

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Scuola di Dottorato in Scienze Matematiche

Nicolò Messina

Strutture lineari-ordinate,
grafi e gruppi di Butler

Tesi di Dottorato di Ricerca
XXIV Ciclo

Tutore:
Prof. C. De Vivo

Coordinatore:
Prof. F. de Giovanni

Indice

1. Introduzione	3
Capitolo 1. Premesse e generalità	6
1. Alcune notazioni	6
2. Introduzione ai gruppi di Butler; regolarità	6
3. Typeset di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo	9
4. Typeset di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo	12
5. Sulla struttura dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi	14
6. Tende	15
7. Calcolo delle partizioni minime mediante i Primi.	19
8. Uno strumento per lo studio dei sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(m)$	21
9. Sulla nozione di regolarità	22
10. La notazione degli interi liberi da quadrati	23
Capitolo 2. Isomorfismi e cambi-base di gruppi di Butler	26
1. I rapporti tra typeset e struttura gruppale.	26
2. Isomorfismi e cambi-base	30
3. Cambi-base di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi	33
4. Proprietà strutturali di $\mathbf{B}(1)$ -gruppo determinate dalla tenda	39
5. Il dominio di un automorfismo \mathcal{E} di $\mathbb{B}(m)$	42
Capitolo 3. Teoremi nello spazio delle parti pari su un insieme	43
1. Elementi di teoria dei grafi	43
2. Lo spazio delle parti pari	46
3. Grafo e dominio di un isomorfismo $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$	51
4. Il funtore $S_\bullet : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{P}^*$	56
5. Commenti alla costruzione funtoriale	58
6. Cambi-base di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi indecomponibili.	61
7. Un ipotesi di approccio al teorema di [BDVM]	67
Capitolo 4. Una panoramica sui $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, $n \geq 2$	70
1. Spezzamenti dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, $n \geq 2$	70
2. Il teorema di Butler	79
Bibliografia	89

1. Introduzione

Nell'ambito della teoria dei gruppi abeliani senza torsione la classe dei gruppi di Butler nasce in maniera naturale come generalizzazione della classe dei gruppi completamente decomponibili, classificati nel 1937 da R. Baer ([Ba]), la quale viene così immersa in una classe di gruppi che ha significative proprietà di chiusura. Ad esempio la classe dei gruppi di Butler di rango finito è la minima classe di gruppi abeliani senza torsione contenente tutti i gruppi di rango 1, che sia chiusa per sottogruppi puri, immagini omomorfe (senza torsione) e somme dirette finite. Tale classe di gruppi venne introdotta nel 1965 da M.C.R. Butler ([Bu65]) e successivamente generalizzata, eliminando la restrizione sul rango finito ([Rich83],[Bu87]).

Tuttavia furono i gruppi di Butler di rango finito che suscitano un grande interesse da parte di vari studiosi e continuano tutt'oggi a essere una tra le più attive aree di ricerca nell'ambito della teoria dei gruppi abeliani. Ciò è dovuto, tra altri motivi, ad una circostanza rara nella teoria dei gruppi abeliani: i gruppi di Butler di rango finito presentano sorprendenti aspetti di carattere computazionale, i quali consentono di approcciare il loro studio con strumenti lineari-ordinati e combinatorici e pertanto di ottenere per essi risultati di natura costruttiva.

L'argomento di questa tesi è lo studio e l'applicazione di tali strumenti; per come è definito l'argomento di studio, sarà utile convenire di usare il termine *gruppo* per "gruppo abeliano senza torsione, di rango finito". Inoltre, come è ben noto¹, tutte le proprietà fondamentali dei gruppi abeliani senza torsione sono invarianti per *quasi-isomorfismi*, cioè per isomorfismi tra sottogruppi di indice finito. Pertanto si adotterà il quasi-isomorfismo come equivalenza fondamentale e, con abuso di linguaggio, si dirà *isomorfo*, *addendo diretto*, *indecomponibile*, etc. invece di "quasi-isomorfo", "quasi-addendo diretto", "quasi-indecomponibile", etc.

Un gruppo completamente decomponibile è una somma diretta di gruppi di rango 1, cioè, a meno di isomorfismi, di sottogruppi del gruppo additivo $\mathbb{Q}(+)$ del campo \mathbb{Q} dei numeri razionali.

Un gruppo di Butler è, equivalentemente, un'immagine omomorfa senza torsione di un gruppo completamente decomponibile oppure un sottogruppo puro di un gruppo completamente decomponibile; l'equivalenza delle due definizioni è uno dei teoremi principali provati da Butler ([Bu65]).

In tutta l'esposizione si privilegerà la prima definizione, quella di gruppo di Butler come immagine omomorfa di un gruppo completamente decomponibile, ovvero come quoziente di un gruppo completamente decomponibile rispetto ad un suo sottogruppo puro. Secondo questa visione, un gruppo di Butler è un gruppo G somma di un numero finito di sottogruppi puri di rango 1

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$$

i cui generatori puri g_1, \dots, g_m sono soggetti a n relazioni indipendenti ($n \leq m$); con tale definizione si parla di $\mathbf{B}(n)$ -gruppo di Butler. Indicando con $t_i = t_G(g_i)$ il tipo in G del generico g_i , l' m -pla (t_1, \dots, t_m) vien detta la *base di tipi* di G .

¹cfr. ad esempio [A], Cap. 2.

È tale punto di vista che ha prodotto i vari strumenti lineari-ordinati e combinatorici menzionati; prima di introdurli, si osservi quanto segue: per ogni gruppo G si definisce il *typeset* $T(G)$ di G come l'insieme dei tipi degli elementi di G :

$$T(G) = \{t_G(g) | g \in G\}.$$

È ben noto (cfr. ad esempio [A], Cap. 3. Lemma 3.1.3) che, se $T(G)$ è finito, allora $T(G)$ è un sotto- \wedge -semireticolo del reticolo $(\mathbb{T}, \wedge, \vee)$ dei tipi. Ad esso si suole aggiungere un massimo “ ∞ ” per il tipo del gruppo nullo e di conseguenza, se $T(G)$ è finito, allora esso è un reticolo $(T(G), \wedge, \vee)$, con il suo sup “ \vee ” definito in maniera ovvia. Sotto tale fattispecie ricadono i gruppi di Butler di rango finito; nel loro typeset particolari tipi, detti \vee -irriducibili vengono individuati sulla base della discrepanza tra le operazioni di estremo superiore \vee nel typeset e \vee nel reticolo dei tipi.

La *tenda* di un gruppo di Butler G — che può essere, in prima approssimazione, descritta come una $\{0, 1\}$ -tabella con m righe e un numero finito di colonne, alla quale sia associata una partizione di $I := \{1, \dots, m\}$ che *seziona* le righe della tabella in accordo con l'insieme delle relazioni della rappresentazione — è uno strumento che sintetizza in maniera efficace le relazioni d'ordine intrattenute, nel typeset, tra i generatori del gruppo e i \vee -irriducibili (vedi Sez. 6 Cap. 1).

A ogni rappresentazione di un gruppo di Butler $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ come quoziente di un gruppo completamente decomponibile resta associata una tenda e due gruppi di Butler che posseggono rappresentazioni alle quali è associata la medesima tenda vengono detti *isoscenici*. Si ottiene così una relazione d'equivalenza molto più larga dell'isomorfismo; pertanto è estremamente significativo che, mentre typeset e rango di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo mostrano avere una influenza limitata sulla struttura del gruppo, così non è per la tenda: la classe di isoscenismo determina, nel caso del $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, le decomposizioni dirette, l'indecomponibilità, e i *cambi-base* (ovvero i cambi di rappresentazione), ed ha una significativa influenza sulla struttura anche nel caso dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, con $n \geq 2$ (vedi Cap. 2).

Ai $\mathbf{B}(1)$ -gruppi è dedicata la parte centrale di questa tesi. Essi sono, come già accennato, il luogo in cui con maggiore successo si sono applicate le suddette tecniche, ad opera di studiosi tra cui C. De Vivo, C. Metelli e F. Barioli. La loro ricerca si è mossa a partire da una situazione vantaggiosa ed esclusiva per i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi: lo studio dei loro cambi-base può essere ricondotto dal campo razionale al campo \mathbb{Z}_2 ([GM],[BDVM]) ed inoltre l'unica relazione a cui i generatori sono soggetti è di fatto indipendente dal $\mathbf{B}(1)$ -gruppo scelto. Ciò permette di dispiegare completamente le possibilità combinatorie insite nella tenda e le trasformazioni originali di cui è suscettibile.

Il mio lavoro è consistito in un ulteriore sviluppo di tali possibilità. Un opportuno funtore controvariante ha permesso di ricondurre le problematiche dei cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi dal loro originario ambiente di studio (gli spazi delle bipartizioni) ad un nuovo contesto (gli spazi delle parti di ordine pari di un insieme). In questo modo, molte proprietà combinatorie della tenda hanno guadagnato una descrizione intrinseca, libera dal riferimento

alla dimensione dello spazio ambiente, e si sono rese possibili efficaci interpretazioni della tenda come ipergrafo, e delle proprietà di indecomponibilità grupale in termini di 2-connessione di grafi e ipergrafi. Ciò ha condotto ad una caratterizzazione dei cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi indecomponibili, oltre che a nuove e più agevoli modalità del loro studio in generale, lontane dalla complessità d'uso degli spazi di bipartizioni e del reticolo delle partizioni (vedi Cap. 3).

I risultati raggiunti sono contenuti nell'articolo "*Base changes of $\mathbf{B}(1)$ -Butler groups: a \mathbb{Z}_2 -linear and graph theory approach*", in corso di stampa sul "Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche".

Recentemente C. De Vivo e C. Metelli hanno trovato una dimostrazione costruttiva di una delle implicazioni del teorema di Butler ed è in fase di elaborazione una dimostrazione costruttiva dell'altra implicazione. Nel caso delle immersioni di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo, l'interpretazione in termini di ipergrafi e grafi ospiti è risultata nuovamente pertinente, e sembra fornire una versione equivalente — puramente combinatoria, in teoria dei grafi — del problema algebrico dell'immersione del gruppo in un contenitore puro minimale (vedi Sezione 2, Cap. 4).

Sfortunatamente, non appena si affronta lo studio dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi per $n \geq 2$, il campo razionale "la fa da padrone": i coefficienti razionali delle relazioni di una rappresentazione di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo influiscono quasi sempre in maniera stringente sulle proprietà strutturali del gruppo e l'isoscenismo detta legge solo in alcuni casi particolari. Ad esempio, ci sono $\mathbf{B}(2)$ -gruppi isoscenici, che sono decomponibili o indecomponibili a seconda dei coefficienti delle due relazioni che li rappresentano; di conseguenza non c'è alcun algoritmo che decomponga un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo in addendi diretti indecomponibili a partire dalla sua sola tenda, anche se n è appena 2. Fanno eccezione alcuni particolari $\mathbf{B}(2)$ -gruppi e i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi cosiddetti "degeneri" cioè dati "a priori" come somme dirette di gruppi di Butler.

Ancora, anche quando si trovino condizioni di spezzamento per $\mathbf{B}(n)$ -gruppi con $n \geq 2$, queste ultime sono strettamente legate alle loro rappresentazioni: cambiando base (cioè rappresentazione), le suddette condizioni cambiano completamente o perdono di significato (cfr. Sezione 1 Cap. 4). E l'elenco potrebbe continuare.

Nella letteratura ci sono tuttavia vari studi sui $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, per $n \geq 2$, che cominciano a gettare un po' di luce sulle difficili problematiche che si presentano per essi (cfr. [DVM8], [DVM12], [DVM13], [DVM14], [GUV], [VWW]). In particolare sembra aprire qualche spiraglio il lavoro sulla dimostrazione costruttiva del teorema di Butler precedentemente citato ([DVM16]). Nel corso di tutta la tesi ho inserito, con commenti, esempi di varia natura, nel tentativo di fornire una panoramica, necessariamente incompleta, dei problemi che si presentano per i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi di Butler, quando $n \geq 2$.

Premesse e generalità

1. Alcune notazioni

Le lettere greche minuscole, con l'eccezione di alcune (τ, σ, ν, π), denoteranno numeri razionali.

Se I è un insieme finito, si indicherà come di consueto con $\mathcal{P}(I)$ l'insieme delle parti di I ; inoltre si indicherà con $\mathcal{P}^*(I)$ l'insieme delle parti di ordine pari di I . Le parti di ordine 2 di I verranno chiamati i 2-elementi di $\mathcal{P}^*(I)$ e l'insieme dei 2-elementi verrà indicato con $\mathcal{P}_2(I)$.

$(\mathbb{P}(I), \wedge, \vee)$ indicherà il reticolo delle partizioni di I , $(\mathbb{T}, \wedge, \vee)$ il reticolo dei tipi, al quale sia stato aggiunto un massimo " ∞ " per il tipo del gruppo nullo.

Quando non vi sia luogo a equivoci, e non sia importante il riferimento all'insieme I di ordine m , si useranno $\mathcal{P}(m)$, $\mathcal{P}^*(m)$, $\mathbb{P}(m)$ invece di $\mathcal{P}(I)$, $\mathcal{P}^*(I)$, $\mathbb{P}(I)$. Si userà spesso la notazione E^{-1} per il complemento $I \setminus E$ di un sottoinsieme E di I .

Nel reticolo $\mathbb{P}(I)$ si useranno le notazioni seguenti, con $E \subseteq I$:

$b_E = b_{E^{-1}}$ è la bipartizione $\{E, E^{-1}\}$;

p_E è la partizione $\{E^{-1}, \{i\} | i \in E\}$ detta *partizione puntata su E* ;

$p_i := p_{\{i\}} = b_{\{i\}}$ è la partizione puntata sul singleton $\{i\}$ ($i \in I$).

La partizione massima $\{\emptyset, I\} = b_\emptyset = b_I = p_\emptyset$ sarà denotata con 0 (zero) e considerata come bipartizione impropria; questo perché l'insieme $\mathbb{B}(I)$ delle bipartizioni con l'aggiunta di b_\emptyset è uno \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale, rispetto alla somma definita, per ogni $b_E, b_F \in \mathbb{B}(I)$ da:

$$b_E + b_F = b_{E+F} = \{(E \cap F) \cup (E^{-1} \cap F^{-1}), (E \cap F^{-1}) \cup (E^{-1} \cap F)\}.$$

Rispetto a tale operazione b_\emptyset è il vettore nullo. Inoltre $\mathbb{B}(I)$ può essere identificato in maniera canonica con il quoziente $\mathcal{P}(I)/\langle I \rangle$ dello \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale sull'algebra di Boole $\mathcal{P}(I)$, pertanto la \mathbb{Z}_2 -dimensione di $\mathbb{B}(I)$ è $|I| - 1 = m - 1$.

Ogni insieme di $m - 1$ bipartizioni p_i puntate su singleton è una base e l' m -pla (p_1, \dots, p_m) è una *base ridondante* di $\mathbb{B}(I)$, cioè un insieme di generatori dipendente minimale; in particolare $\sum_{i=1}^m p_i = 0$.

Se \mathcal{E} è un automorfismo di $\mathbb{B}(I)$, esso sarà rappresentato con l' m -pla \mathbb{Z}_2 -ammissibile $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ dei vettori immagini $b_{E_i} := \mathcal{E}(p_i)$ con $i = 1, \dots, m$, cioè sarà scritto rispetto la base ridondante (p_1, \dots, p_m) .

2. Introduzione ai gruppi di Butler; regolarità

Un gruppo G si dice un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo (di Butler) se G è isomorfo ad un quoziente di un gruppo completamente decomponibile

$$X = \bigoplus_{i=1}^m R_i x_i \quad (R_i \leq \mathbb{Q}(+) \text{ per ogni } i)$$

rispetto ad un suo sottogruppo puro K di rango n (con $n \leq m$). Sicché

$$G = X/K.$$

Non si lede la generalità assumendo $\mathbb{Z} \leq R_i$, perché ogni sottogruppo di $\mathbb{Q}(+)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\mathbb{Q}(+)$ contenente \mathbb{Z} .

Posto $g_i = x_i + K$ per $i = 1, \dots, m$, si ha

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*,$$

cioè G si scrive come somma di m sottogruppi puri di rango 1, generati dagli elementi della sua *base* (g_1, \dots, g_m) . La rappresentazione di G viene completata dalle *relazioni* che si ottengono proiettando in G una scelta y_1, \dots, y_n di n generatori puri (e indipendenti) di K :

$$y_l = \sum_{i=1}^m \alpha_{l,i} x_i \quad (l = 1, \dots, n).$$

In tal modo si ottengono n relazioni indipendenti

$$a_l := \alpha_{l,1} g_1 + \dots + \alpha_{l,m} g_m = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

tra i g_i .

Se $g = x + K$ è un elemento di G , il suo tipo in G è ovviamente l'estremo superiore dei tipi in X dei suoi rappresentanti $x + y$, al variare di $y \in K$:

$$t_G(g) = \bigvee \{t_X(x + y) \mid y \in K\}$$

e, ovviamente, $t_G(g_i) \geq t(R_i) = t_X(x_i) := t_i$.

Esiste allora un (unico) sottogruppo S_i di $\mathbb{Q}(+)$ tale che $R_i \leq S_i$ e il cui tipo è $t_G(g_i)$. Ne segue che

$$X \leq \overline{X} := \bigoplus_{i=1}^m S_i x_i$$

e, denotato con \overline{K} il sottogruppo puro di \overline{X} generato da K (ovvero da y_1, \dots, y_m), è facile verificare che $\overline{X}/\overline{K}$ è quasi isomorfo a $X/K = G$. Così, essendo il quasi-isomorfismo l'equivalenza fondamentale tra i gruppi oggetto di studio, è lecito assumere (ridenominando) che

$$(1) \quad t_i = t_G(g_i) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

L' m -pla (t_1, \dots, t_m) è detta *la base di tipi* relativa alla rappresentazione di G :

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*,$$

$$\alpha_{l,1} g_1 + \dots + \alpha_{l,m} g_m = 0 \quad (l = 1, \dots, n).$$

La matrice $n \times m$ della rappresentazione di G è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{l,1} & \dots & \alpha_{l,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}$$

che ha ovviamente rango n . Il rango di G è pertanto $m - n$.

Allo scopo di evitare fastidiose sovrabbondanze, si osservi quanto segue. Se

$$K \leq \bigoplus_{i \in J} R_i x_i,$$

dove J è una parte propria di I , allora

$$G = X/K = \frac{\left(\bigoplus_{i \in J} R_i x_i\right)}{K} \oplus \left(\bigoplus_{i \notin J} \frac{R_i x_i \oplus K}{K}\right) \simeq \frac{\left(\bigoplus_{i \in J} R_i x_i\right)}{K} \oplus \left(\bigoplus_{i \notin J} R_i x_i\right)$$

ovvero

$$G = \left(\bigoplus_{i \in J} \langle g_i \rangle_* \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \notin J} \langle g_i \rangle_* \right)$$

è la somma diretta di un gruppo completamente decomponibile di rango $m - |J|$ e di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo di Butler di rango $|J| - n$, il quale ha le stesse relazioni di G (i g_i con $i \notin J$ non intervengono nelle relazioni). Così per evitare di “trascinarsi dietro” spezzamenti banali, si conviene di assumere che g_1, \dots, g_m compaiono ciascuno in almeno una delle relazioni $a_l = 0$ di G , per un qualche $l = 1, \dots, n$ dipendente da g_i . I $\mathbf{B}(n)$ -gruppi siffatti e per i quali, in più, valga la (1), insieme con le loro rappresentazioni, sono detti *regolari*. Limitare lo studio ad essi non costituisce una restrizione significativa; infatti *ogni $\mathbf{B}(n)$ -gruppo è somma diretta di un gruppo regolare e di gruppo completamente decomponibile*.

In tutto il corso dell'esposizione $\mathbf{B}(n)$ -gruppo starà per $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare.

È immediato osservare che l'ipotesi di regolarità comporta che tra *tutte* le relazioni di G , ottenute come combinazioni lineari delle relazioni della rappresentazione,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (\lambda_l \in \mathbb{Q}, \forall l = 1, \dots, n)$$

ce n'è almeno una che coinvolge tutti i g_i , ovvero il cui supporto in X è uguale a $I = \{1, \dots, m\}$. Sia essa $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m = 0$, con $\alpha_i \in R_i \setminus \{0\}$ (per ogni $i = 1, \dots, m$). Allora $\bar{y}_1 := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$ appartiene a K , in particolare appartiene ad un insieme di n generatori puri di K , sicché è lecito assumere $\bar{y}_1 = y_1$ (cambiando eventualmente la base y_1, \dots, y_n di K). D'altro canto è ovvio che $\langle x_i \rangle_* = R_i x_i$ e $\langle \alpha_i x_i \rangle_*$ hanno in X lo stesso tipo t_i , per ogni $i = 1, \dots, m$ e quindi non si lede la generalità se si assume $\alpha_i = 1$ ($\forall i = 1, \dots, m$), ridenominando eventualmente i generatori puri degli addendi diretti di X . Quanto precede assicura che non viene meno la generalità se si suppone che tra le relazioni di G ci sia la *relazione diagonale*

$$g_1 + \dots + g_m = 0.$$

In altre parole, nella matrice A delle relazioni di G si può assumere, se conveniente, che una riga — ad esempio la prima — abbia tutte le entrate uguali ad 1. Si osservi che, con tale convenzione, i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi (regolari) sono tutti rappresentati come segue:

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$$

$$g_1 + \dots + g_m = 0.$$

A questo punto è chiaro che, in generale, lavorare con i $\mathbf{B}(n)$ gruppi a partire da una loro rappresentazione come quoziente di un completamente decomponibile su di un suo sottogruppo puro equivale a lavorare con una *matrice delle relazioni*, e con una opportuna *base di tipi*. Conviene dunque trasferire alle m -ple di tipi la definizione di *regolarità*:

DEFINIZIONE 1. Una base di tipi (t_1, \dots, t_m) di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare è detta m -pla di tipi n -regolare se

$$t_G(g_i) = t_X(x_i) = t_i \quad (\forall i = 1, \dots, m)$$

Le condizioni affinché una m -pla di tipi (t_1, \dots, t_m) sia regolare verranno analizzate in seguito, usando lo strumento della m -tenda. Per il momento ci si limita a osservare che (t_1, \dots, t_m) è 1-regolare — si dirà semplicemente *regolare* — se e solo se

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i = \bigwedge_{j \neq i} t_j,$$

per ogni $i \in I$, equivalentemente se e solo se

$$t_i \geq \bigwedge_{j \neq i} t_j$$

per ogni $i \in I$. Inoltre, proprio la presenza della relazione diagonale garantisce che *una m -pla n -regolare* ($n \geq 1$) è *regolare*.

Tuttavia, la n -regolarità con $n \geq 2$ impone ulteriori restrizioni, le quali derivano dai coefficienti delle relazioni e, in particolare, dalla *partizione-base* su I , che mette in uno stesso blocco i_1 e i_2 (con $i_1, i_2 \in I$) se e solo se $\alpha_{l, i_1} = \alpha_{l, i_2}$ per ogni $l \in \{1, \dots, n\}$; in altri termini la partizione base ripartisce le colonne della matrice delle relazioni, mettendo in uno stesso blocco colonne uguali.

3. Typeset di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo

Sia G un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo. Si è già detto nell'introduzione che il typeset $T(G)$ di G è un sotto- \wedge -semireticolato finito del reticolo $(\mathbb{T}, \wedge, \vee)$ dei tipi e quindi $T(G)$ è un reticolo $(T(G), \wedge, \vee)$, dove è definito in maniera ovvia l'operazione di estremo superiore, cioè per ogni $\sigma', \sigma'' \in T(G)$ è

$$\sigma' \vee \sigma'' := \bigwedge \{ \sigma \in T(G) \mid \sigma \geq \sigma' \vee \sigma'' \}$$

(si osservi che l'insieme dei maggioranti è non vuoto essendo $\infty = t(\{0\}) \in T(G)$). È immediato inoltre osservare che $\sigma' \vee \sigma'' \geq \sigma' \vee \sigma''$.

Descriviamo adesso come calcolare il tipo di un elemento di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo, a partire da una sua base di tipi e dalla matrice dei coefficienti associata nella rappresentazione. Seguendo le notazioni fin qui usate, sia

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_* = X/K$$

un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo, con le relazioni

$$\alpha_{l,1}g_1 + \dots + \alpha_{l,m}g_m = 0 \quad (l \in L := \{1, \dots, n\})$$

e (t_1, \dots, t_m) la sua base di tipi (n -regolare).

In primo luogo, è facile provare che nel gruppo completamente decomponibile X i tipi *procedono per inf*: se $x = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$ (con $\beta_i \in R_i$ per ogni $i \in I$), si ha

$$t_X(x) = \bigwedge \{t_X(x_i) \mid i \in \text{supp}(x)\},$$

dove $\text{supp}(x) := \{i \in I \mid \beta_i \neq 0\}$.

Risulta dunque naturale definire l'applicazione $\tau : \mathcal{P}(I) \rightarrow T(G)$ che ad ogni $E \subseteq I$ associa

$$\tau(E) := \bigwedge \{t_i \mid i \in E\},$$

dove $t_i = t_X(x_i)$ per ogni $i \in I$. Si noti che è sottinteso nella definizione di τ il riferimento alla base di tipi (t_1, \dots, t_m) , cosa che in generale non dà luogo ad equivoci. Ovviamente, per ogni E, F tali che $E \subseteq F \subseteq I$, si ha $\tau(F) \leq \tau(E)$.

Con tale definizione, è $t_X(x) = \tau(\text{supp}(x))$. Sia poi $g = x + K \in G$ e $x = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i$, quindi $g = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i$; allora il tipo $t_G(g)$ di g in G è l'estremo superiore dei tipi in X dei suoi rappresentanti

$$\sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{l=1}^n \lambda_l y_l = \sum_{i=1}^m \left(\beta_i + \sum_{l=1}^n \alpha_{l,i} \lambda_l \right) x_i$$

e pertanto

$$t_G(g) = \bigvee \left\{ \tau \left(\text{supp} \left(\sum_{i=1}^m \left(\beta_i + \sum_{l=1}^n \alpha_{l,i} \lambda_l \right) x_i \right) \right) \mid (\lambda_l)_{l \in L} \right\}.$$

Si tenga presente che, per ogni $l \in L$, λ_l appartiene al sottogruppo

$$\bigcap \{R_i \mid i \in \text{supp}(y_l)\}$$

di $\mathbb{Q}(+)$. Tuttavia, poiché $t_X(x_i) = t_X(sx_i)$, per ogni $s \neq 0$, non si influisce sui supporti supponendo semplicemente $\lambda_l \in \mathbb{Q}$, ed è quanto si farà in seguito per agilità di esposizione.

Ora, il calcolo dei supporti dei diversi rappresentanti di g è ovviamente equivalente al calcolo dei rispettivi complementi, che vengono chiamati gli *zero-blocchi* di g . D'altro canto, poiché come osservato $E \subseteq F \subseteq I$ implica $\tau(F) \leq \tau(E)$, al calcolo di $t_G(g)$ basta l'individuazione dei supporti minimali, equivalentemente degli zero-blocchi massimali di g , il cui insieme si denoterà con $\text{maxfam}(g)$. Con $\text{Maxfam } G$ viene invece denotato l'insieme $\{\text{maxfam}(g) \mid g \in G\}$. Si ha infine

$$t_G(g) = \bigvee \{ \tau(Z^{-1}) \mid Z \in \text{maxfam}(g) \}.$$

Il calcolo degli zero-blocchi massimali di $g = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i$ equivale alla determinazione dei sottosistemi compatibili massimali del sistema lineare (nelle incognite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$):

$$\text{Sys}(g) : \left\{ \sum_{l=1}^n \alpha_{l,i} \lambda_l + \beta_i = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, m) \right.$$

e pertanto alla determinazione dei sottoinsiemi Z di I per i quali il rango della matrice $A[Z]$, estratta dalla matrice A delle relazioni di G per restrizione alle colonne indicizzate in Z , sia uguale al rango della matrice che si

ottiene da essa aggiungendo la riga $(\beta_i)_{i \in Z}$, e che siano massimali sotto tale condizione:

$$\text{rank } A[Z] = \text{rank} \begin{bmatrix} A[Z] \\ [\beta_i | i \in Z] \end{bmatrix}.$$

Si illustra quanto sopra con un esempio, che verrà poi ripreso nell'ultimo capitolo.

ESEMPIO 1.

$$X = \bigoplus_{i=1}^6 \langle x_i \rangle_*$$

$$K = \langle x_1 + \cdots + x_6, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_6 x_6 \rangle_*$$

con $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ vettore con almeno due componenti distinte; quindi $G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_6 \rangle_*$ è un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo con le relazioni

$$\begin{aligned} g_1 + \cdots + g_6 &= 0 && \text{(relazione diagonale)} \\ \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_6 g_6 &= 0 && \text{(seconda relazione)} \end{aligned}$$

e base di tipi (t_1, \dots, t_6) che sia 2-regolare, cioè per cui si abbia

$$t_G(g_i) = t_X(x_i) = t_i \quad (\forall i = 1, \dots, 6).$$

È immediato verificare che, in un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo, non si lede la generalità supponendo $\alpha_1 = 0$ ed uno dei rimanenti coefficienti uguale ad 1 (a tale scopo basta sostituire la seconda relazione con la relazione

$$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_6 g_6 - \alpha_1 (g_1 + \cdots + g_6) = 0$$

e successivamente con la relazione che si ottiene moltiplicando la precedente espressione per α_i^{-1} , per un i tale che $\alpha_i \neq 0$.

Sia $g = \sum_{i=1}^6 \beta_i g_i$; si ha allora

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^6 \beta_i g_i + \lambda_1 (g_1 + \cdots + g_6) + \lambda_2 (\alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_6 g_6) = \\ &= (\lambda_1 + \beta_1) g_1 + \sum_{i=2}^6 (\lambda_1 + \alpha_i \lambda_2 + \beta_i) g_i \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Sys}(g) : \begin{cases} \lambda_1 + \beta_1 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \beta_2 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha_3 \lambda_2 + \beta_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1 + \alpha_6 \lambda_2 + \beta_6 = 0 \end{cases}$$

Ovviamente i sottosistemi compatibili (e compatibili massimali) dipendono dalle due relazioni. Allo scopo di non appesantire troppo i calcoli ci si limita ad esemplificare il caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ a due a due distinti e

non nulli¹ e si sceglie la seguente base di tipi (ridotti)²:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= (\infty, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ \mathbf{t}_2 &= (0, 0, \infty, \infty, 0, \dots) \\ \mathbf{t}_3 &= (0, \infty, 0, \infty, 0, \dots) \\ \mathbf{t}_4 &= (0, \infty, \infty, 0, 0, \dots) \\ \mathbf{t}_5 &= (\infty, 0, 0, \infty, 0, \dots) \\ \mathbf{t}_6 &= (\infty, 0, \infty, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Ci si chiede se il tipo $\sigma := (\infty, \infty, \infty, \infty, 0, \dots) = \mathbf{t}_1 \vee \mathbf{t}_2 \vee \mathbf{t}_3 \vee \mathbf{t}_4$ appartiene o no al typeset di G .

Poiché $\sigma = (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_5 \wedge \mathbf{t}_6) \vee (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_3 \wedge \mathbf{t}_4) \vee (\mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_4 \wedge \mathbf{t}_6) \vee (\mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_3 \wedge \mathbf{t}_5)$, affinché σ appartenga al typeset di G è necessario e sufficiente che esista $g = \sum_{i=1}^6 \beta_i g_i \neq 0$ tale che

$$\text{maxfam}(g) = \{\{2, 3, 4\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}\}.$$

Assumendo, senza ledere la generalità, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, da $\text{Sys}(g)$ si ottengono le condizioni seguenti

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & \beta_5 & \beta_6 \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \beta_1 & 0 & \beta_5 \end{bmatrix} = \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \beta_1 & 0 & \beta_6 \end{bmatrix} = 2 \left(= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha_i & \alpha_j \end{bmatrix} \quad (i \neq j) \right) \end{aligned}$$

cioè i determinanti delle tre matrici devono essere nulli. Facili calcoli mostrano che tale condizione è equivalente alla seguente:

$$(2) \quad \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_3 \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_3 \alpha_5 \alpha_6 + \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 = 0$$

e che, sotto tale condizione, si ottiene

$$\beta_1 = \beta \alpha_3 \alpha_5, \quad \beta_5 = \beta \alpha_5 (\alpha_3 - \alpha_5), \quad \beta_6 = \beta \alpha_6 (\alpha_3 - \alpha_5)$$

con $\beta \neq 0$.

Così $\sigma = (\infty, \infty, \infty, \infty, 0, \dots) \in \mathbf{T}(G)$ se e solo se vale (2), e si ha

$$\sigma = \mathbf{t}_G(\beta(\alpha_3 \alpha_5 g_1 + \alpha_5 (\alpha_3 - \alpha_5) g_5 + \alpha_6 (\alpha_3 - \alpha_5) g_6)).$$

Ad esempio con $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = -3$, $\alpha_5 = 6$, $\alpha_6 = -2$ si ha

$$\sigma = \mathbf{t}_G(3g_1 - 3g_5 + g_6).$$

L'esempio mostra che il typeset di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo, con $n \geq 2$, dipende in maniera essenziale dai coefficienti delle relazioni.

4. Typeset di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo

Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$, con $g_1 + \dots + g_m = 0$ un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo, con base di tipi $(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m)$ regolare. Sia inoltre $g = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i \in G$.

DEFINIZIONE 2. Si definisce *partizione di g in G* (nella data rappresentazione di G) la partizione di $I = \{1, \dots, m\}$ che mette in uno stesso blocco i_1 e i_2 se e solo se $\beta_{i_1} = \beta_{i_2}$. Tale partizione sarà denotata con $\text{part}_G(g)$.

¹Ciò equivale a fissare la partizione-base uguale a $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

²Si vedrà nel seguito che tale 6-pla di tipi è 2-regolare, rispetto alle relazioni date.

Essa è ben definita, nel senso che se si cambia il rappresentante di g :

$$g = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i + \lambda(g_1 + \cdots + g_m) = \sum_{i=1}^m (\lambda + \beta_i) g_i \quad (\lambda \in \mathbb{Q})$$

si ha ovviamente $\beta_{i_1} = \beta_{i_2}$ se e solo se $\beta_{i_1} + \lambda = \beta_{i_2} + \lambda$.

PROPOSIZIONE 1. *Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo e $g \in G$. Si ha $\text{maxfam}(g) = \{A^{-1} | A \in \text{part}_G(g)\}$, l'insieme dei co-blocchi di $\text{part}_G(g)$, e quindi*

$$t_G(g) = \bigvee \{ \tau(A^{-1}) | A \in \text{part}_G(g) \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che l'unica relazione in un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo è la relazione diagonale, e calcolare i diversi rappresentanti di g nel gruppo. \square

Il fatto che in un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G , quale che sia la sua rappresentazione (ovvero, i suoi generatori puri), il tipo in G di un suo elemento g dipenda esclusivamente da $\text{part}_G(g)$, giustifica la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3. Sia (t_1, \dots, t_m) una m -pla regolare di tipi (cioè $\bigwedge_{i=1}^m t_i = \bigwedge_{j \neq i} t_j$ per ogni $i \in I = \{1, \dots, m\}$) e sia $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_h\} \in \mathbb{P}(I)$. La posizione

$$t(\mathcal{A}) := \tau(A_1^{-1}) \vee \dots \vee \tau(A_h^{-1})$$

definisce un'applicazione

$$t : \mathcal{A} \in \mathbb{P}(m) \mapsto t(\mathcal{A}) \in \mathbb{T}$$

tale che $t(p_i) = t_i, \forall i = 1, \dots, m$. È facile verificare che t è un \wedge -omomorfismo di $(\mathbb{P}(m), \wedge, \vee)$ in $(\mathbb{T}, \wedge, \vee)$, che vien detto essere un *morfismo di tenda*.

Con tali definizioni, se $G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$ è un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo con base di tipi (t_1, \dots, t_m) , si ha³ per ogni $g \in G$:

$$t_G(g) = t(\text{part}_G(g)).$$

La terminologia di “morfismo di tenda” trova la sua giustificazione nella definizione di m -tenda, che si darà nella sezione successiva. Per adesso si osservi che in generale t non conserva l'estremo superiore di due partizioni; tuttavia nel caso delle bipartizioni si ha agevolmente che:

PROPOSIZIONE 2. *Sia t un morfismo di m -tenda, ed $E \subseteq I$. Allora si ha*

$$(3) \quad t(b_E) = t(p_E \vee p_{E^{-1}}) = t(p_E) \vee t(p_{E^{-1}})$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$t_E = t_{E^{-1}} := t(b_E) = t(b_{E^{-1}}) = \tau(E) \vee \tau(E^{-1}) = t(p_E) \vee t(p_{E^{-1}})$$

\square

³Si osservi che l'uguaglianza è tra tipi, che sono ovviamente invarianti per rappresentazione; tuttavia l'applicazione t a secondo membro e la $\text{part}_G(g)$ dipendono dalla rappresentazione.

E si noti che, viceversa, se $t : \mathbb{P}(m) \rightarrow \mathbb{T}$ è un morfismo di tenda, ovvero un \wedge -omomorfismo che verifichi la condizione (3), allora, posto $t_i = t(p_i)$, ($i \in I$), l' m -pla (t_1, \dots, t_m) è regolare e definisce (a meno di isomorfismi), il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$, $g_1 + \dots + g_m = 0$, tale che $t_G(g_i) = t_i$, per ogni $i \in I$.

5. Sulla struttura dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi

Nell'ultima sezione si è mostrato come i tipi degli elementi di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo siano associati a partizioni dell'insieme $I = \{1, \dots, m\}$. Risulteranno quindi comode le seguenti notazioni, che peraltro hanno senso nel contesto generale dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, relative a sottogruppi associati a sottoinsiemi dell'insieme di generatori di una data rappresentazione:

Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo. Se $A \subseteq I$, indicheremo con g_A l'elemento di G dato da

$$g_A := \sum_{i \in A} g_i.$$

e con G_A il sottogruppo puro di G

$$G_A := \langle g_i | i \in A \rangle_*.$$

Se $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\} \in \mathbb{P}(I)$; indicheremo con $G(\mathcal{A})$ il sottogruppo puro di G dato da

$$G(\mathcal{A}) := \langle g_{A_i} | i = 1, \dots, r \rangle_*.$$

Si ha ovviamente, per ogni $i \in I$ ed ogni $A \subseteq I$

$$G_{\{i\}} = \langle g_i \rangle_*$$

$$G_I = G_{I \setminus \{i\}} = G(\min \mathbb{P}(I)) = G$$

$$G_\emptyset = G(\max \mathbb{P}(I)) = \{0\}.$$

$$G(p_A) = G_A$$

Nel caso dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi il sottogruppo associato ad una partizione può essere precisato nella sua struttura e rango.

PROPOSIZIONE 3. *Siano $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo ed $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ una partizione di $I = \{1, \dots, m\}$. Allora si ha:*

- i. $G(\mathcal{A}) = \langle g_{A_1} \rangle_* + \dots + \langle g_{A_r} \rangle_*$
- ii. $\text{rank } G(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - 1 = r - 1$

DIMOSTRAZIONE. i. L'inclusione $\langle g_{A_1} \rangle_* + \dots + \langle g_{A_r} \rangle_* \subseteq G(\mathcal{A})$ è ovvia. Viceversa, sfruttando il fatto che l'unica relazione in G è la relazione diagonale, è facile provare che il quoziente $G / \langle g_{A_1} \rangle_* + \dots + \langle g_{A_r} \rangle_*$ è senza torsione, cioè che $\langle g_{A_1} \rangle_* + \dots + \langle g_{A_r} \rangle_*$ è puro in G . Vale dunque l'inclusione inversa, essendo $G(\mathcal{A})$ il minimo sottogruppo puro contenente i g_{A_i} . ii. Segue direttamente da i. \square

Ragionando come nell'ultima dimostrazione è possibile ottenere facilmente le seguenti proprietà:

PROPOSIZIONE 4. *Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} partizioni di I . Allora si ha:*

- i. $G(\mathcal{A}) \cap G(\mathcal{B}) = G(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
- ii. $G(\mathcal{A}) + G(\mathcal{B}) \geq G(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$

iii. $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Leftrightarrow G(\mathcal{A}) \geq G(\mathcal{B})$

Qui osserviamo che tra i sottogruppi del tipo $G(\mathcal{A})$ rientrano i sottogruppi $G(\sigma)$, classici in letteratura sui gruppi abeliani senza torsione (cfr. [F II], cap. XIII), pienamente invarianti, costituiti dagli elementi di un gruppo G aventi tipo maggiore o uguale ad un tipo fissato.

$$G(\sigma) = \{g \in G \mid t_G(g) \geq \sigma\}.$$

Infatti, se $\sigma \in \text{Im } t$ allora è non vuoto l'insieme

$$t(\sigma) := \{\mathcal{A} \in \mathbb{P}(m) \mid t(\mathcal{A}) = \sigma\}$$

e, poiché t è un \wedge -omomorfismo, si ha

$$t\left(\bigwedge\{\mathcal{A} \in \mathbb{P}(m) \mid t(\mathcal{A}) = \sigma\}\right) = \sigma.$$

Indicata con $\text{part}_t(\sigma)$ la partizione $\bigwedge\{\mathcal{A} \in \mathbb{P}(m) \mid t(\mathcal{A}) = \sigma\}$, detta anche *la partizione minima* di σ (rispetto a t), si ha allora

$$G(\sigma) = G(\text{part}_t(\sigma)).$$

Si osservi che la struttura dei $G(\sigma)$ è di primaria importanza per i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, ed è pertanto preziosa la proposizione seguente, conseguenza immediata di quanto detto finora e della Proposizione 3.

PROPOSIZIONE 5. *Siano $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo, e t il morfismo di tenda associato alla detta rappresentazione. Allora*

$$\text{rank } G(\sigma) = |\text{part}_t(\sigma)| - 1$$

6. Tende

Sia G un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo. Un tipo π del typeset di G si dirà *tipo primo* o, semplicemente, un *Primo* di G se π è \vee -irriducibile (rispetto all'inclusione $\mathbb{T}(G) \hookrightarrow \mathbb{T}$), se cioè

$$\bigvee\{\sigma \in \mathbb{T}(G) \mid \sigma < \pi\} < \pi.$$

Sono ovviamente Primi di G i tipi minimali (gli atomi) di $\mathbb{T}(G)$, cioè i tipi che coprono $\min \mathbb{T}(G) = \bigwedge\{\sigma \mid \sigma \in \mathbb{T}(G)\}$. Per ragioni che appariranno chiare tra breve, $\min \mathbb{T}(G)$ non è un primo di G , mentre $t(0) = \infty$ è un primo triviale che viene di solito trascurato.

Giova osservare che un Primo di G non è necessariamente un tipo minimale di $\mathbb{T}(G)$, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 2. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_4 \rangle_*$, $g_1 + \dots + g_4 = 0$ il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo con base di tipi:

$$\begin{aligned} t_1 &= (\infty, 0, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ t_2 &= (\infty, 0, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ t_3 &= (0, \infty, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ t_4 &= (0, \infty, 0, 0, \infty, 0, \dots). \end{aligned}$$

I tipi minimali di $\mathbb{T}(G)$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= t_1 \wedge t_2 = (\infty, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ \pi_2 &= t_3 \wedge t_4 = (0, \infty, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ \pi_3 &= t_2 \wedge t_3 = (0, 0, 0, \infty, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

ai quali vanno aggiunti i seguenti due tipi primi non minimali:

$$\begin{aligned}\pi_4 = \mathfrak{t}_1 &= (\infty, 0, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ \pi_5 = \mathfrak{t}_4 &= (0, \infty, 0, 0, \infty, 0, \dots).\end{aligned}$$

Si osservi inoltre che — proprio come accade in particolare per gli atomi — un tipo di $\mathbb{T}(G)$ che sia \vee -irriducibile è anche \wedge -irriducibile (ed è quindi un Primo di G), mentre in generale è falso il viceversa, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 3. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_5 \rangle_*$, $g_1 + \dots + g_5 = 0$ il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo con base di tipi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_1 &= (\infty, \infty, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ \mathfrak{t}_2 &= (\infty, 0, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ \mathfrak{t}_3 &= (0, 0, 0, \infty, \infty, 0, \dots) \\ \mathfrak{t}_4 &= (0, \infty, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ \mathfrak{t}_5 &= (0, \infty, 0, 0, \infty, 0, \dots).\end{aligned}$$

I tipi minimali di $\mathbb{T}(G)$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \mathfrak{t}_1 \wedge \mathfrak{t}_2 = (\infty, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ \pi_2 &= \mathfrak{t}_1 \wedge \mathfrak{t}_4 \wedge \mathfrak{t}_5 = (0, \infty, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ \pi_3 &= \mathfrak{t}_2 \wedge \mathfrak{t}_3 \wedge \mathfrak{t}_4 = (0, 0, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ \pi_4 &= \mathfrak{t}_3 \wedge \mathfrak{t}_5 = (0, 0, 0, 0, \infty, 0, \dots)\end{aligned}$$

ai quali va aggiunto il tipo primo non minimale:

$$\pi_5 = \mathfrak{t}_1 = (\infty, \infty, \infty, 0, 0, 0, \dots) = \pi_1 \vee \pi_2$$

L'insieme dei Primi di G sarà denotato con $\Pi(G)$. Ovviamente ogni tipo σ del typeset di G è l'estremo superiore (il \vee in \mathbb{T}) dei tipi Primi minori o uguali di esso:

$$\sigma = \bigvee \{ \pi \in \Pi(G) \mid \pi \leq \sigma \} \quad \forall \sigma \in \mathbb{T}(G).$$

Procediamo ora a definire la tenda associata ad una rappresentazione di G

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$$

con relazioni

$$\alpha_{l,1}g_1 + \dots + \alpha_{l,m}g_m = 0 \quad (l \in L = \{1, \dots, n\})$$

e base di tipi

$$(\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_m).$$

Posto (come al solito) $I = \{1, \dots, m\}$, $\Pi(G) = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ ⁴ e $P := \{1, \dots, r\}$, si considera la $\{0, 1\}$ -tabella $[\delta_{i,s}]_{i \in I, s \in P}$, con m righe indicizzate in I , ed r colonne indicizzate in P , le cui entrate sono definite come segue:

$$\delta_{i,s} := \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_s \not\leq \mathfrak{t}_i \\ 1 & \text{se } \pi_s \leq \mathfrak{t}_i. \end{cases}$$

⁴Si osservi che la definizione di tenda procede a partire da un ordinamento dell'insieme dei primi, che non può che essere arbitrario. Di tale arbitrarietà si dovrà tener conto quando si procederà alla definizione dei cambi-base di una tenda (vedi Cap. 2).

Denotata con $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ la partizione-base, si definisce *tenda* (della rappresentazione) di G la coppia $t(G) := ([\delta_{i,s}]_{i \in I, s \in P}, \mathcal{A})$.

Alle righe di $t(G)$ si da il nome di *tipi della base*, alle colonne il nome di *Primi* (della tenda); infine, i blocchi A_1, \dots, A_k della partizione-base sono detti *le sezioni della tenda*.

Si ottiene così una $\{0, 1\}$ -tabella sezionata sulle righe. Se π è un Primo della tenda, si definisce lo *zero-blocco* $Z(\pi)$ di π come l'insieme degli indici di riga che hanno 0 sulla colonna di π :

$$Z(\pi) = \{i \in I | \pi \not\leq t_i\}$$

e, di conseguenza, il *supporto* di π è

$$\text{supp}(\pi) := I \setminus Z(\pi) = \{i \in I | \pi \leq t_i\}.$$

Per agilità di notazione le entrate uguali a 0 della tenda verranno indicate come punti (e per questo chiamati a volte “buchi” della tenda), e gli indici di riga si scriveranno ancora (t_1, \dots, t_m) *con abuso di notazione*: è importante infatti capire — come sarà più chiaro in seguito quando si parlerà di isoscenismo e realizzazioni concrete — che, quale che sia il modo in cui è stata ottenuta la tenda (da una data rappresentazione di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo o definita ad arbitrio, con il solo vincolo delle condizioni di regolarità per la base di tipi), essa descrive non un solo gruppo di Butler, bensì un'infinità di gruppi di Butler, in generale non quasi-isomorfi tra loro, ed i “tipi” e i “Primi” della tenda sono suscettibili di infinite interpretazioni in \mathbb{T} ; ciascuna di queste interpretazioni concrete definisce di conseguenza un proprio sotto- \wedge -semireticolo di \mathbb{T} .

Quelle scritte qui di seguito sono le tende dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi degli esempi 1, 2 e 3 fatti in precedenza.

Tenda dell'esempio 1 (pag. 11)

$$\begin{array}{cccc} t_1 = & 1 & 1 & \bullet & \bullet \\ t_2 = & \bullet & \bullet & 1 & 1 \\ \hline t_3 = & \bullet & 1 & \bullet & 1 \\ \hline t_4 = & \bullet & 1 & 1 & \bullet \\ \hline t_5 = & 1 & \bullet & \bullet & 1 \\ t_6 = & 1 & \bullet & 1 & \bullet \end{array}$$

Tenda dell'esempio 2 (pag. 15)

$$\begin{array}{cccc} t_1 = & 1 & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ t_2 = & 1 & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ t_3 = & \bullet & 1 & \bullet & 1 & \bullet \\ t_4 = & \bullet & 1 & \bullet & \bullet & 1 \end{array}$$

Tenda dell'esempio 3 (pag. 16)

$$\begin{array}{cccc} t_1 = & 1 & 1 & 1 & \bullet & \bullet \\ t_2 = & 1 & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ t_3 = & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 1 \\ t_4 = & \bullet & 1 & \bullet & 1 & \bullet \\ t_5 = & \bullet & 1 & \bullet & \bullet & 1 \end{array}$$

Con l'aiuto dell'Esempio 2, introduciamo quanto accennato sull'infinità di interpretazioni di cui è suscettibile la tenda. È facile verificare che se in tale esempio si sostituisce la base di tipi (t_1, \dots, t_m) , ad. es., con la seguente

$$\begin{aligned} t'_1 &= (0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots) \\ t'_2 &= (1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \\ t'_3 &= (1, 0, 1, 1, 1, 0, \dots) \\ t'_4 &= (2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots) \end{aligned}$$

si ottiene ancora la stessa tenda

$$\begin{aligned} t'_1 &= 1 \bullet 1 \bullet \bullet \\ t'_2 &= 1 \bullet \bullet 1 \bullet \\ t'_3 &= \bullet 1 \bullet 1 \bullet \\ t'_4 &= \bullet 1 \bullet \bullet 1 \end{aligned}$$

dove i primi sono ancora ottenuti allo stesso modo:

$$\begin{aligned} \pi'_1 &= t'_1 \wedge t'_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \\ \pi'_2 &= t'_3 \wedge t'_4 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \\ \pi'_3 &= t'_2 \wedge t'_3 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ \pi'_4 &= t'_1 = (0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots) \\ \pi'_5 &= t'_4 = (2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots) \end{aligned}$$

È immediato osservare che i due $\mathbf{B}(1)$ -gruppi considerati hanno lo stesso rango 3, e i loro typeset sono reticoli isomorfi, mentre i gruppi sono ben lontani dall'essere (quasi-)isomorfi! Non è difficile constatare che esempi e situazioni analoghe se ne possono fornire in quantità.⁵

Quanto esemplificato finora giustifica dunque le definizioni seguenti.

DEFINIZIONE 4. Siano G e G' $\mathbf{B}(n)$ -gruppi dati rispettivamente mediante le rappresentazioni:

$$\begin{aligned} G &= \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_* \\ \text{relazioni: } & \alpha_{l,1}g_1 + \dots + \alpha_{l,m}g_m = 0 \quad (l \in L = \{1, \dots, m\}), \\ \text{base di tipi: } & (t_1, \dots, t_m), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G' &= \langle g'_1 \rangle_* + \dots + \langle g'_m \rangle_* \\ \text{relazioni: } & \alpha'_{l,1}g'_1 + \dots + \alpha'_{l,m}g'_m = 0 \quad (l \in L = \{1, \dots, m\}), \\ \text{base di tipi: } & (t'_1, \dots, t'_m). \end{aligned}$$

Le rappresentazioni di G e G' si dicono *isosceniche* se hanno la medesima tenda.

DEFINIZIONE 5. Due gruppi di Butler G e G' si dicono *isoscenici* se posseggono rispettive rappresentazioni tra loro isoceniche.

⁵A tal proposito si osservi che è necessaria attenzione nella scelta dei tipi contenenti divisibilità finite (attenzione che deve essere rivolta proprio al modo in cui i primi si ottengono dai tipi della base); al contrario, quando ci si limita a tipi contenenti solo divisibilità pari a zero o infinito, allora ottenere una nuova classe di isomorfismo di $\mathbf{B}(n)$ -gruppo è facile quanto scegliere un insieme di numeri primi. Si veda in particolare quanto detto in seguito a proposito dei *tipi ridotti*

Una tenda viene anche definita senza riferimento ad una rappresentazione di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo.

DEFINIZIONE 6. Siano m, n, r numeri naturali tale che $n \leq m$ e $r \leq 2^m (= |\mathcal{P}m|)$. Una (m, n) -tenda è una terna $t : (n, [\delta_{i,s}]_{i \in I, s \in P}, \mathcal{A})$, dove:
 - $[\delta_{i,s}]$ è una $\{0, 1\}$ -tabella, con indici di riga $I = \{1, \dots, m\}$, indici di colonna $P = \{1, \dots, r\}$ e con le colonne a due a due distinte
 - $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\}$ è una partizione di I con $n \leq k (\leq m)$.
 L'intero n è detto il *rango* di t ; le colonne di $[\delta_{i,s}]$ sono detti i *Primi* della tenda e le righe costituiscono la *base* della (m, n) -tenda.

Se $k = 1$, cioè $\mathcal{A} = \max \mathbb{P}(m)$, allora il rango di t è $n = 1$ e si parlerà semplicemente di m -tenda.

Prima di analizzare in generale le proprietà delle tende dei gruppi di Butler, giova premettere le considerazioni seguenti. Si è già accennato che ad una (m, n) -tenda t corrispondono infinite realizzazioni concrete di t come tenda di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo; questo permette di dare un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo prescindendo dai tipi concreti della base (e limitandosi dunque ai Primi della tenda) ovvero dare il gruppo *a meno di isoscenismi*.

Il vantaggio di tale punto di vista risiede nel fatto che molte proprietà strutturali di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo sono fortemente *influenzate* dalla sua classe di isoscenismo, cioè dalla (m, n) -tenda di una sua rappresentazione; anzi, se ci limita ai $\mathbf{B}(1)$ -gruppi la tenda *determina* proprietà strutturali quali indecomponibilità, scomposizione in addendi diretti e rango dei sottogruppi pienamente invarianti $G(\sigma)$.

Un problema connesso allo studio dei gruppi di Butler “a meno di isoscenismi”, ovvero dati mediante una tenda, è che in generale un gruppo di Butler possiede una diversa tenda per ogni sua rappresentazione, così che non è affatto ovvio stabilire se due gruppi di Butler G e G' siano o no isoscenici, quando G e G' vengano dati mediante loro rappresentazioni: una soluzione del problema dipende chiaramente dalla individuazione dei cambi-base (dei cambi di rappresentazioni) di un gruppo di Butler e questa è una questione aperta e ben lontana da un qualsivoglia approccio per una sua soluzione. L'unica eccezione è costituita dalla classe dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, per i quali il problema dei cambi-base è ampiamente risolto, con vari tipi di approcci, i quali hanno in comune la riduzione della questione in ambito \mathbb{Z}_2 -lineare. Allo studio dei cambi-base in un nuovo ambito, lo spazio delle parti pari su un insieme, è dedicato il Capitolo 3 del presente lavoro (vedi anche [M]).

7. Calcolo delle partizioni minime mediante i Primi.

Nella Sezione 5 si è visto come il calcolo del rango dei sottogruppi pienamente invarianti $G(\sigma)$ può essere ricondotto al calcolo della partizione minima $\text{part}_t(\sigma)$. In questa sezione mostriamo come la tenda permetta il calcolo effettivo di tali partizioni.

Allo scopo premettiamo una proposizione di carattere generale.

PROPOSIZIONE 6. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo con le relazioni

$$\alpha_{l,1}g_1 + \dots + \alpha_{l,m}g_m = 0 \quad (l \in L = \{1, \dots, n\})$$

e base di tipi (t_1, \dots, t_m) . Se π è un Primo (non triviale) di G allora

$$\pi = \wedge \{t_i | \pi \leq t_i\} \quad \left(= \tau \left(Z(\pi)^{-1} \right) \right)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $g \in G \setminus \{0\}$ tale che $t_G(g) = \pi$. Si ha allora

$$\pi = \vee \{ \tau(Z^{-1}) | Z \in \text{maxfam}(g) \}.$$

Ne segue, poiché π è \vee -irriducibile, che $\exists Z \in \text{maxfam}(g)$ tale che

$$\pi = \tau(Z^{-1}) = \wedge \{t_i | i \in Z^{-1}\},$$

sicchè è non vuoto l'insieme $\{i \in I | \pi \leq t_i\}$. Posto $\wedge \{t_i | \pi \leq t_i\} = \sigma$ si ha ovviamente $\pi \leq \sigma$ e quindi

$$\sigma = \sigma \vee \pi = (\wedge \{t_i | \pi \leq t_i\}) \vee \pi = \vee \{t_i \wedge \pi | \pi \leq t_i\} = \pi.$$

□

COROLLARIO 1. Se G è un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo, allora la partizione minima di un primo π è la puntata sul supporto di π :

$$\text{part}_t(\pi) = p_{Z(\pi)^{-1}}$$

e

$$\text{rank } G(\pi) = m - |Z(\pi)|$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dalle Proposizioni 6 e 5. □

Come detto nella Sezione 6, ogni tipo del typeset di G è estremo superiore dei primi minori o uguali di esso. Il passaggio alla partizione minima conserva l'operazione di estremo superiore.

PROPOSIZIONE 7. Sia $\sigma \in T(G)$ e sia $\mathcal{F} = \{\pi \in \Pi(G) | \pi \leq \sigma\}$. Allora è

$$\text{part}_t(\sigma) = \bigvee_{\pi \in \mathcal{F}} \text{part}_t(\pi) = \bigvee_{\pi \in \mathcal{F}} p_{Z(\pi)^{-1}}$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda uguaglianza segue dal Corollario 1. Indicata allora con \mathcal{A} la partizione a secondo membro, si osservi prima che il morfismo di tenda t associa ad \mathcal{A} il tipo σ , e che non associa σ ma un tipo inferiore ad una qualsiasi partizione che si ottiene da \mathcal{A} per ulteriore suddivisione di qualche suo blocco; quindi non può che essere uguale alla partizione minima $\text{part}_t(\sigma)$. □

Giova riportare, mediante una figura tratta da [DVM4], un metodo grafico con cui è possibile calcolare la partizione minima associata ad un prodotto di Primi relativi ad una tenda data: in essa si mostra come si possa calcolare l'estremo superiore di puntate sui supporti dei primi connettendo gli zero-blocchi in orizzontale e verticale, secondo una procedura chiamata *Pulling the strings*, e considerando singleton gli eventuali elementi di $I = \{1, \dots, m\}$ che non appartengono ad alcuno zero-blocco.

	*	*	*	*				
$t_1 =$	1	1	0	0	1	0	1	0
$t_2 =$	1	0	1	0	1	0	1	0
$t_3 =$	1	0	1	0	1	1	0	0
$t_4 =$	1	1	1	0	0	1	0	0
$t_5 =$	1	0	0	1	1	0	1	0
$t_6 =$	1	0	1	0	0	1	0	1
$t_7 =$	0	1	1	0	0	1	0	1
$t_8 =$	0	0	1	1	0	1	0	1

Nella figura si mostra il calcolo della partizione minima del tipo σ che è estremo superiore dei tipi marcati con l'asterisco, che risulta essere

$$\{\{2\}, \{1, 5\}, \{3, 4, 6, 7, 8\}\}.$$

Il rango del $G(\sigma)$ corrispondente è dunque 2.

8. Uno strumento per lo studio dei sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(m)$

Si è visto che i sottogruppi pienamente invarianti $G(\sigma)$ di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ sono associati a particolari partizioni di $\{1, \dots, m\}$. In questa sezione verrà illustrato uno strumento che mette in relazione, in un contesto più generale, le partizioni di $\mathbb{P}(m)$ e particolari sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(m)$. Esso tornerà utile nello studio dei cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, nel Capitolo 2.

Ad ogni partizione $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ di I resta associato il sottospazio $V(\mathcal{C})$ di $\mathbb{B}(m)$ costituito dalle bipartizioni maggiori o uguali di \mathcal{C} :

$$V(\mathcal{C}) := \{b_E \in \mathbb{B}(m) | b_E \geq \mathcal{C}\}.$$

Essendo per ogni n -pla di bipartizioni $b_{E_1} + \dots + b_{E_n} \geq b_{E_1} \wedge \dots \wedge b_{E_n}$, si ha che $V(\mathcal{C})$ è un sottospazio di $\mathbb{B}(m)$ e che $(b_{C_1}, \dots, b_{C_k})$ è una sua base ridondante:

$$V(\mathcal{C}) = \langle b_{C_1} \rangle + \dots + \langle b_{C_k} \rangle \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^k b_{C_j} = 0$$

quindi $\dim V(\mathcal{C}) = |\mathcal{C}| - 1$.

PROPOSIZIONE 8. *Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{P}(m)$. Allora:*

- (i.) $V(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$
- (ii.) $V(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \geq V(\mathcal{C}) + V(\mathcal{D})$
- (iii.) $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ se e solo se $V(\mathcal{D}) \leq V(\mathcal{C})$

Le dimostrazioni di (i.), (ii.), (iii.) sono ovvie. Per il punto (ii.) si osservi che l'inclusione può essere stretta. Ad esempio, posto $\mathcal{C} = b_{\{1,2\}}$, $\mathcal{D} = b_{\{1,3\}} \in \mathbb{P}(4)$, si ha

$$V(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) = V(\min \mathbb{P}(4)) = \mathbb{B}(4)$$

mentre $V(\mathcal{C}) + V(\mathcal{D}) = \{0, b_{\{1,2\}}, b_{\{1,3\}}, b_{\{1,4\}}\}$.

Dalla Proposizione 8 segue subito che l'applicazione

$$V : \mathcal{C} \in \mathbb{P}(m) \rightarrow V(\mathcal{C}) \in L(\mathbb{B}(m))$$

è un \vee -monomorfismo duale del reticolo $(\mathbb{P}(m), \wedge, \vee)$ nel reticolo $(L(\mathbb{B}(m)), \cap, +)$ dei sottospazi di $\mathbb{B}(m)$ (spazio proiettivo di dimensione $m - 2$ su \mathbb{Z}_2). Si osservi che tale \vee -immersione duale non è suriettiva (se $m \geq 4$); precisamente: se W è un sottospazio di $\mathbb{B}(m)$ e $(b_{C_1}, \dots, b_{C_k})$ è una sua base allora $W \in \text{Im } V$ se e solo se $W = V(b_{C_1} \wedge \dots \wedge b_{C_k})$.

È immediato osservare che le immagini mediante V delle partizioni puntate sono i sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(m)$ rispetto alla sua base ridondante (p_1, \dots, p_m) ; infatti, se p_A è una partizione puntata su A si ha⁶

$$V(p_A) = \langle p_i | i \in A \rangle$$

e, se $A \neq I$ allora $\{p_i, b_{A^{-1}} | i \in A\}$ è una base ridondante di $V(p_A)$. Di conseguenza $V(p_A)$ ha dimensione $|A|$, fatta eccezione per $V(p_I) = \mathbb{B}(m)$ la cui dimensione è $|I| - 1$.

Si osservi infine che $V(p_A)$ è isomorfo allo spazio delle bipartizioni su $I_A := A \cup \{A^{-1}\}$. Infatti se $b_E \in V(p_A)$ è $A^{-1} \subseteq E$ o $A^{-1} \subseteq E^{-1}$; a meno di cambiare il rappresentante E di b_E , si può assumere $A^{-1} \subseteq E$ e

$$b_E \in V(p_A) \rightarrow b_{(E \cap A) \cup \{A^{-1}\}} \in \mathbb{B}(I_A)$$

è un isomorfismo di \mathbb{Z}_2 -spazi vettoriali.

9. Sulla nozione di regolarità

DEFINIZIONE 7. Un sottoinsieme F di $I = \{1, \dots, m\}$ si dice *regolare-minimale rispetto alle relazioni di G* se indicizza un insieme dipendente-minimale di colonne della matrice $A = [\alpha_{l,i}]_{l \in L, i \in I}$ delle relazioni di G . Un *sottoinsieme regolare* di I è una unione di sottoinsiemi regolari-minimali.

È immediato verificare che F è un sottoinsieme regolare-minimale se e solo se

$$\text{rank } A[F] = \text{rank } A[F \setminus \{i\}] = |F| - 1, \quad \forall i \in F.$$

Poiché $\text{rank } A = n$ e una riga (la prima riga) di A è $(1, \dots, 1)$ (relazione diagonale), si ha che, se F è minimale-regolare, allora $2 \leq |F| \leq n+1$. In particolare, se $n = 1$, cioè si tratta di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo (e dunque $A = (1, \dots, 1)$) allora i sottoinsiemi regolari-minimali sono tutti e soli i sottoinsiemi di ordine 2.

PROPOSIZIONE 9. *La n -regolarità della base di tipi (t_1, \dots, t_m) di G equivale alla seguente proprietà della tenda $t(G)$ di G : l'insieme dei buchi (degli zeri) di ogni colonna di $t(G)$ è un sottoinsieme regolare (di $I = \{1, \dots, m\}$) rispetto alle relazioni di G .*

Per una dimostrazione dettagliata si rinvia a [DVM11] o [DVM16]. Qui ci si limita ad osservare che essa si ottiene abbastanza facilmente, tenendo presente il calcolo dei tipi $t_G(g_i)$ con $i \in I$, quando si parta da una qualsiasi m -pla (t_1, \dots, t_m) di tipi. In particolare, si ha:

$$t_G(g_i) = \vee \{ \tau(Z^{-1}) \mid Z \in \text{maxfam}(g_i) \},$$

⁶Si osservi però che se $|A| = m - 1$ allora $V(p_A) = V(p_I)$.

dove $Z \in \maxfam(g_i)$ se e solo se Z indicizza le equazioni di un sottosistema compatibile massimale di

$$\text{Sys}(g) : \begin{cases} \sum_{l=1}^n \alpha_{l,j} \lambda_l = 0 & \text{se } j \in I \setminus \{i\} \\ \sum_{l=1}^n \alpha_{l,i} \lambda_l + 1 = 0 \end{cases}$$

DEFINIZIONE 8. Una (m, n) -tenda $t = (n, [\delta_{i,s}], \mathcal{A})$ si dice *regolare* se esiste una matrice A , ($n \times m$ su \mathbb{Q}) tale che $\text{rank } A = n$ e gli zero-blocchi delle colonne sono sottoinsiemi di I regolari rispetto ad A .

Ad esempio non è regolare la $(4, 2)$ -tenda seguente

$$\begin{array}{rcccccc} t_1 = & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 1 & 1 \\ \hline t_2 = & \bullet & 1 & 1 & \bullet & \bullet & 1 \\ \hline t_3 = & 1 & \bullet & 1 & \bullet & 1 & \bullet \\ \hline t_4 = & 1 & 1 & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \end{array}$$

con partizione-base $\min \mathbb{P}(4)$ e aventi per colonne tutte le possibili colonne contenenti esattamente due buchi. In particolare, quale che sia una matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

con gli α_i a due a due distinti, nel calcolo della base di tipi di un qualsiasi $\mathbf{B}(2)$ -gruppo, si deve passare dalla tenda data ad una ottenuta da essa “riempendo i buchi”; ovvero la tenda data non è tenda di alcun $\mathbf{B}(2)$ -gruppo regolare.

Sono invece regolari le $(4, 2)$ -tende seguenti

$$\begin{array}{rcccc} t_1 = & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \\ \hline t_2 = & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \hline t_3 = & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \hline t_4 = & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccccc} t_1 = & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 1 \\ \hline t_2 = & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & \bullet \\ \hline t_3 = & 1 & \bullet & 1 & \bullet & \bullet \\ \hline t_4 = & 1 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

e ogni altra tenda che si ottiene da esse sopprimendo colonne (come si suol dire “cancellando primi”).

È immediato osservare che una m -tenda (cioè $n = 1$, $\mathcal{A} = \max \mathbb{P}(m)$) è regolare se e solo se ogni colonna ha almeno due buchi.

10. La notazione degli interi liberi da quadrati

Una maniera comoda ed efficace di dare una tenda, che sarà usata spesso in tutta l'esposizione, è la seguente. Sia $(\mathbb{N}^*, \text{M.C.D.}, \text{m.c.m.})$ il reticolo degli interi positivi liberi da quadrati, con l'aggiunta di un massimo “ ∞ ”. Data una (m, n) -tenda $t = (n, [\delta_{i,s}]_{i \in I, s \in P}, \mathcal{A})$, si scelgono (ad arbitrio) un insieme di Π di r numeri primi distinti e una biezione

$$s \in P = \{1, \dots, r\} \mapsto q_s \in \Pi$$

e si indicizzano le colonne (i Primi) di t coerentemente con essa, scrivendo q_s in luogo di 1 nella s -ma colonna. Così ogni riga t_i della tenda viene scritta

come prodotto di numeri primi distinti. Se t è regolare, cioè è la tenda di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo G , allora la biezione $s \mapsto q_s$ induce il seguente monomorfismo

$$\sigma \in T(G) \mapsto \begin{cases} \infty & \text{se } \sigma = \infty \\ \Pi\{q_s | q_s \leq \sigma\} & \text{se } \sigma \neq \infty \end{cases}$$

il quale immerge $(T(G), \wedge, \vee)$ in $(\mathbb{N}^*, \text{M.C.D.}, \text{m.c.m.})$, ove si tenga presente che ogni tipo σ di $T(G)$ è l'estremo superiore (in \mathbb{T}) dei tipi Primi minori o uguali di esso. Così ogni tipo del typeset di G viene rappresentato come prodotto di numeri primi (distinti) e, con abuso di notazione e di terminologia, si scriverà

$$\sigma = \Pi\{q_s | q_s \leq \sigma\}$$

e si dirà che un primo q divide o no il tipo σ , o che q divide o non divide un elemento $g \in G$, rispettivamente quando q divida o no $t_G(g)$.

Giova osservare che tale "divisibilità" non ha alcun legame con la divisibilità consueta in un gruppo, ovvero di un elemento $g \in G$ per la potenza di un numero primo, la quale definisce il tipo $t_G(g)$ di g in G . Tuttavia, tra le (infinite) realizzazioni concrete di un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo dato, a meno di isocscenismi, mediante una (m, n) -tenda t , ce ne sono alcune *standard*, legate alla divisibilità consueta. Precisamente, data una (m, n) -tenda regolare t , rappresentata nella maniera appena descritta, ovvero mediante un insieme $\Pi = \{q_1, \dots, q_s\}$ di numeri primi, si considerano i tipi ridotti (minimali in \mathbb{T}) ρ_s , che hanno ∞ sulla componente s relativa alla divisibilità per q_s e 0 altrove (dunque infinita divisibilità per q_s e divisibilità definitivamente nulla per tutti gli altri primi)⁷. Con tale scelta si ottiene un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo concreto G , con $t(G) = t$, il cui typeset è costituito da *tipi ridotti*, cioè tipi che hanno un numero finito di ∞ e 0 altrove. In particolare la base di tipi $(t_1, \dots, t_m) = (t_G(g_1), \dots, t_G(g_m))$ è costituita dai tipi ridotti

$$t_i = \vee\{\rho_s | q_s \text{ divide } t_i\} = \wedge\{\rho_s | i \notin Z(q_s)\}.$$

Ad esempio, le tende degli Esempi ammettono le seguenti realizzazioni concrete.

Realizzazione concreta "standard" dell' Esempio 1,

$t_1 =$	q_1	q_2	\bullet	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, \infty, 0, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_2 =$	\bullet	\bullet	q_3	q_4	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$0, 0, \infty, \infty,$	$ $	$0 \dots)$
$t_3 =$	\bullet	q_2	\bullet	q_4	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, 0, \infty, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_4 =$	\bullet	q_2	q_3	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$0, \infty, \infty, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_5 =$	q_1	\bullet	\bullet	q_4	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, 0, 0, \infty,$	$ $	$0 \dots)$
$t_6 =$	q_1	\bullet	q_3	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, 0, \infty, 0,$	$ $	$0 \dots)$

Realizzazione concreta "standard" dell' Esempio 2,

$t_1 =$	q_1	\bullet	q_3	\bullet	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, 0, \infty, 0, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_2 =$	q_1	\bullet	\bullet	q_3	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$\infty, 0, 0, \infty, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_3 =$	\bullet	q_2	\bullet	q_3	\bullet	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$0, \infty, 0, 0, 0,$	$ $	$0 \dots)$
$t_4 =$	\bullet	q_2	\bullet	\bullet	q_4	$=$	$(0, \dots, 0,$	$ $	$0, \infty, 0, 0, \infty,$	$ $	$0 \dots)$

⁷ ρ_s è il tipo del gruppo additivo dei razionali q_s -adici

Realizzazione concreta “standard” dell’ Esempio 3

$$\begin{array}{l}
t_1 = q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet = (0, \dots, 0, \left| \infty, \infty, \infty, 0, 0, \right| 0 \dots) \\
t_2 = q_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet = (0, \dots, 0, \left| \infty, 0, 0, \infty, 0, \right| 0 \dots) \\
t_3 = \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad q_4 \quad q_5 = (0, \dots, 0, \left| 0, 0, 0, \infty, \infty, \right| 0 \dots) \\
t_4 = \bullet \quad q_2 \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet = (0, \dots, 0, \left| 0, \infty, 0, \infty, 0, \right| 0 \dots) \\
t_5 = \bullet \quad q_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_5 = (0, \dots, 0, \left| 0, \infty, 0, 0, \infty, \right| 0 \dots)
\end{array}$$

E’ da notare che tutti i su mostrati esempi di realizzazioni concrete mostrano solo per comodità di scrittura tipografica i numeri primi q_s “adiacenti”, cioè corrispondenti ad un intervallo di indici $s \in \mathbb{N}$, essendo come prima specificato, del tutto arbitraria la corrispondenza $s \mapsto q_s$.

CAPITOLO 2

Isomorfismi e cambi-base di gruppi di Butler

La possibilità di studiare i cambi di base è alquanto rara nella teoria dei gruppi abeliani; nella Sezione 2 si introduce l'argomento per i gruppi di Butler. A quella che — allo stato attuale della ricerca — costituisce la parte più consistente della teoria dei cambi-base, ovvero quella riguardante i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, viene dato spazio nella Sezione 3, principalmente per illustrare il punto dal quale prende le mosse l'ulteriore sviluppo della teoria, che è descritto nel Capitolo 3. Infine, nella Sezione 4 si fa il punto delle proprietà conservate dai cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi e che costituiscono il punto di forza dello studio dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di Butler a meno di isoscenismi.

Nella seguente Sezione 1 viene illustrato come tale studio non sia, come potrebbe sembrare, lo studio delle relazioni tra typeset e struttura gruppale, bensì più propriamente lo studio delle relazioni d'ordine, nel typeset, tra gli elementi \vee -irriducibili e i generatori del gruppo (ovvero l'insieme delle relazioni che sono rappresentate nella tenda del gruppo) e dell'influenza di tali relazioni sulla struttura gruppale.

1. I rapporti tra typeset e struttura gruppale.

Siano, per un fissato n , G ed H due $\mathbf{B}(n)$ -gruppi di Butler; il fatto che G ed H abbiano ugual rango e stesso typeset non implica che G ed H siano isomorfi; ciò anche quando si richieda che uno dei due o entrambi siano indecomponibili.

Tale ultima richiesta nasce dal fatto che è molto facile esibire due $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di Butler decomponibili, aventi stesso rango, stesso typeset e non isomorfi. Un esempio non troppo banale può essere il seguente.

ESEMPIO 4.

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_5 \rangle_*$$

$$g_1 + \cdots + g_5 = 0$$

Tenda:

$$\begin{array}{l} t_1 = q_1 \bullet \bullet \bullet = (\infty, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ t_2 = q_1 \bullet q_3 \bullet = (\infty, 0, \infty, 0, 0, \dots) \\ t_3 = \bullet q_2 \bullet q_4 = (0, \infty, 0, \infty, 0, \dots) \\ t_4 = \bullet q_2 \bullet \bullet = (0, \infty, 0, 0, 0, \dots) \\ t_5 = \bullet q_2 q_3 \bullet = (0, \infty, \infty, 0, 0, \dots) \end{array}$$

e

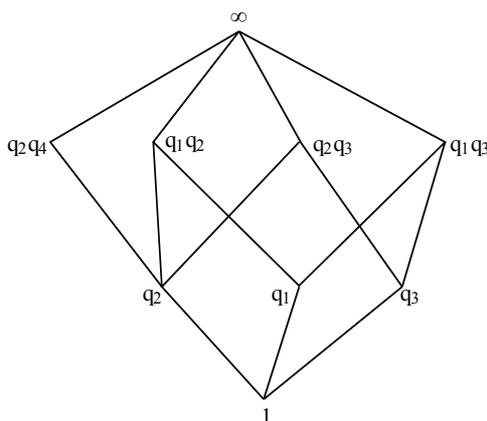
$$H = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_5 \rangle_*$$

$$h_1 + \cdots + h_5 = 0$$

Tenda:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= q_1 \ q_2 \ \bullet \ \bullet = (\infty, \ \infty, \ 0, \ 0, \ 0, \ \dots) \\
 u_2 &= q_1 \ \bullet \ q_3 \ \bullet = (\infty, \ 0, \ \infty, \ 0, \ 0, \ \dots) \\
 u_3 &= \bullet \ q_2 \ \bullet \ q_4 = (0, \ \infty, \ 0, \ \infty, \ 0, \ \dots) \\
 u_4 &= q_1 \ \bullet \ \bullet \ \bullet = (\infty, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \dots) \\
 u_5 &= \bullet \ q_2 \ q_3 \ \bullet = (0, \ \infty, \ \infty, \ 0, \ 0, \ \dots)
 \end{aligned}$$

È immediato verificare che entrambi i gruppi hanno rango 4 e che $T(G) = T(H)$:



Tuttavia i due gruppi non sono isomorfi: ad es. $G = \langle g_2 \rangle_* \oplus \langle g_3 \rangle_* \oplus \langle g_5 \rangle_* \oplus \langle g_{\{1,2\}} \rangle_*$ è completamente decomponibile, mentre tale non è H , che tra i suoi addendi diretti

$$H = \langle h_1 \rangle_* \oplus \langle h_3 \rangle_* \oplus H_{\{3,5\}}$$

ha $H_{\{3,5\}}$ indecomponibile.

Si fornisce qui di seguito un esempio di due $\mathbf{B}(1)$ -gruppi non isomorfi, aventi stesso rango e stesso typeset e dei quali uno solo è indecomponibile.

ESEMPIO 5. Siano $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_9 \rangle_*$ e $H = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_9 \rangle_*$, rappresentazioni di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di rango 8, con le rispettive relazioni diagonali e le seguenti tende:

*Tenda*¹ di G

$$\begin{aligned}
 t_G(g_1) &= p_1 \ p_2 \ p_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ r_1 \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_2) &= p_1 \ p_2 \ p_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ r_2 \ \bullet \\
 t_G(g_3) &= p_1 \ p_2 \ p_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ r_3 \\
 t_G(g_4) &= \bullet \ \bullet \ p_3 \ q_1 \ q_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_5) &= \bullet \ p_2 \ \bullet \ q_1 \ \bullet \ q_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_6) &= p_1 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ q_2 \ q_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_7) &= p_1 \ \bullet \ \bullet \ q_1 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_8) &= \bullet \ p_2 \ \bullet \ \bullet \ q_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
 t_G(g_9) &= \bullet \ \bullet \ p_3 \ \bullet \ \bullet \ q_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet
 \end{aligned}$$

¹In questo e nei successivi esempi, per ragioni di chiarezza espositiva si ometterà di fornire un esempio di realizzazione concreta standard dei tipi della base, mediante l'esplicitazione di una successione di divisibilità ∞ o 0 . Ciò proprio a ragione della semplicità ed al tempo stesso della arbitrarietà di tale procedimento. Il lettore può comunque supporre, per comodità, fissata una siffatta realizzazione, come spiegato nella Sezione 10, Cap. 1

Tenda di H

$$\begin{aligned}
 t_H(h_1) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & r_1 & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_2) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & r_2 & \bullet \\
 t_H(h_3) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & r_3 \\
 t_H(h_4) &= \bullet & \bullet & p_3 & q_1 & q_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_5) &= \bullet & p_2 & \bullet & q_1 & \bullet & q_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_6) &= p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & q_2 & q_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_7) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_8) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_H(h_9) &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{aligned}$$

I due gruppi hanno lo stesso typeset, come si può verificare calcolando le partizioni minime dei vari prodotti di primi, a partire dalle seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned}
 t_i &= u_i & \forall i &= 1, \dots, 6 \\
 t_7 &= p_1 q_1 = u_{\{4,5\}} \\
 t_8 &= p_2 q_2 = u_{\{4,6\}} \\
 t_9 &= p_3 q_3 = u_{\{5,6\}} \\
 u_7 &= u_8 = u_9 = p_1 p_2 p_3 = \tau\{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

D'altro canto $\text{rank } G(p_1) = 5$ e $\text{rank } H(p_1) = 7$ e quindi G ed H non sono isomorfi. Si ha inoltre

$$\text{part}_t(t_i) = p_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

e pertanto G è indecomponibile; invece H è decomponibile, essendo

$$\text{part}_u(u_7) = \text{part}_u(u_8) = \text{part}_u(u_9) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}\}.$$

ed è quindi

$$H = \langle h_1 \rangle_* \oplus \langle h_2 \rangle_* \oplus \langle h_3 \rangle_* \oplus H_{\{4,5,6\}} \oplus \langle h_7 \rangle_* \oplus \langle h_8 \rangle_*$$

con $H_{\{4,5,6\}}$ indecomponibile.

Nel costruire esempi di questo tipo bisogna porre attenzione che oltre agli isoscenismi non “a vista” dettati da cambi-base non banali, ci sono quelli indotti da permutazioni sull’insieme delle colonne (il cui ordinamento è arbitrario) e sull’insieme delle righe (cambi-base banali). Quindi tende apparentemente diverse possono essere isosceniche in maniera banale, come mostra l’esempio seguente.

ESEMPIO 6. ([DVM1]) Siano $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_9 \rangle_*$ e $H = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_9 \rangle_*$, rappresentazioni di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di rango 8, con le rispettive relazioni diagonali e le seguenti tende:

Tenda di G

$$\begin{aligned}
 t_G(g_1) = t_1 &= p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_2 & s_3 \\
 t_G(g_2) = t_2 &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_1 & \bullet & s_3 \\
 t_G(g_3) = t_3 &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & q_3 & \bullet & \bullet & \bullet & s_1 & s_2 & \bullet \\
 t_G(g_4) = t_4 &= p_1 & \bullet & \bullet & q_1 & q_2 & q_3 & \bullet & r_2 & r_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_G(g_5) = t_5 &= \bullet & p_2 & \bullet & q_1 & q_2 & q_3 & r_1 & \bullet & r_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_G(g_6) = t_6 &= \bullet & \bullet & p_3 & q_1 & q_2 & q_3 & r_1 & r_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 t_G(g_7) = t_7 &= p_1 & p_2 & p_3 & q_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_1 & \bullet & \bullet \\
 t_G(g_8) = t_8 &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_2 & \bullet \\
 t_G(g_9) = t_9 &= p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & q_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_3
 \end{aligned}$$

Tenda di H

$$\begin{array}{l}
t_H(h_1) = u_1 = p_1 \ p_2 \ p_3 \ q_1 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ s_2 \ s_3 \\
t_H(h_2) = u_2 = p_1 \ p_2 \ p_3 \ \bullet \ q_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ s_1 \ \bullet \ s_3 \\
t_H(h_3) = u_3 = p_1 \ p_2 \ p_3 \ \bullet \ \bullet \ q_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ s_1 \ s_2 \ \bullet \\
t_H(h_4) = u_4 = p_1 \ \bullet \ \bullet \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \bullet \ r_2 \ r_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
t_H(h_5) = u_5 = \bullet \ p_2 \ \bullet \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ r_1 \ \bullet \ r_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
t_H(h_6) = u_6 = \bullet \ \bullet \ p_3 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ r_1 \ r_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
t_H(h_7) = u_7 = p_1 \ \bullet \ \bullet \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ r_1 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
t_H(h_8) = u_8 = \bullet \ p_2 \ \bullet \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \bullet \ r_2 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\
t_H(h_9) = u_9 = \bullet \ \bullet \ p_3 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \bullet \ \bullet \ r_3 \ \bullet \ \bullet \ \bullet
\end{array}$$

I gruppi hanno lo stesso typeset, come si può verificare calcolando le partizioni minime dei vari prodotti di primi, a partire dalle seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned}
t_i &= u_i \quad \forall i = 1, \dots, 6 \\
t_7 &= u_{\{2,3\}} \\
t_8 &= u_{\{1,3\}} \\
t_9 &= u_{\{1,2\}} \\
u_7 &= t_{\{5,6\}} \\
u_8 &= t_{\{4,6\}} \\
u_9 &= t_{\{4,5\}}
\end{aligned}$$

Dopodiché con calcoli un po' laboriosi non è difficile provare che G e H hanno lo stesso typeset. D'altro canto G ed H non sono isomorfi perché $\text{rank } G(p) \neq \text{rank } H(p)$, per ogni primo p .

I due gruppi risultano indecomponibili, essendo

$$\text{part}_t(t_i) = \text{part}_u(u_i) = p_i, \quad \forall i = 1, \dots, 9.$$

In realtà, come anticipato, è questo uno dei casi in cui permutazioni opportune di righe e di colonne, in particolare

$$(p_1, q_1)(p_2, q_2)(p_3, q_3)(r_1, s_1)(r_2, s_2)(r_3, s_3)$$

sulle colonne e

$$(1, 4)(2, 5)(3, 6)$$

sulle righe, mostrano che i due gruppi sono in realtà isoscenici.

Da tali osservazioni sorge in maniera naturale il seguente problema a tutt'oggi aperto

Due $\mathbf{B}(1)$ -gruppi indecomponibili, che abbiano stesso rango e stesso typeset, sono di necessità isoscenici?

Le difficoltà di ricerca di possibili controesempi a tale congettura fanno propendere per una risposta affermativa, ma il problema resta aperto, ed interessante: peculiarità dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi sono i legami, di natura combinatorica, tra tenda e typeset (vedi *Pulling the string* Sezione 7, Cap. 1) e tra tenda e decomponibilità (vedi Sezione 4 di questo capitolo), e la risposta al quesito potrebbe venire dall'uso degli strumenti sviluppati nel Capitolo 3.

2. Isomorfismi e cambi-base

Siano G un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare dato dalla rappresentazione R_G seguente:

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$$

Matrice della relazioni: $A = [\alpha_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$

Base di tipi (t_1, \dots, t_m) e conseguente tenda t

ed H un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare dello stesso rango di G , con rappresentazione R_H

$$H = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_m \rangle_*$$

Matrice della relazioni: $B = [\beta_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$

Base di tipi (u_1, \dots, u_m) e conseguente tenda u

e siano G ed H isomorfi.

Allora G ed H hanno lo stesso typeset e quindi gli stessi tipi Primi, i quali permettono di scrivere i tipi del typeset come loro “prodotti” (secondo la convenzione introdotta in 10, Cap. 1). Sia $f : G \rightarrow H$ un isomorfismo e si ponga:

$$f(g_i) = h'_i \quad f^{-1}(h_i) = g'_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

e

$$g'_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{i,j} g_j \quad h'_i = \sum_{j=1}^m \epsilon_{i,j} h_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

con le ovvie appartenenze dei coefficienti γ ed ϵ ai sottogruppi di \mathbb{Q} che danno le rispettive basi di tipi.

Allora f dà luogo a un cambio-base tra le rappresentazioni R_G e R_H , nel senso che le matrici

$$\Phi = [\gamma_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq m}$$

e

$$\Psi = [\epsilon_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq m}$$

godono delle proprietà²

$$(*) \begin{cases} \Phi\Psi - I_m & \text{è equivalente alla matrice } A \\ \Psi\Phi - I_m & \text{è equivalente alla matrice } B \end{cases}$$

$$(**) \begin{cases} B\Phi & \text{è equivalente alla matrice } A \\ A\Psi & \text{è equivalente alla matrice } B \end{cases}$$

Si ha inoltre, per ogni $i = 1, \dots, m$:

$$u_i = t_H(h_i) = t_G(g'_i)$$

e

$$t_i = t_G(g_i) = t_H(h'_i),$$

²Due matrici A_1 e A_2 su uno stesso campo K si dicono equivalenti se le righe di A_1 sono combinazioni lineari delle righe di A_2 e viceversa

sicch , per un Primo q si ha che q divide³ u_i se e solo se q divide $t_G(\sum_{j=1}^m \gamma_{i,j}g_j)$; ci    equivalente a dire che $Z_t(q)$   contenuto in qualche insieme appartenente a $\text{maxfam}_G(\sum_{j=1}^m \gamma_{i,j}g_j)$. Analogamente si ha che q divide t_i se e solo se q divide $t_H(\sum_{j=1}^m \epsilon_{i,j}h_j)$, quindi se e solo se $Z_u(q)$   contenuto in qualche insieme appartenente a $\text{maxfam}_H(\sum_{j=1}^m \epsilon_{i,j}h_j)$.

Esplicitando tali propriet  in termini di Φ e Ψ si ha l'ulteriore coppia di condizioni

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} Z_t(q) \text{   contenuto in qualche insieme che indicizza un} \\ i \notin Z_u(q) \Leftrightarrow \text{sottosistema risolubile del sistema} \\ \text{Sys}(g'_i) = \sum_{l=1}^n \alpha_{l,j} \lambda_l + \gamma_{i,j} \quad j = 1, \dots, m \\ \\ Z_u(q) \text{   contenuto in qualche insieme che indicizza un} \\ i \notin Z_t(q) \Leftrightarrow \text{sottosistema risolubile del sistema} \\ \text{Sys}(h'_i) = \sum_{l=1}^n \beta_{l,j} \lambda_l + \epsilon_{i,j} \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Le propriet  (*), (**) e (***) assicurano che

$$\begin{aligned} t_G(g) &= t_H(f(g)), \quad \forall g \in G \\ t_H(h) &= t_G(f^{-1}(h)), \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

Quindi il cambio-base (Φ, Ψ) tra R_G e R_H d  luogo a due nuove rappresentazioni di G ed H :

$$\begin{aligned} R'_G &\left\{ \begin{array}{l} G = \langle g'_1 \rangle_* + \dots + \langle g'_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } B = [\beta_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (u_1, \dots, u_m) = (t_G(g'_1), \dots, t_G(g'_m)) \end{array} \right. \\ R'_H &\left\{ \begin{array}{l} H = \langle h'_1 \rangle_* + \dots + \langle h'_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } A = [\alpha_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (t_1, \dots, t_m) = (t_H(h'_1), \dots, t_H(h'_m)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ovviamente   valido il viceversa: i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi G ed H sono isomorfi qualora essi posseggano ciascuno due rappresentazioni, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} R_G &\left\{ \begin{array}{l} G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } A = [\alpha_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (t_1, \dots, t_m) \end{array} \right. \\ R'_G &\left\{ \begin{array}{l} G = \langle g'_1 \rangle_* + \dots + \langle g'_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } B = [\beta_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (u_1, \dots, u_m) \end{array} \right. \\ R_H &\left\{ \begin{array}{l} H = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } B = [\beta_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (u_1, \dots, u_m) \end{array} \right. \\ R'_H &\left\{ \begin{array}{l} H = \langle h'_1 \rangle_* + \dots + \langle h'_m \rangle_* \\ \text{Matrice della relazioni: } A = [\alpha_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \\ \text{Base di tipi } (t_1, \dots, t_m). \end{array} \right. \end{aligned}$$

³Ricordiamo che secondo la nomenclatura introdotta in 10 Cap. 1, un Primo q divide un tipo t_i di una tenda t se e solo se i appartiene al supporto di q in t

L'isomorfismo è dato dall'applicazione $f : G \rightarrow H$ ottenuta prolungando per linearità le posizioni $f(g_i) = h'_i$, per $i = 1, \dots, m$. Per verificarlo basta ripercorrere le considerazioni fatte in precedenza, partendo dalle scritture dei g'_i e degli h'_i in funzione dei g_i e degli h_i rispettivamente:

$$g'_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{i,j} g_j, \quad h'_i = \sum_{j=1}^m \epsilon_{i,j} h_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Si ottengono così le due matrici su \mathbb{Q}

$$\Phi = [\gamma_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m} \quad \Psi = [\epsilon_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

e le proprietà (*), (**) e (***) sono assicurate dalle ipotesi fatte sulle coppie di rappresentazioni di G e H , e ciò basta a garantire, come si voleva,

$$t_G(g) = t_H(f(g)), \quad \forall g \in G$$

$$t_H(h) = t_G(f^{-1}(h)), \quad \forall h \in H.$$

È importante osservare che se $G = H$, si ha allora $R_G = R'_H$ e $R_H = R'_G$ e l'isomorfismo f che si ottiene è nient'altro che l'identità 1_G . Il cambio-base che allora si ottiene è semplicemente la riscrittura dei g'_i in R_G e dei g_i in R'_G e questo, insieme alle considerazioni fatte sul caso generale, assicura che il calcolo del tipo in G di un $g \in G$ non dipende dalle rappresentazioni R_G o R'_G .

Non appare superfluo osservare che il lavorare con un sistema di generatori con delle relazioni permette ad un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo di avere cambi-base non banali (ovviamente a meno di permutazioni degli elementi della sua base) anche nel caso in cui esso ammetta⁴ solo automorfismi diagonali, dunque del tipo

$$g_i \mapsto \rho_i g_i \quad i = 1, \dots, m$$

con $\rho_i \in R_i \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z} \leq R_i \leq \mathbb{Q}$ e $t(R_i) = t_i = t_G(g_i)$, per ogni i .

Uno dei più piccoli esempi di $\mathbf{B}(1)$ -gruppo indecomponibile di tal genere è il seguente:

ESEMPIO 7. Sia G il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo dato da

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_4 \rangle_*$$

$$g_1 + \dots + g_4 = 0$$

con tenda seguente

$$\begin{array}{cccc} t_1 = & q_1 & q_2 & \bullet & \bullet \\ t_2 = & \bullet & q_2 & q_3 & \bullet \\ t_3 = & \bullet & \bullet & q_3 & q_4 \\ t_4 = & q_1 & \bullet & \bullet & q_4 \end{array}$$

⁴Tale proprietà è ad esempio scatenata, insieme all'indecomponibilità, dall'essere

$$G(t_i) = \langle g_i \rangle_* \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Si osservi, inoltre, che tale condizione è equivalente all'indecomponibilità nel caso dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi.

Poiché $\min T(G) = \min T = t(\mathbb{Z})$, ne segue che i suoi unici automorfismi sono $\pm 1_G$. Tuttavia G possiede due cambi-base non banali. Il primo dato da

$$\Phi' = \Psi' = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \pm 1$$

che da luogo alle relazioni

$$h'_1 = -\gamma g_1, \quad h'_2 = \gamma(g_1 + g_2), \quad h'_3 = \gamma g_3, \quad h'_4 = \gamma(g_1 + g_4)$$

e alla tenda

$$\begin{array}{l} t'_1 = t(h'_1) = q_1 \quad q_2 \quad \bullet \quad \bullet \\ t'_2 = t(h'_2) = \bullet \quad q_2 \quad \bullet \quad q_4 \\ t'_3 = t(h'_3) = \bullet \quad \bullet \quad q_3 \quad q_4 \\ t'_4 = t(h'_4) = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad \bullet \end{array}$$

e il secondo dato da

$$\Phi'' = \Psi'' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \pm 1$$

che da luogo alle relazioni

$$h''_1 = \gamma(g_1 + g_2), \quad h''_2 = -\gamma g_2, \quad h''_3 = \gamma(g_2 + g_3), \quad h''_4 = \gamma g_4$$

e alla tenda

$$\begin{array}{l} t''_1 = t_{1,2} = \bullet \quad q_2 \quad \bullet \quad q_4 \\ t''_2 = t_2 = \bullet \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \\ t''_3 = t_{2,3} = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad \bullet \\ t''_4 = t_4 = q_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_4 \end{array}$$

Basta una breve riflessione per rendersi conto che il problema della determinazione dei cambi-base dei gruppi di Butler è molto complesso e che è difficile individuare un qualche approccio generale. A riprova di ciò, non sono molti i risultati in letteratura sui cambi-base dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi con $n \geq 2$. La situazione tuttavia è molto diversa per i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, come viene mostrato nella Sezione seguente.

3. Cambi-base di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi

Lo studio dei cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi è reso agevole dalla possibilità di ricondurre tutte le problematiche in un ambito \mathbb{Z}_2 -lineare e ciò consente di lavorare solo sulle tende con strumenti essenzialmente combinatorici. Il merito di tale riduzione del problema va principalmente a H.P.Goeters e C.Megibben ([**GM**], 2001), anche se i loro risultati erano già presenti in embrione in [**FM**] (1991) di L.Fuchs e C.Metelli. Inoltre, nel 2003 F.Barioli, C.De Vivo e C.Metelli hanno ottenuto in [**BDVM**] alcuni risultati riguardanti le rappresentazioni di spazi vettoriali, i quali possono essere efficacemente utilizzati per semplificare le dimostrazioni di alcuni dei teoremi ottenuti da Goeters e Megibben.

Riportiamo in sintesi il risultato principale di [**BDVM**], rimandando al loro lavoro per i dettagli dimostrativi.

DEFINIZIONE 9. Sia K un campo e sia V un K -spazio vettoriale. Una *rappresentazione* di V è una coppia $(V, (V_r)_{r \in \Pi})$ dove Π è un insieme che indica la famiglia $(V_r)_{r \in \Pi}$ di sottospazi di V .

DEFINIZIONE 10. Siano $(V, (V_r)_{r \in \Pi})$ e $(W, (W_r)_{r \in \Pi})$ due rappresentazioni di K -spazi vettoriali V e W . Esse si dicono *isomorfe* se esiste un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tale che $\varphi(V_r) = W_r$ per ogni $r \in \Pi$. Con abuso di linguaggio si dice anche che φ è un isomorfismo tra le due rappresentazioni.

Condizione necessaria affinché un tale isomorfismo esista è ovviamente la seguente proprietà dell'intersezione:

$$(\cap) \quad \dim_V \bigcap_{r \in \pi} V_r = \dim_W \bigcap_{r \in \pi} W_r \quad \forall \pi \subseteq \Pi$$

La condizione non è in nessun modo sufficiente in generale a garantire l'esistenza di un isomorfismo tra le rappresentazioni, ed in [BDVM] gli autori analizzano il problema nel caso ristretto, ma significativo, in cui i V_r e W_r siano spazi coordinati rispetto a fissate basi.

TEOREMA 1 (Theorem 5.1, [BDVM]). *Siano $(V, (V_r)_{r \in \Pi})$ e $(W, (W_r)_{r \in \Pi})$ due rappresentazioni di K -spazi vettoriali V e W , e i sottospazi V_r , risp. W_r siano, per ogni $r \in \Pi$ sottospazi coordinati rispetto a fissate basi ridondanti di V , risp. di W . Se le famiglie di sottospazi $\{V_r | r \in \Pi\}$ e $\{W_r | r \in \Pi\}$ godono della proprietà (\cap) allora le due rappresentazioni sono isomorfe.*

La significatività del risultato è legata al fatto che l'ipotesi della base ridondante fa da spartiacque: se si ipotizza che i sottospazi siano coordinati rispetto ad una base vera, la tesi segue facilmente, mentre è possibile esibire controesempi che mostrano come la tesi non può seguire in generale se i sottospazi sono supposti coordinati rispetto ad un sistema di generatori più ampio di una base ridondante.

Riprendiamo adesso la descrizione dei cambi-base, nel caso particolare dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi. Se $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ è un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare, allora l'unica sua relazione è la relazione diagonale, a cui corrisponde la matrice delle relazioni $\Delta_m = [1, \dots, 1]$. Siano allora R_G ed R'_G due rappresentazioni di G , con rispettive basi di tipi (t_1, \dots, t_m) e (u_1, \dots, u_m) .

Per un cambio-base di G tra le dette rappresentazioni, la proprietà (***) si specializza⁵ adesso in:

$$(***)' \begin{cases} \Phi \text{ e } \Psi \text{ sono matrici } m \times m \text{ su } \mathbb{Q} \text{ di rango } m - 1 \text{ a} \\ \text{somma costante e non nulla sulle colonne} \end{cases}$$

e le proprietà (*) diventa:

$$(*)' \begin{cases} \Phi \Psi = [\lambda_j + \delta_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m} \\ \Psi \Phi = [\mu_j + \delta_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m} \end{cases} \quad (\delta_{i,j} \text{ simbolo di Kronecker})$$

⁵Si osservi che, in accordo con la letteratura sui $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, le matrici delle relazioni si scriveranno per colonne; nel sseguito è stata dunque operata implicitamente la trasposizione di matrici.

dove i λ_j e i μ_j sono razionali. Infine, se $\Phi = [\gamma_{j,i}]_{1 \leq i,j \leq m}$ e $\Psi = [\epsilon_{j,i}]_{1 \leq i,j \leq m}$, la proprietà $(***)$ si traduce nella seguente:

$$(***)' \begin{cases} i \notin Z_t(q) \Leftrightarrow Z_u(q) \text{ è contenuto in un blocco di} \\ \text{part}_H(\sum_{j=1}^m \epsilon_{j,i} h_j) = \text{part}_H(g_i) \\ \\ i \notin Z_u(q) \Leftrightarrow Z_t(q) \text{ è contenuto in un blocco di} \\ \text{part}_G(\sum_{j=1}^m \gamma_{j,i} g_j) = \text{part}_G(h_i) \end{cases}$$

ove si ricordi che $\text{maxfam}_G(g) = \text{part}_G(g)$.

L'idea di Goeters e Megibben (e, in parte, di Fuchs e Metelli) consiste nell'associare a ogni rappresentazione R_G di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G di rango $m-1$ una rappresentazione \mathcal{L}_G dello \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale $\mathbb{B}(m)$ delle bipartizioni di $I = \{1, \dots, m\}$, ottenuta indicizzando in un opportuno insieme $\Pi = \{q_1, \dots, q_m\}$ sottospazi che corrispondano ai sottogruppi pienamente invarianti $G(\sigma)$, con σ Primo del gruppo G . In tal modo essi dimostrano che se G ed H sono $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di rango $m-1$, allora G e H risultano isomorfi se e solo se sono isomorfe le \mathbb{Z}_2 -rappresentazioni \mathcal{L}_G e \mathcal{L}_H , ed in tal caso un automorfismo tra le rappresentazioni è dato da un automorfismo \mathcal{E} di $\mathbb{B}(m)$.

Se \mathcal{E} è scritto rispetto alla base ridondante delle bipartizioni puntate (p_1, \dots, p_m) , allora è $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ m -pla di bipartizioni *ammissibile*⁶, che da luogo al seguente cambio-base:

$$h_i = \gamma_i g_{E_i}, \quad g_i = \epsilon_i h_{F_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

dove $(b_{F_1}, \dots, b_{F_m}) = \mathcal{E}^{-1}$, cioè, indicando con δ_C la funzione caratteristica di un qualsiasi $C \subseteq I$

$$\Phi = [\gamma_i \delta_{E_j}(i)]_{1 \leq i,j \leq m}, \quad \Psi = [\epsilon_j \delta_{F_j}(i)]_{1 \leq i,j \leq m},$$

dove i γ_i e gli ϵ_i sono razionali non nulli (con le ovvie appartenenze ai sottogruppi di $\mathbb{Q}(+)$ che danno le basi di tipi), e si ha in \mathbb{Q}^m la somma costante delle colonne, ovvero:

$$\gamma_1 \delta_{E_1} + \dots + \gamma_m \delta_{E_m} = \gamma \delta_I \quad (\gamma \neq 0)$$

$$\epsilon_1 \delta_{F_1} + \dots + \epsilon_m \delta_{F_m} = \epsilon \delta_I \quad (\epsilon \neq 0)$$

e quindi la validità delle $(*)'$.

Tale cambio-base, tradotto sulle tende t e u diventa:

$$\begin{cases} u_i = t_{E_i} = t(b_{E_i}) \\ t_i = u_{F_i} = t(b_{F_i}) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m).$$

3.1. Da \mathbb{Q} a \mathbb{Z}_2 . Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo dato mediante l'usuale rappresentazione che contempla la relazione diagonale, e la base di tipi (t_1, \dots, t_m) ; inoltre secondo le convenzioni adottate nella Sezione 10 Cap. 1, sia $\Pi(G) = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ l'insieme dei tipi Primi del typeset $T(G)$ di G e sia $\Pi = \{q_1, \dots, q_n\}$ un insieme di numeri primi che indicizza le colonne della tenda t e che consente di scrivere ogni tipo $\sigma \in T(G)$ come prodotto di primi.

⁶È la terminologia originaria usata in [FM], e semplicemente indica una m -pla di bipartizioni dipendente minimale.

Ricordiamo che in un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo i tipi σ sono associati a partizioni $\text{part}_t(\sigma)$ e queste, a loro volta, determinano il rango dei sottogruppi pienamente invarianti $G(\sigma)$. In particolare, per ogni tipo primo $q_r \in \Pi$ si ha, denotando con $A_r = Z_t(q_r)^{-1}$ il supporto di q_r nella tenda t ,

$$\text{part}_t(\pi_r) = p_{A_r} \text{ (la partizione puntata su } A_r \text{)}$$

mentre per il generico tipo $\sigma \in \mathbf{T}(G)$, $\sigma = \vee\{\pi_r | \pi_r \leq \sigma\}$, si ha:

$$\text{part}_t(\sigma) = \vee\{p_{A_r} | q_r \text{ divide } \sigma\}.$$

Associando ad ogni partizione la sua immagine mediante il \vee -monomorfismo duale $V : \mathbb{P}(m) \rightarrow L(\mathbb{B}(m))$ si ottiene la seguente rappresentazione:

$$\mathcal{L}_G = (\mathbb{B}(m), (V(p_{A_r}))_{r \in \Pi})$$

che è, come preannunciato, la rappresentazione di $\mathbb{B}(m)$ associata alla rappresentazione R_G di G .

Si osservi che, per ogni tipo $\sigma \in \mathbf{T}(G)$ si ha

$$V(\text{part}_t(\sigma)) = \cap\{V(p_{A_r}) | q_r \text{ divide } \sigma\}$$

e $G(\sigma) = G(\text{part}_t(\sigma))$ ha rango

$$|\text{part}_t(\sigma)| - 1 = \dim V(\text{part}_t(\sigma)) = \dim \cap\{V(p_{A_r}) | q_r \text{ divide } \sigma\}$$

Quindi, un isomorfismo di $\mathbb{B}(m)$, che conservi le intersezioni dei sottospazi coordinati $V(p_{A_r})$ è sufficiente a garantire la conservazione dei ranghi dei $G(\sigma)$.

Siano dunque G e H $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di rango $m - 1$ dati mediante le rappresentazioni R_G e R_H , con le rispettive relazione diagonali e basi di tipi (t_1, \dots, t_m) , (u_1, \dots, u_m) , e siano

$$\mathcal{L}_G = (\mathbb{B}(m), (V(p_{A_r}))_{r \in \Pi_1})$$

e

$$\mathcal{L}_H = (\mathbb{B}(m), (V(p_{B_r}))_{r \in \Pi_2})$$

le rispettive rappresentazioni di $\mathbb{B}(m)$ ad esse associate.

Se G ed H sono isomorfi (in particolare se $G = H$), allora G ed H hanno lo stesso typeset e quindi gli stessi tipi Primi π_1, \dots, π_n sicché lecito assumere $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi := \{q_1, \dots, q_n\}$, cioè

$$\begin{cases} \text{part}_t(\pi_r) = p_{A_r} \\ \text{part}_u(\pi_r) = p_{B_r} \end{cases} \quad \forall \pi_r \in \Pi(G) = \Pi(H).$$

Si ha allora, per ogni $\sigma \in \mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(H)$:

$$\text{rank } G(\sigma) = \dim \cap\{V(p_{A_r}) | q_r \text{ divide } \sigma\}$$

$$\text{rank } H(\sigma) = \dim \cap\{V(p_{B_r}) | q_r \text{ divide } \sigma\}.$$

A questo punto il citato risultato di Barioli, De Vivo e Metelli assicura che esiste un automorfismo \mathcal{E} di $\mathbb{B}(m)$ tale che:

$$(4) \quad \mathcal{E}^{-1}(V(p_{A_r})) = V(p_{B_r}), \quad \forall r : q_r \in \Pi$$

da cui segue che le due rappresentazioni \mathcal{L}_G e \mathcal{L}_H sono isomorfe.

Se si scrivono rispetto alla base ridondante delle puntate $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$, $\mathcal{E}^{-1} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$, e si definisce

$$\mathcal{E}(A_r) := \{i \in \{1, \dots, m\} | b_{E_i} \geq p_{A_r}\} = \{i \in \{1, \dots, m\} | b_{E_i} \in V(p_{A_r})\}$$

allora la (4) è equivalente a

$$B_r = \mathcal{E}(A_r), \quad \forall r : q_r \in \Pi$$

ed è infine facile verificare che, per ogni $i = 1, \dots, m$:

$$\mathfrak{t}_G(g_i) = \mathfrak{u}_{E_i} = \mathfrak{t}_H(h_{E_i}).$$

La dimostrazione fornita da Goeters e Megibben dell'implicazione

$$G \simeq H \Rightarrow \mathcal{L}_G \simeq \mathcal{L}_H$$

è alquanto diversa e meno generale di quella contenuta in [BDVM]. Tuttavia entrambe le dimostrazioni sono notevolmente lunghe e riportarle richiederebbe troppo spazio. Pertanto si omettono, rinviando alla bibliografia citata per i dettagli.

3.2. Da \mathbb{Z}_2 a \mathbb{Q} . Siano ora G e H $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di rango $m - 1$ e con lo stesso typeset, dati mediante le rappresentazioni R_G e R_H , con le rispettive relazioni diagonali e basi di tipi $(\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_m)$, $(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_m)$, e siano \mathcal{L}_G ed \mathcal{L}_H le \mathbb{Z}_2 -rappresentazioni ad esse associate.

Per ipotesi \mathcal{L}_G e \mathcal{L}_H siano isomorfe e sia $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$ che sia un isomorfismo da \mathcal{L}_H a \mathcal{L}_G , ed il suo inverso $\mathcal{E}^{-1} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$. È allora lecito assumere

$$\mathcal{L}_G = (\mathbb{B}(m), V(p_{A_r})_{r \in \Pi})$$

$$\mathcal{L}_H = (\mathbb{B}(m), V(p_{B_r})_{r \in \Pi})$$

con

$$\mathcal{E}^{-1}(V(p_{A_r})) = V(p_{B_r}) \quad r : q_r \in \Pi$$

cioè $B_r = \mathcal{E}(A_r)$ per ogni r , dove $\Pi = \{q_1, \dots, q_n\}$ è un insieme di numeri primi in corrispondenza biunivoca con i tipi Primi π_1, \dots, π_n del typeset $\mathbf{T}(G) = \mathbf{T}(H)$, e $\text{part}_{\mathfrak{t}}(\pi_r) = p_{A_r}$ e $\text{part}_{\mathfrak{u}}(\pi_r) = p_{B_r}$, per ogni r .

Poiché \mathcal{E} ed \mathcal{E}^{-1} sono scritti rispetto alla base ridondante (p_1, \dots, p_m) , si ha

$$b_{E_1} + \dots + b_{E_m} = 0 = b_{F_1} + \dots + b_{F_m}$$

e \mathcal{E} e \mathcal{E}^{-1} sono rappresentati da tutte e solo le matrici $m \times m$ su \mathbb{Z}_2 di rango $m - 1$ della forma⁷

$$\mathcal{E} = [\delta_{E_j^{\pm 1}}(i)]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad \mathcal{E}^{-1} = [\delta_{F_j^{\pm 1}}(i)]_{1 \leq i, j \leq m}$$

a somma costante sulle colonne

$$\sum_{j=1}^m \delta_{E_j^{\pm 1}}(i) = 0 \text{ oppure } 1, \quad \sum_{j=1}^m \delta_{F_j^{\pm 1}}(i) = 0 \text{ oppure } 1$$

per ogni $i = 1, \dots, m$.

In particolare \mathcal{E} e \mathcal{E}^{-1} possono essere rappresentati con matrici aventi una fissata riga i -esima nulla⁸, in genere per comodità la m -esima.

Le suddette matrici conservano ovviamente il loro rango, pari a $m - 1$, se si riguardano come matrici su \mathbb{Q} ; in particolare, se vengono scritte con l' m -esima riga nulla e si sopprime la j -esima colonna in entrambe, si ottengono le matrici invertibili \mathcal{E}_j , \mathcal{E}_j^{-1} con $\det_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{E}_j = 1$ e quindi $\det_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}_j$ è un intero

⁷Si osservi che ciascuna colonna è identificata a meno di scambi di 0 ed 1.

⁸In pratica rappresentati rispetto ad una base vera $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m)$

dispari. Inoltre la condizione che la somma delle colonne è costante su \mathbb{Z}_2 comporta che la somma delle colonne in \mathbb{Q} è un vettore colonna le cui entrate sono tutte interi pari. Inoltre, nella rappresentazione con m -esima riga nulla, è ovviamente

$$\mathcal{E}\mathcal{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}.$$

A questo punto non è difficile dimostrare che esistono due m -ple di *moltiplicatori non nulli razionali*

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_m), \quad (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$$

tali che in \mathbb{Q} si abbia

$$\gamma_1\delta_{E_1^{\pm 1}} + \dots + \gamma_m\delta_{E_m^{\pm 1}} = \gamma\delta_I$$

$$\epsilon_1\delta_{F_1^{\pm 1}} + \dots + \epsilon_m\delta_{F_m^{\pm 1}} = \epsilon\delta_I$$

per un opportuna scelta degli esponenti di $E_j^{\pm 1}$ e $F_j^{\pm 1}$ e che, per ogni scelta siffatta, si ha

$$[\gamma_1\delta_{E_1^{\pm 1}}, \dots, \gamma_m\delta_{E_m^{\pm 1}}] \cdot [\epsilon_1\delta_{F_1^{\pm 1}}, \dots, \epsilon_m\delta_{F_m^{\pm 1}}] = [\lambda_j + \delta_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

e

$$[\epsilon_1\delta_{F_1^{\pm 1}}, \dots, \epsilon_m\delta_{F_m^{\pm 1}}] \cdot [\gamma_1\delta_{E_1^{\pm 1}}, \dots, \gamma_m\delta_{E_m^{\pm 1}}] = [\mu_j + \delta_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

con $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Q}$. Per i dettagli dimostrativi si rinvia a [GM] o [DVM3].

Così la coppia di matrici $m \times m$ su \mathbb{Q} :

$$\Phi := [\gamma_1\delta_{E_1^{\pm 1}}, \dots, \gamma_m\delta_{E_m^{\pm 1}}] \quad \Psi := [\epsilon_1\delta_{F_1^{\pm 1}}, \dots, \epsilon_m\delta_{F_m^{\pm 1}}]$$

verificano le proprietà $(*)'$ e $(**)'$, necessarie affinché (Φ, Ψ) sia un cambio-base tra G ed H . D'altro canto le ipotesi

$$\mathcal{E}^{-1}(V(p_{A_r})) = V(p_{B_r}) \quad r : q_r \in \Pi$$

comportano ovviamente che per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{-1}(\cap\{V(p_{A_r})|q_r \text{ divide } t_i\}) &= \cap\{\mathcal{E}^{-1}(V(p_{A_r}))|q_r \text{ divide } t_i\} = \\ &= \cap\{V(p_{B_r})|q_r \text{ divide } t_i\} = V(\cup\{p_{B_r}|q_r \text{ divide } t_i\}) \end{aligned}$$

e quindi $t_i = u_{F_i} = u(b_{F_i})$, ove si osservi che

$$q_r|t_i \Leftrightarrow p_i \in V(p_{A_r}) \Leftrightarrow b_{F_i} = \mathcal{E}^{-1}(p_i) \in \mathcal{E}^{-1}(V(p_{A_r})) = V(p_{B_r}) \Leftrightarrow q_r|u_{F_i}.$$

Analogamente si ottiene l'altra relazione $u_i = t_{E_i} = t(b_{E_i})$; ciò garantisce che la coppia di matrici $[\Phi, \Psi]$ è un cambio-base tra G ed H , che risultano quindi isomorfi.

4. Proprietà strutturali di $\mathbf{B}(1)$ -gruppo determinate dalla tenda

Come mostrato nella Sezione 1, il typeset di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo ha un influenza molto debole sulle proprietà strutturali del gruppo, le quali al contrario sono — insieme al typeset — determinate dalla tenda; esse vengono qui riassunte per comodità di riferimento.

PROPOSIZIONE 10. *Sia t una tenda regolare con base di tipi (t_1, \dots, t_m) , e insieme di primi $\Pi(G) = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$. Sono invarianti, rispetto ad una qualsiasi interpretazione concreta dei primi della tenda come tipi in \mathbb{T} , e dunque risultano proprietà comuni a tutti i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi G aventi t come tenda:*

- i. *il typeset (a meno di isomorfismi)*
- ii. *il rango dei sottogruppi $G(\sigma)$ per ogni $\sigma \in \mathbb{T}(G)$*
- iii. *le proprietà di indecomponibilità o decomponibilità di G*
- iv. *l'insieme dei cambi di rappresentazioni su \mathbb{Z}_2*

La proprietà i. segue da quanto detto in Sezione 7 Cap. 1, osservando che i candidati $\sigma \in \mathbb{T}(G)$ sono i “prodotti di primi” e che un siffatto prodotto appartiene al typeset se e solo se la partizione $\sup_{\pi \leq \sigma} \text{part}_t(\pi)$ è diversa dalla partizione massima $\{\emptyset, I\}$. Tale proprietà dipende solo dalla tenda e non dall'interpretazione dei primi in tipi di \mathbb{T} .

Ne segue subito la proprietà ii., tenendo conto delle Proposizioni 5 e 7. Le prossime sottosezioni prendono in esame le proprietà iii. e iv.

Indecomponibilità e algoritmo di decomposizione per $\mathbf{B}(1)$ -gruppi.

Come introdotto all'inizio di questa sezione, le proprietà in esame saranno studiate per un gruppo G dato a meno di isoscenismi, ovvero prescindendo dalla corrispondenza dei Primi di $\Pi(G)$ in \mathbb{T} .

A tale scopo, descriviamo la tenda dei sottogruppi G_E associati a partizioni puntate p_E . Si consideri innanzitutto la seguente trasformazione sulle partizioni in $\mathbb{P}(I)$: se $X \subset I$ e si identificano gli elementi di X , allora la generica partizione $\mathcal{A} \in \mathbb{P}(I)$ viene trasformata nella partizione che si ottiene sostituendo, nei blocchi di $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ un fissato simbolo (ad es. “ X ”) al posto di ogni $x \in X$; con questo procedimento tutti gli insiemi aventi intersezione non vuota in con X vengono sostituiti da un unico blocco $\bigcup \{A_i \mid X \cap A_i \neq \emptyset\}$ in cui gli elementi $x \in X$ sono posti tra loro uguali. Coerentemente con ciò, quando si quozienta rispetto ad un certo X si può allora dire che la partizione \mathcal{A} viene trasformata in $\mathcal{A} \vee p_{X^{-1}}$ pensata in $X^{-1} \cup \{X\}$.

Ad esempio, se si identificano in $I = \{1, \dots, 6\}$ gli elementi di $X = \{4, 6\}$ la partizione $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ diventa $\{\{1, 2\}, \{3, 5, X\}\}$.

PROPOSIZIONE 11. *Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo con la relazione diagonale e sia $E \subset I$. Allora la tenda di G_E nella rappresentazione indotta*

$$G_E = \langle g_i, g_{E^{-1}} \mid i \in E \rangle_* = \sum_{i \in E} \langle g_i \rangle_* + \langle g_{E^{-1}} \rangle_*$$

si ottiene dalla tenda di G estraendo le righe indiciate in E ed aggiungendo a queste il tipo t_E . In tale tenda t' è $\text{part}_{t'}(\sigma) = \text{part}_t(\sigma) \vee p_E$ pensata in $E \cup \{E^{-1}\}$.

DIMOSTRAZIONE. La prima parte della proposizione è ovvia. Si tenga poi presente che $t_E = \tau(E) \cup \tau(E^{-1})$ e che dunque nella riga t_E , in corrispondenza di un primo π compare 0 se e solo se $p_{Z(\pi)^{-1}} \leq b_E$. Sulla base di ciò si osservi semplicemente che, quando si calcola la partizione minima di un σ nella nuova tenda, tutti e soli gli zero-blocchi nelle righe indicate in E che si connettevano attraverso zeri nelle righe indicate in E^{-1} adesso si connettono mediante zeri sulla riga t_E . \square

Coerentemente con la definizione di partizione minima si introduce la seguente locuzione:

DEFINIZIONE 11. In un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo si dirà che un tipo σ è unicamente ottenuto se e solo se la sua partizione minima è una bipartizione.

PROPOSIZIONE 12. Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare. Per ogni tipo della base t_i sono equivalenti

- i. t_i è unicamente ottenuto
- ii. $\text{part}_t(t_i) = p_i$
- iii. $\text{rank } G(t_i) = 1$
- iv. $G(t_i) = \langle g_i \rangle_*$

DIMOSTRAZIONE. Dalla condizione di regolarità (Sezione 9 Cap. 1) segue la relazione $t(p_i) = t_i$ e quindi in generale $\text{part}_t(t_i) \leq p_i$; dopo ciò, tutte le equivalenze sono ovvie tenendo conto di quanto detto in Sezione 5. \square

TEOREMA 2. Sia

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$$

$$g_1 + \cdots + g_m$$

un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare con base di tipi t_1, \dots, t_m . Allora G è indecomponibile se e solo se ogni t_i è unicamente ottenuto.

DIMOSTRAZIONE. Sia G decomponibile nella somma diretta $G = G' \oplus G''$, con $G', G'' \neq 0$. Se per ogni $i \in I$ si ha $g_i \in G' \cup G''$ si ottiene la contraddizione $G' \cap G'' \neq 0$ poiché $g_1 + \dots + g_m = 0$. Allora esiste $i \in I$ tale che $g_i \notin G' \cup G''$, ed è quindi $g_i = g' + g''$ con $g' \in G'$ e $g'' \in G''$ elementi non nulli. Allora $t_i = t_G(g_i) = t_{G'}(g') \wedge t_{G''}(g'') = t_G(g') \wedge t_G(g'')$. D'altra parte g' e g'' sono ovviamente indipendenti ed, essendo $G(t_i) \leq \langle g', g'' \rangle_*$, segue $\text{rank } G(t_i) \geq 2$, ovvero la tesi per la Proposizione 12.

Viceversa, si supponga (senza ledere la generalità) che sia $\text{part}_t(t_1) < p_1$. Allora esiste una tripartizione $\{\{1\}, E, F\}$ tale che $\text{part}_t(t_1) \leq \{\{1\}, E, F\}$, e quindi

$$\begin{aligned} t_1 &= t(\text{part}_t(t_1)) \leq t(\{\{1\}, E, F\}) = \\ &= (t_1 \wedge \tau(E)) \vee (t_1 \wedge \tau(F)) \leq \\ &\leq (\tau(E) \vee (t_1 \wedge \tau(F))) \wedge ((t_1 \wedge \tau(E)) \vee \tau(F)) = \\ &= (\tau E \vee \tau(E^{-1})) \wedge (\tau F \vee \tau(F^{-1})) = t_E \wedge t_F = \\ &= t(b_E) \wedge t(b_F) = t_G(g_E) \wedge t_G(g_F) \end{aligned}$$

Ne segue che, essendo $g_1 = -g_E - g_F$, si ha $t_G(g_1) = t_{G_E \oplus G_F}(g_1)$; conservandosi il tipo allora $G_E \oplus G_F$ è puro in G , cioè $G = G_E \oplus G_F$. \square

Per decomporre G_E basta procedere come su G , tenendo presente che con riferimento alla tenda t' di G_E si ha

$$\text{part}_{t'}(t_i) = \text{part}_t(t_i) \vee p_E, \quad \forall i \in E$$

e

$$\text{part}_{t'}(t_E) = \text{part}_t(t_E) \vee p_E$$

usando l'abuso di notazione $I_E = E \cup \{E^{-1}\}$.

ESEMPIO 8. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_6 \rangle_*$ il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo avente per tenda

$$\begin{array}{l} t_1 = q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ t_2 = \bullet \quad q_2 \quad q_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad s \\ t_3 = \bullet \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad s_2 \quad s_3 \quad \bullet \quad s \\ t_4 = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_3 \quad s_4 \quad s \\ t_5 = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad s_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_4 \quad s \\ t_6 = q_1 \quad q_2 \quad \bullet \quad s_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ t_7 = q_1 \quad q_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

si ha allora che $\text{part}_t(t_1) = (1)(23)(45)(67)$, mentre $\text{part}_t(t_i) = p_i$, per ogni $i = 2, \dots, m$.

Da $\text{part}_t(t_1)$ si ottengono le seguenti decomposizioni dirette di G

- (1) $G = G_{\{2,3,4,5\}} \oplus G_{\{6,7\}}$;
- (2) $G = G_{\{2,3,6,7\}} \oplus G_{\{4,5\}}$;
- (3) $G = G_{\{2,3\}} \oplus G_{\{4,5,6,7\}}$

Nella decomposizione (1), posto $G' = G_{\{2,3,4,5\}}$ e $G'' = G_{\{6,7\}}$, si hanno le tende

$$\begin{array}{l} t'_2 = \quad t_2 = \bullet \quad q_2 \quad q_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad s \\ t'_3 = \quad t_3 = \bullet \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad s_2 \quad s_3 \quad \bullet \quad s \\ t'_4 = \quad t_4 = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_3 \quad s_4 \quad s \\ t'_5 = \quad t_5 = q_1 \quad \bullet \quad q_3 \quad s_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_4 \quad s \\ t'_{\{1,6,7\}} = t_{\{1,6,7\}} = q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad s \end{array}$$

e

$$\begin{array}{l} t''_6 = \quad t_6 = q_1 \quad q_2 \quad \bullet \quad s_1 \quad \bullet \quad \bullet \\ t''_7 = \quad t_7 = q_1 \quad q_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_2 \quad \bullet \\ t''_{\{1,2,3,4,5\}} = t_{\{1,2,3,4,5\}} = q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad s \end{array}$$

Così mentre G'' è indecomponibile, per G' si ha

$$\text{part}_{t'}(t'_i) = \text{part}_{t'}(t_i) = p_i \quad \forall i = 2, 3, 4, 5$$

ma

$$\text{part}_{t'}(t'_{\{1,6,7\}}) = \text{part}_t(t_{\{1,6,7\}}) \vee p_{\{2,3,4,5\}} = \{\{A\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

con $A = \{1, 6, 7\}$ e quindi $G' = G_{\{2,3\}} \oplus G_{\{4,5\}}$, decomposizione in addendi diretti indecomponibili. Quindi la decomposizione finale è

$$G = G_{\{2,3\}} \oplus G_{\{4,5\}} \oplus G_{\{6,7\}}$$

Partendo dalle decomposizioni (2) e (3) si perviene alla stessa conclusione.

In effetti l'algoritmo suggerito dalla dimostrazione del Teorema 2, ed illustrato nel precedente esempio, richiede più passi di quanto sia necessario, valendo il seguente Teorema:

TEOREMA 3. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_*$, $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare, con $g_1 + \cdots + g_m = 0$ e base di tipi (t_1, \dots, t_m) . Se, per un certo $i \in I$ è $\text{part}_t(t_i) = \{\{i\}, C_1, \dots, C_h\}$, allora

$$G = G_{C_1} \oplus \cdots \oplus G_{C_h}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta usare il Teorema 2 e ragionare per induzione su h . \square

Essendo l'indecomponibilità legata alle partizioni minime dei tipi della base, allora l'indecomponibilità (risp. la decomponibilità) è una proprietà conservata dai cambi-base e dunque studiabile a meno di isocenismi.

5. Il dominio di un automorfismo \mathcal{E} di $\mathbb{B}(m)$

Sia \mathcal{E} un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Si pone il problema di determinare quali siano i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi a cui \mathcal{E} cambia base.

Data una tenda t ed un suo cambio-base $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ scritto rispetto alla base delle bipartizioni puntate, l'equazione 4 nella Sezione 3 traduce il requisito di portare i sottospazi coordinati $V(p_{A_r})$ in sottospazi coordinati $V(p_{B_r})$, per ogni A_r che sia complemento dello zero blocco di un Primo della tenda.

Si pone il problema di determinare l'insieme, detto *dominio* di \mathcal{E} , dei sottospazi coordinati⁹ mandati da \mathcal{E} in sottospazi coordinati. Detto in altri termini, partendo dalla tenda t vuota (cioè priva di colonne e che ammette ogni \mathcal{E} come cambio-base), ci si chiede quali sono i Primi che è consentito aggiungere a t affinché essa continui ad ammettere \mathcal{E} come cambio-base.

Per porre la definizione di dominio in accordo con la letteratura, si consideri per ogni $A \subset I$, con $|A| \neq m - 1$ la posizione

$$\mathcal{E}(A) := \{i \in \{1, \dots, m\} | b_{E_i} \geq p_A\} = \{i \in \{1, \dots, m\} | b_{E_i} \in V(p_A)\}.$$

Allora, è evidente che $\mathcal{E}^{-1}(V(p_A)) = V(p_B)$ per un opportuno B necessariamente equipotente ad A , se e solo se $|\mathcal{E}(A)| = |A|$. Ciò giustifica le seguente definizione

DEFINIZIONE 12 ([DVM5], Definizione 7.4). Sia \mathcal{E} un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$. Si definisce *dominio di \mathcal{E}* l'insieme degli $A \subseteq I$ tali che $|A| \neq m - 1$ e $|\mathcal{E}(A)| = |A|$.

Si noti che l'insieme dei cambi-base ammessi da un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo è anch'esso determinato dalla sua tenda. Nella Sezione 6 Cap.3 si farà cenno alle proprietà che una tenda deve avere per ammettere cambi-base non banali, ovvero distinti dalle permutazioni.

⁹Sempre con riferimento alla base ridondante (p_1, \dots, p_m)

Teoremi nello spazio delle parti pari su un insieme

Nel seguente capitolo si mostrerà come un funtore controvariante e invertibile permette di trasformare lo studio degli automorfismi \mathcal{E} di $\mathbb{B}(m)$ in quello degli automorfismi $S_{\mathcal{E}}$ di $\mathcal{P}^*(m)$, l'iperpiano di $\mathcal{P}(m)$ costituito dagli insiemi di ordine pari. In particolare, la categoria concreta \mathbb{B} degli spazi di bipartizioni e quella \mathcal{P}^* degli spazi di parti pari risultano isomorfe, come mostrato nella Sezione 4.

Questa trasformazione comporta diversi vantaggi, che verranno illustrati via via all'interno del capitolo. Un primo vantaggio viene qui descritto, al fine di motivare la Sezione seguente. Si consideri il \vee -monomorfismo duale

$$V : \mathcal{C} \in \mathbb{P}(m) \mapsto V(\mathcal{C}) \in L(\mathbb{B}(m))$$

definito in Sezione 8 Cap. 1, tra il reticolo delle partizioni su un insieme di ordine m ed il reticolo dei sottospazi di $\mathbb{B}(m)$, usato in letteratura contestualmente allo studio degli automorfismi

$$\mathbb{B}(m) \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbb{B}(m).$$

Gran parte del tecnicismo e delle difficoltà dimostrative in tale ambito sono causate dal fatto che gli aspetti algebrici e quelli combinatorici rimangono confinati in ambienti diversi (spazi vettoriali da un lato e reticoli di partizioni dall'altro), e che è duale l'azione dell'applicazione V che li collega. Tramite il funtore S_{\bullet} che verrà in seguito descritto, tutto verrà ricondotto allo studio di automorfismi

$$\mathcal{P}^*(I) \xrightarrow{S_{\mathcal{E}}} \mathcal{P}^*(I)$$

tra gli spazi delle parti di cardinalità pari di I : in questo modo, nello stesso ambiente potranno dialogare agevolmente le proprietà algebriche (la differenza simmetrica di insiemi, che $S_{\mathcal{E}}$ conserva) e quelle combinatorie (l'unione ed intersezione di insiemi, al posto delle operazioni di \wedge e \vee nel reticolo delle partizioni).

Si vedrà inoltre che, oltre la somma diretta, gli automorfismi $S_{\mathcal{E}}$ conservano una parte delle proprietà combinatorie, parte che viene ad essere agevolmente descritta con gli strumenti della Teoria dei Grafi. Pertanto, si premette alla Sezione 2 in cui si descrivono gli strumenti a disposizione negli spazi $\mathcal{P}^*(I)$, la seguente Sezione, in cui si fa il punto dei rudimenti della Teoria dei Grafi di cui avremo bisogno nel seguito.

1. Elementi di teoria dei grafi

Per i dettagli di questa Sezione si rinvia alla bibliografia (cfr. [D], [VW], [W]).

DEFINIZIONE 13. Un *grafo* \mathcal{G} è una coppia $\mathcal{G} = (I, \mathcal{X})$ dove I è un insieme finito (non vuoto), detto insieme dei vertici, ed \mathcal{X} è un sottoinsieme di parti di ordine 2 di I , detto insieme degli spigoli.

La ben nota definizione è stata riportata solo per osservare che gli spigoli di un grafo (non orientato) sono semplicemente parti di ordine 2 di un insieme I ; con le notazioni introdotte nel Sezione 1 Cap. 1, è $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$. Nella definizione, inoltre, è contemplata la possibilità di *punti isolati*, ovvero che non appartengono a nessuno spigolo; essi sono gli eventuali elementi di $I \setminus (\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \mathbf{v})$.

Essendo fissato I , spesso ci capiterà di identificare (o definire) un grafo con il suo insieme di spigoli $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$; allora di volta in volta diremo se si considera \mathcal{X} come grafo *in* I (contemplando la possibilità di punti isolati), oppure se ci limiteremo a considerare i vertici effettivamente *toccati* dagli spigoli di \mathcal{X}

$$\text{Vert}(\mathcal{X}) := \bigcup \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{X}\} \subseteq I$$

Diremo che \mathcal{X} è un grafo *su* I se non ci sono punti isolati, $I = \text{Vert}(\mathcal{X})$.

DEFINIZIONE 14. Siano $a, b \in I$, diciamo che $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$ contiene un *cammino* (di *lunghezza* n) che collega a e b se esiste una successione di spigoli $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathcal{X} tale che

$$\mathbf{v}_1 = \{x_0, x_1\}, \mathbf{v}_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, \mathbf{v}_n = \{x_{n-1}, x_n\}.$$

con $x_0 = a, x_n = b$.

I \mathbf{v}_i sono gli *spigoli del cammino*, ed gli x_i sono i *vertici toccati dal cammino*.

A volte potrà essere utile dare un cammino mediante una sequenza di vertici (x_0, \dots, x_n) , e sarà opportuno tener presente che, mentre in generale ci possono essere ripetizioni tra gli x_i (e in tal caso il cammino contiene un ciclo), tuttavia sono necessariamente distinti due vertici successivi della sequenza: la presenza di “loop” della forma (x, x) è infatti esclusa dal fatto che gli l’insieme di spigoli è $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$.

DEFINIZIONE 15. Un cammino (x_0, \dots, x_n) è detto un *ciclo* se $n \geq 3$, $x_0 = x_n$ e per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $j \in \{0, \dots, n\}$ è $x_i \neq x_j$. L’intero n sarà detto *lunghezza del ciclo*.

Nella definizione rientrano dunque solo le sequenze di vertici tutti distinti, eccezion fatta per per il primo e l’ultimo. Equivalentemente, si può osservare che un ciclo è un cammino $(x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$ in cui ogni vertice appartenga a due e solo due spigoli.

Altre definizioni intuitive ma meno usuali, vengono qui riportate per convenienza:

DEFINIZIONE 16. Un grafo che non contiene cicli vien detto *aciclico* e vien anche detto essere una *foresta*. Si chiama *albero* una foresta connessa.

In altri termini, un albero è un grafo “semplicemente connesso”, mentre una foresta può contenere più “componenti connesse”.

La nozione immediatamente seguente la “connessione semplice” è notoriamente la 2-connessione. Per quanto ben nota, sarà opportuno precisarla,

al fine di comprendere la generalizzazione che si opera quando si passa agli ipergrafi.

DEFINIZIONE 17. Sia (I, \mathcal{X}) un grafo. Un $a \in I$ è detto *punto di taglio* per (I, \mathcal{X}) se esiste una bipartizione $\{\mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ di \mathcal{X} , tale che

$$\text{Vert}(\mathcal{Y}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Z}) = \{a\}.$$

Si osservi che la seguente definizione è, *limitatamente al caso dei grafi*, equivalente alla seguente

DEFINIZIONE 18. Sia (I, \mathcal{X}) un grafo. Un $a \in I$ è detto *punto di taglio* per (I, \mathcal{X}) se, indicando con \mathcal{V}_a l'insieme degli spigoli che hanno a per vertice

$$\mathcal{V}_a = \{\mathbf{v} \in \mathcal{X} \mid a \in \mathbf{v}\},$$

si ha che $(I \setminus \{a\}, \mathcal{X} \setminus \mathcal{V}_a)$ ha più componenti connesse di (I, \mathcal{X})

Si osservi che un grafo, per poter avere punti di taglio, deve avere più di uno spigolo.

DEFINIZIONE 19. Si chiama grafo 2-connesso un grafo connesso privo di punti di taglio.

A volte in letteratura (ad es. in [D]) si utilizza una definizione leggermente diversa; tuttavia è questa che si generalizza naturalmente al caso degli ipergrafi. In pratica con questa definizione si aggiungono alla classe dei 2-connessi “propriamente detti” (che vengono caratterizzati come i cicli e i grafi ottenuti da essi aggiungendo induttivamente cammini, vedi [D], Proposizione 3.1.1) i grafi costituiti da un punto isolato o da un solo spigolo.

In un grafo esistono le componenti 2-connesse massimali; due siffatte componenti possono intersecarsi, per la loro massimalità, in al più un vertice. Inoltre i cicli di un grafo sono esclusivamente quelli inclusi in una sua componente 2-connessa massimale (cfr. [D], Sezione 3.1). Ne segue che la struttura di un grafo viene ad essere scomposta in spigoli che appartengono a componenti 2-connesse massimali propriamente dette (contenenti cicli), e nei i restanti spigoli che insieme formano necessariamente una foresta, ovvero un grafo aciclico. (Vedi costruzione del “block graph” in [D], sezione citata).

Illustriamo adesso come si estendono le nozioni considerate al caso degli ipergrafi.

DEFINIZIONE 20. Un *ipergrafo* \mathcal{T} è una coppia $\mathcal{T} = (I, \mathcal{X})$ dove I è un insieme finito (non vuoto), detto insieme dei vertici, ed \mathcal{X} è un sottoinsieme di parti non vuote (di cardinalità qualsiasi) di I , detto insieme degli iperspigholi.

I grafi sono dunque particolari ipergrafi, esattamente quelli aventi la cardinalità degli iperspigholi costante e pari a 2. Ancora una volta, se I è fissato, daremo un ipergrafo mediante l'insieme dei suoi iperspigholi $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$. In particolare:

DEFINIZIONE 21. Siano $a, b \in I$, diciamo che $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$ contiene un *cammino* che collega a e b se esiste una successione di iperspigholi

(C_0, \dots, C_n) di \mathcal{X} tale che, per un opportuno ordinamento dei suoi elementi, si ha $a \in C_0, b \in C_n$ e

$$C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset, \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Inoltre, come locuzione, diremo che il cammino *collega a e b fuori di $\{k\}$* se $k \notin C_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Agli ipergrafi si estende direttamente la Definizione 17 di punto di taglio, e non la Definizione 18. Ad esempio, l'ipergrafo connesso su $I = \{1, \dots, 6\}$

$$C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{2, 3, 4\}, C_3 = \{3, 4, 5\}, C_6 = \{5, 6\}$$

ha 2 e 5 come punti di taglio, ma non 3 né 4. Se si usasse invece la Definizione 18, si avrebbe la conseguenza scomoda che 3 sarebbe di taglio perché "togliendolo" la Definizione mi impone di togliere anche gli iperspighi ad essi adiacenti: una cosa senza senso, visto che erano connessi anche tramite il 4!

Una simile diversità di comportamento riguarda anche la Definizione 19 di 2-connessione (=connesso e privo di punti di taglio). Essa si estende direttamente agli ipergrafi, ma sarà importante considerare il seguente caso particolare:

DEFINIZIONE 22. Un ipergrafo si dice *fortemente 2-connesso* se per ogni $a, b, k \in I$, esiste un cammino (C_0, \dots, C_n) che collega a e b fuori di k .

L'ipergrafo su $I = \{1, 2, 3, 4\}$ dato dagli spighi $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{2, 3, 4\}$ risulta 2-connesso, ma non fortemente 2-connesso. Mentre al contrario:

PROPOSIZIONE 13. *Sia (I, \mathcal{X}) un ipergrafo. Se \mathcal{X} è fortemente 2-connesso, allora è 2-connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvvia. □

Per i grafi, tuttavia, le nozioni di 2-connessione e forte 2-connessione si provano facilmente essere equivalenti.

Da adesso nel seguito, la tenda t di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ verrà riguardata come ipergrafo, considerando come iperspighi gli $Z(\pi_r)$ con π_r primo di G . Tenendo presente il calcolo delle partizioni minime con Pulling the strings tramite la tenda, allora il Teorema 2 di indecomponibilità di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo si traduce subito nel seguente:

TEOREMA 4. *Un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo è indecomponibile se e solo la sua tenda è un ipergrafo fortemente 2-connesso.*

2. Lo spazio delle parti pari

Sia $I = \{1, \dots, m\}$ e $(\mathcal{P}(I), +, \cdot)$ lo \mathbb{Z}_2 -spazio vettoriale delle parti di I , con $+$ differenza simmetrica. Non è difficile verificare che, per come è definita l'operazione di differenza simmetrica in $\mathcal{P}(I)$, se $A, B \in \mathcal{P}(I)$ sono insiemi di ordine pari, allora $A + B$ è di ordine pari; ugualmente immediato è osservare che $\{\{1, 2\}, \dots, \{1, m\}\}$ è un insieme indipendente di ordine $m - 1$. Pertanto l'insieme $\mathcal{P}^*(I)$ delle parti di ordine pari è un iperpiano di $\mathcal{P}(I)$.

L'insieme $\mathcal{P}_2(I)$ è ovviamente un sistema di generatori di $\mathcal{P}^*(I)$. Le nozioni elementari di Teoria dei Grafi permettono di caratterizzare le proprietà di indipendenza lineare in $\mathcal{P}^*(I)$.

PROPOSIZIONE 14. *Sia $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$. Allora:*

- i) \mathcal{X} genera $\mathcal{P}^*(I)$ se e solo se \mathcal{X} è un grafo connesso su I .
- ii) \mathcal{X} è una base di $\mathcal{P}^*(I)$ se e solo se \mathcal{X} è albero su I

DIMOSTRAZIONE. i) Se \mathcal{X} è connesso su I , allora \mathcal{X} genera $\mathcal{P}_2(I)$ e quindi $\mathcal{P}^*(I)$; infatti per ogni $a, b \in I$, $\{a, b\}$ è la somma di un cammino che collega a and b . Se \mathcal{X} è non connesso, allora esso ha due o più componenti connesse $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$, mentre se \mathcal{X} non è su I , allora $\text{Vert}(\mathcal{X}) \subset I$, e ci sono punti isolati (gli elementi di $I \setminus \text{Vert}(\mathcal{X})$) ciascuno dei quali è esso stesso una componente connessa. In tutti questi casi, non è difficile verificare che \mathcal{X} non genera tutti gli $A \in \mathcal{P}^*(I)$, in particolare non genera quegli A tali che $A \cap \text{Vert}(\mathcal{C})$ ha ordine dispari.

ii) Per quanto mostrato in i), \mathcal{X} genera $\mathcal{P}^*(I)$ se e solo se è un grafo connesso su I . In questo caso, se \mathcal{X} è una base allora non contiene cicli e quindi è semplicemente connesso, dunque è un albero su I . Viceversa, se \mathcal{X} è semplicemente connesso allora per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ si ha che $\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{v}\}$ è non connesso, e quindi \mathcal{X} è un insieme di generatori minimale di $\mathcal{P}^*(I)$. \square

COROLLARIO 2. *Tra tutte le sequenze di vertici $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ di lunghezza fissata n , i cicli sono tutti e soli quelli che generano sottospazi di dimensione massimale $n - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Immediata osservando che se in un cammino

$$(x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$$

esiste un x_i che appartiene ad almeno 3 spigoli, allora nella sequenza di vertici ci sono ulteriori ripetizioni. Pertanto è minore il numero di vertici toccati dal cammino, ed è più piccolo il sottospazio generato, per la Proposizione 14. \square

Nota. Quanto detto chiarisce un fatto importante: quando si lavora con i 2-elementi dello spazio delle parti su un insieme $\mathcal{P}^*(I)$, c'è corrispondenza diretta tra proprietà di *natura lineare* e proprietà di *natura combinatorica*, ovvero legate a fatti di connessione e semplice connessione di grafi.

È naturale osservare che considerare solo basi costituite da 2-elementi, ovvero solo gli alberi su I , impone una restrizione significativa alla varietà di rappresentazioni di cui $\mathcal{P}^*(I)$ è suscettibile; tuttavia si vedrà in seguito che esse sono ampiamente sufficienti a studiare (e caratterizzare) i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi indecomponibili (vedi Sezione 6 di questo Cap. ed anche Sottosezione 2.3 del Cap. 4).

Inoltre, il rapporto tra proprietà lineari e combinatoriche di $\mathcal{P}^*(I)$ si estende anche al livello degli ipergrafi. Si osservi che se C_1, C_2 sono parti di I , e $|C_1 \cap C_2| \leq 1$, allora si ha la somma diretta $\mathcal{P}^*(C_1) \oplus \mathcal{P}^*(C_2)$ essendo $\mathcal{P}^*(C_1) \cap \mathcal{P}^*(C_2) = \mathcal{P}^*(C_1 \cap C_2) = \{0\}$. Più in generale si ha:

PROPOSIZIONE 15. Sia $\mathcal{X} = \{C_1, \dots, C_n\}$ un ipergrafo di I , e sia $|C_i \cap C_j| \leq 1$, per ogni $i \neq j = 1, \dots, n$. Allora si ha

$$\langle \mathcal{P}^*(C_i) | i = 1, \dots, n \rangle = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}^*(C_i)$$

se e solo se \mathcal{X} è aciclico.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che \mathcal{X} contenga un ciclo. Sia allora $r \geq 3$ ed esista una sequenza $(x_0, x_1, \dots, x_r, x_{r+1} = x_0)$ di punti di I e per ogni $i = 0, \dots, r$ esista un iperspigo di \mathcal{X} che include $\{x_i, x_{i+1}\}$; rinominando gli iperspighi, possiamo supporre che $\{x_i, x_{i+1}\} \in C_i$, per ogni $i = 0, \dots, r$. Allora

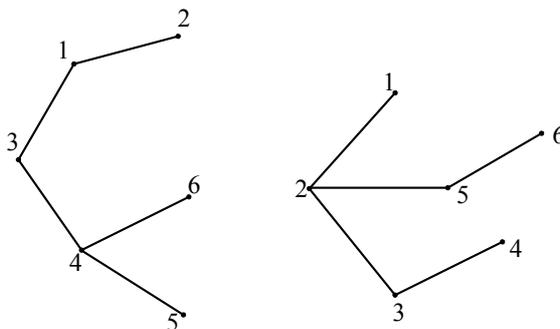
$$(5) \quad \langle \{x_0, x_1\} \rangle \leq \mathcal{P}^*(C_0) \cap \langle \mathcal{P}^*(C_i) | i = 1, \dots, r \rangle$$

e la somma non è diretta.

Viceversa, per induzione su n è immediato provare che in assenza di cicli, e per le ipotesi fatte sulle intersezioni dei C_i , la somma è diretta. \square

2.1. Automorfismi di $\mathcal{P}^*(I)$. La Proposizione 14 permette di costruire graficamente con facilità numerosi automorfismi di $\mathcal{P}^*(I)$: è sufficiente considerare due alberi su I , scelti ad arbitrio e che proprio per la Proposizione 14 avranno lo stesso numero di elementi, quindi imporre una corrispondenza biunivoca tra i rispettivi insiemi di spighi.

Ad esempio, considerati gli alberi su $I = \{1, \dots, 6\}$



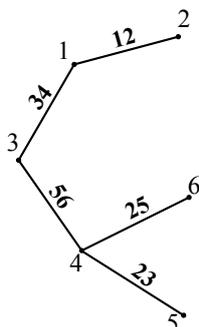
una applicazione biettiva S , scelta ad arbitrio, dagli spighi del grafo a sinistra agli spighi del grafo a destra, ad esempio

$$S(\{1, 2\}) = \{1, 2\}, \quad S(\{2, 3\}) = \{3, 4\}$$

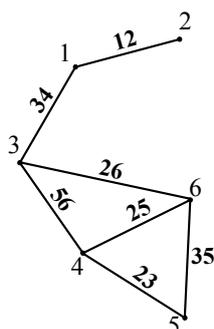
$$S(\{3, 4\}) = \{5, 6\}, \quad S(\{4, 5\}) = \{2, 3\}, \quad S(\{4, 6\}) = \{2, 5\}$$

si estende ovviamente in un uno ed un solo automorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$.

Un modo di descrivere tale corrispondenza biunivoca è illustrato nella immagine seguente: si aggiunge allo spigo $\{h, k\}$ l'etichetta corrispondente allo spigo scelto come immagine.



Il vantaggio di tale rappresentazione è quella di poter leggere la *somma in S* (o *S -somma*) di un cammino. Ad. la somma in S del cammino $(3, 4, 6)$ è $S(\{3, 6\}) = S(\{3, 4\}) + S(\{4, 6\}) = \{5, 6\} + \{2, 5\} = \{2, 6\}$. In tal caso si ha dunque una nuova associazione tra 2-elementi, che può essere segnata sulla figura del grafo; verificando la S -somma di altri cammini, si possono così scoprire agevolmente — per esempi non troppo complessi — le eventuali altre associazioni tra 2-elementi che S determina. Nel nostro caso, il grafo diventa



Questo piccolo espediente grafico è molto utile anche nella produzione di esempi di automorfismi, che soddisfino a requisiti scelti circa le associazioni tra 2-elementi. Tuttavia le possibilità di definire automorfismi mediante associazioni tra 2-elementi non si limitano al caso della corrispondenza tra due alberi.

PROPOSIZIONE 16. *Siano \mathcal{X} e \mathcal{Y} grafi 2-connessi su I e sia $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una biezione tale che S ed S^{-1} portano cicli in cicli. Allora S si estende (in un unico modo) in un automorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che in un grafo 2-connesso una foresta massimale P è certamente un albero, cioè è connesso. Infatti se P non fosse connesso, si potrebbe aggiungere un cammino che collega due sue componenti connesse e non forma cicli, contro l'ipotesi di massimalità.

Ne segue che in un grafo 2 connesso, i concetti di foresta massimale e albero massimale si equivalgono. Si consideri un albero massimale P in \mathcal{X} . Ovviamente $S(P)$ è aciclico, ed inoltre una foresta massimale: se infatti, p. a., non è massimale allora esiste P' aciclico che contiene propriamente $S(P)$. Ma allora $S^{-1}(P')$ è aciclico e contiene propriamente P , contro la sua massimalità. Quindi $S(P)$ è una foresta massimale, dunque un albero massimale.

La $S|_P : P \rightarrow S(P)$ si estende in un automorfismo \bar{S} di $\mathcal{P}^*(I)$ per la Proposizione 14. Resta da verificare che l'azione di \bar{S} è compatibile con le posizioni restanti di S su $\mathcal{X} \setminus P$. Sia dunque $\mathbf{v} \in \mathcal{X} \setminus P$, allora $\{\mathbf{v}\} \cup P$ contiene un ciclo C ; inoltre anche $S(C)$ è un ciclo, per ipotesi. È allora immediato osservare che come

$$\mathbf{v} = \sum_{\substack{\mathbf{w} \in C \\ \mathbf{w} \neq \mathbf{v}}} \mathbf{w}$$

anche

$$S(\mathbf{v}) = \sum_{\substack{S(\mathbf{w}) \in S(C) \\ S(\mathbf{w}) \neq S(\mathbf{v})}} S(\mathbf{w}).$$

Ma tali sommatorie sono le scritture di \mathbf{v} (risp. $S(\mathbf{v})$) nella base P (risp. $S(P)$), ed è dunque $S(\mathbf{v}) = \bar{S}(\mathbf{v})$. \square

2.2. Rappresentazioni tabellari di isomorfismi. Descriviamo l'uso di una rappresentazione tabellare che risulta molto comoda nello studio di isomorfismi e nella costruzione di nuovi esempi.

Sia $|I| = m$. Come osservato prima, $\mathcal{P}_2(I)$ genera $\mathcal{P}^*(I)$, così possiamo descrivere completamente l'azione di un automorfismo $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$ rappresentando le immagini $S(\{h, k\})$ di tutti i 2-insiemi $\{h, k\}$ al variare di $h \neq k \in I$, in corrispondenza delle entrate di posto (h, k) di una tabella $m \times m$. Si osservi che $\{h\} + \{k\} = \{h, k\}$ se $h \neq k$, mentre è uguale a \emptyset se $h = k$; di conseguenza si conderanno uguali a \emptyset le entrate della diagonale principale della tabella. Per il resto, la tabella è simmetrica per ovvie ragioni e questo consente di limitare la nostra rappresentazione al triangolo superiore della tabella.

Nel caso dell'automorfismo descritto nella precedente Sezione 2.1, otteniamo la seguente tabella di S :

	1	2	3	4	5	6
1		1,2	3,4	3,4,5,6	2,4,5,6	2,3,4,6
2			1,2,3,4	1,2,3,4,5,6	1,4,5,6	1,3,4,6
3				5,6	2,3,5,6	2,6
4					2,3	2,5
5						3,5

È facile lavorare con questo tipo di rappresentazione: il fatto che un isomorfismo conserva la somma si traduce nel fatto che, caselle disposte come agli estremi di un rettangolo con il vertice in basso a sinistra sulla diagonale principale (ad es. le caselle $\{1, 3\}$, $\{1, 6\}$, $\{3, 6\}$) hanno i loro contenuti che soddisfano l'operazione di differenza simmetrica ($S(\{1, 3\}) + S(\{1, 6\}) = S(\{3, 6\})$).

Inoltre, tabelle di questo tipo possono essere incollate (eventualmente ridenominando) ottenendo isomorfismi di somme dirette. Ad esempio, si voglia incollare il suddetto automorfismo di $\mathcal{P}^*(6)$ con l'automorfismo di $\mathcal{P}^*(3)$, dato dalla seguente tabella:

	1	2	3
1		1,3	2,3
2		1,2	

Si vuole dunque lavorare in $\mathcal{P}^*(8) = \mathcal{P}^*({1, 2, 3, 4, 5, 6}) \oplus \mathcal{P}^*({6, 7, 8})$, identificando il secondo addendo diretto con una copia di $\mathcal{P}^*({1, 2, 3})$ ridenominando $1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow 7, 3 \rightarrow 8$. Non resta dunque che incollare le due tabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1,2	3,4	3,4,5,6	2,4,5,6	2,3,4,6		
2			1,2,3,4	1,2,3,4,5,6	1,4,5,6	1,3,4,6		
3				5,6	2,3,5,6	2,6		
4					2,3	2,5		
5						3,5		
6							6,8	7,8
7								6,7

da completare con la regola della somma.

È sono un espediente grafico, ma illustra un aspetto vantaggioso della teoria degli automorfismi di $\mathbb{B}(m)$ letti tramite il funtore in $\mathcal{P}^*(I)$: mentre le bipartizioni b_E lavorano in dimensione fissata pari a $|E \cup E^{-1}|$, negli spazi di parti pari si possono considerare insiemi A_i via via naturalmente inclusi in ambienti più grandi, tramite la semplice inclusione insiemistica.

È stato già osservato che, dati A_1, A_2 insiemi tali che $|A_1 \cap A_2| \leq 1$, la somma $\mathcal{P}^*(A_1) \oplus \mathcal{P}^*(A_2)$ è diretta. Solo nel caso in cui $|A_1 \cap A_2| = 1$ allora $\mathcal{P}^*(A_1) \oplus \mathcal{P}^*(A_2) = \mathcal{P}^*(A_1 \cup A_2)$; altrimenti è $\mathcal{P}^*(A_1) \oplus \mathcal{P}^*(A_2) \oplus \langle \{a_1, a_2\} \rangle = \mathcal{P}^*(A_1 \cup A_2)$ per ogni $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. Questo lascia un ampio margine di arbitrarietà quando si vogliono definire automorfismi di $\mathcal{P}^*(A_1 \cup A_2)$ *incollando* automorfismi di $\mathcal{P}^*(A_i)$ se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Altro aspetto che risulta evidente dalla tabella è l'operazione opposta a quella di incollare tabelle: trovare sottotabelle "autonome". Nell'esempio precedente le caselle aventi indici in $\{4, 5, 6\}$ hanno contenuti inclusi in $\{2, 3, 5\}$. Ne segue che l'automorfismo S ammette una restrizione

$$S|_{\mathcal{P}^*({4, 5, 6})} \rightarrow \mathcal{P}^*({2, 3, 5}).$$

In realtà anche ogni casella che abbia per contenuto un 2-elemento costituisce una sottotabella "autonoma"; ad es. S ammette anche la restrizione

$$S|_{\mathcal{P}^*({4, 5})} \rightarrow \mathcal{P}^*({2, 3}).$$

Tali sottotabelle autonome costituiscono una parte cospicua della teoria degli spazi di parti pari, e verranno discusse nella prossima Sezione.

3. Grafo e dominio di un isomorfismo $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$

Definiremo il grafo di un automorfismo, poi il suo ipergrafo detto dominio. Servirà dare le definizioni nel caso generale di un isomorfismo $\mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$, con I insieme necessariamente equipotente a J ($|I|, |J| \geq 2$); si osserva esplicitamente che nelle definizioni è essenziale poter disporre della rappresentazione *concreta* di spazi vettoriali come spazi di parti pari.

DEFINIZIONE 23. Siano I, J insiemi equipotenti e $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$ un isomorfismo. Il *grafo di S* è

$$\mathcal{G}_S := \mathcal{P}_2(I) \cap S^{-1}(\mathcal{P}_2(J))$$

Il grafo di S è dunque l'insieme dei 2-elementi che vengono mandati in 2-elementi. Si osservi che il grafo di S può essere vuoto.

PROPOSIZIONE 17. *Sia S un isomorfismo come nella Definizione 23. Allora si ha:*

$$S(\mathcal{G}_S) = \mathcal{G}_{S^{-1}}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per definizione si ha

$$\mathcal{G}_{S^{-1}} = \mathcal{P}_2(J) \cap S(\mathcal{P}_2(I)) = S[S^{-1}(\mathcal{P}_2(J)) \cap \mathcal{P}_2(I)] = S(\mathcal{G}_S)$$

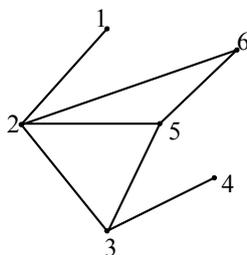
□

In pratica, un isomorfismo S determina una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli del suo grafo e quelli del grafo dell'isomorfismo inverso. È quindi naturale, considerando quanto detto nella Proposizione 14, il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 18. *Se \mathcal{X} è un ciclo in \mathcal{G}_S , allora $S(\mathcal{X})$ è un ciclo in $\mathcal{G}_{S^{-1}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Corollario 2, tenendo conto che S è un isomorfismo. □

Ad esempio, si può osservare, confrontando il grafo di S con il seguente grafo di S^{-1} (illustrato facendo a meno delle etichette):



che entrambi posseggono due cicli di lunghezza 3 ed un 4-ciclo.

L'immediata generalizzazione del grafo di S è la seguente definizione di *dominio* di S , che costituisce un ipergrafo.

DEFINIZIONE 24. Siano I, J insiemi equipotenti e $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$ un isomorfismo. Il *dominio* di S è l'insieme degli $A \subseteq I$, con $|A| \neq 1$, per i quali esiste un \bar{A} tale che

$$(6) \quad S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\bar{A})$$

Ovviamente, se A è nel dominio di S , allora A è equipotente ad \bar{A} . Inoltre il dominio di S include il suo grafo, ed è in generale non vuoto, appartenendovi almeno I .

Come accennato nella Sezione precedente, si può controllare l'equazione $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\bar{A})$ semplicemente guardando all'azione di S su una base di $\mathcal{P}^*(A)$ (ad esempio, se $i \in A$, allora $\bar{A} = \bigcup_{j \in A \setminus \{i\}} S(\{i, j\})$), quindi guardando alle caselle $S(\{i, j\})$ della tabella di S con $\{i, j\} \subseteq A$. Queste

caselle descrivono l'azione della restrizione $S|_{\mathcal{P}^*(A)}$ di S a $\mathcal{P}^*(A)$, e si ha che se $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\overline{A})$, allora $S|_{\mathcal{P}^*(A)} : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow \mathcal{P}^*(\overline{A})$ è un isomorfismo.

Ovviamente si ha:

PROPOSIZIONE 19. *Per ogni $A \subseteq I$ è $A \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se $\overline{A} \in \mathbb{D}(S^{-1})$.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvio dalla definizione di $\mathbb{D}(S)$. \square

Riguarderemo al dominio di S come ad un ipergrafo. La Proposizione seguente mostra che se A, B sono elementi connessi del dominio, cioè $A \cap B \neq \emptyset$, allora si può considerare “forte” la loro connessione se $|A \cap B| \geq 2$: infatti in tal caso sarà $|A \cap B| = |\overline{A} \cap \overline{B}|$ e molto si potrà dire anche su $A \cup B$. Invece la connessione $|A \cap B| = 1$ potrà essere considerata “debole” ovvero non necessariamente conservata, nel passaggio a $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Ciò deriva dal fatto che se $A \subseteq I$, la dimensione $\dim \mathcal{P}^*(A)$, se diversa da zero, dà la relazione $|A| = 1 + \dim \mathcal{P}^*(A)$, mentre il caso $\dim \mathcal{P}^*(A) = 0$ implica $|A| = 1$ o $A = \emptyset$.

PROPOSIZIONE 20. *Siano $A, B \in \mathbb{D}(S)$. Allora:*

- i) *Se $|A \cap B| \geq 2$, allora $A \cap B \in \mathbb{D}(S)$ e $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$.*
- ii) *Se $|A \cap B| = 1$ allora $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 1$.*
- iii) *Se $|A \cap B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = 0$, allora $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se $S(\{a, b\}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ per una scelta arbitraria di $a \in A$ e $b \in B$.*
- iv) *Se $|A \cap B| = 0$ e $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 1$, allora $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se esiste $k \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ tale che $S(\{a, b\}) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \cup \{k\}$ per una scelta arbitraria di $a \in A$ e $b \in B$.*

DIMOSTRAZIONE. In generale, $\mathcal{P}^*(A \cap B) = \mathcal{P}^*(A) \cap \mathcal{P}^*(B)$, mentre $\mathcal{P}^*(A \cup B) = \mathcal{P}^*(A) + \mathcal{P}^*(B)$ se e solo se $|A \cap B| \geq 1$. Sia $A, B \in \mathbb{D}(A)$ e $|A \cap B| \geq 1$. Allora $S(\mathcal{P}^*(A \cap B)) = S(\mathcal{P}^*(A)) \cap S(\mathcal{P}^*(B)) = \mathcal{P}^*(\overline{A}) \cap \mathcal{P}^*(\overline{B}) = \mathcal{P}^*(\overline{A} \cap \overline{B})$; d'altra parte $S(\mathcal{P}^*(A \cup B)) = S(\mathcal{P}^*(A)) + S(\mathcal{P}^*(B)) = \mathcal{P}^*(\overline{A}) + \mathcal{P}^*(\overline{B}) \leq \mathcal{P}^*(\overline{A} \cup \overline{B})$. Poiché $A \cup B \in \mathbb{D}(S)$, deve valere l'uguaglianza. In questo modo otteniamo i) e ii). Dopo di ciò, iii) e iv) sono ovvie. \square

Come esempio di applicazione della Proposizione 20, si controlli il seguente esempio¹.

ESEMPIO 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		1,2	2,3	1,2 3,4	4,5 6,7	4,6	3,4 6,7	3,4,5 6,7,10	3,4,5,6 7,8,9,10	3,4,5 6,7,8	3,4,6 7,9,11

per la i) si controlli $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{B} = \{1, 3, 4\}$; per ii) $A = \{3, 8, 10\}$, $B = \{3, 5\}$, $\overline{A} = \{5, 8, 10\}$, $\overline{B} = \{3, 5\}$; per iii) $A = \{3, 5, 7\} = \overline{A}$, $B = \{8, 9, 10\} = \overline{B}$; per iv) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7\}$, $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\overline{B} = \{3, 7\}$.

Si osservi che in realtà il dominio di S può essere in generale molto vasto, e la ricerca dei suoi elementi non agevole, comportando di fatto la verifica dell'azione di S sul generico $A \subset I$. In tal senso la Proposizione 20 è di aiuto, nel determinare nuovi elementi del dominio a partire da quelli già

¹Nel dare esempi di automorfismi S , ci limiteremo alla prima riga della sua tabella, che rappresenta ovviamente l'azione di S sulla base $\{\{1, 2\}, \dots, \{1, m\}\}$

noti. Tuttavia esistono elementi del dominio che sfuggono ad una analisi così immediata e sono un po' più riposti, anche se limitati proprio dalla Proposizione 20 al caso di connessioni "deboli". Ancora si osservi che dalla Proposizione 15 segue che nulla si può dire se il dominio è aciclico, e resta da analizzare il caso dei cicli nel dominio.

Servirà il seguente Lemma. In esso, per alleggerire le notazioni, diremo che y occorre in un cammino $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_2(I)$ ogni qual volta $y \in S(\mathbf{v})$, con $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ e il suo numero delle occorrenze sarà il numero di tali \mathbf{v} (in tale notazione è omesso il riferimento ad S , poiché nel seguito si lavorerà con un isomorfismo fissato).

LEMMA 1. Sia S un isomorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$ in $\mathcal{P}^*(J)$, \mathcal{X} un cammino aciclico $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}_1 = \{x_0, x_1\}, \dots, \mathbf{v}_n = \{x_{n-1}, x_n\}\}$ in $\mathcal{P}_2(I)$, con S -somma

$$\left| \sum_{i=1}^n S(\mathbf{v}_i) \right| = |S(\{x_0, x_n\})| \geq 4$$

Allora esistono sottoinsiemi di ordine pari B_i of $S(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$, non tutti vuoti e di cui almeno uno proprio, tali che $B_1 + \dots + B_n$ è contenuto nella S -somma di \mathcal{X} .

DIMOSTRAZIONE. Ponendo $B_i = \emptyset$ per ogni $i = \{1, \dots, n\}$, procediamo ridefinendo ad ogni passo un B_i , aggiungendovi due elementi, e lasciando inalterati gli altri B_j con $j \neq i$. Per ipotesi, ogni $y \in S(\{x_0, x_n\})$ ha un numero dispari di occorrenze in \mathcal{X} . Sia $y_1 \in S(\{x_0, x_n\})$, scegliamo $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ tale che $y_1 \in S(\mathbf{v}_{i_1}) \setminus B_{i_1}$. Quindi scegliamo $y_2 \in S(\mathbf{v}_{i_1}) \setminus B_{i_1}$, con $y_2 \neq y_1$ e ridefiniamo $B_{i_1} = B_{i_1} \cup \{y_1, y_2\}$; gli altri B_j , con $j \neq i_1$ rimangono invariati.

Se $y_2 \in S(\{x_0, x_n\})$, l'algoritmo si ferma. Altrimenti, poiché y_2 ha un numero dispari di occorrenze in \mathcal{X} , esiste $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, tale che $y_2 \in S(\mathbf{v}_{i_2}) \setminus B_{i_2}$. Scegliamo $y_3 \in S(\mathbf{v}_{i_2}) \setminus B_{i_2}$, con $y_3 \neq y_2$ e ridefiniamo come prima $B_{i_2} = B_{i_2} \cup \{y_2, y_3\}$.

Se $y_{i_3} \in S(\{x_0, x_n\})$, l'algoritmo si ferma. Altrimenti, procediamo cercando un'altra occorrenza di y_{i_3} in \mathcal{X} .

L'algoritmo terminerà ad un passo $n' < n$ tale che $y_{n'+1} \in S(\{x_0, x_n\})$. Gli interi i_j non sono necessariamente tutti distinti, ma l'algoritmo deve fermarsi perché ad ogni passo l'ordine dei B_i non diminuisce, e l'ordine di un certo $B_j \subset S(\mathbf{v}_j)$ aumenta di 2. In più, all'ultimo passo, $B_1 + \dots + B_n = \{y_1, y_{n'+1}\} \subset S(\{x_0, x_n\})$, così che i B_j non sono tutti vuoti, ed almeno uno di essi è un sottoinsieme proprio del rispettivo $S(\mathbf{v}_j)$. \square

Il risultato seguente verrà ottenuto nell'ipotesi di avere particolari cicli nel dominio.

DEFINIZIONE 25. Un ipergrafo $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(I)$, di $n \geq 3$ iperspigholi, è detto un *ciclo minimale* se, per un opportuno ordinamento $\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$ dei suoi iperspigholi si ha (posto $C_{n+1} = C_0$):

- i. $|C_i \cap C_{i+1}| = 1$ per ogni $i = 0, \dots, n$ e tali intersezioni sono tutte distinte
- ii. $C_i \cap C_j = \emptyset$ per ogni $i = 0, \dots, n$ e per ogni $j \neq \pm i$.

Per comprendere le ragioni di tale Definizione, si osservi l'equazione 5 nella Proposizione 15: se si fosse aggiunta l'ipotesi che il ciclo era minimale, avremmo avuto l'uguaglianza.

PROPOSIZIONE 21. *Sia $S : \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathcal{P}^*(J)$ un isomorfismo e*

$$\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$$

un ciclo minimale con $C_i \in \mathbb{D}(S)$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$. Allora anche gli $\overline{C_i}$ formano un ciclo minimale, per un opportuno loro riordinamento $\overline{C_{i_1}}, \dots, \overline{C_{i_n}}$. Inoltre esiste un ciclo di lunghezza n nel grafo di S .

DIMOSTRAZIONE. In generale le intersezioni $\overline{C_k} \cap \overline{C_h}$ non possono che essere singleton o vuote (vedi Prop. 20).

Non si lede la generalità se si suppone che le intersezioni non vuote siano nell'ordine $C_0 \cap C_1 = \{x_1\}, \dots, C_{n-1} \cap C_n = \{x_n\}, C_n \cap C_0 = \{x_0\}$ e dunque usiamo la nomenclatura $\mathbf{v}_i = \{x_{i-1}, x_i\} \subseteq C_i$. Cominciamo con il dimostrare che per ogni $i = 0, \dots, n$ è $|S\{x_i, x_{i+1}\}| = 2$. Non si lede la generalità nel supporre che, per assurdo, sia $|S\{x_0, x_n\}| \geq 4$. Allora siamo nelle ipotesi del Lemma 1: troviamo insiemi $B_i \subseteq S(\{\mathbf{v}_i\})$ non tutti vuoti e di cui almeno uno proprio, la cui somma è contenuta propriamente in $S(\{x_0, x_n\}) \in \mathcal{P}^*(\overline{C_0})$; poiché $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{D}(S)$, allora $S^{-1}(\mathcal{P}^*(\overline{C_i})) = \mathcal{P}^*(C_i)$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$, ed è

$$\mathbf{v} := S^{-1}(B_1 + \dots + B_n) = S^{-1}(B_1) + \dots + S^{-1}(B_n) \in \mathcal{P}^*(C_0) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}^*(C_i) \right).$$

Ma d'altra parte, in virtù delle ipotesi sulle intersezioni degli C_i , è anche

$$\mathcal{P}^*(C_0) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}^*(C_i) \right) = \langle \{x_0, x_n\} \rangle$$

e per quanto stabilito con il Lemma 1, è anche $\mathbf{v} \neq \{x_0, x_n\}$, una contraddizione. Quindi l'unica possibilità è che non vi sia \mathbf{v}_i tale che $|S(\mathbf{v}_i)| \geq 4$.

Allora $(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = x_0)$ è un ciclo nel grafo di S , e la sua immagine mediante S è un ciclo, per la proposizione 18. Ricordiamo che S porta cicli in cicli ma non conserva necessariamente le adiacenze degli spigoli; in ogni caso, a meno di un riordinamento, si ottiene la proprietà i. per i $\overline{C_i}$. Tale proprietà è quindi dimostrata per il generico isomorfismo S

Da ciò la ii. segue subito. Infatti si supponga p. a. che sia $\overline{C_{j_k}} \cap \overline{C_{j_h}} = \{z\}$ con $k < h$ interi non consecutivi; ovviamente è possibile sceglierli in maniera da minimizzare la differenza $h - k \geq 2$. Allora $\overline{C_{i_k}}, \overline{C_{i_{k+1}}}, \dots, \overline{C_{i_h}}$ formano un ciclo, che è necessariamente minimale per le ipotesi fatte sugli indici k ed h . Allora la i. applicata a tale ciclo e ad S^{-1} porta a contraddire la minimalità del ciclo C_i . \square

Il procedimento usato nell'ultima parte della dimostrazione permette di osservare una cosa: se $n + 1$ iperspighi $C_0, C_1, \dots, C_n, C_{n+1} = C_0$ formano nell'ordine un ciclo, e tutte le intersezioni $C_h \cap C_k$ sono al più singleton, è possibile scomporre il ciclo in cicli minimali, passando a cicli più piccoli (eventualmente i cicli di lunghezza 3 sono necessariamente minimali). Tuttavia tale scomposizione non è necessariamente unica.

4. Il funtore $S_\bullet : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{P}^*$

Dimostreremo che la categoria concreta \mathbb{B} degli spazi delle bipartizioni $\mathbb{B}(I)$ su un insieme finito I e quella \mathcal{P}^* degli spazi di parti pari $\mathcal{P}^*(I)$ sono isomorfe. Il primo passo sarà quello di definire l'immagine del generico morfismo della categoria \mathbb{B} .

Siano I, J insiemi di ordine rispettivamente m e n . Sia \mathcal{E} un omomorfismo di $\mathbb{B}(I)$ in $\mathbb{B}(J)$, quindi $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$, dove $b_{E_i} = \mathcal{E}(p_i)$ è una bipartizione su J , per ogni $i \in I$.

Definiamo un omomorfismo $S_{\mathcal{E}}$ di $\mathcal{P}^*(J)$ in $\mathcal{P}^*(I)$ ponendo

$$S_{\mathcal{E}}(A) := \{i \in I \mid A \cap E_i \text{ ha ordine dispari}\} \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{P}^*(J)$$

Ovviamente, la definizione è indipendente dalla scelta del rappresentante E_i o E_i^{-1} di una bipartizione b_{E_i} , semplicemente perché A ha ordine pari e quindi $A \cap E_i$ è di ordine dispari se e solo se tale è $A \cap E_i^{-1}$.

Si ha che $S_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{P}^*(I)$ e $S_{\mathcal{E}}$ è un omomorfismo, e ciò segue dalla Proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 22. *Siano $A, B, E, E_1, \dots, E_r \in \mathcal{P}(J)$; allora*

i) *$E \cap (A + B)$ ha ordine dispari se e solo se uno e solo uno tra $E \cap A$ and $E \cap B$ ha ordine dispari;*

ii) *$A \cap (E_1 + \dots + E_r)$ ha ordine dispari se e solo se $\{j \mid j = 1, \dots, r, |A \cap E_j| \text{ è dispari}\}$ ha ordine dispari;*

Sia poi $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ un omomorfismo di $\mathbb{B}(I)$ in $\mathbb{B}(J)$, allora

iii) *se $A, B \in \mathcal{P}^*(J)$ e $i \in I$, allora $i \in S_{\mathcal{E}}(A + B)$ se e solo se $i \in S_{\mathcal{E}}(A) + S_{\mathcal{E}}(B)$*

iv) *se $A \in \mathcal{P}^*(J)$, allora $S_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{P}^*(I)$.*

DIMOSTRAZIONE. i) Segue immediatamente dall'osservare che $E \cap (A + B) = [E \cap (A \cap B^{-1})] \cup [E \cap (B \cap A^{-1})]$, analizzando singolarmente i casi di $|E \cap (A \cap B)|$ dispari o pari.

ii) Se $r \leq 2$ vedi i). Se $r \geq 3$, si arriva alla tesi mediante un ovvio procedimento induttivo.

iii) Segue facilmente da i).

iv) Si osservi che $E_1 + \dots + E_m \in \{\emptyset, J\}$, e poiché ovviamente $|A \cap J| = |A \cap \emptyset|$ è pari, dev'essere allora $S_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{P}^*(I)$, a causa della ii). \square

DEFINIZIONE 26. Definiamo un funtore controvariante S_\bullet dalla categoria concreta \mathbb{B} alla categoria concreta \mathcal{P}^* , associando, per ogni insieme finito I , all'oggetto $\mathbb{B}(I)$ ovviamente $\mathcal{P}^*(I)$, e ad ogni morfismo $\mathcal{E} : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}(J)$ il morfismo $S_{\mathcal{E}} : \mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$.

Al fine di mostrare che la Definizione è corretta, si verificano adesso le proprietà functoriali.

PROPOSIZIONE 23. *L'applicazione $S_\bullet : \text{Hom}(\mathbb{B}(I), \mathbb{B}(J)) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}^*(J), \mathcal{P}^*(I))$ gode delle proprietà:*

i) $1_{\mathbb{B}(I)} \xrightarrow{S_\bullet} 1_{\mathcal{P}^*(I)}$, per ogni $\mathbb{B}(I)$ oggetto di \mathbb{B} ;

ii) per ogni \mathcal{E}, \mathcal{F} tali che

$$\mathbb{B}(I) \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbb{B}(J) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{B}(L)$$

si ha $S_{\mathcal{E}} \circ S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F} \circ \mathcal{E}}$.

DIMOSTRAZIONE. i) Se $\mathcal{E} = 1_{\mathbb{B}(I)}$, allora $\mathcal{E} = (p_1, \dots, p_m)$ ed essendo $S_{\mathcal{E}}(A) = \{i \in I \mid A \cap \{i\} \text{ è di ordine dispari}\}$, si ha $S_{\mathcal{E}}(A) = A$ per ogni $A \in \mathcal{P}^*(I)$, e $S_{\mathcal{E}} = 1_{\mathcal{P}^*(I)}$.

ii) Siano adesso \mathcal{E}, \mathcal{F} come da ipotesi, con $|I| = m, |J| = n, |L| = r$ e si abbiano le rappresentazioni $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ come m -pla di bipartizioni su J , $\mathcal{F} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_n})$ come n -pla di bipartizioni su L .

Poiché $\mathcal{F} \circ \mathcal{E}$ è un omomorfismo di $\mathbb{B}(I)$ in $\mathbb{B}(L)$, denotiamo con $(b_{H_1}, \dots, b_{H_m})$ una sua rappresentazione come m -pla di bipartizioni su L . Allora, per ogni $i \in I$, abbiamo per definizione

$$b_{H_i} = (\mathcal{F} \circ \mathcal{E})(p_i) = \mathcal{F}(b_{E_i}) = \mathcal{F} \left(\sum_{j \in E_i} p_j \right) = \sum_{j \in E_i} b_{F_j}$$

e, considerando i due rappresentanti di ogni bipartizione, dev'essere

$$\sum_{j \in E_i} F_j \in \{H_i, H_i^{-1}\}$$

Per ogni $A \in \mathcal{P}^*(L)$ e $i \in I$, abbiamo allora $i \in S_{\mathcal{F} \circ \mathcal{E}}(A)$ se e solo se $A \cap \sum_{j \in E_i} F_j$ ha ordine dispari, quindi (per la Proposizione 22, iii.) se e solo se è dispari l'ordine dell'insieme

$$\{j \in E_i \mid A \cap F_j \text{ ha ordine dispari}\} = E_i \cap \{j \in J \mid A \cap F_j \text{ ha ordine dispari}\}.$$

Consideriamo adesso

$$(S_{\mathcal{E}} \circ S_{\mathcal{F}})(A) = S_{\mathcal{E}}(S_{\mathcal{F}}(A)) = S_{\mathcal{E}}(\{j \in J \mid A \cap F_j \text{ ha ordine dispari}\}).$$

Per ogni $i \in I$, per definizione è $i \in S_{\mathcal{E}}(S_{\mathcal{F}}(A))$ se e solo se è dispari l'ordine dell'insieme $E_i \cap \{j \in J \mid A \cap F_j \text{ ha ordine dispari}\}$. Si ha quindi per ogni A $S_{\mathcal{E}} \circ S_{\mathcal{F}}(A) = S_{\mathcal{F} \circ \mathcal{E}}(A)$ e la tesi. \square

Le proprietà functoriali garantiscono che se \mathcal{E} è un automorfismo di $\mathbb{B}(I)$, allora $S_{\mathcal{E}}$ è un automorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$.

4.1. Il funtore inverso $\mathcal{E}_\bullet : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{B}$. Di fatto, lo studio degli automorfismi di $\mathbb{B}(I)$ è del tutto equivalente a quello degli automorfismi di $\mathcal{P}^*(I)$. Ciò viene mostrato osservando che il funtore S_\bullet ha inverso, cioè che è possibile associare ad ogni omomorfismo $S : \mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$ un opportuno omomorfismo $\mathcal{E}_S : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}(J)$, tale che $S_{(\mathcal{E}_S)} = S$ e $\mathcal{E}_{(S_{\mathcal{E}})} = \mathcal{E}$.

Al fine di poter descrivere l'azione del funtore inverso servirà la seguente Proposizione.

PROPOSIZIONE 24. *Ad ogni iperpiano H di $\mathcal{P}^*(I)$ può essere associata ad una bipartizione $b_{E(H)}$ di I , con $E(H) \neq \emptyset, I$, tale che $H = \{A \in \mathcal{P}^*(I) \mid A \cap E(H) \text{ ha ordine pari}\}$; in particolare $H = \mathcal{P}^*(E(H)) \oplus \mathcal{P}^*(E(H)^{-1})$ (si noti che $\mathcal{P}^*(E(H)) = \emptyset$ se $E(H)$ è un singleton).*

DIMOSTRAZIONE. Si considerino dapprima i 2-elementi $\{1, 2\}, \dots, \{1, m\}$ di $\mathcal{P}_2(I)$; si riordini e separi tale collezione in due parti (una delle quali può essere vuota): $\{1, i_2\}, \dots, \{1, i_r\} \in H$ e $\{1, i_{r+1}\}, \dots, \{1, i_m\} \notin H$. Poiché stiamo lavorando sul campo \mathbb{Z}_2 , H ha indice 2 in $\mathcal{P}^*(I)$, e per ogni scelta di $h, k \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ distinti abbiamo $\{i_h, i_k\} = \{1, i_h\} + \{1, i_k\} \in H$.

Allora $\{1, i_2\}, \dots, \{1, i_r\}, \{i_{r+1}, i_{r+2}\}, \dots, \{i_{r+1}, i_m\}$ formano un insieme di $m - 2$ vettori di H , che non contiene cicli, e dunque genera un sottospazio di dimensione $m - 2$, necessariamente uguale ad H . Quindi $E(H) = \{1, i_2, \dots, i_r\}$. \square

Sia ora S un omomorfismo $\mathcal{P}^*(J) \rightarrow \mathcal{P}^*(I)$ con $|I| = m$, $|J| = n$. Per ogni $i \in I$, denotiamo con $H_{|i}$ l'iperpiano $\mathcal{P}^*(I \setminus \{i\})$ di $\mathcal{P}^*(I)$; abbiamo che $H_{|i} \cap S(\mathcal{P}^*(J))$ è $S(\mathcal{P}^*(J))$ o un iperpiano; nel primo caso si ponga $b_{E_i} = \{\emptyset, J\}$; in caso contrario, guardando alla tabella di S , è facile scoprire qual è la b_{E_i} tale che $\mathcal{P}^*(E_i) \oplus \mathcal{P}^*(E_i^{-1}) = S^{-1}(H_{|i})$: ad es. basta controllare la presenza dell'indice i sull' r -esima riga; sia quindi E_i^r l'insieme $\{j \in I \mid i \in S(\{r, j\})\}$; è facile provare che $b_{E_i^r} (= b_{E_i})$ è invariante rispetto ad r e che b_{E_i} è la bipartizione desiderata.

Ora mostriamo che $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ è un omomorfismo, cioè che $b_{E_1} + \dots + b_{E_m} = 0$. Sia $i, j \in I$; si osservi che, per ogni $k \in I$, $k \notin S(\emptyset) = \emptyset$, quindi, per definizione di b_{E_k} , $k \in S(\{i, j\})$ se e solo se b_{E_k} separa i, j . Ma $|S(\{i, j\})|$ è pari, quindi dalla Proposizione 22 iii) segue che $b_{E_1} + \dots + b_{E_m}$ tiene uniti i, j , per ogni i, j . Quindi $b_{E_1} + \dots + b_{E_m}$ è zero.

Infine è facile vedere che $S(\mathcal{E}_S) = S$ e $\mathcal{E}(S_{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}$. Per esempio, al fine di controllare la prima identità, basta richiamare la precedente osservazione, cioè che $k \in S(\{i, j\})$ se e solo se b_{E_k} separa i, j , per ottenere che $k \in S(\mathcal{E}_S)(\{i, j\})$ se e solo se $k \in S(\{i, j\})$.

Questo completa la dimostrazione dell'isomorfismo tra le categorie \mathbb{B} e \mathcal{P}^* .

4.2. Relazione tra i domini di \mathcal{E} e di $S_{\mathcal{E}}$. Ricordiamo che (vedi Sezione 5 Cap. 2), il dominio di un automorfismo \mathcal{E} è l'insieme dei sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(I)$ che vengono mandati da \mathcal{E} in sottospazi coordinati di $\mathbb{B}(I)$. Ciò equivale a dire che se $A \subseteq I \setminus \{1, \dots, m\}$, $|A| \neq 1$ e $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ allora $A^{-1} \in \mathbb{D}(\mathcal{E})$ se e solo se

$$(7) \quad |\{i \mid b_{E_i} \geq p_{A^{-1}}\}| = \dim V(A^{-1}) = m - |A|$$

Ciò ovviamente equivale anche a richiedere che l'insieme complementare di quello a primo membro, $\overline{A} := \{i \mid b_{E_i} \not\geq p_{A^{-1}}\}$ abbia cardinalità $|\overline{A}| = |A|$. Ma $k \in \overline{A}$ se e solo se b_{E_k} separa lo zero-blocco A di $p_{A^{-1}}$, e ciò accade se solo se esistono $i, j \in A$ distinti tali che b_{E_k} separa i, j , infine se e solo se $k \in S(\{i, j\})$, con $\{i, j\} \in \mathcal{P}^*(A)$. Ne segue subito che

PROPOSIZIONE 25. *Per ogni $A \subseteq I$, $A \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se $A^{-1} \in \mathbb{D}(\mathcal{E}_S)$.*

Dunque, con riferimento alle tende ed in particolare al loro lettura "per colonne", la teoria degli spazi delle bipartizioni riguarda agli insiemi degli 1 come elementi del dominio, mentre la teoria degli spazi delle parti pari considera i loro complementi, gli insiemi degli 0. Prima di passare alle applicazioni di quanto detto, facciamo alcuni commenti sul percorso già svolto.

5. Commenti alla costruzione funtoriale

Nel precedente Capitolo 2 si è illustrato come due $\mathbf{B}(1)$ -gruppi isoscenici siano legati — quale che siano le loro rappresentazioni date — da un cambio-base su \mathbb{Z}_2 che porta una tenda nell'altra e che questo cambio-base è un

automorfismo \mathcal{E} dello spazio vettoriale delle bipartizioni $\mathbb{B}(I)$ su un insieme $I = \{1, \dots, m\}$.

Rispetto ad una base ridondante l'automorfismo \mathcal{E} è rappresentabile come m -pla ammissibile delle bipartizioni immagini dei vettori della base, ovvero una $(b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ insieme dipendente minimale di $\mathbb{B}(m)$.

Volendo scrivere la \mathbb{Z}_2 -matrice $m \times m$ di tale automorfismo *rispetto alla base ridondante* delle puntate (p_1, \dots, p_m) otteniamo una matrice che ha:

- (1) determinante zero, ma che possiede minori non nulli di ordine $m-1$;
- (2) le colonne identificate a meno di scambi di "zeri ed uni";
- (3) come somma delle colonne, il vettore costante ad entrate tutte nulle (o tutte 1).

. Il punto (2) deriva dal fatto che nella base ridondante ogni bipartizione è generabile in due modi, mediante due sommatorie aventi supporto complementare

$$b_E = \sum_{i \in E} p_i = \sum_{i \in E} p_i + \sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \notin E} p_i.$$

Il punto (3) traduce numericamente il fatto che la somma $\sum_{i=1}^m b_{E_i}$ è zero, ovvero la bipartizione $\{\emptyset, I\}$ che tiene uniti tutti gli elementi di I .

Come esempio, si consideri l'automorfismo

$$\mathcal{E} = (b_{1238}, b_{156}, b_{1278}, b_{246}, b_{1458}, b_{1247}, b_{678}, b_{258})$$

di $\mathbb{B}(I)$ con $I = \{1, \dots, 8\}$. Allora è *una* sua matrice, rispetto alla base ridondante delle puntate,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ma anche qualsiasi altra matrice che si ottiene da essa aggiungendo $(1, 1, \dots, 1)$ ad alcuni suoi vettori colonna. Ad es. se scegliamo di cambiare le prime quattro colonne, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ancora una matrice dello stesso automorfismo.

Tuttavia è possibile osservare che, poiché i nuovi rappresentanti sono stati ottenuti aggiungendo alle colonne (quali che esse siano) una quantità costante, ovvero 1, le *differenze* tra le coordinate di ciascuna colonna sono

rimaste invariate. Ad es. le colonne che danno differenza 1 tra la loro prima e seconda coordinata sono le colonne di indice 2, 4, 5 e 8.

Passare a queste differenze costituisce l'essenza della costruzione functoriale. Poiché la costruzione functoriale "mima" il passaggio alla matrice trasposta (ma non considera le righe bensì le somme di coppie di righe), non fa meraviglia che conservi il rango della matrice e che, in particolare, il funtore porti automorfismi in automorfismi.

Qui si vuol osservare che, come per le differenze $\{2, 4, 5, 8\}$ tra prima e seconda riga, in generale tali differenze sono *in numero pari* perché stiamo lavorando con una base ridondante. Così lo spazio di arrivo è l'iperpiano $\mathcal{P}^*(8) \leq \mathcal{P}(8)$ delle parti pari su 8 elementi. Si ha dunque un'ulteriore riprova della pertinenza dell'idea originaria di lavorare nella base ridondante: se avessimo applicato la costruzione functoriale ad un automorfismo rappresentato su una base vera, lo spazio di arrivo sarebbe stato l'intero spazio $\mathcal{P}(7)$. Ma in tale spazio, che ovviamente ha parti di ordine pari e dispari, sarebbe venuta a cadere tutta l'interpretazione in termini di grafi che rende possibile ottenere i risultati in maniera agevole.

Al passaggio da una base vera ad una ridondante corrisponde l'immersione di $\mathcal{P}(7)$ come iperpiano di parti pari in $\mathcal{P}(8)$: ogni parte pari rimane tale, mentre ad ogni parte X di ordine dispari va in $X \cup \{8\}$. In questo modo tutte le basi di parti di ordine 1 o 2 (eventualmente non connesse come grafi) vengono mandate in basi di 2 elementi che, per quanto si è visto, risultano essere alberi. È un procedimento che un po' ricorda l'aggiunta dei punti impropri alle rette del piano, per far sì che ogni coppia di rette abbia un'intersezione.

Altro commento merita la scelta di lavorare sugli 0 della tabella, e non sugli 1. È facilmente verificabile che è impossibile un cambio-base tra le due tende

$$\begin{array}{rcccl}
 & A_1 & A_2 & A_3 & & B_1 & B_2 & B_3 \\
 t_1 = & 0 & 1 & 0 & & u_1 = & 0 & 1 & 1 \\
 t_2 = & 0 & 0 & 1 & & u_2 = & 0 & 0 & 1 \\
 t_3 = & 1 & 0 & 0 & & u_3 = & 1 & 0 & 0 \\
 t_4 = & 1 & 1 & 1 & & u_4 = & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

Se si interpretano le colonne come partizioni puntate sui loro supporti (gli 1) ciò viene giustificato dal fatto che

$$\dim V(p_{A_1}) \cap V(p_{A_2}) \cap V(p_{A_3}) = 1, \quad \dim V(p_{B_1}) \cap V(p_{B_2}) \cap V(p_{B_3}) = 0$$

dunque non si conservano le dimensioni delle intersezioni. Ma questa descrizione cambia se si "immergono" le tende in dimensione maggiore:

$$\begin{array}{rcccl}
 & A_1 & A_2 & A_3 & & B_1 & B_2 & B_3 \\
 t_1 = & 0 & 1 & 0 & & u_1 = & 0 & 1 & 1 \\
 t_2 = & 0 & 0 & 1 & & u_2 = & 0 & 0 & 1 \\
 t_3 = & 1 & 0 & 0 & & u_3 = & 1 & 0 & 0 \\
 t_4 = & 1 & 1 & 1 & & u_4 = & 1 & 1 & 0 \\
 t_5 = & 1 & 1 & 1 & & u_4 = & 1 & 1 & 1 \\
 t_6 = & 1 & 1 & 1 & & u_4 = & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

Il cambio-base è sempre impossibile, stavolta però perché

$$\dim V(p_{A_1}) \cap V(p_{A_2}) \cap V(p_{A_3}) = 3, \quad \dim V(p_{B_1}) \cap V(p_{B_2}) \cap V(p_{B_3}) = 2.$$

Come già osservato in precedenza, lavorare con le bipartizioni e le partizioni puntate obbliga a riferirsi sempre alla dimensione dello spazio ambiente.

In entrambi i casi, invece, ragionando con gli spazi di parti pari ed identificando le colonne con i rispettivi zero-blocchi $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ ecc., la descrizione rimane la stessa: dal punto di vista combinatorio non esiste un automorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$ che porta il ciclo $(1, 2, 3)$ della prima tenda nel cammino aciclico $(1, 2, 3, 4)$ della seconda tenda; dal punto di vista algebrico, non esiste automorfismo che possa portare il $\mathcal{P}^*(\{1, 2, 3\})$ di dimensione 2 in $\mathcal{P}^*(\{1, 2, 3, 4\})$ di dimensione 3. Tutto questo senza nessun riferimento alla dimensione dell'ambiente I .

6. Cambi-base di $\mathbf{B}(1)$ -gruppi indecomponibili.

I risultati di questa Sezione sono contenuti in *Base changes of $\mathbf{B}(1)$ -groups: a \mathbb{Z}_2 -linear and graph theory approach* [M], in pubblicazione sul Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

Per il Teorema 4, l'indecomponibilità di $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G equivale alla forte 2-connessione della sua tenda t . Un suo cambio-base \mathcal{E} di G deve avere nel proprio dominio le colonne di t , da cui anche $\mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$ è fortemente 2-connesso come ipergrafo.

Ne segue che i cambi-base dei gruppi indecomponibili sono tutti e soli quelli aventi dominio fortemente 2-connesso. Tuttavia, la Proposizione 21 mostra come un ciclo minimale nel dominio di un automorfismo S sottenda sempre un ciclo nel grafo di S . Quindi non sorprende che la forte 2-connessione del dominio implichi (ed equivalga) alla 2-connessione del grafo di S .

Tale teorema di caratterizzazione ha anche un risvolto computazionale: mentre la verifica della forte 2-connessione del dominio prevede la complessa costruzione effettiva del dominio (praticamente la verifica dei 2^m sottoinsiemi di I), la verifica della 2-connessione del grafo necessita solo della verifica dei possibili $\binom{m}{2}$ spigoli di I .

Si ricordi la Definizione 21 di un cammino di un ipergrafo che *collega* a, b fuori di $\{k\}$.

Osserviamo che, fissato k , la relazione $a \sim b$ definita in I dall'esistenza di una sequenza che collega a, b fuori di $\{k\}$ è di equivalenza; indichiamo allora con $[a]$ la classe di equivalenza di a . In più, esiste una sequenza che collega a, b fuori di $\{k\}$ se e solo se esiste una siffatta sequenza che collega $c \in [a]$ e $d \in [b]$ (fuori di $\{k\}$); alla luce di ciò, è giustificata e chiara nel significato la locuzione “la sequenza C_1, \dots, C_n collega $[a], [b]$ fuori di $\{k\}$ ”.

Il teorema principale di questa sezione è il seguente.

TEOREMA 5. *Sia S un isomorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$ in $\mathcal{P}^*(J)$. Se $\mathbb{D}(S)$ è fortemente 2-connesso e $A \in \mathbb{D}(S)$, allora $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ è fortemente 2-connesso.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare l'asserto quando A è massimale in $\mathbb{D}(S)$. Sia $\mathbb{D}(S)$ fortemente 2-connesso e supponiamo, per assurdo, che $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(A)})$ non sia fortemente 2-connesso. Allora, esistono $a, b, k \in A$ ed una

sequenza C_1, \dots, C_n in $\mathbb{D}(S)$ che collega $[a]$ e $[b]$ fuori $\{k\}$, ma non esista una tale sequenza in $\mathbb{D}(S_{|\mathcal{P}^*(A)})$.

Quindi, non possiamo avere $|C_i \cap A| \geq 2$ per tutti gli i , altrimenti in questo caso $C_1 \cap A, \dots, C_n \cap A$ sarebbe, per la Proposizione 20, una sequenza in $\mathbb{D}(S_{|\mathcal{P}^*(A)})$ che collega $[a], [b]$ fuori di $\{k\}$.

Possiamo scegliere una tal sequenza di lunghezza minimale n ; come conseguenza di tale scelta ed ancora della Proposizione 20 si ha che:

- (1) $|C_i \cap C_{i+1}| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Infatti, tali intersezioni sono non vuote per ipotesi; d'altra parte, se $|C_i \cap C_{i+1}| \geq 2$, potremmo considerare la sequenza

$$C_1, \dots, C_{i-1}, C_i \cup C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n$$

di lunghezza $n-1$;

- (2) da (1) abbiamo che $\overline{C_i} \cap \overline{C_{i+1}} = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Altrimenti, $C_i \cup C_{i+1}$ è nel $\mathbb{D}(S)$, e la lunghezza della sequenza diminuirebbe di nuovo;
- (3) se $i+1 < j$ allora $|C_i \cap C_j| = 0$; altrimenti avremmo ancora una sequenza più piccola

$$C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n;$$

- (4) $n \geq 2$. Se infatti fosse $n = 1$, C_1 collegherebbe $[a], [b]$, quindi $|C_1 \cap A| \geq 2$ e $C_1 \cap A \in \mathbb{D}(S_{|\mathcal{P}^*(A)})$ collega $[a], [b]$;
- (5) la massimalità di A proibisce anche che, per qualche i , sia $|A \cap C_i| \geq 2$ e $A \cup C_i \subset I$
- (6) un po' più di attenzione è richiesta per vedere che, per ogni i , $|A \cap C_i| \geq 2$ e $A \cup C_i = I$ non può verificarsi. Infatti, per un tal C_i , avremmo $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ per ogni $j \neq i$, e la sequenza avrebbe lunghezza 2. Ma da ciò seguirebbe che, detti $C_i = C$ e D i due elementi della sequenza, allora $|C \cap D| = 1$ e quindi $|D| = 2$. Ora, $S(\mathcal{P}^*(I)) = S(\mathcal{P}^*(C \cup A)) = \mathcal{P}^*(I)$, quindi $\overline{C} \cup \overline{A} = I$; d'altra parte $\mathcal{P}^*(D) \cap \mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}^*(D) \cap \mathcal{P}^*(C) = 0$, quindi $|\overline{D} \cap \overline{A}| = |\overline{D} \cap \overline{C}| = 1$. Infine $C \cup D \in \mathbb{D}(S)$, e avremmo come contraddizione una sequenza di lunghezza 1.

Sia allora r il minimo $i > 1$ tale che $|A \cap C_i| = 1$ (eventualmente $r = n$); sia $C_1 \cap A = \{x_1\}$, $C_i \cap C_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ for $i = 1, \dots, r-1$, $C_r \cap A = \{x_{r+1}\}$, mentre $|C_i \cap A| = 0$ per ogni $1 < i < r$. Allora $\{x_1, x_{r+1}\} \subseteq A$; se $|S(\{x_1, x_{r+1}\})| = 2$, allora $\{x_1, x_{r+1}\} \in [a]$ e, se $r < n$, possiamo considerare la sequenza C_{r+1}, \dots, C_n e la lunghezza decresce ancora, altrimenti $r = n$, $\{x_1, x_{n+1}\} \in \mathbb{D}(S_{|\mathcal{P}^*(A)})$ collega $[a]$ e $[b]$.

Questo assicura che $|S(\{x_1, x_{r+1}\})| \geq 4$, e questa è una contraddizione alla luce della Proposizione 21, osservando che A, C_1, \dots, C_n è un ciclo minimale nel dominio di S .

□

Il Teorema ha un immediata ricaduta sui $\mathbf{B}(1)$ -gruppi di Butler. In generale è ovvio che la indecomponibilità non è una proprietà gruppale che viene ereditata per quozienti; tuttavia se un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G ha una tenda sufficientemente complessa — pari alla tenda di un cambio-base di un

indecomponibile — allora ci sono particolari sezioni di G che sono indecomponibili.

COROLLARIO 3. *Sia \mathcal{E} un cambio-base di un gruppo indecomponibile e G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo rappresentante dalla tenda $\mathbb{D}(\mathcal{E})$. Allora per ogni $A \in \mathbb{D}(S_{\mathcal{E}})$, il $\mathbf{B}(1)$ -gruppo $G_A/\langle g_A \rangle_*$ è indecomponibile.*

DIMOSTRAZIONE. Osservare che la tenda di $G_A/\langle g_A \rangle_*$ è ottenuta dalla tenda di \mathcal{E} cancellando le righe t_i , con $i \notin A$, e coincide con la tenda di $S_{\mathcal{E}|_{\mathcal{P}^*(A)}}$. Quindi il risultato segue dal Teorema 5. \square

Il teorema di caratterizzazione dei cambi-base degli indecomponibili è una immediata conseguenza del Teorema 5

TEOREMA 6. *Sia S un isomorfismo di $\mathcal{P}^*(I)$ in $\mathcal{P}^*(J)$. $\mathbb{D}(S)$ è fortemente 2-connesso se e solo se \mathcal{G}_S è un grafo 2-connesso su I .*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che ogni spigolo di \mathcal{G}_S è nel $\mathbb{D}(S)$. Quindi se \mathcal{G}_S è un grafo 2 connesso su I , allora la condizione di forte 2-connessione di $\mathbb{D}(S)$ è verificata per ogni a, b, k , con C_1, \dots, C_n dati da un cammino \mathcal{X} che connette a e b e che non tocca k .

Viceversa, sia $\mathbb{D}(S)$ fortemente 2-connesso. Procediamo per induzione su $|I|$. Se $|I| = 2$, allora l'asserto è ovvio. Sia quindi $|I| \geq 3$ e $k \in I$. Per ogni $a, b \in I \setminus \{k\}$, esiste per ipotesi una sequenza C_1, \dots, C_n di elementi del $\mathbb{D}(S)$, che collega a e b , con $k \notin C_i$ for $i = 1, \dots, n$. Per il Teorema 5, per $i = 1, \dots, n$, $\mathbb{D}(S|_{\mathcal{P}^*(C_i)})$ è fortemente 2-connesso e, per ipotesi induttiva, il grafo di $S|_{\mathcal{P}^*(C_i)}$ è 2-connesso su C_i ; poiché $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, l'unione di questi grafi è il cercato cammino che contiene a, b ma non k . \square

Se il grafo di S è 2-connesso, la ricerca degli elementi del dominio risulta facilitata. Per ogni grafo \mathcal{G} in I , ed $A \subseteq I$, definiamo il grafo di \mathcal{G} sotteso da A come $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_2(A) \cap \mathcal{G}$ (ovvero l'insieme degli spigoli di \mathcal{G} tra elementi di A).

COROLLARIO 4. *Sia \mathcal{G}_S 2-connesso, $A \subseteq I$ ($|A| \neq 1$). Allora $A \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se il grafo $\mathcal{G}_S(A)$ è 2-connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza immediata dei Teoremi 5 e 6. \square

Anche quando \mathcal{G}_S è solamente connesso si può dire qualcosa sugli elementi del dominio $\mathbb{D}(S)$: essi sono dati dai sottografi connessi di \mathcal{G}_S che S manda in sottografi connessi.

COROLLARIO 5. *Sia \mathcal{G}_S connesso, $A \subseteq I$ ($|A| \neq 1$). Allora:*

- i) se $A \in \mathbb{D}(S)$, allora $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ è connesso;
- ii) $A \in \mathbb{D}(S)$ se e solo se $\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ e $S(\mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}})$ sono connessi.

DIMOSTRAZIONE. i) Supponiamo che esistono $a, b \in A$ tali che ogni cammino semplicemente connesso \mathcal{G}_S , che collega a e b , non è contenuto in $\mathcal{P}^*(A)$. Sia \mathcal{X} uno di questi cammini; guardando alla sequenza dei suoi vertici, si possono scegliere $c, d \in A \cap \text{Vert}(\mathcal{X})$ tali che $\{c, d\} \notin \mathcal{G}_{S|_{\mathcal{P}^*(A)}}$ e il cammino $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ che collega c e d è tutto fuori di $\mathcal{P}^*(A)$. Allora, otteniamo nuovamente una contraddizione, osservando che gli elementi di \mathcal{X}' sono in $\mathbb{D}(S)$ e siamo dunque nuovamente nell'ipotesi della la Proposizione 21.

ii) Se $A \in \mathbb{D}(S)$, allora $\mathcal{G}_{S|\mathcal{P}^*(A)}$ è connesso per i), e $S(\mathcal{G}_{S|\mathcal{P}^*(A)}) = \mathcal{G}_{S|\mathcal{P}^*(\bar{A})}^{-1}$ è connesso ancora per i), per la Definizione all'inizio della Sezione 2.1 e la Proposizione 19. Viceversa, sia $\mathcal{X} = \mathcal{G}_{S|\mathcal{P}^*(A)}$ connesso. Allora, per la Proposizione 14 i), \mathcal{X} è una base di $\mathcal{P}^*(A)$, quindi $S(\mathcal{X}) = S(\mathcal{G}_{S|\mathcal{P}^*(A)})$ è una base di $S(\mathcal{P}^*(A))$. Posto $\bar{A} = \text{Vert}(S(\mathcal{X}))$: allora, ancora per la proposizione 14 i), $S(\mathcal{X})$ è una base di $\mathcal{P}^*(\bar{A})$, quindi $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\bar{A})$ e $A \in \mathbb{D}(S)$. \square

Ulteriore conseguenza sui grafi di domini è che non ogni grafo 2-connesso può essere il grafo di un automorfismo.

COROLLARIO 6. *Se \mathcal{G}_S è grafo di un automorfismo S , e \mathcal{X}, \mathcal{Y} sono sottografi 2-connessi tali che $|\text{Vert}(\mathcal{X}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Y})| \geq 2$, allora $\mathcal{G}_S(\text{Vert}(\mathcal{X}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Y}))$ è 2-connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Immediata, osservando che per le ipotesi $\text{Vert}(\mathcal{X}) \cap \text{Vert}(\mathcal{Y}) \in \mathbb{D}(S)$. \square

6.1. Il dominio di un scambio. A titolo di illustrazione, applichiamo i risultati della sezione precedente al calcolo del dominio di uno scambio.

Come si è già accennato, uno dei problemi risolti nella Teoria dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi è quello di stabilire se un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo ammette cambi-base non banali (ovvero distinti dalle permutazioni dei generatori).

La risposta è stata fornita in [DVM6] e [DVM7], nei quali gli autori sviluppano un algoritmo di decomposizione di $\mathcal{E} = (b_{E_1}, \dots, b_{E_m})$ in trasvezioni. L'algoritmo risulta essere più veloce del classico algoritmo di decomposizione di Gauss: la natura concreta dello spazio $\mathbb{B}(m)$ (ed in definitiva il campo \mathbb{Z}_2) permettono di indirizzare l'algoritmo riducendo via via il numero delle coppie di bipartizioni b_{E_i}, b_{E_j} tali che $|b_{E_i} \wedge b_{E_j}| = 4$. Inoltre le trasvezioni considerate sono gli *scambi*, ovvero le trasvezioni che fissano un iperpiano coordinato.

Uno scambio si descrive nel seguente modo: siano scelti $i_1, i_2 \in I$ *pivot* della rappresentazione, e sia $\{\{i_1, i_2\}, X, \bar{X}\}$ una tripartizione di $\{1, \dots, m\}$; allora lo scambio che fissa l'iperpiano coordinato

$$H_{i_1, i_2} = \langle p_i | i \in X \cup \bar{X} \rangle$$

è l'automorfismo $\mathcal{S} = (b_{F_1}, \dots, b_{F_m})$ dato da

$$b_{F_i} = \begin{cases} p_i & \text{se } i \in X \cup \bar{X} \\ p_i + b_X & \text{se } i \in \{i_1, i_2\}. \end{cases}$$

Una qualsiasi scelta di X da luogo ad uno scambio, che in particolare è una permutazione se e solo se uno tra X e \bar{X} è vuoto.

Conseguenza importante dell'algoritmo di decomposizione in scambi è la seguente: se

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_1 \cdots \mathcal{S}_r$$

è decomposto in scambi, allora $\mathbb{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathbb{D}(\mathcal{S}_1)$ (vedi Proposizione 1, [DVM6]).

Da ciò si deduce che gli scambi hanno dominio massimale, ed un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo ammette un cambio-base non banale se e solo se la sua tenda è inclusa nel dominio di uno scambio.

Il dominio di uno scambio, per quanto vasto, può essere calcolato agevolmente a partire dal suo grafo. Sia \mathcal{S} lo scambio avente i_1, i_2 come pivot e

dato dalla tripartizione $\{\{i_1, i_2\}, X, \overline{X}\}$; se è una permutazione, allora il suo grafo è il grafo totale. Supponiamo che \mathcal{S} non sia una permutazione, allora si ha

$$S_{\mathcal{S}}(\{h, k\}) = \begin{cases} \{h, k\} & \text{se } \{h, k\} \subseteq X \text{ oppure } \{h, k\} \subseteq \overline{X} \\ \{i_1, i_2, h, k\} & \text{se } h \in X, k \in \overline{X} \\ \{i_2, k\} & \text{se } h = i_1 \\ \{i_1, k\} & \text{se } h = i_2 \end{cases}$$

Ne segue che il grafo di $S_{\mathcal{S}}$ è descritto come il grafo totale su X e su \overline{X} , completato con l'aggiunta dei pivot che sono connessi tra loro e a qualunque altro vertice.

PROPOSIZIONE 26. *Il dominio di uno scambio \mathcal{S} avente i_1, i_2 come pivot e tripartizione $\{\{i_1, i_2\}, X, \overline{X}\}$, con X, \overline{X} non vuoti è costituito dai seguenti insiemi ($|A| \neq 1$):*

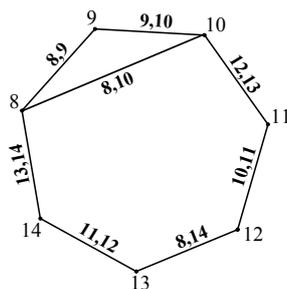
$$A \in \mathbb{D}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq X \cup \{i_1, i_2\} \text{ oppure} \\ A \subseteq \overline{X} \cup \{i_1, i_2\} \text{ oppure} \\ \{i_1, i_2\} \subseteq A \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Il grafo di uno scambio è evidentemente 2-connesso. Basta usare la Proposizione 4, osservando che quelli indicati sono gli unici insiemi di vertici che sottendono un grafo 2-connesso nel grafo di \mathcal{S} . In particolare, gli insiemi che hanno vertici sia di X che di \overline{X} e contengono al più un pivot, o sono sconnessi o hanno il pivot come punto di taglio. \square

6.2. Altri esempi di cambi-base e loro grafi. Come osservato in precedenza, il grafo di un cambio-base può essere vuoto (ovvero privo di spigoli e costituito da soli punti isolati). In particolare si osservi il cambio-base \mathcal{E} rappresentato in forma matriciale nella Sezione 5, e qui riportato come $S_{\mathcal{E}}$:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2,4,5,8	2,3,5,6	1,2,3,4	1,3,6,8	1,3,4,5,6,7	1,2,5,7	2,6,7,8

Esso ha dominio banale, costituito dal solo $A = I = \{1, \dots, 8\}$. È dunque evidente che i grafi non possono essere lo strumento generale di ricerca degli elementi del dominio. Ad es. incollando l'automorfismo $S_{\mathcal{E}}$ di $\mathcal{P}^*(8)$ ora descritto, con l'automorfismo S di $\mathcal{P}^*(\{8, \dots, 14\})$ descritto dalla seguente corrispondenza:



otteniamo un automorfismo di $\mathcal{P}^*(14) = \mathcal{P}^*(8) \oplus \mathcal{P}^*({8, \dots, 14})$ il cui grafo è ancora quello descritto in figura. Inoltre nel dominio abbiamo, oltre gli elementi del dominio di $S_{\mathcal{E}}$ e di S , anche gli insiemi $\{1, \dots, 9\}$, $\{1, \dots, 8, 14\}$, e la loro unione.

Si consideri adesso l'automorfismo S descritto nella Sottosezione 2.1: è un esempio di un automorfismo avente grafo connesso ma non 2-connesso. Nella tenda del dominio di S

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_2 &= 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ t_3 &= 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ t_4 &= 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_5 &= 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_6 &= 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{aligned}$$

si può osservare che

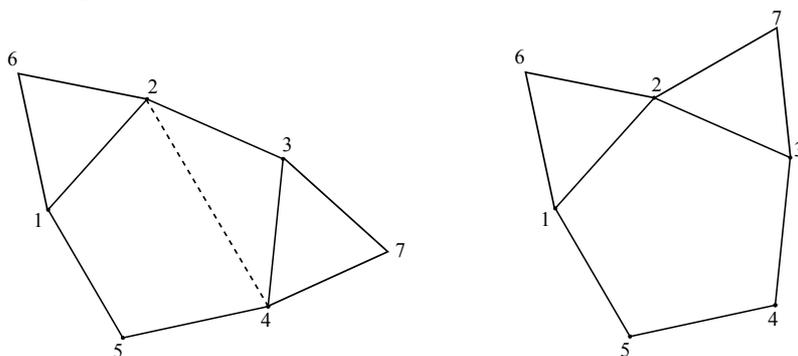
$$\text{part}_t(t_2) = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

$$\text{part}_t(t_3) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}.$$

Un qualunque $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G che ammette S come cambio-base, e la cui tenda è dunque ottenuta da quella di S cancellando colonne, è decomponibile. In particolare, gli elementi g_2, g_3 su cui sicuramente G spezza corrispondono ai punti di taglio 2 e 3 del grafo di S^{-1} .

Un'ulteriore osservazione merita il caso dei grafi 2-connessi. Si consideri l'automorfismo S di $\mathcal{P}^*(7)$ che agisce come l'identità su $\mathcal{P}^*({1, 2, 6})$, e completato su $\mathcal{P}^*(7) = \mathcal{P}^*({1, 2, 6}) \oplus \mathcal{P}^*({3, 4, 7}) \oplus \mathcal{P}^*({1, 4, 5})$ (vedi Proposizione 15) con le posizioni $S({3, 4}) = \{2, 3\}$ e $S({3, 7}) = \{2, 7\}$, $S({1, 5}) = \{3, 4\}$ e $S({4, 5}) = \{1, 5\}$.

Allora i grafi di S e di S^{-1} sono:

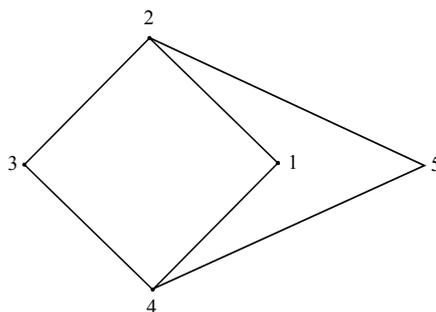


Ovviamente S manda cicli in cicli, e tali associazioni tra cicli (spigolo per spigolo) definiscono l'automorfismo, poiché i grafi sono 2-connessi su I . I due grafi non sono isomorfi, tuttavia si osservi quanto segue: nel primo grafo a sinistra \mathcal{G} i punti 2 e 4 sono esattamente i due punti di connessione tra i sottografi $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}({2, 3, 4, 7})$ e $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}({1, 2, 4, 5, 6})$, la cui unione è tutto \mathcal{G} ; inoltre i punti 2 e 4 sono connessi in entrambi i sottografi \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 . Sotto queste ipotesi effettuiamo l'operazione ($\#$) di ruotare \mathcal{G}_1 rispetto a \mathcal{G}_2 : otterremo, a meno di ridenominare i vertici, il secondo grafo a destra.

Ebbene, tale evenienza non è casuale. Come provato da H. Whitney in uno dei suoi lavori giovanili ([W], 1933), due grafi tra i cui spigoli vi sia una

corrispondenza biunivoca che porta cicli in cicli sono ottenibili l'uno dall'altro mediante successione di operazione tipo $(\#)$ (ovvero sono *2-isomorfi*). Sarebbe interessante investigare la relazione che c'è tra le operazioni algebriche in $\mathcal{P}^*(I)$ e le operazioni grafiche $(\#)$ quando la corrispondenza che manda cicli in cicli è dettata da S sul suo grafo.

Bisogna, comunque, tener presente che i grafi degli automorfismi di $\mathcal{P}^*(I)$ sono una sottoclasse propria della classe dei grafi 2-connessi. Ad illustrazione di ciò, si consideri quanto detto nel Corollario 6, ponendo $\mathcal{X} = \{1, 2, 4, 5\}$ e $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$:



Per il Corollario, il grafo non può essere grafo di alcun automorfismo. Altra limitazione evidente, non esistono automorfismi di $\mathcal{P}^*(4)$ il cui grafo è semplicemente connesso.

7. Un ipotesi di approccio al teorema di [BDVM]

Gli strumenti a disposizione in $\mathcal{P}^*(I)$ si sono dimostrati efficaci nel problema di caratterizzazione dei cambi-base degli indecomponibili, e nel fornire dimostrazioni di semplici risultati già noti sul dominio di un automorfismo di $\mathbb{B}(m)$.

È naturale allora chiedersi se essi sono validi nel sostituire gli spazi di bipartizioni, in generale, come strumento di studio delle rappresentazioni degli spazi vettoriali rispetto ad una base ridondante. Quanto visto fin'ora farebbe propendere per una risposta affermativa.

Esponiamo i risultati parziali e le difficoltà incontrate nell'ottenere nel nuovo ambito il risultato principale di [BDVM] (Teorema 5.1). Esso è il seguente:

TEOREMA 7 (BDVM). *Siano $m \geq 1$, $n \geq 0$ interi, V e W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} di dimensione $m - 1$, e famiglie di sottospazi coordinati, rispetto a fissate basi ridondanti, V_1, \dots, V_n di V , W_1, \dots, W_n di W , godenti della proprietà dell'intersezione:*

$$(8) \quad \dim(\cap\{V_r | r \in \pi\}) = \dim(\cap\{W_r | r \in \pi\})$$

per ogni $\pi \subset \{1, \dots, n\}$. Allora esiste un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tale che $\varphi(V_i) = W_i$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

La dimostrazione viene affrontata in [BDVM] usando le tende come tabelle di incidenza tra sottospazi: ogni colonna rappresenta un sottospazio coordinato, essendo 1 in corrispondenza di una riga t_i se e solo se il sottospazio contiene il vettore i -esimo della fissata base ridondante. La corrispondenza tra sottospazi è dunque una corrispondenza biunivoca $q_i \mapsto q'_i$

tra i Primi di due tende t e u ; questa determina immediatamente una corrispondenza biunivoca tra i generici σ “prodotti di Primi” di t e i prodotti σ' dei Primi corrispondenti di u .

L'intersezione di sottospazi è di fatto un “prodotto di Primi” σ , la cui dimensione è la dimensione del sottospazio $V(\text{part}_t(\sigma))$, pari a $|\text{part}_t(\sigma)| - 1$; questo numero è riconducibile a proprietà dell'ipergrafo degli zero-blocchi. Per un ipergrafo H useremo le seguenti notazioni: indicheremo con $|\cup H|$ il numero dei punti toccati da H , e con $c.c.H$ il numero delle sue componenti connesse.

PROPOSIZIONE 27. *Sia $\sigma = p_1 \dots p_r$ un prodotto di Primi di una m -tenda t , ed H_σ l'ipergrafo determinato dagli zero-blocchi $Z(p_i)$ dei suoi primi. Allora*

$$|\text{part}_t(\sigma)| - 1 = m - |\cup H_\sigma| + c.c.H_\sigma - 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Immediata, tenendo conto di come si calcola $\text{part}_t(\sigma)$ sulla tenda, mediante Pulling the Strings. \square

PROPOSIZIONE 28. *Siano t e u due m -tende regolari ed esista una corrispondenza biunivoca $q_i \xrightarrow{\varphi} q'_i$ tra i loro Primi. Sia inoltre, per il generico σ prodotto di Primi di t , σ' il prodotto dei primi corrispondenti. Allora φ gode della proprietà dell'intersezione se e solo se, per ogni σ è*

$$|\cup H_\sigma| - c.c.H_\sigma = |\cup H_{\sigma'}| - c.c.H_{\sigma'}$$

DIMOSTRAZIONE. Immediata per la Proposizione 27, essendo la dimensione dello spazio ambiente m costante. \square

Osserviamo che per un ipergrafo H in I la quantità $|\cup H| - c.c.H$ ha un significato algebrico: se si indicano con $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ le componenti connesse di H , allora

$$|\cup H| - c.c.H = \dim(\mathcal{P}^*(\mathcal{C}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{P}^*(\mathcal{C}_r)).$$

Chiameremo dunque $|\cup H| - c.c.H$ la *dimensione di H in $\mathcal{P}^*(I)$* , e la indicheremo semplicemente con $\dim H$, quando sarà chiaro che H è un ipergrafo in I e la sua dimensione algebrica vada calcolata su $\mathcal{P}^*(I)$ nel modo indicato.

Quindi il Teorema 7 può essere equivalentemente enunciato nel modo seguente.

TEOREMA 8. *Siano \mathcal{X} e \mathcal{Y} due ipergrafi su I , con iperspigoli non singleton². Se esiste una corrispondenza biunivoca $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tale che*

$$(9) \quad \dim H = \dim \varphi(H), \quad \forall H \subseteq \mathcal{X}$$

allora esiste un automorfismo S di $\mathcal{P}^(I)$ che ha \mathcal{X} nel suo dominio e tale che, per ogni $A \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{D}(S)$, è³*

$$\overline{A} = \varphi(A).$$

Esiste una dimostrazione diretta e, soprattutto, significativa del Teorema in questa formulazione? Una strada potrebbe essere la seguente:

²Questa ipotesi traduce la regolarità delle tende, e cioè il fatto che gli zero-blocchi hanno almeno ordine 2.

³Si ricordi la notazione per gli elementi A del dominio: \overline{A} è l'insieme equipotente a A tale che $S(\mathcal{P}^*(A)) = \mathcal{P}^*(\overline{A})$

1. la proprietà (9) implica che se \mathcal{C}_i è una 2-connessa massimale di \mathcal{X} , allora $\varphi(\overline{\mathcal{C}_i})$ è una componente 2-connessa massimale dell'ipergrafo \mathcal{Y} . Poiché i cicli di un ipergrafo esattamente quelli inclusi in una \mathcal{C}_i , tali componenti connesse non possono che intersecarsi in singleton e tali connessioni non formano cicli. Ne segue che se è possibile costruire automorfismi S di $\mathcal{P}^*(\mathcal{C}_i)$ per ogni \mathcal{C}_i , questi possono poi essere incollati per la Proposizione 15. Rimane dunque da analizzare il caso degli ipergrafi \mathcal{X} 2-connessi.
2. Nel caso in cui \mathcal{X} è un ipergrafo 2-connesso e $|\cap_{A \in \mathcal{X}} A| \leq 2$ allora si prova agevolmente che la proprietà (9) equivale a

$$(10) \quad |\cap_{A \in H} A| = |\cap_{A' \in H'} A'| \quad \forall H \subseteq \mathcal{X}$$

Questo permette di definire un automorfismo per induzione sul numero $n = |\mathcal{X}|$ degli elementi di A_1, \dots, A_n di \mathcal{X} ; l'automorfismo può essere dapprima definito (arbitrariamente) sull'intersezione di tutti gli A_i , poi esteso alle intersezioni di $n-1$ elementi, e via via su tutta la loro unione. Ad ogni passo, l'estensione è definita arbitrariamente, e la proprietà (10) serve solo a garantire che le estensioni sono lecite.

3. Sia ancora \mathcal{X} un ipergrafo 2-connesso, e sia $|A \cap B| \leq 1$ per ogni $A, B \in \mathcal{X}$. Allora una difficoltà nasce dal fatto che le intersezioni singleton non vengono necessariamente conservate. Tuttavia in queste ipotesi la (9) equivale al fatto che φ e la sua inversa portano cicli in cicli. Quindi è possibile passare ad una scomposizione di ciclo in cicli minimali più piccoli (eventualmente i triangoli), e definire una applicazione tra 2-elementi di I , sulla falsariga di ciò che accade nella Proposizione 25; rispettare la Proposizione citata è infatti condizione necessaria per qualsiasi automorfismo S cercato. D'altra parte in questo modo si risolve il problema delle intersezioni singleton (poiché le rimanenti intersezioni non coinvolte in cicli legano parti in somma diretta) e le associazioni tra i 2-elementi considerate mandano cicli in cicli, quindi per la Proposizione 16 possono essere estese in un automorfismo S .

Le difficoltà di formalizzare il punto (3) nascono dal fatto che un ciclo non ha un'unica scomposizione in cicli minimali, e resta da dimostrare che le associazioni tra 2-elementi che si ottengono attraverso diverse scomposizioni sono compatibili tra loro. D'altra parte sono state, con questo approccio, non superabili le difficoltà di trattare situazioni miste, in cui una componente connessa ha intersezioni di qualsiasi ordine. Ulteriori sviluppi sono necessari per capire se una opportuna induzione permetterà di risolvere costruttivamente il problema, o se è necessaria una ulteriore chiarificazione degli strumenti a disposizione nell'ambiente $\mathcal{P}^*(I)$.

Una panoramica sui $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, $n \geq 2$

Come già detto nell'Introduzione, tutti gli strumenti \mathbb{Z}_2 -lineari ordinati e combinatorici usati per lo studio dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi sono solo parzialmente di aiuto nell'affrontare lo studio dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, con $n \geq 2$; per essi la parte \mathbb{Q} -lineare gioca un ruolo determinante. Tra le difficoltà che si incontrano quando si cerca di ripercorrere per i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, $n \geq 2$, il percorso di ricerca che è stato così di successo per i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, quella più rilevante è l'individuazione di un qualsivoglia approccio efficace allo studio dei cambi-base dei $\mathbf{B}(n)$ gruppi in generale.

In questo capitolo si forniranno esempi volti ad illustrare le differenze di comportamento tra i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi e i $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, nella Sezione 1 con riferimento agli spezzamenti dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, nella Sezione 2 con riferimento al Teorema di Butler ([Bu65], [DVM16]). Inoltre, si mostrerà come l'interpretazione della tenda come ipergrafo sia ancora di aiuto nel costruire immersioni in un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo completamente decomponibile.

1. Spezzamenti dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, $n \geq 2$

Come visto nella Sezione 4 del Cap. 2, il problema delle decomposizioni dirette dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi è ampiamente risolto, ed in maniera costruttiva. Quale che sia la sua rappresentazione, è facile decidere se un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo è indecomponibile; se invece è decomponibile esso — secondo la locuzione precedentemente introdotta — *spezza su un elemento* della base, in due addendi diretti che sono a loro volta $\mathbf{B}(1)$ -gruppi. Una decomposizione in addendi diretti indecomponibili si ottiene con un algoritmo che itera il procedimento.

La situazione è ben diversa per i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, con $n \geq 2$: stabilire in generale se un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo è indecomponibile è un problema aperto. Rari sono in letteratura i risultati riguardanti spezzamenti o indecomponibilità di $\mathbf{B}(n)$ -gruppi anche solo per $n = 2$, che siano invarianti per isoscenismo, ed ancora più rari sono analoghi risultati per i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi con $n \geq 3$.

Sono note solo alcune condizioni sufficienti all'indecomponibilità dei $\mathbf{B}(2)$ -gruppi, tuttavia legate alle loro rappresentazioni. Come pure dalle rappresentazioni dipendono alcuni teoremi di spezzamento relativi ai $\mathbf{B}(2)$ -gruppi ottenuti da De Vivo e Metelli. Tra questi ultimi si riporta solo un interessante teorema sui $\mathbf{B}(2)$ -gruppi che spezzano su due elementi della base (cfr. [DVM13]). Per altri risultati si rinvia alla Bibliografia (cfr. [DVM10], [DVM12]).

1.1. Un teorema di spezzamento. Il preannunciato risultato di De Vivo e Metelli è il seguente:

TEOREMA 9. Sia G un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo dato, a meno di isoscenismi, da una $(m, 2)$ -tenda t :

$$\begin{aligned} G &= \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_m \rangle_* \\ g_{A_1} + \cdots + g_{A_k} &= 0 \\ \alpha_1 g_{A_1} + \cdots + \alpha_k g_{A_k} &= 0 \end{aligned}$$

con $2 \leq k \leq m$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a due a due distinti. Allora G spezza su due elementi g_{i_1}, g_{i_2} della base appartenenti a sezioni distinte — e senza ledere la generalità si può supporre $i_1 \in A_1, i_2 \in A_k$ — in una somma diretta

$$G = G_E \oplus G_F$$

se e solo se esiste una tripartizione $\{\{i_1, i_2\}, E, F\}$ di $I = \{1, \dots, m\}$ che verifica le proprietà seguenti, in relazione alla tenda di G :

- i. p è un primo di t_{i_1} se e solo se per lo zero-blocco $Z(p)$ di p vale una delle inclusioni seguenti
 - $Z(p) \subseteq E \cup A_k$
 - $Z(p) \subseteq F \cup A_k$
 - $Z(p) \subseteq (E \cap A_j) \cup (F \cap A_{j'})$, con $j \neq j'$ e $j, j' \neq k$
- ii. p è un primo di t_{i_k} se e solo se per lo zero-blocco $Z(p)$ di p vale una delle inclusioni seguenti
 - $Z(p) \subseteq E \cup A_1$
 - $Z(p) \subseteq F \cup A_1$
 - $Z(p) \subseteq (E \cap A_j) \cup (F \cap A_{j'})$, con $j \neq j'$ e $j, j' \neq 1$

Per la dimostrazione, non difficile ma piuttosto articolata, si rinvia al citato articolo. Qui ci si limita ad illustrare la situazione con due esempi significativi, che mettono in luce il ruolo fondamentale che gioca la partizione-base.

ESEMPIO 10. Sia $m = 6$ e partizione base $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$. Senza ledere la generalità si può supporre che sia

$$\begin{aligned} G &= \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_6 \rangle_* \\ g_1 + \cdots + g_6 &= 0 \\ g_{3,4} - g_{5,6} &= 0. \end{aligned}$$

La matrice delle relazioni è allora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

quindi gli zero-blocchi consentiti per la tenda di G sono gli insiemi della partizione base,

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\},$$

gli 8 insiemi che si ottengono da questi scegliendo un elemento in ogni partizione, ed infine tutti quelli che si ottengono per operazione di unione dai precedenti.

Si impone che G spezzi su g_1 e g_6 nella somma diretta

$$G = G_{\{2,3\}} \oplus G_{\{4,5\}}$$

scegliendo cioè $E = \{2, 3\}, F = \{4, 5\}$. Il Teorema 9 fornisce le seguenti restrizioni per gli zero-blocchi dei primi che non contengono 1 e che non contengono 6:

- se $1 \notin Z(p)$ allora dev'essere $Z(p) \subseteq \{2, 3, 5, 6\}$;
- se $6 \notin Z(p)$ allora dev'essere $Z(p) \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$.

Si ottiene così la seguente (6, 2)-tenda

$t_1 =$	p_1	q_1	r_1	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\dots	\dots	\dots	\bullet
$t_2 =$	\bullet	\bullet	r_1	\bullet	q_6	\bullet					
$t_3 =$	\bullet	\bullet	r_1	p_6	q_6	r_6					
$t_4 =$	p_1	q_1	r_1	\bullet	\bullet	r_6					
$t_5 =$	\bullet	q_1	\bullet	\bullet	\bullet	r_6					
$t_6 =$	\bullet	\bullet	\bullet	p_6	q_6	r_6	\bullet	\dots	\dots	\dots	\bullet

dove sono consentiti tutti i primi p con $\{1, 6\} \subseteq Z(p)$ e $Z(p)$ regolare. Tale tenda è quella con il massimo numero di primi avente partizione base $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ e che spezza su g_1, g_6 ; ogni altro gruppo di questo tipo si ottiene da questo cancellando primi.

In realtà si può osservare che con le condizioni imposte, G_E e G_F si decompongono ulteriormente, ed il gruppo G risulta completamente decomponibile:

$$G = \langle g_2 \rangle_* \oplus \langle g_3 \rangle_* \oplus \langle g_4 \rangle_* \oplus \langle g_5 \rangle_*$$

ESEMPIO 11. Sia $m = 8$ e partizione base $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7, 8\}\}$ cioè, senza ledere la generalità,

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_8 \rangle_*$$

$$g_1 + \dots + g_8 = 0$$

$$\alpha_1 g_{1,2} + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 + \alpha_5 g_5 + \alpha_6 g_6 + \alpha_7 g_{7,8} = 0.$$

con gli α_i a due a due distinti, e matrice delle relazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_7 \end{bmatrix}.$$

Se si impone che G spezzi su g_1 e g_8 nella somma diretta

$$G = G_{\{2,3,4\}} \oplus G_{\{5,6,7\}},$$

gli zero blocchi $Z(p)$ consentiti per i primi della tenda sono tutti e soli i seguenti:

$$\begin{aligned} &\{2, 3, 4\}, \quad \{5, 6, 7\}, \quad \{7, 8\}, \quad \{5, 6, 8\}, \quad \{3, 4, 8\}, \quad \{2, 3, 8\}, \\ &\{2, 4, 8\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 3, 4\}, \quad \{1, 5, 6\}, \quad \{1, 5, 7\}, \quad \{1, 6, 7\}, \end{aligned}$$

e tutti gli insiemi regolari contententi $\{1, 8\}$.

Così la tenda di G con il massimo numero di primi è la seguente

$t_1 =$	p	q	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\dots	\bullet	
$t_2 =$	\bullet	q	p_1	p_2	p_3	\bullet	\bullet	\bullet	p_7	p_8	p_9	p_{10}	\bullet			
$t_3 =$	\bullet	q	p_1	p_2	\bullet	p_4	\bullet	p_6	\bullet	p_8	p_9	p_{10}	r			
$t_4 =$	\bullet	q	p_1	p_2	\bullet	\bullet	p_5	p_6	\bullet	p_8	p_9	p_{10}	r			
$t_5 =$	p	\bullet	p_1	\bullet	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	\bullet	\bullet	p_{10}	r			
$t_6 =$	p	\bullet	p_1	\bullet	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	\bullet	p_9	\bullet	r			
$t_7 =$	p	\bullet	\bullet	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	\bullet	\bullet	\bullet			
$t_8 =$	p	q	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	\bullet	\bullet	\dots	\bullet

dove sono consentiti tutti i primi p con $\{1, 8\} \subseteq Z(p)$ e $Z(p)$ regolare.

Gli addendi diretti, a loro volta, sono:

$$G_{\{2,3,4\}} = \langle g_2 \rangle_* + \langle g_3 \rangle_* + \langle g_4 \rangle_* + \langle -g_{2,3,4} \rangle_*$$

con tenda

$$\begin{array}{l} t_2 = \bullet \ q \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet \end{array} \right| \bullet \ p_7 \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \dots \end{array} \right. \\ t_3 = \bullet \ q \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \bullet & p_4 & \bullet \end{array} \right| p_6 \ \bullet \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ \left| \begin{array}{c} r \\ \dots \end{array} \right. \\ t_4 = \bullet \ q \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \bullet & \bullet & p_5 \end{array} \right| p_6 \ \bullet \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ \left| \begin{array}{c} r \\ \dots \end{array} \right. \\ t_G(g_{2,3,4}) = p \ q \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right| \bullet \ \bullet \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \dots \end{array} \right. \end{array}$$

e

$$G_{\{5,6,7\}} = \langle g_5 \rangle_* + \langle g_6 \rangle_* + \langle g_7 \rangle_* + \langle -g_{5,6,7} \rangle_*$$

con tenda

$$\begin{array}{l} t_5 = p \ \bullet \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & \bullet & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \right| p_6 \ p_7 \ \bullet \ \bullet \ p_{10} \ \left| \begin{array}{c} r \\ \dots \end{array} \right. \\ t_6 = p \ \bullet \ \left| \begin{array}{cccc} p_1 & \bullet & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \right| p_6 \ p_7 \ \bullet \ p_9 \ \bullet \ \left| \begin{array}{c} r \\ \dots \end{array} \right. \\ t_7 = p \ \bullet \ \left| \begin{array}{cccc} \bullet & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \right| p_6 \ p_7 \ p_8 \ \bullet \ \bullet \ \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \dots \end{array} \right. \\ t_G(g_{5,6,7}) = p \ q \ \left| \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \right| p_6 \ p_7 \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \dots \end{array} \right. \end{array}$$

Si osservi che i due addendi diretti $G_{\{2,3,4\}}$ e $G_{\{5,6,7\}}$ risultano indecomponibili con le tende su mostrate, dunque non è possibile ulteriormente decomporre il gruppo. D'altra parte se si cancellano opportunamente primi è possibile ottenere gruppi $G = G_{\{2,3,4\}} \oplus G_{\{5,6,7\}}$ i cui addendi diretti sono (ciascuno o entrambi) ulteriormente decomponibili, o anche completamente decomponibili.

1.2. Ruolo della matrice delle relazioni. Una delle maggiori difficoltà alla soluzione dei problemi di spezzamento risiede nel fatto che un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo dato mediante una (m, n) -tenda a meno di isocscenismi può essere indecomponibile o decomponibile a seconda delle entrate della matrice delle relazioni che lo rappresenta, indipendentemente dalle sue (infinite) realizzazioni concrete.

Infatti la matrice delle relazioni da un lato influenza la tenda, ovvero i primi ammissibili, tramite i suoi insiemi dipendenti minimali di colonne che intervengono nelle condizioni di n -regolarità; e d'altra parte influisce direttamente sul typeset del $\mathbf{B}(n)$ -gruppo, consentendo o vietando la presenza in esso di particolari tipi, circostanza che a sua volta può determinare la decomponibilità o l'indecomponibilità del gruppo.

Tale situazione può presentarsi anche solo per $n = 2$, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 12. Sia

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_6 \rangle_*$$

un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo con matrice delle relazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$$

con gli α_i a due a due distinti e non nulli, e tenda

$$\begin{array}{cccc} t_1 = & q_1 & q_2 & \bullet & \bullet \\ t_2 = & \bullet & \bullet & q_3 & q_4 \\ \hline t_3 = & \bullet & q_2 & \bullet & q_4 \\ t_4 = & \bullet & q_2 & q_3 & \bullet \\ \hline t_5 = & q_1 & \bullet & \bullet & q_4 \\ t_6 = & q_1 & \bullet & q_3 & \bullet \end{array}$$

Si è visto (cfr. Esempio 1) che il tipo $\sigma = q_1q_2q_3q_4$ appartiene al typeset se e solo se

$$(11) \quad \alpha_3\alpha_4\alpha_5 - \alpha_3\alpha_4\alpha_6 - \alpha_3\alpha_5\alpha_6 + \alpha_4\alpha_5\alpha_6 = 0$$

e che, se vale la (11), allora

$$\sigma = t_G(g_0)$$

dove

$$g_0 = \beta(\alpha_3\alpha_5\alpha_1 + \alpha_5(\alpha_3 - \alpha_5)g_5 + \alpha_6(\alpha_3 - \alpha_5)g_6) \quad (\beta \neq 0).$$

D'altro canto è immediato osservare che, a meno di quasi isomorfismi, si ha

$$G_{\{3,4,5,6\}} = \langle \alpha_3g_3 \rangle_* + \langle \alpha_4g_4 \rangle_* + \langle \alpha_5g_5 \rangle_* + \langle \alpha_6g_6 \rangle_*,$$

che è un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo indecomponibile, come si evince dalla sua tenda, che si ottiene da quella di G sopprimendo le prime due righe:

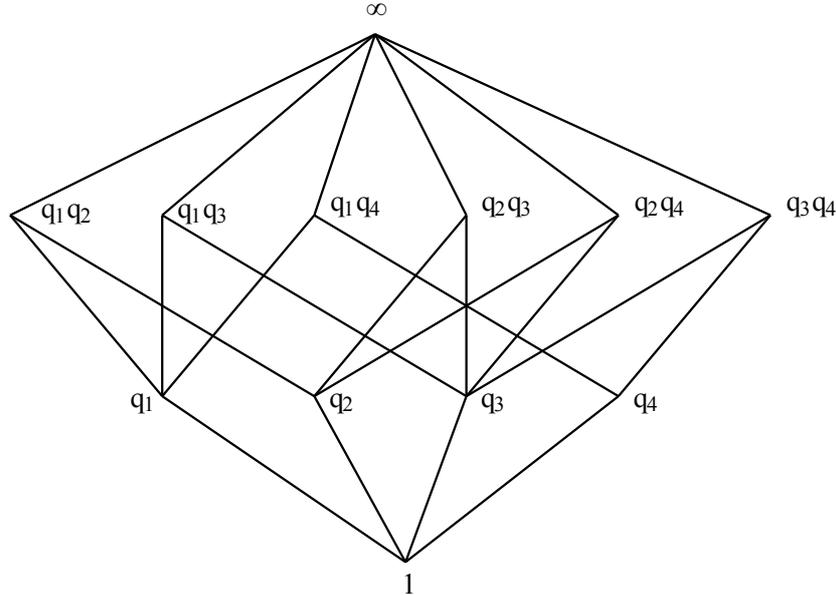
$$\begin{array}{cccc} t_3 = & \bullet & q_2 & \bullet & q_4 \\ t_4 = & \bullet & q_2 & q_3 & \bullet \\ t_5 = & q_1 & \bullet & \bullet & q_4 \\ t_6 = & q_1 & \bullet & q_3 & \bullet \end{array}.$$

Così, se vale la (11), è facile verificare che

$$G = \langle g_0 \rangle_* \oplus G_{\{3,4,5,6\}}$$

spezza “su g_1 e g_2 ” nella somma diretta di un gruppo di rango 1 e di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo indecomponibile di rango 3.

Se invece non vale la (11), allora G è indecomponibile, perché $G(t_i) = \langle g_i \rangle_*$, per ogni $i = 3, \dots, 6$; il typeset di G è allora:



Giova osservare che, come mostra l'esempio, quando $n \geq 2$ il reticolo $(T(G), \vee, \gamma)$ e di conseguenza le proprietà strutturali di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo G non sono in generale invarianti per isocenismi, perché possono essere legati ad ipersuperfici dello spazio proiettivo $PS(m - 1, \mathbb{R})$, in particolare all'appartenenza o meno a tali ipersuperfici dei punti (a coordinate razionali) $[\alpha_{l,1}, \dots, \alpha_{l,m}]$ con $l = 1, \dots, n$, righe della matriche delle relazioni che rappresentano G . Nell'esempio interviene l'ipersuperficie in $PS(5, \mathbb{R})$ di equazioni:

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_3\xi_4\xi_5 - \xi_3\xi_4\xi_6 - \xi_3\xi_5\xi_6 + \xi_4\xi_5\xi_6 = 0. \end{cases}$$

Tale circostanza evidenzia alcune delle difficoltà che si presentano nello studio dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi, per $n \geq 2$. Nella letteratura ci sono alcuni risultati parziali sul typeset dei $\mathbf{B}(n)$ -gruppi e in particolare su quello dei $\mathbf{B}(2)$ -gruppi. La loro trattazione richiederebbe lunghe e laboriose premesse e, d'altra parte, esula dagli scopi di queste note. Per tali risultati si rinvia pertanto alla Bibliografia (cfr [DVM11], [DVM14]).

1.3. Numero degli elementi su cui un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo spezza. Una ulteriore differenza di comportamento dei gruppi di Butler di grado $n \geq 2$ rispetto ai $\mathbf{B}(1)$ -gruppi consiste nel fatto che non è detto che un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo decomponibile spezzi su al più n elementi di una sua base, come invece accade nel caso dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi. Tale circostanza mostra pertanto che il Teorema 9 descrive un tipo di comportamento molto particolare nella classe dei $\mathbf{B}(2)$ -gruppi.

In generale il numero di elementi della base, su cui spezza un gruppo di Butler decomponibile di grado $n \geq 2$ dipende dalle sue rappresentazioni come $\mathbf{B}(n)$ -gruppo. Fornisco qui di seguito alcuni esempi che mettono in luce tale circostanza.

ESEMPIO 13. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_6 \rangle_*$ un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo con le relazioni

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 = 0$$

$$g_3 + g_4 - g_5 - g_6 = 0$$

e tenda

$$\begin{array}{rcccccc} t_1 = & p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_2 = & p_1 & \bullet & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet \\ \hline t_3 = & \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_4 = & \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ \hline t_5 = & \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_6 = & \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \end{array}$$

Si ha

$$g_{1,2} = -2g_{3,4} = -2g_{5,6}$$

e quindi

$$t_G(g_{1,2}) = p_1 p_2 p_3.$$

Ne segue, ovviamente:

$$G = \langle g_{1,2} \rangle_* \oplus G_{\{2,4,6\}}$$

sicché G spezza sui 3 elementi della base g_1, g_3, g_5 . D'altra parte è immediato verificare che

$$G(p_1 p_2 p_3) = \langle g_{1,2} \rangle_*$$

e che $G(t_i) = \langle g_i \rangle_*$ per $i = 2, 4, 6$ e che

$$G = \langle g_2, g_4, g_6, g_j \rangle_* \quad \text{per ogni } j = 1, 3, 5.$$

Ne segue che

$$G = \langle g_{1,2} \rangle_* \oplus \langle g_2 \rangle_* \oplus \langle g_4 \rangle_* \oplus \langle g_6 \rangle_*$$

è completamente decomponibile e non possiede alcun'altra rappresentazione non triviale come $\mathbf{B}(2)$ -gruppo regolare distinta da quella originaria (a meno di permutazione degli indici $\{1, \dots, 6\}$).

Giova osservare che, come ogni gruppo completamente decomponibile ($\mathbf{B}(0)$ -gruppo), G possiede le seguenti rappresentazioni triviali come $\mathbf{B}(1)$ -gruppo e come $\mathbf{B}(n)$ -gruppo, per ogni $n \geq 2$, le quali danno spezzamenti su esattamente n elementi della base. Posto

$$h_1 = g_{1,2}, \quad h_2 = g_2, \quad h_3 = g_4, \quad h_4 = g_6, \quad h_5 = -(h_1 + h_2 + h_3 + h_4),$$

si ottiene la seguente rappresentazione di G come $\mathbf{B}(1)$ -gruppo:

$$G = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_5 \rangle_*$$

$$h_1 + \dots + h_5 = 0$$

e tenda:

$$\begin{array}{rcccccc} t(h_1) = & p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t(h_2) = & p_1 & \bullet & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet \\ t(h_3) = & \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ t(h_4) = & \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ t(h_5) = & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

la quale da spezzamento su h_5 .

Per $n \geq 2$ si ponga per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$h_{i+4} = \sum_{j=1}^4 \beta_{i,j} h_j$$

con la condizione $\sum_{i=1}^n \beta_{i,j} = -1, \forall j = 1, 2, 3, 4$ (che fornisce la relazione diagonale $\sum_{j=1}^n h_j = 0$).

Si ha, ovviamente:

$$G = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_4 \rangle_* + \langle h_5 \rangle_* + \cdots + \langle h_{4+n} \rangle_*$$

con le relazioni indipendenti

$$\sum_{j=1}^4 \beta_{i,j} h_j - h_{4+i} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

così G è rappresentato come $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare, che spezza sugli n elementi h_5, \dots, h_{4+n} della base. La tenda di tale rappresentazione dipende dalla scelta dei $\beta_{i,j}$.

Ad esempio, per $n = 2$, scegliendo

$$h_5 = 2h_1 - h_2, \quad h_6 = -3h_1 - h_3 - h_4,$$

si ottiene la seguente rappresentazione di G (come $\mathbf{B}(2)$ -gruppo):

$$G = \langle h_1 \rangle_* + \cdots + \langle h_6 \rangle_*$$

con le relazioni

$$\begin{aligned} h_1 + \cdots + h_6 &= 0 \\ 2h_1 - h_2 - h_5 &= 0 \end{aligned}$$

e tenda

$$\begin{array}{l} t(h_1) = \begin{array}{ccccccc} p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline p_1 & \bullet & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet \\ p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ t(h_2) = \begin{array}{ccccccc} p_1 & \bullet & \bullet & q_2 & \bullet & \bullet \\ \hline p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ t(h_3) = \begin{array}{ccccccc} p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline p_1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ t(h_4) = \begin{array}{ccccccc} \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ t(h_5) = \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & \bullet & q_6 \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \\ t(h_6) = \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \end{array}$$

ESEMPIO 14. L'ultimo esempio riguarda un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo che spezza su 3 elementi della base e che non possiede alcuna rappresentazione in cui il gruppo spezzi su 2 elementi della base.

Sia

$$G = \langle g_1 \rangle_* + \cdots + \langle g_9 \rangle_*$$

un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo con le relazioni

$$\begin{aligned} g_1 + \cdots + g_9 &= 0 \\ g_{4,5,6} - g_{7,8,9} &= 0 \end{aligned}$$

e tenda

$$\begin{array}{l} t_1 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & \bullet & s_1 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_2 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & p_2 & s_1 & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & s_2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_3 = \begin{array}{cccccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & s_3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline t_4 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & \bullet & \bullet & q_1 & s_4 & \bullet & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_5 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & p_2 & \bullet & q_1 & s_4 & \bullet & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & s_5 & \bullet & \bullet \\ t_6 = \begin{array}{cccccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet & s_6 & \bullet & \bullet \\ \hline t_7 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & s_7 & \bullet \\ t_8 = \begin{array}{cccccccccccc} p_1 & p_2 & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & s_7 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_8 & \bullet \\ t_9 = \begin{array}{cccccccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & s_9 \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

È immediato osservare che G spezza sui tre elementi della base g_1, g_4, g_7 nella somma diretta

$$G = G' \oplus G''$$

dove $G' = \langle g_2, g_5, g_8 \rangle_* = \langle g_2 \rangle_* \oplus \langle g_5 \rangle_* \oplus \langle g_8 \rangle_*$ è completamente decomponibile e G'' è il $\mathbf{B}(2)$ -gruppo di rango 4 ed indecomponibile avente per rappresentazione:

$$G'' = \langle g_{1,2} \rangle_* + \langle g_3 \rangle_* + \langle g_{4,5} \rangle_* + \langle g_6 \rangle_* + \langle g_{7,8} \rangle_* + \langle g_9 \rangle_*$$

relazioni

$$g_{1,2} + g_3 + g_{4,5} + g_6 + g_{7,8} + g_9 = 0$$

$$g_{4,5} + g_6 - g_{7,8} - g_9 = 0$$

e tenda:

$$\begin{array}{rccccccccccc} t(g_{1,2}) = & p_1 & s_1 & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t(g_3) = & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & s_3 & \bullet & \bullet \\ \hline t(g_{4,5}) = & p_1 & \bullet & q_1 & s_4 & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t(g_6) = & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & s_6 & \bullet \\ \hline t(g_{7,8}) = & p_1 & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & s_7 & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet \\ t(g_9) = & \bullet & \bullet & q_1 & \bullet & q_4 & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & s_9 \end{array}$$

È altresì facile verificare che G non spezza né su uno né su due elementi della base.

D'altro canto tutti i tipi della base di G sono tipi Primi, precisamente t_i è relativo al Primo s_i , per $i = 1, \dots, 9$ e

$$G(t_i) = \langle g_i \rangle_*, \quad \forall i \neq 1, 4, 7$$

$$G(t_1) = \langle g_1, g_2 \rangle_*$$

$$G(t_4) = \langle g_4, g_5 \rangle_*$$

$$G(t_7) = \langle g_7, g_8 \rangle_*$$

È infine facile verificare che tale circostanza comporta che ogni altra rappresentazione di G come $\mathbf{B}(2)$ -gruppo non comporta un cambio di tenda, da cui segue che G non possiede alcuna rappresentazione con $\mathbf{B}(2)$ -gruppo che spezzi su al più due elementi della base.

Tuttavia è possibile fornire rappresentazioni di G come $\mathbf{B}(3)$ -gruppo che spezza su al più 3 elementi della base; in particolare quando si ponga

$$h_i = g_i \quad \forall i \neq 1, 4, 7, 10$$

$$h_1 = g_{1,2}, \quad h_4 = g_{4,5}, \quad h_7 = g_{7,8}, \quad h_{10} = -(g_2 + g_5 + g_8)$$

si ottiene la seguente rappresentazione di G . Si osservi che la seconda relazione è semplicemente quella di partenza, riscritta in termini dei nuovi generatori h_i :

$$G = \langle h_1 \rangle_* + \dots + \langle h_{10} \rangle_*$$

$$h_1 + \dots + h_{10} = 0$$

$$h_4 + h_6 - h_7 - h_9 = 0$$

$$h_2 + h_5 + h_8 + h_{10} = 0$$

con tenda

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{t}(h_1) = p_1 \quad \bullet \quad s_1 \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_3) = \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad s_3 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\hline
\mathfrak{t}(h_2) = p_1 \quad p_2 \quad s_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad s_2 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_5) = p_1 \quad p_2 \quad \bullet \quad q_1 \quad s_4 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad s_5 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_8) = p_1 \quad p_2 \quad \bullet \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad s_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad s_8 \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_{10}) = p_1 \quad p_2 \quad \bullet \\
\hline
\mathfrak{t}(h_4) = p_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_1 \quad s_4 \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_6) = \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad s_6 \quad \bullet \\
\hline
\mathfrak{t}(h_7) = p_1 \quad \bullet \quad \bullet \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad s_7 \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
\mathfrak{t}(h_9) = \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad q_1 \quad \bullet \quad q_4 \quad \bullet \quad q_7 \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad s_9
\end{array}$$

In questo modo, G spezza sull'elemento h_{10} della base:

$$G = (\langle h_2 \rangle_* \oplus \langle h_5 \rangle_* \oplus \langle h_8 \rangle_*) \oplus (\langle h_1 \rangle_* + \langle h_3 \rangle_* + \langle h_4 \rangle_* + \langle h_6 \rangle_* + \langle h_7 \rangle_* + \langle h_9 \rangle_*).$$

È chiaro che la possibilità di rappresentare un $\mathbf{B}(2)$ -gruppo come $\mathbf{B}(n)$ -gruppo per $n \geq 3$ rende difficili i problemi di caratterizzazione dell'indecomponibilità dei $\mathbf{B}(2)$ -gruppi e delle loro modalità di spezzamento su n o meno elementi; al punto degli studi, pertanto, mentre lo studio dei cambi-base dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi è stato portato a compimento con successo e con varietà di strumenti e tecniche, il corrispettivo studio per i $\mathbf{B}(n)$ -gruppi sembra ancora sfuggire a qualsiasi tipo di approccio.

2. Il teorema di Butler

Come si è detto nell'Introduzione, i gruppi di Butler possono essere definiti anche come sottogruppi puri di completamente decomponibili:

TEOREMA 10 (Teorema di Butler ([Bu65], 1965)). *Per un gruppo G sono equivalenti le affermazioni seguenti:*

- (1) G è immagine omomorfa di un gruppo completamente decomponibile;
- (2) G è isomorfo a un sottogruppo puro di un gruppo completamente decomponibile.

La dimostrazione fornita da Butler non è costruttiva; per ottenerla si usa infatti una terza definizione di gruppi di Butler, che si colloca in un ambito di algebra universale.

Successivamente sono state fornite varie dimostrazioni del teorema di Butler con approcci abbastanza simili tra loro, che sono essenzialmente quelli esposti in [A] (Sez. 3.2, Theorem 3.2.2). Tali dimostrazioni si basano sulla esistenza di opportuni supporti minimali o cosupporti massimali di elementi di un gruppo di Butler G , a seconda che G sia considerato come sottogruppo puro o come immagine omomorfa di un gruppo completamente decomponibile; le tecniche dimostrative sono abbastanza complesse. Tuttavia anche tali dimostrazioni non sono costruttive, perché in esse non viene indicato alcun procedimento che consenta un calcolo effettivo di siffatti (co)supporti.

Recentemente una dimostrazione costruttiva del teorema di Butler è stata fornita da C. De Vivo e C. Metelli, con particolare riguardo all'implicazione (1) \Rightarrow (2) ([DVM16]). Qui di seguito si riporta il risultato a

grandi linee, corredandolo con alcuni esempi, rimandando all'articolo per la dimostrazione, che è notevolmente articolata.

Come contributo personale fisserò l'attenzione sul caso dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, mostrando come il problema della loro immersione possa essere approcciato mediante la teoria dei grafi.

2.1. Immersioni di un gruppo di Butler in un gruppo completamente decomponibile.

Sia $\mathbf{A} = [\alpha_{l,i}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ una matrice $n \times m$ su \mathbb{Q} , con $n \leq m$ e di rango (massimo) n . Sia $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_h\}$ la partizione $I = \{1, \dots, m\}$ detta "partizione-base" e definita dal mettere in uno stesso blocco gli indici a cui corrispondono colonne uguali. Con le notazioni e le convenzioni fin qui adottate (cfr. Cap. 1) i sottoinsiemi regolari di I sono detti insiemi "Primi" e sono tutte e sole le unioni degli insiemi regolari minimali — determinati mediante (e, con abuso di linguaggio, identificati con) gli insiemi di colonne di \mathbf{A} che siano dipendenti minimali. Siano essi F_1, \dots, F_r e siano $F_1, \dots, F_r, F_{r+1}, \dots, F_k$ le loro unioni distinte e distinte¹ da I : essi sono detti *i sottoinsiemi regolari di I rispetto ad \mathbf{A}* .

Scelto un insieme $\{q_{F_1}, \dots, q_{F_r}, q_{F_{r+1}}, \dots, q_{F_k}\}$ di numeri primi, si consideri la (m, n) -tenda $t := t[\mathbf{A}]$ le cui sezioni sono i blocchi di \mathcal{A} e le cui colonne sono le funzioni caratteristiche degli F_j^{-1} ($j \in J = \{1, \dots, k\}$) cioè lo zero-blocco del primo q_{F_j} è F_j :

$$Z_t(q_{F_j}) = F_j \quad (j \in J),$$

così che la i -ma riga t_i di t può essere identificata con il prodotto dei primi q_{F_j} tali che $i \notin F_j$:

$$t_i = \prod \{q_{F_j} \mid i \notin F_j\} \quad (i \in I = \{1, \dots, m\}).$$

È chiaro che la (m, n) -tenda $t[\mathbf{A}]$ rappresenta, a meno di isoscenismi, il $\mathbf{B}(n)$ -gruppo regolare² $G[\mathbf{A}] = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$ di rango $m - n$, la cui matrice delle relazioni è \mathbf{A} (o una equivalente ad \mathbf{A})

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{l,i} g_i = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

e la cui base di tipi è (t_1, \dots, t_m) :

$$t_{G[\mathbf{A}]}(g_i) = t_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

D'altro canto, se dalla tenda $t[\mathbf{A}]$ si cancellano primi (si elimina un insieme di colonne), si ottengono tutte e sole le (m, n) -tende che rappresentano (a meno di isoscenismi) un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo di rango $m - n$, la cui matrice delle relazioni è \mathbf{A} (o una equivalente ad \mathbf{A}), ove si ricordi che i primi "consentiti" da \mathbf{A} sono tutti e soli i sottoinsiemi di I regolari rispetto ad \mathbf{A} .

Per maggiore chiarezza di esposizione si danno alcuni esempi.

ESEMPIO 15. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

¹L'insieme regolare I viene di solito ommesso.

²N.B.: in [DVM16] $G[\mathbf{A}]$ viene denotato con W_{tot} ($\mathbf{B}(n)$ -gruppo totale), sopprimendo l'indicazione di \mathbf{A} e usando W invece di G .

con α_4, α_5 distinti e distinti da 0 e 1; la partizione base è $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
Gli insiemi di colonne dipendenti minimali di \mathbf{A} sono:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{1, 2\}, & F_2 &= \{1, 3, 4\}, & F_3 &= \{1, 3, 5\}, \\ F_4 &= \{1, 4, 5\}, & F_5 &= \{2, 3, 4\}, & F_6 &= \{2, 3, 5\}, \\ F_7 &= \{2, 4, 5\}, & F_8 &= \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

La tenda $t[\mathbf{A}]$ è la seguente³.

$$\begin{array}{cccccccc|cccc} t_1 = & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & q_{13} \\ t_2 = & \bullet & & q_{\{1,3,4\}} & q_3 & q_4 & \bullet & \bullet & \bullet & q_8 & \bullet & \bullet & \bullet & q_{12} & \bullet \\ \hline t_3 = & q_{\{1,2\}} & & \bullet & \bullet & q_4 & \bullet & \bullet & q_7 & \bullet & \bullet & \bullet & q_{11} & \bullet & \bullet \\ \hline t_4 = & q_{\{1,2\}} & & \bullet & q_3 & \bullet & \bullet & q_6 & \bullet & \bullet & \bullet & q_{10} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline t_5 = & q_{\{1,2\}} & & q_{\{1,3,4\}} & \bullet & \bullet & q_5 & \bullet & \bullet & \bullet & q_9 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

e rappresenta, a meno di isoscenismi, il $\mathbf{B}(2)$ -gruppo $G[\mathbf{A}] = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_5 \rangle_*$, con le relazioni

$$\begin{aligned} g_1 + \dots + g_5 &= 0 \\ g_3 + \alpha_4 g_4 + \alpha_5 g_5 &= 0 \end{aligned}$$

e base di tipi (t_1, \dots, t_5) .

Se dalla tenda $t[\mathbf{A}]$ si eliminano tutti i primi salvo $q_{\{1,2\}}$, $q_8 = q_{\{3,4,5\}}$ si ottiene la tenda t' :

$$\begin{array}{cccc} t'_1 = & \bullet & & q_{\{3,4,5\}} \\ t'_2 = & \bullet & & q_{\{3,4,5\}} \\ \hline t'_3 = & q_{\{1,2\}} & & \bullet \\ t'_4 = & q_{\{1,2\}} & & \bullet \\ \hline t'_5 = & q_{\{1,2\}} & & \bullet \end{array}$$

che rappresenta un altro $\mathbf{B}(2)$ -gruppo $G' = \langle g'_1 \rangle + \dots + \langle g'_5 \rangle$ con base di tipi (t'_1, \dots, t'_5) e matrice delle relazioni \mathbf{A} . Non appare superfluo osservare che G' possiede anche rappresentazioni come $\mathbf{B}(1)$ -gruppo, ad es. la seguente:

$$\begin{aligned} G' &= \langle h_1 \rangle + \langle h_2 \rangle + \langle h_3 \rangle + \langle h_4 \rangle \\ h_1 + \dots + h_4 &= 0 \end{aligned}$$

e tenda

$$\begin{aligned} t(h_1) &= t'_1 \\ t(h_2) &= t'_2 \\ t(h_3) &= t'_4 \\ t(h_4) &= t'_5 \end{aligned}$$

che si ottiene da t' sopprimendo la terza riga e eliminando le sezioni. Basta infatti porre:

$$h_1 = g'_1, \quad h_2 = g'_2, \quad h_3 = (1 - \alpha_4)g'_4, \quad h_4 = (1 - \alpha_5)g'_5$$

per osservare subito che il tipo mancante t'_3 è presente in quanto

$$t'_3 = t_{G'}(g'_3) = q_{\{1,2\}} = t_{G'}(-\alpha_4 g'_4 - \alpha_5 g'_5) = t'_4 \wedge t'_5 = t(h_3) \wedge t(h_4).$$

³In [DVM16] i primi vengono indicati nel loro zero-blocco. Qui solo per ragioni tipografiche è stato fatto solo per le prime due colonne. La linea verticale è solo per indicare l'insieme dei Primi corrispondenti ai F_1, \dots, F_8 , alla sua sinistra, e le loro unioni sulla destra

Si badi bene che, a differenza di quanto accade per G' , la presenza in $t[\mathbf{A}]$ di tutti i primi consentiti da \mathbf{A} non permette di rappresentare $G[\mathbf{A}]$ come $\mathbf{B}(1)$ -gruppo.

ESEMPIO 16. Sia $\mathbf{A} = \Delta_m = [1, \dots, 1]$. In questo caso gli insiemi regolari minimali sono tutti e soli i sottoinsiemi di ordine 2 di $I = \{1, \dots, m\}$ e quindi i primi di $t[\Delta_m]$ sono⁴ tutti i q_X con X generico sottoinsieme proprio di ordine ≥ 2 .

A $G[\Delta_m]$ si darà il nome di $\mathbf{B}(1)$ -gruppo totale: esso è rappresentato, a meno di isoscenismi, da $t[\Delta_m]$, e ogni $\mathbf{B}(1)$ -gruppo di rango $m - 1$ è rappresentato mediante una tenda che si ottiene da $t[\Delta_m]$ cancellando primi.

2.2. Immersioni di un $G[\mathbf{A}]$ in un completamente decomponibile. Si illustra ora il procedimento usato da De Vivo, Metelli [DVM16] che consente di immergere puramente un $G[\mathbf{A}]$ in un gruppo completamente decomponibile.

Sia dunque $\mathbf{A} = [\alpha_{l,j}]_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ una matrice $n \times m$ su \mathbb{Q} di rango $n \leq m$. Siano F_1, \dots, F_r gli insiemi regolari minimali rispetto a \mathbf{A} (cioè gli insiemi di colonne dipendenti minimali di \mathbf{A}) e sia $Y[\mathbf{A}]$ il seguente gruppo completamente decomponibile:

$$Y[\mathbf{A}] := \bigoplus_{j=1}^r L_j y_{F_j} \quad (\mathbb{Z} \leq L_j \leq \mathbb{Q}; \quad j = 1, \dots, r)$$

dove il tipo $u_{F_j} := u_j$ di L_j è il prodotto dei primi q_F di $t[\mathbf{A}]$ tali che, se $F = \cup\{F_{j'} | j' \in J'\}$ con $J' \subseteq J = \{1, \dots, r\}$ allora $j \notin J'$:

$$u_j = t(L_j) = t(y_{F_j}) = \prod \{q_{\cup_{j' \in J'} F_{j'}} | j \notin J'\} \quad (j \in J = \{1, \dots, r\}).$$

In altri termini, nella tenda⁵ di $Y[\mathbf{A}]$ lo zero-blocco di un generico primo è:

$$Z_{Y[\mathbf{A}]}(q_{\cup_{j' \in J'} F_{j'}}) = \{F_{j'} | j' \in J'\}.$$

Descriviamo ora come costruire una matrice $\Omega[\mathbf{A}] = [\omega_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}}$ $m \times r$ su \mathbb{Q} che immerge $G[\mathbf{A}]$ in $Y[\mathbf{A}]$ come sottogruppo puro.

Per ogni $F_j = F$ insieme regolare minimale, il sistema lineare omogeneo nelle incognite $(\xi_i | i \in F_j)$:

$$\text{Sys}(F_j) = \left\{ \sum_{i \in F_j} \alpha_{l,i} \xi_i = 0 \quad l = 1, \dots, n \right.$$

ha ovviamente rango $|F_j| - 1$ e quindi possiede ∞^1 soluzioni $(\rho \bar{\omega}_{i,j} | i \in F_j)$ dove $\rho \neq 0$ e $\bar{\omega}_{i,j} \neq 0$, per ogni $i \in F_j$.

La matrice $\Omega[\mathbf{A}]$ è definita come segue:

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} \bar{\omega}_{i,j} & \text{se } i \in F_j \\ 0 & \text{se } i \notin F_j \end{cases}$$

Il risultato di De Vivo e Metelli è il seguente

⁴Con la solita esclusione di I .

⁵Si osservi che $Y[\mathbf{A}]$ è un completamente decomponibile, quindi nella sua tenda sono consentiti tutti gli zero blocchi, anche quelli singleton.

TEOREMA 11. *L'applicazione*

$$g_i \in G[A] \rightarrow \sum_{j=1}^r \omega_{i,j} y_{F_j} \in Y[A]$$

prolungata per linearità è un monomorfismo $G[A] \hookrightarrow Y[A]$ la cui immagine è un sottogruppo puro di $Y[A]$.

Inoltre se G è un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo la cui tenda si ottiene da quella di $G[A]$ cancellando primi (e la matrice delle relazioni di G è A) allora $\Omega[A]$ immerge puramente G nel gruppo completamente decomponibile Y che si ottiene da $Y[A]$ cancellando i primi eliminati.

Riportiamo, a titolo di illustrazione, la matrice $\Omega[A]$ del precedente Esempio 15; essa va intesa modulo moltiplicatori non nulli sulle colonne.

$$\begin{array}{c} F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \alpha_4 - 1 & \alpha_5 - 1 & \alpha_5 - \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 - 1 & \alpha_5 - 1 & \alpha_5 - \alpha_4 & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \alpha_5 - \alpha_4 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_5 & 1 & 0 & -\alpha_5 & 1 - \alpha_5 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 & 0 & 1 & \alpha_4 & \alpha_4 - 1 \end{array} \right] \end{array}$$

In generale la matrice $\Omega[A]$ che immerge puramente un $\mathbf{B}(n)$ -gruppo G in un gruppo completamente decomponibile Y lascia inalterato il rango $\text{rank } Y[A]$ e quest'ultimo è spesso molto grande rispetto a quello che potrebbe bastare per una immersione di G in un completamente decomponibile (mentre ovviamente $\text{rank } Y[A]$ è necessario per immergere $G[A]$).

Quello di individuare un gruppo completamente decomponibile di rango minimo sotto la condizione di possedere un sottogruppo puro isomorfo ad un assegnato $\mathbf{B}(n)$ -gruppo appare un problema abbastanza difficile da affrontare in generale e non ci sono in letteratura risultati in questo senso. Nella sezione seguente viene descritto un approccio al problema ristretto al caso dei $\mathbf{B}(1)$ -gruppi, ancora con l'ausilio della teoria dei grafi.

2.3. Immersioni di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo di Butler in un gruppo completamente decomponibile. Sia $G = \langle g_1 \rangle_* + \dots + \langle g_m \rangle_*$, $g_1 + \dots + g_m = 0$ un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo. La matrice delle relazioni è $\Delta_m := [1, \dots, 1]$. Allora G si immerge in $Y[\Delta_m]$ mediante la matrice $m \times \binom{m}{2}$

$$\Omega[\Delta_m] = [\omega_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq \binom{m}{2}}}$$

dove, con $j = \{i_1, i_2\} \in \mathcal{P}_2(I)$ e $i_1 \leq i_2$:

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin j \text{ (} i \neq i_1, i_2 \text{)} \\ 1 & \text{se } i = i_1 \\ -1 & \text{se } i = i_2 \end{cases}$$

dove, senza ledere la generalità, si è sostituita la generica soluzione $(\rho, -\rho)$, $\rho \neq 0$ di $\text{Sys}(\{i_1, i_2\})$ con $(1, -1)$.

Ovviamente la tenda $t[\Delta_m]$ di $G[\Delta_m]$ è la "tenda totale" le cui colonne hanno come zero-blocchi tutti i sottoinsiemi di I aventi ordine compreso tra 2 ed $|I|$ (come sempre tra questi si omette I); analogamente, la tenda di $Y[\Delta_m]$ è la tenda totale di un gruppo completamente decomponibile di

rango $\binom{m}{2}$, i cui zero-blocchi sono tutti i sottoinsiemi propri e non vuoti di $I = \{1, \dots, m\}$.

La teoria dei grafi viene anche qui in soccorso, nel fornire un contesto alternativo in cui cercare matrici Ω che immergano un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare in un completamente decomponibile di rango piccolo.

DEFINIZIONE 27. Dato un ipergrafo connesso t su un insieme di vertici I , si chiama *grafo ospite di t* un qualunque grafo \mathcal{G} sullo stesso insieme di vertici I e che goda della proprietà di avere il grafo indotto $\mathcal{G}(C)$ connesso per ogni iperspigo C di t .

Ovviamente \mathcal{G} è connesso, per l'ipotesi di connessione⁶ di t . Al solito, la tenda di un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo sarà riguardata come ipergrafo su I , i suoi iperspighi essendo gli zero-blocchi della tenda. Si ha allora un teorema di immersione, che esprimiamo con l'ausilio della seguente definizione.

DEFINIZIONE 28. Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare dato da una tenda t , e sia \mathcal{G} un grafo ospite di t . Definiamo la matrice $\Omega_{\mathcal{G}}$ associata al grafo ospite \mathcal{G} come la restrizione di $\Omega[\Delta_m]$ alle colonne di indice $j = \{i_1, i_2\} \in \mathcal{P}_2(I)$ con $\{i_1, i_2\}$ spigo di \mathcal{G} .

Si osservi che se si considera la matrice $\overline{\Omega}_{\mathcal{G}}$ quozientata su \mathbb{Z}_2 (nel senso di leggere le sue entrate sul campo \mathbb{Z}_2), allora le sue colonne altro non sono che tutti e soli gli spighi $\{h, k\} \in \mathcal{G}$, rappresentati come m -ple: ad ogni $\{h, k\} \in \mathcal{G}$ corrisponde la colonna che ha 1 come coordinate di posto h e k e zero altrove. La connessione tra le proprietà grafiche e \mathbb{Z}_2 -lineari in $\mathcal{P}_2(I) \subset \mathcal{P}^*(I)$ valgono parimenti per le colonne di $\overline{\Omega}_{\mathcal{G}}$.

TEOREMA 12. *Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo regolare di rango $m - 1$, dato da una tenda t che sia un ipergrafo connesso su $I = \{1, \dots, m\}$. Se \mathcal{G} è un grafo ospite di t , allora $\Omega_{\mathcal{G}}$ determina un'immersione "pura" di G in un gruppo completamente decomponibile $Y_{\mathcal{G}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $Y_{\mathcal{G}}$, codominio dell'immersione, è il sottogruppo puro di

$$Y[\Delta_m] = \oplus \{L_{\{i_1, i_2\}} y_{\{i_1, i_2\}} \mid \{i_1, i_2\} \in \mathcal{P}_2(I)\}$$

ottenuto restringendo la somma diretta agli spighi di \mathcal{G} :

$$Y_{\mathcal{G}} = \oplus \{L_{\{i_1, i_2\}} y_{\{i_1, i_2\}} \mid \{i_1, i_2\} \in \mathcal{G}\}.$$

Ovviamente, il rango di $Y_{\mathcal{G}}$ è il numero di colonne di $\Omega_{\mathcal{G}}$, dunque il numero di spighi di \mathcal{G} , che è almeno $m - 1$ colonne per la connessione di \mathcal{G} .

Il rango di $\Omega_{\mathcal{G}}$ è $m - 1$. Questo deriva dalla Proposizione 14 del Cap. 3. In particolare, essendo \mathcal{G} connesso su I , esso genera $\mathcal{P}^*(I)$ e contiene una base, ovvero un albero (necessariamente con $m - 1$ spighi); l'insieme di colonne che corrispondono a tale albero sono indipendenti su \mathbb{Z}_2 , ed è quindi possibile trovare un minore non nullo di $\overline{\Omega}_{\mathcal{G}}$ in corrispondenza di tale scelta di $m - 1$ colonne, ed opportune $m - 1$ righe. La stessa scelta di colonne e righe per $\Omega_{\mathcal{G}}$ dà allora una sottomatrice necessariamente invertibile su \mathbb{Q} di

⁶La definizione di grafo ospite può essere data anche per ipergrafi non connessi, ma nel seguito non ne avremo bisogno.

rango $m - 1$ (se fosse zero il suo determinante, sarebbe nullo anche il suo determinante su \mathbb{Z}_2).

Rango di $\Omega_{\mathcal{G}}(G(\sigma))$. Sia $\sigma \in T(G)$ il prodotto di primi q_1, \dots, q_r con $\text{part}_t(\sigma) = \{A_1, \dots, A_l\}$ e $\text{rank } G(\sigma) = l - 1$ (vedi Sez. 5 e 7, Cap. 1). Allora per ogni $i = 1, \dots, r$ lo zero-blocco $Z_t(q_i)$ è incluso in un blocco di $\text{part}_t(\sigma)$ e, anzi, i q_1, \dots, q_r sono tutti e soli i primi godenti di tale proprietà⁷. Calcoliamo rango e tipo dell'immagine di $G(\sigma)$ mediante $\Omega_{\mathcal{G}}$.

Poiché $G(\sigma) = \langle g_{A_1}, \dots, g_{A_l} \rangle_*$ e per ogni $s = 1, \dots, l$ è $g_{A_s} := \sum_{k \in A_s} g_k$. Tenendo conto che per ogni $i \in I$,

$$\Omega_{\mathcal{G}}(g_i) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{G}} \omega_{i,j} y_{\{i,j\}},$$

si ha che

$$(12) \quad \Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s}) = \sum_{\substack{i \in A_s, j \notin A_s \\ \{i,j\} \in \mathcal{G}}} \omega_{i,j} y_{\{i,j\}}.$$

In pratica, l'immagine di g_{A_s} corrisponde alla totalità degli spigoli *ponte* $\{i, j\}$ in \mathcal{G} tra A_s e gli altri blocchi di $\text{part}_t(\sigma)$. Per convincersene, basta osservare che nel sommare tutte le immagini dei singoli addendi di $g_{A_s} := \sum_{k \in A_s} g_k$, compaiono esattamente due volte, e con coefficienti opposti 1 e -1 , i generatori $y_{\{i,j\}}$ con $i, j \in A_s$.

È altresì facile, con tale descrizione, rendersi conto che le immagini $\{\Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s}) \mid s = 1, \dots, l\}$ costituiscono un insieme dipendente minimale in $Y_{\mathcal{G}}$. Innanzitutto la loro somma è zero. Si scelga un suo sottoinsieme proprio massimale, e non si lede la generalità se si suppone di prendere $\Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_2}), \dots, \Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_l})$. Si supponga per assurdo dipendente tale insieme di elementi di $Y_{\mathcal{G}}$. Allora esiste una somma

$$(13) \quad \sum_{s=2}^l \alpha_s \Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s}) = 0$$

con coefficienti non tutti nulli.

Tuttavia esiste, per l'ipotesi di connessione della tenda t e, dunque, di \mathcal{G} , almeno uno spigolo $\{h_1, h_2\}$ che è ponte tra A_1 ed uno dei restanti A_s ; ancora non si lede la generalità se si suppone $h_1 \in A_1, h_2 \in A_2$; per come sono definite le immagini nel completamente decomponibile, $y_{\{h_1, h_2\}}$ compare come addendo solo nell'immagine di g_{A_2} . Ne segue che (13) non è nulla se $\alpha_2 \neq 0$; allora, in accordo con le ipotesi per assurdo, dev'essere $\alpha_2 = 0$ e

$$(14) \quad \sum_{s=3}^l \alpha_s \Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s}) = 0,$$

somma zero con coefficienti non tutti nulli. Quindi abbiamo per ipotesi una parte dipendente di ordine $l - 2$.

⁷La cosa può essere precisata nella maniera seguente: se $\sigma' = q_1 \cdots q_{r'}$ e $\mathcal{A} = \text{part}_t(\sigma') \neq \{I, \emptyset\}$, allora è in $T(G)$ non necessariamente σ' ma in generale $\sigma = q_1 \cdots q_{r'} \cdots q_r$ che si ottiene moltiplicando σ' per gli eventuali altri primi detti *ancillari* e definiti dall'aver zero-blocco incluso in un blocco di \mathcal{A} ; ovviamente è anche $\mathcal{A} = \text{part}_t(\sigma)$.

Tuttavia, si può continuare ragionando come prima: per le ipotesi fatte sulla connessione di t , esiste un blocco di $\text{part}_t(\sigma)$ distinto da A_1, A_2 — che senza ledere la generalità si può supporre essere A_3 — che ha un ponte con almeno uno dei precedenti A_1, A_2 . Come prima, si ottiene che (14) non può essere nulla se $\alpha_3 \neq 0$ e si ottiene allora $\alpha_3 = 0$, ed una parte dipendente di ordine $l - 3$.

Il procedimento prosegue fino all'ultimo A_l , la cui immagine è ovviamente indipendente. Ciò porta ad una contraddizione, che è seguita dall'aver supposto $\{\Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s})\}_{s=1, \dots, l}$ dipendente ma non dipendente minimale.

Con ciò segue che $\text{rank } G(\sigma) = l - 1 = \text{rank } \Omega_{\mathcal{G}}(G(\sigma))$.

Tipo delle immagini dei generatori di $G(\sigma)$. Infine si calcoli il tipo di ogni $\Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s})$; con riferimento alla (12), ogni $y_{\{i,j\}}$ è indicato in un ponte di A_s con un altro blocco di $\text{part}_t(\sigma)$, quindi sulla riga $u_{\{i,j\}}$ di $Y_{\mathcal{G}}$ corrisponde 1 in ogni colonna relativa ai primi q_1, \dots, q_s (in quanto gli zero-blocchi in t di tali primi, $Z_t(q_1), \dots, Z_t(q_r)$, sono invece inclusi nei blocchi di $\text{part}_t(\sigma)$). Questo garantisce che il tipo di $\Omega_{\mathcal{G}}(g_{A_s})$ in $Y_{\mathcal{G}}$ è maggiore o uguale di σ .

Se p è un primo $p \not\leq \sigma$, allora $Z_t(p)$ non è incluso⁸ nei blocchi di $\text{part}_t(\sigma)$. Poiché il grafo indotto $\mathcal{G}(Z_t(p))$ è connesso, esiste un $\{i, j\} \in \mathcal{G}(Z_t(p))$ non incluso in un blocco di $\text{part}_t(\sigma)$: allora è $y_{\{i,j\}}$ un ponte tra blocchi $A_s, A_{s'}$ di $\text{part}_t(\sigma)$, che compare come addendo nelle immagini di $g_{A_s}, g_{A_{s'}}$. D'altra parte $u_{\{i,j\}}$ è un tipo avente 0 in corrispondenza della colonna p , e questo garantisce che esiste in $\Omega_{\mathcal{G}}(G(\sigma))$ un elemento il cui tipo è non maggiore di p . Ripetendo il ragionamento per ogni $p \not\leq \sigma$, si ha infine che in $\Omega_{\mathcal{G}}(G(\sigma))$ c'è il tipo σ . In particolare, non è difficile vedere che

$$t_G(g_i) = t_{Y_{\mathcal{G}}}(\Omega_{\mathcal{G}}(g_i)) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Questo assicura anche che $\Omega_{\mathcal{G}}(G)$ è un sottogruppo puro di $Y_{\mathcal{G}}$ □

Si osservi che, mentre l'ipotesi di connessione di t e \mathcal{G} è stata più volte usata, l'ipotesi che il generico zero-blocco $Z_t(q)$ induca un grafo connesso su \mathcal{G} è stata usata solo nell'ultimo punto; senza tale ipotesi l'immagine $\Omega_{\mathcal{G}}(G(\sigma))$ potrebbe avere solo tipi strettamente maggiori di σ .

Non stupirebbe che il teorema si inverta, ovvero che ogni immersione di G come sottogruppo puro di un completamente decomponibile mediante una matrice Ω dia un grafo \mathcal{G}_{Ω} ospite per t , quando si leggano le colonne di Ω come spigoli. In verità, la parte riguardante il rango di Ω si inverte, dando come conseguenza che \mathcal{G}_{Ω} è connesso; e similmente si inverte la parte riguardante il rango dei $G(\sigma)$, dando come conseguenza che per ogni $\text{part}_t(\sigma)$, \mathcal{G} fornisce un numero sufficiente di ponti (ovvero spigoli) che connettono i blocchi di $\text{part}_t(\sigma)$ in un'unica componente connessa. Resta quindi da invertire solo l'ultima parte, mostrando che la connessione di $\mathcal{G}_{\Omega}(Z_t(p))$ per ogni primo p di t sia necessaria per ritrovare i tipi σ in $\Omega(G(\sigma))$.

Il seguente corollario offre una condizione sufficiente alla completa decomponibilità di G in termini di grafi ospiti.

⁸Si veda la nota precedente sui primi ancillari

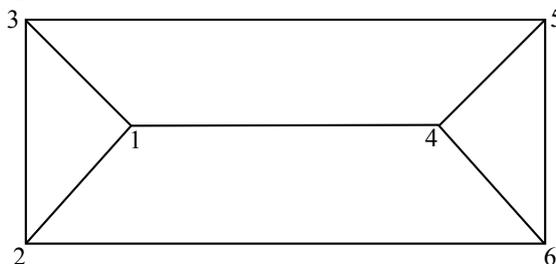
COROLLARIO 7. *Sia G un $\mathbf{B}(1)$ -gruppo la cui tenda t è connessa ed ammette un grafo ospite semplicemente connesso. Allora G è completamente decomponibile.*

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal Teorema precedente, che descrive l'immersione di G in un completamente decomponibile di rango pari al numero di spigoli di \mathcal{G} . Ma dalle ipotesi segue che tale rango è proprio $\text{rank } G - 1$, quindi è G stesso completamente decomponibile. \square

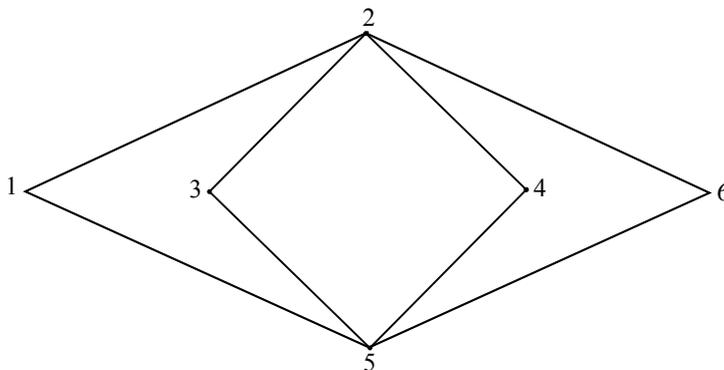
Anche questo corollario diventerebbe una caratterizzazione, qualora si riesca ad invertire il teorema. In ogni caso si osservi che in tal modo il problema risulta solamente spostato di ambito, non essendo evidente — ed essendo anzi la sua ricerca un problema aperto — un algoritmo che fornisca, per un dato ipergrafo, un grafo ospite con minimo numero di spigoli. È banale che la soluzione non può venire da una semplice sottrazione progressiva di spigoli, essendo facile trovare esempi di ipergrafi con grafi ospiti “minimali” (cioè tali che ogni sottoinsieme proprio dell'insieme degli spigoli non ospiti l'ipergrafo), ma che non hanno il minimo numero di spigoli possibile. Si osservi ad esempio la seguente tenda:

$$\begin{array}{cccccccc}
 t_1 = & \bullet & \bullet & \bullet & p_4 & p_5 & \bullet & p_7 & p_8 \\
 t_2 = & \bullet & \bullet & p_3 & \bullet & p_5 & p_6 & \bullet & p_8 \\
 t_3 = & \bullet & p_2 & \bullet & \bullet & p_5 & p_6 & p_7 & \bullet \\
 t_4 = & p_1 & \bullet & p_3 & p_4 & \bullet & \bullet & \bullet & p_8 \\
 t_5 = & p_1 & p_2 & \bullet & p_4 & \bullet & \bullet & p_7 & \bullet \\
 t_6 = & p_1 & p_2 & p_3 & \bullet & \bullet & p_6 & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

ed i suoi grafi ospiti minimali



e



di cui solo il secondo ha numero minimo di spigoli. Un algoritmo, comunque, potrebbe venire dall'osservazione che in realtà solo il secondo minimizza

il massimo numero di cicli indipendenti su \mathbb{Z}_2 (3 nel secondo esempio, 4 nel primo esempio).

Bibliografia

- [A] Arnold, D.M. *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets* CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2000
- [AV] Arnold, D. and Vinsonhaler, C. *Finite rank Butler groups: a survey of recent results*, Abelian groups (Curaçao, 1991), Dekker, New York, 1993, 17-41
- [Ba] Baer, R. *Abelian groups without elements of finite order* Duke Math. J. 3, 1937, 68-122
- [BDVM] Barioli, F., De Vivo, C. and Metelli, C. *On vector spaces with distinguished subspaces and redundant base*, Linear Algebra Appl. 374 (2003), 107-126
- [Bu65] Butler, M.R.C. *A class of torsion-free abelian groups of finite rank*, Proc. London Math. Soc.(3) 15, 1965, 680-698
- [Bu87] Butler, M.R.C. *Some almost split sequences in torsion-free abelian group theory*, Abelian Group Theory, Gordon and Beach, New York 1987, 221-305
- [D] Diestel, R. *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 173, Springer-Verlag Heidelberg, New York (2005)
- [DVM1] De Vivo, C. and Metelli, C. *$\mathbf{B}(1)$ -groups: some counterexamples*, Abelian Groups and Modules, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 182 (1996), 227-232
- [DVM2] De Vivo, C. and Metelli, C. *Finite partition lattices and Butler groups*, Comm. Algebra, 27 (1999), no.4, 1571-1590
- [DVM3] De Vivo, C. and Metelli, C. *Admissible matrices as base changes of $\mathbf{B}(1)$ -groups: a realizing algorithm*, Trends in Mathematics (1999), Birkhauser Verlag Basel, 135-147
- [DVM4] De Vivo, C. and Metelli, C. *Decomposing $\mathbf{B}(1)$ -groups: an algorithm*, Comm. Algebra. Vol. 30, No. 12 (2002), 5621-5637
- [DVM5] De Vivo, C. and Metelli, C. *\mathbb{Z}_2 -linear order-preserving transformations of tent*, Ricerche di Matematica, Vol.LI, Fasc.1, (2002), 159-184
- [DVM6] De Vivo, C. and Metelli, C. *A transvection decomposition in $GL(n,2)$* , Colloquium Mathematicum, Vol.94 (2002), no.1, 51-60
- [DVM7] De Vivo, C. and Metelli, C. *A constructive solution to the base change decomposition problem in $\mathbf{B}(1)$ -groups*, Proceedings of the Algebra Conference — Venezia 2002, Marcel Dekker, Inc. (2004), 119-132
- [DVM8] De Vivo, C. and Metelli, C. *On degenerate $\mathbf{B}(2)$ -groups*, Houston Math. J., Vol. 32, No.3, 2006
- [DVM10] De Vivo, C. and Metelli, C. *Butler groups splitting over a base element*, Colloquium Mathematicum, Vol. 109, No.2 (2007), 297-305
- [DVM11] De Vivo, C. and Metelli, C. *Settings for a study of finite rank Butler groups*, Journal of Algebra, Vol. 318/1 (2007), 456-483
- [DVM12] De Vivo, C. and Metelli, C. *On direct decomposition of Butler $\mathbf{B}(2)$ -groups*, Volume in memoria di A.L.S. Corner, Contributions to Module Theory; Models, Modules and Abelian Groups, W.De Gruyter 2008, 201-219
- [DVM13] De Vivo, C. and Metelli, C. *On Butler $\mathbf{B}(2)$ -groups decomposing over two base elements*, Comment. Math. Univ. Carolin.,50,no.2,2009,165-179
- [DVM14] De Vivo, C. and Metelli, C. *On the typeset of a $\mathbf{B}(2)$ -group*, Preprint n.4/2009, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”, Università Federico II, Napoli — in pubblicazione su Houston Math. J.
- [DVM15] De Vivo, C. and Metelli C. *Pure $B(n)$ -subgroups of completely decomposable groups*, Preprint n.13, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”, Università Federico II, Napoli — in pubblicazione su “Ricerche di Matematica”

- [DVM16] De Vivo, C. and Metelli, C. *Butler's theorem revisited*, Preprint n.22, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università Federico II, Napoli — in pubblicazione su Atti del convegno "Groups and Model Theory", Mülheim an der Ruhr, 2011, Università di Duisburg-Essen
- [F II] Fuchs, L. *Infinite abelian groups. Vol. II*, Academic Press, New York, 1973, Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II
- [FM] Fuchs, L. and Metelli, C. *On a class of Butler groups*, Manuscripta Math. 71 (1991), no.1, 1-28
- [GM] Goeters, H. Pat and Megibben, C. *Quasi-isomorphism and \mathbb{Z}_2 -representations for a class of Butler groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 106 (2001), 21-45
- [GUV] Goeters, H. P., Ullery W. and Vinsonhaler Ch. *Numerical invariants for a class of Butler groups*, Contemp. Math. 171 (1994), 159172
- [M] Messina, N. *Base changes of $\mathbf{B}(1)$ -Butler groups: a \mathbb{Z}_2 -linear and graph theory approach*, Preprint n.25, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli", Università Federico II, Napoli — in pubblicazione su Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli
- [Rich83] Richman, F. *An extension of the theory of completely decomposable torsion-free abelian groups*, Trans. Math. Soc. 279, 1983, 175-185
- [VW] Vertigan, D. and Whittle, G. *A 2-Isomorphism Theorem for Hypergraph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 71, 215-230 (1997)
- [VWW] Vinsonhaler C., Wallutis S.L. and Wickless W.J. *A class of $\mathbf{B}(2)$ -groups*, Comm. Algebra 33 (2005), no. 6, 2025-2037
- [W] Whitney, H. *2-Isomorphic Graphs*, American Journal of Mathematics, Vol. 55, No. 1/4 (1933), pp. 245-254