

UNIVERSITÀ DI NAPOLI "FEDERICO II"  
DIPARTIMENTO DI GEOFISICA E VULCANOLOGIA

---

Dottorato di Ricerca in  
SCIENZE DELLA TERRA

**Comparazione di modelli fisico-matematici  
di previsione meteorologica:  
applicazione sul territorio Campano**

Tutore:  
Prof. Adriano Mazzarella  
Coordinatore:  
Prof. Giuliano Ciampo

Tesi di Dottorato di:  
Raffaele Di Cristo

---

XVIII Ciclo

# INDICE GENERALE

---

<i>Introduzione</i>	5
<b>Capitolo 1: Generalità dei modelli di previsione numerica</b>	<b>7</b>
1.1 Introduzione	7
1.2 Caratteristiche generali dei modelli numerici	8
1.2.1 Rappresentazione delle condizioni iniziali	9
1.2.2 Evoluzione delle variabili atmosferiche	11
1.3 Equazioni primitive	13
1.3.1 Conservazione della massa	13
1.3.2 Conservazione del calore	14
1.3.3 Conservazione del moto	17
1.3.4 Conservazione dell'acqua	18
1.4 Forme semplificate delle equazioni primitive	19
1.4.1 Conservazione del moto e numero di Rossby	20
1.4.2 Conservazione del moto in atmosfera idrostatica	21
1.4.3 Semplificazioni dell'equazione di continuità	21
1.4.4 Conservazione del calore in atmosfera adiabatica	22
1.4.5 Conservazione del vapore acqueo	23
1.5 Media delle equazioni primitive	24
1.5.1 Il problema della chiusura	26
1.5.2 La funzione di Exner	28
1.6 Metodi di soluzione	30
1.6.1 Introduzione agli schemi a differenze finite	30
1.6.2 Tipi di schemi a differenze finite	32
1.6.3 Soluzione con analisi spettrale	35
<b>Capitolo 2: Metodi di Parametrizzazione</b>	<b>37</b>
2.1 Introduzione	37
2.1.1 Stabilità atmosferica	37
2.1.2 Il numero di gradiente di Richardson	38

---

2.2	Flussi turbolenti	39
2.2.1	<i>Flussi turbolenti orizzontali</i>	39
2.2.2	<i>Flussi turbolenti verticali</i>	40
2.2.3	<i>Scambi turbolenti con il suolo</i>	43
2.2.4	<i>Flussi verticali presso il suolo</i>	43
2.2.5	<i>Flussi verticali nello strato di transizione</i>	44
2.2.6	<i>Flussi negli strati superiori</i>	45
2.3	Flussi d'energia radiante	46
2.3.1	<i>Radiazione ad onda corta</i>	47
2.3.2	<i>Radiazione ad onda lunga</i>	50
2.3.3	<i>Influenza della copertura nuvolosa</i>	51
2.4	Processi termodinamici del vapore acqueo	53
2.4.1	<i>Parametrizzazione in atmosfera stabile</i>	53
2.4.2	<i>Parametrizzazione in atmosfera instabile</i>	55
2.5	Condizioni al contorno	56
2.5.1	<i>Condizioni laterali</i>	57
2.5.2	<i>Condizioni al confine superiore</i>	59
2.5.3	<i>Condizioni al confine inferiore</i>	60
 <b>Capitolo 3: Un modello numerico per la Campania</b>		<b>62</b>
3.1	Introduzione	62
3.2	Acquisizione dei dati	64
3.2.1	<i>Il formato dati Synop</i>	64
3.2.2	<i>Il formato dati Metar</i>	65
3.2.3	<i>I dati dell'osservatorio meteorologico</i>	66
3.3	Inizializzazione del modello	69
3.3.1	<i>Assimilazione dei dati</i>	71
3.3.2	<i>Filtraggio dei dati</i>	73
3.4	Fase di elaborazione	74
3.4.1	<i>Preelaborazione</i>	74
3.4.2	<i>Elaborazione</i>	75
3.4.3	<i>Struttura ibrida della griglia</i>	76
3.4.4	<i>Avvezioni positive e negative</i>	79
3.4.5	<i>Rappresentazione del territorio</i>	80

---

---

<b><i>Capitolo 4: Validazione del Modello Numerico</i></b>	<b>81</b>
4.1 Il nubifragio del 17 Settembre 2005 . . . . .	81
4.2 L'evento piovoso del 7 Ottobre 2005	86
4.3 Conclusioni . . . . .	90
<b><i>Appendice: Elenco dei simboli</i></b>	<b>92</b>
<b><i>Bibliografia</i></b>	<b>95</b>
<b><i>Ringraziamenti</i></b>	<b>99</b>

## INTRODUZIONE

---

La possibilità di prevedere l'evoluzione dei diversi fenomeni atmosferici attraverso l'applicazione delle leggi fisiche della termodinamica e della fluidodinamica ha trovato, nel corso dell'ultimo secolo, una spinta sempre maggiore grazie ad una crescente conoscenza dei fenomeni stessi e ad un contemporaneo sviluppo di sistemi di elaborazione computerizzata sempre più potenti. In particolare, è in special modo nell'ultimo ventennio che la previsione atmosferica mediante sistemi numerici (*NWP*, *Numerical Weather Prediction*) ha avuto un'evoluzione notevole, grazie soprattutto alla crescente necessità da parte di enti civili, turistici e militari di avere dati sempre più precisi ed attendibili sullo sviluppo di fenomeni che potessero avere ripercussioni sul piano economico ed ambientale.

Attualmente esistono molti modelli numerici capaci di prevedere a diverse scale spaziali l'evoluzione dello stato dell'atmosfera nel corso del tempo, ma molti di questi sono tarati su territori specifici ed alcuni, per chi non abbia delle buone basi informatiche, si rivelano come delle *black box* in cui i meccanismi che dal dato di partenza portano al risultato finale restano oscuri o solo parzialmente chiariti dalle pagine dei manuali. Anche non togliendo a questi il merito di essere strumenti che, se usati correttamente, possono portare a risultati di grande precisione, con margini di errore spesso inferiori al 5% per previsioni estese su scale temporali inferiori alle 48 ore, nel corso di questo lavoro di tesi ho scelto di sviluppare un semplice modello numerico ex-novo per una serie di motivi ben precisi:

- disporre di uno strumento che fosse facilmente modificabile ed adattabile alle esigenze di studio;
- avere la possibilità di sperimentare diverse forme di parametrizzazioni e schemi numerici senza per questo cambiare di volta in volta il software impiegato;
- poter operare su elaboratori convenzionali con tempi di attesa accettabili;
- poter sfruttare il lavoro svolto anche per scopi didattici.
- poter essere facilmente impiegato per scopi di protezione civile.

Come sarà meglio illustrato nelle conclusioni di questa tesi (Capitolo 4), anche se i primi quattro punti sono stati raggiunti con successo, il modello sviluppato presenta comunque dei limiti che lo rendono per molti aspetti imperfetto e richiedono ulteriori modifiche e miglioramenti prima che sia possibile usarlo per scopi di protezione civile con risultati affidabili.

La tesi è stata organizzata in quattro capitoli, il primo dei quali è dedicato agli aspetti generali dei modelli numerici. In questo sono raccolti alcuni cenni storici sul loro sviluppo e descrive le basi di termodinamica e fluidodinamica su cui questi si sono andati sviluppando nel corso del tempo; nello stesso, inoltre, vengono illustrati anche i due metodi più comunemente usati per risolvere le equazioni differenziali che caratterizzano i loro sistemi: i metodi a differenze finite e quelli per mezzo di analisi spettrale.

---

Direttamente collegato al primo, il secondo capitolo presenta alcuni dei metodi di parametrizzazione più comunemente usati nei modelli numerici per descrivere quei fenomeni di cui non sono ancora del tutto note le reali basi fisiche, come il riscaldamento radiativo delle masse d'aria, la condensazione del vapore acqueo in pioggia ed i flussi di tipo turbolento a piccola scala.

Il terzo capitolo descrive il modello sviluppato nel corso del periodo di studio, indicando per esso sia la meccanica di funzionamento che i vari aspetti ad essa connessi, come la tipologia di dati adoperabili per la sua inizializzazione, le modalità di rappresentazione del dominio di calcolo ed i metodi di parametrizzazione in esso impiegati. Nell'ultimo capitolo, il quarto, vengono riportati invece i risultati di alcune simulazioni svolte e le conclusioni da esse tratte riguardo l'efficacia del modello nel simulare gli eventi piovosi e le variazioni di temperatura, umidità e pressione.

# CAPITOLO 1

## Generalità dei modelli di previsione numerica

---

### 1.1 Introduzione

Prima dell'avvento dei moderni sistemi di elaborazione computerizzata, nonostante la conoscenza delle principali leggi fisiche che regolano l'atmosfera ed il suo comportamento, i meteorologi basavano le proprie previsioni principalmente su tre fattori: l'analisi della cartografia fornita dai grandi centri internazionali di monitoraggio atmosferico, le informazioni storiche raccolte sugli eventi verificatisi nella regione d'interesse ed una serie di regole maturate con lo studio e l'esperienza sul campo. Molti di loro preferiscono tuttora affidarsi a questi metodi quando la previsione da effettuare copre un periodo relativamente breve (non superiore alle sei ore), e questo perché i modelli numerici hanno lunghi tempi d'elaborazione e non sempre sono adatti a fornire risposte rapidi.

Le previsioni a breve termine (o *nowcasting*) eseguite con i metodi tradizionali si basano su tre regole fondamentali che traggono origine dallo studio dei più complessi meccanismi fisici e termodinamici che regolano il comportamento dell'atmosfera.

- *Principio di tendenza*: prevede che se una massa d'aria segue una certa traiettoria con velocità costante, è possibile prevedere i suoi successivi spostamenti semplicemente estendendone il percorso nel tempo; anche se si tratta di un principio estremamente semplice, è molto utile nel prevedere lo spostamento di masse d'aria associate a cicloni ed anticicloni, salvo che non si stiano intensificando o indebolendo.
- *Principio di analogia*: si basa sull'assunto che gli eventi atmosferici tendano ad evolversi sulla base di schemi caratteristici per ciascuna regione del globo; infatti, nel corso degli anni è stata sviluppata una complessa catalogazione di situazioni a larga scala (i *circulation patterns*) a cui vengono attribuite differenti probabilità di precipitazione e l'eventuale variazione delle diverse variabili meteorologiche fondamentali (temperatura, pressione, etc.).
- *Principio di persistenza*: assume che le condizioni atmosferiche presentino un elevato grado di autocorrelazione, cioè abbiano la tendenza a mantenersi costanti su brevi periodi di tempo.

Pur avendo perso il primato che avevano per i meteorologi del passato, queste regole rappresentano ancora un valido punto di partenza per qualsiasi modello di previsione meteorologica; infatti, in prima analisi, un modello può ritenersi attendibile se riesce a fornire risultati che siano almeno migliori di quelli ottenibili con le stesse a partire da un uguale insieme di dati.

---

## 1.2 Caratteristiche generali dei modelli numerici

Lo scopo dei modelli di previsione meteorologica è quello di ottenere, a partire da un insieme di dati di partenza (*input*), un insieme di informazioni (*output*) rappresentativi dell'evolversi nel tempo delle variabili atmosferiche ed, a seconda della metodologia usata, è possibile classificare un modello come prognostico o diagnostico.

Un modello di tipo *diagnostico* consente di ricostruire il campo di vento stazionario a partire da un insieme di dati sperimentali ed adopera per il calcolo un insieme di equazioni indipendenti dal tempo basate sul principio di conservazione di massa o sull'equazione di Navier-Stokes (Sherman, 1978).

Diversamente, nei modelli *prognostici* l'evoluzione futura delle variabili meteorologiche viene calcolata attraverso l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali dipendenti dal tempo e basate sui principi di termodinamica e fluidodinamica (Pielke, 2002); un simile processo, in forma semplificata, può essere espresso dalla seguente equazione:

$$C' = C + f(C)\Delta t$$

dove  $C$  rappresenta le condizioni atmosferiche iniziali,  $C'$  le condizioni atmosferiche previste dal modello ed  $f(C)\Delta t$  le variazioni intercorse fra il primo ed il secondo stato nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  (detto passo temporale del modello o *timestep*).

L'estensione dell'area su cui opera ciascun modello e la sua capacità di essere sensibile o meno alle fluttuazioni a piccola scala consente un'ulteriore catalogazione dello stesso, permettendo la distinzione in:

- modelli a scala globale (*global model*), se il dominio di calcolo si estende sull'intera superficie del pianeta o su un singolo emisfero;
- modelli ad area limitata o alla mesoscala (*mesoscale model*), se l'estensione è nell'ordine delle migliaia di chilometri;
- modelli a scala regionale o locale (*local model*), quando l'area indagata non supera le poche centinaia di chilometri.

Generalmente, quanto maggiore è l'estensione spaziale del modello tanto più l'insieme di equazioni da esso impiegato potrà risultare semplificato; questo accade perché, se l'area di studio è particolarmente ampia, gli effetti dei fattori atmosferici locali (come l'evaporazione dai laghi, le correnti di brezza, gli attriti al suolo, lo scambio del vapore acqueo e dell'anidride carbonica con la vegetazione, etc.) potranno essere trascurati rispetto a quelli a più ampia scala, permettendo di escludere del tutto o in parte la loro computazione senza una perdita significativa dell'affidabilità.

---

### 1.2.1 Rappresentazione delle Condizioni Iniziali

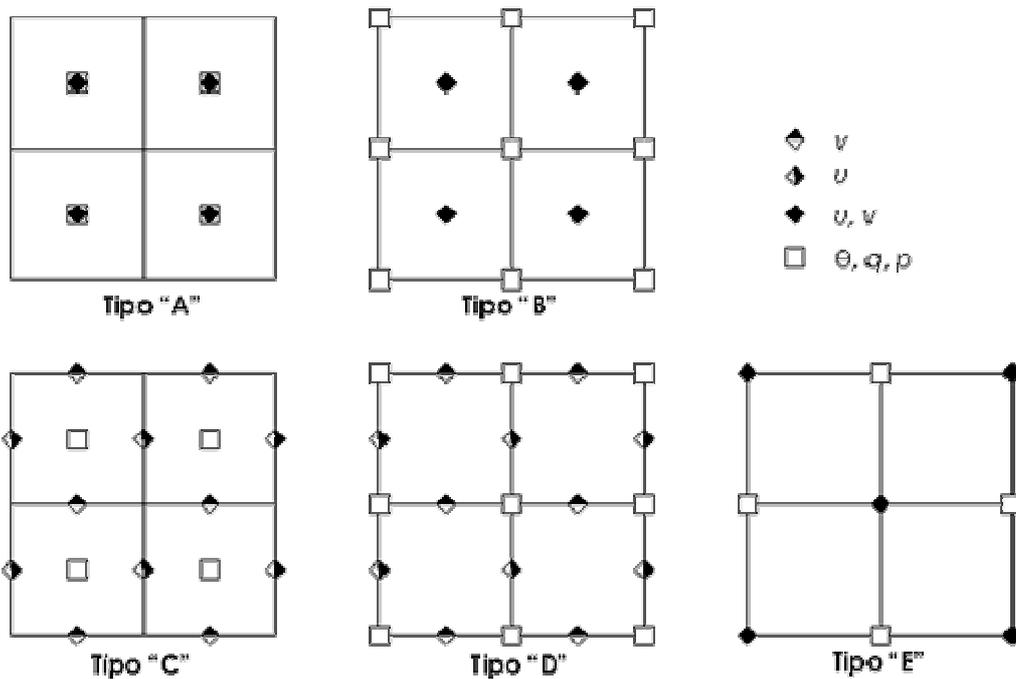
Nei modelli di tipo prognostico i dati usati per descrivere le condizioni di partenza del sistema vengono ricavati dalle misurazioni effettuate da un insieme sufficientemente esteso di strumenti meteorologici posti entro l'area di studio. Per i modelli a scala globale è diffuso l'uso dei dati trasmessi in radiofrequenza dalla rete di rilevazione del WMO (World Meteorological Organization), le cui stazioni di misura sono codificate in tabulati che ne elencano le specifiche tecniche, i codici di riconoscimento, il formato di codifica usato per la trasmissione dati e le coordinate geografiche. Allo sviluppo di tale rete partecipano diversi enti, principalmente agenzie aeronautiche e navali di numerose nazioni del mondo.

Dei dati disponibili per ciascuna stazione impiegata, quelli indispensabili ai processi di computazione sono la temperatura, l'umidità, la pressione, la velocità del vento e la direzione del vento. Essi vengono quindi raccolti ed introdotti in forma informatizzata nel preprocessore del modello, il quale interpolerà e filtrerà i valori di ciascuna variabile al fine di ottenere un campo continuo ed omogeneo distribuito su tutta l'area di studio. Tale procedimento è generalmente indicato come *processo di inizializzazione* e porta ad una rappresentazione dei dati attraverso griglie orizzontali sovrapposte la cui configurazione può variare sia rispetto alla distribuzione spaziale delle variabili atmosferiche che rispetto alla forma delle maglie.

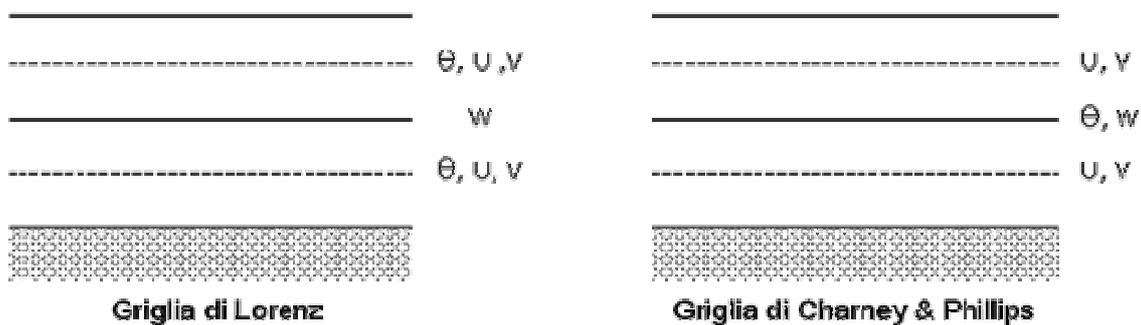
Una delle classificazioni più note usata nelle descrizioni sintetiche dei modelli numerici è quella attribuita ad Arakawa e schematizzata in figura 1.1, la quale si basa sulla distribuzione delle variabili sui nodi orizzontali della griglia (Arakawa e Lamb, 1977). In particolare, tale classificazione mette in risalto la posizione delle variabili di flusso, cioè le componenti zonali ( $u$ ) e meridionali ( $v$ ) della velocità del vento, rispetto a quelle di campo, rappresentate da pressione ( $p$ ), umidità ( $q$ ) e temperatura ( $\theta$ ); i tipi da B ad E vengono anche indicati come *griglie sfalsate*, essendo i due gruppi di variabili posti su nodi differenti, al contrario del tipo A in cui tutte le variabili sono localizzate sullo stesso nodo.

Alcuni modelli sfalsano le variabili adoperate anche in senso verticale, alternandole sulle griglie usate per rappresentare i diversi livelli dell'atmosfera; in questo caso si è soliti distinguere in *griglie di Lorenz* quelle in cui sono accoppiate velocità orizzontale e temperatura (Lorenz, 1960) ed in *griglie di Charney & Phillips* quelle in cui sono accoppiate velocità verticale e temperatura (Charney e Phillips, 1953). La figura 1.2 schematizza le differenze fra i due tipi.

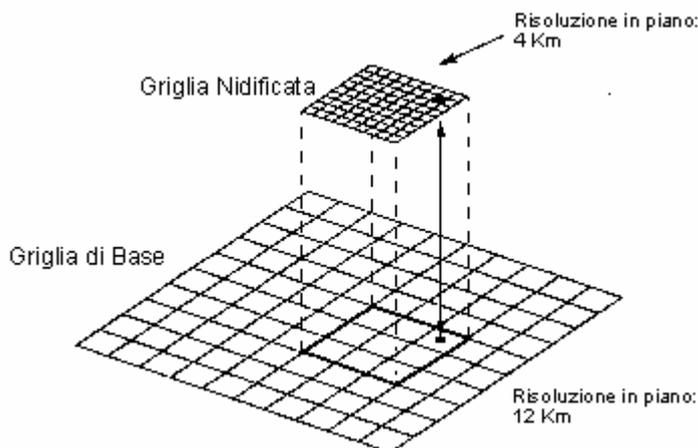
Le maglie delle griglie possono avere forma variabile a seconda del tipo di modello e dell'estensione dell'area di studio; modelli che operano su modeste porzioni di territorio fanno uso di maglie quadrate o di forma trapezoidale, capaci di rispecchiare le deformazioni dovute alla sfericità della superficie terrestre, mentre i più moderni modelli di circolazione globale adottano maglie esagonali. In alcuni modelli è anche consentito l'uso di *griglie nidificate* (*nested grids*) con cui è possibile indagare in maggior



**Figura 1.1:** Classificazione di Arakawa per le griglie orizzontali. Le velocità del vento sul piano orizzontale sono indicate da  $u$  e  $v$ , mentre temperatura, umidità e pressione sono rispettivamente indicate dalle lettere  $\theta$ ,  $q$  e  $p$ .



**Figura 1.2:** Griglie sfalsate verticalmente. Le velocità del vento sul piano orizzontale sono indicate da  $u$  e  $v$ , la velocità verticale da  $w$  e la temperatura da  $\theta$ .

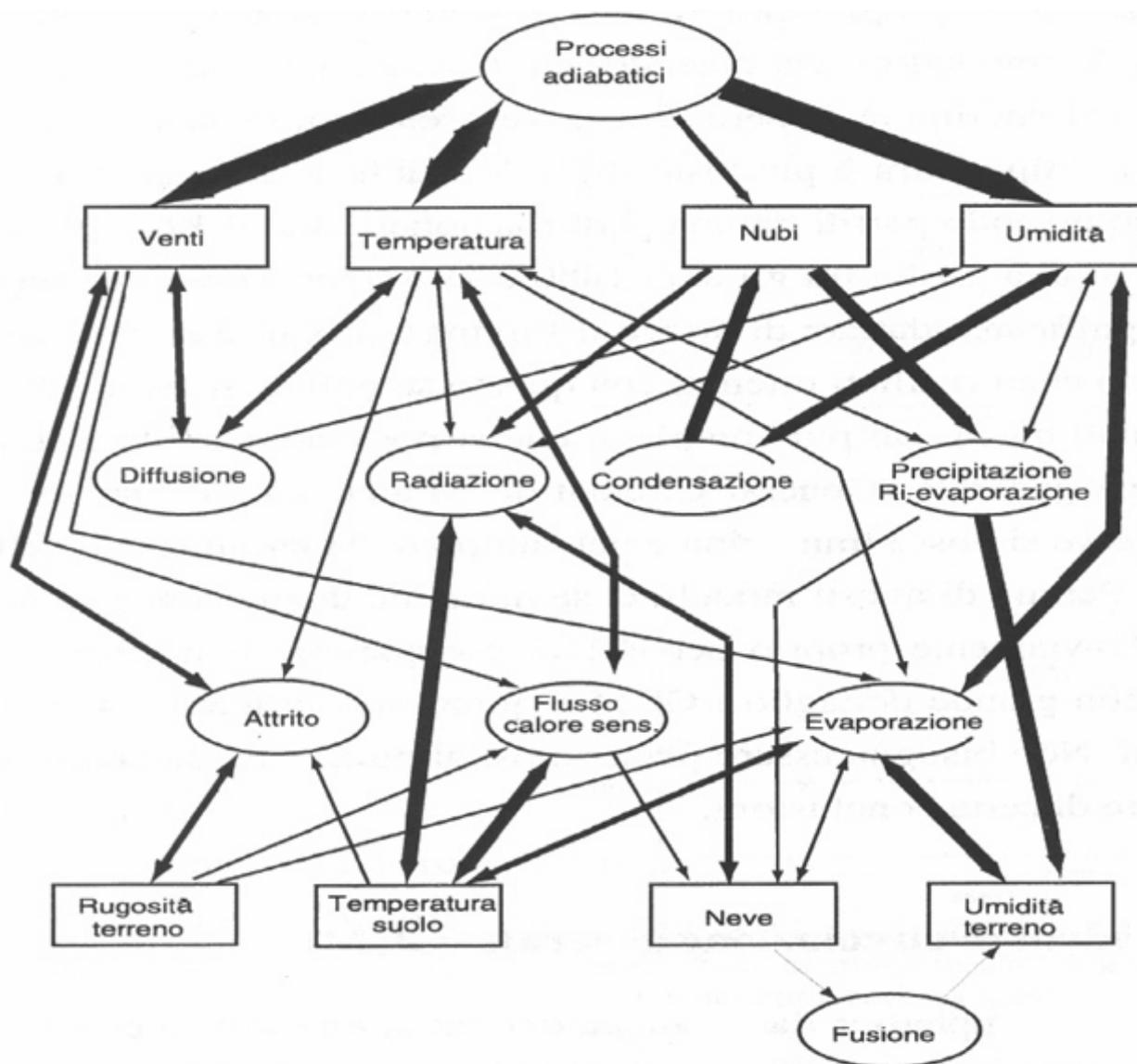


**Figura 1.3:** Costruzione di una griglia nidificata lungo il piano orizzontale di un modello numerico.

dettaglio solo alcune regioni specifiche; come viene schematicamente illustrato in figura 1.3, infatti, queste permettono di infittire i nodi disponibili soltanto entro l'area specificata, con un notevole risparmio in termini di calcolo.

### 1.2.2 Evoluzione delle variabili atmosferiche

I processi di calcolo adottati da un qualsiasi modello numerico tentano, attraverso semplificazioni più o meno spinte, di simulare i complessi meccanismi di *feedback* esistenti fra la superficie terrestre, l'atmosfera e la radiazione solare al fine di prevedere come si modificheranno nel tempo le variabili indagate a partire dal proprio stato iniziale; un quadro schematico dei fenomeni coinvolti e delle interdipendenze fra questi esistenti è fornito in figura 1.4.



**Figura 1.4:** Schema dei processi che interessano l'evolversi del tempo e relative interdipendenze. Lo spessore dato alle frecce è indicativo dell'entità dell'influenza di un processo su un altro (Giuliacchi *et al.*, 2001).

Per meglio comprendere la complessità di un simile sistema, basti pensare che per un accurato calcolo della variazione di temperatura al suolo devono essere prese in considerazione, oltre alle variazioni termiche dovute all'arrivo di masse d'aria più fredde o più calde (*avvezioni termiche*), anche i flussi di calore provenienti dalla radiazione solare, dalla perdita di calore nell'infrarosso da parte della superficie terrestre (*irraggiamento*), dai moti convettivi e dalla condensazione e evaporazione del vapore acqueo.

L'esistenza di queste strette interdipendenze fra i fenomeni fisici indagati porta alla comparsa di *termini non lineari* nelle equazioni usate per rappresentare il comportamento dell'atmosfera. Inoltre, l'inadeguata conoscenza di alcuni dei fenomeni atmosferici, come gli scambi turbolenti lungo il piano orizzontale, viene colmata attraverso l'introduzione di funzioni empiriche.

Da quanto esposto finora risulta chiaro che l'evoluzione delle variabili atmosferiche viene prevista per mezzo di un sistema di equazioni che, per quanto possa essere sottoposto ad approssimazioni di vario tipo, tenta di riprodurre il comportamento dell'atmosfera attenendosi a rigidi principi fisici. Una descrizione di queste equazioni, nella forma originariamente enunciata da Richardson (1922) e nota come sistema delle *equazioni primitive*, sarà discussa in dettaglio nel paragrafo 1.3.

A causa dell'elevata capacità di calcolo richiesta per gli schemi e le funzioni usate per rappresentare il complesso sistema atmosferico, lo sviluppo di sistemi di previsione numerica sempre più precisi ed efficaci ha dovuto necessariamente seguire di pari passo la crescita di potenza dei calcolatori elettronici. Arakawa (1998), in particolare, suggerisce al riguardo una suddivisione del processo di sviluppo di modelli numerici in quattro fasi fondamentali, che si articolano a partire dal 1904 fino ai giorni nostri (Tabella 1.1).

Periodo	Livelli di Complessità raggiunti	Potenza di Calcolo
<i>Preludio</i>		
1904 – 1950	Sviluppo teorico dei primi modelli previsionali atmosferici (Richardson, 1922).	—
<i>Prima Fase dell'Epoca dello Sviluppo</i>		
1950 – 1960	Primi modelli di previsione atmosferica operanti su calcolatori elettronici	1 ÷ 3
<i>La Magnifica Seconda Fase</i>		
1960 – 1970	Perfezionamento dei modelli di previsione atmosferica esistenti Sviluppo dei primi modelli di circolazione generale atmosferica	3 ÷ 80
1970 – 1980	Perfezionamento dei modelli esistenti	80 ÷ 2000
1980 – 1990	Sviluppo dei primi modelli a mesoscala e dei modelli climatici globali. Nascita dei modelli regionali e globali del NWP Primi modelli per la risoluzione degli ammassi nuvolosi	2000 ÷ 10000
<i>La Terza Fase dalle Grandi Sfide</i>		
1990 – 2000	Modelli regionali ad alta risoluzione Modelli di circolazione generale oceano-atmosferica	10000 ÷ 100000
2000 – 2010	Modelli unificati	?

**Tabella 1.1:** L'evoluzione storica dei modelli numerici secondo Arakawa raffrontata con l'aumento della potenza di calcolo degli elaboratori elettronici (nello schema viene usato un termine di grandezza relativo).

---

### 1.3 Le Equazioni Primitive

Le equazioni utilizzate dai diversi modelli numerici, pur variando in funzione delle parametrizzazioni e delle coordinate impiegate, traggono tutte origine dalle conoscenze disponibili nel campo della dinamica e termodinamica dell'atmosfera e la loro formulazione generale risale a quasi due secoli fa. Esse includono le seguenti relazioni di conservazione (Pielke, 2002; Wallace ed Hobbs, 1977):

- principio di conservazione della massa;
- principio di conservazione del calore;
- principio di conservazione del moto;
- principio di conservazione del vapore d'acqua.

L'insieme di questi principi forma un sistema di equazioni, dette *primitive*, che devono essere risolte simultaneamente ed in cui compaiono termini che rappresentano le entrate ed uscite del sistema.

Il primo geofisico a rendersi conto della possibilità d'impiego delle equazioni primitive per lo sviluppo di previsioni meteorologiche fu, nel 1904, Vilhelm Bjerknes (Bjerknes, 1904). Egli suggerì che il problema della previsione fisico-matematica potesse ricondursi, una volta note le leggi governanti l'evoluzione temporale delle variabili atmosferiche, alla conoscenza delle sole *condizioni iniziali*, poiché, a partire da queste, il sistema di equazioni poteva essere risolto ottenendo lo stato delle variabili coinvolte all'istante successivo quello di partenza.

#### 1.3.1 Conservazione della Massa

In atmosfera è possibile assumere che non esista guadagno o perdita di massa; ciò comporta che, in un qualsiasi volume infinitesimo dello spazio, la quantità di massa presente si mantiene costante ed i flussi in entrata ed in uscita si eguagliano. Matematicamente, tale principio può essere espresso tramite la seguente equazione, nota anche come *equazione di continuità*:

$$-\Delta\rho\mathbf{V} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{V}$  è il vettore rappresentante lo spostamento di massa e  $\rho$  la densità del fluido. Ai fini computazionali, tuttavia, è preferibile evitare la notazione vettoriale ed introdurre le derivate parziali delle sue componenti ortogonali agli assi del sistema di riferimento, ottenendo:

$$-\frac{u\partial\rho}{\partial x} - \frac{v\partial\rho}{\partial y} - \frac{w\partial\rho}{\partial z} + \frac{\rho\partial u}{\partial x} + \frac{\rho\partial v}{\partial y} + \frac{\rho\partial w}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (1.2)$$

dove  $u$ ,  $v$  e  $w$  rappresentano le velocità associate alle componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$  del vettore  $\mathbf{V}$ , mentre  $\rho$  è ancora la densità del fluido.

---

### 1.3.2 Conservazione del Calore

Ad altitudini inferiori ai 50 chilometri l'atmosfera si comporta in maniera molto simile ad un gas ideale e può considerarsi localmente in *equilibrio termodinamico*. Pertanto, volendo applicare la prima legge della termodinamica ad un volume d'aria di massa unitaria, si otterrebbe che:

$$dQ = p d\alpha + dI \quad (1.3)$$

essendo  $dQ$  la variazione differenziale di calore,  $dI$  la variazione differenziale di energia interna e  $p d\alpha$  la variazione differenziale del lavoro, quest'ultima intesa come variazione del volume specifico,  $d\alpha$ , dovuta all'azione della pressione,  $p$ . L'equazione può essere ulteriormente sviluppata introducendo la legge dei gas ideali espressa da Boyle, per la quale risulta che:

$$p\alpha = r T \quad (1.4)$$

dove  $T$  è la temperatura del gas in gradi Kelvin e  $r$  una costante che varia in funzione della composizione chimica. Sulla base dell'ipotesi di Avogrado, che asserisce che a parità di pressione e temperatura i gas dotati di uguale peso molecolare occupano volumi identici, è possibile definire  $r$  come funzione del peso molecolare  $\mu$  e di una serie di condizioni standard, ottenendo:

$$r = p_0 V_0 / T_0 \mu = R / \mu \quad (1.5)$$

dove  $R$  è detta *costante universale dei gas* ed ha un valore pari a  $8.3144 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ .

Il peso molecolare dell'aria in totale assenza di vapore acqueo è stato calcolato pari a 28.98 kg/mol, ma per tener conto anche dell'influenza di quest'ultima componente, che oltre ad essere ampiamente variabile ne costituisce non meno del 2% della massa totale, occorre introdurre l'umidità specifica,  $q$ , portando la (1.5) alla forma seguente:

$$p\alpha = R_d T_v \quad (1.6)$$

dove

$$R_d = R / 28.98 \approx 286.90 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$T_v = (1 + 0.61q) T$$

Questi ultimi due termini rappresentano, nell'ordine, la *costante dei gas per l'aria secca* e la *temperatura virtuale*; quest'ultima, di uso frequente in meteorologia, rappresenta il valore di temperatura che l'aria secca deve avere per assumere, a parità di pressione, la stessa densità dell'aria umida.

Il termine trovato nella 1.6 può essere introdotto nell'equazione della prima legge della termodinamica espressa dalla 1.3 applicando la regola del prodotto di differenziali, per la quale risulterà:

$$p d\alpha = d(p\alpha) - \alpha dp$$

---

quindi, operando le opportune sostituzioni, si giungerà all'equazione seguente:

$$dQ = R_d dT_v - \alpha dp + dI \quad (1.7)$$

Poiché è fatto assunto che la massa d'aria mantenga un volume costante, la sua energia interna sarà data dal prodotto fra la temperatura e la costante di calore specifico a volume costante,  $c_v$ ; ciò consente di sostituire il termine  $dI$  ottenendo:

$$dQ = R_d dT_v - \alpha dp + c_v dT_v$$

da cui:

$$dQ = (R_d + c_v) dT_v - \alpha dp \quad (1.8)$$

Quest'ultima equazione, essendo per l'aria secca il *calore specifico a volume costante* pari a  $717 \text{ JK}^{-1} \text{ Kg}^{-1}$  ed il *calore specifico a pressione costante*,  $c_p$ , pari a  $1004 \text{ JK}^{-1} \text{ Kg}^{-1}$ , può essere riscritta come:

$$dQ = c_p dT_v - \alpha dp \quad (1.9)$$

Ai fini meteorologici, tuttavia, non è conveniente ricorrere al volume specifico  $\alpha$ , in quanto dipendente dal valore di densità dell'aria che non è direttamente misurabile. Pertanto è preferibile sostituire tale termine facendo riferimento alla relazione espressa dall'equazione 1.6, ottenendo:

$$dQ = c_p dT_v - \frac{R_d T_v}{p} dp$$

da cui, dividendo ambo i membri per  $T_v$ :

$$dS = c_p \frac{dT_v}{T_v} - \frac{R_d}{p} dp \quad (1.10)$$

dove il termine  $dS$  rappresenta la variazione differenziale di *entropia*.

Assumendo per ipotesi che il termine  $dS$  sia pari a zero, i due termini alla destra dell'equazione precedente dovrebbero eguagliarsi e la funzione potrebbe essere riscritta nella seguente forma:

$$\frac{dT_v}{T_v} = \frac{R_d}{c_p} \frac{dp}{p}$$

o nella sua equivalente:

$$d \ln(T_v) = \frac{dR_d}{c_p} d \ln(p) \quad (1.11)$$

Integrando quest'ultima equazione per una massa d'aria in movimento fra due punti aventi valori pressione e temperatura definiti, rispettivamente, dalle coppie  $(p_1, p_2)$  e  $(T_{v1}, T_{v2})$ , si ottiene come risultato:

---


$$\frac{T_{v2}}{T_{v1}} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \quad (1.12)$$

Tale relazione, nota comunemente come *equazione di Poisson*, può essere applicata al caso specifico in cui la posizione di arrivo della massa d'aria abbia un valore di pressione standard di 1000 hPa, consentendo di ricavare il valore di *temperatura potenziale*,  $\theta$ .

$$\theta = \left( \frac{1000}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \quad (1.13)$$

La relazione esistente fra questa e l'entropia del sistema può essere facilmente constatata differenziando logaritmicamente l'ultima equazione e moltiplicando per  $c_p$ ; si otterrà, infatti:

$$\frac{c_p}{\theta} d\theta = \frac{c_p}{T_v} dT_v - \frac{R_d}{p} dp$$

che risulta identica, nel termine di destra, all'equazione 1.10. Da ciò si può dedurre che una variazione di temperatura potenziale è equivalente ad una variazione di entropia e che l'equazione della prima legge della termodinamica può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{1}{T_v} dQ = \frac{c_p}{\theta} d\theta \quad (1.14)$$

Poiché i modelli numerici vanno alla ricerca delle variazioni che le masse d'aria subiscono nel tempo, nella precedente deve essere introdotto l'*operatore di derivazione Lagrangiano* ( $d/dt$ ).

$$\frac{1}{T_v} \frac{dQ}{dt} = \frac{c_p}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_p}{\theta} S_\theta \quad (1.15)$$

Il termine  $S_\theta$  rappresenta l'insieme delle immissioni ed emissioni di calore che interessano la massa d'aria e che possono avere origine da processi fisici o chimici (evaporazione, condensazione, reazioni chimiche di natura endotermica o esotermica, etc.); la definizione del suo valore rappresenta uno dei maggiori problemi della modellistica numerica e viene risolto attraverso calcoli che possono coinvolgere sia funzioni di tipo empirico che aventi una solida base fisica, come sarà illustrato nel secondo capitolo di questa tesi.

La formulazione data dalla 1.15 definisce la variazione di  $\theta$  seguendo la massa d'aria ed è, pertanto, di tipo *Lagrangiano*. Diversamente, volendo esprimere la variazione locale di  $\theta$  in funzione delle coordinate spaziali ( $x, y, z$ ) e del tempo, è possibile ricorrere alla formulazione *Euleriana* riportata di seguito:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left[ \frac{u \partial \theta}{\partial x} + \frac{v \partial \theta}{\partial y} + \frac{w \partial \theta}{\partial z} \right] + S_\theta = -\mathbf{V} \Delta \theta + S_\theta \quad (1.16)$$


---

---

### 1.3.3 Conservazione del Moto

Questo principio di conservazione è espresso dalla seconda legge di Newton sul moto, in base alla quale ogni corpo soggetto ad una forza riceve un'accelerazione; nel caso di un volume d'aria avente una massa unitaria, tale relazione può essere espressa vettorialmente come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (1.17)$$

dove  $\mathbf{F}$  rappresenta il vettore di forza,  $\mathbf{a}$  il vettore d'accelerazione e  $\mathbf{V}$  il vettore di velocità. Tuttavia, tale espressione è valida solo per un sistema di riferimento fisso nello spazio, e non nel caso di un sistema di riferimento in rotazione come quello terrestre; occorre pertanto ridefinire l'equazione con l'introduzione del vettore  $\boldsymbol{\Omega}$ , rappresentante la velocità angolare della Terra, e del vettore  $\mathbf{R}$ , rappresentante la posizione della massa in esame rispetto al centro della Terra (Pielke, 2002). Pertanto, si ottiene:

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \right] (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

da cui, semplificando e ponendo  $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ , risulta:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (1.18)$$

L'equazione ottenuta fornisce il valore d'accelerazione dovuto alla rotazione terrestre, come dimostra la presenza della *forza di Coriolis* espressa dal termine  $2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})$ , ma non tiene conto delle accelerazioni dovute alle forze interne ed esterne alla massa d'aria, per le quali occorre aggiungere nuovi termini.

Le *forze esterne* che possono agire sul moto di una massa d'aria sono rappresentate principalmente dalla *forza di gravità* e dalla forza esercitata dai *gradienti di pressione*. La prima forza viene espressa attraverso la legge di gravitazione universale corretta per l'effetto deviante dovuto alla rotazione della terra; pertanto, l'equazione che ne definisce l'accelerazione risulta essere:

$$-\mathbf{g}\mathbf{k} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (1.19)$$

dove  $\mathbf{g}$  è l'accelerazione di gravità corretta,  $\mathbf{k}$  è un vettore unitario orientato verso il centro della terra e  $\mathbf{G}$  è il vettore rappresentante la forza di gravità. L'accelerazione derivante dal gradiente di pressione, invece, può essere calcolata con uno schema simile a quello visto per l'*equazione di continuità*, tenendo conto che il vettore che esprime la forza esercitata dalla pressione è orientato in direzione delle aree di bassa pressione e che può essere scomposto lungo ciascuna delle tre direzioni spaziali; si può pertanto ottenere:

$$\mathbf{F}_p = - \frac{1}{\partial p} \left[ \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (1.20)$$

---

Le *forze interne* ad un fluido sono rappresentate principalmente dall'attrito viscoso, ma per un gas come l'aria questo avrà un ordine di grandezza ridotto e, considerando che i modelli numerici operano su distanze spesso superiori al chilometro, risulterà trascurabile rispetto alle altre forze coinvolte nel moto. Pertanto, la definizione della conservazione del moto può ottenersi semplicemente sommando alla 1.18 le due equazioni determinate per le forze esterne, ottenendo:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 2 (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) - \mathbf{g}\mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Considerando che la velocità è una funzione del tempo e della posizione in un dato istante, sarà:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V} dx}{\partial x dt} + \frac{\partial \mathbf{V} dy}{\partial y dt} + \frac{\partial \mathbf{V} dz}{\partial z dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

pertanto, l'equazione della conservazione del moto può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{V} \nabla \mathbf{V} + 2 (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) - \mathbf{g}\mathbf{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.21)$$

#### 1.3.4 Conservazione dell'acqua

L'acqua può presentarsi in atmosfera in forma liquida, solida e gassosa e la sua conservazione deve essere espressa tenendo conto sia dei passaggi di stato che degli spostamenti di massa a cui è sottoposta. In prima approssimazione, è possibile indicare con il termine  $S_q$  l'insieme dei processi che portano l'acqua ad entrare o uscire dall'atmosfera (evaporazione, traspirazione, reazioni di tipo chimico, etc.) e dei passaggi di stato, ottenendo la seguente equazioni di conservazione:

$$\frac{dq}{dt} = S_q$$

dove  $q$  rappresenta il rapporto fra la massa d'acqua e la massa d'aria presenti in un volume unitario (anche detto, più semplicemente, *umidità specifica*).

In realtà, il termine  $S_q$  è costituito da un insieme di equazioni matematiche la cui corretta definizione non solo è estremamente complessa, ma ancora molto controversa a causa dei complessi processi di interazione a cui l'acqua è sottoposta in atmosfera. Per esempio, nei modelli destinati allo studio dei cumuli, vengono prese in considerazione l'interazione dell'acqua con gli aerosol, la conseguente possibilità di formazione di idrometeore e l'eventuale influenza e formazione di cristalli di ghiaccio.

Poiché anche in questa relazione il termine indagato è una funzione della posizione della massa d'aria in un dato istante, è possibile riscrivere la precedente in forma Euleriana, ottenendo:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{V} \nabla q + S_q \quad (1.22)$$

## 1.4 Forme Semplificate delle Equazioni Primitive

Riassumendo quanto è stato trattato nel precedente paragrafo, il sistema di equazioni differenziali a cui fa riferimento la maggioranza dei modelli numerici può essere così espresso in forma non vettoriale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u\partial u}{\partial x} - \frac{v\partial u}{\partial y} - \frac{w\partial u}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin\varphi - 2w\Omega \cos\varphi \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{u\partial v}{\partial x} - \frac{v\partial v}{\partial y} - \frac{w\partial v}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin\varphi \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{u\partial w}{\partial x} - \frac{v\partial w}{\partial y} - \frac{w\partial w}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g + 2u\Omega \cos\varphi \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{u\partial \theta}{\partial x} - \frac{v\partial \theta}{\partial y} - \frac{w\partial \theta}{\partial z} + S_\theta \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{u\partial q}{\partial x} - \frac{v\partial q}{\partial y} - \frac{w\partial q}{\partial z} + S_q \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{u\partial p}{\partial x} - \frac{v\partial p}{\partial y} - \frac{w\partial p}{\partial z} + \frac{\rho\partial u}{\partial x} + \frac{\rho\partial v}{\partial y} + \frac{\rho\partial w}{\partial z} \quad (1.28)$$

dove  $\varphi$  rappresenta la latitudine del punto in esame,  $\Omega$  è lo scalare della velocità angolare della Terra (pari a circa  $7 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ),  $g$  l'accelerazione di gravità (pari a circa  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ ) e  $\alpha$  il volume specifico dell'aria (dato dal rapporto  $1/\rho$ ).

Una prima semplificazione di questo sistema può essere ottenuta attraverso un'analisi di scala, in cui gli ordini di grandezza di ciascuno dei termini presenti nell'equazioni vengono messi a confronto con le scale spaziali e temporali in cui opera il modello (Pielke, 2002; Holton, 1996).

Termine	Definizione	Ordine di grandezza
$u, v$	velocità orizzontali	$U \approx 10 \text{ m s}^{-1}$
$w$	velocità verticale (dal basso verso l'alto)	$W \approx 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$
$2\Omega \sin\varphi$	parametro di Coriolis	$f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
$(\partial p/\rho)$	fluttuazioni di pressione	$P \approx 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
$g$	accelerazione di gravità	$G \approx 10 \text{ m s}^{-2}$
$\rho$	densità dell'aria	$\rho \approx 10^3 \text{ g m}^{-3}$
$\delta x, \delta y$	distanze orizzontali fra i punti della griglia	L
$\delta z$	distanza verticale fra i punti della griglia	H
$\delta t$	passo temporale del modello	T

**Tabella 1.2:** Ordini di grandezza usati nel corso dell'analisi di scala svolta in questo paragrafo.

---

### 1.4.1 Conservazione del moto e numero di Rossby

Un'analisi di scala dei termini presenti sulla destra dell'equazione 1.24 permette di stabilire quale sia il contributo di ciascuno dei fenomeni legati al moto orizzontale delle masse d'aria; in particolare, sostituendo con gli ordini di grandezza presentati in Tabella 1, si ottiene che:

$$\frac{u\partial v}{\partial x} \approx \frac{v\partial v}{\partial y} \approx \frac{U^2}{L} \quad ; \quad \frac{w\partial v}{\partial z} \approx \frac{WU}{H} \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2u\Omega \sin\varphi \approx \frac{P}{L} + fU$$

Dividendo i termini individuati per  $fU$ , il contributo all'equazione del moto in termini di ordini di grandezza risulta espresso dai seguenti tre termini:

$$\frac{U}{fL} \quad ; \quad \frac{W}{fH} \quad ; \quad \frac{P}{LfU} + 1$$

I tre termini risultano legati alla scala spaziale del modello, ma il secondo può considerarsi trascurabile rispetto al primo, poiché la scala orizzontale ( $L$ ) è solitamente superiore di almeno due ordini di grandezza rispetto alla scala verticale ( $H$ ), è ciò rende il rapporto  $U/L$  superiore al rapporto  $W/H$ .

Mettendo a confronto i due termini rimanenti, si osserva che entrambi hanno sempre valore positivo ma che il secondo non può essere inferiore ad uno. Il termine  $U/fL$ , che prende il nome di *numero di Rossby*, può pertanto essere usato come un indice che consente di stabilire, in relazione con la scala orizzontale del modello da cui strettamente dipende, i termini trascurabili nell'equazioni del moto orizzontale. In particolare:

- Se  $U/fL$  è molto inferiore ad 1, i termini legati alle variazioni locali di velocità ( $\partial u/\partial x$  e  $\partial v/\partial y$ ) sono da ritenersi trascurabili. Il sistema viene detto *statico* in presenza di variazioni locali nulle, e *quasi statico* se il loro ordine di grandezza è comunque inferiore ad  $U$ .
- Se  $U/fL$  è molto superiore ad 1, i termini legati alla forza di Coriolis diventano trascurabili.
- Se  $U/fL$  è prossimo ad 1, nessun termine nell'equazione del moto risulta trascurabile.

Nel caso limite in cui  $U/fL$  sia molto inferiore ad uno,  $L$  sia molto superiore ad  $H$  e la velocità orizzontale ( $U$ ) sia prossima alla velocità indotta dalla forza di Coriolis, l'equazione orizzontale del moto può ridursi a:

$$u = - \frac{1}{\rho 2\Omega \sin\varphi} \frac{\partial p}{\partial y} = u_g \quad (1.29)$$

$$v = \frac{1}{\rho 2\Omega \sin\varphi} \frac{\partial p}{\partial x} = v_g \quad (1.30)$$

dove i termini  $u_g$  e  $v_g$  vengono definiti *componenti geostrofiche del vento* e dipendono esclusivamente dalla forza del gradiente di pressione e dalla forza di Coriolis.

---

---

### 1.4.2 Conservazione del moto in atmosfera idrostatica

Anche nel caso dell'equazione 1.25 rappresentativa della componente verticale del moto è possibile fare uso dell'analisi di scala per definire i termini che maggiormente influenzano questo parametro. Sempre con riferimento alle grandezze presentate in Tabella 1, risulta infatti che:

$$\frac{u\partial w}{\partial x} \approx \frac{v\partial w}{\partial y} \approx \frac{w\partial w}{\partial z} \approx \frac{WU}{L} \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{P}{H} \quad ; \quad 2u\Omega \sin\varphi \approx fU \quad ; \quad g \approx G$$

dove si può osservare che l'ordine di grandezza dei primi due termini dipende dalle scale spaziali. Più in particolare, osservandone esclusivamente i termini al denominatore e basandosi sui valori dati in tabella, risulta fra i due una differenza di quattro ordini di grandezza, essendo:

$$WU \approx 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad \text{e} \quad P \approx 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Se, come citato nel caso precedente, il modello fa uso di una scala orizzontale (L) maggiore rispetto a quella verticale (H), tale differenza tenderà a crescere, rendendo il primo termine trascurabile e permettendo di escludere le variazioni locali di velocità dal processo di calcolo. Tale semplificazione è detta *assunzione di idrostaticità dell'atmosfera* e, quando applicata, definisce il modello come *idrostatico*.

Nel caso del moto verticale, anche l'effetto della forza di Coriolis può ritenersi trascurabile essendo il suo ordine di grandezza molto inferiore rispetto ai restanti due parametri, pertanto l'equazione 1.25 potrà risciversi in:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \tag{1.31}$$

ammesso che il rapporto H/L sia inferiore o pari ad 1.

### 1.4.3 Semplificazioni dell'equazione di continuità

Riscrivendo l'equazione di continuità (1.28) in modo che sulla sinistra vi siano i termini correlati alla derivata totale della densità e sulla destra quelli legati all'avvezione della stessa quantità, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u\partial \rho}{\partial x} + \frac{v\partial \rho}{\partial y} + \frac{w\partial \rho}{\partial z} = \frac{\rho\partial u}{\partial x} + \frac{\rho\partial v}{\partial y} + \frac{\rho\partial w}{\partial z}$$

che può essere anche scritta come:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho\partial u}{\partial x} + \frac{\rho\partial v}{\partial y} + \frac{\rho\partial w}{\partial z}$$

dove l'operatore D/Dt viene usato per indicare la *derivata totale*.

Essendo l'atmosfera non confinata fisicamente, l'aria può assumersi eguale ad un fluido incompressibile se le velocità orizzontali risultano inferiori a quella del suono ed il rapporto L/H è di molto inferiore-

re ad uno (Holton, 1992). Quando entrambe queste condizioni sono soddisfatte, l'atmosfera può dirsi *incomprimibile* e la derivata totale della densità può porsi pari a 0, consentendo di ridurre la 1.28 alla seguente forma:

$$\frac{\rho \partial u}{\partial x} + \frac{\rho \partial v}{\partial y} + \frac{\rho \partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.32)$$

che prende il nome di *equazione di continuità per convezione ristretta* (Dutton e Fichtl, 1969).

Anche se nella maggioranza dei modelli a mesoscala l'assunzione che H sia molto inferiore a L è valida, ciò non sempre accade per i modelli a scala locale, dove L può essere inferiore ai 10 chilometri ed il citato rapporto L/H è vicino ad 1. In questi casi l'assunzione di incompressibilità non è applicabile, ma può essere sostituita con l'assunzione di *non elasticità* (Pielke, 2002).

L'assunzione di *non elasticità*, in cui l'unico vincolo posto è che le velocità siano inferiori a quelle del suono, permette di porre il termine  $\partial \rho / \partial t$  pari a zero e di sostituire la 1.28 con la seguente equazione:

$$-\frac{u \partial \rho}{\partial x} - \frac{v \partial \rho}{\partial y} - \frac{w \partial \rho}{\partial z} + \frac{\rho \partial u}{\partial x} + \frac{\rho \partial v}{\partial y} + \frac{\rho \partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.33)$$

che prende il nome di *equazione di continuità per convezione profonda* (Dutton e Fichtl, 1969).

#### 1.4.4 Conservazione del calore in atmosfera adiabatica

Il termine  $S_\theta$  introdotto nell'equazione di conservazione del calore (1.26) è in genere costituito da una serie di più equazioni dipendenti dalle scale spaziali e temporali impiegate dal modello e che permettono di rappresentare i contributi dovuti a sorgenti e perdite di calore; la rappresentazione attraverso equazioni o costanti di questi contributi prende il nome di *processo di parametrizzazione* (Pielke, 2002).

A causa delle diverse forme che il  $S_\theta$  può assumere non è possibile un'analisi di scala dello stesso. Però, è possibile ugualmente una semplificazione della relazione di conservazione del calore se si assume i moti atmosferici siano *adiabatici*, cioè non comportino scambio di calore; in questo caso, infatti, non potranno esistere sorgenti o perdite di calore, ed il termine  $S_\theta$  potrà considerarsi nullo, riducendo la 1.26 a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{u \partial \theta}{\partial x} - \frac{v \partial \theta}{\partial y} - \frac{w \partial \theta}{\partial z} \quad (1.34)$$

che, usando la definizione di derivata totale, diventa:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

Tale assunzione è tanto più valida quanto più le seguenti condizioni sono rispettate:

- scarsa presenza di vapore acqueo in atmosfera e mancanza di passaggi di fase dello stesso;

- ridotto scambio di calore fra atmosfera e superficie terrestre;
- ridotti periodo d'analisi, che permettono di considerare trascurabili gli scambi radiativi di calore.

#### 1.4.5 Conservazione del vapore acqueo

Come nel caso precedente, anche per l'equazione di conservazione del vapore d'acqua (1.27) il termine  $S_q$  viene trattato attraverso un processo di parametrizzazione (Pielke, 2002) e l'unica semplificazione che può essere direttamente applicata è quella di considerare il suo valore pari a zero, ottenendo che:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{u \partial q}{\partial x} - \frac{v \partial q}{\partial y} - \frac{w \partial q}{\partial z} \quad (1.34)$$

ed usando la definizione di derivata totale:

$$\frac{Dq}{Dt} = 0$$

Quest'assunzione può ritenersi valida se il vapore acqueo presente in atmosfera risulta inferiore alla quantità richiesta per mettere in atto i meccanismi di passaggio di fase e se la quantità di vapore che è comunque soggetta a passaggi di fase è inferiore a quella mobilitata dai moti di convezione atmosferica.

Anche se l'argomento non verrà trattato in questa tesi, è importante notare che la stessa equazione che regola la variazione del vapore acqueo può essere riscritta in maniera del tutto simile per qualsiasi sostanza volatile e soggetta a passaggi di fase sia presente in atmosfera; ciò consente, per esempio, di estendere il campo di applicazione dei modelli numerici anche alla diffusione aerea degli inquinanti. Le varie equazioni relative alle sostanze volatili vengono aggiunte alle sei equazioni di base ed hanno come forma generale la seguente:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - \frac{u \partial \chi}{\partial x} - \frac{v \partial \chi}{\partial y} - \frac{w \partial \chi}{\partial z} + S_\chi$$

dove  $\chi$  rappresenta la concentrazione della sostanza ed  $S_\chi$  la variazione di concentrazione derivante dagli apporti e dalle perdite locali. Anche in questo caso, l'ultimo termine sarà sostituito attraverso il processo di parametrizzazione.

---

## 1.5 Media delle Equazioni Primitive

Le equazioni da 1.23 a 1.28 e le loro forme semplificate sono definite in termini di operatori differenziali ( $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$ ) la cui validità matematica è verificata quando i rispettivi incrementi spaziali ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ) e temporali ( $\delta t$ ) tendono a 0. Ai fini delle applicazioni pratiche di un modello, tuttavia, occorre che gli incrementi spaziali siano maggiori delle distanze intermolecolari, così che siano prese in considerazione solo le componenti statistiche del moto, ma siano piccoli a sufficienza da permettere di rappresentare in modo ugualmente accurato i termini differenziali anche attraverso l'uso di costanti (Pielke, 2002).

Il rispetto delle citate costrizioni porterebbe il campo d'applicazione dei modelli numerici che usano le equazioni indicate a scale spaziali dell'ordine del centimetro ed a scale temporali dell'ordine del secondo; tuttavia, poiché nei modelli a mesoscala lo stesso campo è solitamente esteso sul piano orizzontale per non meno di 100 chilometri e su quello verticale per almeno 10 chilometri, i passi temporali e spaziali indicati richiederebbero l'elaborazione delle equazioni ad ogni secondo su non meno di  $10^{20}$  punti di griglia. Come si può facilmente immaginare, una simile mole di calcolo non può essere sostenuta da alcun calcolatore esistente per simulare l'evoluzione atmosferica in tempi utili ai fini previsionali (Pielke, 2002; Giuliacci *et al.*, 2001).

Per aggirare questo problema, occorre integrare le equazioni di conservazione entro intervalli spaziali e temporali compatibili con le capacità di calcolo dei mezzi disponibili. Quanto minori saranno gli intervalli scelti, tanto migliore risulterà la *risoluzione* della circolazione atmosferica.

L'approccio proposto da Reynolds per l'integrazione delle equazioni da 1.23 a 1.28 si basa sull'assunto che ogni grandezza, scalare o vettoriale, possa essere espressa come la somma di una componente media,  $\psi_m$ , con una componente variabile,  $\psi'$ , come mostrato di seguito (Stull, 1988):

$$\psi = \psi_m + \psi'$$

Il termine  $\psi'$ , rappresentando l'oscillazione della variabile  $\psi$  rispetto al suo valore medio, è anche definita *perturbazione a scala di sottogriglia* (*subgrid-scale perturbation*), mentre il termine  $\psi_m$  viene calcolato integrando secondo la seguente funzione (Pielke, 2002):

$$\psi_m = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} \psi \frac{dz dy dx dt}{\Delta z \Delta y \Delta x \Delta t}$$

dove gli incrementi finiti  $\Delta z$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta x$  rappresentano gli intervalli di griglia del modello e l'intervallo  $\Delta t$  il *passo temporale* (*time step*) dello stesso.

Si può generalmente osservare che le variabili medie tendono a variare nel tempo e nello spazio molto più lentamente delle rispettive perturbazioni, e ciò consente di operare una *separazione di scala* fra i termini  $\psi_m$  ed  $\psi'$  tale che il primo può considerarsi quasi costante ed il secondo, invece,

ampiamente fluttuante. In base ad un assunto proposto dallo stesso Reynolds, inoltre, è possibile considerare la media dei termini di perturbazione nei vari punti dello spazio e del tempo pari a zero (Pielke, 2002).

La sostituzione delle variabili presenti nelle equazioni da 1.23 a 1.28 con la formulazione proposta da Reynolds porta ad un nuovo sistema di equazioni, detto *sistema delle equazioni di Reynolds*, che può essere espresso come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial t} = & - \frac{u_m \partial u_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial u_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial u_m}{\partial z} - \alpha_m \frac{\partial p_m}{\partial x} + 2v_m \Omega \sin \varphi - 2w_m \Omega \cos \varphi + \\ & - \frac{\partial(u' u')}{\partial x} - \frac{\partial(v' u')}{\partial y} - \frac{\partial(w' u')}{\partial z} - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial t} = & - \frac{u_m \partial v_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial v_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial v_m}{\partial z} - \alpha_m \frac{\partial p_m}{\partial y} - 2u_m \Omega \sin \varphi + \\ & - \frac{\partial(u' v')}{\partial x} - \frac{\partial(v' v')}{\partial y} - \frac{\partial(w' v')}{\partial z} - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_m}{\partial t} = & - \frac{u_m \partial w_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial w_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial w_m}{\partial z} - \alpha_m \frac{\partial p_m}{\partial z} + g + 2u_m \Omega \cos \varphi + \\ & - \frac{\partial(u' w')}{\partial x} - \frac{\partial(v' w')}{\partial y} - \frac{\partial(w' w')}{\partial z} - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial \theta_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial \theta_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial \theta_m}{\partial z} + S_\theta - \frac{\partial(u' \theta')}{\partial x} - \frac{\partial(v' \theta')}{\partial y} - \frac{\partial(w' \theta')}{\partial z} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial q_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial q_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial q_m}{\partial z} + S_q - \frac{\partial(u' q')}{\partial x} - \frac{\partial(v' q')}{\partial y} - \frac{\partial(w' q')}{\partial z} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial \rho_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial \rho_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial \rho_m}{\partial z} - \frac{\partial(u' \rho')}{\partial x} - \frac{\partial(v' \rho')}{\partial y} - \frac{\partial(w' \rho')}{\partial z} \quad (1.40)$$

In questo nuovo sistema i termini nelle equazioni del moto in cui compare il rapporto  $1/\rho'$  rappresentano correlazioni con la perturbazione a scala di sottogriglia che possono essere eliminate assumendo che il campo di densità presenti delle variazioni spaziali e temporali così piccole che il rapporto  $\rho_m/\rho'$  risulti molto inferiore ad uno. Purtroppo, tale assunzione è generalmente valida nel piano orizzontale, dove non esistono forti gradienti di densità, ma non nel piano verticale.

Per poter sostituire il termine associato al rapporto  $1/\rho'$  nell'equazione 1.37 permettendo al contempo la rimozione dello stesso delle equazioni 1.35 e 1.36, è possibile fare uso dell'assunzione di idrostaticità introdotta nella 1.31 e per la quale, per una variazione di velocità nulla, vale il bilancio:

$$\partial p / \partial z = - g \rho$$

L'insieme di queste assunzioni prende il nome di *approssimazione di Boussinesq* e permette di sostituire le equazioni da 1.35 a 1.37 con le seguenti (Pielke, 2002; Holton, 1992):

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial u_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial u_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial u_m}{\partial z} - \alpha_M \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + 2v_m \Omega \sin \varphi - 2w_m \Omega \cos \varphi +$$

$$- \frac{\partial(u'u')}{\partial x} - \frac{\partial(v'u')}{\partial y} - \frac{\partial(w'u')}{\partial z} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial v_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial v_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial v_m}{\partial z} - \alpha_M \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - 2u_m \Omega \sin \varphi +$$

$$- \frac{\partial(u'v')}{\partial x} - \frac{\partial(v'v')}{\partial y} - \frac{\partial(w'v')}{\partial z} \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial w_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial w_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial w_m}{\partial z} - \alpha_M \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{\alpha}{\alpha_M} g + 2u_m \Omega \cos \varphi +$$

$$- \frac{\partial(u'w')}{\partial x} - \frac{\partial(v'w')}{\partial y} - \frac{\partial(w'w')}{\partial z} \quad (1.43)$$

dove viene impiegata una seconda scomposizione di Reynolds per la quale:

$$\psi_m = \psi_M + \hat{\psi}$$

essendo  $\hat{\psi}$  la perturbazione della variabile media  $\psi_m$  rispetto ad una media ad ampia scala,  $\psi_M$ , calcolata mediante l'equazione seguente:

$$\psi_M = \int_x^{x+Dx} \int_y^{y+Dy} \psi \frac{dx dy}{Dx Dy}$$

in cui i termini  $Dx$  e  $Dy$  sono costanti che esprimono l'estensione del piano orizzontale del dominio di calcolo o, nel caso di modelli a scala globale, due lunghezze di almeno un ordine di grandezza superiore rispetto ai valori di  $\delta x$  e  $\delta y$  (Pielke, 2002).

### 1.5.1 Il problema della chiusura

Nelle equazioni da 1.35 a 1.43 sono presenti termini di tipo  $\psi'\psi'$  che vengono nel complesso definiti *termini di correlazione di sottogriglia* e che rappresentano fluttuazioni di piccola scala che influiscono sui fenomeni risolvibili alle scale del modello. L'esistenza di questi termini rende il sistema delle equazioni di Reynolds un sistema aperto perché ciascuno di essi, in realtà, è una nuova incognita che necessita di essere sostituita con una quantità nota o con una nuova equazione.

L'approccio di sostituzione attraverso l'uso di nuove equazioni richiede una nuova scomposizione delle variabili secondo il metodo di Reynolds, con la definizione di un termine medio di ordine pari al valore di turbolenza originario,  $\psi'_m$ , e di un termine turbolento di ordine inferiore,  $\psi''$ . Tale processo,

tuttavia, introdurrà nuovi termini di correlazione di sottogriglia che dovranno poi essere sostituiti con una nuova serie di equazioni o con quantità note.

Il numero di sostituzioni attraverso equazioni eseguite prima di assegnare una quantità costante ai termini di correlazione di sottogriglia definisce l'*ordine della chiusura* del sistema di Reynolds, e quanto più il suo numero è alto tanto più il modello riuscirà a descrivere nel dettaglio l'influenza dei termini non direttamente risolvibili dalle proprie scale spaziali e temporali. Nella chiusura di *ordine zero*, che rappresenta un caso particolare di chiusura usata per lo studio delle variazioni delle variabili medie, tutti i termini di correlazione di sottogriglia vengono considerati nulli, senza operare per essi alcuna effettiva sostituzione.

Le chiusure di ordine uno o superiore possono distinguersi in due tipi: *chiusure locali* e *chiusure non locali*. Nella chiusura locale, una quantità nota nello spazio viene parametrizzata mediante quantità note in punti diversi, facendo assunto che la turbolenza possa essere trattata in analogia con la diffusione molecolare. Nella chiusura non locale, invece, una quantità sconosciuta viene parametrizzata attraverso l'uso di quantità note in punti diversi, assumendo che la turbolenza si origini da vortici di dimensioni che coprono l'intero spettro dei moti turbolenti.

Un tipo di chiusura locale di primo ordine è quella nota come *teoria-k* (o del *flusso-gradiente*) nella quale si assume che i flussi turbolenti siano correlati ai gradienti medi da coefficienti di scambio detti di *diffusione turbolenta* (*eddy diffusivity*). Le sostituzioni operate sono pertanto del seguente tipo:

$$\begin{array}{lll}
 u'u' = -K_{Mu} \frac{\partial u_m}{\partial x} & v'u' = -K_{Mvu} \frac{\partial u_m}{\partial y} & w'u' = -K_{Mwu} \frac{\partial u_m}{\partial z} \\
 u'v' = -K_{Muv} \frac{\partial v_m}{\partial x} & v'v' = -K_{Mvv} \frac{\partial v_m}{\partial y} & w'v' = -K_{Mvw} \frac{\partial v_m}{\partial z} \\
 u'w' = -K_{Muw} \frac{\partial w_m}{\partial x} & v'w' = -K_{Mvw} \frac{\partial w_m}{\partial y} & w'w' = -K_{Mww} \frac{\partial w_m}{\partial z} \\
 u'\theta' = -K_{Hu} \frac{\partial \theta_m}{\partial x} & v'\theta' = -K_{Hv} \frac{\partial \theta_m}{\partial y} & w'\theta' = -K_{Hw} \frac{\partial \theta_m}{\partial z} \\
 u'q' = -K_{Wu} \frac{\partial q_m}{\partial x} & v'q' = -K_{Wv} \frac{\partial q_m}{\partial y} & w'q' = -K_{Ww} \frac{\partial q_m}{\partial z}
 \end{array}$$

dove i coefficienti  $K_M$ ,  $K_H$  e  $K_W$  rappresentano, rispettivamente, la *viscosità turbolenta*, la *diffusione termica turbolenta* e la *diffusione turbolenta del vapore acqueo* e sono definiti in base alle caratteristiche del flusso atmosferico. Nel loro insieme, questi essi sono anche indicati come *coefficienti di scambio* ed i metodi usati per il loro calcolo saranno descritti in maggior dettaglio nel paragrafo 2.2.

---

### 1.5.2 La funzione di Exner

Le presenza nelle equazioni di conservazione del moto (da 1.41 a 1.43) dei termini medi legati alla densità ( $\rho_m$ ) comporta la necessità di calcolare questi valori prima di ogni ciclo di soluzione del sistema facendo uso dell'equazione di stato dei gas, con un aumento del numero di operazioni complessivamente eseguite dal calcolatore.

Un sostituzione particolarmente conveniente dei termini contenenti la densità media è la seguente (qui espressa lungo la componente zonale del moto):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad (1.44)$$

dove  $\pi$  è detta funzione di Exner ed è definita da:

$$\pi = c_p \frac{T_v}{\theta}$$

i cui termini  $c_p$  e  $T_v$ , rispettivamente calore specifico a pressione costante e temperatura virtuale, sono stati discussi nel paragrafo 1.3.2. Se si applica la scomposizione di Reynolds al termine sulla destra della 1.44 si ottiene la seguente nuova forma media:

$$\theta \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\theta_m \partial \pi_m}{\partial x} + \frac{\partial(\theta' \pi')}{\partial x}$$

Il termine rappresentante la correlazione di scala di sottogriglia della nuova equazione non può, in questo caso, essere rimosso operando le assunzioni sulla densità viste in precedenza, ma i risultati di una lunga serie di misurazioni empiriche (Lumley e Panofsky, 1964) dimostrano che è generalmente valida la seguente assunzione:

$$\theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \approx \frac{\theta_m \partial \pi_m}{\partial x}$$

applicando la quale è possibile riscrivere le equazioni da 1.35 ad 1.37 nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial t} = & - \frac{u_m \partial u_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial u_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial u_m}{\partial z} - \theta_m \frac{\partial \pi^{\wedge}}{\partial x} + 2v_m \Omega \sin \varphi - 2w_m \Omega \cos \varphi + \\ & - \frac{\partial(u' u')}{\partial x} - \frac{\partial(v' u')}{\partial y} - \frac{\partial(w' u')}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial t} = & - \frac{u_m \partial v_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial v_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial v_m}{\partial z} - \theta_m \frac{\partial \pi^{\wedge}}{\partial y} - 2u_m \Omega \sin \varphi + \\ & - \frac{\partial(u' v')}{\partial x} - \frac{\partial(v' v')}{\partial y} - \frac{\partial(w' v')}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.46)$$

---


$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = - \frac{u_m \partial w_m}{\partial x} - \frac{v_m \partial w_m}{\partial y} - \frac{w_m \partial w_m}{\partial z} - \theta_m \frac{\partial \pi^{\wedge}}{\partial z} + \frac{\theta_M}{\theta^{\wedge}} g + 2u_m \Omega \cos \varphi +$$

$$- \frac{\partial(u'w')}{\partial x} - \frac{\partial(v'w')}{\partial y} - \frac{\partial(w'w')}{\partial z} \quad (1.47)$$

In queste non è più richiesta la conoscenza della densità dell'aria e della perturbazione ad ampia scala della pressione ( $p^{\wedge}$ ) durante il processo di calcolo; inoltre, poiché è possibile dimostrare che il gradiente verticale di  $p$  è maggiore rispetto a quello di  $\pi$ , l'uso del secondo permette di ridurre il margine d'errore associato alle tecniche di risoluzione basate su schemi a differenze finite (descritte a partire dal prossimo paragrafo).

Uno svantaggio implicito in questo tipo di semplificazione, tuttavia, riguarda i casi in cui non venga fatto uso di alcuna delle assunzioni di idrostaticità, essendo la funzione di Exner comunque legata alle variazioni di densità della massa d'aria. L'equazione di continuità, infatti, deve essere sostituita dalla seguente:

$$\frac{\partial \pi^{\wedge}}{\partial t} = - \frac{R\pi_M}{c_v \rho_M \theta_M} \left[ \frac{\partial u \rho_M \theta_M}{\partial x} + \frac{\partial v \rho_M \theta_M}{\partial y} + \frac{\partial w \rho_M \theta_M}{\partial z} \right]$$

Diversamente, posta l'assunzione di idrostaticità per atmosfera incompressibile espressa dalla 1.32, è possibile sostituire la 1.47 con la seguente:

$$\frac{\partial \pi_m}{\partial z} = - \frac{g}{\theta_m}$$

---

## 1.6 Metodi di Soluzione

Le tecniche di soluzione applicabili al sistema di equazioni primitive possono fare ricorso a due tipi di metodologie fondamentali: quelle basate su uno *schema a differenze finite* e quelle basate sull'*analisi spettrale* delle componenti armoniche.

### 1.6.1 Introduzione agli schemi a differenze finite

Gli schemi di soluzione attraverso metodi a differenze finite sono stati usati per risolvere le comuni equazioni differenziali sin dal 1890 e Richardson introdusse il loro uso per la soluzione delle equazioni differenziali parziali nel 1910; il motivo per cui vengono impiegate ancora oggi nei modelli numerici risiede nella facilità d'implementazione degli stessi e nella loro semplicità di comprensione.

Il principio matematico su cui si basa il metodo delle differenze finite è quello della scomposizione in serie di Taylor, con la quale è possibile esprimere il valore di una funzione come una serie infinita composta dal valore della funzione stessa e dalle sue derivate in  $x$ . In formula ciò viene espresso come:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{1}{1!} \frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3F}{dx^3} \Delta x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n F}{dx^n} \Delta x^n$$

Risolvendo la serie rispetto alla prima derivata sul lato destro dell'equazione, si ottiene che:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{dx^2} \Delta x - \frac{1}{3!} \frac{d^3F}{dx^3} \Delta x^2 - \dots - \frac{1}{n!} \frac{d^n F}{dx^n} \Delta x^{n-1}$$

e conservando soltanto il primo termine sul lato destro della nuova equazione si ottiene quella che viene definita un'*approssimazione di primo ordine con differenza in avanti*, cioè:

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad (1.48)$$

Tale approssimazione sostituisce all'equazione differenziale ( $dF/dx$ ) un'*equazione differenziata* il cui margine di errore è pari alla somma delle derivate escluse.

Usando un procedimento del tutto simile, è possibile calcolare un'*approssimazione di primo ordine con differenza all'indietro*, in base alla quale risulta:

$$F(x - \Delta x) = F(x) - \frac{1}{1!} \frac{dF}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{dx^2} \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3F}{dx^3} \Delta x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n F}{dx^n} \Delta x^n$$

da cui:

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{F(x) - F(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.49)$$

Sottraendo i termini della serie di Taylor usata per ottenere la 1.49 dai termini della serie di Taylor usata per la 1.48, si ottiene un'*approssimazione di secondo ordine con differenza centrata* di forma:

$$\frac{dF}{dx} \approx \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.50)$$

ed in cui l'errore d'approssimazione risulta inferiore rispetto alla 1.48 ed alla 1.49 essendo stato rimossa dalla sottrazione la derivata di secondo ordine.

L'efficacia di questo tipo di schemi può essere provata empiricamente ricorrendo ad un'equazione di tipo differenziale che abbia una soluzione analitica facilmente calcolabile; è questo il caso, per esempio, della funzione del moto uniformemente accelerato la cui equazione:

$$\frac{dx}{dt} = at$$

ha come soluzione analitica l'equazione:

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

Se si prova a risolvere quest'equazione mediante la 1.48 si ottiene:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(\Delta t + t) - x(t)}{\Delta t}$$

da cui la soluzione per differenza diventa:

$$x(\Delta t + t) = x(t) + at\Delta t$$

Tuttavia, se si confronta l'andamento della curva calcolata dall'equazione ottenuta per via analitica con quella ricavata da una serie di *cicli iterativi* dell'equazione differenziata, si nota che le due tendono a coincidere solo al ridursi dell'intervallo di tempo  $\Delta t$  usato nella seconda (come mostrato in tabella 1.2) e ciò ci permette di capire perché l'uso degli schemi a differenze finite è utile soltanto per le equazioni differenziali di tipo molto complesso. Ogni ciclo iterativo di un'equazione differenziata, infatti, richiede il calcolo della soluzione all'istante  $t+\Delta t$  usando come riferimento il risultato precedentemente ottenuto all'istante  $t$ ; ciò vuol dire che quanto più piccolo sarà  $\Delta t$  tanto maggiore sarà il numero di cicli richiesti e, di conseguenza, il numero di operazioni da compiere prima di giungere alla soluzione del risultato dell'equazione per un istante particolare.

Tempo Trascorso	Risultato Reale	Risultato dell'equazione differenziata			
		$\Delta t = 0.5$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.001$
1 sec.	5	2.5	4.7	5.0	5.0
2 sec.	20	15.0	19.2	19.9	20.0
3 sec.	45	37.5	43.7	44.9	45.0
4 sec.	80	70.0	78.2	79.8	80.0
5 sec.	125	112.5	115.7	124.8	125.0

**Tabella 1.2:** Velocità reali ed approssimate da uno schema a differenze finite della funzione del moto accelerato uniforme di punto, inizialmente in quiete, sottoposto ad accelerazione costante di  $5 \text{ m/s}^2$ .

---

### 1.6.2 Tipi di schemi a differenze finite

Gli schemi alle differenze finite impiegati nei modelli numerici hanno forme simili a quelli visti nelle equazioni da 1.48 a 1.50. Di questi i più noti sono rappresentati dalle equazioni elencate di seguito, dove  $\psi$  rappresenta una funzione generica che varia sia rispetto allo spazio ( $x$ ) che rispetto al tempo ( $t$ ).

1. *Centrato nello spazio ed avanti nel tempo (Forward in time, centered in space)*

$$\frac{\psi(x, t+1) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{\psi(x+1, t) - \psi(x-1, t)}{2\Delta x} \quad (1.50)$$

2. *Centrato nello spazio e nel tempo (Leapfrog centered in space)*

$$\frac{\psi(x, t+1) - \psi(x, t-1)}{2\Delta t} = \frac{\psi(x+1, t) - \psi(x-1, t)}{2\Delta x} \quad (1.51)$$

3. *Centrato nello spazio e indietro nel tempo (Backward in time, centered in space)*

$$\frac{\psi(x, t+1) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{\psi(x+1, t+1) - \psi(x-1, t+1)}{2\Delta x} \quad (1.52)$$

4. *Non centrato nello spazio e avanti nel tempo (Uncentered in space, forward in time)*

$$\frac{\psi(x, t+1) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{\psi(x, t+1) - \psi(x-1, t+1)}{\Delta x} \quad (1.53)$$

Nonostante questi schemi possano apparire approssimazioni adeguate per un'equazione differenziale, in realtà ciascuno di essi può essere usato soltanto in precise condizioni a causa di problemi di stabilità delle soluzioni. Per capire come questo accada è utile osservare come ciascuno schema si comporta in presenza di una semplice equazione del tipo impiegato nei modelli numerici di previsione: quella del moto mono-dimensionale di un'onda, anche nota come *equazione di avvezione*.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.54)$$

Questa equazione, il cui aspetto è simile a quello dell'equazione di conservazione del moto, esprime il movimento di un'onda che viaggia con lunghezza costante ed a velocità  $c$  in una sola direzione.

Volendo analizzare la stabilità della funzione è utile usare il metodo di *Von Neumann* (Pielke, 2002), in cui  $U$  viene passata dal dominio del tempo a quello delle frequenze mediante la scomposizione di Fourier, ottenendo:

$$U(\Delta x, \Delta t) = U'(\omega, k) e^{i(k\Delta x + \omega\Delta t)} \quad (1.55)$$

dove  $\omega$  rappresenta la frequenza dell'onda,  $k$  il suo indice ed  $i$  la componente immaginaria ( $\sqrt{-1}$ ). Se si impiega questa sostituzione nell'equazione di avvezione e si tenta di risolvere la stessa per mezzo dei

---

schemi a differenze finite visti in precedenza, le equazioni differenziate che si ottengono sono:

1. *Centrato nello spazio ed avanti nel tempo*

$$e^{i\omega\Delta t} - 1 = \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \left[ e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right]$$

2. *Centrato nello spazio e nel tempo*

$$e^{i\omega\Delta t} = e^{-i\omega\Delta t} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left[ e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right]$$

3. *Centrato nello spazio e indietro nel tempo*

$$1 - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \left[ e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right] = 0$$

4. *Non centrato nello spazio e avanti nel tempo*

$$e^{i\omega\Delta t} = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left[ 1 - e^{-ik\Delta x} \right] \quad \text{se } U(x,t) > 0$$

In queste, il termine ricorrente  $c\Delta t/\Delta x$  prende il nome di *numero di Courant* e definisce la relazione fra velocità di propagazione dell'onda, passo temporale e passo spaziale; in particolare, quando è maggiore di uno indica che l'onda riesce a percorrere in un intervallo temporale più punti di griglia per volta, mentre se è inferiore ad uno si verifica il contrario.

Nelle equazioni differenziate possono dunque comparire guadagni o perdite di velocità dovuti ad una imprecisa rappresentazione delle onde attraverso i punti della griglia, evento che non si verifica nelle rispettive equazioni differenziali. Ciò può causare un'*amplificazione* o uno *smorzamento* del risultato nel corso del tempo, ed è importante poter conoscere l'entità di questi fenomeni prima di fare uso di un qualsiasi schema numerico a differenze finite.

A questo scopo, si rivela utile analizzare la componente immaginaria della frequenza dell'onda, dopo aver definito che (Pielke, 2002):

$$\omega = \omega_R + \omega_I$$

$$\varepsilon = \pm e^{-\omega_I \Delta t}$$

essendo  $\omega_R$  e  $\omega_I$  rispettivamente le componenti reali ed immaginarie della frequenza. Se si espandono gli esponenziali della componente reale in somme di seni e coseni e si risolve rispetto a  $\varepsilon$  ciascuna delle quattro equazioni riportate sopra, infatti, diventa possibile conoscere per quali valori del numero di Courant lo schema a differenze finite mostrerà instabilità lineare. In particolare, indicando con  $C$  il numero di Courant, i risultati ottenibili sono:

---

1. Centrato nello spazio ed avanti nel tempo

$$\varepsilon = \pm \sqrt{1 + C^2 \text{sen}(k\Delta x)}$$

2. Centrato nello spazio e nel tempo

$$\varepsilon = \begin{cases} \pm 1 & [2C \text{sen}(k\Delta x)]^2 \leq 4 \\ -0.5 [2C \text{sen}(k\Delta x)]^2 \pm 0.5 \sqrt{[2C \text{sen}(k\Delta x)]^2 - 4} & [2C \text{sen}(k\Delta x)]^2 > 4 \end{cases}$$

3. Centrato nello spazio e indietro nel tempo

$$\varepsilon = \pm \left[ \sqrt{1 + C^2 \text{sen}^2(k\Delta x)} \right]^{-1}$$

4. Non centrato nello spazio e avanti nel tempo

$$\varepsilon = \pm \sqrt{1 + 2C (\cos(k\Delta x) - 1)(1-C)}$$

Rappresentando  $\varepsilon$  la variazione d'ampiezza della soluzione durante ciascun passo temporale (in molti testi viene anche usato il termine di fattore di amplificazione o *amplification factor*), le soluzioni date permettono di stabilire quale schema sia stabile e quale non lo sia semplicemente valutando la grandezza che tale fattore può assumere. Ciò porta alle seguenti conclusioni:

- Per quanto la logica possa suggerire la correttezza dello schema centrato nello spazio ed avanzato nel tempo, l'entità dell'oscillazione calcolabile per il fattore di amplificazione indica una forte instabilità lineare della soluzione e rende lo schema una valida approssimazione dell'equazione differenziale solo per intervalli spaziali e temporali estremamente piccoli.
- Lo schema non centrato, che per l'equazione di avvezione prende il nome di schema sottovento (*upwind scheme*), si mantiene stabile per valori del numero di Courant compresi fra uno e zero ma, ad esclusione dei margini di tale intervallo (0 e 1), la soluzione è comunque soggetta allo smorzamento delle piccole lunghezze d'onda.
- Lo schema centrato nello spazio e nel tempo risulta linearmente stabile fintanto che il numero di Courant si mantiene, in valore assoluto, inferiore o uguale ad 1.
- Lo schema centrato nello spazio ed indietro nel tempo è l'unico che si mostra stabile per qualsiasi passo temporale e spaziale scelto ma, trattandosi di uno schema *implicito*, non è possibile calcolarne la soluzione in modo diretto. La risoluzione dello schema, infatti, richiede la creazione di un sistema di equazioni basate sulla 1.52 ed in numero pari al quadrato dei punti della griglia impiegata; anche per un computer particolarmente potente, quindi, l'impiego di questo schema è praticabile soltanto se i punti sono pochi o il numero di iterazioni da eseguire è piccolo.

---

### 1.6.3 Soluzione con Analisi Spettrale

L'analisi spettrale applicata alla soluzione dei modelli numerici si basa sull'analisi di Fourier, in base alla quale è possibile, posti adeguati vincoli, sostituire ad una qualsiasi funzione  $F(x)$  la sommatoria di una serie infinita di termini seno e coseno secondo la forma:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi nx}{L}$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) d(x)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} d(x)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} d(x)$$

ed  $L$  rappresenta il periodo della funzione, nel caso di funzioni periodiche, o l'estensione del dominio della funzione nel caso di funzioni non periodiche. La stessa rappresentazione, in forma equivalente, può essere ottenuta facendo uso della funzione esponenziale in luogo delle coppie seno-coseno, ottenendo:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i2\pi nx/L}$$

dove:

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) e^{-i2\pi nx/L} d(x)$$

ed  $i$  è il termine immaginario dato dalla radice quadra di un numero negativo.

Immaginando che i punti della griglia posti lungo una particolare direzione seguano l'andamento di una funzione incognita di tipo discreto, è possibile applicare l'analisi di Fourier per costruire una serie di armoniche la cui somma approssimi l'andamento dei punti stessi. Purtroppo, poiché è impossibile fare uso di un numero infinito di armoniche, la serie deve essere *troncata* raggiunto un numero  $N$  di coppie seno-coseno, ignorando tutte le componenti a maggior frequenza ad esse successive; ciò è la principale fonte d'errore derivante dall'uso di questa tecnica. Per esempio, il modello previsionale sviluppato dallo ECMWF (*European Centre for Medium Weather Forecasting*) adotta questo metodo di soluzione con un troncamento all'armonica numero 511, arrivando ad una risoluzione di griglia di circa 40 chilometri per l'intero emisfero settentrionale.

I vantaggi dell'utilizzo del metodo spettrale rispetto a quello per differenze finite derivano dalla sua maggiore stabilità numerica. Ciò può essere osservato in una sua applicazione all'equazione d'avvezione (1.54) facendo uso delle due coppie seguenti di trasformate di Fourier:

---

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U'(k, t) e^{ikx} dk$$

$$U'(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) e^{-ikx} dx$$

dove la prima può essere direttamente sostituita nell'equazione per ottenere:

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + ickU' = 0$$

In questo modo all'equazione differenziale parziale di partenza si sostituisce un'equazione differenziale ortogonale che può essere risolta per  $U'(k, t)$ ; la soluzione ottenuta, quindi, può essere usata mediante trasformazione inversa per risolvere l'equazione originaria.

La stabilità numerica del metodo spettrale è garantita dalla possibilità di soluzione di un'equazione ortogonale che, non presentando prodotti di termini incogniti, può essere risolta sia analiticamente che con un metodo alle differenze finite; tuttavia, la precisione del risultato ottenuto dipenderà dal numero di armoniche impiegate nel corso dei processi di trasformazione con il metodo di Fourier. Ciò rappresenta uno dei maggiori limiti di questo metodo in quanto, al crescere del numero di armoniche impiegate, la mole di lavoro richiesta per trasformare e ritrasformare le equazioni e per calcolare le soluzioni ad ogni punto cresce in pari misura; occorre pertanto trovare una soluzione di compromesso fra la potenza di calcolo disponibile in elaborazione e la precisione richiesta nei risultati.

## CAPITOLO 2

### Metodi di Parametrizzazione

---

#### 2.1 Introduzione

Come accennato nel corso del capitolo precedente, nei modelli numerici è spesso necessario semplificare alcuni termini delle equazioni primitive tramite l'uso di formule ricavate da dati sperimentali; tale processo è generalmente definito *processo di parametrizzazione*. Tuttavia bisogna notare che, contrariamente a ciò che si potrebbe pensare, ogni parametrizzazione non punta necessariamente ad una simulazione realistica degli aspetti fisici rappresentati dai termini non lineari del sistema, ma si propone di dare agli stessi una soluzione che risulti numericamente stabile.

I processi che vengono parametrizzati in un modello sono in tutto quattro: i flussi a scala di sottogriglia, i flussi radiativi di temperatura, le variazioni di temperatura e umidità legati ai passaggi di fase dell'acqua e gli scambi intercorrenti fra l'atmosfera e la superficie terrestre (Pielke, 2002).

##### 2.1.1 Stabilità Atmosferica

Generalmente, uno stesso termine non lineare può essere parametrizzato in più modi differenti a seconda delle condizioni prospettate dal calcolatore durante il processo di previsione per ciascun punto della griglia. In particolare, assume un ruolo di particolare importanza in tale ambito la condizione di *stabilità atmosferica*, in base alla quale è possibile definire l'intensità e la direzione dei moti verticali delle masse d'aria.

L'approccio comunemente usato per definire le condizioni di stabilità atmosferica in un dato istante nei modelli numerici è quello di riferirsi alle variazioni verticali della *temperatura potenziale equivalente* ( $\theta_E$ ) che risulta definita dalla seguente funzione:

$$\theta_E = \theta e^{\frac{HX}{\pi\theta}} \quad (2.1)$$

dove  $\pi$  è la funzione di Exner,  $\theta$  la temperatura virtuale,  $X$  il rapporto di mescolanza ed  $H$  il calore latente di condensazione ( $\approx 2500 \text{ J g m}^{-3}$ ).

In base al segno assunto dal gradiente della temperatura potenziale rispetto alla quota ( $\partial\theta_E/\partial z$ ) diventa possibile classificare l'atmosfera come *convettivamente stabile*, *instabile* o *neutra*. Ciascuna di queste tre condizioni porta ad un differente comportamento dei moti verticali e dei processi di condensazione e di trasporto del vapore acqueo, con la conseguente necessità di adottare parametrizzazioni differenti. Nel dettaglio, i fenomeni che si possono verificare sono:

- 
- In *atmosfera neutra* ( $\partial\theta_E/\partial z = 0$ ), assenza di moti convettivi e prevalenza della turbolenza meccanica sul trasporto del vapore d'acqua.
  - In *atmosfera stabile* ( $\partial\theta_E/\partial z > 0$ ), assenza di moti convettivi ascendenti e condensazione del vapore acqueo in caso di sollevamento forzato della massa d'aria se l'umidità specifica è superiore a quella richiesta per la saturazione.
  - In *atmosfera instabile* ( $\partial\theta_E/\partial z < 0$ ), comparsa di moti convettivi verticali che portano alla dispersione del vapore acqueo e delle altre sostanze volatili, con sviluppo di nuvole cumuliformi in presenza di masse d'aria umida prossime alla saturazione.

### 2.1.2 Il numero di gradiente di Richardson

Una seconda funzione che può essere adoperata per definire la stabilità convettiva dell'atmosfera è il *numero di gradiente di Richardson*, che viene espresso nel modo seguente:

$$R_i = \frac{g \partial\theta_m}{\theta_M \partial z} \left/ \left[ \left( \frac{\partial u_m}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_m}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \quad (2.2)$$

dove il termine  $\theta_M$  rappresenta una media ad ampia scala della temperatura potenziale, generalmente calcolata sul dominio dell'intero piano orizzontale indagato.

Il numero di gradiente di Richardson può essere interpretato in modo del tutto simile al gradiente di temperatura potenziale equivalente per conoscere lo stato di stabilità atmosferica. Risulta infatti:

- che lo strato atmosferico sia stabile se  $R_i > 0$ ;
- che lo strato atmosferico sia neutro se  $R_i = 0$ ;
- che lo strato atmosferico sia instabile se  $R_i < 0$ ;

Inoltre, diversi studi (Dutton, 1976) hanno dimostrato che quando il valore del gradiente di Richardson supera il valore di 0.25 la condizione di stabilità è sufficientemente intensa da annullare i processi turbolenti del flusso, rendendo lo stesso completamente laminare. Tale valore di 0.25 è anche detto *numero critico di Richardson* ed indicato con il termine  $R_{iC}$ .

Infine, in condizioni di instabilità atmosferica, l'uso del gradiente di Richardson consente una facile distinzione del regime di flusso in atto. Risulta infatti che:

- per  $R_i \leq -1$ , la produzione laterale di energia cinetica alla scala di sottogriglia è intensa e dà luogo ad un regime di *convezione forzata*;
- per  $R_i > -1$ , la produzione laterale di energia cinetica alla scala di sottogriglia è inferiore rispetto all'energia cinetica di galleggiamento, dando luogo ad un regime di *convezione libera*.

---

## 2.2 Flussi Turbolenti

I flussi turbolenti rappresentati dai termini di correlazione alla scala di sottogriglia costituiscono un elemento di rilievo per un'adeguata rappresentazione delle onde meccaniche e degli scambi di materia ed energia prodotti dall'interazione fra l'atmosfera e la superficie del suolo. La loro parametrizzazione è eseguita distintamente per la componente a carattere prevalentemente orizzontale e per quella a carattere verticale.

### 2.2.1 Flussi Turbolenti Orizzontali

L'attuale conoscenza dei fenomeni turbolenti nei movimenti orizzontali delle masse d'aria è limitata alle piccole scale spaziali; al contrario, ben poco è noto del loro comportamento e degli scambi ad essi associati sulle scale dell'ordine superiore al chilometro. Pertanto, le parametrizzazioni usate puntano più ad ottenere la stabilità numerica dei modelli che non una reale rappresentazione fisica.

I coefficienti di *viscosità turbolenta* ( $K_M$ ) espressi nel piano orizzontale, avendo le componenti  $u$  e  $v$  dimensioni confrontabili, sono considerati identici lungo tutte le direzioni e permettono di esprimere i rispettivi termini turbolenti come:

$$u'u' = -K_M \frac{\partial u_m}{\partial x} \quad u'v' = -K_M \frac{\partial u_m}{\partial y} \quad v'u' = -K_M \frac{\partial v_m}{\partial x} \quad v'v' = -K_M \frac{\partial v_m}{\partial y}$$

in cui il valore di  $K_M$  può essere calcolato usando lo schema di Smagorinsky (1963), per il quale questo è dato dal seguente prodotto:

$$K_M = \rho_M K_{MI}$$

dove  $\rho_M$  rappresenta la media del valore di densità calcolata sull'intero livello orizzontale del modello e il valore del termine  $K_{MI}$  viene scelto come il maggiore fra i risultati delle due seguenti equazioni:

$$K_{MI} = C_{xy} (\delta x)^2 \left[ \left( \frac{\partial v_m}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_m}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$K_{MI} = 0.075 (\delta x)^{3/4}$$

In quest'ultime,  $\delta x$  rappresenta il passo orizzontale della griglia del modello mentre  $C_{xy}$  rappresenta un termine di correzione il cui valore viene scelto arbitrariamente per evitare la degradazione del risultato da parte delle onde di lunghezza d'onda pari a  $2\delta x$  (Pielke, 2002).

La determinazione dei valori orizzontali del flusso turbolento di calore ( $K_H$ ) e del flusso turbolento di vapore acqueo ( $K_W$ ) possono essere calcolati in modo simile usando diversi valori del coefficiente  $C_{xy}$  o, come accade più di frequente, essere trascurati completamente conservando solo la componente media del trasporto per avvezione e la componente turbolenta verticale.

### 2.2.2 Flussi Turbolenti Verticali

In modo simile alla componente orizzontale, i flussi turbolenti lungo la verticale del modello sono parametrizzabili partendo dalle seguenti chiusure del primo ordine:

$$w'u' = -K_M \frac{\partial u_m}{\partial z} \quad w'v' = -K_M \frac{\partial v_m}{\partial z} \quad w'\theta' = -K_H \frac{\partial \theta_m}{\partial z} \quad w'q' = -K_W \frac{\partial q_m}{\partial z}$$

ma usando uno schema di calcolo dei *coefficienti di scambio* (K) variabile in base alla quota del piano orizzontale considerato.

La necessità di cambiare schema di calcolo in relazione alla quota deriva dagli effetti che l'attrito con il suolo ha sulla velocità dei flussi turbolenti. Il profilo della velocità orizzontale all'aumentare della quota dal suolo, infatti, tende ad approssimare l'integrale della seguente funzione, nota come equazione di Prandtl (Prandtl, 1932) e valida in condizione di stratificazione neutra dell'atmosfera:

$$V = (u^2 + v^2)^{0.5} = \frac{V_f}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (2.3)$$

In questa,  $z$  rappresenta l'altezza dalla superficie del suolo dello strato preso in considerazione,  $V_f$  è la *velocità d'attrito* dell'aria lungo il piano e  $\kappa$  è la *costante di von Karman*, il cui valore è stato stimato attraverso misurazioni in atmosfera come pari a circa 0.40 (Hogstrom, 1996; Bergmann, 1998).

Il termine  $z_0$  presente nell'equazione prende il nome di *lunghezza di rugosità superficiale* (*surface roughness length*) o anche di *rugosità aerodinamica* (*aerodynamic roughness*), e rappresenta l'altezza dal suolo entro la quale la velocità orizzontale del vento è azzerata a causa delle forze d'attrito viscoso con il suolo. Il suo valore, variabile in relazione alla tipologia di terreno e di copertura su esso presente, viene calcolato tramite osservazioni dirette dei profili verticali di velocità del vento; una serie di valori rappresentativi di questa costante, calcolati da Oke (1978) e Priestly (1959), sono riportati nella tabella 2.1. Inoltre, esistono anche formule per il calcolo approssimativo del valore di  $z_0$ , come quella fornita da Lettau (1969):

Tipo Superficie	Elevazione media	Rugosità aerodinamica
Campo di cereali	40 ÷ 200 cm	4 ÷ 20 cm
Erba corta	2 ÷ 10 cm	0.3 ÷ 1 cm
Erba lunga	25 ÷ 100 cm	4 ÷ 10 cm
Bosco di conifere	10 ÷ 60 m	1 ÷ 6 m
Bosco deciduo	10 ÷ 60 m	1 ÷ 6 m
Bosco nano	5 ÷ 10 m	0.5 ÷ 1 m
Ghiaccio	—	0.001 cm
Neve	—	0.005 ÷ 0.01 cm
Sabbia	—	0.03 cm
Terreno arato	—	0.1 ÷ 1 cm

**Tabella 2.1:** Valori rappresentativi della rugosità aerodinamica determinati da Oke e Priestly.

---


$$z_0 = 0.5 H \frac{P}{A}$$

dove  $H$  è l'altezza media degli ostacoli presenti al suolo,  $P$  l'area totale del profilo degli ostacoli rispetto alla direzione del vento ed  $A$  l'estensione in piano dell'area su cui si intende stimare la costante.

Benché alcuni studi abbiano dimostrato la validità dell'equazione di Prandtl alle basse quote anche in assenza di una perfetta stratificazione neutra (Carl *et al.*, 1973), quando l'atmosfera è in condizioni di stratificazione stabile o instabile (cioè, con  $Ri \neq 0$ ) è opportuno sostituire la 2.3 con:

$$V = \frac{V_f}{\kappa} \ln \left[ \frac{z}{z_0} - \psi_M(z/L) \right] \quad (2.4)$$

in cui  $L$  rappresenta la *lunghezza di Monin*, espressa da:

$$L = \frac{\theta_M V_f^3}{g \kappa (w' \theta')} \quad (2.5)$$

Il termine  $\psi_M$ , che in condizioni di stratificazione neutra dell'atmosfera è pari a 0, corregge la funzione di Prandtl deviandone il profilo verticale per adattarlo ad un'atmosfera non neutra e può essere calcolato come:

$$\psi_M = \int_0^{z/L} \frac{1 - \Phi_M}{z/L} d(z/L) \quad (2.6)$$

dove  $\Phi_M$ , o *deformazione adimensionale del vento*, è determinata da:

$$\Phi_M = \frac{\kappa z \partial V}{V_f \partial z} \quad (2.7)$$

La lunghezza di Monin-Obukhov, dal punto di vista fisico, può intendersi come l'altezza alla quale la turbolenza meccanica eguaglia quella di origine termica ed il suo rapporto con la quota,  $z/L$ , può essere usato per valutare la stabilità atmosferica secondo gli stessi criteri dati per il gradiente di Richardson (Pielke, 2002). Il calcolo del suo valore, come si può dedurre dalla 2.5 e dalla 2.4, richiede tuttavia la conoscenza pregressa sia della velocità d'attrito,  $V_f$ , che della diffusione termica turbolenta,  $w' \theta'$ , ed una sua soluzione analitica necessita di un complesso processo iterativo.

A questo punto è opportuno dare una prima definizione dei diversi *coefficienti di scambio* ( $K$ ). Questi non rappresentano alcuna proprietà reale del fluido ma un parametro correlato alla velocità del flusso e, attraverso la teoria di *similarità di Monin-Obukhov* (Holton, 1992), sono esprimibili come:

$$K_M = \frac{l^2}{\Phi_M^2} \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \quad K_H = \frac{l^2}{\Phi_M \Phi_H} \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|$$

dove  $l$  rappresenta il prodotto della costante di von Karman ( $\kappa$ ) per l'altezza media dello strato ( $z$ ) e  $\Phi_H$ , similmente a  $\Phi_M$ , la *deformazione adimensionale della temperatura potenziale* definita da:

$$\Phi_H = \frac{\kappa z \partial \theta_m}{\theta_f \partial z} \quad (2.8)$$

con  $\theta_f$  che esprime il *flusso termico turbolento*. Quest'ultimo può essere calcolato in modo simile alla velocità d'attrito e, come questa, sarà correlato alla lunghezza di Monin; risulta infatti:

$$\theta = \frac{\theta_f}{\kappa} \ln \left[ \frac{z}{z_0} - \Psi_H(z/L) \right]$$

$$\Psi_H = \int_0^{z/L} \frac{1 - \Phi_H}{z/L} d(z/L)$$

Poiché, in base alla definizione di chiusura data ad inizio paragrafo, il termine di flusso a sottoscala  $w'\theta'$  risulta parametrizzabile in:

$$w'\theta' = -K_H \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = - \frac{l^2}{\Phi_M \Phi_H} \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \frac{\partial \theta_m}{\partial z}$$

si osserva, per sostituzione nella 2.5, che i termini  $\Phi_M$  e  $\Phi_H$  dipendono dalla lunghezza di Monin e che quest'ultima è a sua volta dipendente dal prodotto  $\Phi_M \Phi_H$ . Ciò impedisce una soluzione analitica delle due equazioni essendo le stesse in forma implicita.

Uno schema per la soluzione analitica dei termini  $\Phi_M^{-2}$  e  $\Phi_M \Phi_H^{-1}$  viene proposto da Louis (1979) e consta del seguente insieme di due coppie di funzioni:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_M^{-2} &= 1 - \frac{10 Ri}{1 + C_H (-Ri)^{0.5}} \\ \Phi_M \Phi_H^{-1} &= 1 - \frac{15 Ri}{1 + C_H (-Ri)^{0.5}} \end{aligned} \right\} \text{ per } Ri < 0 \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_M^{-2} &= \frac{1}{1 + 10 Ri (1 + 5 Ri)^{-0.5}} \\ \Phi_M \Phi_H^{-1} &= \frac{1}{1 + 15 Ri (1 + 5 Ri)^{-0.5}} \end{aligned} \right\} \text{ per } Ri > 0 \quad (2.10)$$

dove il termine  $C_H$  viene definito in funzione della distanza dal suolo come:

$$C_H = 75 \frac{\kappa^2 (1 + z/z_0)^{0.5}}{[\ln(1 + z/z_0)]^2} \quad \text{per } z < h_S \quad (2.11)$$

$$C_H = \frac{(\kappa z)^2}{3 z^2} \quad \text{per } z > h_S \quad (2.12)$$

avendo indicato con  $h_S$  la quota limite dello *strato di superficie* definito nel paragrafo 2.4.4. Questo schema, pur rappresentando un'approssimazione, consente di risolvere con buona precisione i flussi a scala di sottogriglia attraverso uno schema analitico di facile applicazione; il suo solo limite riguarda

---

una sovrastima della velocità di flusso laminare in condizione di atmosfera stabile per quote superiori a quello dello strato di transizione definito nel paragrafo 2.4.5 (Louis *et al.*, 1982).

Un'ultima nota merita il coefficiente di scambio  $K_w$ , che finora non è stato trattato espressamente. In realtà, sono pochi i modelli che adottano una vera parametrizzazione di questo termine in quanto, come dimostrato da diversi studi (Yamada, 1977), gli scambi di umidità e di temperatura sono operati quasi esclusivamente dai fenomeni di avvezione e, pertanto, seguono comportamenti simili; l'unica eccezione a tale assunto si verifica quando le due quantità presentano gradienti verticali opposti (Warhaft, 1976), ma anche in questo caso le differenze riscontrabili negli scambi a scala di sottogriglia hanno ordini di grandezza molto piccoli. Ne consegue che è possibile assegnare al coefficiente  $K_w$  lo stesso valore del coefficiente  $K_H$ .

### 2.2.3 Scambi turbolenti con il suolo

Lo strato prossimo al suolo nel quale si verificano gli scambi molecolari fra atmosfera e superficie terrestre viene generalmente definito *strato viscoso* ed è situato interamente sotto la quota definita dalla rugosità aereodinamica ( $z_0$ ). Sulla base di diversi studi (Zilitinkevich, 1970; Deardorff, 1974) è possibile correlare la temperatura e l'umidità registrate sulla superficie superiore di questo strato con quella del suolo immediatamente sottostante con:

$$\begin{aligned}\theta_{z_0} &= \theta_S + 0.0962 \frac{\theta_f}{\kappa} \left( \frac{V_f z_0}{\nu} \right)^{0.45} \\ q_{z_0} &= q_S + 0.0962 \frac{q_f}{\kappa} \left( \frac{V_f z_0}{\nu} \right)^{0.45}\end{aligned}\tag{2.13}$$

dove  $\nu$  è la *viscosità cinematica* dell'aria ( $\approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ).

Le componenti di velocità del vento  $u$ ,  $v$  e  $w$  in questo strato, dato il valore nullo della funzione di Prandtl per le quote inferiori o pari a  $z_0$ , sono tutte considerate pari a zero; inoltre, per esso è possibile considerare trascurabili le variazioni della pressione  $p$  e della funzione di Exner  $\pi$  (Pielke, 2002).

### 2.2.4 Flussi verticali presso il suolo

Lo strato che si estende a partire dalla quota definita dalla rugosità aereodinamica fino ad una altezza ( $h_S$ ) variabile fra i 10 ed i 100 metri prende il nome di *strato di superficie*. In esso tutti i flussi alla scala di sottogriglia si intendono non influenzati dalla forza di Coriolis e la loro parametrizzazione avviene lungo un numero discreto di superfici piane considerate orizzontalmente omogenee e stabili.

Fra le forme più comunemente adottate per la parametrizzazione di questo strato, quella riportata da Hogstrom (1996) può essere usata per ottenere direttamente la soluzione dei valori di  $\psi_M$ ,  $\Phi_M$ ,  $\psi_H$  e  $\Phi_H$  tramite una serie di relazioni empiriche scelte in base al rapporto fra la quota dello strato considerato ( $z$ )

e la lunghezza di Monin ( $L$ ):

$$\begin{aligned}
 \Psi_M &= \begin{cases} 2 \ln [(1 + a) / 2] + \ln [1 + (a^2 / 2)] - 2 \tan^{-1} a + 1.5707 & z/L \leq 0 \\ -5.3a & 0 < z/L \leq 0.5 \end{cases} \\
 \Psi_H &= \begin{cases} 2 \ln [(1 + b^2) / 2] & z/L \leq 0 \\ -8.0b & 0 < z/L \leq 0.5 \end{cases} \\
 \Phi_M &= \begin{cases} (1 - 19z/L)^{-0.25} & z/L \leq 0 \\ 1 + 5.3z/L & 0 < z/L \leq 0.5 \end{cases} \\
 \Phi_H &= \begin{cases} (1 - 11.6z/L)^{-0.25} & z/L \leq 0 \\ 1 + 8.0z/L & 0 < z/L \leq 0.5 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

posto che  $a = (1 - 19z/L)^{0.25}$  e  $b = (1 - 11.6z/L)^{0.25}$ .

### 2.2.5 Flussi verticali nello strato di transizione

Lo *strato di transizione* si estende dallo strato di superficie fino ad un'altezza ( $h_T$ ) generalmente posta fra i 100 metri ed i primi chilometri di quota; in esso il vento tende a cambiare di direzione e di intensità, fino a raggiungere la *velocità di flusso libero* nel momento in cui il trasferimento di massa ad opera dei flussi a scala di sottogriglia diventa trascurabile.

Generalmente l'altezza  $h_T$  che determina l'estensione dello stato di transizione è associata ad un tipo di inversione termica che, come discusso da Oke (1978), può avere origine:

- dal raffreddamento notturno o da quello causato da un forte tasso di evaporazione;
- dal riscaldamento diurno del suolo o da quello causato da fenomeni di subsidenza;
- da fenomeni di avvezione indotti dall'arrivo di un fronte.

In assenza di inversione, invece, è possibile considerare il valore di  $h_T$  proporzionale al rapporto fra la velocità d'attrito e la costante di Coriolis (Blackadar e Tennekes, 1968).

Relativamente a questo particolare strato, una parametrizzazione alternativa a quella di Louis per i casi di stratificazione stabile dell'atmosfera è stata proposta da Blackadar (1979). In questa i valori dei coefficienti  $K_M$  e  $K_H$  sono pari a zero se il gradiente di Richardson è superiore al numero critico ( $Ri_C \approx 0.25$ ), mentre vengono calcolati dalla seguente funzione in caso contrario:

$$K_M = K_H = 1.1 (Ri_C - Ri) l^2 |\partial V / \partial z| / Ri \tag{2.15}$$

Il valore di  $l$ , come proposto da McNider (1981), può essere in questa sostituito con una costante pari a 70 se la quota media dello strato è superiore ai 200 metri.

Come provato da numerosi anni di osservazione per mezzo di radiosonde, l'andamento del vettore di velocità orizzontale lungo la verticale dello strato di transizione segue un profilo ad elica, detto *profilo di Ekman*, che si origina dalle variazioni nell'equilibrio delle tre forze principali che determinano il moto

---

delle masse d'aria: quella del gradiente di pressione, quella dell'attrito al suolo e quella derivante dalla rotazione terrestre. L'andamento di tale profilo può essere espresso in forma matematica ed impiegato al fine di stimare il vento a quote specifiche mediante la seguente coppia di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w' u'}{\partial z} - f(v - v_g) &= 0 \\ - \frac{\partial w' v'}{\partial z} - f(u - u_g) &= 0 \end{aligned}$$

che, usando la parametrizzazione introdotta per i flussi a scala di sottogriglia, diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} K_M \frac{\partial u}{\partial z} - f(v - v_g) &= 0 \\ - \frac{\partial}{\partial z} K_M \frac{\partial v}{\partial z} - f(u - u_g) &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione analitica per queste due funzioni, originariamente formulata da Ekman nel caso dei flussi superficiali oceanici (Ekman, 1905), è stata successivamente estesa anche al campo atmosferico e viene espressa da:

$$\begin{aligned} u &= u_g [1 - e^{-\gamma z} \cos(\gamma z)] \\ v &= u_g e^{-\gamma z} \sin(\gamma z) \\ \gamma &= (f / 2K_M)^{0.5} \end{aligned} \tag{2.16}$$

### 2.2.6 Flussi negli strati superiori

Superata la quota dello *strato di transizione* i flussi turbolenti possono considerarsi nulli e non essere parametrizzati, conservando solo le componenti medie del moto espresse nell'equazione 1.35 e seguenti. La possibilità di una tale semplificazione è dovuta principalmente a due motivi: il primo è la distanza dal terreno, che permette di considerare quasi nulli gli effetti meccanici delle forze d'attrito, ed il secondo la forte velocità media dei venti alle quote superiori, che tende a rendere trascurabili i flussi turbolenti rispetto a quelli laminari.

---

### 2.3 Flussi d'Energia Radiante

Il termine  $S_0$  presente nell'equazione di conservazione del calore (1.16) rappresenta le variazioni di temperatura associate al guadagno ed alla perdita di energia termica da parte degli strati atmosferici conseguenti, principalmente, agli scambi radiativi e dai passaggi di stato del vapore acqueo. In questo paragrafo sarà illustrato il processo di parametrizzazione dei primi, ponendo tuttavia alcune assunzioni comunemente impiegate nei modelli numerici.

L'assunzione più comune, come accade per la parametrizzazione dei flussi turbolenti, è che i flussi radiativi siano del tutto trascurabili lungo il piano orizzontale rispetto a quelli che si verificano lungo la verticale. Una tale assunzione è generalmente valida in quanto molte delle proprietà atmosferiche, fra cui la densità, la concentrazione di vapore acqueo e di anidride carbonica, presentano un forte gradiente verticale che favorisce la trasmissione d'energia lungo tale direzione (Pielke, 2002). Pertanto, una prima funzione utile per il calcolo del parametro  $S_0$  relativamente alla sola componente radiativa ( $S_{0R}$ ) risulta essere:

$$S_{0R} = \left. \frac{\partial T_m}{\partial t} \right|_{\text{rad}} = - \frac{1}{\rho_m c_p} \frac{\partial R_S}{\partial z}$$

dove  $R_S$  è la variazione complessiva di radiazione assorbita dall'atmosfera. Tale variazione, come sarà di seguito dimostrato, è determinata principalmente dal contributo della radiazione proveniente dal Sole, indicata come *radiazione ad onda corta* ( $R_{Ssw}$ ), e della radiazione proveniente dalla superficie terrestre, indicata come *radiazione ad onda lunga* ( $R_{Slw}$ ). Ciò permette di riscrivere la precedente come:

$$S_{0R} = - \frac{1}{\rho_m c_p} \left[ \frac{\partial R_{Slw}}{\partial z} + \frac{\partial R_{Ssw}}{\partial z} \right] \quad (2.17)$$

permettendo di adottare due distinti metodi di parametrizzazione per ciascuna di queste componenti.

Il motivo per cui è possibile trattare separatamente la radiazione di origine solare e quelle prodotta dalla Terra può essere facilmente compreso attraverso l'applicazione della *legge di Plank*, in base alla quale la massima intensità di radiazione elettromagnetica che può essere prodotta da un corpo è definita, in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ , da (Coulson, 1975):

$$B_\lambda(T) = 1.191 \times 10^{-16} \left/ \left[ \lambda^5 (e^{k/\lambda T} - 1) \right] \right.$$

dove  $T$  è la temperatura del corpo e  $k$  una costante fondamentale del valore di  $1.4388 \times 10^{-2}$  m K (NBS, 1974). Tracciando i valori della funzione per tutte le lunghezze d'onda e relativamente alle temperature di 6000K e di 290K, che rappresentano rispettivamente le medie della superficie solare e della superficie terrestre, si ottengono infatti due curve (*spettri di emissione elettromagnetica*) la cui sovrapposizione è trascurabile, come mostrato in figura 2.1 (List, 1971).

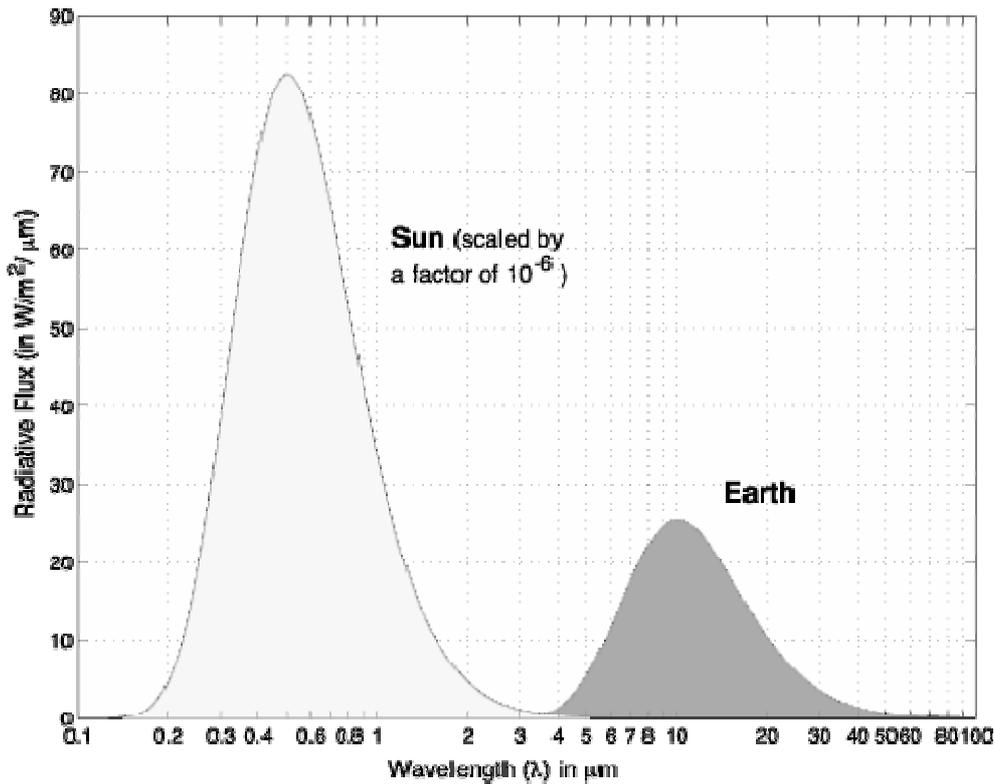


Figura 2.1: Spettri di emissione elettromagnetica relativi alla Terra ed al Sole (List, 1971).

### 2.3.1 Radiazione ad onda corta

La radiazione ad onda corta viene assorbita dall'atmosfera mediante irraggiamento diretto o diffuso; nel primo caso, l'onda elettromagnetica segue una traiettoria diretta fino al punto ricevente, mentre nel secondo caso viene riflessa o deviata una o più volte lungo il proprio percorso perdendo una parte della propria energia iniziale. Complessivamente, la quantità di energia solare che raggiunge una superficie piana dell'alta atmosfera in un dato istante può essere calcolata come:

$$R_{S_{sw}\downarrow} = \begin{cases} S_0 D \cos Z & \text{per } |Z| < 90^\circ \\ 0 & \text{per } |Z| \geq 90^\circ \end{cases} \quad (2.18)$$

dove  $S_0$  è la *costante solare* ( $\approx 1376 \text{ W m}^{-2}$ ),  $Z$  l'angolo formato dal sole rispetto alla verticale del luogo (*angolo zenitale*) e  $D$  il rapporto fra la distanza media Terra-Sole e la distanza effettiva registrabile nello stesso periodo dell'anno, che può essere calcolato come (Paltridge e Platt, 1976):

$$D = 1.0001 + 0.0342 \cos(d_0) + 0.0013 \sin(d_0) + 0.0007 \cos(2d_0) + 0.0001 \sin(2d_0)$$

con  $d_0$  pari al prodotto del giorno giuliano dell'anno per  $2\pi/365$ . L'esatto valore dell'angolo zenitale, che varia rispetto al periodo dell'anno, al luogo ed all'ora del giorno, può essere invece calcolato come:

$$\cos Z = \cos \varphi \cos \delta \cos h + \sin \varphi \sin \delta$$

dove  $\varphi$  è la latitudine del luogo,  $h$  l'angolo orario e  $\delta$  la declinazione solare. Questi ultimi due parametri

sono espressi dalle funzioni (Paltridge e Platt, 1976):

$$\delta = 0.0069 - 0.3999 \cos(d_0) + 0.0703 \sin(d_0) + 0.0068 \cos(2d_0) + 0.0009 \sin(2d_0)$$

$$h = \arccos [ - \tan(\delta) \tan(\varphi) ]$$

In presenza di condizioni di cielo sereno ed assenza di sostanze inquinanti, i principali elementi che assorbono l'energia della radiazione ad onda corta diretta sono il vapore acqueo e l'ossigeno biatomico. Una formulazione empirica dell'entità di tale assorbimento è data dalle seguente equazione, che mostra una notevole precisione per angoli zenitali inferiori agli 80° (McDonald, 1960; McCumber, 1980):

$$a_q = 0.077 (\delta P / \cos Z)^{0.3} \quad (2.19)$$

In questa il termine  $\delta P$  definisce la *lunghezza del cammino ottico* rispetto al vapore acqueo all'interno di uno strato d'aria di spessore pari a  $\delta z$  e viene calcolato attraverso il seguente integrale:

$$\delta P = \int_z^{z+\delta z} \rho q dz \quad (2.20)$$

il cui risultato deve essere espresso in grammi per centimetro quadro. L'equazione 2.18, pertanto, può essere riscritta nella forma seguente:

$$R_{S_{sw}\downarrow} = \begin{cases} a_q S_0 D \cos Z & \text{per } |Z < 90^\circ| \\ 0 & \text{per } |Z \geq 90^\circ| \end{cases} \quad (2.21)$$

Bisogna notare, comunque, che anche se tale parametrizzazione è comunemente impiegata nei modelli a mesoscala non tiene conto del riscaldamento prodotto dalle radiazioni ad onda lunga che si originano per riflessione da superfici quali acqua, neve e corpi nuvolosi.

La radiazione ad onda corta che dalla terra viene emessa verso lo spazio, diversamente, si costituisce dalla porzione di radiazione incidente riflessa dalla superficie terrestre e diffusa dalle molecole d'aria; più in particolare, il processo di diffusione della radiazione solare incidente, in assenza di nuvole e con cielo limpido, si manifesta come una riflessione multipla in tutte le direzioni (*isentropica*) a causa dell'interazione con le particelle di gas e di pulviscolo presenti in atmosfera, originando quella che viene definita come *diffusione di Rayleigh* e che determina il colore azzurro del cielo. L'energia assorbita e trasmessa in conseguenza di tale fenomeno può essere calcolata con la seguente equazione (Kondratyev, 1969):

$$t = 1.03 - 0.08 \sqrt{(9.49 \times 10^{-6} p + 0.051) / \cos Z} \quad (2.22)$$

dove  $p$  rappresenta il valore della pressione atmosferica nello strato considerato.

La riflessione della radiazione solare da parte della superficie terrestre, invece, avviene in misura variabile in base al tipo di terreno e di copertura su essa presente, secondo un coefficiente di proporzione detto *albedo* ( $A$ ) che può essere determinato attraverso misurazioni dirette; alcuni valori caratteristici di

questo coefficiente sono dati in tabella 2.2 (Oke, 1973; Lee, 1978). Tenendo conto di questo processo e del precedente, la radiazione complessivamente riflessa verso lo spazio risulta pari a:

$$R_{S_{sw}}\uparrow = A (t - a_q) R_{S_{sw}}\downarrow \quad (2.23)$$

Per ottenere il termine relativo la radiazione ad onda corta nella 2.17 occorre calcolare il bilancio fra la radiazione incidente,  $R_{S_{sw}}\downarrow$ , e quella riflessa,  $R_{S_{sw}}\uparrow$ , integrandolo per l'altezza dello strato d'aria considerato. Risulterà pertanto che:

$$\frac{\partial R_{S_{sw}}\downarrow}{\partial z} = - S_0 D \cos Z \frac{\partial a_q}{\partial z}$$

$$\frac{\partial R_{S_{sw}}\uparrow}{\partial z} = - R_{S_{sw}}\uparrow \frac{\partial a_q}{\partial z}$$

da cui:

$$\frac{\partial R_{S_{sw}}}{\partial z} = \frac{\partial R_{S_{sw}}\uparrow}{\partial z} - \frac{\partial R_{S_{sw}}\downarrow}{\partial z}$$

Tipo Superficie	Albedo
Acqua	$- 0.0139 + 0.0467 \tan (Z)$
Area urbana	$0.10 \div 0.30$
Argilla	$0.10 \div 0.20$
Campo agricolo	$0.18 \div 0.25$
Duna sabbiosa	$0.35 \div 0.45$
Erba	$0.16 \div 0.26$
Foresta decidua	$0.15 \div 0.20$
Ghiacciaio	$0.20 \div 0.40$
Neve	$0.40 \div 0.90$
Roccia nuda	$0.05 \div 0.15$
Tundra	$0.15 \div 0.20$

**Tabella 2.2:** Valori rappresentativi della albedo per diversi tipi di superficie (Oke, 1973; Lee, 1978).

### 2.3.2 Radiazione ad onda lunga

In assenza di nubi e con cielo limpido, la diffusione della radiazione ad onda lunga è trascurabile a confronto della sua emissione e del suo assorbimento da parte degli elementi costituenti l'atmosfera, ed in particolare da parte dell'anidride carbonica e del vapore acqueo (Liou, 1980). Uno schema che tiene conto di queste particolari condizioni per la parametrizzazione del bilancio complessivo della radiazione ad onda lunga (o *radiazione infrarossa*, come viene più comunemente indicata) è stato sviluppato da Manher e Pielke (1977) ed è basato sulla seguente equazione:

$$\frac{\partial R_{S_{lw}}}{\partial z} = \left[ \frac{\sigma \partial \epsilon(u, T)}{\partial z} (T_z^4 - T_g^4) - \frac{\sigma \partial \epsilon(u_T - u, T)}{\partial z} (T_t^4 - T_z^4) \right] \quad (2.24)$$

dove  $T_g$ ,  $T_z$  e  $T_t$  rappresentano le temperature, rispettivamente, del suolo, dello strato osservato e dello strato limite superiore (cioè, quello situato all'estremo superiore della griglia usata nel modello), mentre  $\sigma$  è la *costante di Stefan-Boltzman* ( $\approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ).

La funzione  $\epsilon(u, T)$  nella precedente equazione esprime l'*emissività ad ampio spettro* dell'atmosfera ed, ai fini della parametrizzazione in un modello numerico, può essere stimata con buona precisione da una somma corretta delle emissività dell'anidride carbonica e del vapore acqueo calcolate alla pressione dello strato atmosferico in esame (Stanley e Jurica, 1970):

$$\epsilon(u, T) = \epsilon_q(\delta P) + \epsilon_{\text{co}_2}(\delta H) - (0.075 \pm 0.025) \quad (2.25)$$

In questa l'emissività ad ampio spettro dell'anidride carbonica  $\epsilon_{\text{co}_2}(u, T)$  può essere calcolata usando la seguente funzione (Kondratyev, 1969):

$$\epsilon_{\text{co}_2}(u, T) \approx \epsilon_{\text{co}_2}(\delta H) = 0.185 \left[ 1 - e^{-0.39\delta H'} \right] \quad (2.26)$$

dove:

$$\delta H' = \delta H^{0.4} = [0.252 - (p_0 - p)]^{0.4}$$

con  $p$  e  $p_0$  che rappresentano, rispettivamente, le pressioni espresse in millibar all'altezza dello strato considerato ed al livello del mare. In modo simile, è possibile calcolare il valore di emissività del vapore acqueo, ma la funzione impiegata viene in questo caso scelta in relazione alla lunghezza del cammino ottico (espressa dalla 2.20) secondo il seguente schema (Kuhn 1963; Jacobs *et al.*, 1974):

$$\epsilon_q(u, T) \approx \epsilon_q(\delta P) = \begin{cases} 0.113 \log_{10}(1 + 12.63\delta P) & \text{per } \log_{10}(\delta P) \leq -4.0 \\ 0.104 \log_{10}(\delta P) + 0.440 & \text{per } -4.0 < \log_{10}(\delta P) \leq -3.0 \\ 0.121 \log_{10}(\delta P) + 0.491 & \text{per } -3.0 < \log_{10}(\delta P) \leq -1.5 \\ 0.146 \log_{10}(\delta P) + 0.527 & \text{per } -1.5 < \log_{10}(\delta P) \leq -1.0 \\ 0.161 \log_{10}(\delta P) + 0.542 & \text{per } -1.0 < \log_{10}(\delta P) \leq 0 \\ 0.136 \log_{10}(\delta P) + 0.542 & \text{per } \log_{10}(\delta P) > 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Paltridge e Platt propongono la seguente formula approssimativa per il calcolo del raffreddamento giornaliero dovuto alla perdita di radiazione infrarossa (Paltridge e Platt, 1976):

$$\frac{1}{\rho_m c_p} \frac{\partial R_{S_{lw}}}{\partial z} = - [ 0.017 T + 1.8 ] \quad (2.28)$$

Questo può essere adoperato, con un margine d'errore di circa 0.33°C, in condizioni di cielo sereno, con atmosfera priva di forti disomogeneità nella distribuzione delle temperature e del vapore acqueo e per intervalli di temperatura compresi fra i -90°C ed i +30°C.

### 2.3.3 Influenza della copertura nuvolosa

La presenza di copertura nuvolosa agisce in modo significativo ma differente sulle lunghezze d'onda fino ad ora trattate. Le onde corte vengono parzialmente riflesse verso lo spazio quando incontrano la superficie superiore di un corpo nuvoloso e ciò riduce la loro capacità di riscaldare gli strati inferiori ed il suolo; nello stesso tempo, però, le onde lunghe provenienti dal basso incontrano nel corpo delle nubi un cammino ottico superiore alla norma a causa del forte contenuto di vapore acqueo, con conseguente aumento della quantità di energia che viene trasformata in calore (Stephens, 1978a; Sasamori, 1972).

Stephens propone uno schema di parametrizzazione per la radiazione ad onda lunga per strati d'aria aventi un contenuto frazionario di corpi nuvolosi pari  $\sigma_C$  definito dalla seguente equazione (Stephens, 1978b):

$$\frac{\partial R_{S_{lw}}}{\partial z} = \sigma_C \left[ \frac{\partial R_{S_{lw}\uparrow'}}{\partial z} - \frac{\partial R_{S_{lw}\downarrow'}}{\partial z} \right] + (1 - \sigma_C) \left[ \frac{\partial R_{S_{lw}\uparrow}}{\partial z} - \frac{\partial R_{S_{lw}\downarrow}}{\partial z} \right] \quad (2.29)$$

dove, facendo riferimento alla 2.24, risulta:

$$\left[ \frac{\partial R_{S_{lw}\uparrow'}}{\partial z} - \frac{\partial R_{S_{lw}\downarrow'}}{\partial z} \right] = \left[ \frac{\sigma \partial \epsilon(u, T)}{\partial z} (T_z^4 - T_g^4) - \frac{\sigma \partial \epsilon(u_T - u, T)}{\partial z} (T_t^4 - T_z^4) \right]$$

mentre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{S_{lw}\uparrow'}}{\partial z} &= \frac{a\uparrow \partial W\uparrow}{\partial z} e^{-a\uparrow - W\uparrow} \left[ \sigma T^4 - R_{SCT_{lw}\uparrow} \right] + \frac{\epsilon\uparrow \partial \sigma T^4}{\partial z} \\ \frac{\partial R_{S_{lw}\downarrow'}}{\partial z} &= \frac{a\downarrow \partial W\downarrow}{\partial z} e^{-a\downarrow - W\downarrow} \left[ \sigma T^4 - R_{SCB_{lw}\downarrow} \right] + \frac{\epsilon\downarrow \partial \sigma T^4}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Quest'ultima coppia di equazioni, calcola la quantità di radiazione ad onda lunga emessa dalla superficie superiore ed inferiore di un corpo nuvoloso a partire dalla quantità di radiazione che sarebbe presente sulle stesse superfici in assenza dello stesso ( $R_{SCT_{lw}\uparrow}$  e  $R_{SCB_{lw}\downarrow}$ ) e dal loro contenuto d'acqua ( $W\uparrow$  e  $W\downarrow$ ). I termini  $a\uparrow$  e  $a\downarrow$  rappresentano due coefficienti empirici pari, rispettivamente, a 0.130 e 0.158 m<sup>2</sup>g<sup>-1</sup>.

<sup>1</sup>, mentre i valori di emissività impiegati sono calcolati come:

$$\epsilon_{\uparrow} = 1 - e^{-a_{\uparrow} W_{\uparrow}} \quad \epsilon_{\downarrow} = 1 - e^{-a_{\downarrow} W_{\downarrow}}$$

Per la radiazione ad onda corta, la presenza di corpi nuvolosi accentua il fenomeno della diffusione, che in presenza di particellato delle dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda viene spesso indicata con il termine di *diffusione di Mie (Mie scattering)*. Tale forma di diffusione si compone di una serie di riflessioni multiple all'interno dell'ammasso nuvoloso che porta ad un aumento dell'energia trasferita nello strato d'aria e ad una riduzione della radiazione incidente negli strati inferiori. In base allo schema proposto da Stephens (1978b), di tutte le frequenze della radiazione ad onda corta solo quelle aventi una lunghezza d'onda superiore a 0.75  $\mu\text{m}$  contribuiscono in modo apprezzabile al riscaldamento degli strati d'aria occupati da corpi nuvolosi, mentre le restanti possono ritenersi riflesse dalla superficie superiore degli stessi senza scambio d'energia; tenendo conto di tale assunzione, la 2.9 può essere riscritta in:

$$R_{S_{sw}} = t_c (t - a_q) R_{S_{sw}\downarrow} \quad (2.31)$$

mentre il riscaldamento dovuto al passaggio delle onde a maggiore lunghezza può essere calcolato per mezzo dell'equazione:

$$\frac{\partial R_{S_{sw}}}{\partial z} = (t - a_q) R_{S_{sw}\downarrow} \frac{\partial a_c}{\partial z} \quad (2.32)$$

In queste i termini  $t_c$  e  $a_c$  vengono calcolati attraverso una serie di costanti fornite in tabelle dallo stesso autore e variabili in base all'angolo zenitale ed alla quantità d'acqua stimata all'interno della nube; le funzioni usate per il calcolo, inoltre, variano in base alla lunghezza d'onda considerata:

$$\left. \begin{aligned} r_c &= \frac{K_1 \tau / \cos Z}{1 + K_1 \tau / \cos Z} \\ t_c &= 1 - r_c \end{aligned} \right\} 0.30 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.75 \mu\text{m}$$

$$\left. \begin{aligned} r_c &= (u^2 - 1) (e^{\tau} - e^{-\tau} 1) / R_c \\ t_c &= 4u / R_c \\ a_c &= 1 - t_c - r_c \\ u^2 &= (1 - K_2 + 2K_3 K_2) / (1 - K_2) \end{aligned} \right\} 0.75 \mu\text{m} < \lambda \leq 4.0 \mu\text{m}$$

dove  $\tau$  rappresenta lo spessore ottico determinato in forma empirica da Stephens (1978b) come:

$$\log_{10} \tau = \begin{cases} 0.26 + 1.70 \ln (\log_{10} \delta P) & 0.30 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.75 \mu\text{m} \\ 0.34 + 1.65 \ln (\log_{10} \delta P) & 0.75 \mu\text{m} < \lambda \leq 4.0 \mu\text{m} \end{cases}$$

---

## 2.4 Processi Termodinamici del Vapore Acqueo

La parametrizzazione dei processi termodinamici associati al trasporto ed al passaggio di stato del vapore acqueo è uno dei problemi attualmente più discussi nello sviluppo di modelli numerici a qualsiasi scala e ciò è dovuto principalmente alla carenza di adeguati studi di laboratorio ed alla difficoltà di riprodurre tali processi in condizioni simili a quelle atmosferiche. In conseguenza di queste limitazioni, sono stati sviluppati nel corso degli anni diversi schemi per parametrizzare la variazione del vapore acqueo a seguito dei passaggi di stato ( $S_q$ ) e degli scambi termici dovuti ai passaggi di fase (inclusi nel termine  $S_\theta$ ), ma i cui limiti maggiori risultano i seguenti:

- l'assenza di una solida base scientifica;
- l'impossibilità di trattare più forme di processi convettivi a scala temporale diversa (per esempio, variazioni di tipo stagionale e diurno);
- l'assunzione che tutti i processi convettivi si verifichino a scala di sottogriglia, senza tenere conto che alcuni di questi possono presentarsi su scale spaziali più estese (come i fenomeni di subsidenza);

Nonostante questi limiti, la parametrizzazione dei fenomeni associati al vapore acqueo non può essere trascurata per la notevole importanza che essa assume nella previsione degli eventi piovosi.

### 2.4.1 Parametrizzazione in Atmosfera Stabile

Il comportamento del vapore acqueo tende a differire a seconda che l'atmosfera si trovi in condizioni stabili ( $\partial\theta_E/\partial z > 0$ ) o non stabili ( $\partial\theta_E/\partial z \leq 0$ ) e ciò comporta la necessità di adottare parametrizzazioni differenti nei due casi (Pielke, 2002).

Una massa d'aria non satura che venga sollevata fino al raggiungimento della saturazione in una situazione di atmosfera stabile determina la formazione di nuvole stratiformi se la condizione di stabilità persiste lungo tutta la colonna d'aria, o di nubi cumuliformi se localmente si ha il passaggio ad una condizione d'instabilità; a seconda di quale sia la situazione riscontrata, la probabilità ed il meccanismo di formazione di eventuali precipitazioni tenderà a differire. Le precipitazioni da nubi stratiformi, infatti, sono favorite solo in presenza di deboli correnti verticali che permettono alle gocce formatesi sulla cima delle nubi di cadere ed accrescersi verso il basso; viceversa, le precipitazioni dalle nubi cumuliformi sono favorite da forti correnti ascendenti, che trasportano le gocce raccolte alla base delle stesse verso quote più alte dove si raffreddano e si accrescono per contatto con il corpo della nube (Houze, 1981).

Un metodo di parametrizzazione per questi processi, noto con il nome di *microfisico* (*parametrized microphysical*), calcola separatamente il comportamento dei diversi stati dell'acqua. In base a questa, il termine  $S_q$  può per il vapore acqueo essere decomposto in (Orville, 1980):

$$S_q = S_{\text{cond.}} - S_{\text{dep.}} - C_{\text{SN}} + C_{\text{EP}}$$

dove i termini riportati sulla destra indicano, nell'ordine, la variazione di vapore acqueo conseguente

alla condensazione, alla deposizione, alla sublimazione sulla superficie di fiocchi di neve o cristalli di ghiaccio e all'evaporazione della pioggia. Ciascuno di questi viene parametrizzato separatamente e poi introdotto nella funzione per ottenere la variazione totale del vapore acqueo.

Per calcolare il contributo dei termini legati ai fenomeni di condensazione e deposizione è possibile usare le seguenti funzioni:

$$S_{\text{dep.}} = w \partial q_{\text{si}} / \partial z \quad \text{per } T_v \leq T_0 \text{ e } q = q_{\text{si}}$$

$$S_{\text{cond.}} = w \partial q_{\text{sw}} / \partial z \quad \text{per } T_v > T_0 \text{ e } q = q_{\text{sw}}$$

dove  $T_0$  è la temperatura richiesta per la sublimazione del vapore acqueo in cristalli di ghiaccio, mentre  $q_{\text{si}}$  e  $q_{\text{sw}}$  rappresentano le umidità specifiche di saturazione del vapore acqueo rispetto al ghiaccio ed all'acqua liquida definite da (Pielke, 2002):

$$\begin{aligned} q_{\text{si}} &= (3.8/p) e^{\frac{21.9 (T_v - 273.2)}{T_v - 7.7}} \\ q_{\text{sw}} &= (3.8/p) e^{\frac{17.3 (T_v - 273.2)}{T_v - 35.9}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Per calcolare il contributo della sublimazione dei cristalli di ghiaccio e dell'evaporazione delle piogge le equazioni impiegate sono molto più complesse delle precedenti e ne sono state sviluppate di diversi tipi; per esempio, una parametrizzazione possibile per il coefficiente  $C_{\text{EP}}$  può essere (Rotstayn, 1999):

$$C_{\text{EP}} = -6.28(s_w - 1) n_{\text{OR}} [0.78b_R^{-2} + 0.42b_R a_3 s_C^{0.33} v^{-0.5} (\rho_G/\rho)^{0.25} - 1.92] \left[ \frac{L_C^2}{\rho k_a R_v T^2} + \frac{1}{\rho^2 q_{\text{sw}} \psi} \right]$$

dove  $\psi$  è la diffusività del vapore acqueo in atmosfera ( $\approx 1.875 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ),  $k_a$  la conduttività termica dell'aria ( $\approx 0.018 \text{ W/mK}$ ),  $v$  la viscosità cinematica dell'aria ( $\approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ). I restanti termini sono costanti empiriche ottenute attraverso serie di misurazioni o ricavate da funzioni che, a loro volta, fanno riferimento a costanti empiriche, come può essere osservato di seguito:

$$b_R = (3.14 \rho_w n_{\text{OR}} / \rho q)^{0.25}$$

$$s_w = q / q_{\text{sw}}$$

$$s_C = v / \psi$$

$$n_{\text{OR}} = 10^7 \text{ m}^{-4}$$

$$a_3 = 0.8$$

Il termine  $s_C$  ( $\approx 0.8$ ) prende anche il nome di numero di Schmidt.

Una forma di parametrizzazione meno complessa viene illustrata da Tiedtke (1987) e permette una stima delle variazioni di temperatura e della quantità di precipitazione in presenza di fenomeni di condensazione non convettiva, come quelli associati all'avvicinarsi di un fronte. In questa si assume che:

$$S_{\theta Q} = \frac{H}{c_p} \frac{\partial q_{sw}}{\partial t} = C_R \frac{H}{c_p} \quad (2.34)$$

$$S_q = - \frac{\partial q_{sw}}{\partial t} = -C_R$$

dove  $q_{sw}$  è l'umidità specifica di saturazione rispetto all'acqua liquida (calcolabile mediante la 2.33),  $S_{\theta Q}$  il contributo alla variazione di temperatura dovuta ai passaggi di stato del vapore acqueo e  $H$  il calore latente di condensazione.

Il valore di  $C_R$ , detto *tasso di condensazione*, può essere ottenuto per via diagnostica calcolando da prima i valori di  $T^{t+1}$  e  $q^{t+1}$  senza tenere conto dei termini  $S_q$  e  $S_{\theta Q}$ , quindi il valore di  $q_{sw}^{t+1}$  usando  $T^{t+1}$  e poi derivando rispetto al tempo mediante l'uso di uno schema a differenze finite.

Se il valore di  $q^{t+1}$  è maggiore di quello trovato per  $q_{sw}^{t+1}$ , la temperatura e l'umidità calcolate sono corrette mediante le seguenti funzioni per simulare una condensazione immediata del vapore acqueo in eccesso e la conseguente formazione di precipitazioni:

$$T_*^{t+1} = T^{t+1} + \frac{H}{c_p} \frac{q^{t+1} - q_{sw}^{t+1}}{1 + (H/c_p)(\partial q_{sw}^{t+1}/\partial T)}$$

$$q_*^{t+1} = q^{t+1} + \frac{q^{t+1} - q_{sw}^{t+1}}{1 + (H/c_p)(\partial q_{sw}^{t+1}/\partial T)}$$

Calcolando il nuovo valore dell'umidità di saturazione a partire dal valore di  $T_*^{t+1}$  e definendo il tasso di condensazione come:

$$C_R = \frac{1}{2\Delta t} \frac{q^{t+1} - q_{sw}^{t+1}}{1 + (H/c_p)(\partial q_{sw}^{t+1}/\partial T)}$$

il *tasso di precipitazione* (espresso in metri al secondo) risulta dal seguente integrale:

$$P_R = \frac{1}{\rho_w} \int_0^\infty C_R \rho dz$$

dove  $\rho_w$  rappresenta la densità media dell'acqua liquida ( $\approx 10^6 \text{ g/m}^3$ ).

---

### 2.4.2 Parametrizzazione in Atmosfera Instabile

In atmosfera instabile ( $\partial\theta_E/\partial z \leq 0$ ) si osserva la comparsa di nubi cumuliformi di grande estensione verticale se la condizione di instabilità si prolunga in modo costante lungo la colonna d'aria, o di cumuli stratiformi se alla condizione di instabilità si affiancano localmente regioni di stabilità; in entrambi i casi si è soliti parlare di nuvole *convettive*, in quanto originate dalle correnti ascensionali che si instaurano in regime di instabilità atmosferica.

Uno degli schemi più comunemente usati per la parametrizzazione dei cumuli da convezione è quello sviluppato da Kuo (1974); questo si basa su una relazione di equilibrio in cui il processo di convezione si instaura al fine di compensare, fino ad annullarla, l'instabilità dello strato atmosferico determinata dai flussi ad ampia scala. Per essa, i termini  $S_{\theta Q}$  e  $S_q$  sono calcolati come:

$$S_{\theta Q} = \frac{L(1-b)}{\pi} \frac{IQ_1}{\int Q_1 dz} \quad (2.35)$$
$$S_q = bI \frac{Q_2}{\int Q_2 dz}$$

dove  $I$  è il tasso con cui viene immesso vapore acqueo nella colonna d'aria in esame e  $b$  la frazione di  $I$  che incrementa il contenuto d'acqua della colonna. Molinari e Corsetti (1985) suggeriscono di calcolare il valore di  $I$  come il prodotto della velocità verticale dell'aria per il contenuto di vapore acqueo ( $wq$ ).

Nello schema di Kuo i termini  $Q_1$  e  $Q_2$  rappresentano, rispettivamente, i profili verticali relativi al riscaldamento dell'aria ed all'arricchimento di vapore acqueo, mentre il valore  $[1 - b]$  definisce il tasso di precipitazione.  $Q_1$  può essere rappresentata come la differenza fra la temperatura potenziale registrata all'esterno ed l'interno del corpo nuvoloso, considerando la seconda pari alla media fra i valori registrati alla sommità ed alla base dello stesso.

---

## 2.5 Condizioni al Contorno

Per ottenere una soluzione adeguata delle variabili atmosferiche attraverso le equazioni descritte nel primo capitolo sarebbe necessario un dominio di calcolo esteso su tutta la superficie terrestre, in modo da poter ottenere i gradienti orizzontali delle variabili indagate usando i valori registrati presso i punti adiacenti a quello preso in esame; analogamente, l'estensione verticale del dominio dovrebbe risultare tale da giungere fino ai confini estremi dell'atmosfera, dove i valori delle stesse variabili possono essere considerati costanti e non più soggette alle oscillazioni indotte dai fenomeni troposferici. In realtà solo i modelli di circolazione globale fanno uso di domini così estesi, avendo essi scale orizzontali molto ampie e dovendo fornire previsioni che riguardano l'intero globo terrestre; al contrario, sarebbe poco conveniente in termini di calcolo, nonché poco utile, usare un dominio di tale estensione se l'area da indagare ha dimensioni inferiori a quelle di un continente o di uno stato. Limitare le dimensioni del dominio, infatti, consente di disporre di una maggiore potenza di calcolo residua che può essere utilizzabile per ottenere una maggiore risoluzione spaziale del modello o implementare schemi matematici di maggiore precisione e complessità.

Lavorare su un dominio confinato, tuttavia, comporta alcune restrizioni ed impone la necessità di fare uso di correzioni che impediscano l'accumularsi di errori nei punti situati lungo i margini orizzontali e verticali dello stesso. Ne deriva che, mentre nell'area interna vengono usati i metodi finora illustrati per definire l'evoluzione delle variabili indagate rispetto al tempo, nei punti di confine le variabili vengono calcolate "artificiosamente" per dissipare le quantità trasportate per avvezione verso l'esterno ed evitare una loro riflessione verso l'interno. Queste parametrizzazioni dei valori a contorno si differenziano a seconda che il confine trattato sia laterale, superiore o inferiore.

### 2.5.1 Condizioni laterali

I metodi proposti per la determinazione dei valori lungo i confini laterali del dominio di calcolo sono numerosi, ma tutti hanno come obiettivo la riduzione dei fenomeni di riflessione dal bordo verso la parte interna del modello (Pielke, 2002).

L'ipotesi del *ingresso costante con uscita di gradiente* (*constant inflow, gradient outflow*) è la forma di parametrizzazione di più facile applicazione. Questa prevede che i punti situati lungo il confine da cui entra il flusso d'avvezione mantengano un valore costante (*confine fisso*), mentre quelli situati dove il flusso d'avvezione abbandona il dominio assumano i valori delle variabili poste nei punti interni ad essi immediatamente adiacenti (*confine d'uscita*); in forma matematica:

$$\Psi'_X = \Psi_X \quad (\text{confine fisso})$$

$$\Psi'_X = \Psi_{X-1} \quad (\text{confine d'uscita})$$

---

Purtroppo, questo schema non riesce a controllare in modo adeguato le riflessioni lungo il margine della griglia e, contemporaneamente, a correggere la collocazione del confine d'uscita. Per ovviare parzialmente a questo limite, è stata proposta la seguente formulazione alternativa per i valori posti lungo il confine d'uscita (Mason e Sykes, 1979):

$$\Psi'_X = 1.5 \Psi_{X-1} - 0.5 \Psi_{X-3} \quad (2.36)$$

la quale, pur non risolvendo completamente i problemi di riflessione verso l'interno, ha mostrato una maggiore stabilità rispetto allo schema classico.

L'ipotesi del *confine radiante* (*radiative boundary*) mostra una complessità d'applicazione superiore alla precedente ed ha come scopo quello di ridurre i fenomeni di riflessione verso l'interno del modello mediante un aggiustamento delle variabili poste lungo il confine. Allo scopo, viene usata una funzione del tipo:

$$\partial u / \partial t = - (u + c) \partial u / \partial x \quad (2.37)$$

che accelera il trasporto verso l'esterno delle componenti normali di velocità dell'aria sommando ad esse una velocità  $c$  che può essere calcolata ad ogni ciclo o essere mantenuta costante. Fra i metodi più noti per il calcolo di  $c$  ci sono:

- quello proposto da Orlansky (1976), per il quale  $c = (\partial u / \partial t) / (\partial u / \partial x)$ ;
- quello proposto da Klemp e Lilly (1978), che media i valori ottenuti attraverso il metodo di Orlansky lungo la verticale;
- quello proposto da Klemp e Wilhelmson (1978), che pone  $c$  come una costante pari alla velocità tipica delle onde di gravità ( $\approx 10 \div 30$  m/s).

Per le variabili diverse dalla velocità del vento è possibile usare funzioni simili alla precedente o, in modo più semplice, adottare per esse la condizione di ingresso costante e uscita di gradiente descritta in precedenza.

L'ultima condizione di seguito descritta per i confini laterali è quella nota come *confine assorbente* (*sponge boundary*), in cui i flussi in movimento verso il confine vengono progressivamente smorzati o incrementando i valori dei coefficienti di scambio o alterandone i valori tramite funzioni di filtro. Una formulazione comune di questa parametrizzazione è data dalla seguente equazione:

$$\partial \psi / \partial t = - u \partial \psi / \partial x - r (\psi - \psi_A) \quad (2.38)$$

dove  $\psi_A$  è il valore di  $\psi$  desiderato lungo il confine laterale e  $r$  è detto *coefficiente di rilassamento* (Davis, 1983). Quest'ultimo non è costante, ma viene definito con un valore massimo in corrispondenza dei punti al confine per poi decrescere, fino ad avvicinarsi allo zero, proseguendo verso il centro della griglia.

---

### 2.5.2 Condizioni al confine superiore

Idealmente, per evitare la riflessione delle onde che si propagano lungo l'asse verticale, il confine superiore del dominio di calcolo dovrebbe essere situato alla quota in cui la densità dell'aria è pari a 0; in pratica, una buona approssimazione può essere ottenuta già posizionando il confine superiore alla quota in cui la velocità verticale  $w$  è nulla. In base a quest'ultimo assunto, è possibile porre la velocità  $w$  uguale a zero ad una quota arbitrariamente scelta, ma sufficientemente lontana dall'area in cui si verificano i moti convettivi della massa d'aria. Tale opzione prende il nome di *condizione di confine rigido*.

La condizione di confine rigido, tuttavia, prevede una correzione continua dei valori di pressione alla quota imposta per evitare un'alterazione dei fenomeni di perturbazione esistenti negli strati inferiori e, in una situazione in cui la velocità verticale non tende naturalmente a 0 verso il livello di confine, si potrebbe osservare una qualche alterazione dei risultati rispetto all'evoluzione reale degli eventi.

Un'alternativa al confine rigido è la *condizione di confine a superficie impervia*, in cui lo strato di confine è rappresentato da un piano che attraversa tutti i punti di uguale valore di temperatura potenziale  $\theta$ . In questo, considerando la velocità verticale  $w_T$  registrata presso l'ultimo livello verticale disponibile per il dominio del modello, la velocità verticale  $w_S$  lungo lo strato di confine sarà determinata da (Pielke, 1974):

$$w_S = w_T - \int_{z_T}^{z_S} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \quad (2.39)$$

Come ci si può aspettare, in conseguenza delle variazioni di velocità verticale, il valore di  $\theta$  nei diversi punti può cambiare nel corso del tempo, e ciò rende il confine a superficie impervia un piano "mobile", capace di rispondere ai fenomeni di divergenza negli strati sottostanti. Per questa ragione, è considerata una rappresentazione più efficace rispetto al *confine rigido*.

Un ulteriore metodo per parametrizzare il confine superiore consiste nell'applicazione, a due o più degli strati superiori del dominio di calcolo, della condizione di confine assorbente già descritta (Klemp e Lilly, 1978). Questo genere di parametrizzazione può definirsi una via di mezzo fra le due analizzate sopra; infatti essa è meno dispendiosa in termini di potenza di calcolo rispetto al confine con superficie impervia, ma più precisa di un confine rigido.

---

### 2.5.2 Condizioni al confine inferiore

Il confine inferiore di un modello numerico è l'unico che abbia una reale valenza fisica, dovendo, oltre che fornire stabilità numerica ai processi di calcolo, rappresentare anche le interazioni e gli scambi fra il suolo e l'atmosfera. Come illustrato nel paragrafo 2.2.3, le velocità orizzontali sono considerate nulle lungo la superficie del suolo a causa dei fenomeni di attrito e, per la legge del bilancio idrostatico, anche la velocità verticale risulta pari a zero; più complessa, invece, risulta l'individuazione lungo la stessa superficie dei valori di temperatura e di umidità, per i quali risulta indispensabile l'uso di schemi numerici.

La temperatura del terreno può essere determinata attraverso la conoscenza del bilancio d'equilibrio dei flussi di calore relativi alla superficie terrestre, rappresentati dai fenomeni di conduzione ( $Q_G$ ), di convezione ( $Q_C$ ) e di irraggiamento ( $Q_R$ ). Per l'equilibrio termico risulta, infatti, che:

$$Q_C + Q_R - Q_G = 0$$

e potendo esprimere  $Q_R$  e  $Q_C$  come:

$$Q_C = -\rho c_p (w'\theta') - \rho H_p (w'q')$$

$$Q_R = (t - a_q) R_{Ssw\downarrow} + R_{Slw\downarrow} - R_{Slw\uparrow}$$

la precedente può risciversi nella seguente forma estesa:

$$\rho c_p (w'\theta') + \rho H_p (w'q') - (t - a_q) R_{Ssw\downarrow} - R_{Slw\downarrow} + R_{Slw\uparrow} + Q_G = 0 \quad (2.40)$$

Essendo la temperatura del suolo  $T_S$  una conseguenza del fenomeno di equilibrio termico è possibile considerare la stessa come una funzione dell'equazione precedente, assumendo che:

$$f(T_S) = \rho c_p (w'\theta') + \rho H_p (w'q') - (t - a_q) R_{Ssw\downarrow} - R_{Slw\downarrow} + R_{Slw\uparrow} + Q_G \quad (2.41)$$

Nella situazione in cui tutti i flussi siano perfettamente bilanciati  $f(T_S)$  è pari a zero ma, poiché una tale condizione raramente si osserva nella realtà, è preferibile considerare nella stessa funzione un fattore di perturbazione  $\delta T_S$  e sostituire attraverso la seguente espansione in serie di Taylor:

$$f(T_S + \delta T_S) = f(T_S) + f'(T_S)(\delta T_S) = 0$$

Poiché in una condizione di perfetto equilibrio, per la quale  $f(T_S)$  eguaglia  $f(T_S + \delta T_S)$ , non esisterebbero variazioni di temperatura nella superficie del suolo, ne deriva che il termine di perturbazione  $\delta T_S$  non è altro che la variazione temporale di  $T_S$ . Riarrangiando la precedente, quindi, risulta:

$$T_S^{t+1} = T_S^t - [f(T_S) / f'(T_S)] \quad (2.42)$$

dove  $f'(T_S)$  può essere ottenuta derivando rispetto alla 2.41, ottenendo:

$$f'(T_S) = \partial[\rho c_p (w'\theta')]/\partial z + \partial[\rho H_p (w'q')]/\partial z + 4\sigma T_S^3 + v[\partial(\partial T/\partial z)/\partial z] \quad (2.43)$$

---

La soluzione della 2.42 può essere ottenuta attraverso il processo di *iterazione di Newton-Raphson*, per il quale il valore di  $T_S^t$  viene sostituito con quello di  $T_S^{t+1}$ , rielaborando di volta in volta la 2.40 e la 2.43, fintanto che il termine di perturbazione  $\delta T_S$  non sia diventato, in valore assoluto, inferiore a  $10^{-5}$  (Pielke, 2002).

Un metodo alternativo a quello appena descritto e di più facile implementazione è stato proposto da Pielke (1974); esso consta di una semplice equazione che esclude ogni possibile interazione fra il suolo ed i fenomeni di circolazione atmosferica. La temperatura potenziale presso il terreno  $\theta_{z0}$ , infatti, viene ad essere definita come:

$$\theta_{z0} = \theta_{min} + \theta_{max} \text{ sen } [6.28 (h / 24)] \quad (2.44)$$

dove  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$  rappresentano i valori minimi e massimi di temperatura potenziale registrati sul posto nello stesso periodo dell'anno, mentre  $h$  rappresenta il numero di ore trascorse dal raggiungimento della temperatura minima (periodo generalmente associato al primo sorgere del Sole).

Per la determinazione del contenuto di umidità specifica del terreno può essere adoperato l'approccio di McCumber (1980), nel quale si fa uso della seguente serie di equazioni:

$$q_G = -h q_s(T_S)$$

$$q_s(T_S) = 0.622 \frac{e_s(T_S)}{p - 0.378 e_s(T_S)} \quad (2.45)$$

$$e_s(T_S) = 6.1078 e^{17.269 \frac{T_G - 273.16}{T_G - 35.86}}$$

$$h = e^{\frac{g M_G}{R_v T_G}}$$

dove  $M_G$  rappresenta il *potenziale di vapore acqueo* del suolo, che può essere ottenuto attraverso uno schema a differenze finite dalla seguente funzione:

$$M_G = M_{G-\Delta z} + \left[ \frac{W_s|_G}{\rho_w K_\eta} - 1 \right] \Delta z \quad (2.46)$$

con  $W_s|_G$  rappresentante il flusso di vapore acqueo nel terreno registrato in prossimità del suolo.

## CAPITOLO 3

### Un modello numerico per la Campania

---

#### 3.1 Introduzione

La parte conclusiva del mio dottorato è stata orientata allo sviluppo di un software di previsione meteorologica basato sui principi esposti nei precedenti due capitoli e principalmente orientato alle previsioni a breve termine. Tale scelta è stata maturata nel corso della collaborazione avuta, fra il marzo ed il novembre del 2004, con il “*centro funzionale per la previsione meteorologica ed il monitoraggio meteo-idro-pluviometrico e delle frane*”, annesso alla Protezione Civile di Napoli, dove è in uso una versione del Lokal Modell messo a disposizione dal DWD (Deutscher Wetterdienst, Servizio Meteorologico tedesco).

Nel corso di una serie di analisi effettuate sui risultati ottenuti dal Lokal Modell relativamente ad alcuni eventi piovosi verificatisi fra il dicembre ed il giugno 2004 si sono osservati spesso le due tipologie di errori seguenti, comuni anche a gran parte dei modelli numerici operanti su ampia scala (Pielke, 2002):

- discrepanze fra la quantità di precipitazione prevista e quella osservata;
- Valutazione inesatta dei tempi d’arrivo e di passaggio delle perturbazioni.

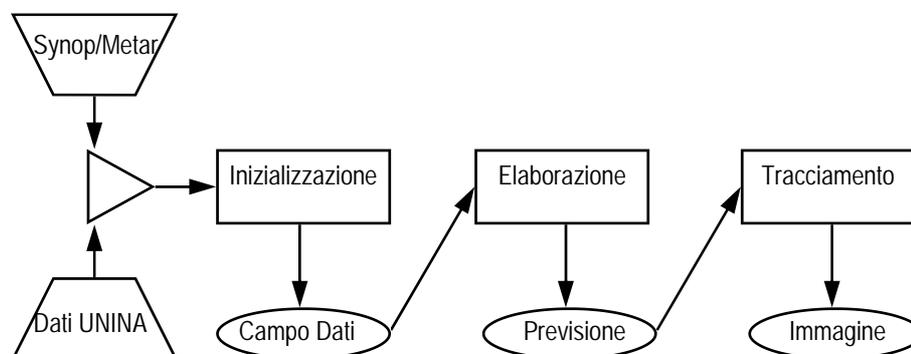
Questi errori tendevano a presentarsi in maniera sistematica, nonostante il modello fosse dotato di una solida base fisica e di un metodi di parametrizzazione molto più raffinati di quelli discussi nel secondo capitolo di questa tesi. Solo in seguito esaminando le carte di precipitazione fornite dal modello, si giunse alla conclusione che il problema poteva risiedere in un’erronea rappresentazione della morfologia del suolo. Il Lokal Modell, infatti, pur disponendo di una risoluzione spaziale di appena 7 km e di un insieme di equazioni non-idrostatiche, adoperava per la rappresentazione del territorio griglie bidimensionali aventi un passo variabile fra i 14 ed i 20 km.

Una corretta parametrizzazione degli aspetti legati alla morfologia del territorio, ed in particolar modo dell’orografia e della presenza di corpi idrici, rappresentano una componente non trascurabile nel calcolo delle velocità in prossimità del suolo e della variazione di umidità specifica delle masse d’aria (Pielke, 2002). Tale parametrizzazione, pur non rappresentando una soluzione completa della stima della quantità di pioggia, può contribuire a migliorare in maniera significativa la previsione dei tempi d’arrivo delle celle temporalesche. Questo vantaggio non è di poco conto se si pensa che un margine d’errore superiore alle 6 ore nella previsione di un evento potenzialmente dannoso può portare a falsi allarmi o, peggio, ad allarmi tardivi.

Il modello sviluppato, che attualmente non ha ancora una denominazione definitiva, si compone di diverse interfacce grafiche (*GUI*, da *Graphical User Interface*) ed opera in ambiente Windows seguendo i criteri dati nel diagramma di flusso di figura 3.1. Ciascuna interfaccia è finalizzata ad una delle seguenti operazioni specifiche:

- acquisizione dei dati d'inizializzazione da file di raccolta;
- inserimento manuale di dati utili all'inizializzazione;
- creazione del campo interpolato a partire dai dati d'inizializzazione;
- calcolo della variazione temporale delle variabili presenti nel campo interpolato;
- restituzione grafica dei risultati ottenuti.

Usando le stesse in modo integrato è possibile ottenere mappe e tabulati relativi alle condizioni previste sul territorio campano a diverse quote, usando come insieme di dati di partenza le misure effettuate da una serie di stazioni meteorologiche al suolo.



**Figura 3.1:** Schema esplicativo del funzionamento del modello numerico sviluppato.

---

## 3.2 Acquisizione dei Dati

Il processo di acquisizione dati nel modello avviene mediante due interfacce diverse: una dedicata alla decodifica di file di dati preesistenti ed una dedicata all'inserimento manuale di dati. I formati supportati dalla prima sono quelli regolarmente trasmessi attraverso il *Global Transmission System* (GTS) della *World Meteorological Organisation* (WMO) ed identificati comunemente dalle sigle METAR e SYNOP; viene inoltre offerta la possibilità di acquisire dati organizzati in un comune foglio elettronico (come *Excel*).

Tutti i dati acquisiti vengono raggruppati in modo ordinato su un singolo file di testo in seguito usato per l'inizializzazione del modello.

### 3.2.1 Il formato dati Synop

Il Synop è un codice alfanumerico (indicato dalla WMO con la sigla FM-12) usato per riportare in modo sintetico le condizioni atmosferiche al suolo in varie parti del mondo e viene generato ogni sei ore a partire dai dati registrati da una serie di stazioni meteorologiche automatizzate e non. Anche se i dati trasmessi in questo formato sono usati principalmente per la navigazione marina, essi coprono un'ampia gamma d'informazioni relative allo stato dell'atmosfera, quali la temperatura, la pressione (sia alla quota della stazione di misura che sul livello del mare), la copertura nuvolosa, il contenuto di umidità, la velocità e la direzione del vento e le eventuali precipitazioni.

Per gli scopi del mio lavoro di tesi, i dati synop usati per l'assimilazione da parte del modello sono stati raccolti attraverso internet principalmente da due siti:

- <http://www.uradio.ku.dk>, sito tedesco che raccoglie in file di testo numerose trasmissioni radio,
- <ftp://tgftp.nws.noaa.gov>, sito ufficiale per la raccolta dei dati Synop da tutto il mondo.

Nel loro formato originario, ciascun file di siti raccoglie tutti i dati synop disponibili per un preciso periodo di tempo; in particolare, il sito della *NOAA* raccoglie i dati provenienti da tutto il mondo, con l'aggiunta anche di eventuali *warnings* (messaggi di testo in chiaro che forniscono avvisi su situazioni meteorologiche a rischio), mentre il sito *uradio* raccoglie esclusivamente dati d'interesse per il nord europa ed il bacino del mediterraneo, senza presenza di *warnings*.

Strutturalmente, un messaggio Synop è organizzato dalle due alle quattro parti distinte, ma il numero esatto dipende dalla configurazione della stazione meteorologica e dagli standard adottati nella nazione in cui questa opera; tuttavia sono solo le prime due parti, una dedicata all'identificazione del punto di trasmissione e l'altra contenente i dati meteorologici essenziali, quelle di reale interesse per il processo di acquisizione del modello.

La prima parte del messaggio (in alto nella figura 3.2) è costituita da due a quattro termini in codice. Il primo termine può essere soltanto AAXX o BBXX ad indicare, rispettivamente, se la stazione è terrestre

---

AAXX 01064  
08495 32980 70915 10160 20118 30135 40143 55003 82072 90550  
333 20157 30013 82367 87075 90710 91125=

**Figura 3.2:** Esempio di messaggio in codifica Synop.

o marina. Il secondo termine è costituito da cinque cifre, le prime quattro usate per indicare giorno ed ora dell'acquisizione e l'ultima per l'unità di misura impiegata nella lettura del vento. I restanti due termini sono opzionali e compaiono solo per stazioni marine mobili, indicandone le coordinate geografiche al momento della trasmissione.

La seconda parte del messaggio (al centro nella Figura 3.2) è costituita di termini a cinque caratteri, in prevalenza numerici, e contiene informazioni relative all'identità della stazione ed a tutti i principali dati meteorologici registrati; essa termina o con il passaggio ad un set di dati opzionale, che viene marcato da una tripletta di numeri identici (111, 222, 333 o 444), o dal carattere di uguaglianza (=), che indica la fine della trasmissione radio. Per interpretarne i contenuti in modo corretto occorre riferirsi sia alla posizione di ciascun termine che, secondariamente, al valore della prima cifra numerica. Schematicamente, infatti, risulta che:

- il primo termine identifica la stazione in base al numero assegnato dalla WMO (WMO, 2005), con il quale è possibile risalire alle sue esatte coordinate geografiche;
- il secondo termine riporta il tipo di precipitazioni in corso, l'altezza della base delle nubi ed la visibilità al suolo;
- il terzo termine fornisce il grado di copertura nuvolosa insieme con velocità e direzione del vento;
- i termini successivi rappresentano ciascuno una lettura strumentale, di cui le più frequenti sono quelle di temperatura, pressione e umidità.

### 3.2.2 Il formato dati Metar

Il Metar (indicato dalla WMO con la sigla FM-15) è concettualmente simile al Synop, ma la codifica impiegata è differente ed il suo utilizzo riguarda principalmente le applicazioni aeronautiche. Per gli scopi di questa tesi, i dati impiegati sono stati prelevati attraverso i canali messi a disposizione dalla NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) e dall'Aeronautica Militare agli indirizzi internet:

- <http://weather.noaa.gov/weather/metar.shtml>
- <http://www.meteoam.it/modules.php?name=metar>

Contrariamente ai precedenti, i dati in questo formato sono resi disponibili ad intervalli orari, tuttavia ogni stazione abilitata può trasmettere le proprie informazioni in qualsiasi momento e senza una cadenza

---

KLNK 252346Z 31013G47KT 270V350 3/4SM R36/1400VP6000FT +TSRA BR BKN010  
BKN042 OVC050 23/22 A2974 RMK AO2 PK WND 24055/2335 WSHFT 2323 TSB18RAB18  
P0045

**Figura 3.3:** Esempio di messaggio in codifica Metar.

temporale precisa; ciò porta gli enti preposti alla raccolta dati a mettere insieme tutti i messaggi inviati entro la stessa ora a prescindere dall'esatto minuto di registrazione.

Il codice di un messaggio Metar (illustrato in figura 3.3) è meno ordinato di un Synop, ma mostra una maggiore flessibilità e capacità di contenuto; purtroppo, a causa del prevalente uso aeronautico di questi dati alcuni di essi utili per applicazioni modellistiche non sempre sono disponibili.

Ogni messaggio Metar inizia con una sigla di quattro lettere che identifica la stazione in base ad un elenco stillato dalla *International Civil Aviation Organisation* (ICAO, 2003) e che viene impiegato per tracciarne l'esatta posizione; a questa segue un termine che indica il giorno e l'ora, comprensiva di minuti, a cui si riferisce la lettura ed un termine opzionale che indica se la stazione è automatizzata o è gestita da un operatore. Tutti i termini immediatamente successivi riportano, con codifiche variabili, dati relativi alla visibilità, al vento, alla temperatura, all'umidità ed ai fenomeni atmosferici in atto. La pressione atmosferica, che rappresenta un parametro fondamentale per le applicazioni modellistiche, non è ritenuta essenziale ai fini aeronautici e solo alcune stazioni ne trasmettono il valore esatto; questo è pertanto riportato in una sezione opzionale del messaggio (*remarks*) il cui inizio è contrassegnato dalla sigla RMK.

Considerando nel loro insieme i dati Synop e Metar trasmessi nel corso di una stessa ora, la copertura strumentale ottenibile per l'Europa ed il bacino del Mediterraneo è generalmente quella riportata nella figura 3.4, dove ad ogni punto indicato sulla carta corrisponde una stazione capace di fornire tutti i dati utili all'inizializzazione del modello.

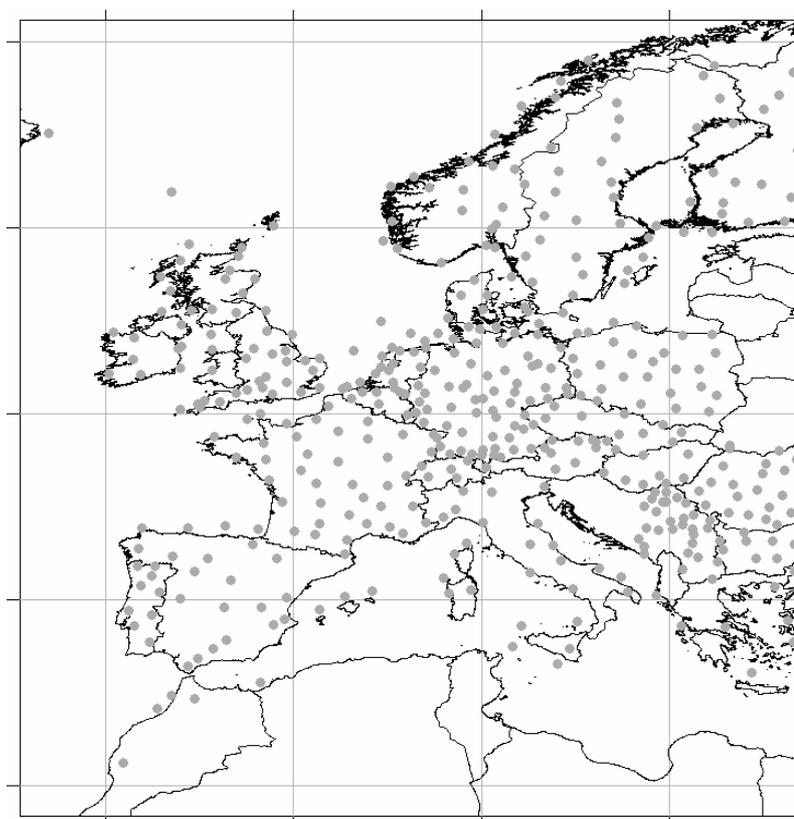
### **3.2.3 I dati dell'Osservatorio Meteorologico**

Per ottenere una migliore copertura strumentale della regione Campania, l'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II" ha installato o ottenuto in gestione da privati ventisei stazioni meteorologiche che possono essere interrogate in tempo reale per ottenere dati con cadenza variabile dall'ora ai dieci minuti. L'elenco delle stazioni impiegate nel corso di questo studio, con informazioni relative l'intervallo di lettura, la posizione geografica ed i sensori installati, viene riportato nella tabella 3.1.

Il software impiegato per la raccolta dei dati è stato sviluppato presso la *Siap+Micros* (ditta fornitrice anche di molte delle stazioni impiegate) ed è stato da me configurato per l'acquisizione automatica nel

Denominazione della Stazione	Posizione			Intervallo di Lettura	Sensori Installati
	Lat.	Lon.	Quota		
Agnano	40.81	14.15	13	10 min.	Solo termopluviometrici
Altavilla	40.50	15.06	40	30 min.	Solo termopluviometrici
Ascea	40.13	15.18	225	60 min.	Termopluviometrici con vento e radiazione
Castelnuovo Cilento	40.20	15.15	280	60 min.	Termopluviometrici con vento e radiazione
Ceraso	40.18	15.25	340	60 min.	Termopluviometrici con vento e radiazione
Flumeri	41.07	15.14	85	10 min.	Solo termopluviometrici
Laviano	40.78	15.30	90	10 min.	Termopluviometrici con vento
Licola	40.87	14.04	8	60 min.	Solo termopluviometrici
Monte Sacro	40.21	15.08	1685	60 min.	Termopluviometrici con vento e pressione
Napoli (Porto)	40.85	14.25	10	10 min.	Solo termopluviometrici
Napoli (UNINA)	40.83	14.25	50	10 min.	Termopluviometrici con radiazione, vento e pressione
Oliveto Citra	40.69	15.23	80	10 min.	Termopluviometrici con vento e bagnatura fogliare
Prignano	40.32	15.06	410	60 min.	Termopluviometrici con vento, pressione e radiazione
Procida	40.73	14.00	50	30 min.	Termopluviometrici con vento e pressione
Salento	40.23	15.18	420	60 min.	Termopluviometrici con vento e radiazione
Sapri	40.73	15.61	8	60 min.	Termopluviometrici con vento, pressione e radiazione
Vesuvio	40.82	14.42	1200	10 min.	Solo termopluviometrici

**Tabella 3.1:** Stazioni disponibili presso l'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II". Sono riportate le coordinate in gradi centesimali, gli intervalli di lettura ed il tipo di sensori installati (per Termopluviometrici s'intende l'insieme di Temperatura, Umidità e Precipitazione).



**Figura 3.4:** Copertura dell'Europa e dell'area Mediterranea attraverso i dati Synop e Metar.

corso della notte dei dati di ciascuna stazione; con questa configurazione, infatti, è possibile disporre al mattino dei dati relativi alle 00 UTC, che possono essere integrati con quelli forniti dalla decodifica dei messaggi Synop e Metar relativi lo stesso intervallo di tempo. Incrociando i dati provenienti da queste diverse fonti, è possibile ottenere per il territorio campano la copertura strumentale illustrata in figura 3.5, con la possibilità di risolvere fenomeni aventi scala spaziale dell'ordine dei 30-50 chilometri.

Una copertura estensiva con dati reali del dominio di calcolo rappresenta un elemento decisivo nel determinare il successo di una previsione numerica dell'evolversi di un qualsiasi fenomeno fisico; ad un aumento dei punti disponibili, infatti, aumenta la possibilità di individuare quelle piccole perturbazioni che potrebbero, con lo scorrere del tempo, contribuire all'evolversi di fenomeni a più ampia scala. Con una copertura di pochi punti, al contrario, non soltanto sarà impossibile individuare fenomeni a piccola scala, ma aumenterà la possibilità che i processi d'interpolazione usati per definire i restanti punti del dominio di calcolo introducano valori falsati rispetto alle condizioni reali (Isaaks e Srivastava, 1989).

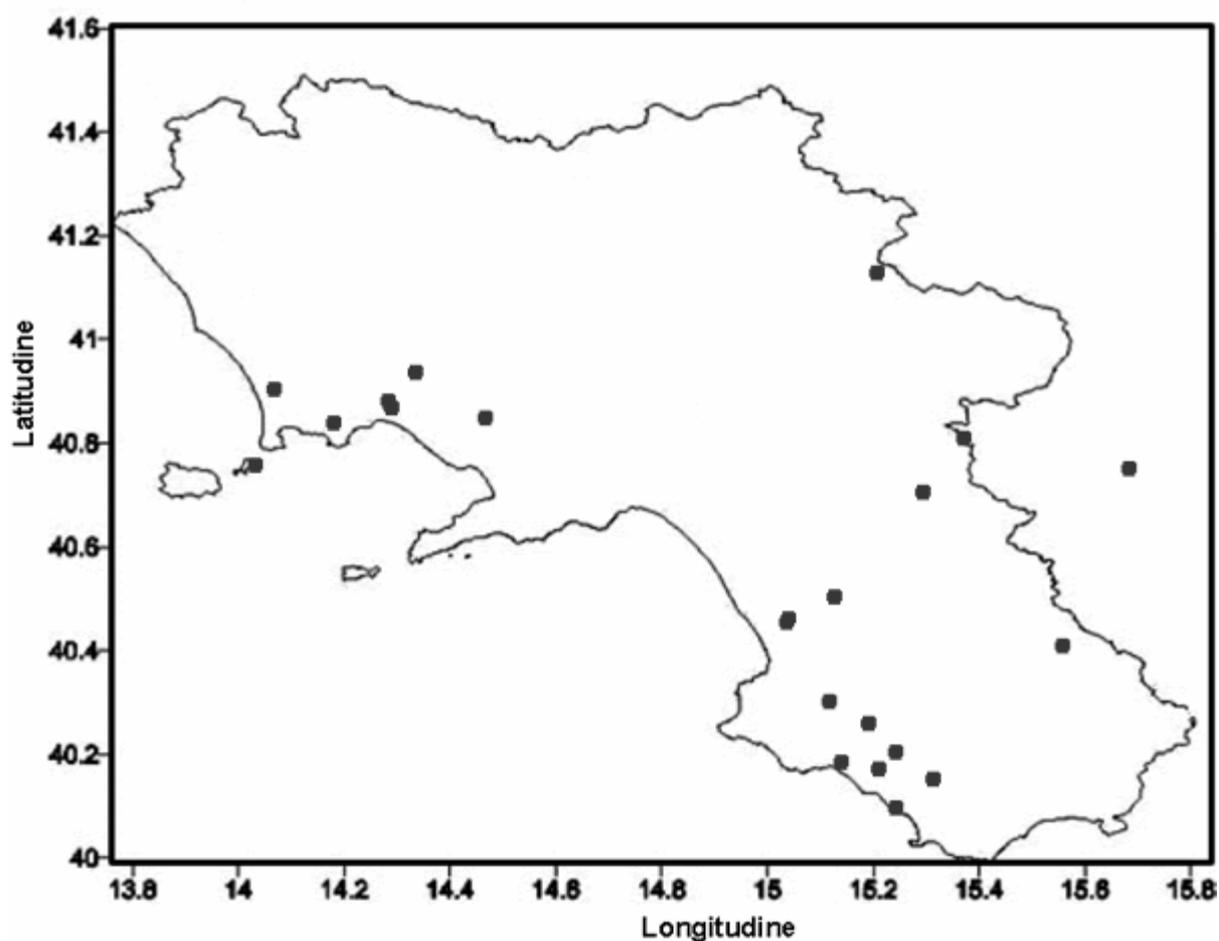


Figura 3.5: Copertura della Campania integrando le stazioni dell'Osservatorio Meteorologico con quelle che trasmettono in Synop e Metar.

---

### 3.3 Inizializzazione del Modello

Completato il processo di acquisizione dei dati, il file generato, contenente le informazioni raccolte dalle diverse stazioni, viene impiegato per creare il campo di partenza su cui il modello andrà ad operare per ottenere la previsione delle condizioni meteorologiche future. L'intero processo, al cui termine sarà generato un file contenente una griglia tridimensionale rappresentante lo stato iniziale dell'atmosfera, è gestito da una singola interfaccia sulla quale l'operatore può specificare il passo orizzontale della griglia di dati, l'area su cui dovrà svolgersi la previsione e l'eventuale filtro da applicare ai dati.

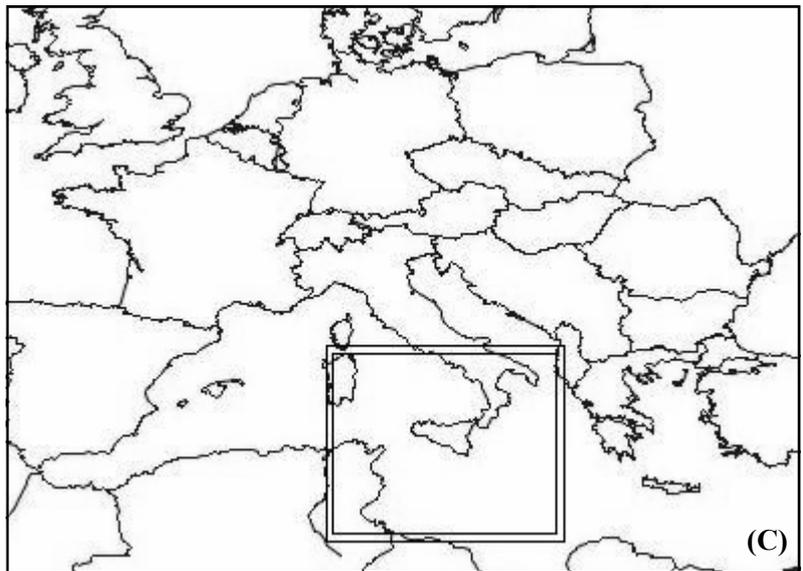
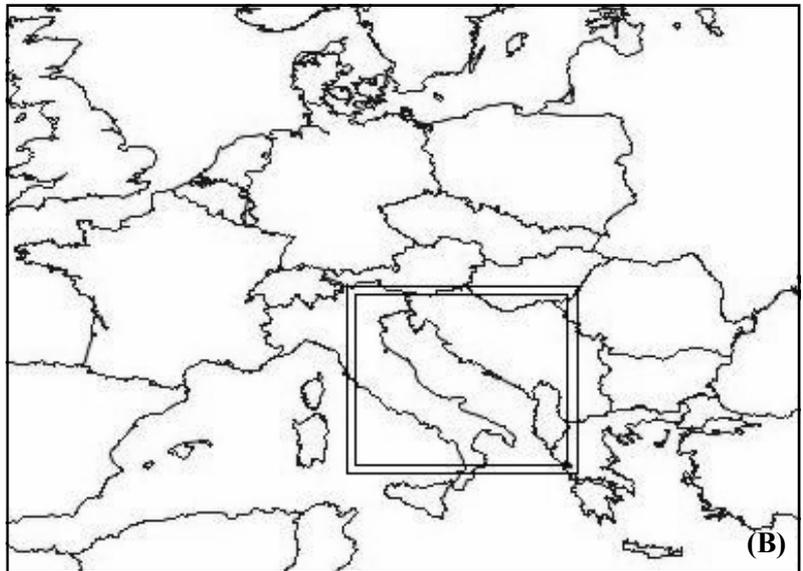
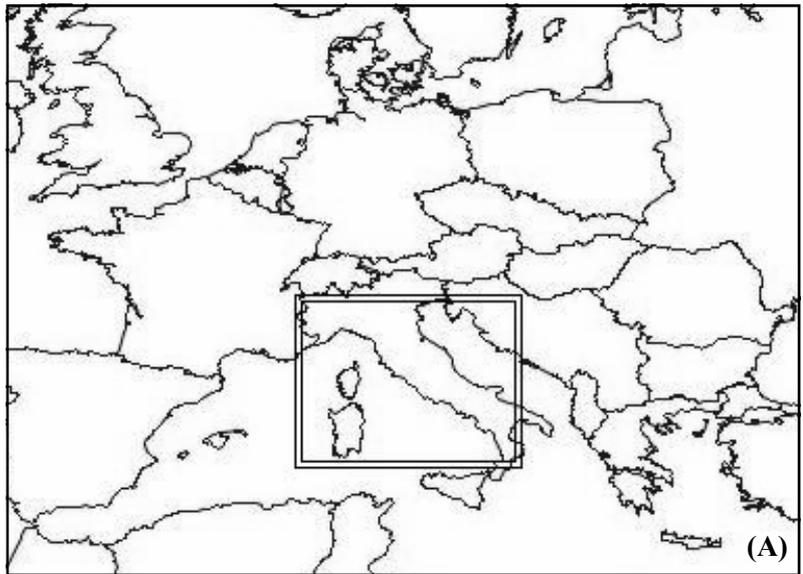
La scelta del passo orizzontale di griglia non è soggetta a vincoli specifici ed è possibile usare passi di 12.5, 25, 50 o 100 chilometri; più alto sarà il valore scelto minore sarà il tempo necessario all'elaborazione ed il livello di risoluzione ottenibile per la griglia. Per avere un maggior dettaglio dei fenomeni temporaleschi locali è sempre opportuno ricorrere al passo da 12.5 o 25 chilometri, mentre per seguire lo spostamento dei grandi fronti è sufficiente usare il passo a 50 o 100 chilometri.

Contrariamente alla scelta precedente, quella del dominio di calcolo deve essere compiuta con maggior cura, preferendo quello che meglio copre l'area di provenienza delle correnti dominanti e dei fronti. Nel corso dei diversi test del modello, sono state usate allo scopo le carte di distribuzione della pressione al suolo relative alle 00 UTC fornite dal centro meteo Bracknell della *United Kingdom Meteorological Office* (UKMO), reperibili all'indirizzo internet <http://www.wetterzentrale.de/topkarten/tkfaxbraar.htm>.

I domini disponibili sono in tutto tre e si estendono ciascuno per 900 chilometri da Est ad Ovest e per 1100 chilometri da Nord a Sud, presentando in proiezione un aspetto rettangolare. Nel dettaglio, questi sono:

- *Dominio Tirrenico – Nord Europeo* (figura 3.6a), il più adeguato a seguire l'evoluzione dei fronti con provenienza atlantica;
- *Dominio Adriatico – Est Europeo* (figura 3.6b), impiegato per seguire l'evoluzione delle correnti di origine balcanica e dei fronti legati all'anticiclone siberiano;
- *Dominio Mediterraneo* (figura 3.6c), il più utile per l'evoluzione delle correnti legate all'anticiclone africano ed all'anticiclone delle Azzorre durante il periodo estivo.

A seconda del passo orizzontale scelto, ciascun piano di questi domini può essere rappresentato da 99, 396, 1584 o 6192 punti di griglia.



**Figura 3.6:** I domini disponibili nel modello.  
a) Dominio Tirrenico – Nord Europeo.  
b) Dominio Adriatico – Est Europeo.  
c) Dominio Mediterraneo.

---

### 3.3.1 Assimilazione dei dati

Come citato nel precedente paragrafo, i dati raccolti vengono inseriti in forma tabulare in un singolo file; questo, al suo interno e su ogni riga, presenta le coordinate di una stazione seguite dalle misurazioni di temperatura ( $T$ ), temperatura di rugiada ( $T_d$ ), intensità e direzione del vento ( $V_d$  e  $V_v$ ), quota stimata del corpo nuvoloso più basso ( $C_z$ ), pressione atmosferica locale ( $p$ ) e pressione atmosferica al livello del mare ( $p_{msl}$ ). Anche se ciascuno di questi parametri è utilizzato dal modello, alcuni di essi devono prima essere trasformati nelle variabili tipicamente impiegate nel sistema di equazioni primitive.

Il vento, espresso per velocità e direzione, viene scomposto vettorialmente lungo il piano orizzontale attraverso le seguenti funzioni per ottenerne le componenti zonali ( $u$ ) e meridionali ( $v$ ):

$$u = V_v \sin(V_d) \quad v = V_v \cos(V_d) \quad (3.1)$$

La componente verticale ( $w$ ), non essendo direttamente disponibile dalle misurazioni, può essere posta a velocità nulla o calcolata in funzione del gradiente di pressione mediante la funzione:

$$w = (\rho \hat{c} p / \partial z) - 9.8 \quad (3.2)$$

Alla temperatura di rugiada, che definisce la temperatura alla quale il vapore acqueo passa allo stato liquido a parità di pressione atmosferica, viene sostituita l'umidità specifica ( $q$ ), calcolata come (Palge e Treier, 1998):

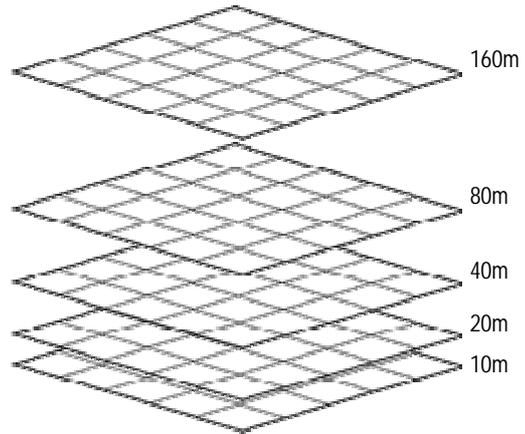
$$q = 1.06 \frac{e^{\frac{1541 + 23.59 T_d}{236 T_d}}}{1 + 0.0036 T} \quad (3.3)$$

Completato il processo di sostituzione per tutti i punti disponibili, il programma passa a calcolare per interpolazione una griglia tridimensionale estesa sul dominio scelto. Questa si costituisce di una serie di griglie piane orizzontali parallele, in cui la distanza fra i nodi delle maglie è pari a quella scelta all'avvio dell'inizializzazione; la distanza dal suolo di ciascuna di esse, invece, viene determinata per mezzo della seguente funzione ad andamento esponenziale, dove  $i$  rappresenta un indice intero univoco compreso fra uno e dieci:

$$z = 10 \times 2^{(i-1)} \quad (3.4)$$

Ne risulta un andamento verticale dei diversi piani simile a quello illustrato in figura 3.7.

Ciascuno degli strati orizzontali viene interpolato separatamente dagli altri facendo uso esclusivo dei dati forniti dalle stazioni che si trovano ad una quota compresa fra quella dello strato immediatamente inferiore e quella del secondo strato immediatamente superiore; la sola eccezione è costituita dal solo strato alla base del modello, che usa tutte le stazioni aventi una quota compresa fra 0 e 50 metri per disporre di un maggior numero di punti impiegabili. L'algoritmo usato per l'interpolazione è noto come *inverso della distanza* (Isaaks e Srivastava, 1989) e viene espresso dall'equazione:



**Figura 3.7:** Struttura della griglia tridimensionale impiegata nel modello ed indicazione delle quote assegnate dalla 3.4 a ciascun piano orizzontale (per esigenze di spazio sono illustrati soltanto i primi cinque livelli).

$$\psi' = \frac{\sum_{n=1}^N \psi_n / D(\psi_n, \psi')}{\sum_{n=1}^N 1 / D(\psi_n, \psi')} \quad (3.5)$$

dove  $\psi'$  rappresenta il valore della variabile ricercata in un qualsiasi punto dello spazio,  $\psi_n$  il valore della  $n$ -esima misurazione strumentale della variabile e  $D(\psi_n, \psi')$  la distanza esistente fra il punto della griglia e la posizione della stazione di misura.

Prima di poter essere interpolati, tuttavia, le variabili misurate dalle stazioni devono essere corrette alla quota di ciascuno strato elaborato tramite alcune delle equazioni impiegate in fisica dell'atmosfera. Indicando con  $\Delta Z$  la differenza di quota fra la stazione e l'altezza dello strato del modello ed usando il pedice  $zl$  per tutte le variabili derivate alla quota desiderata, l'equazioni impiegate sono:

$$p_{zl} = p - e \frac{\Delta Z}{29.3 (T_v)} \quad (3.6)$$

$$T_{zl} = \begin{cases} T - 0.0098 \Delta Z & zl \leq C_z \\ T - 0.0098 C_z - \frac{0.0098 (\Delta Z - C_z)}{1 + 2490 (dX/dT)} & C_z < zl \end{cases} \quad (3.7)$$

$$T_{d zl} = T_d - 0.004 \Delta Z \quad (3.8)$$

mentre per ottenere  $q_{zl}$  vengono introdotti i valori calcolati di  $T_{zl}$  e  $T_{d zl}$  nella 3.3.

Il rapporto  $dX/dT$  presente nella 3.7 definisce la variazione del *rapporto di mescolanza* rispetto alla variazione di temperatura ed è definito da (Wallace e Hobbs, 1977):

$$\frac{dX}{dT} = \frac{0.622 (e - e_s)}{p (T - T_d)} \quad (3.9)$$

in cui  $e$  ed  $e_s$  rappresentano, rispettivamente, la *tensione di vapore* e la *tensione di vapore saturo*, che possono essere espresse attraverso le seguenti funzioni empiriche (Palge e Treier, 1998):

$$e = e \frac{1514 + 25.59 T_d}{239 T_d} \qquad e_s = e \frac{1514 + 25.59 T}{239 T}$$

Le componenti orizzontali del vento non vengono corrette durante questa fase, ma vengono assegnate ai diversi strati con il proprio valore originario; il loro trattamento, infatti, viene affidato in via opzionale alla fase di *preelaborazione* descritta nel paragrafo 3.4.1.

### 3.3.2 Filtraggio dei Dati

Il modello può filtrare i dati acquisiti prima che questi siano interpolati, eliminando quei valori che mostrano una forte differenza rispetto alla media calcolata sui punti adiacenti. L'attivazione del filtro è opzionale e, dato il suo meccanismo di funzionamento, esso è classificabile come un tipo *passa basso*; la formula impiegata, infatti, taglia le oscillazioni a breve lunghezza d'onda mediante la seguente relazione matematica (Isaaks e Srivastava, 1989):

$$\psi' = \begin{cases} \psi & \text{per } |M(\psi) - \psi| \leq S(\psi) \\ M(\psi) & \text{per } |M(\psi) - \psi| > S(\psi) \end{cases} \quad (3.10)$$

dove  $\psi$  e  $\psi'$  rappresentano il valore originario ed il valore filtrato della variabile,  $M(\psi)$  il valore medio della variabile registrato per l'area e  $S(\psi)$  un valore di soglia.

Per le variabili di temperatura, pressione e temperatura di rugiada, le soglie scelte hanno un valore pari al triplo del gradiente orizzontale medio osservato presso le nostre latitudini, come mostrato nella tabella 3.2. Per le componenti orizzontali del vento la soglia viene calcolata pari al doppio del valore medio elaborato per l'area, in modo da conservare la componente di velocità media e rimuovere le velocità di raffica; quest'ultime, infatti, rappresentando fenomeni isolati nello spazio, possono dare luogo a forti perturbazioni del risultato durante il processo di elaborazioni.

Variabile	Gradiente Medio	Valore di Soglia
p	$2 \div 3 \times 10^{-3}$ Pa/m	$5 \times 10^{-3}$ Pa/m
T	$1 \div 2 \times 10^{-4}$ K/m	$3 \times 10^{-4}$ K/m
$T_d$	$3 \div 5 \times 10^{-4}$ K/m	$9 \times 10^{-4}$ K/m

**Tabella 3.2:** Gradienti orizzontali medi e valori di soglia impiegati per temperatura, temperatura di rugiada e pressione.

---

### 3.4 Fase di Elaborazione

La fase di elaborazione del modello rappresenta il momento centrale della previsione meteorologica basata sui sistemi di calcolo computerizzato; con essa, infatti, i valori di partenza presenti nella griglia vengono fatti “evolvere” nel tempo in modo da ottenere una previsione delle condizioni future. Nel caso del modello in esame l’intero processo viene gestito da una sola interfaccia in cui è possibile specificare la durata del periodo di simulazione, l’ora a cui si riferiscono i dati nella griglia di partenza e le eventuali funzioni da aggiungere al procedimento di elaborazione. Riguardo quest’ultimo aspetto dell’interfaccia vengono considerati opzionali i seguenti procedimenti:

- la chiusura al primo ordine mediante la *teoria del K*, disabilitando la quale il modello adotta una chiusura di ordine zero per i termini a scala di sottogriglia;
- *correzione del vento in quota*, operata mediante il principio del vento termico illustrato nel prossimo paragrafo;

#### 3.4.1 Preelaborazione

La fase di preelaborazione (*preprocessing*) viene eseguita una sola volta all’avvio della procedura di calcolo e si occupa di definire le condizioni a contorno di partenza, di correggere le velocità orizzontali del vento e di calcolare alcuni dei parametri derivabili dai dati di partenza. La prima di queste operazioni è sostanzialmente identica a quella descritta nel paragrafo 3.4.2; le restanti due sono invece riportate di seguito.

La correzione della velocità del vento riguarda esclusivamente i quattro strati più alti del modello, cioè quelli posti a 5120, 2560, 1280 e 640 metri; la maggioranza dei punti del territorio campano sono, infatti, ad una quota inferiore rispetto alle quattro appena indicate ed è pertanto possibile considerare i venti di questi strati soggetti alle regole della spirale di Ekman descritta nel paragrafo 2.2.5. In realtà la correzione non usa le funzioni descritte da Ekman (2.16), ma la più semplice funzione di calcolo del *vento termico* (Wallace e Hobbs, 1977), che iterata dal livello più basso verso quello più alto consente ugualmente di ottenere l’andamento a spirale del vento indicato dall’autore. Nel dettaglio, le equazioni impiegate per calcolare i valori corretti di velocità ( $u'$  e  $v'$ ) sono:

$$u'_z = u_{z-1} - (R / f) (\partial T_{z-1} / \partial x) \ln (p_{z-1} / p_z)$$

$$v'_z = v_{z-1} + (R / f) (\partial T_{z-1} / \partial y) \ln (p_{z-1} / p_z)$$

dove i pedici  $z$  e  $z-1$  indicano, rispettivamente, una variabile riferita allo strato da correggere o a quello ad esso immediatamente inferiore.

Relativamente ai parametri derivabili, gli unici richiesti durante il processo di elaborazione sono la temperatura potenziale  $\theta$  e la densità dell'aria  $\rho$ . La prima viene calcolata con l'equazione 1.16 a partire dai valori di temperatura e pressione locali, mentre per le restanti due viene fatto uso delle seguenti (Wallace e Hobbs, 1977):

### 3.4.2 Elaborazione

Il processo d'elaborazione viene schematizzato in figura 3.8 e risulta in un meccanismo d'iterazione ciclica in cui possono distinguersi tre passaggi fondamentali: la definizione delle condizioni al contorno, l'elaborazione dei termini parametrizzabili ed il calcolo dell'evoluzione delle variabili coinvolte.

Lo schema numerico impiegato per il calcolo delle *condizioni al contorno laterali* si ispira a quello proposto da Mason e Sykes ed illustrato nel paragrafo 2.5.1; questo permette di calcolare il valore al confine del dominio di una qualsiasi variabile partendo dai due punti ad esso adiacenti lungo lo stesso asse orizzontale. Per esempio, nel caso del confine ovest, la funzione usata è:

$$\Psi_{[0, y]} = \Psi_{[1, y]} + 0.5(\Psi_{[1, y]} - \Psi_{[2, y]}) \quad (3.11)$$

dove  $\Psi_{[0, y]}$  è il valore della variabile sul confine ovest di ascissa  $y$ , mentre  $\Psi_{[1, y]}$  e  $\Psi_{[2, y]}$  indicano il valore della stessa variabile calcolato nei due punti immediatamente adiacenti della stessa ascissa. Una tale espressione ha come scopo quello di conservare parte del gradiente della variabile lungo il piano, così da alterare solo in minima parte i fenomeni di avvezione che si verificano in prossimità del confine.

Per i *confini superiore ed inferiore* del modello, localizzati il primo a 10240 metri ed il secondo sul livello del mare, la condizione al contorno impiegata è quella del confine rigido descritto all'inizio del paragrafo 2.5.2. I valori impiegati per ciascuna variabile sono dati nella tabella 3.3 ed alcuni di questi, invece di essere considerati costanti, sono calcolati come funzione dei gradienti verticali ricavabili dai punti interni del dominio o dai gradienti verticali medi descritti per condizioni atmosferiche standard.

Variabile	Valore al suolo	Valore a 10240 metri
u	0	$u_{5120}$
v	0	$v_{5120}$
w	0	0
p	$p_{10} + 12.5$	
q	$q_{10}$	$0.5 \times q_{5120}$
$\rho$	$\rho_{10}$	$0.6 \times \rho_{5120}$
$\theta$	$\theta_{10}$	$\theta_{5120} + 35$
T	$T_{10}$	$T_{5120} - 35$

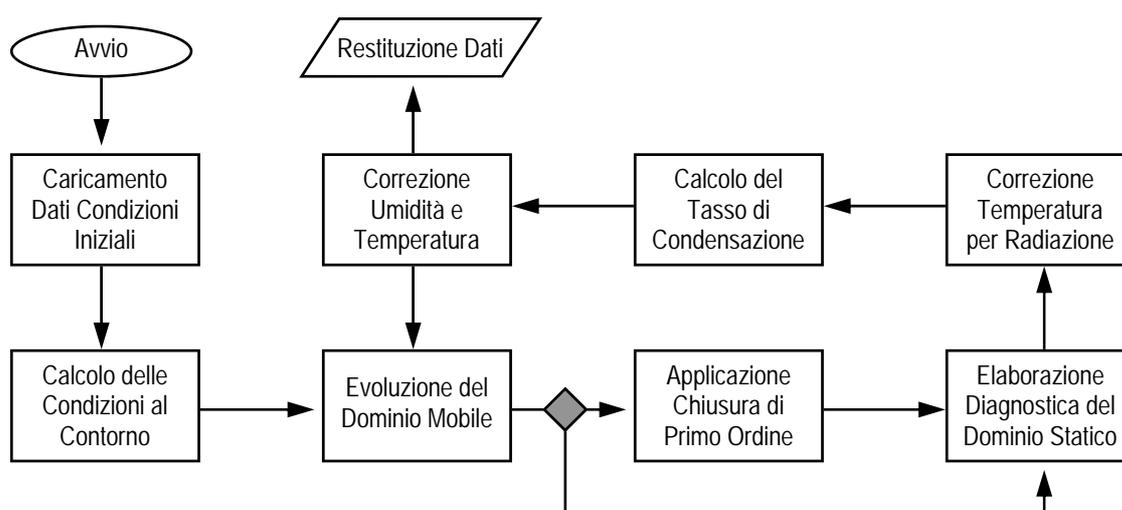
**Tabella 3.3:** Valori assegnati per i confini superiori ed inferiori del modello. I pedici usati nelle funzioni si riferiscono alle quote a cui viene prelevata la variabile in oggetto.

Le parametrizzazioni operate ad ogni ciclo di calcolo riguardano i diversi aspetti fisici discussi nel terzo capitolo di questa tesi e, per molti di essi, le funzioni usate sono le stesse descritte nel corso dello stesso. Nel dettaglio, gli schemi adoperati sono:

- per i *flussi a scala di sottogriglia*, lo schema di Louis (equazioni da 2.9 a 2.12), sostituito oltre i 2000 metri di quota dallo schema di Blakadar (equazione 2.15) in condizioni di atmosfera stabile;
- per il *riscaldamento radiativo* dell'aria, gli schemi di Manher e Pielke (equazioni da 2.24 a 2.27) e McDonald (equazioni da 2.19 a 2.23);
- per i *passaggi di stato del vapore acqueo* ed i fenomeni ad esso associati sono valutati, lo schema presentato da Tiedke (equazione 2.34) e lo schema di Kuo (equazione 2.35).

Per accelerare il processo di calcolo è possibile escludere dall'elaborazione il calcolo dei coefficienti di scambio, considerando gli stessi nulli e portando il sistema ad una chiusura di ordine zero. Questo tipo di approssimazione, durante le prove eseguite, ha mostrato di non determinare variazioni apprezzabili nel risultato finale delle elaborazioni per simulazioni della durata inferiore alle 24 ore e per scale spaziali di 50 o 100 chilometri.

La soluzione del sistema di equazioni primitive e delle parametrizzazioni citate avviene mediante uno schema a differenze finite di tipo centrato nello spazio ed avanzato nel tempo (equazione 1.50), i cui limiti di stabilità sono stati parzialmente superati dando alla griglia di elaborazione la particolare conformazione descritta nel prossimo paragrafo. Il passo temporale impiegato nella soluzione dello schema è di 120 secondi.



**Figura 3.8:** Diagramma di flusso illustrante i diversi passaggi svolti dal processo di elaborazione.

---

### 3.4.3 Struttura Ibrida della Griglia

A differenza di un comune modello numerico, quello sviluppato per gli scopi di questa tesi presenta una griglia di calcolo che può definirsi *ibrida*. Una parte dei dati, infatti, non si considera vincolata per posizione ai nodi della griglia tridimensionale generata nel corso del processo di inizializzazione, ma può muoversi liberamente all'interno del dominio di calcolo secondo le accelerazioni prodotte dai fenomeni di avvezione. Per meglio comprendere il significato di questa scelta è utile osservare le equazioni da 1.23 a 1.28, che generalmente costituiscono il punto di partenza per un qualsiasi modello che adotti un sistema di riferimento *euleriano*, e le stesse equazioni riscritte, come riportato di seguito, per un sistema di riferimento *lagrangiano*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin\varphi - 2w\Omega \cos\varphi \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin\varphi \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = S_\theta \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = S_q \quad (3.16)$$

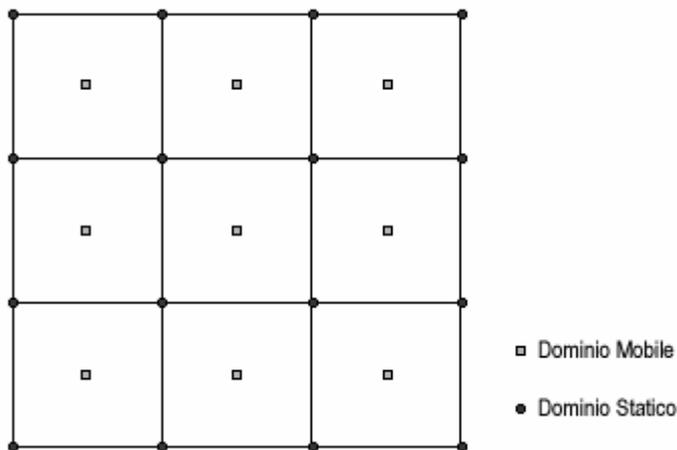
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

Nel secondo caso, infatti, i termini da calcolare sono drasticamente ridotti a causa della mancanza delle derivate spaziali, e ciò si rivela estremamente vantaggioso in termini di tempi di elaborazione.

La scomposizione della griglia in *elementi mobili*, cioè capaci di spostarsi entro il dominio impiegato, ed *elementi statici*, cioè fissati ai nodi della griglia di partenza, viene operata generando dalla griglia di partenza due nuove griglie distinte:

- una prima, identica alla griglia iniziale, sui cui nodi sono registrati i valori di temperatura e pressione (*dominio statico*);
- una seconda, sfalsata nel piano orizzontale rispetto alla precedente di metà del passo di griglia, in cui i nodi raccolgono i valori di velocità del vento, densità, temperatura potenziale, umidità specifica e coordinate spaziale (*dominio mobile*).

La struttura delle due griglie, terminata la loro creazione, risulta simile a quella mostrata in figura 3.9 e l'elaborazione di ciascuna di esse segue processi distinti.



**Figura 3.9:** Disposizione dei nodi nel dominio mobile e nel dominio statico del modello.

In particolare, poiché le variabili del dominio statico non ricadono nell'ambito delle variazioni temporali descritte dal sistema delle equazioni primitive, il loro valore viene rielaborato al termine di ciascun passo temporale. Per la temperatura ciò avviene usando la seguente funzione:

$$T_{t+1} = \left\{ \theta_{t+1} \left[ \frac{1}{(1 + 0.61q_{t+1})^{0.72}} \left( \frac{100000}{(286.9\rho_{t+1})} \right)^{0.28} \right] \right\}^{1.3} \quad (3.18)$$

nella quale i valori di densità, umidità specifica e temperatura potenziale possono essere ricavati da una media pesata dei quattro punti del dominio mobile più vicini al nodo in esame, secondo lo stesso criterio descritto per l'equazione 3.5. Per la pressione, invece, viene adottato un criterio parzialmente empirico, basato sull'analisi delle variazioni di densità lungo la verticale di ciascun punto del dominio, attraverso la seguente formula:

$$P_{t+1} = P_t + \left[ \sum_{n=x}^{10} \rho_n^t h_n - \sum_{n=x}^{10} \rho_n^{t+1} h_n \right] \quad (3.19)$$

dove  $\rho_n h_n$  è il prodotto della densità registrata alla quota del livello  $n$  per l'altezza del livello stesso,  $x$  il livello su cui si sta elaborando la pressione, e  $t$  e  $t+1$  gli indici che indicano se le variabili sono riferite all'istante in corso o a quello in fase di elaborazione. Risulta pertanto che, noto il valore previsto di densità per ciascun punto della griglia mobile, è possibile determinare la variazione di pressione come una funzione della variazione di densità nella colonna d'aria sovrastante il punto in esame.

Diversamente dai casi appena esposti, l'elaborazione degli elementi presenti nel dominio mobile si configura secondo gli stessi principi dei normali modelli numerici, risolvendo ad ogni passo temporale il sistema costituito dalle equazioni da 3.12 a 3.18 con l'utilizzo di uno schema a differenze finite in avanti nel tempo e centrato nello spazio. Poiché viene usato un sistema di riferimento lagrangiano, tuttavia, al termine delle normali operazioni di calcolo viene anche operata una variazione delle coordinate spaziali di ciascun punto mediante le seguenti funzioni:

---

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t + u_{t+1} \delta t \\y_{t+1} &= y_t + v_{t+1} \delta t \\z_{t+1} &= z_t + w_{t+1} \delta t\end{aligned}\tag{3.20}$$

Durante l'elaborazione, pertanto, si potrà osservare una progressiva migrazione dei punti secondo i regimi di vento imposti dai gradienti di pressione esistenti nel dominio di calcolo.

#### 3.4.4 Avvezioni positive e negative

Gli spostamenti a cui sono soggetti gli elementi del dominio mobile possono portare al manifestarsi di *regioni di aggregazione* o di *diradazione* in presenza di fenomeni di avvezione positiva (*convergenza*) o negativa (*divergenza*); inoltre, parte degli elementi in movimento può valicare il confine del dominio o percorrerne l'intera lunghezza, lasciandone progressivamente scoperta una parte. Per ovviare a questo tipo di inconvenienti, il modello verifica al termine di ogni passo temporale se esiste almeno un punto del dominio mobile che ricade entro quattro punti adiacenti del dominio statico, quindi opera una delle correzioni seguenti:

- se non trova alcun punto nell'area indagata, ne aggiunge uno nuovo mediante interpolazione degli altri elementi confinanti facendo uso dell'equazione 3.5;
- se trova due o più punti entro la stessa area, li elimina tutti e ne genera uno nuovo mediando i valori delle coordinate e delle variabili associate ai precedenti.

Attraverso lo stesso sistema di correzione, le condizioni al contorno del modello sono automaticamente modificate ogni volta che un qualsiasi punto mobile attraversa uno dei confini del dominio; quando ciò accade, infatti, il valore del punto d'ingresso viene aggregato ai valori scelti ad inizio elaborazione come condizione a contorno, esattamente come accade nel secondo dei punti citati in precedenza.

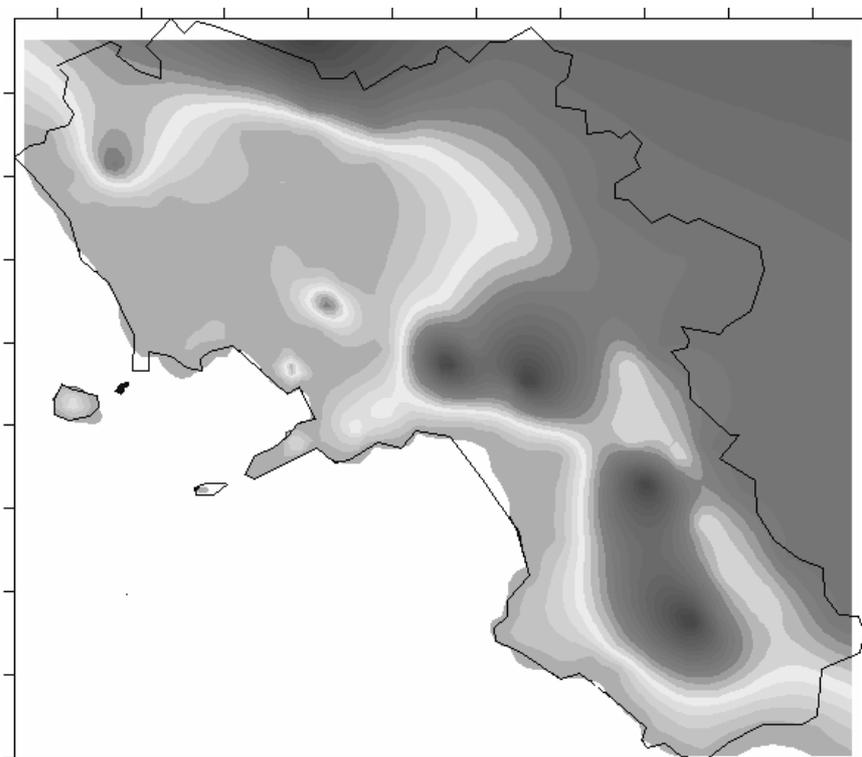
Un secondo aspetto di questa tecnica di correzione, riguarda il valore di densità; ai fenomeni di convergenza e divergenza, infatti, si associano rispettivamente compressioni e dilatazione delle masse d'aria che portano a variazioni di densità e, conseguentemente, variazioni di pressione. Con il metodo citati i fenomeni di convergenza portano ad un aumento medio della densità che può ritenersi realistico, ma altrettanto non può dirsi per i fenomeni di divergenza, nei quali, invece, il valore di densità ottenuto per mezzo della correzione tenderà ad essere molto prossimo a quello precedente; questo si verifica perché il punto che viene ad essere rielaborato ha come elemento a lui più vicino proprio quello che si appresta a sostituire. Di conseguenza, in caso di divergenza, il valore di densità del punto rielaborato viene arbitrariamente ridotto dello 0.0001%; tale valore, scelto dopo numerose simulazioni, si è rivelato quello che ha determinato i valori di pressione per le aree di divergenza maggiormente realistici.

---

### 3.4.5 Rappresentazione del terreno

La superficie del territorio campano viene rappresentata all'interno del modello numerico da un *DEM* (*Digital Elevation Model*) con una risoluzione in piano di 15 Km e valori di altimetria di ciascun punto aventi un margine d'errore dell'ordine dei 100 metri. Tale rappresentazione viene principalmente usata per determinare l'albedo richiesta nella parametrizzazione del riscaldamento dell'aria come conseguenza della radiazione ad onda corta (equazione 2.23).

Il coefficiente d'albedo viene ricavato in modo approssimativo, non essendo il DEM dotato anche di dati relativi la tipologia di terreno presente in ciascun punto del grigliato; nel caso di punti posti a quota zero o inferiore si assume l'esistenza di un valore d'albedo di 0.6, pari alla media di un comune specchio d'acqua, mentre per i restanti punti viene usata un'albedo di 0.2, pari alla media di un normale terreno roccioso.



**Figura 3.7:** Il modello digitale delle quote usato all'interno del modello.

## CAPITOLO 4

### Validazione del modello numerico

---

#### 4.1 Il nubifragio del 17 Settembre 2005

Per eseguire una prima verifica della versione definitiva del modello numerico sono state svolte diverse simulazioni relative al periodo compreso fra il 16 ed il 17 settembre del 2005. Dall'osservazione delle carte meteo, risulta che questo intervallo di tempo sia stato caratterizzato dall'occlusione di un fronte freddo a nord delle Alpi e dal progressivo avvicinamento di un'estesa area di bassa pressione al Sud Italia; durante il giorno 17, inoltre, l'area di bassa pressione (1004hPa) inizialmente centrata sul Nord Adriatico, migra verso sud in direzione di un'area di alta pressione (1011hPa) posta fra la penisola ellenica e la punta occidentale della Sicilia, accompagnandosi ad abbondanti piogge. Per la simulazione, pertanto, è stata usata una griglia a 100 km posizionata nel dominio tirrenico (figura 3.6a).

Nel corso della verifica il modello è stato prima in una simulazione della durata di 48 ore a partire dalle 00 UTC del giorno 16 Settembre 2005 e, successivamente, per una simulazione della durata di 24 a partire dalle 00 UTC del giorno 17 Settembre 2005; i valori ottenuti alle coordinate dell'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II" (lat. 40°50' long. 14°15' alt. 50m s.l.m.) sono stati riportati nelle tabelle 4.1 e 4.2, dove vengono messi a confronto con i valori registrati dalla strumentazione disponibile sul luogo. La tabella 4.3 riporta i coefficienti di correlazione ottenuti da una regressione lineare fra i valori osservati e quelli previsti per ciascuna delle variabili indicate, distinguendo fra la simulazione a 24 e quella a 48 ore.

Dall'analisi dei coefficienti di correlazione risulta la capacità del modello di individuare in maniera attendibile le sole piogge, mentre le fluttuazioni delle restanti variabili vengono previste in misura non ancora soddisfacente. I valori di precipitazione ottenuti, inoltre, non rispecchiano comunque la reale intensità dell'evento temporalesco, anche se la comparsa di valori non nulli sembra sempre coincidere con il reale inizio del fenomeno.

Si è inoltre osservato in questo test che, operando un'analisi di regressione lineare fra i dati ottenuti nella simulazione a 24 ore e la seconda metà dei dati ottenuti nella simulazione a 48 ore, i coefficienti di correlazione si mantengono per le diverse variabili in esame si mantengono tutti superiori allo 0,8. Ciò indica che il modello riesce a valutare correttamente l'andamento delle variabili ma, come si osserva dai dati, sottostimandone la reale entità.

Data	Ora	Valori Osservati				Valori Previsti			
		T (°C)	p (hPa)	Q (%)	R (mm)	T (°C)	p (hPa)	Q (%)	R (mm)
17/09/05	3	23,2	1002,0	76	0	16,4	1004,1	79	0
17/09/05	6	24,1	1002,5	74	0	15,9	1004,0	77	0
17/09/05	9	24,4	1003,2	76	0	16,2	1004,0	75	0
17/09/05	12	25,0	1002,1	73	0	16,5	1003,9	74	0
17/09/05	15	24,5	1001,4	79	0	16,5	1003,9	74	0
17/09/05	18	24,2	1001,7	77	0	16,3	1003,9	75	0
17/09/05	21	22,6	1001,6	82	3,0	16,0	1003,9	77	0
17/09/05	24	21,7	1001,4	88	36,2	16,1	1003,9	78	0,1

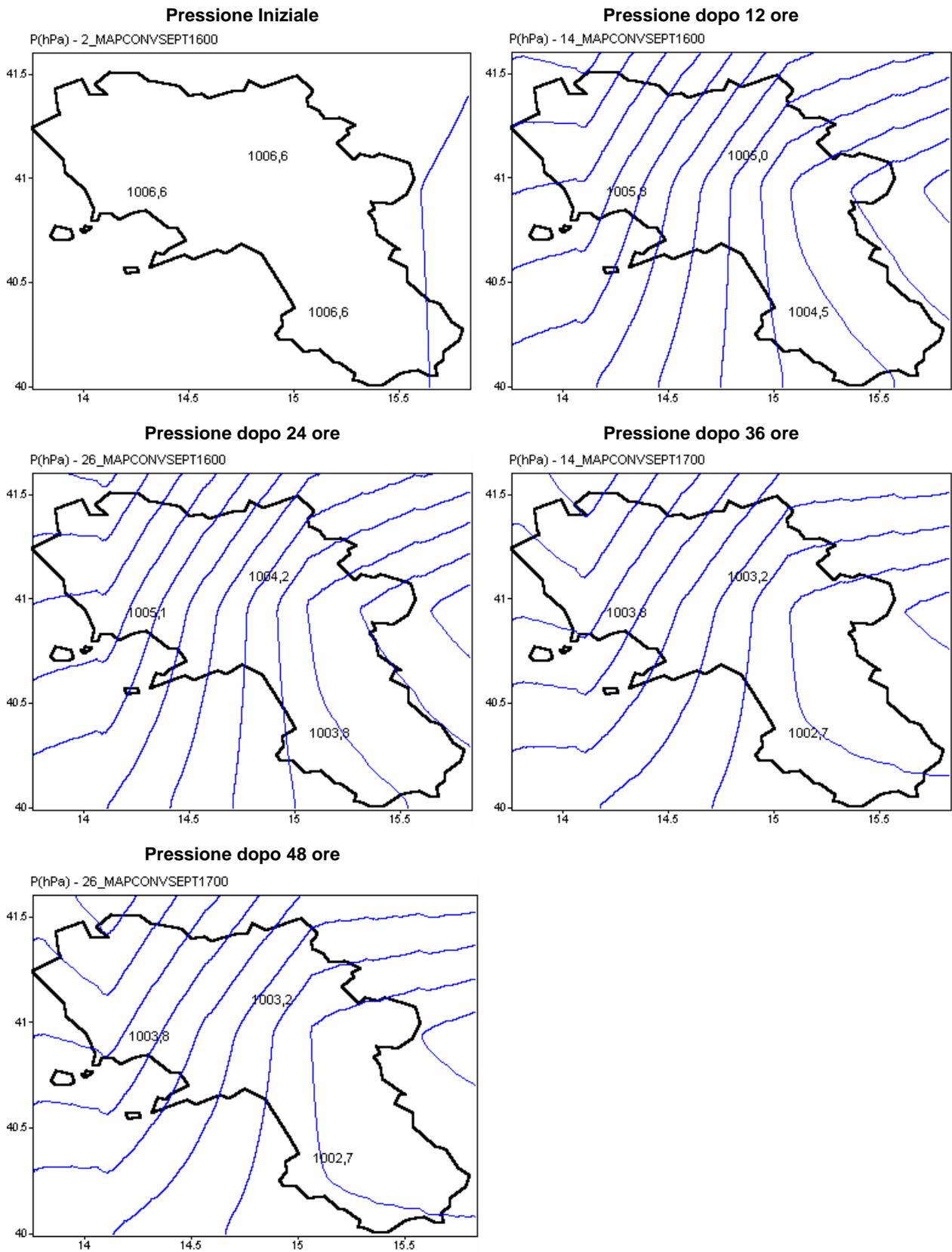
**Tabella 4.1:** Dati meteorologici previsti ed osservati alle coordinate dell'Osservatorio Meteorologico, a partire dalle ore 3 UTC del giorno 17/9/2005 in una simulazione della durata di 24 ore. Con Q ed R sono indicate, rispettivamente, l'umidità relativa e l'altezza di pioggia.

Data	Ora	Valori Osservati				Valori Previsti			
		T (°C)	P (hPa)	Q (%)	R (mm)	T (°C)	P (hPa)	Q (%)	R (mm)
16/09/05	3	21,2	1005,1	63	0	18,1	1005,4	73	0
16/09/05	6	22,7	1005,1	53	0	17,2	1005,5	78	0
16/09/05	9	24,5	1004,5	52	0	17,6	1005,5	76	0
16/09/05	12	26,8	1003,4	48	0	17,9	1005,4	75	0
16/09/05	15	24,8	1003,2	64	0	17,8	1005,1	75	0
16/09/05	18	23,6	1003,2	69	0	17,4	1004,9	77	0
16/09/05	21	23,5	1002,7	70	0	17,2	1004,7	78	0
16/09/05	24	23,4	1002,1	72	0	17,0	1004,5	79	0
17/09/05	3	23,2	1002,0	76	0	17,0	1004,4	79	0
17/09/05	6	24,1	1002,5	74	0	17,1	1004,3	79	0
17/09/05	9	24,4	1003,2	76	0	17,5	1004,2	77	0
17/09/05	12	25,0	1002,1	73	0	18,0	1004,2	75	0
17/09/05	15	24,5	1001,4	79	0	17,9	1004,1	75	0
17/09/05	18	24,2	1001,7	77	0	17,5	1004,1	77	0,1
17/09/05	21	22,6	1001,6	82	3,0	17,3	1004,0	78	0
17/09/05	24	21,7	1001,4	88	36,2	17,2	1003,9	79	0

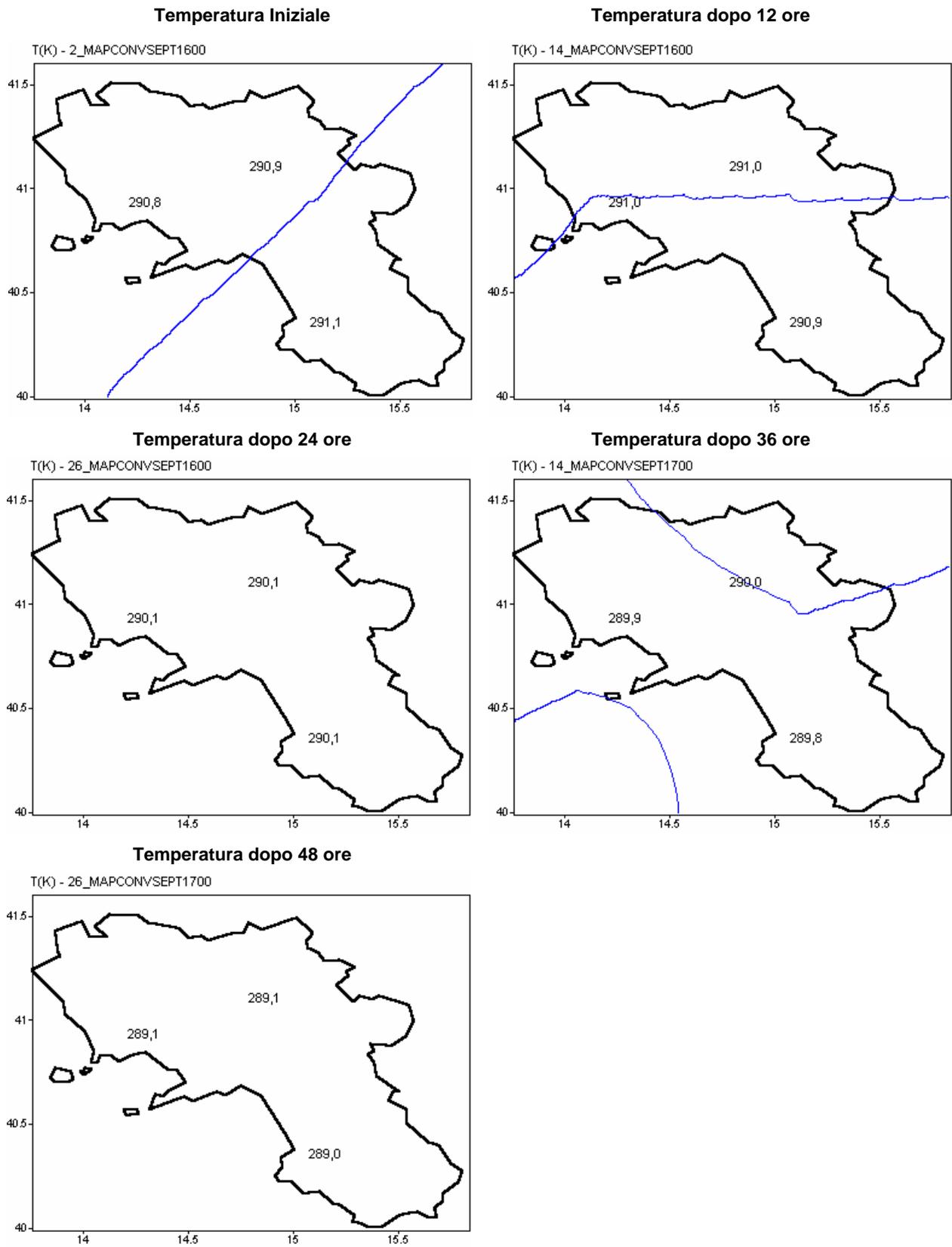
**Tabella 4.2:** Dati meteorologici previsti ed osservati alle coordinate dell'Osservatorio Meteorologico, a partire dalle ore 3 UTC del giorno 16/9/2005 in una simulazione della durata di 48 ore. Con Q ed R sono indicate, rispettivamente, l'umidità relativa e l'altezza di pioggia.

Periodo Simulazione	Coefficienti di Correlazione			
	T	p	Q	R
24 ore	0,24	0,28	0,14	0,99
48 ore	0,11	0,81	0,08	0,98

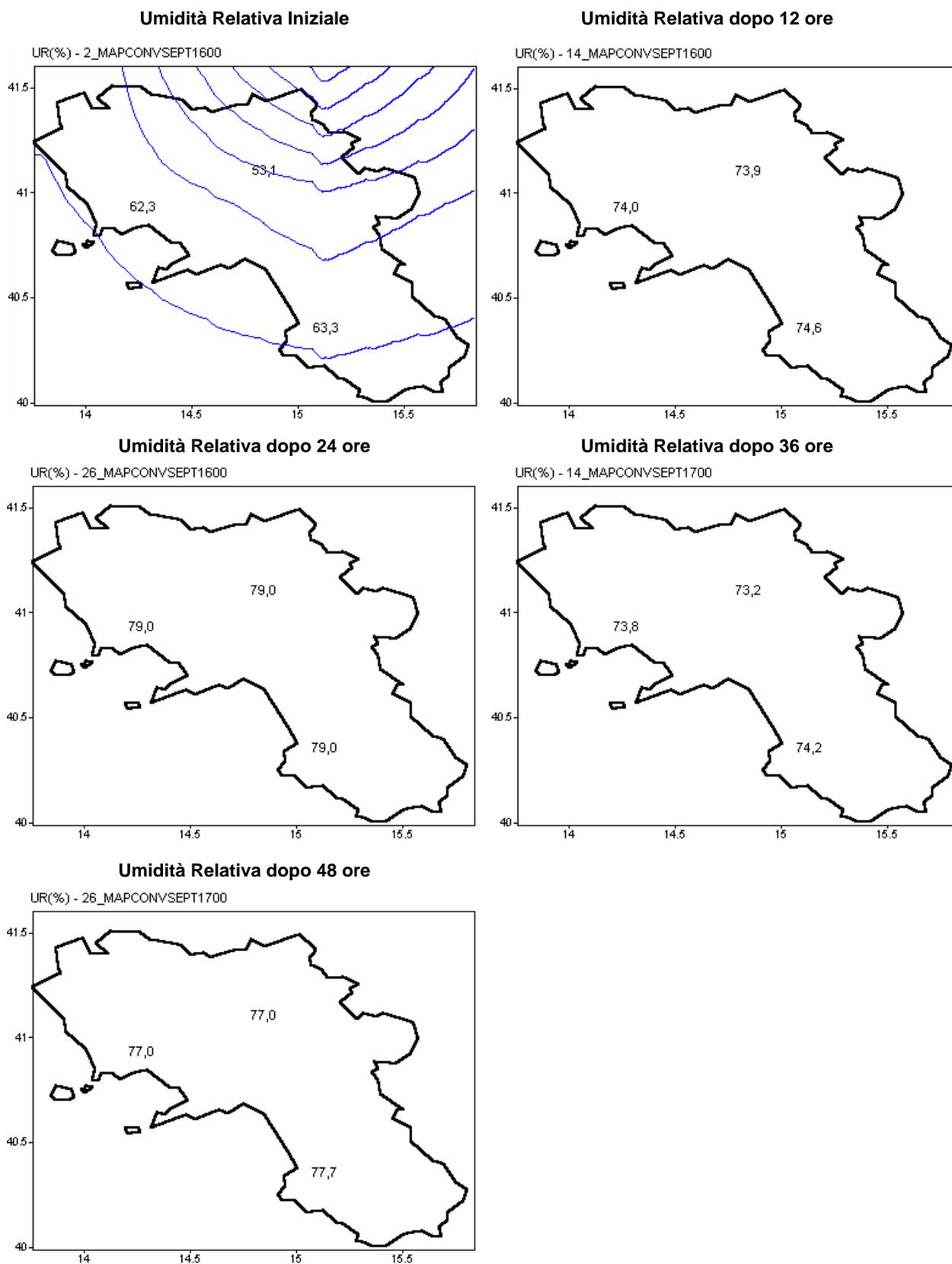
**Tabella 4.3:** Coefficienti di correlazione ottenuti mediante regressione lineare dalle serie di dati delle tabelle 3.5 e 3.6.



**Figura 4.1:** Evoluzione della pressione atmosferica alla quota di 40 metri a partire dalle ore 00 UTC del giorno 16 Settembre 2005 e per le 48 ore successive.



**Figura 4.2:** Elaborazione dei campi di temperatura alla quota di 40 metri nelle 48 ore successive le 00 UTC del giorno 16 Settembre 2005.



**Figura 4.3:** Elaborazione dei campi di umidità relativa alla quota di 40 metri nelle 48 ore successive le 00 UTC del giorno 16 Settembre 2005.

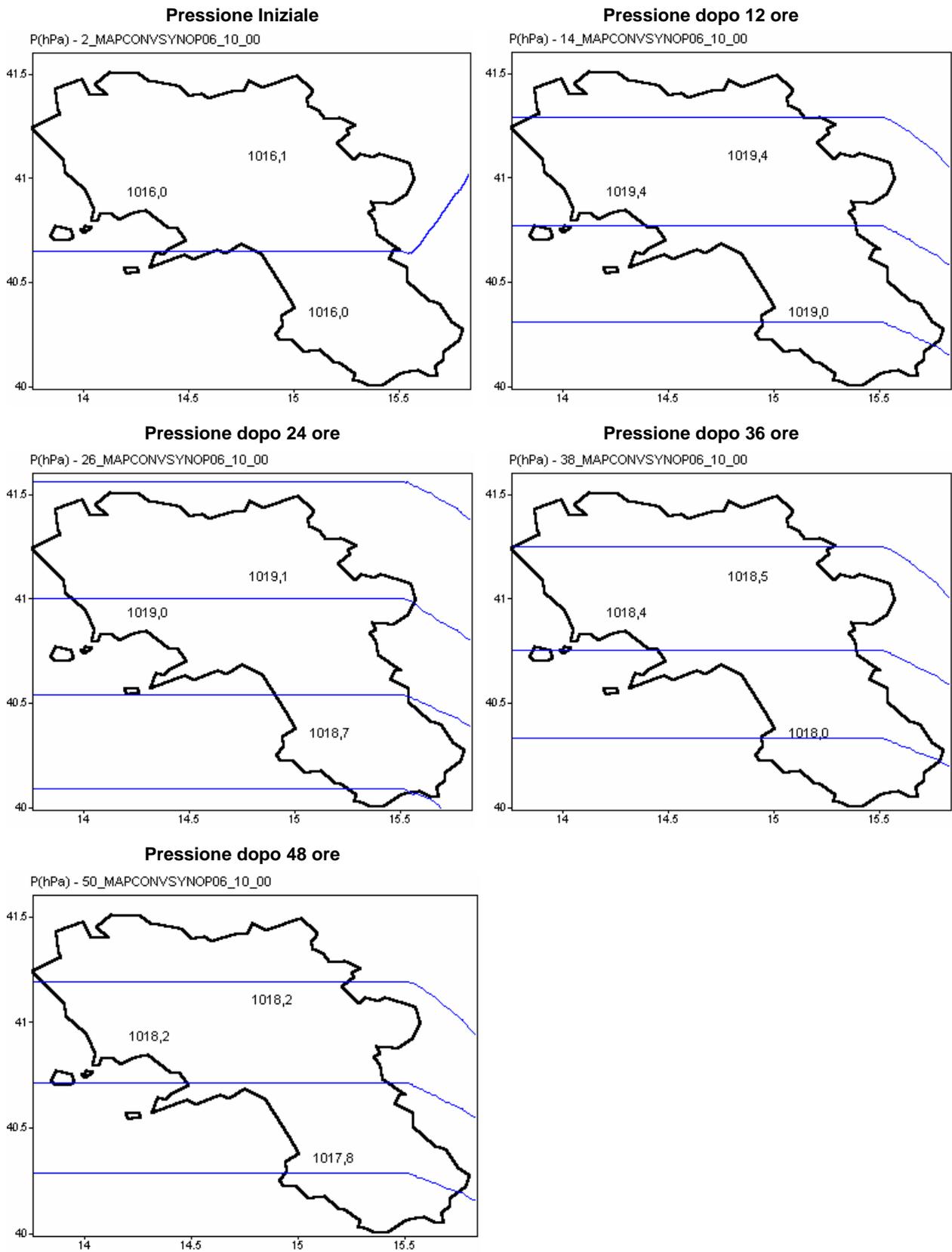
## 4.2 L'evento piovoso del 07 Ottobre 2005

Come per il caso precedente, il modello è stato usato per simulare l'evoluzione di un evento piovoso, stavolta dotato di minore intensità e maggiormente frammentato nel tempo. Quello del 7 Ottobre 2005, infatti, risulta associato ad centro di bassa pressione localizzato sull'Italia che ha portato all'instaurarsi di una condizione di instabilità conseguente all'ingresso di aria umida di origine balcanica e formazione di fronti occlusi lungo la fascia appenninica e le alpi occidentali. Per questo test, pertanto, è stata usata una griglia con risoluzione orizzontale di 100 km posizionata sul dominio adriatico (figura 3.6b).

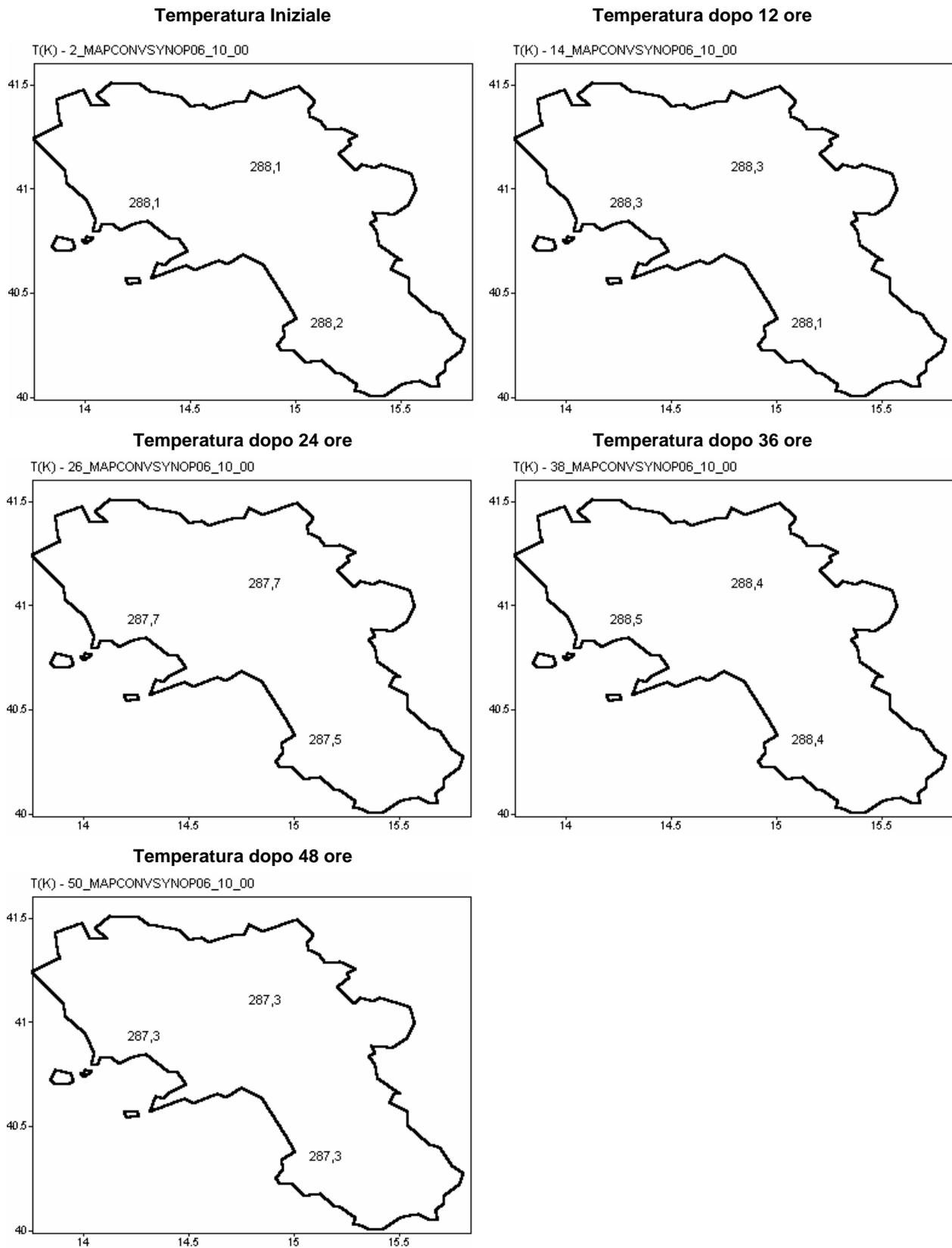
La simulazione è stata in questo caso operata soltanto sulle 48 ore, a partire dai dati disponibili per le 00 UTC del 6 Ottobre 2005, ed i dati sono stati messi a confronto, con lo stesso criterio usato per il test precedente, come mostrato in tabella 3.7. In questo caso, il miglior risultato dell'analisi di regressione lineare si è ottenuto per il coefficiente di correlazione della pressione (0,46) e per l'umidità relativa (0,36); il coefficiente di correlazione per la pioggia è inferiore a 0,5 ma, come nel test precedente, gli eventi di precipitazione previsti si sono verificati in prossimità degli eventi reali.

Data	Ora	Valori Osservati				Valori Previsti			
		T (°C)	P (hPa)	Q (%)	R (mm)	T (°C)	P (hPa)	Q (%)	R (mm)
06/10/05	3	17,1	1011,4	84	0	15,0	1019,7	80	0
06/10/05	6	18,4	1011,8	77	0	14,4	1019,9	77	0
06/10/05	9	21,5	1012,5	57	0	14,7	1019,8	76	0
06/10/05	12	21,2	1011,3	60	0	15,0	1019,7	74	0
06/10/05	15	20,6	1011,3	68	0	14,9	1019,6	75	0
06/10/05	18	19,6	1011,9	75	0	14,6	1019,5	76	0
06/10/05	21	18,7	1012,5	79	0	14,4	1019,4	77	0
06/10/05	24	18,4	1012,1	79	0	14,3	1019,3	77	0
07/10/05	3	17,7	1011,3	79	0	14,3	1019,2	78	0,1
07/10/05	6	18,6	1011,7	74	0	14,3	1019,1	78	0
07/10/05	9	19,0	1011,2	77	0	14,6	1018,9	76	0
07/10/05	12	19,0	1011,5	82	1,2	15,0	1018,7	75	0
07/10/05	15	19,8	1010,7	81	3,0	14,9	1018,6	75	0
07/10/05	18	19,5	1010,0	79	0	14,5	1018,6	77	0,1
07/10/05	21	17,2	1011,1	88	11,2	14,4	1018,5	78	0
07/10/05	24	16,0	1009,7	87	6,0	14,3	1018,5	78	0

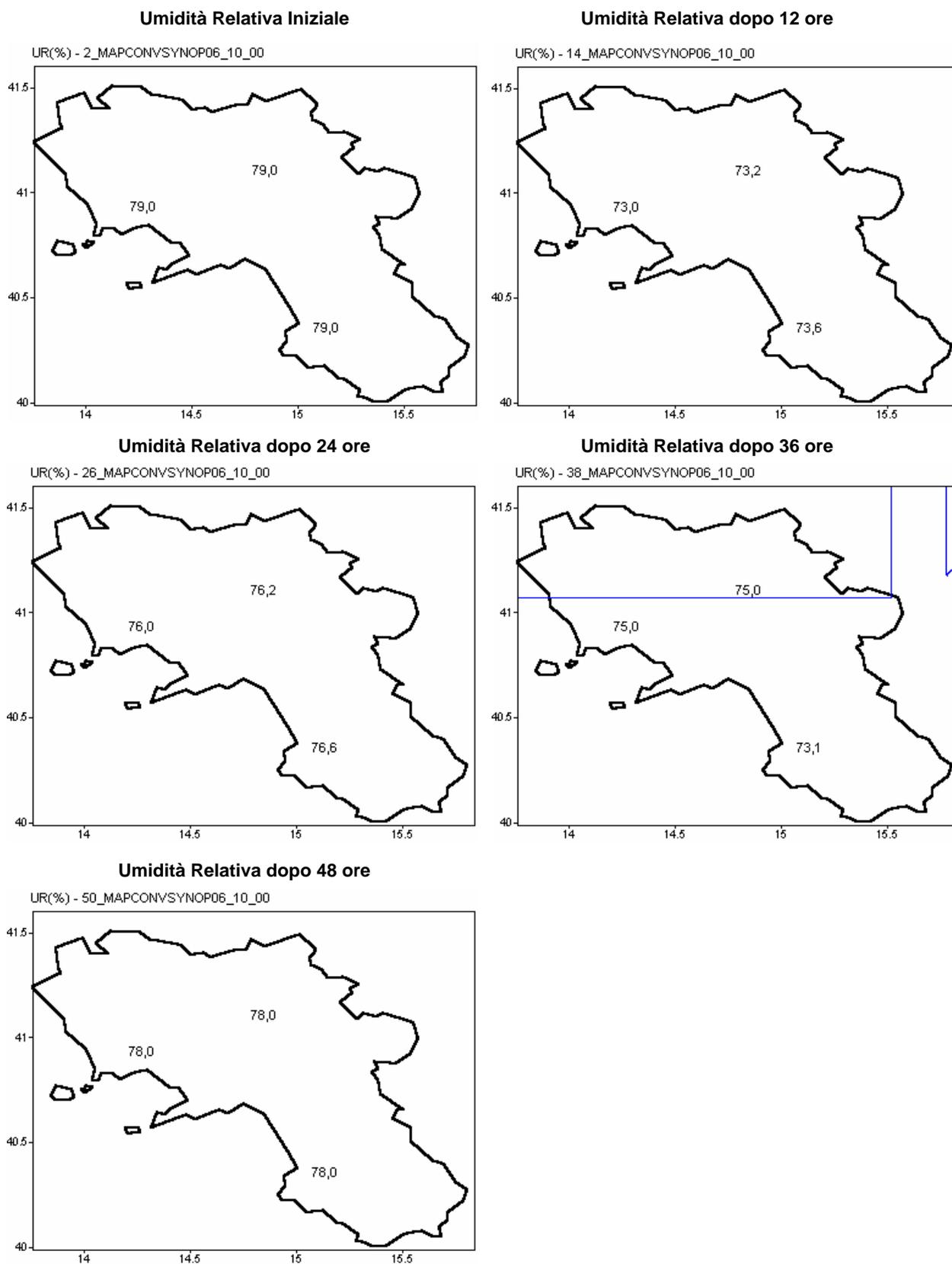
**Tabella 4.4:** Dati meteorologici previsti ed osservati alle coordinate dell'Osservatorio Meteorologico, a partire dalle ore 3 UTC del giorno 6/10/2005. Intestazioni come in tabella 3.4.



**Figura 4.4:** Evoluzione della pressione atmosferica alla quota di 40 metri a partire dalle ore 00 UTC del giorno 6 Ottobre 2005 e per le 48 ore successive.



**Figura 4.5:** Elaborazione dei campi di temperatura alla quota di 40 metri nelle 48 ore successive le 00 UTC del giorno 6 Ottobre 2005.



**Figura 4.6:** Elaborazione dei campi di umidità relativa alla quota di 40 metri nelle 48 ore successive le 00 UTC del giorno 6 Ottobre 2005.

---

### 4.3 Conclusioni

La presente tesi di dottorato si è incentrata principalmente sugli aspetti teorici e sui risvolti pratici dei modelli di previsione numerica applicati all'evoluzione delle variabili atmosferiche, puntando, come scopo principale, allo sviluppo di un semplice modello capace di prevedere in tempi brevi il possibile verificarsi di eventi di precipitazione estrema. La possibilità di avere un simile strumento, soprattutto nel caso di un territorio come quello campano in cui sono presenti molte aree a rischio idrogeologico, può rivelarsi infatti fondamentale per scopi di protezione civile.

Lo studio degli aspetti teorici ha coinvolto principalmente le basi dei diversi modelli attualmente usati e prodotti dai grandi centri meteorologici, come lo *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) o il *National Centre for Environmental Prediction* (NCEP), portandomi ad esaminare le principali leggi che regolano la fisica dell'atmosfera e, successivamente, gli schemi usati per la parametrizzazione di fenomeni come l'evaporazione, la formazione di piogge o lo scambio radiativo del calore. Per avviare lo sviluppo del software vero e proprio, invece, è stato necessario studiare i metodi di soluzione impiegati per risolvere le equazioni differenziali e differenziali parziali, anche in questo caso facendo riferimento ai principali metodi impiegati nei modelli attualmente esistenti.

I test sul primo prototipo funzionante del modello sono cominciati soltanto nella prima metà del 2004 e, fino ai primi del 2005, si sono basati quasi esclusivamente sull'uso dei dati reperibili attraverso i canali METAR e SYNOP. Successivamente, con la contemporanea configurazione di un'estesa rete di misure meteorologiche sul territorio campano alla quale ho attivamente partecipato, si sono avvalsi anche dei dati provenienti da stazioni poste direttamente accessibili in remoto dall'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II".

A seguito delle verifiche svolte e delle due discusse nei paragrafi precedenti, il modello numerico sviluppato si è rivelato ancora ampiamente perfezionabile, in particolare per ciò che riguarda la capacità di prevedere in modo corretto i valori assoluti delle variabili coinvolte negli studi meteorologici; diversamente, sembra che l'uso della griglia ibrida, peraltro già ampiamente adoperata del campo dei modelli di dispersione degli inquinanti (De Hann e Rotach, 1998), possa rappresentare una valida alternativa alle griglie statiche nella simulazione dei movimenti associati alle masse d'aria e, di conseguenza, nella previsione degli eventi piovosi. Probabilmente, con un'adeguata correzione delle variazioni di densità ed umidità specifica associate ai movimenti di divergenza e convergenza che hanno luogo nel dominio mobile del modello sarà possibile ottenere valori più vicini a quelli realmente osservati dalle strumentazioni.

Un aspetto non trascurabile nell'uso dei modelli numerici, tuttavia, riguarda la bontà del dato usato in fase di inizializzazione; l'installazione e l'adeguata configurazione della rete di centra-

---

line meteorologiche annessa all'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II" durante il mio periodo di studio ha, in tal senso, fornito un'ottima base di dati adoperabile durante il corso di diverse simulazioni e nel periodo di sviluppo del modello. Infatti, come accennato nel paragrafo 3.2.3, se non si dispone di una buona rete di monitoraggio le possibilità di disporre di un campo di dati iniziale realistico si riducono in misura considerevole, anche avendo a disposizione metodi di interpolazione precisi o sistemi di correzione del dato affidabili (Isaaks e Srivastava, 1989); come enunciato anche dalla *teoria dell'informazione*, infatti, dati "reali" sono ottenibili soltanto attraverso l'uso di misurazioni dirette, mentre i metodi numerici possono soltanto portarci a dei dati "realistici" (Shannon e Weaver, 1963).

## APPENDICE: Elenco dei simboli

---

<b>F</b>	vettore di forza
<b>G</b>	vettore rappresentante l'attrazione gravitazionale verso il centro della Terra
<b>R</b>	vettore congiungente il centro della Terra con un punto alla sua superficie
<b>V</b>	vettore di velocità di una massa d'aria
<b>a</b>	vettore di accelerazione
<b>k</b>	vettore unitario orientato verso il centro della Terra
<b>i</b>	vettore unitario orientato da ovest a est sulla superficie terrestre
<b>j</b>	vettore unitario orientato da sud a nord sulla superficie terrestre
<b><math>\Omega</math></b>	vettore della velocità angolare della Terra
<b>C</b>	numero di Courant
<b>C<sub>R</sub></b>	tasso di condensazione del vapore acqueo
<b>D<sub>x</sub></b>	estensione zonale del dominio orizzontale del modello
<b>D<sub>y</sub></b>	estensione meridionale del dominio orizzontale del modello
<b>H</b>	estensione verticale del dominio del modello
<b>L</b>	estensione media del dominio orizzontale del modello
<b>P<sub>R</sub></b>	tasso di precipitazione
<b>Q</b>	quantità di calore
<b>R</b>	costante universale dei gas ( $\approx 8.3144 \times 10^3 \text{ J/K kmol}$ )
<b>R<sub>d</sub></b>	costante dei gas per l'aria secca ( $\approx 287 \text{ J/K kg}$ )
<b>R<sub>S</sub></b>	radiazione totale
<b>R<sub>i</sub></b>	numero di gradiente di Richardson
<b>R<sub>iC</sub></b>	numero critico di Richardson ( $\approx 0.25$ )
<b>R<sub>S<sub>lw</sub></sub></b>	radiazione ad onda lunga
<b>R<sub>S<sub>sw</sub></sub></b>	radiazione ad onda corta
<b>S</b>	entropia
<b>S<sub>0</sub></b>	costante solare ( $\approx 1376 \text{ W/m}^2$ )
<b>S<sub>cond</sub></b>	variazione di vapore acqueo per condensazione
<b>S<sub>dep</sub></b>	variazione di vapore acqueo per deposizione
<b>S<sub>q</sub></b>	variazioni di umidità specifica conseguente agli scambi di vapore acqueo
<b>S<sub><math>\theta</math></sub></b>	variazione di temperatura potenziale conseguente agli scambi di calore
<b>S<sub><math>\chi</math></sub></b>	variazione di concentrazione di una sostanza a seguito di scambi in atmosfera

---

T	temperatura dell'aria
$T_d$	temperatura di rugiada dell'aria
$T_v$	temperatura virtuale dell'aria
V	velocità in piano del vento
$V_f$	velocità d'attrito
X	rapporto di mescolanza
Z	angolo di declinazione solare
H	calore latente di condensazione
$H_p$	calore latente di condensazione a pressione costante
L	lunghezza di Monin
$c_p$	calore specifico dell'aria secca a pressione costante ( $\approx 1004 \text{ J/K kg}$ )
$c_v$	calore specifico dell'aria secca a volume costante ( $\approx 717 \text{ J/K kg}$ )
e	tensione di vapore
$e_s$	tensione di vapore saturo
g	accelerazione di gravità ( $\approx 9.8 \text{ m/s}^2$ )
p	pressione dell'aria
q	umidità specifica
u	velocità dell'aria lungo l'asse zonale (da ovest a est)
$u_g$	velocità geostrofica dell'aria lungo l'asse zonale (da ovest a est)
v	velocità dell'aria lungo l'asse meridionale (da sud a nord)
$v_g$	velocità geostrofica dell'aria lungo l'asse meridionale (da sud a nord)
w	velocità verticale dell'aria (dal basso verso l'alto)
$z_0$	rugosità aereodinamica
f	parametro di Coriolis ( $2\Omega$ )
$h_S$	quota limite dello strato di superficie
$h_T$	quota limite dello strato di transizione
$k_a$	conduttività termica dell'aria ( $\approx 0.018 \text{ W/mK}$ )
$s_C$	numero di Schmidt ( $\approx 0.8$ )
$\Phi_H$	deformazione adimensionale della temperatura
$\Phi_M$	deformazione adimensionale del vento
$\alpha$	volume specifico dell'aria
$\varepsilon$	fattore di amplificazione di uno schema numerico a differenze finite
$\theta$	temperatura potenziale
$\theta_E$	temperatura potenziale equivalente

---

---

$\kappa$	costante di von Karman ( $\approx 0.40$ )
$\mu$	peso molecolare
$\pi$	funzione di Exner
$\rho$	densità dell'aria
$\rho_w$	densità dell'acqua ( $\approx 1 \times 10^6 \text{ g/m}^3$ )
$\sigma$	costante di Stefan-Boltzmann ( $\approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ )
$\lambda$	lunghezza d'onda
$\nu$	viscosità cinematica dell'aria ( $\approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ )
$\tau$	spessore ottico
$\varphi$	latitudine di un punto sulla superficie terrestre
$\chi$	concentrazione di una sostanza volatile.
$\psi$	diffusività dell'aria in atmosfera ( $\approx 1.875 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

## BIBLIOGRAFIA

---

- Arakawa A., 1998. “A Personal Perspective on the Early Years of General Circulation Modeling at UCLA”, in “General Circulation Model Development: Past, Present, and Future”, International Geophysics Series vol. **70**, Academic Press, pp. 1-65.
- Arakawa A. e Lamb V. R., 1977. “Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model”, *Meth. Comput. Phys.*, **17**, pp. 173-265.
- Bergman J. C., 1998. “A physical interpretation of von Karman’s constant based on asymptotic consideration – A new value”, *J. Atmos. Sci.*, **55**, 3403-3405.
- Bjerknes V., 1904. “Das problem der wettervorsage, betrachtet vom standpunkte der mechanik und der physik”, *Meteor. Z.*, **21**, pp. 1-7. (Traduzione inglese di Yale Mintz, Los Angeles, 1954).
- Blackadar A. K., 1979: “High-resolution models of the planetary boundary layer”. *Advances in Environmental Science and Engineering* di J.R. Pfafflin and E. N. Ziegler, Vol. I, pp. 50-85, Gordon and Breach Science Publisher, NY.
- Blackadar A. K. e Tennekes H., 1968: “Asymptotic similarity in neutral barotropic planetary boundary layer”, *J. Atmos. Sci.*, **25**, pp. 1015-1020.
- Carl D. M., Tarbell T. C., Panofsky H. A., 1973. “Profile of wind and temperature from towers over homogeneous terrain”, *J. Atmos. Sci.*, **30**, pp. 788-794.
- Charney J. G. e Phillips N. A., 1953. “Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows”. *J. Meteor.*, **10**, pp. 71-99.
- Coulson K. L., 1975. “Solar and Terrestrial Radiation”, Accademic Press, New York.
- Davis H. C., 1983: “Limitation of some common lateral boundary schemes used in regional NWP models”, *Mon. Wea. Rev.*, **111**, pp. 1002-1012.
- Deardorff J. W., 1974. “Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer”. *Bound.-Layer Meteor.*, **7**, pp. 81-106
- De Hann P. and Rotach M.V.: 1998, “A novel approach to atmospheric dispersion modelling: the Puff-Particle model”, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **124**, 2771–2792.
- Dutton J. A., 1976. “The ceaseless wind. An introduction to the theory of atmospheric motion”. McGraw-Hill, New York.
- Ekman, V.W. 1905. “On the influence of the earth's rotation on ocean currents”. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, **11**, pp. 1-55.
- Gannon P. T., 1978. “Influence of earth surface and cloud properties on the south Florida sea breeze”, NOAA Technical report ERL 402-HMEML-2.

- 
- Giuliacci P., Giuliacci A. e Corazzon P., 2001. “Prevedere il tempo in Internet”, Alpha Test, Milano.
  - Högström U., 1996. “Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer”. *Bound.-Layer Meteor.*, **78**, pp. 215-246.
  - Holton J. R., 1992. “An introduction to dynamic meteorology”, Academic Press, Londra.
  - Houze R. A., 1981. “Structures of atmospheric precipitation system: A global survey.”, *Radio Sci.*, **16**, pp. 671-689.
  - International Civil Aviation Organization, 2003. “Location Indicators”, ICAO.
  - Isaaks E.H. and Srivastava R.M., 1989. “Applied Geostatistic”, Oxford University Press.
  - Jacobs C.A., Pandolfo J. P., Atwater M.A., 1974. “A description of a general three dimensional numerical simulation model of a coupled air-water and/or air-land boundary layer”. IFYGL final report, CEM report n. 5131-509a.
  - Klemp J. B. e Lilly D. K., 1978: “Numerical simulation of hydrostatic mountain waves”, *J. Atmos. Sci.*, **35**, pp. 78-107.
  - Klemp J. B. e Wilhelmsom R. B., 1978: “The simulation of three-dimensional convective storm dynamics”, *J. Atmos. Sci.*, **35**, pp. 1070-1096.
  - Kondratyev J., 1969. “Radiation in the Atmosphere”, Academic Press, New York.
  - Kuhn P., 1963. “Radiometersonde observation of infrared flux emissivity for water vapour”, *J. Appl. Meteor.*, **2**, pp. 368-378.
  - Kuo H. L., 1974: “Further studies of the parametrization of the influence of cumulus convection on large scale flows”, *J. Atmos. Sci.*, **31**, pp. 1232-1240.
  - Lettau H., 1969. “Note on aerodynamic roughness – Parameter estimation on the basis of roughness element description”, *J. Appl. Meteor.*, **8**.
  - Lee R., 1978. “Forest Micrometeorology”, Columbia University Press, New York.
  - Liou K. N., 1980. “An introduction to atmospheric radiation”, Academic Press, New York.
  - Lipps F.B. and Hemler R.S., 1980. “Another look at the thermodynamic equation for deep convection”, *Mon. Wea. Rev.*, **108**, pp. 79-84.
  - List R. J., 1971. “Smithsonian Meteorological Tables”, Smithsonian Institution Press, Washington, D.C.
  - Lumley J. L. e Panofsky H. A., 1964. “The structure of atmosphere turbulence”, *Interscience, Monog.* **12**, New York.
  - Louis J. F., 1979. “A parametric model of vertical eddy fluxes in atmosphere”, *Bound. Layer Meteor.*, **17**, pp. 187-202.

- 
- Manher Y. e Pielke R. A., 1977. “A numerical study of the airflow over irregular terrain”, *Beitrage zur Physik der Atmosphere*, **50**, pp. 13.
  - Mason P. J. e Sykes R. I., 1979. “Three-dimensional numerical integrations of the Navier-Stokes equation for flow over surface-mounted obstacles”. *J. Fluid Mech.*, **91**, pp. 433-450.
  - McCumber M. D., 1980. “A numerical simulation of the influence of heat and moisture fluxes upon mesoscale circulation.”, Ph.D. dissertation, Dept. of Enviromental Science, University of Virginia, Charlottesville, VA.
  - McNider R. T., 1981: “Investigation of the impact of topographic circulations on the transport and dispersion of ari pollutants“, Ph.D. dissertation, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903.
  - McDonald J., 1960. “Direct assorbtion of solar radiation by atmospheric water vapour.” *J. Meteor.*, **17**, pp. 319-328.
  - Molinari J. e Corsetti T., 1985. “Incorporation of cloud-scale and mesoscale down-drafts into a cumulus parametrization: Results of one- and three-dimensional integrations”. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, pp. 485-511.
  - Nieuwstadt F. T. M., 1984. “The turbulent structure of the stable, nocturnal boundary layer”, *J. Atmos. Sci.*, **41**, pp. 2202-2216.
  - Oke T. R., 1973. “City size and the urban heat island”, *Atmos. Environ.*, **7**, pp. 769-779.
  - Oke T. R., 1978. “Boundary Layer Climates”, Methuen, Londra.
  - Orlansky L., 1976: “A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows”, *J. Comput. Phys*, **21**, pp.251-269.
  - Orville H.D., 1980 : “Numerical modelling of clouds”. Lecture notes, IFAORS Short Course 450, December 1980. Institute for atmosperic optics and remote sensing, Hampton, VA, pp. 1-5.
  - Palge V. and Treier V., 1998. “Comparison of formulas for calculating water vapour saturation pressure”, Estonian Agricultural University, Technical Report.
  - Paltridge G. W. e Platt C. M. R., 1976. “Radiative processes in Meteorology and Climatology”, Elsevier, New York.
  - Pielke R. A., 1974: “A three-dimensional numerical model of the sea breezes over south Florida”, *Mon. Wea. Rev.*, **102**, pp. 115-139.
  - Pielke R. A., 2002. “Mososcale Meteorological Modeling”, Academic Press, Londra.
  - Prandtl L.,1932. “Zur turbulenten Strömung in Röhren und längs Platten”, *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst.*, **4**, pp. 18-29.
  - Priestly C. H. B., 1959. “Turbulent transfer in the lower atmosphere”, The University of Chigaco Press, Chicago.
-

- 
- Richardson L. F., 1922. “Weather Prediction by Numerical Process”, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
  - Rotstayn L. D., 1999: “Climate sensitivity of the CSIRO GMC: Effect of cloud modeling assumptions”, *J. Climate*, **12**, pp. 334-356.
  - Sasamori T., 1972: “A linear harmonic analysis of atmospheric motions with radiative dissipation”, *J. Meteor. Soc. Japan*, **50**, pp. 505-517.
  - Shannon C. e Weaver W., 1963: *Teoria matematica della comunicazione*, ETAS
  - Sherman C. A., 1978. “A mass-consistent model for wind fields over complex terrains”, *J. Appl. Meteor.*, **17**, pp. 312-319.
  - Smagorinsky J., 1963. “General circulation experiments with the primitive equation. Part I: The basic experiment”, *Mon. Wea. Rev.*, **91**, pp. 99-164.
  - Stanley D. O. e Jurica G. M., 1970: “Flux emissivity tables for water vapour, carbon dioxide and ozone”, *J. Appl. Meteor.*, **9**, pp. 365-372.
  - Stephens G. L., 1978a: “Radiation profile in extended water clouds. I: Theory”, *J. Atmos. Sci.*, **35**, pp. 2111-2122.
  - Stephens G. L., 1978b: “Radiation profile in extended water clouds. II: Parameterization scheme”, *J. Atmos. Sci.*, **35**, pp. 2123-2132.
  - Stull R. B., 1988: “An introduction to boundary layer meteorology”, Kluwer Academic Publishers.
  - Tiedtke M., 1987: “Parametrization of non-convective condensation processes”, Meteorological Training Course Lecture Series, ECMWF.
  - Wallace J. M. e Hobbs P. V., 1977. “Atmospheric science, an introductory survey”, Academic Press, Londra.
  - Warhaft Z., 1976. “Heat and moisture flux in the stratified boundary layer”, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, pp. 703-707.
  - World Meteorological Organisation, 2005. “Observing Stations and WMO Catalogue of Radiosondes”, *WMO Publications*, **9**, vol. A.
  - Yamada T., 1977. “A numerical experiment on pollutant dispersion in a horizontally-homogeneous atmospheric boundary layer”, *Atmos. Environ.*, **11**, pp 1015-1024.
  - Zilitinkevich S. S., 1970. “Dinamic of atmospheric boundary layer”, Hydrometeorol, Leningrado.

## RINGRAZIAMENTI

---

Un ringraziamento sincero al mio tutore, il prof. Adriano Mazzarella, per la costante presenza, l'aiuto ed il sostegno datomi.

Un ringraziamento ai tecnici dell'Osservatorio Meteorologico del Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli "Federico II", Raffaele Viola, Teodoro Esposito e Gaetano Paolillo, per l'indispensabile supporto tecnico.

Un ringraziamento, infine, ai miei familiari ed a Carmen per il sostegno morale dimostratomi.