Algebre di Killing ad orbite tridimensionali.

Rossella Piscopo

Al Prof. Giovanni Rotondaro.

Indice

Introduzione

Il lavoro di Tesi è dedicato alla classificazione di tutte le algebre di campi di Killing ad orbite tridimensionali per le metriche pseudo-riemanniane. I campi di Killing sono tali che il flusso ad essi associato è composto da isometrie che lasciano invariata la metrica. Lo studio delle algebre di campi di Killing è, perciò, di per sè interessante dal punto di vista geometrico, ma lo è maggiormente se si osserva il forte legame con applicazioni in fisica teorica. In particolare, le Equazioni di Einstein, in Relatività Generale, possono essere semplificate notevolmente per le pseudo-metriche che ammettono un'algebra di campi di Killing non banale. In molti casi le Equazioni di Einstein possono essere risolte in maniera esplicita. E' noto che le soluzioni delle Equazioni di Einstein in assenza di materia sono varietà Lorentiane il cui tensore di Ricci è nullo (varietà Ricci-piatte). Quindi, il problema ha una valenza geometrica molto interessante. Di recente nell'ambito della Fisica Teorica è aumentato l'interesse anche per le metriche Kleniane, cioè quelle metriche la cui segnatura è $(2, 2)$. Si è scelto, pertanto, di studiare tutti i tipi di pseudo-metriche senza preferenza alcuna per quelle di segnatura prestabilita.

In passato lo studio delle soluzioni esatte delle Equazioni di Einstein come dimostrano i testi di Petrov [**10**] o Kramer-Stephani [**7**], ha prodotto numerosi risultati.

L'approccio fornito dai lavori di Sparano-Vilasi-Vinogradov [**13**], [**14**] ha permesso, però, di trovare nuove soluzioni. Nei suddetti lavori sono state studiate le metriche che ammettono algebre di campi di Killing ad orbite bidimensionali sotto le ipotesi di integrabilità per la distribuzione ortogonale e di non degenerazione del tensore metrico ristretto sulle orbite. E' stato osservato che le nuove soluzioni classificate comprendono tutte le soluzioni particolari scoperte precedentemente.

Nel lavoro di Catalano-Vinogradov [**1**] sono state studiate le algebre di campi di Killing ad orbite bidimensionali, nell'ipotesi in cui la distribuzione ortogonale è integrabile ed il tensore metrico degenera, se ristretto alle orbite della distribuzione.

Si è, così, ipotizzato che nuove possibili soluzioni alle equazioni di Einstein, potevano ottenersi,o considerando le metriche che ammettono algebre di campi di Killing conformi, oppure facendo variare la dimensione delle orbite delle algebre di Killing. La prima ipotesi è stata sviluppata nel lavoro di R. Piscopo [**11**].

La seconda ipotesi è stata trattata nel lavoro di tesi, nel caso in cui le orbite sono tridimensionali. Nel presente lavoro, infatti, sono classificate tutte le algebre di campi di Killing ad orbite tridimensionali.

Considerata la varietà pseudo-riemanniana (M, g) di dimensione n, l'algebra dei campi di Killing è stata denotata con $\mathfrak{Kill}\,(g)$. E' noto che quest'algebra ha dimensione finita e, in particolare, $\dim \mathfrak{Kill}\,(g) \leq \frac{1}{2} n\,(n+1)$. Si è osservato, però, che la dimensione delle orbite impone una condizione alquanto rigida sulla dimensione dell'algebra. Considerata, infatti, la sottoalgebra $\mathcal{G}_k$ dell'algebra dei campi di Killing $\mathfrak{Kill}\,(g)$ se la dimensione delle orbite di $\mathcal{G}_k$ è, ad esempio, r, si è dimostrato che la dimensione dell'algebra è soggetta alla seguente limitazione:

$$r \leq \dim \mathcal{G}_k \leq \frac{1}{2} r\,(r+1)$$

Fissata la dimensione delle foglie a tre, ovviamente l'algebra $\mathcal{G}_k$ ha dimensione compresa o uguale tra 3 e 6. Nel presente lavoro si è scelto di non studiare le algebre di Killing tridimensionali, poichè su di esse ci sono risultati già noti.

Un'altro parametro di studio è stato fornito dal rango del tensore metrico ristretto sulle orbite dell'algebra. Ovviamente, essendo le orbite tridimensionali, questo potrà assumere valori compresi tra 0 e 3. Anche il caso in cui il rango è 3 non è riportato in questo lavoro perchè è riconducibile a risultati noti.

Nel Capitolo I sono stati provati dei risultati utili per le successive dimostrazioni. E' stato brevemente ricordato il concetto di distribuzione e di orbite di una distribuzione. E' stato condotto uno studio delle linearizzazioni delle algebre stabili e della loro dimensione. L'utile risultato sulla dimensione delle algebre stabili ci ha consentito di dimostrare la forte limitazione cui la dimensione dell'algebra in considerazione deve sottostare.

Nel Capitolo II si elencano le algebre ad orbite tridimensionali, nell'ipotesi in cui il tensore metrico si annulla, quando ristretto alle orbite.

A priori, ci si aspettava che le uniche strutture possibili fossero quelle abeliane, indipendentemente dalla dimensione dell'algebra. Si è invece provato, che in dimensione 5 e 6 le strutture ottenute sono effettivamente abeliane, ma per le algebre di dimensione 4 si è visto che, oltre ad una struttura abeliana, può realizzarsi anche questa particolare struttura

$$\mathfrak{I}_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 : [e_i, e_j] = 0,\ i, j = 1, 2, 3,\ [e_4, e_i] = e_i, i = 1, 2, 3 \rangle \, .$$

dove l'algebra derivata è l'unica sottoalgebra tridimensionale abeliana e in cui ogni sottospazio bidimensionale è una sottoalgebra. Quest'algebra fa parte di quelle algebre da noi chiamate *Algebre di Rotondaro* ed è stato osservato con interesse, seppur in un contesto diverso, che anche l'unica algebra trovata nel lavoro [**11**] fa parte di questa classe.

Il capitolo III è dedicato al caso in cui il tensore ha rango 1, quando è ristretto alle orbite. In questo caso, un forte parametro di classificazione è stato dato dalla distribuzione ortogonale. Come primo risultato si è provato che la dimensione dell'algebra non può essere maggiore di 4, se la distribuzione ortogonale non è integrabile. Inoltre, si è osservato che la distribuzione dei nuclei, intersezione della distribuzione tridimensionale e della distribuzione ortogonale di codimensione 3, è, ovviamente, non-integrabile se tale è la distribuzione ortogonale. In queste ipotesi, lo studio si è basato su alcune identità polinomiali, che si sono evinte proprio dal fatto che il tensore metrico ha rango uno sulle foglie della distribuzione. Queste identità, per le algebre di dimensione 4, hanno fornito una serie di condizioni sulle costanti di struttura, che hanno permesso di giungere alla classificazione di soli cinque tipi di strutture ammissibili. Le algebre di dimensione 5 e 6 sono, poi, state studiate, osservando che, se la distribuzione dei nuclei è bidimensionale, la varietà quoziente, ottenuta identificando i punti appartenenti alla stessa varietà integrale, è una curva. Per teorema di Lie sulla linea, su di una curva esiste al più una sottoalgebra tridimensionale di campi tangenti alla curva stessa. In particolare, se la sottoalgebra è di dimensione 3, questa è isomorfa a $so\,(2,1)$, mentre nel caso bidimensionale la sottoalgebra è non-abeliana. Si è,quindi, osservato che i campi di Killing linearmente indipendenti, tangenti alle sottovarietà integrali massimali, sono al più 3. Per risultati elencati nel lavoro di Catalano-Vinogradov era noto che se l'algebra generata dai campi di Killing sulla superficie è tridimensionale, questa è certamente abeliana; mentre se l'algebra è bidimensiona, questa può essere abeliana e non-abeliana. Lo studio e la ricerca della struttura delle due suddette algebre ha permesso di scrivere le algebre di dimensione 5 e 6 come somme semidirette di queste speciali sottoalgebre.

Nel Capitolo IV, infine, si è trattato il caso in cui il rango del tensore metrico è pari a 2. Come precedentemente sottolineato, questo caso è stato studiato con metodo differente da quello del caso precedente. Per poter classificare le algebre si è utilizzato il metodo delle linearizzazioni delle algebre stabili. Le algebre di dimensione 4 trovate possono essere o la somma diretta delle algebre semisemplici tridimensionali ($so\,(3)$, $so\,(2,1)$) con un'algebra unidimensionale, oppure la somma dell'algebra delle isometrie infinitesimali del piano euclideo o di quello iperbolico-euclideo con un'algebra unidimensionale. Nello studio delle algebre di dimensione 5 e 6, si è osservato che entrambe le algebre contengono sottoalgebre di dimensione 4. Questo ha consentito di classificare tali algebre, utilizzando i risultati ottenuti per le algebre di dimensione 4 che hanno fornito la base sulla quale sono state ritrovate le strutture delle algebre di dimensione maggiore.

La classificazione riportata nel presente lavoro rappresenta un modo per semplificare lo studio delle possibili nuove soluzioni delle Equazioni di Einstein.

Nel concludere questa introduzione, non può mancare il più sentito ringraziamento al Prof. A.M. Vinogradov, per aver guidato lo svolgimento del lavoro e per tutti gli insegnamenti che hanno permesso di conseguire utili risultati matematici.

CAPITOLO 1

Algebre di Killing ad orbite $r-$dimensionali.

Date per note le nozioni basilari sulle algebre di Lie e sui concetti di campi vettoriali, flusso di un campo, varietà pseudo-riemanniane, ecc..., in questo primo capitolo ci proponiamo di fornire dei risultati preliminari, alla base dei quali sarà possibile una completa e corretta classificazione delle algebre di Killing ad orbite tridimensionali. Nel presente capitolo brevemente riassumeremo i concetti di distribuzione e di orbite (o foglie) della distribuzione. Verrà definita la linearizzazione dell'algebra isotropa e si darà la dimostrazione di un primo, utile risulatato. Si osserverà, inoltre, come la dimensione delle orbite dell'algebra limiti fortemente la dimensione dell'algebra stessa.

1. Definizioni preliminari.

Sia (M, g) una varietà pseudo-riemanniana di dimensione n.

DEFINIZIONE 1. *I campi vettoriali indotti su uno spazio metrico affine da un gruppo* 1*-parametrico di isometrie sono detti* ***isometrie infinitesimali.***

Esiste una seconda definizione di isometria infinitesimale che non fa riferimento in modo esplicito alla struttura affine dello spazio ed è, pertanto, più adatta per l'uso fatto in questo lavoro.

Se X è un campo vettoriale sulla varietà M, esso genera un gruppo 1-parametrico di isometrie $\{\varphi_t\}_t$ (*flusso*). Cosiderata l'orbita $t \to \varphi_t(x)$, dove $x \in M$, siano V e W altri due campi lungo l'orbita del punto x; poichè φ_t è, in particolare, un'isometria,

$$\varphi_t^*(g(V, W)) = g\left(\varphi_{-t*}V, \varphi_{-t*}W\right) \tag{1.1}$$

Differenziando rispetto a t ambo i membri dell'espressione (1.1), e ponendo $t = 0$ si ottiene

$$X(g(V, W)) = g(L_X V, W) + g(V, L_X W)$$

Questa espressione definisce il risultato solo nel punto x; ma x, V, W sono arbitrari, quindi, il risulato può essere esteso in ogni punto della varietà M e per ogni coppia di campi. Allora, X è un'isometria infinitesimale se

$$X\left(g\left(V,W\right)\right)=g\left(\left[X,V\right],W\right)+g\left(V,\left[X,W\right]\right) \tag{1.2}$$

L'equazione (1.2) prende il nome di *equazione di Killing.*

DEFINIZIONE 2. *Una soluzione X dell'equazione di Killing è detta* ***campo di Killing****.*

Osserviamo che, data una qualunque k-forma ω differenziabile su M, ha senso definire la derivata di Lie di ω lungo un campo X, questa si esprime come:

$$L_X\left(\omega\right)\left(X_1,...,X_k\right)=X\left(\omega\left(X_1,...,X_k\right)\right)-\sum_{i=1}^{k}\omega\left(X_1,...,\left[X,X_i\right],...,X_k\right)$$

Poichè il tensore metrico è una 2-forma e l'espressione (1.2) è esattamente la derivata di Lie della metrica g lungo il campo X , l'equazione di Killing può essere scritta

$$L_X\left(g\right)=0$$

L'insieme dei campi di Killing di uno spazio metrico (risp. pseudometrico) sono un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $D\left(M\right)$ dei campi tangente alla varietà. Inoltre, questo sottospazio, risulta essere anche una algebra di Lie ripsetto al commutatore (o parentesi di Lie) di due campi.

LEMMA 1. *I campi di Killing di una metrica g su di una varietà connessa n-dimensionale M, formano un'algebra di Lie di dimensione*

$$\dim\mathfrak{Kill}\left(g\right)\leq\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$$

DIMOSTRAZIONE. Dato un punto $p\in M$, un campo di Killing X è univocamente determinato da $X\left(p\right)$ e da $\left(\nabla X\right)_p$. Considerata l'applicazione ψ definita sull'algebra $\mathfrak{Kill}\left(g\right)$:

$$\psi:X\rightarrow\left(X\left(p\right),\left(\nabla X\right)_p\right),$$

mostreremo essere un monomorfismo e

$$\dim\mathfrak{Kill}\left(g\right)\leq\dim T_pM+\dim\left(trasformazioni\ antisimmetriche\ di\ T_pM\right).$$

Sia $p\in M$, consideriamo $\left(X\left(p\right),\left(\nabla X\right)_p\right)=\left(0,0\right)$. Se X è un campo di Killing che si annulla in un punto $p\in M$, allora il flusso$\{A_t\}$ ad

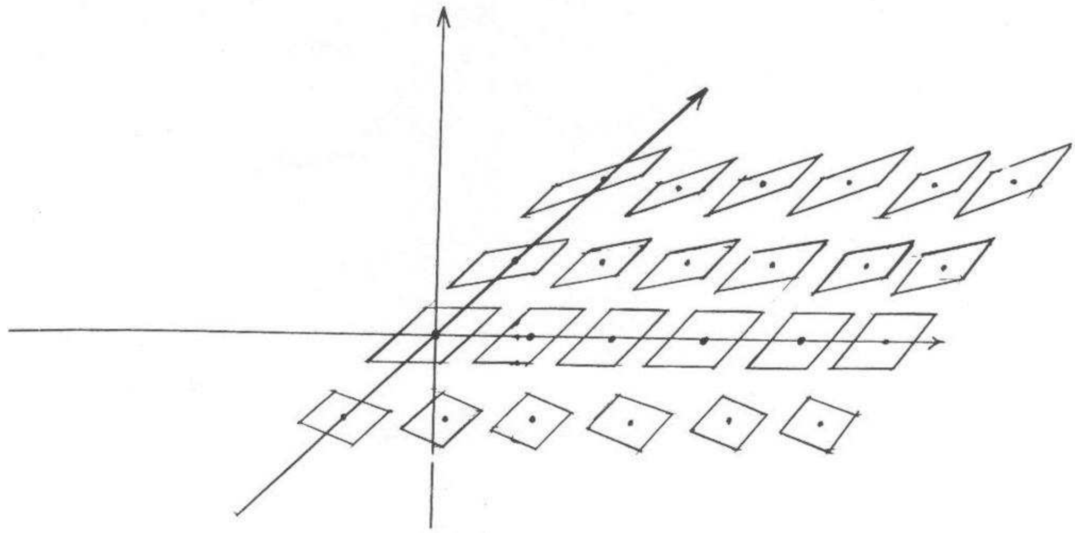


FIGURA 1. **Distribuzione.**

esso associato fissa il punto p, pertanto, possiamo considerare l'automorfismo ortogonale

$$A_{t*} : T_pM \to T_pM$$

Sappiamo che anche $(\nabla X)_p = 0$, allora, considerato un campo Y

$$[X, Y]_p = \nabla_{X_p} Y - \nabla_{Y_p} X = 0$$

Poichè i due campi commutano, anche i rispettivi flussi commutano; questo significa che $A_{t*} = id_{T_pM}$, per ogni t, poichè X si annulla in un intorno di p. Allora, l'insieme (chiuso) degli zeri di X e ∇X è un insieme aperto e, quindi, tutto M. Allora ψ è un monomorfismo. $\square$

Riportiamo, ora, brevemente, la nozione di *distribuzione tangente* sulla varietà M e quella di foglie di una distribuzione (vedi [**2**], [**8**]). Questi due concetti saranno parte integrante e fondamentale del lavoro fatto nei capitoli successivi.

Considerata la varietà differenziabile M di dimensione n,

DEFINIZIONE 3. *Un'applicazione*

$$\mathcal{D} : x \in M \longrightarrow \mathcal{D}_x \subseteq T_xM$$

è una distribuzione r-dimensionale ($r \in N, 1 \leq r \leq n$) su M se (vedi Figura 1):

(i) D_x è un $R-$sottospazio vettoriale di T_xM, $\forall x \in M$

(ii) $\dim_{\mathbb{R}} D_x = r$.

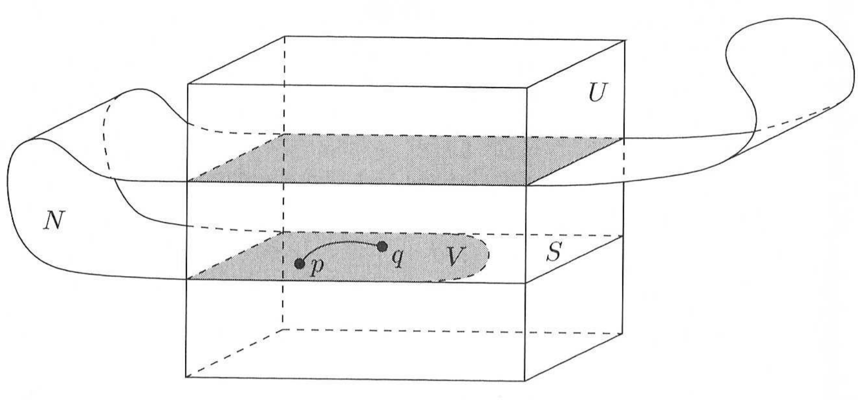


FIGURA 2. **Sottovarietà Integrale.**

Quindi, assegnare una distribuzione significa fissare per ogni $x \in M$, un sottospazio r-dimensionale di T_xM.

DEFINIZIONE 4. *Se $\mathcal{D}$ è una distribuzione differenziabile, si dirà che un campo vettoriale è tangente a $\mathcal{D}$ se $V_x \in \mathcal{D}_x$, $\forall x \in M$.*

DEFINIZIONE 5. *Si dice varietà integrale (vedi Figura 2)di $\mathcal{D}$ una sottovarietà r-dimensionale N "tangente" a $\mathcal{D}_x, \forall x \in N$. Risulta $T_xN \subset D_x$.*

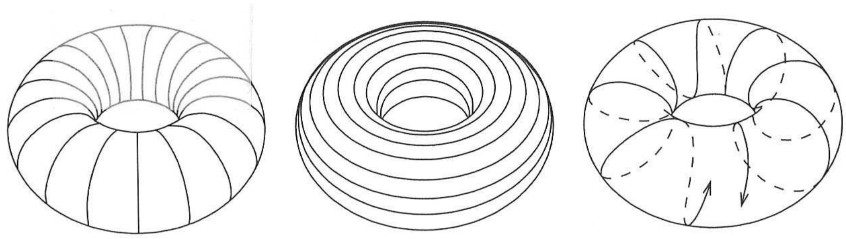
DEFINIZIONE 6. *La distribuzione $\mathcal{D}$ è detta **integrabile** se per ogni p in M, esiste un unica varietà integrale massimale (cioè non contenuta propriamente in nessun' altra varietà integrale).*

DEFINIZIONE 7. *La distribuzione $\mathcal{D}$ è detta **involutiva** se dati qualunque due campi appartenenti alla distribuzione, il loro commutatore è ancora un elemento della distribuzione.*

LEMMA 2. *La distribuzione $\mathcal{D}$ è integrabile se e solo se è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Vedere [**8**]. □

Se si uniscono tutte le varietà integrali di una distribuzione involutiva, $k-$dimensionale $\mathcal{D}$, otteniamo una decomposizione di M in $k-$sottovarietà che foliano la varietà M.



(a) (b) (c)

FIGURA 3. **Foliazione del Toro.**

DEFINIZIONE 8. *Definiamo una* ***foliazione*** *di dimensione k sulla varietà M una collezione sottovarietà immerse $k-$dimensionali (**foglie**) la cui unione sia M e tali che in ogni intorno dei punti della varietà esista una carta (U, φ) con le segueti proprietà:*

(1) *$\varphi(U)$ è prodotto di sottospazi connessi ed aperti $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*
(2) *Ogni foglia inteseca U o nel sottospazio vuoto, oppure in un insieme unione numerabile di spazi $k-$dimensionali della forma $x^{k+1} = c^{k+1}, ..., x^n = c^n$.(una tale carta prende il nome di **carta piatta**).*

TEOREMA 1. *(teorema globale di Frobenius) Sia $\mathcal{D}$ una distribuzione involutiva sulla varietà M. La collezione di tutte le varietà integrali massimali connesse di $\mathcal{D}$ genera una foliazione di M.*

Trattati, quindi, gli argomenti utili a definire l'ambiente in cui ci muoveremo, nel prossimo paragrafo forniremo degli strumenti che aiuteranno a classificare le algebre di Killing ad orbite tridimensionali.

2. Linearizzazione di un campo vettoriale.

Nel presente paragrafo vogliamo introdurre il concetto di *linearizzazione* dell'algebra stabile. Tale argomento tornerà particolarmente utile come metodo per classificare le algebre in considerazione.

Per i gruppi è noto il concetto di gruppo isotropo. Fissato un punto $x \in M$ denotiamo con G_x il gruppo $G_x = \left\{g \in G : \phi_g(x) = x\right\}$che sarà detto *gruppo isotropo* nel punto x. E' possibile dare una definizione infinitesimale del gruppo isotropo. Considerata l'algebra di Lie $\mathcal{G}$, si ha

DEFINIZIONE 9. *Sia $p \in M$, l'algebra $\mathcal{G}_p = \{X \in \mathcal{G} : X_p = 0\}$ è detta **algebra isotropa** nel punto p.*

Considerato il campo vettoriale X, tale che $X \in \mathcal{G}_p$, detto $\{\varphi_t\}_t$ il flusso generato da X, è noto che

$$X = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi_t^*$$

poichè $X_p = 0$, il punto p è fissato dal flusso (i.e. $\varphi_t(p) = p, \ \forall t$), definiamo

$$\Phi_t \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_t)_{*p} : T_pM \to T_pM$$

$\{\Phi_t\}_t$ è un gruppo 1−parametrico di automorfismi di T_pM.

Definizione 10. *L'endomorfismo di T_pM*

$$\operatorname{lin}_p X = \frac{d}{dt}_{|t=0} \Phi_t$$

*è detta **linearizzazione** di X nel punto p.*

Allora, è semplice vedere che $\forall \xi \in T_pM$

$$\operatorname{lin}_p X(\xi) = [V, X]_c \,,$$

dove $V \in D(M)$ è un campo vettoriale tale che $\xi = V_p$.

La seguente proprietà della linearizzazione è una semplice conseguenza della definizione.

Lemma 3. *Siano p un punto di M e $X, Y \in \mathcal{G}_p$, allora:*

$$\operatorname{lin}_p [X, Y] = -[\operatorname{lin}_p X, \operatorname{lin}_p Y] \,.$$

Dimostrazione. Considerato un campo $Z \in D(M)$, tale che $Z_p = \xi$ con $\xi \in T_pM$, risulta,

$$\begin{aligned} \operatorname{lin}_p [X, Y](\xi) = \ & [Z, [X, Y]]_p \stackrel{\text{per l'identità di Jacobi}}{=} \\ & -[[Z, Y], X]_p + [[Z, X], Y]_p = \\ & -\operatorname{lin}_p X(\operatorname{lin}_{pY}(\xi)) + \operatorname{lin}_p Y(\operatorname{lin}_p X(\xi)) = \\ & -[\operatorname{lin}_p X, \operatorname{lin}_p Y](\xi) \,. \end{aligned}$$

□

3. Endomorfismi antisimmetrici dello spazio tangente.

Nel seguente paragrafo, mediante la linearizzazione, saremo in grado di studiare la dimensione dell'algebra isotropa. A tal fine, consideriamo la seguente situazione algebrica:

sia V uno spazio vettoriale, $W \subset V$ un sottospazio di diemensione k e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una forma bilineare, simmetrica non-degenere su V. Un endomorfismo $\varphi : V \to V$ è antisimmetrico rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se

$$\langle \varphi(u), v \rangle + \langle u, \varphi(v) \rangle = 0 \tag{3.1}$$

qualunque siano $u, v \in V$.

In forma matriciale il prodotto scalare di due vattori u e v dello spazio vettoriale $n-$dimensionale V si esprime come

$$\langle u, v\rangle = (u_1, ..., u_n)\,\Gamma\,(v_1, ..., v_n)^t = u\Gamma v^t \tag{3.2}$$

con Γ matrice rappresentativa del prodotto scalare.

Il nostro scopo è quello di studiare l'algebra degli endomorfismi di V tali che:

1. φ è antisimmetrico rispetto alla forma bilineare $\langle\cdot,\cdot\rangle$;
2. $\varphi(W) \subset W$;
3. L'operatore quoziente $\varphi_W : V/W \to V/W$ è nullo.

Sia N il nucleo della forma bilineare $\langle,\rangle$ ristretta al sottospazio W e supponiamo $\dim N = d$. E' possibile considerare la base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ di V in modo che $W = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_d, e_{d+1}, ..., e_{k-d}\}$, $N = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_d\}$, quindi, Allora, $W = N \oplus S$, con $S = \operatorname{span}\{e_{d+1}, ..., e_{k-d}\}$; ovviamente, la forma bilineare è non degenere se ristretta ad S.

Considerata, quindi, la matrice A che rappresenta l'endomorfismo φ nella base $\mathcal{B}$, la relazione (3.1) può scriversi nella forma

$$\left.\begin{aligned} (Au)^t\,\Gamma v + u^t\Gamma A v = &\ u^t A^t\Gamma v + u^t\Gamma A v \\ = &\ u^t\left(A^t\Gamma + \Gamma A\right) v \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^t\Gamma + \Gamma A = 0$$

Il sottospazio isotropo N è uguale all'intersezione di W e del suo complemento ortogonale $W^\perp$, per la nota formula di Grassman, $\dim\left(W + W^\perp\right) = n-d$. Possiamo, quindi, considerare il sottospazio H di dimensione d supplementare di $\left(W + W^\perp\right) \Rightarrow V = \left(W + W^\perp\right) \oplus H$.

Nota 1. *Osserviamo che il sottospazio $W \oplus H$ è non isotropo; infatti,*

$$\begin{aligned} (W+H) \cap (W+H)^\perp = &\ (W+H) \cap \left(W^\perp \cap H^\perp\right) = \\ &\ \left(W \cap W^\perp \cap H^\perp\right) + \left(H \cap W^\perp \cap H^\perp\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il primo addendo al secondo membro della (3.3) è nullo perchè $W \cap W^\perp = N$ e se per assurdo esistesse un elemento $n \in N$, ortogonale ad H, avremmo $\langle n, h\rangle = 0, \forall h \in H$. Si trova così un elemento di H ortogonale ad N, $h \in N^\perp \Rightarrow H \cap N^\perp \neq \{0\}$, ma questo è assurdo perchè $H \cap N^\perp = (W \cap W)^\perp \cap H = \left(W + W^\perp\right) \cap H$ ed H è supplementare a $\left(W + W^\perp\right)$

Si osserva che anche $\left(H \cap W^\perp \cap H^\perp\right) = \{0\}$ perchè H è complementare a $\left(W + W^\perp\right)$.

Fatte queste osservazioni, siamo nella seguente situazione:

(1) $\dim N = \dim H$;
(2) H è totalmente isotropo;
(3) $W \oplus H$ è un sottospazio non isotropo.
(4) H è ortogonale ad N e viceversa.

E' possibile riordinare la base $\mathcal{B}$ di V in modo che la metrice Γ della forma bilineare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, possa scriversi come:

(3.4)
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0_d & 0_{d\times(k-d)} & 0_{d\times(n-k-d)} & \mathbb{I}_d \\ 0_{(k-d)\times d} & {}^{\pm}\mathbb{I}_{k-d} & 0_{(k-d)\times(n-k-d)} & 0_{(k-d)\times d} \\ 0_{(n-k-d)\times d} & 0_{(n-k-d)\times(k-d)} & \mathbb{I}_{n-k-d} & 0_{(n-k-d)\times d} \\ \mathbb{I}_{d\times d} & 0_{d\times(k-d)} & 0_{d\times(n-k-d)} & 0_d \end{pmatrix}$$

Dove ${}^{\pm}\mathbb{I}$ rappresenta la forma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ristretta al sottospazio S.

Ritornando all'endomorfismo φ, possiamo scrivere che la sua matrice rappresentativa è:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $A_1 \in M_k, A_2 \in M_{k,(n-k)}$. Utile, in seguto, sarà suddividere in blocchi le matrici. Scriveremo

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix} \text{ ed } A_2 = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{23} & A_{24} \end{pmatrix} \text{e la matrice } \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

con $\Gamma_1 \in M_k, \Gamma_{12} \in M_{k\times(n-k)}, \Gamma_{21} \in M_{(n-k)\times k}, \Gamma_2 \in M_{(n-k)\times(n-k)}$. Dalla relazione (3), si ottiene:

$$\begin{cases} A_1^t\Gamma_1 + \Gamma_1 A_1 = 0 \\ A_1^t\Gamma_{12} + \Gamma_1 A_2 = 0 \\ A_2^t\Gamma_{12} + \Gamma_{21} A_2 = 0 \end{cases}$$

Le suddette relazioni ci forniscono l'espressione della matrice rappresentativa A dell'endomorfismo φ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -A_{24}^t\,{}^{\pm}\mathbb{I} & 0 & A_{22} \\ 0 & A_{14} & 0 & A_{24} \\ & 0 \quad 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

dove la matrice $A_{24} \in M_{(k-d)\times d}, A_{22}$ è una matrice antisimmetrica di ordine d e A_{14} è una matrice antisimmetrica di ordine $(k-d)$.

Indicheremo con $\mathcal{L}$ l'algebra delle matrici di questi spaciali endomorfismi endomorfismi antisimmetrici.

LEMMA 4. *L'algebra $\mathcal{L}$ ha dimensioni*

$$\dim \mathcal{L} \leq \frac{1}{2} k (k-1)$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata, se si osserva che

$$\dim \mathcal{L} \leq \dim M_{(k-d)\times d} + \dim so(d) + \dim so(k-d)$$

□

Vogliamo, procedere con lo studio dell'algebra $\mathcal{L}$ per poterne conoscere la struttura. Calcoliamo il commutatore tra due metrici del tipo (3.5) dell'algebra $\mathcal{L}$. Siano A e B due matrici del tipo (3.5)

$$[A,B] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -A_{24}^t (\pm\mathbb{I}) B_{14} + B_{24}^t (\pm\mathbb{I}) A_{14} \\ 0 & [A_{14}, B_{14}] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -A_{24}^t (\pm\mathbb{I}) B_{24} + B_{24}^t (\pm\mathbb{I}) A_{24} \\ 0 & A_{14}B_{24} - B_{14}A_{24} \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Notiamo che il commutatore dipende solo dalle seguenti matrici $[A_{14}, B_{14}]$, $(A_{14}B_{24} - B_{14}A_{24})$, $(-A_{24}^t (\pm\mathbb{I}) B_{24} + B_{24}^t (\pm\mathbb{I}) A_{24})$. Possiamo studiare la struttura dell'algebra $\mathcal{L}$ studiandone, come prima cosa, il centro dell'algebra $\mathcal{L}$ è: $Z(\mathcal{L}) = \{A \in \mathcal{L} : A_{14} = A_{24} = 0\}$. Si nota chiaramente che $\mathcal{L} \neq Z(\mathcal{L})$, quindi, $\mathcal{L}$ è sicuramente non-abeliana.

Per proseguire lo studio della struttura dell'algebra $\mathcal{L}$, premettiamo alcune note definizioni riguardanti le algebra di Lie (per tutti i dettagli si fa riferimento ai testi [**4**], [**5**], [**?**]).

DEFINIZIONE 11. *Un'algebra di Lie L che ammette solo ideali banali e tale che $[L,L] \neq 0$ è detta* ***semplice****.*

DEFINIZIONE 12. *Definiamo una successione di ideali dell'algebra L con $L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L,L], ..., L^{(i)} = \left[L^{(i-1)}, L^{(i-1)}\right]$. Diremo L* ***risolubile*** *se esiste un intero n tale che $L^{(n)} = 0$.*

DEFINIZIONE 13. *Diremo che un'algebra di Lie L si decompone nella* ***somma semidiretta*** *di due sue sottoalgebre L_1, L_2 se:*

1. *La sottoalgebra L_1 è un ideale,*
2. *l'algebra L, come spazio vettoriale, è la somma diretta di L_1 ed L_2.*

Il centro $Z(\mathcal{L})$ è un ideale non banale, quindi, possiamo sicuramente affermare che l'algebra $\mathcal{L}$ non è semplice.

LEMMA 5. *l'algebra $\mathcal{L}$ è somma semidiretta semi-diretta delle sue due sottoalgebre $L_1 = \{A \in \mathcal{L} : A_{22} = A_{24} = 0\} = so(k-d)$ e $L_2 = \{A \in \mathcal{L} : A_{14} = 0\}$,* DIMOSTRAZIONE. Riguardata come spazio vettoriae, l'algebra di Lie $\mathcal{L}$ è la somma diretta dei suoi due sottospazi vettoriali L_1 ed L_2. Inoltre, l'algebra L_2 è risolubile, infatti,

$$L_2^{(1)} = [L_2, L_2] = Z(\mathcal{L}) \subset L_2 \Rightarrow L_2^{(2)} = \left[L_2^{(1)}, L_2^{(1)}\right] = 0$$

mentre l'algebra L_1 è semisemplice. Notiamo, inoltre, che $L_2 = M_1 \oplus M_2$ dove $M_1 = Z(\mathcal{L})$ e $M_2 = \{A \in L_2 : A_{22} = 0\}$. Dall'epressione del commutatore di due matrici del tipo (3.5) si deduce facilmente che $[M_2, M_2] \subset M_1, [L_1, M_1] = 0, [L_1, M_2] \subset M_2$. Dagli ultimi due commutatori segue che $[L_1, L_2] \subset L_2$ e, quindi L_2 è un ideale di $L_1 \subset \mathcal{L}$. □

4. Algebre di campi di Killing ad orbite $k-$dimensionali.

Data la varietà pseudo-riemanniana (M, g), consideriamo l'algebra delle isometrie infinitesimali della metrica g, algebra che indicheremo con $\mathfrak{Kill}(g)$. Abbiamo già detto che $\dim \mathfrak{Kill}(g) = \frac{1}{2}n(n+1)$. In questo paragrafo dimostreremo che la dimensione dell'algebra di Killing $\mathcal{G}_k \subset \mathfrak{Kill}(g)$, che genera una distribuzione di dimensione r, è soggetta ad una forte limitazione. Le due proposizioni nel seguito enunciate, dimostrano che, qualunque sia il comportamento del tensore metrico lungo le foglie della distribuzione, la dimensione dell'orbita è fortemente limitata dalla dimensione delle foglie.

PROPOSIZIONE 1. *Considerata la varietà pseudo-riemanniana* (M, g), *se g è non degenere sulle foglie F_a, $a \in M$,*

$$\dim \mathcal{G}_k \leq \frac{r(r+1)}{2}$$

DIMOSTRAZIONE. Proveremo che la restrizione

$$\rho : X \in \mathcal{G}_k \to X_F \in \mathfrak{Kill}(g_F)$$

è un monomorfismo. A tal fine, supponiamo che $X_F = 0$ e fissiamo un punto $p \in F$. Ovviamente $(\nabla X)_p (T_p F) = 0$. Sia, allora, $\nu \in T_p M \setminus T_p F$ un vettore non isotropo. Se α è una qualunque curva con velocità iniziale ν, allora la foglia di Killing $F_{\alpha(t)}$ per $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ con ϵ piccolo a piacere, descrive una sottovarietà S $(r+1)-$dimensionale. La metrica g_S ristretta a questa sottovarietà è non degenere ed X_S (campo X rsistretto alla varietà S) è un campo di Killing per la metrica g_S che si annulla sulla ipersuperficie F in S. Se il campo X_S si annulla su una ipersuperficie, allora, $X_S = 0$ su tutta S perchè se $X_p = 0$, per ogni $p \in F$, allora $(\nabla X_S)_p (T_p F) = 0$, essendo $(\nabla X)_p$ antisimmetrico, si ottiene $(\nabla X)_p = 0$ su S ed, in particolare, $\nabla_\nu X = 0$. Poichè in $T_p F^\perp$

esiste una base di vettori non isotropi, $(\nabla X)_p = 0 \Rightarrow X = 0$.(per ulteriori dettagli consultare [**9**]). $\square$

Il risultato appena ottenuto può essere esteso al caso in cui il tensore metrico si annulla se ristretto alle foglie della distribuzione.

PROPOSIZIONE 2. *Se il tensore metrico g degenera sulle foglie $F_a, a \in M$, allora*

$$\dim \mathcal{G} \leq \frac{r\,(r+1)}{2}$$

DIMOSTRAZIONE. E' noto che, assegnato il punto $p \in M$:

$$\dim \mathcal{G} = r + \dim \mathcal{G}_p$$

Consideriamo l'applicazione

$$\rho : X \in \mathcal{G}_p \to \overline{X} \in so\,(T_pM)\,,$$

che è un monomorfismo, quindi, per conoscere la dimensione dell'algebra stabile sarà necessario studiare la dimensione massima dell'immagine dell'applicazione $\operatorname{Im}\rho = \mathcal{L} = \left\{\overline{X} \in so\,(V) : X \in \mathcal{G}_p\right\}$.
Per quanto osservato nel paragrafo 3, se come spazio vettoriale V scegliamo T_pM, fissata la foglia F_p, $p \in M$ possiamo considerare $W = T_pF_p$e $g_p$come applicazione bilineare; allora, per il lemma 4 si ottiene il risultato. $\square$

CAPITOLO 2

Orbite nulle.

Le limitazioni, esposte nel precedente capitolo, riguardo la dimensione dell'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$ forniscono uno parametro essenziale per la classificazione in questione. Un ulteriore parametro di studio è dato dal rango del tensore metrico, ristretto sulle orbite. Nel presente capitolo ci occuperemo di classificare le algebre di Killing ad orbite tridimensionali nell'ipotesi in cui il tensore metrico si annulli completamente sulle orbite. I risultati ottenuti sono particolarmente interessanti perchè, a differenza di ciò che si ipotizzava a priori, si è dimostrato che oltre alle strutture abeliane per le algebre di dimensione 4 è stata classificata un'ulteriore struttura, rappresentata dall'algebra di Rotondaro.

1. Algebre di campi di Killing ad orbite tridimensionali.

Data una varietà pseudoriemanniana (M, g), sia $\mathfrak{Kill}(g)$ l'algebra dei campi di Killing per la metrica g. Consideriamo la sottoalgebra $\mathcal{G}_k$ che genera la distribuzione tridimensionale $\mathcal{D}$. Per le proposizioni 1 e 2, l'algebra $\mathcal{G}_k$ avrà dimensone

$$3 \leq \dim \mathcal{G} \leq 6$$

Nel seguito ci occuperemo solo di algebre di dimensione maggiori di 3, perchè il caso tridimensionale si riduce allo studio dei gruppi di trasformazioni tridimensionali, sui quali tutto è già noto. Sia, allora, $k \geq 4$. Fissiamo tre campi $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{G}_k$ in modo tale che $\{X_1, X_2, X_3\}$ sia (su un qualche aperto) una base della distribuzione $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{G})$ generata da $\mathcal{G}$. Poichè l'algebra $\mathcal{G}_k$ è almeno $4-$dimensionale, esistono delle funzioni f_i non tutte costanti tali che

$$X_4 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 \in \mathcal{G}_r \tag{1.1}$$

Il campo X_4 è tangente alla distribuzione $\mathcal{D}$ ed è di Killing per la metrica g.

LEMMA 6. *Sia X un campo vettoriale sulla varietà M. Se $f \in C^{\infty}(M)$, vale la seguente formula:*

$$L_{fX}(g) = fL_X(g) + i_X(g)\,df \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Il secondo addendo al secondo membro dell'equazione è il *prodotto simmetrico (vedi* [**8**]*)* di due $1-$forme differenziali e $i_X(g)$ è l'*inserzione* di X in g. La dimostrazione è una semplice applicazione della nota formula per la derivata di Lie di un tensore covariante lungo un campo vettoriale X:

$$L_Y(g)(A,B) = Y(g(A,B)) - g([Y,A],B) - g(A,[Y,B]), \quad Y,A,B \in D(M)$$

Consideriamo, quindi, la derivata di Lie della metrica g lungo il campo fX,

$$L_{fX}(g)(A,B) = fX(g(A,B)) - g([fX,A],B) - g(A,[fX,B]),$$

allora,

$$\begin{aligned} L_X(g)(A,B) &= fL_X(g)(A,B) + A(f)\,g(X,B) + B(f)\,g(A,X) \\ &= fL_X(g)(A,B) + df \cdot i_X(g)(A,B) \end{aligned}$$

poichè $[fX,A] = f[X,A] - A(f)X$ (rispettivamente, $[fX,B] = f[X,B] - B(f)X$). □

Per la formula (1.2), essendo il campo X_4 di Killing per la metrica g (i.e. $L_{X_4}(g) = 0$), si ottiene:

$$L_{X_4}(g) = df_1 \cdot i_{X_1}(g) + df_2 \cdot i_{X_2}(g) + df_3 \cdot i_{X_3}(g) = 0 \tag{1.3}$$

LEMMA 7. *Dato uno spazio vettoriale V, consideriamo $e_1, ..., e_m \in V$ vettori linearmente indipendenti e $\sum_{i=1}^{m} e_i h_i = 0$, con $h_1, ..., h_m \in V$, allora*

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ ... \\ h_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ ... \\ e_m \end{pmatrix},$$

con A matrice antisimmetrica.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è una semplice applicazioni di nozioni di algebra lineare. □

Dalla formula (1.3) possiamo ottenere la seguente espressione matriciale:

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} i_{X_1}(g) \\ i_{X_2}(g) \\ i_{X_2}(g) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

dove la matrice antisimmetrica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

è certamente distinta dalla matrice nulla perchè altrimenti si avrebbe $df_1 = df_2 = df_3 = 0 \Rightarrow f_i =$cost. , $i = 1,2,3$. Ricaviamo, dunque, il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} df_1 = \gamma_3 i_{X_2}(g) - \gamma_2 i_{X_3}(g) \\ df_2 = -\gamma_3 i_{X_1}(g) + \gamma_1 i_{X_3}(g) \\ df_3 = \gamma_2 i_{X_1}(g) - \gamma_1 i_{X_2}(g) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Osserviamo che, essendo Λ una matrice antisimmetrica di ordine dispari, $\det(\Lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(\Lambda) < 3$; in particolare, il rango di una matrice antisimmetrica è pari, quindi, $\operatorname{rg}(\Lambda) = 2$

LEMMA 8. *Il sistema* $\{df_1, df_2, df_3\}$ *ha rango* 2.

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per assurdo e supponiamo che il sistema di differenziali abbia rango uno. Possiamo supporre, allora, che df_2 e df_3 sono multipli di df_1, $df_2 = \alpha df_1$, $df_3 = \beta df_2$. Sostituendo nella relazione (1.3)

$$0 = df_1 \cdot i_{X_1}(g) + \alpha df_1 \cdot i_{X_2}(g) + \beta df_1 \cdot i_{X_3}(g) = df_1 \cdot i_{X_1+\alpha X_2+\beta X_3}(g)$$

se ne deduce che, se $df_1 \neq 0$, risulta $X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 = 0$, in contraddizione con la supposta indipendenza dei tre campi. □

Avendo provato che il rango del sistema dei differenziali è 2, senza ledere la generalità, possiamo supporre che f_3 dipenda funzionalmente dalle rimanenti due funzioni : $df_3 = h_1 df_1 + h_2 df_2$, con $h_i = \dfrac{\partial f_3}{\partial f_i}$, $i = 1,2$, dal sistema (1.5) si ottiene la relazione che lega i tre differenziali.

$$\gamma_1 df_1 + \gamma_2 df_2 + \gamma_3 df_3 = 0$$

Ritornando all'espressione matriciale (1.4), se vi inseriamo i campi X_1, X_2, X_3, si ha:

$$\begin{pmatrix} X_1(f_1) & X_2(f_1) & X_3(f_1) \\ X_1(f_2) & X_2(f_2) & X_3(f_2) \\ X_1(f_3) & X_2(f_3) & X_3(f_3) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) \\ g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) \\ g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) & g(X_1,X_1) \end{pmatrix}$$

Indicata con J la trasposta della metrice al primo mebro e con Γ la matrice al secondo membro, abbiamo la seguente, dondamentale relazione

$$J^t = \Lambda\Gamma \tag{1.6}$$

la matrice Γ, essendo la matrice di Gram della metrica, è, ovviamente, simmetrica.

LEMMA 9. *La matrice J ha traccia nulla.*

DIMOSTRAZIONE. $\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma) = \operatorname{tr}(\Gamma\Lambda) = \operatorname{tr}(\Lambda^t\Gamma^t) = \operatorname{tr}(-\Lambda\Gamma)$ □

Dal precedente lemma segue, ovviamente, che

$$X_1(f_1) + X_2(f_2) + X_3(f_3) = 0$$

2. Orbite nulle.

In questo paragrafo, supporremo che il tensore metrico sia completamente degenere sulle orbite di $\mathcal{G}_k$. Osserviamo che, essendo le orbite di dimensione 3, questo richiede che $\dim M \geq 6$.

Nel segiuto, si classificheranno tutte le algebre di Killing ad orbite ad orbite tridimensionali, tali che il tensore g, ristretto sulle foglie della distribuzione abbia rango zero. Prima di classificare le suddette algebre, premettiamo alcuni utili risultati, riguardanti una particolare classe di algebre di Lie che ritroveremo nella classificazione.

LEMMA 10. *Data un'algebra tridimensionale $\mathcal{G}$ su un campo $\mathbb{K}$. Se i sottospazi bidimensionali di $\mathcal{G}$ sono sottoalgebre, allora $\mathcal{G}$ è abeliana, oppure isomorfa all'algebra* $\mathfrak{I}_3 = \{e_1, e_2, e_3 : [e_1, e_2] = 0, [e_3, e_i] = e_i, i = 1, 2\}$.

DIMOSTRAZIONE. Se i sottoaspazi bidimensionali di $\mathcal{G}$ sono abeliani, allora $\mathcal{G}$ è abeliana. Assumiamo, allora, che esiste almeno un sottospazio bidimensionale che non sia una sottoalgebra abeliana; scegliamo una base $\{e, h\}$ del sottospazio V, tale che $[e, h] = h$ e consideriamo un elemento f appartenente al supporto $|\mathcal{G}|$ dell'algebra $\mathcal{G}$, tale che $\{e, h, f\}$ sia una base per lo spazio vettoriale $|\mathcal{G}|$. Poichè $\operatorname{span}\{h, f\}$ è una sottoalgebra e $[h, f] = ph + qf,\ p, q \in \mathbb{K}$. Analogamente, anche e ed f generano una sottoalgebra, tale che $[e, f] = re + sf,\ r, s \in \Bbbk$. L'identità di Jacobi per e, f, h, ci dice che

$$qf - qre + (sp - r)\,h = 0$$

dall'indipendenza di e, f, h segue $q = 0, r = sp$. Allora i commutatori diventano

$$[h, f] = ph, \qquad [e, f] = s\,(pe + f)$$

Se consideriamo, ora, il sottospazio $W = \text{span}\{e, h+f\}$, questo è una sottoalgebra e

$$[e, h+f] = (sp)\, e + (h+f) + (s-1)\, f$$

è ancora in W. Questo significa $(s-1)\, f = 0 \Rightarrow s = 1$ e $[e, f] = pe + f$. In modo analogo si ha $[h, pe+f] = 0$. Allora, se si pone

$$e_1 = h,\ e_2 = pe + f,\ e_3 = e$$

si ottiene il risultato. □

Nota 2. *L'algebra derivata $\mathfrak{I}_3'$ è, ovviamente, abeliana. In particolare, questa è l'unica algebra bidimensionale abeliana di $\mathfrak{I}_3$.*

Il lemma 10 può essere generalizzato come segue.
Consideriamo l'algebra $\mathfrak{I}_{n+1}$ di dimensione $n+1$, generata da $e_1, ..., e_{n+1}$ e tale che $[e_i, e_j] = 0,\ i, j \leq n$, e $[e_{n+1}, e_i] = e_i,\ i \leq n$.

Definizione 14. *$\mathfrak{I}_{n+1}$ è detta **algebra di Rotondaro** di dimensione $n+1$.*

L'algebra derivata $\mathfrak{I}_{n+1}'$ è l'algebra beliana $\mathcal{A}_n$, generata da $e_1, ..., e_n$. E'semplice provare la seguente affermazione:

Lemma 11. *Ogni sottoaspazio $n-$dimensionale V in $|\mathfrak{I}_{n+1}|$ è una sottoalgebra in $\mathfrak{I}_{n+1}$ isomorfa ad $\mathfrak{I}_n$ se $V \neq |\mathfrak{I}_{n+1}'|$. In particolare, $\mathfrak{I}_{n+1}'$ è l'unica sottoalgebra abeliana $n-$dimensionale in $\mathfrak{I}_{n+1}$.*

Teorema 2. *Sia $\mathcal{G}$ un'algebra di Lie di dimensione $n+1$, tale che ogni sottospazio bidimensionale è una sottoalgebra. Allora, $\mathcal{G}$ è abeliana, oppure isomorfa all'algebra di Rotondaro $\mathfrak{I}_{n+1}$.*

Dimostrazione. Se tutti i sottospazi $2-$dimensionali di $\mathcal{G}$ sono sottoalgebre, ovviamente, ogni sottospazio $V \subset |\mathcal{G}|$ è una sottoalgebra. Dimostreremo il teorema per induzione su $n \geq 3$. Per quanto dimostrato nel Lemma 10, l'asserto è vero per $n = 3$. Scegliamo $n = 3$ come base di induzione e, supposto il risultato vero per le algebre di dimensione n, dimostriamo il risultato vero per le algebre di dimensione $n+1$. Se ogni sottospazio V di dimensione n è una sottoalgebra abeliana, ovviamente $\mathcal{G}$ stessa è abeliana. Assumiamo, allora che $V \subset |\mathcal{G}|$ sia un sottospazio di dimensione n non abeliano, allora per ipotesi di induzione V è isomorfa ad $\mathfrak{I}_n$. Sia $V_0 \subset V$ ilsottospazio di dimensione $n-1$, supporto dell'algebra derivata (abeliana) di V, poichè $V \simeq \mathfrak{I}_n$ esiste un elemento $e \in V$ tale che $ad_{e|V_0} = Id_{V_0}$. Sia, ora, $W \subset |\mathcal{G}|$, un sottospazio tale che $\dim W = n$, $e \in W$ e $W \neq V$. Allora, $|\mathcal{G}| = \text{span}\{V, W\}$ ed, essendo i due sottospazi distinti, $V \cap W$ è una sottoalgebra di dimensione $n-1$. Poichè $e \notin V_0 \cap W$, $V_0 \cap W$ è un sottospazio di codimensione 1 in $V \cap W$ e $\dim(V_0 \cap W) = n-2 \geq 1$. Ovviamente, $ad_{e|(V_0 \cap W)} = Id_{V_0 \cap W}$. Quindi, $V \cap W$ non è abeliana in $\mathcal{G}$ e, per ipotesi di induzione, è isomorfa ad $\mathfrak{I}_{n-1}$. Questo significa che l'algebra il cui supporto è W, non è abeliana in $\mathcal{G}$, perchè contiene la sottoalgebra $V \cap W$ che non è abeliana; allora, W è isomorfa ad $\mathfrak{I}_n$. Denotato con W_0 il sottospazio abeliano, di W $\dim W_0 = n-1$ ed, inoltre, $V_0 \cap W \subset W_0$. Infatti, W_0 è l'autospazio di $ad_{e_{|W_0}}$corrispondente all'autovalore 1. Quindi, $\dim(V_0 + W_0) = n$ e $ad_{e|(V_0+W_0)} = Id_{V_0+W_0}$. Resta da provare che $V_0 + W_0$ è abeliana. Siano $x, y \in V_0 + W_0$, allora, nella sottoalgebra $H = \operatorname{span}\{x, y, e\}$ x ed y appartengono all'autospazio relativo all'autovalore 1 di $ad_{e_{|H}}$. Dall'ipotesi di induzione, poichè H è tridimensionale, sappiamo che tale spazio è abeliano$\Rightarrow$ $[x, y] = 0$. □

Alla base del precedente teorema è possibile dimostrare la seguente proposizione che claasificherà tutte le algebre di Killing ad orbite tridimensionali, sulle quali il tensore metrico g degenera totalmente.

Proposizione 3. *Sia $\mathcal{G}_k$ $(3 < k \leq 6)$ un'algebra di Killing ad orbite tridimensionali di una varietà pseudoriemanniana (M, g). Se g è completamente degenere sulle orbite di $\mathcal{G}_k$, allora:*

(a) *Se $\dim \mathcal{G}_k = 4$ allora $\mathcal{G}_4$ è abeliana oppure è isomorfa all'algebra di Rotondaro $\mathfrak{I}_4$.*

(b) *$\mathcal{G}_k$ è abeliana se $k = 5, 6$*

Dimostrazione. (a) Fissata una base $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{G}_k$ $(3 < k \leq 6)$ in modo che $\{X_1, X_2, X_3\}$ sia una base della distribuzione $\mathcal{D}$ generata da $\mathcal{G}_4$, esistono delle funzioni f_i tali che $X_4 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 \in \mathcal{G}_k$

Poichè la metrica si annulla sulle foglie, dalla relazione (1.6) si ha $\Gamma = 0 \Rightarrow J = 0$. Questo significa che, considerati i commutatori del quarto campo X_4 con i primi tre, otteniamo:

$$\begin{cases} [X_1, X_4] = f_2 [X_1, X_2] + f_3 [X_1, X_3] \\ [X_2, X_4] = -f_1 [X_1, X_2] + f_3 [X_2, X_3] \\ [X_3, X_4] = -f_1 [X_1, X_3] - f_2 [X_2, X_3] \end{cases}$$

Per il Lemma 8 sappiamo che il sistema dei differenziali $\{df_1, df_2, df_3\}$ ha rango due, possiamo supporre

(1) df_1, df_3 indipendenti $(\gamma_2 \neq 0)$
(2) df_2, df_3 indipendenti $(\gamma_1 \neq 0)$

Poichè i campi $[X_1, X_4], [X_2, X_4], [X_3, X_4]$ sono campi di Killing per la metrica g,

$$
\begin{aligned}
0 &= df_2 \cdot g_{[X_1,X_2]} + df_3 \cdot g_{[X_1,X_3]} \\
0 &= -df_1 \cdot g_{[X_1,X_2]} + df_3 \cdot g_{[X_2,X_3]} \\
0 &= -df_1 \cdot g_{[X_1,X_3]} - df_2 \cdot g_{[X_2,X_3]}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

da cui otteniamo

$$
\left.\begin{array}{ll}
g_{[X_1,X_2]} = \alpha df_3 & g_{[X_1,X_3]} = -\alpha df_2 \\
g_{[X_1,X_2]} = \beta df_3 & g_{[X_2,X_3]} = \beta df_1 \\
g_{[X_1,X_3]} = \gamma df_2 & g_{[X_2,X_3]} = -\gamma df_1
\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = -\gamma \tag{2.2}
$$

allora $g_{[X_1,X_2]} = \alpha df_3$, $g_{[X_2,X_3]} = \alpha df_1$, $g_{[X_1,X_3]} = -\alpha df_2$. Sostituendo le espressioni dei tre differenziali:

$$
\left\{\begin{array}{l}
g_{[X_1,X_2]} = g_{\alpha(\gamma_2 X - \gamma_1 Y)} \\
g_{[X_2,X_3]} = g_{\alpha(\gamma_3 Y - \gamma_2 Z)} \\
g_{[X_1,X_3]} = g_{\alpha(\gamma_3 X - \gamma_1 Z)}
\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
[X_1, X_2] = \alpha\,(\gamma_2 X_1 - \gamma_1 X_2) \\
[X_2, X_3] = \alpha\,(\gamma_3 X_2 - \gamma_2 X_3) \\
[X_1, X_3] = \alpha\,(\gamma_3 X_1 - \gamma_1 X_3)
\end{array}\right. \tag{2.3}
$$

Se osserviamo il sistema (2.3) si evince che, dati due qualunque campi dell'algebra $\mathcal{G}_k$,questi generano una sottoalgebra bidimensionale. Ad analoga conclusione si giunge se consideriamo i commutatori con il campo X_4. Per la Proposizione 2, se l'algebra $\mathcal{G}_4$ è abeliana, oppure è isomorfa ad $\mathfrak{I}_4$.

(b) Nel caso in cui la dimensione dell'algebra è $4 < k \leq 6$ consideriamo $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} \subset \mathcal{G}_k$ un sistema di campi linearmente indipendenti tali che X_1, X_2, X_3 generano la distribuzione $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{G}_r)$. Siano $f_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, 2, 3$ tali che il campo X_4 ha espressione (1.1) e $f_i' \in C^\infty(M)$, $i = 1, 2, 3$ tali che $X_5 = f_1' X_1 + f_2' X_2 + f_3' X_3$. Con procedimento analogo a quello precedente, si ottiene un sistema del tipo (2.2)

$$
\left\{\begin{array}{ll}
g_{[X_1,X_2]} = \alpha df_3 & g_{[X_1,X_3]} = -\alpha df_2 \\
g_{[X_1,X_2]} = \beta df_3 & g_{[X_2,X_3]} = \beta df_1 \\
g_{[X_1,X_3]} = \gamma df_2 & g_{[X_2,X_3]} = -\gamma df_1
\end{array}\right.
$$

con $\alpha' \in C^\infty(M)$. Quindi, $\alpha' df_i = \alpha df_i$, $i = 1, 2, 3$. Ma i sistemi $\{df_1, df_2, df_3\}$ e $\{df_1', df_2', df_3'\}$ sono indipendenti. Pertanto, dobbiamo concludere $\alpha = \alpha' = 0$, i.e., $\mathcal{G}_k$ è abeliana. □

3. Realizzazione delle algebre di Rotondaro.

Supponiamo di essere nelle ipotesi della precedente proposizione e che $k = 4$. E' possibile trovare un'espressione coordinata per i generatori dell'algebra $\mathcal{G}_4$. Se $\mathcal{G}_4$ è abeliana, ovviamente, tale rappresentazione coordinata è ovvia. Se $\mathcal{G}_4$ non è abeliana, per la proposizione precedente, sappiamo che è isomorfa all'algebra di Rotondaro $\mathfrak{I}_4$. Nel seguito distingueremo differenti casi, ottenuti studiando le orbite dell'algebra derivata $\mathfrak{I}'_4$. Prima di procedere con la realizzazione in termini di campi coordinati, premettiamo un noto risultato di cui forniremo uno stralcio della dimostrazione, che non coincide esattamente con quella riportata dai testi classici.

TEOREMA 3. *(III Teorema di Lie) .Data un'algebra di Lie astratta, questa è sempre l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, in generale, data un'algebra ed una base di campi, la struttura si definisce con $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ dove le c_{ij}^k sono costanti. se i generatori X_i sono campi invarianti a destra (vedi [**15**], [**8**]) su G, e $\{A_{t_i}^i\} \longleftrightarrow X_i$ sono i flussi generati da X_i, allora possiamo considerare la carta

$$(t_1, ..., t_n) \longmapsto A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_n}^n(e).$$

dove e è l'identità di G. Notiamo che

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*}) = A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_i}^{i*} \circ X_i \circ A_{t_{i-1}}^{i-1*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*}$$

allora, $\forall\ f$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_i} f(t_1, ..., t_n) = \frac{\partial}{\partial t_i} f(A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_n}^n(e)) &= \frac{\partial}{\partial t_i}(A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_n}^n)^*(f)(e) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_i}(A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*})(f)(e) \\
&= (A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_i}^{i*} \circ X_i \circ A_{t_{i-1}}^{i-1*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*})(f)(e) \\
&= (A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*}) \circ (A_{-t_1}^{1*} \circ ... \circ A_{-t_{i-1}}^{i-1*} \circ X_i \circ A_{t_{i-1}}^{i-1*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*})(f)(e) \\
&= (A_{t_n}^{n*} \circ ... \circ A_{t_1}^{1*}) \circ ((A_{t_1}^1(...(A_{t_{i-i}}^{i-1}(X_i))...)(f)(e) \\
&= ((A_{t_1}^1(...(A_{t_{i-i}}^{i-1}(X_i))...)(f)(A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_n}^n(e)) \\
&= ((A_{t_1}^1(...(A_{t_{i-i}}^{i-1}(X_i))...)(f(t_1, ..., t_n))
\end{aligned}$$

cioè

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_{(t_1, t_2, ..., t_{i-1}, \cdot, ..., \cdot)} = (A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_{i-i}}^{i-1})(X_i).$$

D'altra parte $(A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_{i-i}}^{i-1})(X_j)$ ha la seguente forma:

$$(A_{t_1}^1 \circ ... \circ A_{t_{i-i}}^{i-1})(X_j) = \sum_{h=1}^n \alpha_j^h(t_1, t_2, ..., t_i) X_h.$$

Premessi questi risultati, possiamo stabilire una procedura che ci permetterà di realizzare un'algebra di Lie astratta $A := (\{\xi_1, ..., \xi_n\}, [\ ,\ ])$

in termini dei campi $X_1, ..., X_n$ su un intorno aperto di $\mathbb{R}^n$.
Se

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$$

abbiamo bisogno che

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$$

dove c_{ij}^k sono le stesse costanti di struttura dell'algebra A.
Iniziamo il procedimento, ponendo:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}.$$

Se si pone

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_2}\right|_{(t_1,\cdot,...,\cdot)} = A_{t_1}^1(X_2)$$

allora, la seguente equazione deve essere soddisfatta

$$\frac{d}{dt_1}(A_{t_1}^1(X_2)) = [A_{t_1}^1(X_2), X_1]$$

insieme alle condizioni iniziali

$$A_{t_1=0}^1(X_2) = X_2.$$

L'elemento $A_{t_1}^1(X_2)$, come elemento dell'algebra, si scriverà nella forma

$$A_{t_1}^1(X_2) = \sum_{h=1}^{n} \alpha_2^h(t_1) X_h$$

Il suddetto problema di Cauchy si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}\alpha_2^h(t_1) = \displaystyle\sum_k \alpha_2^k(t_1) c_{k1}^h \\ \alpha_2^h(t_1 = 0) = \delta_{h2}. \end{cases}$$

Questo permette di ottenere $A_{t_1}^1(X_2)$ come combinazione lineare concreta dei campi $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_2}\right|_{(t_1,\cdot,...,\cdot)} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_2^h(t_1) X_h.$$

Il prossimo passo è quello di ottenere $\left.\frac{\partial}{\partial t_3}\right|_{(t_1,t_2,\cdot,...,\cdot)}$ come combinazione lineare concreta dei campi $X_1, X_2, ..., X_n$. A tal fine, poniamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_3}\right|_{(t_1,t_2,\cdot,...,\cdot)} = (A_{t_1}^1 \circ A_{t_2}^2)(X_3)$$

e calcoliamo $(A^1_{t_1} \circ A^2_{t_2})(X_3)$ nel seguente modo. Come prima cosa, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt_2}(A^2_{t_2}(X_3)) = [A^2_{t_2}(X_3), X_2] \\ A^2_0(X_3) = X_3 \end{cases}$$

e se

$$A^2_{t_2}(X_3) = \sum_{h=1}^{n} \alpha^h_3(t_2) X_h$$

il problema di cauchy diventa

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt_2}\alpha^h_3 = \displaystyle\sum_k \alpha^k_3 c^h_{k2} \\ \alpha^h_3(0) = \delta_{h3} \end{cases}$$

e concretamente determina una $A^2_{t_2}(X_3) = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \alpha^h_3(t_2) X_h$. Infine, consideriamo il rimanente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}(A^1_{t_1}(A^2_{t_2}(X_3))) = [A^1_{t_1}(A^2_{t_2}(X_3)), X_1] \\ A^1_0(A^2_{t_2}(X_3)) = A^2_{t_2}(X_3). \end{cases}$$

A tal punto, risolvendo il problema, otteniamo $\left.\dfrac{\partial}{\partial t_3}\right|_{(t_1,t_2,\cdot,\dots,\cdot)}$ come combinazione lineare dei campi $X_1, X_2, \dots, X_n$.
E' chiaro che, iterando il procedimento, è possibile determinare tutti i campi $X_1, X_2, \dots, X_n$. Alla fine di tutto il procedimento, si giungerà al seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_1} = X_1 \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial t_2}\right|_{(t_1,\cdot,\dots,\cdot)} = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \alpha^h_2(t_1) X_h \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial t_3}\right|_{(t_1,t_2,\cdot,\dots,\cdot)} = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \alpha^h_3(t_1,t_2) X_h \\ \dots \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial t_n}\right|_{(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},\cdot)} = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \alpha^h_n(t_1,\dots,t_{n-1}) X_h. \end{cases}$$

Le equazioni presenti sono linearmente indipendenti, perchè lo sono le derivate $\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \left.\dfrac{\partial}{\partial t_2}\right|_{(t_1,\cdot,\dots,\cdot)}, \dots, \left.\dfrac{\partial}{\partial t_n}\right|_{(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},\cdot)}$, e determinano l'insieme dei campi $X_1, ..., X_n$. La procedura è corretta perchè si vede che la condizione

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k.$$

è verificata. La validità della condizione può essere verificata semplicemente utilizzando le informazioni che si ottengono dalle equazioni del sistema. □

Siamo, quindi, pronti a trovare una rappresentazione coordinatr dell'algebra di Rotondaro $\mathfrak{I}_4$. Poichè l'algebra di Rotondaro $\mathfrak{I}_4$ ha algebra derivata tridimensionale abeliana, abbiamo proseguito l'analisi ragionando sulla dimensione delle orbite dell'algebra derivata.

CASO 1. *Orbite tridimensionali.*

Se le orbite di $\mathfrak{I}_4'$ sono tridimensionali, queste coincidonoo con le orbite dell'algebra $\mathfrak{I}_4$. Possiamo, quindi, scegliere tre campi $\mathbb{R}-$linearmente indipendenti X_1, X_2, X_3, che generano le orbite di $\mathfrak{I}_4'$ e la distribuzione $\mathcal{D}$. Il quarto campo $X_4 = f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3$ con $f_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, 2, 3$. Per quanto osservato sulle algebre di Rotondaro, il campo X_4 agisce come l'identità sugli elementi di $\mathfrak{I}_4'$. Allora, tenendo presente che la metrice J (presente nella relazione (1.6)) è nulla e che i campi X_1, X_2, X_3 commutano tra loro,

(3.1)

$$X_i = -[X_i, X_4] = \sum_{j=1}^{3} X_i(f_j) X_j + \sum_{j=1}^{3} f_j [X_i, X_j] = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

La relazione (3.1) mostra che le orbite di $\mathfrak{I}_4'$ devono essere bidimensionali.

CASO 2. *Orbite bidimensionali.*

Se le orbite di $\mathfrak{I}_n'$ sono bidimensionali, scelti X_1 ed X_2 due campi $\mathbb{R}-$linearmente indipendenti, possiamo considerare il terzo campo $X_3 = f_1X_1 + f_2X_2$ ed un quarto campo X_4 che risulti essere linearmente indipendente con i precedenti.

LEMMA 12. *Siano X_1, X_2 e $f_1X_1 + f_2X_2$, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, campi di Killing per una data metrica (M, g). Allora, supponendo X_1 ed X_2 indipendenti, f_1 ed f_2 sono linearmente, oppure sono costanti.*

DIMOSTRAZIONE. Se si tiene conto che $L_{X_1}(g) = L_{X_2}(g) = 0$, dalla relazione (1.2) si ottiene

$$0 = L_{f_1X_1+f_2X_2}(g) = i_{X_1} \cdot df_1 + i_{X_2} \cdot df_2$$

Supponiamo che $f_2 = \varphi(f_1)$, allora la suddetta relazione diventa

$$0 = (i_{X_1} + \varphi' i_{X_2}) \cdot df_1 = i_{X_1+\varphi' X_2}(g) \cdot df_1, \tag{3.2}$$

se $df_1 \neq 0$, l'uguaglianza (3.2) implica $i_{X_1+\varphi' X_2}(g) = 0 \Rightarrow X_1 + \varphi' X_2 = 0$ poichè g è non degenere e questo è in contraddizione con la supposta indipendenza di X_1, X_2. Se, $df_1 = 0$, ovviamente $df_2 = 0$. $\square$

Corollario 1. *Se $\mathcal{G}$ è un'algebra tridimensionale di Killing ad orbite di Killing bidimensionli ed i campi X_1, X_2, X_3 sono i suoi generatori, allora quasi ovunque $X_3 = f_1 X_1 + f_2 X_2$ ed f_1, f_2 funzionalmente indipendenti.*

I campi X_1, X_2, X_4 sono linearente indipendenti e generano l'orbita tridimensionale di $\mathfrak{I}_4$; poichè lo spazio $V = \operatorname{span}\{X_1, X_2, X_4\}$ non coincide con $|\mathfrak{I}_4'|$ per il Lemma 11 l'algebra generata da $\{X_1, X_2, X_4\}$ è isomorfa a $\mathfrak{I}_3$ (i.e. $[X_1, X_2] = 0, [X_4, X_i] = X_i,\ i = 1, 2$). La realizzazione in termini di campi coordinati di quest'ultima algebra tridimensionale si trova semplicemente. Siano $\left\{A^i_{x_i}\right\}$ i flussi generati dai campi X_i, con $i = 1, 2, 4$, poniamo $X_1 = \partial_1$. Il secondo campo coordinato lo si può trovare spostando il campo X_2 mediante il flusso di $X_1 : \partial_2 = A^1_{x_1}(X_2)$. Ma, questo è un elemento dell'algebra, quindi $A^1_{x_1}(X_2) = \sum\limits_{i=1,2,4} \alpha_i(x_1) X_i$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} A^1_{x_1}(X_2) &= \left[A^1_{x_1}(X_2), X_1\right] \\ &= \left[\sum_{i=1,2,4} \alpha_i(x_1) X_i, X_1\right] = \alpha_4 X_1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dx_1} A^1_{x_1}(X_2) = \sum_{i=1,2,4} \alpha_i'(x_1) X_i \tag{3.4}$$

Confrontando le espressioni (3.3),(3.4) si presenta il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \alpha_1' = \alpha_4 \\ \alpha_2' = 0 \\ \alpha_4' = 0 \\ \alpha_1(0) = \alpha_4(0) = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Ne deduciamo che $\partial_2 = X_2$. Il terzo campo coordinato $\partial_3 = A^1_{x_1}\left(A^2_{x_2}(X_4)\right)$. Analogamente al precedente caso, calcoliamo $A^2_{x_2}(X_4)$, questo come campo dell'algebra si scrive $A^2_{x_2}(X_4) = \sum_{i=1,2,4} \beta_i(x_1) X_i$; allora

$$\sum_{i=1,2,4} \beta_i'(x_1) X_i = \frac{d}{dx_1} A^2_{x_2}(X_4) = \left[A^2_{x_2}(X_4), X_2\right] = \beta_4 X_2$$

Anche in questo caso, otteniamo un semplice problema di Cauchy

$$\begin{cases} \beta_1' = 0 \\ \beta_2' = \beta_4 \\ \beta_4' = 0 \\ \beta_1(0) = \beta_2(0) = 0 \\ \beta_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = x_2 \\ \beta_4 = 1 \end{cases}$$

Quindi, $A^1_{x_1}\left(A^2_{x_2}(X_4)\right) = A^1_{x_1}(x_2 X_2 + X_4) = A^1_{x_1}(x_2 X_2) + A^1_{x_1}(X_4)$; per trovare il terzo campo coordinato, sarà necessario trovare solo $A^1_{x_1}(X_4)$, che con procedimento analogo al precedente, sarà $A^1_{x_1}(X_4) = x_1 X_1 + X_4$. L'espressione dei campi X_1, X_2, X_4 in termine di campi coordinati è:

$$X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_4 = \partial_3 - x_2\partial_2 - x_1\partial_1$$

Il campo X_3 si scriverà $X_3 = f_1 X_1 + f_2 X_2 = f_1\partial_1 + f_2\partial_2$. Le relazioni $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$ implicano

$$\partial_i(f_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2$$

e, quindi, f_1, f_2 non dipendono dalle prime due coordinate. La relazione $[X_4, X_3] = X_3$ mostra che $f_i \equiv f_i(x_4, x_5, ...)$, con $i = 1, 2$. E' possibile riordinare la carta in modo che $f_1 = x_4$ ed $f_2 = x_5$. L'espressione coordinata dei generatori dell'algebra di Rorondaro $\mathfrak{I}_4$ è:

$$X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = x_4\partial_1 + x_5\partial_2,\ X_4 = \partial_3 - x_2\partial_2 - x_1\partial_1.$$

Caso 3. *Orbite* 1$-$*dimensionali.*

Le orbite di $\mathfrak{I}_4'$ non possono avere dimensione 1. Infatti, scelto X_1 come generatore dell'orbita, possiamo considerare un altro campo $X_2 = \varphi X_1$, ma come dimostra il seguente Lemma, due campi di Killing sono proporzionali secondo una costante:

Lemma 13. *Sia $X \in D(M)$ ed $f \in C^\infty(M)$. Se i campi X ed fX sono campi di Killing per una metrica (M, g), allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Il campo X è di Killing $L_X(g) = 0$, analogamente se fX è di Killing $L_{fX}(g) = 0$, per la formula (1.6)

$$0 = L_{fX}(g) = i_X(g) \cdot df$$

questo significa che $df = 0 \Leftrightarrow f = costante$. $\square$

CAPITOLO 3

Orbite doppiamente degeneri.

In questo terzo capitolo analizzeremo quali algebre si possono realizzare come algebre di Killing ad orbite tridimensionali per una metrica g, nel caso in cui questa degenera con rango 1, quando la si restringe sulle foglie. Si è osservato che, in queste ipotesi, anche la distribuzione ortogonale $\mathcal{D}^{\perp}$ di codimensione $(n-3)$ limita fortemente la dimensione dell'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$. Il risultato provato in questo capitolo, mostra che l'algebra non può avere dimensione superiore a 4, se la distribuzione ortogonale non è integrabile e, inoltre, si vedrà che questo caso è riconducibile a quello trattato nel precedente capitolo. Nel caso in cui la distribuzione ortogonale risulta integrabile, lo studio delle strutture delle algebre si baserà su alcune identità polinomiali.

1. La distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$ non-integrabile.

Sia $\mathcal{D}$ è la distribuzione generata dall'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$, detta $\mathcal{D}^{\perp}$ la distribuzione ortogonale a $\mathcal{D}$, possiamo considerare la distribuzione $\mathcal{N} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}^{\perp}$, detta distribuzione **dei nuclei**. Nelle prossime proposizioni, vedremo come la distribuzione dei nucle è fortemente condizionata dalla distribuzione ortogonale $\mathcal{D}^{\perp}$.

Definizione 15. *Una distribuzione Σ si dice **parallela** se $\nabla_A B \in \Sigma,\ \forall A, B \in D(M)$.*

Lemma 14. *Sia $\mathcal{D}$ la distribuzione di Killing. La distribuzione $\mathcal{D}^{\perp}$ ortogonale a $\mathcal{D}$ è involutiva $\Leftrightarrow$ parallela.*

Dimostrazione. Sia X un campo di Killing ed $A, B \in \mathcal{D}^{\perp}$, allora

$$g(\nabla_A B, X) = -g(B, \nabla_A X) = g(A, \nabla_B X) = -g(\nabla_B A, X)$$

quindi, $\nabla_A B + \nabla_B A \in \mathcal{D}^{\perp}$. Ma $[A, B] = \nabla_A B - \nabla_B A \in \mathcal{D}^{\perp}$, quindi, risulta $\nabla_A B \in \mathcal{D}^{\perp}$. □

Lemma 15. *Sia $\mathcal{D}$ la distribuzione di Killing. Se la distribuzione $\mathcal{D}^{\perp}$ ortogonale a $\mathcal{D}$ è integrabile, si ha $\nabla_N(\mathcal{D}) \in \mathcal{N},\ \forall N \in \mathcal{N}$.*

Dimostrazione. Consideriamo il campo $X \in \mathcal{D}$, allora $X = \Sigma_i f_i X_i$ con $X_i \in \mathcal{D}$. $\nabla_N(X) = \Sigma_i N(f_i) X_i + \Sigma_i f_i \nabla_N X_i$. Basterà allora, far vedere che $\nabla_N X_i \in \mathcal{D}$. Sia $V \in \mathcal{D}^\perp$,

$$g(\nabla_N X_i, V) = -g(X_i, \nabla_N V) = 0$$

perchè la distribuzione $\mathcal{D}$, per il precedente Lemma è parallela e, quindi, $\nabla_N V \in \mathcal{D}^\perp$. □

Corollario 2. *Sia $\mathcal{D}$ la distribuzione di campi di Killing. Se $\mathcal{D}^\perp$, distribuzione ortogonale a $\mathcal{D}$ è integrabile, allora la distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$ è parallela e, quindi, integrabile.*

Valendo le suddette proprietà, si può dimostrare la seguente, fondamentale proposizine:

Proposizione 4. *Sia $\mathcal{G}_k$ un'algebra di Killing e $\mathcal{D}$ la distribuzione tridimensionale, generata da $\mathcal{G}_k$. Se $\dim \mathcal{G}_k > 4$, la distribuzione ortogonale a $\mathcal{D}$ è integrabile($\Rightarrow \mathcal{N}$ integrabile).*

Dimostrazione. Per ipotesi $\mathcal{G}_k$ contiene almeno cinque campi $\mathbb{R}-$linearmente indipendenti. Siano X, Y, Z i generatori della distribuzione $\mathcal{D}$.Qualunque siano i campi V e W indipendenti con i precedenti, questi sono tangenti alle orbite della distribuzione; questo vuol dire che esistono delle funzioni $f_i, \varphi_i \in C^\infty(M)$, con $i = 1, 2, 3$, non tutte cosanti, tali che $V = f_1 X + f_2 Y + f_3 Z$ e $W = \varphi_1 X + \varphi_2 Y + \varphi_3 Z$. I differenziali delle funzioni, in accordo con quanto detto nel paragrafo 1 sono soggetti alle seguenti relazioni

$$\begin{cases} df_1 = \gamma_3 g_Y - \gamma_2 g_Z \\ df_2 = -\gamma_3 g_X + \gamma_1 g_Z \\ df_3 = \gamma_2 g_X - \gamma_1 g_Y \end{cases} ; \qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \delta_3 g_Y - \delta_2 g_Z \\ d\varphi_2 = -\delta_3 g_X + \delta_1 g_Z \\ d\varphi_3 = \delta_2 g_X - \delta_1 g_Y \end{cases} ,$$

inoltre, i sistemi $\{df_i\}_{i=1,2,3}, \{d\varphi_i\}_{i=1,2,3}$ hanno rango due e si annullano su $\mathcal{D}^\perp$. Senza venir meno alla generalità, supponiamo che df_1, df_2 sono indipendenti $(\gamma_3 \neq 0)$. Assumiamo, quindi, che la distribuzione ortogonale non integrabile; questa ammette due differenziali indipendenti, allora $d\varphi_i = \alpha_i df_1 + \beta_i df_2 \Rightarrow \delta_i = \alpha_1 \gamma_i$, $(i = 1, 2, 3)$.Quindi, $d\varphi_i = \alpha_1 df_i$ e $\varphi_i = \varphi_i(f_i)$, cioè α_1 costante. Ma, allora, $\varphi_i = \alpha_1 f_i + c_i$ con $c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow W = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + \alpha_1 V$. Questo, ovviamente contraddice la supposta indipendenza dei campi X, Y, Z, V, W. □

L'ultima proposizione ci fornisce un'informazione utile riguardante la dimensione dell'algebra di Killing . Possiamo affermare che se la distribuzione bidimensionale dei nuclei $\mathcal{N}$ non è integrabile la dimensione dell'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$ minore o al più uguale a 4.

Lemma 16. *Se la distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$ non è integrabile, la matrice J (vedi (1.6)) ha rango zero.*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathcal{N} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}^{\perp}$ due campi $\mathbb{R}-$linearmente indipendenti. Poichè la distribuzione $\mathcal{N}$ è, per ipotesi, non integrabile, $[X, Y] \notin \mathcal{N}$. Inoltre, qualunque sia il campo $V \in \mathcal{D}^{\perp}$, risulta

$$i_V\,(df_i) = V\,(f_i) = 0,\ i = 1, 2, 3$$

dove i differenziali df_i sono gli stessi definiti nelparagrafo 1. Ne risulta, quindi, che $X\,(f_i) = Y\,(f_i) = 0,\ i = 1, 2, 3$ e, di conseguenza $[X, Y]\,(f_i) = 0$. Ma $[X, Y] \in \mathcal{D}$ ed è linearmente indipendente con X ed Y, pertanto $\{X, Y, [X, Y]\}$ generano la distribuzione $\mathcal{D}$. Se ne deduce che le funzioni f_i $(i = 1, 2, 3)$ sono costanti lungo le orbite dell'algebra $\mathcal{G}_k$ e la matrice $J = 0$. □

Ora, osserviamo che i risultati ottenuti nel caso in cui il tensore metrico si annulla quando ristretto alle orbite dell'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$, sono conseguenza del fatto che la matrice $J = 0$. Quindi, in virtù del Lemma 16, nel caso che stiamo considerando, otteniamo i medesimi risultati.

2. $\mathcal{N}$ integrabile.

Nel seguente paragrafo studieremo le algebre di Killing di dimensione 4 ad orbite tridimensionali nel caso in cui la distribuzione dei nuclei è integrabile. Sia $\mathcal{G}_4$ l'algebra di Killing ad orbite tridimensionali, dalla relazione (1.6), ottenuta nel precedente capitolo, si evince che, ovviamente, il rango della matrice J è al più uguale al rango della matrice prodotto $\Lambda\Gamma$. Se il rango del tensore metrico è 1, quando ristretto alle foglie, questo significa che $\mathrm{rg}\,(J) \leq 1$. Sarà sufficiente, quindi, studiare solo il caso in cui il rango è 1, perchè il caso $\mathrm{rg}\,(J) = 0$ è stato ampiamente studiato.

Siano X_1, X_2, X_3 i generatori della distribuzione $\mathcal{D}$, se $\mathrm{rg}\,(J) = 1$, allora, sono nulli tutti i minori di ordine due della matrice

$$J = \begin{pmatrix} X_1\,(f_1) & X_1\,(f_2) & X_1\,(f_3) \\ X_2\,(f_1) & X_2\,(f_2) & X_2\,(f_3) \\ X_3\,(f_1) & X_3\,(f_2) & X_3\,(f_3) \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{cases} X_1(f_1)X_2(f_2) - X_1(f_2)X_2(f_1) = 0 & * \\ X_1(f_2)X_2(f_3) - X_1(f_3)X_2(f_2) = 0 & * \\ X_1(f_1)X_2(f_3) - X_1(f_3)X_2(f_1) = 0 & \\ X_2(f_1)X_3(f_2) - X_2(f_2)X_3(f_1) = 0 & * \\ X_2(f_2)X_3(f_3) - X_2(f_3)X_3(f_2) = 0 & * \\ X_2(f_1)X_3(f_3) - X_2(f_3)X_3(f_1) = 0 & \\ X_1(f_1)X_3(f_2) - X_1(f_2)X_3(f_1) = 0 & \\ X_1(f_2)X_3(f_3) - X_1(f_3)X_3(f_2) = 0 & \\ X_1(f_1)X_3(f_3) - X_1(f_3)X_3(f_1) = 0 & \end{cases}$$

Dei nove minori di ordine due, sarà sufficiente considerare solo quattro fondamentali (evidenziati con un asterisco), perchè i rimanenti, per ragioni di antisimmetria, saranno automaticamente nulli.

Come dimostra il seguente Lemma le componenti della matrice J sono polinomi di secondo grado nelle variabili f_i, :

Lemma 17. *Siano $X_1, ..., X_n \in \mathcal{G}_{n+1}$ n campi linermente indipendenti che generano la distribuzione $\mathcal{D}$. Se $X_* \in \mathcal{G}_{n+1}$, allora, $X_* = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ e si avrà:*

$$X_j(f_k) + \sum_{i=1}^n \left(c_{ji}^k f_i + c_{ji}^* f_i f_k\right) = c_{j*}^k + c_{j*}^* f_i$$

dove c_{ji}^k, c_{ji}^* sono le costanti di struttura di $\mathcal{G}_{n+1}$. Inoltre, le tracce τ_i, τ_* degli operatori aggiunti ad_{X_i}, $(i = 1, 2, 3)$ e ad_{X_*} rispettivamente soddisfano la relazione:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i f_i = \tau_*. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Calcoliamo i commutatori $[X_j, X_*]$:

$$\begin{aligned} [X_j, X_*] &= \left[X_j, \sum_{i=1}^n f_i X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(f_i [X_j, X_i] + X_j(f_i) X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(f_i [X_j, X_i] + X_j(f_i) X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_j(f_i) X_i + f_i \sum_{k=1}^n c_{ji}^k X_k + f_i c_{ji}^* X_*\right). \end{aligned}$$

Poichè $\mathcal{G}_4$ è un'algebra di Lie, $[X_j, X_*] = \sum_{k=1}^{n} c_{j*}^k X_k + c_{j*}^* X_*$. Confrontando le due espressioni per i commutatori:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_j\left(f_i\right) X_i + f_i \sum_{k=1}^{n} c_{ji}^k X_k + f_i c_{ji}^* X_* \right) = \sum_{k=1}^{n} c_{j*}^k X_k + c_{j*}^* X_*$$

$$\Updownarrow$$

$$X_j\left(f_k\right) X_k + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i c_{ji}^k X_k + f_i f_k c_{ji}^* X_k \right) = c_{j*}^k X_k + c_{j*}^* f_k X_k$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{X_j\left(f_k\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i c_{ji}^k + f_i f_k c_{ji}^* \right) = c_{j*}^k + c_{j*}^* f_k}$$

Se $j = k$ si ottiene :

$$c_{ji}^j f_i + c_{ji}^* f_i f_j = c_{j*}^j + c_{j*}^* f_j \Leftrightarrow c_{ji}^j f_i + c_{*i}^* f_i = c_{j*}^j$$

per l'antisimmetria di c_{ji}^* si ottiene la relazione cercata. $\square$

La formula (2.1) è, ovviamente non banale se l'algebra non è unimodulare e ci permette di esprimere una delle funzioni f_i in funzione delle altre due. Se l'algebra è unimodulare, si sfrutterà, invece, il fatto che tutte le tracce degli aggiunti sono nulle.

Se, ora, si sostituiscono le epressioni ottenute per le componenti $X_j\left(f_i\right)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, nei quattro minori prescelti della matrice J, si giunge alle seguenti relazioni: (Nel seguito, per comodità, indicheremo le costanti di struttura con i tre indici in basso, riportando al primo posto l'indice che, nella scrittura classica, è in alto.):

1. $X_2\left(f_1\right) X_3\left(f_2\right) - X_2\left(f_2\right) X_3\left(f_1\right) =$
$\left(\left(-f_1 c_{121} - c_{421} f_1^2 - c_{123} f_3 - c_{423} f_1 f_3\right) + c_{124} + c_{424} f_1\right) \cdot$
$\left(\left(-c_{231} f_1 - c_{431} f_2 f_1 - c_{232} f_2 - c_{432} f_2^2\right) + c_{234} + c_{434} f_2\right) +$
$\left(\left(f_1 c_{221} + c_{421} f_1 f_2 + c_{223} f_3 + c_{423} f_2 f_3\right) - c_{224} - c_{424} f_2\right) \cdot$
$\left(\left(-c_{132} f_2 - c_{432} f_2 f_1 - c_{131} f_1 - c_{431} f_1^2\right) + c_{134} + c_{434} f_1\right) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
&c_{124}c_{234} - c_{134}c_{224} - f_1 c_{121}c_{234} + f_1 c_{131}c_{224} + f_1 c_{221}c_{134} \\
&-f_1 c_{231}c_{124} + f_2 c_{132}c_{224} - f_2 c_{124}c_{232} - f_3 c_{123}c_{234} + f_3 c_{223}c_{134} \\
&-f_1 c_{224}c_{434} + f_1 c_{234}c_{424} + f_2 c_{124}c_{434} - f_2 c_{134}c_{424} + f_1 f_2 c_{121}c_{232} \\
&-f_1 f_2 c_{221}c_{132} - f_1 f_3 c_{131}c_{223} + f_1 f_3 c_{123}c_{231} - f_1 f_2 c_{121}c_{434} \\
&+f_1 f_2 c_{131}c_{424} - f_1 f_2 c_{124}c_{431} + f_1 f_2 c_{421}c_{134} + f_2 f_3 c_{123}c_{232} \\
&-f_2 f_3 c_{132}c_{223} - f_1 f_2 c_{232}c_{424} + f_1 f_2 c_{224}c_{432} + f_1 f_3 c_{223}c_{434} \\
&-f_1 f_3 c_{234}c_{423} - f_2 f_3 c_{123}c_{434} + f_2 f_3 c_{134}c_{423} - f_1 f_2 f_3 c_{131}c_{423}
\end{aligned}$$

$$+f_1f_2f_3c_{123}c_{431} - f_1f_2f_3c_{223}c_{432} + f_1f_2f_3c_{232}c_{423} + f_1^2c_{121}c_{231}$$
$$-f_1^2c_{131}c_{221} - f_1^3c_{221}c_{431} + f_1^3c_{231}c_{421} + f_1^2c_{221}c_{434} - f_1^2c_{231}c_{424}$$
$$-f_1^2c_{421}c_{234} + f_1^2c_{224}c_{431} + f_2^2c_{132}c_{424} - f_2^2c_{124}c_{432} + f_1^2f_2c_{121}c_{431} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_3f_1^2\left(c_{231}c_{423} - c_{223}c_{431}\right) + f_3f_2\left(-c_{123}c_{434} + c_{134}c_{423}\right)$$
$$+f_3\left(c_{223}c_{134} - c_{123}c_{234}\right) + f_1f_3f_2\left(c_{123}c_{431} - c_{131}c_{423}\right)$$
$$+f_1f_3\left(c_{123}c_{231} - c_{131}c_{223} + c_{223}c_{434} - c_{234}c_{423}\right)$$
$$+f_1^3\left(c_{231}c_{421} - c_{221}c_{431}\right)$$
$$+f_1^2\left(c_{121}c_{231} - c_{131}c_{221} + c_{221}c_{434} - c_{231}c_{424} - c_{421}c_{234} + c_{224}c_{431}\right)$$
$$+f_1^2f_2\left(c_{121}c_{431} - c_{131}c_{421} - c_{221}c_{432} + c_{232}c_{421}\right) + f_1f_2^2\left(c_{121}c_{432} - c_{132}c_{421}\right)$$
$$+f_1f_2\left(c_{121}c_{232} - c_{221}c_{132} - c_{121}c_{434} + c_{131}c_{424} - c_{124}c_{431} + c_{421}c_{134} - c_{232}c_{424} + c_{224}c_{432}\right)$$
$$+f_1\left(c_{131}c_{224} - c_{121}c_{234} + c_{221}c_{134} - c_{231}c_{124} - c_{224}c_{434} + c_{234}c_{424}\right)$$
$$+f_2^2\left(c_{132}c_{424} - c_{124}c_{432}\right)$$
$$+f_2\left(c_{132}c_{224} - c_{124}c_{232} + c_{124}c_{434} - c_{134}c_{424}\right) + c_{124}c_{234} - c_{134}c_{224} = 0$$

2. $X_1\left(f_1\right)X_2\left(f_2\right) - X_1\left(f_2\right)X_2\left(f_1\right) =$

$$\left(\left(-f_2c_{112} - c_{412}f_1f_2 - c_{113}f_3 - c_{413}f_1f_3\right) + c_{114} + c_{414}f_1\right)\cdot$$
$$\left(\left(-c_{221}f_1 - c_{421}f_2f_1 - c_{223}f_3 - c_{423}f_2f_3\right) + c_{224} + c_{424}f_2\right) +$$
$$\left(\left(f_2c_{212} + c_{412}f_2^2 + c_{213}f_3 + c_{413}f_2f_3\right) - c_{214} - c_{414}f_2\right)\cdot$$
$$\left(\left(-c_{121}f_1 - c_{421}f_1^2 - c_{123}f_3 - c_{423}f_1f_3\right) + c_{124} + c_{424}f_1\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_{114}c_{224} - c_{124}c_{214} + f_1c_{121}c_{214} - f_1c_{221}c_{114} - f_2c_{112}c_{224}$$
$$+f_2c_{212}c_{124} - f_3c_{113}c_{224} - f_3c_{114}c_{223} + f_3c_{123}c_{214} + f_3c_{213}c_{124}$$
$$-f_1c_{214}c_{424} + f_1c_{224}c_{414} + f_2c_{114}c_{424} - f_2c_{124}c_{414}$$
$$+f_1f_2c_{112}c_{221} - f_1f_2c_{121}c_{212} - f_1f_3c_{121}c_{213} + f_1f_3c_{113}c_{221}$$
$$+f_1f_2c_{121}c_{414} - f_1f_2c_{114}c_{421} + f_2f_3c_{112}c_{223} - f_2f_3c_{212}c_{123}$$
$$+f_1f_2c_{212}c_{424} - f_1f_2c_{412}c_{224} + f_1f_3c_{213}c_{424} + f_1f_3c_{214}c_{423}$$
$$-f_1f_3c_{223}c_{414} - f_1f_3c_{224}c_{413} - f_2f_3c_{113}c_{424} - f_2f_3c_{114}c_{423}$$
$$+f_2f_3c_{123}c_{414} + f_2f_3c_{124}c_{413} - f_1f_2f_3c_{121}c_{413} + f_1f_2f_3c_{113}c_{421}$$
$$-f_1f_2f_3c_{212}c_{423} + f_1f_2f_3c_{223}c_{412} - f_1^2c_{221}c_{414} + f_1^2c_{214}c_{421}$$
$$+f_3^2c_{113}c_{223} - f_3^2c_{123}c_{213} - f_2^2c_{112}c_{424} + f_2^2c_{124}c_{412} + f_1f_2^2c_{112}c_{421}$$
$$-f_1f_2^2c_{121}c_{412} - f_1^2f_2c_{212}c_{421} + f_1^2f_2c_{221}c_{412} + f_1^2f_3c_{221}c_{413}$$
$$-f_1^2f_3c_{213}c_{421} + f_2^2f_3c_{112}c_{423} - f_2^2f_3c_{123}c_{412} - f_1f_3^2c_{213}c_{423}$$
$$+f_1f_3^2c_{223}c_{413} + f_2f_3^2c_{113}c_{423} - f_2f_3^2c_{123}c_{413} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_3^2f_1\left(c_{223}c_{413} - c_{213}c_{423}\right) + f_3^2\left(c_{113}c_{223} - c_{123}c_{213}\right)$$
$$+f_3^2f_2\left(c_{113}c_{423} - c_{123}c_{413}\right) + f_3f_1^2\left(c_{221}c_{413} - c_{213}c_{421}\right)$$
$$+f_3f_2^2\left(c_{112}c_{423} - c_{123}c_{412}\right)$$
$$+f_3f_2\left(c_{112}c_{223} - c_{212}c_{123} - c_{113}c_{424} - c_{114}c_{423} + c_{123}c_{414} + c_{124}c_{413}\right)$$

$+f_3 f_1 f_2 \left(c_{113}c_{421} - c_{121}c_{413} - c_{212}c_{423} + c_{223}c_{412}\right)$
$+f_3 f_1 \left(c_{113}c_{221} - c_{121}c_{213} + c_{213}c_{424} + c_{214}c_{423} - c_{223}c_{414} - c_{224}c_{413}\right)$
$+f_3 \left(c_{123}c_{214} - c_{114}c_{223} - c_{113}c_{224} + c_{213}c_{124}\right) + f_1^2 \left(c_{214}c_{421} - c_{221}c_{414}\right)$
$+f_1 f_2 \left(c_{121}c_{414} - c_{114}c_{421} + c_{212}c_{424} - c_{412}c_{224}\right)$
$+f_1 \left(c_{121}c_{214} - c_{221}c_{114} - c_{214}c_{424} + c_{224}c_{414}\right) + f_2^2 \left(c_{124}c_{412} - c_{112}c_{424}\right)$
$+f_2 \left(c_{212}c_{124} - c_{112}c_{224} + c_{114}c_{424} - c_{124}c_{414}\right) + c_{114}c_{224} - c_{124}c_{214} = 0$

3. $X_1(f_2) X_2(f_3) - X_1(f_3) X_2(f_2) =$
$((-f_2 c_{212} - c_{412} f_2^2 - c_{213} f_3 - c_{413} f_2 f_3) + c_{214} + c_{414} f_2) \cdot$
$((-c_{321} f_1 - c_{421} f_3 f_1 - c_{323} f_3 - c_{423} f_3^2) + c_{324} + c_{424} f_3) +$
$((f_2 c_{312} + c_{412} f_2 f_3 + c_{313} f_3 + c_{413} f_3^2) - c_{314} - c_{414} f_3) \cdot$
$((-c_{221} f_1 - c_{421} f_2 f_1 - c_{223} f_3 - c_{423} f_2 f_3) + c_{224} + c_{424} f_2) = 0$

$\Downarrow$

$c_{214}c_{324} - c_{224}c_{314} + f_1 c_{221}c_{314} - f_1 c_{321}c_{214} - f_2 c_{212}c_{324} + f_2 c_{312}c_{224}$
$-f_3 c_{213}c_{324} - f_3 c_{214}c_{323} + f_3 c_{223}c_{314} + f_3 c_{313}c_{224} - f_2 c_{314}c_{424} + f_2 c_{324}c_{414}$
$+f_3 c_{214}c_{424} - f_3 c_{224}c_{414} + f_1 f_2 c_{212}c_{321} - f_1 f_2 c_{221}c_{312} - f_1 f_3 c_{221}c_{313}$
$+f_1 f_3 c_{213}c_{321} - f_1 f_2 c_{321}c_{414} + f_1 f_2 c_{421}c_{314} + f_1 f_3 c_{221}c_{414} - f_1 f_3 c_{214}c_{421}$
$+f_2 f_3 c_{212}c_{323} - f_2 f_3 c_{312}c_{223} - f_2 f_3 c_{212}c_{424} + f_2 f_3 c_{412}c_{224} + f_2 f_3 c_{313}c_{424}$
$+f_2 f_3 c_{314}c_{423} - f_2 f_3 c_{323}c_{414} - f_2 f_3 c_{413}c_{324} + f_1 f_2 f_3 c_{212}c_{421} - f_1 f_2 f_3 c_{221}c_{412}$
$+f_1 f_2 f_3 c_{321}c_{413} - f_1 f_2 f_3 c_{313}c_{421} + f_3^2 c_{213}c_{323} - f_3^2 c_{223}c_{313} + f_2^2 c_{312}c_{424}$
$-f_2^2 c_{412}c_{324} - f_3^2 c_{213}c_{424} - f_3^2 c_{214}c_{423} + f_3^2 c_{223}c_{414} + f_3^2 c_{224}c_{413} + f_3^3 c_{213}c_{423}$
$-f_3^3 c_{223}c_{413} - f_1 f_2^2 c_{312}c_{421} + f_1 f_2^2 c_{321}c_{412} - f_1 f_3^2 c_{221}c_{413} + f_1 f_3^2 c_{213}c_{421}$
$+f_2 f_3^2 c_{212}c_{423} - f_2 f_3^2 c_{223}c_{412} - f_2^2 f_3 c_{312}c_{423} + f_2^2 f_3 c_{412}c_{323} - f_2 f_3^2 c_{313}c_{423}$
$+f_2 f_3^2 c_{323}c_{413} = 0$

$\Downarrow$

$f_3^3 \left(c_{213}c_{423} - c_{223}c_{413}\right) + f_3^2 f_1 \left(c_{213}c_{421} - c_{221}c_{413}\right)$
$+f_3^2 \left(c_{213}c_{323} - c_{223}c_{313} - c_{213}c_{424} - c_{214}c_{423} + c_{223}c_{414} + c_{224}c_{413}\right)$
$+f_2 f_3^2 \left(c_{212}c_{423} - c_{223}c_{412} - c_{313}c_{423} + c_{323}c_{413}\right) + f_3 f_2^2 \left(c_{412}c_{323} - c_{312}c_{423}\right)$
$+f_3 f_2 \left(c_{212}c_{323} - c_{312}c_{223} - c_{212}c_{424} + c_{412}c_{224} + c_{313}c_{424} + c_{314}c_{423} - c_{323}c_{414} - c_{413}c_{324}\right)$
$+f_3 \left(c_{223}c_{314} - c_{214}c_{323} - c_{213}c_{324} + c_{313}c_{224} + c_{214}c_{424} - c_{224}c_{414}\right)$
$+f_3 f_1 f_2 \left(c_{321}c_{413} - c_{313}c_{421}\right) + f_3 f_1 \left(c_{213}c_{321} - c_{221}c_{313} + c_{221}c_{414} - c_{214}c_{421}\right)$
$+f_2^2 \left(c_{312}c_{424} - c_{412}c_{324}\right) + f_2 \left(c_{312}c_{224} - c_{212}c_{324} - c_{314}c_{424} + c_{324}c_{414}\right)$
$+f_1 f_2 \left(-c_{321}c_{414} + c_{421}c_{314}\right) + f_1 \left(c_{221}c_{314} - c_{321}c_{214}\right)$
$+c_{214}c_{324} - c_{224}c_{314} = 0$

4. $X_3(f_3) X_2(f_2) - X_3(f_2) X_2(f_3) =$
$((-c_{221} f_1 - c_{421} f_2 f_1 - c_{223} f_3 - c_{423} f_2 f_3) + c_{224} + c_{424} f_2) \cdot$
$(-c_{332} f_2 - c_{331} f_1 - c_{431} f_1 f_3 - c_{432} f_2 f_3 + c_{334} + c_{434} f_3) +$

$$((+c_{231}f_1 + c_{431}f_2f_1 + c_{232}f_2 + c_{432}f_2^2) - c_{234} - c_{434}f_2)\cdot$$
$$((-c_{321}f_1 - c_{421}f_3f_1 - c_{323}f_3 - c_{423}f_3^2) + c_{324} + c_{424}f_3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_{224}c_{334} - c_{234}c_{324} - f_1c_{221}c_{334} + f_1c_{231}c_{324} + f_1c_{321}c_{234} - f_1c_{331}c_{224}$$
$$+f_2c_{232}c_{324} - f_2c_{224}c_{332} - f_3c_{223}c_{334} + f_3c_{323}c_{234} - f_2c_{324}c_{434} + f_2c_{334}c_{424}$$
$$+f_3c_{224}c_{434} - f_3c_{234}c_{424} + f_1f_2c_{221}c_{332} - f_1f_2c_{321}c_{232} - f_1f_3c_{231}c_{323}$$
$$+f_1f_3c_{223}c_{331} + f_1f_2c_{321}c_{434} - f_1f_2c_{331}c_{424} - f_1f_2c_{421}c_{334} + f_1f_2c_{431}c_{324}$$
$$-f_1f_3c_{221}c_{434} + f_1f_3c_{231}c_{424} + f_1f_3c_{421}c_{234} - f_1f_3c_{224}c_{431} + f_2f_3c_{223}c_{332}$$
$$-f_2f_3c_{232}c_{323} + f_2f_3c_{232}c_{424} - f_2f_3c_{224}c_{432} + f_2f_3c_{323}c_{434} - f_2f_3c_{423}c_{334}$$
$$+f_1f_2f_3c_{221}c_{432} - f_1f_2f_3c_{232}c_{421} + f_1f_2f_3c_{331}c_{423} - f_1f_2f_3c_{323}c_{431}$$
$$+f_1^2c_{221}c_{331} - f_1^2c_{231}c_{321} - f_2^2c_{332}c_{424} + f_2^2c_{324}c_{432} - f_3^2c_{223}c_{434} + f_3^2c_{234}$$
$$c_{423}$$
$$-f_1^2f_2c_{321}c_{431} + f_1^2f_2c_{331}c_{421} + f_1^2f_3c_{221}c_{431} - f_1^2f_3c_{231}c_{421} - f_1f_2^2c_{321}c_{432}$$
$$+f_1f_2^2c_{421}c_{332} - f_1f_3^2c_{231}c_{423} + f_1f_3^2c_{223}c_{431} + f_2f_3^2c_{223}c_{432} - f_2f_3^2c_{232}c_{423}$$
$$-f_2^2f_3c_{323}c_{432} + f_2^2f_3c_{332}c_{423} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_3^2f_1\left(c_{223}c_{431} - c_{231}c_{423}\right)+f_3^2\left(c_{234}c_{423} - c_{223}c_{434}\right)+f_3f_1^2\left(c_{221}c_{431} - c_{231}c_{421}\right)$$
$$+f_3f_2\left(c_{232}c_{424} - c_{224}c_{432} + c_{323}c_{434} - c_{423}c_{334}\right)$$
$$+f_3\left(c_{323}c_{234} - c_{223}c_{334} + c_{224}c_{434} - c_{234}c_{424}\right)$$
$$+f_1f_2f_3\left(c_{221}c_{432} - c_{232}c_{421} + c_{331}c_{423} - c_{323}c_{431}\right)$$
$$+f_1f_3\left(c_{223}c_{331} - c_{231}c_{323} - c_{221}c_{434} + c_{231}c_{424} + c_{421}c_{234} - c_{224}c_{431}\right)$$
$$+f_1^2f_2\left(c_{331}c_{421} - c_{321}c_{431}\right)+f_1^2\left(c_{221}c_{331} - c_{231}c_{321}\right)+f_1f_2^2\left(c_{421}c_{332} - c_{321}c_{432}\right)$$
$$+f_1f_2\left(c_{221}c_{332} - c_{321}c_{232} + c_{321}c_{434} - c_{331}c_{424} - c_{421}c_{334} + c_{431}c_{324}\right)$$
$$+f_1\left(c_{231}c_{324} - c_{221}c_{334} + c_{321}c_{234} - c_{331}c_{224}\right) + f_2^2\left(c_{324}c_{432} - c_{332}c_{424}\right)$$
$$+f_2\left(c_{232}c_{324} - c_{224}c_{332} - c_{324}c_{434} + c_{334}c_{424}\right) + c_{224}c_{334} - c_{234}c_{324} = 0$$

Poichè i polinomi ottenuti forniscono l'epressione di f_3 in funzione di f_1 ed f_2, i loro coefficienti devono essere tutti proporzionali. Notiamo che f_3 compare nel primo polinomio solo al grado uno e che f_1 compare nel terzo solo al primo grado, pertanto si ha:

(2.2)
$$\begin{cases} c_{213}c_{423} - c_{223}c_{413} = 0 \\ c_{113}c_{223} - c_{123}c_{213} = 0 \\ c_{213}c_{323} - c_{223}c_{313} - c_{213}c_{424} - c_{214}c_{423} + c_{223}c_{414} + c_{224}c_{413} = 0 \\ -c_{223}c_{434} + c_{234}c_{423} = 0 \\ c_{113}c_{423} - c_{123}c_{413} = 0 \\ c_{212}c_{423} - c_{223}c_{412} - c_{313}c_{423} + c_{323}c_{413} = 0 \\ c_{112}c_{423} - c_{123}c_{412} = 0 \\ -c_{312}c_{423} + c_{412}c_{323} = 0 \\ c_{221}c_{413} - c_{213}c_{421} = 0 \\ -c_{221}c_{313} + c_{213}c_{321} = 0 \\ -c_{221}c_{414} + c_{214}c_{421} = 0 \\ -c_{121}c_{213} - c_{131}c_{221} + c_{221}c_{434} + c_{213}c_{424} - c_{421}c_{234} - c_{224}c_{413} = 0 \\ c_{321}c_{413} - c_{313}c_{421} = 0 \\ -c_{121}c_{413} + c_{113}c_{421} + c_{221}c_{423} - c_{223}c_{421} = 0 \end{cases}$$

Considerata la matrice rappresentativa dell'operatore aggiunto rispetto al campo X_3

$$ad_{X_3} \equiv \begin{pmatrix} c_{113} & c_{123} & 0 & c_{143} \\ c_{213} & c_{223} & 0 & c_{243} \\ c_{313} & c_{323} & 0 & c_{343} \\ c_{413} & c_{423} & 0 & c_{443} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

dalle relazioni del sistema (2.2), si ottiene che i minori della suddetta matrice (1) sono nulli

$$\begin{vmatrix} c_{113} & c_{123} \\ c_{213} & c_{223} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{113} & c_{123} \\ c_{413} & c_{423} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{223} & c_{243} \\ c_{423} & c_{443} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{213} & c_{223} \\ c_{413} & c_{423} \end{vmatrix} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{vmatrix} c_{213} & c_{243} \\ c_{413} & c_{443} \end{vmatrix} = 0$$

da cui si deduce che la seconda e la quarta riga della matrice sono proporzionali. Analogamente, se consideriamo la matrice dell'operatore aggiunto rispetto al campo X_2 dal sistema (2.2) si ha che sono nulli i minori:

$$\begin{vmatrix} c_{112} & c_{132} \\ c_{412} & c_{432} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{312} & c_{332} \\ c_{412} & c_{432} \end{vmatrix} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{vmatrix} c_{112} & c_{132} \\ c_{312} & c_{332} \end{vmatrix} = 0$$

Riassumendo le informazioni ottenute ed utilizzando l'antisimmetria delle costanti di struttura, si può provare che:

LEMMA 18. *Siano* $X_1, ..., X_4$ *una base dell'algebra di Killing* $\mathcal{G}_4$ *ed* $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{G}_4$ *l'deale generato dal campo* X_i, $(i = 1, .., 4)$. *Denotiamo con* $\widetilde{\mathcal{G}}_i$ *l'algebra quoziente* $\mathcal{G}_4/\mathcal{I}_i$, $i = 1, .., 4$. *Il rango dell'operatore* ad_{X_i} *sull'algebra quoziente è pari ad* 1 *e, quindi,* $\mathrm{rg}\,(ad_{X_i}) \leq 2$ *su tutta l'algebra* $\mathcal{G}_4$.

3. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_4$.

Consideriamo x, y, z, u i quattro campi che generano l'algebra $\mathcal{G}_4$. Dalle proprietà, ottenute nel precedente paragrafo, sugli aggiunti dei campi è possibile dedurre quali siano le strutture ammissibili per $\mathcal{G}_4$ nelle ipotesi in cui la metrica g degenera con rango uno sulle foglie della distribuzione $\mathcal{D}$. Per quanto visto nel Lemma 18, il rango della matrice dell'operatore aggiunto è al più bidimensionale, questo significa che il nucleo del medesimo operatore è almeno bidimensionale. Consideriamo, quindi, il campo $x \in \mathcal{G}_4$ ed il relativo operatore aggiunto ad_x. Proseguiremo l'analisi studiando la dimensione dell'immagine dell'operatore ad_x.

CASO 4. $\dim \mathrm{Im}\, ad_{\mathbf{x}} = 2$.

Se la dimensione dell'immagine è 2, sicuramente, il campo x vi appartiene. Inoltre, esiste altri due campi y e z, tali che $\mathrm{Im}\, ad_x = \mathrm{span}\,\{x, z\}$ e $\ker ad_x = \mathrm{span}\,\{x, y\}$. $\mathrm{Im}\, ad_x$ è un'algebra bidimensionale, questa potrà essere abeliana oppure non abeliana. Nel seguito studieremo separatamente i due casi:

1. **$\{x, z\}$ generano un'algebra non abeliana.**

In queste ipotesi il nucleo dell'operatore ad_x è bidimensionale, quindi, $\exists y \in \mathcal{G}_4 : [x, y] = 0$.Abbiamo dunque, i campi x, y, z, vediamo quando questi chiudono un algebra tridimensionale. Dall'identità di Jacobi per $\{x, y, z\}$ si ottiene:

$$ad_x\,([y, z]) = [y, z] \Rightarrow [y, z] \in \mathrm{Im}\, ad_x. \tag{3.1}$$

Questo significa che $[y, z]$ è combinazione lineare di x e z, $[y, z] = \alpha x + \beta z$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Sostituendo l'espressione di $[y, z]$ nella relazione (3.1) si ottiene

$$\alpha x + \beta z = \beta z \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \beta \end{cases}.$$

L'algebra tridimensionale generata dai tre campi ha la seguente struttura:

$$[x, y] = 0,\ [x, z] = z,\ [y, z] = \beta z, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Dobbiamo, quindi, distinguere i casi: $\beta = 0$, $\beta \neq 0$

i) $\beta = 0$.

Il commutatore $[y, z] = 0$ il campo $z \in \ker ad_y$, che risulta, pertanto, tridimensionale, contenendo già i campi indipendenti x, y. Questo significa che l'immagine dell'operatore ad_y potrà essere al più unidimensionale. Scelto un quarto campo $u \in \mathcal{G}_4$ $\mathbb{R}-$linearmente indipendente con i precedenti, questo non può commutare con x, altrimenti si avrebbero tre campi linearmente indipendenti nel $\ker ad_x$ che deve essere bidimensionale. Quindi, $[x, u] = a_1 x + a_2 z$ con a_1 ed a_2 costanti non contemporaneamente nulle. Poichè abbiamo osservato che $\dim \operatorname{Im} ad_y \leq 1$, è necessario studiare separatamente tre sottocasi:

a: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 0$

In questo caso il campo u commuta con y, $[y, u] = 0$. Se si scrivono le rimanenti identità di Jacobi per i campi x, y, z, u, si ottiene:
(3.2)

$$\begin{cases} 0 = [[x, y], u] + [[y, u], x] + [[u, x], y] \\ 0 = [[x, z], u] + [[z, u], x] + [[u, x], z] = [z, u] + [[z, u], x] - a_1 z \\ 0 = [[y, z], u] + [[z, u], y] + [[u, y], z] = [[z, u], y] \end{cases}$$

Vediamo che la prima è banalmente verificata. Dall'ultima, invece, si deduce che $[z, u] \in \ker ad_y$ ed poichè il $\ker ad_y$ è generato dai quattro campi x, y, z, u, $[z, u]$ si scrive come loro combinazione lineare: $[z, u] = hx + ky + lz + mu$, $(h, k, l, m \in \mathbb{R})$. Sostituendo $[z, u]$ nella seconda delle espressioni nel sistema (3.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= hx + ky + lz - lz + a_1 z \\ &= hx + ky + mu - m(a_1 x + a_2 z) + a_1 z, \end{aligned}$$

dall'indipendenza dei campi x, y, z, u segue $m = h = k = a_1 = 0$. La struttura dell'algebra sarà:

1) $\mathcal{G}_4 : [x, y] = 0, \quad [x, z] = z, \quad [y, z] = 0, \quad [x, u] = \lambda z, \quad [y, u] = 0, \quad [z, u] = lz,$

con $(\lambda \neq 0, l \in \mathbb{R})$.

b: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$ e $\operatorname{rg} ad_y$ è 0 su $\mathcal{G}_4/\langle y \rangle$.

In accordo con il lemma 18, $\operatorname{Im} ad_y = \operatorname{span}\{y\}$ ed il nucleo sarà generato dai tre campi x, y, z. Allora, si avrà $[y, u] = ay$ con $a \neq 0$.

Poichè i quattro campi devono generare un'algebra di dimensione 4, dovranno essere soddisfatte le identità di Jacobi.

(3.3)
$$\begin{cases} 0 = [[x,y]\,,u] + [[y,u]\,,x] + [[u,x]\,,y] \\ 0 = [[x,z]\,,u] + [[z,u]\,,x] + [[u,x]\,,z] = [z,u] + [[z,u]\,,x] - a_1 z \\ 0 = [[y,z]\,,u] + [[z,u]\,,y] + [[u,y]\,,z] = [[z,u]\,,y] \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente, la prima delle identità si verifica banalmente. Poichè $[x,u]$ e $[y,u]$ sono distinti da zero, deve essere $[z,u] = 0$ perchè il $\ker ad_u$ deve essere almeno bidimensionale. la struttura dell'algebra $\mathcal{G}_4$ è:

$$[x,y] = 0, [x,z] = z, [y,z] = 0, [x,u] = a_2 z, [y,u] = ay, [z,u] = 0,$$

con $(a_2 \neq 0, a \neq 0)$.

Osserviamo, però, che l'ipotesi $a \neq 0$ e $a_2 \neq 0$ ci porta a concludere che $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$ perchè contiene i vettori linearmente indipendenti z ed y. Questo contraddice, però, il lemma 18 perchè se l'immagine di ad_u è bidimensionale deve contenere necessariamente il campo u.

c: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$ e $\operatorname{rg} ad_y$ è 1 su $\mathcal{G}_4/\langle y\rangle$

In questo caso, l'immagine di ad_y può essere generata rispettivamente da u, x, z.

(1): Se $\operatorname{Im} ad_y = \operatorname{span}\{u\}$

risulta $[y,u] = au$, con $a \neq 0$. Anche in questo caso deve essere $[z,u] = 0$. Sostituendo nella prima delle identità di Jacobi (3.3) per i campi $\{x,y,u\}$ si ottiene $aa_1 = aa_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$, ma questo contraddice l'ipotesi $\dim \operatorname{Im} ad_x = 2$.

(2): Se $\operatorname{Im} ad_y = \operatorname{span}\{x\}$

$[y,u] = ax$ con $a \neq 0$. $[z,u]$ è un elemento dell'algebra, quindi, $[z,u] = hx + ky + lz + mu$, $(h,k,l,m \in \mathbb{R})$. Se si scrive l'identità di Jacobi per i campi $\{y,z,u\}$ si ottiene $a = 0$, che ovviamente, contraddice l'ipotesi.

(3): Se $\operatorname{Im} ad_y = \operatorname{span}\{z\}$

In questo caso $[y,u] = az$, con $a \neq 0$. Poichè $[x,u]$ e $[y,u]$ sono distinti da zero ed il nucleo di ad_u deve essere almeno bidimensionale, risulta $[z,u] = 0$. Dall'identità di Jacobi per i campi $\{x,y,u\}$ si ottiene, contro l'ipotesi, $a = 0$.

ii) $\beta \neq 0$.

Consideriamo il quarto campo u; certamente, come già osservato, u non può commutare con x, quindi, $[x,u] = a_1 x + a_2 z$ con a_1 ed a_2 costanti non contemporaneamente nulle. Poichè $[x,z] \neq 0$ ed $[y,z] \neq 0$, in accordo con il lemma 18 dovrà essere $[z, u] = 0$, altrimenti il nucleo dell'operatore ad_z sarebbe unidimensionale. Se $[z, u] = 0$, scrivendo l'identità di Jacobi per i campi $\{x, z, u\}$ e $\{y, z,$ u$\}$si ha:

$$\begin{cases} 0 = [[x, z], u] + [[z, u], x] + [[u, x], z] = -a_1 z \\ 0 = [[y, z], u] + [[z, u], y] + [[u, y], z] = [[u, y], z] \end{cases}$$

cioè $a_1 = 0$ ($\Rightarrow a_2 \neq 0$) e $[y, u] \in \ker ad_z$. Quindi, $[y, u] = az + bu$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Si nota subito che deve essere $a \neq 0$ e $b = 0$, perchè altrimenti $\mathrm{Im}\, ad_y$ sarebbe bidimensionale pur non contenendo y, cosa che è in contraddizione con il lemma 18. Quindi sostituito $[y, u] = az$ nell'identità di Jacobi per $\{x, y, u\}$:

$$0 = [[x, y], u] + [[y, u], x] + [[u, x], y] = [az, x] + [-a_2 z, y],$$

si ottiene $a_2 \beta = a$ e la struttura ammissibile per l'algebra è:

2) $\mathcal{G}_4 : [x, y] = 0, \quad [x, z] = z, \quad [y, z] = \beta z, \quad [x, u] = \lambda z, \quad [y, u] = \lambda\beta z, \quad [z, u] = 0,$

con $(\lambda \neq 0, \beta \neq 0)$

2. $\{x, z\}$ **generano un'algebra abeliana.**

Se $[x, z] = 0$ questo vuol dire che $z \in \ker ad_x$ e poichè $\dim \mathrm{Im}\, ad_x = 2$, si ha che qualunque siano i campi y e u in $\mathcal{G}_4$ indipendenti con z ed x, $[x, y] \neq 0$ e $[x, u] \neq 0$. Poichè $[x, y], [x, u] \in \mathrm{Im}\, ad_x$, risulta $[x, y] = ax + bz$, $[x, u] = cx + dz$ con $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ e tali che $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(c, d) \neq (0, 0)$. Si osserva subito che $\dim \mathrm{Im}\, ad_u$ è almeno unidimensionale; procederemo, quindi distinguendo i due sottocasi: $\dim \mathrm{Im}\, ad_u = 1$, $\dim \mathrm{Im}\, ad_u = 2$

i) $\dim \mathrm{Im}\, ad_u = 1$

Poichè $[x, u] \neq 0$ deve essere necessariamente $[u, z] = [u, y] = 0$. Se scriviamo le identità di Jacobi

$$\begin{cases} 0 = [[x, y], u] + [[y, u], x] + [[u, x], y] \\ 0 = [[x, z], u] + [[z, u], x] + [[u, x], z] \\ 0 = [[y, z], u] + [[z, u], y] + [[u, y], z] \\ 0 = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] \end{cases} \tag{3.4}$$

risulta che $[y, z] \in \ker ad_u \Rightarrow [y, z] = hy + kz + lu$ con $h, k, l \in \mathbb{R}$. Sostituendo l'espressione ottenuta nella prima e nella quarta delle identità presenti in (3.4) otteniamo le seguenti relazioni

$$
\begin{cases} ad - cb + dk = 0 \\ dh = 0 \\ dl = 0 \\ ha + lc = 0 \\ hb + ld = 0 \end{cases} \tag{3.5}
$$

Distinguiamo i due sottocasi: $h \neq 0$ e $h = 0$

a: $h \neq 0$

$h \neq 0 \Rightarrow d = 0$ $(\Rightarrow c \neq 0) \Rightarrow b = 0$. La struttura risulterebbe

$$[x,y] = ax, \quad [x,z] = 0, \quad [y,z] = hy+kz+lu, \quad [x,u] = cx, \quad [y,u] = 0, \quad [z,u] = 0,$$

Si nota, che deve essere $k = l = 0$ altrimenti $\dim \operatorname{Im} ad_y$ è bidimensionale, ma non contiene il campo y. Ma se $l = 0$, dalle (3.5) risulta $a = 0$, che non è possibile in quanto a e b non possono essere contemporaneamente nulle.

b: $h = 0$

Ovviamente $k = l = 0$ altrimenti $\dim \operatorname{Im} ad_y$ è bidimensionale, ma non contiene il campo y. La struttura per l'algebra è

$$[x,y] = ax+bz, \quad [x,z] = 0, \quad [y,z] = 0, \quad [x,u] = cx+dz, \quad [y,u] = 0, \quad [z,u] = 0,$$

con $ad = cb$ e $(a,b) \neq (0,0)$, $(c,d) \neq (0,0)$.

Poichè $ad = cb$ i due campi $ax + bz$ e $cx + dz$ sono proporzionali, in particolare $cx + dz = \dfrac{d}{b}\,(ax + bz)$. Se allora, con abuso di notazione, indichiamo i nuovi generatori dell'algebra con $(x + bz)$, $a^{-1}y$, z, $a^{-1}u$ e con $\rho = \dfrac{d}{b}$, la struttura è isomorfa a

3) $\mathcal{G}_4 : [x,y] = x, \quad [x,z] = 0, \quad [y,z] = 0, \quad [x,u] = \rho x, \quad [y,u] = 0, \quad [z,u] = 0,$

con $\rho \neq 0$.

ii) $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$

In questo caso $[u,z] = 0$, $[u,y] \neq 0$ e dovendo essere il $\ker ad_y$ almeno bidimensionale, è $[y,z] = 0$. $[y,u] \in \operatorname{Im} ad_u$, quindi, $[y,u] = \alpha\,(cx + dz) + \beta u$. Sostituendo nella prima delle Jacobi in (3.4) risulta

$$
\begin{cases} ad - \beta d - cb = 0 \\ \beta c = 0 \end{cases}
$$

Possiamo distinguere due sottocasi: $\beta = 0$, $\beta \neq 0$:

a: $\beta = 0$

Qualunque sia c si ottiene $ad = bc$, la struttura ottenuta è

$$[x,y] = ax+bz, \quad [x,z] = 0, \quad [y,z] = 0, \quad [x,u] = cx+dz, \quad [y,u] = \alpha\,(cx+dz) \quad [z,u] =$$

con a e b non contemporaneamente nulle, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 0$ otteniamo la struttura 5). Se $\alpha \neq 0$ con analogo ragionamento fatto per la struttura precedente, ponendo $\beta = a^{-2}\rho$, otteniamo l'algebra:

$$[x,y] = x, \quad [x,z] = 0, \quad [y,z] = 0, \quad [x,u] = \rho x, \quad [y,u] = \beta\rho x \quad [z,u] = 0,$$

con β e ρ distinte da 0.

Si osserva che la struttura ottenuta è isomorfa alla 1). Infatti, detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra 1), l'isomorfismo è dato da:

$$\begin{cases} x' = -y \\ z' = -x \\ u' = u \\ y' = z \end{cases}.$$

b: $\beta \neq 0$

$c = 0, (\Rightarrow d \neq 0)$ ed $a = \beta$. Si osserva che $\dim \operatorname{Im} ad_y$ è bidimensionale, ma non contiene il campo y, fatto che non può verificarsi per il lemma 18.

CASO 5. $\dim \operatorname{Im} ad_{\mathbf{x}} = 1$.

1. **Il rango dell'operatore $\mathbf{ad_x}$ sul quoziente $\mathcal{G}_4/\langle \mathbf{x} \rangle$ è 1.**

Se il rango dell'operatore aggiunto sul quoziente è 1, questo significa che $\exists z \in \mathcal{G}_4$ distinto da x e tale che $\operatorname{Im} ad_x = \operatorname{span}\{z\}$ e che $\dim \ker ad_x = 3$. Ovviamente può accadere $[x,z] \neq 0$ oppure $[x,z] = 0$. Distingueremo nel segiuto i due casi

i) $[x,z] \neq 0$

Poichè il nucleo di ad_x è tridimensionale $\exists y, u \in \mathcal{G}_4$ *t.c.* $[x,y] = [x,u] = 0$. Inoltre, poichè $\operatorname{Im} ad_x$ è generata da z, $[x,z] = z$. Possiamo scrivere le 4 identità di Jacobi che devono essere soddisfatte dai campi x, y, z, u affinchè questi possano generare un'algebra di Lie di dimensione 4 :

(3.6)
$$\begin{cases} 0 = [[x,y]\,,u] + [[y,u]\,,x] + [[u,x]\,,y] = [[y,u]\,,x] \\ 0 = [[x,z]\,,u] + [[z,u]\,,x] + [[u,x]\,,z] = [z,u] + [[z,u]\,,x] \Leftrightarrow [x,[z,u]] = [z,u] \\ 0 = [[y,z]\,,u] + [[z,u]\,,y] + [[u,y]\,,z] \\ 0 = [[x,y]\,,z] + [[y,z]\,,x] + [[z,x]\,,y] = [[y,z]\,,x] + [y,z] \Leftrightarrow [x,[y,z]] = [y,z] \end{cases}$$

Le identità (3.6) dicono che $[y,u] \in \ker ad_x$, $[z,u]$ e $[y,z]$ appartengono a $\operatorname{Im} ad_x \Leftrightarrow [z,u] = az,\ [y,z] = bz,\ (a,b \in \mathbb{R})$. Possiamo procedere facendo delle ipotesi sulle costanti a e b :

(1) $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Se $b \neq 0$ l'immagine di ad_y conterrà certamente il vettore z. Ovviamente, vanno distinti i due casi: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$ e $\dim \operatorname{Im} ad_y = 2$

a: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$

Poichè $b \neq 0$ il campo apparterrà all'$\operatorname{Im} ad_y$, che sarà generata dallo stesso z. Quindi, $[y,u] = cz$. Ma $[y,u] \in \ker ad_x$, quindi deve essere $c = 0$. Inoltre, $a = 0$ perchè altrimenti il $\ker ad_z$ si ridurrebbe al solo z, in contraddizione con quanto detto nel lemma 18. La struttura ottenuta sarà:

4) $\mathcal{G}_4 : [x,y] = 0,\ [x,z] = z,\ [y,z] = bz,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = 0,$

con $b \neq 0$.

b: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 2$

L'immagine di ad_y che contiene già il campo z, essendo bidimensionale, conterrà anche il campo y; pertanto, $[y,u] = cz + dy$. Se si sostituisce l'espressione di $[y,u]$ nelle relazioni (3.6) si ha che $c = d = 0$ il che è in contraddizione con la bidimensionalità dell'immagine.

(2) $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

Si osserva subito che se $a \neq 0$ deve essere $b = 0$, altrimenti $\dim \ker ad_z = 1$,cosa che contraddice il lemma 18. Poichè $a \neq 0$, il campo $z \in \operatorname{Im} ad_u$, questo vuol dire che la dimensione di $\operatorname{Im} ad_u$ è almeno 1. Distinguiamo i casi $\dim \operatorname{Im} ad_u = 1$ e $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$

a: $\dim \operatorname{Im} ad_u = 1$

Il nucleo di ad_u è tridimensionale, questo significa che $[y,u] = 0$ e la struttura ottenuta è

$\mathcal{G}_4 : [x,y] = 0,\ [x,z] = z,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = az,$

con $a \neq 0$.

Si osserva che la struttura ottenuta è isomorfa alla numero 4) se si scambia y con $-u$.

b: $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$

L'immagine di ad_u è bidimensionale e conterrà oltre al campo z anche il campo u. Questo vuol dire che $[y,u] = \alpha z + \beta u$. Se si sostituisce l'espressione del commutatore $[y,u]$ in (3.6) si giunge alla contraddizione $\alpha = \beta = 0$.

(3) $a = b = 0$

In questo caso $[y,u]$ come elemento del $\ker ad_x$ potrà essere scritto come combinazione di x, y, u, cioè $[y,u] = \alpha x + \beta y + \gamma u$, che sostituito nelle relazioni (3.6) ci da $\alpha = 0$. La struttura ottenuta è

$$\mathbf{5)}\ \mathcal{G}_4 : [x,y] = 0,\ [x,z] = z,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = \beta y + \gamma u,\ [z,u] = 0,$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. La struttura trovata è isomorfa alla seguente,

$$\mathbf{5'})\ \mathcal{G}_4 : [x,y] = 0,\ [x,z] = z,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = \beta y,\ [z,u] = 0,$$

se come generaturi si scelgono $x, z, u, y' = \beta y + \gamma u$.

ii) $[x,z] = 0$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre $[x,y] = z$ ed $[x,u] = 0$. L'immagine dell'operatore aggiunto ad_y è almeno unidimensionale perchè $[x,y] \neq 0$. Distinguiamo nel seguito i due casi: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$ e $\dim \operatorname{Im} ad_y = 2$

a: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 1$

L'immagine di ad_y sarà generata conterrà il campo z e sarà da questo generata. Poichè l'immagine di ad_y è unidimensionale, essendo $[x,y] \neq 0$ deve essere $[y,z] = 0$, $[y,u] = 0$. Dall'identità di Jacobi per i campi $\{x,y,u\}$ si ottiene $[z,u] = 0$. Si ottengono così le due strutture

$$\mathbf{6)}\ \mathcal{G}_4 : [x,y] = z,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = 0,$$

che è isomorfa alla

b: $\dim \operatorname{Im} ad_y = 2$

In questo caso, uno dei due commutatori, deve essere distinto da zero. Supponiamo $[y,u] \neq 0$ e $[y,z] = 0$. Poichè l'immagine di ad_y è bidimensionale, questa conterrà anche il campo y. Allora, $[y,u] = az + by$ con a e b costanti non nulle contemporaneamente. Dall'identità di Jacobi per i campi $\{z,u,x\}$ si ottiene $[z,u] \in \ker ad_x \Leftrightarrow [z,u] = hx + kz + lu$. Se si sostituisce l'espressione ottenuta nell'identità di Jacobi per i campi $\{x,y,u\}$ si ha: $h = l = 0$ e $k = b$. Si osserva subito che deve essere $b = 0$ altrimenti, l'immagine dell'operatore ad_u sarebbe bidimensionale, ma non conterrebbe il campo u. La struttura ottenuta è la seguente

$$[x,y] = z,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = az,\ [z,u] = 0,$$

con $a \neq 0$. La struttura è isomorfa alla 6). Infatti, indicati con x', y', z', u', i suoi generatori,l'isomorfismo è dato da

$$\begin{cases} x = x' \\ z = x' \\ u = u' + ax' \\ y = y' \end{cases}$$

2. **Il rango dell'operatore $\mathbf{ad_x}$ sul quoziente $\mathcal{G}_4/\langle \mathbf{x} \rangle$ è 0.**

In questa ipotesi, $\operatorname{Im} ad_x = \operatorname{span}\{x\}$; quindi, $\dim \ker ad_x = 3 \Rightarrow \exists y, z \in \mathcal{G}_4$ tali che $[x, y] = [x, z] = 0$. Scelto il quarto campo $u \in \mathcal{G}_4$, linearmente indipendente con i primi tre, poichè la dimensione di $\operatorname{Im} ad_x$ è uno, deve essere $[x, u] \neq 0$; in particolare, $[x, u] = x$. Scriviamo, ora, le identità di Jacobi

$$\begin{cases} 0 = [[x, y], u] + [[y, u], x] + [[u, x], y] = [[y, u], x] \\ 0 = [[x, z], u] + [[z, u], x] + [[u, x], z] = [[z, u], x] \\ 0 = [[y, z], u] + [[z, u], y] + [[u, y], z] \\ 0 = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = [[y, z], x] \end{cases} \tag{3.7}$$

da cui si vede che $[y, z], [y, u], [z, u] \in \ker ad_x$. Possiamo procedere facendo delle ipotesi sulla dimensione di $\operatorname{Im} ad_u$; questa sarà almeno unidimensionale perchè $[x, u] = x$. Quindi, nel seguito, analizzeremo separatamente i due casi: $\dim \operatorname{Im} ad_u = 1$ oppure $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$.

i) $\dim \operatorname{Im} ad_u = 1$

Se l'immagine è unidimensionale, $\dim \ker ad_u = 3$, quindi, $[y, u] = [z, u] = 0$. Dalla terza identità in (3.7) si ottiene che $[y, z] \in \ker ad_u$, il che significa $[y, z] = hy + kz + lu$, con $h, k, l \in \mathbb{R}$. Poichè $[y, z] \in \ker ad_x$ risulta $l = 0$. La struttura trovata è

$$[x, y] = 0,\ [x, z] = 0,\ [y, z] = hy + kz,\ [x, u] = x,\ [y, u] = 0,\ [z, u] = 0,$$

con $h, k \in \mathbb{R}$. Osserviamo che la struttura ottenuta è isomorfa alla prima delle 5) con $h = \alpha$ e $k = \beta$. Infatti, indicati con x', y', z', u' i generatori dell'algebra 7) l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = -z' \\ z = u' \\ u = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

ii) $\dim \operatorname{Im} ad_u = 2$

L'immagine dell'operatore ad_u è bidimensionale e contiene oltre al campo x anche il campo u. Il nucleo dell'operatore ad_u sarà bidimensionale, quindi, senza ledere la generalità, possiamo supporre $[y, u] = 0$

e $[z,u] = ax + bu$ con a e b costanti non contemporaneamente nulle. Dalla seconda delle identità di Jacobi in (3.7) si ottiene che $b = 0$ $(\Rightarrow a \neq 0)$. Mentre dalla terza delle identità si evince che $[y,z] \in \ker ad_u \Leftrightarrow [y,z] = cy + du$. Poichè $[y,z] \in \ker ad_x$, si ha che $d = 0$. Si osserva che anche $c = 0$, altrimenti in contraddizione con il lemma 18 si avrebbe $\dim \mathrm{Im}\, ad_z = 2$, ma $z \notin \mathrm{Im}\, ad_z$. La struttura ottenuta è

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = x,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = ax,$$

con $a \neq 0$. Si osserva che è isomorfa alla 5) per $\beta = 0$. Se si indicano i suoi generatori con x', y', z', u' l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = -u' \\ z = x' \\ u = z' - ax' \\ y = y' \end{cases}$$

Caso 6. $\dim \mathrm{Im}\, ad_{\mathbf{x}} = 0$

In questo caso $\exists y, z, u \in \mathcal{G}_4$tali che $[x,y] = [x,z] = [x,u] = 0$. Possiamo procedere lo studio, analizzando la dimensione di un operatore aggiunto di uno dei tre campi y, z, u. Scegliamo di studiare la dimensione dell'immagine di ad_y, che sarà al più bidimensionale.

1. $\dim \mathrm{Im}\, ad_y = 0$

I commutatori $[y,z] = [y,u] = 0$. Vanno, ovviamente, distinti due casi: $[z,u] = 0$ oppure $[z,u] \neq 0$

i) se $[z,u] = 0$ ritroviamo la struttura abeliana per l'algebra $\mathcal{G}_4$

ii) se $[z,u] \neq 0$ l'immagine di ad_z è unidimensionale, quindi distinguiamo i vari sottocasi

a: $\dim \mathrm{Im}\, ad_z = 1$ e $\mathrm{rg}\,(ad_z) = 0$ su $\mathcal{G}_4/\langle z \rangle$:

In questo caso, l'immagine di ad_z è generata da z, quindi, $[z,u] = z$ e la struttura ottenuta è

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = 0,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = z$$

La struttura ottenuta è isomorfa alla seconda delle 5) quando $\beta = 0$. Detti x', y', z', u' i generatori della struttura appena trovata, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = -u' \\ z = z' \\ u = x' \\ y = y' \end{cases}$$

b: $\dim \mathrm{Im}\, ad_z = 1$ e $\mathrm{rg}\,(ad_z) = 1$ su $\mathcal{G}_4/\langle z \rangle$:

L'immagine di ad_z è generata da un campo distinto da z, non lede la generalità supporre che $[z,u] = u$. La struttura ottenuta è

$$[x,y]=0,\ [x,z]=0,\ [y,z]=0,\ [x,u]=0,\ [y,u]=0,\ [z,u]=u$$

Detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra appena trovata, questa è isomorfa alla seconda delle 5) per $\beta = 0$. L'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = z' \\ z = u' \\ u = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2. $\dim \mathrm{Im}\, ad_y = 1$

Vanno distinti i due casi, quando il rango di ad_y su $\mathcal{G}_4/\langle y \rangle$ è 0 oppure 1 :

i) Il rango di ad_y su $\mathcal{G}_4/\langle y \rangle$ è 0.

L'immagine dell'operatore ad_y è generata dal solo vettore y; allora, senza ledere la generalità, possiamo supporre $[y,u] = 0$ e $[y,z] = y$. Questo significa che $y \in \mathrm{Im}\, ad_z$. Ovviamente, può accedre $[z,u] = 0$ oppure $[z,u] \neq 0$. Studiamo separatamente i due casi:

a: $[z,u] = 0$

La struttura trovata per l'algebra $\mathcal{G}_4$ è

$$[x,y]=0,\ [x,z]=0,\ [y,z]=y,\ [x,u]=0,\ [y,u]=0,\ [z,u]=0.$$

Indicati con x', y', z', u' i generatori dell'algebra trovata, si osserva che è isomorfa alla seconda delle 5) per $\beta = 0$ e che l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = -z' \\ z = y' \\ u = u \\ y = x \end{cases}$$

b: $[z,u] \neq 0$

L'immagine dell'operatore aggiunto ad_z è bidimensionale e conterrà, oltre al campo y, anche il campo z. Il commutatore $[z,u]$ è combinazione lineare dei campi y e z, $[z,u] = ay + bz$, con a e b costanti non contemporaneamente nulle. Scritte le identità di Jacobi

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0 = [[x,y]\,,u] + [[y,u]\,,x] + [[u,x]\,,y] \\
0 = [[x,z]\,,u] + [[z,u]\,,x] + [[u,x]\,,z] \\
0 = [[x,y]\,,z] + [[y,z]\,,x] + [[z,x]\,,y] \\
0 = [[y,z]\,,u] + [[z,u]\,,y] + [[u,y]\,,z]
\end{array}
\right. , \tag{3.8}
$$

sostituendo la combinazione nell'ultima delle identità presenti in (3.8) risulta $b = 0$. La struttura trovata è la seguente:

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = y,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = ay.$$

con $a \neq 0$. Si osserva che la struttura è isomorfa alla numero 5) per $\beta = 0$. Indicati con x', y', z', u' i suoi generatori, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x = -z' \\
z = y' \\
u = u' - ay' \\
y = x'
\end{array}
\right. .
$$

ii) Il rango di ad_y su $\mathcal{G}_4/\left<y\right>$ è 1.

L'immagine dell'operatore ad_y è unidimensionale sul quoziente $\mathcal{G}_4/\left<y\right>$, quindi, sarà generata da un campo distinto da y. Anche in questo caso, possiamo supporre $[y,u] = 0$ e $[y,z] \neq 0$. Possiamo procedere distinguendo i due casi $[z,u] = 0$ oppure $[z,u] \neq 0$

a: $[z,u] = 0$

Dalle identità di Jacobi (3.8) segue che $[y,z] \in \ker ad_u \Rightarrow [y,z] = ax + by + cz + du$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. In particolare, possiamo supporre $b = 0$ perchè, se tutte le altre costanti fossero nulle e b fosse diversa da zero, risulterebbe $\operatorname{Im} ad_y = \operatorname{span}\{y\}$, che per ipotesi non è possibile. Tutte le identità di Jacobi presenti in (3.8) sono identicamente verificate e la struttura ottenuta è:

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = ax+cz+du,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = 0.$$

con $a,c,d \in \mathbb{R}$. Ovviamente se $a = d = 0$ questa è isomorfa alla 5) per $\beta = 0$. Nel caso in cui $c = 0$ ed a e b non sono contemporaneamente nulle, la struttura appena ottenuta è isomorfa alla 6). Indicati con x', y', z', u' i suoi generatori, l'isomorfismo è dato da:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x = y' \\
z = ax' + du' \\
u = u' \\
y = z'
\end{array}
\right. .
$$

b: $[z,u] \neq 0$

L'immagine di ad_z è bidimensionale e sicuramente conterrà il campo z. Poichè $[z,u] \in \operatorname{Im} ad_u$ che è unidimensionale, possiamo distinguere i due sottocasi: $\operatorname{Im} ad_u = \operatorname{span}\{u\}$ oppure $\operatorname{Im} ad_u = \operatorname{span}\{x\}$

(1): $\operatorname{Im} ad_u = \operatorname{span}\{u\}$

$[z,u] = u \Rightarrow u \in \operatorname{Im} ad_z \Rightarrow [y,z] = az + bu$ con $a.b \in \mathbb{R}$. Scrivendo l'identità di Jacobi per i campi $\{y,z,u\}$ si ottiene $a = 0$

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = bu,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = u.$$

con $b \neq 0$. Si osserva che la struttura è isomorfa alla numero 5) con $\beta = 0$. Indicati con x', y', z', u' i generatori della algebra ottenuta, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = z' \\ z = u' \\ u = x' \\ y = y' + bu' \end{cases}.$$

b: $\operatorname{Im} ad_u = \operatorname{span}\{x\}$

Non è restrittivo supporre $[z,u] = x$ $[z,u] = u \Rightarrow u \in \operatorname{Im} ad_z \Rightarrow$ $[y,z] = az + bx$ con $a.b \in \mathbb{R}$. Scrivendo l'identità di Jacobi per i campi $\{y,z,u\}$ si ottiene $a = 0$

$$[x,y] = 0,\ [x,z] = 0,\ [y,z] = bx,\ [x,u] = 0,\ [y,u] = 0,\ [z,u] = x.$$

con $b \neq 0$. Isomorfa all'algebra 6). Infatti, indicati con x', y', z', u' i suoi generatori, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = -u' \\ z = x' \\ u = -y' - bu' \\ y = z' \end{cases}.$$

3 $\dim \operatorname{Im} ad_y = 2$

Se l'algebra $\operatorname{Im} ad_y$ non è abeliana, poichè $\dim \operatorname{Im} ad_x = 0$ scambiando i ruoli di x ed y, si ripetono i ragionamenti fatti nel caso 4. Se $\operatorname{Im} ad_y$ è abeliana si osserva che si ottiene un'algebra isomorfa alla 3). Infatti indicati con x', y', z', u' i suoi generatori, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = y' \\ z = x' \\ u = u' \\ y = z' \end{cases}.$$

Le strutture ammissibili per l'algebra $\mathcal{G}_4$, oltre a quella abeliana, sono:

1) $[x,y]=0,\quad [x,z]=z,\quad [y,z]=0,\quad [x,u]=\lambda z,\quad [y,u]=0,\quad [z,u]=lz,$

con $\lambda \neq 0, l \neq 0$.

2) $[x,y]=0,\quad [x,z]=z,\quad [y,z]=\beta z,\quad [x,u]=\lambda z,\quad [y,u]=\lambda\beta z,\quad [z,u]=0,$

con $\lambda \neq 0, \beta \neq 0$.

3) $[x,y]=x,\quad [x,z]=0,\quad [y,z]=0,\quad [x,u]=\rho x,\quad [y,u]=0,\quad [z,u]=0,$

con $\rho \neq 0$.

4) $[x,y]=0,\ [x,z]=z,\ [y,z]=bz,\ [x,u]=0,\ [y,u]=0,\ [z,u]=0,$

con $b \neq 0$.

5) $[x,y]=0,\ [x,z]=z,\ [y,z]=0,\ [x,u]=0,\ [y,u]=\beta y,\ [z,u]=0,$

con $\beta \in \mathbb{R}$.

6) $[x,y]=z,\ [x,z]=0,\ [y,z]=0,\ [x,u]=0,\ [y,u]=0,\ [z,u]=0.$

Vediamo che tra le strutture appena elencate ci sono alcune tra loro isomorfa. Infatti:

La 1) è isomorfa alla numero 5) se $\beta = 0$. Detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra 1), l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \\ u = \lambda z' + u' \end{cases} .$$

La 4) è isomorfa alla 5) per $\beta = 0$. Detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra 7), l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - bx' \\ z = z' \\ u = u' \end{cases} .$$

La 3) è isomorfa alla 5) per $\beta = 0$. Detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra 5), l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = z \\ z' = x \\ u' = u - \rho y \end{cases} .$$

La 6) è isomorfa alla 2). Detti x', y', z', u' i generatori dell'algebra 5), l'isomorfismo lo si ottiene ponendo

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = z \\ z' = x \\ u' = u - \rho y \end{cases}.$$

Osserviamo, infine che l'algebra 5) nel caso in cui $\beta \neq 0$ è isomorfa alla seguente struttura:

$$[x, y] = 0, [x, z] = 0, [y, z] = \beta z, [x, u] = x, [y, u] = 0, [z, u] = 0,$$

con $\beta \neq 0$.

Le rimanenti strutture ammissibili per l'algebra $\mathcal{G}_4$ sono:

1) $[x, y] = 0,\ [x, z] = 0,\ [y, z] = 0,\ [x, u] = 0,\ [y, u] = 0,\ [z, u] = 0.$
2) $[x, y] = 0, [x, z] = z, [y, z] = \beta z, [x, u] = \lambda z, [y, u] = \lambda\beta z, [z, u] = 0,\ (\beta, \lambda \neq 0)$.
3) $[x, y] = 0,\ [x, z] = z,\ [y, z] = 0,\ [x, u] = 0,\ [y, u] = 0,\ [z, u] = 0.$
4) $[x, y] = 0, [x, z] = 0, [y, z] = \beta z, [x, u] = x, [y, u] = 0, [z, u] = 0,\ (\beta \neq 0)$
5) $[x, y] = z,\ [x, z] = 0,\ [y, z] = 0,\ [x, u] = 0,\ [y, u] = 0,\ [z, u] = 0.$

4. Realizzazione delle algebre $\mathcal{G}_4$.

Prima di procedere alla realizzazione in termini di campi coordinati, premettiamo una proposizione utile ai fini della nostra classificazione:

PROPOSIZIONE 5. *Dati tre campi X, Y, Z, linearmente indipenti, tali che $Z = f_1 X + f_2 Y$, con $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ valgono i seguenti risultat:*

(i) Se la metrica g è completamente degenere sulle foglie della distribuzione allora i campi $\{X, Y, Z\}$ generano un'algebra tridimensionale abeliana di Killing.

(ii) Se la metrica g ha rango uno sulle foglie della distribuzione, allora l'algebra generata dai campi di Killing X, Y, Z è isomorfa all'algebra di Heisemberg.

(iii) Nel caso in cui $[X, Y] = fX + hY$ e la metrica ha rango due sulle foglie della distribuzione, l'algebra generata dai tre campi è isomorfa all'algebra $so(3)$.

DIMOSTRAZIONE. Vedi [**1**]. □

LEMMA 19. *Considerata l'algebra $\mathcal{G}_4$ ad orbite tridimensionali, sia $\mathcal{L}_3$ una sua sottoalgebra tridimensionale. Si dimostra che $\mathcal{L}_3$ non può avere orbite unidimensionali.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con X_1, X_2, X_3 i generatori della sottoalgebra $\mathcal{L}_3$. Se X_1 è il generatore dell'orbita, sia X_4 il quarto campo, questo sarà tangente alle foglie della distribuzione; quindi esisterà una funzione $f \in C^\infty (M)$ tale che $X_4 = fX_1$. Per il lemma (13), f è costante. □

Osserviamo che se la sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali, queste coincidono con quelle di $\mathcal{G}_4$ e come quarto campo sarà sufficiente, per quanto osservato all'inizio del capitolo, scrivere una combinazione funzionali dei generatori delle orbite di $\mathcal{L}_3$, secondo delle funzioni i cui differenziali formino un sistema di rango due.

Se le orbite delle sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ sono bidimensionali, essendo il nucleo della metrica bidimensionale, questo intersecherà le orbite in un sottospazio unidimensionale o bidimensionale. Se l'intersezione è bidimensionale, la metrica sarà nulla sulle orbite e per la proposizone (5) la sottoalgebra tridimensionale scelta dovrà essere necessariamente beliana; nel caso in cui l'intersezione ha dimensione uno, la metrica sarà degenere sulle orbite con rango uno e, la sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ dovrà essere isomorfa all'algebra di Heisemberg.

Consideriamo,quindi, una carta (U, x) e cerchiamo di realizzare le strutture elencate per $\mathcal{G}_4$ in funzione dei campi coordinati che indicheremo con $\partial_{x_i} = \partial_i$.

STRUTTURA 1: Algebra abeliana:

Scegliamo come sottoalgebra tridimensionale $\mathcal{L}_3$, quella generata dai campi x, y, z ed indichiamo con $X_1 = x, X_2 = y, X_3 = z$ i sui generatori.

$\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali.

Le orbite della sottoalgebra coincidono con quelle di $\mathcal{G}_4$, allora, considerato il quarto campo $u = X_4 = f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3$ studiamo i commutatori dei primi tre campi con X_4.

$$
\begin{aligned}
0 &= [X_1, X_4] = X_1 (f_1) X_1 + X_1 (f_2) X_2 + X_1 (f_3) X_3 \\
0 &= [X_2, X_4] = X_2 (f_1) X_1 + X_2 (f_2) X_2 + X_2 (f_3) X_3 \\
0 &= [X_3, X_4] = X_3 (f_1) X_1 + X_3 (f_2) X_2 + X_3 (f_3) X_3
\end{aligned}
$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} X_1\left(f_1\right)=0\\ X_1\left(f_2\right)=0\\ X_1\left(f_3\right)=0\\ X_2\left(f_1\right)=0\\ X_2\left(f_2\right)=0\\ X_2\left(f_3\right)=0\\ X_3\left(f_1\right)=0\\ X_3\left(f_2\right)=0\\ X_3\left(f_3\right)=0 \end{cases}$$

Fissata la carta (U,x), i generatori dell'algebra $\mathcal{L}_3$ si esprimono in questa carta come: $X_1=\partial_1,\ X_2=\partial_2,\ X_3=\partial_3$. Dal sistema, si evince, quindi, che le funzioni f_i non dipendono dalle prime tre variabili. Inoltre, sappiamo che una delle tre funzioni dipende dalle altre; è possibile riadattare la carta in modo che i generatori dell'algebra si scrivono nella carta (U,x) come segue:

$$\mathcal{G}_4: X_1=\partial_1,\ X_2=\partial_2,\ X_3=\partial_3,\ X_4=x_4\partial_1+x_5\partial_2+\varphi\left(x_4,x_5\right)\partial_3.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite bidimensionali.

Come già osservato, è necessario distinguere due sotticasi:

(1) Se l'intersezione fra il nucleo della metrica e le orbite è un sottospazio unidimensionale, la metrica degenera sul sottospazio con rango 1. Per la proposizione 5, l'algebra deve essere isomorfa all'algebra di Heisemberg, mentre $\mathcal{L}_3$ è abeliana.

(2) Se l'intersezione è un sottospazio bidimensionale, la metrica si annullerà totalmente sulle orbite della sottoalgebra $\mathcal{L}_3$. In accordo con la proposizione 5, $\mathcal{L}_3$ è abeliana. Siano X_1 ed X_2 i generatori delle orbite di $\mathcal{L}_3$. Il terzo campo $z=X_3$ sarà tangente alle foglie, quindi esisteranno due funzioni f_1 ed f_2 tali che $X_3=f_1X_1+f_2X_2$. Se $u=X_4$, risulta:

$$\begin{aligned} 0 &= [X_1,X_3]=X_1\left(f_1\right)X_1+X_1\left(f_2\right)X_2 \\ 0 &= [X_2,X_3]=X_2\left(f_1\right)X_1+X_2\left(f_2\right)X_2 \\ 0 &= [X_4,X_3]=X_4\left(f_1\right)X_1+X_4\left(f_2\right)X_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Fissata la carta (U,x), in termini di campi coordinati si ha: $X_1=\partial_1,\ X_2=\partial_2, X_3=f_1\partial_1+f_2\partial_2\ X_4=\partial_3$. Dalle leggi di commutazione (4.1) deduciamo che f_1,f_2 non dipendono dalle prime tre coordinate. Allora, il campo $X_3=x_4\partial_1+x_5\partial_2$.

$$\mathcal{G}_4: X_1=\partial_1, X_2=\partial_2, X_3=x_4\partial_1+x_5\partial_2, X_4=\partial_3$$

Struttura 2:

$$\mathcal{G}_4 : [x,y] = 0, [x,z] = z, [y,z] = \beta z, [x,u] = \lambda z, [y,u] = \lambda\beta z, [z,u] = 0, \; (\beta, \lambda \neq 0)$$

Sia $\mathcal{L}_3$ la sottoalgebra generata dai campi x, y, z, poniamo $X_1 = x, X_2 = y, X_3 = z$.

$\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali.

Sia $u = X_4$, questo sarà tangente alle orbite della distribuzione, quindi siano $f_i \in C^\infty(M)$, con $i = 1,2,3$ tali che $X_4 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3$. Dai commutatori di X_4 con i primi tre campi, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} X_1(f_1) = 0 \\ X_1(f_2) = 0 \\ X_1(f_3) = \lambda - f_3 \\ X_2(f_1) = 0 \\ X_2(f_2) = 0 \\ X_2(f_3) = \lambda\beta - \beta f_3 \\ X_3(f_1) = 0 \\ X_3(f_2) = 0 \\ X_3(f_3) = \beta f_2 + f_1 \end{cases}$$

La relazione sulle tracce, dimostrata nel Lemma (17), ci dice che $f_1 = -\beta f_2$. Inoltre, fissata la carta (U, x) l'algebra $\mathcal{L}_3$ si scrive in termini di campi coordinati, come $X_1 = \partial_1, \; X_2 = \partial_2, \; X_3 = e^{(x_1 + \beta x_2)}\partial_3$. Dal sistema,si ottiene che f_2 non dipende dalle prime tre coordinate ed $f_3 = \lambda\left(1 - e^{-(x_1+\beta x_2)}\right)$. L'algebra $\mathcal{G}_4$ sarà generata dai campi:

$$\mathcal{G}_4 : X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, X_3 = e^{(x_1+\beta x_2)}\partial_3, X_4 = -\beta x_4 \partial_1 + x_4 \partial_2 + \lambda e^{(x_1+\beta x_2)}\partial_3.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite bidimensionali.

(1) Se il nucleo della metrica e le orbite di $\mathcal{L}_3$ si intersecano in un sottospazio unidimensionale, la metrica ristretta alle foglie sarà degenere con rango uno. Per la proposizione 5 l'algebra tridimensionale deve essere isomorfa all'algebra di Heisemberg, mentre nel nostro caso, $\mathcal{L}_3$ è isomorfa a:

$$[X,Y] = 0, \; [Y,Z] = 0, \; [Z,X] = -X.$$

(2) Se l'intersezione è bidimensionale, l'algebra $\mathcal{L}_3$, in accordo con la proposizione 5, dovrebbe essere abeliana, cosa che nel nostro caso non si verifica.

STRUTTURA 3:

$$\mathcal{G}_4 : [x, y] = 0,\ [x, z] = z,\ [y, z] = 0,\ [x, u] = 0,\ [y, u] = 0,\ [z, u] = 0$$

Sia $\mathcal{L}_3$ la sottoalgebra tridimensionale generata da x, y, z. Indichiamo con $X_1 = x, X_2 = y, X_3 = z$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali.

Indicato con $u = X_4$ il quarto campo combinazione funzionale di X_1, X_2, X_3, $X_4 = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3$. I commutatori dei campi sono:

$$\begin{aligned}
0 &= [X_1, X_4] = X_1(f_1) X_1 + X_1(f_2) X_2 + (X_1(f_3) + f_3) X_3 \\
0 &= [X_2, X_4] = X_2(f_1) X_1 + X_2(f_2) X_2 + X_2(f_3) X_3 \\
0 &= [X_3, X_4] = X_3(f_1) X_1 + X_3(f_2) X_2 + (X_3(f_3) - f_1) X_3
\end{aligned}$$

da cui si ottiene il sistema:

$$\begin{cases}
X_1(f_1) = 0 \\
X_1(f_2) = 0 \\
X_1(f_3) + f_3 = 0 \\
X_2(f_1) = 0 \\
X_2(f_2) = 0 \\
X_2(f_3) = 0 \\
X_3(f_1) = 0 \\
X_3(f_2) = 0 \\
X_3(f_3) - f_1 = 0
\end{cases}$$

.Dalla relazione sulle tracce si ottiene $f_1 = 0$. Inoltre, fissata la carta (U, x) i generatori dell'algebra $\mathcal{L}_3$ si esprimono come: $X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = e^{x_1}\partial_3$. Osservando le relazioni del sistema si deduce che f_2 non dipende dalle prime tre coordinate, mentre, tenendo presente che f_3 non dipende da x_2 e da x_3, si ha $f_3 = e^{-x_1} \Rightarrow X_4 = x_4\partial_2 + e^{x_1}\partial_3$. L'algebra $\mathcal{G}_4$ si esprime nella carta (U, x) come:

$$\mathcal{G}_4 : X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, X_3 = e^{x_1}\partial_3, X_4 = x_4\partial_2 + e^{x_1}\partial_3.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite bidimensionali.

Notiamo che la sottoalgebra scelta è isomorfa all'algebra

$$[X, Y] = 0,\ [Y, Z] = 0,\ [Z, X] = -X$$

con argomentazioni analoghe a quelle del caso precedente si esclude il caso in cui le orbite della sottoalgebra sono bidimensionali.

STRUTTURA 4:

$$[x,y]=0,[x,z]=0,[y,z]=\beta z,[x,u]=x,[y,u]=0,[z,u]=0,\ (\beta\neq 0)$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali.

Indichiamo con X_1,X_2,X_3 i campi x,y,z che generano la sottoalgebra tridimensionale $\mathcal{L}_3$, sia $u=X_4=f_1X_1+f_2X_2+f_3X_3$, sotto queste ipotesi i commutatori sono:

$$\begin{aligned}
X_1 &= [X_1,X_4]=X_1(f_1)X_1+X_1(f_2)X_2+X_1(f_3)X_3\\
0 &= [X_2,X_4]=X_2(f_1)X_1+X_2(f_2)X_2+(X_2(f_3)+\beta f_3)X_3\\
0 &= [X_3,X_4]=X_3(f_1)X_1+X_3(f_2)X_2+(X_3(f_3)-\beta f_2)X_3
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}
X_1(f_1)=1\\
X_1(f_2)=0\\
X_1(f_3)=0\\
X_2(f_1)=0\\
X_2(f_2)=0\\
X_2(f_3)=-\beta f_3\\
X_3(f_1)=0\\
X_3(f_2)=0\\
X_3(f_3)=\beta f_2
\end{cases}$$

Dalla relazione sulle tracce si ottiene $f_2=-\dfrac{1}{\beta}$. Inoltre, è facile vedere che in una carta (U,x), i campi X_1,X_2,X_3 sono dati da $X_1=\partial_1,X_2=\partial_2,X_3=e^{\beta x_2}\partial_3$, che inseriti nel sistema ci dicono che $f_1=x_1$, f_3 non dipende dalla prima variabile. In particolare, poichè $X_3(f_3)=-1$ e $X_2(f_3)=-\beta f_3$ si ha $f_3=-x_3e^{-\beta x_2}\Longrightarrow X_4=x_1\partial_1-x_3e^{-\beta x_2}$.

$$\mathcal{G}_4: X_1=\partial_1,X_2=\partial_2,X_3=e^{\beta x_2}\partial_3,X_4=x_1\partial_1-\frac{1}{\beta}\partial_2-x_3e^{-\beta x_2}.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite bidimensionali.

La sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ è somorfa a

$$[X,Y]=0,\ [Y,Z]=0,\ [Z,X]=-X$$

e quindi, anche anche in questo caso $\mathcal{L}_3$ non può essere ad orbite bidimensionali.

STRUTTURA 5:

$$[x,y]=z,\ [x,z]=0,\ [y,z]=0,\ [x,u]=0,\ [y,u]=0,\ [z,u]=0.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite tridimensionali.

Scegliamo la sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ generata dai campi y,z,u. Indichiamo con $X_1 = y, X_2 = z, X_3 = u$ i suoi generatori. Il quarto campo, tangente alle orbite, sarà $x = X_4 = f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3$, con $f_i \in C^{\infty}(M)$. Calcolando i cammutatori dei primi tre campi con il quarto, otteniamo

$$\begin{array}{rcl} -X_2 & = & [X_1,X_4] = X_1(f_1)X_1 + X_1(f_2)X_2 + X_1(f_3)X_3 \\ 0 & = & [X_2,X_4] = X_2(f_1)X_1 + X_2(f_2)X_2 + X_2(f_3)X_3 \\ 0 & = & [X_3,X_4] = X_3(f_1)X_1 + X_3(f_2)X_2 + X_3(f_3)X_3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X_1(f_1) = 0 \\ X_1(f_2) = -1 \\ X_1(f_3) = 0 \\ X_2(f_1) = 0 \\ X_2(f_2) = 0 \\ X_2(f_3) = 0 \\ X_3(f_1) = 0 \\ X_3(f_2) = 0 \\ X_3(f_3) = 0 \end{cases}$$

Fissata la carta (U,x), i campi X_1,X_2,X_3 sono: $X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_4 = \partial_3$. Allora, dal sistema si evince che: $f_2 = -x_1,$ ed $f_{1,}f_3$ non dipendono dalle prime tre variabili. In particolare, poichè il sistema di differenziali delle funzioni ha rango due, possiamo supporre che f_3 dipenda da f_1. Possiamo riasattare la carta in modo che i generatori di $\mathcal{G}_4$ si scrivano come

$$\mathcal{G}_4 : X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = \partial_3,\ X_4 = x_4\partial_1 - x_1\partial_2 - \varphi(x_4)\partial_3.$$

$\mathcal{L}_3$ ha orbite bidimensionali.

La sottoalgebra $\mathcal{L}_3$ è abeliana, quindi, in accordo con la proposizione 5, questa si realizza se la metrica si annulla totalmente sulle orbite. Nel nostro caso, questo accade quando il nucleo della metrica interseca le orbite di $\mathcal{L}_3$ in un sottospazio bidimensionale. Siano, allora, X_1 ed X_2 i generatori dell'orbita di $\mathcal{L}_3$, il terzo campo X_3 è tangente alle orbite, quindi, esistono delle funzioni f_1 ed f_2 tali che $X_3 = fX_1 + f_2X_2$. Dai commutatori di X_3 con gli altri campi, si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= [X_1, X_3] = X_1(f_1)X_1 + X_1(f_2)X_2 \\ 0 &= [X_2, X_3] = X_2(f_1)X_1 + X_2(f_2)X_2 \\ 0 &= [X_4, X_3] = X_4(f_1)X_1 + X_4(f_2)X_2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X_1(f_1) = 0 \\ X_1(f_2) = 0 \\ X_2(f_1) = 0 \\ X_2(f_2) = 0 \\ X_4(f_1) = 0 \\ X_4(f_2) = 0 \end{cases}$$

I campi X_1, X_2, X_4 generano una sottoalgebra isomorfa all'algebra di Heisemberg. Fissata la carta (U, x), in termini di campi coordinati si ha: $X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_4 = \partial_3 - x_2\partial_2$. Allora, dal sistema otteniamo che le funzioni f_i, con $i = 1, 2$, non dipendono dalle prime tre coordinate. I generatori dell'algebra $\mathcal{G}_4$ si esprimono nella carta come segue:

$$\mathcal{G}_4 : X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = x_4\partial_1 + x_5\partial_2,\ X_4 = \partial_3 - x_1\partial_2.$$

5. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_5$.

Se l'algebra di Killing $\mathcal{G}_k$ ha dimensione 5, capire quali siano le strutture ammissibili richiede una discussione più di tipo qualitativo che computazionale, come fatto, invece, per le algebre di dimensione 4. Sappiamo che la metrica degenera sulle foglie della distribuzione $\mathcal{D}$ con rango 1. Allora, fissata una foglia $F_a, a \in M$ della distribuzione, consideriamo S la sottovarietà integrale massimale per il punto $a \in M$, della distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$. Indicata con $\widetilde{F}$ la varietà ottenuta identificando i punti che appartengono alla stessa sottovarietà integrale massimale, questa sarà una varietà di dimensione $(3 - d)$, dove d è la dimensione della distribuzione $\mathcal{N}$. Un punto di quuesta varietà sarà $\widetilde{p} = [p] = S$ ed un vettore tangente a $\widetilde{F}$ in $\widetilde{p}$ una classe di equivalenza di un vettore $v \in T_pF$,

$$T_{\widetilde{p}}\widetilde{F} = [p, v] = \{(q, w) \in F \times T_pF : q \in S, w \in T_pF, \pi(v) = \pi(w)\}$$

dove π è la proiezione di F su $\widetilde{F}$.

Definizione 16. *Data una distribuzione $\mathcal{N}$ sulla varietà M, un campo $X \in D(M)$ si dice $\mathcal{N}-$proiettabile se $N \in \mathcal{N} \Rightarrow [X, N] \in \mathcal{N}$.*

DEFINIZIONE 17. *Una funzione* $f \in C^{\infty}(M)$ *si dice* $\mathcal{N}-$*proiettabile se* $N \in \mathcal{N} \Rightarrow N(f) = 0$*, ossia la funzione* f *è costante lungo* N*.*

LEMMA 20. *Se un campo* X *è* $\mathcal{N}-$*proiettabile ed* f *è una funzione* $\mathcal{N}-$*proiettabile allora anche* $X(f)$*, è* $\mathcal{N}-$*proiettabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N una campo tangente ad $\mathcal{N}$, allora:
$N(X(f)) = N(X(f)) - X(N(f)) = [N, X](f) = 0$[1] □

Considerato l'isieme delle funzioni lisce sul quoziente $C^{\infty}\left(\widetilde{F}\right)$, queste sono localmente della forma $\widetilde{f}$ con $f \in C^{\infty}(M)$ $\mathcal{N}-$proiettabile, ossia $\widetilde{f}([p]) = f(p)$; un campo $\widetilde{X} \in D\left(\widetilde{F}\right)$ è definito quando è definito sulle $\widetilde{f}$. Allora, per ogni campo $X \in D(M)$, tale che X è $\mathcal{N}-$proiettabile, resta definito $\widetilde{X} \in D\left(\widetilde{F}\right)$ ponendo $\widetilde{X}\left(\widetilde{f}\right) = \widetilde{X(f)}$.

LEMMA 21. *I campi di Killing di* M*, ristretti ad un orbita* F *sono proiettabili lungo* $\mathcal{N}$*.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è banale se si osserva che i campi di $\mathcal{G}_k$ sono simmetrie per $\mathcal{N}$. Infatti, Considerati i campi $X \in \mathcal{G}_k$ ed $N \in \mathcal{N}$, mostreremo che $[X, N] \in \mathcal{N}$. Consideriamo il campo $Y \in \mathcal{D}$

$$0 = L_X(g)(Y, N) = -g(Y, [X, N])$$

Non avendo fatto ipotesi sul campo Y, si deduce che il campo $[X, N]$ è ortogonale a $\mathcal{D}$. Se, ora, condiseriamo un campo $V \in \mathcal{D}^{\perp}$,

$$0 = L_X(g)(V, N) = -g(V, [X, N])$$

e quindi, $[X, N]$ è ortogonale a $\mathcal{D}^{\perp}$. □

I campi di $\mathcal{G}_k$ sono proiettabili su $\widetilde{F}$, possiamo, quindi, considerare il seguente morfismo di algebre di Lie

$$\pi : X \in \mathcal{G}_k \to \widetilde{X} \in D\left(\widetilde{F}\right) \tag{5.1}$$

Prima di procedere con lo studio delle algebre $\mathcal{G}_5$, introduciamo due utili concetti quali la somma semi-diretta di algebre di Lie e il gruppo di coomologia di un'algebra di lie.

[1] $N(f) = 0$ per la proiettabilità di f.
$[N, X] \in \mathcal{N}$ per la proiettabilità di X.

5.1. Somma semi-diretta di algebre di Lie. La somma semi-diretta di algebre di Lie è un concetto duale a quello di prodotto semi-direttodi gruppi di Lie.

Definizione 18. *Diciamo che un'algebra di Lie $\mathcal{A}$ si decompone nella somma semi-diretta delle sottoalgebre $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ se*

1. *La sottoalgebra $\mathcal{A}_1$ è un ideale*
2. *L'algebra $\mathcal{A}$, come spazio vettoriale, è la somma diretta dei sottospazi $|\mathcal{A}_1|$ ed $|\mathcal{A}_2|$.*[2]

In questo caso scriveremo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus_\rho \mathcal{A}_2$ dove $\rho : \mathcal{A}_2 \to \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}_1)$ è l'omomorfismo di algebre definito da

$$[\xi_2, \xi_1] = \beta\,(\xi_2)\,\xi_1$$

con $\xi_1 \in \mathcal{A}_1, \xi_2 \in \mathcal{A}_2$.

Banalmente, si osserva che la somma è diretta se ρ è l'omomorfismo nullo.

Riferendoci, nello specifico, al nostro caso indicato con $\mathfrak{H}$ il nucleo della proiezione π, si avrà

$$\mathcal{G}_k = \pi\,(\mathcal{G}_r) \oplus_\rho \mathfrak{H}, \tag{5.2}$$

dove $\rho : \pi\,(\mathcal{G}_r) \to Der\,(\mathfrak{H})\,.$

Lemma 22. *L'omomorfismo di algebre ρ è una rappresentazione di $\pi\,(\mathcal{G}_k)$ sull'ideale $\mathfrak{H}$.*

Dimostrazione. Si vede facilmente che ρ è un'applicazione lineare. Al fine di dimostrare che è un omomorfismo di algebre, consideriamo due elementi $v, v' \in \pi\,(\mathcal{G}_r)$ e $u \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}\rho\,([v, v'])\,u = \;& [[v, v']\,, u] = \\ & -[[v', u]\,, v] - [[u, v]\,, v'] = \\ & [v, \rho\,(v')\,u] + [\rho\,(v)\,u, v'] = \\ & [\rho\,(v)\,, \rho\,(v')]\,u.\end{aligned}$$

□

[2] $|\mathcal{A}_i|$ è il supporto della sottoalgebra $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$

5.2. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_5$.. Se l'algebra $\mathcal{G}_k$ ha dimensione 5 e la metrica degenera sulle orbite con rango 1, la distribuzione dei nuclei è certamente bidimensionale. Questo significa che, fissata la foglia F_a , con $a \in M$, le sottovarietà integrali massimali della distibuzione $\mathcal{N}$, sono delle superfici, mentre la varietà quoziente $\widetilde{F}$ sarà una curva.

Per il teorema di Lie sulla linea, è noto che una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi ad essa tangenti ad una curva può essere al più tridimensionale. Questo, ovviamente, significa che se proiettiamo i campi di $\mathcal{G}_5$ su $\widetilde{F}$, il nucleo della proiezione dovrà essere di dimensione maggiore di due. Inoltre, campi che appartengono al nucleo della proiezione π (vedi 5.1) sono campi di Killing tangenti alle varietà integrali massimali della distribuzione $\mathcal{N}$. Abbiamo osservato che queste varietà sono delle superfici sulle quali, è noto, si possono trovare al più tre campi di Killing linearmente indipendenti; allora:

$$2 \leq \dim \ker \pi \leq 3,$$

nel seguito, studieremo separatamente i due casi.

Caso 7. $\dim \ker \pi = 2$

Sulla curva $\widetilde{F}$ si proietteranno tre campi vettoriali, il teorema di Lie sulla linea, ci dice che questi tre campi generano una sottoalgebra di $D\left(\widetilde{F}\right)$ isomorfa a $so\,(2,1)$. Invece, sulla superficie S ci saranno due campi di Killing che potrà essere abeliana $\mathcal{A}_2$ oppure non-abeliana G_2. Per quanto espresso dalla formula (5.2), per l'algebra $\mathcal{G}_5$ saranno possibili due diverse strutture:

$$\mathcal{G}_5 = so\,(2,1) \oplus_\rho \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{G}_5 = so\,(2,1) \oplus_\rho G_2 \tag{5.3}$$

Caso 8. $\dim \ker \pi = 3$

Il nucleo tridimensionale, quindi, si hanno tre campi di Killing tangenti alla superficie S. La superficie S è una sottovarietà integrale della distribuzione dei nuclei sulla quale la metrica si annulla totalmente. Per la proposizione 5, i tre campi tangenti ad S generano un'algebra tridimensionale abeliana $\mathcal{A}_3$. Passando al quoziente, sulla curva $\widetilde{F}$ si avranno due campi che, per il teorema di Lie sulla linea, generano una sottoalgebra bidimensionale non-abeliana G_2 (localmente generata dai campi saranno $X = \partial_x, Y = x\partial_x$). L'algebra $\mathcal{G}_5$ ammetterà la struttura

$$\mathcal{G}_5 = G_2 \oplus_\rho \mathcal{A}_3$$

6. Realizzazione delle algebre $\mathcal{G}_5$.

a: E' noto (vedi [**4**], [**5**]) che una rappresentazione (finito-dimensionale) di un'algebra semisemplice come $so\,(2,1)$ è completamente riducibile

(Teorema di Weyl). Quindi, nel nostro caso, la rappresentazione di $so(2,1)$ si sdoppia nella somma di due rappresentazioni unidimensionali di $so(2,1)$ che è noto sono banali. Questo vuol dire che la rappresentazione di $so(2,1)$ sull'algebra bidimensionale è sempre banale. Considerati, quindi, X, Y, Z, V, W generatori dell'algebra $\mathcal{G}_5$, tali che X, Y, Z generano $so(2,1)$, le leggi di commutazione dell'algebra $\mathcal{G}_5$ sono:

$$\mathcal{G}_5: \begin{array}{l} [X,Y]=Z,\ [Y,Z]=-X,\ [Z,X]=-Y,\ [V,W]=sW,\ [X,V]=0, \\ [Y,V]=0,\ [Z,V]=0,\ [X,W]=0,\ [Y,W]=0,\ [Z,W]=0 \end{array}$$

con $s = 0, 1$ a seconda che l'algebra generata da V e W è abeliana oppure non-abeliana.

Fissata una carta (U, x) della varietà M ed indicati con $\partial_i = \partial_{x_i}$, $(i = 1, ..., 5)$ i campi coordinati, l'espressione dei generatori X, Y, Z, V, W nella carta è:

$$\begin{array}{rcl} X & = & x_2\partial_3 + x_3\partial_2,\ Y = x_3\partial_1 + x_1\partial_3, \\ Z & = & -x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\ V = \partial_4,\ W = e^{sx_4}\partial_5, \end{array}$$

con $s = 0, 1$.

b: Se $\mathcal{G}_5 : G_2 \oplus_\rho \mathcal{A}_3$, scriveremo in maniera esplicita la sua rappresentazione banale; nel caso in cui la rappresentazione è non banale, la si può suddividere nella somma di rappresentazioni sui G_2-sottomoduli di $\mathcal{A}_3$. Indichiamo, quindi, con X, Y, Z, i generatori dell'algebra $\mathcal{A}_3$ e V e W i generatori di G_2, l'algebra $\mathcal{G}_5$ ha la seguente struttura

$$\mathcal{G}_5: \begin{array}{l} [X,Y]=0,\ [Y,Z]=0,\ [Z,X]=0,\ [V,W]=W,\ [X,V]=0, \\ [Y,V]=0,\ [Z,V]=0,\ [X,W]=0,\ [Y,W]=0,\ [Z,W]=0 \end{array}$$

Nella carta (U, x) i cinque campi si esprimono nella forma

$$\begin{array}{rcl} X & = & \partial_1,\ Y = \partial_2,\ Z = \partial_3 \\ V & = & \partial_4,\ W = e^{x_4}\partial_5. \end{array}$$

Se la rappresentazione non è banale, possiamo considerare questa riducibile e scriverla come somma delle rappresentazioni dell'algebra bidimensionale non abeliana su due suoi sottomoduli di cui uno bidimensionale ed uno unidimensionale oppure su tre sottomoduli unidimensionali. Ad esempio, la struttura sarà:

$$\mathcal{G}_5: \begin{array}{l} [X,Y]=0,\ [Y,Z]=0,\ [Z,X]=0,\ [V,W]=W,\ [X,V]=aX, \\ [Y,V]=bY,\ [Z,V]=cZ,\ [X,W]=0,\ [Y,W]=0,\ [Z,W]=0 \end{array}$$

nel caso dei tre sottomoduli unidimensionali.

7. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_6$.

Se consideriamo algebre di dimensione 6, lo studio verrà condotto in maniera del tutto analoga a quella del paragrafo precedente. Anche in questo caso, la dimensione del nucleo della proiezione π sarà soggetta a delle limitazioni. Si dimostra, infatti, che:.

LEMMA 23. *La dimensione del nucleo della proiezione* π *è* 3.

DIMOSTRAZIONE. Se per assurdo, la dimensione del nucleo di π fosse minore o uguale a due, si avrebbero sulla curva $\widetilde{F}$ un numero di campi superiori a 3. Per il teorema di Lie sulla linea, sappiamo che questi non possono generare una sottoalgebra di Lie di $D\left(\widetilde{F}\right)$. Per le ragioni già elencate nel paragrafo precedente, sappiamo che la dimensione del nucleo non può essere maggiore di 3. $\square$

Se la dimensione del nucleo è tre ci sono tre campi di Killing tangenti alla superficie S contenuta in F_a. Come abbiamo precedentemente osservato, i tre campi generano un'algebra tridimensionale abeliana $\mathcal{A}_3$. Sulla curva $\widetilde{F}$ si proietteranno tre campi che, per il teorema di Lie sulla linea, generano un'algebra isomorfa a $so\,(2,1)$. L'algebra $\mathcal{G}_6$ sarà

$$\mathcal{G}_6 = so\,(2,1) \oplus_\rho \mathcal{A}_3$$

8. Realizzazione delle algebre $\mathcal{G}_6$.

La rappresentazione di $so\,(2,1)$ è per il teorema di Weyl completamente riducibile. Se la rappresentazione ρ è banale e $\mathcal{G}_6$, detti X, Y, Z, V, W, U i generatori dell'algebra $\mathcal{G}_6$, tali che X, Y, Z generano l'algebra $so\,(2,1)$:

$$\mathcal{G}_6 : \begin{array}{l} [X,Y]=Z,\ [Y,Z]=-X,\ [Z,X]=-Y,\ [V,W]=0,\ [V,U]=0, \\ [W,U]=0,\ [X,V]=0,\ [Y,V]=0,\ [Z,V]=0,\ [X,W]=0, \\ [Y,W]=0,\ [Z,W]=0,\ [X,U]=0,\ [Y,U]=0,\ [Z,U]=0 \end{array}$$

In una carta, (U,x) i sei campi si esprimono come:

$$\begin{array}{l} X = x_2\partial_3 + x_3\partial_2,\ Y = x_3\partial_1 + x_1\partial_3,\ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1 \\ V = \partial_4,\ W = \partial_5,\ U = \partial_6. \end{array}$$

Se la rappresentazione è non banale, è noto che questa si sdoppierà nella somma di una rappresentazione unidimensionale e di una bidimensionale.

CAPITOLO 4

Orbite semplicemente degeneri.

In questo capitolo ci proponiamo di classificare quali algebre si realizzano come algebre di campi di Killing ad orbite tridimensionali, quando il tensore metrico g ha rango 2 sulle foglie della distrubuzione. La classificazione delle algebre di Killing ad orbite tridimensionali si baserà, a differenza del capitolo precedente, sulle linearizzazioni delle algebre isotrope. Mediante queste linearizzazioni, sarà possibile definire la struttura delle algebre isotrope e, alla base di queste, giungere alle strutture delle algebre $\mathcal{G}_k$ ammissibili per la metrica g.

Nel seguito, fissata la foglia F per un punto a della varietà M, utilizzeremo le stesse notazioni del precedente capitolo, con l'unica eccezione per le sottovarietà integrale della distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$. La distribuzione dei nuclei $\mathcal{N}$ ha, in questo caso, dimensione 1, le sue varietà integrali massimali, sono della curve C in F. Se, nuovamente, chiamiamo $\widetilde{F}$ la varietà delle curve caratteristiche in F, ossia la varietà ottenuta identificando i punti che appartengono alla stessa curva caratteristica, questa sarà una varietà bidimensionale. Un punto di tale varietà sarà $\widetilde{p} = [p] = C$

Sia $\mathcal{G}_k$ l'algebra di Killing e c la proiezione sulla varietà $\widetilde{\widetilde{F}}$ della sottovarietà integrale C, indichiamo con

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{G}} &= \left\{\widetilde{X} : X \in \mathcal{G}_4\right\}, \text{ proiezione di } \mathcal{G}_k \text{ su } \widetilde{F}, \\
\widetilde{\mathcal{G}}_c &= \left\{\widetilde{X} : \widetilde{X}_c = 0\right\}, \text{ algebra isotropa di } \widetilde{\mathcal{G}} \text{ in } c, \\
\mathcal{G}_a &= \{X \in \mathcal{G}_k : X_a = 0\}, \text{ algebra isotropa di } \mathcal{G}_4 \text{ in } a, \\
\mathcal{G}_c &= \left\{X \in \mathcal{G}_k : \widetilde{X}_c = 0\right\}, \text{ campi tangenti a } C \text{ in } a.
\end{aligned}$$

Le algebre elencate sono tra loro legate secondo le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_a &\subset \mathcal{G}_c \subset \mathcal{G}_4 , \\
\widetilde{\mathcal{G}}_c &\subset \widetilde{\mathcal{G}}
\end{aligned}$$

Considerata, come nel capitolo precedente, la proiezione

$$\pi : X \in \mathcal{G}_k \to \widetilde{X} \in D\left(\widetilde{F}\right)$$

il suo nucleo è costituito dai campi di Killing tangenti alla curva caratteristica C. Si osserva che il nucleo potrà essere al più unidimensionale perchè su una varietà di dimensione uno esiste al più un campo di Killing.

1. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_4$.

Sia $\mathcal{G}_4$ l'algebra di Killing di dimensione 4 ad orbite tridimensionali; poichè la dimensione dell'algebra è 4, per quanto provato nel paragrafo 3, l'algebra isotropa $\mathcal{G}_a$ è unidimensionale.

Nel seguito, studieremo separatamente il caso in cui l'algebra $\mathcal{G}_4$ si proietta in maniera isomorfa sull'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ (i.e. $\dim\ker\pi = 0$) oppure no (i.e. $\dim\ker\pi = 1$)

Caso 9. $\dim\ker\pi = 0$

Se l'immagine di $\mathcal{G}_4$ sul quoziente è isomorfa, l'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ sarà anch'essa di dimensione quattro e la sua algebra stabile $\widetilde{\mathcal{G}}_c$ avrà dimensione 2; questo comporta che anche la sottoalgebra $\mathcal{G}_c$ di $\mathcal{G}_4$ sarà bidimensionale. Stabilite le dimensioni delle algebre, denotiamo con X_C la restrizione del campo $X \in \mathcal{G}_c$ alla sottovarietà integrale C, è possibile considerare un secondo omomorfismo di algebre di Lie:

$$\varphi_C : X \in \mathcal{G}_c \to X_C \in \mathcal{G}_C$$

dove $\mathcal{G}_C = \{X_C : X \in \mathcal{G}_c\}$ e $\dim\mathcal{G}_C \leq 2$, perchè $\dim\mathcal{G}_c = 2$,

Lemma 24. *L'algebra $\mathcal{G}_C$ è unidimensionale.*

Dimostrazione. Se, per assurdo, $\dim\mathcal{G}_C = 2$, sulla curva C si avrebbe una sottoalgebra bidime nsionale dell'algebra $D(C)$ dei campi tangenti alla curva. Per il teorema di Lie sulla linea, tale algebra, in termini di campi di coordinati, ha come generatori i campi: $X = x\dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Se a è un punto tale che la sua coordinata $x = 0$, il campo $X_a = 0$. Quindi, considerata la linearizzazione del campo X in a, questa su C è distinta da zero, il che contraddice il risultato ottenuto nel paragrafo 3, dove si vede che un tale endomorfismo deve annullarsi sul nucleo. $\square$

COROLLARIO 3. *Esiste almeno un campo* $0 \neq X \in \mathcal{G}_c$ *tale che* $X_C = 0$.

Si osserva, quindi, che la restrizione φ_C manda un campo $X \in \mathcal{G}_a$, nullo nel punto a, nel campo nullo. Quindi, un campo che si annulla in a, si annulla su tutta la curva C.

Sia X il campo di $\mathcal{G}_a$ che si annulla sulla curva C, da quanto dimostrato nel paragrafo 3, sappiamo che la linearizzazione del campo X in a è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Procederemo lo studio, distinguendi i due sottocasi: $\lambda = 0; \lambda \neq 0$.

$\underline{\lambda \neq 0}$

L'algebra $\mathcal{G}_c$ è bidimensionale e contiene $\mathcal{G}_a$, quindi, $X \in \mathcal{G}_c$. Scelto un secondo campo $Y \in \mathcal{G}_c$ indipendente con X, sappiamo che $X_C = 0$, mentre Y_C è tangente a C in a, questo significa che $[X,Y]_C = 0$ cioè $[X,Y] = kX$, essendo X è l'unico campo che si annulla lungo tutta la curva C. Poichè $\lambda \neq 0$ non è restrittivo supporre $\lambda = 1$, allora, la linearizzazione di X nel punto a, ristretta al quoziente è rappresentata dalla matrice

$$\mathbb{I} = \operatorname{lin}_c \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1]$$

e $\mathbb{I}^2 = -id$.

Prima di analizzare dettagliatamente le strutture delle algebre $\mathcal{G}_4$, premettiamo alcuni utili risultati:

LEMMA 25. *Considerati due operatori A, B, su uno spazio vettoriale, se $[A,B] = B$, allora, B è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema di Hamilton-Cayley ci dice che ogni operatore è soluzione del proprio polinomio caratteristico. Quindi, indicato con $P(t)$ il polinomio caratteristico dell'operatore B, si ha

$$P(B) = B^2 + pB + qId = 0.$$

Se si calcola il commutatore di $P(B)$ con A si ha

$$0 = \left[A,\ B^2\right] + p\,[A,B] = 2B^2 + pB$$

[1] Il segno $\pm$ dipende se consideriamo $so(2)$ oppure $so(1,1)$.

Confrontando le due espressioni in B, otteniamo:

$$pB + 2qId = 0$$

quindi, $B = 0$ oppure $B^2 = 0$. $\square$

Posto $\mathcal{G}_c^0 = \{X \in \mathcal{G}_c : X_C = 0\}$, $\mathcal{G}_c^0$ è un ideale di $\mathcal{G}_c$ e indicato con $\mathcal{G}_c^1 = \left\{X \in \mathcal{G}_c^0 : \mathrm{lin}_c \widetilde{X} = 0\right\}$, questo è un ideale di $\mathcal{G}_c^0$ e $[\mathcal{G}_c, \mathcal{G}_c^1] \subset \mathcal{G}_c^1$. Possiamo allora considerare l'algebra $\mathcal{H}$ delle linearizzazioni di $\widetilde{\mathcal{G}}_c = \mathcal{G}_c/\mathcal{G}_c^1$, per la quale vale il seguente lemma:

LEMMA 26. *L'algebra $\mathcal{H}$ è commutativa.*

DIMOSTRAZIONE. La $1 \leq \dim \mathcal{H} \leq 2$. Se $\dim \mathcal{H}$ =1, la commutatività è ovvia. Se $\dim \mathcal{H}$ =2, possiamo considerare l'algebra derivata $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \mathcal{G}_c^0 \setminus \mathcal{G}_c^1$ e $\dim [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \leq 1$. La commutatività è ancora ovvia se l'algebra derivata ha dimensione zero. Nel caso in cui $\dim [\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 1$ un suo generatore è

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora, $\mathcal{H}$ è abeliana perchè, se non lo fosse, considerato un qualunque suo elemento A, si avrebbe $[A, \mathbb{I}] = \mathbb{I}$, cioè si arriverebbe all'assurdo $\mathbb{I}$ nilpotente. $\square$

Per il lemma precedente, indicati con un$\tilde{}$gli elementi dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$, possiamo dire che se $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ sono le proiezioni sul quoziente dei campi X ed Y di $\mathcal{G}_4$, allora $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = 0$ e poichè $\widetilde{Y} \in \widetilde{\mathcal{G}}_c$ ha senso parlare della sua linearizzazione in c che risulta essere

$$\mathrm{lin}_c \widetilde{Y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha Id.$$

Anche in questo caso dobbiamo procedere suddividendo lo studio in due sottocasi: $\alpha = 1,\ \alpha = 0$.

1. $\alpha = 1,\ \mathrm{lin}_c \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

In questa ipotesi $\mathrm{lin}_c \widetilde{Y} = Id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$. Considerato un campo $\widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, risulta $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right]_c = \mathrm{lin}_{c,\widetilde{X}} \left(\widetilde{Z}_c\right) \neq 0$, quindi, $\exists \widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$ tale che $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right]_c = \widetilde{V}_c$, ovvero, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}$. Possiamo considerare il commutatore di $\widetilde{V}$ e

$\widetilde{X}$, questo sarà

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right]_c &= \operatorname{lin}^2_{c,\widetilde{X}}\left(\widetilde{Z}_c\right) = -\widetilde{Z}_c \Rightarrow \left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right] = -\widetilde{Z} + \operatorname{Mod}\widetilde{\mathcal{G}}_c \\ &\Downarrow \\ \left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right] &= -\widetilde{Z} + \gamma\widetilde{X} + \delta\widetilde{Y}, \quad \gamma,\delta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per il campo $\widetilde{X}$, poichè $\operatorname{lin}_c \widetilde{Y} = Id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right] &= \widetilde{Z} + \sigma\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}, \\ \left[\widetilde{V},\widetilde{Y}\right] &= \widetilde{V} + \mu\widetilde{X} + \nu\widetilde{Y},\end{aligned}$$

con $\sigma,\beta,\mu,\nu\in\mathbb{R}$.

Al fine di verificare se tali campi generano un'algebra di Lie, scriviamo le quattro identità di Jacobi

$$\begin{aligned}\left[\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right],\widetilde{Z}\right] + \left[\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right],\widetilde{X}\right] + \left[\left[\widetilde{Z},\widetilde{X}\right],\widetilde{Y}\right] &= 0 \\ \left[\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right],\widetilde{V}\right] + \left[\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right],\widetilde{X}\right] + \left[\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right],\widetilde{Y}\right] &= 0 \\ \left[\left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right],\widetilde{V}\right] + \left[\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right],\widetilde{X}\right] + \left[\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right],\widetilde{Z}\right] &= 0 \\ \left[\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right],\widetilde{V}\right] + \left[\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right],\widetilde{Y}\right] + \left[\left[\widetilde{V},\widetilde{Y}\right],\widetilde{Z}\right] &= 0\end{aligned} \tag{1.2}$$

Dalla prima delle (1.2) otteniamo che $\left[\widetilde{V},\widetilde{Y}\right] = \widetilde{V}$. Dalla seconda si evince che $\sigma = -\gamma$ e $\beta = -\delta$, quindi, $\left[\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right] = \widetilde{Z} - \gamma\widetilde{X} - \delta\widetilde{Y}$. Nella terza identità compare $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]$ che come elemento dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ può scriversi come: $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right] = a\widetilde{X} + b\widetilde{Y} + c\widetilde{Z} + d\widetilde{V}$, con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Inserendo l'espressione del commutatore nelle ultime due identità presenti in (1.2), si ottiene: che $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right] = -\gamma^2\widetilde{X} - \gamma\delta\widetilde{Y} + \gamma\widetilde{Z} - \delta\widetilde{V}$ .La struttura $\mathcal{G}_4 \simeq \widetilde{\mathcal{G}}$ è data da:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l}[X,Y]=0,\ [V,X]=-Z+\gamma X+\delta Y,\ [Z,X]=V,\ [V,Y]=V, \\ [Z,Y]=Z-\gamma X-\delta Y,\ [Z,V]=-\gamma^2X-\gamma\delta Y+\gamma Z-\delta V.\end{array}$$

con $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Si osserva che se sostituiamo Z con $Z' = Z - \gamma X - \delta Y$, la struttura ottenuta è isomorfa a

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l}[X,Y]=0,\ [V,X]=-Z',\ [Z',X]=V,\ [V,Y]=V, \\ [Z',Y]=Z',\ [Z,V]=0.\end{array}$$

Si nota che $\mathcal{G}_4'$ è bidimensionale ed abeliana; inoltre, indicati con $X_1 = V,\ X_2 = Z',\ X_3 = Y,\ X_4 = -X$ l'algebra ottenuta è isomorfa alla seguente struttura (elencata nel testo [**10**]):

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = -X_1, \\ [X_1, X_4] = X_2,\ [X_2, X_4] = -X_1,\ [X_3, X_4] = 0. \end{array}$$

2. $\alpha = 1, \mathrm{lin}_c \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

In questo caso la linearizzazione di $\widetilde{X}$ è tale che $\mathbb{I}^2 = Id$. Per i campi $\widetilde{X}$ ed $\widetilde{Y}$ valgono i ragionamenti fatti nella parte iniziale del capitolo, pertanto, $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = 0$. Con ragionamenti fatti nel capitolo precedente, otteniamo che $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}, \left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{V},\ \left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{Z} + \gamma\widetilde{X} + \delta\widetilde{Y}$, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{Z} + \sigma\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}$ con $\sigma, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nuovamente, utilizzando le identità di Jacobi (1.2), dalla seconda si evince che $\sigma = \gamma,\ \beta = \delta$, per cui $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{Z} + \gamma\widetilde{X} + \delta\widetilde{Y}$. Se si scrive il commutatore $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{V}\right]$ come elemento dell'algebra $\mathcal{G}_4$ e lo si inserisce nella terza e nella quarta delle identità, si ha che: $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{V}\right] = \gamma^2\widetilde{X} + \gamma\delta\widetilde{Y} + \gamma\widetilde{Z} + \delta\widetilde{V}$. La struttura per l'algebra $\mathcal{G}_4$ sarà:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X, Y] = 0,\ [V, X] = Z + \gamma X + \delta Y,\ [Z, X] = V,\ [V, Y] = V, \\ [Z, Y] = Z + \gamma X + \delta Y,\ [Z, V] = \gamma^2 X + \gamma\delta Y + \gamma Z + \delta V. \end{array}$$

con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Si osserva che se sostituiamo $Z' = Z + \gamma X + \delta Y$, la struttura ottenuta è isomorfa a

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X, Y] = 0,\ [V, X] = Z',\ [Z', X] = V,\ [V, Y] = V, \\ [Z', Y'] = Z',\ [V, Z'] = 0. \end{array}$$

Si nota che $\mathcal{G}_4'$ è bidimensionale ed abeliana; inoltre, indicati con $X_1 = Z' - V,\ X_2 = Z' + V,\ X_3 = \frac{1}{2}(Y + X),\ X_4 = \frac{1}{2}(X - Y)$, l'algebra ottenuta è isomorfa alla seguente struttura (elencata nel testo [**10**]):

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = 0, \\ [X_1, X_4] = X_1,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_3, X_4] = 0. \end{array}$$

3. $\alpha = 0, \mathrm{lin}_c \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le considerazioni fatte nel caso precedente per i commutatori di $\widetilde{X}$ con $\widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ e $\widetilde{V}$ valgono anche in questo caso, quindi, $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = 0$, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}$, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = -\widetilde{Z} + \gamma\widetilde{X} + \delta\widetilde{Y}$. Se consideriamo i commutatori di $\widetilde{Y}$ con i campi $\widetilde{Z}, \widetilde{V}$, otteniamo che

$$\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right]_c = \mathrm{lin}_{c,\widetilde{Y}}\left(\widetilde{Z}_c\right) = \left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right]_c = \mathrm{lin}_{c,\widetilde{Y}}\left(\widetilde{V}_c\right) = 0,$$

quindi, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right], \left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] \in \widetilde{\mathcal{G}}_c$ il che implica $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = \sigma\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}$, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = \mu\widetilde{X} + \nu\widetilde{Y}$ con $\sigma, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dalla prima e dalla seconda identità in (1.2) si ottiene $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = \left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = 0$, cioè il centro dell'algebra è dato da Y. Dalla identità per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{Z}\right\}$, tenendo presente che come elemento dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ il commutatore $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right]$ si scrive come $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = a\widetilde{X} + b\widetilde{Y} + c\widetilde{Z} + d\widetilde{V}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, si ottiene: $c = -\gamma, d = 0$.

La struttura dell'algebra è data:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X, Y] = 0,\ [V, X] = -Z + \gamma X + \delta Y,\ [Z, X] = V, \\ [V, Y] = 0,\ [Z, Y] = 0,\ [V, Z] = aX + bY - \gamma Z. \end{array}$$

Notiamo che

$$\mathcal{G}_4/\left\{Y\right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} so\,(3) \text{ se } \rho > 0 \\ so\,(2,1) \text{ se } \rho < 0 \\ \mathcal{R}_0^2 \text{ se } \rho = 0 \end{array} \right. .$$

dove $\rho = \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ a & -\gamma \end{vmatrix} = -\gamma^2 + a$ e con $\mathcal{R}_0^2$ si intende l'algebra delle isometrie del piano euclideo.

Se ρ è nullo, i vettori $-Z + \gamma X$ e $aX + \gamma Z$ sono proporzionali e l'algebra derivata di $\mathcal{G}/\left\{Y\right\}$ è bidimensionale. L'isomorfismo con $\mathcal{R}_0^2$ si ottiene se si pone

$$X_1 = \gamma X - Z,\ X_2 = V,\ X_3 = \frac{1}{\gamma}Z.$$

Nel caso in cui ρ è maggiore di zero, l'isomorfismo con $so\,(3)$ si ottiene ponendo:

$$X_1 = -X,\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}V,\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(-Z + \gamma X\right).$$

Nel caso in cui ρ è minore di zero, l'isomorfismo con $so\,(2,1)$ si ottiene ponendo:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}V,\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\left(-Z+\gamma X\right),\ X_3 = X.$$

Quindi l'algebra $\mathcal{G}_4$ può essere di due tipi distinti: $\mathcal{G}_4 = so\,(3)\oplus\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_0^2\oplus_\rho\mathbb{R}$.

4. $\alpha = 0, \operatorname{lin}_c\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Analogamente al caso $\alpha = 1$, sappiamo che $\operatorname{lin}_c\widetilde{Y} = Id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, e $\operatorname{lin}_c\widetilde{X} = \mathbb{I}$ con $\mathbb{I}^2 = Id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$. I commutatori saranno, quindi: $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right] = 0$, $\left[\widetilde{Z},\widetilde{X}\right] = \widetilde{V}$, $\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right] = \widetilde{Z}+\gamma\widetilde{X}+\delta\widetilde{Y}$. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti fino ad ora, otteniamo: $\left[\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right] = 0$, $\left[\widetilde{V},\widetilde{Y}\right] = 0$. Anche in questo caso, il centro dell'algebra è dato dal campo Y. Procedendo in modo del tutto analogo al caso precedente, si scopre che la struttura di $\mathcal{G}_4$ è:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X,Y]=0,\ [V,X]=Z+\gamma X+\delta Y,\ [Z,X]=V, \\ [V,Y]=0,\ [Z,Y]=0,\ [V,Z]=aX+bY-\gamma Z. \end{array}$$

L'algebra quoziente

$$\mathcal{G}\smallsetminus\{Y\}\simeq\left\{\begin{array}{l} so\,(2,1)\ \text{ se } \rho\neq 0 \\ \mathcal{R}_1^2 \text{ se } \rho = 0 \end{array}\right. .$$

dove $\rho = \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ a & -\gamma \end{vmatrix} = -\gamma^2 - a$ con $\mathcal{R}_1^2$ si intende l'algebra delle isometrie del piano iperbolico-euclideo.

Anche in questo caso è facile trovare l'isomorfismo con l'algebra $\mathcal{R}_1^2$. Detti X_1, X_2, X_3, i generatori di tale algebra, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo:

$$X_1 = \gamma X + Z,\ X_2 = V,\ X_3 = -\frac{1}{\gamma}Z.$$

Nel caso in cui ρ è maggiore di zero, l'isomorfismo con $so\,(2,1)$ si ottiene ponendo:

$$X_1 = X,\ X_2 = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(Z+\gamma X\right),\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}V.$$

Nel caso in cui ρ è minore di zero, l'isomorfismo con $so\,(2,1)$ si ottiene ponendo:

$$X_1 = -X,\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}V,\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\left(Z+\gamma X\right).$$

Quindi, l'algebra $\mathcal{G}_4$ può essere di due tipi distinti: $\mathcal{G}_4 = so\,(2,1) \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_1^2 \oplus_\rho \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda = 0}$

Se la linearizzazione di $\widetilde{X}$ è nulla, questo significa che $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right]_c = 0, \forall \widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, quindi, $\operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_c$ e $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} \leq 2$. Scelto un secondo campo $\widetilde{Y} \in \widetilde{\mathcal{G}}_c$ linearmente indipendente con $\widetilde{X}$, sarà $\left[\widetilde{Y}, \widetilde{X}\right] = s\widetilde{X}, (s = 0, 1)$. Lo studio delle strutture che si ottengono per l'algebra $\mathcal{G}_4$ in tali ipotesi, verrà condotto analizzando separatamente i casi $s = 0, s = 1$ e ragionando sulla dimensione dell'immagine dell'operatore $ad_{\widetilde{X}}$: $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} = 0, 1, 2$.

(1) $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} = 2$.

In questo caso, il nucleo e l'immagine dell'operatore $ad_{\widetilde{X}}$ sono bidimensionali. Procediamo distinguendo i due casi $s = 0$ e $s = 1$.

(i) $s = 0$

I campi $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ commutano e $\ker ad_{\widetilde{X}} = \widetilde{\mathcal{G}}_c$. Poichè l'immagine dell'operatore aggiunto $ad_{\widetilde{X}}$ è bidimensionale, esistono due campi $\widetilde{V}, \widetilde{Z} \notin \widetilde{\mathcal{G}}_c$ tali che $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{Y}$, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{X}$ .Dalle identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\}$, $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{V}\right\}$si ha, inoltre, che $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right], \left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] \in \ker ad_{\widetilde{X}}$, quindi,

$$\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = m\widetilde{X} + n\widetilde{Y}, \ \left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = k\widetilde{X} + l\widetilde{Y},$$

con $m, n, k, l \in \mathbb{R}$.

L'unico commutatore mancante è $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right]$, che, come elemento dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ si scrive $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{Y} + a_3\widetilde{Z} + a_4\widetilde{V}$, con $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Se, ora, scriviamo le rimanenti identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{Z}\right\}$ e $\left\{\widetilde{Y}, \widetilde{V}, \widetilde{Z}\right\}$ si ottiene:

$$\begin{cases} a_3 = n - 1 \\ a_4 = m \\ \dfrac{n-1}{m} = \dfrac{l-m}{2k} = -\dfrac{n+1}{l} \end{cases}$$

La struttura per l'algebra $\mathcal{G}_4$ è:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X, Y] = 0, \ [V, Y] = mX + nY, \ [V, X] = X, \ [Z, Y] = kX + lY, \\ [Z, X] = Y, \ [V, Z] = a_1X + a_2Y + (n-1)\,Z + mV. \end{array}$$

(ii) $s = 1$

Se $s = 1$, $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = -\widetilde{X}$, qundi, $\ker ad_{\widetilde{X}} \cap \widetilde{\mathcal{G}}_c = \left\{\widetilde{X}\right\}$. Sappiamo che il nucleo dell'operatore aggiunto $ad_{\widetilde{X}}$ è bidimensinale, pertanto, $\exists \widetilde{V} \notin \widetilde{\mathcal{G}}_c$ tale che $\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = 0$.Dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{V}\right\}$, si ha che

$$\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] \in \ker ad_{\widetilde{X}} \Rightarrow \left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = \alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{V}.$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Poichè anche l'immagine di $ad_{\widetilde{X}}$ è, per ipotesi, bidimensionale esisterà un elemeto $W \notin \widetilde{\mathcal{G}}_c$: $\left[\widetilde{X}, \widetilde{W}\right] = \widetilde{Y}$ ed in particolare $W \notin \left\langle\widetilde{V}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle$ altrimenti $\widetilde{Y}$ sarebbe un elemento di $\left\langle\widetilde{V}, \widetilde{X}\right\rangle = \ker ad_{\widetilde{X}}$. Se sostituiamo il commutatore $\left[\widetilde{Y}, \widetilde{W}\right] = a\widetilde{X} + b\widetilde{Y} + c\widetilde{V} + d\widetilde{W}$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) nell'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{W}\right\}$ ci da $b = 0, d = -1$, cioè $\left[\widetilde{Y}, \widetilde{W}\right] = a\widetilde{X} + c\widetilde{V} - \widetilde{W}$.

Se si sostituiscono i campi $\widetilde{V}, \widetilde{W}$ con $\widetilde{V}' = \widetilde{V} + \left(\dfrac{\alpha}{1+\beta}\right)\widetilde{X}$, $\widetilde{W}' = \widetilde{W} + \lambda\widetilde{X}$, (con $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha c}{1+\beta} - a\right)$) si ottiene una nuova base dell'algebra in cui i commutatori calcolati si riscrivono nella forma:

$$\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right] = -\widetilde{X},\ \left[\widetilde{V}', \widetilde{X}\right] = 0, \left[\widetilde{V}', \widetilde{Y}\right] = \beta\widetilde{V}', \left[\widetilde{W}', \widetilde{Y}\right] = \widetilde{W}' - c\widetilde{V}', \left[\widetilde{X}, \widetilde{W}'\right] = \widetilde{Y}$$

. Con queste nuove espressioni dei commutatori, se si calcola l'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{W}', \widetilde{V}'\right\}$ si ottiene

$$\left[\left[\widetilde{V}', \widetilde{W}'\right], \widetilde{X}\right] = \beta\widetilde{V}' \tag{1.3}$$

questo significa che $\widetilde{V}' \in \widetilde{\mathcal{G}}_c = \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}}$, fatto impossibile perchè $\widetilde{V} \notin \widetilde{\mathcal{G}}_c$; quindi, $\beta = 0$ e $\left[\widetilde{V}', \widetilde{W}'\right] \in \ker ad_{\widetilde{X}}$. Infine, dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V}', \widetilde{Y}, \widetilde{W}'\right\}$ si ha:

$$\left[\widetilde{Y}, \left[\widetilde{V}', \widetilde{W}'\right]\right] = -\left[\widetilde{V}', \widetilde{W}'\right],$$

cioè $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right]$ è un autovettore relativo all'autovalore -1 dell'operatore

$$ad_{\widetilde{Y}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'autovettore relativo all'autovalore -1 è $\left(\widetilde{W'} - c\widetilde{V'}\right)$, quindi, $\left[\widetilde{V'},\widetilde{W'}\right] = \lambda\left(\widetilde{W'} - c\widetilde{V'}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Osserviamo, però, che $\left[\left[\widetilde{V},\widetilde{W'}\right],\widetilde{X}\right] = 0$, quindi $\lambda = 0$. Con un ultimo cambiamento di base, se si sostituisce $\widetilde{W'} - c\widetilde{V'} = T$, la struttura dell'algebra è:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X,Y] = -X, [V,Y] = 0, [T,Y] = T \\ [X,T] = Y, [V,X] = 0, [V,T] = 0 \end{array}$$

Si può osservare che $\mathcal{G}' = \langle T,Y,X\rangle \simeq so\,(2,1)$ e che $\{V\}$ è il centro dell'algebra $\Rightarrow \mathcal{G} = so\,(2,1) \oplus \mathbb{R}$.

2. $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} = 1$

In questa ipotesi, il nucleo dell'applicazione è tridimensionale ed inoltre, sappiamo che $\left[\widetilde{Y},\widetilde{X}\right] = s\widetilde{X}, (s = 0, 1)$. Distinguiamo allora i due casi:

(i) $s = 1$

$\left[\widetilde{Y},\widetilde{X}\right] = \widetilde{X} \Rightarrow \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} = \left\langle\widetilde{X}\right\rangle \subset \widetilde{\mathcal{G}}_c$. Poichè il nucleo è tridimensionale $\exists \widetilde{V},\widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{X},\widetilde{V}\right] = \left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right] = 0$. Dalle identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V},\widetilde{Y},\widetilde{X}\right\}$e $\left\{\widetilde{Z},\widetilde{Y},\widetilde{X}\right\}$, $\left\{\widetilde{V},\widetilde{Z},\widetilde{X}\right\}$otteniamo che

$$\begin{aligned} \left[\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right],\widetilde{X}\right] &= 0 \\ \left[\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right],\widetilde{X}\right] &= 0 \\ \left[\left[\widetilde{V},\widetilde{Z}\right],\widetilde{X}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right] &= a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{V} + a_3\widetilde{Z} \\ \left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right] &= b_1\widetilde{X} + b_2\widetilde{V} + b_3\widetilde{Z} \\ \left[\widetilde{V},\widetilde{Z}\right] &= c_1\widetilde{X} + c_2\widetilde{V} + c_3\widetilde{Z}. \end{aligned}$$

Se si sostituiscono le espressioni dei commutatori, appena ottenute, nell'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{Y},\widetilde{V},\widetilde{Z}\right\}$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\frac{c_2}{c_3} &= \frac{b_2}{b_3}=\frac{a_2}{a_3},\\ c_1 &= (b_2c_1-c_2b_1)+(a_3c_1-c_3a_1)\end{aligned}$$

Quindi, la struttura dell'algebra è:

$$\mathcal{G}_4:\begin{array}{l}[X,Y]=-X,\ [X,V]=0,\ [X,Z]=0,\ [Y,Z]=a_1X+a_2V+a_3Z,\\ [Y,V]=b_1X+b_2V+b_3Z,\ [V,Z]=c_1X+c_2V+c_3Z\end{array}.$$

La struttura trovata, può essere riscritta come:

$$\mathcal{G}_4:\begin{array}{l}[X,Y]=-X,\ [X,V]=0,\ [X,Z]=0,\ [Y,Z]=a_1X+(a_2V+a_3Z),\\ [Y,V]=b_1X+\dfrac{b_3}{a_3}(a_2V+a_3Z),\ [V,Z]=c_1X+\dfrac{c_3}{a_3}(a_2V+a_3Z)\end{array}$$

(ii) $s=0$

$\left[\widetilde{Y},\widetilde{X}\right]=0\Rightarrow\widetilde{\mathcal{G}}_c\subset\ker ad_{\widetilde{X}}$. Poichè il nucleo di $ad_{\widetilde{X}}$ è, per ipotesi, tridimensionale, esiste un terzo campo $\widetilde{Z}\in\widetilde{\mathcal{G}}\setminus\widetilde{\mathcal{G}}_c:\left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right]=0$. Dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right\}$ si ottiene che il commutatore $\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right]\in\ker ad_{\widetilde{X}}$, quindi, $\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right]=a\widetilde{X}+b\widetilde{Y}+c\widetilde{Z}$. L'immagine di $ad_{\widetilde{X}}$ è per ipotesi unidimensionale ed è contenuta in $\widetilde{\mathcal{G}}_c$, pertanto esiste un quarto campo $\widetilde{V}\in\widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c:\left[\widetilde{X},\widetilde{V}\right]\neq0$, in particolare,

$$\operatorname{lin}_c\widetilde{X}\left(\widetilde{V}\right)=\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right]_c=0\Rightarrow\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right]=\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y}$$

con α,β non contemporaneamente distinte da zero.

Utilizzando l' identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{V}\right\}$,si ottiene che il commutatore $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right]$ è nel nucleo dell'operatore $ad_{\widetilde{X}}$, pertanto $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right]=k\widetilde{X}+l\widetilde{Y}+m\widetilde{Z}$ con $k,l,m\in\mathbb{R}$. L'ultimo commutatore rimasto è $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]$ che come elemento dell'algebra si scrive: $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]=p_1\widetilde{X}+p_2\widetilde{Y}+p_3\widetilde{Z}+p_4\widetilde{V}$. A tal punto, utilizzando le ultime due identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{V},\widetilde{Z}\right\}\left\{\widetilde{V},\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\}$, si ottengono le seguenti identità tra le costanti di struttura:

$$\left\{\begin{array}{l}\beta c = 0\\ \beta b = -\beta p_4\\ \beta a + p_4\alpha = 0\end{array}\right. . \tag{1.4}$$

Possiamo distinguere diversi casi:

(a) $\beta = 0$

Ovviamente, deve essere $\alpha \neq 0$ altrimenti $\left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0$, non è restrittivo supporre $\alpha = 1$. Dal sistema (1.4) si ottiene $p_4 = 0$. Inoltre, dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V}, \widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right\}$ si evince che le costanti di struttura devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l}a + kb + cp_1 - ap_3 - al = 0\\ cp_2 - bp_3 = 0\\ bm - cl = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a + kb + cp_1 - ap_3 - al = 0\\ \dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{l}{m}\end{array}\right.$$

La struttura dell'algebra sarà:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l}[Y, X] = 0,\ [X, Z] = 0,\ [X, V] = X,\ [Y, Z] = aX + bY + cZ,\\ [Y, V] = kX + \dfrac{m}{c}(bY + cZ),\ [Z, V] = p_1X + \dfrac{p_3}{c}(bY + cZ).\end{array}$$

La struttura ottenuta è isomorfa all'algebra del precedente caso $s = 1$; se con X', Y', Z', V' indichiamo i suoi generatori, l'isomorfismo lo si ottiene ponendo:

$$\left\{\begin{array}{l}X' = X\\ Z' = Z\\ V' = -V\\ Y' = V\end{array}\right.$$

e le costanti di struttura sono $(a, b, c) = (c_1, c_2, c_3)$, $(k, l, m) = (b_1, b_2, b_3)$, $(p_1, p_2, p_3) = (a_1, a_2, a_3)$.

(b) $\beta \neq 0$

Se β è distinto da zero, il sistema (1.4) diventa

$$\left\{\begin{array}{l}b = -p_4\\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a}{b}\\ c = 0\end{array}\right.$$

e, sempre dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V}, \widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right\}$, si ottengono le ulteriori condizioni:

$$\left\{\begin{array}{l}la - 2kb + ap_3 + a\alpha = 0\\ bp_3 - bl + a\beta = 0\\ 2bm = 0\end{array}\right. \tag{1.5}$$

se $b=0 \Rightarrow a=0$ e la struttura dell'algebra è

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=\alpha X+\beta Y,\ [Y,Z]=0, \\ [Y,V]=kX+lY+mZ,\ [Z,V]=p_1X+p_2Y+p_3Z \end{array}$$

se $b \neq 0 \Rightarrow m=0$ e dal sistema (1.5) si ottiene che

$$\begin{cases} p_3 = l-\alpha \\ \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{k}{l} \end{cases}$$

per cui l'algebra è:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=X,\ [Y,Z]=aX+bY, \\ [Y,V]=\dfrac{l}{b}\left(aX+bY\right),\ [Z,V]=p_1X+p_2Y+\left(l-\alpha\right)Z-bV. \end{array}$$

Caso 10. $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}}=0$

Il $\ker ad_{\widetilde{X}}$ ha dimensione 4 e quindi, oltre ad $\left[\widetilde{Y},\widetilde{X}\right]=0$, esistono due campi $\exists \widetilde{V},\widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}} \setminus \widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{X},\widetilde{V}\right]=\left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right]=0$. Possiamo procedere l'analisi, ragionano sulla dimensione del nucleo dell'operatore $ad_{\widetilde{Z}}$, che è almeno bidimensionale.

(i) $\dim \ker ad_{\widetilde{Z}}=4$

I campi $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{V}$ commuteranno con il campo $\widetilde{Z}$, quindi $\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right]=\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]=0$. Dalle identità di Jacobi per i campi $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right] \in \ker ad_{\widetilde{X}}$, allora, $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right]=q_1\widetilde{X}+q_2\widetilde{Y}+q_3\widetilde{Z}+q_4\ \widetilde{V}$, con $q_1,q_2,q_3,q_4 \in \mathbb{R}$. La struttura dell'algebra sarà:

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=0,\ [Y,Z]=0, \\ [Y,V]=q_1X+q_2Y+q_3Z+q_4\ V,\ [Z,V]=0. \end{array}$$

Se tutte le costanti sono nulle, l'algebra è abeliana. Se $q_4 \neq 0$, ponendo $V'=q_1X+q_2Y+q_3Z+q_4\ V$ la struttura è isomorfa a

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V']=0,\ [Y,Z]=0, \\ [Y,V']=q_4V',\ [Z,V']=0. \end{array}$$

se $q_4=0$, ponendo $Z'=q_1X+q_2Y+q_3Z$, la struttura è isomorfa a

$$\mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [X,Z']=0,\ [X,V]=0,\ [Y,Z']=0, \\ [Y,V]=Z',\ [Z',V]=0. \end{array}$$

(ii) $\dim \ker ad_{\widetilde{Z}}=3$

Possiamo supporre $[Y,Z]=0$ e $[Z,V]\neq 0$. Se si scrivono le identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V},\widetilde{Z},\widetilde{X}\right\}$, $\left\{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{V}\right\}$, si scopre che $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right]$ e $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]$ appartengono al nucleo di $ad_{\widetilde{X}}$: e come tali possono scriversi come $\left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right] = q_1\widetilde{X}+q_2\widetilde{Y}+q_3\widetilde{Z}+q_4\widetilde{V}$, $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right] = m_1\widetilde{X}+m_2\widetilde{Y}+m_3\widetilde{Z}+m_4\ \widetilde{V}$ con $m_i,q_i\in\mathbb{R}$ per $i=1,..,4$ e tali che le m_i non sono tutte nulle. Dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{Z},\widetilde{Y},\widetilde{V}\right\}$ si hanno le seguenti relazioni tra le costanti di struttura: $\dfrac{m_4}{q_4}=\dfrac{m_1}{q_1}=\dfrac{m_2}{q_2}=\dfrac{m_3}{q_3}$.
La struttura dell'algebra $\mathcal{G}_4$ è:

$$\mathcal{G}_4:\ \begin{array}{l}[Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=0,\ [Y,Z]=0,\\ [Y,V]=q_1X+q_2Y+q_3Z+q_4V,\ [Z,V]=\dfrac{m_4}{q_4}\left(q_1X+q_2Y+q_3Z+q_4\ V\right)\end{array}$$

Se $q_4\neq 0$ e si pone $Z'=\left(q_1X+q_2Y+q_3Z+q_4\ V\right)$ si ha l'algebra:

$$\mathcal{G}_4:\ \begin{array}{l}[Y,X]=0,[X,Z]=0,[X,V]=0,\ [Y,Z]=q_4Z',\\ [Y,V]=Z',\ [Z,V]=\left(q_2+m_3\right)Z'\end{array}$$

si verifica facilmente che questa struttura è isomorfa all'algebra del caso (i) ottenuta per $q_4\neq 0$.

Se $q_4=0$ può accadere che $q_i=0$, con $i=1,2,3$ e l'algebra ottenuta è sempre isomorfo a quella del caso (i) ottenuta per $q_4\neq 0$. Se $m_4=0$ giungiamo all'assurdo $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right]=0$.

Caso 11. $\dim\ker\pi=1$

Se il nucleo della proiezione è unidimensionale, esisterà un campo Y su F_a che sarà verticale, ovvero, che si proietterà nel campo nullo. Il campo Y sarà tangente alla curva caratteristica C. Analogamente al caso $\dim\ker\pi=0$, analizzeremo l'algebra stabile di $\mathcal{G}$ e di $\widetilde{\mathcal{G}}$ rispettivamente nei punti $a\in F$ e $c\in\widetilde{F}$, dove c è la proiezione della curva C sul quoziente $\widetilde{F}$. Abbiamo già osservato all'inizio del paragrafo, che $\dim\mathcal{G}_a=1$. L'algebrà $\widetilde{\mathcal{G}}$, proiezione di $\mathcal{G}_4$ sul quoziente è tridimensionale, quindi la sua algebra stabile, sulla varietà bidimensionale $\widetilde{F}$ sarà, in accordo con il lemma 3, $\dim\widetilde{\mathcal{G}}_c=1$; ovviamente, $\mathcal{G}_a=\mathcal{G}_c=\left\{X\in\mathcal{G}:\widetilde{X}_c=0\right\}$. Sia $X\in\mathcal{G}_a$, la linearizzazione di $\widetilde{X}$ sarà nuovamente,

$$\operatorname{lin}_c\widetilde{X}=\mathbb{I}=\begin{pmatrix}0 & \pm 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

quindi, anche in questo caso studieremo tre differenti sottocasi:

1. $\operatorname{lin}_c \widetilde{X} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sulla varietà quoziente $\widetilde{F}$ si proietteranno tre campi tra cui, ovviamente, ci sarà $\widetilde{X}$. Consideriamo, quindi, un campo $\widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, poichè la linearizzazione di $\widetilde{X}$ è non nulla, esisterà un campo $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$ tale che $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right]_c = \operatorname{lin}_{c,\widetilde{X}}\left(\widetilde{Z}_c\right) = \widetilde{V}_c$, quindi, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}$. Inoltre, si ha che $\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right]_c = \operatorname{lin}^2_{c,\widetilde{X}}\left(\widetilde{Z}_c\right) = -\widetilde{Z}_c \Rightarrow \left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = -\widetilde{Z} + \lambda\widetilde{X}$. Se si scrive l'identità di Jacobi per $\left\langle\widetilde{V}, \widetilde{X}, \widetilde{Z}\right\rangle$:

$$\lambda\widetilde{V} = \left[\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right], X\right] \tag{1.6}$$

il campo $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right]$ come elemento di $\widetilde{\mathcal{G}}$, può essere scritto, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = a\widetilde{X} + b\widetilde{V} + c\widetilde{Z}$, che sostituito in (1.6) ci da: $b = 0, c = -\lambda$. L'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ ha la seguente struttura:

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}, \left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = -\widetilde{Z} + \lambda\widetilde{X}, \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = a\widetilde{X} - \lambda\widetilde{Z}$$

Come è già stato osservato, la struttura di $\widetilde{\mathcal{G}}$ è isomorfa a:

$$\widetilde{\mathcal{G}} \simeq \begin{cases} so\,(3) \text{ se } \sigma > 0 \\ so\,(2,1) \text{ se } \sigma < 0 \\ \mathcal{R}^2_0 \text{ se } \sigma = 0 \end{cases}$$

dove $\sigma = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix}$.

Il nucleo della proiezione π è un ideale unidimensionale generato dal campo verticale Y, quindi, l'algebra $\mathcal{G}_4$ avrà una delle seguenti strutture

$$\mathcal{G}_4{=}so\,(3) \oplus \mathbb{R},\ \mathcal{G} = \mathcal{R}^2_0 \oplus \mathbb{R},\ \mathcal{G} = \mathcal{R}^2_0 \oplus_\rho \mathbb{R},\ \mathcal{G}_4{=}so\,(2,1) \oplus \mathbb{R}.$$

ρ è la rappresentazione di $\mathcal{R}^2_0$ sull'ideale unidimensionale.

2. $\operatorname{lin}_c \widetilde{X} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I ragionamenti fatti nel caso precedente si ripetono anche in questo caso, tenendo però presente che $\mathbb{I}^2 = Id$. L'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ è:

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{Z}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{V}, \left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{Z} + \lambda\widetilde{X}, \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = a\widetilde{X} - \lambda\widetilde{Z}.$$

Considerato $\delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & a \end{vmatrix}$ l'algebra è isomorfa a $\widetilde{\mathcal{G}}$ è, come già provato, isomorfa a:

$$\widetilde{\mathcal{G}} :\simeq \begin{cases} so\,(2,1) \text{ se } \rho \neq 0 \\ \mathcal{R}_1^2 \text{ se } \rho = 0 \end{cases}$$

Allora, l'algebrà $\mathcal{G}_4$ avrà una delle seguenti strutture:

$$\mathcal{G}_4 {=} so\,(2,1) \oplus \mathbb{R},\ \mathcal{G}_4 {=}\ \mathcal{R}_1^2 \oplus \mathbb{R},\ \mathcal{G}_4 {=}\ \mathcal{R}_1^2 \oplus_\rho \mathbb{R}$$

ρ è la rappresentazione di $\mathcal{R}_1^2$ sull'ideale unidimensionale.

3. $\operatorname{lin}_c \widetilde{X} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Poichè $\operatorname{lin}_c \widetilde{X} = 0$, qualunque sia il campo $\widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, si ha

$$\operatorname{lin}_c \widetilde{X} \left(\widetilde{Z}_c\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right]_c = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_c.$$

L'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}_c$ è unidimensionale, quindi, $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} \leq 1$. Procediamo studiando separatamente i due casi:

(i) $\dim \operatorname{Im} ad_{\widetilde{X}} = 0$

Il nucleo dell'operatore aggiunto $ad_{\widetilde{X}}$ è tridimensionale, quindi, esistono due campi $\widetilde{Z}, \widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0$.

Poichè l'unico commutatore non ancora noto è $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right]$, possiamo ragionare sulla dimensione di $\ker ad_{\widetilde{Z}}$, ovviamente, questo già contiene i campi $\widetilde{Z}$ e $\widetilde{X}$, se fosse tridimensionale, si avrebbe $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = 0$ e l'algebra quoziente sarebbe

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = 0,\ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0, \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = 0$$

Se, invece, $\dim \ker ad_{\widetilde{Z}} = 2$, si ha $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = m_1 \widetilde{X} + m_2 \widetilde{Z} + m_3\ \widetilde{V}$, con $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ e non nulle contemporaneamente. La struttura dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ è

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X},\ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0,\ \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = 0$$

se $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$.

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = 0,\ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0,\ \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X}$$

se $m_1 \neq 0, m_2 = 0$.

Poichè il nucleo della proiezione è un ideale dell'algebra di dimensione 4, per quanto abbiamo già osservato sulle somme disrette, si avrà $\mathcal{G}_4 = \widetilde{\mathcal{G}} \oplus_\rho \mathbb{R}$, con ρ rappresentazione di $\widetilde{\mathcal{G}}$ su $\mathbb{R}$.

(ii) $\dim \mathrm{Im}\, ad_{\widetilde{X}} = 1$

Il nucleo dell'aggiunto è, questa volta, bidimensionale, quindi, esiste un campo $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0$. Inoltre, poichè l'immagine è unidimensionale, $\mathrm{Im}\, ad_{\widetilde{X}} = \widetilde{\mathcal{G}}_c, \exists \widetilde{Z} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X}$. Anche in questo caso possiamo ragionare sull'immagine dell'operatore aggiunto $ad_{\widetilde{Z}}$. Poichè l'immagine di $ad_{\widetilde{Z}}$ è almeno unidimensionale (i.e. $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X}$) il nucleo sarà al più bidimensionale. Ovviamente, distinguendo i due casi si ottiene:

(a) $\dim \ker ad_{\widetilde{Z}} = 2$

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X}, \ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0, \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = 0$$

che è isomorfa alla seconda struttura trovata nel caso (i).

(b) $\dim \ker ad_{\widetilde{Z}} = 1$

L'immagine è bidimensionale, quindi, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] \neq 0$ e, dall'identità di Jacobi si vede che $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = \alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{V}$ con α e β costanti non contemporaneamente nulle. Si nota che se $\beta = 0$ si ottiene una struttura isomorfa a quella precedente, mentre se $\beta \neq 0$,

$$\widetilde{\mathcal{G}} : \left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{X}, \ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = 0, \ \left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = \alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{V}$$

con $\beta \neq 0$.

Quindi, l'algebra $\mathcal{G}_4$ è la somma semidiretta della struttura quoziente $\widetilde{\mathcal{G}}$ e dell'ideale unidimensionale, generato dal campo verticale Y.

Prima di realizzare le strutture ottenute per le algebre $\mathcal{G}_4$, vogliamo premettere alcuni risultati che ci consentiranno di scrivere esplicitamente le rappresentazioni di $\widetilde{\mathcal{G}}$ sull'ideale unidimensionale generato dal campo verticale nel caso in cui $\dim \ker \pi = 1$ e di spiegare perchè la rappresentazione unidimensionale di un'algebra semisemplice è banale.

Nel paragrafo 5.1 abbiamo già dato la definizione di somma semidiretta; nel segiuto ci limiteremo a studiare la somma semidiretta di un'algebra tridimensionale e di un ideale unidimensionale. Come fatto nel paragrafo 5.1 $\mathfrak{H}$ è il nucleo della proiezione π, e

$$\mathcal{G}_4 = \pi\left(\mathcal{G}_4\right) \oplus_\rho \mathfrak{H} \tag{1.7}$$

dove $\rho : \pi(\mathcal{G}_4) \to \mathbb{R}$. In queste ipotesi vale il seguente Lemma:

LEMMA 27. *Considerata l'algebra derivata di $\pi(\mathcal{G}_r)$, questa è contenuta nel nucleo della rappresentazione $\rho : \pi(\mathcal{G}_r) \to \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v, v' \in \pi(\mathcal{G}_r)$ e $u \in \mathfrak{H}$. Un elemento dell'algebra derivata sarà della forma $[v, v']$, allora

$$\begin{aligned} \rho([v,v'])\,u = \ & [[[v,v']],u] = -[[v',u],v] + [[v,u],v'] \\ & -[\rho(v')\,u, v] + [\rho(v)\,u, v'] = \\ & \rho(v)\,\rho(v')\,u - \rho(v')\,\rho(v)\,u = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Dal lemma appena enunciato, segue subito, che se $\pi(\mathcal{G}_4) = \widetilde{\mathcal{G}}$ è isomorfa ad un'algebra tridimensionale semisemplice (i.e. $so(3)$, $so(2,1)$) la rappresentazione di quest'ultima sull'ideale unidimensionale è banale e, quindi, l'algebra $\mathcal{G}_4$ è somma diretta di $\widetilde{\mathcal{G}}$ ed $\mathbb{R}$. Riepilogando, le strutture ammissibili per le algebre $\mathcal{G}_4$ sono:

$$1)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = X_3,\ [X_2,X_3] = X_1,\ [X_3,X_1] = X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = 0 \end{cases}$$

$$2)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = X_3,\ [X_2,X_3] = -X_1,\ [X_3,X_1] = -X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = 0 \end{cases}$$

$$3)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_1,\ [X_3,X_1] = X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = 0 \end{cases}$$

$$4)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_1,\ [X_3,X_1] = X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = \beta X_4 \end{cases} \quad \beta \neq 0$$

$$5)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_1,\ [X_3,X_1] = -X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = 0 \end{cases}$$

$$6)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_1,\ [X_3,X_1] = -X_2, \\ [X_1,X_4] = 0,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_4,X_3] = \beta X_4 \end{cases} \quad \beta \neq 0$$

$$7)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_2,\ [X_3,X_1] = -X_1, \\ [X_1,X_4] = X_2,\ [X_2,X_4] = -X_1,\ [X_3,X_4] = 0. \end{cases}$$

$$8)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1,X_2] = 0,\ [X_2,X_3] = X_2,\ [X_3,X_1] = 0, \\ [X_1,X_4] = X_1,\ [X_2,X_4] = 0,\ [X_3,X_4] = 0. \end{cases}$$

$$9)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X,Y] = 0,\ [V,Y] = mX + nY,\ [V,X] = X,\ [Z,Y] = k\widetilde{X} + l\widetilde{Y}, \\ [Z,X] = Y,\ [V,Z] = a_1X + a_2Y + (n-1)\,Z + mV. \end{cases}$$

$$10)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X,Y] = -X,\ [X,V] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [Y,Z] = a_1 X + (a_2 V + a_3 Z)\,, \\ [Y,V] = b_1 X + \dfrac{b_3}{a_3}(a_2 V + a_3 Z)\,,\ [V,Z] = c_1 X + \dfrac{c_3}{a_3}(a_2 V + a_3 Z) \end{cases}$$

$$11)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = \alpha X + \beta Y, \\ [Y,Z] = 0,\ [Y,V] = kX + lY + mZ,\ [Z,V] = p_1 X + p_2 Y + p_3 Z \end{cases}$$

$\beta \neq 0$

$$12)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = X,\ [Y,Z] = aX + bY, \\ [Y,V] = \dfrac{l}{b}(aX + bY)\,,\ [Z,V] = p_1 X + p_2 Y + (l - \alpha) Z - bV \end{cases} \quad b \neq$$

0

$$13)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = 0, \\ [Y,V] = q_4 V,\ [Z,V] = 0. \end{cases} .$$

$$14)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z'] = 0,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z'] = 0, \\ [Y,V] = Z',\ [Z',V] = 0. \end{cases} .$$

15) Algebra abeliana

$$16)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = \alpha Y,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = \gamma Y, \\ [Y,V] = \beta Y,\ [Z,V] = 0 \end{cases} \quad ((\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}) \cdot$$

$$17)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = X,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = 0, \\ [Y,V] = 0,\ [Z,V] = 0 \end{cases} .$$

$$18)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = X,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = aY, \\ [Y,V] = bY,\ [Z,V] = 0 \end{cases} \quad ((a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}) \cdot$$

$$19)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = 0, \\ [Y,V] = 0,\ [V,Z] = X \end{cases} .$$

$$20)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = 0,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = aY, \\ [Y,V] = bY,\ [V,Z] = X \end{cases} .$$

$$21)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = X,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = 0, \\ [Y,V] = 0,\ [V,Z] = \alpha X + \beta V \end{cases} \quad \beta \neq 0 \cdot$$

$$22)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X] = 0,\ [X,Z] = X,\ [X,V] = 0,\ [Y,Z] = bY, \\ [Y,V] = 0,\ [V,Z] = \alpha X + \beta V \end{cases} \quad \beta, b \neq$$

$0 \cdot$

Si osserva facilmente che la 16) e la 17) sono isomorfe alla 13), così come la 19) è isomorfa alla 14). La struttura 18) è isomorfa alla 8) e l'isomorfismo è:

$$\begin{cases} X_1 = Y \\ X_2 = X \\ X_3 = bZ - aV \\ X_4 = V \end{cases}.$$

L'algebra 14) è isomorfa alla 11) se, in quest'ultima sono nulle tutte le castanti. Indicate con X', Y', Z', V', i generatori della struttura 14), l'isomorfismo è dato da

$$\begin{cases} X' = Z \\ Y' = X \\ Z' = \beta Y \\ V' = V \end{cases}, \text{ con } \beta \neq 0.$$

Analogamente si dimostra che la 13) è isomorfa alla 10) se tutte le costanti presenti in quest'ultima sono nulle.

La struttura 21) nel caso in cui anche α è distinta da zero, è isomorfa alla 11) quando le sue costanti di struttura sono

$$k = 1,\ l = m = p_1 = p_2 = p_3 = 0.$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$ la 21) è isomorfa aall'algebra 18) scambiando i ruoli di X e V. Anche l'algebra 22) se $\alpha \neq 0$ è isomorfa alla struttura 11) quando le sue costanti di struttura sono

$$k = 1,\ p_3 = b,\ l = m = p_1 = p_2 = 0.$$

mentre se $\alpha = 0$ è ismorfa alla 10), basterà considerare le seguenti costanti di struttura per l'algebra 10)

$$b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0,\ b_2 = 1,\ a_3 = \beta$$

La struttura 20) è anch'essa isomorfa alla 10), basterà considerare le seguenti costanti di struttura per l'algebra 10)

$$b_1 = b_3 = b_2 = c_1 = c_2 = c_3 = 0,\ a_2 = 1$$

Quelle che seguono, sono le possibili strutture per l'algebra $\mathcal{G}_4$ sono:

$$1)\ \mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0 \end{array}$$

$$2)\ \mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} [X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = -X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0 \end{array}$$

$$3)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0 \end{cases}$$

$$4)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = \beta X_4 \end{cases} \beta \neq 0$$

$$5)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0 \end{cases}$$

$$6)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2, \\ [X_1, X_4] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = \beta X_4 \end{cases} \beta \neq 0$$

$$7)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = -X_1, \\ [X_1, X_4] = X_2,\ [X_2, X_4] = -X_1,\ [X_3, X_4] = 0. \end{cases}$$

$$8)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = 0, \\ [X_1, X_4] = X_1,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_3, X_4] = 0. \end{cases}$$

$$9)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X, Y] = 0,\ [V, Y] = mX + nY,\ [V, X] = X,\ [Z, Y] = k\widetilde{X} + l\widetilde{Y}, \\ [Z, X] = Y,\ [V, Z] = a_1 X + a_2 Y + (n-1) Z + mV. \end{cases}$$

$$10)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X, Y] = -X,\ [X, V] = 0,\ [X, Z] = 0,\ [Y, Z] = a_1 X + (a_2 V + a_3 Z), \\ [Y, V] = b_1 X + \dfrac{b_3}{a_3} (a_2 V + a_3 Z),\ [V, Z] = c_1 X + \dfrac{c_3}{a_3} (a_2 V + a_3 Z) \end{cases}$$

$$11)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y, X] = 0,\ [X, Z] = 0,\ [X, V] = \alpha X + \beta Y, \\ [Y, Z] = 0,\ [Y, V] = kX + lY + mZ,\ [Z, V] = p_1 X + p_2 Y + p_3 Z \end{cases} \beta \neq 0$$

$$12)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y, X] = 0,\ [X, Z] = 0,\ [X, V] = X,\ [Y, Z] = aX + bY, \\ [Y, V] = \dfrac{l}{b} (aX + bY),\ [Z, V] = p_1 X + p_2 Y + (l - \alpha) Z - bV \end{cases} b \neq 0$$

13) **STRUTTURA ABELIANA**

2. Realizzazione delle algebre $\mathcal{G}_4$.

Nel seguente paragrafo, scriveremo in maniera esplicita i generatori delle strutture trovate nel paragrafo precedente, in termini di campi coordinati. Prima di fare ciò, dobbiamo premettere alcuni risultati che ci consentiranno di dire che le rappresentazioni non banali di alcune delle algebre quozienti sull'ideale unidimensionali, sono uniche a meno di isomorfismi.

Sia $\mathfrak{H}$ è il nucleo della proiezione π, consideriamo $\dim \mathfrak{H} = 1$, se $\pi(\mathcal{G}_4) = \widetilde{\mathcal{G}}$ è isomorfa ad un'algebra non semplice, la sua rappresentazione sull'ideale bidimensionale potrà essere banale oppure non-banale.. Nel seguito, riporteremo cosa accade quando $\pi(\mathcal{G}_4) \simeq \mathcal{R}_0^2$ (oppure $\simeq \mathcal{R}_1^2$). Ricordiamo che $\mathcal{R}_0^2$ (risp. $\mathcal{R}_1^2$) sono le algebre delle isometrie del piano euclideo (risp. del piano ellittico-iperbolico),

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0^2 &: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, \ [X_3, X_1] = X_2 \\ \mathcal{R}_1^2 &: \ [X_1, X_2] = 0, [X_2, X_3] = X_1, \ [X_3, X_1] = -X_2\end{aligned}$$

Dimostreremo che la rappresentazione non banale di $\mathcal{R}_0^2$ (risp. $\mathcal{R}_1^2$) sull'ideale unidimensionale è unica a meno di isomorfismi. Per il lemma (27), abbiamo che la rappresentazione $\rho : \mathcal{R}_0^2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{H})$ manda i campi X_1 ed X_2 in zero. $\rho(X_3) \in \mathrm{End}(\mathfrak{H})$ e non è altro che la moltiplicazione per uno scalare. Ovviamente, può accadere che $\rho(X_3) = 0$, in questo caso la rappresentazione ρ è quella banale e l'algebra $\mathcal{G}_4$ è la somma diretta di $\mathcal{R}_0^2$ ed $\mathfrak{H}$. Supponiamo, quindi, $\rho(X_3) \neq 0$, consideriamo due distinte rappresentazioni ρ e $\widetilde{\rho}$ di $\mathcal{R}_0^2$ su $\mathfrak{H}$, si otterranno due algebre di dimensione 4, $\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4'$, ripsettivamente. Entrambe le algebre hanno un ideale unidimensionale e la loro algebra derivata è di dimensione 3, é facile vedere che l'ideale unidimensionale è unico. Se si suppone che le due algebre $\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4'$ sono isomorfe, indicati con $\mathfrak{H}$ e $\widetilde{\mathfrak{H}}$ i rispettivi ideali unidimensionali, ovviamente, l'isomorfismo manda $\mathfrak{H}$ in $\widetilde{\mathfrak{H}}$ e l'algebra quoziente $\mathcal{G}_4/\mathfrak{H}$ va nell'algebra quoziente $\mathcal{G}_4'/\widetilde{\mathfrak{H}}$. Le due rappresentazioni saranno, così, equivalenti. Infatti, indicato con φ l'automorfismo dell'algebra $\mathcal{R}_0^2$ che lascia invariato il piano generato da X_1 ed X_2 si ottiene che

$$\begin{aligned}\varphi(X_1) &= aX_1 + bX_2 \\ \varphi(X_2) &= cX_1 + dX_2 \\ \varphi(X_3) &= \pm X_3 + \alpha X_1 + \beta X_2\end{aligned}$$

con $a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dalle leggi di commutazione per i generatori dell'algebra $\mathcal{R}_0^2$, si ottiene che l'automorfismo manda i due vettori $X_3 + \alpha X_1 + \beta X_2$ e $-X_3 + \alpha X_1 + \beta X_2$ l'uno nell'altro, questo vuol dire che i due piani paralleli al piano generato da X_1 ed X_2 si identificano e se ρ e $\widetilde{\rho}$ sono le due rappresentazioni tali che $\rho\left(X_3\right) = \gamma$ e $\widetilde{\rho}\left(X_3\right) = \widetilde{\gamma}$, queste si equivalgono se e solo se, $\gamma^2 = \widetilde{\gamma}^2$. Ricordiamo che due rappresentazioni si dicono equivalenti se esiste un morfismo tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_0^2 & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{End}\left(\mathfrak{H}\right) \\ \varphi \updownarrow & \circlearrowleft & \uparrow f \\ \mathcal{R}_0^2 & \underset{\widetilde{\rho}}{\rightarrow} & \mathrm{End}\left(\mathfrak{H}\right) \end{array}$$

Nel nostro caso, l'applicazione $f : u \in \mathfrak{H} \rightarrow -u \in \mathfrak{H}$. Con un ragionamento analogo, si dimstra che anche per l'algebra $\mathcal{R}_1^2$ la rappresentazione non-banale è unica a meno di isomorfismi.

Tutto quello che è stato fin qui dimostrato è valido nel caso in cui il complemento dell'ideale $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{G}_4$è una sottoalgebra tridimensionale di $\mathcal{G}_4$. Nel paragrafo successivo mostreremo, mediante lo studio del gruppo di coomologia dell'algebra di Lie $\mathcal{R}_0^2$ (risp. $\mathcal{R}_1^2$) , che è sempre possibile scegliere il complemento di $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{G}_4$ in modo tale che questo risulti essere una sottoalgebra.

2.1. Gruppo di Coomologia di un'algebra di Lie. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Lie ed $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{A}-$modulo. Se $i \geq 1$, una $\mathfrak{M}-$*cocatena* di dimensione i è un'applicazione alternante, $i-$lineare

$$\underbrace{\mathcal{A}\times ... \times \mathcal{A}}_{i-\text{volte}}\rightarrow\mathfrak{M}$$

Se $i = 0$ si definisce la $\mathfrak{M}-$*cocatena* di dimensione 0 un'applicazione costante da $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{M}$. Se f è una cocatena di dimensione i, con $i \geq 0$, allora, f determina una cocatena δf di dimensione $i+1$ detta *cobordo* di f, definita dalla formula

(2.1)

$$\begin{aligned} \delta f\left(X_1, ..., X_{i+1}\right) = & \sum_{q=1}^{i+1} \left(-1\right)^{i-1} X_q \left(f\left(X_1, .., \widehat{X}_q, .., X_{i+1}\right)\right) + \\ & \sum_{q<r} \left(-1\right)^{q+r} f\left(\left[X_q, X_r\right], .., \widehat{X}_q, .., \widehat{X}_r, .., X_{i+1}\right) \end{aligned}$$

Con il simbolo$\widehat{\ }$su un elemento si intende l'omissione di quest'ultimo. L'insieme delle $\grave{\imath}-$cocatene $C^i\left(\mathcal{A}, \mathfrak{M}\right)$ è uno spazio vettoriale. Inoltre, l'applicazione $f \rightarrow \delta f$ è lineare ed è chiamatao *operatore di cobordo,* di $C^i\left(\mathcal{A}, \mathfrak{M}\right)$ in $C^{i+1}\left(\mathcal{A}, \mathfrak{M}\right)$, con $i \geq 0$.

Una $i-$cocatena f è detta *cociclo* se $\delta f = 0$ ed è detta *cobordo* se $f = \delta h$ per una qualche $\left(i-1\right)-$cocatena h. L'insieme $Z^i\left(\mathcal{A}, \mathfrak{M}\right)$ degli $i-$cocicli è il nucleo dell'omomorfismo δ di C^i in C^{i+1}, quindi, Z^i è un sottospazio di C^i. Analogamente $B^i\left(\mathcal{A}, \mathfrak{M}\right)$ l'insieme degli $i-$cobordi è un sottospazio di C^i perchè è l'immagine, mediante δ, di C^{i-1}. Con un semplice calcolo è facile provare che $B^i \subseteq Z^i$, cioè ogni cobordo è un cociclo. Questo risultato è una conseguenza diretta della proprietà fondamentale dell'operatore cobordo: $\delta^2 = 0$ (per maggiori dettagli vedere [**5**]). Fatte queste premesse, è possibile deinire l'$i-$*esimo gruppo di coomologia di* $\mathcal{A}$ relativo al modulo $\mathfrak{M}$ come lo spazio quoziente

$$H^i(\mathcal{A},\mathfrak{M}) \equiv \frac{Z^i(\mathcal{A},\mathfrak{M})}{B^i(\mathcal{A},\mathfrak{M})}.$$

Se $i = 0$, $B^i(\mathcal{A},\mathfrak{M}) = 0$ in quanto non esistono $(i-1)-$cocatene, quindi, $H^0(\mathcal{A},\mathfrak{M}) = Z^0(\mathcal{A},\mathfrak{M})$. Questo $0-$esimo gruppo di coomologia può essere identificato con l'insieme degli elementi $u \in \mathfrak{M}$ tali che $ua = 0$ per tutti gli a. Tali elementi sono detti *invarianti* del modulo $\mathfrak{M}$. Se $H^i(\mathcal{A},\mathfrak{M}) = 0$ si ha che $Z^i(\mathcal{A},\mathfrak{M}) = B^i(\mathcal{A},\mathfrak{M})$, cioè ogni cociclo è un cobordo.

Proseguiamo lo studio riferendoci in manira specifica al nostro caso, indichiamo con $\overline{X}_i$ i campi in $\mathcal{G}_4$ che sono il sollevamento dei campi dell'algebra quoziente $\pi(\mathcal{G}_4)$. Definiamo nel seguente modo il commutatore di due campi $\overline{X}_i, \overline{X}_j$,

$$\left[\overline{X}_i, \overline{X}_j\right] = \overline{[X_i, X_j]} + \lambda(X_i, X_j),$$

dove $\lambda : \pi(\mathcal{G}_4) \times \pi(\mathcal{G}_4) \to \mathfrak{H}$ è una forma bilineare.

Il commutatore tra un campo $\overline{X}_i$ ed un elemento Y dell'ideale è $\left[\overline{X}_i, Y\right] = \rho(X)\,Y$.

Se, ora, si considera un altro complemento di $\mathfrak{M}$ in $\mathcal{G}_4$ e si indicano con $\widetilde{X}_i$ i suoi elementi, vediamo quale relazione sussiste tra gli elementi dei due diversi complementi di $\mathfrak{H}$:

$$\widetilde{X}_i = \overline{X}_i + \varphi(X_i),\ i = 1, 2, 3$$

dove $\varphi : \pi(\mathcal{G}_4) \to \mathfrak{H}$. Se si calcola il commutatore tra $\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j$ si ottiene

(2.2)
$$\left[\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j\right] = \overline{[X_i, X_j]} + \lambda(X_i, X_j) + \rho(X_i)(\varphi(X_j)) - \rho(X_j)(\varphi(X_i))$$

ma, per definizione di commutatore tra due elementi dello stesso complemento esisterà una forma bilineare $\mu : \pi(\mathcal{G}_4) \times \pi(\mathcal{G}_4) \to \mathfrak{H}$, tale che:

(2.3)
$$\left[\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j\right] = \widetilde{[X_i, X_j]} + \mu(X_i, X_j) = \overline{[X_i, X_j]} + \varphi([X_i, X_j]) + \mu(X_i, X_j)$$

Confrontando le due espressioni (2.2) e (2.3), si ottiene:

(2.4)
$$\mu(X_i, X_j) = -\varphi([X_i, X_j]) + \lambda(X_i, X_j) + \rho(X_i)(\varphi(X_j)) - \rho(X_j)(\varphi(X_i))$$

Le forme bilineari λ e μ sono dei cocicli, mentre data un'applicazione $\varphi : \pi(\mathcal{G}_4) \to \mathfrak{H}$ il cobordo è

$$\delta\varphi(X_1, ..., X_{i+1}) = \sum_{q=1}^{i+1} (-1)^{q-1} X_q \left(\varphi\left(X_1, .., \widehat{X}_q, .., X_{i+1}\right)\right) + \sum_{q<r} (-1)^{q+r} \varphi\left([X_q, X_r], .., \widehat{X}_q, .., \widehat{X}_r, .., X_{i+1}\right).$$

Possiamo, ora dimostrare che se $\pi(\mathcal{G}_4) \simeq \mathcal{R}_0^2$, la scelta del complemento dell'ideale $\mathfrak{H}$ come sottoalgebra di $\mathcal{G}_4$ è sempre possibile. Nell'ipotesi che ρ sia una rappresetazione non banale (i.e $\rho(X_3) \neq 0$, $\rho(X_i) = 0$, $i = 1, 2$),

$$\left[\overline{X}_1, \mathfrak{H}\right] = \left[\overline{X}_2, \mathfrak{H}\right] = 0 \text{ e } \left[\overline{X}_3, Y\right] = a^2 Y, \ a \in \mathbb{R}$$

Se si calcola l'identiatà di Jacobi per i campi $\left\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3\right\}$ si ottiene che $\lambda(X_1, X_2) = 0$. Quindi, una forma bilineare λ è un cociclo se e solo se $\lambda(X_1, X_2) = 0$ (analogamente per μ).

Data l'applicazione $\varphi : \mathcal{R}_0^2 \to \mathfrak{H}$, vediamo che $\delta\varphi$ è un cobordo ed in particolare, $\delta\varphi(X_1, X_2) = 0$. Si nota subito dalla (2.4) che le due forme bilineari λ e μ differiscono per un cobordo, pertanto, appartengono alla medesima classe di coomologia. Il secondo gruppo di coomologia dell'algebra $\mathcal{R}_0^2$ è però, nullo. Basta osservare che la dimensione dello spazio dei cocicli e quella dello spazo dei cobordi è la stessa. Tutto questo, significa che è sempre possibile trovare una forma bilineare in modo tale che il complemento di $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{G}_4$ risulti una sottoalgebra.

Allo stesso risultato si giunge se si considera l'algebra $\mathcal{R}_1^2$.

2.2. Realizzazione delle algebre $\mathcal{G}_4$.. Come abbiamo fatto nei capitoli precedenti, daremo una formulazione in termini di campi coordinati di alcune delle strutture ottenute.

Data una carta (U, x), sicuramente le strutture facilmente realizzabili in in termini di campi coordinati sono: $\mathcal{G}_4 = so(3) \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_4 = so(2,1) \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_0^2 \oplus_\rho \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_1^2 \oplus_\rho \mathbb{R}$. Se X, Y, Z, V sono i generatori dell'algebra $\mathcal{G}_4$, indicati con ∂_i i campi coordinati nella carta scelta,

Struttura 1: $\mathcal{G}_4$=$so(3) \oplus \mathbb{R}$

E' noto che X, V, Z sono i generatori dell'algebra $so(3)$ questi si esprimono in termini di campi coordinati come:

$$X = -x_2\partial_3 + x_3\partial_2, \ V = -x_3\partial_1 + x_1\partial_3, \ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1$$

La somma è diretta e questo significa che la rappresentazione di $so(3)$ sull'ideale unidimensionale, generato di Y, è banale. Allora, basterà scegliere $Y = \partial_4$ e l'algebra $\mathcal{G}_4$ ha come generatori:

$$\mathcal{G}_4 : X = -x_2\partial_3 + x_3\partial_2,\ V = -x_3\partial_1 + x_1\partial_3,\ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\ Y = \partial_4$$

Struttura 2: $\mathcal{G}_4 = so\,(2,1) \oplus \mathbb{R}$

L'algebra semisemplice $so\,(2,1)$ ha come generatori in una carta i campi:

$$X = x_2\partial_3 + x_3\partial_2,\ V = x_3\partial_1 + x_1\partial_3,\ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1$$

Anche in questo caso, la rappresentazione è banale, essendo l'algebra semisemplice, quindi, basterà scegliere il quarto campo $Y = \partial_4$ e la rappresentazione dell'intera algebra di dimensione 4 in una carta sarà:

$$\mathcal{G}_4 : X = x_2\partial_3 + x_3\partial_2,\ V = x_3\partial_1 + x_1\partial_3,\ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\ Y = \partial_4$$

Struttura 3: $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_0^2 \oplus \mathbb{R}$

In questo caso, la rappresentazione è banale ed in una carta i generatori dell'algebra di dimensione 4 saranno:

$$\mathcal{G}_4 : X = \partial_1,\ V = \partial_2,\ Z = -x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\ Y = \partial_4$$

Struttura 4: $\mathcal{G}_4 = \mathcal{R}_1^2 \oplus \mathbb{R}$

Il ragionamento fatto per l'algebra $\mathcal{R}_0^2$ ha senso anche per $\mathcal{R}_1^2$. Allora, se la rappresentazione è banale, la struttura si realizza come

$$\mathcal{G}_4 : X = \partial_1,\ V = \partial_2,\ Z = x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\ Y = \partial_4$$

Ricordiamo che per il terzo teorema di Lie ognuna delle strutture trovate può essere realizzata come un'algebra di Lie concreta. Questo significa che è sempre possibile esprimere ognuna di queste algebre in termini di campi coordinat.

3. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_5$.

Analogamente a quanto fatto per le algebre di dimensione 4, fissata la foglia F_a, con $a \in M$, consideriamo la proiezione

$$\pi : \mathcal{G}_5 \to D\left(\widetilde{F}\right)$$

dove $\widetilde{F}$ è la varietà quoziente definita all'inizio del capitolo. Ovviamente, per le stesse ragioni esposte all'inizio del capitolo, il nucleo della proiezione π avrà al più dimensione 1. Nel seguito, distingueremo, nuovamente, i due sottocasi: $\dim\ker\pi = 0$ e $\dim\ker\pi = 1$.

Caso 12. $\dim \ker \pi = 0$

La dimensione dell'algebra stabile $\mathcal{G}_a$ di $\mathcal{G}_5$ nel punto a è, in accordo con il lemma (3), bidimensionale. Considerata la proiezione $\widetilde{\mathcal{G}}$ di $\mathcal{G}_5$ sulla varietà quoziente $\widetilde{F}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ ha dimensione 5, questo significa che l'algebra stabile $\widetilde{\mathcal{G}}_c$ nel punto c (proiezione della curva caratteristica C sulla varietà quoziente) è tridimensionale, così come lo è l'algebra $\mathcal{G}_c = \left\{ X \in \mathcal{G}_4 : \widetilde{X}_c = 0 \right\}$. Come già fatto nel precedente paragrafo, consideriamo le restrizione dei campi di $\mathcal{G}_c$ alla curva caratteristica e denotiamo l'algebra da essi generata con $\mathcal{G}_C = \{X \in \mathcal{G}_c : X_C = 0\}$.

Lemma 28. *$\mathcal{G}_C$ ha dimensione due.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\dim \mathcal{G}_C = 0$, cioè supponiamo che i e tre i campi tangenti alla curva caratteristica non si annullino se ad essa ristretti . Fissato un punto sulla curva, per il teorema di Lie sulla linea esiste una carta in cui i tre campi si possono scrivere come $X = \dfrac{\partial}{\partial x}, Y = x\dfrac{\partial}{\partial x}, Z = x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$. Allora, considerato il punto $a = (x = 0, x_2 ..., x_n)$, i campi Y e Z si annullano in a. Per quanto abbiamo già osservato nell'analoga dimostrazione fatta per le algebre di dimensione 4, la linearizzazione del campo Y, ha $\dfrac{\partial}{\partial x}_{|a}$ come autovettore relativo all'autovalore 1, fatto che contraddice i nostri risultati sugli operatori antisimmetrici. Ad un risultato analogo si giunge se consideriamo $\dim \mathcal{G}_C = 1$, infatti, fissato un punto sulla curva, i due capi ad essa tangenti possono scriversi in una carta come $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\dfrac{\partial}{\partial x}$, quindi, nuovamente ricadiamo in contraddizione con i risultati ottenuti nel primo capitolo. □

Dal lemma segue che i campi appartenenti all'algebra stabile $\mathcal{G}_a$ si annullano ristretti sulla curva C, mentre esiste un campo $Z \in \mathcal{G}_c$ non nullo e tangente a C in a.Siano, allora, $X, Y \in \mathcal{G}_a$, per quanto già osservato, le loro linearizzazioni sono rappresentate dalle matrici:

$$\operatorname{lin}_a X = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & \pm\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{lin}_a Y = \begin{pmatrix} 0 & p' & q' \\ 0 & 0 & \pm\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

L'analisi delle possibili strutture procederà distinguendo differenti sottocasi. Osserviamo che è sufficiente studiare i casi in cui le due linearizzazioni sono nulle e quello in cui almeno una delle due è distinta da zero; questo perchè nel caso in cui le due linearizzazioni sono non nulle, sarà sufficiente, in una nuova base, considerare un nuovo campo Y', ottenuto sottraendo dal campo X il campo$Y$ moltiplicato per un opportuno coefficiente[2] così da ricadere nel caso secondo dei casi citati sopra. Nel caso in cui, ad esempio, la linearizzazione di Y è non nulla, non è restrittivo supporre che $\beta = 1$

$$\underline{\lambda = 0,\ \beta = 1}$$

La linearizzazione del campo $\widetilde{Y}$, proiezione dal campo Y sulla varietà quoziente, è rappresentata dalla matrice

$$\mathbb{J} = \operatorname{lin}_c \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le strutture

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_c^0 &= \{X \in \mathcal{G}_c : X_C = 0\} = \mathcal{G}_a \\ \mathcal{G}_c^1 &= \left\{X \in \mathcal{G}_c^0 : \operatorname{lin}_c X = 0\right\} = \langle X \rangle, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{G}_c^1$ è un ideale di $\mathcal{G}_c^0$. Considerato il campo Y in $\mathcal{G}_a$ per quanto appena osservato, $[Y, X] = kX$ con $k \in \mathbb{R}$. Inoltre, $[\mathcal{G}_c, \mathcal{G}_c^1] \subset \mathcal{G}_c^1$, detto Z è il terzo campo in $\mathcal{G}_c$, risulta $[Z, X] = hX$, con $h \in \mathbb{R}$. Il commutatore $[Z, Y]$ è un campo che si annulla ristretto alla curva caratteristica, quindi, $[Z, Y] \in \mathcal{G}_c^0$ e $[Z, Y] = mX + nY$. Sulla varietà quoziente il commutatore delle proiezioni dei campi $\widetilde{Z}, \widetilde{Y}$ è $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = m\widetilde{X} + n\widetilde{Y}$, ma se si considerano le linearizzazioni nel punto c,

$$n\mathbb{J} = \operatorname{lin}_c \left[\widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right] = -\left[\operatorname{lin}_c \widetilde{Z}, \mathbb{J}\right] \Rightarrow n = 0$$

altrimenti, in accordo con il lemma (25) $\mathbb{J}$ sarebbe nilpotente. Poichè $\left[\operatorname{lin}_c \widetilde{Z}, \mathbb{J}\right] = 0$, si ottiene che $\operatorname{lin}_c \widetilde{Z} = aId_{\mathcal{G}} + b\mathbb{J}$ e con un opportuno cambiamento di base, possiamo scrivere il campo $\widetilde{Z}$, in modo tale che $\operatorname{lin}_c \widetilde{Z} = aId_{\mathcal{G}}$. Procediamo distinguiamo i sottocasi: $a = 0, \quad a = 1$

(1) $a = 1, \quad \operatorname{lin}_c \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

[2] $Y' = X - \dfrac{\lambda}{\beta} Y$

La linearizzazione del campo $\widetilde{Y}$ è non nulla, allora, considerato il campo $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, $\mathrm{lin}_c \widetilde{Y}\left(\widetilde{V}\right) \neq 0 \Rightarrow \exists \widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right]_c = \widetilde{W}_c$ e, quindi, $\left[\widetilde{V}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{W}$. Inoltre,

$$\left[\widetilde{W}, \widetilde{Y}\right]_c = \mathrm{lin}_c^2 \widetilde{Y}\left(\widetilde{V}\right) = -\widetilde{V}_c \Rightarrow \left[\widetilde{W}, \widetilde{Y}\right] = -\widetilde{V} + p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z}.$$

La linearizzazione di $\widetilde{Z}$ coincide con l'identità, quindi,

$$\left[\widetilde{V}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{V} + q_1\widetilde{X} + q_2\widetilde{Y} + q_3\widetilde{Z}, \left[\widetilde{W}, \widetilde{Z}\right] = \widetilde{W} + r_1\widetilde{X} + r_2\widetilde{Y} + r_3\widetilde{Z}.$$

Infine, essendo la linearizzazione di $\widetilde{X}$ nulla, si ha $\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right], \left[\widetilde{W}, \widetilde{X}\right] \in \widetilde{\mathcal{G}}_c$ e

$$\left[\widetilde{V}, \widetilde{X}\right] = a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{Y} + a_3\widetilde{Z}, \left[\widetilde{W}, \widetilde{X}\right] = b_1\widetilde{X} + b_2\widetilde{Y} + b_3\widetilde{Z}.$$

Per conoscere quali sono effettivamente le costanti di struttura dell'algebra, consideriamo le identità di Jacobi, vediamo che l'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\}$ è verificata banalmente. Dalle identità per i campi $\left\{\widetilde{V}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\}, \left\{\widetilde{Z}, \widetilde{V}, \widetilde{Y}\right\}, \left\{\widetilde{Z}, \widetilde{W}, \widetilde{Y}\right\}, \left\{\widetilde{Z}, \widetilde{X}, W\right\}, \left\{\widetilde{Z}, \widetilde{X}, \widetilde{V}\right\}, \left\{\widetilde{W}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\}$ si ottengono le seguenti relazioni tra le costanti

$$\begin{cases} a_2 = a_3 = 0 \\ b_1 = b_2 = b_3 = 0 \\ r_2 = r_3 = 0 \\ q_2 = -p_2 \\ q_3 = -p_3 \\ a_1 = kp_2 + hp_3 \\ ma_1 + kq_1 - mq_3 + r_1 = 0 \\ r_1 - p_1 - q_1 - hp_1 - mp_2 = 0 \end{cases}$$

Per verificare le ultime identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{W}\right\}, \left\{\widetilde{Y}, \widetilde{V}, \widetilde{W}\right\} \left\{\widetilde{Z}, \widetilde{V}, \widetilde{W}\right\}$, consideriamo il cammutatore $\left[\widetilde{V}, \widetilde{W}\right] = s_1\widetilde{X} + s_2\widetilde{Y} + s_3\widetilde{Z} + s_4\widetilde{V} + s_5$.
Da queste si ottiene:

$$\begin{cases} s_5 = -p_3 \\ s_4 = p_2 \\ s_3 = -p_2p_3 \\ s_2 = -p_2^2 \end{cases}$$

La struttura dell'algebra $\mathcal{G}_5$ è, quindi,

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y, X] = kX,\ [Z, X] = hX,\ [V, X] = a_1X,\ [W, X] = 0,\ [Z, Y] = mX, \\ [V, Y] = W,\ [W, Y] = -V + p_1X + p_2Y + p_3Z,\ [V, Z] = V + q_1X - p_2Y - p_3Z, \\ [W, Z] = W + r_1X,\ [V, W] = s_1X - p_2^2Y - p_2p_3Z + p_2V - p_3W. \end{array}$$

dove tutte le costanti presenti variano in $\mathbb{R}$.

(2) $a = 1,\ \text{lin}_c \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rispetto al caso precedente, in questo caso, ovviamenete, cambia solo il commutatore $\left[\widetilde{W}, \widetilde{Y}\right]$, perchè $\text{lin}_c^2 \widetilde{Y} = Id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, quindi, $\left[\widetilde{W}, \widetilde{Y}\right] = \widetilde{V} + p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z}$. Nuovamente, facciamo riferimento alle identità di Jacobi per ritrovare delle relazioni tra le costanti di struttura. In particolare, dall'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\}, \left\{\widetilde{W}, \widetilde{Y}, \widetilde{X}\right\}$ si ottiene che:

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \\ -a_1 - kp_2 - hp_3 + b_3 m = 0 \\ b_1 = ma_3 \\ b_2 = ka_2 \\ b_3 = ka_3 \end{array}\right. \tag{3.1}$$

L'analisi della struttura dell'algebra $\widetilde{\mathcal{G}}_5$ non è così immediata come quella del caso precedente. Per ottenere una corretta analisi della struttura, poichè l'algebra $\mathcal{G}_a$, generata dai campi X, Y , è bidimensionale, possiamo considerare i casi in cui essa è abeliana oppure non abeliana. Quindi, lo studio prosegue distinguendo $k = 0,\ k \neq 0$.

(i) $k = 0$

Il sistema (3.1) diventa:

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = b_1 = 0 \\ -a_1 - hp_3 = 0 \end{array}\right.$$

dalle ulteriori identità di Jacobi, considerato il commutatore $\left[\widetilde{V}, \widetilde{W}\right] = s_1\widetilde{X} + s_2\widetilde{Y} + s_3\widetilde{Z} + s_4\widetilde{V} + s_5\widetilde{W}$, si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l} r_2 = r_3 = 0 \\ r_1 = -mhp_3 \\ q_2 = p_2 \\ q_3 = p_3 \\ q_1 = p_1 \\ s_5 = p_3 \\ s_4 = p_2 \\ s_3 = p_2 p_3 \\ s_2 = p_2^2 \\ \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{h}{m} \end{array}\right.$$

pertanto la struttura dell'algebra $\mathcal{G}_5$ è:

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y,X]=0,\ [Z,X]=hX,\ [V,X]=-hp_3X,\ [W,X]=0,\ [Z,Y]=mX, \\ [V,Y]=W,\ [W,Y]=V+p_1X+p_2Y+p_3Z,\ [V,Z]=V+q_1X+p_2Y+p_3Z, \\ [W,Z]=W-mhp_3X,\ [V,W]=s_1X+p_2^2Y+p_2p_3Z+p_2V+p_3W. \end{array}$$

(ii) $k \neq 0$

Non è restrittivo supporre $k=1$; allora, il sistema (3.1) diventa:

$$\begin{cases} a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \\ -a_1-p_2-hp_3=0 \\ b_1=ma_3 \end{cases}$$

Considerato il commutatore $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right]=s_1\widetilde{X}+s_2\widetilde{Y}+s_3\widetilde{Z}+s_4\widetilde{V}+s_5\widetilde{W}$, utilizzando le ulteriori identità di Jacobi si ottiene:

$$\begin{cases} a_2=a_3=b_2=b_3 \\ b_1=r_2=r_3=0 \\ ma_3=0 \\ ha_2-a_2=0 \\ ma_1+q_1+r_1-mp_3=0 \\ q_1-p_1-mp_2-p_1h=0 \\ p_1a_2=q_1a_2=0 \\ q_2=p_2,\ q_3=p_3 \\ s_2=p_2^2,\ s_3=p_2p_3 \\ s_5=p_3,\ s_4=p_2 \\ s_1=-hp_1p_3 \end{cases}$$

pertanto la struttura dell'algebra $\mathcal{G}_5$ è:

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y,X]=X,\ [Z,X]=hX,\ [V,X]=a_1X+a_2Y+a_2Z,\ [W,X]=0,\ [Z,Y]=mX, \\ [V,Y]=W,\ [W,Y]=V+p_1X+p_2Y+p_3Z,\ [V,Z]=V+q_1X+p_2Y+p_3Z, \\ [W,Z]=W-r_1X,\ [V,W]=-hp_1p_3X+p_2^2Y+p_2p_3Z+p_2V+p_3W. \end{array}$$

(3) $a=0, \operatorname{lin}_c\widetilde{Y}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Scelto il campo $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{G}} \setminus \widetilde{\mathcal{G}}_c$, con ragionamenti già fatti nei casi precedenti si ottengono le seguenti espressioni per i commutatori

$$\begin{aligned}
&\left[\widetilde{Y},\widetilde{X}\right] = k\widetilde{X},\ \left[\widetilde{Z},\widetilde{X}\right] = h\widetilde{X},\ \left[\widetilde{V},\widetilde{Y}\right] = \widetilde{W},\\
&\left[\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right] = m\widetilde{X},\ \left[\widetilde{W},\widetilde{Y}\right] = -\widetilde{V} + p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z},\\
&\left[\widetilde{V},\widetilde{X}\right] = a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{Y} + a_3\widetilde{Z},\\
&\left[\widetilde{W},\widetilde{X}\right] = b_1\widetilde{X} + b_2\widetilde{Y} + b_3\widetilde{Z}.
\end{aligned}$$

Poichè $a = 0$, la linearizzazione del campo $\widetilde{Z}$ nel punto c è nulla, quindi, $\left[\widetilde{V},\widetilde{Z}\right] \in \widetilde{\mathcal{G}}_c$, e

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{V},\widetilde{Z}\right] &= q_1\widetilde{X} + q_2\widetilde{Y} + q_3\widetilde{Z},\\
\left[\widetilde{W},\widetilde{Z}\right] &= r_1\widetilde{X} + r_2\widetilde{Y} + r_3\widetilde{Z}.
\end{aligned}$$

Considerate le identità di Jacobi, otteniamo le prime relazioni relazioni:

$$\begin{cases}
b_1 = b_2 = b_3 = a_2 = a_3 = 0\\
r_2 = r_3 = q_2 = q_3 = 0\\
a_1 = p_2 k + h p_3\\
r_1 = -kq_1 - ma_1\\
q_1 = -mp_2 - \dfrac{h\left(mkp_3 - p_1\right)}{\left(k^2+1\right)}
\end{cases}$$

Infine, considerato il campo $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right]$ come elemento dell'algebra $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right] = c_1\widetilde{X} + c_2\widetilde{Y} + c_3\widetilde{Z} + c_4\widetilde{V} + c_5\widetilde{W}$, inserendolo nelle ultime identità di Jacobi si ottiene:

$$\begin{cases}
c_4 = p_2,\ c_5 = 0\\
-kc_1 + mc_3 - p_1a_1 - p_3q_1 = 0\\
-hc_1 - mc_2 - r_1a_1 + p_2q_1 = 0
\end{cases}$$

Dalle relazioni ottenute sulle costanti di struttura possiamo dire che la struttura di $\mathcal{G}_5$ è:

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l}
[Y,X] = kX,\ [Z,X] = hX,\ [V,X] = a_1X,\ [W,X] = 0,\ [Z,Y] = mX,\\
[V,Y] = W,\ [W,Y] = -V + p_1X + p_2Y + p_3Z,\ [V,Z] = q_1X,\\
[W,Z] = r_1X,\ [V,W] = c_1X + c_2Y + c_3Z + p_2V
\end{array}$$

dove tutte le costanti presenti variano in $\mathbb{R}$.

(4) $a = 0, \operatorname{lin}_c \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Anche in questo caso, l'unico commutatore che cambia è $\left[\widetilde{W},\widetilde{Y}\right]=$ $\widetilde{V}+p_1\widetilde{X}+p_2\widetilde{Y}+p_3\widetilde{Z}$. Dalle identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{V},\widetilde{X},\widetilde{Y}\right\}$, $\left\{\widetilde{W},\widetilde{Y},\widetilde{X}\right\}$ si ottiene che:

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_2=kb_2\\
a_3=kb_3\\
-a_1-kp_2-hp_3+b_3m=0\\
b_1=-ma_3\\
b_2=ka_2\\
b_3=ka_3
\end{array}\right. \tag{3.2}
$$

Come già precedentemente fatto, per ottenere una corretta analisi della struttura, poichè l'algebra $\mathcal{G}_a$, generata dai campi X,Y , è bidimensionale, possiamo considerare i casi in cui essa è abeliana oppure non abeliana. Quindi, lo studio prosegue distinguendo $k=0,\ k\neq 0$.

(i) $k=0$

Il sistema (3.2) diventa:

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_2=a_3=b_2=b_3=b_1=0\\
-a_1-hp_3=0
\end{array}\right.
$$

dalle ulteriori identità di Jacobi, considerato il commutatore $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right]=$ $s_1\widetilde{X}+s_2\widetilde{Y}+s_3\widetilde{Z}+s_4\widetilde{V}+s_5\widetilde{W}$, si ottiene

$$
\left\{\begin{array}{l}
q_2=q_3=r_2=r_3=0\\
r_1=mhp_3\\
a_1=-hp_3\\
q_1-hp_1-mp_2=0\\
s_5=0\\
s_4=p_2\\
ms_3=-hp_2p_3\\
-hs_1-ms_2+mp_2^2+mh^2p_3^2+hp_2p_1=0
\end{array}\right.
$$

pertanto la struttura dell'algebra $\mathcal{G}_5$ è:

$$
\mathcal{G}_5:\ \begin{array}{l}
[Y,X]=0,\ [Z,X]=hX,\ [V,X]=-hp_3X,\ [W,X]=0,\ [Z,Y]=mX,\\
[V,Y]=W,\ [W,Y]=V+p_1X+p_2Y+p_3Z,\ [V,Z]=q_1X,\\
[W,Z]=mhp_3X,\ [V,W]=s_1X+s_2Y+s_3Z+p_2V.
\end{array}
$$

(ii) $k\neq 0$

Non è restrittivo supporre $k = 1$; allora, il sistema (3.2) diventa:

$$\begin{cases} a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \\ -a_1 - p_2 - hp_3 + ma_3 = 0 \\ b_1 = -ma_3 \end{cases}$$

Considerato il commutatore $\left[\widetilde{V}, \widetilde{W}\right] = s_1\widetilde{X} + s_2\widetilde{Y} + s_3\widetilde{Z} + s_4\widetilde{V} + s_5\widetilde{W}$, utilizzando le ulteriori identità di Jacobi si ottiene:

$$\begin{cases} a_2 = b_2 = q_2 = r_2 = 0,\ b_3 = a_3 \\ b_1 = r_3 = q_3 = -ma_3 \\ ha_2 = ha_3 = 0 \\ ma_1 + q_1 + r_1 - mp_3 = 0 \\ q_1 - p_1 - mp_2 - p_1 h = 0 \\ s_5 = 0,\ s_4 = p_2 \\ -s_1 + ms_3 - p_1 a_1 - p_3 q_1 = 0 \\ hs_3 + s_2 + p_2 a_1 - a_3 q_1 + a_3 r_1 = 0 \\ -mp_2 a_3 - r_1 a_3 + q_1 a_3 = 0 \\ p_2 a_3 + ma_3^2 + a_1 a_3 = 0 \\ -hs_1 - ms_2 + p_2 q_1 - r_1 a_1 - ma_3 r_1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y,X] = X,\ [Z,X] = hX,\ [V,X] = a_1 X + a_3 Z,\ [W,X] = -ma_3 + a_3 Z,\ [Z,Y] = mX \\ [V,Y] = W,\ [W,Y] = V + p_1 X + p_2 Y + p_3 Z,\ [V,Z] = q_1 X - ma_3 Z, \\ [W,Z] = W + r_1 X - ma_3 Z,\ [V,W] = s_1 X + s_2 Y + s_3 Z + p_2 V \end{array}$$

$$\underline{\lambda = \beta = 0}$$

Se le linearizzazioni dei due campi X ed Y sono nulle sarà:

$$\mathcal{G}_c^1 = \left\{ X \in \mathcal{G}_c^0 : \mathrm{lin}_c\, X = 0 \right\} = \mathcal{G}_a.$$

Osserviamo che $\mathcal{G}_c^1$ è un ideale in $\mathcal{G}_c$ e $\mathcal{G}_c^1 \subset \mathcal{G}_5$, se si riguardano queste algebre come spazi vettoriali è lecito considerare gli spazi quoziente

$$G = \mathcal{G}/\mathcal{G}_c^1 \ \text{ e } G_c = \mathcal{G}_c/\mathcal{G}_c^1,$$

ovviamente, $G_c \subset G$ e $\dim G = 3,\ \dim G_c = 1$

Considerati gli operatori aggiunti associati ai campi $X, Y,$ generatori di $\mathcal{G}_c^1$, questi lasciano invariato $\mathcal{G}_c^1$ e pertanto, sarà sufficiente studiare il loro comportamento su G e G_c. Allora, qualunque sia $X \in \mathcal{G}_c^1$ denotiamo con $\rho(X) = ad_X \,\mathrm{Mod}\, \mathcal{G}_c^1$. L'azione di $\rho(X)$ su G_c è banale (i.e. $\rho(X)_{G_c} = 0$) in quanto, come già osservato, $[\mathcal{G}_c, \mathcal{G}_c^1] \subset \mathcal{G}_c^1$, mentre

$\rho(X)(G) \subset G_c$ perchè la linearizzazione di X è nulla. Quindi, il nucleo dell'operatore $\rho(X)$, ha dimensione

$$2 \leq \dim\ker\rho(X) \leq 3.$$

Il lemma che segue dimostrerà che l'operatore $\rho(X)$ è nilpotente, per ogni $X \in \mathcal{G}_c^1$:

LEMMA 29. *L'operatore $\rho(X)$ è nilpotente di altezza 2.*

DIMOSTRAZIONE. Se $v \in G$, ed $X \in \mathcal{G}_c^1$, l'immagine di v mediante $\rho(X)$ è in G_c, quindi, risulterà $\rho(X)^2(v) = 0$, perchè $\rho(X)_{G_c} = 0$. $\square$

Dal lemma appena enunciato segue che

LEMMA 30. *La sottoalgebra $\mathcal{G}_c^1$ è abeliana.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i campi X, $Y \in \mathcal{G}_c^1$, linearmente indipendenti e consideriamo gli operatori $\rho(X)$ e $\rho(Y)$ ad essi associati. Gli operatori $\rho(X)$ e $\rho(Y)$ sono rappresentati dalle due matrici A, B rispettivamente.

Sia $v \in G \backslash G_c$, tale che $Av \neq 0$. Se per assurdo $[A, B] \neq 0$, poichè l'operatore A è nilpotente risulta $[A, B] = A, \forall B$; allora,

$$[A, B]v = Av \Leftrightarrow ABv - BAv = Av.$$

Si osserva che $Bv \in G_c$, quindi, $ABv = 0$ perchè A si annulla su G_c, analogamente si ha $BAv = 0$. Si giunge, così, all'assurdo $Av = 0$. $\square$

Il lemma dimostra anche che $\rho(Y) : \ker\rho(X) \hookleftarrow$ e che $\ker\rho(X) \cap \ker\rho(Y) \neq 0$ e in particolare, G_c è in questa intersezione. Nel seguito, procederemo distinguendo i due sottocasicasi: $\dim\ker\rho(X) = 2$ e $\dim\ker\rho(X) = 3$.

(1) $\dim\ker\rho(X) = 2$

Consideriamo due elementi X e Y in $\mathcal{G}_c^1$, linermente indipendenti e consideriamo gli operatori $\rho(X)$, $\rho(Y)$ ad essi associati. Se A e B sono le loro matrici rappresentative, risulta:

LEMMA 31. *Sia $v \in G \backslash G_c$, tale che $Av \neq 0$, allora $Bv = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle z \rangle = G_c$, se Bv fosse non-nullo, risulta $Bv = \lambda z$, con $\lambda \neq 0$. Possiamo considerare un nuovo operatore $B' = \dfrac{1}{\lambda}B$, e $B'v = z$, gli operatori A e $(A - B')$ risultano liearmente indipendenti perchè $(A - B')v = 0$. $\square$

Sia z l'elemento di G_c, poichè i due operatori $\rho(Y)$ e $\rho(X)$ si annullano su G_c, risulta

$$\rho(Y)\, z = \rho(X)\, z = 0$$

Per ipotesi il nucleo di $\rho(X)$ è bidimensionale, quindi, indicato con w e v due elementi di G, linearmente indipendenti con z, risulterà

$$\rho(X)(w) = 0,\ \rho(X)(v) \neq 0.$$

Per il lemma (31) si ottiene $\rho(Y)(v) = 0$.

Il nucleo dell'operatore $\rho(Y)$ avrà, anch'esso, dimensione compresa tra 2 e 3 e questo ci porta a procedere lo studio separando i due sottocasi: $\dim\ker\rho(Y) = 3$ e $\dim\ker\rho(Y) = 2$.

(a) $\dim\ker\rho(Y) = 3$

Poichè il nucleo dell'operatore $\rho(Y)$ è tridimensionale, sarà

$$\rho(Y)\, z = \rho(Y)\, v = \rho(Y)\, w = 0$$

Se, ora, traduciamo quanto fin qui dimostrato, in termini di campi sulla varietà $\widetilde{F}$, denotata con $\widetilde{\mathcal{G}}_c^1$ la proiezione isomorfa di $\mathcal{G}_c^1$ sulla varietà quoziente, continuano a valere le inclusioni $\widetilde{\mathcal{G}}_c^1 \subset \widetilde{\mathcal{G}}_c \subset \widetilde{\mathcal{G}}$. Indichiamo con

$$z = \left[\widetilde{Z}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}},\ v = \left[\widetilde{V}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}},\ w = \left[\widetilde{W}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}},$$

per quanto abbiamo fino ad ora osservato:

$$\left[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}} = \left[\widetilde{Y}, \widetilde{V}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}} = \left[\widetilde{Y}, \widetilde{W}\right]_{\mathrm{Mod}_{\widetilde{\mathcal{G}}_c^1}} = 0$$

quindi,

$$\left[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right] = a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{Y},\ \left[\widetilde{Y}, \widetilde{V}\right] = b_1\widetilde{X} + b_2\widetilde{Y},\ \left[\widetilde{Y}, \widetilde{W}\right] = c_1\widetilde{X} + c_2\widetilde{Y}.$$

con tutte le costanti che variano in $\mathbb{R}$.

Inoltre, per il campo $\widetilde{X}$ si ha

$$\left[\widetilde{X}, \widetilde{Z}\right] = m_1\widetilde{X} + m_2\widetilde{Y},\ \left[\widetilde{X}, \widetilde{W}\right] = n_1\widetilde{X} + n_2\widetilde{Y},\ \left[\widetilde{X}, \widetilde{V}\right] = Z + h_1\widetilde{X} + h_2\widetilde{Y}.$$

Possiamo, ora, utilizzare le identità diJacobi per scoprire le relazioni che sussistono fra le costanti di struttura. Le identità per $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{Z}, \widetilde{Y}\right\}, \left\{\widetilde{X}, \widetilde{W}, \widetilde{Y}\right\}$ sono banalmente verificate. Dall'identità per i campi $\left\{\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{Y}\right\}$ otteniamo $\left[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right] = 0$. Per verificare le rimananti identità di Jacobi, consideriamo i commutatori $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{V}\right] = s_1\widetilde{X} + s_2\widetilde{Y} + s_3\widetilde{Z} + s_4\widetilde{V} + s_5\widetilde{W}$, $\left[\widetilde{Z}, \widetilde{W}\right] = p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z} + p_4\widetilde{V} + p_5\widetilde{W}$,

$\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right] = q_1\widetilde{X} + q_2\widetilde{Y} + q_3\widetilde{Z} + q_4\widetilde{V} + q_5\widetilde{W}$. Allora, le relazioni tra le varie costanti sono:

$$\begin{cases} c_1 = p_4 = p_5 = 0 \\ s_4 = m_1 \\ q_4 = p_3 - n_1 \\ m_1p_3 = 0 \\ m_1n_2 + m_2c_2 - m_2p_3 - m_2n_1 = 0 \\ m_2b_1 - s_3m_1 - s_5n_1 - h_1m_1 = 0 \\ m_2b_2 - s_3m_2 - s_5n_2 - h_1m_2 = 0 \\ (-q_4 - p_3)\, s_5 + m_1q_5 = 0 \\ 2m_1q_1 - 2q_4s_1 + p_1\,(-q_5 - h_1 + s_3) - p_2b_1 = 0 \\ -q_4s_3 - q_5p_3 - p_1 + m_1q_3 = 0 \\ m_2q_1 - q_4s_2 - p_2q_5 - p_1h_2 - p_3s_2 - p_2b_2 + s_3p_2 + s_1n_2 + s_2c_2 + m_1q_2 = 0 \\ -q_3m_1 - q_4h_1 + p_1 - q_5n_1 - n_2b_1 = 0 \\ -q_3m_1 - p_3h_2 + p_2 - q_5n_2 - n_2b_2 + h_1n_2 + h_2c_2 = 0 \\ -q_4b_1 - c_2b_1 + b_1n_1 = 0 \\ -q_4b_2 - c_2q_5 + b_2n_1 + b_1n_2 = 0 \end{cases}$$

La struttura dell'algebra è:

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y,X] = 0,\ [Z,X] = m_1X + m_2Y,\ [X,V] = Z + h_1X + h_2Y, \\ [X,W] = n_1X + n_2Y,\ [Y,Z] = 0,\ [Y,V] = b_1X + b_2Y, \\ [Y,W] = c_2Y,\ [Z,V] = s_1X + s_2Y + s_3Z + m_1V + s_5W, \\ [Z,W] = p_1X + p_2Y + p_3Z, \\ [V,W] = q_1X + q_2Y + q_3Z + (p_3 - n_1)\,V + q_5W \end{array}$$

dove le costanti di struttura devono soddisfare le relazioni sopra elencate.

(b) $\dim\ker\rho\,(Y) = 2$

In questo caso, esiste un elemento di $G\backslash G_c$ che viene mandato da $\rho\,(Y)$ in un vettore non-nullo proporzionale a z. Poichè abbiamo osservato che se $\rho\,(X)\,(v) \neq 0, \rho\,(Y)\,(v) = 0$, esiste un $w \in G\backslash G_c$ tale che $\rho\,(Y)\,(w) = z$ e $\rho\,(X)\,w = 0$.allora $\rho\,(Y)\,(w) = \lambda z$. Procedendo in modo analogo al caso precedente, otteniamo che i commutatori dei campi $\widetilde{V},\widetilde{Z},\widetilde{W}$ con il camp0 $\widetilde{Y}$ sono:

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right] &= 0,\ \left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right] = a_1\widetilde{X} + a_2\widetilde{Y},\ \left[\widetilde{Y},\widetilde{V}\right] = b_1\widetilde{X} + b_2\widetilde{Y}, \\ \left[\widetilde{Y},\widetilde{W}\right] &= Z + c_1\widetilde{X} + c_2\widetilde{Y}, \left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right] = m_1\widetilde{X} + m_2\widetilde{Y}, \\ \left[\widetilde{X},\widetilde{W}\right] &= n_1\widetilde{X} + n_2\widetilde{Y}, \left[\widetilde{X},\widetilde{V}\right] = Z + h_1\widetilde{X} + h_2\widetilde{Y}. \end{aligned}$$

mentre restano immutati quelli con il campo $\widetilde{Y}$.

Anche in questo caso, si vede che l'identità di Jacobi per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{Z},\widetilde{Y}\right\}$ è identicamente verificata, mentre da quelle per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{W},\widetilde{Y}\right\}$ e $\left\{\widetilde{X},\widetilde{V},\widetilde{Y}\right\}$ otteniamo $\left[\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right] = \left[\widetilde{X},\widetilde{Z}\right] = 0$. Per verificare le rimanenti identità di Jacobi, scriviamo $\left[\widetilde{Z},\widetilde{V}\right] = s_1\widetilde{X} + s_2\widetilde{Y} + s_3\widetilde{Z} + s_4\widetilde{V} + s_5\widetilde{W}$, $\left[\widetilde{Z},\widetilde{W}\right] = p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z} + p_4\widetilde{V} + p_5\widetilde{W}$, $\left[\widetilde{V},\widetilde{W}\right] = q_1\widetilde{X} + q_2\widetilde{Y} + q_3\widetilde{Z} + q_4\widetilde{V} + q_5\widetilde{W}$. Le costanti di struttura devono verificare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} s_4 = s_5 = p_4 = p_5 = 0 \\ q_4 = -n_1 - p_3 - h_2 \\ q_5 = -c_1 + b_2 - s_3 \\ p_1 = -q_4 s_3 - q_5 p_3 \\ -q_4 h_1 - q_5 n_1 - 2h_1 n_1 - n_2 b_1 - p_1 - h_2 c_1 = 0 \\ -q_4 h_2 - q_5 n_2 - h_2 n_1 - n_2 b_2 - p_2 - h_2 c_2 - h_1 n_2 = 0 \\ -q_4 b_1 - q_5 c_1 - s_1 - c_1 h_1 - c_2 b_1 + b_1 n_1 + b_2 c_1 = 0 \\ -q_4 b_2 - q_5 c_2 - s_2 - c_1 h_2 + b_1 n_2 = 0 \\ -q_4 s_2 - q_5 p_2 - p_2 b_2 - p_1 h_2 - p_3 s_2 + c_2 s_2 + s_3 p_2 + s_1 n_2 = 0 \\ -q_4 s_1 - q_5 p_1 - p_2 b_1 - p_1 h_1 - p_3 s_1 + s_1 n_1 + c_1 s_2 + s_3 p_1 = 0 \end{cases}$$

Allora, l'algebra ha la seguente struttura:

$$\mathcal{G}_5 : \begin{array}{l} [Y,X] = 0,\ [Z,X] = 0,\ [Y,Z] = 0,\ [X,V] = Z + h_1X + h_2Y, \\ [X,W] = n_1X + n_2Y,\ [Y,V] = b_1X + b_2Y, \\ [Y,W] = Z + c_1X + c_2Y,\ [Z,V] = s_1X + s_2Y + s_3Z \\ [Z,W] = p_1X + p_2Y + p_3Z, \\ [V,W] = q_1X + q_2Y + q_3Z + q_4V + q_5W \end{array}$$

dove le costanti di struttura devono soddisfare le relazioni sopra elencate.

Caso 13. $\dim\ker\pi = 1$

Se la proiezione sul quoziente non è un isomorfismo, significa che esiste un campo di $\mathcal{G}_5$ che è verticale. Sulla varietà quoziente $\widetilde{F}$ avremo un'algebra di dimensione 4, che conterrà le proiezioni dei generatori dell'algebra stabile $\mathcal{G}_a$. Diciamo X, Y i generatori di $\mathcal{G}_a$, come abbiamo osservato all'inizio del paragrafo, le loro linearizzazioni saranno

$$\operatorname{lin}_c \widetilde{X} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},\ \operatorname{lin}_c \widetilde{Y} = \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

e, per quanto già visto, sarà sufficiente suddividere l'analisi in due sottocasi: $\lambda = 0, \beta \neq 0$ e $\lambda = \beta = 0$

$\underline{\lambda = 0,\ \beta \neq 0}$

Abbiamo, così un'algebra di dimensione 4, che contiene un campo con linearizzazione nulla ed uno con linearizzazione non nulla. Se si fa riferimento alla classificazione fatta nel paragrafo precedente per le algebre di dimensione 4, si vede che le uniche strutture che soddisfano tale condizione sono: $so\,(3)\oplus\mathbb{R}$, $so\,(2,1)\oplus\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_0^2\oplus_\rho\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_1^2\oplus_\rho\mathbb{R}$. L'algebra $\mathcal{G}_5$ sarà, quindi, la somma semidiretta di queste algebre con l'ideale unidimensionale, rappresentato dal nucleo. Per il lemma 27, la rappresentazione di $\mathcal{G}_5$ sull'ideale unidimensionale manda l'algebra derivata delle strutture di dimensione 4, in zero. In accordo con quanto appena detto, le strutture ammissibili (fra loro non isomorfe) per l'algebra $\mathcal{G}_5$ sono:

$$1)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = 0,\ [X_5, X_4] = bX_5 \end{cases} \quad (b \in \mathbb{R}).$$

$$2)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = -X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = 0,\ [X_5, X_4] = bX_5 \end{cases} \quad (b \in \mathbb{R})\,.$$

$$3)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = aX_5,\ [X_5, X_4] = bX_5 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})\,.$$

$$4)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = \beta X_4,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = aX_5,\ [X_5, X_4] = 0 \end{cases} \quad (\beta \neq 0, a \in \mathbb{R})\,.$$

$$5)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = 0,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = aX_5,\ [X_5, X_4] = bX_5 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})\,.$$

$$6)\ \mathcal{G}_5 : \begin{cases} [X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_4, X_3] = \beta X_4,\ [X_1, X_5] = 0,\ [X_2, X_5] = 0, \\ [X_5, X_3] = aX_5,\ [X_5, X_4] = 0 \end{cases} \quad (\beta \neq 0, a \in \mathbb{R})$$

$\underline{\lambda = \beta = 0}$

Anche in questo caso, facciamo riferimento alla classificazione fatta per le algebre di dimensione 4. Dobbiamo riferirci a quelle strutture che possiedono due campi con linearizzazione nulla. Ovviamente, tra tali algebre ci sarà quella abeliana ed, inoltre, anche le seguenti strutture 9),10),11),12) della classificazione delle algebre di Killing di dimensioni 4, ma tali che alcune delle loro costanti sono nulle. Le strutture alle quali faremo riferimento si presntano nella forma:

$$1)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X,Y]=0,\ [V,Y]=mX+nY,\ [V,X]=X,\ [Z,Y]=k\widetilde{X}+l\widetilde{Y}, \\ [Z,X]=Y,\ [V,Z]=a_1X+a_2Y+(n-1)\,Z+mV. \end{cases}$$

$$2)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [X,Y]=-X,\ [X,V]=0,\ [X,Z]=0,\ [Y,Z]=a_1X \\ [Y,V]=b_1X,\ [V,Z]=c_1X \end{cases}$$

$$3)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=\alpha X+\beta Y, \\ [Y,Z]=0,\ [Y,V]=kX+lY,\ [Z,V]=p_1X+p_2Y \end{cases} \quad (\beta\neq 0)$$

$$4)\ \mathcal{G}_4 : \begin{cases} [Y,X]=0,\ [X,Z]=0,\ [X,V]=X,\ [Y,Z]=aX+bY, \\ [Y,V]=\dfrac{l}{b}\,(aX+bY)\,,\ [Z,V]=p_1X+p_2Y+(l-\alpha)\,Z-bV \end{cases} \quad (b\neq 0)$$

dove le costanti di struttura soddisfano le relazioni elencate nella classificazione fatta nel paragrafo 1.

L'algebra $\mathcal{G}_5$ sarà, quindi, la somma semidiretta di tali strutture e dell'ideale unidimensionale rappresentato dal nucleo della proiezione π.

4. Struttura delle algebre $\mathcal{G}_6$.

Consideriamo l'algebra $\mathcal{G}_6$ ad orbite tridimensionali. Per vedere quali sono le possibili strutture, procederemo facendo largo uso dei risultati ottenuti nei capitoli precedenti. Fissata la foglia F per il punto $a\in M$ sia c la proiezione della curva caratteristica C sul quoziente $\widetilde{F}$. Le algebre $\mathcal{G}_6$ potranno proiettarsi in maniera isomorfa sul quoziente, oppure, come già osservato, esisterà un campo di Killing sulla curva C, verticale rispetto alla proiezione π. Proseguiremo lo studio, suddividendo l'analisi in due parti: $\dim\ker\pi=0,\ \dim\ker\pi=1$

Caso 14. $\ker\pi=0$

Se l'algebra si proietta in modo isomorfo sulla varietà quoziente, su una supperficie si hanno 6 campi linearmente indipendenti, questo, ovviamente, implica che l'algebra stabile $\widetilde{\mathcal{G}}_c$ ha dimensione 4. Poichè $\widetilde{\mathcal{G}}$ è la proiezione isomorfa di $\mathcal{G}_6$ sulla varietà quoziente, deduciamo che l'algebra $\mathcal{G}_6$ possiede una sottoalgebra di Killing di dimensione 4. Le possibili algebre di Killing di dimensione 4 per una metrica di rango 2 sulle foglie, sono state completamente classificate nella prima parte di questo capitolo e faremo riferimento a tali strutture per realizzare le algebre di dimensione 6. Nel seguito, riportiamo solo alcuni esempi di come le strutture di dimensione 6 possono realizzare. Il resto della classificazione verrà riportata dettaglaitamente in un altro lavoro.

I campi appartenenti all'algebra stabile $\mathcal{G}_a$ si annullano ristretti sulla curva C, mentre esiste un campo $V \in \mathcal{G}_c$ non nullo e tangente a C in a.Siano, allora, $X, Y, Z \in \mathcal{G}_a$ campi linearmente indipendenti, per quanto già osservato, ha senso parlare delle loro linearizzazioni, che sono rappresentate dalle matrici:

$$\mathbb{I} = \operatorname{lin}_a X = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & \pm\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{lin}_a Y = \begin{pmatrix} 0 & p' & q' \\ 0 & 0 & \pm\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}; \operatorname{lin}_a Z = \begin{pmatrix} 0 & p' & q' \\ 0 & 0 & \pm\gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

L'analisi delle possibili strutture procederà distinguendo differenti sottocasi. Osserviamo che è sufficiente studiare i casi in cui le tre linearizzazioni sono nulle e quello in cui almeno una delle tre è distinta da zero; questo perchè nel caso in cui le tre linearizzazioni sono non nulle, sarà sufficiente, in una nuova base, considerare due nuovi campi Y', ottenuti sottraendo dal campo X il campo$Y$ ed il campo Z, rispettivamente, moltiplicati per un opportuno coefficiente[3] così da ricadere nel caso secondo dei casi citati sopra. Nel caso in cui, ad esempio, la linearizzazione di X è non nulla, non è restrittivo supporre che $\lambda = 1$,

$$\underline{\lambda \neq 0,\ \gamma = \beta = 0}$$

La proiezione dell'algebra $\mathcal{G}_6$ è isomorfa sull'algebra quoziente, pertanto, condurremo, come fatto in precedenza, lo studio sulla sua proiezione $\widetilde{\mathcal{G}}$. Il campo $\widetilde{X}$ ha linearizzazione distinta da zero, detto $\widetilde{V}$ il quarto campo appartenente a il loro commutatore sarà tale che $[X, V]$ si annulla sulla curva caratteristica, quindi, $[\widetilde{X}$ $h\widetilde{X} + m\widetilde{Y} + n\widetilde{Z}$. Se si passa alle linearizzazioni, come conseguenza del lemma 25, risulterà $h = 0$ (altrimenti l'operatore $\mathbb{I}$ sarebbe nilpotente), e $\operatorname{lin}_c \widetilde{V} = aId_{\widetilde{\mathcal{G}}}$. La linearizzazione del campo $\widetilde{X}$ è non nulla, allora, considerato il campo $\widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c$, $\operatorname{lin}_c \widetilde{X}\left(\widetilde{W}\right) \neq 0 \Rightarrow \exists \widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{G}}/\widetilde{\mathcal{G}}_c : \left[\widetilde{W}, \widetilde{X}\right]_c = \widetilde{U}_c$ e, quindi, $\left[\widetilde{W}, \widetilde{X}\right] = \widetilde{U}$. Inoltre,

$$\left[\widetilde{U}, \widetilde{X}\right]_c = \operatorname{lin}_c^2 \widetilde{X}\left(\widetilde{W}\right) = -\widetilde{W}_c \Rightarrow \left[\widetilde{U}, \widetilde{X}\right] = -\widetilde{W} + p_1\widetilde{X} + p_2\widetilde{Y} + p_3\widetilde{Z} + p_4\widetilde{V},$$

[3] $Y' = X - \dfrac{\lambda}{\beta}Y,\ Z' = X - \dfrac{\lambda}{\beta}Z$

mentre, poichè la linearizzazione di $\widetilde{V}$ coincide con l'identità, si avrà

$$\left[\widetilde{W},\widetilde{V}\right]=\widetilde{W}+q_1\widetilde{X}+q_2\widetilde{Y}+q_3\widetilde{Z}+q_4\widetilde{V},\ \left[\widetilde{U},\widetilde{V}\right]=\widetilde{U}+r_1\widetilde{X}+r_2\widetilde{Y}+r_3\widetilde{Z}+r_4\widetilde{V}.$$

Infine, poichè i campi $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{Z}$ hanno linearizzazione nulla,

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{W},\widetilde{Y}\right] &= c_1\widetilde{X}+c_2\widetilde{Y}+c_3\widetilde{Z}+c_4\widetilde{V},\ \left[\widetilde{U},\widetilde{Y}\right]=d_1\widetilde{X}+d_2\widetilde{Y}+d_3\widetilde{Z}+d_4\widetilde{V},\\ \left[\widetilde{W},\widetilde{Z}\right] &= m_1\widetilde{X}+m_2\widetilde{Y}+m_3\widetilde{Z}+m_4\widetilde{V},\ \left[\widetilde{U},\widetilde{Z}\right]=n_1\widetilde{X}+n_2\widetilde{Y}+n_3\widetilde{Z}+n_4\widetilde{V},\end{aligned}$$

cioè i quattro commutatori appartengono all'algebra stabile $\widetilde{\mathcal{G}}_c$.

A questo punto, possiamo fare riferimento alle strutture delle algebre di dimensione 4, che ci permetteranno di conoscere la struttura di $\widetilde{\mathcal{G}}_c$ e di poter verificare se, sono soddisfatte le identità di Jacobi, anche con questi ulteriori commutatori. Poichè $\lambda \neq 0$ ci riferiremo alle algebre di dimensione 4 che contengono un campo, la cui linearizzazione sul quoziente è non nulla. Faremo riferimento alle algebre di dimensione quattro, tale che la linearizzazione del campo $\widetilde{X}$ sia non-nulla

$$1.\ \widetilde{\mathcal{G}}_c:\ \begin{array}{l}[X,Y]=0,\ [V,X]=-Z,\ [Z,X]=V,\ [V,Y]=V,\\ [Z,Y]=Z,\ [Z,V]=0.\end{array}$$

Si osserva subito che dall'identità per i campi $\left\{\widetilde{X},\widetilde{Z},\widetilde{W}\right\}$ si giunge all'assurdo $W=0$.

Caso 15. $\ker\pi=1$

La presenza di un campo verticale, ci assicura che sulla varietà quoziente ci sarà un'algebra di dimensione 5. Anche in questo caso è possibile sfruttare i risultati precedenti. Le possibili strutture ottenute per le algebre di dimensione 5, nel caso in cui il tensore metrico degenera con rango 2 sulle orbite, sono state classificate nel precedente paragrafo. L'algebra $\mathcal{G}_6$ sarà, pertanto, la somma semidiretta delle algebre di dimensione 5 con l'ideale unidimensionale generato dal campo verticale. Elenchiamo qui alcune delle possibili strutture ammissibili per l'algebra $\mathcal{G}_6$:

$$1)\ \mathcal{G}_6:\left\{\begin{array}{l}[X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=0,\ [X_3,X_1]=0,\ [X_1,X_4]=0,\\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=0,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0,\\ [X_5,X_3]=0,\ [X_5,X_4]=0,\ [X_1,X_6]=aX_6,\ [X_2,X_6]=bX_6,\\ [X_3,X_6]=cX_6,\ [X_4,X_6]=dX_6,\ [X_5,X_6]=eX_6\end{array}\right.$$

Le costanti sono nulle se la somma è diretta.

$$2)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=X_3,\ [X_2,X_3]=X_1,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=0,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=0,\ [X_5,X_4]=bX_5,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=0,\ [X_4,X_6]=aX_6,\ [X_5,X_6]=cX_6 \end{cases} \quad (b\in\mathbb{R}).$$

Notiamo che se $b \neq 0$, in accordo con il lemma 27, la costante $c = 0$, mentre se la somma è diretta $a = c = 0$.

$$3)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=X_3,\ [X_2,X_3]=-X_1,\ [X_3,X_1]=-X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=0,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=0,\ [X_5,X_4]=bX_5,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=0,\ [X_4,X_6]=aX_6,\ [X_5,X_6]=cX_6 \end{cases} \quad (b\in\mathbb{R})\,.$$

L'osservazione fatta per la struttura precedente è valida anche in questo caso.

$$4)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=0,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=aX_5,\ [X_5,X_4]=bX_5,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=cX_6,\ [X_4,X_6]=dX_6,\ [X_5,X_6]=eX_6 \end{cases} \quad (a,b\in\mathbb{R})\,.$$

La costante $e = 0$ se a oppure b sono non-nulle, mentre la somma è diretta se $c = d = e = 0$.

$$5)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,\ [X_3,X_1]=X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=\beta X_4,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=aX_5,\ [X_5,X_4]=0,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=bX_6,\ [X_4,X_6]=0,\ [X_5,X_6]=cX_6 \end{cases} \quad (\beta\neq 0, a\in\mathbb{R})$$

Se $a \neq 0 \Rightarrow c = 0$, in accordo con il lemma 27, mentre $b = c = 0$ se la somma è diretta.

$$6)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,\ [X_3,X_1]=-X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=0,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=aX_5,\ [X_5,X_4]=bX_5,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=cX_6,\ [X_4,X_6]=dX_6,\ [X_5,X_6]=eX_6 \end{cases} \quad (a,b\in\mathbb{R})\,.$$

Se una delle due costanti a o b è distinta da zero, ovviamente risulta $e = 0$, mentre la somma è diretta se $c = d = e = 0$.

$$7)\ \mathcal{G}_6 : \begin{cases} [X_1,X_2]=0,\ [X_2,X_3]=X_1,\ [X_3,X_1]=-X_2,\ [X_1,X_4]=0, \\ [X_2,X_4]=0,\ [X_4,X_3]=\beta X_4,\ [X_1,X_5]=0,\ [X_2,X_5]=0, \\ [X_5,X_3]=aX_5,\ [X_5,X_4]=0,\ [X_1,X_6]=0,\ [X_2,X_6]=0, \\ [X_3,X_6]=bX_6,\ [X_4,X_6]=0,\ [X_5,X_6]=cX_6 \end{cases} \quad (\beta\neq 0, a\in\mathbb{R})$$

$a \neq 0 \Rightarrow c = 0$; la somma è diretta se $b = c = 0$.

5. Conclusioni.

Il presente lavoro di classificazione delle algebre di Killing ad orbite tridimensionali, sarà definistivamente completato in seguito. In particolare, verranno analizzate le strutture di dimensione 5 trovate nel caso in cui il tensore metrico ha rango 2 sulle orbite dell'algebra, per ottenere, come fatto nei casi precedenti, un numero di algebre tra loro non isomorfe. Inoltre, sempre nel caso in cui la metrica degenera con rango 2 sulle orbite, sarà completata la classificazione delle algebre di dimensione 6, classificazione che non è stato possibile riportare nel lavoro di tesi, in quanto, sebbene il metodo di linearizzazione delle algebre isotrope porti a risultati certi e definitivi, la sua applicazione per le strutture di dimensione 6 è particolarmente lungo e richiede una più ampia trattazione, che sarà riportata interamente in un nuovo lavoro.

Completata la classificazione delle algebre di Killing ad orbite tridimensionali, si intende applicare i risultati otteuti alla ricerca di soluzioni esatte delle Equazioni di Einstein, con metodi analoghi a quelli utilizzati nei lavori [**1**], [**13**], [**14**] per le algebre di Killing ad orbite bidimensionali.

Bibliografia

[1] D. Catalano Ferraioli, A.M. Vinogradov. (2004) - *Ricci flat metrics 4-metrics with bidimensional null Killing orbits.* - Preprint DIPS-7/2004.

[2] M.Crampin, F.A.E. Pirani - *Applicable Differential Geometry.* - London Mathematical Society Lecture Note Series 59. Cambridge University Press.

[3] V.V.Gorbatsevich, A.L.Onishchik, E.B.Vinberg - *Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups* - Springer.

[4] J.E.Humphreys - *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* - Springer-Verlag.

[5] N.Jacobson - *Lie Algebras* - Interscience Publishers.

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu - *Foundations of Differential Geometry. Vol I* - Interscience Press.

[7] D.Kramer, H.Stephani, E.Herlt, M. MacCallum - *Exact solution of Einstein field equations* - Cambridge University Press.

[8] J.M.Lee - *Introduction to Smooth Manifolds. - Springer-Verlag.*

[9] P.Petersen - *Riemannian Geometry.* - Springer-Verlag.

[10] A.Z. Petrov - *Einstein Spaces* - Pergamon Press

[11] R. Piscopo - *A Note on Conformal Killing Algebras. Preprint n°*45 del Dipartimento di Matematica e Applicazioni Renato Caccioppoli Università Federico II

[12] R. Piscopo - *Algebre di Killing 4-dimensionali ad orbite tridimensionali.* - Preprint n°46 del Dipartimento di Matematica e Applicazioni Renato Caccioppoli Università Federico II

[13] G.Sparano, G.Vilasi, A.M. Vinogradov - *Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves. Local aspect.* - Differential Geometry and its Applications 16, 95.

[14] G. Sparano, G. Vilasi, A.M. Vinogradov.(2002) - *Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves. II. Global aspects*. - Differential Geometry and its Applications 17, 15.

[15] M. Spivak - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. I, II* - Publish or Perish, Inc. Berkeley.

Le immagini sono state tratte dal testo di J.M. Lee *Introduction to Smooth Manifolds.*