SIMMETRIZZAZIONE GAUSSIANA
ed
EQUAZIONI ELLITTICHE

Filomena Feo

Dottorato di ricerca in Scienze Matematiche XVII ciclo

Dipartimento di Matematica e Applicazioni R. Caccioppoli

Università degli Studi di Napoli Federico II

Complesso Universitario Monte S. Angelo - via Cintia

80126 NAPOLI - ITALY

Indice

0.1 Introduzione

In questa tesi si studia una classe di problemi di Dirichlet relativi ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo degenere, dove la degenerazione è espressa in termini della funzione densità nella misura di Gauss.
L'obiettivo è quello di ottenere stime ottimali delle soluzioni, risultati di esistenza e di regolarità.

Una prima classe di problemi presa in esame è del tipo

$$\begin{cases} -\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} - \left(d_i(x)u\right)_{x_i} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = g\varphi - \left(f_i\varphi\right)_{x_i} & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

dove

- $\varphi\left(x\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ è la densità della misura di Gauss,
- $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \varphi\left(x\right)\left|\xi\right|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n$,q.o. $x \in \Omega$,
- Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ non necessariamente limitato,
- i coefficienti ed i termini noti sono funzioni che appartengono ad opportuni spazi di Lorentz-Zygmund.

Il problema (1) è legato all'operatore di Ornstein-Ulenbeck (vedi ad esempio [26]).
Per la natura dell'operatore lo spazio naturale in cui si cercano le soluzioni è lo spazio di Sobolev $H_0^1\left(\varphi, \Omega\right)$ definito come la chiusura di $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{H_0^1(\varphi,\Omega)} = \left(\int_\Omega \left|u\left(x\right)\right|^2 \ \gamma_n\left(dx\right)\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega \left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 \ \gamma_n\left(dx\right)\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ottengono stime ottimali della soluzione mediante un confronto puntuale con la soluzione di un problema avente una struttura più semplice. L'idea è quella di sviluppare le tecniche ormai classiche introdotte da Talenti in [79] ed ampiamente utilizzate nel caso di problemi uniformemente ellittici, lineari e non, anche di tipo parabolico (vedi [84] per un'ampia bibliografia sull'argomento). Tali tecniche si basano sulla simmetrizzazione di Schwartz e la disuguaglianza isoperimetrica classica e nel caso di problemi uniformemente ellittici

consentono di confrontare la soluzione del problema di partenza con la soluzione di un problema dello stesso tipo, ma definito in una sfera, in cui i dati sono a simmetria sferica. Nel nostro caso la struttura dell'operatore in esame suggerisce di usare la nozione di riordinamento rispetto alla misura di Gauss e la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss. Tale disuguaglianza afferma, che tra tutti i domini con misura di Gauss fissata, i semispazi hanno perimetro rispetto alla misura di Gauss minimo. Usando il riordinamento rispetto alla misura di Gauss si confronta la soluzione di un problema del tipo (1) con la soluzione di un problema dello stesso tipo definito in un semispazio, in cui i coefficienti sono funzioni di una sola variabile.
Risultati in questa direzione sono stati ottenuti nel caso $b_i = c = f_i = 0$ in [18] e nel caso $d_i(x) = f_i(x) = 0$ in [35]. La presenza di tutti i termini di ordine inferiore determina condizioni di piccolezza delle norme ai fini dell'esistenza della soluzione, condizione che può essere migliorata nel caso in cui uno dei due coefficienti abbia maggiore sommabilità. Per quanto riguarda il termine di tipo distribuzione sulla linea di [4] per ottenere i risultati di confronto si usa la nozione di pseudoriordinamento rispetto alla misura di Gauss.
Osserviamo che la maggiore semplicità del problema con cui confrontiamo il problema di partenza ci permette in alcuni casi di scrivere esplicitamente la soluzione e quindi di ottenere delle stime esplicite della soluzione del problema (1).
A partire dalle stime ottenute con i risultati di confronto si dimostrano condizioni che garantiscono una maggiore sommabilità della soluzione.
Dalla disuguaglianza di Gross, se $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ è soluzione di (1), allora u appartiene allo spazio di Lorentz-Zygmund con peso $L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. Si è studiato come varia la sommabilità della soluzione negli spazi di Lorentz-Zygmund al variare dei termini noti nella stessa classe di spazi.

Nell'ordine di idee esposto è stata presa in esame una classe di problemi nonlineari del tipo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) + G(x,u) = g\varphi - \mathrm{div}\,(f\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

dove

- $a(x,\eta,\xi)\xi \geq \varphi(x)\,|\xi|^p$con $p > 1$,

- Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ non necessariamente limitato,
- le funzioni $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni di Carathéodory con opportune condizioni di crescita, che insieme ai termini noti appartengono a particolari spazi di Lorentz-Zygmund.

Le principali difficoltà nello studio del problema (2) sono dovute all'operatore $-\text{div}\,(a(x,u,\nabla u))$ che non è uniformemente ellittico, al dominio Ω che può essere non limitato ed alla presenza del termine d'ordine inferiore $H(x,u)$ che comporta una perdita di coercività quando la norma $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ non è sufficientemente piccola.
Una prima questione da affrontare è quella di stabilire condizioni che garantiscono l'esistenza della soluzione. Utilizzando le tecniche descritte per il caso lineare si determinano stime a priori della soluzione che consentono di passare al limite in opportuni problemi approssimanti.
Nell'ultimo capitolo è presentata un'estensione dei risultati descritti per la classe di problemi (1) ad equazioni di tipo ellittico legate a particolari misure di probabilità.

La prima parte della tesi è dedicata alla presentazione di risultati già noti sulla misura di Gauss. Si espongono nozioni e proprietà generali sui riordinamenti di funzione e sulla simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss introdotta da Ehrhard in [42]. Per quanto riguarda la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss si propongono approcci indipendenti tra loro che fanno uso di nozioni differenti e seguono strade distinte nelle dimostrazioni. Il terzo capitolo è dedicato alla disuguaglianza di Sobolev logaritmica. Si mette in evidenza il forte legame tra la disuguaglianza di Sobolev logaritmica, la disuguaglianza isoperimetrica ed il semigruppo di Ornstein-Ulenbeck. In questo capitolo sono riportati anche le definizioni ed alcune proprietà degli spazi di Lorentz-Zygmund che vengono usati nel seguito della tesi.

Un sentito ringraziamento alla Prof.ssa M.R. Posteraro per avermi guidato scientificamente ed incoraggiato in questi anni ed alla Prof.ssa A. Mercaldo per i suoi utili suggerimenti. Desidero, inoltre, esprimere la mia profonda stima al Prof. V. Ferone e al Prof. A. Alvino, quale punti di riferimento per noi giovani che ci addentriamo nella ricerca in questo affascinante campo della matematica.

Capitolo 1

Riordinamenti

I riordinamenti di funzioni furono introdotti per la prima volta in maniera sistematica da Hardy-Littlewood-Polya in [53] ed in seguito utilizzati in molti campi dell'analisi. Polya-Szëgo in [69] e successivamente altri autori li hanno usati per dimostrare alcune disuguaglianze isoperimetriche e, più recentemente, sono stati applicati con successo nello studio delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico e parabolico (vedere [84] per una vasta bibliografia).

Siano X e Y sottoinsiemi rispettivamente di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^d$, con $n, d \in \mathbb{N}$, e siano (X, μ) e (Y, ν) due differenti spazi di misura. Riordinare una funzione μ-misurabile u definita in X a valori reali significa costruire una nuova funzione w a valori reali definita in Y, che abbia delle proprietà desiderate, come la monotonia e certe simmetrie, ma tale che si conservi la misura degli insiemi di livello. Per riordinare una funzione bisogna, quindi, riordinare i suoi insiemi di livello. Per ogni $t \geq 0$, l'insieme di livello $X_t = \{x \in X : |u(x)| > t\}$ di u è un sottoinsieme μ-misurabile di X ed il suo riordinamento è un sottoinsieme $X_t^\diamond \subset Y$ tale che $X_t^\diamond = \varnothing$ se $X_t = \varnothing$ e $\nu(X_t^\diamond) = \mu(X_t)$ se $X_t \neq \varnothing$. La funzione w è costruita in modo tale che i suoi insiemi di livello $Y_t = \{x \in Y : |w(x)| > t\}$ siano i riordinamenti degli insiemi X_t, insiemi di livello di u.

1.1 Definizioni e proprietà

Cominciamo con l'introdurre la nozione di funzione di distribuzione ed assumiamo che $\mu\,(X_t) < \infty$ per ogni $t > 0$ oppure che $\mu\,(X) < \infty$ anche se tale ipotesi non è essenziale per le prime definizioni e proprietà che daremo.

Definizione 1.1 *Sia u una funzione μ-misurabile definita in X a valori reali. Si definisce* funzione di distribuzione *di u la funzione*

$$\mu_u(t) = \mu\{x \in X : |u(x)| > t\} \qquad \forall t \in [0, +\infty[\,.$$

Si osservi che $\mu_u(t)$ dipende solo dal valore assoluto di u. Dalla definizione di μ_u seguono facilmente le seguenti proprietà:

Proposizione 1.2 *La funzione di distribuzione μ_u è non negativa, decrescente e continua a destra. Inoltre*[1]
(i) $\mu_u(0) = \mu(\mathrm{supp}\ u)$ *e* $\mu_u(+\infty) = 0$,
(ii) $\{t \geq 0 : \mu_u(t) = 0\} = [\operatorname{ess\,sup} f, +\infty[\,$,
(iii) $\mu_u(t^-) = \mu\{x \in X : |u(x)| > t\}$ *per cui il salto*

$$\mu_u\left(t^-\right) - \mu_u(t) = \mu\{x \in X : |u(x)| = t\}\,,$$

(iv) μ_u *presenta delle discontinuità nei punti in cui* $\mu\{x \in X : |u(x)| = t\} \neq 0$.

La funzione distribuzione ci permette di dire quando due funzioni sono una il riordinamento dell'altra. In accordo con quanto detto all'inizio del paragrafo:

Definizione 1.3 *Sia u una funzione μ-misurabile definita su X e w una funzione $\nu-$misurabile definita su Y. Si dice che w è un* riordinamento *di u o che u e w sono* equimisurabili *se hanno la stessa funzione di distribuzione:*

$$\mu_u(t) = \nu_w(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.1}$$

Per la proprietà (1.1) si ha che se Ψ è un operatore definito su un insieme di funzioni misurabili, che dipende solo dalla funzione distribuzione, allora Ψ è invariante rispetto all'operazione di riordinamento. Ad esempio nel caso di una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona si ha

$$\int_X F(u(x))d\mu = \int_X F(t)\,(-d\mu_u(t)) = \int_Y F(w(x))d\nu, \tag{1.2}$$

[1] Con supp u si indica il supporto della funzione u.

dove u e w sono due funzioni equimisurabili. In particolare[2]

$$\|u\|_{L^p(\mu,X)} = \|w\|_{L^p(v,Y)} .$$

Definiamo ora alcuni particolari riordinamenti di funzione.

Definizione 1.4 *Sia u una funzione definita in X $\mu-$misurabile a valori reali, si chiama* riordinamento decrescente *di u la funzione $u^* :]0,\infty[\to [0,\infty[$ definita da*

$$u^*(s) = \inf \{t \geq 0 : \mu_u(t) \leq s\} ; \tag{1.3}$$

Si ossevi che l'ipotesi $\mu(X) < \infty$, assicura che la funzione di distribuzione μ_u è limitata da $\mu(X)$ e quindi $u^*(s) = 0$ per ogni $s \geq \mu(X)$.
Se μ_u è continua e strettamente decrescente, u^* è l'inversa di μ_u in un opportuno intervallo. Più in generale la funzione u^* è l'inversa "generalizzata" di μ_u, nel senso che il suo grafico si ottiene ribaltando quello di μ_u rispetto alla bisettrice del 1° quadrante, trasformando le zone in cui μ_u è costante in punti di discontinuità per u^* ed i punti di discontinuità di μ_u in zone in cui u^* è costante. Osserviamo inoltre che u^* è la funzione di distribuzione di μ_u rispetto alla misura di Lebesgue. Segue, quindi, che per la funzione u^* valgono le stesse proprietà della funzione di distribuzione.

Proposizione 1.5 *Sia u una funzione $\mu-$misurabile in X. La funzione u^* è decrescente, continua a destra e presenta discontinuità nella zona dove μ_u è costante. Inoltre*
(i) $u^*(0) = \text{ess sup}\,|u|$ *e* $u^*(+\infty) = 0$;
(ii) $\{s \geq 0 : u^*(s) = 0\} = [\mu\{x \in X : u(x) \neq 0\}, +\infty[$;
(iii) $u^*(\mu_u(t)) \leq t$ *se* $\mu_u(t) < \infty$ *e* $\mu_u(u^*(s)) \leq s$ *se* $u^*(s) < \infty$;
(iv) u e u^* sono equimisurabili.

Per la proprietà (iv) la funzione u^* definita da (1.3) è un riordinamento di u secondo la Definizione 1.3. Pertanto, come già osservato si conserva la norma L^p.

Dal riordinamento decrescente di una funzione si può facilmente definire il *riordinamento crescente*

[2] Indichiamo con $L^p(\mu, X), 1 \leq p < \infty$, lo spazio costituito dalle funzioni per cui

$$\|u\|_{L^p(\mu,X)} = \left(\int_X |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$$u_*(s) = u^*(\mu(X) - s) \qquad \forall s \in]0, \mu(X)[\,.$$

Nel caso della misura di Lebesgue particolare importanza nelle applicazioni riveste il riordinamento decrescente a simmetria sferica (o riordinamento di Schwarz).

Definizione 1.6 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\Omega^\#$ la sfera $n-$dimensionale di misura $|\Omega|$*[3]*.* *Il* riordinamento decrescente a simmetria sferica *è la funzione definita da*

$$u^\#(x) = u^*(\omega_n |x|^n) \qquad x \in \Omega^\#,$$

dove ω_n è la misura della sfera $n-$dimensionale di raggio unitario.

Notiamo che $u^\#$ è un riordinamento di u secondo la Definizione 1.3. La funzione $u^\#$ è una funzione a simmetria sferica ed i suoi insiemi di livello sono sfere centrate nell'origine.

Per ulteriori risultati riguardanti i riordinamenti rispetto ad una misura positiva si veda ad esempio [10], [64], [54], [34], [82] e [70].

1.2 Disuguaglianza di Hardy-Littlewood

I rirdinamenti in generale non preservano il prodotto di funzioni e quindi risultano molto importanti le disuguaglianze che coinvolgono l'integrale di un prodotto di funzioni e l'integrale del prodotto dei loro riordinamenti. Una di queste, la disuguaglianza di G.H. Hardy e J.E. Littlewood è basata sulla relazione elementare che la somma è massima quando le ennuple sono ordinate nello stesso modo ed è minima quando sono ordinate in maniera opposta. Se $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sono due n-uple di numeri non negativi e $(a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$, $(b_1^*, b_2^*, ..., b_n^*)$ sono le corrispettive n-uple riordinate in ordine decrescente, allora

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* b_{n+1-j}^* \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*. \tag{1.4}$$

Le relazioni integrali che seguono possono essere viste come generalizzazioni della (1.4).

[3] Con $|E|$ si indica e si indicherà nel seguito la misura di Lebesgue di un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.7 *Siano u e w due funzioni $\mu-$misurabili definite in X. Allora*

$$\int_0^{\mu(X)} u^*(s)\, w_*(s)\ ds \leq \int_X |uw|\ d\mu \leq \int_0^{\mu(X)} u^*(s)\, w^*(s)\ ds \tag{1.5}$$

Se una delle due funzioni nella (1.5) è la funzione caratteristica di un sottoinsieme $\mu-$misurabile di X si ottiene la seguente disuguaglianza:

Proposizione 1.8 *Sia E un sottoinsieme μ-misurabile di X ed u una funzione $\mu-$misurabile definita in E. Allora*

$$\int_E |u|\ d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} u^*(s)\ ds. \tag{1.6}$$

E' naturale chiedersi se l'integrale $\int_0^t u^*(s)\ ds$ è un massimo per l'insieme degli integrali $\int_E |u|\ d\mu$, al variare di E tra i sottoinsieme $\mu-$misurabile di X con fissata misura.

Proposizione 1.9 *Sia u una funzione $\mu-$misurabile in X. Per ogni $0 \leq t \leq \mu(X)$ esiste un sottoinsieme $\mu-$misurabile E_t di X con $\mu(E_t) = t$, tale che*

$$\int_{E_t} |u|\ d\mu = \int_0^t u^*(s)\ ds.$$

La Proposizione 1.8 e la Proposizione 1.9 implicano il seguente risultato.

Teorema 1.10 *Sia u una funzione $\mu-$misurabile di X. Allora per ogni $t \in [0, \mu(X)]$, si ha*

$$\int_0^t u^*(s)\, ds = \max\left\{\int_E |u|\ d\mu : E \subset X, \mu(E) = t\right\}.$$

Osserviamo che l'operatore $u \to u^*$ non è subadditivo; ma il precedente Teorema 1.10 permette di dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:

Proposizione 1.11 *Siano $u, w \in L^1(\mu, X)$. Per ogni $t \in [0, \mu(X)]$*

$$\int_0^t (u+w)^*(s)\, ds \leq \int_0^t [u^*(s) + w^*(s)]\, ds.$$

In particolare vale l'uguaglianza se $t = \mu(X)$.

Se nella (1.5) si pone $w = \chi_E$ con E sottoinsieme $\mu-$misurabile di X con $\mu(E) = t$, la disuguaglianza si riduce alla seguente:

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E u(x)dx \leq \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s)\,ds. \tag{1.7}$$

Quindi la media di u su un insieme di misura t è dominata dalla corrispondente media di u^* sull'intervallo $(0, t)$. Notiamo che tale media è massimale tra le medie di u^* su insiemi di misura t, per questo la funzione a destra della disuguaglianza (1.7) è chiamata funzione massimale.

Definizione 1.12 *Se u è una funzione $\mu-$misurabile in X, la* funzione massimale *di u è la funzione u^{**} definita da:*

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s)\,ds \qquad t > 0. \tag{1.8}$$

Di seguito riportiamo alcune proprietà dell'operatore massimale $u \to u^{**}$.

Proposizione 1.13 *Siano u e w due funzioni $\mu-$misurabile in X. La funzione u^{**} è non negativa, decrescente e continua su $]0, +\infty[$. Inoltre*
(i) $u^{**} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ $\mu-q.o.$,
(ii) $|u| \leq |w|$ $\mu-q.o.$ $\Rightarrow u^{**} \leq w^{**}$,
(iii) $(u + w)^{**} \leq u^{**} + w^{**}$,
(iv) $u^* \leq u^{**}$.

1.3 Disuguaglianza tipo Pólya-Szëgo

Abbiamo visto che per effetto del riordinamento rispetto ad una misura la norma L^p resta invariata, invece in generale la norma del gradiente non si conserva passando al riordinamento.

Polya e Szëgo dimostrarono che integrali di tipo Dirichlet decrescono per effetto del riordinamento di Schwarz (vedere [69], [78], [64] e [30]).

Teorema 1.14 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*[4]*, $1 \leq p < \infty$, allora $u^{\#} \in W_0^1, p(\Omega^{\#})$*

[4] Per $1 \leq p < \infty$ indichiamo con $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

e si ha

$$\left\| \nabla u^{\#} \right\|_{L^p(\Omega^{\#})} \leq \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Nel caso $1 < p < \infty$ il risultato si dimostra prima per $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e poi si procede per approssimazione. In reltà se $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ vale un risultato più generale.

Teorema 1.15 *Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione boreliana e $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione crescente convessa. Se $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $u \geq 0$, si ha*

$$\int_{\Omega^{\#}} G(u^{\#}) F(\nabla u^{\#}) dx \leq \int_{\Omega} G(u) F(\nabla u) dx.$$

Nel caso di una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue in [83] si dimostra che integrali di tipo Dirichlet con peso di funzioni sufficientemente regolari decrescono per effetto di opportuni riordinamenti.
Sia u una funzione μ-misurabile e definita in X, in questo paragrafo il riordinamento di u è la funzione $u^{\circ} : X \to [0, +\infty[$ definita da

$$u^{\circ}(x) = u^{*}(\mu_f(f(x))),$$

dove u^* è il riordinamento decrescente definito da (1.3), μ_f è la funzione di distribuzione di una funzione f μ-misurabile definita in X a valori reali tale che:
(a) $\mu\{x \in X : f(x) \leq 0\} = \mu\{x \in X : f(x) \geq 1\} = 0,$
(b) $\mu\{x \in X : a < f(x) < b\} \neq 0$ se $0 < a < b < 1,$
(c) $\mu\{x \in X : f(x) = t\} = 0$ se $0 < t < 1,$
(d) $\mu\{x \in X : f(x) > t\} < \infty$ se $0 < t < 1$ oppure $\mu(X) < \infty.$
Sia E un sottoinsieme μ-misurabile di X. Poniamo[5]

$$P_X(E) = \liminf_{r \to 0} \frac{1}{2r} \mu\{x \in X : d(x, X \cap \partial E) < r\},$$

il contenuto di Minkowski di una porzione di ∂E; la funzione P_X è tale che $P_X(A) = P_X(B)$ se $X \cap \partial A = X \cap \partial B$ ed è detta perimetro relativo ad X.

Teorema 1.16 ([83]) *Supponiamo che*
(i) *υ sia una funzione a valori reali definita in X tale che $|\{x \in X : \upsilon(x) \leq 0\}| = 0$ e*

$$\mu(E) = \int_E \upsilon(x) \, dx$$

[5] Denotiamo con $d(x, E)$ la distanza euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$ dal sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$.

per ogni sottoinsieme E di X misurabile secondo Lebesgue;

(ii) *f sia una funzione regolare con* $\inf f = 0$, $\sup f = 1$ *e* $\nabla f(x) \neq 0$ *se* $0 < f(x) < 1$;
per cui

$$\{x \in X : f(x) > t\} \neq \varnothing \text{ è un aperto,}$$

$$\{x \in X : f(x) = t\} \text{ è una varietà } (n-1)\text{-dimensionale}$$

e

$$\{x \in X : f(x) = t\} = X \cap \partial \{x \in X : f(x) > t\} \text{ se } 0 < t < 1;$$

(iii) *esista una funzione q a valori reali definita in* $[0, \mu(X)]$ *tale che* $q(s) > 0$ *se* $0 < s < \mu(X)$ *e*

$$q(\mu(E)) \leq P_X(E), \tag{1.9}$$

con E sottoinsieme misurabile di X tale che $\mu(E)$ oppure $\mu(X)$ sia finita;

(iv) *ogni insieme di livello di f realizza l'uguaglianza nella (1.9), cioè*

$$q(\mu_f(t)) = P_X\{x \in X : f(x) > t\}, \text{ se } 0 < t < 1;$$

(v) *le linee di massima pendenza di f sono rette;*

(vi) *u sia una funzione lipschitziana;*

(vii) *Ψ sia una funzione di Young, cioè un'applicazione di* $[0, +\infty[$ *in* $[0, +\infty[$,
decrescente e convessa tale che $\Psi(0) = 0$.

Allora

$$\int_X \Psi(|\nabla u|) \ \mu(dx) \geq \int_X \Psi(|\nabla u^\circ|) \ \mu(dx). \tag{1.10}$$

Il precedente risultato generalizza il famoso teorema di Pólya-Szegö (cfr. [69]), che è legato al principio che a parità di volume la misura di superficie decresce per effetto della simmetrizzazione. La disuguaglianza (1.10) è infatti legata ad una disuguaglianza isoperimetrica. Difatti l'ipotesi (iii) equivale a richiedere che, data una misura μ ed un perimetro relativo P_X, definito a partire da μ, valga una sorta di disuguaglianza isoperimetrica relativa. Analogamente l'ipotesi (iv) e (v) sono equivalenti a richiedere che esista una famiglia di aperti regolari dipendenti da un sol parametro che realizza l'uguaglianza nella disuguaglianza isoperimetrica ed i cui bordi siano traettorie ortogonali di rette.

Capitolo 2

Simmetrizzazione gaussiana

La misura di Gauss entra in gioco in molti campi dalla teoria quantistica, alla statistica, alla finanza e ad altri settori delle scienze. Per questo motivo negli ultimi anni è stata oggetto di studi che hanno visto il combinarsi di idee e metodi della probabilità, dell'analisi e della geometria.

Una misura (di Borel) di probabilità γ_1 su $\mathbb{R}$ è detta di Gauss se o è la misura di Dirac δ_a oppure ha densità (rispetto alla misura di Lebesgue)

$$\varphi_1\left(x, a, \sigma^2\right) = \sigma^{-1}\left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{|x-a|^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.1}$$

Nell'ultimo caso la misura è detta non degenere ed i parametri a e σ^2 sono detti media e varianza di γ_1. Noi considereremo solo il caso standard, cioè quando $a = 0$ e $\sigma^2 = 1$ e indichieremo con $\Phi\left(\tau\right)$ la funzione

$$\Phi\left(\tau\right) = \gamma_1\left(\left(\tau, \infty\right)\right) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}. \tag{2.2}$$

Indicheremo con γ_n la misura n-dimensionale standard di Gauss su $\mathbb{R}^n$ (il prodotto fatto n volte della misura di Gauss standard su $\mathbb{R}$) definita da:

$$\gamma_n\left(dx\right) = \varphi_n\left(x\right) dx, \tag{2.3}$$

dove

$$\varphi_n\left(x\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right). \tag{2.4}$$

Quando non darà luogo a confusioni, si ometterà il riferimento alla dimensione.

In questo capitolo si vuole presentare la simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss ricavando anche una semplice dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica soddisfatta da tale misura.

2.1 Simmetrizzazione gaussiana di insiemi

In questo paragrafo diamo la nozione di simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss, data da Ehrhard in [42]: un insieme misurabile o sue sezioni sono trasformati in semispazi. Fissato $\xi \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\xi| = 1$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ denotiamo con[1]

$$H(\xi, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \xi) > \lambda\}$$

il semispazio tale che $H(\xi, -\infty) = \mathbb{R}^n$ ed $H(\xi, +\infty) = \varnothing$.

Definizione 2.1 *Sia T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-k$ con $1 \leq k \leq n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $|\xi| = 1$, una direzione ortogonale a T. Una k-*simmetrizzazione gaussiana *rispetto a T nella direzione ortogonale ξ, denotata con $S = S\,(T, \xi)$, è l'applicazione che ad ogni aperto (risp. chiuso) A di $\mathbb{R}^n$ associa il sottoinsieme $A^{\odot} = S\,[A]$ di $\mathbb{R}^n$ tale che*[2]
(i) $A^{\odot} \cap \left(x + T^{\perp}\right) = \varnothing$, se $\gamma_k\left(A \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right) = 0$;
(ii) $A^{\odot} \cap \left(x + T^{\perp}\right) = \left(x + T^{\perp}\right)$, se $\gamma_k\left(A \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right) = 1$;
(iii) $A^{\odot} \cap \left(x + T^{\perp}\right) = H(\xi, \lambda) \cap \left(x + T^{\perp}\right)$ (risp. $\overline{H(\xi, \lambda)} \cap \left(x + T^{\perp}\right)$),
se $\gamma_k\left(A \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right) \in (0, 1)$, dove $\lambda = \lambda(x, A)$ è tale che per ogni $x \in T$

$$\gamma_k\left(H(\xi, \lambda) \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right) = \gamma_k\left(A \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right).$$

Osserviamo che la definizione di k-simmetrizzazione può essere data per un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ usando ancora i semispazi aperti.

Osservazione 2.2 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, le $n-$simmetrizzazioni (cioè $k = n$ e $T = \{0\}$) trasformano ogni insieme A in un semispazio di $\mathbb{R}^n$ che ha la stessa misura di Gauss di A:

$$S\left(\{0\}, \xi\right)[A] = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (x, \xi) > \Phi^{-1}(\gamma_n(A))\right\}.$$

[1] Con $(.,.)$ denotiamo il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

[2] Se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con $T^{\perp}$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a T.

Esempio 2.3 Consideriamo il caso $1-$dimensionale. Esistono solo due 1-simmetrizzazioni nelle direzioni opposte $\xi = \pm 1$:

$$S_+ = S(\{0\}\,, 1) \quad \text{e} \quad S_- = S(\{0\}\,, -1).$$

Queste simmetrizzazioni trasformano ogni insieme aperto A in una semiretta aperta rispettivamente destra o sinistra

$$\begin{aligned} S_+\,[A] &= \left]\Phi^{-1}(\gamma_1(A)), +\infty\right[\\ S_-([A] &= \left]-\infty, -\Phi^{-1}(\gamma_1(A))\right[. \end{aligned}$$

Esempio 2.4 Nel piano $\mathbb{R}^2$ possiamo considerare le $1-$simmetrizzazioni e le $2-$simmetrizzazioni. Queste ultime in accordo con l'Osservazione 2.2 trasformano ogni insieme aperto in un semipiano aperto di $\mathbb{R}^2$. Le $1-$simmetrizzazioni secondo una fissata direzione trasformano ogni sezione dell'insieme in una semiretta avente la stessa misura di Gauss $1-$dimensionale.

Esempio 2.5 In $\mathbb{R}^3$ possiamo considerare $1-$simmetrizzazioni, $2-$simmetrizzazioni e $3-$simmetrizzazioni. Queste ultime in accordo con l'Osservazione 2.2 trasformano ogni insieme aperto in un semispazio aperto di $\mathbb{R}^3$. Le $2-$simmetrizzazioni secondo una fissata giacitura trasformano ogni sezione piana dell'insieme in un semipiano avente la stessa misura di Gauss $2-$dimensionale. Le $1-$simmetrizzazioni secondo una fissata direzione trasformano le sezioni, intersezione dell'insieme A con le rette aventi la direzione fissata, in una semiretta avente la stessa misura di Gauss $1-$dimensionale.

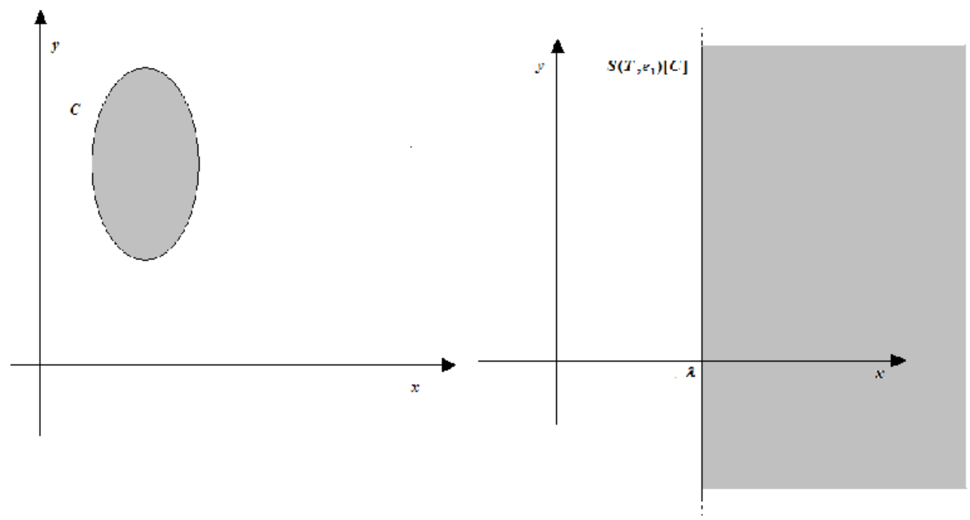
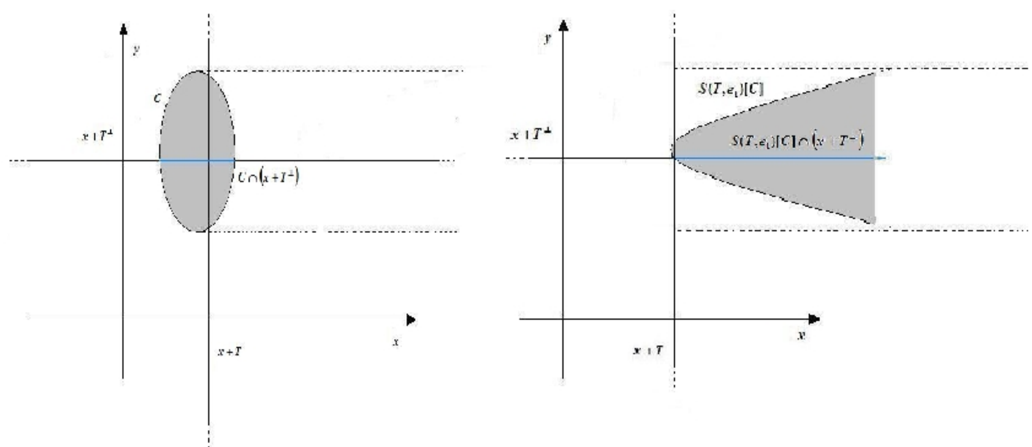


Figura 2.1: 2-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^2$ rispetto al sottospazio $T = \{0\}$ nella direzione e_1 dell'insieme C.



1-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^2$ rispetto a T sottospazio $1-$dimensionale nella direzione e_1 dell'insieme C.

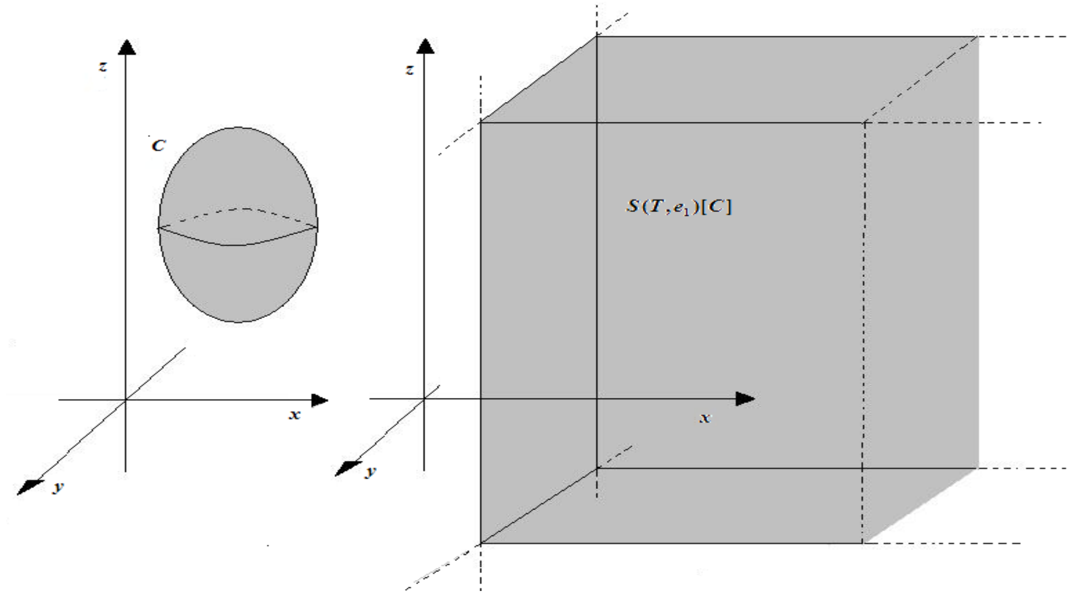
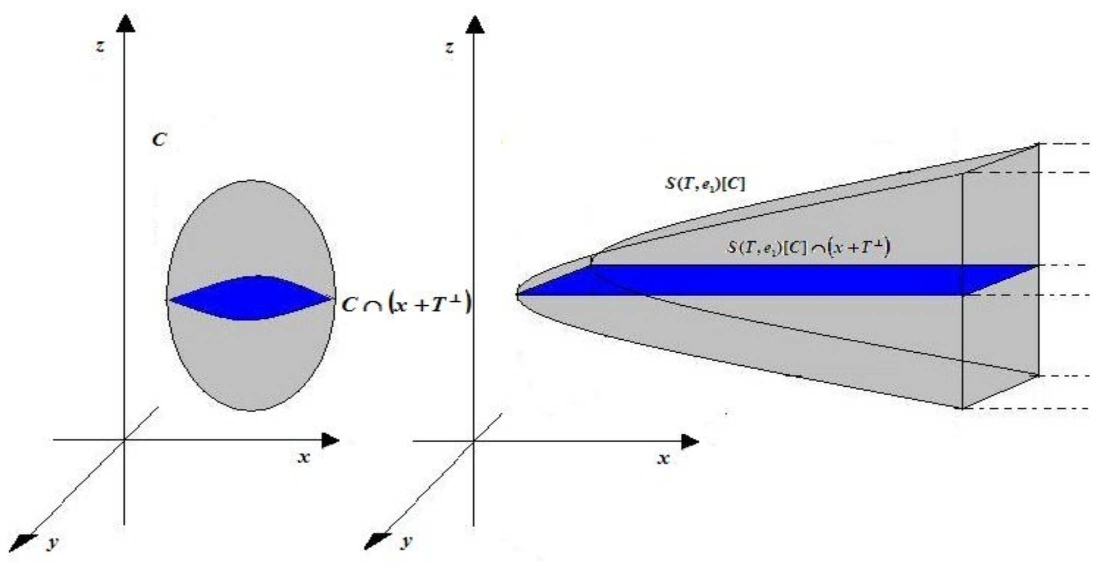


Figura 2.2: 3-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^3$ rispetto al sottospazio $T = \{0\}$ nella direzione e_1 dell'insieme C.



2-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^3$ rispetto a T sottospazio $1-$dimensionale nella direzione e_1 dell'insieme C.

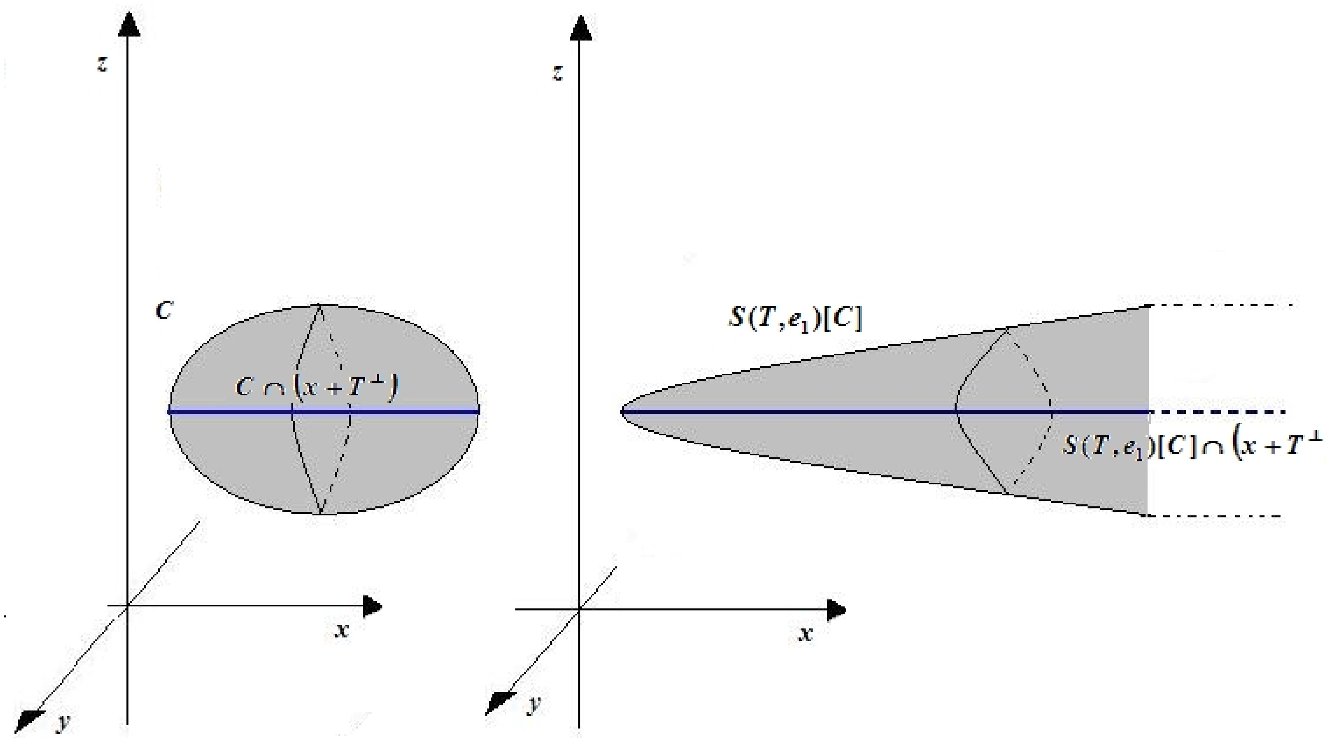


Figura 2.3: 1-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^3$ rispetto a T sottospazio 1−dimensionale nella direzione e_1 dell'insieme C.

Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti proprietà di stabilità analoghe a quelle delle simmetrizzazioni classiche (vedere ad esempio [73]).

Proposizione 2.6 *Sia $S = S(T,\xi)$ una k-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$, allora valgono le seguenti*
(i) per ogni A aperto o chiuso si ha:

$$S(T,\xi)[\mathbb{R}^n - A] = \mathbb{R}^n - S(T,-\xi)[A]$$

(ii) S è monotona, cioè se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $S[A] \subseteq S[B]$;
(iii) S è internamente continua, cioè per ogni successione crescente di aperti $\{A_j\}_{j\in N}$ si ha che $S\left[\underset{j}{\cup} A_j\right] = \underset{j}{\cup} S[A_j]$,
(iv) S è esternamente continua, cioè per ogni successione decrescente di chiusi $\{C_j\}_{j\in N}$ si ha che $S\left[\underset{j}{\cap} C_j\right] = \underset{j}{\cap} S[C_j]$;
(iv) per ogni isieme chiuso C di $\mathbb{R}^n$ si ha:

$$\gamma_n(S[C]) = \gamma_n(C).$$

Cominciamo con il provare alcune proprietà delle 1-simmetrizzazioni. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ denoteremo con A_r l'insieme di seguito definito

$$A_r = A + B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \leq r\}, \tag{2.5}$$

dove $B_n(0,r)$ denota la sfera di $\mathbb{R}^n$ con centro nell'origine e raggio r.

Proposizione 2.7 *Per ogni insieme di boreliano A di $\mathbb{R}$ e per ogni $r > 0$ si ha*

$$\Phi^{-1}(\gamma_1(A_r)) \geq \Phi^{-1}(\gamma_1(A)) + r, \tag{2.6}$$

Inoltre ogni 1-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$ è regolarizzante, cioè per ogni chiuso C e per ogni $r > 0$ si ha che $S[C_r] \supseteq (S[C])_r$.

Dimostrazione. Denotiamo con $S_+ = S(\{0\},1)$ e $S_- = S(\{0\},-1)$ le due simmetrizzazioni in $\mathbb{R}$. Per ogni chiuso C di $\mathbb{R}$ si ha

$$S_+[C] = \left[\Phi^{-1}(\gamma_1(C), +\infty)\right[$$
$$S_-([C] = \left]-\infty, -\Phi^{-1}(\gamma_1(C)\right]$$

Per dimostrare la (2.6) basta dimostrare che una delle due simmetrizzazioni, S_+ o S_-, è regolarizzante, provando una delle due seguenti inclusioni

$$S_+[A_r] \supseteq S_+[A]_r \qquad\qquad S_-[A_r] \supseteq S_-[A]_r$$

quando A è unione finita di m intervalli. Se $m = 1$, le inclusioni sono conseguenza di un semplice calcolo. Sia $m > 1$ e supponiamo che A sia unione degli intervalli $I_1, ..., I_m$. Senza ledere da generalità, possiamo supporre che

$$I_{j+1} \subseteq I_j + \mathbb{R}^+ \text{ per ogni } 1 \leq j \leq m-1.$$

Si osservi che è sufficiente provare l'inclusione solo per gli $r > 0$ tali che per ogni k e per ogni $j \neq k$ $(I_j)_r \cap (I_k)_r = \varnothing$. Sotto queste ipotesi, se $J = I_1 \cup ... \cup I_{m-1}$, si ha che

$$S_-[A] = S_-\left[\bigcup_{j=1}^{m} I_j\right] = S_-[S_-[I_1] \cup J \cup S_+[I_m]] \tag{2.7}$$

e

$$S_-[A_r] = S_-\left[\bigcup_{j=1}^{m} (I_j)_r\right] = S_-[S_-[(I_1)_r] \cup J_r \cup S_+[(I_m)_r]].$$

Dalle inclusioni note per il caso di un singolo intervallo, segue che

$$S_-[(I_1)_r] \supseteq S_-[I_1]_r \text{ e } S_+[(I_m)_r] \supseteq S_+[I_m]_r;$$

inoltre la monotonia di S_- implica l'inclusione

$$S_-\left[\bigcup_{j=1}^{m} (I_j)_r\right] \supseteq S_-[S_-[I_1]_r \cup J_r \cup S_+[I_m]_r]. \tag{2.8}$$

Posto $C = S_-[I_1]_r \cup J_r \cup S_+[I_m]_r$ si ha che il complementare di C è unione di $m-1$ intervalli e quindi, per induzione su m, si ottiene che

$$S_+[(\mathbb{R} - C)_r] \supseteq S_+[\mathbb{R} - C]_r,$$

la quale, per la (i) della Proposizione 2.6, si riscrive come

$$S_-[S_-[I_1]_r \cup (I_2)_r \cup ... \cup (I_{m-1})_r \cup S_+[I_m]_r] \supseteq$$
$$\supseteq S_-[S_-[I_1] \cup I_2 \cup ... \cup I_{m-1} \cup S_+[I_m]]_r.$$

Usando (2.7) e (2.8) si ha:

$$S_{-}\left[\bigcup_{j=1}^{m}(I_j)_r\right] \supseteq S_{-}\left[\bigcup_{j=1}^{m} I_j\right]_r .$$

Dimostriamo ora la seconda parte della proposizione. Sia $S = S\,(T,\xi)$ con $T =^{3} <\xi>^{\perp}$ una 1-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$. Per ogni chiuso C e per ogni $r > 0$ si ha

$$S\left[C_r\right] = \underset{x\in T}{\cup} S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right]_r$$

Basta solo mostrare che per ogni $x \in T$ si ha

$$S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right]_r \subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right)_r\right].$$

Per fare ciò proviamo che per ogni $x, y \in T$ si ha

$$S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right]_r \cap \left(y + T^{\perp}\right) \subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right)_r\right] \cap \left(y + T^{\perp}\right).$$

Osserviamo che vale la seguente uguaglianza

$$S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right]_r \cap \left(y + T^{\perp}\right) = S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right] + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^{\perp}\right)\right)$$

dove $B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^{\perp}\right)$ è un segmento simmetrico nello spazio affine $y - x + T^{\perp}$ di dimensione 1, allora, dalla prima parte della proposizione, si deduce che

$$\begin{aligned}
&S\left[C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right] + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^{\perp}\right)\right)\\
&\subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right) + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^{\perp}\right)\right)\right]\\
&= S\left[\left(C \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right)_r \cap \left(y + T^{\perp}\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.8 Ogni 1-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$ è aperta e chiusa. Infatti le trasformazioni di insiemi monotone e internamente continue sono aperte se regolarizzanti e dall$a$ (i) della Proposizione 2.6 segue che sono anche chiuse.

[3] Se ξ_i e ξ_j sono due vettori di $\mathbb{R}^n$ con $\langle \xi_i, \xi_j \rangle$ denotiamo il sottospazio vettoriale generato da ξ_i e ξ_j.

Osservazione 2.9 La (2.6) precedente è la disuguaglianza di Borell in $\mathbb{R}$ (vedere (2.18) nel successivo paragrafo 3). Inoltre la Proposizione 2.7 garantisce la stabilità delle classi degli aperti e dei chiusi rispetto all'operazione di 1-simmetrizzazione e quindi garantisce la possibilità della loro composizione sugli aperti e sui chiusi.

E' possibile approssimare le 2-simmetrizzazioni in $\mathbb{R}^2$ con una successione di 1-simmetrizzazioni. Consideriamo una successione di versori $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\xi_0 = e_2 = (0,1), \xi_1 = e_1 = (1,0)$

$$(\xi_j, \xi_{j-1} + \xi_0) = 0$$

con $(\xi_j, \xi_0) < 0$ per ogni $j \geq 2$. Sia $S(T, \xi_j)$ una 1-simmetrizzazione di direzione ξ_j in $\mathbb{R}^2$ e poniamo

$$S_j = S(T, \xi_j) \circ ... \circ S(T, \xi_0). \tag{2.9}$$

Proposizione 2.10 *Per ogni chiuso C di $\mathbb{R}^2$, per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in S_j(C)$ vale la seguente inclusione*

$$x + \xi_0\mathbb{R}^+ + \xi_j\mathbb{R}^+ \subseteq S_j\left[C\right].$$

Questa proposizione è conseguenza diretta della (2.6) (essendone anche un'interpretazione geometrica) e permette di dimostrare il seguente:

Teorema 2.11 *Siano $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la successione di trasformazioni di insiemi definite in* (2.9) *e sia $\widetilde{S} = S(\{0\}, \xi_1)$ una 2-simmetrizzaione di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, esiste un numero reale $R(\varepsilon)$ tale che per ogni chiuso C di $\mathbb{R}^2$ con $\gamma_2(C) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ e per tutti gli $R > R(\varepsilon)$ si ha*

$$\lim_{j\to\infty} S_j(C) \cap B_2(0,R) = \widetilde{S}(C) \cap B_2(0,R).$$

Inoltre la convergenza è uniforme sull' insieme degli insiemi chiusi C con misura $\gamma_2(C) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Si può dimostrare che se nel teorema precedente le S_j sono regolarizzanti allora lo è anche la $\widetilde{S}$. Il Teorema 2.11 ha quindi il seguente importante corollario.

Corollario 2.12 *In $\mathbb{R}^2$ tutte le simmetrizzazioni sono regolarizzanti.*

Per dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ tutte le simmetrizzazioni sono regolarizzanti abbiamo bisogno del seguente lemma tecnico la cui dimostrazione rimandiamo a [42].

Lemma 2.13 *Sia $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $|\xi| = 1$ e siano $S_1 = S(T_1, \xi)$ e $S_2 = S(T_2, \xi)$ due simmetrizzazioni aperte e chiuse in $\mathbb{R}^n$ con $T_2 \supseteq (T_1 + < \xi >)^\perp$, allora si ha*

$$S_2 \circ S_1 = S(T_1 \cap T_2, \xi).$$

Teorema 2.14 *In $\mathbb{R}^n$ tutte le k-simmetrizzazioni S sono regolarizzanti, cioè per ogni chiuso C e per ogni $r > 0$*

$$S[C_r] \supseteq (S[C])_r.$$

In particolare S è aperta e chiusa.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla dimensione n dello spazio. Per $n = 2$ l'asserto segue dal Corollario 2.12.
Consideriamo $S = S(T, \xi)$ una k-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$, dove $1 \leq k \leq n-1$. Allora per ogni chiuso C di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$(S[C])_r = \bigcup_{x \in T} \left(S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right]\right)_r.$$

Bisogna dunque mostrare che per ogni $x \in T$ si ha

$$\left(S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right]\right)_r \subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^\perp\right)\right)_r\right].$$

Per fare ciò proviamo che per ogni $x, y \in T$ si ha

$$\left(S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right]\right)_r \cap \left(y + T^\perp\right) \subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^\perp\right)\right)_r\right] \cap \left(y + T^\perp\right).$$

Osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze

$$\left(S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right]\right)_r \cap \left(y + T^\perp\right) = S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right] + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^\perp\right)\right)$$

$$S\left[\left(C \cap \left(x + T^\perp\right)\right)_r\right] \cap \left(y + T^\perp\right) = S\left[\left(C \cap \left(x + T^\perp\right)\right) + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^\perp\right)\right)\right].$$

Poichè $B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^\perp\right)$ è una sfera nello spazio affine $y - x + T^\perp$ di dimensione $k \leq n-1$, l'ipotesi di induzione assicura che

$$\begin{aligned} &S\left[C \cap \left(x + T^\perp\right)\right] + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^\perp\right)\right) \\ &\subseteq S\left[\left(C \cap \left(x + T^\perp\right)\right) + \left(B_n(0,r) \cap \left(y - x + T^\perp\right)\right)\right] \end{aligned}$$

il che prova il teorema nel caso di k-simmetrizzazioni in $\mathbb{R}^n$, con $k \neq n$. Resta da provare il teorema solo per le n-simmetrizzazioni di $\mathbb{R}^n$. Poichè le k-simmetrizzazioni in $\mathbb{R}^n$, con $1 \leq k \leq n-1$, sono aperte e chiuse, possiamo usare il lemma precedente.
Siano $S = S(\{0\}, \xi)$ una n-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$ e T_1 un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ortogonale a ξ, di dimensione $n-k$ con $2 \leq k \leq n-1$ e poniamo $S_1 = S(T_1, \xi)$ e $S_2 = S\left((T_1 + \mathbb{R}\xi)^{\perp}, \xi\right)$. Queste due simmetrizzazioni sono aperte e chiuse, quindi per il lemma precedente $S = S_1 \circ S_2$. Allora S è regolarizzante, aperta e chiusa. □

Dalla dimostrazione del Teorema 2.14 segue il seguente:

Corollario 2.15 *Siano $S_1 = S(T_1, \xi)$ e $S_2 = S(T_2, \xi)$ due simmetrizzazioni in $\mathbb{R}^n$ con $(T_1 \cap T_2)^{\perp}_{T_1}$,ortogonale a $(T_1 \cap T_2)^{\perp}_{T_2}$ allora si ha*

$$S_2 \circ S_1 = S_1 \circ S_2 = S(T_1 \cap T_2, \xi).$$

In particolare per $n \geq 3$, tutte le k-simmetrizzazioni in $\mathbb{R}^n$ con $k \geq 2$ possono essere scritte come composizione di $(k-1)$ 2-simmetrizzazioni.

La simmetrizzazione gaussiana conserva gli insiemi convessi, cioè vale un analogo del teorema di Schwarz, Brunn e Minkowski per la simmetrizzazione di Steiner nello spazio euclideo.

Teorema 2.16 ([42]) *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ aperto o chiuso e sia S una simmetrizzazione gaussiana. Se A è convesso, anche $S[A]$ è convesso.*

2.2 Riordinamenti gaussiani di funzioni

Nello spazio munito della misura gaussiana abbiamo visto che la simmetrizzazione naturale è l'applicazione che trasforma un insieme o sue sezioni in semispazi. Come nel caso classico si può pensare di compiere tale operazione sugli insiemi di livello di una funzione in modo da riordinarne i valori assunti dalla funzione con un criterio di monotonia.

2.2.1 Riordinamenti di funzioni e n-simmetrizzazioni

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e u una funzione misurabile in Ω, in accordo con la (1.3), il riordinamento decrescente di u rispetto alla misura di Gauss è la funzione:

$$u^{\circledast}(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu(t) \leq s\}, \qquad 0 < s \leq 1,$$

dove $\mu(t)$ denota la misura di Gauss dell'insieme di livello di u, cioè la funzione distribuzione di u rispetto alla misura di Gauss.
Per la funzione $u^{\circledast}$ valgono le proprietà descritte nel primo capitolo per i riordinamenti decrescenti.

Introduciamo, ora, il riordinamento di funzione rispetto alla misura di Gauss, legato alle $n-$simmetrizzazioni gaussiane.

Definizione 2.17 *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ ed u una funzione misurabile in Ω. Il* riordinamento rispetto alla misura di Gauss *di u è la funzione*

$$u^{\star} : x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega^{\star} \to u^{\circledast}(\Phi(x_1)) \in [0, +\infty[\,,$$

dove $\Omega^{\star} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma_n(\Omega) = \gamma_n(\Omega^{\star})$ e Φ è la funzione definita da (2.2)*.*

Dalla definizione è ovvio che $u^{\star}$ è funzione di una sola variabile, è crescente ed è definita in un semispazio. Osserviamo, inoltre, che gli insiemi di livello di $u^{\star}$ sono gli n-simmetrizzati rispetto alla direzione $\mathbf{e}_1$ degli insiemi di livello di u, quindi $u^{\star}$ è un riordinamento di u secondo la Definizione 1.3. Allora dalla (1.2) segue che

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \;\gamma_n(dx) = \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(u^{\circledast}(s)\right)^p \;ds = \int_{\Omega^{\star}} \left(u^{\star}(x)\right)^p \;\gamma_n(dx)\,, \tag{2.10}$$

cioè la norma nello spazio $L^p(\varphi, \Omega)$[4] è invariante rispetto al riordinamento rispetto alla misura di Gauss.

[4] Indichiamo con $L^p(\varphi, \Omega)\,, 1 < p < +\infty$, lo spazio di Lebesgue pesato costituito dalle funzioni misurabili per cui

$$\|u\|_{L^p(\varphi,\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \varphi(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Poichè per la misura di Gauss vale una disuguaglianza isoperimetrica (vedere successivo paragrafofo 2) come conseguenza del Teorema 1.16 si ottiene la seguente disuguaglianza tipo Pólya-Szegö:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \ \gamma_n (dx) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u^\star\right| \ \gamma_n (dx) . \tag{2.11}$$

Nelle applicazioni della teoria dei riordinamenti allo studio delle equazioni alle derivate parziali, vengono spesso valutati integrali di funzioni sommabili sull'insieme di livello di un'altra funzione misurabile. Nel 1978 in [9] fu introdotto il concetto di pseudo-riordinamento; una definizione analoga può essere data rispetto alla misura di Gauss.
Siano $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile, $f \in L^p (\varphi, \Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega^\circledast = (0, \gamma_n (\Omega))$. Diremo che la funzione

$$\widetilde{f}_u : \Omega^\circledast \rightarrow \mathbb{R}$$

è lo *pseudo-riordinamento* rispetto alla misura di Gauss di f rispetto ad u se esiste una famiglia $\mathcal{E} (\Omega) = \{E (s)\}_{s\in\Omega^*}$ di sottoinsiemi di Ω tali che

(i) $\gamma_n (E(s)) = s$,
(ii) $s_1 \leq s_2 \qquad \Rightarrow \qquad E(s_1) \subseteq E(s_2)$
(iii) $E(s) = \{x \in \Omega : u(x) > u^\circledast (s)\} \qquad \text{se} \quad s = \mu_u(t)$ e

$$\widetilde{f}_u(s) = \frac{d}{ds} \int_{E(s)} f(x)\varphi (x) \ dx \qquad \text{per q.o. } s \in \Omega^\circledast. \tag{2.12}$$

Osservazione 2.18 L'assoluta continuità della funzione

$$h (s) = \frac{d}{ds} \int_{E(s)} f(x)\varphi (x) \ dx$$

assicura che (2.12) è ben posta.

Seguendo la linea di [9] si può dimostrare che la funzione $\widetilde{f}_u$, "costruita" sugli insiemi di livello di u, non è un riordinamento di f, ma è "vicina" all'insieme dei riordinamenti dei f.

Teorema 2.19 *Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile ed $f \in L^p (\varphi, \Omega)$ con $p \geq 1$. Sia $\widetilde{f}_u$ la funzione definita dalla* (2.12). *Allora esiste una successione di funzioni*

$\{f_h(s)\}_{h\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega^{\circledast})$ *tali che* $f_h^*(s) = f^{\circledast}(s)$ *ed inoltre*

$$f_h \rightharpoonup \widetilde{f}_u \ \text{ debole in } L^p\left(\Omega^{\circledast}\right) \text{ se } 1 < p < +\infty \text{ (debole}^* \text{ se } p = \infty\text{)},$$

e

$$\lim_{h\to\infty} \int_0^{\gamma_n(\Omega)} f_h(s)\, g(s)\, ds = \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \widetilde{f}_u(s)\, g(s)\, ds \quad \forall g \in BV\left(\Omega^{\circledast}\right) \text{ se } p = 1.$$

Dal teorema precedente segue un'immediata proprietà della funzione $\widetilde{f}_u$.

Proposizione 2.20 *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile ed* $f \in L^p(\varphi, \Omega)$ *con* $f \geq 0$. *Allora*

$$\int_0^t \widetilde{f}_u^{\,*}(s)\ ds \leq \int_0^t f^{\circledast}(s)\ ds \quad \forall t \in [0, \gamma_n(\Omega)[$$

e

$$\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \widetilde{f}_u^{\,*}(s)\ ds = \int_0^{\gamma_n(\Omega)} f^{\circledast}(s)\ ds.$$

Ulteriori risultati sul pseudo-riordinamento di una funzione sono riportati ad esempio in [71], [72], [70] e [49].

2.2.2 Riordinamenti di funzioni e k-simmetrizzazioni

Usando la nozione di k-simmetrizzazione si può pensare di simmetrizzare l'insieme di livello di una funzione lungo direzioni assegnate (cfr. [43]). In analogia con quanto fatto nei paragrafi precedenti considereremo funzioni $u \geq 0$.

Definizione 2.21 *Sia* u *una funzione boreliana di* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}$ *e sia* $S = S(T, \xi)$ *una* k-*simmetrizzazione gaussiana in* $\mathbb{R}^n$ *con* $1 \leq k \leq n$. *Denoteremo* $S[u] = u^{\odot}$ *la funzione definita da*

$$u^{\odot}(x) = \inf\left\{t \in \mathbb{R};\ \Phi(x,\xi) \geq \gamma_k\left(\{u > t\} \cap \left(x + T^{\perp}\right)\right)\right\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $S[u] = u^{\odot}$ *si chiama* k-simmetrizzazione gaussiana *di* u.

Osserviamo che la definizione di $u^{\odot}$ coincide con quella di $u^{\star}$ quando $k = n$ e $\xi = \mathbf{e}_1$. Simmetrizzare una funzione equivale a simmetrizzare i suoi insiemi di livello. In questo paragrafo, per semplicità, considereremo funzioni $u(x)$ continue in modo da garantire che

[4] Con BV si denota lo spazio delle funzioni a variazione limitata con la norma usuale.

gli insiemi di livello $\{u(x) > t\}$ siano aperti per ogni t. Indicando il sottografico di u con $G_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, y \leq u(x)\}$, si trova che $u^{\odot}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \notin S(T \times \mathbb{R}, (\xi, 0))[G_u]\}$, dove $S(T \times \mathbb{R}, (\xi, 0))$ è una k-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^{n+1}$.
Segue subito che gli insiemi di livello di $u^{\odot}$ sono i simmetrizzati degli insiemi di livello di u e quindi u e $u^{\odot}$ sono equimisurabili. Valgono le seguenti:

Proposizione 2.22 *Sia u una funzione continua di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Si ha*
(i) $\forall t \in \mathbb{R},\ \{u^{\odot}(x) > t\} = S[\{u(x) > t\}]$;
(ii) $\gamma_n(\{u^{\odot}(x) > t\}) = \gamma_n(\{u(x) > t\})$, *cioè u e $u^{\odot}$ sono equimisurabili;*
(iii) $\forall y \in T \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \gamma_k(\{u^{\odot}(x) > a\} \cap (y + T^{\perp})) = \gamma_k(\{u(x) > a\} \cap (y + T^{\perp}))$;
(iv) $\forall s, t \in \mathbb{R},\ s \leq t,\ S[(u \wedge t) \vee s] = (S[u] \wedge t) \vee s$;
(v) $\forall c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \in \mathbb{R},\ S[cu] = cS[u]$ *e* $S[u + a] = S[u] + a$;
(vi) $\forall (x_1, x_2) \in T \times T^{\perp},\ S[-u](x_1 + x_2) = -S[u](x_1 - x_2)$;
(vii) Per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$, $u^{\odot}(x)$ dipende solo dalla proiezione ortogonale di x su T e su $< \xi >$. Inoltre la restrizione di $u^{\odot}(x)$ a tutti gli spazi affini del tipo $y+ < \xi >$ è una funzione crescente per ogni $y \in T$.

La precedente proposizione garantisce che la k-simmetrizzazione gaussiana di una funzione continua è una funzione continua. Dalla Proposizione 2.22 si evince anche che la k-simmetrizzazione gaussiana di una funzione è il suo riordinamento equimisurabile rispetto alla misura γ_k (definita sui sottospazi perpendicolari a T) e monotono nella direzione ξ.
Vale una disuguaglianza tipo Hardy-Littlewood.

Proposizione 2.23 *Se u e w sono due funzioni continue positive di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ allora*

$$\int uw\gamma_n(dx) \leq \int u^{\odot} w^{\odot} \gamma_n(dx).$$

Dimostrazione. Per il teorema della convergenza monotona e per la (iv) della Proposizione 2.22 è sufficiente dimostrare l'asserto nel caso di funzioni limitate. In queste ipotesi

$$\int u(x)w(x)\gamma_n(dx) = \int \left(\int_0^{u(x)} dt \right) w(x)\gamma_n(dx) = \int_0^{\infty} dt \int_{\{u(x) \geq t\}} w(x)\gamma_n(dx).$$

Per dimostrare l'asserto basta solo far vedere che se w è una funzioni continue positive di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ e C è chiuso di $\mathbb{R}^n$ allora

$$\int_C w\gamma_n\left(dx\right) \leq \int_{C^\odot} w^\odot \gamma_n\left(dx\right). \tag{2.13}$$

Per ogni coppia di chiusi C_1, C_2 si ha che $\gamma_n\left(C_1 \cap C_2\right) \leq \gamma_n\left(C_1^\odot \cap C_2^\odot\right)$. Infatti

$$\gamma_n\left(C_1 \cap C_2\right) = \int_T \gamma_k\left(C_1 \cap C_2 \cap \left(x + T^\perp\right)\right)\gamma_{n-k}(dx),$$

e $\forall x \in T$,$\gamma_k\left(C_1 \cap C_2 \cap \left(x + T^\perp\right)\right) \leq \gamma_k\left(C_1^\odot \cap C_2^\odot \cap \left(x + T^\perp\right)\right)$ perché $C_1^\odot \cap \left(x + T^\perp\right)$ e $C_2^\odot \cap \left(x + T^\perp\right)$ sono due semispazi inscatolati di $x + T^\perp$.
La (2.13) segue osservando che

$$\int_C w\gamma_n\left(dx\right) = \int_0^\infty \gamma_n\left(\{w > t\} \cap C\right)dt.$$

□

Nelle simmetrizzazioni gaussiane, come in tutte le simmetrizzazioni regolarizzanti, diminuisce il modulo di continuità.

Proposizione 2.24 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e u una funzione reale lipschitziana definita su A che ammette sull'insieme $\{x : a \leq u(x) \leq b\}$ modulo di continuita*

$$c(\delta) := \sup\left\{\left|u(x) - u(y)\right|, x, y \in A \ t.c. \ \ \|x - y\| \leq \delta\right\}$$

finito. Se S è una k-simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^n$, u ammette sull'insieme $\{x : a \leq u^\odot(x) \leq b\}$ modulo di continuita $c^\odot \leq c$.

Osserviamo che dalla proposizione precedente segue subito che se u è una funzione lipschtziana lo è anche $u^\odot$.

2.3 Disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss

La disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss afferma che tra tutti gli insiemi di fissata misura di Gauss i semispazi hanno perimetro minimo.

Tale disuguaglianza fu provata nel 1975 indipendentemente da Borell [27], da Sudakov-Tsirel'son [77]. Le dimostrazioni di Borell e Sudakov-Tsirel'son, anche se diverse, sfruttano principalmente la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera ed il lemma di Poincaré; piu tardi nel 1983 Ehrharde [42], invece, ne fece una dimostrazione che si basa sulla simmetrizzazione di insiemi rispetto alla misura di Gauss. Infine nel 1997 Bobkov [21] ne propone un'elementare dimostrazione come conseguenza di una disuguaglianza isoperimetrica sul cubo discreto.

2.3.1 Versione geometrica

Sudakov-Tsirel'son e Borell ottengono la disuguaglianza isoperimetrica come versione limite della disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera al crescere della dimensione dello spazio, in quanto si dimostra che la misura di Gauss è limite di certe misure invarianti per rotazione e normalizzate sulla sfera.
La disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera stabilisce che tra tutti i sottoinsiemi della superficie sferica con fissata misura, le calotte rendono minima la misura della frontiera. Una prima versione di questo risultato fu stabilita separatamente e con tecniche differenti, da E. Schmidt ([74]) nel 1948 e da P. Lévy ([60]) nel 1951.
Sia $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+2}$ con $k \geq 0, m = m(k) = k + n + 2$ con n fissato. Denotiamo con $\Pi_{m,n}$ la proiezione canonica di $\mathbb{R}^m$ su $\mathbb{R}^n$, con $S^{m-1}_{\sqrt{k}}$ la sfera con centro l'origine e raggio $\sqrt{k}$ in $\mathbb{R}^m$ e con σ_k una misura invariante per rotazioni normalizzata su $S^{m-1}_{\sqrt{k}}$. Per ogni insieme di Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\nu_{n,k}(A) = \sigma_k \left(\Pi^{-1}_{m,n}(A) \cap S^{m-1}_{\sqrt{k}} \right). \tag{2.14}$$

Il Lemma di Poincaré (si veda ad esempio [41]) ci garantisce che la misura $\nu_{n,k}$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue dx e che la misura di Gauss γ_n è il limite di misure invarianti per rotazioni normalizzate sulla sfera, proiettate su un fissato sottospazio di $\mathbb{R}^n$, ovvero sia un insieme di Borel $A \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\lim_{k \to \infty} \nu_{n,k}(A) = \gamma_n(A).$$

Una calotta C sulla superfice sferica S^{n-1} può essere riguardata come intersezione di un semispazio H con la superfice sferica S^{n-1} e dal Lemma di Poincaré la misura $\nu_{n,k}(C) = \nu_{n,k}(H \cap S^{n-1})$ tende alla misura di Gauss del semispazio, $\gamma_n(H)$. Questa proprietà delle calotte di “convergere” ai semispazi e la proprietà delle stesse di essere insiemi estremali nella disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera, ci suggerisce che i semispazi siano insiemi estremali per il problema isoperimetrico rispetto alla misura di Gauss.

La linea sviluppata da Ehrhard, invece, utilizza la nozione di simmetrizzazione di insiemi rispetto alla misura di Gauss riadattando l'idea usata da Steiner per la dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica classica.
Steiner nel 1836 introduce una nozione di simmetrizzazione che porta il suo nome per mostrare le proprietà estremali dei cerchi e dei dischi nei problemi isoperimetrici classici. Detta S una simmetrizzazione di Schwarz basta dimostrare che tale simmetrizzazione è regolarizzante, cioè $S[C_r] \supset S[C]_r$ per ogni insieme chiuso C e per ogni $r > 0$, per ottenere con una semplice integrazione la seguente disuguaglianza

$$|A_r| \geq |B_r| \tag{2.15}$$

per ogni compatto $A \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$, dove B è la sfera euclidea chiusa tale che $|A| = |B|$(vedere ad esempio [73]). Il primo passo è, quindi, dimostrare per la misura di Gauss una disuguaglianza analoga alla (2.15).
Per semplicià in seguito sceglieremo come direzione sempre $\xi = (1, 0, ..., 0)$ e quindi indicheremo con

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}.$$

Teorema 2.25 *Sia A un boreliano di $\mathbb{R}^n$ ed H un semispazio di $\mathbb{R}^n$ tale che $\gamma_n(A) \geq \gamma_n(H)$. Allora*

$$\gamma_n(A_r) \geq \gamma_n(H_r). \tag{2.16}$$

Dimostrazione. La (2.16) è conseguenza del Teorema 2.14 per $k = n$. □

Poichè la misura di Gauss di un semispazio può essere calcolata, $\gamma_n(H) = \Phi(\lambda)$, il precedente teorema può essere riformulato: se $\gamma_n(A) \geq \Phi(\lambda)$, allora

$$\gamma_n(A_r) \geq \Phi(\lambda - r). \tag{2.17}$$

Se indichiamo con Φ^{-1} la funzione inversa di Φ, dalla (2.17) segue che per ogni boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $r \geq 0$

$$\Phi^{-1}\left(\gamma_n\left(A_r\right)\right) \geq \Phi^{-1}\left(\gamma_n\left(A\right)\right) - r. \tag{2.18}$$

La (2.18) è nota come *disuguaglianza di Borell* e mette in evidenza che la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss è essenzialmente indipendente dalla dimensione dello spazio.
Introducendo la nozione di contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss si potrà usare la (2.16) per legare la misura gaussiana di un insieme a quella della sua frontiera.

Definizione 2.26 *Sia A un boreliano di $\mathbb{R}^n$. Il* contenuto di Minkowski *rispetto alla misura di Gauss di A è*

$$\gamma_n^+\left(\partial A\right) = \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[\gamma_n\left(A_r\right) - \gamma_n\left(A\right)\right]. \tag{2.19}$$

La precedente ci permette di riformulare (2.17): se $\gamma_n\ (A) = \gamma_n\ (H) = \Phi\left(\lambda\right)$, allora

$$\gamma_n^+\left(\partial A\right) \geq \gamma_n^+\left(\partial H\right). \tag{2.20}$$

Poichè $\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$, il contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss di un semispazio H è

$$\gamma_n^+\left(\partial H\right) = \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r}\left[\Phi\left(\lambda - r\right) - \Phi\left(\lambda\right)\right] = \left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right), \tag{2.21}$$

allora, la (2.20) diventa

$$\gamma_n^+\left(\partial A\right) \geq \left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}\left(\gamma_n\left(A\right)\right)^2}{2}\right). \tag{2.22}$$

La funzione al secondo membro della (2.22) è detta *funzione isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss* e nell'origine (e per simmetria in 1) ha lo stesso andamento della funzione $t\left(2\lg\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, nel senso che

$$\lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t\to 1^-}} \frac{\left(2\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(t)^2}{2}\right)}{t\left(2\lg\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = 1. \tag{2.23}$$

Se definiamo il perimetro rispetto alla misura di Gauss di un insieme $(n-1)$-rettificabile E nel seguente modo

$$P_{\gamma_n}\left(E\right) = \int_{\partial E} \varphi_n(x)\ d\mathcal{H}_{n-1}(dx),$$

la disuguaglianza (2.16) implica la seguente disuguaglianza isoperimetrica:

Proposizione 2.27 *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $(n-1)$-rettificabile, allora*

$$P_{\gamma_n}(E) \geq P_{\gamma_n}(H), \tag{2.24}$$

dove H è un semispazio che ha la stessa misura di Gauss di E.

Dimostrazione. Per semplicità riportiamo la dimostrare nel caso di insiemi chiusi. Sia C un insieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $(n-1)$-rettificabile. Per provare la Proposizione 2.27 in queste ipotesi abbiamo bisogno di provare che se C è un chiuso con $\gamma_n(\partial C) = 0$ e S è una simmetrizzazione gaussiana allora per tutti gli $r > 0$ si ha

$$\gamma_n(\partial C + B_n(0,r)) \geq \gamma_n(\partial S[C] + B_n(0,r)). \tag{2.25}$$

Infatti

$$\partial C + B_n(0,r) = ((C + B_n(0,r)) \setminus C) \cup \left(\left(\overline{\mathbb{R}^n - C} + B_n(0,r)\right) \setminus \overline{\mathbb{R}^n - C}\right) \cup \partial C$$

e poichè il membro di destra è unione disgiunta si deduce che

$$\gamma_n(\partial C + B_n(0,r)) = \gamma_n(C + B_n(0,r)) - \gamma_n(C) + \gamma_n\left(\overline{\mathbb{R}^n - C} + B_n(0,r)\right) - \gamma_n\left(\overline{\mathbb{R}^n - C}\right).$$

Poichè S è crescente si ha che $\gamma_n(\partial S[C]) \leq \gamma_n(\partial C) = 0$. Usando la proprietà regolarizzante delle simmetrizzazioni si ottiene

$$\gamma_n(\partial C + B_n(0,r)) \geq \gamma_n(S[C] + B_n(0,r)) - \gamma_n(S[C]) + \gamma_n\left(\overline{\mathbb{R}^n - S[C]} + B_n(0,r)\right) - \gamma_n\left(\overline{\mathbb{R}^n - S[C]}\right),$$

cioè (2.25).
Sia S sia una n-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$. Poichè ∂C è $(n-1)$-rettificabile, allora $\gamma_n(\partial C) = 0$. Per la disuguaglianza (2.25)

$$\begin{aligned}\int_{\partial C} \varphi(x) d\mathcal{H}_{n-1}(dx) &= \frac{1}{2} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(\partial C + B_n(0,r)) \\ &\geq \frac{1}{2} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(\partial S[C] + B_n(0,r)) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\gamma_n(C))^2}{2}\right),\end{aligned}$$

in quanto $S[C]$ è un semispazio con la stessa misura di Gauss di C. □

Osserviamo che se E è un insieme regolare il contenuto di Minkowski di E, γ_n^+, coincide con il perimetro P_{γ_n}.

Ehrhard in [45] dà anche una caratterizzazione degli insiemi estremali nella disuguaglianza isoperimetrica. Tale caratterizzazione è possibile solo se si considerano gli insiemi chiusi con certe caratteristiche. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ se H è un semispazio chiuso e $C = H \cup \{x\}$ con $x \notin H$ allora $\gamma_2(H) = \gamma_2(C)$ e $\mu^+_{\gamma_2}(\partial H) = \mu^+_{\gamma_2}(\partial C)$.

Proposizione 2.28 *Sia C un sottoinsieme proprio chiuso e non vuoto di $\mathbb{R}^n$ che sia chiusura del proprio interno e sia H è un semispazio di misura $\gamma_n(C)$. Se $\gamma^+_n(\partial H) = \gamma^+_n(\partial C)$ allora C è un semispazio.*

Sempe usando la nozione di simmetrizzazione gaussiana Ehrhard in [42] stablisce una disuguaglianza tipo Brunn-Minkowski valida solo per gli insiemi convessi.

Teorema 2.29 *Siano A e B due borelliani non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Se A e B sono convessi allora per ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha*

$$\Phi^{-1}\left(\gamma_n\left(\lambda A + (1-\lambda)B\right)\right) \geq \lambda \Phi^{-1}\left(\gamma_n(A)\right) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\left(\gamma_n(B)\right). \tag{2.26}$$

Osserviamo che se si applica la (2.26) con $B = B_n(0, \frac{r}{1-\lambda})$ e si manda $\lambda \to 0$ si ottiene (2.18).
Resta aperto il problema di dimostrare la (2.26) senza ipotesi di convessità sugli insiemi. Per una generica funzione misurabile sfruttando il teorema precedente possiamo pronunciarci sulla convessità delle funzioni simmetrizzate.

Proposizione 2.30 ([42]) *Sia u una funzione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ misurabile.*
Per ogni numero reale t, se $\{u(x) > t\}$ è convessa e se la restrizione di u a $\{u(x) > t\}$ è concava, allora $u^{\odot}$ è concava su $\{u(x) > t\}$. Se u è convessa allora lo è anche $u^{\odot}$.

2.3.2 Disuguaglianza isoperimetrica e riordinamenti gaussiani

Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione lipschtziana ed $S = S(T, \xi)$ una simmetrizzazione gaussiana (cfr. § 2.1) allora sappiamo che anche $S[u] = u^{\odot}$ (cfr. § 2.2.2) è lipschitziana. Come è noto per il teorema di Rademacher una funzione lipschitziana è derivabile quasi ovunque e il suo gradiente è una funzione boreliana limitata. Il suo grafico G_u ,inoltre, è un insieme $n-$rettificabile, la cui misura di Hausdorff di dimensione n è data da

$$\int_{\partial G_u} \varphi_{n+1}(x) d\mathcal{H}_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\|x\|^2 + u^2(x)\right\}\right)\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx.$$

Sia $G_{u^{\odot}} = S(T \times \mathbb{R}, (\xi, 0))\,[G_u]$ il sottografico di $u^{\odot}$. Per (2.25) si ha che

$$\forall r > 0 \qquad \gamma_{n+1}\left(\partial G_u + B_{n+1}(0,r)\right) \geq \gamma_{n+1}\left(\partial G_{u^{\odot}} + B_{n+1}(0,r)\right).$$

Se ne deduce che

$$\int_{\partial G_u} \varphi_{n+1}(x) d\mathcal{H}_n(dx) \geq \int_{\partial G_{u^{\odot}}} \varphi_{n+1}(x) d\mathcal{H}_n(dx).$$

Questi integrali si possono esprimere come segue:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\|x\|^2 + u^2(x)\right\}\right)\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\|x\|^2 + u^{\odot 2}(x)\right\}\right)\sqrt{1 + \|\nabla u^{\odot}\|^2} dx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Per un metodo dovuto a Polya (cfr. [69]) si ottiene la seguente:

Proposizione 2.31 *Sia S una simmetrizzazione gaussiana in $\mathbb{R}^n$. Per tutte le funzioni lipschitziane f, si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u\|^2 \gamma_n(dx) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left\|\nabla u^{\odot}\right\|^2 \gamma_n(dx).$$

Dimostrazione. Basta considerare per ogni $\varepsilon > 0$ in (2.27) le funzioni εu e poi far tendere ε a zero. □

Corollario 2.32 *Nelle ipotesi della Proposizione 2.31 e per ogni boreliano B di $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$\int_{\{u \in B\}} \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} \gamma_n(dx) \geq \int_{\{u^{\odot} \in B\}} \sqrt{1 + \|\nabla u^{\odot}\|^2} \gamma_n(dx)$$

e

$$\int_{\{u \in B\}} \|\nabla u\|^2 \gamma_n(dx) \geq \int_{\{u^{\odot} \in B\}} \left\|\nabla u^{\odot}\right\|^2 \gamma_n(dx).$$

Tale disuguaglianza può essere generalizzata:

Teorema 2.33 *Sia $S = S(\{0\}, \xi)$ una n-simmetrizzazione in $\mathbb{R}^n$ e F una funzione convessa crescente su $\mathbb{R}^+$. Per ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitziana e per ogni boreliano B di $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$\int_{\{u \in B\}} F\left(\|\nabla u\|\right) \gamma_n(dx) \geq \int_{\{u^{\odot} \in B\}} F\left(\left\|\nabla u^{\odot}\right\|\right) \gamma_n(dx).$$

2.3.3 Versione analitica: la disuguaglianza di Bobkov

Una diversa dimostrazione con un approccio funzionale è proposta da Bobkov in [21]. Per arrivare a dimostrare la versione funzionale (vedere successiva (2.36)) della disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss si stabilisce prima un'analoga disuguaglianza (vedere la successiva (2.35)) rispetto alla misura di Bernoulli[5], $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, di supporto $\{-1, +1\}$ e poi si tensorizza per poter, infine, usare il teorema centrale del limite.

Proposizione 2.34 *La funzione* $I(t) = \varphi_1\left(\Phi^{-1}(t)\right)$ *è massimale tra tutte le funzioni continue non negative definite in* $[0,1]$ *tali che*

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{I(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} \quad \forall 0 \leq a, b \leq 1 \tag{2.28}$$

e

$$I(0) = I(1) = 0. \tag{2.29}$$

Dimostrazione. Basta far vedere che $I(t) = \varphi_1\left(\Phi^{-1}(t)\right)$ soddisfa (2.28) e (2.29).
Fissato $c \in (0,1)$, sia $g(x) = I(c+x)^2 + x^2, x \in \triangle(c) = (-\min(c, 1-c), \min(c, 1-c))$. Se poniamo $c = \frac{a+b}{2}$ e $x = \frac{a-b}{2}$ (2.28) si riscrive come

$$\sqrt{g(0)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{g(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{g(-x)} \tag{2.30}$$

e la condizione $0 \leq a, b \leq 1$ equivale a $x \in \triangle(c)$.
Moltiplicando per 2 ed elevando al quadrato due volte la (2.30) si ottiene

$$16g(0)^2 + (g(x) - g(-x))^2 \leq 8g(0)\left(g(x) + g(-x)\right).$$

Questa disuguaglianza si può riscrive in termini della funzione $h(x) = g(x) - g(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2$:

$$(h(x) - h(-x))^2 \leq 8I(c)^2\left(h(x) + h(-x)\right) \tag{2.31}$$

Notiamo che $I \cdot I'' = -1$ e che la funzione $(I')^2$ è convessa su $(0,1)$ .Quest'ultima condizione permette di dimostrare che la funzione $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ è convessa su $\triangle(c)$. Inoltre, poichè R è pari e convessa $R(x) \geq R(0) = 0$ per ogni $x \in \triangle(c)$, cioè

$$h(x) + h(-x) \geq 2I'(c)^2x^2. \tag{2.32}$$

[5] Indichiamo con δ_a la misura di Dirac concentrata in a.

La (2.31) si ottiene dalla (2.32) e dalla seguente disuguaglianza

$$\left|\frac{h(x)-h(-x)}{x}\right| \leq 4I(c)\left|I'(c)\right|.$$

Poichè $h(x)-h(-x)=I(c+x)^2-I(c-x)^2$ per dimostrare la proposizione bisogna, quindi, mostrare che

$$\left|\frac{I(c+x)^2-I(c-x)^2}{x}\right| \leq 4I(c)\left|I'(c)\right|. \tag{2.33}$$

Per la simmetria di I intorno a $1/2$, $I(1-c)=I(c)$, $|I'(1-c)|=|I'(c)|$ e

$$\left|I((1-c)+x)^2-I((1-c)-x)^2\right| = \left|I(c+x)^2-I(c-x)^2\right|.$$

Inoltre possiamo assumere $x>0$, poichè la parte destra della (2.33) è una funzione pari, e $c \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ (si noti che $\triangle(1-c)=\triangle(c)$). Con tali assunzioni $I(c+x)\geq I(c-x)$ quindi la (2.33) si riscrive

$$\frac{I(c+x)^2-I(c-x)^2}{x} \leq 4I(c)I'(c) \tag{2.34}$$

se $0<x<c\leq 1\backslash 2$. Consideriamo la funzione $k(x)=I(c+x)^2-I(c-x)^2$, la sua derivata seconda $k''(x)=2\left(I'(c+x)^2-I'(c-x)^2\right)\leq 0$, per quando osservato precedentemente su I. Allora k è una funzione concava e non negativa su $(0,c)$ per cui

$$\frac{k(x)}{x}=\int_0^1 k'(tx)dt$$

è non crescente su $(0,c]$. Resta da provare la (2.34) per $x=0$. Dal seguente sviluppo

$$I(c+x)^2=I^2(c)+2I(c)I'(c)x+O(x^2)$$

segue che $k(x)\backslash x\rightarrow 4I(c)I'(c)$ se $x\rightarrow 0$. □

Per una arbitraria funzione $f:\{-1,1\}\rightarrow[0,1]$ la condizione (2.28) si riscrive

$$I(Ef)\leq E\sqrt{I(f)^2+|\nabla f|^2}, \tag{2.35}$$

dove si è posto $a=f(-1)$ e $b=f(1)$ e si è indicato con $Ef=\int f d\mu$ il valore medio rispetto alla misura $\mu=\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1$ uniforme su $\{-1,1\}$, e con $|\nabla f|=\left|\frac{f(-1)+f(1)}{2}\right|$ il gradiente discreto.

Lemma 2.35 *Se I è una funzione su $\{-1,1\}$ tale che* (2.35) *vale per ogni funzione $f:\{-1,1\}\to[0,1]$ rispetto alla misura di probabilità μ su $\{-1,1\}$, allora (2.35) vale per ogni $f:\{-1,1\}^n\to[0,1]$ rispetto alla misura prodotto $\mu_n=\bigotimes_{i=1}^{n}\mu_i$ con $\mu_i=\mu=\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1$.*

Combinando il Lemma 2.35 e la Proposizione 2.34 si dimostra che

Proposizione 2.36 *Sia $I(t)=\varphi_1\left(\Phi^{-1}(t)\right)$, allora* (2.35) *vale per ogni $f:\{-1,1\}^n\to[0,1]$ rispetto alla misura prodotto μ_n.*
In particolare per ogni $A\subset\{-1,1\}^n$ la (2.35) *per $f=\chi_A$ implica che*

$$\mu_n^+(A)\geq I(\mu_n(A)),$$

dove

$$\mu_n^+(A)=\int|\nabla\chi_A|\,d\mu_n$$

è il perimetro discreto.

La Proposizione 2.36 estende la disuguaglianza (2.35) al caso $n-$dimensionale. La proposizione che segue usa il teorema centrale del limite per ottenere l'analoga rispetto alla misura di Gauss.

Proposizione 2.37 *Sia $I(t)=\varphi_1\left(\Phi^{-1}(t)\right)$, allora per ogni $f:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ localmente lipschitziane vale* (2.35) *rispetto alla misura di Gauss γ_n, cioè*

$$I\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\gamma_n\,(dx)\right)\leq\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt{I(f)^2+|\nabla f|^2}\gamma_n\,(dx)\,. \tag{2.36}$$

In particolare per ogni boreliano $A\subset\mathbb{R}^n$ si ha (2.22)*.*

Dimostrazione. Consideriamo funzioni $f:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ derivabili due volte con derivate prime e seconde limitate. Applicando la (2.35) alle seguenti funzioni

$$f_k(x_1,...,x_k)=f\left(\frac{x_1+...+x_k}{\sqrt{k}}\right),\quad x_1,...,x_k\in\{-1,1\}^n,$$

definite su $\{-1,1\}^{nk}$. Per il teorema centrale del limite in $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}}f_k(x_1,...,x_k)d\mu_{nk}\to\int_{\mathbb{R}^n}f\gamma_n\,(dx)\,,\qquad k\to\infty.$$

Si noti anche che

$$|\nabla f_k(x_1, ..., x_k)|^2 = \left|\nabla f\left(\frac{x_1 + ... + x_k}{\sqrt{k}}\right)\right|^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{quando } k \to \infty,$$

uniformemente su $x_1, ..., x_k \in \{-1, 1\}^n$. Poichè $|\nabla f|^2$ è continua e limitato di nuovo per il teorema centrale del limite si ha

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}} \sqrt{I(f_k)^2 + |\nabla f_k|^2}\, d\mu_{nk} \to \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2}\gamma_n\,(dx)\,, \qquad k \to \infty.$$

Un semplice argomento di approssimazione permette di estendere il risultato trovato alle funzioni localmente lipschitziane, che per il teorema di Rademacher sono differenziabili quasi ovunque.
La (2.22) si ottiene dalla (2.36) approssimando la funzione caratteristica χ_A con funzioni lipschitziane. □

Osservazione 2.38 La funzione I è ottimale in (2.36) o equivalentemente in (2.28) tra tutte le funzioni continue non negative su $[0, 1]$ soddisfacenti (2.28) e (2.29). Infatti se esistesse un'altra funzione continua non negativa J su $[0, 1]$ soddisfacente (2.28) e (2.29), allora varrebbero (2.36) e (2.22) con J al posto di I. Ma per un semispazio H tale che $\gamma_n(H) = t$ si ha che $\gamma_n^+(\partial H) = I(t)$, quindi $I(t) \geq J(t)$ per ogni t.

Nel 2000 Barthe and Maurey in [11] danno una dimostrazione della (2.36) usando la tecnica delle martingale e propongono delle estensioni e delle generalizzazioni. Per approfondimenti sul caso di uguaglianza nella disuguaglianza di Bobkov si rimanda a [31].

In [31] è proposta anche una dimostrazione della (2.36) usando le proprietà del semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck (cfr. § 3.2.2).

2.4 Disuguaglianze di tipo isoperimetrico e semispazi

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia μ una misura di Borel su X. Il contenuto di Minkowski rispetto a μ di un sottoinsieme A di Borel di X è definito come

$$\mu^+(A) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mu(A_r) - \mu\,(A)}{r}, \tag{2.37}$$

dove $A_r = \{x \in X : d\,(x, A) \leq r\}$. Si chiama funzione isoperimetrica di μ la più grande funzione I_μ su $[0, \mu\,(X)]$ tale che vale la seguente disuguaglianza, detta disuguaglianza isoperimetrica,

$$\mu^+(A) \geq I_\mu(\mu(A))$$

per ogni insieme di Borel A di X tale che $\mu(A) < \infty$.
Se $B \subset X$ è tale che $\mu^+(B) = I_\mu(\mu(B))$, l'insieme B ha frontiera di misura minima tra gli insiemi di fissato volume ed è detto insieme estremale. La disuguaglianza isoperimetrica implica che se A è un insieme misurabile che ha la stessa misura di un insieme estremale B, allora la misura della frontiera di A è maggiore o uguale della misura della frontiera di B.
Una delle questioni interessanti è determinare gli insiemi estremali di una disuguaglianza isoperimetrica, problema che non sempre è di facile risoluzione.
Anche la funzione isoperimetrica I_μ è esplicitamente nota solo in pochi casi, ad esempio nel caso di spazi con curvatura costante: lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, la sfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ con la metrica geodetica e lo spazio iperbolico con la metrica iperbolica. Altro esempio di disuguaglianza isoperimetrica è quella gaussiana che si può ad esempio ottenere come limite della disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera. In questo caso gli insiemi estremali sono semispazi.

In questo paragrafo vogliamo esaminare condizioni necessarie e sufficienti affinché i semispazi $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$ siano insiemi estremali per la disuguaglianza isoperimetrica rispetto ad una data misura.

Nel caso 1-dimensionale il problema è risolto e le misure sono completamente caratterizzate (cfr. [23]). Sia μ una misura di Borell su $\mathbb{R}$ normalizzata e sia $F_\mu(\lambda) = \mu(]\lambda, +\infty[)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la sua funzione distribuzione. Indichiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia di quelle misure che sono concentrate in un certo intervallo (a_F, b_F), dove

$$a_{F_\mu} = \inf\{t \in \mathbb{R} : F_\mu(t) > 0\}$$

e

$$b_{F_\mu} = \sup\{t \in \mathbb{R} : F_\mu(t) < 1\},$$

e tali che in tale intervallo F_μ è assolutamente continua con densità una funzione continua e positiva f_μ. Introduciamo la funzione

$$J_\mu(p) = f_\mu\left(F_\mu^{-1}(p)\right), \ 0 < p < 1,$$

dove F_μ^{-1} è la funzione inversa della funzione di distribuzione ristretta a $(a_{F\mu}, b_{F\mu})$. Estendiamo questa funzione su $[0,1]$ ponendo

$$J_\mu(0) = J_\mu(1) = 0.$$

Osserviamo che se ν è una misura ottenuta da μ per traslazione, $\nu(A) = \mu(A+h)$ per $h \in \mathbb{R}$, allora $J_\mu = J_\nu$. Allora si può pensare a μ in termini di J_μ a meno del parametro di traslazione h, per cui l'applicazione $\mu \to J_\mu$ è una biezione tra la famiglia $\mathcal{F}$ e la famiglia delle funzioni continue e positive su $(0,1)$.
Condizioni necessarie e sufficiente affinché le semirette $H = \{x \in \mathbb{R} : x_1 > \lambda\}$ siano insiemi estremali per il problema isoperimetrico in $\mathbb{R}$ sono espresse dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.39 ([23]) *Sia $F \in \mathcal{F}$ Per ogni $p \in (0,1)$ l'insieme $H = \{x \in \mathbb{R} : x_1 > \lambda\}$ è un insieme estremale per il problema isoperimetrico con $\lambda = F_\mu^{-1}(p)$ se e solo se è simmetrica rispetto alla sua mediana, cioè J_μ è simmetrica rispetto a 1/2, e per ogni $p, q > 0$ tali che $p + q < 1$,*

$$J_\mu(p+q) \leq J_\mu(p) + J_\mu(q). \tag{2.38}$$

Osservazione 2.40 Se μ è log-concava, cioè se ha una densità f_μ tale che $\log f_\mu$ è concava nell'intervallo (a_F, b_F), allora J_μ è concava e verifica la (2.38). Quindi per le misure log-concave sulla retta reale condizione necessaria e sufficiente affinché le semirette $\{x \in \mathbb{R} : x_1 > \lambda\}$ siano insiemi estremali per il problema isoperimetrico è che la misura sia simmetrica (cfr. [20]).

In generale $-\infty \leq a_{F\mu} < b_{F\mu} \leq +\infty$. Necessariamente, f_μ è continua e positiva su $(a_{F\mu}, b_{F\mu})$, F_μ è crescente su $(a_{F\mu}, b_{F\mu})$, e quindi esiste un'inversa $F_\mu^-1 : (0,1) \to (a_{F\mu}, b_{F\mu})$.

In [20] Bobkov studia il caso del prodotto di misure log-concave. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ e sia $\mu^{\otimes n} = \mu \times ... \times \mu$ la misura prodotto in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.41 ([20]) *Sia $n \geq 2$. I semispazi $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$ sono etremali per il problema isoperimetrico se e solo se*

(i) μ è simmetrica rispetto ad un punto che è la mediana di F_μ;

(ii) il supporto di μ è la retta reale $\mathbb{R}$ (i.e. $a_{F_\mu} = -\infty, b_{F_\mu} = +\infty$);

(iii) per ogni $p, q \in (0,1)$,

$$\frac{f_\mu(F_\mu^{-1}(pq)}{pq} \leq \frac{f_\mu(F_\mu^{-1}(p)}{p} + \frac{f_\mu(F_\mu^{-1}(q)}{q}.$$

In particolare in [24] si caratterizza la misura gaussiana come la sola misura prodotto in cui i semispazi sono gli insiemi estremali.
Barthe ([12]) confronta la funzione isoperimetrica di particolari funzioni con quella della misura gaussiana.
Riscalando opportunamente per convenienza possiamo assumere $I_\mu(1/2) = 1$. Quando μ è una misura su $\mathbb{R}^n$, la misura definita come $\mu_\varrho(A) = \mu(\varrho A)$ per $\varrho > 0$ è tale che $I_{\mu_\varrho} = \varrho I_\mu$.
La misura di Gauss ha la seguente importante proprietà:

$$I_{\gamma_n} = I_{\gamma_1} = f_{\gamma_1} \circ F_{\gamma_1}^{-1}.$$

Teorema 2.42 ([12]) *Sia M una varietà rimaniana e sia μ una misura di probabilità su M, che ammette una densità rispetto al volume rimaniano. Sia $c > 0$. Allora sono equivalenti:*

(i)$I_\mu \geq cI_\gamma$

(ii) per ogni funzione localmente lipschitziana $g : M \to [0,1]$

$$I_\gamma \left(\int g d\mu \right) \leq \int \sqrt{I_\gamma^2 \left(g\right) + \frac{1}{c^2} \left|\nabla g\right|^2} d\mu.$$

Corollario 2.43 ([12]) *Sia μ una misura di probabilità su M. Se $I_\mu \geq cI_{\gamma_1}$, allora $I_{\mu^{\otimes n}} \geq cI_{\gamma_1}$ per $n \geq 1$.*

Teorema 2.44 ([12]) *Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ log-concava assolutamente continua e pari*

$$d\mu = e^{-W} dx,$$

dove $W : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ è convessa e tale che $W(0) = 0$.

Se $\sqrt{W}$ è convessa, allora $I_{\mu^{\otimes n}} \geq I_{\gamma_1}$, per ogni intero n.

Questo teorema può essere applicato alle misure di probabilità $d\mu_p = e^{-|\alpha_p t|^p}$ per $p \geq 2$.

Osservazione 2.45 *Se ν è una misura immagine di μ per mezzo di una funzione lipschitziana f è noto che*

$$\|f\|_{Lip} I_\nu \geq I_\mu.$$

In particolare se μ è una misura di probabilità su $\mathbb{R}^n$, allora

$$\inf_{p \in (0,1)} \frac{I_\mu\left(p\right)}{I_{\gamma_1}\left(p\right)} \geq \sup \left\{ \frac{1}{\|f\|_{Lip}} : f(\gamma_n) = \mu \right\}.$$

In [22] si dimostra la seguente condizione.

Teorema 2.46 ([22]) *Sia* μ *una misura log-concava su* $\mathbb{R}^n$. *La condizione* $I_\mu \geq cI_\gamma$ *è verificata per una certa costante* $c > 0$ *se e solo se* $\int \exp\left(\varepsilon |x|^2\right) d\mu(x) < \infty$ *per una certa costante* $\varepsilon > 0$.

In particolare soddisfano questo teorema le misure di Boltzmann sotto particolari ipotesi (cfr. Capitolo 6).

Capitolo 3

Disuguaglianze di Sobolev logaritmiche

Le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche sono divenute negli ultimi anni un utile mezzo nell'analisi in dimensione infinita, ma giocano un importante ruolo anche in dimensione finita. Nate all'inizio degli anni settanta con i lavori sull'ipercontrattività di Nelson [66], prendono il nome che portano oggi dopo l'articolo di Gross [52] del 1975. Nel caso della misura di Lebesgue, la disuguaglianza di Sobolev garantisce che funzioni con gradiente a quadrato sommabile hanno una sommabilità con esponente $2^* = \frac{2n}{n+2}$ maggiore di due. Nel caso della misura di Gauss, invece, si guadagna solo la sommabilità di un logaritmo: le funzioni appartengono a particolari spazi di Orlicz, detti spazi di Zygmund, che introduciamo nel primo paragrafo di questo capitolo.

3.1 Spazi di Lorentz-Zygmund

Nel 1928 A. Zygmund nella teoria generale dell'interpolazione introduce per la prima volta lo spazio $L(\log L)$. Tale spazio e le sue generalizzazioni sono noti come spazi di Zygmund e di Lorentz-Zygmund. Noi di seguito considereremo solo spazi di Lorentz-Zygmund pesati, cioè nei quali gli integrali sono fatti rispetto alla misura di Gauss. Per la definizione degli spazi di Lorentz-Zygmund classici e per le relative proprietà si rimanda a [13], [14] e [67].

Definizione 3.1 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$*. Se* $0 < p < \infty$ *ed* $-\infty < \alpha < +\infty$*, lo* spazio di Zygmund $L^p (\log L)^\alpha (\varphi, \Omega)$ *è l'insieme delle funzioni misurabili in* Ω *per le quali*

$$\int_\Omega [|f(x)| \ \log^\alpha (2 + |f(x)|)]^p \ \gamma_n (dx) < \infty. \tag{3.1}$$

Se $\alpha \geq 0$*, lo spazio di Zygmund* $L^\alpha_{\exp} (\varphi, \Omega)$ *è l'insieme delle funzioni misurabili in* Ω *per le quali esiste una costante* $\sigma = \sigma(f) > 0$ *tale che*[1]

$$\int_\Omega \exp (\sigma |f(x)|)^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_n (dx) < \infty. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.2 Le quantità (3.1) e (3.2) non sono delle norme.

Questi spazi possono essere anche caratterizzati in termini del riordinamento decrescente rispetto alla misura di Gauss.

Lemma 3.3 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$*. Se* $0 < p < \infty$ *e* $-\infty < \alpha < +\infty$*, allora una funzione misurabile in* Ω *appartiene allo spazio di Zygmund* $L^p (\log L)^\alpha (\varphi, \Omega)$ *se e solo se*

$$\|u\|_{L^p(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)} = \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[(1 - \log t)^\alpha f^\circledast (t) \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.3}$$

Se $\alpha \geq 0$*, allora una funzione misurabile in* Ω *appartiene allo spazio di Zygmund* $L^\alpha_{\exp} (\varphi, \Omega)$ *se e solo se*

$$\|u\|_{L^\infty(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)} = \sup_{0<t<\gamma_n(\Omega)} (1 - \log t)^{-\alpha} f^\circledast (t) < \infty. \tag{3.4}$$

Si osservi che le espressioni (3.3) e (3.4) sono del tutto simili a quelle utilizzate nella definizione di norma degli spazi di Lorentz $L^{p,q}$ con la differenza che il peso è di tipo logaritmico invece che di tipo potenza.
Nel 1980, Bennet e Rudnick [13] considerano entrambi i pesi nella stessa espressione, introducendo una classe più ampia di spazi a tre parametri detti spazi di Lorentz-Zygmund, che contiene la classe degli spazi di Lebesgue, quella dei Lorentz e quella degli Zygmund.

[1] Se $\alpha = 0$ la (3.2) si interpretata come f limitata, per cui $L^0_{\exp} = L^\infty$.

Definizione 3.4 *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e* $0 < p, q < \infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$. *Lo spazio di* Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$ *è l'insieme delle funzioni misurabili in* Ω *per le quali risulta finita la seguente quantità:*

$$||u||_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[t^{\frac{1}{p}} (1 - \log t)^{\alpha} f^{\circledast}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & se\ 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{t \in (0, \gamma_n(\Omega))} \left[t^{\frac{1}{p}} (1 - \log t)^{\alpha} f^{\circledast}(t) \right] & se\ q = \infty. \end{cases} \tag{3.5}$$

Osservazione 3.5 Dalla precedente definizione segue, ovviamente, che lo spazio di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$ per $\alpha = 0$ è lo spazio di Lorentz $L^{p,q}(\varphi, \Omega)$. In particolare, se $p = q$ e $\alpha = 0$ allora $L^{p,q}(\log L)^{\alpha} = L^p$ è il classico spazio di Lebesgue. Inoltre se $0 < p < \infty$, dal Lemma 3.3, segue che

$$L^{p,p}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega) = L^p(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$$

e se $p = \infty$, $\alpha \geq 0$

$$L^{\infty,\infty}(\log L)^{-\alpha}(\varphi, \Omega) = L^{\alpha}_{\exp}(\varphi, \Omega).$$

Come nel caso degli spazi di Lorentz, la (3.5) definisce una quasinorma rispetto alla quale $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}$ è completo.

Per lavorare con gli spazi di Lorentz-Zygmund sono molto utili alcune disugualglianze di tipo Hardy con pesi di tipo potenza-logaritmo (vedere ad esempio [13]).

Proposizione 3.6 *Siano* $r > 0, 1 \leq q \leq \infty$ *e* $-\infty < \alpha < +\infty$ *e sia* ψ *una funzione non negativa misurabile su* $(0,1)$. *Allora*
per $1 \leq q < \infty$ *valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\left(\int_0^1 \left[t^{-r} (1 - \log t)^{\alpha} \int_0^t \psi(s)\ ds \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^1 \left[t^{1-r} (1 - \log t)^{\alpha} \psi(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.6}$$

e

$$\left(\int_0^1 \left[t^{r} (1 - \log t)^{\alpha} \int_t^1 \psi(s)\ ds \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_0^1 \left[t^{1+r} (1 - \log t)^{\alpha} \psi(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}; \tag{3.7}$$

per $q = \infty$ *valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\sup_{0<t<1} \left(t^{-r} (1 - \log t)^{\alpha} \int_0^t \psi(s)\ ds \right) \leq c \sup_{0<t<1} \left(t^{1-r} (1 - \log t)^{\alpha} \psi(t) \right) \tag{3.8}$$

e

$$\sup_{0<t<1}\left(t^r(1-\log t)^\alpha\int_t^1\psi(s)\ ds\right)\le c\sup_{0<t<1}\left(t^{1+r}(1-\log t)^\alpha\psi(t)\right). \tag{3.9}$$

In tutti i casi le costanti $c=c(r,q,\alpha)$ sono indipendenti da ψ.

Nel caso limite $r=0$ vale invece la seguente proposizione.

Proposizione 3.7 *Sia $1\le q\le\infty$ e $\frac{1}{q}+\alpha\neq 0$ e sia ψ una funzione non negativa misurabile su $(0,1)$. Allora*
per $1\le q<\infty$, se $\frac{1}{q}+\alpha>0$ vale la seguente disuguaglianza

$$\left(\int_0^1\left[(1-\log t)^\alpha\int_0^t\psi(s)\ ds\right]^q\ \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\le c\ \left(\int_0^1\left[t(1-\log t)^{\alpha+1}\psi(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.10}$$

se $\frac{1}{q}+\alpha<0$ vale invece la disuguaglianza

$$\left(\int_0^1\left[(1-\log t)^\alpha\int_t^1\psi(s)\ ds\right]^q\ \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\le c\ \left(\int_0^1\left[t(1-\log t)^{\alpha+1}\psi(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.11}$$

Per $q=\infty$, se $\alpha>0$ vale la seguente disuguaglianza

$$\sup_{0<t<1}\left((1-\log t)^\alpha\int_0^t\psi(s)\ ds\right)\le c\sup_{0<t<1}\left(t(1-\log t)^{\alpha+1}\psi(t)\right), \tag{3.12}$$

se $\alpha<0$ vale invece la disuguaglianza

$$\sup_{0<t<1}\left((1-\log t)^\alpha\int_t^1\psi(s)\ ds\right)\le c\sup_{0<t<1}\left(t(1-\log t)^{\alpha+1}\psi(t)\right). \tag{3.13}$$

In tutti i casi le costanti $c=c(q,\alpha)$sono indipendenti da ψ.

La definizione (3.5) può essere equivalentemente data sostituendo ad $f^{\circledast}$ la funzione massimale $f^{\circledast\circledast}$. Se $1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ ed $-\infty<\alpha<+\infty$, essendo $f^{\circledast}\le f^{\circledast\circledast}$ ed applicando l'opportuna disuguaglianza di Hardy tra quelle delle proposizioni precedenti, si ha che

$$\begin{aligned}||f||_{L^{p,q}(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)}&\le ||f||^{\circledast}_{L^{p,q}(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)}= \\ &=\left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)}\left[t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^\alpha f^{\circledast\circledast}(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\le \\ &\le c_{p,q,\alpha}||f||_{L^{p,q}(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)}\end{aligned} \tag{3.14}$$

per qualche costante $c_{p,q,\alpha}$ e per ogni $f \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$. La quantità $||f||^{\circledast}_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}$ è una norma rispetto a cui $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}$ è uno spazio di Banach.
Si osservi che al variare di p, q ed α lo spazio $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ può ridursi alla sola funzione nulla. Di seguito indichiamo le condizioni $affinché$ lo spazio $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ non sia banale.

Lemma 3.8 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $0 < p,q \leq \infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$. Lo spazio di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ è non banale se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni*

$$\begin{cases} p < \infty; \\ p = \infty \ , \ \alpha + \frac{1}{q} < 0; \\ p = \infty \ , \ q = \infty \ , \ \alpha = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Analizziamo ora le relazioni tra spazi di Lorentz-Zygmund con diverso indice. Le inclusioni con primo esponente variabile sono analoghe a quelle degli spazi di Lebesgue e la dimostrazione è simile alla corrispondente per gli spazi di Lorentz (vedere [**?**]).

Teorema 3.9 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, se $0 < r < p \leq \infty, 0 < q, s \leq \infty$ e $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, allora*

$$L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega) \subseteq L^{r,s}(\log L)^{\beta}(\varphi,\Omega).$$

Per le inclusioni con il primo esponente uguale, si osservi che per la definizione lo spazio di Zygmund $L^{p}(\log L)^{\alpha}$ decresce al crescere di α, invece, lo spazio di Lorentz $L^{p,q}$ cresce al crescere del secondo esponente q. Più in generale vale il seguente risultato.

Teorema 3.10 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, se $0 < p \leq \infty, 0 < q, s \leq \infty$ e $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, allora*

$$L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega) \subseteq L^{p,s}(\log L)^{\beta}(\varphi,\Omega) \tag{3.16}$$

se è verificata una delle seguenti condizioni
(i)

$$q \leq s \quad e \quad \alpha \geq \beta$$

(ii)

$$q > s \quad e \quad \alpha + \frac{1}{q} > \beta + \frac{1}{s}.$$

Nelle applicazioni è utile conoscere il legame tra la norma di una funzione sommabile f e di una funzione F costruita a partire da f sugli insiemi di livello di una funzione misurabilie u.

Proposizione 3.11 *Sia u una funzione misurabile, $f \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ e sia $\left(\widetilde{f^{\sigma}}\right)_u$ lo pseudo riordinamento di f^{σ} rispetto ad u con $1 \leq \sigma < p \leq \infty, \sigma \leq q \leq \infty$ e $-\infty < \alpha < +\infty$. Se*

$$F^{\sigma} = \left(\widetilde{f^{\sigma}}\right)_u, \tag{3.17}$$

allora $F \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})$ e

$$\|F\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})} \leq C \, \|f\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)},$$

dove C dipende da σ, p, q, α e $\gamma_n(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $f \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ e siano $\sigma < p \leq \infty, \sigma \leq q < \infty$ e $-\infty < \alpha < +\infty$. Valutiamo la norma di F nello spazio $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})$. Sfruttando le proprietà dei riordinamenti e la relazione (3.17) si ha

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})} &= \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[t^{\frac{1}{p}} (1-\log t)^{\alpha} F^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[t^{\frac{\sigma}{p}} (1-\log t)^{\alpha\sigma} \frac{1}{t} \int_0^t \left(F^*(s)\right)^{\sigma} ds \right]^{\frac{q}{\sigma}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[t^{\frac{\sigma}{p}-1} (1-\log t)^{\alpha\sigma} \int_0^t \left(f^{\circledast}(s)\right)^{\sigma} ds \right]^{\frac{q}{\sigma}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Usando la disuguaglianza di Hardy (3.6) con $\frac{\sigma}{p} - 1 < 0$ e $1 \leq \frac{q}{\sigma} \leq \infty$, dalla (3.18) si ha per una certa costante c

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})} &\leq c \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left[t^{\frac{\sigma}{p}} (1-\log t)^{\alpha\sigma} \left(f^{\circledast}(t)\right)^{\sigma} \right]^{\frac{q}{\sigma}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c \, \|f\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}. \end{aligned}$$

Negli altri casi si procede allo stesso modo, ma usando la disuguaglianza di Hardy (3.8) invece della (3.6). $\square$

Osservazione 3.12 Siano F e f come nella proposizione precedente. Nel caso $p = q = \sigma$ e $\alpha = 0$ la norma L^σ delle funzioni F e f coincidono, cioè

$$\|F\|_{L^\sigma(\Omega^\circledast)} = \|f\|_{L^\sigma(\varphi,\Omega)} .$$

Per ulteriori risultati riguardanti gli spazi di Lorentz-Zygmund si rimanda ad esempio a [13].

3.2 Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

Uno dei modi per dimostrare con semplicità ed in maniera molto rapida le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche è usare la teoria dei semigruppi, in quanto il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck è strettamente legato a tali disuguaglianze, come il semigruppo del calore è legato alle disuguaglianze di Sobolev classiche.

3.2.1 Cenni di teoria dei semigruppi

La teoria dei semigruppi si applica ad una vasta classe di problemi (equazioni differenziali iperboliche del tipo dell'equazione delle onde, paraboliche del tipo dell'equazione del calore, ecc...). Consideriamo ad esempio la seguente equazione del calore

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(t,x) & 0 < t < T, 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & 0 < t < T \end{cases} \tag{3.19}$$

L'idea è vedere l'equazione (3.19) come equazione di evoluzione in un opportuno spazio di Banach e studiarla usando risultati per equazioni astratte e interpretare poi tali risultati in termini del problema iniziale.

Poniamo $u(t,\cdot) = U(t), f(t,\cdot) = F(t)$, $0 < t < T$, cosicchè, per ogni $t \in [0,1]$, $U(t)$ e $F(t)$ sono funzioni della variabile x appartenenti ad un opportuno spazio di Banach X. La scelta di X dipende dal tipo di risultati che si cercano e/o dalla regolarità dei dati. Per esempio se f e u_0 sono funzioni continue, una scelta naturale è $X = C([0,1])$, se invece $f \in L^p((0,T) \times (0,1))$ e $u_0 \in L^p((0,T) \times (0,1))$, per $2 \leq p < \infty$, la scelta naturale è $X = L^p(0,1)$. Fatta questa scelta il problema (3.19) si riscrive

$$\begin{cases} U'(t) = Au(t) + F(t) & 0 < t < T \\ U(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

dove A è la realizzazione della derivata seconda con condizioni al bordo di Dirichlet nello spazio X scelto. Per esempio se $X = C([0,1])$, allora il dominio di A è

$$D(A) = \left\{\psi \in C^2([0,1]) : \psi(0) = \psi(1) = 0\right\}$$

e l'operatore A è definito da

$$(A\psi)(x) = \psi''(x);$$

se invece $X = L^p(0,1)$,

$$D(A) = H^2([0,1]) \cap H_0^1([0,1]) \text{ e } (A\psi)(x) = \psi''(x) \text{ in senso debole.}$$

Il problema (3.20) è un problema di Cauchy per equazioni differenziali lineari nello spazio di Banach X. Per tali equazioni non si generalizza in modo ovvio la teoria delle equazioni differenziali ordinarie perché l'operatore A è definito su un sottospazio di X e non è continuo. Si sfruttano invece proprietà spettrali dell'operatore per arrivare a costruire la soluzione del problema di Cauchy omogeneo (caso $F = 0$) che per analogia con il caso finito dimensionale è indicata con $e^{tA}u_0$. Per ogni fissato $t \geq 0$, l'applicazione $u_0 \to e^{tA}u_0$ è lineare e continua. La famiglia di operatori $\left\{e^{tA} : t \geq 0\right\}$ viene detta semigruppo perché gode della seguente proprietà:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \qquad \forall t, s \geq 0,\ e^{0A} = I.$$

Si vede poi che la soluzione di (3.20) nel caso generale è data dalla formula

$$U(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds, \quad 0 < t < T.$$

Per approfondimenti sui semigruppi e le loro applicazioni alle equazioni si veda ad esempio [61].

3.2.2 Proprietà del semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck

Il semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck $(T(t))_{t\geq 0}$ è definito su $L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)$ dalla seguente formula (nota come formula di Mehler):

$$T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\varphi(y)dy \qquad \forall f \in L^p(\varphi, \mathbb{R}^n).$$

Questi operatori sono ben definiti. Infatti γ_n è immagine della misura prodotto $\gamma_n \otimes \gamma_n$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ per mezzo della trasformazione

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y \in \mathbb{R}^n,$$

per ogni fissato t, allora $f \in L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)$ e

$$\int |f(x)|^p \gamma_n(dx) = \int \int \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \right|^p \gamma_n(dx)\gamma_n(dy).$$

Usando il teorema di Fubini la funzione

$$x \to \int \left| f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \right|^p \gamma_n(dy)$$

è γ_n-integrabile per ogni x e per la disuguaglianza di Hölder $T(t)f \in L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)$ ed inoltre

$$\|T(t)f\|_{L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)}. \tag{3.21}$$

Si noti che per $p = 1$, con un cambio di variabile, si può far vedere che la (3.21) è un'uguaglianza, per cui γ_n è una misura invariante per il semigruppo $(T(t))_{t \geq 0}$.
Il semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck dà una rappresentazione integrale della soluzione di un particolare problema di Cauchy di equazioni paraboliche. Per ogni $u_0 \in L^2(\varphi, \mathbb{R}^n)$, $u(t, x) = T(t)u_0(x)$ è soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} u_t = Au = \triangle u - (x, \nabla u) & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

L'operatore A è il generatore del semigruppo $(T(t))_{t \geq 0}$ su $L^2(\varphi, \mathbb{R}^n)$, cioè

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t}.$$

È chiamato operatore di Ornsteinb-Uhlenbeck ed è un laplaciano naturale per lo spazio euclideo munito della misura gaussiana.
In realtà in letteratura con la parola operatore di Ornsteinb-Uhlenbeck si intende un'intera classe di operatori a cui A appartiene, che sono definiti come i generatori dei semigruppi delle probabilità di transizione associate alla perturbazione di un sistema dinamico lineare mediante un moto browniano (vedere ad esempio [36]).
Si dimostra che il dominio di A è $H^2(\varphi, \mathbb{R}^n)$ e che per ogni funzione $f \in H^2(\varphi, \mathbb{R}^n)$ e $g \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int (\nabla g(x), \nabla f(x)) \gamma_n(dx) = - \int g(x)Af(x)\gamma_n(dx), \tag{3.22}$$

quindi A è associabile ad una forma di Dirichlet rispetto alla misura gaussiana:

$$\langle Af, f\rangle = \int |\nabla f(x)|^2 \gamma_n(dx)$$

Dalla definizione del semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck $T(t)$ e osservando che esso può agire su funzioni a valori vettoriali si dimostra facilmente questa importante relazione.

Proposizione 3.13 *Per ogni funzione $f \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\nabla T(t)f = e^{-t}T(t)\nabla f. \tag{3.23}$$

Per ulteriori dettagli e per approfondimenti sul semigruppo di Ornstein-Ulenbeck vedere ad esempio [26] e [36].

3.3 Semigruppi, disuguaglianze isoperimetriche ed immersioni di Sobolev

Alcune proprietà dei semigruppi possono essere usati per studiare le disuguaglianze isoperimetriche, in particolare mostreremo come l'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Ulenbeck è legata alla disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss.

Ricordiamo che la disuguaglianza isoperimetrica nello spazio euclideo è equivalente al crescere sotto il riordinamento isoperimetrico delle norma L^2 del semigruppo del calore agente su funzioni caratteristiche di insiemi.

La classica disuguaglianza isoperimetrica nello spazio euclideo stabilisce che tra tutti gli insiemi compatti A di $\mathbb{R}^n$ con fissata misura la sfera $B = B_n(0,r)$ è quella con perimetro[2] minimo:

$$P(A) \geq P(B). \tag{3.24}$$

Osserviamo che $P(B) = n\omega_n r^{n-1}$ e $|A| = |B| = \omega_n r^n$, dove $\omega_n = |B_n(0,1)|$. Da ciò segue che

$$P(A) \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}} |A|^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.25}$$

[2] Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $(n-1)$-rettificabile indichiamo con $P(A)$ il perimetro di A, cioè

$$\int_{\partial A} \mathcal{H}^{n-1}(dx).$$

Usando la formula di coarea (vedere [46]) e integrando per parti la (3.25) implica la seguente disuguaglianza di Sobolev per $p = 1$ (vedere ad esempio [62])

$$n\omega_n \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla f\|_1 \tag{3.26}$$

per ogni funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Viceversa, nell'ipotesi che l'insieme A abbia frontiera abbastanza regolare la (3.26) è equivalente alla (3.25). Basta, infatti, prendere f approssimante la funzione caratteristica χ_A dell'insieme A, in modo che $\int |\nabla f|\, dx$ approssimi $P(A)$:

$$\int_A |\nabla f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{A \cap \{f=t\}} \mathcal{H}^{n-1}(dy) \right) dt.$$

Sostituendo f con f^α, per un opportuno α, e usando la disuguaglianza di Hölder, dalla (3.26) si ricava per $1 \leq p < n$ e per una certa costante $C(n,p)$ positiva la seguente disuguaglianza

$$\|f\|_{p^*} \leq C(n,p) \|\nabla f\|_p ,$$

dove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Osserviamo che nel caso particolare $p = 2$, integrando per parti si ottiene

$$\|f\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C(n,2) \|\nabla f\|_2 = C(n,2) \int f(-\triangle f) dx,$$

dove $\triangle$ è l'usuale laplaciano, che è il generatore del semigruppo del calore $e^{t\triangle}, t \geq 0$, la cui rappresentazione integrale è

$$e^{t\triangle} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \sqrt{2t} y\right) \gamma_n(dy),\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Per capire il legame tra il semigruppo del calore e la disuguaglianza isoperimetrica nello spazio euclideo è cruciale la seguente proposizione, la cui dimostrazione si basa su proprietà del semigruppo del calore (vedi ad esempio [58]).

Proposizione 3.14 *Per ogni compatto A in $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare e per ogni $t \geq 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n - A} e^{t\triangle} \chi_A dx \leq \left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} P(A).$$

Tale disuguaglianza è ottimale nel senso che se B è una sfera

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n - B} e^{t\triangle} \chi_B dx = P(B). \tag{3.27}$$

In base a tale proposizione per dimostrare (3.24) basta far vedere che per ogni $t \geq 0$ e per ogni compatto A in $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare si ha

$$\left\| e^{\frac{t}{2}\triangle}\chi_A \right\|_2 \leq \left\| e^{\frac{t}{2}\triangle}\chi_B \right\|_2,$$

ovvero

$$\int_A e^{t\triangle}\chi_A dx \leq \int_B e^{t\triangle}\chi_B dx, \tag{3.28}$$

dove B è una sfera con la stessa misura di A. Infatti se (3.28) è verificata allora per la Proposizione 3.14 si ha

$$\begin{aligned} P(A) &\geq \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n - A} e^{t\triangle}\chi_A dx = \\ &= \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n - A} e^{t\triangle}1 dx - \int_{\complement A} e^{t\triangle}\chi_{\complement A} dx \right) \\ &\geq \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n - B} e^{t\triangle}1 dx - \int_{\complement B} e^{t\triangle}\chi_{\complement B} dx \right) \\ &= \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n - B} e^{t\triangle}\chi_B dx \end{aligned}$$

e quindi per la (3.27) passano al limite per $t \to 0$ si ha $P(A) \geq P(B)$. In conclusione per dimostare la disuguaglianza isoperimetrica (3.24) è sufficiente verificare la validità della (3.28).

In modo analogo al caso euclideo, dalla disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss si ottiene una disuguaglianza tipo Sobolev. La disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss (2.22) può essere espressa in termini di disuguaglianze integrali utilizzando la seguente formula di coarea ([46]): se f è una funzione regolare si ha che

$$\int |\nabla f| \ \gamma_n(dx) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = s\}} \varphi_n(x) \ \mathcal{H}^{n-1}(dx) \right) ds. \tag{3.29}$$

Dalla (2.22) e dalla (3.29), segue

$$\int |\nabla f| \ \gamma_n(dx) \geq \int_0^{+\infty} \varphi_1 \circ \Phi^{-1}(\gamma_n \{|f| \geq s\}) \ ds. \tag{3.30}$$

Si osservi che quando f è una funzione regolare che approssima χ_A, con A insieme con frontiera regolare a tratti, allora dalla (3.30) si riottiene la (2.22). Sfruttando (2.23) la disuguaglianza (3.30) implica una disuguaglianza tipo Sobolev rispetto alla misura di Gauss per $p = 1$.

Teorema 3.15 ([44]) *Se* $|\nabla f| \in L^1(\varphi, \Omega)$*, allora* $f \in L^1(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$.

Dimostrazione. Osservando che vicino allo zero vale la seguente disuguaglianza $t(2\log(1/t))^{\frac{1}{2}} \geq t$, per un s_0 abbastanza grande la (3.30) e la (2.23) implicano che

$$\int |\nabla f| \;\; \gamma_n(dx) \geq \int_{s_0}^{+\infty} \gamma_n \{|f| \geq s\} \;\; ds. \tag{3.31}$$

da cui segue che

$$\int |f| \;\; \gamma_n(dx) \leq c < \infty.$$

Per $s \geq 0$, $\gamma_n \{|f| \geq s\} \leq \frac{c}{s}$, allora dalla (3.30) e dalla (2.23), si ha che per una certa costante k

$$\begin{aligned} \int |\nabla f| \;\; \gamma_n(dx) \geq k \int_{s_0}^{+\infty} \gamma_n \{|f| \geq s\} \log\left(\frac{1}{\gamma_n \{|f| \geq s\}}\right)^{\frac{1}{2}} \;\; ds \geq \\ \geq \int_{s_0}^{+\infty} \gamma_n \{|f| \geq s\} \log\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \;\; ds. \end{aligned}$$

□

Vediamo adesso le relazioni tra il semigruppo di Ornnstein-Uhlenbeck $(T(t))_{t\geq 0}$ e la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss. In analogia con il caso classico (3.24) la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss è equivalente al crescere sotto il riordinamento gaussiano della norma L^2 pesata del semigruppo di Ornnstein-Uhlenbeck agente su funzioni caratteristiche di insiemi (vedere ad esempio [59]).

Proposizione 3.16 *Per ogni boreliano* A *in* $\mathbb{R}^n$ *con frontiera regolare e per ogni* $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n - A} T(t)\chi_A \gamma_n(dx) \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \arccos(e^{-t}) \gamma_n^+(\partial A).$$

La disuguaglianza nella proposizione precedente è ottimale nel senso che se H è un semispazio

$$\lim_{t\to 0} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\arccos(e^{-t})\right]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n - H} T(t)\chi_H dx = \gamma_n^+(\partial H).$$

Per dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica (2.22) basta far vedere che per ogni $t \geq 0$ e per ogni boreliano A in $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare vale la seguente disuguaglianza

$$\int_A T(t)\chi_A dx \leq \int_H T(t)\chi_H dx, \tag{3.32}$$

dove H è un semispazio tale che $\gamma_n(H) = \gamma_n(A)$. Osservando che $\int_A T(t)\chi_A dx = \left\| T(\frac{t}{2})\chi_A \right\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)}$ la (3.32) equivale a

$$\left\| T\left(\frac{t}{2}\right)\chi_A \right\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} \leq \left\| T\left(\frac{t}{2}\right)\chi_H \right\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)}. \tag{3.33}$$

Questa disuguaglianza è stata dimostrata ad esempio da Borell in [28].

3.4 Le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche

Usando le proprietà dei semigruppi è possibile facilmente dimostrare la disuguaglianza di Sobolev logaritmica nota come disuguaglianza di Gross. Tale disuguaglianza ci garantisce che una funzione a quadrato sommabile con gradiente a quadrato sommabile appartiene ad un particolare spazio di Lorentz-Zygmund.

Teorema 3.17 *Per ogni funzione $f \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log|f|\,\gamma_n(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla f, \nabla f)\,\gamma_n(dx) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\gamma_n(dx)\log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2\gamma_n(dx)\right). \tag{3.34}$$

Dimostrazione. Sia $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f \geq c > 0$. Poniamo $\psi = f^2$. Allora $\nabla f = \frac{1}{2}\nabla\psi/\sqrt{\psi}$, e la disuguaglianza da provare è equivalente alla seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi\log|\psi|\,\gamma_n(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} \psi\gamma_n(dx)\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi\gamma_n(dx)\right) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\psi}\left|\nabla\psi\right|^2\gamma_n(dx). \tag{3.35}$$

Si noti che $T(t)\psi \geq c^2$. Poichè

$$\lim_{t\to\infty} T(t)\psi\log T(t)\psi = \int_{\mathbb{R}^n}\psi\gamma_n(dx)\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi\gamma_n(dx)\right),$$

il primo membro della (3.35) può essere rappresentato come

$$-\int_0^\infty\left(\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} T(t)\psi\log T(t)\psi\gamma_n(dx)\right)dt. \tag{3.36}$$

Per le proprietà dei semigruppi e poichè γ_n è una misura invariante per il semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ (3.36) si riscrive

$$-\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} (AT(t)\psi) \log T(t)\psi \gamma_n (dx) \right) dt - \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} T(t)\psi \frac{1}{T(t)\psi} \frac{d}{dt} T(t)\psi \gamma_n (dx) \right) dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} (AT(t)\psi) \log T(t)\psi \gamma_n (dx) \right) dt.$$

Applicando la (3.22) e dalla (3.23) è possibile riscrivere la stessa espressione come

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} < \nabla T(t)\psi, \nabla(\log T(t)\psi) > \gamma_n (dx) \right) dt &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T(t)\psi} \left|\nabla T(t)\psi\right|^2 \gamma_n (dx) \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T(t)\psi} \left|T(t)\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx) \right) dt.\end{aligned}$$

Poichè per ogni $f, g \in L^2(\varphi, \mathbb{R}^n)$ si può dimostrare che $\left[T(t)(fg)\right]^2 \leq T(t)\left(f^2\right) T(t)\left(g^2\right)$, allora

$$\frac{1}{T(t)\psi} \left(T(t)\partial_{x_i}\psi\right)^2 \leq T(t) \left(\frac{1}{\psi} \left(\partial_{x_i}\psi\right)^2 \right). \tag{3.37}$$

Usando (3.37) si ottiene

$$\begin{aligned} e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T(t)\psi} \left|T(t)\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx) &= e^{-2t} \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T(t)\psi} \left(T(t)\partial_{x_i}\psi\right)^2 \gamma_n (dx) \\ &\leq e^{-2t} \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} T(t) \left(\frac{1}{\psi} \left(\partial_{x_i}\psi\right)^2 \right) \gamma_n (dx) \\ &= e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\psi} \left|\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx), \end{aligned}$$

integrando rispetto a t tra 0 e ∞

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{T(t)\psi} \left|T(t)\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx) \right) dt &\leq \int_0^\infty e^{-2t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\psi} \left|\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\psi} \left|\nabla\psi\right|^2 \gamma_n (dx).\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato l'asserto nel caso $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per una funzione non negativa $f \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ la tesi segue dal lemma di Fatou poiché esiste una successione $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$\psi_j \geq \frac{1}{j}$ e $\psi_j \to f$ in $H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ e quasi ovunque:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log|f| \,\gamma_n\,(dx) \leq & \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^{2} \psi_j^2 \log|\psi_j| \,\gamma_n\,(dx) \\
\leq & \liminf_{j\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\psi_j, \nabla\psi_j > \gamma_n\,(dx) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n}^{2} \psi_j^2 \gamma_n\,(dx) \log \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{2} \psi_j^2 \gamma_n\,(dx) \right) \right\} \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla f, \nabla f > \gamma_n\,(dx) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \gamma_n\,(dx) \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \gamma_n\,(dx) \right)
\end{aligned}$$

Infine se $f \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ arbitraria l'asserto segue osservando che $|f| \in H^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$ e $|\nabla\,|f|| = |\nabla f|$ quasi ovunque. □

La disuguaglianza (3.34), dimostrata per la prima volta nel 1975 da Gross [52], implica che se f e $\nabla f \in L^2\,(\varphi, \mathbb{R}^n)$ la funzione f appartiena allo spazio $L^2\,(\log L)^{\frac{1}{2}}\,(\varphi, \mathbb{R}^n)$. Feissner ([47]) ed indipendentemente Adams ([1]) mostrano che se tutte le derivate di f fino a quelle d'ordine k sono in $L^2\,(\varphi, \mathbb{R}^n)$, allora la funzione f appartiena allo spazio $L^2\,(\log L)^{\frac{k}{2}}\,(\varphi, \mathbb{R}^n)$.

A differenza delle classiche disuguaglianze di Sobolev la disuguaglianza di Gross ha un carattere indipendente dalla dimensione dello spazio, nel senso che non solo i coefficienti e le potenze sono indipendenti dalla dimensione ma la disuguaglianza ha senso e continua ad essere valida in dimensione infinita.

Osservazione 3.18 La (3.34) è ottimale nel senso che per ogni ε positivo esiste una funzione f che verifica (3.34) ma tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log|f|^{2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \gamma_n\,(dx) = \infty.$$

Inoltre la funzione reale di una variabile reale $f(x) = e^{\frac{x^2}{4}} h(x)$, con $h(x) = \left[(x^2+2)\ln(x^2+2)\right]^{-\frac{3}{4}}$, ha derivata in $L^2\,(\varphi, \mathbb{R})$ ma $f^2(x)\,(\log f(x))\,(\log\log f(x))$ non è sommabile, perché si comporta asintoticamente come la funzione $x^{-3}\,(2\log x)^{-\frac{3}{2}}\,\frac{x^2}{4}\,(2\log x) = cx^{-1}\,(\log x)^{-\frac{1}{2}}$ per una certa costante c, che non è integrabile in $[a, +\infty[$ per ogni $a > 0$.

Se nella (3.34) rimpiazziamo f con $|f|^{\frac{p}{2}}$, per $1 < p < \infty$, si ottiene

$$\int f^p \log|f| \,\gamma_n\,(dx) \leq \frac{p}{2} \int |\nabla f|^2\,|f|^{p-2}\,\mathrm{sign}\ f\ \gamma_n\,(dx) + \|f\|^p_{L^p(\varphi,\mathbb{R}^n)} \log\|f\|_{L^p(\varphi,\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.38}$$

Le disuguaglianze (3.34) e (3.38) possono essere riscritte in termini dell'operatore di Ornsteinb-Uhlenbeck $Au = \triangle u - (x, \nabla u)$:

$$\int f^2 \log|f| \, \gamma_n (dx) \leq \langle Af, f\rangle + \|f\|^2_{L^2(\varphi,\mathbb{R}^n)} \log\|f\|_{L^2(\varphi,\mathbb{R}^n)}$$

e

$$f^p \log|f| \, \gamma_n (dx) \leq \frac{p}{2(p-1)} \left\langle Af, |f|^{p-1} \operatorname{sign} f \right\rangle + \|f\|^p_{L^p(\varphi,\mathbb{R}^n)} \log\|f\|_{L^p(\varphi,\mathbb{R}^n)} . \quad (3.39)$$

Si può dimostrare (vedere [52]) che la (3.39) è equivalente alla seguente proprietà di ipercontrattività del semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck dimostrata da Nelson nel 1973 in [66].

Teorema 3.19 *Il semigruppo di Ornsteinb-Uhlenbeck $(T(t))_{t\geq 0}$ è ipercontrattivo, cioè per ogni $p > 1, q > 1$, si ha*

$$\|T(t)f\|_{L^q(\varphi,\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\varphi,\mathbb{R}^n)}$$

per ogni $t > 0$ tale che $e^{2t} \geq \frac{q-1}{p-1}$.

Osservazione 3.20 La disuguaglianza nel precedente teorema ci asscura che l'operatore da $L^q(\varphi, \mathbb{R}^n)$ a $L^p(\varphi, \mathbb{R}^n)$ è una contrazione.

Abbiamo visto che $W^{1,p}(\varphi, \mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\log L)^{\frac{p}{2}}(\varphi, \mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$. Per $p = \infty$ vale la seguente proposizione (vedere [57] e [2]).

Proposizione 3.21 *Se f è una funzione lipschitziana allora $f \in L^\infty (\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \mathbb{R}^n)$.*

Usando le proprietà dei riordinamenti è possibile dimostare direttamente una disuguaglianza tra le norme.

Proposizione 3.22 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $|\nabla f| \in L^p(\varphi, \Omega)$ con $1 \leq p < \infty$, allora $f \in L^p(\log L)^{\frac{p}{2}}(\varphi, \Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \|\nabla f\|_{L^p(\varphi,\Omega)} . \quad (3.40)$$

Se $|\nabla f| \in L^\infty(\Omega)$ allora $f \in L^\infty (\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$ e

$$\|f\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_2 \|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)} . \quad (3.41)$$

In entrambi i casi le costanti C_1,C_2 dipendono solo da p e $\gamma_n(\Omega)$.

Dimostrazione. Per $1 \leq p < +\infty$, usando (3.7), (2.23) e (2.11) si ottiene

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} &\leq c \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t(1-\log t)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{d}{dt} f^{\circledast}(t) \right| \right)^p dt \\ &\leq c \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left| \frac{d}{dt} f^{\circledast}(t) \right|^p \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(t)^2}{2} p \right) dt \\ &= c \left\| \nabla f^{\star} \right\|^p_{L^p(\varphi,\Omega)} \leq c \left\| \nabla f \right\|^p_{L^p(\varphi,\Omega)}, \end{aligned}$$

dove c è una costante dipendente solo da p e $\gamma_n(\Omega)$ e che può variare da rigo a rigo.
Per $p = +\infty$ la disuguaglianza (3.41) segue allo stesso modo usando la (3.13) invece della (3.7) e osservando che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} f^{\star}(x_1) &= \frac{d}{dx_1} f^{\circledast}(\Phi(x_1)) \\ &= -\frac{d}{dt} f^{\circledast}(t) \Big|_{t='(\Phi(x_1))} \varphi(x_1). \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} &= \sup_{0<t<\gamma_n(\Omega} \left[(1-\log t)^{-\frac{1}{2}} f^{\circledast}(t) \right] \\ &\leq c \sup_{0<t<\gamma_n(\Omega} \left[t(1-\log t)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{d}{dt} f^{\circledast}(t) \right| \right] \\ &\leq c \sup_{0<t<\gamma_n(\Omega} \left[\left| \frac{d}{dt} f^{\circledast}(t) \right|^p \exp(-\frac{\Phi^{-1}(t)^2}{2}) \right] \\ &= c \sup_{\lambda<x_1<+\infty} \left[\left| \frac{d}{dx_1} f^{\star}(x_1) \right| \right] \\ &= c \left\| \nabla f^{\star} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \left\| \nabla f \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.23 L'immersione $W^{1,p}(\varphi, \mathbb{R}^n)$ in $L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \mathbb{R}^n)$ è compatta per $1 \leq p < \infty$ (vedere [1]) e quindi sono compatte le immersioni di $W^{1,p}_0(\varphi, \Omega)$ in $L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$ per ogni sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^n$.

Ulteriori risultati riguardanti teoremi di immersione degli spazi di Sobolev in particolari spazi di Orlicz sono contenuti in [1].

Seguendo la linea di [3] ed usando opportunamente le disuguaglianze di Hardy è possibile dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 3.24 *Sia f una funzione regolare.*
Sia $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ e $-\infty < \alpha < \infty$ tali da verificare una delle seguenti condizioni

(*a*) $q \leq p$ *e* $\alpha \geq 0$ *oppure* $\alpha < 0$ *e* $\left(\frac{1}{p} - \alpha\right) < \frac{1}{q}$

(*b*) $q > p$, $\alpha > 0$ *e* $\left(\frac{1}{p} - \alpha\right) < \frac{1}{q}$.

Se $\nabla u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$ *allora* $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$
e vale la seguente disuguaglianza tra le norme

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} . \tag{3.42}$$

La costante C dipende solo da p, q, α e $\gamma_n(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale

$$J[u] = \frac{\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\beta}(\varphi,\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}}.$$

Sia $1 \leq q < \infty$, $1 \leq p < \infty$ e $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$.
Si ha[3]

$$J[u] = \frac{\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1 - \log t)^{\beta} u^{\circledast}(t)\right)^q \frac{dt}{t}}{\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1 - \log t)^{\alpha} |\nabla u|^{\circledast}(t)\right)^q \frac{dt}{t}}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\beta}(\varphi,\Omega)} &= \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1 - \log t)^{\beta} u^{\circledast}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1 - \log \Phi(x_1))^{\beta q} \left(u^{\star}(x_1)\right)^q \varphi(x_1) dx_1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} &= \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1 - \log t)^{\alpha} |\nabla u|^{\circledast}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1 - \log \Phi(x_1))^{\alpha q} \left(|\nabla u|^{\star}(x_1)\right)^q \varphi(x_1) dx_1.
\end{aligned}$$

Assumiamo $u \geq 0$ e $u \in C_0^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. Infatti il $\sup J[u]$ non cambia se si sostituisce $u(x)$ con $|u(x)|$. Assumiamo anche $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, poiché $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_0^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.

[3] Assumiamo $\frac{1}{\infty} = 0$.

Per funzioni regolari vale la seguente formula di coarea

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{|u|>t\}} f(x)\,|\nabla u|\,\varphi(x)\;dx = \int_{\{u=t\}} f(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)$$

per ogni funzione $f \in L^1(\varphi, \mathbb{R}^n)$. Per il teorema di Sard

$$\{x : u(x) = t\} = \partial\{x : u(x) > t\}$$

per q.o. $t \in [0, \infty[$. Altrove $\{x : u(x) = t\} = \partial\{x : u(x) > t\} \cup \{x : \nabla u(x) = 0\}$, then

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{|u|>t\}} f(x)\,|\nabla u|\,\varphi(x)\;dx = \int_{\partial\{|u|>t\}} f(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx). \tag{3.43}$$

Se $p \neq \infty$ la funzione $t^{\frac{q}{p}-1}(1-\log t)^{q\alpha}$ è decrescente per

(a) $q \le p$ e $\alpha \ge 0$ oppure $\alpha < 0$ e $\left(\frac{1}{p} - \alpha\right) < \frac{1}{q}$

(b) $q > p$, $\alpha > 0$ e $\left(\frac{1}{p} - \alpha\right) < \frac{1}{q}$.

In questi casi è possibile costruire una funzione $R_u(x)$ tale che

$i)$ $R_u^{\circledast}(t) = t^{\frac{q}{p}-1}(1-\log t)^{q\alpha}$, i. e. $R_u^{\star}(x_1) = \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{q\alpha}$

$ii)$ $\forall t > 0 \;\; \exists h > 0$ tale che

$$\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > t\} = \{y \in \mathbb{R}^n : R_u(y) > h\}\,;$$

Dalla $i)$ e $ii)$ segue che

$$R_u(x) = \mu\,(t)^{\frac{q}{p}-1}\,(1-\log\mu\,(t))^{q\alpha} \tag{3.44}$$

se $x \in \partial\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > t\}$.

Usando (**??**) e $i)$ otteniamo

$$\begin{aligned} &\|\nabla u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} = \\ &= \int_{\lambda}^{\infty}\left(R_u^{\star}(x_1)\,|\nabla u|^{\star}(x_1)\right)^q \varphi(x_1)dx_1 \\ &\ge \int_{\Omega} (\nabla u)^q\,(x)\,R_u(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \tag{3.45}$$

La funzione $R_u(x)$ non è unicamente determinata ma il valore dell'integrale a destra nella disuguaglianza (3.45) non dipende dalla scelta di tale funzione, perché per $x \notin \partial\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > t\}$ si ha che $\nabla u\,(x) = 0$.

Usando (3.45) si ha

$$J[u] \leq J'[u] = \frac{\int_\lambda^\infty \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\beta q} u^\star(x_1)^q \varphi(x_1) dx_1}{\int_\Omega |\nabla u|^q(x) R_u(x)\varphi(x)dx}.$$

Nella disuguaglianza (3.45) vale il segno di uguaglianza se $q = p$ e $\alpha = 0$ per ogni funzione u oppure negli altri casi per ogni funzione u tale che

$$u(x) = u^\star(x_1) \qquad \text{e} \qquad \nabla u(x) = |\nabla u|^\star(x_1). \tag{3.46}$$

Allora i funzionali J e J' sono uguali se $q = p$ e $\alpha = 0$ e assumono lo stesso valore per funzioni che verificano la (3.46).

Sia $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione non negativa e $u^\star$ il suo riordinamento.

Vale la seguente

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^q(x) R_u(x)\varphi(x)dx &\geq \int_\lambda^\infty \left|\nabla u^\star\right|^q(x_1) R_{u^\star}(x_1)\varphi(x_1)dx_1 \\ &= \int_\lambda^\infty \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\alpha q}\left|\nabla u^\star\right|^q(x_1)\varphi(x_1)dx_1.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Cominciamo con il mostrare che

$$\int_{\partial\{|u|>t\}} (\nabla u)^{q-1}(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx) \geq \mu(t)^{1-q}\left[\varphi_1\circ\Phi^{-1}(\mu(t))\right]^q. \tag{3.48}$$

Se $q = 1$ la (3.48) è conseguenza della disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss.

Dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\frac{1}{h}\int_{t<u\leq t+h} |\nabla u|(x)\varphi(x) \leq \left(\frac{1}{h}\int_{t<u\leq t+h} |\nabla u|^q(x)\varphi(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\mu(t+h)-\mu(t)}{h}\right)^{1-\frac{1}{q}},$$

per cui

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u|(x)\varphi(x) \leq \left(-\frac{d}{dt}\int_{u>t} |\nabla u|^q(x)\varphi(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(-\mu'(t)\right)^{1-\frac{1}{q}},$$

dalla quale usando (3.43) si ha

$$\int_{u=t}\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx) \leq \left(\int_{u=t} |\nabla u|^{q-1}(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)\right)^{\frac{1}{q}}\left(-\mu'(t)\right)^{1-\frac{1}{q}},$$

e infine usando la disuguaglianza isoperimetrica si ottiene la (**??**).

Usando la disuguaglianza (3.43) abbaimo

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q (x) R_u(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} dt \int_{\partial\{|u|>t\}} |\nabla u|^{q-1} (x) R_u(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)$$

per cui dalla (3.44) e dalla (**??**)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla u|^q (x) R_u(x)\varphi(x)dx &= \int_0^{\infty} \mu(t)^{\frac{q}{p}-1} (1-\log\mu(t))^{q\alpha} \left(\int_{\partial\{|u|>t\}} |\nabla u|^{q-1}(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)\right) dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \mu(t)^{\frac{q}{p}-1} (1-\log\mu(t))^{q\alpha} \left[\varphi_1\circ\Phi^{-1}(\mu(t))\right]^q \left(-\mu'(t)\right)^{1-q} dt.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Se sostituiamo u con $u^\star$ tutte le precedenti disuguaglianze valgono con il segno di uguaglianza:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} \mu(t)^{\frac{q}{p}-1} (1-\log\mu(t))^{q\alpha} \left[\varphi_1\circ\Phi^{-1}(\mu(t))\right]^q \left(-\mu'(t)\right)^{1-q} dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu(t)^{\frac{q}{p}-1} (1-\log\mu(t))^{q\alpha} \int_{\partial\{|u|>t\}^\star} \left|\nabla u^\star\right|^{q-1}(x)\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx) \left(-\mu'(t)\right)^{1-q} dt \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\alpha q} \left|\nabla u^\star\right|^q (x_1)\varphi(x_1)dx_1 \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} \left|\nabla u^\star\right|^q (x_1) R_{u^\star}(x_1)\varphi(x_1)dx_1.\end{aligned}$$

Allora la disuguaglianza (3.47) è provata.

Sfruttando la (3.47) per valutare sup J' è lecito limitarsi solo funzioni crescenti dipendenti solo dalla prima variabile:

$$J'[u] = \frac{\int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\beta q} u^q(x_1)\varphi(x_1)dx_1}{\int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\alpha q} \left|u'(x_1)\right|^q \varphi(x_1)dx_1}.$$

Mostriamo che $J'[u]$ è limitato per opportuni β.

Per $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$, usando la (3.7) e (2.23) si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{(\alpha+\frac{1}{2})q} u^{\star}(x_1)^q \varphi(x_1) dx_1 \\
&= \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^{\alpha+\frac{1}{2}} u^{\circledast}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&\leq c \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}+1}(1-\log t)^{\alpha+\frac{1}{2}} \left|\frac{d}{dt} u^{\circledast}(t)\right|\right)^q \frac{dt}{t} \\
&\leq c \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^{\alpha} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(t)^2}{2}\right) \left|\frac{d}{dt} u^{\circledast}(t)\right|\right)^q \frac{dt}{t} \\
&= c \int_{\lambda}^{\infty} \Phi(x_1)^{\frac{q}{p}-1}(1-\log\Phi(x_1))^{\alpha q} \left|\frac{d}{dx_1} u^{\star}(x_1)\right|^q \varphi(x_1)\, dx_1,
\end{aligned}$$

per una costante positiva dipendente solo da p, q, α e $\gamma_n(\Omega)$. □

Osservazione 3.25 A differenza di quando accade nel caso studiato in [3] con questo metodo non si possono stimare le migliori costanti nella Proposizione 3.24 perché non sono ottimali le costanti nelle disuguaglianze di Hardy e la costante che viene dal comportamento asintotico della funzione isoperimetrica.

Consideriamo funzioni u regolari a valori reali.definite in $\mathbb{R}^n$. Si supponga u normalizzata come segue

$$\text{m.v. } u = \int u \; \gamma_n(dx) = 0, \quad \int |\nabla u| \; \gamma_n(dx) = 1, \tag{3.50}$$

allora la disuguaglianza di Sobolev logaritmica implica[4]

$$\int |u| \; \log_+^{\frac{1}{2}} |u| \, \gamma_n(dx) < c, \tag{3.51}$$

per una certa costante assoluta c.

In [68] si migliora la (3.51) ottenendo un'immersione ottimale in uno spazio di Orlicz che contiene lo spazio di Zygmund $L^1(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$.

[4] La stima (3.51) garantisce che la funzione u appartenga allo spazio di Zygmund $L^1(\log L)^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.26 ([68]) *Sia M definita come*[5]

$$M(\sqrt{2\pi}t) = \begin{cases} 2t & se\ 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{1-\left(\operatorname{erf}\sqrt{\log t}\right)^2} & se\ t > 1. \end{cases}$$

Se u è una funzione regolare a valori reali definita in $\mathbb{R}^n$ che soddisfa (3.50), allora[6]

$$\|u\|_{L^M(\mathbb{R}^n,\gamma_n)} \le 1. \tag{3.53}$$

[5] La funzione errore erf è definita come segue:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

[6] *M è una funzione di Young e con $L^M(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ denotiamo l'associato spazio di Orlitcz dotato della norma usuale*

$$\|u\|_{L^M(\mathbb{R}^n,\gamma_n)} = \inf\left\{k > 0 : \int M\left(\frac{|u|}{k}\right)\, d\gamma_n \le 1\right\} \tag{3.52}$$

Capitolo 4

Equazioni ellittiche lineari

In questo capitolo si studia una classe di problemi di Dirichlet relativi ad un'equazione ellittica lineare del secondo ordine di tipo degenere, dove la degenerazione è di tipo gaussiano. L'obiettivo è ottenere stime ottimali della soluzione mediante il confronto con un problema dello stesso tipo che abbia opportune simmetrie. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} - \left(d_i(x)u\right)_{x_i} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = g\varphi - \left(f_i\varphi\right)_{x_i} & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

dove Ω è un aperto non necessariamente limitato di $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ è la densità della misura di Gauss e a_{ij},$d_i(x)$,$b_i(x)$ e $c(x)$ per $i, j = 1, 2, .., n$ sono funzioni misurabili in Ω tali che:

(i) $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \varphi(x)|\xi|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, q.o. x \in \Omega$,

(ii) $\frac{a_{ij}(x)}{\varphi(x)} \in L^\infty(\Omega)$,

(iii) $\left(\sum b_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq b(x)\varphi(x)$, dove $b(x) \in L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$,

(iv) $\left(\sum d_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq d(x)\varphi(x)$, dove $d(x) \in L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$,

(v) $\frac{c(x)}{\varphi(x)} \in L^\infty(\Omega)$ e $c(x) \geq 0$,

(vi) $g(x) \in L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$,

(vii) $f_i(x) \in L^2(\varphi, \Omega) \quad i = 1, .., n$ e $\sum f_i^2(x) = f^2(x)$.

Si osservi che se Ω è limitato l'operatore del problema (4.1) è uniformemente ellittico. E' noto che quando Ω è limitato la simmetrizzazione di Schwarz permette di confrontare la soluzione di un problema ellittico con quella di un problema dello stesso tipo definito in una sfera con dati a simmetria sferica.

Questo tipo di risultato ottenuto inizialmente da Talenti in [79] per un'equazione lineare uniformemente ellittica è stato esteso ad equazioni più generali considerando termini di ordine inferiore, indebolendo le ipotesi di ellitticità e considerando equazioni di tipo non lineare, vedi ad esempio [5], [4], [8], [7], [17], [15], [81], [80], [83], [84], [33], [48], [85].

Nel nostro caso il dominio Ω può non essere limitato e l'ipotesi di ellitticità (i) è data in termini della funzione φ. Questo ci porta a considerare soluzioni deboli in uno spazio di Sobolev pesato ed ad utilizzare la nozione di riordinamento rispetto alla misura di Gauss. Compariamo la soluzione del problema (4.1) con la soluzione di un problema dello stesso tipo definito in un semispazio avente la stessa misura di Gauss di Ω. Tale risultato di confronto ci fornisce stime della soluzione u in termini della soluzione di un problema dalla struttura più semplice con i coefficienti ed i dati che dipendono da una sola variabile. Inoltre si riesce ad ottenere una stima della norma di u in $H_0^1(\varphi, \Omega)$ che fornisce anche una condizione sufficiente per l'esistenza in termini della sommabilità dei dati.
Nei casi $d_i(x) \equiv 0$ o $b_i(x) \equiv 0$ per $i = 1, ..., n$ la soluzione del problema più semplice può essere scritta esplicitamente (vedere Corollario 4.5 e Corollario 4.6), allora la stima puntuale dà una stima esplicita della soluzione che è punto di partenza per i risultati di regolarità.

Osserviamo che dalla disuguaglianza di Gross se $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ è una soluzione del problema (4.1) allora u appartiene allo spazio di Lorentz-Zygmund $L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. Studiamo, allora, come varia la sommabilità di u al variare della sommabilità dei dati f e g negli spazi di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$.

Osserviamo che equazioni legate alla misura di Gauss sono già state studiate. In [32] si considera il corrispondente operatore parabolico e in [16] si ottengono stime del primo autovalore relativo all'operatore in considerazione.

4.1 Nozioni preliminari

Per $1 \le p < \infty$ indichiamo con $W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ la chiusura di $C_0^{\infty}(\Omega)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \ \gamma_n(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Per gli spazi di Sobolev pesati $W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ vale una disuguaglianza tipo Poincaré che assicura l'equivalenza tra la norma $\|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)}$ e la norma

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p \ \gamma_n(dx)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \ \gamma_n(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposizione 4.1 *Se Ω è un aperto di R^n con $\gamma_n(\Omega) < 1$, per ogni funzione $u \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$, $1 \le p < \infty$, vale la seguente disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^p(\varphi,\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\varphi,\Omega)}, \tag{4.2}$$

con C constante dipendente da p e $\gamma_n(\Omega)$.

Dimostrazione. Dalle proprietà dei riordinamenti e dalla disuguaglianza (2.11) segue subito che

$$\frac{\|u\|^p_{L^p_{(\varphi,\Omega)}}}{\|\nabla u\|^p_{L^p_{(\varphi,\Omega)}}} \le \frac{\|u^\star\|^p_{L^p_{(\varphi,\Omega^\star)}}}{\|\nabla u^\star\|^p_{L^p_{(\varphi,\Omega^\star)}}} = \frac{\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} u^\star(x_1)^p \ \varphi(x_1) \ dx_1}{\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} \left|\frac{d}{dx_1} u^\star(x_1)\right|^p \ \varphi(x_1) \ dx_1}. \tag{4.3}$$

L'ultimo rapporto nella (4.3) è limitato (vedere ad esempio [62], Teorema 1.3.1/2). □

Nel seguito useremo la seguente versione del lemma di Gronwall (cfr.[63]). Per comodità ne riportiamo la dimostrazione in quanto l'ipotesi (4.4) in cui lo riportiamo e lo usiamo è più generale.

Lemma 4.2 *Siano $\lambda, \gamma, \phi, \theta$ funzioni in $[a, +\infty)$ tali che $\lambda \ge 0, \gamma \ge 0$ e $\lambda\theta$, $\lambda\phi$ appartengono a $L^1(a,+\infty)$ e $\lambda\gamma$ appartenga a $L^1(a,k)$ per ogni $k > a$ e*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_k^{+\infty} \lambda(\tau)\phi(\tau) \ d\tau\right) \left(\exp\left[\int_a^k \lambda(s)\gamma(s) \, ds\right]\right) = 0. \tag{4.4}$$

Se per q.o. $t \ge a$

$$\phi(t) \le \theta(t) + \gamma(t) \int_t^\infty \lambda(\tau)\phi(\tau) \ d\tau \ , \tag{4.5}$$

allora per q.o. $t \ge a$

$$\phi(t) \le \theta(t) + \gamma(t) \int_t^\infty \theta(\tau)\lambda(\tau) \exp\left(\int_t^\tau \lambda(r)\gamma(r) \ dr\right) \ d\tau \ .$$

Dimostrazione. Bisogna far vedere che

$$\int_t^\infty \lambda(\tau)\phi(\tau)d\tau \leq \int_t^\infty \theta(\tau)\lambda(\tau)\exp\left(\int_t^\tau \lambda(r)\gamma(r)\ dr\right)\ d\tau\ .$$

Siano

$$H(t) = \int_t^\infty \lambda(\tau)\phi(\tau)d\tau$$

e

$$y(\tau) = \exp\left(\int_t^\tau \lambda(r)\gamma(r)\ dr\right).$$

Osserviamo che y è soluzione di $y' - \lambda\gamma y = 0$.
Per ipotesi

$$\phi \leq \theta + \gamma H$$

allora

$$-D(yH) \leq \theta\lambda y,$$

per cui integrando[1]

$$-\left[y(+\infty)H(+\infty) - y(t)H(t)\right] = \int_t^\infty \theta\lambda y d\tau.$$

Se

$$\lim_{k\to\infty} y(k)H(k) = 0,$$

allora $H(t) = \displaystyle\int_t^\infty \theta\lambda y d\tau.$ □

Per la natura dell'operatore in considerazione una funzione $u \in H_0^1(\varphi,\Omega)$ è una soluzione debole del problema (4.1), se

$$\int_\Omega (a_{ij}(x)u_{x_i}\psi_{x_j} + d_i(x)u\psi_{x_i} + b_i(x)u_{x_i}\psi + c(x)u\psi)\ dx = \int_\Omega (g\psi + f_i\psi_{x_i})\,\varphi(x)dx \qquad (4.6)$$

$$\forall\psi \in H_0^1(\varphi,\Omega).$$

Osserviamo che nelle ipotesi (i)-(vii), usando la Proposizione 3.11, la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5), le disuguaglianze di Hölder e Poicarè tutti i termini in (4.6) sono ben definiti.

[1] Si è indicato con y$(+\infty)$ il limite

$$\lim_{t\to+\infty} y(t).$$

4.2 Risultati di confronto

Consideriamo la classe di problemi del tipo (4.1) al variare di:

1. Ω tra i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ con fissata misura di Gauss
2. la matrice dei coefficienti a_{ij} in modo da soddisfare la condizione (i),
3. i coefficienti b_i e d_i in modo da soddisfare la condizione (iii) e (iv) rispettivamente,
4. dei termini noti g e f rispettivamente in un insieme di funzioni con assegnato riordinamento e assegnato pseudoriordinamento rispetto alla misura di Gauss e tali da garantire l'esistenza della soluzione nel problema (4.1).

Ci si chiede quali siano il dominio Ω, la matrice dei coefficienti a_{ij}, i coefficienti b_i e d_i e le funzione g e f per i quali la norma di u in $H_0^1(\varphi, \Omega)$ è massima. In [18] nel caso $b_i = c = f_i = 0$ per $i = 1, 2, ..n$ si dimostra che il problema ottimale si ottiene quando Ω è il semispazio che ha la stessa misura di Gauss di Ω, $a_{ij} = \delta_{ij}$ ed $g = g^\star$ e si ottiene un confronto di tipo puntuale tra la soluzione di un problema del tipo (4.1) e la soluzione del problema massimale.

L'equazione con i termini di ordine inferiore (4.1), nel caso $d_i(x) = f_i(x) = 0$ per $i = 1, 2, ..n$ è stata trattata in [35]. Se si trascura l'influenza del termine di ordine zero continua a valere un confronto di tipo puntuale, se, invece, se ne tiene conto, il confronto puntuale non vale, in generale, ma è possibile ottenere un confronto tra concentrazioni.
Il risultato di confronto per il problema (4.1) nelle condizioni (i)-(vii) è stato ottenuto in [40]. Si dimostra che il problema ottimale è definito in un semispazio ed ha i dati in un certo senso riordinati rispetto alla misura di Gauss. Precisamente il problema ottimale nella classe dei problemi di tipo (4.1) al varaiare di 1-4 è il seguente

$$\begin{cases} -(w_{x_1}\varphi(x))_{x_1} + (D(\Phi(x_1))w\varphi(x))_{x_1} - B(\Phi(x_1))w_{x_1}\varphi(x) = \\ \qquad = g^\star(x_1)\varphi(x) - (F(\Phi(x_1))\varphi(x))_{x_1} & in \ \ \Omega^\star \\ \\ w = 0 & su\ \partial\Omega^\star, \end{cases} \tag{4.7}$$

dove si sono usate le notazioni introdotte nel Paragrafo 2 del Capitolo 2, che continueremo ad usare in questo capitolo e nel successivo.

Teorema 4.3 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $\gamma_n(\Omega) < 1$ e sia $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ soluzione di (4.1) nelle ipotesi (i)-(vii); inoltre, supponiamo che valga una delle seguenti*

(*a*) $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *è sufficientemente piccola,*

(*b*) $b \in L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$ *con* $2 < a < \infty$.

Sia $w(x) = w^\star(x)$ *la soluzione del problema* (4.7), *dove* $\Omega^\star = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che* $\gamma_n(\Omega) = \gamma_n(\Omega^\star)$ *e* F, B *e* D *sono funzioni tali che* $F^2 = \widetilde{(f^2)}_u$, $B^2 = \widetilde{(b^2)}_u$ *e* $D^2 = \widetilde{(d^2)}_u$.

Allora

$$u^\star(x_1) \le w^\star(x_1) = w(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega^\star. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Siano $h > 0$ e $t \in [0, \sup|u|[$. Se prendiamo

$$\psi(x) = \begin{cases} h \text{ sign } u & \text{if } |u| > t + h \\ (|u| - t) \text{ sign } u & \text{if } t < |u| \le t + h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

in (4.6), allora si ottiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} a_{ij}(x)\ u_{x_i}u_{x_j}\ dx + \frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} d_i(x)\ u\ u_{x_i}\ dx\ + \\
&+\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} b_i(x)u_{x_i}\,(|u|-t)\,\text{sign } u\ dx\ + \int_{|u|>t+h} b_i(x)\ u_{x_i}\text{sign } u\ dx + \\
&+\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} c(x)u(x)\,(|u|-t)\,\text{sign } u\ dx + \int_{|u|>t+h} c(x)\ u\,(x)\,\text{sign } u\ dx = \\
&= \frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} f_i\varphi(x)u_{x_i}\ dx + \frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} g(x)\varphi(x)\,(|u|-t)\,\text{sign } u\ dx + \\
&+\int_{|u|>t+h} g(x)\varphi(x)\text{sign } u\ dx
\end{aligned}$$

Dalle ipotesi (i), (iii), (iv) e (v), mandando $h \to 0$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx \leq & \int_t^{+\infty}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}b^2(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} ds+ \\
& +\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} t\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}d^2(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}+ \\
& +\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}f^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}+ \\
& +\int_{|u|>t}g(x)\varphi(x)\text{sign }u\ dx. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

D'altra parte, la formula di Coarea (vedere [46]) e la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss implicano

$$
-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|\,\varphi(x)\ dx \geq \int_{\partial\{|u|>t\}^\star}\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right), \qquad (4.10)
$$

dove $\{|u|>t\}^\star$ è il semispazio avente misura di Gauss $\mu(t)=\gamma_n(\{x\in\Omega : |u(x)|>t\})$.
Allora, dalla (4.10) e dalla disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$
1 \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.11)
$$

Inoltre da (2.12), si ha

$$
\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}f^2(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{d}{dt}\int_0^{\mu(t)}F^2(s)\ ds\right)^{\frac{1}{2}}=F(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.12)
$$

$$
\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}b^2(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{d}{dt}\int_0^{\mu(t)}B^2(s)\ ds\right)^{\frac{1}{2}}=B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.13)
$$

e

$$
\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}d^2(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{d}{dt}\int_0^{\mu(t)}D^2(s)\ ds\right)^{\frac{1}{2}}=D(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.14)
$$

dove F, B e D sono funzioni tali che $F^2=\left(\widetilde{f^2}\right)_u$, $B^2=\left(\widetilde{b^2}\right)_u$ e $D^2=\left(\widetilde{d^2}\right)_u$.

Applicando (4.11), la disuguaglianza di Hölder, la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) e le relazioni (4.12), (4.13) e (4.14) segue

$$\begin{aligned}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq & (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\times \\ & \times\int_t^{+\infty}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}B(\mu(s))\left(-\mu'(s)\right)^{\frac{1}{2}}ds+ \\ & + tD(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+F(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+ \\ & + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}g^{\circledast}(s)ds.\end{aligned} \tag{4.15}$$

La condizione (4.4) del lemma di Gronwall è verificata se vale o (a) o (b). Per comodità del lettore si rimandano i dettagli all'Osservazione 4.4.
Applicando il lemma di Gronwall con

$$\phi(t)=\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

dalla (4.15) si ricava

$$\begin{aligned}\phi(t)\leq & (tD(\mu(t))+F(\mu(t)))\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}g^{\circledast}(s)ds+ \\ & +(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_t^{+\infty}\exp\left[\int_t^s(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\mu(r))\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(r))^2}{2}\right)\left(-\mu'(r)\right)dr\right]\times \\ & \times\left[(sD(\mu(s))+F(\mu(s)))B(\mu(s))\left(-\mu'(s)\right)+\right. \\ & \left.+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(-\mu'(s)\right)B(\mu(s))\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(s))^2}{2}\right)\int_0^{\mu(s)}g^{\circledast}(z)dz\right]ds,\end{aligned} \tag{4.16}$$

quindi ponendo $\mu(r)=\tau$ e $\mu(s)=\sigma$ otteniamo

$$\begin{aligned}\phi(t)\leq & (tD(\mu(t))+F(\mu(t)))\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}g^{\circledast}(s)ds+ \\ & +(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}\exp\left[\int_\sigma^{\mu(t)}(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]\times \\ & \times\left[u^{\circledast}(\sigma)D(\sigma)B(\sigma)+F(\sigma)B(\sigma)+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\right)B(\sigma)\int_0^\sigma g^{\circledast}(z)dz\right]d\sigma.\end{aligned}$$

Usando (4.11) si ha

$$\left(-\mu'(t)\right)^{-1} \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}}(tD(\mu(t)) + F(\mu(t)))\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right) + (2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(\mu(t))^2\right)\int_0^{\mu(t)} g^{\circledast}(s)ds +$$
$$+(2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(\mu(t))^2\right)\int_0^{\mu(t)}\exp\left[\int_\sigma^{\mu(t)}(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]\times$$
$$\times\left[u^{\circledast}(\sigma)D(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma)B(\sigma) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\right)B(\sigma)\int_0^\sigma g^{\circledast}(z)dz\right]d\sigma.$$

Di conseguenza, ponendo $\mu(t) = s$ e integrando per parti si ottiene

$$-\left(u^{\circledast}(s)\right)' \leq (2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\times \tag{4.17}$$
$$\times\int_0^s\exp\left[\int_\sigma^s(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]g^{\circledast}(\sigma)d\sigma +$$
$$+(2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\int_0^s\left[u^{\circledast}(\sigma)D(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma)B(\sigma)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\int_\sigma^s(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]d\sigma +$$
$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right)\left[u^{\circledast}(s)D(s) + F(s)\right].$$

Se $w(x) = w^\star(x)$ è soluzione del problema (4.7) si ha

$$-\left(w^{\circledast}(s)\right)' = (2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\times \tag{4.18}$$
$$\times\int_0^s\exp\left[\int_\sigma^s(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]g^{\circledast}(\sigma)d\sigma +$$
$$+(2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\int_0^s\left[w^{\circledast}(\sigma)D(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma)B(\sigma)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\int_\sigma^s(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]d\sigma +$$
$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right)\left[w^{\circledast}(s)D(s) + F(s)\right].$$

Infatti (4.18) si ricava come (4.17), partendo dal problema (4.7) e osservando che in questo caso tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

Per provare il confronto (4.8) basta seguire la linea dimostrativa di [5] (vedere Teorema 2) Da (4.17) e (4.18) scrivendo

$$V(s) = \int_0^s \left[\left(u^{\circledast}(\sigma) - w^{\circledast}(\sigma)\right) D(\sigma) B(\sigma)\right] \exp\left[\int_\sigma^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] d\sigma,$$

si ha

$$\begin{cases} -\left(A(s) D^{-1}(s) B^{-1}(s) V'(s)\right)' \leq (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right) A(s) V(s) \\ \\ V(0) = V'(\gamma_n(\Omega)) = 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

dove

$$A(s) = \exp\left[\int_{\gamma_n(\Omega)}^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\right) B(\sigma)\, d\sigma\right].$$

L'esistenza di una soluzione $w^\star(x)$ del problema (4.7) e l'uguaglianza (4.18), garantiscono che il problema

$$\begin{cases} -\left(A(s) D^{-1}(s) B^{-1}(s) Z'(s)\right)' = (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right) A(s) Z(s) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right) A(s) F(s) + \\ \qquad + (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right) A(s) \int_0^s \exp\left[\int_\sigma^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] g^{\circledast}(\sigma) d\sigma + \\ \qquad + (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right) A(s) \int_0^s F(\sigma) B(\sigma) \exp\left[\int_\sigma^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] d\sigma \\ \\ Z(0) = Z'(\gamma_n(\Omega)) = 0 \end{cases}$$

ha la seguente soluzione positiva

$$Z(s) = \int_0^s w^{\circledast}(\sigma) D(\sigma) B(\sigma) \exp\left[\int_\sigma^s (2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] d\sigma.$$

Questo ci assicura (vedere [10]) che il problema

$$\begin{cases} -\left(A(s) D^{-1}(s) B^{-1}(s) \Psi'(s)\right)' = \lambda (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right) A(s) \Psi(s) \\ \\ \Psi(0) = \Psi'(\gamma_n(\Omega)) = 0, \end{cases}$$

ha il primo autovalore $\lambda_1 > 1$, e di conseguenza (vedere nuovamente [10]) in (4.19) si ha $V(s) \leq 0$ e $V'(s) \leq 0$, cioè (4.8). $\square$

Osservazione 4.4 Come già osservato la validità di una delle ipotesi tra (a) e (b) garantisce che (4.4) valga e che quindi è possibile applicare il lemma di Gronwall a (4.15). Esaminiamo i dettagli.

La (4.15) si riscrive nella forma (4.5) facendo le seguenti posizioni

$$\gamma \equiv 1,$$
$$\lambda(t) = B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right) \tag{4.20}$$

e

$$\phi(t) = \left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.21}$$

Per le posizioni fatte la condizione (4.4) da verificare diventa

$$\lim_{k\to\infty}\left[\int_k^{+\infty}B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}dt\right]\times \tag{4.22}$$
$$\times\exp\left((2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^k\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)dt\right) = 0.$$

Usando le disuguaglianze di Hölder e di Hardy-Littlewood (1.5), (2.23) e la Proposizione 3.11, si ha

$$\left[\int_k^{+\infty}B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}dt\right]\times \tag{4.23}$$
$$\times\exp\left((2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_0^k\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)B(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)dt\right)\leq$$
$$\leq C_1\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\left(\int_0^{\mu(k)}(1-\log s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|u|>k}|\nabla u|^2\varphi dx\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\exp\left((2\pi)^{\frac{1}{2}}C_2\int_{\mu(k)}^{\gamma_n(\Omega)}\frac{B(s)}{s(1-\log s)^{\frac{1}{2}}}ds\right),$$

per certe costanti positive C_1 e C_2.

Osserviamo che nell'ipotesi (a), integrando per parti e usando la Proposizione 3.11 abbiamo

$$\int_s^t\frac{B(r)}{r(1-\log r)^{\frac{1}{2}}}dr \leq C\|B\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\Omega^\circledast)} + C\int_s^t\frac{\int_0^r B(\tau)\,d\tau}{r^2(1-\log r)^{\frac{1}{2}}}dr \tag{4.24}$$
$$\leq C\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\log\left(\frac{t}{s}\right),$$

per una certa costante positiva C.

Se invece vale l'ipotesi (b), le disuguaglianze di Hölder e Young danno

$$\begin{aligned}\int_s^t \frac{B(r)}{r\,(1-\log r)^{\frac{1}{2}}}dr &\leq C(\varepsilon)\int_0^{t-s}\left(\frac{B^*\,(r)}{(1-\log r)^{\frac{1}{2}}}\right)^a\frac{dr}{r}+\varepsilon\int_s^t\frac{1}{r}dr \qquad (4.25)\\ &\leq C(\varepsilon)\,\|b\|^a_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}+\varepsilon\log\left(\frac{t}{s}\right),\end{aligned}$$

per un arbitrario ε e un'opportuna costante $C(\varepsilon)$ dipendente da ε.
Usando (4.24) if $b \in L^{\infty}\,(\log L)^{-\frac{1}{2}}\,(\varphi,\Omega)$ oppure (4.25) if $b \in L^{\infty,a}\,(\log L)^{-\frac{1}{2}}\,(\varphi,\Omega)$, con $2 < a < \infty$, la condizione (4.22) è verificata.

Nei prossimi due corollari esaminiamo separatamente i casi $b_i(x) \equiv 0$ $i = 1,..,n$ e $d_i(x) \equiv 0$ per $i = 1,..,n$. Il risultato di confronto (4.8) può essere dimostrato più facilmente ed inoltre la soluzione $w(x)$ del problema (4.7) può essere scritta dando una stima esplicita di $u^\star(x_1)$. Inoltre, si può provare una stima della norma di $|\nabla u|$.
Cominciamo con il considerare il caso $d_i(x) \equiv 0$ per $i = 1,..,n$.

Corollario 4.5 *Nelle ipotesi del Teorema* 4.3*, se* $d_i(x) \equiv 0$ $i = 1,...,n$ *allora il confronto* (4.8) *vale con*

$$\begin{aligned}w\,(x_1)=&\int_\lambda^{x_1}\exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right)\int_\tau^{+\infty}g^\star(\sigma)\exp\left(\int_\tau^\sigma B(\Phi(r))dr-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma\ d\tau+\int_\lambda^{x_1}F\,(\Phi\,(\tau))\,d\tau+\\ &+\int_\lambda^{x_1}\exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right)\int_\tau^{+\infty}F\,(\Phi\,(\sigma))\,B\,(\Phi\,(\sigma))\exp\left(\int_\tau^\sigma B(\Phi(r))dr-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma\ d\tau. \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\,\varphi(x)dx \leq \int_{\Omega^\star}|\nabla w|^q\,\varphi(x)dx \qquad \textit{per } 0 < q \leq 2. \qquad (4.27)$$

Dimostrazione. Osserviamo che, nelle ipotesi $d_i(x) \equiv 0$ per $i = 1,...,n$, la (4.8) si può ottenere facilmente da (4.17) e (4.18).

Proviamo (4.27). Usando la disuguaglianza di Hölder e (4.16) abbiamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^q\varphi(x)dx \leq \left(-\mu'(t)\right)^{1-\frac{q}{2}} \Bigg\{ & F(\mu(t)) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right) \times \\
& \times \left(\int_0^{\mu(t)} g^{\circledast}(s)ds\right) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right) \times \\
& \times \int_t^{\infty} \Bigg(F(\mu(\tau)) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(\tau))^2}{2}\right) \int_0^{\mu(\tau)} g^{\circledast}(s)ds \Bigg) B(\mu(\tau)) \left(-\mu'(\tau)\right) \times \\
& \times \exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_t^{\tau} B(\mu(r)) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(r))^2}{2}\right) \left(-\mu'(r)\right) dr\right] d\tau \Bigg\}^q .
\end{aligned}
$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ l'ultima disuguaglianza diventa

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^q \varphi(x)dx \leq \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \Bigg\{ & F(s) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right) \times \\
& \times \left(\int_0^s g^{\circledast}(\tau)d\tau\right) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right) \times \\
& \times \int_0^s \left(F(\tau) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) \int_0^{\tau} g^{\circledast}(\sigma)d\sigma \right) \times \\
& \times B(\tau) \exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_\tau^s B(\sigma) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\right) d\sigma\right] d\tau \Bigg\}^q ds,
\end{aligned}
$$

e integrando per parti segue la (4.27). $\square$

Il prossimo corollario esamina il caso $b_i(x) \equiv 0$ per $i = 1, ..., n$. Le condizioni su $d_i(x)$, $i = 1, ..., n$, sono necessarie per scrivere esplicitamente la soluzione $w(x)$ del problema (4.7).

Corollario 4.6 *Nelle ipotesi del Teorema 4.3, sia $b_i(x) \equiv 0$ per $i = 1, ..., n$ e valga una delle seguenti*

(a ′) $\|d\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *è sufficientemente piccola,*

(b′) $d \in L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$ *con* $2 < a < \infty$.

Allora il confronto (4.8) *vale con*

$$w(x_1) = \int_\lambda^{x_1} F\left(\Phi\left(s\right)\right) \exp\left(\int_s^{x_1} D\left(\Phi\left(r\right)\right) dr\right) ds+ \\ + \int_\lambda^{x_1} \exp\left(\int_s^{x_1} D\left(\Phi\left(r\right)\right) dr + \frac{s^2}{2}\right) \int_s^{+\infty} g^\star(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dzds. \tag{4.28}$$

Inoltre si ha

$$\int_\Omega \left|\nabla u\right|^q \varphi(x)dx \leq \int_{\Omega^\star} \left|\nabla w\right|^q \varphi(x)dx \qquad \textit{per } 0 < q \leq 2. \tag{4.29}$$

Dimostrazione. Partendo da (4.17) e integrando tra s e $\gamma_n(\Omega)$, segue che

$$u^\circledast(s) \leq \int_s^{\gamma_n(\Omega)} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\tau\right)^2}{2}\right) \left(u^\circledast(\tau) D\left(\tau\right) + F\left(\tau\right)\right) d\tau+ \\ + \int_s^{\gamma_n(\Omega)} (2\pi) \exp\left(\Phi^{-1}\left(\tau\right)^2\right) \int_0^\tau g^\circledast(z) dz d\tau.$$

Si vuole applicare il lemma di Gronwall con $\phi(s) = u^\circledast(s)$. La validità della condizione (4.4) può essere verificato seguendo la linea dell'Osservazione 4.4. Si trova che $d_i(x)$ per $i = 1, ..., n$ deve soddisfare l'ipotesi (a') oppure(b'). Integrando per parti abbiamo

$$u^\circledast(s) \leq \int_s^{\gamma_n(\Omega)} \left(F(r) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(r\right)^2}{2}\right) \int_0^r g^\circledast(z) dz\right) \times \\ \times (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(r\right)^2}{2}\right) \exp\left(\int_s^r (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\sigma\right)^2}{2}\right) D\left(\sigma\right) d\sigma\right) dr.$$

Ora ponendo $s = \Phi(x_1)$ otteniamo (4.8).
Usando (4.15) con $B(t) \equiv 0$ segue

$$-\frac{d}{dt} \int_{|u|>t} \left|\nabla u\right|^q \varphi(x)\ dx \leq \left(-\mu'(t)\right) \{tD\left(\mu\left(t\right)\right) + F\left(\mu\left(t\right)\right) + \\ + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(t\right)\right)^2}{2}\right) \int_0^{\mu(t)} g^\circledast(s) ds \Big\}^q.$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ l'ultima disuguaglianza diventa

$$\int_\Omega \left|\nabla u\right|^q \varphi(x)\ dx \leq \int_\lambda^{+\infty} \left\{u^\star(x) D\left(\Phi(x)\right) + F(\Phi(x)) + \right. \\ \left. + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \int_x^{+\infty} g^\star(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr\right\}^q \varphi(x) dx.$$

Allora dalla (4.8) si ottiene (4.29). □

4.3 Risultati di regolarità

In questo paragrafo viene studiata la regolarità delle soluzioni del problema (4.1), cioè come varia la sommabilità della soluzione al variare della sommabilità dei dati negli spazi di Lorentz-Zygmund, gli spazi ambienti del problema considerato. Il risultato di confronto ottenuto nei Corollari 4.3 e 4.6 permette di poter confrontare la soluzione u del problema (4.1) con la soluzione w di un opportuno problema. Utilizzando tale stima è possibile ottenere condizioni ottimali sui dati che garantiscono l'esistenza della soluzione. Inoltre se $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ è soluzione del problema (4.1) per la disuguaglianza di Gross u appartiene allo spazio di Lorentz-Zygmund $L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. Vogliamo studiare, allora, come varia la sommabilità di u al variare della sommabilità dei dati negli spazi di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$.

Ampia è la bibliografia inerente a risultati di regolarità per equazioni lineari e non nel caso classico (vedi ad esempio [75], [76], [65], [86], [9], [8], [50], [51], [15], [19]).

La proposizione che segue prova una stima a priori per la norma di u in $H_0^1(\varphi, \Omega)$ che dà anche una condizione sufficiente per l'esistenza in termini della sommabilità dei dati. Si osserva che un risultato di esistenza con entrambe norme piccole si può ottenere applicando il teorema di Lax-Milgram.

Proposizione 4.7 *Sia $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ una soluzione del problema (4.1). Nelle ipotesi del Teorema 4.3, se $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ e $\|d\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ sono sufficientemente piccole, la disuguaglianza*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \ \|g\|_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + C_2 \ \|f\|_{L^2(\varphi,\Omega)}, \tag{4.30}$$

vale per certe costanti positive C_1, C_2 dipendenti solo da $\gamma_n(\Omega)$, $\|b\|$ e $\|d\|$.
Per eliminare l'ipotesi di piccolezza di una delle due norme, bisogna prendere i coefficienti b_i o d_i per $i = 1, \ldots n$ nello spazio $L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$ con $2 < a < \infty$.

Dimostrazione. Osserviamo che si può applicare il lemma di Gronwall alla (4.15) se vale o (a) oppurre (b). La condizione (4.4) può essere verificata seguendo la linea dell' Osservazione 4.4.
Abbiamo

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)(-\mu'(t))^{\frac{1}{2}}\int_t^{+\infty}\left(sD(\mu(s))+F(\mu(s))+\right.$$

$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(s\right)\right)^{2}}{2}\right)\int_{0}^{\mu(s)}g^{\circledast}(z)dz\Big)B\left(\mu\left(s\right)\right)\left(-\mu'\left(s\right)\right)\times$$
$$\times\exp\left[\int_{t}^{s}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(r\right)\right)^{2}}{2}\right)B(\mu\left(r\right))\left(-\mu'\left(r\right)\right)dr\right]ds+$$
$$+\,tD\left(\mu\left(t\right)\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2}}+F\left(\mu\left(t\right)\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(t\right)\right)^{2}}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\mu(t)}g^{\circledast}(z)dz.$$

Elevando al quadrato, integrando tra 0 e $+\infty$, facendo un cambio di variabile otteniamo

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\varphi(x)\;dx\leq C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}\left(t\right)^{2}\right)\left[\left(\int_{0}^{t}\left(u^{\circledast}(s)D(s)+F\left(s\right)\right)B(s)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\int_{s}^{t}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(r\right)^{2}}{2}\right)B\left(r\right)dr\right]ds\right)^{2}+$$
$$+\,C\left(\int_{0}^{t}B(s)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(s\right)^{2}}{2}\right)\int_{0}^{s}g^{\circledast}(z)dz\times\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left[\int_{s}^{t}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(r\right)^{2}}{2}\right)B\left(r\right)dr\right]ds\right)^{2}\right]dt+$$
$$+\,C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}u^{\circledast 2}(t)D^{2}\left(t\right)dt+C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}F^{2}\left(t\right)dt+$$
$$+\,C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}\left(t\right)^{2}\right)\left(\int_{0}^{t}g^{\circledast}(z)dz\right)^{2}dt.$$

allora usando (4.24) oppure (4.25) si ha

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\varphi(x)\;dx\leq C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}\left(t\right)^{2}\right)\left[\left(\int_{0}^{t}\left(u^{\circledast}(s)D(s)+F(s)\right)B(s)\left(\frac{t}{s}\right)^{\beta}ds\right)^{2}+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{0}^{t}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(s\right)^{2}}{2}\right)B(s)\left(\frac{t}{s}\right)^{\beta}\int_{0}^{s}g^{\circledast}(z)dzds\right)^{2}\right]dt+$$
$$+\,C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}u^{\circledast 2}(t)D^{2}\left(t\right)dt+$$
$$+C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}F^{2}\left(t\right)dt+C\int_{0}^{\gamma_{n}(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}\left(t\right)^{2}\right)\left(\int_{0}^{t}g^{\circledast}(z)dz\right)^{2}dt.$$

dove $\beta=C\left\|b\right\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ se usiamo (4.24) e $\beta=C\varepsilon$ se usiamo (4.25).

Da qui in poi C sarà una costante positiva, dipendente solo da $\gamma_n(\Omega)$ and $\|b\|$, che potrà variare da rigo a rigo.
Usando (2.23), la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) possiamo applicare la disuguaglianza di Hardy (3.6) se β è sufficientemente piccolo ottenendo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 \varphi(x)\ dx \leq & C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{(1-\log t)} \left(u^{\circledast}(t) D^*(t) B^*(t)\right)^2 dt + \\ & + C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{(1-\log t)} \left(B^*(t) F^*(t)\right)^2 dt + \\ & + C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{(1-\log t)} \left(B^*(t) \frac{1}{(1-\log t)^{\frac{1}{2}}} g^{\circledast\circledast}(t)\right)^2 dt + \\ & + C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} u^{\circledast 2}(t) D^{*2}(t)\, dt + C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} F^{*2}(t)\, dt + \\ & + C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^2(1-\log t)} \left(\int_0^t g^{\circledast}(z) dz\right)^2 dt.\end{aligned}$$

Allora per la disuguaglianza (3.40) si ha

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} \leq & C \|d\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \left(1 + \|b\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right) \|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} \\ & + C \left(1 + \|b\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right) \left(\|f\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Abbiamo provato (4.30) se le norme $\|d\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ e $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ sono sufficientemente piccole oppure se la norma $\|d\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ è sufficientemente piccola e $b \in L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$. Osserviamo che nell'ultimo caso la (4.31) può essere ottenuta con $\|b\|_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.
Per provare (4.30) senza ipotesi di piccolezza sulla norma $\|d\|$, assumiamo $d \in L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$.
Argomentando come nel Teorema 4.3 al posto della (4.9) si ottiene

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} |\nabla u|^2 \varphi(x)\ dx \leq & \int_{|u|>t} |b(x)|\, |\nabla u|\, \varphi(x)\ dx + \left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} |\nabla u|^2 \varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times t \left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>t} d^2(x) \varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} f^2 \varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} |\nabla u|^2 \varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{|u|>t} g(x) \varphi(x) \operatorname{sign} u\ dx.\end{aligned}$$

Appicando (4.11), la disuguaglianza di Hölder, la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) e le relazioni (4.12) e (4.14) si ha

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)(-\mu'(t))^{\frac{1}{2}}\int_{|u|>t}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)dx+ \tag{4.32}$$

$$+tD(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+F(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)(-\mu'(t))^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}g^{\circledast}(s)ds.$$

Quindi

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\leq\left\{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)(-\mu'(t))^{\frac{1}{2}}\int_{|u|>t}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)dx+\right.$$

$$+tD(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+F(\mu(t))\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)(-\mu'(t))^{\frac{1}{2}}\int_0^{\mu(t)}g^{\circledast}(s)ds\right\}^2.$$

Integrando tra 0 e $+\infty$, con un cambio di variabile si ha

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\varphi(x)\ dx\leq C\int_0^{\gamma_n(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\left(\int_{|u|>u^{\circledast}(s)}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)\ dx\right)^2ds+ \tag{4.33}$$

$$+C\int_0^{\gamma_n(\Omega)}u^{\circledast 2}(s)D^2(s)\,ds+\int_0^{\gamma_n(\Omega)}F^2(s)\,ds+$$

$$+C\int_0^{\gamma_n(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\left(\int_0^s g^{\circledast}(z)dz\right)^2ds.$$

Valutiamo il primo integrale. Ponendo $h(x)=|b(x)|\,|\nabla u|$ e usando (2.23), la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) e la Proposizione 3.11, si ottiene

$$\int_0^{\gamma_n(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}(s)^2\right)\left(\int_{|u|>u^{\circledast}(s)}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)\ dx\right)^2ds\leq \tag{4.34}$$

$$\leq C\int_0^{\gamma_n(\Omega)}\frac{1}{s^2(1-\log s)}\left(\int_0^s\tilde{h}{}_u^{\circledast}(t)dt\right)^2ds\leq\left\|\widetilde{h}_u\right\|^2_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(0,\gamma_n(\Omega))}$$

$$\leq C\|h\|^2_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\leq C\|b\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)}.$$

Usando la (4.34) e la (2.23), la disuguaglianza di Hölder e la Proposizione 3.11, la disuguaglianza (4.33) diventa

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} \leq C\left\{\|b\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} + \|d\|^2_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + \right. \tag{4.35}$$

$$\left. + \|f\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right\}.$$

Valutiamo, ora, la norma $\|u\|_{L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$. Usando in (4.35) la seguente disuguaglianza (che per comodità dimostreremo in seguito)

$$\|u\|_{L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\varphi,\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + C\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\varphi,\Omega)}, \tag{4.36}$$

si ottiene

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} \leq C\|b\|^2_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\left(1 + \|d\|^2_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} + \tag{4.37}$$

$$+ C\left(1 + \|d\|^2_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right)\left(\|f\|^2_{L^2(\varphi,\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right).$$

La disuguaglianza (4.37) implica la (4.30) se $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ è sufficientemente piccola. Proviamo, ora, la disuguaglianza (4.36). Dalla (4.32) usando la (4.11) si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-\mu'(t))} \leq & C\left\{(2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(\mu(t))^2\right) \times \int_{|u|>t}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)\ dx + \right.\\ & + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\right)[tD(\mu(t)) + F(\mu(t))] + \\ & \left. + (2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(\mu(t))^2\right)\int_0^{\mu(t)} g^{\circledast}(s)ds\right\}.\end{aligned}$$

Ponendo $\mu(t) = s$ e integrando tra s e $\gamma_n(\Omega)$ otteniamo

$$u^{\circledast}(s) \leq C\int_s^{\gamma_n(\Omega)}(2\pi)\exp\left(\Phi^{-1}(z)^2\right)\left(\int_{|u|>u^{\circledast}(z)}|b(x)|\,|\nabla u|\,\varphi(x)\ dx + \int_0^z g^{\circledast}(r)dr\right)dz +$$

$$+ \int_s^{\gamma_n(\Omega)}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(z)^2}{2}\right)\left(u^{\circledast}(z)D(z) + F(z)\right)dz.$$

Applicando il lemma di Gronwall con $\phi(s) = u^{\circledast}(s)$. La condizione (4.4) può essere verificata seguendo la linea dell'Osservazione 4.4. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} u^{\circledast}(s) \leq C \int_{s}^{\gamma_n(\Omega)} & \left(\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(z)^2}{2} \right) F(z) + \exp\left(\Phi^{-1}(z)^2 \right) \times \right. \\ & \times \left(\int_{|u|>u^{\circledast}(z)} |b(x)| \, |\nabla u| \, \varphi(x) \; dx + \int_0^z \; g^{\circledast}(r) dr \right) \Bigg) \times \\ & \times \exp\left(\int_s^z \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2} \right) D(\tau) \, d\tau \right) dz. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Usando la (4.25) con D al posto di B si ottiene

$$\exp\left(\int_s^z \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2} \right) D(\tau) \, d\tau \right) \leq C_1 \left(\frac{z}{s} \right)^{C\varepsilon}, \tag{4.39}$$

dove C_1 è una costante positiva dipendente da $\|d\|$. Usando (4.39) e la disuguaglianza di Hardy (3.7) per un'opportuno ε e la (4.34) si ottiene (4.36). □

Osserviamo che nelle ipotesi della Proposizione 4.7 se $g \in L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ e $f \in L^2(\varphi,\Omega)$, allora il problema (4.1) ha una soluzione $u \in H_0^1(\varphi,\Omega)$.
Inoltre dalla disuguaglianza di Gross si ha che $u \in L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}$.
Useremo le stime ottenute nei Corollari 4.5 e 4.6 per dimostrare risultati di regolarità. Consideriamo prima il caso $d_i(x) \equiv 0$ e poi il caso $b_i(x) \equiv 0$. In ognuno di questi casi per convenienza del lettore esamineremo separatamente il caso $f_i(x) \equiv 0$ per $i = 1, ..., n$ e il caso $g(x) \equiv 0$.

Teorema 4.8 *Nelle ipotesi del Corollario* 4.5, *sia* $f_i(x) \equiv 0$ *per* $i = 1, ..., n$ *e* $g \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$.
(1) Se

$$p = 2 \text{ e o } 1 \leq q \leq 2 \text{ e } \alpha \geq -\frac{1}{2} \text{ oppure } 2 < q \leq \infty \text{ e } \alpha > -\frac{1}{q}$$

oppure

$$2 < p < \infty, \; 1 \leq q \leq \infty \text{ e } -\infty < \alpha < +\infty,$$

allora $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\varphi,\Omega)$. *Inoltre*

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \; \|g\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}. \tag{4.40}$$

(2) Se

$$p = \infty, 1 \leq q \leq \infty, -\infty < \alpha < +\infty \text{ e } \alpha + \frac{1}{q} < 0,$$

allora $u \in L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$*. Inoltre*

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} \leq C_2 \ \|g\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} . \tag{4.41}$$

Le costanti C_1, C_2 *dipendono da* $p, q, \alpha, \gamma_n(\Omega)$ *e* $\|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.

Dimostrazione. Se $w \in H_0^1(\varphi, \Omega^{\star})$ la soluzione debole del problema (4.7) con $f_i \equiv 0$ per $i = 1, ..., n$ dalla (2.23) e dalla (4.24) oppure dalla (4.25) si ha

$$w(t) \leq C \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma^2(1-\log\sigma)} \int_0^{\sigma} \left(\frac{\sigma}{s}\right)^{\beta} g^{\circledast}(s) ds \; d\sigma,$$

dove $\beta = C\,\|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ se si usa (4.24) e $\beta = C\varepsilon$ se invece si usa (4.25). Denotiamo con C una costante positiva dipendente solo da $\gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|$, che potrà variare da rigo a rigo. Proviamo il risultato (*1*) quando $1 \leq q < \infty$. Dalla definizione (3.5) e usando le disuguaglianze di Hardy (3.7) e (3.6) con $\frac{1}{p} - 1 + \beta < 0$, si ha

$$||w||^q_{p,q;\alpha+1} \leq C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \Bigg(t^{\frac{1}{p}} (1-\log t)^{\alpha+1} \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{\sigma^{\beta}}{\sigma^2(1-\log\sigma)} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \int_0^{\sigma} \left(\frac{1}{s}\right)^{\beta} g^{\circledast}(s) ds \; d\sigma \Bigg)^q \frac{dt}{t} \\ &\leq C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}-1+\beta} (1-\log t)^{\alpha} \int_0^t \left(\frac{1}{s}\right)^{\beta} g^{\circledast}(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \\ &\leq C \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} (1-\log t)^{\alpha} g^{\circledast}(t) \right)^q \frac{dt}{t} = C ||g||^q_{p,q;\alpha}. \end{aligned}$$

Quest'ultima disuguaglianza e la (4.8) provano (4.40).
Quando $q = \infty$ la disuguaglianza (4.40) segue allo stesso modo usando la disuguaglianza di Hardy (3.9) invece della (3.7). La stessa dimostrazione continua a valere nel caso (*2*) se si usa al posto della disuguaglianza (3.7) la disuguaglianza (3.11) quando $1 \leq q < \infty$ e la (3.13) quando $q = \infty$. $\square$

Teorema 4.9 *Nelle ipotesi del Corollario 4.5, sia* $g(x) \equiv 0$ *e* $f_i \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$ *per* $i = 1, ...n$.
(1) Se

$$2 < p < \infty,\ 2 \leq q \leq \infty \ e \ -\infty < \alpha < +\infty,$$

allora $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$. *Inoltre*

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \ \|f\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}. \tag{4.42}$$

(2) Se

$$p = \infty, 1 \leq q < \infty, -\infty < \alpha < +\infty \ e \ \alpha + \frac{1}{q} < 0$$

oppure

$$p = \infty, q = \infty, \ e \ \alpha \leq 0,$$

allora $u \in L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$. *Inoltre*

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_2 \ \|f\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}. \tag{4.43}$$

Le costanti C_1, C_2 *dipendono da* $p, q, \alpha, \gamma_n(\Omega)$ *e* $\|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.

Dimostrazione. Usando la (2.23) si ha

$$w^*(t) \leq w_1(t) + w_2(t),$$

dove

$$w_1(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{F(\sigma)}{\sigma(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}} d\sigma \tag{4.44}$$

e

$$\begin{aligned} w_2(t) = (2\pi) \int_t^{\gamma_n(\Omega)} & \frac{1}{\sigma^2(1-\log\sigma)} \times \\ & \times \int_0^{\sigma} \exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_r^{\sigma} \frac{B(r)}{\sigma(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}} d\tau\right] B(r)F(r)\, dr\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Caso (*1*) con $2 \leq q < \infty$. Denotiamo con C una costante positiva. Osserviamo che integrando per parti, usando la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) si ottiene:

$$w_1(t) \leq C \frac{||F||_{L^1(\Omega^{\circledast})}}{\gamma_n(\Omega)\,(1-\log\gamma_n(\Omega))^{\frac{1}{2}}} + C \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{\int_0^{\sigma} F^*(s)\, ds}{\sigma^2\,(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}} d\sigma \tag{4.46}$$

Usando la (4.46), la disuguaglianza di Hardy (3.7) e la Proposizione 3.11 si ha

$$\|w_1\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C||F||_{L^1(\Omega^{\circledast})}\left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} t^{\frac{q}{p}}\,(1-\log t)^{(\alpha+\frac{1}{2})q}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \tag{4.47}$$

$$+\,C\left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} t^{\frac{q}{p}}\,(1-\log t)^{(\alpha+\frac{1}{2})q}\left(\int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{\int_0^{\sigma} F^*(s)\,ds}{\sigma^2\,(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}}d\sigma\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\,\|F\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\Omega^{\circledast})} \leq C\,\|f\|_{p,q;\alpha}\,.$$

Per valutare la norma di w_2 in $L^{p,q}\,(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}\,(\varphi,\Omega)$ è possible argomentare come nel teorema precedente, ottenendo

$$||w_2||_{p,q;\alpha+\frac{1}{2}} \leq C||f||_{p,q;\alpha}. \tag{4.48}$$

Dalla (4.47) e (4.48) si ha (4.42).
La dimostrazione degli altri casi è analoga. □

In maniera simile è possibile provare i seguenti teoremi.

Teorema 4.10 *Nelle ipotesi del Corollario* 4.6*, sia* $f_i(x) \equiv 0$ *per* $i = 1,...,n$ *e* $g \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$.
(1) Se

$$p = 2 \text{ e o } 1 \leq q \leq 2 \text{ e } \alpha \geq -\frac{1}{2} \text{ oppure } 2 < q \leq \infty \text{ e } \alpha > -\frac{1}{q}$$

oppure

$$2 < p < \infty,\ 1 \leq q \leq \infty \text{ e } -\infty < \alpha < +\infty,$$

allora $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\varphi,\Omega)$*. Inoltre*

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\varphi,\Omega)} \leq C_1\ \ \|g\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}\,.$$

(2) Se

$$p = \infty, 1 \leq q \leq \infty, -\infty < \alpha < +\infty \text{ e } \alpha + \frac{1}{q} < 0,$$

allora $u \in L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)$*. Inoltre*

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} \leq C_2\ \ \|g\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}\,.$$

Le costanti C_1, C_2 *dipendono da* $p, q, \alpha, \gamma_n(\Omega)$ *e* $\|d\|_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.

Teorema 4.11 *Nelle ipotesi del Corollario* 4.6*, sia* $g \equiv 0$ *e* $f_i \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi, \Omega)$ *per* $i = 1, ..., n$.
(1) Se

$$2 < p < \infty, \ 2 \leq q \leq \infty \ e \ -\infty < \alpha < +\infty,$$

allora $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. *Inoltre*

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \ \|f\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}.$$

(2) Se

$$p = \infty, 2 \leq q < \infty, -\infty < \alpha < +\infty \ e \ \alpha + \frac{1}{q} < 0$$

oppure

$$p = \infty, q = \infty \ e \ \alpha \leq 0,$$

allora $u \in L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. *Inoltre*

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \leq C_2 \ \|f\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)}.$$

Le costanti C_1, C_2 *dipendono da* $p, q, \alpha, \gamma_n(\Omega)$ *e* $\|d\|_{L^{\infty,a}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.

Osservazione 4.12 Ricalcando le dimostrazioni dei precedenti teoremi si possono ottenere risultati analoghi per il problema (4.1) con entrambi i termini noti non nulli.

Osservazione 4.13 Notiamo che pur aumentando di molto la sommabilità dei dati, la soluzione del problema (4.1) non è limitata.

Consideriamo, ad esempio, il seguente caso particolare del problema (4.7)

$$\begin{cases} -(w_{x_1}\varphi(x))_{x_1} = g^{\star}(x_1)\varphi(x) & in \quad \Omega^{\star} \\ \\ w = 0 & on \ \partial\Omega^{\star} \end{cases}$$

Si fa vedere che

$$\|w\|_{L^{\infty}(\Omega)} = w(0) = \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \exp(\Phi^{-1}(\sigma)^2) \int_0^{\sigma} g^*(s)ds \ d\sigma. \tag{4.49}$$

Utilizzando la (2.23) e la decrescenza di g^*, è facile dedurre che la (4.49) è finita solo se $g \equiv 0$.

Capitolo 5

Equazioni ellittiche non lineari

In questo capitolo studieremo questioni inerenti l'esistenza e la regolarità di soluzioni deboli del seguente problema non lineare

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) + G(x,u) = g\varphi - \mathrm{div}\,(f\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, che come nel capito precedente ha misura di Gauss minore di 1, e p è un numero reale $1 < p < +\infty$.
Inoltre $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni di Carathéodory tali che

(i) $a(x,\eta,\xi)\xi \geq \varphi(x)\,|\xi|^p$;

(ii) $|a(x,\eta,\xi)| \leq c_1\varphi(x)\left(|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k_1(x)\right)$,

$c_1 > 0$, $k_1(x) \geq 0$ e $k_1(x) \in L^{p'}(\varphi,\Omega)$;

(iii) $\left(a(x,\eta,\xi) - a(x,\eta,\bar{\xi})\right)\left(\xi - \bar{\xi}\right) > 0$ se $\xi \neq \bar{\xi}$;

(iv) $|H(x,\xi)| \leq \varphi(x)\left(b(x)\,|\xi|^{p-1} + k_2(x)\right)$,

$b(x) \geq 0$, $k_2(x) \geq 0$, $b(x) \in L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ e $k_2(x) \in L^{p'}(\varphi,\Omega)$;

(v) $|G(x,\eta)| \leq c_3\varphi(x)\left(|\eta|^{p-1} + k_3(x)\right)$,

$c_3 > 0$, $k_3(x) \geq 0$ e $k_3(x) \in L^{p'}(\varphi,\Omega)$;

(vi) $G(x,\eta)\eta \geq 0$;

(vii) $g \in L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$;

$(viii)$ $|f| \in L^{p'}(\varphi, \Omega)$,

per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ e $\xi, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Ci sono tre principali difficoltà nello studio del problema (5.1). La prima è dovuta all'operatore $-\text{div}\,(a(x, u, \nabla u))$ che può non essere uniformemente ellittico. La seconda è dovuta al fatto che il dominio Ω può non essere limitato ed infine c'è la presenza del termine d'ordine inferiore $H(x, u)$ che comporta una perdita di coercività quando la norma $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ non è sufficientemente piccola.
Una delle questioni di maggiore rilievo nello studio del problema (5.1) è la ricerca di condizioni per l'esistenza di una soluzione.
Il primo paragrafo di questo capitolo è dedicato, quindi, a questioni inerenti l'esistenza e si conclude con qualche breve considerazione sull'unicità.
Nel terzo paragrafo si descrivono risultati di regolarità del tipo visto per il caso lineare nel capitolo precedente, ottenuti usando stime della soluzione frutto di un risultato di confronto descritto nel secondo paragrafo.

Ricordiamo la definizione di soluzione debole.

Definizione 5.1 *Diremo che $u \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ è una soluzione debole del problema* (5.1)*, se*

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla\psi dx + \int_\Omega H(x, \nabla u)\psi dx + \int_\Omega G(x, u)\psi dx = \int_\Omega (g\psi\varphi + f\nabla\psi\varphi)\, dx, \qquad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega). \tag{5.2}$$

Osservazione 5.2 Nelle ipotesi (ii),(iv),(v),(vii) e $(viii)$, dalle immersioni di Sobolev, dalla disuguaglianza di Hardy e di Hölder è facile verificare che tutti i termini in (5.2) sono ben definiti.

Osservazione 5.3 Le ipotesi (ii) e (v) potrebbero essere sostituite dalle seguenti migliori condizioni di crescita:

$(ii)'$ $|a(x, \eta, \xi)| \le c_1\varphi(x) \left(|\eta|^{p-1} (\log(2 + |\eta|))^{\frac{p-1}{2}} + |\xi|^{p-1} + k_1(x)\right)$,
$c_1 > 0, k_1(x) \ge 0$ *e* $k_1(x) \in L^{p'}(\varphi, \Omega)$;

$(v)'$ $G(x, \eta) \le c_3\varphi(x) \left(|\eta|^{p-1} (\log(2 + |\eta|))^{\frac{p-1}{2}} + k_3(x)\right)$,
$c_3 > 0, k_3(x) \ge 0$ *e* $k_3(x) \in L^{p'}(\varphi, \Omega)$.

Nel seguito non assumeremo $(ii)'$ e $(v)'$ solo per evitare complicanze tecniche.

5.1 Esistenza

Per provare l'esistenza di soluzioni deboli del problema (5.1) approssimiamo i dati del problema in modo da ottenere una successione di problemi approssimanti che hanno soluzione. Il successivo passo è cercare una stima apriori per le soluzioni dei problemi approssimanti, per poi potere passare al limite ed ottenere una soluzione del problema (5.1).
Osserviamo che se Ω è limitato, il problema (5.1) è uniformemente ellittico, allora risultati di esistenza possono essere trovati in [37], [38] e [39].
Il risultato di esistenza che riusciamo a provare è il seguente:

Teorema 5.4 *Nelle ipotesi* (i)-$(viii)$ *supponimo che valga una delle seguenti*
(a) $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *è sufficientemente piccola,*
(b) $b \in L^{\infty,r}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ *con* $2 < r < \infty$.
Allora esiste almeno una soluzione debole u *del problema* (5.1).

La prima questione affrontata è l'esistenza di soluzioni per equazioni del tipo (5.1) coercive, che si dimostra adattando il classico metodo dovuto a Leray-Lions (vedere paragrafo 5.1.1).

5.1.1 Esistenza per un'equazione coerciva

Cominciamo con il provare un risultato di esistenza per particolari equazioni non lineari ellittiche coercive adattando il classico metodo dovuto a Leray-Lions (vedere [55]).
Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\text{div}\ (a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) + G(x,u) = g\varphi - \text{div}\ (f\varphi) & \textit{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

dove $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni Carathéodory che soddisfano rispettivamente le ipotesi (i)-(iii) e (v)-(vi). Inoltre assumiamo che $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia una funzione di Carathéodory tale che soddisfi (invece della più generale ipotesi (iv)) l'ipotesi
$(iv)''$ $|H(x,\xi)| \leq \varphi(x)\left(c_1 |\xi|^{p-1} + k_2(x)\right),$
$c_1 \geq 0,\ k_2(x) \geq 0,\ k_2(x) \in L^{p'}(\varphi,\Omega)$, a.e. $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, .

Infine assumiamo che f soddisfi l'ipotesi (vii) e g soddisfi l'ipotesi $(viii)$.
Osserviamo che esiste $Lu \in W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)$ tale che

$$< Lu, w >= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla w \; dx + \int_\Omega H(x,\nabla u) w \; dx + \int_\Omega G(x,u) w \; dx, \qquad \forall w \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$$

e

$$Lu = -\text{div } a(x,u,\nabla u) + H(x,\nabla u) + G(x,u), \qquad \forall u \in D(\Omega). \tag{5.4}$$

Per provare l'esistenza di una soluzione del problema in considerazione abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 5.5 *Nelle ipotesi* (ii) *e* (iii) *siano* $u_h, u \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ *tali che*

$$u_h \rightharpoonup u \quad \textit{debole in } W_0^{1,p}(\varphi,\Omega).$$

Denotiamo

$$F_h(x) = [a(x,u_h,\nabla u_h) - a(x,u,\nabla u)]\, \nabla(u_h - u)$$

e assumiamo che

$$\int_\Omega F_h(x) dx \to 0.$$

Allora

$$\nabla u_h(x) \to \nabla u(x) \qquad \textit{q.o. in } \Omega.$$

Dimostrazione. Usando (iii) segue che $F_h(x) \geq 0$. Per una certa sottosuccessione, denotata ancora con $(u_h)_h$, si ha

$$\begin{aligned} u_h &\to u, \qquad \forall x \in \Omega - \Omega_0, \\ F_h &\to 0, \qquad \forall x \in \Omega - \Omega_0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

con $\gamma_n(\Omega_0) = 0$. Sia $x \notin \Omega_0$ e sia $\bar{\xi}$ un limite di $\nabla u_h(x)$.
Segue

$$\left|\bar{\xi}\right| < \infty. \tag{5.6}$$

Infatti da (i) e (ii), si ottiene

$$\begin{aligned}
F_h(x) &= a(x, u_h(x), \nabla u_h(x))\nabla u_h(x) + a(x, u(x), \nabla u(x))\nabla u(x) + \\
&- a(x, u_h(x), \nabla u_h(x))\nabla u(x) - a(x, u(x), \nabla u(x))\nabla u_h(x) \\
&\geq |\nabla u_h(x)|^p \varphi(x) + |\nabla u(x)|^p \varphi(x) - c_1 \left[|u_h(x)|^{p-1} + |\nabla u_h(x)|^{p-1}\right. \\
&\left. + k_1(x)\right] \varphi(x) |\nabla u(x)| - c_1 \left[|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1} + k_1(x)\right] \varphi(x) |\nabla u_h(x)| \\
&\geq |\nabla u_h(x)|^p \varphi(x) - c |\nabla u_h(x)|^{p-1} - c |\nabla u_h(x)| + c,
\end{aligned}$$

per una certa costante c. Inoltre $F_h(x) \to \infty$ se $\left|\bar{\xi}\right| = \infty$ e questo contraddice (5.5). Per la continuità della funzione a nelle variabili η e ξ, da (5.6) e (5.5), si ha

$$\left[a(x, u, \bar{\xi}) - a(x, u, \nabla u)\right] \left(\bar{\xi} - \nabla u\right) = 0,$$

e da (iii) si deduce che

$$\nabla u(x) = \bar{\xi}.$$

Allora si ha

$$\nabla u_h\,(x) \to \nabla u\,(x) \qquad \forall x \in \Omega - \Omega_0,$$

che prova il teorema. $\square$

Proviamo ora il risultato di esistenza.

Teorema 5.6 *Supponiamo che valgano le ipotesi (i)-(iii), (iv)" e (v). Sia L definito da (5.4) e*

$$\frac{< Lv, v >}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)}} \to \infty, \qquad se \quad \|v\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)} \to \infty.$$

Allora per ogni $T \in W^{-1,p'}(\varphi, \Omega)$ esiste $u \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ tale che

$$Lu = T.$$

Dimostrazione. Dalla classica teoria sugli operatori monotoni e coercivi, è sufficiente provare che l'operatore L è limitato ed esiste un operatore

$$\bar{L} : W_0^{1,p}(\varphi, \Omega) \times W_0^{1,p}(\varphi, \Omega) \to W^{-1,p'}(\varphi, \Omega)$$

tale che

(*1*) $Lu = \bar{L}(u,u)$;

(*2*) l'applicazione $v \to \bar{L}(u,v)$ $\forall u \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ è limitata, emicontinua[1] e

$$< \bar{L}(u,u) - \bar{L}(u,v), u - v > \geq 0; \tag{5.7}$$

(*3*) l'applicazione $u \to \bar{L}(u,v)$ $\forall v \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ è limitata ed emicontinua;

(*4*) se $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ e $< \bar{L}(u_k,u_k) - \bar{L}(u_k,u), u_k - u > \to 0$, allora per ogni $v \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$

$$\bar{L}(u_k,v) \rightharpoonup \bar{L}(u,v) \quad \text{in } W^{-1,p'}(\varphi,\Omega);$$

(*5*) se $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ e $\bar{L}(u_k,v) \to \Psi$ in $W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)$ allora

$$< \bar{L}(u_k,v), u_k > \to < \Psi, u > .$$

Per rendere più leggibile quanto segue useremo le seguenti notazioni

$$\tilde{a}(x,\xi) = \frac{a(x,\xi)}{\varphi(x)}, \ \tilde{H}(x,\xi) = \frac{H(x,\xi)}{\varphi(x)} \quad \text{e} \quad \tilde{G}(x,\eta) = \frac{G(x,\eta)}{\varphi(x)} \tag{5.8}$$

e denoteremo con

$$\begin{aligned}
\bar{a}(u,v,w) &= \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\nabla w \ dx,\\
\bar{H}(u,w) &= \int_\Omega H(x,\nabla u) w \ dx,\\
\bar{G}(u,w) &= \int_\Omega G(x,u) w \ dx,
\end{aligned}$$

per ogni $u,v,w \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$.

L'applicazione $w \to \bar{a}(u,v,w) + \bar{H}(u,w) + \bar{G}(u,w)$ $\forall u,v \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ è lineare e limitata, inoltre, esiste $\bar{L} : W_0^{1,p}(\varphi,\Omega) \times W_0^{1,p}(\varphi,\Omega) \to W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)$ tale che

$$< \bar{L}(u,v), w > = \bar{a}(u,v,w) + \bar{H}(u,w) + \bar{G}(u,w),$$

[1] Un'applicazione $T : v \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega) \to Tv \in W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)$ è emicontnua se

$$\lambda \in \mathbb{R} \to \langle T(v_1 + \lambda v_2), w \rangle \in \mathbb{R}$$

è continua per ogni v_1, v_2 e $w \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$.

per ogni $u, v, w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$.

Iniziamo con il provare (*2*). Usando (*iii*), segue immediatamente (5.7). Per la continuità della funzione $a(x, \eta, \xi)$ nella variabile ξ, si ottiene

$$\widetilde{a}(x, u, \nabla(v_1 + \lambda v_2)) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla v_1) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole.}$$

Inoltre

$$\bar{a}(u, v_1 + \lambda v_2, w) \to \bar{a}(u, v_1, w) \quad \text{se } \lambda \to 0 \quad \forall u, v_1, v_2, w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega).$$

In maniera simile si prova la (*3*). Infatti per la continuità delle funzioni $a(x, \eta, \xi)$ e $G(x, \eta)$ nella variabile η e della funzione $H(x, \xi)$ nella variabile ξ, si ha

$$\begin{gathered}
\widetilde{a}(x, u_1 + \lambda u_2, \nabla v) \to \widetilde{a}(x, u_1, \nabla v) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole,} \\
\widetilde{H}(x, \nabla u_1 + \lambda \nabla u_2) \to \widetilde{H}(x, \nabla u_1) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole,} \\
\widetilde{G}(x, u_1 + \lambda u_2) \to \widetilde{G}(x, u_1) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole.}
\end{gathered}$$

Inoltre se $\lambda \to 0$ segue che

$$\begin{aligned}
&\bar{a}(u_1 + \lambda u_2, v, w) + \bar{H}(\nabla u_1 + \lambda \nabla u_2, w) + \bar{G}(u_1 + \lambda u_2, w) \to \\
&\bar{a}(u_1, v, w) + \bar{H}(\nabla u_1, w) + \bar{G}(u_1, w),
\end{aligned}$$

per ogni $u_1, u_2, v, w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$.

Ora dimostriamo la (*4*). Assumiamo che $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ e

$$< \bar{L}(u_k, u_k) - \bar{L}(u_k, u), u_k - u > \to 0.$$

Segue che

$$\begin{cases} u_k \to u \text{ q.o. in } \Omega \\ \exists \rho \in L^p(\varphi, \Omega) : |u_k(x)| \le \rho(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ q.o. in } \Omega \\ \|u_k\|_{W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)} \le L, \qquad \text{per una certa } L > 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

D'altra parte il Lemma 5.5 ci assicura che

$$\nabla u_k(x) \to \nabla u(x) \text{ q.o. in } \Omega. \tag{5.10}$$

Inoltre per la continuità delle funzioni $a(x, \eta, \xi)$ e $G(x, \eta)$ nella variabile η e della funzione $H(x, \xi)$ nella variabile ξ, dalla (5.10) e (5.9), si ha

$$\widetilde{a}(x, u_k, \nabla v) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla v) \text{ q.o. in } \Omega, \tag{5.11}$$

$$\widetilde{H}(x, \nabla u_k) \to \widetilde{H}(x, \nabla u) \text{ q.o. in } \quad \Omega, \tag{5.12}$$

$$\widetilde{G}(x, u_k) \to \widetilde{G}(x, u) \text{ q.o. in } \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Inoltre dalla (ii),(iv)",(v) e (5.9) le funzioni $\widetilde{a}(x, u_k, \nabla v)$, $\widetilde{H}(x, \nabla u_k)$ e $\widetilde{G}(x, u_k)$ appartengono a $L^{p'}(\varphi, \Omega)$. Allora dalla (5.11), (5.12) e (5.13) si ha (vedere Lemma 1.3 di [55])

$$\widetilde{a}(x, u_k, \nabla v) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla v) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole},$$

$$\widetilde{H}(x, \nabla u_k) \to \widetilde{H}(x, \nabla u) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole},$$

$$\widetilde{G}(x, u_k) \to \widetilde{G}(x, u) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega)\text{-debole},$$

inoltre

$$\bar{a}(u_k, v, w) \to \bar{a}(u, v, w), \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$$

$$\bar{H}(u_k, w) \to \bar{H}(u, w), \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$$

$$\bar{G}(u_k, w) \to \bar{G}(u, w), \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$$

cioè

$$\bar{L}(u_k, v) \rightharpoonup \bar{L}(u, v) \quad \text{in } W^{-1,p'}(\varphi, \Omega).$$

Infine per provare la (5) supponiamo che $u_k \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ e $\bar{L}(u_k, v) \to \Psi$ in $W^{-1,p'}(\varphi, \Omega)$.

Usando (ii) e (5.9), si ottiene

$$\left|\widetilde{a}(x, u_k, \nabla v)\right| \leq c \left[|u_k|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1} + |k_1|\right] \leq c \left[|\rho|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1} + |k_1|\right] = z\,(x)\,,$$

con $z \in L^{p'}(\varphi, \Omega)$. Dal teorema sulla convergenza dominata si ha

$$\widetilde{a}(x, u_k, \nabla v) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla v) \text{ in } L^{p'}(\varphi, \Omega),$$

quindi

$$\bar{a}(u_k, v, u_k) \to \bar{a}(u, v, u). \tag{5.14}$$

Usando (iv)", (v) e (5.9) si ottiene

$$\left|\bar{H}(u_k, u_k - u) + \bar{G}(u_k, u_k - u)\right| \leq c \left\| u_k - u \right\|_{L^p(\varphi, \Omega)},$$

e quindi

$$\bar{H}(u_k, u_k - u) + \bar{G}(u_k, u_k - u) \to 0. \tag{5.15}$$

Inoltre si ha

$$\bar{H}(u_k, u) + \bar{G}(u_k, u) =< \bar{L}(u_k, v), u > -\bar{a}(u_k, v, u) \to < \Psi, u > -\bar{a}(u, v, u). \tag{5.16}$$

Da (5.15) e (5.16) si deduce che

$$\bar{H}(u_k, u_k) + \bar{G}(u_k, u_k) \to < \Psi, u > -\bar{a}(u, v, u). \tag{5.17}$$

Da (5.14) e (5.17) segue che

$$< \bar{L}(u_k, v), u_k >= \bar{a}(u_k, v, u_k) - \bar{H}(u_k, u_k) + \bar{G}(u_k, u_k) \to < \Psi, u > .$$

Questo completa la dimostrazione. □

5.1.2 Stima apriori

Nello studio dell'esistenza un passo importante è trovare una stima apriori per la norma $W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ della soluzione del problema (5.1). Queste stime sono ottenute adattando la classica tecnica dovuta a Talenti (vedere [79]) che è basata sull'uso della disuguaglianza isoperimetrica e sulla simmetrizzazione di Schwarz (vedere [84] per un'ampia bibiografia). La presenza della degenerazione $\varphi(x)$ nella condizione (i) ed il fatto che Ω può essere illimitato, ci porta ad usare la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss ed ad usare la nozione di riordinamento rispetto alla misura di Gauss.

Lemma 5.7 *Sia u una soluzione debole del problema* (5.1)*. Nelle ipotesi del Teorema* 5.4*, vale la seguente stima*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)} \le C_1 \|f\|^{p-1}_{L^{p'}(\varphi,\Omega)} + C_2 \|g\|^{p-1}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + C_3 \|k_2\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}, \tag{5.18}$$

dove C_1, C_2 e C_3 sono costanti che dipendono solo da p, $\gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ψ definita da

$$\psi(x) = \begin{cases} \text{sign } u, & \text{se } \ |u| > t+h, \\ \dfrac{(|u|-t)\,\text{sign } u}{h}, & \text{se } t < |u| \le t+h, \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

dove$t$ e h sono costanti positive.

Usando ψ come funzione test in (5.2), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} a(x,u,\nabla u)\ \nabla u\ dx+\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} H(x,\nabla u)\,(|u|-t)\,\mathrm{sign}\ u\ dx+\\
&+\int_{|u|>t+h} H(x,\nabla u)\ \mathrm{sign}\ u\ dx+\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} G(x,u)\,(|u|-t)\,\mathrm{sign}\ u\ dx+\\
&\quad+\int_{|u|>t+h} G(x,u)\ \mathrm{sign}\ u\ dx=\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} f\nabla u\ \varphi\ dx+\\
&+\frac{1}{h}\int_{t<|u|\le t+h} g(|u|-t)\mathrm{sign}\ u\ \varphi\ dx+\int_{|u|>t+h} g\mathrm{sign}\ u\ \varphi\ dx.
\end{aligned}$$

Dalle ipotesi $(i),(iv)$ e (vi) e dalla disuguaglianza di Hölder, per $h\to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\,\varphi(x)dx\le&\int_t^{+\infty}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}b^p(x)\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}|\nabla u|^p\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}ds+\\
&+\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|f|^{p'}\,\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}+\\
&+\int_{|u|>t}k_2(x)\mathrm{sign}\ u\ \varphi(x)dx+\int_{|u|>t}g(x)\mathrm{sign}\ u\ \varphi(x)\ dx. \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

D'altraparte la formula di coarea (vedi [46]) e la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss implicano

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|\,\varphi(x)dx\ge\int_{\partial\{|u|>t\}^\star}\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(t\right)\right)^2}{2}\right),\qquad(5.20)$$

dove $\{|u|>t\}^\star$ è il semispazio che ha misura di Gauss $\mu(t)=\gamma_n\left(\{x\in\Omega:|u(x)|>t\}\right).$ Allora usando (5.20) e la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$1\le(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(t\right)\right)^2}{2}\right)\left(-\mu'(t)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\,\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}.\qquad(5.21)$$

Dalle definizione di pseudoriordinamento abbiamo:

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|f|^{p'}\,\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p'}}=F\left(\mu\left(t\right)\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

e

$$\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}b^p(x)\varphi(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}=B\left(\mu\left(s\right)\right)\left(-\mu'\left(s\right)\right)^{\frac{1}{p}},$$

dove F e B sono funzioni tali che $F^{p'} = \left(\widetilde{f^{p'}}\right)_u$ e $B^p = (\widetilde{b^p})_u$.
Dalla (5.19) applicando (5.21) e usando la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (1.5) abbiamo

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\,\varphi(x)\;dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq F\left(\mu\left(t\right)\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu\left(t\right))^2}{2}\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\times$$
$$\int_t^{+\infty} B(\mu\left(s\right))\left(-\mu'\left(s\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{d}{ds}\int_{|u|>s}|\nabla u|^p\varphi\left(x\right)dx\right)^{\frac{1}{p'}} ds+$$
$$+\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu\left(t\right))^2}{2}\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^{\mu(t)}\left(k_2^{\circledast}\left(s\right)+g^{\circledast}\left(s\right)\right)ds\right).$$

Osserviamo che la condizione (4.4) è verificata se (a) oppure (b). Allora possiamo applicare il Lemma 4.2 ottenendo

$$\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$
$$\leq F\left(\mu\left(t\right)\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu\left(t\right))^2}{2}\right)\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\int_0^{\mu(t)}\left(k_2^{\circledast}(s)+g^{\circledast}(s)\right)ds+$$
$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(-\mu'\left(t\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu\left(t\right)\right)^2}{2}\right)\int_t^{+\infty} B\left(\mu\left(\tau\right)\right)\left(-\mu'\left(\tau\right)\right)\left(F\left(\mu\left(\tau\right)\right)+\right.$$
$$\left.+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu\left(\tau\right))^2}{2}\right)\left(\int_0^{\mu(\tau)}\left(k_2^{\circledast}(s)+g^{\circledast}(s)\right)ds\right)\right)\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_t^{\tau} B(\mu\left(r\right))\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu(r)\right)^2}{2}\right)\left(-\mu'(r)\right)dr\right]d\tau, \tag{5.22}$$

cioè

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\varphi(x)dx \leq$$
$$\leq c\left\{\int_0^{\gamma_n(\Omega)}(F\left(t\right))^{p'}+(2\pi)^{\frac{p'}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(t)^2}{2}p'\right)\left(\int_0^t k_2^{\circledast}(s)+g^{\circledast}(s)ds\right)^{p'}\right.$$
$$+(2\pi)^{\frac{p'}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(t\right)^2}{2}p'\right)\left(\int_0^t B\left(\tau\right)\left[F\left(\tau\right)+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\int_0^{\tau}\left(k_2^{\circledast}(s)+g^{\circledast}(s)\right)ds\right]\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_\tau^t B(r)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(r)^2}{2}\right)dr\right]d\tau\right)^{p'}dt\right\}. \tag{5.23}$$

Abbiamo denotato e denoteremo con c una costante positiva dipendente solo da $p, \gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$, che potrà variare da rigo a rigo.
Ora valutiamo il secondo membro della diseguaglianza (5.23). Usando (2.23) e (4.24) nel caso (a) oppure (4.25) nel caso (b) si ha:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \varphi(x)dx \leq \tag{5.24}$$
$$\leq \int_0^{\gamma_n(\Omega)} F^{p'}(t)dt + c\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^{p'}(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^t \left(k_2^{\circledast}(s) + g^{\circledast}(s)\right) ds\right)^{p'} +$$
$$+ c\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^{p'}(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^t B(\tau)F(\tau)\left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta d\tau\right)^{p'} dt$$
$$+ c\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^{p'}(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^t \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau)}{\tau(1-\log\tau)^{\frac{1}{2}}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^\tau \left(k_2^{\circledast}(s) + g^{\circledast}(s)\right) ds \quad \left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta d\tau \right)^{p'} dt,$$

dove $\beta = c\varepsilon$ se si usa (4.24) e $\beta = c\,\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ se si usa (4.25).
Usando (3.6) per un β sufficiente piccolo, la disuguaglianza di Hardy e la Proposizione 3.11 gli ultimi due integrali del secondo membro della disuguaglianza (5.24) diventano

$$\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^{p'}(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^t B(\tau)F(\tau)\left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta d\tau\right)^{p'} dt$$
$$\leq c\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{B^{*p'}(t)F^{*p'}(t)}{(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} dt \leq c\,\|b\|^{p'}_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \|f\|^{p'}_{L^{p'}(\varphi,\Omega)}$$

e

$$\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{t^{p'}(1-\log t)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^t \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} B(\tau)}{\tau(1-\log\tau)^{\frac{1}{2}}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^\tau \left(k_2^{\circledast}(s) + g^{\circledast}(s)\right) ds \quad \left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta d\tau \right)^{p'} dt \leq$$

$$\leq c\int_0^{\gamma_n(\Omega)} \frac{B^{*p'}(t)}{t^{p'}(1-\log t)^{p'}} \left(\int_0^t \left(k_2^{\circledast}(s) + g^{\circledast}(s)\right) ds\right)^{p'} dt$$
$$\leq c\,\|b\|^{p'}_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \left(\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + \|k_2\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}\right).$$

Inoltre

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \varphi(x)dx \le c\left(\|f\|^{p'}_{L^{p'}(\varphi,\Omega)} + \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + \|k_2\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} \right),$$

cioè (5.18). □

5.1.3 Convergenza dei gradienti

Per il passaggio al limite nei problemi approssimanti abbiamo bisogno della convergenza dei gradienti. Tale convergenza è dimostrata seguendo la linea di [25].

Teorema 5.8 *Nelle ipotesi (i)-(iii) se* $(f_h)_h \subset L^{p'}(\varphi,\Omega), (g_h)_h \subset L^1(\varphi,\Omega)$ *e* u_h *sono soluzioni deboli delle equazioni*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a\,(x,u_h,\nabla u_h)) = g_h\varphi - \mathrm{div}\,(f_h\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

tali che

$$u_h \rightharpoonup u \quad \textit{debole in } W_0^{1,p}(\varphi,\Omega),\ \textit{forte in } L^p(\varphi,\Omega)\ \textit{e q.o. in } \Omega, \tag{5.25}$$

$$f_h \to f \quad \textit{forte in } \left(L^{p'}(\varphi,\Omega)\right)^n, \tag{5.26}$$

e

$$\|g_h\|_{L^1(\varphi,\Omega)} \le M, \tag{5.27}$$

dove M è una costante che non dipende da h.
Allora

$$\nabla u_h \to \nabla u \qquad \textit{q.o. in } \Omega.$$

Dimostrazione. Usando $v_h = T_\varrho(u_h - u) \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ come funzione test, si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [a(x,u_h,\nabla u_h) - a(x,u_h,\nabla u)]\,\nabla T_\varrho(u_h-u)\ dx = \qquad (5.28)\\ &= -\int_\Omega a(x,u_h,\nabla u)\nabla T_\varrho(u_h-u)\ dx + \int_\Omega f_h\ \nabla T_\varrho(u_h-u)\varphi dx\\ &+ \int_\Omega g_h T_\varrho(u_h-u)\varphi dx. \end{aligned}$$

Da (5.25), segue che

$$T_\varrho u_h \rightharpoonup T_\varrho u \text{ debole in } W_0^{1,p}(\varphi,\Omega),$$

che implica che per un fissato ϱ, i primi due termini nel membro di destra dell'uguaglianza (5.28) tendono a 0 quando h tende ad infinito. D'altra parte dalla (5.27)

$$\left| \int_\Omega g_h T_\varrho (u_h - u)\varphi dx \right| \leq M\rho.$$

Questo prova che, per ϱ fissato,

$$\limsup_{h\to\infty} \int_\Omega \left[a(x,u_h,\nabla u_h) - a(x,u_h,\nabla u)\right] \nabla T_\varrho (u_h - u)\ dx \leq M\rho. \tag{5.29}$$

Ora usando (5.8) poniamo

$$z_h(x) = \left[\widetilde{a}(x,u_h,\nabla u_h) - \widetilde{a}(x,u_h,\nabla u)\right](\nabla u_h - \nabla u),$$

Dividendo l'insieme Ω nei seguenti due insiemi

$$S_h = \{x \in \Omega : |u_h(x) - u(x)| \leq \varrho\}, \qquad G_h = \{x \in \Omega : |u_h(x) - u(x)| > \varrho\},$$

e usando la disuguaglianza di Hölder con $0 < \theta < 1$ fissato, abbiamo

$$\int_\Omega z_h(x)^\theta \varphi(x)\, dx = \int_{S_h} z_h(x)^\theta \varphi(x)\, dx + \int_{G_h} z_h(x)^\theta \varphi(x)\, dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{S_h} z_h(x)\,\varphi(x)\, dx\right)^\theta \gamma_n(S_h)^{1-\theta} + \left(\int_{G_h} z_h(x)\,\varphi(x)\, dx\right)^\theta \gamma_n(G_h)^{1-\theta}. \tag{5.30}$$

Si osservi che per ϱ fissato $\gamma_n(G_h)^{1-\theta} \to 0$ quando $h \to \infty$ e da (5.29) la funzione z_h è uniformemente limitata in $L^1(\varphi,\Omega)$. Inoltre si deduce da (5.30) che

$$\limsup_{h\to\infty} \int_\Omega z_h(x)^\theta \varphi(x)\, dx \leq (M\rho)^\theta \gamma_n(\Omega)^{1-\theta}. \tag{5.31}$$

Facendo tendere ρ a 0, la disuguaglianza (5.31) implica che $z_h(x)^\theta \to 0$ forte in $L^1(\varphi,\Omega)$ ed esiste una sottosuccessione, ancora denotata con $(z_h)_h$, tale che

$$z_h(x) \to 0 \quad \forall x \in \Omega - \Omega_0 \quad \text{con} \quad \gamma_n(\Omega_0) = 0. \tag{5.32}$$

L'enunciato segue dal Lemma 5.5 con $F_h = z_h\varphi$. $\square$

5.1.4 Passaggio al limite

Per provare il Teorema 5.4, come già detto, approssimiamo prima i dati del problema (5.1) ottenendo una successione di problemi approssimanti, che sono problemi con operatori coercivi, per cui valgono i risultati di esistenza provati nella prima sottosezione. La stima apriori data dal Lemma 5.7 vale per le soluzioni di questi problemi approssimanti, per cui è possibile passare al limite ottenendo una soluzione del problema (5.1).
Denotiamo con $T_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'usuale troncata al livello $h > 0$, cioè

$$T_h(s) = \begin{cases} s & \text{se} \quad |s| \leq h, \\ \\ \dfrac{s}{|s|}h & \text{se} \quad |s| > h. \end{cases}$$

Consideriamo il problema approssimante

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u_h, \nabla u_h)) + H_h(x, \nabla u_h)\varphi + G_h(x, u_h)\varphi = g\varphi - \operatorname{div}(f\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u_h = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.33}$$

dove

$$H_h(x,\xi) = T_h\left(\widetilde{H}(x,\xi)\right) \quad \text{e} \quad G_h(x,\eta) = T_h\left(\widetilde{G}(x,\eta)\right),$$

e si sono usate le notazioni introdotte in (5.8).
Inoltre osserviamo che

$$|H_h(x,\xi)|\,\varphi(x) \leq h\varphi(x)$$
$$|G_h(x,\eta)|\,\varphi(x) \leq h\varphi(x)$$

per q.o. $x \in \Omega$, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Il problema (5.33) ha almeno una soluzione debole per il Teorema 5.6. Inoltre segue dal Lemma 5.7 che la successione $(u_h)_h$ è limitata in $W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$, quindi esiste una funzione $u \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ e una sottosuccessione, denotata ancora con $(u_h)_h$, tale che

$$\begin{cases} u_h \rightharpoonup u & \text{debole in } W_0^{1,p}(\varphi,\Omega), \\ u_h \to u & \text{forte in } L^p(\varphi,\Omega), \\ u_h \to u & \text{q.o. in } \Omega. \end{cases} \tag{5.34}$$

Osserviamo che, usando (iv), (v) e la stima (5.18), le funzioni $H_h(x, \nabla u_h)$ e $G_h(x, u_h)$ sono uniformemente limitate in $L^1(\varphi, \Omega)$.
Usando il Teorema 5.8 possiamo concludere che per una certa sottosuccessione, denotata ancora con $(u_h)_h$, si ha

$$\nabla u_h \to \nabla u \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{5.35}$$

Ricordando che $a(x, \eta, \xi)$, $H(x, \xi)$ e $G(x, \eta)$ sono funzioni di Carathéodory, dalla (5.35) e (5.34) segue che

$$\begin{cases} \widetilde{a}(x, u_h, \nabla u_h) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla u) \quad \text{q.o. in } \Omega, \\ H_h(x, \nabla u_h) \to \widetilde{H}(x, \nabla u) \quad \text{q.o. in } \Omega, \\ G_h(x, u_h) \to \widetilde{G}(x, u) \quad \text{q.o. in } \Omega, \end{cases}$$

dove si sono usate le notazioni introdotte in (5.8).
Usando (ii),(iv),(v) e la disuguaglianza di Hölder per ogni fissato $s \in [1, p')$ e per ogni sottoinsieme γ_n-misurabile E, si prova che

$$\int_E \left|\widetilde{a}(x, u_h, \nabla u_h)\right|^s \varphi\, dx \le$$

$$\le c_1 \left(\int_E |u_h|^{s(p-1)} \varphi\, dx + \int_E |\nabla u_h|^{s(p-1)} \varphi\, dx + \int_E k_1^s(x) \varphi\, dx \right)$$

$$\le c_1 \left(\int_E |u_h|^p \varphi\, dx \right)^{\frac{s}{p'}} \gamma_n(E)^{1-\frac{s}{p'}} + c_1 \left(\int_E |\nabla u_h|^p \varphi\, dx \right)^{\frac{s}{p'}} \gamma_n(E)^{1-\frac{s}{p'}} + c_1 \int_E k_1^s(x) \varphi\, dx;$$

$$\int_E |H_h(x, \nabla u_h)| \varphi\, dx \le \left(\int_E |b(x)|^p \varphi\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |\nabla u_h|^p \varphi\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} + \int_E k_2(x) \varphi\, dx$$

e

$$\int_E |G_h(x, u_h)| \varphi\, dx \le c_3 \left(\int_E |u_h|^p \varphi\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \gamma_n(E)^{\frac{1}{p}} + c_3 \int_E k_3(x) \varphi\, dx.$$

Dal teorema di Vitali possiamo concludere che

$$\begin{cases} \widetilde{a}(x, u_h, \nabla u_h) \to \widetilde{a}(x, u, \nabla u) \quad \text{forte in } L^s(\varphi, \Omega),\ s \in [1, p'[, \\ H_h(x, \nabla u_h) \to \widetilde{H}(x, \nabla u) \quad \text{forte in } L^1(\varphi, \Omega), \\ G_h(x, u_h) \to \widetilde{G}(x, u) \quad \text{forte in } L^1(\varphi, \Omega). \end{cases} \tag{5.36}$$

Usando (5.36) è possibile passare al limite in

$$\int_\Omega a\left(x, u_h, \nabla u_h\right) \nabla \psi dx + \int_\Omega H_h(x, \nabla u_h)\psi\varphi dx + \int_\Omega G_h(x, \nabla u_h)\psi\varphi dx = \int_\Omega g\psi\varphi dx + \int_\Omega f \nabla\psi\varphi dx, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(\Omega\right),$$

e ottenere

$$\int_\Omega a\left(x, u, \nabla u\right) \nabla \psi dx + \int_\Omega H(x, \nabla u)\psi dx + \int_\Omega G(x, \nabla u)\psi dx = \int_\Omega g\psi\varphi dx + \int_\Omega f \nabla\psi\varphi dx, \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(\Omega\right).$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema 5.4.

5.1.5 Qualche osservazione sull'unicità

In generale non c'è unicità della soluzione del problema (5.1). Mostriamo un controesempio. Sia Ψ una funzione $C^\infty(\Omega)$, $\Psi \neq 0$ e nulla sulla frontiera di Ω. Se $p \geq 4$ ed è pari allora il seguente problema

$$\begin{cases} -\left(\varphi \left|w_{x_1}\right|^{p-2} w_{x_1}\right)_{x_1} + (p-1)\varphi |w_{x_1}|^{p-2}\, \Psi_{x_1 x_1} - \varphi \left|w_{x_1}\right|^{p-2} \Psi_{x_1} x_1 = 0 & \text{in } \Omega^\star \\ \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega^\star \end{cases}$$

ammette due soluzioni: $u = 0$ e $u = \Psi$.

Per particolari problemi del tipo (5.1) nelle ipotesi (*i*)-(*iii*) and (*vii*)-(*viii*) si può dimostrare l'unicità della soluzione.
Precisamente il problema

$$\begin{cases} -\left(\varphi \left|w_{x_1}\right|^{p-2} w_{x_1}\right)_{x_1} = g^\star\varphi - \left(F\left(\Phi(x_1)\right)\varphi\right) & \text{in } \Omega^\star \\ \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega^\star. \end{cases} \tag{5.37}$$

ha un unica soluzione. Con riferimento al Teorema 2.3 di [55] l'unicità della soluzione per tale problema segue dal far vedere che l'operatore L definito da (5.4) è un'applicazione di dualità rispetto a $\phi(r) = r^{p-1}$, cioè
(*a*) $< Lu, u >= \|Lu\|_{W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$,
(*b*) $\|Lu\|_{W^{-1,p'}(\varphi,\Omega)} = \phi\left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)}\right) \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$.

5.2 Risultati di confronto

In questo paragrafo compariamo la soluzione del problema (5.1) con la soluzione di un problema ottenuto simmetrizzando i dati ed il dominio con l'operazione di simmetrizzazione gaussiana che è stata introdotta nel secondo capitolo. Il problema simmetrizzato, definito in un semispazio ed con i coefficienti che dipendono da una sola variabile, è il seguente

$$\begin{cases} -\left(\varphi\,|w_{x_1}|^{p-2}\,w_{x_1}\right)_{x_1} - B\left(\Phi(x_1)\right)\varphi|w_{x_1}|^{p-2}w_{x_1} - k_2^\star\varphi = & \text{in } \Omega^\star \\ \qquad\qquad = g^\star\varphi - \left(F\left(\Phi(x_1)\right)\varphi\right) & \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega^\star. \end{cases} \tag{5.38}$$

Il risultato di confronto che proviamo ci dà una stima puntuale della soluzione del problema (5.1) in termini dei dati perché la soluzione del problema (5.38) può essere esplicitamente scritta.

Teorema 5.9 *Sia* $u \in W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)$ *soluzione del problema* (5.1) *nelle ipotesi* (*i*)-(*viii*) *e sia verificata una delle seguenti condizioni:*
(*a*) $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *è sufficientemente piccola,*
(*b*) $b \in L^{\infty,r}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ *con* $2 < r < \infty$.
Allora abbiamo che

$$u^\star(x_1) \leq w(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega^\star \tag{5.39}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\,\varphi(x)dx \;\leq \int_{\Omega^\star}|\nabla w|^q\,\varphi(x)dx \qquad \textit{per tutti } 0 < q \leq p \tag{5.40}$$

dove

$$\begin{aligned} w\,(x) = \int_\lambda^{x_1}&\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\left\{\exp\left(\frac{\tau^2}{2}\frac{p}{p'}\right)F\left(\Phi\left(\tau\right)\right)+\right. \\ &+\exp\left(\frac{\tau^2}{2}p\right)\int_\tau^{+\infty}\left(g^\star(\sigma)+k_2^\star(\sigma)\right)\exp\left(\int_\tau^\sigma B\left(\Phi(r)\right)dr-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma+ \\ &\left.+\exp\left(\frac{\tau^2}{2}p\right)\int_\tau^{+\infty}F\left(\Phi\left(\sigma\right)\right)B\left(\Phi(\sigma)\right)\exp\left(\int_\tau^\sigma B\left(\Phi(r)\right)dr-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma\right\}^{\frac{p'}{p}}d\tau \end{aligned} \tag{5.41}$$

è la soluzione del problema (5.38) *e* λ *è tale che* $\gamma_n\left(\Omega\right) = \gamma_n\left(\Omega^\star\right)$.

Dimostrazione. Argomentando come nella dimostrazione del Lemma 5.7, da (5.22) ed elevando a $\frac{p'}{p}$, la (5.21) può essere riscritta come

$$\begin{aligned}1\leq(2\pi)^{\frac{p'}{2}}\left(-\mu'(t)\right)\Bigg\{&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}\frac{p}{p'}\right)F(\mu(t))+\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}p\right)\times\\ &\times\int_0^{\mu(t)}\left(g^{\circledast}(s)+k_2^{\circledast}(s)\right)ds+\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(t))^2}{2}p\right)\int_t^{\infty}(F(\mu(\tau))B(\mu(\tau))+\\ &+(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(\mu(\tau))\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(\tau))^2}{2}\right)\int_0^{\mu(\tau)}\left(g^{\circledast}(s)+k_2^{\circledast}(s)\right)ds\Bigg)\left(-\mu'(\tau)\right)\times\\ &\times\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_t^{\tau}B(\mu(r))\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\mu(r))^2}{2}\right)\left(-\mu'(r)\right)dr\right]d\tau\Bigg\}^{\frac{p'}{p}}.\end{aligned}\tag{5.42}$$

Integrando tra 0 e t, (5.42) diventa

$$\begin{aligned}t\leq\int_{\mu(t)}^{\gamma_n(\Omega)}&(2\pi)^{\frac{p'}{2}}\Bigg\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\frac{p}{p'}\right]F(\sigma)+\\ &+\exp\left[\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}p\right]\int_0^{\sigma}\left(g^{\circledast}(s)+k_2^{\circledast}(s)\right)ds+\exp\left[\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}p\right]\times\\ &\times\int_0^{\sigma}\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_r^{\sigma}B(\tau)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)d\tau\right]\times\\ &\times\left(F(r)B(r)+(2\pi)^{\frac{1}{2}}B(r)\exp\left[\frac{\Phi^{-1}(r)^2}{2}\right]\int_0^{r}\left(g^{\circledast}(s)+k_2^{\circledast}(s)\right)ds\right)dr\Bigg\}^{\frac{p'}{p}}d\sigma.\end{aligned}$$

Ora ponendo $\mu(t)=s$, $s=\Phi(x_1)$ ed osservando che

$$\begin{aligned}&\int_{\tau}^{+\infty}B(\Phi(\sigma))\exp\left[\int_{\tau}^{\sigma}B(\Phi(r))\,dr\right]\int_{\sigma}^{+\infty}\left(g^{\star}(r)+k_2^{\star}(r)\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr\,d\sigma=\\ &=-\int_{\tau}^{+\infty}\left(g^{\star}(\sigma)+k_2^{\star}(\sigma)\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma+\\ &\quad+\int_{\tau}^{+\infty}\left(k_2^{\star}(\sigma)+g^{\star}(\sigma)\right)\exp\left(\int_{\tau}^{\sigma}B(\Phi(r))\,dr-\frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma\end{aligned}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
u^{\star}(x) \leq \int_{\lambda}^{x_1} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg\{ & \exp\left(\frac{\tau^2}{2}\frac{p}{p'}\right) F\left(\Phi(\tau)\right) + \\
& + \exp\left(\frac{\tau^2}{2}p\right)\int_{\tau}^{+\infty} F\left(\Phi(\sigma)\right) B\left(\Phi(\sigma)\right)\exp\left(\int_{\tau}^{\sigma} B\left(\Phi(r)\right)dr - \frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma + \\
& + \exp\left(\frac{\tau^2}{2}p\right)\int_{\tau}^{+\infty}\left(g^{\star}(\sigma) + k_2^{\star}(\sigma)\right)\exp\left(\int_{\tau}^{\sigma} B\left(\Phi(r)\right)dr - \frac{\sigma^2}{2}\right)d\sigma\Bigg\}^{\frac{p'}{p}} d\tau,
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

dove λ è tale che $\gamma_n\left(\Omega^{\star}\right) = \gamma_n(\Omega)$ e $\Omega^{\star} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$. Per completare la dimostrazione basta osservare che l'espressione a destra in (5.43) è soluzione del problema (5.38).

Proviamo ora (5.40). Usando la disuguaglianza di Hölder e (5.22) si ha

$$
\begin{aligned}
& -\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^q\varphi(x)dx \leq \left(-\mu'(t)\right)^{1-\frac{q}{p}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^p\varphi(x)dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq \\
& \leq \left(-\mu'(t)\right)\Bigg\{F\left(\mu(t)\right) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu(t)\right)^2}{2}\right)\int_0^{\mu(t)}\left(g^{\circledast} + k_2^{\circledast}\right)ds + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu(t)\right)^2}{2}\right)\int_t^{\infty}\left(F\left(\mu(\tau)\right) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu(\tau)\right)^2}{2}\right)\int_0^{\mu(\tau)}\left(g^{\circledast} + k_2^{\circledast}\right)ds\right) \times \\
& \times B\left(\mu(\tau)\right)\left(-\mu'(\tau)\right)\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_t^{\tau} B\left(\mu(r)\right)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu(r)\right)^2}{2}\right)\left(-\mu'(r)\right)dr\right]d\tau\Bigg\}^{\frac{q}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ l'ultima disuguaglianza diventa

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}|\nabla u|^q\varphi(x)dx \leq \int_0^{\gamma_n(\Omega)} \Bigg\{ & F(s) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right) \times \\
& \times\left(\int_0^s \left(g^{\circledast}(\tau) + k_2^{\circledast}(\tau)\right)d\tau\right) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(s)^2}{2}\right) \times \\
& \times \int_0^s\left(F(\tau) + (2\pi)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right)\int_0^{\tau}\left(g^{\circledast}(\sigma) + k_2^{\circledast}(\sigma)\right)d\sigma\right) \times \\
& \times B(\tau)\exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\int_{\tau}^{s} B(\sigma)\exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2}\right)d\sigma\right]d\tau\Bigg\}^{\frac{q}{p-1}} ds,
\end{aligned}
$$

cioè (5.40). $\square$

5.3 Risultati di regolarità

In questa sezione dimostreremo dei risultati che ci permettono di legare la sommabilità di u con la sommabilità dei dati. Dalle disuguaglianze di Sobolev logaritmiche si ha che se $u \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega)$ è soluzione del problema (5.1), allora u appartiene allo spazio di Lorentz-Zygmund $L^p (\log L)^{\frac{1}{2}} (\varphi, \Omega)$. Noi mostreremo come varia la sommabilità di u al variare della sommabilità dei dati negli spazi di Lorentz-Zygmund $L^{a,q} (\log L)^{\alpha} (\varphi, \Omega)$.
Quando Ω è limitato risultati di regolarità per soluzioni di equazioni ellittiche non lineari degeneri sono ben noti (vedere [8], [7], [15], [19]).

Le desiderate stime della soluzione u del problema in opportuni spazi di Lorentz-Zygmund sono ottenute valutando la norma della funzione w definita da (5.41). Per semplicità considereremo separatamente i casi $f(x) \equiv 0$ e $g(x) \equiv 0$.

Teorema 5.10 *Nelle ipotesi del Teorema* 5.9 *sia* $f(x) \equiv 0$.
(1) Se $g \in L^{\frac{a}{p-1}, \frac{q}{p-1}} (\log L)^{\alpha(p-1) - \frac{p}{2}} (\varphi, \Omega)$ *allora* $u \in L^{a,q} (\log L)^{\alpha} (\varphi, \Omega)$, *dove*

$$\begin{cases} a = p, \\ 1 \le q \le p, \\ \alpha(p-1) - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \ge 0, \end{cases} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{cases} a = p, \\ p < q \le \infty, \\ \alpha(p-1) - \frac{p}{2} + \frac{p-1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

oppure

$$p < a < \infty, \ 1 \le q \le \infty \ \textit{ e } \ -\infty < \alpha < +\infty.$$

Inoltre vale la seguente

$$\|u\|_{L^{a,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} \le C_1 \ \|g\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{a}{p-1}, \frac{q}{p-1}} (\log L)^{\alpha(p-1) - \frac{p}{2}} (\varphi,\Omega)} + C_2. \tag{5.44}$$

(2) Se $g \in L^{\infty, \frac{q}{p-1}} (\log L)^{\alpha(p-1) + \frac{p}{2} - 1} (\varphi, \Omega)$ *allora* $u \in L^{\infty,q} (\log L)^{\alpha} (\varphi, \Omega)$, *dove*

$$\begin{cases} 1 \le q < \infty, \\ \alpha < -\frac{1}{q}, \\ \frac{p-1}{q} + \alpha(p-1) < -\frac{p}{2} + 1, \end{cases} \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{cases} q = \infty, \\ \alpha < 0, \\ \alpha(p-1) < -\frac{p}{2} + 1, \end{cases}$$

e vale la seguente

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\varphi,\Omega)} \le C_3 \ \|g\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\infty, \frac{q}{p-1}} (\log L)^{\alpha(p-1) + \frac{p}{2} - 1} (\varphi,\Omega)} + C_4. \tag{5.45}$$

Le costanti C_1, C_2, C_3 *e* C_4 *dipendono da* $p, a, q, \alpha, \gamma_n(\Omega), \|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *e* $\|k_2\|_{L^{p'}(\varphi,\Omega)}$.

Dimostrazione. Sia $w \in W_0^{1,p}(\varphi, \Omega^\star)$ una soluzione debole del problema (5.38) con $F \equiv 0$. Usando la (2.23) e la (4.24) nel caso (a) oppure la (4.25) nel caso (b), segue che

$$w^\circledast(t) \le c \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma^{p'}(1-\log \sigma)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{s}\right)^\beta \left(g^\circledast(s) + k_2^\circledast(s)\right) ds \right)^{\frac{p'}{p}} d\sigma, \tag{5.46}$$

dove $\beta = c\,\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ se usiamo (4.24) e $\beta = c\varepsilon$ se usiamo (4.25) e c è una costante positiva che dipende solo da p, $\gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ e che può variare da rigo a rigo. Proviamo (5.44) quando $1 \le q < \infty$. Dalla definizione (3.5), usando (5.46), le disuguaglianze (3.7) e (3.6) per un β sufficientemente piccolo, si ha

$$||w||^q_{a,q;\alpha} \le C_1 \,\|g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1},\alpha(p-1)-\frac{p}{2}} + C_2. \tag{5.47}$$

Allora (5.39) e (5.47) implicano (5.44).
Quando $q = \infty$, la disuguaglianza (5.44) segue in maniera analoga rimpiazzando (3.7) con (3.9) e (3.6) con (3.8).
Nel caso *(2)* se $1 \le q < \infty$ la disuguaglianza (5.45) si dimostra allo stesso modo usando la disuguaglianza (3.11), con $\alpha < -\frac{1}{q}$, e (3.6). Quando $q = \infty$ si usa la disuguaglianza (3.13) con $\alpha < 0$ e la disuguaglianza (3.8). □

Teorema 5.11 *Nelle ipotesi del Teorema* 5.9 *sia* $g(x) \equiv 0$.
(1) Se $|f| \in L^{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1}} (\log L)^{(p-1)(\alpha-\frac{1}{2})} (\varphi, \Omega)$ *allora* $u \in L^{a,q} (\log L)^\alpha (\varphi, \Omega)$, *dove*

$$p < a < \infty,\ p \le q \le \infty \ \ e\ \ -\infty < \alpha < +\infty;$$

e vale la seguente

$$\|u\|_{L^{a,q}(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)} \le C_1 \ \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1}}(\log L)^{(p-1)(\alpha-\frac{1}{2})}(\varphi,\Omega)} + C_2. \tag{5.48}$$

(2) Se $|f| \in L^{\infty,\frac{q}{p-1}} (\log L)^{(p-1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} (\varphi, \Omega)$ *allora* $u \in L^{\infty,q} (\log L)^\alpha (\varphi, \Omega)$, *dove*

$$\begin{cases} p \le q < \infty, \\ \alpha < -\frac{1}{q}, \\ (p-1)\left(\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right) < 0, \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} q = \infty, \\ \alpha < 0, \\ (p-1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \le 0; \end{cases}$$

e

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^\alpha(\varphi,\Omega)} \le C_3 \ \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\infty,\frac{q}{p-1}}(\log L)^{(p-1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(\varphi,\Omega)} + C_4. \tag{5.49}$$

Le costanti C_1, C_2, C_3 *e* C_4 *dipendono da* $p, a, q, \alpha, \gamma_n(\Omega), \|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ *e* $\|k_2\|_{L^{p'}(\varphi,\Omega)}$.

Dimostrazione. Iniziamo con il ricordare che la soluzione del problema (5.1) con $g \equiv 0$ è

$$w^{\circledast}(t) = (2\pi)^{\frac{p'}{2}} \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \left\{ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2} \frac{p}{p'} \right] F(\sigma) + \right. \tag{5.50}$$

$$+\exp\left[\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2} p\right] \int_0^\sigma \exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_r^\sigma B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] B(r) F(r) dr +$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\sigma)^2}{2} p\right) \int_0^\sigma \exp\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_r^\sigma B(\tau) \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(\tau)^2}{2}\right) d\tau\right] k_2^{\circledast}(r) dr \right\}^{\frac{p'}{p}} d\sigma.$$

Denoteremo con c una costante positiva che dipende solo da p, $\gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ e che può variare da rigo a rigo.

Usando (2.23) e (4.24), nel caso (a), oppure (4.25), nel caso (b), segue che

$$w^{\circledast}(t) \le c\,(w_1(t) + w_2(t) + w_3(t))$$

con

$$w_1(t) = \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(F(\sigma)\right)^{\frac{p'}{p}} d\sigma,$$

$$w_2(t) = \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma^{p'}(1-\log\sigma)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{r}\right)^\beta B(r) F(r) dr\right)^{\frac{p'}{p}} d\sigma$$

e

$$w_3(t) = \int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma^{p'}(1-\log\sigma)^{\frac{p'}{2}}} \left(\int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{r}\right)^\beta k_2^{\circledast}(r) dr\right)^{\frac{p'}{p}} d\sigma,$$

dove $\beta = c\,\|b\|$ se usiamo (4.24) e $\beta = c\varepsilon$ se usiamo (4.25).

Proviamo prima (5.48) quando $p \le q < \infty$. Gli argomenti usati nella dimostrazione del precedente teorema mostrano che

$$\|w_3\|_{a,q;\alpha} \le c\,\|k_2\|_{L^{p'}(\varphi,\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}, \tag{5.51}$$

e

$$\|w_2\|_{a,q;\alpha}^q \le c\,\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}^{\frac{q}{p-1}} \|f\|_{L^{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1}}(\log L)^{(p-1)(\alpha-\frac{1}{2})}(\varphi,\Omega)}^{\frac{q}{p-1}}. \tag{5.52}$$

Osserviamo che integrando per parti, usando la disuguaglianza Hardy-Littlewood (1.5) si ha

$$w_1(t) \le c \frac{||F||_{L^{\frac{1}{p-1}}(\Omega^{\circledast})}^{\frac{1}{p-1}}}{\gamma_n(\Omega)\,(1-\log\gamma_n(\Omega))^{\frac{1}{2}}} + c\int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{\int_0^\sigma (F^*(s))^{\frac{1}{p-1}} ds}{\sigma^2\,(1-\log\sigma)^{\frac{1}{2}}} d\sigma \tag{5.53}$$

Dalla (5.53), usando la disuguaglianza (3.7) e (3.6) e la Proposizione 3.11, si ha

$$
\begin{aligned}
\|w_1\|_{a,q;\alpha} \leq & \; c||F||^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{1}{p-1}}(\Omega^{\circledast})} \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} t^{\frac{q}{a}} (1-\log t)^{\alpha q} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \\
& + c \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} t^{\frac{q}{a}} (1-\log t)^{\alpha q} \left(\int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{\int_0^{\sigma} (F^*(s))^{\frac{1}{p-1}} ds}{\sigma^2 (1-\log \sigma)^{\frac{1}{2}}} d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq c||F||^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1}}(\log L)^{(p-1)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(\Omega^{\circledast})} + c \left(\int_0^{\gamma_n(\Omega)} t^{\frac{q}{a}-q} (1-\log t)^{\alpha q - \frac{q}{2}} \left(\int_0^t (F^*(\sigma))^{\frac{1}{p-1}} d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq c \, \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{\frac{a}{p-1},\frac{q}{p-1}}(\log L)^{(p-1)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(\varphi,\Omega)} . \qquad (5.54)
\end{aligned}
$$

Sfruttando (5.39), l'asserto segue da (5.54), (5.52) e (5.51).
La stima (5.48) quando $q = \infty$ e la stima (5.49) si dimostrano con simili argomenti. □

Osservazione 5.12 Ricalcando le dimostrazioni del Teorema 5.10 e del Teorema 5.11 si possono ottenere risultati analoghi per il problema (5.1) con entrambi i termini noti non nulli.

Osservazione 5.13 Nella dimostrazione del Lemma 5.7 se si sostituisce l'ipotesi (iv) con l'ipotesi

(iv)' $|H(x,\xi)| \leq (b(x)\,|\xi|^{\sigma} + k_2(x))\,\varphi(x)$

q.o. $x \in \Omega, \forall \xi \in R^n$, $\sigma \in [0, p-1[$, $b(x) \in L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ e $k_2(x) \in L^{p'}(\varphi,\Omega)$,

si può mostrare una stima del tipo (5.18) senza ne l'ipotesi di piccolezza su $\|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ ne l'ipotesi $b \in L^{\infty,r}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ con $2 < r < \infty$. Precisamente si dimostra che vale la seguente stima

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\varphi,\Omega)} \leq C_1 \|f\|^{p-1}_{L^{p'}(\varphi,\Omega)} + C_2 \|g\|^{p-1}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + C_3 \|k_2\|^{p'}_{L^{p'}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)} + C_4, \qquad (5.55)$$

dove C_1, C_2, C_3 e C_4 sono costanti non negative che dipendono solo da p, $\gamma_n(\Omega)$ e $\|b\|_{L^{\infty}(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$.
In questo caso dalla (5.55) si può mostrare un risultato di esistenza con una lieve modifica della dimostrazione del Teorema 5.4 e possono essere ottenuti risultati di confronto e regolarità osservando che

$$|\nabla u|^{\sigma} \leq \left(|\nabla u|^{p-1} + 1 \right).$$

Osservazione 5.14 Con le tecniche usate in questo capitolo si possono provare risultati di esistenza, confronto e regolarità per il seguente problema

$$\begin{cases} -\text{div }\ (a(x,u,\nabla u)) - \text{div }\ (K(x,u)) + G(x,u) = g\varphi - \text{div }\ (f\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.56}$$

dove $K : \Omega \times R \to R^n$ è una funzione di Carathéodory tale che
(ix) $|K(x,\eta)| \leq \left(d(x)\,|\eta|^{p-1} + k_4\,(x)\right)\varphi(x)$

q.o. $x \in \Omega$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $d(x)$, $k_4(x) \geq 0$, $d(x) \in L^\infty\,(\log L)^{-\frac{1}{2}}\,(\varphi,\Omega)$ e $k_4\,(x) \in L^{p'}\,(\varphi,\Omega)$, nell'ipotesi che gli altri termini dell'equazione verifichino (i)-(iii) e (v)-$(viii)$.

Capitolo 6

Equazioni ellittiche e misure di Boltzmann

Una misura di Boltzmann è una misura di probabilità tale che

$$\mu\,(dx) = Z^{-1} \exp\left(-W(x)\right) dx, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n$$

dove Z^{-1} è il fattore normalizzante e $W(x)$ è una funzione regolare, ad esempio C^2, tale che $\exp\left(-W(x)\right)$ sia sommabile. Può essere descritta come la misura invariante del generatore $L = \frac{1}{2}\triangle - \frac{1}{2}\nabla W \nabla$. L'operatore L è il generatore del semigruppo del processo di Kolmogorov soluzione di una particolare equazione istocastica. Se $W(x) = -\frac{|x|^2}{2}$, μ è la misura di Gauss standard n-dimensionale su $\mathbb{R}^n$, corrispondente ai processi di Ornstein-Uhlenbeck.

6.1 Nozioni e risultati preliminari

Denotiamo con $W''(x)$ la matrice Hessiana di W in $x \in \mathbb{R}^n$. Per queste misure di probabilità vale una disuguaglianza isoperietrica non ottimale.

Teorema 6.1 ([59]) *Assumiamo che per una certa costante $c > 0$,*

$$W''(x) \geq cI \tag{6.1}$$

uniformemente in x. Allora per ogni insieme di Borel A di $\mathbb{R}^n$

$$\mu^+(\partial A) \geq \sqrt{c}\,\varphi_1\left(\Phi^{-1}(\mu(A))\right), \tag{6.2}$$

dove μ^+ è il contenuto di Minkowski rispetto a μ definito in (2.37).

In maniera equivalente si può dire che nelle ipotesi del Teorema 6.1 per ogni insieme di Borel A di $\mathbb{R}^n$

$$\mu^+(\partial A) \geq \sqrt{c}\ \gamma_n^+(\partial A^\blacklozenge), \tag{6.3}$$

dove $A^\blacklozenge$ è il semispazio che ha misura di Gauss $\gamma_n(A^\blacklozenge) = \mu(A)$ e γ_n^+ è il contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss.
Per semplicità consideriamo semispazi ortogonali alla direzione e_1 di $\mathbb{R}^n$, cioè

$$A^\blacklozenge = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \omega\},$$

dove $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è tale che $\gamma_n(A^\blacklozenge) = \mu(A)$.
Se definiamo il perimetro rispetto alla misura di Boltzmann di un sottoinsieme $(n-1)$-rettificabile E di $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo

$$P_\mu(E) = \int_{\partial E} Z^{-1} \exp(-W(x))\ d\mathcal{H}_{n-1}(dx),$$

la disuguaglianza (6.3) implica la seguente disuguaglianza isoperimetrica:

Proposizione 6.2 *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $(n-1)$-rettificabile, allora*

$$P_\mu(E) \geq P_\mu(A^\blacklozenge), \tag{6.4}$$

dove $A^\blacklozenge$ è un semispazio che ha he ha misura di Gauss $\gamma_n(A^\blacklozenge) = \mu(A)$.

Osservazione 6.3 Sia F una funzione lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ con costante $\sqrt{c}$. Allora la misura immagine ν di μ per mezzo di F, è una contrazione della misura di Gauss canonica su $\mathbb{R}$. In particolare in dimensione 1 ogni misura soddisfacente le ipotesi del Teorema 6.1 è immagine della misura di Gauss canonica per mezzo di una funzione lipschitziana.

Le misure di Boltzmann soddisfano una disuguaglianza di Sobolev logaritmica.

Teorema 6.4 ([59]) *Nelle ipotesi del Teorema 6.1 la misura μ soddisfa una disuguaglianza di Sobolev logaritmica*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \log|u|\, \mu(dx) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla u, \nabla u > \mu(dx) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^2 \mu(dx) \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \mu(dx)\right) \tag{6.5}$$

per ogni funzione $u \in H^1(\mu, \mathbb{R}^n)$[1].

La precedente proposizione garantisce che una funzione $u \in L^2(\mu,\Omega)$[2] con $\nabla u \in L^2(\mu,\Omega)$ è tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2 \log|u|\,\mu(dx) < +\infty,$$

che equivale a dire che u appartiene allo spazio di Zygmund $L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)$.
Diamo le nozioni di riordinamento relative alle misure di Boltzmann. Se u è una funzione misurabile su Ω, in accordo con la (1.3), denotiamo con

- u° il riordinamento decrescente di u rispetto alla misura μ, i.e.

$$u^\circ(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu_u(t) \leq s\} \qquad s \in \left]0,1\right],$$

dove $\mu_u(t) = \mu(\{x \in \Omega : |u| > t\})$ è la funzione distribuzione di u.
In analogia alla definizione di riodinamento rispetto alla misura di Gauss definiamo

- $u^\blacklozenge$ il riordinamento di u rispetto alla misura di Boltzmann, i.e.

$$u^\blacklozenge(x) = u^\circ(\Phi(x_1)) \qquad x \in \Omega^\blacklozenge = \{x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \omega\},$$

dove $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è tale che $\gamma_n(A^\blacklozenge) = \mu(A)$.
Per la funzione u° valgono le proprietà descritte nel primo capitolo per i riordinamenti decrescenti.
Dalla sua definizione è ovvio che $u^\blacklozenge$ è una funzione di una sola variabile, crescente e definita in un semispazio. Osserviamo, inoltre, che gli insiemi di livello di $u^\blacklozenge$ sono i semispazi $\{x \in \Omega : |u| > t\}^\blacklozenge$ per cui

$$\gamma_n(\left\{x \in \Omega : \left|u^\blacklozenge\right| > t\right\}) = \mu(\{x \in \Omega : |u| > t\}),$$

quindi $u^\blacklozenge$ è un riordinamento di u secondo la Definizione 1.3. Allora dalla (1.2) segue che

[1] Con $H^1(\mu,\mathbb{R}^n)$ denotiamo lo spazio di Sobolev delle funzioni u misurabili per cui

$$\int |\nabla u|^2 \mu(dx) < +\infty.$$

[2] Indichiamo con $L^p(\mu,\Omega)$, $1 < p < +\infty$, lo spazio costituito dalle funzioni misurabili per cui

$$\|u\|_{L^p(\mu,\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$$\|u\|_{L^p(\mu,\Omega)} = \left\|u^{\circ}\right\|_{L^p(0,\mu(\Omega))} = \left\|u^{\blacklozenge}\right\|_{L^p(\varphi,\Omega^{\blacklozenge})}.$$

Per quanto visto nel primo capitolo se $u\,(x)$ e $v\,(x)$ sono due funzioni misurabili vale la seguente disuguaglianza di tipo Hardy-Littlewood

$$\int_{\Omega} |u\,(x)\,v\,(x)|\ \ \mu\,(dx) \leq \int_0^{\mu(\Omega)} u^{\circ}\,(s)\,v^{\circ}\,(s)\ \ ds = \int_{\Omega^{\blacklozenge}} u^{\blacklozenge}\,(x)\,v^{\blacklozenge}\,(x)\ \ \gamma_n\,(dx)\,. \tag{6.6}$$

Per la norma L^p del gradiente $|\nabla u|$ vale una disuguaglianza tipo Polya-Szëgo.

Proposizione 6.5 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in W_0^{1,p}(\mu,\Omega)^3, 1 \leq p < \infty$, allora $u^{\blacklozenge} \in W_0^1, p(\varphi,\Omega^{\blacklozenge})$ e si ha*

$$\left\|\nabla u^{\blacklozenge}\right\|_{L^p(\varphi,\Omega^{\blacklozenge})} \leq \left(\sqrt{c}\right)^p \|\nabla u\|_{L^p(\mu,\Omega)}\,. \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Seguendo la linea di [83] si dimostra che

$$\int_{\Omega} |\nabla u\,(x)|^p\ \ \mu\,(dx) \geq \int_0^{\infty} \left(\sqrt{c}\ \varphi_1\left(\Phi^{-1}(s)\right)\left(-\frac{d}{ds}u^{\circ}\,(s)\right)\right)^p$$

L'asserto segue perché

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{c}\varphi_1 \circ \Phi^{-1}(s)\left(-\frac{d}{ds}u^{\circ}\,(s)\right)\right)^p = \left(\sqrt{c}\right)^p \int_{\Omega} \left(\left|\nabla u^{\blacklozenge}\,(x)\right|\right)^p \varphi(x)\ dx,$$

in quanto

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u^{\blacklozenge}\,(x_1) = -\frac{d}{ds}u^{\circ}\,(s)|_{s=\Phi(x_1)}\varphi_1(x_1).$$

□

Ė possibile dimostrare una disuguaglianza tipo Poincarè usando la disuguaglianza (6.7) e procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 4.1 .

Proposizione 6.6 *Nell'ipotesi che Ω sia un aperto di R^n con $\mu\,(\Omega) < 1$, per ogni funzione $u \in W_0^{1,p}\,(\mu,\Omega)\,,\ 1 \leq p < \infty$, vale la seguente disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^p(\mu,\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\mu,\Omega)}\,,$$

con C constante dipendente da p e $\mu(\Omega)$.

[3] Per $1 \leq p < \infty$ indichiamo con $W_0^{1,p}\,(\mu,\Omega)$ la chiusura di $C_0^{\infty}\,(\Omega)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\mu\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u\,(x)|^p\ \ \mu\,(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

È inoltre possibile dimostrare delle disuguaglianze tra le norme di u e del suo gradiente che rispecchiano le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche.

Proposizione 6.7 *Se* $|\nabla f| \in L^p(\mu,\Omega), 1 \leq p < \infty,$ *allora* $f \in L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\log L)^{\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)} \leq C_1 \|\nabla f\|_{L^p(\mu,\Omega)}. \tag{6.8}$$

Se $|\nabla f| \in L^\infty(\Omega)$ *allora* $f \in L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)} \leq C_2 \|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{6.9}$$

In entrambi i casi le costanti C_1, C_2 *dipendono da* p *e* $\mu(\Omega)$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si proceda come nella Proposizione 3.22. □

Le nozioni introdotte saranno usate per studiare un'equazione di tipo ellittico legata alle misure di Boltzmann.

6.2 Risultati di confronto e di regolarità

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} = gZ^{-1}e^{-W(x)} & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.10}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $W(x)$ soddisfa (6.1) e $a_{ij}(x)$ per $i,j = 1,..,n$ sono funzioni misurabili su Ω tali che

(i) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq Z^{-1}e^{-W(x)}|\xi|^2$ per q.o. $x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $\frac{a_{ij}(x)}{Z^{-1}e^{-W(x)}} \in L^\infty(\Omega)$,
(iii) $g(x) \in L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)$.

E' naturale cercare soluzioni nello spazio di Sobolev pesato $H_0^1(\mu,\Omega)$, chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{H_0^1(\mu,\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \ \mu(dx)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diremo che $u \in H_0^1(\mu,\Omega)$ è una soluzione debole del problema (6.10), se

$$\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}\zeta_{x_j}dx = \int_\Omega g\zeta\mu\,(dx) \qquad \forall\zeta \in H_0^1(\mu,\Omega). \tag{6.11}$$

Notiamo che nelle ipotesi (i)-(iii), usando le disuguaglianza di Hardy-Littlewood (6.6) e di Hölder, si fa vedere che tutti i termini in (6.11) sono ben definiti.
L'esistenza di un'unica soluzione nelle ipotesi (i)-(iii) è, ad esempio, garantita dal teorema di Lax-Milgram.
Il teorema che segue fornisce un confronto della soluzione del problema (6.10) con la soluzione di un problema più semplice definito in un semispazio i cui dati dipendono da una sola variabile.

Teorema 6.8 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $\mu(\Omega) < 1$ e sia $u \in H_0^1(\mu,\Omega)$ soluzione del problema* (6.10) *nelle ipotesi (i)-(iii). Sia $v(x) = v^\blacklozenge(x)$ la soluzione del problema*

$$\begin{cases} -(v_{x_1}\varphi(x))_{x_1} = g^\blacklozenge(x_1)\varphi(x) & \text{in } \Omega^\blacklozenge \\ \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^\blacklozenge, \end{cases} \tag{6.12}$$

dove $\Omega^\blacklozenge$ è il semispazio $\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \omega\}$, con $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $\mu(\Omega) = \gamma_n(\Omega^\blacklozenge)$
Allora

$$u^\blacklozenge(x_1) \leq \frac{1}{c}v^\blacklozenge(x_1) = \frac{1}{c}v(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega^\blacklozenge, \tag{6.13}$$

dove

$$v^\blacklozenge(x_1) = \int_\lambda^{x_1} \exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right)\int_\tau^\infty g^\blacklozenge(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dyd\tau.$$

Inoltre si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^q\,\mu\,(dx) \leq \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{q}{2}}\int_{\Omega^\blacklozenge} |\nabla v|^q\,\mu\,(dx) \qquad \text{per } 0 < q \leq 2. \tag{6.14}$$

Dimostrazione. Sia $h > 0$ e $t \in [0, \sup|u|[$. Se prendiamo

$$\psi(x) = \begin{cases} h \text{ sign } u & \text{if } |u| > t+h \\ (|u|-t)\text{ sign } u & \text{if } t < |u| \leq t+h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

in (6.11), allora si ha

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_{t<|u|\leq t+h} a_{ij}(x)\ u_{x_i}u_{x_j}\ dx = \\ &= \frac{1}{h}\int_{t<|u|\leq t+h} g(x)Z^{-1}e^{-W(x)}\left(|u|-t\right)\text{sign }u\ dx+ \\ &+\int_{|u|>t+h} g(x)Z^{-1}e^{-W(x)}\text{sign }u\ dx\end{aligned}$$

Nelle ipotesi (i), mandando $h \to 0$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\,Z^{-1}e^{-W(x)}\ dx\leq\int_{|u|>t} g(x)Z^{-1}e^{-W(x)}\text{sign }u\ dx. \tag{6.15}$$

D'altra parte la formula di coarea (si veda [46]) e la disuguaglianza isoperimetrica (6.2) implicano

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|\,Z^{-1}e^{-W(x)}\ dx\geq\sqrt{c}\int_{\partial\{|u|>t\}^{\blacklozenge}}\varphi(x)\mathcal{H}_{n-1}(dx)=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2}{2}\right) \tag{6.16}$$

dove $\{|u|>t\}^{\blacklozenge}$ è il semispazio avente misura di Gauss $\mu_u(t)$.
Allora usando (6.16) e la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$1\leq\left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2}{2}\right)\left(-\mu_u'(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t}|\nabla u|^2\,Z^{-1}e^{-W(x)}\ dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.17}$$

Usando (6.17) e (6.15) segue

$$1\leq\left(\frac{2\pi}{c}\right)\exp\left(\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2\right)\left(-\mu_u'(t)\right)\int_0^{\mu(t)} g^{\circ}(s)ds.$$

Integrando tra 0 e t otteniamo

$$t\leq\int_0^t\left(\frac{2\pi}{c}\right)\exp\left(\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2\right)\left(-\mu_u'(t)\right)\int_0^{\mu(t)} g^{\circ}(s)dsdt.$$

Ponendo $\mu_u\left(t\right)=\sigma$

$$u^{\circ}(s)\leq\left(\frac{2\pi}{c}\right)\int_s^{\mu(\Omega)}\exp\left(\Phi^{-1}\left(\sigma\right)^2\right)\int_0^{\sigma} g^{\circ}(s)dsd\sigma=v^{\circ}(s)$$

per quasi ogni $0<s\leq\mu(\Omega)$, cioè

$$u^{\blacklozenge}(x_1)\leq\frac{1}{c}\int_{\lambda}^{x_1}\exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right)\int_{\tau}^{\infty} g^{\blacklozenge}(y)dyd\tau=\frac{1}{c}v^{\blacklozenge}(x_1)$$

Usando la disuguaglianza di Hölder e la (6.15) si ha per $0 < q \leq 2$

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} |\nabla u|^q \ \mu\,(dx) \leq \left(\int_{|u|>t} g(x)\psi(x)\ dx\right)^{\frac{q}{2}} \left(-\mu_u'(t)\right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

Per la disuguaglianza di Hardy-Littlewood e usando (6.17) si ha

$$-\frac{d}{dt}\int_{|u|>t} |\nabla u|^q \,\mu\,(dx) \leq \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{q}{2}} \exp\left(q\frac{\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2}{2}\right)\left(\int_0^{\mu_u(t)} g^{\circ}(s)ds\right)^q \left(-\mu_u'(t)\right).$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^q \,\mu\,(dx) &\leq \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^{+\infty} \exp\left(q\frac{\Phi^{-1}\left(\mu_u\left(t\right)\right)^2}{2}\right)\left(\int_0^{\mu_u(t)} g^{\circ}(s)ds\right)^q \left(-\mu_u'(t)\right)dt \\ &= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{q}{2}} \int_0^{\mu(\Omega)} \exp\left(q\frac{\Phi^{-1}\left(r\right)^2}{2}\right)\left(\int_0^{r} g^{\circ}(s)ds\right)^q d\tau \\ &= \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{q}{2}} \int_\lambda^{\infty} \left(\exp\left(\frac{x_1^2}{2}\right)\int_\tau^\infty g^{\blacklozenge}(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right)^q \varphi(x_1)dx_1.\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 6.9 Osserviamo che il problema (6.12) verifica una condizione di ellitticità diversa rispetto al problema di partenza. Se μ è la misura di Gauss si ritrovano i risultati del Capitolo 4.

Usando sempre la nozione di riordinamento e la disuguaglianza isoperimetrica relativa alla misura in questione si riesce a dimostrare la seguente stima (cfr. Proposizione 4.7)

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mu,\Omega)} \leq C\ \ \|g\|_{L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)}$$

per una certa costante C dipendente solo da $\mu\,(\Omega)$. Tale stima ci garantisce che nelle ipotesi (i)-(ii) la (iii) è condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione.
Dalla disuguaglianza (6.5) segue subito che se $u \in H_0^1(\mu,\Omega)$ è soluzione del problema (6.10) allora $u \in L^2\left(\log L\right)^{-\frac{1}{2}}(\mu,\Omega)$.
Per comodità del lettore definiamo gli spazi di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}\left(\log L\right)^{\alpha}(\mu,\Omega)$ rispetto alla misura di Bolzmann (cfr. § 3.1).

Definizione 6.10 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $0 < p, q < \infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$. Lo spazio di Lorentz-Zygmund $L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)$ è l'insieme delle funzioni misurabili in Ω per le quali risulta finita la seguente quantità:*

$$||u||_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\mu(\Omega)} \left[t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^{\alpha} f^{\circ}(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & se\ 0 < q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t\in(0,\mu(\Omega))} \left[t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^{\alpha} f^{\circ}(t)\right] & se\ q = \infty. \end{cases} \tag{6.18}$$

Ora studiamo come varia la sommabilità della soluzione u al variare della sommabilità del dato negli spazi di Lorentz-Zygmund.

Teorema 6.11 *Supponiamo di essere nelle ipotesi del Teorema 6.8 e sia $g \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)$.*
(a) Se $p \neq +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$ allora $u \in L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\mu,\Omega)$. Inoltre

$$\|u\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\mu,\Omega)} \leq C_1 \ \|g\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)}\,. \tag{6.19}$$

(b) Se $p = +\infty$,

$$1 \leq q < +\infty \ \ e\ \alpha + \frac{1}{q} < 0,$$
$$q = +\infty \ \ e\ \alpha \leq 0,$$

allora $u \in L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)$. Inoltre

$$\|u\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)} \leq C_2 \ \|g\|_{L^{\infty,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)}\,. \tag{6.20}$$

Le costanti C_1, C_2 dipendono da p, q, α e $\mu(\Omega)$.

Dimostrazione. Proviamo il risultato (a) quando $1 \leq q < \infty$. Dalla definizione (6.18) e usando la disuguaglianza di Hardy (3.7) si ha

$$\begin{aligned} &||v||^q_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha+1}(\varphi,\Omega^\blacklozenge)} \\ &\leq C\int_0^{\gamma_n(\Omega^\blacklozenge)} \left(t^{\frac{1}{p}}(1-\log t)^{\alpha+1}\int_t^{\gamma_n(\Omega)} \frac{1}{\sigma^2(1-\log\sigma)}\int_0^{\sigma} g^{\circ}(s)ds\, d\sigma\right)^q \frac{dt}{t} \\ &\leq C\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}-1}(1-\log t)^{\alpha}\int_0^t g^{\circ}(s)ds\right)^q \frac{dt}{t} = C\,\|g\|_{L^{p,q}(\log L)^{\alpha}(\mu,\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Dal confronto del teorema precedente e dall'ultima disuguaglianza si ricava (6.19). Usando opportunamente una delle disuguaglianze di Hardy segue l'asserto negli altri casi. □

Osservazione 6.12 Procedendo come nei Capitoli 4 e 5 si possono dimostrare risultati di esistenza, confronto e regolarità di problemi del tipo (6.10) anche non lineari e con termini di ordine inferiore.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *General Logarithmic Sobolev Inequaliies and Orlicz Imbeddings,* Journal of Funtional Analysis 34, 292-303, (1979).

[2] S. Aida, T. Masuda, I. Shigekawa, *Logarithmic Sobolev Inequalities and Exponential integrability,* J. Funct. Anal. 126 (1994), no. 1, 83–101.

[3] A. Alvino, *Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz,* Boll. Un. Mat. Ital. A (5) 14 (1977), no. 1, 148–156.

[4] A. Alvino, P. L. Lions, G. Trombetti, *On optimization problems with prescribed rearrangement,* Nonlinear Anal. T.M.A. 13,185-220, (1989).

[5] A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization*, Ann. Inst. H. Poincarè Anal. non linéaire, 7 (1990), 37-65.

[6] A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti, *Comparison result for elliptic and parabolic equations: a new approach,* Differential and Integral equations (4), 1, (1991), 25-50.

[7] A. Alvino, G. Trombetti, *Equazioni ellittiche con termini di ordine inferiore e riordinamenti*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nater. Rend. Lincei (8) 66 (1979), pp. 194-200.

[8] A. Alvino, G. Trombetti, *Su una classe di equazioni ellittiche non lineari degeneri*, Ricerche Mat., 29 (1980), 193-212.

[9] A. Alvino, G. Trombetti, *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri*, Ricerche Mat. 27,413-428, (1978).

[10] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and applications*, Pitman London, 1980.

[11] F.Barthe, B. Maurey, *Some remark on isoperimetry of Gaussian type,* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 36 (2000),4,419-434.

[12] F.Barthe, *Extremal properties of central Half-spaces for product measure,* J. Funct. Anal. 182 (2001), no. 1, 81–107.

[13] C. Bennet, K. Rudnick, *On Lorentz-Zygmund spaces,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 175 (1980), 67.

[14] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolations of Operator,* Pure and Applied Mathematics, 129. Accademic Press, Inc. Boston, MA, 1988.

[15] M.F. Betta, *Estimates for solutions of nonlinear degenerate elliptic equations*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena XLV, 449-470, (1997).

[16] M. F. Betta, F. Chiacchio, A. Ferone, *Isoperimetric estimates for the first eigenfunction of a class of linear elliptic problems,* ZAMP, in corso di stampa.

[17] M. F. Betta, F. Brock, A. Mercaldo, M. R. Posteraro, *A weighted isoperimetric inquality and application to symmetrization*, J. Inequal. Appl., 4 (1999), 215-240.

[18] M. F. Betta, F. Brock, A. Mercaldo, M. R. Posteraro, *A comparison related to Gauss measure,* C. R. Acad. Sci. Paris, 334, Serie I, (2002), 451-456.

[19] M.F. Betta, V. Ferone, A. Mercaldo, *Regualrity for solutions of nonlinear elliptic equation*, Rend. Mat. Appl. 7, 11, 737-759, (1991).

[20] S.G. Bobkov, *Extremal properties of half-space for log-concave distributions,* Ann. Probab. 24 (1996), no. 1, 35–48.

[21] S.G. Bobkov, *An isoperimetric inequality on the discrete cube and an elementary proof of the isoperimetric inequality in gauss,* Ann. Probability 25, 206-214, (1997).

[22] S.G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures,* Ann. Probab. 27 (1999), no. 4, 1903–1921.

[23] S.G. Bobkov, C. Houdré, *Some connection between isoperimetric and sobolev-type inequalities,* Mem. Amer. Math. Soc. 129 (1997), no. 616.

[24] S.G. Bobkov, C. Houdré, *Caracterization of gaussian measures by isoperimetric property of half-spaces,* Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 228 (1996), Veroyatn. i Stat. 1, 31–38, 356; translation in J. Math. Sci. (New York) 93 (1999), no. 3, 270–275

[25] L. Boccardo, F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear Anal. 19 (1992), 581-597.

[26] V. Bogachev, *Gaussian measure,* Mathematical Surveys and Monographs, 62. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998

[27] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space,* Invent. Math. 30, 207-216, (1975).

[28] C. Borell, *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process,* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70 (1985), no. 1, 1–13.

[29] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori ed., Napoli, (1986).

[30] Brothers J., Ziemer W.P., *Minimal rearrangements of Sobolev functions,* J. Reine Angew. Math.384 (1988), 153-179.

[31] E. A. Carlen, C. Kerce, *On the cases of equality in Bobkov's inequality and gaussian rearrangement,* Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), no. 1, 1–18.

[32] F. Chiacchio, *Comparison results for linear parabolic equations in unbounded domains via Gaussian symmetrization,* Differential Interal Equations 17 (2004), 241-258.

[33] G. Chiti, *Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche*, Boll. U.M.I. 5, 16-A,178-185, (1979).

[34] K. M. Chong, N. M. Rice, *Equimisurable rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine Angew. Math. 384,153-179, (1988).

[35] G. di Blasio, *Linear Elliptic equations and Gauss measure,* in fase di stampa su J.I.P.A.M.

[36] G. Da Prato, J. Zabcyk, *Ergodicity for infinite-dimensional systems,* London Mathematical Society Lecture Note Series, 229.

[37] Del Vecchio, *Nonlinear elliptic equations with measure data*, Potential Anal., 4 (1995), 185–203.

[38] T. Del Vecchio, M. M. Porzio, *Existence results for a class of non coercive Dirichlet problems*, Ricerche Mat. 44 (1995), 421-438.

[39] T. Del Vecchio, M. R. Posteraro, *An existence result for nonlinear and noncoercive problems*, Nonlinear Anal. 31 (1998), 191–206.

[40] G. di Blasio, F. Feo, M.R. Posteraro, *Regularity results for degenerate elliptic equations related to Gauss measure,* in fase di stampa su Mathematical Inequalities and Applications.

[41] A. Ehrhard, *Une dèmostratio de l'inègalitè de Borell,* Ann. Scientifiques de l'Univesitè de Clermont-Ferrand 69, 165-184, (1981).

[42] A. Ehrhard, *Symètrisation dans l'espace de Gauss,* Math. Scand. 53, 281-301, (1983).

[43] A. Ehrhard, *Inégalités isoperimétriques et intégrales de Dirichlet Gaussiennes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^{e} sèrie, t. 17, 317-332, (1984).

[44] A. Ehrhard, *Sur l'inegalite de Sobolev logarithmique de Gross*, Seminar on probability, XVIII, Lecture Notes in Math. 1059, 194-196, Springer, Berlin, (1984).

[45] A. Ehrhard, *Elements extremaux pour les inegualities de Brunn-Minkowski gaussiennes,* Ann. Inst. Henri Poincaré 22, 149-168, (1986).

[46] H. Federer, *Geometric Measure Theory,* Springer-Varlag, (1969).

[47] G. F. Feissner, *Hypercontractive semigroup and Sobolev's inequality,* Trans. Amer. Math. Soc. 210 (1975), 51–62.

[48] V. Ferone, M. R. Posteraro, *Symmetrization results for elliptic equations with lower-rder terms*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 39, 47-61, (1991).

[49] A. Ferone, R. Volpicelli, *Some relations between pseudo-rearrangement and relative rearrangement,* Nonlinear anaysis 41, 855-869, (2000).

[50] E. Giarrusso, D. Nunziante, *Regularity theorems in limit cases for solutions of linear and nonlinear elliptic equations*, Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste 20, 39-58, (1988).

[51] E. Giarrusso, G. Trombetti, *Regularity theorems in limit cases for solutions of linear and nonlinear elliptic equations*, Bull. Austr. Math. Soc. 36, 425-434, (1987).

[52] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities,* Amer. J. Math. 97, 1061-1083, (1976).

[53] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities,* cambridge University Press, cambrige, (1964).

[54] B. Kawhol, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE,* Lecture Notes in Math. 1150, Springer Verlag, Berlin-New York, (1985).

[55] J.-L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires,* Paris Gauthier-Villars (1968).

[56] M. Ledoux, *Isopérimétric et inégalités de Sobolev logarithmiques gaussiennes,* Acad. sci. Pris t. 306, Série I, 79-82, (1988).

[57] M. Ledoux, *Remarks on logarithmic Sobolev constants, exponential integrability and bounds on the diameter,* J. Math. Kyoto Univ. 35 (1995), no. 2, 211–220.

[58] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gauss analysis,* Lecture on probability theory and stactictics (Saint-Flour, 1994), Lecture Notes in Math 1648, 164-294, Springer berlin, (1996).

[59] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities,* Séminaire de Probabilités, XXXIII, 120–216, Lecture Notes in Math., 1709, Springer, Berlin, 1999.

[60] P. Lèvy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle,* Gouthies-Villars, (1951).

[61] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problem,* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16.

[62] G. Maz'ja, *Sobolev Spaces* , Springer-Varlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1980).

[63] C. Miranda, *Disuguaglianze,* Lessons of Superior Mathematics held at the University of Naples in 1962/63.

[64] J. Mossino, *Inegalites isoperimetriques et applications en physique*, Collection Traveaux en cours, Hermann, Paris, 1984

[65] M. K. W. Murty, G. Stampacchia, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, Ann. Mat. Pura Appl., 80 (1968), 1-122.

[66] E. Nelson, *The free Markoff field,* J. Functional Analysis 12 (1973), 211–227.

[67] B. Opic, L. Pick, *On generalized Lorentz-Zygmund spaces*, Math. Inequal. Appl. 2 (1999), no. 3, 391–467., 4^e sèrie, t. 17,317-332, (1984).

[68] E. Pelliccia, G. Talenti, *A proof of a logarithmic Sobolev inequalityr*, Calc. Var.,1,237-242 (1993)

[69] G. Pólya, G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical phisics,* Ann. of Math. Studies 27, Princeton University Press, Princeton, (1951).

[70] J. M. Rakotoson, B. Simon, *Relative rearrangement on a measure space,. Application to the regularuty of weighted monotone rearrangement. Part1*, *Part2*, Rev. R. Acad. Ciend. Exact. Fis. Nat. (Esp) 91,17-31, (1997).

[71] J. M. Rakotoson, *Quelques propriétés du réarrangement relatif,* C.R. Acad. Sciù. Paris 302, Serie I, N 15 (1986).

[72] J. M. Rakotoson, *Some properties of the relative rearrangement,* JMAA 2 ,135, 488-500 (1988).

[73] J. Sarvas, *Symmetrisation of Rings in n-Space,* Ann. Acad. Sci. Fenn.,série A,552(1971).

[74] E. Schmidt, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperime-trische Eigenschaft der Kuger in der euklidischer und nichteuklidischen Geometrie,* Math.Nach. 1, 81-157, (1948).

[75] G. Stampacchia, *Le problémede Dirichet pour le équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, 189-258, (1965).

[76] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Seminaire de Mathématique Supérieure 16, Presses del univ. Montréal, Montréal, (1966).

[77] V. N. Sudakov, B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half- spaces for spherically invariant measures,* J. Soviet. math. 9, 9-18, (1978).

[78] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110 (1976), 353–372.

[79] G. Talenti, *Elliptic Equations and Rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 3 (1976), pp. 697-718.

[80] G. Talenti, *Nonlinear elliptic equation, rearrangements of functions and Orlicz spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., 120 (1979), 156-184.

[81] G. Talenti, *Linear Elliptic P.D.E.'s:Level Set, Rearrangements and a priori Estimates of Solutions*, Boll. Un. Mat. Ital. B, (6) 4-B (1985), 917-949.

[82] G. Talenti, *Inequalities in rearrangement invariant function spaces,* Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol. 5, 177–230, Prometheus, Prague, 1994.

[83] G. Talenti, *A weighted version of a rearrangement inequality*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII (NS) 43,121-133, (1997).

[84] G. Trombetti, *Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni a derivate parziali*, Boll. Un. Mat. Ital. B 3, 601-634, (2000).

[85] G. Trombetti, J.L. Vazquez, *A symmetrization result for elliptic equations with lower-order term*s, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5, 7, 137-150, (1985).

[86] N. S. Trudinger, *Linear elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 27 (1973), 265-308.