

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

FACOLTA' DI ECONOMIA

Dottorato di ricerca "Matematica per l'analisi economica e la finanza"

XIV ciclo



TITOLO TESI

**“La valutazione comparata delle opzioni strutturate:
un applicazione al caso delle Outside barrier options e delle correlation digital
options**

Coordinatrice:

Ch.ma Prof.ssa

Rosa Coccozza

Candidato:

Dott. Giuseppe Xella

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

INDICE

Introduzione	3
1 Le opzioni esotiche packages	4
1.1 Strategia long straddle.....	4
1.2 Strategia long strangle.....	5
1.3 Strategia butterfly.....	7
1.4 Spread al rialzo mediante call.....	9
2 Le opzioni esotiche digital	12
2.1 Cash or nothing digital options.....	12
2.2 Gap digital options.....	16
2.3 Asset or nothing digital options.....	18
2.4 Caratteristiche generali delle european digital options.....	22
2.5 American digital options.....	31
3 Le opzioni esotiche barrier	56
3.1 Pricing delle standard barrier options.....	62
3.2 Prezzo e sensibilità delle standard barrier options.....	72
3.3 Opzioni reverse barrier.....	95
3.4 Pricing delle reverse barrier options.....	97
3.5 Coefficienti di sensibilità delle reverse barrier options.....	103
4 Profili di comparabilità	126
4.1 Caratteristiche delle outside barrier option.....	126
4.2 Caratteristiche correlation digital option.....	130
4.3 Profili di comparabilità: il caso delle outside barrier e delle correlation digital.....	134
Bibliografia	150

INTRODUZIONE

Le opzioni esotiche, denominate anche opzioni di seconda generazione, sono strumenti finanziari derivati che presentano caratteristiche speciali e comunque diverse da quelle che regolano il funzionamento di un'opzione plain vanilla.

Non è semplice proporre una classificazione delle opzioni esotiche in quanto tali titoli, negoziati sia in modo autonomo sia come parte integrante di prestiti obbligazionari, e più in generale di titoli strutturati, sono presenti sui mercati in una grandissima varietà di forme e la grande dinamicità dei mercati finanziari crea ogni giorno nuovi tipi di opzioni con caratteristiche sempre più articolate e quindi qualsiasi classificazione proposta non si può certo ritenere definitiva.

Tali tipologie di opzioni sono per lo più scambiate in mercati privati e non regolamentati, cioè nei mercati cosiddetti OTC.

Solo in pochi casi, e limitatamente a determinate tipologie di contratti, sono state negoziate opzioni esotiche, ne è un esempio la quotazione di *quanto options* all'American Stock Exchange.

Le categorie più rappresentative di contratti esotici sono date dalle *opzioni packages*, le *opzioni binarie o digitali*, le *opzioni path dependent*, le *opzioni multiassets*.

Nel prosieguo del lavoro sarà svolta un'analisi comparazione tra due opzioni esotiche con payoff simili : l'*outside barrier option* e la *correlation digital option*.

Ne saranno evidenziate le caratteristiche comuni e le differenze riscontrabili nell'analisi dei principali coefficienti di sensitività.

CAPITOLO 1

LE OPZIONI ESOTICHE PACKAGES

I packages sono dei portafogli formati da opzioni plain vanilla, da contratti forward, da denaro contante ed anche da attività sottostante.

Esempi di packages sono le strategie date dalle diverse combinazioni di opzioni call e put europee quali le spreads al rialzo od al ribasso, spreads a farfalla, straddles, strangles, ecc.

1.1 STRATEGIA LONG STRADDLE

Una tipologia di opzioni packages è data dalla strategia long straddle, che consiste nell'acquisto di un'opzione call e di un'opzione put, sulla stessa attività, con prezzo di esercizio e scadenza uguali. Il prezzo di esercizio è pari al valore di mercato del sottostante al momento dell'acquisto delle opzioni. Questa strategia viene adottata quando si prevede una forte variazione del prezzo del sottostante ma non si sa se tale variazione sia in aumento o in diminuzione. Infatti la combinazione delle due opzioni comporta una posizione finale che garantisce un profitto nel caso di una forte variazione del prezzo del sottostante.

Supponendo l'acquisto, sulla stessa attività, di un'opzione call con strike pari a 60€ e contemporaneamente l'acquisto di una put con strike pari a 60€ abbiamo il seguente payoff:

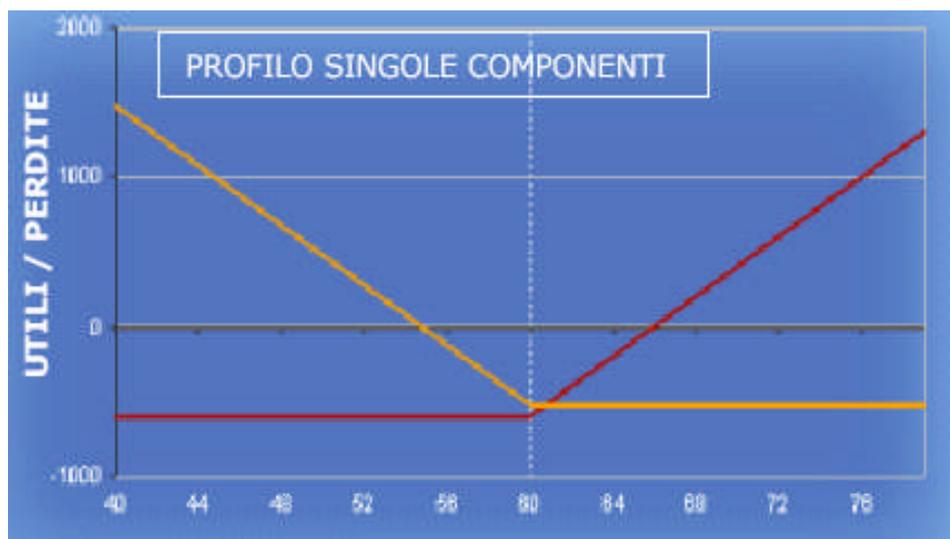


Figura 1 - Payoff derivante dall'assunzione di una strategia "Long straddle"

Dove sull'asse delle ascisse è rappresentato il prezzo del sottostante, e sulle ordinate è rappresentato il profitto/perdita. Inoltre con la linea rossa è indicato il payoff derivante dall'acquisto di una call, mentre con la linea verde è indicato il payoff derivante dall'acquisto di una put.

Con tale strategia la perdita massima è limitata ed è pari alla somma dei due premi pagati, e si ha quando il prezzo del sottostante resta invariato o subisce una modesta variazione.

Il massimo profitto è teoricamente illimitato nel caso di rialzo del prezzo del sottostante ed è pari alla differenza tra il prezzo del sottostante e lo strike price (in quanto si esercita la call), mentre in caso di ribasso il massimo profitto è limitato e pari all'intero valore dell'attività sottostante.

1.2 STRATEGIA LONG STRANGLE

Una ulteriore tipologia di opzioni packages è data dalla strategia Long Strangle, che consiste nell'acquisto di un'opzione call e di un'opzione

put, sullo stesso sottostante, con uguale scadenza ma, a differenza della straddle, con diverso strike price.

L'investitore che adotta tale strategia punta sul fatto che il prezzo del sottostante subisca una forte variazione ma non è certo se tale variazione sarà in aumento od in diminuzione. Per trarre un profitto da questa strategia è necessario che la variazione del prezzo del sottostante sia molto forte, infatti il prezzo del sottostante deve variare più che in una strategia straddle per realizzare un profitto. Graficamente:

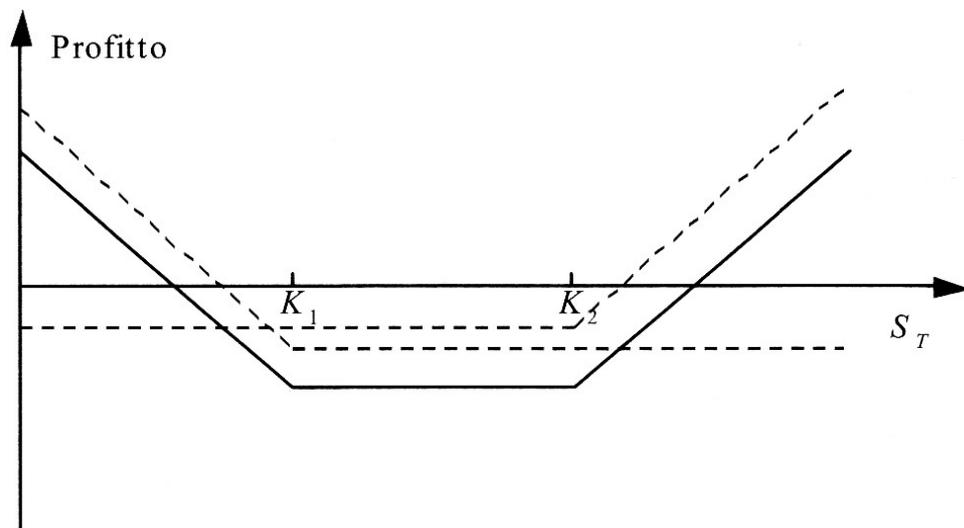


Figura 2 - Payoff derivante dall'assunzione di una strategia "Long strangle"

Dove sull'asse delle ascisse è rappresentato il prezzo del sottostante (S_T) e sull'asse delle ordinate è rappresentato il profitto/perdita dovuto alla variazione del prezzo del sottostante. Infine K_1 è lo strike price della put, mentre K_2 è lo strike price della call ($K_2 > K_1$)

Il payoff di una strategia strangle varia a seconda della distanza tra i due prezzi di esercizio. Infatti più sono lontani gli strike maggiore dovrà essere la variazione del prezzo del sottostante per realizzare un profitto.

La perdita massima, che si verifica quando il prezzo del sottostante non subisce significative variazioni ($K_1 < S_T < K_2$), è pari alla somma dei premi pagati per l'acquisto delle opzioni.

Il massimo profitto, nel caso di una forte diminuzione del prezzo del sottostante ($S_T = 0$), è limitato e pari alla differenza tra lo strike della put ed il prezzo del sottostante (se $S_T = 0$ allora $K_1 - S_T = K_1$); invece nel caso di un forte aumento del prezzo del sottostante, il massimo profitto è teoricamente illimitato ed è pari alla differenza tra il prezzo del sottostante e lo strike price della call ($S_T - K_2$).

1.3 STRATEGIA BUTTERFLY

La strategia “Butterfly” consiste nell'acquisto di quattro opzioni, sullo stesso sottostante, con tre strike price differenti ma con scadenza uguale.

Per attuare tale strategia è necessario vendere due opzioni call, quella (ITM) con il prezzo di esercizio più basso, e quella (OTM) con il prezzo di esercizio più alto, e detenere le due opzioni call, entrambe ATM, con lo stesso strike price intermedio. Inoltre è necessario che i prezzi di esercizio delle due opzioni vendute siano equidistanti dal prezzo di esercizio delle altre due opzioni con strike intermedio.

Assumendo tale strategia, l'investitore intende realizzare un profitto derivante da una variazione del prezzo del sottostante che superi i due strike “esterni”, e tale profitto è pari al premio netto incassato con la vendita di due opzioni.

L'investitore realizzerà un guadagno da tale strategia se il prezzo del sottostante varierà in modo tale da superare gli strike price delle opzioni vendute.

Supponendo l'acquisto di due opzioni call(ATM) con strike pari a 60€ e la contestuale vendita di due opzioni call con prezzo di esercizio pari a 55€(ITM) ed a 65€(OTM), tutte sullo stesso sottostante e con pari scadenza, abbiamo il seguente payoff:



Figura 3 - Payoff derivante dall'acquisto di due opzioni call e dalla vendita di due opzioni call con tre strike diversi ma con uguale scadenza e sottostante

Dove sull'asse delle ascisse è rappresentato il prezzo del sottostante e sull'asse delle ordinate è rappresentato il profitto/perdita dovuto alla variazione del prezzo del sottostante. Inoltre con la linea arancione è indicato il payoff derivante dall'acquisto di due call con strike pari a 60€, con la linea rossa è indicato il payoff derivante dalla vendita dell'opzione call con strike pari a 65€ ed infine con la linea verde è rappresentato il payoff derivante dalla vendita di una call con strike price pari a 55€.

La massima perdita derivante dall'assunzione di una strategia "Butterfly" si ha nell'eventualità in cui, a scadenza, il prezzo del sottostante è uguale allo strike intermedio. In tal caso la perdita è pari alla differenza tra il prezzo di esercizio minore e quello intermedio più i premi incassati con la vendita delle due opzioni.

Il massimo profitto si ha, invece, quando il prezzo del sottostante è maggiore dello strike price più alto oppure quando è minore dello strike price più basso, ed è pari alla differenza tra la somma dei premi incassati con la vendita delle opzioni e la somma dei premi pagati per l'acquisto delle due opzioni con strike intermedio.

Graficamente:



Figura 4 - Payoff derivante da una strategia "Butterfly"

1.4 SPREAD AL RIALZO MEDIANTE CALL

Una Bull Call Spread è un tipo di spread verticale. E' costituita da due call con lo stessa scadenza ma con differenti strike. Il prezzo strike della *short call* è maggiore dello strike della long call, il che significa che questa strategia richiederà sempre una spesa iniziale (debito). Il principale obiettivo della short call è quello di contribuire a pagare il costo della long call. Fino ad un certo prezzo dell'azione, la Bull Call Spread lavora come la sua relativa componente long call, come se fosse una strategia autonoma. Tuttavia, diversamente dal payoff della long call, il potenziale guadagno massimo è limitato. Questo è parte

del trade off, il premio della short call mitiga il costo della strategia ma fissa un tetto massimo al profitto.

Le motivazioni sottostanti all'acquisto di una *Bull Call Spread* sono legate alla possibilità di trarre profitti dall'apprezzamento del sottostante, senza però sostenere una spesa in conto capitale e relativo rischio di proprietà del possesso di azioni. L'investitore che acquista tale opzione package prevede un apprezzamento del valore dell'attività sottostante entro la scadenza della strategia.

Inoltre la perdita massima è limitata ed il peggior scenario si ottiene quando lo *stock* scade con prezzo(S_T) inferiore al prezzo strike (K_1). In questo caso l'opzione call scade senza valore e la perdita è pari alla spesa iniziale per la posizione(debito netto), cioè al premio pagato per l'opzione acquistata al netto incassato per l'opzione venduta.

Così come la perdita massima anche il profitto massimo è limitato. Se il prezzo del sottostante, a scadenza, è pari o superiore allo strike price, l'investitore esercita la componente *long call* e presumibilmente viene assegnato ad una *short call*.

Di conseguenza l'azione è acquistata al prezzo più basso (cioè al long call strike price K_1) e simultaneamente venduta a quello più alto (cioè allo short call strike price K_2). Il profitto massimo è la differenza tra i due prezzi strike, meno l'iniziale esborso (il debito) pagato per stabilire lo spread (premio per l'opzione acquistata al netto del premio per quella venduta). La sintesi del valore di tale strategia alla scadenza T è riportata nella Tabella 1.

Prezzo dell'azione	Valore finale della long call	Valore finale della short call	Valore finale complessivo
$S_T \leq K_1$	0	0	0
$K_1 < S_T \leq K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T$	$S_T - K_1$	$-(S_T - K_2)$	$K_2 - K_1$

Tabella 1 - Valore finale di uno spread al rialzo mediante calls

Alla scadenza il punto di pareggio della strategia (break even point), ossia il prezzo del sottostante al quale gli utili eguagliano le perdite, si ottiene quando il prezzo dello stock è superiore allo strike price più basso di un ammontare pari alla spesa sostenuta inizialmente. In questo caso, la short call scadrà senza valore ed il valore intrinseco¹ della long call sarà uguale al debito.

Graficamente:

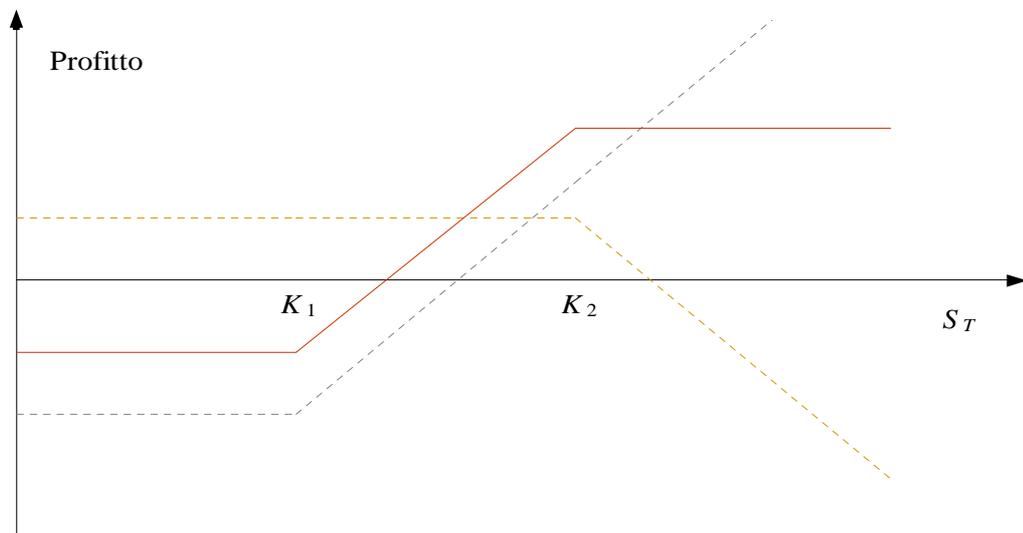


Figura 5 - Payoff derivante da una strategia "Call Bull Spread"

¹ Per una *call* tale valore è dato, in un certo istante, dalla differenza fra il prezzo dell'attività e il prezzo di esercizio dell'opzione se tale differenza è positiva, altrimenti è definito uguale a zero. Per una *put*, invece, tale valore è dato, in un certo istante, dalla differenza tra il prezzo di esercizio e il prezzo dell'attività se tale differenza è positiva, altrimenti il valore intrinseco è uguale a zero.

CAPITOLO 2

LE OPZIONI ESOTICHE DIGITAL

Le digital options sono anche conosciute come opzioni binarie. Generalmente il payoff derivante da tali opzioni può essere dato sia da un ammontare prefissato di denaro, ed in questo caso si parla di un'opzione binaria *cash or nothing*, sia da un'attività sottostante, ed in questo caso si parla invece di un'opzione binaria *asset or nothing*. Infine il payoff può essere pari alla differenza tra il valore dell'attività sottostante, alla data di scadenza dell'opzione, ed un livello di prezzo prestabilito nel contratto che spesso differisce dallo strike price. In quest'ultimo caso la digital option prende il nome di *gap option*. Come qualsiasi altro tipo di opzione, anche le digital options possono essere sia call che put, e sia americane che europee.

2.1 CASH OR NOTHING DIGITAL OPTIONS

Tale opzione rappresenta la tipologia più semplice delle digital options. Infatti qualora il prezzo dell'underlying asset superasse o risultasse al di sotto del livello specificato nel contratto, rispettivamente per una call e per una put, il compratore dell'opzione avrà diritto ad ottenere in pagamento la somma di denaro prestabilita. Nel caso opposto l'opzione scadrebbe senza alcun valore.

La funzione che definisce il payoff per un'opzione *call Cash or Nothing* può, quindi, essere scritta nel seguente modo:

$$C_{con} \begin{cases} 0 & \text{se } S < K \\ B & \text{se } S > K \end{cases}$$

Vale il contrario per una *put Cash or Nothing*.

In alternativa, il *payoff* può essere espresso utilizzando la funzione di Heaviside $H(\cdot)$. Tale funzione assume valore 1 se il suo argomento è positivo, altrimenti ha valore zero.

Posto il *payoff* pari a:

$$C_{CON} = BH(S - K)$$

se S è maggiore di K l'argomento della funzione è positivo e il *payoff* è uguale a B , se, viceversa, S è inferiore od uguale a K il *payoff* è nullo. Chiaramente per una *put* vale il contrario in quanto si considera $H(K - S)$. Si verifica così che le due espressioni, che definiscono il *payoff* di un'opzione *call* e di un'opzione *put cash-or-nothing* sono equivalenti.

Graficamente:

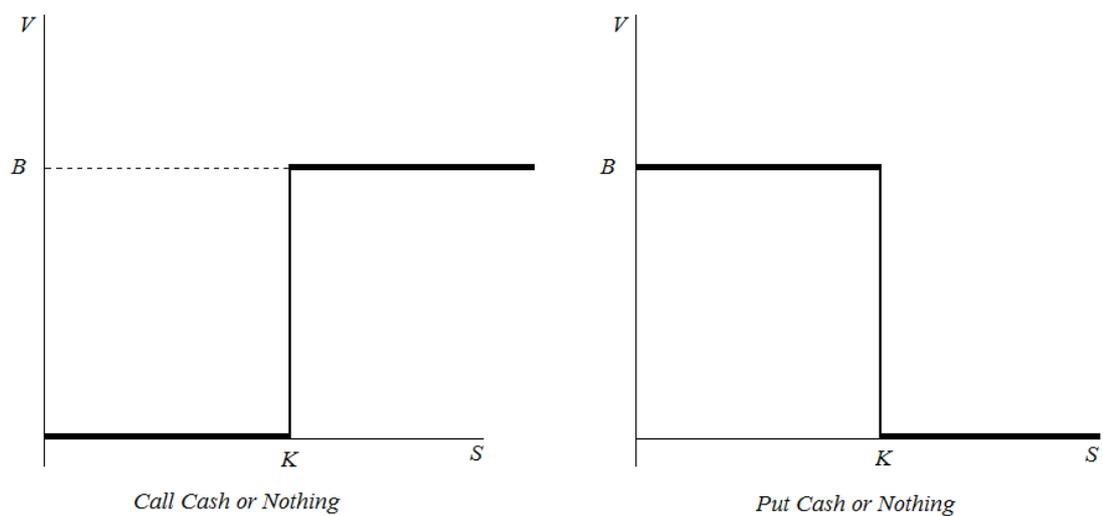


Figura 6 - Payoff a scadenza di una call e di una put cash or nothing

Le cash or nothing digital options sono inoltre caratterizzate dal fatto che il loro valore è facilmente calcolabile in quanto il loro prezzo è dato dal valore attuale del possibile pagamento futuro. Per il calcolo del prezzo di tale opzione si fa riferimento alla formula di Black-Scholes, e di conseguenza alle loro assunzioni. Si considera infatti che il prezzo dell'attività sottostante segua una distribuzione lognormale e che quindi la probabilità che l'opzione scada ITM, e cioè che alla scadenza $S_T > K$ (per una call), è data da $N(d_2)^2$ dove d_2 è dato da :

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - g - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

in cui:

S_0 rappresenta il prezzo del sottostante al tempo 0

K rappresenta lo strike price

r rappresenta il tasso risk free

σ rappresenta la deviazione standard

T è la vita residua dell'opzione

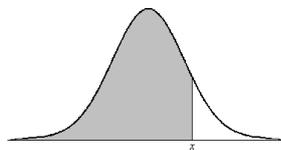
In definitiva il prezzo di una cash or nothing(*CON*) digital option è dato per una call e per una put rispettivamente da:

$$CON_{CALL} = B e^{-rt} N(d_2)$$

$$CON_{PUT} = B e^{-rt} N(-d_2)$$

dove B rappresenta la somma di denaro prestabilita.

² $N(x)$ è la funzione di distribuzione di una variabile normale con media nulla e deviazione standard pari a 1, ossia è la probabilità che una variabile normale standardizzata assuma un valore inferiore ad x . Graficamente:



In alternativa può essere utilizzato l'approccio probabilistico per una più rigorosa derivazione della formula sopra presentata. Prima di tutto la probabilità di esercizio può essere così calcolata³:

$$P[\phi S_\omega > \phi K] = P\left[\phi x > \phi \ln\left(\frac{K}{S}\right)\right] = P\left[\phi u > \phi \frac{\left(\left(\ln\frac{K}{S}\right) - \mu_x\right)}{\sigma_x}\right] = P[\phi_u > -\phi d_2] = N(\phi d_2)$$

dove $x = \ln\left(\frac{S_T}{S}\right)$, $u = \frac{(x - \mu_x)}{\sigma_x}$ ovvero nient'altro che la variabile x

standardizzata, $\mu_x = \left(\frac{r - g - \sigma^2}{2}\right)t$ è la media con cui si distribuisce x ,

$\sigma_x = \sigma\sqrt{t}$ è la deviazione standard di x , e ϕ è un operatore binario che assume valore $\phi = 1$ per le *call*, $\phi = -1$ per le *put*.

A questo punto, poiché, a scadenza, con probabilità *risk neutral* $N(d_2)$ la nostra opzione pagherà la somma B , mentre con probabilità $(1 - N(d_2))$ il *payoff* sarà nullo, abbiamo tutti gli elementi per valutare, in base all'approccio probabilistico, l'opzione nel seguente modo:

$$V = e^{-rt} [0 \cdot (1 - N(\phi d_2)) + B \cdot N(\phi d_2)] = e^{-rt} B N(\phi d_2)$$

Otteniamo un risultato equivalente a quello mostrato in precedenza.

³ Zhang "Exotic options"

2.2 GAP DIGITAL OPTIONS

Le Gap options sono una diretta estensione delle opzioni plain vanilla. Infatti mentre il payoff di queste ultime è dato, per una call, dalla differenza tra il valore del sottostante a scadenza e lo strike price, e, per una put, dalla differenza tra lo strike price e il valore del sottostante a scadenza, per il payoff di una Gap option si fa riferimento ad un livello di prezzo X (*gap parameter*) che spesso è diverso dal valore dello strike price.

Analiticamente abbiamo che il payoff, rispettivamente di una Gap call e di una Gap put, è dato da:

$$C_{GAP} = \max[S_T - X] \quad \text{se } S_T > K$$

$$P_{GAP} = \max[X - S_T] \quad \text{se } S_T < K$$

dove:

S_T rappresenta il prezzo dell'underlying al tempo T

X rappresenta il gap parameter

K rappresenta lo strike price

Graficamente:

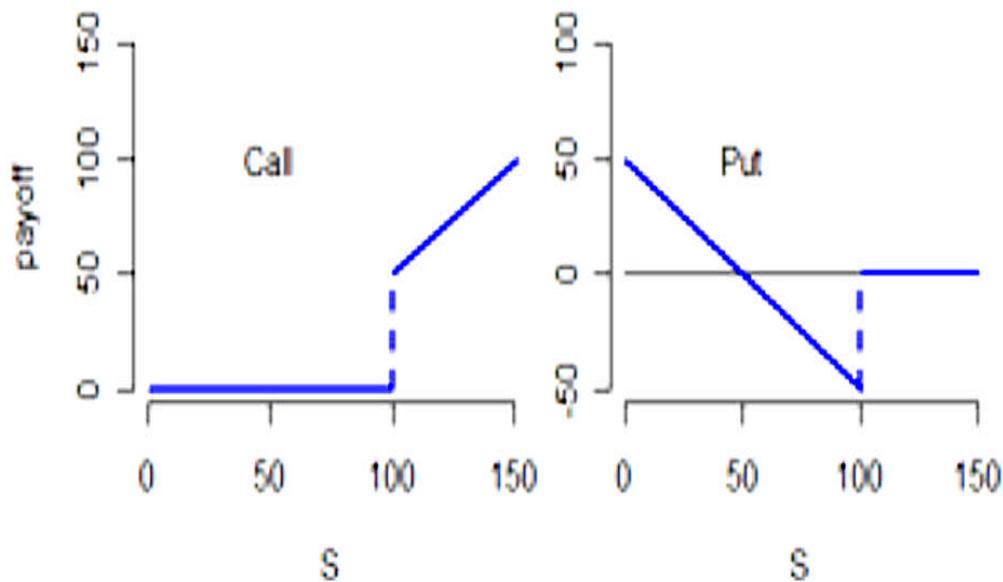


Figura 7 - Payoff a scadenza di una call e di una put Gap options

Come per le opzioni binarie CON anche per le Gap options il calcolo del prezzo è ottenuto con una estensione della formula di Black-Scholes, analiticamente:

$$P_C = Se^{-gt} N(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) - Xe^{-rt} N(d_2)$$

$$P_P = Xe^{-rt} N(-d_2) - Se^{-gt} N(-d_2 - \sigma\sqrt{\tau})$$

dove:

P_C rappresenta il prezzo di una Gap call

P_P rappresenta il prezzo di una Gap put

d_2 è dato da
$$\frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - g - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]}{(\sigma\sqrt{\tau})}$$

g rappresenta il payout rate dell'attività sottostante

X rappresenta il gap parameter

r rappresenta il tasso risk free

τ è la vita residua dell'opzione

2.3 ASSET OR NOTHING DIGITAL OPTIONS

Le Asset or Nothing sono una tipologia di digital options molto diffuse. Il compratore di tale opzione acquista il diritto di ricevere l'attività sottostante nel caso in cui l'opzione giunga alla scadenza in the money.

Possiamo considerare le Asset or Nothing options come dei casi particolari di Gap options in cui il gap parameter è pari a zero.

Infatti il loro prezzo è ottenuto sostituendo alla formula per il calcolo del valore delle gap options il parametro gap X con zero.

Analiticamente:

$$C_{AON} = Se^{-gt} N(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) \quad \text{call}$$

$$P_{AON} = Se^{-gt} N(-d_2 - \sigma\sqrt{\tau}) \quad \text{put}$$

Il loro payoff è dato da: se $S_T < K$

$$C_{\text{Payoff}} = \begin{cases} S_T & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_{\text{Payoff}} = \begin{cases} S_T & \text{se } S_T < K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Graficamente:

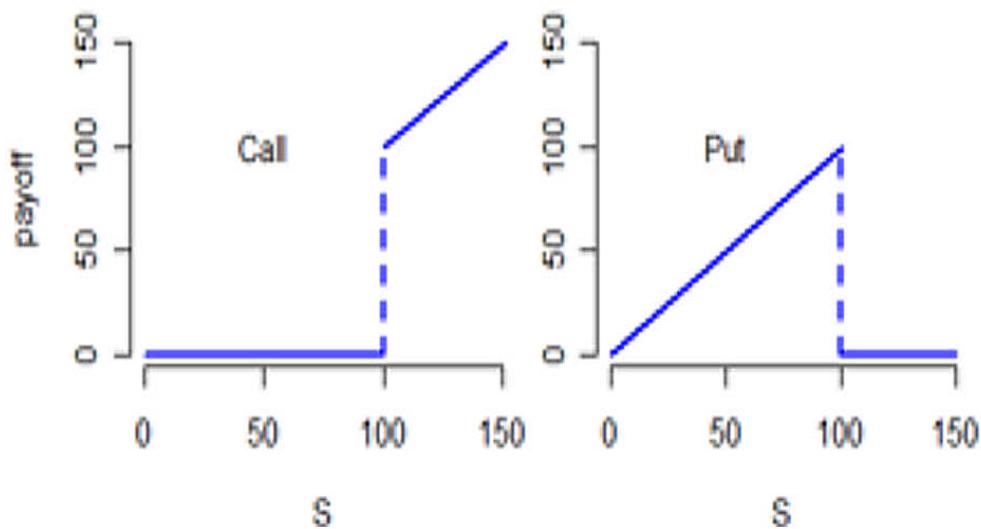


Figura 8 - Payoff a scadenza di una call e di una put Asset or Nothing con strike price pari a 100

Un caso particolare delle AON è rappresentato dalle cosiddette *Supershares*. A differenza dell'AON tale tipologia di opzione paga l'asset sottostante se alla scadenza il suo prezzo sarà compreso all'interno di un range predefinito di valori, altrimenti paga zero.

Un'opzione *Supershare* può essere considerata come un portafoglio composto da una posizione long su un'opzione Asset or Nothing con strike K_1 e da una posizione short su un'opzione Asset or Nothing con strike K_2 (dove $K_2 > K_1$).

Tale opzione presenta un *payoff* pari a:

$$Supershare = \frac{1}{d} [H(S - K) - H(S - K + d)]$$

che è uguale a:

$$Supershare \begin{cases} 0 & \text{se } S \leq K \\ 1/d & \text{se } K < S < K + d \\ 0 & \text{se } S \geq K + d \end{cases}$$

Questo significa che il detentore, al momento dell'esercizio, otterrà un *payoff* positivo e pari a $1/d$ solo nel caso in cui il valore dell'attività

sottostante, S , risulti compreso nell'intervallo $[K, (K+d)]$, il cui limite inferiore è rappresentato dal prezzo d'esercizio. Il *payoff* per questo tipo d'opzione, definito da $1/d$, è funzione inversa dell'ampiezza dell'intervallo stesso; infatti, minore è il valore assegnato a d , maggiore è il *payoff*. Graficamente quest'ultimo può essere descritto, per un'opzione *supershare*, dalla retta spezzata che appare nella seguente figura:

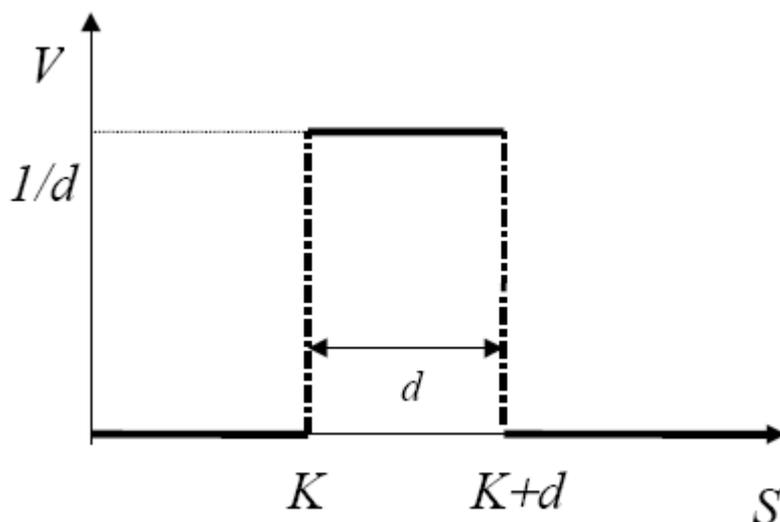


Figura 9 - Payoff di un'opzione *supershare*

E' possibile replicare il *payoff* di una opzione *supershare* acquistando un'opzione *call* ed un'opzione *put* binarie con prezzo *strike* rispettivamente pari a K e $K+d$ e contemporaneamente contraendo un debito a tasso fisso di pari scadenza a rendimento certo. Tale replica è schematizzata per profili di rendimento in figura 10. Nella prima serie di tre grafici è stato riportato il profilo che si ottiene dall'acquisto di un'opzione *call* binaria e di un'opzione *put* binaria. Nella seconda serie di tre grafici si delinea il profilo di un'opzione *supershare*, che si ottiene contrapponendo al risultato ottenuto dall'acquisto delle due opzioni la vendita del titolo a reddito fisso.

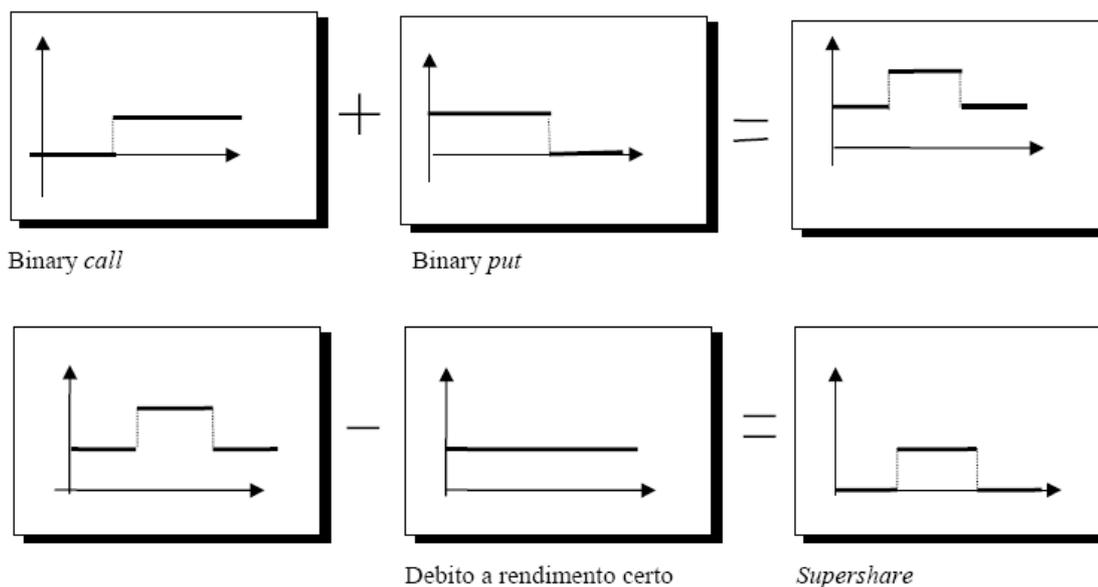


Figura 10 - Replica di un'opzione *supershare*

Il prezzo di tale tipologia di opzione è ricavabile dalla formula per il prezzo delle AON:

$$\text{Prezzo Supershare} = Se^{-g\tau} \left\{ N\left[d_1(S, K_1) + \sigma\sqrt{\tau} \right] - N\left[d_1(S, K_2) + \sigma\sqrt{\tau} \right] \right\}$$

dove:

$$d_1(S, K_1) \text{ è dato da } \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K_1}\right) + \left(r - g + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]}{(\sigma\sqrt{\tau})}$$

$$d_1(S, K_2) \text{ è dato da } \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K_2}\right) + \left(r - g + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right]}{(\sigma\sqrt{\tau})}$$

g rappresenta il payout rate dell'attività sottostante

r rappresenta il tasso risk free

τ è la vita residua dell'opzione

2.4 CARATTERISTICHE GENERALI DELLE *EUROPEAN DIGITAL OPTIONS*

Risulta opportuno farsi un'idea più precisa delle caratteristiche peculiari delle binarie di tipo europeo. A tal fine può risultare vantaggioso studiare il grafico seguente, il quale mette in relazione il valore dell'opzione con il prezzo del sottostante e la vita residua dell'opzione stessa. Le ipotesi ambientali (volatilità e tasso) e contrattuali (*strike* e *payoff*) alla base del grafico proposto sono le seguenti: $\sigma=15\%$, $r=5\%$, $K=105$, $X=100$

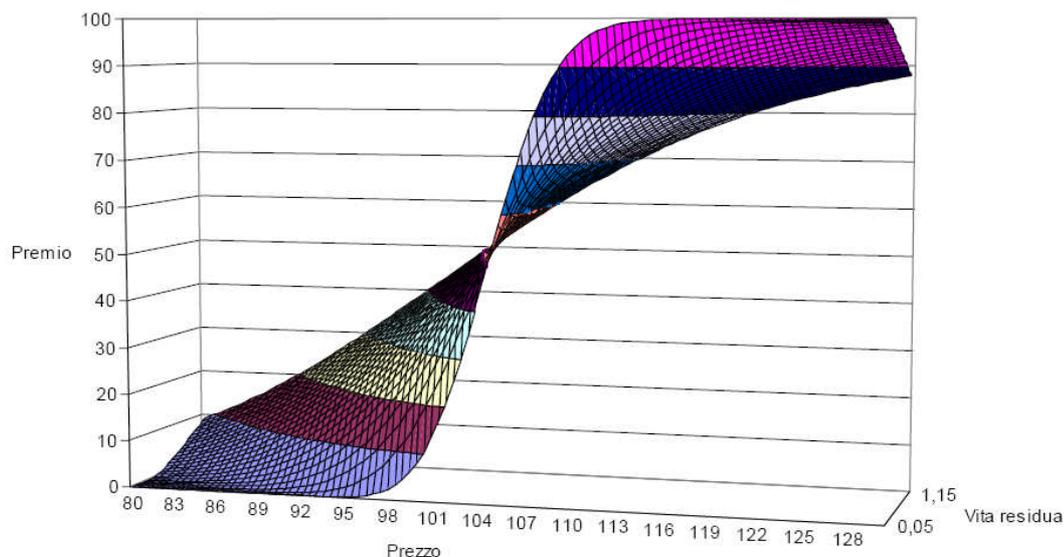


Figura 11 - Il premio di una *european digital* ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Non è difficile notare come l'opzione, man mano che si avvicina la data di scadenza, tenda a diventare decisamente più instabile. In sostanza il passare del tempo accentua l'impennata che il *Delta* subisce in corrispondenza dello *strike*, nei cui dintorni il comportamento dell'opzione è decisamente brusco. Ciò è ovviamente

dovuto alla natura “dicotomica” dell’opzione binaria che, come detto, paga o tutto o niente, senza mezze misure. Il passare del tempo rende il comportamento dell’opzione più brusco, in quanto diminuisce nettamente le probabilità che l’opzione passi dallo stato *out of the money* allo stato *in the money* o viceversa; la conseguenza è che un’opzione *out of the money* è assai probabile che rimanga tale, con ovvia contrazione del suo valore, mentre la considerazione speculare vale per l’opzione *in the money*.

Al passaggio del tempo deve dunque risultare (per le *put* vale l’opposto):

$$V(t) < V(t_1) \quad \text{per } F_t > K$$

$$V(t) > V(t_1) \quad \text{per } F_t < K$$

dove V rappresenta il valore dell’opzione, K è lo *strike*, F_t è il prezzo corrente a termine, mentre t misura la vita residua dell’opzione (e chiaramente $t_1 < t$)

In effetti, partendo dalle medesime ipotesi alla base della costruzione del grafico 11 e prendendo come base di riferimento per esempio un prezzo spot di 125\$, il valore dell’opzione passa dai 91\$ circa in corrispondenza di una vita residua di nove mesi ai 98\$ riscontrabili a tre mesi dalla scadenza. Alle medesime condizioni, ma con uno spot di 90\$, l’opzione passa da un valore di 16\$ circa ad uno di soli 2,7\$. Il grafico della funzione *Delta* (figura 12) può aiutare a meglio comprendere il comportamento di una *digital* europea.

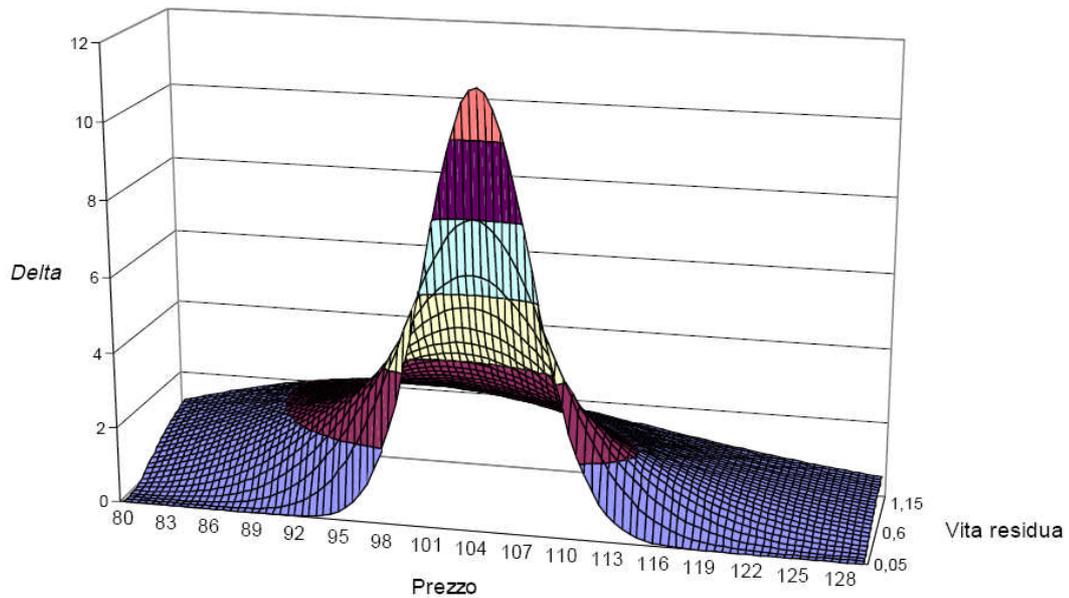


Figura 12 - Delta di una *European digital* ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

In accordo con le considerazioni svolte appena sopra, il *Delta* tende, col passare del tempo, a presentare un picco nella fascia di prezzo intorno allo *strike*. Infatti tende a diminuire per prezzi lontani dallo *strike* e ad aumentare vistosamente in corrispondenza dello stesso. Si pensi del resto cosa possa significare per le *chances* di esercitabilità finale di una *digital* anche solo un minimo movimento favorevole del sottostante quando il prezzo dovesse trovarsi poco al di sotto dello *strike* e la vita residua ammontasse a poche settimane. In effetti il *Delta*, in corrispondenza dello *strike*, al diminuire della vita residua da nove a tre mesi, passa (valgono le solite ipotesi circa condizioni contrattuali, volatilità e tasso) da 2,7 a 4,9 circa. Per prezzi lontani dallo *strike*, come detto, si verifica il fenomeno opposto: in corrispondenza ad esempio di uno spot di 125\$ il *Delta* passa da 0,67 (nove mesi di vita residua) a 0,19 (tre mesi a scadenza); per uno spot pari a 90\$ il *Delta* diminuisce da 2,1 a 0,9. Il grafico comunque non si limita a confermare quanto detto, ma presenta altresì una curiosità: la

sua conformazione non è, come ci si potrebbe superficialmente aspettare, del tutto simmetrica intorno allo *strike*, ma presenta, per valori della vita residua sufficientemente elevati, una tendenza a vedere il proprio asse di simmetria fissarsi in corrispondenza di valori del prezzo più bassi.

Questa tendenza della funzione *Delta* a raggiungere il proprio apice (in presenza di una elevata vita residua) prima dello *strike*, si spiega con il *drift* positivo che guida i movimenti del prezzo del sottostante: esso aumenta in maniera significativa la probabilità che il sottostante raggiunga a scadenza valori superiori allo *strike* e ciò in misura tanto più incisiva quanto maggiore è la vita residua della *digital* (quanto maggiore è la vita residua dell'opzione, tanto maggiore è il tempo a disposizione del *drift* per agire sul prezzo). Tale aumento di probabilità è così forte da rendere meno sensibile il valore dell'opzione a variazioni favorevoli del sottostante già a partire da prezzi posti (momentaneamente) al di sotto dello *strike*. Infatti, posto $r=5\%$ e $\tau=9$ mesi (vita residua), il *Delta* dell'opzione raggiunge il suo apice per valori del prezzo pari circa a 100\$; passando ad un tasso del 10%, l'apice viene invece raggiunto per prezzi intorno ai 96,5\$ (dunque sensibilmente inferiori). Altro aspetto degno di nota è la perfetta somiglianza esistente tra la funzione *Delta* della *digital* e la funzione *Gamma* di una *vanilla* (il che poi implica evidentemente una coincidenza di andamento anche tra valore della *digital* e *Delta* di una *vanilla*).

L'analogia sopra menzionata tra *Delta* della *digital* e *Gamma* della *vanilla* (coefficiente questo dotato evidentemente di un andamento meno regolare rispetto al *Delta* della medesima *vanilla*) spiega la maggiore variabilità presentata dal *Gamma* dell'esotica.

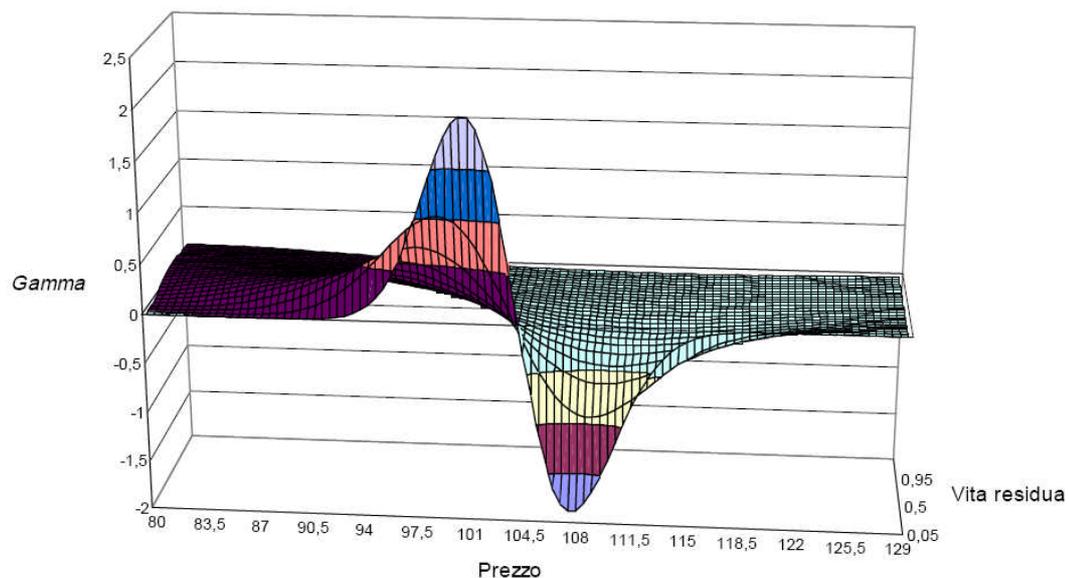


Figura 13 - Funzione *Gamma* di una *digital* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Dalla figura 13 è possibile arguire le caratteristiche di *risk reversal* (inversione del rischio) dell'opzione. Gli anglosassoni usano questo termine per indicare un repentino cambiamento di segno nella funzione *Gamma* in corrispondenza di un determinato livello del prezzo del sottostante. Tale caratteristica risulta particolarmente evidente nelle binarie man mano che ci si avvicina alla scadenza: per valori del prezzo inferiori allo *strike* l'opzione presenta *Gamma* positivo, per poi assumere un *Gamma* negativo quando il prezzo supera lo *strike* (vale ovviamente l'opposto per le *put*). Ad esempio, nel solo *range* di prezzo compreso tra 100 e 107\$, in presenza di una ridotta vita residua (un paio di settimane), la funzione *Gamma* passa da 1,95 a -1,8 in soli 7\$ di variazione del sottostante. Sempre in corrispondenza dello *strike*, come del resto è facile dedurre osservando la figura 11, cambia anche il comportamento del valore dell'opzione in funzione del tempo (né del resto potrebbe essere altrimenti se si pensa alla consueta complementarità tra effetto *Theta*

ed effetto *Gamma*): come si è già fatto notare, sotto lo *strike* infatti si manifesta un'erosione temporale del valore dell'opzione (*time decay*), mentre si verifica l'esatto opposto per valori del prezzo superiori allo *strike*. Dunque l'emittente l'opzione *digital* perde sull'effetto *Gamma* e guadagna sull'effetto *Theta* fintanto che l'opzione rimane *out of the money*, mentre la situazione si capovolge completamente quando l'opzione entra *in the money*. Chiaramente una tale caratteristica di inversione del rischio può creare qualche problema al *trader* che cercasse di coprire il rischio *Gamma* (dovuto alla non sempre puntuale compensazione tra effetto *Gamma* ed effetto *Theta*) utilizzando strumenti sprovvisti di una tale caratteristica.

Per quanto riguarda il coefficiente *Vega* (la derivata prima del premio rispetto alla volatilità del sottostante) si può facilmente prevederne l'andamento analogo a quello del *Gamma*: la figura 14 conferma del resto l'attesa somiglianza con tale funzione.

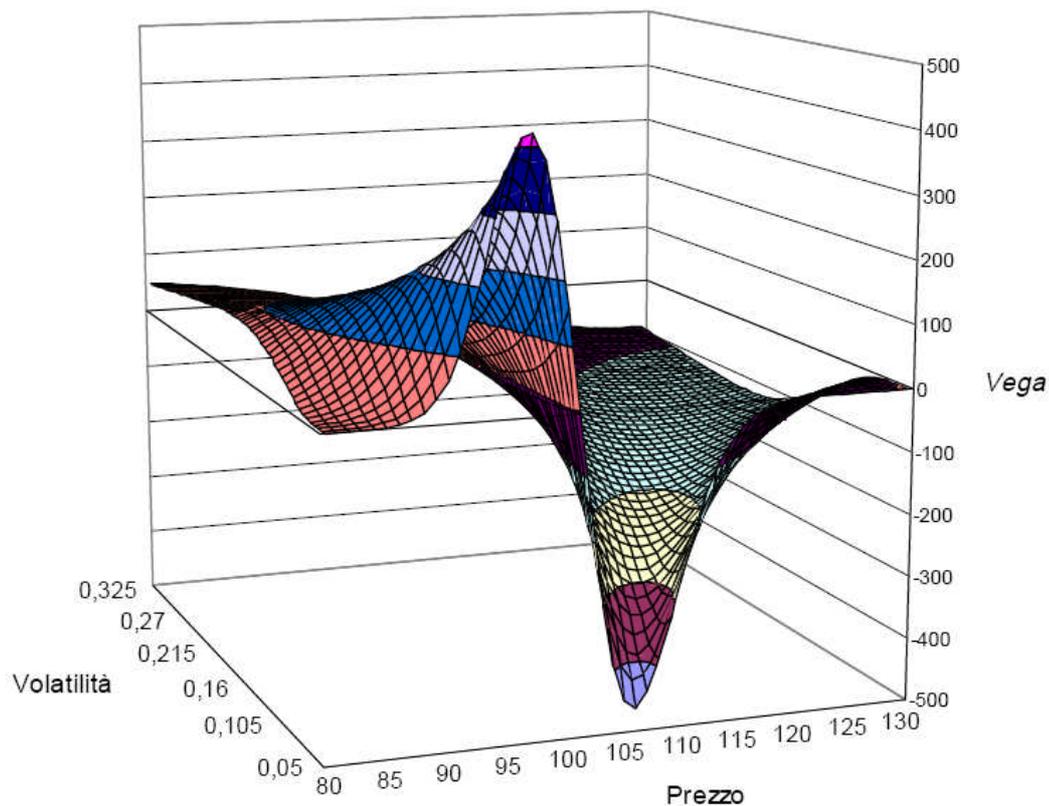


Figura 14 - Vega di una *digital call* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della volatilità di partenza

L'andamento sinusoidale della funzione *Vega* si spiega piuttosto facilmente: quando l'opzione è *out of the money* ogni aumento della volatilità del sottostante evidentemente non potrà che essere bene accetto, dal momento che andrà ad aumentare la probabilità che l'opzione ha di entrare *in the money*; al contrario quando l'opzione dovesse trovarsi già *in the money*, l'interesse del detentore è al contrario che la situazione rimanga "congelata", dal momento che la *binary* non potrebbe mai offrirgli più di quanto già non gli offra; la conseguenza è un *Vega* negativo (un aumento della volatilità aumenterebbe la probabilità dell'opzione di tornare o finire *out of the money*). Per quanto riguarda l'effetto della volatilità di partenza sul *Vega*, questo sarà chiaramente diverso a seconda del grado di vicinanza dello *spot* allo *strike*: per valori del prezzo lontani dallo

strike una bassa volatilità di partenza implica una probabilità di cambiamento di “campo” (passaggio dallo stato *out of the money* a quello *in the money* o viceversa) estremamente bassa, e dunque anche una bassa sensibilità in termini assoluti del premio rispetto a variazioni della volatilità; al contrario, sempre in presenza di una bassa volatilità di partenza, un prezzo vicino allo *strike* implica una forte sensibilità della probabilità di “cambiamento di campo” a variazioni della volatilità che, in prossimità appunto dello *strike*, possono in effetti risultare determinanti: il risultato consiste in un *Vega* particolarmente elevato in termini assoluti. Chiaramente per elevate volatilità di partenza il ragionamento si inverte: per prezzi vicini allo *strike* la probabilità di cambiamento di campo è così elevata da risultare poco sensibile a variazioni ulteriori della volatilità, mentre ciò non avviene per prezzi sufficientemente lontani, in virtù dei quali (grazie anche alla volatilità di partenza sufficientemente alta) la medesima probabilità ha ancora margini sostanziosi di aumento.

Le stesse considerazioni valgono per spiegare l’andamento del *Vega* in corrispondenza di diversi livelli di vita residua: del resto una bassa vita residua significa una bassa volatilità complessiva (considerata sull’arco della variazione complessiva del sottostante dall’inizio alla fine della vita dell’opzione) e viceversa.

Resta da esaminare il solo *Theta*, ovvero la derivata prima del premio rispetto al tempo (o meglio la vita residua dell’opzione). Esso misura la perdita o l’aumento di valore dell’opzione al passaggio del tempo. L’impianto classico di valutazione delle opzioni prevede una stretta complementarietà tra tale greca ed il *Gamma* visto in precedenza (in altre parole quel che si guadagna sul *Gamma* lo si deve perdere sul *Theta* e viceversa).

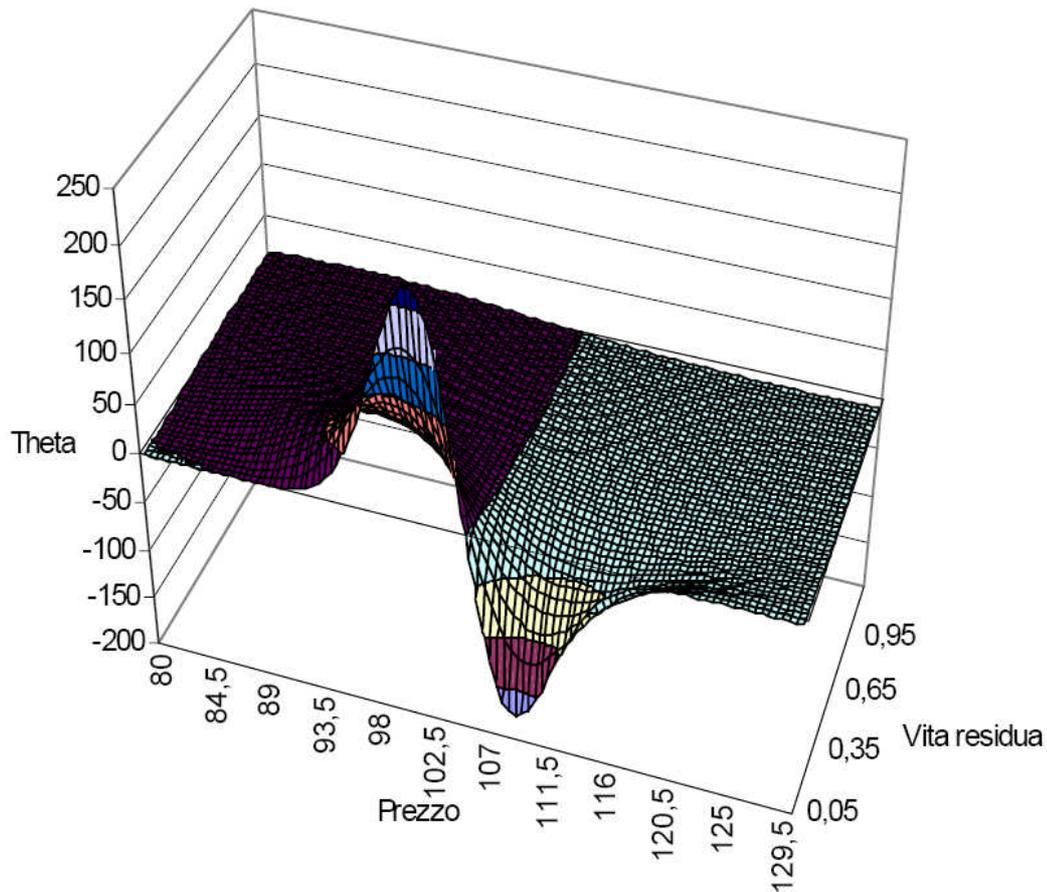


Figura 15 - *Theta* di una *digital call* europea ($K=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Nella figura 15, riportante l'andamento del *Theta* in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua, è possibile ravvisare una forte analogia con quanto visto in figura 13. Quando il *Gamma* raggiunge i massimi valori in termini assoluti, ecco inevitabilmente il *Theta* fare altrettanto. In sostanza l'opzione tende a perdere valore, al passaggio del tempo, per prezzi inferiori allo *strike* (quando l'*hedger*, lungo sulla posizione in opzioni, guadagna invece sull'effetto *Gamma*), e a guadagnarne invece per prezzi più alti (quando invece il medesimo *hedger* perde sull'effetto *Gamma*). Le ragioni di tale andamento sono fondamentalmente le stesse che abbiamo visto per il *Vega*. Del resto il fattore tempo è assai spesso, nella sua influenza sul comportamento dell'opzione, assimilabile al fattore volatilità.

2.5 AMERICAN DIGITAL OPTIONS

L'opzione binaria americana si differenzia dalla *digital* europea per il semplice fatto che non richiede, per l'esercizio, un prezzo a scadenza maggiore o minore di un dato livello (*strike price*) ma si accontenta che venga toccato anche solo momentaneamente da parte del prezzo un determinato livello H in un qualsiasi momento precedente la scadenza.

Non è un caso quindi se tali binarie vengono anche definite *one touch* (un solo tocco) dagli anglosassoni: è sufficiente che il prezzo del sottostante “tocchi” in qualsiasi momento la barriera perché l'opzione (di qui la sua natura binaria) paghi una determinata somma di denaro. Tale somma potrà essere corrisposta immediatamente oppure a scadenza: nel primo caso si parla di una *one touch immediate binary*, nel secondo di una *one touch deferred binary*.

La prima tipologia è di più difficile valutazione rendendosi evidentemente necessaria l'individuazione di una distribuzione di probabilità che permetta il calcolo del tempo “medio” in cui (per l'appunto in media) dovrebbe verificarsi il fatidico “tocco”: solo ciò rende possibile una corretta attualizzazione del *payoff* offerto dalla *digital*.

In termini più formali, posto pari ad H il livello di prezzo barriera, posta uguale a B la somma di denaro pagata dalla *digital* in caso di esercizio e definita la variabile M_t^T nel seguente modo (il prezzo massimo raggiunto in un intervallo di tempo):

$$M_t^T = \max \{S(s) | s \in [t, T]\}$$

dove $[t, T]$ rappresenta l'insieme di numeri reali destinati al computo del tempo dalla data t fino alla scadenza T (ovvero l'intervallo di tempo), siamo in grado di esprimere il *payoff* di una *digital call* americana in termini formali, affermando che l'opzione paga:

$$0 \quad \text{se } M_t^T < H$$

$$B \quad \text{se } M_t^T \geq H$$

Naturalmente una struttura analoga presentano le *digital put*.

La valutazione delle binarie americane, al pari delle *barrier options*, richiede l'utilizzo di una particolare funzione di densità probabilistica messa a punto da Cox e Miller. Tale funzione di densità consiste in una distribuzione dei prezzi a scadenza condizionata al mancato raggiungimento del livello H durante tutto l'arco della vita residua dell'opzione. In altri termini questa funzione di densità ci dice, per ogni livello di prezzo a scadenza inferiore (o superiore nel caso di una *put*) al livello H , il grado di probabilità (la densità di probabilità) con cui il prezzo può raggiungere a scadenza quel dato livello senza mai toccare il livello H . Viceversa un prezzo a scadenza superiore, nel caso di una *call*, od inferiore, nel caso di una *put*, al livello H , è raggiunto certamente con una traiettoria che attraversa il livello H . La funzione comunque non è propriamente riferita ai prezzi *tout court* del sottostante, bensì ai logaritmi degli stessi (in verità i logaritmi del rapporto tra prezzo corrente e prezzo iniziale): ciò si rende necessario per via del fatto che sono i ritorni, calcolati come logaritmi dei prezzi a distribuirsi normalmente, e ciò in virtù del moto Browniano aritmetico da essi seguito, in contrapposizione con il moto geometrico dei prezzi *tout-court*, che conduce ad una distribuzione futura di tipo

lognormale. In questa sede si cercherà di offrire una derivazione intuitiva della funzione ottenuta da Cox e Miller. Il linguaggio utilizzato a tal fine è un linguaggio preso a prestito dalla termodinamica: la ragione di tale scelta risiede nella maggiore evocatività che una particella fisica, da un punto di vista intuitivo, sicuramente possiede rispetto al logaritmo di un prezzo. Si consideri dunque una particella x che, muovendo da un livello (quota) di partenza definito pari a zero, effettui tale movimento (che considereremo solo su due dimensioni) secondo un moto Browniano aritmetico senza *drift*. Si consideri inoltre una “barriera” superiore di livello pari ad h ed una particella y del medesimo tipo e moto di x , ma che muova da un livello di partenza pari a $2h$. Si prenda in esame il grafico seguente, rappresentante due possibili traiettorie, parzialmente sovrappontesi, delle particelle x e y :

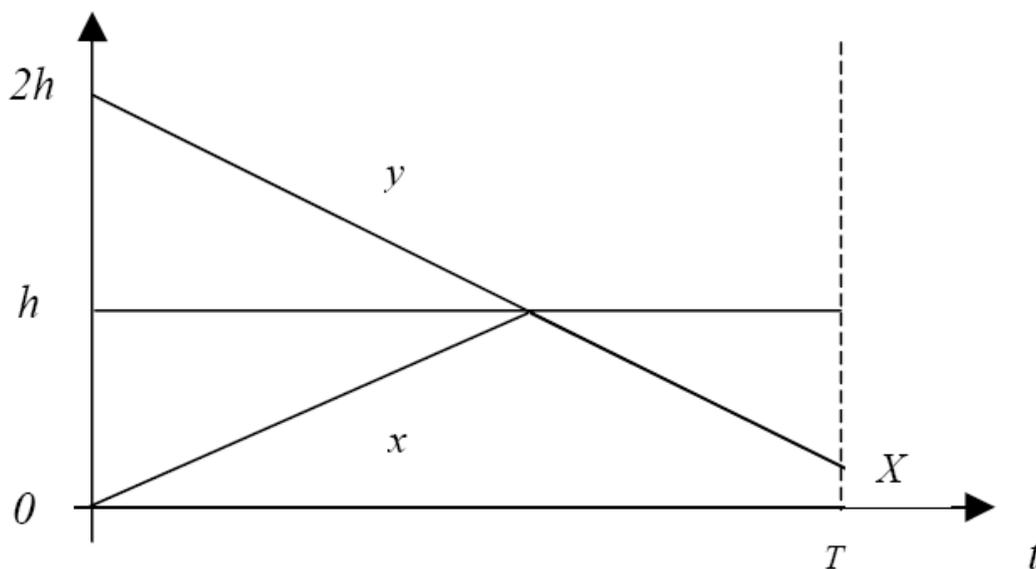


Figura 16 - Principio di riflessione

Il percorso seguito dalla particella x da 0 fino ad X (passando per la barriera) ha identica densità di probabilità di verificarsi del percorso

seguito dalla particella y da $2h$ fino ad X . La ragione di questo fenomeno è da ricercarsi nella conformazione delle due traiettorie. Prima che tali traiettorie si fondano, al raggiungimento della barriera, in una sola, esse presentano una medesima inclinazione (coefficiente angolare) in valore assoluto. Due traiettorie rettilinee che presentino una medesima “pendenza” in valore assoluto hanno la medesima “probabilità” di verificarsi (e a maggior ragione due traiettorie coincidenti, quali si presentano dopo il raggiungimento della barriera). Ciò è possibile in virtù della *natura simmetrica* della distribuzione normale, che, come detto, definisce i movimenti (senza *drift*) delle nostre due particelle (ovvero i logaritmi del prezzo del sottostante): in altre parole, un movimento verso l’alto o verso il basso della medesima entità hanno, in assenza di *drift*, la medesima “probabilità” (densità di probabilità) di verificarsi. Va da sé che traiettorie più “ripide” saranno meno “probabili”, poiché esse implicano (all’interno del nostro modello) la continua estrazione dalla distribuzione normale di valori posti sulle code della stessa e, pertanto, meno plausibili; in base al medesimo ragionamento la traiettoria più probabile è, in assenza di *drift*, quella orizzontale.

Una volta appurata la “isoprobabilità” delle due traiettorie tracciate nella figura 16 siamo in grado di generalizzare quanto detto, rilevando come, per ogni traiettoria che, partendo da quota zero e passando (ed eventualmente anche oltrepassando) per la barriera, raggiunga, al tempo T , la quota X , esista una seconda traiettoria che, partendo da quota $2h$, comportandosi in maniera del tutto simmetrica alla prima fino al raggiungimento della barriera e poi del tutto identica (coincidente) ad essa fino al conseguimento (al tempo T) della quota X , ha evidentemente la medesima identica probabilità (o meglio

densità di probabilità) di verificarsi. In sostanza quindi, la probabilità (in questo caso, cumulando le densità, è possibile parlare in termini di probabilità vera e propria) che una particella (l'equivalente fisico del logaritmo del prezzo), partendo da quota zero, raggiunga al tempo T (a scadenza) una qualsiasi quota inferiore alla barriera, passando nel suo tragitto per quest'ultima, è uguale alla probabilità che una medesima particella, partendo da quota $2h$, raggiunga al tempo T una quota inferiore ad h (la quota della barriera). Va poi, se del caso, chiarito che quanto detto vale ovviamente non solo per le semplici traiettorie lineari rappresentate in figura 16, ma per qualsiasi traiettoria che, partendo da 0, raggiunga a scadenza X toccando una o più volte la barriera: per ciascuna di tali traiettorie ne esiste una, simmetrica (fino al primo incrocio con la barriera) ed equiprobabile, che parte da quota $2h$. Al fine di dare al ragionamento sin qui svolto una veste più formale, consideriamo le due funzioni di densità relative alle due particelle, in presenza di *drift* nullo e di una deviazione standard pari a $\sigma\sqrt{t}$ (ciascuna di queste due distribuzioni dovrà dirci in sostanza la “probabilità” con cui la relativa particella raggiungerà a scadenza la quota X e non altre). La posizione a scadenza della particella x è distribuita secondo una normale con media pari alla posizione di partenza 0 e deviazione standard $\sigma\sqrt{t}$. Pertanto, per la particella x abbiamo:

$$f_x(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1(X-0)^2}{2\sigma^2 t}}$$

dove X è la quota finale raggiunta.

Per la particella y , che, al contrario di x , *muove da quota $2h$ anziché zero*, abbiamo analogamente:

$$f_y(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h)^2}{\sigma^2 t}}$$

dove X è definito come sopra. Naturalmente questa funzione misura anche la densità di probabilità dei percorsi che partono da 0 e arrivano a scadenza in X (al di qua della barriera) toccando la barriera.

A questo punto basta mettere insieme i due tasselli e, sostituendo i ritorni alle particelle, ottenere così la funzione di densità che ci dica, per ogni livello di prezzo (o meglio: logaritmo del prezzo) a scadenza inferiore alla barriera, la probabilità (da intendersi densità) che il prezzo vi arrivi partendo dal valore iniziale (che corrisponde al ritorno 0 in $t = 0$) senza mai toccare la barriera:

$$p(X, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-0)^2}{\sigma^2 t}} - e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h)^2}{\sigma^2 t}} \right\} \text{ per } X < h$$

dove h è evidentemente $\ln\left(\frac{H}{S}\right)$ (H è il livello della barriera in termini assoluti, ovvero non logaritmici).

Quindi $p(X, t)$ non è altro che $[f_x(X, t) - f_y(X, t)]$, ovvero la solita distribuzione normale diminuita, e quindi depurata, per ogni $X < h$, delle densità di probabilità relative a quei prezzi che, pur rivelandosi a scadenza inferiori ad h , hanno toccato la barriera durante l'arco di vita

dell'opzione: infatti la densità di probabilità relativa alle particelle x che finiscano la loro corsa a quota X sotto la barriera dopo averla però raggiunta è esattamente identica, per il discorso di isoprobabilità sin qui svolto, alla densità relativa alle particelle y che, partendo da quota $2h$, raggiungano a scadenza la medesima quota X , scavalcando evidentemente una o più volte la barriera. La riproposizione della figura 16, ottenuta sovrapponendo le due funzioni di densità menzionate, può aiutare la comprensione intuitiva del problema: è quanto offre la figura 17.

In essa è facile distinguere le due distribuzioni normali $f_x(X, t)$ ed $f_y(X, t)$ relative alle due particelle x ed y .

Ciascuna di queste distribuzioni ci dice la densità di probabilità con cui la particella x e la y rispettivamente finiscono a scadenza col raggiungere una determinata quota X e non altre (non a caso le due distribuzioni sono centrate, in assenza di *drift*, sulle traiettorie orizzontali).

Evidentemente per ottenere la distribuzione $p(X, t)$ dovremo sottrarre, per ogni valore X al di sotto della “barriera”, dalla prima distribuzione la seconda, in modo da depurare appunto la prima funzione di densità dalle densità relative alle traiettorie sbagliate, ovvero quelle che, pur portando la particella ad una quota finale $X < h$, prevedono un passaggio sulla “barriera”.

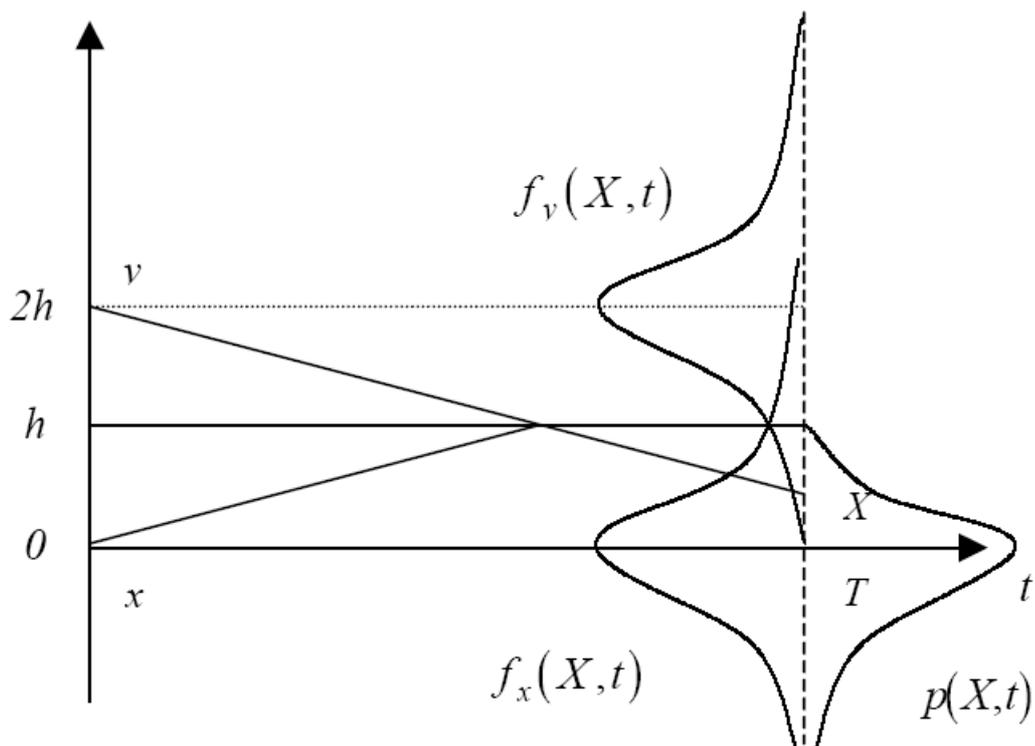


Figura 17 - Le distribuzione di probabilità relative alle due particelle x ed y

C'è però un elemento molto importante, relativo alla trasposizione del problema dallo scenario fisico (come fin qui presentato) a quello economico e che è stato trascurato nella funzione $p(X,t)$: tale elemento è la presenza del *drift*; infatti il logaritmo del prezzo presenta un movimento di tipo Browniano aritmetico, ma presenta

altresì un *drift* pari ad $a = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ (abbiamo sostituito μ con il tasso

senza rischio r , in accordo con l'approccio probabilistico).

Naturalmente Cox e Miller hanno tenuto conto di tale *drift* ed hanno trovato una versione generalizzata di $p(X,t)$, di cui evidentemente quella esaminata non è che un caso particolare (quello di $a = 0$). Tale funzione è:

$$p(X, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-0-at)^2}{\sigma^2 t}} - e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h-at)^2}{\sigma^2 t}} \right\} \text{ per } X < h$$

Non è difficile constatare come tale generalizzazione non si sia limitata ad “aggiornare” le funzioni $f_x(X, t)$ ed $f_y(X, t)$, ma abbia

anche introdotto un fattore $e^{\frac{2ha}{\sigma^2}}$ del tutto inaspettato. In realtà per arrivare a comprendere la ragion d’essere di tale fattore è necessario prima di tutto rendersi conto che, in presenza di *drift*, le due famose traiettorie illustrate in figura 16 cessano di essere isoprobabili. In particolare, in presenza di un *drift* positivo, la traiettoria della particella y diventa meno probabile di quella della controparte x : ciò si spiega con la resistenza (offerta dal *drift* positivo) che la particella y deve vincere per scendere fino a raggiungere la barriera a quota h (oltretutto la particella x va incontro ad un fenomeno opposto). Proprio per compensare tale fenomeno è necessario introdurre il

fattore di correzione $e^{\frac{2ha}{\sigma^2}}$ per la funzione di densità $f_y(X, t)$. In altre parole, per rendere le due traiettorie nuovamente isoprobabili (nel senso che vengono percorse idealmente da un medesimo numero medio di particelle) è necessario in un certo senso “barare” e far

quindi finta che da quota $2h$ partano non una, bensì $e^{\frac{2ha}{\sigma^2}}$ particelle y .

Per non appesantire ulteriormente la trattazione non è il caso di dimostrare in questa sede perché tale fattore di correzione debba essere esattamente quello della distribuzione di Cox e Miller, tuttavia è possibile darne un’interpretazione alquanto intuitiva. Per esempio ci

aspetteremmo che all'aumentare del *drift* relativo (il rapporto tra *drift* e varianza) aumenti anche il fattore di correzione: ed infatti in esso è presente il rapporto $\frac{a}{\sigma^2}$. Lo stesso dicasi per l'altezza della barriera h :

più alta è la barriera, maggiore è la distanza che le nostre particelle y devono percorrere controcorrente partendo da $2h$ e tanto più alto deve quindi risultare il fattore di

correzione. Estendendo quanto detto si può affermare che, qualora avessimo bisogno della funzione di densità relativa ai (logaritmi dei) soli prezzi che, pur concludendo il loro percorso sotto la barriera abbiano toccato la medesima almeno una volta prima della scadenza, non dovremmo far altro che prendere di peso la $f_y(X, t)$ ed applicarla all'intervallo $[-\infty, h]$.

A questo punto disponiamo degli strumenti necessari alla valutazione delle *deferred binary options*. A tal fine è prima di tutto necessario calcolare la probabilità complessiva che il prezzo, partendo da sotto la barriera, arrivi a toccarla almeno una volta prima della scadenza. Evidentemente tale probabilità non può che rappresentare la somma di due componenti: la probabilità che il prezzo termini la sua corsa al di sopra della barriera (il che ovviamente implica il perforamento della stessa) nonché la probabilità che il prezzo, pur raggiungendo a scadenza livelli inferiori (in termini logaritmici) ad h , abbia toccato tale livello almeno una

volta prima della scadenza. In termini formali la probabilità d'esercizio è dunque pari a:

$$\begin{aligned}
P &= \int_h^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-at)^2}{\sigma^2 t}} dX + \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X-2h-at)^2}{\sigma^2 t}} dX = \\
&= N\left(\frac{-(h-at)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(\frac{h-2h-at}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Evidentemente il valore della *digital*, posto uguale alla somma B il *payoff* offerto a scadenza dall'opzione in caso favorevole, può essere espresso nel seguente modo:

$$V = e^{-rt} B \cdot P + e^{-rt} 0 \cdot (1 - P) = e^{-rt} B \cdot P$$

ovvero⁴, sostituendo ad a e ad h le formule corrispondenti:

$$V_C = e^{-rt} B \left\{ N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt - \frac{\sigma^2}{t}}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) - rt + \frac{\sigma^2}{t}}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right\}$$

è il valore di una *call cash or nothing*⁵.

Se invece di una *call*, una *put* non dovremmo far altro che scambiare gli intervalli di integrazione delle due funzioni di densità, ottenendo evidentemente:

$$V_P = e^{-rt} B \left\{ N\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) - rt + \frac{\sigma^2}{t}}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + rt - \frac{\sigma^2}{t}}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right\}$$

⁴ Tale formulazione, ottenuta con Rubinstein, differisce da quella proposta da Zhang utilizzata in precedenza.

La differenza tra le due formule consiste semplicemente in un cambio di segno degli argomenti delle funzioni cumulate $N(\cdot)$.

Le formule finora esaminate sono valide solo per le opzioni *digital* americane che prevedano il pagamento del *payoff* rigorosamente a scadenza (*deferred binary*). Chiaramente per arrivare ad una valutazione in forma chiusa delle *immediate binary options* si rende necessaria l'individuazione di una funzione di densità che, per ogni istante precedente la scadenza, ci dica la probabilità con cui in quell'istante la barriera può essere perforata. Tale funzione prende il nome di densità di *first passage time*. Per la derivazione della stessa si consideri ora la probabilità che la barriera (con $a > 0$) non venga mai perforata prima della scadenza:

$$\bar{P} = N\left(\frac{h-at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} N\left(\frac{-h-at}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Differenziando tale funzione (in realtà avremmo potuto differenziare, con esiti, a parte il segno, identici, anche la probabilità di perforamento della barriera) rispetto alla vita residua e cambiando il segno del risultato (altrimenti la densità sarebbe negativa: all'aumento della vita residua la probabilità di non perforamento diminuisce, ed ovviamente cresce di pari misura quella di perforamento) otteniamo la distribuzione di densità che cercavamo:

$$l(t) = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{(h-at)^2}{2\sigma^2 t}}$$

La distribuzione $l(t)$ è detta anche “distribuzione Gaussiana inversa”.

Nel caso di una put, cioè nel caso $h < 0$, la distribuzione $l(t)$ diventa:

$$l(t) = \frac{-h}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} e^{-\frac{(h-at)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Il valore di una *immediate binary option* può essere visto come il valore atteso del valore attuale del *payoff* offerto dalla *digital* nel momento in cui il prezzo tocca la barriera; in termini formali dunque:

$$V = \int_0^t e^{-rt} Bl(\tau) d\tau = B \int_0^t e^{-rt} l(\tau) d\tau$$

La soluzione di questo integrale ci offre la seguente formula di valutazione in forma chiusa per le *immediate american digital*:

$$V = B \left(\frac{H}{S} \right)^{q_1} N[\theta Q_1] + B \left(\frac{H}{S} \right)^{q_{-1}} N[\theta Q_{-1}]$$

$$\text{dove} \quad Q_v = \frac{\ln \frac{H}{S} + vt\psi}{\sigma\sqrt{t}} \quad (v = +1 \text{ oppure } -1)$$

$$\psi = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2 r}$$

$$q_v = \frac{a + v\psi}{\sigma^2}$$

$\theta = -1$ per le call ($h > 0$), $\theta = +1$ per le put

Ovviamente una *immediate american cash or nothing digital* varrà sempre più della corrispondente *deferred*. Infatti a parità di condizioni la *immediate* offre subito quello che la *deferred* offre solo a scadenza.

Al di là delle notevoli differenze che, ai fini della valutazione, abbiamo avuto modo di riscontrare tra le *digital* europee e quelle americane, occorre riconoscere che questi due tipi di binarie presentano anche altre e più interessanti diversità. In primo luogo le *digital* americane, per le maggiori *chance* che offrono di ottenere un *payoff* positivo (non dimentichiamo che, mentre l'europea paga solo se a scadenza il prezzo è superiore/inferiore allo *strike*, l'americana al contrario paga anche nel caso in cui lo *strike/barriera* venga semplicemente "toccato" prima della scadenza), sono evidentemente anche più costose delle controparti europee (in genere addirittura il doppio). Un'altra interessante caratteristica delle *digital* americane rispetto alle europee consiste nella presenza di un *Vega* (derivata del prezzo rispetto alla volatilità) costantemente positivo. La cosa non deve stupire più che tanto: infatti, in un'*american digital*, il prezzo del sottostante non può mai superare la barriera ed entrare *in the money* senza causare l'estinzione (favorevolmente anticipata) dell'opzione. Ma per cominciare a farci un'idea più precisa del comportamento di una *digital* americana (*deferred binary*), osserviamo attentamente l'andamento del premio rappresentato nella seguente figura.

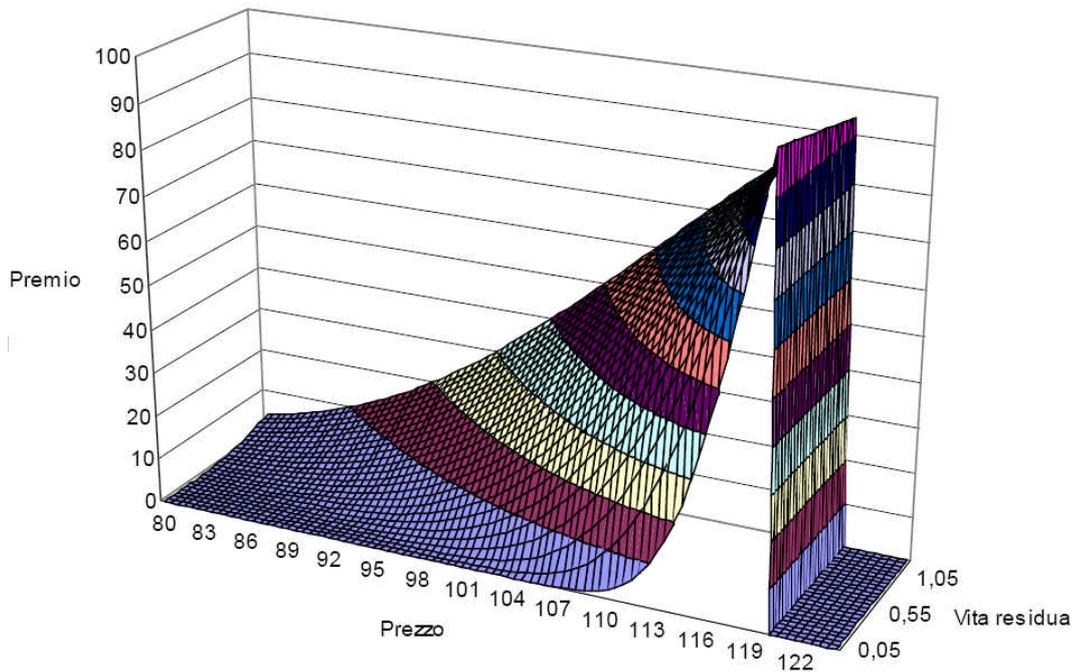


Figura 18 - Premio di una deferred call (H=120) in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua (tasso = 5%)

Questo grafico è stato ottenuto ipotizzando la presenza di una *call con barriera* collocata in corrispondenza di un prezzo pari a 120\$ (inoltre: $\sigma=15,7\%$, $r=5\%$, $B=100\text{\$}$). Il primo elemento che balza all'occhio confrontando tale grafico con quello relativo alle binarie europee è ovviamente la parete verticale che si innalza in corrispondenza della barriera, dovuta all'estinzione che l'opzione incontra per prezzi pari o superiori alla barriera stessa. D'altra parte la scelta di un livello pari a zero per il prezzo dell'opzione oltre la barriera ha natura puramente simbolica: non si può misurare ciò che non c'è. Un altro elemento di differenziazione, tra la *digital americana* e quella europea, che emerge abbastanza chiaramente dal grafico è la mancanza di quella caratteristica di *risk reversal* che al contrario contraddistingueva, in maniera appariscente, le *european binary*. In realtà, pur potendosi ragionevolmente sostenere che il *Gamma* delle *digital americane* è

sostanzialmente sempre positivo, una tale tesi comincia seriamente a vacillare in presenza di un tasso senza rischio piuttosto elevato. Il tasso utilizzato nella figura 18 era del 5%. Si può notare come, in presenza di una vita residua molto elevata (intorno ad un anno), il grafico accenna una leggera concavità in prossimità della barriera. Osserviamo ora il grafico (figura 19) della medesima opzione in presenza di un tasso del 15% (volutamente esagerato).

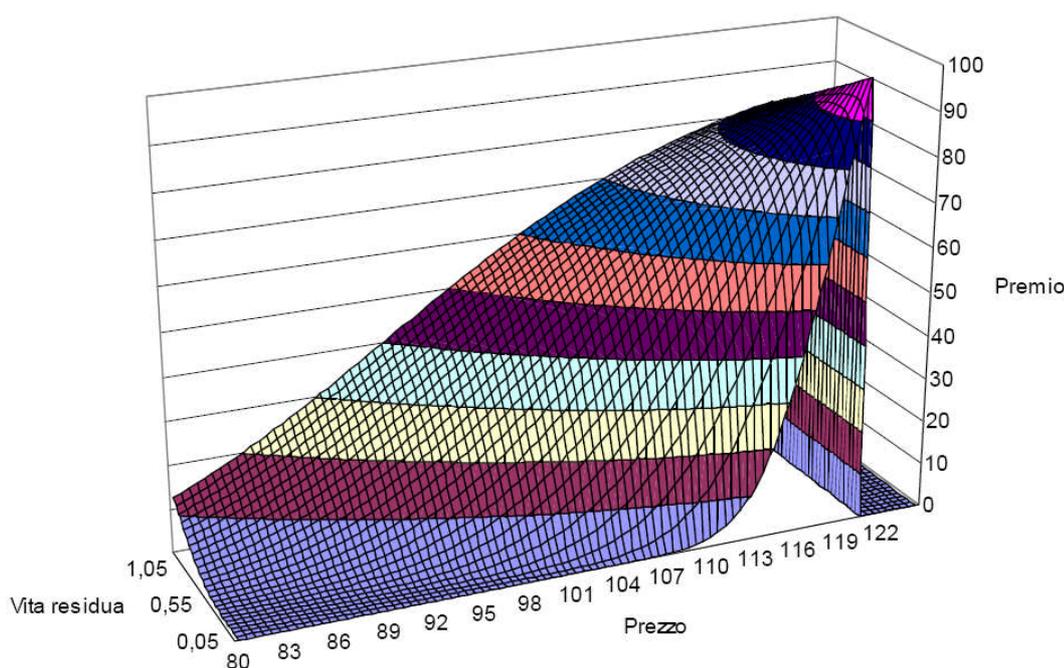


Figura 19 - Prezzo di una deferred call (H=120) in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua (tasso = 15%)

Per valori del prezzo prossimi alla barriera ed in corrispondenza di una vita residua sufficientemente elevata, possiamo notare che il grafico presenta una strana “gobba” (o rigonfiamento). L’accentuarsi della concavità (*Gamma* negativo) in tali condizioni non è certo una casualità ed esiste anzi una spiegazione intuitiva per tale fenomeno. Un elevato tasso di interesse implica, in base alle nostre assunzioni relative all’utilizzo del metodo probabilistico, una spiccata tendenza

del prezzo del sottostante a variare in aumento: questo significa che, per valori di partenza del prezzo sufficientemente alti ed in presenza di una vita residua piuttosto lunga, il perforamento della barriera è un evento praticamente certo, o comunque molto probabile. Chiaramente in tali condizioni un ulteriore aumento del prezzo non può che avere effetti estremamente limitati sul valore della *digital*, soprattutto se paragonati con l'aumento di valore di cui può beneficiare la stessa per medesimi movimenti del prezzo, ma in presenza di una vita residua ridotta (ed in combinazione con valori di partenza del prezzo prossimi alla barriera). Queste sono dunque le ragioni che portano il *Gamma* negativo a predominare in una porzione non trascurabile della figura 19.

In realtà, tuttavia, anche nella figura 18 , il *Gamma* presenta un'inversione di segno anche nel caso di un tasso del 5%; è il caso però di sottolineare come tale inversione fosse di modeste proporzioni. Infatti il *Gamma* negativo non scendeva mai al di sotto di $-0,25$, contro il quasi 3 raggiunto dal *Gamma* positivo in prossimità della scadenza. Con un tasso del 15% al contrario il *Gamma* può scendere fino a -1 (ovvero quattro volte tanto) in prossimità della barriera e a poco tempo dalla scadenza dell'opzione. In effetti, a prescindere dall'effetto tasso ed in apparente contrasto con quanto detto, è più facile trovare *Gamma* fortemente negativi in presenza di una bassa vita residua, quando cioè il comportamento dell'opzione si fa giocoforza più brusco, anche se un'alta vita residua abbassa (nelle call) notevolmente il prezzo a partire dal quale il *Gamma* inverte il suo segno; in altre parole una bassa vita residua rende l'inversione quantitativamente notevole ma circoscritta alla zona di prezzo appena a ridosso della barriera (per la qual ragione risulta scarsamente visibile

nei grafici), mentre un'opzione più “giovane” presenta inversioni più modeste, ma estese ad una “zona” ben più estesa (e ben più visibile sul grafico). Il grafico a due dimensioni rappresentato nella figura 20 mostra il comportamento della medesima opzione a quattro e a sedici mesi dalla scadenza, rendendo ancora più evidente la variabilità della curvatura (il *Gamma*) in funzione della vita residua.

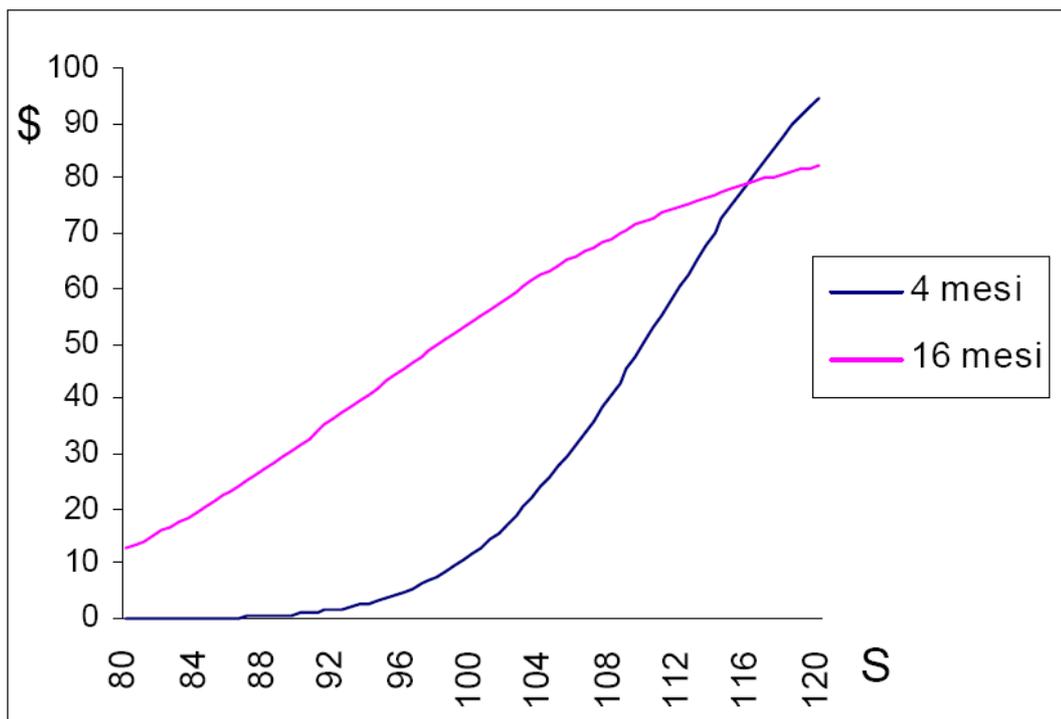


Figura 20 - Il premio di una deferred up and in ($H=120$) a 4 e a 16 mesi dalla scadenza.

Questo grafico tuttavia non si limita a confermare la validità delle intuizioni sopra sviluppate. È facile infatti notare come il prezzo della *digital* con minore vita residua arrivi a superare il prezzo dell'opzione “giovane” per valori del prezzo sufficientemente alti. Tale fenomeno appare, a prima vista, inspiegabile, in quanto ci si aspetterebbe che il *time decay* operasse in corrispondenza di qualsiasi livello del prezzo. In realtà occorre tenere nel debito conto anche l'effetto sul prezzo relativo all'attualizzazione dello stesso. In effetti per valori del prezzo

del sottostante sufficientemente alti la probabilità di perforamento della barriera è così alta da risultare assai poco sensibile al passaggio del tempo. È questa la ragione per cui, in presenza di tassi particolarmente alti (non dimentichiamo che stiamo ragionando sulla base di un tasso del 15%) e di prezzi sufficientemente prossimi alla barriera, l'effetto attualizzazione supera l'effetto *time decay* e porta il prezzo della *digital* a crescere con il passare del tempo. A titolo esemplificativo si fa notare come in presenza di un tasso del 15% e di uno spot vicinissimo alla barriera, poniamo pari a 119\$ (le altre condizioni sono le medesime riportate più sopra), il valore dell'opzione passa da 89\$ circa a nove mesi dalla scadenza ai ben 96\$ rilevabili (a parità assoluta di condizioni) in presenza di una vita residua ridotta a tre mesi. Con un tasso ridotto al 5% chiaramente il fenomeno è molto meno marcato e tuttavia ancora presente: si passa in questo caso da 96\$ a 99\$ circa (anche qui passando da nove a tre mesi dalla scadenza).

Per quanto riguarda il *Delta* osserviamo la figura 21.

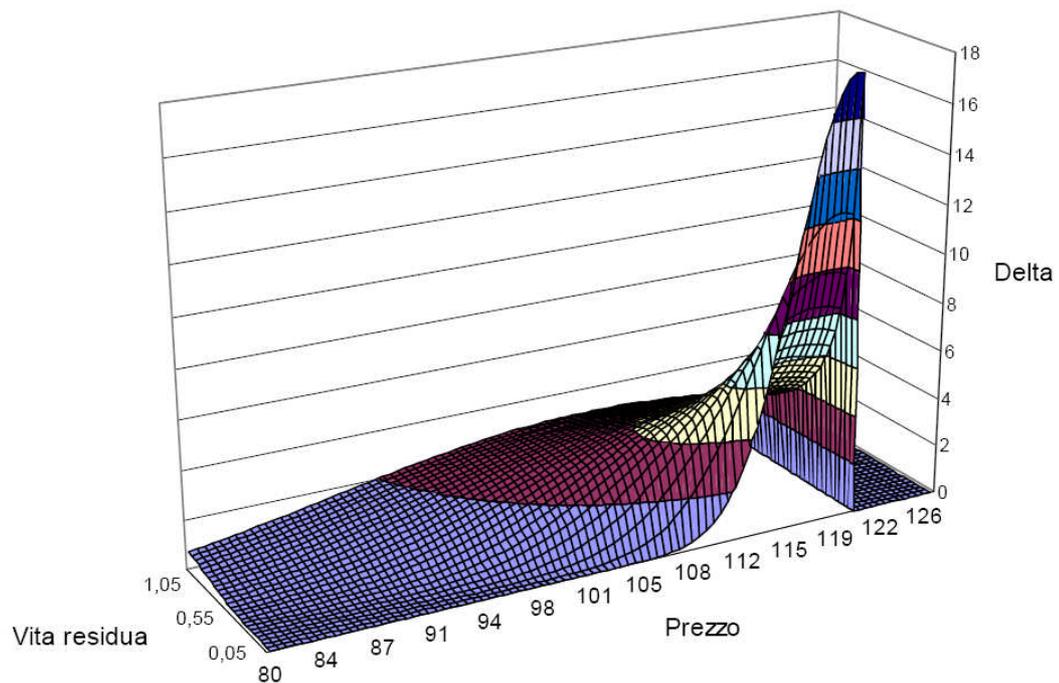


Figura 21 - Il Delta di una deferred call (H=120) in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua.

Per prezzi molto alti e vita residua sufficientemente elevata è facile constatare come la funzione, dopo aver raggiunto un massimo assoluto, tenda a decrescere, confermando quanto osservato relativamente al *Gamma* (usando un tasso $r=5\%$). In termini generali comunque, ciò che importa rilevare è la costante tendenza del *Delta* a crescere, al passare del tempo, per valori del prezzo sufficientemente alti e a decrescere per valori del prezzo troppo lontani dalla barriera. Evidentemente anche nel caso delle binarie americane si ripropone lo stesso problema riscontrato nelle *digital* europee e cioè che per prezzi vicini alla barriera ed una scadenza dell'opzione ravvicinata il *Delta* diventa esplosivo, rendendo impossibile la copertura dinamica della *digital*. Basti pensare del resto come la funzione *Delta* passi, in corrispondenza di uno spot di 119\$, dal 3,6 a nove mesi dalla

scadenza a circa 7,2 (il doppio) a tre mesi, fino a quasi 18, quando alla scadenza mancano soltanto un paio di settimane.

Passiamo ora ad esaminare il coefficiente *Vega*.

Come già è stato affermato in precedenza, le *digital americane* sono caratterizzate da un *Vega* sempre positivo. Ciò è rilevabile dal seguente grafico:

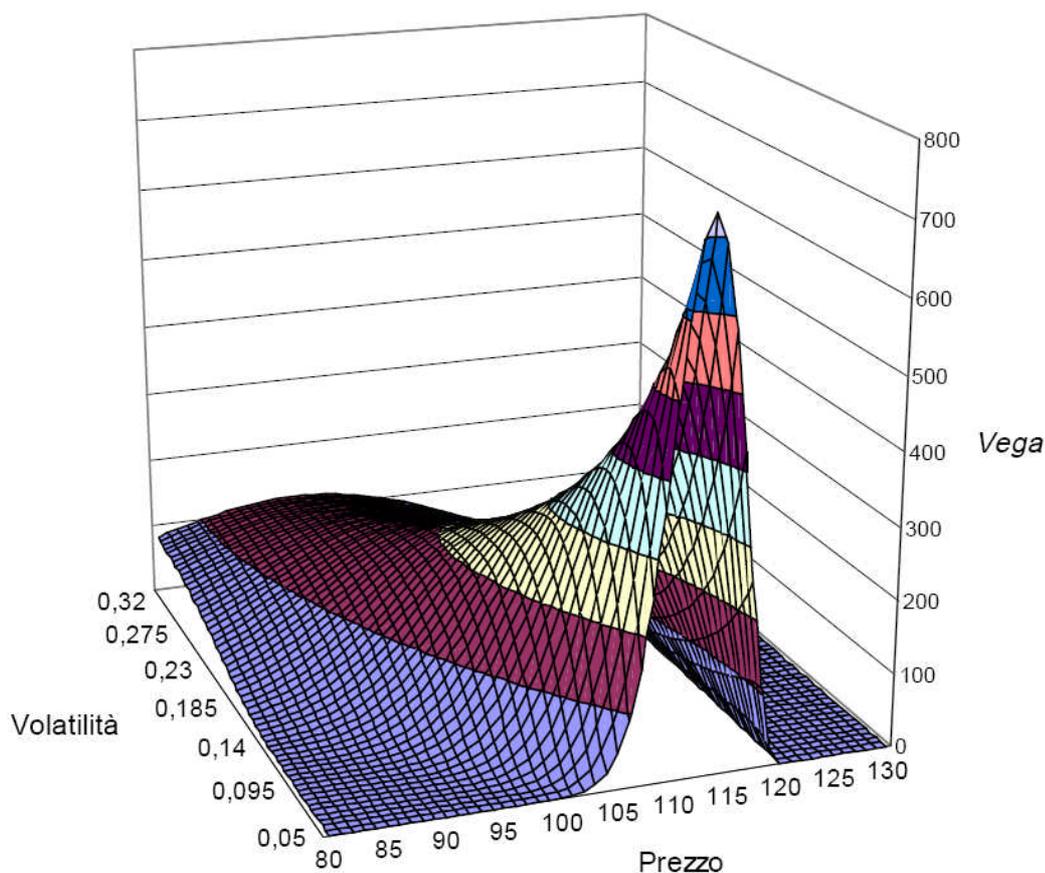


Figura 22 - Vega di una deferred up and in (H=120) in funzione del prezzo del sottostante e della volatilità. (I valori del Vega sono in percentuale)

Come è lecito aspettarsi, il *Vega* raggiunge i massimi livelli in corrispondenza di volatilità di partenza basse e per prezzi del sottostante prossimi alla barriera. Ciò si spiega con il fatto che, in prossimità della barriera, basta un piccolo aumento della bassa

volatilità di partenza per ottenere un considerevole aumento della probabilità di perforamento della barriera; è quanto non accade nel caso di prezzi troppo lontani dalla barriera (sempre in presenza di bassa volatilità di partenza), nel qual caso la speranza di vedere perforata la barriera è talmente bassa da risultare molto poco sensibile a modesti aumenti della volatilità. A riprova di quanto detto il $Vega(110, 10\%)$ (il $vega$ calcolato in base ad uno spot di 110\$ e ad una volatilità di partenza del 10%) è pari a 0.4 circa, mentre il $Vega(90, 10\%)$ risulta sostanzialmente nullo. Un ragionamento esattamente speculare vale per valori di partenza della volatilità sufficientemente alti: per volatilità elevate e prezzi vicini alla barriera la probabilità di perforamento della barriera è tanto prossima all'unità da risultare quasi insensibile ad ulteriori aumenti della volatilità, mentre per prezzi sufficientemente lontani dalla barriera c'è ancora spazio per un aumento apprezzabile della medesima. Infatti, volendo offrire ulteriori esempi numerici, $Vega(119, 30\%)$ è praticamente nullo, mentre $Vega(96, 30\%)$ ammonta a 0.14.

Tutte queste considerazioni hanno avuto per oggetto, sinora, le *deferred american binary*. Giunge dunque spontaneo, chiedersi se tali argomentazioni possano risultare valide anche per le *immediate american binary* che, come già abbiamo visto, si differenziano dalle *deferred* per il pagamento immediato (al momento della perforazione della barriera), e non a scadenza, della somma (B) pattuita in caso di estinzione favorevole. Osserviamo prima di tutto il grafico relativo all'andamento del premio in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua (figura 21: barriera, tasso, volatilità e *payoff* sono gli stessi utilizzati per le *deferred*, ovvero $H = 120\$$, $\sigma = 15,7\%$, $r_f = 5\%$, $B = 100\$$).

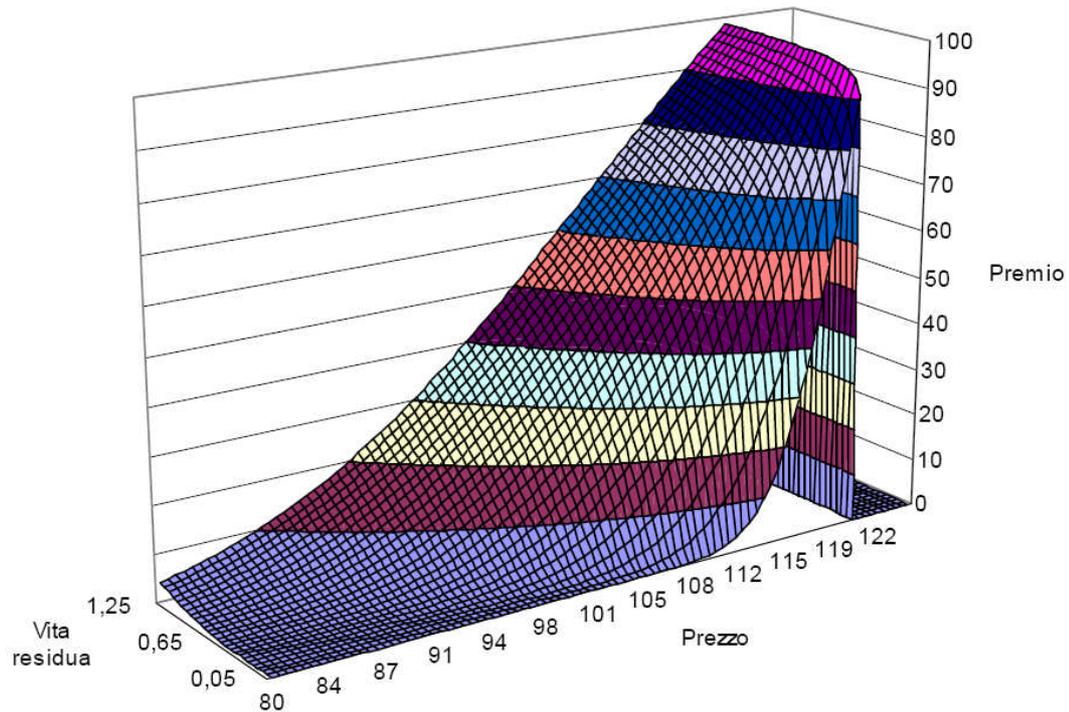


Figura 23 - Premio di una *immediate up and in* ($H=120$) in funzione del prezzo e della vita residua.

Si può constatare la sostanziale identità di tale grafico con quello relativo alla *deferred binary*. Tuttavia, a dire il vero, esiste una minima differenza, e cioè che nelle *immediate binary* non troviamo più, in corrispondenza di prezzi prossimi alla barriera, il *time decay* negativo che, al contrario, era riscontrabile nelle *deferred* (in maniera tanto più marcata quanto più alto era il tasso senza rischio). Ciò si spiega con il fatto che, in questo caso, il fattore di attualizzazione non agisce più, come nelle *deferred*, in maniera indipendente, ma risulta strettamente legato alla probabilità di perforazione della barriera⁶. Per il resto le caratteristiche delle due tipologie di *digital* americane sono praticamente identiche.

⁶ Si veda in proposito la gaussiana inversa ed il procedimento seguito per il *pricing* delle *immediate* illustrato in precedenza.

Passiamo ora ad analizzare le *put*. Ci si dovrebbe aspettare un funzionamento speculare di queste ultime rispetto alle *call* ed in gran parte è così.

Osserviamo il grafico relativo al comportamento di una *put deferred digital* (figura 24: a parte la barriera posta a quota 90\$ le rimanenti condizioni sono le stesse dei grafici precedenti).

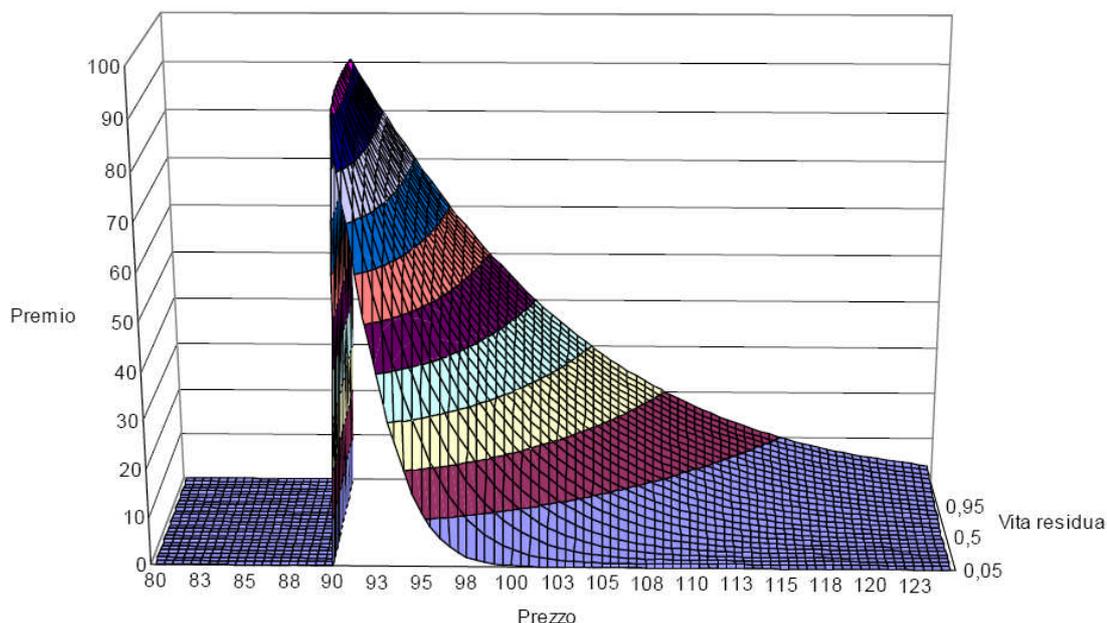
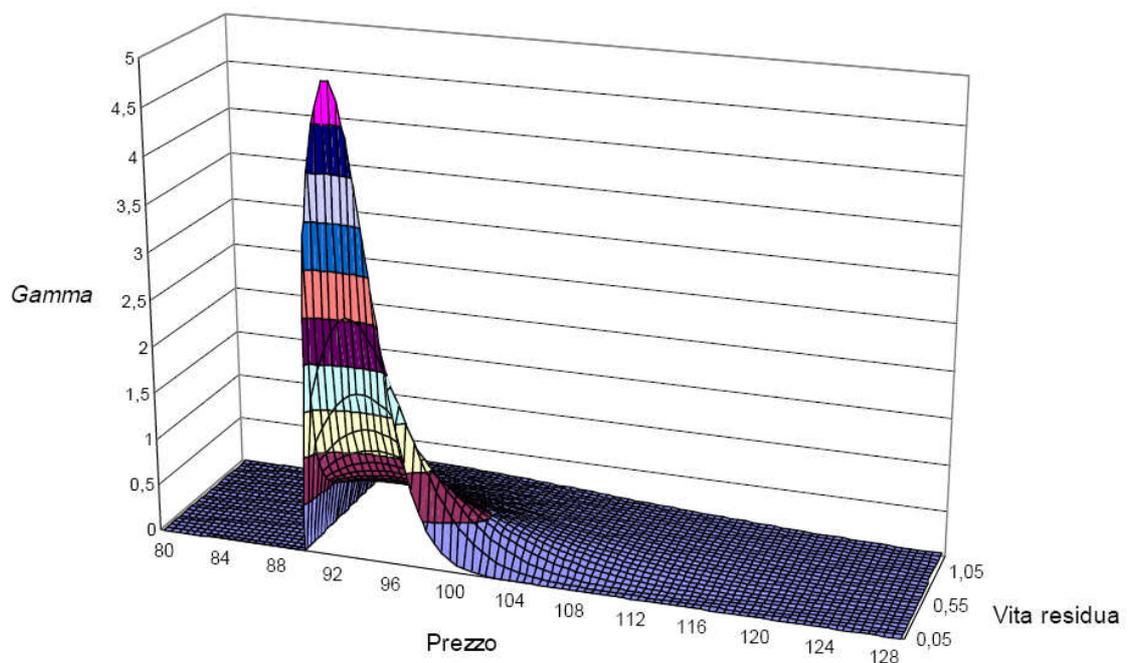


Figura 24 - Andamento del premio di una *put* ($H=90$) in funzione del prezzo e della vita residua

Osservando il grafico si può notare una forte analogia con quello delle *call*, tranne che per un particolare. Il particolare è costituito dal fatto che non c'è una riduzione della pendenza in prossimità della barriera.

La cosa in realtà non dovrebbe stupire più che tanto se solo si riporta alla memoria la ragione per cui, nelle *call*, era possibile un'inversione del *Gamma* in prossimità della barriera, e cioè la presenza di un *drift* positivo che, proprio per prezzi vicini alla barriera (ed elevata vita residua), rendeva tanto probabile il perforamento della stessa da

impedire un congruo aumento di valore dell'opzione per ulteriori aumenti del prezzo del sottostante. Chiaramente, con una barriera da perforare dall'alto, vale per le *put* il ragionamento opposto, e cioè tanto più alto è il tasso d'interesse (tanto più alto è il *drift*) tanto più difficile diventa il perforamento della barriera e quindi tanto più sensibile diventa il prezzo dell'opzione all'andamento del prezzo del sottostante. È questa dunque la ragione che porta ad una funzione *Gamma* costantemente positiva, come del resto facilmente verificabile osservando la figura 25.



Volendo offrire una riprova numerica di quanto detto circa l'influenza del *drift* sulla convessità delle *put digital* basti considerare le cifre seguenti: il $\text{Gamma}(95, 3\text{mesi})$ (il *Gamma* calcolato in corrispondenza di uno spot di 95\$ e di una vita residua di tre mesi) vale 1,05 circa in presenza di un tasso pari al 5%, per arrivare a 1,42 con un tasso del 15%; in sostanza, in accordo con quanto accennato sopra, un aumento del *drift* porta ad un aumento della convessità.

CAPITOLO 3

LE OPZIONI ESOTICHE BARRIER

Le opzioni barriera sono opzioni che o nascono (*in barrier* o *knock-in*) o si estinguono (*out barrier* o *knock-out*) quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge un determinato valore H detto appunto barriera.

Le opzioni barriera, siano esse *call* o *put*, possono essere distinte in quattro categorie:

- *up-and-in* : il prezzo dell'attività sottostante S deve, prima della scadenza, crescere fino a raggiungere il valore H . Solo in questo caso il detentore avrà diritto ad esercitare l'opzione;
- *down-and-in* : l'opzione "nasce" solo nel momento in cui il prezzo dell'attività sottostante decresce fino a raggiungere il valore H ;
- *up-and-out* : il detentore perde il diritto ad esercitare l'opzione se, durante la vita della stessa, l'attività sottostante aumenta fino a raggiungere la barriera;
- *down-and-out* : in questo caso il contratto è cancellato se, entro la scadenza dello stesso, il prezzo dell'attività sottostante raggiunge o va al di sotto del valore barriera H .

Comunemente la barriera si trova nella regione *out-of-the-money*, ossia è posizionata al di sotto del prezzo d'esercizio per un'opzione *call*, al di sopra per un'opzione *put*. Queste opzioni sono dette *standard* (o *regular*) *barrier*. Esistono, tuttavia, altre opzioni barriera

che si distinguono in quanto la barriera è posizionata nella regione *in-the-money*. Tali opzioni sono dette *reverse barriers*.

Tutte le opzioni barriera proprio per la presenza della barriera che limita le possibilità di esercizio hanno premi più contenuti rispetto a quelli previsti per l'acquisto delle corrispondenti opzioni standardizzate di tipo europeo. In particolare, poi, le opzioni *reverse barriers* del tipo *out barrier*, che trovano nella presenza di una barriera un limite massimo al *payoff* conseguibile, prevedono premi ancora più contenuti.

Appartengono alla categoria delle opzioni *standard barrier*:

- *down-and-out call* (con $H < K$): la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed ha un valore, H , inferiore al prezzo di esercizio, K . Affinché l'opzione non scompaia l'attività sottostante non deve andare al di sotto del valore barriera. Quindi le oscillazioni di prezzo per l'attività sottostante trovano un limite minimo nel valore barriera. Il detentore di una simile opzione si aspetta una volatilità bassa ed una tendenza al rialzo delle quotazioni dell'attività sottostante. Per quanto riguarda il premio, questo diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo che va da H , valore della barriera, ad K , prezzo di esercizio.

- *down-and-in call* (con $H < K$): la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed il suo valore, H , è minore rispetto a K , prezzo di esercizio dell'opzione. In questo caso affinché l'opzione venga ad esistere occorre necessariamente che durante la vita dell'opzione il valore dell'attività sottostante diminuisca fino a raggiungere il valore della barriera. Successivamente il valore dell'attività sottostante dovrà risalire al di sopra di K per consentirne l'esercizio. Le aspettative di un

operatore che investa in questo strumento sono di un'alta volatilità dell'attività sottostante. Il premio aumenta al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $H-K$.

- *up-and-out put* (con $H > K$): la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed ha un valore superiore al prezzo di esercizio, K . L'operatore che acquista tale opzione ipotizza bassa volatilità ed una tendenza al ribasso della quotazione dell'attività sottostante. Al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo tra il prezzo d'esercizio e la barriera diminuirà, di conseguenza, anche il premio poiché aumenta la probabilità che durante la vita dell'opzione il valore dell'attività sottostante raggiunga la barriera e "sparisca".

- *up-and-in put* (con $H > K$): la barriera si trova nella regione *out-of-the-money* ed il suo valore sarà, di conseguenza, superiore al prezzo di esercizio K . Per attivare l'opzione l'attività sottostante deve aumentare fino a raggiungere la barriera. Perché vi sia convenienza ad esercitare l'opzione il prezzo deve di nuovo diminuire al di sotto del valore del prezzo d'esercizio. L'operatore che acquista una siffatta opzione si aspetta dunque grande volatilità del prezzo dell'attività sottostante. Per quanto concerne il premio, invece, esso diminuisce all'aumentare dell'intervallo $H-K$ perché, a parità di altri fattori, diminuisce la probabilità di *payoff* positivi in caso di attivazione.

Il *payoff* delle *standard barrier* è riportato di seguito:

$$\text{Down and out call: } \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \\ 0 & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

$$\text{Up and out put: } \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) < H \\ 0 & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases}$$

$$\text{Down and in call: } \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ 0 & \text{se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases}$$

$$\text{Up and in puts: } \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per qualche } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ 0 & \text{se per ogni } \tau \leq T \text{ risulta } S(\tau) < H \end{cases}$$

dove S_T rappresenta il prezzo *spot* del sottostante a scadenza, τ indica un momento determinato prima della scadenza, T è la scadenza, H è il livello di prezzo in corrispondenza del quale è fissata la barriera, mentre $S(\tau)$ rappresenta il prezzo del sottostante rilevabile nell'istante τ .

Appartengono, invece, alla categoria delle *reverse barrier*, caratterizzate dalla barriera nel lato *in-the-money*, le seguenti opzioni:

- *up-and-out call* (con $H > K$) : la barriera si trova nella regione *in-the-money* e di conseguenza H sarà maggiore del prezzo d'esercizio K . In questo caso, quindi, la barriera rappresenta un limite massimo al profitto conseguibile dal detentore, che si aspetta una tendenza solo lievemente rialzista ed una bassa volatilità. Se, infatti, il valore dell'attività sottostante raggiunge o supera il valore barriera l'opzione

si disattiva. Per quanto riguarda il premio, esso diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $K-H$ poiché aumenta la probabilità che la barriera venga raggiunta.

- *up-and-in call* (con $H > K$): la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed avrà un valore maggiore rispetto al prezzo d'esercizio K . Se la barriera non viene raggiunta l'opzione non viene attivata. L'operatore, quindi, ipotizzerà una tendenza rialzista che gli permetta di raggiungere la barriera e di mantenersi *in-the-money*. Assumendo uno strike pari al prezzo corrente, il premio aumenta al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $K-H$ poiché la probabilità di raggiungere la barriera è maggiore.

- *down-and-out put* (con $H < K$): la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed il suo valore H sarà inferiore al prezzo d'esercizio K . L'operatore si aspetta una leggera tendenza al ribasso ed una volatilità contenuta poiché se l'attività sottostante scende al di sotto del valore barriera l'opzione si disattiva e cessa di esistere. Il premio risulta contenuto poiché il *payoff* è limitato e diminuisce al diminuire dell'ampiezza dell'intervallo $H-K$.

- *down-and-in put* (con $H < K$): la barriera si trova nella regione *in-the-money* ed il suo valore H sarà inferiore al prezzo d'esercizio K . Solo se il valore dell'attività sottostante scende al di sotto del valore barriera l'opzione diviene attiva.

Il loro *payoff* è riportato di seguito:

$$\text{Up and in call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \end{cases}$$

$$\text{Down and in put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases}$$

$$\text{Up and out call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases}$$

$$\text{Down and out put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

La struttura delle opzioni barriera può essere ulteriormente complicata dalla presenza di discontinuità della barriera e/o di *rebate*. In particolare si parla di discontinuità della barriera quando questa è una funzione del tempo. In altri termini la barriera svolge la sua funzione solo in determinati periodi durante la vita dell'opzione e questo ne determina la discontinuità. Un *rebate*, invece, è un pagamento fisso fatto al detentore dell'opzione quando l'attività sottostante raggiunge la barriera (o non la raggiunge mai nel caso delle *knock-in*), si tratta cioè di una sorta di premio di consolazione, e può essere applicato a qualsiasi tipo di opzione barriera, sebbene si tratti di una clausola tipica delle *reverse barrier*. Un'opzione che preveda un *rebate* ha, di conseguenza, un *payoff* più favorevole per il detentore. Infatti il *rebate* può essere considerato come un pagamento fisso riconosciuto in luogo del *payoff* quando la barriera è raggiunta.

3.1 PRICING DELLE STANDARD BARRIER OPTIONS

Ai fini del pricing di tale tipo di opzioni, si riporta di seguito la funzione, già vista nella trattazione delle american binary options, rappresentante, per ogni livello di prezzo finale posto al di qua della barriera, la densità di probabilità con cui il prezzo del sottostante (=logaritmo del prezzo) vi possa arrivare senza mai passare per la barriera:

$$p(X, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{1(X-0-at)^2}{2\sigma^2 t}} - e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} e^{-\frac{1(X-2h-at)^2}{2\sigma^2 t}} \right\}$$

dove X è il logaritmo del rapporto tra prezzo finale e prezzo iniziale, mentre $h = \ln \frac{H}{S}$ ed è la versione logaritmica della barriera.

Di questa funzione di densità ci interessa in particolare il secondo addendo, ovvero la funzione che, per ogni livello di prezzo posto al di qua della barriera, ci dice la “probabilità” con cui il sottostante vi può arrivare *passando* per la barriera. Chiameremo tale funzione $g(X, t)$:

$$g(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} e^{-\frac{1(X-2h-at)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Sostituendo X con la notazione u , abbiamo:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{2ha}{\sigma^2}} e^{-\frac{1(u-2h-at)^2}{2\sigma^2 t}}$$

dove $a = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, come visto in precedenza.

Per quanto riguarda le *down and in call* (con $H < K$ e senza rebate), utilizzando l'approccio probabilistico, dovremo cercare di assegnare (e dunque moltiplicare) ad ogni possibile *payoff* positivo la "probabilità" che esso stesso ha di verificarsi e quindi sommare tutti i prodotti così ottenuti. Trattandosi di una *knock-in*, condizione imprescindibile per l'ottenimento di un qualsiasi *payoff* positivo è chiaramente la preliminare perforazione della barriera; proprio questa è la ragione che porta all'utilizzo della $g(u)$ all'interno del seguente integrale definito che, opportunamente attualizzato, ci restituisce il valore dell'opzione in questione:

$$C_{di} = e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{+\infty} (Se^u - K)g(u)du$$

dove S è il prezzo spot iniziale.

Ricordando come u altro non sia che il logaritmo naturale del rapporto tra prezzo finale a scadenza e prezzo iniziale, integrare in du da $\ln(K/S)$ ad infinito significa semplicemente integrare da un prezzo *tout-court* pari a K fino ad infinito. In sostanza noi stiamo sommando nel continuo (e dunque integrando) ogni *payoff* positivo (Se^u è banalmente il prezzo finale espresso attraverso la variabile logaritmica) moltiplicato per la rispettiva probabilità che questo ha di verificarsi; probabilità questa condizionata al preliminare perforamento della barriera (infatti $g(u)$ ci restituisce, per ogni livello di prezzo finale compreso nella zona *in the money*, la sola probabilità relativa ai "percorsi utili", ovvero quelli passanti per la barriera.

La risoluzione dell'integrale offre la soluzione che consente il calcolo del premio della *down and in call* C_{di} :

$$C_{di} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

In realtà l'espressione compresa all'interno delle parentesi quadre può essere tranquillamente interpretata come la tradizionale formula di Black e Scholes con la semplice sostituzione di S con $\frac{H^2}{S}$.

Di qui la forma compatta con cui è possibile esprimere la formula per la valutazione delle *down and in call*:

$$C_{di} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)$$

dove $C_{BS}\left(\frac{H^2}{S}, K\right)$ indica la classica formula di Black e Scholes per le

call, espressa come funzione di $\frac{H^2}{S}$, al posto del più tradizionale sottostante S , e dello *strike price* K .

Se consideriamo la concessione di un *rebate*, a scadenza, in caso di mancato perforamento della barriera, si rende necessaria l'aggiunta alla formula precedente di una componente che offra una valutazione analitica di tale caratteristica.

Per una stima del valore del *rebate* è sufficiente moltiplicare il valore attuale della cifra pattuita contrattualmente (R), in caso di mancato perforamento della barriera, per la probabilità che il contratto si estingua senza che il prezzo arrivi mai a toccare la barriera (ovvero la probabilità che il prezzo del sottostante finisca la propria corsa sopra

la barriera diminuita della probabilità che il prezzo, pur finendo sopra la barriera, passi almeno una volta per la stessa).

Quindi abbiamo:

$$V_{R(di)} = e^{-rt} R \int_{\ln \frac{H}{S}}^{+\infty} (f(u) - g(u)) du$$

dove $f(u)$ è la distribuzione normale non condizionata che, opportunamente integrata, restituisce la probabilità che il prezzo finale risulti superiore alla barriera. Sviluppando:

$$V_{R(di)} = e^{-rt} R \left[\int_{\ln \frac{H}{S}}^{+\infty} f(u) du - \int_{\ln \frac{H}{S}}^{+\infty} g(u) du \right] =$$

$$= e^{-rt} R \left[\int_{\ln \frac{H}{S}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-at}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2} du - \int_{\ln \frac{H}{S}}^{+\infty} e^{\frac{2ah}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u-2\ln\left(\frac{H}{S}\right)-at}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2} du \right]$$

Sostituiamo nel primo integrale $x = \frac{u-at}{\sigma \sqrt{t}}$, mentre nel secondo

$$v = \frac{u - 2\ln\left(\frac{H}{S}\right) - at}{\sigma \sqrt{t}}. \text{ Otteniamo:}$$

$$\begin{aligned}
V_R &= e^{-rt} R \left[\int_{\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) - at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sigma\sqrt{t} dx - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \int_{\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) - 2\ln\left(\frac{H}{S}\right) - at}{\sigma\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \sigma\sqrt{t} dv \right] = \\
&= e^{-rt} R \left[N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]
\end{aligned}$$

Coerentemente con quanto detto, il prezzo di una *down and in call* con *rebate* (e $K > H$) sarà la somma delle due componenti individuate (valore dell'opzione più il valore del *rebate*):

$$C^*_{di} = C_{di} + V_R$$

Passiamo ora alla valutazione delle *up and in put* (con $K < H$). Chiaramente la struttura dell'opzione è del tutto speculare a quella delle *down and in call*; questo permette di sfruttare con poche modifiche le soluzioni cui siamo già pervenuti per le *call*. Per ottenere la valutazione delle *up and in put* bisogna risolvere il seguente integrale:

$$P_{ui} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{K}{S}\right)} (K - Se^u) g(u) du$$

Abbiamo che:

$$P_{ui} = \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln\left(\frac{SK}{H^2}\right) - rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln\left(\frac{SK}{H^2}\right) - rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

Per quanto concerne il *rebate* eventualmente offerto dalla *up and in put* (in caso di mancato perforamento della barriera) la questione si ripropone in maniera del tutto analoga, cioè si inverte l'intervallo di integrazione. Questo perché la “regione di prezzo” in cui il sottostante deve concludere la sua corsa (condizione necessaria ma non sufficiente) affinché ci sia la possibilità di pagamento del *rebate* non è più, come nel caso della *down barrier*, l'intervallo da H (in versione logaritmica) ad infinito, bensì l'intervallo compreso tra zero (che in versione logaritmica è $-\infty$) ed H (ancora in versione logaritmica, cioè $\ln(H/S)$).

Dunque:

$$\begin{aligned} V_R(\text{up and in put}) &= e^{-rt} R \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)} (f(u) - g(u)) du = \\ &= e^{-rt} R \left[N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(-\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] \end{aligned}$$

Il valore complessivo è dato dalla somma del valore dell'opzione più il valore del *rebate*:

$$P_{ui}^* = P_{ui} + V_R$$

Prendiamo ora in esame la valutazione delle *knock-out regular barrier option*.

Per quanto riguarda la *down and out call* con $K > H$, il valore è dato dalla risoluzione del seguente integrale:

$$C_{do} = e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{+\infty} (Se^u - K)(f(u) - g(u))du$$

In sostanza non si è fatto altro che moltiplicare ogni *payoff* utile per la probabilità che esso ha di verificarsi, probabilità questa condizionata però al mancato raggiungimento della barriera (avendo a che fare con una *knock-out*): di qui la sottrazione, effettuata attraverso la consueta $g(u)$, dei “percorsi non utili”, ovvero quelli che, prevedendo un’escursione sulla barriera, provocano l’estinzione anticipata dell’opzione.

L’integrale può utilmente essere scisso in due parti:

$$C_{do} = e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{+\infty} (Se^u - K)f(u)du - e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{+\infty} (Se^u - K)g(u)du$$

Nel secondo integrale si ha il valore della *down and in call*, questo permette di semplificare il nostro lavoro, rendendo possibile il riutilizzo dei risultati ottenuti nello studio della *knock-in*. Per quanto concerne poi il primo integrale, in esso è espresso il valore di una semplice *vanilla call*. La formula per la valutazione delle *down and out call* è dunque la seguente:

$$C_{do} = S \cdot N \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln \left(\frac{H^2}{SK} \right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rt} K \cdot N \left(\frac{\ln \left(\frac{H^2}{SK} \right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right]$$

Questa formula può anche essere scritta:

$$C_{do}(K, H) = \text{Vanilla call}(K) - C_{di}(K, H)$$

$$C_{do}(K, H) + C_{di}(K, H) = \text{Vanilla call}(K)$$

Se si possiede contemporaneamente una *down and out call* ed una *down and in call* (con medesime caratteristiche) ci si garantisce necessariamente il possesso continuo di una *vanilla* con medesimo *strike*, poiché, qualora la *knock-out* dovesse estinguersi (a causa del perforamento della barriera), automaticamente la *knock-in* offrirebbe ciò che la *knock-out* ci ha tolto. Il valore dell'eventuale *rebate* di una *down and out call* è lo stesso di una *put immediate american digital* (con identica barriera) che paghi, in caso di esercizio, una somma analoga a quella pagata dal *rebate*.

Prendiamo in considerazione l'ultima tipologia, e cioè le *up and out put*. Per ottenere una valutazione di queste ultime è sufficiente utilizzare le stesse soluzioni trovate per le *down and out call* con alcune semplici modifiche: trattandosi di *put* invece che di *call* occorrerà banalmente cambiare il segno che precede le funzioni cumulate (perché il *payoff* della *put* è l'esatto opposto di quello della

call) nonché il segno interno alle stesse, essendosi invertito l'intervallo di integrazione. In termini matematici infatti il valore delle *up and out put* è dato dal seguente integrale:

$$P_{uo} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{K}{S}\right)} (K - Se^u) (f(u) - g(u)) du$$

Ne consegue la seguente soluzione:

$$P_{uo} = e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) - S \cdot N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

Vale sempre la seguente relazione:

$$P_{uo}(K, H) = \text{Vanilla put}(K) - P_{ui}(K, H)$$

da cui:

$$P_{uo}(K, H) + P_{ui}(K, H) = \text{Vanilla put}(K)$$

Nelle considerazioni fin qui svolte, non sono stati presi in considerazione né il caso di un sottostante che paga dividendi, né il caso di prezzi forward.

Le seguenti tabelle riassumono il pricing delle standard barrier in questi ultimi due casi:

Tabella 2 - Pricing delle regular barrier in presenza di dividendi (o nel caso di opzioni valutarie)

<i>Down and in call</i>	$\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Up and in put</i>	$\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(SK/H^2) - rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Down and out call</i>	$e^{-dt} S \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-rt} K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Up and out put</i>	$e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-dt} S \cdot N\left(-\frac{\ln(S/K) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) -$ $-\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[e^{-rt} K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{-dt} \left(\frac{H^2}{S}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/SK) + rt - dt + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$

Tabella 3 - Pricing delle regular barrier in caso di riferimento a prezzi forward

<i>Down and in call</i>	$\left(\frac{F}{H}\right) \left[\left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Up and in put</i>	$\left(\frac{F}{H}\right) \left[K \cdot N\left(\frac{\ln(FK/H^2) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(\frac{\ln(FK/H^2) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Down and out call</i>	$F \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(F/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \left(\frac{F}{H}\right) \left[\left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - K \cdot N\left(\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$
<i>Up and out put</i>	$K \cdot N\left(-\frac{\ln(F/K) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - F \cdot N\left(-\frac{\ln(F/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \left(\frac{F}{H}\right) \left[K \cdot N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) - \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H^2}{F}\right) N\left(-\frac{\ln(H^2/FK) + \sigma^2 t/2}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right]$

3.2 PREZZO E SENSIBILITÀ DELLE STANDARD BARRIER OPTIONS

Iniziamo dal considerare le opzioni *Knock in*. In particolare nella figura 25, è rappresentato il valore di una *down and in call* in funzione del sottostante e della vita residua, è stato ottenuto assumendo uno *strike* $K = 105\$$, una volatilità $\sigma = 15,7\%$, un tasso senza rischio $r_f = 5\%$ ed una barriera a quota $H = 100\$$.

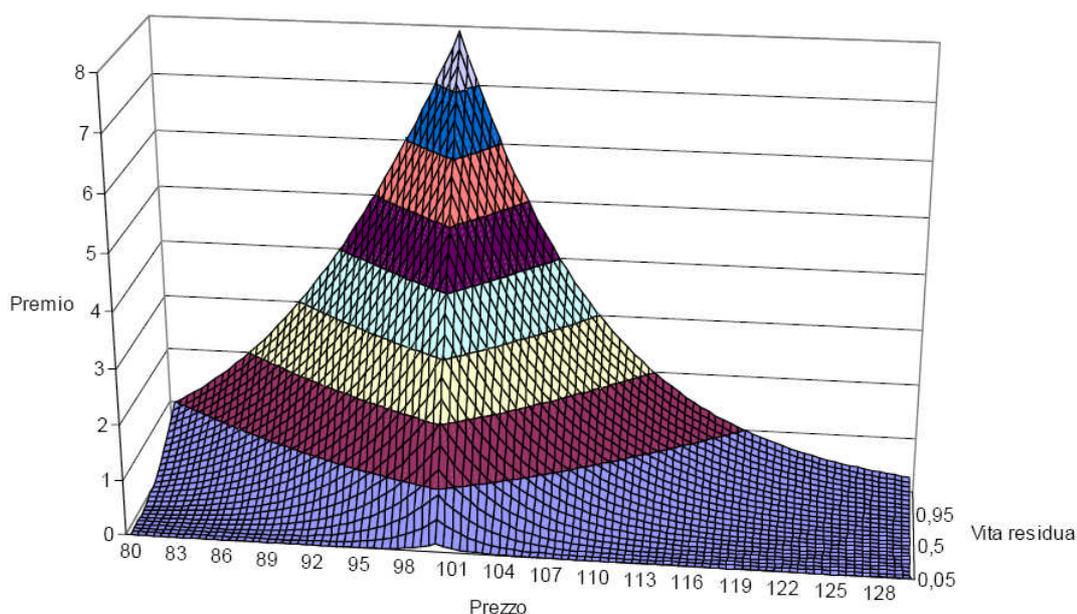


Figura 25 - Premio di una *down and in call* ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

E' semplice notare come l'opzione, al di sotto della barriera fissata a quota 100\$, semplicemente cessa di essere una *barrier option* per diventare una *vanilla call* (ed è dunque una *vanilla* ad essere rappresentata nella regione sinistra del grafico): ciò è evidentemente frutto della struttura contrattuale.

Per il resto, l'opzione, partendo chiaramente da prezzi al di sopra della barriera, tende ad aumentare di valore man mano che il prezzo si avvicina alla barriera. Ciò si spiega con il conseguente aumento della probabilità di perforamento di quest'ultima, evento che, come noto, porterebbe il detentore a beneficiare del possesso della *vanilla* (senza il quale rimarrebbe, salvo *rebate*, assolutamente privo di qualsivoglia possibilità di *payoff* positivo).

E' possibile notare, inoltre, che il *payoff* di una *down and in call* è molto simile ad una *vanilla put*.

Non deve inoltre stupire il fatto che il valore dell'opzione tenda (partendo da sopra la barriera), per prezzi molto vicini alla barriera, a coincidere (o quasi) con quello della *vanilla*. Infatti appena al di sopra di essa il perforamento diviene evento praticamente certo, con la banale conseguenza di trasformare l'opzione in una *vanilla* con un certo "anticipo" (almeno nel valore). In effetti, in corrispondenza di una vita residua pari a nove mesi, passando da un prezzo (del sottostante) di 100,5\$ ad uno di 99,5\$ (ovvero infrangendo la barriera) il valore della posizione sale da 4,6\$ a 4,65\$ soltanto.

Il valore dell'opzione tende poi a scendere con il passare del tempo per un effetto inevitabile di *time decay*; del resto il valore dell'opzione rappresentato nel grafico è interamente di tipo temporale, nel senso che dipende strettamente dalla probabilità di movimenti favorevoli del sottostante, movimenti questi che diventano meno probabili in presenza di una più bassa vita residua.

Per quanto riguarda la funzione *Delta*, questa è riportata nel grafico seguente:

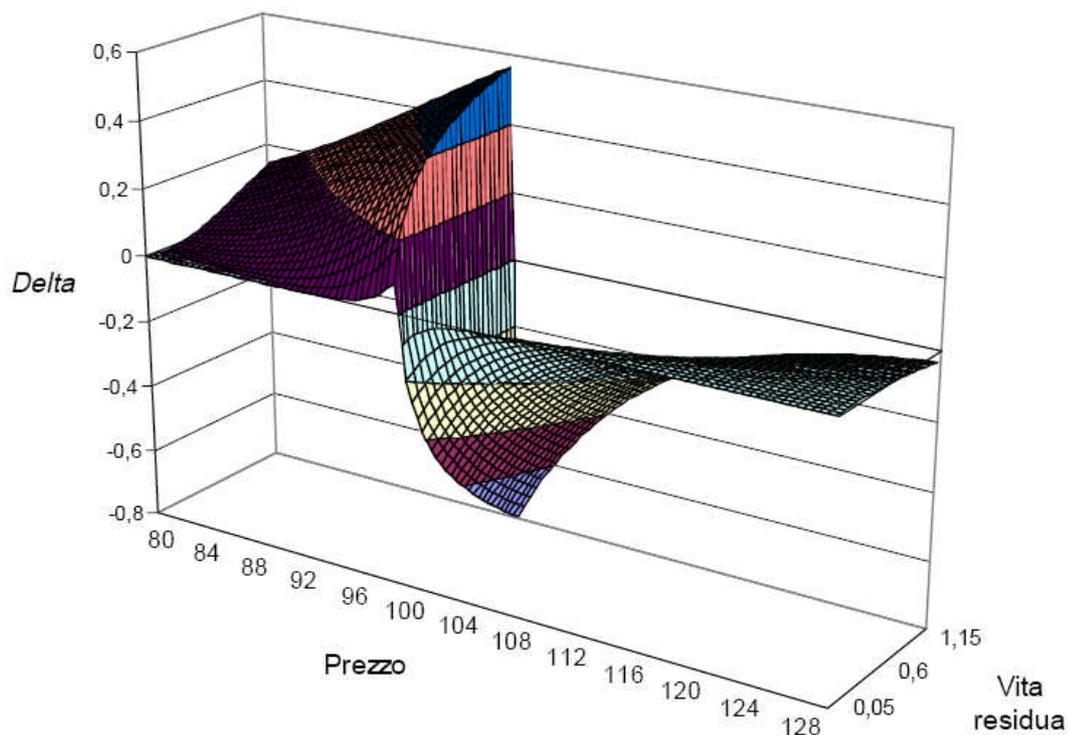


Figura 26 - Delta di una down and in call ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Non è difficile rilevare la discontinuità che la funzione presenta in corrispondenza della barriera (a quota 100\$): è infatti in questo punto che l'opzione si trasforma nella *vanilla*, con conseguente stravolgimento della posizione che, da ribassista (in un primo momento), diventa improvvisamente rialzista (la *vanilla* è una *call*). Del resto basti pensare che, in presenza di una vita residua di nove mesi, passando da un prezzo (del sottostante) di 100,5\$ ad uno di 99,5\$ il *Delta* della posizione passa da $-0,6$ a $0,5$ (quasi l'opposto).

Inoltre si può notare come il *Delta* dell'opzione, per prezzi posti al di sopra della barriera, raggiunga valori superiori (in valore assoluto) a quelli raggiungibili per prezzi inferiori alla stessa. Ciò si spiega soprattutto con l'effetto *drift* cui abbiamo fatto riferimento in precedenza.

In sostanza la tendenza del prezzo a salire (in media: è il *drift* positivo) fa sì che il valore dell'opzione, anche in prossimità della barriera (in questo caso appena al di sopra), sia sempre suscettibile di sensibili aumenti: questo perché il *drift* positivo abbassa la probabilità di perforamento della barriera e la rende conseguentemente (e con essa chiaramente il valore dell'opzione) più sensibile a movimenti favorevoli del sottostante. Per una conferma numerica di quanto detto è sufficiente far notare come, nel caso di un'opzione con nove mesi di vita residua ed in presenza di un prezzo del sottostante appena al di sopra della barriera, per un tasso senza rischio che passa dal solito 5% ad un più sostanzioso 10%, il *Delta* dell'opzione sale (in valore assoluto) da $-0,6$ circa ad oltre -1 (ovvero quasi il doppio). In presenza quindi di un tasso nullo i *Delta* dell'opzione sui due "versanti" della barriera tendono a coincidere (sempre in valore assoluto), a patto però che la vita residua risulti sufficientemente bassa; bisogna infatti tenere ben presente che le differenti caratteristiche strutturali dell'opzione sui due lati della barriera (*vanilla* al di sotto di questa e praticamente *digital* al di sopra della stessa) possono essere ignorate solo quando una bassa vita residua rendesse la *vanilla*, data la difficoltà probabilistica per il prezzo del sottostante di raggiungere valori molto elevati, sufficientemente comparabile ad una *digital* (nel senso che i *payoff* raggiungibili hanno scarsa variabilità).

Per quanto concerne la funzione *Gamma*, essa risulta, abbastanza prevedibilmente, sempre positiva per qualsiasi valore del prezzo o della vita residua. A riprova di tale affermazione si può osservare la figura 27. Chiaramente la funzione non è definita in corrispondenza

della barriera, dove del tutto arbitrariamente abbiamo posto la funzione uguale a zero.

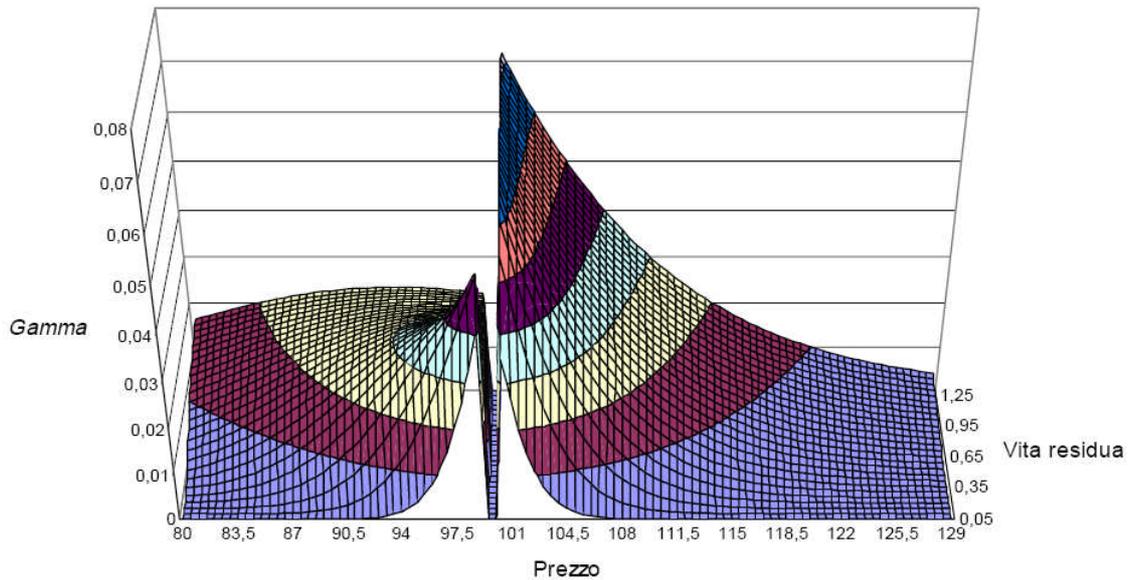


Figura 27 - *Gamma* di una *down and in call* ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Esaminiamo ora la funzione *Vega* della medesima opzione. Il grafico riportato in figura 28 presenta una forte somiglianza con il *Vega* di una *vanilla*.

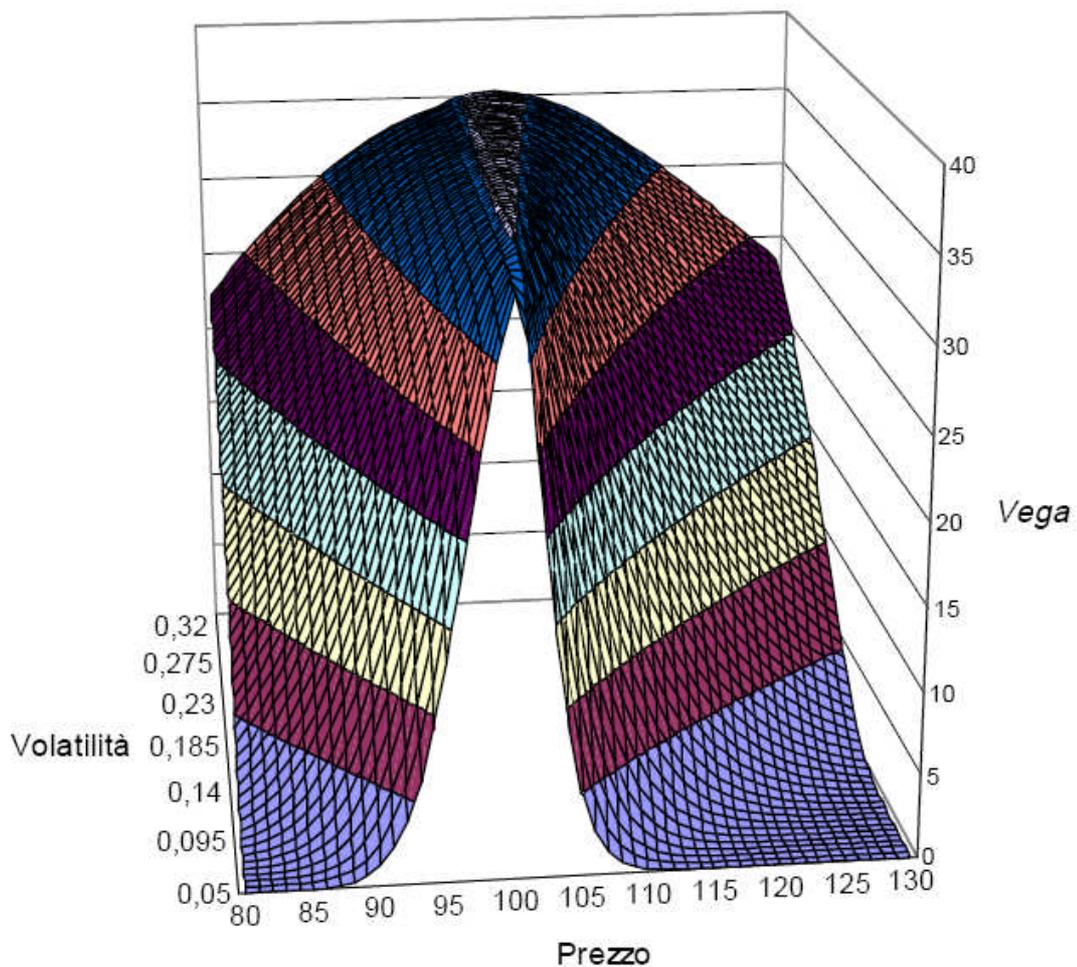


Figura 28 - Vega di una *down and in call* ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della volatilità di partenza

E' semplice intuire il motivo per cui la porzione di grafico posta alla sinistra della barriera presenti una tale somiglianza (in quanto corrisponde ad una *vanilla*). Per quanto riguarda invece il lato destro, il Vega tende a crescere man mano che il prezzo si avvicina alla barriera. La ragione di ciò consiste nel fatto che, tanto più prossimo risulta il prezzo al traguardo (la barriera), tanto più determinante diventa l'aiuto rappresentato da un incremento nella volatilità (anche se, per volatilità di partenza piuttosto alte e prezzi a ridosso della barriera, la probabilità di *knocking-in* raggiunge livelli tanto alti da risultare poco incrementabili, con la conseguenza che il Vega tende a

decreocere già a partire da prezzi situati un poco sopra la barriera); d'altra parte, per prezzi molto lontani dalla barriera, la probabilità di perforamento della stessa diventa tanto bassa da risultare poco sensibile a moderati incrementi della volatilità. Quanto appena detto risulta tanto più vero quanto minore è la volatilità di partenza, per la semplice ragione che una bassa volatilità riduce la probabilità di perforamento in maniera più decisiva nelle regioni di prezzo lontane dalla barriera che in quelle vicine. Ecco spiegato perché il grafico debba, al diminuire della volatilità di partenza, sgonfiarsi molto più rapidamente per prezzi elevati che per prezzi vicini alla barriera. Volendo portare un esempio numerico, basti pensare che, in presenza di una volatilità del 20% e passando da uno spot di 130\$ ad uno di 101\$, il *Vega* sale da 8 a 35 (oltre quattro volte tanto). Quanto detto finora vale anche per il caso in cui si ragioni in termini di vita residua anziché in termini di volatilità.

Passiamo ora ad analizzare le *up and in put*. Di fatto la loro struttura, come è già stato detto in precedenza, può definirsi del tutto speculare a quella delle appena esaminate *down and in call*. Esiste tuttavia una variabile che, non rispettando questa simmetria strutturale, determina qualche lieve differenza comportamentale tra le due *knock-in*: tale variabile è evidentemente il *drift*, il quale non può non rimanere il medesimo per ambedue le esotiche (mentre per mantenere la simmetria avrebbe dovuto modificarsi nel suo opposto: ad esempio da 5% a -5%). Il grafico riportato in figura 29 è relativo all'andamento del premio della *up and in put*:

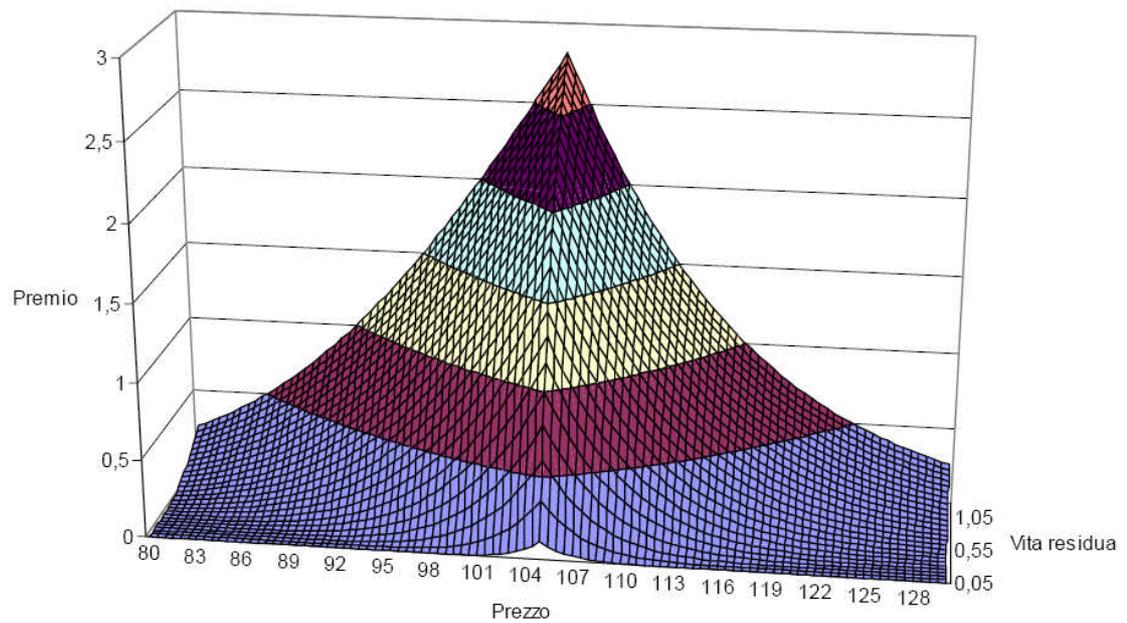


Figura 29 - Premio di una up and in put ($K=100$, $H=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

La somiglianza (in termini speculari) del grafico con la figura 25 relativa al premio della *down and in call* è schiacciante. Tuttavia il *drift*, rimasto invariato, comporta alcune diversità in termini di pendenza: infatti, mentre il *Delta* della *down and in call* (al di sopra di H) era, in termini assoluti, superiore a quello della *vanilla* al di là della barriera, in questo caso avviene l'esatto opposto (il *drift* in effetti aumenta il *Delta* della *vanilla put* e diminuisce quello della *barrier*). Il *drift* è inoltre responsabile di un'altra particolarità, e cioè che portando all'eccesso la probabilità di *knocking-in* a ridosso della barriera, fa sì che il *Delta*, al diminuire della vita residua, tenda, a tratti (proprio a ridosso della barriera), ad aumentare lievemente (diversamente dalla *call*). Questo fenomeno si spiega con la diminuzione della probabilità di perforamento della barriera che il calo di vita residua porta con sé: tale diminuzione, data l'entità della probabilità di partenza, finisce dunque con l'essere più importante, ai fini del comportamento del

Delta nel tempo, rispetto al calo di valore della *vanilla* sottostante (che tenderebbe a far calare la pendenza). Per il resto le due opzioni sono (specularmente) identiche.

Si riportano di seguito i grafici della funzione *Delta* e della funzione *Gamma*:

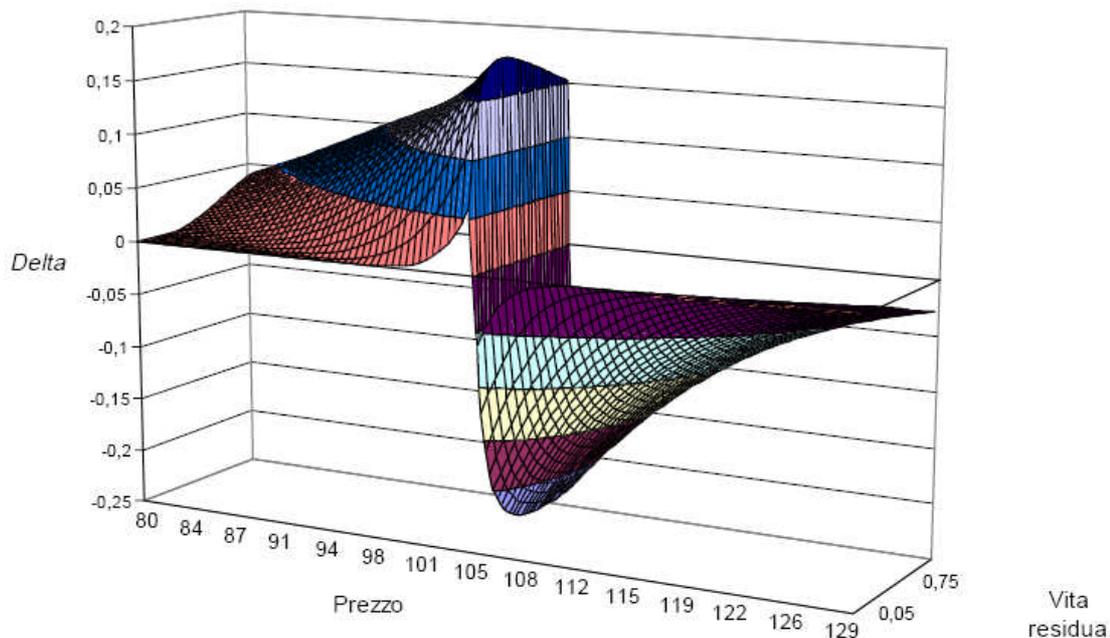


Figura 30 - *Delta* di una *up and in put* ($K=100$, $H=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

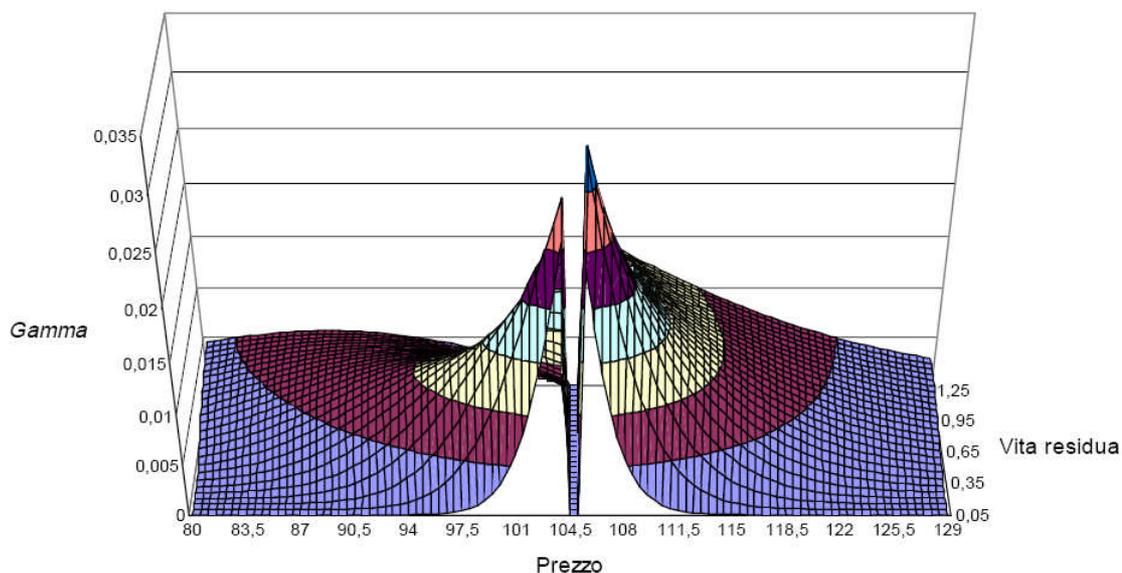


Figura 31 - *Gamma* di una *up and in put* ($K=100$, $H=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Passiamo adesso all'analisi delle *Knock out*.

Consideriamo per prima l'*opzione down and out call*. Osservando il grafico 32, è possibile vedere l'andamento del valore di una tale opzione in relazione al variare del prezzo e della vita residua:

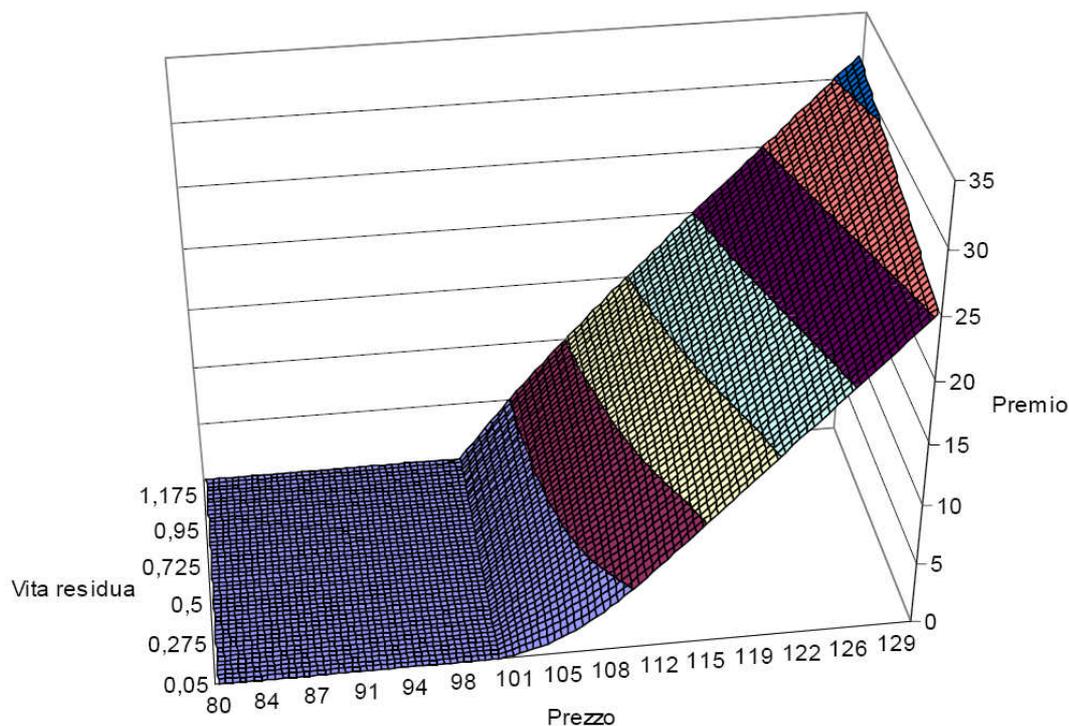


Figura 32 - Premio di una *down and out call* ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Il grafico è stato ottenuto ipotizzando uno *strike* di 105\$, una barriera fissata a quota 100\$, una volatilità del 15,7% ed un tasso senza rischio del 5%. A scanso di equivoci, il grafico, alla sinistra di quota 100\$, cessa di essere significativo, in quanto l'opzione non esiste al di sotto della barriera e la scelta di assegnarle valore zero è ovvia.

Come lecito aspettarsi, l'opzione aumenta di valore al salire del prezzo sottostante. Tale crescita, nel valore dell'opzione, non è dovuta solamente all'aumento del valore intrinseco che si verifica con l'aumento del prezzo, bensì trova una spinta ulteriore nella

diminuzione della probabilità di *knocking-out* che l'aumento stesso del prezzo inevitabilmente produce, allontanando il sottostante dalla zona "critica", cioè quella di estinzione.

Inoltre, in base alla relazione $C_{do} + C_{di} = \text{Vanilla call}$, vista in precedenza, il valore di una C_{do} sarebbe costituito da una *vanilla call* con il concorso (algebricamente negativo) di una "specie di *put*" (la C_{di}). Ciò aiuta a spiegare la rapida diminuzione di valore registrabile a ridosso della barriera (la "*put*" infatti aumenta di valore al calare del prezzo). Infatti la conformazione della funzione *Delta*(figura 33) conferma quanto detto.

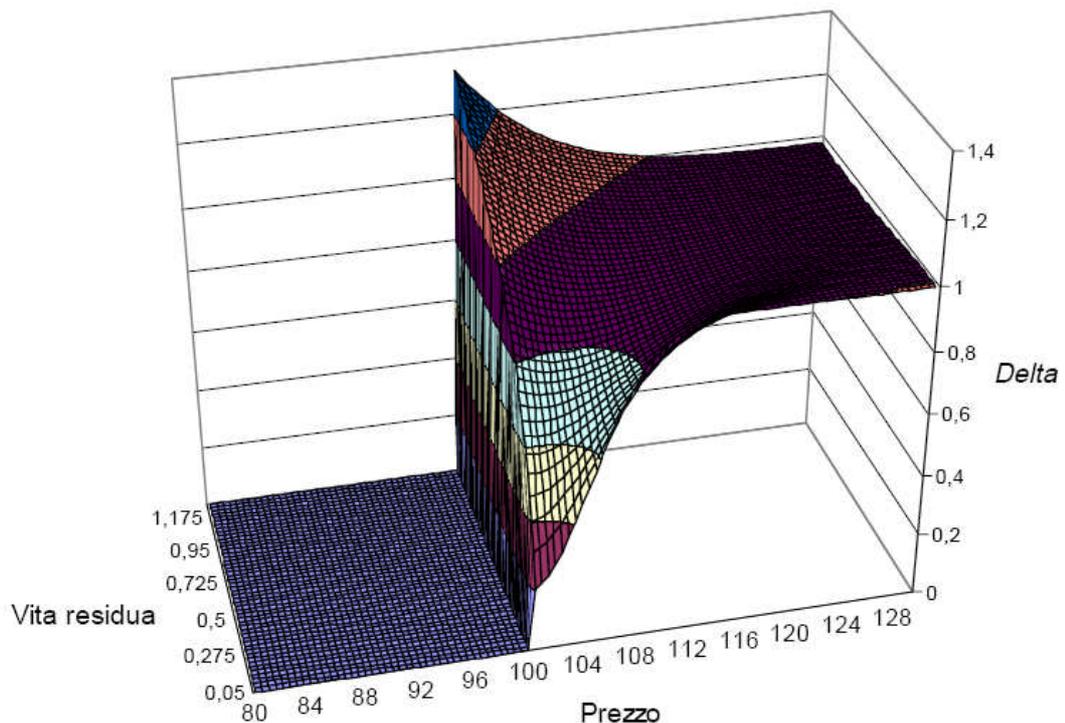


Figura 33 - Delta di una down and out call ($K=105, H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Coerentemente con quanto sopra riportato, il *Delta* dell'opzione, almeno in presenza di un'elevata vita residua, si rivela nettamente superiore alla corrispondente greca di una *vanilla*: per una verifica è

sufficiente infatti constatare come esso (il *Delta* della *barrier*) risulti, a tratti (non casualmente per una vita residua molto elevata), addirittura superiore ad uno. Ciò è dovuto all'aumento di valore indotto nell'opzione dalla diminuzione della probabilità di perforamento della barriera che un aumento del prezzo porta inevitabilmente con sé. Chiaramente questa componente probabilistica (componente questa che si aggiunge a quella del valore intrinseco, o più propriamente *vanilla*, nel determinare l'aumento di valore dell'opzione che segue ad una crescita del prezzo del sottostante) tende a risultare sempre meno significativa man mano che ci si allontana dalla barriera, per la banale ragione che la diminuzione di probabilità di cui sopra diventa, al crescere del prezzo, quantitativamente sempre meno consistente; la conseguenza è evidentemente, per prezzi sufficientemente alti, una netta prevalenza della componente *vanilla* su quella che abbiamo definito componente probabilistica ma che possiamo identificare come componente barriera.

La prevalenza della componente più tradizionale su quella barriera, porta il *Delta* dell'opzione, al crescere del prezzo, a convergere verso il valore unitario, prima da sopra e poi, quando la componente barriera è del tutto esaurita, da sotto (il tradizionale valore temporale della *vanilla* impedisce infatti al *Delta* di fermarsi, nella sua discesa, a quota uno, ma va al di sotto di 1). Resta da dire che la componente barriera è tanto più significativa quanto maggiore è la vita residua dell'opzione, per la semplice ragione che, quanto più tempo manca alla scadenza dell'opzione, tanto maggiore ne emerge la probabilità di perforamento della barriera. Quanto più alta si dimostra quest'ultima, tanto più condizionato ne risulta l'andamento del valore dell'opzione e

quindi, in ultima analisi, tanto maggiore si manifesta l'influenza della componente barriera.

A dimostrazione della validità di queste intuizioni di massima, il grafico del *Delta* tende, al diminuire drastico della vita residua, a ricalcare sempre più l'andamento del *Delta* di una *vanilla*. Questa è la dimostrazione della netta prevalenza della componente *vanilla* su quella barriera per bassi valori della vita residua. Il *Gamma* dell'opzione non può naturalmente non risultare condizionato dalle questioni appena trattate (si veda la figura 34). Come ampiamente prevedibile, per una vita residua sufficientemente elevata, la prevalenza della componente barriera (prevalenza che sfuma man mano all'aumentare del prezzo) porta, nella corrispondente zona del grafico, ad un *Gamma* per lo più negativo, mentre, avvicinandoci alla scadenza, la schiacciante controffensiva della componente *vanilla* rende l'andamento della funzione *Gamma* del tutto analogo a quello della controparte tradizionale (il *Gamma* della *vanilla*). Volendo offrire un esempio numerico, basti pensare che, passando, per uno spot di 102\$, da una vita residua di 1 anno ad una di 1 mese, il *Gamma* passa da un determinato valore negativo (-0,04) al suo esatto opposto algebrico (0,04 e oltre).

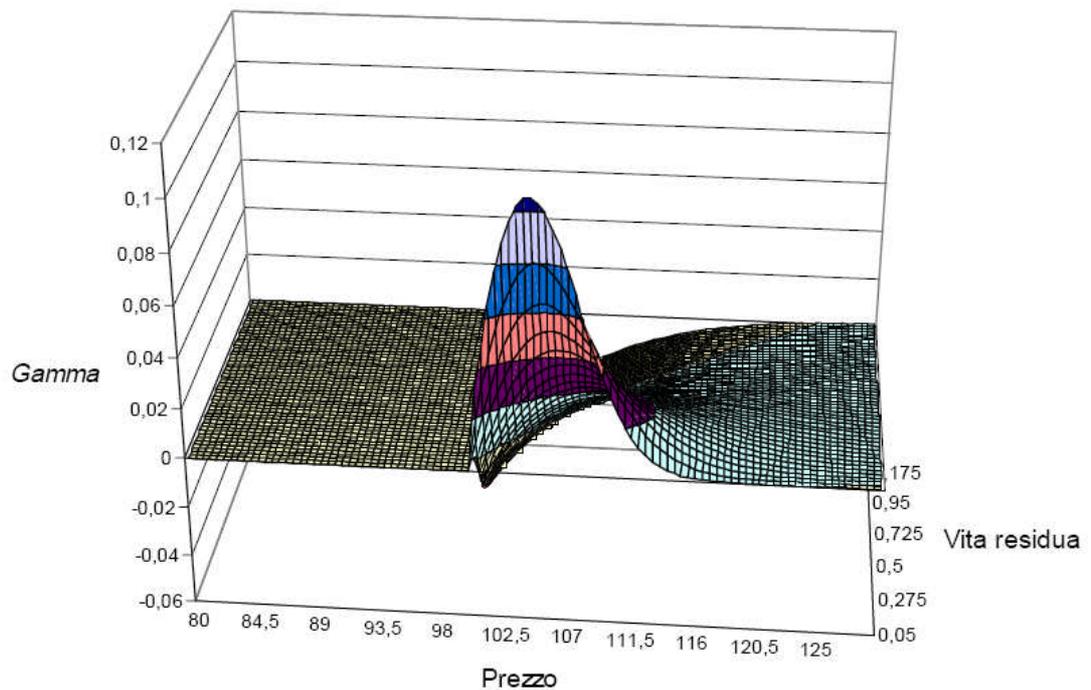


Figura 34 - *Gamma* di una *down and out call* ($K=105$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Resta da esaminare soltanto la funzione *Vega*.

A ennesima dimostrazione della natura dicotomica che l'opzione presenta in corrispondenza di diverse vite residue (il derivato presenta infatti una propria originale natura fintantoché la vita residua si mantiene elevata, per poi trasformarsi quasi del tutto in una *vanilla*) si riportano i due grafici relativi al *Vega* di una medesima opzione rispettivamente ad 1 anno (figura 35) e a 3 mesi (figura 36) dalla scadenza.

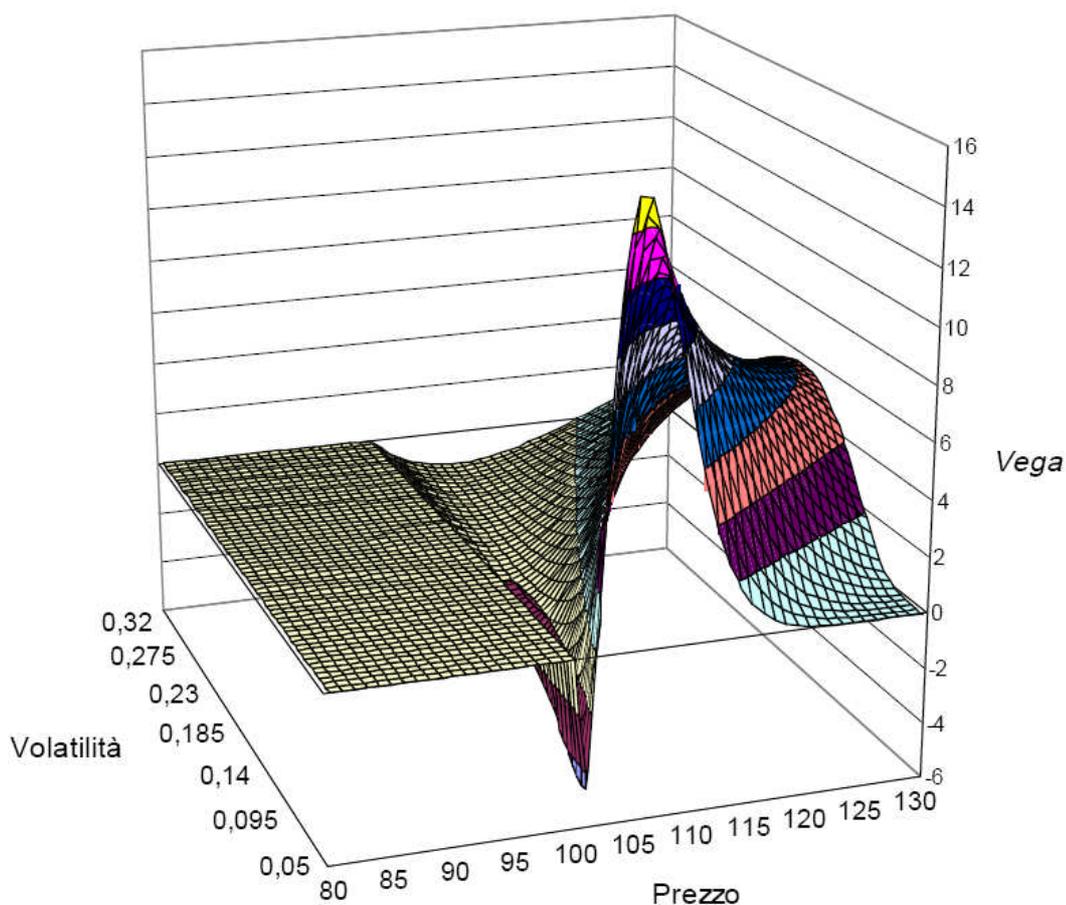


Figura 35 - Vega di una *down and out call* ($K=105$, $H=100$) in presenza di una vita residua pari ad 1 anno

Nel primo grafico, relativo al *Vega* dell'opzione dotata ancora di un'elevata vita residua (figura 35), non è difficile rilevare come l'opzione presenti, in certe zone del grafico ed in particolar modo a ridosso della barriera, accanto al familiare *Vega* positivo anche un *Vega* negativo. La spiegazione di tale fenomeno è estremamente intuitiva: a ridosso della barriera (ed in presenza di un'elevata vita residua che faccia da amplificatore) un aumento della volatilità del sottostante incrementa potentemente le probabilità di *knocking-out* dell'opzione e quindi, in sostanza, la possibilità di incappare nelle relative inevitabili conseguenze negative per il detentore. Chiaramente il fenomeno (del *Vega* negativo) risulterà più circoscritto in presenza

di una bassa volatilità di partenza, poiché questa, abbassando notevolmente la probabilità di *knocking-out*, limita l'influenza della componente barriera nella struttura dell'opzione.

Tuttavia, anche in presenza di una bassa volatilità di partenza, il *Vega* raggiunge comunque, per prezzi appena al di sopra della barriera, livelli negativi ragguardevoli (sotto $-4,6$): anzi si può ben dire che il *Vega* negativo è sì più facilmente rintracciabile per un'alta volatilità di partenza (lo si trova in una più estesa "zona di prezzo"), ma raggiunge i valori massimi (in termini assoluti) per basse volatilità. In sostanza per elevate volatilità la prevalenza della componente barriera porta a *Vega* quasi ovunque negativi, ma la stessa alta volatilità rende troppo elevata la probabilità di perforamento, al punto da renderla non troppo sensibile ad ulteriori aumenti della volatilità stessa (la conseguenza è un *Vega* "non troppo negativo"); l'esatto opposto succede per basse volatilità di partenza. A conferma di quanto detto si consideri che, per una volatilità del 33%, il *Vega* si mantiene negativo per qualsiasi livello di prezzo compreso tra 101 e 120\$ senza però mai scendere sotto $-1,35$; al contrario, per una volatilità del 10%, il *Vega* risulta negativo nel solo esiguo *range* di prezzo compreso tra 101 e 103\$, raggiungendo tuttavia livelli (negativi) ben più sostanziosi, fino ad oltre $-3,3$.

Si è già avuto modo di spiegare come, per una bassa vita residua, la componente barriera debba cedere nettamente il passo alla più tradizionale componente *vanilla*. Ciò è facilmente riscontrabile nel grafico riportato in figura 36 (relativo al medesimo *Vega*, ma per una vita residua di soli tre mesi): non a caso infatti la struttura ricorda, molto più di quanto non faccia il primo grafico, il *Vega* di una *vanilla*.

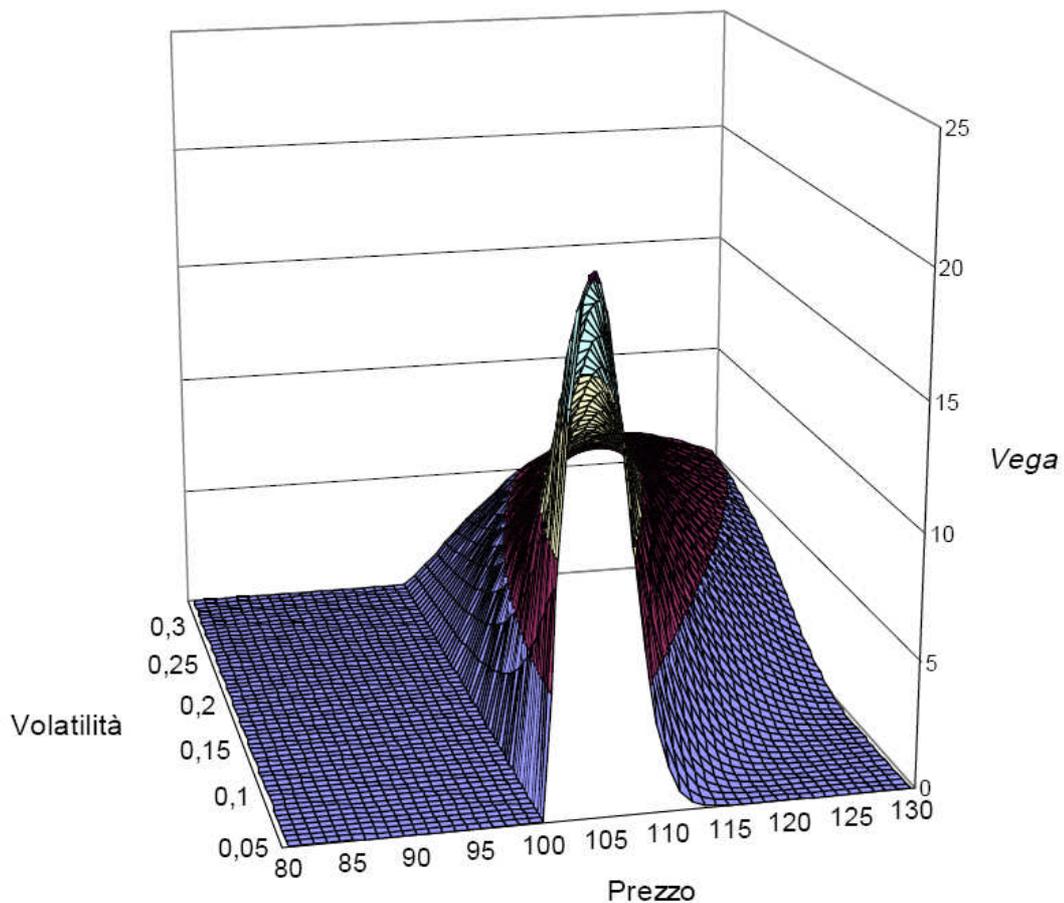


Figura 36 - Vega di una *down and out call* ($K=105, H=100$) a tre mesi dalla scadenza

Le differenze con le *Vanilla* ad ogni modo non possono certo mancare, infatti, specialmente per alte volatilità di partenza, la componente barriera torna ad essere significativa; la bassa vita residua impedisce a tale componente di prendere il sopravvento e di sfociare in un *Vega* negativo ma, ciononostante, non può impedirle di abbassare notevolmente le dimensioni del *Vega* positivo.

Chiaramente tale riduzione del *Vega* ha luogo, oltre che per alte volatilità, a ridosso della barriera, dove, come del resto abbiamo avuto modo di accertare, la componente barriera è giocoforza più significativa.

L'altra *knock-out* di cui dobbiamo occuparci è rappresentata dalle *up and out put*. Come nel caso delle *knock-in*, la *put* presenta una

struttura del tutto simmetrica a quella della *call*, ciò tuttavia non le impedisce di manifestare anche caratteristiche del tutto originali. Questa opzione presenta infatti, a differenza della controparte *down and out call*, un *time decay* a tratti negativo. In effetti, per prezzi abbastanza lontani dalla barriera, il valore dell'opzione sale al passare del tempo. Volendo offrire qualche cifra, si consideri che, per uno spot pari a 85\$ (in questo esempio e nel grafico riportato di seguito lo *strike* dell'opzione è stato fissato a quota 100\$, la barriera a 105\$; le condizioni restanti sono le medesime relative alle opzioni precedenti), l'opzione passa dagli 11,7\$ di valore per un anno di vita residua ai 13,8\$ riscontrabili a soli tre mesi dalla scadenza.

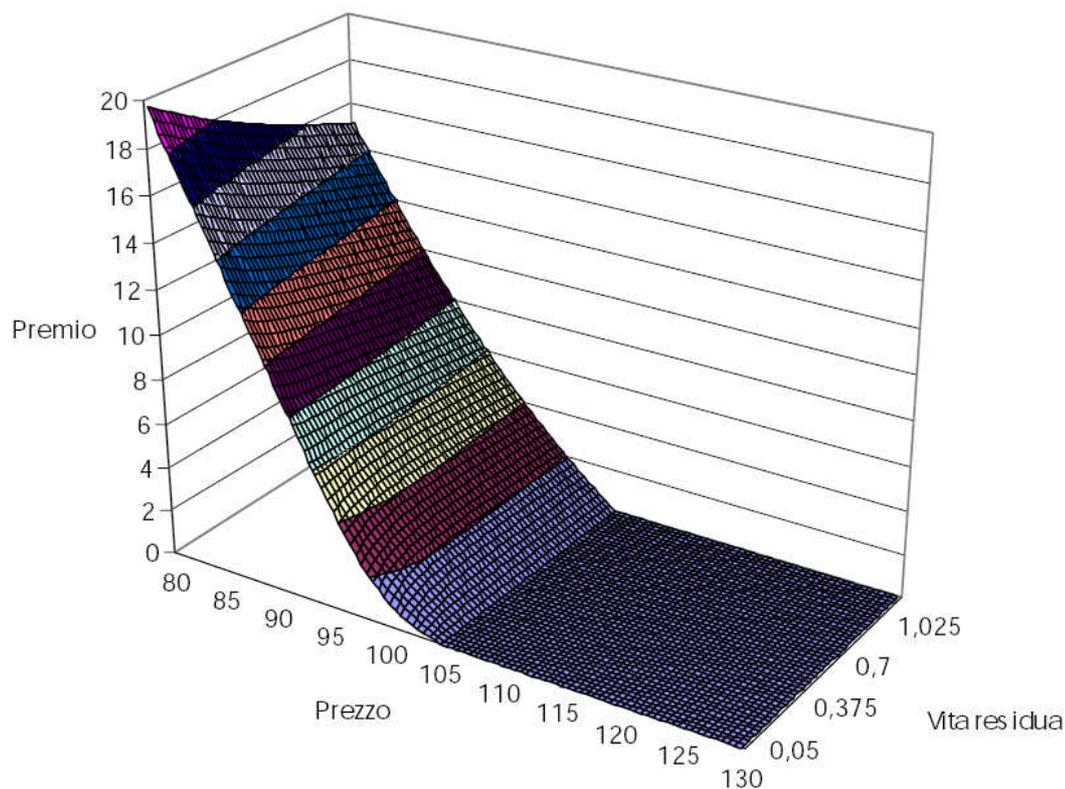


Figura 37 - Premio di una *up and out put* ($K=100$, $H=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

La ragione di tale anomalo *time decay* è da attribuirsi interamente alla combinazione tra *drift* positivo (che questa volta spinge il sottostante

verso la barriera) e componente barriera: il *drift* infatti mantiene a livelli significativi la probabilità di perforamento della barriera anche per prezzi molto lontani dalla stessa, mentre la riduzione della medesima probabilità ad opera del semplice passaggio del tempo fa il resto. Paradossalmente tale fenomeno non ha luogo per prezzi troppo vicini alla barriera: la ragione di ciò è da ricercarsi nel bassissimo valore dell'opzione per tali prezzi e quindi in una situazione in cui quasi ogni movimento di un certo rilievo del sottostante finisce con l'essere ampiamente auspicabile (del resto solo un forte *shock* aleatorio, ovviamente al ribasso, può vincere il *drift* che trascina verso la barriera).

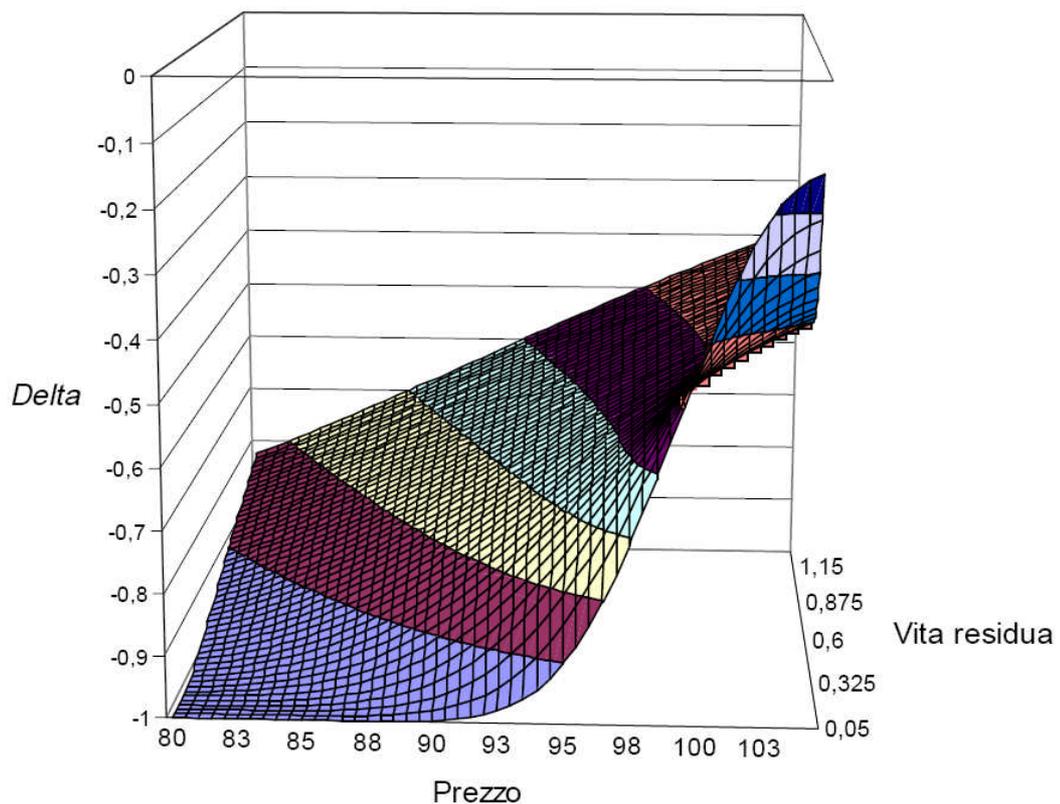


Figura 38 - Delta di una *up and out put* ($H=105\$$) in funzione del prezzo e della vita residua

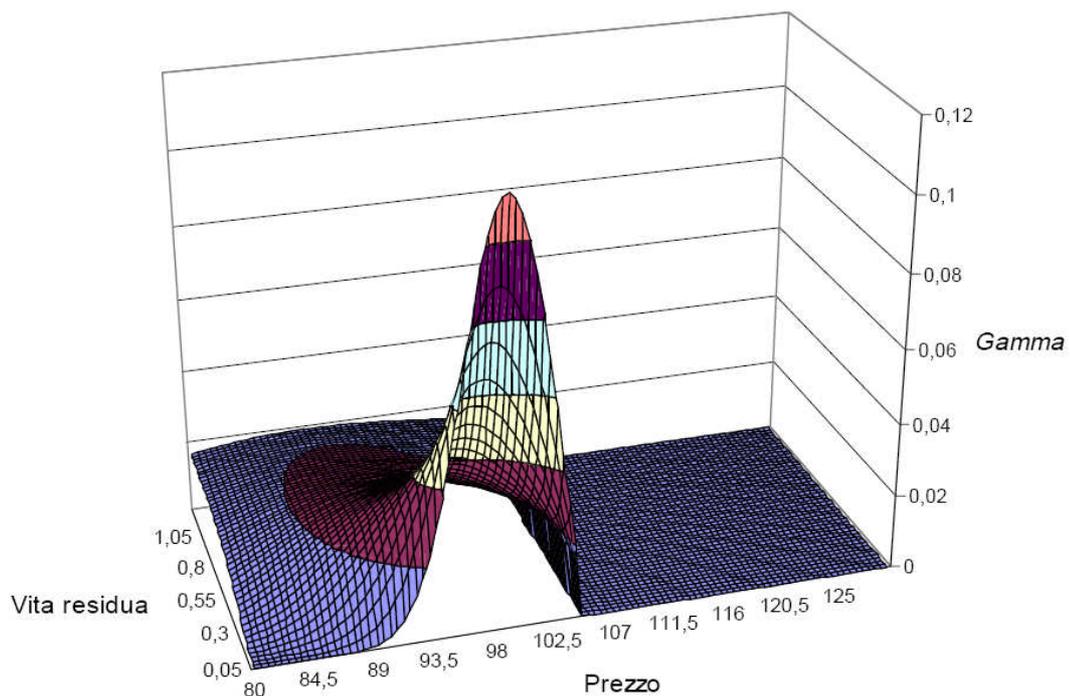
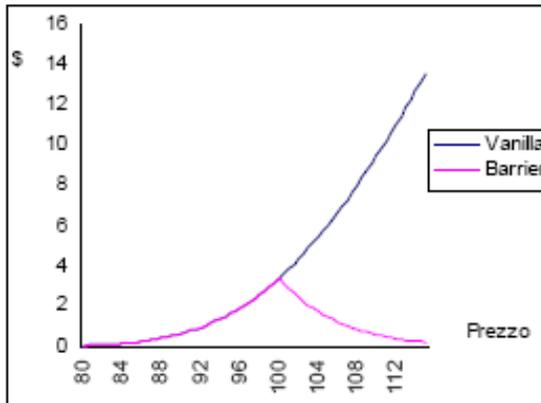


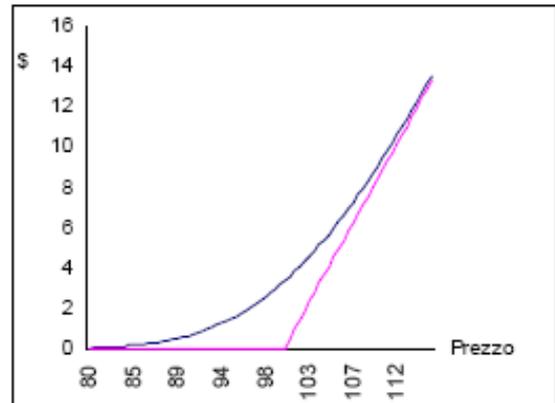
Figura 39 - Gamma di una up and out put ($H=105$) in funzione del prezzo e della vita residua

Osservando più attentamente la figura 37, ci si può rendere conto di come la pendenza dello stesso, in special modo per elevate vite residue, risulti meno accentuata rispetto alla *call* (infatti il *Delta* dell'opzione, riportato in figura 38, non scende mai sotto -1). Ciò è dovuto al *drift* che, spingendo il prezzo verso la barriera, aumenta le probabilità di perforamento della stessa fino a livelli tali da risultare poco "incrementabili" a seguito di movimenti ulteriormente sfavorevoli del prezzo. Naturalmente tale situazione non può non influire sul *Gamma* dell'opzione (figura 39), che, infatti, a differenza della *down and out call*, si presenta positivo per qualsiasi valore del prezzo e della vita residua.

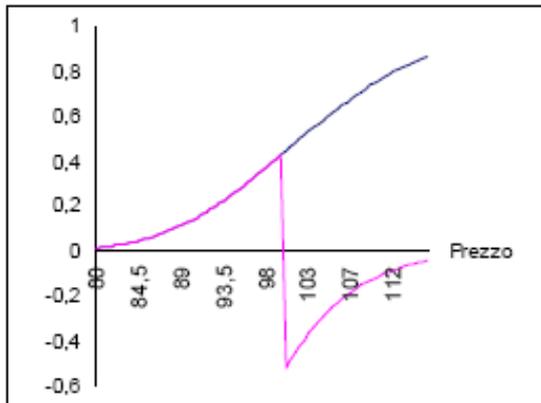
Di seguito si riportano alcuni schemi riassuntivi del valore e della sensibilità delle *regular barrier options*.



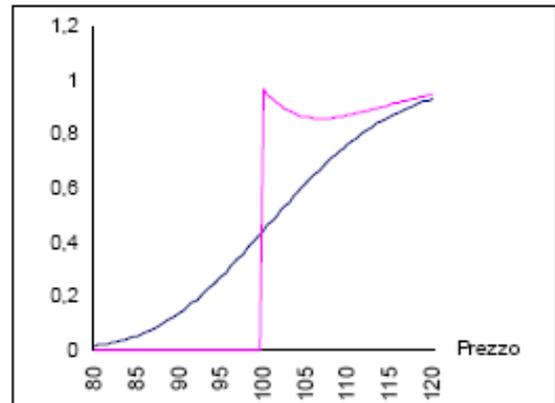
a) Premio di una down and in call ($K=105;H=100$)



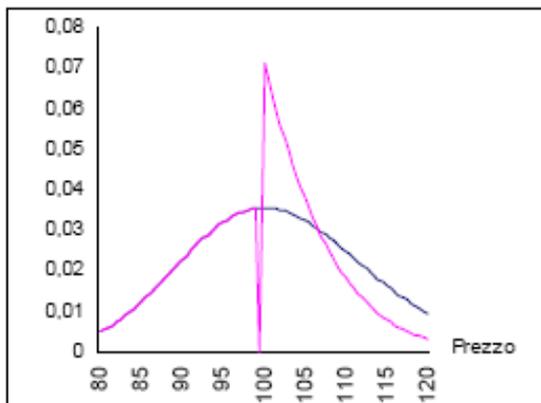
d) Premio di una down and out call ($K=105;H=100$)



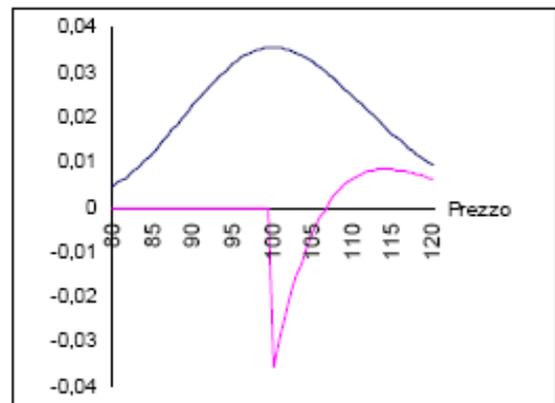
b) Delta di una down and in call ($K=105;H=100$)



e) Delta di una down and out call ($K=105;H=100$)

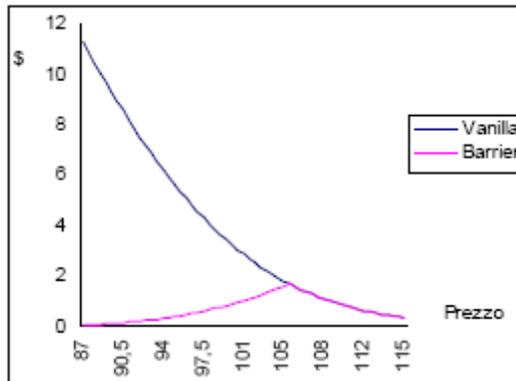


c) Gamma di una down and in call ($K=105;H=100$)

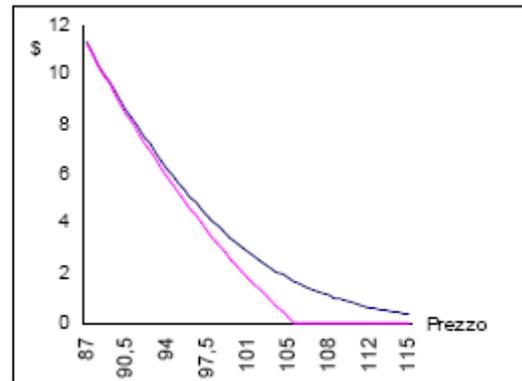


f) Gamma di una down and out call ($K=105;H=100$)

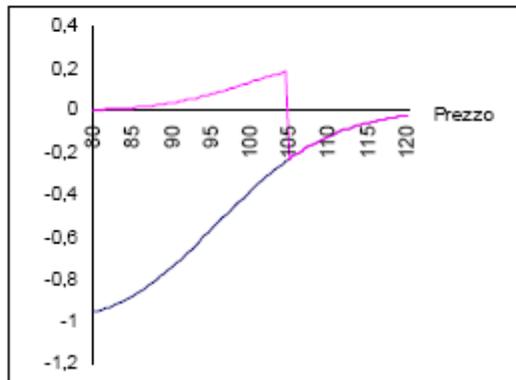
Schema 1 - Premio, Delta e Gamma delle down and in call nonché delle down and out call



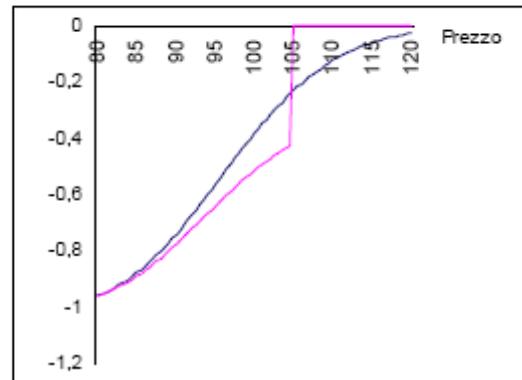
a) Premio di una up and in put ($K=100;H=105$)



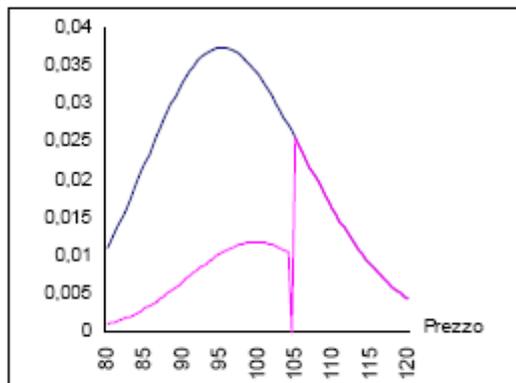
d) Premio di una up and out put ($K=100;H=105$)



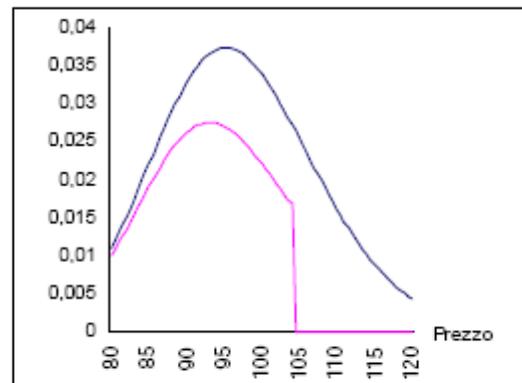
b) Delta di una up and in put ($K=100;H=105$)



e) Delta di una up and out put ($K=100;H=105$)

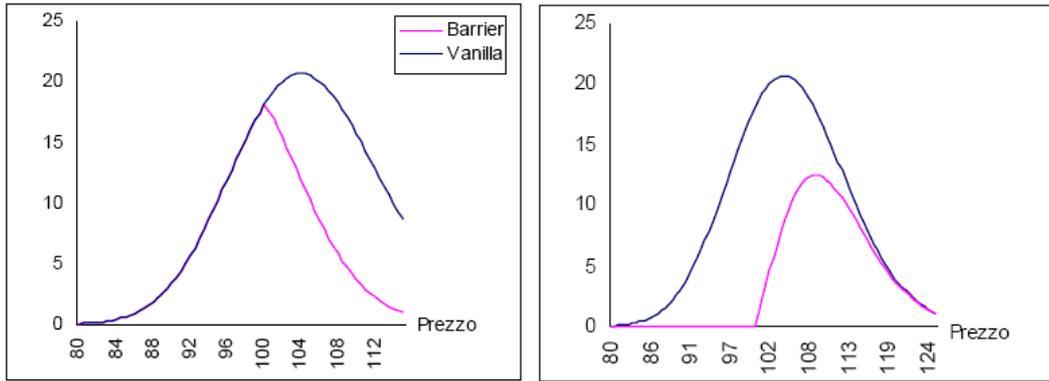


c) Gamma di una up and in put ($K=100;H=105$)



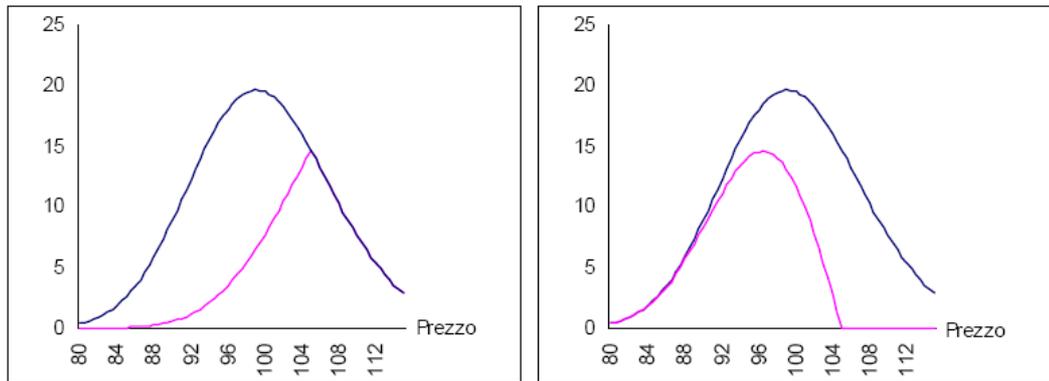
f) Gamma di una up and out put ($K=100;H=105$)

Schema 2 - Premio, Delta e Gamma delle up and in put nonché delle up and out put



a) Vega di una *down and in call* ($K=105;H=100$)

b) Vega di una *down and out call* ($K=105;H=100$)



c) Vega di una *up and in put* ($K=100;H=105$)

d) Vega di una *up and out put* ($K=100;H=105$)

Schema 3 - Vega delle *regular barrier options*

3.3 OPZIONI REVERSE BARRIER

La differenza fondamentale tra opzioni barriera di tipo *regular* ed opzioni barriera di tipo *reverse* consiste semplicemente nello stato, rispettivamente *out of the money* ed *in the money*, in cui l'opzione viene a trovarsi al momento della perforazione della barriera. Questa caratteristica delle *reverse barrier*, ovvero il collocarsi della barriera nella zona *in the money* dell'opzione, risulta tutt'altro che trascurabile. E' tale caratteristica ad essere infatti responsabile di un fortissimo dislivello nel valore intrinseco dell'opzione sui due lati della barriera, con conseguenti comportamenti anomali dell'esotica.

Affinché, al perforamento della barriera, l'opzione *reverse barrier* “nasca” (se *knock-in*) o si estingua (se *knock-out*) effettivamente *in the money*, deve necessariamente risultare, per le *call*, $H > K$, e, per le *put*, $H < K$. Le *reverse barrier options* sono dunque: le *up and in call* (con $H > K$), le *down and in put* (con $H < K$), le *up and out call* (con $H > K$) ed infine le *down and out put* (con $H < K$).

I *payoff* di tali opzioni sono:

$$\text{Up and in call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \end{cases}$$

$$\text{Down and in put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \end{cases}$$

$$\text{Up and out call:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, S_T - K] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) < H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \geq H \end{cases}$$

$$\text{Down and out put:} \quad \begin{cases} \text{Max}[0, K - S_T] & \text{se per ogni } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) > H \\ 0 \text{ (o } R) & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S(\tau) \leq H \end{cases}$$

dove S_T rappresenta il prezzo *spot* del sottostante a scadenza, τ indica un momento determinato prima della scadenza t , H è il livello di prezzo in corrispondenza del quale è fissata la barriera, R costituisce l'ammontare dell'eventuale *rebate*, mentre $S(\tau)$ rappresenta il prezzo del sottostante rilevabile nell'istante τ . Rimane da dire che, come del resto già accennato nell'introduzione, il *rebate* rappresenta una caratteristica piuttosto frequente per le *reverse barrier*, per lo meno più di quanto non lo sia per le *regular*.

3.4 PRICING DELLE OPZIONI REVERSE BARRIER

Per il calcolo del valore delle *reverse barrier options* utilizzeremo, in parte, le stesse soluzioni, opportunamente adattate, per gli integrali che compongono il valore delle *regular barrier* visti in precedenza.

Consideriamo il valore delle *up and in call* (senza *rebate*). Il valore opzioni (senza *rebate*) è dato dalla somma dei seguenti integrali:

$$C_{ui} = e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}^{+\infty} (Se^u - K) f(u) du + e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)} (Se^u - K) g(u) du$$

Il primo integrale rappresenta il valore di quei *payoff* le cui probabilità di realizzazione sono legate alle probabilità che il prezzo ha di concludere la propria corsa oltre la barriera (non a caso l'intervallo di integrazione va dalla barriera, in versione logaritmica, fino ad infinito), indipendentemente dal percorso seguito: se infatti il prezzo viene a trovarsi a scadenza al di là della barriera, deve evidentemente averla attraversata almeno una volta, con conseguente attivazione della *vanilla*, e poiché la barriera è posta al di sopra dello *strike*, ne deriva evidentemente il conseguimento del corrispondente *payoff*. La *vanilla* tuttavia offre *payoff* positivi non solo per prezzi che vanno da H ad infinito, ma anche per prezzi compresi tra K ed H : sono questi i *payoff* il cui valore il secondo integrale si propone di catturare (infatti l'intervallo di integrazione va appunto da K ad H , entrambi ovviamente in versione logaritmica). Poiché tuttavia un prezzo finale

compreso tra *strike* e barriera (dato $K < H$) non implica automaticamente il perforamento di quest'ultima, ne consegue l'utilizzo, nell'integrale, della funzione di densità $g(u)$ (al posto della tradizionale $f(u)$), la quale, per ogni prezzo finale (espresso in forma logaritmica) posto al di qua della barriera, restituisce la densità di probabilità che il sottostante ha sì di concludere la propria corsa in corrispondenza di tale prezzo, ma dopo però essere preliminarmente passato per la barriera (si tratta in sostanza di una probabilità condizionata al perforamento di quest'ultima). Dalla somma di questi due integrali emerge dunque il valore della *up and in call* senza *rebate*. La loro soluzione (per lo sviluppo completo si veda l'apposita appendice matematica) ci offre la seguente formula di valutazione:

$$\begin{aligned}
C_{ui} = & SN \left[\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] - e^{-r} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + \\
& + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right] - e^{-r} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right] - \\
& - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right] - e^{-r} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right]
\end{aligned}$$

Nell'eventuale caso della presenza di un *rebate*, alla formula sopra riportata dovrà essere sommato anche il valore restituito dall'espressione seguente:

$$V_R (up\ and\ in\ call) = e^{-rt} R \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)} (f(u) - g(u)) du$$

L'integrale rappresenta semplicemente la probabilità che la barriera non venga mai raggiunta durante l'arco di vita dell'opzione: moltiplicando tale probabilità per l'ammontare (R) del *rebate* attualizzato otteniamo il valore attuale di quest'ultimo. Rispetto al *rebate* di una *down and in call* l'integrale presenta un intervallo di integrazione invertito: per risolvere il nostro problema sarà dunque sufficiente cambiare il segno dell'argomento delle funzioni cumulate componenti la soluzione già ottenuta in precedenza. In sostanza quindi:

$$V_R (up\ and\ in\ call) = e^{-rt} R \left[N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N\left(-\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right]$$

Passiamo ora alle *down and in put*. La prima caratteristica di tali opzioni da rimarcare consiste nella perfetta simmetria della struttura di queste rispetto alle *up and in call*. Tale simmetria si sostanzia nella struttura degli integrali componenti il valore dell'opzione (per quanto segue valgono, adattate, le stesse considerazioni effettuate per le *up and in call*):

$$P_{di} = e^{-rt} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)} (K - Se^u) f(u) du + \left[e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}^{+\infty} (K - Se^u) g(u) du - e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{+\infty} (K - Se^u) g(u) du \right]$$

Rispetto alla *up and in call* il contenuto di ciascun integrale presenta il segno algebrico capovolto (trattandosi di *put*), accompagnato da un

intervallo di integrazione invertito: ne consegue, a livello di soluzione, un cambiamento nel segno sia interno (nell'argomento della funzione) che esterno (il segno che precede la $N(x)$) delle funzioni cumulate.

Il valore della *down and in put* è dunque:

$$\begin{aligned}
 P_{di} = & -SN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + \\
 & + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right] - \\
 & - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right]
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il *rebate*, a cambiare è soltanto l'intervallo di integrazione:

$$V_R (\text{down and in put}) = e^{-rt} R \int_{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}^{+\infty} (f(u) - g(u)) du$$

La soluzione dell'integrale è dunque:

$$V_R (\text{down and in put}) = e^{-rt} R \left[N \left[\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} N \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right]$$

Occupiamoci ora delle *reverse knock-out*, ed in particolare delle *up and out call*.

Il valore di tali opzioni è offerto dalla soluzione del seguente singolo integrale:

$$C_{uo} = e^{-rt} \int_{\ln\left(\frac{K}{S}\right)}^{\ln\left(\frac{H}{S}\right)} (Se^u - K)(f(u) - g(u))du$$

La *up and out call* offre *payoff* positivi nella sola zona di prezzo compresa tra K (lo *strike*) ed H (la barriera), questo spiega l'intervallo di integrazione.

Prima condizione dunque, necessaria ma non sufficiente, per l'ottenimento di un *payoff* positivo è un prezzo finale a scadenza compreso tra K ed H . Tuttavia è anche necessario che il sottostante, nel raggiungere a scadenza tale prezzo finale, non vi arrivi passando per la barriera (altrimenti l'opzione si estingue). Questo spiega perché, all'interno dell'integrale, si sottragga la funzione $g(u)$ alla solita $f(u)$. In effetti $g(u)$ rappresenta semplicemente la densità di probabilità con cui il sottostante può raggiungere un dato livello di prezzo (a scadenza) al di qua della barriera, passando però per la stessa. Dunque in sostanza l'integrale non fa altro che sottrarre, per ogni livello del prezzo finale, alla probabilità che il sottostante vi arrivi, indipendentemente dal percorso seguito, la probabilità che il sottostante vi arrivi passando per la barriera. Quindi $(f(u)-g(u))$ è la probabilità che il sottostante raggiunga a scadenza il livello dato di prezzo (in versione logaritmica u) senza mai toccare la barriera. Risolvendo l'integrale proposto:

$$\begin{aligned}
C_{uo} = & SN \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{-rt} KN \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \\
& - SN \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-rt} KN \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \\
& - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{-rt} KN \left(\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] + \\
& + \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[\left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{-rt} KN \left(\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Occupiamoci, infine, della valutazione delle *down and out put*.

Per queste opzioni vale la relazione:

$$P_{do} + P_{di} = \text{Vanilla put}$$

E quindi:

$$P_{do} = \text{Vanilla put} - P_{di}$$

A questo punto è facile offrire la soluzione analitica completa per le *down and out put*:

$$\begin{aligned}
P_{do} = & -SN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] + \\
& + SN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] - e^{-rt} KN \left[-\frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + rt - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \right] - \\
& - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right] + \\
& + \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S}\right) N \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \right] + e^{-rt} KN \left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + at}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right]
\end{aligned}$$

3.5 COEFFICIENTI DI SENSIBILITA' DELLE *REVERSE BARRIER*

Iniziamo analizzando il comportamento di una *up and in call* in presenza delle seguenti caratteristiche: lo *strike* è posto uguale a $K = 100\$$, la barriera a quota $H = 110\$$, il tasso senza rischio è $rf = 5\%$, mentre la volatilità, al solito, è collocata ad un livello $\sigma = 15,7\%$. In base a questi parametri siamo in grado di costruire il grafico (figura 40) relativo all'andamento del premio in funzione del prezzo e della vita residua.

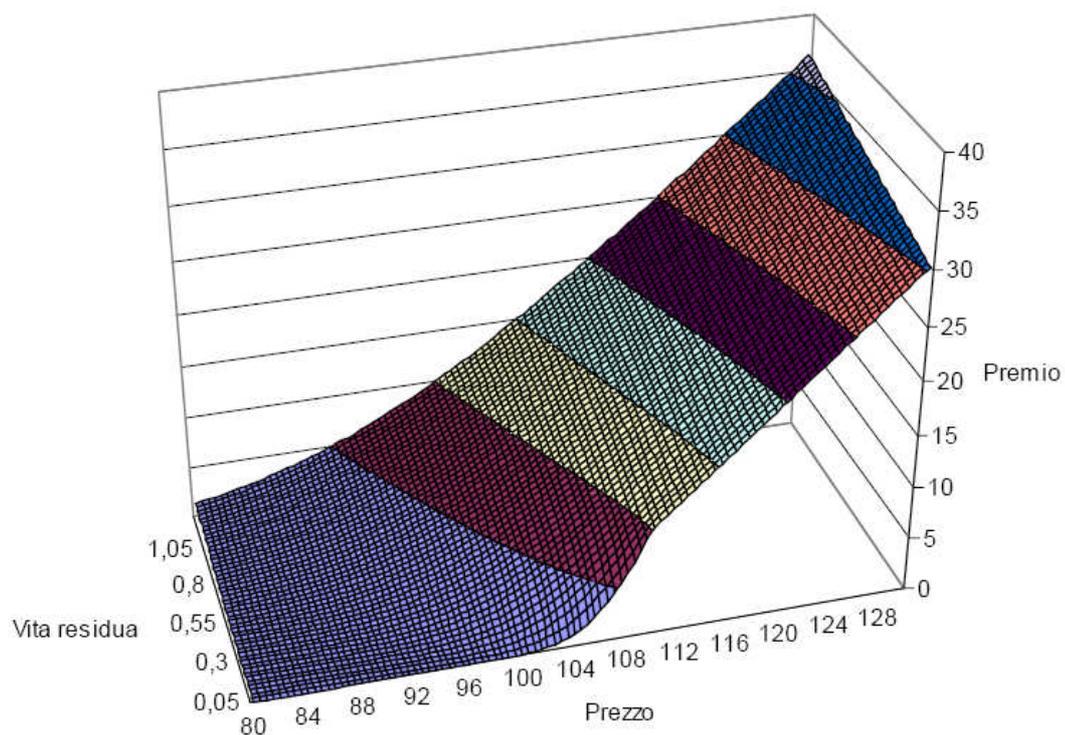


Figura 40 - Premio di una *up and in call* in funzione del prezzo del sottostante e della vita residua

Al di sopra di quota 110\$, in corrispondenza della quale è collocata la barriera, l'opzione si trasforma automaticamente nella corrispondente *vanilla call*.

E' possibile notare come per valori della vita residua sufficientemente alti, il cambiamento in questione risulti poco visibile sul grafico, al contrario di quanto accade invece a poco tempo dalla scadenza. Ciò è dovuto all'influenza che la vita residua ha sulle probabilità di perforamento della barriera. In effetti, con un'alta vita residua, la probabilità di "*knocking-in*" si mantiene elevata per valori del prezzo anche abbastanza lontani dalla barriera ed in particolare, per prezzi vicini alla stessa, risulta assai prossima ad uno: ciò permette un avvicinamento (per prezzi del sottostante crescenti a partire da sotto la barriera) del prezzo della *barrier* al valore (per $S=H$) della *vanilla*

molto più graduale di quanto non succeda ad un paio di settimane dalla scadenza; infatti, quando manca ormai poco all'estinzione dell'opzione, la probabilità di perforamento della barriera subisce una diminuzione considerevole, specialmente per prezzi non vicinissimi a quest'ultima, rendendosi così necessaria, da parte del prezzo dell'opzione, una sorta di "rincorsa" al valore (per $S=H$) della *vanilla* negli ultimi *tick* di prezzo a ridosso della barriera (poiché soltanto appena al di sotto di questa la probabilità di perforamento ritorna rapidamente a livelli elevati). Del resto basti considerare come, ad un paio di settimane dalla scadenza, passando da uno spot di 107\$ ad uno di 109,5\$, il valore dell'opzione passa da 4\$ circa ad oltre 10\$. Osservando l'andamento della funzione *Delta* è possibile comprendere meglio quanto detto.

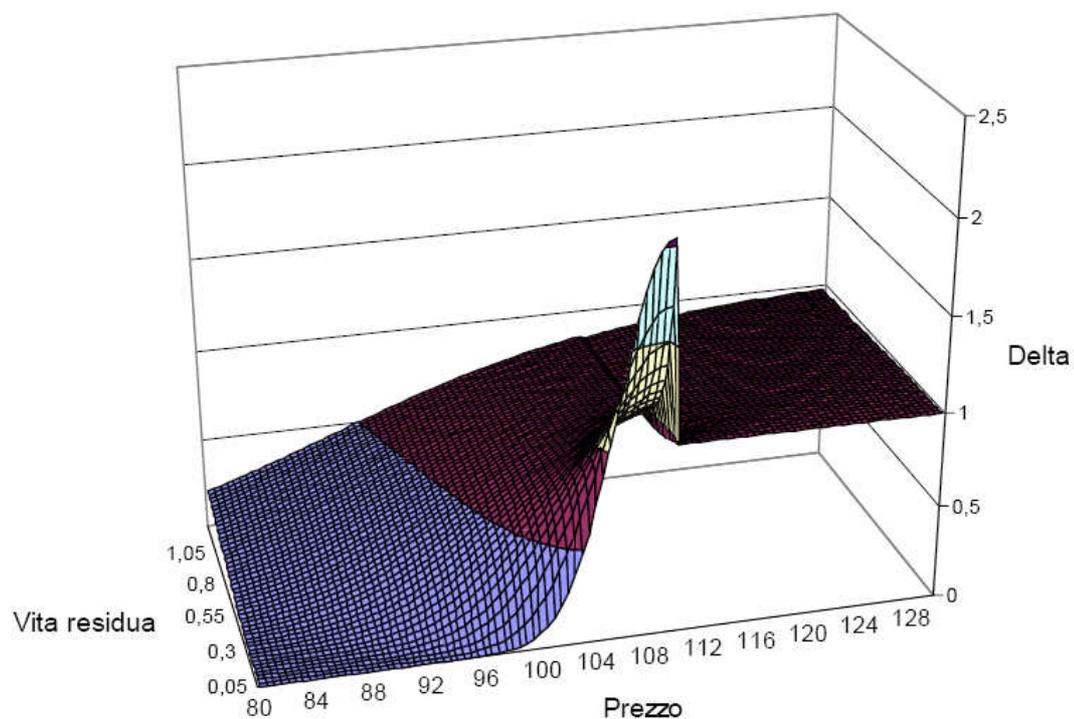
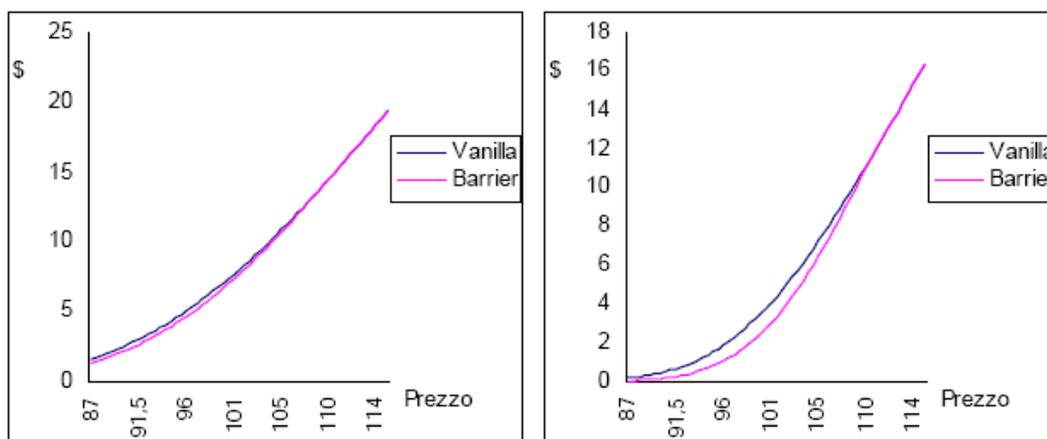


Figura 41 - Delta di una up and in call ($K=100$, $H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

Il grafico mostra, ovviamente, per una bassa vita residua, un picco (superiore a quota due) in corrispondenza della zona di prezzo a ridosso della barriera. Oltre i 110\$ troviamo il *Delta* della *vanilla* molto vicino all'unità, occorre infatti ricordare come la *vanilla* “nasca”, al perforamento della barriera, abbondantemente *in the money*.

Nel grafico seguente è riportato l'andamento (rispetto al sottostante) della *up and in call* e di una *vanilla* (con medesimo *strike*), in presenza di una vita residua rispettivamente di nove e tre mesi (inoltre $K=100\$$, $H=110\$$).



a) *Up and in call* e *vanilla* a 9 mesi dalla scadenza b) *Up and in call* e *vanilla* a 3 mesi dalla scadenza

Figura 42 - Confronto tra i valori di una *up and in call* e di una *vanilla* a nove e a tre mesi dalla scadenza

E' possibile verificare come la differenza di andamento tra *barrier* e *vanilla* sia particolarmente significativa nel solo secondo caso, ovvero in quello relativo ad una più bassa vita residua. Per il resto, la ragione per cui troviamo la *barrier* sempre al di sotto della *vanilla* è piuttosto banale. La *barrier* infatti, per poter offrire i medesimi *payoff* della

standard call, deve preliminarmente veder perforata la barriera (evento questo dalla probabilità minore di 1).

Tale tipo di opzione è caratterizzata da un gamma sempre positivo.

Graficamente:

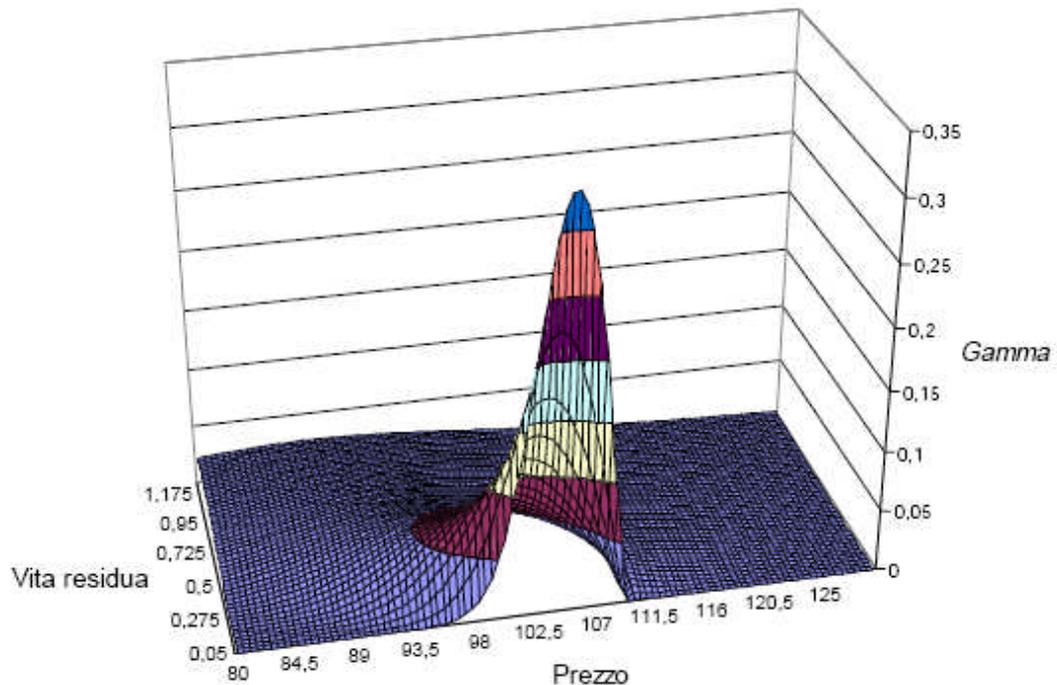


Figura 43 - *Gamma* di una *up and in call* ($K=100$, $H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

Passando ora allo studio della funzione *Vega* (figura 44), è il caso di precisare come, in questo caso, si sia evitato di riportare all'interno del medesimo grafico, oltre quota 110\$, anche il *Vega* della *vanilla* (che al solito subentra alla *barrier* nella zona al di sopra della barriera). È il caso inoltre di precisare come quest'ultimo sia stato ottenuto in presenza di una vita residua di 3 mesi (nonché per $K=100$ \$ ed $H=110$ \$).

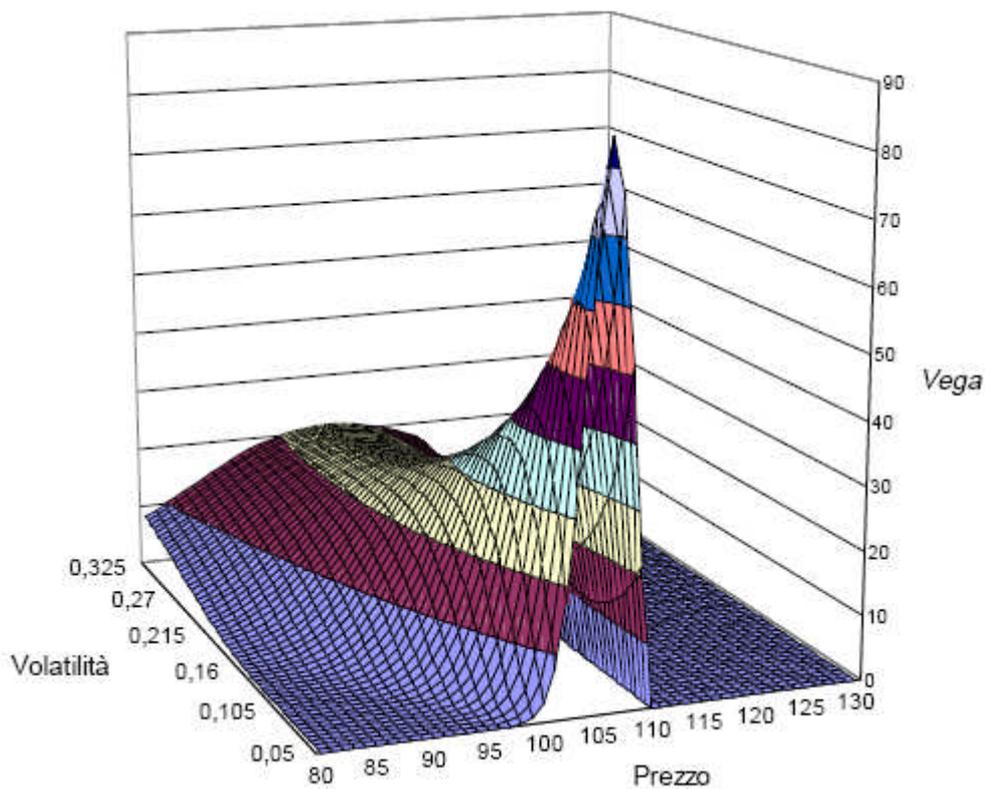


Figura 44 - Vega di una up and in call in funzione del prezzo e di diversi livelli della volatilità

È impossibile non notare la schiacciante somiglianza che la funzione *Vega* presenta nei confronti dell'analoga "greca" relativa alle *american digital*: come in queste ultime infatti, al diminuire della volatilità, il *Vega* tende a concentrarsi nella zona di prezzo a ridosso della barriera (tanto da arrivare a più che raddoppiare, per uno *spot* pari a 105\$ e per una volatilità che passasse dal 30 al 10%), diminuendo invece drasticamente, fino ad annullarsi, per prezzi lontani dalla stessa (in presenza delle medesime condizioni, per un prezzo tuttavia di 90\$, il *Vega* passa da 17 circa a praticamente zero). La spiegazione di tale andamento è piuttosto agevole. Infatti, come detto in precedenza, il *Vega* raggiunge i massimi livelli in corrispondenza di volatilità di partenza basse e per prezzi del sottostante prossimi alla barriera, in quanto in prossimità della

barriera, basta un piccolo aumento della bassa volatilità di partenza per ottenere un considerevole aumento della probabilità di perforamento della barriera. Il contrario accade nel caso di prezzi troppo lontani dalla barriera (sempre in presenza di bassa volatilità di partenza), nel qual caso la speranza di vedere perforata la barriera è talmente bassa da risultare molto poco sensibile a modesti aumenti della volatilità. Invece per valori di partenza della volatilità sufficientemente alti e prezzi vicini alla barriera, la probabilità di perforamento della barriera è tanto prossima all'unità da risultare quasi insensibile ad ulteriori aumenti della volatilità, mentre per prezzi sufficientemente lontani dalla barriera c'è ancora spazio per un aumento apprezzabile della medesima. Ciò che però può essere interessante notare è la tendenza del *Vega* della *barrier* a mantenersi relativamente alto anche in corrispondenza di elevate volatilità del sottostante. In altre parole troviamo, in questo caso, meno accentuato il divario esistente, per esempio, nelle *digital*, tra *Vega* registrabili a molto tempo dalla scadenza e *Vega* rilevabili in prossimità della barriera, quando la scadenza dell'opzione è ormai vicina. Come abbiamo appena detto, il basso *Vega* della *digital* riscontrabile in presenza di elevate volatilità implicite è dovuto al semplice fatto che, essendo la probabilità di perforamento della barriera molto elevata a causa appunto dell'alta volatilità, il beneficio derivante da un'ulteriore aumento di quest'ultima non può risultare molto significativo, nel caso invece delle *up and in call reverse*, ulteriori aumenti della volatilità non vanno ad incidere soltanto sulla probabilità di *knocking-in* ma anche sul valore stesso della *vanilla* sottostante, con ulteriore vantaggio (da cui il maggior *Vega*) per il detentore dell'opzione.

Per quanto concerne l'altra *reverse knock-in*, ovvero la *down and in put*, essendo la struttura dell'opzione del tutto simmetrica a quella della *call*, ne presenta di conseguenza caratteristiche del tutto analoghe (figure 45 e 46).

La presenza di qualche minimo elemento di differenziazione è dato dal diverso *drift*.

La conseguenza più interessante legata al problema *drift* è rappresentata dalla presenza di un *Delta* mediamente più basso, in termini assoluti, rispetto a quello della *call* (la media dei valori del *Delta*, rappresentati nel relativo grafico, è di $-0,28$ per la *down and in put* contro lo $0,47$ della *up and in call*). Infatti il *drift* rende meno raggiungibili i *payoff* più ricchi della *put* sottostante, con la conseguenza di moderare la crescita di valore dell'opzione al diminuire del prezzo. Chiaramente il *drift* gioca un ruolo opposto in presenza di una bassissima vita residua, quando cioè l'opzione diventa praticamente una *digital*: a quel punto conta solo la probabilità di *knocking-in*, ed il *drift*, abbassandola, rende l'opzione più sensibile alle diminuzioni del prezzo; la conseguenza è un *Delta* più elevato ($2,2$ contro il 2 della *call*). Il *Gamma*, dal canto suo, è praticamente indistinguibile dalla controparte *call* (come del resto il *Vega*).

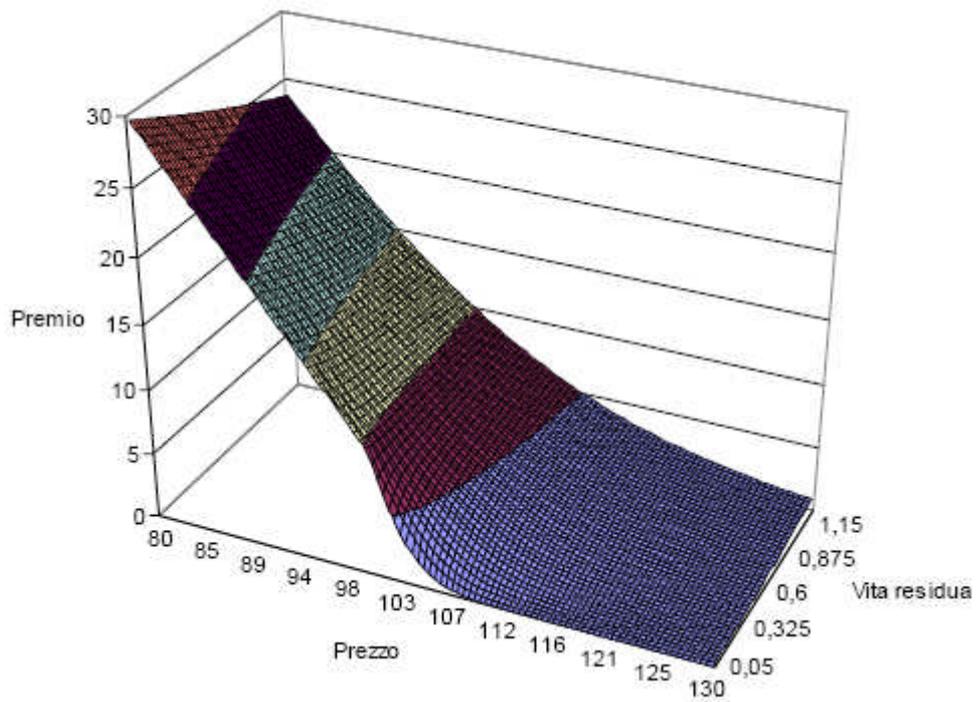


Figura 45 - Premio di una *down and in put* al variare del prezzo e della vita residua ($K=110$, $H=100$)

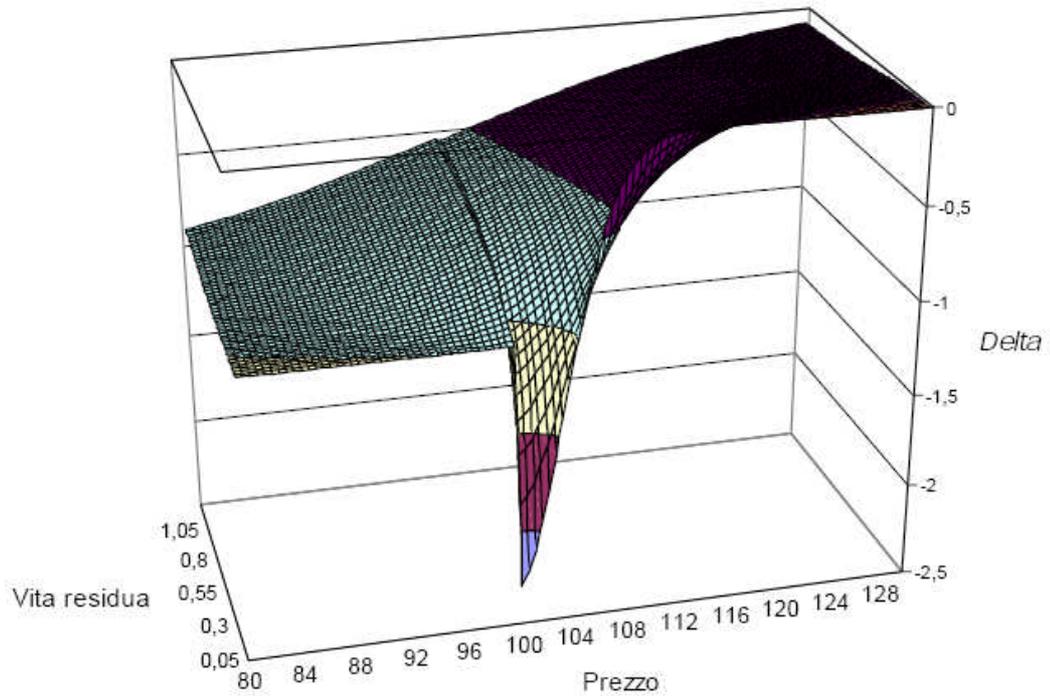


Figura 46 - Delta di una *down and in put* al variare del prezzo e della vita residua ($K=110$, $H=100$)

Passiamo ad analizzare le *knock out reverse barrier*, iniziando dalle *up and out call*.

Nella figura 47 è riportato l'andamento del premio di una *up and out call* (*strike*, barriera, tasso e volatilità sono rispettivamente pari a 100\$, 110\$, 5% e 15,7%).

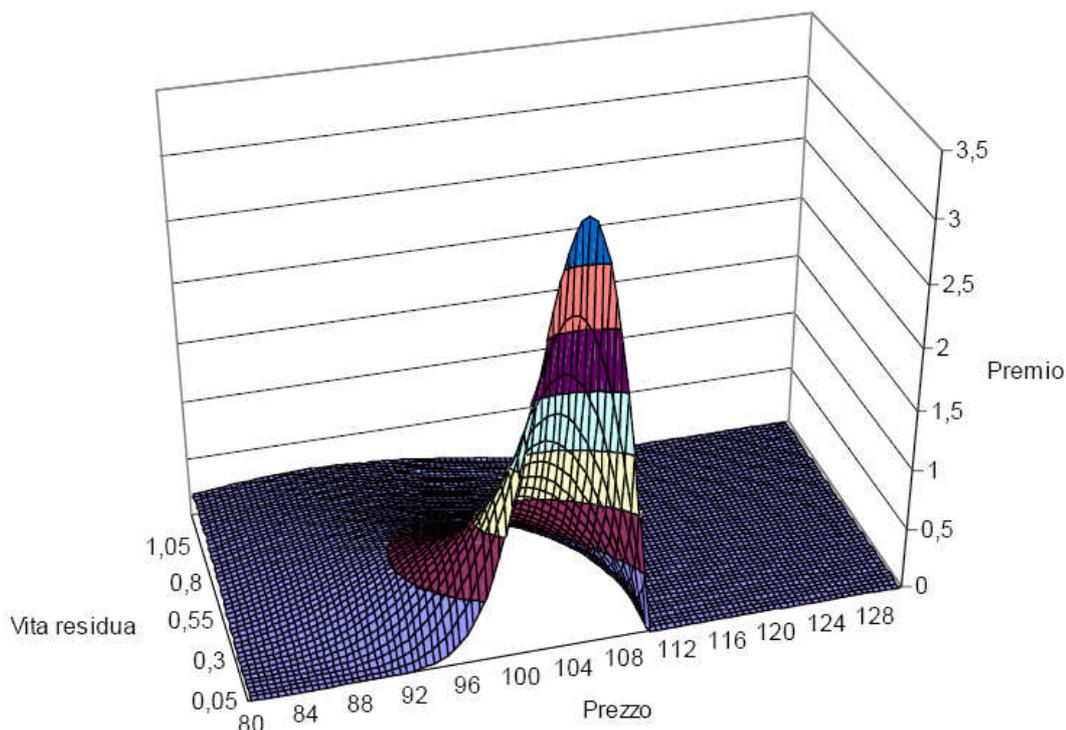


Figura 47 - Premio di una *up and out call* ($K=100$, $H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

Tale forma, più somigliante a quella di una greca, è il frutto dell'incontro-scontro tra le due componenti del valore della *knock-out*, cioè la componente “*vanilla*” e la componente “barriera”.

La prima tenderebbe ovviamente a far crescere indefinitamente il valore dell'opzione all'aumentare del prezzo del sottostante mentre la seconda, algebricamente negativa, aumentando in valore assoluto all'avvicinarsi della barriera, opererebbe evidentemente in senso opposto (in quanto è Knock out). A questo punto la spiegazione di tale conformazione del grafico è data dal fatto che per prezzi

sufficientemente lontani dalla barriera prevale la componente “*vanilla*”, mentre per prezzi abbastanza elevati (e dunque vicini alla barriera) domina incontrastata la componente “barriera”. Non a caso infatti, per qualsiasi vita residua, il premio raggiunge il proprio massimo prima della barriera, per poi calare, a seconda del tempo mancante prima della scadenza, più o meno rapidamente fino a quota zero in corrispondenza di $S=H$. Dovrebbe poi essere chiaro per il lettore il modo con cui la vita residua influenza la lotta tra le due componenti sopra menzionate. Infatti un’alta vita residua mantiene elevata la probabilità di “*knocking-out*” anche per prezzi piuttosto lontani dalla barriera, portando quindi la componente barriera a prevalere su una più vasta porzione di grafico. Al contrario una bassa vita residua, riducendo drasticamente, per prezzi distanti dalla barriera, le probabilità di perforamento di quest’ultima, comporta per la componente “esotica” (non *vanilla*) una severa limitazione della propria influenza alla sola zona di prezzo posta a ridosso della barriera (in corrispondenza della quale le possibilità di *knocking-out* rimangono per forza di cose elevate). Volendo offrire un esempio numerico di quanto detto, basti considerare che, per una vita residua $t = 1$ anno, il valore dell’opzione raggiunge il proprio apice per $S = 92\$$, per $t = 3$ mesi lo raggiunge a quota $S = 100,5\$$, mentre per $t \approx 2$ settimane circa si riscontra il massimo valore in corrispondenza di $S = 105\$$ circa: ciò è dovuto al fatto che la componente barriera, responsabile della diminuzione del valore dell’opzione, perde forza con il passare del tempo, per riacquistarla soltanto per valori del prezzo sottostante sempre più vicini alla barriera (ovviamente la “forza” di cui parliamo non è altro che la probabilità di *knocking-out*).

Anche per quanto concerne l'andamento del premio al passare del tempo, è necessario far riferimento allo "scontro" tra componente *vanilla* e componente barriera. Infatti dove prevale la prima componente (e dove dunque la probabilità di *knocking-out* è bassa) l'opzione, comportandosi di fatto da *vanilla* (o quasi), vede il proprio valore scemare con il passaggio del tempo, mentre, laddove a prevalere è la componente barriera (con un'alta probabilità di perforamento della stessa), il premio non può che trarre vantaggio dalla diminuzione della vita residua, poiché un calo di quest'ultima limita evidentemente le indesiderate possibilità di *knocking-out*, salvaguardando l'esistenza stessa dell'investimento. La figura 48, relativa all'andamento della funzione *Theta*, offre una facile verifica grafica di quanto appena affermato.

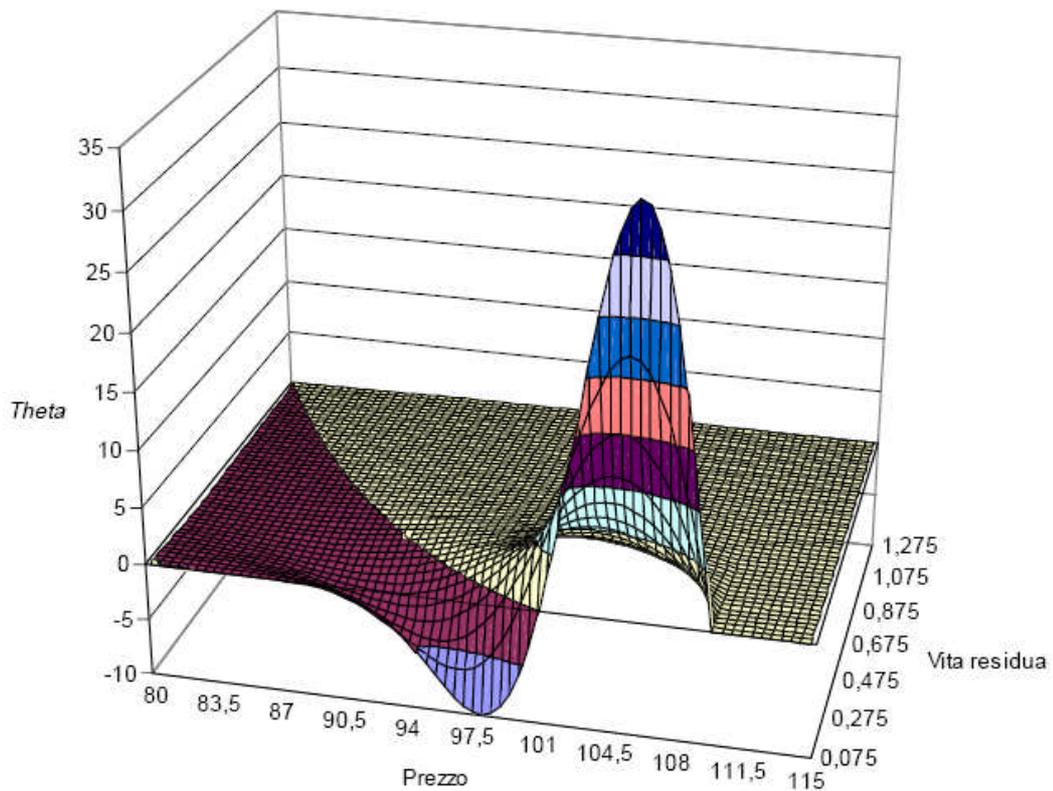


Figura 48 - *Theta* di una *up and out call* ($K=100$, $H=110$) al variare del prezzo e della vita residua

Nelle figure 49 e 50 sono riportati i grafici relativi alla funzione *Delta* e alla funzione *Gamma* della *up and out call*. Ovviamente non può destare sorpresa, dopo quanto visto, il cambio di segno nella funzione *Delta*, che passa regolarmente da valori positivi, finché a prevalere è la componente *vanilla* (per prezzi lontani dalla barriera), a valori negativi, quando la questione barriera assume invece un ruolo determinante; volendo offrire qualche cifra a riguardo si consideri che, ad un paio di settimane dalla scadenza, il *Delta* passa dallo 0,4 rilevabile a quota $S=103\$$ al -1 riscontrabile per $S=109\$$.

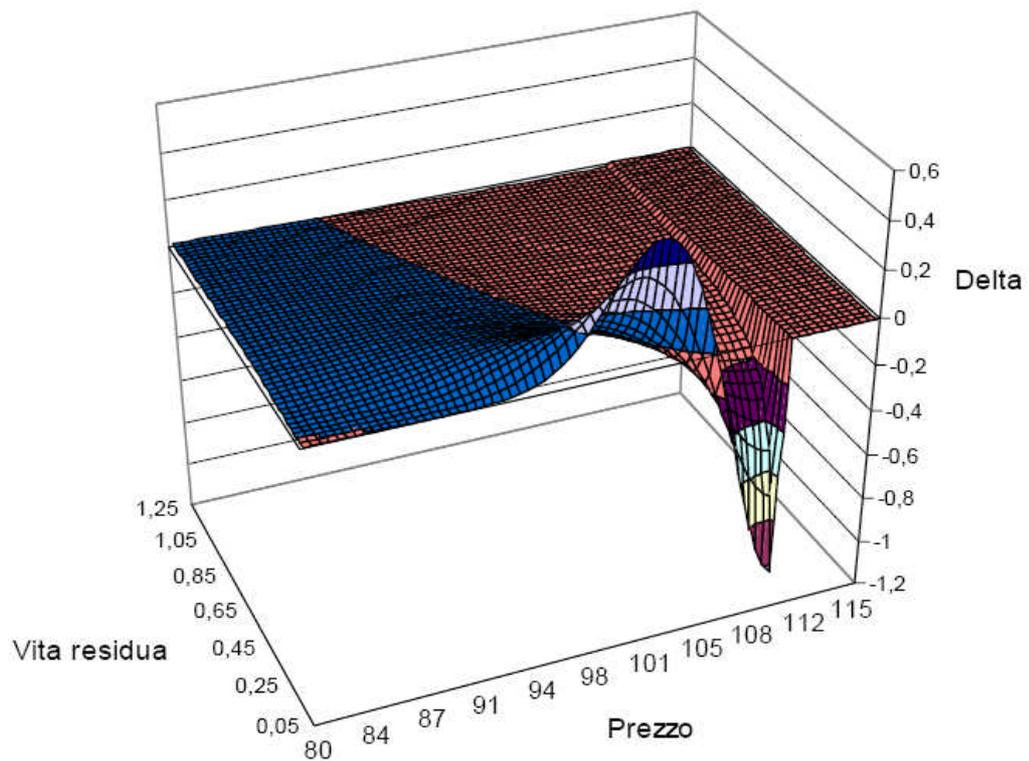


Figura 49 - Delta di una up and out call ($K=100, H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

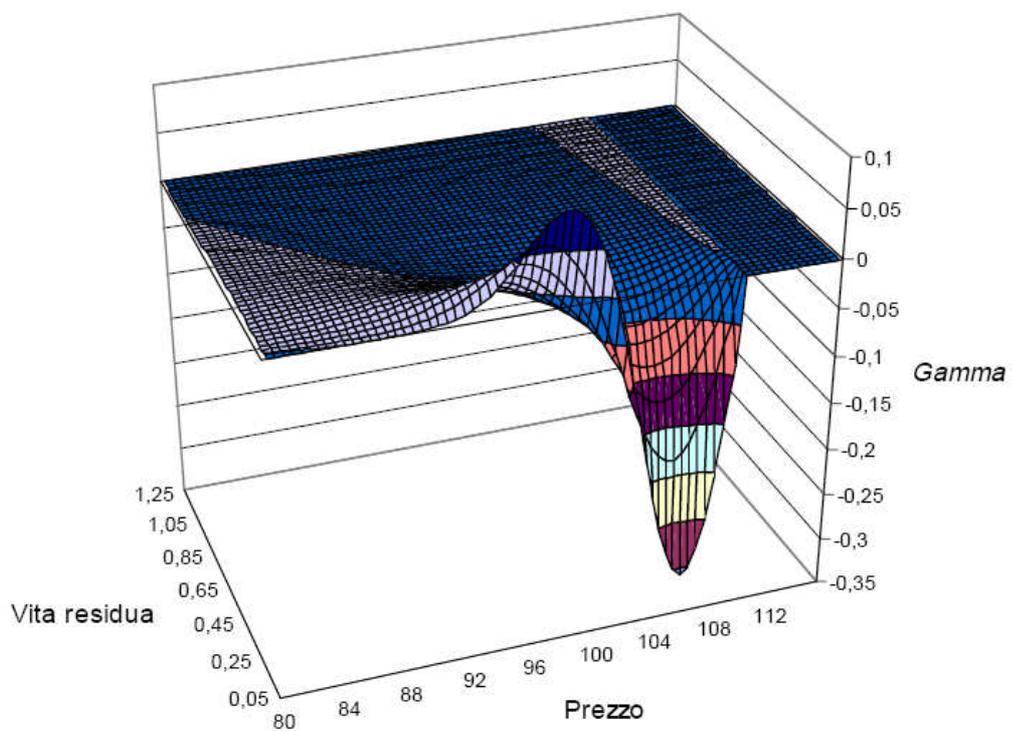


Figura 50 - Gamma di una up and out call ($K=100, H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

E' interessante rilevare come, per una vita residua sufficientemente elevata, il *Delta* della *barrier* si presenti, in termini assoluti, praticamente quasi nullo. In effetti, a nove mesi dalla scadenza, il *Delta*, positivo o negativo che sia, non supera mai lo 0,037 in valore assoluto. Un discorso analogo vale per la funzione *Gamma*. Chiaramente il fenomeno si spiega con una precoce (ovvero già per prezzi piuttosto bassi) prevalenza della componente barriera, il che di fatto impedisce al valore dell'opzione di raggiungere livelli massimi significativi; in altre parole il premio rimane praticamente azzerato o quasi per qualsiasi valore del sottostante (non riesce a decollare).

Al contrario, invece, in presenza di una bassa vita residua, la prevalenza, per prezzi non vicinissimi alla barriera, della componente *vanilla* permette all'opzione di acquisire gran parte del valore intrinseco situato nella zona compresa tra *strike* e barriera; ciò le consente di raggiungere livelli massimi di valore piuttosto significativi, da cui poi, quando il prezzo raggiunge la zona a ridosso della barriera (e la probabilità di *knocking-out* cresce vertiginosamente), dovrà rapidamente decadere fino all'annullamento. Ovviamente una tale situazione ha come conseguenza diretta la formazione, a ridosso della barriera, di un *Delta* negativo potenzialmente illimitato. A scopo esemplificativo si riporta in figura 51 il grafico relativo all'andamento della funzione *Delta* in presenza di una vita residua di un solo giorno (il grafico tridimensionale precedente si fermava infatti ad oltre due settimane dalla scadenza).

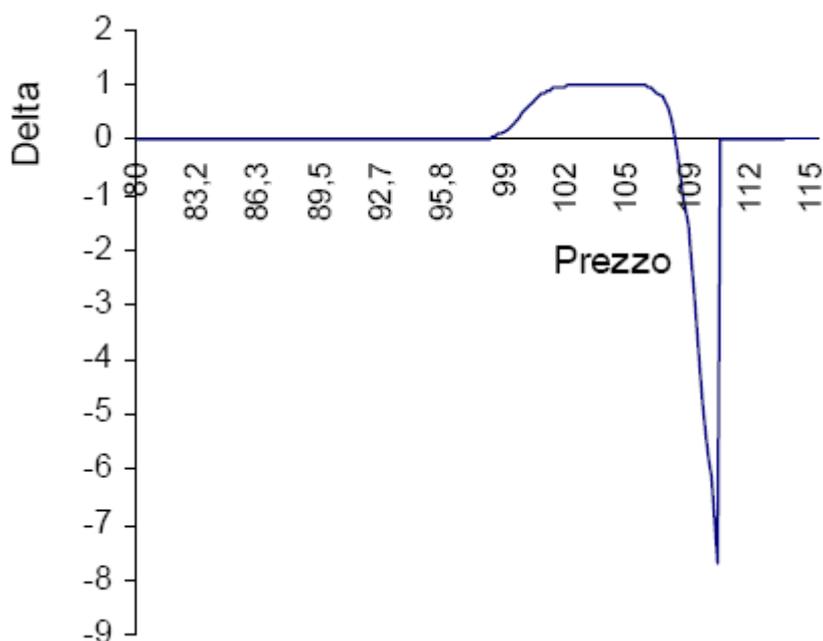


Figura 51 - Delta di una up and out call ($K=100$, $H=110$) ad un giorno dalla scadenza

Il *Delta*, come si evince dal grafico, è praticamente uguale a quello di una *vanilla* (anch'essa prossima a scadenza) fino a quota 107\$: al di là di questa soglia la forte vicinanza della barriera affossa rapidamente l'opzione. Il *Delta* negativo raggiunto nel grafico (circa $-7,7$), pur notevole, è soltanto un accenno ai livelli teoricamente accessibili per la *up and out call*: basterebbe spostare lo *strike* da 100 a 90\$ (aumentando considerevolmente il valore intrinseco al momento del *knocking-out*) per vedere il nostro *Delta* raggiungere agilmente quota -17 circa o più.

La funzione *Gamma* (figura 50), soprattutto a poco tempo dalla scadenza, conferma l'andamento non proprio lineare delle *reverse knock-out*: non solo presenta la caratteristica di *risk-reversal* (basti pensare che, ad un paio di settimane dalla scadenza, il *Gamma* passa dallo 0,1 circa rilevabile a quota 98\$ al $-0,3$ riscontrabile per un

prezzo del sottostante pari a poco più di 100\$) ma raggiunge livelli assoluti molto elevati. Del resto occorre pensare che, ad un istante dalla scadenza, il *Delta* dell'opzione, in corrispondenza della barriera, passa da 1 a $-\infty$ nello spazio di un infinitesimo incremento di prezzo (l'*american digital*, se non altro, si accontentava di passare da 0 a $+\infty$). Passiamo ad analizzare la funzione *Vega*, il cui andamento è riportato in figura 52.

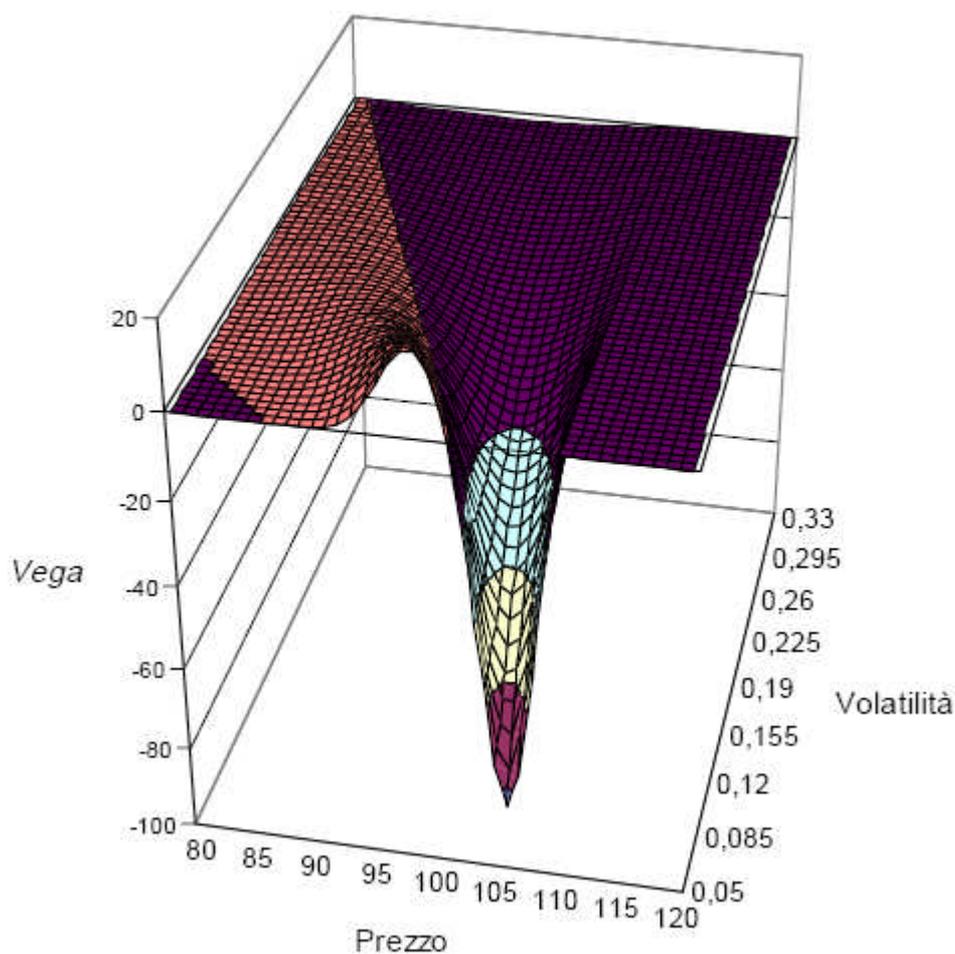


Figura 52 - Vega di una up and out call ($K=100$, $H=110$) in funzione del prezzo e della vita residua

L'andamento del *Vega* è sinusoidale (si ricorda che il grafico è stato ottenuto per una vita residua di 3 mesi): nella fattispecie il *Vega* negativo, riscontrabile nella zona di prezzo adiacente alla barriera, si

spiega con l'influenza negativa che un aumento della volatilità inevitabilmente produce sulla probabilità di *knocking-out* dell'opzione e dunque sul valore di quest'ultima. Per prezzi sufficientemente lontani dalla barriera, comportandosi l'opzione in maniera analoga ad una *vanilla*, il *Vega* torna ai tradizionali valori positivi. Per volatilità di partenza piuttosto basse il *Vega* può inoltre raggiungere valori negativi di spicco (sotto -80): infatti la bassa volatilità (unitamente alla presenza di uno *spot* vicino alla barriera) mantiene la probabilità di *knocking-out* a livelli tali (non troppo alti) da risultare notevolmente sensibili ad aumenti della volatilità stessa. L'andamento sinusoidale cui abbiamo sopra accennato e che il *Vega* condivide, in special modo, con la funzione *Gamma*, rende estremamente arduo ogni tentativo tradizionale di copertura dei rischi corrispondenti.

Rimane da analizzare, infine, l'altra *reverse knock-out*: la *down and out put* (figura 53).

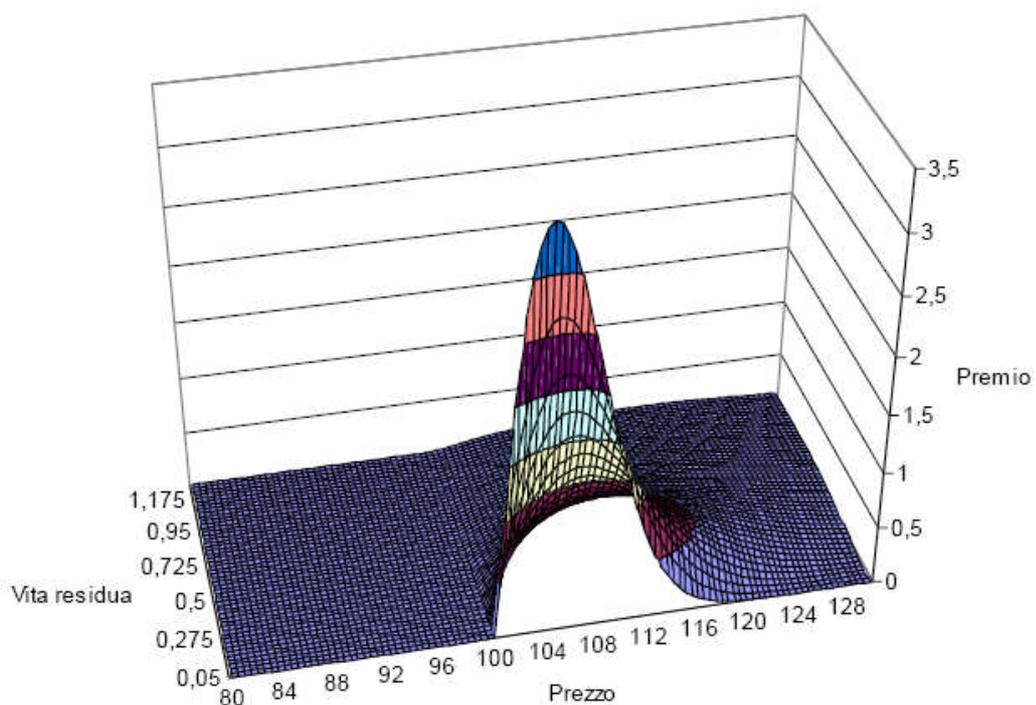


Figura 53 - Premio di una *down and out put* ($K=110$, $H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

Al solito la simmetria strutturale tra *call* e *put* della stessa famiglia (nella fattispecie *knock-out*) rende del tutto adattabili al caso della *put* le considerazioni finora effettuate in merito alla *call*. Altrettanto al solito la questione *drift* introduce alcuni minimi elementi di differenziazione: nel nostro caso infatti il *drift* positivo accentua la pendenza della funzione a ridosso della barriera. Ovviamente ciò è dovuto all'influsso moderatore che esso produce sulla probabilità di *knocking-out* dell'opzione a ridosso della barriera. Tale fenomeno ha come conseguenza chiaramente non solo un aumento del *Delta* (che nel caso della *down and out put* raggiunge un massimo collocabile, ad un paio di settimane dalla scadenza, ad oltre quota 1,2 , contro l'1 riscontrabile per le *up and out call*: si veda figura 54) ma anche un più elevato *Gamma*.

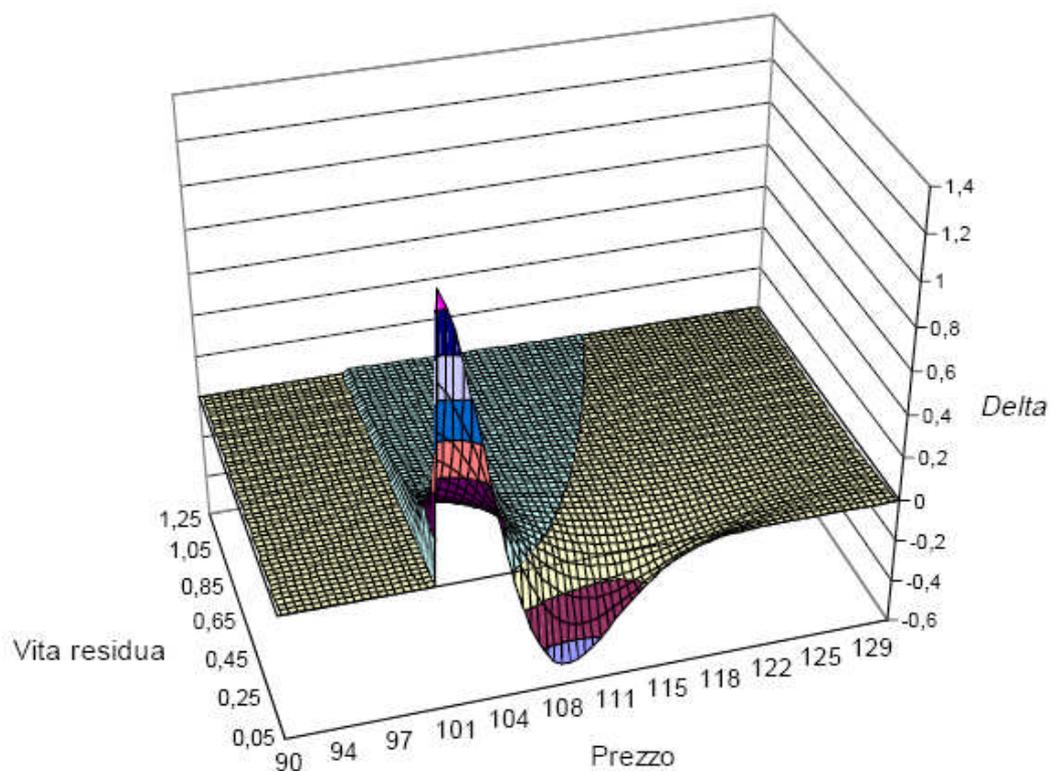


Figura 54 - Delta di una *down and out put* ($K=110, H=100$) in funzione del prezzo e della vita residua

L'influsso "moderatore" del drift costringe infatti il *Delta* a raggiungere quota zero (in corrispondenza della barriera) in un più breve "range" di prezzo, con l'ovvia conseguenza di un aumento del *Gamma* (che è la derivata del *Delta*) (figura 55).

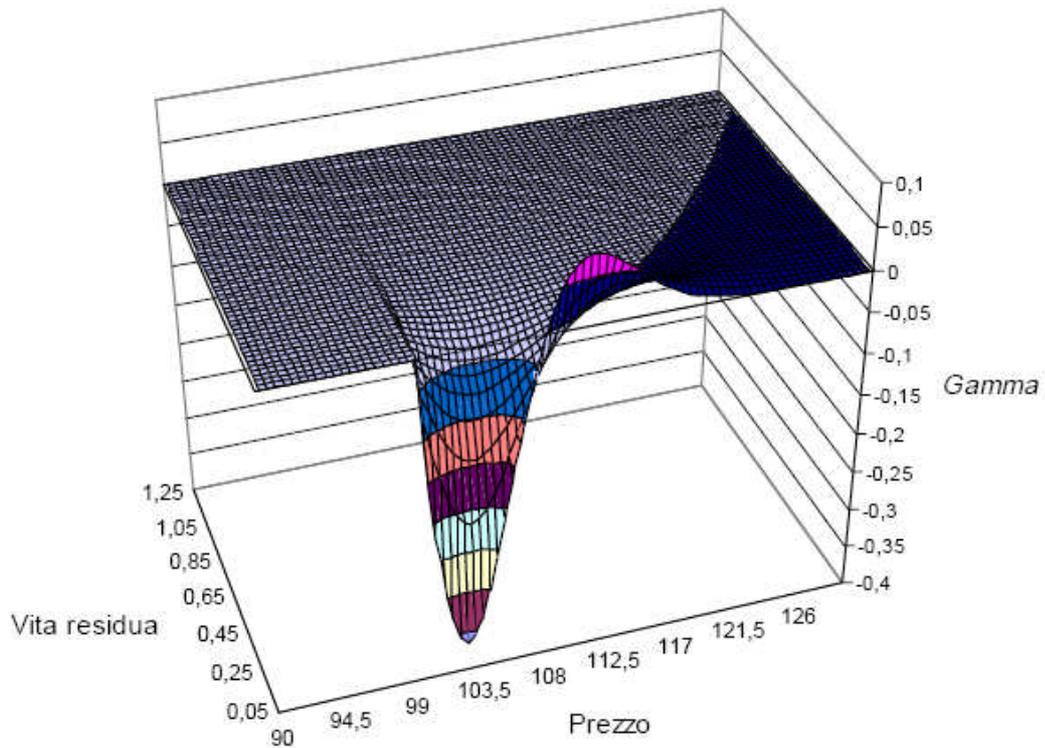
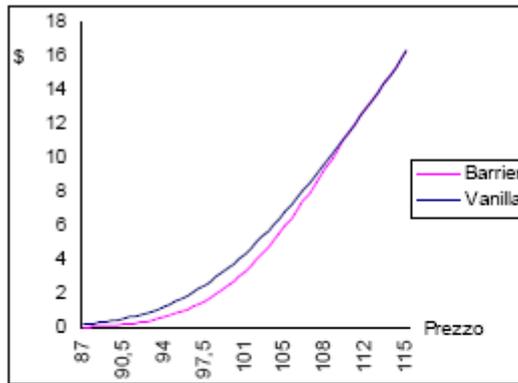
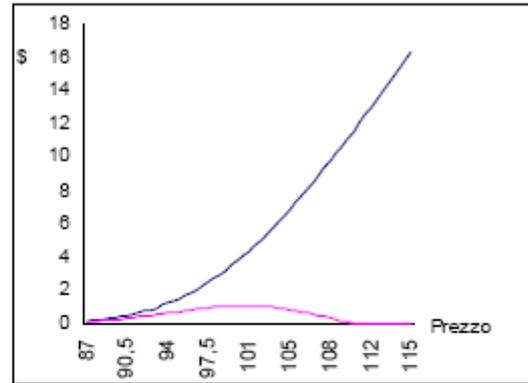


Figura 55 - Gamma di una down and out put (K=110, H=100) in funzione del prezzo e della vita residua

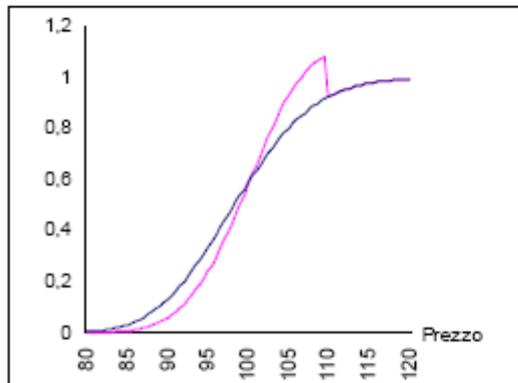
Si riportano nelle pagine seguenti dei prospetti riassuntivi relativi all'andamento del premio e delle principali greche per ciascuna delle *reverse barrier* qui trattate. I grafici sono stati ottenuti per una vita residua pari a 3 mesi; i restanti parametri sono gli stessi utilizzati finora.



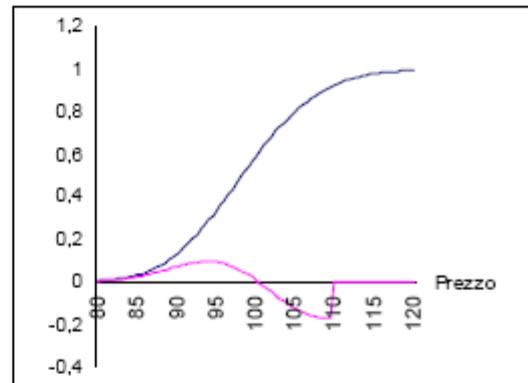
a) Premio di una *up and in call* ($K=100\$; H=110\$$)



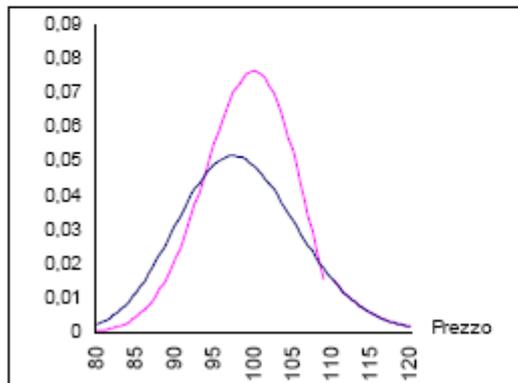
d) Premio di una *up and out call* ($K=100\$; H=110\$$)



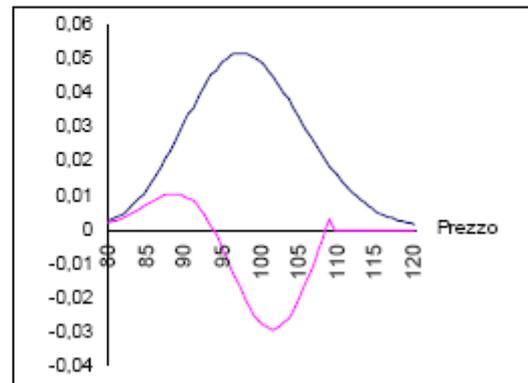
b) Delta di una *up and in call* ($K=100\$; H=110\$$)



e) Delta di una *up and out call* ($K=100\$; H=110\$$)

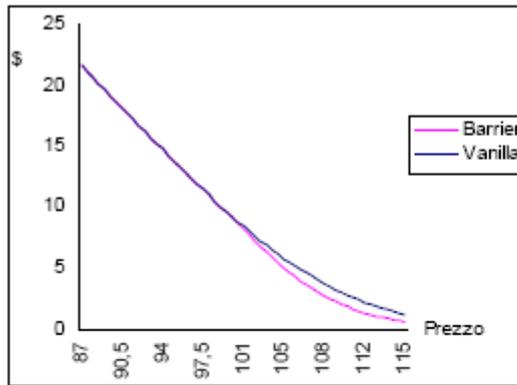


c) Gamma di una *up and in call* ($K=100\$; H=110\$$)

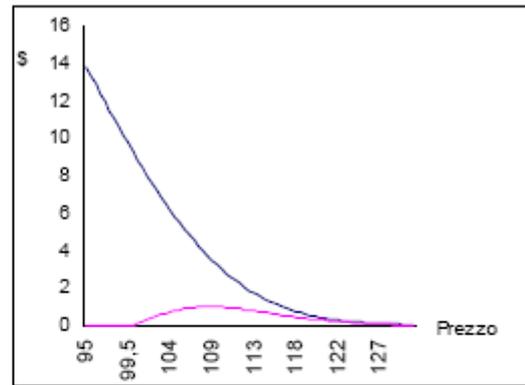


f) Gamma di una *up and out call* ($K=100\$; H=110\$$)

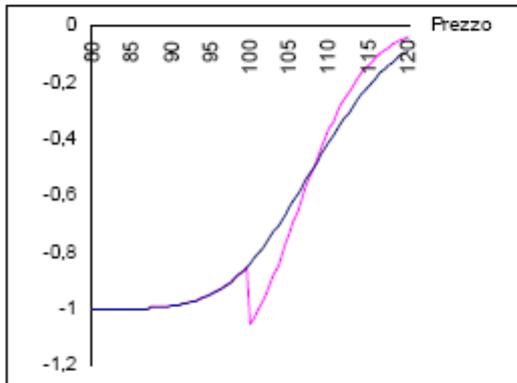
Schema 4 - Premio, Delta e Gamma delle *up and in call* nonché delle *up and out call*



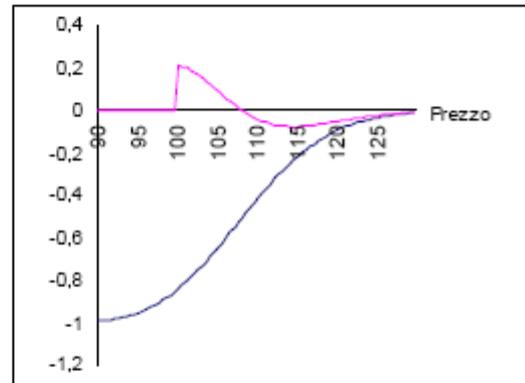
a) Premio di una down and in put ($K=110\$;H=100\$$)



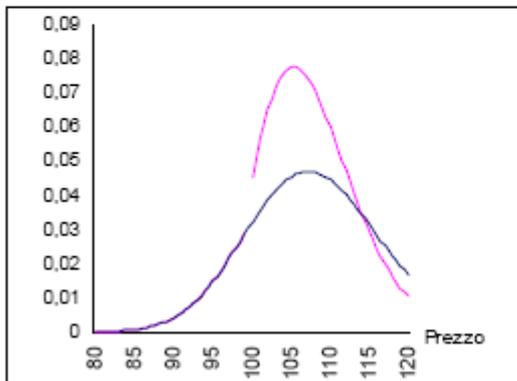
d) Premio di una down and out put ($K=110\$;H=100\$$)



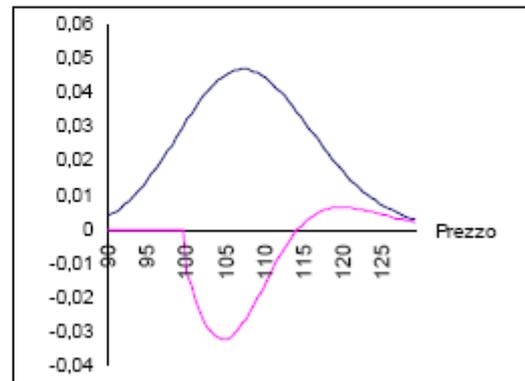
b) Delta di una down and in put ($K=110\$;H=100\$$)



e) Delta di una down and out put ($K=110\$;H=100\$$)

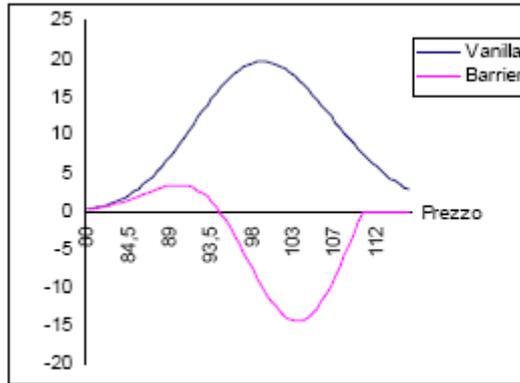


c) Gamma di una down and in put ($K=110\$;H=100\$$)

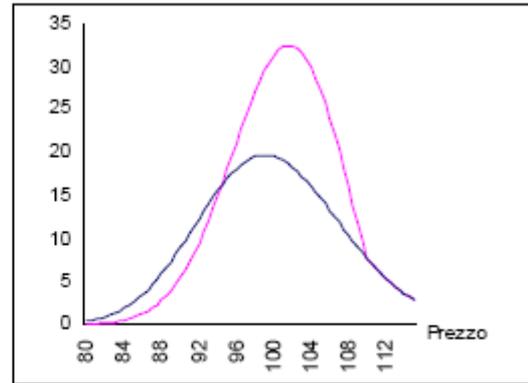


f) Gamma di una down and out put ($K=110\$;H=100\$$)

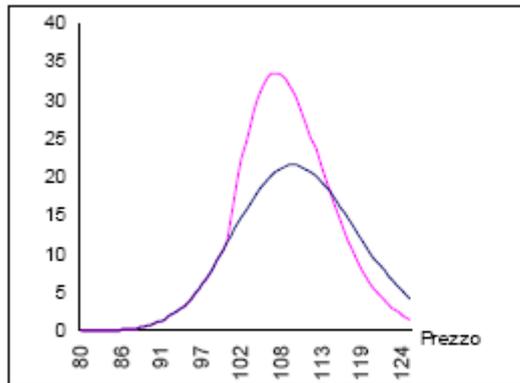
Schema 5 - Premio, Delta e Gamma delle down and in put nonché delle down and out put



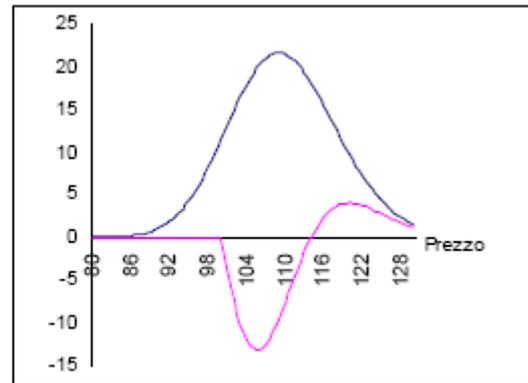
a) Vega di una up and out call ($K=100\$;H=110\$$)



b) Vega di una up and in call ($K=100\$;H=110\$$)



c) Vega di una down and in put ($K=110\$;H=100\$$)



d) Vega di una down and out put ($K=110\$;H=100\$$)

Schema 6 - Vega delle reverse barrier options

CAPITOLO 4

PROFILI DI COMPARABILITÀ

Analizzando gli innumerevoli contratti esotici è possibile rilevare opzioni con caratteristiche, a prima vista, simili (funzione di payoff). Nella nostra analisi, in particolare, ci soffermeremo su due contratti: le *outside barrier options* e le *correlation digital options*.

L'obiettivo di questo capitolo è di verificare l'effettiva somiglianza di tali contratti sotto il profilo dell'andamento del premio e di conseguenza della diversa sensibilità a variazioni di fattori di mercato. Proveremo inoltre a dare un'indicazione della convenienza ad acquistare l'uno o l'altro tipo di contratto a seconda delle aspettative sull'andamento del sottostante.

4.1 CARATTERISTICHE DELLE OUTSIDE BARRIER OPTIONS

Le *outside barrier options*⁷ sono delle particolari *barrier options* caratterizzate dalla presenza di due sottostanti: l'uno con la funzione di "misurazione" (*measurement asset*), l'altro con la funzione di "pagamento" (*payoff asset*).

Si comprende come il coefficiente di correlazione tra le due assets sottostanti giochi un ruolo fondamentale nella determinazione del prezzo di tale tipologia di contratto. Infatti, considerando ad esempio una *down and out call*, all'aumentare del prezzo della *measurement asset*, il valore dell'opzione aumenta se anche il valore della *payoff*

⁷ Heynen e Kat, *Journal of Financial Engineering*, 1994

asset subisce una variazione al rialzo, cioè se tra le due attività sottostanti vi è una correlazione positiva.

La possibilità di *knocking-in*, o di *knocking-out*, dipende esclusivamente dal fatto che la *measurement asset* raggiunga il livello di barriera durante la vita dell'opzione.

Abbiamo visto che la valutazione delle *standard barrier options* richiede l'utilizzo di una particolare funzione di densità probabilistica. Tale funzione di densità consiste in una distribuzione dei prezzi (logaritmici) a scadenza condizionata al raggiungimento od al mancato raggiungimento del livello barriera durante tutto l'arco della vita residua dell'opzione.

Anche la valutazione delle *outside barrier options* richiede tale funzione di densità contenente la distribuzione lognormale dei prezzi della *payoff asset*, con la differenza che questa funzione di densità è condizionata al raggiungimento od al mancato raggiungimento, a seconda che si tratti di una Knock in o di una Knock out, da parte del prezzo della *measurement asset*, del livello barriera durante tutto l'arco della vita residua dell'opzione.

E' possibile ottenere un'unica funzione di densità⁸ per tutte le otto tipologie di *outside barrier options*, e cioè: *up and in*, *up and out*, *down and in* *down and out*, sia call che put.

Tale funzione è data da:

⁸ Vedi P.G. Zhang, *Exotic options*, pag. 301-303

$$\xi(x) = f(x)N \left\{ \vartheta \zeta \frac{[d_{bs}(M, H, \sigma_2) + \rho u]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right\} - \zeta e^{\frac{2av_2}{\sigma_2^2}} f \left(u - \frac{2\rho a}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} \right) \\ \times N \left\{ \vartheta \left(\frac{[d_{bs}(M, H, \sigma_2) + \rho u]}{\sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{2a}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} \sqrt{1 - \rho^2} \right) \right\}$$

dove :

$$v_2 = r - g_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \text{ ed } a = \ln \left(\frac{H}{S} \right);$$

x rappresenta i log-return della payment asset⁹;

$$u = \frac{(x - v_\tau)}{(\sigma_2 \sqrt{\tau})} \text{ è una variabile normale standardizzata per } x;$$

$$d_{bs}(M, H, \sigma_2) = \frac{[\ln(M/H) + v_2 \tau]}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} \text{ è lo stesso argomento che si ritrova}$$

nella formula di Black-Scholes.

Infine ϑ e ζ sono due operatori binari che indicano rispettivamente la direzione dell'opzione ($\vartheta = 1$ per down, $\vartheta = -1$ per up), e se l'opzione è Knock in o Knock out ($\zeta = 1$ per out, $\zeta = -1$ per in).

Grazie alla funzione di densità sopra descritta, unica per tutte le tipologie di *outside barrier options*, è stata ricavata un'unica formula¹⁰ per il *pricing* delle *outside barrier options*.

Prima di passare a definire la formula per prezzare tale opzione, definiamo la funzione di payoff:

$$OTDS(\omega, \vartheta, \zeta, \rho) = e^{-r\tau} \int \max[\omega S e^x - \omega K, 0] \xi(x) dx^{11}$$

⁹ I log-return della payment asset (x) e della measurement asset (y) sono assunti correlati ad un tasso costante di correlazione ρ . Inoltre sia x che y sono distribuiti normalmente.

¹⁰ Vedi P.G. Zhang, *Exotic options*, pag. 303-304

Come ϑ e ζ , anche ω è un operatore binario che indica la tipologia dell'opzione (1 per call, -1 per put).

Per quanto riguarda invece il prezzo, questo è ricavato dalla seguente formula:

$$\begin{aligned} \text{prezzoOTDS}(\omega, \vartheta, \zeta, \rho) = & \omega S e^{-g\tau} N_2[\omega d_{1bs}(S, K, \sigma), \vartheta d_{12}, \omega \vartheta \zeta \rho] \\ & - \omega K e^{-r\tau} N_2[\omega d_{bs}(S, K, \sigma), \vartheta \zeta d_{bs}(M, H, \sigma_2), \omega \vartheta \zeta \rho] \\ & - \zeta \left(\frac{H}{M} \right)^{\frac{2v_2}{\sigma_2^2}} \left\{ \omega S \left(\frac{H}{M} \right)^{\frac{2\rho\sigma}{\sigma_2}} e^{-g\tau} N_2[\omega d_{21}, \vartheta d_{22}, \omega \vartheta \rho] \right. \\ & \left. - \omega K e^{-r\tau} N_2[\omega(d_{21} - \sigma\sqrt{\tau}), \vartheta(d_{22} - \rho\sigma\sqrt{\tau}), \omega \vartheta \rho] \right\} \end{aligned}$$

dove:

N_2 è una funzione di distribuzione normale bivariata¹²;

$$d_{12} = d_{bs}(M, H, \sigma_2) + \rho\sigma\sqrt{\tau};$$

$$d_{21} = d_{1bs}(S, K, \sigma_1) + \frac{2a\rho}{\sigma_2\sqrt{\tau}};$$

$$d_{22} = d_{12} + \frac{2a}{\sigma_2\sqrt{\tau}};$$

M è il prezzo della measurement asset;

H è come sempre il livello barriera;

S è il prezzo della payment asset;

¹¹ L'integrazione va da $-\infty$ a $d_{bs}(S, K, \sigma)$ per una put, e da $-d_{bs}(S, K, \sigma)$ ad ∞ per una call.

¹² Con funzione di probabilità: $P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{z}{2(1-\rho^2)}\right]$

dove: $z \equiv \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$

4.2 CARATTERISTICHE DELLE CORRELATION DIGITAL OPTIONS

Le *correlation digital options* rappresentano una particolare categoria di digital options. A differenza delle classiche digital, le *correlation digital options* sono caratterizzate dalla presenza di due attività sottostanti, proprio come abbiamo visto per le *outside barrier*: la *payment asset*, il cui prezzo è indicato con S , e la *measurement asset*, il cui prezzo è indicato con M . L'andamento del prezzo delle due attività è correlato con un coefficiente di correlazione pari a ρ .

Il payoff delle *correlation digital options* è dato da:

$$POCD = \omega[S(\tau) - X] \text{ se } \omega M(\tau) \geq \omega K \\ = 0 \text{ altrimenti.}$$

dove ω è lo stesso operatore binario visto in precedenza, mentre X^{13} è un livello predeterminato di prezzo utilizzato per determinare il livello di gap rispetto al prezzo della payoff asset.

E' facile notare come nell'ipotesi in cui payoff asset e measurement asset coincidessero, saremmo di fronte ad una semplice ordinary gap option.

Al fine di stimare il valore delle correlation digital options, utilizziamo una funzione di densità. Considerando l'ambiente di Black e Scholes, i prezzi delle due attività sottostanti sono distribuiti secondo una funzione di distribuzione lognormale bivariata.

¹³ E' il cosiddetto gap parameter.

Più nello specifico, supponiamo che le due attività sottostanti siano I_1 ed I_2 , e che entrambe seguano uno standard geometric Brownian motion:

$$dI_i = (\mu_i - g_i)I_i dt + \sigma_i I_i dz_i(t) \quad \text{con } i = 1 \text{ e } 2$$

dove $z_i(t)$, ed $i = 1, 2$ sono due processi di Wiener standard con coefficiente di correlazione ρ , media (rendimento atteso dell'attività) μ_i e deviazione standard delle due attività σ_i , ed infine g_i è il payout rate dell'iesima underlying asset. In un mondo neutrale al rischio¹⁴, come quello di Black e Scholes, il processo stocastico descritto in precedenza diventa:

$$dI_i = (r - g_i)I_i dt + \sigma_i I_i dz_i(t) \quad \text{con } i = 1 \text{ e } 2$$

dove r è il tasso *risk free*.

Risolvendo l'equazione otteniamo:

$$I_i(\tau) = I_i \exp\left[\left(\mu_i - g_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau + \sigma_i z_i(\tau)\right], \quad i = 1 \text{ e } 2$$

¹⁴ La possibilità di considerare un mondo neutrale verso il rischio deriva da una proprietà fondamentale dell'equazione differenziale di Black-Scholes: in quest'equazione non figurano variabili che sono influenzate dalla propensione al rischio degli investitori. In definitiva l'assunzione di neutralità (e quindi la possibilità di considerare $\mu = r_f$) è un espediente tecnico per ottenere le soluzioni dell'equazione differenziale. Le soluzioni ottenute sono valide sempre, non solo nel caso in cui gli investitori siano neutrali al rischio. Infatti quando si passa da un mondo neutrale ad un mondo avverso al rischio, accadono due cose: cambia il tasso di rendimento atteso dell'azione e cambia il tasso d'interesse utilizzato per attualizzare il valore finale dei derivati. Questi due effetti si compensano esattamente tra loro.

dove τ è la vita residua dell'opzione, ed I_1 ed I_2 sono i prezzi correnti delle due attività.

Sia $x = \ln\left[\frac{I_1(\tau)}{I_1}\right]$ ed $y = \ln\left[\frac{I_2(\tau)}{I_2}\right]$. Può essere dimostrato che sia x

che y sono normalmente distribuiti con media rispettivamente

$$\mu_x = \left(-g_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\tau \quad \text{e} \quad \mu_y = \left(-g_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\tau, \quad \text{varianza rispettivamente}$$

$\sigma_x^2 = \sigma_1^2\tau$ e $\sigma_y^2 = \sigma_2^2\tau$ e con un coefficiente di correlazione ρ .

La funzione di densità bivariata può essere espressa come segue:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u^2 - 2\rho v + v^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

dove $u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$ ed $v = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$

La funzione di densità bivariata può essere espressa anche come:

$$f(x, y) = f(y)f(x|y)$$

dove:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(u - \rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

Infine anche come:

$$f(x, y) = f(x)f(y|x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$f(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(v - \rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

Le funzioni di densità bivariata espresse sopra, sono utilizzate per derivare le formule per il pricing di gran parte delle correlation options (comprese le *outside barrier options*) in un ambiente di Black-Scholes.

Possiamo ora scrivere la funzione di densità condizionata di x sotto la condizione $\omega M(\tau) > \omega K$ o $\omega y > \omega \ln\left(\frac{M}{S}\right)$, $\omega v > \omega d(M, K, \sigma^2)$:

$$f[u|\omega v > \omega d(M, K, \sigma_2, g_2)] = f(u)N\left[\frac{d(M, K, \sigma_2, g_2) + \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right]$$

dove:

$$d(A, B, C, D) = \frac{\ln(A/B) + \left(r - D - \frac{C^2}{2}\right)\tau}{C\sqrt{\tau}}$$

è un argomento della formula di Black-Scholes, in cui A è il prezzo spot, B è lo strike price, C è la volatilità e D è il payout rate.

$$u = \frac{x - (r - g - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad e \quad v = \frac{y - (r - g_2 - \sigma_2^2)\tau}{\sigma_2\sqrt{\tau}}$$

sono due variabili standardizzate corrispondenti ai log-returns della payment asset e della measurement asset.

Il *payoff atteso* delle *correlation digital options*, può essere scritto come:

$$E(POCD) = \omega S e^{(r-g)\tau} N_2[\omega d_1(S, K, \sigma, g), \omega d(M, K, \sigma_2, g_2) + \omega \rho \sigma_2 \sqrt{\tau}, \rho] - \omega X N_2[\omega d(S, K, \sigma, g), \omega d(M, K, \sigma_2, g_2), \rho]$$

dove $d_1(A, B, C, D) = \frac{\ln(A/B) + \left(r - D + \frac{C^2}{2}\right)\tau}{C\sqrt{\tau}}$ e $N_2(a, b, \rho)$ è il valore di

una funzione cumulativa di una distribuzione normale bivariata standard che ha come limiti superiori a e b , per il primo e secondo argomento, ed un coefficiente di correlazione ρ .

Siccome operiamo in un ambiente di Black-Scholes, con assenza di arbitraggio ed in un mondo neutrale al rischio, possiamo ottenere la formula per il pricing delle *correlation digital options*, scontando i flussi (*payoff*) attesi al tasso *risk free* r :

$$CDOP = \omega S e^{-g\tau} N_2 \left[\omega d_1(S, K, \sigma, g), \omega \vartheta d(M, K, \sigma_2, g_2) + \omega \vartheta \rho \sigma_2 \sqrt{\tau}, \rho \right] - \omega X e^{-r\tau} N_2 \left[\omega d(S, K, \sigma, g), \omega \vartheta d(M, K, \sigma_2, g_2), \rho \right]$$

4.3 PROFILI DI COMPARABILITA': IL CASO DELLE OUTSIDE BARRIER E DELLE CORRELATION DIGITAL

In questo paragrafo sarà effettuata una analisi comparativa tra una *outside barrier option* del tipo *call down and out* ed una *correlation digital option call*.

Dalla descrizione delle caratteristiche di entrambe le tipologie di opzioni, sopra riportata, è possibile evincere una struttura simile. Infatti sia le *Outside barrier options* che le *Correlation digital options* si basano su due sottostanti, l'uno con funzione di misurazione e l'altro con funzione di pagamento.

Un ulteriore elemento di somiglianza è riscontrabile nella funzione del *payoff*, infatti per le *outside barrier option call down and out* questo è dato dalla differenza tra S (payment asset) e K (strike price) condizionato al verificarsi dell'evento: $M > H$ (measurement asset maggiore del livello barriera). Per le *correlation digital option call* il *payoff* è dato dalla differenza tra S (payment asset) e X (gap parameter) condizionato al verificarsi dell'evento: $M > K$ (measurement asset maggiore dello *strike price*).

L'analisi è stata svolta effettuando simulazioni sul prezzo della *payoff* asset e della measurement asset, fissando gli altri parametri. Tali elaborazione sono state effettuate attraverso l'utilizzo del programma Matlab.

Iniziamo analizzando il comportamento di una *outside barrier option down and out call* in presenza delle seguenti caratteristiche: lo *strike* è posto uguale a $K = 98\text{€}$, la barriera a quota $H = 98\text{€}$, il tasso senza rischio è $r_f = 8\%$, la volatilità della payment asset, è collocata ad un livello $\sigma_1 = 20\%$, mentre la volatilità della measurement asset è collocata ad un livello $\sigma_2 = 15\%$, il payout rate della payment asset è pari a $g_1 = 3\%$, mentre quello della measurement asset è $g_2 = 5\%$, infine la vita residua è posta pari a $\tau = 0.5$.

In base a questi parametri siamo in grado di costruire il grafico (figura 56) relativo all'andamento del premio in funzione del prezzo della payment asset e del prezzo della measurement asset.

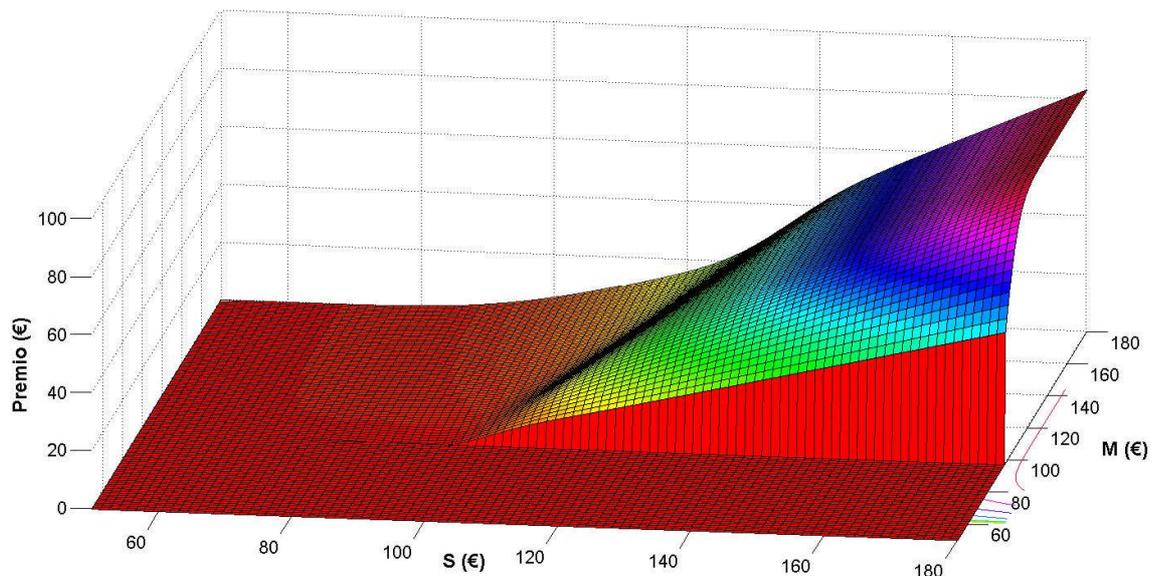


Figura 56 - Premio di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della *payment asset* (S) e del prezzo della *measurement asset* (M).

Come già detto per le *standard barrier options*, il grafico, alla sinistra di quota 98€ (con riferimento alla *measurement asset* M), cessa di essere significativo, in quanto l'opzione non esiste al di sotto della barriera e la scelta di assegnarle valore zero è ovvia (la scelta di un livello pari a zero per il prezzo dell'opzione oltre la barriera ha natura puramente simbolica: non si può misurare ciò che non c'è.).

Come lecito aspettarsi, l'opzione aumenta di valore all'aumentare del prezzo di entrambe le attività sottostanti. Tale crescita, nel valore dell'opzione, non è dovuta solamente all'aumento del valore intrinseco che si verifica con l'aumento del prezzo della *payment asset* S , bensì trova una spinta ulteriore nella diminuzione della probabilità di *knocking-out* che l'aumento del prezzo della *measurement asset* M inevitabilmente produce, allontanando il sottostante dalla zona "critica", cioè quella di estinzione.

Per quanto riguarda il *Delta* di tale opzione, questo è riportato nella seguente figura:

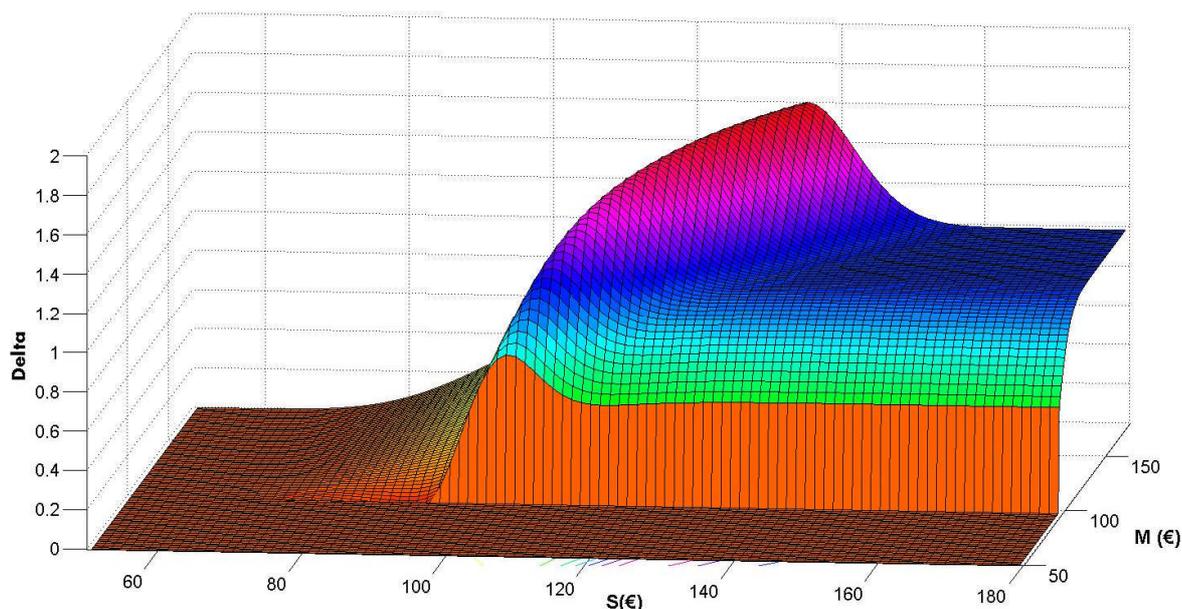


Figura 57- Delta di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della payment asset (S) e del prezzo della measurement asset (M)

Il *Delta* dell'opzione si rivela a tratti superiore ad uno. Ciò è dovuto all'aumento di valore indotto nell'opzione dalla diminuzione della probabilità di perforamento della barriera che un aumento del prezzo della *measurement asset* M porta inevitabilmente con sé. Come detto in precedenza, questa componente probabilistica, che però a differenza delle standard barrier, è relativa ad una attività che non coincide con quella di pagamento, e che si aggiunge a quella del valore intrinseco (componente questa relativa alla *payoff asset* S), o più propriamente *vanilla*, nel determinare l'aumento di valore dell'opzione che segue ad una crescita del prezzo del sottostante S , tende a risultare sempre meno significativa man mano che ci si allontana dalla barriera, per la banale ragione che la diminuzione di probabilità, di cui sopra, diventa, al crescere del prezzo di M , quantitativamente sempre meno consistente; la conseguenza è, evidentemente, per prezzi di S ed M sufficientemente alti, una netta prevalenza della componente *vanilla*

su quella che abbiamo definito componente probabilistica (componente *barriera*).

Anche in questo caso, quindi, la prevalenza della componente più tradizionale su quella barriera, porta il *Delta* dell'opzione, al crescere del prezzo di *M* ed *S*, a convergere verso il valore unitario.

E' chiaro inoltre che la componente barriera è tanto più significativa quanto maggiore è la vita residua dell'opzione, per la semplice ragione che, quanto più tempo manca alla scadenza dell'opzione, tanto maggiore è la probabilità di perforamento della barriera.

Infine per quanto concerne il coefficiente *Gamma*, questo conferma quanto detto a proposito del *Delta*.

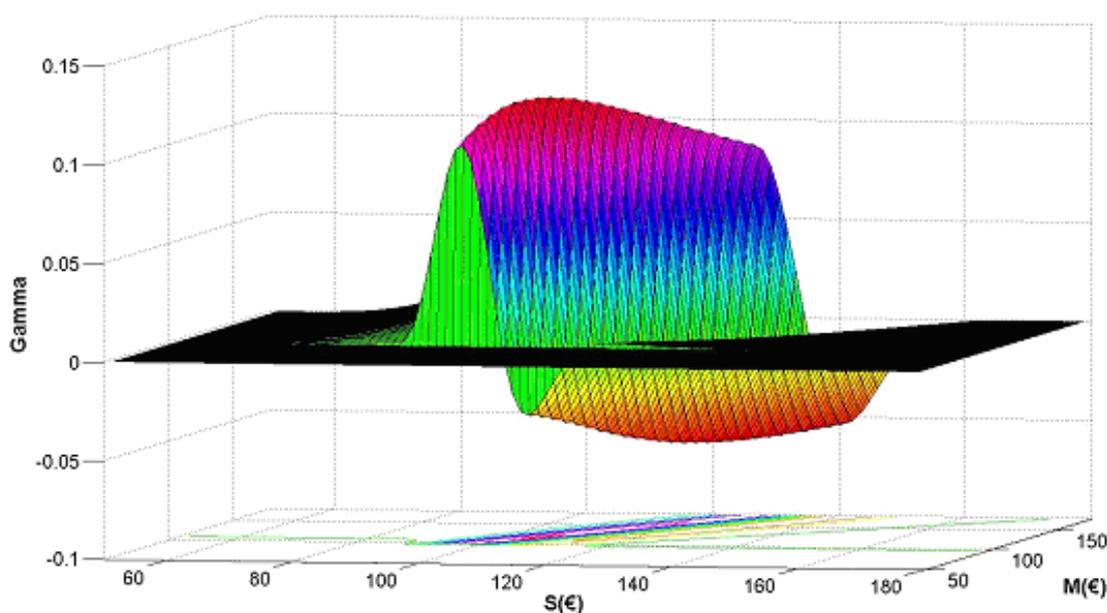


Figura 58 - *Gamma* di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della payment asset (*S*) e del prezzo della measurement asset (*M*)

E' possibile notare come il *Gamma* tenda a salire (rispecchiando l'andamento del *Delta*) man mano che il prezzo dell'attività pagamento *S* aumenta, anche se per valori sufficientemente elevati

tende a stabilizzarsi su valori molto bassi. Come detto in precedenza, la componente barriera sfuma man mano che il prezzo della *measurement asset M* aumenta e ciò porta ad una riduzione del *Gamma* sino a fargli assumere valori negativi (anche se in valore assoluto sono molto ridotti).

Per quanto riguarda il comportamento del premio di una *outside barrier option down and out call* al variare della volatilità delle due underlying assets, questo è riportato nella figura seguente:

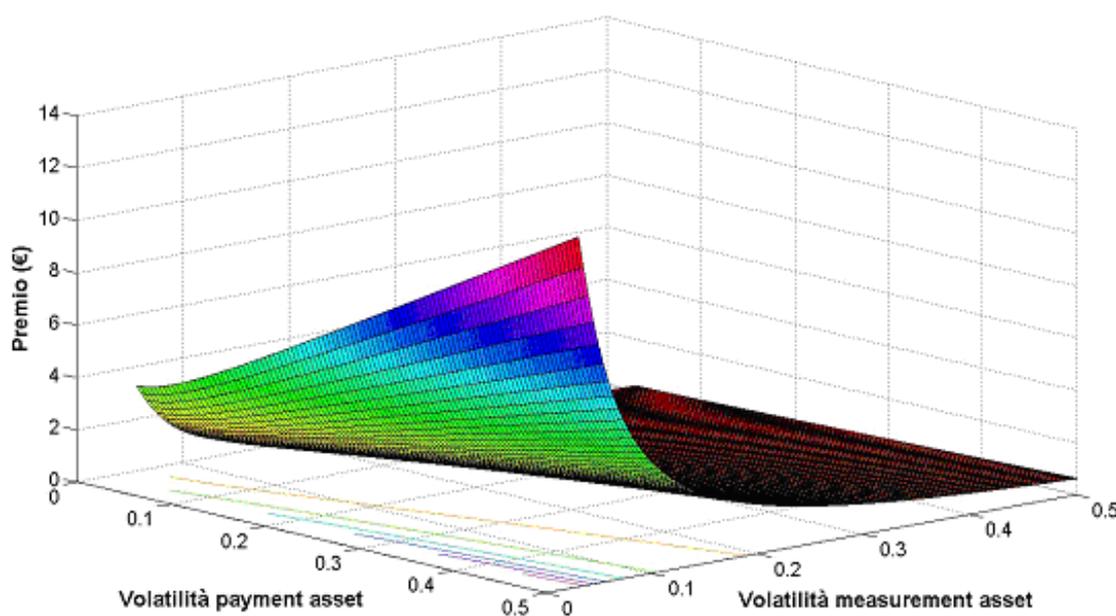


Figura 59 - Premio di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della payment asset (S) e della measurement asset (M)

Come è possibile notare, il premio dell'opzione aumenta, come ovvio, all'aumentare della volatilità della payment asset, in quanto più il sottostante "pagamento" è volatile, maggiore sarà la probabilità, che a scadenza, questo sia superiore allo *strike price K*, e che quindi l'opzione scada *in the money*. Ciò può essere constatato dalla figura 60 in cui il Vega dell'opzione (e quindi il valore dell'opzione) aumenta all'aumentare della volatilità della payment asset.

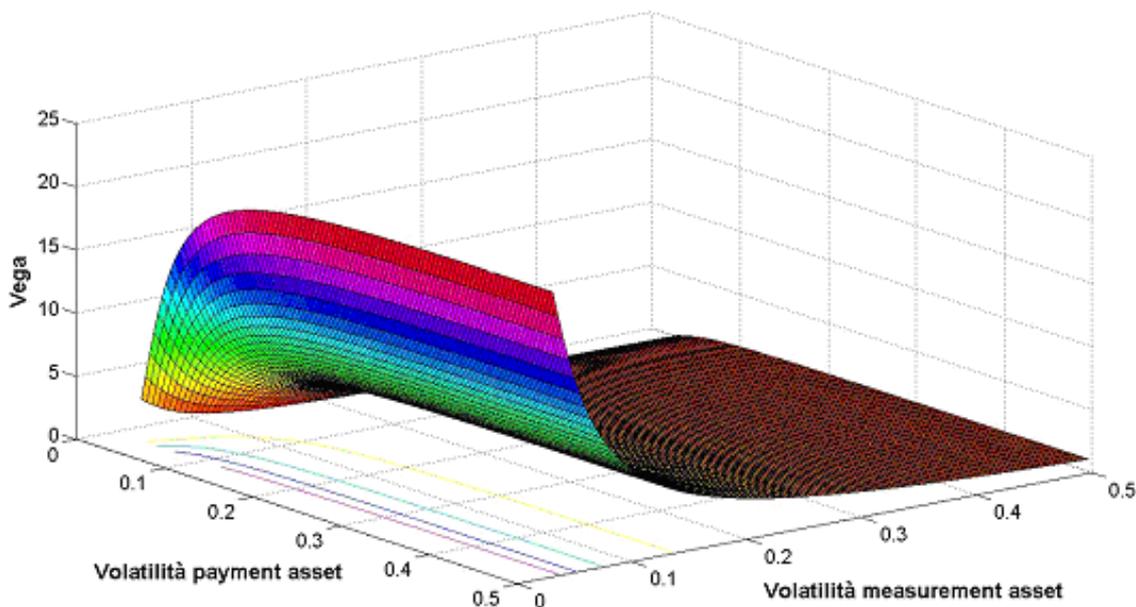


Figura 60 - Vega di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della payment asset (S)¹⁵

Facendo riferimento, invece, alla volatilità della *measurement asset*, dal grafico 59 risulta che il premio dell'opzione diminuisce all'aumentare di quest'ultima. La spiegazione è alquanto banale, e va ricercata nel fatto che, per prezzi della *measurement asset* M vicini al livello di barriera H , come nel caso in esame, un incremento della volatilità si tradurrebbe in un aumento della probabilità di *knocking-out*, in quanto sarebbe più probabile il tocco, da parte della *measurement asset*, del livello barriera e di conseguenza l'estinzione dell'opzione.

L'andamento del *Vega*, riportato di seguito, calcolato questa volta derivando rispetto alla volatilità della *measurement asset*, non può che confermare quanto appena detto:

¹⁵ Si sta derivando in funzione della volatilità della payment asset.

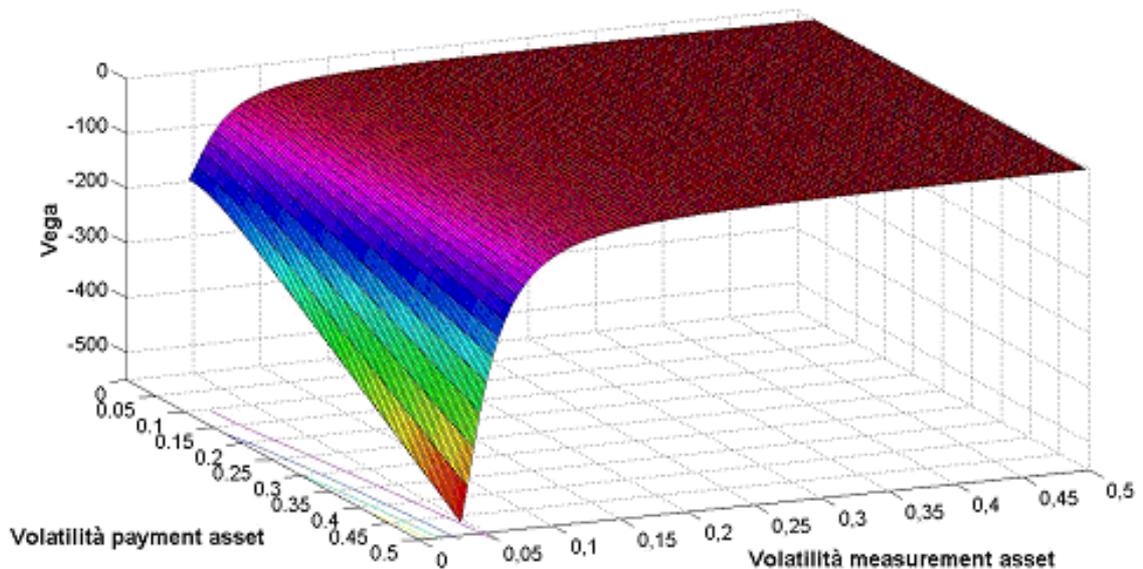


Figura 61 - Vega di una *outside barrier option down and out call* ($K=98, H=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della *measurement asset* (M)¹⁶

Infatti all'aumentare della volatilità della *measurement asset* il Vega tende a assumere valori negativi¹⁷ per lo stesso motivo detto in precedenza. Mentre un incremento nella volatilità della *payment asset* comporta un aumento del Vega e quindi del valore dell'opzione.

Passiamo ora ad analizzare il comportamento di una *correlation digital option call* in presenza delle seguenti caratteristiche: lo *strike* è posto uguale a $K = 98€$, il gap parameter a quota $X = 98€$, il tasso senza rischio è $rf = 8\%$, la volatilità della *payment asset*, è collocata ad un livello $\sigma_1 = 20\%$, mentre la volatilità della *measurement asset* è collocata ad un livello $\sigma_2 = 15\%$, il payout rate della *payment asset* è pari a $g_1 = 3\%$, mentre quello della *measurement asset* è $g_2 = 5\%$, infine la vita residua è posta pari a $\tau = 0.5$.

¹⁶ Si sta derivando in funzione della volatilità della *measurement asset*.

¹⁷ Specialmente per alte volatilità di partenza, la componente barriera si presenta significativa, tuttavia la bassa vita residua impedisce a tale componente di prendere il sopravvento e di sfociare in un Vega negativo ma, ciononostante, non può impedirle di abbassare notevolmente le dimensioni del Vega positivo.

L'andamento del premio della *correlation digital call*, con tali parametri, in funzione del prezzo della payment asset e del prezzo della measurement asset è riportato nel grafico 62:

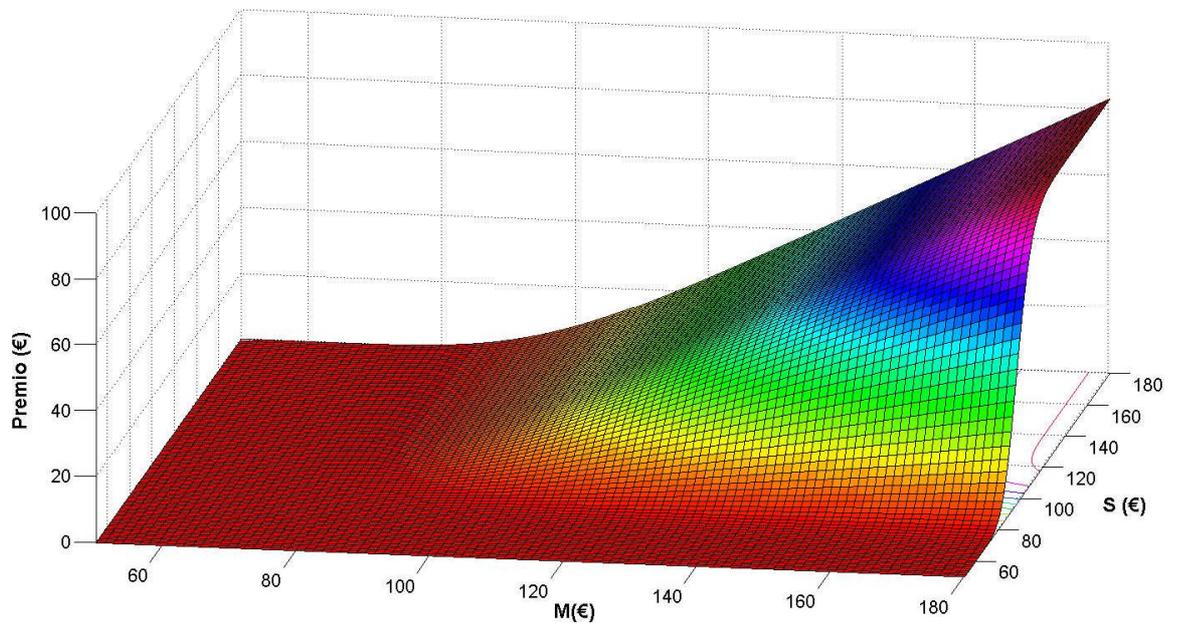


Figura 62 - Premio di una *correlation digital option call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della payment asset (S) e del prezzo della measurement asset (M).

Questa tipologia di opzione (molto simile ad una gap option) richiede che sia il prezzo della measurement asset M che quello della payment asset aumentino. Infatti il payoff di una *correlation digital call* è dato, come visto in precedenza, da $S - X$ se $M \geq K$ (0 altrimenti), per cui il valore dell'opzione è strettamente dipendente da movimenti al rialzo di entrambe le underlying assets.

Il grafico sopra riportato ci conferma quanto appena detto, delineando un andamento simile al premio di una *vanilla call*.

In accordo con le considerazioni svolte appena sopra, il *Delta* (figura 63) tende a presentare un andamento crescente al crescere del prezzo della *measurement asset* e della *payoff asset*.

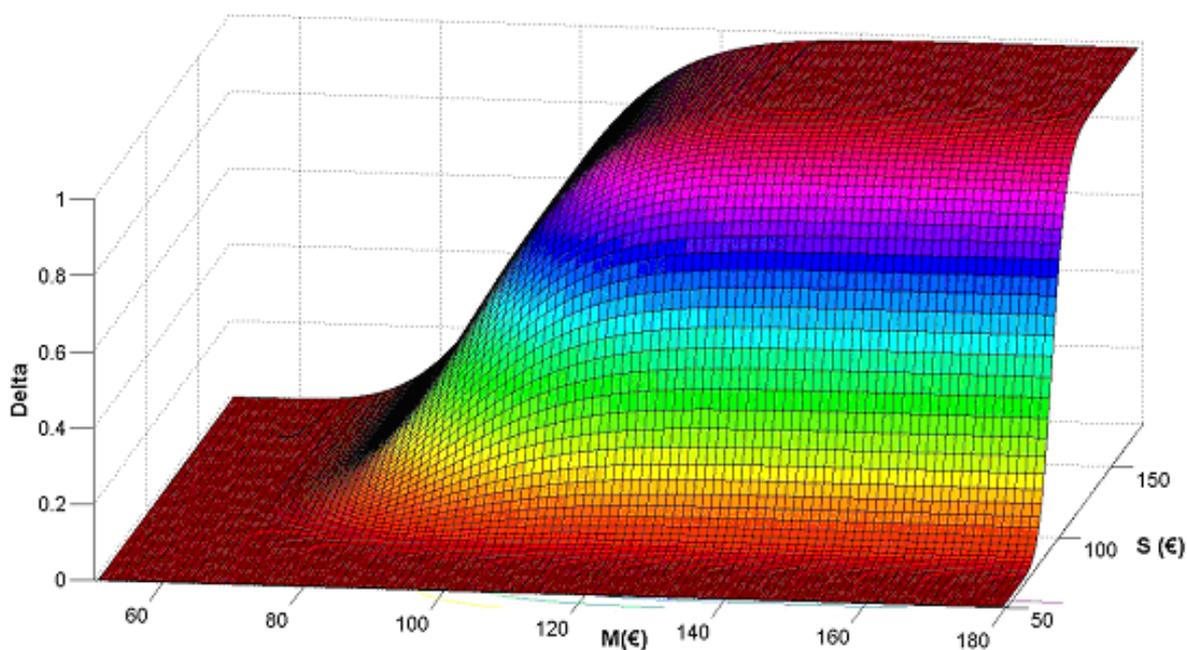


Figura 63 - *Delta* di una *correlation digital option call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della payment asset (S) e del prezzo della measurement asset (M).

La spiegazione è piuttosto banale ed è quella data con riferimento all'andamento del premio.

Come per il premio anche l'andamento del *Delta* è molto simile a quello di una *vanilla call* (figura 64), infatti osservando il grafico è possibile notare come per valori sufficientemente elevati della payment asset e della measurement asset, il valore del *Delta* tende all'unità.

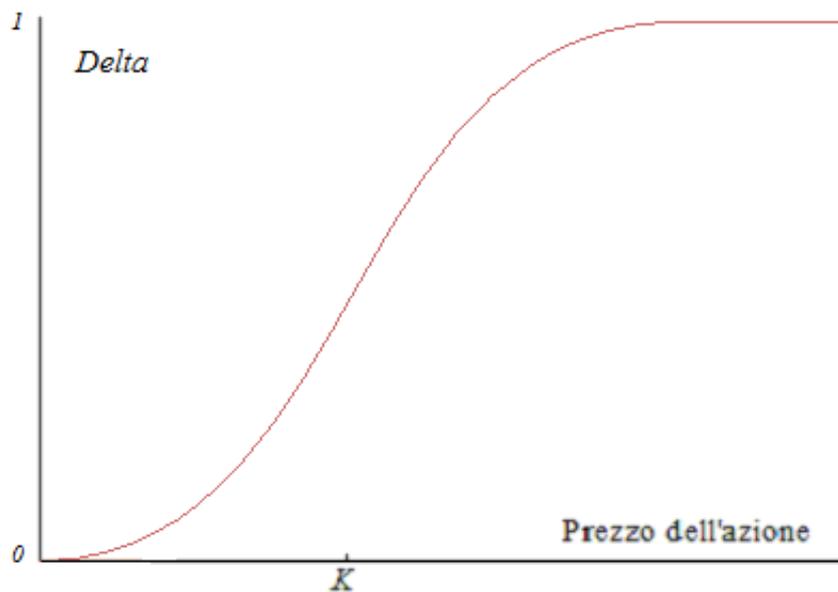


Figura 64 - *Delta* di un'opzione plain vanilla in funzione del prezzo del sottostante

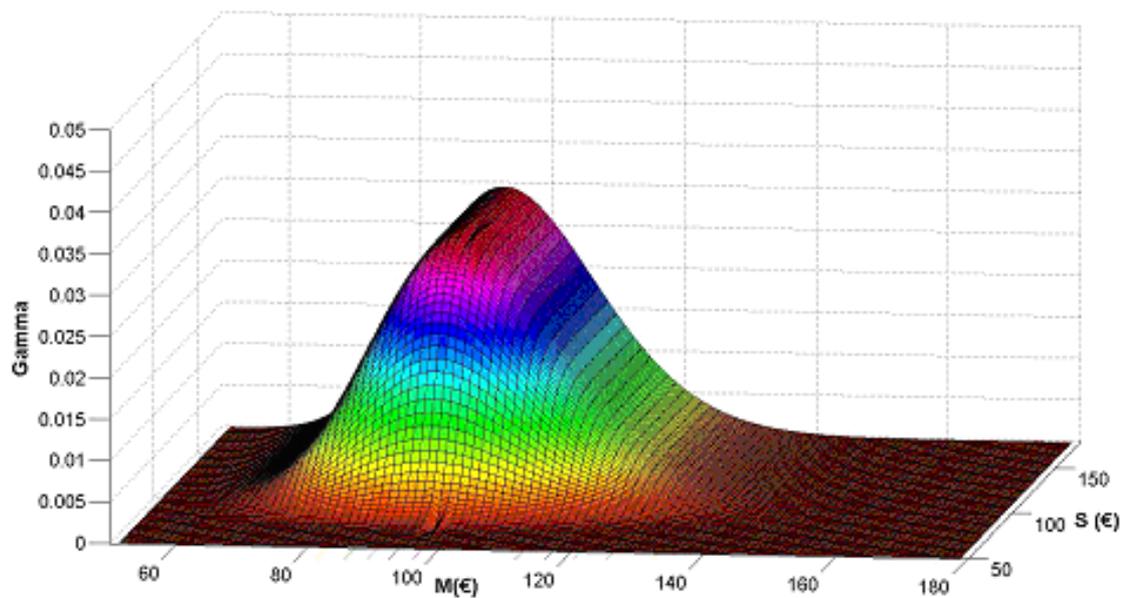


Figura 65 - *Gamma* di una *correlation digital option call* ($K=98, H=98$) in funzione del prezzo della payment asset (S) e del prezzo della measurement asset (M).

Il coefficiente *Gamma* misura la variazione del *Delta* al variare del prezzo delle underlying assets, per cui osservando il grafico del *Gamma* risulta evidente che il *Delta* (e quindi il premio dell'opzione) subisce la sua variazione più significativa in corrispondenza di prezzi vicini allo *strike K* ed al *gap parameter X*.

Inoltre, come riscontrato per il *Delta*, anche il *Gamma*, come ovvio, presenta un andamento del tutto simile a quello di una *vanilla option* (figura 66):

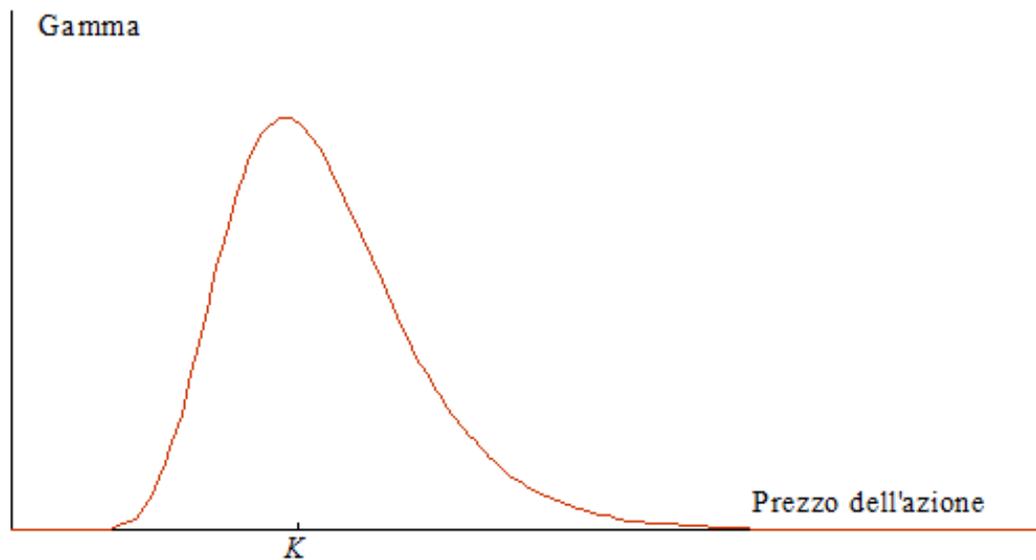


Figura 66 - *Gamma* di un'opzione plain vanilla in funzione del prezzo del sottostante

Per quanto riguarda il comportamento del premio di una *correlation digital option call* al variare della volatilità delle due underlying assets, questo è riportato nella figura seguente:

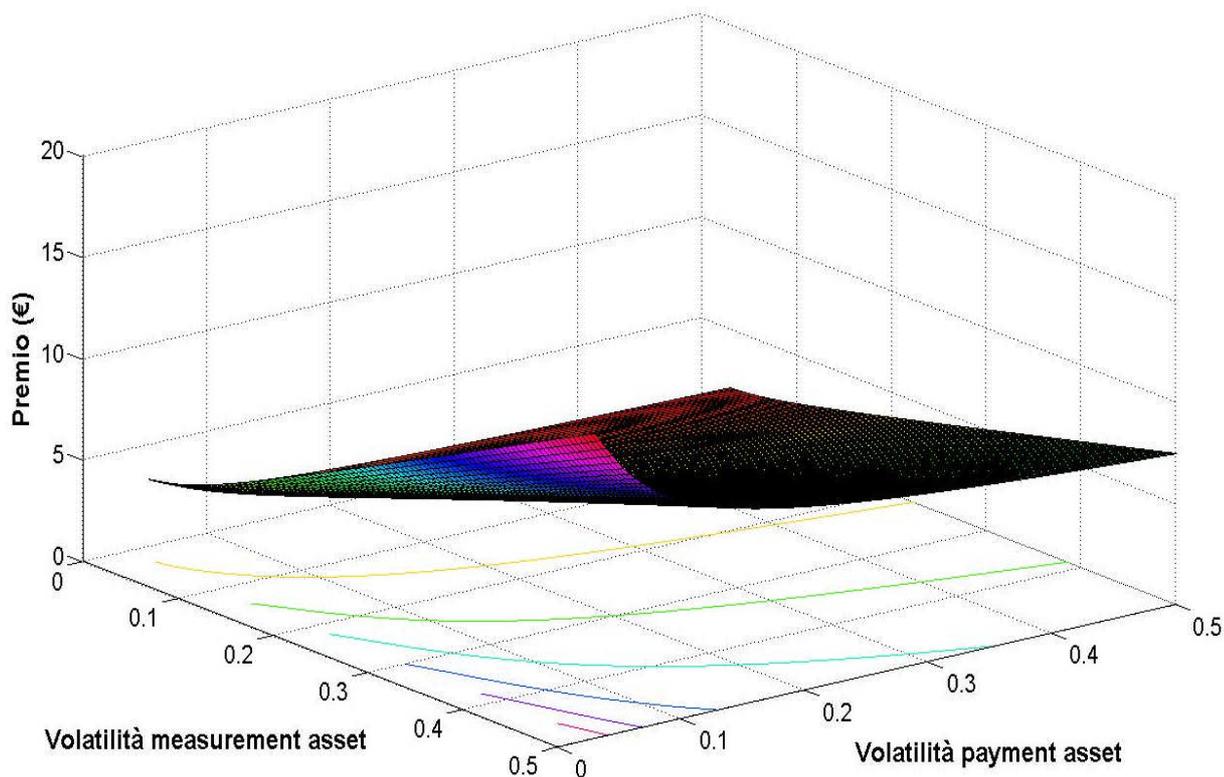


Figura 67 - Premio di una *correlation digital option call* ($K=98, X=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della *payment asset* (S) e della *measurement asset* (M)

Come è possibile verificare dalla figura 67, il valore di tale tipologia di contratto aumenta con l'incremento della volatilità della *measurement asset* M , mentre si riduce all'aumentare della volatilità della *payment asset* S (per prezzi di S leggermente superiori al *gap parameter* X).

Come è lecito aspettarsi, il *Vega* (figura 68) raggiunge i massimi livelli in corrispondenza di volatilità di partenza basse e per prezzi della *measurement asset* sottostante prossimi allo *strike price* (come nel caso in esame). Ciò si spiega con il fatto che, in prossimità dello *strike*, basta un piccolo aumento della bassa volatilità di partenza per ottenere un considerevole aumento della probabilità di superamento dello *strike price* K da parte della *measurement asset* M ; è quanto non accade nel caso di prezzi troppo lontani dalla barriera (sempre in

presenza di bassa volatilità di partenza), nel qual caso la speranza di vedere superato lo *strike* è talmente bassa da risultare molto poco sensibile a modesti aumenti della volatilità.

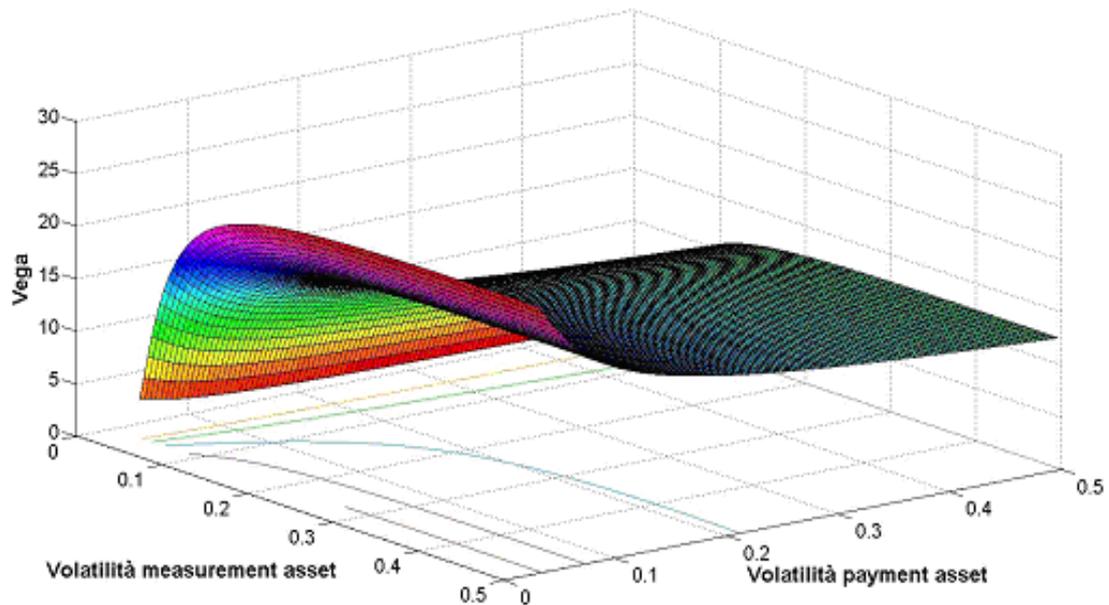


Figura 68 - Vega di una *correlation digital option call* ($K=98, X=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della measurement asset (M)¹⁸

Chiaramente bisogna far riferimento anche alla volatilità della *payment asset* S (figura 69). Nel caso in esame il valore della *payment asset* è già superiore al parametro X , per questo incrementi della sua volatilità implicano la possibilità che il prezzo di quest'ultima ricada al di sotto del *gap parameter* X , rendendo l'opzione *out of the money*. Per questo motivo il Vega non può che assumere valori negativi, e ciò spiega quindi l'andamento in diminuzione del prezzo dell'opzione all'aumentare della volatilità della *payment asset*.

¹⁸ Si sta derivando rispetto alla measurement asset M .

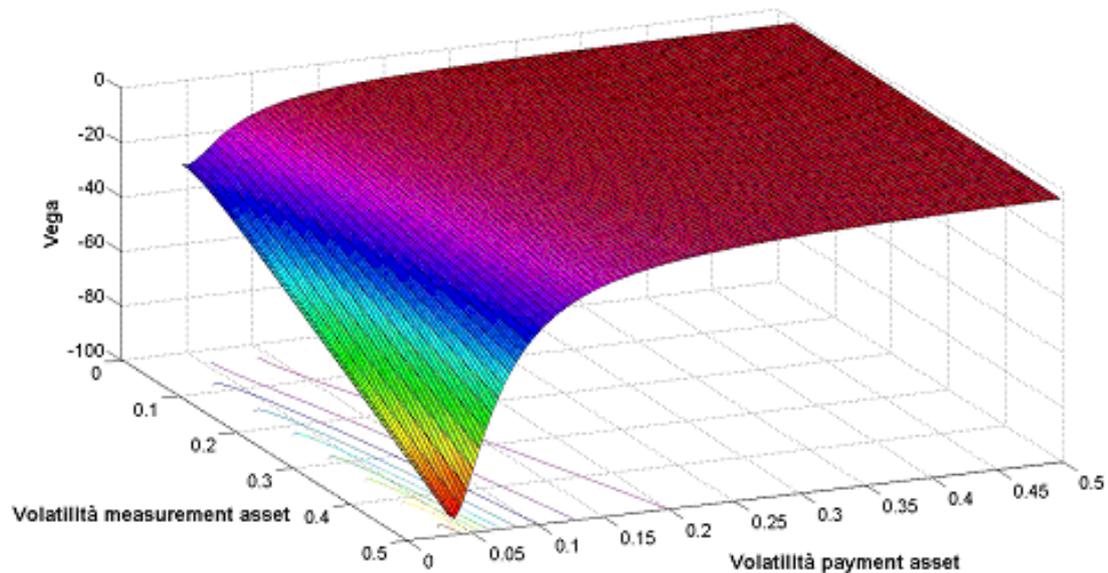


Figura 69 - Vega di una *correlation digital option call* ($K=98, X=98, S=100, M=100$) in funzione della volatilità della payment asset (S)¹⁹

In conclusione, dall'analisi condotta, è stato possibile evincere che le due opzioni oggetto di studio, pur presentando tratti di analogia nella struttura, nel *payoff* e nel fatto che entrambe sono fortemente condizionate dal grado di correlazione tra le underlying assets, per i motivi esposti in precedenza, sono in realtà molto diverse sotto il profilo della sensibilità ai diversi fattori di mercato, come è possibile notare dalle figure sopra analizzate, e di conseguenza (a parità di condizioni) nell'entità del premio da corrispondere per il loro acquisto.

Ciò è spiegabile dal diverso funzionamento che caratterizza tali opzioni ed in particolare dal fatto che l'*outside barrier option*, essendo appunto una *barrier*, e quindi dotata di una barriera che ne comporta l'estinzione immediata in caso di raggiungimento, è fortemente condizionata da tale componente (componente *barriera*) che incide in misura significativa, come visto, sulla sensibilità del premio

¹⁹ Si sta derivando rispetto alla payment asset S.

dell'opzione a variazioni nel valore dei sottostanti e nella volatilità. La *correlation digital option* è chiaramente priva di barriera, essendo una *digital*, e per questo non ha quella componente probabilistica legata ad una eventuale estinzione che incide sul valore di quest'ultima, ma è piuttosto assimilabile ad una *gap option* su due *underlying assets*. Come è risaputo le *gap options* possono essere considerate la diretta estensione delle opzioni *plain vanilla*, e da qui la spiegazione del comportamento delle greche²⁰ che è quasi del tutto assimilabile a quello delle corrispondenti opzioni *plain vanilla*.

²⁰ Le greche sono i coefficienti di sensibilità al variare dei diversi fattori di mercato (prezzo del sottostante, volatilità, tasso d'interesse risk free, correlazione ecc.).

Bibliografia:

Alexander, C. a cura di (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, John Wiley & Sons Ltd.

Black F. e Scholes M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", in *Journal of Political Economy*, vol. 81, May-June, pp. 637-654.

Bowie J. e Carr P. (1995), *Static Simplicity* in R. Jarrow (a cura di), *Over the Rainbow*, Risk Publications, pp.183-189.

Carr, P. (1994), *European Put Call Symmetry*, Cornell University working paper.

Cox, J.C. e Ross S.A. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 145-166.

Cox D.R., Miller H.D.(1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall.

Derman E., Ergener D. e Kani I., (1995), “Static Option Replication”, in *The Journal of Derivatives*, vol. 2, nr. 4 (estate 1995), pp.78-95.

Erzegovesi L. (1992), *Le opzioni su titoli e su futures obbligazionari*, Larix, Milano.

Erzegovesi L. (1997), *Ingegneria finanziaria: principi e applicazioni standard nei mercati del debito e dei cambi*, Università di Trento, Dipartimento di Informatica e studi aziendali.

Garman M. e Kohlhagen S. (1983), “Foreign Currency Option Values”, in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, pp. 231-237.

Grabbe J. (1983), “The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange”, in *Journal of International Money and Finance*, vol. 2, pp.239-253.

Gupta A. (1997), “On Neutral Ground”, in *Risk*, vol. 10, nr. 7, July, pp. 37-41.

Merton R. (1973), “Theory of Rational Option Pricing”, in *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, Spring, pp. 141-183.

Neftci N. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, San Diego.

Rubinstein M. e Reiner E. (1991a), “Breaking Down the Barriers”, in *Risk*, September, pp. 28-35.

Rubinstein M. e Reiner E. (1991b), “Unscrambling the Binary Code”, in *Risk*, October, pp.75-83.

Rubinstein M. (1991), *Exotic Options*, Finance Working Paper 20, Walter A. Hass School of Business, Institute of Business and Economic Research, University of California at Berkeley, December.

Shimko D. (1992), *Finance in Continuous Time. A Primer*, Kolb Publishing Company, Miami Fla.

Taleb N. (1997), *Dynamic Hedging. Managing Vanilla and Exotic Options*, John Wiley & Sons, New York.

Thomas B. (1996), *Exotic Options II* in Alexander C. (a cura di), (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, pp.111-132.

Tompkins R.G. (1997), “Static versus Dynamic Hedging of Exotic Options: An Evaluation of Hedge Performance via Simulation” in *NetExposure - Electronic Journal of Financial Risk*, 2, November, <http://www.netexposure.co.uk/>.

Zhang, P.G. (1997), *Exotic Options. A Guide to Second Generation Options*, World Scientific, Singapore.

Peter G. Zhang, *Exotic options (2nd edition)*, World Scientific

P. Wilmott, S.Howison, J.Dewynne, *The mathematics of financial derivatives*, Cambridge University Press

Robert Kolb, *Understanding options*, John Wiley&Sons

E. Gaarder Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill (1998)

M. Capinski, T.Zastawniak, *Mathematics for finance: an introduction to financial engineering*, Springer

John C. Hull, *Opzioni, futures e altri derivati*, Pearson (6^a Edizione)

Lowrence G. McMillan, *McMillan on options (2nd edition)*, John Wiley&Sons

E.Briys, M.Bellalah, H.M. Mai, F de Varenne, *Options,futures and exotic derivatives*, John Wiley&Sons

Paul Wilmott, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley&Sons

Uwe Wystup , *FX options and Structured options*, Wiley Finance

Domingo A. Tavella , *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*,
Wiley Finance

Steven E. Shreve , *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer

Steven E. Shreve , *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer

Marco Avellaneda , *Weighted Monte Carlo Methods for Multi-Asset
Equity Derivatives: Theory and Practice*, New York University

Wim Schoutens, *Lévy Processes in Finance - Pricing Financial
Derivatives -*, Wiley

Riccardo Rebonato, *Volatility and Correlation - in the pricing of
equity, fx and interest rate options*, Wiley in Financial Engineering

Scheldon Natenberg, *Option Volatility&Pricing*, McGraw-Hill

F.Douglas Rouah, Gregory Vainberg, *Option Pricing
Models&Volatility using Excel-VBA*, Wiley Finance

P.J. Hunt, J.E. Kennedy , *Financial Derivatives in Theory and Practice*, Wiley

Emmanuel Gobet, Arturo Kohatsu-Higa, *Computation of Greeks for barrier and look-back options using Malliavin Calculus*, Electronic Communications in Probability (Working Paper)

Pradipto Banerjee, *Close Form Pricing of Plain and Partial Outside Double Barrier Options*, Working Paper

Rubinstein Mark and Eric Reiner, *Exotic Options*, Working Paper, University of California, Berkeley, 1993

Simon Benninga, Zvi Wiener, *Binomial Option Pricing, the Black&Scholes Option Pricing Formula, and Exotic Options*, Working Paper

Sorin R. Straja, *Stochastic Modeling of Stock Prices*, Working Paper

Wilmott Paul, Howison Sam, Dewynne Jeff, *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995

Wilmott Paul, Dewynne Jeff, *Partial to the Exotic*, Risk

Siti internet:

<http://www.sitmo.com>

<http://www.global-derivatives.com>

<http://www.wilmott.com/>

Software utilizzati:

Matlab R2008a della Mathworks

Microsoft Excel