

Università degli Studi di Napoli Federico II

Tesi di Dottorato in Scienze Economiche

Utilità non-concava ed Eterogeneità:
risultati teorici e test empirici

Candidato:
Giuliano Curatola

Tutor:
Professor Marco Pagano

Coordinatore del Corso:
Professor Carlo Panico

Abstract

Nella presente tesi si analizza un'economia di puro scambio in tempo continuo nella quale gli agenti economici sono dotati di funzione di utilità convessa-concava rispetto al consumo in linea con quanto proposto da Kahneman e Tversky (1979). Più precisamente la funzione di utilità è convessa (concava) per livelli di consumo inferiori (superiori) a un dato livello di riferimento. Gli agenti, in ogni istante di tempo, decidono la proporzione della loro ricchezza da consumare e quella da investire sul mercato per massimizzare la funzione di utilità precedentemente descritta. Sono disponibili due opportunità d'investimento: un titolo rischioso e uno privo di rischio. Infine, gli agenti economici sono eterogenei rispetto al livello di riferimento del consumo. I seguenti output di equilibrio sono oggetto di studio: i prezzi dei due titoli in cui è possibile investire e i loro rendimenti, la volatilità del titolo rischioso, il prezzo di mercato del rischio e il rendimento azionario in eccesso rispetto al tasso privo di rischio. Il problema principale della non concavità della funzione di utilità riguarda la possibile non esistenza dell'equilibrio economico come mostrato in De Giorgi, Hens e Levy (2011). Nella tesi si mostra invece che l'eterogeneità nel livello di riferimento garantisce l'esistenza dell'equilibrio economico che invece non esiste in un'economia con agente rappresentativo dotato di un singolo livello di riferimento sul consumo. Inoltre, la funzione di utilità convessa-concava e l'eterogeneità nelle preferenze producono componenti singolarmente continui nella dinamica dei prezzi in equilibrio e quindi jumps nei rendimenti dei titoli. Infine, tale funzione di utilità produce rendimenti azionari con volatilità asimmetrica.

Contenuti

Capitolo 1

1.1. Introduzione	pag. 5
1.2 Prospect Theory e Loss Aversion	pag. 8
1.3 Loss Aversion e Habit Formation	pag. 12
1.4 Eterogeneità e Loss Aversion	pag. 17

Capitolo 2

2.1 Il Mercato Finanziario	pag. 23
2.2 Equilibrio Economico	pag. 26
2.3 Caratterizzazione dell'Equilibrio ed Eterogeneità	pag. 29
2.4 Eterogeneità ed Esistenza dell'Equilibrio	pag. 38

Capitolo 3

3.1 Analisi Numerica	pag. 43
3.1.1 Scelta dei Parametri	pag. 43
3.1.2 L'Avversione al Rischio Relativa Aggregata	pag. 43
3.1.3 Prezzo di mercato del rischio e tasso di Interesse Privo di Rischio	pag. 45
3.1.4 Volatilità e Premio al Rischio del Mercato Azionario	pag. 47
3.1.5 Il Processo singolarmente continuo $A(t)$	pag. 48
3.1.6 L'Effetto della Distribuzione della Ricchezza Iniziale	pag. 50
3.2 L'Effetto Garch Asimmetrico	pag. 54
3.3 Conclusioni e Possibili Estensioni	pag. 59

Bibliografia	pag. 61
---------------------	---------

Appendice A: dimostrazioni	pag. 66
-----------------------------------	---------

Appendice B: metodi numerici	pag. 73
-------------------------------------	---------

Capitolo 1

Introduzione e sintesi della letteratura di riferimento

1.1 Introduzione

Nel presente lavoro di tesi si analizza un'economia di puro scambio in tempo continuo nella quale gli agenti sono dotati di funzione di utilità s-shaped definita sul consumo. L'utilità degli agenti economici, oltre che dal consumo c , dipende da un livello di riferimento z relativamente al quale gli agenti valutano il consumo. Consumi maggiori di z producono guadagni di utilità mentre consumi inferiori a z producono perdite in termini di utilità. In modo più formale la funzione di utilità $U(c, z)$ è definita nel modo seguente:

$$U(c, z) = \begin{cases} -B \frac{(z-c)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c < z \\ A \frac{(c-z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c \geq z \end{cases} \quad (1.1)$$

con $\gamma \in [0, 1)$. La funzione in (1.1) è la funzione di utilità utilizzata da Kahneman and Tversky (1979) per caratterizzare il comportamento di agenti con avversione alle perdite e presenta le seguenti proprietà: 1)

$u(x, \cdot)$ è crescente nel suo argomento; 2) $u(x, \cdot)$ è concava nel dominio dei guadagni e convessa su quello delle perdite; 3) $u(x, \cdot)$ è più ripida nel dominio delle perdite che in quello dei guadagni. La proprietà 1 è anche nota come monotonicità; la proprietà 2 è anche detta sensibilità decrescente, cioè l'effetto marginale di guadagni o perdite diminuisce con la loro grandezza. La proprietà 3 è invece tipica della loss aversion, cioè l'impatto delle perdite è maggiore in valore assoluto di quello di guadagni di uguale entità. Tali proprietà sono mostrate nella seguente figura.

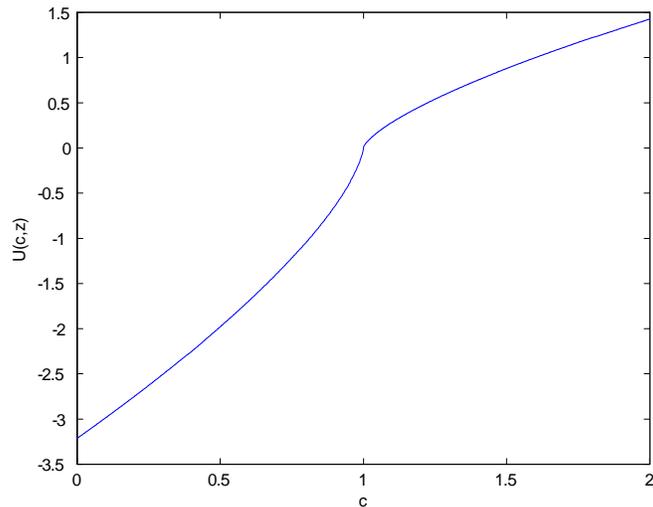


Figura 1-1: Funzione di utilità $U(c, z)$ con $z = 1$.

La tesi si propone due obiettivi principali. Il primo è di carattere teorico: come mostrato da Hens, De Giorgi and Levy (2004) l'equilibrio economico non esiste in un'economia nella quale gli agenti sono dotati di preferenze s-shaped. Nella seguente tesi si mostra che l'eterogeneità nella reference z , insieme a condizioni deboli sulla distribuzione iniziale di ricchezza, assicurano l'esistenza dell'equilibrio economico. Il secondo obiettivo è di carattere empirico: stabilita l'esistenza dell'e-

equilibrio, saranno analizzate e testate le implicazioni e le proprietà statistiche degli output del modello. In particolare verranno analizzati il prezzo di mercato del rischio, il tasso privo di rischio, il rendimento azionario in eccesso e la volatilità del mercato e si mostrerà come la loss aversion introduca salti nella dinamica di tali grandezze. Infatti, come mostrato da Karatzas e Shreve (1998), poichè il consumo degli agenti economici può scendere al di sotto del livello di reference, per evitare che sul mercato siano presenti opportunità di arbitraggio, il prezzo di tutti gli asset nell'economia deve essere decomposto in due parti, una assolutamente continua e una singolarmente continua. La componente singolarmente continua produrrà i salti nelle grandezze di equilibrio.

Data la funzione di utilità utilizzata, il modello nella presente tesi è strettamente collegato alla letteratura sulla *prospect theory* e in particolare a quella riguardante la *loss aversion*. Inoltre poichè nella presente tesi si analizza un'economia di puro scambio con agenti eterogenei il modello illustrato è strettamente collegato anche alla letteratura sull'eterogeneità nelle preferenze. Le due aree di ricerca in questione saranno sintetizzate nei prossimi paragrafi. E' tuttavia impossibile, data la vastità di tali aree di ricerca, produrne una sintesi completa ed esaustiva. Lo scopo dei paragrafi successivi è quindi quello di elencare e analizzare brevemente i lavori maggiormente collegati alla presente tesi in modo da produrre un quadro il più possibile esauriente del contesto in cui la presente tesi si inserisce e confrontare modelli e risultati in letteratura con quanto proposto nella seguente tesi.

1.2 Prospect Theory e Loss Aversion

La letteratura riguardante la Prospect Theory è stata originata dal lavoro di Kahneman e Tversky (1979) con il quale gli autori mostrano i limiti della teoria dell'utilità attesa proposta da Von Neumann Morgestern. La teoria dell'utilità attesa, proposta da Von Neumann Morgestern nel 1947, si basa sull'idea che gli individui economici, quando compiono scelte di investimento tra alternative con esiti diversi e incerti con probabilità note, siano in grado di assegnare un valore monetario ad ogni alternativa e, calcolando il valore monetario atteso di ogni alternativa di investimento scelgano sempre l'alternativa con il valore monetario atteso più alto. La funzione di utilità in Von Neumann Morgestern è concava quando descrive le preferenze di individui avversi al rischio, convessa per preferenze di individui propensi al rischio e lineare per individui neutrali nei confronti del rischio. Tale teoria, che ancora oggi influenza il mondo accademico, è stata ed è oggetto di numerose critiche. L'economista francese Maurice Allais nel 1953 ha mostrato che gli individui tendono a sopravvalutare i risultati considerati certi e a sottovalutare quelli invece considerati probabili e che, inoltre, essi tendono a comportarsi in modo ambiguo nella scelta tra eventi quasi certi ed eventi probabili violando sistematicamente la teoria dell'utilità attesa. Tale critica fu poi formalizzata e ampliata da Kahneman and Tversky che mostrarono come in molte situazioni di scelta della vita reale la teoria dell'utilità attesa non è consistente con le scelte degli agenti economici. In particolare Kahneman e Tversky mostrano la presenza di tre fenomeni che contraddicono la teoria dell'utilità attesa: l'effetto certezza, l'effetto riflessione e l'effetto isolamento. Per effetto certezza si intende la tendenza degli individui a preferire eventi certi ad eventi probabili anche se il valore atteso

dell'evento certo è inferiore a quello dell'evento probabile. Nella stessa situazione la teoria dell'utilità attesa fornisce la risposta opposta. L'effetto riflessione si riferisce al comportamento degli individui che tendono a preferire eventi positivi con minor valore ma con probabilità più alta ad eventi positivi con maggior valore ma probabilità più bassa. In modo esattamente speculare, gli individui tendono a preferire eventi negativi di valore maggiore ma con probabilità bassa ad eventi negativi di valor minore ma con probabilità più alta. In aggiunta a tale comportamento, gli agenti economici tendono a preferire eventi positivi certi ad eventi positivi incerti e eventi negativi incerti ad eventi negativi certi. Tale comportamento è sintetizzato dal fatto che l'atteggiamento nei confronti del rischio degli individui non è costante rispetto al dominio dei risultati possibili, infatti, gli individui tendono ad essere avversi al rischio quando valutano eventi positivi e propensi al rischio quando valutano eventi negativi. Infine, per effetto isolamento si intende la tendenza degli agenti economici a valutare scelte diverse in modo isolato allo scopo di semplificare la decisione anche se la valutazione combinata potrebbe portare a scelte con valor atteso maggiore che in base alla teoria dell'utilità attesa dovrebbero essere preferite.

Dei tre effetti precedentemente descritti la funzione di utilità della presente tesi incorpora il secondo, comunemente noto in letteratura come loss aversion ovvero avversione alle perdite. In sintesi, la variazione di utilità che deriva da un guadagno (\$10 per esempio) è inferiore in valore assoluto alla variazione di utilità che invece deriva da una perdita dello stesso valore (sempre \$10 per esempio). In altre parole, l'utilità marginale della funzione di utilità nel dominio delle perdite è maggiore di quella nel dominio nei guadagni. Formalmente, nella funzione (1.1) il rapporto B/A è maggiore di uno. In particolare,

le stime empiriche del rapporto B/A condotte per esempio da Kahneman and Tversky (1992) e Benartzi e Thaler (1995) mostrano che $B/A \approx 2.25$ come confermato anche da lavori empirici successivi, per esempio, Berkelaar, Kouwenberg e Post (2004).

Tale idea della loss aversion è stata recentemente applicata nella letteratura finanziaria ed è stato dimostrato che essa produce in molti casi risultati superiori rispetto alla tradizionale teoria dell'utilità attesa. Benartzi e Thaler (1995) mostrano che la loss aversion unita ad una frequente valutazione delle performance relative può spiegare il rendimento in eccesso sui mercati azionari rispetto ai titoli privi di rischio. Barberis Huang e Santos (2001) mostrano come una time-varying loss aversion rispetto alla ricchezza finanziaria è utile a spiegare il rendimento in eccesso sui mercati azionari. McQueen e Workink (2004) mostrano invece che la loss aversion produce volatilità asimmetrica. In questi due modelli gli agenti derivano utilità sia dal consumo che dalla fluttuazione della loro ricchezza rispetto alla quale mostrano loss aversion. In particolare gli agenti sono dotati di una funzione di utilità che è data dalla somma di una tradizionale funzione strettamente concava definita sul consumo e una funzione convessa-concava definita sui rendimenti del loro portafoglio di investimenti. In aggiunta il loro livello di loss aversion varia nel tempo: a seguito di rendimenti del loro portafoglio maggiori di un dato livello di riferimento (che può essere il tasso privo di rischio, o il rendimento di un dato portafoglio utilizzato come benchmark) gli agenti diventano meno avversi alle perdite mentre diventano più avversi a seguito di perdite. Tale comportamento della loss aversion fa sì che il modello possa spiegare il rendimento in eccesso sui mercati ma rende l'analisi del modello (inevitabilmente numerica) complicata perchè le condizioni di Eulero che determinano i rendimenti, e la dinamica della loss aversion devono essere risolte

simultaneamente. E' importante sottolineare, come mostrato dagli autori stessi, che se il livello della loss aversion è costante nel tempo, il modello proposto da Barberis Huang e Santos perde il potere esplicativo prima descritto e non risulta più significativamente diverso da un modello con tradizionale funzione di utilità strettamente concava. La funzione di utilità in (1.1) utilizzata nella presente tesi, poichè definita sul consumo e non su rendimenti azionari, produce endogenamente quella variazione nell'atteggiamento verso il rischio e dunque non necessita di un parametro di loss aversion time varying semplificando di molto la soluzione del modello.

Come spiegato nell'introduzione la funzione di utilità definita in (1.1) implica un particolare atteggiamento degli agenti economici nei confronti del rischio. Il presente lavoro si inserisce dunque anche nel recente dibattito riguardante la dinamica empirica dell'avversione al rischio. Kim e Lee (2008) mostrano che l'avversione al rischio in periodi di boom è maggiore che in recessione. I risultati che vengono dalla psicologia sperimentale vanno nella stessa direzione. Isen e Geva (1987); Isen e Patrick (1983) e Nygren et al. (1996) mostrano, tramite esperimenti in laboratorio, che il campione di persone ricevente un aumento nel livello di consumo si dimostra meno disponibile ad accettare nuove scommesse rispetto al gruppo di controllo. Gli autori interpretano tale risultato come evidenza di una crescita dell'avversione al rischio passando da stati cattivi a stati buoni del mondo. Intuitivamente, in uno stato buono del mondo gli agenti economici possono perdere relativamente di più che in uno stato cattivo. La loss aversion può spiegare tale evidenza poichè gli agenti dotati di utilità s-shaped sono amanti del rischio negli stati cattivi e avversi al rischio negli stati buoni del mondo. Tuttavia, l'evidenza sulla dinamica della risk aversion è controversa. Gordon e St- Amour (2002) mostrano invece che l'avver-

sione al rischio è controciclica. Gli autori costruiscono un modello con avversione a rischio non costante e stimano l'avversione al rischio implicita in tale modello. Il risultato è che l'avversione al rischio cresce in recessione e si riduce nei periodi di boom economico. I risultati del presente lavoro si collocano a metà strada tra le due precedenti visioni. Nel resto del lavoro sarà infatti individuato un livello dell'endowment aggregato, chiamato poi D^* , tale per cui l'avversione al rischio per livelli di endowment maggiori di D^* è decrescente nell'endowment aggregato mentre per livelli inferiori è crescente (o costante, secondo le ipotesi sulla distribuzione iniziale di ricchezza). Inoltre, l'avversione al rischio per livelli di endowment maggiori di D^* è sempre maggiore dell'avversione al rischio per livelli di endowment inferiori a D^* . La spiegazione di tale risultato è intuitiva: D^* è l'endowment aggregato superato il quale tutti gli agenti consumano al di sopra della loro reference e sono dunque avversi al rischio mentre in caso contrario, la presenza di agenti amanti del rischio riduce fortemente l'avversione al rischio nell'economia.

1.3 Loss Aversion e Habit Formation

L'ipotesi che gli agenti economici valutano il loro consumo in termini relativi rispetto ad un determinato livello di riferimento non è nuova in letteratura. Tale atteggiamento degli individui è infatti noto come habit formation. In tali modelli si assume che gli agenti economici costruiscono gradualmente nel tempo un livello di riferimento nel loro consumo rispetto al quale valutare il consumo corrente. Il modo in cui gli agenti costruiscono il livello di riferimento del loro consumo genera la distinzione tra *internal habit formation* ed *external habit formation*. Nel primo caso si assume che gli agenti economici costruiscano

il loro livello di riferimento basandosi sulle proprie esperienze di consumo mentre nel secondo caso gli agenti si basano sul consumo di un gruppo di riferimento esterno al quale aspirano e che tendono dunque ad imitare. Caratteristica fondamentale dei modelli di internal habit formation è la formulazione di una funzione di utilità *in differenze*. Più precisamente, gli agenti economici traggono utilità dalla differenza tra il loro consumo corrente e la reference, esattamente come nella funzione (1.1) utilizzata nella presente tesi. I modelli di external habit considerano una funzione di utilità nella quale ciò che è rilevante per i consumatori è il *rapporto* tra il consumo corrente e la reference. Ne segue che, mentre i modelli di internal habit producono avversione al rischio relativa che dipende dallo stato dell'economia, nei modelli di external habit l'avversione al rischio relativa è costante. Per tale motivo un modello con agenti loss averse è più vicino, in termini di implicazioni sull'avversione al rischio a modelli di internal habit formation.

Loss aversion, Habit formation e la tradizionale funzione di utilità strettamente concava producono implicazioni profondamente diverse riguardo la strategia di consumo e risparmio degli agenti economici. E' dunque utile e istruttivo confrontare la funzione definita in (1.1) e utilizzata nella presente tesi con una tradizionale funzione di utilità strettamente concava e con quelle utilizzate nella letteratura di habit formation in termini di scelte di consumo e risparmio. Le implicazioni in termini di consumo e risparmio della funzione di utilità strettamente concava sono visibili dall'analisi del seguente modello di scelte intertemporali. L'economia è popolata da un agente rappresentativo che risolve il seguente problema:

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{1.2}$$

s.t. $a_{t+1} + c_t \leq (1 + r)a_t + y_t$

dove β è il fattore di sconto intertemporale, a_t è il risparmio dell'agente nel periodo t , y_t il reddito, r il tasso di interesse e $u(c_t)$ la funzione di utilità strettamente crescente, strettamente concava e due volte differenziabile in c_t . In questo caso la strategia ottima prevede che il consumo ottimo sia stabile nel tempo (per opportuni valori dei parametri l'agente consumerà lo stesso ammontare in ogni istante di tempo). Per finanziare la strategia ottima l'agente deve essere in grado di finanziare il suo consumo prendendo a prestito denaro al tasso r quando il suo reddito non è sufficiente a finanziare il consumo ottimo (quindi presumibilmente in giovane età) e dovrà ripagare il prestito quando invece il suo reddito è superiore alle necessità di consumo (quindi nell'età adulta). Tali risultati sono consistenti con la teoria del reddito permanente formulata da Friedman nel 1957. Tale teoria è stata criticata per molteplici ragioni: in caso di reddito basso gli agenti potrebbero avere borrowing constraint e quindi non essere in grado di accedere al mercato del credito; gli agenti potrebbero avere ragioni di risparmio precauzionale (per finanziare futuri e probabili stati cattivi del mondo e quindi ridurre il consumo attuale al di sotto di quanto previsto dalla teoria del reddito permanente); oppure ancora gli agenti potrebbero avere intenti ereditari e quindi consumare in età avanzata meno di quanto previsto dall'ipotesi del reddito permanente.

Per accogliere alcune delle critiche proposte all'approccio standard è stata formulata la teoria dell'utilità non separabile nel tempo (si veda

per esempio Sundaresan (1989) e Constantinides (1990)). In particolare, in tale teoria si assume che la funzione di utilità $U(c, z)$ è definita da

$$U(c, z) = \begin{cases} A \frac{(c-z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c \geq z \\ -\infty & \text{se } c < z \end{cases} \quad (1.3a)$$

in cui generalmente z prende la forma di media ponderata del consumo passato con, $\lim_{c-z \rightarrow 0} U(c, z) = -\infty$ e $\lim_{c-z \rightarrow \infty} U(c, z) = -0$. Queste ipotesi fanno sì che l'utilità non sia più separabile nel tempo nel senso che il consumo ottimo in un dato istante di tempo sarà anche funzione del valore atteso delle utilità marginali future e quindi, attraverso queste, del consumo ottimo futuro, negando in questo modo i risultati di base della teoria del reddito permanente. La seconda implicazione di tale utilità è una forma di additività intertemporale: poichè livelli di consumo inferiori a z producono perdite infinite, il consumo ottimo dovrà necessariamente essere superiore al livello di riferimento z . Questo tipo di approccio presenta due problemi: 1) poichè gli agenti sono obbligati a consumare almeno z in ogni istante di tempo, affinché il problema abbia soluzione, è necessario che la ricchezza iniziale sia sufficiente a sostenere tale strategia di consumo; 2) le implicazioni del modello sono difficili da giustificare economicamente, infatti non è vero che il consumo degli agenti è sempre superiore alla media dei consumi passati in particolare in periodi di recessione. Tali problemi sono stati affrontati e superati nel lavoro di Detemple e Karatzas (2003) in cui gli autori propongono un modello con investitori dotati di funzione di utilità (1.3a) ma senza imporre la condizione di Inada $\lim_{c-z \rightarrow 0} U'(c, z) = \infty$. L'effetto della rimozione di tale ipotesi è che il consumo è libero di scendere al di sotto del livello riferimento e potrebbe anche essere negativo. Per evitare un consumo negativo è dunque necessario imporre un vincolo aggiuntivo al problema di mas-

simo. Poichè gli agenti non sono più obbligati a consumare al di sotto del livello di riferimento non sono più necessari vincoli alla ricchezza iniziale. Inoltre, viene a cadere la proprietà di un consumo corrente sempre superiore alla sua media passata. Intuitivamente, un valore di riferimento alto, riduce l'utilità degli agenti in particolare negli stati del mondo in cui non è possibile sostenere alti livelli di consumo. In tali stati gli agenti hanno incentivo a consumare di meno (al di sotto della reference), in modo da ridurre z e accrescere l'utilità futura. Questo tipo di strategia non è implementabile con la funzione di utilità (1.3a). Si noti che anche la funzione di utilità (1.1) impiegata nella tesi presenta tali caratteristiche. Il fatto che gli agenti possono consumare al di sotto del livello di riferimento implica che non debbano essere imposte restrizioni alla ricchezza iniziale degli agenti e che il consumo non presenti un trend sempre crescente rispetto alla sua media passata. Tali considerazioni saranno approfondite nel prossimo capitolo e analizzate all'interno del modello proposto nella tesi. Tuttavia, sembra opportuno fornire a questo punto una spiegazione del perchè la loss aversion produce un profilo di consumo diverso da quanto previsto dalla teoria del reddito permanente. Si consideri a questo proposito il modello con loss aversion nel consumo proposto da Bowman, Minehart e Rabin (1999). Il problema di ottimo dell'agente rappresentativo è il seguente:

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} w(r_1) + v(c_1 - r_1) + \mathbb{E}(w(r_2) + v(c_2 - r_2)) & \quad (1.4) \\ \text{s.t. } c_1 + c_2 = y_1 + y_2 & \\ r_2 = (1 - \alpha)r_1 + \alpha r_2 & \end{aligned}$$

dove $w(\cdot)$ è la tradizionale funzione di utilità strettamente concava, $v(\cdot)$ è una funzione di utilità con loss aversion e $0 \leq \alpha \leq 1$. I risul-

tati ottenuti dagli autori possono essere così sintetizzati: l'agente loss averse è risk seeking quando consuma al di sotto della reference è quindi preferirà concentrare le perdite in un periodo piuttosto che suddividerle fra più periodi in contrasto con la teoria del reddito permanente che prevede un consumo stabile nel tempo; l'agente è incentivato a risparmiare di più nel primo periodo così da accrescere la possibilità di consumare al di sopra della reference nel secondo periodo producendo così quel risparmio precauzionale che la teoria del reddito permanente non è in grado di spiegare; l'incertezza unita all'atteggiamento risk seeking fa sì invece che l'agente preferisca concentrare le perdite nel secondo periodo incentivando così il consumo nel primo a discapito del risparmio. Infatti, quando gli agenti fronteggiano elevata incertezza nella distribuzione del reddito futuro, il consumo risponde in maniera asimmetrica a cambi attesi nel reddito futuro. Infatti, con elevata incertezza sul reddito futuro, gli agenti tendono a non consumare al di sotto della reference anche se si aspettano un reddito futuro al di sotto di essa, mentre, un incremento atteso del reddito futuro produce un incremento del consumo corrente. Ne segue che, date le condizioni economiche, la loss aversion può produrre quei comportamenti che la teoria del reddito permanente e quella dell'utilità non separabile nel tempo precedentemente definite faticano a spiegare.

1.4 Eterogeneità e Loss aversion

L'eterogeneità nelle preferenze in modelli con loss aversion è stata introdotta da Berkelaar e Kouwenberg (2008). Gli autori considerano un'economia con un'agente CRRA e due agenti loss averse rispetto alla loro ricchezza finanziaria che differiscono nella reference e nella loro ricchezza iniziale. Il modello considerato nel presente lavoro di

tesi differisce dal modello in Berkelaar e Kouwenberg (2008) per alcuni aspetti essenziali: primo, nel presente lavoro si assumerà l'esistenza di un continuo di agenti che differiscono nel loro livello di reference e non un numero discreto di agenti. Secondo, mentre Berkelaar e Kouwenberg (2008) assumono agenti dotati di utilità CRRA sul consumo e s-shaped utility sulla ricchezza, nella presente tesi si assume che gli agenti siano loss averse sul consumo e quindi, diversamente da Berkelaar e Kouwenberg (2008), il prezzo di mercato del rischio e il tasso risk-free non sono costanti nel modello della tesi. Il considerare un continuo di agenti produce inoltre una diversità rispetto ai modelli standard con loss aversion. Yogo (2008) considera un modello con agente rappresentativo e agenti loss averse sul consumo concentrandosi sulle sole scelte di portafoglio, aggirando così il problema dell'esistenza dell'equilibrio. L'assenza di eterogeneità in Yogo (2008) produce un pricing kernel discontinuo nell'endowment aggregato dell'economia e conseguenti quantità di equilibrio, in particolare il tasso risk free, troppo volatili rispetto alle loro controparti empiriche. Nel seguito della tesi sarà mostrato come un continuo di agenti, rende il pricing kernel una funzione continua del dividendo aggregato migliorando le proprietà empiriche del tasso privo di rischio. Il modello nel presente lavoro di tesi è anche strettamente legato alla letteratura sull'eterogeneità degli agenti economici. Recentemente, un numero sempre maggiore di articoli si propone di studiare l'effetto dell'eterogeneità nelle preferenze in equilibrio. Da un punto di vista empirico è infatti indubbio che l'eterogeneità è una caratteristica prevalente dei mercati finanziari. Da un punto di vista tecnico l'eterogeneità rappresenta un significativo passo in avanti rispetto all'economia caratterizzata da un agente rappresentativo. Il modello con agente rappresentativo introdotto da Lucas (1978) semplifica di molto la costruzione dell'equilibrio e rende possibile spie-

gare l'effetto di preferenze, dotazioni e tecnologie sui prezzi degli asset. Tuttavia tale tipo di modello non consente di analizzare l'effetto che distribuzione e redistribuzione della ricchezza hanno sull'allocazione dei titoli e dunque sui loro rendimenti in equilibrio. Al contrario, quando gli agenti sono eterogenei, l'avversione al rischio aggregata dipende dallo stato dell'economia anche se i singoli agenti hanno avversione al rischio costante. Modifiche nello stato dell'economia influenzano la ricchezza degli agenti singoli e dunque la loro allocazione ottimale in titoli che di conseguenza modificherà i loro rendimenti. Tale analisi non può essere effettuata in un'economia con agente rappresentativo. L'effetto dell'eterogeneità in equilibrio è stato originariamente studiato da Dumas (1989) e Wang (1996). Dumas studia un'economia con produzione con due agenti e analizza numericamente le proprietà dell'equilibrio. Wang studia un'economia di puro scambio enfatizzando le condizioni necessarie a determinare i prezzi degli asset in forma chiusa. La letteratura è stata quindi estesa con modelli come Chan e Kogan (2002) e Kiourous e Zapatero (2009). Chan e Kogan studiano un'economia in tempo continuo con infiniti agenti dotati di preferenze del tipo - Catching up with the Joneses che differiscono per la curvatura della funzione di utilità. Gli autori mostrano che tale economia eterogenea produce risultati migliori, in termini di proprietà degli asset, rispetto ad una comparabile economia omogenea. In particolare, l'eterogeneità nelle preferenze è in grado di produrre rendimenti azionari in eccesso rispetto al tasso privo di rischio e volatilità controciclica in eccesso rispetto ai fondamentali dell'economia. Kiourous e Zapatero studiano la versione in tempo discreto dell'economia di Chan e Kogan dove la distribuzione dell'avversione al rischio è calibrata in base alle stime empiriche di Kimball, Sahm and Shapiro (2008). Gli autori mostrano che quando l'avversione a rischio è calibrata su dati empirici il mod-

ello non produce risultati significativamente diversi da un'economia omogenea. Il modello della presente tesi si ispira a Chan e Kogan (2001) nel modo in cui viene trattata l'eterogeneità. Infatti, il modo in cui Chan e Kogan modellano l'eterogeneità è altamente conveniente a livello computazionale. Gli autori costruiscono infatti l'agente rappresentativo (un pianificatore sociale) della loro economia come media ponderata con pesi strettamente positivi delle funzioni di utilità individuali. Tradizionalmente tali pesi sono determinati endogenamente in letteratura il che complica drasticamente la soluzione del modello. L'innovazione di Chan e Kogan sta nel fissare esogenamente tali pesi sfruttando la relazione esistente tra il problema del pianificatore sociale e l'equilibrio competitivo. Il pianificatore massimizza una media ponderata delle utilità dei singoli individui in modo che l'allocatione risultante sia Pareto ottima. Nel problema competitivo ogni agente massimizza la sua funzione di utilità separatamente e i prezzi di mercato sono poi determinati dall'eguaglianza tra domanda e offerta. Le soluzioni dei due problemi sono uguali se le condizioni di primo ordine sono uguali e, in particolare, le condizioni di primo ordine sono uguali se il peso che il pianificatore sociale assegna ad un dato agente è uguale al reciproco del moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo di bilancio dello stesso agente nel problema competitivo. Poiché tale moltiplicatore è funzione della ricchezza del singolo agente, ne risulta una relazione biunivoca tra i pesi del social planner e la ricchezza iniziale degli agenti per cui fissare pesi o ricchezza è esattamente la stessa cosa. Non vi è inoltre perdita di generalità perché la ricchezza iniziale è sempre ottenibile come prezzo al tempo zero della strategia di consumo di ogni agente con notevoli semplificazioni computazionali. L'approccio seguito nella presente tesi è esattamente quello di Chan e Kogan con il vantaggio che lo studio dell'effetto di diverse distribuzioni

iniziali di ricchezza può essere realizzato semplicemente utilizzando diverse funzioni di peso nel problema del social planner. Si noti infine che la critica di Kiourous e Zapatero a Chan e Kogan non è applicabile nel contesto della presente tesi. Infatti, non è possibile confrontare gli output di un modello economico con eterogeneità e loss aversion con i risultati di una corrispondente economia omogenea poichè senza eterogeneità l'equilibrio economico non esiste.

Il resto della tesi è strutturato nel modo seguente: nel secondo capitolo si descrive il modello economico di riferimento e si analizzano tutte le quantità di equilibrio; nel terzo capitolo si mostrano i risultati di un'analisi quantitativa, i test econometrici per la validazione empirica del modello e le conclusioni finali riguardanti considerazioni generali e possibili estensioni.

Capitolo 2

Il modello economico

In questo capitolo si illustrerà il modello economico oggetto di studio nella presente tesi e si formalizzeranno i risultati descritti nell'introduzione. La metodologia per la risoluzione di modelli economici in tempo continuo è illustrata, fra altri, in Duffie (2008) e Karatzas e Shreve (1998) a cui ci si riferisce implicitamente in tutto il capitolo. Ulteriori riferimenti, quando necessari, saranno indicati nel corso del capitolo.

2.1 Il mercato finanziario

Si consideri un'economia di puro scambio e uno spazio completo di probabilità definito da $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dove Ω è il set degli stati di natura con generico elemento ω ; \mathcal{F} la sigma algebra degli stati di natura osservabili e \mathbb{P} la misura di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) comune a tutti gli agenti. Sia B un moto Browniano su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'economia ha orizzonte infinito. Un solo bene di consumo è usato come numerario dell'economia. Tutte le quantità analizzate si intendono misurabili rispetto a \mathcal{F} . Sul mercato finanziario sono disponibili due opportunità di investimento: un titolo localmente privo di rischio con offerta netta nulla e un titolo rischioso

con offerta unitaria. Il titolo privo di rischio ha prezzo S_t al tempo t con $S_0 = 1$.

Come mostrato in Karatzas e Shreve (1991), quando gli agenti sono dotati di un livello di riferimento nella funzione di utilità bisogna distinguere due casi: se tutti gli agenti consumano sempre al di sopra del livello di riferimento il prezzo del titolo privo di rischio può essere descritto solo tramite il tasso di interesse pagato dal titolo stesso, mentre in caso contrario, tale prezzo deve essere decomposto in una componente assolutamente continua e una componente singolarmente continua. Inoltre, per evitare opportunità di arbitraggio, anche il prezzo degli altri titoli nell'economia dovrà necessariamente incorporare tale componente singolarmente continua. Come visto nel capitolo precedente, in un modello con loss aversion gli agenti possono consumare una quantità sia maggiore sia inferiore alla loro reference e questo implica la necessità di determinare, in equilibrio, le parti singolari dei prezzi di entrambi gli asset.

Formalmente, il processo S_t è misurabile rispetto alla sigma algebra \mathcal{F}_t con variazione totale finita e può essere quindi decomposto in due parti: una assolutamente continua e una singolarmente continua, S_t^{ac} e S_t^{sc} rispettivamente. Più precisamente:

$$r_t = \frac{\frac{d}{dt} S_t^{ac}}{S_t}, \quad A_t = \int_0^t \frac{\frac{d}{dt} S_t^{sc}}{S_t} \quad (2.1)$$

tale che

$$S_t = \exp \left\{ \int_0^t r_u du + A_t \right\} \quad (2.2)$$

per un dato processo $r \in \mathbb{R}$ che sarà determinato in equilibrio. A_t è il processo singolarmente continuo con derivata nulla, nel senso di Lebesgue, in quasi tutti gli istanti di tempo. Karatzas e Shreve (1991)

mostrano che se il componente singolare A_t non è dato da (2.1) il modello sarà caratterizzato da opportunità di arbitraggio sui mercati. Nel caso in cui S_t è assolutamente continuo, $A_t = 0$ e il prezzo degli asset evolve in modo standard e in particolare, l'asset privo di rischio rappresenta un conto di risparmio con tasso di interesse istantaneo al tempo t dato da r_t . Il processo A_t sarà determinato in equilibrio. L'endowment aggregato (o dividendo aggregato) dell'economia, D_t , segue un moto geometrico Browniano:

$$dD_t = \mu_D D_t dt + \sigma_D D_t dB_t \quad (2.3)$$

con $\mu_D \in \mathbb{R}^+$ e $\sigma_D \in \mathbb{R}^+$. Il prezzo del titolo rischioso al netto del dividendo, P_t , è continuo, strettamente positivo e segue la seguente legge di moto:

$$dP_t = -D_t dt + P_t[\mu_t dt + \sigma_t dB_t + dA_t] \quad (2.4)$$

per drift μ_t , e volatilità σ_t , da determinare in equilibrio. Il processo stocastico:

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \quad (2.5)$$

definisce il rendimento in eccesso per unità di rischio (Sharpe ratio) e sarà determinato in equilibrio. L'economia è popolata da un continuo di agenti loss averse con funzione di utilità:

$$U(c_t, z) = \begin{cases} A \frac{(c_t - z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c_t \geq z \\ -B \frac{(z - c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c_t < z \end{cases} \quad (2.6)$$

con $\gamma \in [0, 1)$ e le proprietà specificate nell'introduzione. L'ultima caratteristica del modello rimasta da specificare è l'eterogeneità fra gli agenti. Si assume che gli agenti differiscono per il loro livello di

reference z . Più precisamente, $z \in \widehat{Z} = [0, \bar{z}]$ per un dato estremo superiore¹ $\bar{z} > 0$.

2.2 Equilibrio economico

Per caratterizzare l'equilibrio si seguirà lo schema risolutivo proposto in Chan e Kogan (2001): si analizzerà prima il problema del social planner in modo da ottenere il consumo ottimo per ogni agente. Sarà quindi costruita un'economia Arrow Debreu che supporta l'allocazione ottima trovata al punto precedente e, come ultimo step, l'equilibrio Arrow Debreu sarà implementato come equilibrio di un'economia a scambi sequenziali (sequential trade economy). Il social planner distribuisce l'endowment aggregato fra gli agenti in modo tale che l'allocazione finale sia Pareto ottima. Si assume, senza perdita di generalità, che l'economia sia popolata da un solo agente per ogni livello di reference z e che $g(z)$ sia il peso che il social planner assegna al singolo tipo z . Data la distribuzione di pesi $g(z)$ il problema di ottimo del social planner è il seguente:

$$\sup_{\{c_t(\cdot; z)\}} \mathbb{E}_0 \int_0^\infty \left[e^{-\rho t} \int_0^{\bar{z}} g(z) U(c_t(\cdot; z)) dz \right] dt \quad (2.7)$$

$$s.t. \int_0^{\bar{z}} c_t(\cdot; z) dz \leq D_t, \quad c_t(\cdot; z) \geq 0 \quad \forall t$$

Poichè non si considerano trasferimenti intertemporali di risorse e i mercati sono completi per ipotesi, il problema di ottimo può essere ridotto ad un problema statico. Più precisamente, in ogni istante di

¹ \bar{z} potrebbe anche essere infinito senza alcuna modifica alla soluzione generale proposta.

tempo il social planner massimizza:

$$\int_0^{\bar{z}} g(z)U(c_t(\cdot; z)) dz \quad (2.8)$$

soggetto agli stessi vincoli del problema (2.7). Il consumo ottimo per ogni agente di tipo z è dato nella proposizione seguente.

Proposition 1 *Sia $x(D_t)$ il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo delle risorse del problema (2.7). Il consumo ottimo per l'agente di tipo z è dato da:*

$$C_t^*(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x(D_t) > \bar{x}(z) \\ z + g(z)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{x(D_t)}{A}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{se } x(D_t) \leq \bar{x}(z) \end{cases} \quad (2.9)$$

dove $\bar{x}(z)$ è implicitamente definito nell'equazione seguente:

$$f(\bar{x}, z) = g(z)^{\frac{1}{\gamma}} x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} A^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} - xz + g(z)B \frac{z_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} = 0. \quad (2.10)$$

Proof. Appendice A ■

Per assicurare l'esistenza dell'equilibrio sui mercati è necessario che in ogni istante di tempo almeno un subset di agenti consumi in modo da assorbire la dotazione complessiva dell'economia. Come condizione necessaria si richiede dunque che $g(z)$ non tenda a zero quando $z \rightarrow 0$. Segue che, $\bar{x}(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow 0$ e, data la strategia ottima in (2.9) questo implica l'esistenza di un subset di agenti con consumo positivo a prescindere dal valore di x e quindi di D_t . In questo senso, l'eterogeneità su z e la condizione precedente su $g(z)$, assicurano l'esistenza dell'equilibrio sui mercati finanziari. Ne deriva che non tutte le funzioni che assegnano un peso agli agenti sono compatibili con l'esistenza dell'equilibrio. Per questo motivo nel resto della tesi saranno studiate due diverse economie: come caso benchmark si considera un'economia

dove $g(z) = 1 \forall z$ e per finire si analizzeranno gli effetti di diverse funzioni che assegnano il peso agli agenti sulle quantità di equilibrio².

L'allocazione Pareto ottima in Proposition 1 può essere supportata come equilibrio di un'economia Arrow Debreu dove gli agenti scambiano asset contingenti che pagano 1 in un dato stato del mondo e 0 altrimenti. Sia H_t la state price density di tale economia. H_t rappresenta il prezzo di un'unità di consumo in un dato stato e, in equilibrio, è determinata dall'utilità marginale dell'agente rappresentativo valutata all'endowment aggregato. Affinchè non ci siano opportunità di arbitraggio nel modello la state price density deve necessariamente soddisfare:

$$dH_t = -r_t H_t dt - \theta_t H_t dt - H_t dA_t. \quad (2.11)$$

La funzione di utilità dell'agente rappresentativo è definita come:

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} U^{RA}(D_t, z) \right] dt$$

con

$$U^{RA}(D_t, z) = \int_0^{\bar{z}} U(c_t^*(D_t, z)) dz.$$

L'equilibrio implica che

$$\frac{H_s}{H_t} = e^{-\rho(s-t)} \frac{\partial U^{RA}(D_s, z) / \partial D_s}{\partial U^{RA}(D_t, z) / \partial D_t}$$

e dalle condizioni di primo ordine del problema del social planner risulta che

$$\partial U^{RA}(D_t, z) / \partial D_t = x(D_t) \quad (2.12)$$

²Due considerazioni sono utili a questo punto: assumere l'esistenza di una funzione di peso equivale ad assumere l'esistenza di una distribuzione iniziale della ricchezza che supporta la funzione di peso in equilibrio; l'ipotesi di distribuzione uniforme non è nuova nella letteratura e si trova, per esempio in Weinbaumn (2010).

e quindi

$$\frac{H_s}{H_t} = e^{-\rho(s-t)} \frac{x(D_s)}{x(D_t)}. \quad (2.13)$$

Data la state price density possiamo calcolare il prezzo degli asset sul mercato azionario come

$$P_t = \mathbb{E}_t \int_t^\infty \left[e^{-\rho(s-t)} \frac{\partial U^{RA}(D_s, z) / \partial D_s}{\partial U^{RA}(D_t, z) / \partial D_t} D_s ds \right]. \quad (2.14)$$

Infine, è conveniente definire l'avversione al rischio aggregata dell'economia, $ARRA(D_t)$, in termini dell'utilità marginale dell'agente rappresentativo come segue

$$ARRA(D_t) = -D_t \frac{\partial^2 U^{RA}(D_t, z) / \partial D_t^2}{\partial U^{RA}(D_t, z) / \partial D_t}. \quad (2.15)$$

2.3 Caratterizzazione dell'equilibrio ed eterogeneità

Il profilo di consumo ottimo associato alla funzione s-shaped è discontinuo, o superiore alla reference o zero. In ogni istante di tempo l'endowment aggregato, D_t , determina, attraverso la market clearing il valore di equilibrio di $x(\cdot)$. Tutti gli agenti con $\bar{x}(z) \geq x(\cdot)$ consumano al di sopra della loro reference mentre tutti gli agenti con $\bar{x}(z) < x(\cdot)$ consumano zero. $x(\cdot)$, come si vedrà successivamente, è decrescente nell'endowment aggregato e quindi l'agente loss averse consuma solo quando le risorse dell'economia sono sufficienti a finanziare un consumo al di sopra della reference. Inoltre, $x(\cdot)$ è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo delle risorse e, dalle condizioni di primo ordine, coincide con il prezzo del consumo in un dato stato. Di conseguenza l'agente loss averse consuma solo negli stati del mondo

in cui il consumo non è troppo costoso. Ancora, la strategia di consumo degli agenti loss averse può essere analizzata dal punto di vista del pianificatore sociale. Poichè consumi inferiori a z producono utilità negativa, il pianificatore preferisce assegnare il consumo agli agenti che lo valutano usando la parte concava della funzione di utilità in modo da massimizzare il welfare.

Ulteriori caratteristiche del profilo di consumo dell'agente loss averse possono essere analizzate studiando il corrispondente problema di ottimo concavificato. Intuitivamente, una funzione non globalmente concava può essere concavificata considerando la più piccola funzione concava che domina la funzione di partenza. Nel nostro caso la funzione di utilità $U(c_t, z)$ è convessa-concava. Si consideri dunque la più piccola funzione concava $U_c(c_t, z)$ tale che $U_c(c_t, z) \geq U(c_t, z)$ per ogni c_t . L'idea è quella di massimizzare $U_c(c_t, z)$ e non $U(c_t, z)$ con il vantaggio che, essendo $U_c(c_t, z)$ globalmente concava, le condizioni di primo ordine per un massimo saranno necessarie e sufficienti. Ovviamente, perchè la procedura sia corretta occorre dimostrare che il massimo della funzione $U_c(c_t, z)$ coincide con quello della funzione di partenza $U(c_t, z)$. A questo proposito è sufficiente mostrare che i valori di x per i quali le due funzioni non coincidono non possono mai essere un massimo di $U(c_t, z)$. A questo punto è utile costruire il maggiorante concavo di $U(c_t, z)$. Si noti che esisterà un punto, $\hat{c} \in [z, \infty)$, dove la linea retta uscente dal punto $(0, U(0))$ e la parte concava di $U(c_t, z)$ sono tangenti. Sia quindi $U_c(c_t, z)$ la funzione che assume valori da $(0, U(0))$ a $(\hat{c}, U(\hat{c}))$ per valori del consumo nell'intervallo $[0, \hat{c}]$ e che risulta uguale a $U(c_t, z)$ per valori del consumo superiori a \hat{c} . Formalmente,

$$U_c(c_t, z) = \begin{cases} -B \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (\hat{c} - z)^{-\gamma} c_t & \text{se } c_t < \hat{c} \\ A \frac{(c_t - z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{se } c_t \geq \hat{c} \end{cases}$$

con \hat{c} implicitamente definito da

$$g(\hat{c}, z) = -A \frac{(\hat{c} - z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (\hat{c} - z)^{-\gamma} \hat{c} - B \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} = 0.$$

Data questa definizione, $U_c(c_t, z)$ è dunque il più piccolo maggiorante concavo dell'utilità originale (1.1) come mostrato nella figura successiva.

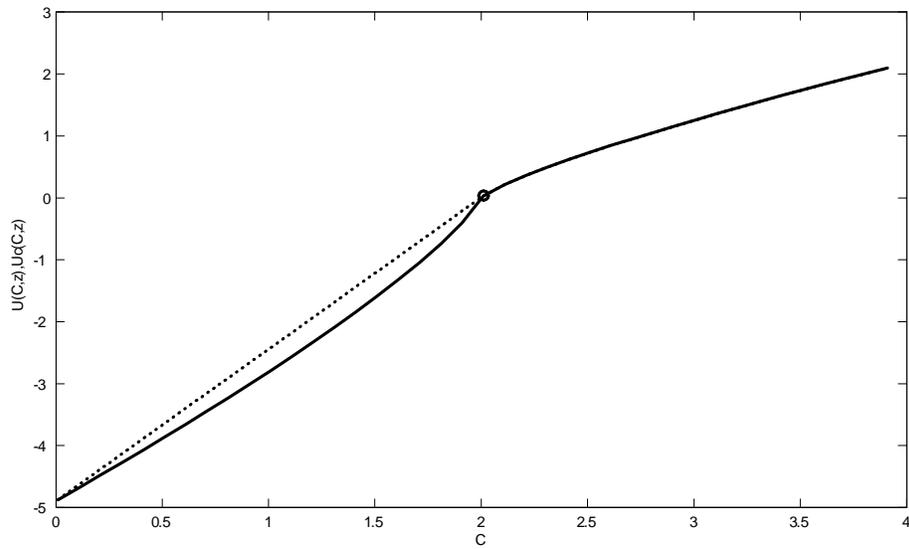


Figura 2-1: Utilità convessa-concava e utilità concavificata (linea a puntini) come funzione del consumo; $z = 2$; \circ identifica \hat{c} .

La soluzione del problema concavificato coincide con quella del problema non concavo poichè, intuitivamente, l'agente con utilità convessa-concava agisce sul mercato con l'obiettivo di evitare la parte convessa dell'utilità. E' immediato mostrare che $\hat{c} = z + \left(\frac{\bar{x}}{A}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ e quindi le due funzioni $f(\cdot)$ (definita in (2.10)) e $g(\cdot)$ sono equivalenti nel senso che identificano il valore della state price density in equilibrio e il corrispondente consumo ottimo al di sotto del quale la funzione concavificata è

lineare. Questo risultato conferma l'intuizione che il consumo ottimo non sarà mai nella regione in cui l'utilità originale e quella concavificata differiscono (cioè nel tratto lineare di $U_c(c_t, z)$) poichè, come già verificato, il consumo che massimizza $U(c_t, z)$ è 0 oppure un valore maggiore di \hat{c} e, in entrambi i punti, le due funzioni sono uguali per costruzione.

Infine, è possibile dimostrare che, data l'ipotesi di pesi uniformi, $\bar{x}(z)$ è una funzione monotona decrescente in z e quindi esiste $z^* \in \hat{Z}$ tale che tutti gli agenti con $z > z^*$ consumano zero e tutti gli agenti con $z \leq z^*$ consumano al di sopra della reference. Questo risultato è sintetizzato nel lemma successivo.

Lemma 2 *Sia $x(D_t)$ il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo delle risorse del problema (2.7), si assuma che $g(z) = 1 \forall z$ e sia $z^*(x)$ la funzione implicitamente definita da*

$$f(x, z^*) = 0 \quad (2.16)$$

con $f(\cdot)$ data in (2.10). Il consumo ottimo dell'agente di tipo z è dato da:

$$C_t^*(\cdot; z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z > z^*(x) \\ z + \left(\frac{x}{A}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{se } z \leq z^*(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

Proof. Appendice A ■

Si noti che, dato il lemma precedente, due sole cose possono accadere in ogni dato istante di tempo: *i*) la condizione $z \leq z^*(x)$ vale per ogni agente e tutti gli agenti consumano al di sopra della loro reference; *ii*) la condizione $z \leq z^*(x)$ vale solo per un subset di agenti e quindi agenti con consumo zero e agenti con consumo al di sopra della reference interagiscono sul mercato. Una volta riscritto il consumo ottimo in termini della reference è più semplice ottenere e risolvere la market

clearing in termini di x . Nel caso in cui tutti gli agenti consumano al di sopra della loro reference il vincolo di bilancio del problema (2.7) diventa

$$\int_0^{\bar{z}} \left(z + \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right) dz = D_t \quad (2.18)$$

che, risolto per x produce

$$x = A \left[\frac{D_t - \frac{1}{2}\bar{z}^2}{\bar{z}} \right]^{-\gamma}. \quad (2.19)$$

Consideriamo adesso il caso in cui solo un subset di agenti consuma al di sopra della loro reference. Il vincolo delle risorse diventa

$$\int_0^{z^*(x) < \bar{z}} \left(z + \left(\frac{x}{A} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right) dz = D_t. \quad (2.20)$$

In questo caso $z^*(x)$ e x devono essere determinate simultaneamente in equilibrio. In altre parole $z^*(x)$ e x risolvono il sistema di equazioni definito da (2.16) e (2.20). Si noti ora che, poichè tutte le quantità di equilibrio sono funzione dell'endowment aggregato D_t , si può determinare un valore di D_t , che da qui in poi sarà denominato D^* , tale che nel caso in cui $D_t \geq D^*$ tutti gli agenti consumano al di sopra della reference e quando $D_t < D^*$ solo un subset di agenti può farlo. D^* può essere facilmente determinato risolvendo (2.19) per D a $x = \bar{x}(\bar{z})$. Si ottiene

$$D^* = \frac{1}{2}\bar{z}^2 + \bar{z} \left(\frac{\bar{x}(\bar{z})}{A} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.21)$$

Si noti che x è una funzione continua dell'endowment aggregato. La continuità del pricing kernel è proprietà nuova in modelli di equilibrio con loss aversion. Per esempio, Yogo (2008) presenta un modello con loss aversion ma senza eterogeneità e riporta un pricing kernel discontinuo.

Una volta calcolato il valore di equilibrio di x per la completa caratterizzazione di tutte le quantità oggetto di analisi è necessario determinarne la dinamica. A tale fine è necessario calcolare le due derivate $x_D(D_t)$ e $x_{DD}(D_t)$ dove le lettere sottoscritte si riferiscono alle derivate di x rispetto alle variabili sottoscritte cioè l'endowment aggregato. Tali funzioni sono riportate nella seguente Proposition.

Proposition 3 *La funzione $x_D(D_t)$ è data da*

$$x_D(D_t) = \begin{cases} \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}x^{-\frac{1}{\gamma}-1}z^*(x)+z^*(x)z_x^*(x)+z_x^*(x)x^{-\frac{1}{\gamma}}} & \text{se } D_t < D^* \\ -\gamma \frac{x(\cdot)}{D_t - \frac{1}{2}\bar{z}^2} & \text{se } D_t \geq D^* \end{cases} \quad (2.22)$$

e la funzione $x_{DD}(D_t)$ è data da

$$x_{DD}(D_t) = \begin{cases} x_D(\cdot)N(x) & \text{se } D_t < D^* \\ -\gamma \frac{[x_D(\cdot)D_t - \frac{1}{2}\bar{z}^2 - x(\cdot)]}{D_t - \frac{1}{2}\bar{z}^2} & \text{se } D_t \geq D^* \end{cases} \quad (2.23)$$

dove

$$\begin{aligned} N(x) = & -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) x^{-\frac{1}{\gamma}-2} z^*(x) + \frac{1}{\gamma} x^{-\frac{1}{\gamma}-1} z_x^*(x) - z_x^*(x)^2 \\ & - z^*(x) z_{xx}^*(x) + \frac{1}{\gamma} z_x^*(x) x^{-\frac{1}{\gamma}-1} - z_{xx}^*(x) x^{-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

$z_x^*(x_t) = \frac{\partial z^*(\cdot)}{\partial x^2}$ e $z_{xx}^*(x_t) = \frac{\partial^2 z^*(\cdot)}{\partial x^2}$. $x_D(D_t)$ e $x_{DD}(D_t)$ sono discontinue a $D_t = D^*$. Infine, $x_D(\cdot)$ è sempre negativa e $x_{DD}(\cdot)$ sempre positiva.

Proof. Appendice A ■

Dalla proposizione precedente risulta chiaro che $x(D_t)$ è una funzione convessa della semi-martingala D_t . In aggiunta, le due funzioni

non sono uniformemente differenziabili in D come si evince in Figura 2-2 dove il pricing kernel, le sue derivate e z^* sono tracciate come funzione dell'endowment aggregato per $\gamma = 0.3$. Si noti in particolare che $x(D_t)$ è una funzione continua di D con kink a $D_t = D^*$ dove cioè $x(D_t)$ non è differenziabile.

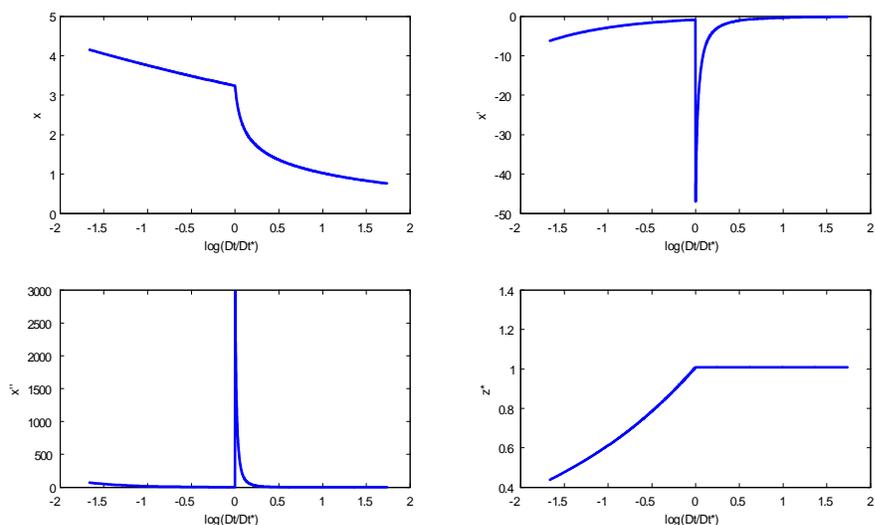


Figura 2-2: $x(D)$, $x_D(D)$, $x_{DD}(D)$ e $z^*(x)$ come funzioni di D_t .

Si noti che l'utilità marginale dell'agente rappresentativo è concava nell'endowment aggregato anche se le funzioni dei singoli agenti non lo sono. Infatti, l'utilità dell'agente rappresentativo è data dalla media ponderata, con pesi strettamente positivi, delle funzioni individuali valutate al consumo ottimo. Tale media può essere divisa in due parti: una media di funzioni concave (per gli agenti con $C_t^* > z$) e una media di costanti (per gli agenti con $C_t^* = z$). Ne segue che l'utilità dell'agente rappresentativo è concava in D_t .

Infine, come conseguenza della Proposition 3, il calcolo della dinamica di x richiede l'applicazione di una regola di Ito modificata che

tenga in conto i salti nelle derivate di x . Tale regola è chiamata Ito-Tanaka formula per funzioni convesse di semi-martingale e, insieme alla proposizione precedente, produce il lemma successivo:

Lemma 4 $x(D_t)$ in equilibrio può essere scritta come

$$\begin{aligned} x(D_t) = & x_0 + \int_0^t \left[x_D \mu_D D_t + \frac{1}{2} x_{DD} \sigma_D^2 D_t^2 \right] ds \quad (2.24) \\ & + \int_0^t x_D \sigma_D D_t dB_t \\ & + [x_D(D_+) - x_D(D_-)] L_t(D^*) \end{aligned}$$

dove $L_t(D^*)$ è il local time di D_t a D^* ed è dato da

$$L_t(D^*) = |D_t - D^*| - |D_0 - D^*| - \int_0^t \text{sgn}(D_s - D^*) dD_s \quad (2.25)$$

Proof. Appendice A. ■

A questo punto si noti che dall'analisi sull'equilibrio abbiamo che

$$H_t = \frac{e^{-\rho t} x(D_t)}{x_0} \quad (2.26)$$

Mettendo insieme il lemma precedente, (2.11) e (2.24) otteniamo

$$\theta_t = -\frac{x_D}{x} \sigma_D D_t \quad (2.27)$$

$$r_t = \rho - \frac{x_D}{x} \mu_D D_t - \frac{1}{2} \frac{x_{DD}}{x} \sigma_D^2 D_t^2 \quad (2.28)$$

$$A_t = -\frac{[x_D(D_+) - x_D(D_-)] L_t(D^*)}{x}. \quad (2.29)$$

Anche l'avversione al rischio aggregata dell'economia può essere calcolata come funzione di x e delle sue derivate come specificato nel lemma seguente.

Lemma 5 *L'avversione al rischio aggregata è data da*

$$ARRA(D_t) = -D_t \frac{x_D(D_t)}{x(D_t)}$$

Proof. *Appendice A* ■

Tutte le quantità di equilibrio, poichè funzioni di x_D e x_{DD} , saranno discontinue a $D_t = D^*$. Le proprietà di tale discontinuità saranno indagate nel capitolo successivo.

Infine, da un'applicazione del lemma di Ito sulla funzione di prezzo dell'economia seguono volatilità e rendimento azionario in eccesso in equilibrio.

Proposition 6 *La volatilità del mercato, σ_t , è data da:*

$$\sigma_t = \left[\frac{Q'(D_t)}{Q(D_t)} - \frac{x_D}{x} \right] \sigma_D D_t \quad (2.30)$$

dove:

$$Q(D_t) = \mathbb{E}_t \int_t^\infty [e^{-\rho(s-t)} x(D_s) D_s ds]$$

e

$$Q'(D_t) = \frac{\partial Q}{\partial D}.$$

Il rendimento in eccesso del mercato azionario è invece

$$\mu_t - r_t = \theta_t \sigma_t$$

Proof. *Appendice A* ■

E' opportuno notare che la volatilità dei rendimenti ha due componenti: il termine $Q'(D_t)/Q(D_t)$ cattura l'effetto di una variazione dell'endowment aggregato sul valore atteso scontato del prezzo futuro; il termine x_D/x cattura invece l'effetto dell'avversione al rischio ag-

gregata dell'economia sulla volatilità dei rendimenti. Infatti, il prezzo dei titoli in equilibrio è dato dal valore atteso dei flussi di cassa futuri prodotti dal titolo, scontato ad un tasso che tiene conto del rischio (e che quindi dipende dall'avversione al rischio dell'economia). Variazioni del dividendo aggregato producono quindi volatilità attraverso due canali. Supponiamo, per esempio, che vi sia un aumento del dividendo aggregato. Il valore atteso dei flussi di cassa futuri aumenta producendo un aumento del prezzo e quindi un aumento della volatilità. Inoltre, con l'aumento del dividendo aggregato gli individui diventano meno avversi al rischio e quindi scontano il futuro ad tasso più basso producendo un ulteriore aumento del prezzo e quindi ancora volatilità. Il secondo aspetto è importante perchè è quello che generalmente differenzia un'economia omogenea da una eterogenea. Infatti, poichè l'avversione al rischio in un'economia eterogenea è time varying anche se i singoli agenti hanno avversione al rischio costante, l'economia eterogenea riesce a produrre maggior volatilità rispetto all'economia omogenea attraverso l'effetto dell'endowment aggregato sull'avversione al rischio.

Tutte le quantità di equilibrio fin qui calcolate, premio al rischio, tasso privo di rischio, volatilità e rendimento azionario in eccesso sono funzioni di $x_D(\cdot)$ e quindi discontinue nell'endowment aggregato dell'economia.

2.4 Eterogeneità ed esistenza dell'equilibrio

E' importante, a questo punto della tesi, analizzare il ruolo svolto dall'eterogeneità nel garantire l'esistenza dell'equilibrio economico. Si

consideri, a questo proposito, un'economia con un solo agente rappresentativo e reference $z = z_1$. La proposizione 1 implica che in questo caso il consumo di tale agente sarà diverso da zero solo nel caso in cui $x \leq \bar{x}(z_1)$. Questo comporta che in alcuni stati del mondo la domanda di consumo sarà nulla a fronte di un'offerta positiva e che quindi il mercato non può essere in equilibrio. Si consideri ora un'economia popolata da due agenti: uno loss averse e uno con preferenze CRRA ($z = 0$). Dalla proposizione 1 otteniamo che entrambi gli agenti consumano nel caso in cui $x \leq \bar{x}(z_1)$ mentre in caso contrario solo l'agente CRRA consuma. In questo caso l'agente CRRA assorbe sempre tutta la dotazione dell'economia ma questo non è sufficiente a garantire l'esistenza dell'equilibrio. Quando l'agente CRRA è il solo con consumo non nullo, la condizione di equilibrio tra domanda e offerta si esprime come

$$x^{-\frac{1}{\gamma}} = D_t$$

che risolta per x produce $x = D_t^{-\gamma}$. Quando entrambi gli agenti consumano si ha invece

$$z + 2x^{-\frac{1}{\gamma}} = D_t$$

da cui si ottiene $x = \left(\frac{D_t - z}{2}\right)^{-\gamma}$. E' facile verificare che la prima state price density è valida per $D_t < D_1 = \bar{x}(z_1)^{-\frac{1}{\gamma}}$ mentre la seconda per $D_t > D_2 = z + 2\bar{x}(z_1)^{-\frac{1}{\gamma}}$ e che si ha $D_2 > D_1$. Per cui, per valori di D_t compresi tra D_1 e D_2 non esiste un valore della state price density per cui il mercato possa essere in equilibrio. Questo ragionamento può essere ripetuto per un numero arbitrario (ma discreto) di agenti con un livello di riferimento diverso. Un numero discreto di agenti rende dunque la state price density un processo a salti, con dei gap nel dominio del dividendo aggregato in cui la state price density non è definita. Il continuo di agenti invece annulla tali gap nel dominio

del dividendo aggregato rendendo la state price density una funzione continua di D_t . La continuità della state price density è condizione essenziale per l'esistenza dell'equilibrio economico. Infine si noti che, anche se la state price density è continua in D_t le sue derivate non lo sono. La discontinuità nelle derivate non altera tuttavia l'esistenza dell'equilibrio ma influisce solamente sulla dinamica della state price density e quindi sui rendimenti di equilibrio dei titoli.

Nella sezione successiva della tesi tutte le quantità di equilibrio precedentemente descritte saranno valutate quantitativamente per ottenere una prima descrizione empirica del modello.

Capitolo 3

Analisi numerica e test empirici

In questo capitolo sarà analizzata quantitativamente l'economia eterogenea con agenti loss averse introdotta nel capitolo precedente. La prima parte dell'analisi è dedicata allo studio delle quantità di equilibrio come funzioni dell'endowment aggregato dell'economia D_t . Lo studio sarà condotto sotto diverse ipotesi sulla funzione di peso del social planner, $g(z)$, in modo da valutare gli effetti della distribuzione iniziale di ricchezza sulle quantità di equilibrio. Infine, sarà proposta un'analisi delle proprietà statistiche dei rendimenti azionari generati dal modello che saranno confrontati con i rendimenti dello S&P 5000.

E' importante ricordare che tutti i risultati esposti sono generati dall'interazione di agenti avversi al rischio e agenti amanti del rischio. La loro interazione nell'economia produce il livello e la dinamica delle quantità di equilibrio che si vedranno nel capitolo.

3.1 Analisi numerica

Tutte le quantità di equilibrio sono funzione del solo endowment aggregato dell'economia e dei parametri del modello. Di seguito si presentano i parametri utilizzati nell'analisi quantitativa.

3.1.1 Scelta dei parametri

L'economia sviluppata nella tesi sarà implementata utilizzando i seguenti parametri:

Endowment		Preferenze					
μ_D	0.0184	γ	0.3	A	1	\bar{z}	1
σ_D	0.033	ρ	0.03	B	2.25		

Tabella 1: Parametri del modello

I parametri impiegati per la funzione di utilità sono quelli stimati da Tversky e Kahneman: $A = 1$, $B = 2.25$. μ_D e σ_D sono i parametri generalmente usati per replicare la dinamica del consumo aggregato riportato nel CEX dataset. Tali numeri sono pienamente confrontabili con Mehra e Prescott (1985), Constantinides (1990) e Barberis Huang e Santos (2001). L'eterogeneità è modellata assumendo $z \in [0, 1]$. $\bar{z} = 1$ assicura che massa totale degli agenti è normalizzata ad 1.

3.1.2 L'avversione al rischio relativa aggregata

In Appendice A, è possibile verificare che l'avversione al rischio è costante e pari a $\gamma/2$ quando $D_t < D^*$ e decrescente nell'endowment aggregato quando $D_t > D^*$. In Figura 3-1 si nota come effettivamente l'avversione al rischio aggregata mostra tale proprietà. Il motivo per cui risulta decrescente quando $D_t > D^*$ è intuitivo: l'avversione al

rischio di ogni agente con consumo positivo è decrescente nel suo livello di consumo e l'avversione aggregata, che in equilibrio è una media ponderata delle avversioni individuali al rischio¹, non può che ereditare tale proprietà. Quando invece $D_t < D^*$ nell'economia coesistono agenti propensi al rischio e agenti avversi al rischio e il motivo per cui l'avversione al rischio aggregato è costante va spiegato con cautela. Un aumento del dividendo aggregato produce due effetti: un set di agenti passerà da consumo zero a consumo positivo (da atteggiamento risk loving a risk aversion) con conseguente aumento dell'avversione al rischio aggregata; gli agenti con consumo già positivo vedranno invece crescere il loro livello attuale di consumo con conseguente riduzione della loro avversione al rischio individuale e quindi di quella aggregata. L'effetto totale dipende quindi dalla somma dei due effetti contrapposti. Poiché la funzione di peso del social planner è uniforme le due tipologie di agenti hanno lo stesso peso e i due effetti si cancellano a vicenda producendo un'avversione costante. Inoltre, l'avversione al rischio nel caso in cui $D_t > D^*$ è sempre maggiore di quella nel caso in cui $D_t < D^*$. Questo risultato è spiegato ancora una volta dalla presenza di agenti amanti del rischio quando $D_t < D^*$. Anche questo risultato è spiegato dall'interazione fra le due tipologie di agenti. La presenza degli agenti amanti del rischio quando $D_t < D^*$ riduce fortemente l'avversione al rischio dell'economia che risulta infatti sempre uguale a $\gamma/2$ come mostrato in Appendice A. Ne segue che l'economia eterogenea con agenti loss averse è equivalente, in termini di avversione al rischio aggregata, a un'economia omogenea con avversione al rischio $\gamma/2$. Tale risultato sarà importante per l'analisi della volatilità

¹Tal affermazione non è precisa: in realtà l'avversione al rischio aggregata è il reciproco della media ponderata delle tolleranze al rischio ma il concetto di base non cambia.

del mercato azionario.

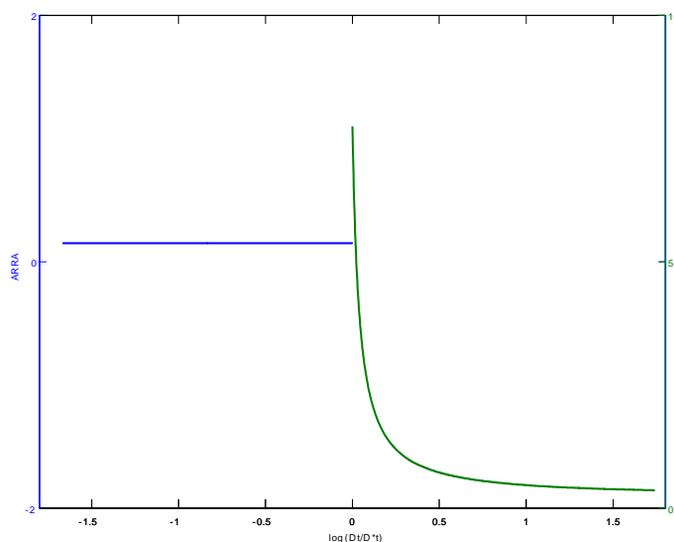


Figura 3-1: Avversione al rischio relativa aggregata come funzione di D_t .

3.1.3 Prezzo di mercato del rischio e tasso di interesse privo di rischio

La Figura 3-2 mostra il prezzo di mercato del rischio e il tasso di interesse privo di rischio come funzione del tasso di crescita realizzato dell'endowment aggregato. Il prezzo di mercato, che è una funzione riscalata dell'avversione al rischio, mostra le stesse proprietà dell'avversione al rischio per i motivi precedentemente descritti. Inoltre, il prezzo di mercato del rischio è sempre maggiore del prezzo di mercato in una corrispondente economia di Lucas nel caso $D_t > D^*$ e inferiore in caso contrario come mostrato in Appendice A. Il motivo è il seguente: quando $D_t < D^*$ la presenza degli agenti amanti del rischio riduce notevolmente la remunerazione che gli agenti chiedono per detenere titoli in equilibrio rispetto all'economia di Lucas mentre, quando

$D_t > D^*$ gli agenti desiderano essere compensati per il rischio che l'endowment aggregato si riduca costringendoli a consumare al di sotto della loro reference. Tale rischio non esiste nell'economia di Lucas, in cui gli agenti economici, dotati di funzione CRRA, non richiedono tale compenso aggiuntivo e producono quindi un prezzo di mercato del rischio più basso rispetto a quello prodotto da agenti loss averse. Il tasso privo di rischio è invece crescente nell'endowment aggregato quando $D_t > D^*$ e costante in caso contrario. Quando $D_t > D^*$ un aumento dell'endowment aggregato produce un aumento della domanda del titolo rischioso con un conseguente aumento del livello di indebitamento e una crescita dei tassi di interesse. Inoltre, una spiegazione diversa dello stesso fenomeno è data dalla dinamica dell'utilità marginale dei singoli agenti: poichè per $D_t > D^*$ l'utilità marginale di tutti gli agenti è decrescente nell'endowment aggregato essi preferiscono investire piuttosto che consumare un dollaro aggiuntivo producendo l'effetto sui tassi di interesse spiegato precedentemente. Quando invece $D_t < D^*$ si hanno due effetti contrapposti: gli agenti risk lover accrescono la domanda del titolo privo di rischio a seguito di incrementi nell'endowment aggregato provocando una riduzione del tasso privo di rischio mentre gli agenti avversi al rischio accrescono la domanda del titolo rischioso provocando un aumento del tasso privo di rischio. Anche in questo caso i due effetti si compensano esattamente producendo un tasso privo di rischio costante. La Figura 3-2 riportata di seguito svela tali proprietà.

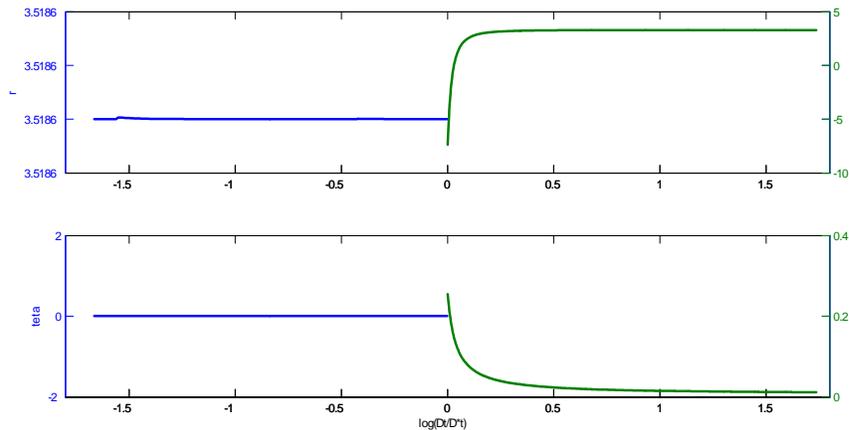


Figura 3-2: Prezzo di mercato del rischio e tasso risk-free come funzioni di D_t .

3.1.4 Volatilità e premio al rischio del mercato azionario

In questo paragrafo si analizza la volatilità dei rendimenti azionari e il rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio generati dal modello. La caratteristica di modelli di equilibrio con eterogeneità è che questi riescono, diversamente dai modelli con agente rappresentativo, a produrre volatilità in eccesso rispetto ai fondamentali dell'economia. Inoltre la volatilità del mercato in un'economia omogenea è sempre crescente nell'endowment aggregato mentre l'eterogeneità può rendere la volatilità una funzione decrescente dell'endowment aggregato. Tali risultati sono dettagliatamente discussi in Chan e Kogan (2002). In sintesi, un'economia eterogenea produce volatilità sia attraverso la volatilità dell'endowment aggregato sia attraverso la variazione dell'avversione al rischio aggregata. Un aumento dell'endowment aggregato fa sì che il valore atteso scontato dei dividendi futuri aumenti e con esso il prezzo corrente del titolo. La variazione del prezzo corrente fa crescere la volatilità sul mercato. L'aumento dell'endowment

aggregato riduce inoltre l'avversione al rischio e gli agenti scontano il futuro ad un tasso più basso; la riduzione del tasso di sconto produce una variazione aggiuntiva del prezzo del titolo e un ulteriore incremento di volatilità. Coerentemente con i precedenti risultati, il modello con agenti loss averse produce più volatilità quando $D_t > D^*$ poichè solo in questo range dell'endowment aggregato l'avversione al rischio è rilevante al fine di determinare la volatilità. Inoltre, la volatilità è crescente nell'endowment aggregato quando $D_t < D^*$ e decrescente in caso contrario, infatti, come mostrato nei paragrafi precedenti, nel caso in cui $D_t < D^*$ l'avversione aggregata è costante e uguale a $\gamma/2$. Queste proprietà sono immediatamente verificabili nella Figura 3-3. Il rendimento azionario in eccesso mostra, come atteso, la stessa dinamica della volatilità. Da notare che è molto basso rispetto ai dati empirici quando $D_t < D^*$ a causa della presenza degli agenti amanti del rischio in questo caso.

3.1.5 Il processo singolarmente continuo $A(t)$

Nella Figura 3-4 che segue è rappresentato il processo A_t definito da (2.25) e (2.29). Nella stessa figura sono raffigurati una simulazione dell'endowment aggregato e D^* .

Si noti che A_t è zero prima che l'endowment aggregato raggiunga D^* e dopo ciò, decresce quando il dividendo aggregato tocca il valore di threshold, sia nel caso in cui il dividendo aggregato raggiunge D^* da destra che nel caso in cui lo raggiunge da sinistra. Karatzas e Shreve (1991) interpretano questo effetto come incremento di inflazione nell'economia perchè i titoli valgono meno rispetto al consumo. Nonostante il termine inflazione sia leggermente improprio in tale contesto, poichè non si considera la moneta come bene di investimento, esso è utile

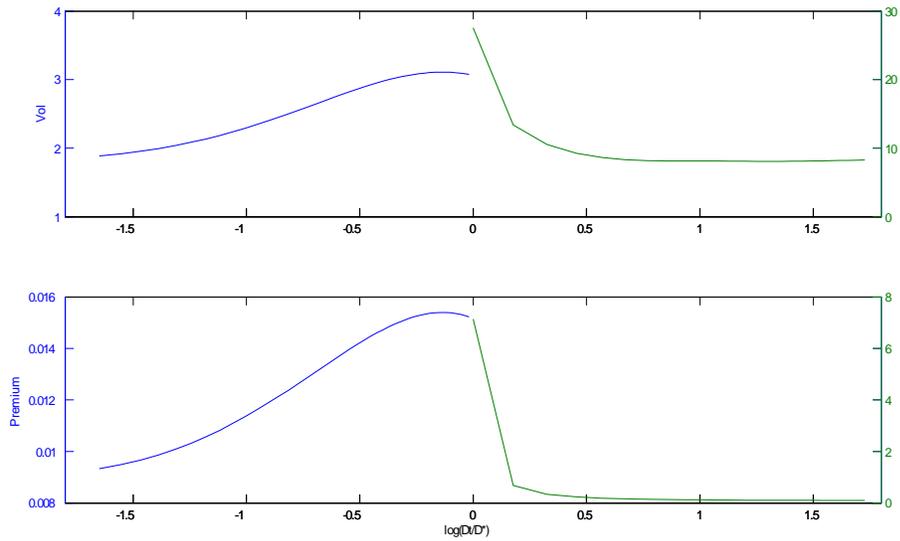


Figura 3-3: Volatilità del mercato azionario e rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio come funzione del tasso di crescita del dividendo aggregato.

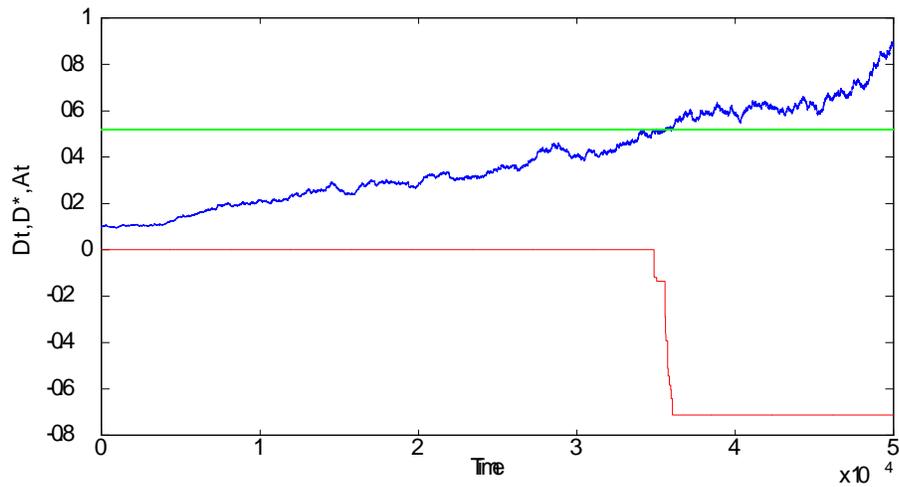


Figura 3-4: Una traiettoria simulata del dividendo aggregato (linea blu), D^* (linea verde) e il corrispondente processo singolarmente continuo $A(t)$ (linea rossa) per il caso $\alpha = 0$. $D_0 < D^*$.

a spiegare il comportamento del tasso privo di rischio che può essere negativo quando $D_t \simeq D^*$ e cioè quando l'inflazione è più alta. I tassi reali possono infatti essere negativi in periodi di alta inflazione. Si noti infine che il livello di eterogeneità influisce su A_t : scegliendo infatti $\bar{z} = \infty$ è facile mostrare che in questo caso si ha $D_t < D^* = \infty$ per ogni t e quindi $A_t = 0$. In questo caso si ottiene tuttavia un modello in cui un sottoinsieme di agenti consuma sempre zero a prescindere dallo stato dell'economia.

3.1.6 L'effetto di diverse distribuzioni della ricchezza iniziale

Una volta definito il problema di ottimo del social planner, l'effetto della distribuzione della ricchezza iniziale può essere analizzato semplicemente facendo variare la funzione di peso che il social planner assegna ai vari agenti nell'economia. Sappiamo infatti che esiste un mapping uno ad uno tra il peso che il social planner assegna ad un dato agente e la ricchezza iniziale dello stesso agente. Il metodo delle martingale impiegato per risolvere il modello della presente tesi ci fornisce poi un modo per ottenere la distribuzione iniziale della ricchezza utilizzando solo il consumo ottimo. Più precisamente, sia $w_0(z)$ la ricchezza iniziale di un agente con livello di riferimento z allora si ha

$$w_0(z) = \mathbb{E}_t \int_t^\infty \left[e^{-\rho(s-t)} \frac{x(D_s)}{x(D_0)} C_t^*(., z) ds \right]$$

e ovviamente il consumo ottimo C_t^* dipenderà anche dal peso che il social planner assegna all'agente con livello di riferimento z . Per valutare l'effetto della funzione di peso in questa sezione si assume che

$$g(z)^{\frac{1}{\gamma}} \sim \text{Exp}(1/\lambda)$$

con $\lambda = [10, 0.4]$. La funzione esponenziale è scelta solo per semplicità e perchè rispetta le condizioni su $g(z)$ enfatizzate nel capitolo precedente. Un'analisi non riportata mostra per esempio che l'utilizzo di diverse funzioni di peso rende problematica l'esistenza dell'equilibrio: assumendo $g(z)$ log-normale l'equilibrio non esiste mentre se $g(z)$ segue una distribuzione gamma l'equilibrio esiste solo per opportune scelte dei parametri della funzione gamma stessa. A prescindere dalla specifica funzione di peso utilizzata l'effetto di $g(z)$ non uniforme è intuitivo. Si è visto come la funzione uniforme renda l'avversione al rischio aggregata costante per $D_t < D^*$ e la volatilità del mercato crescente in D_t . Ci si aspetta dunque che una funzione non uniforme renda l'avversione al rischio aggregata non costante (crescente o decrescente rispetto al dividendo aggregato) e che questo produca dunque una diversa dinamica della volatilità del mercato. Inoltre, come anticipato nei capitoli precedenti, la funzione di peso corrisponde a diverse ipotesi sulla distribuzione iniziale della ricchezza fra gli agenti. E' facile verificare che, con distribuzione uniforme, il consumo ottimo $C_t^*(.; z)$ è crescente in z fino al punto di consumo nullo e poi rimane costante a zero. Ne segue che $w_0(z)$ sarà prima crescente e poi decrescente in z . Con distribuzione esponenziale invece, $C_t^*(.; z)$ è decrescente in z per valori piccoli di z e poi crescente fino al punto di consumo nullo. $w_0(z)$ mostrerà quindi un primo tratto decrescente diversamente da quanto visto nel caso uniforme. Infine, date le proprietà della distribuzione esponenziale, abbiamo che per $\lambda = 10$ la distribuzione di z (e quindi della ricchezza iniziale) è relativamente più concentrata intorno agli agenti con referenze alta rispetto al caso $\lambda = 0.4$. Nella Figura 3-5 seguente si mostrano l'avversione al rischio aggregata e il corrispondente premio al rischio nell'economia eterogenea con funzione di peso esponenziale.

Si noti che una funzione di peso non uniforme rende l'avversione

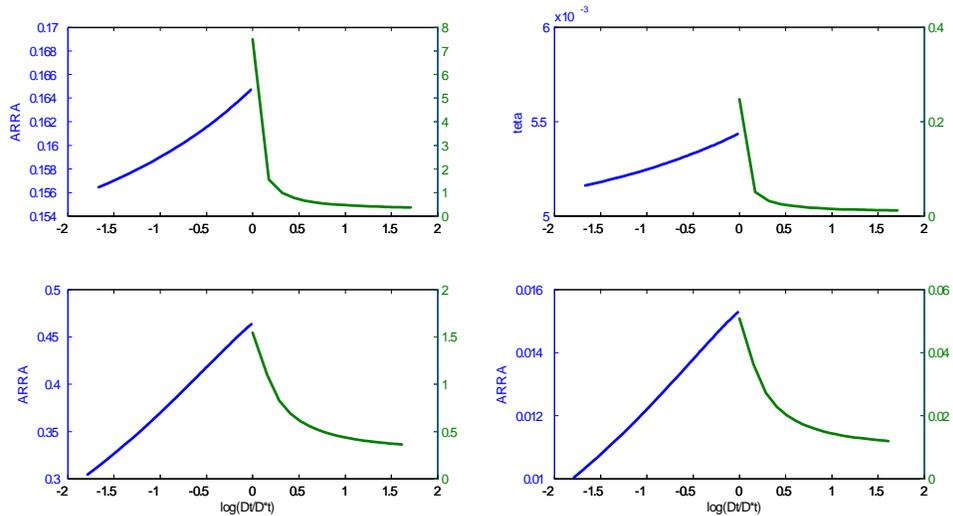


Figura 3-5: Avversione al rischio aggregata e premio al rischio con $\lambda = 10$ (prima riga) e $\lambda = .4$ (seconda riga).

al rischio aggregata una funzione crescente del dividendo aggregato negli stati del mondo in cui $D_t < D^*$. Inoltre, passando da $\lambda = 10$ a $\lambda = 0.4$ l'avversione al rischio aggregata cresce per $D_t < D^*$ e decresce in caso contrario. Intuitivamente, per $\lambda = 10$ il social planner assegna un peso maggiore agli agenti con reference elevata rispetto a $\lambda = 0.4$. Quando $D_t < D^*$ gli agenti con reference elevata tendono ad avere un consumo nullo e quindi influiscono negativamente sull'avversione al rischio aggregata. Viceversa, quando $D_t > D^*$ l'avversione al rischio individuale è crescente in z per cui agenti con reference elevata accrescono l'avversione al rischio aggregata dell'economia.

La diversa dinamica indotta dalla funzione esponenziale nell'avversione al rischio aggregata si ripercuoterà sulla dinamica della volatilità e del rendimento azionario in eccesso. La Figura 3-6 mostra volatilità e rendimento in eccesso per i due casi in analisi. Si noti che la funzione esponenziale rende volatilità e rendimento in eccesso funzioni decres-

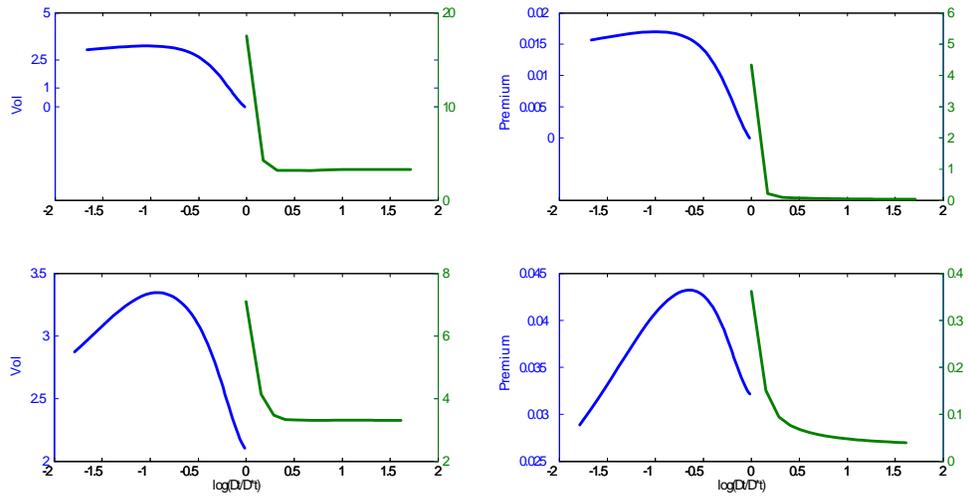


Figura 3-6: Volatilità del mercato e rendimento in eccesso per $\lambda = 10$ (prima riga) $\lambda = .4$ (seconda riga).

centi del dividendo aggregato per $\lambda = 10$ e funzioni prima crescenti e poi decrescenti per $\lambda = 0.4$. Tale risultato si spiega, come accennato, con la dinamica dell'avversione al rischio aggregata. Quando l'avversione al rischio aggregata è decrescente (e con variazione marginale anche decrescente) nel dividendo aggregato, come in Chan e Kogan (2002), l'effetto dell'avversione al rischio sulla volatilità diminuisce al crescere del dividendo aggregato producendo una volatilità decrescente nel dividendo aggregato. Quando invece l'avversione al rischio aggregata è crescente in D_t (con effetto marginale crescente) come nel caso in analisi, la volatilità può anche essere crescente nel dividendo aggregato a causa dell'effetto dell'avversione al rischio sui prezzi dei titoli, che è maggiore al crescere D_t .

3.2 L'effetto GARCH asimmetrico

Perchè un modello con agenti loss averse dovrebbe generare una volatilità asimmetrica? L'agente loss averse può diventare amante del rischio a seguito di uno shock negativo sull'endowment aggregato mentre continuerà ad essere avverso al rischio (se lo era precedentemente) a seguito di shock positivi. Ne segue che la sua strategia di investimento reagirà in modo asimmetrico a seguito di shock sull'endowment aggregato e, in particolare, ci si aspetta che tale agente investa in modo più aggressivo sul mercato quando è amante del rischio (e quindi a seguito di shock negativi). Una strategia più aggressiva produce generalmente variazioni del prezzo maggiori rispetto ad una strategia più conservativa e quindi maggiore volatilità. Secondo questo ragionamento ci si aspetta quindi che la volatilità reagisca in maniera asimmetrica rispetto a shock positivi e negativi sull'endowment aggregato e in particolare che shock negativi producano più volatilità rispetto a quelli positivi. Questo risultato è consistente con la dinamica dell'avversione al rischio aggregata: a seguito di aumenti dell'endowment aggregato l'avversione al rischio diminuisce producendo dunque un incremento del prezzo e maggiore volatilità; una riduzione dell'endowment aggregato produce una variazione dell'avversione al rischio più marcata in poichè gli agenti amanti del rischio diventano relativamente più importanti. Si noti ancora, che tale effetto è presente anche se la riduzione dell'endowment aggregato non conduce l'economia in stati del mondo di basso consumo ($D_t < D^*$). Infatti, la riduzione di D_t rende gli stati del mondo cattivi più probabili inducendo l'effetto asimmetrico sulla volatilità futura attesa. Si noti infine, che per livelli di D_t sufficientemente grandi e lontani da D^* l'effetto di una diminuzione dell'endowment aggregato sulle probabilità di eventi futuri negativi dovrebbe

essere trascurabile rendendo la volatilità meno asimmetrica. In altre parole, l'effetto asimmetrico dovrebbe indebolirsi quando l'endowment aggregato è sufficientemente grande e lontano da D^* . Tale effetto è coerente con i risultati empirici in Kim e Lee (2008).

Altra caratteristica saliente della volatilità dei rendimenti azionari è l'auto-correlazione. In altre parole, aumenti della volatilità corrente tendono a produrre maggiore volatilità futura. La volatilità in un modello con agenti loss averse dipende, come visto, dalla variazione nell'atteggiamento nei confronti del rischio degli agenti economici: più grande è il set di agenti che diventano amanti del rischio a seguito di shock negativi maggiore sarà la volatilità generata. Ne segue che la volatilità al tempo t dipenderà da z^* al tempo t , infatti z^* definisce proprio la grandezza del set² degli agenti amanti al rischio. La volatilità al tempo $t + 1$ dipenderà dalla variazione di z^* che a sua volta dipende da z^* al tempo t come si può verificare in Appendice A. Attraverso tale canale la volatilità è correlata nel tempo. Intuitivamente, in periodi di maggior volatilità, l'atteggiamento degli agenti economici nei confronti del rischio è più sensibile agli shock dell'endowment aggregato e tale maggior sensibilità influenza positivamente la volatilità futura. Ne risulta che la volatilità tende ad essere correlata positivamente nel tempo.

Per testare tali ipotesi è stata generata una serie storica di 23.000 dividendi giornalieri³ che sono stati utilizzati per calcolare una serie storica di prezzi, $\{p_t\}_{t=1,\dots,23000}$, usando la funzione di prezzo (2.14). I prezzi così ottenuti sono stati usati per calcolare una serie storica di

²Gli agenti amanti del rischio saranno infatti compresi nell'intervallo $[z^*, \bar{z})$ e quelli avversi al rischio nell'intervallo $[0, z^*)$.

³Si ritiene che tale serie storica sia sufficientemente lunga e che i momenti campionari siano una buona proxy di quelli della popolazione.

log-rendimenti r_t usando la formula

$$r_t = \log\left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right) \times 100.$$

I rendimenti così ottenuti sono gli input per la stima di un modello GARCH(1,1) ed EGARCH(1,1). Il modello GARCH(1,1) si basa sul seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2 \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + u_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

mentre il modello EGARCH si basa sulle equazioni

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2 \\ \ln(\sigma_t) &= \omega + \alpha_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_t} + \alpha_2 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_t} \right| + \alpha_3 \ln(\sigma_{t-1}) + u_t \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il secondo modello presenta due vantaggi: i) è in grado di cogliere la variazione asimmetrica nella volatilità attraverso i parametri α_1 e α_2 ; ii) poichè le equazioni sono espresse in termini dei logaritmi della varianza, la varianza condizionale sarà sempre positiva e la stima dell'EGARCH non necessita di constraints sui parametri tali che $\sigma_t > 0$, che invece sono necessari per la stima del GARCH. Per la stima dei due modelli si è utilizzato UCSD-Garch-Toolbox di Kevin Sheppard in Matlab.

La scelta di usare rendimenti giornalieri necessita di una breve discussione. Da un lato sappiamo che il GARCH è un fenomeno ad alta frequenza spesso misurato proprio in giorni; d'altra parte si ritiene che gli agenti modifichino il loro comportamento in modo abbastanza lento in genere ogni tre-sei mesi. La letteratura su internal habit o loss aversion legata alla ricchezza finanziaria ritiene che gli agenti valutino la loro ricchezza rispetto al benchmark di riferimento con frequenza

annuale. Tuttavia in questo caso si assume che gli agenti valutino il livello del loro consumo per cui una valutazione giornaliera non sembra così distante dalla realtà. Nella Tabella 2 sono riportate le stime del modello GARCH(1,1,) e, per facilitare i confronti, si mostrano anche i risultati della stima dello stesso modello usando i rendimenti giornalieri dello S&P 500. Il test di significatività è riportato in parentesi.

	α	β
<i>S&P500</i>	0.072	0.919
<i>LA_Economy</i>	0.0021	0.9978
	(4.5892)	(1995.9506)

Tabella 2: GARCH con log-rendimenti.

Tutti i parametri sono statisticamente significativi e $\beta = .99$ è indice di forte persistenza nella dinamica della volatilità. Nella Tabella 3 sono riportati invece i risultati della stima del GARCH asimmetrico.

	α_1	α_2	α_3
<i>S&P500</i>	-0.077	0.133	0.981
<i>LA_Economy</i>	-0.0013	0.0047	0.99
	(-2.1260)	(4.6258)	(9487.9251)

Tabella 3: EGARCH con log-rendimenti.

Si noti che il parametro ARCH α_2 e il parametro GARCH α_3 sono entrambi statisticamente significativi: Il clustering della volatilità è evidente a frequenza giornaliera e il parametro GARCH è indice di una forte componente di memoria nella volatilità. α_1 ha il segno atteso ed è inferiore ad α_2 in valore assoluto: se si assume per esempio che $\varepsilon_{t-1} > 0$ allora l'effetto sulla volatilità è $\alpha_1 + \alpha_2$ mentre nel caso in

cui $\varepsilon_{t-1} < 0$ l'effetto sulla volatilità è $-\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2$. Quindi, il modello è in grado di generare la relazione asimmetrica tra shock (le news del mercato) e la volatilità. I parametri α_1 e α_2 stimati, anche se significativi, sono tuttavia inferiori alle loro controparti empiriche. Per valutare la robustezza delle stime entrambi i modelli sono stati anche stimati usando come input per l'equazione dei rendimenti un processo AR(1) e non sono state rilevate differenze significative nei parametri.

Un'ultima considerazione di carattere empirico riguarda il comportamento del tasso privo di rischio. Una volta ottenuta la serie del dividendo aggregato è facile ottenere una serie storica del tasso privo di rischio usando l'equazione (28). La tabella 3 mostra i risultati di tale simulazione.

Min	Max	Mean	Vol
3.106%	6.587%	3.935%	0.832%

Tabella 4: Proprietà del tasso privo di rischio.

Infine, si noti che il modello produce un tasso di interesse dello stesso ordine di grandezza dei dati empirici con una volatilità molto bassa. E' interessante realizzare un confronto con i precedenti modelli di equilibrio con agenti loss averse. Il solo modello con cui è possibile effettuare un confronto è Yogo (2008) dove l'autore considera loss aversion nel consumo ma senza eterogeneità e con le sole scelte di portafoglio⁴. In un modello con loss aversion e senza eterogeneità il pricing kernel è discontinuo e produce un tasso privo di rischio troppo volatile se confrontato con i dati reali. Citando le parole dello stesso autore: *the reference-dependent model fails in an important way, predicting an excessively volatile risk-free rate...so the standard deviation*

⁴Non considerando esplicitamente la scelta del consumo si evita il problema di esistenza dell'equilibrio.

of the risk-free rate in the model is an order of magnitude higher than that of the T-bill rate. (pag. 136). Più precisamente il tasso privo in Yogo (2008) è -17.02% quando gli agenti consumano al di sotto della reference e 86.71% in caso contrario. Il problema, come anticipato nelle sezioni precedenti della tesi è che loss aversion senza eterogeneità produce un pricing kernel discontinuo che di conseguenza introduce maggior volatilità nel processo del tasso privo di rischio.

3.3 Conclusioni e possibili estensioni

Nella presente tesi si è analizzato un modello di equilibrio economico generale con agenti eterogenei dotati di funzione di utilità convessa/concava. La tesi fornisce un contributo principalmente teorico poichè mostra come l'eterogeneità sia essenziale per l'esistenza dell'equilibrio che invece non esiste in un'economia omogenea (con agenti identici). La tesi mostra quindi le condizioni sotto le quali tale funzione di utilità può essere utilizzata in modelli di equilibrio economico generale e non solo parziale come in molta della letteratura di riferimento elencata nel primo capitolo. Da un punto di vista quantitativo, il modello con agenti eterogenei e funzione di utilità convessa/concava riproduce alcuni fatti stilizzati dei rendimenti azionari. La volatilità del mercato mostra infatti componenti discontinue (jumps), è fortemente persistente e asimmetrica, ed in eccesso rispetto ai fondamentali dell'economia. Il rendimento azionario in eccesso rispetto al tasso privo di rischio mostra valori consistenti con i dati empirici.

Il modello nella presente tesi si presta ad alcune interessanti estensioni. Per esempio, una prima estensione potrebbe riguardare la costruzione della reference z . La reference costante potrebbe essere sostituita da una reference che dipende dal consumo passato in linea

con la letteratura di internal habit formation. Una possibile formulazione è dunque quella di Constantinides (1990) con reference definita da

$$z_t = z_0 e^{-\beta t} + \delta \int_0^t e^{-\beta(s-t)} c_s ds$$

con $z_0, \beta, \delta \in \mathbb{R}^+$. Tale dinamica della reference, anche se empiricamente più plausibile, presenta delle ovvie complicazioni analitiche: per determinare il consumo ottimo al tempo t l'agente deve tenere in considerazione l'effetto del consumo al tempo t sul livello futuro della reference e quindi sull'utilità marginale futura. Ne segue che, le condizioni di primo ordine per il consumo conteranno un componente che guarda al futuro con ovvie complicazioni analitiche poichè tale componente dovrà in qualche modo rientrare nelle quantità di equilibrio. Tuttavia il vantaggio di tale formulazione è che, con reference variabile, il valore di threshold del dividendo aggregato, D^* , diventa anch'esso variabile nel tempo producendo quindi maggiore alternanza tra periodi di alto e basso consumo rispetto a quanto possibile con D^* costante.

Da un punto di vista empirico si potrebbero invece testare le implicazioni riguardanti la dinamica dell'avversione al rischio degli individui. Infatti, in un recente articolo, Kimball, Sahm e Shapiro (2008) mostrano come stimare l'avversione al rischio degli agenti partendo dai dati sul consumo (CEX). Tale analisi potrebbe essere applicata al presente lavoro per testare le implicazioni del modello riguardanti la dinamica dell'avversione al rischio prodotte dalla funzione di utilità convessa/concava. Tutte queste estensioni vengono lasciate come futuri argomenti di ricerca.

Bibliografia

1. Barberis N., Huang M., Santos T, 2001, Prospect theory and Asset Prices, *Quarterly Journal of Economics* 116, 1–53.
2. Allais, M., 1953, Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, *Econometrica*, 21, 4, 503-546
3. Benartzi, S., Thaler, R., 1995, Myopic loss aversion and the equity premium puzzle, *Quarterly Journal of Economics* 110, 73–92.
4. Berkelaar, A., Kouwenberg, R., Post, G., 2004, Optimal portfolio choice under loss aversion, *Review of Economics & Statistics*, 84, 973–987.
5. Berkelaar A. and Kouwenberg R. 2009, From Boom 'till Boost: how Loss aversion affects Asset Prices, *Journal of Banking & Finance* 33, 6, 1005-1013.
6. Bowman, D., Minehart, D., and Rabin, M. 1999, Loss Aversion in a Consumption–Savings Model, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 38, 155–178.
7. Chan Y. L., Kogan L. 2002, Catching up with the Joneses: Heterogenous Preferences and the dynamics of Asset Prices, *Journal of Political Economy* 110, 6, 1255-1285.
8. Constantinides, G., 1990, Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle, *Journal of Political Economy* 98, 519–543.

9. Cox J. C. and C.-F. Huang 1989, Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process, *Journal of Economic Theory*, 49, 33-83.
10. Duffie D., 2008, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Third Edition.
11. Detemple, J. B., Karatzas, I., Non-Addictive habits: optimal consumption-portfolio policies, *Journal of Economic Theory*, 113, 265-285(21).
12. Karatzas, I., Shreve, S., 1991, Equilibrium Model with Singular Asset Prices, *Mathematical Finance* 1, 11-29.
13. Karatzas, I., Shreve, S., 1998, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag:New York.
14. De Giorgi E., Hens T., Levy H., 2011, Existence of capm equilibria with prospect theory preferences, *NCCR-Working Paper*, (no. 85).
15. Detemple J. B. and F. Zapatero,1991, Asset Prices in an Exchange Economy with Habit Formation, *Econometrica* 59, 1633-1657.
16. Detemple J. B. and F. Zapatero,1992, Optimal Consumption - Portfolio policies with Habit Formation, *Mathematical Finance* 2, 251-274.
17. Friedman, M., *A Theory of the Consumption Function*, Princeton University Press.
18. Isen, A. M., and Geva, N. 1987, The influence of positive affect on acceptable level of risk and thoughts about losing: The

- person with the large canoe has the large worry, *Organizational Behavior and Human Decision Process*, 39: 145-154.
19. Isen, A. M., and Patrick, R. 1983, Prospect Theory and the Risk-return Relation: Some Belgian evidence, *Academy of Management Journal*, 34: 215-225.
 20. Kahneman, D., Tversky, A., 1979, Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica* 47, 263–290.
 21. Kimball, M. S., Sahm, C. R. e Shapiro, M. D., 2008, Imputing risk tolerance from survey responses *Journal of the American Statistical Association*, 103(483), 1028-1038.
 22. Lucas, R., 1978, Asset prices in an exchange economy, *Econometrica* 46,1429–1445.
 23. McQueen, G., Vorkink, K., 2004, Whence garch? A preference-based explanation for conditional volatility, *Review of Financial Studies* 17, 915–949.
 24. Mehra R. and E. C. Prescott 1985, The Equity Premium Puzzle, *Journal of Monetary Economics*,15, 145-161.
 25. Motohiro Yogo 2008, Asset Prices Under Habit Formation and Reference-Dependent Preferences, *Journal of Business & Economic Statistics*,26,131-143.
 26. Nygren, T. E., Isen, A. M., Taylor, P. J. and Dulin J., 1996, The influence of positive affect on the decision rule in risk situation: Focus on outcome (and avoidance of loss) rather than probability, *Organizational Behavior and Human Decision Process*, 66: 59-72.

27. Tversky, A., Kahneman, D., 1992, Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty* 5,297–323
28. Sei-Wan Kim, Bong-Soo Lee, 2008, Stock Return, Asymmetric Volatility, Risk Aversion, and Business Cycle: Some New Evidence, *Economic Inquiry*, Vol 46, No.2, 131-148.
29. Todorov V., Tauchen G., 2010, Volatility Jumps, Economic Research Initiative at Duke, working paper num. 3.
30. Xiouros Costas, Zapatero Fernando, The Representative Agent of an Economy with external Habit-formation and Heterogeneous Risk Aversion, Working Paper.
31. Weinbaum D., 2010, Preference heterogeneity and asset prices: An exact solution, *Journal of Banking and Finance* 34 (9), 2238-2246.

Appendice A: Dimostrazioni

proof of Proposition 1. Il consumo ottimo in Proposition 1 viene dalle condizioni di primo ordine del problema del social planner. Si deve tuttavia considerare che l'utilità non è concava per cui le condizioni di primo ordine descrivono solo massimi locali. Se $c < z$ la funzione di utilità è convessa quindi dal teorema di Weirestrass sappiamo che il massimo si troverà agli estremi del dominio del consumo, 0 o z . Se invece $c \geq z$ la funzione di utilità è concava e possiamo quindi applicare il teorema di Kuhn Tucker (KT). Dalle condizioni di KT abbiamo:

$$\begin{aligned} A(c - z)^{-\gamma} &= x - y, \quad c \geq 0 \\ yc &= 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Dove x è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo delle risorse e y il moltiplicatore associato al vincolo di non-negatività. Risolvendo le condizioni di KT abbiamo i 3 seguenti candidati per un massimo locale:

$$C^* = \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = z \\ C_3 = z + g(z)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{x}{A}\right)^{-1/\gamma} \end{cases} \quad (3.3)$$

Abbiamo quindi bisogno di confrontare i massimi locali per determinarne uno globale. Si definisca a questo scopo la funzione $L(C^*, z)$ nel modo seguente

$$L(C^*, z) = g(z)U(C^*, z) - xC^*$$

Segue che $L(C_3, z) > L(C_2, z)$ se

$$Ag(z) \frac{g(z)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma} - x \left(z + g(z)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{x}{A}\right)^{-1/\gamma} \right) > -xz \Rightarrow \frac{1}{1-\gamma} - 1 > 0 \quad (3.4)$$

Dato che $\gamma < 1$ la precedente disuguaglianza è sempre verificata. Confrontiamo ora C_1 e C_2 . $L(C_1, z) \geq L(C_2, z)$ se

$$-Bg(z)\frac{(z)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \geq -xz \Rightarrow x > g(z)\frac{Bz^{-\gamma}}{(1-\gamma)} \quad (3.5)$$

Nel caso in cui la condizione precedente è vera, dobbiamo confrontare C_1 e C_3 , altrimenti, C_3 è la soluzione ottima. Confrontiamo ora C_3 e C_1 . $L(C_3, z) > L(C_1, z)$ se

$$Ag(z)\frac{g(z)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma} - x\left(z + g(z)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{x}{A}\right)^{-1/\gamma}\right) \geq -g(z)B\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

o

$$g(z)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}A^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{1-\gamma} - xz + g(z)B\frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} \geq 0$$

che è l'equazione riportata in Proposition 1. Si ha poi che

$$f\left(g(z)\frac{Bz^{-\gamma}}{(1-\gamma)}, z\right) = g(z)A^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{Bz^{-\gamma}}{(1-\gamma)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{\gamma}{1-\gamma} > 0 \quad (3.6)$$

e inoltre,

$$\frac{df(\cdot)}{dx} = -g(z)A^{\frac{1}{\gamma}}x^{-\frac{1}{\gamma}} - z < 0 \quad (3.7)$$

con $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, z) = -\infty$. Mettendo insieme tutta questa informazione su $f(\cdot)$ abbiamo che $f(\cdot)$ ha esattamente uno zero nell'intervallo $\left(g(z)\frac{Bz^{-\gamma}}{(1-\gamma)}, \infty\right)$. Chiamiamo questo punto \bar{x} con $f(\bar{x}, z) = 0$. Dato che $f(\cdot)$ è strettamente decrescente si ha che, $f(x, z) > 0$ per ogni $x < \bar{x}$ e $f(x, z) \leq 0$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Quindi, C_3 è ottimo per $x < \bar{x}$ e C_1 è ottimo per $x \geq \bar{x}$.

■

Proof of Lemma 1. La sola cosa da dimostrare è che nel caso in cui $g(z) = 1$ \bar{x} è una funzione decrescente di z . Differenziando

totalmente la (2.10) otteniamo

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{x - Bz^{-\gamma}}{Ax^{-\frac{1}{\gamma}} + z} \quad (3.8)$$

Con il segno di tale rapporto che dipende dal solo numeratore. Usando ancora (2.10) otteniamo

$$\frac{\gamma}{z} \left[(x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} A^{\frac{1}{\gamma}} + xz \right] = x - Bz^{-\gamma} \quad (3.9)$$

Poichè il lato sinistro è positivo il lato destro deve esserlo pure. ■

Calcolo delle funzioni $Z_x(\cdot)$ e $Z_{xx}(\cdot)$. Dalla Proposition 1 abbiamo che

$$f(x, z) = x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} - xz + B \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} = 0$$

quindi, differenziando totalmente

$$-x^{\frac{-1}{\gamma}} - z - xz_x + Bz^{-\gamma}z_x = 0 \quad (3.10)$$

e risolvendo l'equazione precedente per z_x e si ha

$$z_x = \frac{z + x^{\frac{-1}{\gamma}}}{Bz^{-\gamma} - x}. \quad (3.11)$$

Dall'equazione (3.9) sappiamo che $z_x < 0$. Differenziando ancora la (2.10) abbiamo

$$\frac{1}{\gamma} x^{\frac{-1}{\gamma}-1} - 2z_x - xz_{xx} - \gamma Bz^{-\gamma-1} z_x^2 + Bz^{-\gamma} z_{xx} = 0$$

e quindi,

$$z_{xx} = \frac{2z_x + \gamma Bz^{-\gamma-1} z_x^2 - \frac{1}{\gamma} x^{\frac{-1}{\gamma}-1}}{Bz^{-\gamma} - x}$$

$$= \frac{2 \frac{z+x}{Bz^{-\gamma}-x}^{-\frac{1}{\gamma}} + \gamma B z^{-\gamma-1} \left(\frac{z+x}{Bz^{-\gamma}-x}^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} x^{-\frac{1}{\gamma}-1}}{Bz^{-\gamma} - x}$$

Il segno è ancora una volta determinato dal numeratore poichè il denominatore è negativo in virtù del risultato precedente. Procedendo nello stesso modo fatto per z_x e usando (2.10) e l'espressione analitica di z_x si può mostrare che $z_{xx} > 0$ per cui z è una funzione convessa di x . ■

Proof of Proposition 2. Le derivate di x per $D_t > D^*$ sono immediate dall'equazione (2.19). Quando $D_t \leq D^*$ dobbiamo differenziare la market clearing rispetto all'endowment aggregato. Si ottiene

$$\left[-\frac{1}{\gamma} x^{-\frac{1}{\gamma}-1} z^* + z^* z_x^* + z_x^* x^{-\frac{1}{\gamma}} \right] dx = dD$$

che risolta per dx/dD produce il risultato desiderato. Si noti che quando $D_t \rightarrow D^*$ da sinistra $x \rightarrow \bar{x}$, $z^* \rightarrow \bar{z}$ e $z_x^* \rightarrow z_x^*(\bar{x}, \bar{z})$, ne segue che

$$\lim_{D_t \rightarrow D^*_-} \frac{dx}{dD} = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} \bar{x}^{-\frac{1}{\gamma}-1} + z_x^*(\bar{x}, \bar{z}) \left[\bar{z} + \bar{x}^{-\frac{1}{\gamma}} \right]}$$

Per cui se $z_x^*(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{D_t \rightarrow D^*_-} \frac{dx}{dD} &= \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} \bar{x}^{-\frac{1}{\gamma}-1}} = -\gamma \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{-\frac{1}{\gamma}}} \\ &= -\gamma \frac{\bar{x}}{D_t - \frac{1}{2} \bar{z}^2} \end{aligned}$$

A questo punto è immediato verificare che

$$-\gamma \frac{\bar{x}}{D_t - \frac{1}{2} \bar{z}^2} = \lim_{D_t \rightarrow D^*_+} \frac{dx}{dD}$$

e quindi, se $z_x^*(\bar{x}, \bar{z}) \neq 0$, x_D è discontinua a D^* . Si può facilmente verificare che $z_x^*(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\bar{z} + \bar{x}^{-\frac{1}{\gamma}}}{B\bar{z}^{-\gamma} - \bar{x}} \neq 0$ per cui la condizione per la continuità

di x_D non è verificata. In ultimo x_{DD} può essere ottenuta dalla doppia differenziazione della market clearing. Si può mostrare che x_{DD} è funzione di $z_x^*(\bar{x}, \bar{z})$ e $z_{xx}^*(\bar{x}, \bar{z})$ e quindi per gli stessi motivi spiegati prima è discontinua a $D_t=D^*$. Il segno di x_D e x_{DD} è stabilito numericamente e lo si può verificare in figura 2.2. ■

Proof of Lemma 2. Segue direttamente dall'applicazione dell'Ito-Tanaka formula per funzioni convesse di semimartingale su $x(\cdot)$. ■

Proprietà del prezzo di mercato del rischio. Utilizzando (2.27) con (2.22) si ha

$$\begin{aligned}\theta_t|_{D_t < D^*} &= \frac{\gamma \sigma_D D_t}{x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* - \gamma x z^* z_x^* - \gamma z_x^* x^{1-\frac{1}{\gamma}}} \\ &= k(x) \gamma \sigma_D\end{aligned}$$

dove

$$k(x) = \frac{D_t}{x_t^{-\frac{1}{\gamma}} z^* + \gamma(x z^* + x^{1-\frac{1}{\gamma}}) z_x^*}$$

il denominatore si può riscrivere usando l'espressione analitica di z_x^* e si ottiene

$$\begin{aligned}&x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* + \gamma(x z^* + x^{1-\frac{1}{\gamma}}) z_x^* \\ &= x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* + \gamma(x z^* + x^{1-\frac{1}{\gamma}}) \frac{z^* + x^{-\frac{1}{\gamma}}}{x - B z^{-\gamma}}\end{aligned}$$

da cui, utilizzando (2.10) si ottiene $\gamma(x z^* + x^{1-\frac{1}{\gamma}}) = z^*(x - B z^{*- \gamma})$ e quindi

$$x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* + z^* x^{-\frac{1}{\gamma}} + z^{*2}.$$

La market clearing ci dice che

$$D_t = x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* + \frac{1}{2} z^{*2}$$

e quindi si ottiene

$$D_t < x^{-\frac{1}{\gamma}} z^* - \gamma x z^* z_x^* - \gamma z_x^* x^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

da cui risulta $k(x) < 1$. Quando $D_t > D^*$ abbiamo

$$\theta_t|_{D_t > D^*} = \gamma \sigma_D \frac{D_t}{D_t - \frac{1}{2} z^2} > \gamma \sigma_D$$

■

Proof of Lemma 3. Immediata data la definizione di $ARRA(D_t)$ in (2.15) e usando il fatto che l'utilità marginale dell'agente rappresentativo è uguale a x . In più, date le proprietà del prezzo di mercato del rischio quando $D_t < D^*$, abbiamo che θ_t si può scrivere come $k(x)\gamma\sigma_D$ con $k(x) < 1$. Quindi,

$$\theta_t|_{D_t < D^*} = -\frac{x_D}{x} \sigma_D D_t = k(x)\gamma\sigma_D$$

e,

$$-\frac{x_D}{x} D_t = \gamma k(x)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} ARRA(D_t) &= -D_t \frac{x_D}{x} \\ &= \gamma k(x) < \gamma. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $D_t > D^*$ si ha

$$ARRA(D_t)|_{D_t > D^*} = \gamma \frac{D_t}{D_t - \frac{1}{2} z^2} > \gamma$$

■

Proof of Proposition 3. Data la definizione di $Q(\cdot)$ il prezzo

dell'asset rischioso si può scrivere come

$$P_t = \frac{Q(\cdot)}{x} \quad (3.12)$$

per cui si ha che:

$$dP_t = (\dots)dt + P_t dA(t) + \left[\frac{Q'(\cdot)}{x} - \frac{x_D}{x^2} Q(\cdot) \right] dB_t$$

e

$$\frac{dP_t}{P_t} = (\dots)dt + dA(t) + \sigma_D D_t \left[\frac{Q'(\cdot)}{Q(\cdot)} - \frac{x_D}{x} \right] dB_t$$

La funzione che moltiplica dB_t è la volatilità che stiamo cercando.

Definendo $X_s = \frac{D_s}{D_t}$, abbiamo

$$\begin{aligned} Q'(\cdot) &= \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty x_D X_s^2 D_t ds + \int_t^\infty x X_s ds \right] \\ &= \frac{1}{D_t} \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty x_D D_s^2 ds + \int_t^\infty x D_s ds \right] \end{aligned}$$

■

Appendice B: Metodi Numerici

Prezzi e volatilità in equilibrio nella presente tesi richiedono la valutazione di una serie di valori attesi poichè la variabile di stato dell'economia, D , è una variabile casuale con distribuzione log-normale. Tale valutazione presenta due problemi: il primo è che tali valori attesi non sono ottenibili in forma chiusa; il secondo è che per valori di $D < D^*$ il pricing kernel dell'economia non è noto in forma chiusa. In entrambi i casi sono necessari metodi numerici. L'obiettivo è il calcolo del prezzo dell'asset rischioso secondo l'equazione

$$P_t = \mathbb{E}_t \int_t^\infty \left[e^{-\rho(s-t)} \frac{x(D_s)}{x(D_t)} D_s ds \right]$$

o

$$P_t x(D_t) = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} x(D_s) D_s ds \right]$$

Sia $y = \log(D)$ quindi

$$P_t x(D_t) = \int_{-\infty}^\infty \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} x(e^y) e^y f(y) dy ds$$

dove $f(y)$ è la densità di y , cioè normale con media $\log(D_t) + (\mu_D - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)$ e varianza $\sigma^2(s-t)$. Per cui si ha

$$P_t x(D_t) = \int_{-\infty}^{\log(D^*)} \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} x(e^y) e^y f(y) dy ds + \int_{\log(D^*)}^\infty \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} x(e^y) e^y f(y) dy ds \quad (3.13)$$

L'integrale può essere separato in due somme in virtù della continuità di x . Il secondo termine dell'equazione precedente è calcolato usando il metodo della quadratura poichè $x(e^y)$ è noto in forma chiusa per $y > \log(D^*)$. Per il calcolo del primo termine si è seguita la seguente

procedura: si è discretizzato il dominio del dividendo aggregato e, per ogni punto nello spazio discretizzato, è stata risolta numericamente la market clearing per ottenere x ; i risultati sono stati interpolati per ottenere $x(e^y)$ come funzione di y . La quadratura è stata quindi applicata integrando la funzione interpolata.

Per il calcolo della volatilità è stato necessario calcolare la funzione $x_D(e^y)$ per la quale si è seguita la stessa strategia: x_D per $y > \log(D^*)$ è stata calcolata in forma chiusa mentre per $y < \log(D^*)$ la funzione è stata ottenuta prima numericamente e poi interpolata. L'integrale finale necessario per il calcolo della volatilità è stato ottenuto nuovamente utilizzando la quadratura.

Ringraziamenti

Desidero dedicare alcune righe per ringraziare tutte le persone che hanno contribuito, a vario titolo, a rendere questa tesi, e soprattutto gli anni del programma di dottorato, migliori sotto tanti punti di vista.

Vorrei ringraziare il relatore, il Professor Marco Pagano, per la grande disponibilità, cortesia e tutto l'aiuto e i consigli fornitimi nel corso di questi anni di dottorato.

Un ringraziamento particolare a Maria, per essermi stata vicina nonostante molte difficoltà e per aver reso più sopportabili gli anni di lontananza del dottorato, oltre che per aver reso questa tesi leggibile in italiano.

Infine, ma non in ordine di importanza, il più grosso debito di riconoscenza verso i miei genitori che mi hanno dato così tanto senza chiedere nulla in cambio. E ancora devo ringraziare i miei fratelli, Rubens e Davide, semplicemente perché ci sono sempre anche se ormai siamo lontani.