

# *Flutter di Velivoli con comandi Fly By Wire e Non Linearità*

Marika Belardo

Tesi di Dottorato in  
Ingegneria Aerospaziale

Università degli Studi di Napoli  
*Federico II*

Scuola di Dottorato in Ingegneria Industriale  
Dottorato di Ricerca in Ingegneria Aerospaziale, Navale e della Qualità  
Ciclo XXIV

Indirizzo Ingegneria Aerospaziale  
Coordinatore Chiar.mo Prof. Antonio Moccia

Relatore Chiar.mo Prof. Leonardo Lecce  
Tutor Ing. Modesto Pecora

# Dedica

Dedico questo lavoro alla mia famiglia, Salvatore, Elisabetta, Dajana, Mario, Maria Cristina e nonna Rosa.

Senza il vostro conforto non sarei riuscita a portare a termine questo lavoro.

Grazie di cuore. Vi voglio bene.

*Marika*

# Ringraziamenti

Ringrazio il *Centro Italiano Ricerche Aerospaziali*, che mi ha offerto questa notevole opportunità di crescita.

Ringrazio i Project Manager di tutti i progetti che hanno alimentato l'attività di tesi. In particolare ringrazio l'ing. Antonio Sollo di *Piaggio Aero Industries* per aver messo a disposizione i dati di progetto necessari alla tesi.

Ringrazio la *Scuola di Dottorato in Ingegneria Aerospaziale*, nella persona del coordinatore, prof. Antonio Moccia.

Ringrazio il prof. Leonardo Lecce, per i preziosi consigli che ha saputo darmi durante questo percorso “non lineare”!

Ringrazio i miei colleghi Luigi Di Palma e Nicola Paletta, per non avere mai smesso di credere che ce la potessi fare, dopo tutto. Grazie per la vostra stima, ragazzi!

*And last but not least*, ringrazio il mio tutor aziendale, l'ing. Modesto Pecora, il mio “faro” da ben dieci anni. Senza la sua mole di sapienza ed esperienza difficilmente sarei riuscita ad ottenere questo risultato.

# Contenuti

<b>CAPITOLO 1 MOTIVAZIONI E SCENARIO</b> .....	<b>1</b>
<b>CAPITOLO 2 NON LINEARITÀ STRUTTURALI CONCENTRATE</b> .....	<b>9</b>
2.1 INTRODUZIONE.....	9
2.2 ARTICOLO DI PROVA.....	10
2.2.1 Operazioni preparatorie.....	13
2.3 ANALISI DI FLUTTER PSEUDO – LINEARE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.....	22
2.3.1 Il metodo del bilancio armonico.....	22
2.3.2 Valutazione della rigidezza equivalente e calcoli di flutter.....	25
2.4 ANALISI DI FLUTTER NON LINEARI NEL DOMINIO DEL TEMPO.....	29
2.4.1 Metodologia.....	29
2.4.2 Soluzione dell'equazione aeroelastica non lineare nel tempo.....	34
2.5 CONCLUSIONI.....	36
<b>CAPITOLO 3 INTRODUZIONE DI LEGGI DI CONTROLLO O FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI SERVOATTUATORI IDRAULICI NELL'EQUAZIONE DEL FLUTTER</b> .....	<b>37</b>
3.1 INTRODUZIONE.....	37
3.2 ARTICOLO DI PROVA JOINED WING.....	38
3.2.1 Inclusione della legge di controllo nell'equazione della stabilità aeroelastica.....	40
3.2.2 Risultati.....	48
3.2.2.1 Analisi di flutter con legge di controllo.....	50
3.2.2.2 Validazione.....	51
3.3 ARTICOLO DI PROVA BUSINESS JET CON SERVOATTUATORE IDRAULICO.....	53
3.3.1 Caratterizzazione dell'attuatore.....	57
3.3.2 Inclusione del servattuatore nell'equazione della stabilità aeroelastica - metodologia.....	61
3.3.3 Risultati.....	65
3.4 CONCLUSIONI.....	69
<b>CAPITOLO 4 FLUTTER NON LINEARE NEL TEMPO CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SERVOATTUATORE IDRAULICO</b> .....	<b>70</b>
4.1 INTRODUZIONE.....	70
4.2 STUDIO DELL'ATTUATORE MODELLO LINEARE.....	71
4.3 CONFRONTO TRA IL MODELLO NON LINEARE DELL'ATTUATORE E IL MODELLO LINEARIZZATO CON BILANCIO ARMONICO.....	78
4.4 APPROSSIMAZIONE DEL SERVOATTUATORE AD UN SISTEMA COMPLETO DEL SECONDO ORDINE.....	84
4.5 CALCOLI DI FLUTTER LINEARE CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SERVOATTUATORE - RISULTATI.....	88
4.6 MODELLO AEROSERVOELASTICO NON LINEARE.....	93
4.6.1 Risultati delle analisi – confronto tra modello aeroservoelastico lineare e non.....	102
4.6.2 Risultati delle analisi – confronto con tra modello aeroservoelastico lineare e non – attuatore di alettone.....	104
4.7 CONCLUSIONI.....	106
<b>CAPITOLO 5 CONCLUSIONI ALLA TESI</b> .....	<b>108</b>
<b>FIGURA 70 SCHEMA SINTETICO ATTIVITÀ TESI</b> .....	<b>111</b>
<b>APPENDICE A STUDIO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SERVOATTUATORE IDRAULICO</b> .....	<b>112</b>
A.1 MODELLO MATEMATICO LINEARIZZATO.....	112
A.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI.....	113
A.2.1 Premessa: le equazioni di continuità e della quantità di moto attraverso orifizi.....	113



A.2.2	<i>Analisi linearizzata della servovalvola</i> .....	118
A.2.2.1	Coefficienti della valvola .....	122
A.2.2.2	Coefficienti della valvola nel punto di nullo.....	123
A.2.3	<i>Pistone controllato dalla servovalvola</i> .....	130
A.2.3.1	Bulk modulus effettivo .....	132
A.2.4	<i>Equazioni della dinamica della servovalvola e dell'attuatore</i> .....	134
A.2.5	<i>Presenza di ritorni nel servoattuatore</i> .....	137
<b>APPENDICE B RAZIONALIZZAZIONE DELLE FORZE AERODINAMICHE ALLA ROGER...</b>		<b>140</b>
B.1	EQUAZIONI DEL MOTO DI UN VELIVOLO ELASTICO .....	140
B.2	L'APPROSSIMAZIONE DI ROGER.....	141
B.3	LA RAPPRESENTAZIONE STATO VETTORE.....	145

## Lista delle figure

Figura 1 Tipico ciclo limite .....	2
Figura 2 Trittico articolo di prova # 1 – velivolo small aircraft .....	11
Figura 3 Modello aerodinamico.....	12
Figura 4 Modello di matching .....	12
Figura 5 Linea di comando elevatore.....	14
Figura 6 Risultati di flutter con la nuova base modale .....	19
Figura 7 Modo principale .....	20
Figura 8 Modo extra.....	20
Figura 9 Legge non lineare deflessione – carico .....	25
Figura 10 Andamento della rigidità equivalente al variare dell’ampiezza di oscillazione ...	26
Figura 11 Andamento di $M(t)$ e $M(x)$ per ampiezza di oscillazione 5 [deg] .....	27
Figura 12 Andamento di $M(t)$ e $M(x)$ per ampiezza di oscillazione 15 [deg].....	27
Figura 13 Andamento di $M(t)$ e $M(x)$ per ampiezza di oscillazione 25 [deg].....	28
Figura 14 Risultati analisi di flutter pseudo lineari.....	29
Figura 15 Accelerazione estremità alare alla velocità di flutter e immediatamente dopo .....	34
Figura 16 Confronto risultati analisi pseudo lineari nel dominio della frequenza e analisi non lineari nel tempo .....	35
Figura 17 Articolo di prova #2 – <i>Joined wing</i> .....	38
Figura 18 Modello aerodinamico e di matching (nodi di colore rosso).....	39
Figura 19 Schema logico della legge di controllo a ciclo chiuso (pitch) degli elevatori.....	39
Figura 20 Schema della legge di controllo con esclusione della dinamica del velivolo.....	40
Figura 21 Analisi di flutter senza legge di controllo .....	49
Figura 22 Analisi di flutter con legge di controllo TF primo tipo Eq. 30.....	50
Figura 23 Analisi di flutter con legge di controllo TF Eq. 39.....	51
Figura 24 -Longherone anteriore ala.....	52
Figura 25 -Longherone anteriore ala.....	52
Figura 26 Longherone posteriore ala .....	52
Figura 27 Longherone posteriore ala .....	52
Figura 28 Massa bilanciamento elevatore.....	52
Figura 29 Massa bilanciamento elevatore.....	52
Figura 30 Articolo di prova #3 – business jet.....	53
Figura 31 Business Jet: Modello aerodinamico e di matching.....	54
Figura 32 Inviluppo di stabilità, in termini di rigidità di elevatore .....	54
Figura 33 Combinazione servovalvola - pistone .....	62
Figura 34 Cinematismo superficie mobile .....	62
Figura 35 Risultati business jet – diagramma v-g, rigidità di elevatore $K_{min}$ .....	65
Figura 36 Risultati business jet – diagramma v-g, State Space con dinamica servoattuatore .	67
Figura 37 Luogo delle radici .....	68
Figura 38 Risultati business jet – diagramma v-g, PK con dinamica servoattuatore .....	68
Figura 39 Risposta attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 5$ [mm] .....	72
Figura 40 Risposta attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 50$ [mm] .....	72
Figura 41 Rotazione superficie mobile, $x_{in} = 5$ [mm].....	73
Figura 42 Rotazione superficie mobile, $x_{in}=50$ [mm].....	73
Figura 43 Segnale d’ingresso attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 5$ [mm] .....	73
Figura 44 Salto di pressione attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 5$ [mm] .....	74
Figura 45 Spostamento pistone attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 5$ [mm] .....	74

Figura 46 Rotazione superficie mobile attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 5$ [mm] .....	75
Figura 47 Segnale d'ingresso attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 50$ [mm] .....	75
Figura 48 Salto di pressione attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 50$ [mm] .....	76
Figura 49 Spostamento pistone attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 50$ [mm] .....	76
Figura 50 Rotazione superficie mobile attuatore modello linearizzato, $x_{in} = 50$ [mm] .....	77
Figura 51 Frequenza esibita dal sistema al variare di $h$ .....	77
Figura 52 Coefficiente di smorzamento al variare di $h$ .....	78
Figura 53 Spostamento imposto della valvola.....	82
Figura 54 Confronto risposte sistema non lineare vs sistema linearizzato con bilancio armonico.....	83
Figura 55 Confronto sistema misto vs sistema completo II ordine con massa fittizia .....	85
Figura 56 Segnale di input attuatore, $x_{in}$ .....	86
Figura 57 Confronto risposte attuatore linearizzato vs attuatore non lineare – modello II ordine completo .....	87
Figura 58 Andamento poli in velocità elevatore-attuatore: approccio derivatori vs approccio massa fittizia.....	88
Figura 59 Diagramma v-g con matrici aggiuntive servoattuatore, approccio derivatori.....	89
Figura 60 Diagramma v-g con matrici aggiuntive servoattuatore, approccio massa fittizia....	90
Figura 61 Diagramma v-g analisi di flutter attuatore linearizzato bilancio armonico.....	91
Figura 62 Accelerazione estremità alare, risposta dinamica lineare, $V = 1.63 V_D$ .....	92
Figura 63 Confronto accelerazione - wing .....	102
Figura 64 Confronto accelerazione - winglet .....	102
Figura 65 Confronto accelerazione – piano orizzontale .....	103
Figura 66 Confronto accelerazione – elevatore.....	103
Figura 67 Flutter con meccanismo di attuazione dell'alettone.....	104
Figura 68 Accelerazione sull'ala dovuta a eccitazione tramite alettone.....	105
Figura 69 Accelerazione sulla winglet dovuta a eccitazione tramite alettone .....	105
Figura 70 Schema sintetico attività tesi .....	111
Figura 71 Combinazione servovalvola - pistone .....	112
Figura 72 Flusso attraverso orifizi .....	114
Figura 73 Coefficiente di contrazione.....	116
Figura 74 Coefficiente di efflusso .....	117
Figura 75 Tipi di accoppiamento centrale delle valvole .....	118
Figura 76 Flusso al carico in base al tipo di accoppiamento centrale.....	118
Figura 77 Servovalvola .....	119
Figura 78 Pressure flow curves adimensionalizzate.....	125
Figura 79 Curva del coefficiente di sensitività della pressione a linea bloccata.....	127
Figura 80 Curva del flusso di leakage.....	127
Figura 81 Flusso al centro per valvola nuova ed usurata.....	128
Figura 82 Combinazione servovalvola - pistone .....	130
Figura 83 Coefficiente smorzamento viscoso .....	135
Figura 84 Modello attuatore con ritorni.....	137
Figura 85 Forza aerodinamica generalizzata $Q(2,3)$ e a destra interpolazione mediante spline .....	141
Figura 86 Interpolazione della forza aerodinamica mediante Roger.....	145

## Lista delle tabelle

Tabella 1 Valori di rigidezza equivalente per diverse ampiezze di oscillazione.....	26
Tabella 2 Risultati analisi di flutter pseudo lineari.....	28
Tabella 3 Confronto risultati analisi pseudo lineari nel dominio della frequenza e analisi non lineari nel tempo .....	35
Tabella 4 Frequenze e Masse generalizzate modali.....	48
Tabella 5 Masse generalizzate incrociate.....	48
Tabella 6 Rotazioni modali in pitch zona sistema navigazione e controllo .....	49
Tabella 7 Servoattuatore, valori calcolati – pressione mandata 50 [bar] .....	59
Tabella 8 Coefficienti del polinomio TF attuatore e frequenza esibita dall’attuatore con superficie mobile.....	60
Tabella 9 Risultati business jet – analisi di flutter con rigidezza di elevatore $K_{min}$ .....	65
Tabella 10 Frequenze e Masse generalizzate modali.....	66
Tabella 11 Masse generalizzate incrociate extra modo 41.....	66
Tabella 12 Risultati business jet – analisi di flutter con dinamica servoattuatore.....	67
Tabella 13 Confronto flutter attuatore linearizzato con bilancio armonico e con Taylor.....	91

## Bibliografia

- [1] Pecora, M., “Modellistica aeroelastica per analisi di flutter”, Documento Tecnico Interno CIRA, CIRA-TR-05-0101, 2005
- [2] Merritt, H. E., “Hydraulic Control Systems”, John Wiley & Sons, Inc., 1967
- [3] Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., Halfman, R. L., “Aeroelasticity”, Dover Publications, Inc., 1955
- [4] Shen, S., “An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems”, Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 26, No. 1, pp. 25–31, 1959.
- [5] Breitbach, E. J., “Effect of Structural Nonlinearities on Aircraft Vibration and Flutter”, AGARD, TR 665, 1977.
- [6] Breitbach, E. J., “Flutter Analysis of an Airplane with Multiple Structural Nonlinearities in the Control System”, NASA Technical Paper 1620, 1980.
- [7] Lee, C. L., “An Iterative Procedure for Nonlinear Flutter Analysis”, AIAA Journal, Vol. 24, No. 5, pp. 833–840, 1986.
- [8] Lubber, W. G., “Flutter prediction on a combat aircraft involving backlash and actuator failures on control surfaces”, Proc. Int. Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Manchester, UK, 1995
- [9] Maričić, N., “Influence of Structural Backlash and friction in command system on the aircraft flutter”, Theoret. Appl. Mech., Vol. 31, No. 3-4, pp. 317-344, Belgrade, 2004.
- [10] Vio, G. A., Cooper, J. E., “Lymit Cycle Oscillation Prediction for Aeroelastic Systems with Bilinear Stiffness”, Int. J. of Appl. Math. And Mech., Vol. 3, pp. 100-119, 2005
- [11] Liu, L., Dowell, E. H., “Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface”, AIAA Journal, Vol. 43, No. 4, pp. 802–815, 2005.
- [12] Manetti, M., Quaranta, G., Mantegazza, P., “Numerical Evaluation of Limit Cycles of Aeroelastic Systems”, Journal of Aircraft, Vol. 46, No. 5, pp. 1759-1769, 2009.
- [13] Gordon, J., Meyer, E., Minogue, R., “Nonlinear Stability Analysis of Control Surface Flutter with Free-Play Effects”, Journal of Aircraft, Vol. 45, No. 6, pp. 1904–1916, 2008.
- [14] Ramiro, V., “Metodi per la valutazione delle instabilità aeroelastiche dinamiche in presenza di non linearità concentrate”, Tesi di Laurea, Seconda Università degli Studi di Napoli, Relatore: Pecora, M., a. a. 2004-2005
- [15] Pecora, M., “HAPD – Influenza Giochi e Failure sul Flutter”, Documento Tecnico Interno CIRA, CIRA-CF-09-1238, 2009

- [16] Zimmermann, H., “Aeroservoelasticity”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 90, pp. 719-735, 1991
- [17] Roger, K. L., “Airplane Math Modeling and Active Aeroelastic Control Design,” AGARD CP-228, pp. 1–11, 1977
- [18] Brenner, M. J., “Aeroservoelastic Modeling and Validation of a Thrust-Vectoring F/A-18 Aircraft”, NASA Technical Paper 3647, 1996
- [19] Lubber, W., Becker, J., “An integrated Design Procedure for Aircraft Structure Including the Influence of Flight Control System on Aircraft Flutter”, Proc. of the RTO AVT Specialists’ Meeting on “Structural Aspects of Flexible aircraft Control”, 1999
- [20] Lubber, W., “The Interaction of Advanced Flight Control System and Elastic Aircraft Structure”, Proc. of IMAC-XXVI Conference & Exposition on Structural Dynamics, 2008
- [21] Albano, E., Rodden, W. P., “Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows,” AIAA Journal, Vol. 7, No. 2, pp. 279–285, 1969
- [22] Hagedorn. P., “Non-linear Oscillations”, Oxford Science Publications, 1988
- [23] Pecora, M., “Dispense del corso di Aeroelasticità applicata tenuto presso la Seconda Università degli Studi di Napoli a.a. 2000/2001”, 2001
- [24] The MacNeal - Schwendler Corporation, “MSC/NASTRAN Quick Reference Guide”, 1998
- [25] Harder, R. L., Desmarais, R. N. “Interpolation Using Surface Splines”, Journal of Aircraft, Vol. 9, pp. 189-191, 1972
- [26] Pecora, M., “SANDY CODE Theoretical Manual”, 2011
- [27] Pecora, M., “Lezioni di dinamica del velivolo flessibile”, Corso della scuola di Dottorato in Ingegneria Aerospaziale, XXIV ciclo.

# Capitolo 1

## *Motivazioni e scenario*

Scopo di questa tesi è lo sviluppo di metodologie affidabili per l'esecuzione di analisi di flutter non lineare, applicabili a velivoli con comandi manuali e a velivoli con comandi *Fly By Wire*.

Lo sforzo è mirato all'arricchimento del pacchetto, già a disposizione, di codici *in house* per l'analisi di flutter, mantenendone invariato l'approccio, che è quello che utilizza la tecnica della sottostrutturazione dinamica (extra modi). Tale approccio sarà esposto in dettaglio nel Capitolo 2 e rappresenta la costante di tutto ciò che sarà prodotto per il flutter non lineare, [1].

La ragione della scelta degli argomenti della tesi risiede nella necessità, ravvisata dal mondo industriale, di strumenti affidabili e veloci, che consentano di rispondere alle esigenze certificative sia di velivoli di piccole dimensioni che di velivoli di grandi dimensioni.

Il cuore della tesi è costituito da tre capitoli (Capitolo 2, Capitolo 3, Capitolo 4), con livello incrementale di problematiche da affrontare.

Nel Capitolo 2 si metterà a punto la tecnica del bilancio armonico per effettuare analisi di flutter nel dominio della frequenza per un velivolo di categoria EASA CS 23, in presenza di non linearità nel movimento d'alettone.

Nel Capitolo 3 si scriveranno le equazioni del sistema aeroelastico in presenza di leggi di controllo o comandi servopotenziati, nell'ipotesi di linearità del sistema. Il metodo sarà applicato su due casi molto diversi tra loro: un velivolo sperimentale non convenzionale, nel

quale sarà considerata la legge di controllo dell'elevatore (flutter a ciclo chiuso) e un velivolo di categoria business jet (EASA CS 25), nel quale sarà considerata la presenza del servattuatore idraulico dell'elevatore, le cui equazioni sono esposte in APPENDICE A, [2].

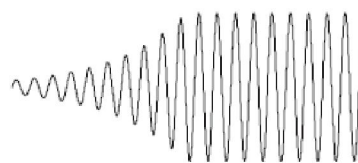
Nel Capitolo 4 si utilizzerà l'approccio precedente (Cap. 2), introducendo però le equazioni non lineari della dinamica del servattuatore idraulico, pervenendo quindi alla scrittura delle equazioni del flutter non lineare, che saranno risolte con integrazione nel tempo.

Le analisi di flutter di *routine* sono condotte con l'ipotesi di linearità: gli spostamenti sono piccoli, le forze aerodinamiche sono proporzionali alla risposta e gli elementi del sistema di controllo rispondono linearmente con l'ampiezza dello spostamento. È noto tuttavia che nei sistemi reali sono presenti fenomeni non lineari sia dal punto di vista strutturale che dal punto di vista aerodinamico. Tali non linearità influenzano il comportamento aeroelastico del velivolo e le metodologie lineari non sono in grado di prevederlo con accuratezza.

Le sorgenti di non linearità possono risiedere:

- nella struttura, ad esempio la rigidità cubica degli attacchi dei motori, il gioco nelle superfici mobili, le rigidità bilineari dovute alla presenza di *spring tab* o le non linearità distribuite dovute ai giunti meccanici,
- nell'aerodinamica, ad esempio nel regime transonico, in cui la posizione dell'onda d'urto dipende dalla risposta dell'ala, quindi vi è una relazione non lineare tra il movimento della struttura e le forze aerodinamiche su di essa agenti.

Uno dei più importanti fenomeni di risposta aeroelastica non lineare è costituito dai cicli limite (*Limit Cycle Oscillations, LCOs*) ovvero delle oscillazioni auto-sostenute di ampiezza limitata Figura 1. Tali oscillazioni limitate talvolta sono instabili ovvero si innesca il flutter, talvolta si mantengono al di sotto di una certa soglia ovvero sono stabili. Entrambi i casi portano a situazioni non volute, poiché quand'anche dovessero essere stabili, tali oscillazioni affaticano notevolmente la struttura.



**Figura 1** Tipico ciclo limite



Spesso un singolo meccanismo non lineare è il principale responsabile di un ciclo limite. È pur vero però che non si può conoscere a priori quale non linearità predomini, se non si è conosciuto a fondo l'effetto della non linearità selezionata, attraverso uno studio numerico o in galleria o ancora su un velivolo. Una delle ragioni per cui è difficile capire un ciclo limite in un velivolo è che esso non è atteso: si ha a che fare dunque con un fenomeno imprevisto, anche se talvolta la non linearità può essere “benefica” perché “limita” il flutter, cioè si manifesta come oscillazione limitata piuttosto che come flutter catastrofico.

Gli studi aeroelastici in presenza di non linearità strutturali concentrate condotti dagli anni Cinquanta ad oggi possono essere inquadrati in due blocchi metodologici. Il primo, quello storico introdotto da Shen e Breitbach, si basa sulla linearizzazione mediante il bilancio armonico, [4] - [9], [12], che nel tempo si è sviluppato nel tentativo di considerare anche armoniche di ordine superiore nello sviluppo, [11], [12]. Il secondo, più recente, cerca metodi alternativi al bilancio armonico per la soluzione del flutter non lineare, [10].

I primi studi sulle non linearità strutturali concentrate risalgono quindi agli anni Cinquanta. Shen, [4], applica una versione semplificata del metodo di Kryloff e Bogoliuboff (metodo della “linearizzazione armonica” o del “bilancio armonico”) per la trattazione delle oscillazioni non lineari. In particolare egli ne evidenzia la convenienza come metodo approssimato per la soluzione di problemi di flutter affetti da non linearità. L'ipotesi fondamentale di tutto il metodo è che il sistema ammette una soluzione periodica dominata dalla prima armonica, ipotesi verificata in condizione di flutter, poiché la risposta del sistema è monofrequenziale. In altri termini il sistema filtra tutte le armoniche di ordine superiore.

Shen analizza vari tipi di non linearità: gioco, isteresi, gioco con precarico. Ne ha calcolato le funzioni descrittive, reale nel caso del gioco, complesse nel caso di isteresi e gioco con precarico, dipendenti dall'ampiezza di oscillazione. Ha infine effettuato calcoli di flutter per sistemi a due e tre gradi di libertà, affetti dalle precedenti non linearità, mostrando la variazione della velocità di flutter con l'ampiezza di oscillazione.

Nel 1977 Breitbach, [5], fa una disamina sui vari tipi di non linearità strutturali, sia concentrate che distribuite (ad esempio i rivetti e i giunti meccanici, la cui presenza distribuita ha un effetto trascurabile sul flutter), focalizzando l'attenzione su quelle concentrate, le più insidiose. Egli utilizza il seguente approccio per la soluzione del flutter non lineare: durante le prove di vibrazione le non linearità dei meccanismi delle superfici di controllo sono sostituite

con elementi lineari artificiali. Gli elementi non lineari sono in seguito introdotti nelle analisi di flutter, attraverso l'aggiunta di un ulteriore termine lagrangiano al sistema di equazioni. Tale termine di fatto rimuove le rigidità artificiali ed introduce quelle reali (non lineari). Il metodo è basato sull'ipotesi che anche gli spostamenti non lineari possono essere scritti come combinazione lineare dei modi ottenuti con le prove di vibrazione "linearizzate". I termini non lineari sono calcolati con la tecnica del bilancio armonico. Tale metodo, poiché dapprima valuta i modi sperimentali con rigidità artificiali lineari, poi li rimuove e allo stesso tempo aggiunge termini di rigidità non lineari, che vengono sviluppati nella medesima base modale sperimentale, ha un grado di approssimazione che dipende fortemente dal numero di modi scelti. La ragione sta nel fatto che non si possono detrarre esattamente le rigidità artificiali tramite una rappresentazione modale finita, bisogna aver cura di introdurre tanti modi finché la rigidità residua abbia un valore inferiore ad una soglia fissata. Questo problema può essere superato se si utilizza un approccio diverso per l'esecuzione delle prove di vibrazione al suolo. Una delle modalità con cui tali prove possono essere eseguite è la seguente: le prove sono eseguite ammorsando le superfici mobili a quelle fisse, ovvero non facendole partecipare al movimento della struttura. Il movimento delle superfici mobili è introdotto in seguito sotto forma di extra modi ovvero come extra equazioni a tutto il sistema aeroelastico, con i rispettivi termini diretti e incrociati di massa, rigidità, smorzamento, aerodinamica. Questa modalità di eseguire le prove si sposa con le metodologie sviluppate nel presente lavoro.

Più tardi lo stesso Breitbach, [6], estende il suo precedente lavoro ad un alante affetto da più non linearità contemporaneamente: non linearità isteretiche all'allettone e al timone. Egli utilizza nuovamente il bilancio armonico per calcolare i termini di rigidità e smorzamento equivalenti e mette a punto una tecnica iterativa per la soluzione del flutter: vengono fornite delle ampiezze di oscillazione iniziali, corrispondenti ad altrettanti valori di rigidità e smorzamento equivalenti. Risolta l'equazione, si ottengono delle ampiezze in condizione di flutter, che sono confrontate con quelle di partenza: il calcolo si arresta quando la differenza tra due iterate è al di sotto di una certa tolleranza. In realtà non è chiaro, nel lavoro di Breitbach, come vengano calcolate le ampiezze di oscillazione della superficie affetta da non linearità in condizione di flutter: poiché egli risolve un problema agli autovalori (e non un problema di risposta), l'ampiezza in condizione di flutter dipende dall'autovettore di flutter, che per come è costruito il problema, è definito a meno di una costante.

Una tecnica iterativa basata sull'allineamento delle caratteristiche modali del sistema (modi e frequenze) al variare della rigidità equivalente (ovvero dell'ampiezza di oscillazione) è stata messa a punto nel 1986 da Lee, [7]. Partendo da un valore di primo tentativo per la rigidità equivalente (calcolata mediante il bilancio armonico), viene risolta l'equazione di flutter. Ad ogni autovalore di flutter corrisponderà un'ampiezza di oscillazione della non linearità. Tale valore viene utilizzato per ricalcolare il valore di rigidità equivalente. Se il valore di rigidità al passo successivo è molto diverso da quello al passo precedente, i modi del sistema vengono ri-allineati a questo nuovo valore. Una volta raggiunta la convergenza sulla rigidità, viene determinata la stabilità del sistema. Tale metodo richiede costi computazionali notevoli quando le dimensioni del sistema sono elevate.

Un altro esempio dell'applicazione della linearizzazione mediante bilancio armonico è costituito dal notevole lavoro fatto dal tedesco Luber [8] sul Tornado: durante i test sui prototipi erano stati rilevati giochi eccessivi sia nella movimentazione delle superfici mobili che nel meccanismo di variazione della freccia alare. Luber ha calcolato i termini di rigidità e smorzamento equivalenti con il bilancio armonico e ha effettuato calcoli di flutter non lineare nel dominio della frequenza, ottenendo una velocità di flutter più bassa di quella predetta dalla teoria lineare.

Maričić [9] riscrive le equazioni del flutter per il test case AGARD no. 665 (3 gradi di libertà) includendo l'equazione del modo non lineare di superficie mobile ed effettuando una linearizzazione con il bilancio armonico. Risolve il problema agli autovalori per due tipi di non linearità: *backlash* e isteresi simmetrica, dimostrando ancora una volta la notevole influenza delle non linearità sulla predizione del flutter nonché la validità dell'approccio.

Vio e Cooper [10] introducono un nuovo approccio, alternativo al bilancio armonico, per la predizione dei cicli limite: essi dapprima semplificano, mediante un opportuno cambiamento di variabili, le equazioni non lineari che reggono il sistema. In seguito operano una riduzione dei gradi di libertà del sistema. Il limite del metodo sta nel fatto che la semplificazione può essere applicata solo a funzioni continue, descritte da polinomi, mentre le funzioni non lineari che intervengono nel sistema aeroelastico (rigidità bilineare, gioco, isteresi, attrito) sono funzioni non descritte da una singola espressione analitica. Per rendere possibile l'inclusione di una rigidità bilineare nel modello, essi la approssimano ad un polinomio i cui coefficienti

sono determinati mediante *curve-fitting*, con risultati più accurati rispetto al bilancio armonico.

Oltre allo sviluppo di metodi alternativi al bilancio armonico [10], altri studiosi hanno incluso armoniche di ordine superiore nell'approssimazione [11], [12], sebbene il metodo può complicarsi notevolmente quando vengano considerate più di una non linearità e più armoniche [12].

Articoli recenti di Boeing [13] hanno riproposto il metodo del bilancio armonico con approssimazione alla sola armonica fondamentale, poiché esso rappresenta un'ottima approssimazione se il sistema possiede capacità filtranti delle armoniche di ordine superiore: in condizione di flutter il sistema aeroelastico si trova proprio in tale condizione.

Nella prima parte del presente lavoro, al Capitolo 2, si seguirà il primo blocco metodologico, partendo dal lavoro già iniziato in [14] e perfezionato in [15]: il bilancio armonico è stato utilizzato per introdurre una rigidità bilineare della superficie mobile coinvolta nel meccanismo di flutter. Nello sviluppo di Fourier è stata considerata la prima armonica, ritenuta una buona approssimazione in condizione di flutter. L'inclusione della funzione non lineare è stata schematizzata con un valore di rigidità equivalente. Il termine di smorzamento equivalente è nullo poiché la funzione è dispari. L'approccio seguito per il calcolo del termine di rigidità equivalente è basato sulla minimizzazione dell'errore quadratico medio che si commette approssimando la funzione con il termine suddetto.

La seconda parte del lavoro è dedicata alla scrittura del sistema aeroservoelastico con l'ipotesi di linearità, ipotesi che sarà poi rimossa.

Nel 1991 Helmut Zimmermann [16] pubblica un articolo molto significativo sul problema dell'inclusione delle equazioni dei servoattuatori idraulici attivi (ciclo chiuso) nelle equazioni della stabilità aeroelastica. Il primo problema che egli si pone è riscrivere le equazioni classiche della stabilità aeroelastica includendo il *feedback* degli attuatori nonché capire la loro influenza sul flutter. Un aspetto fondamentale è valutare una base modale del sistema conservativo corrispondente (senza feedback del sistema di controllo e con attuatori non attivi) mediante prove di vibrazione a terra svolte in maniera opportuna. Egli infatti propone due procedure per l'esecuzione delle prove:

- rimozione degli attuatori e loro sostituzione con elementi asta con valori di rigidità: rigidità nulla, rigidità dell'attuatore passivo, rigidità molto alta

- senza rimozione dell’attuatore, supposto schematizzato dalla sola rigidità (il modello matematico ricavato da tale test fornisce valori di rigidità e smorzamento dipendenti dall’ampiezza di oscillazione).

A tal proposito è opportuno sottolineare che la costruzione dei modelli dinamici del presente lavoro è fatta secondo prove di vibrazione a terra effettuate sia in configurazione “superfici ammorsate” sia in configurazione “velivolo bloccato – superfici libere”. Tale modalità di esecuzione delle prove si sposa con la tecnica della sottostrutturazione dinamica.

Ritornando al lavoro di Zimmermann, al sistema conservativo viene poi aggiunto un certo numero di modi relativi al movimento delle superfici di controllo, con accoppiamento in massa, rigidità e aerodinamica ma senza il contributo aerodinamico diretto della superficie rispetto al proprio asse di cerniera (nel presente lavoro invece gli *extra modi* includono anche il momento aerodinamico di cerniera). In corrispondenza dei gradi di libertà delle superfici di controllo e dei punti di misura per il *feedback* vengono aggiunte le funzioni di trasferimento degli attuatori, dipendenti dalla frequenza, come i carichi aerodinamici.

Infine vengono introdotti i carichi aerodinamici attraverso l’approssimazione di Roger [17], che ben si presta ad una rappresentazione Stato Vettore dell’intero sistema (si veda l’APPENDICE B).

Più tardi Brenner [18] conduce la campagna numerico - sperimentale per la *clearance* aeroservoelastica del velivolo F/A-18 HARV TVCS, ottenuto dal velivolo *baseline* F/A-18 con ingenti modifiche nel sistema propulsivo, nella massa e nelle leggi di controllo. Nel lavoro di Brenner i servoattuatori idraulici vengono inclusi con le loro equazioni, proprio come sarà fatto nel Capitolo 3 e viene utilizzata una formulazione Stato Vettore del sistema.

La mutua influenza tra il sistema di controllo del velivolo e l’elasticità della struttura è oggetto di numerose pubblicazioni nell’ambito del programma Eurofighter EF2000, datate tra la fine degli anni Novanta e l’inizio del nostro secolo. Qui ne sono citate due, [19] e [20]. Nella prima, [19], viene presentata la filosofia di certificazione aeroservoelastica del velivolo, che include una procedura integrata di progetto dei filtri *notch* per l’attenuazione dell’accoppiamento strutturale con il sistema di controllo del velivolo. La procedura integrata di progetto è basata su un modello analitico per la descrizione del sistema completo, inclusivo anche delle equazioni della meccanica del volo e delle leggi di controllo. I calcoli di flutter sono eseguiti a ciclo aperto e a ciclo chiuso, con aerodinamica calcolata per Mach sub e

supersonici, mostrando una blanda influenza del sistema di controllo per volo livellato mentre ad alti angoli d'attacco la velocità di flutter decresce in maniera considerevole a causa dell'interazione tra le leggi di controllo e la struttura elastica.

Nella seconda, [20], viene posto l'accento sulla necessità di un progetto multidisciplinare del sistema di controllo, senza prescindere dall'elasticità della struttura. In altre parole tutti i parametri di progetto del *Flight Control System* (guadagni, filtri, ecc.) devono essere derivati in un unico ciclo di progettazione integrata. In tale ciclo importanza capitale rivestono le prove di accoppiamento strutturale a terra (*Ground Structural Coupling Test*), che hanno lo scopo di identificare la risposta della struttura elastica (tramite il prelevamento delle risposte dei sensori collocati nell'unità inerziale) ad un'eccitazione sinusoidale a frequenza variabile delle superfici di controllo, a ciclo aperto.

## Capitolo 2

### *Non linearità strutturali concentrate*

#### 2.1 INTRODUZIONE

Nel presente capitolo si affronterà lo studio del flutter di velivoli con comandi manuali caratterizzati dalla presenza di non linearità strutturali concentrate nelle linee di comando.

Tale tipo di non linearità è quella maggiormente diffusa tra i velivoli di categoria *small aircraft*, dunque è di particolare interesse per le aziende del settore poter disporre di strumenti veloci ma al tempo stesso affidabili per la predizione del flutter.

Sarà messa a punto una tecnica di risoluzione dell'equazione del flutter, nel dominio della frequenza, basata su analisi pseudo - lineari al variare della rigidità della linea di comando.

I valori della rigidità saranno ottenuti mediante la tecnica del *bilancio armonico*.

Il sistema aeroelastico sarà modellato con la tecnica della sottostrutturazione dinamica ovvero la base modale sarà costituita da *modi* cosiddetti *principali* (a superfici bloccate) e *modi* cosiddetti *extra* (modi rigidi di superficie mobile). Tale schematizzazione è molto valida allorché si rende necessario effettuare analisi di flutter al variare di qualche parametro come la rigidità, la massa o lo smorzamento. In effetti è l'unica tecnica utilizzabile quando sono presenti sistemi con non linearità concentrate. Il valore aggiunto della tecnica della sottostrutturazione dinamica sta nel suo grande vantaggio dal punto di vista computazionale: essendo le non linearità confinate all'interfaccia tra le sottostrutture, non è necessario

ricalcolare le forze aerodinamiche generalizzate ogni qualvolta vengano variate le caratteristiche di rigidità delle linee di comando.

La sottostrutturazione dinamica è la tecnica “regina” di tutto il lavoro di tesi, per tale motivo ne sarà data enfasi solo nel primo capitolo, con l’intesa che essa sarà sempre utilizzata.

L’articolo di prova utilizzato in questo capitolo è un velivolo polacco. Esso è stato fornito nell’ambito del progetto europeo (6° Programma Quadro) **CESAR** (*Cost Effective Small Aircraft*).

Senza ledere la validità di quanto esposto, sarà utilizzato solo il semi modello simmetrico del velivolo.

I risultati ottenuti dalle analisi pseudo – lineari di flutter nel dominio della frequenza e con la tecnica del bilancio armonico saranno confrontati con analisi non lineari nel tempo (*Stato Vettore* aeroelastico non lineare), allo scopo di testare la validità dell’approccio seguito.

## **2.2 ARTICOLO DI PROVA**

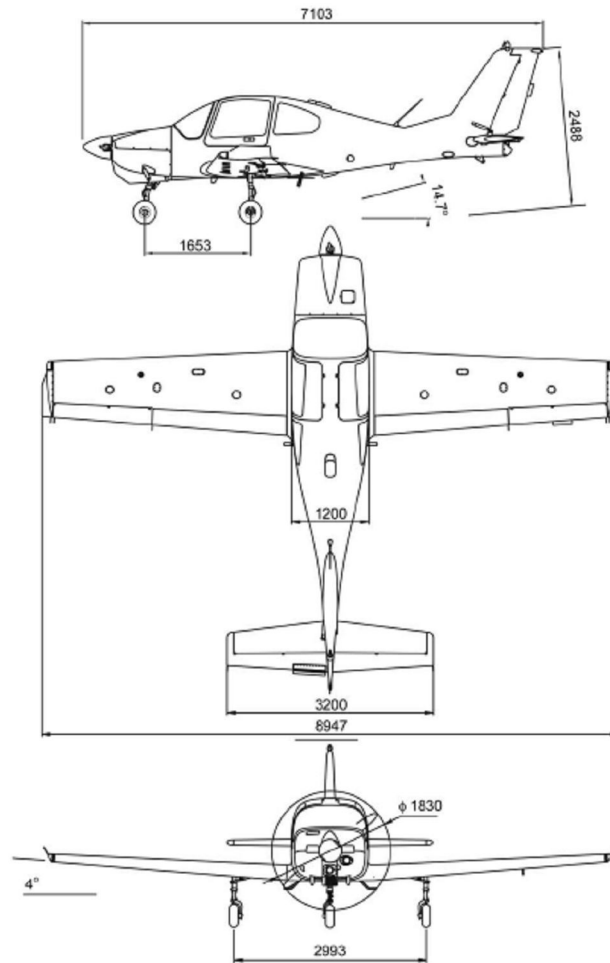
L’articolo di prova utilizzato per mettere a punto la metodologia è il velivolo PZL I23, rispondente alle normative di aeronavigabilità europee EASA CS-23 e statunitensi FAA FAR 23, con MTOW (*Max Take Off Weight*) di 1150 [Kg].

La configurazione è ad ala bassa, impennaggi convenzionali e carrello retrattile, propulsa da un solo motore ad elica. La struttura è costituita in larga parte da materiale composito rinforzato con fibre di carbonio o vetro. Il velivolo ospita quattro persone incluso il pilota.

Il sistema di controllo è di tipo manuale, ad aste, cavi e rinvii.

Nella Figura 2 è mostrato il trittico del velivolo.





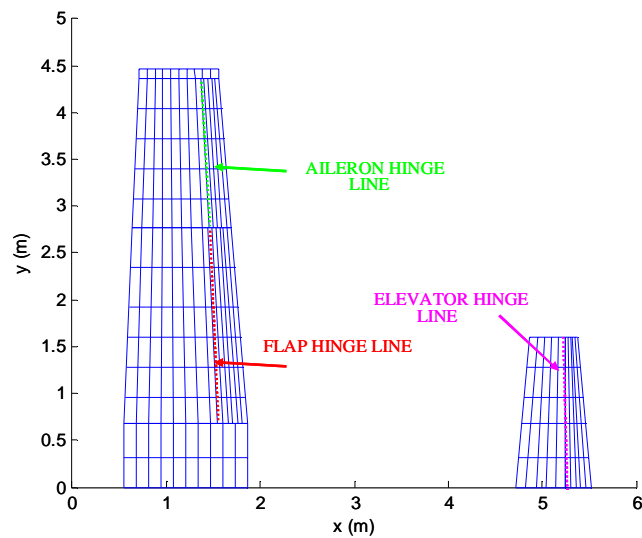
**Figura 2** Trittico articolo di prova # 1 – velivolo small aircraft

Il progetto ha messo a disposizione i seguenti dati del velivolo:

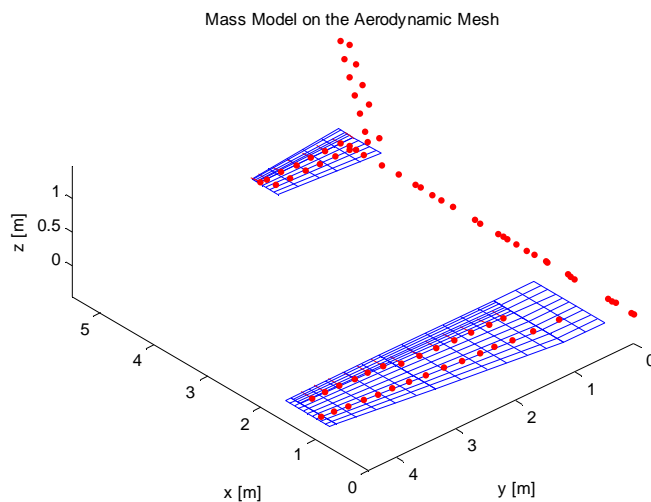
1. modello *stick* validato con prove di vibrazione a terra (*Ground Vibration Test, GVT*).  
Le prove di vibrazione sono state eseguite con velivolo sospeso tramite supporti di rigidità tale da non interferire con i modi propri di vibrare della struttura e con i modi delle superfici di controllo libere di ruotare;
2. modello di massa
3. risultati di analisi di flutter eseguite, a quota 3000 [m], che mostrano la prima instabilità dovuta all'accoppiamento della torsione d'ala con la deflessione dell'alettone; l'instabilità si verifica alla velocità di  $V_{F\_TAS} = 150$  [m/s].

Poiché il meccanismo di flutter (con associazione modale simmetrica) coinvolge l'alettone, nella metodologia che sarà messa a punto sarà considerata una non linearità nel suo meccanismo di movimento.

Del velivolo in esame è stato costruito il modello aerodinamico *Doublet Lattice*, [21], (229 *boxes* aerodinamici, infittiti in corrispondenza delle superfici mobili) e il modello di *Matching* basato su operatori *splines* monodimensionali. I due modelli sono mostrati nelle figure che seguono. Sono stati scelti i nodi del modello di massa come nodi di *matching*.



**Figura 3 Modello aerodinamico**



**Figura 4 Modello di matching**

### 2.2.1 OPERAZIONI PREPARATORIE

Prima di procedere alla messa a punto della metodologia, è stato necessario riadattare i dati dinamici a disposizione. Si espone una sintesi del lavoro preparatorio fatto.

Per poter utilizzare la sottostrutturazione dinamica è necessario avere l'alettone come extra – modo. Un tale risultato sarebbe stato disponibile se le prove di vibrazione a terra fossero state eseguite dapprima in configurazione a superfici ammorsate e poi in configurazione superfici libere – velivolo bloccato.

In aggiunta, il modello che è stato fornito presentava una schematizzazione così puntuale della linea di comando dell'elevatore, da impegnare un quarto dello schema.

Si è resa quindi necessaria una modellazione più sintetica della dinamica della linea di comando dell'elevatore, mediante matrici (2x2). Il procedimento per la valutazione dei termini di tali matrici è esposto a pag. 14.

Sono state poi valutate le caratteristiche di massa e rigidezza di flap e alettone, riportate a pag. 16.

Allo scopo di avere a disposizione una base modale idonea ad essere trattata, è stata dapprima valutata una base modale  $\underline{\Phi}_0$  a partire dai modi numerici di partenza (validati con GVT con modi di superfici libere di ruotare), ma eliminando tutta la linea di comando dell'elevatore. Tale base ha dunque il modo di elevatore a frequenza nulla.

A partire dalla base modale  $\underline{\Phi}_0$  sono stati poi aggiunti al database:

- la nuova schematizzazione della dinamica sistema barra- elevatore,
- il valore di rigidezza del flap,
- un valore di rigidezza molto elevata all'alettone, per bloccarlo.

ne è stata infine eseguita una riortogonalizzazione, secondo il metodo spiegato a pag. 17, ottenendo quindi una base modale  $\underline{\Phi}_1$ , che sarà utilizzata come base modale principale nella tecnica della sottostrutturazione dinamica, con aggiunta dell'extra modo di alettone.

La base modale  $\underline{\Phi}_1$  è parzialmente coerente con quella fornita dal progetto. La parziale coerenza deriva dal fatto che la base modale fornita in *input* non è ad alettone bloccato.

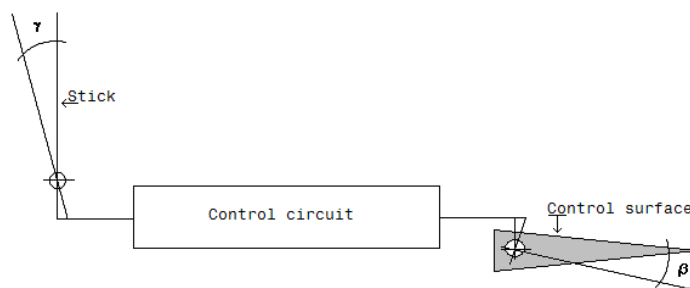
È stata quindi effettuata un'ulteriore prova per verificare che la base modale  $\underline{\Phi}_1$  fosse coerente con quella fornita in input. A tal uopo è stata costruita una nuova base modale  $\underline{\Phi}_2$  nel seguente modo: alla base modale  $\underline{\Phi}_1$  è stato aggiunto il modo rigido di alettone e le caratteristiche di massa e rigidità valutate a pag. 16. Ne è stata eseguita una riortogonalizzazione. La base risultante  $\underline{\Phi}_2$ , coerente con quella fornita in *input*, consente di poter utilizzare la base  $\underline{\Phi}_1$  per i successivi calcoli.

Il confronto tra la base fornita in input e la base  $\underline{\Phi}_2$  mostra un ottimo accordo tra frequenze e forme modali.

In conclusione tutto il lavoro preparatorio fatto è stato finalizzato all'ottenimento della base modale  $\underline{\Phi}_1$ , necessaria per le analisi pseudo-lineari con la tecnica della sottostrutturazione dinamica e all'eliminazione della ridondanza nella schematizzazione della linea di comando dell'elevatore.

### **Schematizzazione del circuito dell'elevatore**

Nel dettaglio l'elevatore e la sua linea di comando sono modellati con una matrice di rigidità e massa. La Figura 5 mostra la schematizzazione utilizzata per l'elevatore.



**Figura 5** Linea di comando elevatore

Posti:

$\beta$  e  $\gamma$  rispettivamente le rotazioni della superficie e della barra,

$N = -\beta/\gamma$  il rapporto cinematico fra la rotazione della superficie mobile e la barra in assenza di carico e d'attriti

$K_{\beta\beta}$  la rigidezza del circuito di controllo a barra bloccata, valutata alla superficie mobile

$K_{\gamma\gamma}$  la rigidezza del circuito di controllo a superficie bloccata, valutata alla barra

la relazione che lega i due gradi di libertà è esprimibile come:

$$\begin{bmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\beta} \\ K_{\beta\gamma} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{stick} \\ M_{hinge} \end{pmatrix}$$

**Eq. 1**

La matrice di rigidezza è singolare poiché rappresenta il legame tra i movimenti rigidi della superficie e della barra.

Dalla seconda delle Eq. 1 a carico agente nullo si ottiene:

$$\beta/\gamma = -K_{\beta\gamma}/K_{\beta\beta}$$

Posto  $\beta/\gamma = N$ , dove  $N$  è il rapporto cinematico di asservimento, si ha:

$$K_{\beta\gamma} = K_{\beta\beta} N$$

$$K_{\gamma\beta} = K_{\beta\beta} N$$

$$K_{\gamma\gamma} = K_{\beta\beta} N^2$$

**Eq. 2**

Definendo inoltre:

$I_{\gamma\gamma}$  momento d'inerzia della barra rispetto al suo asse di rotazione

$I_{\beta\beta}$  momento d'inerzia della superficie rispetto all'asse di cerniera

Le oscillazioni libere del circuito di controllo dell'elevatore sono date da:

$$\begin{bmatrix} I_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & I_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\beta\beta} N^2 & K_{\beta\beta} N \\ K_{\beta\beta} N & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Eq. 3**

Noti che siano  $I_{\gamma\gamma}$ ,  $I_{\beta\beta}$ ,  $N$ ,  $K_{\beta\beta}$  è possibile caratterizzare completamente il circuito.

Il rapporto di asservimento è noto. La valutazione di  $K_{\beta\beta}$  è stata eseguita mediante un'analisi statica agli elementi finiti del modello *stick* del velivolo.

Il momento d'inerzia  $I_{\beta\beta}$  è stato valutato a partire dal modello di massa della superficie mobile.

Il momento  $I_{\gamma\gamma}$  è stato valutato nel seguente modo. Passando al dominio della frequenza, l'Eq. 3 diventa:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} I_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & I_{\beta\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\beta\beta} N^2 & K_{\beta\beta} N \\ K_{\beta\beta} N & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, dopo semplici passaggi si ottiene:

$$I_{\gamma\gamma} = \frac{I_{\beta\beta} N^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_\beta}\right)^2 - 1}$$

Dove

$\omega_\beta^2 = K_{\beta\beta} / I_{\beta\beta}$  è la pulsazione naturale a barra bloccata

$\omega$  è la pulsazione naturale a barra non bloccata ovvero quanto ottenuto dalle prove di vibrazione a terra  $f = 21.3$  [Hz] modo di elevatore.

Il circuito dell'elevatore è così completamente caratterizzato.

### **Schematizzazione del flap e dell'alettone**

Il movimento del flap e dell'alettone saranno schematizzati con molle di rigidezza  $K_{\text{aileron}}$  e  $K_{\text{flap}}$  calcolate a partire dalla conoscenza delle caratteristiche di massa e pulsazione.

Il flap e l'alettone sono modellati con masse concentrate nel modello *stick beam* del velivolo, dunque è agevole calcolarne i momenti d'inerzia attorno ai rispettivi assi di cerniera:

$$I_{\text{hinge flap}} = 0.096408 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

$$I_{\text{hinge aileron}} = 0.017201 \text{ [Kg m}^2\text{]}$$

Dalle prove di vibrazione a terra sono inoltre note le frequenze di oscillazione:

$$f_{\text{aileron}} = 36.8 \text{ [Hz]}$$

$$f_{\text{flap}} = 19.6 \text{ [Hz]}$$

da cui:

$$K_{\text{aileron}} = 919.6256 \text{ Nm/rad}$$

$$K_{\text{flap}} = 1462.122 \text{ Nm/rad}$$

### **Valutazione di una base modale idonea mediante riortogonalizzazione**

Si supponga di disporre di una base modale di modi normali  $\phi$  ottenuti per date caratteristiche di massa  $\underline{\underline{M}}_{\text{orig}}$  e rigidezza  $\underline{\underline{K}}_{\text{orig}}$  dalla soluzione del problema agli autovalori:

$$\left( -\omega_i^2 \underline{\underline{M}}_{\text{orig}} + \underline{\underline{K}}_{\text{orig}} \right) \cdot \phi_i = 0$$

**Eq. 4**

Se alle caratteristiche di massa e rigidezza vengono aggiunte delle ulteriori matrici, la base modale originaria non sarà più ortogonale alle nuove matrici di massa e rigidezza ovvero i prodotti:

$$\underline{\underline{\phi}}^T \left( \underline{\underline{M}}_{\text{orig}} + \underline{\underline{\Delta M}} \right) \underline{\underline{\phi}}$$

$$\underline{\underline{\phi}}^T \left( \underline{\underline{K}}_{\text{orig}} + \underline{\underline{\Delta K}} \right) \underline{\underline{\phi}}$$

**Eq. 5**

Non saranno più delle matrici diagonali.

Il problema è trovare una nuova base modale  $\underline{\underline{\psi}}$  che sia ortogonale alle nuove matrici di massa e rigidezza. Se si pone:

$$\underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\alpha}}$$

**Eq. 6**

dove  $\underline{\underline{\alpha}}$  è una opportuna matrice di trasformazione tra le due basi, è possibile formulare un nuovo problema agli autovalori, che consenta il calcolo della predetta matrice di trasformazione.

Infatti sostituendo l'Eq. 6 nelle Eq. 5 si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\psi}}^T (\underline{\underline{M}}_{\text{orig}} + \underline{\underline{\Delta M}}) \underline{\underline{\psi}} &= \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}_{\text{orig}} \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\Delta M}} \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{M}}_{\text{G}} \underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\Delta M}}_{\text{G}} \underline{\underline{\alpha}} \\ \underline{\underline{\psi}}^T (\underline{\underline{K}}_{\text{orig}} + \underline{\underline{\Delta K}}) \underline{\underline{\psi}} &= \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}_{\text{orig}} \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\Delta K}} \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{K}}_{\text{G}} \underline{\underline{\alpha}} + \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{\Delta K}}_{\text{G}} \underline{\underline{\alpha}} \end{aligned}$$

**Eq. 7**

dove  $\underline{\underline{M}}_{\text{G}}$  e  $\underline{\underline{K}}_{\text{G}}$  sono matrici diagonali, mentre  $\underline{\underline{\Delta M}}_{\text{G}}$  e  $\underline{\underline{\Delta K}}_{\text{G}}$  non lo sono.

Riformulando il problema agli autovalori per la nuova base modale e tenendo conto delle Eq. 7 si ha:

$$-\omega_{i(\alpha)}^2 (\underline{\underline{M}}_{\text{G}} + \underline{\underline{\Delta M}}_{\text{G}}) \underline{\underline{\alpha}}_i + (\underline{\underline{K}}_{\text{G}} + \underline{\underline{\Delta K}}_{\text{G}}) \underline{\underline{\alpha}}_i = 0$$

Che potrà essere risolto in  $\omega_{i(\alpha)}$  e  $\underline{\underline{\alpha}}_i$  per il calcolo della matrice di trasformazione che consente di passare da una base modale all'altra preservandone l'ortogonalità alle matrici di massa e rigidezza.

Nel caso specifico del ricalcolo della base modale per l'articolo di prova, la nuova base modale è stata rivalutata introducendo:

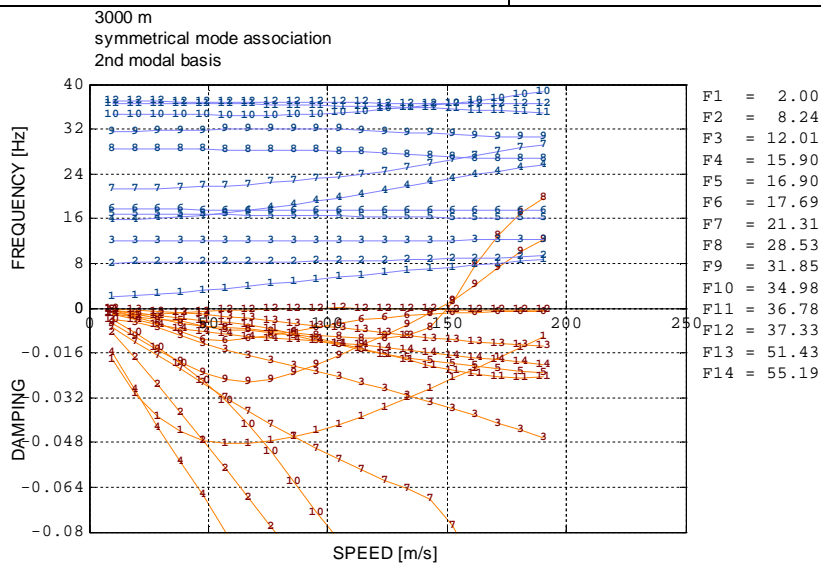
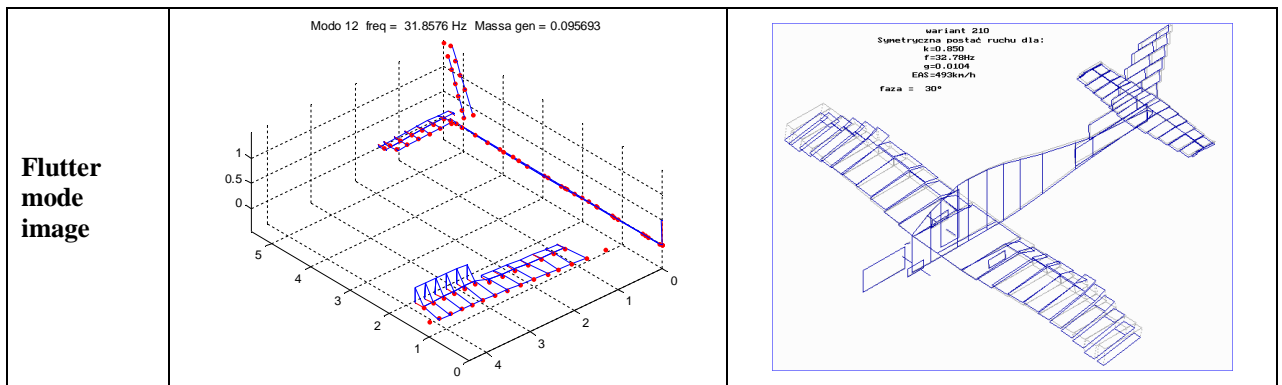
- la modellazione del circuito di elevatore coerente con i risultati delle prove di vibrazione a terra
- la modellazione del flap con molla di rigidezza coerente con i risultati delle prove di vibrazione a terra



– la modellazione dell’alettone con molla di rigidità molto alta allo scopo di bloccarlo una volta ottenuta la base modale ad alettone bloccato, basterà variare il valore della rigidità della molla che ne simula il movimento per attivarne la presenza.

Avendo costruito il modello aerodinamico ed avendo rivalutato la base modale, ci si è preoccupati di verificare la congruenza di quest’ultima con quella originaria attraverso un calcolo di flutter nelle medesime condizioni di quota e Mach, ottenendo lo stesso meccanismo di accoppiamento (torsione ala e movimento alettone) in condizione di flutter ad una velocità molto prossima a quella fornita dal progetto. Se ne mostra il diagramma v-g e il confronto con i dati di partenza:

Flutter speed @ 3000 m	147 (TAS, [m/s])	150 (TAS, [m/s])
Flutter mode	<i>aileron rotation + wing torsion</i>	<i>aileron rotation + wing torsion</i>
Flutter mode frequency	31.85 [Hz]	33.46 [Hz]



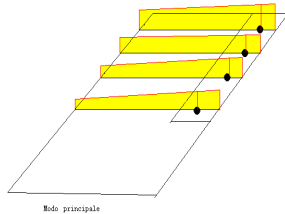
**Figura 6 Risultati di flutter con la nuova base modale**

## La tecnica della sottostrutturazione dinamica

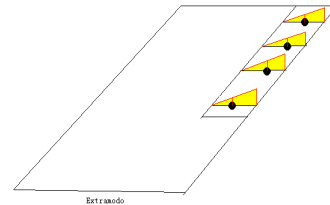
È opportuno in questa fase introdurre la tecnica della sottostrutturazione dinamica, in modo da evidenziarne l'importanza per i calcoli di flutter pseudo-lineare.

Come già esposto in precedenza, allorquando dovessero verificarsi variazioni di talune caratteristiche di massa o rigidità dovute, ad esempio all'aggiunta di masse di bilanciamento sulle superfici mobili o a variazioni della rigidità dovute alla presenza di non linearità, è importante poter disporre di un modello aeroelastico che sia in grado di accogliere tali variazioni senza eccessivi sforzi computazionali. Si pensi ad esempio di dover effettuare calcoli massivi di sensibilità al variare delle caratteristiche sopra menzionate, senza però rivalutare basi modali e forze aerodinamiche.

Tale approccio è reso possibile dalla tecnica della sottostrutturazione dinamica: alla base modale a superfici mobili bloccate (base principale) è aggiunto un numero opportuno di extra modi (movimenti rigidi di superficie mobile) per i quali vengono preventivamente calcolate anche le forze aerodinamiche generalizzate indotte.



**Figura 7 Modo principale**



**Figura 8 Modo extra**

Utilizzando i pedici “p” e “ex” per individuare rispettivamente modi principali ed extra modi, lo spostamento totale perpendicolare alla superficie mobile è una combinazione lineare dei modi principali  $\underline{\Phi}_p$  e dell'extra modo  $\underline{d}_{ex}$  :

$$\underline{w}_{mobile}(r, t) = \underline{\Phi}_p(r) \cdot \underline{q}(t) + \underline{d}_{ex}(r) \cdot \delta(t)$$

dove  $\delta(t)$  è la coordinata lagrangiana della rotazione della superficie mobile.

Per rotazione unitaria della superficie mobile l'extra modo è dato dal vettore delle distanze dall'asse di cerniera

$$\underline{d}(r) = [x_i]$$

Essendo  $\underline{\underline{M}}_{\text{mobile}}$  la matrice di massa della superficie mobile l'energia cinetica associata al suo movimento è data da:

$$\Delta T_{\text{mobile}} = 1/2 \underline{\dot{w}}_{\text{mobile}}^T(r, t) \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{\dot{w}}_{\text{mobile}}(r, t)$$

Da cui la massa generalizzata della superficie mobile:

$$\underline{\underline{\Delta M}}_G = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_p^T \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{\Phi}_p & \underline{\Phi}_p^T \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{d}_{\text{ex}} \\ \underline{d}_{\text{ex}}^T \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{\Phi}_p & \underline{d}_{\text{ex}}^T \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{d}_{\text{ex}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_p^T \underline{\underline{M}}_{\text{mobile}} \underline{\Phi}_p & \underline{m}_{p,\text{ex}} \\ \underline{m}_{p,\text{ex}}^T & I \end{bmatrix}$$

La matrice di massa generalizzata di tutto il velivolo sarà:

$$\underline{\underline{M}}_G = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{p,p} & \underline{m}_{p,\text{ex}} \\ \underline{m}_{p,\text{ex}}^T & I \end{bmatrix}$$

**Eq. 8**

Nella Eq. 8 la matrice  $\underline{\underline{M}}_{p,p}$  è generalmente diagonale, conseguenza dell'ortogonalità dei modi principali,  $I$  è il momento d'inerzia della superficie mobile rispetto all'asse di cerniera,  $\underline{m}_{p,\text{ex}}$  è il vettore delle masse generalizzate incrociate dovute all'accoppiamento tra modi principali ed extra modi. Non considerando per economia di scrittura i termini di smorzamento, l'equazione della stabilità aeroelastica con extra modi si scrive:

$$\left[ s^2 \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{p,p} & \underline{m}_{p,\text{ex}} \\ \underline{m}_{p,\text{ex}}^T & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{p,p} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_{\text{ex}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho V^2 \begin{pmatrix} \underline{\underline{Q}}_{p,p} & \underline{\underline{Q}}_{p,\text{ex}} \\ \underline{\underline{Q}}_{\text{ex},p} & \underline{\underline{Q}}_{\text{ex},\text{ex}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Eq. 9**

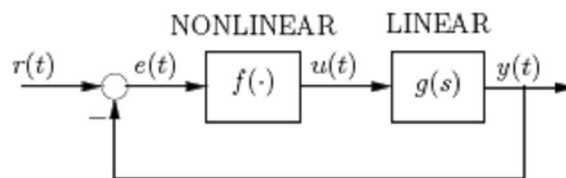
L'Eq. 9 è scritta in modo tale che è possibile cambiare il valore dei termini di rigidità o massa relativi all'extra modo per effettuare analisi di flutter parametriche, senza dover calcolare nuove basi modali o forze aerodinamiche generalizzate, con indubbio vantaggio computazionale. La tecnica della sottostrutturazione dinamica non si limita solo agli extra modi, ma è uno strumento prezioso che consente di apportare modifiche all'intero sistema semplicemente agendo su una sua sottostruttura (ad esempio matrici aggiuntive di massa, rigidità o smorzamento dovute a cambiamenti di qualche parametro riguardante la sottostruttura), mantenendo però invariate le caratteristiche del sistema principale.

## 2.3 ANALISI DI FLUTTER PSEUDO – LINEARE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

### 2.3.1 IL METODO DEL BILANCIO ARMONICO

Il metodo della Funzione Descrittiva (detto anche del bilancio armonico) utilizza tecniche nel dominio della frequenza (serie di Fourier) per investigare le oscillazioni di ciclo limite di sistemi che presentano non linearità concentrate.

E' spesso possibile ricondurre il comportamento di sistemi lineari contenenti non linearità concentrate al seguente schema a blocchi:



Tale sistema può dare origine a oscillazioni auto sostenute di ampiezza limitata, che altro non sono che movimenti periodici, detti cicli limite. Se il sistema contiene una sufficiente attività filtrante delle armoniche a frequenza relativamente alta ci si può spesso, almeno come primo tentativo, limitare ad una approssimazione alla prima armonica, caratterizzando cioè il ciclo limite solo con un'ampiezza ed una frequenza. Tale ipotesi è verificata in condizione di flutter.

Si supponga che in tale condizione il sistema sia descritto dalla seguente equazione:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

**Eq. 10**

Ponendo:

$$x = A \sin \omega t$$

**Eq. 11**

da cui

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t$$

**Eq. 12**

La funzione f sarà:

$$f(x, \dot{x}) = f(A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t)$$

Approssimando la funzione  $f(x, \dot{x})$  con la sua prima armonica di Fourier:

$$f(x, \dot{x}) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega t dt$$

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega t dt$$

Dalle Eq. 11 e Eq. 12 si ottiene:

$$\sin \omega t = \frac{x}{A} \quad \cos \omega t = \frac{\dot{x}}{\omega A}$$

Sostituendo nell'Eq. 10 si ha:

$$\ddot{x} + \left( \frac{a_1}{A\omega} \right) \cdot \dot{x} + \left( \frac{b_1}{A} \right) \cdot x = 0$$

**Eq. 13**

L'Eq. 13 è l'equazione "linearizzata" del sistema: la non linearità è contenuta in un termine di smorzamento  $\frac{a_1}{A\omega}$  (di tipo isteretico) e in un termine di rigidità  $\frac{b_1}{A}$ . Entrambi dipendono, in risonanza, dalla sola ampiezza di oscillazione.

Se la funzione f non lineare è dispari il termine di smorzamento è nullo, poiché:

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt = 0$$

La non linearità di rigidità considerata per l'alettone dell'articolo di prova è una funzione bilineare dispari, dunque la funzione descrittiva si ridurrà al solo termine di rigidità. Il

coefficiente moltiplicativo  $K_{eq}$  è detto Rigidezza Equivalente. L'equazione del sistema sarà pertanto:

$$\ddot{x} + K_{eq} x = 0$$

**Eq. 14**

La rigidezza equivalente dovrà essere tale da minimizzare l'errore quadratico medio tra la funzione non lineare  $f$  e la sua approssimazione  $K_{eq}x$ , metodo della linearizzazione ottimale di Blaquiere, [22].

L'errore che si commette è pari a:

$$\varepsilon(K_{eq}, t) = f(x, \dot{x}) - K_{eq}x$$

**Eq. 15**

L'errore quadratico è:

$$E(K_{eq}, t) = \varepsilon^2 = f^2(x, \dot{x}) - 2K_{eq} x f(x, \dot{x}) + K_{eq}^2 x^2$$

**Eq. 16**

La condizione di minimizzazione dell'errore quadratico medio nel periodo è data da:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial E(K_{eq}, t)}{\partial K_{eq}} dt = 0$$

**Eq. 17**

dove:

$$\frac{\partial E(K_{eq}, t)}{\partial K_{eq}} = -2xf(x, \dot{x}) + 2K_{eq}x^2$$

**Eq. 18**

Sostituendo nell'integrale si ha:

$$-\frac{2}{T} \int_0^T xf(x, \dot{x}) dt + \frac{2}{T} K_{eq} \int_0^T x^2 dt = 0$$

**Eq. 19**

Da cui è possibile ricavare la rigidezza equivalente

$$K_{eq} = \frac{\int_0^T x f(x, \dot{x}) dt}{\int_0^T x^2 dt}$$

Eq. 20

### 2.3.2 VALUTAZIONE DELLA RIGIDEZZA EQUIVALENTE E CALCOLI DI FLUTTER

Per l'articolo di prova in esame la non linearità è nel circuito di controllo dell'alettone. Si tratta di una legge bilineare di rigidità della superficie mobile, di cui in Figura 9 si riporta il grafico della deflessione in funzione della forza applicata (momento M)

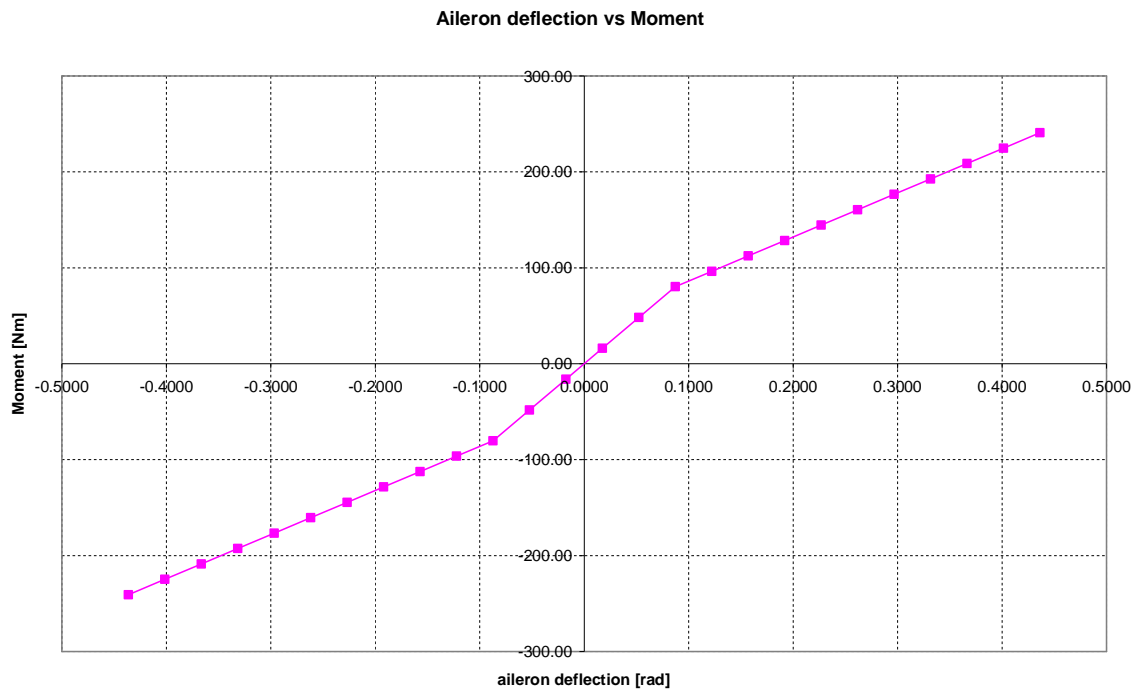


Figura 9 Legge non lineare deflessione – carico

Con due valori caratteristici di rigidità:

$$K = 919.6256 \text{ [Nm/rad]}$$

$$\text{per } -5^\circ < \delta < 5^\circ$$

$$K = 459.8128 \text{ [Nm/rad]}$$

$$\text{per } \delta < -5^\circ \text{ and } \delta > 5^\circ$$

Scelti un'ampiezza di oscillazione  $\Delta\varphi$  e un segnale sinusoidale  $x = \Delta\varphi \sin(2\pi f_n t)$  con frequenza assegnata di 1 [Hz] (si ricorda che la rigidità equivalente è indipendente dalla pulsazione) per il movimento oscillatorio dell'alettone, è possibile valutare, in base al legame mostrato in Figura 9, l'andamento di  $M(x)$  e quindi anche  $M(t)$ , nonché il valore di rigidità equivalente in base all'Eq. 20.

Sono stati effettuati diversi calcoli per altrettanti valori di ampiezze di oscillazione, i cui risultati sono riportati nella Tabella 1 e riportati nel grafico in Figura 10.

Oscillation amplitude [deg]	Keq [Nm/rad]	Oscillation amplitude [deg]	Keq [Nm/rad]
3	919.6256	15	651.2871
4	919.6256	16	639.7433
5	919.6256	17	629.4884
6	883.0222	18	620.3221
7	839.0385	19	612.0817
8	800.259	20	604.6365
9	767.4571	21	597.8776
10	739.8375	22	591.7153
11	716.4566	23	586.0754
12	696.4961	24	580.8936
13	679.3049	25	576.1181
14	664.3688		

Tabella 1 Valori di rigidità equivalente per diverse ampiezze di oscillazione

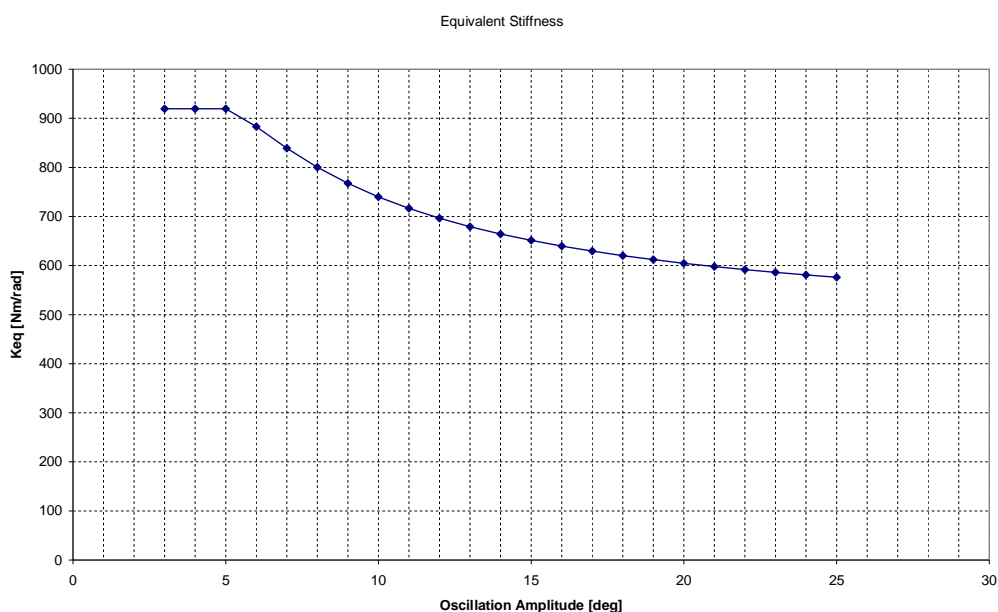
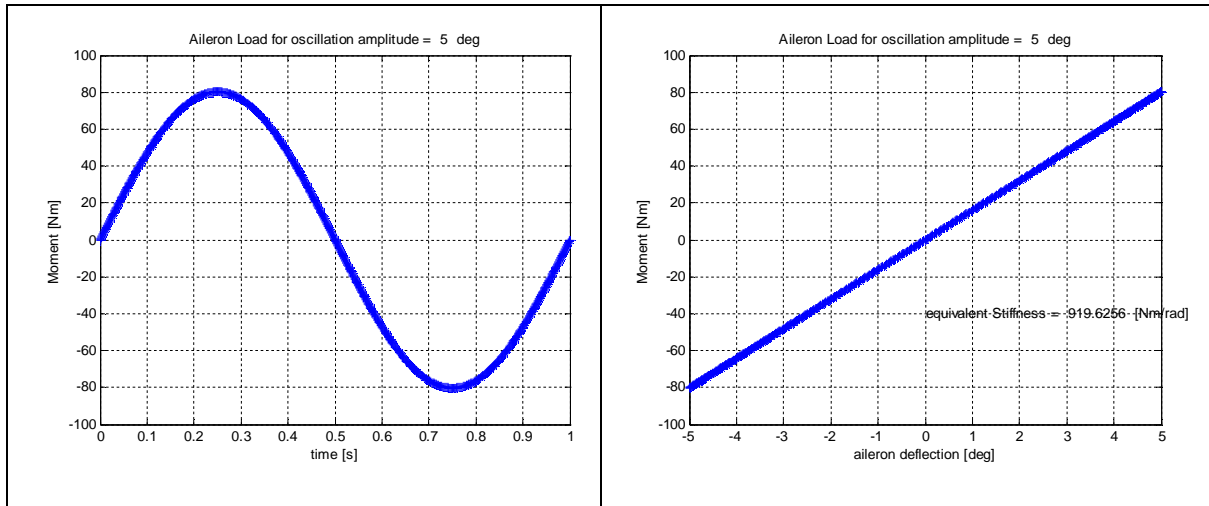


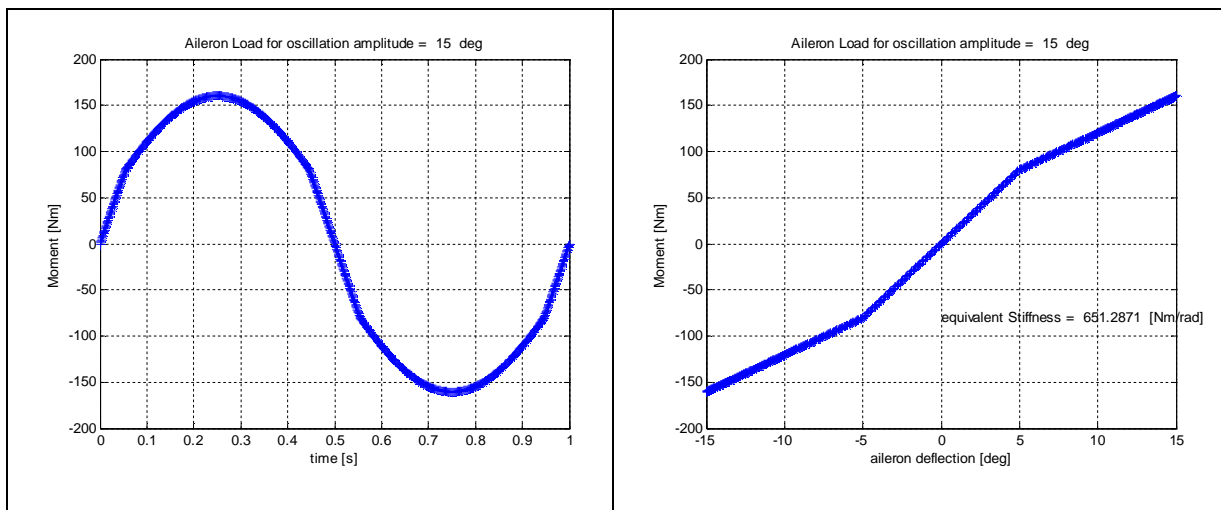
Figura 10 Andamento della rigidità equivalente al variare dell'ampiezza di oscillazione



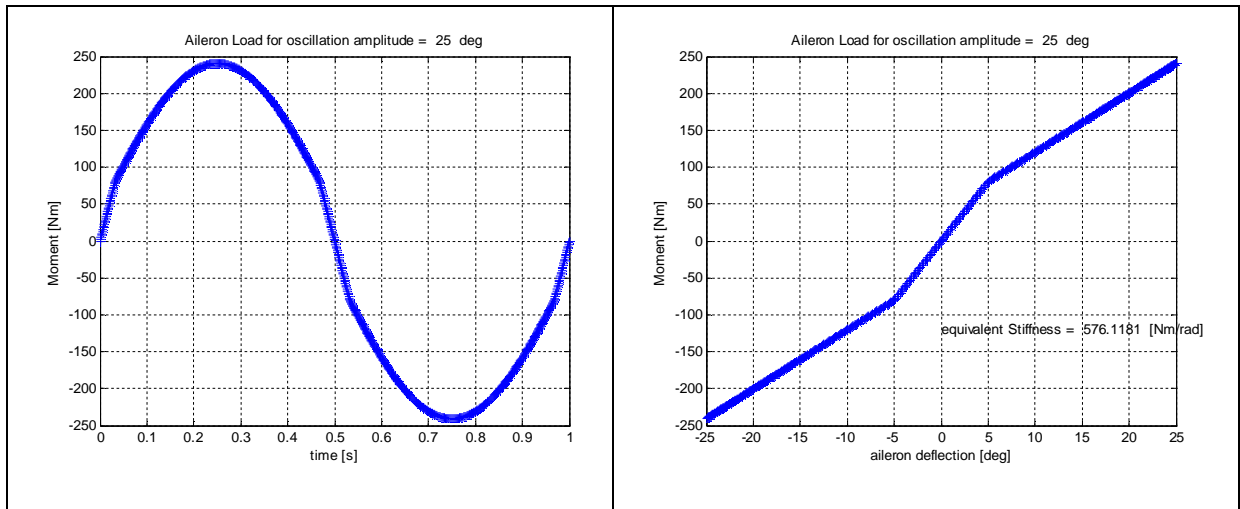
Si riportano, nelle figure che seguono, anche gli andamenti del momento  $M(x)$  e  $M(t)$  per alcuni valori di ampiezza di oscillazione, da cui si può notare, nell'andamento del momento nel tempo, come la funzione passi da una sinusoide pura (per ampiezze di oscillazioni entro  $5^\circ$ ) ad un moto armonico per ampiezze di oscillazioni oltre  $5^\circ$ .



**Figura 11 Andamento di  $M(t)$  e  $M(x)$  per ampiezza di oscillazione 5 [deg]**



**Figura 12 Andamento di  $M(t)$  e  $M(x)$  per ampiezza di oscillazione 15 [deg]**

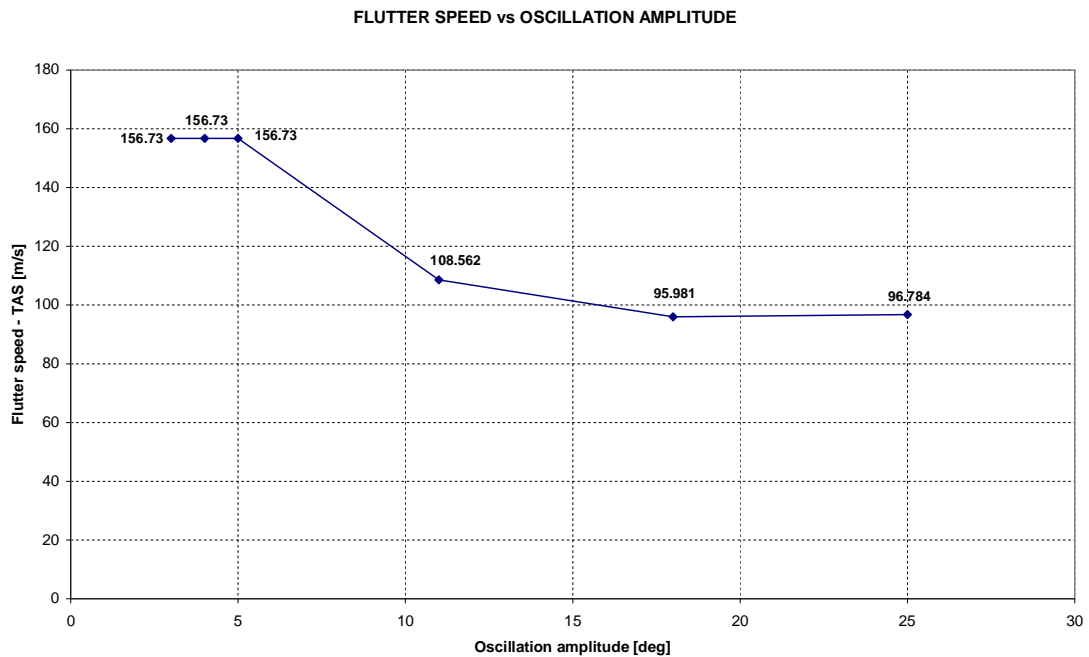


**Figura 13** Andamento di  $M(t)$  e  $M(x)$  per ampiezza di oscillazione 25 [deg]

Sono state quindi eseguite, con la tecnica della sottostrutturazione dinamica, diverse analisi di flutter pseudo lineari al variare della rigidità del circuito dell'alettone. I valori imposti sono proprio i valori di rigidità equivalente ricavati con la tecnica del bilancio armonico. In Tabella 2 si riportano i risultati in termini di velocità di flutter. In forma grafica essi sono mostrati in Figura 14.

Oscillation amplitude [deg]	$K_{eq}$ [Nm/rad]	$V_{F\_TAS}$ [m/s]
3	919.6256	156.73
4	919.6256	156.73
5	919.6256	156.73
11	716.4566	108.56
18	620.3221	95.98
25	576.1181	96.78

**Tabella 2** Risultati analisi di flutter pseudo lineari



**Figura 14 Risultati analisi di flutter pseudo lineari**

Le analisi di flutter sono state eseguite con il metodo PK della continuazione [23], alla quota di 3000 [m], coerentemente con i dati ricevuti dal progetto.

## 2.4 ANALISI DI FLUTTER NON LINEARI NEL DOMINIO DEL TEMPO

### 2.4.1 METODOLOGIA

Si consideri l'assenza di non linearità. L'equazione della dinamica con extra modi è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{pp} & \underline{\underline{M}}_{p,ex} \\ \underline{\underline{M}}_{ex,p} & \underline{\underline{M}}_{ex} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{q}}_p \\ \ddot{\underline{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{q}}_p \\ \dot{\underline{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_p \\ \underline{q}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}_{ext G}(t)$$

**Eq. 21**

dove

$\underline{\underline{M}}_{pp}$  matrice delle masse generalizzate principali

$\underline{\underline{\sigma}}_p$	matrice degli smorzamenti generalizzati principali
$\underline{\underline{K}}_p$	matrice delle rigidzze generalizzate principali
$\underline{q}_p(t)$	coordinate lagrangiane principali
$\underline{q}_{ex}(t) = [\beta]$	coordinate lagrangiane degli extra modi (nel caso in esame soltanto la rotazione $\beta$ dell'alettone)
$\underline{\underline{M}}_{ex}$	matrice delle masse generalizzate degli extra modi
$\underline{\underline{M}}_{p,ex}$	matrice delle masse generalizzate accoppiate tra modi principali e extra modi
$\underline{F}_{extG}(t)$	forzanti esterne generalizzate

In presenza di una forza esterna non lineare, ad esempio un momento dipendente dall'ampiezza di oscillazione:

$$M_{NL}(\Delta\tilde{\beta})$$

L'Eq. 21 diviene:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{pp} & \underline{\underline{M}}_{p,ex} \\ \underline{\underline{M}}_{ex,p} & \underline{\underline{M}}_{ex} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\ddot{q}}_p \\ \underline{\ddot{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\dot{q}}_p \\ \underline{\dot{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_p \\ \underline{q}_{ex} \end{pmatrix} = -\underline{F}_{NLG} + \underline{F}_{extG}(t)$$

**Eq. 22**

con

$\underline{F}_{NLG}$  forzanti esterne generalizzate non lineari.

Le forze esterne generalizzate non lineari possono essere ricavate a partire dal lavoro virtuale compiuto dalla deflessione della superficie:

$$\delta L = \delta\beta \cdot M_\beta$$

Sviluppando la rotazione della superficie in base modale si ottiene:

$$\beta = \phi_{\beta 1} q_1 + \phi_{\beta 2} q_2 + \dots + \phi_{\beta ex1} q_{ex1} + \phi_{\beta ex2} q_{ex2}$$

$$\delta\beta = \phi_{\beta 1} \delta q_1 + \phi_{\beta 2} \delta q_2 + \dots + \phi_{\beta ex1} \delta q_{ex1} + \phi_{\beta ex2} \delta q_{ex2}$$

Da cui:

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} = \phi_{\beta i} \cdot M_{\beta}$$

Che in notazione matriciale si scrive:

$$\left\{ \frac{\delta L}{\delta q_i} \right\} = \begin{bmatrix} \phi_{\beta 1} \\ \phi_{\beta 2} \\ \vdots \\ \phi_{\beta ex 1} \\ \phi_{\beta ex 2} \end{bmatrix} \cdot M_{\beta} = \begin{bmatrix} \phi_{\beta 1} \\ \phi_{\beta 2} \\ \vdots \\ \phi_{\beta ex 1} \\ \phi_{\beta ex 2} \end{bmatrix} \cdot M_{NL}(\Delta \tilde{\beta})$$

Ovvero

$$\underline{F}_{NL_G} = \underline{\phi}_{NL} \underline{F}_{NL}(\Delta \tilde{\beta})$$

con:

$$\underline{\phi}_{NL} = \begin{bmatrix} \phi_{\beta 1} \\ \phi_{\beta 2} \\ \vdots \\ \phi_{\beta ex 1} \\ \phi_{\beta ex 2} \end{bmatrix}; \quad \underline{F}_{NL}(\Delta \tilde{\beta}) = M_{NL}(\Delta \tilde{\beta})$$

Sostituendo nell'Eq. 22 si ottiene l'equazione della dinamica con forzanti esterne non lineari:

$$\underline{M} \begin{pmatrix} \ddot{\underline{q}}_p \\ \ddot{\underline{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \underline{C} \begin{pmatrix} \dot{\underline{q}}_p \\ \dot{\underline{q}}_{ex} \end{pmatrix} + \underline{K} \begin{pmatrix} \underline{q}_p \\ \underline{q}_{ex} \end{pmatrix} = \underline{F}_{ext_G}(t) - \underline{\phi}_{NL} \underline{F}_{NL}(\Delta \tilde{\beta})$$

**Eq. 23**

Dove:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{pp} & \underline{M}_{p,ex} \\ \underline{M}_{ex,p} & \underline{M}_{ex} \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{C}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'Eq. 23 in forma Stato Vettore assume la forma:

$$\frac{d}{dt} \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{C} \end{bmatrix} \underline{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{M}^{-1} \underline{\phi}_T \end{bmatrix} \underline{F}_{ext_G}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{M}^{-1} \underline{\phi}_{NL} \end{bmatrix} \underline{F}_{NL}(\Delta \tilde{\beta})$$

**Eq. 24**

Dove:

$\underline{\phi}$  matrice degli spostamenti modali del sistema prelevati nella direzione delle forze applicate esterne

$\underline{\phi}_{=NL}$  matrice degli spostamenti modali della non linearità, che nel caso in esame è un vettore di dimensioni pari all'ordine del sistema, con termini tutti nulli eccetto un termine unitario in corrispondenza dell'extra modo)

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} \underline{q}_p \\ \underline{q}_{ex} \\ \underline{\dot{q}}_p \\ \underline{\dot{q}}_{ex} \end{pmatrix} \text{ vettore di stato, } \quad [\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} \end{bmatrix} \text{ matrice pianta}$$

$$[\underline{B}] = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{\phi}^T \end{bmatrix} \text{ matrice di controllo lineare, } \quad [\underline{B}'] = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{\phi}_{=NL} \end{bmatrix} \text{ matrice di controllo non lineare}$$

Data la non linearità del sistema, la soluzione dell'Eq. 24 dipende dalle condizioni iniziali.

Nell'Eq. 24 non sono state ancora incluse le forze aerodinamiche generalizzate. Nel caso in cui si utilizzi una rappresentazione razionale alla Roger, con 4 ritardi aerodinamici, lo stato vettore si scrive:

$$\frac{d}{dt} \underline{X}(t) = \underline{A} \cdot \underline{X}(t) + \underline{B} \cdot \underline{U}(t) - \underline{B}' \cdot \underline{U}'(\Delta\tilde{\beta})$$

Eq. 25

Con:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}_S^{-1}\underline{K}_S & -\underline{M}_S^{-1}\underline{C}_S & -\eta_0\gamma_1\underline{M}_S^{-1}\underline{B}_1 & -\eta_0\gamma_2\underline{M}_S^{-1}\underline{B}_2 & -\eta_0\gamma_3\underline{M}_S^{-1}\underline{B}_3 & -\eta_0\gamma_4\underline{M}_S^{-1}*\underline{B}_4 \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & -\underline{I} \cdot \gamma_1 \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \cdot \gamma_2 \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \cdot \gamma_3 \frac{v}{c_r} & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \cdot \gamma_4 \frac{v}{c_r} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \\ \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \\ \underline{z}_4 \end{Bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}_S^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}_S^{-1} \cdot \underline{\Phi}_{NL} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}(t) = \underline{F}_{ext_c}(t); \quad \underline{U}'(\Delta\tilde{\beta}) = \underline{F}_{NL}(\Delta\tilde{\beta})$$

### **Matrice di osservazione della non linearità**

Ricordando l'espressione di  $\Delta\tilde{\beta}$ :

$$\Delta\tilde{\beta} = \beta$$

e di  $\beta$  in base modale:

$$\beta = \phi_{\beta 1} \mathbf{q}_1 + \phi_{\beta 2} \mathbf{q}_2 + \dots + \phi_{\beta ex 1} \mathbf{q}_{ex 1} + \phi_{\beta ex 2} \mathbf{q}_{ex 2}$$

Si ha:

$$\Delta\tilde{\beta} = (\phi_{\beta 1}) \mathbf{q}_1 + \dots + (\phi_{\beta ex 2}) \mathbf{q}_{ex 2}$$

I vettori di osservazione per spostamento e velocità sono dati rispettivamente dai due vettori di dimensione  $[(2 + n_{ritardi}) \cdot \text{modi}]$ :

$$\underline{C}_{NL} = [\underline{\phi}_{OBS} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}] \quad \underline{C}_{NLV} = [\underline{0} \quad \underline{\phi}_{OBS} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}]$$

dove:

$\underline{\phi}_{OBS} = [(\phi_{\beta 1}) \quad \dots \quad (\phi_{\beta ex 2})]$  è un vettore riga di dimensione pari al numero di modi (principali ed extra)

da cui la rotazione e il rateo:

$$\Delta\tilde{\beta} = \underline{C}_{NL} \underline{X} \quad \frac{d}{dt}(\Delta\tilde{\beta}) = \underline{C}_{NLV} \underline{X}$$

## 2.4.2 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE AEROELASTICA NON LINEARE NEL TEMPO

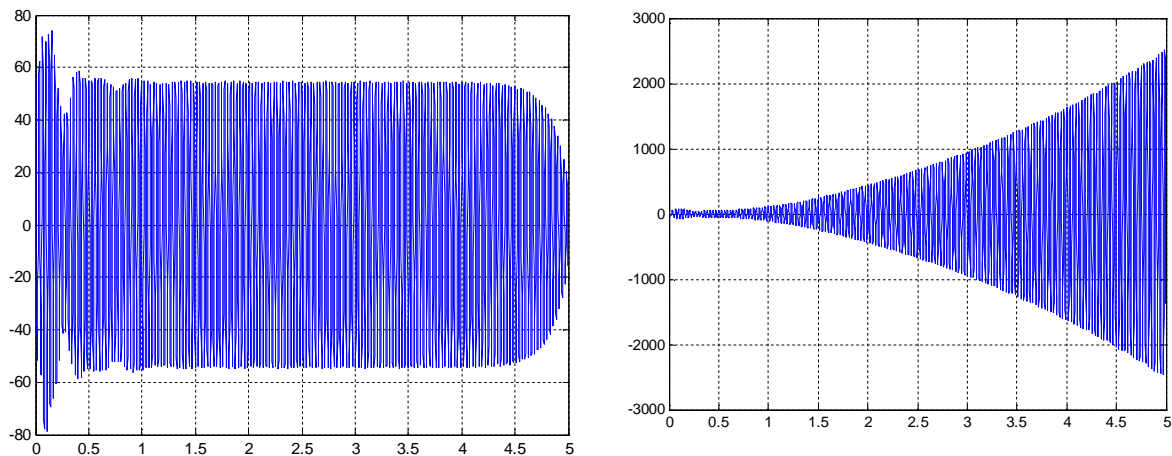
Il sistema descritto dall'Eq. 25 è stato risolto nel tempo mediante integrazione con Runge Kutta del 4° ordine. Nel caso in esame è stata osservata l'accelerazione in un nodo all'estremità dell'ala per verificare la presenza di oscillazioni instabili.

In particolare si è proceduto come segue:

- per ogni calcolo è stata imposta la condizione iniziale di ampiezza di oscillazione della superficie mobile (alettone);
- ogni calcolo è stato eseguito alla quota di 3000 [m] e per un valore di velocità di volo vicina a quella di flutter ottenuta dalle precedenti analisi pseudo lineari;
- per ogni valore di velocità prossimo alla velocità di flutter sono stati eseguiti più calcoli facendo variare in un intervallo molto stretto sia l'ampiezza di oscillazione iniziale che la velocità di volo, fino a raggiungere la condizione di flutter, evidenziata dall'accelerazione all'estremità dell'ala.

Essendo la natura del flutter in esame alquanto “esplosiva” è stato piuttosto laborioso trovare il valore di velocità di flutter (limite tra comportamento stabile ed instabile).

Le due immagini che seguono (Figura 15) mostrano, per una data condizione iniziale, l'accelerazione all'estremità dell'ala alla velocità di flutter e appena dopo l'innesco dell'instabilità.



**Figura 15** Accelerazione estremità alare alla velocità di flutter e immediatamente dopo

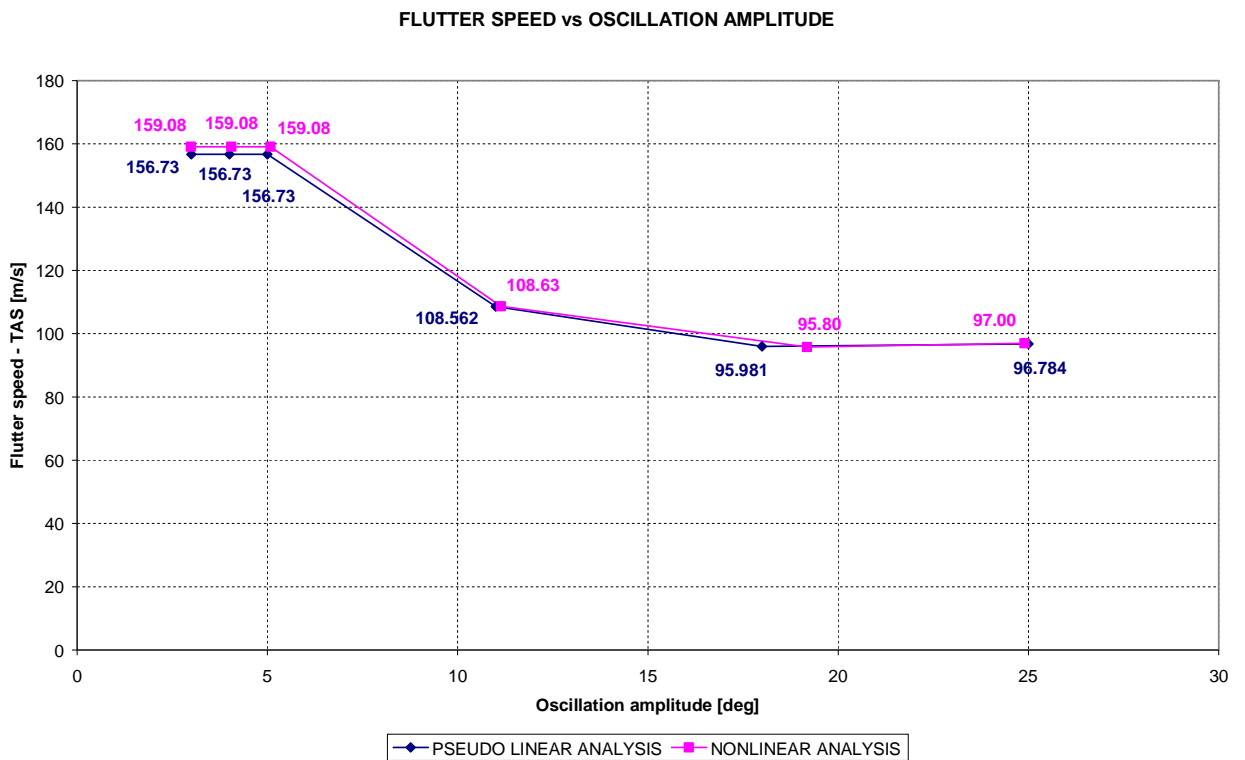


I risultati delle analisi sono riportati in Tabella 3, dove sono confrontati con quelli ottenuti con le analisi pseudo lineari nel dominio della frequenza. Nella Tabella 3 sono riportati anche i valori di rigidità equivalente valutati in condizione di flutter, i quali sono risultati in ottimo accordo con quelli utilizzati nei calcoli di flutter pseudo-lineari.

<i>PSEUDO LINEAR ANALYSIS FD</i>			<i>NON LINEAR ANALYSIS TD</i>		
oscill amplitude	VF	Keq	oscill amplitude	VF	Keq
[deg]	[m/s]	[Nm/rad]	[deg]	[m/s]	[Nm/rad]
3	156.73	919.6256	2.99	159.077	895.9091
4	156.73	919.6256	4.05	159.077	895.9091
5	156.73	919.6256	5.0793	159.077	895.9091
11	108.562	716.4566	11.1356	108.63	707.3388
18	95.981	620.3221	19.1801	95.8	605.5865
25	96.784	576.1181	24.899	97	572.3596

**Tabella 3** Confronto risultati analisi pseudo lineari nel dominio della frequenza e analisi non lineari nel tempo

Nella Figura 16 il confronto è riportato in forma grafica.



**Figura 16** Confronto risultati analisi pseudo lineari nel dominio della frequenza e analisi non lineari nel tempo

## 2.5 CONCLUSIONI

A partire dai dati a disposizione relativi all'articolo di prova, sono state effettuate delle operazioni preparatorie sulla base modale e sulla schematizzazione delle superfici mobili finalizzate all'esecuzione di analisi di flutter pseudo lineari nel dominio della frequenza.

Le analisi di flutter pseudo lineari hanno fatto uso della tecnica della sottostrutturazione dinamica con extra modo di alettone, la superficie che è stata considerata affetta da una non linearità bilineare in rigidità.

I valori di rigidità equivalente attribuiti al meccanismo dell'alettone sono stati ricavati mediante la tecnica del bilancio armonico.

Per confermare la bontà dell'approccio utilizzato, il problema è stato formulato anche in stato vettore non lineare, per essere poi risolto nel tempo con integrazione Runge Kutta del quarto ordine.

I risultati in termini di velocità di flutter al variare dell'ampiezza dell'oscillazione ottenuti mediante:

- analisi di flutter pseudo lineari nel dominio della frequenza
- analisi di flutter non lineari nel dominio del tempo

sono in ottimo accordo, come mostrato dalla Tabella 3 e dalla Figura 16, confermando la bontà del bilancio armonico per il caso esaminato.

## Capitolo 3

### *Introduzione di leggi di controllo o funzioni di trasferimento di servoattuatori idraulici nell'equazione del flutter*

#### 3.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente è stato affrontato il problema delle non linearità strutturali concentrate nelle linee di comando (manuali) di velivoli di categoria *small* ed è stata fornita una metodologia, relativamente a basso costo, per effettuare analisi di flutter nel dominio della frequenza.

Nel presente capitolo sarà messa a punto una metodologia lineare, in grado di includere le leggi di controllo nell'equazione del flutter nel dominio della frequenza, allorquando il velivolo sia dotato di comandi *fly by wire*.

Saranno presentati i risultati per due articoli di prova rappresentativi:

- un velivolo sperimentale in configurazione non convenzionale ad ali giuntate (*joined wing*), per il quale sarà inclusa la legge di controllo a ciclo chiuso, che mette in retroazione l'angolo degli elevatori con la rotazione a picchiare del velivolo;
- un velivolo dell'aviazione civile, rispondente alle normative di aeronavigabilità EASA CS 25 di categoria *business jet*, per il quale sarà inclusa la funzione di trasferimento del servoattuatore idraulico dell'elevatore.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, per ragioni di economia di calcolo tutte le analisi saranno effettuate con associazione modale simmetrica, senza ledere la validità dello studio.

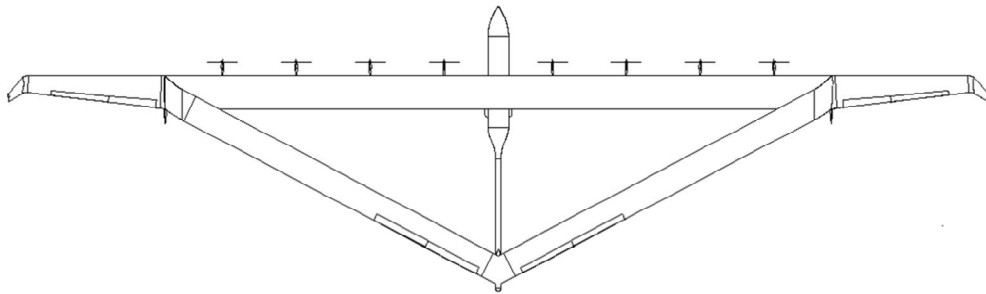
Alla base di tutte le formulazioni che saranno esposte vi sarà sempre la tecnica della sottostrutturazione dinamica, con extra modi di superfici mobili.

### 3.2 ARTICOLO DI PROVA JOINED WING

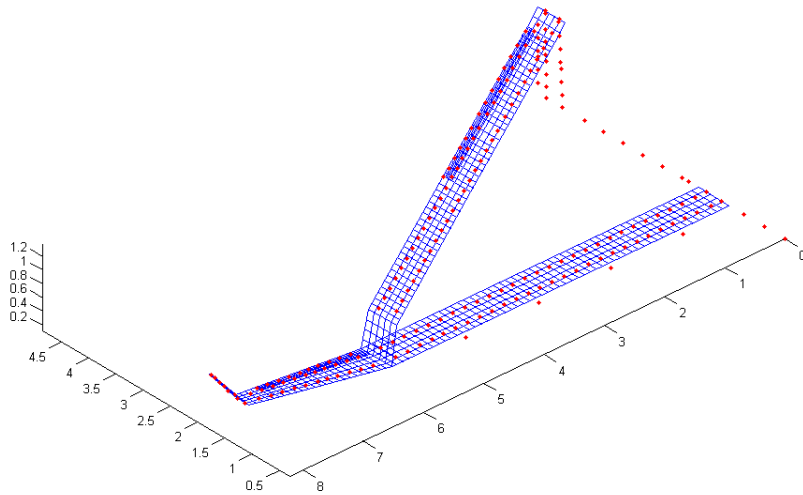
L'articolo di prova utilizzato per introdurre la legge di controllo degli elevatori è un velivolo sperimentale con una configurazione non convenzionale ad ali giuntate, del quale si mostra una vista in pianta. Sono a disposizione: il modello aerodinamico *doublet lattice*, il modello dinamico agli elementi finiti, il modello di *matching* e la legge di controllo degli elevatori.

L'attività è stata svolta nell'ambito del progetto **PRORA HAPD** (*High Altitude Performance Demonstrator*).

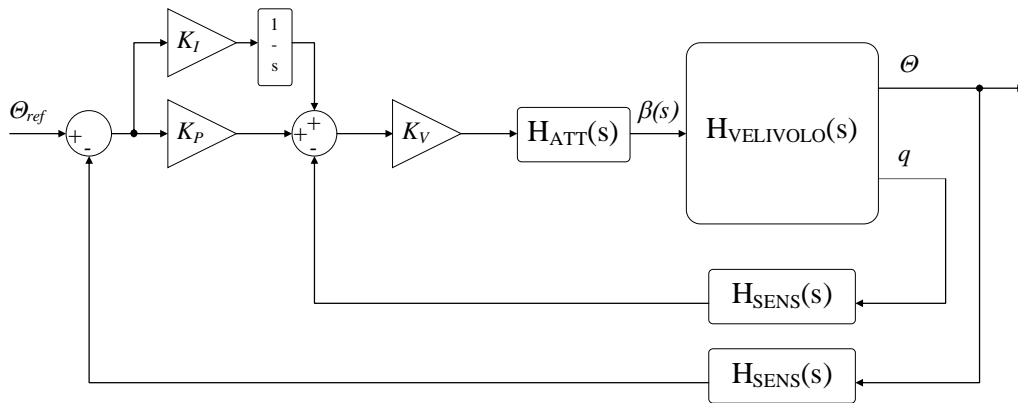
Nelle figure che seguono sono mostrati: una vista in pianta del velivolo, il modello aerodinamico e di *matching*, la legge di controllo degli elevatori.



**Figura 17** Articolo di prova #2 – *Joined wing*



**Figura 18** Modello aerodinamico e di matching (nodi di colore rosso)



**Figura 19** Schema logico della legge di controllo a ciclo chiuso (pitch) degli elevatori

$H_{att}(s)$  e  $H_{sens}(s)$  sono le funzioni di trasferimento rispettivamente dell'attuatore e del sensore aventi le seguenti espressioni:

$$H_{att}(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1s + b_0}$$

$$H_{sens}(s) = \frac{c_0}{s + d_0}$$

Con i seguenti valori dei coefficienti:

$a_0 = b_0 = 7057.0395$   
 $b_1 = 168.0124$   
 $d_0 = c_0 = 12.566$   
 $K_i = 3.375$   
 $K_p = 4.5$

$V_{TAS}$	$K_V(V_\infty)$
[m/s]	
15	-0.4
20	-0.2
25	-0.07
30	-0.01

### 3.2.1 INCLUSIONE DELLA LEGGE DI CONTROLLO NELL'EQUAZIONE DELLA STABILITÀ AEROELASTICA

Escludendo la dinamica del velivolo dal circuito si ottiene il legame fra la rotazione degli elevatori e quella di *pitch*.

$$\beta = T(s, V_\infty) \cdot \Theta_v$$

$$\frac{\beta}{\Theta} = T(s, V_\infty) = K_v(V_\infty)(K_p - c_0)a_0 \frac{\left[ s + \frac{K_i}{(K_p - c_0)} \right]}{(s^2 + b_1s + b_0)(s + d_0)}$$

Eq. 26

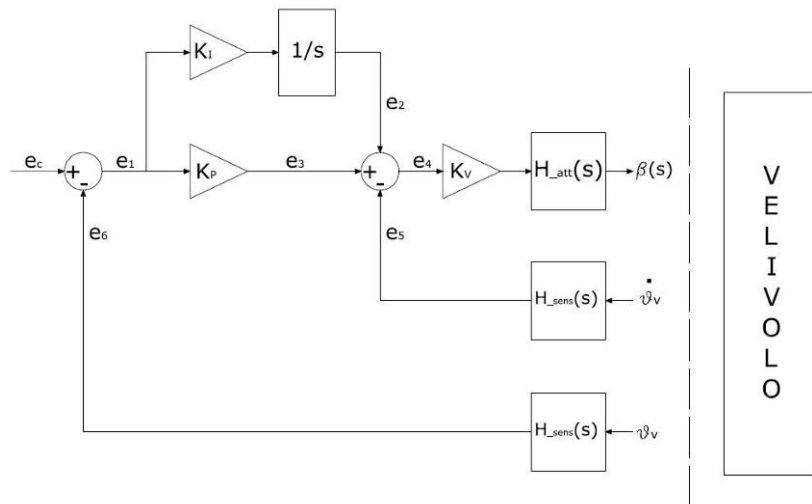


Figura 20 Schema della legge di controllo con esclusione della dinamica del velivolo

Scrivendo le equazioni di ingresso - uscita ai singoli nodi si determina una rappresentazione a coefficienti costanti della funzione di trasferimento a ciclo aperto:

$$(s^2 \underline{\underline{A}} + s \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \cdot Y(s) = (s^2 \underline{\underline{V}}_2 ; s \underline{\underline{V}}_1 ; \underline{\underline{V}}_0) \cdot \Theta(s)$$

Eq. 27

Essendo:

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= K_v H_{att}(s) \cdot e_4 \\
e_4 &= e_3 + e_2 - e_5 \\
e_2 &= \frac{K_i}{s} \cdot e_1 \\
e_3 &= K_p \cdot e_1 \\
e_5 &= H_{sens}(s) \cdot \dot{\Theta}_v \\
e_1 &= \Theta_v - H_{sens}(s) \cdot \Theta_v
\end{aligned}$$

**Eq. 28**

posto:

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \beta(s) \\
e_4 &= E_{102} \\
e_2 &= E_{103} \\
e_3 &= E_{104} \\
e_5 &= E_{105} \\
e_1 &= E_{106}
\end{aligned}$$

e tenuto conto delle espressioni polinomiali dell'attuatore e del sensore si ha:

$$\begin{aligned}
(s^2 + b_1 s + b_0) \beta &= K_v a_0 E_{102} \\
E_{102} &= E_{104} + E_{103} - E_{105} \\
s E_{103} &= K_i E_{106} \\
E_{104} &= K_p E_{106} \\
(s + d_0) E_{105} &= s c_0 \Theta_v \\
(s + d_0) E_{106} &= [s + (d_0 - c_0)] \Theta_v
\end{aligned}$$

**Eq. 29**

L'idea è quella di applicare alla Eq. 29 tanti derivatori finché tutte le variabili al primo membro abbiano termini non nulli in  $s^2$ , poiché l'obiettivo è aggiungere tali equazioni al sistema aeroelastico senza però rendere singolare la matrice di massa.

$$\begin{aligned}
(s^2 + b_1 s + b_0)\beta &= K_v a_0 E_{102} \\
s^2 E_{102} &= s^2 E_{104} + s^2 E_{103} - s^2 E_{105} \\
s^2 E_{103} &= s K_i E_{106} \\
s^2 E_{104} &= s^2 K_p E_{106} \\
(s^2 + s d_0) E_{105} &= s^2 c_0 \cdot \Theta_v \\
(s^2 + s d_0) E_{106} &= [s^2 + s(d_0 - c_0)] \cdot \Theta_v
\end{aligned}$$

**Eq. 30**

Le Eq. 30, in forma di matrice, assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
s^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -K_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} b_0 & -K_v a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{bmatrix} = s^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_0 \\ 1 \end{bmatrix} \Theta + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_0 - c_0 \end{bmatrix} \Theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Theta
\end{aligned}$$

**Eq. 31**

Si introduce ora la dinamica del velivolo. Per semplicità di esposizione si suppone che esso sia rappresentato da 2 modi normali e dall'extra modo della superficie di controllo, rispettivamente con coordinate lagrangiane  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $\beta$ . L'equazione della dinamica aeroelastica è:

$$\begin{aligned}
s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{bmatrix} + s \left\langle \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\eta_1}{K_R} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix} \right\rangle^{\text{Imag}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{bmatrix} + \\
\left\langle \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \eta_0 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix} \right\rangle^{\text{Real}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**Eq. 32**



Se non vi fosse la legge di controllo, considerando la prima delle Eq. 30 si avrebbe:

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} + s \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} - \frac{\eta_1}{K_R} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix}^{Imag} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} - \eta_0 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix}^{Real} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ K_v a_0 E_{102} \end{pmatrix}$$

Eq. 33

In analogia con i servovalvatori idraulici, il termine  $K_v a_0 E_{102}$  si può vedere come l'ingresso imposto alla servovalvola ed è un termine noto. La stabilità di questo sistema può essere eseguita con i metodi PK una volta sommato, nell'equazione dell'extra modo, alle matrici di massa, di smorzamento e di rigidezza rispettivamente i termini 1,  $b_1$ ,  $b_0$ .

Quando la servovalvola è asservita a ciclo aperto con la rotazione  $\Theta$ , non considerando per economia di scrittura l'aerodinamica<sup>1</sup>, le Eq. 33 assieme alle Eq. 31 consegnano:

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -K_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix} + s \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & -K_v a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix} = s^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_0 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_0 - c_0 \end{pmatrix} \Theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Theta$$

Eq. 34

<sup>1</sup> Il che sarà fatto in seguito con una rappresentazione ridotta della funzione di trasferimento

Ricordando il legame che esiste fra  $\Theta$  e le coordinate generalizzate (modali e di controllo):

$$\Theta = (\Phi_{1\Theta} \quad \Phi_{2\Theta} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix}$$

Eq. 35

Il secondo membro delle Eq. 34 diviene:

$$S^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_0 \Phi_{1\Theta} & -c_0 \Phi_{2\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi_{1\Theta} & -\Phi_{2\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix} +$$

$$S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(d_0 - c_0) \Phi_{1\Theta} & -(d_0 - c_0) \Phi_{2\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \\ E_{103} \\ E_{104} \\ E_{105} \\ E_{106} \end{pmatrix}$$

Eq. 36

## RAPPRESENTAZIONE RIDOTTA DELLA LEGGE DI CONTROLLO

La legge di controllo, accorpando i vari ingressi e le varie uscite può essere semplificata in:

$$\frac{\beta}{\Theta} = T(s, V_\infty) = K_v(V_\infty)(K_p - c_0)a_0 \frac{\left[ s + \frac{K_i}{(K_p - c_0)} \right]}{(s^2 + b_1s + b_0)(s + d_0)}$$

**Eq. 37**

posto

$$Z = \frac{K_i}{(K_p - c_0)}$$

$$G = (K_p - c_0)$$

Si ha:

$$\beta = K_v a_0 \frac{E_{102}}{(s^2 + b_1s + b_0)}$$

$$E_{102} = G \frac{(s + Z)}{(s + d_0)} \Theta$$

**Eq. 38**

Applicando tanti derivatori finché tutte le variabili a sinistra hanno termini non nulli in  $s^2$ :

$$(s^2 + b_1s + b_0)\beta = K_v a_0 E_{102}$$

$$(s^2 + s d_0) E_{102} = s^2 (G)\Theta + s(GZ)\Theta + (0)\Theta$$

**Eq. 39**

e sommando alle Eq. 32:

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} & 0 \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} & 0 \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left\langle s \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} - \frac{\eta_1}{K_R} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} & 0 \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle^{\text{Imag}} +$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & -K_v a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \eta_0 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} & 0 \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle^{\text{Real}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \end{pmatrix} = s^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ G \end{pmatrix} \Theta + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ GZ \end{pmatrix} \Theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Theta + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Eq. 40**

introducendo infine il legame funzionale fra  $\Theta$  e le coordinate generalizzate (modali e di controllo):

$$\Theta = (\Phi_{1\Theta} \quad \Phi_{2\Theta} \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \end{pmatrix}$$

si ottiene l'equazione a ciclo chiuso:

$$s^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} & 0 \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} & 0 \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} + 1 & 0 \\ -\Phi_{1\Theta} G & -\Phi_{2\Theta} G & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left\langle s \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \\ -\Phi_{1\Theta} GZ & -\Phi_{2\Theta} GZ & 0 & d_0 \end{bmatrix} - \frac{\eta_1}{K_R} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} & 0 \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{Imag}} \right\rangle +$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & -K_v a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \eta_0 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} & 0 \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{Real}} \right\rangle \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ E_{102} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 41

Annullando le forze esterne si ottengono le equazioni della stabilità, già esplicitate nel formato PK.

$$\left\{ s^2 \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{pp} & \underline{\underline{M}}_{pY} \\ \underline{\underline{M}}_{Yp} & \underline{\underline{M}}_{YY} + \underline{\underline{A}} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_{pp} - \frac{\eta_1}{K_R} \underline{\underline{Q}}_{pp}^i & -\frac{\eta_1}{K_R} \underline{\underline{Q}}_{pY}^i \\ -\frac{\eta_1}{K_R} \underline{\underline{Q}}_{Yp}^i - \underline{\underline{V}}_1 \underline{\underline{\Phi}}^R & -\frac{\eta_1}{K_R} \underline{\underline{Q}}_{YY}^i + \underline{\underline{B}} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{pp} - \eta_0 \underline{\underline{Q}}_{pp}^R & -\eta_0 \underline{\underline{Q}}_{pY}^R \\ -\eta_0 \underline{\underline{Q}}_{Yp}^R - \underline{\underline{V}}_0 \underline{\underline{\Phi}}^R & -\eta_0 \underline{\underline{Q}}_{YY}^R + \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 42

Con:

$$\underline{\underline{M}}_{pp} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Matrice delle masse generalizzate modali

$$\underline{\underline{M}}_{pY} = \begin{bmatrix} m_{1\beta} & 0 \\ m_{2\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice delle masse generalizzate incrociate

$$\underline{\underline{M}}_{Yp} = \begin{bmatrix} m_{\beta 1} & m_{\beta 2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Matrice delle masse generalizzate incrociate**

$$\underline{\underline{M}}_{YY} = \begin{bmatrix} m_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Matrice della massa generalizzata dell'extra - modo**

$$\underline{\underline{\sigma}}_{pp} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

**Matrice degli smorzamenti generalizzati**

$$-\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \underline{\underline{Q}}_{pp}^i = -\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}^{Imag}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate principali, parte immaginaria**

$$-\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \underline{\underline{Q}}_{pY}^i = -\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \begin{bmatrix} Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{2\beta} & 0 \end{bmatrix}^{Imag}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate incrociate, parte immaginaria**

$$-\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \underline{\underline{Q}}_{Yp}^i = -\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \begin{bmatrix} Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{Imag}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate incrociate, parte immaginaria**

$$-\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \underline{\underline{Q}}_{YY}^i = -\frac{\eta_1}{K_R} \cdot \begin{bmatrix} Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{Imag}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate extra, parte immaginaria**

$$-\eta_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_{pp}^R = -\eta_0 \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}^{Real}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate principali, parte reale**

$$-\eta_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_{pY}^R = -\eta_0 \cdot \begin{bmatrix} Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{2\beta} & 0 \end{bmatrix}^{Real}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate incrociate, parte reale**

$$-\eta_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_{Yp}^R = -\eta_0 \cdot \begin{bmatrix} Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{Real}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate incrociate, parte reale**

$$-\eta_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_{YY}^R = -\eta_0 \cdot \begin{bmatrix} Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{Real}$$

**Matrice delle forze aerodinamiche generalizzate extra, parte reale**

$$-\underline{V}_2 \underline{\Phi}^R = -\begin{Bmatrix} 0 \\ G \end{Bmatrix} \cdot \{\Phi_{1\theta} \quad \Phi_{2\theta}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Phi_{1\theta} G & -\Phi_{2\theta} G \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\underline{V}_1 \underline{\Phi}^R = -\begin{Bmatrix} 0 \\ GZ \end{Bmatrix} \cdot \{\Phi_{1\theta} \quad \Phi_{2\theta}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Phi_{1\theta} GZ & -\Phi_{2\theta} GZ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix}$$

$$-\underline{V}_0 \underline{\Phi}^R = -\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \{\Phi_{1\theta} \quad \Phi_{2\theta}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} b_0 & -K_v a_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Matrici dipendenti dalla legge di controllo**

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{1\theta} \\ \Phi_{2\theta} \end{Bmatrix}$$

**Rotazioni modali in pitch**

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

**Coordinate generalizzate principali**

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \beta \\ E_{102} \end{pmatrix}$$

**Coordinate generalizzate di controllo**

### 3.2.2 RISULTATI

Le analisi sono condotte considerando i seguenti parametri modali del velivolo:

MODO	F [Hz]	MG (Kg*m <sup>2</sup> )
1	0.00	92.2
2	0.00	92.2
3	0.00	129.3
4	1.1715	9.7091
5	3.3833	3.8668
6	4.2698	2.8619
7	5.3567	1.10E-02
8	5.5512	1.6271
9	5.8942	0.72084
10	6.2569	5.0766
11	8.9447	0.30349
12	9.4866	2.22E-02
13	9.602	2.17E-02
14	10.772	0.40679
15	12.535	0.13985
16	13.064	2.72E-03
17	13.182	5.47E-02
18	13.26	6.54E-03
19	15.67	0.1312
20	17.157	3.91E-03
21	18.685	0.19584
22	20.132	0.16965
23	21.873	3.53E-02
24	22.441	4.50E-02
25	23.993	0.15435
26	24.936	2.27E-02
27	25.952	4.88E-02

Tabella 4 Frequenze e Masse generalizzate modali

MODO	EXTRA_MODO	GM_IJ
1	51 <sup>2</sup>	0
2	51	0
3	51	0
4	51	1.70E-03
5	51	-6.90E-03
6	51	-7.19E-04
7	51	-8.52E-05
8	51	1.48E-03
9	51	2.60E-03
10	51	-5.63E-03
11	51	-7.54E-04
12	51	-4.71E-05
13	51	-6.78E-05
14	51	-1.68E-03
15	51	-7.55E-05
16	51	1.54E-05
17	51	-1.20E-03
18	51	1.46E-04
19	51	4.17E-04
20	51	-8.67E-06
21	51	2.20E-03
22	51	1.57E-03
23	51	-1.80E-03
24	51	-2.09E-03
25	51	-1.07E-03
26	51	3.85E-04
27	51	2.45E-04

Tabella 5 Masse generalizzate incrociate

Qui di seguito si riportano i coefficienti modali della rotazione in *pitch* nella zona in cui è predisposto il sistema di navigazione e controllo.

La rotazione è valutata assumendo una variazione lineare degli spostamenti modali lungo Z tra gli estremi della zona.

<sup>2</sup> Il modo 51 è la rotazione degli elevatori

Modo	Ry	Modo	Ry
1	0	15	0.02824
2	0	16	-0.00085
3	1	17	-0.01882
4	-0.02854	18	0.00069
5	0.03955	19	0.02456
6	0.04061	20	-0.00224
7	-0.00002	21	-0.0883
8	-0.09831	22	-0.2034
9	-0.0414	23	0.01673
10	-0.00397	24	-0.09192
11	0.00202	25	-0.05621
12	0.00324	26	0.00503
13	-0.00418	27	-0.01689
14	-0.00642		

Tabella 6 Rotazioni modali in pitch zona sistema navigazione e controllo

I risultati delle analisi di flutter senza l'inclusione della legge di controllo sono mostrate in Figura 21.

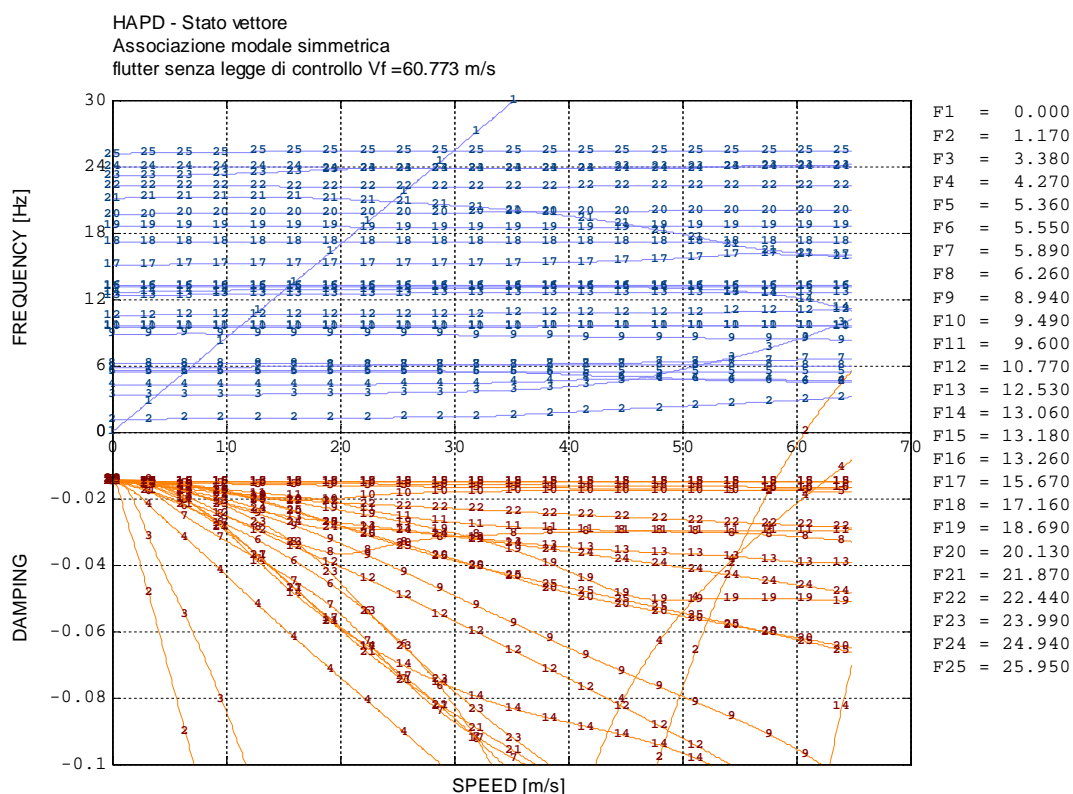


Figura 21 Analisi di flutter senza legge di controllo

### 3.2.2.1 Analisi di flutter con legge di controllo

I calcoli con la legge di controllo sono stati eseguiti sia con rappresentazione estesa che con rappresentazione ridotta della legge di controllo, consegnando gli stessi risultati.

Matrici A B C e Vettori  $V_2 V_1 V_0$  - funzione di trasferimento primo tipo Eq. 30,  $K_v = -0.04$

1	0	0	0	0	0
0	1	-1	-1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	-4.5
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

MATRICE A

168.0124	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-3.375
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	12.56637	0
0	0	0	0	0	12.56637

MATRICE B

7057.04	282.2816	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

MATRICE C

	<b>V2</b>	<b>V1</b>	<b>V0</b>
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	12.56637	0	0
	1	0	0

Vettori  $V_2 V_1 V_0$  (TF primo tipo)

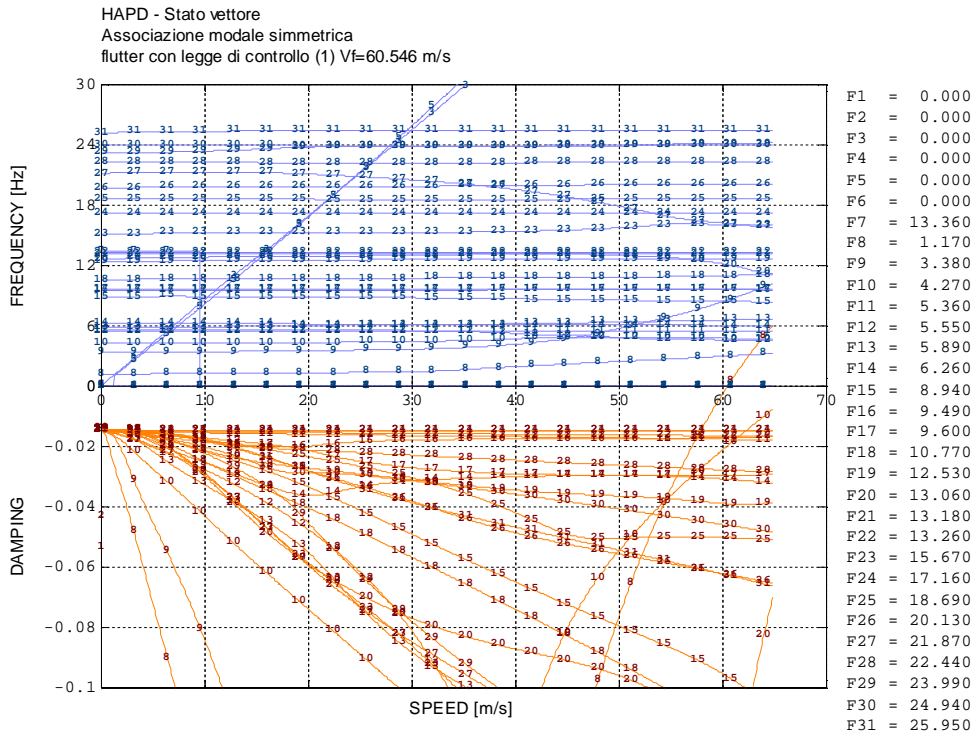


Figura 22 Analisi di flutter con legge di controllo TF primo tipo Eq. 30



Matrici A B C e Vettori  $V_2$   $V_1$   $V_0$  - funzione di trasferimento secondo tipo Eq. 39,  $K_V = -0.04$

1	0
0	1

MATRICE A

168.01238	0
0	12.56637

MATRICE B

7057.04	2822.816
0	0

MATRICE C

<b>V2</b>	<b>V1</b>	<b>V0</b>
0	0	0
-8.06637	3.375	0

Vettori  $V_2$   $V_1$   $V_0$

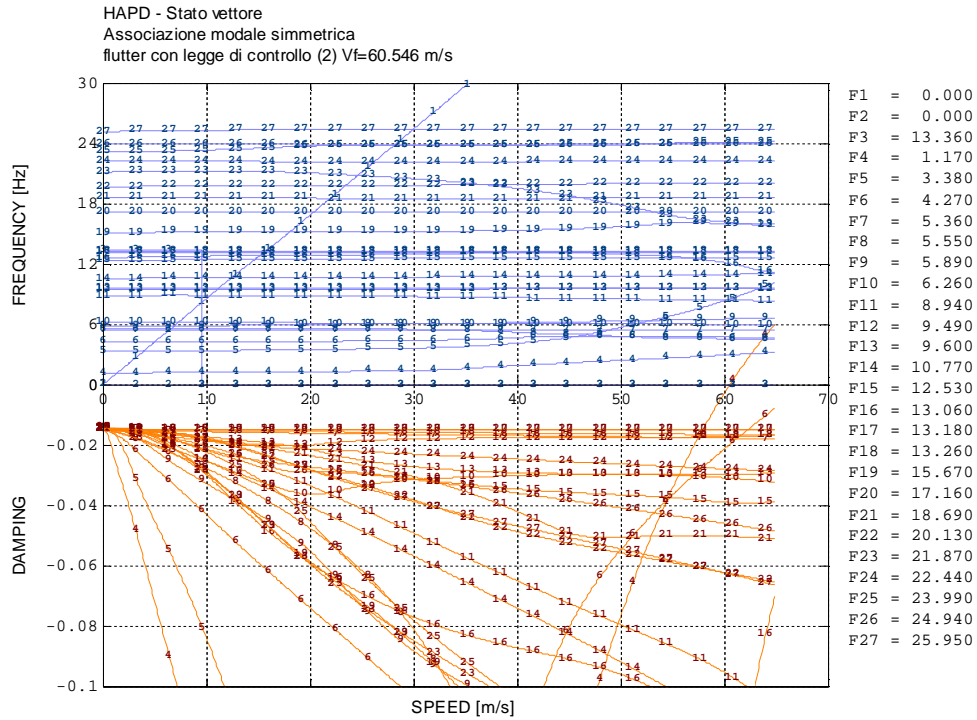


Figura 23 Analisi di flutter con legge di controllo TF Eq. 39

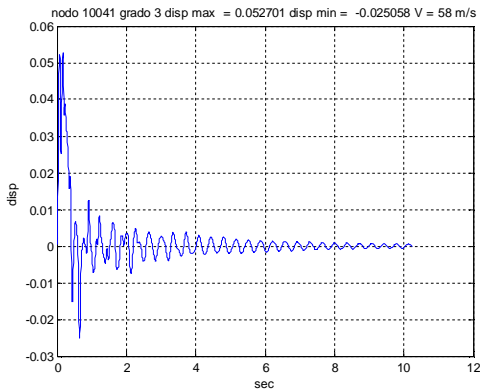
### 3.2.2.2 Validazione

Allo scopo di verificare la consistenza dell'approccio appena descritto, dello stesso sistema è stata studiata la risposta impulsiva per determinare la velocità di flutter. A tale fine sono state osservate nel tempo le risposte nella direzione Z di nodi situati su:

- Ala anteriore
- Fusoliera zona d'ubicazione del sistema di guida navigazione e controllo
- Elevatore centrale in corrispondenza della predisposizione della massa di bilanciamento

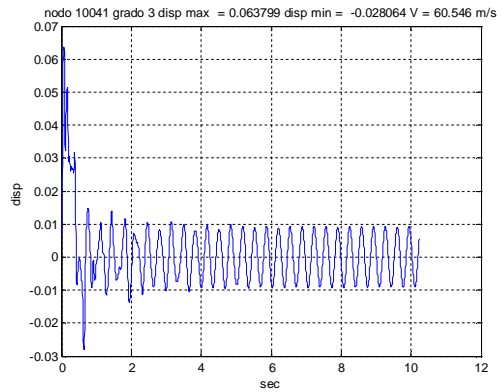
I risultati mostrano una velocità di flutter in linea con quelle precedentemente valutate utilizzando le due formulazioni, estesa e ridotta, della funzione di trasferimento.

***RISPOSTA IMPULSIVA SUB FLUTTER –  
SPOSTAMENTI***

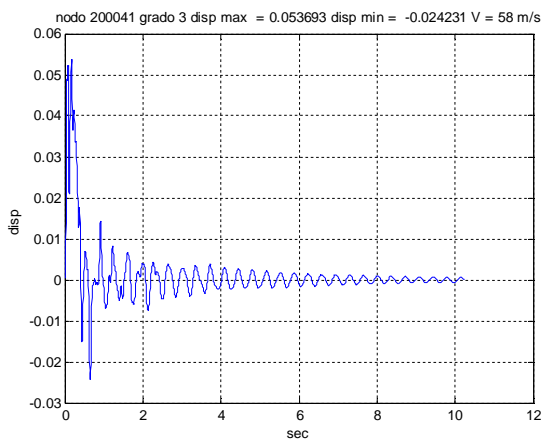


**Figura 24 -Longherone anteriore ala**

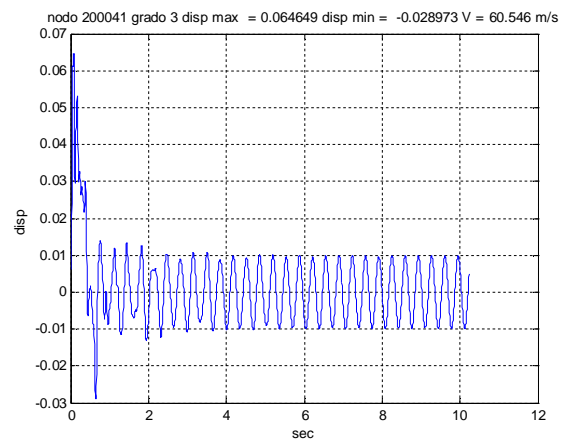
***RISPOSTA IMPULSIVA ALLA  
VELOCITÀ DI FLUTTER -  
SPOSTAMENTI***



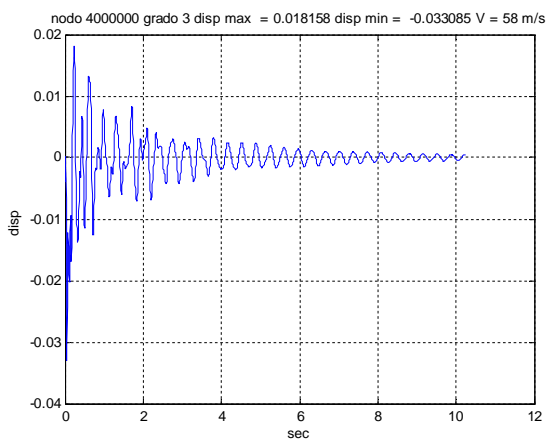
**Figura 25 -Longherone anteriore ala**



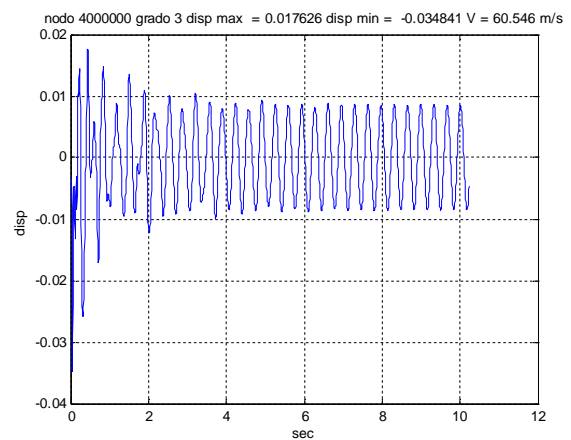
**Figura 26 Longherone posteriore ala**



**Figura 27 Longherone posteriore ala**



**Figura 28 Massa bilanciamento elevatore**



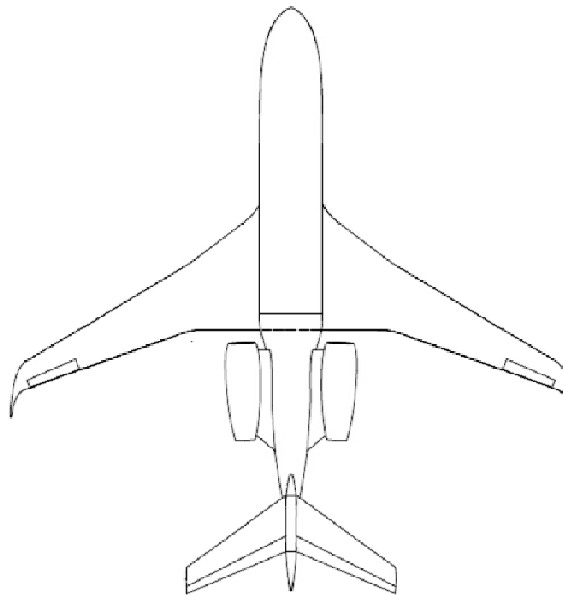
**Figura 29 Massa bilanciamento elevatore**

### 3.3 ARTICOLO DI PROVA BUSINESS JET CON SERVOATTUATORE IDRAULICO

L'articolo di prova utilizzato per introdurre la funzione di trasferimento del servoattuatore idraulico dell'elevatore è un velivolo rispondente alle normative EASA CS 25, di categoria *business jet*. L'attività è stata svolta nell'ambito del progetto **PFLUTTER** (*Determinazione delle instabilità aeroelastiche del velivolo Piaggio Aero Industries P1xx*).

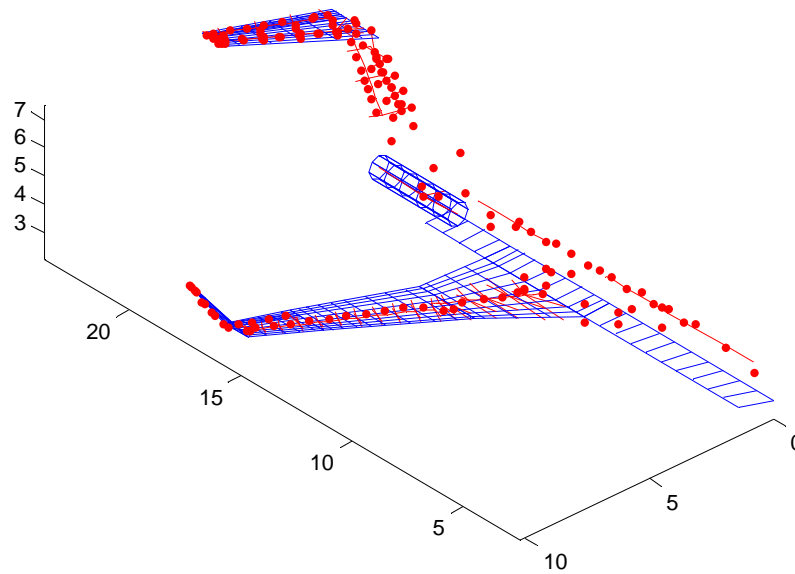
Nell'APPENDICE A è esposta la teoria adoperata per ricavare la funzione di trasferimento del servoattuatore idraulico. Si rimanda pertanto a tale appendice per le formule riportate nel presente capitolo.

La Figura 30 mostra una vista in pianta del velivolo in esame.



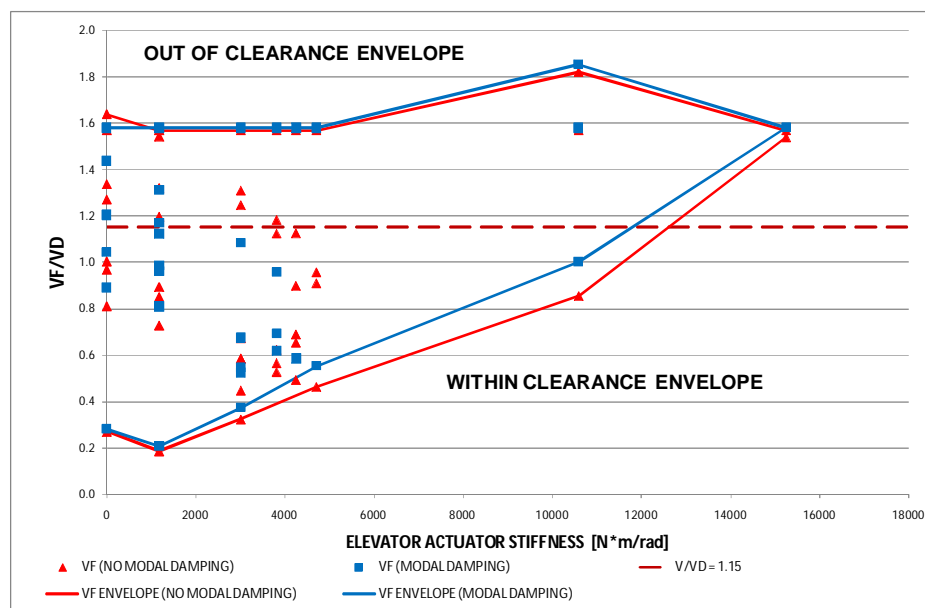
**Figura 30** Articolo di prova #3 – business jet

Del velivolo è a disposizione il modello aeroelastico, di cui la parte dinamica è costituita da un modello misto *stick beam* e matrici DMIG [24], la parte aerodinamica e di matching è costituita da un modello *DLM* e operatori *splines* superficiali per le superfici portanti, monodimensionali per le superfici di controllo e *rigid body* per fusoliera e nacelle [25], [26]. Nella Figura 31 si mostra il modello aerodinamico e di *matching*.



**Figura 31 Business Jet: Modello aerodinamico e di matching**

La superficie mobile considerata nella trattazione è l'elevatore. L'elevatore è collegato al piano orizzontale tramite 4 cerniere ed è mosso con due servoattuatori idraulici. Con il metodo della sottostrutturazione dinamica, sono state preventivamente eseguite analisi di stabilità al variare della rigidezza di ancoraggio dell'elevatore. Tali analisi hanno avuto lo scopo di trovare la minima rigidezza rotazionale di ciascun attuatore, tale da garantire assenza di flutter anche nel caso di *failure* di uno dei due. Le analisi sono state eseguite in associazione modale simmetrica, per la configurazione di massa OEW (*Operative Empty Weight*) e a quota zero.



**Figura 32 Involuppo di stabilità, in termini di rigidezza di elevatore**

Dai risultati si evince che, affinché la velocità di flutter  $V_F$  sia  $\geq 1.15V_D$ , come stabilito dalla normativa, il valore della rigidità deve essere non inferiore a 15256 [N m/rad].

In base a tale informazione è stato effettuato un dimensionamento preliminare dell'attuatore.

Facendo riferimento a quanto esposto in APPENDICE A, la rigidità idraulica all'asse di cerniera vale:

$$\frac{4\beta_e A_p^2}{V_t} \cdot d^2$$

Con:

$A_p$  area pistone

$V_t$  volume totale delle camere del cilindro,  $V_t = A_i \cdot (2 \cdot L)$

$2 \cdot L$  corsa

$A_i = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$  area interna del cilindro

Dato il valore esiguo dello spessore delle luci di trafilamento, non si commette errore apprezzabile nell'ipotizzare che l'area del pistone sia uguale all'area interna del cilindro e per spessori della camicia dell'ordine di 1 [mm] l'area esterna uguale a quella interna, da cui:

$$\frac{4\beta_e A_p^2}{V_t} \cdot d^2 = \frac{4\beta_e A_p^2}{A_i \cdot (2L)} \cdot d^2 \approx \frac{4\beta_e A_i}{2L} \cdot d^2 = \frac{4\beta_e \pi D_0^2}{2L \cdot 4} \cdot d^2 \geq 15256 \text{ [N} \cdot \text{m/rad]}$$

Cioè un diametro esterno del cilindro:

$$D_0 \geq \sqrt{\frac{2L}{\pi d^2 \beta_e} \cdot 15256 \cdot 10^3} \text{ [mm]}$$

Il valore del diametro esterno del cilindro può essere così calcolato introducendo i valori della semicorsa  $L$ , del braccio  $d$  e del *bulk modulus*  $\beta_e$ .

Il bulk modulus è dato dai tre contributi dovuti al contenitore  $\beta_c$ , al liquido (olio)  $\beta_l$  e alle particelle di aria intrappolate nel liquido  $\beta_g$ , secondo la seguente equazione:

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_c} + \frac{1}{\beta_l} + \frac{1}{\beta_g} \left( \frac{V_g}{V_t} \right)$$

Dove  $\left( \frac{V_g}{V_t} \right)$  indica la frazione di volume del gas contenuto nell'olio.

Si trascura in questa fase il termine  $\frac{1}{\beta_c}$  perché molto minore dell'unità. Il termine dovuto all'aria intrappolata è dato da  $\beta_g = 1.4 \cdot p$ , con  $p$  pressione di esercizio.

Posto:

$$\beta_l = 1516 \text{ [N/mm}^2\text{]} \text{ (valore tipico di fluidi idraulici derivati da petrolio, } \beta_l = 2.2 \cdot 10^5 \text{ [psi])}$$

$$P = 50 \text{ [bar]} = 5 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$\left( \frac{V_g}{V_t} \right) = 0.06$$

$$L = 200 \text{ [mm]}$$

$$d = 50 \text{ [mm]}$$

si ha:

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{1516} + \frac{1}{116.67} = 9.23 \cdot 10^{-3} \text{ [mm}^2 \text{ / N]} \Rightarrow \beta_e = 108 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

Per tener conto di  $\beta_c$  si diminuisce di una unità il valore calcolato, pervenendo a:

$$\beta_e = 107 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

da cui si ottiene un diametro esterno del cilindro pari a:

$$D = 85.2 \text{ [mm]}$$

Partendo dalle dimensioni di massima sopra dedotte, è stata effettuata una prima analisi del servoattuatore, riportata nel prossimo paragrafo.

### 3.3.1 CARATTERIZZAZIONE DELL'ATTUATORE

I coefficienti della valvola variano con il punto di funzionamento. Il punto più critico per la stabilità è il punto di nullo, cui corrispondono i coefficienti  $k_{c0}$  e  $k_{q0}$ . E' critico per la stabilità perché il coefficiente  $k_q$  è massimo, ovvero il guadagno della funzione di trasferimento è massimo, mentre il coefficiente  $k_c$ , collegato allo smorzamento del sistema, è minimo. Un sistema stabile nel punto di nullo lo sarà anche negli altri punti di funzionamento. Per tale motivo si esegue l'analisi linearizzata attorno al punto di nullo. Si considera un valore di pressione di mandata pari a 50 [bar].

La stabilità dipende dalle radici del polinomio al denominatore della funzione di risposta del sistema (si veda l'APPENDICE A):

$$s \left[ \frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p^2} \cdot s^2 + \left( \frac{k_{cc} m_p}{A_p^2} + \frac{B_p V_t}{4\beta_e A_p^2} \right) \cdot s + \left( 1 + \frac{B_p k_{cc}}{A_p^2} \right) \right]$$

Con:

$V_t$	volume totale delle camere del cilindro, [mm <sup>3</sup> ]
$m_p$	massa pistone, [Kg]
$\beta_e$	bulk modulus effettivo, [N/mm <sup>2</sup> ]
$A_p$	Area pistone, [mm <sup>2</sup> ]
$k_{cc}$	coefficiente di leakage, [mm <sup>3</sup> /(N s)]
$B_p$	coefficiente di smorzamento viscoso del pistone,
[N s/mm]	

Ciascun termine è dato da:

$$V_t = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (2 \cdot mds)$$

D	diametro interno del cilindro
mds	midstroke, semicorsa pistone

$$m_p = \rho \cdot V_p$$

$\rho$	densità materiale pistone
--------	---------------------------

$$V_p = \frac{\pi \cdot D_p^2}{4} \cdot L$$

volume pistone

$D_p$

diametro pistone

$L$

lunghezza piatto pistone

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_c} + \frac{1}{\beta_l} + \frac{1}{\beta_g} \left( \frac{V_g}{V_t} \right)$$

$$A_p = \frac{\pi \cdot D_p^2}{4}$$

$$k_{cc} = k_{c0} + C_{tp}$$

$$k_{c0} = \frac{\pi \cdot r_c^2 \cdot W}{32 \cdot \mu}$$

Coefficiente di Pressione

$\mu$

viscosità olio

$r_c$

raggio di raccordo

$W$

gradiente d'area della servovalvola

$$C_{tp} = C_{ip} = \frac{\pi \cdot D / 2 \cdot c_r^3}{6 \cdot \mu \cdot L}$$

coefficiente di leakage tra cilindro e pistone

$D$

diametro interno cilindro

$c_r$

spessore luce di trafilamento

$L$

lunghezza piatto pistone

$$B_p = \frac{\mu \cdot A_{ip}}{c_r}$$

$$A_{ip} = \pi \cdot D_p \cdot L$$

area laterale pistone

I valori di calcolo sono riportati in Tabella 7.



		<b>u.m.</b>	
press mandata	$p_s$	[bar]	50
press mandata	$p_s$	[N/mm <sup>2</sup> ]	5
coeff efflusso	$C_d$	adim.	0.6
gradiente d'area	w	[mm]	0.8
densità olio	$\rho$	[N*s <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup> ]	8.34E-10
sensività di pressione valvola	$k_{p0}$	[N/mm <sup>3</sup> ]	8.25E+06
guadagno di portata servovalvola	$k_{q0}$	[mm <sup>2</sup> /s]	3.72E+04
spessore cilindro	t	[mm]	1.5
materiale cilindro	<b>acciaio</b>		
modulo elastico materiale	E	[N/mm <sup>2</sup> ]	210000
modulo poisson materiale	$\nu$	adim.	0.33
diametro esterno cilindro	$D_0$	[mm]	85.20
diam. est. / spessore cilindro	$D_0/t$	adim.	56.80
diametro interno cilindro	D	[mm]	82.20
spessore luci trafilamento pistone	$c_r$	[mm]	0.1
materiale pistone	acciaio		
densità materiale pistone	$\rho_p$	[Kg/mm <sup>3</sup> ]	7.80E-06
volume pistone	$V_p$	[mm <sup>3</sup> ]	5.28E+04
massa pistone	$m_p$	[kg]	0.412
diametro pistone	$D_p$	[mm]	82.00
semicorsa pistone	m <sub>ds</sub>	[mm]	200
lunghezza piatto pistone	L	[mm]	10
area pistone	$A_p$	[mm <sup>2</sup> ]	5281.02
volume totale camere	$V_t$	[mm <sup>3</sup> ]	2122723.89
beta_container	$\beta_c$	[N/mm <sup>2</sup> ]	3.72E+03
percentuale di aria in liquido	$V_g/V_t$	adim.	6.00%
rapporto calori specifici aria	$c_p/c_v$	adim.	1.40
beta_gas	$\beta_g$	[N/mm <sup>2</sup> ]	7.00E+00
beta_g*(Vt/Vg)	$\beta_g * (V_t/V_g)$	[N/mm <sup>2</sup> ]	1.17E+02
bulk modulus olio	$\beta_l$	[N/mm <sup>2</sup> ]	1516
bulk modulus effettivo	$\beta_e$	[N/mm <sup>2</sup> ]	105.26
viscosità assoluta (dinamica) olio	$\mu$	[N*s/mm <sup>2</sup> ]	4.50E-04
coeff leakage interno pistone	$C_{ip}$	[mm <sup>5</sup> /(N*s)]	4.78E+00
raggio di raccordo tipico orificio valvola	$r_c$	[mm]	0.00508
coeff di pressione servovalvola	$k_{c0}$	[mm <sup>5</sup> /(N*s)]	4.50E-03
Kcc	$k_{cc}$	[mm <sup>5</sup> /(N*s)]	4.79E+00
area laterale pistone	$A_{lp}$	[mm <sup>2</sup> ]	2576.11
coefficiente smorzamento viscoso pistone	$B_p$	[N*s/mm]	1.1592E+01

**Tabella 7 Servoattuatore, valori calcolati – pressione mandata 50 [bar]**

Si procede a verificare che la rigidità esibita dal servoattuatore sia in linea con il requisito dettato dal flutter ( $K_{min}=15256$  [N m/rad]), associato ad una frequenza di elevatore pari a circa 18 [Hz].

Riprendendo lo schema di Figura 34, la massa equivalente della superficie mobile vista all'albero del pistone è ricavata dall'uguaglianza dei lavori virtuali delle forze d'inerzia:

$$\delta\beta \cdot (I_{\beta\beta} \cdot \ddot{\beta}) = \delta x_p \cdot (m_{eq} \cdot \ddot{x})$$

Ricordando che:

$$x_p = d \cdot \beta$$

$$\delta x_p = d \cdot \delta\beta$$

$$\ddot{x}_p = d \cdot \ddot{\beta}$$

Si ha:

$$m_{eq} = \frac{I_{\beta\beta}}{d^2}$$

All'albero il pistone vede una massa che è somma della sua massa e della massa equivalente della superficie mobile, dunque per il servoattuatore in questione i coefficienti del polinomio al denominatore sono calcolati a partire dai seguenti dati, che forniscono una frequenza prossima a quella dettata dal requisito aeroelastico.

<i>momento Inerzia elevatore</i>	$I_{\beta\beta}$	$[Kg \cdot m^2]$	0.95
<i>braccio</i>	d	$[m]$	0.05
	Vt	$[m^3]$	2.12E-03
	Ap	$[m^2]$	5.28E-03
	beta_e	$[N/m^2]$	1.05E+08
	$m_{tot} = m_p + I_{\beta\beta}/d^2$	$[Kg]$	3.80E+02
	Kcc	$[m^5/(N \cdot s)]$	4.79E-15
	Bp	$[N \cdot s/m]$	1.16E+04

<i>coefficienti polinomio</i>	a		6.86E-05
	b		2.10E-03
	c		1.00E+00
	$b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		-2.70E-04
			Sol. immaginarie
	omega_n	$[rad/s]$	120.73
	freq_n	$[Hz]$	<b>19.22</b>
	B_cr		1.66E-02
	zita		0.1265

**Tabella 8 Coefficienti del polinomio TF attuatore e frequenza esibita dall'attuatore con superficie mobile**

### 3.3.2 INCLUSIONE DEL SERVOATTUATORE NELL'EQUAZIONE DELLA STABILITÀ AEROELASTICA - METODOLOGIA

Per introdurre la dinamica del servattuatore idraulico nell'equazione della stabilità aeroelastica sarà utilizzata la medesima metodologia esposta nel § 3.2.1.

Considerando per semplicità di esposizione che il velivolo sia rappresentato da 2 modi normali e dall'extra modo della superficie di controllo, rispettivamente con coordinate lagrangiane  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $\beta$ , l'equazione della dinamica aeroelastica è:

$$(j\omega)^2 \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} + (j\omega) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} + \eta_0 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 43

con  $\eta_0 = \frac{1}{2}\rho v^2$  e  $\underline{Q}$  matrice delle forze aerodinamiche generalizzate.

Il legame tra il movimento del pistone,  $x_p$  e il movimento della servovalvola  $x_v$  è retto dalle equazioni fondamentali della servovalvola e del pistone (Eq. 182, Eq. 185):

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = F_{ext}$$

Eq. 44 Dinamica del pistone in presenza di forze esterne

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dp_L}{dt} + k_{cc} \cdot p_L + A_p \frac{dx_p}{dt} = k_q \cdot x_v$$

Eq. 45 Equazione della servovalvola

Con:

$p_L$	salto di pressione tra le camere
$x_v$	spostamento dello spool della servovalvola
$x_p$	spostamento del pistone
$F_{ext}$	forze esterne
$V_t$	volume totale delle camere del cilindro

$m_p$	massa pistone
$\beta_e$	bulk modulus effettivo
$A_p$	Area pistone
$k_{cc}$	coefficiente di leakage
$B_p$	coefficiente di smorzamento viscoso del pistone
$k_q$	guadagno di portata della servovalvola

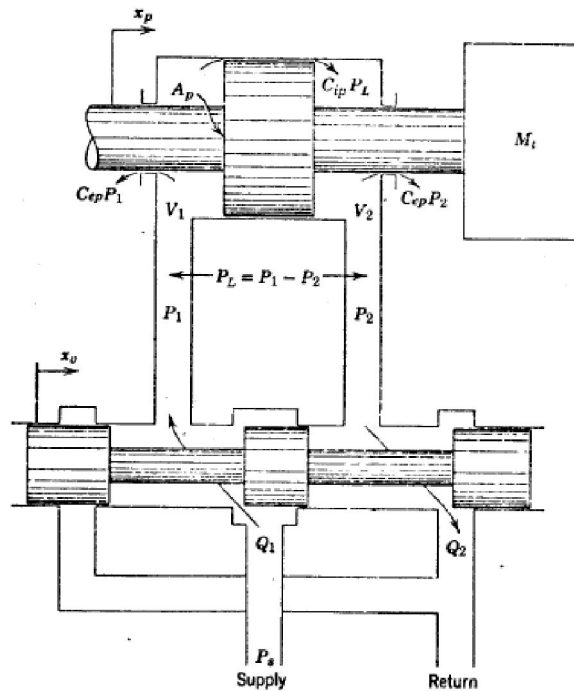


Figura 33 Combinazione servovalvola - pistone

Ricordando la relazione tra l'angolo di rotazione della superficie mobile e lo spostamento del pistone:

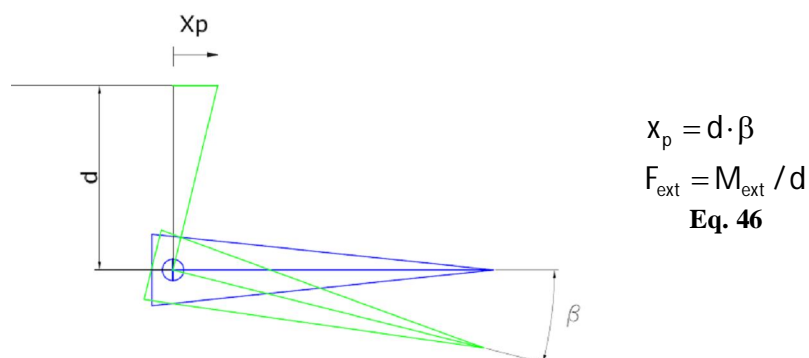


Figura 34 Cinematismo superficie mobile

Trasformando le Eq. 45 e Eq. 44 secondo Laplace si ha (lettere maiuscole per le trasformate):

$$s^2 \cdot m_p d^2 \cdot \beta + s \cdot B_p d^2 \cdot \beta - A_p d \cdot P_L = M_{\text{ext}}$$

$$s \cdot A_p d \cdot \beta + k_{cc} \cdot P_L + s \cdot \frac{V_t}{4\beta_e} P_L = k_q \cdot X_v$$

**Eq. 47**

Nel dominio della frequenza:

$$(j\omega)^2 \cdot m_p d^2 \cdot \beta + (j\omega) \cdot B_p d^2 \cdot \beta - A_p d \cdot P_L = M_{\text{ext}}$$

$$(j\omega) \cdot A_p d \cdot \beta + (j\omega) \cdot \frac{V_t}{4\beta_e} P_L + k_{cc} \cdot P_L = k_q \cdot X_v$$

**Eq. 48**

Dove il momento esterno è la somma del contributo inerziale e di quello aerodinamico:

$$M_{\text{ext}} = M_{\text{inerz}} + M_{\text{aero}}$$

**Eq. 49**

A loro volta sia il contributo inerziale che quello aerodinamico si compongono ciascuno di un contributo diretto, indotto dal movimento della superficie mobile e un contributo indiretto, indotto dalle deformate elastiche.

Di seguito vengono esplicitati i suddetti contributi, nel dominio della frequenza:

$$M_{\text{inerz}}^{\text{diretto}} = -(j\omega)^2 I_{\beta\beta} \beta$$

$$M_{\text{inerz}}^{\text{indiretto}} = -(j\omega)^2 \sum_1^n m_{\beta, qi} \cdot q_i$$

**Eq. 50**

$$M_{\text{aero}}^{\text{diretto}} = \eta_0 \cdot Q_{\beta\beta}(k_r) \cdot \beta$$

$$M_{\text{aero}}^{\text{indiretto}} = \eta_0 \cdot \sum_1^n Q_{\beta, qi}(k_r) \cdot q_i$$

**Eq. 51**

Dove  $I_{\beta\beta}$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse di cerniera della superficie mobile e  $k_r$  è la frequenza ridotta. Sostituendo le Eq. 50 e Eq. 51 nella Eq. 48 si ha:

$$(j\omega)^2 \cdot [m_p d^2 + I_{\beta\beta}] \cdot \beta + (j\omega) \cdot [B_p d^2] \beta + (j\omega)^2 \sum_1^n m_{\beta, qi} q_i - \eta_0 Q_{\beta\beta}(k_r) \cdot \beta - \eta_0 \sum_1^n Q_{\beta, qi}(k_r) q_i - A_p d \cdot P_L = 0$$

$$(j\omega) \cdot A_p d \cdot \beta + (j\omega) \cdot \frac{V_t}{4\beta_e} P_L + k_{cc} \cdot P_L = k_q \cdot X_v$$

**Eq. 52**

L'idea è di nuovo quella di applicare alla Eq. 52 tanti derivatori finché tutte le variabili al primo membro abbiano termini non nulli in  $(j\omega)^2$ , poiché le equazioni andranno aggiunte al sistema aeroelastico e la risoluzione del problema prevede l'inversione della matrice di massa, che non deve quindi essere singolare.

Applicando i derivatori alla seconda delle Eq. 52, si ha:

$$(j\omega)^2 \cdot [m_p d^2 + I_{\beta\beta}] \cdot \beta + (j\omega)^2 \sum_1^n m_{\beta, q_i} q_i + (j\omega) \cdot [B_p d^2] \cdot \beta - A_p d \cdot P_L - \eta_0 Q_{\beta\beta}(k_r) \cdot \beta - \eta_0 \sum_1^n Q_{\beta, q_i}(k_r) q_i = 0$$

$$+ (j\omega)^2 \cdot A_p d \cdot \beta + (j\omega)^2 \cdot \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot P_L + (j\omega) \cdot k_{cc} \cdot P_L = + (j\omega) \cdot k_q \cdot X_v$$

**Eq. 53**

Tali equazioni, inserite nell'equazione della dinamica aeroelastica, forniscono, in forma matriciale:

$$(j\omega)^2 \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_{1\beta} & 0 \\ 0 & m_2 & m_{2\beta} & 0 \\ m_{\beta 1} & m_{\beta 2} & m_p d^2 + I_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & A_p d & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ P_L \end{Bmatrix} +$$

$$+ (j\omega) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_p d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ P_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_p d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ P_L \end{Bmatrix} +$$

$$+ \eta_0 \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1\beta} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2\beta} & 0 \\ Q_{\beta 1} & Q_{\beta 2} & Q_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \beta \\ P_L \end{Bmatrix} = (j\omega)^2 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + (j\omega) \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_q \cdot X_v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Eq. 54**

Le Eq. 54 sono le equazioni della risposta dinamica ad un input dello *spool* della servovalvola. Per  $X_v = 0$  si ha l'equazione della stabilità aeroelastica in presenza del servoattuatore idraulico.

Le equazioni appena presentate hanno una notevole implicazione sperimentale, poiché possono essere utilizzate per lo studio preventivo della funzione atta ad eccitare i modi di

flutter durante il *Flight Flutter Test*. Tale funzione sarà impostata mediante il movimento della servovalvola,  $X_v$ .

### 3.3.3 RISULTATI

Per l'articolo di prova in esame è stata dapprima effettuata un'analisi di flutter con la tecnica della sottostrutturazione dinamica con rigidità dell'extra modo di elevatore pari a quella richiesta dal requisito di flutter ( $K_{min}=15256$  [N m/rad]), senza includere la funzione di trasferimento del servoattuatore. Sono stati ottenuti i risultati mostrati in Tabella 9 e in Figura 35. il modo di flutter a velocità più bassa coinvolge il piano orizzontale, quello a velocità più alta l'ala.

Flutter speed ratio VF/VD	Flutter frequency [Hz]	curve
1.636	8.248	2
1.232	17.344	6

Tabella 9 Risultati business jet – analisi di flutter con rigidità di elevatore  $K_{min}$

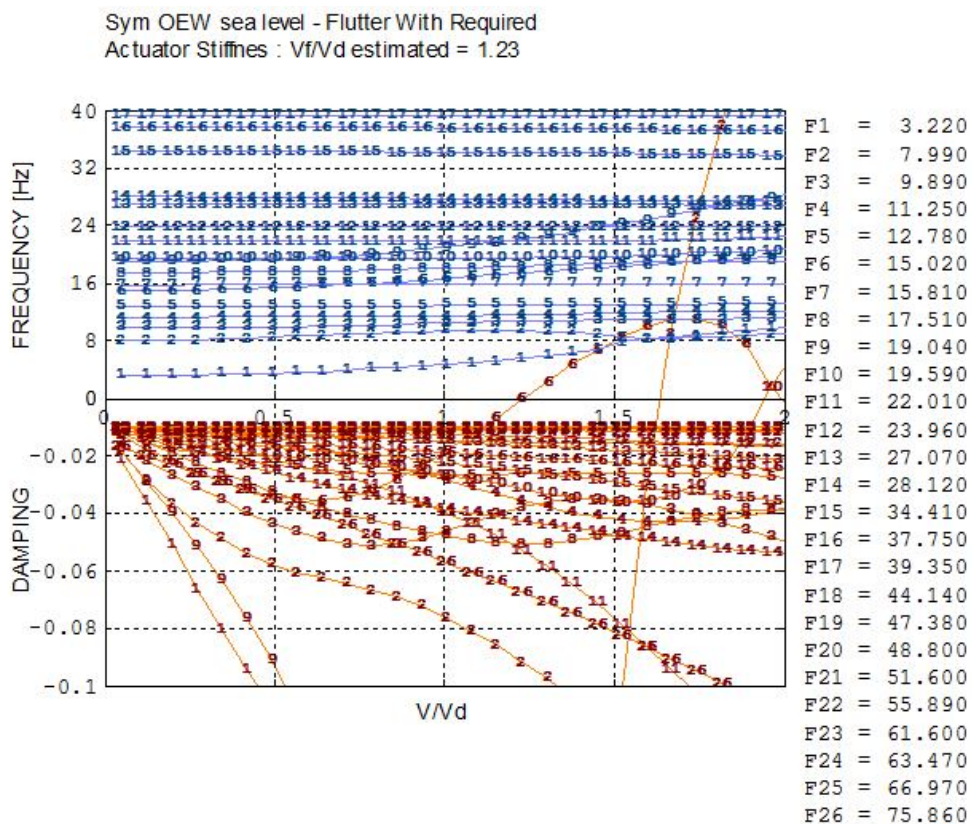


Figura 35 Risultati business jet – diagramma v-g, rigidità di elevatore  $K_{min}$

Sono state poi eseguite le analisi di flutter includendo la dinamica del servattuatore.

Si riportano le caratteristiche modali del velivolo (associazione modale simmetrica) e successivamente i risultati del calcolo.

MODO	F [Hz]	MG [Kg*m <sup>2</sup> ]	MODO	F [Hz]	MG [Kg*m <sup>2</sup> ]
1	0.00	5264.7	16	28.117	21.112
2	0.00	5264.7	17	34.414	71.591
3	0.00	107746.3	18	37.748	25.767
4	3.224	56.161	19	39.355	4.5305
5	8.041	72.874	20	44.137	3.8826
6	9.897	32.561	21	47.167	23.061
7	11.250	50.51	22	48.793	16.807
8	12.795	90.322	23	51.104	14.542
9	15.164	31.422	24	54.222	3.5276
10	15.805	5.5983	25	58.201	0.66183
11	17.514	10.08	26	61.631	0.46783
12	19.541	85.652	27	63.493	1.2468
13	22.005	5.3795	28	66.971	0.45687
14	23.958	44.142	29	68.651	0.54286
15	27.065	619.03	30	75.540	1.1843

**Tabella 10** Frequenze e Masse generalizzate modali

MODO	GM_ij	MODO	GM_ij
1	0	16	-6.27E-03
2	0	17	4.76E-03
3	0	18	3.08E-02
4	0.21598	19	2.92E-03
5	-1.9614	20	-4.03E-02
6	-0.44864	21	0.61524
7	0.12999	22	6.17E-02
8	-0.52906	23	-0.84875
9	-0.57731	24	-0.70284
10	7.35E-04	25	0.33185
11	1.48E-02	26	-2.51E-02
12	-0.15147	27	3.12E-02
13	2.97E-03	28	5.84E-04
14	2.91E-05	29	1.07E-02
15	7.45E-02	30	3.78E-03

**Tabella 11** Masse generalizzate incrociate extra modo 41

La seguente tabella contiene le matrici aggiuntive della dinamica del servattuatore idraulico:

<b>A</b>		<b>V2</b>
0.00102500	0.0	0.0
0.00026405	5.04000E-12	0.0
<b>B</b>		<b>V1</b>
28.981192	0.0	0.0
0.0	4.78671E-15	0.03717514
<b>C</b>		<b>V0</b>
0.0	-0.000264051	0.0
0.0	0.0	0.0

In Figura 36 è riportato il diagramma v-g ottenuto con il metodo Stato Vettore. Si può osservare come l'inclusione della dinamica del servattuatore abbia fatto comparire due nuove radici, corrispondenti ai poli della funzione di trasferimento del servattuatore: un autovalore a frequenza nulla, e un altro a circa 19.5 [Hz], corrispondente alla frequenza esibita dal servattuatore (Tabella 8).



Per quanto riguarda il meccanismo di flutter, esso non cambia. L'inclusione della dinamica del servoattuatore, in questo caso specifico, ha un effetto benefico sulla velocità di flutter di piano orizzontale, poiché innalza da 1.23 a 1.36 il rapporto  $V_F/V_D$  (Tabella 9, Tabella 12). Questo è dovuto all'elevato smorzamento introdotto dal sistema di attuazione.

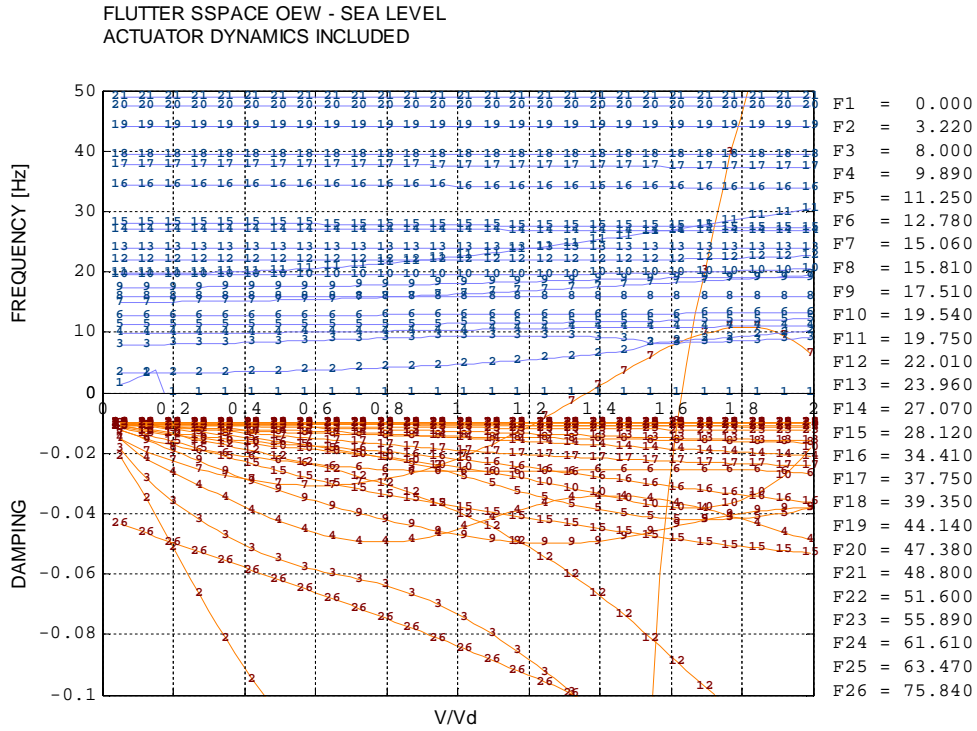


Figura 36 Risultati business jet – diagramma v-g, State Space con dinamica servoattuatore

Velocità di Flutter $V_F/V_D$	Frequenza di Flutter [Hz]	curva
1.633	8.235	2
1.366	17.384	6

Tabella 12 Risultati business jet – analisi di flutter con dinamica servoattuatore

Si riporta anche il luogo delle radici, da cui si può notare come i due modi anzidetti intersechino l'asse verticale alle frequenze specificate.

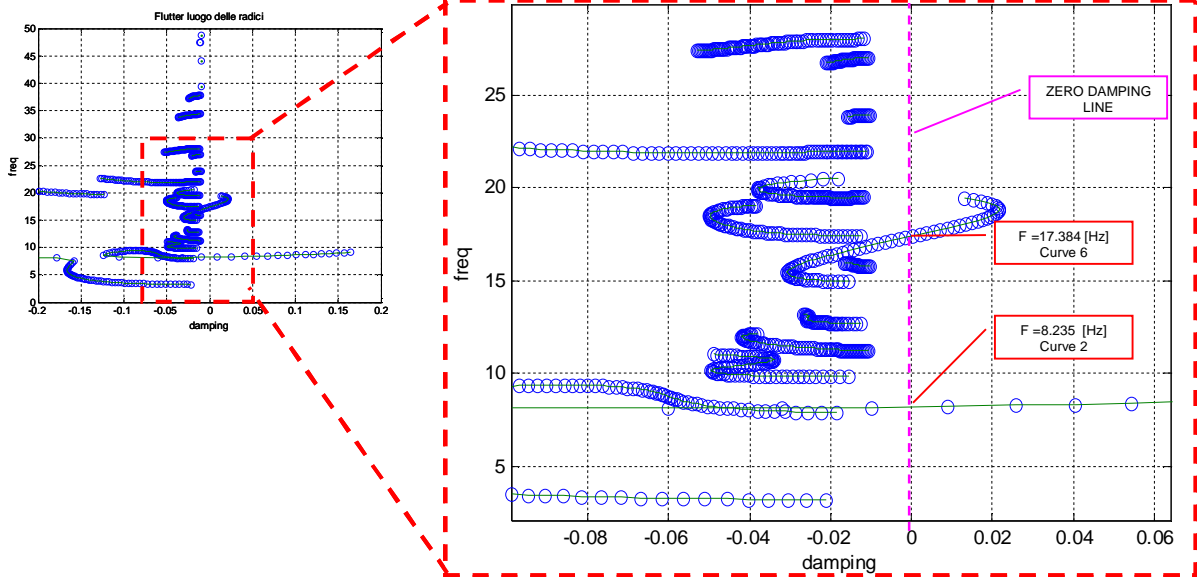


Figura 37 Luogo delle radici

E' stato nuovamente eseguito il calcolo con il metodo PK, consegnando gli stessi risultati del metodo Stato vettore.

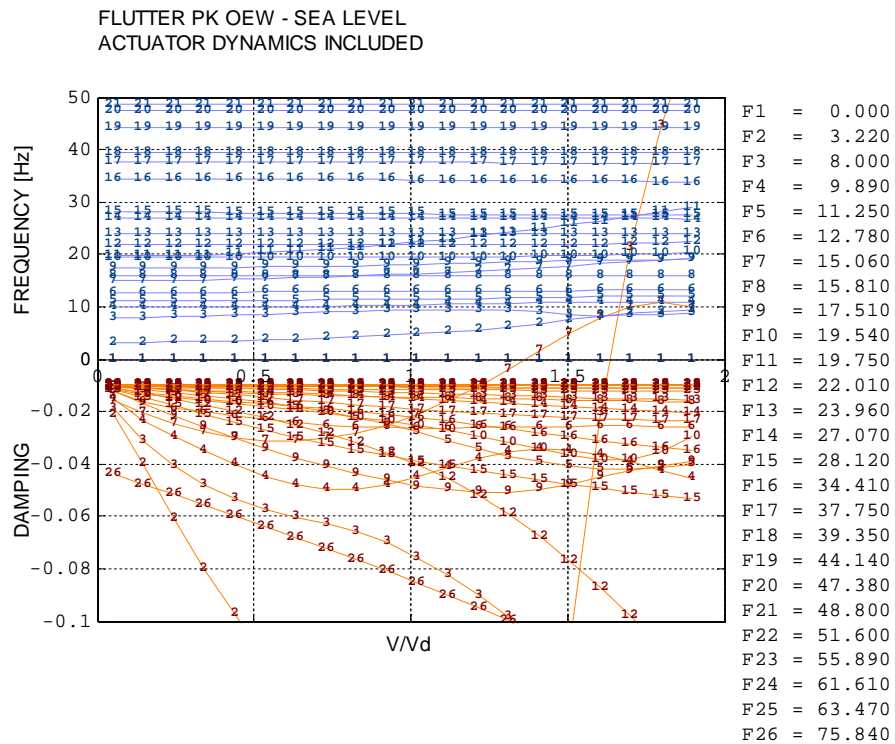


Figura 38 Risultati business jet – diagramma v-g, PK con dinamica servoattuatore

### 3.4 CONCLUSIONI

È stata messa a punto una metodologia in grado di includere, nell'equazione aeroelastica, la funzione di trasferimento di una legge di controllo o di un servattuatore idraulico. Alla base del metodo c'è l'aggiunta, in coda a tutte le equazioni, delle ulteriori relazioni tra i gradi di libertà iniziali e quelli dovuti alla presenza del nuovo sistema da aggiungere.

Il sottosistema da aggiungere è dato in ingresso ai codici tramite sei matrici (Eq. 27), che possono essere determinate a partire dalle sue equazioni. La realizzazione delle modifiche ai codici è stata fatta sia per il metodo PK Inglese che per lo *State Space*.

I casi esaminati nel presente capitolo sono due velivoli completamente diversi tra loro: un velivolo sperimentale in configurazione non convenzionale ad ali giuntate, per il quale è stata inclusa la legge di controllo degli elevatori; un velivolo di categoria business jet, con ala bassa, piano di coda a T, motori in fusoliera, per il quale è stata inclusa la funzione di trasferimento del servattuatore dell'elevatore, dopo averne effettuato un dimensionamento preliminare.

Nel primo caso la metodologia è stata validata per lo *State Space* sia attraverso l'inclusione di due forme della legge di controllo (estesa e ridotta) sia attraverso lo studio della risposta impulsiva del sistema, consegnando sempre lo stesso risultato in termini di velocità di flutter.

Nel secondo caso la metodologia è stata messa a punto anche per il metodo di soluzione PK inglese, consegnando gli stessi risultati dello *State Space*.

Il secondo caso sarà oggetto del prossimo capitolo, nel quale si abbandonerà l'ipotesi di linearità delle equazioni del servattuatore e verrà messa a punto una metodologia di risoluzione *time marching* del sistema aeroservoelastico non lineare (equazioni non lineari del servattuatore incluse nelle equazioni del flutter).

## Capitolo 4

### *Flutter non lineare nel tempo con funzione di trasferimento del servoattuatore idraulico*

#### 4.1 INTRODUZIONE

Questo capitolo sarà il *trait d'union* tra il secondo e il terzo capitolo.

Nel secondo capitolo sono state affrontate le non linearità strutturali concentrate tipiche dei velivoli a comandi manuali. Nel terzo sono state introdotte leggi di controllo nelle equazioni della stabilità aeroelastica ed è stato affrontato lo studio linearizzato di un servoattuatore idraulico.

Nel presente capitolo sarà messo a punto un metodo per includere le equazioni non lineari (funzione portata non lineare della servovalvola) dell'attuatore nel sistema aeroelastico. Le equazioni non lineari del servoattuatore costituiscono un sistema misto differenziale primo - secondo ordine. Senza operare alcuna modifica alle equazioni del servoattuatore, la loro inclusione nel sistema aeroelastico con il metodo dei derivatori (introdotto nel capitolo precedente) può non fornire risposte fisicamente coerenti. Per tale motivo sarà necessario trovare una schematizzazione non lineare del secondo ordine del servoattuatore, che sia dinamicamente equivalente e che dia, una volta assiemata al sistema aeroelastico, risposte fisicamente accettabili. Tale schematizzazione sarà inoltre confrontata con una linearizzazione delle equazioni mediante bilancio armonico, nella quale le costanti moltiplicative dipendono

dall'ampiezza di oscillazione. Il sistema aeroservoelastico sarà scritto in forma Stato Vettore e risolto nel tempo ai fini della determinazione della risposta aeroservoelastica.

## 4.2 STUDIO DELL'ATTUATORE MODELLO LINEARE

Prima di procedere allo studio del sistema con modello di attuatore non lineare, è stata studiata la risposta del solo attuatore, tenendo conto anche dell'inerzia della superficie mobile, che è l'elevatore.

Il modello di attuatore è quello ricavato nell'Eq. 201 (APPENDICE A), che di seguito si riporta nuovamente:

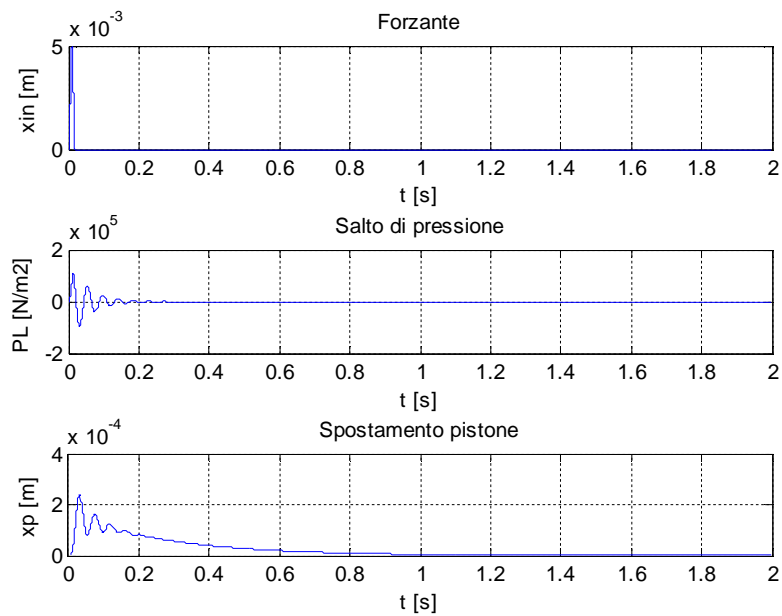
$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B_p & A_p \\ -k_q G_3 & -A_p & -k_{cc} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_q G_1 \end{Bmatrix} \cdot x_{in}$$

Eq. 55

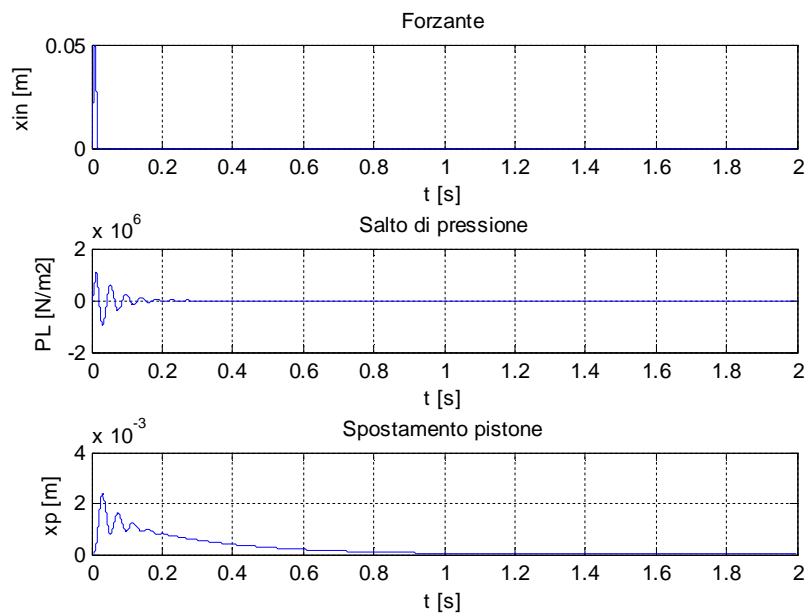
Per quanto riguarda i dati di ingresso per la caratterizzazione dell'attuatore, rispetto a quanto riportato in Tabella 8 è stata leggermente variata la lunghezza del braccio del cinematismo della superficie mobile (*horn*) che da 0.05 [m] è stata portata a 0.06 [m]; ciò ha comportato una variazione della frequenza esibita dal sistema, da 19.22 [Hz] a 23.05 [Hz].

### Risposta ad un segnale pseudo-impulsivo

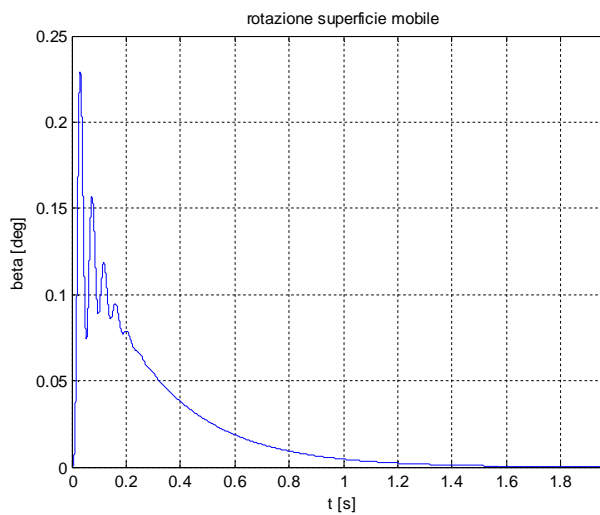
Si riportano le risposte a segnali di input  $x_{in}$  di ampiezze 5 [mm] e 50 [mm].



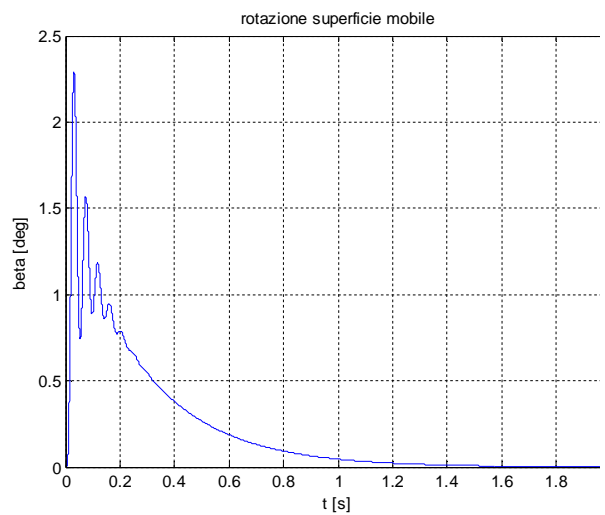
**Figura 39** Risposta attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 5$  [mm]



**Figura 40** Risposta attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 50$  [mm]



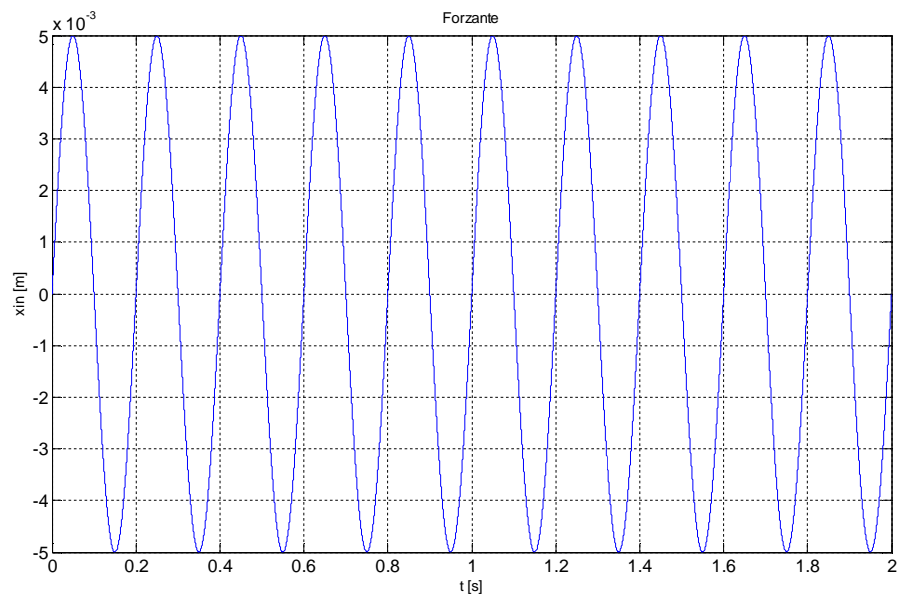
**Figura 41** Rotazione superficie mobile,  $x_{in} = 5$  [mm]



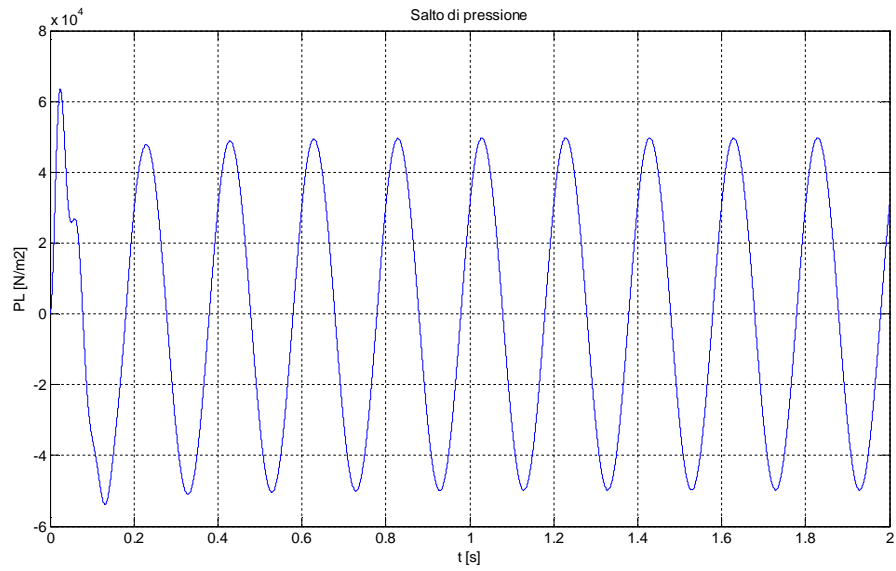
**Figura 42** Rotazione superficie mobile,  $x_{in}=50$ [mm]

### Risposta ad un segnale sinusoidale

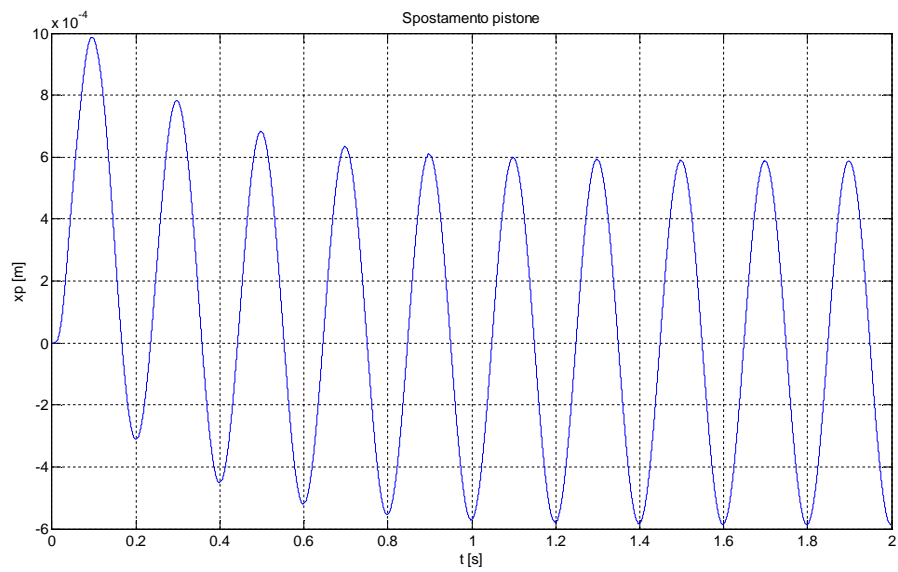
Analogamente a quanto fatto con un segnale di ingresso pseudo impulsivo, si riportano le risposte a segnali sinusoidali di input  $x_{in}$  di ampiezze 5 [mm] e 50 [mm].



**Figura 43** Segnale d'ingresso attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 5$  [mm]



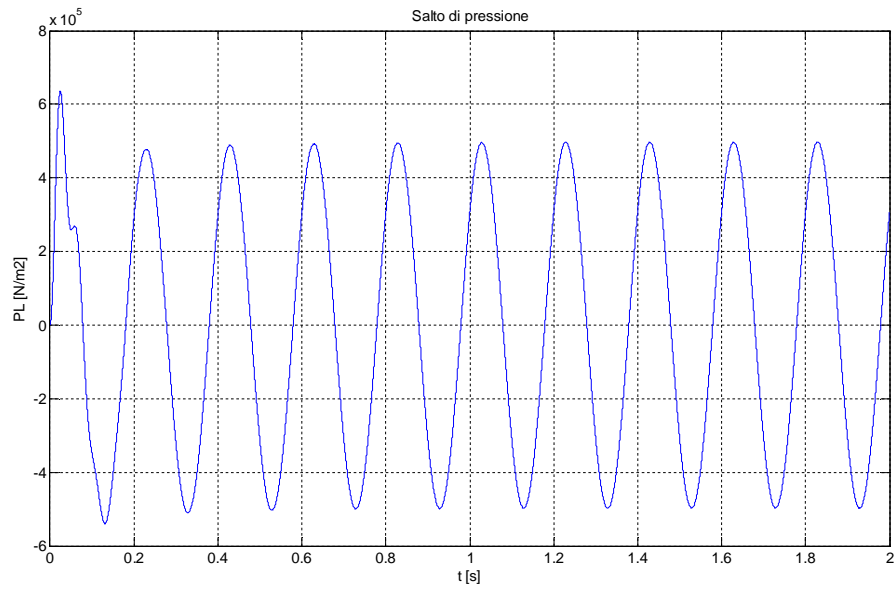
**Figura 44 Salto di pressione attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 5$  [mm]**



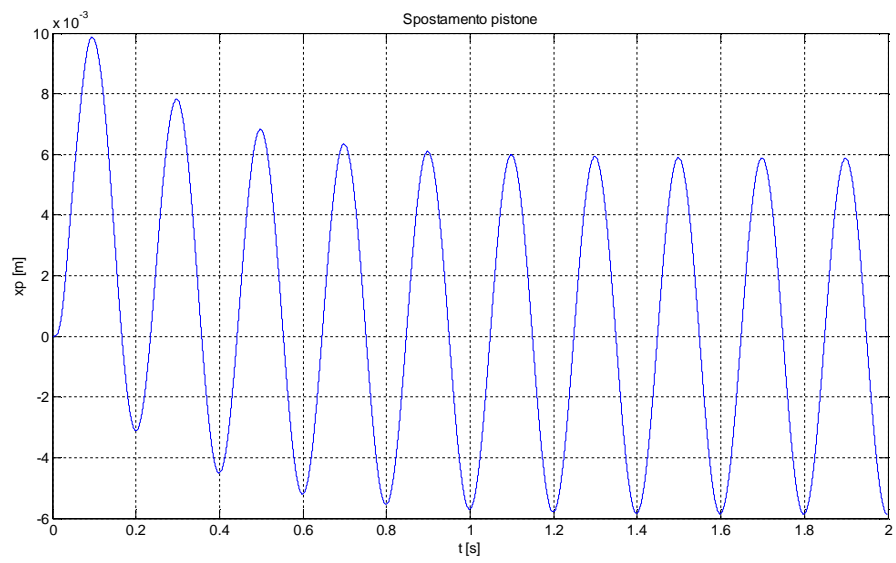
**Figura 45 Spostamento pistone attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 5$  [mm]**



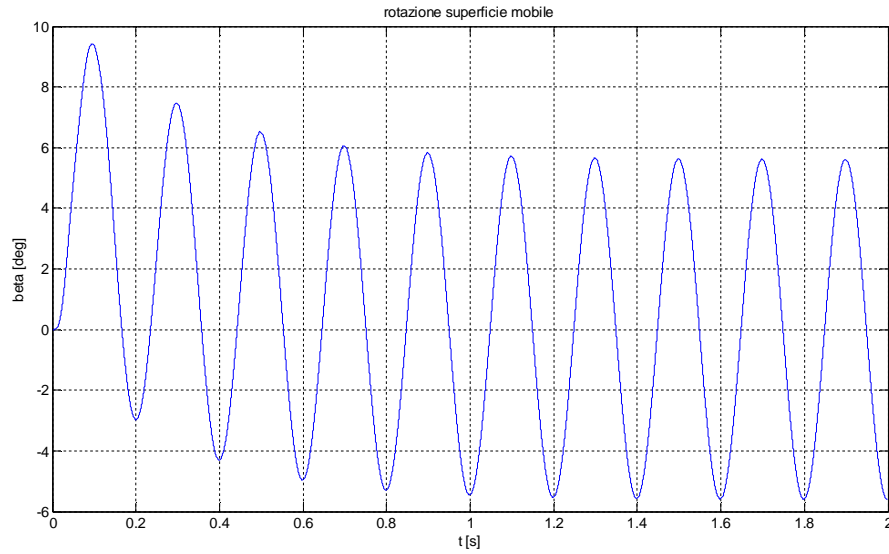




**Figura 48 Salto di pressione attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 50$  [mm]**

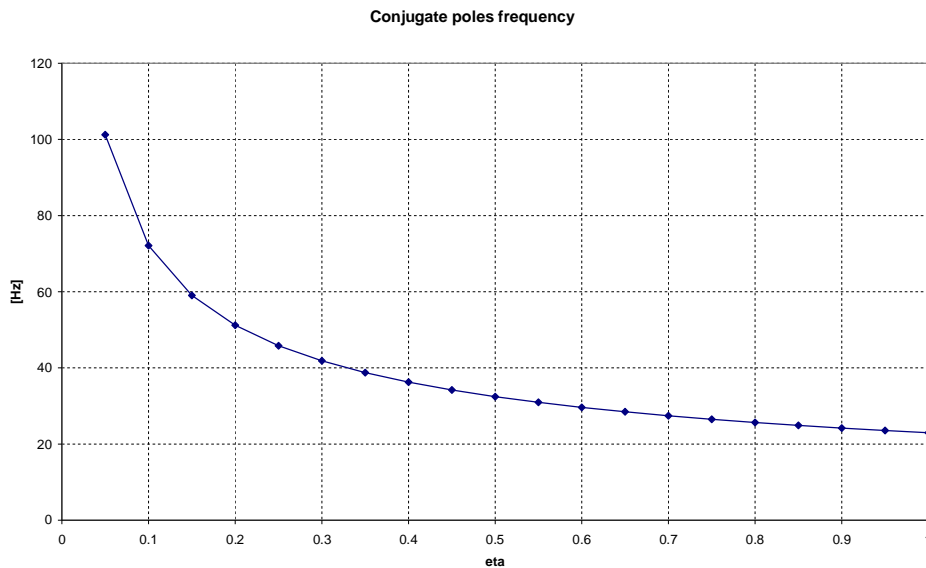


**Figura 49 Spostamento pistone attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 50$  [mm]**

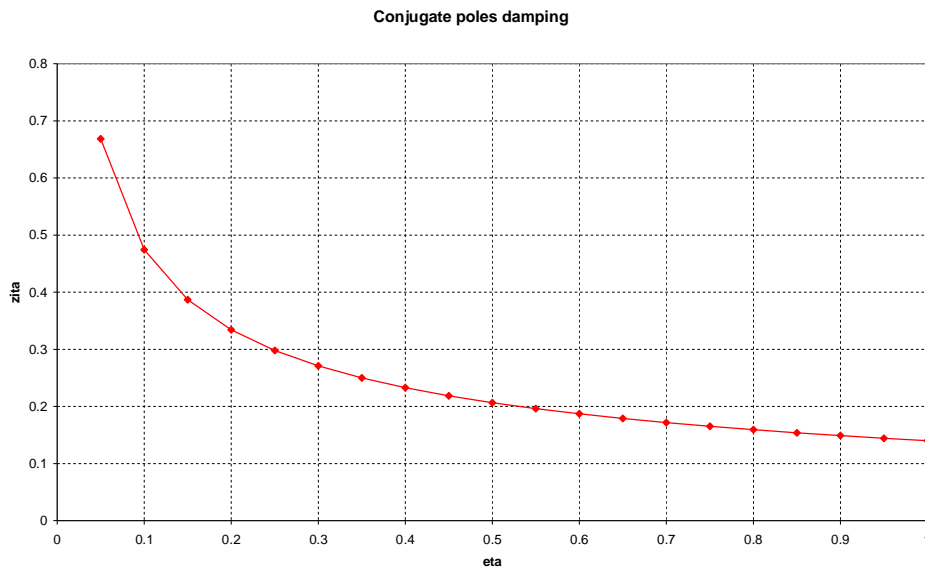


**Figura 50 Rotazione superficie mobile attuatore modello linearizzato,  $x_{in} = 50$  [mm]**

Si riporta anche la variazione (Figura 51 e Figura 52) degli autovalori del sistema attuatore-superficie mobile al variare della massa totale vista dal sistema:  $m_p = m_{piston} + \eta \cdot \frac{I_{\beta\beta}}{d^2}$  con  $\eta \in [0,1]$ , cioè per  $\eta=0$  non vi è carico inerziale esterno, mentre per  $\eta=1$  vi è tutto il carico inerziale esterno.



**Figura 51 Frequenza esibita dal sistema al variare di  $\eta$**



**Figura 52** Coefficiente di smorzamento al variare di  $\eta$

Si nota dalla Figura 52 come lo smorzamento esibito dal sistema attuatore – superficie mobile sia notevolmente più elevato di quello connesso ai modi elastici del velivolo (0.01). Ciò conferma l’effetto benefico sulla stabilità aeroelastica.

### 4.3 CONFRONTO TRA IL MODELLO NON LINEARE DELL’ATTUATORE E IL MODELLO LINEARIZZATO CON BILANCIO ARMONICO

Si riprendono le equazioni non lineari del servoattuatore (funzione non lineare  $Q_L$  della portata della servovalvola) (APPENDICE A, Eq. 157):

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = 0$$

**Eq. 56** Dinamica del pistone in assenza di forze esterne

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \dot{p}_L + C_{tp} \cdot p_L + A_p \dot{x}_p = Q_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 57** Equazione della servovalvola

$$Q_L(x_v, p_L) = C_d \cdot w \cdot \sqrt{\frac{p_s}{\rho}} \cdot x_v \cdot \left( 1 - \text{sign}(x_v) \cdot \frac{p_L}{p_s} \right)^{1/2}$$

**Eq. 58** Funzione non lineare portata

$$x_v = G_1 \cdot x_{in} - G_3 \cdot x_p$$

**Eq. 59 Ritorno pistone**

Con:

$C_d$	coefficiente di efflusso
$w$	gradiente d'area
$\rho$	densità olio
$p_s$	pressione di mandata
$p_L$	salto di pressione tra le camere
$x_v$	spostamento dello spool della servovalvola
$x_p$	spostamento del pistone
$F_{ext}$	forze esterne
$V_t$	volume totale delle camere del cilindro
$m_p$	massa pistone
$\beta_e$	<i>bulk modulus</i> effettivo
$A_p$	area pistone
$B_p$	coefficiente di smorzamento viscoso del pistone
$G_1, G_3$	rapporti cinematici di ritorno

In forma stato vettore si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B_p & A_p \\ 0 & -A_p & -C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot Q_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 60**

$$\begin{bmatrix} x_v \\ p_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_{in}(t)$$

**Eq. 61**

Tali equazioni sono state integrate nel tempo con il metodo di Runge Kutta del quarto ordine, per la valutazione della risposta del solo sistema attuatore ad un segnale sinusoidale. Nel prosieguo saranno mostrati i risultati.

Come già evidenziato al capitolo precedente e nell'APPENDICE A, normalmente si utilizza una linearizzazione basata sullo sviluppo in serie di Taylor intorno allo zero, arrestato al primo ordine, della funzione portata:

$$Q_L(x_v, p_L) \approx \left( \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right)_{p_L=0} \cdot x_v(t) + \left( \frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \right)_{x_v=0} \cdot p_L(t) = k_q \cdot x_v(t) - k_c \cdot p_L(t)$$

**Eq. 62**

Le Eq. 61, tenendo conto delle Eq. 62 portano alla rappresentazione linearizzata del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B_p & A_p \\ -k_q G_3 & -A_p & -k_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_q G_1 \end{Bmatrix} \cdot x_{in}(t)$$

**Eq. 63**

con  $k_c + C_{tp} = k_{cc}$ .

Ciò che viene ora proposto è un metodo di linearizzazione alternativo basato sulla medesima filosofia che è stata utilizzata per tener conto della non linearità in rigidità della superficie di controllo del velivolo esaminato al Capitolo 1 ovvero quella del bilancio armonico.

I coefficienti moltiplicativi della funzione linearizzata della portata non sono più calcolati attorno allo zero, come nello sviluppo di Taylor, ma dipenderanno dalla risposta non lineare del sistema al segnale di ingresso e dunque anche dall'ampiezza di oscillazione.

Assumendo quindi una legge lineare della portata:

$$\underline{Q}_L(x_v, p_L) \approx C_1 \cdot \underline{x}_v(t) + C_2 \cdot \underline{p}_L(t)$$

**Eq. 64**

si istituisce un problema ai minimi quadrati sulla funzione errore:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2)$$

**Eq. 65**

dove  $\underline{f}(C_1, C_2) = C_1 \cdot \underline{x}_v(t) + C_2 \cdot \underline{p}_L(t)$ .

L'errore quadratico è dato da:

$$E = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon}$$

**Eq. 66**

La condizione di minimizzazione dell'errore quadratico medio nel periodo di osservazione è data da:

$$d\underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} = 0$$

**Eq. 67**

Con:

$$\underline{\varepsilon}^T(t) = \underline{Q}_L^T(x_v, p_L) - \underline{f}^T(C_1, C_2) \Rightarrow d\underline{\varepsilon}^T(t) = -\frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_1} \delta C_1 - \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_2} \delta C_2$$

Da cui

$$d\underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \left\{ -\frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_1} \delta C_1 - \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_2} \delta C_2 \right\} \cdot \{ \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2) \} = 0$$

**Eq. 68**

Ovvero:

$$\delta C_1 \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_1} \{ \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2) \} + \delta C_2 \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_2} \{ \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2) \} = 0$$

**Eq. 69**

La condizione espressa dalla Eq. 69 è indipendente da  $\delta C_1$  e  $\delta C_2$ , dunque può scomporsi nelle due condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_1} \{ \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2) \} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial C_2} \{ \underline{Q}_L(x_v, p_L) - \underline{f}(C_1, C_2) \} &= 0 \end{aligned}$$

**Eq. 70**

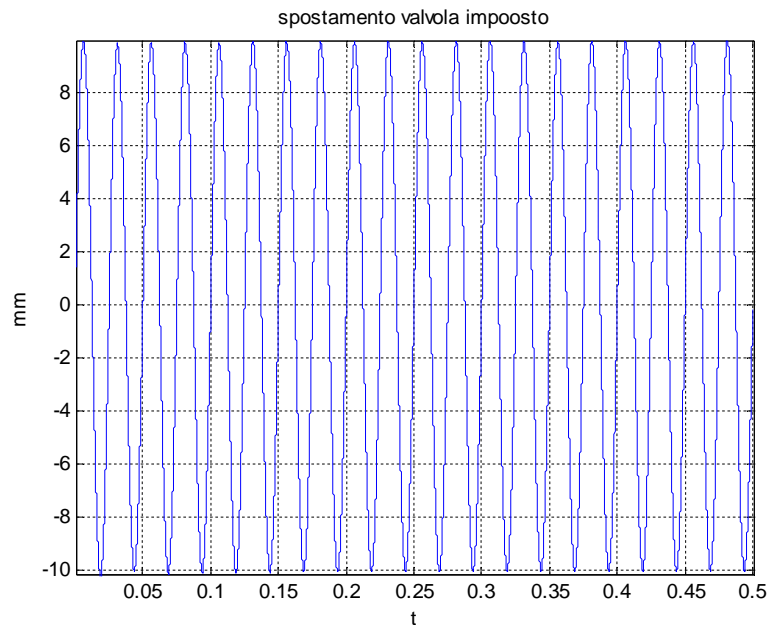
Da cui, mediando nel periodo di osservazione, si ottiene il sistema di equazioni, da cui è possibile calcolare i coefficienti  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{x}_V^T \cdot x_V \cdot dt & \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{x}_V^T \cdot \underline{p}_L \cdot dt \\ \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{p}_L^T \cdot x_V \cdot dt & \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{p}_L^T \cdot \underline{p}_L \cdot dt \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{x}_V^T \cdot \underline{Q}_L \cdot dt \\ \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \underline{p}_L^T \cdot \underline{Q}_L \cdot dt \end{Bmatrix}$$

**Eq. 71**

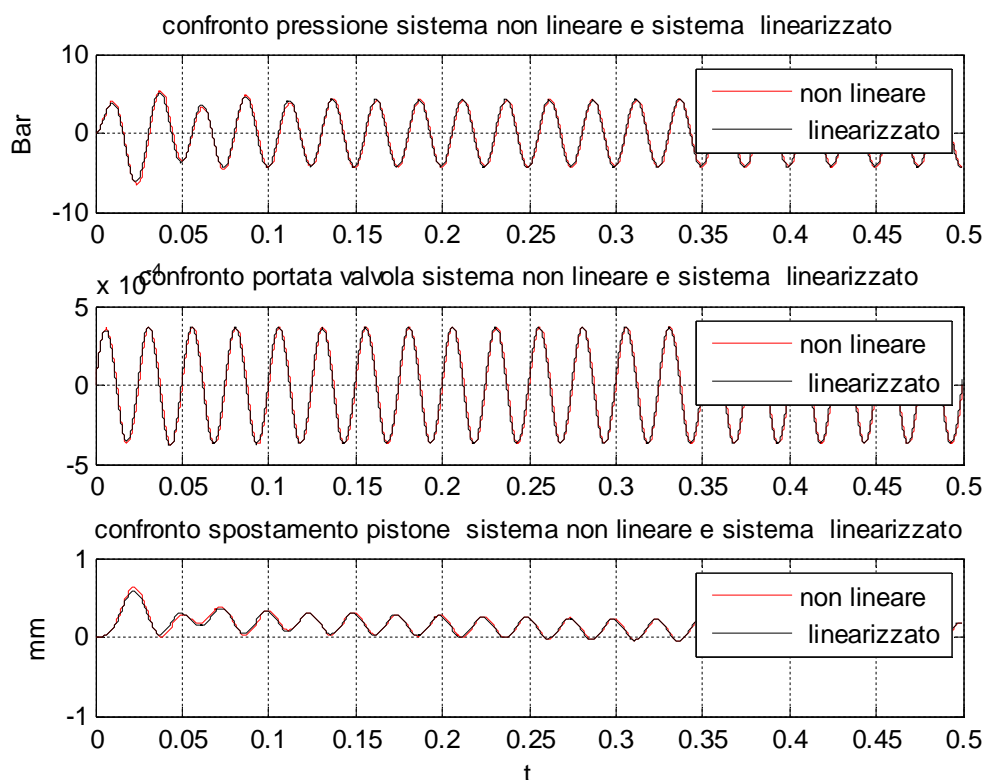
La valutazione dei coefficienti presuppone il calcolo della risposta non lineare del servoattuatore. In altri termini, se si è interessati allo studio della risposta aeroservoelastica di un velivolo, è necessario calcolare una serie di coefficienti al variare dell'ampiezza di oscillazione, risolvendo nel tempo il servoattuatore, che è un sistema di dimensioni notevolmente ridotte rispetto all'intero velivolo. In tal modo sarà possibile eseguire analisi nel tempo e analisi di flutter con un modello completamente lineare ancorché più affidabile rispetto alla linearizzazione alla Taylor, con indubbio vantaggio computazionale.

Ottenuti i coefficienti si risolve il sistema linearizzato e si confrontano le risposte con quelle del sistema non lineare.



**Figura 53 Spostamento imposto della valvola**





**Figura 54 Confronto risposte sistema non lineare vs sistema linearizzato con bilancio armonico**

Dal confronto tra i segnali di risposta si osserva la loro sovrapposizione, con coefficiente di correlazione superiore al 90%. Questo incoraggia l'uso del bilancio armonico anche per lo studio del sistema aeroservoelastico completo. Nel modello di risposta aeroservoelastica c'è però la necessità di introdurre le equazioni aggiuntive del servoattuatore come sistema del secondo ordine (per come sono scritte esse sono miste secondo-primo ordine) allo scopo di permettere l'inversione della matrice di massa.

Nel capitolo precedente il problema è stato risolto applicando un numero opportuno di derivatori alle equazioni. Tale approccio non crea problemi nel caso dello studio della stabilità del sistema, ma non è adatto a problemi di risposta dinamica, poiché fornisce andamenti delle risposte fisicamente non coerenti.

Per tale motivo verrà messo a punto un approccio alternativo: alla equazione della servovalvola viene aggiunto un termine fittizio nella derivata seconda della pressione, con coefficiente moltiplicativo molto piccolo, in modo da ricondurre il sistema misto secondo-primo ordine ad un sistema completo del secondo ordine, da aggiungere poi al sistema aeroelastico.

Nel paragrafo che segue si illustra l'approccio per il solo sistema servoattuatore e si confrontano le risposte del sistema non lineare misto con quelle del sistema non lineare del secondo ordine.

## 4.4 APPROSSIMAZIONE DEL SERVOATTUATORE AD UN SISTEMA COMPLETO DEL SECONDO ORDINE

Nel presente paragrafo saranno illustrate le equazioni del servoattuatore con l'aggiunta di un termine fittizio del secondo ordine nella pressione, per ricondurre tutto ad un sistema del secondo ordine completo.

Si riscrivono le equazioni non lineari del servoattuatore:

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = 0$$

**Eq. 72 Dinamica del pistone in assenza di forze esterne**

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \dot{p}_L + C_{tp} \cdot p_L + A_p \dot{x}_p = Q_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 73 Equazione della servovalvola**

$$Q_L(x_v, p_L) = C_d \cdot w \cdot \sqrt{\frac{p_s}{\rho}} \cdot x_v \cdot \left( 1 - \text{sign}(x_v) \cdot \frac{p_L}{p_s} \right)^{1/2}$$

**Eq. 74 Funzione non lineare portata**

$$x_v = G_1 \cdot x_{in} - G_3 \cdot x_p$$

**Eq. 75 Ritorno pistone**

Si aggiunge alla seconda equazione il termine  $\varepsilon_{mass} \ddot{p}_L$  e dunque il sistema diventa completo del secondo ordine:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{mass} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ A_p & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_p \\ 0 & C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \Delta Q_{NL}(x_v, p_L)$$

**Eq. 76**

Dove vale sempre il legame espresso dalla Eq. 75.

In variabili di stato si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{\text{mass}} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \\ \dot{x}_p \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_p & -B_p & 0 \\ 0 & -C_{tp} & -A_p & -\frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \\ \dot{x}_p \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \Delta Q_{\text{NL}}(x_v, p_L)$$

Eq. 77

$\varepsilon_{\text{mass}}$  è stato posto pari a:

$$\varepsilon_{\text{mass}} = \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

il valore di  $\alpha$  deve essere scelto in modo da non avere problemi di *overflow* e tale da non modificare l'uscita del sistema misto primo - secondo ordine.

Il sistema è risolto nel tempo considerando la funzione non lineare  $\Delta Q_{\text{NL}}$  (Eq. 74) e le risposte sono confrontate con quelle del sistema misto:

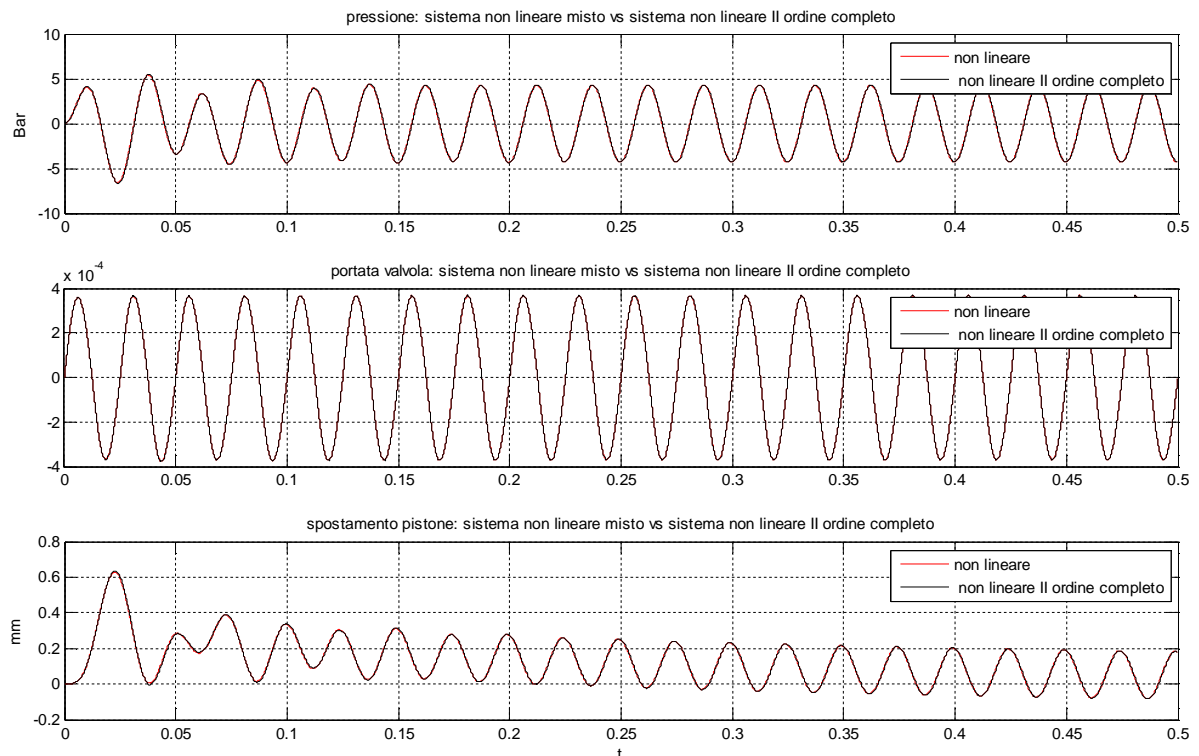


Figura 55 Confronto sistema misto vs sistema completo II ordine con massa fittizia

Dal confronto delle risposte si è fiduciosi nel proseguire le analisi con l'approccio della massa fittizia, poiché i segnali di risposta sono sovrapposti, con deviazione standard inferiore al 10% e coefficiente di correlazione superiore al 90%.

La linearizzazione mediante bilancio armonico proposta nel § 4.3 può essere nuovamente applicata al sistema completo del secondo ordine con massa fittizia: si riporta il confronto tra le risposte dell'attuatore modello del secondo ordine completo linearizzato con bilancio armonico e l'attuatore modello del secondo ordine completo non lineare. Il confronto mostra un'ottima corrispondenza tra i segnali, dunque si può già ravvisare come questo tipo di non linearità del sistema di attuazione è poco influente. Si verificherà poi se tale andamento è mantenuto anche quando l'attuatore sarà inserito nel sistema aeroelastico.

Il segnale di input è sinusoidale con frequenza di circa 40 [Hz] (la frequenza propria del sistema attuatore-superficie mobile è circa 23 [Hz]) fino a 0.5 [s], dopodiché è zero, in modo da recepire la risposta libera una volta introdotto nel sistema aeroelastico. Ha una durata di 4 [s], Figura 56.

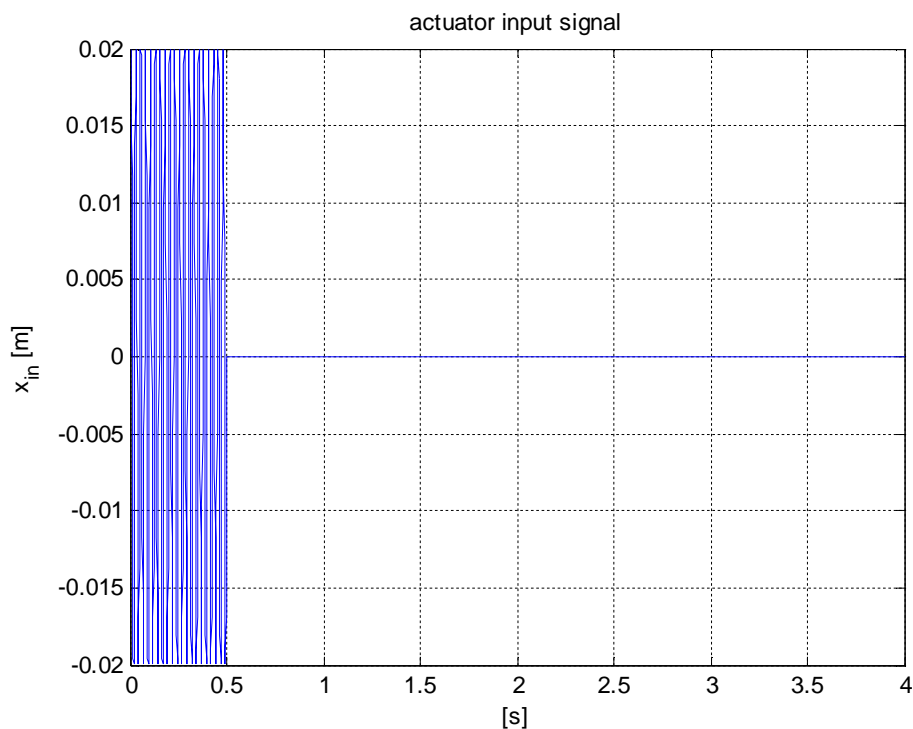


Figura 56 Segnale di input attuatore,  $x_{in}$

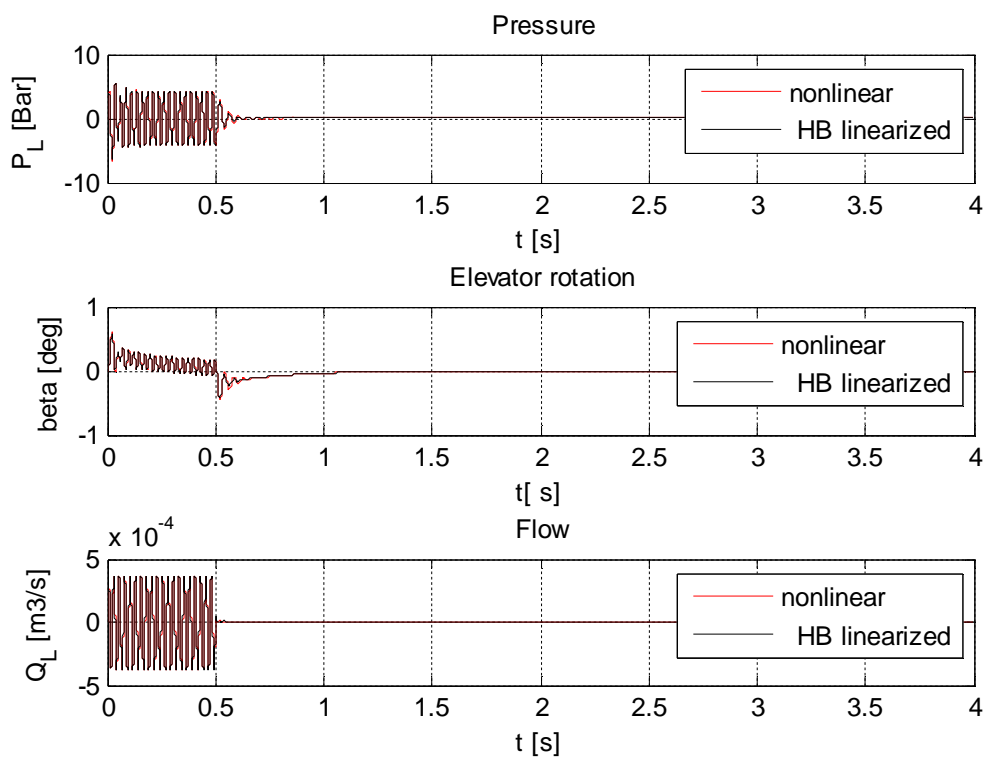


Figura 57 Confronto risposte attuatore linearizzato vs attuatore non lineare – modello II ordine completo

## 4.5 CALCOLI DI FLUTTER LINEARE CON FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SERVOATTUATORE - RISULTATI

A giustificazione della bontà dell'approccio con la massa fittizia vengono confrontati gli andamenti dei poli in velocità del solo sistema servoattuatore – superficie mobile con linearizzazione alla Taylor e, rispettivamente con l'approccio con derivatori e quello con massa fittizia.

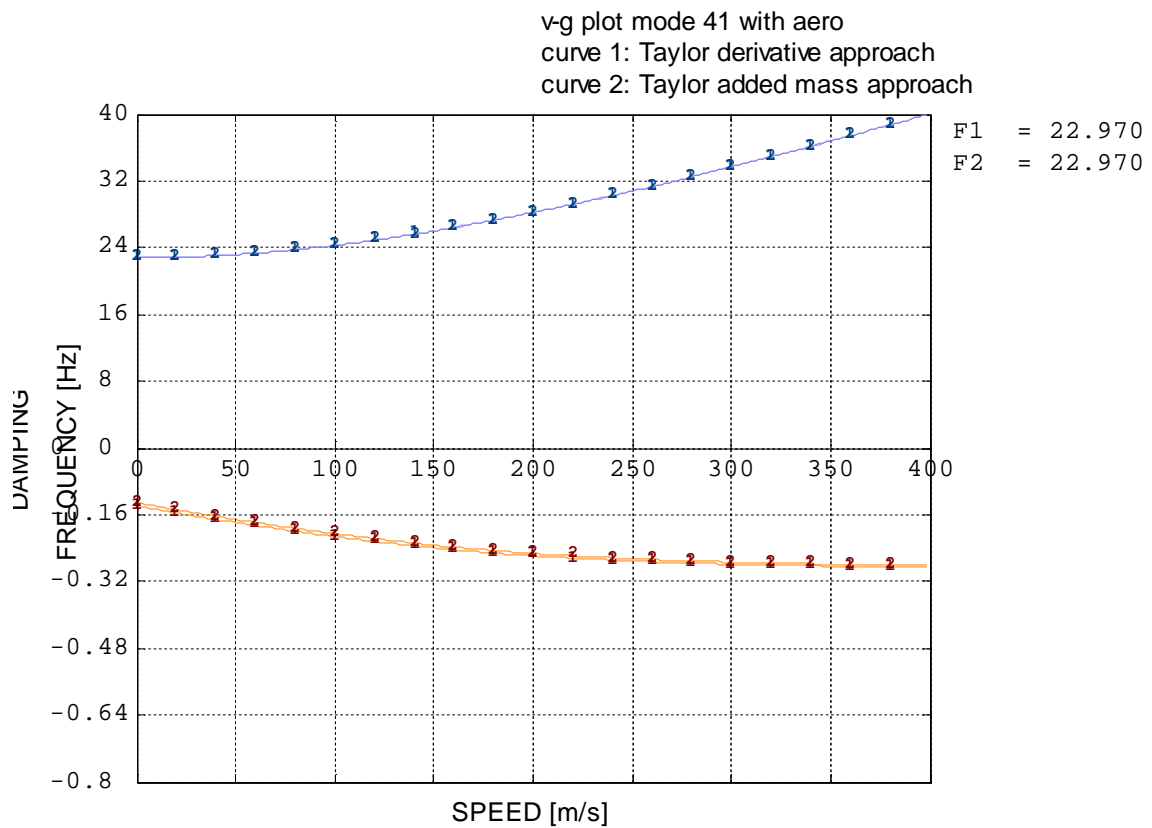


Figura 58 Andamento poli in velocità elevatore-attuatore: approccio derivatori vs approccio massa fittizia

Le matrici aggiuntive del servoattuatore con linearizzazione alla Taylor e approccio con derivatori vengono qui di seguito riportate:

$$\left\{ s^2 \cdot \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ A_p & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ k_q G_3 & k_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} X_p \\ P_L \end{Bmatrix} = \left\{ s^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k_q G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} X_{in}$$

Eq. 78

Le analisi di flutter confermano l'equivalenza dei due approcci (Figura 59, Figura 60).

I risultati mostrano una velocità di flutter pari a 1.63  $V_D$ . Il modo coinvolto è quello dell'ala (curva 3). L'andamento in velocità di frequenze e smorzamenti degli altri modi rimane invariato.

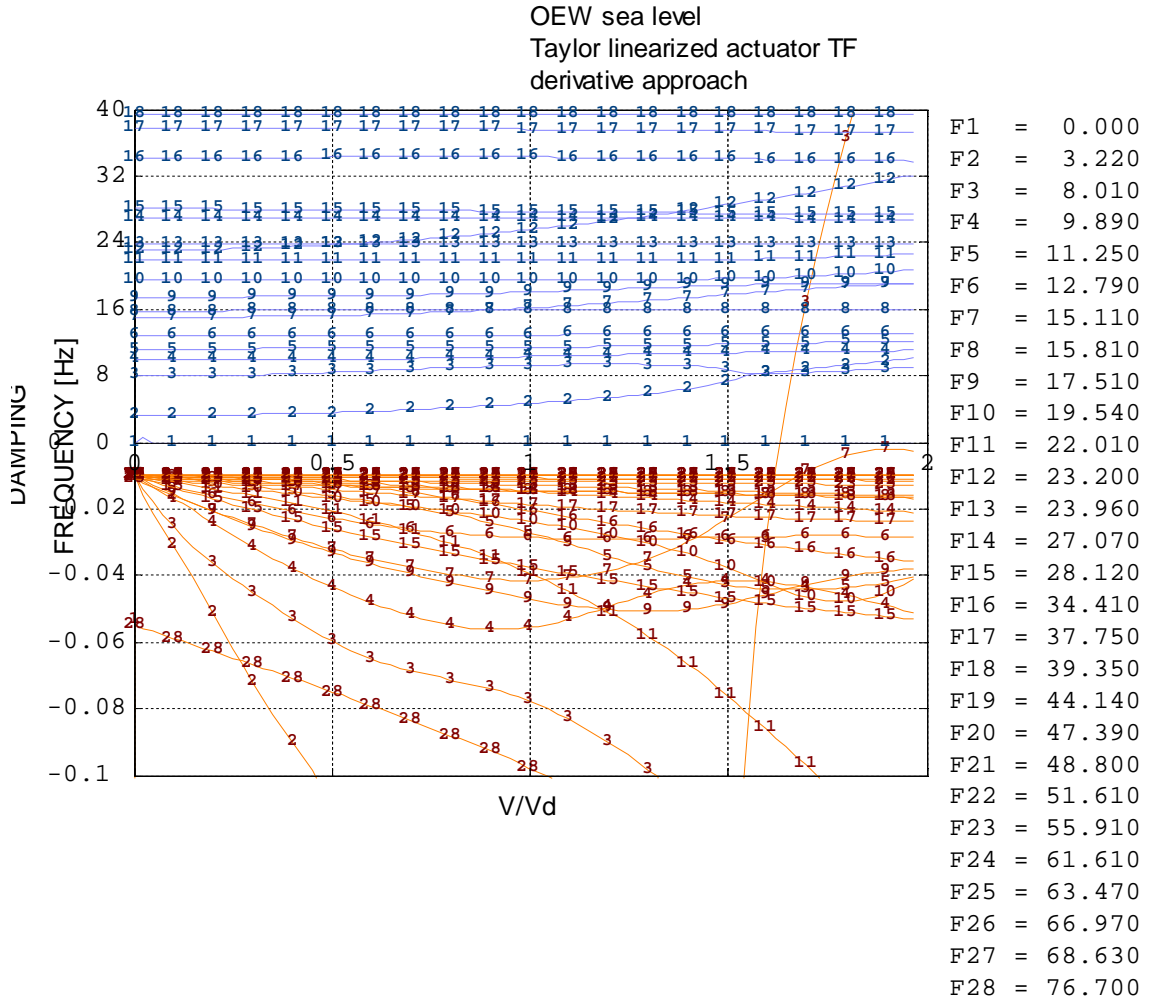
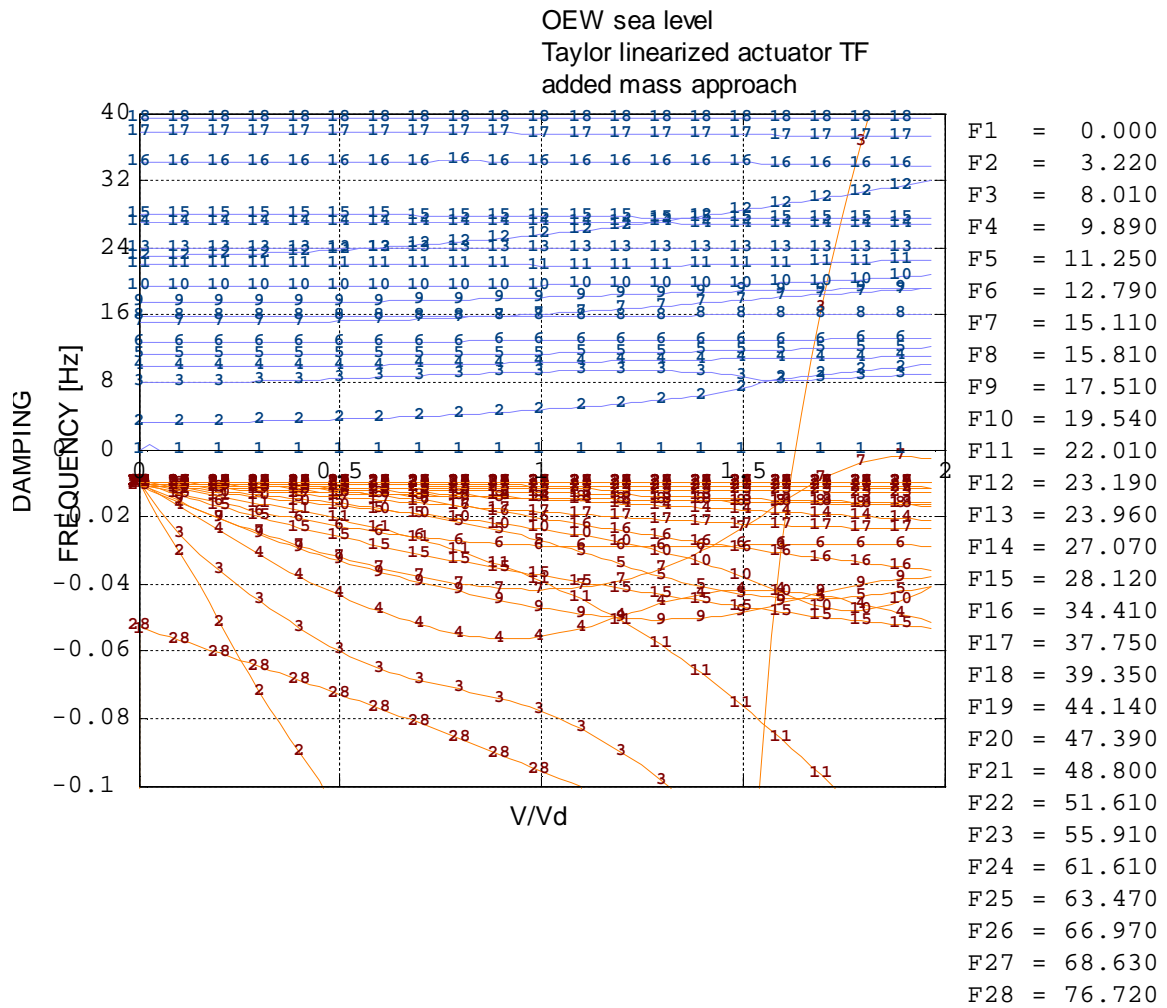


Figura 59 Diagramma v-g con matrici aggiuntive servoattuatore, approccio derivatori



**Figura 60** Diagramma v-g con matrici aggiuntive servoattuatore, approccio massa fittizia

Si riportano infine i risultati delle analisi di flutter con la funzione di trasferimento dell'attuatore (modello II ordine) linearizzato con il bilancio armonico (Eq. 71). Vi è un'ottima corrispondenza tra i valori di velocità di flutter rispetto alla linearizzazione alla Taylor. Il meccanismo di flutter è ancora lo stesso, coinvolge l'ala, curva 3 e anche l'andamento in velocità di frequenze e smorzamenti degli altri modi rimane invariato.



OEW - sea level - actuator TF  
HB linearized

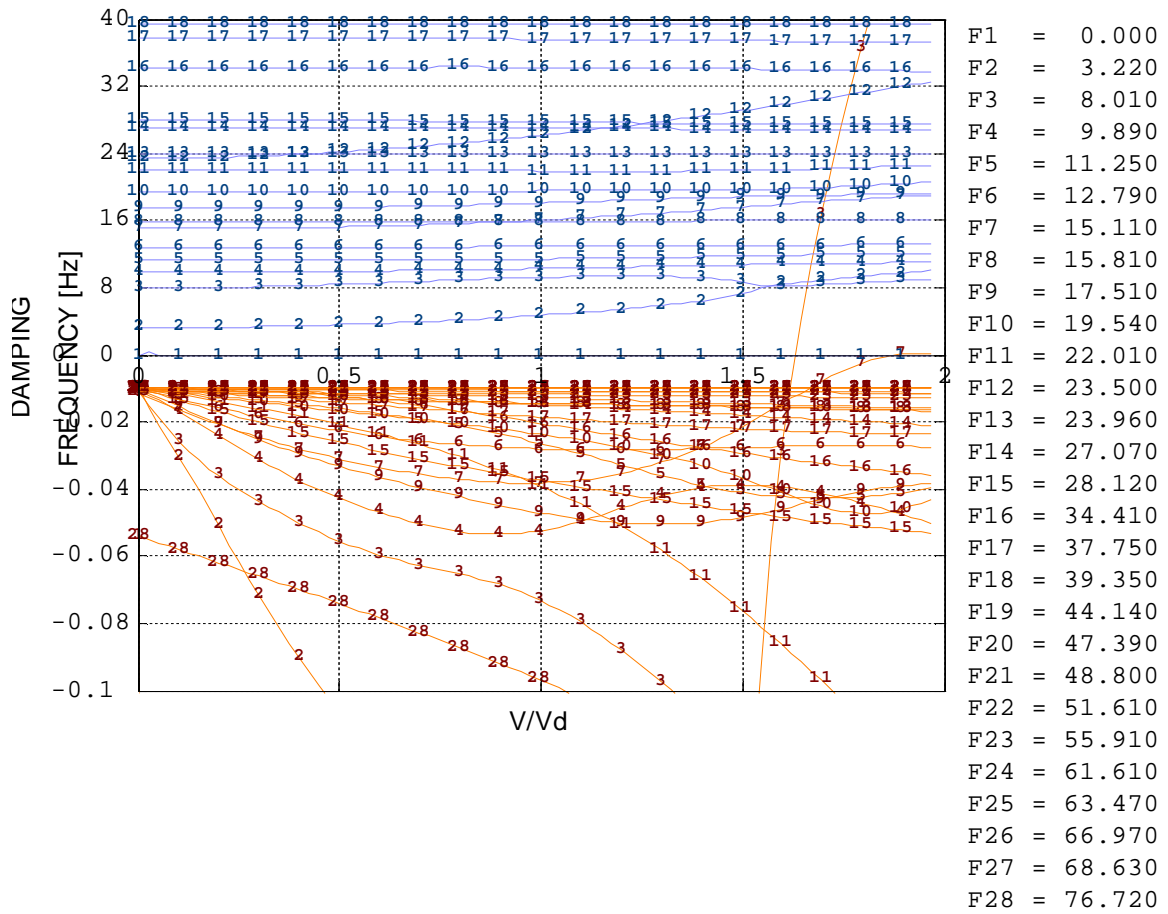


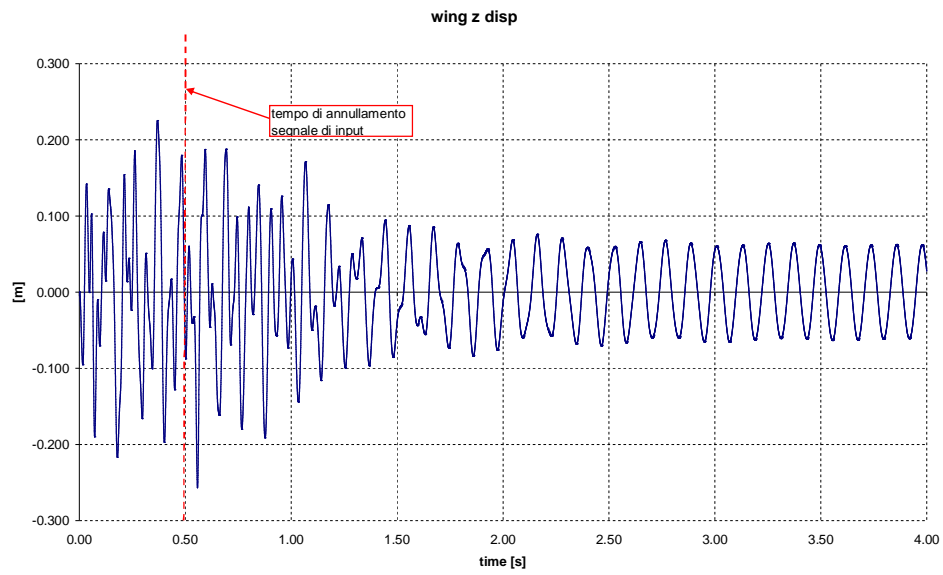
Figura 61 Diagramma v-g analisi di flutter attuttore linearizzato bilancio armonico

In Tabella 13 si riporta il confronto tra le minime velocità di flutter rilevate con i due modelli.

	$V_F/V_D$	$f_F$	CURVE
	[m/s]	[Hz]	
Harmonic Balance linearization	1.631	8.253	3
Taylor linearization	1.630	8.254	3

Tabella 13 Confronto flutter attuttore linearizzato con bilancio armonico e con Taylor

Sono state poi eseguite analisi di risposta aeroelastica dinamica al comando della servovalvola, alla velocità di 1.63  $V_D$ . Il segnale utilizzato per eccitare il flutter tramite il servoattuatore è quello riportato in Figura 56. Il flutter insorge proprio alla velocità di 1.63  $V_D$ . Si riporta la risposta in accelerazione prelevata sull'estremità dell'ala.



**Figura 62** Accelerazione estremità alare, risposta dinamica lineare,  $V = 1.63 V_D$

Nel prossimo paragrafo saranno scritte le equazioni utilizzate per ricavare la risposta aeroservoelastica non lineare. I risultati delle analisi non lineari saranno confrontati con quelli delle analisi lineari.

## 4.6 MODELLO AEROSERVOELASTICO NON LINEARE

Nel presente paragrafo si ricavano le equazioni del sistema aeroelastico non lineare. Sarà utilizzato l'approccio con massa fittizia per l'inserimento del sottosistema non lineare del servoattuatore. Il sistema sarà risolto nel tempo, con integrazione alla Runge Kutta.

In precedenza è stato mostrato (Eq. 27) come ogni sistema di controllo possa esprimersi nella forma:

$$(s^2 \underline{\underline{A}} + s \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{Y}}(s) = (s^2 \underline{\underline{V}}_2 ; s \underline{\underline{V}}_1 ; \underline{\underline{V}}_0) \cdot \underline{\underline{X}}(s)$$

Eq. 79

E come questo possa aggiungersi alla pianta del sistema velivolo, rappresentato dai modi e dai ritardi aerodinamici dovuti alla rappresentazione allo stato finito dell'aerodinamica.

Si richiamano quindi le equazioni non lineari dell'attuatore.

$$\begin{cases} m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = F_{\text{ext}} \\ \varepsilon_{\text{mass}} \ddot{p}_L + \frac{V_t}{4\beta_e} \dot{p}_L + C_{tp} \cdot p_L + A_p \dot{x}_p = Q_L(x_v, p_L) \end{cases}$$

Eq. 80

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{mass}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ A_p & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_p \\ 0 & C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_L(x_v, p_L) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eq. 81

Introducendo il legame di trasformazione tra lo spostamento del pistone e la rotazione della superficie mobile:

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta \\ p_L \end{Bmatrix} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Y}}$$

Eq. 82

si ha:

$$\underline{T}^T \cdot \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{mass} \end{bmatrix} \cdot \underline{T} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{p}_L \end{Bmatrix} + \underline{T}^T \cdot \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ A_p & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \underline{T} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \underline{T}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -A_p \\ 0 & C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \underline{T} \cdot \begin{Bmatrix} \beta \\ p_L \end{Bmatrix} = \underline{T}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_L(x_v, p_L) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Eq. 83**

ovvero:

$$\begin{bmatrix} m_p d^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{mass} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p d^2 & 0 \\ A_p d & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_p d \\ 0 & C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_L(x_v, p_L) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Eq. 84**

Il legame tra lo spostamento della servovalvola e l'ingresso è dato dall'Eq. 75:

$$x_v = G_1 \cdot x_{in} - (G_3 d) \cdot \beta$$

**Eq. 85**

mentre la portata è data da:

$$Q_L(x_v, p_L) = C_d \cdot w \cdot \sqrt{\frac{p_s}{\rho}} \cdot x_v \cdot \sqrt{1 - \text{sign}(x_v) \cdot \frac{p_L}{p_s}}$$

**Eq. 86**

Il sistema dato dalle Eq. 84 è pronto per essere assemblato al sistema aeroelastico. Si riporta dapprima il sistema aeroelastico comprensivo dell'extra modo di elevatore, espanso con un orlato di zeri per accogliere l'ulteriore grado di libertà  $p_L$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{m}_{gen} & \underline{m}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{m}_{\beta i} & \underline{I}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p}_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \beta \\ p_L \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \rho v^2 \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \beta \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$$

**Eq. 87**

Tale sistema si modifica con l'aggiunta (a partire dal grado di libertà di rotazione dell'elevatore) del sistema dato dalle Eq. 84, ottenendo quindi il sistema aeroservoelastico completo:

$$\begin{bmatrix} \underline{m}_{gen} & \underline{m}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{m}_{\beta i} & (m_p d^2 + I_{\beta\beta}) & \underline{0} \\ \underline{0} & 0 & \varepsilon_{mass} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{q}} \\ \underline{\ddot{\beta}} \\ \underline{\ddot{p}_L} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & B_p d^2 & \underline{0} \\ \underline{0} & A_p d & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\dot{\beta}} \\ \underline{\dot{p}_L} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{k}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -A_p d \\ \underline{0} & \underline{0} & C_{tp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\beta} \\ \underline{p}_L \end{Bmatrix} +$$

$$-\frac{1}{2}\rho v^2 \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\beta} \\ \underline{p}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{Q}_L(x_v, p_L) \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$$

**Eq. 88**

Le forze aerodinamiche generalizzate vengono ora sviluppate secondo l'approssimazione razionale di Roger, con:

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\rho v^2; \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\rho v c_r; \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\rho c_r^2$$

**Eq. 89**

Indicando con

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\beta} \\ \underline{p}_L \end{Bmatrix}$$

**Eq. 90**

il vettore dei modi principali e degli extra modi di superficie mobile e di pressione dell'attuatore, si ha:

$$\eta_0 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} = \eta_0 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_0 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \eta_1 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{x}} + \eta_2 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}} +$$

$$+ \eta_0 \sum_{L=1}^{n_{\text{rit}}} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{B}_L & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \frac{(jk_r)}{(jk_r) + \gamma_L} \cdot \underline{x}$$

**Eq. 91**

$n_{\text{rit}}$  è il numero dei ritardi aerodinamici, che nel ricavare le equazioni è posto pari a 4.

Si aggiungono poi le posizioni di Goggin:

$$\frac{1}{(jk_r) + \gamma_L} \cdot \underline{x} = \underline{Z}_L \quad L=1, \dots, 4$$

**Eq. 92**

dove  $\underline{Z}_L$  è un vettore colonna di ordine pari al numero totale dei modi, dunque le equazioni di Goggin sono esplicitate come segue:

$$\begin{aligned} (jk_r) \cdot \underline{Z}_1 &= -\gamma_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{x} \\ (jk_r) \cdot \underline{Z}_2 &= -\gamma_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{x} \\ (jk_r) \cdot \underline{Z}_3 &= -\gamma_3 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{x} \\ (jk_r) \cdot \underline{Z}_4 &= -\gamma_4 \cdot \underline{Z}_4 + \underline{x} \end{aligned} \quad \underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_4 \end{pmatrix}$$

**Eq. 93**

l'espressione delle forze aerodinamiche diventa:

$$\eta_0 \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} = \eta_0 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_0 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \eta_1 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{x}} + \eta_2 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{A}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}} +$$

$$+ \eta_0 \sum_{L=1}^{n_{\text{rit}}} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{B}_L & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot (jk_r) \cdot \underline{Z}_L$$

**Eq. 94**

ovvero:

$$\eta_0 \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} = \eta_0 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_0 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \eta_1 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_1 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{x}} + \eta_2 \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}} +$$

$$+ \eta_0 \sum_{L=1}^{n_{rit}} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_L \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} - \eta_0 \sum_{L=1}^{n_{rit}} \gamma_L \cdot \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_L \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{Z}_L$$

Eq. 95

Ponendo:

$$\underline{\underline{A}}_0 = \eta_0 \cdot \left( \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_0 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} + \sum_{L=1}^{n_{rit}} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_L \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \right)$$

Eq. 96

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_1 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_L = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_L \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

Eq. 97

Eq. 98

Eq. 99

si ha:

$$\eta_0 \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{Q}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{Q}_{\beta i} & \underline{Q}_{\beta\beta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{\dot{x}} = \eta_0 \underline{\underline{A}}_0 \cdot \underline{x} + \eta_1 \underline{\underline{A}}_1 \cdot \dot{\underline{x}} + \eta_2 \underline{\underline{A}}_2 \cdot \ddot{\underline{x}} +$$

$$- \eta_0 \gamma_1 \cdot \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{Z}_1 - \eta_0 \gamma_2 \cdot \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \eta_0 \gamma_3 \cdot \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{Z}_3 - \eta_0 \gamma_4 \cdot \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{Z}_4$$

Eq. 100

Si sostituiscono le Eq. 100 nel sistema di equazioni, dopo aver posto:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{m}_{gen} & \underline{m}_{i\beta} & \underline{0} \\ \underline{m}_{\beta i} & (m_p d^2 + I_{\beta\beta}) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \varepsilon_{mass} \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & B_p d^2 & \underline{0} \\ \underline{0} & A_p d & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{gen} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -A_p d \\ \underline{0} & \underline{0} & C_{tp} \end{bmatrix}$$

Eq. 101

In definitiva si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{C}} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x} - \eta_0 \underline{\underline{A}}_0 \underline{x} - \eta_1 \underline{\underline{A}}_1 \dot{\underline{x}} - \eta_2 \underline{\underline{A}}_2 \ddot{\underline{x}} + \eta_0 \gamma_1 \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \eta_0 \gamma_2 \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \eta_0 \gamma_3 \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \eta_0 \gamma_4 \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{Z}_4 = \\
\qquad \qquad \qquad = \left\{ \begin{array}{l} \underline{0} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}_L(x_v, p_L) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \\
\\
\underline{\dot{Z}}_1 = -\gamma_1 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_1 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_2 = -\gamma_2 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_2 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_3 = -\gamma_3 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_3 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_4 = -\gamma_4 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_4 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x}
\end{array} \right.$$

**Eq. 102**

Si pone poi:

$$\underline{\underline{M}}_s = \underline{\underline{M}} - \eta_2 \underline{\underline{A}}_2; \quad \underline{\underline{C}}_s = \underline{\underline{C}} - \eta_1 \underline{\underline{A}}_1; \quad \underline{\underline{K}}_s = \underline{\underline{K}} - \eta_0 \underline{\underline{A}}_0$$

**Eq. 103**

Da cui il sistema di Eq. 102 assume la forma sintetica:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{\underline{M}}_s \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{C}}_s \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}}_s \cdot \underline{x} + \eta_0 \gamma_1 \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \eta_0 \gamma_2 \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \eta_0 \gamma_3 \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \eta_0 \gamma_4 \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{Z}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \underline{0} \\ 0 \\ \underline{Q}_L(x_v, p_L) \end{array} \right\} \\
\\
\underline{\dot{Z}}_1 = -\gamma_1 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_1 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_2 = -\gamma_2 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_2 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_3 = -\gamma_3 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_3 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\
\underline{\dot{Z}}_4 = -\gamma_4 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_4 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x}
\end{array} \right.$$

**Eq. 104**



Aggiungendo l'identità  $\frac{d}{dt}\underline{x} = \dot{\underline{x}}$  e moltiplicando ambo i membri del primo blocco di equazioni per l'inversa della matrice  $\underline{\underline{M}}_S$  si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\underline{x} = \dot{\underline{x}} \\ \frac{d}{dt}\dot{\underline{x}} = -\underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}_S \cdot \dot{\underline{x}} - \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_S \cdot \underline{x} - \eta_0 \gamma_1 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_1 \cdot \underline{Z}_1 - \eta_0 \gamma_2 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \eta_0 \gamma_3 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_3 \cdot \underline{Z}_3 \\ \quad - \eta_0 \gamma_4 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_4 \cdot \underline{Z}_4 + \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ Q_L(x_v, p_L) \end{array} \right\} \\ \frac{d}{dt}\underline{Z}_1 = -\gamma_1 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_1 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\ \frac{d}{dt}\underline{Z}_2 = -\gamma_2 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_2 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\ \frac{d}{dt}\underline{Z}_3 = -\gamma_3 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_3 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \\ \frac{d}{dt}\underline{Z}_4 = -\gamma_4 \cdot \frac{v}{c_r} \cdot \underline{Z}_4 + \frac{v}{c_r} \cdot \underline{x} \end{array} \right.$$

**Eq. 105**

Per la scrittura in forma stato vettore si pone il vettore di stato pari a:

$$\underline{X} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_4 \end{array} \right.$$

**Eq. 106**

La matrice pianta avrà dimensioni  $(2+n_{rit}) * \text{modi}_{\text{totali}}$  ; essa è qui di seguito esplicitata.

$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{0}}$			
$-\underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_S$	$-\underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}_S$	$-\eta_0 \gamma_1 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{1}}}$	$-\eta_0 \gamma_2 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{2}}}$	$-\eta_0 \gamma_3 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{3}}}$	$-\eta_0 \gamma_4 \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{4}}}$
$\underline{\underline{I}} \cdot \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r}$	$\underline{\underline{0}}$	$-\gamma_1 \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r} \cdot \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$
$\underline{\underline{I}} \cdot \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r}$		$\underline{\underline{0}}$	$-\gamma_2 \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r} \cdot \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$
$\underline{\underline{I}} \cdot \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r}$		$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$	$-\gamma_3 \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r} \cdot \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{0}}$
$\underline{\underline{I}} \cdot \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r}$		$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$	$\underline{\underline{0}}$	$-\gamma_4 \frac{\underline{\underline{V}}}{\underline{\underline{C}}_r} \cdot \underline{\underline{I}}$

Si scrive inoltre la matrice di controllo non lineare e il vettore della forzante non lineare:

$$\underline{\underline{B}}_{\text{NL}} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{M}}_S^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{1}} \end{array} \right\} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{array} \right\} \quad \underline{\underline{U}}_{\text{NL}} = \underline{\underline{Q}}_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 108**

**Eq. 107**

Il sistema in forma sintetica è il seguente:

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}}(t) + \underline{\underline{B}}_{\text{NL}} \cdot \underline{\underline{U}}_{\text{NL}}(x_v, p_L)$$

**Eq. 109**

## Matrici di osservazione

### Osservazione movimento servovalvola

$$x_v = [0 \quad (-G_3 d) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \underline{X} + G_1 \cdot x_{in}$$

**Eq. 110**

### Osservazione salto di pressione

$$p_L = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \underline{X}$$

**Eq. 111**

### Osservazione spostamenti, velocità e accelerazioni nodali

Detta  $\underline{\Phi}$  la matrice degli spostamenti modali nei nodi di osservazione si ha:

$$\underline{d}(t) = \underline{C}_d \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{X}(t)$$

**Eq. 112**

$$\underline{v}(t) = \underline{C}_v \underline{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{X}(t)$$

**Eq. 113**

$$\underline{a}(t) = \underline{C}_v \frac{d}{dt} [\underline{X}(t)] = \underline{C}_v [\underline{A} \cdot \underline{X}(t) + \underline{B}_{NL} \cdot \underline{U}_{NL}(x_v, p_L)] = \underline{C}_a \underline{X}(t) + \underline{D}_{a\_NL} \underline{U}_{NL}(x_v, p_L)$$

**Eq. 114**

con:

$$\underline{C}_a = \underline{C}_v \cdot \underline{A}; \quad \underline{D}_{a\_NL} = \underline{C}_v \cdot \underline{B}_{NL}$$

**Eq. 115**

#### 4.6.1 RISULTATI DELLE ANALISI – CONFRONTO TRA MODELLO AEROSERVOELASTICO LINEARE E NON

Sono state eseguite analisi di risposta aeroelastica non lineare alla velocità presunta di flutter ( $1.63 V_D$ ) confermando che essa rimane invariata ovvero il flutter si verifica ancora alla medesima velocità di volo. Le risposte sui nodi strutturali in termini di accelerazioni (da Figura 63 a Figura 66) e spostamenti (che qui non sono riportati solo per ragioni di sintesi) sono sovrapposte, con coefficiente di correlazione superiore al 90%.

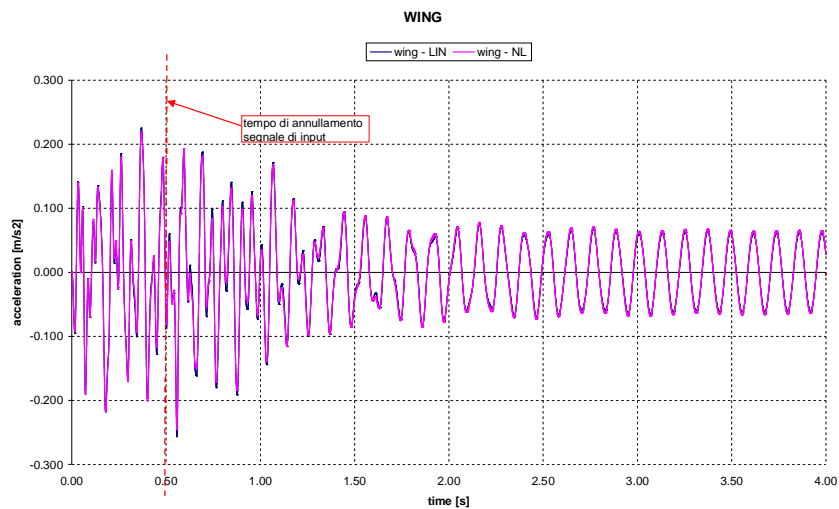


Figura 63 Confronto accelerazione - wing

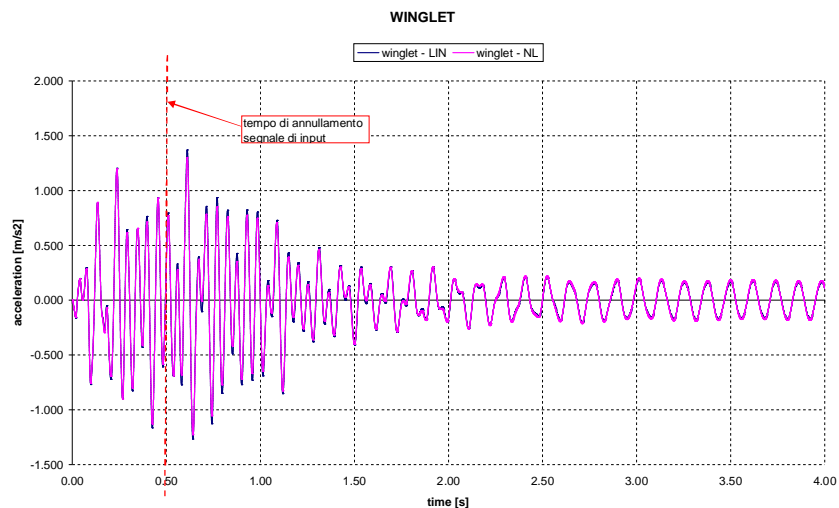
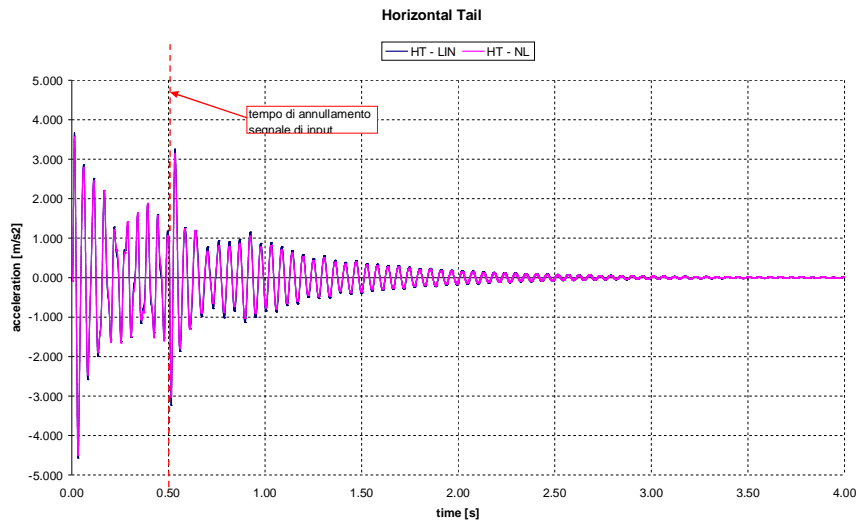
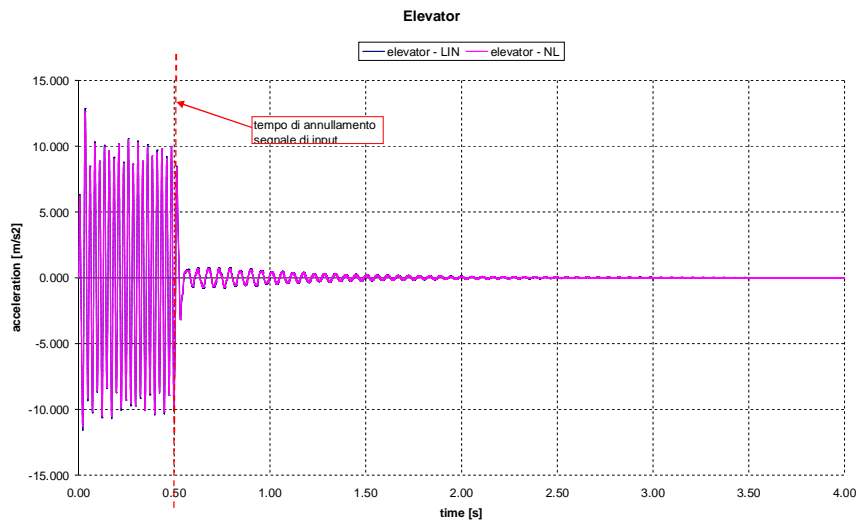


Figura 64 Confronto accelerazione - winglet



**Figura 65 Confronto accelerazione – piano orizzontale**



**Figura 66 Confronto accelerazione – elevatore**

Si osserva l'instabilità sull'ala, mostrata dell'oscillazione persistente in Figura 63 e Figura 64.

#### 4.6.2 RISULTATI DELLE ANALISI – CONFRONTO CON TRA MODELLO AEROSERVOELASTICO LINEARE E NON – ATTUATORE DI ALETTONE

Poiché il meccanismo di flutter coinvolge un modo d'ala e l'eccitazione tramite movimento di servoattuatore è operata all'elevatore, è lecito domandarsi se la blanda influenza sul flutter della non linearità nel servoattuatore sia anche dovuta ad una eccitazione non esercitata direttamente sull'ala. A tale scopo è stato costruito un altro modello, nel quale si è considerato lo stesso attuatore (geometria e parametri del fluido invariati) che stavolta muove l'alettone. Naturalmente essendo diverso il momento di inerzia di tale superficie rispetto a quello dell'elevatore, la frequenza esibita dal sistema attuatore è 35 [Hz], contro i 23 [Hz] della movimentazione dell'elevatore. La frequenza di eccitazione del segnale di ingresso, che era 40 [Hz], è stata portata a 80 [Hz], allo scopo di evitare la risonanza del sistema di attuazione. L'ampiezza del segnale di ingresso è rimasta invariata.

Con un siffatto modello la velocità di flutter non è cambiata, rimanendo al valore precedentemente calcolato ( $1.63 V_D$ ).

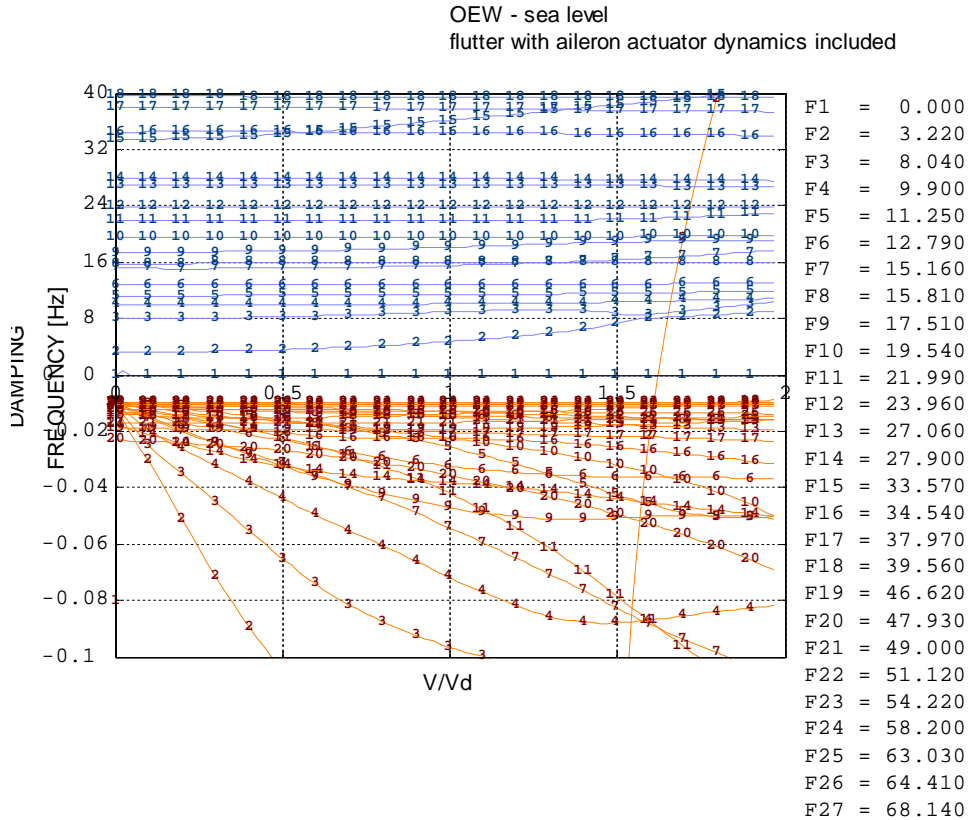
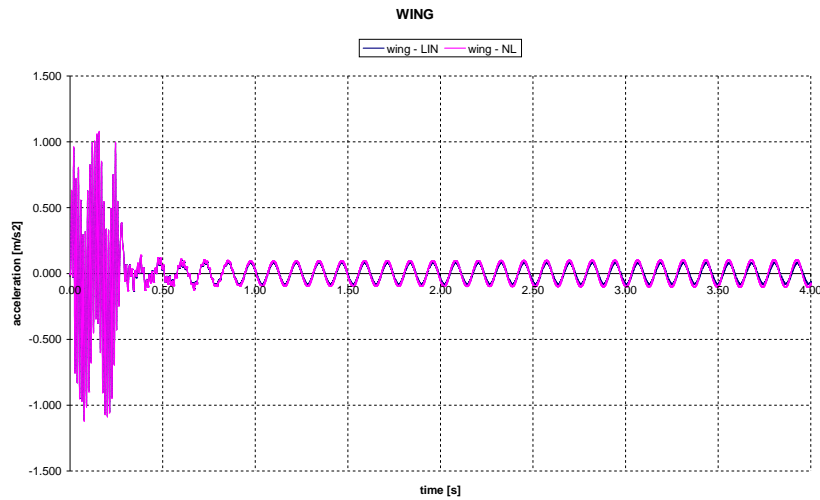
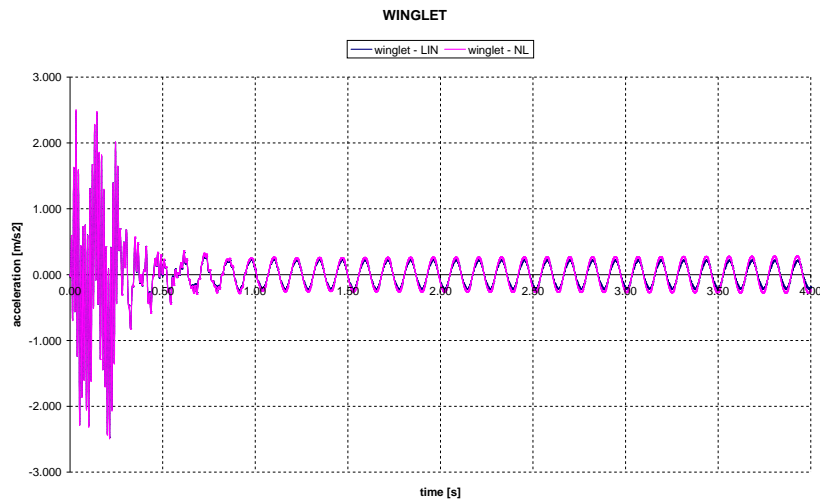


Figura 67 Flutter con meccanismo di attuazione dell'alettone

Si riporta nuovamente il confronto tra le risposte (accelerazioni) ricavate con analisi lineare e non, sui medesimi nodi strutturali di ala e winglet (con coefficiente di correlazione superiore al 90%). Si nota, come c'era da aspettarsi dato che l'eccitazione è operata tramite l'alettone, un valore di accelerazione sull'ala nettamente superiore rispetto al caso di eccitazione operata con l'elevatore (confrontare i valori massimi di accelerazione di Figura 63 e Figura 64 rispetto a quelli di Figura 68 e Figura 69).



**Figura 68 Accelerazione sull'ala dovuta a eccitazione tramite alettone**



**Figura 69 Accelerazione sulla winglet dovuta a eccitazione tramite alettone**

Si ritrova nuovamente che l'influenza di questo tipo di non linearità sulla risposta aeroelastica è blanda.

## 4.7 CONCLUSIONI

Nel presente capitolo l'ipotesi di linearità della funzione portata del servattuatore è stata rimossa. Lo scopo è risolvere il sistema aeroelastico non lineare nel tempo, inclusivo delle equazioni del servattuatore idraulico.

È stata ideata una tecnica (§ 4.4) tale da rendere le equazioni del servattuatore da miste primo – secondo ordine a complete del secondo ordine aggiungendo, nell'equazione della servovalvola, un termine fittizio nella derivata seconda della pressione. Il coefficiente moltiplicativo di tale termine fittizio (che nella nostra trattazione è stato denominato “massa fittizia”) è stato scelto molto piccolo ma tale da non dare problemi di *overflow* nel calcolo.

Per validare l'approccio della massa fittizia è stato dapprima studiato l'andamento in velocità degli autovalori del solo sistema attuatore – superficie mobile (§ 4.5, Figura 58); sono stati confrontati i risultati di analisi flutter lineare, con funzione portata linearizzata alla Taylor, sia per l'approccio derivativo che quello con massa fittizia: l'accordo è ottimo. Tali risultati sono stati confrontati anche dopo aver aggiunto i modi elastici (Figura 59, Figura 60): gli andamenti sono preservati e la velocità di flutter non varia.

È stata inoltre messa a punto, anche in questo caso, una tecnica di linearizzazione simile al bilancio armonico utilizzato nel Capitolo 2. Tale tecnica (abbinata all'approccio della massa fittizia) è risultata in preciso accordo con i risultati di flutter ottenuti con la linearizzazione alla Taylor (Figura 60, Figura 61, Tabella 13). Ancora una volta l'andamento degli autovalori in velocità sono preservati e la velocità di flutter non cambia. Si precisa che trattasi sempre di analisi a ciclo aperto.

A questo punto ci si è sentiti confidenti nell'applicare l'approccio della massa fittizia anche alla risoluzione del problema di risposta aeroelastica dinamica non lineare (a ciclo aperto), § 4.6. Alla velocità presunta di flutter l'input della servovalvola è stato eccitato con un segnale sinusoidale fino a 0.5 [s] e poi zero fino a 4 [s], Figura 56, in modo da prelevare anche la risposta libera del sistema. Le risposte osservate su alcuni nodi strutturali confermano l'insorgenza del flutter. In particolare l'oscillazione persistente si nota proprio sull'ala, coinvolta nel meccanismo di flutter (Figura 63, Figura 64).



Le analisi non lineari nel tempo confermano la bontà del modello e sono in preciso accordo con le analisi lineari nel dominio della frequenza, sia con linearizzazione alla Taylor che con bilancio armonico. In particolare si è osservato che la non linearità ha influenza trascurabile sul flutter, giacché le frequenze del servoattuatore, per come è stato dimensionato, sono molto superiori a quelle dei modi con cui potrebbe innescarsi l'instabilità.

L'eccitazione è stata poi operata anche sull'alettone, portando agli stessi risultati in termini di velocità di flutter, § 4.6.2, Figura 67, Figura 68, Figura 69.

Il fatto che, a ciclo aperto, sia alquanto improbabile che si inneschi un flutter di superfici servoattuate spiega anche perché alcuni autori omettono, nell'equazione di equilibrio intorno all'asse di cerniera, il contributo aerodinamico della superficie di controllo.

Il contributo aerodinamico della superficie di controllo è però necessario a ciclo chiuso per la buona correzione dei guadagni della legge di controllo.

Al tempo dello studio le leggi di controllo del velivolo non erano ancora disponibili, per questo motivo ci si è soffermati solo sul servoattuatore.

## Capitolo 5

### *Conclusioni alla tesi*

Questa tesi ha inteso fornire alcuni strumenti affidabili e veloci per eseguire analisi di flutter e di risposta aeroelastica dinamica in presenza di non linearità nella movimentazione delle superfici di controllo. Tali strumenti sono stati sviluppati sia per velivoli con comandi manuali sia per velivoli con comandi *Fly By Wire*.

In tal modo è stato arricchito il pacchetto, già a disposizione, di codici *in house* per l'analisi di flutter, mantenendone invariato l'approccio, che è quello che utilizza la tecnica della sottostrutturazione dinamica (extra modi), fulcro di tutta l'attività.

La tesi ha seguito un criterio incrementale di problematiche da affrontare.

Si è partiti con un velivolo convenzionale rispondente alle normative di aeronavigabilità europee EASA CS-23, a comandi manuali, con alettone affetto da una non linearità bilineare in rigidità. È stata sistemata la tecnica del bilancio armonico per linearizzare il problema ovvero per calcolare dei valori di rigidità equivalente al variare dell'ampiezza di oscillazione. Tali valori sono stati utilizzati per eseguire valutazioni di flutter parametriche in rigidità (analisi pseudo – lineari). Per confermare la bontà dell'approccio utilizzato, il problema è stato riformulato con la scrittura del sistema in forma stato vettore non lineare, integrato poi nel tempo con il metodo di Runge Kutta del quarto ordine. I risultati in termini di velocità di flutter sono in ottimo accordo tra i due approcci, confermando la bontà del bilancio armonico per il caso esaminato.

Dopo ci si è posto il problema di assiemare le leggi di controllo delle superfici mobili nelle equazioni della stabilità aeroelastica (ciclo chiuso), in campo lineare. Ciò è stato fatto per un velivolo sperimentale non convenzionale ad ali giuntate, per il quale era disponibile la legge di controllo dell'elevatore. Per rendere possibile la risoluzione del sistema aeroservoelastico è stato necessario ricorrere ad un artificio che consentisse l'inversione della matrice di massa: è stato applicato un opportuno numero di derivatori alle equazioni aggiuntive in modo da ottenere un sistema completo del secondo ordine. Dimostrato che ogni legge di controllo può essere rappresentata da un insieme di tre matrici e tre vettori aggiuntivi, è stato agevole includerle nel codice di flutter, il quale è stato opportunamente modificato per poterle ricevere. In tal modo il sistema principale non cambia e si è in grado di eseguire calcoli parametrici al variare dei guadagni. Allo scopo di verificare la consistenza di tale approccio, è stata studiata la risposta impulsiva del velivolo a ciclo chiuso per determinare la velocità di flutter. A tale fine sono state osservate nel tempo le risposte nella direzione Z di nodi situati sull'ala anteriore, fusoliera ed elevatore. I risultati mostrano una velocità di flutter in linea con quella valutata precedentemente con l'approccio derivativo.

L'approccio derivativo è stato utilizzato anche per l'aggiunta di un servoattuatore idraulico nella dinamica dell'intero velivolo (ciclo aperto). Le equazioni del servoattuatore non formano un sistema completo del secondo ordine, bensì un sistema misto secondo – primo ordine. L'applicazione è stata eseguita su un velivolo convenzionale rispondente alle normative di aeronavigabilità europee EASA CS-25. Il servoattuatore, che muove l'elevatore, è stato dapprima dimensionato in maniera tale da rispondere al requisito minimo di rigidità. Anche in questo caso l'inclusione delle equazioni aggiuntive è operata mediante l'immissione delle matrici del sistema che vengono riconosciute dal codice. Le equazioni del servoattuatore idraulico sono linearizzate ovvero la funzione portata è linearizzata con uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine attorno al punto di nullo.

Nell'ultimo capitolo della tesi l'ipotesi di portata lineare del servoattuatore è stata rimossa. Lo scopo è risolvere il sistema aeroelastico non lineare nel tempo, inclusivo delle equazioni del servoattuatore idraulico.

È stata ideata una tecnica tale da rendere le equazioni del servoattuatore da miste a complete del secondo ordine aggiungendo, nell'equazione della servovalvola, un termine fittizio nella derivata seconda della pressione. Il coefficiente moltiplicativo di tale termine fittizio (che

nella nostra trattazione è stato denominato “massa fittizia”) è stato scelto molto piccolo ma tale da non dare problemi di *overflow* nel calcolo.

Per validare l’approccio della massa fittizia è stato dapprima studiato l’andamento in velocità degli autovalori del solo sistema attuatore – superficie mobile; sono stati confrontati i risultati di analisi di flutter lineare, con la portata linearizzata alla Taylor, sia per l’approccio derivativo sia per quello con massa fittizia: l’accordo è ottimo. Tali risultati sono stati confrontati anche dopo aver aggiunto i modi elastici: la velocità di flutter e gli andamenti degli autovalori in velocità sono preservati. È stata inoltre messa a punto, anche in questo caso, una tecnica di linearizzazione simile al bilancio armonico utilizzato nel Capitolo 2. Tale tecnica (abbinata all’approccio della massa fittizia) è in preciso accordo con i risultati di flutter ottenuti con la linearizzazione alla Taylor. Ancora una volta l’andamento degli autovalori in velocità è preservato e l’instabilità di flutter non cambia. Si precisa che trattasi sempre di analisi a ciclo aperto.

A questo punto ci si è sentiti confidenti nell’applicare l’approccio della massa fittizia anche alla risoluzione del problema di risposta aeroelastica dinamica non lineare (a ciclo aperto). Alla velocità presunta di flutter la servovalvola è stata eccitata con un segnale sinusoidale fino a 0.5 [s] e poi zero fino a 4 [s], in modo da prelevare anche la risposta libera del sistema. Le risposte osservate su alcuni nodi strutturali confermano l’insorgenza del flutter. In particolare l’oscillazione persistente si nota proprio sull’ala, coinvolta nel meccanismo di flutter.

Le analisi non lineari nel tempo confermano la bontà del modello e sono in preciso accordo con le analisi lineari nel dominio della frequenza, sia con linearizzazione alla Taylor sia con bilancio armonico. In particolare si è osservato che la non linearità influisce poco sul flutter, giacché le frequenze del servoattuatore, per com’è stato dimensionato, sono molto superiori a quelle dei modi con cui potrebbe innescarsi l’instabilità.

L’eccitazione è stata poi operata anche sull’alettone, portando agli stessi risultati in termini di velocità di flutter.

Il fatto che, a ciclo aperto, sia alquanto improbabile che s’innesci un flutter di superfici servoattuate spiega anche perché alcuni autori omettono, nell’equazione di equilibrio intorno all’asse di cerniera, il contributo aerodinamico (diretto ed indiretto) della superficie di controllo.

Il contributo aerodinamico della superficie di controllo è però necessario che esista a ciclo chiuso per la buona correzione dei guadagni della legge di controllo.

Tutte le metodologie sviluppate sono di tipo numerico. Esse sono state applicate a casi di studio forniti da tre progetti attivi durante il periodo di tesi: il progetto Europeo (6° Programma Quadro) **CESAR** (*Cost Effective Small Aircraft*), il progetto CIRA (Fondi PRORA) **HAPD** (*High Altitude Performance Demonstrator*), il progetto di vendita CIRA **PFLUTTER** (*Determinazione delle instabilità aeroelastiche del velivolo Piaggio Aero Industries P1xx*).

Per motivi legati sia alle finalità proprie dei progetti che ai costi, le metodologie sviluppate non sono state validate sperimentalmente. Questo ulteriore passo, ferma restando la disponibilità economica dei progetti, potrà costituire la naturale evoluzione di questa tesi, alimentando il lavoro di coloro che intenderanno continuare lo studio degli argomenti qui trattati.

A conclusione si fornisce, in Figura 70, uno schema sintetico delle attività sviluppate nella tesi, distinte per casi e metodologie.

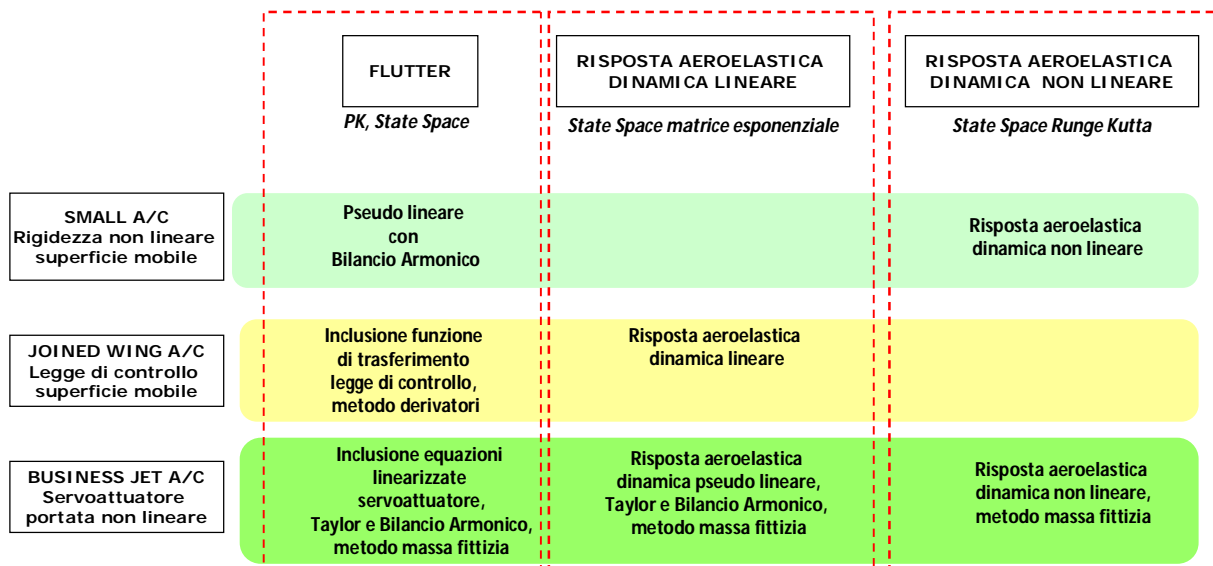


Figura 70 Schema sintetico attività tesi

## APPENDICE A

### *Studio della funzione di trasferimento del servattuatore idraulico*

#### **A.1 Modello matematico linearizzato**

Si riporta un estratto del testo [1], utilizzato a riferimento per la scrittura delle equazioni del servattuatore idraulico.

Le equazioni differenziali che descrivono i componenti di un servattuatore idraulico sono non lineari e talvolta di ordine elevato. Sebbene la potenza di calcolo e gli algoritmi a disposizione consentano la risoluzione delle predette equazioni, non si può prescindere da una analisi linearizzata del sistema, che consenta di comprendere meglio le inevitabili discrepanze tra le performance calcolate e quelle esibite dal sistema reale.

Si svilupperà un modello matematico linearizzato dell'insieme servovalvola – attuatore, finalizzato allo studio della stabilità del sistema e al suo inserimento nell'equazione della stabilità aeroelastica.

La figura che segue illustra la tipologia di attuatore idraulico con annessa servovalvola che sarà considerata nella presente trattazione.

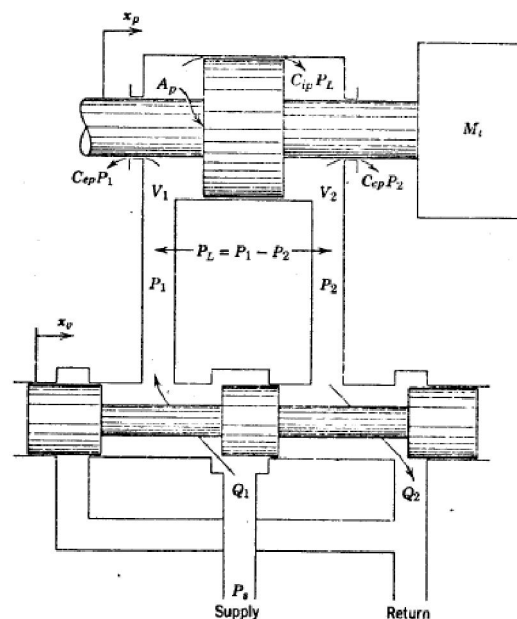


Figura 71 Combinazione servovalvola - pistone

Si ricaverà la funzione di risposta del servoattuatore. La rigidità dell'attacco dell'attuatore sulla struttura in prima analisi non sarà considerata.

## **A.2 Equazioni fondamentali**

Per lo studio del flusso dell'olio all'interno del sistema sarebbero necessarie 7 equazioni:

- 3 per la quantità di moto (Navier-Stokes) nelle tre direzioni
- 1 di conservazione della massa
- 2 equazioni di stato per la densità e la viscosità
- 1 equazione dell'energia

In realtà per i nostri scopi possono essere fatte le seguenti ipotesi che riducono notevolmente il numero delle equazioni e delle incognite:

- incomprimibilità del liquido
- poiché il trasferimento della potenza idraulica avviene con il movimento del fluido attraverso degli orifizi e l'esperienza ha mostrato che tale flusso avviene ad alti numeri di Reynolds, è possibile trascurare i termini viscosi rispetto a quelli inerziali nelle equazioni di Navier-Stokes
- inoltre trattandosi di moti in condotti, l'equazione è lungo una sola direzione, dunque è possibile applicare l'equazione di Bernoulli in una sola dimensione
- per il fluido in esame si assumono condizioni isoterme dunque si può fare a meno di scrivere l'equazione dell'energia
- l'espansione cubica per i liquidi è bassa, dunque nell'equazione di stato della densità è possibile trascurare la dipendenza dalla temperatura, oltretutto tale dipendenza è eliminata anche dalle condizioni di flusso isoterme
- infine si può trascurare l'equazione di stato per la viscosità, in quanto quest'ultima si assume costante

si ricaveranno le equazioni per il moto attraverso orifizi e in seguito esse saranno applicate sia alla servovalvola che all'attuatore.

### **A.2.1 Premessa: le equazioni di continuità e della quantità di moto attraverso orifizi**

Gli orifizi sono uno strumento importante per il trasferimento della potenza idraulica.

Per tale motivo lo studio del flusso che li attraversa è fondamentale nel progetto di un sistema di controllo idraulico.

Il flusso attraverso l'orifizio può essere laminare o turbolento, a seconda dell'importanza delle forze d'inerzia o delle forze viscosi.

Come già anticipato, il flusso attraverso gli orifizi è generalmente ad alto numero di Reynolds. In realtà, come mostra la figura che segue, nel passaggio attraverso la strizione e

prima che il flusso diventi turbolento esso viene accelerato dalla sezione 1 alla sezione 2 in maniera “ordinata”. In questo caso, sebbene il numero di Reynolds sia elevato, il flusso è potenziale.

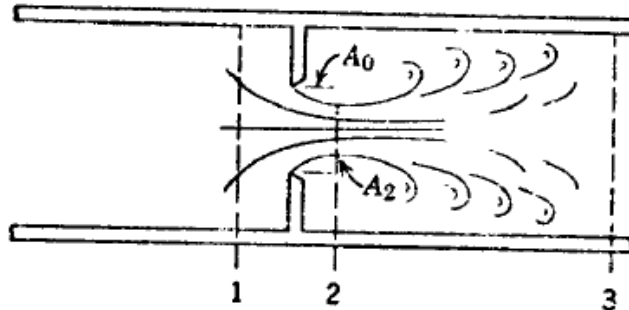


Figura 72 Flusso attraverso orifizi

La sezione minima del tubo di flusso, a valle dell'orifizio di sezione  $A_0$ , è detta **sezione di vena contratta**,  $A_2$ .

Il rapporto tra le due aree è detto **coefficiente di contrazione**  $C_c$

$$A_2 = C_c A_0$$

**Eq. 116**

Dunque nell'ipotesi di flusso potenziale, monodimensionale, incomprimibile, isoterma, trascurabilità delle forze viscosse rispetto a quelle d'inerzia, è possibile utilizzare l'equazione di continuità e l'equazione di Bernoulli.

L'equazione di continuità consegna:

$$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2$$

**Eq. 117**

Con i pedici ad indicare velocità e aree delle due sezioni a monte e valle dell'orifizio.

Si ricava:

$$(A_1 \cdot u_1)^2 = (A_2 \cdot u_2)^2$$

**Eq. 118**

$$u_1^2 = u_2^2 \cdot \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2$$

**Eq. 119**

L'equazione di Bernoulli si scrive:



$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 + p_2$$

**Eq. 120**

Da cui il salto di pressione tra monte e valle dell'orifizio:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (u_2^2 - u_1^2)$$

**Eq. 121**

Combinando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

**Eq. 122**

Esplicitando  $u_2$ :

$$u_2 = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2}}$$

**Eq. 123**

In realtà a causa dell'inevitabile attrito viscoso la velocità  $u_2$  è leggermente più bassa, di un fattore  $C_v$  (coefficiente di velocità), che tipicamente vale 0.98, ma nei calcoli preliminari viene sempre approssimato all'unità.

Nella sezione di vena contratta la portata vale:

$$Q = A_2 u_2 = C_c A_0 u_2 = \frac{C_c A_0 \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}}{\sqrt{1 - C_c^2 \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2}}$$

**Eq. 124**

Si definisce **coefficiente di efflusso**  $C_d$  il termine:

$$C_d = C_d(A_0) = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2 \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2}}$$

Eq. 125

Poiché  $A_0 \ll A_1$ , dall'espressione di sopra si può evincere che  $C_d \approx C_c$  ovvero che il coefficiente di efflusso è circa uguale al coefficiente di contrazione.

Per la determinazione del coefficiente di contrazione  $C_c$  alcune soluzioni sono state determinate per sezioni circolari e a fessura rettangolare, come mostra la figura che segue.

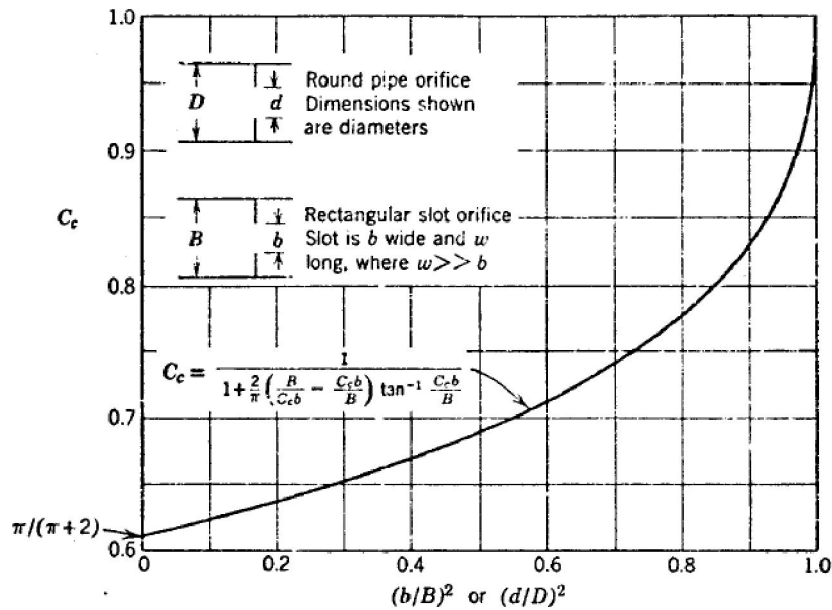


Figura 73 Coefficiente di contrazione

In realtà, se l'orifizio ha gli spigoli molto aguzzi, cioè si presenta come un setto a spessore nullo (altissime tolleranze di lavorazione, altissimi costi), non si commette errore significativo se si assume, per il coefficiente di contrazione, il valore che esso assume per  $d/D=0$ , ovvero:

$$C_c = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.611$$

Eq. 126

Che porta ad un coefficiente di efflusso pari a:

$$C_d = 0.60$$

Eq. 127

Passando ad orifizi più realistici dal punto di vista delle tolleranze di lavorazione, essi somiglieranno più a dei piccoli tubi (spessore non trascurabile). Alcuni valori medi del

coefficiente di efflusso sono stati riportati in letteratura in funzione del Reynolds e delle dimensioni geometriche:

$$C_d = \left[ 1.5 + 13.74 \left( \frac{L}{D \cdot R} \right)^{1/2} \right]^{-1/2} \quad \text{per } \frac{D \cdot R}{L} > 50$$

$$C_d = \left[ 2.28 + 64 \left( \frac{L}{D \cdot R} \right) \right]^{-1/2} \quad \text{per } \frac{D \cdot R}{L} < 50$$

Eq. 128

Queste relazioni sono mostrate nella figura che segue.

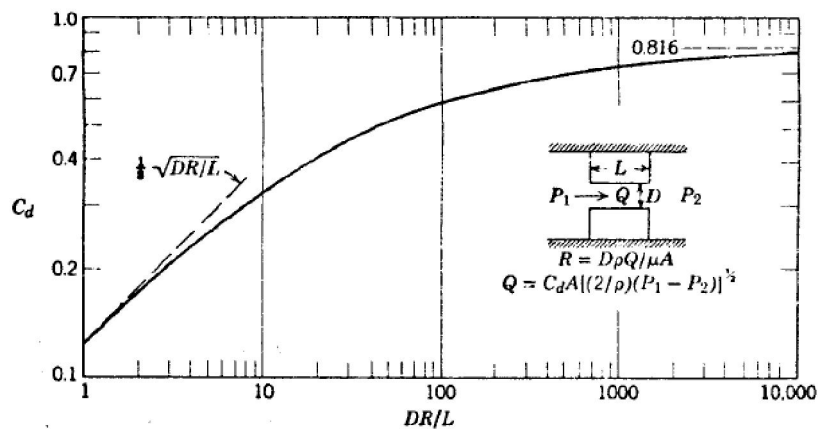


Figura 74 Coefficiente di efflusso

Dove :

$$R = \rho \frac{Q / A_0}{\mu} D_h \quad \text{numero di Reynolds}$$

$$D_h = \frac{4 \cdot \text{Area}}{\text{Perimetro}} \quad \text{diametro idraulico della sezione}$$

$D$  = diametro interno del tubo

$L$  = lunghezza del tubo

Si ha in definitiva:

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} = f(A_0, \Delta p)$$

Eq. 129

L'Eq. 129 è l'equazione fondamentale per giungere alla funzione di risposta del servattuatore.

## A.2.2 Analisi linearizzata della servovalvola

Le valvole a spola sono classificate in base al numero di vie che entrano ed escono dalla valvola, dal numero di pieni e dal tipo di accoppiamento (ovvero dalla geometria degli orifizi) quando l'albero è in posizione neutra.

Quando in posizione neutra la larghezza del pieno è minore della larghezza del vuoto, si dice che la valvola è a centro aperto (*underlapped*); se tali dimensioni sono identiche si dice che la valvola è a centro critico (*zero lapped*); se infine la larghezza del pieno è maggiore della larghezza del vuoto si dice a centro chiuso (*overlapped*).

Il tipo di accoppiamento (Figura 75) è legato a talune importanti caratteristiche delle valvole, prima tra tutte la portata in funzione della corsa dello *spool* (Figura 76).

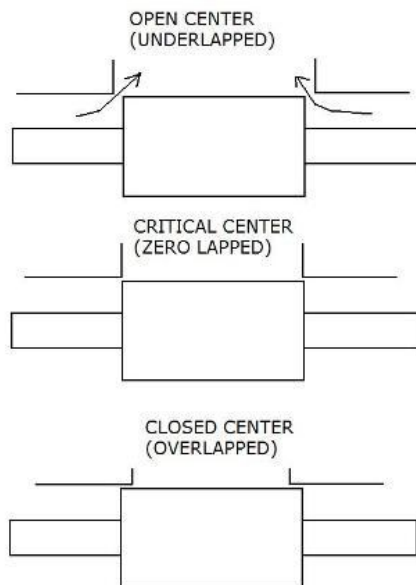


Figura 75 Tipi di accoppiamento centrale delle valvole

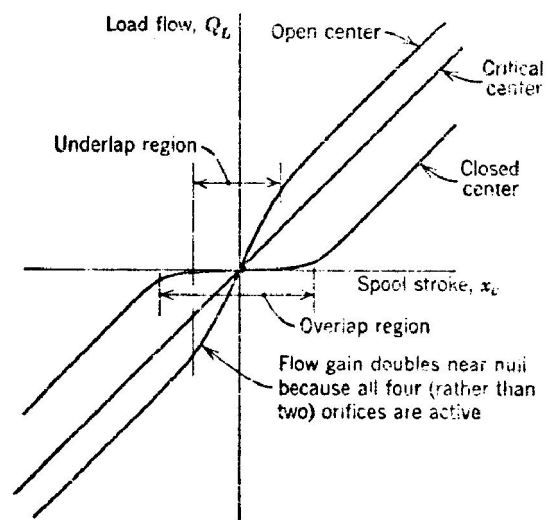


Figura 76 Flusso al carico in base al tipo di accoppiamento centrale

Come si può osservare dal grafico, l'accoppiamento critico è quello che garantisce linearità del flusso al carico nell'intorno della posizione neutra.

La configurazione a centro aperto nell'intorno del punto neutro presenta un flusso doppio poiché vi concorrono il doppio degli orifizi, mentre quella a centro chiuso presenta una banda morta, che può dar luogo a giochi.

Per tali motivi la maggior parte delle valvole sono costruite a centro critico, anche se nella realtà, a causa degli elevati costi di lavorazione connessi con la creazione di spigoli vivi, vi sono dei raggi di raccordo che necessitano di un leggero *overlap* per garantire un flusso lineare.

In effetti la classificazione in base al tipo di accoppiamento viene fatta non tanto in base alle caratteristiche geometriche, ma all'effettivo andamento del flusso in funzione della corsa dell'albero: se il flusso è **lineare**, la valvola è detta a **centro critico**.

La tipologia di servovalvola presa in considerazione in questa trattazione è quella mostrata nella Figura 71, con le seguenti caratteristiche:

- A singolo stadio
- A tre pieni
- A Quattro vie (mandata, ritorno, mandata all'attuatore, ritorno all'attuatore)
- Ad accoppiamento critico
- Simmetrica

Essa è nuovamente riportata nella Figura 77.

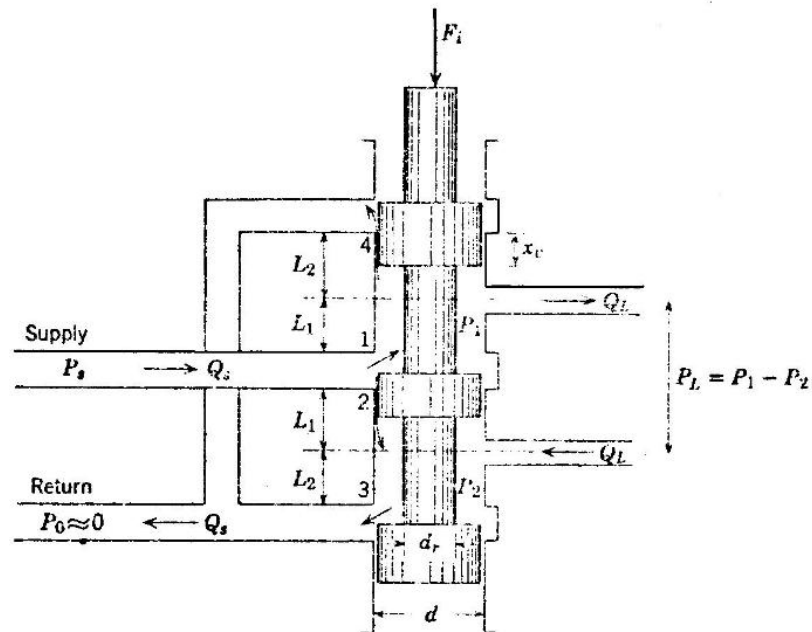


Figura 77 Servovalvola

Si abbia uno spostamento positivo  $x_v$  dell'albero ( $x_v = 0$  posizione neutra, simmetrica).

Le equazioni di continuità, a regime e trascurando la comprimibilità del fluido, nelle due camere della valvola, si scrivono:

$$\begin{aligned} Q_L &= Q_1 - Q_4 \\ Q_L &= Q_3 - Q_2 \end{aligned}$$

Eq. 130

Dove  $Q_L$  è la portata al carico.

Definito il salto di pressione al carico come:

$$p_L = p_1 - p_2$$

Eq. 131

Le portate attraverso i quattro orifizi sono espresse dall'equazione fondamentale ricavata nel precedente paragrafo:

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}$$

**Eq. 132**

Che esplicitata per i quattro orifizi diventa ( $p_0 \approx 0$  o trascurabile rispetto alle altre pressioni in gioco):

$$Q_1 = C_d A_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (p_s - p_1)}{\rho}}$$

**Eq. 133**

$$Q_2 = C_d A_2 \sqrt{\frac{2 \cdot (p_s - p_2)}{\rho}}$$

**Eq. 134**

$$Q_3 = C_d A_3 \sqrt{\frac{2 \cdot p_2}{\rho}}$$

**Eq. 135**

$$Q_4 = C_d A_4 \sqrt{\frac{2 \cdot p_1}{\rho}}$$

**Eq. 136**

Per definire le aree degli orifizi in funzione della corsa dell'albero e della geometria della valvola sarebbero necessarie 4 equazioni:

$$A_1 = A_1(x_v) \quad A_2 = A_2(-x_v) \quad A_3 = A_3(x_v) \quad A_4 = A_4(-x_v)$$

**Eq. 137**

In totale sono state scritte 11 equazioni che risolte forniscono la portata al carico in funzione della corsa dell'albero e del salto di pressione:

$$Q_L = Q_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 138**

La legge appena descritta può essere messa in forma di grafico ottenendo le curve pressione-portata, che danno una descrizione completa delle prestazioni della valvola in condizioni di regime.

Per quel che riguarda le equazioni che descrivono l'andamento dell'area degli orifizi in funzione della corsa dell'albero, si può giungere ad una riduzione del sistema di equazioni. Questo è possibile perché la maggior parte delle valvole hanno una configurazione geometrica cosiddetta fasata (*matched*) e simmetrica.

– Fasata:

$$A_1 = A_3 \quad A_2 = A_4$$

**Eq. 139**

– Simmetrica:

$$A_1(x_v) = A_2(-x_v) \quad A_3(x_v) = A_4(-x_v)$$

**Eq. 140**

Da cui si ricava che, alla posizione neutra ( $x_v = 0$ ) tutti gli orifizi avranno la stessa area  $A_0$ .

Con le predette restrizioni una sola delle quattro aree ha bisogno di essere definita. Le altre discenderanno di conseguenza. Tipicamente l'area dell'orifizio è rettangolare, dunque lineare con la corsa dell'albero, e per la sua definizione bisogna solo conoscere l'altra dimensione, la larghezza  $w$ . La pendenza  $w$  della funzione (lineare) area – corsa è detto **gradiente d'area** o gradiente di apertura della valvola. Si tratta di un parametro molto importante.

Ulteriori semplificazioni al sistema di equazioni derivano dal fatto che la valvola è fasata e simmetrica:

$$Q_1 = Q_3$$

$$Q_2 = Q_4$$

**Eq. 141**

Da cui, sostituendo nelle espressioni delle portate si ha:

$$p_s = p_1 + p_2$$

**Eq. 142**

La pressione di mandata  $p_s$  è un dato noto (valori tipici intorno a 50 [bar]).

Si possono quindi ricavare le pressioni nelle due camere in funzione del salto di pressione al carico e della pressione di mandata:

$$p_1 = \frac{p_s + p_L}{2}; \quad p_2 = \frac{p_s - p_L}{2}$$

**Eq. 143**

Se non vi fosse il carico ( $p_L = 0$ ) le pressioni in ciascuna linea sarebbero entrambe pari a  $p_L/2$ .

Appena il carico viene applicato, la pressione in una linea cresce e nell'altra decresce dello stesso ammontare.

Infine si ricavano le espressioni delle portate di mandata e al carico in funzione delle pressioni  $p_L$  e  $p_s$ .

$$Q_L = C_d A_1 \sqrt{\frac{p_s - p_L}{\rho}} - C_d A_2 \sqrt{\frac{p_s + p_L}{\rho}}$$

**Eq. 144**

$$Q_S = C_d A_1 \sqrt{\frac{p_s - p_L}{\rho}} + C_d A_2 \sqrt{\frac{p_s + p_L}{\rho}}$$

**Eq. 145**

### A.2.2.1 Coefficienti della valvola

Per effettuare l'analisi dinamica del sistema, è necessario che le equazioni delle curve pressione-portata vengano linearizzate.

La funzione

$$Q_L = Q_L(x_v, p_L)$$

**Eq. 146**

Può essere espressa in serie di Taylor nelle due variabili  $(x_v, p_L)$ , attorno ad un punto di funzionamento  $Q_{L1}$ :

$$Q_L = Q_{L1} + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right|_1 \cdot \Delta x_v + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \right|_1 \cdot \Delta p_L + \dots$$

**Eq. 147**

In vicinanza del punto di funzionamento scelto possono essere trascurati i termini di ordine superiore, quindi:

$$Q_L - Q_{L1} \equiv \Delta Q_L = \left. \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right|_1 \cdot \Delta x_v + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \right|_1 \cdot \Delta p_L$$

**Eq. 148**

Le derivate parziali che compaiono nell'equazione possono essere ottenute o effettuando le derivate o graficamente dalle curve pressione-portata. Tali derivate rappresentano i parametri più importanti della valvola. Essi sono così definiti:

$$\frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \equiv k_q \quad \text{Guadagno di Portata (Flow Gain)}$$

**Eq. 149**



$$-\frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \equiv k_c \quad \text{Coefficiente di Pressione (Flow Pressure Coefficient)}$$

Eq. 150

Un altro parametro utile è la sensitività di pressione:

$$\frac{\partial p_L}{\partial x_v} \equiv k_p \quad \text{Sensitività di Pressione (Pressure Sensitivity)}$$

Eq. 151

Che si può esprimere in funzione delle due precedenti quantità:

$$\frac{\partial p_L}{\partial x_v} = -\frac{\partial Q_L / \partial x_v}{\partial Q_L / \partial p_L} \Leftrightarrow k_p = \frac{k_q}{k_c}$$

Eq. 152

Con le precedenti definizioni, l'espressione linearizzata delle curve pressione-portata diviene:

$$\Delta Q_L = k_q \cdot \Delta x_v - k_c \cdot \Delta p_L$$

Eq. 153

I parametri  $k_q$ ,  $k_c$ ,  $k_v$  sono detti **coefficienti della valvola** e sono delle quantità estremamente importanti per le caratteristiche dinamiche del sistema.

Il guadagno di portata  $k_q$ , è direttamente collegato al guadagno ad anello aperto del sistema, dunque ha un'influenza diretta sulla stabilità. Il coefficiente di pressione  $k_c$  invece è direttamente collegato allo smorzamento del sistema.

Avendo fatto l'ipotesi di modello linearizzato attorno ad un punto di funzionamento, i coefficienti della valvola variano con il punto di funzionamento.

Il punto di funzionamento più critico per la stabilità è costituito dall'origine delle curve portata-pressione ( $Q_L = p_L = x_v = 0$ ).

Il sistema generalmente lavora intorno a questo punto, nel quale il guadagno di portata è massimo (alto guadagno ad anello aperto) e il coefficiente di pressione è minimo (basso smorzamento).

E' dunque importante determinare tali coefficienti nell'origine.

### A.2.2.2 Coefficienti della valvola nel punto di nullo

Saranno determinati i coefficienti per una valvola a quattro vie ad accoppiamento critico, che come già esposto, ha un flusso lineare nell'intorno dell'origine. Tale tipologia di valvola rappresenta quella maggiormente utilizzata.

Si ricava dapprima la portata al carico in funzione della corsa della valvola (*pressure flow curve*).

Ricordando che per una valvola con orifizi fasati e simmetrici i flussi di trafileamento (*leakage*) ( $Q_2$  e  $Q_4$  quando  $x_v > 0$ ,  $Q_1$  e  $Q_3$  quando  $x_v < 0$ ) sono nulli perché la geometria è assunta ideale, si ha:

–  $x_v > 0$

$$Q_L = Q_3 - Q_2 = Q_3 = Q_1 - Q_4 = Q_1 = Q_1 = C_d A_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (p_s - p_L)}{\rho}}$$

**Eq. 154**

–  $x_v < 0$

$$Q_L = Q_1 - Q_4 = -Q_4 = Q_3 - Q_2 = -Q_2 = -C_d A_2 \sqrt{\frac{2 \cdot (p_s + p_L)}{\rho}}$$

**Eq. 155**

L'espressione della portata in funzione della corsa della servovalvola può quindi riassumersi nella seguente formula:

$$Q_L = C_d \cdot |A_1| \cdot \frac{x_v}{|x_v|} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \left( p_s - \frac{x_v}{|x_v|} \cdot p_L \right)}$$

**Eq. 156**

Se l'area dell'orifizio è rettangolare con gradiente d'area  $w$  si ha:

$$Q_L = C_d \cdot w \cdot x_v \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \left( p_s - \frac{x_v}{|x_v|} \cdot p_L \right)}$$

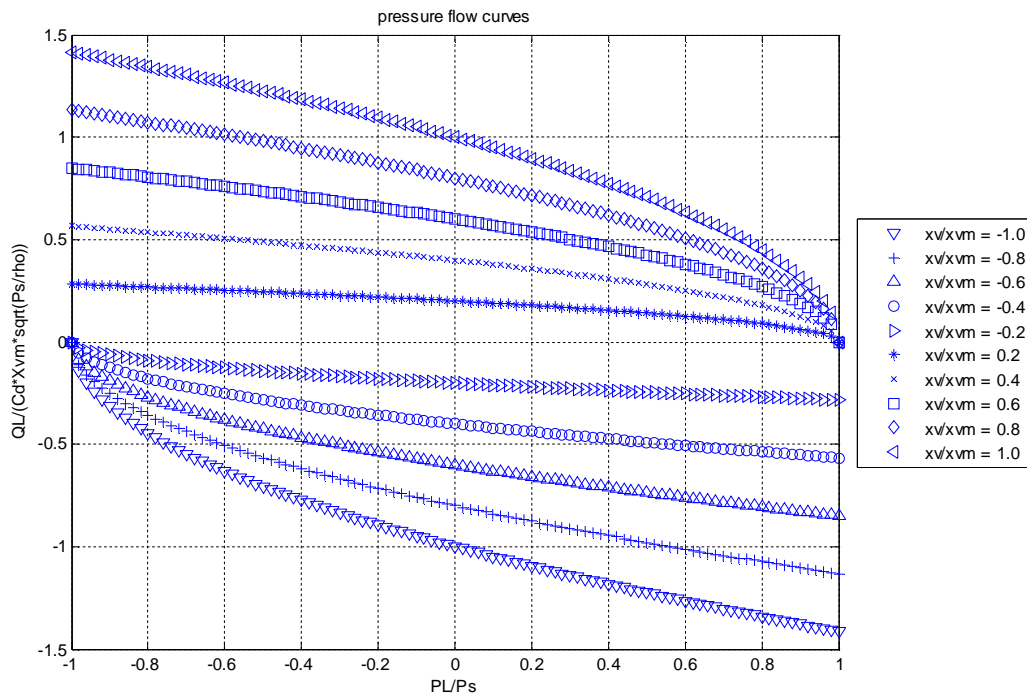
**Eq. 157**

La funzione appena trovata si può riportare, opportunamente adimensionalizzata, alla corsa massima e alla pressione di mandata, in forma grafica:

$$\frac{Q_L}{C_d \cdot w \cdot x_{VM} \cdot \sqrt{p_s / \rho}} = f(p_L / p_s, x_v / x_{VM}) = \frac{x_v}{x_{VM}} \sqrt{1 - \frac{x_v / x_{VM}}{|x_v / x_{VM}|} \cdot \frac{p_L}{p_s}}$$

**Eq. 158**

Con valori di  $x_v / x_{VM}$  e  $p_L / p_s$  compresi nell'intervallo [-1; 1] si hanno i grafici di Figura 78.



**Figura 78 Pressure flow curves adimensionalizzate**

I punti di funzionamento inclusi nel II e IV quadrante corrispondono a condizioni transitorie, nelle quali lo spostamento dello *spool* della servovalvola ha segno contrario rispetto al flusso al carico. Questo avviene quando si ha un repentino cambio nella corsa  $x_v$ , che non viene immediatamente seguito dalla  $Q_L$  a causa dell'inerzia del fluido e del carico stesso: il carico istantaneamente rimane nello stesso verso nonostante sia cambiato il verso dello spostamento della servovalvola.

Differenziando l'Eq. 157 si ottiene:

$$\frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \equiv k_q = C_d \cdot w \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s - p_L)}$$

**Eq. 159**

$$-\frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \equiv k_c = \frac{C_d \cdot w \cdot x_v \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s - p_L)}}{2 \cdot (p_s - p_L)}$$

**Eq. 160**

$$\frac{k_q}{k_c} \equiv k_p = \frac{2 \cdot (p_s - p_L)}{x_v}$$

**Eq. 161**

Dalle espressioni appena scritte si vede come i coefficienti della valvola dipendano dal punto di funzionamento ( $x_v$  e  $p_L$ ). Il punto più critico per la stabilità, come già anticipato, è rappresentato dall'origine delle *pressure - flow curves*.

Analiticamente, ponendo  $Q_L = p_L = x_v = 0$ , dalle Eq. 159, Eq. 160, Eq. 161 si ottiene:

$$k_{q0} = C_d \cdot W \cdot \sqrt{\frac{p_s}{\rho}}$$

**Eq. 162**

$$k_{c0} = 0$$

**Eq. 163**

$$k_{p0} = \infty$$

**Eq. 164**

Che sono i coefficienti della valvola nell'origine delle curve.

Il valore ottenuto per il guadagno di portata  $k_{q0}$  è generalmente ben correlato con i dati sperimentali, quindi può essere usato con fiducia, mentre per gli altri due coefficienti non c'è una buona correlazione sperimentale.

Per tale motivo si cercherà di determinare valori analitici più realistici dei predetti coefficienti, in base alle caratteristiche di trafilamento delle valvole ad accoppiamento critico (si ricorda che per ricavare l'espressione della  $Q_L$  è stata fatta l'ipotesi di flussi di *leakage* nulli, ipotesi che non è vera per le valvole reali, a causa degli inevitabili raggi di raccordo).

In una valvola reale vi sono delle leggere sovrapposizioni, dell'ordine di centesimi di millimetro (0.025 [mm]), che influenzano in maniera significativa il trafilamento di fluido e di conseguenza le *performance* della valvola per corse dello *spool* dello stesso ordine. In letteratura è riportato che al di fuori di questa regione di spostamenti l'equazione analitica (Eq. 157) si correla bene con i dati sperimentali.

Per ricavare gli altri due coefficienti nell'origine delle curve (la sensitività di pressione  $k_{p0}$  e il coefficiente di pressione  $k_{c0}$  è utile dapprima fare qualche considerazione.

Facendo riferimento alla Figura 77, si supponga che le linee al carico siano bloccate ( $Q_L = 0$ ) e si misurino le seguenti tre quantità:

- a valvola frenata, si misura, data una pressione di mandata, il salto di pressione al carico, mostrato nella seguente figura:

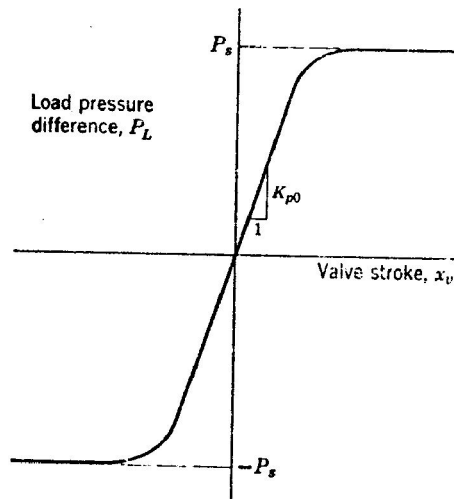


Figura 79 Curva del coefficiente di sensitività della pressione a linea bloccata

Si vede come, dopo uno spostamento dello *spool* molto piccolo, la pressione raggiunga il valore della pressione di mandata  $p_s$ .

Un valore sperimentale della sensitività di pressione nell'origine  $k_{p0}$  può essere ottenuto proprio dalla pendenza della curva mostrata in Figura 79.

- a valvola frenata, si misura, data una pressione di mandata, il flusso di mandata  $Q_s$ , mostrato nella seguente figura:

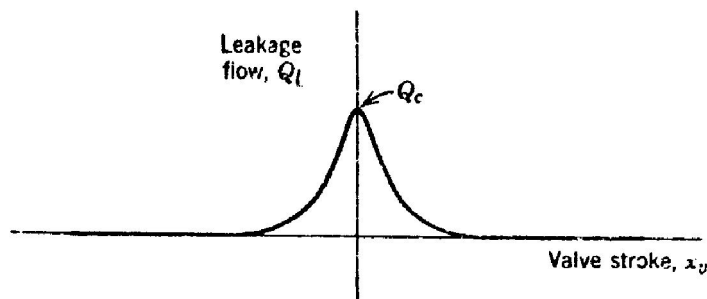
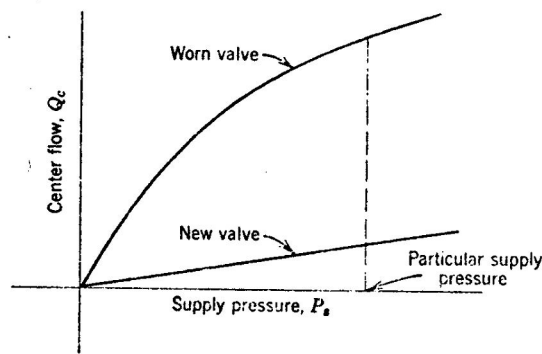


Figura 80 Curva del flusso di leakage

Tale flusso è di fatto un flusso di leakage poiché il flusso al carico è nullo. Dalla figura si osserva come il flusso di leakage è massimo nell'intorno della posizione centrata dello *spool* e decresce man mano che la corsa aumenta, poiché gli orifizi di ritorno vengono chiusi dai pieni.

- a valvola centrata (uguali aree degli orifizi), si misura il flusso totale attraverso la valvola al variare della pressione di mandata. Tale flusso è detto flusso al centro  $Q_c$ , ed è mostrato nella Figura 81 (esso corrisponde al punto di massimo della curva di Figura 80):



**Figura 81 Flusso al centro per valvola nuova ed usurata**

In effetti il flusso  $Q_c$  non è altro che il particolare flusso  $Q_s$  quando l'albero è centrato.

Si vede dalla figura come, per una valvola nuova, le tolleranze sono minime ed il flusso al centro, che cresce con  $p_s$ , è laminare e molto minore di quello che si verifica dopo che la valvola è stata usurata dalle inevitabili particelle solide contenute nel fluido di lavoro.

La curva mostrata in Figura 81 è molto utile per capire se la tolleranza di lavorazione adottata è corretta: data una pressione di mandata, dalla predetta figura si può sapere quale sarà il flusso massimo  $Q_c$  una volta che la valvola sarà stata usurata. Inoltre la curva stessa può essere utilizzata per misurare il coefficiente di pressione  $k_{c0}$ , nel modo che sarà ora spiegato.

Assumendo orifizi fasati e simmetrici, i flussi al carico e quello di mandata saranno dati dalle Eq. 144 ed Eq. 145, rispettivamente. Differenziando l'Eq. 144 rispetto al salto di pressione al carico si ottiene:

$$\frac{\partial Q_L}{\partial p_L} = -\frac{C_d \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s - p_L)}} - \frac{C_d \cdot A_2}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s + p_L)}}$$

**Eq. 165**

Differenziando l'Eq. 145 rispetto alla pressione di mandata si ottiene:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial p_s} = \frac{C_d \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s - p_L)}} + \frac{C_d \cdot A_2}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot (p_s + p_L)}} = -\frac{\partial Q_L}{\partial p_L} \equiv k_c$$

**Eq. 166**

Da quest'ultima uguaglianza si può capire come il coefficiente di pressione  $k_{c0}$  sia ottenibile sperimentalmente dalla pendenza delle curve mostrate in Figura 81, una volta fissata la pressione di esercizio  $p_s$ . Si può notare, sempre dalla Figura 81, che per una data una pressione di esercizio, la differenza tra la

pendenza registrata per una valvola nuova non differisca sensibilmente rispetto a quella registrata per una valvola usurata, sebbene il flusso aumenti drasticamente. Questo si riflette anche sulla sensitività di pressione, ed è un fatto positivo, poiché le performance della valvola non subiscono variazioni eccessive man mano che la valvola si usura.

Si cerca ora di determinare analiticamente il coefficiente di pressione  $k_{c0}$  per una valvola nuova. Finora il flusso attraverso gli orifizi è stato considerato ad alto numero di Reynolds; per flussi laminari (il flusso per una valvola nuova è laminare) sono stati fatti diversi studi semiempirici che, per un orifizio rettangolare in un piano infinito (si faccia riferimento alla Figura 73) con  $b \ll B$ , consegnano:

$$Q = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot W}{32 \cdot \mu} (p_1 - p_2)$$

**Eq. 167**

Dove  $p_1$  e  $p_2$  sono le pressioni a monte e a valle dell'orifizio. Poiché a valvola centrata il flusso è  $Q_c/2$ , il salto di pressione è  $p_s/2$  e la dimensione  $b$  non è altro che il raggio di raccordo  $r_c$ , si ha:

$$Q_c = \frac{\pi \cdot r_c^2 \cdot W}{32 \cdot \mu} p_s$$

**Eq. 168**

Differenziando rispetto alla pressione di mandata si ottiene:

$$k_{c0} = \frac{\pi \cdot r_c^2 \cdot W}{32 \cdot \mu}$$

*Coefficiente di Pressione nell'origine*

**Eq. 169**

Questa è l'espressione approssimata del coefficiente di pressione nell'origine,  $k_{c0}$ , che può essere utilizzata nei calcoli preliminari e dà una buona approssimazione anche per valvola usurata (solitamente a valvola usurata tale valore va raddoppiato o triplicato). Un aspetto molto importante da sottolineare è che il coefficiente di pressione varia con il gradiente d'area, cioè varia con le dimensioni della valvola.

Si può conseguentemente ricavare anche la sensitività di pressione:

$$k_{p0} = \frac{32 \cdot \mu \cdot C_d \sqrt{p_s / \rho}}{\pi \cdot r_c^2}$$

*Sensitività di Pressione nell'origine*

**Eq. 170**

Che risulta essere indipendente dal gradiente d'area e quindi dalle dimensioni della valvola.

Nel calcolo della funzione di risposta del servattuatore saranno utilizzati i valori dei coefficienti nell'origine dati dalle Eq. 162, Eq. 169, Eq. 170.

### A.2.3 Pistone controllato dalla servovalvola

Facendo riferimento alla Figura 82, assunta una valvola con orifizi simmetrici e fasati e detti  $x_v$  e  $x_p$  gli spostamenti rispettivamente della valvola e del pistone, si scrivono le equazioni di continuità per ogni camera del pistone:

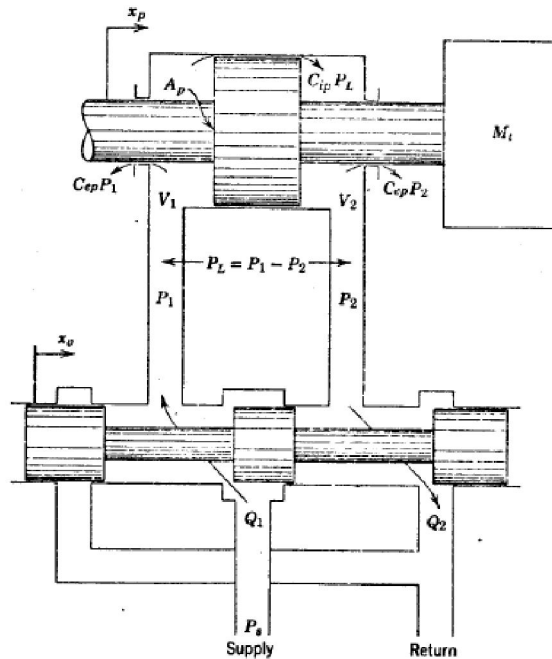


Figura 82 Combinazione servovalvola - pistone

L'equazione di continuità è data da:

$$\rho_{in} \cdot Q_{in} - \rho_{out} \cdot Q_{out} = \frac{d}{dt}(\rho V)$$

Eq. 171

approssimando l'equazione di stato della densità con uno sviluppo di Taylor al primo ordine nelle due variabili pressione e temperatura si ha:

$$\rho = \rho(p, T) \approx \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 \cdot (p - p_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0 \cdot (T - T_0) = \rho_0 \left[ 1 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 \cdot (p - p_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0 \cdot (T - T_0) \right]$$

Eq. 172

Ricordando che:



- il modulo di comprimibilità volumetrica a T costante è dato da:  $\beta = -V_0 \left. \frac{\partial \rho}{\partial V} \right|_0$
- il modulo di dilatazione volumetrica isobarico è dato da:  $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0$

L'equazione di stato può essere riscritta introducendo  $\alpha$  e  $\beta$ . Si esprime dapprima la quantità  $\left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0$  in funzione di  $\beta$ .

$$\rho \cdot V = m = \text{massa} = \text{cost}$$

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = mV^{-1} \Rightarrow \partial \rho = \partial(mV^{-1}) = -\frac{m}{V^2} \partial V \Rightarrow \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 = \left( -\frac{m}{V^2} \frac{\partial V}{\partial p} \right) \Big|_0 = -\frac{m}{V_0^2} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 = \frac{V_0}{m} \cdot \left( -\frac{m}{V_0^2} \right) \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_0 = -\frac{1}{V_0} \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_0 = \frac{1}{\beta}$$

Da cui l'equazione di stato diviene:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \cdot (p - p_0) - \alpha \cdot (T - T_0) \right]$$

Se la temperatura si mantiene costante è possibile trascurare il termine di dilatazione termica:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \cdot (p - p_0) \right]$$

Sostituendo nell'equazione della conservazione della massa ed essendo la densità costante tra ingresso e uscita ( $\rho_{in} = \rho_{out} = \rho$ ):

$$\rho \cdot Q_{in} - \rho \cdot Q_{out} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt}$$

Ma:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \cdot (p - p_0) \right] \right) = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dp}{dt}$$

Per cui:

$$\rho \cdot Q_{in} - \rho \cdot Q_{out} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dp}{dt}$$

Nell'ipotesi di flusso poco comprimibile si può assumere  $\rho \approx \rho_0$ , da cui:

$$Q_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dp}{dt}$$

Applicando la precedente equazione alle due camere del cilindro ed essendo le portate di trafilamento proporzionali al salto di pressione  $p_L$  attraverso i **coefficienti di efflusso** interno  $C_{ip}$ , ed esterno  $C_{ep}$ , si ha:

$$Q_1 - C_{ip}(p_1 - p_2) - C_{ep}p_1 = \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{\beta_e} \frac{dp_1}{dt}$$

**Eq. 173**

$$C_{ip}(p_1 - p_2) - C_{ep}p_2 - Q_2 = \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{\beta_e} \frac{dp_2}{dt}$$

**Eq. 174**

Con:

$V_1$  = volume della camera 1 (inclusa valvola, linea di connessione e volume del pistone)

$V_2$  = volume della camera 2 (inclusa valvola, linea di connessione e volume del pistone)

$\beta_e$  = bulk modulus effettivo, che verrà discusso a breve

Il coefficiente di efflusso interno, da letteratura, per una sezione anulare di lunghezza  $L$ , diametro  $D_e$  e spessore luce di trafilamento  $c_r$  è dato da:

$$C_{ip} = \frac{\pi \cdot D_e / 2 \cdot c_r^3}{6 \cdot \mu \cdot L} \left[ \frac{\text{mm}^5}{\text{N} \cdot \text{s}} \right] =$$

**Eq. 175**

### A.2.3.1 Bulk modulus effettivo

L'interazione tra l'effetto molla di un liquido e la massa dei componenti meccanici dà origine a una risonanza in quasi tutti i componenti idraulici. Tale risonanza costituisce la maggiore limitazione alle *performance* dinamiche. La rigidezza del liquido è caratterizzata dal valore del *bulk modulus*,  $\beta_1$ , ma tale valore può essere notevolmente ridotto dalla presenza di aria intrappolata, il cui *bulk modulus* è  $\beta_g$ . A questo va aggiunto anche il contributo dovuto alla flessibilità del contenitore,  $\beta_c$ .

In definitiva il **bulk modulus effettivo** è dato dalla somma di tre rigidzze in serie, dunque:

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_c} + \frac{1}{\beta_l} + \frac{1}{\beta_g} \left( \frac{V_g}{V_t} \right)$$

**Eq. 176**

Con  $V_g$  e  $V_t$  rispettivamente il volume dell'aria intrappolata e il volume totale di liquido e gas.

Per la determinazione del bulk modulus effettivo bisogna determinare:

- $V_t$ : il volume totale può essere facilmente calcolato in base a considerazioni geometriche
- $\beta_l$ : il bulk modulus dell'olio può essere trovato nel *datasheet* del produttore
- $\beta_g$ : il bulk modulus dell'aria è quello adiabatico, dato da:  $\beta_g = \left( \frac{C_p}{C_v} \right) \cdot p = 1.4 \cdot p$ , con  $p$  pressione del gas. Considerando che la condizione più gravosa è costituita da aria a pressione ambiente (condizione in cui la percentuale di gas può arrivare al 20% del volume totale), poiché all'aumentare della pressione le bolle d'aria si dissolvono nel liquido, si può considerare, per le pressioni di esercizio in gioco, circa 50 [bar], una percentuale intorno al 6%.
- $\beta_c$  il bulk modulus del contenitore, per un cilindro a spessore non trascurabile, è dato da:

$$\beta_c = E \cdot \left[ \frac{t \cdot (D_0 + D)}{(1 + \nu) \cdot D_0^2 + (1 - \nu) \cdot D^2} \right]$$

**Eq. 177**

con:

E modulo di elasticità del materiale, acciaio

$\nu$  modulo di Poisson

$D_0$  diametro esterno cilindro

D diametro interno cilindro

t spessore ( $2t = D_0 - D$ )

## A.2.4 Equazioni della dinamica della servovalvola e dell'attuatore

Si ritorna ora allo sviluppo della funzione di risposta del sistema servovalvola e attuatore.

Il volume delle camere del pistone è dato da:

$$\begin{aligned}V_1 &= V_{01} + A_p \cdot x_p \\V_2 &= V_{02} - A_p \cdot x_p\end{aligned}$$

**Eq. 178**

Con  $A_p$  e  $x_p$  rispettivamente l'area e lo spostamento del pistone.

Supponendo che il pistone sia inizialmente centrato, il volume iniziale delle due camere è lo stesso:

$$V_{01} = V_{02} = V_0$$

**Eq. 179**

Da cui il volume totale risulta costante:

$$V_t = V_1 + V_2 = V_{01} + V_{02} = 2V_0$$

**Eq. 180**

Combinando le Eq. 173 e Eq. 174, si ha:

$$Q_L = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = A_p \frac{dx_p}{dt} + C_{tp} p_L + \frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dp_L}{dt}$$

**Eq. 181**

Con  $C_{tp} = 2 \cdot C_{ip} + C_{ep}$ , **coefficiente di efflusso totale**

Uguagliando la portata dell'attuatore con quella della servovalvola (Eq. 153) si ha:

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dp_L}{dt} + (k_c + C_{tp}) \cdot p_L + A_p \frac{dx_p}{dt} = k_q \cdot x_v$$

**Eq. 182**

Ponendo:

$$k_c + C_{tp} = k_{cc}$$

**Eq. 183**

Si ha:

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dp_L}{dt} + k_{cc} \cdot p_L + A_p \frac{dx_p}{dt} = k_q \cdot x_v$$

**Eq. 184**

L'equazione appena scritta rappresenta una delle due equazioni fondamentali del modello matematico linearizzato del sistema attuatore – servovalvola. Essa mette in relazione lo spostamento dello stelo del pistone con il salto di pressione tra le camere.

L'altra equazione sarà data dalla dinamica del pistone.

Trascurando per ora la dinamica dell'attacco del cilindro sulla struttura, detta  $m_p$  la massa del pistone e  $B_p$  il coefficiente di smorzamento dovuto all'olio, si ha:

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p = F_{press} + F_{ext}$$

**Eq. 185**

La forza di pressione è data dal salto di pressione tra le camere moltiplicato l'area del pistone (a rigore dovrebbero essere considerate le due aree affaccianti del pistone, che possono considerarsi quasi uguali se lo stelo ha sezione trascurabile rispetto all'area del pistone):

$$F_{press} = A_p \cdot p_L$$

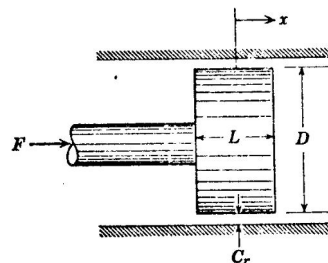
**Eq. 186**

Riassumendo le equazioni della dinamica del sistema servovalvola – attuatore, che andranno inserite nel sistema aeroelastico sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dp_L}{dt} + k_{cc} \cdot p_L + A_p \frac{dx_p}{dt} = k_q \cdot x_v \\ m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = F_{ext} \end{cases}$$

**Eq. 187**

Il coefficiente di smorzamento viscoso dipende dallo spessore delle luci di trafilamento ( $C_r$ ), dall'area laterale del pistone e dalla viscosità dell'olio ( $\mu$ ) (Figura 83):



$$B_p = \frac{\mu \cdot A_{lp}}{C_r}$$

**Eq. 188**

**Figura 83 Coefficiente smorzamento viscoso**

Combinando le Eq. 182 ed Eq. 185 si ottiene l'equazione della **funzione di risposta** del pistone, sia alla forzante esterna che allo spostamento della valvola.

Nel dominio di Laplace si ha:

$$x_p = \frac{\frac{k_q}{A_p} \cdot x_v - \frac{k_{cc}}{A_p^2} \left( 1 + \frac{V_t}{4\beta_e k_{cc}} \cdot s \right) \cdot F_{ext}}{s \left[ \frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p^2} \cdot s^2 + \left( \frac{k_{cc} m_p}{A_p^2} + \frac{B_p V_t}{4\beta_e A_p^2} \right) \cdot s + \left( 1 + \frac{B_p k_{cc}}{A_p^2} \right) \right]}$$

**Eq. 189**

con

$$\omega_h = \sqrt{\frac{4\beta_e A_p^2}{V_t m_p}}; \quad \text{pulsazione idraulica, [rad/s]}$$

$$\delta_h = \frac{k_{cc}}{A_p} \sqrt{\frac{\beta_e m_p}{V_t}} + \frac{B_p}{4A_p} \sqrt{\frac{V_t}{\beta_e m_p}}; \quad \text{smorzamento}$$

Possono essere ricavate le due risposte allo spostamento della servovalvola e alla forzante esterna:

$$G_1(s) = \frac{x_p}{F_{ext}} = \frac{-\frac{k_{cc}}{A_p^2} \left( 1 + \frac{V_t}{4\beta_e k_{cc}} \cdot s \right)}{s \left[ \frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p^2} \cdot s^2 + \left( \frac{k_{cc} m_p}{A_p^2} + \frac{B_p V_t}{4\beta_e A_p^2} \right) \cdot s + \left( 1 + \frac{B_p k_{cc}}{A_p^2} \right) \right]}$$

**Eq. 190**

$$G_2(s) = \frac{x_p}{x_v} = \frac{\frac{k_q}{A_p}}{s \left[ \frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p^2} \cdot s^2 + \left( \frac{k_{cc} m_p}{A_p^2} + \frac{B_p V_t}{4\beta_e A_p^2} \right) \cdot s + \left( 1 + \frac{B_p k_{cc}}{A_p^2} \right) \right]}$$

**Eq. 191**

### A.2.5 Presenza di ritorni nel servoattuatore

Solitamente nei servoattuatori è presente una retroazione sull'uscita, come mostra la Figura 84 nel caso di una retroazione meccanica di rapporti  $G_1$  e  $G_3$ .

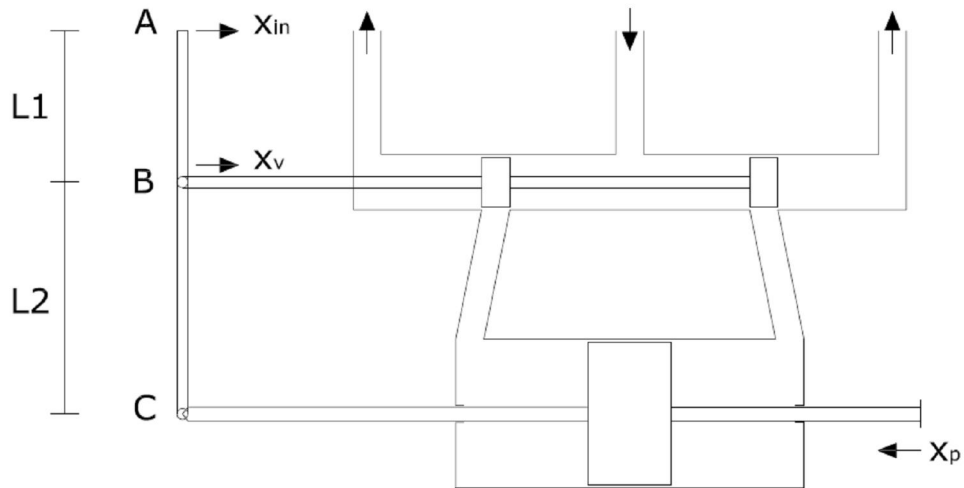


Figura 84 Modello attuatoriale con ritorni

Per cui al sistema va aggiunta un'ulteriore equazione:

$$\begin{cases} m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = F_{ext} \\ A_p \dot{x}_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot \dot{p}_L + k_{cc} \cdot p_L = k_q \cdot x_v \\ x_v = G_1 \cdot x_{in} - G_3 \cdot x_p \end{cases}$$

Eq. 192

Trasformando secondo Laplace ed annullando le forze esterne (l'inerzia della superficie mobile può essere inglobata nella massa  $m_p = m_{pistone} + I_{\beta\beta}/d^2$ ) si ha:

$$\begin{cases} m_p \cdot s^2 \cdot X_p + B_p \cdot s \cdot X_p - A_p \cdot P_L = 0 \\ A_p \cdot s \cdot X_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot s \cdot P_L + k_{cc} \cdot P_L = k_q \cdot X_v \\ X_v = G_1 \cdot X_{in} - G_3 \cdot X_p \end{cases}$$

Eq. 193

Da cui:

$$\begin{cases} P_L = \frac{m_p}{A_p} \cdot s^2 \cdot X_p + \frac{B_p}{A_p} \cdot s \cdot X_p \\ A_p \cdot s \cdot X_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot s \cdot P_L + k_{cc} \cdot P_L = k_q \cdot (G_1 \cdot X_{in} - G_3 \cdot X_p) \\ X_v = G_1 \cdot X_{in} - G_3 \cdot X_p \end{cases}$$

**Eq. 194**

Sostituendo la prima equazione nella seconda:

$$\begin{cases} P_L = \frac{m_p}{A_p} \cdot s^2 \cdot X_p + \frac{B_p}{A_p} \cdot s \cdot X_p \\ A_p \cdot s \cdot X_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot s \cdot \left( \frac{m_p}{A_p} \cdot s^2 \cdot X_p + \frac{B_p}{A_p} \cdot s \cdot X_p \right) + k_{cc} \cdot \left( \frac{m_p}{A_p} \cdot s^2 \cdot X_p + \frac{B_p}{A_p} \cdot s \cdot X_p \right) + k_q G_3 \cdot X_p = k_q \cdot G_1 \cdot X_{in} \\ X_v = G_1 \cdot X_{in} - G_3 \cdot X_p \end{cases}$$

**Eq. 195**

Dalla seconda equazione si ricava la funzione di trasferimento  $TF_{new}$

$$\left\{ \frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p} \cdot s^3 + \left[ \frac{V_t B_p}{4\beta_e A_p} + \frac{k_{cc} m_p}{A_p} \right] \cdot s^2 + \left[ A_p + \frac{k_{cc} B_p}{A_p} \right] \cdot s + k_q G_3 \right\} \cdot X_p = k_q \cdot G_1 \cdot X_{in}$$

**Eq. 196**

$$T_{new}(s) = \frac{X_p}{X_{in}} = \frac{k_q \cdot G_1}{\frac{V_t m_p}{4\beta_e A_p} \cdot s^3 + \left[ \frac{V_t B_p}{4\beta_e A_p} + \frac{k_{cc} m_p}{A_p} \right] \cdot s^2 + \left[ A_p + \frac{k_{cc} B_p}{A_p} \right] \cdot s + k_q G_3}$$

**Eq. 197**

## **RAPPRESENTAZIONE STATO VETTORE**

Partendo dall'Eq. 194 con forzanti esterne nulle:

$$\begin{cases} m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = 0 \\ A_p \dot{x}_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot \dot{p}_L + k_{cc} \cdot p_L = k_q \cdot x_v \\ x_v = G_1 \cdot x_{in} - G_3 \cdot x_p \end{cases}$$

**Eq. 198**

E aggiungendo l'identità  $\dot{x}_p - \dot{x}_p = 0$ :



$$\begin{cases} \dot{x}_p - \dot{x}_p = 0 \\ m_p \cdot \ddot{x}_p + B_p \cdot \dot{x}_p - A_p \cdot p_L = 0 \\ A_p \dot{x}_p + k_q G_3 \cdot x_p + \frac{V_t}{4\beta_e} \cdot \dot{p}_L + k_{cc} \cdot p_L = k_q G_1 \cdot x_{in} \end{cases}$$

**Eq. 199**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & B_p & -A_p \\ k_q G_3 & A_p & k_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_q G_1 \end{Bmatrix} \cdot x_{in}$$

**Eq. 200**

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B_p & A_p \\ -k_q G_3 & -A_p & -k_{cc} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_q G_1 \end{Bmatrix} \cdot x_{in}$$

**Eq. 201**

Da cui le matrici pianta e controllo:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B_p & A_p \\ -k_q G_3 & -A_p & -k_{cc} \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_t}{4\beta_e} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_q G_1 \end{Bmatrix}$$

**Eq. 202**

Matrici di osservazione del salto di pressione e dello spostamento del pistone:

$$y = \begin{Bmatrix} x_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ \dot{x}_p \\ p_L \end{Bmatrix} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{x}$$

**Eq. 203**

## APPENDICE B

### *Razionalizzazione delle forze aerodinamiche alla Roger*

#### **B.1 Equazioni del moto di un velivolo elastico**

In questa appendice verrà illustrato il vantaggio di schematizzare le forze aerodinamiche mediante lo sviluppo di Roger, [27].

Il campo di moto  $(\underline{X}(r, t), \dot{\underline{X}}(r, t), \ddot{\underline{X}}(r, t))$  di un velivolo elastico, soggetto a forzanti esterne aerodinamiche o non, in coordinate modali  $(\underline{\Phi}(r)\underline{q}(t), \underline{\Phi}(r)\dot{\underline{q}}(t), \underline{\Phi}(r)\ddot{\underline{q}}(t))$ , è governato dal sistema di equazioni integro differenziali:

$$\underline{M}_{\underline{G}}\ddot{\underline{q}} + \underline{C}_{\underline{G}}\dot{\underline{q}} + \underline{K}_{\underline{G}}\underline{q} - \frac{1}{2}\rho V^2 \int_0^t \underline{Q}_{\underline{GM}}(t-\tau)\underline{q}(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\rho V^2 \int_0^t \underline{Q}_{\underline{GC}}(t-\tau)\underline{\delta}(\tau)d\tau - \underline{M}_{\underline{GC}}\ddot{\underline{\delta}} + \underline{F}_{\underline{G}}(t)$$

**Eq. 204**

dove:

$\underline{M}_{\underline{G}}$  matrice delle masse generalizzate

$\underline{C}_{\underline{G}}$  matrice degli smorzamenti generalizzati (diagonale per l'ipotesi di Basile)

$\underline{K}_{\underline{G}}$  matrice delle rigidezze generalizzate (diagonale per la proprietà di ortogonalità dei modi)

$$\underline{Q}_{\underline{GM}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}_{\underline{GM}}(j\omega) \exp(j\omega t) dt ;$$

$$\underline{Q}_{\underline{GC}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}_{\underline{GC}}(j\omega) \exp(j\omega t) dt$$

risposte aerodinamiche impulsive di movimento e di comando

$\underline{M}_{\underline{GC}}$  matrice delle masse generalizzate incrociate

$\underline{F}_{\underline{G}}(t)$  forze generalizzate esterne non aerodinamiche

## B.2 L'approssimazione di Roger

Il miglior modo per risolvere l'Eq. 204 è quello di trasformarla nel dominio della frequenza:

$$\left[ (j\omega)^2 \underline{\underline{M}}_G + (j\omega) \underline{\underline{C}}_G + \underline{\underline{K}}_G - \frac{1}{2} \rho V^2 \underline{\underline{Q}}_{GM}(j\omega) \right] \cdot \underline{q}(j\omega) = \left[ \frac{1}{2} \rho V^2 \underline{\underline{Q}}_{GC}(j\omega) - (j\omega)^2 \underline{\underline{M}}_{GC} \right] \cdot \underline{\delta}(j\omega) + \underline{F}_G(j\omega)$$

Eq. 205

ed ottenere le soluzioni separate per effetto della forzante non aerodinamica  $q(j\omega)_F$  e quella  $q(j\omega)_\delta$  dovuto alle superfici di controllo avendo imposto prima  $\delta(j\omega) = 1$ . La soluzione totale si ricomporrà effettuando la trasformata inversa.

Tale modo di procedere ha bisogno del calcolo delle forze aerodinamiche (movimento e comandi) per una serie di frequenze ridotte  $k_{r_i} = \omega_i c_r / V$  dell'ordine delle migliaia con un aggravio di calcolo non trascurabile. D'altro canto l'andamento in frequenza ridotta delle forze aerodinamiche generalizzate è abbastanza regolare per cui esse vengono calcolate per una serie limitata di frequenze ridotte (tipicamente 20 – 30 valori di  $k_r$ ) e interpolate mediante spline.

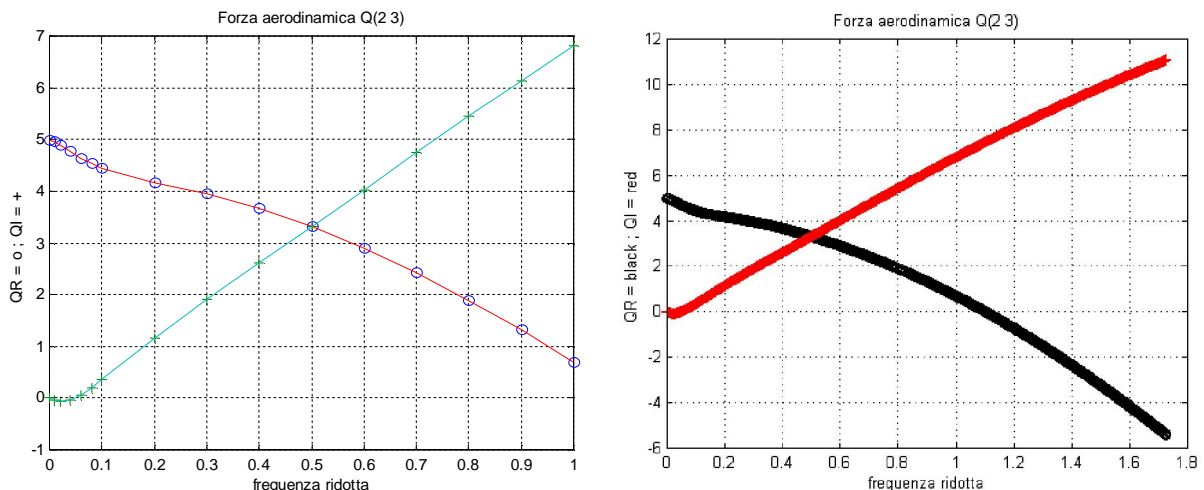


Figura 85 Forza aerodinamica generalizzata Q(2,3) e a destra interpolazione mediante spline

Per economizzare i tempi di calcolo, invece della spline, sarebbe utile un'approssimazione analitica della matrice  $\underline{\underline{Q}}$ .

Sfruttando gli algoritmi di sintesi delle funzioni di trasferimento si può pensare di rappresentare il generico componente  $ij$  della matrice  $\underline{\underline{Q}}$  mediante un rapporto polinomiale.

Fatta la posizione  $s = jk_r$  si può porre:

$$Q_{i,j} = \frac{N(s)_{i,j}}{D(s)_{i,j}}$$

$$N(s)_{i,j} = (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^n)_{i,j}$$

$$D(s)_{i,j} = (1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_m s^m)_{i,j}$$

**Eq. 206**

Il calcolo dei coefficienti è risolvibile mediante una tecnica ai minimi quadrati non lineare. Il pedice  $ij$  nell'Eq. 206 sta a significare che per ognuno di tali termini bisogna valutare questa approssimazione ed è ovvio che ciò non apporta alcun vantaggio di calcolo in quanto, per ognuno dei termini della matrice, si devono immagazzinare tutti i coefficienti del numeratore e del denominatore. Si può in alternativa valutare l'Eq. 206 solo per i termini diagonali  $jj$  e assumendo i coefficienti del denominatore, calcolare i restanti coefficienti del numeratore per ogni termine della colonna  $j$

$$Q_{i,j} = \frac{N(s)_{i,j}}{D(s)_{j,j}} \quad i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$$

**Eq. 207**

La tecnica ai minimi quadrati è ora lineare per i termini  $i, j$  con  $j \neq i$  e si ha:

$$\underline{\underline{Q}}(s) = \underline{\underline{N}}(s) \cdot \underline{\underline{D}}^{-1}(s)$$

con  $\underline{\underline{D}}$  matrice diagonale.

Bisogna, in ogni caso, porre attenzione a che nessuno dei polinomi al denominatore abbia radici la cui parte reale sia positiva. Portando tale ragionamento all'estremo si può pensare di assumere come denominatore unico uno di quelli, non importa quale, per cui le radici reali siano positive.

Poiché non è importante quale forza generalizzata scegliere, purché le radici siano stabili, conviene scegliere sin dall'inizio un'approssimazione che ha questa caratteristica.

La rappresentazione suggerita da Roger risponde a tali requisiti.

$$\underline{\underline{Q}}(k_r) = \underline{\underline{A}}_0 + (jk_r)\underline{\underline{A}}_1 + (jk_r)^2 \underline{\underline{A}}_2 + \sum_{l=1}^n \underline{\underline{B}}_l * \frac{(jk_r)}{(jk_r) + \gamma_l}$$

**Eq. 208**

Le matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$  sono tutte matrici reali e  $\gamma_l$  sono fissati in base ai valori delle frequenze ridotte per cui sono note le matrici  $\underline{\underline{Q}}$  e sono positivi.

Per una miglior convergenza si pone  $\underline{\underline{A}}_0 = \underline{\underline{Q}}(0)$ . Le matrici reali incognite:  $\underline{\underline{A}}_1$   $\underline{\underline{A}}_2$   $\underline{\underline{B}}_l$  sono valutate con la tecnica dei minimi quadrati sulla differenza  $\underline{\underline{Q}}(k_r) - \underline{\underline{Q}}(0)$ . La rappresentazione data dall'Eq. 208 presenta un risparmio di calcolo importante. Ad esempio, per 4 ritardi, bisogna stoccare in memoria solo sette matrici piuttosto che le 20 - 30 matrici complesse per poi applicare su di esse la tecnica di spline.

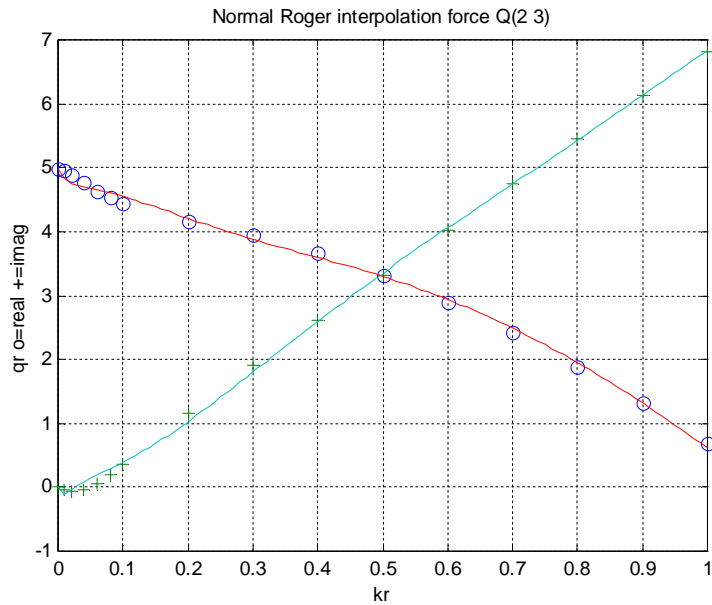


Figura 86 Interpolazione della forza aerodinamica mediante Roger

In Figura 86 si osserva come la forza aerodinamica generalizzata sia ottimamente rappresentata dall'approssimazione di Roger.

### B.3 La rappresentazione stato vettore

Utilizzando l'approssimazione di Roger si può ottenere direttamente la soluzione nel tempo senza passare attraverso la trasformata diretta ed inversa di Fourier.

Fatte le posizioni

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\rho V^2; \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\rho V c_r; \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\rho c_r^2$$

Eq. 209

l'Eq. 208 diventa (considerando 4 ritardi aerodinamici):

$$\eta_0 \underline{\underline{Q}}(k_r) \cdot \underline{q} = [\eta_0 \underline{\underline{A}}_0 + \eta_1 \underline{\underline{A}}_1(j\omega) + \eta_2 \underline{\underline{A}}_2(j\omega)^2] \cdot \underline{q} + \eta_0 \sum_{L=1}^4 \underline{\underline{B}}_L \cdot \frac{(jk_r) \cdot \underline{q}}{(jk_r) + \gamma_L}$$

Eq. 210

sostituendo nell'Eq. 210 la seguente espressione

$$(jk_r) \cdot \underline{Z}_L = -\gamma_L \cdot \underline{Z}_L + \underline{q}_L \quad L = 1, \dots, 4$$

Eq. 211

l'espressione delle forze aerodinamiche diventa:

$$\eta_0 \underline{\underline{Q}}(k_r) \cdot \underline{\underline{q}} = [\eta_0 \underline{\underline{A}}_0 + \eta_1 \underline{\underline{A}}_1(j\omega) + \eta_2 \underline{\underline{A}}_2(j\omega)^2] \cdot \underline{\underline{q}} - \eta_0 \sum_{L=1}^4 \gamma_L \underline{\underline{B}}_L \cdot \underline{\underline{Z}}_L$$

$$\underline{\underline{A}}_0 = [\underline{\underline{A}}_0 + \sum_{L=1}^4 \underline{\underline{B}}_L]$$

**Eq. 212**

Sostituendo lo sviluppo in stato finito (Eq. 212) nell'Eq. 205e indicando con  $\underline{\underline{F}}(j\omega)$  il vettore delle forzanti esterne comprese quelle dovute ai comandi si ha:

$$(j\omega)^2 \underline{\underline{M}}_s \underline{\underline{q}} + (j\omega) \underline{\underline{C}}_s \underline{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}_s \underline{\underline{q}} + \eta_0 \sum_{L=1}^4 \gamma_L \underline{\underline{B}}_L \cdot \underline{\underline{Z}}_L = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{F}}(j\omega)$$

$$(j\omega) \cdot \underline{\underline{Z}}_L = \frac{V}{c_r} \underline{\underline{q}} - \gamma_L \frac{V}{c_r} \underline{\underline{Z}}_L \quad L = 1, \dots, 4$$

**Eq. 213**

dove:

$$\underline{\underline{M}}_s = [\underline{\underline{M}} - \eta_2 \underline{\underline{A}}_2]; \quad \underline{\underline{C}}_s = [\underline{\underline{C}} - \eta_1 \underline{\underline{A}}_1]; \quad \underline{\underline{K}}_s = [\underline{\underline{K}} - \eta_0 \underline{\underline{A}}_0]$$

**Eq. 214**

Con le posizioni:

$$(j\omega)^2 \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\ddot{q}}}; \quad (j\omega) \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\dot{q}}}; \quad (j\omega) \underline{\underline{Z}}_L = \underline{\underline{\dot{Z}}}_L$$

**Eq. 215**

Si ottiene (per 4 ritardi aerodinamici):

$$\underline{\underline{M}}_s \underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{C}}_s \underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{K}}_s \underline{\underline{q}} + \eta_0 \sum_{L=1}^4 \gamma_L \underline{\underline{B}}_L \cdot \underline{\underline{Z}}_L = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{F}}(t)$$

$$(j\omega) \cdot \underline{\underline{Z}}_L = \frac{V}{c_r} \underline{\underline{q}} - \gamma_L \frac{V}{c_r} \underline{\underline{Z}}_L \quad L = 1, \dots, 4$$

**Eq. 216**

e aggiungendo l'identità:

$$\underline{\underline{\dot{q}}} - \underline{\underline{\dot{q}}} = 0$$

**Eq. 217**

si perviene ad un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti:

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}}(t)$$

**Eq. 218**

dove:

$$A = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}_s^{-1} \underline{K}_s & -\underline{M}_s^{-1} \underline{C}_s & -\eta_0 \gamma_1 \underline{M}_s^{-1} \underline{B}_1 & -\eta_0 \gamma_2 \underline{M}_s^{-1} \underline{B}_2 & -\eta_0 \gamma_3 \underline{M}_s^{-1} \underline{B}_3 & -\eta_0 \gamma_4 \underline{M}_s^{-1} * \underline{B}_4 \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & -\underline{I} \gamma_1 v / c_r & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \gamma_2 v / c_r & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \gamma_3 v / c_r & \underline{0} \\ \underline{I} \cdot \frac{v}{c_r} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} \gamma_4 v / c_r \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}_s^{-1} \underline{\Phi}^T \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}(t) = \underline{F}(t)$$