gruppo che verifica la condizione massimale e ogni gruppo dedekindiano verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Supponiamo che G sia un gruppo contenente un sottogruppo centrale A di tipo p^∞ tale che G/A sia dedekindiano e $G = NA$ con N policiclico. Sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena strettamente crescente di sottogruppi non-normali di G, e sia K l' unione dei suoi termini. Poiché G/A è policiclico e K non verifica la condizione massimale, si ha che $A \cap K$ non può essere a condizione massimale e quindi $A = A \cap K \leq K$. D'altra parte G/A è dedekindiano, pertanto K è un sottogruppo normale di G. Poiché N verifica la condizione massimale, esiste un intero positivo n tale che $K \cap N = K_n \cap N \leq K_n$. Ma $K/K \cap N$ e KN/N sono G-isomofi e KN/N è un gruppo di Prüfer, pertanto K_n è un sottogruppo normale di G. Questa contraddizione prova che G, e quindi ogni gruppo come nella condizione (*iii*) dell'enunciato, verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.

Supponiamo, ora, che $G = Q \times F$ sia come nella condizione (*iv*) del Teorema, quindi $Q \simeq \mathbb{Q}_2$ e F è un gruppo finito dedekindiano non-abeliano. Se $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena strettamente crescente di sottogruppi non-normali e K è la sua unione, è chiaro che $N = K_1 \cap Q$ è non identico e quindi $Q/N = A \times D$ con A di tipo 2^∞ e D abeliano finito d'ordine dispari. Segue che $G/N = A \times D \times (FN/N)$ è un gruppo che verifica la condizione (*iii*) dell'enunciato e quindi è un gruppo a condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Pertanto $K = K_n$, per qualche intero positivo n, e G verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.

Viceversa, supponiamo che G verifichi la condizione massimale sui sottogruppi non-normali, che G non sia dedekindiano e che non verifichi la condizione massimale. Per il Lemma 1.1.2, G' verifica la condizione massimale, sicché G' è policiclico (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.31) e quindi tale è anche $G/Z(G)$ (cfr. [18], Theorem 5.9); in particolare, $Z(G)$ non è finitamente generato. Per il Lemma 1.1.2, G è un $\mathfrak{D}$-gruppo che verifica localmente la condizione massimale, pertanto $G/Z(G)$ deve essere dedekindiano e quindi G è nilpotente. Sia T il sottogruppo di torsione di G. Per il Lemma 1.1.4 si ha che $G' \leq T$ oppure G/T è finitamente generato; ma, in quest'ultimo caso, T non è finitamente generato e quindi, ancora per il Lemma 1.1.2, G/T è abeliano. In ogni caso, quindi, G' è periodico nonché finito. Segue allora da un noto risultato di Schur che $G/Z(G)$ è periodico e quindi anche $G/Z(G)$ è finito.

Sia U il sottogruppo di torsione di $Z(G)$ e supponiamo che G/U sia finitamente generato. Allora, per il Lemma 1.1.3, U contiene un sottogruppo di Prüfer A tale che G/A sia finitamente generato. Pertanto G/A è dedekindiano, per il Lemma 1.1.2, e G verifica (iii). Supponiamo allora che G/U non sia finitamente generato. Poiché $G/Z(G)$ è finito, segue dal Lemma 1.1.3 che U è finito e che ogni sottogruppo finito di G è normale in G. Allora G deve contenere un sottogruppo ciclico infinito H non-normale. Poiché $[H_G, G] \leq H_G \cap G' \leq H \cap G' = \{1\}$, si ha che $H_G = H \cap Z(G) \neq \{1\}$ e H/H_G è finito. Ancora il Lemma 1.1.3 assicura che G/H_G contiene un sottogruppo centrale P/H_G di tipo p^∞ (per qualche primo p) tale che G/P sia finitamente generato e dedekindiano. Essendo $G/Z(G)$ finito e $H_G = H \cap Z(G) \leq P \cap Z(G)$, si ha che P è centrale; inoltre, $P = P_0 \times P_1$ con P_0 finito e P_1 isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Q}_p$ dei numeri razionali il cui denominatore è potenza di p. Poiché il gruppo quoziente G/P_1 è dedekindiano e $G' \cap P_1 = \{1\}$, si ha che G/P_1 è finito. Quindi G' ha ordine 2 e $G/Z(G)$ ha esponente 2. Per il Lemma 1.1.3 ogni p'-sottogruppo di G/H_G è normale, quindi H/H_G è un p-gruppo e p divide l'ordine di $G/Z(G)$. Pertanto $p = 2$. Sia V/P_1 la $2'$-componente di G/P_1. Essendo $V' \leq G' \cap P_1 = \{1\}$, V è abeliano e quindi $V = V_0 \times V_1$ con V_0 finito e V_1 isomofo a $\mathbb{Q}_2$; inoltre, G/V_1 è dedekindiano finito non-abeliano. Sia Z/V_1 il 2-sottogruppo di Sylow di G/V_1. Allora $G' \leq Z$ e $V_1G'/G' \simeq V_1 \simeq \mathbb{Q}_2$, sicchè esiste un sottogruppo B di Z contenente G' tale che $Z = (V_1G')B$ e $V_1G' \cap B = G'$ (cfr. [19] vol. 1, p.223). Quindi $Z = V_1 \times B$ e B è finito. Segue che

$$G = VZ = V = V_1 \times B = V_1 \times (BV_0)$$

e $BV_0 \simeq G/V_1$. Pertanto G verifica (iv) ed il teorema è provato. □

Segue, in particolare, dal precedente Teorema che ogni gruppo localmente radicale a condizione massimale sui sottogruppi non-normali verifica la condizione massimale sui sottogruppi oppure è nilpotente e centrale-per-finito, in questo secondo caso la classe di nilpotenza è al più 2 (cfr. [6], Corollary 2.5).

1.2 Condizione delle catene doppie sui sottogruppi non-normali

Sia G un gruppo e sia χ una proprietà pertinente i sottogruppi. Si dice che G verifica la *condizione delle catene doppie sui χ-sottogruppi* se G non contiene famiglie $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ di χ-sottogruppi tali che H_i sia un sottogruppo proprio di H_{i+1} per ogni intero i.

Chiaramente, ogni gruppo che verifica la condizione minimale sui χ-sottogruppi oppure la condizione massimale sui χ-sottogruppi verifica anche la condizione delle catene doppie sui χ-sottogruppi. E' stato provato da T.S. Shores [30] che un gruppo localmente radicale verifica la condizione delle catene doppie (sui sottogruppi) se e solo se esso verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale. In questo paragrafo, si mostrerà come una caratterizzazione analoga a quella di T.S. Shores valga quando si considera la proprietà per un sottogruppo di essere non-normale. Nel seguito, per brevità, ci si riferirà alla classe dei gruppi verificanti la condizione delle catene doppie sui sottogruppi non-normali come alla classe dei *DC-gruppi.*

Lemma 1.2.1 *Sia G un DC-gruppo. Se G contiene una sezione H/K che è prodotto diretto di una famiglia infinita di sottogruppi non-identici, allora K è normale in G e G/K è dedekindiano.*

Dimostrazione – Chiaramente, esiste una famiglia contabile di sottogruppi $(H_n/K)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$H/K = \operatorname*{Dr}_{n\in\mathbb{Z}} H_n/K.$$

Per ogni intero r sia

$$L_r = \langle H_n \mid n \leq r\rangle;$$

allora

$$\ldots < L_{-2} < L_{-1} < L_0 < L_1 < L_2 < \ldots$$

e quindi esiste un intero m tale che L_m è un sottogruppo normale di G. Pertanto K^G è contenuto in L_m e quindi anche in H.

Se n ed r sono interi distinti, anche il gruppo L_r/H_n è prodotto diretto di una famiglia infinita di sottogruppi non identici e quindi lo stesso ragionamento prova che $H_n^G \leq L_r$. Segue che, per ogni intero r, il sottogruppo L_r è normale in G e così anche

$$K = \bigcap_{r\in\mathbb{Z}} L_r$$

è un sottogruppo normale di G.

Ora, per provare che G/K è dedekindiano, possiamo supporre, senza ledere da generalità, che K sia indentico e $H = \operatorname*{Dr}_{n\in\mathbb{Z}} H_n$, dove ogni H_n è un sottogruppo normale in G per la prima parte della dimostrazione. Sia x un elemento di G. Chiaramente, esiste un insieme finito F di interi tale che $\langle x\rangle \cap H$ è contenuto in $\operatorname*{Dr}_{n\in F} H_n$ e quindi, rimpiazzando H col suo sottogruppo $\operatorname*{Dr}_{n\in\mathbb{Z}\setminus F} H_n$, si può supporre che $\langle x\rangle \cap H$ sia identico. Per ogni intero s sia $V_s = \langle H_n \mid n \leq s\rangle$. La condizione DC assicura che il sottogruppo $\langle x\rangle V_s$ è normale in G per infiniti interi s, sicchè, in particolare, $\langle x\rangle L_r$ è normale in G per ogni intero r e quindi anche

$$\langle x\rangle = \bigcap_{r\in\mathbb{Z}} \langle x\rangle L_r$$

è normale in G. Pertanto G è dedekindiano. □

Corollario 1.2.2 *Sia G un DC-gruppo. Allora G è dedekindiano oppure i sottogruppi abeliani di G sono Max-per-Min.*

Dimostrazione – Supponiamo che G non sia dedekindiano e sia A un sottogruppo abeliano di G. Consideriamo un sottogruppo libero B di A tale che A/B sia periodico. Per il Lemma 1.2.1, B verifica la condizione massimale. Supponiamo, per assurdo, che A/B non verifichi la condizione minimale. Se $n \geq 3$, il gruppo A/B^{2^n} deve avere zoccolo infinito e pertanto ancora il Lemma 1.2.1 assicura che B^{2^n} è un sottogruppo normale di G e che G/B^{2^n} è abeliano. Segue che G è abeliano e questa contraddizione completa la dimostrazione. □

Il prossimo risultato mostra, in particolare, che nella classe dei gruppi locamente finiti la condizione DC è equivalente alla condizione minimale sui sottogruppi non-normali.

Corollario 1.2.3 *Sia G un DC-gruppo localmente finito. Allora G è dedekindiano oppure è un gruppo di Černikov.*

Dimostrazione – Se G non è dedekindiano, allora esso verifica la condizione minimale sui sottogruppi abeliani per il Corollario 1.2.2 e quindi è un gruppo di Černikov per un risultato di Šunkov (cfr. [31]). □

Lemma 1.2.4 *Sia G un DC-gruppo. Allora ogni sottogruppo non-normale di G è periodico oppure finitamente generato.*

Dimostrazione – Sia H un sottogruppo di G che sia non periodico e non finitamente generato. Consideriamo un elemento aperiodico a di H e supponiamo che $\langle a \rangle$ non sia normale in G. Allora esiste una successione di interi $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che ogni $\langle a^{k_n} \rangle$ sia non normale in G e

$$\langle a \rangle > \langle a^{k_1} \rangle > \ldots > \langle a^{k_n} \rangle > \ldots$$

Poiché H non è finitamente generato, per ogni elemento x di H esistono infiniti elementi $h_1, h_2, \ldots$ di H tali che

$$\langle a, x \rangle < \langle a, x, h_1 \rangle < \langle a, x, h_1, h_2 \rangle < \ldots < \langle a, x, h_1, \ldots, h_n \rangle < \ldots$$

Segue che $\langle a, x, h_1, \ldots, h_r \rangle$ è un sottogruppo normale di G per qualche intero positivo r, così $\langle x \rangle^G$ è contenuto in H e quindi H è normale in G in questo caso.

Supponiamo, allora, che ogni sottogruppo ciclico infinito di H sia G-invariante. Fissiamo un elemento aperiodico b di H ed un elemento periodico y di H. Se $by = yb$, allora $\langle b, y \rangle = \langle b, by \rangle$ è normale in G e quindi $\langle y \rangle^G \leq H$. Supponiamo che $by \neq yb$, allora $b^y = b^{-1}$ e quindi la catena

$$\langle b^4, y \rangle > \langle b^8, y \rangle > \ldots > \langle b^{2^n}, y \rangle > \ldots$$

è una catena infinita di sottogruppi non-normali di G. D'altra parte H non è finitamente generato e quindi esistono infiniti elementi $w_1, w_2, \ldots$ di H tali che

$$\langle b, y \rangle < \langle b, y, w_1 \rangle < \langle b, y, w_1, w_2 \rangle < \ldots < \langle b, y, w_1, \ldots, w_n \rangle < \ldots$$

Pertanto esiste un intero positivo s tale che $\langle b, y, w_1, \ldots, w_s \rangle$ è un sottogruppo normale di G, sicchè $\langle y \rangle^G$ è contenuto in H e anche in questo caso H è normale in G. □

Lemma 1.2.5 *Sia a un elemento aperiodico di un DC-gruppo G. Allora $\langle a\rangle^G$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali. Inoltre, se $\langle a\rangle$ non è un sottogruppo normale di G allora $G/\langle a\rangle^G$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.*

Dimostrazione – Supponiamo che $\langle a\rangle$ sia non-normale, allora esiste una successione di interi $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che ogni $\langle a^{k_n}\rangle$ sia non normale in G e

$$\langle a\rangle > \langle a^{k_1}\rangle > \ldots > \langle a^{k_n}\rangle > \ldots$$

Pertanto $G/\langle a\rangle^G$ deve verificare la condizione massimale sui sottogruppi non-normali. Inoltre, il reticolo $[\langle a\rangle^G/\langle a\rangle]$ verifica la condizione massimale e quindi $\langle a\rangle^G$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi normali. □

Lemma 1.2.6 *Sia G un DC-gruppo non-periodico e sia $H_1 < H_2 < \ldots$ una catena infinita di sottogruppi non-normali di G. Allora H_n è periodico per ogni intero positivo n.*

Dimostrazione – Si fissi un intero positivo n ed un elemento aperiodico a di H_n. Se $\langle a\rangle$ non è normale in G, allora esiste una successione di interi $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che ogni $\langle a^{k_n}\rangle$ sia non normale in G e

$$\langle a\rangle > \langle a^{k_1}\rangle > \ldots > \langle a^{k_n}\rangle > \ldots$$

contro l'essere G un DC-gruppo. Pertanto ogni sottogruppo ciclico infinito di H_n è G-invariante. Essendo H_n non-normale in G, segue che deve esistere un elemento periodico b di H tale che $a^b = a^{-1}$. Allora la catena

$$\langle a^4, b\rangle > \langle a^8, b\rangle > \ldots > \langle a^{2^n}, b\rangle > \ldots$$

è una catena di sottogruppi non-normali. Questa contraddizione conclude la dimostrazione. □

Un gruppo dotato di una serie finita a fattori che verificano la condizione minimale oppure la condizione massimale è detto un gruppo *minimax*. Un noto risultato di R. Baer assicura che un gruppo radicale i cui sottogruppi abeliani sono minimax è un gruppo risolubile e minimax (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.35).

Se G è un DC-gruppo radicale e G non è dedekindiano, il Corollario 1.2.2 assicura quindi che G è gruppo risolubile e minimax; in particolare, il residuale finito J di G è prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer e G/J è nilpotente-per-policiclico e nilpotente-per-abeliano-per-finito (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.33).

Ricordiamo che un *FC-elemento* di un gruppo G è un elemento del gruppo che ha solo un numero finito di coniugati e che G è detto un *FC-gruppo* se ogni suo elemento è un FC-elemento.

Teorema 1.2.7 ([9]) *Sia G un gruppo localmente radicale. Allora G verifica la condizione delle catene doppie sui sottogruppi non-normali se e solo se G verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi non-normali.*

Dimostrazione – Chiaramente, abbiamo solo da provare la necessarietà della condizione e iniziamo col provala con l'ulteriore ipotesi che il gruppo G sia radicale. Supponiamo, per assurdo, che G non verifichi né la condizione minimale né la condizione massimale sui sottogruppi non-normali. In particolare, G non è dedekindiano e quindi G è risolubile e minimax; inoltre G è non periodico per il Corollario 1.2.3. Sia R il radicale di Hirsch-Plotkin di G. Allora R non verifica né la condizione minimale né la condizione massimale sui sottogruppi (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.31 e Theorem 3.32) e quindi segue dal Corollario 1.2.3 che R è non periodico. Sia X un sottogruppo ciclico infinito non-normale di R. Segue dal Lemma 1.2.5 che X^G verifica la condizione massimale e quindi l'insieme T degli elementi periodici di X^G è un sottogruppo normale e finito di G. Siano $\bar{G} = G/T$ e

$$\bar{H}_1 < \bar{H}_2 < \dots$$

una catena di sottogruppi non-normali di $\bar{R}$. Per il Lemma 1.2.6, ogni H_i è periodico e quindi $H_nX^G \neq H_{n+1}X^G$ per ogni $n \geq 1$. Poiché G/X^G verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali per il Lemma 1.2.5, si ha che H_nX^G è normale in G per qualche intero positivo n. D'altra parte essendo $H_nX^G \leq R$, l'insieme K degli elementi periodici di H_nX^G è un sottogruppo. Chiaramente K è normale in G, contro l'essere

$$K = H_nX^G \cap K = H_n(X^G \cap K) = H_nT = H_n.$$

Questa contraddizione prova che $\bar{R}$ verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali e quindi R' è finito per il Teorema 1.1.5.

Pertanto R' è finito oppure ogni sottogruppo ciclico infinito di R è normale e in questo secondo caso, essendo R non-periodico, si ha che R è abeliano; quindi, in ogni caso, R' è finito, pertanto $R/Z(R)$ è residualmente finito e quindi il residuale finito J di G è contenuto in $Z(R)$. Poiché i sottogruppi periodici di G/J sono finiti, il Lemma 1.2.6 assicura che G/J verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali e quindi J è non identico.

Siano X un sottogruppo ciclico infinito non-normale di G e P un sottogruppo di Prüfer di G normalizzato da X. Allora la condizione DC assicura che $X\Omega_n(P)$ è normale in G per qualche intero positivo n. Pertanto J è un gruppo di Prüfer oppure ogni sottogruppo di R è G-invariante; in ogni caso, quindi, ogni sottogruppo di J è normale in G. In particolare, quanto sopra prova che la chiusura normale di ogni sottogruppo ciclico infinito di G è finito-per-ciclico, pertanto ogni elemento aperiodico di G è un FC-elemento e J deve essere un gruppo di Prüfer se G ha un sottogruppo ciclico infinito non-normale.

Ora, sia H/J un sottogruppo non-normale di G/J. Allora H/J è policiclico per il Lemma 1.1.2. Poiché J è infinito, segue che H non è finitamente generato (cfr. [29] Part 1, Lemma 1.43) e quindi H/J è finito per il Lemma 1.2.4. Essendo G/J non periodico, il Teorema 1.1.1 garantisce che G/J è abeliano; in particolare, gli elementi periodici G formano un sottogruppo e quindi, poiché gli elementi aperiodici di G sono FC-elementi, G è un FC-gruppo. Allora $G/Z(G)$ è residualmente finito, sicchè J è contenuto in $Z(G)$. Segue che $G = R$ e $G' = R'$ è finito; in particolare, G ha un sottogruppo ciclico infinito non-normale e quindi J è un gruppo di Prüfer. Se Y è un sottogruppo periodico di G, allora $Y/Y \cap J$ è finito e quindi anche Y^G/Y_G è finito. D'altra parte, i sottogruppi non-normali di G sono periodici oppure finitamente generati per il Lemma 1.2.4, quindi ogni sottogruppo di G ha un numero finito di coniugati e pertanto $G/Z(G)$ è finito (cfr. [32], Theorem 7.20). Sia L il sottogruppo di torsione di $Z(G)$. Allora L è estensione finita di J per il Corollario 1.2.2, e quindi $Z(G) = L \times K$ per un opportuno sottogruppo senza torsione K. Essendo G centrale-per-finito, il Teorema 1.1.5 assicura che K non è finitamente generato. Sia $F_1 < F_2 < \ldots$ una catena di sottogruppi finitamente generati di K e sia P un sottogruppo periodico di G. Considerando la catena infinita

$$\ldots < F_1^{2^{n+1}} P < F_1^{2^n} P < \ldots < F_1 P < \ldots < F_n P < F_{n+1} P < \ldots$$

si ottiene che esiste un sottogruppo F di K tale che PF è normale in G, quindi anche P è normale in G essendo P il sottogruppo di torsione di FP. Segue allora dal Lemma 1.2.6 che G verifica la condizione massimale sui sottogruppi non-normali e questa contraddizione prova il teorema per i DC-gruppi radicali.

Ora, supponiamo che G sia localmente radicale. Per il Corollario 1.2.3 possiamo supporre che G sia un gruppo non periodico. Il Corollario 1.2.2 assicura che i sottogruppi abeliani di G sono minimax e quindi i sottogruppi finitamente generati di G sono risolubili e minimax; in particolare, G è localmente risolubile. Sia, per assurdo, G non risolubile. Allora $L = \gamma_3(G)$ non è risolubile né minimax e quindi contiene una catena di sottogruppi

$$\ldots < H_{-2} < H_{-1} < H_0 < H_1 < H_2 < \ldots$$

con H_{i-1} sottogruppo di indice infinito di H_i per ogni intero i (cfr. [34], Theorem 2). Poiché G è un DC-gruppo si ha che H_n è normale in G per qualche intero n. D'altra parte la classe dei gruppi localmente risolubili verificanti la condizione minimale debole o la condizione massimale debole coincide con la classe dei gruppi risolubili e minimax (cfr. [34]), pertanto H_n e G/H_n non sono minimax. Sia K un sottogruppo di G che contiene propriamente H_n. Allora K non è finitamente generato (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.35) e quindi K è normale in G oppure è periodico per il Lemma 1.2.4; inoltre, se K fosse periodico allora K sarebbe un gruppo di Černikov (cfr. [31]). Pertanto G/H_n è dedekindiano contro l'essere $H_n \neq L$. Questa contraddizione prova che G è risolubile e quindi la dimostrazione è conclusa. □

Capitolo 2

Restrizioni sui sottogruppi subnormali non-normali

2.1 Automorfismi che fissano sistemi notevoli di sottogruppi

2.1.1 Automorfismi Potenza

Sia G un gruppo. Un automorfismo α di G è detto *automorfismo potenza* se α fissa tutti sottogruppi di G. L'insieme $PAut\, G$ degli automorfismi potenza di G forma un sottogruppo normale del gruppo $Aut\, G$ degli automorfismi di G e le proprietà di questo gruppo sono state studiate da C.D.H. Cooper [4], in particolare sussiste la seguente:

Proposizione 2.1.1 *Sia G un gruppo. Allora $PAut\, G$ è un sottogruppo abeliano e residualmente finito di $Aut\, G$.*

Dimostrazione − Siano x un elemento di G e C_x il centralizzante in $PAut\, G$ di $\langle x\rangle$. Chiaramente, C_x è un sottogruppo normale di $PAut\, G$; inoltre, $PAut\, G/C_x$ è abeliano finito in quanto esso si può immergere in $Aut\,\langle x\rangle$. Poiché $\bigcap_{x\in G} C_x = \{1\}$ si ottiene l'asserto. □

Per quanto riguarda il gruppo degli automorfismi potenza di un gruppo abeliano, esso è completamente descritto dal seguente risultato.

Teorema 2.1.2 ([28]) *Sia G un gruppo abeliano e sia $\alpha \in PAut\, G$.*

(i) Se G è non periodico, allora α è l'identità oppure l'inversione.

(ii) Se G è periodico e $p \in \pi(G)$, allora per ogni intero positivo r esiste un intero positivo $m_{p,r} < p^r$ coprimo con p e congruo a $m_{p,r-1}$ modulo p^{r-1} tale che $g^\alpha = g^{m_{p,r}}$ per ogni elemento g di G di periodo al più p^r.

Viceversa, ogni applicazione di G in sé che verifica (i) oppure (ii) è un automorfismo potenza di G.

Dimostrazione – Siano a e b elementi aperiodici di G, e siano $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ tali che $a^\alpha = a^\varepsilon$ e $b^\alpha = b^\eta$. Se $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$, allora anche ab è aperiodico ed esiste $\lambda \in \{-1, 1\}$ tale che $(ab)^\alpha = (ab)^\lambda$, quindi

$$a^\lambda b^\lambda = (ab)^\lambda = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^\varepsilon b^\eta,$$

da cui $a^\lambda = a^\varepsilon$ e $b^\lambda = b^\eta$ nonché $\varepsilon = \lambda = \eta$. Se invece esiste un elemento $c = a^n = b^m$ non identico in $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, detto $\lambda \in \{-1, 1\}$ tale che $c^\alpha = c^\lambda$ si ha che

$$a^{n\lambda} = (a^n)^\lambda = c^\lambda = c^\alpha = (a^n)^\alpha = a^{n\varepsilon}$$

e quindi $n\lambda = n\varepsilon$ nonché $\lambda = \varepsilon$. Analogamente si ha anche che $\lambda = \eta$ e quindi $\eta = \varepsilon$. Questo prova che α agisce come l'identità o come l'inversione sul sottogruppo $\langle g \in G | o(g) = \infty\rangle$. Pertanto la (i) è provata.

Ora, supponiamo che G sia un p-gruppo (p primo) e siano a e a' elementi di G con $o(a) = p^r \geq o(a')$ (e r intero positivo). Poiché α è automorfismo potenza, si ha che esiste un intero positivo $m \leq p^r$ tale che $(m, p) = 1$ e $a^\alpha = a^m$. Consideriamo $A = \langle a, a'\rangle$ e osserviamo che esso ha esponente p^r. Poiché a è un elemento di periodo massimo di A, si ha che $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ per qualche elemento b di periodo al più p^r. Se $b^\alpha = b^l$ e $(ab)^\alpha = (ab)^n$, segue che

$$a^n b^n = (ab)^n = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^m b^l.$$

Essendo $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$, si ha che $a^{n-m} = 1 = b^{l-n}$. Poiché $o(b)$ divide p^r, si ha che $l \equiv m \ (mod\ o(b))$ e quindi $b^\alpha = b^l = b^m$. D'altra parte $a' = a^h b^k$ per opportuni interi h e k, sicchè $(a')^\alpha = a^{hm} b^{km} = (a')^m$. Infine, poiché a^p ha periodo p^{r-1},

$$(a^p)^\alpha = a^{p \cdot m_{p,r}} = a^{p \cdot m_{p,r-1}}$$

e quindi $m_{p,r} \equiv m_{p,r-1} \ (mod\ p^{r-1})$.

Viceversa, è semplice accorgersi che ogni applicazione di G in sé che verifica (i) oppure (ii) è un automorfismo che fissa i sottogruppi ciclici di G e quindi è un elemento di $PAut\,G$. □

Un automorfismo potenza viene detto *universale* se esso manda elementi dello stesso periodo in potenze con lo stesso esponente. Il Teorema 2.1.2 assicura che nel caso di gruppi abeliani non-periodici oppure di esponente finito, ogni automorfismo potenza è universale, e quindi si può affermare che *ogni automorfismo potenza di un gruppo abeliano è localmente universale* nel senso che è universale su ogni sottogruppo finitamente generato.

Siano G un p-gruppo abeliano (p primo) e $\sigma \in PAut\,G$. Se g è un elemento di G di periodo al più p^r (con r intero positivo), il Teorema precedente assicura che $g^\sigma = g^{m_{p,r}}$ dove $(m_{p,r}, p) = 1$, $0 < m_{p,r} < p^r$ e $m_{p,r} \equiv m_{p,r-1}$ $(mod\ p^{r-1})$. Queste condizioni assicurano che, per $r \geq 1$, risulta

$$m_{p,r} = \alpha_0 + \alpha_1\ p + \alpha_2\ p^2 + \ldots + \alpha_{r-1} p^{r-1},$$

dove $0 < \alpha_0 < p$ e $0 \leq \alpha_i < p$. Pertanto a σ corrisponde l'unità p-adica

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\ p^i.$$

Viceversa, data l'unità p-adica α esiste un unico automorfismo potenza σ di G tale da aversi $g^\sigma = g^{\alpha_0+\alpha_1\ p+\alpha_2\ p^2+\ldots+\alpha_{r-1}p^{r-1}}$ per ogni elemento g di G di periodo al più p^r. Inoltre, l'automorfismo σ è univocamente determinato da α se G ha esponente infinito, mentre σ è univocamente determinato modulo p^n da α se G ha esponente finito p^n. E' pertanto semplice rendersi conto che sussiste il seguente risultato.

Corollario 2.1.3 *Sia G un gruppo abeliano.*

(i) Se G è non periodico, allora $PAut\,G$ ha ordine 2 ed è generato dall'automorfismo che inverte gli elementi di G.

(ii) Se G è periodico allora

$$PAut\,G \simeq \underset{p\in\pi(G)}{\mathrm{Cr}}\ PAut\,G_p.$$

Inoltre, se G_p ha esponente infinito, $PAut\,G_p$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo delle unità p-adiche; mentre se G_p ha esponente finito p^n, allora $PAut\ G_p \simeq Aut\,C_{p^n}$ è isomorfo al gruppo degli elementi invertibili dell'anello degli interi modulo p^n.

Ricordiamo che, se p è un numero primo, il gruppo moltiplicativo delle unità p-adiche risulta isomorfo al prodotto diretto di un gruppo ciclico di ordine 2 oppure $p-1$, a differenza che p sia pari oppure dispari, e del gruppo additivo degli interi p-adici (si noti che quest'ultimo è un gruppo senza torsione).

In particolare, quindi, segue dal Corollario 2.1.3 che un gruppo periodico di automorfismi potenza di un p-gruppo abeliano di esponente infinito è ciclico finito.

2.1.2 Automorfismi che fissano i sottogruppi infiniti

Sia G un gruppo. Un automorfismo di G che fissa tutti i sottogruppi infiniti di G è detto *I-automorfismo.* L'insieme $IAut\,G$ degli I-automorfismi di G è un sottogruppo normale di $Aut\,G$ contenente $PAut\,G$ ed è stato studiato da M. Curzio, S. Franciosi e F. de Giovanni [5] e da J.C. Beidelman e H. Heineken [2]. Chiaramente, $IAut\,G = Aut\,G$ se G è finito e $IAut\,G = PAut\,G$ se G è senza torsione.

Lemma 2.1.4 *Sia G un gruppo infinito e residualmente finito. Allora $IAut\,G = PAut\,G$.*

Dimostrazione – Sia α un I-automorfismo di G e sia x un elemento periodico di G. Poiché G è residualmente finito, esiste un sottogruppo normale di indice finito H tale che $H \cap \langle x \rangle = \{1\}$. Sia $(N_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi G-invarianti di indice finito di H tali che $\bigcap_{i \in I} N_i = \{1\}$. Poiché α opera come automorfismo potenza su ogni gruppo quoziente G/N_i e $\langle x \rangle \cap H = \{1\}$, si ha facilmente che α fissa $\langle x \rangle$. Il Lemma è così provato. □

Del prossimo risultato si farà uso per ottenere una limitazione sulla struttura di un gruppo il cui gruppo degli I-automorfismi contiene propriamente il gruppo degli automorfismi potenza; la dimostazione può essere trovata in [35], nel caso di gruppi localmente risolubili, e in [5], nel caso di gruppi radicali.

Lemma 2.1.5 *Sia Γ un gruppo finito di automorfismi di un gruppo G. Se G è localmente risolubile oppure radicale e se G non è un gruppo di Černikov, allora G contiene un sottogruppo abeliano Γ-invariante che non è un gruppo di Černikov.*

Teorema 2.1.6 (Curzio - Franciosi - de Giovanni [5]) *Sia il gruppo G estensione finita di un gruppo localmente radicale. Se G non è di Černikov, allora $IAut\,G = PAut\,G$.*

Dimostrazione – Sia R un sottogruppo normale localmente radicale di indice finito di G. Se g è un elemento di G, allora $R\langle g \rangle$ è ancora localmente radicale e pertanto si può supporre, senza ledere da generalità, che G sia localmente radicale. Si fissi un elemento periodico x di G.

Supponiamo che G sia periodico, e quindi localmente risolubile. Poiché $\langle x \rangle$ induce un gruppo finito di automorfismi su G, il Lemma 2.1.5 assicura che esiste un sottogruppo abeliano A di G che è normalizzato da x e che non è un gruppo di Černikov. Se S è lo zoccolo di A, il sottogruppo $S\langle x \rangle$ è infinito e residualmente finito e pertanto $IAut\,G$ agisce come gruppo di automorfismi potenza su esso per il Lemma 2.1.4. Pertanto ogni I-automorfismo di G fissa $\langle x \rangle$ in questo caso.

Sia G non periodico, e sia y un elemento aperiodico di G. Poiché $\langle x \rangle$ induce un gruppo finito di automorfismi su $\langle x, y \rangle$, dal Lemma 2.1.5 segue che esiste un sottogruppo abeliano A di G che è normalizzato da x e che non è un gruppo di Černikov. Se A è periodico, allora ogni I-automorfismo di G fissa $\langle x \rangle$ per quanto provato nella prima parte della dimostrazione. Supponiamo che A contenga un elemento aperiodico a. Il sottogruppo $\langle a, x \rangle$ è metabeliano e finitamente generato, pertanto esso è residualmente finito (cfr. [29] Part 2, p. 146) e quindi ogni I-automorfismo di G fissa $\langle x \rangle$ ancora per il Lemma 2.1.4.

Pertanto $IAut\,G = PAut\,G$ ed il Teorema è provato. □

Nel caso particolare di gruppi nilpotenti si ha, inoltre, il seguente:

Teorema 2.1.7 (Curzio - Franciosi - de Giovanni [5]) *Sia G un gruppo nilpotente tale che $IAut\,G \neq PAut\,G$. Allora G è estensione finita di un gruppo di Prüfer.*

Dimostrazione – Per il Teorema 2.1.6, G è un gruppo di Černikov. Siano $A \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$ e $B \simeq \mathbb{Z}(q^\infty)$ sottogruppi di G tali che $A \cap B = \{1\}$. Poiché G è nilpotente, A e B sono sottogruppi centrali (cfr. [29] Part 1, Lemma 3.13). Se x è un p'-elemento di G allora $\langle x\rangle \times A$ è fissato da ogni I-automorfismo e così anche $\langle x\rangle$ è fissato da $IAut\,G$. Poiché lo stesso accade per ogni q'-elemento di G, si può supporre che $p = q$. Sia α un I-automorfismo di G. Chiaramente, esiste un sottogruppo C tale che

$$A \times B = A \times C = B \times C$$

e quindi si ha facilmente che α opera come automorfismo potenza su $A \times B$. Siano y un elemento di G ed $H = \langle y, A, B\rangle$, allora $H = \langle z\rangle \times A \times B$ per qualche elemento z. Poiché α opera come automorfismo potenza su H/B, per ogni elemento u di $\langle z\rangle \times A$ si ha che $u^\alpha = u^n b$ dove n è un intero e $b \in B$. D'altra parte α fissa $\langle z\rangle \times A$, quindi $u^\alpha = u^n$ e α opera come automorfismo potenza su $\langle z\rangle \times A$. Pertanto α induce un gruppo di automorfismi potenza su H e, in particolare, $\langle y\rangle$ è fissato da α. Il Teorema è così provato. $\square$

Usando la classificazione dei gruppi semplici finiti, B. Hartely ha provato che un gruppo localmente finito dotato di un elemento di periodo potenza di primo il cui centralizzante è un gruppo di Černikov è estensione finita di un gruppo localmente risolubile (cfr. [21], Theorem 1). Questo risultato permette di ottenere il seguente Teorema.

Teorema 2.1.8 ([14]) *Sia G un gruppo localmente finito. Se G non è un gruppo di Černikov, allora $IAut\,G = PAut\,G$.*

Dimostrazione – Supponiamo che G contenga un elemento x di periodo potenza di primo tale che il centralizzante $C_G(x)$ sia un gruppo di Černikov. Il risultato di Hartely prima citato assicura che G è estensione finita di un gruppo localmente risolubile e quindi $IAut\,G = PAut\ G$ per il Teorema 2.1.6. Pertanto possiamo supporre che per ogni elemento di periodo potenza di primo y di G, il centralizzante $C_G(y)$ non sia un gruppo di Černikov; quindi $C_G(y)$ contiene un sottogruppo abeliano A che non verifica la condizione minimale (cfr. [31]). Se S è lo zoccolo di A, allora $B = S\langle y\rangle$ è un gruppo infinito e residualmente finito, quindi $IAut\,B = PAut\,B$ per il Lemma 2.1.4.

Questo prova che ogni I-automorfismo di G fissa gli elementi di periodo potenza di primo e pertanto $IAut\,G = PAut\,G$. $\square$

Siano G un gruppo e Γ un gruppo di automorfismi di G. Ricordiamo che Γ *stabilizza* una serie normale finita

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_t = G$$

se $[X_i, \Gamma] \leq X_{i-1}$ per ogni $i = 1, \ldots, t$; in questo caso un noto risultato di L.A. Kalužnin prova che Γ è nilpotente di classe al più $t - 1$ (cfr. [23], Theorem 1.C.1).

Corollario 2.1.9 *Sia G un gruppo infinito localmente finito. Allora $IAut\,G$ è metabeliano.*

Dimostrazione – Per il Teorema 2.1.8 si può supporre che G contenga un sottogruppo A di tipo p^∞. Chiaramente, $IAut\,G$ opera come gruppo di automorfismi potenza su ogni coniugato di A e quindi, per la Proposizione 2.1.1, il suo derivato Γ opera banalmente su A^G. D'altra parte, A^G è infinito e quindi sempre la Proposizione 2.1.1 assicura che Γ opera banalmente anche su G/A^G. Pertanto il gruppo Γ stabilizza la serie $\{1\} < A^G < G$ e quindi $\Gamma' = \{1\}$. □

In contrasto con la Proposizione 2.1.1, il gruppo degli I-automorfismi può non essere abeliano come mostra il seguente esempio. Siano $A = \langle a_0, a_1, \ldots \mid a_0 = 1; a_{n+1}^3 = a_n\rangle$ e $B = \langle b_0, b_1, \ldots \mid b_0 = 1; b_{n+1}^3 = b_n\rangle$ copie del 3-gruppo di Prüfer, e sia x l'automorfismo di $C = A \times B$ definito ponendo

$$a_n^x = b_n, \quad b_n^x = a_n^{-1}b_n^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Allora x ha periodo 3 e $G = \langle x\rangle \ltimes C$ è un 3-gruppo metabeliano e ipercentrale. Inoltre, se γ è l'automorfismo di G che fissa x e inverte gli elementi di C e se τ è l'automorfismo di G che fissa gli elementi di C e manda x in $xa_1b_1^{-1}$, è semplice accorgersi che γ e τ sono I-automorfismi di G che non permutano tra loro. Pertanto $IAut\,G$ è non abeliano.

2.1.3 Automorfismi Artiniani e Noetheriani

Sia G un gruppo. Un automorfismo α di G viene detto *automorfismo artiniano* se comunque si considera una catena discendente

$$H_1 > \ldots > H_n > H_{n+1} > \ldots$$

di sottogruppi di G, esiste un intero positivo m tale che $H_r^\alpha = H_r$ per ogni $r \geq m$. L'insieme $AAut\,G$ degli automorfismi artiniani di G è un sottogruppo normale di $Aut\,G$ contentene il gruppo $PAut\,G$. Chiaramente, $AAut\,G = Aut\,G$ se G verifica la condizione minimale sui sottogruppi ed inoltre $IAut\,G = PAut\,G$ se G è senza torsione, in quanto è semplice accorgersi che ogni automorfismo artiniano fissa i sottogruppi ciclici infiniti. Il gruppo degli automorfismi artiniani è stato sudiato da A. Leone [26], e con considerazioni simili a quelle fatte per gli I-automorfismi è possibile ottenere il seguente risultato.

Teorema 2.1.10 (Leone [26]) *Sia G un gruppo contente un sottogruppo normale H che non sia un gruppo di Černikov. Se H è localmente finito oppure localmente radicale, allora $AAut\,G = PAut\,G$.*

Un automorfismo di un gruppo che fissa definitivamente le catene ascendenti di sottogruppi viene invece detto *automorfismo noetheriamo*. Quindi un automorfismo α di un gruppo G è noetheriano se comunque si considera una catena ascendente

$$H_1 < \ldots < H_n < H_{n+1} < \ldots$$

di sottogruppi di G, esiste un intero positivo m tale che $H_r^\alpha = H_r$ per ogni $r \geq m$. L'insieme $NAut\,G$ degli automorfismi noetheriani di G forma un sottogruppo normale del gruppo $Aut\,G$ contente il gruppo $PAut\,G$. Chiaramente, $NAut\,G = Aut\,G$ se G verifica la condizione massimale sui sottogruppi.

Della seguente utile proprietà degli automorfismi noetheriani si farà spesso uso senza esplicita menzione.

Lemma 2.1.11 *Siano G un gruppo e X un sottogruppo non finitamente generato di G. Allora X è fissato da ogni automorfismo noetheriano di G.*

Dimostrazione – Sia α un automorfismo noetheriano di G. Se x è un elemento di X, esistono infiniti elementi $x_1, x_2, \ldots$ di X tali che

$$\langle x, x_1\rangle < \langle x, x_1, x_2\rangle < \ldots < \langle x, x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle < \ldots$$

e quindi $\langle x, x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle^\alpha = \langle x, x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ per un opportuno intero positivo m; in particolare, $x^\alpha \in X$. Pertanto $X^\alpha \leq X$ e lo stesso ragionamento applicato all'automorfismo noetheriano α^{-1} prova che $X^\alpha = X$. □

Se G è un gruppo localmente finito, il precedente Lemma assicura che ogni automorfismo noetheriano di G fissa i sottogruppi infiniti e pertanto $NAut\,G \leq IAut\,G$; in realtà in questo caso i gruppi di automorfismi in questione coincidono come mostra il prossimo risultato.

Teorema 2.1.12 ([14]) *Sia G un gruppo localmente finito. Allora $NAut\,G = IAut\,G$.*

Dimostrazione – E' sufficiente provare che $IAut\,G \leq NAut\,G$. Per il Teorema 2.1.8 si può supporre che G sia un gruppo di Černikov. Per assurdo, sia α un I-automorfismo che non sia noetheriano. Allora G contiene una catena di sottogruppi finiti

$$X_1 < X_2 < \ldots < X_n < \ldots$$

tali che $X_n^\alpha \neq X_n$ per ogni n; inoltre, se X è l'unione degli X_n è chiaro che X è infinito e quindi $X^\alpha = X$. Sia D il residuale finito di X. Poiché X/D è finito, esiste un intero positivo m tale che $X_kD = X_mD$ per ogni $k \geq m$. Inoltre, X_m^α è un sottogruppo finito di X e quindi X_m^α è contenuto in X_t per qualche $t \geq m$. Si osservi che α opera come automorfismo potenza su D, infatti se $x \in D$ allora D contiene un sottogruppo E di rango 1 a cui x appartiene (cfr. [19], p.107), e chiaramente α opera come automorfismo potenza su E. Allora da

$$X_t = X_mD \cap X_t = X_m(D \cap X_t)$$

segue che

$$X_t^\alpha = X_m^\alpha(D \cap X_t) \leq X_t$$

nonché $X_t^\alpha = X_t$. Questa contraddizione prova che $NAut\,G = IAut\,G$. □

In seguito si vuole analizzare la struttura di un gruppo G, verificante una condizione di nilpotenza generalizzata, quando $NAut\,G \neq PAut\,G$; a tale scopo è necessario affrontare, preliminarmente, il caso in cui G sia abeliano.

Lemma 2.1.13 *Sia G un gruppo abeliano senza torsione non finitamente generato. Allora $NAut\,G = PAut\,G$.*

Dimostrazione – Supponiamo che G abbia un automorfismo noetheriano α che non sia un automorfismo potenza. Poiché le catene ascendenti di sottogruppi di G che non sono α-invarianti sono finite, il Lemma di Zorn assicura che esiste un sottogruppo X di G massimale rispetto alla condizione di non essere fissato da α. Allora X è finitamente generato e quindi G/X è infinito. Poiché ogni sottogruppo di G che contiene propriamente X è fissato da α, in G/X comunque si considerano due sottogruppi non-identici la loro intersezione è non-identica e pertanto G/X è un gruppo di tipo p^∞ per qualche primo p. Sia $X = \langle x_1\rangle \times \ldots \times \langle x_t\rangle$ e poniamo

$$X_{i,q} = \langle x_i\rangle \times (\underset{j\neq i}{\mathrm{Dr}}\langle x_i^q\rangle),$$

per $i = 1, \ldots, t$ e per ogni primo $q \neq p$. Allora

$$G/X_{i,q} = X/X_{i,q} \times B_{i,q}/X_{i,q},$$

dove $B_{i,q}/X_{i,q}$ è un gruppo di tipo p^∞. Chiaramente, $B_{i,q}$ non è finitamente generato, quindi $B_{i,q}^\alpha = B_{i,q}$ e così anche

$$B_i = \bigcap_{q\neq p} B_{i,q}$$

è fissato da α. Inoltre,

$$B_i \cap X = \bigcap_{q\neq p}(B_{i,q} \cap X) = \bigcap_{q\neq p} X_{i,q} = \langle x_i\rangle$$

e quindi B_i ha rango 1. Poiché α è noetheriano, esiste un sottogruppo finito $C_i/\langle x_i\rangle$ di $B_i/\langle x_i\rangle$ fissato da α e così, essendo chiaramente C_i ciclico, si ha che anche $\langle x_i\rangle$ è fissato da α. Pertanto $X^\alpha = X$ e questa contraddizione prova il Lemma. □

Sia p un numero primo e si consideri il prodotto diretto $G = P \times \langle a\rangle$, dove P è un p-gruppo di Prüfer e $\langle a\rangle$ è un gruppo ciclico infinito. E' semplice accorgersi che l'automorfismo di G che opera come l'identità su P e che manda a in ay, dove y è un fissato elemento non-identico di P, è un automorfismo noetheriano ma non è un automorfismo potenza. Il prossimo risultato mostra che per un gruppo abeliano questa è una delle poche situazioni in cui il gruppo degli automorfismi potenza è contenuto propriamente nel gruppo degli automorfismi noetheriani.

Teorema 2.1.14 ([14]) *Sia G un gruppo abeliano tale che $NAut\,G \neq PAut\,G$. Allora G è finitamente generato oppure è prodotto diretto di un gruppo finitamente generato e di un gruppo di Prüfer.*

Dimostrazione – Sia $\alpha \in NAut\,G \setminus PAut\,G$ e sia T il sottogruppo di torsione di G. Supponiamo che T non sia un gruppo di Černikov, sicchè $NAut\,T = PAut\,T$ per il

Teorema 2.1.8 ed il Teorema 2.1.12; inoltre, lo zoccolo S di T è infinito e così $S = S_1 \times S_2$ con S_1 e S_2 infiniti. Sia a un elemento aperiodico di G. Allora $\langle S_1, a\rangle$ e $\langle S_2, a\rangle$ non sono finitamente generati e quindi essi sono fissati da α, pertanto anche $\langle a\rangle = \langle S_1, a\rangle \cap \langle S_2, a\rangle$ è α-invariante. Questa contraddizione prova che T è un gruppo di Černikov; inoltre, per lo stesso ragionamento fatto sopra, T è privo di due sottogruppi infiniti ad intersezione identica e pertanto T è estensione finita di un gruppo di Prüfer. Sia $G = T \times A$ per un opportuno sottogruppo (senza torsione) A. Supponiamo, per assurdo, che A non sia finitamente generato. Se x è un elemento di T, è allora possibile considerare una catena strettamente crescente di sottogruppi $(\langle x\rangle A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove ogni A_n è un sottogruppo (finitamente generato) di A e quindi $(\langle x\rangle A_n)^\alpha = \langle x\rangle A_n$, per qualche $n \geq 1$, nonché $\langle x\rangle^\alpha = \langle x\rangle$ essendo $\langle x\rangle$ caratteristico in $\langle x\rangle A_n$. Pertanto α opera come automorfismo potenza su T e G deve contenere un sottogruppo ciclico infinito X non fissato da α. Ora, se A avesse rango infinito esisterebbero due suoi sottogruppi non finitamente generati B_1 e B_2 tali che $B_1 \cap B_2 = \langle B_1, B_2\rangle \cap X = \{1\}$ e $X = \langle B_1, X\rangle \cap \langle B_2, X\rangle$, pertanto X sarebbe fissato da α. Quindi A ha rango finito, e G può essere scelto come controesempio con rango senza torsione minimo. Sia k un intero positivo tale che $X^k \leq A$. Allora X^k è fissato da α per il Lemma 2.1.13 ed inoltre α opera come un automorfismo noetheriano, ma non come automorfismo potenza, sul gruppo G/X^k. Poiché G/X^k non può essere estensione di un gruppo di Prüfer mediante un gruppo finitamente generato, altrimenti lo sarebbe anche G, si ha che anche G/X^k è un controesempio contro l'essere il rango senza torsione di G/X^k strettamente minore del rango senza torsione di G. Questa contraddizione conclude la dimostrazione. □

Per i gruppi di Baer sussiste invece il seguente:

Teorema 2.1.15 ([14]) *Sia G un gruppo di Baer. Se G non è minimax, allora $NAut\, G = PAut\, G$.*

DIMOSTRAZIONE − Sia x un elemento di G e sia $\alpha \in NAut\, G$. Se $\langle x\rangle$ è normale in G, allora $C_G(\langle x\rangle)$ ha indice finito in G; pertanto x è contenuto in un sottogruppo abeliano non-minimax (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.35) e quindi $\langle x\rangle^\alpha = \langle x\rangle$ per il Teorema 2.1.14. Supponiamo che $\langle x\rangle$ sia non-normale. Posto $X = \langle x\rangle^G$, per induzione sul difetto di $\langle x\rangle$ in G, possiamo supporre che X sia minimax. Se J è il residuale finito di X, allora ogni elemento di J è contenuto in un sottogruppo localmente ciclico di J (cfr. [19], p.107) e quindi $NAut\, G$ opera come un gruppo di automorfismi potenza su J; pertanto possiamo supporre che $J \neq X$. Sia $\bar{G} = G/J$. Allora $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{X})$ è un gruppo minimax (cfr. [25], 6.3.13) e quindi $C_{\bar{G}}(\bar{X})$ contiene un sottogruppo abeliano non-minimax $\bar{A}$ (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.35). Il sottogruppo $\bar{B} = \langle \bar{x}, \bar{A}\rangle$ è abeliano e quindi $B' \leq J$ è un gruppo abeliano che verifica la condizione mimimale. Poiché B non è minimax, segue che anche $C_G(\langle x\rangle)$ è non-minimax (cfr. [24], Lemma 3.2). Allora x è contenuto in un sottogruppo abeliano non-minimax (cfr. [29] Part 2, Theorem 10.35) e quindi $\langle x\rangle^\alpha = \langle x\rangle$ per il Teorema 2.1.14. Il Teorema è così provato. □

Il Teorema 2.1.12 e le considerazioni che seguono il Corollario 2.1.9, assicurano che, in generale, il gruppo degli automorfismi noetheriani non è abeliano. Escludendo ovviamente il caso di gruppi che verificano la condizione massimale, per un gruppo localmente nilpotente il gruppo degli automorfismi noetheriani è comunque risolubile di lunghezza derivata limitata.

Proposizione 2.1.16 *Sia G un gruppo localmente nilpotente non finitamente generato. Allora $NAut\,G$ è metabeliano.*

Dimostrazione – Il gruppo G contiene un sottogruppo abeliano non finitamente generato di A (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.31); inoltre, se A è estensione di un gruppo di Prüfer mediante un gruppo finitamente generato, rimpiazziamo A col suo sottogruppo di Prüfer. Allora $NAut\,G$ agisce come gruppo di automorfismi potenza su ogni coniugato di A per il Teorema 2.1.14, e quindi la Proposizione 2.1.1 assicura che il derivato Γ di $NAut\,G$ opera banalmente sulla chiusura normale B di A in G. D'altra parte, per ogni elemento x di $G \setminus B$, il sottogruppo $B\langle x\rangle$ non è finitamente generato e quindi è fissato da ogni automorfismo noetheriano di G; pertanto ancora la Proposizione 2.1.1 assicura che Γ opera banalmente anche su G/B. Segue che Γ stabilizza la serie $\{1\} < B < G$ e quindi Γ' è identico (cfr. [23], Theorem 1.C.1). □

2.2 T-gruppi

Un gruppo nel quale la relazione di normalità è transitiva, cioè in cui ogni sottogruppo subnormale è normale, viene detto *T-gruppo*. I gruppi finiti nella classe T sono stati studiati da W. Gaschütz [20] e da G. Zacher [33], mentre i T-gruppi infiniti sono stati caratterizzati, nel caso risolubile, da D.J.S. Robinson [28], al cui lavoro ci si può riferire per quei risultati, riguardanti i T-gruppi, che, per brevità di esposizione, nel segutito saranno solo enunciati.

La classe dei T-gruppi è ovviamene chiusa per immagini omomorfe e per sottogruppi subnormali ma, in generale, essa non è chiusa per sottogruppi. Infatti, poiché ogni gruppo semplice è banalmente un T-gruppo, il gruppo alterno di gado 5 è un T-gruppo, ma esso contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo alterno di grado 4 che non è un T-gruppo in quanto ha un sottogruppo normale isomorfo al gruppo quadrinomio di Klein ma è privo di sottogruppi normali di ordine 2.

Lemma 2.2.1 *Siano G un gruppo ed F il sottogruppo di Fitting di G. Se tutti i sottogruppi di F sono normali in G, allora $F = C_G(G')$. In particolare, se G è risolubile, allora esso è metabeliano e iperciclico.*

Dimostrazione – Poiché G induce un gruppo di automorfismi potenza su F, si ha che $G' \leq C_G(F)$ per la Proposizione 2.1.1. Pertanto F è contenuto nel centralizzante

$C_G(G')$ e quindi $F = C_G(G')$. Infine, se G è risolubile, allora $C_G(F) = Z(F)$ e quindi G' è abeliano e iperciclicamente immerso in G; in particolare, G è iperciclico. □

Teorema 2.2.2 *Sia G un T-gruppo e sia F il sottogruppo di Fitting di G. Allora $F = C_G(G')$ è un gruppo dedekindiano e $L = \gamma_3(G)$ è l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G. Inoltre, $L = L^2$.*

Dimostrazione – Il Lemma 2.2.1 assicura che $F = C_G(G')$. Inoltre, per ogni intero $n \geq 3$, il gruppo $G/\gamma_n(G)$ è dedekindiano, in quanto è un T-gruppo nilpotente, e quindi $\gamma_n(G) = \gamma_3(G)$. Infine, poiché ogni sottogruppo di L/L^2 è normale in G/L^2, si ha che L/L^2 è un fattore centrale di G; pertanto $L = [L, G] \leq L^2$ e quindi $L = L^2$. □

Si osservi che se G è un T-gruppo e H è un sottogruppo subnormale e nilpotente di G, allora ogni sottogruppo di H è normale in G. Pertanto come conseguenza del Lemma 2.2.1 si ottiene anche il seguente:

Teorema 2.2.3 *Ogni T-gruppo risolubile è metabeliano e iperciclico.*

I T-gruppi risolubili sono stati divisi da D.J.S. Robinson in quattro classi mutuamente disgiunte:

(1) la classe dei gruppi abeliani;

(2) la classe dei T-gruppi risolubili periodici non abeliani;

(3) la classe dei T-gruppi risolubili non abeliani con sottogruppo di Fitting non-periodico;

(4) la classe dei T-gruppi risolubili non abeliani e non periodici con sottogruppo di Fitting periodico.

In genere, ci si riferisce alle classi di cui sopra ai punti (3) e (4) come alla classe dei T-gruppi risolubili di tipo I e II, rispettivamente.

Teorema 2.2.4 *Sia G un gruppo risolubile non periodico. Allora G è un T-gruppo di tipo I se e solo se verifica le seguenti condizioni:*

(i) $G = \langle x \rangle C_G(G')$ *e* $C_G(G')$ *ha indice* 2 *in* G*;*

(ii) $c^x = c^{-1}$ *per ogni elemento* c *di* $C_G(G')$*;*

(iii) $\langle x^2, (C_G(G'))^2 \rangle = \langle x^2, (C_G(G'))^4 \rangle$.

Corollario 2.2.5 *Sia G un T-gruppo risolubile finitamente generato. Allora G è finito oppure abeliano.*

DIMOSTRAZIONE – Supponiamo che G non sia abeliano e che il sottogruppo di Fitting F di G sia non-periodico; in particolare, G è quindi un gruppo di tipo I. Dal Teorema 2.2.4 e dal Teorema 2.2.2, segue che esiste un elemento x di G che agisce come l'inversione su F tale che $G = \langle x \rangle F$, $x^2 \in F$ e $\langle x \rangle^2 F^2 = \langle x \rangle^2 F^4$. Sia T il sottogruppo di torsione di F. Poiché F ha indice finito in G, anche F è finitamente generato e quindi F/T, in quanto T-gruppo nilpotente senza torsione finitamente generato, è abeliano libero di rango finito. D'altra parte, $F^2T/T = F^4T/T$ e pertanto deve essere $F = T$. Questa contraddizione prova che se G è non abeliano il sottogruppo F deve essere periodico. Poiché G è supersolubile per il Teorema 2.2.3, se F è periodico si ha che F è finito e quindi tale è anche G essendo G risolubile. □

Teorema 2.2.6 *Sia G un T-gruppo risolubile di tipo II. Allora l'insieme T degli elementi periodici di G è un sottogruppo. Inoltre:*

(i) $G' = \gamma_3(G)$ è abeliano divisibile e $C_G(G') = G' \times H$ dove H è un sottogruppo centrale di G;

(ii) $T' = \gamma_3(T)$ è abeliano divisibile e $G' = T' \times K$ dove K è un sottogruppo centrale di T;

(iii) per ogni primo p in $\pi(G')$ il centralizzante $C_G(G'_p)$ è periodico;

(iv) per ogni primo p in $\pi(G')$, la p-componente di H ha esponente finito $p^{n(p)}$ e ogni elemento x di G induce sulla p-componente di $C_G(G')$ un automorfismo potenza $c \mapsto c^\alpha$, dove α è un'unità p-adica tale che $\alpha \equiv 1 \pmod{p^{n(p)}}$.

Supponiamo che G sia un p-gruppo (p primo) risolubile e con la proprietà T. Se G' ha esponente finito p^n, essendo G' abeliano e G un T-gruppo, si ha che ogni sottogruppo di ordine p di G' è contenuto nel centro di G; quindi G è nilpotente (di classe al più $n+1$). Supponiamo allora che G' non abbia esponente finito. Se p è dispari, segue dal Corollario 2.1.3 che $G/C_G(G')$ è finito di ordine che divide $p-1$ e pertanto $G = C_G(G')$ è nilpotente. Sia allora $p = 2$ e supponiamo che G non sia abeliano. Poiché $G' \leq C_G(G')$ ha esponente infinito e $C = C_G(G')$ è dedekindiano per il Teorema 2.2.2, si ha che C è abeliano. Ancora il Corollario 2.1.3 assicura che $G = \langle x \rangle C$ per un opportuno elemento x di $G \setminus C$ che induce l'inversione su C ed è tale che $x^2 \in C$ e $\langle x^2 \rangle C^2 = \langle x^2 \rangle C^4$. Sussiste pertanto il seguente:

Teorema 2.2.7 *Sia G un p-gruppo (p primo) risolubile e con la proprietà T. Allora:*

(i) Se p è dispari, G è abeliano;

(ii) Se $p = 2$, G è dedekindiano oppure $G = \langle x \rangle C_G(G')$ per un opportuno elemento x di $G \setminus C_G(G')$ che induce l'inversione su $C_G(G')$ ed è tale che $[x^2, G'] = \{1\}$ e $\langle x \rangle^2 (C_G(G'))^2 = \langle x \rangle^2 (C_G(G'))^4$.

Più in generale, la struttura di Sylow dei T-gruppi risolubili periodici è descritta dal seguente risultato.

Teorema 2.2.8 *Siano G un T-gruppo risolubile e periodico, $L = \gamma_3(G)$ e $C_p = C_G(L_p)$ per ogni $p \in \pi(L)$.*

(i) Se p è un primo dispari in $\pi(L)$, allora $p \notin \pi(G/L)$ e G/C_p è un gruppo ciclico non indentico il cui ordine divide $p-1$.

(ii) Se $2 \in \pi(L)$, allora $2 \in \pi(G/L)$ e G/C_2 ha ordine 2.

Occorre, ora, fare una panoramica su alcune generalizzazioni della classe dei T-gruppi (infiniti), onde rendere più agevole la comprensione dei successivi paragrafi.

In [15], S. Franciosi e F. de Giovanni hanno considerato i gruppi in cui ogni sottogruppo subnormale infinito è normale: questi gruppi sono chiamati *IT-gruppi.* Oltre a fornire una costruzione dei gruppi risolubili che godono della proprietà IT ma che non sono T-gruppi, i risultati ottenuti sono contenuti nel seguente:

Teorema 2.2.9 (Franciosi - de Giovanni [15]) *Sia G un IT-gruppo risolubile infinito e si supponga che G non sia un T-gruppo. Allora*

(i) il derivato G' di G è nilpotente e G'' è ciclico di ordine potenza di primo. In particolare, G è risolubile di lunghezza derivata al più 3;

(ii) se G è periodico, G è estensione di un gruppo di Prüfer mediante un T-gruppo finito;

(iii) se G è non periodico, l'insieme P degli elementi periodici G è un sottogruppo che contiene il sottogruppo di Fitting di G; inoltre G' è un gruppo di Prüfer ed ha indice finito in P.

Chiaramente, ogni gruppo risolubile che è estensione di un gruppo di Prüfer mediante un T-gruppo finito è un IT-gruppo; inoltre, è stato provato in [15] che anche ogni gruppo non-periodico che verifica la condizione (*iii*) del precedente Teorema è un IT-gruppo. Pertanto il Teorema 2.2.9 classifica completamente la classe degli IT-gruppi risolubili infiniti. Si osservi, in particolare, che ogni IT- gruppo risolubile con sottogruppo di Fitting non-periodico è necessariamente un T-gruppo.

Sempre S. Franciosi e F. de Giovanni, hanno inoltre considerato la classe dei gruppi i cui quozienti finiti sono T-gruppi [16] ed i gruppi in cui i sottogruppi subnormali non-normali hanno indice finito [17]; in particolare, ci si riferisce a questi ultimi come *LT-gruppi.* Gli LT-gruppi risolubili infiniti sono sempre metabeliani, nonché abeliani se senza torsione; inoltre, nel caso non-periodico, gli LT-gruppi sono descritti come segue.

Teorema 2.2.10 (Franciosi - de Giovanni [17]) *Sia G un gruppo risolubile e sia F il sottogruppo di Fitting di G.*

(i) Se G non è ciclico-per-finito e F è non-periodico, allora G è un LT-gruppo se e solo se G è un T-gruppo oppure esiste un elemento x di G che induce l'inversione su F tale che $G = F\langle x\rangle$ ed inoltre F è abeliano di indice 2 in G e F/F^2 è finito.

(ii) Se G è non-periodico e F è periodico, allora G è un LT-gruppo se e solo se G è un T-gruppo oppure $G = \langle x\rangle \ltimes T$ dove x è aperiodico, T è un sottogruppo periodico i cui sottogruppi subnormali sono normali in G, T/F è finito e ogni quoziente di G che sia nilpotente-per-finito è finitamente generato.

Per quanto riguarda gli LT-gruppi risolubili e periodici, essi hanno sempre un numero finito di sottogruppi subnormali non-normali. I gruppi risolubili infiniti con un numero finito di sottogruppi subnormali non-normali sono stati descritti da G. Cutolo [7]; un tale gruppo è sempre estensione di un gruppo abeliano finito mediante un T-gruppo e verifica diversi dei risultati di carattere generale validi per i T-gruppi quali, ad esempio, è metabeliano ed iperciclico.

Se G è un T-gruppo ed H è un sottogruppo subnormale di G, è ovvio che $H = H^G$. Un'altra possibile generalizzazione della classe dei T-gruppi, può essere, quindi, la classe dei gruppi G in cui ogni sottogruppo subnormale H è tale che l'indice $|H^G : H|$ sia finito: in tal caso si dice che G è un *T^*-gruppo*. La classe dei T^*-gruppi è stata considerata da C. Casolo [3]; in particolare, nel caso di gruppi primari e iperabeliani si ha il seguente:

Teorema 2.2.11 (Casolo [3]) *Sia G un p-gruppo iperabeliano (p primo) nella classe T^* e siano inoltre D il sottogruppo generato dai sottogruppi ascendenti abeliani divisibili di G e C il suo centralizzante in G. Allora G/D è nilpotente e C ha indice finito in G. Inoltre*

(i) se $p \neq 2$, allora G è nilpotente;

(ii) se $p = 2$, allora G/C ha ordine al più 2.

2.3 Condizione delle catene doppie sui sottogruppi subnormali non-normali

I gruppi che verificano la condizione minimale sui sottogruppi subnormali non-normali ed i gruppi che verificano la condizione massimale sui sottogruppi subnormali non-normali sono stati considerati in [10] e [11], rispettivamente, dove è stato mostrato come una tale condizione di catena vincola il gruppo, alla quale è imposta, ad avere una struttura molto simile a quella dei gruppi nella classe T. Si mostrerà in questo paragrafo che risultati dello stesso tipo possono essere ottenuti per gruppi che verificano una condizione di catena apparentemente più debole rispetto a quella massimale oppure minimale sui sottogruppi subnormali non-normali.

Sia G un gruppo. Si dirà che G è un *DCT-gruppo* se G verifica la condizione delle catene doppie sui sottogruppi subnormali non-normali cioè se G è privo di famiglie di sottogruppi subnormali non-normali $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ con $H_i < H_{i+1}$ per ogni intero i.

La dimostrazione del prossimo risultato può essere ottenuta in maniera analoga a quella del Lemma 1.2.1.

Lemma 2.3.1 *Sia G un DCT-gruppo contenente un sottogruppo subnormale abeliano che sia prodotto diretto di una famiglia infinita di sottogruppi non-identici. Allora ogni sottogruppo del radicale di Baer di G è normale in G.*

Corollario 2.3.2 *Sia G un DCT-gruppo il cui radicale di Baer B sia periodico. Se B non è un gruppo di Černikov, allora ogni sottogruppo di B è normale in G e $B = C_G(G')$.*

Dimostrazione – Poiché B non è un gruppo di Černikov, esso contiene un sottogruppo subnormale abeliano A che non verifica la condizione minimale (cfr. [29] Part 1, p.176). Allora lo zoccolo di A è subnormale in G ed è prodotto diretto di infiniti sottogruppi non-identici, sicchè ogni sottogruppo di B è normale in G per il Lemma 2.3.1 e $B = C_G(G')$ per il Lemma 2.2.1. □

Lemma 2.3.3 *Sia G un DCT-gruppo e sia x un elemento aperiodico del radicale di Baer di G. Allora $\langle x\rangle^G$ verifica la condizione massimale.*

Dimostrazione – Sia B il radicale di Baer di G. Ovviamente, possiamo supporre che $\langle x\rangle$ sia non-normale e che B non verifichi la condizione massimale. Allora esiste una successione di interi positivi $k_1, k_2, \ldots$ tali che $\langle x^{k_i}\rangle$ sia non-normale in G per ogni $i \geq 1$ e

$$\langle x\rangle > \ldots > \langle x^{k_n}\rangle > \langle x^{k_{n+1}}\rangle > \ldots$$

D'altra parte esistono infiniti elementi $b_1, b_2, \ldots$ di B tali che

$$\langle x\rangle < \langle x, b_1\rangle < \ldots < \langle x, b_1, \ldots, b_n\rangle < \ldots$$

sicchè la condizione DCT assicura che $\langle x, b_1, \ldots, b_m\rangle$ è un sottogruppo normale di G per qualche intero positivo m ed il Lemma è provato. □

Teorema 2.3.4 *Sia G un DCT-gruppo e sia B il radicale di Baer di G. Allora B coincide con il sottogruppo di Fitting di G ed è nilpotente. Inoltre, B è policiclico oppure abeliano-per-finito.*

Dimostrazione – Poiché se B è di Černikov allora B è nilpotente (cfr. [29] Part 1, Lemma 3.13), per il Corollario 2.3.2 possiamo supporre che B contenga un elemento aperiodico x. Se tutti i sottogruppi ciclici infiniti di B sono G-invarianti, a è un elemento periodico di B e T è il sottogruppo di torsione di B, allora $\langle x, a\rangle = \langle x, xa\rangle$ è normale in G è quindi anche

$$\langle x, a\rangle \cap T = \langle a\rangle(\langle x\rangle \cap T) = \langle a\rangle$$

è normale; pertanto B è abeliano in questo caso. Senza ledere da generalità si può quindi assumere che $\langle x\rangle$ non sia normale in G. Allora $\langle x\rangle$ contiene una catena discendente infinita di sottogruppi non-normali in G e pertanto la condizione DCT assicura che l'insieme dei sottogruppi finitamente generati non G-invarianti di B che contengono x ha un elemento massimale X. Per la scelta di X, il gruppo B/X^G è dedekindiano e quindi $B'X^G/X^G$ è finito. D'altra parte il Lemma 2.3.3 assicura che X^G verifica la condizione massimale, pertanto B' è finitamente generato. Al fine di provare che B è nilpotente, il Criterio di Nilpotenza di P. Hall ci consente di supporre che B sia metabeliano; inoltre, poiché gli elementi periodici di B' formano un sottogruppo normale e finito F, esite un intero non-negativo n tale che $F \leq Z_n(B)$ e quindi si può ulteriormente supporre che B' sia senza torsione. Se r è il rango di B' segue che

$$[B',_r B] \leq \bigcap_{p\in\mathbb{P}} (B')^p = \{1\}$$

e quindi B è nilpotente. In particolare, B verifica la condizione delle catente doppie sui sottogruppi non-normali, sicchè B è policiclico oppure abeliano-per-finito per il Teorema 1.2.7, il Teorema 1.1.1 ed il Teorema 1.1.5. □

Lemma 2.3.5 *Sia G un DCT-gruppo il cui radicale di Baer B sia non-periodico. Allora G induce un gruppo di automorfismi noetheriani su B.*

Dimostrazione – Per il Teorema 2.3.4, B è nilpotente. Senza ledere da generalità, possiamo supporre che B contenga un sottogruppo ciclico infinito X non normale in G. Sia

$$H_1 < H_2 < \dots$$

una catena infinita di sottogruppi di B non-normali in G. Supponiamo che H_n sia non-periodico per qualche intero positivo n. Allora, essendo non-normale in G, H_n deve contente un sottogruppo ciclico infinito non G-invariante nonché una catena discendente infinita $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di sottogruppi non-normali di G. Si ottiene così la catena doppia

$$\dots < A_{m+1} < A_m < \dots < A_1 < H_n < H_{n+1} < \dots$$

di sottogruppi subnormali non-normali di G. Questa contraddizione prova che ogni H_n è periodico, in particolare $H_nX \neq H_{n+1}X$ per ogni $n \geq 1$. Poiché X è non-normale in

G, la condizione DCT assicura che H_kX è G-invariante per qualche $k \geq 1$. Essendo H_k il sottogruppo costituito dagli elementi periodici di H_kX, segue che H_k è normale in G. Questa contraddizione conclude la dimostrazione. □

Ricordiamo che un gruppo G si dice *subsolubile* se è dotato di una serie ascendente a fattori abeliani i cui termini sono sottogruppi subnormali di G; equivalentemente, G è subsolubile se ogni suo quoziente non identico ha un sottogruppo subnormale abeliano non-identico. E' semplice rendersi conto che in un gruppo subsolubile G, indicato con B il radicale di Baer di G, si ha $C_G(B) = Z(B)$.

Il prossimo risultato mostra in particolare che, con l'ovvia eccezione dei gruppi che verificano la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi, è possibile limitare la lunghezza derivata di un DCT-gruppo risolubile.

Teorema 2.3.6 *Sia G un DCT-gruppo subsolubile. Allora G è risolubile. Inoltre se G non verifica né la condizione minimale né la condizione massimale sui sottogruppi, allora $G^{(4)}$ è un gruppo abeliano che verifica la condizione minimale; in particolare, G ha lunghezza derivata al più 5.*

Dimostrazione – Supponiamo che G non verifichi né la condizione minimale né la condizione massimale, in particolare il radicale di Baer B di G non è finitamente generato (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.27). Per il Teorema 2.3.4, B è nilpotente e quindi B verifica la condizione minimale oppure la condizione massimale sui sottogruppi non-normali per il Teorema 1.2.7.

Supponiamo che B sia non-periodico, in particolare B' è finito e abeliano per il Teorema 1.1.1 ed il Teorema 1.1.5. Sia $\bar{G} = G/B'$. Allora il noto Teorema di Fitting assicura che $\bar{B}$ è il radicale di Baer di $\bar{G}$, sicchè $C_{\bar{G}}(\bar{B}) = \bar{B}$ essendo G subsolubile. Per il Lemma 2.3.5, $\bar{G}$ induce un gruppo di automorfismi noetheriani su $\bar{G}$. Segue allora dalla Proposizione 2.1.16 che $G'' \leq C_G(B/B') = B$ e quindi $G^{(4)} = \{1\}$.

Supponiamo che B sia periodico. Se G induce un gruppo di automorfismi potenza su B, allora $G' \leq C_G(B) = Z(B)$ per la Proposizione 2.1.1 e G è metabeliano. Segue allora dal Corollario 2.3.2 che si può supporre che B sia un gruppo di Černikov. Sia T il massimo sottogruppo normale e periodico di G. Per il Teorema 2.3.4, B è anche il radicale di Baer di T e quindi T è un gruppo di Černikov (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.29). Siano J il residuale finito di T e F/J il radicale di Baer di G/J. Poiché G non verifica la condizione minimale, il sottogruppo F/J è infinito e quindi esso non è periodico. La prima parte della dimostrazione assicura quindi che $G^{(4)}$ è contenuto in J. Il Teorema è provato. □

Il Corollario 2.2.5 mostra che un T-gruppo risolubile finitamente generato è finito oppure abeliano. Lo stesso risultato continua ad essere vero per gruppi risolubili finitamente generati verificanti la condizione minimale sui sottogruppi subnormali non-normali (cfr. [10], Theorem 2.12) ma, come è ovvio, può non valere per i gruppi a condizione massimale sui sottogruppi subnormali non-normali. In ogni caso sussite il seguente:

Teorema 2.3.7 *Sia G un DCT-gruppo risolubile finitamente generato. Allora G è policiclico.*

Dimostrazione – Sia F il sottogruppo di Fitting di G. Per induzione sulla lunghezza derivata di G si ha che G/F è policiclico; in particolare, esiste una parte finita E di F tale che $F = \langle E \rangle^G$ (cfr. [29] Part 1, Lemma 1.43). Supponiamo che F sia non-periodico. Poiché F è nilpotente per il Teorema 2.3.4, E deve contente un elemento aperiodico x. Se y è un elemento periodico di E, allora xy è aperiodico ed F è anche la chiusura normale del sottoinsieme finito $(E \setminus \{y\}) \cup \{xy\}$; pertanto si può supporre che ogni elemento di E sia aperiodico e quindi F verifica la condizione massimale per il Lemma 2.3.3. Quindi G è policiclico in questo caso. Supponiamo allora che F sia periodico. Per il Corollario 2.3.2, si può assumere che F sia un gruppo di Černikov. Sia J il residuale finito di F. Allora F/J è finito, quindi G/J è policiclico e J è la chiusura normale di una parte finita (cfr. [29] Part 1, Lemma 1.43). Segue che J è finito e quindi G è policiclico. $\square$

Gruppi periodici nella classe DCT

Poiché un gruppo periodico di automorfismi di un gruppo di Černikov è un gruppo di Černikov (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.29), il prossimo risultato è una conseguenza del Corollario 2.3.2 e del Lemma 2.2.1.

Teorema 2.3.8 *Sia G un DCT-gruppo risolubile e periodico. Se G non è un gruppo di Černikov, allora G è metabeliano e iperciclico.*

Teorema 2.3.9 *Sia G un DCT-gruppo risolubile e periodico. Se G non è un T-gruppo, allora G è abeliano-per-finito e G/G' è un gruppo di Černikov.*

Dimostrazione – Chiaramente si può supporre che G non sia un gruppo di Černikov, sicchè anche il sottogruppo di Fitting F di G non è un gruppo di Černikov. Segue allora dal Corollario 2.3.2 che ogni sottogruppo di F è normale in G e quindi $G' \leq C_G(G') = F$. Così G/F è isomorfo ad un gruppo di automorfismi potenza di G', sicchè G/F è residualmente finito per la Proposizione 2.1.1 e quindi, se J/G' è il residuale finito di G/G', deve essere $J \leq F$. Sia X un sottogruppo subnormale non-normale di G; allora X' è normale in G e X/X' è contenuto nel sottogruppo di Fitting di G/X'. Poiché X è non-normale, segue dal Corollario 2.3.2 che G/X' è un gruppo di Černikov; pertanto, G/G' è un gruppo di Černikov. Infine, da $J \leq F$ segue che G/F è finito e quindi G è abeliano-per-finito per il Teorema 2.3.4. $\square$

Come conseguenza del Teorema 2.3.9 si ottiene che ogni sottogruppo subnormale di un DCT-gruppo risolubile periodico ha un numero finito di coniugati.

Corollario 2.3.10 *Sia G un DCT-gruppo risolubile periodico e sia X un sottogruppo subnormale non-normale di G. Allora G/X_G è un gruppo di Černikov. Inoltre, se G non è un gruppo di Černikov, allora X/X_G è abeliano e X^G/X_G è finito.*

Dimostrazione – Senza ledere da generalità, si può supporre che G non sia un gruppo di Černikov. Come nella dimostrazione del Teorema 2.3.9 si può provare che X' è normale in G e G/X' è di Černikov; in particolare, quindi, G/X_G è di Černikov e X/X_G è abeliano. Inoltre, X/X_G è contenuto nel sottogruppo di Fitting di G/X_G e X/X_G ha un numero finito di coniugati in G/X_G (cfr. [29] Part 1, Theorem 5.49). Poiché il sottogruppo di Fitting F di G ha indice finito e $X \cap F \leq X_G$, si ha che X/X_G è finito e quindi tale è anche X^G/X_G. □

Ogni p-gruppo (p primo) risolubile con la proprietà T ha, come mostrato nel Teorema 2.2.7, una struttura molto ristretta. Lo stesso accade per i DCT-gruppi risolubili primari. Ricordiamo che se G è un gruppo, il *sottogruppo di Wielandt* di G è definito come l'intersezione dei normalizzanti dei sottogruppi subnormali di G, e si denota con $\omega(G)$.

Teorema 2.3.11 *Sia G un p-gruppo (p primo) risolubile nella classe DCT che non sia un gruppo di Černikov.*

(i) Se p è dispari, allora G è abeliano.

(ii) Se $p = 2$, allora G ha un numero finito di sottogruppi subnormali non-normali.

Dimostrazione – Supponiamo che G non sia dedekindiano. Sia F il sottogruppo di Fitting di G e sia D il massimo sottogruppo normale abeliano divisibile di G. Per il Corollario 2.3.10, G è un T^*-gruppo e $D \leq \omega(G)$. Per il Teorema 2.2.11, si ha che $p = 2$, che G/D è nilpotente e che $G/C_G(D)$ ha ordine al più 2. In particolare, i sottogruppi subnormali di G hanno difetto limitato e quindi, se L è l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G, un noto risultato di Roseblade assicura che esiste un intero positivo n tale che $L = \gamma_n(G)$.

Per il Teorema 2.3.4, il Teorema 1.2.7 ed il Corollario 1.2.3 si può supporre che D sia non identico e che $F = C_G(D)$ sia abeliano. Per il Corollario 2.3.2, G/F è isomorfo ad un gruppo di automorfismi potenza di D e quindi esiste un elemento z che agisce come l'inversione su F tale che $G = F\langle z\rangle$. Allora $\gamma_{t+1}(G) = F^{2^t}$ per ogni $t \geq 1$, quindi L è abeliano divisibile e G/L ha esponente finito. Poiché G/L è nilpotente, segue dal Corollario 1.2.3 che G/L è finito oppure dedekindiano. Sia X un sottogruppo subnormale non-normale di G. Allora X non è contenuto in F e quindi esiste un elemento x di X tale che $a^x = a^{-1}$ per ogni $a \in F$. Segue che $[L, X] = L^2 = L$ e quindi, essendo X subnormale in G, L è contentuo in X. Pertanto G/L è finito e G ha un numero finito di sottogruppi subnormali non-normali. □

Se G è un T-gruppo, il Teorema 2.2.2 assicura che $\gamma_3(G)$ è l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G. Il prossimo risultato prova che anche nel caso dei DCT-gruppi risolubili periodici la serie centrale inferiore termina dopo un numero finito di passi.

Teorema 2.3.12 *Sia G un DCT-gruppo risolubile periodico. Allora $G/\bar{\gamma}(G)$ è nilpotente e $G'/\bar{\gamma}(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Chiaramente, possiamo supporre che G non sia un gruppo di Černikov; inoltre, si assuma che $G/\bar{\gamma}(G)$ non sia nilpotente. Pertanto $G/\gamma_\omega(G)$ non è nilpotente e, ovviamente, non verifica la condizione minimale. Rimpiazzando G con $G/\gamma_\omega(G)$, si può supporre che G sia residualmente nilpotente e quindi G è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow (cfr. [29] Part 2, p.8). Sia D il massimo sottogruppo normale abeliano divisibile di G. Poiché $[D,G] \leq \gamma_n(G)$ per ogni intero positivo n (cfr. [29] Part 1, Lemma 3.13), si ha che $[D,G] \leq \gamma_\omega(G) = \{1\}$ e quindi $D \leq Z(G)$. D'altra parte G è un T^*-gruppo per il Corollario 2.3.10, e quindi i sottogruppi di Sylow di G sono nilpotenti per il Teorema 2.2.11; pertanto G è nilpotente per il Teorema 2.3.4. Questa contraddizione prova che $G/\bar{\gamma}(G)$ è nilpotente.

Infine, il Corollario 1.2.3 assicura che $G/\bar{\gamma}(G)$ è dedekindiano oppure di Černikov e quindi $G'/\bar{\gamma}(G)$ è finito (cfr. [29] Part 1, Theorem 3.14 e Theorem 4.12). □

Il Teorema 2.3.9 ed il Teorema 2.3.12 hanno la seguente conseguenza.

Corollario 2.3.13 *Sia G un DCT-gruppo risolubile periodico e supponiamo che G non sia un T-gruppo. Allora $G/\bar{\gamma}(G)$ è un gruppo di Černikov.*

Lemma 2.3.14 *Sia G un gruppo periodico non-nilpotente contenente un unico p-sottogruppo di Sylow P, dove p è un primo dispari. Se G/P è nilpotente e tutti i sottogruppi di P sono normali in G, allora $[P,G] = P$.*

Dimostrazione – Chiaramente, P è abeliano e $G/C_G(P)$ è isomorfo ad un p'-gruppo di automorfismi potenza di P. Pertanto, per il Corollario 2.1.3, $[P,x] = P$ per ogni elemento x di $G \setminus C_G(P)$ e quindi anche $[P,G] = P$. □

Teorema 2.3.15 *Sia G un DCT-gruppo risolubile periodico che non sia un gruppo di Černikov, e sia L l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G. Se p è un primo dispari e la p-componente L_p di L è infinita, allora il p-sottogruppo di Sylow $M(p)/L$ di G/L è finito. Inoltre, se L_p non è un gruppo di Černikov, allora $p \notin \pi(G/L)$.*

Dimostrazione – Chiaramente possiamo supporre che G non sia un T-gruppo, sicchè G/L è un gruppo di Černikov per il Corollario 2.3.13; inoltre, L è abeliano per il Teorema 2.3.8. Supponiamo che L_p non sia un gruppo di Černikov. Per il Corollario 2.3.2, $M(p)/C_{M(p)}(L_p)$ è isomorfo ad un p-gruppo di automorfismi potenza di L_p e pertanto, per il Corollario 2.1.3, L_p è un sottogruppo centrale d'esponente infinito di $M(p)$ oppure L_p ha esponente finito e $M(p)$ agisce banalmente su ogni fattore della serie degli zoccoli di L_p. In ogni caso si ha che $M(p)/L_{p'}$ è nilpotente ed ancora il Corollario 2.3.2 assicura che ogni suo sottogruppo è G-invariante. D'altra parte, $M(p)/L_{p'}$ è l'unico p-sottogruppo di Sylow del gruppo non-nilpotente $G/L_{p'}$, e quindi $[M(p),G]L_{p'} = M(p)$ per il Lemma 2.3.14. Quindi $M(p) = L$ e $p \notin \pi(G/L)$.

Ora, suppponiamo che L_p sia infinito e di Černikov. Sia J/L il residuale finito del p-gruppo di Černikov $M(p)/L$. Poiché G induce automorfismi potenza su L, la Proposizione 2.1.1 assicura che $L \leq Z(J)$ e quindi J è nilpotente. Pertanto G agisce come gruppo di automorfismi potenza anche su J. D'altra parte, $J/L \leq Z(G/L)$

(cfr. [29] Part 1, Lemma 3.13) mentre il radicale divisibile di L_p non può essere un sottogruppo centrale essendo un fattore diretto di L. Pertanto $J = L$ e $M(p)/L$ è finito. □

Corollario 2.3.16 *Siano G un DCT-gruppo risolubile periodico e L l'ultimo termine della sua serie centrale inferiore. Se la p-componente L_p di L non è un gruppo di Černikov per qualche primo p, e $q \geq p$ è un primo dispari in $\pi(L)$, allora $q \notin \pi(G/L)$.*

Dimostrazione – Per il Teorema 2.3.8, G è iperciclico e metabeliano; in particolare, L è abeliano. Sia π_p l'insieme dei primi $q > p$. Allora l'insieme N dei π_p-elementi di G è un sottogruppo. Il sottogruppo L_p non verifica la condizione minimale e ogni suo sottogruppo è G-invariante per il Corollario 2.3.2, quindi esiste una catena doppia

$$\ldots < H_{-1} < H_0 < H_1 < \ldots$$

di p-sottogruppi normali di G (cfr. [30]). Se X è un π_p-sottogruppo subnormale di G, allora H_nX è un sottogruppo subnormale di G e $H_nX \neq H_{n+1}X$ per ogni intero n. Segue che esiste un intero k tale che XH_k è normale in G e pertanto lo stesso X è normale in G essendo caratteristico in XH_k. Quindi ogni sottogruppo subnormale di N è G-invariante e, in particolare, N è un T-gruppo. Sia $q \in \pi_p \cap \pi(L)$ e sia $Q/L_{q'}$ l'unico q-sottogruppo di Sylow di $G/L_{q'}$. Allora $Q \leq NL_{q'}$ e $NL_{q'}/L_{q'}$ è G-isomorfo a $N/N \cap L_{q'}$, pertanto ogni sottogruppo di $Q/L_{q'}$ normale in $G/L_{q'}$. Poiché $Q = [Q, G]L_{q'}$ per il Lemma 2.3.14, segue che $Q \leq L$ e quindi $q \notin \pi(G/L)$. Infine, se $p > 2$ allora $p \notin \pi(G/L)$ per il Teorema 2.3.15. □

Teorema 2.3.17 *Sia G un DCT-gruppo risolubile periodico e sia L l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G. Se la 2-componente L_2 di L non è un gruppo di Černikov, allora $L_{2'}$ è un sottogruppo di Hall di G, G'/L è un 2-gruppo e $2 \in \pi(G/G')$.*

Dimostrazione – Per il Corollario 2.3.16, $L_{2'}$ è un sottogruppo di Hall di G. Rimpiazzando G con $G/L_{2'}$ si può supporre che L sia un 2-gruppo; in particolare, G ha un unico 2-sottogruppo di Sylow G_2. D'altra parte il Teorema 2.3.8 assicura che l'insieme $G_{2'}$ degli elementi di G di periodo dispari è un sottoguppo, pertanto $G = G_2 \times G_{2'}$. Poiché L non è un gruppo di Černikov, come nella dimostrazione del Corollario 2.3.16 si ha che il gruppo nilpotente $G_{2'}$ è un T-gruppo, quindi $G_{2'}$ è abeliano e, conseguentemente, G' è un 2-gruppo. Inoltre, L/L^2 è un fattore centrale di G, quindi G/L^2 è nilpotente e $L = L^2$ è divisibile. Segue allora dal Corollario 2.1.3 che ogni elemento di $G \setminus C_G(L)$ opera come l'inversione su L, sicchè $G/C_G(L)$ ha ordine 2 e $2 \in \pi(G/G')$. □

Gruppi non-periodici nella classe DCT

Lemma 2.3.18 *Sia G un DCT-gruppo risolubile e sia F il sottogruppo di Fitting di G. Se il sottogruppo di torsione T di F non è un gruppo di Černikov, allora ogni sottogruppo di F è normale in G.*

Dimostrazione – Per il Corollario 2.3.2 si può supporre che $T \neq F$. Essendo non di Černikov, T contiene un sottogruppo subnormale abeliano con zoccolo infinito (cfr. [29] Part 1, p.176) e quindi ogni sottogruppo di F è normale in G per il Lemma 2.3.1. □

Chiaramente, ogni gruppo in cui i sottogruppi subnormali non-normali hanno indice finito verifica la condizione massimale sui sottogruppi subnormali non-normali. Il prossimo risultato mostra, in particolare, che con opportune ipotesi si ha anche il viceversa.

Teorema 2.3.19 *Sia G un DCT-gruppo risolubile non-policiclico il cui sottogruppo di Fitting F sia non periodico. Se F è senza torsione oppure il sottogruppo di torsione T di F non è un gruppo di Černikov, allora G è un LT-gruppo.*

Dimostrazione – Chiaramente, F è non finitamente generato. Supponiamo, ovviamente, che G non sia un T-gruppo sicchè G contiene un sottogruppo subnormale non-normale X. Se F è senza torsione, poiché il Teorema 2.3.4 ed il Teorema 1.2.7 assicurano che F verifica la condizione minimale oppure massimale sui sottogruppi non-normali, F è abeliano per il Teorema 1.1.1 ed il Teorema 1.1.5; pertanto ogni sottogruppo di F è normale in G per il Lemma 2.1.13. Se invece T non è un gruppo di Černikov allora ogni sottogruppo di F è normale in G per il Lemma 2.3.5. In ogni caso ogni sottogruppo di F è G-invariante e quindi $F = C_G(F)$ è abeliano. Allora G/F è isomorfo ad un gruppo non-identico di automorfismi potenza di F e quindi dal Corollario 2.1.3 segue che F ha indice 2 in G e $G = F\langle z\rangle$ dove z è un elemento di $G \setminus F$ che induce l'inversione su F. Pertanto $\gamma_{n+1}(G) = F^{2^n}$, per ogni intero positivo n, e quindi $G/\gamma_{n+1}(G)$ ha esponente finito. Supponiamo, per assurdo, che $G/\gamma_4(G)$ sia infinito. Per il Corollario 1.2.3 si ha che $G/\gamma_4(G)$ è dedekindiano; pertanto $L = \gamma_3(G)$ è l'ultimo termine della serie centrale inferiore di G e $L = L^2$. Poiché X non è contenuto in F, esiste un elemento x di X che induce l'inversione su F, quindi $[L, x] = L^2 = L$ e $L \leq X$ essendo X subnormale in G. Segue che X è normale in G. Questa contraddizione prova che $G/\gamma_4(G)$ è finito. In particolare, G/F^2 è finito e quindi G è un LT-gruppo per il Teorema 2.2.10. □

Poiché gli LT-gruppi risolubili senza torsione sono abeliani (cfr. [17], Corollary 3.4), il Teorema 2.3.19 ha la seguente conseguenza.

Corollario 2.3.20 *Se G è un DCT-gruppo risolubile senza torsione, allora G è policiclico oppure abeliano.*

Concludiamo osservando che esiste un DCT-gruppo risolubile non-policiclico con sottogruppo di Fitting senza torsione che ha un numero infinito di sottogruppi subnormali non normali. Infatti, consideriamo $G = \langle x\rangle \ltimes A$ dove A è isomorfo al gruppo additivo dei numeri razionali il cui denominatore è potenza di un fissato primo dispari e x è l'automorfimo che inverte gli elementi di A. Allora A è il sottogruppo di Fitting di G e G è un LT-gruppo per il Teorema 2.2.10; in particolare, G è un DCT-gruppo. D'altra parte, per ogni intero $n \geq 2$ il sottogruppo $\langle x, A^{2^n}\rangle$ è subnormale, ma non-normale, in G e pertanto G ha infiniti sottogruppi subnormali non-normali.

2.4 Gruppi con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali

Se G è un gruppo, come ricordato nel paragrafo precedente, il *sottogruppo di Wielandt* $\omega(G)$ di G è definito come l'intersezione dei normalizzanti dei sottogruppi subnormali di G; chiaramente, $\omega(G)$ è un T-gruppo e quindi la "grandezza" del quoziente $G/\omega(G)$ può essere interpretata come una misura per stabilire di quanto i sottogruppi subnormali di G "distano" dall'essere normali. Per un gruppo risolubile G, il problema di stabilire proprietà per il quoziente $G/\omega(G)$ si può ricondurre al problema di stabilire proprietà per $G/\bar{\omega}(G)$, dove $\bar{\omega}(G)$ è l'intersezione dei normalizzanti dei sottogruppi subnormali infiniti. Infatti, J.C. Beidelman, M.R. Dixon e D.J.S. Robinson [1] hanno studiato i gruppi G tali che $\omega(G) \neq \bar{\omega}(G)$ e, in particolare, hanno ottenuto che per un gruppo risolubile G il quoziente $\bar{\omega}(G)/\omega(G)$ è finito.

In [3], C. Casolo considera i gruppi risolubili G in cui ogni sottogruppo subnormale ha al più un numero fissato n di coniugati e prova che in tal caso $G/\omega(G)$ è finito d'ordine limitato da una funzione di n. In questo paragrafo si considereranno i gruppi risolubili che hanno solo un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali (infiniti).

Il seguente Lemma è stato provato da B.H. Neumann in una versione più generale (cfr. ad esempio [29] Part 1, Lemma 4.17); quella che qui si propone verrà usata diverse volte nelle dimostrazioni seguenti senza esplicita menzione.

Lemma 2.4.1 *Siano $X_1, \ldots, X_t$ sottogruppi di un gruppo G tali che $G = X_1 \cup \ldots \cup X_t$. Allora almeno uno tra i sottogruppi $X_1, \ldots, X_t$ ha indice finito in G.*

Lemma 2.4.2 *Sia G un gruppo con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti e sia B il radicale di Baer di G. Se x è un elemento di B tale che $\langle x\rangle^G$ è finitamente generato, allora x ha un numero finito di coniugati in G.*

Dimostrazione – Chiaramente, possiamo supporre che x sia aperiodico. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei sottogruppi di indice finito di $\langle x\rangle^G$ che contengono x. Un noto risultato di Mal'cev assicura che

$$\langle x\rangle = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$$

e quindi

$$\bigcap_{X\in\mathcal{F}} N_G(X) \leq N_G(\langle x\rangle).$$

Se $X \in \mathcal{F}$, allora $\langle x\rangle^G/X_G$ è finito e quindi anche X^G/X_G è finito, pertanto X ha un numero finito di coniugati in G; inoltre, X è un sottogruppo subnormale e infinito G. Poiché G ha solo un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti segue che l'indice $|G : N_G(\langle x\rangle)|$ è finito. □

Teorema 2.4.3 ([13]) *Sia G un gruppo risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali. Se G verifica localmente la condizione massimale, allora $G/\omega(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Chiaramente, possiamo supporre che esistono $k \geq 1$ normalizzanti di indice infinito $N_1, \ldots, N_k$ di sottogruppi subnormali di G. Sia $g \in G \setminus (N_1 \cup \ldots \cup N_t)$ e sia x un elemento del radicale di Baer B di G. Allora $\langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ è un sottogruppo subnormale finitamente generato di G normalizzato da g, sicchè $\langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ ha un numero finito di coniugati e pertanto anche $\langle x \rangle^G = (\langle x \rangle^{\langle g \rangle})^G$ è finitamente generato. Segue allora dal Lemma 2.4.2 che B è contenuto nell'FC-centro di G; in particolare, poiché i quozienti di G verificano le stesse ipotesi fatte sul gruppo, si ha che G è dotato di una serie normale ascendente a fattori policiclici. Sia X un sottogruppo subnormale di G. Allora X è dotato di una serie ascendente di sottogruppi subnormali di G

$$\{1\} = X_0 < X_1 < \ldots < X_\alpha < X_{\alpha+1} < \ldots < X_\tau = X$$

tale che $X_{\alpha+1}/X_\alpha$ sia ciclico per ogni numero ordinale α. Per assurdo supponiamo che X abbia infiniti coniugati e sia $\mu \leq \tau$ il minimo numero ordinale tale che l'indice $|G : N_G(X_\mu)|$ sia infinito. Supponiamo che μ non sia un ordinale limite. Allora $Y = N_G(X_{\mu-1})$ ha indice finito in G e $X_\mu/X_{\mu-1}$ è un sottogruppo subnormale e ciclico di $X_\mu Y_G/X_{\mu-1}$, pertanto $X_\mu/X_{\mu-1}$ ha un numero finito di coniugati in $X_\mu Y_G/X_{\mu-1}$ e quindi, essendo $X_\mu Y_G$ un sottogruppo di indice finito di G, l'indice $|G : N_G(X_\mu)|$ è finito. Questa contraddizione prova che μ è un ordinale limite, quindi

$$X_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} X_\alpha$$

e pertanto

$$\bigcap_{\alpha<\mu} N_G(X_\alpha) \leq N_G(X_\mu).$$

Poiché l'indice $|G : N_G(X_\alpha)|$ è finito per ogni $\alpha < \mu$ e G ha un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali, segue che anche l'indice $|G : N_G(X_\mu)|$ è finito.

Questa contraddizione prova che ogni sottogruppo subnormale di G ha un numero finito di coniugati, quindi $G/\omega(G)$ è finito. □

Lemma 2.4.4 *Sia G un gruppo di Baer con un numero finito k di normalizzanti di sottogruppi subnormali. Allora G è nilpotente di classe limitata da una funzione di k.*

Dimostrazione – Chiaramente, supponiamo che G non sia un T-gruppo. Se X è un sottogruppo subnormale non normale di G, allora $N_G(X)$ ha al più $k-1$ coniugati e quindi il suo normalizzante ha indice al più $k-1$ in G. Poiché G è localmente nilpotente, segue che X è subnormale di difetto limitato da una funzione di k e quindi se G è nilpotente la limitazione della sua classe di nilpotenza in funzione di k è garantita dal Teorema di Roseblade (cfr. [29] Part 2, Theorem 7.42).

Pertanto è sufficiente provare che G è nilpotente e quindi si può supporre che esistono $k \geq 1$ normalizzanti propri $N_1, \ldots, N_k$ di sottogruppi subnormali di G; per induzione su k, ogni N_i è nilpotente. Supponiano che ogni N_i abbia indice infinito in G; in particolare, ogni sottogruppo subnormale con un numero finito di coniugati è normale. Sia $g \in G \setminus (N_1 \cup \ldots \cup N_t)$ e sia x un elemento di G. Allora $\langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ è un sottogruppo subnormale normalizzato da g, sicchè $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ è finitamente generato e quindi x ha un numero finito di coniugati per Lemma 2.4.2; quindi $\langle x \rangle$ è normale in G. Pertanto G è dedekindiano e questa contraddizione prova che qualche N_i ha indice finito in G; sicchè G è nilpotente-per-finito e quindi nilpotente. □

Lemma 2.4.5 *Sia G un gruppo di Baer con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti. Allora $G/Z(G)$ è finito. In particolare, G è nilpotente e G' è finito.*

Dimostrazione − Per il Theorem B di [12] è sufficiente provare che G è nilpotente e quindi si può supporre che esistono $k \geq 1$ normalizzanti propri $N_1, \ldots, N_k$ di sottogruppi subnormali infiniti di G (cfr. [15]). Per induzione su k, ogni N_i è nilpotente e quindi si può supporre che ogni N_i abbia indice infinito in G; in particolare, ogni sottogruppo subnormale infinito con un numero finito di coniugati è normale. Sia $g \in G \setminus (N_1 \cup \ldots \cup N_t)$.

Supponiamo che G sia non-periodico e sia x un elemento aperiodico di G. Allora $\langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ è un sottogruppo infinito subnormale normalizzato da g, sicchè $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle^{\langle g \rangle}$ è finitamente generato e quindi x ha un numero finito di coniugati per il Lemma 2.4.2. Pertanto $\langle x \rangle$ è normale. Poiché G è generato dai sui elementi aperiodici, segue che G è dedekindiano e quindi abeliano.

Supponiamo che G sia periodico e sia n il limite fornito dal Lemma 2.4.4. Poniamo $L = \gamma_{n+1}(G)$ e sia H un sottogruppo infinito G-invariante di L. Allora G/H è nilpotente di classe al più n per il Lemma 2.4.4, pertanto si ha che $H = L$ e L è privo di sottogruppi propri G-invarianti infiniti. Allora L' è finito e a meno di rimpiazzare G con G/L' si può supporre che L sia abeliano; segue che L è un p-gruppo per qualche primo p.

Supponiamo che $L[p]$ sia infinito, quindi $L = L[p]$ è un p-gruppo abeliano elementare. Sia H un sottogruppo di indice finito di L, allora H ha indice finito in $L\langle g \rangle = K$ e quindi H/H_K è finito. Poiché H_K è un sottogruppo subnormale infinito di G normalizzato da g, H_K è normale in G e così H/H_G è finito. Poiché L è privo di sottogruppi infiniti propri G-invarianti si ha che H_G è identico e quindi L è finito. Questa contraddizione assicura che $L[p]$ è finito. Allora L è un gruppo di Černikov, quindi è abeliano divisibile nonché centrale (cfr. [29] Part 1, Lemma 3.13) oppure è finito. In ogni caso, G è nilpotente. □

Lemma 2.4.6 *Sia G un gruppo risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti. Se G possiede un T-sottogruppo N di indice finito, allora $G/\omega(G)$ è finito.*

Dimostrazione − Chiaramente, si può supporre che N sia un sottogruppo normale; si osservi che, essendo N iperciclico per il Teorema 2.2.3, il gruppo G verifica localmente la condizione massimale. Sia X un sottogruppo subnormale e infinito di G. Allora

$X \cap N$ ha indice finito in X e pertanto $X \cap N$ è infinito. D'altra parte, $X \cap N$ è un sottogruppo normale di XN e $\omega(XN/X \cap N)$ ha indice finito in $XN/X \cap N$ per il Teorema 2.4.3, pertanto X ha un numero finito di coniugati in XN. Poiché XN ha indice finito in G segue che l'indice $|G : N_G(X)|$ è finito. Pertanto $G/\bar{\omega}(G)$ è finito e quindi anche $G/\omega(G)$ è finito. □

Lemma 2.4.7 *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo subnormale con un numero finito di coniugati sia normale, e sia A un sottogruppo normale periodico e abeliano di G il cui zoccolo S sia infinito. Se G contiene un elemento periodico g che non normalizza nessun sottogruppo subnormale infinito non-normale, allora ogni sottogruppo di A è normale in G.*

Dimostrazione – Sia H un sottogruppo di indice finito di S. Allora H ha indice finito in $S\langle g\rangle$ e quindi anche il nocciolo K di H in $S\langle g\rangle$ ha indice finito in $S\langle g\rangle$. Chiaramente, K è subnormale in G; d'altra parte K è normalizzato da g, quindi K è normale in G e pertanto $K = H_G$. Poiché H è contenuto in S e S è normale in G, segue che H^G/H_G è finito, sicchè H ha un numero finito di coniugati in G e pertanto H è normale. Ma in S ogni sottogruppo è intersezione dei sottogruppi di indice finito di S che lo contengono, pertanto si ha che ogni sottogruppo di S è normale in G. Sia ora X un sottogruppo ciclico di A. Allora $X \cap S$ è finito e quindi esistono S_1 e S_2 sottogruppi infiniti di S tali che

$$X = S_1X \cap S_2X.$$

Sia $i \in \{1, 2\}$. Chiaramenente $S_i \leq (S_iX)_G$, inoltre $(S_iX)^G = (S_iX)^{\langle g\rangle}$ e S_i ha indice finito in $S_i\langle x, g\rangle$, pertanto $(S_iX)^G/(S_iX)_G$ è finito e quindi S_iX ha un numero finito di coniugati in G; segue che S_iX è un sottogruppo normale di G. Pertanto X è normale in G ed il lemma è provato. □

Teorema 2.4.8 ([13]) *Sia G un gruppo risolubile periodico e con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti. Allora $G/\omega(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Per assurdo, sia G un controesempio in cui l'insieme dei normalizzanti propri dei sottogruppi subnormali infiniti $\{N_G(X_1), \ldots, N_G(X_k)\}$ abbia ordine minimo k; chiaramente, $k \geq 1$. Supponiamo che l'indice di qualche $N_G(X_i)$ sia finito e sia L il nocciolo di $N_G(X_i)$ in G. Allora L ha al più $k-1$ normalizzanti propri di sottogruppi subnormali infiniti, quindi $L/\omega(L)$ è finito e pertanto $\omega(G)$ ha indice finito in G per il Lemma 2.4.6. Questa contraddizione prova che ciascun sottogruppo $N_G(X_1), \ldots, N_G(X_k)$ ha indice infinito in G; in particolare, tutti i sottogruppi subnormali infiniti di G con un numero finito di coniugati sono normali ed inoltre esiste un elemento $g \in G \setminus N_G(X_1) \cup \ldots \cup N_G(X_k)$. Chiaramente, G non è un gruppo di Černikov, pertanto anche il radicale di Baer B di G non è un gruppo di Černikov. Poiché $B/Z(B)$ è finito per il Lemma 2.4.5, segue che $Z(B)$ e B/B' hanno zoccolo infinito. Se H è un sottogruppo infinito di B, segue dal Lemma 2.4.7 che $H \cap Z(B)$ e HB' sono sottogruppi normali di G, sicchè H^G/H_G è finito e H ha un numero finito di coniugati in G. In particolare, tutti i sottogruppi infiniti di B sono normali in G. Sia X un sottogruppo subnormale e infinito di G. Poiché $X \cap B$ è il radicale di Baer di X per il Lemma 2.4.5, il sottogruppo $X \cap B$ è infinito e quindi normale in G. D'altra parte, per il Teorema 2.4.3, il sottogruppo $\omega(G/X \cap B)$ ha indice finito in $G/X \cap B$; pertanto, X ha un numero finito di coniugati in G e quindi X è normale. Questa contraddizione completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 2.4.9 *Sia G un gruppo risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali infiniti. Se $G/Z(G)$ è periodico, allora $G/\omega(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Chiaramente, il gruppo G verifica locamente la condizione massimale. Per il Teorema 2.4.8 si può supporre che $Z(G)$ sia non-periodico. Sia X un sottogruppo subnormale e infinito di G. Se $X \cap Z(G)$ è infinito, il sottogruppo di Wielandt di $G/X \cap Z(G)$ ha indice finito per il Teorema 2.4.3 e quindi X ha un numero finito di coniugati in G. Supponiamo che $X \cap Z(G)$ sia finito; in particolare, X è periodico. Sia a un elemento aperiodico di $Z(G)$. La prima parte della dimostrazione assicura che $X\langle a\rangle$ ha un numero finito di coniugati in G. Essendo X caratteristico in $X\langle a\rangle$, segue che anche X ha un numero finito di coniugati in G. Pertanto $G/\bar{\omega}(G)$, e quindi anche $G/\omega(G)$, è finito. $\square$

Infine, in relazione al Corollario 2.2.5 si fa presente che sarebbe possibile provare il seguente:

Teorema 2.4.10 ([13]) *Sia G un gruppo risolubile con un numero finito di normalizzanti di sottogruppi subnormali (infiniti). Se G è finitamente generato, allora $G/Z(G)$ è finito.*

Bibliografia

[1] J.C. Beidelman - M.R. Dixon - D.J.S. Robinson: "The generalized Wielandt subgroup of a group", *Canad. J. Math.* 47 (1995), 246–261.

[2] J.C. Beidelman - H. Heineken: "A note on I-automorphisms", *J. Algebra* 234 (2000), 694–706.

[3] C. Casolo: " Groups with finite conjugacy classes of subnormal subgroups", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 81 (1989), 107–149.

[4] C.D.H. Cooper: "Power automorphisms of a group", *Math. Z.* 107 (1968), 335–356.

[5] M. Curzio - S. Franciosi - F. de Giovanni: "On automorphisms fixing infinite subgroups of groups", *Arch. Math. (Basel)* 54 (1990), 4–13.

[6] G. Cutolo: "On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups", *Riv. Mat. Pura App.* 9 (1991), 49–59.

[7] G. Cutolo: "On a class of generalized T-groups", *Ricerche Mat.* 42 (1993), 331–351.

[8] G. Cutolo - L.A. Kurdachenko: "Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups", *Geom. Dedicata* 55 (1995), 279–292.

[9] F. De Mari - F. de Giovanni: "Double chain conditions for infinite groups", *Ricerche Mat.*, in corso di stampa.

[10] F. De Mari - F. de Giovanni: "Groups satisfying the minimal condition on subnormal non-normal subgroups", *Algebra Colloq.*, in corso si stampa.

[11] F. De Mari - F. de Giovanni: "Groups satisfying the maximal condition on subnormal non-normal subgroups", *Colloquium Math.* 103 (2005), 85–98.

[12] F. De Mari - F. de Giovanni: "Groups with finitely many normalizers of infinite index", sottomesso per la pubblicazione.

[13] F. De Mari - F. de Giovanni: "Groups with finitely many normalizers of subnormal subgroups", *J. Algebra*, in corso di stampa.

[14] F. De Mari - F. de Giovanni: "Noetherian automorphisms of groups", *Mediterranean J. Math.* 2 (2005), 125–135.

[15] S. Franciosi - F. de Giovanni: "Groups in which every infinite subnormal subgroup is normal", *J. Algebra* 96 (1985), 566–580.

[16] S. Franciosi - F. de Giovanni: "Groups whose finite quotients have a transitive normality relation", *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 6B (1992), 329–350.

[17] S. Franciosi - F. de Giovanni: "Groups whose subnormal non-normal subgroups have finite index", *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat.* 17 (1993), 241–251.

[18] S. Franciosi - F. de Giovanni - M.J. Tomkinson: "Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes", *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 4B (1990), 35–55.

[19] L. Fuchs: "Infinite Abelian Groups", *Accademic Press*, New York (1970).

[20] W. Gaschütz: "Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist", *J. Reine Angew. Math.* 198 (1957), 87–92.

[21] B. Hartley: "Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups", *J. London Math. Soc.*(2) 37 (1988), 421–436.

[22] N.S. Hekster - H.W. Lenstra: "Groups with finitely many non-normal subgroups", *Arch. Math. (Basel)* 54 (1990), 225 – 231.

[23] O.H. Kegel - B.A.F. Wehrfritz: "Locally Finite Groups", *North-Holland Math. Library*, Amsterdam (1973).

[24] L.A. Kurdachenko - H. Smith: "Groups with the weak minimal condition for non-subnormal subgroups", *Ann. Mat. Pura App.* 173 (1997), 299-312.

[25] J.C. Lennox - D.J.S. Robinson: "The Theory of Infinite Soluble Groups", *Clarendon Press*, Oxford (2004).

[26] A. Leone: "Artinian automorphisms in infinite groups", *Boll. Un. Mat. Ital.*, in corso di stampa.

[27] R.E. Phillips - J.S. Wilson: "On certain minimal conditions for infinite groups", *J. Algebra* 51 (1978), 41 – 68.

[28] D.J.S. Robinson: "Groups in which normality is a transitive relation", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60 (1964), 21–38.

[29] D.J.S. Robinson: "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups", *Springer*, Berlin (1972).

[30] T.S. Shores: "A chain condition for groups", *Rocky Mountain J. Math.* 3 (1973), 83–89.

[31] V.P. Šunkov: "On locally finite groups with a minimality condition for abelian subgroups", *Algebra and Logic* 9 (1970), 350–370.

[32] M.J. Tomkinson: "*FC*-groups", *Pitman*, Boston (1984).

[33] G. Zacher: "Caratterizzazione dei T-gruppi finiti risolubili", *Richerche Mat.* 1 (1952), 287–294.

[34] D.I. Zaĭcev: "The theory of minimax groups", *Ukrainian Math. J.* 23 (1971), 536–542.

[35] D.I. Zaĭcev: "Solvable subgroups of locally solvable groups", *Soviet Math. Dokl.* 15 (1974), 342–345.