Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Dottorato di Ricerca in Matematica

Bruno Volzone

Operatori parabolici con termine di ordine zero: risultati di confronto

Tesi Dottorato di Ricerca
XVI Ciclo

Tutore:
Ch.mo Prof. Angelo Alvino

Coordinatore:
Ch.mo Prof. Salvatore Rionero

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi consiste nel mostrare alcuni risultati di confronto tra soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet relativi ad equazioni paraboliche lineari del secondo ordine, mediante metodi di simmetrizzazione secondo Schwarz. Prima di addentrarci più nello specifico in quelle che saranno le tematiche sviluppate nei tre capitoli successivi, diamo ora una breve panoramica sulla genesi delle tecniche che saranno maggiormente utilizzate.

L'idea di usare metodi di simmetrizzazione allo scopo di ottenere stime a priori è piuttosto antica, traendo essa origine dai celebri problemi isoperimetrici, sino ad arrivare alla sua forma moderna, dovuta a H. A. Schwarz e a J. Steiner, da cui il nome di simmetrizzazione di Schwarz e di Steiner. Durante il secolo scorso, una tra le prime opere attraverso cui fu reso popolare il concetto di *riordinamento secondo Schwarz* di una funzione misurabile è il famoso libro di Hardy, Littlewood e Polÿa [53]. Tipicamente, data una funzione reale misurabile u su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, per riordinamento di u si intende la funzione di una variabile u^* definita da

$$u^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\}, \, s \geq 0,$$

dove

$$\mu_u(t) = |\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}| \, , t \geq 0$$

è la *funzione distribuzione* di u. Una tra le caratteristiche più importanti di u^* è quella di possedere insiemi di livello che abbiano la stessa misura dei corrispondenti insiemi di livello di u: da questa proprietà, detta di *equimisurabilità*, discende il fatto che le norme L^p rimangono inalterate al passaggio da u ad u^*. Mediante il riordinamento decrescente, è possibile anche definire una funzione a simmetria radiale decrescente $u^{\#}(x) = u^{\#}(|x|)$, chiamata *riordinamento sferico decrescente* di u, legata ad u^* dalla relazione

$$u^{\#}(x) = u^*(\omega_N |x|^N),$$

dove ω_N denota la misura della sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$, che ha la proprietà di essere definita nella palla $\Omega^{\#}$ centrata nell'origine ed avente la stessa misura di Ω. Da come risulta definito, il riordinamento sferico $u^{\#}$ "eredita" la proprietà di equimisurabilità di u^* rispetto ad u, cioè di conservare le misure degli insiemi di livello di u.

L'applicazione della simmetrizzazione di Schwarz per ottenere stime a priori per soluzioni di equazioni ellittiche vede la sua prima apparizione nel lavoro [86] di Weinberger del 1962, dove si ottiene una stima precisa della soluzione u di un assegnato problema al contorno di tipo ellittico, attraverso il temine noto. Più precisamente, sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e si consideri un operatore lineare ellittico del secondo ordine in forma di divergenza, del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} \tag{1}$$

ove i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ soddisfino la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2, \text{ per q.o. } x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N : \tag{2}$$

allora, se f sia tale che esista un'unica soluzione debole u del problema

$$\begin{cases} Lu = f & in\ \Omega \\ u = 0 & su\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

in [86] si ottiene la miglior costante K nella stima

$$|u(x)| \leq K \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad p > \frac{N}{2}.$$

Per ottenere tale risultato si fissa un punto x_0 in Ω e si stima la norma L^p della funzione di Green $G(x) = G(x_0, x)$, facendo uso dell'ipotesi di ellitticità e della classica disuguaglianza isoperimetrica.

Tuttavia, è nel celebre lavoro di G. Talenti, [73], che si utilizzano questo tipo di strumenti per ottenere un tipo di "*confronto*" tra la soluzione u di un fissato problema ai valori al contorno e la soluzione v di un opportuno problema a simmetria radiale. Allo scopo di descrivere il risultato principale che si può ottenere in questo contesto, sostituiamo l'operatore (1) con quello in forma di divergenza

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)\, u, \tag{4}$$

per il quale sia soddisfatta la (2), e supponiamo che

$$c(x) \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{5}$$

Allora, se u è la soluzione del problema di Dirichlet (3) con condizione omogenea al contorno, si può provare che il riordinamento sferico $u^{\#}$ di u è puntualmente limitato dall'alto dalla soluzione di un opportuno problema a simmetria radiale. Difatti, la funzione $u^{\#}$ viene confrontata con la soluzione v di un problema che sia essenzialmente della forma

$$\begin{cases} -\Delta v = f^{\#} & in\ \Omega^{\#} \\ v = 0 & su\ \partial\Omega^{\#}, \end{cases} \tag{6}$$

e si prova che

$$u^{\#}(x) \leq v(x) \tag{7}$$

in ogni punto della palla $\Omega^{\#}$. Si osservi come questo tipo di risultato consenta di ricondurre lo studio del problema (3), a quello del più semplice problema (6) rispetto al quale, essendo il dominio, i coefficienti ed i dati a simmetria radiale, la soluzione v risulta facilmente calcolabile. Notiamo che la (7) consente di stimare ogni norma L^p di u mediante la corrispondente norma L^p di v :

(8) $$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega^\#)}\,, \quad \forall p \in [1,+\infty]\,.$$

Questo risultato è ottimale, nel senso che il problema (6) fornisce la soluzione "più grande" nella classe dei problemi del tipo (3), al variare di Ω tra gli aperti limitati di $\mathbb{R}^N$, sufficientemente regolari, di misura fissata, di L tra gli operatori del tipo (4) i cui coefficienti verificano (2), (5), e di f in un opportuno insieme di funzioni non negative con assegnato riordinamento. Inoltre, in [73] viene anche determinata la disuguaglianza tra le norme L^p dei gradienti

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \leq \int_{\Omega^\#} |\nabla v|^q \, dx, \quad 0 < q \leq 2$$

ed altri tipi di stime, tra cui alcune ottimali in spazi di Lorentz.

Un'estensione di risultati di questo genere per più generali equazioni lineari con termini di ordine inferiore, può essere trovata in [76], mentre l'applicazione di queste idee per trattare problemi ellittici non lineari trova una sua notevole esplicitazione in [75].

Tornando al problema simmetrizzato (6), si noti che esso non tiene conto dell'influenza del termine di ordine zero, in quanto di quest'ultimo ce ne si può liberare, sostanzialmente, mediante l'ipotesi di segno (5). Se, invece, si suppone che c sia tale che

(9) $$c \in L^\infty(\Omega)$$

e che assuma valori di segno qualsiasi, nell'ipotesi in cui l'operatore (4) sia coercivo su $H_0^1(\Omega)$, il problema (6) viene rimpiazzato dal problema

(10) $$\begin{cases} -\Delta v + \left[(c^+)_\# - (c^-)^\# \right] v = f^\# & in\ \Omega^\# \\ v = 0 & su\ \partial\Omega^\#, \end{cases}$$

dove $(c^+)_\#$ è una particolare funzione a simmetria radiale crescente, chiamata *riordinamento sferico crescente* di c. Allora, sotto queste condizioni, si riesce a dimostrare la seguente disuguaglianza tra le *concentrazioni* di u e v (vedi, ad esempio, [9], [10], [13], [20], [31], [59])

$$\int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma \le \int_0^s v^*(\sigma)\, d\sigma, \ \forall s \in [0, |\Omega|]\,. \tag{11}$$

Ovviamente, il confronto di tipo integrale (11) è più debole rispetto a quello puntuale (7): ciò nonostante, proprio quest'ultima consente *ancora* di ottenere la disuguaglianza (8) tra le norme L^p.

Purtroppo, un tale approccio non fornisce gli stessi risultati se applicato alle equazioni paraboliche, dove un confronto puntuale tra le soluzioni non è in generale vero, ma si può ottenere soltanto una stima tra gli estremi superiori, assieme ad un confronto tra le norme L^p (ed in genere di Orlicz) tra le soluzioni, come viene descritto nel lavoro [18] di C. Bandle del 1976, o nelle pagine 206-218 del suo libro [20]. Infatti, quest'ultimo testo fornisce un gran numero di tecniche di simmetrizzazione, applicate a problemi ellittici e parabolici, sotto diverse condizioni di regolarità dei coefficienti e dei dati. Per comprendere meglio qual è la natura dei risultati che si possono ottenere in questo contesto, consideriamo un operatore differenziale del secondo ordine, dipendente dal tempo, con parte principale in forma di divergenza, del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x,t)\, u,$$

ove i coefficienti a_{ij} e c siano definiti su un cilindroide del tipo $Q_T := \Omega \times (0,T)$, con $T > 0$. Si supponga che l'operatore $\frac{\partial}{\partial t} + L$ sia *uniformemente parabolico*, cioè

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \ge |\xi|^2 \quad \text{per q.o. } (x,t) \in Q_T \ , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\ , \tag{12}$$

ed inoltre (analogamente alle ipotesi di [73] nel caso ellittico) sia

$$c(x,t) \ge 0 \quad \text{in } Q_T. \tag{13}$$

Si consideri la soluzione *classica* u del problema di *Cauchy-Dirichlet*

$$(14)\qquad \begin{cases} u_t + Lu = f & in \;\; Q_T \\ u = 0 & su \;\; S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in \;\; \Omega, \end{cases}$$

dove $S_T := \partial\Omega \times (0,T)$, e siano i dati f, u_0 ed i coefficienti del problema (14) sufficientemente regolari. Allora, posto $Q_T^{\#} := \Omega^{\#} \times (0,T)$ e $S_T^{\#} := \partial\Omega \times (0,T)$, se v è la soluzione del problema

$$(15)\qquad \begin{cases} v_t - \Delta v = f^{\#} & in \;\; Q_T^{\#} \\ v = 0 & su \;\; S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & in \; \Omega^{\#}, \end{cases}$$

si riesce a mostrare che (cfr. [18], [20]) per ogni $t \in [0,T]$ vale il confronto integrale

$$(16)\qquad \int_0^s u^*(\sigma,t)\, d\sigma \le \int_0^s v^*(\sigma,t)\, d\sigma, \quad \forall s \in [0, |\Omega|].$$

In quest'ultima (così come il riordinamento di f nel problema (15)) i riordinamenti si intendono calcolati rispetto ad x, per ogni t *fissato*. C'è da dire che, in generale, non è valido, come nel caso ellittico, un confronto *puntuale* del tipo

$$u^*(s,t) \le v^*(s,t)\,,$$

si confronti ad esempio [79]. Anche in questo caso, dalla (16) discende le disuguaglianza tra le norme L^p di u e v

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \le \|v(t)\|_{L^p\left(\Omega^{\#}\right)}$$

e questo risultato è ottimale, in un senso analogo a quello descritto nel caso ellittico.

Le linee dimostrative seguite da C. Bandle per ottenere la (16) seguono, in prima analisi, i ragionamenti utilizzati da Talenti in [73] nel caso delle soluzioni classiche: infatti, la tecnica consiste nell'integrare l'equazione su di un insieme di livello di u e fare un uso opportuno di strumenti quali la formula di coarea di Federer (cfr. [43], [42], [89]), la disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi ([34]), e la disuguaglianza di riordinamento di Hardy-Littlewood (vedi [53], [23], [33], [54]). La vera differenza rispetto al caso ellittico consiste però nell'ulterore difficoltà di trattare il termine contenente la *derivata temporale* di u: a tale scopo, in [18], [20] viene dimostrata una formula di derivazione rispetto alla variabile t per integrali del tipo

$$\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} u\,(x,t)\,dx,$$

dove u è una funzione molto regolare, ad esempio *analitica*, rispetto alla variabile x per ogni t fissato: in tal caso, questa formula si esplicita in

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} u\,(x,t)\,dx = \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,t)\,dx. \tag{17}$$

Utilizzando lo stesso ragionamento per la soluzione v, per la quale, a causa della simmetria del problema (15), tutte le disuguaglianze dianzi citate divengono uguaglianze, si perviene ad una disuguaglianza differenziale del tipo

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - p\,(s)\,\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \leq 0 \quad \text{in } (0, |\Omega|) \times (0, T) \tag{18}$$

dove

$$\chi\,(s,t) := \int_0^s w\,(\sigma,t)\,d\sigma,$$

$$w\,(s,t) := u^*\,(s,t) - v^*\,(s,t)\,,$$

alla quale applicare il principio del massimo e ottenere così la (16).

La (16) è stata dimostrata in [63] anche relativamente alle soluzioni *deboli* di (14), (15) con la condizione di segno (13) e sotto ipotesi di minore regolarità dei coefficienti e dei dati. Anche in questo caso, seguendo un ragionamento analogo a quello contenuto in [73], ci si imbatte nell'esigenza di determinare un'opportuna formula di derivazione sotto il segno di integrale, che valga per funzioni molto meno regolari rispetto a quelle già analizzate: tale formula viene dimostrata in [63] (fornendo al contempo una proprietà di regolarità di u^* rispetto a t) e si riconduce alla (17) nel caso di funzioni regolari. Successivamente, si riesce di nuovo ad ottenere la (18), ed ancora tramite il principio del massimo discende la (16).

Un altro modo per affrontare il problema della determinazione del confronto integrale tra soluzioni di problemi parabolici, è quello di utilizzare la *discretizzazione rispetto al tempo*. Questo metodo, la cui applicazione ai problemi di simmetrizzazione per operatori parabolici quasilineari è dovuta principalmente a Vàzquez (vedi, ad esempio, [79], [82]), consiste nel suddividere l'intervallo $[0, T]$ mediante una partizione della forma $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ e sostituire la derivata temporale con un rapporto incrementale, dipendente dalla lunghezza della partizione: in questo modo, ci si riconduce ad un numero finito di problemi ellittici con termine di ordine zero, del tipo

$$\begin{cases} -\left(a_{ij}^{(k)}(x)\, u_{x_i}^{(k)}\right)_{x_j} + \left(c^{(k)} + \dfrac{1}{t_k - t_{k-1}}\right) u^{(k)} = f^{(k)} + \dfrac{u^{(k-1)}}{t_k - t_{k-1}} \\ u^{(k)} \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

con $k = 1, \ldots, n$, dove $u^{(0)} = u_0$, $u^{(k)} = u(x, t_k)$ è la funzione u per $t = t_k$ e $f^{(k)}$, $a_{ij}^{(k)}$, $c^{(k)}$, $f^{(k)}$, sono opportune discretizzazioni dei coefficienti $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$, $c = c(x, t)$ e del termine noto $f = f(x, t)$. Allora, per $k \to \infty$, si riesce ad ottenere la soluzione u come limite delle $u^{(k)}$ (per maggiori dettagli, si confronti [56], [58], [24]). In maniera analoga si ragiona con il problema simmetrizzato (15), potendo così considerare v come limite di soluzioni $v^{(k)}$ di n opportuni problemi di Dirichlet definiti su $\Omega^{\#}$: dunque, utilizzando i già citati risultati di confronto per problemi ellittici con termine di ordine zero, si ricava il confronto puntuale tra le concentrazioni di $u^{(k)}$ e $v^{(k)}$, e quindi quello tra u e v passando a limite per $k \to \infty$.

Analogamente al caso ellittico, ci si chiede se si possa ottenere la (16) nel caso in cui

$$c \in L^{\infty}(Q_T) \tag{19}$$

prescindendo dall'ipotesi di segno (13): un risultato in tal senso è stato ottenuto in ([9]), ([10]), dove si suppone che

$$c(x,t) \geq c_0(t) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \ \text{per q.o. } t \in [0,T]\,,$$

con $c_0 \in L^{\infty}(0,T)$, ed il problema simmetrizzato (15) è sostituito dal problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + c_0 v = f^{\#} & in \ \ Q_T^{\#} \\ v = 0 & su \ \ S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & x \in \Omega^{\#}. \end{cases} \tag{20}$$

In queste condizioni, il lavoro [9] presenta una dimostrazione della (16) che fa uso della tecnica di discretizzazione rispetto al tempo dianzi descritta. C'è però da notare che il problema (20) non tiene realmente conto dell'influenza del coefficiente c, soprattutto quando quest'ultimo dipende solo dalla variabile x. Un problema simmetrizzato che abbia reale "memoria" del termine di ordine zero è allora il seguente

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + \left[(c^+)_{\#} - (c^-)^{\#}\right] v = f^{\#} & in \ \ Q_T^{\#} \\ v = 0 & su \ \ S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & x \in \Omega^{\#}, \end{cases} \tag{21}$$

e la dimostrazione della (16) costituisce la parte principale del lavoro [83], evitando, tra l'altro, la discretizzazione rispetto al tempo ma utilizzando un metodo di *perturbazione* del problema simmetrizzato.

L'obiettivo principale che si prefigge questa tesi è allora quello di mostrare dei risultati di confronto per un operatore parabolico con coefficiente di ordine zero che soddisfi varie ipotesi di sommabilità, ed in particolare viene considerato il caso in cui lo stesso coefficiente presenti una singolarità che, in qualche modo, lo ponga come caso *critico*. Poichè nessuna delle tecniche utilizzate nei lavori dianzi citati si adatta a questa specifica situazione, saranno illustrati i dettagli di una metodologia che fornisca dei risultati di carattere generale, che comprendano, come caso particolare, anche quelli riguardanti l'ipotesi in cui il coefficiente c sia limitato.

Passiamo ora a delineare i tratti principali dei capitoli che costituiscono questa tesi.

Il primo capitolo ha il solo scopo di introdurre la formulazione debole dei problemi parabolici lineari e la loro risoluzione. Il primo paragrafo viene impiegato per definire anzitutto gli spazi funzionali, oltre ad essere enunciate le loro proprietà principali, dove saranno ambientate le soluzioni deboli dei problemi al contorno che verranno considerati in seguito. Si passa poi ad enunciare un teorema di esistenza ed unicità per problemi di evoluzione lineari in un contesto astratto, per fornirne susseguentemente alcune concrete applicazioni. In questa prima fase, si enuncia e si dimostra anche il principio del massimo nella sua forma "debole", che verrà spesso richiamato nei capitoli successivi. Nel secondo ed ultimo paragrafo sono invece citate alcune proprietà di regolarità delle soluzioni.

Il secondo capitolo è principalmente dedicato ad illustrare i succitati risultati di confronto ottenuti da C. Bandle nel caso classico e da Mossino-Rakotoson in quello delle soluzioni deboli. Al fine di introdurre gli strumenti necessari ad affrontare tali questioni, nel primo paragrafo viene enunciata la fondamentale disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi (cfr. [34], [35]) e sono richiamate la formula di coarea di Federer (cfr.[43], [42], [89]) e la sua generalizzazione dovuta a Fleming-Rishel (cfr. [45]).
Nel secondo paragrafo è invece introdotto il concetto di riordinamento di una funzione misurabile, citandone al contempo alcune tra le sue proprietà principali: tra queste vi sono, ad esempio, la proprietà di equimisurabilità di u e del suo riordinamento u^*, la continuità della mappa $u \to u^*$ e la classica disuguaglianza di Hardy-Littlewood (cfr. [23], [33], [53]). Inoltre, viene data anche la dimostrazione del cosiddetto *principio di Pólya-Szegö* (cfr. [65], [74]) di cui si farà spesso uso nel

capitolo successivo, che consente di stimare la norma L^p del gradiente di u mediante la corrispondente norma L^p del gradiente del suo riordinamento sferico $u^{\#}$.
Nel terzo paragrafo ci si sofferma nei dettagli delle dimostrazioni dei risultati di confronto contenuti in [18], [20] e [63]. In questo contesto, vengono illustrate le dimostrazioni di tutte le formule di derivazione sotto il segno di integrale che abbiamo richiamato in precedenza: in particolare, nel caso delle funzioni analitiche, è fornita anche una generalizzazione della (17), contenuta in [11] e in [44].

Nel terzo ed ultimo capitolo si forniscono per lo più i risultati contenuti nei lavori [14], [85]. Nel primo paragrafo vengono introdotti gli spazi di Lorentz e gli spazi di Zygmund, assieme ad alcuni utili teoremi di immersione; viene anche enunciata la ben nota disuguaglianza di Hardy

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \geq \lambda_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx, \tag{22}$$

dove $p \in (1, N)$, $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e con $\lambda_{N,p} = \left((N-p)/p\right)^p$ costante ottimale, che non è raggiunta in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Nella seconda parte di questo paragrafo, partendo da un risultato contenuto in [7], si osserva che la classica definizione di soluzione debole per problemi al contorno associati ad operatori parabolici è ancora ben posta, nel senso che continua a valere un teorema di esistenza ed unicità, se i coefficienti appartengono, per ogni t fissato, a spazi $L^p - deboli$, purchè le relative norme siano "sufficientemente piccole".
Nel secondo paragrafo si dimostrano risultati di confronto tra la soluzione u di un problema al contorno del tipo (14), e la soluzione v del problema simmetrizzato (21), nel caso in cui il coefficiente c dipenda *solo* dalla variabile x. Nell'ipotesi in cui $c \in L^\infty(\Omega)$, il confronto viene ottenuto mediante un metodo alternativo rispetto a quello contenuto in [83]: si seguono in primo luogo le linee principali di [62], [63], [83] per l'ottenimento di una disuguaglianza di tipo integro-differenziale, alla quale poi applicare il metodo esibito in [14], allo scopo di ricavare, mediante ragionamenti classici del principio del massimo, la disuguaglianza tra le concentrazioni delle soluzioni.

Viene successivamente contemplato il caso $c \in L^r(\Omega)$, per qualche $r > N/2$: in queste condizioni, soprattutto nell'eventualità in cui c presenti una singolarità e *non* sia limitato dal basso, non si può applicare nessuno dei ragionamenti utilizzabili nel caso in cui c sia limitato. Si considera allora la soluzione $v_\epsilon = v + \epsilon v_0$ del problema "perturbato"

$$\begin{cases} v_{\epsilon t} - \Delta v_\epsilon + \left[(c^+)_\# - (c^-)^\#\right] v_\epsilon = f^\# + \epsilon\delta & in \;\; Q_T^\# \\ v_\epsilon = 0 & su \;\; S_T^\# \\ v_\epsilon(x,0) = u_0^\#(x) + \epsilon v_0(x) & x \in \Omega^\#, \end{cases}$$

ove v è soluzione del problema (21), $\epsilon > 0$, δ è la delta di Dirac concentrata nell'origine e v_0 è la soluzione che si annulla su $\partial\Omega^\#$ dell'equazione

$$-\Delta v_0 + \left[\left(c^+\right)_\# - \left(c^-\right)^\#\right] v_0 = \delta \quad in\, \Omega^\#.$$

Dunque, ci si riconduce a dimostrare la stima

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\, d\sigma \le \int_0^s v_\epsilon^*(\sigma,t)\, d\sigma,$$

per poi passare a limite per $\epsilon \to 0$ ed ottenere così la (16). Quest'ultima viene anche ottenuta nel caso $r = N/2$, per $N > 2$, utilizzando il metodo di discretizzazione rispetto al tempo.

Nel terzo ed ultimo paragrafo si analizza il caso in cui c abbia una singolarità "del tipo" $\lambda/|x|^2$ con $\lambda \le \lambda_N$, dove $\lambda_N = (N-2)^2/4$ $(N > 2)$ è la miglior costante della disuguaglianza di Hardy (22) per $p = 2$. Più precisamente, si suppone che $c \in L_{deb}^{N/2}$ e

$$c^\#(x) \le \frac{\lambda}{|x|^2}, \quad \forall x \in \Omega^\# \setminus \{0\}\,, \text{con } \lambda \le \lambda_N.$$

In questo caso, il problema simmetrizzato accoppiato al problema (14) è

$$
\begin{cases}
v_t - \Delta v = \dfrac{\lambda}{|x|^2} v + f^{\#} & in\ Q_T^{\#} \\
v = 0 & su\ \ S_T^{\#} \\
v(x,0) = u_0^{\#}(x) & x \in \Omega^{\#}.
\end{cases}
\tag{23}
$$

In merito ad un problema del tipo (23), ove $\Omega^{\#}$ può essere sostituito da un qualsiasi aperto limitato contenente l'origine, un primo risultato di esistenza è contenuto in [21] (e successivamente in [29], [81]), dove si dimostra che il comportamento delle soluzioni dipende dal valore del parametro λ. Più precisamente, se $\lambda \leq \lambda_N$ il problema (23) ammette soluzione globale, mentre se $\lambda > \lambda_N$ lo stesso problema non ammette soluzioni locali, qualunque siano $f, u_0 \not\equiv 0$, dando luogo ad un fenomeno di *blow-up completo istantaneo* della soluzione. Nello stesso paragrafo viene fornito anche un risultato di esistenza, ed enunciato uno di non esistenza, per problemi del tipo (23), ove il potenziale $\lambda / |x|^2$ è sostituito da un generico potenziale singolare $V(x)$.
Per quanto concerne la deteminazione del risultato di confronto (16), il caso *sottocritico* $\lambda < \lambda_N$ viene affrontato approssimando le soluzioni u, v mediante le soluzioni dei rispettivi problemi che si ottengono sostituendo i potenziali c, $\lambda / |x|^2$ con le loro troncature a livello $n \in \mathbb{N}$, per poi passare a limite nella disuguaglianza tra le concentrazioni.

Il caso *critico* $\lambda = \lambda_N$ presenta un'ulteriore difficoltà, dovuta al fatto che l'operatore $Lu = -\Delta u - (\lambda / |x|^2)u$ non è coercivo su $H_0^1(\Omega)$, ma soltanto positivo. Viene allora introdotto, mediante un tipo di disuguaglianza di Hardy *migliorata* (cfr.[81]), un opportuno spazio funzionale H nel quale ambientare le soluzioni, per poi ottenerne il relativo confronto integrale. Lo stesso risultato viene ricavato anche seguendo l'approccio di [47] e considerando il contesto più generale delle soluzioni nel senso delle distribuzioni.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare con grande stima il prof. Angelo Alvino per i suoi numerosi ed utili consigli che hanno costituito un continuo ed efficace stimolo alle mie ricerche negli anni di dottorato.
Un segno di stima ed affetto devo a Roberta Volpicelli, per la grande dedizione e passione (nonchè pazienza) che ha dimostrato nel condividere i miei stessi interessi di ricerca. E' per me d'obbligo, ancora, ringraziare quei rappresentanti del gruppo di ricerca al quale appartengo, che si sono sempre resi protagonisti di pregevoli suggerimenti: Maria Francesca Betta, Barbara Brandolini, Francesco Chiacchio, Marco Cicalese, Vincenzo Ferone, Adele Ferone, Anna Mercaldo, Carlo Nitsch, Maria Rosaria Posteraro, Maria Rosaria Tricarico, Cristina Trombetti.
Inoltre, desidero qui citare quelli che sono stati i miei inseparabili "compagni di viaggio", ossia coloro che, durante questo dottorato, ho avuto l'onore di conoscere e con i quali è nata un'inestimabile amicizia: Francesco Borrello, Marianna Cerasuolo, Andrea Orazio Caruso, Francesca Crispo, Fausto De Mari, Francesco Della Pietra, Giuseppina di Blasio, Filomena Feo, Rossella Piscopo, Daniele Puglisi, Maria Tota.

Una particolare menzione di ringraziamento è indirizzata agli amici della mia amata terra caprese : Massimo Aprea, Gabriela Ferraro, Pasquale Ferraro, Susanna Iraci, Nabil Pulita, i quali, con la sincerità e l'assoluta fedeltà dimostratemi in questi anni, hanno costituito insostituibile incentivo ad un continuo e costante incoraggiamento.

Dedico questa tesi alla mia famiglia, che ha saputo sostenermi in ogni mia scelta, in ogni attimo di eccitazione o di sconforto, e sempre in un modo mirabilmente affettuoso ed ineguagliabilmente sincero.

"Il vero viaggio di scoperta non consiste

nel cercare nuovi paesaggi,

ma nell'avere nuovi occhi"

Marcel Proust,

"Alla ricerca del tempo perduto"

Capitolo I

Introduzione ai problemi parabolici lineari. Regolarità delle soluzioni.

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di fornire una breve introduzione alla risoluzione di problemi al contorno per operatori parabolici lineari del secondo ordine, enunciando risultati riguardanti sia l'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli, che la loro regolarità. Poichè il materiale qui riportato è in larga parte già noto e ha come unica pretesa quella di creare il contesto adatto in cui si ambienteranno le tematiche dei capitoli successivi, l'esposizione degli argomenti avrà un taglio volutamente espositivo e non entrerà nei dettagli delle dimostrazioni, per le quali si rimanda invece alle relative note bibliografiche.

Il primo paragrafo è dedicato all'introduzione di alcuni tra gli spazi funzionali che sono essenziali allo studio di problemi parabolici. In tale contesto sono enunciati, in particolare, alcuni risultati di densità e compattezza utili al seguito. Inoltre, vengono esposti alcuni risultati di esistenza ed unicità delle soluzioni deboli, con alcune applicazioni in riferimento a problemi al contorno classici. Nel secondo ed ultimo paragrafo, si analizzano le proprietà di regolarità delle soluzioni deboli: in particolare, relativamente alle soluzioni di problemi omogenei per operatori completi, vengono enunciate proprietà di sommabilità globali (ossia in cilindri del tipo $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$) delle soluzioni , a partire da ipotesi di sommabilità globali dei termini noti.

I.1 Preliminari di analisi funzionale

I.1.1 Alcuni spazi funzionali e loro proprietà

Sia X uno spazio di Banach, con norma $\|\cdot\|_X$. Se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $p \in [1, +\infty)$, denotiamo con $L^p(a, b; X)$ lo spazio delle (classi di) funzioni $f : (a, b) \to X$ misurabili e tali che

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt < +\infty ,$$

con $L^\infty(a, b; X)$ lo spazio delle (classi di) funzioni f essenzialmente limitate su (a, b) a valori in X, per le quali esiste cioè una costante $M > 0$ tale che

$$\|f(t)\|_X \leq M \;\; per \; q.o. \; t \in (a, b)$$

E' facile far vedere che

Teorema I.1.1 *Rispetto alle norme*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(a,b;X)} &= \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} , \\ \|f\|_{L^\infty(a,b;X)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{(a,b)} \|f(t)\|_X \end{aligned}$$

gli spazi $L^p(a, b; X)$ *, per* $p \in [1, +\infty]$ *, sono spazi di Banach.*

Per ogni $f \in L^p(a, b; X)$ possiamo definire

$$\int_a^b f(t) \, dt \in X.$$

Estendiamo ora il concetto di distribuzione al caso vettoriale. *Per distribuzione vettoriale su* (a, b) *a valori in* X intendiamo una trasformazione lineare

$$T : \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \to \langle T, \varphi \rangle \in X$$

che sia continua su $\mathcal{D}(a,b) := C_0^\infty(a,b)$, nel senso che

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{in } X$$

per ogni successione $\{\varphi_n\}$ di $\mathcal{D}(a,b)$ tale che $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(a,b)$.[1]

Forniamo alcuni esempi di distribuzioni a valori vettoriali:

1. Sia $u \in L^1_{loc}(a,b;X)$; allora

$$\varphi \to \int_a^b \varphi(t)\ u(t)\, dt \in X$$

è una distribuzione su (a,b) , a valori in X . Diremo che questa è la *distribuzione definita da* u. Due funzioni distinte definiscono la stessa distribuzione se e solo se sono uguali quasi ovunque.

2. Fissato $x \in X$,

$$\varphi \to \varphi(0)\, x$$

è una distribuzione a valori in X per ogni intervallo (a,b) contenente 0 : questa è la *massa di Dirac* δ_0 , concentrata in 0.

Denoteremo con $\mathcal{D}'(a,b;X)$ lo spazio delle distribuzioni su (a,b) a valori in X :

$$\mathcal{D}'(a,b;X) \equiv \mathfrak{L}(\mathcal{D}(a,b);X) .$$

Per ogni distribuzione a valori vettoriali, possiamo definire (analogamente al caso in cui si considerano distribuzioni su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ e a valori reali) la sua derivata di ordine k, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti, se $T \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, per ogni intero k definiamo una distribuzione $T^{(k)}$ mediante la formula

$$\left\langle T^{(k)}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \frac{d^k\varphi}{dt^k} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \ .$$

[1] $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(a,b)$ se
1. $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0$, uniformemente su (a,b);
2. esiste un compatto $K \subseteq (a,b)$ tale che $supp\varphi_n \subseteq K\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$T^{(k)}$ è chiamata la $k-$*sima derivata di* T *su* (a,b), e sarà denotata con

$$T^{(k)} = \frac{d^k T}{dt^k}$$

Sia $u \in L^1(a,b;X)$. La derivata $u^{(1)}$ della distribuzione su (a,b) definita da u verrà denotata con u' o u_t se t è la variabile in (a,b) :

$$\langle u', \varphi \rangle = -\int_a^b \varphi'(t)u(t)dt \ , \ \ \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \ .$$

Se $X = L^1(\Omega)$ per qualche dominio Ω di $\mathbb{R}^N$, allora $u \in L^1(a,b;L^1(\Omega))$ può essere identificata con una funzione di due variabili mediante la formula

$$u(t)(x) = u(x,t) \ , \ \ (x,t) \in \Omega \times (a,b)$$

Per funzioni regolari, si può mostrare facilmente che

$$u_t(t)(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \ .$$

Supponiamo ora che X , Y sono spazi di Banach tali che

$$X \hookrightarrow Y \qquad (X \textit{ è immerso in } Y \textit{ con continuità}).$$

Allora chiaramente

$$\mathcal{D}'(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;Y)$$

e

$$L^p(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;Y) \quad \forall p \in [1,+\infty].$$

In questo contesto, è possibile estendere il concetto di derivata *debole* al caso di funzioni di una variabile a valori vettoriali. Difatti, se $u \in L^1(a,b;X)$, diremo che $u' \in L^2(a,b;Y)$ se esiste una funzione $v \in L^2(a,b;Y)$ tale che

$$\int_a^b \varphi'(t)\,u(t)\,dt = -\int_a^b \varphi(t)\,v(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b) \ ,$$

intendendo questi due integrali come elementi di Y .

In ciò che seguirà, considereremo due spazi di Hilbert V ed H tali che
$i)$ V è un sottospazio di H denso in H
$ii)$ l'immersione di V in H è continua, cioè $V \hookrightarrow H$.
Se con V' indichiamo il duale di V, ed identificando H con il suo duale, si può dunque ottenere lo schema

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

e la terna (V, H, V') verrà detta *terna hilbertiana*. Denoteremo con
$((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ rispettivamente il prodotto scalare e la norma in V,
$(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ rispettivamente il prodotto scalare e la norma in H . Posto
$(H_0^1(\Omega))' := H^{-1}(\Omega)$, una scelta ragionevole della terna hilbertiana è

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Definiamo ora lo spazio

$$H^1(a, b; V, V') = \left\{u \in L^2(a, b; V) \mid u_t \in L^2(a, b; V')\right\}$$

Teorema I.1.2 *$H^1(a, b; V, V')$ è uno spazio di Hilbert per la norma*

$$\|u\|^2_{H^1(a,b;V,V')} = \|u\|^2_{L^2(a,b;V)} + \|u_t\|^2_{L^2(a,b;V')} \ .$$

Dim. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $H^1(a, b; V, V')$. Allora $\{u_n\}$ è di Cauchy in $L^2(a, b; V)$ e $\{u_n'\}$ è di Cauchy in $L^2(a, b; V')$: esisteranno peciò $u \in L^2(a, b; V)$ e $w \in L^2(a, b; V')$ tali che $u_n \to u$ in $L^2(a, b; V)$ e $u_n' \to w$ in $L^2(a, b; V')$. Allora $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(a, b; V)$[2] : infatti, se $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, risulta

$$\left\|\int_a^b \varphi(t)\, u_n(t)\, dt - \int_a^b \varphi(t)\, u(t)\, dt\right\| \le M\, \|u_n - u\|_{L^2(a,b;V)} \to 0$$

[2] Se $T_n, T \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ (X di Banach) , si dice che $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(a, b; X)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \ \ in\ X \ , \forall\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$$

Dunque $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(a, b; V')$ e

$$\langle u_n', \varphi \rangle = - \langle u_n, \varphi' \rangle \to - \langle u, \varphi \rangle = \langle u', \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b)$$

il che permette di affermare che $u_n' \to u'$ in $\mathcal{D}'(a, b; V')$ .D'altronde, anche $u_n' \to w$ in $\mathcal{D}'(a, b; V')$ per cui $u' = w$. Allora

$$u_n \to u \text{ in } L^2(a, b; V) \text{ e } u_n' \to u' \text{ in } L^2(a, b; V')$$

ossia $u_n \to u$ in $H^1(a, b; V, V')$. $\square$

Indichiamo con $\mathcal{D}([a, b]; V)$ lo spazio delle restrizioni $[a, b]$ delle fuzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$ ($\mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$ è lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili con supporto compatto, a valori in V). Si dimostra che:

Teorema I.1.3 *$D([a, b]; V)$ è denso in $H^1(a, b; V, V')$.*

Di notevole importanza è il seguente risultato (cfr. [32], [41]):

Teorema I.1.4 *Sia $u \in H^1(a, b; V, V')$. Allora u può essere identificata con una funzione continua su $[a, b]$ a valori in H . Inoltre*

$$H^1(a, b; V, V') \hookrightarrow C([a, b]; H) \ ,$$

dove $C([a, b]; H)$ denota lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in H , munito della topologia della convergenza uniforme su $[a, b]$. Infine, per ogni $u \in H^1(a, b; V, V')$, la funzione

$$t \to |u(t)|^2$$

è assolutamente continua, con

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle \tag{1.1}$$

per q.o. $0 \leq t \leq T$.

Una conseguenza fondamentale di quest'ultimo teorema è che esso ci permette di definire per $u \in H^1(a,b;V,V')$ la *traccia* $u(a)$, $u(b)$, cioè i valori in H della funzione $u \in C([a,b];H)$ agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Da questa proprietà, si può dedurre la formula di Green:

Teorema I.1.5 *Siano* $u, v \in H^1(a,b;V,V')$ *, con* $a, b \in \mathbb{R}$. *Allora*

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle \, dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle \, dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)) \ .$$

Dim. Se $u, v \in \mathcal{D}([a,b];V)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle \, dt + \int_a^b \langle u(t), v'(t) \rangle \, dt &= \int_a^b (u'(t), v(t)) \, dt + \int (u(t), v'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (u(t), v(t)) \, dt \\ &= (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)) \ . \end{aligned}$$

Allora il risultato segue per densità e dal teorema I.1.4. □

Possiamo anche dimostrare che

Teorema I.1.6 *Se* $u \in H^1(a,b;V,V')$ *, allora per tutti gli* $v \in V$ *si ha*

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot), v) = \langle u_t(\cdot), v \rangle \quad in \ \mathcal{D}'(a,b) \ .$$

Dim. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Dalla formula di Green si ha

$$\int_a^b \langle u'(t), \varphi(t) v \rangle \, dt + \int_a^b \langle \varphi'(t) v, u(t) \rangle \, dt = (u(b), \varphi(b) v) - (u(a), \varphi(a) v) = 0 \ .$$

Ciò può anche essere scritto nella forma

$$\int_a^b \langle u'(t), v \rangle \varphi(t) \, dt = -\int_a^b \langle v, u(t) \rangle \varphi'(t) \, dt = -\int_a^b (u(t), v) \varphi'(t) \, dt \ ,$$

da cui la tesi. □

Sia X uno spazio di Banach. Se $p \in [1, +\infty]$, definiamo lo spazio di Sobolev

$$W^{1,p}(a, b; X)$$

come lo spazio costituito da tutte le funzioni $u \in L^p(a, b; X)$ tale che la derivata rispetto al tempo u' appartiene anch'essa a $L^p(a, b; X)$. Inoltre, si pone

$$\|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} := \|u\|_{L^p(a,b;X)} + \|u'\|_{L^p(a,b;X)}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(a, b; X)$ e $p \in [1, +\infty]$; rispetto a tale norma, $W^{1,p}(a, b; X)$ è uno spazio di Banach. Porremo

$$H^1(a, b; X) = W^{1,2}(a, b; X) .$$

Per questo tipo di spazi, vale un risultato analogo a quello del teorema I.1.4, precisamente si ha (vedi [41], par. 5.9.2)

Teorema I.1.7 *Sia $u \in W^{1,p}(a, b; X)$, con $1 \leq p < +\infty$. Allora u può essere identificata con una funzione continua su $[a, b]$ a valori in X . Inoltre vale la stima*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \leq C \|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} ,$$

ove C è una costante dipendente solo da T, ossia

$$W^{1,p}(a, b; X) \hookrightarrow C([a, b]; X) .$$

Concludiamo ora con un risultato di compattezza negli spazi $L^p(0, T; X)$ che risulterà utile nel seguito. Supponiamo che X, B, Y siano spazi di Banach tali che

$$X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$$

tale che l'immersione $X \hookrightarrow B$ sia *compatta* e sia F una famiglia di funzioni di $L^p(0, T; B)$. Un problema importante consiste nel fornire delle condizioni sufficienti ad assicurare la compattezza di F in $L^p(0,T;B)$, a partire da alcune proprietà di limitatezza in riferimento agli spazi X , Y : ad esempio, nel corso del capitolo III ci troveremo nella situazione in cui $X = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega)$ ed F è una successione di funzioni $\{u_n\}$ limitata in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, per la quale sarà essenziale determinare le condizioni adatte che garantiscono la sua relativa compattezza in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Un risultato in tal senso, in condizioni più generali, è provato in un lavoro di J.P. Aubin [17], nell'ipotesi in cui F sia limitato in $L^p(0,T;X)$ e la famiglia delle derivate temporali distribuzionali $\{u' : u \in F\}$ sia limitata in $L^r(0,T;Y)$, ove $r > 1$, $1 < p < \infty$, ed X e Y siano *spazi riflessivi* . Tale risultato è, peraltro, contenuto nel testo di J.L. Lions [57] (teorema 5.2, pag.60); una dimostrazione nel caso in cui $r = 1$, $p = 2$ ed X , Y siano spazi di Hilbert, è contenuta in [78] (teorema 2.3, pag.76). Comunque, il teorema al quale faremo principalmente riferimento è un'estensione di un risultato contenuto nel già citato lavoro [17], che fu originariamente provato nel caso $r < 1$, $1 < p < \infty$ (contenuto anch'esso in [57]) . Tale teorema può essere enunciato come segue (cfr. [69]):

Teorema I.1.8 *Supponiamo che F sia una famiglia di funzioni di $L^p(0,T;B)$, dove $p \in [1,+\infty]$. Se F è limitata in $L^p(0,T;X)$, con $p \in [1+\infty)$, e la famiglia delle derivate temporali $\{u' : u \in F\}$ è limitata in $L^1(0,T;Y)$, allora F è relativamente compatta in $L^p(0,T;B)$. Inoltre, se F è limitata in $L^\infty(0,T;X)$ e $\{u' : u \in F\}$ è limitata in $L^r(0,T;Y)$ con $r > 1$, F è relativamente compatta in $C([0,T];B)$.*

I.1.2 La risoluzione dei problemi parabolici lineari

Consideriamo una terna hilbertiana (V,H,V') e supponiamo, in più, che V e H siano *separabili.* Sia $T \in [0,+\infty]$. Per ogni $t \in (0,T)$, denotiamo con $a(t;u,v)$ una forma bilineare su V , soddisfacente le seguenti proprietà

1.) $\forall u,v \in V$, $t \to a(t;u,v)$ è misurabile;

2.) esiste una costante positiva M tale che

$$|a\,(t;u,v)| \leq M\,\|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in V \ \ , q.o.\ t \in (0,T) \ \ ;$$

3.) esistono due costanti $\alpha > 0$ e $\lambda \geq 0$ per le quali si ha

$$a\,(t;u,u) \geq \alpha\,\|u\|^2 - \lambda\,|u|^2 \quad \forall u \in V \ , q.o.\ t \in (0,T)\,,$$

ove, al solito, $\|\cdot\|$ indica la norma in V e $|\cdot|$ la norma in H. La condizione 2.) corrisponde ad un'ipotesi di continuità, mentre la 3.) è una proprietà di coercività debole. Fissati

$$u_0 \in H,\ f \in L^2\,(0,T;V')$$

vogliamo trovare una funzione u che sia soluzione del problema seguente:

$$\text{(1.2)} \quad \begin{cases} i) \ \ u \in L^2\,(0,T;V) \ \ , \ u_t \in L^2\,(0,T;V') \\ ii) \ \ \dfrac{d}{dt}\,(u\,(t)\,,v) + a\,(t;u\,(t)\,,v) = \langle f\,(t)\,,v\rangle \quad \forall v \in V,\ q.o.\ t \in (0,T) \\ iii) \ \ u\,(0) = u_0\ . \end{cases}$$

In base al teorema I.1.4, dalla *i)* abbiamo $u \in C\,([0,T]\,;H)$, per cui possiamo definire $u\,(0)$ ed $u\,(T)$ come elementi di H e dunque la condizione iniziale $iii)$ ha senso. Inoltre, per quanto visto dal teorema I.1.6, la $ii)$ può essere scritta nella forma equivalente

$$ii')\ \ \langle u_t\,(t)\,,v\rangle + a\,(t;u\,(t)\,,v) = \langle f\,(t)\,,v\rangle \quad \forall v \in V,\ per\ q.o.\ t \in (0,T) \ \ .$$

D'altra parte, la funzione $t \to a\,(t;u\,(t)\,,\cdot) \in V'$ è un elemento di $L^2\,(0,T;V')$, sicchè la $ii')$ è equivalente a

$$ii'')\ \ u_t + a\,(t;u,\cdot) = f \ \ \text{in} \ \ L^2\,(0,T;V') \ \ .$$

Ponendo, per $t \in (0,T)$ e $u \in V$ fissati,

$$\langle \mathcal{A}(t)\, u, v\rangle = a(t; u, v) \quad \forall v \in V,$$

si ha che $\mathcal{A}(t)\, u \in V'$ con $\|\mathcal{A}(t)\, u\|_{V'} \leq M \|u\|$, per cui

$$\mathcal{A}(t) : u \in V \to \mathcal{A}(t)\, u \in V'$$

è lineare e continua, dunque $\mathcal{A}(t) \in \mathfrak{L}(V, V')$. La $ii')$ può quindi scriversi nella forma

$$u'(t) + \mathcal{A}(t)\, u(t) = f(t) \quad q.o.\; t \in (0,T), in\; V'.$$

Dunque, risolvere (1.2) equivale a risolvere un problema di Cauchy astratto per un'equazione parabolica di evoluzione, dato da

$$(1.3) \qquad \begin{cases} u'(t) + \mathcal{A}(t)\, u(t) = f(t) \quad q.o.\; t \in (0,T),\; in\; V' \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Al fine di fornire una risposta sull'esistenza e l'unicità della soluzione per un problema di questo tipo, enunciamo il seguente, fondamentale teorema dovuto a J.L. Lions (cfr. [56], [58], [32], [41]):

Teorema I.1.9 *Sotto le condizioni 1.) - 2.) - 3.) di cui sopra, per ogni $u_0 \in H$ ed $f \in L^2(0,T;V')$, esiste una e una sola $u \in H^1(0,T;V,V')$ che sia soluzione del problema (1.2). Inoltre, vale la seguente disuguaglianza*

$$\|u\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq C\left(|u_0|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\right),$$

ove la costante C dipende solo da α, λ, M e T.

Osservazione I.1.1 Se $u_0 \in H$ ed $f \in L^2(0,T;V')$, sia u la soluzione di (1.2).

Il teorema I.1.9 permette di notare che la mappa

$$(u_0, f) \to u$$

è continua da $H \times L^2(0,T;V')$ in $H^1(0,T;V,V')$, ossia abbiamo la proprietà di *continuità rispetto ai dati.*

Al fine di fornire un'applicazione del teorema I.1.9, si consideri un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ e $T > 0$. Si ponga $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ e si consideri un operatore differenziale lineare del secondo ordine dipendente da t , con parte principale in forma di divergenza, del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\, u_{x_i} + c(x,t)\, u, \tag{1.4}$$

dove i coefficienti a_{ij} , b_i , c siano funzioni misurabili su Q_T . Si supponga che a_{ij} , b_i , c siano funzioni di $L^\infty(Q_T)$ e che inoltre esista $\alpha > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \textit{per q.o. } (x,t) \in Q_T \ , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ , \tag{1.5}$$

cioè che l'operatore differenziale $\dfrac{\partial}{\partial t} + L$ sia (uniformemente) parabolico. Poniamo $H = L^2(\Omega)$ e sia V un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ tale che

$$H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega) \ .$$

Il sottospazio V , munito della topologia indotta da $H^1(\Omega)$, è a sua volta uno spazio di Hilbert, evidentemente denso ed immerso con continuità in H . Poniamo, per quasi ogni $t \in (0,T)$ ed $u, v \in V$,

$$a(t;u,v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\cdot,t)\, u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\cdot,t)\, u_{x_i} v + c(\cdot,t)\, uv \right\} dx \ .$$

Dunque, $a(t;\cdot,\cdot)$ è la forma bilineare su V associata all'operatore L all'istante t . Verifichiamo se sussistono le ipotesi 1) -2) -3) del teorema I.1.9. Le proprietà 1.) e

2.) sono di semplice verifica. Sia dunque $u \in V$ e dimostriamo la 3.). In base alla condizione (1.5) di ellitticità, risulta

$$\begin{aligned} a\left(t;u,u\right) &= \int_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\left(\cdot,t\right)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i\left(\cdot,t\right)u_{x_i}u + c\left(\cdot,t\right)u^2\right\}dx \\ &\geq \alpha\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx - \left\|b\right\|_{\infty}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|\left|u\right|dx - \left\|c\right\|_{\infty}\int_{\Omega}u^2 dx\,, \end{aligned}$$

dove $\left\|\cdot\right\|_{\infty}$ denota la norma in $L^{\infty}\left(\Omega\right)$, $\left|\cdot\right|$ la norma euclidea e b il vettore di componenti b_i . Dalla disuguaglianza di Young si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\left|\nabla u\right|\left|u\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left|\nabla u\right|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left|u\right|^2\ ,$$

dunque

$$a\left(t;u,u\right) \geq \alpha\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{\left\|b\right\|_{\infty}}{2\varepsilon}\int_{\Omega}u^2 dx - \left\|c\right\|_{\infty}\int_{\Omega}u^2 dx$$

che equivale a

$$a\left(t;u,u\right) + \left(\frac{\left\|b\right\|_{\infty}}{2\varepsilon} + \left\|c\right\|_{\infty}\right)\int_{\Omega}u^2 dx \geq \left(\alpha - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2}\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx\,.$$

Posto $\lambda = \frac{\left\|b\right\|_{\infty}}{2\varepsilon} + \left\|c\right\|_{\infty} + \alpha - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2}$, si deduce che

$$a\left(t;u,u\right) + \lambda\int_{\Omega}u^2 dx \geq \left(\alpha - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2}\right)\int_{\Omega}\left\{\left|\nabla u\right|^2 + u^2\right\}dx = \left(\alpha - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2}\right)\left\|u\right\|_V^2\ ,$$

dove $\left\|\cdot\right\|_V$ è la norma in V indotta dalla norma $H^1\left(\Omega\right)$. Scelto ε in modo che $\alpha - \frac{\varepsilon\left\|b\right\|_{\infty}}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$, si ha $\lambda > 0$ e

$$a\left(t;u,u\right) \geq \frac{\alpha}{2}\left\|u\right\|_V^2 - \lambda\left|u\right|_H^2\ ,$$

che è proprio la condizione 3.) . Prendendo $u_0 \in L^2\left(\Omega\right)$ ed $f \in L^2\left(0,T;V'\right)$, il teorema I.1.9 conduce direttamente al

Teorema I.1.10 *Sotto le condizioni di cui sopra, esiste un'unica soluzione del* *problema (1.2).*

Interpretiamo il problema (1.2) . Più precisamente, supponiamo che tutte le funzioni ivi coinvolte siano opportunamente regolari, in modo che tutti i calcoli che seguono abbiano senso. La seconda equazione in (1.2), utilizzando la convenzione degli indici ripetuti, si scrive nella forma:

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad & \int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega \left\{a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + b_i u_{x_i} v + cuv\right\} dx \\ = & \int_\Omega fvdx \quad \forall t \in (0,T) \ , v \; regolare \, , v \in V \ .\end{aligned}$$

Prendendo, ad esempio, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ed integrando per parti nel secondo integrale, otteniamo

$$\int_\Omega \left\{u_t - \left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j} + b_i u_{x_i} + cu\right\} vdx = \int_\Omega fvdx \ , \ \forall t \in (0,T) \ \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \, ,$$

dunque

$$(1.7)\qquad u_t + Lu = f \quad in \; Q_T \ .$$

Tornando alla (1.6) , e prendendo questa volta una funzione regolare $v \in V$ ma che non si annulli necesariamente su $\partial\Omega$, l'applicazione della formula di Green porta a

$$\int_\Omega \left\{u_t - \left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j} + b_i u_{x_i} + cu\right\} vdx + \int_{\partial\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j v d\sigma(x) = \int_\Omega fvdx \ \ \forall t \in (0,T) \ ,$$

ove $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ è la normale esterna a $\partial\Omega$, da cui

$$\int_\Omega (u_t + Lu)\, vdx + \int_{\partial\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j v d\sigma(x) = \int_\Omega fvdx \ , \ \forall t \in (0,T) \ .$$

Utilizzando la (1.7) , si può allora scrivere

$$(1.8)\qquad \int_{\partial\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j v \; d\sigma(x) = 0 \ \ \forall v \in V \ , v \text{ regolare.}$$

Inoltre, dobbiamo aggiungere la condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega \ .$$

Tutte queste osservazioni possono essere applicate a casi differenti.

- $V = H_0^1(\Omega)$.

In questo caso, il problema (1.2) corrisponde alla formulazione debole del problema di *Cauchy-Dirichlet*

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} u_t + Lu = f & in \;\; Q_T \\ u = 0 & su \;\; S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in \;\; \Omega. \end{cases}$$

Notiamo che la condizione "$u = 0 \;\; su \;\; S_T$" è contenuta nella condizione

$$u \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \; .$$

Quindi, in base al teorema I.1.10, per ogni $u \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ esiste ed è unica la soluzione debole u del problema (1.9). Per dare un'idea di quelle che sono le linee essenziali della dimostrazione di questo risultato di esistenza ed unicità (quindi, nel caso specifico del problema di Cauchy-Dirichlet), supponiamo ad esempio che

$$\text{(1.10)} \qquad u_0 \in L^2(\Omega) \;\; , \;\; f \in L^2(Q_T) \; .$$

Sia $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una *base ortonormale di* $L^2(\Omega)$, che sia anche una *base ortogonale di* $H_0^1(\Omega)$: si può considerare, ad esempio, l'insieme completo di opportune autofunzioni normalizzate, corrispondenti ad *autovalori dell'operatore* $-\Delta$ *su* Ω *, con condizione omogenea al contorno*. Si ponga

$$\text{(1.11)} \qquad u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} d_n^k(t)\, w_k \quad \forall n \in \mathbb{N} \, ,$$

ove i coefficienti $d_n^k(t)$ $(0 \le t \le T \, , \, k = 1, \ldots, n\,)$ siano tali che

$$\text{(1.12)} \qquad d_n^k(0) = (u_0, w_k) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

e

$$(u_n'(t), w_k) + a(t; u_n(t), w_k) = (f(t), w_k), \ \forall t \in [0,T], \ \forall k = 1, \ldots, n.$$
(1.13)

Utilizzando il metodo di approssimazione di *Faedo-Galerkin (*cfr. [41], [56], [57])*,* si dimostra che per ogni intero n , esiste un'unica funzione u_n della forma (1.11) soddisfacente la (1.12) e la (1.13). Inoltre, tale metodo consente di ottenere la seguente disuguaglianza, detta *stima dell'energia*

(1.14)
$$\max_{0 \le t \le T} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|u_n'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C\left(\|f\|_{L^2(Q_T)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right);$$

da quest'ultima si deduce che, a meno di sottosuccessioni,

(1.15)
$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \ \textit{debole in} \ \ L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_n' &\rightharpoonup u' \ \ \textit{debole in} \ \ L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), \end{aligned}$$

e si riesce a far vedere che u è l'unica soluzione del problema (1.9).

- $V = H^1(\Omega)$. In questo caso, la (1.8) può anche essere interpretata come

$$a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j = 0 \quad su \ \ \partial\Omega$$

e la (1.2) corrisponde alla formulazione debole del problema di *Cauchy-Neumann*

(1.16)
$$\begin{cases} u_t + Lu = f & in \ \ Q_T \\ a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j = 0 & su \ \ S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in \ \ \Omega. \end{cases}$$

Nel caso particolare $a_{ij} = \delta_{ij}$, $bi = c = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, si ha $L = -\Delta$

e (1.16) si riduce al classico problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & in \;\; Q_T \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & su \;\; S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in \;\; \Omega. \end{cases}$$

- $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \; su \;\; \Gamma\}$, ove Γ è una parte della frontiera di Ω. Sia $\Gamma_1 = \partial\Omega \backslash \Gamma$. Allora, in questo caso, riesce facile notare che la (1.2) corrisponde alla versione debole del problema

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & in \; Q_T \\ u = 0 & su \;\; \Gamma \times (0,T) \\ a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j = 0 & su \;\; \Gamma_1 \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & in \;\; \Omega\,. \end{cases}$$

I.1.3 Principio del massimo

Consideriamo un operatore differenziale lineare del secondo ordine dipendente dal tempo, con parte principale in forma di *non* divergenza, del tipo

$$(1.17) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\, u_{x_i} + c(x,t)\, u,$$

e supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c siano continui in Q_T. E' chiaro che, in ipotesi di differenziabilità dei coefficienti, un operatore del tipo (1.4) può essere messo nella forma (1.17) e viceversa.

Si supponga verificata la condizione di ellitticità (1.5). Sia

$$\Gamma_T := (\Omega \times \{0\}) \cup S_T$$

la cosiddetta *frontiera parabolica* di Q_T. Allora vale il seguente risultato, che corrisponde alla versione *classica* del *principio del massimo* (vedi [66], [41], [46]):

Teorema I.1.11 *Supponiamo che* $u \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ [3] *e*

$$c \equiv 0 \quad in\ Q_T.$$

i) *Se*

$$u_t + Lu \leq 0 \quad in\ Q_T,$$

allora

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

ii) *Analogamente, se*

$$u_t + Lu \geq 0 \quad in\ Q_T,$$

allora

$$\min_{\overline{Q}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Più generalmente, se il termine di ordine zero è non nullo, si ha il

Teorema I.1.12 *Supponiamo che* $u \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ *e*

$$c \geq 0 \quad in\ Q_T.$$

[3] Con $C_1^2(Q_T)$ si denota lo spazio delle funzioni di classe C^2 rispetto alle variabili spaziali e di classe C^1 rispetto alla variabile temporale.

i) *Se*

$$u_t + Lu \leq 0 \quad in\ Q_T,$$

allora

$$\max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

ii) *Se*

$$u_t + Lu \geq 0 \quad in\ Q_T,$$

allora

$$\min_{\overline{Q}_T} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-.$$

Il nostro obiettivo è ora quello di fornire una formulazione debole del teorema I.1.12, che si rivelerà essere uno strumento di notevole utilità nei capitoli successivi. Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema I.1.10 . Siano

(1.18) $$u_0^1\,,u_0^2 \;\in L^2(\Omega) \quad , \quad f^1\,,\ f^2 \;\in L^2(0,T;V') \ .$$

Allora vale il seguente risultato:

Teorema I.1.13 *Assumendo le condizioni (1.18) di cui sopra, sia u_i , $i = 1, 2$, la soluzione di*

(1.19) $$\begin{cases} u^i \in L^2(0,T;V) \quad , \ u_t^i \in L^2(0,T;V') \\ \langle u_t^i(t)\,,v\rangle + a(t;u^i(t)\,,v) = \langle f^i(t)\,,v\rangle \quad \forall v \in V, \text{ per q.o. } t \in (0,T)\,, \\ u^i(0) = u_0^i\,. \end{cases}$$

Supponiamo che

(1.20) $$u_0^1 \leq u_0^2 \ \ e \ \ f^1 \leq f^2\ ;$$

allora

(1.21) $$u^1 \leq u^2 \ .$$

Rendiamo più chiaro il significato delle (1.20), (1.21). La prima disuguaglianza nella (1.20) la si intende valevole quasi ovunque in Ω, mentre la (1.21) è intesa quasi ovunque in Q_T. La seconda disuguaglianza di (1.20) significa che per ogni $v \in L^2(0,T;V)$ tale che $v \geq 0$ q.o. in Q_T, risulta

(1.22) $$\left\langle f^1, v \right\rangle \leq \left\langle f^2, v \right\rangle.$$

Per dimostrare questo risultato, avremo bisogno del seguente lemma preliminare

Lemma I.1.1 *Sia $u \in H^1(0,T;V,V')$ dove V sia dato da $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \ su\ \Gamma\}$, con Γ parte della frontiera di Ω. Allora la parte positiva u^+ di u, definita da $u^+(t) = (u(t))^+$, è tale che $u^+ \in L^2(0,T;V)$ e*

(1.23) $$\left\langle u_t, u^+ \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^+\right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad in\ \mathcal{D}'(0,T).$$

Dim. Supponiamo, in prima istanza, che $u \in \mathcal{D}([0,T];V)$. Si considerino le funzioni definite da

(1.24) $$H_\varepsilon(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{se } \varepsilon \leq x, \end{cases}$$

(1.25) $$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} H_\varepsilon(s)\, ds,$$

(1.26) $$G_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} F_\varepsilon(s)\, ds.$$

Mediante semplici calcoli si mostra che

$$F_\varepsilon(x) \to x^+ = \max\{x, 0\}\,,\ G_\varepsilon(x) \to \frac{(x^+)^2}{2} \tag{1.27}$$

per $\varepsilon \to 0$. Inoltre, si noti che

$$0 \le F_\varepsilon(x) \le |x|\,, \quad 0 \le G_\varepsilon(x) \le \frac{x^2}{2}\,, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.28}$$

Per una funzione regolare v, abbiamo che

$$\langle u_t, v\rangle = (u_t, v)_{L^2(\Omega)}\,,$$

e quindi per ogni t

$$\begin{aligned} \langle u_t, F_\varepsilon(u)\rangle &= \int_\Omega u_t F_\varepsilon(u)\,dx \\ &= \int_\Omega u_t G'_\varepsilon(u)\,dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega G_\varepsilon(u)\,dx. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Dalle (1.27), (1.28) segue che per ogni t, per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$G_\varepsilon(u) \to \frac{(u^+)^2}{2} \text{ per q.o. } x \in \Omega,\ \ |G_\varepsilon(u)| \le \frac{u^2}{2}$$

ed essendo $u^2 \in L^1(\Omega)$ per ogni t, dal teorema della convergenza dominata si ha

$$\int_\Omega G_\varepsilon(u)\,dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u^+\right)^2 dx. \tag{1.30}$$

D'altra parte, ancora dalle (1.28) segue che

$$\int_\Omega G_\varepsilon(u)\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \in L^1(0,T)$$

e quindi, ancora dal teorema della convergenza dominata,

$$\int_0^T \left|\int_\Omega G_\varepsilon(u)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u^+\right)^2 dx\right| dt \to 0$$

e la (1.30) vale dunque in $L^1(0,T)$ e per questo anche in $\mathcal{D}'(0,T)$. D'altra parte, non è difficile mostrare che

$$F_\varepsilon(u) \to u^+ \text{ in } L^2(0,T;V),$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\langle u_t, F_\varepsilon(u)\rangle - \langle u_t, u^+\rangle\right| dt &= \int_0^T \left|\langle u_t, F_\varepsilon(u) - u^+\rangle\right| dt \\
&\leq \int_0^T \|u_t\|_{V'} \left\|F_\varepsilon(u) - u^+\right\|_V \\
&\leq \|u_t\|_{L^2(0,T;V')} \left\|F_\varepsilon(u) - u^+\right\|_{L^2(0,T;V)} \to 0
\end{aligned}$$

sicchè

$$\langle u_t, F_\varepsilon(u)\rangle \to \langle u_t, u^+\rangle \text{ in } L^1(0,T).$$

Passando a limite nella (1.29) per $\varepsilon \to 0$, si ottiene allora

$$\langle u_t, u^+\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall u \in \mathcal{D}([0,T];V).$$

Inoltre, se prendiamo ancora $u \in \mathcal{D}([0,T];V)$, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, u^+\rangle \varphi dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\left\|u^+\right\|^2_{L^2(\Omega)} \varphi dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \left\|u^+\right\|^2_{L^2(\Omega)} \varphi' dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

Successivamente, si consideri una funzione $u \in H^1(0,T;V,V')$. Dal teorema I.1.3 discende che esiste una successione $u_n \in \mathcal{D}([0,T];V)$ per la quale

$$u_n \to u \text{ in } H^1(0,T;V,V').$$

E' facile mostrare che

$$u_n^+ \to u^+ \text{ in } L^2(0,T;V).$$

Allora, se $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$,

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \left\langle (u_n)_t , u_n^+ \right\rangle \varphi dt - \int_0^T \left\langle u_t, u^+ \right\rangle \varphi dt \right| \\
= & \left| \int_0^T \left[\left\langle (u_n)_t , u_n^+ - u^+ \right\rangle + \left\langle (u_n)_t - u_t, u^+ \right\rangle \right] \varphi dt \right| \\
\leq & C \left(\int_0^T \|(u_n)_t\|_{V'} \left\| u_n^+ - u^+ \right\|_V + \int_0^T \|(u_n)_t - u_t\|_V \left\| u^+ \right\|_V dt \right) \\
\leq & C \left(\|(u_n)_t\|_{L^2(0,T;V')} \left\| u_n^+ - u^+ \right\|_{L^2(0,T;V)} + \|(u_n)_t - u_t\|_{L^2(0,T;V')} \left\| u^+ \right\|_{L^2(0,T;V)} \right) \\
\leq & C \left(\left\| u_n^+ - u^+ \right\|_{L^2(0,T;V)} + \|(u_n)_t - u_t\|_{L^2(0,T;V')} \right) \to 0
\end{aligned}
$$

ed inoltre

$$
\int_0^T \left\| u_n^+ \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \varphi' dt \to \int_0^T \left\| u^+ \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \varphi' dt,
$$

per cui passando a limite in

$$
\int_0^T \left\langle (u_n)_t , u_n^+ \right\rangle \varphi dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \left\| u_n^+ \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \varphi' dt
$$

si ha la (1.23).

Dimostrazione del teorema I.1.13. Sottraendo membro a membro nelle (1.19) si ha

$$
\left\langle \left(u^1 - u^2\right)_t (t) , v \right\rangle + a\left(t; \left(u^1 - u^2\right)(t) , v\right) = \left\langle \left(f^1 - f^2\right)(t) , v \right\rangle ,
$$

per ogni $v \in V$ e per q.o. $t \in (0,T)$. Poichè $\left(u^1 - u^2\right)^+ \in L^2(0,T;V)$, da quest'ultima uguaglianza si ha

$$
\begin{aligned}
& \left\langle \left(u^1 - u^2\right)_t (t) , \left(u^1 - u^2\right)^+ (t) \right\rangle + a\left(t; \left(u^1 - u^2\right)(t) , \left(u^1 - u^2\right)^+ (t)\right) \\
= & \left\langle \left(f^1 - f^2\right)(t) , \left(u^1 - u^2\right)^+ (t) \right\rangle ;
\end{aligned}
$$

d'altra parte, il lemma I.1.1 implica che

$$
\left\langle \left(u^1 - u^2\right)_t , \left(u^1 - u^2\right)^+ \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \left(u^1 - u^2\right)^+ \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad in\ \mathcal{D}'(0,T)
$$

perciò per quasi ogni t (ed in $\mathcal{D}'(0,T)$) si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}+a\left(t;\left(u^1-u^2\right)^+(t),\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right) \\ = & \left\langle\left(f^1-f^2\right)(t),\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right\rangle. \end{aligned}$$

D'altra parte, dalla seconda delle (1.20) segue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}+a\left(t;\left(u^1-u^2\right)^+(t),\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right)\leq 0$$

mentre dalla coercività debole della forma bilineare $a(t;\cdot,\cdot)$ deduciamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\left\|\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right\|^2_V\leq\lambda\left\|\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\lambda\left\|\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando rispetto al tempo, da quest'ultima e dalla prima delle (1.20), troviamo

$$\begin{aligned}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \leq e^{2\lambda T}\left\|\left(u^1-u^2\right)^+(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & = 0\end{aligned}$$

cioè $u^1(t)\leq u^2(t)$ per q.o. $t\in(0,T)$. Questo implica la (1.21) e completa la dimostrazione del teorema. $\square$

I.2 Regolarità delle soluzioni

I.2.1 Regolarità rispetto al tempo

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet (1.9) e supponiamo che $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare e che

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \ , \\ i\ coefficienti\ a_{ij}\ , b_i\ , c\ \ (i,j = 1,\ldots,N)\ siano\ regolari\ su\ \overline{\Omega} \\ e\ non\ dipendano\ da\ t\ . \end{cases}$$

Allora vale il seguente risultato (cfr. [41], [56], [58]):

Teorema I.2.1 *Siano*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad f \in L^2(Q_T) \ .$$

Sia $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *, con* $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *la soluzione debole del problema (1.9). Allora si ha*

$$u \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \quad u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

e vale la stima seguente:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H_0^1\Omega} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ \le\ & C\left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right) \ , \end{aligned}$$

ove la costante C *dipende solo da* Ω *,* T *e dai coefficienti di* L *.*

Osservazione I.2.1 In realtà, generalizzando adeguatamente le ipotesi del teorema I.2.1, si può ancora ottenere un risultato di regolarità rispetto al tempo. E' sufficiente, infatti, che i coefficienti principali a_{ij} siano tali che,

$$a_{ij} = a_{ji}$$
$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C^0\left(\overline{Q_T}\right) \ , i, j = 1, \dots N,$$

e che i coefficienti b_i , c , per $i = 1, \dots N$, possiedano la regolarità giusta per assicurare la continuità e la coercività della forma bilineare $a(t; \cdot, \cdot)$ (ossia le ipotesi del teorema di esistenza e unicità I.1.9) . In tali condizioni, si riesce a dimostrare (vedi [24]) che se

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \ \text{, ed } \ f \in L^2(Q_T)$$

allora

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \ , \ u' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

e vale la stima

$$\|u\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right) .$$

I.2.2 Risultati di regolarità generali per operatori parabolici completi

Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$e sia T sia un numero reale positivo. Sia $\alpha \in [2, +\infty]$ scelto in modo tale che $H_0^1(\Omega)$ sia immerso con continuità in $L^\alpha(\Omega)$: esista, cioè, una costante positiva β tale da aversi, per ogni funzione $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^\alpha(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Ad esempio, certamente si ha $\alpha = 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ se $N > 2$, $\alpha \in [2, +\infty)$ se $N = 2$ ed $\alpha = +\infty$ se $N = 1$. In questo contesto, supporremo che $N > 2$, anche se

analoghi risultati valgono anche nei casi $N = 1, 2$ (cfr. [51], [52]) .
Indicheremo con V^* la famiglia delle funzioni $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ per le quali $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. In base al teorema I.1.4, ogni funzione $u \in V^*$ è tale che $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.
Siano $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $d_i(x,t)$, $f_0(x,t)$, $f_i(x,t)$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ funzioni definite e misurabili in $Q_T = \Omega \times (0, T)$; si abbia $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $b_i, d_i \in L^\infty(0, T; L^r(\Omega))$, $c \in L^\infty\left(0, T; L^{\frac{r}{2}}(\Omega)\right)$ con $r > N$; si supponga che $f_i \in L^2(Q_T)$ $\forall i = 0, 1, \ldots, N$. Valgano, inoltre, le relazioni seguenti:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geq \mu\,|\xi|^2 \quad q.o.\ (x,t) \in Q_T\ , \forall \xi \in \mathbb{R}^N$;

2. $\|b_i\|_{L^\infty(0,T;L^r(\Omega))}\ , \|d_i\|_{L^\infty(0,T;L^r(\Omega))} \leq M \ \ (M > 0) \ \ \forall i = 1, \ldots, N$.

Considerato l'operatore differenziale del secondo ordine completo

$$Lu = -\sum_{i=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\,u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\,u_{x_i} - \sum_{i=1}^{N} \left(d_i(x,t)\,u\right)_{x_i} + c(x,t)\,u\ ,$$

vogliamo esporre le proprietà di sommabilità delle soluzioni deboli di tutti i problemi al contorno classici, con condizioni al contorno omogenee, relativi all'equazione

$$u_t + Lu = f_0 - \sum_{i=1}^{N} (f_i)_{x_i}\ ,$$

facendo sui temini noti ipotesi di sommabilità *globale* in Q_T . A tale scopo, verrà considerato il seguente problema: trovare una funzione $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tale che

$$\text{(2.2)} \qquad \iint_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + cuv + \sum_{i=1}^{N} d_i u\frac{\partial v}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial t} \right\} dxdt$$
$$= \iint_{Q_T} \left\{ f_0 v + \sum_{i=1}^{N} f_i\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dxdt$$

qualunque sia $v \in V^*$ tale che $v(T) = 0$.

Tale problema , in queste ipotesi, ammette una soluzione ed una sola: tale proprietà discende dal teorema I.1.9, considerando la forma bilineare

$$a(t; u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(\cdot, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\cdot, t) uv + \sum_{i=1}^N d_i(\cdot, t) u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx.$$

Vale allora il seguente risultato:

Teorema I.2.2 *Sia u la soluzione del problema di cui sopra: u è allora sommabile in Q_T con ogni esponente minore di $\frac{2(N+2)}{N}$. Se, poi, d_i ($i = 1, \dots, N$) è sommabile in Q_T con qualche esponente maggiore di $N+2$,*

I) *se $f_i \in L^q(Q_T)$ ($i = 1, \dots, N$) con $2 < q < \frac{2(N+2)}{N}$, u è sommabile in Q_T con l'esponente $\frac{q(N+2)}{N+2-q}$;*

II) *se $f_i \in L^q(Q_T)$ ($i = 1, \dots, N$) con $q = \frac{2(N+2)}{N}$ ed $f_0 \in L^2(Q_T)$, u è sommabile in Q_T con ogni esponente minore di $\frac{q(N+2)}{N+2-q} = \frac{2(N+2)}{N-2}$.*

Se, inoltre, c è sommabile in Q_T con qualche esponente maggiore di $\frac{N+2}{2}$, vale la I) assieme alle seguenti tesi:

III) *se $f_i \in L^q(Q_T)$ ($i = 1, \dots, N$), $f_0 \in L^{q_0}(Q_T)$ con $\frac{2(N+2)}{N} \le q < N+2$, $q_0 = \frac{q(N+2)}{N+2+q}$, u è sommabile in Q_T con ogni esponente minore di $\frac{q(N+2)}{N+2-q}$;*

IV) *se $f_i \in L^q(Q_T)$ ($i = 1, \dots, N$) , $f_0 \in L^p(Q_T)$ con $\frac{2(N+2)}{N} \le q < N+2$ e $p > q_0$, u è sommabile in Q_T con l'esponente $\frac{q(N+2)}{N+2-q}$;*

V) *se* $f_i \in L^q(Q_T)$ *(* $i = 1, \ldots, N$ *)*, $f_0 \in L^{q/2}(Q_T)$ *con* $q > N + 2$ *,* u *è limitata in* Q_T.

Capitolo II

Risultati di confronto per equazioni paraboliche lineari del secondo ordine.

Il presente capitolo è principalmente dedicato alla determinazione di alcuni risultati di confronto tra soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet, relativi ad equazioni paraboliche lineari del secondo ordine, mediante l'utilizzo di tecniche di simmetrizzazione secondo Schwarz. In particolare, nei primi due paragrafi si illustrano alcuni preliminari a tali tecniche, quali la disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi (cfr. [34], [35]), la formula di coarea di Fleming-Rishel ed il concetto di riordinamento secondo Schwarz di una funzione misurabile, assieme ad alcune sue principali proprietà.

Nel terzo ed ultimo paragrafo si affronta prima di tutto il problema della determinazione di una formula di derivazione sotto il segno di integrale. Infatti, il tipico procedimento che si segue per pervenire ai suddetti risultati di confronto, consiste inizialmente nell'integrare l'equazione principale su di un generico insieme di livello della soluzione u. Dunque, già da questa primo passo sorge spontanea l'esigenza di gestire in maniera opportuna l'integrale relativo alla derivata temporale di u: più specificamente, ci si domanda se sia possibile applicare un risultato che consenta di "scaricare" il simbolo di derivata temporale al di fuori dell'integrale. Nel caso delle funzioni regolari (ad esempio analitiche), un tale tipo di formula di derivazione sotto il segno di integrale viene qui dimostrata sia seguendo l'approccio [18], sia utilizzando una metodologia più generale, illustrata per lo più in [11] e che fa uso del concetto di *riordinamento di Steiner*. Per quanto riguarda il contesto delle soluzioni deboli, dove si considerano funzioni del tipo $u \in H^1\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right)$, viene dimostrata una formula di derivazione contenuta in [63] : uno strumento essenziale per ottenere questo risultato è il concetto di *riordinamento relativo*, del quale si fanno qui solo alcuni richiami.

Il paragrafo presenta, infine, le dimostrazioni dei succitati risultati di confronto tra la soluzione u di un assegnato problema iniziale, del tipo

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + cu = f & in \;\; Q_T \\ u = 0 & su \;\; S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

avente coefficiente di ordine zero c non negativo, e la soluzione v di un opportuno problema "simmetrizzato", del tipo

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f^{\#} & in \;\; Q_T^{\#} \\ v = 0 & su \;\; S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & in\, \Omega^{\#}, \end{cases}$$

dove, di fatto, si trascura l'influenza del termine di ordine zero. Qui $\Omega^{\#}$ indica la palla di $\mathbb{R}^N$ centrata nell'origine avente la stessa misura di Ω, $Q_T^{\#} =: \Omega^{\#} \times (0,T)$, $S_T^{\#} =: \partial\Omega^{\#} \times (0,T)$ e con $f^{\#}, u_0^{\#}$ si intendono delle particolari funzioni a simmetria radiale decrescente, che verificano la proprietà di conservare le misure degli insiemi di livello di f e u_0. Viene allora dimostrato che sia nell'ambito delle soluzioni classiche (trattato in [18]- [20]) che in quello delle soluzioni deboli (contenuto in [63]) vale un confronto di tipo *integrale* tra le soluzioni u e v.Una notevole conseguenza consisterà nella possibilità di stimare in modo efficace la norma L^p di u, per ogni $p \in [1, +\infty]$, mediante la corrispondente norma L^p di v.

II.1 La disuguaglianza isoperimetrica. Formula di coarea

In ciò che segue si potrà trovare una rapida panoramica a due risultati che verranno frequentemente applicati: la *disuguaglianza isoperimetrica* (e quindi il concetto di *perimetro* secondo De Giorgi) e la *formula di coarea*. Per alcuni tra i dettagli qui omessi, si rimanda alle relative note bibliografiche.

II.1.1 La disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ ed $u \in L^1(\Omega)$. Si dice che u è una *funzione a variazione limitata su* Ω o, più brevemente, una funzione BV, se esiste una misura di Radon λ su Ω a valori in $\mathbb{R}^N$ che sia a variazione limitata e sia tale che per ogni $i = 1, \ldots, N$ e per ogni $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ risulti

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \varphi d\lambda_i.$$

La misura λ è anche chiamata *gradiente misura di* u ed è denotato con il simbolo Du. Per $BV(\Omega)$ si intende lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni a variazione limitata in Ω. Tale spazio può essere dotato della norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega),$$

ove $|Du|(\Omega)$ denota la variazione totale della misura Du: rispetto a tale norma, si può mostrare che $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach. Per maggiori dettagli sulle funzioni a variazione limitata, si consulti ad esempio [16], [42], [43], [49], [89].
Si può dimostrare che

Lemma II.1.1 *Sia $u \in L^1(\Omega)$. Allora, $u \in BV(\Omega)$ se e solo se*

$$(1.1)\ V_u := \sup\left\{\int_\Omega u(x)\, div\varphi(x)\, dx : \varphi \in C_0^1\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right), \|\varphi\|_\infty \le 1\right\} < \infty.$$

Inoltre l'estremo superiore in (1.1) è uguale alla variazione totale $|Du|(\Omega)$ *di* Du *in* Ω.

Siamo allora in grado di dare le definizione di *perimetro* di un insieme misurabile, dovuta a De Giorgi e contenuta originariamente nel suo lavoro [34]. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ misurabile secondo Lebesgue ed Ω un insieme aperto. Il *perimetro* di E in Ω è definito dalla quantità

$$P(E;\Omega) = \sup\left\{\int_E div\varphi dx : \varphi \in C_0^1\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right), \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}. \tag{1.2}$$

Se $P(E;\Omega) < \infty$, diciamo che E è un *insieme di perimetro finito* in Ω. Quindi, se E ha perimetro finito in Ω, la sua funzione caratteristica χ_E ha gradiente distribuzionale $D\chi_E$ che è una misura di Radon finita a valori in $\mathbb{R}^N$ e $P(E;\Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$. Denotiamo semplicemente con $P(E)$ il perimetro di E in $\mathbb{R}^N$.

Se E è un insieme sufficientemente regolare, ad esempio un insieme misurabile con frontiera di classe C^2, la nozione di perimetro di E in Ω coincide con quella che è naturale aspettarsi: il perimetro di E in Ω è la misura $(N-1)-$dimensionale di quella parte di frontiera di E in Ω dove può essere definito un vettore normale. Difatti, in tal caso è $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E\cap\Omega) < \infty$ (qui con $\mathcal{H}^{N-1}$ si denota la misura di Hausdorff $(N-1)-$dimensionale) mediante la formula di Gauss-Green e utilizzando la definizione di perimetro (1.2) si riesce a far vedere che

$$P(E,\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E\cap\Omega).$$

Denotiamo con ω_N il volume della sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$,ossia $\omega_N = \pi^{\frac{N}{2}}/\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)$, ove $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$ ($t > 0$). Possiamo allora enunciare la, seguente, celebre *disuguaglianza isoperimetrica* di De Giorgi (cfr. [34], [35], [16], [42], [89]):

Teorema II.1.1 *Sia* E *un sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^N$. *Allora vale una delle due disuguaglianze* [4]*:*

$$N\omega_N^{\frac{1}{N}}|E|^{1-\frac{1}{N}} \leq P(E), \tag{1.3}$$

[4] qui $|\cdot|$ denota la misura di Lebesgue $N-$dimensionale.

oppure

$$N\omega_N^{\frac{1}{N}}\left|\mathbb{R}^N\backslash E\right|^{1-\frac{1}{N}} \leq P\left(E\right). \tag{1.4}$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza nella (1.3), allora E è equivalente ad una sfera.

II.1.2 La formula di coarea

Di notevole importanza è la seguente *formula di coarea*, dovuta a Federer (cfr.[16], [43], [42], [89]):

Teorema II.1.2 *Per ogni $u \in Lip\left(\mathbb{R}^N\right)$, si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u\left(x\right) = t\right\} dt. \tag{1.5}$$

In particolare, si dimostra che se $u \in Lip\left(\mathbb{R}^N\right)$ e $g \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, vale la seguente generalizzazione della (1.5), che assume così la forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\left(x\right)|\nabla u|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{u=\theta} g\left(x\right) d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{1.6}$$

Il nostro scopo è ora quello di fornire una ulteriore generalizzazione della (1.5), che valga per una classe di funzioni meno "regolari". A tal fine, sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e consideriamo lo spazio $\mathcal{D}\left(\Omega\right)$, assieme allo spazio di Schwarz $\mathcal{D}'\left(\Omega\right)$ delle distribuzioni su Ω : si ponga $\mathcal{D}^N\left(\Omega\right) = \underset{N}{\underleftrightarrow{\mathcal{D}\left(\Omega\right) \times \ldots \times \mathcal{D}\left(\Omega\right)}}$ e $\mathcal{D}^{N'}\left(\Omega\right) = \underset{N}{\underleftrightarrow{\mathcal{D}'\left(\Omega\right) \times \ldots \times \mathcal{D}'\left(\Omega\right)}}$. Se $\varphi\left(x\right) = \left(\varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_N\left(x\right)\right) \in \mathcal{D}^N\left(\Omega\right)$ e $T = \left(T_1, \ldots, T_N\right) \in \mathcal{D}^{N'}\left(\Omega\right)$, definiamo

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \sup_{x\in\Omega}|\varphi\left(x\right)| = \sup_{x\in\Omega}\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\left(x\right)^2\right]^{1/2}, \\
T\left(\varphi\right) &= \sum_{i=1}^{N} T_i\left(\varphi_i\right), \\
\|T\| &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1}|T\left(\varphi\right)|.
\end{aligned}$$

Fissata una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e considerate le sue derivate prime $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$, con $i = 1, \ldots, N$, il gradiente di T si denota con $grad\, T \in \mathcal{D}^{N'}(\Omega)$ ed è definito da

$$grad\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial x_N} \right).$$

In particolare, se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, si ha [5] $\|grad\, u\| = \int_\Omega |\nabla u|\, dx$ ove ∇u è il gradiente di u, le cui componenti sono le derivate deboli di u. Vale, allora, la seguente formula di coarea, dovuta a Fleming e Rishel (cfr. [45]):

Teorema II.1.3 *Sia u una funzione localmente integrabile su Ω. Sia $E_t = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\|grad\, u\| = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t, \Omega)\, dt.$$

Osservazione II.1.1 In particolare, se u appartiene allo spazio $W^{1,1}(\Omega)$, da quest'ultimo teorema segue che

$$\int_\Omega |\nabla u|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{x : u(x) > t\}, \Omega) dt. \tag{1.7}$$

II.2 Riordinamenti di funzioni misurabili

Il presente paragrafo si prefigge lo scopo di fornire il concetto di riordinamento di una funzione misurabile, cercando di delinearne, nel contempo, alcune caratteristiche principali essenziali al prosieguo.

[5] Qui f è identificata con la distribuzione

$$f(\varphi) = \int_\Omega f \varphi dx.$$

II.2.1 La funzione distribuzione

Definizione II.2.1 Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ed u una funzione reale misurabile su E : la *funzione distribuzione* μ_u di u è definita da

(2.1) $$\mu_u(t) = |\{x \in E : |u(x)| > t\}| \ , t \geq 0.$$

Due funzioni $u : E \to \mathbb{R}$ e $v : F \to \mathbb{R}$, con $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ed $F \subseteq \mathbb{R}^M$ insiemi misurabili, si dicono *equimisurabili,* o anche *equidistribuite,* se hanno la stessa funzione distribuzione, cioè $\mu_u(t) = \mu_v(t)$ per ogni $t \geq 0$. Vale la seguente

Proposizione II.2.1 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile, u, v funzioni misurabili su E, $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili su E ed $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione distribuzione μ_u è non negativa, decrescente e continua a destra in $[0, +\infty)$. Inoltre,*

(2.2) $$|v| \leq |u| \ \ q.o. in \ E \ \Rightarrow \mu_v \leq \mu_u;$$

(2.3) $$\mu_{au}(t) = \mu_u(t/|a|), \ t \geq 0;$$

(2.4) $$\mu_{u+v}(t_1 + t_2) \leq \mu_u(t_1) + \mu_v(t_2), \ \ t_1, t_2 \geq 0;$$

(2.5) $$|u| \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n| \ \ q.o. \ su \ E \Rightarrow \mu_u \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{u_n}.$$

In particolare,

(2.6) $$|u_n| \uparrow |u| \ \ q.o. \ su \ E \ \Rightarrow \ \ \mu_{u_n} \uparrow \mu_u.$$

Osservazione II.2.1 Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ ed u una funzione reale misurabile su E. La funzione distribuzione μ_u di u decresce da $|\text{supp } u|$ a 0 al crescere di t da 0 a $\operatorname{ess}\sup_E |u|$. Il limite sinistro $\mu_u(t^-)$ di μ_u in $t>0$ è uguale a $|\{x\in E : |u(x)|\geq t\}|$; μ_u presenta un salto di discontinuità in corrispondenza di ogni livello t per il quale l'insieme $\{x\in E : |u(x)|=t\}$ ha misura positiva: il valore del salto in t è dato esattamente da

$$\mu_u\left(t^-\right)-\mu_u(t)=|\{x\in E : |u(x)|=t\}|\,.$$

Inoltre, μ_u è continua *ovunque* se e solo se $|u|$ non presenta zone piatte. Infine, μ è strettamente decrescente quando t cresce da $\operatorname{ess}\inf_E |u|$ a $\operatorname{ess}\sup_E |u|$ se u è continua ed E è aperto e conesso. Dimostriamo la seguente, uteriore proprietà della funzione distribuzione (cfr. [76]):

Proposizione II.2.2 *Sia Ω un aperto di R^N ed $u\in H_0^1(\Omega)$. Allora la funzione distribuzione μ_u di u decresce strettamente da* $|\text{supp } u|$ *a* 0 *quando t cresce da* 0 *a* $ess\sup_\Omega |u|$. *In particolare,*

$$\mu_u(s)-\mu_u(t)\geq N^2\omega_N^{2/N}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{-1}\mu_u(t)^{2-(2/N)}(t-s)^2\,,$$

quando $0\leq s<t.$

Dim. Se $0\leq s<t$, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-s}\left(\int_{|u|>s}|\nabla u|\,dx-\int_{|u|>t}|\nabla u|\,dx\right) &= \frac{1}{t-s}\int_{s<|u|\leq t}|\nabla u|\,dx\\ &\leq \frac{1}{t-s}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &\quad\cdot\left(\mu_u(s)-\mu_u(t)\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Dalla formula di coarea di Fleming-Rishel risulta, in particolare,

$$\int_{|u(x)|>\vartheta}|\nabla u|\,dx=\int_\vartheta^{+\infty}P\{x:|u(x)|>\xi\}\,d\xi$$

per ogni $\vartheta>0$, per cui da quest'ultima e dalla disuguaglianza isoperimetrica (1.3), ricaviamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-s}\left(\int_{|u|>s}|\nabla u|\,dx-\int_{|u|>t}|\nabla u|\,dx\right) &= \frac{1}{t-s}\int_s^t P\left(\{x:|u(x)|>\xi\}\right)d\xi \\ &\geq P\left(\{x:|u(x)|>t\}\right)\geq N\omega_N^{1/N}\mu_u(t)^{1-(1/N)}\end{aligned}$$

sicchè dalla (2.7) si ha l'asserto. □

II.2.2 Riordinamenti

Definizione II.2.2 Sia $u : E \to \mathbb{R}$ misurabile. Il *riordinamento decrescente* di u, denotato con u^*, è la funzione distribuzione di μ_u. Più precisamente, osserviamo che un insieme di livello $\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\}$ $(s \geq 0)$ di μ_u è l'insieme vuoto oppure un intervallo semiaperto a destra. Così, il valore di u^* in un punto $s \geq 0$ è l'estremo destro di $\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\}$ se tale intervallo non è vuoto, ed è zero altrimenti. In altre parole, u^* è la funzione da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty]$ definita da

(2.8) $\quad u^*(s) = \sup\{t \geq 0 : \mu_u(t) > s\} = \inf\{t \geq 0 : \mu_u(t) \leq s\}\ , s \geq 0,$

con la convenzione $\sup \varnothing = 0$. Dalla definizione appena data, segue subito che u^* decresce monotonamente da ess $\sup |u|$ a 0 quando s cresce da 0 a $|\text{supp } u|$. Inoltre, se $|E| < \infty$, la funzione distribuzione μ_u è limitata da $|E|$, per cui $u^*(s) = 0$ per ogni $s \geq |E|$: in questo caso, possiamo riguardare u^* come una funzione definita solo sull'intervallo $[0, |E|)$. Si osservi anche che, se μ_u è continua e strettamente decrescente, allora u^* non è altro che l'inversa di μ_u : infatti, se $t \in [0,\text{ess sup}\,|u|]$, si ha

$$u^*(\mu_u(t)) = \sup\left\{\bar{t} \geq 0 : \mu_u(\bar{t}) > \mu_u(t)\right\} = t.$$

Proposizione II.2.3 *Supponiamo che u, v, u_n siano funzioni reali misurabili su $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Il riordinamento decrescente u^* di u è una funzione non* *negativa, decrescente e continua a destra in* $[0, +\infty)$ *. Inoltre,*

(2.9) $$|v| \leq |u| \ \textit{q.o. su } E \ \Rightarrow \ v^* \leq u^*;$$

(2.10) $$(au)^* = |a|\, u^*;$$

(2.11) $$(u+v)^*(s_1+s_2) \leq u^*(s_1) + v^*(s_2) \ \ (s_1, s_2 \geq 0);$$

(2.12) $$|u| \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n| \ \textit{q.o. su } E \ \Rightarrow \ u^* \leq \liminf_{n\to\infty} u_n^*\,;$$

in particolare,

(2.13) $$|u_n| \uparrow |u| \text{ q.o. su } E \ \Rightarrow \ u_n^* \uparrow u^*;$$

(2.14) $$\begin{aligned} u^*(\mu_u(t)) &\leq t \ \ (\textit{quando } \mu_u(t) < \infty); \\ \mu_u(u^*(s)) &\leq s \ \ (\textit{quando } u^*(s) < \infty); \end{aligned}$$

(2.15) $$u \textit{ ed } u^* \textit{ sono equimisurabili};$$

(2.16) $$(|u|^p)^* = (u^*)^p\,;\ 0 < p < \infty.$$

Dim. Il fatto che u^* sia non negativa, decrescente e continua a destra segue dalla definizione stessa di u^*.Le proprietà (2.9), (2.10), (2.12) sono immediate conseguenze delle (2.2), (2.3), (2.5) e dalla definizione di u^*. Per quanto concerne la proprietà (2.14), fissiamo $t \geq 0$ e si supponga che $s = \mu_u(t)$ sia finito. Allora $u^*(\mu_u(t)) = \sup\left\{\bar{t} : \mu_u(\bar{t}) > \mu_u(t)\right\} \leq t,$ che stabilisce la prima parte della (2.14). Supponiamo adesso che $s \geq 0$ sia tale che $t = u^*(s) < \infty$. Dalla (2.8) si ha subito che esiste una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \geq 0$, $t_n \downarrow t$ e $\mu_u(t_n) \leq s$: allora, dalla continuità a destra di μ_u, si ottiene

$$\mu_u\left(u^*(s)\right)=\mu_u(t)=\lim_{n\to\infty}\mu_u(t_n)\leq s,$$

che stabilisce la seconda parte della (2.14). Proviamo ora la (2.11). Possiamo supporre che $t=u^*(s_1)+u^*(s_2)$ sia finito, altrimenti non vi sarebbe nulla da dimostrare. Sia $s=\mu_{u+v}(t)$. Dalla seconda disuguaglianza in (2.14) si ha

$$\begin{aligned} s &= \left|\{x:|u(x)+v(x)|>u^*(s_1)+u^*(s_2)\}\right| \\ &\leq \left|\{x:|u(x)|>u^*(s_1)\}\right|+\left|\{x:|v(x)|>v^*(s_2)\}\right| \\ &= \mu_u\left(u^*(s_1)\right)+\mu_v\left(v^*(s_2)\right)\leq s_1+s_{2,} \end{aligned}$$

il che mostra, in particolare, che s è finito. Allora, utilizzando la prima disuguaglianza in (2.14) ed il fatto che $(u+v)^*$ è decrescente, risulta:

$$\begin{aligned} (u+v)^*(s_1+s_2) &\leq (u+v)^*(s)=(u+v)^*\left(\mu_{u+v}(t)\right) \\ &\leq t=u^*(s_1)+u^*(s_2). \end{aligned}$$

Per mostrare la (2.15), supponiamo che $u:E\to\mathbb{R}$ sia misurabile: esiste allora una successione di funzioni $\{u_n\}$ semplici e non negative, per le quali $u_n\uparrow|u|$. Si prova facilmente che u_n e u_n^* sono equimisurabili, cioè $\mu_{u_n}(t)=\mu_{u_n^*}(t)\;\forall t\geq 0$, ma dalle (2.6) - (2.13) consegue subito che $\mu_{u_n}\uparrow\mu_u$ e $\mu_{u_n^*}\uparrow\mu_{u^*}$, dunque $\mu_u(t)=\mu_{u^*}(t)$ ed u,u^* risultano equimisurabili.
Da quest'ultima proprietà, si ha inoltre

$$\mu_{|u|^p}(t)=\mu_u\left(t^{1/p}\right)=\mu_{u^*}\left(t^{1/p}\right)=\mu_{(u^*)^p}(t)\quad\forall t\geq 0,$$

sicchè

$$\left(|u|^p\right)^*(s)=\left[(u^*)^p\right]^*(s)=(u^*)^p(s),$$

il che prova la (2.16). $\square$

Il seguente risultato fornisce una descrizione alternativa delle norme L^p in termini della funzione distribuzione e del riordinamento decrescente (cfr. [23]).

Proposizione II.2.4 *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ ed u una funzione reale misurabile su E. Se $0 < p < \infty$, si ha*

$$\int_E |u|^p \, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_u(t) \, dt = \int_0^\infty u^*(s)^p \, ds. \tag{2.17}$$

Dim. Supponiamo anzitutto che u sia una funzione semplice e non negativa su E. Allora u può essere scritta come

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

ove $\{E_j\}_{j=1}^n$ è una partizione di E costituita da insiemi misurabili di misura finita e $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$. Si può mostrare facilmente che

$$\mu_u = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}, \text{ con } a_{n+1} := 0,$$

$$m_j := \sum_{i=1}^{j} |E_i| \ , j = 1, \ldots, n \ ,$$

e

$$u^* = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)} \text{ , con } m_0 := 0.$$

Dunque, per come sono definite u ed u^*,

$$\begin{aligned} \int_E |u|^p \, dx &= \sum_{j=1}^{n} a_j^p |E_j| = \sum_{j=1}^{n} a_j^p (m_j - m_{j-1}) \\ &= \int_0^{+\infty} (u^*)^p \, ds. \end{aligned}$$

D'altro canto, utilizzando l'espressione di u e quella della sua funzione distribuzione

μ_u, abbiamo

$$\begin{aligned} p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu_u\left(t\right)dt &= p\sum_{j=1}^{n} m_j \int_0^{+\infty} t^{p-1}\chi_{[a_{j+1},a_j)}\left(t\right)dt \\ &= p\sum_{j=1}^{n} m_j \int_{a_{j+1}}^{a_j} t^{p-1}dt = \sum_{j=1}^{n} m_j\left(a_j^p - a_{j+1}^p\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\left|E_i\right|\left(a_j^p - a_{j+1}^p\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^p\left|E_i\right| = \int_E |u|^p\,dx \end{aligned}$$

da cui la tesi. Se, poi, supponiamo che $u : E \to \mathbb{R}$ sia solo misurabile, esiste una successione di funzioni semplici, non negative e misurabili $\{u_n\}$ tale che $u_n \uparrow |u|$. Allora è

$$\int_E |u_n|^p\,dx = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mu_{u_n}\left(t\right)dt = \int_0^{\infty} u_n^*\left(s\right)^p ds\ , \forall n \in \mathbb{N} :$$

d'altra parte, dalle proposizioni II.2.1 e II.2.3 troviamo $\mu_{u_n} \uparrow \mu_u$ e $u_n^* \uparrow u^*$, per cui dal teorema della convergenza monotona segue che si può passare a limite nell'uguaglianza precedente ed ottenere così la (2.17). □

Diamo ora la definizione di *riordinamento crescente* di una funzione misurabile.

Definizione II.2.3 Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ ed u una funzione reale misurabile su Ω. La funzione

$$u_*\left(s\right) = u^*\left(|\Omega| - s\right)\ , s \in [0, |\Omega|] \tag{2.18}$$

è chiamata *riordinamento crescente di* u.

Quelle che seguono sono alcune notevoli proprietà dei riordinamenti, che interverranno sovente in questo capitolo e in quello successivo (cfr.[23], [33], [54]).

Proposizione II.2.5 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Si hanno le seguenti proprietà:*

(a) se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *è misurabile, per tutte le costanti* $C \geq 0$ *risulta*

$$(u + C)^* = u^* + C;$$

(b) se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *sono misurabili, vale la disuguaglianza*

$$\int_0^{|\Omega|} u_* (s)\, v^* (s)\, ds \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \int_0^{\Omega} u^* (s)\, v^* (s)\, ds. \tag{2.19}$$

(c) la mappa $u \to u^*$ *applica* $L^p(\Omega)$ *in* $L^p(0, |\Omega|)$ *per ogni* $1 \leq p \leq \infty$ *ed è una contrazione, nel senso che per ogni* $u, v \in L^p(\Omega)$ *risulta*

$$\|u^* - v^*\|_{L^p(0,|\Omega|)} \leq \|u - v\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{2.20}$$

La disuguaglianza (2.19) è dovuta a *G.H. Hardy* e *J.E. Littlewood* (cfr. [53]). Attraverso quest'ultima discende subito la (2.20), ad esempio nel caso $p = 2$: infatti, se $u, v \in L^2(\Omega)$, si ha che

$$\int_\Omega |u - v|^2\, dx = \int_\Omega |u|^2\, dx - 2\int_\Omega uvdx + \int_\Omega |v|^2\, dx$$

e

$$\int_0^{|\Omega|} |u^* - v^*|^2\, ds = \int_0^{|\Omega|} |u^*|^2\, dx - 2\int_0^{|\Omega|} u^* v^* ds + \int_0^{|\Omega|} |v^*|^2\, ds;$$

d'altronde

$$\int_\Omega |u|^2\, dx = \int_0^{|\Omega|} |u^*|^2\, dx,\ \int_\Omega |v|^2\, dx = \int_0^{|\Omega|} |v^*|^2\, ds$$

e dalla (2.19) risulta

$$\int_\Omega uvdx \leq \int_0^{|\Omega|} u^* v^* ds,$$

da cui la (2.20).

Valgono i seguenti risultati, per le cui dimostrazioni rimandiamo a [8], [23], [33] e [54] :

Lemma II.2.1 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ ed u una funzione misurabile su Ω. Sia $s \in [0, |\Omega|]$ un valore che cade nel rango della funzione distribuzione μ_u di u. Allora risulta*

$$\int_{|u(x)|>u^*(s)} |u(x)|\, dx = \int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma.$$

Più in generale, per ogni $s \in [0, |\Omega|]$ esiste un insieme misurabile $E_s \subseteq \Omega$ tale che $|E_s| = s$ e

$$\int_{E_s} |u(x)|\, dx = \int_0^s u^*(s)\, ds.$$

Quest'ultima proprietà, assieme alla disuguaglianza di Hardy-Littlewood, consente di affermare che

$$\int_0^s u^*(s)\, ds = \max\left\{\int_E |u(x)|\, dx : E \text{ misurabile, } E \subseteq \Omega \text{ e } |E| = s\right\}. \tag{2.21}$$

Proposizione II.2.6 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ ed $u, v \in L^1(\Omega)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) per ogni $s \in [0, |\Omega|]$,[6]

$$\int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma \le \int_0^s v^*(\sigma)\, d\sigma;$$

(ii) per ogni funzione F, convessa e crescente su $\mathbb{R}^+$ tale che $F(0) = 0$, risulta

$$\int_\Omega F(|u|)\, dx \le \int_\Omega F(|v|)\, dx.$$

Inoltre, se vale, ad esempio, la (i), per ogni funzione h decrescente non negativa su

---

6 spesso si dà alla funzione integrale $\int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma$ la denominazione di *concentrazione di u*.

$[0, |\Omega|]$ *si ha*

$$\int_0^s h(\sigma) u^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s h(\sigma) v^*(\sigma) d\sigma.$$

Proposizione II.2.7 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ ed $u, v \in L^1(\Omega)$. Allora, valgono le seguenti proprietà:*

$$(2.22) \quad \int_0^s (u+v)^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s u^*(\sigma) d\sigma + \int_0^s v^*(\sigma) d\sigma, \ \forall s \in [0, |\Omega|];$$

$$(2.23) \qquad \int_0^s (uv)^*(\sigma) d\sigma \quad \leq \quad \int_0^s u^*(\sigma) v^*(\sigma) d\sigma, \forall s \in [0, |\Omega|].$$

Osserviamo che le (2.22)-(2.23) si possono ottenere facilmente dalla caratterizzazione (2.21) e dalla disuguaglianza di Hardy-Littlewood.
Nel paragrafo che seguirà sarà fornita la nozione di riordinamento sferico, assieme alla dimostrazione di una disuguaglianza che ne caratterizza il suo gradiente.

II.2.2.1 Riordinamenti sferici; la disuguaglianza di Pólya-Szegö

Definizione II.2.4 Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ ed u una funzione reale misurabile su Ω. Definiamo il *riordinamento sferico decrescente di u* come la funzione

$$(2.24) \qquad u^\#(x) = u^*(\omega_N |x|^N), x \in \mathbb{R}^N.$$

Osserviamo che il supporto di $u^\#$ è contenuto nella palla $\Omega^\#$ centrata nell'origine ed avente la stessa misura di Ω, per cui se Ω è limitato, possiamo riguardare $u^\#$ come funzione definita solo su $\Omega^\#$.
Se $t \geq 0$, l'insieme di livello $\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^\#(x) > t\right\}$ è la palla centrata nell'origine avente la stessa misura dell'insieme di livello $\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ di u : difatti, se $u^\#(x) > t$, dalla (2.24) si ha che esiste un $\vartheta > t$ tale che $\mu_u(\vartheta) > \omega_N |x|^N$,

da cui $|x| < \left(\frac{\mu_u(\vartheta)}{\omega_N}\right)^{1/N} \leq \left(\frac{\mu_u(t)}{\omega_N}\right)^{1/N}$; inversamente, se $|x| < \left(\frac{\mu_u(t)}{\omega_N}\right)^{1/N}$, dalla continuità a destra di μ_u deduciamo che possiamo scegliere $\vartheta > t$ per cui $\mu_u(\vartheta) > \omega_N |x|^N$, dunque $u^{\#}(x) \geq \vartheta > t$. Da quest'ultima proprietà segue subito che $\mu_{u^{\#}} = \mu_u$, cioè che u ed $u^{\#}$ sono equidistribuiti. Se Ω è limitato, definiamo il *riordinamento sferico crescente* di u mediante la

$$u_{\#}(x) = u_*(\omega_N |x|^N), \; x \in \Omega^{\#}. \tag{2.25}$$

Dalla proposizione II.2.4 segue, in particolare, che quando si passa da u al suo riordinamento sferico $u^{\#}$, la norma L^p, non cambia. E' lecito domandarsi, nel caso in cui u, ad esempio, sia una funzione abbastanza regolare, se una proprietà analoga valga anche per il *gradiente* di u. Quello che si può affermare con certezza è che, al passaggio di u ad $u^{\#}$, il gradiente *decresce* in termini di norme L^p. Infatti, vale il seguente risultato, noto come *principio di Pólya-Szegö*, che riveste un'importanza fondamentale nella teoria dei riordinamenti:

Teorema II.2.1 *Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p \geq 1$, allora $u^{\#} \in W_0^{1,p}(\Omega^{\#})$ e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \geq \int_{\Omega^{\#}} \left|\nabla u^{\#}\right|^p dx. \tag{2.26}$$

La prima dimostrazione di quest'ultimo risultato, sebbene in ipotesi meno generali, è dovuta a Pólya e Szegö ([65]), mentre l'approccio che noi seguiremo è riconducibile a [74].

Dim. Supponiamo, in prima istanza, che $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ sia non negativa e prolunghiamola a zero al di fuori di Ω: si può allora applicare la formula di Federer (1.6). Fissiamo dunque $1 \leq p < \infty$: vale la seguente disuguaglianza, per quasi ogni $t \geq 0$:

$$(2.27) \int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{N-1} \geq \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-p} \cdot \left[\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\right\}\right]^p .$$

Per $p = 1$,la (2.27) è banale. Se $p > 1$, fissato $h > 0$ si ha, mediante la disuguaglianza di Hölder,

$$\frac{1}{h}\int_{t<u(x)\leq t+h} |\nabla u| \, dx \leq \left(\frac{1}{h}\int_{t<u(x)\leq t+h} |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p} \left[\frac{\mu_u(t) - \mu_u(t+h)}{h}\right]^{1-1/p},$$

per cui, passando a limite per $h \to 0$,

$$(2.28) \quad -\frac{d}{dt}\int_{u(x)>t} |\nabla u| \, dx \leq \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-1/p} \cdot \left[-\frac{d}{dt}\int_{u(x)>t} |\nabla u|^p \, dx\right]^{1/p}.$$

D'altronde, la (1.6) implica

$$\int_{u(x)>t} |\nabla u| \, dx = \int_t^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t'\right\} dt'$$

dunque

$$(2.29) \qquad -\frac{d}{dt}\int_{u(x)>t} |\nabla u| \, dx = \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\right\}$$

ed analogamente

$$\int_{u(x)>t} |\nabla u|^p \, dx = \int \left(\chi_{\{u>t\}} |\nabla u|^{p-1}\right) |\nabla u| \, dx = \int_t^{+\infty} dt' \int_{u(x)=t'} |\nabla u|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

sicchè

$$(2.30) \qquad -\frac{d}{dt}\int_{u(x)>t} |\nabla u|^p \, dx = \int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

per q.o. $t \geq 0$. Utilizzando le (2.29)-(2.30), dalla (2.28) segue

$$\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\right\} \leq \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-1/p} \cdot \left[\int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{N-1}\right]^{1/p}$$

ossia la (2.27). Attraverso la disuguaglianza isoperimetrica (1.3), risulta

$$(2.31) \qquad N\omega_N^{1/N} \left[\mu_u(t)\right]^{1-1/N} \leq \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\right\}.$$

Dalla (1.6) si ha l'identità

$$\int |\nabla u|^p \, dx = \int_0^{+\infty} dt \int_{u(x)=t} |\nabla u|^{p-1} \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

e, dunque, mediante la (2.27) e la (2.31),

$$\begin{aligned} (2.32) \quad \int |\nabla u|^p \, dx &\geq \int_0^{+\infty} \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-p} \cdot \left[\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t\right\}\right]^p dt \\ &\geq \left(N\omega_N^{1/N}\right)^p \int_0^{+\infty} \left[\mu_u(t)\right]^{p(1-1/N)} \cdot \left|\mu_u'(t)\right|^{1-p} dt. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il riordinamento sferico decrescente $u^{\#}$di u, osserviamo che nella (2.31) vale l'uguaglianza, poichè gli insiemi di livello sono palle centrate nell'origine:

$$(2.33) \qquad N\omega_N^{1/N} \left[\mu_u(t)\right]^{1-1/N} = \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^{\#}(x) = t\right\}.$$

Inoltre, la (2.27) vale con il segno di uguaglianza se $|\nabla u|$ è costante sulla superficie di livello $\{x : u(x) = t\}$: nel nostro caso, osserviamo esplicitamente che $\left|\nabla u^{\#}\right| = N\omega_N |x|^{N-1} \cdot \left|u^{*\prime}\left(\omega_N |x|^N\right)\right|$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e dunque

$$\int_{u^{\#}(x)=t} \left|\nabla u^{\#}\right|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} = \left(N\omega_N r^{N-1}\right)^{p-1} \left|u^{*\prime}\left(\omega_N r^N\right)\right|^{p-1} \cdot \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^{\#}(x) = t\right\},$$

dove $r = \left(\mu_u(t)/\omega_N\right)^{1/N}$ è il raggio dell'insieme di livello $\left\{u^{\#} > t\right\}$ di $u^{\#}$. Allora, dalla (2.33) otteniamo

$$\begin{aligned} (2.34) \qquad & \int_{u^{\#}(x)=t} \left|\nabla u^{\#}\right|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \left[\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^{\#}(x) = t\right\}\right]^p \cdot \left[-\frac{1}{u^{*\prime}\left(\mu_u(t)\right)}\right]^{1-p} \\ &= \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-p} \cdot \left[\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^{\#}(x) = t\right\}\right]^p. \end{aligned}$$

D'altra parte, come mostreremo esplicitamente più avanti, il riordinamento $u^{\#}$di u

è lipschitziano, per cui attraverso la (1.6) e le (2.33)-(2.34) discende

$$\begin{aligned}
\int \left|\nabla u^{\#}\right|^p dx &= \int_0^{+\infty} dt \int_{u^{\#}(x)=t} \left|\nabla u^{\#}\right|^{p-1} d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_0^{+\infty} \left[-\mu_u'(t)\right]^{1-p} \cdot \left[\mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u^{\#}(x) = t\right\}\right]^p dt \\
&= \left(N\omega_N^{1/N}\right)^p \int_0^{+\infty} \left[\mu_u(t)\right]^{p(1-1/N)} \cdot \left|\mu_u'(t)\right|^{1-p} dt
\end{aligned}$$

e dalla (2.32) segue l'asserto.

Per mostrare che $u^{\#}$è lipschitziana, osserviamo che dalla (1.6) si ha

$$\int_{t \geq u(x) > t-h} |\nabla u|\, dx = \int_{t-h}^{t} \mathcal{H}^{N-1}\left\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = t'\right\} dt'.$$

Allora, denotata con $L := \max |\nabla u|$ la costante di Lipschitz di u, dalla monotonia di μ_u e dalla disuguaglianza isoperimetrica segue

$$\begin{aligned}
L\left(\mu_u(t-h) - \mu_u(t)\right) &= L\left|\{x : t-h < u(x) \leq t\}\right| \\
&\geq \int_{t-h<u(x)\leq t} |\nabla u|\, dx \\
&\geq N\omega_N^{1/N} \int_{t-h}^{t} \mu_u(t')^{1-1/N} dt' \\
&\geq N\omega_N^{1/N} \mu_u(t)^{1-1/N} h
\end{aligned} \tag{2.35}$$

per ogni t, h tali che $t > h > 0$. Dalla (2.35) discende subito che per q.o. t è

$$\left|u^{*\prime}(\mu_u(t))\right| \mu_u(t)^{1-1/N} \leq \frac{L}{N\omega_N^{1/N}}$$

per cui dall'espressione del gradiente di $u^{\#}$esplicitata in precedenza, si ha

$$\left|\nabla u^{\#}\right| \leq L,$$

da cui

$$\left|u^{\#}(x) - u^{\#}(y)\right| \leq L\,|x-y|\,.$$

E' inoltre evidente che la (2.26) continua a valere se u cambia di segno, a meno di sostituire u con $|u|$.

Supponiamo ora che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,e sia $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora

$$\int_{\Omega^\#} \left|\nabla u_n^\#\right|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx \tag{2.36}$$

per ogni n, e dalla limitatezza di $\{u_n\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ discende che $\left\{u_n^\#\right\}$ è limitata in $W_0^{1,p}\left(\Omega^\#\right)$. Dunque, se $p > 1$, possiamo estrarre da $\{u_n\}$ una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$,per la quale esiste una funzione $v \in L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ tale che

$$\nabla u_n^\# \rightharpoonup v \quad \text{debole in } L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right).$$

Osserviamo che dalla proposizione II.2.5 segue in particolare che

$$u_n^\# \to u^\# \ \text{ forte in } L^p\left(\Omega^\#\right);$$

d'altra parte, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}\left(\Omega^\#\right)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la

$$\int_{\Omega^\#} u_n^\# \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega^\#} \frac{\partial u_n^\#}{\partial x_i} \varphi dx$$

perciò passando a limite per $n \to \infty$,

$$\int_{\Omega^\#} u^\# \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega^\#} v_i \varphi dx$$

cioè $u \in W_0^{1,p}\left(\Omega^\#\right)$, $\nabla u^\# = v$ e quindi

$$u_n^\# \rightharpoonup u^\# \quad \text{debole in } W_0^{1,p}\left(\Omega^\#\right).$$

Infine, passando a limite nella (1.7), segue

$$\left\|u^\#\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega^\#)} \leq \liminf_{n \to \infty} \left\|u_n^\#\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega^\#)} \leq \lim_{n \to \infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Se invece $p = 1$,utilizzando la formula di Fleming Rishel (1.7) e la disuguaglianza isoperimetrica, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|\nabla u|\,dx &= \int_0^{+\infty} P\left\{x\in\Omega:|u(x)|>t\right\}dt\\ &\geq N\omega_N^{1/N}\int_0^{+\infty}\mu_u(t)^{1-1/N}\,dt;\end{aligned}$$

applicando ancora la (1.7) al riordinamento sferico $u^{\#}$ e notando che, in questo caso, la disuguaglianza isoperimetrica diviene un'uguaglianza, otteniamo

$$\int_{\Omega^{\#}}\left|\nabla u^{\#}\right|dx = N\omega_N^{1/N}\int_0^{+\infty}\mu_u(t)^{1-1/N}\,dt$$

e la (2.26) è completamente dimostrata. □

II.3 Risultati di confronto tra soluzioni classiche di problemi parabolici lineari

II.3.1 Alcune proprietà delle funzioni analitiche

Nella seguente definizione, verranno forniti i concetti di riordinamento crescente e decrescente relativamente ad una funzione u che dipenda, oltre che dalla variabile spaziale x, anche dalla variabile temporale t.

Definizione II.3.1 Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $T>0$ (eventualmente anche $T=\infty$) ed $u(x,t)$ una funzione reale su $Q_T=\Omega\times(0,T)$, che sia misurabile rispetto ad $x\in\Omega$ per ogni $t\in(0,T)$ fissato (cioè la funzione $u(t)\equiv u(\cdot,t)$ è misurabile per ogni t). Per *funzione distribuzione di u rispetto ad x*,intendiamo la funzione di due variabili $\mu_u(\vartheta, t)$,definita come la funzione distribuzione $\mu_{u(t)}$ di u per t fissato:

$$\mu_u(\vartheta, t) = |\{x \in \Omega : |u(x,t)| > \vartheta\}|\,,\ \vartheta \geq 0,\ t \in (0,T)\,.$$

Analogamente, definiamo il *riordinamento decrescente* u^* ed il *riordinamento sferico decrescente* $u^\#$ di u, attraverso il riordinamento decrescente e sferico decrescente di $u(t)$:

$$\begin{aligned} u^*(s,t) &= \sup\{\vartheta \geq 0 : \mu_u(\vartheta,t) > s\}\,, \\ u^\#(x,t) &= u^*(\omega_N |x|^N, t)\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ove $(s,t) \in [0, |\Omega|] \times (0,T)$ e $(x,t) \in Q_T^\# := \Omega^\# \times (0,T)$. In maniera analoga vengono definiti il *riordinamento crescente* ed il *riordinamento sferico crescente* di u.

Una notevole proprietà del riordinamento sferico crescente di una funzione $u(x,t)$, che useremo da qui a breve, è la seguente (vedi[18], [20]):

Proposizione II.3.1 *Sia $u(x,t)$ una funzione positiva su $Q := \Omega \times (0,\infty)$ che si annulla su $S := \partial\Omega \times [0,\infty)$. Se $u(x,t)$ è localmente lipschitziana in Q, allora $u^\#(x,t)$ risulta localmente lipschitziana in $Q^\# := \Omega^\# \times (0,\infty)$.*

Sia $u(x,t)$ una funzione continua non negativa su $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, con $u(x,t) = 0$ su S ed $u(x,t_0) \not\equiv 0\ \ \forall t_0 > 0$; supponiamo che $u \in C_1^2(Q)$ (cioè u è di classe C^2 rispetto alle variabili spaziali e di classe C^1 rispetto alla variabile temporale) e che $u(\cdot,t) \equiv u(t)$ sia analitica in Ω per ogni $t > 0$ fissato. Allora, in base ad una nota proprietà delle funzioni analitiche, per ogni $t > 0$ e $\vartheta \geq 0$ la regione $\{x \in \Omega : u(x,t) = \vartheta\}$ può avere volume positivo solo nel caso in cui $u(t) = \vartheta$ su Ω, condizione questa che non può essere verificata in base alle ipotesi fatte su u : dunque, u *non* può essere costante su un insieme di volume positivo. Inoltre, risulta

$$\Gamma(\vartheta,t) := \partial\{x \in \Omega : u(x,t) > \vartheta\} = \{x \in \Omega : u(x,t) = \vartheta\}\,.$$

Poniamo ora

$$(3.2) \qquad \alpha(s,t) = \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} u(x,t)\,dx,$$

per $s \in [0, |\Omega|]$ e $t > 0$.

Il lemma II.2.1 ci consente di scrivere la funzione (3.2) nel modo seguente

$$\alpha(s,t) = \int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma,$$

sicchè

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s,t) = u^*(s,t);$$

dalla proposizione II.3.1 e dal teorema di Rademacher, deduciamo che

$$(3.3) \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2}(s,t) = \frac{\partial u^*}{\partial s}(s,t) \quad \text{q.o.}$$

Poichè u è analitica rispetto ad x per ogni $t > 0$ fissato, dal teorema di Sard segue che per $t > 0$ e per quasi ogni $\vartheta \geq 0$, risulta

$$\Gamma(\vartheta,t) \cap \{x \in \Omega : \nabla u(x,t) = 0\} = \varnothing,$$

ove ∇u sta qui ad indicare il gradiente di u calcolato rispetto alle variabili spaziali. D'altronde, un'applicazione della formula di coarea (1.6) implica

$$(3.4) \qquad -\frac{\partial \mu_u}{\partial \vartheta}(\vartheta,t) = \int_{\Gamma(\vartheta,t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1} \quad \text{per q.o. } \vartheta:$$

difatti, posto nella (1.6)

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{|\nabla u|} & \text{in } \{\vartheta < u \leq \vartheta + h\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $g \in L^\infty$ e per q.o. $\vartheta > 0$ risulta

$$\mu_u(\vartheta+h,t) - \mu_u(\vartheta,t) = -\int_{\vartheta<u\leq\vartheta+h} dx = -\int_\vartheta^{\vartheta+h} ds \int_{u=s} \frac{d\mathcal{H}^{N-1}}{|\nabla u|}.$$

Dalla (3.4) discende subito

$$
(3.5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial s}(s,t) &= -\frac{1}{\int_{\Gamma(u^*(s,t),t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1}} \\ &= -\frac{1}{\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1}}, \end{aligned}
$$

per $t > 0$ e per q.o. $s \in [0, |\Omega|]$.

Per quanto concerne la funzione $\alpha(s,t)$, vale il seguente teorema di derivazione sotto il segno di integrale (cfr.[20])

Teorema II.3.1 *Se $\alpha(s,t)$ è la funzione definita in (3.2), si ha*

$$
(3.6) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s,t) = \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx.
$$

Dim. Si ponga

$$
\Omega(\vartheta, t) = \{x \in \Omega : u(x,t) > \vartheta\}
$$

per ogni $\vartheta \geq 0$, $t > 0$. Se $\Delta t > 0$, sia $\bar{t} = t + \Delta t$, e

$$
\bar{u} = u^*(s, \bar{t}) = u^*(s, t + \Delta t).
$$

Si ha, allora,

$$
(3.7) \qquad \begin{aligned} \alpha(s,\bar{t}) - \alpha(s,t) &= \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t})} u(x,\bar{t})\, dx - \int_{\Omega(u^*(s,t),t)} u(x,t)\, dx \\ &= \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t})} [u(x,\bar{t}) - u(x,t)]\, dx + \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t})} u(x,t)\, dx \\ &\quad - \int_{\Omega(u^*(s,t),t)} u(x,t)\, dx. \end{aligned}
$$

Dalla proposizione II.3.1 discende che u^* è localmente differenziabile, il che consente di scrivere

$$
(3.8) \qquad \bar{u} = u^*(s, t + \Delta t) = u^*(s,t) + \frac{\partial u^*}{\partial t}(s, \tilde{t})\, \Delta t,
$$

per cui quando $\Delta t \to 0$ si ha $\Omega(\bar{u},\bar{t}) \to \Omega(u^*(s,t),t)$. Si hanno le seguenti decomposizioni:

$$\Omega(\bar{u},\bar{t}) = [\Omega(\bar{u},\bar{t}) \cap \Omega(u^*(s,t),t)] \cup [\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)]$$

$$\Omega(u^*(s,t),t) = [\Omega(\bar{u},\bar{t}) \cap \Omega(u^*(s,t),t)] \cup [\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})].$$

Si osservi che, attraverso la (3.8), nell'insieme

$$[\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)] \cup [\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})]$$

si ha, per Δt sufficientemente piccolo,

$$u(x,t) = u^*(s,t) + o(\Delta t). \tag{3.9}$$

D'altra parte, notiamo anche che

$$|\Omega(\bar{u},\bar{t})| = |\Omega(u^*(s,t),t)| = s,$$

sicchè le due decomposizioni precedenti implicano

$$|\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)| = |\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})|. \tag{3.10}$$

Allora, dalla (3.9) e dalla (3.10) deduciamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega(\bar{u},\bar{t})} u(x,t)\,dx - \int\limits_{\Omega(u^*(s,t),t)} u(x,t)\,dx \\
= \; & u^*(s,t) \cdot |\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)| - u^*(s,t) \cdot |\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})| \\
& + \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)} o(\Delta t)\,dx - \int_{\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})} o(\Delta t)\,dx \\
= \; & \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t}) \setminus \Omega(u^*(s,t),t)} o(\Delta t)\,dx - \int_{\Omega(u^*(s,t),t) \setminus \Omega(\bar{u},\bar{t})} o(\Delta t)\,dx.
\end{aligned}$$

Dalla (3.7) si ottiene dunque

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(s,\bar{t})-\alpha(s,t)}{\Delta t} &= \int_{\Omega(\bar{u},\bar{t})}\frac{u(x,\bar{t})-u(x,t)}{\Delta t}dx+\int_{\Omega(\bar{u},\bar{t})\setminus\Omega(u^*(s,t),t)}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}dx\\ &\quad-\int_{\Omega(u^*(s,t),t)\setminus\Omega(\bar{u},\bar{t})}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}dx,\end{aligned}$$

per cui passando a limite per $\Delta t \to 0$ si ha il risultato voluto. $\square$

Osservazione II.3.1 Quest'ultimo risultato si può ottenere, in generale, se si suppongono verificate le ipotesi della proposizione II.3.1.

Tuttavia, si può fornire una formula di derivazione sotto il segno di integrale in una forma più generale rispetto a quella appena data. Supponiamo, a tale scopo, che G sia un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e che u sia una funzione definita su $\overline{G}$. Sia $u > 0$ su G, $u = 0$ su ∂G e supponiamo inoltre che u sia analitica in G.

Per ogni $y \in \mathbb{R}^m$ per il quale l'insieme

$$G_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in G\} \tag{3.11}$$

sia non vuoto, si consideri la funzione

$$x \in G_y \to u(x,y) \tag{3.12}$$

(nel caso precedente, è chiaro che $(Q_T)_t = \Omega$, $\forall t \in (0,T)$ e la funzione (3.12) è quella che si ottiene da u fissando la variabile t). Denotiamo con $u^*(\cdot,y)$ il riordinamento decrescente della (3.12), cioè

$$u^*(s,y) = (u(\cdot,y))^*(s), \quad \forall s \in \left[0, |G_y|_n\right],$$

ove $|\cdot|_n$ denota la misura di Lebesgue $n-$dimensionale. Inoltre, poniamo

$$u^{\#}(x,y) = (u(\cdot,y))^{\#}(x) = u^*(\omega_n |x|^n, y), \quad \forall x \in G_y^{\#}. \tag{3.13}$$

La funzione (3.13) è anche chiamata *riordinamento di Steiner di* u, rispetto alla variabile x. Introduciamo la seguente funzione

$$(3.14)\quad F(s,y)=\int_0^s u^*(\sigma,y)\,d\sigma,\quad \forall y\in\mathbb{R}^m:\ G_y\neq\varnothing \text{ e } s\in\left[0,|G_y|_n\right].$$

Poichè $u(\cdot,y)$ non ha zone piatte (u è di fatto analitica), in base al lemma II.2.1 possiamo riscrivere la (3.14) nella forma seguente

$$F(s,y)=\int_{G_y(s)} u(x,y)\,dx,$$

dove $G_y(s)=\{x\in G_y : u(x,y)>u^*(s,y)\}$. Vogliamo differenziare la funzione (3.14) rispetto alla variabile y. A tal fine, vale il seguente risultato (cfr.[11]):

Lemma II.3.1 *Risulta*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=\int_{G_y(s)}\frac{\partial u}{\partial y_i}dx$$

nel senso delle distribuzioni, per ogni $i=1,\ldots,m$.

Dim. Per dimostrare il risultato, è ovviamente sufficiente considerare il solo caso $m=1$. Dato un valore $\bar{y}$ della variabile y ed un valore $s\in\left(0,|G_{\bar{y}}|_n\right)$, è possibile trovare un insieme aperto $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ed un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$ per il quale $\bar{y}\in I$, $A\times I\subseteq G$ e gli insiemi $G_y(s)$ sono contenuti in A per $y\in I$. Se y, $y+\Delta y\in I$, abbiamo

$$F(s,y+\Delta y)-F(s,y)=\int_{G_{y+\Delta y}(s)} u(x,y+\Delta y)\,dx-\int_{G_y(s)} u(x,y)\,dx:$$

osserviamo allora che, avendosi $|G_y(s)|_n=|u(x,y)>u^*(s,y)|_n=s$, risulta

$$\int_{G_{y+\Delta y}(s)} u(x,y+\Delta y)\,dx=\sup_{|\Omega|=s}\int_\Omega u(x,y+\Delta y)\,dx\geq\int_{G_y(s)} u(x,y+\Delta y)\,dx$$

dunque

$$F(s,y+\Delta y)-F(s,y)\geq\int_{G_y(s)}u(x,y+\Delta y)\,dx-\int_{G_y(s)}u(x,y)\,dx.$$

Posto $\Delta F=F(s,y+\Delta y)-F(s,y)$ e $\Delta u=u(x,y+\Delta y)-u(x,y)$, abbiamo

(3.15)
$$\frac{\Delta F}{\Delta y}\geq\int_{G_y(s)}\frac{\Delta u}{\Delta y}dx\ \text{ se }\Delta y>0$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta y}\leq\int_{G_y(s)}\frac{\Delta u}{\Delta y}dx\ \text{ se }\Delta y<0.$$

Se $\varphi(y)\in\mathcal{D}(I)$ è una funzione non negativa, dalle (3.15) deduciamo

(3.16)
$$\int_I\varphi(y)\frac{\Delta F}{\Delta y}dy\geq\int_I\varphi(y)\,dy\int_{G_y(s)}\frac{\Delta u}{\Delta y}dx\ \text{ se }\Delta y>0$$

$$\int_I\varphi(y)\frac{\Delta F}{\Delta y}dy\leq\int_I\varphi(y)\,dy\int_{G_y(s)}\frac{\Delta u}{\Delta y}dx\ \text{ se }\Delta y<0.$$

Poichè

$$\int_I\varphi(y)\frac{\Delta F}{\Delta y}dy=\int_I\frac{\varphi(y-\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}F(s,y)\,dy$$

si ha

$$\int_I\varphi(y)\frac{\Delta F}{\Delta y}dy\to-\int_I\frac{\partial\varphi}{\partial y}F(s,y)\,dy\ \text{ per }\Delta y\to0,$$

per cui, passando a limite per $\Delta y\to0$ nelle (3.16), otteniamo

$$-\int_I\frac{\partial\varphi}{\partial y}F(s,y)\,dy=\int_I\left(\int_{G_y(s)}\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)\varphi(y)\,dy$$

per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(I)$ e non negativa. Da ciò segue che $\frac{\partial F}{\partial y_i}=\int_{G_y(s)}\frac{\partial u}{\partial y_i}dx$ nel senso delle distribuzioni. $\square$

Per quanto riguarda alcune formule per il calcolo della derivata seconda di F rispetto alle variabili y_i,si confronti ancora [11].

II.3.2 Stime puntuali

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di fornire un risultato di confronto tra la soluzione *classica* u di un problema di Cauchy-Dirichlet relativo ad un'equazione parabolica lineare del secondo ordine, e la soluzione *classica* v di un opportuno problema, chiamato "simmetrizzato", avente dominio, dati e coefficienti a simmetria radiale.

Si consideri un operatore differenziale lineare del secondo ordine, con parte principale in forma di divergenza, del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x,t)\, u, \tag{3.17}$$

dove:

1.) per $i,j = 1,\dots,N$, si ha $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in C^{\infty}\left(\overline{Q}_T\right)$ $(T \in (0,\infty)$), a_{ij} è analitica rispetto ad x per ogni $t > 0$ e vale la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2\,, \ \forall (x,t) \in Q_T \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N; \tag{3.18}$$

2.) $c \in C^{\infty}\left(\overline{Q}_T\right)$, $c \geq 0$ e c è analitica rispetto ad x, per ogni $t > 0$.

Consideriamo il problema ai valori al contorno

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & in\ \ Q_T \\ u = 0 & su\ \ S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \ \Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

con

3) f è analitica in Ω per ogni $t \in (0,T)$ fissato ed $f \geq 0$ in Q_T;

4) $u_0 \in C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_0 \geq 0$ su $\overline{\Omega}$ e $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Se $f \not\equiv 0$, dal principio del massimo (vedi anche [66]) segue che se u è la soluzione di (3.19), $u(x,t) \not\equiv 0$ in Q_T; inoltre, u è una funzione analitica rispetto ad x per ogni t fissato (cfr.[46]).

Il nostro scopo è quello di confrontare la soluzione u di (3.19) con la soluzione v di un opportuno problema "simmetrizzato" . A tal fine, si consideri la funzione (3.2) e si osservi che dalle (3.3)-(3.5) segue

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2}(s,t) = -\left[\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1}\right]^{-1}. \tag{3.20}$$

Fissati $(s,t) \in (0,|\Omega|) \times (0,T)$, essendo u soluzione classica di (3.19), si ha

$$\begin{aligned} &\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} u_t dx - \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}\, dx + \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} c(x,t)\, u dx \\ &= \int_{u(x,t)>u^*(s,t)} f(x,t)\, dx; \end{aligned} \tag{3.21}$$

utilizzando la formula di Gauss-Green, abbiamo

$$-\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}\, dx = -\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} a_{ij}u_{x_i}\nu_j d\mathcal{H}^{N-1},$$

dove $\nu = -\dfrac{\nabla u(x,t)}{|\nabla u(x,t)|}$ è la normale esterna al dominio $\{x : u(x,t) > u^*(s,t)\}$, sicchè dalla condizione di ellitticità (3.18) contenuta nell'ipotesi (1.) di cui sopra, discende

$$\begin{aligned} &-\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}\, dx \\ &= \int_{u(x,t)=u^*(s,t)} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} |\nabla u(x,t)|^{-1} d\mathcal{H}^{N-1} \geq \int_{u(x,t)=u^*(s,t)} |\nabla u(x,t)|\, d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Quindi, tenendo conto del teorema II.3.1, delle (3.21) - (3.22) e del fatto che u e c sono non negative, si ha

$$\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} |\nabla u(x,t)|\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \left[\int_{u(x,t)>u^*(s,t)} f(x,t)\, dx\right] - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s,t)$$

ed applicando la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (2.19) ne consegue

$$(3.23)\qquad \int_{u(x,t)=u^*(s,t)} |\nabla u(x,t)|\, d\mathcal{H}^{N-1} \le \int_0^s f^*(\sigma,t)\, d\sigma - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s,t).$$

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} d\mathcal{H}^{N-1} \quad &\le \quad \left(\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} |\nabla u(x,t)|\, d\mathcal{H}^{N-1}\right)^{1/2} \\ &\cdot \left(\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

ove $\mathcal{H}^{N-1}(\{x : u(x,t) = u^*(s,t)\}) = P(\{x : u(x,t) > u^*(s,t)\})$, per cui applicando la(3.23) e la disuguaglianza isoperimetrica (1.3), troviamo

$$N^2 \omega_N^{2/N} s^{2-(2/N)} \le \left(\int_0^s f^*(\sigma,t)\, d\sigma - \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s,t)\right)\left(\int_{u(x,t)=u^*(s,t)} \frac{1}{|\nabla u(x,t)|} d\mathcal{H}^{N-1}\right).$$

Se poniamo $p(s) := N^2 \omega_N^{2/N} s^{2-(2/N)}$, da quest'ultima disuguaglianza e dalla (3.20) deduciamo che

$$(3.24)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} - p(s)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \le \int_0^s f^*(\sigma,t)\, d\sigma \ \text{ in } \ (0,|\Omega|)\times(0,T).$$

Se $Q_T^{\#} := \Omega^{\#} \times (0,T)$ e $S_T^{\#} := \partial\Omega^{\#} \times (0,T)$ è la sua superficie laterale, consideriamo ora il problema "simmetrizzato" di (3.19):

$$(3.25)\qquad \begin{cases} v_t - \Delta v = f^{\#} & in\ \ Q_T^{\#} \\ v = 0 & su\ \ S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & in\ \Omega^{\#}, \end{cases}$$

Sia $v(x,t)$ la soluzione *classica* di (3.25). A causa della simmetria del problema, $v(x,t)$ è radialmente simmetrica rispetto ad x, cioè $v(x,t) = v(|x|,t)$. Vale la seguente

Proposizione II.3.2 *Se $v(x,t)$ è soluzione di (3.19), allora v è radialmente* *simmetrica decrescente, rispetto ad x. Inoltre,* $v(0,t) = \max_{x \in \overline{\Omega^{\#}}} v(x,t)$.

Dim. In prima istanza, supponiamo che $u_0^{\#}(x)$ e $f^{\#}(x,t)$ siano differenziabili. Se $r = |x|$, risulta

(3.26) $$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = f^{\#}(r,t).$$

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{N-1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{N-1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

si ha, derivando ambo i membri della (3.26) rispetto ad r,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) - \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{N-1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial f^{\#}}{\partial r},$$

sicchè risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} \right) - \Delta \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{N-1}{r^2} \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} \right) \leq 0 & in \;\; Q_T^{\#} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}(r,t) \leq 0 & su \;\; S_T^{\#} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}(r,t) = \dfrac{du_0^{\#}}{dr}(r) \leq 0 & in \; \Omega^{\#}. \end{cases}$$

Dal principio del massimo (teorema I..1.12) segue allora $\dfrac{\partial v}{\partial r} \leq 0$, per cui v è radialmente simmetrica decrescente. Nel caso generale, si approssimano $u_0^{\#}$ ed $f^{\#}$ mediante funzioni differenziabili. □

Analogamente a quanto fatto per la soluzione $u(x,t)$, definiamo per $v(x,t)$ la funzione integrale

(3.27) $$\widetilde{\alpha}(s,t) = \int_0^s v^*(\sigma,t)\, d\sigma.$$

Poichè v è radialmente simmetrica decrescente rispetto ad x, ogni dusguaglianza utilizzata per pervenire alla (3.24) diviene ora un'uguaglianza, per cui si ha

$$\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial t}-p\left(s\right)\frac{\partial^{2}\widetilde{\alpha}}{\partial s^{2}}=\int_{0}^{s}f^{*}\left(\sigma,t\right)d\sigma\ \text{ in }\left(0,\left|\Omega\right|\right)\times\left(0,T\right).$$

Si ponga, dunque,

$$w\left(s,t\right):=u^{*}\left(s,t\right)-v^{*}\left(s,t\right)$$

e

$$\begin{aligned}\chi\left(s,t\right)\quad&:=\alpha\left(s,t\right)-\widetilde{\alpha}\left(s,t\right)\\&=\int_{0}^{s}w\left(\sigma,t\right)d\sigma\,,\end{aligned}\tag{3.28}$$

per $(s,t)\in[0,|\Omega|]\times[0,T]$. In base alle condizioni al contorno imposte in (3.19) e in (3.25), troviamo

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\chi}{\partial t}-p\left(s\right)\dfrac{\partial^{2}\chi}{\partial s^{2}}\leq0 & in\ \ \left(0,\left|\Omega\right|\right)\times\left(0,T\right)\\ \chi\left(0,t\right)=\dfrac{\partial\chi}{\partial s}\left(\left|\Omega\right|,t\right)=0 & \forall t\in\left[0,T\right]\\ \chi\left(s,0\right)=0 & \forall s\in\left[0,\left|\Omega\right|\right].\end{cases}\tag{3.29}$$

A questo punto si può dimostrare, usando il principio del massimo (teoremi I.1.11-12), il seguente

Lemma II.3.2 *Si ha* $\chi(s,t)\leq0$ *ovunque in* $[0,|\Omega|]\times[0,T]$.

Dim. Dalla (3.29) e dal principio del massimo (teor. I.1.12) segue che il massimo di χ in $[0,|\Omega|]\times[0,T]$ è raggiunto sulla frontiera parabolica di $(0,|\Omega|)\times(0,T)$, ossia su uno dei segmenti $\{(s,0):s\in[0,|\Omega|]\}$, $\{(0,t):t\in(0,T]\}$, $\{(|\Omega|,t):t\in(0,T]\}$. Se il massimo è raggiunto sul segmento $\{(|\Omega|,t):t\in(0,T]\}$ in un punto $(|\Omega|,t_0)$, dal lemma di Hopf (vedi [66]) segue che

$$\frac{\partial\chi}{\partial s}\left(\left|\Omega\right|,t_{0}\right)>0,$$

il che contraddice la seconda relazione in (3.29). Allora il massimo di χ è raggiunto su uno dei segmenti $\{(s,0): s \in [0,|\Omega|]\}$, $\{(0,t): t \in (0,T]\}$, dove la stessa χ si annulla: si ha perciò $\max\limits_{[0,|\Omega|]\times[0,T]} \chi = 0$ e quindi la tesi. $\square$

Il lemma II.3.2 e la seconda condizione in (3.29) implicano che $\dfrac{\partial \chi}{\partial s}(0,t) \leq 0$, quindi

$$0 \geq \frac{\partial \chi}{\partial s}(0,t) = w(0,t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) - \max_{\overline{\Omega^{\#}}} v(x,t).$$

I risultati ottenuti pocanzi possono essere dunque riassunti nella maniera che segue:

Proposizione II.3.3 *Siano u e v rispettivamente le soluzioni dei problemi (3.19) e (3.25). Allora si ha*

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma \leq \int_0^s v^*(\sigma,t)\,d\sigma, \quad \forall (s,t) \in [0,|\Omega|]\times[0,T]. \tag{3.30}$$

Inoltre risulta

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) \leq \max_{\overline{\Omega^{\#}}} v(x,t), \ \forall t \in [0,T] \tag{3.31}$$

e per ogni funzione F, non negativa, convessa e crescente su $\mathbb{R}^+$ tale che $F(0)=0$, vale la stima

$$\int_\Omega F(u(x,t))\,dx \leq \int_{\Omega^{\#}} F(v(x,t))\,dx, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.32}$$

Dim. Le (3.30)-(3.31) discendono dal lemma II.3.2, mentre la (3.32) è conseguenza della (3.30) e della propozione II.2.5. $\square$

Osservazione II.3.2 Nella disuguaglianza (3.30) non può valere una stima puntuale del tipo

$$u^*(s,t) \leq v^*(s,t)$$

in $[0, |\Omega|] \times [0, T]$ (cfr. [79]).

Osservazione II.3.3 Se i coefficienti ed i dati del problema (3.19) presentano minore regolarità, ad esempio a_{ij}, $c \in L^\infty(Q_T)$, $f \in L^2(Q_T)$ ed $u_0 \in L^2(\Omega)$, si può pensare di ragionare per *densità*, ossia approssimando la soluzione *debole* u dello stesso problema (3.19) (rispettivamente la soluzione *debole* v di (3.25)) mediante soluzioni $\{u_n\}$ (risp. $\{v_n\}$) di problemi più regolari: allora, per quanto visto nella proposizione II.3.3, si avrebbe

$$\int_0^s u_n^*(\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s v_n^*(\sigma,t)\, d\sigma$$

e quindi, passando a limite, otterremmo ancora la (3.30).

II.4 Risultati di confronto tra soluzioni deboli di problemi parabolici lineari

Il nostro scopo è ora quello di ottenere la stima (3.30) quando u e v sono rispettivamente le soluzioni *deboli* dei problemi (3.19) e (3.25), evitando di utilizzare il ragionamento per densità accennato nell'osservazione II.3.2. La dimostrazione di questo risultato (così come anche quella della proposizione II.3.3 nel caso classico) utilizza un metodo introdotto da Talenti [73] nello studio di equazioni ellittiche senza termini di ordine inferiore, successivamente adattato allo studio di equazioni ellittiche di forma più generale da vari autori (vedi ad esempio [9], [10], [11], [13], [31], [20], [62], [76], [77]). L'idea di base è, anche nel contesto delle soluzioni deboli, quella di ottenere dapprima una disuguaglianza integro differenziale per il riordinamento u^* di $u(\cdot, t)$ per poi utilizzare un opportuno principio del massimo, al fine di ottenere la stima desiderata. Il primo scopo è raggiunto utilizzando un'opportuna funzione test, che consenta di integrare l'equazione sugli insiemi di (sopra) livello di $u(\cdot, t)$, applicando successivamente tutte le disuguaglianze già utilizzate nel corso della dimostrazione della proposizione II.3.3: in questo caso, l'applicazione della disuguaglianza isoperimetrica è subordinato a quello della formula di Fleming-Rishel (teorema II.1.3).

La vera differenza rispetto al caso classico consiste però nel modo in cui dover gestire la *derivata temporale* di u : in questo senso, al fine di fornire una formula di integrazione sotto il segno di integrale che sia valida per funzioni molto meno regolari rispetto a quelle già analizzate, premettiamo le seguenti definizioni e proprietà, sostanzialmente contenute in [61] e in [63]:

Lemma II.4.1 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, u una funzione non negativa misurabile su Ω e $v \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Allora la funzione $(u+v)^* - u^*$ appartiene a $L^P(0, |\Omega|)$ e si ha*

$$\|(u+v)^* - u^*\|_{L^p(0,|\Omega|)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Questo lemma consente di definire, per ogni $u \geq 0$ misurabile, $v \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ e $\lambda > 0$, la funzione

$$w_\lambda(s) = \int_0^s \frac{(u+\lambda v)^* - u^*}{\lambda} d\sigma,$$

da cui $\dfrac{dw_\lambda}{ds} = \dfrac{(u+\lambda v)^* - u^*}{\lambda}$ ed inoltre

$$\left\| \frac{dw_\lambda}{ds} \right\|_{L^p(0,|\Omega|)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \text{ , per ogni } \lambda > 0.$$

Definiamo ora la funzione in $[0, |\Omega|]$ data da

$$w(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_{u>u^*(s)} v(x)\, dx & \text{se} \quad |u = u^*(s)| = 0, \\ \displaystyle\int_{u>u^*(s)} v(x)\, dx + \int_0^{s-|u>u^*(s)|} \left(v_{/\{u=u^*(s)\}}\right)^* (\sigma)\, d\sigma & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per questa funzione si può dimostrare che (cfr.[61]) vale il seguente

Teorema II.4.1 *La funzione w appartiene a $W^{1,p}(0, |\Omega|)$,*

$$\left\| \frac{dw}{ds} \right\|_{L^p(0,|\Omega|)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

e, quando λ tende a zero,

1) $w_\lambda \to w$ *in* $C^0([0, |\Omega|])$;

2) $\dfrac{dw_\lambda}{ds} \to \dfrac{dw}{ds}$ *nel senso delle distribuzioni, cioè*

$$\int_0^{|\Omega|} \frac{dw_\lambda}{ds} \varphi ds \to \int_0^{|\Omega|} \frac{dw}{ds} \varphi ds$$

per ogni $\varphi \in D(0, |\Omega|)$, per $\lambda \to 0^+$. In particolare, $dw_\lambda/ds \rightharpoonup dw/ds$ debolmente in $L^p(0, |\Omega|)$ se $1 < p < \infty$ ed in $L^\infty(0, |\Omega|) -$ debole $*$ se $p = \infty$.

Possiamo allora introdurre la seguente

Definizione II.4.1 La funzione dw/ds è chiamata *riordinamento relativo di v rispetto ad u*, ed è denotato con v_u^*. Per le principali proprietà dei riordinamenti relativi, rimandiamo a [61]-[63].

Definizione II.4.2 Sia $u(x,t)$ una funzione reale non negativa definita su $Q_T := \Omega \times (0,T)$ (potendo essere eventualmente $T = \infty$), misurabile rispetto ad $x \in \Omega$ per ogni $t \in (0,T)$ e sia $v(x,t)$ una funzione reale su Q_T tale che $v(t) := v(\cdot, t) \in L^p(\Omega)$ per ogni $t \in (0,T)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $t \in (0,T)$, possiamo dunque definire il riordinamento relativo $(v(t))^*_{u(t)}$ di $v(t)$ rispetto ad $u(t)$, che è in $L^p(0,|\Omega|)$ e (per il teorema II.4.1)

$$\left\| (v(t))^*_{u(t)} \right\|_{L^p(0,|\Omega|)} \le \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall t \in (0,T)\,. \tag{4.1}$$

Denotiamo ancora con v^*_u la funzione definita in $[0,|\Omega|] \times (0,T)$ mediante la

$$v^*_u(s,t) = (v(t))^*_{u(t)}(s)\,. \tag{4.2}$$

Il nostro obiettivo consiste nello studiare la regolarità di u^* rispetto a t, assumendo una determinata regolarità di u rispetto a t, e calcolare $\partial u^*/\partial t$. A tal proposito, vale il seguente risultato (cfr. [63]):

Teorema II.4.2 *Se u è una funzione non negativa ed appartenente allo spazio $H^1(0,T;L^p(\Omega))$ $(1 \le p \le \infty)$, allora u^* appartiene allo spazio $H^1(0,T;L^p(0,|\Omega|))$ e si ha*

$$\|u^*\|_{H^1(0,T;L^p(0,|\Omega|))} \le \|u\|_{H^1(0,T;L^p(\Omega))}\,.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_u = \frac{\partial w}{\partial s} \quad \text{(\textit{nel senso delle distribuzioni})},$$

dove

$$w(s,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{u(t)>u(t)^*(s)} \frac{\partial u}{\partial t} dx & \textit{se } |u(t) = u(t)^*(s)| = 0 \\ \displaystyle\int_{u(t)>u(t)^*(s)} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_0^{s-|u(t)>u(t)^*(s)|} \left(\frac{\partial u}{\partial t}|_{\{u(t)=u(t)^*(s)\}}\right)^*(\sigma)\, d\sigma & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Per provare questo teorema utilizzeremo il seguente lemma tecnico, per la cui dimostrazione rimandiamo all'appendice di [63]:

Lemma II.4.2 *Sia $u \in H^1(0,T;L^p(\Omega))$ $(1 \le p \le \infty)$,*

$$r_h = \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall h > 0$$

e fissiamo $\varepsilon > 0$. *Allora, quando* $h \to 0$, r_h *tende a zero in* $L^{\alpha}(Q_{\varepsilon})$, *ove* $\alpha = \min(p, 2)$ *e* $Q_{\varepsilon} = \Omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$.

Dimostrazione del teorema II.4.2 Dall'equimisurabilità dei riordinamenti segue

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} = \|u(t)^*\|_{L^p(0,|\Omega|)},$$

quindi

(4.3) $$\|u\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} = \|u^*\|_{L^2(0,T;L^p(0,|\Omega|))}.$$

Inoltre, dalla (4.1) discende

$$\left\| \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t) \right)^*_{u(t)} \right\|_{L^p(0,|\Omega|)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^p(\Omega)},$$

cosicchè

(4.4) $$\left\| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^*_{u} \right\|_{L^2(0,T;L^p(0,|\Omega|))} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))}.$$

Per ottenere l'asserto, sarà allora sufficiente provare che $\partial u^*/\partial t = (\partial u/\partial t)^*_u$ nel senso delle distribuzioni.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T^*)$, ove $Q_T^* = (0, |\Omega|) \times (0, T)$, una funzione tale che il suo supporto sia contenuto nel rettangolo $Q_{\varepsilon}^* = (0, |\Omega|) \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$. Sia $0 < h < \varepsilon$. Sottointendendo la dipendenza dalla variabile s, osserviamo che

(4.5) $$\begin{aligned} &\int_{Q_T^*} \frac{u(t+h)^* - u(t)^*}{h} \varphi(t)\, dsdt \\ =& \int_{Q_T^*} \frac{\left[\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h} \right) \cdot h + u(t) \right]^* - u(t)^*}{h} \varphi(t)\, dsdt \\ =& \int_{Q_T^*} \frac{(u + h(\partial u/\partial t + r_h))^* - u^*}{h} \varphi dsdt \\ =& \int_{Q_T^*} \frac{(u + h(\partial u/\partial t + r_h))^* - (u + h\, \partial u/\partial t)^*}{h} \varphi dsdt \\ &+ \int_{Q_T^*} \frac{(u + h\, \partial u/\partial t)^* - u^*}{h} \varphi dsdt. \end{aligned}$$

Si ponga

$$A_h(t) = \int_0^{|\Omega|} \frac{(u(t) + h(\partial u/\partial t)(t))^* - u(t)^*}{h} \varphi(t)\, ds,$$

per cui l'ultimo integrale nella (4.5) sarà uguale a $\int_0^T A_h(t)\, dt$. Dal teorema II.4.1 segue che

$$\int_0^{|\Omega|} \frac{(u+\lambda v)^* - u^*}{\lambda} \varphi ds \to \int_0^{|\Omega|} v_u^* \varphi ds$$

per ogni $u \geq 0$ e $v \in L^p(\Omega)$, per cui, nel nostro caso,

$$A_h(t) \to \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t) \right)^*_{u(t)} \varphi(t)\, ds, \tag{4.6}$$

per $h \to 0$. Inoltre, dalla proprietà di contrazione dei riordinamenti (proposizione II.2.4) e dalla disuguaglianza di Hölder, deduciamo

$$\begin{aligned} |A_h(t)| &\leq \left\| \frac{(u(t) + h(\partial u/\partial t)(t))^* - u(t)^*}{h} \right\|_{L^p(0,|\Omega|)} \|\varphi(t)\|_{L^{p'}(0,|\Omega|)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi(t)\|_{L^{p'}(0,|\Omega|)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

per ogni $h > 0$, ove $(1/p) + (1/p') = 1$. Utilizzando le (4.6)-(4.7), mediante il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ottiene

$$\int_0^T A_h(t)\, dt \to \int_{Q_T^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^*_u \varphi dsdt \text{ , per } h \to 0. \tag{4.8}$$

Cerchiamo ora di stimare il primo integrale al secondo membro della (4.5). Poichè il supporto di φ è contenuto in Q_ε^*, possiamo scrivere

$$\int_{Q_T^*} \frac{(u + h(\partial u/\partial t + r_h))^* - (u + h\, \partial u/\partial t)^*}{h} \varphi dsdt = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} B_h(t)\, dt,$$

ove

$$B_h(t) = \int_0^{|\Omega|} \frac{(u(t) + h((\partial u/\partial t)(t) + r_h(t)))^* - (u(t) + h\ (\partial u/\partial t)(t))^*}{h} \varphi(t)\, ds.$$

Allora,

$$|B_h(t)| \leq \|r_h(t)\|_{L^\alpha(\Omega)} \|\varphi(t)\|_{L^{\alpha'}(0,|\Omega|)},$$

con $\alpha = \min(p, 2)$ e $(1/\alpha) + (1/\alpha') = 1$: dall'ultima disuguaglianza e dalla disuguaglianza di Hölder discende

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} |B_h(t)|\, dt \leq \|r_h\|_{L^\alpha(Q_\varepsilon)} \|\varphi\|_{L^{\alpha'}(Q_\varepsilon^*)}$$

e in base al lemma II.4.2, si ha $r_h \to 0$ in $L^\alpha(Q_\varepsilon)$ ed il primo integrale al secondo membro della (4.5) tende a zero. Dunque, dalle (4.5)-(4.8) consegue

$$(4.9) \quad \int_{Q_T^*} \frac{u(t+h)^* - u(t)^*}{h} \varphi(t)\, dsdt \to \int_{Q_T^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_u^* \varphi dsdt \text{ , per } h \to 0.$$

D'altronde, è anche vero che

$$\int_{Q_T^*} \frac{u(t+h)^* - u(t)^*}{h} \varphi(t)\, dsdt \to - \int_{Q_T^*} u^* \frac{\partial \varphi}{dt} dsdt,$$

per cui dalla (4.9)

$$\int_{Q_T^*} u^* \frac{\partial \varphi}{dt} dsdt = - \int_{Q_T^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_u^* \varphi dsdt,$$

ossia

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_u^* \quad \text{nel senso delle distribuzioni.}$$

A questo punto dalle (4.3)-(4.4) segue immediatamente $u^* \in H^1(0, T; L^p(0, |\Omega|))$ oltre a valere la stima

$$\|u^*\|_{H^1(0,T;L^p(0,|\Omega|))} \leq \|u\|_{H^1(0,T;L^p(\Omega))}$$

ed il teorema è completamente dimostrato. □

Consideriamo adesso l'operatore (3.17) e supponiamo che i suoi coefficienti soddisfino le seguenti ipotesi:

1.) $a_{ij} \in L^{\infty}(Q_T)\,, a_{ij} = a_{ji}, \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C^0\left(\overline{Q}_T\right)$ per $i, j = 1, \ldots, N$ $(N \geq 1)$ e valga la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\,\xi_i \xi_j \geq |\xi|^2\,, \text{ per q.o. } (x,t) \in Q_T \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

2.) $c \in L^{\infty}(Q_T)\,, c \geq 0$ in Q_T;

3.) $f \in L^2(Q_T)\,, f \geq 0$ in Q_T;

4.) $u_0 \in H_0^1(\Omega)\,, u_0 \geq 0$ in Ω.

Sotto tali condizioni, l'osservazione I.2.1 assicura che la soluzione debole u di (3.19) (la cui esistenza ed unicità è garantita dal teorema I.1.9) è tale che $u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ (un risultato di regolarità analogo vale anche quando $a_{ij} \neq a_{ji}$, (cfr. [22]); inoltre, il principio del massimo fornito dal teorema I.1.13 implica che $u \geq 0$ in Q_T.

Dimostriamo ora il seguente

Teorema II.4.3 *Siano u e v rispettivamente le soluzioni deboli dei problemi (3.19) e (3.25). Allora vale la (3.30). Inoltre, $\forall t \in [0,T]$ e $\forall p \in [1,\infty]$ si ha*

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{L^p\left(\Omega^{\#}\right)}\,. \tag{4.10}$$

Dim. La formulazione debole del problema (3.19) è

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(t)\, v dx + a(t; u(t), v) = \int_{\Omega} f(t)\, v dx \text{ per q.o. } t \in [0,T]\,, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.11}$$

dove $a\left(t;\cdot,\cdot\right)$ è la forma bilineare associata ad L all'istante t :

$$a\left(t;w,z\right)=\int_{\Omega}\left[a_{ij}\left(t\right)w_{x_i}z_{x_j}+c\left(t\right)wz\right]dx,\ \ w,z\in H_0^1\left(\Omega\right).$$

Fissati $t\in\left[0,T\right]$, $h>0$ e $\vartheta\geq 0$, scegliamo come funzione test nella (4.11) la funzione così definita:

$$\varphi_h\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad u>\vartheta+h\\ \dfrac{u-\vartheta}{h} & \text{se} \quad \vartheta<u\leq\vartheta+h\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Risulta, allora,

$$\begin{aligned}(4.12)\qquad &\int\limits_{u>\vartheta+h}\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx+\frac{1}{h}\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}a_{ij}u_{x_i}u_{xj}dx\\ &+\int_{u>\vartheta+h}cudx+\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}cu\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx\\ =&\int\limits_{u>\vartheta+h}fdx+\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}f\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx;\end{aligned}$$

osserviamo che

$$\left|\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}cu\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx\right|\leq\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}cudx\rightarrow 0\text{ per }h\rightarrow 0$$

ed analogamente

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx\rightarrow 0\\ \displaystyle\int_{\vartheta<u\leq\vartheta+h}f\left(\frac{u-\vartheta}{h}\right)dx\rightarrow 0\end{array}\right.\quad\text{per }h\rightarrow 0.$$

Dalla condizione di ellitticità uniforme, ricaviamo

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h} a_{ij}u_{x_i}u_{xj}dx \geq \frac{1}{h}\int\limits_{\vartheta<u\leq\vartheta+h} |\nabla u(x,t)|^2\, dx,$$

per cui

$$-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|^2\, dx \leq -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} a_{ij}u_{x_i}u_{xj}dx;$$

dunque, passando a limite per $h \to 0$ nella (4.12), troviamo

$$-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|^2\, dx \leq \int_{u>\vartheta}\left(f - cu - \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx. \tag{4.13}$$

D'altronde, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz implica

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|\, dx\right)^2 \leq \left(-\frac{\partial\mu_u}{\partial\vartheta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|^2\, dx\right),$$

per cui dalla (4.13) discende

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|\, dx\right)^2 \leq \left(-\frac{\partial\mu_u}{\partial\vartheta}\right)\int_{u>\vartheta}\left(f - cu - \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx. \tag{4.14}$$

Dalla formula di Fleming-Rishel (teorema II.1.3) e dalla disuguaglianza isoperimetrica (1.3) si ha

$$N\omega_N^{1/N}\left[\mu_u(\vartheta,t)\right]^{1-(1/N)} \leq P\left(\{x : u(x,t) > \vartheta\}\right) = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{u>\vartheta} |\nabla u(x,t)|\, dx$$

per quasi ogni $\vartheta \geq 0$, per cui dalla (4.14) abbiamo

$$N^2\omega_N^{2/N}\left[\mu_u(\vartheta,t)\right]^{2-(2/N)} \leq \left(-\frac{\partial\mu_u}{\partial\vartheta}\right)\int_{u>\vartheta}\left(f - cu - \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx. \tag{4.15}$$

D'altronde, la disuguglianza di Hardy Littlewood (2.19) implica

$$\int_{u>\vartheta} (f - cu)\, dx \leq \int_{u>\vartheta} f dx \leq \int_0^{\mu_u(\vartheta,t)} f^*(s,t)\, ds;$$

d'altra parte, poichè $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ per q.o. t, la funzione distribuzione $\mu_{u(t)}$ è strettamente crescente (proposizione II.2.2), quindi l'insieme delle discontinuità è numerabile, per cui

$$0 = \mu_{u(t)}\left(\vartheta^{-}\right) - \mu_{u(t)}\left(\vartheta\right) = \left|u\left(t\right) = \vartheta\right|$$

per q.o. ϑ; inoltre, poichè $\mu_{u(t)}$ non presenta zone piatte, si ha $u\left(t\right)^{*}\left(\mu_{u(t)}\left(\vartheta\right)\right) = \vartheta$, ossia

$$u^{*}\left(\mu_u\left(\vartheta, t\right), t\right) = \vartheta.$$

Allora, per q.o. ϑ, dalla definizione di w data nel teorema II.4.2 e dal fatto che $\left|u\left(t\right) = u\left(t\right)^{*}\left(\mu_{u(t)}\left(\vartheta\right)\right)\right| = 0$, discende

$$\int_{u(t)>\vartheta} \frac{\partial u}{\partial t}\left(t\right) dx = \int_{u(t)>u(t)^{*}\left(\mu_{u(t)}(\vartheta)\right)} \frac{\partial u}{\partial t}\left(t\right) dx = w\left(\mu_{u(t)}\left(\vartheta\right)\right);$$

osserviamo allora che $w\left(0, t\right) = 0$ poichè $\left|u\left(t\right) > u\left(t\right)^{*}\left(0\right)\right| = 0$, per cui ancora dal teorema II.4.2 deduciamo

$$\int_{u(t)>\vartheta} \frac{\partial u}{\partial t}\left(t\right) dx = \int_0^{\mu_u(\vartheta,t)} \frac{\partial w}{\partial s}\left(t\right) ds = \int_0^{\mu_u(\vartheta,t)} \frac{\partial u^{*}}{\partial t}\left(t\right) ds \quad \text{per q.o. } \vartheta \geq 0.$$

Dalla (4.15) si ha dunque

$$1 \leq N^{-2}\omega_N^{-2/N}\left[\mu_u\left(\vartheta, t\right)\right]^{(2/N)-2}\left[\int_0^{\mu_u(\vartheta,t)}\left(f^{*} - \frac{\partial u^{*}}{\partial t}\right) ds\right]\cdot\left(-\frac{\partial \mu_u}{\partial \vartheta}\right). \tag{4.16}$$

Poichè la funzione $\int_0^s \left[f^{*}\left(\sigma, t\right) - \frac{\partial u^{*}}{\partial t}\left(\sigma, t\right)\right] d\sigma$ è continua in $\left[0, \left|\Omega\right|\right]$ per ogni $t \in \left[0, T\right]$ fissato, la funzione

$$H\left(s, t\right) = s^{(2/N)-2}\left[\int_0^s \left[f^{*}\left(\sigma, t\right) - \frac{\partial u^{*}}{\partial t}\left(\sigma, t\right)\right] d\sigma\right]$$

è continua in $\left(0, \left|\Omega\right|\right]$. Integrando la (4.16) tra ϑ e ϑ', ove $0 \leq \vartheta \leq \vartheta'$, otteniamo, mediante un cambiamento di variabili,

$$\vartheta' - \vartheta \leq -N^{-2}\omega_N^{-2/N}\int_{\mu_u(\vartheta,t)}^{\mu_u(\vartheta',t)} s^{(2/N)-2}\left[\int_0^s\left(f^{*} - \frac{\partial u^{*}}{\partial t}\right) d\sigma\right] ds.$$

Si può allora dedurre che (cfr. anche [62])

$$-\frac{\partial u^*}{\partial s} \leq -N^{-2}\omega_N^{-2/N} s^{(2/N)-2} \int_0^s \left(f^* - \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) d\sigma,$$

quindi

$$\int_0^s \frac{\partial u^*}{\partial t} d\sigma - p(s) \frac{\partial u^*}{\partial s} \leq \int_0^s f^*(\sigma, t)\, d\sigma \text{ q.o. in } (0, |\Omega|) \times (0, T), \tag{4.17}$$

$p(s) := N^2 \omega_N^{2/N} s^{2-(2/N)}$. Osserviamo esplicitamente che se

$$k(s,t) = \int_0^s u^*(\sigma, t)\, d\sigma$$

risulta

$$\frac{\partial k}{\partial t}(s,t) = \int_0^s \frac{\partial u^*}{\partial t}(\sigma, t)\, d\sigma.$$

Per quanto riguarda la soluzione v del problema (3.25), dalla proposizione II.3.2 segue che essa è radialmente simmetrica decrescente rispetto ad x, quindi tutte le disuguaglianze utilizzate per pervenire alla (4.17) divengono ora uguaglianze, e si ha perciò

$$\int_0^s \frac{\partial v^*}{\partial t} d\sigma - p(s) \frac{\partial v^*}{\partial s} = \int_0^s f^*(\sigma, t)\, d\sigma \text{ q.o. in } (0, |\Omega|) \times (0, T). \tag{4.18}$$

Con le medesime posizioni fatte per il caso classico, otteniamo che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial t} - p(s) \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \leq 0 & \text{q.o. in } (0, |\Omega|) \times (0, T) \\ \chi(0,t) = \dfrac{\partial \chi}{\partial s}(|\Omega|, t) = 0 & \forall t \in [0, T] \\ \chi(s, 0) = 0 & \forall s \in [0, |\Omega|]. \end{cases} \tag{4.19}$$

ove $\chi(s,t)$ è la funzione definita dalla (3.28). Al fine di concludere la dimostrazione del teorema, proviamo la versione analoga del lemma II.3.2 per le soluzioni deboli.

Lemma II.4.3 *Si ha* $\chi(s,t) \leq 0$ *ovunque in* $[0, |\Omega|] \times [0, T]$.

Dim. Anzitutto osserviamo che, mediante la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, dalle (4.17)-(4.18) si ha

$$\text{(4.20)} \qquad \begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\partial u^*}{\partial s} \leq N^{-2}\omega_N^{-\frac{2}{N}} s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} \left[\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ 0 &\leq -\frac{\partial v^*}{\partial s} \leq N^{-2}\omega_N^{-\frac{2}{N}} s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} \left[\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega^\#)} \right]. \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri della disuguaglianza in (4.19) per $s^{\frac{2}{N}-2}\chi_+$, si ha

$$\text{(4.21)} \qquad s^{\frac{2}{N}-2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \chi_+ \leq N^2 \omega_N^{\frac{2}{N}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ \ \text{ q.o. in } (0, |\Omega|) \times (0, T).$$

Proveremo anzitutto che $\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2}\right) \chi_+ \in L^1(0, |\Omega|)$ per t fissato (da ora in poi, sottointenderemo la dipendenza da t). Dalle (4.20) deduciamo che

$$\text{(4.22)} \qquad \begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \right| &\leq s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} \psi(t) \\ \chi_+ &\leq s^{1/2} \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega^\#)} \right] \end{aligned}$$

dove

$$\psi(t) := N^{-2}\omega_N^{-2/N} \left[2\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega^\#)} \right];$$

allora

$$\left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ \right| \leq \varphi(t)\, s^{(2/N)-1}$$

con

$$\varphi(t) := \psi(t) \cdot \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega^\#)} \right],$$

dunque $\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2}\right) \chi_+$ è sommabile in $(0, |\Omega|)$. Mostriamo ora che

$$\int_0^{|\Omega|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ ds \leq 0.$$

Fissato $a \in (0, |\Omega|)$, dalle (4.22) segue che $\chi \in W^{2,\infty}(a, |\Omega|)$, per ciascun $t \in [0, T]$. Poichè $\chi_+ \in H^1(a, |\Omega|)$, è giustificata la seguente formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} (4.23) \int_a^{|\Omega|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ ds &= \frac{\partial \chi}{\partial s}(|\Omega|) \chi_+(|\Omega|) - \frac{\partial \chi}{\partial s}(a) \chi_+(a) - \int_a^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_+}{\partial s}\right)^2 ds \\ &= -\frac{\partial \chi}{\partial s}(a) \chi_+(a) - \int_a^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_+}{\partial s}\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Vi è allora solo da mostrare che $\frac{\partial \chi}{\partial s}(a) \chi_+(a)$ tende a zero con a. A tal fine, osserviamo che $\int_{|\Omega|}^s \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} ds = \frac{\partial \chi}{\partial s}$, per cui le (4.20) implicano

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \chi}{\partial s}(a)\right| &= \left|\int_{|\Omega|}^{a} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} ds\right| = \left|\int_{|\Omega|}^a \left(\frac{\partial u^*}{\partial s} - \frac{\partial v^*}{\partial s}\right) ds\right| \\ &\leq \left|\int_{|\Omega|}^a \left|\frac{\partial u^*}{\partial s} - \frac{\partial v^*}{\partial s}\right| ds\right| \leq \psi(t) \left|\int_{|\Omega|}^a s^{\frac{2}{N}-\frac{3}{2}} ds\right| \\ &= C\psi(t) \left|a^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}\right|, \end{aligned}$$

ed applicando la seconda delle (4.22) avremo

$$\left|\frac{\partial \chi}{\partial s}(a) \chi_+(a)\right| \leq C\varphi(t) \left|a^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}} - |\Omega|^{\frac{2}{N}-\frac{1}{2}}\right| a^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ per } a \to 0.$$

Poichè gli integrali $\int_a^{|\Omega|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ ds$ e $\int_a^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_+}{\partial s}\right)^2 ds$ tendono rispettivamente a $\int_0^{|\Omega|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ ds$ ed a $\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_+}{\partial s}\right)^2 ds$, dalla (4.23) deduciamo

$$\int_0^{|\Omega|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} \chi_+ ds = -\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_+}{\partial s}\right)^2 ds \leq 0.$$

Dalla (4.21) ricaviamo, grazie alle condizioni al contorno imposte nel problema (4.19),

$$\begin{aligned} 0 &\geq 2\int_0^t \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \chi_+ ds d\tau = \int_0^t \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\chi_+^2\right) ds d\tau \\ &= \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \chi_+^2 ds, \end{aligned}$$

sicchè $\chi_+ = 0$ in $[0, |\Omega|] \times [0, T]$ e quindi la tesi. $\square$

Osserviamo che dalla (4.18) si ha

$$\int_0^s f^* - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^s v^* = -p(s) \frac{\partial v^*}{\partial s} \geq 0,$$

per cui integrando in $(0, t)$,

$$\int_0^s v^*(\sigma, t) d\sigma - \int_0^s u_0^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s d\sigma \int_0^t f^*(\sigma, \tau) d\tau :$$

dunque, posto

$$g(s, t) = \int_0^t f^*(s, \tau) d\tau + u_0^*(s)$$

risulta

$$\int_0^s v^*(\sigma, t) d\sigma \leq \int_0^s g(\sigma, t) d\sigma.$$

La (4.10) deriva dalla (3.30) e dalla proposizione II.2.6 per ogni $p \in [1, \infty)$ e, quindi, anche per $p = \infty$. $\square$

Capitolo III

Risultati di confronto con termine di ordine zero

In questo capitolo si forniranno alcuni risultati di confronto per soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet, associati ad equazioni paraboliche lineari del secondo ordine, per le quali si suppone che i relativi coefficienti di ordine zero siano essenzialmente limitati oppure possano presentare una opportuna singolarità nell'origine. La differenza principale rispetto ai risultati già forniti lungo il corso del capitolo 2 è che il problema simmetrizzato associato al problema originario tiene realmente conto del termine di ordine zero, non essendo assunta, a priori, alcuna specifica ipotesi di segno sul coefficiente.

La maggior parte dei risultati qui esposti, e riguardanti risultati di confronto mediante stime integrali, sono da ricercarsi in [14] e nel lavoro [84].

Il capitolo presenta la seguente suddivisione. Nel primo paragrafo vengono prima di tutto enunciate alcune definizioni e proprietà principali sugli spazi di Lorentz, nonchè alcuni utili risultati di immersione. Al fine di giustificare l'introduzione di tali spazi, si consideri un operatore *ellittico* completo, del tipo

$$Lu = -\left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + b_i(x)\, u_{x_i} - \left(d_i(x)\, u\right)_{x_i} + c(x)\, u.$$

E' ben noto che, se $N \geq 3$, nell'ipotesi in cui $b_i, d_i \in L^N$ e $c \in L^{N/2}$, vale un teorema di esistenza ed unicità "in piccolo" per il problema di Dirichlet relativo all'equazione

$$Lu = f$$

(vedi [70], [71]). Tale risultato è, di fatto, conseguenza del teorema di immersione di Sobolev. In [7], partendo da un risultato contenuto in [6], si osserva che la classica definizione di soluzione debole è ben posta, nel senso che continua a valere un teorema di esistenza ed unicità, se $b_i, d_i \in L^N_{deb}$ e $c \in L^{N/2}_{deb}$, purchè le norme di tali coefficienti siano "sufficientemente piccole". Lo scopo della seconda parte del primo paragrafo consiste allora nel mostrare la versione "parabolica" di quest'ultimo risultato: difatti, esso viene trasposto in un teorema di esistenza ed unicità per problemi al contorno associati ad equazioni paraboliche con coefficienti che appartengano, per ogni t fissato, a spazi L^p_{deb}.

Il secondo paragrafo è dedicato ai suddetti risultati di confronto, nei casi in cui $c \in L^\infty(\Omega)$ e $c \in L^r(\Omega)$, per qualche $r > N/2$.

Per quanto concerne il caso in cui c è limitato, c'è da dire che un tipo di risultato di confronto è stato ottenuto in [9], ove si suppone che $c \in L^\infty(Q_T)$ (dipenda quindi da entrambe le variabili x, t) e che soddisfi la condizione

$$c(x,t) \geq c_0(t) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ per q.o. } t \in [0,T], \tag{0.24}$$

ove $c_0 \in L^\infty(0,T)$. In queste ipotesi, si dimostra che se u è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)\, u = f & in\ \ Q_T \\ u = 0 & su\ \ S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

e v è soluzione del relativo problema simmetrizzato, che assume la forma

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + c_0 v = f^\# & in\ \ Q_T^\# \\ v = 0 & su\ \ S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \Omega^\#, \end{cases} \tag{0.25}$$

allora, per ogni $t \in [0,T]$, vale la disuguaglianza tra le concentrazioni

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma \leq \int_0^s v^*(\sigma,t)\,d\sigma\ ,\forall s \in [0,|\Omega|]\,.$$

La dimostrazione di questo risultato fa uso del metodo di *discretizzazione rispetto al tempo* (cfr. [79], [82]), il quale consente di ricondursi al caso ellittico, al fine di applicare i relativi teoremi di confronto per poi passare a limite. C'è però da notare che, sotto l'ipotesi (0.24), anche quando c dipenda solo dalla variabile x, il problema simmetrizzato (0.25) non risente, in maniera rilevante, dell'influenza del termine di ordine zero. Nel lavoro [83] si suppone, invece, che la funzione c_0 in (0.24) appartenga a $L^\infty(Q_T)$ (e, quindi, dipenda *anche* dalla variabile x), e si perviene al risultato di confronto integrale rimpiazzando il problema (0.25) con il problema

$$\text{(0.26)}\qquad \begin{cases} v_t - \Delta v + c_{0\#}v = f^\# & in\ \ Q_T^\# \\ v = 0 & su\ \ S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \Omega^\#, \end{cases}$$

dove

$$c_{0\#} := \left(c_0^+\right)_\# - \left(c_0^-\right)^\#$$

è il riordinamento di *segno variabile* di c_0. Come si evince da [83], si può pervenire a tale risultato utilizzando un metodo di *perturbazione* del problema simmetrizzato (0.26). Nel secondo paragrafo di questo capitolo, invece, supponendo che $c \in L^\infty(\Omega)$, seguiremo le linee principali di [62], [63], [83] per l'ottenimento di una disuguaglianza di tipo integro-differenziale, per poi utilizzare il metodo esibito in [14], allo scopo di ricavare, mediante ragionamenti classici del principio del massimo, la disuguaglianza tra le concentrazioni delle soluzioni.

Il caso $c \in L^r(\Omega)$, con $r > N/2$, è contenuto nella seconda parte di [14], e la sua risoluzione viene ottenuta mediante un approccio *diretto* che non fa uso, cioè, del metodo alternativo che consente di ottenere u e v come limiti di soluzioni relative ad opportuni problemi approssimanti. Viene anche contemplata l'eventualità in cui

$r = N/2$ (con $N > 2$) ed il ragionamento che si segue è quello di discretizzazione rispetto alla variabile temporale.

Il terzo ed ultimo paragrafo costituisce la parte principale di [84], e tratta il caso in cui c presenti una singolarità nell'origine "del tipo" $\lambda / |x|^2$, con $\lambda \leq \lambda_N$, essendo $\lambda_N := (N-2)^2/4$ la miglior costante nella disuguaglianza di Hardy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_N \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^2} dx,$$

ove Ω è un dominio limitato contenente l'origine: qui per "miglior costante" si intende il fatto che

$$\lambda_N = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}.$$

Ciò conduce allo studio di equazioni lineari del tipo

$$u_t - \Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u + f,$$

i cui risultati di esistenza ed unicità per i relativi problemi di Cauchy-Dirichlet sono contenuti principalmente in [21], oltre che in [29] e [81].

Per quanto riguarda i risultati di confronto, il caso *sottocritico* $\lambda < \lambda_N$ viene trattato attraverso un metodo che si basa sull'approssimazione della soluzione del problema principale mediante soluzioni che si ottengono per *troncatura* del potenziale singolare, per poter poi passare a limite nella stima integrale tra le soluzioni.

Il caso *critico* $\lambda = \lambda_N$, presentando l'ulteriore difficoltà dovuta alla non coercività dell'operatore $L = -\Delta - (\lambda / |x|^2) u$ sullo spazio dell'energia $H_0^1(\Omega)$, è invece esposto in maniera duplice: infatti, il risultato di confronto viene ottenuto sia ambientando le soluzioni in un contesto funzionale che si basa su quello introdotto in [81], sia seguendo l'approccio di [47], nell'ambito più generale delle soluzioni nel senso delle distribuzioni. Il caso *sopracritico* $\lambda > \lambda_N$ non è invece trattato, in quanto conduce a fenomeni di *non esistenza* delle soluzioni (cfr. [21], [29]).

III.1 Alcune proprietà degli spazi di Lorentz

Definizione III.1.1 Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che $1 \leq p, q \leq \infty$. Lo *spazio di Lorentz* $L(p,q,\Omega)$ (o, più brevemente, $L(p,q)$) consiste di tutte le funzioni reali misurabili u su Ω per le quali la quantità

$$\|u\|_{p,q} = \begin{cases} \omega_N^{\frac{q-p}{pq}} \left[\displaystyle\int_{\Omega^\#} \left[|x|^{N/p} u^\# (x) \right]^q \frac{dx}{|x|^N} \right]^{1/q} & (1 \leq q < \infty) \\ \displaystyle\sup_{x \in \Omega^\#} \omega_N^{1/p} \left[|x|^{N/p} u^\# (x) \right] & (q = \infty) \end{cases}$$

è finita. Osserviamo che

1.) $L(p,p) = L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
2.) $L(p,\infty) = L^p_{deb}(\Omega)$ (cioè lo spazio di Marcinkiewicz $\mathcal{M}_p$) per ogni $1 \leq p < \infty$.

Il seguente risultato mostra che, per ogni fissato p, lo spazio di Lorentz $L(p,q)$ cresce al crescere di q.

Proposizione III.1.1 *Supponiamo che* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $1 \leq q \leq r \leq \infty$. *Allora*

$$\|u\|_{p,r} \leq C \|u\|_{p,q}$$

per ogni funzione misurabile u, *ove* C *è una costante dipendente solo da* p, q *ed* r. *In particolare, si ha l'inclusione*

$$L(p,q) \hookrightarrow L(p,r).$$

Le relazioni di inclusione tra gli spazi $L(p,q)$ al variare di p, sono come quelle per gli spazi di Lebesgue L^p, nel senso che esse dipendono dalla misura dello spazio ambiente Ω, ed il secondo esponente q *non è* coinvolto: quindi, se $|\Omega| < \infty$,

$1 \leq p < r \leq \infty$ e $1 \leq q, s \leq \infty$, allora

$$L(r,s) \hookrightarrow L(p,q).$$

Faremo anche uso dello *spazio di Zygmund* $L_{\exp}(\Omega)$, costituito da tutte le funzioni misurabili u su Ω per le quali esiste una costante $\lambda = \lambda(u) > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} \exp(\lambda |u(x)|)\, dx < \infty.$$

Si può mostrare (cfr.[23]) che $u \in L_{\exp}(\Omega)$ se e soltanto se esiste una costante $C = C(u) > 0$ tale che

$$u^{**}(s) \leq C \left(1 + \log \frac{|\Omega|}{s}\right) \ , \ \forall s \in (0, |\Omega|),$$

ove

$$u^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma$$

è la cosiddetta *funzione massimale* di u^*. Si può allora definire $L_{\exp}(\Omega)$ come lo spazio costituito da tutte le funzioni misurabili u su Ω per le quali risulta finita la quantità

$$\|u\|_{L_{\exp}(\Omega)} := \sup_{0<s<|\Omega|} \frac{u^{**}(s)}{\left(1 + \log \frac{|\Omega|}{s}\right)}.$$

Vale, inoltre, il seguente risultato (cfr. [5]):

Teorema III.1.1 *Se $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora*

(1.1) $$u^*(s) \leq (N\omega_N)^{-1/N} \|\nabla u\|_{L^N(\Omega)} \left(\log \frac{|\Omega|}{s}\right)^{1-1/N}, \forall s \in (0, |\Omega|).$$

Dalla (1.1) si evince che per $N = 2$ è valida l'immersione continua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\exp}(\Omega).$$

Infatti, se $u \in H_0^1(\Omega)$, mediante la (1.1) otteniamo

$$u^*(s) \le (2\pi)^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \left(1 + \log \frac{|\Omega|}{s}\right),$$

e dunque, integrando,

$$\begin{aligned} u^{**}(s) &= \frac{1}{s}\int_0^s u^*(\sigma)\, d\sigma \le \left[(2\pi)^{-1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right] \cdot \frac{1}{s}\int_0^s \left(1 + \log \frac{|\Omega|}{\sigma}\right) d\sigma \\ &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \left(1 + \log \frac{|\Omega|}{s}\right), \end{aligned}$$

cioè

(1.2) $$\|u\|_{L_{\exp}(\Omega)} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ricordiamo ora la ben nota disuguaglianza di Hardy, talvolta chiamata anche *"principio di indeterminazione"* (cfr.[47]):

Lemma III.1.1 *Supponiamo che* $1 < p < N$*; se* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, risulta*

i) $u/|x| \in L^p(\mathbb{R}^N)$;

ii) (dis.di Hardy)

(1.3) $$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx \ge \lambda_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx,$$

con $\lambda_{N,p} = ((N-p)/p)^p$;

iii) la costante $\lambda_{N,p}$ *è ottimale.*

Il fatto che la costante $\lambda_{N,p}$ sia ottimale nella (1.3) significa che essa ha la seguente caratterizzazione:

$$\lambda_{N,p} = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u \ne 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}$$

Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ contenente l'origine e $1 < p < N$, la (1.3) continua a valere per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ove gli integrali disuguaglianza vanno calcolati su Ω : si ha cioè

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \geq \lambda_{N,p} \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \tag{1.4}$$

e $\lambda_{N,p}$ è ancora la miglior costante. Possiamo dunque interpretare tale disuguaglianza affermando che l'immersione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ nello spazio $L^p(\Omega)$ con peso $|x|^{-p}$ è continua.

Una caratteristica di notevole interesse della (1.4) è che la costante $\lambda_{N,p}$ *non è mai raggiunta* (nel senso che essa diviene un'uguaglianza per qualche $0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$) in nessun dominio, neanche in tutto $\mathbb{R}^N$.

Enunciamo adesso un teorema di immersione di tipo Sobolev per gli spazi di Lorentz (vedi [6]):

Teorema III.1.2 *Supponiamo che $1 \leq p < N$ e $1 \leq q \leq p$. Se $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, si ha*

$$\|u\|_{p^*,q} \leq C \, \||\nabla u|\|_{p,q} \, ,$$

dove p^* è l'esponente di Sobolev di p e

$$C = \frac{p \left\{\Gamma\left(1 + \frac{N}{2}\right)\right\}^{1/N}}{\sqrt{\pi}\,(N-p)}$$

è la migliore costante possibile. In particolare,

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L\left(p^*, p\right).$$

Un'immediata conseguenza è il seguente

Corollario III.1.1 *Sia $N > 2$.* Se $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$*, risulta*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{u^{\#}}{|x|}\right)^2 dx\right]^{1/2} \leq \frac{2}{N-2} \, \||\nabla u|\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \, ;$$

in particolare,

$$H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L\left(2^*,2\right).$$

Dim. La dimostrazione di questo corollario è un'evidente applicazione del teorema II.5.1 per $p = q = 2$. Tuttavia, questo risultato è un'immediata conseguenza della disuguaglianza di Hardy (1.4) e della disuguaglianza di Polya-Szëgo (teorema II.2.1), difatti, se $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, è $u^\# \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ (in questo caso è ovviamente $\Omega^\# = \mathbb{R}^N$) e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{u^\#}{|x|}\right)^2 dx &\le \left(\frac{2}{N-2}\right)^2\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u^\#\right|^2 dx\\ &\le \left(\frac{2}{N-2}\right)^2\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\right|^2 dx.\end{aligned}$$

□

E' chiaro che il teorema III.1.1 e quest'ultimo corollario valgono ancora se si sostituiscono gli spazi $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ ed $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ rispettivamente con gli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$ ed $H_0^1(\Omega)$, con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ contenente l'origine.

III.1.1 Un risultato di esistenza

Descriviamo ora una piccola applicazione del corollario III.1.1 (cfr. anche [7] per la relativa versione ellittica) . Supponiamo che $N > 2$ e consideriamo l'operatore

$$Lu = -\sum_{i=1}^{N}\left(a_{ij}(x,t)\,u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\,u_{x_i} - \sum_{i=1}^{N}\left(d_i(x,t)\,u\right)_{x_i} + c(x,t)\,u,$$

dove i coefficienti verificano le ipotesi seguenti:

1.) $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ per $i,j = 1,\ldots,N$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \ge |\xi|^2, \text{ per q.o. } (x,t) \in Q_T \text{ e } \forall\xi \in \mathbb{R}^N;$$

2.) si abbia

$$B(x,t) = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}\right] \in L^\infty(0,T;L(N,\infty))$$

$$D(x,t) = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}\right] \in L^\infty(0,T;L(N,\infty)),$$

e [7]

$$\|B\|_{L^\infty(0,T;L(N,\infty))} \leq \alpha$$

$$\|D\|_{L^\infty(0,T;L(N,\infty))} \leq \beta;$$

3.) $c \in L^\infty(0,T;L(N/2,\infty))$ e

$$\|c\|_{L^\infty(0,T;L(N/2,\infty))} \leq \gamma.$$

Consideriamo la forma bilineare associata ad L all'istante t :

$$a(t;u,v) = \int_\Omega \left\{a_{ij}(t)\,u_{x_i}v_{x_j} + b_i(t)\,u_{x_i}v + d_i(t)\,uv_{x_i} + c(t)\,uv\right\}dx.$$

Mostriamo che tale forma è continua su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. E' chiaro che

$$\left|\int_\Omega a_{ij}(t)\,u_{x_i}v_{x_j}dx\right| \leq A\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{1.5}$$

con A costante opportuna; utilizzando il corollario III.1.1, la disuguaglianza (2.19) di Hardy-Littlewood, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e l'ipotesi (2.), troviamo

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega b_i(t)\,u_{x_i}v dx\right| &\leq \left\{\int_\Omega [B(t)]^2 v^2 dx\right\}^{1/2}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{\int_{\Omega^\#}\left[B(t)^\#\right]^2 \left(v^\#\right)^2 dx\right\}^{1/2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{2\alpha}{N-2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

[7] qui intendiamo

$$\|B\|_{L^\infty(0,T;L(N,\infty))} = \operatorname*{ess\,sup}_{(0,T)} \|B(t)\|_{L(N,\infty)}$$

ed analogamente sono definite le norme $\|D\|_{L^\infty(0,T;L(N,\infty))}$, e $\|c\|_{L^\infty(0,T;L(N/2,\infty))}$.

Analogamente

$$(1.7)\qquad \left|\int_\Omega d_i(t)\, uv_{x_i}dx\right| \le \frac{2\beta}{N-2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

e

$$(1.8)\qquad \begin{aligned}\left|\int_\Omega c(t)\, uvdx\right| &\le \int_{\Omega^\#} c(t)^\# u^\# v^\# dx\\ &\le \gamma\left[\int_{\Omega^\#}\left(\frac{u^\#}{|x|}\right)^2 dx\right]^{1/2}\left[\int_{\Omega^\#}\left(\frac{v^\#}{|x|}\right)^2 dx\right]^{1/2}\\ &\le \frac{4\gamma}{(N-2)^2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

relazioni valide per quasi ogni $t\in(0,T)$. Dunque,

$$a(t;u,v)\le M\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u,v\in H_0^1(\Omega)\text{ e per q.o. } t\in(0,T).$$

Se, inoltre, $u\in H_0^1(\Omega)$, dall'ipotesi (1.) e dalle (1.6), (1.7), (1.8) risulta

$$a(t;u,u)\ge\left(1-\frac{2(\alpha+\beta)}{N-2}-\frac{4\gamma}{(N-2)^2}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\quad\text{per q.o. } t\in(0,T);$$

se

$$(1.9)\qquad \frac{2(\alpha+\beta)}{N-2}+\frac{4\gamma}{(N-2)^2}<1,$$

la forma bilineare $a(t;u,v)$ è anche coerciva su $H_0^1(\Omega)$.

Osserviamo ora che se $g\in L\left(\frac{2N}{N+2},2\right)$ e $v\in H_0^1(\Omega)$, allora $gv\in L^1(\Omega)$: difatti,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |gv|\,dx &\le \int_{\Omega^\#} g^\# v^\# dx=\int_{\Omega^\#}\left(\frac{g^\#|x|^{N/(2^*)'}}{|x|^{N/2}}\right)\left(\frac{v^\#|x|^{N/2^*}}{|x|^{N/2}}\right)dx\\ &\le \left(\int_{\Omega^\#}\left[|x|^{N/(2^*)'}g^\#\right]^2\frac{dx}{|x|^N}\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega^\#}\left[|x|^{N/2^*}v^\#\right]^2\frac{dx}{|x|^N}\right)^{1/2}\\ &\le \omega_N^{-1/N}\left(\frac{2}{N-2}\right)\|g\|_{(2^*)',2}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

dove $(2^*)' = 2N/(N+2)$. Fissata allora una funzione $f_0 \in L^2\left(0,T;L\left(\frac{2N}{N+2},2\right)\right)$ è facile far vedere che $f_0 \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Dunque, possiamo applicare il teorema I.1.9 e dedurre che

Teorema III.1.3 *Per ogni $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f_0 \in L^2\left(0,T;L\left(\frac{2N}{N+2},2\right)\right)$ ed $f_i \in L^2(Q_T)$ per $i = 1,\dots,N$, se vale la (1.9) esiste una ed una sola funzione $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tale che $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, soluzione debole del problema di Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f_0 - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (f_i)_{x_i} & in\ \ Q_T \\ u = 0 & su\ \ S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in\ \Omega. \end{cases}$$

In particolare, se $b_i = d_i = 0$, $\|c\|_{L^\infty(0,T;L(N/2,\infty))} < \lambda_N = (N-2)^2/4$, ed $f_0, f_i \in L^2(Q_T)$, vale ancora il risultato di regolarità fornito dal teorema I.2.5.

III.2 Risultati di confronto

Quelli che seguono sono alcuni risultati di confronto di tipo integrale, suddivisi in due casi principali: il caso in cui c è essenzialmente limitato, e quello in cui c sia sommabile in Ω con esponente r, per qualche $r > N/2$.

III.2.1 Il caso $c \in L^\infty(\Omega)$

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, eventualmente contenente l'origine, e sia $T > 0$.

Consideriamo il seguente problema al contorno

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u_t - \sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)\, u = f & in\ Q_T \\ u = 0 & su\ S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

dove assumiamo che l'operatore sia uniformemente parabolico, cioè

$$(2.2)\qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 \ \text{ per q.o. } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Nei risultati richiamati nel capitolo II, viene trascurata l'influenza del termine di ordine zero cu del quale, sostanzialmente, ci si libera tramite l'ipotesi di segno $c(x) \geq 0$. Poichè nel nostro contesto, a priori, il coefficiente c può cambiare segno, il nostro obiettivo è quello di esporre un risultato di confronto tra la soluzione u del problema (2.1) e la soluzione v di un problema a simmetria sferica, che abbia "memoria" del termine di ordine zero. Il problema indiziato è il seguente

$$(2.3)\qquad \begin{cases} v_t - \Delta v + c_{\#} v = f^{\#} & in\ Q_T^{\#} \\ v = 0 & su\ S_T^{\#} \\ v(x,0) = u_0^{\#}(x) & x \in \Omega^{\#}, \end{cases}$$

ove, in questo caso,

$$c_{\#} := \left(c^+\right)_{\#} - \left(c^-\right)^{\#},$$

è il riordinamento crescente di *segno variabile* di c, essendo c^+ e c^- la parte positiva e negativa di c e $\left(c^+\right)_{\#}$, $\left(c^-\right)^{\#}$ rispettivamente i loro riordinamenti sferici crescenti e decrescenti. Faremo le seguenti, ulteriori ipotesi:

$$(2.4)\qquad c \in L^{\infty}(\Omega),$$

$$
\begin{aligned}
&a_{ij} \in L^{\infty}(Q_T), a_{ij} = a_{ji}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in C^0\left(\overline{Q}_T\right) \text{ per } i, j = 1, \ldots, N \\
&f \in L^2(Q_T), u_0 \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Sotto tali condizioni, l'osservazione I.2.1 assicura che la soluzione debole u di (2.1) (la cui esistenza ed unicità è garantita dal teorema I.1.9) è tale che $u \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ .Vale, allora, il seguente risultato (cfr. [9], [14], [83]):

Teorema III.2.1 *Siano u e v rispettivamente le soluzioni deboli dei problemi (2.1) e (2.3). Allora per ogni $t \in [0, T]$ vale il confronto tra le relative concentrazioni:*

$$
\int_0^s u^*(\sigma, t)\, d\sigma \leq \int_0^s v^*(\sigma, t)\, d\sigma \ , \forall s \in [0, |\Omega|] . \tag{2.6}
$$

Osservazione III.2.1 Nel caso $c(x) \geq 0$, la stima (2.6) è migliore della (3.30) fornita dal teorema II.4.3. Difatti, se $\tilde{v}$ è soluzione del problema simmetrizzato di (2.1) che si ottiene trascurando il termine di ordine zero, dal principio del massimo (teorema I.1.13) si ha che $v \leq \tilde{v}$.

Dimostrazione del teorema III.2.1. Possiamo sempre supporre che $c(x) \geq 0$ in Ω. Difatti, se riusciamo a dimostrare il teorema in questo caso, nell' ipotesi in cui c assuma segno qualunque, esiste sempre un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $c(x) \geq \lambda$ q.o. in Ω. Mediante la sostituzione $w := e^{\lambda t} u$, si ha che la funzione w è soluzione del problema

$$
\begin{cases}
w_t - \sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}(x,t)\, w_{x_i}\right)_{x_j} + (c(x) - \lambda)\, w = f e^{\lambda t} & in \ Q_T \\
w = 0 & su \ S_T \\
w(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega,
\end{cases}
$$

ove il coefficiente di ordine zero è non negativo: allora risulta

$$\int_0^s w^*(\sigma,t)\,d\sigma \le \int_0^s z^*(\sigma,t)\,d\sigma \ , \forall (s,t) \in [0,|\Omega|]\times[0,T]\,, \tag{2.7}$$

dove z è soluzione del problema

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (c(x)-\lambda)_\# \, z = f^\# e^{\lambda t} & in \;\; Q_T^\# \\ z = 0 & su \;\; S_T^\# \\ z(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \Omega^\#. \end{cases}$$

Allora si ha $v = e^{-\lambda t} z$, per cui dalla (2.7) si ha la (2.6).

Supponendo, quindi, che il coefficiente di ordine zero sia non negativo, fissiamo $t \in [0,T]\,,\, h > 0$ e $\theta \ge 0$, scegliamo

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \text{sign}(u) & \text{se} \;\; |u| > \vartheta + h \\ \dfrac{|u|-\vartheta}{h}\,\text{sign}(u) & \text{se} \;\; \vartheta < |u| \le \vartheta + h \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

come funzione test nella formulazione debole del problema (2.1) che, in questo caso, assume la forma

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t)\,\psi dx + a(t;u(t),\psi) = \int_\Omega f(t)\,\psi dx \;\; \text{per q.o. } t \in [0,T]\,, \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

dove

$$a(t;\phi,\psi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot,t)\,\phi_{x_i}\psi_{x_j} + c\phi\psi\right] dx \ , \forall \phi,\psi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Come nella dimostrazione del teorema II.4.3, passando a limite per $h \to 0$ otteniamo

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{|u|>\theta}|\nabla u|^2\,dx \leq \int_{|u|>\theta}\left[f(x,t)-c(x)\,u-\frac{\partial u}{\partial t}\right]\text{sign}\,(u)\;\;dx.;$$

d'altronde, da quest'ultima e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, discende

$$\begin{aligned}(2.8)\qquad &\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{|u|>\theta}|\nabla u|\,dx\right)^2\\ \leq\;&\left(-\frac{\partial\mu_u}{\partial\theta}\right)\cdot\left[\int_{|u|>\theta}\left(f(x,t)-c(x)\,u-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\text{sign}(u)\,dx\right].\end{aligned}$$

Il primo membro della (2.8) può essere stimato dal basso facendo uso della disuguaglianza isoperimetrica e della formula di Fleming Rishel (1.7) nel modo seguente:

$$(2.9)\qquad N\omega_N^{1/N}\mu_u(\theta,t)^{1-(1/N)}\leq-\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{|u|>\theta}|\nabla u|\,dx\,.$$

Riguardo al termine contenente la derivata di u rispetto al tempo, notiamo che, poichè $u\in H_0^1(\Omega)$ for per q.o. t, segue che $u^*\in C(]0,|\Omega|])$ (*vedi* [63]), quindi $|u=\theta|=0$ e $u^*(\mu_u(\theta,t))=\theta$, for q.o. θ, quindi dal teorema II.4.2 (per i dettagli, si rimanda al teorema II.4.3) deduciamo

$$(2.10)\qquad \int_{|u|>\theta}\frac{\partial u}{\partial t}\,\text{sign}\,(u)\;\;dx=\int_0^{\mu_u(\theta,t)}\frac{\partial u^*}{\partial t}ds\quad\text{for a.e. }\theta\geq 0.$$

Invece, per ciò che riguarda il secondo membro della (2.8), la disuguaglianza di Hardy-Littlewood (ossia la (2.19), pag.45) implica:

$$(2.11)\qquad \begin{aligned}&-\int_{|u|>\theta}c(x)\,u\,\text{sign}\,(u)\;\;dx\leq-\int_0^{\mu_u(\theta,t)}c_*(s)\,u^*(s,t)\,ds\,,\\ &\int_{|u|>\theta}f(x,t)\;\;\text{sign}\,(u)\;\;dx\leq\int_0^{\mu_u(\theta,t)}f^*(s,t)\,ds.\end{aligned}$$

Allora, utilizzando le (2.9), (2.10), (2.11) nella (2.8), troviamo

$$N^2\omega_N^{2/N}\mu_u(\theta,t)^{2-(2/N)}\leq\left(-\frac{\partial\mu_u}{\partial\theta}\right)\cdot\left\{\int_0^{\mu_u(\theta,t)}\left[f^*(s,t)-c_*(s)\,u^*(s,t)-\frac{\partial u^*}{\partial t}\right]ds\right\}.$$

Eseguendo un cambio di variabili come nella dimostrazione del teorema II.4.3, otteniamo

$$\int_0^s \frac{\partial u^*}{\partial t}(\sigma,t)\,d\sigma - p(s)\frac{\partial u^*}{\partial s} + \int_0^s c_*(\sigma)\,u^*(\sigma,t)\,d\sigma \tag{2.12}$$
$$\leq \int_0^s f^*(\sigma,t)\,d\sigma \ \text{ per q.o. } (s,t) \in Q_T^* := (0,|\Omega|) \times (0,T),$$

dove $p(s) := N^2 \omega_N^{2/N} s^{2-(2/N)}$.

Per quanto concerne la soluzione v del problema (2.3), si può dimostrare (come per la proposizione II.3.2) che la soluzione v è sfericamente simmetrica decrescente rispetto ad x, per cui tutte le disuguaglianze che abbiamo usato per ottenere la (2.12) divengono ora uguaglianze ed abbiamo

$$\int_0^s \frac{\partial v^*}{\partial t}(\sigma,t)\,d\sigma - p(s)\frac{\partial v^*}{\partial s} + \int_0^s c_*(\sigma)\,v^*(\sigma,t)\,d\sigma \tag{2.13}$$
$$= \int_0^s f^*(\sigma,t)\,d\sigma \text{ per q.o. } (s,t) \in Q_T^*.$$

Dalle (2.12)-(2.13) segue allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s w(\sigma,t)\,d\sigma - p(s)\frac{\partial w}{\partial s} + \int_0^s c_*(\sigma)\,w(\sigma,t)\,d\sigma \leq 0,$$

per q.o. $(s,t) \in Q_T^*$, dove $w := u^* - v^*$. Dunque, se poniamo $\chi(s,t) := \int_0^s w(\sigma,t)\,d\sigma$ con $(s,t) \in \overline{Q_T^*}$, dalle condizioni al contorno di (2.1) e (2.3), si ha che χ soddisfa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial t} - p(s)\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + \displaystyle\int_0^s c_*(\sigma)\frac{\partial \chi}{\partial \sigma}(\sigma,t)\,d\sigma \leq 0 \ \ q.o. \text{ in } Q_T^* \\[2ex] \chi(0,t) = \dfrac{\partial \chi}{\partial s}(|\Omega|,t) = 0 \ \ \forall t \in [0,T] \\[2ex] \chi(s,0) = 0 \ \ \forall s \in [0,|\Omega|]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Il nostro scopo è ora quello di ottenere il risultato mediante argomentazioni tipiche del principio del massimo: in questo caso, il ragionamento che seguiremo sarà quello di tipo puntuale utilizzato in [14]. Si può provare facilmente che la funzione χ è continua in $\overline{Q_T^*}$, cosicchè essa ammette un massimo in $\overline{Q_T^*}$: proveremo che questo massimo dev'essere zero. Per assurdo, supponiamo che (s_0, t_0) sia un punto di massimo di χ in $\overline{Q_T^*}$ tale che $\chi(s_0, t_0) > 0$ e supponiamo inizialmente che $(s_0, t_0) \in Q_T^*$. Cominciamo con l'osservare che il termine $\int_0^s c_*(\sigma) \frac{\partial \chi}{\partial \sigma}(\sigma, t)\, d\sigma$ nella disuguaglianza intego differenziale (2.14) può essere trascurato in un opportuno intorno di (s_0, t_0). Infatti, integrando per parti (cfr.[30])

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_0} c_*(\sigma) \frac{\partial \chi}{\partial \sigma}(\sigma, t_0)\, d\sigma &= \int_0^{s_0} c_*(\sigma)\, d\chi(\sigma, t_0) \\
&= c_*(s_0)\, \chi(s_0,t_0) - \int_0^{s_0} \chi(\sigma, t_0)\, dc_*(\sigma) \\
&= \int_0^{s_0} [\chi(s_0, t_0) - \chi(\sigma, t_0)]\, dc_*(\sigma) > 0,
\end{aligned}$$

da cui, per continuità, è possibile trovare un opportuno intorno quadrato $Q_\delta = Q_\delta(s_0, t_0)$ di (s_0, t_0) in cui la funzione $\int_0^s c_*(\sigma) \frac{\partial \chi}{\partial \sigma}(\sigma, t)\, d\sigma$ resti positiva. Dunque, a patto di scegliere δ convenientemente, dalla (2.14) troviamo

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - p(s) \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} < 0 \text{ q.o. in } Q_\delta. \tag{2.15}$$

Allora, possiamo ridurre lo studio del problema (2.14) allo studio della disuguaglianza (2.15) nell'intorno Q_δ,e ciò consente di procedere come nel lemma II.4.3. Comunque, non possiamo moltiplicare direttamente ambo i membri della (2.14) per χ^+, e integrare sull'intervallo $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$, poichè non conosciamo i valori assunti da χ sulla frontiera parabolica Γ_δ di Q_δ. Così, è una scelta naturale considerare, in luogo di χ^+, la funzione φ definita da

$$\varphi := \left(\chi_{/\overline{Q_\delta}} - \max_{\Gamma_\delta} \chi \right)^+ .$$

Senza ledere le generalità, possiamo supporre che

$$\chi(s,t) < \chi(s_0,t_0) \quad \forall (s,t) \in \overline{Q_\delta} \setminus \{(s_0,t_0)\},$$

quindi $\varphi(s_{0,}t_0) > 0$.Multiplicando ambo i membri della disuguaglianza (2.15) per $s^{(2/N)-2}\varphi$ troviamo

$$s^{(2/N)-2}\frac{\partial\chi}{\partial t}\varphi \leq N^2\omega_N^{(2/N)}\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\varphi \text{ q.o. in } Q_\delta\,. \tag{2.16}$$

Come nel lemma II.4.3, è possibile provare che

$$\begin{aligned}&\chi \in W^{2,\infty}(s_0-\delta, s_0+\delta)\ ,\\ &\varphi \in H^1(s_0-\delta, s_0+\delta)\ ,\end{aligned}$$

così un'integrazione per parti conduce a:

$$\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta}\frac{\partial^2\chi}{\partial s^2}\varphi ds = \left[\frac{\partial\chi}{\partial s}\varphi\right]_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} - \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds \leq 0\,.$$

Dunque, dalla (2.16) e dalla definizione di φ abbiamo che, per ogni $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$,

$$\begin{aligned}0 &\geq 2\int_{t_{0-\delta}}^{t}\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} s^{(2/N)-2}\frac{\partial\chi}{\partial t}\varphi ds d\tau = \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} s^{(2/N-2)}\left[\int_{t_0-\delta}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\varphi^2(s,\tau)\right)d\tau\right]ds\\ &= \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} s^{(2/N)-2}\varphi^2(s,t)\,ds,\end{aligned}$$

da cui $\varphi = 0$ in $Q_\delta = (s_0-\delta, s_0+\delta)\times(t_0-\delta, t_0+\delta)$ ma questo contraddice il fatto che $\varphi(s_{0,}t_0) > 0$. Attraverso ragionamenti analoghi si perviene alla stessa conclusione se si suppone che (s_0,t_0) appartenga al segmento $\{(s,T) : s \in (0,|\Omega|)\}$ oppure al segmento $\{(|\Omega|\,,t) : t \in (0,T)\}$. Allora dev'essere $\chi(s_0,t_0) = 0$, da cui la tesi. $\square$

III.2.2 Il caso $c \in L^r(\Omega)$

Analizzando le linee dimostrative del teorema III.2.1 si evince che, per ottenere lo stesso risultato, l'ipotesi fondamentale per il coefficiente $c(x)$, più che la limitatezza globale, sia la *limitatezza dal basso*, cioè che $c(x) \geq \lambda$ per qualche λ.

Il nostro scopo è ora quello di ottenere la disuguaglianza (2.6) nel caso in cui $c(x)$ possa presentare una singolarità nell'origine, verificando al contempo alcune ipotesi di sommabilità. Più precisamente, dimostreremo il seguente teorema (cfr.[14]):

Teorema III.2.2 *Supponiamo che sia verificata la condizione di ellitticità (2.2), le ipotesi (2.5) e, in luogo della (2.4), sia*

$$c \in L^r(\Omega),\ \textit{con}\ r > N/2\ \textit{se}\ N \geq 2,\ r \geq 1\ \textit{se}\ N = 1. \tag{2.17}$$

Siano u e v rispettivamente le soluzioni deboli dei problemi (2.1) e (2.3). Allora vale la stima (2.6).

Uno degli strumenti che consentiranno di dimostrare il teorema III.2.2 è la versione unidimensionale della disuguaglianza di Hardy (1.4), che può essere così enunciata (cfr. [53]):

Lemma III.2.1 *Sia* $1 < p < \infty$, e sia $u \in W^{1,p}(0,1)$ *tale che* $u(0) = 0$. *Allora*

i) $u/|x| \in L^p(0,1)$;

ii) vale la disuguaglianza

$$\int_0^1 |u'(x)|^p \, dx \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^1 \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx. \tag{2.18}$$

Inoltre, $\left(\frac{p-1}{p}\right)^p$ *è la miglior costante e la disuguaglianza è stretta a meno che* $u \equiv 0$.

Dimostrazione del teorema III.2.2 Occupiamoci anzitutto del problema relativo all'*esistenza* della soluzione del problema (2.1) (analogamente si ragionerà per il problema (2.3)). Si ponga

$$a(t;\phi,\psi)=\int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(\cdot,t)\,\phi_{x_i}\psi_{x_j}+c\phi\psi\right]dx\ ,\forall\phi,\psi\in H_0^1(\Omega)\,,$$

e dimostriamo che sono verificate le ipotesi del teorema I.1.9. Supporremo ora che $N>2,$ analogamente e con minori difficoltà si ragionerà nei casi $N=1,2.$

La proprietà di continuità uniforme della forma bilineare $a(t;\cdot,\cdot)$ rispetto al tempo è facilmente verificata attraverso un'applicazione della disuguaglianza di Sobolev. Per quanto concerne la proprietà di coercività debole, se $\phi\in H_0^1(\Omega)$,dalla (2.2) si ha

(2.19)
$$\begin{aligned} & a(t;\phi,\phi)+\lambda\|\phi\| \\ = & \int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(\cdot,t)\,\phi_{x_i}\phi_{x_j}dx+\int_{\Omega}(c+\lambda)\,\phi^2dx \\ \geq & \int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\,dx+\int_{\Omega}c^+\phi^2dx+\int_{\Omega}\left(\lambda-c^-\right)\phi^2dx \\ \geq & \int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\,dx-\int_{\Omega_\lambda}\left(c^--\lambda\right)\phi^2dx, \end{aligned}$$

dove $\Omega_\lambda:=\{x\in\Omega:c^-(x)>\lambda\}$. D'altronde, dalle disuguaglianze di Hölder e di Sobolev si ha

(2.20)
$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\lambda}\left(c^--\lambda\right)\phi^2dx &\leq \left\|c^--\lambda\right\|_{L^{N/2}(\Omega_\lambda)}\|\phi\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq k^2(N)\left\|c^--\lambda\right\|_{L^{N/2}(\Omega_\lambda)}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\,dx,\end{aligned}$$

dove $2^*=2N/(N-2)$ e $k(N)$ è la costante di Sobolev. Poichè $\|c^--\lambda\|_{L^{N/2}(\Omega_\lambda)}\to 0$ per $\lambda\to+\infty,$ possiamo scegliere $\lambda>0$ sufficientemente grande da fare in modo che $\alpha:=\left(1-k^2(N)\,\|c^--\lambda\|_{L^{N/2}(\Omega_\lambda)}\right)>0,$ per cui dalle (2.19)-(2.20) deduciamo

$$a(t;\phi,\phi)+\lambda\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2\geq\alpha\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

ossia la coercività debole. Dunque, in base al teorema I.1.9 esiste una ed una sola soluzione u del problema (2.1) che, sfruttando l'osservazione I.2.1, ammette derivata temporale dotata della regolarità L^2 : $u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$.

Come già osservato, il caso in cui c sia limitato dal basso si può trattare come nella dimostrazione del teorema III.1.1. Supponiamo, quindi, che c possa essere *non* limitato inferiormente in Ω.

La prima parte della dimostrazione è esattamente quella del teorema III.2.1. Mediante l'uso combinato di strumenti come la formula di derivazione sotto il segno di integrale (teorema II.4.2), la formula di coarea di Fleming-Rishel, e le disuguaglianze isoperimetrica e di Hardy-Littlewood, si perviene alla stima

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s \frac{\partial u^*}{\partial t}(\sigma,t)\,d\sigma - p(s)\frac{\partial u^*}{\partial s} + \int_0^s \left[\left(c^+\right)_* - \left(c^-\right)^*\right] u^*(\sigma,t)\,d\sigma \\
&\leq \int_0^s f^*(\sigma,t)\,d\sigma \quad \text{per q.o. } (s,t) \in Q_T^*
\end{aligned}
$$

e tale disuguaglianza diviene un'uguglianza se si sostituisce u con la soluzione v del problema simmetrizzato (2.3). Comunque, se poniamo $\chi(s,t) = \int_0^s (u^* - v^*)\,d\sigma$, non è possibile trascurare il termine $\int_0^s \chi(\sigma,t)\,\frac{d}{d\sigma}\left[\left(c^+\right)_* - \left(c^-\right)^*\right] d\sigma$ attraverso i ragionamenti di tipo puntuale che hanno consentito di ottenere la (2.6), poichè c cambia di segno. In più, bisogna anche tener conto della singolarità di c nell'origine, che potrebbe dar luogo all'eventualità in cui $\left(c^-\right)^* \to +\infty$ per $s \to 0$. Al fine di ovviare a tale problematica, procederemo per approssimazione.

Sia $v_\epsilon = v + \epsilon v_0$ la soluzione del seguente problema "perturbato"

$$
(2.21) \qquad \begin{cases}
v_{\epsilon t} - \Delta v_\epsilon + \left[\left(c^+\right)_\# - \left(c^-\right)^\#\right] v_\epsilon = f^\# + \epsilon\delta & in\ \ Q_T^\# \\
v_\epsilon = 0 & su\ \ S_T^\# \\
v_\epsilon(x,0) = u_0^\#(x) + \epsilon v_0(x) & x \in \Omega^\#,
\end{cases}
$$

dove $\epsilon > 0$, δ è la delta di Dirac concentrata nell'origine e v_0 è la soluzione che si annulla su $\partial\Omega^{\#}$ dell'equazione

$$-\Delta v_0 + \left[\left(c^{+}\right)_{\#} - \left(c^{-}\right)^{\#} \right] v_0 = \delta \quad in\ \Omega^{\#}. \tag{2.22}$$

Su risultati di esistenza riguardo l'equazione (2.22) (così come una generica equazione ellittica lineare con dato misura), ci riferiamo principalmente alla monografia di G. Stampacchia (cfr.[71]). Inoltre, poichè $c \in L^r(\Omega)$ con $r > N/2$, possiamo applicare un risultato di regolarità contenuto [4] per ottenere che la soluzione v_0 di (2.22) è nello spazio di Lorentz $L\left(N/\left(N-2\right), \infty\right)$. Nel caso in cui $N = 2$, si può utilizzare un risultato contenuto in [3] per ottenere che $v_0 \in L_{\exp}\left(\Omega^{\#}\right)$, mentre nel caso $N = 1$ la soluzione è limitata in $\Omega^{\#}$.

Posto allora

$$\chi_\epsilon(s,t) := \int_0^s \left(u^* - v_\epsilon^*\right) d\sigma,$$

abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi_\epsilon}{\partial t} - p(s) \dfrac{\partial^2 \chi_\epsilon}{\partial s^2} + \displaystyle\int_0^s \left[\left(c^{+}\right)_* - \left(c^{-}\right)^* \right] \dfrac{\partial \chi_\epsilon}{\partial \sigma}(\sigma,t)\, d\sigma \\ \leq -\epsilon\ q.o \text{ in } Q_T^* \\ \chi_\epsilon(0,t) = \dfrac{\partial \chi_\epsilon}{\partial s}\left(|\Omega|, t\right) = 0 \ \ \forall t \in [0,T] \\ \chi_\epsilon(s,0) = -\epsilon \displaystyle\int_0^s v_0^*(\sigma)\, d\sigma. \end{cases} \tag{2.23}$$

Vogliamo provare che $\chi_\epsilon \leq 0$ in $\overline{Q_T^*}$, cosicchè

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s v_\epsilon^*(\sigma,t)\, d\sigma \ , \forall (s,t) \in \overline{Q_T^*},$$

e quindi si ottiene il risultato voluto mandando ϵ a zero.

Per assurdo, si supponga che $\chi_\epsilon > 0$ in un sottoinsieme F di $\overline{Q_T^*}$ e sia $\bar{t}$ il valore minimo della proiezione di F sull'asse t. Si noti che

$$\chi_\epsilon(s,t) = \int_0^s (u^* - v^*)\, d\sigma - \epsilon \int_0^s v_0^* d\sigma :$$

proveremo che, per ogni t,

$$\lim_{s\to 0} \left(c^-\right)^*(s)\, \chi_\epsilon(s,t) = 0. \tag{2.24}$$

Infatti, nel caso $N > 2$, poichè v_0 è in $L\left(N/(N-2), \infty, \Omega^{\#}\right)$ si ha

$$v_0^* \leq \frac{K}{s^{1-\frac{2}{N}}}$$

dunque, dalla disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\left(c^-\right)^*(s) \int_0^s v_0^*(\sigma)\, d\sigma\right| &\leq K \left(c^-\right)^*(s)\, s^{\frac{2}{N}} \leq K s^{\frac{2}{N}-1} \int_0^s \left(c^-\right)^* d\sigma \\ &\leq K s^{\frac{2}{N}-\frac{1}{r}} \left\|c^-\right\|_{L^r(\Omega)};\end{aligned}$$

chiaramente, una simile stima vale anche per il termine $\left(c^-\right)^*(s) \int_0^s (u^* - v^*)\, d\sigma$, poichè dalla disuguaglianza di Sobolev risulta che, per t fissato, (vedere anche la proposizione III.1.1)

$$u \in L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L\left(N/(N-2), 2^*\right) \hookrightarrow L\left(N/(N-2), \infty\right),$$

ed analogamente $v \in L\left(N/(N-2), \infty\right)$. Dunque, deduciamo

$$\left|\left(c^-\right)^*(s)\, \chi_\epsilon(s,t)\right| \leq K s^{\frac{2}{N}-\frac{1}{r}} \left\|c^-\right\|_{L^r(\Omega)} \to 0$$

da cui la (2.24). Quest'ultima vale anche nel caso $N=2$, poichè $v_0 \in L_{\exp}\left(\Omega^{\#}\right)$ e

$$\begin{aligned}
\left|\left(c^{-}\right)^{*}(s)\int_0^s v_0^{*}(\sigma)\,d\sigma\right| &\leq \left[s\left(c^{-}\right)^{*}(s)\right]\ v_0^{**}(s) \\
&\leq \|v_0\|_{L_{\exp}(\Omega)}\left(1+\log\frac{|\Omega|}{s}\right)\int_0^s \left(c^{-}\right)^{*}(\sigma)\,d\sigma \\
&\leq s^{\frac{r-1}{r}}\left(1+\log\frac{|\Omega|}{s}\right)\left\|c^{-}\right\|_{L^{r}(\Omega)}\|v_0\|_{L_{\exp}(\Omega)} \to 0;
\end{aligned}$$

tale tipo di stima si può ottenere anche sostituendo v_0 con u e v, in quanto dalla (1.2) discende che $u \in L_{\exp}(\Omega)$ e $v \in L_{\exp}\left(\Omega^{\#}\right)$ per t fissato. E' chiaro che la (2.24) risulta vera anche nel caso $N=1$.

Allora, integrando per parti abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^s \left[\left(c^{+}\right)_{*}-\left(c^{-}\right)^{*}\right]\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial\sigma}(\sigma,t)\,d\sigma &= \left[\left(c^{+}\right)_{*}-\left(c^{-}\right)^{*}\right]\chi_\epsilon(s,t) \\
&\quad -\int_0^s \chi_\epsilon(\sigma,t)\ d\left[\left(c^{+}\right)_{*}-\left(c^{-}\right)^{*}\right].
\end{aligned}$$

Per continuità, possiamo scegliere $\tau>0$ tale che, per $t<\bar{t}+\tau$, si abbia

$$\int_0^s \chi_\epsilon(\sigma,t)\ d\left[\left(c^{+}\right)_{*}-\left(c^{-}\right)^{*}\right]-\epsilon \leq 0 \quad \forall s \in [0,|\Omega|],$$

così che dalla (2.23) discenda

$$\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial t}-p(s)\frac{\partial^2\chi_\epsilon}{\partial s^2}+\left[\left(c^{+}\right)_{*}-\left(c^{-}\right)^{*}\right]\chi_\epsilon(s,t)\leq 0 \quad q.o.\ in\ (0,|\Omega|)\times(0,\bar{t}+\tau).$$

Dividendo ambo i membri di questa disuguaglianza per $p(s)$, possiamo riscriverla come

$$\begin{aligned}
&p(s)^{-1}\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial t}-\frac{\partial^2\chi_\epsilon}{\partial s^2}+p(s)^{-1}\left[(c^{+})_{*}-(c^{-})^{*}\right]\chi_\epsilon \leq 0\,, \\
&q.o.\ in\ (0,|\Omega|)\times(0,\bar{t}+\tau).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Moltiplicando ambo i membri della (2.25) per χ_ϵ^{+} ed integrando tra 0 e $|\Omega|$,utilizzando le condizioni al contorno in (2.23), otteniamo

$$\begin{aligned} &\gamma_N \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial \chi_\epsilon}{\partial t} \chi_\epsilon^+ ds + \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial \chi_\epsilon^+}{\partial s} \right)^2 ds \\ &+\gamma_N \int_0^{|\Omega|} \left[(c^+)_* - (c^-)^* \right] s^{(2/N)-2} \left(\chi_\epsilon^+ \right)^2 ds \leq 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

dove $\gamma_N := N^{-2} \omega_N^{-2/N}$. Vogliamo provare che se sostituiamo la funzione χ_ϵ con la funzione $U_\epsilon := e^{-\lambda t} \chi_\epsilon$ (dove $\lambda > 0$ è una costante opportuna), la somma dei termini della (2.26) che non contengono la derivata rispetto al tempo, è non negativa. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che se $c \in L^r(\Omega)$ con $r > N/2$, l'operatore $-\Delta u + cu$ è coercivo a meno di moltiplicare ambo i membri dell'equazione per $e^{-\lambda t}$. Invero, dalla (2.26) abbiamo che U_ϵ soddisfa

$$\begin{aligned} &\gamma_N \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} U_\epsilon^+ ds + \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s} \right)^2 ds \\ &+\gamma_N \int_0^{|\Omega|} \left[\lambda - (c^-)^* \right] s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 ds \leq 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ora, se $\Omega_\lambda := \{x : c^-(x) > \lambda\}$ e $\Omega_\lambda^* := \left\{ s : (c^-)^*(s) > \lambda \right\} = [0, |\Omega_\lambda|)$ (dalla proprietà di equidistributività dei riordinamenti), notiamo che

$$\begin{aligned} &\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s} \right)^2 ds + \gamma_N \int_0^{|\Omega|} \left[\lambda - \left(c^-\right)^* \right] s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 ds \\ \geq &\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s} \right)^2 ds - \gamma_N \int_{\Omega_\lambda^*} \left[\left(c^-\right)^* - \lambda \right] s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 ds. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Se $s \in \Omega_\lambda^*$, dalla disuguaglianza di Hölder risulta

$$
\begin{aligned}
\left[\left(c^-\right)^*(s) - \lambda\right] s^{2/N} &\leq s^{(2/N)-1} \int_0^s \left[\left(c^-\right)^*(\sigma) - \lambda\right] d\sigma \\
&\leq \left(\int_0^s \left[\left(c^-\right)^*(\sigma) - \lambda\right]^{N/2} d\sigma\right)^{2/N} \\
&\leq \left(\int_0^{|\Omega_\lambda|} \left[\left(c^-\right)^*(\sigma) - \lambda\right]^{N/2} d\sigma\right)^{2/N} = \left\|\left(c^-\right)^* - \lambda\right\|_{L^{N/2}\left(\Omega_\lambda^*\right)} .
\end{aligned}
$$

Usando quest'ultima disuguaglianza e la disuguaglianza di Hardy unidimensionale (2.18) (osserviamo esplicitamente che, per t fissato, $U_\epsilon^+ \in H^1(0, |\Omega|)$ e $U_\epsilon^+(0) = 0$) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\lambda^*} \left[\left(c^-\right)^* - \lambda\right] s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+\right)^2 ds &= \int_{\Omega_\lambda^*} \left[\left(c^-\right)^*(\sigma) - \lambda\right] s^{2/N} \left(\frac{U_\epsilon^+}{s}\right)^2 ds \\
&\leq \left\|\left(c^-\right)^* - \lambda\right\|_{L^{N/2}\left(\Omega_\lambda^*\right)} \int_{\Omega_\lambda^*} \left(\frac{U_\epsilon^+}{s}\right)^2 ds \\
&\leq 4 \left\|\left(c^-\right)^* - \lambda\right\|_{L^{N/2}\left(\Omega_\lambda^*\right)} \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s}\right)^2 ds,
\end{aligned}
$$

e dalla (2.28) troviamo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s}\right)^2 ds + \gamma_N \int_0^{|\Omega|} \left[\lambda - \left(c^-\right)^*\right] s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+\right)^2 ds \\
&\geq \left[1 - 4\gamma_N \left\|\left(c^-\right)^* - \lambda\right\|_{L^{N/2}\left(\Omega_\lambda^*\right)}\right] \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s}\right)^2 ds.
\end{aligned}
$$

Dunque, a patto di scegliere λ sufficientemente grande, si ha

$$
\alpha_N := \left[1 - 4\gamma_N \left\|\left(c^-\right)^* - \lambda\right\|_{L^{N/2}\left(\Omega_\lambda^*\right)}\right] > 0,
$$

così abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s}\right)^2 ds + \gamma_N \int_0^{|\Omega|} \left[\lambda - (c^-)^*\right] s^{(2/N)-2} (U_\epsilon^+)^2 ds \\
&\geq \alpha_N \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s}\right)^2 ds.
\end{aligned}
$$

Notiamo che si può ottenere una simile stima anche nei casi $N = 1, 2$: infatti, il caso $N = 1$ è molto più semplice, mentre nel caso $N = 2$ troviamo

$$\int_{B_\lambda^*} \left[(c^-)^* - \lambda \right] s^{-1} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 ds \leq 4C \left\| (c^-)^* - \lambda \right\|_{L^r(\Omega_\lambda^*)} \int_0^{|\Omega|} \left(\frac{\partial U_\epsilon^+}{\partial s} \right)^2 ds,$$

per qualche $r > 1$ ed un'opportuna costante C.
Allora, dalla (2.27) segue

$$\int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial t} U_\epsilon^+ ds \leq 0 \tag{2.29}$$

per q.o. $t \in (0, \bar{t} + \tau)$. Allora, integrando la (2.29) tra 0 e t con $t \in (0, \bar{t} + \tau)$, ed utilizzando ancora le condizioni al contorno di (2.23) risulta

$$\begin{aligned} 0 \geq 2 \int_0^t d\tau \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \frac{\partial U_\epsilon}{\partial \tau} U_\epsilon^+ ds &= \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 d\tau \right) ds \\ &= \int_0^{|\Omega|} s^{(2/N)-2} \left(U_\epsilon^+ \right)^2 (s, t) \, ds \end{aligned}$$

che implica $U_\epsilon^+ = 0$ in $[0, |\Omega|]$ per ogni $t \in (0, \bar{t} + \tau)$. Ciò significa che $U_\epsilon \leq 0$ in $[0, |\Omega|] \times [\bar{t}, \bar{t} + \tau)$, e quindi anche $\chi_\epsilon \leq 0$ in $[0, |\Omega|] \times [\bar{t}, \bar{t} + \tau)$, ma nello stesso rettangolo la funzione χ_ϵ è positiva dalla costruzione dell'insieme F. Dunque $\chi_\epsilon \leq 0$ in $\overline{Q_T^*}$. $\square$

Osservazione III.2.2 Se $N > 2$ e $c \in L^{N/2}(\Omega)$, non si può utilizzare, al fine di ottenere la (2.6), lo stesso ragionamento adoperato nel corso della dimostrazione del teorema III.2.2: ciò è dovuto all'uso essenziale che viene fatto della soluzione v_0 dell'equazione (2.22), la cui esistenza ed unicità è garantita solo nell'ipotesi in cui il coefficiente di ordine zero abbia sommabilità *maggiore* di $N/2$ (vedi [70], [71]). Ciò nonostante, il risultato di confronto nel caso $c \in L^{N/2}(\Omega)$ viene recuperato utilizzando il metodo di *discretizzazione rispetto al tempo.* Brevemente, illustriamone le linee principali. Consideriamo una partizione di lunghezza $\tau = T/n$

($n \in \mathbb{N}$) dell'intervallo $(0,T)$ e approssimiamo le soluzioni u e v dei problemi (2.1), (2.3) mediante le successioni

$$u_n(x,t) := u^{(k)}(x,t) \quad x \in \Omega,\ t \in [(k-1)\tau, k\tau]$$

$$v_n(x,t) := v^{(k)}(x,t) \quad x \in \Omega^{\#},\ t \in [(k-1)\tau, k\tau]$$

dove, per ogni $k = 1, \ldots, n$, $u^{(k)}$ è la soluzione del problema discreto

$$\text{(2.30)} \quad \begin{cases} \dfrac{u^{(k)} - u^{(k-1)}}{\tau} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}^{(k)}(x)\, u_{x_i}^{(k)} \right)_{x_j} + cu^{(k)} = f^{(k)} & in\ \ \Omega \\ u^{(k)} = 0 & su\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$a_{ij}^{(k)}(x) := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} a_{ij}(x,t)\, dt,$$

$$f^{(k)}(x) := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x,t)\, dt$$

e $u^{(0)} := u_0$, mentre $v^{(k)}$ è la soluzione del problema simmetrizzato

$$\text{(2.31)} \quad \begin{cases} \dfrac{v^{(k)} - v^{(k-1)}}{\tau} - \Delta v^{(k)} + c_{\#} v^{(k)} = f^{(k)\#} & in\ \ \Omega^{\#} \\ v^{(k)} = 0 & su\ \ \partial\Omega^{\#}, \end{cases}$$

con $v^{(0)} := u_0^{\#}$. Utilizzando un risultato di [12] (vedi teorema 3.4) si può provare per induzione che

$$\text{(2.32)} \quad \int_0^s u^{(k)*}(\sigma)\, d\sigma \leq \int_0^s v^{(k)*}(\sigma)\, d\sigma$$

per $k = 1, \ldots, n$. Osserviamo che il risultato di [4] può essere applicato nel caso in cui $c(x) + \frac{1}{\tau} \in L^{\infty}(\Omega)$, ma esso può essere facilmente esteso al caso $c(x) + \frac{1}{\tau} \in L^{N/2}(\Omega)$, poichè l'operatore

$$L^{(k)} u^{(k)} := -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}^{(k)}(x)\, u_{x_i}^{(k)} \right)_{x_j} + \left(c(x) + \frac{1}{\tau} \right) u^{(k)}$$

è coercivo (si rimanda a [12] ed a [72], dove si caratterizza il primo autovalore del problema $-\Delta u = \lambda p(x)\, u,\ \ u \in H_0^1(\Omega)$, con un peso $p \in L^{N/2}(\Omega)$). Infine, passando a limite in (2.32) si ha la (2.6).

III.3 Risultati di confronto nel caso $c \in L(N/2, \infty)$

III.3.1 Alcune premesse

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ contenente l'origine. Il problema di cui adesso ci occuperemo sarà quello di determinare risultati di confronto nel caso in cui il coefficiente c sia un potenziale molto singolare, del tipo

$$c(x) = -\frac{\lambda}{|x|^2}.$$

Questa situazione può essere classificata come caso limite, nel senso che il potenziale $\lambda/|x|^2$ appartiene allo spazio L^r_{loc} se e soltanto se $1 \le r < N/2$ (da ora in poi supporremo sempre $N > 2$), per cui non è possibile utilizzare i risultati classici di unicità e regolarità. Risulta chiaro, invece, che questo potenziale appartenga allo spazio di Lorentz $L(N/2, \infty)$. Un'equazione del tipo

$$u_t - \Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u + f \tag{3.1}$$

appare in numerosi contesti. Nella sua versione ellittica (senza u_t), con $\lambda/|x|^2$ sostituito da un potenziale singolare più generico $V(x)$ e con $f = 0$, essa rappresenta l'equazione di Schrödinger della meccanica quantistica. Inoltre, la (3.1) appare anche nell'analisi linearizzata di modelli standard di combustione che conducono a fenomeni di blow-up. Più precisamente, consideriamo l'equazione del calore semilineare con termine di reazione *esponenziale*

$$u_t - \Delta u = \gamma e^u, \ \ \gamma > 0 : \tag{3.2}$$

quest'equazione rappresenta uno dei più semplici esempi di meccanismi di ignizione nella teoria della combustione, dove u rappresenta la temperatura. La (3.2) ammette una *soluzione singolare stazionaria*, data da

$$U(x) = -2\log|x| + \log\frac{2(N-2)}{\gamma},$$

la quale riveste un ruolo particolarmente importante nello studio dell'esistenza, unicità e blow-up delle soluzioni della stessa (3.2), sia relativamente al problema di Cauchy in $\mathbb{R}^N$ che al problema di Cauchy-Dirichlet: per un'analisi dettagliata di tali questioni si rimanda a [64] ed a [80]. Nel nostro caso, l'operatore linearizzato stazionario della (3.2) rispetto ad U è dato da

$$\begin{aligned} Lv &: = -\Delta v - \gamma e^U v \\ &= -\Delta v - \frac{2(N-2)}{|x|^2}v. \end{aligned}$$

Dunque, la (3.1) è, per $f = 0$ e $\lambda = 2(N-2)$, l'equazione linearizzata della (3.2) rispetto alla sua soluzione singolare stazionaria U.

I primi a studiare problemi al contorno associati ad equazioni del tipo (3.1) sono stati Baras e Goldstein in [21], nel caso in cui $f, u_0 \geq 0$, $f, u_0 \not\equiv 0$ (cfr. anche [29] per il caso $N = 2$). In [21] si dimostra che il comportamento delle soluzioni dipende dal valore del parametro λ. Più precisamente, esiste un valore critico $\lambda_N := (N-2)^2/4$, corrispondente alla miglior costante nella disuguaglianza di Hardy (1.4) per $p = 2$, tale che se $\lambda \leq \lambda_N$, il problema di Cauchy-Dirichlet, con condizione di Dirichlet omogenea, associato alla (3.1) ammette una soluzione globale, mentre se $\lambda > \lambda_N$ lo stesso problema non ammette soluzioni locali qualunque siano $f, u_0 \not\equiv 0$.

Più precisamente, in [21] il potenziale $V(x) = \lambda/|x|^2$ ed il termine noto f sono sostituiti dalle rispettive troncature $V_n = \min\{V, n\}$ e $f_n = \min\{f, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, e si considera la soluzione $u_n(x,t)$ del corrispondente problema di Cauchy-Dirichlet in $\Omega \times (0, +\infty)$ .Allora si dimostra che

a) quando $\lambda \leq \lambda_N$, la successione $\{u_n\}$ delle soluzioni dei problemi approssimanti converge monotonamente ad una soluzione u del problema originario;

b) quando $\lambda > \lambda_N$, allora

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = +\infty$$

per tutti gli $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$.

Quest'ultimo fenomeno è chiamato *blow-up completo istantaneo.*

Successivamente, tale problematica è stata affrontata in [81] rimuovendo l'ipotesi di segno sui dati e analizzando più in dettaglio il caso critico $\lambda = \lambda_N$, mentre in [47] ne viene studiato il caso non lineare.

Il caso $\lambda < \lambda_N$ è più facile da trattare, in quanto se $u \in H_0^1(\Omega)$ dalla disuguaglianza di Hardy (1.4), risulta

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \left(1 - \lambda\lambda_N^{-1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

per cui l'operatore

$$Lu = -\Delta u - \frac{\lambda}{|x|^2} u$$

è coercivo, cosicchè (dal teorema I.1.9) per ogni $f \in L^2(\Omega \times (0,+\infty))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ esiste una soluzione $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega))$ (quindi *globale* nel tempo) del problema

$$(3.3) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{\lambda}{|x|^2} u + f & in \;\; \Omega \times (0,+\infty) \\ u = 0 & su \;\; \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & in \; \Omega. \end{cases}$$

La situazione è diversa nel caso critico $\lambda = \lambda_N$, in cui, come vedremo più avanti, (cfr.[81]), c'è un'unica soluzione in L^2 ma *non in* H_0^1.

Forniamo ora un risultato di esistenza ed uno di non esistenza per problemi di Cauchy-Dirichlet associati ad equazioni del tipo (3.1), ove $\lambda/|x|^2$ è sostituito da un *generico* potenziale singolare $V(x)$.Ci riferiamo, in particolare, a [29] ed al caso $f = 0$. Si consideri, allora, il seguente problema

$$\tag{3.4} \begin{cases} u_t - \Delta u = V(x)\, u & in \;\; Q_T \\ u = 0 & su \;\; S_T \\ u(x,0) = u_0(x) & in\, \Omega, \end{cases}$$

dove supponiamo $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$, e che $V \geq 0$ e $u_0 \geq 0$ q.o. in Ω.Forniamo la seguente

Definizione III.3.1 Sia $0 < T \leq \infty$ ed $u_0 \in L^1(\Omega)$, diciamo che $u \geq 0$ (ci restringiamo all'ambito delle soluzioni non negative) *è soluzione debole di* (3.4) se, per ogni $0 < S < T$ si ha che $u \in L^1(\Omega \times (0,S))$, $Vu \in L^1(\Omega \times (0,S))$ e risulta

$$\tag{3.5} \int_0^S \int_\Omega u(-\xi_t - \Delta \xi)\, dxdt - \int_\Omega u_0 \xi(0)\, dx = \int_0^S \int_\Omega V u \xi dxdt,$$

per ogni funzione $\xi \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,S]\right)$ per cui $\xi(S) \equiv 0$ in Ω e $\xi = 0$ su $\partial\Omega \times [0,S]$. Se $T = \infty$,diremo che u è una *soluzione debole globale.* Il risultato che esporremo è particolarmente interessante, poichè consente di studiare l'esistenza delle soluzioni per il problema (3.4) facendo riferimento al primo autovalore generalizzato dell'operatore stazionario in (3.4). Precisamente, per primo autovalore *generalizzato* dell'operatore $-\Delta - V(x)\, I$ in Ω intendiamo la quantità espressa dalla formula

$$\tag{3.6} \lambda_1(V;\Omega) := \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2\, dx - \int_\Omega V(x)\, \varphi^2 dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx},$$

che può essere eventualmente $-\infty$. Allora, vale il seguente

Teorema III.3.1 *Supponiamo che* $\lambda_1 (V;\Omega) > -\infty$. *Allora, per ogni* $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, *esiste una soluzione debole globale* $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ *di (3.4); inoltre, abbiamo il seguente comportamento asintotico, dato da un decadimento esponenziale in* $L^2(\Omega)$*del tipo*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1(V;\Omega)t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.7}$$

Dim. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ponga $V_n = \min\{V, n\}$, $u_{0n} = \min\{u_0, n\}$; sia u_n l'unica soluzione globale del problema "troncato" di (3.4), dato da

$$\begin{cases} u_{nt} - \Delta u_n = V_n(x)\, u_n & in\ \Omega \times (0,\infty) \\ u_n = 0 & su\ \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x) & in\ \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Fissato $t > 0$, moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione di (3.8) per $u_n(t)$ ed integriamo per parti: abbiamo (vedi teorema I.1.4)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2(t)\, dx = -\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^2\, dx + \int_\Omega V_n(x)\, u_n^2(t)\, dx. \tag{3.9}$$

Poichè $\lambda_1(V;\Omega) > -\infty$, dalla (3.6) si può ricavare immediatamente una disuguaglianza di tipo Hardy-Sobolev con peso $V(x)$, che assume la forma

$$\int_\Omega V(x)\, \varphi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx - \lambda_1(V;\Omega)\int_\Omega \varphi^2 dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

per cui dalla (3.9) otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_n^2(t)\, dx \leq -\lambda_1(V;\Omega)\int_\Omega u_n^2(t)\, dx,$$

per cui, integrando,

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1(V;\Omega)t} \|u_{0n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t > 0. \tag{3.10}$$

Poichè $u_0 \in L^2(\Omega)$, dal teorema della convergenza monotona segue che $u_{0n} \to u_0$

in $L^2(\Omega)$, per cui l'ultima relazione trovata implica la limitatezza della successione $\{u_n(t)\}$ in $L^2(\Omega)$, per ogni t. Osserviamo ora che $\{u_n\}$ è una successione crescente di funzioni non negative (per il principio del massimo), per cui possiamo definire il suo limite puntuale

$$u(x,t) := \lim_{n\to\infty} u_n(x,t),$$

per ogni $(x,t) \in \Omega\times[0,\infty)$. Applicando ancora il teorema della convergenza monotona, dalla (3.10) segue che $u(t) \in L^2(\Omega)$ $\forall t$ e $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$. Inoltre, se $S > 0$ si ha $u \in L^1(\Omega \times (0,S))$, $Vu \in L^1(\Omega \times (0,S))$ e

$$\begin{aligned}
&\int_0^S \int_\Omega u_n(-\xi_t - \Delta\xi)\,dxdt \to \int_0^S \int_\Omega u(-\xi_t - \Delta\xi)\,dxdt \\
&\int_\Omega u_{0n}\xi(0)\,dx \to \int_\Omega u_0\xi(0)\,dx \\
&\int_0^S \int_\Omega V_n u_n \xi dxdt \to \int_0^S \int_\Omega V u \xi dxdt,
\end{aligned}$$

per $n \to \infty$, ove $\xi \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,S]\right)$ tale che $\xi(S) \equiv 0$ in Ω e $\xi = 0$ su $\partial\Omega\times[0,S]$. Passando a limite per $n \to \infty$ nella formulazione debole di (3.8) e nella (3.10) si ha che u è soluzione debole di (3.4) e soddisfa la relazione (3.7). $\square$

Enunciamo ora anche un risultato di *non esistenza* della soluzione debole di (3.4) (cfr.[29]):

Teorema III.3.2 *Supponiamo che $\lambda_1((1-\varepsilon)V;\Omega) = -\infty$, per qualche costante $\varepsilon > 0$. Allora, per ogni $T > 0$ ed $u_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$ con $u_0 \geq 0$ e $u_0 \not\equiv 0$, non esiste alcuna soluzione debole $u \geq 0$ di (3.4). Inoltre, vi è un blow-up istantaneo e completo per il problema (3.4) nel seguente senso: se $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \min(c,n)$, $u_{0n} = \min(u_0,n)$ ed u_n è l'unica soluzione globale di (3.4), con V ed u_0 sostituite rispettivamente da V_n ed u_{0n}, allora per ogni $0 < \tau < T$, risulta*

$$u_n(x,t) \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty, \text{ uniformemente in } \Omega \times (\tau,T),$$

ossia vi è un blow-up istantaneo e completo delle soluzioni approssimanti.

Applichiamo questi ultimi due risultati al caso in cui $V(x) = \lambda |x|^{-2}$, con $\lambda \geq 0$: supponiamo in questo caso che $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Dalla disuguaglianza di Hardy (1.4) segue subito che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx - \lambda \int_\Omega \frac{\varphi^2}{|x|^2} dx \geq \left(1 - \lambda \lambda_N^{-1}\right) \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx,$$

dove $\lambda_N = (N-2)^2/4$: risulta chiaro, allora, che se $\lambda \leq \lambda_N$ è $\lambda_1(V, \Omega) \geq 0$ e dunque, dal teorema III.3.1, si ha che il problema (3.4) ammette una soluzione debole per ogni $u_0 \in L^2(\Omega)$, con $u_0 \geq 0$. D'altra parte, si può dimostrare che se $\lambda > \lambda_N$ possiamo determinare $\varepsilon > 0$ in modo che $\lambda_1((1-\varepsilon)V; \Omega) = -\infty$ (cfr. [28]): conseguentemente, il teorema III.3.2 implica che per ogni $u_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$, con $u_0 \geq 0$ e $u_0 \not\equiv 0$, non esiste alcuna soluzione debole locale di (3.4) e vi è, relativamente allo stesso problema, un blow-up istantaneo e completo delle soluzioni approssimanti.
Dunque, ritroviamo il risultato di [21] enunciato in precedenza.
Ritorniamo adesso alla questione inerente la determinazione di un risultato di confronto per equazioni paraboliche lineari del second'ordine, nell'ipotesi in cui il coefficiente di ordine zero $c(x)$ presenti una singolarità *"del tipo"* $\lambda/|x|^2$: più precisamente, supporremo che

(3.11) $$c^\#(x) \leq \frac{\lambda}{|x|^2}, \quad \forall x \in \Omega^\# \setminus \{0\}, \text{con } \lambda \leq \lambda_N.$$

In tali ipotesi, è possibile confrontare la soluzione u del problema (2.1) con la soluzione v del seguente problema

(3.12) $$\begin{cases} v_t - \Delta v = \dfrac{\lambda}{|x|^2} v + f^\# & in \ Q_T^\# \\ v = 0 & su \ S_T^\# \\ v(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \Omega^\#. \end{cases}$$

Anzitutto analizzeremo nei dettagli il caso *sottocritico* $\lambda < \lambda_N$, per poi passare al caso *critico* $\lambda = \lambda_N$, il quale avrà bisogno di qualche premessa ulteriore di analisi funzionale.

III.3.2 Un risultato di confronto nel caso sottocritico

In questo contesto, un risultato di confronto può essere enunciato nel modo seguente

Teorema III.3.3 *Supponiamo che sia verificata la condizione di ellitticità (2.2), le ipotesi (2.5) e la (3.11) con* $\lambda < \lambda_N$*. Siano* u *e* v *rispettivamente le soluzioni deboli dei problemi (2.1) e (3.12). Allora per q.o.* $t \in [0,T]$ *si ha la* (*2.6).*

Dim. Come già fatto per il teorema III.2.2, occupiamoci anzitutto di dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (2.1) (analogamente si ragionerà, in merito alla medesima questione, per il problema (3.12)). Si ponga nuovamente

$$a\left(t;\phi,\psi\right)=\int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\left(\cdot,t\right)\phi_{x_i}\psi_{x_j}+c\phi\psi\right]dx\ ,\forall\phi,\psi\in H_0^1\left(\Omega\right);$$

se $\phi, \psi \in H_0^1(\Omega)$, mediante la (3.11) ed utilizzando le disuguaglianze di Pólya-Szegö (teorema II.2.1) di Hölder, di Hardy (lemma III.1.1, (1.4)) e di Hardy-Littlewood, segue che

$$\begin{aligned}
\left|a\left(t;\phi,\psi\right)\right| &\leq M\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\int_{\Omega^\#}c^\#\phi^\#\psi^\#dx\\
&\leq M\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\lambda\int_{\Omega^\#}\left(\frac{\phi^\#}{|x|}\right)\left(\frac{\psi^\#}{|x|}\right)dx\\
&\leq M\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\lambda\left[\int_{\Omega^\#}\left(\frac{\phi^\#}{|x|}\right)^2\right]^{1/2}\left[\int_{\Omega^\#}\left(\frac{\psi^\#}{|x|}\right)^2dx\right]^{1/2}\\
&\leq M\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}+\lambda\lambda_N^{-1}\left[\int_{\Omega^\#}\left|\nabla\phi^\#\right|^2dx\right]^{1/2}\left[\int_{\Omega^\#}\left|\nabla\psi^\#\right|^2dx\right]^{1/2}\\
&\leq \left(M+\lambda\lambda_N^{-1}\right)\left\|\phi\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

da cui la continuità uniforme di $a(t;\cdot,\cdot)$. Per quanto concerne la coercività debole, sia $\phi \in H_0^1(\Omega)$: utilizzando la condizione di ellitticità (2.2), abbiamo

$$
\begin{aligned}
a(t;\phi,\phi) &\geq \int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx + \int_\Omega c\phi^2 dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx - \lambda\lambda_N^{-1}\int_\Omega \left|\nabla\phi^\#\right|^2 dx \\
&\geq \alpha\,\|\phi\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

ove $\alpha := 1 - \lambda\lambda_N^{-1} > 0$, ossia la coercività *forte* di $a(t;\cdot,\cdot)$. Allora, in base al teorema I.1.9 e l'osservazione I.2.1 esiste una ed una sola soluzione u del problema (2.1) che ha derivata rispetto al tempo in $L^2(Q_T)$. Procederemo ora approssimando le soluzioni u e v dei problemi (2.1) e (3.12) con le successioni delle soluzioni dei problemi che si ottengono *troncando* i relativi potenziali singolari. Infatti, come vedremo, la coercività dell'operatore $-\Delta + c(x)I$ implica la limitatezza delle soluzioni di questi problemi approssimanti in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, proprietà che si rivela essere di primaria importanza per poi poter passare a limite (vedi [25], [41], [47]). Più precisamente, approssimiamo u e v respettivamente con le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ delle soluzioni dei seguenti problemi troncati:

$$
\begin{cases}
u_{nt} - \sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij}u_{nx_i}\right)_{x_j} + c_n u_n = f & in\ \ Q_T \\
u_n = 0 & su\ \ S_T \\
u_n(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

e

$$
\begin{cases}
v_{nt} - \Delta v_n = W_n v_n + f^\# & in\ \ Q_T^\# \\
v_n = 0 & su\ \ S_T^\# \\
v_n(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \Omega^\#,
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

dove $c_n(x)$ è la troncata a livello $n \in \mathbb{N}$ del potenziale $c(x)$, cioè la funzione

$$c_n(x) = \begin{cases} n & \text{se} \quad c(x) \geq n \\ c(x) & \text{se} \quad |c(x)| \leq n \\ -n & \text{se} \quad c(x) \leq -n \end{cases}$$

e $W_n(x)$ è la troncata del potenziale $\dfrac{\lambda}{|x|^2}$ a livello $n \in \mathbb{N}$. Poichè $c_n \in L^\infty(\Omega)$, dal teorema III.2.1 abbiamo

$$\int_0^s u_n^*(\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s z_n^*(\sigma,t)\, d\sigma, \tag{3.16}$$

dove z_n è la soluzione del problema simmetrizzato di (3.14), cioè

$$\begin{cases} z_{nt} - \Delta z_n + \left[(c_n^+)_\# - (c_n^-)^\#\right] z_n = f^\# & in \;\; Q_T^\# \\ z_n = 0 & su \;\; S_T^\# \\ z_n(x,0) = u_0^\#(x) & x \in \; \Omega^\#. \end{cases}$$

La condizione (3.11) implica che $c_n^\# \leq W_n$, quindi il principio del massimo consente di dedurre che $z_n \leq v_n$ e dalla (3.16) otteniamo

$$\int_0^s u_n^*(\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s v_n^*(\sigma,t)\, d\sigma \;\;, \forall (s,t) \in [0,|\Omega|] \times [0,T], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

quindi non resta altro da provare che si può passare a limite nei problemi troncati (3.14) e (3.15). Proveremo anzitutto che $\{u_n\}$ è limitata sia in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ che in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Infatti, se

$$a_n(t;\phi,\psi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot,t)\, \phi_{x_i}\psi_{x_j} + c_n\phi\psi\right] dx \;, \forall \phi,\psi \in H_0^1(\Omega)$$

con lo stesso ragionamento utilizzato per ottenere la (3.13) troviamo

$$a_n(t;\phi,\phi) \geq \alpha \|\phi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,, \tag{3.18}$$

per ogni $\phi \in H_0^1(\Omega)$,ove $\alpha = 1 - \lambda\lambda_N^{-1}$. Scegliendo u_n come funzione test nella formulazione debole del problema (3.14), si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t}(t) \cdot u_n(t)\, dx + a_n(t; u_n(t), u_n(t)) = \int_\Omega f(t) \cdot u_n(t)\, dx \tag{3.19}$$

per q.o. $t \in [0, T]$;d'altronde, dal teorema I.1.4 risulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t}(t) \cdot u_n(t)\, dx,$$

mentre utilizzando le disuguaglianze di Hölder e Young otteniamo

$$\int_\Omega f(t) \cdot u_n(t)\, dx \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

per cui da queste ultime e dalle (3.19)-(3.18) discende

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha\|u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.20}$$

per q.o. $t \in [0, T]$. Posto

$$\eta(t) = \|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ e } \xi(t) = \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

da quest'ultima disuguaglianza risulta

$$\eta'(t) \leq \eta(t) + \xi(t), \text{ per q.o. } t \in [0, T]:$$

allora, la disuguaglianza di Gronwall [8] permette di asserire che

$$\eta(t) \leq C\left(\eta(0) + \int_0^t \xi(s)\,ds\right) \text{ per ogni } t \in [0,T],$$

dunque

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right), \tag{3.21}$$

il che dimostra la limitatezza di $\{u_n\}$ nello spazio $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Ritornando alla (3.20), integriamo ambo i membri tra 0 e T ed utilizziamo la (3.21): si ha (qui denotiamo con C ogni raggruppamento di quantità costanti)

$$\|u_n(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha\int_0^T \|u_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt \leq C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right),$$

il che implica

$$\|u_n\|_{L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right),$$

per cui vale la *stima dell'energia*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right). \tag{3.22}$$

Essendo $\{u_n\}$ limitata in $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, possiamo estrarre una sottosucessione, ancora denotata con $\{u_n\}$, tale che

$$u_n \rightharpoonup \hat{u} \text{ debolmente in } L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right).$$

[8] *Disuguaglianza di Gronwall (forma differenziale)* Sia $\eta(t)$ una funzione assolutamente continua e non negativa su $[0,T]$, che soddisfi per quasi ogni t la disuguaglianza differenziale

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\,\eta(t) + \psi(t),$$

dove $\phi(t)$, $\psi(t)$siano funzioni sommabili non negative su $[0,T]$. Allora

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$$

per ogni $t \in [0,T]$.

In base agli stessi ragionamenti che hanno consentito di verificare la continuità su $H_0^1(\Omega)$ della forma $a(t;\cdot,\cdot)$, si verifica che l'operatore lineare

$$\mathcal{L}_n w = -\left(a_{ij} w_{x_i}\right)_{x_j} + c_n w$$

è continuo da $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ed in particolare

$$\|\mathcal{L}_n w\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\,\|w\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}$$

per ogni $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,con C costante indipendente da n: allora, dalla limitatezza di $\{u_n\}$ in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ si ha la limitatezza di $\{\mathcal{L}_n u_n\}$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, ed avendosi $u_n' = -\mathcal{L}_n u_n + f$, risulta che $\{u_n'\}$ è limitata anch'essa in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Dunque, a meno di sottosuccessioni,

$$u_n' \rightharpoonup \tilde{u} \ \text{ debolmente in } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

per cui, da una nota proprietà (cfr. [41]), $\hat{u}' = \tilde{u}$. Poniamo ora

$$X = H_0^1(\Omega)\,,\quad B = L^2(\Omega)\,,\quad Y = H^{-1}(\Omega):$$

evidentemente, dal teorema di compattezza di Kondrachov si ha $X \hookrightarrow B$ con compattezza, mentre $B \hookrightarrow Y$ con continuità; inoltre, $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0,T;X)$ e $\{u_n'\}$ è limitata in $L^1(0,T;Y)$, per cui dal teorema I.1.8 si ha che $\{u_n\}$ è relativamente compatta in $L^2(0,T;B) \equiv L^2(Q_T)$, cioè

$$u_n \to \hat{u} \ \text{ fortemente in } L^2(Q_T)\,, \tag{3.23}$$

a meno di sottosuccessioni. Utilizzando ancora il teorema I.1.8, a patto di scegliere opportunamente gli spazi X, B ed Y, si riesce a mostrare che

$$c_n u_n \to c\hat{u} \ \text{ fortemente in } L^1(Q_T)$$

e quindi, per densità, si riesce a passare a limite nella formulazione debole di (3.14), ottenendo così che $\hat{u}$ è soluzione debole di (2.1), da cui $u = \hat{u}$.

Dunque, non resta altro da passare a limite nella (3.17). A tal scopo, notiamo che dalle (3.22), (3.23) si ha

$$u_n(t) \to u(t) \text{ q.o.su } \Omega \text{ per q.o. } t \in [0,T],$$

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq cost. \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e per q.o. } t \in [0,T],$$

perciò da una nota proprietà (vedi [41], [40], [26]) si ha, in particolare,

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{forte in } L^1(\Omega), \text{ per q.o. } t \in [0,T].$$

Utilizzando la proposizione II.2.5 possiamo allora concludere scrivendo

$$\begin{aligned}\left|\int_0^s u_n^*(\sigma,t)\,d\sigma - \int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma\right| &\leq \|(u_n(t))^* - (u(t))^*\|_{L^1(0,|\Omega|)} \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\|_{L^1(\Omega)} \to 0\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. In una maniera analoga si passa a limite nel problema (3.15) e si ottiene

$$\int_0^s v_n^*(\sigma,t)\,d\sigma \to \int_0^s v^*(\sigma,t)\,d\sigma,$$

per $n \to \infty$, per cui dalla (3.17) segue la tesi. $\square$

III.3.3 Analisi del caso critico

Procederemo ora con l'analisi del caso più interessante, corrispondente all'eventualità in cui $\lambda = \lambda_N$. Anzitutto osserviamo che, dalla disuguaglianza di Hardy, l'operatore $L = -\Delta - \left(\lambda_N/|x|^2\right) I$ *non è coercivo su* $H_0^1(\Omega)$, ma soltanto *positivo*, per cui non possono essere applicate tecniche standard di analisi variazionale, ed il contesto funzionale in cui è necessario lavorare risulta più delicato. Premettiamo, a tale scopo, la seguente disuguaglianza di *Hardy-Poincarè* (cfr.[28]):

Teorema III.3.4 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^N$, *con* $0 \in \Omega$ *e* $N \geq 2$. *Allora* *esiste una costante* $C(\Omega) > 0$ *tale che per ogni* $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda_N \frac{u^2}{|x|^2} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega u^2 dx. \tag{3.24}$$

Il valore ottimale della costante è dato in una palla $B_a(0)$ *da*

$$C(\Omega) = z_0^2/a^2,$$

dove z_0 *è il primo zero della funzione di Bessel* $J_0(r)$, $z_0^2 = 0.57832\ldots$. *Per un generico aperto* Ω *possiamo usare come* C *la costante corrispondente alla palla* $\Omega^\#$ *avente il suo stesso volume.*

Questo risultato si riduce per $N = 2$ alla classica disuguaglianza di Poincarè, mentre per $N \geq 3$ essa rappresenta una combinazione della disuguaglianza di Hardy (lemma III.1.1) e della disuguaglianza di Poincarè.

La (3.24) ammette la seguente generalizzazione:

Teorema III.3.5 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^N$, *con* $0 \in \Omega$ *e* $N > 2$. *Per ogni* $q < 2N/(N-2)$ *esiste una costante* $C(q) > 0$ *tale che per ogni* $u \in H_0^1(\Omega)$ *risulti*

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda_N \frac{u^2}{|x|^2} \right] dx \geq C(q) \|u\|_{L^q(\Omega)}^2 . \tag{3.25}$$

Il successivo teorema esibisce un notevole miglioramento della (3.25), in quanto viene mostrato che il primo membro della stessa (3.25) può, di fatto, essere stimato dal basso dalla norma $W^{1,q}$ di u per ogni $1 \leq q < 2$ (vedi [81]):

Teorema III.3.6 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^N$, *con* $0 \in \Omega$ *e* $N > 2$. *Allora per ogni* $1 \leq q < 2$ *esiste una costante* $C(q, \Omega) > 0$ *tale che per ogni* $u \in H_0^1(\Omega)$ *risulti*

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda_N \frac{u^2}{|x|^2} \right] dx \geq C(q,\Omega) \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2 . \tag{3.26}$$

Il nostro scopo è ora quello di costruire uno spazio adatto in cui ambientare le soluzioni dei problemi ai valori al contorno (2.1) e (3.12), in quanto, come si è visto, esso non può essere identificato con l'usuale spazio dell'energia H_0^1. Faremo le seguenti ipotesi:

(3.27) *i coefficienti* a_{ij} non dipendono da t,

(3.28)
$$c(x) \leq 0$$
$$|c(x)| \leq \frac{\lambda_N}{|x|^2}, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Si noti che la (3.26) è più forte rispetto alla (3.11). Si ponga, dunque

$$(u,v)_{\mathcal{E}} := \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, u_{x_i} v_{x_j} + c(x)\, uv \right] dx, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

ossia $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{E}}$ è la forma bilineare associata all'operatore

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j \left(a_{ij}(x)\, \partial_i\right) + c(x)\, I.$$

Poichè dalla disuguaglianza di Hardy-Poincarè migliorata (3.26), dalla(2.2) e dalla (3.28) risulta, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ e $1 \leq q < 2$

$$\begin{aligned} (u,u)_{\mathcal{E}} &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_j} + c(x)\, u^2 \right] dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 - \lambda_N \frac{u^2}{|x|^2} \right] dx \\ &\geq C(q,\Omega)\, \|u\|^2_{W_0^{1,q}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.29}$$

si ha che $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{E}}$ è un prodotto interno ad $H_0^1(\Omega)$, chiamato *prodotto interno ener-*

getico, come descritto in [88]. La corrispondente *norma energetica* è definita da

$$\|u\|_{\mathcal{E}} := (u,u)_{\mathcal{E}}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_j} + c(x)\, u^2 \right] dx \right)^{1/2}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lo spazio $H_0^1(\Omega)$, dotato del prodotto interno energetico $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{E}}$ è un caso particolare di *spazio energetico*, e viene denotato con $(H_0^1(\Omega))_{\mathcal{E}}$. Poichè $(H_0^1(\Omega))_{\mathcal{E}}$ non è, a priori, uno spazio di Hilbert, denotiamo con $H(\Omega)$ lo spazio di Hilbert ottenuto come *completamento di* $(H_0^1(\Omega))_{\mathcal{E}}$.

In base alla (3.29) si ha l'immersione continua

$$H(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q \in [1,2)$$

e l'immersione continua e compatta

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow H_0^s(\Omega),$$

con $0 \leq s < 1$ e $q = q(s)$ sufficientemente vicino a 2 (cfr.[1]): dunque, scegliendo q opportunamente, si ha l'immersione compatta

$$H(\Omega) \hookrightarrow H_0^s(\Omega).$$

Poichè $H_0^s(\Omega)$ è immerso con compattezza in $L^2(\Omega)$ (vedi ancora [1]), possiamo definire un'immersione compatta

$$H(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

D'altronde, si ha

$$H_0^1(\Omega) \subseteq H(\Omega) \subseteq \bigcap_{q<2} W_0^{1,q}$$

per cui si possono considerare le immersioni compatte [9]

$$H(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H'(\Omega)$$

[9] qui $H'(\Omega)$ denota il duale di $H(\Omega)$

e scegliere $L^2(\Omega)$ come spazio "*pivot*", risultando così $(H(\Omega), L^2(\Omega), H'(\Omega))$ una terna hilbertiana (cfr. Cap. I).

In merito al problema (2.1), si consideri ancora la forma bilineare

$$a(\phi,\psi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\,\phi_{x_i}\psi_{x_j} + c\phi\psi \right] dx \text{ , } \forall \phi,\psi \in H_0^1(\Omega) :$$

dalla (3.29) si ha che $a(\cdot,\cdot)$ è coerciva, oltre che continua, su $H(\Omega)$, per cui il teorema I.1.9 consente di affermare che

Teorema III.3.7 *Per ogni $u_0 \in L^2(\Omega)$ ed $f \in L^2(Q_T)$ esiste una ed una sola soluzione debole*

$$u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0,T; H(\Omega)),\ u_t \in L^2(0,T; H'(\Omega))$$

del problema di evoluzione (2.1).

Analogamente si ragiona per il problema (3.12), riuscendone così a determinare un'unica soluzione

$$v \in C\left([0,T]; L^2\left(\Omega^\#\right)\right) \cap L^2\left(0,T; H\left(\Omega^\#\right)\right),\ v_t \in L^2\left(0,T; H'\left(\Omega^\#\right)\right),$$

per ogni $u_0 \in L^2(\Omega)$ ed $f \in L^2(Q_T)$.

Passiamo ora alla determinazione di un risultato di confronto tra la soluzione u di (2.1) e la soluzione v di (3.12). A tale proposito, si può enunciare il seguente

Teorema III.3.8 *Supponiamo che sia verificata la condizione di ellitticità (2.2), le ipotesi (2.5), (3.27) e la (3.28). Siano u e v rispettivamente le soluzioni deboli dei problemi (2.1) e (3.12). Allora per q.o. $t \in [0,T]$ si ha la (2.6).*

Dim. La dimostrazione è molto simile a quella del teorema III.3.3. Difatti, se consideriamo i problemi troncati (3.14), (3.15) con $\lambda = \lambda_N$, si ha la (3.17). Il secondo passo consiste nell'approssimare le soluzioni u e v con le successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$

di tali problemi troncati. Per far questo si dimostra che $\{u_n\}$ (ed analogamente si ragiona per $\{v_n\}$) è limitata in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H(\Omega))$. Per verificare ciò, si osservi che in luogo della (3.18) troviamo,

$$\begin{aligned}
a_n(\phi,\phi) &= \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\,\phi_{x_i}\phi_{x_j} + c_n\phi^2\right] dx \\
&\geq \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\,\phi_{x_i}\phi_{x_j} + c\phi^2\right] dx \\
&= \|\phi\|^2_{H(\Omega)}
\end{aligned}$$

per cui gli stessi ragionamenti danno luogo alla (3.20) conducono, in questo caso, alla

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u_n(t)\|^2_{H(\Omega)} \leq \|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Applicando a quest'ultima la disuguaglianza di Gronwall, si otterrà dunque la stima dell'energia

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2(0,T;H(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q_T)}\right)$$

e gli stessi ragionamenti che si seguono nel teorema III.3.3 consentono di affermare che

$$u_n \rightharpoonup u \text{ debole in } L^2(0,T;H(\Omega))$$

$$u_n \to u \text{ forte in } L^2(Q_T).$$

Analogamente si ottiene che

$$v_n \rightharpoonup v \text{ debole in } L^2\left(0,T;H\left(\Omega^\#\right)\right)$$

$$v_n \to v \text{ forte in } L^2(Q_T^\#)$$

e passando a limite nella (3.17) si ha la (2.6). □

Restando ancora nell'ambito del caso critico $\lambda = \lambda_N$, vogliamo ora illustrare un'ulteriore metodologia per pervenire alla stima (2.6), in alternativa a quella appena esposta lungo le linee dimostrative del teorema III.3.8. Per far questo, lasceremo inalterata la condizione (3.11) e supporremo che i coefficienti principali possano anche dipendere dal tempo, ma imporremo opportune condizioni sui dati del problema (2.1). Precisamente, vale il seguente risultato:

Teorema III.3.9 *Si assumano verificate la condizione di ellitticità (2.2), le ipotesi (2.5) e la (3.11) con* $\lambda = \lambda_N$*. Si supponga, inoltre, che i dati del problema (2.1) abbiano le seguenti, ulteriori proprietà di regolarità*

$$u_0 \in L^\infty(\Omega)\,,\ u_0 \geq 0$$
$$f \in L^\infty(0,T;L(2,\infty))\,,\ f \geq 0. \tag{3.30}$$

Allora ciascuno dei problemi (2.1) e (3.12) ammette una soluzione nel senso delle distribuzioni, che denoteremo rispettivamente con u *e* v*. Queste soluzioni sono tali che*

$$u \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))\,,\ \ |\nabla u| \in \mathcal{M}^p(Q_T)$$
$$v \in L^\infty\left(0,T;L^q\left(\Omega^\#\right)\right),\ \ |\nabla v| \in \mathcal{M}^p\left(Q_T^\#\right),$$

ove $q \in [1,2^*)$, $p = 2q/(q+1)$ *e* $\mathcal{M}^p$ *è lo spazio di Marcinkiewicz di esponente* p*. Inoltre, vale ancora la disuguaglianza (2.6).*

Osservazione III.3.1 Prima di passarne alla dimostrazione, facciamo qualche commento sul teorema III.3.9. C'è da dire anzitutto che esso esibisce un risultato di *esistenza* delle soluzioni, sia per il problema (2.1) che per il suo simmetrizzato (3.12), le quali si ottengono nel senso delle distribuzioni. Va altresì notato che queste soluzioni posseggono gradiente (rispetto alle variabili spaziali) che può non appartenere all'usuale spazio $L^2(Q_T)$ (come le soluzioni nello spazio dell'energia), ma ad uno spazio di Marcinkiewicz $\mathcal{M}^p$ che risulta, a priori, più grande, qualunque sia il valore di q nell'intervallo $[1,2^*)$: in questo senso, il contesto in cui si trattano le soluzioni è più ampio di quello utilizzato per il teorema II.3.9. D'altro canto, la risposta alla questione inerente l'*unicità* di tali tipi di soluzioni sembra essere (in prima analisi) negativa. Le ipotesi (3.30) sono, infine, di natura puramente tecnica, come si potrà evincere dal meccanismo iterativo della dimostrazione, che prende spunto dalla parte contenuta in [47] e riguardante il caso critico.

Dimostrazione del teorema III.3.9. Al fine di costruire un'approssimazione per il problema (2.1), cominciamo dal problema

$$(P_0)\quad \begin{cases} u_t^{(0)} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij} u_{x_i}^{(0)}\right)_{x_j} + c^+ u^{(0)} = f & in\ \ Q_T \\ u^{(0)} = 0 & su\ \ S_T \\ u^{(0)}(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

che ha, sotto le nostre ipotesi, un'unica soluzione non negativa $u^{(0)}$. Definiamo poi $u^{(n)}$ come la soluzione del problema troncato

$$(P_n)\quad \begin{cases} u_t^{(n)} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \left(a_{ij} u_{x_i}^{(n)}\right)_{x_j} + c^+ u^{(n)} = c_n^- u^{(n-1)} + f & in\ \ Q_T \\ u^{(n)} = 0 & su\ \ S_T \\ u^{(n)}(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

dove c_n^- è la troncata a livello $n \in \mathbb{N}$ di c^-. Proveremo ora per induzione che per ogni $t \in [0,T]$,

$$(3.31)\qquad \int_0^s u^{(n)*}(\sigma,t)\,d\sigma \le \int_0^s v^{(n)*}(\sigma,t)\,d\sigma\ ,\ \forall s \in [0,|\Omega|]\,, \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

dove, per ciò che riguarda il problema (3.12), $v^{(0)}$ è la soluzione del problema

$$\left(P_0^{\#}\right)\quad \begin{cases} v_t^{(0)} - \Delta v^{(0)} = f^{\#} & in\ \ Q_T^{\#} \\ v^{(0)} = 0 & su\ \ S_T^{\#} \\ v^{(0)}(x,0) = u_0^{\#}(x) & x \in \Omega^{\#}, \end{cases}$$

e $\left\{v^{(n)}\right\}$ è la successione delle soluzioni dei seguenti problemi costruiti per induzione:

$$\left(P_n^{\#}\right)\quad\begin{cases} v_t^{(n)} - \Delta v^{(n)} = W_n v^{(n-1)} + f^{\#} & in\ \ Q_T^{\#} \\ v^{(n)} = 0 & su\ \ S_T^{\#} \\ v^{(n)}\left(x,0\right) = u_0^{\#}\left(x\right) & x \in \Omega^{\#}. \end{cases}$$

Per $n = 0$, dal teorema II.4.3 si ha

$$\int_0^s u^{(0)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma \leq \int_0^s v^{(0)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma \quad \forall\left(s,t\right) \in \left[0,|\Omega|\right] \times \left[0,T\right].$$

Supponiamo, dunque, che la (3.31) sia vera per $(n-1)$ e mostriamo che essa è vera anche per n. Si ponga

$$\varphi := c_n^- u^{(n-1)} + f,$$
$$\psi := W_n v^{(n-1)} + f^{\#}$$

e proviamo che

(3.32) $$\int_0^s \varphi^*\left(\sigma,t\right)d\sigma \leq \int_0^s \psi^*\left(\sigma,t\right)d\sigma.$$

Infatti, dalla proposizione II.2.7 segue

$$\begin{aligned}\int_0^s \varphi^*\left(\sigma,t\right)d\sigma &\leq \int_0^s \left[c_n^- u^{(n-1)}\right]^* d\sigma + \int_0^s f^*\left(\sigma,t\right)d\sigma \\ &\leq \int_0^s \left(c_n^-\right)^* u^{(n-1)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma + \int_0^s f^*\left(\sigma,t\right)d\sigma.\end{aligned} \tag{33}$$

Dall'ipotesi di induzione e dalla proposizione II.2.6, troviamo

$$\int_0^s \left(c_n^-\right)^* u^{(n-1)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma \leq \int_0^s \left(c_n^-\right)^* v^{(n-1)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma,$$

per cui dalla (3.11) discende,

$$\int_0^s \left(c_n^-\right)^* u^{(n-1)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma \leq \int_0^s W_n^* v^{(n-1)*}\left(\sigma,t\right)d\sigma,$$

cosicchè la (3.33) implica

$$\begin{aligned}\int_0^s \varphi^* (\sigma,t)\, d\sigma &\leq \int_0^s W_n^* v^{(n-1)*} (\sigma,t)\, d\sigma + \int_0^s f^* (\sigma,t)\, d\sigma \\ &= \int_0^s \psi^* (\sigma,t)\, d\sigma.\end{aligned}$$

Allora, dalla (3.32) e applicando ancora il teorema II.4.3 [10] si ha

$$\int_0^s u^{(n)*} (\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s v^{(n)*} (\sigma,t)\, d\sigma,$$

per cui la (3.31) vale per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

D'altra parte, il principio del massimo consente di asserire che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sono successioni crescenti di funzioni non negative. Si ponga

$$u := \lim_{n\to\infty} u^{(n)}$$

$$v := \lim_{n\to\infty} v^{(n)}.$$

Al fine di provare che u e v sono soluzioni nel senso delle distribuzioni dei problemi (2.1)-(3.12), dobbiamo trovare opportune stime a priori. Per far questo, costruiamo anzitutto una opportuna *soprasoluzione stazionaria* di (3.12) (cfr.[47]). Osserviamo, dunque, che dall'ipotesi di regolarità su f nelle (3.30) discende

$$f^\# (x,t) \leq \frac{B}{|x|^{N/2}}, \quad \forall x \in \Omega^\# \setminus \{0\}, \quad \text{per q.o. } t \in (0,T), \tag{3.34}$$

per qualche costante $B > 0$. Si consideri la funzione

$$\phi(x) := \frac{A}{|x|^{\frac{N}{2}-1}} - \frac{B}{|x|^{\frac{N}{2}-2}}, \; x \in \Omega^\# \setminus \{0\},$$

dove $A > 0$ è scelto sufficientemente grande da fare in modo che $\phi \geq u_0^\#$ in

[10] Il teorema II.4.3 vale ancora se nel problema simmetrizzato sostituiamo il riordinamento $f^\#$di f con una funzione g tale che $g \in L^2(Q_T^\#)$ e

$$g(x,t) = g^\# (x,t) \;\; \forall x \in \Omega^\# \text{ per q.o. } t \in [0,T],$$

$$\int_0^s f^* (\sigma,t)\, d\sigma \leq \int_0^s g(\sigma,t)\, d\sigma \;\; \forall s \in [0,|\Omega|], \text{ per q.o. } t \in [0,T].$$

$\Omega^{\#}\backslash\{0\}$ (e ciò risulta possibile in quanto $u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$). Si può facilmente verificare che ϕ è una soluzione stazionaria dell'equazione

$$v_t - \Delta v = \frac{\lambda_N}{|x|^2}v + \frac{B}{|x|^{N/2}}$$

in $\Omega^{\#}\backslash\{0\}$. Mediante la (3.34) risulta allora chiaro che ϕ è una soprasoluzione stazionaria del problema (3.12). Inoltre,

$$\phi \in L^q\left(\Omega^{\#}\right) \text{ , per ogni } q \in [1, 2^*).$$

D'altra parte, $\left(v^{(0)} - \phi\right)_+ = 0$ sulla frontiera parabolica $\Gamma = \left(\Omega^{\#} \times \{0\}\right) \cup \left(\partial\Omega^{\#} \times [0, T]\right)$ di $Q_T^{\#}$ e $\left(v^{(0)} - \phi\right)_t - \Delta\left(v^{(0)} - \phi\right) \leq 0$: quindi, moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per $\left(v^{(0)} - \phi\right)^+$ ed integrando troviamo $v^{(0)} \leq \phi$. Analogamente,

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \ldots \leq v^{(n)} \leq \phi.$$

Abbiamo dunque

$$v = \lim_{n\to\infty} v^{(n)} \leq \phi.$$

Dal teorema di Lebesgue deduciamo

$$\|v\|^q_{L^q(Q_T^{\#})} = \lim_{n\to\infty} \left\|v^{(n)}\right\|^q_{L^q(Q_T^{\#})} \leq T\,\|\phi\|^q_{L^q(\Omega^{\#})} < \infty,$$

per ogni $1 \leq q < 2^*$, quindi $v^{(n)} \to v$ in $L^q(Q_T^{\#})$ per ogni $1 \leq q < 2^*$. Al fine di provare v è soluzione nel senso delle distribuzioni del problema (3.12) è sufficiente mostrare che

$$\nabla v^{(n)} \to \nabla v \quad in\ (L^1(Q_T^{\#}))^N : \tag{3.35}$$

infatti, utilizzando questa proprietà si potrà passare a limite in $W^{1,1}$ nella formulazione debole dei problemi troncati $(P_n^{\#})$ ed ottenere

$$\int_{Q_T^{\#}} \left\{\nabla v \cdot \nabla\varphi - v\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\} dxdt = \lambda_N \int_{Q_T^{\#}} \frac{v\varphi}{|x|^2}dxdt + \int_{Q_T^{\#}} f^{\#}\varphi dxdt + \int_{\Omega^{\#}} u_0^{\#}(x)\,\varphi(x,0)\,dx,$$

per ogni funzione $\varphi \in C^{\infty}\left(\overline{Q_T^{\#}}\right)$ tale che $\varphi \equiv 0$ su $S_T^{\#}$ e $\varphi(T) = 0$ su $\Omega^{\#}$ (che implica, di fatto, la definizione di soluzione data dalla (3.5)).

Utilizzando un ragionamento analogo a quello esposto nel lemma lemma 6.4 contenuto in [47] si può provare la seguente stima per il gradiente di $v^{(n)}$ nello spazio di Marcinkiewicz $\mathcal{M}^p$:

$$\left|\left\{(x,t) \in Q_T^{\#} \mid \left|\nabla v^{(n)}(x,t)\right| > h\right\}\right| \le C(N,T)\, h^{-p},$$

dove $p = 2q/(q+1)$ e $1 \le q < 2^*$. E' allora possibile applicare il lemma 6.5 contenuto nel medesimo lavoro [47] per concludere che

$$\begin{aligned} \nabla v^{(n)} &\to \nabla v \quad \text{q.o. ed in misura,} \\ \nabla v^{(n)} &\to \nabla v \quad \text{in } (L^1(Q_T^{\#}))^N. \end{aligned}$$

Riguardo alla funzione u, notiamo anzitutto che la (3.31) implica che ogni norma L^q di $u^{(n)}$ può essere stimata dalla stessa norma di $v^{(n)}$ (cfr. proposizione II.2.6). In particolare

$$(3.36)\int_0^T \int_\Omega \left|u^{(n)}(x,t)\right|^q dxdt \le \int_0^T \int_{\Omega^{\#}} \left|v^{(n)}(x,t)\right|^q dxdt \le T\,\|\phi\|^q_{L^q(\Omega^{\#})},$$

per ogni $q \in [1,2^*)$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Allora, utilizzando ancora il teorema di Lebesgue troviamo

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^q\, dxdt \le T\,\|\phi\|^q_{L^q(\Omega^{\#})},$$

quindi $u \in L^q(Q_T)$ e $u^{(n)} \to u$ in $L^q(Q_T)$ per ogni $q \in [1,2^*)$. Dalla (3.36) otteniamo

$$\left|\left\{(x,t) \in Q_T \mid \left|u^{(n)}(x,t)\right| > h\right\}\right| \le T\left(\frac{\|\phi\|_{L^q(\Omega^{\#})}}{h}\right)^q \equiv C(N,T)\, h^{-q},\ q \in [1,2^*),$$

e si può ancora utilizzare il procedimento del lemma 6.4 di [47] per avere che

$$\left|\left\{(x,t) \in Q_T^{\#} \mid \left|\nabla u^{(n)}(x,t)\right| > h\right\}\right| \le C(N,T)\, h^{-p}.$$

Dunque, applicando ancora il lemma 6.5 in [47] deduciamo

$$\nabla u^{(n)} \to \nabla u, \quad \text{q.o. ed in misura}$$
$$\nabla u^{(n)} \to \nabla u \quad \text{ in } (L^1(Q_T))^N,$$

cioè u è soluzione del problema (2.1) nel senso delle distribuzioni. Infine, passando a limite nella (3.31) otteniamo la (2.6) e quindi la tesi. $\square$

Bibliografia

[1] R. A. ADAMS: *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] J. A. AGUILAR CRESPO, I. PERAL ALONSO: *Global behaviour of the Cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations,* SIAM J. Math. Anal., (6) **31**, 1270-1294, 2000

[3] A. ALBERICO, V. FERONE: *Regularity properties of solutions of elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *in limit cases,* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, **6** (1995), 237-250.

[4] A. ALVINO: *Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., s. 8, **52** (1977), 335-340.

[5] A. ALVINO: *Un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz,* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli, **44** (1977), 105-112.

[6] A. ALVINO: *Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz,* Boll. U.M.I., (5) **14**-A (1977), 148-156.

[7] A. ALVINO, G. TROMBETTI: *Esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet,* Proc. of the Intern. Meeting ded. to the memory of prof. C. MIRANDA, Naples (1982), 269-280.

[8] A. ALVINO, P.L. LIONS, G. TROMBETTI: *On optimization problem with prescribed rearrangements,* Nonlin. Anal. T.M.A., **13** (1989), 185-220.

[9] A. ALVINO, P.L. LIONS, G. TROMBETTI: *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization,* Ann. Inst. Henri Poincaré, (2) **7** (1990), 37-65.

[10] A. ALVINO, P.L. LIONS, G. TROMBETTI: *Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization: a new approach,* Differential and Integral Equations, (4) **1** (1991), 25-50.

[11] A.ALVINO, J.I.DIAZ, P.L.LIONS, G.TROMBETTI: *Elliptic Equations and Steiner Symmetrization,* Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLIX, 217-236 (1996).

[12] A. ALVINO, S. MATARASSO, G. TROMBETTI: *Variational inequalities and rearrangements,* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, **3** (1992), 271-285.

[13] A. ALVINO, S. MATARASSO and G. TROMBETTI: *Elliptic boundary value problems: comparison results via symmetrization,* Ric. Mat., (2) **51** (2002), 341-356.

[14] A. ALVINO, R. VOLPICELLI, B. VOLZONE: *Sharp estimates for solutions of parabolic equations with a lower order term,* accettato per la pubblicazione su Journal of Applied Functional Analysis.

[15] A. ALVINO, R. VOLPICELLI, B. VOLZONE: *Comparison results for solutions of parabolic equations with a zero order term,* sottomesso per la pubblicazione su "Le Matematiche" di Catania.

[16] L. AMBROSIO, N. FUSCO, D. PALLARA: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[17] J. P. AUBIN: *Un théorème de compacité*, C.R. Acad. Sci., **256** (1963), 5042-5044.

[18] C. BANDLE: *On symmetrizations in parabolic equations,* J.Anal. Math., **30** (1976), 98-112.

[19] C. BANDLE: *Isoperimetric Inequalities for a class of nonlinear parabolic equations,* ZAMP 27 (1976), 377-384.

[20] C. BANDLE: *Isoperimetric Inequalities and Applications,* Monographs and Studies in Math., No. 7, Pitman, London, 1980.

[21] P. BARAS, J. A. GOLDSTEIN: *The heat equation with a singular potential,* Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 121-139.

[22] C. BARDOS: *A regularity theorem for parabolic equations,* J. Funct. Anal., (2) **7** (1971), 311-322.

[23] C. BENNET, R. SHARPLEY: *Interpolation of Operators*, Pure and Appl. Math. Vol. 129, Academic Press, 1988.

[24] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS: *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, Collection "Méthodes Mathématiques de l'Informatique", 1978.

[25] L. BOCCARDO, F. MURAT: *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations,* Nonlin. Anal. T.M.A., (6) **19** (1992),

581-597.

[26] H. BREZIS: *Analisi funzionale - Teoria e applicazioni,* Liguori Editore, 1986.

[27] H. BREZIS, TH. CAZENAVE, Y. MARTEL, A. RAMIANDRISOA: *Blow up for* $u_t - \Delta u = g(u)$ *revisited,* Adv. Differ. Equat., **1** (1996), 73-90.

[28] H. BREZIS, J. L. VAZQUEZ: *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic equations,* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **10** (1997), 443-469.

[29] X. CABRÉ, Y. MARTEL: *Existence versus instantaneous blow-up for linear heat equations with singular potentials*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., (11) **329** (1999), 973-978.

[30] B. V. BRUNT and M. CARTER: *The Lebesgue Stieltjes Integral,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000, ISBN: 0-387-95012-5

[31] G. CHITI: *Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche,* Boll. U.M.I., (5) **16-A** (1979), 178-185.

[32] M. CHIPOT: *Elements of Nonlinear Analysis,* Birkhäuser Advanced Texts, 2000.

[33] K.M. CHONG, N.M. RICE: *Equimeasurable rearrangements of functions*, Queen's papers in pure and applied mathematics, No.28, Queen's University, Ontario, 1971.

[34] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura* $(r-1)-$ *dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni,* Ann. Mat. Pura e Appl., **36** (1954), 191-213.

[35] E. DE GIORGI: *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita,* Atti Accad. Naz. Lincei Mem.

Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I, **5** (1958), 33-44.

[36] J. DENY, J. L. LIONS: *Les espaces du type de Beppo Levi,* Annales Fourier, **5** (1953-'54), 305-370.

[37] J.I. DÍAZ and J. MOSSINO: *Isoperimetric inequalities in the parabolic obstacle problems,* J. Math. Pures Appl. (9), (3) **71** (1992), 233-266.

[38] J.I. DÍAZ: *Simetrizacion de problemas parabolicos no lineales: aplicacion a ecuaciones de reaccion-difusion,* Mem. Real Academia De Ciencias Exactas, Fisicas Y Naturales, Serie de Ciencias Exactas, Tomo XXVIII, 1991.

[39] J.I. DÍAZ: *Symmetrization of nonlinear elliptic and parabolic problems and applications: a particular overview,* Progress in partial differential equations: elliptic and parabolic problems (Pont-à-Mousson, 1991), 1–16, Pitman Res. Notes Math. Ser., 266, Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.

[40] E. DIBENEDETTO: *Real Analysis,* Birkhäuser Advanced Texts, 2002.

[41] L. C. EVANS: *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, A.M.S., 1998.

[42] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.

[43] H. FEDERER: *Geometric Measure Theory,* Springer Verlag, New York, 1969.

[44] V. FERONE and A. MERCALDO: *A second order derivation formula for functions defined by integrals,* C.R. Acad. Sci. Paris, t.326, Série I (1998), 549-554.

[45] W. FLEMING, R. RISHEL: *An integral formula for total gradient variation,* Arch. Math., **11**, (1960), 218-222.

[46] A. FRIEDMAN: *Partial Differential Equations of Parabolic Type,* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1964.

[47] J. GARCÍA AZORERO, I. PERAL ALONSO: *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems,* J. Diff. Eq. (2) **144** (1998), 441-476.

[48] D. GILBARG, N. TRUDINGER: *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, 1977.

[49] E. GIUSTI: *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Birkhäuser, Boston 1984.

[50] L. M. GRAVES: *Theory of functions of real variables,* McGraw-Hill, New York, 1956.

[51] F. GUGLIELMINO: *Sulla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per operatori parabolici,* Ricerche di Matematica, **12** (1963), 44-66.

[52] F. GUGLIELMINO: *Ulteriori contributi alla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi parabolici,* Ricerche di Matematica, **12** (1963), 140-150.

[53] G. H. HARDY , J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA: *Inequalities,* Cambridge University Press, 1964.

[54] B. KAWHOL: *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Math., No. 1150, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.

[55] O. A. LADYZENSKJA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA: *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, A.M.S., 1968.

[56] J. L. LIONS: *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites,* Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[57] J. L. LIONS: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[58] J. L. LIONS, E. MAGENES: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications,* Vol.1-3, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[59] P.L. LIONS: *Quelques remarques sur la symétrisation de Schwarz,* Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminars, v.1, Pitman 1981.

[60] Y. MARTEL: *Complete blow up and global behaviour of solutions of* $u_t - \Delta u = g(u)$, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire, **15** (1998), 687-723.

[61] J. MOSSINO: *Directional Derivative of the Increasing Rearrangement Mapping and Application to a Queer Differential Equation in Plasma Physics*, Duke Math. J., (3) **48** (1981), 475-495.

[62] J. MOSSINO: *Inégalités isopérimétriques et applications en physique,* Collection Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.

[63] J. MOSSINO, J.M. RAKOTOSON: *Isoperimetric inequalities in parabolic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1986), 51-73.

[64] I. PERAL ALONSO, J. L. VAZQUEZ: *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term,* Arch. Rational Mech. Anal., **129** (1995), 201-224.

[65] G. PÓLYA, G. SZEGÖ: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics,* Ann.of Math. Studies, n.27, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[66] M.H. PROTTER, H.F. WEINBERGER: *Maximum principles in differential equations*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1976.

[67] W. RUDIN: *Analisi reale e complessa,* Bollati Boringhieri, 1974.

[68] G. SANSONE, R.CONTI: *Equazioni differenziali non lineari,* Edizioni Cremonese, Roma, 1956.

[69] J. SIMON: *Compact Sets in the Space* $L^p\left(0,T;B\right)$, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **146** (1987), 65-96.

[70] G. STAMPACCHIA: *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Séminaire sur les équations aux dérivées partielle, Collège de France, 1964.

[71] G. STAMPACCHIA: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Ann. Inst. Fourier Groenoble, **15** (1965).

[72] A. SZULKIN, M. WILLEM: *Eigenvalue problems with indefinite weight,* Studia Math., (2) **135** (1999), 191–201.

[73] G. TALENTI: *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4) **3** (1976), 697-718.

[74] G. TALENTI: *Best Constant in Sobolev Inequality,* Ann. Mat. Pura Appl., **110** (1976), 353-372.

[75] G. TALENTI: *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces*, Annal. Mat. Pura Appl. (4) **120** (1979), 159-184.

[76] G. TALENTI: *Linear Elliptic P.D.E.'s: Level Sets, Rearrangements and a priori Estimates of Solutions*, Boll. U.M.I., (6) **4**-B (1985), 917-949.

[77] G. TALENTI: *Rearrangements of functions and partial differential equations,* Nonlinear diffusion problems (Montecatini Terme, 1985), 153-178, Lect. Notes in Math., 1224, Springer, Berlin-New York, 1986.

[78] R. TEMAM: *Navier-Stokes equations,* North-Holland, 1979.

[79] J.L. VÁZQUEZ: *Symmetrization for* $u_t = \Delta\varphi(u)$ *and applications* (French), C.R. Acad. Sci. Paris, Série I , (2) **295** (1982), 71-74.

[80] J. L. VÁZQUEZ: *Domain of existence and blowup for the exponential reaction-diffusion equation,* Indiana Univ. Math. J., (2) **48** (1999), 677-709.

[81] J. L. VÁZQUEZ, E. ZUAZUA: *The Hardy Inequality and the Asymptotic Behaviour of the Heat Equation with an Inverse-Square Potential,* Journal of Functional Analysis, **173** (2000), 103-153.

[82] J.L. VÁZQUEZ: *Symmetrization and Mass Comparison for Degenerate Nonlinear Parabolic and related Elliptic Equations,* Advanced Nonlinear Studies, **5** (2005), 87-131.

[83] R. VOLPICELLI: *Comparison results for solutions of parabolic equations,* Ric. Mat. (1) **XLII** (1993), 179-192.

[84] R. VOLPICELLI, B. VOLZONE: *Comparison results for solutions of linear parabolic equations with a singular potential,* preprint 2005 n.29, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, Università degli Studi di Napoli “Federico II”.

[85] R. VOLPICELLI, B. VOLZONE: *Comparison results for solutions of nonlinear parabolic equations with a singular potential,* in preparazione.

[86] H. WEINBERGER: *Symmetrization in uniformly elliptic problems*, Studies in Math. Anal., Stanford Univ. Press, 1962, pp. 424-428.

[87] K. YOSIDA: *Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1974.

[88] E. ZEIDLER: *Applied Functional Analysis,* Appl. Math. Sci., Vol. 108, Springer-Verlag, New York, 1995.

[89] ZIEMER: *Weakly differentiable functions*: *Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation,* Springer, New York, 1989.