

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DEI TRASPORTI “LUIGI TOCCHETTI”**

**DOTTORATO IN
INGEGNERIA DELLE RETI CIVILI E DEI SISTEMI TERRITORIALI
INDIRIZZO INFRASTRUTTURE VIARIE E SISTEMI DI TRASPORTO
XVIII CICLO**

**COORDINATORE: prof. ing. Domenico Pianese
COORDINATORE DI INDIRIZZO: prof. ing. Renato Lamberti**

TESI DI DOTTORATO

**SVILUPPI TEORICI SUI MODELLI DI
SIMULAZIONE DELLA SCELTA DEL
PERCORSO**

**TUTOR: prof. ing. Marino de Luca
prof. ing. Andrea Papola**

CANDIDATO: ing. Vittorio Marzano

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

a mio padre
perché non vi sono bravi allievi
senza grandi maestri

INDICE

Indice.....	3
Introduzione.....	5
1. Modelli di simulazione della scelta del percorso: uno stato dell'arte	8
1.1 Considerazioni introduttive ed ipotesi di lavoro.....	8
1.2 Modelli di utilità aleatoria	10
1.2.1 Modelli GEV	14
1.2.1.1 Logit Multinomiale.....	15
1.2.1.2 Logit Gerarchizzato ad uno e più livelli.....	15
1.2.1.3 Cross-Nested Logit.....	17
1.2.1.4 RNEV/Network GEV.....	21
1.2.2 Probit.....	22
1.2.3 Mixed Logit.....	25
1.3 Modelli di utilità aleatoria per la simulazione della scelta del percorso.....	27
1.3.1 Logit Multinomiale	29
1.3.1.1 C-Logit.....	31
1.3.1.2 Path-size Logit	35
1.3.2 Logit Gerarchizzato.....	37
1.3.3 Cross-Nested Logit.....	37
1.3.3.1 Link-nested Logit	38
1.3.3.2 Paired Combinatorial Logit.....	40
1.3.4 Probit.....	41
1.3.5 Mixed Logit.....	42
1.4 Un'analisi delle proprietà numeriche dei modelli di scelta del percorso.....	44
1.4.1 Rete di Daganzo.....	46
1.4.2 Rete ad esagono.....	51
1.4.3 Rete di Braess	54
1.4.4 Rete a maglia.....	55
1.5 Considerazioni conclusive e spunti di ricerca.....	60
2. Il modello PML per la simulazione della scelta del percorso.....	62
2.1 Introduzione.....	62

2.2 Formulazione del modello PML	62
2.3 Proprietà numeriche.....	66
2.4 Un algoritmo SNL-PML ad enumerazione implicita dei percorsi.....	70
2.5 Applicazione ad un contesto reale	73
2.5.1 Implementazione di un software di calcolo in Visual Basic	73
2.5.2 Applicazione alla rete di Fuorigrotta.....	75
3. Il calcolo delle covarianze nei modelli GEV: analisi teorica ed applicazione al PML.....	78
3.1 Covarianze nei modelli GEV: problemi irrisolti	78
3.2 Richiami di statistica.....	79
3.2.1 Notazione adottata.....	79
3.2.2 Modelli di variabile aleatoria dei valori estremi	81
3.2.2.1 Caso univariato	81
3.2.2.2 Caso multivariato.....	83
3.3 Il calcolo delle covarianze per i modelli GEV.....	85
3.3.1 Procedura di calcolo	85
3.3.2 Logit Multinomiale	86
3.3.3 Logit Gerarchizzato.....	87
3.3.4 Cross-Nested Logit.....	89
3.3.4.1 CNL minimo per tre alternative e due correlazioni	91
3.3.4.2 CNL minimo per tre alternative e matrice di covarianze completa.....	95
3.3.4.3 Generalizzazione della struttura CNL del paragrafo 3.3.4.1	98
3.3.4.4 Generalizzazione della struttura CNL del paragrafo 3.3.4.2.....	102
3.3.4.5 Aspetti operativi per la specificazione di un modello CNL.....	104
3.3.5 Path Multilevel Logit	106
3.4 Modelli di utilità aleatoria additivi ed omoschedasticità.....	111
3.4.1 Relazione tra le classi dei modelli GEV e dei modelli di utilità aleatoria additivi..	112
3.4.2 Homoskedasticity lemma.....	120
4. Cenni su approcci modellistici alternativi per la simulazione della scelta del percorso	125
4.1 Motivazioni dello studio	125
4.2 La teoria dell'eliminazione per aspetti	125
4.2.1 Elimination by aspects (EBA) ed elimination by tree (EBT)	125
4.3 Prospect theory	132
Conclusioni.....	140
Ringraziamenti	144
Bibliografia.....	146

INTRODUZIONE

“Viaggiare, è proprio utile, fa lavorare l’immaginazione. Tutto il resto è delusione e fatica. Il viaggio che ci è dato è interamente immaginario. Ecco la sua forza. Va dalla vita alla morte. Uomini e bestie, città e cose, è tutto inventato. [...] E poi in ogni caso tutti possono fare altrettanto. Basta chiudere gli occhi. È dall’altra parte della vita.”

Louis-Ferdinand Céline, *Viaggio al termine della notte*

“Man mano che il tempo passa cominciamo a vedere
l’infanzia come un paradiso perduto,
e la giovinezza come il tempo in cui non abbiamo saputo
realizzare quel che sognavamo. Dopo è troppo tardi,
e qualunque sciocchezza la chiamiamo esperienza.”

Osvaldo Soriano, *L’ora senz’ombra*

La simulazione di un sistema di trasporto si fonda sull’applicazione di un insieme di modelli matematici che definiscono e caratterizzano le componenti di domanda e di offerta del sistema e ne simulano la reciproca interazione, al fine di determinare le prestazioni del sistema ed il flusso di utenti su ciascuno dei suoi elementi, nell’intervallo temporale assunto come riferimento. Il modello di scelta del percorso è parte del sottosistema di modelli di domanda e consente di simulare in che modo i flussi di domanda, per ciascuna coppia origine-destinazione e per ognuno dei modi di trasporto disponibili, si ripartiscano tra tutti i percorsi ammissibili su rete.

Poiché il contesto di scelta del percorso si caratterizza, soprattutto in ambito urbano, per un numero considerevole di alternative fortemente correlate, è necessario implementare modelli di simulazione che siano in grado di tenere in conto di queste caratteristiche peculiari e che al tempo stesso soddisfino requisiti di semplicità operativa. La struttura matematica di tali modelli, il cui studio è di ampia tradizione e consolidato interesse nell’ingegneria dei sistemi di trasporto, attinge di norma al paradigma della classe dei modelli econometrici di scelta discreta, e più in particolare dei modelli di utilità aleatoria. In tale contesto, è possibile adottare due approcci metodologici differenti per affrontare il problema della numerosità e della correlazione tra alternative. Il primo consiste nell’individuazione a priori, attraverso regole comportamentali ed algoritmi euristici, di un insieme di percorsi effettivamente percepiti dagli utenti ed eventualmente tra di loro indipendenti – termini qui utilizzati in senso intuitivo ma a cui sarà attribuito un preciso significato nel seguito – tra i quali simulare, più o meno agevolmente, la scelta. Il secondo approccio affronta in maniera congiunta e simultanea i processi della definizione dell’insieme delle alternative di scelta e della scelta all’interno di tale insieme, attraverso l’utilizzo di modelli matematici di simulazione in grado di affrontare questo livello di complessità. Sebbene un approccio del primo tipo trovi sempre più ampi riscontri in letteratura, soprattutto nell’ambito della simulazione dinamica dei sistemi di trasporto, l’attenzione è oggi prevalentemente focalizzata sul secondo approccio, cui la presente tesi di dottorato rivolge la sua attenzione.

In tale ambito è ragionevole assumere che un modello di scelta del percorso debba essere in grado di simulare gli effetti delle covarianze tra le utilità dei percorsi preservando al tempo stesso

caratteristiche funzionali che lo rendano operativamente semplice, ovvero dotato di forma chiusa, con un numero ridotto di parametri da calibrare e con la possibilità di implementare un algoritmo di calcolo delle probabilità di scelta ad enumerazione implicita dei percorsi. In virtù di queste ipotesi, la simulazione della scelta del percorso ha ricevuto notevole interesse in letteratura tecnica, in particolare per la sua complessità intrinseca: essa ha storicamente rappresentato un contesto di prova severo per gli strumenti modellistici propri dell'ingegneria dei sistemi di trasporto e dell'econometria, e non di rado significativi avanzamenti teorici, soprattutto nel settore dei modelli di scelta discreta, hanno preso avvio proprio dal tentativo di superare i limiti che i modelli esistenti mostravano se applicati al contesto di scelta del percorso. A fronte di significativi riscontri teorici, il problema non può definirsi ad oggi ancora risolto, in quanto nessuno tra i modelli di scelta del percorso fin qui proposti soddisfa del tutto le proprietà richieste: partendo da questo presupposto, la ricerca in oggetto propone alcuni approfondimenti e sviluppi teorici, nel tentativo di compiere un passo avanti rispetto allo stato dell'arte dei modelli ad oggi reperibili. La tesi di dottorato proposta descrive in dettaglio il percorso di ricerca seguito, articolandosi in quattro capitoli.

Il primo capitolo propone, innanzitutto, uno stato dell'arte dei modelli di utilità aleatoria, che rappresentano come detto il paradigma di gran lunga più consolidato nell'ambito dell'applicazione della teoria delle scelte discrete all'ingegneria dei trasporti; di ciascun modello si descrivono successivamente tutte le specificazioni reperibili in letteratura per l'applicazione al contesto di scelta del percorso. La rispondenza dei modelli considerati ai requisiti teorico-numeriche ed operativi richiesti è poi analizzata attraverso numerose applicazioni su reti test, sia scelte tra quelle di solito utilizzate in letteratura a tale scopo sia predisposte appositamente al fine di evidenziare alcune rilevanti proprietà dei modelli. Ne consegue una tassonomia critica dei modelli di scelta del percorso ad oggi disponibili, che si caratterizza per spunti di innovatività rispetto al pur vasto panorama della letteratura tecnica e che suggerisce numerosi spunti di ricerca.

Sulla scorta di questi risultati, il secondo capitolo propone la formulazione di un nuovo modello di utilità aleatoria per la simulazione del contesto di scelta del percorso, denominato *Path Multilevel Logit* (PML), con l'obiettivo di preservare le proprietà caratteristiche del Probit mantenendo al tempo stesso una forma chiusa. Il modello proposto appartiene alla classe dei modelli di utilità aleatoria di tipo GEV, ed è basato sull'idea di rappresentare la scelta del percorso in maniera disaggregata come il prodotto delle probabilità di scelta di ciascuno degli archi di quel percorso in corrispondenza dei nodi di diversione. Nell'ambito del capitolo si discutono le proprietà teoriche e numeriche del modello PML, si formula un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi per il carico stocastico della rete e si propone un'applicazione ad una rete reale, attraverso un codice di calcolo appositamente predisposto, per un confronto operativo con gli altri modelli disponibili. Tra le proprietà teoriche da analizzare figura naturalmente il modo in cui il modello PML simula gli effetti delle covarianze tra alternative: un'analisi di questo tipo presenta notevoli difficoltà in quanto per la maggior parte dei modelli GEV non si dispone di informazioni circa le covarianze sottiacenti un assegnato contesto di scelta, né esistono in letteratura studi sistematici su questo aspetto.

Il terzo capitolo prende pertanto avvio dalle carenze emerse in letteratura circa la comprensione di alcune proprietà fondamentali dei modelli GEV. Si propone, in primo luogo, un'analisi sistematica del problema covarianze, con particolare riferimento ai modelli di tipo

Cross-Nested, per i quali non si dispone di un'espressione in forma chiusa della relazione esistente tra parametri del modello e corrispondente matrice di covarianze. A tale scopo si approfondiscono innanzitutto alcuni aspetti teorico-numeriche propri della statistica multivariata e dell'integrazione numerica, finalizzati al calcolo numerico delle covarianze; sulla base delle risultanze di tale approfondimento si analizzano i limiti dei modelli GEV nella capacità di riprodurre qualsiasi valore di correlazione tra coppie di alternative e si suggeriscono coerentemente alcune indicazioni circa la specificazione da adottare per riprodurre una data matrice di covarianza. A margine di tale studio, si propone una chiave di lettura circa l'effettiva possibilità di riprodurre contesti di scelta eteroschedastici, di cui la scelta del percorso rappresenta un esempio classico, attraverso modelli di utilità aleatoria additivi: tale aspetto conduce ad interessanti prospettive di approfondimento sui modelli GEV. L'analisi delle covarianze è infine estesa al modello PML al fine di caratterizzarne compiutamente le proprietà teoriche e completare lo studio iniziato nel secondo capitolo.

Il percorso di ricerca proposto nei primi tre capitoli consente di individuare i limiti effettivi che i modelli della classe GEV, e più in generale i modelli di utilità aleatoria, presentano quando applicati alla simulazione della scelta del percorso. Per questo motivo appare interessante accennare ad approcci modellistici alternativi, che stanno trovando ampio interesse nella letteratura più recente, al fine di verificare se possano rappresentare in prospettiva una valida alternativa ai modelli di utilità aleatoria. Il capitolo quarto propone quindi un'analisi delle teorie econometriche dell'eliminazione per aspetti (Elimination-by-aspects), significativa per lo studio in esame anche in virtù di alcune analogie formali che possono essere stabilite con il modello PML, e della scelta tra prospetti (Prospect Theory), che permette di tener conto in maniera più realistica del comportamento di scelta degli utenti simulando esplicitamente gli effetti dei fattori di incertezza e di rischio.

A conclusione della tesi si riassumono le tematiche affrontate e gli avanzamenti di ricerca raggiunti per ciascuna di esse, individuando inoltre alcuni aspetti meritevoli di ulteriore approfondimento.

1. MODELLI DI SIMULAZIONE DELLA SCELTA DEL PERCORSO: UNO STATO DELL'ARTE

1.1 Considerazioni introduttive ed ipotesi di lavoro

La ricerca oggetto della tesi di dottorato affronta il problema della simulazione della scelta del percorso attraverso modelli matematici di simulazione coerenti con il paradigma della teoria delle scelte discrete. Il termine *percorso* è utilizzato nel seguito per indicare una sequenza ordinata di archi (tale che il nodo finale del generico arco coincida col nodo iniziale del successivo) che collega una coppia origine-destinazione senza passare per due volte attraverso lo stesso nodo; esso rappresenta quindi l'unità elementare di scelta per un'assegnata coppia origine-destinazione.

È possibile individuare due tipologie di comportamento di scelta del percorso, a seconda delle caratteristiche del sistema di trasporto cui ci si riferisce. In particolare, si parla di scelta di tipo preventivo, qualora tutte le scelte vengano effettuate prima di intraprendere lo spostamento, e di scelta di tipo misto preventivo/adattivo, se la scelta del percorso avviene in due fasi successive, ovvero formulando una strategia preventiva di viaggio prima di intraprendere lo spostamento e successivamente scegliendo un percorso durante l'effettuazione dello spostamento a seguito del verificarsi di circostanze non predicibili a priori. Nel seguito del lavoro si assumerà un comportamento di scelta di tipo preventivo, salvo ove espressamente indicato.

Un modello di scelta del percorso fornisce la probabilità $p^i[k/oshdm]$ che un utente appartenente alla categoria i utilizzi un percorso k relativo al modo m per recarsi da o a d per lo scopo s nella fascia oraria h . La specificazione completa di un modello di scelta del percorso richiede la definizione dell'insieme delle alternative di scelta e della forma funzionale del modello che simula la scelta in tale insieme.

La definizione dell'insieme dei percorsi ammissibili per ogni coppia o-d assume particolare importanza alla luce della complessità topologica delle reti reali, che può dar luogo ad un numero considerevole di percorsi per ciascuna coppia origine-destinazione. Nella realtà, ciascun utente prende in considerazione solo un insieme limitato di percorsi, sia perché le dimensioni delle reti reali non gli consentono di percepire tutte le alternative a disposizione, sia perché alcuni percorsi sono fortemente sovrapposti e dunque non percepiti come alternative distinte. Pertanto, l'insieme dei percorsi ammissibili K_{odm} che collegano la coppia $o-d$ con il modo m andrebbe definito secondo un modello comportamentale che rappresenti la percezione degli utenti, fornendo la probabilità di ciascun percorso di appartenere all'insieme delle alternative percepite dal generico

utente; questo tipo di approccio alla simulazione dell'insieme delle alternative di scelta è detto probabilistico, e può essere trattato analiticamente con diversi modelli. In alternativa, si può adottare un approccio di tipo deterministico, che può essere esaustivo o selettivo. L'approccio *esaustivo* considera ammissibili tutti i percorsi elementari esistenti sulla rete in esame, e può essere concettualmente visto come un caso limite dell'approccio probabilistico prima descritto; esso genera di norma percorsi con un elevato grado di sovrapposizione e quindi di correlazione tra le disutilità, possibilità di cui occorre tener conto nella scelta della forma funzionale del modello. L'approccio *selettivo* individua invece solo alcuni percorsi fra quelli topologicamente ammissibili sulla base del soddisfacimento di alcune regole: ad esempio, un percorso non può avere un costo medio percepito maggiore di una prefissata percentuale rispetto al costo minimo, non può allontanarsi dalla destinazione e così via. Esiste una vasta letteratura sulle regole che è possibile adottare in tal senso e sulla loro aderenza a paradigmi di comportamento reali degli utenti; poiché questo aspetto non è rilevante ai fini della presente ricerca non sarà approfondito nel seguito.

Per quanto attiene alla scelta della forma funzionale, la probabilità $p[k/oshdm]$ si può simulare attraverso un qualsiasi modello nell'ambito della teoria delle scelte discrete. Fino ad ora, il paradigma teorico più largamente utilizzato a tale scopo è rappresentato dalla teoria dell'utilità aleatoria, essenzialmente perché le regole comportamentali realmente seguite dagli utenti non si discostano molto, almeno in prima approssimazione, dal paradigma interpretativo della teoria ed in termini aggregati si hanno confortanti riscontri pratici. Se ciò è in generale accettabile per la maggior parte delle applicazioni, nondimeno vi sono alcuni limiti propri della teoria dell'utilità aleatoria che suggeriscono di approfondire altri approcci modellistici, ad esempio per cercare di simulare in maniera più realistica contesti di scelta in condizioni di incertezza e di rischio, che stanno trovando riscontro nella letteratura più recente. Per questo motivo, nella presente tesi ci si è prevalentemente riferiti a modelli di utilità aleatoria, riservando al capitolo quarto alcuni cenni relativi ad approcci modellistici alternativi.

Con riferimento alle ipotesi relative al modello di offerta alla base del calcolo delle prestazioni di ciascun percorso, nel seguito si farà riferimento ad un contesto di simulazione statico. Questa ipotesi non inficia la generalità della ricerca proposta anche se, naturalmente, l'estensione al caso dinamico di strumenti di simulazione pensati nel contesto statico non è diretta; in ogni caso, per approfondimenti sugli approcci alla simulazione della scelta del percorso in contesto dinamico ed in presenza di informazione all'utenza si rimanda al contributo di Simonelli (2004).

Poiché i modelli di scelta del percorso costituiscono un componente fondamentale dei modelli di simulazione dell'interazione tra domanda ed offerta (modelli di assegnazione), è necessario approfondire in questo ambito alcuni aspetti teorici ed operativi. Dal punto di vista teorico, le caratteristiche del modello di scelta del percorso utilizzato incidono sulle condizioni di esistenza e di unicità del problema di assegnazione: di ciò sarà fatto esplicito riferimento, nel seguito della presente ricerca, nei casi in cui occorrerà imporre condizioni particolari ai modelli di scelta del percorso trattati. Dal punto di vista operativo, il problema dell'assegnazione è di norma risolto ricorrendo a due tipologie di algoritmi. Gli algoritmi ad *enumerazione esplicita* dei percorsi si basano sul calcolo delle probabilità di scelta e dei corrispondenti flussi su percorsi esplicitamente individuati con uno degli approcci descritti in precedenza; poiché nelle applicazioni si è spesso interessati direttamente ai flussi di arco, ed anche in considerazione della complessità delle reti reali che rende spesso non conveniente un approccio di tipo esplicito, è possibile ricorrere ad

algoritmi ad *enumerazione implicita* che pervengono direttamente al calcolo dei flussi di arco senza enumerare esplicitamente i percorsi considerati. Evidentemente, mentre nell'ambito degli algoritmi di assegnazione ad enumerazione esplicita è possibile utilizzare un qualsiasi modello di scelta del percorso, gli algoritmi ad enumerazione implicita possono essere implementati solo sulla base di particolari modelli di scelta del percorso, la cui forma funzionale consenta di specificare direttamente delle probabilità di scelta tra archi a partire da quelle di scelta tra percorsi. In altri termini, la proprietà di un modello di scelta del percorso di permettere l'implementazione di algoritmi di assegnazione ad enumerazione implicita non è immediata e rappresenta una caratteristica discriminante per valutarne l'applicabilità a contesti reali.

A tal proposito esistono in letteratura algoritmi ad enumerazione implicita che incorporano un approccio alla simulazione dell'insieme di scelta dei percorsi sia esaustivo sia selettivo; ad esempio, l'algoritmo che utilizza il modello Probit (metodo Monte Carlo) considera tutti i percorsi elementari su rete, quindi con approccio esaustivo, mentre l'algoritmo che utilizza il modello Logit (algoritmo di Dial) individua una selezione di percorsi efficienti, quindi con approccio selettivo. Negli algoritmi ad enumerazione esplicita l'approccio alla simulazione dell'insieme di scelta tra percorsi è invece di norma selettivo, e ciò rappresenta in molti casi uno strumento efficace per risolvere a priori il problema della numerosità e della correlazione tra alternative attraverso un'opportuna scelta dell'insieme delle alternative disponibili. Con riferimento al campo di applicazione ed ai vantaggi reciproci dei due approcci, si può dire che gli algoritmi ad enumerazione esplicita consentono un controllo migliore sull'ammissibilità dei percorsi generati, ed inoltre permettono di introdurre in modo diretto attributi delle funzioni di costo non additivi. Al contrario, i metodi di enumerazione implicita dei percorsi, sia selettivi sia esaustivi, sembrano essere più efficienti in termini computazionali e sono alla base di tutti i modelli di assegnazione ad oggi utilizzati in programmi di calcolo commerciali.

In coerenza con le ipotesi poste, nel seguito si descriverà il paradigma costitutivo della teoria dell'utilità aleatoria ed i relativi modelli di interesse (paragrafo 1.2); essi saranno successivamente particolarizzati al contesto di scelta del percorso, illustrandone specificazione e caratteristiche teoriche (paragrafo 1.3) e proprietà numeriche attraverso confronto in simulazione su reti test (paragrafo 1.4). I risultati delle simulazioni effettuate sono infine riassunti nel paragrafo 1.5, nel quale si delineano gli spunti di ricerca sviluppati nei capitoli successivi della tesi.

1.2 Modelli di utilità aleatoria

La teoria delle scelte è una disciplina che attinge al bacino delle competenze proprie dell'econometria, della statistica e della psicologia matematica al fine di fornire degli strumenti analitici per la simulazione del comportamento umano qualora si presenti il problema di selezionare un'alternativa all'interno di un insieme di scelta. Uno dei paradigmi più diffusi e consolidati nell'ambito della teoria delle scelte è rappresentato dalla cosiddetta massimizzazione del beneficio, secondo la quale la realizzazione di una specifica scelta da parte di un decisore è il risultato di un processo che, a partire dall'analisi dell'insieme di tutte le alternative disponibili, ha assegnato al decisore il massimo beneficio rispetto a qualsiasi altra scelta all'interno dell'insieme considerato. Seguendo la trattazione di Daly (2005), una scelta che obbedisca al paradigma della massimizzazione del beneficio è coerente con tre assiomi costitutivi, di cui i primi due sono generali e possono essere così enunciati:

- *completezza*: il decisore è in grado di esprimere un giudizio di preferenza (debole) con riferimento ad una qualsiasi coppia di alternative¹;
- *transitività*: la preferenza (debole) di un'alternativa i rispetto a j e di un'alternativa j rispetto a k implica la preferenza (debole) di i rispetto a k .

Il terzo assioma può essere formulato in due modi diversi e mutuamente escludentesi, ovvero:

- *continuità*: il giudizio di preferenza non è modificato da variazioni infinitesimali negli attributi delle alternative, oppure
- *finitezza*: l'insieme di scelta è finito.

A partire da questi assiomi, Debreu (1954) per il caso di scelta in un insieme continuo e Block e Marschack (1960) per il caso di un insieme di scelta discreto e finito hanno dimostrato che i decisori si comportano come se massimizassero una quantità reale, cui si attribuisce di solito il nome di utilità; in coerenza con gli obiettivi della tesi, nel seguito si farà riferimento al caso di un insieme di scelta discreto e finito.

In termini formali, seguendo Block e Marschack (1960), se C è un insieme di scelta costituito da n alternative, a ciascun elemento $i \in C$ è possibile associare un intero $r_i \in [1, n]$ in modo da stabilire un ordinamento in C tale che risulti, qualunque siano i e j , $r_i \leq r_j$ se l'alternativa j non è preferita all'alternativa i nel senso prima chiarito; ciascun vettore $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$ può essere ovviamente visto come una permutazione dell'insieme dei primi n numeri naturali. Una qualsiasi funzione strettamente decrescente su \mathbf{r} determina una funzione $U(\cdot)$ a valori reali sull'insieme C che preserva l'ordinamento definito da \mathbf{r} , ovvero $U(i) \geq U(j)$ se e solo se j non è preferita ad i . La $U(\cdot)$ è definita funzione di utilità ordinale, e dalla definizione posta segue che la scala di $U(\cdot)$ è del tutto arbitraria e che una qualsiasi trasformazione monotona strettamente crescente preserva l'ordinamento definito da \mathbf{r} . Nel seguito, per semplicità di notazione, si scriverà U_i in luogo di $U(i)$ per denotare l'utilità dell'alternativa i . L'utilità che il decisore associa a ciascuna alternativa non è nota all'analista che simula la scelta, ed è pertanto rappresentata attraverso una variabile aleatoria di solito denominata utilità percepita. Naturalmente, altre cause concorrono all'aleatorietà dell'utilità, da un'insufficiente conoscenza del contesto di scelta da parte dell'analista a cause intrinseche al decisore stesso che potrebbe, ad esempio, modificare casualmente le sue preferenze nel tempo²; per un elenco dettagliato si rimanda a Cascetta (2001). In letteratura vi sono diverse interpretazioni a tal proposito: il primo ad introdurre diverse motivazioni per le

¹ In dettaglio, come riportato in Block e Marschak (1960), l'assioma di completezza asserisce che, se un decisore è forzato a scegliere un certo numero di volte tra due alternative i e j , possono verificarsi due casi. Se il decisore sceglie sempre l'alternativa i , si può dire che egli preferisce i (preferenza forte), ovvero $i > j$; invece, se in almeno un caso egli sceglie l'alternativa j vuol dire che nessuna delle due condizioni di preferenza forte $i > j$ e $j > i$ può verificarsi: in questo caso si dirà che il decisore è indifferente rispetto alle alternative i e j . Il giudizio di preferenza è pertanto debole nella misura in cui, date due alternative, si può essere indifferenti rispetto ad esse ovvero sceglierne strettamente una delle due.

² In effetti l'assioma di completezza nella forma debole introduce la possibilità di un cambiamento di scelta di uno stesso decisore posto più volte di fronte al medesimo contesto, determinando una forma di incoerenza nelle scelte del decisore. Si noti, peraltro, che l'assioma di transitività è definito con riferimento alla medesima preferenza debole. In quest'ottica, i modelli di utilità aleatoria possono essere interpretati come uno strumento per simulare gli effetti di questa incoerenza, in quanto la probabilità di scelta di un'alternativa da essi fornita può essere pensata come la frazione, sul totale del numero di volte in cui si è posta la medesima scelta, nella quale quella alternativa è risultata al primo posto nell'ordinamento definito in C .

cause di aleatorietà è stato Manski (1977), che peraltro sostiene che si tratti di una mera distinzione interpretativa e che le cause di aleatorietà siano di fatto indistinguibili; Dagsvik (1995), citando un precedente lavoro di Thurstone (1927), attribuisce primaria importanza alle cause di aleatorietà legate alle fluttuazioni nel tempo delle preferenze dei decisori piuttosto che alle conseguenze della non conoscenza dell'analista. In termini formali, se per ciascuna alternativa i la funzione U_i è una variabile aleatoria, ovvero il vettore $\mathbf{U}=\{U_1, \dots, U_n\}$ è un vettore aleatorio, si definisce *modello di utilità aleatoria* un insieme di probabilità di scelta tale che risulti:

$$p[i/C] = \Pr[U_i > U_j] \quad \forall j \in C, j \neq i \quad (1.2.1)$$

nella quale $0 \leq p[i/C] \leq 1 \quad \forall i$ e $\sum_i p[i/C] = 1$. L'ordinamento di scelta soggiacente la (1.2.1) verifica naturalmente l'assioma di transitività prima enunciato; peraltro, si può dimostrare che il vettore di probabilità (1.2.1) verifica anche una forma cosiddetta di transitività stocastica forte; per dettagli si rimanda a Luce e Suppes (1965). Ai fini applicativi la relazione costitutiva (1.2.1) può essere formalmente scritta integrando, su tutti i possibili valori di utilità U_i di un'alternativa i , la probabilità che l'alternativa i assuma una certa utilità U_i e le altre alternative un'utilità minore; in altri termini, indicando con $f(U_1 \dots U_n)$ la legge di densità di probabilità congiunta delle utilità percepite, si ha:

$$p[i/C] = \int_{U_i=-\infty}^{+\infty} \int_{U_1=-\infty}^{U_i} \dots \int_{U_{i-1}=-\infty}^{U_i} \int_{U_{i+1}=-\infty}^{U_i} \dots \int_{U_n=-\infty}^{U_i} f(U_1 \dots U_n) dU_1 \dots dU_n \quad (1.2.2)$$

A partire dalle relazioni precedenti si è sviluppata nel corso degli anni una vastissima letteratura sui modelli di scelta discreta appartenenti alla classe dei modelli di utilità aleatoria. E' interessante sottolineare che, pur essendo i modelli di utilità aleatoria basati su relazioni di tipo ordinale come descritto in precedenza, nella pratica del loro sviluppo si utilizza una formalizzazione matematica di tipo cardinale esprimendo l'utilità percepita della generica alternativa i nella forma:

$$U_i = V_i + \varepsilon_i \quad (1.2.4)$$

dove V_i rappresenta l'utilità sistematica, media della variabile aleatoria U_i , ed ε_i rappresenta il residuo aleatorio, di solito ipotizzato a media nulla. La (1.2.4) non determina alcuna restrizione rispetto alla formulazione generale (1.2.1), ed ha l'unico effetto di introdurre la grandezza cardinale V_i con il relativo formalismo matematico; è inoltre evidente che qualsiasi considerazione sulla distribuzione congiunta dei residui aleatori può essere ricondotta alla distribuzione congiunta delle utilità percepite proprio attraverso la (1.2.4). Sostituendo la (1.2.4) nella (1.2.1) si ottiene:

$$p[i/C] = \Pr[V_i + \varepsilon_i > V_j + \varepsilon_j] \quad \forall j \in C, j \neq i \quad (1.2.5)$$

e la probabilità di scelta dell'alternativa j può essere ovviamente riscritta come:

$$p[j] = \int_{\varepsilon_j=-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{V_j+\varepsilon_j-V_1} \dots \int_{\varepsilon_{j-1}=-\infty}^{V_j+\varepsilon_j-V_{j-1}} \int_{\varepsilon_{j+1}=-\infty}^{V_j+\varepsilon_j-V_{j+1}} \dots \int_{\varepsilon_m=-\infty}^{V_j+\varepsilon_j-V_m} f(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m) d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_m \quad (1.2.6)$$

nella quale $f(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ è la legge di densità di probabilità congiunta dei residui aleatori.

E' immediato riconoscere dalla (1.2.1) che l'aggiunta di una medesima costante all'utilità percepita di tutte le alternative e la moltiplicazione dell'utilità percepita di tutte le alternative per una stessa costante positiva non modificano le corrispondenti probabilità di scelta:

$$p[i/C] = \Pr[U_i > U_j] = \Pr[U_i + \lambda > U_j + \lambda] \quad \forall j \in C, j \neq i, \lambda \in R$$

$$p[i/C] = \Pr[U_i > U_j] = \Pr[\lambda U_i > \lambda U_j] \quad \forall j \in C, j \neq i, \lambda \in R^+$$

Al contrario, non è in generale vero che l'aggiunta di una medesima costante all'utilità sistematica di tutte le alternative non modifichi le corrispondenti probabilità di scelta; tale condizione risulta verificata solo per una particolare classe di modelli di utilità aleatoria, detti per l'appunto *additivi*³. La proprietà di additività discende dalla condizione che la distribuzione dei residui aleatori ε_i non dipenda dalle utilità sistematiche; sotto questa ipotesi si ottiene infatti dalla (1.2.5):

$$p[i/C] = \Pr[V_i + \varepsilon_i > V_j + \varepsilon_j] = \Pr[V_i + \lambda + \varepsilon_i > V_j + \lambda + \varepsilon_j] \quad \forall j \in C, j \neq i, \lambda \in R$$

Dalle relazioni precedenti scaturisce inoltre una proprietà fondamentale dei modelli di utilità aleatoria additivi; infatti, poiché risulta:

$$p[i/C] = \Pr[V_i + \varepsilon_i > V_j + \varepsilon_j] = \Pr[V_i - V_j > \varepsilon_j - \varepsilon_i] \quad \forall j \in C, j \neq i$$

ne consegue che in un modello additivo le probabilità di scelta dipendono dalla distribuzione delle differenze dei residui delle alternative e non già dalla distribuzione dei residui stessi. Tale proprietà conduce a rilevanti implicazioni pratiche, che saranno discusse nel paragrafo 3.4.2.

Daly e Zachary (1976) forniscono un insieme di condizioni necessarie e sufficienti affinché un insieme di funzioni di probabilità di scelta sia coerente con gli assiomi costitutivi della teoria dell'utilità aleatoria ed in più soddisfi la condizione di additività. Indicando con $p_j(V_1, \dots, V_n)$ la probabilità di scelta della generica alternativa $j \in 1 \dots n$, funzione delle utilità sistematiche delle n alternative del contesto di scelta, tali condizioni sono espresse dalle seguenti proprietà:

- $p_j(V_1, \dots, V_n) \geq 0 \quad \forall j$ e $\sum_j p_j(V_1, \dots, V_n) = 1$
- $p_j(V_1+k, \dots, V_n+k) = p_j(V_1, \dots, V_n) \quad \forall j, k \in R$
- $\lim_{V_i \rightarrow +\infty} p_j(V_1, \dots, V_n) = 0 \quad \forall j, i$ con $i \neq j$
- $(-1)^{r-1} \frac{\partial^{r-1} p_j(V_1, \dots, V_n)}{\partial V_1 \dots \partial V_{j-1} \partial V_{j+1} \dots \partial V_n} \geq 0$
- $\frac{\partial p_i(V_1, \dots, V_n)}{\partial V_j} = \frac{\partial p_j(V_1, \dots, V_n)}{\partial V_i}$

³ Il termine additivo segue la definizione di Smith (1984) "additive random utility model" successivamente ripresa da Cascetta (2001); in letteratura la stessa classe di modelli è talvolta individuata con nomi diversi, ad esempio McFadden (1981) li definisce "translationally invariant models" e Zachary (1977) "location parameter models". A tal proposito, Daly (2005) sostiene che la condizione di indipendenza dei residui ε_i dalle utilità sistematiche è più forte della condizione di invarianza delle probabilità di scelta rispetto all'aggiunta di una costante all'utilità sistematica delle alternative.

Per approfondimenti sul significato economico di tali condizioni si rimanda alla letteratura, ad esempio al contributo di Ibanez e Batley (2005). In breve, la prima proprietà è direttamente collegata agli assiomi della teoria della probabilità, mentre la seconda stabilisce che in un modello di utilità aleatoria additivo è possibile aggiungere una costante all'utilità sistematica di tutte le alternative senza modificarne le probabilità di scelta, purché la costante aggiunta non dipenda dalle utilità sistematiche stesse. La terza probabilità asserisce che la probabilità di scelta di un'alternativa tende ad uno se la sua utilità sistematica tende ad infinito, il che implica che la derivata parziale prima della probabilità di scelta di un'alternativa rispetto alla sua utilità sistematica sia positiva; tale proprietà equivale alla formulazione econometrica di una legge di domanda di un bene, che aumenta all'aumentare dell'utilità del bene stesso. La quarta proprietà stabilisce che la probabilità di scelta di un'alternativa non diminuisce se diminuiscono le utilità sistematiche di tutte le altre alternative, ed inoltre implica che tutte le derivate parziali prime miste siano non negative, il che introduce la proprietà di compensazione propria dei modelli di utilità aleatoria additivi. Infine, la quinta proprietà stabilisce che tale compensazione obbedisce a principi di simmetria che trovano riscontro nella teoria microeconomica di stampo neoclassico.

La classe di modelli di utilità aleatoria additivi più largamente utilizzata nelle applicazioni è rappresentata dai modelli GEV, proposti da McFadden (1978), che sono descritti in dettaglio nel paragrafo seguente in virtù della loro importanza anche ai fini della simulazione del contesto di scelta del percorso. Si rimanda invece al paragrafo 3.3 ed al capitolo quarto rispettivamente per alcuni approfondimenti sulle proprietà teoriche dei modelli qui descritti e per cenni su approcci modellistici basati sul rilassamento di alcune ipotesi del paradigma dell'utilità aleatoria.

1.2.1 Modelli GEV

Il modello GEV (*general extreme value*) rappresenta una classe di modelli di utilità aleatoria, ciascuno dei quali può essere definito attraverso una funzione generatrice $G(\cdot)$ che soddisfi alcune proprietà matematiche alla base del teorema di McFadden (1978). In particolare, data una funzione $G(y_1 \dots y_m)$ di m variabili, pari al numero delle alternative di scelta, continua e derivabile, definita per $y_1, \dots, y_m \geq 0$, che goda delle seguenti proprietà:

- G è una funzione non negativa ed omogenea di grado $\mu > 0$, ovvero $G(\alpha \mathbf{y}) = \alpha^\mu G(\mathbf{y})^4$;
- $\lim_{y_j \rightarrow +\infty} G(y_1 \dots y_m) = +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$;
- la k -esima derivata parziale di G rispetto ad una generica combinazione di k variabili y_j è non negativa se k è dispari ed è non positiva se k è pari,

è possibile dimostrare che:

- la funzione $F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m) = \exp[-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_m})]$ è una distribuzione multivariata di valore estremo⁵;
- la media dell'utilità percepita dell'alternativa di massima utilità (surplus) è data da $(1/\mu)(\ln G + \gamma)$ dove $\gamma = 0.5772 \dots$ è la costante di Eulero;

⁴ In realtà, la formulazione originaria del teorema di McFadden prevede $\mu=1$; l'estensione al caso generale si deve a Ben-Akiva e Francois (1983).

⁵ Per alcune proprietà delle distribuzioni di valore estremo si può far riferimento a Bierlaire et al. (2003) e Galambos (1987), nonché alle indicazioni riportate nel capitolo terzo.

- il corrispondente modello di scelta è consistente con le ipotesi alla base della teoria dell'utilità aleatoria e la probabilità di scelta dell'alternativa j può essere espressa nel seguente modo:

$$p[j] = \frac{e^{V_j} G_j(e^{V_1} \dots e^{V_n})}{\mu G(e^{V_1} \dots e^{V_n})} \quad (1.2.7)$$

La dimostrazione del teorema ed alcuni approfondimenti teorici saranno descritti in dettaglio nel paragrafo 3.4.

Come si è detto, nell'ambito dei modelli che soddisfano le condizioni imposte dal teorema di McFadden, sono reperibili in letteratura alcune formulazioni notevoli, che saranno oggetto di approfondimento nel corso del presente lavoro perché di rilevante interesse ai fini dell'applicazione al contesto di scelta del percorso; per ulteriori approfondimenti si rimanda ai testi di McFadden (1978), McFadden (1981), Ben-Akiva e Lerman (1985), Cascetta (2001) e Train (2003).

1.2.1.1 Logit Multinomiale

Il più semplice modello derivabile a partire dalla classe GEV è il Logit Multinomiale, proposto da Luce (1959). La funzione generatrice che lo definisce è la seguente:

$$G = \sum_{k=1}^m e^{\frac{V_k}{\theta_0}} \quad (1.2.8)$$

nella quale m è il numero di alternative, V_k l'utilità sistematica della generica alternativa k e θ_0 il parametro di varianza; perché la funzione generatrice (1.2.8) sia coerente con le ipotesi del teorema di McFadden deve risultare $\theta_0 > 0$. Sostituendo la (1.2.8) nella (1.2.7) si ottiene la seguente espressione per la probabilità di scelta della singola alternativa:

$$p[k] = \frac{e^{V_k/\theta_0}}{\sum_h e^{V_h/\theta_0}} \quad (1.2.9)$$

E' immediato verificare che nel Logit Multinomiale i residui delle utilità percepite delle alternative di scelta sono variabili aleatorie di Gumbel indipendenti ed a media nulla; la matrice di covarianze assume pertanto la forma $\Sigma = (\pi^2 \theta^2 / 6) \cdot \mathbf{I}$ dove \mathbf{I} è la matrice identità. Questa caratteristica si traduce in alcune proprietà intrinseche del modello – ad esempio la ben nota proprietà di indipendenza dalle alternative irrilevanti – ampiamente investigate in letteratura, ad esempio in Ben-Akiva e Lerman (1985), Cascetta (2001) e Train (2003): poiché tali ipotesi costituiscono un'eccessiva semplificazione rispetto ad alcuni contesti di scelta, tra cui quello di scelta del percorso, per il quale si è detto nell'introduzione della necessità di adottare forme funzionali in grado di simulare gli effetti della correlazione tra le alternative di scelta, sono stati proposti in letteratura modelli GEV che superassero i limiti intrinseci del Logit Multinomiale.

1.2.1.2 Logit Gerarchizzato ad uno e più livelli

Il modello Logit Gerarchizzato ad un livello, introdotto da Domencich e McFadden (1975), rappresenta un primo passo nel rilassamento dell'ipotesi di indipendenza delle utilità percepite

delle alternative di scelta propria del Logit Multinomiale⁶. In dettaglio, l'insieme di scelta I_m è partizionato in n gruppi disgiunti, ovvero tali che ciascuna alternativa possa appartenere ad uno solo di essi; coerentemente, l'utilità percepita della generica alternativa $j \in I_m$ è espressa nel seguente modo:

$$U_j = V_j + \varepsilon_j = V_j + \eta_k + \tau_{j/k} \quad (1.2.10)$$

dove il residuo aleatorio ε_j è scomposto nella somma di due residui η_k e $\tau_{j/k}$, rispettivamente legati alla parte di utilità comune a tutte le alternative del gruppo ed alla parte di utilità della specifica alternativa all'interno del gruppo. Si suppone inoltre che η_k e $\tau_{j/k}$ siano tra loro indipendenti ed a media nulla, e che le $\tau_{j/k}$ siano v.a. di Gumbel indipendenti di parametro θ_k . Dalle ipotesi poste è possibile ottenere le seguenti forme funzionali, rispettivamente per il calcolo della probabilità di scelta $p[j/k]$ di un'alternativa j all'interno di un gruppo k e della probabilità di scelta $p[k]$ del gruppo k stesso⁷:

$$p[j/k] = \frac{e^{V_j/\theta_k}}{\sum_{i \in k} e^{V_i/\theta_k}}$$

$$p[k] = \frac{\left(\sum_{i \in k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0}}{\sum_h \left(\sum_{i \in h} e^{V_i/\theta_h} \right)^{\theta_h/\theta_0}}$$

nella quale si è indicato con $k \in I_m$ il generico gruppo, con j la generica alternativa, con θ_k il parametro di varianza associato al gruppo k e con θ_0 il parametro di varianza globale. Complessivamente, la probabilità di scelta della singola alternativa j si può esprimere come:

$$p[j] = p[k]p[j/k] = \frac{e^{V_j/\theta_k} \left(\sum_{i \in k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0 - 1}}{\sum_h \left(\sum_{i \in h} e^{V_i/\theta_h} \right)^{\theta_h/\theta_0}} \quad (1.2.11)$$

E' immediato verificare, per sostituzione diretta nella (1.2.7), che la funzione generatrice del modello Logit Gerarchizzato (1.2.11) è la seguente:

$$G = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j \in k} e^{\frac{V_j}{\theta_k}} \right)^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}$$

⁶ L'effettiva attribuzione della formulazione del Logit Gerarchizzato a Domencich e McFadden (1975) non è universalmente condivisa nella letteratura; un approfondimento in tal senso è rappresentato dal contributo di Ortuzar (2001) che effettua una ricognizione dei lavori sul Logit Gerarchizzato partendo dalla fine degli anni '60.

⁷ E' infatti possibile applicare il Logit Multinomiale per il calcolo delle probabilità di scelta $p[j/k]$ in virtù delle ipotesi su $\tau_{j/k}$. Inoltre, quando si effettua la scelta del gruppo, ad esso è associata un'utilità con un residuo pari a $\eta_k + \tau_{j/k}^*$ essendo $\tau_{j/k}^* = \max\{\tau_{j/k}\}$ che è ancora distribuita secondo una Gumbel di parametro θ_k ; siccome $\varepsilon_j = \eta_k + \tau_{j/k}$ la η_k è tale che sommata ad una Gumbel restituisce ancora una Gumbel, se ne deduce che $\eta_k + \tau_{j/k}^*$ è ancora una Gumbel, e quindi è corretto simulare ancora con un Logit Multinomiale le probabilità di scelta tra gruppi.

dalle cui proprietà si deduce che, perché il modello sia coerente con le ipotesi del teorema di McFadden, occorre che risulti $0 \leq \theta_k \leq \theta_0$, ovvero che il rapporto $\delta_k = \theta_k / \theta_0$ sia non negativo e minore od uguale ad uno. A tal proposito è opportuno richiamare il lavoro di Borsch-Supan (1990), che presenta un'interessante analisi sulle implicazioni teoriche ed operative conseguenti ad un rilassamento locale di tali vincoli. Tenendo conto della (1.2.11) e delle ipotesi sui residui η_k e $\tau_{j/k}$, si può immediatamente verificare che la corrispondente matrice di covarianze presenta una struttura a blocchi, con covarianza non nulla solo tra residui aleatori ε_i ed ε_j di alternative appartenenti allo stesso gruppo, data da:

$$Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = Var[\eta_k] = Var[\varepsilon_i] - Var[\tau_{i/k}] = \frac{\pi^2}{6} (\theta_0^2 - \theta_k^2) = \frac{\pi^2 \theta_0^2}{6} (1 - \delta_k^2)$$

Il modello Logit Gerarchizzato può essere ulteriormente generalizzato introducendo più livelli di scelta, seguendo ad esempio la trattazione riportata in Cascetta (2001). In ogni caso, tale generalizzazione mantiene una struttura a blocchi della matrice di covarianze e si caratterizza per un albero di scelta in cui ciascuna alternativa elementare è collegata alla radice da uno ed un solo percorso inteso come sequenza di nodi intermedi.

E' opportuno sottolineare che in letteratura esiste un'altra specificazione del modello Logit Gerarchizzato, proposta da Daly (1987), che si differenzia dalla (1.2.11) per l'assenza del parametro θ_k nell'espressione della probabilità di scelta dell'alternativa elementare all'interno del gruppo k . Un'attenta disamina delle differenze tra le due specificazioni, ed in particolare una verifica della consistenza della formulazione di Daly (1987) con la teoria dell'utilità aleatoria, è riportata in Koppelman e Wen (1998), Daly (2001a) e Koppelman et al. (2001).

1.2.1.3 Cross-Nested Logit

Al fine di poter simulare contesti di scelta caratterizzati da matrici di covarianze con una struttura più generale, Vovsha (1997) ha proposto per primo⁸ in letteratura il modello *Cross-Nested Logit* (CNL), che può essere visto come una generalizzazione del modello Logit Gerarchizzato ad un livello basata sull'ipotesi che ciascuna alternativa possa contemporaneamente appartenere a più di un gruppo, con differenti gradi di appartenenza. Sotto queste ipotesi, la probabilità di scelta della generica alternativa j si può esprimere a partire dall'espressione (1.2.11) introdotta per il Logit Gerarchizzato, generalizzandola in modo da tener conto che una stessa alternativa possa appartenere a più gruppi:

$$p[j] = \sum_k p[j/k] \cdot p[k]$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i gruppi k . La probabilità di scelta $p[j/k]$ di un'alternativa j all'interno di un gruppo k e la probabilità di scelta $p[k]$ del gruppo k risultano pari a:

$$p[j/k] = \frac{\alpha_{kj}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_j/\theta_k}}{\sum_{i \in k} \alpha_{ki}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_i/\theta_k}} \quad (1.2.12)$$

⁸ Secondo alcuni autori, una prima idea di struttura di tipo Cross-Nested risale a Small (1987) con il modello cosiddetto Ordered-GEV sviluppato nel contesto della simulazione dell'orario di partenza con approccio di tipo diacronico.

$$p[k] = \frac{\left(\sum_{i \in k} \alpha_{ki}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0}}{\sum_h \left(\sum_{i \in k} \alpha_{ki}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_h/\theta_0}} \quad (1.2.13)$$

nelle quali i simboli hanno il significato chiarito in precedenza ed α_{kj} esprime il grado di appartenenza dell'alternativa j al gruppo k . La probabilità di scelta complessiva dell'alternativa j è quindi data da:

$$p[j] = \frac{\sum_k \left[\alpha_{kj}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_j/\theta_k} \left(\sum_{i \in k} \alpha_{ki}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0-1} \right]}{\sum_h \left(\sum_{i \in k} \alpha_{ki}^{\theta_0/\theta_k} e^{V_i/\theta_k} \right)^{\theta_h/\theta_0}} \quad (1.2.14)$$

E' interessante, ai fini applicativi, considerare il caso notevole in cui $\theta_k \rightarrow 0 \forall k$; a questo scopo occorre calcolare il limite delle probabilità (1.2.12) e (1.2.13) per $\theta_k \rightarrow 0 \forall k$. Il primo limite è banale in quanto si presenta come limite del rapporto di due infiniti di ordine infinitamente grande; poiché, come riportato in Fiorenza e Greco (1995), e^x ha ordine superiore ad e^y se $x > y$, ne consegue che:

$$p[j/k] = \lim_{\theta_k \rightarrow 0^+} \frac{e^{(V_j + \theta_0 \ln \alpha_{kj})/\theta_k}}{\sum_{i \in k} e^{(V_i + \theta_0 \ln \alpha_{ki})/\theta_k}} = \begin{cases} 1/n & \text{se } V_j + \theta_0 \ln \alpha_{kj} = \max_{i \in k} \{V_i + \theta_0 \ln \alpha_{ki}\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.2.15)$$

dove n rappresenta l'eventuale numero di alternative per le quali si verifica la predetta condizione di massimo. Per quanto riguarda il limite della (1.2.13), posto $V_i^* = V_i + \theta_0 \ln \alpha_{ki}$ si può intervenire sul numeratore nel seguente modo:

$$\lim_{\theta_k \rightarrow 0^+} \left(\sum_{i \in k} e^{V_i^*/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0} = \lim_{\theta_k \rightarrow 0^+} e^{\frac{\theta_k}{\theta_0} \ln \sum_{i \in k} e^{V_i^*/\theta_k}} \quad (1.2.16)$$

Ponendo $1/\theta_k = x$ ed applicando la regola di De L'Hospital, l'esponente della (1.2.16) diviene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sum_{i \in k} \left(e^{V_i^*} \right)^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i \in k} V_i^* \left(e^{V_i^*} \right)^x}{\left(e^{V_i^*} \right)^x}$$

e poiché a^x è un infinito di ordine superiore a b^x se $a > b$ ne consegue che il limite precedente vale $\max_{i \in k} \{V_i^*\}$, e quindi il limite (1.2.16) risulta pari a:

$$\lim_{\theta_k \rightarrow 0^+} \left(\sum_{i \in k} e^{V_i^*/\theta_k} \right)^{\theta_k/\theta_0} = e^{\max_{i \in k} \{V_i^*\}/\theta_0}$$

Allo stesso modo si può procedere per il denominatore, per cui complessivamente il limite della (1.2.13) quando $\theta_k \rightarrow 0 \forall k$ vale:

$$p[k] = \frac{e^{\max_{i \in k} \{V_i^*\} / \theta_0}}{\sum_h e^{\max_{i \in h} \{V_i^*\} / \theta_0}} \quad (1.2.17)$$

Di conseguenza, combinando le relazioni (1.2.13) ed (1.2.17) si perviene alla formula finale per il calcolo delle probabilità di scelta nell'ipotesi $\theta_k \rightarrow 0 \forall k$. Per un esempio si rimanda alla (1.3.21). Il modello CNL può essere ricavato come modello GEV a partire dalla (1.2.7) assumendo una funzione generatrice, così come specificata in Papola (2000)⁹, data da:

$$G = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j \in k} e^{\frac{V_j}{\theta_0}} \right)^{\theta_k} \quad (1.2.18)$$

Perché la (1.2.18) sia consistente con le ipotesi del teorema di McFadden deve risultare, come per il Logit Gerarchizzato, $0 \leq \theta_k \leq \theta_0$ ovvero $0 < \delta_k = \theta_k / \theta_0 < 1$; inoltre, poiché θ_k / θ_0 è un numero reale ed il codominio della funzione esponenziale è R^+ risulta evidente che deve essere $\alpha_{kj} \geq 0$; di conseguenza, l'unico vincolo che la consistenza con il teorema di McFadden impone sui gradi di appartenenza è che siano non negativi. Nel paragrafo 3.3.4 saranno introdotte e discusse ulteriori condizioni sui gradi di appartenenza; in questa sede si richiama l'attenzione sul fatto che, se si vuole che i residui aleatori delle utilità percepite delle alternative di scelta abbiano la stessa media, occorre rispettare il vincolo $\sum_k \alpha_{kj} = c$ dove c è una costante positiva.

Una particolare specificazione CNL, utile nel contesto di simulazione della scelta del percorso, si ottiene imponendo una rete di scelta caratterizzata da $n(n-1)/2$ gruppi binari, se n è il numero delle alternative. Tale modello va sotto il nome di *Paired Combinatorial Logit* (PCL) ed a partire dalla (1.2.18) se ne può scrivere la funzione generatrice come:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\alpha_{ij,i}^{\frac{\theta_{ij}}{\theta_0}} e^{\frac{V_i}{\theta_0}} + \alpha_{ij,j}^{\frac{\theta_{ij}}{\theta_0}} e^{\frac{V_j}{\theta_0}} \right]^{\theta_{ij}} \quad (1.2.19)$$

Se nella (1.2.19) si normalizza ponendo $\theta_0=1$ si ottiene:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\alpha_{ij,i}^{\theta_{ij}} e^{V_i} + \alpha_{ij,j}^{\theta_{ij}} e^{V_j} \right]^{\theta_{ij}} \quad (1.2.20)$$

In letteratura esistono due formulazioni notevoli del modello (1.2.20), che si differenziano per

⁹ In letteratura esistono specificazioni della funzione generatrice di un modello Cross-Nested leggermente diverse, nella forma ma non nella sostanza, dalla (1.2.18): per una tassonomia si può far riferimento a Bierlaire (forthcoming) e ad Abbè et al. (2005). Tali formulazioni sono nella pratica riconducibili l'una alle altre; ad esempio, poiché la normalizzazione della varianza di un modello CNL avviene di norma come per gli altri modelli GEV assumendo come valore di riferimento la quantità $\pi^2/6$, ponendo $\theta_0=1$ nella funzione generatrice (1.2.18) si ottiene la formulazione del GNL (*generalized nested logit*) di Wen e Koppelman (2001) che quindi non è altro che un CNL normalizzato.

le differenti specificazioni dei parametri in essa presenti. In particolare, se si assumono tutti i gradi di appartenenza uguali ad uno¹⁰ e si pone $\sigma_{ij}=1-\theta_{ij}$ si perviene alla formulazione:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[e^{\frac{V_i}{1-\sigma_{ij}}} + e^{\frac{V_j}{1-\sigma_{ij}}} \right]^{1-\sigma_{ij}} \quad (1.2.21)$$

che costituisce la formulazione tradizionale del PCL così come proposta da Gliebe et al. (1999) e Wen e Koppelman (2000); il parametro σ_{ij} è detto parametro di similarità tra le alternative i e j . Ovviamente, avendo normalizzato $\theta_0=1$ e ricordando che la consistenza con il paradigma dell'utilità aleatoria impone $\theta_{ij} \leq \theta_0$ ne consegue che deve necessariamente risultare $\sigma_{ij} \in [0,1]$. Ponendo invece nella (1.2.20) $\alpha_{ij,i}=\alpha_{ij,j}=1-\lambda_{ij}$ e $\lambda_{ij}=1-\theta_{ij}$ si ottiene la formulazione:

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[(1-\lambda_{ij})^{\frac{1}{\theta_{ij}}} e^{\frac{V_i}{\theta_{ij}}} + (1-\lambda_{ij})^{\frac{1}{\theta_{ij}}} e^{\frac{V_j}{\theta_{ij}}} \right]^{\theta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (1-\lambda_{ij}) \left[e^{\frac{V_i}{1-\lambda_{ij}}} + e^{\frac{V_j}{1-\lambda_{ij}}} \right]^{1-\lambda_{ij}} \quad (1.2.22)$$

che rappresenta la specificazione PCL per prima proposta in letteratura da Chu (1989). E' da notare che, mentre la formulazione (1.2.21) garantisce, come detto, che la somma dei gradi di appartenenza sia uguale per tutte le alternative, nella formulazione (1.2.22) tale condizione va imposta introducendo esplicitamente il vincolo:

$$\sum_k \alpha_{ik,i} = \sum_k (1-\lambda_{ik}) = n-1 - \sum_k \lambda_{ik} \rightarrow \sum_k \lambda_{ik} = \sum_k \lambda_{jk} \quad \forall i,j$$

nella quale si è tenuto conto che ciascuna alternativa appartiene a $n-1$ gruppi se n è il numero delle alternative di scelta.

Poiché sarà di interesse nel seguito, si riporta per comodità l'espressione della probabilità di scelta corrispondente alle specificazioni (1.2.21) ed (1.2.22) nel caso di θ_0 qualsiasi. Tenendo infatti conto che:

$$p[j] = \sum_{k \neq j} p[jk] p[j / jk]$$

si ottengono per sostituzione le seguenti formule per la (1.2.21):

$$p[j / jk] = \frac{e^{V_j/(1-\sigma_{jk})}}{e^{V_j/(1-\sigma_{jk})} + e^{V_k/(1-\sigma_{jk})}}$$

$$p[jk] = \frac{\left[e^{V_j/(1-\sigma_{jk})} + e^{V_k/(1-\sigma_{jk})} \right]^{1-\sigma_{jk}}}{\sum_{q=1}^{s-1} \sum_{r=q+1}^s \left[e^{V_q/(1-\sigma_{qr})} + e^{V_r/(1-\sigma_{qr})} \right]^{1-\sigma_{qr}} \theta_0}$$

e per la (1.2.22):

¹⁰ Le implicazioni di questa posizione sui valori delle medie dei residui delle utilità percepite saranno opportunamente descritte nel paragrafo 3.3.4.

$$p[j / jk] = \frac{e^{V_j/(1-\lambda_{jk})}}{e^{V_j/(1-\lambda_{jk})} + e^{V_k/(1-\lambda_{jk})}}$$

$$p[jk] = \frac{(1-\lambda_{jk}) \left[e^{V_j/(1-\lambda_{jk})} + e^{V_k/(1-\lambda_{jk})} \right]^{\frac{1-\lambda_{jk}}{\theta_0}}}{\sum_{q=1}^{s-1} \sum_{r=q+1}^s (1-\lambda_{jk}) \left[e^{V_q/(1-\lambda_{qr})} + e^{V_r/(1-\lambda_{qr})} \right]^{\frac{1-\lambda_{qr}}{\theta_0}}}$$

Per quanto attiene alle covarianze soggiacenti il modello CNL, a differenza di quanto accade per gli altri modelli della famiglia Logit, per i quali è possibile esprimere in forma chiusa gli elementi della matrice di covarianze dei residui aleatori in funzione dei parametri del modello non si dispone di un'espressione in forma chiusa delle covarianze tra residui. In letteratura è disponibile una congettura, proposta da Papola (2000), in accordo con la quale la covarianza tra I residui delle utilità di due alternative i e j in un modello Cross-Nested può essere espressa come:

$$Cov[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \frac{\pi^2 \theta_0^2}{6} \sum_k \alpha_{ki}^{1/2} \alpha_{kj}^{1/2} (1 - \delta_k^2) \quad (1.2.23)$$

La congettura si basa sulla necessità di riprodurre i casi limite, ad esempio se le due alternative appartengono entrambe ad uno ed un solo gruppo comune k risulta $\alpha_{ki} = \alpha_{kj} = 1$ e ci si riconduce alla covarianza del Logit Gerarchizzato e, viceversa, se le due alternative non hanno alcun gruppo in comune tutti i termini della sommatoria si annullano e dunque risulta $Cov[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$. In ogni caso, a parte tali casi limite riprodotti in maniera esatta, non vi sono indicazioni in letteratura circa il grado di approssimazione insito nella congettura. Uno studio sistematico basato sul calcolo numerico delle covarianze a partire dalla distribuzione congiunta dei residui aleatori, esprimibile per un modello GEV a partire dal teorema di McFadden, sarà proposto nel paragrafo 3.3.4.

1.2.1.4 RNEV/Network GEV

Ciascuna delle generalizzazioni di modelli GEV sin qui proposte si fonda sull'oggettiva impossibilità delle formulazioni precedenti di simulare una matrice di covarianze che fosse il più generale possibile. Nel caso del modello CNL, come si è detto, non si dispone di un'espressione in forma chiusa delle covarianze e pertanto, come sarà descritto nel capitolo 3, il problema di stabilire se ed in che misura esso sia in grado di riprodurre una qualsiasi matrice di covarianze è ancora oggetto di ricerca e di dibattito nella comunità scientifica. Il modello RNEV (*recursive nested extreme value*), inizialmente proposto da Daly (2001b) e successivamente formalizzato da Bierlaire (2002) e Daly e Bierlaire (forthcoming), si presenta come una generalizzazione del CNL e di tutti gli altri modelli sin qui descritti, nel senso che tutti possono essere da esso derivati come casi particolari; ciò premesso, sull'effettiva utilità dell'aggiunta di più livelli di scelta ad un CNL nell'ottica di riprodurre matrici di covarianze più flessibili occorre, per quanto prima discusso, ancora pronunciarsi.

Seguendo la formalizzazione proposta nel contributo di Daly e Bierlaire (forthcoming), per definire il modello Network GEV è necessario considerare un grafo orientato individuato da un insieme di vertici V e da un insieme di archi E al generico dei quali, indicato con ij , è associato un parametro $\alpha_{ij} \geq 0$. La rete così ottenuta deve possedere le seguenti proprietà:

- non contiene alcun circuito;
- ha un unico nodo v_0 senza predecessori, detto *radice* della rete;
- ha J nodi $v_1 \dots v_J$ senza successori, detti *alternative* della rete;
- per ciascun nodo v_i della rete esiste almeno un percorso $(v_{i0}, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), \dots, (v_{ip-1}, v_{ip})$ che connette $v_0=v_{i0}$ e $v_i=v_{ip}$ tale per cui:

$$\prod_{k=1}^p \alpha_{ik-1, ik} > 0$$

A ciascun nodo v_i della rete è inoltre associato:

- un insieme I_i costituito da J_i “alternative rilevanti”. Se v_i è un’alternativa della rete, l’insieme I_i è costituito dall’alternativa stessa, altrimenti I_i è costituito da tutte le alternative rilevanti I_j dei nodi v_j successivi di v_i ;
- una funzione omogenea G^i definita in uno spazio di dimensione J_i ed a valori nel campo reale;
- un parametro di omogeneità δ_i^{11} .

In particolare, la funzione G^i è definita nel seguente modo:

$$G^i(x) = \begin{cases} x_i^{1/\delta_i} & \text{se } succ(i) = \emptyset \\ \sum_{j \in succ(i)} \alpha_{ij} G^j(x)^{\delta_j/\delta_i} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come dimostrato in Daly e Bierlaire (forthcoming), sussiste il teorema di “GEV-ereditarietà” secondo il quale, se le G^j che compaiono nell’espressione precedente sono funzioni generatrici omogenee di grado $1/\delta_j$, allora anche G^i è una funzione generatrice omogenea di grado $1/\delta_i$ purché risulti $\alpha_{ij} > 0$ e $0 < \delta_j < \delta_i$. Sussistendo questo teorema, è di conseguenza abbastanza semplice dimostrare, attraverso equazioni ricorsive, che il modello Network GEV così definito risulta effettivamente un GEV. E’ inoltre possibile stabilire la seguente espressione per la probabilità di transizione da un nodo i della rete di scelta verso un successore $j \in succ(i)$:

$$p[j/i] = G^j \frac{\partial G^i / \partial G^j}{\mu G^i}$$

Come si è detto, tutti gli altri modelli GEV descritti nei paragrafi precedenti possono essere riguardati come casi particolari del Network GEV, che pertanto rappresenta la specificazione GEV più generale ad oggi reperibile in letteratura; ovviamente, nulla si può dire sulla matrice di covarianza sottostante il modello.

1.2.2 Probit

Il modello Probit si basa sull’ipotesi che il vettore $\mathbf{\epsilon}$ dei residui aleatori delle utilità percepite delle alternative di scelta sia distribuito secondo una variabile aleatoria normale multivariata a media nulla e matrice di covarianze $\mathbf{\Sigma}$. Se gli elementi di tale matrice non dipendono dal vettore delle utilità sistematiche il modello gode della proprietà di additività enunciata nel paragrafo 1.2; sotto

¹¹ Nella notazione di Bierlaire, così come nella maggior parte della letteratura anglosassone, il grado di omogeneità è definito come il reciproco di δ_i ed è di solito indicato con la lettera μ . Si è qui deciso di mantenere la notazione tradizionalmente adottata nella letteratura italiana e già utilizzata nei paragrafi precedenti.

questa ipotesi è importante sottolineare che la matrice di covarianze relativa ad un contesto di scelta caratterizzato da m alternative presenta solo apparentemente $[m(m+1)]/2$ elementi distinti, in quanto nell'ipotesi di additività il numero massimo di parametri che effettivamente descrivono il comportamento di scelta relativo a quel contesto ed univocamente determinabili in fase di calibrazione è inferiore e pari ad $[m(m-1)]/2-1$. Ciò pone, da un lato, il problema di normalizzare opportunamente il modello al fine di individuare quali parametri siano effettivamente stimabili, e dall'altro suggerisce di adottare delle specificazioni che in maniera più o meno automatica consentano di ridurre intrinsecamente il numero di gradi di libertà della matrice di covarianze.

Uno dei metodi più utilizzati in tal senso, e di rilevanza notevole ai fini della simulazione del contesto di scelta del percorso, va sotto il nome di *factor-analytic Probit*, in accordo con il quale il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}$ dei residui aleatori delle utilità percepite delle alternative è espresso attraverso una funzione lineare di un vettore $\boldsymbol{\zeta}$ di n variabili aleatorie normali standard indipendenti:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \sum_{k=1}^n f_{jk} \zeta_k \quad \text{ovvero} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta} \quad (1.2.24)$$

dove \mathbf{F} è una matrice di dimensioni $(m \times n)$. Gli elementi della matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ dei residui aleatori possono essere espressi in funzione degli elementi f_{jk} della matrice \mathbf{F} attraverso l'espressione (1.2.24):

$$\text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}_j] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_j^2] = E\left[\left(\sum_{k=1}^n f_{jk} \zeta_k\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^n f_{jk}^2 \zeta_k^2\right] = \sum_{k=1}^n f_{jk}^2 E[\zeta_k^2] = \sum_{k=1}^n f_{jk}^2 \quad (1.2.25)$$

$$\text{Cov}[\boldsymbol{\varepsilon}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_h] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_h] = E\left[\sum_{k=1}^n f_{jk} \zeta_k \cdot \sum_{k=1}^n f_{hk} \zeta_k\right] = \sum_{k=1}^n f_{jk} f_{hk} \cdot E[\zeta_k^2] = \sum_{k=1}^n f_{jk} f_{hk} \quad (1.2.26)$$

oppure in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] = E[\mathbf{F}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}^T\mathbf{F}] = \mathbf{F}E[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}^T]\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{I}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

Si noti che nel caso particolare in cui $m=n$ (matrice \mathbf{F} quadrata) si può dimostrare che la matrice \mathbf{F} è triangolare bassa ed univocamente determinata attraverso la fattorizzazione di Cholesky della matrice $\boldsymbol{\Sigma}$. Oltre all'applicazione al contesto di scelta del percorso di cui si dirà in seguito, un'altra rilevante applicazione che adotta una particolare specificazione della (1.2.24) è nota in letteratura come *random coefficient Probit*. In essa, basandosi sull'ipotesi che il residuo aleatorio $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ derivi dalla variabilità dei coefficienti β_k della funzione di utilità all'interno dell'insieme dei decisori, si assume che per ciascun individuo i il coefficiente β_k^i sia esprimibile come somma di un valor medio β_k ed un residuo aleatorio η_k^i :

$$\beta_k^i = \beta_k + \eta_k^i \quad k=1,2,\dots,K$$

dove K è il numero complessivo di coefficienti utilizzati per definire le utilità sistematiche delle m alternative. Ipotizzando che i residui aleatori η_k^i siano indipendentemente distribuiti come v.a. normali a media nulla e varianza σ_k^2 ne consegue che:

$$U_j^i = V_j^i + \boldsymbol{\varepsilon}_j^i = \sum_k \beta_k^i X_{jk}^i = \sum_k \beta_k X_{jk}^i + \eta_k^i X_{jk}^i$$

con:

$$V_j^i = \sum_k \beta_k X_{jk}^i; \quad \varepsilon_j^i = \sum_k \eta_k^i X_{jk}^i = \sum_k \sigma_k \varepsilon_k^i X_{jk}^i; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^i \sim MVN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon)$$

dove X_{jk} è il valore dell'attributo k nell'alternativa j ; esso è uguale a zero se l'attributo X_k non compare nell'utilità sistematica dell'alternativa j . Confrontando quest'ultima relazione con la (1.2.24) ne consegue che:

$$f_{jk}^i = \sigma_k X_{jk}^i$$

e per sostituzione nelle (1.2.25) e (1.2.26) si ottiene:

$$\begin{aligned} Var[\varepsilon_j] &= \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 X_{jk}^i{}^2 \\ Cov[\varepsilon_j, \varepsilon_h] &= \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 X_{jk}^i X_{hk}^i \end{aligned}$$

La probabilità di scelta della generica alternativa j in un insieme di scelta con cardinalità m è ovviamente espressa dall'integrale (1.2.6), di cui non è però possibile nell'ipotesi di distribuzione normale multivariata esprimere la soluzione in forma chiusa dell'integrale né ricorrere a metodi di risoluzione di tipo numerico, che risultano poco efficienti qualora vi siano molte alternative. Per il calcolo delle probabilità di scelta Probit bisogna quindi ricorrere a metodi numerici approssimati; per approfondimenti in tal senso si rimanda a Cascetta (2001) e Train (2003). Nel presente lavoro, salvo ove espressamente indicato, si sono adottate tecniche di simulazione del tipo Monte Carlo. Tale metodo, noto in letteratura anche come metodo di *accettazione-rifiuto* (AR), genera tramite una sequenza di estrazioni di numeri pseudo-casuali un campione di utilità percepite per le diverse alternative e stima la probabilità di scelta di ciascuna alternativa j come la frazione di volte in cui risulta l'alternativa di massima utilità percepita. In altri termini, la generica iterazione k del metodo si articola nei seguenti passi:

- si genera un vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_n^k)^T$ di numeri pseudo-casuali estratti da una variabile aleatoria normale multivariata a media nulla e matrice di covarianze $\boldsymbol{\Sigma}$;
- si calcola il vettore $\mathbf{U}^k = \mathbf{V} + \boldsymbol{\varepsilon}^k$ delle utilità percepite campionate;
- si determina un vettore \mathbf{p}^k di probabilità di scelta $p[j/\boldsymbol{\varepsilon}^k]$ delle alternative di tipo deterministico, ovvero $\mathbf{p}^k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con il valore 1 associato alla componente di \mathbf{U}^k di valore più elevato.

Di conseguenza, dopo N iterazioni, una stima campionaria corretta della probabilità di scelta $p[j]$ è data da:

$$\hat{p}[j] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p[j/\boldsymbol{\varepsilon}^k] = \frac{N_j}{N} \quad (1.2.27)$$

dove N_j è il numero di volte che l'alternativa j è l'alternativa di massima utilità percepita nel campione generato. Nelle applicazioni è possibile estrarre un campione di realizzazioni pseudo-casuali $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ da una variabile aleatoria normale multivariata n -dimensionale a media nulla e matrice di covarianze $\boldsymbol{\Sigma}$ nel seguente modo:

- si estrae un vettore \mathbf{z}^k di n v.a. normali standard indipendenti¹²;
- si calcola il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{F}\mathbf{z}^k$ dove la \mathbf{F} è nota, se si è adottato un approccio di tipo factor analytic, o determinabile attraverso la fattorizzazione di Cholesky della generica matrice $\boldsymbol{\Sigma}$.

A fronte della sua semplicità operativa, il metodo Monte Carlo presenta alcuni problemi di carattere teorico. In particolare, i metodi di calibrazione basati sulla simulazione della funzione di verosimiglianza – per approfondimenti si rimanda a Bolduc (1999) – richiedono che la funzione vettoriale $\mathbf{p}[\boldsymbol{\beta}]$ delle probabilità di scelta in funzione del vettore dei parametri da calibrare sia continua e doppiamente differenziabile, il che non accade se la si simula attraverso la (1.2.27)¹³. Una possibile soluzione, proposta da McFadden (1989), prende il nome di simulazione *smoothed* Monte-Carlo, alla generica iterazione della quale il vettore di probabilità di scelta \mathbf{p}^k non è deterministico ma è calcolato utilizzando un Logit Multinomiale di parametro θ e pertanto assume la forma $\mathbf{p}^k = (p^k_1, \dots, p^k_m)$ ¹⁴; in questo modo, però, le probabilità di scelta simulate con lo *smoothed* Monte-Carlo non costituiscono una stima corretta bensì approssimano quelle Probit in misura direttamente proporzionale al valore del parametro di varianza θ del Logit con il quale si calcolano le probabilità di scelta a ciascuna iterazione. In altri termini, esso dovrà essere scelto in modo da raggiungere un compromesso tra velocità e stabilità di convergenza, che aumentano all'aumentare di θ , ed affidabilità nelle probabilità calcolate, che si discostano da quelle Probit tanto più quanto θ è elevato.

Questa considerazione conduce direttamente allo sviluppo del Mixed Logit, di cui si darà cenno nel paragrafo successivo, oltre a suggerire un'applicazione al contesto di scelta del percorso che sarà descritta nel paragrafo 1.3.5.

1.2.3 Mixed Logit

Seguendo l'interpretazione della letteratura proposta da Train (2003), una prima formulazione del Mixed Logit può farsi risalire alla sistematizzazione teorica dello *smoothed* Monte Carlo proposta da McFadden (1989) per il calcolo delle probabilità Probit appena descritto. Si è infatti visto che alla generica iterazione dello *smoothed* Monte Carlo il vettore di probabilità di scelta \mathbf{p}^k non è deterministico ma calcolato utilizzando un Logit Multinomiale di parametro θ , il cui valore condiziona la dicotomia tra velocità di convergenza ed approssimazione delle probabilità Probit. Con riferimento a quest'ultimo aspetto, si riconosce immediatamente che il modello di utilità aleatoria cui effettivamente corrispondono le probabilità di scelta calcolate con lo *smoothed* Monte-Carlo assume in pratica che il residuo complessivo ε_j della (1.2.4) sia scomponibile nella

¹² Esistono diverse tecniche numeriche per estrarre realizzazioni pseudocasuali distribuite secondo una normale standard. Nelle applicazioni della presente tesi si è prevalentemente fatto ricorso al metodo della trasformazione di Box-Muller per cui, dette u_1 ed u_2 due realizzazioni pseudocasuali di una variabile aleatoria uniforme, le quantità $x_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2)$ e $x_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2)$ costituiscono realizzazioni di v.a. normali standard.

¹³ Infatti, perché il vettore \mathbf{p} simulato cambi al variare del vettore $\boldsymbol{\beta}$ occorre che in almeno un'estrazione delle due simulazioni sia scelta un'alternativa j diversa, e si verifica numericamente che ciò non accade con continuità. In altri termini, la funzione vettoriale $\mathbf{p}[\boldsymbol{\beta}]$ simulata col metodo Monte Carlo non è continua. Inoltre, se un'alternativa ha un'utilità sistematica molto bassa è probabile che la simulazione restituisca una probabilità di scelta nulla, il che rappresenta un ulteriore problema nel calcolo della loglikelihood.

¹⁴ In questo modo la $\mathbf{p}[\boldsymbol{\beta}]$ è continua e doppiamente differenziabile perché media di valori di probabilità strettamente positivi e non binari (0/1) come nel caso deterministico, ed inoltre fornisce probabilità di scelta strettamente maggiori di zero.

somma di due aliquote λ_j e τ_j tra loro indipendenti:

$$U_j = V_j + \varepsilon_j = V_j + \lambda_j + \tau_j \quad (1.2.28)$$

dove le λ_j sono v.a. normali a media nulla e matrice di covarianza Σ e le τ_j sono v.a. indipendenti di Gumbel a media nulla e parametro di varianza θ . Il modello (1.2.28) è stato formalmente introdotto in letteratura da Ben-Akiva e Bolduc (1996) ed è noto in letteratura come *Multinomial Probit with Logit Kernel*. In generale, le ipotesi poste sulla distribuzione dei residui λ_j e τ_j non sono restrittive in quanto essi possono seguire una distribuzione qualsiasi, e ciò genera una classe di modelli di utilità aleatoria denominati *mixed models*; in particolare, quando i residui τ_j sono v.a. di Gumbel indipendentemente ed identicamente distribuite il modello (1.2.28) è noto in letteratura come *Mixed Logit*. E' in ogni caso opportuno sottolineare, come evidenziato in Papola e Marzano (2004), che con il modello (1.2.28) non è possibile riprodurre una qualsiasi correlazione tra alternative, in quanto dalla definizione di varianza e dall'ipotesi di indipendenza tra i residui λ_j e τ_j segue che:

$$Var[\varepsilon_j] = Var[\lambda_j + \tau_j] = Var[\lambda_j] + Var[\tau_j] \quad (1.2.29)$$

mentre la covarianza tra una coppia di residui è data da:

$$Cov[\varepsilon_j, \varepsilon_k] = Cov[\lambda_j, \lambda_k] \leq \sqrt{Var[\lambda_j]} \cdot \sqrt{Var[\lambda_k]} \quad (1.2.30)$$

per cui si conclude che:

$$Corr[\varepsilon_j, \varepsilon_k] \leq \frac{\sqrt{Var[\lambda_j]} \cdot \sqrt{Var[\lambda_k]}}{\sqrt{Var[\lambda_j + \tau_j]} \cdot \sqrt{Var[\lambda_k + \tau_k]}} < 1 \quad (1.2.31)$$

Per comprendere come la (1.2.28) sia perfettamente coerente con le probabilità simulate attraverso uno smoothed Monte-Carlo basta considerare che, detto λ^* un vettore di realizzazioni pseudo-casuali λ_j^* dei residui normali λ_j , la (1.2.28) può essere riguardata nella forma $U_j = (V_j + \lambda_j^*) + \tau_j$ ed in virtù dell'ipotesi fatta sulla distribuzione di τ_j le corrispondenti probabilità di scelta $p^{MNL}[j/\lambda^*]$ possono essere calcolate utilizzando un Logit multinomiale di parametro θ :

$$p^{MNL}[j/\lambda^*] = \frac{\exp[V_j + \lambda_j^*]}{\sum_{h \in I} \exp[V_h + \lambda_h^*]} \quad (1.2.32)$$

Evidentemente, detta $f(\lambda)$ la legge di densità di probabilità congiunta dei residui normali λ_j , le probabilità di scelta $p[j]$ fornite dal Mixed Logit sono date da:

$$p[j] = \int p^{MNL}[j/\lambda^*] \cdot f(\lambda) d\lambda = \int \frac{\exp[V_j + \lambda_j^*]}{\sum_{h \in I} \exp[V_h + \lambda_h^*]} \cdot f(\lambda) d\lambda \quad (1.2.33)$$

e si riconosce immediatamente che una stima corretta dell'integrale (1.2.33) si ottiene con uno stimatore del tipo (1.2.27) in cui le $p[j/\mathbf{e}^k]$ sono proprio le (1.2.32).

Ai fini delle applicazioni al contesto di scelta del percorso, appare interessante estendere al Mixed Logit l'approccio di tipo factor analysis alla componente normale λ_j del residuo

complessivo ε_j dell'utilità percepita dell'alternativa j . In particolare, si ottiene:

$$\varepsilon_j = \sum_{k=1}^n f_{jk} \zeta_k + \tau_j \quad \text{ovvero} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\tau}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\zeta}$ il vettore di dimensione $(n-1)$ delle normali standard ζ_i . L'utilità percepita U_j dell'alternativa j può allora essere espressa come:

$$U_j = V_j + \sum_{k=1}^n f_{jk} \zeta_k + \tau_j \quad (1.2.34)$$

Di conseguenza, la varianza del singolo residuo può essere scritta nel seguente modo:

$$Var[\varepsilon_j] = E\left[\sum_{k=1}^n f_{jk}^2 \zeta_k^2\right] + E[\tau_j^2] = \sum_{k=1}^n f_{jk}^2 + \frac{\pi^2 \theta^2}{6} \quad (1.2.35)$$

mentre la covarianza tra i residui di due alternative è ancora espressa dalla (1.2.26). Si noti che è possibile specificare la matrice \mathbf{F} in maniera opportuna per ricondursi a casi notevoli di covarianze; a titolo di esempio, se $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ il modello degenera in un Logit Multinomiale, mentre per ottenere una matrice di covarianza analoga a quella di un Logit Gerarchizzato ad un livello con n gruppi basta assumere la \mathbf{F} di dimensione pari al numero di alternative per il numero di gruppi ed in modo che il generico elemento f_{ji} valga 1 se j appartiene al gruppo i -mo e 0 in caso contrario.

La (1.2.34) è nota in letteratura come specificazione del Mixed Logit di tipo *error component*. Analogamente al factor analytic Probit, è possibile adottare una specificazione di tipo *random coefficient* della componente λ_j :

$$U_j = \sum_k \beta_k X_{jk}^i + \eta_k^i X_{jk}^i + \tau_j$$

avendo adottato lo stesso simbolismo introdotto per il Probit. La (1.2.32) e la (1.2.33) possono allora essere riscritte nel seguente modo, facendo comparire esplicitamente la densità di probabilità congiunta $f(\boldsymbol{\beta})$ dei coefficienti:

$$p^{MNL}[j / \boldsymbol{\beta}] = \frac{\exp[V_j(\boldsymbol{\beta})]}{\sum_{h \in I} \exp[V_h(\boldsymbol{\beta})]} \quad (1.2.36)$$

$$p[j] = \int p^{MNL}[j / \boldsymbol{\beta}] \cdot f(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta} = \int \frac{\exp[V_j(\boldsymbol{\beta})]}{\sum_{h \in I} \exp[V_h(\boldsymbol{\beta})]} \cdot f(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta} \quad (1.2.37)$$

In questo senso, le probabilità di scelta fornite dalla (1.2.36) vanno interpretate come probabilità di scelta calcolate in corrispondenza di una particolare realizzazione della variabile aleatoria multivariata $\boldsymbol{\beta}$, mentre le probabilità di scelta assolute si ottengono come media delle probabilità (1.2.36) pesate attraverso la $f(\boldsymbol{\beta})$, ovvero la (1.2.37).

1.3 Modelli di utilità aleatoria per la simulazione della scelta del percorso

Il presente paragrafo particularizza l'applicazione al contesto di scelta del percorso dei modelli di

utilità aleatoria descritti nel paragrafo precedente, illustrando in particolare come ciò comporti, in molti casi, una sostanziale modifica o riformulazione del modello stesso.

Come descritto nell'introduzione, un percorso può definirsi come una sequenza ordinata di archi che collega una coppia origine-destinazione senza passare per due volte attraverso lo stesso nodo. Per quanto attiene alla simbologia adottata per descrivere la topologia della rete, a seconda dei casi si parlerà indifferentemente di un generico arco indicandolo con una lettera minuscola dell'alfabeto latino ovvero identificandolo come una coppia di nodi. In particolare, a ciascun arco ordinato l della rete è univocamente associata una coppia di nodi: il nodo finale $HD(l)$ che rappresenta la testa dell'arco ed il nodo iniziale $TL(l)$ che ne individua la coda. A partire da questa definizione, è possibile introdurre per ciascun nodo i della rete il concetto di stella in ingresso $BS(i)$, come dell'insieme degli archi la cui testa coincide con il nodo considerato, ed analogamente quello di stella in uscita $FS(i)$ come dell'insieme di archi la cui coda coincide con il nodo considerato. A volte, nel seguito, per semplificare la notazione si parlerà anche di stella in ingresso ed in uscita da un arco, intendendo con ciò rispettivamente la stella in ingresso del nodo coda e la stella in uscita del nodo testa dell'arco.

Coerentemente con le ipotesi generali alla base della teoria dell'utilità aleatoria, illustrate nel paragrafo 1.2, a ciascun percorso k è associata un'utilità percepita U_k , espressa in accordo con la (1.2.4) come:

$$U_k = V_k + \varepsilon_k = -C_k + \varepsilon_k$$

nella quale si è evidenziato che l'utilità sistematica rappresenta, in realtà, una disutilità che può essere definita in termini del costo C_k del percorso considerato. In particolare, C_k può essere espresso nel seguente modo:

$$C_k = \sum_{l \in k} c_l + C_k^{NA} \quad (1.3.1)$$

dove c_l è il costo dell'arco l , la sommatoria è estesa a tutti gli archi del percorso k e C_k^{NA} rappresenta una componente di costo cosiddetta non additiva, ovvero specifica del percorso stesso e dunque non riconducibile a combinazione di costi di arco; un esempio tradizionalmente proposto di aliquota non additiva di costo del percorso è rappresentato da un pedaggio non lineare con la distanza. La relazione (1.3.1) può essere naturalmente espressa in forma vettoriale, attraverso la matrice di incidenza archi-percorsi \mathbf{A} , come $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{c} + \mathbf{C}^{NA}$ avendo indicato con \mathbf{C} il vettore colonna dei costi di percorso totali, con \mathbf{C}^{NA} quello dei costi non additivi e con \mathbf{c} quello dei costi di arco. Nel seguito, per semplicità, si assumerà $C_k^{NA} = 0 \forall k$ ovvero si ipotizzeranno solo costi di percorso additivi.

In generale, si ipotizza che l'utilità di percorso U_k sia data dalla somma delle utilità percepite u_l di tutti gli archi che lo compongono per cui, in assenza della componente non additiva, indicando con η_l il residuo aleatorio delle variabili di arco, si può scrivere:

$$U_k = \sum_{l \in k} u_l$$

$$u_l = -c_l + \eta_l$$

Nell'ipotesi che le utilità percepite di arco u_l siano v.a. indipendenti, si può dimostrare che la

covarianza tra le utilità di due percorsi k e h è pari alla somma delle varianze delle utilità degli archi in comune, in quanto:

$$Cov[\varepsilon_k \varepsilon_h] = E[\varepsilon_k \varepsilon_h] = E[\sum_{l \in k} \eta_l \cdot \sum_{l' \in h} \eta_{l'}] = \sum_{l \in k \cap h} E[\eta_l^2] = \sum_{l \in k \cap h} Var[\eta_l]$$

La tassonomia riportata di seguito è, salvo ove espressamente indicato, coerente con le ipotesi sin qui introdotte; essa attinge, in parte, agli studi di Batley et al. (2001), Ramming (2002), Marzano (2002), Papola (2003) e Bierlaire e Frejinger (2005) che saranno descritti in dettaglio nel paragrafo 1.4 a proposito del confronto in simulazione tra modelli di scelta del percorso. Coerentemente con quanto assunto nell'introduzione, le specificazioni e le caratteristiche di ciascun modello saranno descritte nell'ottica di un'applicazione ad enumerazione implicita dei percorsi e sottolineando, qualora necessario, i problemi applicativi nell'ambito dei modelli di assegnazione. In ogni caso, ove rilevante, si darà cenno di applicazioni di modelli a fini "interpretativi" ovvero di modelli calibrati per inferire alcune regole sul comportamento di scelta del percorso degli utenti.

1.3.1 Logit Multinomiale

L'applicazione del modello Logit Multinomiale al contesto di scelta del percorso può essere formalmente definita sostituendo nella forma funzionale (1.2.9) la disutilità di ciascun percorso espressa attraverso la (1.3.1):

$$p[k] = \frac{e^{-C_k/\theta_0}}{\sum_h e^{-C_h/\theta_0}} \quad (1.3.2)$$

Nella pratica, l'impossibilità di simulare la correlazione tra alternative di scelta a seguito dell'ipotesi di indipendenza delle utilità percepite rende di solito non conveniente l'adozione tout court di modelli di scelta del percorso di tipo Logit Multinomiale, in conseguenza del forte grado di sovrapposizione che in genere caratterizza i percorsi disponibili, a meno che non si adottino euristiche di selezione dell'insieme di scelta che escludano a priori la presenza di alternative correlate¹⁵. Peraltro, sulla base del modello Logit Multinomiale è stato storicamente proposto in letteratura da Dial (1971) il primo algoritmo per il calcolo dei flussi di arco con approccio implicito e selettivo¹⁶. Per descrivere l'algoritmo occorre definire in primo luogo il concetto di efficienza di un arco rispetto all'origine e/o rispetto alla destinazione: seguendo la definizione di Dial, un arco ij è efficiente rispetto all'origine se il costo $Z_{o,j}$ del minimo percorso per raggiungerne la testa j è maggiore del costo $Z_{o,i}$ del minimo percorso per raggiungerne la coda i , ed analogamente è efficiente rispetto alla destinazione se $Z_{j,d} > Z_{i,d}$. Si osservi che dalla definizione posta segue che gli archi appartenenti all'albero di minimo costo di radice o (ovvero definito attraverso la condizione di Bellmann) sono per definizione efficienti rispetto all'origine, ed

¹⁵ In altre parole, se la configurazione della rete non consente di trascurare gli effetti della sovrapposizione, si può selezionare con approccio esplicito un insieme di alternative disponibili che privilegi percorsi poco correlati e simulare la scelta con un Logit Multinomiale, così come accennato nell'introduzione. Un'analisi delle numerose euristiche reperibili in letteratura a tale scopo esula dagli obiettivi della presente tesi, e pertanto non sarà considerata nel seguito.

¹⁶ Come sarà chiarito tra breve, l'ipotesi di approccio selettivo introdotta da Dial ha una funzione di carattere meramente algoritmico e non comportamentale.

analogamente accade rispetto alla destinazione. E' allora immediato estendere la definizione di efficienza ad un percorso, affermando che un percorso è efficiente se e solo se lo sono tutti i suoi archi. Poiché tornerà utile nel capitolo 2, coerentemente con le definizioni introdotte in precedenza è possibile definire la stella efficiente in uscita $EFS(i)$ di un nodo i come l'insieme dei nodi testa degli archi efficienti rispetto all'origine ed alla destinazione ed aventi come coda i , ed analogamente la stella efficiente in ingresso $EBS(i)$ come l'insieme dei nodi coda degli archi efficienti rispetto all'origine ed alla destinazione la cui testa coincide con i .

E' possibile definire l'algoritmo di Dial con riferimento alla condizione di efficienza rispetto ad una sola tra l'origine e la destinazione (algoritmo a *singolo passo*) ovvero rispetto ad entrambe (algoritmo a *doppio passo*). Di seguito, per semplicità di notazione, si propone la specificazione dell'algoritmo a singolo passo con archi efficienti rispetto all'origine o ; per quello a doppio passo si rimanda al capitolo 2, nel quale sarà descritta una sua generalizzazione nell'ambito della formulazione di un algoritmo di caricamento della rete per il modello PML.

Dal punto di vista teorico, l'algoritmo prende avvio dalla constatazione che, a partire dalla (1.3.2), la probabilità di scegliere un percorso k nell'insieme K_{od} dei percorsi disponibili da o a d risulta proporzionale al costo del percorso stesso:

$$p[k] \propto \exp(-C_k / \theta)$$

Ricordando che C_k si può esprimere in funzione dei costi di arco c_{ij} secondo la (1.3.1) la precedente relazione può scriversi come:

$$p[k] \propto \exp(-C_k / \theta) = \prod_{ij \in k} \exp(-c_{ij} / \theta)$$

La probabilità di scelta $p[k/od]$ si può esprimere a sua volta come la probabilità $p[ij/j]$ di scegliere ciascun arco ij del percorso condizionata alla scelta del nodo finale j :

$$p[k] = \prod_{ij \in k} p[ij / j] \quad (1.3.3)$$

Dial dimostra che, se la probabilità $p[ij/j]$ è calcolata con un Logit multinomiale di parametro θ_0 secondo la specificazione:

$$p[ij / j] = \frac{e^{V_{ij/j}/\theta_0}}{\sum_{m \in BS(j)} e^{V_{mj/j}/\theta_0}}$$

$$V_{ij/j} = -c_{ij} + \theta_0 Y_i$$

$$Y_i = \ln \sum_{n \in BS(i)} e^{V_{ni,i}/\theta_0}$$

allora la probabilità di scelta del percorso (1.3.3) coincide con la probabilità calcolata attraverso il modello Logit Multinomiale (1.3.2) sull'insieme dei percorsi efficienti rispetto all'origine definito in precedenza; si noti che nelle relazioni precedenti l'utilità $V_{ij/j}$ è espressa come somma dell'opposto del costo dell' arco ij e della logsum Y_i relativa al nodo iniziale i .

A partire dalle relazioni precedenti, con passaggi algebrici di sostituzione è conveniente pervenire alla definizione dei pesi di arco w_{ij} e dei pesi di nodo W_j legati secondo le relazioni:

$$w_{ij} = e^{-c_{ij}/\theta_0} \cdot W_i$$

$$W_i = \sum_{m \in BS(j)} w_{ij}$$

per cui la probabilità condizionata $p[ij/j]$ può essere riformulata come segue:

$$p[ij / j] = w_{ij} / W_i \tag{1.3.4}$$

Per convenzione, si attribuisce un peso di nodo unitario anche all'origine, per la quale non ha ovviamente senso parlare di stella in ingresso. Ciò premesso, l'algoritmo di Dial si articola nei seguenti passi, con riferimento alla generica origine o :

- si genera, attraverso un algoritmo di minimo percorso, una lista di nodi per costo crescente di allontanamento dall'origine;
- si esamina alla k -ma iterazione il nodo j che è al k -mo posto nella lista dei nodi raggiungibili da o per costo di raggiungimento minimo crescente;
- $\forall i \in BS(j)$ si verifica l'efficienza rispetto all'origine dell'arco ij ; in caso affermativo, si calcola il peso dell'arco ij e si aggiorna il peso del nodo j rispettivamente secondo le relazioni:

$$w_{ij} = e^{-c_{ij}/\theta_0} \cdot W_i$$

$$W_j = W_j + w_{ij}$$

altrimenti si pone il peso di arco $w_{ij}=0$.

E' opportuno sottolineare che la struttura dell'algoritmo permette di processare tutti i nodi in virtù dell'ipotesi di efficienza rispetto all'origine, la quale garantisce che all'iterazione k siano già stati processati tutti gli archi la cui testa ha un costo di raggiungimento inferiore al nodo processato all'iterazione k stessa, e ciò permette di calcolare quindi i pesi di nodo. In altre parole, la condizione di efficienza nasce per mere ragioni algoritmiche, e solo in una seconda fase ha ricevuto in letteratura una chiave di lettura di tipo comportamentale. E' peraltro da dimostrare che gli utenti si comportino effettivamente percependo gli archi, e quindi i percorsi, in termini di efficienza rispetto all'origine, alla destinazione o ad entrambe.

Ad ogni modo, una volta processati tutti i nodi, si conoscono tutti i pesi di nodo e di arco per cui, attraverso l'applicazione della (1.3.4), che fornisce le percentuali secondo cui il flusso entrante in ciascun nodo si ripartisce tra gli archi efficienti rispetto all'origine che lo hanno come coda, è possibile procedere al caricamento della rete processando i nodi in ordine crescente di allontanamento dalla destinazione.

La specificazione dell'algoritmo nell'ipotesi di condizione di efficienza rispetto alla destinazione, e nel caso di efficienza rispetto sia all'origine sia alla destinazione, risulta immediata e pertanto non è esplicitamente riportata.

1.3.1.1 C-Logit

Come osservato, il modello Logit Multinomiale non è in grado di tenere in considerazione gli

effetti delle covarianze tra le alternative di scelta, in virtù dell'ipotesi di indipendenza delle utilità percepite delle alternative di scelta; per questo motivo, in letteratura si sono proposti approcci modellistici alternativi che consentissero di superare questo limite, pur basandosi sulla stessa forma funzionale e quindi conservandone i vantaggi computazionali ed operativi. Il modello C-Logit, proposto da Cascetta (1995), introduce una correlazione tra percorsi attraverso un attributo di costo aggiuntivo CF_k , detto fattore di sovrapposizione o commonality factor. Attraverso tale fattore si esprime la correlazione tra due percorsi in funzione del loro grado di sovrapposizione, valutato in termini di costo degli archi condivisi dei due percorsi; da ciò consegue che CF_k è nullo se nessun arco di k è condiviso con altri percorsi della rete, ed è tanto maggiore quanti più numerosi sono i percorsi che condividono gli archi più rilevanti del percorso k . In questo modo, attraverso il CF_k si riduce l'utilità sistematica e quindi la probabilità di scelta dei percorsi molto correlati rispetto a quelli indipendenti. Ricordando l'espressione (1.3.2) del Logit Multinomiale si può formulare in forma chiusa la probabilità di scelta di ciascun percorso come:

$$p[k] = \frac{e^{-(C_k + CF_k)/\theta_0}}{\sum_h e^{-(C_h + CF_h)/\theta_0}} \quad (1.3.5)$$

E' quasi superfluo sottolineare che tale modello riproduce in maniera approssimata gli effetti delle covarianze tra i residui aleatori delle utilità percepite delle alternative di scelta, in quanto da un punto di vista concettuale tali residui restano indipendenti in senso statistico, dal momento che la forma funzionale utilizzata è di tipo Logit Multinomiale. L'idea di base è quella che l'effetto delle covarianze sia quello di ridurre la probabilità di scelta dell'alternativa più correlata che, nelle ipotesi introdotte all'inizio del paragrafo 1.3, è il percorso con maggior grado di sovrapposizione; pertanto, il C-Logit non introduce esplicitamente delle covarianze tra le utilità dei percorsi, ma assegna ugualmente probabilità di scelta minore al percorso più correlato penalizzandone l'utilità sistematica attraverso il fattore di sovrapposizione. Sulla bontà di questa approssimazione si tornerà in dettaglio nel seguito testandola attraverso opportune prove numeriche.

In letteratura è possibile reperire differenti formulazioni del fattore di sovrapposizione CF_k . L'espressione originariamente proposta da Cascetta et al. (1996) è data da¹⁷:

$$CF_k^1 = \beta_0 \ln \left(1 + \sum_{h \neq k} \frac{X_{hk}}{\sqrt{X_h X_k}} \right) \quad (1.3.6)$$

nella quale la sommatoria presenta al numeratore un attributo di costo X_{hk} comune fra i due percorsi h e k , pesato rispetto alla radice quadrata del prodotto dei medesimi attributi di costo X_h ed X_k dei due percorsi. In altri termini, se h e k sono perfettamente coincidenti la sommatoria vale 1 mentre se non hanno alcun arco in comune la sommatoria vale 0. Un'altra espressione del commonality factor reperibile in letteratura tecnica si deve a Russo e Vitetta (2001) ed è data da:

$$CF_k^2 = \beta_0 \sum_{l \in k} \lambda_{kl} \ln N_l \quad (1.3.7)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli archi l del percorso k , λ_{lk} è il peso dell'arco l nel percorso k di norma espresso come rapporto tra il costo dell'arco l ed il costo del percorso k , e N_l è la

¹⁷ Le diverse specificazioni del fattore di sovrapposizione saranno individuate con un apice numerico progressivo.

numerosità dell'arco l ovvero il numero di percorsi che utilizzano l'arco l per collegare la coppia origine-destinazione considerata¹⁸. Una terza formulazione, proposta da Cascetta e Papola (1998), è la seguente:

$$CF_k^3 = \beta_0 \ln \left(1 + \sum_{h \neq k} \frac{X_{hk}}{\sqrt{X_h X_k}} \frac{X_k - X_{hk}}{X_h - X_{hk}} \right) \quad (1.3.8)$$

che in qualche modo generalizza la (1.3.6) introducendo anche le aliquote degli attributi di costo dei due percorsi non condivise. Sulle diverse specificazioni del fattore di sovrapposizione precedentemente introdotte è opportuno effettuare alcune osservazioni. La prima è che, perché il C-Logit funzioni correttamente, occorre che la forma funzionale (1.3.5) sia riformulata nel modo seguente:

$$p[k] = \frac{e^{-C_k/\theta_0 - CF_k}}{\sum_h e^{-C_h/\theta_0 - CF_h}} = \frac{PP_k \cdot e^{-C_k/\theta_0}}{\sum_h PP_h \cdot e^{-C_h/\theta_0}} \quad (1.3.9)$$

dove $PP_k = e^{-CF_k}$ può essere interpretato come la probabilità di percepire il percorso k in un modello di scelta del percorso con simulazione implicita dell'insieme di scelta¹⁹, in coerenza con quanto descritto in Cascetta e Papola (2001). In altri termini, il fattore di sovrapposizione non deve essere diviso per il coefficiente θ_0 e non deve essere presente il coefficiente moltiplicativo β_0 . In questo modo, infatti, è assicurato che il CF sia adimensionale, come deve essere affinché possa essere adimensionale l'argomento dell'esponenziale nella (1.3.5), e che il modello riproduca correttamente i casi limite come si vedrà nel paragrafo 1.4.

Una seconda osservazione, di rilevante importanza ai fini applicativi, è rappresentata dalla constatazione che le specificazioni (1.3.6) e (1.3.8) richiedono per forza un approccio di tipo esplicito, con enumerazione di tutti i percorsi per poter effettivamente calcolare i costi in comune e quindi i fattori di sovrapposizione. Invece, come illustrato in Russo e Vitetta (2001) e Russo e Vitetta (2003), la specificazione (1.3.7) consente, seppur con importanti semplificazioni, di estendere l'algoritmo di Dial descritto nel paragrafo 1.3.1 per il calcolo implicito delle probabilità di scelta. In particolare, la prima semplificazione introdotta consiste nell'assumere nella (1.3.7), in luogo del termine λ_{kl} la quantità λ_l^* che esprime il rapporto tra il costo dell'arco l ed il percorso di minimo costo fra o e d . Con questa posizione, è possibile riformulare i pesi di arco e di nodo precedentemente introdotti nel seguente modo (si è assunto per quanto detto prima $\beta_0=1$ e si è indicato N_{ij} in luogo di N_l per comodità di notazione):

¹⁸ E' da notare che in Russo e Vitetta (2003) vi è un'incongruenza non chiarita nel testo tra la formula n. 2 di pag. 182 che definisce in maniera teorica la specificazione della (1.3.7) e la formula n. 3 di pag. 185, che coincide con la (1.3.7) ed è quella utilizzata nella pratica. Nel seguito si assumerà pertanto per buona la (1.3.7) come specificazione proposta dagli autori.

¹⁹ Il modello IAP-Logit (*implicit availability perception*), proposto da Cascetta e Papola (1998 e 2001), presenta una forma funzionale analoga a quella del C-Logit, con un parametro inserito nella specificazione dell'utilità sistematica di ciascuna alternativa in un contesto di tipo Logit Multinomiale; ciò che lo distingue è la differente interpretazione attribuita a tale parametro, che nel caso del C-Logit mira a simulare in maniera approssimata gli effetti delle covarianze tra le alternative di scelta, mentre per lo IAP-Logit simula la disponibilità dell'alternativa all'interno dell'insieme di scelta del decisore. In altre parole, il coefficiente introdotto dallo IAP-Logit penalizza l'utilità sistematica di un percorso per riflettere la possibilità che i decisori non siano a conoscenza di quel percorso ovvero non possano utilizzarlo. Nella pratica, come si è detto, la specificazione C-Logit (1.3.9) rappresenta un'approssimazione del primo ordine del modello IAP-Logit.

$$w_{ij} = (N_{ij})^{\lambda_i^*} e^{-c_{ij}/\theta_0} \cdot W_i$$

$$W_j = \sum_{m \in BS(j)} w_{mj}$$

Dal momento che il calcolo di λ_i^* non richiede alcun onere computazionale aggiuntivo, l'unico passo aggiuntivo rispetto alla procedura di calcolo illustrata per il Dial applicato al Logit Multinomiale riguarda il calcolo delle numerosità degli archi N_i , che può essere effettuato secondo una banale procedura.

Fissato un arco ij , si possono considerare i due insiemi delle parti di percorsi che precedono i e seguono j , rispettivamente di numerosità $NA_{ij,od}$ e $NB_{ij,od}$. La numerosità dell'arco ij è allora data dal numero di combinazioni tra gli elementi dei due insiemi così definiti, e cioè dal prodotto delle numerosità $NA_{ij,od}$ e $NB_{ij,od}$; per conoscere $NA_{ij,od}$ si procede come segue:

- si genera l'albero di minimo percorso di origine o ;
- si pone $NA_{oi}=1$ per ogni arco oi uscente da o ed efficiente, e si ordina per costo minimo crescente la lista dei nodi i così raggiunti;
- per ogni nodo i della lista, si considera ciascun nodo $j \in FS(i)$: si controlla se l'arco ij è efficiente, in caso affermativo si pone:

$$NA_{ij} = \sum_{h \in BS(i)} NA_{hi}$$

ovvero si somma la numerosità di tutti gli archi incidenti in i ed efficienti per ottenere la numerosità di ij .

Con la stessa procedura, a patto di sostituire l'albero di minimo costo di radice o con quello di destinazione d , si calcola $NB_{ij,od}$. Si noti che il calcolo di $NA_{ij,od}$ va effettuato tante volte quante sono le origini, mentre quello di $NB_{ij,od}$ tante volte quante sono le destinazioni. Pertanto, se si specifica la numerosità come prodotto $NA_{ij,od} \cdot NB_{ij,od}$ occorre processare separatamente ciascuna coppia origine-destinazione con un algoritmo di Dial a doppio passo. Pertanto, un'ulteriore semplificazione di solito adottata nella (1.3.7) prevede che $N_i \cong NA_{ij,od}$ in modo da processare tutte le destinazioni contemporaneamente per una data origine, con un approccio a singolo passo.

Come sarà descritto nel dettaglio nel paragrafo 1.4 attraverso delle prove numeriche, questa semplificazione, in uno con quella introdotta in precedenza ($\lambda_k \cong \lambda_i^*$) riduce significativamente i tempi di calcolo ma tende a sottostimare la sovrapposizione tra i percorsi ed a fornire risultati non sempre soddisfacenti.

La necessità di valutare in simulazione le probabilità di scelta fornite dal modello C-Logit risulta evidente se si inquadra dal punto di vista teorico il modo in cui il modello cerca di riprodurre gli effetti della correlazione tra le alternative di scelta; in particolare, come descritto in Papola (2001), è importante sottolineare che tali effetti non sono stati ancora formalmente chiariti in letteratura, se non in casi particolarmente semplici. E' infatti noto che, date due alternative A e B di pari utilità sistematica, la prima indipendente e la seconda correlata con una o più alternative (figura 1.1a), ci si aspetta che A sia scelta mediamente con maggiore frequenza. Inoltre, se ρ_{AB} è il livello di correlazione tra A e B e ρ_{CD} quello tra C e D (figura 1.1b), A e B saranno scelte con minore frequenza rispetto a C e D se risulta $\rho_{AB} > \rho_{CD}$ e viceversa. Infine, se A è correlata con una sola alternativa B mentre C è correlata con due alternative D ed E (figura 1.1c) ed il livello di

correlazione tra le alternative è il medesimo, ovvero $\rho_{AB}=\rho_{CD}=\rho_{CE}=\rho_{DE}$, le alternative C, D ed E saranno scelte con minore frequenza rispetto ad A e B . Tutti i modelli probabilistici in grado di introdurre esplicitamente delle covarianze tra le alternative, ad esempio Logit Gerarchizzato e Probit, riproducono coerentemente i risultati precedentemente descritti.

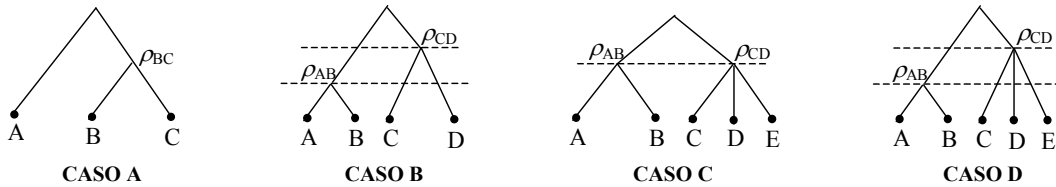


Figura 1.1 – Esempi di strutture di correlazione

Nulla si può dire, invece, su cosa accada nel caso di figura 1.1d, analogo al caso di figura 1.1c a differenza del quale risulta $\rho_{AB} > \rho_{CD} = \rho_{CE} = \rho_{DE}$; in particolare, non si può stabilire a priori se sia più penalizzata A che è correlata con una sola alternativa B con un livello di correlazione ρ_{AB} oppure C che è correlata con due alternative, D ed E , ma con un livello di correlazione inferiore. Allo stato attuale delle conoscenze sul fenomeno correlazione non è possibile rispondere a tale domanda; si può comunque verificare numericamente che Logit Gerarchizzato e Probit forniscono in questi casi risultati sempre coerenti e praticamente coincidenti tra loro.

Se ne può concludere che, se per ogni coppia di alternative i e j risulta $\rho_{ih} \geq \rho_{jh} \forall h$ oppure $\rho_{ih} \leq \rho_{jh} \forall h$ con almeno una disuguaglianza verificata in senso stretto, allora $p[i] < p[j]$ ovvero $p[i] > p[j]$ come nei casi di figura 1.1a-1.1c precedentemente descritti. Se ciò non accade, non è possibile formulare aspettative chiare circa le probabilità di scelta né costruirle sperimentalmente; l'unica possibilità è quella di analizzare i risultati forniti da modelli quali Logit Gerarchizzato e Probit. Rispetto al C-Logit, dunque, si conclude che non è possibile garantire a priori l'esistenza di una sorta di "correlazione totale" misurabile attraverso il fattore di sovrapposizione CF in modo tale che, a parità di utilità sistematiche, la probabilità di scelta di un'alternativa sia sempre inversamente proporzionale al suo livello di correlazione totale. E' fondamentale, quindi, analizzare e confrontare attentamente le prestazioni di questo modello in simulazione nei contesti di scelta del percorso.

1.3.1.2 Path-size Logit

Il modello Path-size Logit è stato inizialmente proposto da Ben-Akiva e Bierlaire (1999) e successivamente generalizzato da Ramming (2002). Dal punto di vista strettamente operativo, la forma funzionale del modello è esattamente analoga a quella di un C-Logit e prevede dunque che un attributo PS_k sia aggiunto all'utilità sistematica di ciascun percorso nell'ambito di una specificazione di tipo Logit Multinomiale:

$$p[k] = \frac{e^{-C_k + \beta \ln PS_k}}{\sum_h e^{-C_h + \beta \ln PS_h}}$$

La principale differenza rispetto al C-Logit risiede nell'analisi interpretativa dell'attributo PS_k , la cui definizione discende dall'applicazione al contesto di scelta del percorso della cosiddetta teoria delle scelte discrete per le alternative aggregate, proposta da Ben-Akiva e Lerman (1985) ed

applicata per prima alla simulazione della scelta della destinazione. Come riportato in Prashker e Bekhor (2004), mentre nel caso della scelta della destinazione ciascuna alternativa aggregata (zona di traffico) può essere suddivisa in un numero più o meno grande di alternative elementari (destinazioni elementari all'interno della zona di traffico), nel caso della scelta del percorso la taglia massima di un percorso è pari ad uno e si riduce in misura proporzionale a quanto quel percorso condivide archi con gli altri percorsi della rete nell'insieme di scelta considerato. In altre parole, il fattore di taglia PS_k di un percorso k può essere interpretato come la percentuale di quel percorso che costituisce un'alternativa "piena". In particolare, la prima specificazione proposta per il fattore di taglia si deve a Ben-Akiva e Lerman (1985) che propongono²⁰:

$$PS_k^1 = \sum_{l \in k} \frac{L_l}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in Kod} a_{lj}} \quad (1.3.11)$$

nella quale L_l è la lunghezza dell'arco l e L_k la lunghezza del percorso k . A partire dalla formulazione originaria (1.3.11) sono state proposte diverse varianti della funzione di taglia del percorso k . In particolare, gli stessi Ben-Akiva e Bierlaire (1999) modificano la (1.3.11) nel seguente modo:

$$PS_k^2 = \sum_{l \in k} \frac{L_l}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in Kod} \frac{L_{Kod}^*}{L_j} a_{lj}} \quad (1.3.12)$$

dove L_{Kod}^* è la lunghezza del minimo percorso nell'insieme Kod .

Una successiva formulazione, denominata *generalized Path-size*, si deve a Ramming (2002) che propone:

$$PS_k^3 = \sum_{l \in k} \frac{L_l}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in Kod} \frac{G(L_k, \gamma)}{G(L_j, \gamma)} a_{lj}}$$

nella quale $G(x, \gamma)$ è una funzione della variabile x dipendente da un parametro γ . Ramming (2002) e Hoogendoorn-Lanser (2005) in particolare propongono:

$$PS_k^3 = \sum_{l \in k} \frac{L_l}{L_k} \frac{1}{\sum_{j \in Kod} \left(\frac{L_k}{L_j} \right)^\gamma a_{lj}} \quad (1.3.13)$$

che ovviamente si riconduce alla (1.3.11) quando $\gamma=0$; Ramming (2001) suggerisce di utilizzare un valore di γ molto grande ma finito.

Le specificazioni (1.3.11)-(1.3.13) sono state riportate così come descritte in letteratura; è evidente che esse possono essere semplificate, così come descritto in Bierlaire e Frejinger (2005) tenendo anche conto che nelle utilizzazioni pratiche ne va calcolato il logaritmo naturale come:

²⁰ Le diverse specificazioni del fattore di taglia saranno individuate con un apice numerico progressivo, così come per le diverse specificazioni del fattore di sovrapposizione nel C-Logit.

$$PS_k^1 = \frac{1}{L_k} \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} a_{lj}} \rightarrow \ln PS_k^1 = -\ln L_k + \ln \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} a_{lj}}$$

$$PS_k^2 = \frac{1}{L_k L_{Kod}^*} \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} \frac{a_{lj}}{L_j}} \rightarrow \ln PS_k^2 = -\ln L_k - \ln L_{Kod}^* + \ln \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} \frac{a_{lj}}{L_j}}$$

$$PS_k^3 = \frac{1}{(L_k)^{\gamma+1}} \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} \frac{a_{lj}}{(L_j)^\gamma}} \rightarrow \ln PS_k^3 = -(\gamma+1) \ln L_k + \ln \sum_{l \in k} \frac{L_l}{\sum_{j \in Kod} \frac{a_{lj}}{(L_j)^\gamma}}$$

Non è possibile reperire in letteratura un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi basato sul Path-size Logit, e d'altra parte le diverse specificazioni testé descritte per il fattore PS_k suggeriscono che non sia possibile applicarle senza procedere con un approccio ad enumerazione esplicita. Inoltre, così come per il C-Logit, è possibile dimostrare attraverso prove numeriche che il modello non sempre fornisce risultati coerenti con le aspettative; su questo punto si tornerà in dettaglio nel paragrafo 1.4.

1.3.2 Logit Gerarchizzato

L'applicazione del modello Nested Logit al contesto di scelta del percorso può essere formalmente definita, esattamente come fatto per il Logit Multinomiale, sostituendo nella forma funzionale del modello la disutilità di ciascun percorso espressa attraverso la (1.3.1). In questo modo, applicando il Nested Logit è possibile almeno in teoria simulare contesti di scelta del percorso riproducendo alcune tipologie di correlazioni tra alternative, ancorché limitate dalla struttura a blocchi della matrice di covarianze del modello descritta nel paragrafo 1.2.1.2; che il modello non sia in grado di riprodurre qualsiasi contesto di scelta in coerenza con le ipotesi generali introdotte nel paragrafo 1.3, lo si può banalmente verificare sulla rete di Braess (figura 1.8 nel paragrafo 1.4.3), per la quale è evidente che la matrice di covarianze tra le utilità percepite dei percorsi non è a blocchi e quindi non riproducibile in maniera esatta attraverso un Nested Logit. Per questo motivo, il modello Nested Logit non ha mai ricevuto interesse nell'ambito della simulazione del contesto di scelta del percorso; una conseguenza diretta di ciò è che non si è mai posto in letteratura – almeno a conoscenza di chi scrive – il problema di specificare un Nested Logit per il contesto di scelta del percorso e contestualmente implementare un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi. In tal senso, come sarà mostrato in dettaglio nel capitolo 2, è possibile in modo banale generalizzare l'algoritmo di Dial descritto nel paragrafo 1.2.1 al fine di adottare un approccio ad enumerazione implicita dei percorsi.

1.3.3 Cross-Nested Logit

L'applicazione del modello Cross-Nested Logit al contesto della scelta del percorso consente di superare, almeno in linea teorica, i limiti imposti dalle proprietà matematiche dei modelli Logit Multinomiale e Gerarchizzato; è peraltro significativo che la prima applicazione del modello di Vovsha (1997) sia stata riferita proprio alla simulazione della scelta del percorso. Come si è detto nel paragrafo 1.2.1.3, per specificare un modello Cross-Nested occorre definirne i parametri di varianza ed i gradi di appartenenza, attraverso i quali si specifica la struttura della rete di scelta. In

letteratura esistono due fondamentali specificazioni del Cross-Nested applicato alla scelta del percorso, rispettivamente il modello Link-Nested Logit ed il modello Paired Combinatorial Logit, che saranno pertanto descritti e trattati separatamente nei prossimi paragrafi.

1.3.3.1 Link-nested Logit

Il modello *Link-nested Logit*, proposto da Vovsha e Bekhor (1998) considera tanti gruppi quanti sono gli archi della rete in oggetto, e per ogni arco l individua il gruppo K_{odl} dei percorsi su rete tra o e d che lo attraversano; coerentemente, considerando la (1.3.1), la probabilità $p[k/l]$ di scegliere un percorso dato un arco e la probabilità marginale $p[l]$ di scegliere un arco si definiscono rispettivamente come:

$$p[k/l] = \frac{\alpha_{lk}^{1/\delta_l} e^{-C_k/\theta_l}}{\sum_{h \in K_{odl}} \alpha_{lh}^{1/\delta_l} e^{-C_h/\theta_l}} \quad (1.3.14)$$

$$p[l] = \frac{\left(\sum_{h \in K_{odl}} \alpha_{lh}^{1/\delta_l} e^{-C_h/\theta_l} \right)^{\delta_l}}{\sum_{l'} \left(\sum_{h \in K_{odl'}} \alpha_{l'h}^{1/\delta_{l'}} e^{-C_h/\theta_{l'}} \right)^{\delta_{l'}}} \quad (1.3.15)$$

ed in accordo con la (1.2.14) la probabilità di scelta del percorso risulta:

$$p[k] = \frac{\sum_l \left[\alpha_{lk}^{1/\delta_l} e^{-C_k/\theta_l} \left(\sum_{h \in K_{odl}} \alpha_{lh}^{1/\delta_l} e^{-C_h/\theta_l} \right)^{\delta_l - 1} \right]}{\sum_{l'} \left(\sum_{h \in K_{odl'}} \alpha_{l'h}^{1/\delta_{l'}} e^{-C_h/\theta_{l'}} \right)^{\delta_{l'}}} \quad (1.3.16)$$

Nell'espressione generale del modello (1.3.16) il grado di appartenenza α_{lk} del percorso k al gruppo individuato dall'arco l viene di norma definito come il rapporto tra il costo c_l dell'arco l ed il costo C_k del percorso k :

$$\alpha_{lk} = \frac{c_l}{C_k} a_{lk} \quad (1.3.17)$$

nella quale a_{lk} è il corrispondente elemento della matrice di incidenza archi-percorsi, che vale 1 se $l \in k$ e 0 in caso contrario. Batley et al. (2001) suggeriscono di adottare una relazione di tipo non lineare, aggiungendo un esponente γ ad elevare il rapporto c_l/C_k , ma nei fatti poi utilizzano una specificazione del modello con $\gamma=1$ per cui ad oggi non vi sono riscontri in letteratura su quale sia il miglior valore di γ da adottare. Peraltro, dalla (1.3.17) risulta:

$$\sum_l \alpha_{lk} = \sum_l \frac{c_l}{C_k} a_{lk} = \frac{1}{C_k} \sum_l c_l a_{lk} = 1$$

mentre nel caso di $\gamma \neq 1$ si avrebbe:

$$\sum_l \alpha_{lk} = \sum_l \left(\frac{c_l}{C_k} \right)^\gamma a_{lk} = \frac{1}{C_k^\gamma} \sum_l c_l^\gamma a_{lk}$$

e ciò non garantisce che la somma dei gradi di appartenenza sia uguale per tutti i gruppi (archi). Come si è detto nel paragrafo 1.2.1.3, ciò comporta che la media dei residui aleatori di percorso non sia né nulla né uguale per tutti i percorsi, per cui nel seguito del presente lavoro l'applicazione del Link Nested Logit avverrà sempre con $\gamma=1$.

Per quanto attiene alle indicazioni in letteratura su come definire i parametri di varianza θ_l e δ_l per rendere operativa l'applicazione del modello Link-nested Logit, sono reperibili i contributi di Behkor e Prashker (2001), che definiscono δ_l come la media aritmetica dei pesi di ciascun arco l in tutti i percorsi che lo attraversano, ovvero posto $n_l = \sum_k a_{lk}$:

$$\delta_l = 1 - \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^n \frac{c_l}{C_k} a_{lk} = 1 - \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^n \alpha_{lk} \quad (1.3.18)$$

mentre Marzano (2002) e Papola (2003) propongono una specificazione di δ_l come radice quadrata della media geometrica dei pesi di ciascun arco l in tutti i percorsi che lo attraversano:

$$\delta_l = 1 - \sqrt[n_l]{\prod_{k>l} \frac{c_l}{C_k}} = 1 - \sqrt[2n_l]{\prod_{k>l} \frac{c_l}{C_k}} = 1 - \sqrt[2n_l]{\prod_{k>l} \alpha_{lk}} \quad (1.3.19)$$

La bontà di queste specificazioni sarà testata opportunamente nel seguito attraverso simulazioni numeriche.

Un altro caso notevole di specificazione dei parametri di varianza, proposto da Prashker e Behkor (1998) ed investigato in Papola (2000), è dato da $\delta_l=0 \forall l$. In particolare, quando $\delta_l \rightarrow 0 \forall l$ le probabilità di scelta (1.3.14) e (1.3.15) vanno opportunamente ricalcolate tenendo conto dei risultati riportati nel paragrafo 1.2.1.3, per cui dalle (1.2.15) e (1.2.17) risulta rispettivamente:

$$p[k/l] = \lim_{\delta_l \rightarrow 0} \frac{\alpha_{lk}^{1/\delta_l} e^{-C_k/\theta_l}}{\sum_{h \in K_{odl}} \alpha_{lh}^{1/\delta_l} e^{-C_h/\theta_l}} = \begin{cases} 1/n_l & \text{se } C_k = \min_{h \in K_{odl}} \{C_h\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$p[l] = \frac{\alpha_{lk_l} e^{-C_{k_l}/\theta_0}}{\sum_{l'} \alpha_{l'k_l} e^{-C_{k_l}/\theta_0}} \quad (1.3.20)$$

nella prima delle quali si è indicato con n_l il numero di percorsi di minimo costo per la coppia origine-destinazione considerata che attraversano l'arco l , e nella seconda k_l rappresenta il percorso di costo minimo che collega la coppia origine-destinazione considerata passando per l'arco l . Si può allora riformulare la probabilità di scelta del generico percorso k come:

$$p[k] = \sum_l p[l] p[k/l] = \sum_{l \in D_k} \frac{\alpha_{lk_l} e^{-C_{k_l}/\theta_0}}{\sum_{l'} \alpha_{l'k_l} e^{-C_{k_l}/\theta_0}} \frac{1}{n_l} = \frac{e^{-C_k/\theta_0} \sum_{l \in D_k} \alpha_{lk_l} / n_l}{\sum_{l'} \alpha_{l'k_l} e^{-C_{k_l}/\theta_0}} \quad (1.3.21)$$

nella quale D_k è l'insieme degli archi del percorso k per i quali k è proprio il percorso di minimo

costo; infatti, tutti gli archi per i quali k non è il percorso di costo minimo hanno una $p[k/l]$ nulla e quindi non compaiono nella sommatoria. La (1.3.21) è spesso semplificata in letteratura, come suggerito da Prashker e Bekhor (1998), supponendo che per ciascun arco vi sia un solo percorso di costo minimo che lo attraversa ($n_l=1$), per cui essa diviene:

$$p[k] = \frac{e^{-C_k/\theta_0} \sum_{l \in D_k} \alpha_{lk}}{\sum_l \alpha_{lk_l} \cdot e^{-C_{k_l}/\theta_0}}$$

La specificazione con $\delta_l=0$ testé introdotta permette di implementare un algoritmo per il caricamento stocastico della rete ad enumerazione implicita dei percorsi, secondo quanto suggerito da Prashker e Bekhor (1998). Tale algoritmo si basa sulla considerazione che la (1.3.20) può essere riscritta come:

$$p[l] = \frac{e^{[-C_{k_l} + \theta_0 \ln \alpha_{lk_l}]/\theta_0}}{\sum_{l'} e^{[-C_{k_{l'}} + \theta_0 \ln \alpha_{l'k_{l'}}]/\theta_0}}$$

a partire dalla quale è agevole costruire una procedura che, separatamente per ciascuna coppia origine-destinazione, consenta di calcolarne implicitamente numeratore e denominatore.

1.3.3.2 Paired Combinatorial Logit

L'applicazione al contesto di scelta del percorso del modello Cross-Nested nella specificazione di tipo Paired Combinatorial Logit si riscontra in letteratura in due contributi, i quali sono accomunati dal considerare una specificazione nella quale compaiono, per ciascuna coppia origine-destinazione, tante alternative quante sono i percorsi e tanti gruppi quante sono le possibili combinazioni di coppie di percorsi.

Prashker e Bekhor (1998) adottano una specificazione di tipo (1.2.22) e definiscono il parametro di similarità nel seguente modo:

$$\lambda_{hk} = \frac{X_{hk}}{\sqrt{X_h X_k}} \quad (1.3.22)$$

nella quale X_{hk} esprime un attributo di costo condiviso tra i due percorsi e X_h e X_k il medesimo attributo per ciascuno dei percorsi. Come si può notare, dalla (1.3.22) segue che:

$$\sum_k \lambda_{hk} = \sum_k \frac{X_{hk}}{\sqrt{X_h X_k}} = \frac{1}{\sqrt{X_h}} \sum_k \frac{X_{hk}}{\sqrt{X_k}}$$

e quindi non si può garantire a priori che la condizione $\sum_k \lambda_{hk}$ costante ed uguale per tutte le alternative, di cui si è detto al paragrafo 1.2.1.3, sia soddisfatta; in altre parole, la specificazione (1.3.22) non garantisce la normalizzazione del modello.

Gliebe et al. (1999) adottano invece una formulazione di tipo (1.2.21) ed una specificazione del parametro di similarità data da:

$$\sigma_{hk} = \frac{X_{hk}}{X_h + X_k - X_{hk}} \quad (1.3.23)$$

nella quale i simboli hanno il significato precedentemente introdotto; tale specificazione è stata successivamente ripresa da Batley et al. (2001).

E' da sottolineare che, almeno allo stato attuale, l'interesse applicativo del PCL alla simulazione della scelta del percorso è tutto sommato scarso, in quanto esso richiede un approccio ad enumerazione esplicita dei percorsi e quindi non permette l'implementazione di algoritmi impliciti di caricamento della rete.

1.3.4 Probit

Insieme al Logit Multinomiale ed alle sue approssimazioni, il modello Probit rappresenta uno dei modelli di più larga e consolidata applicazione al contesto di scelta del percorso, in virtù della possibilità di tenere in conto in maniera estremamente semplice della correlazione tra percorsi attraverso una specificazione di tipo factor analytic della matrice di covarianze (paragrafo 1.2.2).

Tradizionalmente, la prima proposta di applicazione del modello Probit alla scelta del percorso si fa risalire a Daganzo e Sheffi (1977), che assumono la varianza del residuo aleatorio del singolo percorso k proporzionale ad un'aliquota X_k del suo costo e la covarianza tra due percorsi h e k proporzionale ad un'aliquota X_{hk} del costo degli archi condivisi secondo lo stesso coefficiente ξ :

$$Var[\varepsilon_k] = \xi X_k \quad (1.3.24)$$

$$Cov[\varepsilon_h \varepsilon_k] = \xi X_{hk} \quad (1.3.25)$$

E' del tutto evidente che questa ipotesi equivale ad assumere un approccio del tipo factor analytic (1.2.24) nel quale si specifichi una matrice \mathbf{F} di dimensione $n_k \cdot n_l$ dove n_k è il numero di percorsi, data una coppia origine-destinazione, e n_l il numero di archi:

$$\mathbf{F} = \xi^{1/2} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \text{diag}(\mathbf{c})^{1/2} \quad (1.3.26)$$

dove \mathbf{A} è la matrice di incidenza archi-percorsi, di dimensione $n_l \cdot n_k$ e $\text{diag}(\mathbf{c})$ è la matrice quadrata di dimensione $n_l \cdot n_l$ ottenuta disponendo tutti i costi di arco sulla diagonale principale. Infatti in questo modo risulta:

$$Var[\varepsilon_k] = \xi \sum_{l=1}^{n_l} a_{lk}^2 c_l = \xi \sum_{l=1}^{n_l} a_{lk} c_l = \xi X_k \quad (1.3.27)$$

$$Cov[\varepsilon_h \varepsilon_k] = \xi \sum_{l=1}^{n_l} a_{lk} a_{lh} c_l = \xi X_{hk} \quad (1.3.28)$$

essendo a_{lk} il generico elemento della matrice \mathbf{A} . E' da notare, per inciso, che la specificazione della matrice \mathbf{F} riduce il numero di parametri da calibrare al solo fattore ξ ²¹.

E' inoltre immediato estendere il metodo di calcolo Monte Carlo per il calcolo delle probabilità di scelta al contesto di simulazione della scelta del percorso. Infatti, il vettore delle utilità percepite $\mathbf{U}^k = \mathbf{V} + \boldsymbol{\varepsilon}^k$ da campionare alla generica iterazione è esprimibile, come descritto nel

²¹ Daganzo e Sheffi (1977) non forniscono indicazioni sul perché i costi di arco compaiano come funzioni lineari nelle specificazioni di varianze e covarianze; d'altra parte, non sono a conoscenza di chi scrive studi in letteratura che abbiano tentato di calibrare in qualche modo un'elasticità della matrice di covarianze specificata in questo modo rispetto ai costi di arco. Si potrebbe generalizzare tale ipotesi ponendo nella (1.3.26) $\text{diag}(\mathbf{c})^{1/2n}$ anziché $\text{diag}(\mathbf{c})^{1/2}$ in modo che la varianza sia proporzionale alla potenza n -ma del costo di arco.

paragrafo 1.2.2, come $\mathbf{U}^k = \mathbf{V} + \mathbf{F}\mathbf{z}^k$, dove \mathbf{z}^k è un vettore di n_l variabili aleatorie normali standard indipendenti. Particolarizzando questa espressione al contesto di scelta del percorso e tenendo conto della (1.3.26) si deduce che $\mathbf{U}^k = \mathbf{A}^T \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \cdot (\xi \text{diag}(\mathbf{c}))^{1/2} \cdot \mathbf{z}^k = \mathbf{A}^T \cdot [\mathbf{c} + (\xi \text{diag}(\mathbf{c}))^{1/2} \cdot \mathbf{z}^k]$ per cui alla generica iterazione del metodo Monte Carlo basta seguire i seguenti passi:

- si estrae un vettore \mathbf{z}^k di n_l v.a. normali standard indipendenti;
- si campionano i costi di arco secondo la relazione $\mathbf{c}^k = \mathbf{c} + [\xi \text{diag}(\mathbf{c})]^{1/2} \cdot \mathbf{z}^k$, ovvero per il singolo arco si pone $c_l^k = c_l + z_l^k (\xi c_l)^{1/2}$;
- si calcola il vettore $\mathbf{U}^k = \mathbf{A}^T \mathbf{c}^k$ delle (dis)utilità percepite campionate;
- si individua il percorso di minimo costo per quell'iterazione.

Il metodo testé descritto, seppur formalmente corretto, non si presta ad applicazioni pratiche in quanto richiede che si enumerino esplicitamente i percorsi per ciascuna coppia origine-destinazione. E' però semplice implementare, a partire da questa procedura, un algoritmo di assegnazione implicita per il calcolo del vettore dei flussi di arco \mathbf{f}_{SNL} Probit. Basta infatti effettuare un carico deterministico della rete $\mathbf{f}_{\text{DNL}}^k$ alla k -ma iterazione con i costi di arco \mathbf{c}^k campionati come descritto in precedenza, mediando poi sul numero totale di iterazioni per pervenire ad una stima non distorta di \mathbf{f}_{SNL} , ad esempio attraverso l'equazione ricorsiva:

$$\mathbf{f}_{\text{SNL}}^k = [(k-1) \mathbf{f}_{\text{SNL}}^{k-1} + \mathbf{f}_{\text{DNL}}^k(\mathbf{c}^k)]/k$$

1.3.5 Mixed Logit

Le applicazioni del modello Mixed Logit alla simulazione del contesto di scelta del percorso sono ad oggi limitate a pochi studi in letteratura, e pertanto non vi sono risultati più o meno consolidati come accade invece per gli altri modelli. Da un punto di vista teorico, per rendere operativo il modello Mixed Logit è necessario specificarne la struttura del residuo aleatorio e la matrice di covarianze, dando per scontato che la disutilità sistematica di ciascun percorso sia espressa attraverso la (1.3.1). L'analogia formale col modello Probit suggerisce ovviamente l'idea di adottare la stessa specificazione della matrice delle covarianze con approccio factor analysis proposta da Daganzo e Sheffi (1977) per il Probit, e descritta dalle equazioni (1.3.24) e (1.3.25). Esempi di specificazioni di questo tipo nell'ambito del contesto di scelta del percorso si devono in primo luogo a Ramming (2002) e Bekhor et al. (2002), che calibrano un Mixed Logit nel contesto di un'architettura di simulazione della scelta del percorso focalizzata sulla rappresentazione della conoscenza della rete da parte degli utenti.

Bierlaire e Frejinger (2005) propongono un modello Mixed Logit, con specificazione della struttura di errore analoga a quella di Ramming e presenza di un attributo Path-Size di tipo (1.3.11) nell'utilità sistematica di ciascun percorso; il lavoro citato presenta un aspetto innovativo, quello di utilizzare dati GPS per calibrare un modello di scelta del percorso, ancorché non sia ben chiaro in che modo rilevazioni di carattere "passivo" possano aiutare a calibrare modelli di scelta del percorso che si connotano per la loro natura comportamentale. Occorre inoltre sottolineare che Bierlaire e Frejinger (2005) introducono il concetto di sottopercorso, ovvero di sequenza di archi consecutivi, sostenendo che dal punto di vista teorico gli utenti formulano le strategie di percorso analizzando scelte ad un livello più aggregato rispetto a quello degli archi; le semplificazioni introdotte nella fase di raccolta dati e la forma funzionale del modello calibrato

non consentono peraltro di supportare con chiara evidenza sperimentale questa tesi.

Un'altra applicazione, basata su dati derivanti da un'indagine SP, seppur con notevoli limitazioni teoriche, è reperibile in Han et Algers (2001). Batley et al. (2001) calibrano un Mixed Logit su un campione "virtuale" di dati nell'ambito di un confronto generale tra modelli di scelta del percorso, come sarà descritto nel paragrafo 1.4.

Occorre, peraltro, sottolineare che mentre tutti gli altri contributi adottano una specificazione della matrice \mathbf{F} esattamente uguale alla (1.2.25), Batley et al (2001) propongono invece una specificazione del residuo normale del tipo $\mathbf{F}=\mathbf{A}^T \cdot \text{diag}(\mathbf{c})$, per cui la varianza del singolo residuo di percorso risulta proporzionale, a meno di un termine costante dato dal termine Gumbel distribuito, al quadrato dell'impedenza di percorso anziché all'impedenza di percorso stessa²².

In Marzano e Papola (2004) è invece investigata la possibilità di utilizzare il Mixed Logit nel contesto di un approccio ad enumerazione implicita dei percorsi, a partire dal presupposto che, come detto nel paragrafo 1.2.3, il calcolo delle probabilità di scelta Mixed Logit può avvenire con un metodo di simulazione smoothed Monte Carlo nel quale a ciascuna iterazione le probabilità di scelta \mathbf{p}^k sono calcolate con un Logit Multinomiale di parametro θ anziché essere deterministiche. Di conseguenza, tale stimatore tende a convergere più rapidamente nel caso del Mixed Logit e ciò corrisponde in generale ad una maggiore efficienza computazionale di questo modello rispetto al Probit. In questo senso, il Mixed Logit potrebbe risultare una valida alternativa al Probit nella simulazione della scelta del percorso.

In particolare, adottando un approccio del tipo factor analytic con matrice \mathbf{F} espressa attraverso la (1.2.25), coerentemente con le espressioni (1.2.29)-(1.2.31) introdotte in precedenza si ottiene:

$$Var[\varepsilon_k] = \frac{\theta_{ML}^2 \pi^2}{6} + \xi_{ML} X_k \quad (1.3.29)$$

$$Cov[\varepsilon_h, \varepsilon_k] = \xi_{ML} X_{hk} = \sum_{l \in k \cap h} Var[\lambda_l] \leq \sum_{l \in k \cap h} Var[\varepsilon_l] \quad (1.3.30)$$

nelle quali si sono evidenziati con il pedice ML i parametri di proporzionalità del Mixed Logit per distinguerli da quelli analoghi introdotti rispettivamente per i modelli GEV e per il Probit.

Innanzitutto, la (1.3.30) mostra che le covarianze che possono essere riprodotte con un modello Mixed Logit sono limitate superiormente. E' inoltre interessante sottolineare che, se non si introducono attributi di costo di percorso non additivi, il modello così specificato si riconduce ad un modello del tutto analogo nella sua struttura al Probit; la sola differenza è legata alla presenza del nocciolo Logit. Evidentemente, dal punto di vista teorico questa formulazione comporta che il Mixed Logit sia coerente con le ipotesi generali poste nel paragrafo 1.3 solo se si verifica la condizione $Var[\tau_j]=0$, ovvero se il modello coincide con il Probit. Naturalmente, esso sarà tanto più lontano dalle ipotesi formulate per una corretta simulazione del contesto di scelta del percorso quanto maggiore sarà il peso dell'aliquota di varianza di τ_j rispetto alla varianza di ε_j . D'altra parte, ciò garantisce dal punto di vista operativo una minor fluttuazione delle probabilità di scelta tra due iterazioni successive e una più rapida convergenza dei metodi numerici di

²² Ciò rappresenta una critica al lavoro citato, in quanto oltre ad altre osservazioni che saranno proposte nel paragrafo 1.4, occorre tenere in conto che i risultati forniti nel corso del lavoro dal Probit e dal Mixed Logit non sono confrontabili tra loro per via della differente specificazione utilizzata per la matrice \mathbf{F} .

simulazione tipo Monte Carlo. A parità di condizioni, le probabilità di scelta calcolate con il modello Mixed Logit saranno tanto più lontane dalle probabilità fornite dal Probit e tanto più vicine a quelle del Logit Multinomiale in misura proporzionale al rapporto θ_{ML}^2/ξ_{ML} tra la varianza del residuo Gumbel e quella del residuo normale. In altre parole, quando tale rapporto tende a infinito il modello degenera in un Logit Multinomiale, mentre se tende a zero il modello coincide con il Probit.

Riguardando tali considerazioni alla luce delle caratteristiche richieste ai modelli di scelta del percorso, appare evidente che l'applicabilità del modello Mixed Logit al contesto di scelta del percorso debba essere valutata confrontando in termini quantitativi il vantaggio derivante dalla sua maggior efficienza computazionale e lo svantaggio conseguente alla distorsione delle probabilità Probit per effetto del nocciolo Logit. In particolare, poiché tali esigenze sono tra loro contrastanti e strettamente legate ai valori assunti dal parametro θ_{ML} , sarà interessante valutare attraverso le prestazioni in simulazione del modello se esiste un intervallo di valori di θ_{ML} , ed in caso affermativo determinarlo, per i quali si osservi un miglioramento di efficienza computazionale e al tempo stesso probabilità di scelta comunque prossime a quelle fornite dal Probit. Un'analisi di dettaglio in tal senso sarà proposta nel paragrafo 1.4.

Come accennato, in letteratura non vi sono esempi di algoritmi di carico stocastico ad enumerazione implicita con modello di scelta del percorso di tipo Mixed Logit. Evidentemente, le considerazioni svolte da Marzano e Papola (2004) suggeriscono l'implementazione di un algoritmo SNL basato sul Mixed Logit la cui generica iterazione k è articolata nei seguenti passi:

- campionamento dei costi di arco (vettore \mathbf{c}^k)
- carico stocastico della rete con un algoritmo SNL-Logit (vettore $\mathbf{f}^k_{\text{DIAL}}$)
- calcolo dei flussi di arco all'iterazione k con la relazione:

$$\mathbf{f}^k = [(\epsilon-1) \mathbf{f}^{k-1} + \mathbf{f}^k_{\text{DIAL}}] / \epsilon$$

- test di arresto (ϵ è una soglia prefissata):

$$|\mathbf{f}^k - \mathbf{f}^{k-1}| / \mathbf{f}^k < \epsilon$$

L'algoritmo descritto è del tutto analogo a quello SNL-Probit e come esso fornisce dunque una stima non distorta del vettore di flussi cercato. La differenza è che il carico stocastico della rete SNL-Logit sostituisce il carico deterministico della rete; la complessità computazionale della singola iterazione è pertanto pari a quella dell'algoritmo di Dial; tra l'altro ciò comporta che mentre per l'SNL-Probit l'insieme di scelta è da ritenersi costituito da tutti i percorsi aciclici, in questo caso si considera la scelta solo tra tutti i percorsi Dial-efficienti nel senso chiarito in precedenza.

1.4 Un'analisi delle proprietà numeriche dei modelli di scelta del percorso

Si è detto in precedenza che la qualità di un modello di scelta del percorso deve essere valutata sulla base delle sue caratteristiche teoriche, numeriche ed operative. Nel paragrafo 1.3 si sono descritte le caratteristiche teoriche e discusse alcune proprietà operative dell'applicazione al contesto di scelta del percorso dei più importanti modelli di utilità aleatoria, introdotti nel paragrafo 1.2. A questo punto, è necessario verificarne le prestazioni su diverse reti test, opportunamente congegnate per evidenziare alcuni aspetti salienti del comportamento di scelta

del percorso in coerenza con le ipotesi poste all'inizio del paragrafo 1.3.

Peraltro, è questa una tradizione abbastanza consolidata nella modellistica della scelta del percorso, a partire dal lavoro di Daganzo e Sheffi (1977) che, per illustrare i vantaggi connessi all'applicazione del Probit, evidenziano i limiti del Logit Multinomiale su una rete analoga a quella che sarà introdotta nel paragrafo 1.4.1. Appare quindi interessante in primo luogo richiamare i più recenti e significativi contributi di letteratura in tal senso, che hanno rappresentato il punto di partenza per la presente analisi.

Praskher e Bekhor (1998) analizzano alcuni modelli GEV – segnatamente Logit, C-Logit nella specificazione (1.3.6), Link-Nested Logit con gradi di appartenenza dati dalla (1.3.17) e parametri di varianza fissati empiricamente, PCL nella specificazione (1.2.22) con parametri di similarità espressi dalla (1.3.22) – sulle reti del paragrafo 1.4.1 ed 1.4.4 nonché su una rete simile (denominata short by-pass/long by-pass) non presa in considerazione nel presente lavoro; il loro lavoro non prende in considerazione il Probit come elemento di confronto per una simulazione “ragionevole” degli effetti della correlazione tra alternative.

Batley et al. (2001) analizzano in primo luogo su una rete a quattro archi del tipo di quella utilizzata nel paragrafo 1.4.2 il comportamento di alcuni modelli GEV – segnatamente Logit Multinomiale, Nested Logit, C-Logit nella specificazione (1.3.6), Link-Nested Logit con gradi di appartenenza dati dalla (1.3.17) e parametri di varianza fissati empiricamente, PCL nella specificazione (1.2.21) con parametri di similarità espressi dalla (1.3.23) – rispetto a variazioni nella sovrapposizione tra percorsi. Come sarà chiaro nel seguito, un test condotto sulla sola rete del paragrafo 1.4.2 non basta ad evidenziare le lacune proprie di alcuni modelli. Successivamente, essi costruiscono un database “virtuale” su reti appena più complesse generando attraverso una semplice procedura delle scelte simulate, sulla base delle quali calibrano i modelli precedentemente descritti più Probit e Mixed Logit; il problema di questo approccio metodologico – come evidenziato dagli stessi autori nel commento dei risultati – è che si utilizza un metodo che implicitamente favorisce alcuni modelli rispetto ad altri, e ciò di fatto non consente di trarre delle conclusioni di carattere generale.

Praskher e Bekhor (2004) propongono un contributo sulla rete del paragrafo 1.4.2 e su una rete sostanzialmente simile a quella del paragrafo 1.4.4, analizzando le prestazioni in simulazione di Logit Multinomiale, C-Logit nella specificazione (1.3.6), Path-size Logit nella specificazione (1.3.13) con $\rho=1$, Link Nested Logit con parametri di varianza costanti (rispettivamente pari a 0 ed a 0.5 in due diverse prove numeriche), PCL nella specificazione (1.2.21) con parametri definiti attraverso la (1.3.22) e Mixed Logit, senza però definire in maniera chiara in che modo siano definiti i parametri di varianza nella (1.4.3). Il loro contributo è molto interessante in quanto propone anche alcune considerazioni applicative dei modelli di scelta del percorso precedentemente elencati nell'ambito del più generale problema dell'assegnazione.

Bierlaire e Frejinger (2005) limitano la loro analisi alle differenti specificazioni del Path-size Logit e della sua generalizzazione nel contesto di un'applicazione con il modello Mixed Logit.

I contributi di Marzano (2002), Papola (2003) e Papola e Marzano (2004) riprendono e generalizzano gli studi di letteratura appena citati, e rappresentano la base per la verifica condotta nella presente tesi.

Prima di procedere con l'analisi di dettaglio dei risultati, riportati nei paragrafi seguenti, va descritto il modo in cui sono stati specificati i parametri di varianza dei diversi modelli al fine di

poter procedere ad un confronto a parità di varianza. Innanzitutto, si è fissato un coefficiente di variazione cv , rapporto fra deviazione standard e media, pari a 0.30 come suggerito in molti riferimenti di letteratura; noto il costo medio di percorso X_m , pari alla media dei costi di tutti i percorsi, si sono poi determinati i parametri di varianza ξ del modello Probit e θ del modello Logit con le relazioni:

$$cv = \frac{\sqrt{\xi X_m}}{X_m} \rightarrow \xi = X_m cv^2 \quad (1.4.1)$$

$$cv = \frac{\theta_0 \pi}{X_m \sqrt{6}} \rightarrow \theta_0 = \frac{X_m cv \sqrt{6}}{\pi} \quad (1.4.2)$$

Per quanto riguarda il modello Mixed Logit, coerentemente con la (1.3.29), l'espressione del cv risulta:

$$cv = \frac{\sqrt{\xi_{ML} X_m}}{X_m} + \frac{\theta_{ML} \pi}{X_m \sqrt{6}}$$

Di conseguenza per ciascun valore del coefficiente di variazione esistono infinite coppie di valori (ξ_{ML}, θ_{ML}) ; in particolare, fissato un cv le coppie di valori da considerare sono del tipo:

$$\xi_{ML} \in [0, X_m cv^2] , \quad \theta_{ML} = \frac{\sqrt{6 X_m (X_m cv^2 - \xi_{ML})}}{\pi} \quad (1.4.3)$$

Sulla base di questa posizione si valuterà la dicotomia tra velocità di convergenza e approssimazione delle probabilità Probit di cui si è detto nel paragrafo 1.3.5.

1.4.1 Rete di Daganzo

La rete di Daganzo, illustrata nella figura 1.2, è composta da quattro archi monodirezionali e tre percorsi.

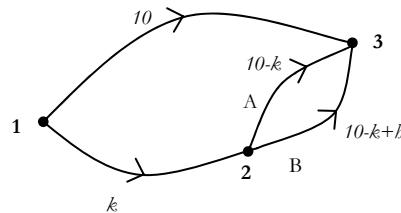


Figura 1.2 – Rete di Daganzo

Il percorso $a \equiv 1-3$ coincidente con l'arco $1-3$ ed il percorso $b \equiv 1-2A-3$ presentano un costo pari a 10 unità mentre il percorso $c \equiv 1-2B-3$ presenta un costo pari a $10+h$; al variare del parametro k varia la correlazione tra i percorsi b e c , che è massima per $k=10$, quando degenerano in un unico percorso, e nulla per $k=0$ quando divengono due percorsi non sovrapposti; nel seguito saranno analizzati i casi notevoli $h=0$, $h=2$ ed $h \rightarrow \infty$.

Quando $h=0$ ci si attende, per $k=10$, una probabilità di scelta pari a 0.50 per il percorso a ed a 0.25 per ciascuno dei percorsi b e c , mentre quando $k=0$ ci si attende una probabilità di scelta pari

a 0.33 per ciascuno dei percorsi. I risultati numerici sono riassunti nella figura 1.3, nella quale i modelli sono stati applicati utilizzando tutte le specificazioni descritte nel paragrafo precedente. In particolare, è stato considerato anche il Logit Gerarchizzato in quanto, per effetto delle ipotesi poste all'inizio del paragrafo 1.2, la matrice di covarianze corrispondente alla rete di Daganzo è a blocchi; in tal senso appare naturale adottare un albero di scelta con un gruppo bc , contenente i percorsi b e c , il cui parametro di varianza θ_{bc} mutuato dalla (1.4.2) è intuitivamente proporzionale all'aliquota di costo dell'arco non condivisa tra i due percorsi:

$$\theta_{bc} = \frac{(10-k)cv\sqrt{6}}{\pi} \quad (1.4.4)$$

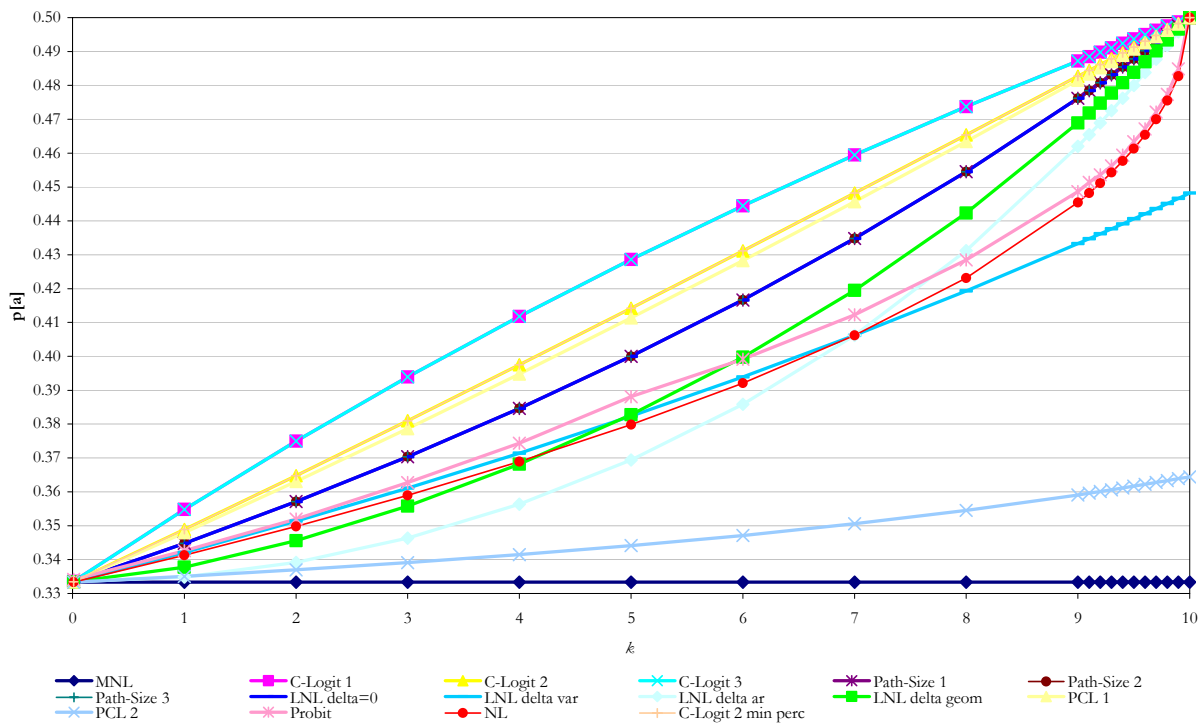


Figura 1.3 – Probabilità di scelta per il percorso a nella Rete di Daganzo ($h=0$)

Una prima osservazione delle probabilità di scelta di figura 1.3 riguarda il PCL nella specificazione (1.3.23), che non rispetta le aspettative per $k \rightarrow 10$. Infatti, la particolare configurazione di costi della rete test analizzata determina i seguenti valori per i gradi di similarità:

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ac} = 0 \quad ; \quad \sigma_{bc} = \frac{k}{20 + h - k}$$

Nel caso in cui $h=0$, si noti che $\sigma_{bc} \rightarrow 0$ per $k \rightarrow 0$, per cui il PCL degenera in un Logit Multinomiale e fornisce probabilità di scelta coerenti con le aspettative, mentre $\sigma_{bc} \rightarrow 1$ per $k \rightarrow 10$, per cui la probabilità di scelta del percorso a fornita dal PCL può essere scritta, con una serie di passaggi algebrici, nel seguente modo:

$$p[a] = \frac{0.5 \cdot 2^{1/\theta_0} + 0.5}{2 \cdot 2^{1/\theta_0} + 0.5}$$

che ovviamente non è pari a 0.50 come atteso. Per questo motivo si può già concludere che la specificazione (1.3.23) non fornisce risultati coerenti con le aspettative in simulazioni numeriche, e pertanto non sarà ulteriormente considerata nel seguito.

Anche il modello Link Nested Logit con parametri di varianza δ uguali per tutti i gruppi ed esogenamente fissati risulta non coerente con le aspettative²³, mentre le specificazioni (1.3.18) ed (1.3.19) e quella con δ nulli conducono a risultati soddisfacenti. E' poi da sottolineare che il C-Logit riproduce correttamente le probabilità attese solo se si applicano le modifiche alla (1.3.5) suggerite nel paragrafo 1.3.1.1; le prove numeriche mostrano infatti che, se si dividesse il fattore di sovrapposizione per θ_0 la probabilità di scelta del percorso a tenderebbe a 0.66 per $k \rightarrow 10$.

Per quanto riguarda il Mixed Logit, le cui probabilità di scelta non sono state riportate nel diagramma di figura 1.1, occorre controllare, come descritto nel paragrafo 1.3.5, se la dicotomia tra velocità di convergenza e distorsione nel calcolo delle probabilità di scelta Probit possa condurre ad un risultato di compromesso soddisfacente. Per eseguire il calcolo, si tenga conto che, con la configurazione di costi come da figura 1.2, risulta dalle (1.4.2) ed (1.4.1) rispettivamente $\theta_0=2.334$ e $\xi_P=0.90$ per cui è possibile far variare ξ_{ML} tra 0 e 0.90 e calcolare di conseguenza θ_{ML} attraverso la (1.4.3); i risultati sono riportati in tabella 1.1 per il caso $k \rightarrow 10$.

Percorso	MNL	Mixed Logit (ξ_{ML}/ξ_P)						Probit
		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	
a	0.3333	0.3543	0.3758	0.3992	0.4282	0.4485	0.4631	0.5000
b	0.3333	0.3229	0.3121	0.3004	0.2859	0.2758	0.2685	0.2500
c	0.3333	0.3229	0.3121	0.3004	0.2859	0.2757	0.2684	0.2500

Tabella 1.1 – Probabilità Mixed Logit per la rete di Daganzo ($h=0$)

Le probabilità di scelta calcolate con il modello Mixed Logit in corrispondenza dei casi limite $\xi_{ML}/\xi_P=0$ e $\xi_{ML}/\xi_P=1$ degenerano rispettivamente nei valori forniti da Logit Multinomiale e Probit, a conferma di quanto già detto; inoltre, i valori di probabilità osservati in corrispondenza di diversi valori del rapporto ξ_{ML}/ξ_P confermano l'effetto distorsivo indotto dalla presenza del nocciolo Logit. Tale distorsione va naturalmente approfondita su reti di dimensioni maggiori, nelle quali sia possibile apprezzare, come descritto in precedenza, anche il guadagno in termini di tempi di calcolo conseguente all'adozione di un algoritmo di caricamento della rete basato su uno smoothed Monte Carlo.

Un'altra configurazione di costi notevole si realizza per $h=2$, in corrispondenza della quale si ottengono i risultati riportati in figura 1.4. Come si può notare, molti dei modelli proposti mostrano un comportamento dissimile da quello del Probit: in particolare, quando $k \rightarrow 10$ la probabilità di scelta da essi fornita tende ad un valore prossimo a 0.57 mentre il Probit porge un valore che tende a 0.50 dal basso. Gli unici modelli che forniscono un risultato coerente con il Probit sono il Logit Gerarchizzato ed il C-Logit nella specificazione (1.3.8); con riferimento a quest'ultimo modello occorre sottolineare l'andamento anomalo delle probabilità di scelta fornite per il percorso a , che raggiungono un massimo per $k=8$ e poi decrescono fino a fornire una probabilità di scelta pari a 0.50 per $k \rightarrow 10$.

²³ Prove numeriche condotte su differenti specificazioni esogene e costanti dei parametri di varianza hanno comunque condotto a risultati non soddisfacenti.

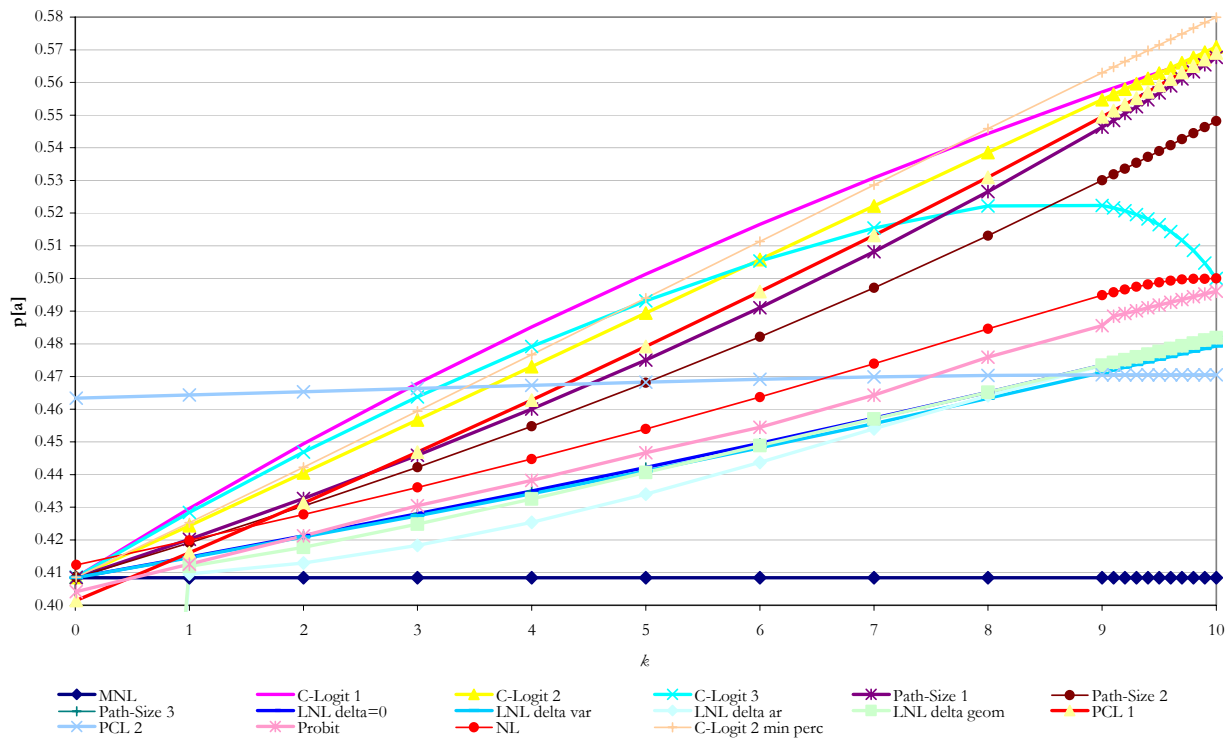


Figura 1.4 – Probabilità di scelta per il percorso a nella Rete di Daganzo ($h=2$)

Per comprendere l'andamento anomalo delle probabilità di scelta fornite dal C-Logit con fattore di sovrapposizione CF^3 , basta applicare la (1.3.8) nella configurazione di costi analizzata, ottenendo:

$$CF_1^3 = 0 ; CF_2^3 = \ln\left(1 + \frac{k}{\sqrt{120}} \frac{10-k}{12-k}\right) ; CF_3^3 = \ln\left(1 + \frac{k}{\sqrt{120}} \frac{12-k}{10-k}\right)$$

per cui se si diagrammano i valori di CF_2^3 e CF_3^3 si riscontra l'andamento riportato in figura 1.5.

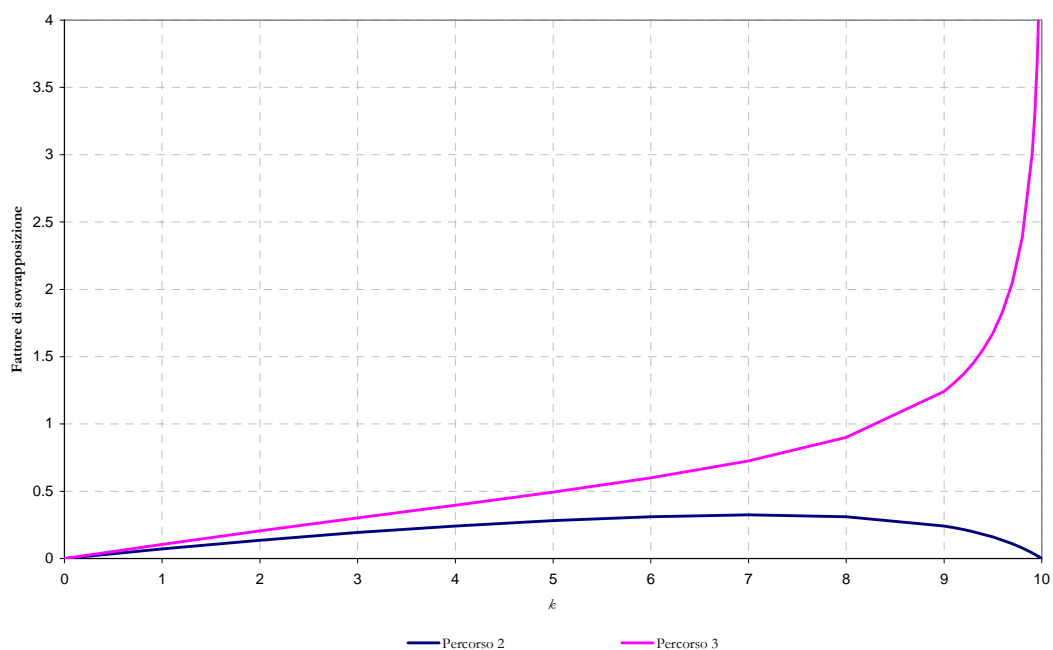


Figura 1.5 – Fattori di sovrapposizione (1.3.8) per C-Logit nella Rete di Daganzo ($h=2$)

Come si può notare, tali risultati appaiono controintuitivi e pertanto si può concludere che la specificazione (1.3.8) del fattore di sovrapposizione per il modello C-Logit non risulta coerente con le aspettative nelle prove numeriche. Per quanto attiene alle altre specificazioni del fattore di sovrapposizione, come si è detto nel paragrafo 1.3.1.1 l'unica specificazione che effettivamente permette l'enumerazione implicita si discosta dalla (1.3.7), in quanto ciascun arco è pesato rispetto al minimo percorso per ciascuna coppia origine-destinazione e non già rispetto al percorso del quale si sta calcolando il CF_k ; a tal proposito, i risultati riportati in figura 1.4 mostrano che, almeno per la rete in esame, la specificazione approssimata porge risultati più lontani dal Probit rispetto a quanto non accada per la formulazione originaria (1.3.7). Se ne conclude, in ogni caso, che il modello C-Logit nelle specificazioni attualmente proposte in letteratura fornisce risultati non sempre coerenti con le aspettative e comunque difficilmente interpretabili.

Al fine di testare ulteriormente le probabilità di scelta del percorso nella rete in esame, è conveniente proporre i risultati della simulazione condotta sulla rete di figura 1.2 con $h \rightarrow \infty$; in questo caso ci si attende, qualunque sia il valore di k , che i percorsi a e b abbiano una probabilità di scelta pari a 0.50 mentre il percorso c non sia mai scelto perché non percepito a causa dell'elevata disutilità sistemica. I risultati sono riportati nel diagramma di figura 1.6.

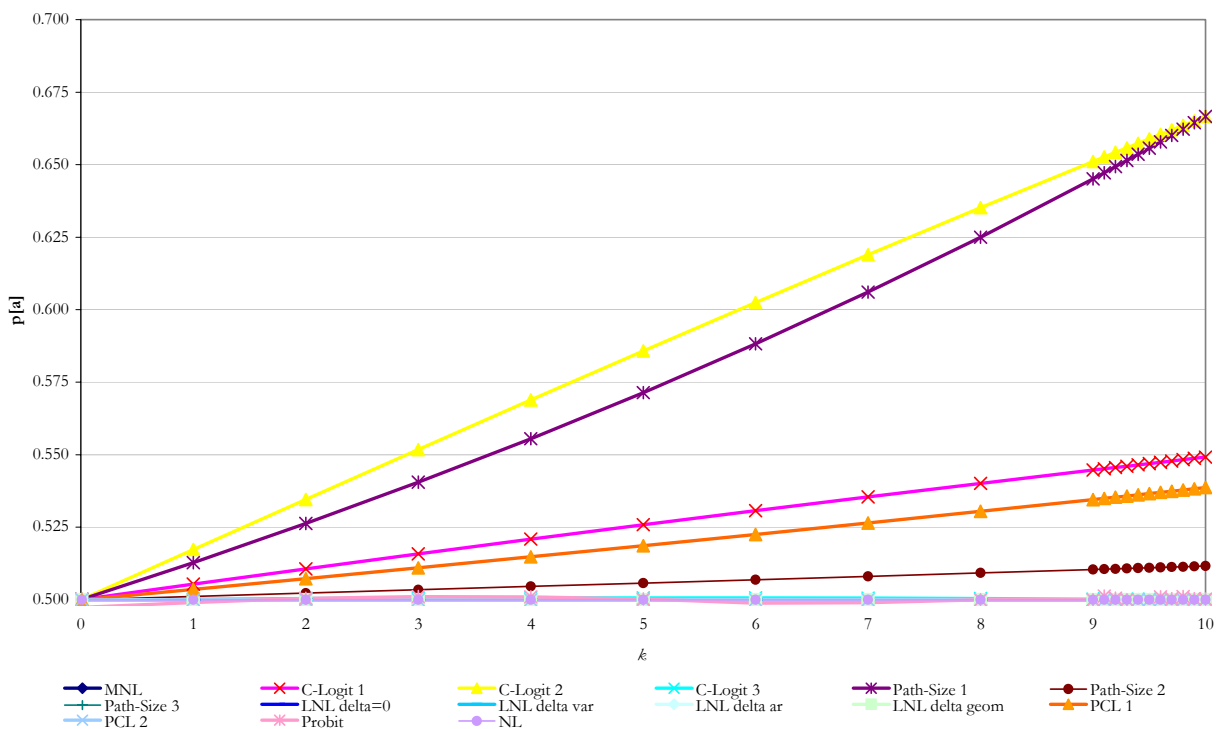


Figura 1.6 – Probabilità di scelta per il percorso a nella Rete di Daganzo ($h \rightarrow \infty$)

Le probabilità di scelta calcolate evidenziano che alcuni dei modelli proposti al paragrafo precedente già presentano problemi in fase applicativa se applicati ad una rete molto semplice, ancorché con una configurazione di costi particolare. In particolare, per quanto riguarda il C-Logit, l'unica specificazione del fattore di sovrapposizione a fornire risultati coerenti con le aspettative risulta la (1.3.8), che comunque aveva prodotto risultati non coerenti per $h=2$, occorre inoltre sottolineare che, ancora una volta, l'unica specificazione che permette l'implementazione di un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi è quella che fornisce i risultati più lontani

dalle aspettative. Anche le specificazioni (1.3.11) ed (1.3.12) del fattore di taglia nel modello Path-size Logit forniscono risultati non coerenti con le aspettative, mentre la specificazione (1.3.13) risulta perfettamente coerente con i risultati previsti. Le specificazioni del Link Nested lavorano molto bene, così come Probit, per il quale occorre comunque ricordare che le probabilità di scelta risultano fluttuanti per effetto degli errori dovuti alla simulazione di tipo Monte Carlo adottata per il calcolo delle probabilità di scelta. Per quanto attiene al PCL, la specificazione del grado di similarità (1.3.22) porge risultati non soddisfacenti e, poiché anche la specificazione (1.3.23) presentava problemi nelle prove numeriche condotte sulla rete di Daganzo con $h=0$, se ne conclude che, almeno allo stato attuale, il Paired Combinatorial Logit non è in grado di simulare correttamente gli effetti della correlazione tra percorsi, e pertanto non sarà ulteriormente considerato nelle prove successive.

A margine delle prove numeriche sin qui condotte si evidenzia una proprietà dei modelli sin qui considerati che tornerà utile nel seguito: in coerenza con le ipotesi descritte all'inizio del paragrafo 1.3, tutti i modelli di scelta del percorso riproducono probabilità per effetto della disutilità dei percorsi e della loro sovrapposizione, per cui se si "inverte" in maniera speculare la rete di figura 1.2 (si veda la figura 2.5) tutte le probabilità di scelta sin qui calcolate non cambiano.

1.4.2 Rete ad esagono

La rete ad esagono, illustrata in figura 1.7, è composta da nove archi e cinque percorsi, che possono essere gerarchicamente ordinati per sovrapposizione crescente; in particolare, si passa dal percorso costituito dall'arco 1-6, indipendente da tutti gli altri, al percorso perimetrale che è sovrapposto con tutti gli altri. Questa particolare configurazione consente di formulare delle aspettative circa l'ordinamento delle probabilità di scelta per ciascun percorso e consente, in coerenza con quanto descritto nel paragrafo 1.3.1.1, di testare la validità del modello C-Logit. Nelle prove numeriche condotte sulla rete ad esagono non si è considerato il Paired Combinatorial Logit, che ha già mostrato risultati contraddittori sulla rete di Daganzo, così come non è stato preso in considerazione il Link-Nested Logit nella specificazione con δ costanti ed esogenamente fissati; per gli altri modelli che pure non hanno mostrato risultati del tutto coerenti con le aspettative si è deciso di procedere ad un'ulteriore verifica. Così come per la rete di Daganzo, il Logit Gerarchizzato è stato specificato utilizzando per i parametri di varianza una formula analoga alla (1.4.4).

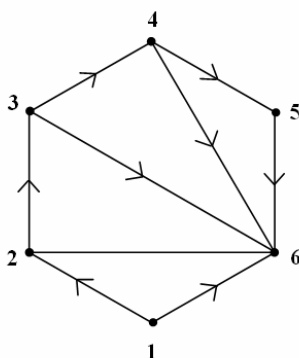


Figura 1.7 – Rete ad esagono

Si propone, in primo luogo, il calcolo delle probabilità di scelta in corrispondenza di una configurazione di costi in cui tutti i percorsi hanno la medesima impedenza: i risultati della simulazione sono riportati in tabella 1.2.

Percorso	1	2	3	4	5
Sequenza nodi	1-6	1-2-6	1-2-3-6	1-2-3-4-6	1-2-3-4-5-6
Costo	5	5	5	5	5
MNL	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
C-Logit CF_1	0.3296	0.2060	0.1648	0.1498	0.1498
C-Logit CF_2	0.2919	0.2212	0.1776	0.1546	0.1546
C-Logit CF_3	0.3296	0.2060	0.1648	0.1498	0.1498
Path-size PS_1	0.2632	0.2237	0.1886	0.1623	0.1623
Path-size PS_2	0.2632	0.2237	0.1886	0.1623	0.1623
Path-size PS_3	0.2632	0.2237	0.1886	0.1623	0.1623
Probit	0.2599	0.2185	0.1913	0.1656	0.1648
LNL $\delta=0$	0.2632	0.2237	0.1886	0.1623	0.1623
LNL δ geom	0.2331	0.2115	0.1934	0.1810	0.1810
LNL δ aritm	0.2157	0.2053	0.1967	0.1912	0.1912
Nested Logit	0.2913	0.2331	0.1838	0.1459	0.1459

Tabella 1.2 – Probabilità di scelta rete ad esagono (costi di percorso uguali)

Il modello Logit Multinomiale fornisce naturalmente probabilità di scelta uguali per tutti i percorsi, in quanto non è in grado di simulare gli effetti della loro sovrapposizione; le probabilità di scelta C-Logit si attestano su valori diversi a seconda delle espressioni adottate per il fattore di sovrapposizione, a proposito delle quali risulta $CF_1=CF_3$ solo per la particolare configurazione di costi adottata. Il modello Probit riproduce le probabilità attese in maniera ottimale, poiché premia il percorso meno correlato e penalizza gli altri in misura proporzionalmente crescente alla loro sovrapposizione; le probabilità di scelta dei percorsi 4 e 5 sono diverse solo in conseguenza dell'approssimazione insita nel metodo numerico di calcolo Monte Carlo delle probabilità di scelta. Le probabilità calcolate con il modello Link-nested Logit dipendono fortemente dalla specificazione scelta per i parametri di varianza; in particolare, i risultati in tabella 1.2 mostrano che ci si avvicina di più al Probit utilizzando le specificazioni con $\delta=0$ e con δ calcolato attraverso la (1.3.19), piuttosto che con la specificazione (1.3.18). Anche le probabilità di scelta calcolate con il Path-size Logit risultano coerenti con le aspettative; è peraltro da notare che la particolare configurazione dei costi di arco rende uguali le tre specificazioni per il fattore di taglia PS .

E' interessante considerare altre due configurazioni di costo che si ottengono, rispettivamente, premiando e penalizzando in termini di disutilità il percorso meno correlato: nelle tabelle 1.3 ed 1.4 sono riportate le probabilità di scelta fornite dai diversi modelli presi in considerazione.

Percorso	1	2	3	4	5
Sequenza nodi	1-6	1-2-6	1-2-3-6	1-2-3-4-6	1-2-3-4-5-6
Costo	5	5.1	5.2	5.3	5.3
MNL	0.2309	0.2126	0.1958	0.1803	0.1803
C-Logit CF_1	0.3641	0.2123	0.1578	0.1329	0.1329
C-Logit CF_2	0.3242	0.2275	0.1704	0.1390	0.1390
C-Logit CF_3	0.3634	0.2150	0.1590	0.1313	0.1313
Path-size PS_1	0.2942	0.2311	0.1815	0.1466	0.1466
Path-size PS_2	0.2857	0.2292	0.1836	0.1507	0.1507
Path-size PS_3	0.2915	0.2683	0.1995	0.1204	0.1204
Probit	0.2843	0.2303	0.1843	0.1484	0.1527
LNL $\delta=0$	0.2915	0.2289	0.1811	0.1492	0.1492
LNL δ geom	0.2638	0.2238	0.1895	0.1614	0.1614
LNL δ aritm	0.2463	0.2175	0.1926	0.1718	0.1718
Nested Logit	0.3341	0.2448	0.1772	0.1220	0.1220

Tabella 1.3 – Probabilità di scelta rete ad esagono (costi crescenti con il grado di sovrapposizione)

Percorso	1	2	3	4	5
Sequenza nodi	1-6	1-2-6	1-2-3-6	1-2-3-4-6	1-2-3-4-5-6
Costo	5.3	5.2	5.1	5	5
MNL	0.1713	0.1862	0.2024	0.2200	0.2200
C-Logit CF ₁	0.2897	0.1985	0.1723	0.1697	0.1697
C-Logit CF ₂	0.2552	0.2125	0.1852	0.1736	0.1736
C-Logit CF ₃	0.2901	0.1958	0.1707	0.1717	0.1717
Path-size PS ₁	0.2289	0.2130	0.1954	0.1813	0.1813
Path-size PS ₂	0.2365	0.2155	0.1939	0.1770	0.1770
Path-size PS ₃	0.2276	0.1998	0.1636	0.2045	0.2045
Probit	0.2299	0.2060	0.1893	0.1877	0.1872
LNL $\delta=0$	0.2276	0.2144	0.1975	0.1802	0.1802
LNL δ geom	0.2010	0.1969	0.1958	0.2032	0.2032
LNL δ aritm	0.1853	0.1912	0.1994	0.2121	0.2121
Nested Logit	0.2601	0.2158	0.1852	0.1695	0.1695

Tabella 1.4 – Probabilità di scelta rete ad esagono (costi decrescenti con il grado di sovrapposizione)

In corrispondenza della configurazione di costi relativa alla tabella 1.3, nella quale il percorso meno correlato è anche quello di minor disutilità sistematica ed i costi di percorso risultano crescenti con il grado di sovrapposizione, le probabilità di scelta calcolate con il Logit Multinomiale risultano ovviamente funzione della sola differenza tra le utilità sistematiche dei percorsi considerati e non tengono conto degli effetti della correlazione tra le alternative. Dal momento che le probabilità di scelta calcolate con gli altri modelli risultano anche, seppur in maniera diversa per ciascuno di essi, dall correlazione tra i percorsi, ci si attende per ognuno una probabilità di scelta per percorso I , di massima utilità e minima correlazione, superiore rispetto a quella fornita dal Logit Multinomiale. I risultati di tabella 1.3 mostrano chiaramente questa tendenza; è peraltro da notare che le probabilità di scelta calcolate con diverse specificazioni dei modelli Link-nested Logit, C-Logit e Path-size Logit, pur avvicinandosi a quelle fornite dal modello Probit, risultano tra loro significativamente diverse anche se tutte coerenti con le aspettative.

Analoghe considerazioni si possono estendere, simmetricamente, al caso analizzato in tabella 1.4, nel quale il percorso meno correlato è al tempo stesso quello di massima disutilità ed i costi di percorso risultano decrescenti con il grado di sovrapposizione. Rispetto al caso precedente, tutti i modelli di scelta del percorso che tengono conto degli effetti della correlazione tra le alternative di scelta devono operare, con riferimento alle probabilità di scelta fornite dal Logit Multinomiale, una “compensazione” nella probabilità di scelta del percorso I rispetto a tutti i restanti percorsi, in virtù della sua indipendenza. Tutti i modelli forniscono, seppur con differenze significative, risultati coerenti con le aspettative ad eccezione del Path-size Logit con fattore di taglia specificato secondo la (1.3.13); questo stesso risultato controintuitivo è illustrato in Bierlaire e Frejinger (2005) su una rete simile a quella qui presa in considerazione. Di conseguenza, così come accade per il C-Logit, è possibile costruire un opportuno controesempio in modo da invalidare tutte le possibili specificazioni finora proposte in letteratura per il fattore di taglia.

Per quanto attiene al Mixed Logit, si può procedere in esatta analogia con il paragrafo 1.4.1, analizzando la sensibilità con cui le probabilità di scelta fornite dal modello Probit si alterano al crescere della componente del residuo aleatorio Gumbel-distribuita; i risultati, riportati in tabella 1.5, conducono alle stesse considerazioni proposte in precedenza per la rete di Daganzo.

Percorso	MNL	Mixed Logit (ξ_{ML}/ξ_P)						Probit
		0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95	
1	0.2000	0.2112	0.2218	0.2308	0.2444	0.2514	0.2537	0.2583
2	0.2000	0.2024	0.2065	0.2121	0.2140	0.2146	0.2182	0.2206
3	0.2000	0.1979	0.1944	0.1916	0.1915	0.1911	0.1890	0.1894
4	0.2000	0.1944	0.1883	0.1839	0.1753	0.1713	0.1692	0.1630
5	0.2000	0.1941	0.1890	0.1815	0.1748	0.1716	0.1699	0.1687

Tabella 1.5 – Probabilità Mixed Logit per la rete ad esagono

1.4.3 Rete di Braess

Un'altra rete test molto utilizzata in letteratura per valutare le caratteristiche dei modelli di scelta del percorso è costituita dalla rete di Braess, illustrata in figura 1.8 insieme alla configurazione di costi adottata per il caso in esame.

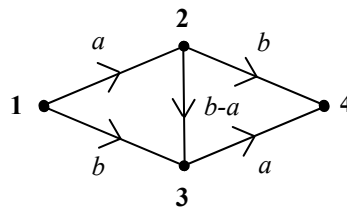


Figura 1.8 – Rete di Braess

La configurazione dei costi di arco illustrate nella figura precedente determina un'utilità sistemática uguale ad $a+b$ per ciascun percorso. In particolare, i percorsi 1-2-4 ed 1-3-4 hanno utilità di percorso indipendenti tra loro e correlate allo stesso modo con l'utilità del percorso 1-2-3-4. Mantenendo costante il valore di b e variando il rapporto a/b tra 0 ed 1, si passa dal caso limite $a/b=0$ nel quale i tre percorsi sono non sovrapposti e pertanto le rispettive utilità indipendenti (con una probabilità di scelta pari a 0.33 per ciascuno di essi) al caso $a/b=1$ nel quale la rete degenera in una rete a forma di otto nella quale è consentita una diversione in corrispondenza del nodo 2 (che coincide con il nodo 3) dal percorso superiore al percorso inferiore. E' in primo luogo evidente che la matrice di covarianze delle utilità sistematiche corrispondente alle ipotesi poste all'inizio del paragrafo 1.4 non è a blocchi e pertanto non risulta possibile applicare a questa rete il modello Logit Gerarchizzato. Inoltre, è immediato verificare che le diverse specificazioni del fattore di taglia nel modello Path-Size Logit, illustrate nel paragrafo 1.3.1.2, risultano tra loro coincidenti in virtù della particolare configurazione di costi adottata. Per gli altri modelli si rimanda alle probabilità di scelta, riportate nelle figure successive, in funzione del rapporto a/b tra 0 ed 1.

I risultati riportati nelle figure 1.9 ed 1.10 confermano le considerazioni proposte a commento delle simulazioni sulle reti in precedenza illustrate; in particolare, si evidenzia ancora una volta il forte scostamento delle probabilità fornite dal modello Path-size Logit rispetto agli altri modelli. Inoltre, si è evidenziata la differenza significativa nel calcolo delle probabilità di scelta calcolate con il modello C-Logit con fattore di sovrapposizione espresso attraverso la (1.3.7), a seconda che si calcoli la numerosità di arco con riferimento alla singola origine, per un algoritmo ad enumerazione implicita a singolo passo, ovvero con riferimento a ciascuna coppia origine-destinazione, per un algoritmo ad enumerazione implicita a doppio passo.

Non si è ritenuto significativo riportare le prove numeriche relative al modello Mixed Logit perché la complessità della rete è analoga a quella del paragrafo 1.4.1.

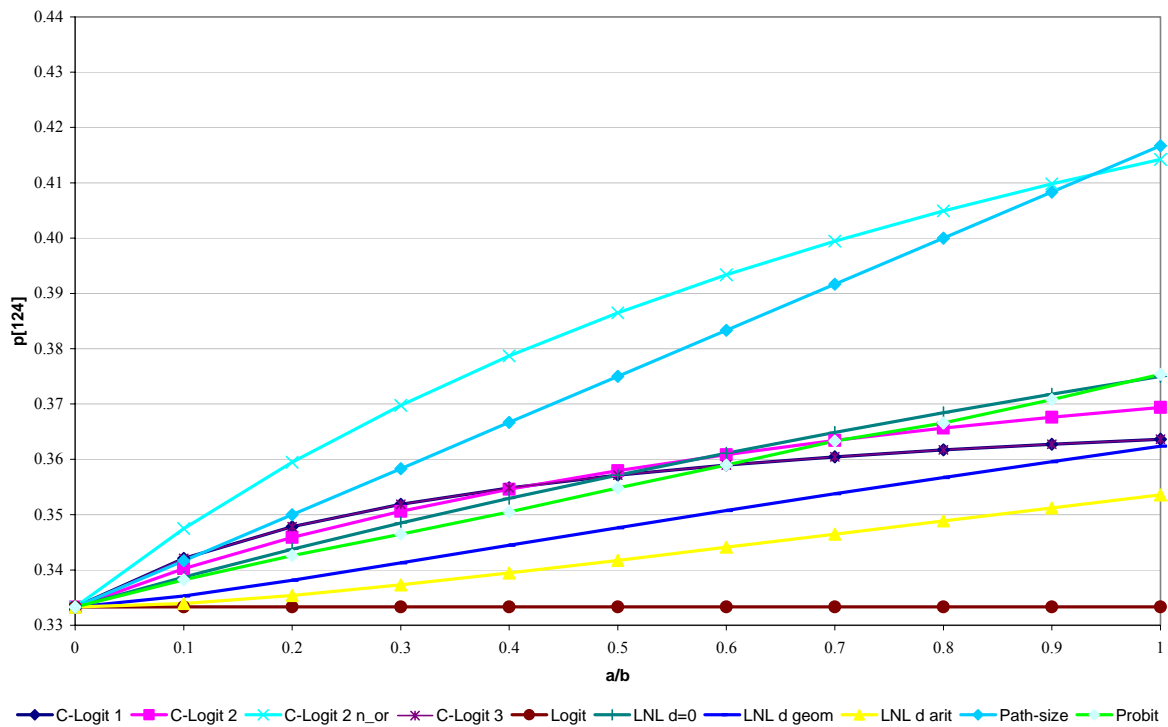


Figura 1.9 – Probabilità di scelta per la rete di Braess (percorsi 1-2-4 ed 1-3-4)

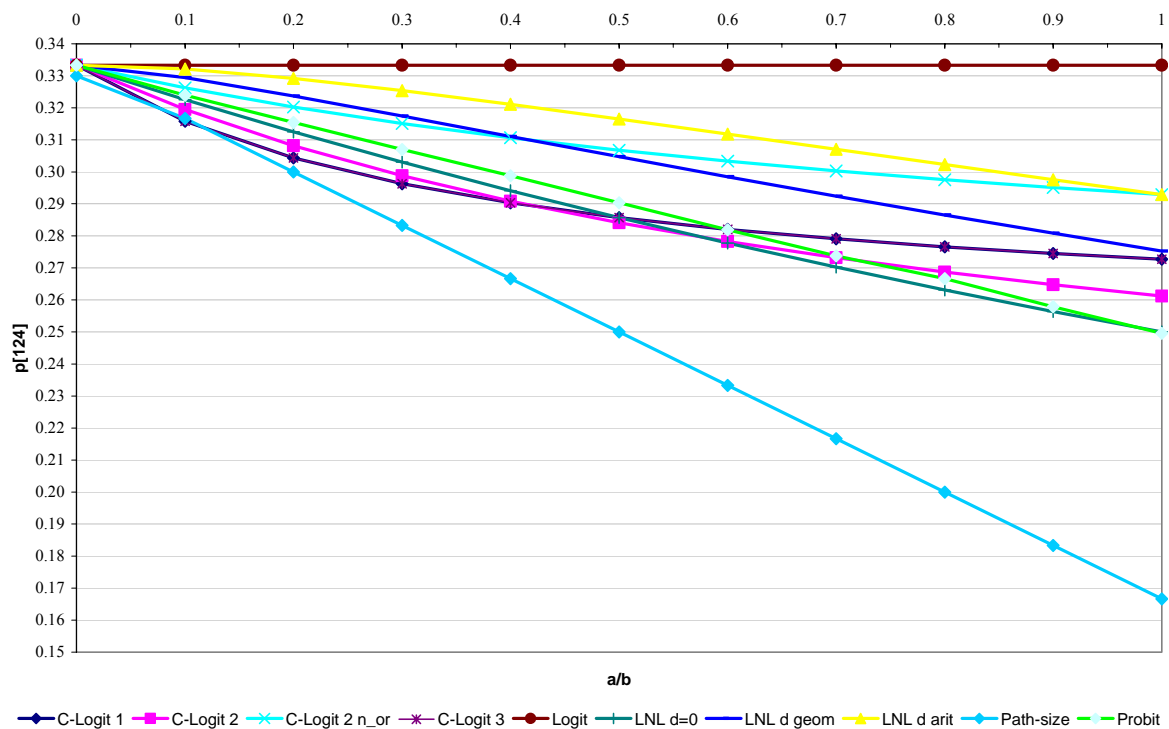


Figura 1.10 – Probabilità di scelta per la rete di Braess (percorso 1-2-3-4)

1.4.4 Rete a maglia

Le reti test fin qui presentate risultano estremamente particolari nella loro struttura in modo da evidenziare eventuali problemi di carattere numerico nei modelli di scelta del percorso presi in considerazione. Appare pertanto opportuno rivolgere l'attenzione ad una tipologia di rete test che maggiormente si avvicini ad un caso reale; in particolare, la rete a maglia illustrata in figura 1.11 è

costituita da 17 archi monodirezionali, cui corrispondono 10 percorsi a collegare una sola coppia origine-destinazione. Le correlazioni tra i percorsi non hanno, in questo caso, una struttura a blocchi e pertanto il Logit Gerarchizzato non può essere utilizzato per simularne le probabilità di scelta; inoltre, riprendendo quanto descritto nel paragrafo 1.3.1.1, si è nella condizione di non poter prevedere chiaramente un ordine tra percorsi congruente con una sorta di “correlazione totale” per cui, anche a parità di utilità sistematiche, non è possibile formulare aspettative precise sulle probabilità di scelta attese. In ogni caso, nelle prove numeriche condotte i percorsi sono stati numerati in modo tale che quelli più sovrapposti, nel senso chiarito nel paragrafo 1.4, siano quelli con numerazione intermedia.

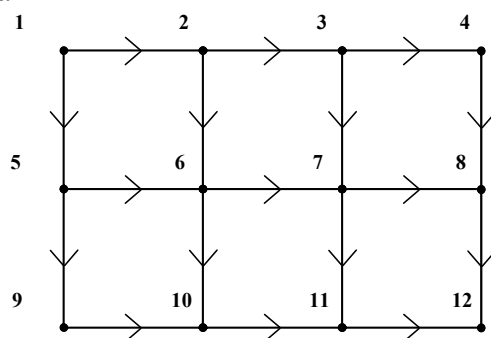


Figura 1.11 – Rete a maglia

Una prima prova numerica è stata condotta ipotizzando costi di percorso (e costi di arco, per la particolare configurazione della rete) tutti uguali; i risultati sono riportati in tabella 1.6. Successivamente, sono state prese in considerazione due configurazioni di costi di percorso che rispettivamente premiano e penalizzano in termini di utilità sistematica i percorsi meno correlati; i risultati di queste simulazioni sono riportati nelle tabelle 1.7 ed 1.8.

Percorso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi	1-2-3-4-8-12	1-2-3-7-8-12	1-2-3-7-11-12	1-2-6-7-8-12	1-2-6-7-11-12	1-5-6-7-11-12	1-2-6-10-11-12	1-5-6-7-8-12	1-5-6-10-11-12	1-5-9-10-11-12
Costo	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
MNL	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
C-Logit 1	0.1045	0.1005	0.0983	0.0983	0.0963	0.0983	0.0983	0.1005	0.1005	0.1045
C-Logit 2	0.1079	0.0999	0.0982	0.0970	0.0953	0.0970	0.0982	0.0987	0.0999	0.1079
C-Logit 3	0.1045	0.1005	0.0983	0.0983	0.0963	0.0983	0.0983	0.1005	0.1005	0.1045
Path-size 1	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Path-size 2	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Path-size 3	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Probit	0.1355	0.0958	0.0934	0.0864	0.0773	0.0854	0.0940	0.1034	0.0944	0.1344
LNL $\delta=0$	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
LNL δ arit	0.1081	0.0998	0.0983	0.0969	0.0954	0.0969	0.0983	0.0984	0.0998	0.1081
LNL δ geom	0.1208	0.0988	0.0958	0.0923	0.0893	0.0923	0.0958	0.0953	0.0988	0.1208

Tabella 1.6 – Probabilità di scelta rete a maglia (costi di percorso uguali)

Percorso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi	1-2-3-4-8-12	1-2-3-7-8-12	1-2-3-7-11-12	1-2-6-7-8-12	1-2-6-7-11-12	1-5-6-7-11-12	1-2-6-10-11-12	1-5-6-7-8-12	1-5-6-10-11-12	1-5-9-10-11-12
Costo	19	20	20	20	20	20	20	20	20	19
MNL	0.1184	0.0954	0.0954	0.0954	0.0954	0.0954	0.0954	0.0954	0.0954	0.1184
C-Logit 1	0.1233	0.0958	0.0936	0.0936	0.0917	0.0936	0.0936	0.0958	0.0958	0.1233
C-Logit 2	0.1264	0.0952	0.0936	0.0924	0.0908	0.0924	0.0936	0.0940	0.0952	0.1264
C-Logit 3	0.1248	0.0951	0.0932	0.0933	0.0915	0.0933	0.0932	0.0955	0.0951	0.1248
Path-size 1	0.1811	0.0878	0.0832	0.0739	0.0693	0.0739	0.0832	0.0786	0.0878	0.1811
Path-size 2	0.1771	0.0888	0.0842	0.0750	0.0704	0.0750	0.0842	0.0796	0.0888	0.1771
Path-size 3	0.3164	0.0439	0.0439	0.0479	0.0479	0.0479	0.0439	0.0479	0.0439	0.3164
Probit	0.1634	0.0842	0.0870	0.0808	0.0748	0.0783	0.0847	0.0971	0.0847	0.1652
LNL $\delta=0$	0.3197	0.0429	0.0429	0.0472	0.0472	0.0472	0.0429	0.0472	0.0429	0.3197
LNL δ arit	0.1300	0.0939	0.0926	0.0917	0.0905	0.0917	0.0926	0.0930	0.0939	0.1300
LNL δ geom	0.1501	0.0904	0.0880	0.0858	0.0834	0.0858	0.0880	0.0882	0.0904	0.1501

Tabella 1.7 – Probabilità di scelta rete a maglia (percorsi meno correlati premiati)

Percorso Nodi Costo	1 1-2-3-4-8-12 21	2 1-2-3-7-8-12 20	3 1-2-3-7-11-12 20	4 1-2-6-7-8-12 20	5 1-2-6-7-11-12 20	6 1-5-6-7-11-12 20	7 1-2-6-10-11-12 20	8 1-5-6-7-8-12 20	9 1-5-6-10-11-12 20	10 1-5-9-10-11-12 21
MNL	0.0841	0.1040	0.1040	0.1040	0.1040	0.1040	0.1040	0.1040	0.1040	0.0841
C-Logit 1	0.0883	0.1047	0.1023	0.1023	0.1003	0.1023	0.1023	0.1046	0.1047	0.0883
C-Logit 2	0.0916	0.1040	0.1023	0.1010	0.0993	0.1010	0.1023	0.1028	0.1040	0.0916
C-Logit 3	0.0872	0.1051	0.1026	0.1025	0.1004	0.1025	0.1026	0.1048	0.1051	0.0872
Path-size 1	0.1434	0.0982	0.0930	0.0827	0.0775	0.0827	0.0930	0.0879	0.0982	0.1434
Path-size 2	0.1470	0.0973	0.0921	0.0817	0.0765	0.0817	0.0921	0.0869	0.0973	0.1470
Path-size 3	0.1057	0.1132	0.1051	0.0880	0.0799	0.0880	0.1051	0.0961	0.1132	0.1057
Probit	0.1081	0.1047	0.1005	0.0900	0.0810	0.0925	0.0996	0.1098	0.1048	0.1091
LNL $\delta=0$	0.1053	0.1133	0.1053	0.0880	0.0800	0.0880	0.1053	0.0961	0.1133	0.1053
LNL δ arit	0.0896	0.1048	0.1031	0.1013	0.0996	0.1013	0.1031	0.1030	0.1048	0.0896
LNL δ geom	0.0973	0.1057	0.1021	0.0974	0.0939	0.0974	0.1021	0.1010	0.1057	0.0973

Tabella 1.8 – Probabilità di scelta rete a maglia (percorsi meno correlati penalizzati)

I risultati di queste simulazioni mostrano, in primo luogo, che il modello C-Logit fornisce probabilità di scelta non coerenti con l'ordinamento individuato dal modello Probit, in coerenza con quanto descritto in precedenza. Si sottolineano, inoltre, i valori di probabilità forniti dal Link-nested Logit con $\delta=0$ e dal Path-size con fattore di taglia (1.3.13) nella configurazione di costi di percorso riportata in tabella 1.7: entrambi appaiono lontani dal comportamento degli altri modelli. Se ciò risulta una conferma per il Path-size Logit, che pure nelle prove numeriche condotte sulle reti precedenti aveva mostrato incoerenze nelle probabilità di scelta, non altrettanto può dirsi per il Link-nested Logit con $\delta=0$, per il quale si conclude che in contesti di scelta caratterizzati da molti percorsi di costo simile porge risultati non soddisfacenti.

Le considerazioni precedentemente esposte trovano conferma se si considerano configurazioni di costo in cui le utilità sistematiche dei percorsi risultano direttamente od inversamente proporzionali al loro grado di sovrapposizione; i risultati sono riportati nelle tabelle 1.9 ed 1.10.

Percorso Nodi Costo	1 1-2-3-4-8-12 20	2 1-2-3-7-8-12 20	3 1-2-3-7-11-12 21	4 1-2-6-7-8-12 22	5 1-2-6-7-11-12 23	6 1-5-6-7-11-12 22	7 1-2-6-10-11-12 21	8 1-5-6-7-8-12 21	9 1-5-6-10-11-12 20	10 1-5-9-10-11-12 20
MNL	0.1202	0.1202	0.0980	0.0800	0.0652	0.0800	0.0980	0.0980	0.1202	0.1202
C-Logit 1	0.1250	0.1205	0.0961	0.0781	0.0626	0.0781	0.0961	0.0979	0.1205	0.1250
C-Logit 2	0.1283	0.1193	0.0959	0.0773	0.0623	0.0773	0.0959	0.0961	0.1193	0.1283
C-Logit 3	0.1258	0.1220	0.0960	0.0769	0.0607	0.0769	0.0960	0.0980	0.1220	0.1258
Path-size 1	0.1863	0.1072	0.0833	0.0606	0.0473	0.0606	0.0833	0.0778	0.1072	0.1863
Path-size 2	0.1814	0.1070	0.0844	0.0627	0.0497	0.0627	0.0844	0.0793	0.1070	0.1814
Path-size 3	0.2068	0.2059	0.0578	0.0008	0.0000	0.0008	0.0578	0.0575	0.2059	0.2068
Probit	0.1616	0.1230	0.0890	0.0583	0.0387	0.0608	0.0901	0.0983	0.1233	0.1569
LNL $\delta=0$	0.2069	0.2069	0.0574	0.0000	0.0000	0.0000	0.0574	0.0574	0.2069	0.2069
LNL δ arit	0.1317	0.1242	0.0955	0.0731	0.0555	0.0731	0.0955	0.0956	0.1242	0.1317
LNL δ geom	0.1493	0.1311	0.0910	0.0622	0.0417	0.0622	0.0910	0.0912	0.1311	0.1493

Tabella 1.9 – Probabilità di scelta rete a maglia (costi di percorso crescenti con il grado di sovrapposizione)

Percorso Nodi Costo	1 1-2-3-4-8-12 20	2 1-2-3-7-8-12 20	3 1-2-3-7-11-12 19	4 1-2-6-7-8-12 18	5 1-2-6-7-11-12 17	6 1-5-6-7-11-12 18	7 1-2-6-10-11-12 19	8 1-5-6-7-8-12 19	9 1-5-6-10-11-12 20	10 1-5-9-10-11-12 20
MNL	0.0778	0.0778	0.0974	0.1220	0.1528	0.1220	0.0974	0.0974	0.0778	0.0778
C-Logit 1	0.0817	0.0784	0.0960	0.1207	0.1478	0.1207	0.0960	0.0987	0.0784	0.0817
C-Logit 2	0.0851	0.0785	0.0963	0.1190	0.1453	0.1190	0.0963	0.0971	0.0785	0.0851
C-Logit 3	0.0804	0.0765	0.0952	0.1225	0.1529	0.1225	0.0952	0.0980	0.0765	0.0804
Path-size 1	0.1330	0.0765	0.0903	0.1000	0.1140	0.1000	0.0903	0.0863	0.0765	0.1330
Path-size 2	0.1379	0.0773	0.0902	0.0975	0.1088	0.0975	0.0902	0.0855	0.0773	0.1379
Path-size 3	0.0770	0.0005	0.1004	0.1338	0.3757	0.1338	0.1004	0.0009	0.0005	0.0770
Probit	0.1015	0.0617	0.0882	0.1208	0.1537	0.1214	0.0873	0.0988	0.0634	0.1031
LNL $\delta=0$	0.0767	0.0000	0.1012	0.1337	0.3768	0.1337	0.1012	0.0000	0.0000	0.0767
LNL δ arit	0.0812	0.0725	0.0952	0.1239	0.1594	0.1239	0.0952	0.0952	0.0725	0.0812
LNL δ geom	0.0861	0.0626	0.0920	0.1272	0.1749	0.1272	0.0920	0.0890	0.0626	0.0861

Tabella 1.10 – Probabilità di scelta rete a maglia (costi di percorso decrescenti con il grado di sovrapposizione)

Anche questi risultati numerici confermano le perplessità sulla specificazione del modello Link-nested Logit con $\delta=0$, mentre la specificazione dei parametri di varianza (1.3.19) fornisce risultati sistematicamente migliori della (1.3.18).

Per quanto attiene al modello Mixed Logit, la rete considerata nel presente paragrafo rappresenta un test interessante per verificare la dicotomia tra velocità di convergenza ed approssimazione delle probabilità Probit di cui si è detto nel paragrafo 1.3.5, nel quale si è introdotta una possibile applicazione del modello Mixed Logit alla simulazione della scelta del percorso con approccio ad enumerazione implicita dei percorsi, basata sull'implementazione di un algoritmo di caricamento stocastico della rete che introduce nella tradizionale assegnazione SNL-Probit lo stimatore smoothed Monte Carlo descritto nel paragrafo 1.2.2. Le proprietà teoriche di questa applicazione sono già state discusse, e nel corso delle prove numeriche sin qui condotte si è tentata una prima quantificazione dell'effetto distorsivo indotto sulle probabilità Probit dalla presenza dell'aliquota di residuo Gumbel-distribuita. L'aspetto più rilevante che deve essere approfondito è quindi quello computazionale, legato alla quantificazione dello scostamento dalle probabilità Probit necessario per perseguire un dato miglioramento nei tempi di calcolo. Si riportano, in questo senso, i risultati descritti in Papola e Marzano (2002). Il primo passo per il confronto ha riguardato il calcolo del vettore di flussi "soluzione" \mathbf{f}_P^* e \mathbf{f}_{ML}^* per ciascuno dei due modelli, arrestando dopo un elevato numero di iterazioni gli algoritmi di caricamento stocastico della rete rispettivamente descritti nei paragrafi 1.3.4 ed 1.3.5. Successivamente, si è analizzata la convergenza di ciascun algoritmo al proprio vettore di flussi "soluzione" diagrammando l'andamento della somma degli scostamenti in valore assoluto $\mathbf{f}^*-\mathbf{f}$ in funzione del numero di iterazioni effettuate. A tal proposito occorre sottolineare che il calcolo dei flussi di arco SNL Mixed Logit (SNL-ML) con l'algoritmo descritto nel paragrafo 1.3.5 richiede per ciascuna iterazione un'applicazione dell'algoritmo di Dial (1971), mentre per il calcolo dei flussi di arco SNL Probit (SNL-P) alla generica iterazione si effettua un carico deterministico della rete con costi campionati e si mediano i flussi così ottenuti con quelli risultanti dalle iterazioni precedenti. In linea di massima, quindi, la struttura dell'algoritmo SNL-P determina per la singola iterazione un tempo di calcolo pari a quello necessario per un carico deterministico della rete, a meno del tempo di campionamento che con opportuni accorgimenti può essere reso trascurabile, mentre la struttura dell'algoritmo SNL-ML ha la complessità computazionale di un algoritmo di Dial che, secondo le indicazioni riportate in Cascetta (2001), può essere approssimativamente posta per la singola iterazione pari a 2÷3 volte il tempo necessario per un carico deterministico della rete. Pertanto, il confronto tra gli algoritmi è stato condotto sia sulla base del numero assoluto di iterazioni effettuate sia in termini di DNL equivalenti assumendo che un'iterazione dell'algoritmo SNL-Probit equivalga ad un DNL ed un'iterazione SNL-HLP a 2.5 DNL. I risultati sono riportati nelle figure successive, in ciascuna delle quali si sono confrontati diversi valori del rapporto ξ_{ML}/ξ_P , riportato tra parentesi in legenda. Le curve relative al modello Mixed Logit nelle figure precedenti evidenziano che solo con valori molto bassi di ξ_{ML} , dunque con un modello di scelta prossimo ad un Logit Multinomiale secondo le indicazioni numeriche risultanti dalle precedenti prove numeriche, si osserva una convergenza più rapida rispetto al Probit; peraltro, i risultati appaiono ancor meno soddisfacenti se il confronto è condotto in termini di iterazioni DNL equivalenti. Per completare il confronto è necessario a questo punto verificare lo scostamento tra i flussi SNL-ML relativi ai differenti valori del rapporto ξ_{ML}/ξ_P e i flussi SNL Probit. Nella figura

1.14 è riportato, in funzione del numero di iterazioni, lo scostamento tra il vettore di flussi SNL-ML ed il vettore \mathbf{f}_P^* . Dall'analisi comparata dei diagrammi delle figure 1.13 ed 1.14, si evince quindi che non esiste un range di valori del rapporto ξ_{ML}/ξ_P per i quali si osservi un miglioramento di efficienza computazionale e al tempo stesso probabilità di scelta e flussi SNL-ML comunque prossimi a quelli forniti dal Probit.

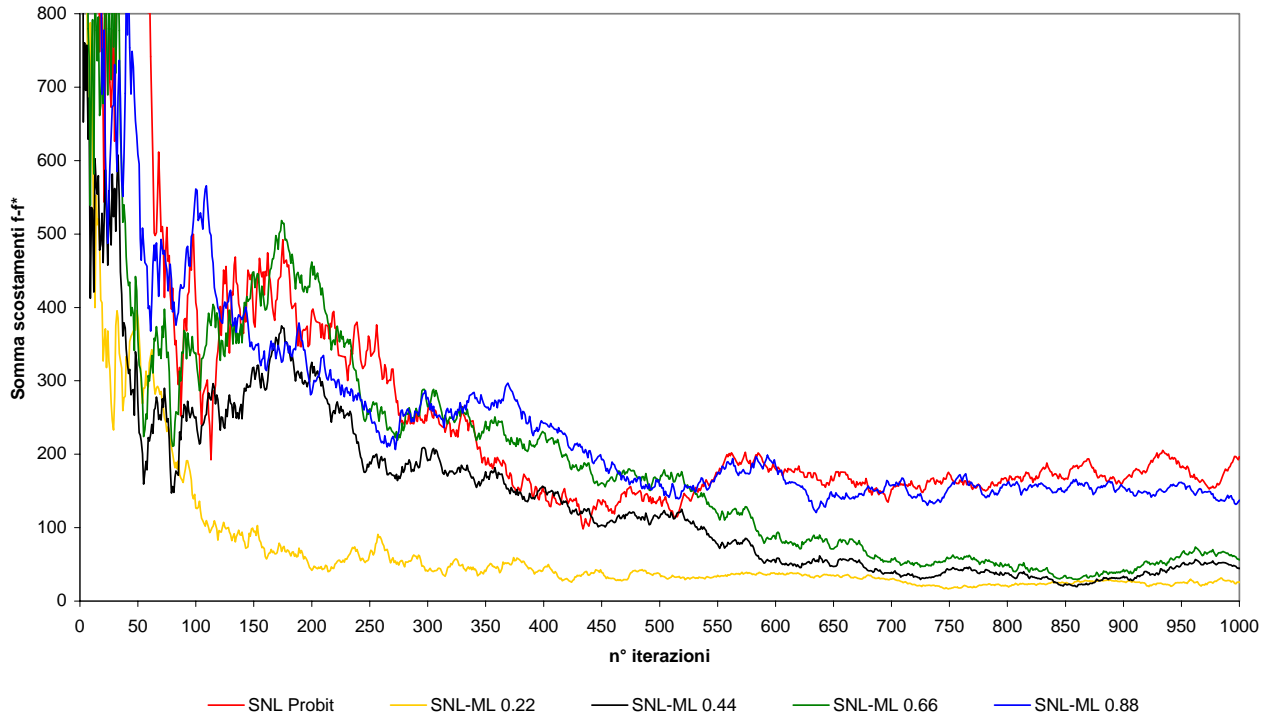


Figura 1.12– Convergenza di ciascun algoritmo al proprio vettore di flussi soluzione (n° di iterazioni)

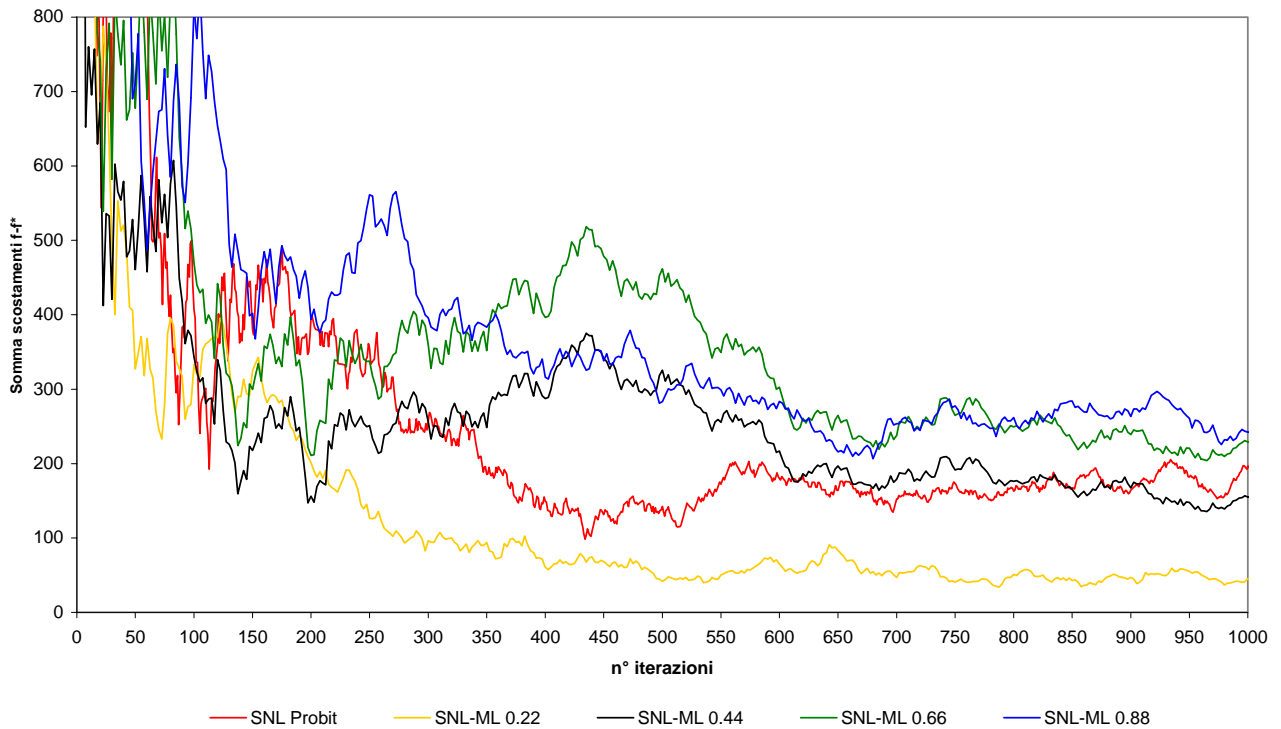
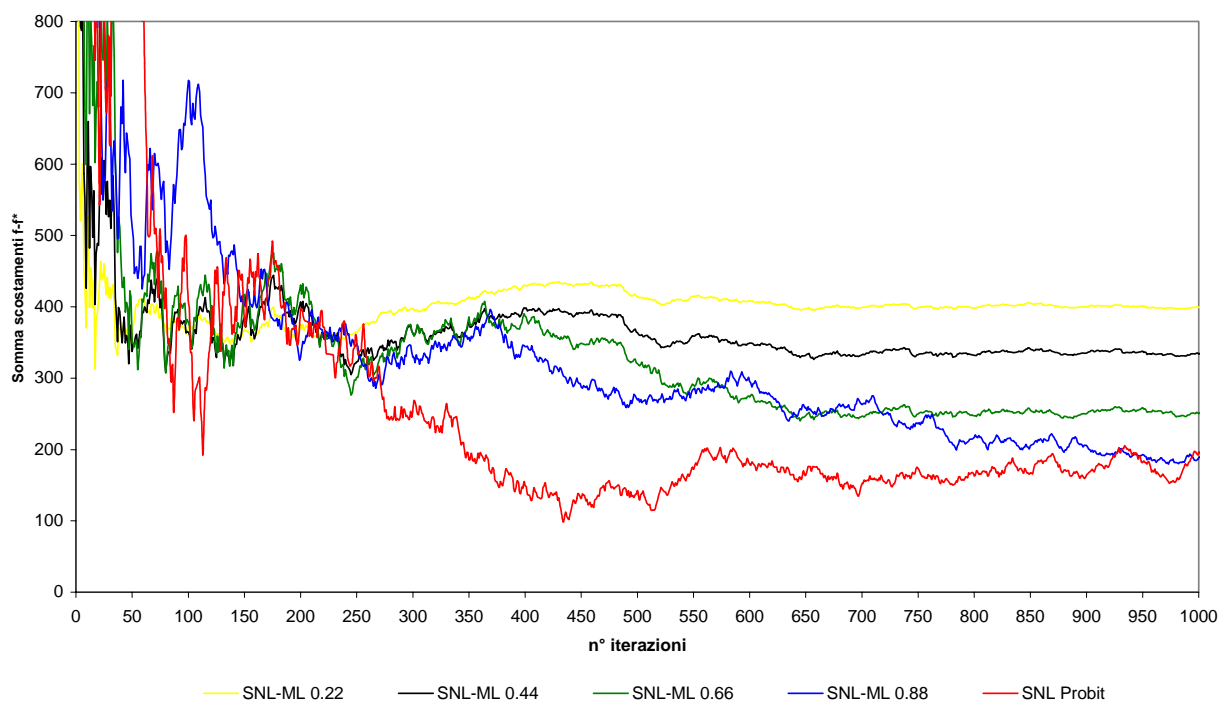


Figura 1.13 – Convergenza di ciascun algoritmo al proprio vettore di flussi soluzione (DNL equivalenti)



*Figura 1.14 – Convergenza di ciascun algoritmo al vettore di flussi f^*_p (n° di iterazioni)*

1.5 Considerazioni conclusive e spunti di ricerca

Gli aspetti di carattere teorico, numerico e sperimentale approfonditi nei paragrafi precedenti sui modelli di scelta del percorso individuati in sede di analisi bibliografica possono essere sintetizzati nella tabella 1.11, nella quale si è fatto riferimento alle proprietà, discusse in sede di introduzione, rispetto alle quali giudicare la bontà di un modello di scelta del percorso.

La tassonomia evidenzia in maniera molto chiara che, ancorché siano stati proposti numerosissimi modelli per la simulazione della scelta del percorso, nessuno di essi è in grado di soddisfare pienamente i requisiti richiesti. Si evince, infatti, che l'unico modello a garantire adeguate proprietà teoriche e numeriche nel contesto di un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi è il Probit, che però sconta l'impossibilità di procedere al calcolo in forma chiusa delle probabilità di scelta.

Peraltro, tutti i modelli in forma chiusa che sono stati proposti per ovviare a tale inconveniente presentano problemi di carattere teorico e/o numerico, e di fatto nessuno di essi si può proporre come valida alternativa al Probit. Infatti, l'unico modello a fornire soddisfacenti proprietà teoriche e numeriche è il Link-nested Logit nella specificazione dei parametri di varianza (1.3.18) o (1.3.19), nessuna delle quali permette però l'enumerazione implicita dei percorsi.

Appare quindi evidente la possibilità di ricercare modelli di scelta del percorso che, pur mantenendo le proprietà caratteristiche del modello Probit, ne superino il limite intrinseco dell'indisponibilità di una forma chiusa. E' su questo presupposto che si sviluppa la ricerca condotta nella presente tesi di dottorato.

Modello	Specificazione (riferimento bibliografico)	Forma chiusa	Simulazione effetti correlazione	Proprietà numeriche	Algoritmo ad enumerazione implicita
Logit Multinomiale	Luce (1959)	SI	NO	NO	SI
C-Logit	CF_1 Cascetta (1995)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
	CF_2 Russo e Vitetta (2001)	SI	Approssimata	Controesempi	SI
	CF_3 Cascetta e Papola (1998)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
Path-Size Logit	PS_1 Ben-Akiva e Lerman (1985)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
	PS_2 Ben-Akiva e Bierlaire (1999)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
	PS_3 Ramming (2002)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
Logit Gerarchizzato	Williams (1975)	SI	A blocchi	Dipende dal contesto	SI
Link-Nested Logit	δ_{nulli} Prashker e Bekhor (1998)	SI	SI	Controesempi	SI
	$\delta_{costanti}$ Vovsha e Bekhor (1998)	SI	SI	Controesempi	NO
	δ_{artim} Behkor e Prashker (2001)	SI	SI	Controesempi	NO
	δ_{geom} Marzano (2002) Papola (2003)	SI	SI	Controesempi	NO
	PCL_1 Prashker e Bekhor (1998)	SI	SI	Controesempi	NO
Paired Combinatorial Logit	PCL_2 Gliebe et al. (1999)	SI	Approssimata	Controesempi	NO
Probit	Daganzo (1977)	NO	SI	SI	SI
Mixed Logit	Ramming (2002)	NO	Limitata superiormente	NO	SI

Tabella 1.11 – Confronto tra modelli di scelta del percorso

2. IL MODELLO PML PER LA SIMULAZIONE DELLA SCELTA DEL PERCORSO

2.1 Introduzione

Nel capitolo precedente si sono analizzate in dettaglio le proprietà teoriche, numeriche ed operative di numerosi modelli di scelta del percorso; i risultati sintetizzati nel paragrafo 1.5 evidenziano che nessun modello è in grado, ad oggi, di soddisfare i requisiti discussi nell'introduzione. Il presente capitolo propone un nuovo modello di scelta del percorso, appartenente alla classe dei modelli GEV²⁴, che aspira a preservare le caratteristiche proprie del modello Probit preservando al tempo stesso una forma chiusa. In particolare, l'idea di fondo è di rappresentare la scelta di un percorso come il risultato di una sequenza di scelte compiute in corrispondenza dei nodi di quel percorso; come sarà descritto in dettaglio nel seguito, ciò comporta che nella corrispondente rete di scelta – che nella struttura è simile a quella del modello Network GEV introdotto nel paragrafo 1.2.1.4 – le alternative di scelta, e quindi le probabilità da calcolare, sono rappresentate dai percorsi della rete e non già dalle foglie. Per questo motivo, il modello è stato definito *Path Multilevel Logit* (PML), in coerenza con la nomenclatura introdotta in Marzano e Papola (2004).

Coerentemente con quanto descritto nel capitolo precedente, dopo aver illustrato la specificazione del modello e discusso alcune proprietà teoriche (paragrafo 2.2), se ne valutano le caratteristiche numeriche attraverso prove sulle reti test precedentemente introdotte (paragrafo 2.3) ed infine si propone un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi con applicazione ad una rete reale (paragrafi 2.4 e 2.5).

2.2 Formulazione del modello PML

Come detto, il modello PML è un modello GEV che si propone di simulare una sequenza di scelte congiunte, la cui struttura è rappresentata da una rete monodirezionale di tipo Cross-Nested multilivello. Più nel dettaglio, la radice della rete di scelta riproduce la scelta iniziale, mentre ciascun nodo r rappresenta, al tempo stesso, una scelta intermedia ed un'alternativa: in particolare, esso rappresenta la scelta tra tutte le alternative di scelta rappresentate dai nodi successivi di r e l'alternativa di scelta disponibile in corrispondenza di tutti i passi di scelta

²⁴ L'appartenenza del PML alla classe dei modelli GEV sarà discussa in dettaglio nel paragrafo 3.3.5.

rappresentati dai nodi predecessori di r . Il risultato fornito dal modello è la probabilità di ciascuna possibile sequenza di scelte, pari al numero dei percorsi disponibili sulla rete di scelta che connettono l'origine con i nodi finali.

Al fine di particularizzare il modello PML al contesto di scelta del percorso è opportuno riprendere la nomenclatura, introdotta nel paragrafo 1.3.1, relativa alle definizioni di efficienza di un arco rispetto all'origine e/o rispetto alla destinazione e di stella efficiente in ingresso/in uscita da un nodo. A partire da queste definizioni, e data una qualsiasi coppia origine-destinazione $o-d$ della rete, il modello PML è caratterizzato da una rete di scelta nella quale la radice coincide con l'origine o , ciascun nodo della rete di scelta rappresenta un arco ij efficiente (rispetto a quella coppia $o-d$) ed i nodi finali rappresentano gli archi la cui testa coincide con la destinazione. Più in dettaglio, i predecessori del nodo rappresentativo dell'arco ij sono tutti i nodi rappresentativi degli archi hi con $h \in EBS(i)$ mentre i discendenti sono tutti i nodi rappresentativi degli archi jm con $m \in EFS(j)$. Di conseguenza, ciascun arco efficiente ij della rete, ad eccezione degli archi entranti nella destinazione, identifica un gruppo/nodo della rete di scelta al quale appartengono tutti gli archi jm con $m \in EFS(j)$ e che a sua volta appartiene a tutti i gruppi/nodi identificati dagli archi hi con $h \in EBS(i)$. In questo modo, la radice rappresenta il passo di scelta iniziale tra tutti gli archi in uscita dall'origine e ciascun nodo ij della rete di scelta rappresenta la scelta tra tutti gli archi efficienti in uscita dal nodo j , data la scelta di ij . In questo modo, ciascun percorso della rete di scelta, ovvero un insieme ordinato di gruppi/nodi che connettono la radice con un nodo finale, identifica un particolare percorso efficiente della rete, ovvero una particolare sequenza di archi efficienti che connettono l'origine con la destinazione. Un esempio di rete di scelta corrispondente alla rete di figura 1.11 è riportato nella figura 2.1.

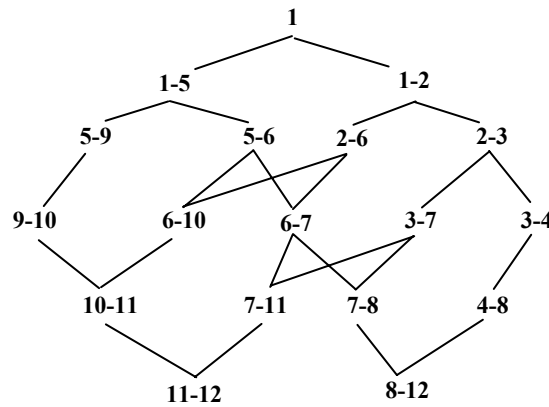


Figura 2.1 – Rete di scelta del modello PML per la rete di figura 1.11

A partire da questa definizione della rete di scelta, il modello PML fornisce la probabilità di scelta di tutti i percorsi k efficienti della rete con la seguente forma funzionale:

$$p[k] = \prod_{ij \in L_k} p[ij / hi, gh] \quad (2.2.1)$$

nella quale L_k è l'insieme ordinato degli archi appartenenti al percorso k e $p[ij/hi,gh]$ è data da²⁵:

²⁵ Nelle formule seguenti si omette per semplicità di notazione l'indicazione dell'apice corrispondente alla coppia $o-d$ considerata. Si noti inoltre che l'esponente dei gradi di appartenenza nella (2.2.2) è l'inverso rispetto alla classica formulazione dei modelli Cross-Nested e Network GEV. La motivazione di tale differenza sarà chiarita nel paragrafo 2.3 con un esempio numerico.

$$p[ij / hi, gh] = \frac{\alpha_{hi,ij}^{\theta_{hi}/\theta_{gh}} e^{V_{ij/hi}/\theta_{hi}}}{\sum_{j' \in EFS(i)} \alpha_{hi,j'}^{\theta_{hi}/\theta_{gh}} e^{V_{j'/hi}/\theta_{hi}}} \quad (2.2.2)$$

L'utilità sistematica $V_{ij/hi}$ dell'arco ij , dato l'arco hi con $h \in EBS(i)$, è espressa come la somma dell'opposto dell'impedenza di arco $-c_{ij}$ e di una variabile inclusiva $Y_{ij/hi}$ rappresentativa delle (dis)utilità di tutti i percorsi ammissibili che connettono l'arco ij con la destinazione:

$$V_{ij/hi} = -c_{ij} + \theta_{ij} Y_{ij/hi} \quad (2.2.3)$$

$$Y_{ij/hi} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = d \\ \ln \sum_{m \in EFS(j)} \alpha_{ij,jm}^{\theta_{ij}/\theta_{hi}} e^{V_{jm/ij}/\theta_{ij}} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Nell'equazione (2.2.2) si è indicato con θ il generico parametro di varianza, mentre $\alpha_{hi,ij}$ rappresenta il grado di appartenenza dell'arco ij al gruppo formato dal predecessore hi ; per definizione risulta:

$$\sum_{h \in EBS(i)} \alpha_{hi,ij} = 1 \quad (2.2.5)$$

Infine, sostituendo la relazione (2.2.2) nella (2.2.1) si ottiene:

$$p[k] = \prod_{ij \in L_k} \frac{\alpha_{hi,ij}^{\theta_{hi}/\theta_{gh}} e^{V_{ij/hi}/\theta_{hi}}}{\sum_{j' \in EFS(i)} \alpha_{hi,j'}^{\theta_{hi}/\theta_{gh}} e^{V_{j'/hi}/\theta_{hi}}} \quad (2.2.6)$$

Si noti che per tutti gli archi ij con $i \in EFS(o)$, che non hanno alcun predecessore, risulta $\theta_{ho} = \theta_o$ ed $\alpha_{ho,oj} = \alpha_{o,oi} = 1$ dalla (2.2.5), per cui la (2.2.2) diviene:

$$p[oi / o] = \frac{e^{V_{oi/o}/\theta_o}}{\sum_{i' \in EFS(o)} e^{V_{oi'/o}/\theta_o}} \quad (2.2.7)$$

Al fine di rendere operativo il modello PML (2.2.6) occorre specificare i gradi di appartenenza ed i parametri di varianza.

Una possibile specificazione del grado di appartenenza $\alpha_{hi,ij}^{od}$ dell'arco ij al gruppo formato dal generico predecessore hi con $h \in EBS(i)$, data una certa coppia origine-destinazione $o-d$, è la seguente:

$$\alpha_{hi,ij}^{od} = \alpha_{hi}^{od} = \frac{\frac{n_{o,h}}{Z_{o,h} + c_{hi}}}{\sum_{h' \in EBS(i)} \frac{n_{o,h'}}{Z_{o,h'} + c_{h'i}}} \quad (2.2.8)$$

dove $Z_{o,h}$ è il costo del minimo percorso dall'origine o al nodo h ed $n_{o,h}$ è il numero di percorsi che collegano l'origine o con il nodo h . Pertanto, il grado di appartenenza specificato secondo la

(2.2.8) aumenta al crescere di $n_{o,h}$ ed al decrescere di $Z_{o,h}$ con un'intuitiva interpretazione fisica. Si noti che la formula (2.2.8) fornisce il medesimo grado di appartenenza al gruppo formato dall'arco hi per tutti gli archi ij con $j \in \text{EFS}(i)$ e, pertanto, $\alpha_{hi,ij}^{od}$ sarà indicato nel seguito come α_{hi}^{od} . I parametri di varianza sono specificati seguendo la specificazione (1.3.24) proposta da Daganzo e Sheffi (1977), in accordo con la quale la varianza di un percorso è proporzionale ad un suo attributo di costo additivo. Tale ipotesi può essere adattata ad un modello omoschedastico, quale il PML, assumendo che:

$$\text{Var}[U_k] = \xi Z_{o,d} \quad \forall k \in K_{od} \quad (2.2.9)$$

nella quale K_{od} è l'insieme dei percorsi che connettono l'origine o con la destinazione d , $Z_{o,d}$ l'aliquota di costo additivo del minimo percorso tra o e d e ξ un coefficiente di proporzionalità. Dall'espressione della varianza per i modelli della famiglia Logit e dalla (2.2.9) segue:

$$\frac{\pi^2 \theta_0^2}{6} = \xi Z_{o,d} \quad \rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\sqrt{6\xi Z_{o,d}}}{\pi} \quad (2.2.10)$$

Di conseguenza, con riferimento al generico arco ij ed alla generica coppia $o-d$ risulta:

$$\theta_{ij}^{od} = \theta_j^d = \frac{\sqrt{6\xi Z_{j,d}}}{\pi} \quad (2.2.11)$$

nella quale $Z_{j,d}$ è una componente di costo additiva del minimo percorso tra i nodi j e d . Si noti che il valore di θ_{ij}^{od} non dipende dall'arco ij e dall'origine, ma solo dal minimo percorso tra la testa dell'arco ij e la destinazione. Di conseguenza, i parametri di varianza θ_{ij}^{od} assumono il medesimo valore per tutti gli archi ij e per tutte le coppie od che condividono la stessa destinazione d ; pertanto, θ_{ij}^{od} sarà indicato nel seguito come θ_j^d .

In virtù delle specificazioni (2.2.8) e (2.2.11), la variabile inclusiva dell'arco ij può essere semplificata riformulandola in modo indipendente dall'arco predecessore:

$$Y_{ij/hi} = Y_{ij} = \ln \sum_{m \in \text{EFS}(j)} \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} e^{V_{jm}/\theta_j} \quad (2.2.12)$$

Di conseguenza, anche l'utilità sistematica dell'arco ij può essere formulata indipendentemente dall'arco predecessore:

$$V_{ij/hi} = V_{ij} = -c_{ij} + \theta_j \ln \sum_{m \in \text{EFS}(j)} \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} e^{V_{jm}/\theta_j} = -c_{ij} + \theta_j \left(\ln \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} + \ln \sum_{m \in \text{EFS}(j)} e^{V_{jm}/\theta_j} \right) \quad (2.2.13)$$

e la (2.2.2) diviene la probabilità di scelta $p[ij/i]$ dell'arco ij condizionata al raggiungimento della sua coda i :

$$p[ij/i] = \frac{\alpha_{hi}^{\theta_i/\theta_h} e^{V_{ij}/\theta_i}}{\sum_{j' \in \text{EFS}(i)} \alpha_{hi}^{\theta_i/\theta_h} e^{V_{ij'}/\theta_i}} = \frac{e^{V_{ij}/\theta_i}}{\sum_{j' \in \text{EFS}(i)} e^{V_{ij'}/\theta_i}} = \frac{e^{-\frac{c_{ij}}{\theta_i} + \frac{\theta_j}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} + \ln \sum_{m \in \text{EFS}(j)} e^{V_{jm}/\theta_j} \right)}}{\sum_{j' \in \text{EFS}(i)} e^{-\frac{c_{ij'}}{\theta_i} + \frac{\theta_{j'}}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij'}^{\theta_{j'}/\theta_i} + \ln \sum_{m \in \text{EFS}(j')} e^{V_{jm}/\theta_{j'}} \right)}} \quad (2.2.14)$$

In conclusione, la probabilità di scelta del percorso k è data da:

$$p[k] = \prod_{ij \in L_k} p[ij / i] = \prod_{ij \in L_k} \frac{e^{-\frac{c_{ij} + \theta_j}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij}^{\theta_j / \theta_i} + \ln \sum_{m \in EFS(j)} e^{V_{jm} / \theta_j} \right)}}{\sum_{j' \in EFS(i)} e^{-\frac{c_{ij'} + \theta_{j'}}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij'}^{\theta_{j'} / \theta_i} + \ln \sum_{m \in EFS(j')} e^{V_{j'm} / \theta_{j'}} \right)}} \quad (2.2.15)$$

2.3 Proprietà numeriche

Una volta illustrata la specificazione del modello è necessario, in coerenza con quanto descritto nel capitolo 1, analizzarne le proprietà numeriche attraverso la simulazione delle probabilità di scelta sulle reti test utilizzate nel paragrafo 1.4; le ipotesi generali ivi poste continuano ovviamente a valere nelle successive applicazioni.

E' in primo luogo interessante verificare le probabilità di scelta fornite dal modello PML sulla rete di Braess, introdotta nel paragrafo 1.4.3; per questo scopo, in figura 2.2 è riportata la rete di scelta PML per la rete di Braess, e nelle figure 2.3 e 2.4 sono rispettivamente riportati i valori delle probabilità di scelta per i percorsi 1-2-4 ed 1-3-4.

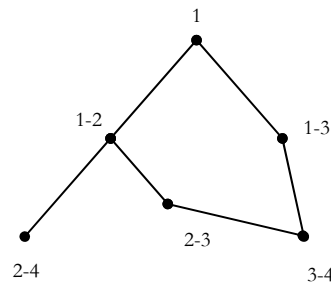


Figura 2.2 – Rete di scelta PML per la rete di Braess

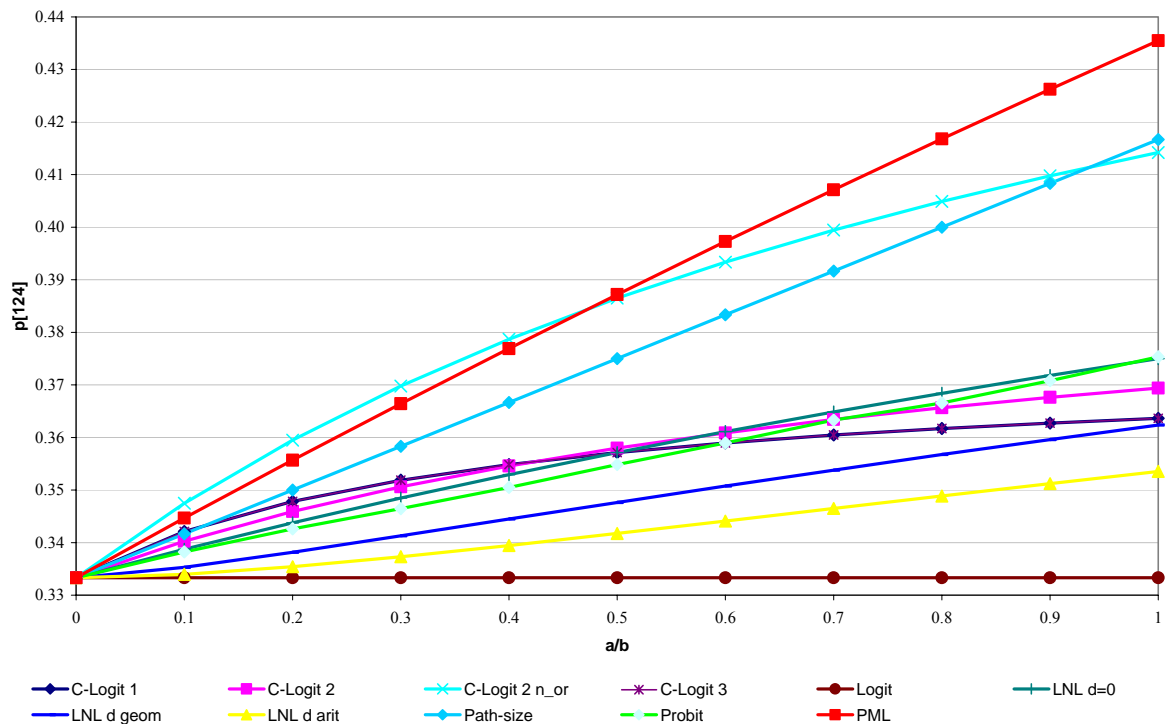


Figura 2.3 – Probabilità di scelta per la rete di Braess (percorso 1-2-4)

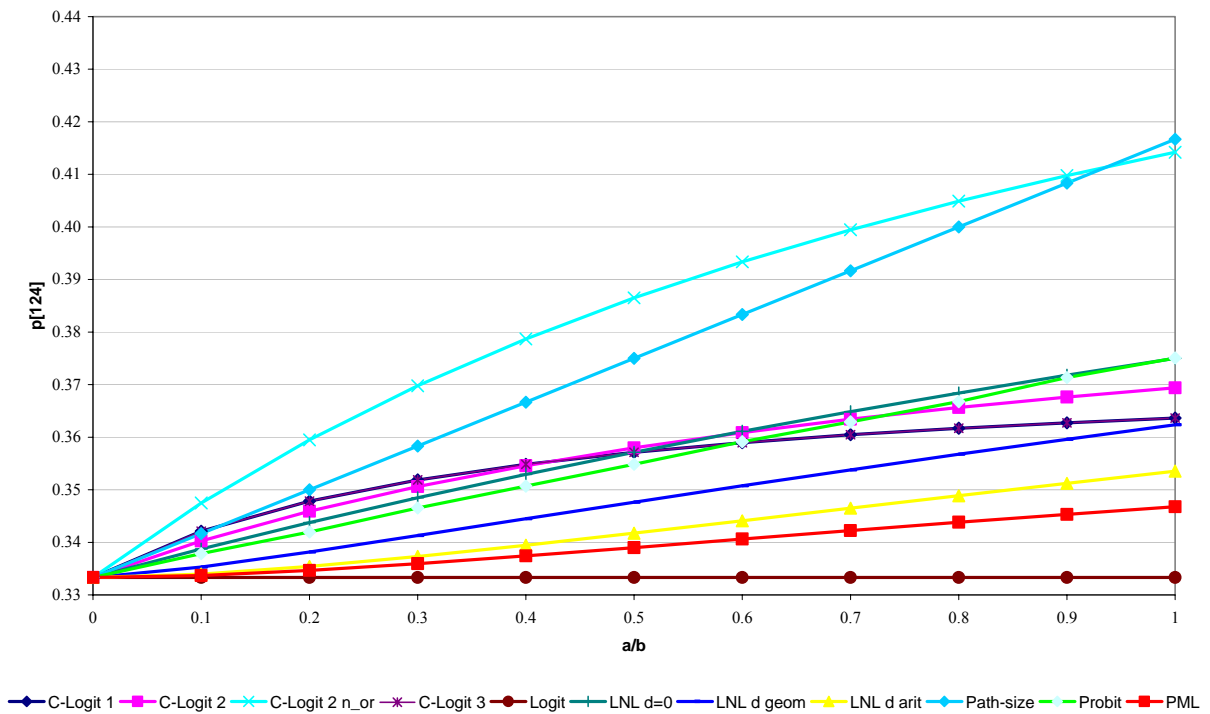


Figura 2.4 – Probabilità di scelta per la rete di Braess (percorso 1-3-4)

L'analisi di tali probabilità consente di evidenziare gli effetti delle ipotesi comportamentali alla base del modello PML. Come chiarito nel capitolo 1, tutti gli altri modelli di scelta del percorso assumono che un utente percepisca e scelga un'alternativa di percorso in termini aggregati, sulla base della sua utilità e della sua correlazione con gli altri percorsi. Di conseguenza, essi assegnano la medesima probabilità di scelta ai percorsi 1-2-4 ed 1-3-4 dal momento che essi hanno la medesima utilità e la stessa correlazione con il percorso 1-2-3-4. Al contrario, il modello PML assegna al percorso 1-2-4 una probabilità di scelta maggiore rispetto al percorso 1-3-4, e ciò si può interpretare come conseguenza di un ulteriore "effetto di diversione" tenuto in conto dal modello e risultante, per la specifica rete in esame, dalla possibilità di diversione in corrispondenza del nodo 2. In altre parole, il modello riproduce una preferenza degli utenti verso percorsi che consentono un maggior numero di diversioni, a parità di utilità e di correlazione; tale effetto è riprodotto dal modello PML in virtù dell'ipotesi che la scelta di un percorso sia il risultato di una sequenza di scelte di arco, compiute in corrispondenza di tutti i suoi nodi, sulla base sia dell'impedenza dell'arco sia di una variabile inclusiva che tiene conto di tutti i percorsi disponibili per raggiungere la destinazione a partire da quell'arco.

Per verificare le considerazioni sin qui proposte è opportuno analizzare le probabilità di scelta fornite dal modello PML sulla rete di Daganzo. In primo luogo, come si può notare dalla figura 2.5, la rete di scelta del modello PML coincide con quella di un Logit Gerarchizzato per la particolare configurazione della rete; è questo un aspetto positivo del modello, che si riduce ad un Nested Logit in tutti i casi in cui la matrice di covarianze tra le utilità dei percorsi è a blocchi. E' quindi sufficiente riguardare i valori di probabilità di scelta Nested Logit nei diagrammi delle figure 1.3, 1.4 ed 1.6 per effettuare alcune considerazioni. In particolare, i risultati mostrano come il modello PML tenda a fornire per ciascun valore di k una probabilità di scelta maggiore per i percorsi 12-23_A e 12-23_B rispetto agli altri modelli, in conseguenza dell'effetto di diversione legato alla possibilità di cambiare percorso in corrispondenza del nodo 2. E' importante

sottolineare che, a differenza di quanto accade nella rete di Braess, in questo esempio l'effetto correlazione e l'effetto diversione tendono a compensarsi, dal momento che i percorsi che permettono una diversione sono anche i più correlati. Per questo motivo, al fine di investigare quanto ciascun effetto contribuisca alle probabilità di scelta PML, è interessante analizzare una configurazione alternativa della rete di Daganzo ottenuta “capovolgendola”, come riportato in figura 2.5 insieme con la corrispondente rete di scelta PML; in questo modo l'effetto diversione scompare non essendo più possibile cambiare percorso una volta partiti dall'origine.

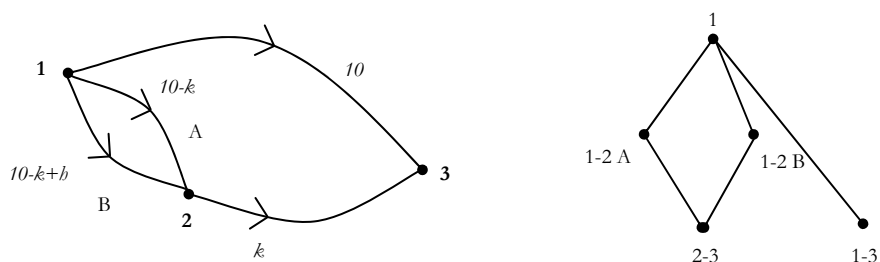


Figura 2.5 – Rete di Daganzo “capovolta” (a sinistra) e rete di scelta PML (a destra)

Come notato nel paragrafo 1.4.1, tutti gli altri modelli di scelta del percorso forniscono le stesse probabilità di scelta per le due reti di figura 1.2 e 2.5; al contrario, il modello PML penalizza maggiormente i percorsi $12-23_A$ e $12-23_B$, e quindi premia maggiormente il percorso diretto 13 rispetto ai valori di figura 1.3, come si evince dalle probabilità di scelta riportate in figura 2.6 nella quale per semplicità di lettura si sono riportate solo le probabilità di scelta Probit. In questo modo, confrontando i due diagrammi, è possibile separare e quantificare gli effetti di correlazione e di diversione.

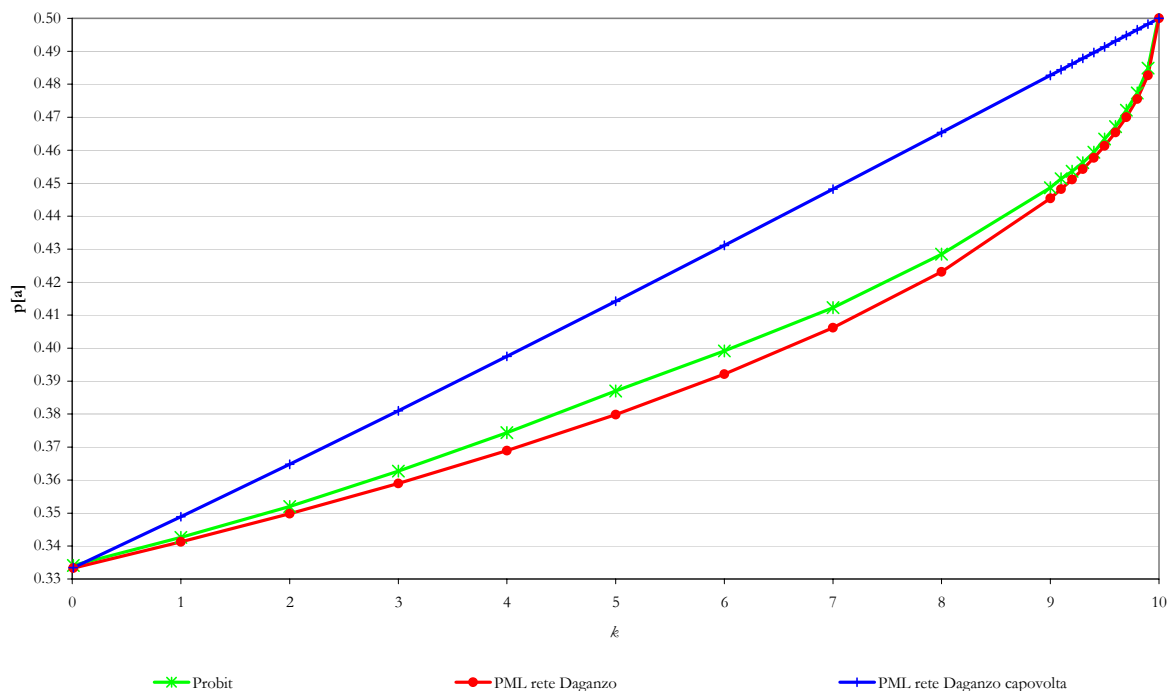


Figura 2.6 – Probabilità di scelta per il percorso a nella rete di figura 2.5

Un'altra interessante prova numerica finalizzata alla comprensione delle proprietà del modello PML può essere condotta sulla rete riportata in figura 2.7 insieme alla corrispondente rete di

scelta PML. In particolare, si ipotizza che non tutte le diversioni siano possibili in corrispondenza del nodo 2: chi proviene dall'arco $1-2a$ non può impegnare l'arco $2-3c$ ed, analogamente, chi proviene dall'arco $1-2b$ non può impegnare l'arco $2-3a$; in questo modo la rete di scelta diviene strutturalmente simile a quella di un Cross-Nested Logit.

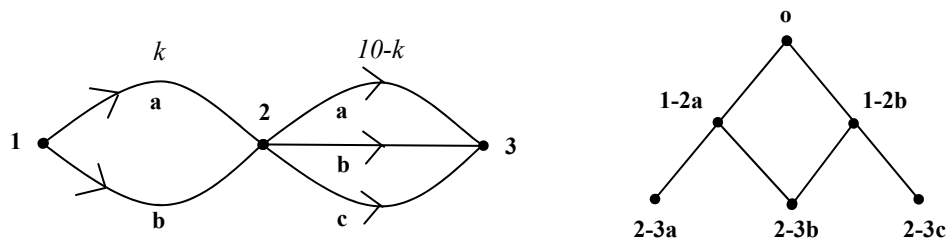


Figura 2.7 – Rete test per il modello PML (a sinistra) e corrispondente rete di scelta (a destra)

La configurazione dei costi di arco è tale per cui quando $k \rightarrow 0$ la scelta degenera tra tre percorsi equiprobabili, per cui ci si aspetta che $p[1a2a3]=p[1b2c3]=0.333$ e $p[1a2b3]=p[1b2b3]=0.167$; invece quando $k \rightarrow 10$ la scelta degenera tra due percorsi equiprobabili per cui ci si attende $p[1a2a3]=p[1b2c3]=p[1a2b3]=p[1b2b3]=0.25$. In ogni caso, qualunque sia il valore di k la probabilità di scelta congiunta dei percorsi $1a2b3$ ed $1b2b3$ deve essere compresa tra 0.33 e 0.50. E' evidente che tale condizione si realizza solo se gli esponenti dei gradi di appartenenza sono minori di uno, così come accade per la forma funzionale (2.2.2) del modello PML; al contrario, se si interpreta la rete di scelta di figura 2.7 nell'ottica di un modello Cross-Nested, la circostanza che nella forma funzionale (1.2.12) gli esponenti dei gradi di appartenenza siano maggiori di uno determina una probabilità di scelta per l'alternativa elementare $2-3b$ minore di 0.33 (ovviamente a parità di utilità sistematica). Questo esempio conferma quindi perché nella specificazione (2.2.2) si sia adottato un valore superiore ad uno per gli esponenti dei gradi di appartenenza.

Le ultime prove numeriche riguardano infine la rete a maglia del paragrafo 1.4.4, la cui rete di scelta PML è stata riportata nella figura 2.1, per la quale si sono testate differenti configurazioni di costi di arco; i risultati sono riportati nelle tabelle successive, dalle quali si può osservare che il modello PML fornisce probabilità di scelta generalmente simili a quelle del Probit; ancora una volta, la principale differenza è rappresentata dal fatto che il modello PML penalizza il percorso 10 rispetto al percorso 1 in quanto quest'ultimo permette un maggior numero di diversioni rispetto al primo.

Percorso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi	1-2-3-4-8-12	1-2-3-7-8-12	1-2-3-7-11-12	1-2-6-7-8-12	1-2-6-7-11-12	1-5-6-7-11-12	1-2-6-10-11-12	1-5-6-7-8-12	1-5-6-10-11-12	1-5-9-10-11-12
Costo	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
MNL	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
C-Logit 1	0.1045	0.1005	0.0983	0.0983	0.0963	0.0983	0.0983	0.1005	0.1005	0.1045
C-Logit 2	0.1079	0.0999	0.0982	0.0970	0.0953	0.0970	0.0982	0.0987	0.0999	0.1079
C-Logit 3	0.1045	0.1005	0.0983	0.0983	0.0963	0.0983	0.0983	0.1005	0.1005	0.1045
Path-size 1	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Path-size 2	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Path-size 3	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
Probit	0.1355	0.0958	0.0934	0.0864	0.0773	0.0854	0.0940	0.1034	0.0944	0.1344
LNL $\delta=0$	0.1618	0.0931	0.0882	0.0784	0.0735	0.0784	0.0882	0.0833	0.0931	0.1618
LNL δ arit	0.1081	0.0998	0.0983	0.0969	0.0954	0.0969	0.0983	0.0984	0.0998	0.1081
LNL δ geom	0.1208	0.0988	0.0958	0.0923	0.0893	0.0923	0.0958	0.0953	0.0988	0.1208
PML	0.1541	0.1039	0.0849	0.0944	0.0771	0.0810	0.0893	0.0993	0.0939	0.1221

Tabella 2.1 – Probabilità rete a maglia (costi di percorso tutti uguali)

Percorso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi	1-2-3-4-8-12	1-2-3-7-8-12	1-2-3-7-11-12	1-2-6-7-8-12	1-2-6-7-11-12	1-5-6-7-11-12	1-2-6-10-11-12	1-5-6-7-8-12	1-5-6-10-11-12	1-5-9-10-11-12
Costo	20	20	21	22	23	22	21	21	20	20
MNL	0.1202	0.1202	0.0980	0.0800	0.0652	0.0800	0.0980	0.0980	0.1202	0.1202
C-Logit 1	0.1250	0.1205	0.0961	0.0781	0.0626	0.0781	0.0961	0.0979	0.1205	0.1250
C-Logit 2	0.1283	0.1193	0.0959	0.0773	0.0623	0.0773	0.0959	0.0961	0.1193	0.1283
C-Logit 3	0.1258	0.1220	0.0960	0.0769	0.0607	0.0769	0.0960	0.0980	0.1220	0.1258
Path-size 1	0.1863	0.1072	0.0833	0.0606	0.0473	0.0606	0.0833	0.0778	0.1072	0.1863
Path-size 2	0.1814	0.1070	0.0844	0.0627	0.0497	0.0627	0.0844	0.0793	0.1070	0.1814
Path-size 3	0.2068	0.2059	0.0578	0.0008	0.0000	0.0008	0.0578	0.0575	0.2059	0.2068
Probit	0.1616	0.1230	0.0890	0.0583	0.0387	0.0608	0.0901	0.0983	0.1233	0.1569
LNL $\delta=0$	0.2069	0.2069	0.0574	0.0000	0.0000	0.0000	0.0574	0.0574	0.2069	0.2069
LNL δ arit	0.1317	0.1242	0.0955	0.0731	0.0555	0.0731	0.0955	0.0956	0.1242	0.1317
LNL d geom	0.1493	0.1311	0.0910	0.0622	0.0417	0.0622	0.0910	0.0912	0.1311	0.1493
PML	0.1846	0.1324	0.0759	0.0669	0.0384	0.0553	0.0837	0.0965	0.1208	0.1454

Tabella 2.2 – Probabilità rete a maglia (costi di percorso crescenti con il grado di sovrapposizione)

Percorso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodi	1-2-3-4-8-12	1-2-3-7-8-12	1-2-3-7-11-12	1-2-6-7-8-12	1-2-6-7-11-12	1-5-6-7-11-12	1-2-6-10-11-12	1-5-6-7-8-12	1-5-6-10-11-12	1-5-9-10-11-12
Costo	20	20	19	18	17	18	19	19	20	20
MNL	0.0778	0.0778	0.0974	0.1220	0.1528	0.1220	0.0974	0.0974	0.0778	0.0778
C-Logit 1	0.0817	0.0784	0.0960	0.1207	0.1478	0.1207	0.0960	0.0987	0.0784	0.0817
C-Logit 2	0.0851	0.0785	0.0963	0.1190	0.1453	0.1190	0.0963	0.0971	0.0785	0.0851
C-Logit 3	0.0804	0.0765	0.0952	0.1225	0.1529	0.1225	0.0952	0.0980	0.0765	0.0804
Path-size 1	0.1330	0.0765	0.0903	0.1000	0.1140	0.1000	0.0903	0.0863	0.0765	0.1330
Path-size 2	0.1379	0.0773	0.0902	0.0975	0.1088	0.0975	0.0902	0.0855	0.0773	0.1379
Path-size 3	0.0770	0.0005	0.1004	0.1338	0.3757	0.1338	0.1004	0.0009	0.0005	0.0770
Probit	0.1015	0.0617	0.0882	0.1208	0.1537	0.1214	0.0873	0.0988	0.0634	0.1031
LNL $\delta=0$	0.0767	0.0000	0.1012	0.1337	0.3768	0.1337	0.1012	0.0000	0.0000	0.0767
LNL δ arit	0.0812	0.0725	0.0952	0.1239	0.1594	0.1239	0.0952	0.0952	0.0725	0.0812
LNL d geom	0.0861	0.0626	0.0920	0.1272	0.1749	0.1272	0.0920	0.0890	0.0626	0.0861
PML	0.1089	0.0715	0.0858	0.1311	0.1572	0.1189	0.0813	0.0992	0.0615	0.0846

Tabella 2.3 – Probabilità rete a maglia (costi di percorso decrescenti con il grado di sovrapposizione)

Le prove numeriche sin qui condotte consentono, in definitiva, di evidenziare le buone proprietà in simulazione del modello PML, che si discosta dai risultati forniti dal Probit solo in virtù di quello che è stato definito effetto di diversione; tale effetto, peraltro, sembra essere coerente con il comportamento reale degli utenti e pertanto potrebbe rappresentare un ulteriore punto di forza del modello PML.

2.4 Un algoritmo SNL-PML ad enumerazione implicita dei percorsi

Come descritto in precedenza, un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi per il caricamento stocastico della rete con un determinato modello di scelta del percorso deve permettere da un lato la definizione del modello, ovvero della sua struttura e dei suoi parametri, e dall'altro lato il caricamento della rete e pertanto il calcolo dei flussi di arco.

Nel presente paragrafo si descrive un algoritmo di caricamento della rete di tipo SNL-PML che permette, per l'appunto, la definizione dei parametri di varianza e dei gradi di appartenenza, attraverso i quali la rete di scelta è implicitamente definita, ed il calcolo dei flussi di arco sulla base di una riformulazione delle probabilità di scelta (2.2.14). Come sarà chiaro nel seguito, tale algoritmo prende spunto dall'algoritmo di Dial, descritto nel paragrafo 1.3.1, rispetto al quale si è deciso di preservare la definizione di peso di nodo e di peso di arco. La procedura sarà prima descritta con riferimento ad una singola coppia origine-destinazione e successivamente estesa al caso generale; per questo motivo nel seguito gli apici identificativi della coppia *o-d* nella notazione dei parametri del modello.

Con riferimento ai gradi di appartenenza, si noti in primo luogo che le quantità $n_{o,i}$ possono essere facilmente determinate così come descritto nel paragrafo 1.3.1.1, nel quale sono state

indicate con il simbolo $NA_{ij,od}$. Inoltre, il numeratore α_{hi}^{num} nella (2.2.8) dipende solo dall'origine o e pertanto può essere determinato per ciascun arco hi una volta sola per tutte le destinazioni nel corso dell'esecuzione di un algoritmo di minimo percorso tipo Dijkstra:

$$\alpha_{hi}^{num} = \frac{n_{o,h}}{Z_{o,h} + c_{hi}} \quad (2.2.16)$$

Il denominatore α_i^{den} nella relazione (2.2.8) dipende invece dagli archi efficienti in ingresso nel nodo i e pertanto deve essere determinato separatamente per ciascuna destinazione:

$$\alpha_i^{den} = \sum_{h' \in EBS(i)} \frac{n_{o,h'}}{Z_{o,h'} + c_{h'i}}$$

Con riferimento ai parametri di varianza, dalla relazione (2.2.11) segue che essi sono legati alla particolare destinazione considerata; pertanto, essi possono essere determinati per tutte le origini, fissata una certa destinazione, semplicemente calcolando attraverso un algoritmo di minimo percorso il vettore dei costi minimi $Z_{j,d}$.

Come risulterà chiaro nel seguito, l'algoritmo per il caricamento della rete con il modello PML richiede due esplorazioni della rete, la prima dalla destinazione a ritroso verso l'origine e la seconda dall'origine verso la destinazione. Al fine di determinare le probabilità di scelta $p[ij/i]$, la relazione (2.2.14) deve essere riformulata introducendo il peso w_{ij} di un arco ij e il peso W_i di un nodo $i \neq d$, rispettivamente definiti come segue:

$$w_{ij} = e^{V_{ij}/\theta_i} = e^{-\frac{c_{ij} + \theta_j}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} + \ln \sum_{m \in EFS(j)} e^{V_{jm}/\theta_j} \right)} \quad (2.2.17)$$

$$W_i = \sum_{j' \in EFS(i)} e^{-\frac{c_{ij'} + \theta_{j'}}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij'}^{\theta_{j'}/\theta_i} + \ln \sum_{m \in EFS(j')} e^{V_{j'm}/\theta_{j'}} \right)} \quad (2.2.18)$$

Si pone inoltre per convenzione pari ad uno il peso di nodo della destinazione. E' immediato verificare le seguenti relazioni tra pesi di nodo e pesi di arco:

$$W_i = \sum_{j' \in EFS(i)} w_{ij'} = \sum_{j' \in EFS(i)} e^{V_{ij'}/\theta_i} \quad (2.2.19)$$

$$w_{ij} = e^{-\frac{c_{ij} + \theta_j}{\theta_i} \left(\ln \alpha_{ij}^{\theta_j/\theta_i} + \ln W_j \right)} \quad (2.2.20)$$

Alla luce di queste definizioni, la probabilità di scelta (2.2.14) può essere riscritta come:

$$p[ij/i] = \frac{w_{ij}}{W_i} \quad (2.2.21)$$

e la probabilità di scelta del generico percorso k può essere espressa come:

$$p[k] = \prod_{ij \in L_k} \frac{w_{ij}}{W_i}$$

Le variabili (2.2.17) e (2.2.18) possono essere determinate, rispettivamente per ciascun arco e nodo della rete, attraverso una procedura ricorsiva che esplora i nodi della rete seguendo un ordine topologico crescente a partire dalla destinazione d (lista ordinate dei nodi L_d). In dettaglio, si indichi con i il nodo processato alla generica iterazione; in primo luogo, la quantità α_i^{den} può essere determinata come la somma di tutti gli α_{hi}^{num} dati dalla (2.2.16) per tutti gli archi hi efficienti con $h \in EBS(i)$. Inoltre, poiché la condizione di efficienza di arco e l'ordine topologico di esplorazione dei nodi garantiscono che tutti i nodi $j \in EFS(i)$ siano già stati processati e quindi tutti i dati necessari per il calcolo delle (2.2.17) e (2.2.18) siano disponibili, è possibile calcolare i pesi di arco w_{ij} per ciascun $j \in EFS(i)$ ed il peso di nodo W_i rispettivamente attraverso le (2.2.20) e (2.2.19). Pertanto, l'esplorazione della rete dalla destinazione a ritroso verso l'origine può essere riassunta come segue:

```

for each  $i \in L_d$ 
   $\alpha_i^{den} = 0$ 
   $W_i = 0$ 
  for each  $h \in EBS(i)$ 
     $\alpha_i^{den} = \alpha_i^{den} + \alpha_{hi}^{num}$ 
  next  $h$ 
  for each  $j \in EFS(i)$ 
    calcolo dei gradi di appartenenza  $\alpha_{ij}^{od}$  attraverso la (2.2.8)
    calcolo dei pesi di arco  $w_{ij}$  attraverso la (2.2.20)
     $W_i = W_i + w_{ij}$ 
  next  $j$ 
next  $i$ 

```

A questo punto, calcolati i pesi di nodo e di arco, è possibile determinare i flussi di arco processando i nodi della rete seguendo un ordine topologico crescente a partire dall'origine (lista ordinata di nodi L_o). Al fine di illustrare la procedura di caricamento della rete, con riferimento ad una singola coppia $o-d$, si indichi con f_{ij}^{od} il flusso tra o e d che impegna l'arco ij e con f_i^{od} il flusso tra o e d in ingresso nell'arco i ; con questa notazione la procedura è la seguente:

```

for each  $i \in L_o$ 
   $f_i^{od} = 0$ 
  for each  $h \in EBS(i)$ 
     $f_i^{od} = f_i^{od} + f_{hi}^{od}$ 
  next  $h$ 
  for each  $j \in EFS(i)$ 
     $f_{ij}^{od} = f_i^{od} \frac{w_{ij}}{W_i}$ 
  next  $j$ 
next  $i$ 

```

In conclusione, indicando con I_o l'insieme dei centroidi di origine, con I_d l'insieme dei centroidi di destinazione e con f_{ij} il flusso sull'arco ij , l'algoritmo per il caricamento della rete

SNL-PML può essere così sintetizzato:

```
for each  $o \in I_o$   
  determinazione della lista  $L_o$  e calcolo dei parametri  $n_{o,i}$  e  $\alpha_{hi}^{num} \forall i, hi$   
  for each  $d \in I_d$   
    determinazione della lista  $L_d$  e calcolo di  $\theta_i^d \forall i$   
    calcolo dei pesi di nodo e di arco  
    calcolo dei flussi di arco  $f_{ij}^{od}$  (caricamento della rete)  
     $f_{ij} = f_{ij} + f_{ij}^{od}$   
  next  $d$   
next  $o$ 
```

Con riferimento all'efficienza computazionale dell'algorithmo proposto, si è visto che ciascuna coppia o-d necessita di essere processata separatamente e richiede due esplorazioni della rete, una all'indietro per il calcolo dei parametri e dei pesi di nodo e di arco, ed una in avanti per il caricamento della rete. Pertanto, il tempo di calcolo è dello stesso ordine di grandezza di un caricamento stocastico della rete con algorithmo di Dial nell'ipotesi di condizione di efficienza degli archi rispetto sia all'origine sia alla destinazione.

2.5 Applicazione ad un contesto reale

L'algorithmo ad enumerazione implicita dei percorsi descritto nel paragrafo precedente può essere agevolmente codificato in un linguaggio di programmazione al fine di applicare il modello PML ad una rete reale. Per poter confrontare i risultati forniti dal modello con quelli ottenuti attraverso altri modelli di scelta del percorso si è appositamente implementato un software di calcolo per l'assegnazione statica, sia di caricamento della rete sia di equilibrio, in modo da condurre i confronti a parità di ipotesi e con una flessibilità non raggiungibile attraverso i pacchetti software comunemente disponibili in commercio. La rete test prescelta per condurre il confronto è quella relativa al sistema di trasporto individuale del quartiere di Fuorigrotta (Napoli), utilizzata a scopi didattici all'interno del Dipartimento di Ingegneria dei Trasporti dell'Università di Napoli.

Nel paragrafo 2.5.1 si descrivono alcuni aspetti di dettaglio relativi all'implementazione del software di calcolo, mentre nel paragrafo 2.5.2 si propone l'applicazione del modello PML e si traccia un quadro d'insieme dei confronti con i risultati forniti da altri modelli di scelta del percorso.

2.5.1 Implementazione di un software di calcolo in Visual Basic

Il software di calcolo è stato implementato utilizzando il linguaggio di programmazione Visual Basic 6.0. Per quanto attiene alla struttura del software, i file di input minimi richiesti sono un file di nodi ed un file di archi della rete di trasporto individuale, a partire dai quali è possibile condurre elaborazioni del tipo minimo percorso a flusso nullo da/verso un assegnato nodo della rete, con l'ulteriore possibilità di procedere al calcolo delle numerosità di arco definite nella (1.3.7). Se ai files di nodi ed archi si aggiunge in input un file di domanda, è possibile procedere ad assegnazione di caricamento della rete e di equilibrio sia deterministica sia stocastica, con modelli di scelta del percorso Probit e PML. Il contenuto informativo associato a ciascun nodo è

costituito dal codice identificativo e dalla codifica della sua caratteristica (ovvero nodo reale o nodo fittizio), mentre le caratteristiche presenti per ciascun arco sono di seguito elencate:

- codice identificativo dell'arco [intero]
- tipo dell'arco [di rete, connettore]
- codice del nodo iniziale dell'arco
- codice del nodo finale dell'arco
- tipo di funzione di costo [esogeno, BPR, Doherty, Festa/Nuzzolo+Doherty, T-model]
- costo esogeno
- lunghezza dell'arco [metri]
- larghezza utile dell'arco [metri]
- pendenza [%, positiva se in salita]
- tortuosità [parametro adimensionale in scala 0-1]
- indice di disturbo alla circolazione [parametro adimensionale in scala 0-1]
- numero di intersezioni secondarie [intersezioni/km]
- possibilità di sorpasso [consentito, vietato]
- velocità a flusso nullo [km/h]
- capacità dell'arco [veicoli equivalenti/ora]
- durata del ciclo semaforico nell'intersezione in testa all'arco [s]
- durata del verde efficace [s]
- parametro α funzione BPR
- parametro β funzione BPR

Come si può notare, è possibile specificare differenti tipologie di funzioni di costo, tra le quali si è inserita anche quella implementata nel pacchetto commerciale T-Model della ELASIS in quanto utilizzato come elemento di confronto nella fase di implementazione del software. Nella figura 2.8 sono riportati alcuni esempi di interfaccia grafica del software in modo da illustrare le tipologie di files di input, le elaborazioni possibili ed i parametri regolabili esogenamente nel caso dell'assegnazione SUE.

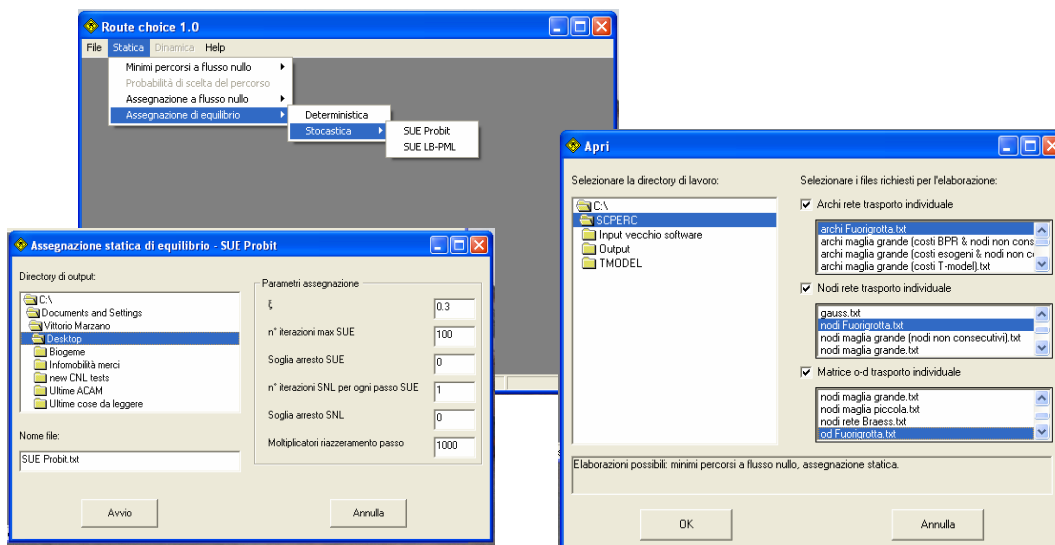


Figura 2.8 – Interfaccia del software (input, elaborazioni possibili, opzioni di assegnazione)

Per quanto attiene agli algoritmi di assegnazione utilizzati si è fatto riferimento a quanto riportato in Cascetta (2001) e Sheffi (1985); è interessante in questa sede proporre alcune considerazioni in merito ad aspetti operativi di codifica dell'algoritmo per il caricamento della rete SNL-PML introdotto nel paragrafo 2.4.

Si consideri in primo luogo l'esplorazione all'indietro della rete per il calcolo dei parametri del modello. Come si è visto, detto k è il nodo da processare alla generica iterazione, occorre innanzitutto calcolare i gradi di appartenenza definiti dalle (2.2.8) processando gli archi (efficienti) appartenenti a $EBS(k)$: ciò è immediato in quanto i pesi di arco sono determinati data un'origine una volta sola per tutte le destinazioni. Successivamente si determina il peso del nodo a partire dai pesi di tutti gli archi (efficienti) appartenenti a $EFS(k)$; la condizione di efficienza rispetto alla destinazione garantisce che tutte le grandezze necessarie siano note. Rispetto a questa sequenza banale di operazioni occorre tener conto di una serie di "casi particolari" che si possono presentare nella codifica dell'algoritmo²⁶:

- può accadere che un arco efficiente finisca in un nodo a peso nullo, cioè dal quale non escono archi efficienti. Ciò provoca un errore di overflow, per cui quando si esplora la stella in avanti del nodo processato è necessario introdurre due condizioni per calcolare il peso di arco (efficienza e nodo finale a peso non nullo);
- può accadere che un arco esca da un nodo non attraversabile, ovvero un centroide. In tal caso l'arco in questione non va considerato nell'esplorare la stella all'indietro del nodo processato, e ciò determina la necessità di verificare due condizioni, rispettivamente di efficienza e nodo coda dell'arco attraversabile. Naturalmente a tale regola costituisce eccezione il nodo origine;
- specularmente, può accadere che un arco entri in un nodo non attraversabile, che è quindi un centroide diverso dalla destinazione. Quindi, quando si esplora la stella in avanti del nodo processato per calcolare il peso di nodo occorre escludere anche gli archi che abbiano nodo testa non attraversabile.

Con riferimento all'esplorazione in avanti della rete per il calcolo dei flussi di arco, è facile riconoscere che la condizione di efficienza, in uno con l'aver assegnato pesi nulli a nodi non attraversabili, non richiede la definizione di condizioni aggiuntive per evitare errori e/o casi particolari. L'unico problema si presenta quando ad essere processato è un nodo a peso nullo, che determina una condizione di overflow nel calcolo delle probabilità come si può immediatamente riconoscere dalla (2.2.21). Di conseguenza, occorre aggiungere la condizione che i nodi a peso nullo non vadano processati durante il caricamento della rete.

E' infine opportuno sottolineare che, sebbene il codice sia stato scritto senza porre particolare attenzione all'ottimizzazione dei tempi di calcolo, il software implementato è in grado di completare le elaborazioni in un tempo molto simile a quello dei pacchetti software commerciali con cui è stato confrontato.

2.5.2 Applicazione alla rete di Fuorigrotta

Il modello topologico del sistema di trasporto individuale del quartiere di Fuorigrotta (Napoli)

²⁶ Esistono metodi computazionalmente più efficienti per ovviare ad alcuni dei problemi qui segnalati; un'analisi approfondita è contenuta nel contributo di Adamo e Bifulco (1997). Sebbene alcuni miglioramenti siano stati in parte inseriti in versioni successive del codice di calcolo, non si è ritenuto opportuno soffermarsi su questi aspetti in quanto non fondamentali rispetto agli obiettivi della presente ricerca.

riportato in figura 2.9 ed utilizzato per l'applicazione è costituito da 487 archi, dei quali 106 connettori, e 248 nodi, di cui 43 centroidi. La fascia oraria presa in considerazione per la stima della domanda di trasporto è quella di punta del mattino, corrispondente all'intervallo 7:30-8:30.



Figura 2.9 – Rete di Fuorigrotta (elaborazione grafica da TransCAD)

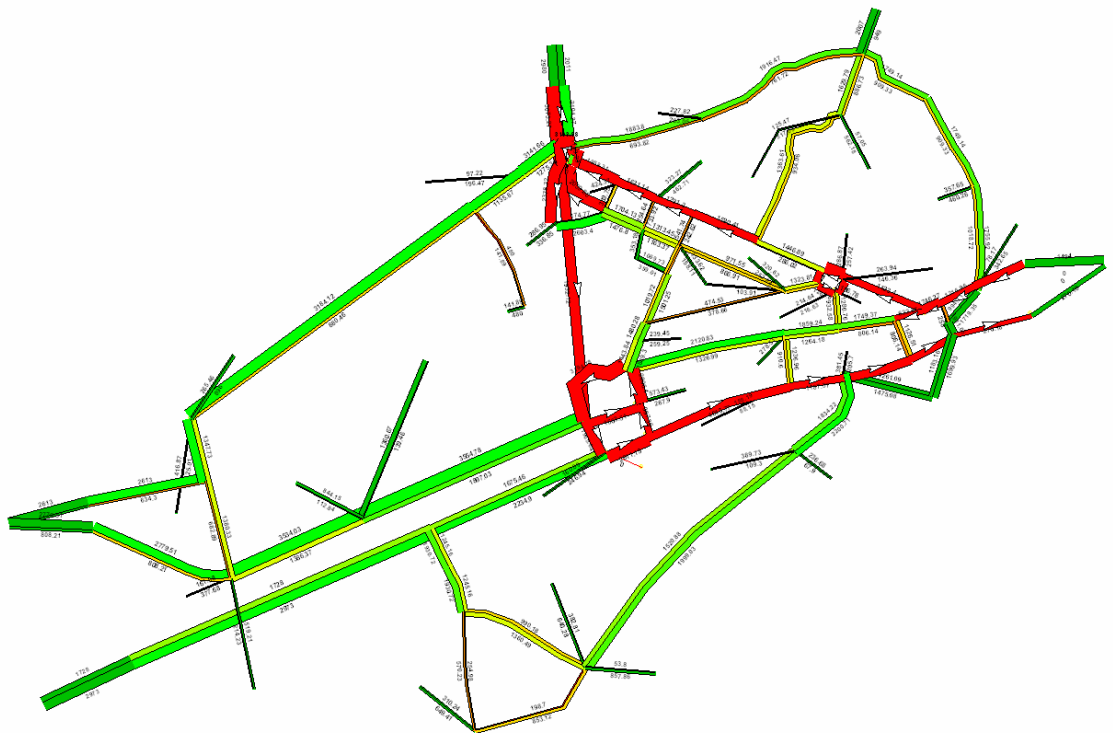


Figura 2.10 – Assegnazione di equilibrio SUE-PML (elaborazione grafica da TransCAD)

Utilizzando il codice di calcolo appositamente predisposto sono stati calcolati i vettori di flussi di equilibrio deterministico \mathbf{f}^{DUE} e di equilibrio stocastico con i modelli Probit e PML, rispettivamente $\mathbf{f}^{\text{SUE-PR}}$ e $\mathbf{f}^{\text{SUE-PML}}$; per quest'ultimo è anche riportato il relativo flussogramma in figura 2.10. E' in primo luogo interessante notare che il massimo scostamento percentuale tra il vettore di flussi $\mathbf{f}^{\text{SUE-PML}}$ e quello $\mathbf{f}^{\text{SUE-PR}}$ è inferiore al 3%. Inoltre, il calcolo dei flussi $\mathbf{f}^{\text{SUE-PML}}$ ha richiesto un tempo pari a quello necessario perché si stabilizzassero i flussi $\mathbf{f}^{\text{SUE-PR}}$ e di circa l'8% superiore a quello necessario per la determinazione dei flussi \mathbf{f}^{DUE} . Ovviamente, tali risultati valgono per la rete in esame e nel generalizzarli occorre tener conto che l'algoritmo di caricamento SNL-PML è a doppio passo, quindi con una complessità computazionale che cresce col quadrato del numero di centroidi, mentre gli altri sono a singolo passo, quindi con una complessità lineare rispetto al numero di centroidi.

Peraltro, l'esempio proposto nel presente paragrafo ha il solo obiettivo di mostrare come sia possibile applicare il modello di scelta del percorso PML ad una rete reale ottenendo, con tempi di calcolo ragionevoli, risultati ampiamente confrontabili con quelli forniti dal modello Probit. Una valutazione generale sulle proprietà dei diversi modelli di scelta del percorso in contesti reali potrebbe scaturire dall'analisi della loro capacità di riprodurre i flussi osservati con riferimento all'applicazione a numerose reti, tra loro differenti per dimensione e livello medio di congestione; si potrebbe in altri termini verificare se esista un modello di scelta del percorso che, applicato a diversi contesti, riesca sistematicamente ad avvicinarsi ai flussi osservati più di tutti gli altri. A causa della difficoltà di reperimento di una base dati significativa e in virtù degli obiettivi generali fissati, si è deciso di non approfondire ulteriormente questo aspetto nella presente ricerca.

3. IL CALCOLO DELLE COVARIANZE NEI MODELLI GEV: ANALISI TEORICA ED APPLICAZIONE AL PML

3.1 Covarianze nei modelli GEV: problemi irrisolti

Come più volte evidenziato nell'introduzione e nei capitoli precedenti, uno degli elementi discriminanti per la valutazione della qualità di un modello di scelta del percorso è rappresentato dalla sua capacità di tener conto degli effetti della covarianza tra percorsi sulle corrispondenti probabilità di scelta. La prassi di solito seguita in letteratura, ed applicata anche nell'ambito della presente tesi per i confronti numerici di cui al paragrafo 1.4, è quella di giudicare indirettamente tale proprietà per un assegnato modello verificando quanto le probabilità di scelta da esso fornite si discostino da quelle calcolate dal Probit nello stesso contesto. Ciò discende dal fatto che per un modello Probit è possibile specificare direttamente la matrice di covarianze, in termini sia di struttura sia di valori: è per l'appunto questo il caso delle ipotesi (1.3.24) ed (1.3.25) introdotte da Daganzo e Sheffi (1977). Nel caso dei modelli GEV, invece, la matrice di covarianze è indirettamente definita dalla struttura della rete di scelta e dai valori dei parametri che figurano nel modello stesso: poiché, a parte alcuni casi particolari, nulla si sa sulla relazione tra struttura/parametri del modello GEV e corrispondente matrice di covarianze, non è possibile ad oggi reperire in letteratura delle procedure operative che consentano di determinare quale matrice di covarianze corrisponda ad una data specificazione del modello stesso e quindi di specificare un modello GEV che riproduca covarianze desiderate. I casi particolari si riferiscono, come noto, al Logit Multinomiale, che assume una matrice di covarianze omoschedastica e diagonale, ed al Logit Gerarchizzato che permette, come descritto nel paragrafo 1.2.1.2, una struttura della matrice di covarianze a blocchi con correlazione tra due alternative appartenenti ad un gruppo comune k pari ad $1-\delta_k^2$, dove δ_k è il parametro di varianza associato al gruppo k . Nel caso di modelli GEV più generali (Cross-Nested Logit, PML, network GEV) non vi sono indicazioni in letteratura, fatta eccezione per la congettura (1.2.23) introdotta a nel paragrafo 1.2.1.3; in ogni caso, non esistono in letteratura studi sistematici sul grado di approssimazione insito nella congettura stessa né sono state proposte altre formulazioni.

Appare quindi importante, sia alla luce dell'applicazione al contesto di scelta del percorso sia da un punto di vista più generale, approfondire la relazione esistente tra matrice di covarianze e specificazione della struttura e dei parametri per i modelli della classe GEV. La difficoltà maggiore che si incontra in questo studio è rappresentata dall'impossibilità di determinare

un'espressione in forma chiusa per le covarianze in funzione dei parametri e della struttura del modello per tutti i modelli GEV la cui struttura di correlazione sia una rete, ovvero nella quale non sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra nodi della rete e rispettivi antenati; in tal senso, lo strumento operativo applicabile è rappresentato dal calcolo numerico delle covarianze a partire dalle ipotesi del teorema di McFadden.

Un altro elemento di notevole interesse emerso nei capitoli precedenti e meritevole di approfondimento è rappresentato dall'analisi del concetto di eteroschedasticità nei modelli di utilità aleatoria additivi. Si è infatti visto che i modelli della classe GEV sono omoschedastici, ovvero permettono di simulare contesti di scelta caratterizzati da utilità percepite di uguale varianza, pari a $\pi^2 \theta_0^2 / 6$ dove θ_0 è il parametro associato alla radice della rete di scelta. Tale proprietà si configura come un limite generale nell'applicabilità di questi modelli, ed in particolare anche nella simulazione della scelta del percorso per la quale emerge la chiara necessità di assumere varianze diverse per percorsi di costo generalizzato diverso: è ancora una volta il caso delle specificazioni (1.3.24) ed (1.3.25). Se ne conclude di solito in letteratura che il Probit è in quest'ottica un modello migliore perché permette di simulare contesti eteroschedastici, a differenza dei modelli GEV. Questa affermazione, pur ampiamente condivisa, è in realtà poco investigata in letteratura, e ciò suggerisce di approfondire le proprietà intrinseche della classe dei modelli GEV rispetto alla simulazione dei contesti eteroschedastici.

Pertanto, nei paragrafi successivi sarà in primo luogo formalizzato in termini matematici il problema della simulazione delle covarianze con i modelli GEV e discussa la metodologia di calcolo numerico utilizzata per la valutazione delle covarianze stesse. Si discutono poi numerose applicazioni con riferimento sia a diverse tipologie di modelli GEV sia al modello PML, per verificarne più nel dettaglio le proprietà teoriche discusse nel paragrafo 2.6 e discuterne l'appartenenza alla classe GEV stessa. Al problema dell'omoschedasticità nei modelli di utilità aleatoria additivi è infine dedicato il paragrafo 3.4.

3.2 Richiami di statistica

3.2.1 Notazione adottata

Date n variabili aleatorie $X_1 \dots X_n$ è possibile definirne la funzione di distribuzione congiunta F (cumulative distribution function, Cdf) e la funzione di densità congiunta f (probability density function, pdf), la prima definita a partire dalla seconda attraverso la relazione:

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \int_{t_1 = -\infty}^{x_1} \dots \int_{t_n = -\infty}^{x_n} f_{X_1 \dots X_n}(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dall'ipotesi di continuità della f in un sottoinsieme dello spazio euclideo n -dimensionale R^n , segue che anche la F è continua e differenziabile nello stesso sottoinsieme, e risulta in ogni suo punto di coordinate $(x_1 \dots x_n)$:

$$\frac{\partial^n F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)$$

A partire dalla densità congiunta di n variabili aleatorie è possibile definire la densità marginale di un sottoinsieme delle n variabili aleatorie; in particolare si dimostra che la densità marginale di

k variabili prese nella n -pla $X_1 \dots X_n$ (per semplicità si suppone che siano le prime k nell'ordine) è data da:

$$f_{X_1 \dots X_k}(x_1 \dots x_k) = \int_{t_{k+1}=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{t_n=-\infty}^{+\infty} f_{X_1 \dots X_n}(t_1 \dots t_n) dt_{k+1} \dots dt_n$$

In altre parole, è sufficiente integrare su tutto il dominio di definizione la densità congiunta rispetto a tutte le variabili "estranee" alla k -pla selezionata per ottenere la densità marginale di quella k -pla. Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché le n variabili aleatorie $X_1 \dots X_n$ siano indipendenti è che la loro densità congiunta sia pari al prodotto delle densità marginali di ciascuna di esse.

Analogamente, è possibile definire le distribuzioni marginali a partire da quella congiunta; in particolare si dimostra che la distribuzione marginale di k variabili prese nella n -pla $X_1 \dots X_n$ (per semplicità di notazione si suppone ancora che siano le prime k nell'ordine) è data da:

$$F_{X_1 \dots X_k}(x_1 \dots x_k) = \lim_{\substack{x_{k+1} \rightarrow +\infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = F_{X_1 \dots X_k}(x_1 \dots x_k \infty \dots \infty) \quad (3.2.1)$$

Poiché sarà di interesse nel seguito, si richiama anche la definizione di funzione di sopravvivenza $S_X(t)$ di una variabile aleatoria X , definita come:

$$S_X(t) = \text{Prob}[X > t] = 1 - F_X(t) \quad (3.2.2)$$

Il nome della funzione (3.2.2) deriva dal caso particolare in cui X esprime la durata di funzionamento di un sistema, relativamente al quale $F_X(t) = \text{Prob}[X \leq t]$ è la probabilità che il sistema non sia in funzione oltre l'istante di tempo t ed $S_X(t)$ è invece la probabilità che sia ancora attivo all'istante t .

Si ricorda inoltre che una variabile aleatoria X è univocamente determinata dalla sua funzione generatrice dei momenti $\Phi_X(t)$ definita come segue:

$$\Phi_X(t) = E[e^{tx}]$$

dal cui sviluppo in serie di Mac Laurin risulta:

$$E[x^n] = \left. \frac{d\Phi_X(t)}{dt^n} \right|_0 = \Phi_X^{(n)}(0)$$

per cui, conoscendo la funzione $\Phi_X(t)$, si possono agevolmente determinare tutti i momenti della X . Nel caso di una variabile aleatoria multidimensionale, le informazioni relative ai momenti primi e secondi possono essere sintetizzate nella cosiddetta matrice di covarianze, della quale è opportuno richiamare alcune proprietà che saranno utilizzate nel seguito.

In generale, una matrice quadrata \mathbf{M} di ordine m si definisce positiva semidefinita se risulta $\mathbf{xMx}^T \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in R^m$ e positiva definita se $\mathbf{xMx}^T > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in R^m$; analogamente, si possono introdurre le definizioni di matrice negativa definita e negativa semidefinita. E' immediato verificare che una matrice di covarianze $\mathbf{\Sigma}$ è positiva semidefinita, in quanto essa può essere posta nella forma $\mathbf{\Sigma} = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T]$ e per le proprietà degli operatori media e varianza risulta:

$$\mathbf{v}\Sigma\mathbf{v}^T = \mathbf{v}E[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T]\mathbf{v}^T = E[\mathbf{v}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}^T] = \text{Var}[\mathbf{v}\mathbf{X}] \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \quad (3.2.3)$$

E' possibile stabilire una serie di condizioni necessarie e sufficienti affinché \mathbf{M} sia positiva definita (semidefinita); in particolare, \mathbf{M} è positiva definita (semidefinita) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (non negativi). Poiché il prodotto degli autovalori di una matrice è pari al suo determinante, ne consegue che una matrice positiva semidefinita non singolare è positiva definita, ovvero le due definizioni si equivalgono. Nel seguito, salvo ove espressamente indicato, si assumeranno matrici di covarianze non singolari, per le quali sarà dunque considerata la condizione (3.2.3) con la disuguaglianza in senso stretto.

In generale, verificare se una data matrice \mathbf{M} di ordine m è positiva (semi)definita attraverso il calcolo dei suoi autovalori non è sempre agevole. Un utile strumento di verifica alternativo è rappresentato dal cosiddetto criterio di Jacobi-Sylverster, che si fonda sul calcolo dei determinanti dei minori principali di \mathbf{M} . In particolare, indicando con \mathbf{M}_k il minore principale di ordine k estratto dalla matrice \mathbf{M} considerandone le prime k righe e le prime k colonne prese nell'ordine e con $\det\{\mathbf{M}_k\}$ il suo determinante, tale criterio stabilisce che \mathbf{M} è positiva definita se e solo se $\det\{\mathbf{M}_k\} > 0 \quad \forall k \in [1, m]$ ed è negativa definita se e solo se $(-1)^k \det\{\mathbf{M}_k\} > 0 \quad \forall k \in [1, m]$.

La condizione $\det\{\mathbf{M}_k\} \geq 0$ è invece necessaria ma non sufficiente affinché una matrice reale simmetrica sia positiva semidefinita; in questo caso occorre infatti verificare che tutti i minori estratti eliminando in tutti i modi possibili righe e colonne dalla matrice \mathbf{M} siano non negativi, con un dispendio computazionale notevolmente maggiore.

3.2.2 Modelli di variabile aleatoria dei valori estremi

3.2.2.1 Caso univariato

Il modello di variabile aleatoria dei valori estremi assume un'importanza rilevante nelle discipline ingegneristiche ed economiche in quanto permette di effettuare valutazioni probabilistiche su eventi di massimo e di minimo legati a fenomeni naturali ed antropici. La legge di distribuzione cumulata di una variabile aleatoria X di valore estremo può essere espressa in modo aggregato nel seguente modo:

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} & \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}} & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

nella quale figurano un parametro di scala θ , uno di posizione μ ed uno di forma ξ . La (3.2.4) è di solito indicata in letteratura come distribuzione GEV (Generalized Extreme Value), termine che non va ovviamente confuso con la classe di modelli trattati nel paragrafo 1.2.1. E' da notare che per $\xi=0$ la X è definita in tutto R mentre per $\xi>0$ [$\xi<0$] X è definita per $x>\mu-\theta/\xi$ [$x<\mu-\theta/\xi$]. Dalla (3.2.4) è possibile definire tre diversi tipi di distribuzione di valore estremo a seconda del valore assunto dal parametro ξ , ovvero:

- $\xi=0 \rightarrow$ distribuzione di Gumbel (GEV tipo I)
- $\xi>0 \rightarrow$ distribuzione di Fréchet (GEV tipo II)
- $\xi<0 \rightarrow$ distribuzione di Weibull (GEV tipo III)

Come riportato in Galambos (1987), l'importanza della distribuzione (3.2.4) nelle sue forme

determinate dal parametro ξ discende dal teorema di Fisher-Tippett, secondo il quale il massimo di variabili aleatorie i.i.d. tende asintoticamente ad una distribuzione GEV, indipendentemente dalla distribuzione delle variabili stesse; in particolare, tale massimo è detto convergente al dominio di attrazione del tipo di distribuzione GEV individuata da ξ . E' evidente che il parametro di forma ξ influenza fisicamente l'andamento delle code della distribuzione GEV, come illustrato in figura 3.1; tale andamento è a sua volta influenzato dall'andamento delle code della distribuzione delle variabili di cui si sta determinando il massimo. Si può a tal proposito dimostrare che se la coda della distribuzione di tali variabili decresce esponenzialmente il corrispondente dominio di attrazione è la Gumbel: ciò accade per tutte le distribuzioni che hanno code "sottili" ovvero di tipo normale, esponenziale, gamma, lognormale e di Weibull. Se invece la coda della distribuzione decresce seguendo una potenza il corrispondente dominio di attrazione è la Fréchet: è il caso delle distribuzioni che hanno code "spesse" come la t -Student e la Pareto. Infine, se la coda della distribuzione è troncata il dominio di attrazione è rappresentato dalla Weibull: è questo il caso delle distribuzioni definite in un insieme limitato, come la beta e la variabile uniforme.

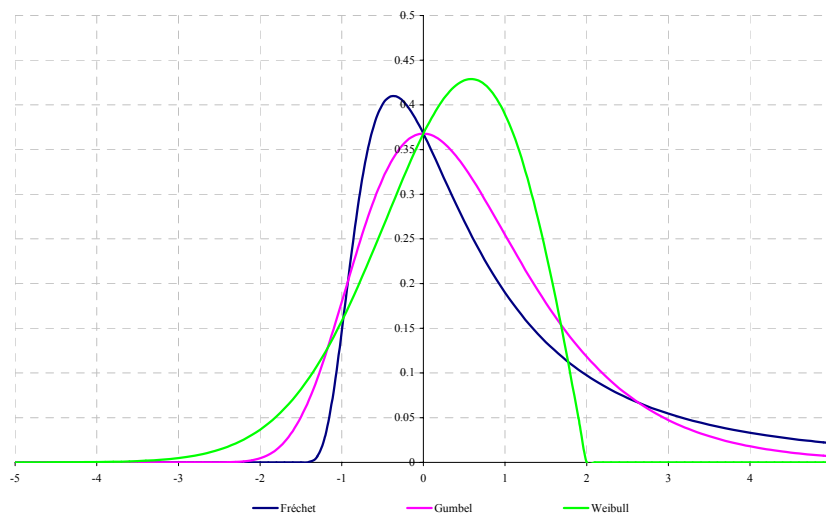


Figura 3.1 – Modelli di variabile aleatoria di valore estremo ($\xi=\pm 0.5, \mu=0, \theta=1$)

Per la sua importanza nell'ambito della teoria dell'utilità aleatoria, di seguito si dettagliano alcune caratteristiche della variabile aleatoria di Gumbel, definita attraverso le seguenti leggi di distribuzione, densità di probabilità e generatrice dei momenti:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}} \quad (3.2.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}} \quad (3.2.6)$$

$$\Phi_X(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - \theta t) \quad (3.2.7)$$

nelle quali μ è la moda e la varianza è $\pi^2 \theta^2 / 6$. E' da ricordare che nella (3.2.7) la funzione Gamma Γ è definita come:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0$$

La media della v.a. di Gumbel è pari a $V = \mu + \theta\phi$ dove ϕ è la costante di Eulero; poiché nelle applicazioni conviene spesso far comparire direttamente la media nell'espressione di F ed f , le (3.2.5) e (3.2.6) possono essere riscritte come:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-V}{\theta}} - \phi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-V}{\theta} - \phi} e^{-e^{-\frac{x-V}{\theta}} - \phi}$$

Al fine di generare numeri pseudo-casuali distribuiti secondo un modello di variabile aleatoria di Gumbel si può ricorrere al metodo della trasformazione inversa, per cui tenendo conto della (3.2.5), si genera prima un numero pseudo-casuale u uniformemente distribuito nell'intervallo $[0,1]$ e successivamente si calcola la quantità

$$x = \mu - \theta \ln(-\ln(u))$$

ovvero, facendo comparire direttamente la media V :

$$x = V - \theta\phi - \theta \ln(-\ln(u))$$

3.2.2.2 Caso multivariato

Analogamente al caso univariato, è possibile definire una variabile aleatoria multivariata di valore estremo, di solito indicata con l'acronimo MEV (Multivariate Extreme Value); seguendo Galambos (1987) e Joe (2001), sussiste in letteratura una definizione precisa di funzione MEV. Si consideri in particolare un vettore aleatorio (X_1, \dots, X_n) la cui generica componente X_i sia una variabile aleatoria esponenziale di media v_i , e dunque di varianza v_i^2 per le proprietà della funzione esponenziale; in accordo con la (3.2.2) sia $S(x_1, \dots, x_n)$ la corrispondente funzione di sopravvivenza. Per definizione S è una funzione esponenziale multivariata stabile rispetto al minimo (*min-stable multivariate exponential*) se la variabile $\min\{X_1/w_1, \dots, X_n/w_n\}$ è esponenziale qualunque sia il vettore $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$; equivalentemente S assume la forma:

$$-\ln S(x_1 \dots x_n) = \int_P \max_i p_i x_i dU(p_1 \dots p_n) \quad (3.2.8)$$

nella quale il dominio P è definito come $P = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \text{ e } \sum_i p_i = 1\}$ ed $U(p_1 \dots p_n)$ è una misura definita in P . Ciò premesso, si definisce distribuzione di valore estremo multivariato una funzione $F(y_1 \dots y_n)$ ottenuta dalla $S(x_1 \dots x_n)$ con la trasformazione delle marginali esponenziali della (3.2.8) in marginali di valore estremo:

$$F(y_1 \dots y_n) = S(e^{-y_1} \dots e^{-y_n}) = \exp \left[- \int_P \max_i p_i e^{-y_i} dU(p_1 \dots p_n) \right] \quad (3.2.9)$$

La (3.2.9) è nota in letteratura come *rappresentazione di Pickands* delle distribuzioni di valore estremo multivariato. Si noti che la definizione posta implica che le marginali di una funzione di valore estremo multivariato siano variabili di valore estremo di Gumbel di pari varianza, dunque

omoschedastiche; per pervenire a questo risultato basta applicare la (3.2.1) alla (3.2.9).

Per comprendere l'importanza generale della rappresentazione (3.2.9), si consideri il caso in cui si rilevino m caratteristiche per ciascuno degli n individui di una popolazione di riferimento. A ciascun individuo j è quindi possibile associare le misure $X_{1j} \dots X_{mj}$ sintetizzabili nel vettore \mathbf{X}_j , per cui alla fine si hanno $\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_n$ vettori aleatori. Indicato con $Z_{i,n}$ il valore massimo della caratteristica i osservata su tutta la popolazione, è possibile definire un vettore $\mathbf{Z}_n = \{Z_{1,n} \dots Z_{m,n}\}$ di m componenti il cui pedice n tiene conto su quanti individui è calcolato il massimo. Schematizzando quanto detto si ha:

caratteristica	individuo				massimo
	1	2	...	n	
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$...	$X_{1,n}$	$Z_{1,n}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$...	$X_{2,n}$	$Z_{2,n}$
...
m	$X_{m,1}$	$X_{m,2}$...	$X_{m,n}$	$Z_{m,n}$

Si è in particolare interessati alla distribuzione della variabile $\mathbf{Z}_n = \{Z_{1,n} \dots Z_{m,n}\}$, nel seguito indicata per brevità come $H_n(z_1 \dots z_m)$. Per quanto detto risulta:

$$\begin{aligned} H_{Z_{1,n} \dots Z_{m,n}}(z_1 \dots z_m) &= H_n(z_1 \dots z_m) = \Pr[Z_{1,n} < z_1, \dots, Z_{m,n} < z_m] = \\ &= \Pr[X_{1,1} < z_1, \dots, X_{1,n} < z_1, \dots, X_{m,1} < z_m, \dots, X_{m,n} < z_m] = \\ &= \Pr[X_{1,1} < z_1, \dots, X_{m,1} < z_m, \dots, X_{1,n} < z_1, \dots, X_{m,n} < z_m] \end{aligned}$$

per cui, se i vettori \mathbf{X}_i sono tra di loro indipendenti e seguono la stessa distribuzione $F_{\mathbf{X}_i}(x_1 \dots x_m)$ la relazione precedente diventa:

$$H_n(z_1 \dots z_m) = \prod_{i=1}^n F_{X_{1,i} \dots X_{m,i}}(x_1 \dots x_m) = F_{\mathbf{X}_i}^n(x_1 \dots x_m)$$

Quando il numero di individui tende ad infinito, si pone il problema di definire delle caratteristiche della funzione F tali che sia possibile trovare due sequenze di vettori $\mathbf{a}_n = (a_{1,n} \dots a_{m,n})$ e $\mathbf{b}_n = (b_{1,n} \dots b_{m,n}) > 0$ tali che $H_n(\mathbf{a}_n \mathbf{z} + \mathbf{b}_n) \rightarrow H(x_1 \dots x_m)$ per $n \rightarrow +\infty$. A tal proposito sussiste un teorema²⁷ per cui tutte e sole le funzioni $H(x_1 \dots x_m)$ cercate sono distribuite secondo la (3.2.9), indipendentemente dalla distribuzione F di partenza.

Le funzioni definite dalla (3.2.9) godono inoltre di particolari proprietà. In generale, se $F(x_1 \dots x_m)$ è una legge di distribuzione le cui marginali siano genericamente indicate come $F_i(x_i)$, si chiama funzione di dipendenza²⁸ di F una funzione $D(y_1 \dots y_m)$ definita nell'ipercubo ad m dimensioni di lato unitario, non negativa e non decrescente tale che:

$$F(x_1 \dots x_n) = D[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)] \quad (3.2.10)$$

Si può dimostrare²⁹ che se $H(\mathbf{x})$ è soluzione al problema cercato allora la sua funzione di dipendenza, diciamola $D_H(\mathbf{y})$, gode della seguente proprietà:

²⁷ Si veda Galambos (1987), teorema 5.4.3 pag. 265.

²⁸ Dall'inglese *dependence function*. E' inoltre diffuso in letteratura il termine *copula* per indicare la funzione $D(\cdot)$.

²⁹ Si veda Galambos (1987), teorema 5.2.4 pag. 251 e lemma 5.4.1 pag. 259.

$$D_H^k(y_1^{\frac{1}{k}}, \dots, y_m^{\frac{1}{k}}) = D_H(y_1, \dots, y_m) \quad \forall k \geq 0 \quad (3.2.11)$$

per cui la funzione:

$$d_H(y_1, \dots, y_m) = -\ln D_H(e^{-y_1}, \dots, e^{-y_m}) \quad (3.2.12)$$

risulta essere omogenea, in quanto dalla (3.2.11) consegue:

$$d_H(\alpha y_1, \dots, \alpha y_m) = -\ln D_H(e^{-\alpha y_1}, \dots, e^{-\alpha y_m}) = -\ln [D_H(e^{-y_1}, \dots, e^{-y_m})]^\alpha = \alpha d_H(y_1, \dots, y_m)$$

Tenendo conto di questo risultato, poiché dalla (3.2.9) si è riconosciuto che tutte le funzioni multivariate di valore estremo hanno marginali Gumbel omoschedastiche, la (3.2.10) diventa:

$$F(x_1 \dots x_n) = D[\exp(e^{-\mu x_1}), \dots, \exp(e^{-\mu x_n})]$$

e sostituendovi la (3.2.12) si ha:

$$F(x_1 \dots x_n) = D[\exp(e^{-\mu x_1}), \dots, \exp(e^{-\mu x_n})] = e^{-d_h(e^{-\mu x_1}, \dots, e^{-\mu x_n})} \quad (3.2.13)$$

In conclusione, la classe delle funzioni multivariate di valore estremo espressa in accordo con la rappresentazione di Pickands può equivalentemente essere definita attraverso la (3.2.13) nella quale $d_h(y_1 \dots y_n)$ è una funzione omogenea.

3.3 Il calcolo delle covarianze per i modelli GEV

3.3.1 Procedura di calcolo

In accordo con il teorema di McFadden (1978) riportato nel paragrafo 1.2.1, la funzione di distribuzione congiunta dei residui aleatori $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ delle utilità delle n alternative relative ad un assegnato contesto di scelta si può esprimere, per un modello della famiglia GEV, a partire dalla funzione generatrice G nel seguente modo:

$$F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = e^{-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_n})} \quad (3.3.1)$$

Quindi, da un punto di vista operativo, il passaggio dalla G di un modello GEV alla legge di distribuzione dei corrispondenti residui aleatori delle utilità percepite avviene attraverso la trasformazione $F=e^{-G}$ semplicemente sostituendo nella G alle utilità sistematiche i rispettivi residui. Dalle relazioni (3.2.1) e (3.3.1) segue che la distribuzione marginale dei residui delle utilità percepite di una coppia di alternative i e j e del residuo dell'utilità percepita della singola alternativa i si ottengono rispettivamente come:

$$F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} F_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} e^{-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_n})} \quad (3.3.2)$$

$$F_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} F_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} e^{-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_n})} \quad (3.3.3)$$

Nella pratica, i limiti al secondo membro delle precedenti relazioni possono essere determinati semplicemente tenendo presente che $e^x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e che per $a > 0$ risulta $x^a \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Le densità di probabilità marginali delle utilità percepite delle alternative i e j e della singola alternativa i si ottengono poi a partire dalle (3.3.2) e (3.3.3) nel seguente modo:

$$f_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{\partial^2 F_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \quad (3.3.4)$$

$$f_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = \frac{\partial F_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i} \quad (3.3.5)$$

Una volta note le densità marginali, le grandezze di interesse (media, varianza, covarianza e coefficiente di correlazione) si possono agevolmente calcolate con le relazioni introdotte nel paragrafo 3.2.1 e qui particolarizzate utilizzando le (3.3.4) e (3.3.5):

$$E[\varepsilon_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i$$

$$Var[\varepsilon_i] = E[\varepsilon_i^2] - E^2[\varepsilon_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i^2 f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i - E^2[\varepsilon_i]$$

$$Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i \varepsilon_j f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) d\varepsilon_i d\varepsilon_j - E[\varepsilon_i]E[\varepsilon_j] \quad (3.3.6)$$

$$\rho[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \frac{Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j]}{\sqrt{Var[\varepsilon_i]Var[\varepsilon_j]}}$$

3.3.2 Logit Multinomiale

A partire dalla funzione generatrice del modello Logit Multinomiale introdotta nel paragrafo 1.2.1.1 ed adottando la procedura appena descritta, si può determinare la legge di distribuzione congiunta dei residui aleatori delle utilità delle alternative di scelta:

$$G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_n}) = \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} \rightarrow F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}$$

Applicando successivamente le relazioni (3.3.2) e (3.3.3) si ottiene³⁰:

$$F(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\varepsilon_k}{\theta_0}} = e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_0}} \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n e^{-\frac{\varepsilon_k}{\theta_0}} = e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_0}} \quad (3.3.7)$$

$$F(\varepsilon_i) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\varepsilon_k}{\theta_0}} = e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n e^{-\frac{\varepsilon_k}{\theta_0}} = e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} \quad (3.3.8)$$

³⁰ Nel calcolare i limiti si è utilizzato il teorema secondo cui, date n funzioni $f_1 \dots f_n$, ciascuna convergente per $x \rightarrow x_0$, anche la funzione $g(x) = \prod f_i$ è convergente per $x \rightarrow x_0$ ed il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti; per approfondimenti si rimanda a Fiorenza e Greco (1995) pag. 179.

Dalle relazioni precedenti si ricava immediatamente che ciascun singolo residuo è distribuito secondo una variabile aleatoria di Gumbel, come naturalmente atteso, con media pari a $\theta_0\phi$ e varianza proporzionale a θ_0 ; si noti infatti che dal confronto tra la (3.2.5) e la (3.3.8) segue che la variabile ε_i ha moda μ nulla. Inoltre, la covarianza tra due residui qualsiasi è nulla in quanto dalla (3.3.7) emerge che la loro distribuzione congiunta è pari al prodotto delle distribuzioni marginali.

3.3.3 Logit Gerarchizzato

Si propone in prima istanza un esempio relativo ad un Logit Gerarchizzato ad un solo livello; a partire dall'espressione della funzione generatrice proposta nel paragrafo 1.2.1.2, è immediato risalire all'espressione della distribuzione congiunta dei residui aleatori:

$$G(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_n}) = \sum_k \left[\sum_{j \in k} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}} \rightarrow F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e^{-\sum_k \left[\sum_{j \in k} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = \prod_k e^{-\left[\sum_{j \in k} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}}$$

Applicando la relazione (3.3.3) si ottiene:

$$F(\varepsilon_i) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i}} \prod_k e^{-\left[\sum_{h \in k} e^{-\frac{\varepsilon_h}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = e^{-e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}}$$

per cui i residui aleatori di ciascuna alternativa sono ancora variabili aleatorie di Gumbel con media pari a $\theta_0\phi$. Per quanto riguarda invece il calcolo della distribuzione congiunta di una coppia di residui attraverso la (3.3.2), occorre considerare due possibili alternative. Nel caso in cui i residui ε_i ed ε_j appartengano a gruppi diversi si ha:

$$F(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} \prod_k e^{-\left[\sum_{h \in k} e^{-\frac{\varepsilon_h}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = e^{-e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}} e^{-e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_0}}}$$

per cui essendo la distribuzione congiunta pari al prodotto delle marginali la loro covarianza è nulla, mentre nel caso in cui appartengano al medesimo gruppo k risulta:

$$F(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \lim_{\substack{\varepsilon_h \rightarrow +\infty \\ h \neq i, j}} \prod_k e^{-\left[\sum_{h \in k} e^{-\frac{\varepsilon_h}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = e^{-\left[e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_k}} + e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} \quad (3.3.9)$$

Dalla (3.3.9) utilizzando la (3.3.4) è possibile determinare la densità congiunta della coppia di residui e da questa, applicando in successione le relazioni (3.3.4) e (3.3.6), determinare il valore della covarianza tra i residui aleatori delle utilità percepite di due alternative appartenenti allo stesso gruppo. Il principale problema è rappresentato dall'impossibilità di risolvere in forma chiusa l'integrale (3.3.6) nel quale si sia sostituita la derivata parziale seconda mista della (3.3.9); si richiede pertanto una risoluzione di tipo numerico.

E' evidente a questo punto che, per procedere ulteriormente, risulta necessario testare affidabilità e livello di approssimazione conseguenti alla risoluzione numerica dell'integrale (3.3.6); in questo senso, il Logit Gerarchizzato rappresenta un interessante banco di prova in quanto il

valore della covarianza tra i residui di due alternative appartenenti ad uno stesso gruppo è noto in forma chiusa a partire dall'ipotesi (1.2.10) sul residuo aleatorio complessivo di ciascuna alternativa. Nella presente tesi è stato utilizzato a tale scopo il software di calcolo *Mathematica* che permette anche il calcolo simbolico delle derivate. In definitiva, risolvendo l'integrale per via numerica per diversi valori di θ_k e θ_0 e confrontandolo con i valori espressi in forma chiusa si ottengono i risultati riportati in tabella 3.1; come si può notare, il grado di precisione raggiunge la quarta cifra decimale e può quindi ritenersi ampiamente soddisfacente.

θ_k	θ_0	Forma chiusa	Integrale (numerico)
0,25	2	6.47692789	6.47692441
1	2	4.93480220	4.93480216
1,75	2	1.54212569	1.54212569

Tabella 3.1 – Confronto risoluzione numerica/forma chiusa per Logit Gerarchizzato ad un livello

E' a questo punto opportuno procedere ad un esempio relativo ad un semplice Logit Gerarchizzato multilivello, riportato in figura 3.2.

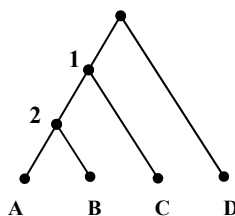


Figura 3.2 – Esempio di Logit Gerarchizzato a più livelli

La determinazione della funzione generatrice può avvenire direttamente tenendo conto che, per quanto visto nel paragrafo 1.2.1, risulta $G(e^{V_1} \dots e^{V_n}) = e^{Y_0}$ essendo Y_0 la variabile di soddisfazione connessa all'intero contesto di scelta; si può banalmente verificare che Y_0 è pari al denominatore delle probabilità di scelta di diversione dall'origine. Da ciò consegue che la funzione di distribuzione congiunta dei residui aleatori è dunque pari a:

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}) = e^{-e \frac{\varepsilon_D}{\theta_0}} \cdot e^{-\left[e^{\frac{\varepsilon_C}{\theta_1} + \left[e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_2} + e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_2}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_0}}}$$

Le distribuzioni congiunte delle coppie di residui si determinano applicando la procedura precedentemente illustrata, e risultano pari a:

$$F(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = e^{-\left[e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_2} + e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_2}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_0}}} ; F(\varepsilon_a, \varepsilon_c) = e^{-\left[e^{\frac{\varepsilon_C}{\theta_1} + e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_1}} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_0}}}$$

$$F(\varepsilon_a, \varepsilon_d) = e^{-e \frac{\varepsilon_D}{\theta_0}} \cdot e^{-e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_0}}} ; F(\varepsilon_b, \varepsilon_c) = e^{-\left[e^{\frac{\varepsilon_C}{\theta_1} + e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_1}} \right]^{\frac{\theta_1}{\theta_0}}}$$

$$F(\varepsilon_b, \varepsilon_d) = e^{-e^{-\frac{\varepsilon_D}{\theta_0}}} \cdot e^{-e^{-\frac{\varepsilon_B}{\theta_0}}} ; F(\varepsilon_c, \varepsilon_d) = e^{-e^{-\frac{\varepsilon_D}{\theta_0}}} \cdot e^{-e^{-\frac{\varepsilon_C}{\theta_0}}}$$

A partire da queste ultime è poi immediato passare alle distribuzioni marginali di ciascun singolo residuo, dalle quali si ritrovano i risultati già sottolineati in precedenza. Per quanto attiene alle covarianze, si evince dalle distribuzioni precedentemente riportate che non vi è covarianza tra le coppie di residui delle alternative *A-D*, *B-D* e *C-D* in quanto, come atteso, accade che la distribuzione congiunta delle suddette coppie di residui è pari al prodotto delle rispettive distribuzioni marginali. Procedendo per via numerica alla risoluzione degli integrali per il calcolo delle covarianze tra le rimanenti coppie di residui di alternative si ottengono i risultati riportati in tabella 3.2; come si può osservare, i risultati coincidono ancora una volta almeno fino alla quarta cifra decimale con le covarianze teoriche da modello.

			Covarianza <i>a-b</i>		Covarianza <i>a-c</i> e <i>b-c</i>	
θ_0	θ_1	θ_2	Forma chiusa	Numerica	Forma chiusa	Numerica
2	1	0.5	6.1685	6.1685	4.9348	4.9348
2	1.5	0.5	6.1685	6.1685	2.8786	2.8786
2	1.5	1	4.9348	4.9348	2.8786	2.8786
2	1.75	1	4.9348	4.9348	1.5421	1.5421
2	1.75	1.5	2.8786	2.8786	1.5421	1.5421

Tabella 3.2 – Confronto risoluzione numerica/forma chiusa per Logit Gerarchizzato ad un livello

3.3.4 Cross-Nested Logit

A partire dalla funzione generatrice dei momenti (1.2.18) del modello Cross-Nested Logit si ottiene la seguente distribuzione congiunta dei residui aleatori:

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e^{-\sum_k \left[\sum_{j \in k} \alpha_{kj} \frac{\theta_0}{\theta_k} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = \prod_k e^{-\left[\sum_{j \in k} \alpha_{kj} \frac{\theta_0}{\theta_k} e^{-\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} \quad (3.3.10)$$

Atteso che lo stesso residuo aleatorio può comparire in più termini del prodotto, si indichi con C_i l'insieme dei gruppi cui una certa alternativa i appartiene; dalla (3.3.10) e dalla (3.3.3) consegue che la funzione di distribuzione cumulata del singolo residuo aleatorio è espressa da:

$$F(\varepsilon_i) = \prod_{k \in C_i} e^{-\left[\alpha_{ki} \frac{\theta_0}{\theta_k} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_k}} \right]^{\frac{\theta_k}{\theta_0}}} = \prod_{k \in C_i} e^{-\alpha_{ki} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}} = e^{-\left(\sum_{k \in C_i} \alpha_{ki} \right) e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}} \quad (3.3.11)$$

Un risultato notevole che emerge dalla (3.3.11) si riferisce al calcolo della media del singolo residuo aleatorio, che risulta pari a:

$$F(\varepsilon_i) = e^{-\left(\sum_{k \in C_i} \alpha_{ki} \right) e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0}}} = e^{-e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_0} \ln \left(\sum_{k \in C_i} \alpha_{ki} \right)}} \rightarrow E[\varepsilon_i] = \theta_0 \ln \left(\sum_{k \in C_i} \alpha_{ki} \right) + \theta_0 \phi \quad (3.3.12)$$

Nei modelli di utilità aleatoria additivi, come detto nel paragrafo 1.2, è possibile aggiungere la

medesima quantità a tutte le utilità delle alternative senza modificarne le corrispondenti probabilità di scelta. Per normalizzare un modello di utilità aleatoria additivo è dunque sufficiente imporre la condizione che la media dei residui aleatori delle utilità percepite sia uguale per tutte le alternative; mentre ciò è automatico nei modelli di tipo Logit Multinomiale e Gerarchizzato, la (3.3.12) mostra che per il modello Cross-Nested tale condizione è soddisfatta se e solo se la somma dei gradi di appartenenza è uguale per tutte le alternative. Appare in tal senso intuitivo scegliere questa somma pari ad 1, in modo da poter agevolmente interpretare i gradi di appartenenza in termini percentuali: le specificazioni Cross-Nested di Vovsha (1997), Papola (2000) e Bierlaire (2001) seguono tale prassi. La specificazione CNL (1.2.21), proposta di Koppelman e Wen (1997) e definita Paired Combinatorial Logit, assume invece che i gradi di appartenenza sommino ad $n-1$ dove n è il numero di alternative. Esistono anche esempi di specificazioni Cross-Nested non normalizzate, come evidenziato nel paragrafo 1.3.3.2 a proposito della specificazione (1.3.22) di un PCL nel contesto di scelta del percorso proposta da Prashker e Bekhor (1998).

E' interessante sottolineare che dalle (3.3.10) e (3.3.2) consegue che la legge di distribuzione di probabilità congiunta di una coppia di residui ε_i ed ε_j può essere formalmente scritta come:

$$F(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \prod_{k \in C_i \cap C_j} e^{-\left[\frac{\theta_0}{\alpha_{ki}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_i}{\theta_k}} + \alpha_{kj}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}} \right] \frac{\theta_k}{\theta_0}} \prod_{k \in C_i - [C_i \cap C_j]} e^{-\left[\frac{\theta_0}{\alpha_{ki}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_i}{\theta_k}}} \right] \frac{\theta_k}{\theta_0}} \prod_{k \in C_j - [C_i \cap C_j]} e^{-\left[\frac{\theta_0}{\alpha_{kj}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}}} \right] \frac{\theta_k}{\theta_0}} \quad (3.3.13)$$

Come si può notare, se $C_i \cap C_j = \emptyset$, ovvero le due alternative i e j non appartengono a nessun gruppo comune, la distribuzione congiunta $F(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ è pari al prodotto delle marginali e dunque la covarianza tra i due residui è pari a zero. Se invece $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ vi è almeno un gruppo in comune tra le due alternative e dunque la covarianza risulta non nulla e determinabile per via numerica attraverso la procedura numerica di risoluzione descritta in precedenza. Si osservi che la (3.3.13) può essere equivalentemente riscritta nel seguente modo:

$$F(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \prod_{k \in C_i \cap C_j} e^{-\left[\frac{\theta_0}{\alpha_{ki}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_i}{\theta_k}} + \alpha_{kj}^{\theta_k} e^{\frac{\varepsilon_j}{\theta_k}}} \right] \frac{\theta_k}{\theta_0}} \cdot e^{-\left(\sum_{k \in C_i - [C_i \cap C_j]} \alpha_{ki} \right) \frac{\varepsilon_i}{\theta_0}} \cdot e^{-\left(\sum_{k \in C_j - [C_i \cap C_j]} \alpha_{kj} \right) \frac{\varepsilon_j}{\theta_0}} \quad (3.3.14)$$

In conclusione, una volta determinata dalla (3.3.13) la densità congiunta $f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, la covarianza cercata si ottiene risolvendo l'integrale doppio (3.3.6):

$$Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i \varepsilon_j f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) d\varepsilon_i d\varepsilon_j - E[\varepsilon_i] E[\varepsilon_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_i \varepsilon_j f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) d\varepsilon_i d\varepsilon_j - (\theta_0 \phi)^2$$

Nei paragrafi 3.3.4.1-3.3.4.4 sono analizzate le covarianze relative ad alcune specificazioni del modello CNL, al fine di proporre un quadro d'insieme che generalizzi il contributo di Papola e Marzano (2005).

Uno studio analogo, ma limitato alla sola verifica del livello di approssimazione della congettura (1.2.23), è stato indipendentemente proposto da Abbé et al. (2005), che forniscono un'interessante chiave di lettura delle covarianze soggiacenti il modello CNL. A tal proposito, si consideri un contesto di scelta caratterizzato da m alternative, le cui utilità hanno residui aleatori

distribuiti secondo la (3.3.1); si può dimostrare l'uguaglianza:

$$\varepsilon_j = \max_{k \in C_j} (\theta_0 \ln \alpha_{kj} + \hat{\varepsilon}_{jk}) \quad (3.3.15)$$

nella quale risulta:

$$\text{Corr}[\hat{\varepsilon}_{jk}, \hat{\varepsilon}_{ih}] = 0 \quad \forall k \neq h \text{ e } \forall j \neq i$$

e dato un gruppo k la distribuzione congiunta dei residui delle alternative ad esso appartenenti risulta data da:

$$F(\hat{\varepsilon}_{jk} : k \in C_j) = e^{-\left(\sum_j e^{\frac{\varepsilon_j}{\theta_0}} \right)^{\frac{\theta_0}{\theta_0}}} \quad (3.3.16)$$

Per dimostrare la (3.3.15) Abbé et al. (2005) verificano che la distribuzione delle ε_j al primo membro coincide con quella del massimo delle ε_{jk} al secondo membro. Si noti anche che la (3.3.16) corrisponde alla distribuzione di un modello GEV la cui funzione generatrice è costituita da un termine della sommatoria della funzione generatrice di un Logit Gerarchizzato introdotta nel paragrafo 1.2.1.2. Alla luce di questo risultato è immediato esprimere la covarianza tra due alternative in un modello CNL come:

$$\text{Corr}[\varepsilon_j, \varepsilon_i] = \text{Corr}[\max_{k \in C_j} (\theta_0 \ln \alpha_{kj} + \hat{\varepsilon}_{jk}), \max_{k \in C_i} (\theta_0 \ln \alpha_{ki} + \hat{\varepsilon}_{ik})] \quad (3.3.17)$$

La relazione (3.3.17) mostra esplicitamente che l'approssimazione insita nella congettura (1.2.23) è da ricercarsi nel fatto che essa sottintende una correlazione tra alternative espressa in termini di combinazione lineare delle corrispondenti correlazioni Logit Gerarchizzato, mentre la reale correlazione espressa attraverso la (3.3.17) è basata su una relazione di massimo tra tali correlazioni.

In ogni caso, essa non determina alcun vantaggio operativo nel calcolo delle covarianze, in quanto la sua applicazione richiederebbe la conoscenza della distribuzione congiunta delle due variabili aleatorie massimo che figurano a secondo membro. Poiché tali variabili non sono indipendenti, tale distribuzione non è esprimibile in modo agevole e ci si riconduce agli stessi problemi di integrazione numerica soggiacenti la risoluzione dell'integrale (3.3.6).

3.3.4.1 CNL minimo per tre alternative e due correlazioni

La prima applicazione si riferisce al più semplice esempio di struttura di scelta di tipo Cross-Nested, riportata in figura 3.3, con un'alternativa B appartenente a due gruppi.

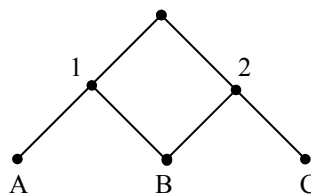


Figura 3.3 – Specificazione CNL minima per tre alternative e due correlazioni

La legge di distribuzione congiunta dei residui ε_A ed ε_B può essere scritta a partire dalla (3.3.13) nel seguente modo:

$$F(\varepsilon_A \varepsilon_B) = e^{-\left[\frac{\varepsilon_A}{\theta_1} + \alpha_{1B} \frac{\varepsilon_B}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_B}{\theta_0}} \right] \frac{\theta_1}{\theta_0}} e^{-(1-\alpha_{1B}) \frac{\varepsilon_B}{\theta_0}} \quad (3.3.18)$$

nella quale gli unici parametri variabili risultano il rapporto $\delta_1 = \theta_1/\theta_0$ ed il grado di appartenenza α_{1B} . I valori di correlazione ρ_{AB} calcolati a partire dalla (3.3.18) in funzione di δ_1 e di α_{1B} sono riportati in figura 3.4 insieme ai corrispondenti risultati forniti dalla congettura (1.2.23).

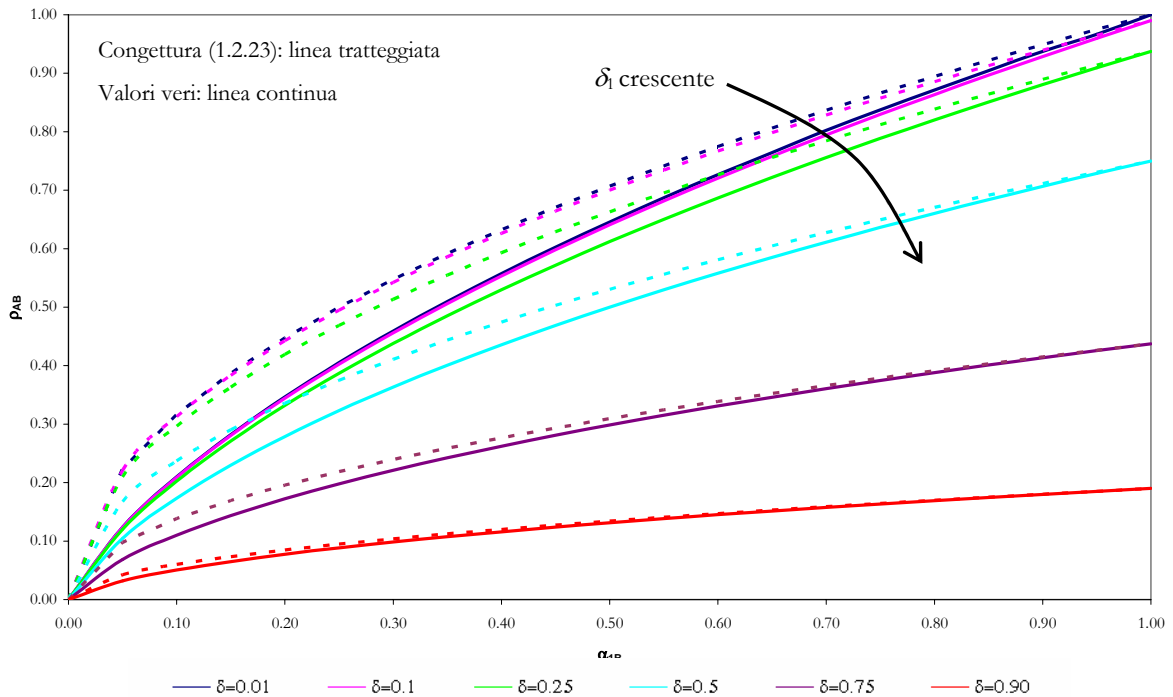


Figura 3.4 – Valori di ρ_{AB} per la struttura CNL di figura 3.3

I risultati riportati in figura 3.4 consentono di effettuare interessanti considerazioni. In primo luogo, si osserva una costante sovrastima della correlazione ρ_{AB} calcolata attraverso la congettura (1.2.23) rispetto ai valori veri, con un grado di approssimazione che si riduce al crescere di δ_1 ed all'aumentare di α_{1B} ; i casi limite sono ovviamente riprodotti correttamente. Si noti inoltre che, qualunque valore di α_{1B} si consideri, la massima correlazione tra A e B si ottiene quando $\delta_1=0$, e che in accordo con quanto riportato da Dagsvik (1995), i modelli GEV sono in grado di riprodurre esclusivamente correlazioni non negative. E' opportuno, a questo punto, investigare anche se un modello CNL sia in grado di riprodurre qualsiasi matrice di covarianze, e quindi di correlazione, a termini non negativi. A tale scopo si osservi che la matrice di correlazioni corrispondente alla struttura CNL di figura 3.3 è data da:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{AB} & 0 \\ \rho_{AB} & 1 & \rho_{BC} \\ 0 & \rho_{BC} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.19)$$

Per individuare tutte le coppie (ρ_{AB}, ρ_{BC}) ammissibili basta ricordare che una matrice di

covarianze deve essere positiva definita, escludendo il caso di singolarità, e pertanto è possibile applicare alla matrice \mathbf{P} il criterio di Jacobi-Sylvester descritto nel paragrafo 3.2.1, ottenendo:

$$\det\{\mathbf{P}_1\} > 0 \rightarrow 1 > 0$$

$$\det\{\mathbf{P}_2\} > 0 \rightarrow 1 - \rho_{AB}^2 > 0$$

$$\det\{\mathbf{P}_3 \equiv \mathbf{P}\} > 0 \rightarrow 1 - \rho_{AB}^2 - \rho_{BC}^2 > 0$$

Le prime due espressioni non forniscono alcuna condizione aggiuntiva, in quanto il valore assoluto del coefficiente di correlazione è per definizione non maggiore dell'unità, mentre è immediato riconoscere che la terza condizione determina un dominio di ammissibilità F_P delle correlazioni nel piano (ρ_{AB}, ρ_{BC}) la cui frontiera è un cerchio di raggio unitario (linea rossa nel diagramma di figura 3.6, relativo al quadrante delle correlazioni positive).

Occorre a questo punto confrontare il dominio F_P con quello F_{CNL} relativo alla struttura di figura 3.3. Per costruire la frontiera di F_{CNL} è possibile utilizzare i risultati riportati in figura 3.4, osservando che per ogni dato valore di ρ_{AB} la corrispondente massima correlazione ρ_{BC} riproducibile si ottiene per $\delta_1=0$ ed $\alpha_{2B}=1-\alpha_{1B}^*$ essendo α_{1B}^* il più piccolo valore del grado di appartenenza α_{1B} compatibile con ρ_{AB} ; si osservi a tal proposito la figura 3.5. La frontiera del dominio F_{CNL} così ottenuta è riportata in figura 3.6.

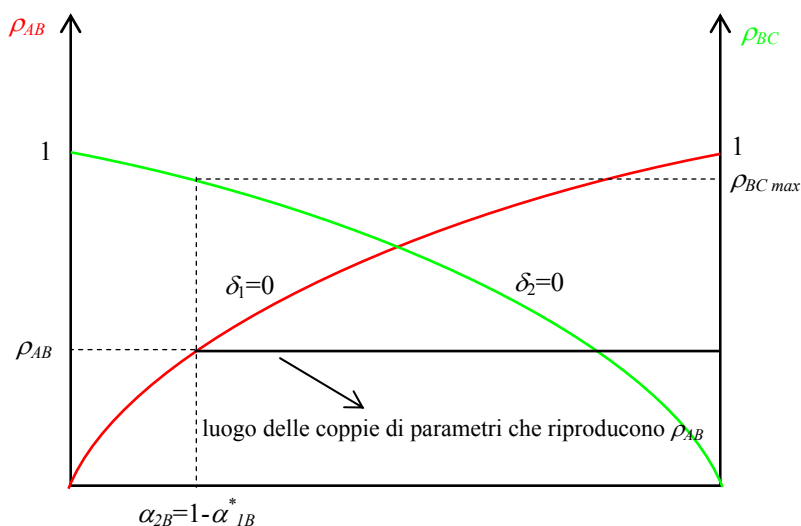


Figura 3.5 – Determinazione della frontiera del dominio F_{CNL}

La figura 3.6 evidenzia chiaramente che il dominio F_P contiene strettamente il dominio F_{CNL} anche se il grado di copertura di quest'ultimo può ritenersi accettabile. Tale risultato evidenzia in primo luogo la necessità di verificare se esista una generalizzazione della specificazione CNL riportata in figura 3.3 in grado di coprire l'intero dominio F_P delle matrici di correlazione del tipo (3.3.19), e pone inoltre il problema di valutare la relazione tra F_{CNL} ed F_P in casi più complessi di quello qui presentato.

Il diagramma di figura 3.4 evidenzia inoltre un ulteriore aspetto teorico meritevole di approfondimento. Si evince infatti con chiarezza che la corrispondenza tra parametri del modello e valori di correlazione non è biunivoca: in altri termini, fissato un determinato valore di correlazione ρ_{AB} (strettamente diverso dai casi limite) è possibile individuare infinite coppie di valori (α_{1B}, δ_1) che riproducono esattamente tale correlazione.

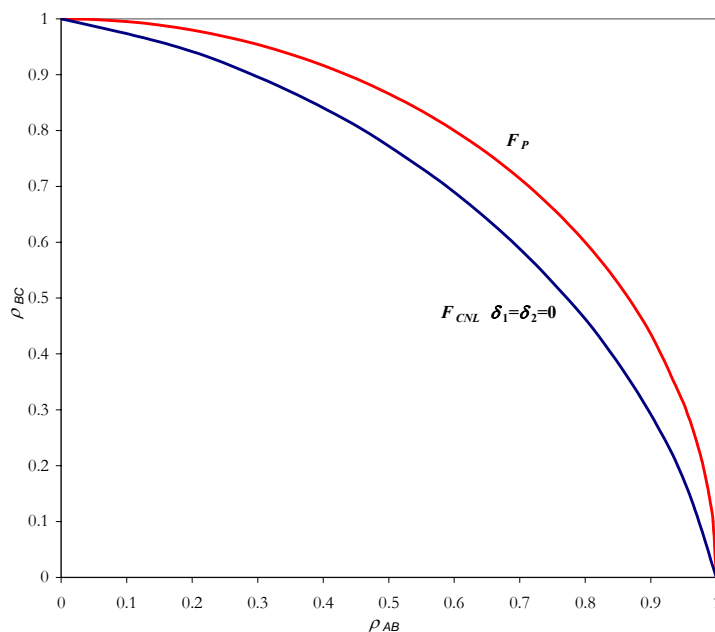


Figura 3.6 – Confronto tra i domini di ammissibilità F_P e F_{CNL} per la struttura di figura 3.3

Ad esempio, la coppia di valori di correlazioni $\rho_{AB}=0.32302$ e $\rho_{BC}=0.636302$ può essere riprodotta attraverso le seguenti terne di parametri:

$\alpha_{1B}=0.25$	$\alpha_{1B}=0.425$	$\alpha_{1B}=0.5$
$\delta_1=0.50$	$\delta_1=0.69025$	$\delta_1=0.724948$
$\delta_2=0.50$	$\delta_2=0.335556$	$\delta_2=0.136231$

a ciascuna delle quali corrispondono rispettivamente le seguenti probabilità di scelta, calcolate nell'ipotesi di utilità sistematiche nulle e con $\theta_0=1$:

$p[A]=0.425$	$p[A]=0.410$	$p[A]=0.403$
$p[B]=0.223$	$p[B]=0.194$	$p[B]=0.157$
$p[C]=0.350$	$p[C]=0.394$	$p[C]=0.438$

Come si può osservare, esse risultano significativamente diverse tra loro, e ciò chiarisce che la corrispondenza tra probabilità di scelta e matrice di covarianze in un modello CNL non è biunivoca, a differenza di quanto accade ad esempio per il modello Probit. Infatti, la distribuzione normale multivariata è completamente definita proprio dal vettore delle medie e dalla matrice di covarianze, mentre la distribuzione multivariata di valore estremo (3.3.10) è identificata da parametri non in corrispondenza biunivoca con le covarianze.

A conforto di questa osservazione si possono calcolare i momenti terzi corrispondenti alle distribuzioni individuate attraverso le terne di parametri prima riportate. Ricordando che il momento centrato m_{rs} di ordine $r \cdot s$ è definito come $m_{rs} = E[(x_1 - \mu_1)^r (x_2 - \mu_2)^s]$, è possibile definire il momento terzo m_{21} come:

$$m_{21} = E[x_1^2 x_2] - 2\mu_1 E[x_1 x_2] - \mu_2 E[x_1^2] + 2\mu_1^2 \mu_2$$

e siccome $\mu_1 = \mu_2$ si può scrivere:

$$m_{21} = E[x_1^2 x_2] - 2\mu \text{Cov}[x_1, x_2] - \mu \text{Var}[x_1] - \mu^3$$

Analogamente si può definire il momento terzo m_{12} :

$$m_{12} = E[x_1 x_2^2] - 2\mu \text{Cov}[x_1, x_2] - \mu \text{Var}[x_2] - \mu^3$$

Per evidenziare le differenze tra momenti basta dunque calcolare le quantità $E[x_1^2 x_2]$ e $E[x_1 x_2^2]$. Nel caso in esame si ottiene rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} E[\varepsilon_A^2 \varepsilon_B] = 3.19493 & E[\varepsilon_A^2 \varepsilon_B] = 3.01897 & E[\varepsilon_A^2 \varepsilon_B] = 2.97564 \\ E[\varepsilon_A \varepsilon_B^2] = 2.42004 & E[\varepsilon_A \varepsilon_B^2] = 2.59057 & E[\varepsilon_A \varepsilon_B^2] = 2.63682 \end{array}$$

e ciò conferma che siamo in presenza di diverse distribuzioni a parità di matrice di covarianze.

3.3.4.2 CNL minimo per tre alternative e matrice di covarianze completa

Un secondo esempio di specificazione Cross-Nested meritevole di approfondimento alla luce dei risultati riportati nel paragrafo precedente è costituito dalla struttura CNL minima in grado di riprodurre un contesto di scelta con tre alternative e matrice di covarianze completa (figura 3.7).

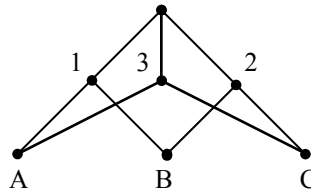


Figura 3.7 – Specificazione CNL minima per tre alternative e matrice di covarianze completa

Considerata la simmetria della struttura, è sufficiente calcolare la correlazione ρ_{AB} a partire dalla legge di distribuzione congiunta dei due residui ε_A ed ε_B :

$$F(\varepsilon_A \varepsilon_B) = e^{-\left[\alpha_{1A} e^{-\frac{\varepsilon_A}{\theta_1}} + \alpha_{1B} e^{-\frac{\varepsilon_B}{\theta_1}} \right] \frac{\theta_1}{\theta_0}} e^{-(1-\alpha_{1A})e^{-\frac{\varepsilon_A}{\theta_0}}} e^{-(1-\alpha_{1B})e^{-\frac{\varepsilon_B}{\theta_0}}} \quad (3.3.20)$$

in quanto, come si può facilmente verificare, la struttura delle distribuzioni congiunte delle altre coppie di residui è del tutto analoga alla (3.3.20). Dalla (3.3.20) segue che le variabili da cui dipende ρ_{AB} sono i gradi di appartenenza α_{1A} e α_{1B} nonché il parametro di varianza $\delta_1 = \theta_1 / \theta_0$. A titolo di esempio, in figura 3.8 sono riportati i valori di ρ_{AB} calcolati numericamente per $\delta_1 = 0$; si ritrovano ovviamente i casi limite per cui $\rho_{AB} = 1$ se α_{1A} e α_{1B} sono entrambi uguali ad uno mentre ρ_{AB} tende a zero se almeno uno dei due gradi di appartenenza α_{1A} e α_{1B} si annulla.

In figura 3.10 è invece diagrammata la differenza tra i valori veri di ρ_{AB} e quelli forniti dalla congettura (1.2.23), sempre per $\delta_1 = 0$. Si verifica innanzitutto che per $\alpha_{1A} = 1$ si ritrovano le differenze calcolate per la specificazione CNL minima (paragrafo 3.3.4.1); inoltre, il livello di approssimazione si mantiene comunque accettabile in tutto il dominio e comunque in linea con il massimo errore riscontrato nei casi precedenti, attento come sempre in corrispondenza di valori prossimi a zero di uno dei gradi di appartenenza (cfr. col diagramma di figura 3.4).

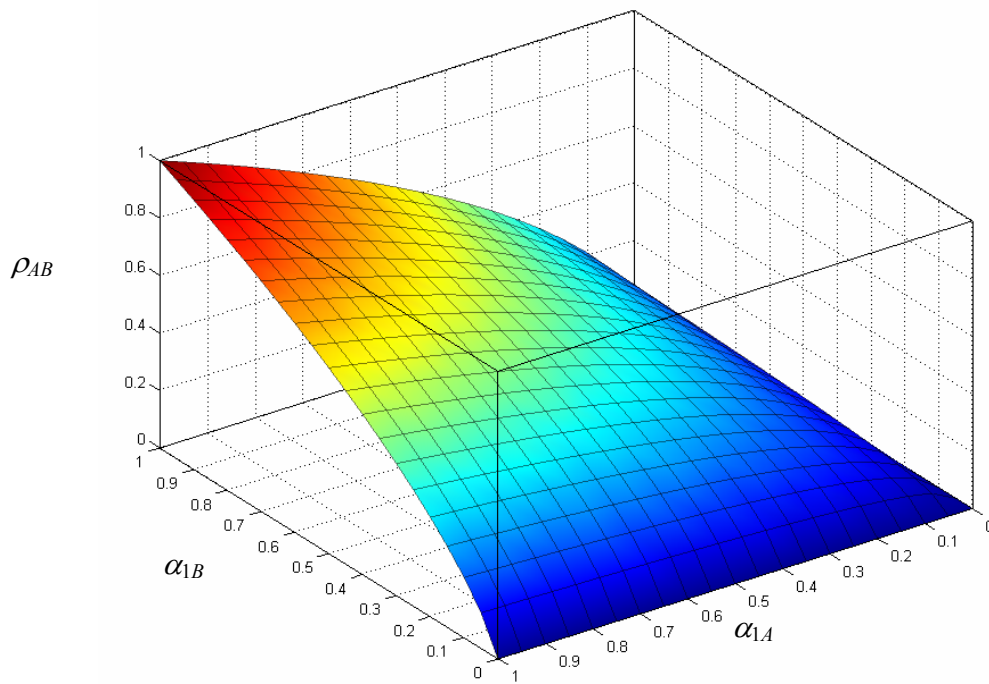


Figura 3.8 – Valori di ρ_{AB} per la struttura CNL di figura 3.7 ($\delta_1=0$)

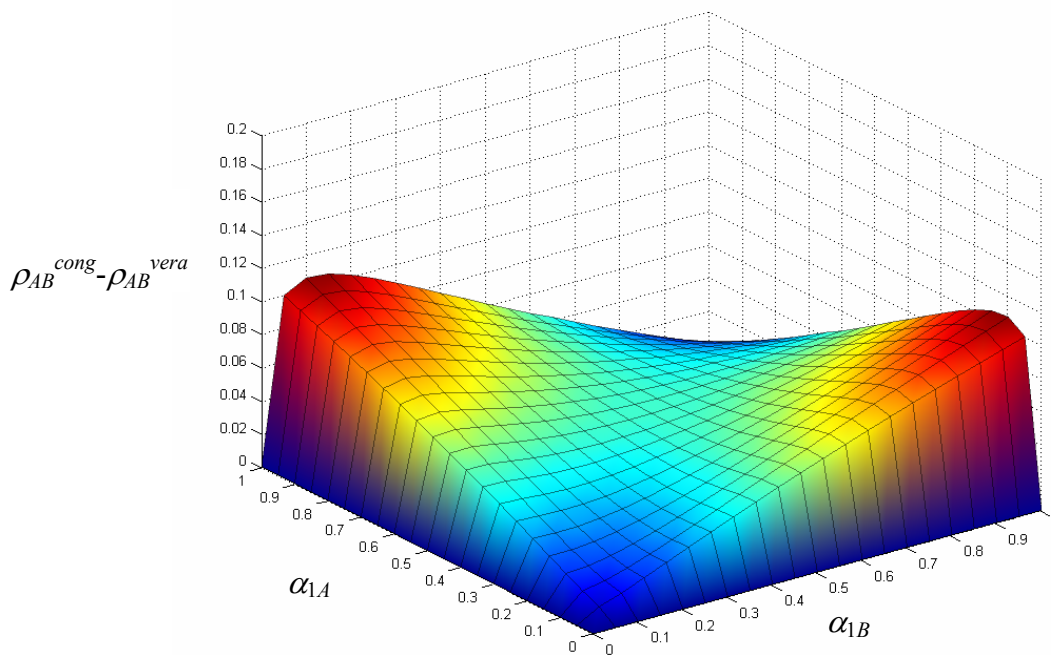


Figura 3.9 – Approssimazione congettura (1.2.23) per la struttura CNL di figura 3.7 ($\delta_1=0$)

Analizzando più in dettaglio la distribuzione congiunta (3.3.20), ci si accorge che essa è in realtà comune ad una qualsiasi struttura CNL all'interno della quale si possa individuare una coppia di alternative A e B che condivide un solo gruppo I , così come schematicamente illustrato in figura 3.10. In altre parole, essa rappresenta un “atomo” a partire dal quale è possibile costruire strutture CNL che coinvolgano un numero maggiore di alternative.

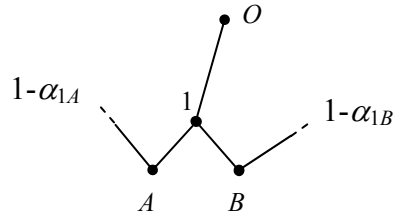


Figura 3.10 – Struttura CNL generale corrispondente alla distribuzione (3.3.20)

Si noti che una volta fissati i gradi di appartenenza α_{1A} ed α_{1B} risultano univocamente determinate anche le quantità $1-\alpha_{1A}$ ed $1-\alpha_{1B}$, che esprimono il grado di “non appartenenza” delle due alternative al gruppo in comune. E’ evidente che nell’ambito di una struttura CNL questi gradi di non appartenenza devono essere congruenti tra i diversi gruppi, per cui è interessante diagrammare l’andamento della massima correlazione ρ_{AB} tra le due alternative A e B al variare della loro “non appartenenza” al gruppo in comune. Poiché sarà utile nel seguito, tale andamento è riportato nel diagramma in figura 3.11, che si è ovviamente ottenuto dal diagramma in figura 3.8 per simmetria.

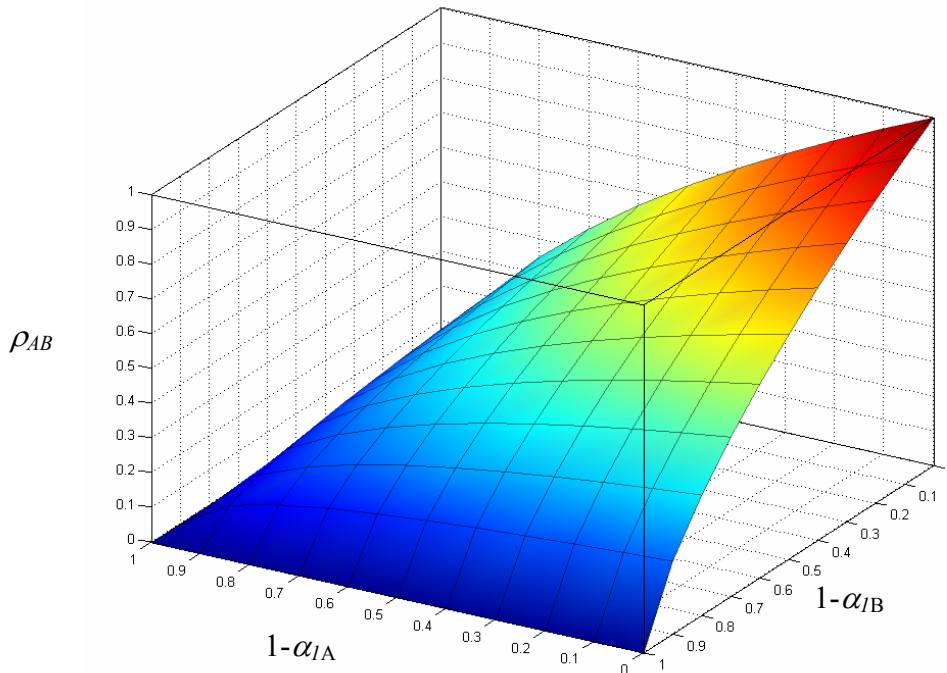


Figura 3.11 – Andamento delle correlazioni massime per la struttura di figura 3.10

E’ interessante infine approfondire anche per questo caso la relazione tra il dominio F_P delle matrici di covarianze ammissibili e quello F_{CNL} soggiacente la specificazione di figura 3.7. In particolare, la matrice di correlazioni da considerare è la seguente:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{AB} & \rho_{AC} \\ \rho_{AB} & 1 & \rho_{BC} \\ \rho_{AC} & \rho_{BC} & 1 \end{bmatrix}$$

L’applicazione del criterio di Jacobi-Sylvester conduce alla definizione di un dominio

individuato dalle seguenti disuguaglianze:

$$\det\{P_1\} > 0 \rightarrow 1 > 0$$

$$\det\{P_2\} > 0 \rightarrow 1 - \rho_{AB}^2 > 0$$

$$\det\{P_3 \equiv P\} > 0 \rightarrow 1 - \rho_{AB}^2 - \rho_{BC}^2 - \rho_{AC}^2 + 2\rho_{AB}\rho_{BC}\rho_{AC} > 0$$

L'ultima disequazione permette, in analogia con l'esempio riportato nel paragrafo 3.3.4.1, di individuare la frontiera del dominio F_P , diagrammato a sinistra nella figura 3.9 con riferimento all'ottante delle correlazioni positive; in particolare, fissato un valore per $\rho_{AB} \in [0,1]$ e $\rho_{AC} \in [0,1]$ si ottengono i seguenti valori di ρ_{BC} :

$$\rho_{BC} = \rho_{AC}\rho_{AB} \pm \sqrt{\rho_{AC}^2\rho_{AB}^2 - \rho_{AB}^2 - \rho_{AC}^2 - 1}$$

Il dominio F_{CNL} può a sua volta essere agevolmente costruito per punti in quanto in questo caso non è immediato, a differenza dell'esempio riportato nel paragrafo precedente, ricostruirne la frontiera; il confronto tra F_P (a sinistra) e F_{CNL} (a destra) è riportato nella figura 3.12.

Risulta evidente che il problema di riprodurre l'intero dominio delle matrici di correlazioni ammissibili si aggrava all'aumentare del numero di alternative. Un'indicazione in tal senso, seppur relativa ad un caso particolare, è stata fornita in letteratura nell'ambito del loro contributo sul Paired Combinatorial Logit da Koppelman e Wen (2000), che indicano come al crescere del numero di alternative diminuisca il valore di covarianza massima riprodotto dal PCL per una coppia di alternative.

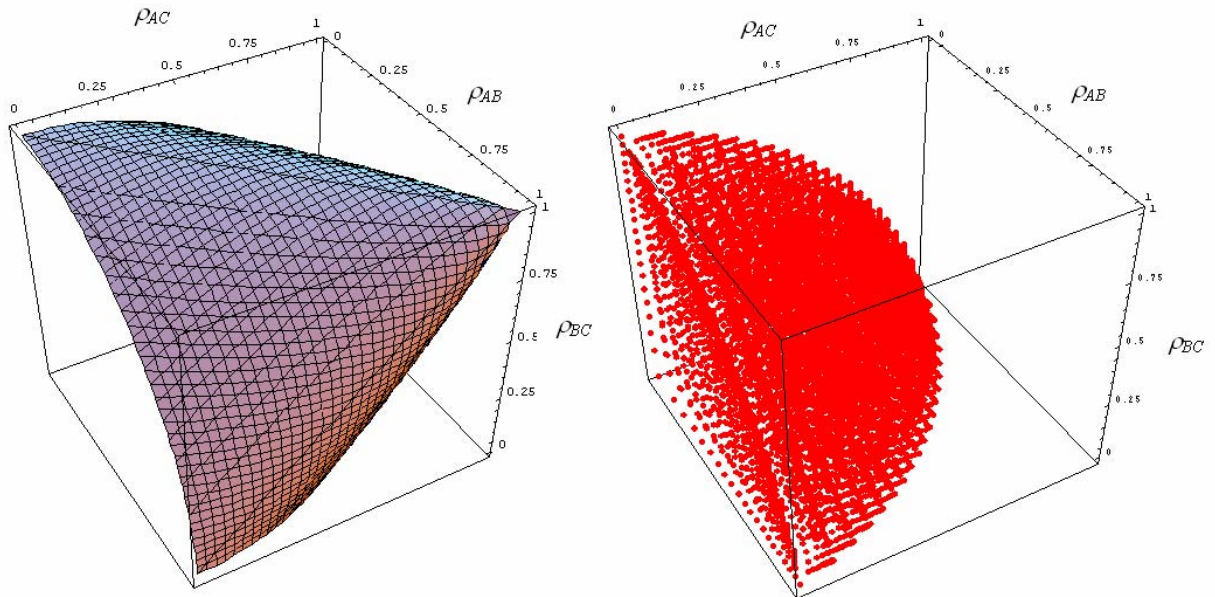


Figura 3.12 – Confronto tra i domini di ammissibilità F_P e F_{CNL} per la struttura di figura 3.7

3.3.4.3 Generalizzazione della struttura CNL del paragrafo 3.3.4.1

I risultati riportati nei paragrafi precedenti evidenziano la necessità di approfondire la relazione tra specificazione di un modello CNL e corrispondente matrice di covarianze. In particolare, così come riportato in figura 3.13, una prima generalizzazione riguarda l'aggiunta di un ulteriore gruppo in comune tra le alternative A e B nella struttura CNL minima riportata in figura 3.3.

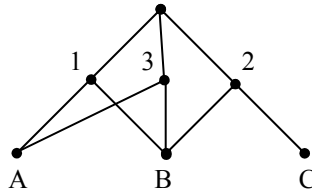


Figura 3.13 – Generalizzazione della specificazione CNL minima per tre alternative e due correlazioni

La legge di distribuzione congiunta dei residui ε_A ed ε_B può essere scritta a partire dalla (3.3.13) nel seguente modo:

$$F(\varepsilon_A \varepsilon_B) = e^{-\left[\alpha_{1A} \frac{\theta_0 - \varepsilon_A}{\theta_1} e^{\frac{\theta_0 - \varepsilon_B}{\theta_1}} + \alpha_{1B} e^{\frac{\theta_0 - \varepsilon_B}{\theta_1}} \right] \frac{\theta_1}{\theta_0}} e^{-\left[\alpha_{3A} \frac{\theta_0 - \varepsilon_A}{\theta_3} e^{\frac{\theta_0 - \varepsilon_B}{\theta_3}} + \alpha_{3B} e^{\frac{\theta_0 - \varepsilon_B}{\theta_3}} \right] \frac{\theta_3}{\theta_0}} e^{-(1-\alpha_{1B}-\alpha_{3B})e^{-\frac{\varepsilon_B}{\theta_0}}} \quad (3.3.21)$$

nella quale i parametri variabili risultano i rapporti $\delta_1 = \theta_1/\theta_0$ e $\delta_3 = \theta_3/\theta_0$ ed i gradi di appartenenza α_{1B} , α_{3B} ed α_{1A} ; la (3.3.21) si differenzia quindi dalla (3.3.18) per il termine aggiuntivo legato al nuovo gruppo in comune alle due alternative A e B . Nell'esplorare il dominio delle matrici di covarianze riprodotte dalla struttura di figura 3.13, compatibilmente con i tempi di calcolo si è deciso di porre $\delta_1 = \delta_3 = 0$ in quanto questo è il caso in corrispondenza del quale si ottiene la massima correlazione tra coppie di alternative.

In figura 3.14 è riportato l'andamento della correlazione ρ_{AB} al variare di α_{1B} ed α_{1A} per un fissato valore di α_{2B} pari a 0.2, mentre in figura 3.15 si riporta il corrispondente andamento delle differenze tra i valori veri e quelli forniti dalla congettura (1.2.23); gli ordini di grandezza delle approssimazioni rilevate si mantengono entro limiti accettabili. Diagrammi analoghi sono riportati nelle figure 3.16 e 3.17 per il caso $\alpha_{2B} = 0.5$.

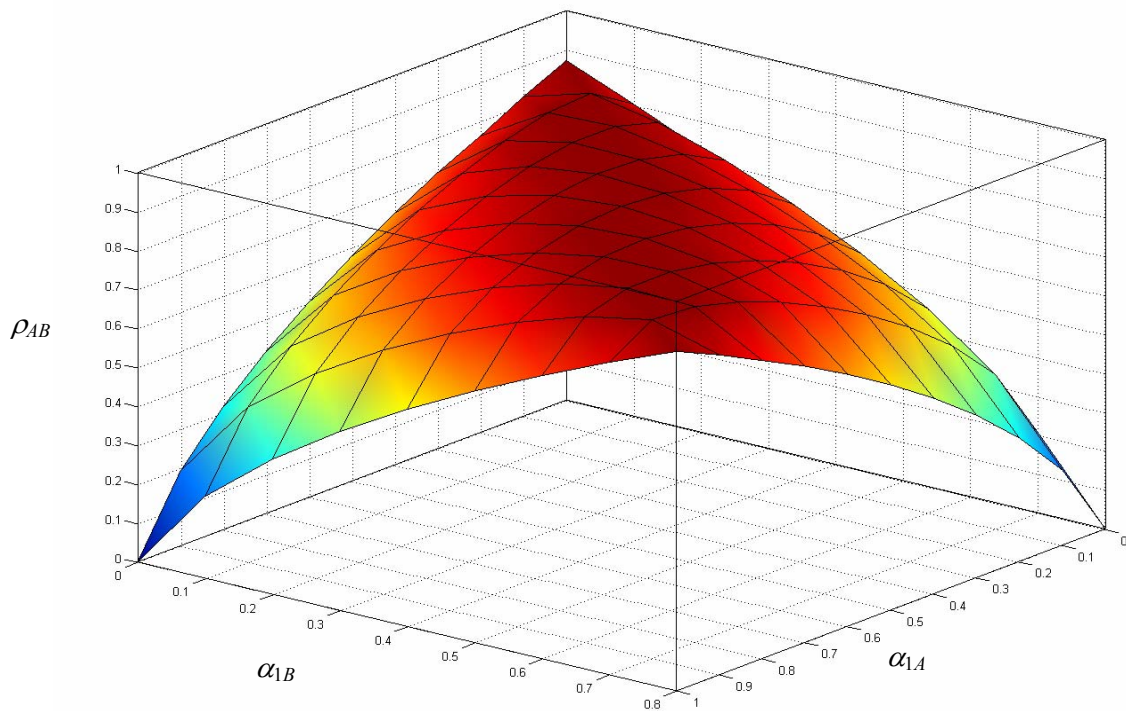


Figura 3.14 – Valori di ρ_{AB} per la struttura CNL di figura 3.13 ($\delta_1 = 0$ e $\delta_3 = 0$, $\alpha_{2B} = 0.2$)

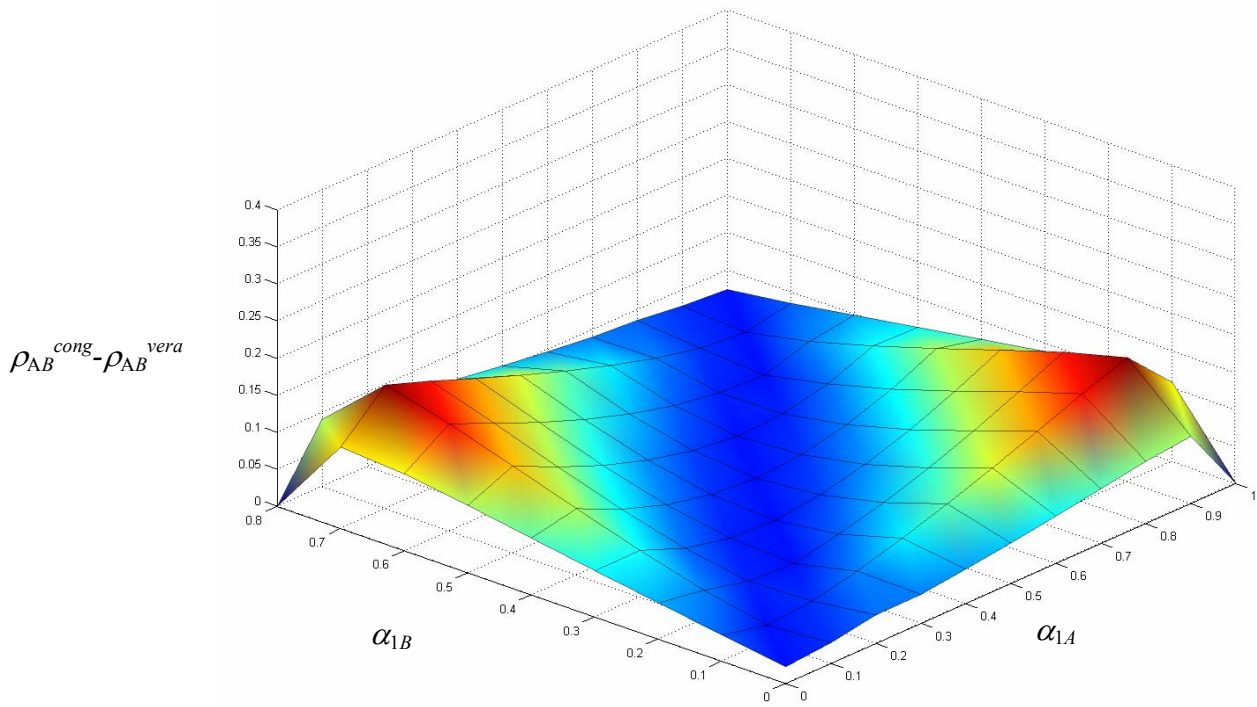


Figura 3.15 – Approssimazione congettura (1.2.23) per il caso di figura 3.14

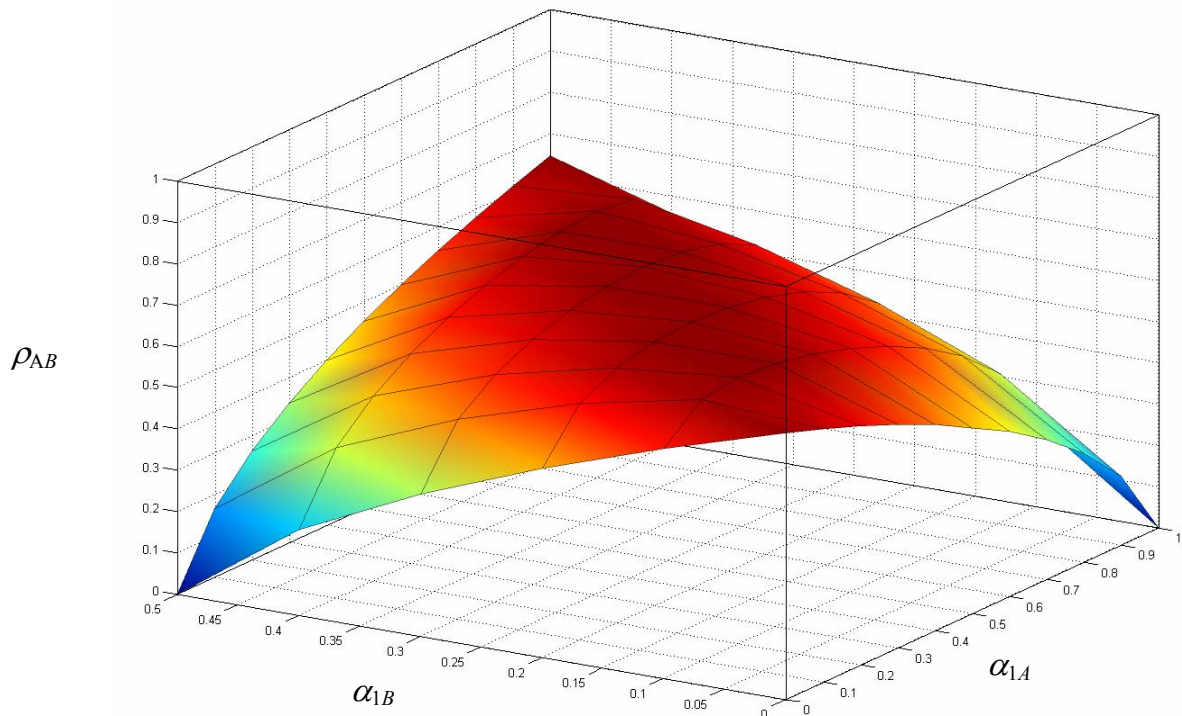


Figura 3.16 – Valori di ρ_{AB} per la struttura CNL di figura 3.13 ($\delta_1=0$ e $\delta_3=0$, $\alpha_{2B}=0.2$)

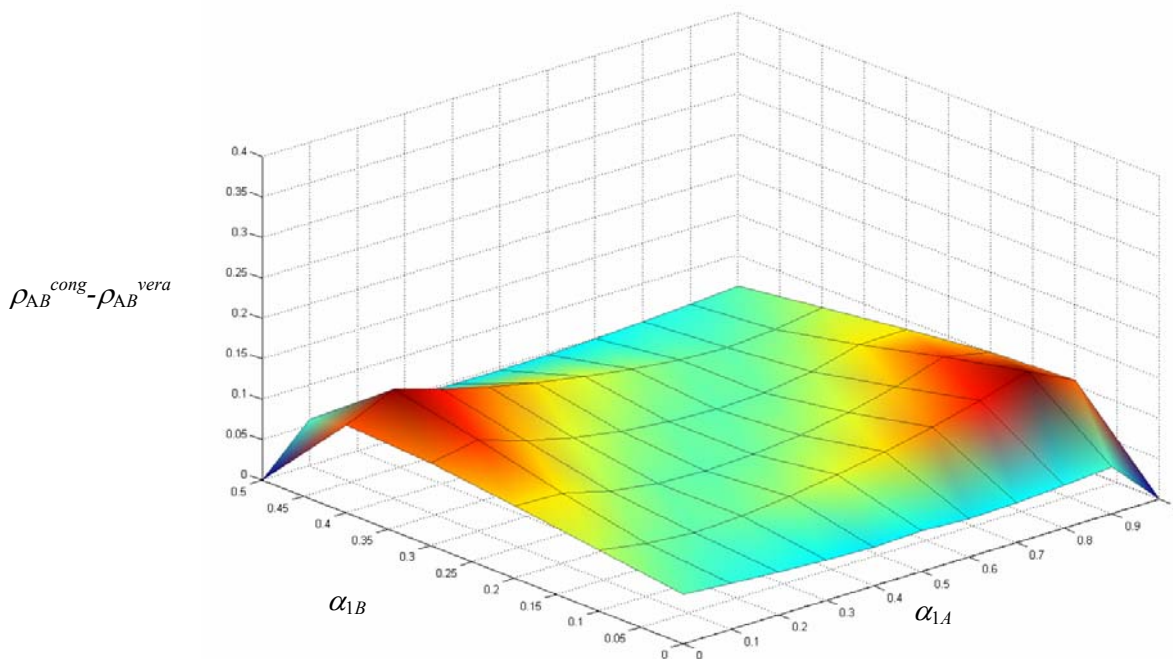


Figura 3.17 – Approssimazione congettura (1.2.23) per il caso di figura 3.16

Poiché la matrice di covarianze corrispondente all'esempio considerato è ancora la (3.3.19), anche il dominio di ammissibilità F_P delle matrici di covarianze semidefinite positive coincide con quello calcolato nel paragrafo 3.3.4.1. A differenza del caso precedente, non è però agevole determinare la frontiera del dominio F_{CNL} in quanto non si può ripetere il ragionamento di figura 3.5. Per questo motivo, si è deciso di diagrammare tutte le coppie di punti sperimentali del tipo (ρ_{AB}, ρ_{BC}) ottenute al variare dei gradi di appartenenza; in particolare, variando α_{1B} , α_{3B} ed α_{1A} tra 0 ed 1 si possono calcolare per differenza le quantità $\alpha_{2B}=1-\alpha_{1B}-\alpha_{3B}$ ed $\alpha_{3A}=1-\alpha_{1A}$ e poi determinare $\rho_{AB}=\rho_{AB}(\alpha_{1B}, \alpha_{3B}, \alpha_{1A})$ con i calcoli numerici qui riportati e $\rho_{BC}=\rho_{BC}(\alpha_{2B})$ con i calcoli numerici riportati nel paragrafo 3.3.4.1. I risultati sono riportati nel diagramma di figura 3.18, nella quale i gradi di appartenenza sono stati fatti variare con passo 0.1 tra 0 ed 1.

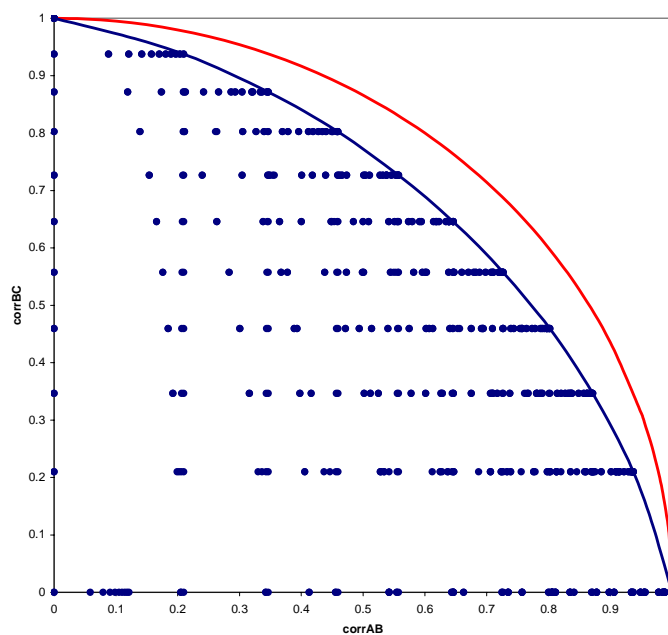


Figura 3.18– Confronto tra i domini di ammissibilità F_P e F_{CNL} per la struttura di figura 3.13

Il diagramma precedente propone numerosi spunti di riflessione. Innanzitutto, si evidenzia il risultato importante che l'aggiunta di un gruppo in comune tra le alternative A e B non permette nel caso in esame di ampliare la copertura di F_P in quanto la frontiera di F_{CNL} è rimasta la stessa; ovviamente, ciò è vero a rigore solo per i punti sperimentali calcolati, ma è ragionevole assumere che ciò accada anche per gli altri valori di δ_1 e δ_3 non esplorati. Per spiegare la posizione dei punti sperimentali, basta considerare che una volta fissato un valore di α_{2B} la correlazione tra B e C non varia al variare di α_{1B} ed α_{3B} nel rispetto del vincolo $\alpha_{2B}=1-\alpha_{1B}-\alpha_{3B}$ per cui è immediato riconoscere che ciascuna delle rette su cui sono allineati i punti corrisponde ad un valore di α_{2B} , in particolare per $\alpha_{2B}=0$ si ha $\rho_{BC}=0$ e per $\alpha_{2B}=1$ si ha $\rho_{BC}=1$. Una volta fissato un valore di α_{2B} , e quindi di ρ_{BC} , la correlazione tra A e B varia in funzione di α_{1B} ed α_{1A} come indicato ad esempio nel diagramma di figura 3.14 per il caso $\alpha_{2B}=0.2$, cui corrisponde una covarianza massima pari a $\rho_{BC}=0.346529$. Come si può notare, tutte le curve attingono un massimo in corrispondenza di $\rho_{AB}=0.871576$, ed infatti il punto $(0.871576, 0.346529)$ si trova sulle frontiere dei domini F_{CNL} riportati nelle figure 3.6 e 3.16.

In generale, l'espressione (3.3.21) permette di trattare una qualsiasi struttura CNL rappresentabile come in figura 3.19, ovvero nella quale due alternative A e B condividono due gruppi 1 e 3 ed in modo tale che l'alternativa A non appartenga ad alcun altro gruppo; ad esempio, la struttura di figura 3.20 alla luce dei risultati precedenti non aggiunge nulla in più rispetto alla struttura di figura 3.13 per la copertura del dominio delle matrici ammissibili.

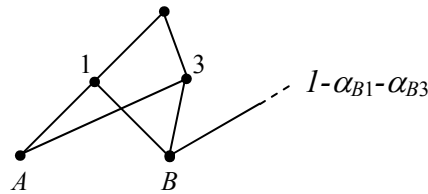


Figura 3.19– Gruppo di correlazione CNL corrispondente alla relazione (3.3.21)

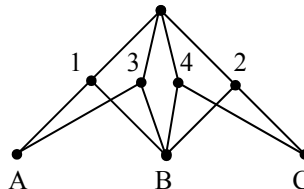


Figura 3.20– Struttura CNL trattabile attraverso la (3.3.21)

3.3.4.4 Generalizzazione della struttura CNL del paragrafo 3.3.4.2

Un'altra generalizzazione meritevole di approfondimento riguarda la struttura descritta nel paragrafo 3.3.4.2, cui può essere aggiunto un ulteriore gruppo in comune tra le alternative A e B , così come riportato in figura 3.21.

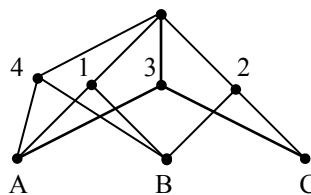


Figura 3.21 – Generalizzazione della specificazione CNL minima per tre alternative e matrice completa

L'interesse per questa struttura nasce dal fatto che la distribuzione congiunta dei residui delle alternative A e B , espressa dalla relazione:

$$F(\varepsilon_A \varepsilon_B) = e^{-\left[\alpha_{1A} \frac{\theta_0}{\theta_1} e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_1}} + \alpha_{1B} \frac{\theta_0}{\theta_1} e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_1}} \right]} e^{-\left[\alpha_{4A} \frac{\theta_0}{\theta_4} e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_4}} + \alpha_{4B} \frac{\theta_0}{\theta_4} e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_4}} \right]} e^{-(1-\alpha_{1B}-\alpha_{4B})e^{\frac{\varepsilon_B}{\theta_0}}} e^{-(1-\alpha_{1A}-\alpha_{4A})e^{\frac{\varepsilon_A}{\theta_0}}} \quad (3.3.22)$$

è rappresentativa di una qualsiasi struttura CNL del tipo rappresentato in figura 3.22, ovvero con due alternative A e B che condividono due gruppi I e 4 . In coerenza con quanto detto prima, la struttura di figura 3.22 rappresenta una generalizzazione dell'atomo di figura 3.10 per la costruzione di strutture CNL più complesse.

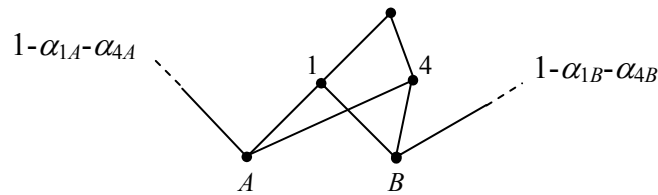


Figura 3.22 – Gruppo di correlazione CNL corrispondente alla relazione (3.3.22)

Appare quindi naturale calcolare per via numerica le correlazioni relative alla (3.3.22), ovvero alla struttura di figura 3.22, e confrontarle con le correlazioni massime riportate in figura 3.11 per la struttura di figura 3.10. Per brevità non si riportano i risultati relativi alla verifica dell'approssimazione della congettura (1.2.23), che anche nell'esempio considerato ha fornito una sovrastima accettabile delle correlazioni vere. E' invece osservare l'andamento riportato in figura 3.23 delle correlazioni massime riproducibili al variare dei parametri $1-\alpha_{1A}-\alpha_{4A}$ ed $1-\alpha_{1B}-\alpha_{4B}$ di non appartenenza ai gruppi in comune, per verificare se la struttura 3.21 generalizzi, in termini di correlazioni massime effettivamente riproducibili, quella di figura 3.10.

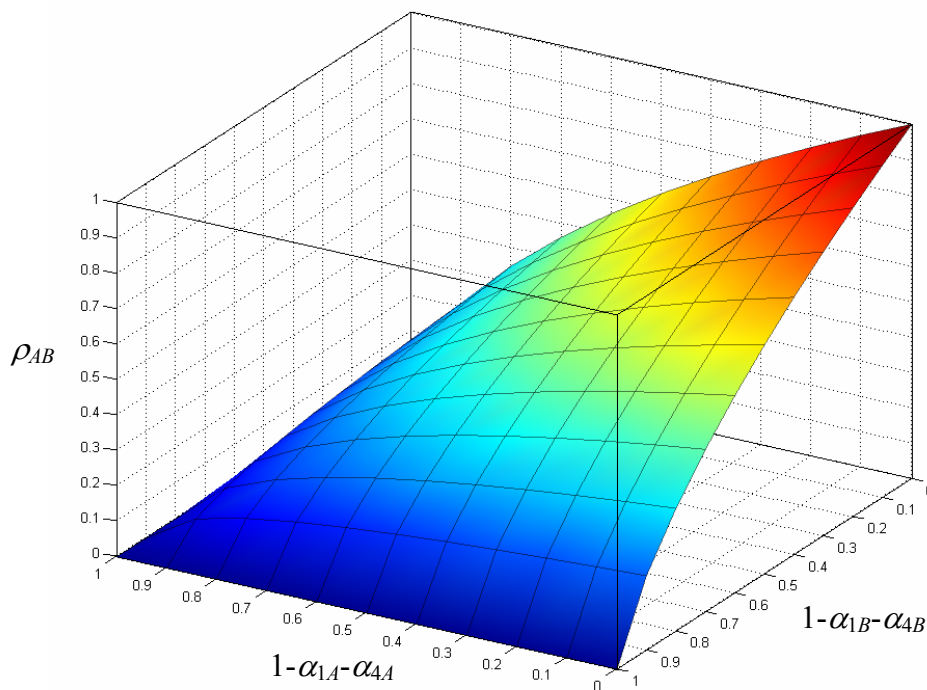


Figura 3.23 – Andamento della correlazione per la struttura di figura 3.22

Come si può notare, il diagramma ottenuto coincide con quello di figura 3.11, e ciò suggerisce la conclusione importante che le massime correlazioni riproducibili per una coppia di alternative con un CNL non dipendano da quanti gruppi queste alternative condividono, bensì dalla somma dei gradi di appartenenza in comune. In altre parole, poiché l'aggiunta di ulteriori gruppi comuni all'atomo di figura 3.10 non influisce sulle massime correlazioni riproducibili, il modello CNL più generale che si possa specificare è rappresentato dalla specificazione PCL (1.2.19), che è per l'appunto basata sulla specificazione di strutture di correlazione con gruppi binari.

Poiché si è dimostrato con gli esempi del paragrafo 3.3.4.2 che il dominio delle matrici F_{CNL} ammissibili corrispondente alla struttura PCL non copre l'intero dominio F_C delle matrici di covarianze definite positive, una conseguenza diretta di questo risultato è che, ai fini della copertura del dominio delle matrici di covarianze ammissibili, il modello Cross-Nested Logit non è in grado di riprodurre qualsiasi matrice di covarianze e pertanto non può essere considerato il modello GEV più generale.

3.3.4.5 Aspetti operativi per la specificazione di un modello CNL

A margine dello studio condotto sull'analisi delle covarianze riproducibili attraverso un modello Cross-Nested Logit si ritiene opportuno proporre una procedura operativa che consenta, nel rispetto dei limiti evidenziati nei paragrafi precedenti, di individuare operativamente una specificazione CNL in grado di riprodurre un'assegnata matrice di covarianze. Ciò assume particolare rilevanza nel contesto di scelta del percorso per il quale è possibile, come descritto nel paragrafo 1.3, formulare aspettative a priori circa la struttura di covarianze, ad esempio adottando una specificazione del tipo (1.3.24) ed (1.3.25). A tale scopo sono state implementate due differenti procedure, descritte in letteratura in Papola e Marzano (2005).

La prima procedura si basa sull'analogia formale che è possibile stabilire tra la congettura (1.2.23), che ha rivelato nelle prove numeriche precedenti un grado di approssimazione accettabile, e l'espressione delle covarianze in un factor-analytic Probit (paragrafo 1.2.2). Si è infatti visto che una data matrice di covarianze Σ è esprimibile attraverso la fattorizzazione di Choleski $\Sigma = FF^T$ nella quale F è una matrice quadrata triangolare bassa, il cui generico elemento si indichi con f_{ik} ; di conseguenza, se il vettore ε dei residui delle utilità delle alternative è normalmente distribuito e \mathbf{z} è un vettore di normali standard s-indipendenti si ottiene $\varepsilon = F^T \mathbf{z}$, a partire dalla quale è immediato ricavare la (1.2.26). Quest'ultima relazione, confrontata con la congettura (1.2.23), suggerisce una posizione del tipo:

$$\begin{aligned} \alpha_{ki} &= (f_{ik})^2 \quad \forall k, i \\ \delta_k &= 0 \quad \forall k \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

In altre parole, data una matrice di covarianza se ne calcola la fattorizzazione di Choleski e si specifica un CNL in accordo con le relazioni precedenti. Purtroppo, la procedura non ha fornito risultati soddisfacenti in applicazione, per alcune ragioni fondamentali. La prima è da ricollegarsi alla circostanza che, data una matrice Σ di ordine n , si possono determinare tante matrici di Choleski quante sono le possibili permutazioni tra alternative nella matrice Σ , ovvero $n!$; ci si attende ovviamente che le probabilità di scelta non cambino al variare dell'ordine delle alternative in Σ mentre, in conseguenza dell'instabilità introdotta dalla componente deterministica dovuta alla posizione $\delta_k = 0 \quad \forall k$ i corrispondenti modelli CNL così specificati forniscono probabilità

significativamente diverse tra loro. La seconda motivazione è legata alla circostanza che nella matrice F possono esservi anche elementi negativi: sebbene ciò non influisca in linea di principio sulla procedura proposta, si è osservato che le specificazioni CNL corrispondenti alla scelta di tali matrici prevedevano gruppi in comune anche tra alternative non correlate.

La seconda procedura sviluppata si basa sulla considerazione che, alla luce dei risultati proposti nel paragrafo precedente, il modo più generale per riprodurre una data matrice di covarianze attraverso un modello Cross-Nested è quello di specificare un PCL nel quale compaiano tanti gruppi quante sono le correlazioni non nulle da simulare. In questo modo si introducono tanti δ_k quante sono le correlazioni da simulare ed i gradi di appartenenza costituiscono parametri aggiuntivi che è possibile fissare nel modo più conveniente nel rispetto del vincolo di normalizzazione introdotto in precedenza. Appare in tal senso naturale porre:

$$\alpha_{ik} = 1/n_i \quad \forall i, k \quad (3.3.24)$$

dove n_i rappresenta il numero di correlazioni non nulle che interessano l'alternativa i , ovvero il numero di termini diversi dalla diagonale principale non nulli presenti sulla riga i -ma della matrice di covarianze. Una volta determinati i gradi di appartenenza attraverso la (3.3.24) è possibile sostituirli nella congettura (1.2.23) che si semplifica in quanto in una struttura di tipo PCL due alternative condividono al massimo un solo gruppo; di conseguenza si ottiene:

$$\delta_k = \left(1 - \frac{\rho_{ij}}{1/n_i^{1/2} \cdot 1/n_j^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (3.3.25)$$

La procedura consiste dunque nel calcolare i gradi di appartenenza dalla (3.3.24) e successivamente i parametri di varianza dalla (3.3.25). Di seguito si riportano alcuni risultati relativi ad un contesto di scelta rispettivamente con tre e quattro alternative; in particolare, sono state considerate diverse matrici di covarianze ed in corrispondenza di ciascuna si sono calcolate le probabilità di scelta calcolate con un Probit e quelle CNL ottenute applicando la procedura descritta.

Matrice di correlazione				Probabilità di scelta	
	A	B	C	CNL	PROBIT
A	1.00	0.50	0.30	0.297	0.293
B	0.50	1.00	0.10	0.327	0.334
C	0.30	0.10	1.00	0.376	0.373
A	1.00	0.50	0.00	0.322	0.330
B	0.50	1.00	0.50	0.299	0.295
C	0.00	0.50	1.00	0.379	0.376
A	1.00	0.50	0.00	0.364	0.368
B	0.50	1.00	0.30	0.273	0.261
C	0.00	0.30	1.00	0.364	0.371

Matrice di correlazione					Probabilità di scelta	
	A	B	C	D	CNL	PROBIT
A	1.00	0.30	0.20	0.10	0.237	0.229
B	0.30	1.00	0.00	0.00	0.244	0.244
C	0.20	0.00	1.00	0.00	0.256	0.258
D	0.10	0.00	0.00	1.00	0.263	0.269
A	1.00	0.30	0.20	0.30	0.227	0.210
B	0.30	1.00	0.10	0.10	0.254	0.258
C	0.20	0.10	1.00	0.00	0.265	0.272
D	0.30	0.10	0.00	1.00	0.254	0.260
A	1.00	0.30	0.00	0.00	0.251	0.256
B	0.30	1.00	0.20	0.00	0.242	0.238
C	0.00	0.20	1.00	0.30	0.249	0.244
D	0.00	0.00	0.30	1.00	0.258	0.262
A	1.00	0.30	0.00	0.00	0.261	0.266
B	0.30	1.00	0.30	0.00	0.239	0.234
C	0.00	0.30	1.00	0.30	0.239	0.233
D	0.00	0.00	0.30	1.00	0.261	0.267
A	1.00	0.30	0.30	0.30	0.228	0.213
B	0.30	1.00	0.30	0.00	0.250	0.252
C	0.30	0.30	1.00	0.00	0.250	0.251
D	0.30	0.00	0.00	1.00	0.272	0.284

Tabella 3.3 – Applicazione della procedura per riprodurre una data matrice di covarianze con un CNL

Come si può osservare dai valori numerici riportati in tabella 3.3, i risultati sono molto promettenti e le probabilità CNL sono prossime a quelle Probit. Occorre peraltro sottolineare che dalla (3.3.25) emerge un ulteriore limite sulle correlazioni riproducibili affinché sia rispettato il vincolo sui parametri di varianza imposto dal teorema di McFadden. In altre parole, il dominio delle matrici di covarianze riproducibili attraverso la procedura descritta è strettamente contenuto in F_{CNL} e pertanto, rispetto a quest'ultimo, consente di coprire una porzione minore del dominio F_P delle matrici di covarianze ammissibili.

3.3.5 Path Multilevel Logit

La procedura di calcolo numerico delle covarianze descritta nel paragrafo 3.3.1 può essere agevolmente applicata anche al modello PML; nel presente paragrafo si propongono alcuni esempi applicativi relativi alle reti test introdotte nel capitolo primo.

Poiché per la rete di Daganzo (figura 1.2) il modello PML si riduce ad un Logit Gerarchizzato, l'esempio più semplice di analisi di covarianze da investigare si riferisce alla rete di Daganzo "capovolta", introdotta nel capitolo secondo e riportata per comodità in figura 3.24 insieme alla corrispondente rete di scelta del modello PML.

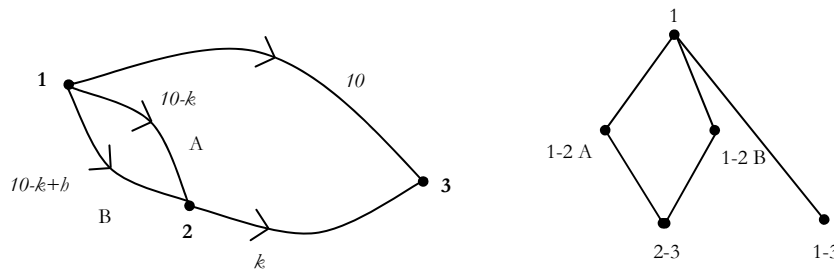


Figura 3.24 – Rete di Daganzo “capovolta” (a sinistra) e rete di scelta PML (a destra)

Ricordando che la funzione generatrice corrisponde al denominatore dell'espressione delle probabilità di diversione dall'origine, radice della rete di scelta PML, applicando in successione la (2.2.14) a partire dalle foglie e tenendo conto della (2.2.13) si ottiene:

$$p[23/2] = 1$$

$$p[13/1] = \frac{e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}}{e^{-\frac{c_{12A}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12A}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{12B}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12B}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}}$$

$$p[12_B/1] = \frac{e^{-\frac{c_{12B}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12B}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)}}{e^{-\frac{c_{12A}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12A}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{12B}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12B}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}}$$

$$p[12_A/1] = 1 - p[12_B/1] - p[13/1]$$

La funzione generatrice PML relativa alla rete di figura 3.24 dipende quindi dalle (dis)utilità di arco ed è data da:

$$G_{arco} = e^{-\frac{c_{12A}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12A}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{12B}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{12B}^{\theta_2/\theta_1} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \right)} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}} \quad (3.3.26)$$

La (3.3.26) può essere riformulata in modo da far comparire direttamente le (dis)utilità di percorso, ottenendo:

$$G_{perc} = \alpha_{12A} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12A-23}}{\theta_1}} + \alpha_{12B} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12B-23}}{\theta_1}} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}$$

dalla quale a norma della (3.3.1) è immediato risalire alla distribuzione congiunta dei residui aleatori delle utilità di percorso:

$$F(\varepsilon_{perc}) = e^{-\alpha_{12A} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12A-23}}{\theta_1}}} \cdot e^{-\alpha_{12B} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12B-23}}{\theta_1}}} \cdot e^{-e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}} \quad (3.3.27)$$

La determinazione della distribuzione marginale del residuo aleatorio di ciascun percorso, ottenibile dalla (3.3.27) applicando la (3.2.1), ne consente il calcolo di media e varianza:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{12A-23}) &= e^{-\alpha_{12A} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12A-23}}{\theta_1}}} & E[\varepsilon_{12A-23}] &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \ln \alpha_{12A} + \theta_1 \phi \\ F(\varepsilon_{12B-23}) &= e^{-\alpha_{12B} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 e^{-\frac{c_{12B-23}}{\theta_1}}} & \rightarrow E[\varepsilon_{12B-23}] &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \ln \alpha_{12B} + \theta_1 \phi \\ F(\varepsilon_{13}) &= e^{-e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1}}} & E[\varepsilon_{13}] &= \theta_1 \phi \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Introducendo nella (3.3.28) le specificazioni (2.2.8) e (2.2.11) rispettivamente proposte per i gradi di appartenenza ed i parametri di varianza, è possibile esprimere le medie dei residui di percorso in funzione della configurazione di costi riportata in figura 3.24:

$$\begin{aligned} \alpha_{12A} &= \frac{1/c_{12A}}{1/c_{12A} + 1/c_{12B}} = \frac{10-k+h}{2(10-k)+h} & E[\varepsilon_{12A-23}] &= \frac{\sqrt{6\xi \cdot 10}}{\pi} \frac{k}{10} \ln \frac{10-k+h}{2(10-k)+h} + \theta_1 \phi \\ \alpha_{12B} &= \frac{1/c_{12B}}{1/c_{12A} + 1/c_{12B}} = \frac{10-k}{2(10-k)+h} & \rightarrow E[\varepsilon_{12B-23}] &= \frac{\sqrt{6\xi \cdot 10}}{\pi} \frac{k}{10} \ln \frac{10-k}{2(10-k)+h} + \theta_1 \phi \\ \theta_1 &= \frac{\sqrt{6\xi \cdot 10}}{\pi} & E[\varepsilon_{13}] &= \theta_1 \phi \\ \theta_2 &= \frac{\sqrt{6\xi \cdot k}}{\pi} \end{aligned}$$

E' interessante notare che in questo esempio per $h=0$ il fattore di sovrapposizione introdotto dal PML coincide con la specificazione (1.3.7) del fattore di sovrapposizione del C-Logit.

Si noti che le distribuzioni marginali riportate nella (3.3.28) hanno dunque tutte pari varianza, ed è questo un risultato atteso in virtù dell'omoschedasticità dei modelli GEV, mentre le medie risultano tra loro diverse; inoltre, dal confronto tra la (3.3.28) e la (3.3.27) segue che la distribuzione congiunta dei residui è pari al prodotto delle marginali, condizione questa che evidenzia l'indipendenza dei residui stessi. Questo risultato suggerisce che, almeno in parte, il modello PML riproduce gli effetti della correlazione tra alternative con un meccanismo di penalizzazione delle utilità dei percorsi analogo a quello alla base dei modelli descritti nei paragrafi 1.3.1.1 ed 1.3.1.2. In particolare, poiché nella rete di Daganzo normale il PML si riconduce ad un Logit Gerarchizzato, e dunque simula correttamente la correlazione tra i due percorsi inferiori,

mentre nella rete di Daganzo capovolta degenera in un Logit Multinomiale con fattore di correzione dell'utilità delle alternative, si può ipotizzare che il modello PML sia in grado di introdurre un'effettiva dipendenza solo tra residui aleatori di percorsi "dall'alto", ai quali cioè corrisponda una struttura di correlazione di tipo Logit Gerarchizzato, e che simuli invece in maniera approssimata la correlazione "dal basso" attraverso un meccanismo che penalizzi le (dis)utilità dei percorsi correlati. Su questo punto si tornerà in dettaglio nel seguito con altri esempi.

Al fine di approfondire i risultati ottenuti sulla rete di figura 3.24, è utile analizzare le covarianze fornite dal PML nel caso della rete di Braess, riportata per comodità in figura 3.25 insieme alla corrispondente rete di scelta PML.

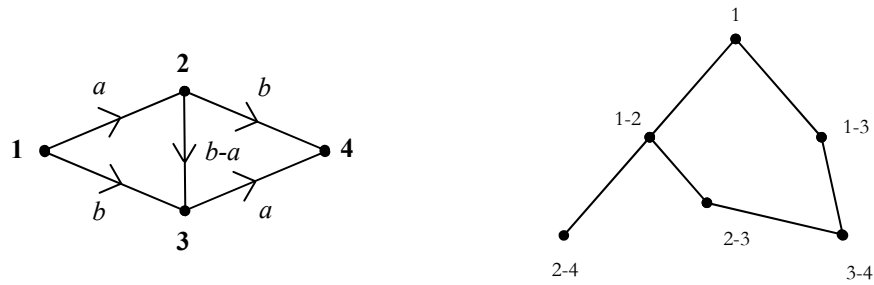


Figura 3.25 – Rete di scelta PML per la rete di Braess

Le probabilità di scelta fornite dal modello PML in corrispondenza di ciascun nodo della rete sono le seguenti:

$$p[34/3] = 1$$

$$p[23/2] = \frac{e^{-\frac{c_{23}}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\ln \alpha_{23}^{\theta_3/\theta_2} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)}}{e^{-\frac{c_{23}}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\ln \alpha_{23}^{\theta_3/\theta_2} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)} + e^{-\frac{c_{24}}{\theta_2}}}$$

$$p[24/2] = 1 - p[23/2]$$

$$p[12/1] = \frac{e^{-\frac{c_{12}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left[\ln \alpha_{12}^{\theta_2/\theta_1} + \ln \left(e^{-\frac{c_{23}}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\ln \alpha_{23}^{\theta_3/\theta_2} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)} + e^{-\frac{c_{24}}{\theta_2}} \right) \right]}}{e^{-\frac{c_{12}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left[\ln \alpha_{12}^{\theta_2/\theta_1} + \ln \left(e^{-\frac{c_{23}}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\ln \alpha_{23}^{\theta_3/\theta_2} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)} + e^{-\frac{c_{24}}{\theta_2}} \right) \right]} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1} + \frac{\theta_3}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{13}^{\theta_3/\theta_1} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)}}$$

$$p[13/1] = 1 - p[12/1]$$

dalle quali, tenendo conto di quanto detto in precedenza, è possibile ricavare l'espressione della funzione generatrice rispettivamente in termini di residui aleatori di arco e di percorso:

$$G_{arco} = e^{-\frac{c_{12}}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1} \left[\ln \alpha_{12}^{\theta_2/\theta_1} + \ln \left(e^{-\frac{c_{23}}{\theta_2} + \frac{\theta_3}{\theta_2} \left(\ln \alpha_{23}^{\theta_3/\theta_2} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)} + e^{-\frac{c_{24}}{\theta_2}} \right) \right]} + e^{-\frac{c_{13}}{\theta_1} + \frac{\theta_3}{\theta_1} \left(\ln \alpha_{13}^{\theta_3/\theta_1} - \frac{c_{34}}{\theta_3} \right)}$$

$$G_{perc} = \left(\alpha_{23}^{\left(\frac{\theta_3}{\theta_2} \right)^2} \alpha_{12}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} e^{-\frac{c_{12} + c_{23} + c_{34}}{\theta_2}} + \alpha_{12}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} e^{-\frac{c_{12} + c_{24}}{\theta_2}} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \alpha_{13}^{\left(\frac{\theta_3}{\theta_1} \right)^2} e^{-\frac{c_{13} + c_{34}}{\theta_1}} \quad (3.3.29)$$

Di conseguenza, la legge di distribuzione congiunta dei residui di percorso soggiacente il modello PML per la rete di Braess è la seguente:

$$F(\varepsilon_{perc}) = e^{-\left(\alpha_{23} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 \frac{\theta_2}{\alpha_{12} \theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{1234}}{\theta_2}} + \alpha_{12} \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{124}}{\theta_2}} \right) \frac{\theta_2}{\theta_1}} e^{-\alpha_{13} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{134}}{\theta_1}}} \quad (3.3.30)$$

dalla quale si possono agevolmente determinare le distribuzioni marginali dei singoli residui di percorso e le rispettive medie:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{134}) &= e^{-\alpha_{13} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{134}}{\theta_1}}} & E[\varepsilon_{134}] &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \ln \alpha_{13} + \theta_1 \phi \\ F(\varepsilon_{1234}) &= e^{-\alpha_{23} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 \frac{\theta_2}{\alpha_{12} \theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{1234}}{\theta_2}} - \alpha_{12} \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{124}}{\theta_2}}} & \rightarrow E[\varepsilon_{1234}] &= \frac{\theta_2^2}{\theta_2} \ln \alpha_{23} + \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \ln \alpha_{12} + \theta_1 \phi \\ F(\varepsilon_{124}) &= e^{-\alpha_{12} \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\frac{\varepsilon_{124}}{\theta_2}}} & E[\varepsilon_{124}] &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \ln \alpha_{12} + \theta_1 \phi \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Ancora una volta, i residui sono omoschedastici e presentano medie diverse; è inoltre immediato riconoscere dalla (3.3.30) che il percorso *1-3-4* è indipendente dagli altri due, mentre i percorsi *1-2-3-4* e *1-2-4* risultano correlati in quanto la distribuzione congiunta dei loro residui non è pari al prodotto delle rispettive marginali. Tale risultato conferma le considerazioni precedentemente riportate a proposito della capacità del PML di simulare in modo esatto le correlazioni dall'alto ed in modo approssimato quelle dal basso: infatti, i percorsi *1-2-3-4* e *1-2-4* condividono il primo arco e dunque il PML ne simula la correlazione, mentre i percorsi *1-2-3-4* e *1-3-4* condividono l'ultimo arco e per il PML non sono correlati. L'espressione dei gradi di appartenenza e dei parametri di varianza per la configurazione di costi di figura 3.25 risulta, in accordo con la (2.2.8) e la (2.2.11):

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= 1 & \theta_1 &= \frac{\sqrt{6\xi(a+b)}}{\pi} \\ \alpha_{13} &= \frac{1/c_{13}}{1/c_{13} + 1/(c_{12} + c_{23})} = 0.5 & \text{e} & \theta_2 = \frac{\sqrt{6\xi b}}{\pi} \\ \alpha_{23} &= \frac{1/(c_{12} + c_{23})}{1/c_{13} + 1/(c_{12} + c_{23})} = 0.5 & & \theta_3 = \frac{\sqrt{6\xi a}}{\pi} \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

e quindi, per sostituzione nella (3.3.31) si ottiene:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{134}] &= -\theta_1 \frac{a}{a+b} \ln 2 + \theta_1 \phi \\ E[\varepsilon_{1234}] &= -\theta_2 \frac{a}{b} \ln 2 + \theta_1 \phi \\ E[\varepsilon_{124}] &= \theta_1 \phi \end{aligned}$$

In questo caso il fattore di sovrapposizione fornito dal PML non risulta coincidente con nessuna delle espressioni riportate nei paragrafi 1.3.1.1 ed 1.3.1.2. In generale, le relazioni (3.3.28)

e (3.3.31) suggeriscono che il modello PML corregga l'utilità di ciascun percorso utilizzando un'espressione del tipo:

$$CF_k^{PML} = \sum_{ij \in k} \frac{\theta_j^2}{\theta_i} \ln \alpha_{ij} = \sum_{ij \in k} \frac{Z_{j,d}}{Z_{i,d}} \frac{\sqrt{6\xi Z_{i,d}}}{\pi} \ln \alpha_{ij} \quad (3.3.33)$$

nella quale si è utilizzata la notazione introdotta nel capitolo secondo.

Sostituendo i valori (3.3.32) nella (3.3.30) e passando al limite per $\varepsilon_{134} \rightarrow +\infty$ si può scrivere la funzione di distribuzione congiunta dei residui ε_{134} ed ε_{1234} :

$$F(\varepsilon_{1234}, \varepsilon_{124}) = e^{-\left(0.50 \frac{a}{b} e^{-\frac{\varepsilon_{1234}}{\theta_2}} + e^{-\frac{\varepsilon_{124}}{\theta_2}}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}} \quad (3.3.34)$$

a partire dalla quale si può dedurre l'andamento della covarianza al variare del rapporto a/b e confrontarlo con la specificazione (1.3.28) di Daganzo e Sheffi. In particolare, in virtù della proprietà $Cov[ax+b, cy+d] = ac Cov[x, y]$ ne consegue che la (3.3.34) corrisponde alla distribuzione dei residui di una coppia di alternative che abbiano come antenato comune un nodo di parametro θ_2 in un Logit Gerarchizzato, per cui si ha:

$$Corr[\varepsilon_{1234}, \varepsilon_{134}] = 1 - \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^2 = \frac{a}{a+b}$$

che quindi coincide con la specificazione (1.3.28) introdotta per il modello Probit.

Un esempio che aiuta a chiarire gli aspetti sin qui evidenziati è costituito dalla rete riportata in figura 3.26, costituita da 11 archi ed 8 percorsi; essa è infatti costruita in modo che alcune coppie di percorsi, ad esempio 1 e 3 ed 1 e 4, condividano sia archi iniziali sia finali. Ripetendo il procedimento sin qui applicato si perviene alla seguente funzione di distribuzione congiunta dei residui aleatori di percorso:

$$F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_8) = e^{-\left(e^{-\frac{\varepsilon_8}{\theta_5}} + \left(e^{-\frac{\varepsilon_7}{\theta_6}} + e^{-\frac{\varepsilon_6}{\theta_6}}\right)^{\frac{\theta_6}{\theta_5}}\right)^{\frac{\theta_5}{\theta_1}}} \cdot e^{-\left(\left(e^{-\frac{\varepsilon_5}{\theta_5}} + \left(e^{-\frac{\varepsilon_4}{\theta_6}} + e^{-\frac{\varepsilon_3}{\theta_6}}\right)^{\frac{\theta_6}{\theta_5}}\right)^{\frac{\theta_5}{\theta_2}} + \left(e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta_6}} + e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta_6}}\right)^{\frac{\theta_6}{\theta_2}}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}} \quad (3.3.35)$$

nella quale il generico residuo di percorso ha una media esattamente espressa dalla (3.3.33). La (3.3.35) conferma tutte le osservazioni precedentemente proposte, in quanto ad esempio i percorsi 5 ed 8 nella realtà sono completamente sovrapposti a meno del primo arco e per il modello PML risultano invece indipendenti.

Per verificare cosa accade alle coppie di percorsi precedentemente menzionate basta osservare la struttura Logit Gerarchizzato corrispondente alla (3.3.35), riportata in figura 3.27.

E' immediato verificare che ciascuna coppia di percorsi presenta come antenato comune più lontano il nodo della struttura Logit Gerarchizzato corrispondente alla testa dell'ultimo arco che la coppia di percorsi divide partendo dall'origine della rete reale, e ciò conferma la correttezza delle osservazioni proposte a proposito della struttura di covarianze soggiacente il modello PML.

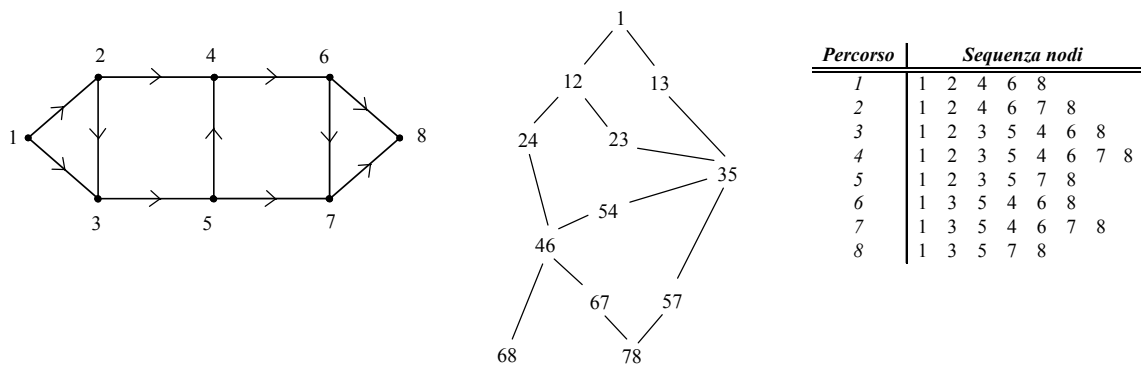


Figura 3.26 – Rete test per l'analisi delle covarianze riprodotte dal modello PML

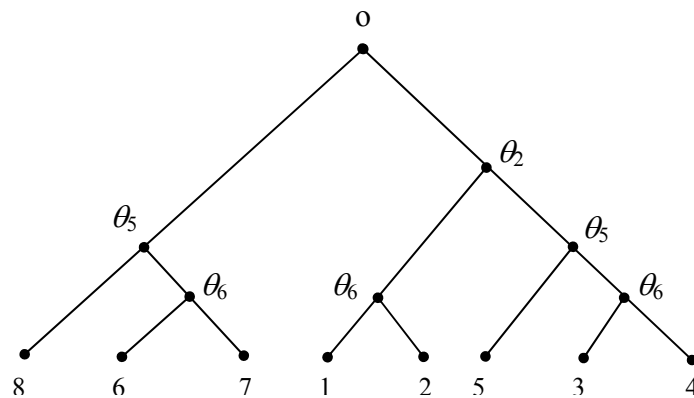


Figura 3.27 – Struttura Logit Gerarchizzato corrispondente alla (3.3.35)

Le considerazioni sin qui proposte consentono di provare l'appartenenza del PML alla classe dei modelli GEV, ed in particolare la sua equivalenza con un Logit Gerarchizzato, a patto che si introducano ipotesi sul fattore (3.3.33) affinché siano rispettate le ipotesi del teorema di McFadden (1978). A tal fine basta ricordare che, per un qualsiasi modello GEV, tutti i parametri presenti all'interno del modello non devono dipendere dalle utilità sistematiche delle alternative di scelta, in modo che rimangano costanti nel calcolo delle derivate parziali della funzione generatrice. Rispetto al PML, ciò implica che i gradi di appartenenza ed i parametri di varianza definiti nel capitolo secondo non devono dipendere da attributi di costo congestionato dei percorsi; è questa peraltro una condizione cui normalmente soggiacciono anche gli altri modelli di scelta del percorso: ad esempio, gli attributi rispetto ai quali si calcola la sovrapposizione tra percorsi alla Daganzo e Sheffi (paragrafo 1.3.4) devono essere ipotizzati costanti.

3.4 Modelli di utilità aleatoria additivi ed omoschedasticità

Nello studio fin qui condotto sono state introdotte alcune proprietà dei modelli di utilità aleatoria particolarmente importanti ai fini dell'applicazione al contesto di scelta del percorso. In particolare, ci si è soffermati sui seguenti aspetti:

- è utile ipotizzare nelle applicazioni che la legge di distribuzione dei residui aleatori delle utilità percepite non dipenda dalle utilità sistematiche o da suoi attributi: questa proprietà è, come detto nel capitolo primo, caratteristica dei modelli di utilità aleatoria additivi;
- poiché il contesto di scelta del percorso è intrinsecamente caratterizzato da alternative di diversa varianza, come ad esempio esplicitato attraverso la specificazione (1.3.24) di Daganzo e Sheffi,

- occorre poter disporre di modelli in grado di simulare contesti di scelta eteroschedastici;
- disporre di un'espressione in forma chiusa delle probabilità di scelta rappresenta una condizione necessaria per implementare algoritmi di assegnazione efficienti e robusti.

Come descritto nel capitolo primo, nell'ambito dell'insieme dei modelli additivi è possibile individuare una classe di modelli coerenti con le ipotesi del teorema di McFadden, denominati modelli GEV, che possono annoverarsi tra i modelli di utilità aleatoria di più larga e consolidata applicazione.

Nel complesso, le classificazioni dei modelli additivi in ragione delle proprietà prima elencate risultano fortemente connesse, così come sottolinea una vasta gamma di studi di letteratura ampiamente condivisi³¹. In particolare, si riconosce che i modelli GEV derivati dalle ipotesi del teorema di McFadden sono omoschedastici, come sottolineato senza una esplicita dimostrazione nel contributo di Bierlaire et al. (2003), ed in forma chiusa, mentre non è possibile riprodurre contesti di scelta eteroschedastici con modelli additivi in forma chiusa, come dimostrano ad esempio il modello Heteroskedastic Extreme Value (HEV) di Bhat³² (1995) ed il modello Probit.

Rispetto a questi risultati ampiamente condivisi esistono alcuni studi di letteratura, ad esempio nei contributi di Smith (1984), Dagsvik (1995), Joe (2001) e Daly (2005), sulla possibilità che la classe dei modelli GEV sia più ampia in termini matematici rispetto a quanto finora stimato, ovvero che un modello GEV possa approssimare un qualsiasi modello di utilità aleatoria additivo; appare in tal senso evidente che un tale risultato imponga una rilettura delle classificazioni precedentemente indicate. Ad esempio, se è vero che tutti i modelli additivi sono GEV significa che vi sono modelli GEV non in forma chiusa, e questa circostanza sembra essere intuitivamente compatibile con le ipotesi del teorema di McFadden; inoltre, è vero che tutti i modelli additivi sono omoschedastici oppure che esistono modelli GEV eteroschedastici, il che apre problemi teorici notevoli in quanto un simile risultato sembra incompatibile con il teorema di McFadden.

Questo paragrafo è per l'appunto dedicato ad alcuni approfondimenti mirati alla verifica della relazione tra classe dei modelli GEV e classe dei modelli additivi, ed alla conseguente rilettura delle proprietà di eteroschedasticità e di forma non chiusa, alla luce dei dubbi prima espressi. In particolare, nell'affrontare il problema dell'eteroschedasticità è di aiuto un contributo di Daly (2001c) che teorizza in una congettura, denominata homoskedasticity "chimeral" lemma, la possibilità che una qualsiasi matrice di covarianze eteroschedastica relativa ad un modello Probit additivo possa essere trasformata in una matrice omoschedastica equivalente, ovvero tale che il corrispondente modello conduca alle medesime probabilità di scelta. In particolare, il paragrafo 3.4.1 tratta la relazione tra la classe dei modelli GEV e quella dei modelli additivi, mentre il paragrafo 3.4.2 affronta in dettaglio e generalizza il lemma di Daly (2001c).

3.4.1 Relazione tra le classi dei modelli GEV e dei modelli di utilità aleatoria additivi

Molti dei lavori citati nei paragrafi 1.2 e 3.4 affrontano, seppur con un taglio ed un livello di approfondimento diverso, il problema di definire un insieme di condizioni necessarie e/o

³¹ Tra gli articoli si richiamano in particolare Bunch (1991), Yai et al. (1997), Bhat (1997), Bolduc (1999) e Munizaga et al. (1999), mentre tra i libri ci si riferisce a Ben-Akiva e Lerman (1985), Cascetta (2001) e Train (2003).

³² Ovviamente il modello HEV è additivo se si assume che il parametro di varianza di ciascuna alternativa non dipenda dalle utilità sistematiche delle alternative stesse. In Bhat (1995) è anche riportata una proposta di specificazione di tali parametri in funzione di attributi del decisore, nel qual caso viene meno l'ipotesi di additività.

sufficienti per individuare e specificare modelli di utilità aleatoria additivi. In ragione dei loro obiettivi, è possibile in particolare classificare ed individuare contributi che mirano a:

- definire il ruolo dei modelli di utilità aleatoria, additivi e non, nell'ambito della teoria delle scelte probabilistiche: è il caso, ad esempio, di Block e Marschak (1960) e Luce e Suppes (1965), che focalizzano l'attenzione sull'analisi della consistenza della teoria dell'utilità aleatoria con gli assiomi della teoria di scelta probabilistica piuttosto che su problematiche di carattere operativo ed applicativo;
- definire la classe dei modelli di utilità aleatoria additivi da un punto di vista pratico, specificando direttamente una tipologia di modelli additivi, ad esempio McFadden (1978), o proponendo un insieme di condizioni cui un vettore di probabilità di scelta deve soggiacere perché ne sia garantita l'additività, ad esempio Daly e Zachary (1976) e Zachary (1977);
- analizzare le relazioni esistenti tra le classi di modelli proposti, ad esempio verificando le proprietà matematiche della classe GEV rispetto a quella dei modelli additivi e/o discutendo la consistenza tra le diverse condizioni imposte per definire una classe di modelli: a questa categoria appartengono i contributi di Smith (1984), Borsch-Supan (1990), Dagsvik (1995), Joe (2001), Daly (2005), Ibanez e Batley (2005).

E' proprio l'ultima categoria di ricerche quella di maggior interesse per il problema in esame; in tale ambito vi sono risultati in parte contrastanti e, come accennato in precedenza, alcune convinzioni diffuse in letteratura ma non dimostrate; appare quindi opportuno proporre alcune considerazioni a tal proposito.

Il teorema di McFadden, enunciato nel paragrafo 1.2.1, rappresenta uno strumento versatile di costruzione di un modello di utilità aleatoria a partire da una funzione $G(y_1 \dots y_n)$ definita in R_0^+ , omogenea³³ di grado $\mu > 0$ e non negativa, che tenda ad infinito per ogni $y_i \rightarrow +\infty$ e le cui derivate parziali soddisfino la seguente condizione:

$$(-1)^k \frac{\partial^k G(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{a_1} \dots \partial y_{a_k}} \leq 0$$

nella quale $(a_1 \dots a_k)$ è una generica k -pla non ordinata dell'insieme $(1 \dots n)$. La consistenza del modello GEV con la teoria dell'utilità aleatoria è garantita dal fatto che la probabilità di scelta (1.2.7) è ottenuta nella dimostrazione del teorema applicando direttamente la definizione di massimizzazione dell'utilità rappresentata dall'integrale (1.2.6).

Al fine di dimostrare la tesi del teorema di McFadden (1978), occorre innanzitutto verificare che la funzione $F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m) = \exp[-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_m})]$ sia effettivamente una legge di distribuzione di probabilità multivariata. Perché ciò accada devono essere dimostrate tre proprietà³⁴; la prima è che deve risultare:

³³ In realtà, poiché μ può essere un qualsiasi numero reale positivo, la proprietà $G(\alpha \mathbf{y}) = \alpha^\mu G(\mathbf{y})$ ha senso solo per $\alpha > 0$ per cui la funzione G è positivamente omogenea, che è una proprietà più forte della semplice omogeneità. Si noti che se $\mu \neq 0$ e la funzione G è definita per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, risulta $G(\alpha \mathbf{0}) = \alpha^\mu G(\mathbf{0}) \rightarrow G(\mathbf{0}) = \alpha^\mu G(\mathbf{0})$, e se per assurdo fosse $G(\mathbf{0}) \neq 0$ risulterebbe $\alpha^\mu = 1 \forall \alpha > 0$ il che è impossibile avendo ipotizzato $\mu \neq 0$. Ne consegue quindi che la proprietà di positiva omogeneità di G implica che $G(\mathbf{0}) = 0$. In merito alle funzioni positivamente omogenee esiste il teorema di Eulero, che stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia positivamente omogenea di grado $\mu > 0$ è che risulti verificata l'uguaglianza $\mu G(y_1 \dots y_n) = y_1 G_1(y_1 \dots y_n) + \dots + y_n G_n(y_1 \dots y_n)$.

³⁴ Ovviamente il codominio della F è l'intervallo $[0, 1]$ e ciò è garantito a priori dalla non negatività della G .

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow +\infty} F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = 0 \quad \forall i \quad (3.4.1)$$

e ciò è garantito dalla condizione di divergenza positiva della funzione G per ogni $y_i \rightarrow +\infty$. La seconda è:

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ \varepsilon_n \rightarrow +\infty}} F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = 1 \quad (3.4.2)$$

ed è verificata in virtù della condizione $G(\mathbf{0})=0$ che, come si è detto, è una proprietà più debole dell'omogeneità; in altri termini, la positiva omogeneità è condizione sufficiente ma non necessaria. La terza proprietà è che le derivate parziali della F , fino a quelle di ordine n se n sono le alternative di scelta, devono essere tutte non negative. Tenendo conto della forma funzionale della F , tali le derivate parziali possono essere poste nella forma:

$$\frac{\partial^k F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)}{\partial \varepsilon_{s_1} \dots \partial \varepsilon_{s_k}} = \prod_{i=1}^k e^{-\varepsilon_{s_i}} \cdot Q_{s_1 \dots s_k}(y_1 \dots y_n) \cdot F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) \quad (3.4.3)$$

nella quale $\{s_1, \dots, s_k\}$ è una qualsiasi sequenza di indici appartenenti all'insieme $\{1, \dots, n\}$ e la funzione Q è definita in modo ricorsivo come:

$$Q_{s_1 \dots s_k}(y_1 \dots y_n) = \begin{cases} \frac{\partial G(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_1}} & \text{se } k=1 \\ \frac{\partial G(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_k}} \cdot Q_{s_1 \dots s_{k-1}}(y_1 \dots y_n) - \frac{\partial Q_{s_1 \dots s_{k-1}}(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_k}} & \text{se } k>1 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

E' immediato riconoscere che in $Q_{s_1 \dots s_k}$ compaiono derivate parziali di G fino a quelle di ordine k . Se $Q_{s_1 \dots s_{k-1}}$ è costituito da tutti termini positivi presi con il proprio segno, ne consegue che il primo termine della (3.4.4) è positivo perché le derivate prime di G sono non negative; inoltre, il secondo termine della (3.4.4) è formato da tutti termini non positivi, in quanto ognuno dei termini di $Q_{s_1 \dots s_{k-1}}$ genera un termine con una derivata parziale di G che è aumentata di un ordine, e quindi ha cambiato segno in ogni caso per le ipotesi sui segni delle derivate parziali della G . Quindi se tutti i termini di $Q_{s_1 \dots s_{k-1}}$ sono positivi anche tutti i termini di $Q_{s_1 \dots s_k}$ sono positivi, e siccome Q_{s_1} è non negativa si deduce dalla (3.4.3) che tutte le derivate parziali della F sono non negative, e quindi F è effettivamente una legge di distribuzione cumulata multivariata. Inoltre, passando al limite per tutti i residui aleatori tranne l' i -mo scelto come riferimento, si ha:

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ \varepsilon_n \rightarrow +\infty}} F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = e^{-G(0, \dots, e^{-\varepsilon_i}, \dots, 0)} \quad (3.4.5)$$

In altre parole, per ricavare una funzione di distribuzione congiunta $F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ con marginali (3.4.5) a partire da una generatrice $G(y_1 \dots y_n)$ basta ipotizzare che G sia non negativa, diverga positivamente $\forall y_i \rightarrow +\infty$, che risulti $G(\mathbf{0})=0$ e che le derivate parziali rispettino la nota condizione sui segni. Se poi si ipotizza l'omogeneità di G di grado μ si ottiene:

$$G(e^{-\varepsilon_i} \cdot 0, \dots, e^{-\varepsilon_i} \cdot 1, \dots, e^{-\varepsilon_i} \cdot 0) = e^{-\mu \varepsilon_i} G(0, \dots, 1, \dots, 0) \quad (3.4.6)$$

per cui la (3.4.5) diviene:

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ \varepsilon_n \rightarrow +\infty}} F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = e^{-G(0, \dots, e^{-\varepsilon_i}, \dots, 0)} = e^{-G(0, \dots, 1, \dots, 0)} e^{-\mu \varepsilon_i} \quad (3.4.7)$$

che confrontata con la (3.2.4) mostra che la F è una distribuzione di valore estremo multivariato con marginali distribuite secondo una v.a. di Gumbel di uguale varianza, proporzionale ad $1/\mu^2$, e medie date da $\theta_0 \ln G(0, \dots, 1, \dots, 0)$, dove il termine 1 è posto nell' i -ma posizione per la marginale i -ma. In altre parole, la condizione di omogeneità della funzione G garantisce che le marginali della distribuzione di valore estremo multivariato trovata siano omoschedastiche³⁵. Questo risultato è ovviamente coerente con i teoremi richiamati nel paragrafo 3.2.2.2, secondo cui una funzione multivariata di valore estremo a marginali Gumbel omoschedastiche è definita come $F(\mathbf{x}) = \exp[-G(e^{-x})]$ essendo G una funzione omogenea.

Una volta dimostrato che F è una distribuzione di probabilità, per derivare il corrispondente modello di utilità aleatoria basta ricorrere alla definizione generale (1.2.2), che può essere riscritta tenendo conto che la probabilità di scelta di un'alternativa i è pari al prodotto tra la probabilità che l'utilità di quell'alternativa assuma un certo valore per la probabilità che le utilità delle altre alternative siano minori di quel valore, integrato su tutti i possibili valori di utilità dell'alternativa i ³⁶:

$$p[i] = \int_{\varepsilon_i = -\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} F(\varepsilon_i + V_i - V_1, \dots, \varepsilon_i + V_i - V_{i-1}, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_i + V_i - V_n) d\varepsilon_i \quad (3.4.8)$$

Per ottenere l'espressione di probabilità (1.2.7) dei modelli GEV basta sostituire la (3.4.7) nella (3.4.8), ed assumere le ipotesi di omogeneità e di additività, che risultano necessarie nella semplificazione dell'integrale (3.4.8). Sebbene non sia esplicitamente esplorata in letteratura, esiste ovviamente la possibilità che vi sia una funzione G che rispetti tutte le condizioni di McFadden e che però non sia dotata di espressione elementare: in questo caso l'espressione di probabilità (1.2.7) continua formalmente a valere ma non è in realtà un'espressione in forma chiusa; in questo senso, l'esistenza di modelli GEV non in forma chiusa appare compatibile con il teorema di McFadden. Alcuni esempi di funzioni generatrici di questo tipo sono riportati nel seguito del paragrafo.

Per ulteriori dettagli e per una disamina accurata delle ipotesi alla base di McFadden è proposta da Ibanez e Batley (2005), anche se con un risultato non corretto per quanto riguarda l'assunzione sui segni delle derivate parziali della G ³⁷.

In definitiva, il teorema di McFadden individua una classe di funzioni G_n tali che una qualsiasi $G \in G_n$ genera una distribuzione di valore estremo $F(x_1 \dots x_n) = \exp[-G(e^{-x_1} \dots e^{-x_n})] \in F_n$, essendo

³⁵ Si noti per inciso che la funzione $G(y_i) = \sum y_i^{\mu}$, che è la "generatrice" del modello HEV, non è omogenea ma verifica la (3.4.6) ed inoltre sostituita nella (3.4.7) restituisce marginali Gumbel eteroschedastiche, ciascuna di varianza proporzionale a $1/\mu_i^2$; essa però non rientra nel teorema di McFadden, e dunque il modello HEV non è un GEV in quanto le distribuzioni multivariate di valore estremo sono per definizione a marginali omoschedastiche e con funzioni generatrici (o di dipendenza) omogenee.

³⁶ Questa espressione vale per qualsiasi modello di utilità aleatoria, si veda McFadden (1981), formula (5.2) pag. 204.

³⁷ Ibanez e Batley (2005) sostengono che la condizione sui segni delle derivate parziali della G è sufficiente ma non necessaria per la (3.4.4), mentre il contributo di Smith (1984) di cui si dirà tra breve prova che in realtà esse sono equivalenti. Di conseguenza le due relazioni, denominate GEV4 e GEV4b nel loro articolo, si equivalgono a norma del teorema dimostrato nell'appendice dell'articolo di Smith (1984).

F_n la classe delle funzioni di distribuzione cumulata n -variata reali e continue. Ipotizzando che F sia invertibile – ciò è garantito se si assume che sia strettamente monotona – si può allora scrivere $G(e^{-x_1} \dots e^{-x_n}) = -\ln F[-\ln(x_1 \dots x_n)]$ e quindi si conclude che, se esiste una $G \in G_n$ in grado di generare una certa $F \in F_n$ allora questa G è unica. Poiché però le condizioni introdotte per definire G_n sono solo sufficienti, si pone allora il problema di verificare se esistano funzioni di distribuzione multivariate di valore estremo non generabili attraverso il teorema di McFadden, ovvero se in altre parole le condizioni del teorema di McFadden siano anche necessarie³⁸.

La questione è stata affrontata e risolta da Smith (1984) attraverso una dimostrazione di seguito sintetizzata. Occorre precisare in primo luogo che il contributo di Smith (1984) presenta delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un vettore di probabilità $p(\mathbf{V})$ sia rappresentabile con un modello di utilità aleatoria additivo; evidentemente, come accennato nel paragrafo 1.2, un simile studio era già stato affrontato da Daly e Zachary (1976), che però non viene citato da Smith (1984). Peraltro, a parte le condizioni che un qualsiasi vettore di probabilità di scelta deve verificare, cioè probabilità non negative e con somma uno, i due contributi pervengono agli stessi risultati, in particolare Smith chiama “symmetry condition” la condizione di uguaglianza delle derivate parziali prime miste e “non-negativity condition” quella sui segni delle derivate parziali di qualsiasi ordine della $p(\mathbf{V})$. Egli però commette un errore in quanto afferma che quest’ultima condizione vale solo per i modelli GEV, mentre come hanno dimostrato Ibanez e Batley³⁹ (2005) essa è del tutto generale nell’ambito della classe dei modelli additivi.

Ciò premesso, Smith (1984) parte dalla definizione generale (3.2.13) di funzione multivariata di valore estremo (che egli chiama impropriamente funzione di valore estremo generalizzato), ovvero $F(x_1 \dots x_n) = \exp[-\Gamma(e^{-x_1} \dots e^{-x_n})]$ con $\Gamma(x_1 \dots x_n)$ omogenea, e dimostra che la funzione $\Gamma(x_1 \dots x_n)$ deve necessariamente verificare le ipotesi del teorema di McFadden. Infatti, ripercorrendo all’inverso i passi della dimostrazione del teorema di McFadden, per dimostrare che F è una funzione di distribuzione deve risultare $\Gamma(x_1 \dots x_n) \geq 0$ per limitare il codominio della F , inoltre dalla (3.4.1) $\Gamma(x_1 \dots x_n) \rightarrow +\infty \forall x_i \rightarrow +\infty$ e dalla (3.4.2) deve risultare $\Gamma(\mathbf{0}) = 0$. Infine, le derivate parziali della F possono essere scritte come:

$$\frac{\partial F(x_1 \dots x_n)}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_k}} = \prod_{i=1}^k e^{-x_{s_i}} \cdot F(x_1 \dots x_n) \cdot (-1)^k \bar{\Gamma}_{s_1 \dots s_k}(e^{-x_1} \dots e^{-x_n}) \quad (3.4.9)$$

nella quale risulta, utilizzando la stessa notazione della (3.4.4):

$$\bar{\Gamma}_{s_1 \dots s_k}(y_1 \dots y_n) = \begin{cases} \frac{\partial \Gamma(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_1}} & \text{se } k = 1 \\ \frac{\partial \Gamma(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_k}} \cdot \bar{\Gamma}_{s_1 \dots s_{k-1}}(y_1 \dots y_n) - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{s_1 \dots s_{k-1}}(y_1 \dots y_n)}{\partial y_{s_k}} & \text{se } k > 1 \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Quindi dalle (3.4.9) e (3.4.10) segue l’ulteriore condizione $(-1)^k \bar{\Gamma}_{s_1 \dots s_k}(y_1 \dots y_n) \geq 0$. Smith (1984) dimostra che questa condizione equivale alla seguente:

³⁸ A rigore questo problema si pone solo per l’ipotesi sui segni delle derivate parziali della funzione generatrice, in quanto la necessità dell’omogeneità della funzione generatrice è già stata discussa nel paragrafo 3.2.2.2.

³⁹ Occorre infatti sottolineare che una dimostrazione delle condizioni espresse da Daly e Zachary (1976) non è mai stata di fatto pubblicata.

$$(-1)^k \frac{\partial \Gamma(y_1 \dots y_n)}{\partial y_1 \dots \partial y_n} \geq 0 \quad (3.4.11)$$

Si riconosce allora che le condizioni cui la funzione $\Gamma(x_1 \dots x_n)$ deve soggiacere perché la $F(x_1 \dots x_n) = \exp[-\Gamma(e^{-x_1} \dots e^{-x_n})]$ sia una distribuzione di valore estremo multivariato sono esattamente coincidenti con le ipotesi del teorema di McFadden.

Si può allora concludere che il teorema di McFadden stabilisce condizioni necessarie e sufficienti atte a definire completamente la classe G_n delle funzioni generatrici di valore estremo multivariato, ovvero che i modelli di utilità aleatoria additivi con distribuzioni marginali di Gumbel omoschedastiche sono tutti e soli quelli contemplati dal teorema di McFadden.

I contributi di McFadden (1978) e Smith (1984), confrontati tra loro e rilette alla luce delle osservazioni riportate nel paragrafo 3.2.2.2, permettono di identificare con chiarezza il ruolo che esiste tra modelli GEV e distribuzioni di valore estremo multivariato; l'analisi sin qui condotta rappresenta dunque il punto di partenza per esplorare la relazione tra modelli GEV e modelli di utilità aleatoria additivi.

Uno dei contributi più significativi in questa direzione si deve a Dagsvik (1995) che dimostra, sfruttando alcune delle proprietà enunciate nel paragrafo 3.2.2.2 per le distribuzioni multivariate di valore estremo, che una qualsiasi funzione di probabilità $p(\mathbf{V})$ derivante da utilità distribuite con una legge qualsiasi può essere approssimata da un modello GEV. Su questo risultato occorre in primo luogo precisare che, sebbene non sia mai esplicitato da Dagsvik (1995), tale approssimazione vale rispetto ai modelli di utilità aleatoria additivi: infatti, l'ipotesi A.1 di pag. 91 del suo articolo, necessaria per la dimostrazione, implica che la distribuzione congiunta dei residui non dipenda dalle utilità sistematiche. In ogni caso, la circostanza che la classe dei modelli GEV sia densa in quella dei modelli di utilità aleatoria additivi implica che un qualsiasi modello di utilità aleatoria è (almeno asintoticamente) equivalente, nel senso che dà luogo alle medesime probabilità $p(\mathbf{V})$, ad un modello omoschedastico. Peraltro, non sembrano emergere indicazioni operative su come effettivamente specificare un modello GEV in modo da riprodurre una desiderata funzione di probabilità. In questo senso è interessante considerare la formula (2.7) di pag. 92 del contributo di Dagsvik (1995); in particolare, dato un vettore di utilità percepite $\mathbf{U}=(U_1 \dots U_n)$ la cui distribuzione congiunta sia una generica $F(y_1 \dots y_n)$, egli considera come distribuzione multivariata di valore estremo per la dimostrazione la seguente:

$$F(x_1 \dots x_n) = e^{-E \left[\left(\sum_k e^{\frac{U_k - x_k}{a}} \right)^{a^2} \right]} = e^{- \int_{y_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{y_n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_k e^{\frac{y_k - x_k}{a}} \right)^{a^2} f(y_1 \dots y_n) dy_1 \dots dy_n} \quad (3.4.12)$$

nella quale a è un parametro positivo. Innanzitutto, si può dimostrare che la (3.4.12) è effettivamente una distribuzione di valore estremo multivariato che soddisfa le ipotesi del teorema di McFadden (1978) per cui è possibile applicare la (1.2.7), a partire dalla quale impostare la dimostrazione su un ragionamento al limite per $a \rightarrow 0$. Dagsvik (1995) non propone approfondimenti a partire dalla funzione generatrice che si può formalmente scrivere dalla (3.4.12), né sono a conoscenza di chi scrive studi che abbiano compiuto passi in avanti su questo aspetto. In ogni caso, sembra emergere ancora una tendenza verso l'esistenza di modelli GEV non in forma chiusa.

Un successivo contributo di letteratura meritevole di interesse si deve a Joe (2001) che, richiamando il lavoro di Dagsvik (1995), afferma di generalizzarlo dimostrando che una qualsiasi distribuzione di probabilità di ordinamenti (*ranking probability distribution*) nel senso di Block e Marschack (1960) può essere approssimata da una distribuzione di valore estremo multivariato del tipo (3.2.9); per distribuzione di probabilità di ordinamenti relativa ad un contesto di scelta caratterizzato da m alternative si intende l'insieme $R = \{r(i_1 \dots i_m) : (i_1 \dots i_m) \in P_m\}$ essendo P_m l'insieme delle possibili permutazioni dell'insieme $(1 \dots m)$. Rispetto a questa affermazione è importante chiarire la relazione esistente tra una distribuzione di probabilità di ordinamenti e modelli di utilità aleatoria: Joe (2001) si limita a richiamare un risultato degli stessi Block e Marschack (1960) secondo i quali una qualsiasi distribuzione di probabilità di ordinamenti R è "consistente" con un qualsiasi modello di utilità aleatoria e viceversa. In ogni caso, è evidente che non si aggiunge nulla di operativo alle seppur limitate osservazioni di Dagsvik (1995) sulla possibilità di implementare un modello GEV che riproduca la $p(\mathbf{V})$ di un qualsiasi modello di utilità aleatoria additivo.

L'ultimo contributo in ordine temporale ad affrontare la questione è quello di Daly (2005), che in primo luogo propone un confronto critico ed una sintesi delle condizioni che occorre imporre ad un modello di utilità aleatoria perché possa classificarsi come additivo. In particolare, oltre ad imporre che la legge di probabilità $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ dei residui sia continua e non degenera, Daly (2005) discute due forme di additività, che indica rispettivamente come forte e debole; analizzando in dettaglio le dimostrazioni⁴⁰ si evince però che, di fatto, è sempre necessario riferirsi alla forma forte che si esprime come di solito imponendo che la $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ non dipenda dal vettore delle utilità sistematiche \mathbf{V} . L'aspetto più interessante del contributo di Daly (2005) si riferisce però alla relazione tra modelli GEV e modelli additivi. In particolare, dato un qualsiasi modello di utilità aleatoria con $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ distribuita in modo qualsiasi, è possibile definirne la ben nota funzione di soddisfazione:

$$L(V_1 \dots V_n) = E[\max_j \{V_j + \varepsilon_j\}] = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x f(x, \dots, x) dx \quad (3.4.13)$$

La (3.4.13) può essere riscritta nella forma:

$$L(V_1 \dots V_n) = \sum_j L_j(V_1 \dots V_n) = \sum_j \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{V_j+x_j-V_1} \dots \int_{x_n=-\infty}^{V_j+x_j-V_n} (V_j + x_j) f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.4.14)$$

nella quale la media L della massima utilità percepita è calcolata sommando tutti i contributi L_j di ciascuna delle utilità percepite nel sottodominio di R^n in cui assume valore maggiore delle altre⁴¹. Daly (2005) dimostra che nell'ipotesi di additività della $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ la (3.4.14) dà luogo ad un modello GEV con funzione generatrice:

$$G(e^{V_1}, \dots, e^{V_n}) = e^{\mu L(V_1, \dots, V_n)} = e^{\mu \sum_j \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{V_j+x_j-V_1} \dots \int_{x_n=-\infty}^{V_j+x_j-V_n} (V_j + x_j) f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n} \quad (3.4.15)$$

E' interessante ripercorrere in modo leggermente diverso la dimostrazione di Daly (2005)

⁴⁰ E' ad esempio il caso della differenziazione nella formula (A.1) riportata nell'appendice del suo articolo.

⁴¹ Non è immediato riconoscere che tale espressione non richieda alcuna ipotesi aggiuntiva e valga quindi in generale; peraltro, sia McFadden (1978 e 1981) sia Daly (2005) la utilizzano senza introdurre ipotesi restrittive.

interpretandola alla luce delle precedenti considerazioni. Innanzitutto, è banale che la (3.4.15) sia una funzione non negativa; inoltre, dimostrare che la (3.4.15) è omogenea di grado μ equivale a provare che la funzione L è additiva in quanto:

$$\begin{aligned} G(\alpha e^{V_1}, \dots, \alpha e^{V_n}) &= \alpha^\mu G(e^{V_1}, \dots, e^{V_n}) \leftrightarrow e^{\mu L(V_1 + \ln \alpha, \dots, V_n + \ln \alpha)} = \alpha^\mu e^{\mu L(V_1, \dots, V_n)} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow L(V_1 + \ln \alpha, \dots, V_n + \ln \alpha) = L(V_1, \dots, V_n) + \ln \alpha \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Ciò premesso, se $f(\mathbf{\epsilon})$ non dipende da \mathbf{V} l'aggiunta di una costante k all'utilità sistematica di tutte le alternative non cambia i limiti di integrazione nella (3.4.14) né la $f(\mathbf{\epsilon})$, ma modifica solo una parte dell'integrando, per cui per la generica L_j si ha:

$$L_j(V_1 + k, \dots, V_n + k) = \int_{x_j = -\infty}^{+\infty} \int_{x_1 = -\infty}^{V_j + x_j - V_1} \dots \int_{x_n = -\infty}^{V_j + x_j - V_n} (V_j + x_j + k) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = L_j(V_1, \dots, V_n) + p[j] \cdot k$$

per cui sommando su j si dimostra la (3.4.16), tenendo conto che le probabilità di scelta delle diverse alternative devono ovviamente sommare ad uno. Inoltre, nell'ipotesi di additività la variabile di soddisfazione L , e dunque la funzione $e^{\mu L}$, tende a $+\infty$ al divergere positivamente dell'utilità sistematica di un'alternativa; inoltre, poiché $V_i \rightarrow +\infty$ implica $e^{V_i} \rightarrow +\infty$ ne consegue dalla (3.4.15) che anche la G diverge positivamente per ciascuna utilità $V_i \rightarrow +\infty$.

Per quanto riguarda la proprietà sul segno delle derivate parziali della funzione G , dalla (3.4.15) segue che occorre investigare il segno delle derivate parziali di $e^{\mu L(\mathbf{V})}$ rispetto ad una generica combinazione di variabili e^{V_i} . Si noti innanzitutto che se il modello di scelta è additivo ne consegue che la derivata parziale prima della L rispetto all'utilità sistematica di una certa alternativa è proprio la probabilità di scelta di quell'alternativa, dunque non negativa, e pertanto per il segno delle derivate parziali di ordine k della L basta guardare il segno delle derivate parziali di ordine $k-1$ delle probabilità di scelta. Su questo aspetto Daly (2005) non fornisce dettagli circa la dimostrazione, rimandando a contributi precedenti di letteratura; il risultato cui perviene è comunque che la L definita attraverso la (3.4.14) rispetta tutte le condizioni imposte dal teorema di McFadden.

Il risultato dichiarato è dunque che, data una qualsiasi distribuzione $f(\mathbf{\epsilon})$ dei residui aleatori che rispetti l'ipotesi di additività, la funzione di soddisfazione relativa a tale distribuzione dà luogo attraverso la (3.4.15) alla funzione generatrice di un modello GEV. E' immediato dimostrare che il modello di partenza ed il modello GEV così derivato hanno la medesima funzione di soddisfazione, in quanto dal teorema di McFadden (1978), dall'espressione (3.4.15) e dalla dimostrata additività della funzione di soddisfazione L segue:

$$\frac{\ln G(e^{V_1}, \dots, e^{V_n}) + \gamma}{\mu} = L(V_1, \dots, V_n) + \gamma = L(V_1 + \gamma, \dots, V_n + \gamma)$$

Poiché la derivata della funzione di soddisfazione rispetto all'utilità sistematica di un'alternativa fornisce la probabilità di scelta di quell'alternativa, ne consegue che i due modelli sono equivalenti, ovvero riproducono la medesima $p(\mathbf{V})$. Ciò comporta quindi che tutti i modelli additivi sono equivalenti a modelli GEV, ovvero equivalenti a modelli omoschedastici, e siccome è possibile scrivere funzioni di soddisfazione che non sono in forma chiusa (i.e. Probit) allora è possibile che esistano modelli GEV non in forma chiusa.

Evidentemente la legge di distribuzione congiunta dei residui aleatori relativa alla generatrice (3.4.15) può essere scritta come:

$$F(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = \exp[-G(e^{-\varepsilon_1} \dots e^{-\varepsilon_n})] = \exp \left[-e^{\mu \sum_{j=1}^n \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{-\varepsilon_j+x_j+\varepsilon_1} \dots \int_{x_n=-\infty}^{-\varepsilon_j+x_j+\varepsilon_n} (-\varepsilon_j+x_j) f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n} \right] \quad (3.4.17)$$

Si noti che, seguendo le indicazioni fornite dai due autori, la distribuzione (3.4.12) proposta da Dagsvik (1995) fornisce un modello GEV che approssima asintoticamente una qualsiasi $p(\mathbf{V})$ mentre la (3.4.17) di Daly (2005) riproduce esattamente la $p(\mathbf{V})$ corrispondente alla distribuzione additiva fissata. Su quest'ultimo contributo occorre peraltro indagare ancora per chiarire alcuni aspetti poco chiari delle dimostrazioni proposte, obiettivo questo che esula dagli scopi della presente ricerca; si noti, a titolo di esempio, che dovrebbe potersi ricondurre la (3.4.17) nella forma di Pickands riportata nel paragrafo 3.2.2.2.

In conclusione, sebbene il problema non possa dirsi definitivamente risolto e restino alcuni aspetti teorici da chiarire, è possibile reperire in letteratura chiare evidenze sulla possibilità che un modello GEV possa approssimare un qualsiasi modello di utilità aleatoria additivo; in tal senso, l'esistenza di modelli GEV non in forma chiusa si è rivelata coerente con le ipotesi del teorema di McFadden (1978), mentre al contrario si è confermata la loro natura omoschedastica. Questo comporta, da un punto di vista pratico, che tutti i modelli additivi sono in un certo senso equivalenti – nel senso che danno luogo alle medesime probabilità di scelta – a modelli omoschedastici. Appare dunque interessante approfondire questo aspetto analizzando alcune proprietà del modello Probit che rappresenta, come descritto nel paragrafo 1.2.2, è uno dei modelli eteroschedastici più utilizzati nelle applicazioni.

3.4.2 Homoskedasticity lemma

Nel paragrafo precedente si è discussa la relazione esistente tra la classe dei modelli di valore estremo generalizzato e quella dei modelli di utilità aleatoria additivi, giungendo alla conclusione che i modelli GEV formano una classe più ampia di quanto non ritenuto finora e che vi sono in particolare evidenze sulla possibilità che tutti i modelli additivi siano in realtà proprio modelli GEV. Un'ulteriore prova a sostegno di questa tesi è rappresentata dal cosiddetto homoskedasticity “chimeral” lemma, proposto in letteratura da Daly (2001), alla cui analisi e generalizzazione è dedicato il presente paragrafo.

Come detto nel paragrafo 1.2, nei modelli di utilità aleatoria additivi il comportamento di scelta dipende dalla matrice di covarianze delle differenze delle utilità percepite e dalla tipologia della loro legge di distribuzione. Nel consegue che una matrice di covarianze Σ soggiacente un modello Probit corrispondente ad un contesto di scelta con n alternative contiene $n(n+1)/2$ parametri, dei quali risultano identificabili solo $n(n-1)/2$ meno un ulteriore parametro per fissare la scala delle utilità. In altre parole, un modello di utilità aleatoria additivo del tipo $U_j = V_j + \varepsilon_j$ equivale in termini di probabilità di scelta al modello $U_{ji} = V_{ji} + \varepsilon_{ji} = V_j - V_i + \varepsilon_j - \varepsilon_i$ nel quale si sono espresse le differenze delle utilità percepite rispetto ad un'alternativa i scelta come riferimento; la matrice di covarianze Ω_i dei residui aleatori ε_{ji} può essere agevolmente derivata dalla matrice Σ seguendo ad esempio la procedura suggerita da Train (2003), secondo cui $\Omega_i = \mathbf{M}_i \Sigma \mathbf{M}_i^T$ nella quale \mathbf{M}_i è una matrice rettangolare di dimensioni $(n-1) \cdot n$ ottenuta dalla matrice identità di ordine $n-1$

aggiungendo una colonna di termini pari a -1 in posizione i -ma.

Ovviamente, la matrice $\mathbf{\Omega}_i$ dipende dalla scelta dell'alternativa i e risulta positiva definita, in quanto $\mathbf{z}\mathbf{\Omega}_i\mathbf{z}^T = \mathbf{z}\mathbf{M}_i\mathbf{\Sigma}\mathbf{M}_i^T\mathbf{z}^T = (\mathbf{z}\mathbf{M}_i)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{z}\mathbf{M}_i)^T$ che è sempre maggiore di zero in quanto $\mathbf{\Sigma}$ è positiva definita per ipotesi. Se ne conclude, quindi, che data una matrice di covarianze $\mathbf{\Sigma}$ ed un'alternativa di riferimento i , esiste una sola matrice di covarianze di differenze $\mathbf{\Omega}_i$, mentre data una matrice $\mathbf{\Omega}_i$ possono esistere in generale più matrici $\mathbf{\Sigma}$ dalle quali è possibile derivare $\mathbf{\Omega}_i$, per cui è possibile definire l'insieme C delle matrici $\mathbf{\Sigma}$ ammissibili rispetto a $\mathbf{\Omega}_i$.

L'idea di base del lemma di omoschedasticità è cercare nell'insieme C una matrice di covarianze $\mathbf{\Sigma}_h$ che sia omoschedastica ed equivalente a $\mathbf{\Sigma}$, ovvero che dia luogo alle medesime probabilità di scelta; in termini formali, si pone il problema di individuare il sottoinsieme $H \subseteq C$ delle matrici omoschedastiche equivalenti a $\mathbf{\Sigma}$. Daly (2001c) affronta la questione risolvendo un sistema di equazioni ottenute dalla condizione $\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{M}_i\mathbf{\Sigma}\mathbf{M}_i^T$ imponendo l'omoschedasticità di $\mathbf{\Sigma}$; il risultato è che, qualunque sia l'alternativa i scelta come riferimento, la matrice $\mathbf{\Sigma}_h$ può sempre essere scritta nella forma:

$$\mathbf{\Sigma}_h = \begin{bmatrix} k & k - \frac{\delta_{12}}{2} & \dots & k - \frac{\delta_{1n}}{2} \\ & k & \dots & k - \frac{\delta_{2n}}{2} \\ & & \dots & \dots \\ & & & k \end{bmatrix} \quad (3.4.18)$$

nella quale risulta:

$$\delta_{ij} = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij} \quad (3.4.19)$$

e k è il parametro di omoschedasticità.

La caratteristica "chimerale" del lemma dipende dalla necessità di dimostrare che il modello ottenuto attraverso la trasformazione (3.4.18) sia reale, ovvero che la (3.4.18) sia una matrice di covarianze ammissibile. Daly (2001c) argomenta che il termine generico della matrice di correlazione corrispondente alla (3.4.18) è pari a $1 - \delta_{ij}/2k$ che è minore di uno se $k > 0$ tenuto conto che $\delta_{ij} > 0$ per definizione; poiché la correlazione tra due variabili aleatorie deve essere sempre non minore di -1 una possibile condizione da imporre al parametro k è $k > \frac{1}{4} \max_{ij} \{\delta_{ij}\}$. Tale condizione è però debole per garantire che la (3.4.18) sia una matrice ammissibile, come mostra lo stesso Daly (2001c) su un controesempio con tre alternative di scelta.

Nel corso della presente ricerca si è invece seguita una procedura diversa per verificare l'ammissibilità della matrice (3.4.18), ragionando in particolare sulla circostanza che una matrice di covarianze è ammissibile se è positiva definita, e tale condizione può essere direttamente verificata attraverso il criterio di Jacobi-Sylvester introdotto nel paragrafo 3.2: quindi, indicato con \mathbf{D}_i il minore principale ottenuto dalla matrice $\mathbf{\Sigma}_h$ considerandone le prime i righe e colonne, $\mathbf{\Sigma}_h$ è positiva definita se e solo se $\det(\mathbf{D}_i) > 0 \forall i \in 1 \dots n$. Si noti dalla (3.4.18) che la particolare struttura di $\mathbf{\Sigma}_h$ implica che \mathbf{D}_i ha sempre la medesima struttura qualunque sia i , e che ciascun determinante $\det(\mathbf{D}_i)$ è funzione del parametro k ; apparentemente, il problema non è di semplice trattabilità analitica in quanto nel calcolo di tale determinante compaiono varie potenze di k .

E' tuttavia possibile dimostrare il seguente risultato: qualunque sia \mathbf{D}_i , $\det(\mathbf{D}_i)$ è una funzione

lineare del parametro di omoschedasticità k , per cui esiste uno ed un solo valore di k tale che $\det(\mathbf{D}_i)=0$. Si indichi tale valore con k_i : $\det(\mathbf{D}_i)[k_i]=0$.

Per dimostrare tale risultato è sufficiente considerare le seguenti proprietà dei determinanti:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e ricordare che se una matrice \mathbf{A} contiene due o più righe linearmente dipendenti allora il suo determinante è nullo. Applicando ricorsivamente la prima proprietà alla matrice \mathbf{D}_i (o equivalentemente alla matrice Σ_h che ha la medesima struttura) e tenendo conto delle altre due si ottiene:

$$\det \Sigma_h = k \left(\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) +$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

che può anche essere scritta come:

$$\det \Sigma_h = k \left(\det \begin{bmatrix} 1 & 1-\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & 1-\frac{\delta_{1n}}{2} \\ 1-\frac{\delta_{12}}{2} & 1 & \dots & 1-\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{\delta_{1n}}{2} & 1-\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) + \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Quest'ultima relazione, che può essere riscritta nella forma compatta $\det \mathbf{D}_i = a_i k + b_i$, consente immediatamente di determinare il valore cercato di k_i . Si noti che i coefficienti a_i e b_i dipendono dagli elementi della matrice di covarianze di partenza Σ .

Tale risultato rappresenta ovviamente solo il primo passo per risolvere il problema dell'ammissibilità della (3.4.18). Un interessante risultato empirico è stato in tal senso rilevato in contesti di scelta fino a dieci alternative; in particolare, si è riscontrato che risulta sempre $a_i > 0$ per cui la condizione $\det \mathbf{D}_i > 0$ è garantita per $k > k_i$ qualunque sia i : ciò garantisce che sia sempre possibile trovare un intervallo di valori di k che garantisca la positività della (3.4.18). Tale

intervallo dovrebbe essere in generale espresso dalla disuguaglianza $k > \max\{k_i\}$; le prove numeriche condotte hanno però mostrato che risulta sempre $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ per cui l'intervallo cercato può essere semplicemente espresso come $k > k_n$.

Il risultato empiricamente conseguito può quindi essere così riassunto: data una matrice eteroschedastica Σ , si scrive la matrice Σ_h attraverso la (3.4.19) e si cerca il valore k_n che garantisce che $\det \Sigma_h > 0$; tale valore è in particolare dato dal rapporto $k_n = -b_n/a_n$ nel quale risulta:

$$b_n = \det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta_{12}}{2} & \dots & -\frac{\delta_{1n}}{2} \\ -\frac{\delta_{12}}{2} & 0 & \dots & -\frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\delta_{1n}}{2} & -\frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 - \frac{\delta_{12}}{2} & \dots & 1 - \frac{\delta_{1n}}{2} \\ 1 - \frac{\delta_{12}}{2} & 1 & \dots & 1 - \frac{\delta_{2n}}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \frac{\delta_{1n}}{2} & 1 - \frac{\delta_{2n}}{2} & \dots & 1 \end{bmatrix} - b_n$$

Si possono così determinare infinite matrici omoschedastiche equivalenti a Σ , la generica delle quali si ottiene ponendo nella (3.4.18) un valore di $k > k_n$. Tale grado di libertà è ovviamente atteso e rappresenta la scelta del fattore di scala propria dei modelli di utilità aleatoria additivi.

In tabella 3.4 è riportata, a titolo di esempio, una matrice di covarianze eteroschedastica relativa ad un contesto di scelta con dieci alternative. Applicando la procedura descritta, si ritrovano i valori di k_i riportati in tabella 3.5, per cui il valore minimo che il parametro di omoschedasticità può assumere è pari a 46,245; è possibile allora ricavare matrici omoschedastiche equivalenti a quella considerata ponendo ad esempio $k=51$, $k=70$ e $k=1000$, ottenendo le matrici riportate in tabella 3.6. E' immediato verificare, calcolando le corrispondenti probabilità di scelta Probit, che tutte queste matrici danno luogo al medesimo vettore di probabilità di scelta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	0	2	4	4	6	6	2	0	0
2	0	9	12	3	12	0	9	3	3	0
3	2	12	26	6	27	15	18	17	4	3
4	4	3	6	6	12	10	10	3	2	2
5	4	12	27	12	49	42	29	18	16	13
6	6	0	15	10	42	73	37	19	20	16
7	6	9	18	10	29	37	34	14	15	5
8	2	3	17	3	18	19	14	38	13	10
9	0	3	4	2	16	20	15	13	43	22
10	0	0	3	2	13	16	5	10	22	40

Tabella 3.4 – Matrice di covarianze per un esempio sul lemma di omoschedasticità

Condizione da $\det\{D_i\}$	valore
k_1	0.000
k_2	3.250
k_3	6.546
k_4	7.225
k_5	39.775
k_6	39.944
k_7	39.968
k_8	40.910
k_9	41.977
k_{10}	46.245

Tabella 3.5 – Condizioni sul parametro di omoschedasticità per la matrice di tabella 3.4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	51	44.5	38	50	28.5	18.5	38	32	27.5	29
2	44.5	51	45.5	46.5	34	10	38.5	30.5	28	26.5
3	38	45.5	51	41	40.5	16.5	39	36	20.5	21
4	50	46.5	41	51	35.5	21.5	41	32	28.5	30
5	28.5	34	40.5	35.5	51	32	38.5	25.5	21	19.5
6	18.5	10	16.5	21.5	32	51	34.5	14.5	13	10.5
7	38	38.5	39	41	38.5	34.5	51	29	27.5	19
8	32	30.5	36	32	25.5	14.5	29	51	23.5	22
9	27.5	28	20.5	28.5	21	13	27.5	23.5	51	31.5
10	29	26.5	21	30	19.5	10.5	19	22	31.5	51

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	70	63.5	57	69	47.5	37.5	57	51	46.5	48
2	63.5	70	64.5	65.5	53	29	57.5	49.5	47	45.5
3	57	64.5	70	60	59.5	35.5	58	55	39.5	40
4	69	65.5	60	70	54.5	40.5	60	51	47.5	49
5	47.5	53	59.5	54.5	70	51	57.5	44.5	40	38.5
6	37.5	29	35.5	40.5	51	70	53.5	33.5	32	29.5
7	57	57.5	58	60	57.5	53.5	70	48	46.5	38
8	51	49.5	55	51	44.5	33.5	48	70	42.5	41
9	46.5	47	39.5	47.5	40	32	46.5	42.5	70	50.5
10	48	45.5	40	49	38.5	29.5	38	41	50.5	70

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1000	993.5	987	999	977.5	967.5	987	981	976.5	978
2	993.5	1000	994.5	995.5	983	959	987.5	979.5	977	975.5
3	987	994.5	1000	990	989.5	965.5	988	985	969.5	970
4	999	995.5	990	1000	984.5	970.5	990	981	977.5	979
5	977.5	983	989.5	984.5	1000	981	987.5	974.5	970	968.5
6	967.5	959	965.5	970.5	981	1000	983.5	963.5	962	959.5
7	987	987.5	988	990	987.5	983.5	1000	978	976.5	968
8	981	979.5	985	981	974.5	963.5	978	1000	972.5	971
9	976.5	977	969.5	977.5	970	962	976.5	972.5	1000	980.5
10	978	975.5	970	979	968.5	959.5	968	971	980.5	1000

Tabella 3.6 – Matrici omoschedastiche equivalenti alla matrice di tabella 3.4

4. CENNI SU APPROCCI MODELLISTICI ALTERNATIVI PER LA SIMULAZIONE DELLA SCELTA DEL PERCORSO

4.1 Motivazioni dello studio

I risultati sin qui conseguiti permettono di definire con sufficiente precisione quale sia il massimo livello di complessità raggiungibile nell'ambito dell'applicazione di modelli di utilità aleatoria alla simulazione del contesto di scelta del percorso. Coerentemente, il presente capitolo introduce due tipologie di modelli di scelta discreta che esulano dal paradigma dell'utilità aleatoria e che risultano di potenziale interesse per il contesto di simulazione della scelta del percorso.

La prima classe di modelli presa in considerazione è quella dell'*elimination by aspects* (EBA), di interesse in quanto è possibile stabilire molte analogie formali con il processo di scelta alla base della formulazione del modello PML, descritto nel capitolo secondo. L'assunto di base della teoria, così come descritta da Tversky (1972) che per primo l'ha proposta, è infatti quello di rappresentare la scelta di un'alternativa come il risultato dell'eliminazione successiva dall'insieme di scelta di tutte le alternative che non possiedono gli aspetti (attributi) considerati di volta in volta. Appare quindi interessante analizzare in modo critico le due formulazioni, al fine di evidenziarne aspetti comuni e divergenze, anche alla luce di un contributo di letteratura proposto da Batley e Daly (2004) che investiga la relazione tra modelli EBA e modelli GEV.

La seconda teoria presa in considerazione nel presente capitolo è la *prospect theory* di Kahneman e Tversky (1979), molto nota ed ampiamente applicata nel campo dell'economia e della finanza e recentemente considerata in alcuni studi trasportistici come potenziale modello di simulazione della scelta del percorso. Si è quindi ritenuto opportuno dedicare la parte conclusiva della tesi ad una teoria che, fondandosi sulla critica formale alle ipotesi costitutive della teoria dell'utilità aleatoria ed introducendo esplicitamente gli effetti dell'incertezza e del rischio nelle scelte dei decisori, si configura come possibile percorso di ricerca alternativo alla classe dei modelli sin qui trattati.

4.2 La teoria dell'eliminazione per aspetti

4.2.1 *Elimination by aspects (EBA) ed elimination by tree (EBT)*

La presente trattazione è in parte ripresa dal contributo originale di Tversky (1972) con integrazioni da Batley e Daly (2005); la formulazione non ricorsiva delle probabilità di scelta

(4.2.3) e (4.2.5) è invece originale.

La teoria dell'eliminazione per aspetti affronta il problema della scelta di un'alternativa all'interno di un insieme finito T di cardinalità n_T . In accordo con quanto descritto da Tversky (1972), è possibile definire un processo di scelta nel seguente modo: dato T , il decisore sceglie un sottoinsieme di alternative non vuoto B di T con probabilità di transizione $p[B/T]$, poi un sottoinsieme non vuoto C di B con probabilità di transizione $p[C/B]$ e così via, finché non rimane un insieme costituito da una sola alternativa. Indicando con M un generico sottoinsieme non vuoto di T , le probabilità di transizione devono ovviamente obbedire al seguente vincolo:

$$\sum_{M \subseteq T} p[M/T] = 1 \quad (4.2.1)$$

In altre parole, la probabilità di scegliere una generica alternativa $i \in T$ può essere calcolata come la probabilità di scegliere i in tutti i possibili sottoinsiemi $M \subseteq T$, per cui si ottiene:

$$p[i/T] = \sum_{M \subseteq T} p[M/T] p[i/M]$$

E' ragionevole introdurre la seguente ipotesi di proporzionalità tra probabilità di transizione:

$$\frac{p[B/A]}{p[C/A]} = \frac{\sum_{M \in T: (M \cap A) = B} p[M/T]}{\sum_{N \in T: (N \cap A) = C} p[N/T]} \quad (4.2.2)$$

nella quale risulta $B, C \subseteq A \subseteq T$. Si può dimostrare⁴² che la (4.2.2) equivale a definire la seguente espressione per la probabilità di scelta di un'alternativa $i \in A \subseteq T$:

$$p[i/A] = \frac{\sum_{M \subseteq T} u(M) p[i/A \cap M]}{\sum_{N \subseteq T: (N \cap A) \neq \emptyset} u(N)} \quad (4.2.3)$$

dove $u(\cdot)$ è una funzione monotona di utilità definita nell'insieme di tutte le 2^{n_T} possibili combinazioni delle alternative di T , incluso l'insieme vuoto. Si noti che la (4.2.3) conduce ad un calcolo ricorsivo in quanto contiene implicitamente il termine $p[i/A]$ anche al secondo membro:

$$p[i/A] = \frac{\sum_{M \subseteq T} u(M) p[i/A \cap M]}{\sum_{N \subseteq T: (N \cap A) \neq \emptyset} u(N)} = \frac{\sum_{M: A \subseteq M} u(M) p[i/A] + \sum_{M: A \not\subseteq M} u(M) p[i/A \cap M]}{\sum_{N: (N \cap A) \neq \emptyset, A} u(N) + \sum_{N: A \subseteq N} u(N)}$$

In ogni caso, attraverso semplici passaggi, a partire dall'ultima espressione è possibile ricavare una definizione di probabilità analoga alla (4.2.3) ma non ricorsiva:

$$p[i/A] = \frac{\sum_{M: A \not\subseteq M} u(M) p[i/A \cap M]}{\sum_{N: (N \cap A) \neq \emptyset, A} u(N)} \quad (4.2.4)$$

⁴² Tversky (1972), pag. 348.

Alla (4.2.4) può essere attribuito un significato più intuitivo introducendo il concetto di *aspetti* di un'alternativa nell'insieme di scelta T , ed ipotizzando coerentemente che la transizione tra sottoinsiemi di T sia il risultato di un processo di scelta basato sul confronto in termini di utilità $u(\cdot)$ degli aspetti delle alternative appartenenti a quel sottoinsieme. In termini formali, a ciascuna alternativa $i \in T$ è associato un sottoinsieme finito e non vuoto i' di aspetti, nel seguito indicati con $i' = \{\alpha, \beta, \dots\}$; si dirà quindi che una certa alternativa i include l'aspetto α se $\alpha \in i'$. Inoltre, dato un sottoinsieme $A \subseteq T$, si può definire l'insieme A' degli aspetti inclusi in almeno un'alternativa appartenente ad A , ovvero $A' = \{\alpha \mid \alpha \in i' \text{ per almeno un } i \in A\}$, e per ciascun $\alpha \in A'$ si può individuare il sottoinsieme $A_\alpha \subseteq A \subseteq T$ delle alternative $i \in A$ che includono l'aspetto α . Nel seguito si escluderà per definizione il caso in cui un aspetto sia incluso in tutte le alternative appartenenti a T , in quanto irrilevante ai fini della scelta tra alternative. La relazione (4.2.3) si particolarizza dunque nel seguente modo:

$$p[i / A] = \frac{\sum_{\alpha \in i'} u(\alpha) p[i / A \cap A_\alpha]}{\sum_{\beta \in A'} u(\beta)} \quad (4.2.5)$$

E' possibile esprimere una relazione non ricorsiva della (4.2.5) analoga alla (4.2.4). Si noti infatti che $A \cap A_\alpha = A$ se e solo se $A \subseteq A_\alpha$, il che significa che tutte le alternative in A includono l'aspetto α ; pertanto, detto $A'^* \subseteq A'$ il sottoinsieme degli aspetti comuni a tutte le alternative appartenenti ad A , la (4.2.5) può essere riscritta come:

$$p[i / A] = \frac{\sum_{\alpha \in i'} u(\alpha) p[i / A \cap A_\alpha]}{\sum_{\beta \in A'} u(\beta)} = \frac{\sum_{\alpha \in A'^*} u(\alpha) p[i / A] + \sum_{\alpha \in i' - A'^*} u(\alpha) p[i / A \cap A_\alpha]}{\sum_{\beta \in A'^*} u(\beta) + \sum_{\beta \in A' - A'^*} u(\beta)}$$

dalla quale si ottiene:

$$p[i / A] = \frac{\sum_{\alpha \in i' - A'^*} u(\alpha) p[i / A \cap A_\alpha]}{\sum_{\beta \in A' - A'^*} u(\beta)} \quad (4.2.6)$$

che è la formula non ricorsiva analoga alla (4.2.4). Ovviamente, se $A \equiv T$ risulta $A'^* \equiv \emptyset$ in quanto si è escluso che possano esservi aspetti condivisi da tutte le alternative, e quindi la (4.2.6) coincide con la (4.2.5). Si riporta di seguito un esempio applicativo, relativo ad un contesto di scelta con tre alternative e quattro aspetti per ciascuna alternativa, riportato in figura 4.1.

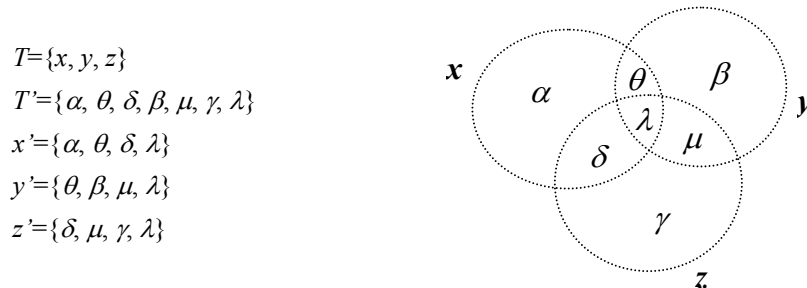


Figura 4.1 – Esempio di modello EBA e rappresentazione grafica dell'insieme di scelta

Si noti innanzitutto che l'aspetto λ , comune a tutte le alternative, non è stato preso in considerazione in quanto irrilevante ai fini della scelta. Applicando la formula non ricorsiva (4.2.6) per il calcolo della probabilità di scelta dell'alternativa x nell'insieme T si ottiene:

$$p[x/T] = \frac{u(\alpha)p[x/x] + u(\theta)p[x/xy] + u(\delta)p[x/xz]}{u(\alpha) + u(\theta) + u(\delta) + u(\beta) + u(\mu) + u(\gamma)}$$

nella quale risulta ovviamente $p[x/x]=1$ e le probabilità $p[x/xy]$ e $p[x/xz]$ possono ancora essere calcolate attraverso la (4.2.6). Ad esempio, per la prima di esse si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= \{x, y\} \\ A' &= \{\alpha, \theta, \delta, \beta, \mu\} \\ A'^* &= \{\theta\} \\ x'-A'^* &= \{\alpha, \delta\} \\ A'-A'^* &= \{\alpha, \delta, \beta, \mu\} \\ A_\alpha &= \{x\} \\ A_\delta &= \{x, z\} \end{aligned}$$

$$p[x/xy] = \frac{u(\alpha)p[x/x] + u(\delta)p[x/x]}{u(\alpha) + u(\delta) + u(\beta) + u(\mu)} = \frac{u(\alpha) + u(\delta)}{u(\alpha) + u(\delta) + u(\beta) + u(\mu)}$$

mentre per la seconda si ha:

$$p[x/xz] = \frac{u(\alpha) + u(\theta)}{u(\alpha) + u(\theta) + u(\gamma) + u(\mu)}$$

In conclusione, si ottiene un'espressione che fornisce la probabilità $p[x]$ in funzione dell'utilità degli aspetti considerati:

$$p[x/T] = \frac{u(\alpha) + u(\theta) \frac{u(\alpha) + u(\delta)}{u(\alpha) + u(\delta) + u(\beta) + u(\mu)} + u(\delta) \frac{u(\alpha) + u(\theta)}{u(\alpha) + u(\theta) + u(\gamma) + u(\mu)}}{u(\alpha) + u(\theta) + u(\delta) + u(\beta) + u(\mu) + u(\gamma)} \quad (4.2.7)$$

Al fine di chiarire ulteriormente il meccanismo soggiacente la teoria dell'eliminazione per aspetti, è possibile adottare una rappresentazione topologica del processo di scelta, così come descritto in Batley e Daly (2004). A tal proposito, si indichi con N l'insieme di cardinalità $2^{n_{asp}}$ contenente tutte le possibili combinazioni degli n_{asp} aspetti di T' , incluso l'insieme vuoto, e con X il sottoinsieme di N costituito da tutti gli insiemi di aspetti inclusi in almeno un'alternativa appartenente a T . E' immediato riconoscere che risulta $\emptyset \subset X \subset N$. Nell'esempio di figura 4.1, due elementi di N sono gli insiemi $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e $\{\mu\}$, il primo non interamente incluso in alcuna alternativa e dunque non appartenente ad X , il secondo incluso nelle alternative y e z e quindi appartenente ad X . In generale, a ciascun sottoinsieme di X è possibile far corrispondere l'insieme delle alternative di T che condividono gli aspetti di quel sottoinsieme, ed è possibile in particolare definire una mappatura iniettiva di X in T associando a ciascun elemento di X il più ampio sottoinsieme di alternative di T che include gli aspetti contenuti nell'elemento di X considerato.

La topologia del processo di scelta si può allora definire nel seguente modo: la radice è rappresentata dall'insieme vuoto \emptyset , il generico nodo è rappresentato da una combinazione di aspetti $A' \in X$ ed i suoi discendenti sono tutte le combinazioni di aspetti $B' \in X$ tali che $A' \subset B'$ e $B' - A' = \{\alpha\}$; in altre parole B' è ottenuto da A' aggiungendovi un solo aspetto α . Ne consegue inoltre che i nodi finali sono rappresentativi proprio delle alternative di T ; infatti, procedendo per aggiunta successiva di aspetti, si giunge ad un punto in cui tutti gli aspetti sono stati considerati; i sottoinsiemi di X costruiti in questa fase sono sicuramente non coincidenti, perché uno stesso aspetto non può appartenere a tutte le alternative, e sono in corrispondenza biunivoca con le alternative di T in quanto per lo stesso motivo esiste una ed una sola alternativa con un'assegnata configurazione di aspetti. Un esempio per il caso di figura 4.1 è riportato in figura 4.2.

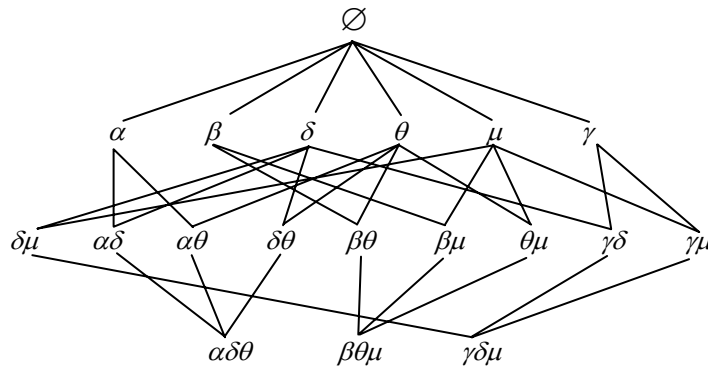


Figura 4.2 – Rappresentazione del processo di scelta relativo all'esempio di figura 4.1

E' a questo punto possibile dimostrare, così come riportato in Batley e Daly (2004), che la probabilità (4.2.6) si può ottenere in modo analogo a quanto descritto per il modello RNEV del paragrafo 1.2.1.4, esprimendo le probabilità di transizione tra due nodi consecutivi A' e B' della rappresentazione topologica appena descritta nel seguente modo:

$$p[B' / A'] = \frac{u(\alpha)}{\sum_{\substack{\beta \in C' - A' \\ C' \in \text{succ}(A')}} u(\beta)} \quad (4.2.8)$$

avendo indicato con α l'unico aspetto per cui B' ed A' differiscono per costruzione. Applicando la (4.2.8) alla rete riportata in figura 4.2 si ottiene:

$$\begin{aligned} p[x] = p[\alpha\delta\theta] &= p[\alpha\delta\theta / \alpha\delta] (p[\alpha\delta / \alpha] p[\alpha / \emptyset] + p[\alpha\delta / \delta] p[\delta / \emptyset]) + \\ & p[\alpha\delta\theta / \delta\theta] (p[\delta\theta / \delta] p[\delta / \emptyset] + p[\delta\theta / \theta] p[\theta / \emptyset]) + \\ & p[\alpha\delta\theta / \alpha\theta] (p[\alpha\theta / \alpha] p[\alpha / \emptyset] + p[\alpha\theta / \theta] p[\theta / \emptyset]) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

nella quale ad esempio risulta, in accordo con la (4.2.8):

$$p[\alpha\delta / \alpha] = \frac{u(\delta)}{u(\delta) + u(\theta)}$$

$$p[\delta / \emptyset] = \frac{u(\delta)}{u(\delta) + u(\theta) + u(\alpha) + u(\beta) + u(\mu) + u(\gamma)}$$

Esprimendo tutti i termini della (4.2.9) in questo modo e procedendo ad alcune semplificazioni è facile ricondursi alla (4.2.7).

Una particolare specificazione del modello EBA si ottiene imponendo una struttura ad albero agli insiemi degli aspetti inclusi nelle alternative appartenenti al contesto di scelta considerato, così come illustrato nell'esempio di figura 4.3. Tversky e Sattath (1979) introducono una distinzione formale tra l'applicazione del modello EBA al caso di strutture ad albero, definita *elimination by tree* (EBT), e la rappresentazione gerarchica del processo di scelta in presenza di vincoli sulla sequenza di analisi degli aspetti delle alternative, denominata *hierarchical elimination method* (HEM); successivamente essi provano la perfetta equivalenza tra EBT ed HEM⁴³ e si riferiscono ad essi in generale come modello *preference tree* (PRETREE); Batley e Daly (2004) introducono per lo stesso modello il termine *hierarchical elimination by aspects* (HEBA).

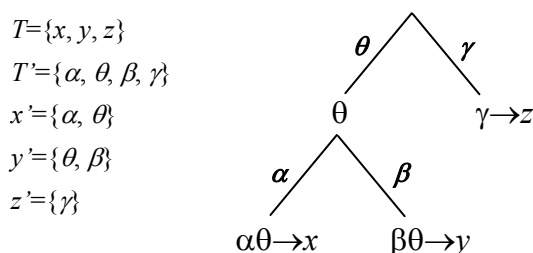


Figura 4.3 – Un esempio di modello EBT

Come si nota dalla rappresentazione ad albero del processo di scelta riportato in figura 4.3, è possibile stabilire un'equivalenza formale tra aspetti delle alternative ed archi dell'albero di scelta, il che consente di definire l'insieme $succ(\alpha)$ dei discendenti di un aspetto e di associare coerentemente una misura di utilità $u(\alpha)$ a ciascun aspetto/arco dell'albero di scelta. E' inoltre possibile definire la somma $m(\alpha)$ delle utilità di tutti gli aspetti/archi che appartengono al sottoalbero che ha α come radice, determinabile a partire dalla seguente equazione ricorsiva:

$$m(\alpha) = u(\alpha) + \sum_{\beta \in succ(\alpha)} m(\beta) \tag{4.2.10}$$

Coerentemente, se $\beta \in succ(\alpha)$ l'insieme A_α delle alternative che possiedono l'aspetto α contiene l'insieme A_β delle alternative che possiedono l'aspetto β ed è quindi possibile definire la probabilità $p[A_\beta/A_\alpha]$ che l'alternativa scelta in A_α sia contenuta in A_β ; in altre parole, risulta $p[A_\beta/A_\alpha] = \sum_{i \in A_\beta} p[i/A_\alpha]$. Tversky e Sattath (1979) dimostrano che le seguenti tre condizioni sono sufficienti per garantire che una famiglia di probabilità di scelta HEM sia coerente con le ipotesi

⁴³ Da un punto di vista concettuale, alla teoria dell'eliminazione per aspetti potrebbe essere erroneamente attribuita una valenza non compensatoria, sulla base della descrizione del processo di scelta che conduce all'eliminazione di alternative che non posseggono determinati aspetti/attributi. Il punto chiave è che, in un contesto di scelta del tutto generale, nulla è possibile dire sull'ordine in cui gli aspetti/attributi sono presi in considerazione, ed è in quest'ottica che va letta la specificazione (4.2.1)-(4.2.6) della teoria. In altre parole, pur basandosi su presupposti di non compensatorietà, la teoria riproduce il risultato del processo di scelta in termini compensatori piuttosto che il processo di scelta stesso. E' del tutto evidente che una struttura di aspetti ad albero può essere invece interpretata come un caso particolare di processo di scelta nel quale è possibile individuare a priori una sequenza ordinata di aspetti. In tal senso, il modello HEM non è altro che una formalizzazione equivalente alla EBT nella quale si evidenzia per l'appunto la rappresentazione del processo di scelta, mentre la EBT come caso particolare di EBA non assume, almeno teoricamente, nessuna ipotesi sull'ordine in cui gli aspetti sono considerati.

della teoria EBA⁴⁴:

- se $\beta \in succ(\gamma)$ ed $\alpha \in succ(\beta)$ allora $p[A_\alpha / A_\gamma] = p[A_\alpha / A_\beta] \cdot p[A_\beta / A_\gamma]$;
- se $\beta \in succ(\gamma)$ ed $\alpha \in succ(\gamma)$ allora:

$$\frac{p[A_\alpha / A_\gamma]}{p[A_\beta / A_\gamma]} = \frac{m(\alpha)}{m(\beta)}$$

- le precedenti condizioni valgono per un qualsiasi sottoalbero dell'albero di scelta considerato.

Si noti che dalla seconda condizione si può determinare un'agevole espressione per le probabilità di transizione; infatti, scrivendo la condizione per tutti gli aspetti $\lambda \in succ(\gamma)$ rispetto ad un aspetto $\alpha \in succ(\gamma)$ di riferimento e sommando su λ si ottiene:

$$\sum_{\lambda \in succ(\gamma)} p[A_\lambda / A_\gamma] = \frac{p[A_\alpha / A_\gamma]}{m(\alpha)} \sum_{\lambda \in succ(\gamma)} m(\lambda) \rightarrow p[A_\alpha / A_\gamma] = \frac{m(\alpha)}{\sum_{\lambda \in succ(\gamma)} m(\lambda)} \quad (4.2.11)$$

La (4.2.11) esprime intuitivamente la condizione per cui la scelta tra alternative direttamente discendenti dal nodo in cui ci si trova è proporzionale all'utilità di tutti gli aspetti/archi che è possibile raggiungere da quell'alternativa.

La trattazione della teoria dell'eliminazione per aspetti sin qui riportata suggerisce alcune intuitive analogie con la specificazione dei modelli di utilità aleatoria appartenenti alla classe GEV: si riconosce, infatti, una similitudine almeno formale tra la struttura con la quale si è rappresentato un modello EBA e la rete di scelta propria di un modello RNEV/network GEV, e tra la rete rappresentativa del processo di scelta HEBA e l'albero di scelta di un Logit gerarchizzato. Peraltro, esistono in letteratura riscontri in tal senso, ad esempio Tversky e Sattath (1979) affermano che EBA e modelli GEV sono "molto simili" e McFadden (1981) scrive che essi sono "praticamente indistinguibili".

Come detto in precedenza, un tentativo di formalizzazione teorica dell'equivalenza tra modelli EBA e modelli GEV, è stato proposto da Batley e Daly (2004), che stabiliscono l'equivalenza tra EBT e Logit Gerarchizzato con riferimento all'esempio riportato in figura 4.3 ed affermano che una generalizzazione ad alberi di scelta con strutture più complesse è abbastanza diretta. Essi, inoltre, investigano l'equivalenza tra EBA e RNEV mostrando che in generale non è possibile ricondurre effettivamente la prima categoria di modelli alla seconda in virtù della non consistenza rispetto al paradigma della massimizzazione dell'utilità.

E' poi evidente l'analogia tra il modo in cui si simula il processo di scelta con un modello PML e l'approccio ad eliminazione per aspetti nella formulazione EBT; in particolare, l'analogia si stabilisce considerando che a ciascun percorso siano associati come aspetti gli archi che lo costituiscono e che la scelta avvenga per analisi gerarchica degli aspetti (archi) attraverso un'esplorazione della rete per costo topologico crescente di allontanamento dall'origine. In tal senso, la similitudine tra EBT e PML è ulteriormente confermata dalla circostanza che entrambi i modelli possono essere ricondotti, sotto certe condizioni, a forme di Logit Gerarchizzato.

⁴⁴ Tversky e Sattath (1979) definiscono ulteriori condizioni necessarie e sufficienti affinché una famiglia di probabilità di scelta sia consistente con le ipotesi dell'eliminazione per aspetti, in particolare le cosiddette condizioni ternaria e quaternaria; poiché esse non sono rilevanti per la ricerca in oggetto, non saranno trattate nel seguito.

4.3 Prospect theory

La prospect theory è stata proposta da Kahneman e Tversky (1979) nel tentativo di superare l'incapacità della teoria dell'utilità aleatoria di considerare esplicitamente gli effetti dell'incertezza e del rischio sulle scelte dei decisori. La descrizione riportata nel paragrafo 4.3.1 segue in linea di massima la trattazione originale, con integrazioni dall'analisi di Machina (1987); nel paragrafo 4.3.2 se ne discute l'applicazione al contesto di scelta del percorso.

In primo luogo, si definisce *prospetto* un'alternativa di scelta caratterizzata da n possibili risultati x_i $i \in 1 \dots n$, ciascuno con probabilità di verificarsi p_i ; risulta ovviamente $\sum_i p_i = 1$ ed il prospetto può essere sinteticamente indicato nella forma compatta $(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$. In molti casi è utile considerare prospetti binari, ovvero con due soli possibili risultati; per semplificare la notazione, un prospetto binario del tipo $(x, p; 0, 1-p)$ sarà indicato semplicemente come (x, p) ed il cosiddetto prospetto senza rischio $(x, 1)$ sarà indicato con (x) . Mantenendosi nell'ambito del paradigma della massimizzazione del beneficio, una scelta tra prospetti può essere ricondotta al confronto tra misure di beneficio assegnate ai prospetti stessi, per cui si è tradizionalmente posto in letteratura economica il problema di quantificare il beneficio associato ad un generico prospetto $P = (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$. I primi ad affrontare il problema sono stati Pascal e Fermat con la teoria del valore atteso (*expected value theory*) in accordo con la quale a ciascun prospetto P è intuitivo associare il valor medio dei suoi risultati, ovvero la quantità $\bar{x} = \sum_i p_i x_i$. La teoria del valore atteso conduce al celebre paradosso di San Pietroburgo, illustrato da Bernoulli nel 1728 con il seguente esempio. Si consideri un prospetto rappresentativo di un gioco in cui viene lanciata una moneta un certo numero di volte finché non esce testa; se ciò accade dopo n lanci è pagato un premio pari a 2^{n-1} €. Siccome la probabilità che esca testa dopo n lanci è pari ad $1/2^n$ ne consegue che il valore atteso di tale prospetto è infinito, ovvero pari a $n_{TOT}/2$ € se ci si limita ad n_{TOT} lanci. Il paradosso è che tale risultato implica che un decisore preferirebbe questo gioco ad una qualsiasi somma sicura offerta ovvero ad un qualsiasi prospetto del tipo (x) ; poiché la massima quantità di denaro che un decisore è disposto a rifiutare pur di accettare il rischio insito nel prospetto o gioco offerto prende il nome di *certezza equivalente* di quel prospetto o gioco, si può affermare che la *certezza equivalente* del gioco descritto dal paradosso di San Pietroburgo è infinita. Peraltro, anche limitandosi al caso di un numero finito di lanci, è immediato riconoscere la discrasia tra il valore associato al prospetto dalla teoria del valore atteso rispetto a quanto realmente percepito dai decisori. Per risolvere questo paradosso è allora stata proposta una diversa quantità da associare ad un prospetto per misurarne il beneficio⁴⁵; in particolare, si è introdotta la cosiddetta teoria dell'utilità attesa (*expected utility theory*) in accordo con la quale al generico prospetto P è associata un'utilità $U(P) = \sum_i p_i u(x_i)$ dove $u(\cdot)$ è detta funzione di utilità di Von Neumann-Morgensten. Si può infatti facilmente verificare che, data una qualsiasi funzione di utilità concava, la *certezza equivalente* del gioco rappresentato nel paradosso di San Pietroburgo risulta comunque finita, anche se il valore atteso del gioco è infinito.

E' a tal proposito interessante notare quali implicazioni comportamentali abbia la scelta di una funzione di utilità concava piuttosto che convessa. La figura 4.4 illustra una funzione di utilità concava nel caso di un gioco in cui si può vincere la somma x' con probabilità $2/3$ e la somma $x'' > x'$ con probabilità $1/3$. La quantità $\bar{x} = 2/3x' + 1/3x''$ rappresenta dunque il valore atteso del

⁴⁵ Secondo alcuni economisti, il paradosso di San Pietroburgo non ha senso in quanto non si può definire razionalmente il beneficio associato ad una somma infinita di denaro.

gioco; inoltre, dette $u(x')$ ed $u(x'')$ le utilità corrispondenti alle vincite x' ed x'' , l'utilità media attesa del gioco risulta pari a $\bar{u} = 2/3u(x') + 1/3u(x'')$. È immediato risalire per costruzione grafica alla determinazione della certezza equivalente del gioco proposto, ovvero la massima somma di denaro cui si è disposti a rinunciare pur di accettare il gioco proposto: essa corrisponde alla somma di denaro x_{eq} alla quale è associata un'utilità, secondo la curva considerata, pari all'utilità media attesa del gioco. Evidentemente, se risulta $x_{eq} < \bar{x}$ vuol dire che si è disposti a preferire al prospetto stesso una somma certa minore del valor medio della vincita del prospetto proposto: tale comportamento può ragionevolmente essere definito di avversione al rischio (*risk aversion*); viceversa, se risulta $x_{eq} > \bar{x}$ significa che si è disposti a rinunciare ad una somma maggiore del valore atteso del prospetto pur di accettare il prospetto stesso, con un comportamento classificabile come di propensione al rischio (*risk seeking*). In altre parole, si ha comportamento di propensione [avversione] al rischio se la certezza equivalente del prospetto è maggiore [minore] del valore atteso del prospetto; è immediato riconoscere che ciò accade se si utilizza una funzione di utilità convessa [concava]. Se ne conclude quindi che funzioni di utilità concave sono rappresentative di un comportamento di avversione al rischio mentre funzioni di utilità convesse descrivono comportamenti di propensione al rischio.

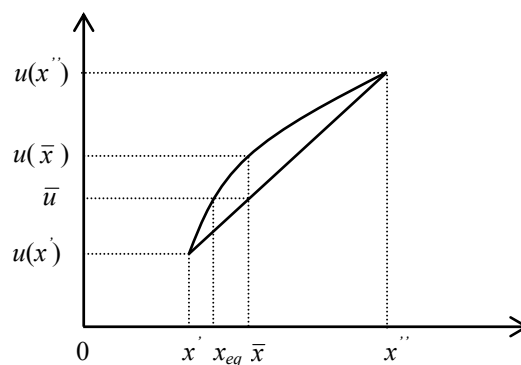


Figura 4.4– Relazione tra concavità della funzione di utilità e percezione del rischio

Si può pertanto concludere che la valutazione tra prospetti nell'ambito della teoria dell'utilità attesa obbedisce ai tre seguenti assiomi costitutivi:

- l'utilità di un prospetto è espressa dalla relazione $U(P) = \sum_i p_i u(x_i)$;
- un prospetto $(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$ è accettabile se, detto w il valore attuale degli asset del decisione (punto di riferimento), risulta $U(w+x_1, p_1; w+x_2, p_2; \dots; w+x_n, p_n) > u(w)$;
- la funzione $u(\cdot)$ è concava, ovvero con derivata seconda negativa, per riprodurre il comportamento di avversione al rischio.

La teoria dei prospetti di Kahneman e Tversky (1979) nasce dall'osservazione sperimentale di alcuni controesempi, di seguito descritti⁴⁶, che violano gli assiomi costitutivi della teoria dell'utilità attesa. I controesempi sono espressi in termini monetari e sono stati proposti a gruppi di decisori in diverse parti del mondo ed in differenti contesti socio-economici: essi hanno fornito ovunque risultati analoghi e pertanto possono ritenersi affidabili.

⁴⁶ In particolare, nel seguito si descrivono i controesempi funzionali alla definizione delle ipotesi alla base della prospect theory. In letteratura sono disponibili numerosi altri controesempi, tra i quali è utile menzionare per le sue implicazioni economiche quello della cosiddetta assicurazione probabilistica.

Il primo controesempio è noto come paradosso di Allais e si riferisce al cosiddetto effetto certezza (*certainty effect*) secondo il quale i decisori tendono ad attribuire un'importanza maggiore ad eventi considerati certi. In particolare, si considerino le seguenti coppie di prospetti:

$$A_1=(2500, 0.33; 2400, 0.66; 0, 0.01)$$

$$B_1=(2400)$$

$$A_2=(2500, 0.33; 0, 0.67)$$

$$B_2=(2400, 0.34; 0, 0.66)$$

Si noti che la seconda coppia di prospetti è ottenuta dalla prima sottraendo ad A_1 e B_1 il prospetto $(2400, 0.66)$. Dalla teoria dell'utilità attesa si deduce che, ipotizzando $U(A_1) > U(B_1)$, risulta $0.33u(2500) + 0.66u(2400) > u(2400)$ e quindi sottraendo ad ambo i termini $0.66u(2400)$ si ottiene $0.33u(2500) > 0.34u(2400)$ per cui $U(A_2) > U(B_2)$. In altre parole, la teoria dell'utilità attesa stabilisce che se A_1 è preferito a B_1 allora A_2 deve essere preferito a B_2 e viceversa; questo risultato è anche noto in letteratura come assioma di indipendenza⁴⁷. Nella realtà, se si pone la scelta ad un gruppo di decisori, si osserva invece una preferenza per il prospetto B_1 nel primo gruppo e per il prospetto A_2 nel secondo, violando la previsione della teoria dell'utilità attesa. Questo risultato si interpreta proprio alla luce del fatto che i decisori tendono ad attribuire importanza maggiore ai prospetti certi, nell'esempio B_1 .

Un altro esempio di violazione dell'assioma di indipendenza è rappresentato dal cosiddetto effetto possibilità (*possibility effect*) o sovrastima (*overweighting effect*) osservabile nel seguente caso:

$$A_1=(6000, 0.45)$$

$$B_1=(3000, 0.90)$$

$$A_2=(6000, 0.001)$$

$$B_2=(3000, 0.002)$$

Infatti, contrariamente alle previsioni della teoria dell'utilità attesa, i decisori tendono a scegliere B_1 nel primo caso ed A_2 nel secondo, e ciò si spiega con la percezione del basso valore delle probabilità di vincita nel secondo caso. In altre parole, si tende a preferire una somma maggiore quando le probabilità di vincita sono comunque scarse, mentre si accetta una somma minore se a quest'ultima è associata una probabilità di vittoria comunque elevata.

Un terzo effetto di rilevante importanza nella critica alla teoria dell'utilità attesa è poi rappresentato dall'effetto riflessione (*reflection effect*), che si osserva proponendo una scelta tra prospetti simmetrici nel dominio delle vincite e delle perdite, ad esempio:

$$A_1=(x, p)$$

$$B_1=(y)$$

$$A_2=(-x, p)$$

$$B_2=(-y)$$

dove $x > y$. La tendenza osservata ad accettare il prospetto B_1 nel primo caso ed A_2 nel secondo

⁴⁷ L'assioma di indipendenza o di sostituzione scaturisce direttamente dalle ipotesi alla base della teoria dell'utilità attesa, ed in generale può essere formulato nel seguente modo: se il prospetto A è favorito rispetto al prospetto B, allora un qualsiasi prospetto del tipo (A, p) sarà preferito a (B, p) con $p \in [0, 1]$. Infatti se A è preferito a B allora $U(A) > U(B)$ e quindi $pU(A) > pU(B)$.

evidenzia la presenza di un comportamento di avversione al rischio nel dominio delle vincite, per cui si preferisce una somma minore ma certa ad una maggiore ma non certa, e di propensione al rischio nel dominio delle perdite, per cui si preferisce rischiare di perdere una somma maggiore che non essere certi di perdere una somma minore. Tra l'altro, proponendo una scelta per diversi valori di x ed y si osserva che la tendenza al rischio nel dominio delle perdite è più spinta di quella di avversione al rischio nel dominio delle vincite.

Un altro effetto non riproducibile con la teoria dell'utilità attesa è noto come effetto di separazione (*isolation effect*), legato alle modalità con le quali un prospetto è presentato ai decisori. Si consideri in particolare una scelta tra i seguenti prospetti:

$$A_1=(4000, 0.20)$$

$$B_1=(3000, 0.25)$$

Essa può essere equivalentemente espressa attraverso un gioco che presenta due fasi, così come illustrato in figura 4.5; nella prima fase si ha il 75% di probabilità di terminare il gioco ed il 25% di passare alla seconda fase, nella quale si può scegliere tra un prospetto $A_2=(4000, 0.80)$ ed un prospetto $B_2=(3000)$.

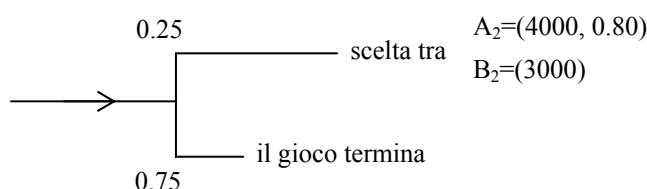


Figura 4.5 – Controesempio relativo all'effetto di separazione

La teoria dell'utilità attesa porge evidentemente la stessa utilità per le due coppie di prospetti, mentre i decisori tendono a preferire il prospetto A_1 nel primo caso ed il prospetto B_2 nel secondo, evidenziando quindi che la modalità con la quale si presenta una scelta tra prospetti influenza la scelta stessa.

Al fine di tener conto degli effetti descritti nei precedenti controesempi, Kahneman e Tversky (1979) hanno innanzitutto proposto di suddividere il processo di simulazione in due fasi: la prima, detta di semplificazione (*editing*), è basata sull'applicazione di regole euristiche volte alla semplificazione dell'insieme di prospetti offerti, mentre la seconda, detta di valutazione (*evaluation*), conduce alla scelta del prospetto di massimo valore.

La fase di semplificazione dell'insieme dei prospetti offerti prevede l'applicazione delle seguenti regole:

- codificazione (*coding*): occorre verificare che tutti i prospetti offerti siano presentati nella stessa unità di misura ed i guadagni e le perdite riferite rispetto al medesimo valore di riferimento;
- aggregazione (*combination*): se in un prospetto figura lo stesso risultato con differenti valori di probabilità occorre sommare tali valori, ad esempio il prospetto (200, 0.25; 200, 0.25; ...) dovrà essere espresso nella forma (200, 0.50; ...);
- segregazione (*segregation*): la componente senza rischio di un prospetto deve essere eliminata, ad esempio il prospetto (300, 0.80; 200, 0.20) dovrà essere posto nella forma (200)+(100, 0.80);
- semplificazione (*simplification*): i valori dei risultati e delle probabilità devono essere approssimati

in modo da non alterarne la percezione, per cui ad esempio il prospetto (99, 0.495) dovrà essere semplificato in (100, 0.50);

- eliminazione (*cancellation*): le parti comuni a tutti i prospetti offerti devono essere eliminate, ad esempio la scelta tra (200, 0.25; 300, 0.45; ...) e (200, 0.25; 150, 0.35; ...) va ricondotta alla scelta tra (300, 0.45; ...) e (150, 0.35; ...);
- dominazione (*dominance*): i prospetti che siano dominati da tutti gli altri presenti nell'insieme di scelta vanno eliminati.

E' immediato verificare che le prime quattro regole vanno applicate separatamente a ciascun prospetto nell'insieme offerto, mentre le ultime due si riferiscono a confronti tra prospetti.

Una volta terminata la fase di semplificazione è possibile passare a quella di valutazione. Da un punto di vista pratico, la scelta avviene sempre considerando il prospetto di massima utilità; ciò che cambia rispetto alla teoria di Von Neumann-Morgensten è la procedura con la quale è associato un valore a ciascun prospetto. In particolare, al generico prospetto $P=(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$ è associata un'utilità calcolata attraverso la seguente espressione:

$$U(P) = \sum_i v(x_i)\pi(p_i) \tag{4.3.1}$$

nella quale $v(\cdot)$ è una funzione di valore (*value function*) che sostituisce la funzione di utilità $u(\cdot)$ di Von Neumann-Morgensten e $\pi(\cdot)$ è una funzione di peso (*weighting function*).

La funzione di valore $v(\cdot)$ ha l'andamento illustrato in figura 4.6, con un punto di nullo in corrispondenza del valore scelto come riferimento nella fase di codifica dei prospetti ed un andamento concavo nel dominio dei guadagni ed uno convesso nel dominio delle perdite, con una pendenza maggiore per quest'ultimo, in modo da tener conto della più rapida propensione al rischio nel dominio delle perdite rispetto alla più moderata tendenza di avversione al rischio nel dominio delle vincite.

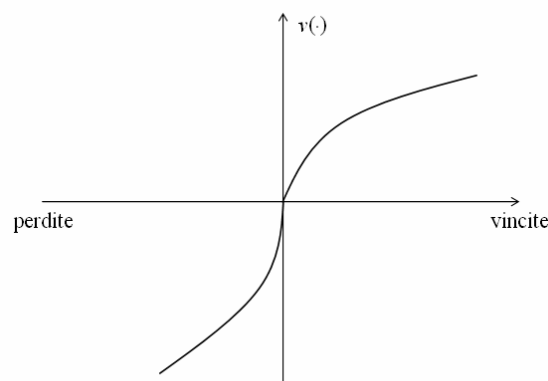


Figura 4.6 – Andamento della funzione di valore

La funzione di peso $\pi(\cdot)$ presenta invece l'andamento illustrato nella figura 4.7. Innanzitutto, la funzione presenta una discontinuità eliminabile nel punto 0 in quanto si conviene che $\pi(0)=0$ mentre $\pi(x) \rightarrow c \neq 0$ per $x \rightarrow 0$, mentre risulta normalmente $\pi(1)=1$. Inoltre, per valori bassi di p l'andamento della funzione di peso è tale per cui $\pi(p) > p$ in modo da tenere in conto dell'effetto di sovrastima delle basse probabilità prima descritto, mentre per valori di probabilità sufficientemente ampi risulta $\pi(p) < p$. Quest'ultima condizione implica che risulti in generale

$\pi(p)+\pi(1-p)<1$, proprietà che va sotto il nome di *subcertainty effect* poiché da un punto di vista intuitivo esso esprime che la somma di due eventi incerti è minore in termini di peso di un evento certo⁴⁸.

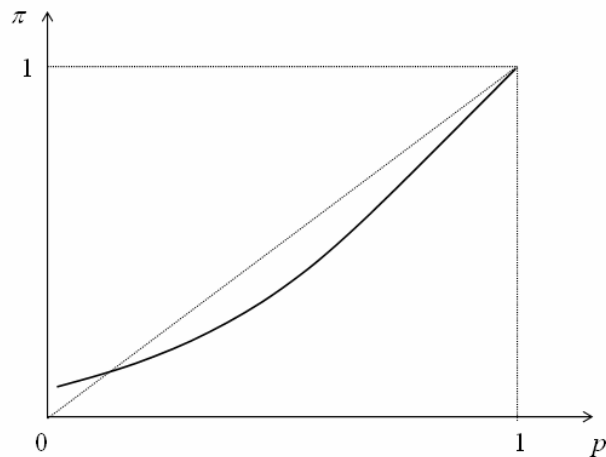


Figura 4.7 – Andamento della funzione di peso

La funzione di peso così definita gode anche di ulteriori proprietà, ad esempio quella di subproporzionalità e di subadditività; poiché non sono rilevanti ai fini della presente ricerca, si rimanda per approfondimenti ai riferimenti bibliografici precedentemente citati.

Una volta descritte le caratteristiche delle funzioni di valore e di peso da utilizzare nella (4.3.1), è possibile definire i passi della fase di valutazione tra prospetti. Seguendo la trattazione originale di Kahneman e Tversky (1979), conviene focalizzare l'attenzione sui prospetti binari, ovvero prospetti del tipo $(x, p; y, q)$ che coinvolgono due soli possibili risultati x ed y ; i prospetti binari possono essere classificati in:

- strettamente positivi, se $x, y > 0$ e $p + q = 1$;
- strettamente negativi, se $x, y < 0$ e $p + q = 1$;
- regolari, in tutti gli altri casi, ovvero se si verifica che $x > 0 > y$ oppure $y > 0 > x$ oppure $p + q < 1$.

Ciò premesso, ai prospetti regolari è associato, in accordo con la (4.3.1), un valore pari a:

$$V(x, p; y, q) = \pi(p)v(x) + \pi(q)v(y) \quad (4.3.2)$$

mentre ai prospetti strettamente positivi, supponendo $x > y > 0$, è associato un valore dato da:

$$V(x, p; y, q) = v(y) + \pi(p)[v(x) - v(y)] \quad (4.3.3)$$

In altre parole, la (4.3.3) tiene conto che ad un prospetto strettamente positivo occorre applicare, in fase di semplificazione, la regola di segregazione della componente senza rischio del prospetto, per cui è ragionevole applicare un peso alla sola componente del valore del prospetto

⁴⁸ Il *subcertainty effect* può essere riscontrato nel primo controesempio del paragrafo 4.3.1. Infatti, siccome i decisori preferiscono B_1 risulta $v(2400) > \pi(0.33)v(2500) + \pi(0.66)v(2400)$ ovvero $[1 - \pi(0.66)]v(2400) > \pi(0.33)v(2500)$, e siccome preferiscono A_2 risulta $\pi(0.33)v(2500) > \pi(0.34)v(2400)$. Di conseguenza risulta $[1 - \pi(0.66)]v(2400) > \pi(0.34)v(2400)$ ovvero $\pi(0.34) + \pi(0.66) < 1$. Molti economisti hanno contestato l'esistenza di un simile effetto; Kahneman e Tversky (1979) dedicano ampio spazio ad una disamina critica delle osservazioni proposte in tal senso.

soggetta a rischio. Si noti anche che, se si rigetta il subcertainty effect, risulta $\pi(p)+\pi(1-p)=1$ e la (4.3.3) coincide con la (4.2.2).

E' possibile infine dimostrare che l'applicazione della prospect theory a tutti i controesempi illustrati nel presente paragrafo conduce a scelte coerenti con le osservazioni rilevate nel corso degli esperimenti.

Come si è già accennato in precedenza, le possibilità applicative della prospect theory alla simulazione del contesto di scelta del percorso sono state solo recentemente esplorate in letteratura, ed allo stato attuale non vi sono ancora proposte modellistiche e metodologiche consolidate di carattere operativo. In ogni caso, è interessante richiamare brevemente alcuni contributi che investigano se ed in che misura nel comportamento di scelta del percorso possano individuarsi alcuni tra gli effetti precedentemente descritti.

In tal senso, il lavoro di Van de Kaa (2004) rappresenta un utile punto di partenza per analizzare lo stato dell'arte in materia; in particolare, sono richiamati i risultati di precedenti indagini e studi condotti in Olanda nel corso degli anni '80 e '90, che mostrano chiaramente come in tutti i casi in cui i decisori si trovano a decidere rispetto a situazioni diverse dall'attuale, misurata in termini di tempo medio di viaggio, la percezione del peggioramento del tempo di viaggio di un percorso ha un effetto di gran lunga maggiore rispetto ad un uguale miglioramento del tempo di viaggio. A partire da questo riscontro, Vand de Kaa (2004) analizza alcuni studi per la valutazione economica del risparmio del tempo di viaggio, individuando risultati che – secondo il suo punto di vista – non possono essere spiegati nell'ambito della teoria dell'utilità attesa. Un'indagine accurata ed approfondita sulla scelta del percorso in condizioni di incertezza sul tempo di viaggio è stata invece condotta da de Palma e Picard (2005), che sottolineano come sia intrinseca nel contesto di scelta del percorso la presenza di attributi delle alternative non osservabili dagli utenti e come ciò determini uno spiccato comportamento di propensione e/o di avversione al rischio. Per supportare questa tesi gli autori hanno condotto un'indagine su circa tremila utenti, rilevando informazioni sul tempo medio di viaggio del loro spostamento abituale e proponendo di scegliere tra il percorso abituale e percorsi alternativi in differenti scenari, in ciascuno dei quali si proponeva un percorso alternativo caratterizzato da un tempo di viaggio variabile in maniera uniforme in un intervallo contenente il tempo di viaggio abituale. In particolare, un primo scenario era di tipo simmetrico, ad esempio se il tempo di viaggio abituale risultava di 30 minuti la scelta poteva avvenire tra il percorso abituale ed un percorso con un tempo di viaggio compreso tra 20 e 40 minuti, così da poter inizialmente classificare gli utenti rispetto alla loro attitudine al rischio. Successivamente, l'intervallo del tempo di viaggio del percorso alternativo veniva modificato proponendo soluzioni peggiori agli utenti propensi al rischio (ad esempio, chi aveva scelto l'alternativa 20-40 minuti si trovava a scegliere tra 30 minuti e 25-40 minuti) e migliori agli utenti avversi al rischio (ad esempio, chi aveva scelto l'alternativa 30 minuti era chiamato a scegliere tra 30 minuti e 20-35 minuti). Complessivamente sono stati costruiti sette scenari, denominati "lotterie", gerarchicamente ordinabili; in questo modo, potendo per ciascun intervistato posizionare nella gerarchia di scenari la lotteria corrispondente al percorso abituale rispetto alle altre, si poteva classificare il comportamento di questi utenti ad accettare o meno il rischio in condizioni di incertezza sul tempo di viaggio. Sulla base di questi risultati è stata poi condotta uno studio per tentare di riprodurre da modello i comportamenti di propensione/avversione al rischio e valutarli nell'ambito sia della teoria dell'utilità attesa sia con

approccio del tipo prospect theory, con risultati promettenti anche se non definitivi e direttamente estendibili ad altre realtà.

L'unico contributo ad oggi reperibile in letteratura che analizza invece in che modo si possa implementare un modello di scelta del percorso è quello di Sumalee et al. (2005), che propongono un'applicazione su una rete a due archi nella quale si introduce una esplicita variabilità del tempo di percorrenza dei due archi in funzione di fluttuazioni aleatorie della domanda. In particolare, gli autori introducono delle funzioni di valore e di peso che approssimano gli andamenti illustrati nelle figure 4.6 e 4.7, opportunamente semplificate in modo da poterle esprimere attraverso espressioni in forma chiusa, e risolvono un problema di equilibrio tra flussi e costi per via numerica, proponendo poi un'analisi critica rispetto alla soluzione "classica" del problema di assegnazione stocastica di equilibrio. A tal proposito, se da un lato alcuni risultati risultano promettenti, dall'altro se ne evidenziano altri di non intuitiva interpretazione; in ogni caso, la metodologia adottata richiede uno sforzo computazionale notevole anche su una rete così ridotta.

In conclusione, se da un lato emergono chiare indicazioni sulla rispondenza del comportamento di scelta del percorso agli assiomi costitutivi della prospect theory, dall'altro non è ancora stata proposta una metodologia operativamente convincente per implementare modelli di scelta del percorso basati sulle fasi di semplificazione e valutazione tra prospetti prima descritte. Peraltro, occorre investigare anche se ed in che misura la teoria dell'utilità attesa, ed in particolare i modelli di utilità aleatoria descritti nei capitoli precedenti, non sia in grado di riprodurre questi stessi effetti, senza quindi dover ricorrere necessariamente a paradigmi alternativi.

CONCLUSIONI

La tesi di dottorato proposta ha affrontato il tema della simulazione del contesto di scelta del percorso attraverso modelli di scelta discreta.

Nel primo capitolo si è presentata una tassonomia dei modelli di scelta del percorso reperibili in letteratura nell'ambito della classe dei modelli di utilità aleatoria, che costituisce il paradigma dei modelli di scelta discreta di più larga e consolidata applicazione. I modelli sono stati analizzati in relazione alla capacità di soddisfare precise proprietà teoriche, numeriche ed operative. In particolare, si è verificata la loro capacità di tener conto e di simulare esplicitamente gli effetti sulle probabilità di scelta delle covarianze tra percorsi, valutata la rispondenza alle probabilità di scelta attese su numerose reti test, ed analizzata la disponibilità di un'espressione in forma chiusa e la possibilità di implementare un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi. I risultati conseguiti con questo studio hanno in tal senso ripreso e generalizzato i contributi di stato dell'arte già disponibili in letteratura.

In sintesi, tra i modelli ad oggi disponibili nessuno soddisfa in pieno i requisiti richiesti; in particolare, il modello Probit, che si rivela il più affidabile dal punto di vista teorico e numerico, non è dotato di forma chiusa e ciò pone problemi di carattere operativo e computazionale nelle applicazioni. Appare quindi necessario approfondire le proprietà dei modelli in forma chiusa, appartenenti alla classe dei modelli di valore estremo generalizzato (GEV). In questo ambito, tra i modelli GEV che permettono l'implementazione di un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi alcuni non sono in grado di simulare le covarianze (i.e. Logit Multinomiale), altri ne tengono conto solo se la struttura di correlazione tra percorsi è del tipo ad albero (i.e. Logit Gerarchizzato), altri ancora utilizzano metodi di tipo approssimato per riprodurre gli effetti delle correlazioni sulle probabilità di scelta (C-Logit) che producono risultati controintuitivi su alcune reti test. Tra i modelli GEV con struttura di correlazione a rete, quindi in grado di riprodurre una qualsiasi struttura di covarianze tra alternative, l'unico ad essere stato oggetto di applicazione alla scelta del percorso è il modello Cross-Nested Logit (CNL): purtroppo, l'unica specificazione CNL che permette l'enumerazione implicita dei percorsi fornisce risultati incoerenti su alcune reti test. Peraltro, occorre sottolineare che allo stato attuale delle conoscenze di letteratura non si è in grado di quantificare le covarianze riprodotte dal modello CNL in relazione alla specificazione della sua struttura e dei suoi parametri. Per quanto attiene al Mixed Logit, non se ne riscontrano benefici applicativi nella scelta del percorso; alcune prove numeriche appositamente condotte

hanno infatti verificato che la distorsione introdotta nelle probabilità di scelta Probit per effetto della presenza della componente del residuo aleatorio di tipo Logit vanifica il vantaggio operativo di una maggior stabilità e velocità di convergenza nel calcolo delle probabilità di scelta. L'analisi critica dello stato dell'arte ha quindi evidenziato che il problema della simulazione della scelta del percorso attraverso modelli di utilità aleatoria non è affatto risolto, e che in particolare è utile cercare modelli GEV che possano preservare le caratteristiche teoriche e numeriche del Probit, perseguendo al tempo stesso vantaggi di tipo operativo.

A questo sviluppo di ricerca è stato dedicato il secondo capitolo della tesi, nel quale si è specificato un nuovo modello GEV per la simulazione della scelta del percorso, denominato Path Multilevel Logit (PML), basato sull'idea di rappresentare la scelta di un percorso come risultato aggregato della sequenza di scelte compiute ai nodi di diversione di quel percorso. Le proprietà teoriche e numeriche del modello PML sono state verificate sulle stesse reti test utilizzate nel capitolo primo; per quanto attiene alle proprietà operative è stata proposta una specificazione dei parametri del modello tale da permettere l'implementazione di un algoritmo ad enumerazione implicita dei percorsi, successivamente codificato in un linguaggio di programmazione per permetterne l'applicazione ad una rete reale. In tal senso, i risultati ottenuti sono soddisfacenti in quanto il modello risponde ai requisiti teorici e numerici richiesti ed i flussi di arco calcolati su una rete reale si discostano poco da quelli Probit con tempi di calcolo ragionevoli pur in presenza di un algoritmo a doppio passo.

Per approfondire il modo in cui il modello PML simula gli effetti delle covarianze tra alternative, si è reso necessario analizzare in maggior dettaglio la relazione esistente tra la specificazione, in termini di struttura e di parametri di varianza, di un modello GEV e le corrispondenti covarianze: a questo aspetto è stato per l'appunto dedicato il terzo capitolo. In particolare, poiché non è possibile esprimere in forma chiusa la relazione tra parametri di un modello GEV con struttura di correlazione a rete e corrispondente matrice di covarianze, è stata proposta una procedura di calcolo numerico delle covarianze basata sul teorema di McFadden (1978). Tale procedura è stata prima applicata ai modelli GEV per i quali si dispone di espressioni in forma chiusa delle covarianze (i.e. Logit Gerarchizzato ad uno e più livelli), al fine di testarne il livello di approssimazione, e successivamente applicata ai modelli con struttura di correlazione a rete ad un livello (i.e. CNL) ed a più livelli (i.e. PML).

I risultati relativi al calcolo delle covarianze per il modello CNL si sono rivelati di notevole interesse. In primo luogo, è stato verificato il livello di approssimazione dell'unica congettura ad oggi proposta in letteratura per il calcolo delle covarianze CNL in funzione dei gradi di appartenenza e dei parametri di varianza, che ha mostrato un'accettabile sovrastima delle covarianze vere in tutti i casi in cui è stata analizzata. Si è inoltre cercato di verificare se una struttura di tipo Cross-Nested bilivello sia da sola in grado di riprodurre una qualsiasi matrice di covarianze ammissibile, ovvero positiva (semi)definita. Per rispondere a questo quesito si è prima dimostrato sperimentalmente che la specificazione CNL più generale possibile è di tipo Paired Combinatorial Logit (PCL), ovvero con gruppi binari per ciascuna correlazione tra alternative da riprodurre. A partire da questo risultato si è quindi verificato sperimentalmente che una struttura PCL non copre l'intero dominio delle matrici di covarianze (semi)definite positive, il che giustifica in linea di principio l'esistenza di strutture di tipo Cross-Nested multilivello (i.e. network GEV). L'applicazione della procedura di calcolo numerico delle covarianze al PML ha poi

permesso di verificare che esso riproduce in maniera esatta le correlazioni tra percorsi “dall’alto”, se si adotta un’esplorazione della rete in avanti dall’origine, ovvero “dal basso” se la rete è esplorata a ritroso dalla destinazione, mentre le restanti correlazioni sono riprodotte in modo approssimato con un effetto del tipo commonality factor. In tal senso, il PML può essere riguardato come un modello approssimato più efficiente del C-Logit come alternativa in forma chiusa al calcolo delle probabilità di scelta del percorso Probit. A margine di questa analisi si è dimostrata anche l’appartenenza del PML alla classe GEV, e si sono discusse condizioni cui i parametri del modello devono soggiacere perché questa appartenenza sia garantita.

L’analisi delle covarianze riprodotte dai modelli GEV ha quindi rappresentato un primo passo nella ricerca di modelli di utilità aleatoria, in particolare applicati al contesto di scelta del percorso, che possano preservare le caratteristiche del Probit mantenendo al tempo stesso una forma chiusa. In tal senso, è opportuno ricordare che i modelli GEV sono in grado di riprodurre solo contesti di tipo omoschedastico, cioè con pari varianza tra le utilità delle alternative, mentre il Probit permette di simulare anche contesti di tipo eteroschedastico. Si è quindi ritenuto necessario approfondire anche questo aspetto, per verificare se ed in che misura tale differenza rappresenti un limite effettivo nell’applicazione dei modelli GEV, sia in generale sia nella scelta del percorso. A tal fine si è condotta un’analisi critica e di sistematizzazione di alcuni contributi di letteratura relativi alla valutazione delle proprietà matematiche dei modelli GEV, e si sono proposti avanzamenti teorici sul cosiddetto lemma di omoschedasticità di Daly (2005). La conclusione cui si è giunti è che è sempre possibile, nell’ambito dei modelli additivi, ricondurre un modello Probit con matrice di covarianze eteroschedastica ad un modello Probit equivalente ma con matrice omoschedastica. Questo risultato rappresenta quindi un primo passo verso la conferma che l’incapacità dei modelli GEV di simulare contesti di tipo eteroschedastico non costituisce un limite così marcato come finora ritenuto in letteratura.

Nell’ultimo capitolo si è infine fatto cenno ad approcci modellistici alternativi alla teoria dell’utilità aleatoria. In particolare, si è introdotta la teoria dell’eliminazione per aspetti (EBA), di rilevante interesse in virtù delle sue analogie formali col modello PML, rispetto al quale se ne sono discusse similitudini e differenze a partire dalla circostanza che entrambi i modelli possono essere ricondotti, sotto certe ipotesi, a forme di tipo Logit Gerarchizzato. Infine, avendo esplorato in dettaglio gli aspetti rilevanti dell’applicazione dei modelli di utilità aleatoria alla scelta del percorso, si è ritenuto utile accennare anche ad approcci modellistici alternativi che tentano di considerare esplicitamente gli effetti dell’incertezza e del rischio sulle scelte dei decisori. Infatti, nell’ambito della scelta del percorso il comportamento degli utenti è di solito influenzato da condizioni di incertezza associate alla non perfetta conoscenza delle caratteristiche delle alternative disponibili, ad esempio i tempi di percorrenza su percorsi alternativi, e tale incertezza conduce ad un comportamento di scelta che dipende dalla maggiore o minore attitudine del decisore ad accettare alternative rischiose. In questo ambito si è in particolare fatto riferimento alla prospect theory come esempio di paradigma che, in accordo con i primi riscontri in letteratura disponibili, sembra riprodurre in maniera efficace il comportamento di scelta del percorso degli utenti in condizioni di incertezza e di rischio.

Gli obiettivi inizialmente posti a base della ricerca possono quindi dirsi raggiunti, ed in più si sono proposti approfondimenti in relazione ad alcuni aspetti relativi alla classe dei modelli GEV fino ad oggi non investigati in letteratura. I risultati conseguiti hanno peraltro permesso di

delineare ulteriori sviluppi di ricerca, sia per quanto riguarda la scelta del percorso nell'ambito dei modelli di utilità aleatoria additivi sia con riferimento alla possibilità di applicare paradigmi modellistici differenti.

RINGRAZIAMENTI

Per fare ciò che si vuole nella vita occorrono determinazione e fortuna: se per la prima si può cercare dentro di sé, con le giuste motivazioni, per la seconda non si può far altro che tirare in ballo qualcosa che sia oltre il nostro essere e la nostra volontà, e ciò mi basta per sentire la responsabilità di ripagare ogni giorno l'infinito privilegio che mi è stato concesso. A questo pensiero mi sono aggrappato nei momenti difficili, tutte le volte che non mi sono sentito all'altezza o avvertivo la sensazione di perdere di vista il senso di ciò a cui dedicavo gran parte del mio tempo. E poiché da soli non si va da nessuna parte, ringrazio per prime tutte le persone che ho incontrato in questi anni e che hanno testimoniato – più o meno volontariamente – più fiducia in me di quanta io non ne abbia in me stesso: è grazie al loro incoraggiamento che ho continuato a camminare.

Vorrei ringraziare innanzitutto il professor de Luca, per il sostegno che non mi ha mai fatto mancare e per la libertà di ricerca e di studio che mi ha lasciato per l'intero corso di dottorato. Vorrei poi ringraziare i ragazzi del Dipartimento di Ingegneria dei Trasporti dell'Università di Napoli, in particolare Davide, perché è il collega di lavoro ideale ed un amico su cui so che potrò sempre contare; Armando, per quel viaggio da Arezzo a Venezia e nonostante il conteggio di mezzi pesanti negli autogrill della Campania in cui è riuscito a coinvolgermi una notte d'inverno; Emilio, perché mi ha sempre sorpreso con la sua genialità; Fulvio, la cui intelligenza e tenacia non smetterò mai di invidiare; Vincenzo, che aspetto sempre su un campo di calcio o su una pista da sci; Mimmo, per la sua ristata ed i suoi “non si può fare...”; Biagio e Maria Teresa, che mi insegnano ogni giorno che con il sorriso e la disponibilità si diventa delle persone migliori, e poi Antonino e Francesco, Luca, Lucia, Salvatore con il quale passerei una vita intera a parlare di cinema e politica, Guido e Valerio. Non posso poi non ricordare tutti i tesisti di cui sono stato correlatore, in particolare Michele, Vincenzo, Davide, Barbara, Antonio e Roberta, e gli studenti che hanno avuto la sventura di incrociarmi in questi anni: grazie a loro ho capito quanto sia importante e difficile seguire e giudicare un'altra persona.

Un ringraziamento va anche a Guido Gentile, per i preziosi consigli e le dritte sugli aspetti operativi e computazionali degli algoritmi di assegnazione.

Vorrei inoltre ringraziare l'*Institute for Transport Studies* dell'Università di Leeds, che mi ha ospitato per quattro mesi, ed in particolare Richard Batley ed Andrew Daly, che mi hanno seguito

in qualità di supervisors: grazie per la lezione di umiltà che mi hanno dato e per le tante osservazioni critiche che hanno migliorato molti aspetti della mia ricerca di dottorato. Della mia esperienza d'oltremarina ringrazio anche Stefano, Gianfranco e Roberta e poi Manoj, José, Fitsum che mi ha costretto ad intonare “you’ll never walk alone” insieme ad altri mille tifosi del Liverpool, Richard, Hedi, Amaya che è stata una perfetta guida turistica a Dublino, Alfredo, Lucy, Jerry e Yaron.

Un pensiero di profonda gratitudine va alla mia famiglia, perché nonostante il tempo che passiamo insieme sia sempre di meno non mi manca mai il loro sostegno, ed in particolare a Paoletta, che è sempre nel mio cuore. Grazie di cuore anche ad Alessia, la mia *compagna di viaggio*, perché sapere che ci sei mi dà sempre una grande carica.

Infine, riservo il mio ultimo e profondo ringraziamento al professore cui sarò sempre debitore per tutto ciò che ho imparato ed ho fatto in questo dottorato (forse *quasi* tutto, sono ancora indeciso sui quindici chilometri a piedi di notte a Parigi...), conscio che a pochi nella vita è concesso di incontrare una persona della quale intuire i pensieri prima ancora di parlare, e – soprattutto – all'amico con cui ho condiviso questi tre irripetibili anni della mia vita: grazie, Andrea.

BIBLIOGRAFIA

- Abbé, E., Bierlaire, M. and Toledo, T. (2005). Normalization and correlation of Cross-Nested Logit models. Proceedings of 2005 ETC Conference, Strasbourg.
- Adamo, V. and Bifulco, G.N. (1997). Sull'efficienza degli algoritmi di assegnazione stocastica di equilibrio. Il trasporto pubblico nei sistemi urbani e metropolitani, vol. I, ed. Franco Angeli.
- Batley, R. and Daly, A. (2004). Is elimination-by-aspects a random-utility-maximising model? Paper presented at the Centre for Decision Research Seminars, Leeds University Business School, Leeds, UK.
- Batley, R., Fowkes, T., Watling, D., Whelan, G., Daly, A., and Hato, E. (2001). Models for analysing route choice. Paper presented at the 33rd Annual Conference of the Universities Transport Studies Group Conference, University of Oxford.
- Bekhor, S., Ben-Akiva, M. and Ramming, M. (2002). Adaptation of logit kernel to route choice situation. *Transportation Research Record*, 1805, pp. 78–85.
- Bekhor, S. and Prashker, J. (2001). Stochastic user equilibrium formulation for the generalized nested logit model. *Transportation Research Record*, 1752, pp. 84–90.
- Ben-Akiva, M. and Bierlaire, M. (1999). Discrete choice models with applications to departure time and route choice. *Handbook of Transportation Science*, 26, pp. 5–34.
- Ben-Akiva, M. and Bolduc, D. (1996). Multinomial probit with a logit kernel and a general parametric specification of the covariance structure. Paper presented at the 3rd Invitational Choice Symposium, Columbia University.
- Ben-Akiva, M. and Francois, B. (1983). μ homogeneous generalized extreme value model. Working paper, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge.
- Ben-Akiva, M. and Lerman, S. (1985). *Discrete choice analysis: Theory and application to travel demand*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Bhat, C. (1995). A Heteroscedastic Extreme Value Model of Intercity Mode Choice. *Transportation Research B*, 29 (6), pp. 471-483.
- Bhat, C. (1997). Covariance heterogeneity in nested logit models: econometric structure and application to intercity travel. *Transportation Research B*, 31, pp. 11–21.
- Bierlaire, M. (2002). The network GEV model. Proceedings of the 2nd Swiss Transportation Research Conference, Ascona, Switzerland.
- Bierlaire, M. (forthcoming). A theoretical analysis of the cross-nested logit model. Accepted for

- publication in *Annals of Operations Research*.
- Bierlaire, M., Bolduc, D. and McFadden, D. (2003) Characteristics of generalized extreme value distributions. Technical report, Econometrics Laboratory, University of California, Berkeley.
- Bierlaire, M. and Frejinger, E. (2005). Route choice models with subpath components. Proceedings of the 2nd Swiss Transportation Research Conference, Ascona, Switzerland.
- Block, H. D. and Marschak, J. (1960). Random orderings and stochastic theories of response. In I. Olkin, S. Ghurye, W. Hoeffding, W. Madow and H. Mann (Eds.), *Contributions to probability and statistics*, Stanford University Press, pp. 97-132.
- Borsch-Supan, A. (1990). On the compatibility of nested logit models with utility maximization. *Journal of Econometrics*, 43, pp. 373-388.
- Bolduc, D. (1999). A practical technique to estimate multinomial Probit models in transportation. *Transportation Research B*, 33 (1), pp. 63-79.
- Bunch, D. S. (1991). Estimability in the multinomial Probit model. *Transportation Research B*, 25 (1), pp. 1-12.
- Cascetta, E. (1995). A modified Logit model for route choice. Internal report, Dipartimento di Ingegneria dei Trasporti, Università di Napoli.
- Cascetta E. and Papola A. (2001). Random utility models with implicit availability/perception of choice alternatives for the simulation of travel demand. *Transportation Research C*, 9 (4), pp. 249-263.
- Cascetta, E. (2001). *Transportation system engineering: theory and methods*. Kluwer ed., Netherlands.
- Cascetta, E., Nuzzolo, A., Russo, F. and Vitetta, A. (1996). A modified Logit route choice model overcoming path overlapping problems. Specification and some calibration results for interurban networks. Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Jean-Baptiste Lesort ed., Pergamon.
- Chu, C. (1989). A paired combinatorial logit model for travel demand analysis. Proceedings of 5th World Conference on Transportation Research, Ventura, CA.
- Daganzo, C.F. and Sheffi, Y. (1977). On stochastic models of traffic assignment. *Transportation Science*, 11(3).
- Dagsvik, J.K. (1995). How large is the class of generalised extreme value models? *Journal of Mathematical Psychology*, 39, pp. 90-98.
- Daly, A. (1987). Estimating “tree” Logit models. *Transportation Research B*, 21, pp. 251-267.
- Daly, A. (2001a). Alternative tree Logit models: comments on a paper of Koppelman and Wen. *Transportation Research B*, 35, pp.717-724.
- Daly, A. (2001b). Recursive nested EV model. ITS Working Paper, 559, Institute for Transport Studies, University of Leeds.
- Daly, A. (2001c). Independence, homoskedasticity and existence in random utility models. ITS working paper, 557, Institute for Transport Studies, University of Leeds.
- Daly, A. (2005). Properties of random utility models of consumer choice. Proceedings of IMA conference, London.
- Daly, A. and Zachary, S. (1976). Improved multiple choice models. Proceedings of the 4th PTRC Summer Annual Meeting. PTRC, London.
- Daly, A. and Bierlaire, M. (forthcoming). A general and operational representation of GEV

- models. *Transportation Research B*, accepted for publication.
- Debreu, G. (1954). Representation of a preference ordering by a numerical function. Thrall, R.M., Coombs, C.H. and Davis, R.L. (eds) *Decision Processes*. Wiley, New York.
- De Palma, A. and Picard, N. (2005). Route choice decision under travel time uncertainty. *Transportation Research A*, 39, pp. 295-324.
- Dial, R.B. (1971). A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. *Transportation Research*, 5, pp. 83-111.
- Domencich, T.A. and McFadden, D. (1975). *Urban Travel Demand: A Behavioural Analysis*. North-Holland, Amsterdam.
- Fiorenza, R. and Greco, D. (1995). *Lezioni di Analisi Matematica I e II*. Liguori ed., Napoli.
- Galambos, J. (1987). *The asymptotic theory of extreme order statistics* (second edition). John Wiley & Sons, New York.
- Gliebe, J.P., Koppelman, F.S. and Ziliaskopoulos, A. (1999). Route choice using a paired combinatorial logit model. Paper presented at the 78th meeting of the Transportation Research Board, Washington D.C.
- Han, B. and Algers, S. (2001). Accommodating drivers' taste variation and repeated choice correlation in route choice modelling by using the mixed Logit model. Presented at the 80th TRB Meeting, Washington D.C.
- Hoogendoorn-Lanser, S. (2005). *Modelling travel behaviour in multi-modal networks*. PhD Thesis, TRAIL series, Technical University of Delft, The Netherlands.
- Ibanez, N. and Batley, R. (2005). Alternative presentations of the random utility model. *Proceedings of 2005 ETC Conference*, Strasbourg.
- Joe, H. (2001). Multivariate extreme value distributions and coverage of ranking probabilities. *Journal of Mathematical Psychology*, 45, pp. 180-188.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), pp. 263-292.
- Koppelman, F. and Wen, C. (1997). The Paired Combinatorial Logit Model: Properties, estimation and application. Presented at the 76th TRB Meeting, Washington D.C.
- Koppelman, F. and Wen, C. (1998). Alternative Nested Logit models: structure, properties and estimation. *Transportation Research B*, 32(5), pp. 289-298.
- Koppelman, F. and Wen, C. (2000). The Paired Combinatorial Logit Model: Properties, estimation and application. *Transportation Research B*, 34, pp. 75-89.
- Koppelman, F, Sethi, V. and Wen, C. (2001). Alternative Nested Logit models: a response to comments by Andrew Daly on an earlier paper of Koppelman and Wen. *Transportation Research B*, 32, pp. 725-729.
- Luce, R. D. (1959). *Individual Choice Behaviour*. John Wiley and Sons, New York
- Luce, R. D., and Suppes, P. (1965). Preference, utility, and subjective probability. In R. D. Luce R.D., B. Bush and E.Galanter (Eds.), *Handbook of mathematical psychology*, 3, pp. 249-410.
- Machina, M. (1987). Choice under uncertainty: problems solved and unsolved. *The Journal of Economic Perspectives*, 1(1), pp. 121-154.
- Manski, C. (1977). The structure of random utility models. *Theory and Decision*, 8, pp. 229-254.
- Marzano, V. (2002). *Un confronto tra modelli di scelta del percorso: aspetti teorici ed operativi*. Tesi di laurea in Ingegneria Civile (indirizzo Trasporti), Università di Napoli "Federico II".

- Marzano, V. and Papola, A. (2004). A Path Multilevel Logit model for route choice which allows implicit path enumeration. Proceedings of 2004 ETC Conference, Strasbourg.
- McFadden, D. (1978). Modelling the choice of residential location. Karlqvist A. et al (eds.), Spatial interaction theory and planning models, North Holland, Amsterdam.
- McFadden, D. (1981). Structural analysis of discrete data with econometric applications. Manski C. e McFadden D. (eds), MIT Press, Cambridge.
- McFadden, D. (1989). A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration. *Econometrica*, 57, pp. 995–1026.
- Munizaga, M., Heydecker, B. and Ortuzar, J. de D. (1999). Representation of heteroskedasticity in discrete choice models. *Transportation Research B*, 34, pp. 219-240.
- Ortuzar, J. de D. (2001). On the development of the Nested Logit model. *Transportation Research B*, 35(4), pp. 213-216.
- Papola, A. (2000). Some developments of the cross-nested logit model. Proceedings of the 9th IATBR Conference.
- Papola, A. (2003). Applicabilità del modello Link nested logit alla simulazione della scelta del percorso. Proceedings of the annual meeting “Metodi e Tecnologie dell’Ingegneria dei Trasporti”, Reggio Calabria 2001, Franco Angeli ed.
- Papola, A. and Marzano, V. (2004). Applicabilità del modello Hybrid Logit-Probit alla simulazione della scelta del percorso. Proceedings of the annual meeting “Metodi e Tecnologie dell’Ingegneria dei Trasporti”, Reggio Calabria 2002, Franco Angeli ed.
- Papola, A. and Marzano, V. (2005). A specification procedure of the CNL model reproducing any homoskedastic covariance matrix. Proceedings of 2005 ETC Conference, Strasbourg.
- Prashker, J.N. and Bekhor, S. (1998). Investigation of stochastic network loading procedures. Proceedings of the 77th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington DC.
- Prashker, J.N. and Bekhor, S. (2004). Route choice models used in the stochastic user equilibrium problem: a review. *Transport reviews*, 24(4), pp. 437-463.
- Ramming, M.S. (2002). Network knowledge and route choice. PhD dissertation, Massachusetts Institute of Technology.
- Russo, F. and Vitetta, A. (2001). Un modello di scelta del percorso che affronta i problemi di enumerazione esplicita e sovrapposizione dei percorsi. Proceedings of the annual meeting “Metodi e Tecnologie dell’Ingegneria dei Trasporti”, Reggio Calabria 1999, Franco Angeli ed.
- Russo, F. and Vitetta, A. (2003). An assignment model with modified Logit, which obviates enumeration and overlapping problems. *Transportation*, 30, pp. 177-201.
- Sheffi, Y. and Powell, W.B. (1982). An algorithm for the equilibrium assignment problem with random link times. *Networks*, 12, pp. 191–207.
- Sheffi, Y. (1985). *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Simonelli, F. (2004). Aspetti teorici e modellistici per applicazioni di infomobilità in contesti dinamici. Tesi di dottorato, Dipartimento di Ingegneria dei Trasporti, Università di Napoli.
- Small, K. (1987). A discrete choice model for ordered alternatives. *Econometrica*, 55, pp. 409-424.
- Smith, T.E. (1984). A choice probability characterisation of generalised extreme value models.

- Applied Mathematics and Computation, 14, pp. 35-62.
- Sumalee A., Connors, R. and Batley R. (2005). The applicability of prospect theory to the analysis of transport networks. Proceedings of 2005 ETC Conference, Strasbourg.
- Thurstone, L. (1927). A law of comparative judgement. Psychological Review, 34, pp. 273-286.
- Train, K. (2003). Discrete choice methods with simulation. Cambridge University Press.
- Tversky, A. (1972). Choice by elimination. Journal of Mathematical Psychology, 9, pp. 341-367.
- Tversky, A. and Sattath, S. (1979). Preference trees. Psychological review, 79(4), pp. 281-299.
- Vovsha, P. (1997). Cross-nested logit model: an application to mode choice in the Tel-Aviv metropolitan area. Proceedings of 76th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington DC.
- Van de Kaa, E.J. (2004). Prospect theory and the understanding of travellers' choice behaviour. Report of TRAIL research school, Technical University of Delft, The Netherlands.
- Vovsha, P. and Bekhor, S. (1998). The link-nested logit model of route choice: overcoming the route overlapping problem. Transportation Research Record, 1645, pp. 133-142.
- Yai, T., Iwakura, S. and Morichi, S. (1997). Multinomial Probit with structured covariance for route choice behaviour. Transportation Research B, 31 (3), pp. 195-207.
- Wen, C. H. and Koppelman, F. S. (2001). The generalized nested logit model. Transportation Research B, 35(9) pp. 627-641.
- Williams, H.C.W.L. (1977). On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. Environment and Planning A, 9, pp. 285-344.
- Zachary, S. (1977). Some results on choice models. LGORU Transportation working note, 10.

This research was partially supported through a European Community *Marie Curie* Fellowship.

Disclaimer: the author is solely responsible for information communicated and the European Commission is not responsible for any view or results expressed.