

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II



FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
Dipartimento di Meccanica ed Energetica

DOTTORATO DI RICERCA  
IN  
INGEGNERIA DEI SISTEMI MECCANICI  
(XXIV CICLO)

## **Simulazione monodimensionale stazionaria e non stazionaria di turbocompressori per la sovralimentazione di MCI**

COORDINATORE DEL DOTTORATO:

Ch.mo Prof. Ing. Fabio Bozza

TUTOR:

Ch.mo Prof. Ing. Fabio Bozza

Ch.mo Prof. Ing. Alfredo Gimelli

CANDIDATO:

Ing. Vincenzo De Bellis

## Sommario

<b>Capitolo 1 - Introduzione .....</b>	<b>1</b>
<b>Capitolo 2 - Il modulo geometrico.....</b>	<b>9</b>
2.1 Introduzione.....	9
2.2 Geometria complessiva compressore.....	9
2.3 Geometria girante compressore .....	12
2.4 Area di passaggio e perimetro bagnato .....	25
2.5 Tabella riepilogativa geometria compressore.....	32
2.6 Geometria complessiva turbina .....	34
2.7 Geometria girante turbina.....	37
2.8 Area di passaggio e perimetro bagnato turbina .....	42
2.9 Geometria distributore palettato turbina.....	44
2.10 Tabella riepilogativa geometria turbina .....	47
<b>Capitolo 3 - Le equazioni del moto .....</b>	<b>50</b>
3.1 Introduzione.....	50
3.2 Ipotesi del modello fluidodinamico ed introduzione alle equazioni del moto.....	50
3.3 Le equazioni del moto dal teorema del trasporto o di Reynolds.....	52
3.3.1 Equazione di conservazione della massa.....	54
3.3.2 Equazione di bilancio dell'energia.....	54
3.3.3 Equazione del bilancio della quantità di moto.....	56
3.4 Equazioni per flusso monodimensionale .....	57
3.4.1 Equazione di conservazione della massa.....	59
3.4.2 Equazione di bilancio della quantità di moto .....	60
3.4.3 Equazione di bilancio dell'energia.....	62

3.5	Equazioni per flusso monodimensionale in forma differenziale .....	64
3.5.1	Equazione di conservazione della massa.....	64
3.5.2	Equazione di bilancio della quantità di moto .....	65
3.5.3	Moto completamente sviluppato e coefficiente di attrito.....	67
3.5.4	Equazione di bilancio dell'energia.....	73
3.6	Le equazioni del moto in condotti rotanti .....	74
3.6.1	Moti relativi.....	74
3.6.2	Equazione di conservazione della massa.....	77
3.6.3	Equazione di bilancio della quantità di moto .....	77
3.6.4	Equazione di bilancio dell'energia.....	80
3.7	Equazioni per flusso assialsimmetrico a componente assiale nulla .....	81
3.7.1	Equazione di conservazione della massa.....	82
3.7.2	Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione radiale.....	82
3.7.3	Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione periferica (equazione del momento angolare) .....	84
3.7.4	Equazione di bilancio dell'energia.....	86
3.7.5	Coefficiente d'attrito .....	87
<b>Capitolo 4 - Integrazione delle equazioni del moto e condizioni al contorno .....</b>		<b>84</b>
4.1	Introduzione.....	84
4.2	Equazioni del moto in condotti fissi e condizioni di compatibilità .....	84
4.3	Flusso omoentropico e condizioni di compatibilità.....	89
4.4	Il metodo delle caratteristiche e gli invarianti di Riemann.....	90
4.4.1	Flusso omoentropico.....	90
4.4.2	Flusso non omoentropico .....	93
4.5	Condizioni di compatibilità nel moto relativo e per flusso assialsimmetrico .....	95
4.6	Condizioni al contorno.....	98

4.6.1 Giunzione generica tra due condotti .....	98
4.6.2 Giunzione tra più di due condotti .....	102
4.6.3 Giunzione aspirazione – girante compressore .....	104
4.6.4 Giunzione generica tra i condotti costituenti i modelli del compressore e della turbina .....	106
4.6.5 Giunzione “compressore” e “turbina” .....	107
4.7 Integrazione delle equazioni del moto nei condotti.....	111
4.7.1 Schemi d’integrazione della famiglia Lax – Wendroff.....	112
4.7.2 Schemi d’integrazione Upwind.....	123
<b>Capitolo 5 - Il codice stazionario .....</b>	<b>132</b>
5.1 Introduzione.....	132
5.2 Soluzione equazioni del moto per condotti fissi .....	132
5.3 Soluzione equazioni del moto per condotti rotanti.....	135
5.4 Soluzione equazioni del moto per flusso assialsimmetrico (quasi-1D).....	135
<b>Capitolo 6 - Modelli di perdita.....</b>	<b>138</b>
6.1 Introduzione.....	138
6.2 Perdite d’imbocco.....	141
6.3 Perdite per riduzione della sezione di passaggio all’imbocco della girante del compressore .....	143
6.4 Deviazione del flusso all’ingresso della girante .....	145
6.5 Perdite per incidenza ed urto per flusso diretto nel compressore.....	145
6.6 Perdite uscita girante per flusso inverso nel compressore e per flusso diretto nella turbina .....	150
6.7 Perdite per incidenza ed urto per flusso inverso nel compressore e per flusso diretto nella turbina .....	152
6.8 Perdite per incidenza all’ingresso della palettatura statorica della turbina.....	155
6.9 Effetto Slip .....	156

6.10	Perdite per leakage, per blade loading e Mach supercritico per flusso diretto nel compressore .....	169
6.11	Perdite per leakage e blade loading per flusso diretto nella turbina.....	172
6.12	Calcolo della portata di riflusso nel compressore .....	173
6.13	Calcolo della portata di trafileamento nella turbina .....	175
6.14	Mixing con portata di riflusso o trafileamento .....	176
6.15	Giunzione tra girante e diffusore nel compressore.....	177
6.16	Giunzione tra diffusore e voluta del compressore per flusso diretto.....	179
6.17	Moto nella voluta per flusso inverso nel compressore e diretto nella turbina.....	182
<b>Capitolo 7 - Taratura del modello del compressore ed analisi dei risultati .....</b>		<b>184</b>
7.1	Introduzione.....	184
7.2	Taratura del modello .....	184
7.3	Applicazioni del modello stazionario del compressore .....	194
7.4	Applicazioni del modello instazionario.....	198
7.4.1	Applicazione instazionaria stabile .....	198
7.4.2	Applicazione instazionaria instabile .....	201
7.4.3	Applicazione al motore a combustione interna sovralimentato.....	203
7.5	Validazione del modello instazionario .....	207
7.6	Analisi del pompaggio .....	226
<b>Capitolo 8 - Taratura del modello della turbina ed analisi dei risultati .....</b>		<b>238</b>
8.1	Introduzione.....	238
8.2	Taratura del modello .....	238
8.3	Analisi dei risultati.....	243
<b>Capitolo 9 - Conclusioni.....</b>		<b>247</b>
<b>Bibliografia .....</b>		<b>251</b>

Nella progettazione degli odierni motori a combustione interna (MCI) dedicati all'autotrazione, la sovralimentazione svolge un ruolo fondamentale non solo per il miglioramento delle prestazioni, ma anche per la riduzione dei consumi di combustibile e delle emissioni inquinanti sia per i motori ad accensione comandata che per quelli ad accensione per compressione.

Nella letteratura corrente sono presenti numerosi contributi relativi alla sovralimentazione di MCI [1,2]; questi si riferiscono a tecnologie avanzate quali turbocompressori a geometria variabile e multistadio, spesso integrati con sistemi di ricircolo dei gas di scarico (Exhaust Gas Recirculation - EGR) ad alta e/o bassa pressione, sovralimentazione assistita elettricamente e turbocompounding. Tali tecnologie si stanno affermando anche come strategie di controllo delle emissioni inquinanti e di riduzione dei consumi [3].

Per i MCI ad accensione per compressione, la sovralimentazione a gas di scarico ha consentito, ormai da più di cinquanta anni, di migliorarne sostanzialmente le prestazioni in termini di potenza erogata. In quelli di moderna concezione permette inoltre di mantenere adeguati valori di eccesso d'aria anche in presenza di elevati tassi di EGR [4]. Tale pratica, unitamente ad opportune strategie d'iniezione, rappresenta attualmente uno degli strumenti maggiormente impiegato per il contenimento delle emissioni inquinanti. Una precisa gestione del grado di sovralimentazione, inoltre, è indispensabile per controllare ed estendere il dominio operativo di modalità di combustione alternative come quelle denominate PCCI (Partially-Premixed Charge Compression Ignition) e per il controllo dell'istante di autoaccensione [5].

Nei moderni MCI ad accensione comandata, la sovralimentazione mediante turbocompressore azionato dai gas di scarico viene oggi impiegata anche al fine di ridurre i consumi specifici di combustibile [6, 7] rispetto ai corrispondenti motori aspirati di pari potenza, ma di cilindrata maggiore. Tale filosofia progettuale è indicata comunemente con il termine downsizing [8,9]. I MCI ad accensione comandata aspirati di concezione tradizionale, nei cicli prescritti per l'omologazione della vettura inerenti i vincoli sulle emissioni inquinanti allo scarico, lavorano sempre in condizioni di carico medio e basso. Ciò penalizza il consumo specifico di combustibile per due motivi: in primo luogo, la rilevante entità del lavoro di pompaggio connesso all'utilizzo della valvola a farfalla come organo di regolazione, riduce il lavoro utile ed, inoltre, le perdite meccaniche, poco influenzate dal carico, vengono ad avere un'incidenza tanto più elevata quanto più bassa è la potenza erogata dal motore.

Viceversa, appare evidente come l'utilizzo di un motore sovralimentato di cilindrata ridotta consenta, vista la più modesta entità delle masse in gioco e delle superfici di attrito, di ridurre sia in termini assoluti che relativi le perdite meccaniche. Inoltre, per un prefissato valore di carico (parziale), la più bassa cilindrata richiederà una minore chiusura della valvola a farfalla, determinando così una riduzione del lavoro di pompaggio. Al tempo stesso sarà necessario intervenire sulla regolazione del gruppo di sovralimentazione, ottenuta grazie alla variazione dell'assetto delle pale statoriche della turbina o, più comunemente per i motori ad accensione comandata, grazie all'apertura della valvola di by-pass (Waste-Gate); in questo modo, si realizza un controllo integrato del livello di sovralimentazione e del carico. Tali indubbi benefici sono ulteriormente accentuati dall'adozione di sistemi di distribuzione completamente flessibili e dall'iniezione diretta di benzina. La minore cilindrata non penalizza, inoltre, la potenza massima proprio grazie alla possibilità di raggiungere elevati gradi di sovralimentazione a pieno carico.

L'utilizzo della sovralimentazione comporta, però, nelle condizioni di funzionamento di pieno carico, alcuni inconvenienti. Uno dei più rilevanti consiste nel fatto che i valori di temperatura e di pressione regnanti nel cilindro al termine della fase di compressione sono superiori a quelli che si avrebbero nel corrispondente motore aspirato di pari potenza; tale circostanza potrebbe essere causa di fenomeni

di autoaccensione o detonazione. Le pratiche solitamente impiegate per limitare tali combustioni anomale sono:

- raffreddare la carica compressa tramite uno scambiatore di calore; naturalmente, tale soluzione penalizza il motore in termini di ingombri, peso e complessità architettonica.
- ridurre il rapporto di compressione volumetrico.
- adottare un rapporto aria/combustibile molto ricco, raffreddando in tal modo, a valle dell'iniezione, la miscela fresca.
- adottare valori dell'anticipo all'accensione particolarmente ridotti, o talvolta negativi, riducendo così i picchi di pressione e temperatura massima nel cilindro. Tale soluzione, come le precedenti due, comportano tuttavia ovvie ripercussioni negative sul consumo specifico di combustibile.

Inoltre, l'aumento del cimento termomeccanico connesso alla sovralimentazione obbliga al dimensionamento più conservativo del manovellismo di spinta rotativa e del sistema di raffreddamento.

L'analisi delle prestazioni di un MCI sovralimentato può essere effettuata mediante codici di calcolo capaci di descrivere il flusso e le trasformazioni termodinamiche all'interno dei condotti e dei cilindri che costituiscono il motore; gli stessi affiancano la sperimentazione e ne consentono la riduzione in termini di costi e tempi. I codici di simulazione si differenziano in base alle ipotesi su cui si basa la descrizione del flusso: zero dimensionale (0D), monodimensionale (1D) e tridimensionale (3D). I primi prevedono la risoluzione delle sole equazioni di bilancio di massa ed energia nei volumi in cui viene schematizzato il sistema e, pertanto, non sono in grado di descrivere adeguatamente i fenomeni di propagazione ondosa; vengono, viceversa, fruttuosamente impiegati per modellare l'andamento delle grandezze termodinamiche all'interno delle capacità in cui il campo di moto è mediamente nullo. I modelli monodimensionali tengono conto anche del bilancio della quantità di moto e vengono utilizzati per la simulazione dell'intero motore; essi assumono come ipotesi fondamentale che ciascuna grandezza termofluidodinamica possa ritenersi uniforme in ogni sezione normale alla direzione di propagazione del flusso medio. Tale assunzione, risulta approssimare adeguatamente il campo di moto all'interno di larga parte dei sistemi di aspirazione

e scarico di un MCI. In fine, i codici tridimensionali provvedono a risolvere le equazioni del moto considerando, oltre ai bilanci di massa ed energia, le tre componenti dell'equazione di bilancio della quantità di moto; pur rappresentando lo strumento più raffinato nella descrizione dei fenomeni che si realizzano all'interno di un MCI, richiedono tempi di calcolo notevoli e, pertanto, sono impiegati esclusivamente per la simulazione di sottosistemi del motore (es. scatola filtro, cilindro, catalizzatore, etc.).

Lo studio dell'accoppiamento tra motore e turbocompressore è solitamente realizzato attraverso l'impiego di codici monodimensionali [10]; questi ultimi richiedono la conoscenza delle mappe della turbina e del compressore. Tali mappe, in genere fornite dal costruttore, non rispecchiano il reale funzionamento delle turbomacchine quando accoppiate ad un MCI a causa di diversi fattori:

- si riferiscono a condizioni operative stazionarie, mentre a causa delle pulsazioni di pressione dovute all'apertura delle valvole di aspirazione e scarico [11,12], le turbomacchine operano sempre in condizioni instazionarie.
- a causa della geometria del sistema di aspirazione, il flusso entrante nella girante di un compressore può non essere distribuito uniformemente lungo il profilo della pala per effetto della presenza di moti vorticosi (pre-whirl).
- soprattutto nel caso di una turbina, il fatto che le condizioni a monte della turbomacchina in termini di pressione, temperatura e composizione possano differire anche in maniera rilevante rispetto a quelle in cui ne è stata misurata la mappa può comportare un errore non trascurabile nella stima delle prestazioni della stessa; tale errore può, in ogni caso, essere contenuto grazie all'impiego delle grandezze corrette così come prescritto dalla teoria della similitudine.
- lo scambio di calore attraverso la cassa, quello trasferito dalla turbina e dal motore verso il compressore e quello sviluppato per attrito nei cuscinetti possono influenzare in maniera determinante la valutazione delle prestazioni rilevate sperimentalmente soprattutto in termini di rendimento adiabatico.

Le mappe caratteristiche misurate sperimentalmente non possono che riferirsi ad un numero limitato di velocità di rotazione ed, in molti casi, la regione operativa indagata non copre interamente quella in cui la turbomacchina si trova a lavorare nell'effettivo funzionamento quando accoppiata ad un MCI; per questo motivo,

all'interno dei codici 1D sono presenti delle procedure di estrapolazione ed interpolazione delle curve caratteristiche [13,14,15] basate, in larga parte, su tecniche di carattere puramente matematico e prive di un evidente riscontro fisico. In figura 1.1 sono riportate la mappa caratteristica di un compressore in termini di rapporto di compressione e le corrispondenti curve prestazionali ottenute per estrapolazione mediante un noto codice monodimensionale.

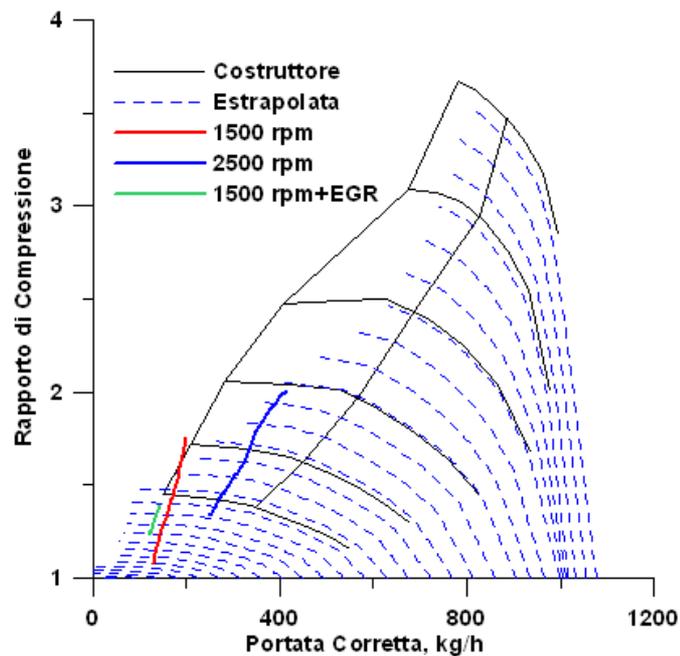


Figura 1.1 - Mappa compressore estrapolata tramite codice commerciale

Si nota come l'andamento delle curve ricavate per interpolazione ed estrapolazione dal codice commerciale risulti alquanto grossolano nella descrizione di alcune regioni:

- per elevate portate e, quindi, in prossimità del bloccaggio (choking - raggiungimento della velocità del suono in una sezione ristretta della turbomacchina), le caratteristiche appaiono essere una mera estrapolazione lineare del tratto immediatamente precedente.
- per basse portate, le curve non coprono l'intero campo operativo contemplato dalla mappa sperimentale ed, inoltre, non comprendono la zona a pendenza positiva (funzionamento instabile), né tantomeno un'eventuale stima degli andamenti per flusso inverso.

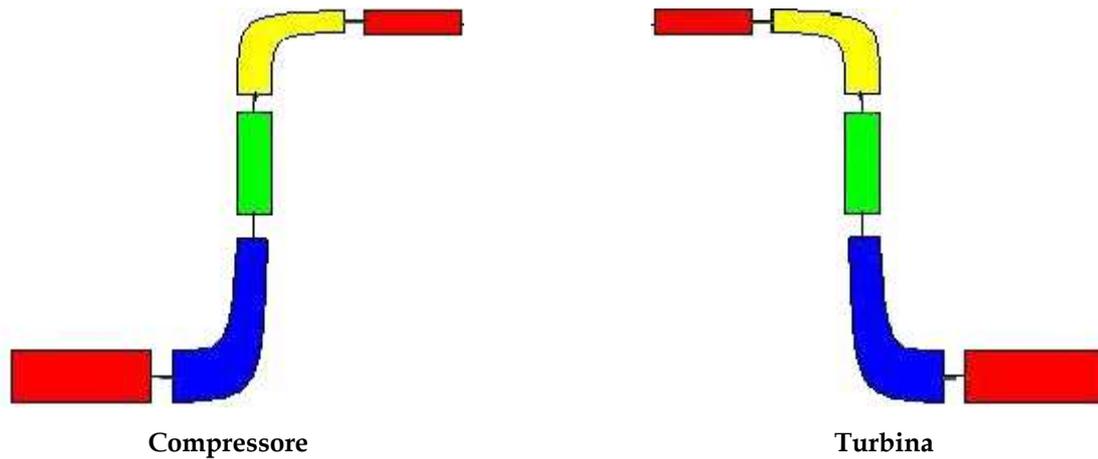
Soprattutto quando il MCI cui è accoppiato il compressore funziona in condizioni di alto carico e bassa velocità di rotazione, il punto operativo della turbomacchina può collocarsi all'esterno della mappa caratteristica come nell'esempio proposto in figura 1.1 per la velocità di rotazione del motore di 1500 rpm. In tali circostanze, ancora una volta, il codice commerciale ricorre a modelli di carattere meramente matematico per la previsione delle prestazioni del compressore lì dove, nel funzionamento reale di quest'ultimo, si potrebbe innescare il fenomeno del pompaggio. Evidentemente, tale fenomeno di accoppiamento instabile tra il compressore ed il circuito in cui lo stesso è inserito, è di carattere fortemente instazionario e non può essere adeguatamente descritto mediante l'approccio tradizionale basato sulle mappe stazionarie.

Per i motivi sopraelencati, appare necessario un miglioramento dell'approccio solitamente impiegato per lo studio dell'accoppiamento tra motore e turbocompressore basato sulle mappe caratteristiche [16].

L'argomento della presente tesi di dottorato è quindi lo sviluppo di una procedura numerica in grado di effettuare una stima delle prestazioni in regime stazionario del compressore centrifugo e della turbina centripeta facenti parte del gruppo di sovralimentazione di un MCI fissando arbitrariamente le condizioni operative e rendendo, pertanto, superfluo il ricorso a tecniche di estrapolazione di dati. Detta procedura si basa sull'ipotesi che il moto all'interno dei componenti facenti parte delle turbomacchine possa assumersi monodimensionale.

Per quanto riguarda il solo compressore, al fine di poterne caratterizzare appieno il funzionamento anche in condizioni fortemente instazionarie quali, ad esempio, quelle che si verificano nel corso del pompaggio (surge), è sviluppata anche una procedura che risolve le equazioni del moto in tali condizioni.

Il compressore è schematizzato come una serie di cinque condotti: il condotto di aspirazione, la girante, il diffusore, la voluta e il condotto di mandata. La girante stessa è considerata come un insieme di canali rotanti in parallelo. La turbina è descritta in maniera del tutto analoga al compressore salvo invertire l'ordine dei componenti. In tal caso, inoltre, il diffusore è sostituito dal distributore palettato o da un semplice condotto convergente di altezza costante.



**Figura 1.2 - Schematizzazione monodimensionale turbomacchine**

La procedura numerica include un modulo che, sulla base di un numero contenuto di grandezze lineari ed angolari direttamente misurate sulle turbomacchine, provvede a effettuare una schematizzazione geometrica; la stessa è poi utilizzata per ricavare gli andamenti della sezione di passaggio e del perimetro bagnato in funzione dell'ascissa curvilinea per ciascun condotto in cui si suppone suddivisa la turbomacchina. Particolare cura è riposta nella ricostruzione della geometria della girante rappresentando quest'ultima il componente più complesso da descrivere geometricamente sia per il compressore che per la turbina.

Al fine di riprodurre adeguatamente il funzionamento reale delle turbomacchine sono introdotti nel modello alcune correlazioni di perdita volte a descrivere fenomeni molto complessi ed altrimenti non modellabili mediante l'approccio seguito quali, ad esempio, l'urto della vena fluida sulla pala, lo slip, l'attrito interno al fluido e quello con le pareti, lo scambio termico, etc.

Uno dei motivi fondamentali che ha portato allo sviluppo della versione stazionaria del modello risiede nell'esigenza di dotarsi di uno strumento analitico in grado di valutare le prestazioni di turbina e compressore con tempi di calcolo molto contenuti. Il basso onere computazionale richiesto permette anche di effettuare la taratura del modello mediante una procedura automatica avente lo scopo di identificare il valore da attribuire alle costanti di calibrazione minimizzando lo scostamento tra le prestazioni previste numericamente e quelle rilevate sperimentalmente.

---

Nel caso del compressore, il codice stazionario è altresì impiegato come rapido e veloce banco di prova per definire la modellazione delle perdite da riportare successivamente nella più raffinata, ma computazionalmente onerosa procedura instazionaria.

#### 2.1 Introduzione

Il modulo geometrico è la parte della procedura proposta adibita al compito di schematizzare e riprodurre la geometria della turbomacchina con il fine di ricavare le informazioni necessarie al modello di analisi delle prestazioni. Il primo passo da compiere è quello di stabilire la parametrizzazione del sistema ossia definire il numero ed il tipo di parametri da utilizzare per la descrizione dell'intera geometria. A tal fine, l'approccio è stato quello di selezionare il numero minimo di grandezze necessarie ad una adeguata definizione della geometria, avendo cura che le stesse siano facilmente misurabili da un qualsiasi utente del modello. In questo capitolo verranno dunque esposte tutte le semplificazioni adottate e le misure necessarie per la schematizzazione geometrica proposta per il compressore e la turbina.

#### 2.2 Geometria complessiva compressore

Il modello geometrico del compressore è costituito, oltre che dalla girante (F2 in fig. 2.1), anche dal condotto di aspirazione (F1), dal diffusore liscio (F3), dalla voluta (F4) (al cui termine è presente un cono divergente) e da un condotto di mandata (F5). E' altresì presente un condotto virtuale che schematizza il gioco

presente tra girante e cassa (RF) avente il compito di modellare le perdite volumetriche.

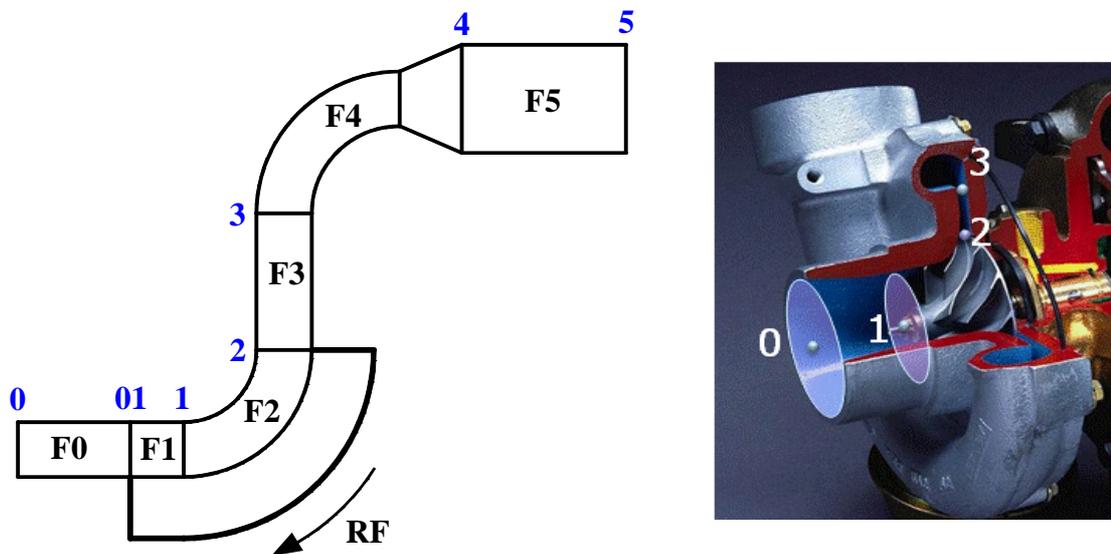


Figura 2.1 - Modello monodimensionale compressore - sezioni principali (blu)

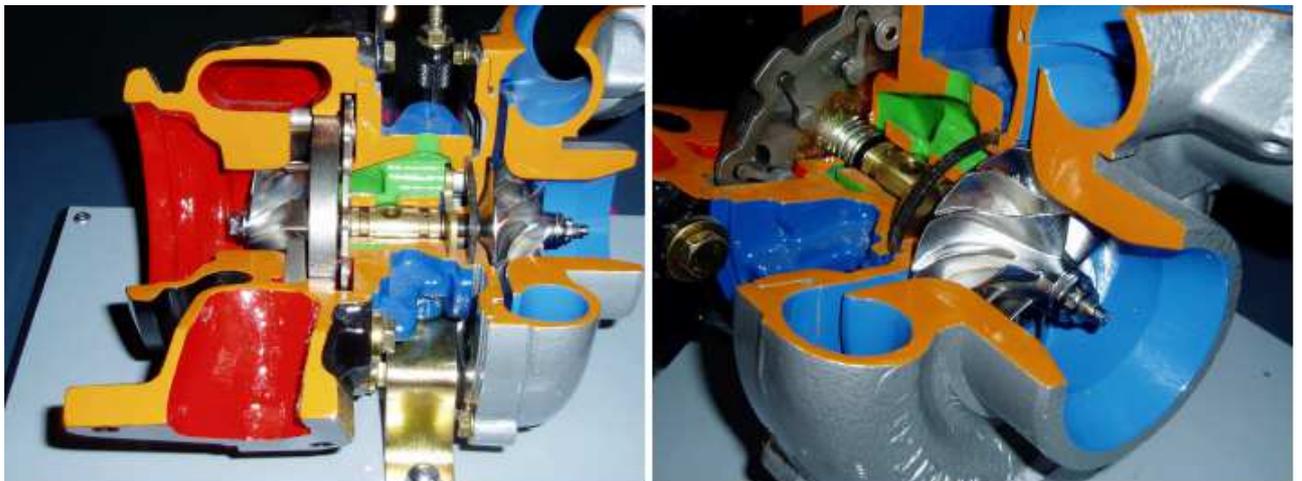


Figura 2.2 - Vista in sezione del turbocompressore

Il condotto di aspirazione è ricostruito come un condotto convergente ad asse rettilineo. Per la sua parametrizzazione è quindi necessario assegnare semplicemente il diametro iniziale  $D_0$  e l'estensione assiale  $L_0$ . Il diametro di uscita  $D_1$  è definito una volta noti il diametro d'ingresso girante  $D_{1h}$  e l'altezza del gioco tra quest'ultima e la cassa  $h_{gap}$ .

$$D_1 = D_{1h} + 2h_{gap} \quad (2.1)$$

Il diffusore invece è considerato come un condotto divergente di estensione assiale costante. Tale dimensione è assunta pari all'altezza della pala all'uscita della girante  $b$ . Per la parametrizzazione del diffusore, pertanto, si rende necessaria la sola misura del diametro all'uscita  $D_3$  (Figura 2.3).



Figura 2. 3 – Dimensione caratteristica diffusore liscio

La voluta è schematizzata come un condotto dal diametro variabile linearmente; la sezione d'ingresso è pari a quella d'uscita del diffusore, mentre quella terminale viene valutata a partire della misura del diametro  $D_4$  all'uscita della voluta (fig. 2.4). La lunghezza del condotto viene posta pari alla metà della lunghezza della spirale cui viene assimilata la linea media della voluta; tale scelta modellistica è dettata dall'assunzione che una particella fluida percorra mediamente la metà della lunghezza delle linea media della voluta. Quest'ultima termina con un cono di assegnate dimensioni (lunghezza  $L_{con}$  e diametro d'uscita  $D_{con}$ ) raccordato alla voluta senza discontinuità di diametro.

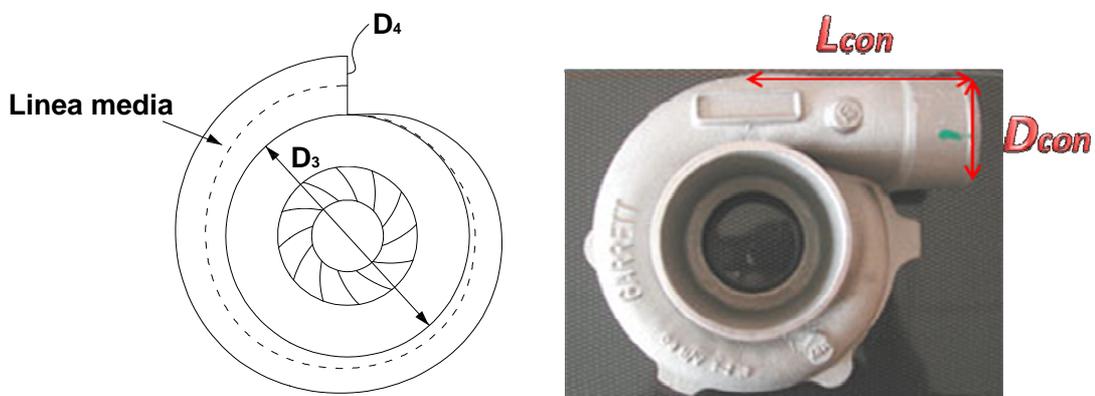


Figura 2. 4 – Dimensioni caratteristiche voluta

Il condotto di mandata è infine descritto come un condotto a sezione costante e pari a quella di uscita del cono; l'unico parametro geometrico da assegnare in questo caso è la lunghezza.

L'inevitabile gioco presente tra cassa e girante è schematizzato come un condotto avente una lunghezza pari a quella del profilo meridiano di shroud (ci si riferisca al paragrafo seguente per la definizione di tale profilo) ed una sezione di passaggio costante  $\Omega_{gap}$  pari a:

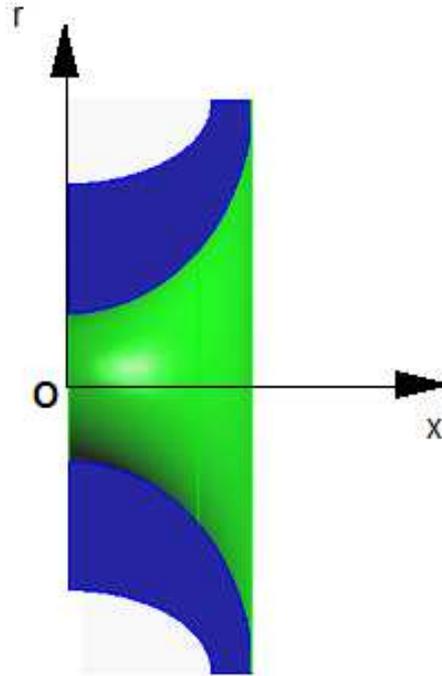
$$\Omega_{gap} = \left( \frac{D_1 + D_{1s}}{2} \right) \pi h_{gap} \quad (2.2)$$

### 2.3 Geometria girante compressore

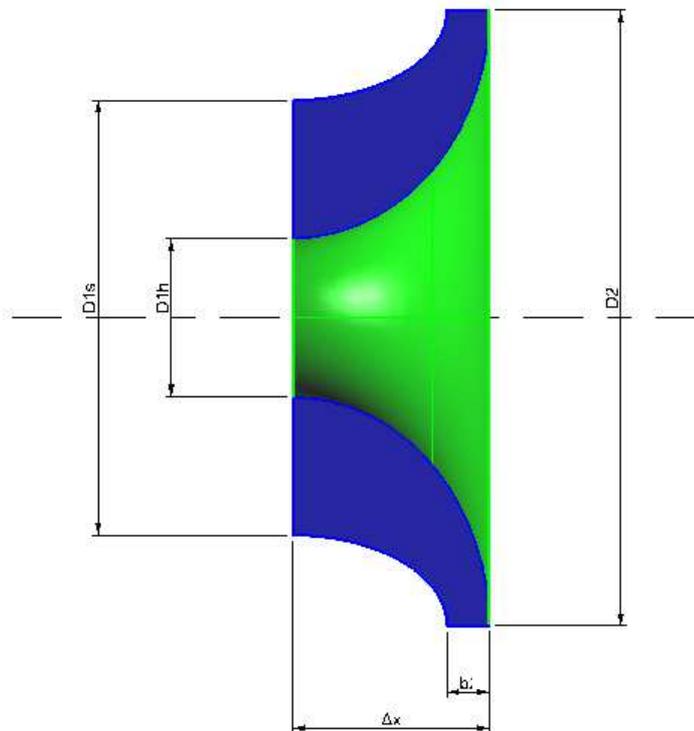
L'approccio seguito nella ricostruzione della geometria della girante è stato quello di definire preliminarmente i profili di hub (mozzo) e shroud (apice) della pala rotorica nel piano meridiano (un qualsiasi piano che contenga l'asse di simmetria assiale della girante) per poi ruotare opportunamente detti profili (unitamente ad altri intermedi) introno all'asse della macchina per fornirne una rappresentazione tridimensionale.

Nel piano meridiano è introdotto un sistema di riferimento cartesiano la cui origine **O** giace sull'asse della girante all'altezza della sezione d'ingresso; gli assi coordinati sono l'asse della girante stesso,  $x$ , e un qualsiasi raggio uscente dall'origine perpendicolare a quest'ultimo,  $r$  (fig. 2.5).

Nel modello proposto sono considerate esclusivamente giranti ad ingresso assiale; stante tale ipotesi i due punti che definiscono la sezione d'ingresso del canale meridiano, ovvero il punto di inizio del profilo di shroud e quello del profilo di hub, saranno caratterizzati dalla medesima coordinata assiale (in entrambi i casi nulla), mentre quella radiale è individuata dai diametri  $D_{1h}$  e  $D_{1s}$  (fig. 2.6).



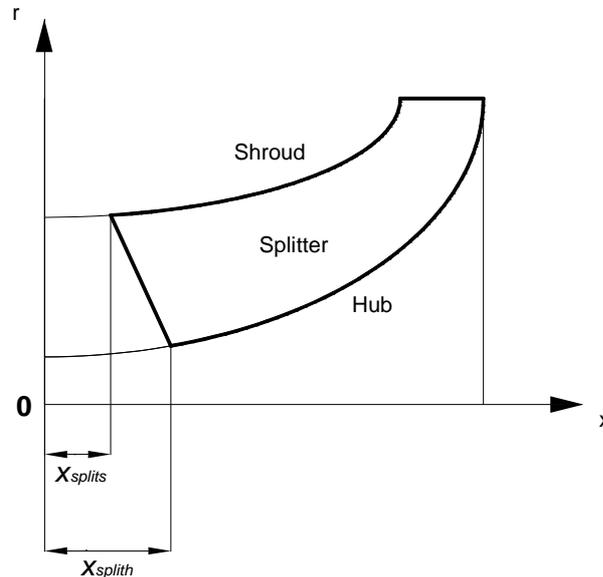
**Figura 2. 5 – Sistema riferimento nel piano meridiano**



**Figura 2. 6– Dimensioni caratteristiche girante**

Qualora, poi, la girante sia dotata di pale splitter si suppone che i profili di queste ultime siano perfettamente coincidenti con quelli delle pale “intere” salvo

cominciare in corrispondenza di punti le cui coordinate assiali sono assegnate tramite le grandezze  $x_{splith}$  e  $x_{splits}$  (fig. 2.7).



**Figura 2. 7 – Pala splitter**

La schematizzazione prevede che all'uscita della girante le pale siano perfettamente radiali. Sulla base di tale assunzione, i punti che individuano le estremità terminali dei profili di hub e shroud sono caratterizzati dalla medesima coordinata radiale (a sua volta pari alla metà del diametro  $D_2$ , fig. 2.6), mentre quelle assiali sono definite a partire dall'estensione assiale della girante  $\Delta x$  e dall'altezza meridiana della pala all'uscita  $b$  (fig. 2.6).

Assegnati i punti iniziali e terminali dei profili di hub e shroud, resta da definire la geometria dei profili stessi. Tra le diverse possibilità disponibili, si è deciso di assimilare le curve di hub e shroud a rami di ellisse evitando, grazie a tale scelta, l'introduzione di ulteriori parametri nella schematizzazione geometrica. Il profilo di hub, pertanto, è schematizzato come un ramo di ellisse avente semiassi  $a_h = \Delta x$  e  $b_h = (D_2 - D_{1h})/2$  (fig. 2.8) e le cui equazioni parametriche sono:

$$x_h = a_h \cos(\pi/2 - t_h) \quad (2.3)$$

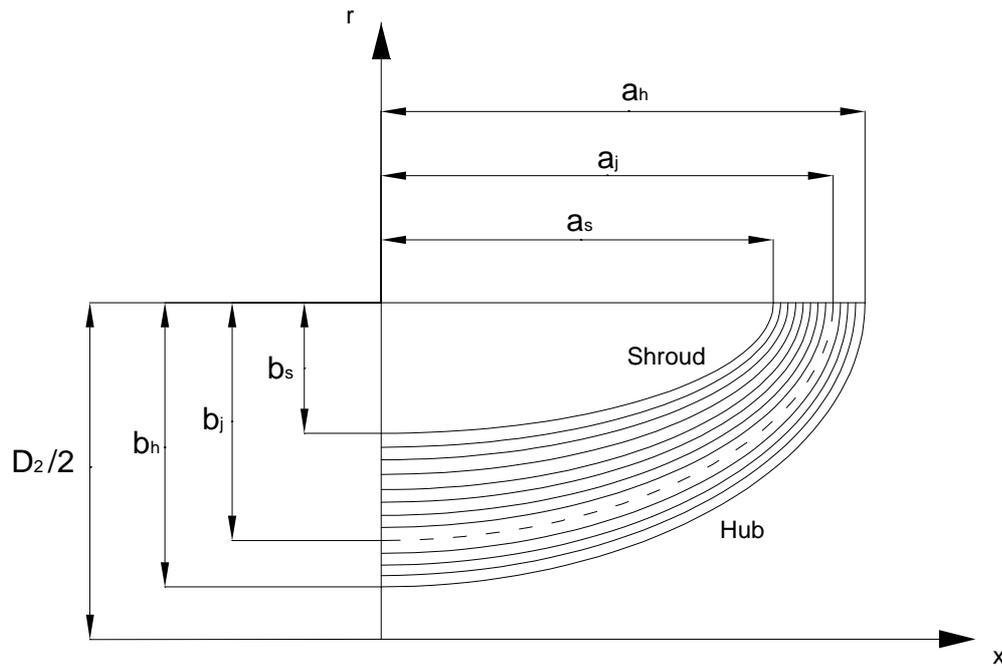
$$r_h = \frac{D_2}{2} - b_h \text{sen}(\pi/2 - t_h) \quad (2.4)$$

Il profilo meridiano di shroud è descritto da equazioni parametriche formalmente coincidenti con le (2.3) e (2.4) salvo considerare i semiassi  $a_s = \Delta x - b$  e  $b_s = (D_2 - D_{1s})/2$ .

Si introduce un profilo meridiano denominato *medio* rappresentativo del baricentro delle sezione normale al flusso che attraversa il vano interpallare. Tale profilo è ancora una volta definito da equazioni parametriche del tipo (2.3) e (2.4) in cui i semiassi sono  $a_m = \Delta x - b/2$  e  $b_m = (D_2 - D_{1m})/2$ .  $D_{1m}$  è il diametro della linea media al bordo d'ingresso supposto pari alla media geometrica dei diametri all'ingresso all'hub ed allo shroud secondo la:

$$D_{1m} = \sqrt{(D_{1s} + D_{1h})/2} \quad (2.5)$$

Tale scelta nella definizione di  $D_{1m}$  consente di suddividere il canale interpallare in due tubi di flusso attraversati dalla stessa portata volumetrica. Per affinare la ricostruzione geometrica, la pala è ricoperta da  $n$  profili intermedi di cui il  $j$ -simo ha semiassi  $a_j = \Delta x - \frac{j-1}{n-1} b$  e  $b_j = \frac{D_2 - D_{1h}}{2} - \frac{D_{1s} - D_{1h}}{2} \frac{j-1}{n-1}$  (fig. 2.8).



**Figura 2. 8– “Mappatura” girante nel piano meridiano – dimensioni caratteristiche profili meridiani**

Nell’algoritmo sviluppato, le tre ellissi principali (hub, media e shroud) e quelle intermedie sono tracciate per punti. Con riferimento al profilo di hub e facendo variare in modo discreto il parametro  $t_h$  da 0 a  $\pi/2$ , per ogni valore di detto parametro è possibile ricavare il corrispondente valore dell’angolo sotteso  $\theta_{el}$  tramite la relazione (fig. 2.9):

$$\theta_{el} = \arctan \left( \frac{a_h}{b_h} \tan t_h \right) \quad (2.6)$$

Il profilo di shroud e quello medio (così come quelli intermedi) sono poi disegnati in modo tale che i loro punti (A e B in fig. 2.9) siano caratterizzati dallo stesso valore di  $\theta_{el}$  dei corrispondenti punti di hub (C in fig. 2.9), ossia facendo in modo tale che siano allineati lungo la medesima retta passante per il centro dell’ellisse.

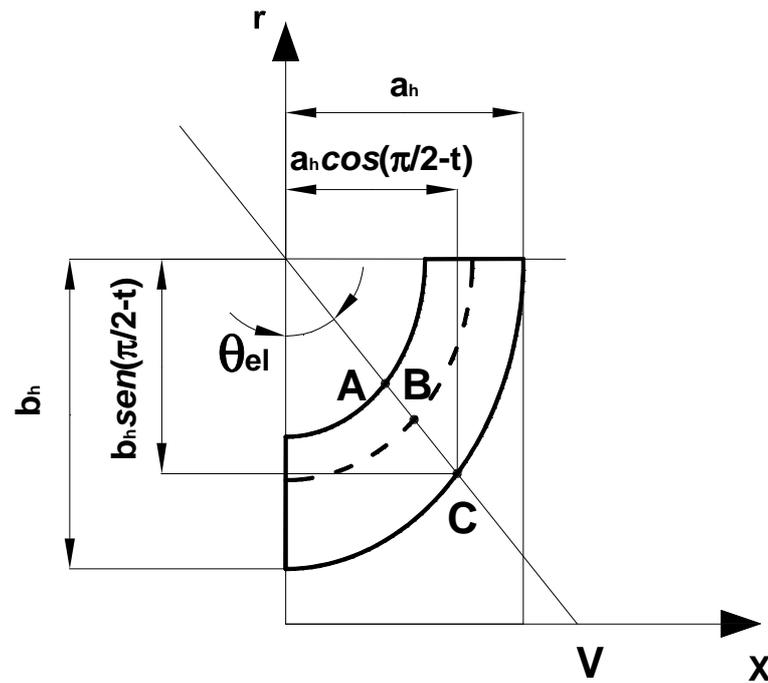


Figura 2. 9 - Piano meridiano - profili hub, shroud e medio

A tal fine, è necessario definire i valori del parametro per i profili di shroud ( $t_s$ ) e medio ( $t_m$ ) secondo le relazioni:

$$t_s = \arctan\left(b_s/a_s \tan(\theta_{el})\right) \quad (2.7)$$

$$t_m = \arctan\left(b_m/a_m \tan(\theta_{el})\right) \quad (2.8)$$

ottenute invertendo la (2.6) e conservando il valore di  $\theta_{el}$ .

Per ciascun profilo considerato, si può introdurre un sistema di riferimento curvilineo in cui ogni punto ad esso appartenente può essere univocamente determinato semplicemente mediante l'ascissa curvilinea meridiana  $m$ . Il valore di quest'ultima per l' $i$ -esimo punto della linea di hub viene calcolato numericamente secondo la:

$$m_{i,h} = m_{i-1,h} + \sqrt{(x_{i,h} - x_{i-1,h})^2 + (r_{i,h} - r_{i-1,h})^2} \quad (2.9)$$

Lo stesso può farsi per la linea di shroud, per quella media e per tutte le eventuali altre linee intermedie dalla cui unione è possibile ricreare la superficie meridiana della pala.

Disegnato il canale meridiano, si passa alla definizione della pala come oggetto tridimensionale. Si introduce allora un sistema di riferimento cilindrico in cui  $x$  e  $r$  hanno significato già noto e  $\gamma$  rappresenta la coordinata angolare o anomalia.

Con riferimento ad un generico profilo (hub, shroud o intermedio), nel passare dalla linea meridiana a quella tridimensionale corrispondente, le coordinate radiali e assiali non variano per cui resta da definire il solo valore dell'anomalia. A tal fine, è possibile verificare la sussistenza di un legame funzionale tra detta anomalia e l'angolo di pala costruttivo  $\varphi$  espresso dalla:

$$rd\gamma = dm \tan \varphi \quad (2.10)$$

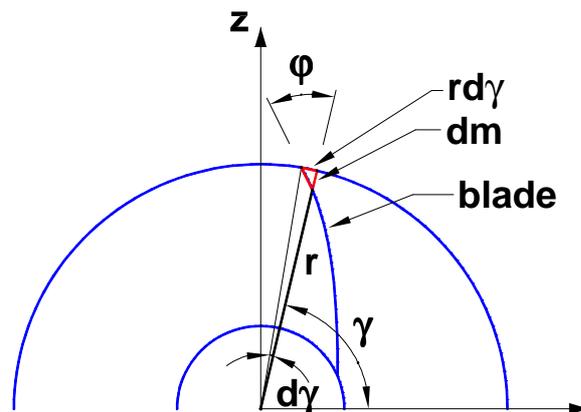


Figura 2. 10 - Schema girante - vista in pianta

La figura 2.10, che mostra il caso di una girante perfettamente radiale, consente di verificare immediatamente la (2.10). Sebbene di più complessa visualizzazione, è possibile constatarne la sussistenza anche nel caso di giranti a flusso misto come quelle facenti parte di un gruppo di sovralimentazione per MCI.

Stante la (2.10), che può essere riscritta come:

$$\frac{d\gamma}{dm} = \frac{\tan \varphi}{r} \quad (2.11)$$

appare evidente come sia conveniente esprimere l'andamento dell'anomalia  $\gamma$  come funzione dell'ascissa curvilinea  $m$ . Fatta tale scelta, infatti, risulta definito il valore della derivata della funzione  $\gamma = \gamma(m)$  una volta noti gli andamenti del raggio e dell'angolo di pala. Da un punto di vista pratico, però, è possibile con relativa semplicità misurare dette grandezze all'ingresso ed all'uscita delle girante, mentre risulterebbe ben più complessa nonché affetta da incertezza la valutazione degli andamenti in funzione di  $m$  delle già citate grandezze. Sulla base di tali premesse, si è deciso di modellare la funzione  $\gamma = \gamma(m)$  mediante un polinomio di terzo grado del tipo:

$$\gamma(m) = am^3 + bm^2 + cm + d \quad (2.12)$$

per la cui identificazione è necessario stimare i 4 coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . A tal fine, si può verificare che imponendo le 4 condizioni al contorno:

$$\gamma(m=0) = \gamma_1 \quad (2.13)$$

$$\gamma(m=l_{blade}) = \gamma_2 \quad (2.14)$$

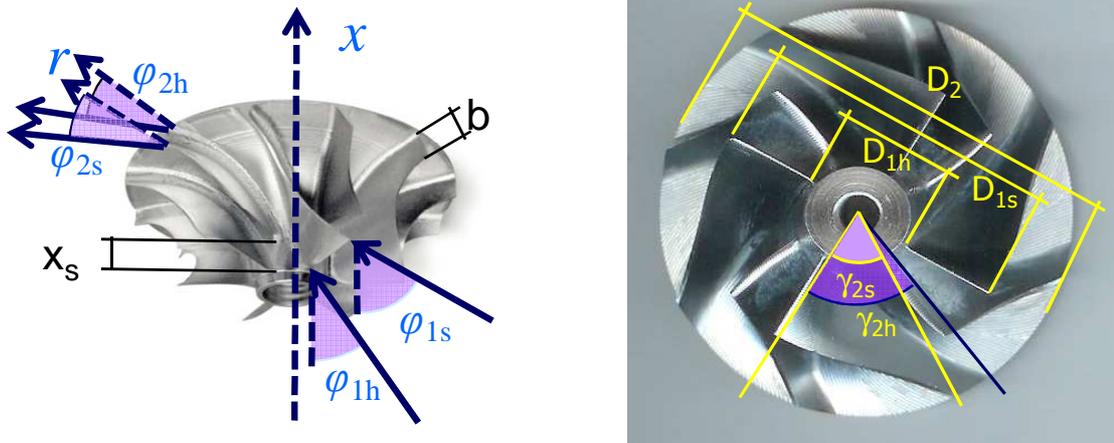
$$\left. \frac{d\gamma}{dm} \right|_1 = \frac{\tan \varphi_1}{r_1} \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{d\gamma}{dm} \right|_2 = \frac{\tan \varphi_2}{r_2} \quad (2.16)$$

si ricava il seguente sistema lineare avente come incognite proprio i 4 coefficienti della funzione  $\gamma = \gamma(m)$

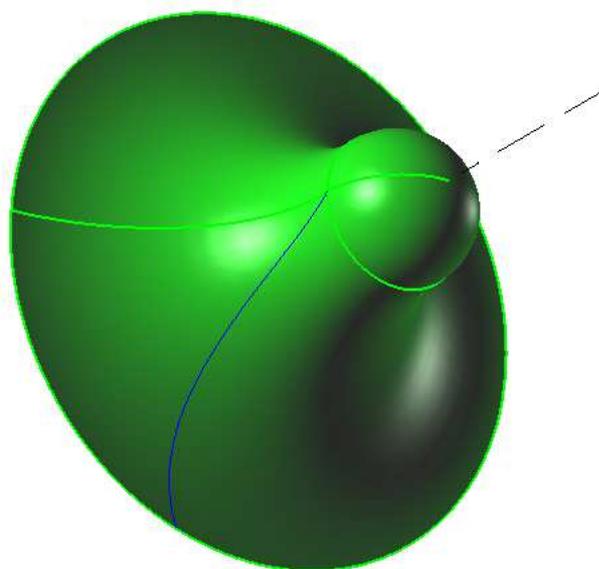
$$\begin{cases} d = \gamma_1 \\ a \cdot l_{blade}^3 + b \cdot l_{blade}^2 + c \cdot l_{blade} + d = \gamma_2 \\ c = \tan \varphi_1 / r_1 \\ 3a \cdot l_{blade}^2 + 2b \cdot l_{blade} + c = \tan \varphi_2 / r_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

in cui tutti i simboli hanno significato noto ad eccezione di  $l_{blade}$  che rappresenta la lunghezza del generico profilo meridiano.



**Figura 2. 11 – Dimensioni lineari ed angolari caratteristiche della girante**

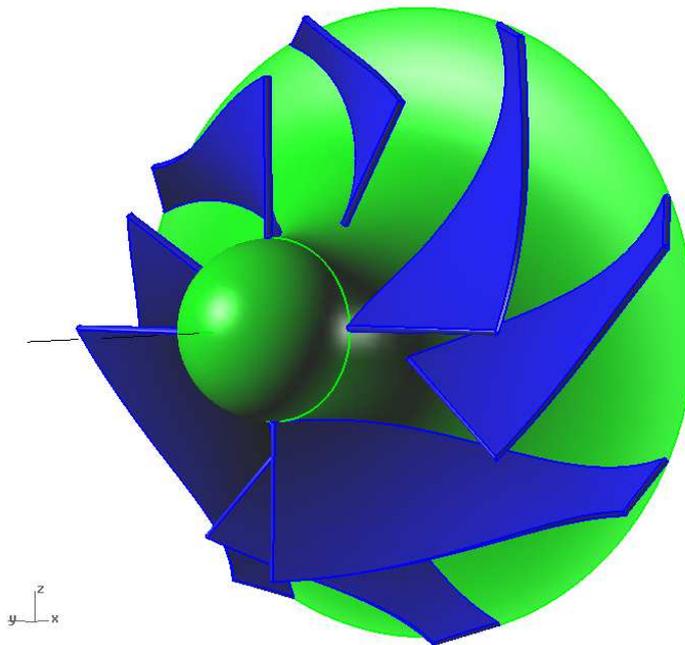
Riassumendo, con riferimento all’hub, dalla misura degli angoli di pala all’ingresso ed all’uscita della girante,  $\varphi_{1h}$  e  $\varphi_{2h}$ , e dei corrispondenti angoli di rotazione,  $\gamma_{1h}$  e  $\gamma_{2h}$ , e diametri (da cui si ricavano i relativi raggi),  $D_{1h}$  e  $D_{2h}$ , si ottengono i 4 coefficienti della funzione  $\gamma_h = \gamma_h(m_h)$  che rappresenta la legge di rotazione del profilo meridiano di hub (linea a tratto verde in fig. 2.12) necessaria alla descrizione del profilo tridimensionale di hub (linea a tratto blu in fig. 2.12).



**Figura 2. 12 – Profilo meridiano e tridimensionale di hub**

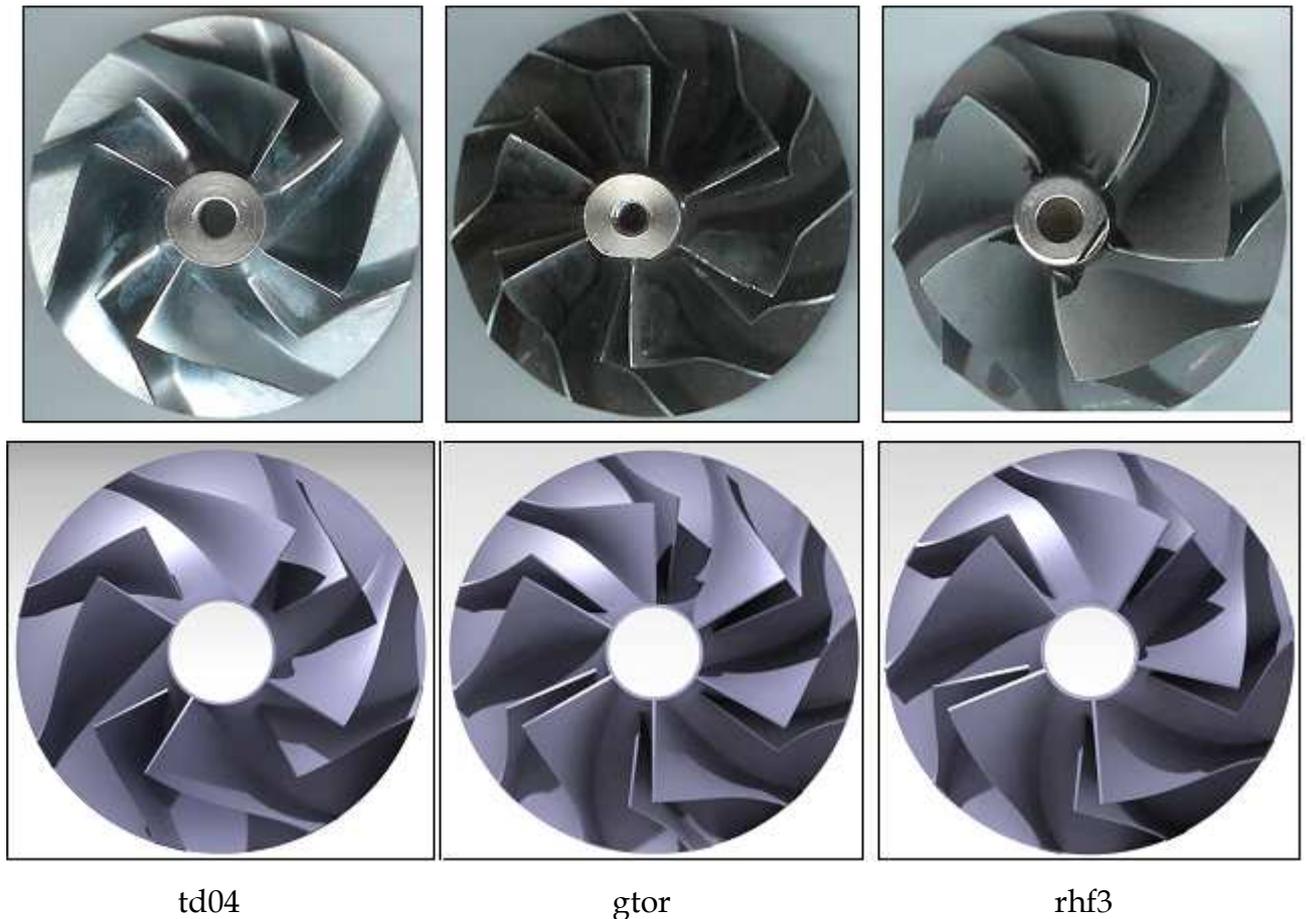
Analogo procedimento è seguito per la linea di shroud salvo considerare gli angoli di pala,  $\varphi_{1s}$  e  $\varphi_{2s}$ , quelli di rotazione,  $\gamma_{1s}$  e  $\gamma_{2s}$ , ed i diametri,  $D_{1s}$  e  $D_{2s}$ . I profili intermedi e quello medio sono definiti utilizzando opportune interpolazioni dei valori assunti dagli angoli di pala, da quelli di rotazione e dai diametri all'hub ed allo shroud.

In questo modo viene ricostruita la geometria della singola pala rotorica che può essere ruotata, noto il numero di pale  $Z$ , dell'angolo  $\Delta\gamma=360/Z$  per pervenire alla completa descrizione del vano interpalare. Iterando la rotazione della geometria della pala si perviene alla riproduzione dell'intera girante di cui è riportato un esempio in figura. 2.13.



**Figura 2. 13 – Ricostruzione tridimensionale girante**

Il modello geometrico appena descritto è stato utilizzato per la ricostruzione della geometria di tre differenti giranti appartenenti ad altrettanti compressori centrifughi di serie che nel seguito verranno indicati con le sigle td04 (Mitsubishi), gtor (Garrett), rhf3 (IHI). (fig. 2.14). Si nota un'ottima concordanza tra le geometrie riprodotte al CAD e quelle reali per i tre i casi analizzati.



**Figura 2. 14 - Ricostruzione CAD delle giranti dei compressori di riferimento td04, gtor e rhf3**

Definita la geometria della girante ed, in particolare, identificati i polinomi che descrivono i legami  $\gamma_h = \gamma_h(m_h)$  e  $\gamma_s = \gamma_s(m_s)$ , è possibile, riarrangiando la (2.11), pervenire ad una stima degli andamenti dell'angolo di pala all'hub ed allo shroud secondo la:

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{d\gamma}{dm} r \right] \quad (2.18)$$

Detti andamenti, rappresentati in figg. 2.15 - 2.17, sono comparati con quelli riportati in [17] in cui si confrontano differenti design relativi a differenti coefficienti di portata. Come si nota, il modello proposto è in grado di riprodurre un trend piuttosto simile a quello illustrato in [17] in merito all'hub; minore accordo è riscontrabile per lo shroud.

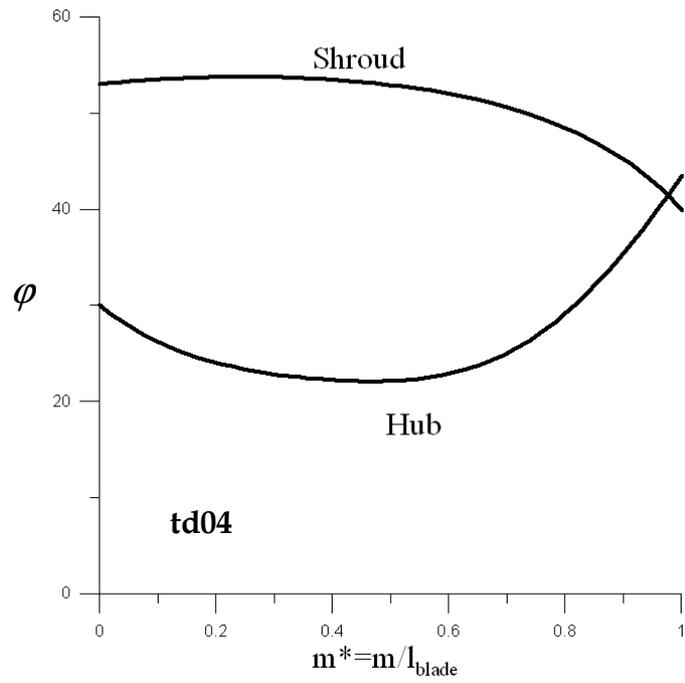


Figura 2. 15- Angolo pala  $\varphi$  in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - td04

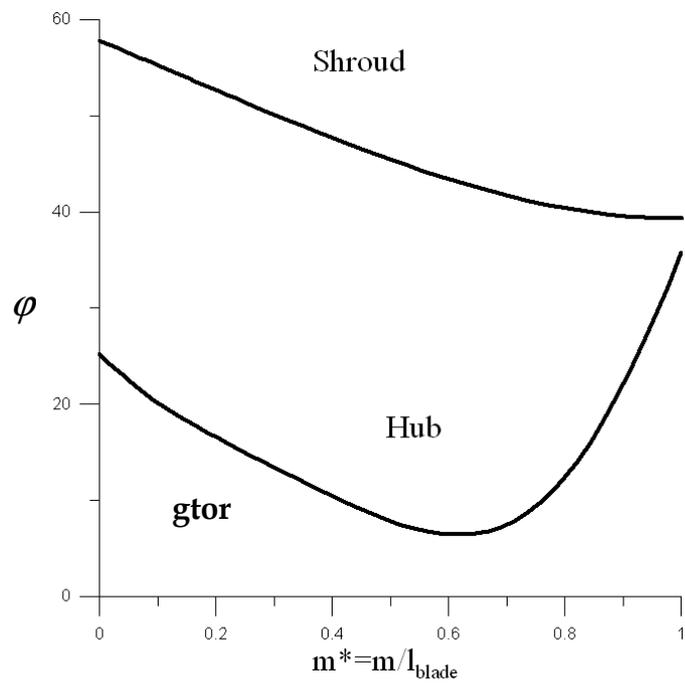


Figura 2. 16 - Angolo pala  $\varphi$  in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - gtor

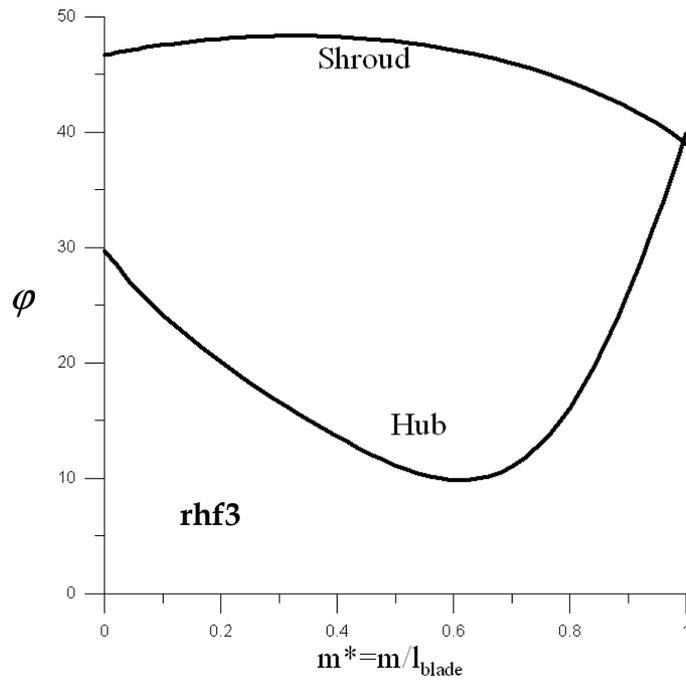


Figura 2. 17 - Angolo pala  $\phi$  in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - rhf3

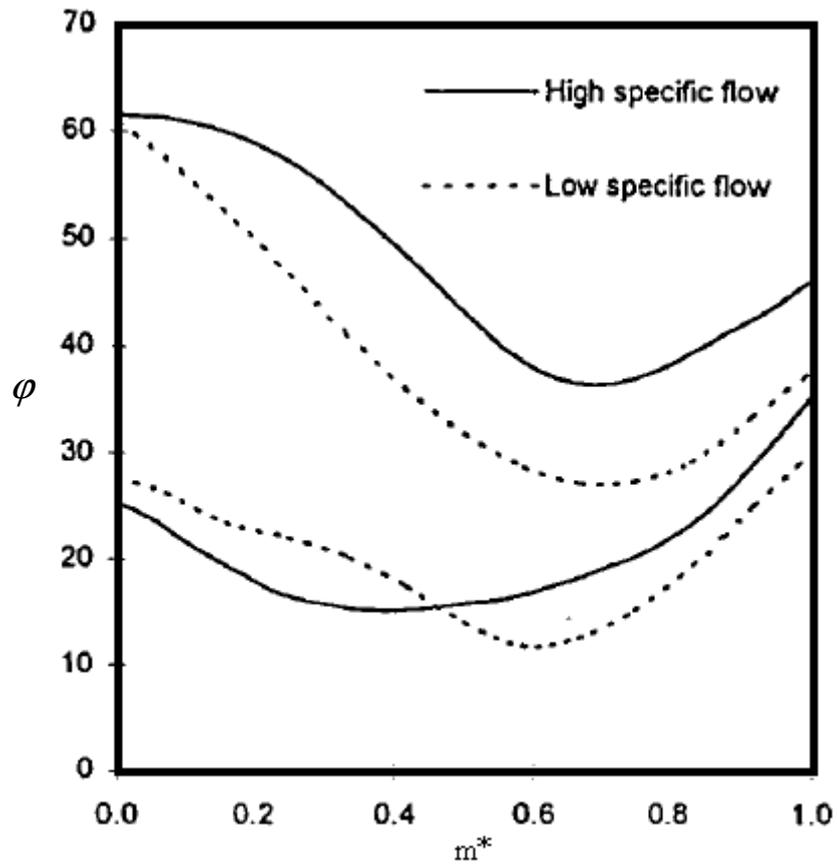


Figura 2. 18 - Angolo pala  $\phi$  in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata [17]

## 2.4 Area di passaggio e perimetro bagnato

La procedura include un modulo dedicato alla valutazione dell'andamento, in funzione dell'ascissa curvilinea, del perimetro bagnato e dell'area di passaggio della sezione normale alla linea media (supponendo, sulla base dell'ipotesi di moto monodimensionale, che il flusso abbia come direzione principale quella corrispondente alla linea media); tali dati sono necessari per integrare le equazioni monodimensionali del moto.

Per determinare la generica sezione di attraversamento si comincia tracciando la normale alla linea media meridiana passante per il generico punto P appartenente a detta linea (linea a tratto discontinuo in fig. 2.19a). In questo modo, risultano individuati i punti d'intersezione con i profili meridiani di hub, shroud ed intermedi. Ogni coppia di profili definisce un sottocanale interpallare. La procedura provvede pertanto al calcolo della sezione di passaggio e del perimetro bagnato per ciascuno di essi; il risultato viene poi sommato su tutti i sottocanali per il calcolo della sezione di passaggio e del perimetro bagnato globali.

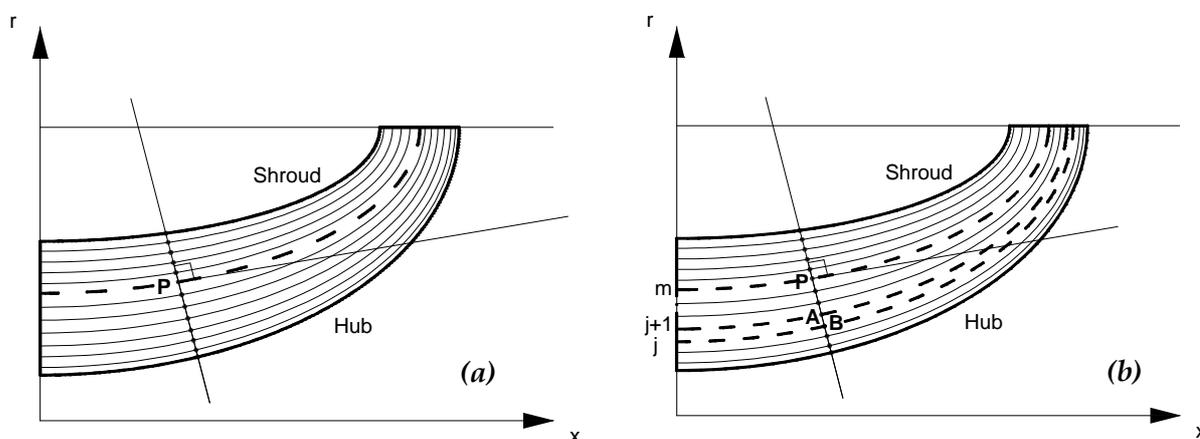


Figura 2. 19 - Profili meridiani

Con riferimento alla generica coppia di profili  $j$  e  $j+1$  (fig. 2.19b), la sezione normale alla linea media di ciascun sottocanale è assimilata ad un simil-parallelogramma (a differenza di un parallelogramma, in questo caso i lati non obliqui non sono segmenti di retta) avente altezza pari al segmento AB. Le due basi del parallelogramma sono archi di circonferenza ruotati opportunamente al fine di

risultare normali alla linea media. La lunghezza di detti archi è calcolata moltiplicando la coordinata radiale  $r$  dei punti A e B per l'ampiezza angolare del vano interpalare  $\Delta\gamma = 360/Z$  (fig. 2.20). Tale ampiezza è ridotta dell'arco corrispondente allo spessore della pala  $s_p$  secondo la relazione:

$$\Delta\gamma = 360/Z - \frac{s_p}{r \cos \varphi} \quad (2.18)$$

facilmente verificabile dalla fig. 2.20.

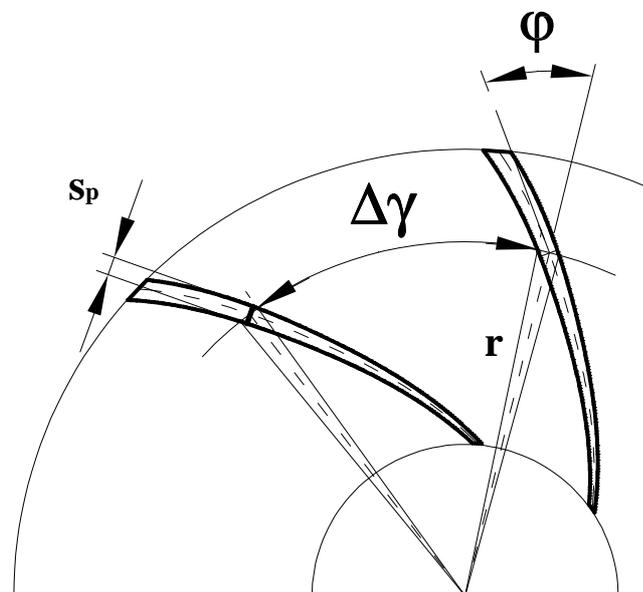


Figura 2. 20 - Vista in pianta vano interpalare

Una volta ottenuta la lunghezza dell'arco di circonferenza (XX in fig. 2.21) con centro nella traccia dell'asse di rotazione è necessario riportare tale misura alla direzione normale alla linea media. Pertanto, si moltiplica tale lunghezza per  $\cos \varphi$  al fine di ottenere un valore approssimato della lunghezza del segmento YY normale alla linea media (trascurando, pertanto, gli effetti legati alla curvatura dell'arco XX - tale ipotesi comporta errori via via minori al ridursi dell'ampiezza angolare ovvero al crescere del numero di pale).

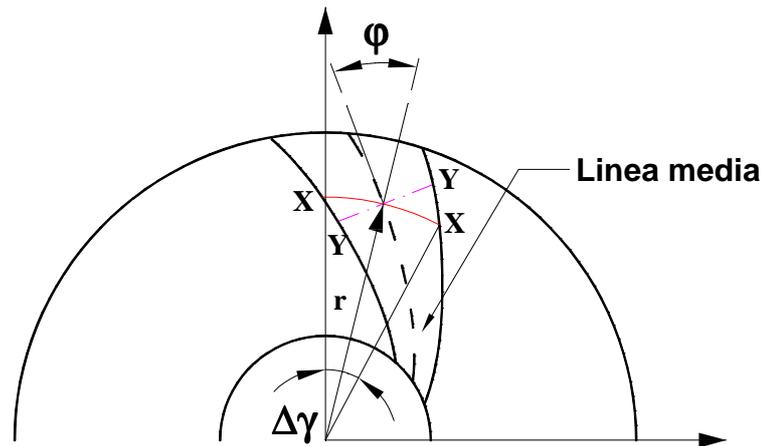


Figura 2. 21 - Vista piana vano interpallare - arco sezione passaggio

La figura 2.22 meglio chiarisce la procedura seguita: una volta assegnato il generico punto P sulla linea media meridiana (linea verde), è possibile individuare il simil-parallelogramma (racchiuso da bordo rosso) ottenuto intersecando due pale consecutive e le superfici di hub e shroud con una superficie conica indefinita avente come generatrice la retta normale al profilo medio meridiano nel punto P e come asse di simmetria l'asse della girante.

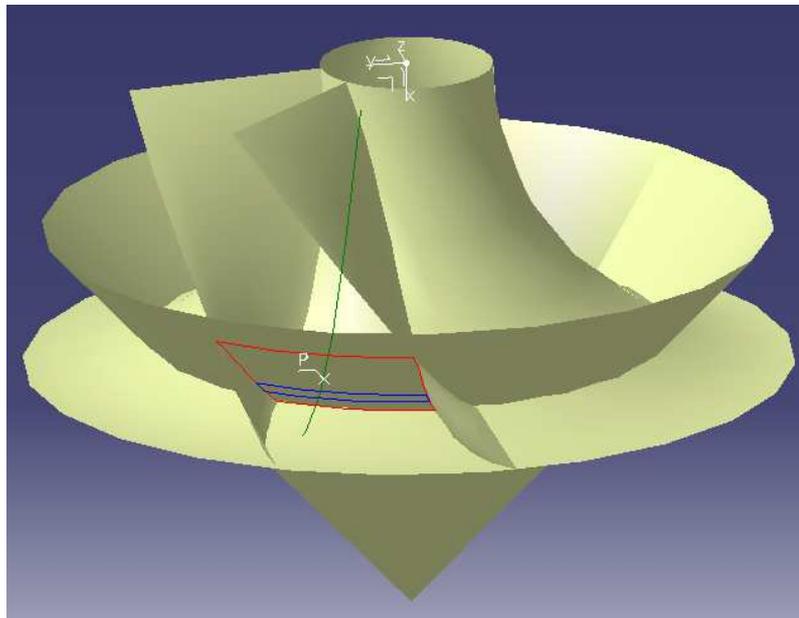
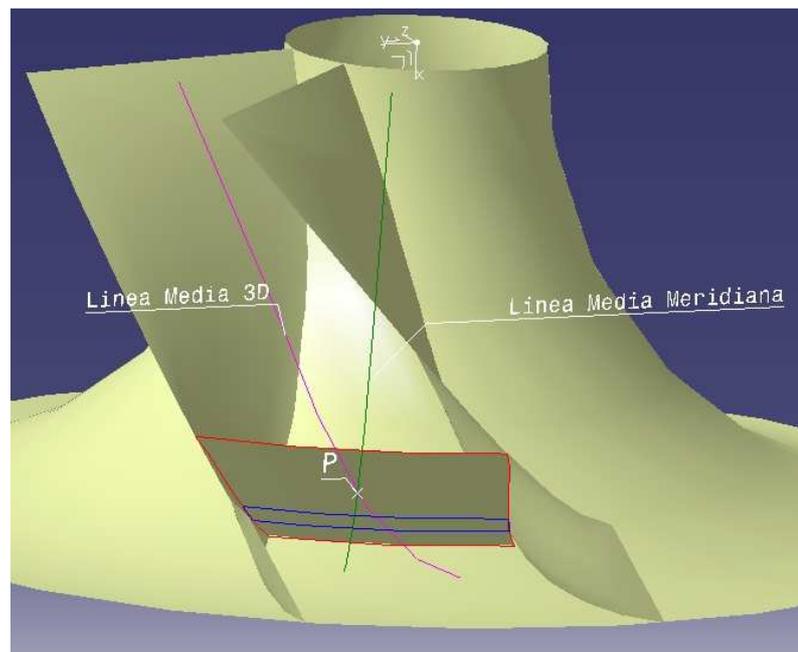


Figura 2. 22 - Intersezione superficie conica indefinita - pale girante e superfici di hub e shroud

Detta figura è a sua volta suddivisa in sotto-parallelogrammi come quello racchiuso da bordo blu in fig. 2.23. Per ciascuno di questi è calcolata l'area di passaggio ed il perimetro bagnato secondo la procedura precedentemente descritta. Tali misure sono poi riferite alla direzione normale alla linea media 3D moltiplicando la lunghezza degli archi costituenti i lati non obliqui per  $\cos \varphi$ .



**Figura 2. 23 - Simili parallelogramma (contorno rosso) e sotto-parallelogramma (contorno blu).**

Al fine del calcolo del perimetro bagnato è necessario valutare anche la lunghezza del lato obliquo del sotto-parallelogramma (i due lati minori nella fig. 2.24). Questa è ottenuta semplicemente come distanza tra i punti di estremità di tale lato indicati con C e D in fig. 2.24; si ricorda che tali punti sono ottenuti dalla rotazione dei punti corrispondenti nel piano meridiano A e B della rispettiva anomalia  $\gamma$ .

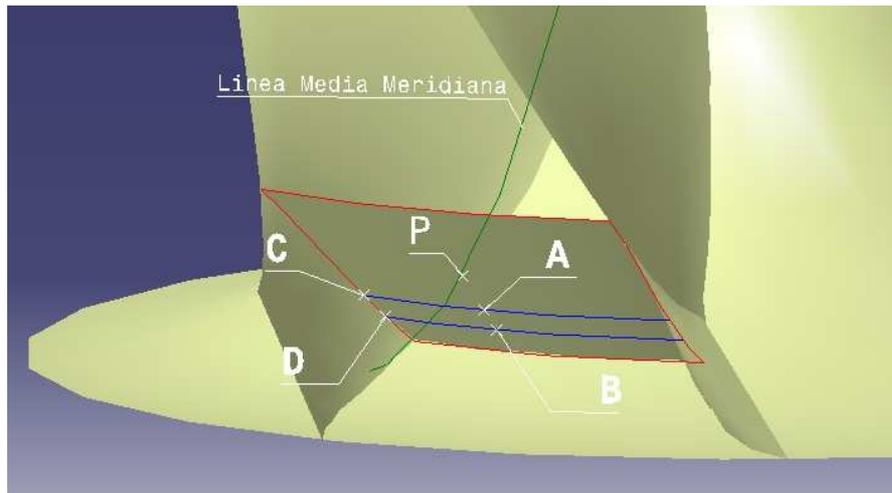


Figura 2. 24 – Dettaglio sezione passaggio normale alla linea media meridiana

Grazie a tale procedura è quindi possibile ricavare gli andamenti di alcune grandezze caratteristiche come l'area della sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana. Per i tre compressori considerati si hanno i seguenti andamenti:

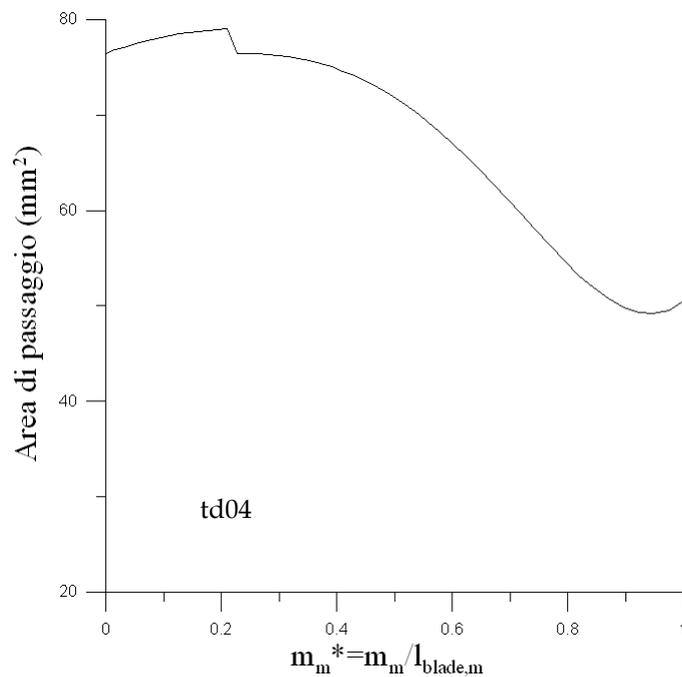
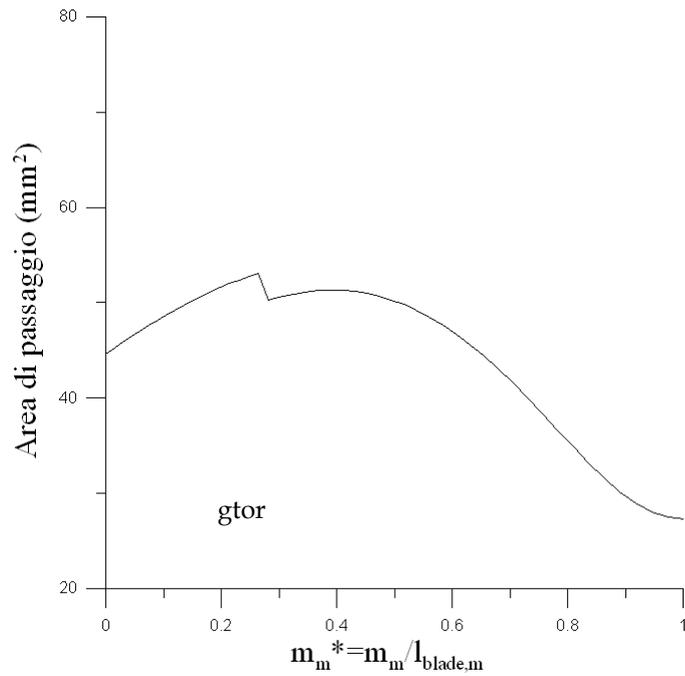
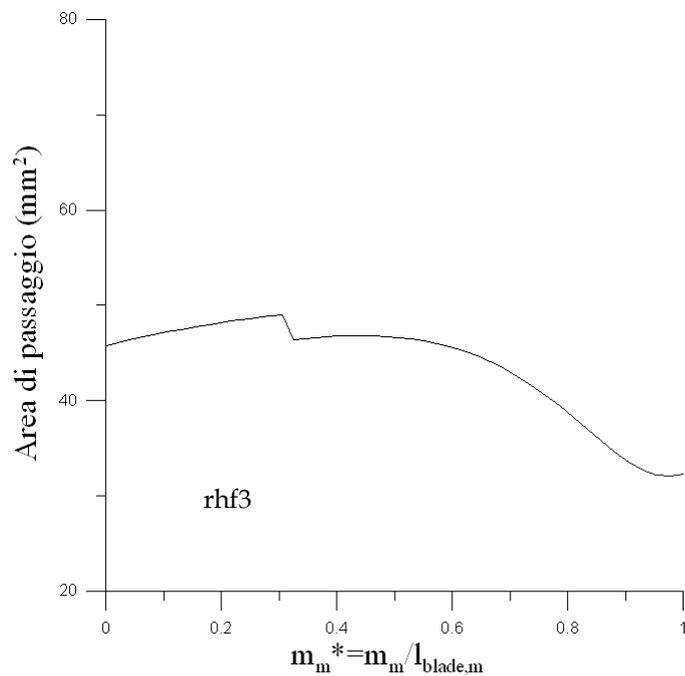


Figura 2. 25 – Sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - td04



**Figura 2. 26 - sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - gtor**



**Figura 2. 27 - sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana adimensionalizzata - rhf3**

L'evidente discontinuità negli andamenti delle aree delle sezioni di passaggio è da imputare all'ingombro della pala splitter.

---

Il modello consente di descrivere opportunamente la conformazione dei bordi d'ingresso e d'uscita dalla girante; in particolare, è possibile assegnare un profilo rettilineo oppure definire due angoli caratteristici per i due bordi al fine di imporre un'opportuna curvatura. Tale caratteristica offerta dalla procedura proposta solitamente non è utilizzata per la definizione della geometria delle giranti del compressore in quanto le stesse presentano bordi lineari. Viceversa, profili curvilinei vengono impiegati per definire i bordi d'ingresso e d'uscita delle pale delle giranti delle turbine. Maggiori dettagli circa l'assegnazione di tali caratteristiche geometriche verranno pertanto forniti nel paragrafo riguardante la turbina.

## 2.5 Tabella riepilogativa geometria compressore

Nella seguente tabella sono riportate tutte le grandezze necessarie al modello proposto per la caratterizzazione della geometria del compressore; sono altresì riportati i valori numerici di tali grandezze relativi ai tre gruppi di sovralimentazione considerati.

		td04	gtor	rhf3
<b>Condotto di aspirazione</b>				
$D_0 - L_0$	Diametro - Lunghezza	47.2 ÷ 28.8	44.8 ÷ 70.3	44.2 ÷ 51.0
<b>Girante</b>				
$Z$	Numero di pale	8	12	10
$\Delta x$	Estensione assiale	16.2	14.5	16.2
$D_{1h} - D_{1s}$	Diametro di hub e shroud all'ingresso	13.1 ÷ 36.0	10.6 ÷ 34.1	9.0 ÷ 30.0
$D_2$	Diametro all'uscita	51.0	46.0	40.0
$\varphi_{1h} - \varphi_{1s}$	Angoli costruttivi di hub e shroud all'ingresso	30° ÷ 53°	25.0 ÷ 58°	30° ÷ 47°
$\varphi_{2h} - \varphi_{2s}$	Angoli costruttivi di hub e shroud all'uscita	43° ÷ 40°	45° ÷ 42°	49° ÷ 39°
$\gamma_{1h} - \gamma_{1s}$	Angoli di rotazione di hub e shroud	0.0° ÷ 0.0°	0.0° ÷ 0.0°	0.0° ÷ 0.0°
$\gamma_{2h} - \gamma_{2s}$	Angoli di rotazione di hub e shroud	67.0° ÷ 58.0°	47.0° ÷ 41°	60.0° ÷ 54.0°
$b$	Altezza della pala all'uscita	3.5	3.1	3.6
$x_{splitter}$	Ascissa di inizio della pala splitter	5.0	5.4	6.8
$s_p$	Spessore della pala	0.5	0.6	0.6
$h_{gap}$	Spessore del gioco tra girante e cassa	0.3	0.3	0.3

<b>Diffusore liscio</b>				
$D_3$	Diametro di uscita	80.0	91.1	75.4
<b>Voluta</b>				
$D_4$	Diametro uscita	33.5	33.6	32.9
<b>Cono</b>				
$D_{con}$	Diametro uscita	53.0	33.3	33.9
$L_{con}$	Lunghezza	162.2	120.0	120.0
<b>Condotto di mandata</b>				
$L_5$	Lunghezza	300.0	300.0	300.0

Tabella 2. 1- Dati caratterizzazione geometrica del compressore

## 2.6 Geometria complessiva turbina

Il modello della turbina comincia con il condotto di aspirazione (F0) cui segue un cono convergente e la voluta (F1). Nel caso di turbina regolata mediante Waste-Gate (Waste Gate Turbine - WGT), la voluta è collegata alla girante (F3) mediante un condotto convergente di altezza costante caratterizzato da una modesta estensione radiale (F2); per quanto riguarda la turbina a geometria variabile (Variable Nozzle Turbine - VNT), essa presenta a valle della voluta il distributore palettato (F2). Il modello termina con il condotto di mandata (F4) e, nel caso di WGT, presenta un condotto finale (F5) nel quale si realizza il mescolamento tra i gas che sono espansi in turbina e quelli che hanno attraversato la valvola di by-pass.

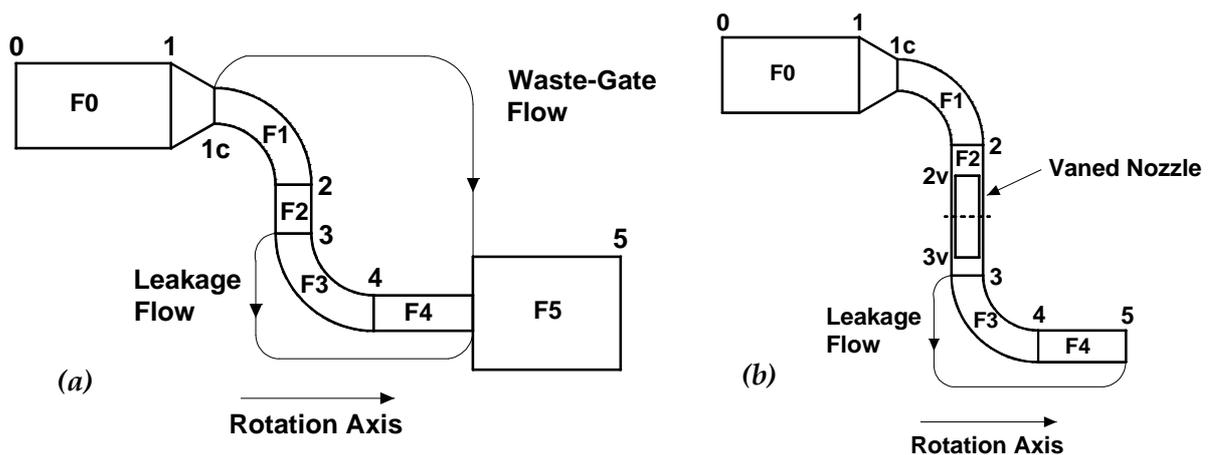


Figura 2. 28 - Modello monodimensionale turbina - Waste-Gate (a) - Geometria variabile (b)

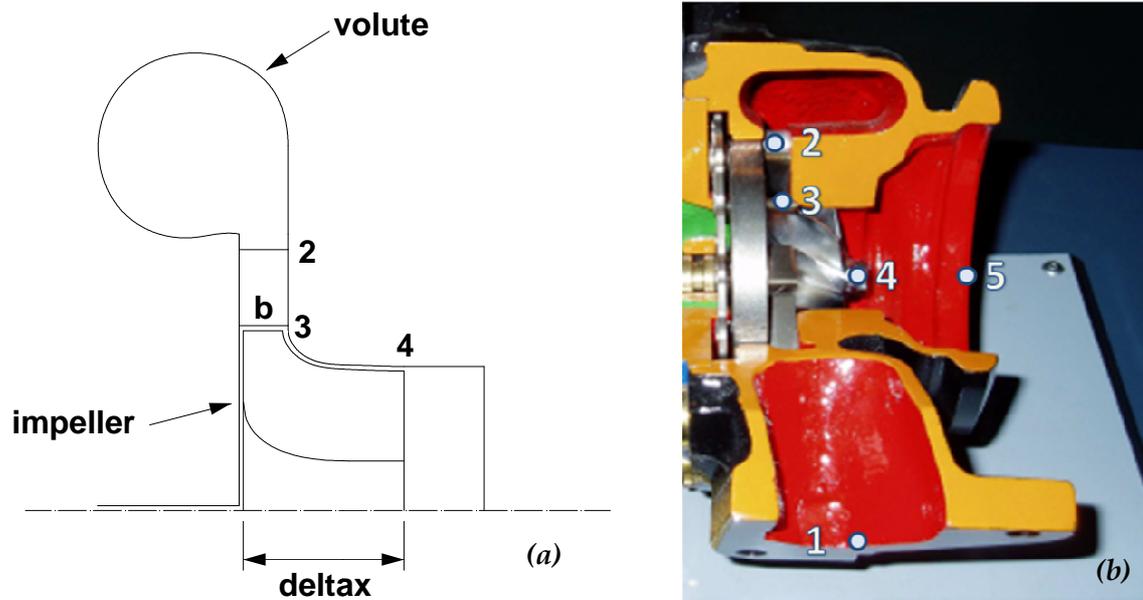


Figura 2. 29 - Schema e illustrazione sezione turbina (a) - Sezioni caratteristiche (b)

Il condotto di aspirazione è schematizzato come un condotto a sezione costante ad asse rettilineo (lunghezza  $L_{asp}$ ); la voluta è preceduta da un cono convergente (lunghezza  $L_{con}$ , diametro ingresso  $D_{con}$ ) ed è descritta come un condotto dal diametro variabile linearmente caratterizzato da una curvatura non nulla. La sezione d'ingresso è pari a quella d'uscita del cono (diametro  $D_{vin}$ ), mentre quella d'uscita è posta pari a quella d'ingresso dello statore (diametro  $D_2$ ).

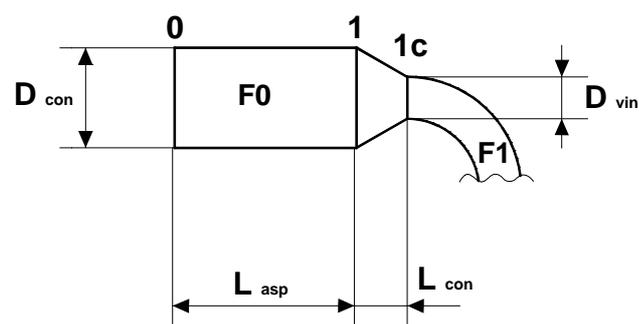


Figura 2. 30 - Dimensioni caratteristiche ingresso turbina

Come già accennato, nel caso di turbina a geometria variabile, nel modello è inclusa la schematizzazione della palettatura statorica; la stessa definisce una serie di condotti caratterizzati da un'altezza costante, ma da sezione decrescente a causa della

conformazione delle pale. Maggiori dettagli circa la schematizzazione della girante e del distributore palettato verranno forniti nei paragrafi ad essi dedicati. Il modello termina con un condotto di mandata ad asse rettilineo (diametro  $D_4$ , lunghezza  $L_4$ ) e, nel caso di una WGT, presenta un'ulteriore condotto caratterizzato da un diametro maggiore (diametro  $D_5$ , lunghezza  $L_5$ ).

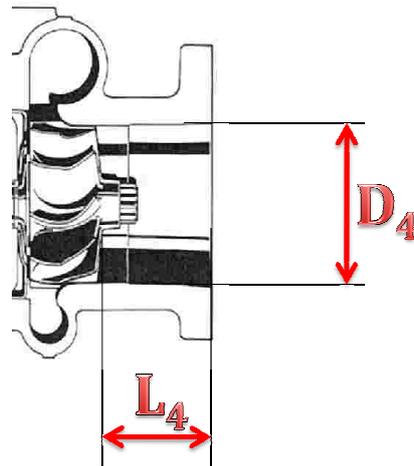


Figura 2. 31 - Dimensioni caratteristiche condotto mandata

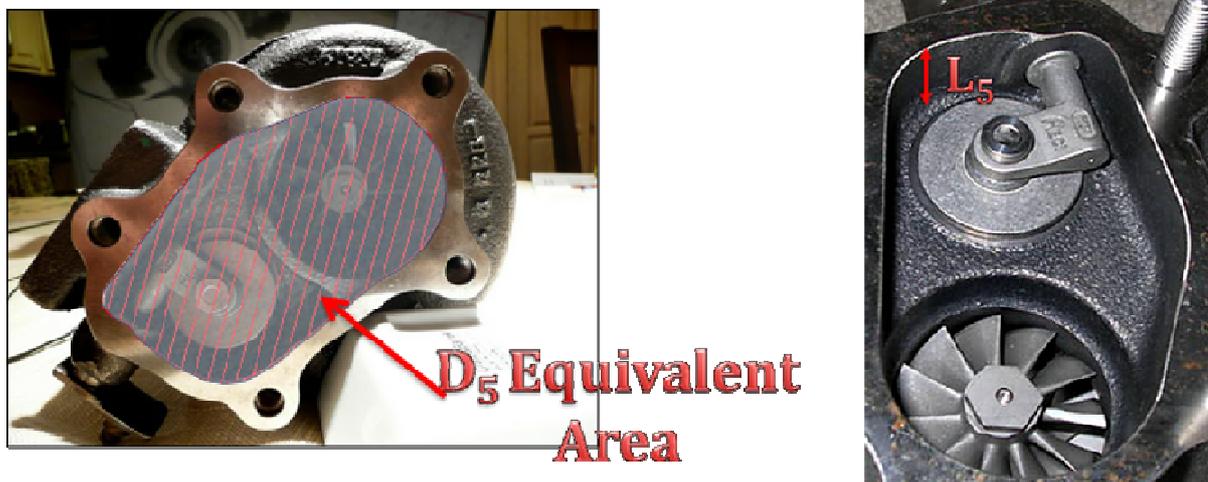


Figura 2. 32 - Dimensioni caratteristiche condotto Waste-Gate

## 2.7 Geometria girante turbina

La procedura impiegata per la ricostruzione della geometria della girante della turbina è del tutto analoga a quella vista per il compressore. Le dimensioni lineari ed angolari necessarie alla procedura sono illustrate in figg. 2.33 - 2.35.

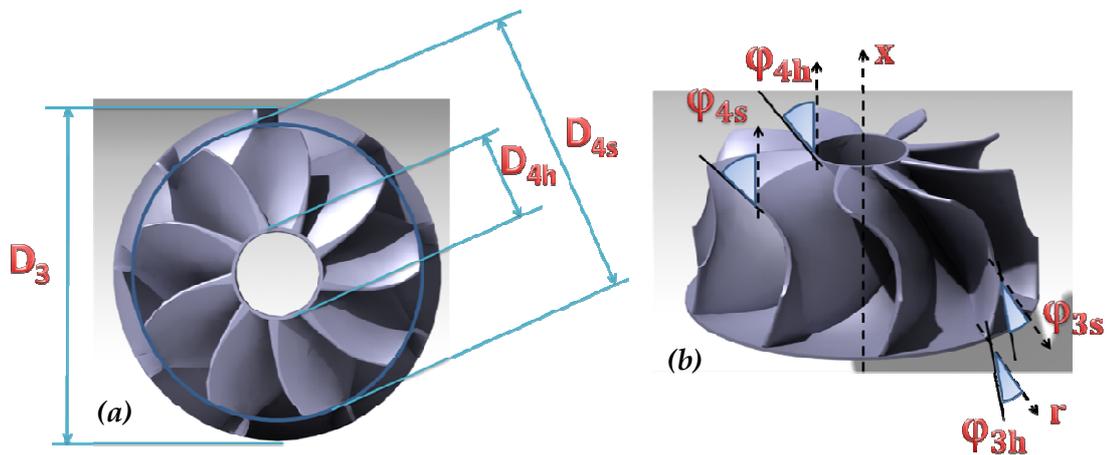


Figura 2. 33 - Dimensioni lineari (a) ed angolari (b) caratteristiche girante turbina

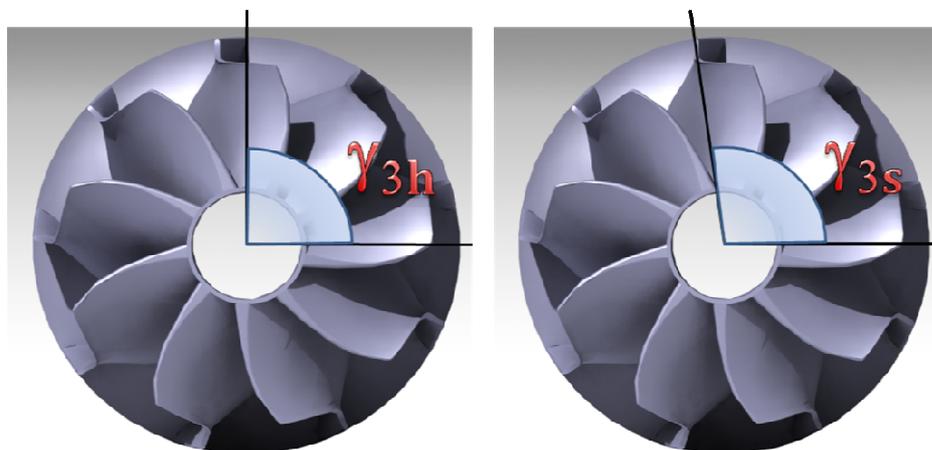


Figura 2. 34 - Angolo pala ingresso hub e shroud

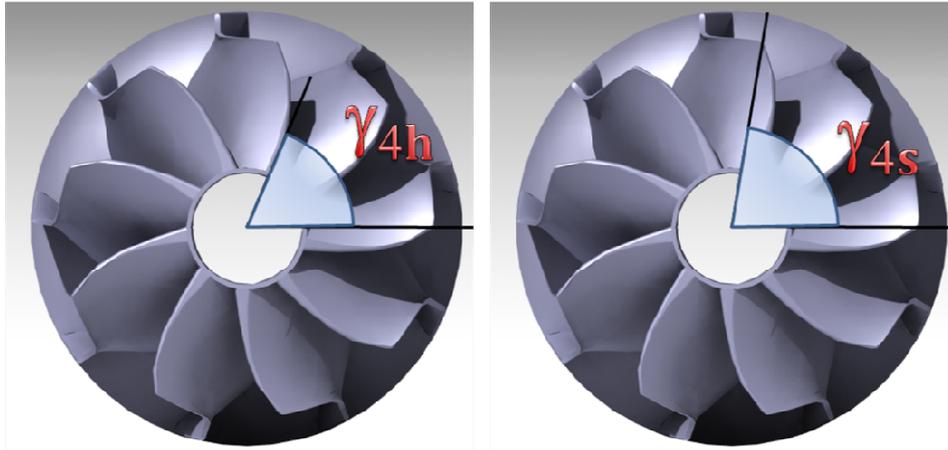


Figura 2. 35 - Angolo pala uscita hub e shroud

Una delle differenze risiede nella modellazione dello spessore della pala; in particolare, per il compressore lo stesso viene assunto costante, mentre per la turbina può essere assegnato secondo tre possibili approcci. Il primo e più semplice si basa ancora una volta sull'ipotesi di spessore uniforme della pala. Un'altra possibilità è quella di imporre una variazione dello spessore secondo una cubica in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana. In tal caso, vengono assegnati i valori dello spessore all'ingresso, nella posizione intermedia ed all'uscita della girante sia per l'hub ( $spg3s$ ,  $spgxs$ ,  $spg4s$ ) che per lo shroud ( $spg3h$ ,  $spgxh$ ,  $spg4h$ ) (figg. 2.36 e 2.37).

La terza possibilità è quella di definire per il solo hub una distribuzione più complessa ottenuta dalla combinazione di tre funzioni: una polinomiale di secondo grado per la parte centrale raccordata senza discontinuità (anche sulla derivata prima) a due funzioni esponenziali. Tale descrizione dell'andamento dello spessore richiede la definizione di ulteriori parametri: la posizione del punto di massimo spessore ( $xpgxh$ ) e la semiampiezza del dominio della ricostruzione secondo una polinomiale ( $dxspgh$ ) (fig. 2.38).

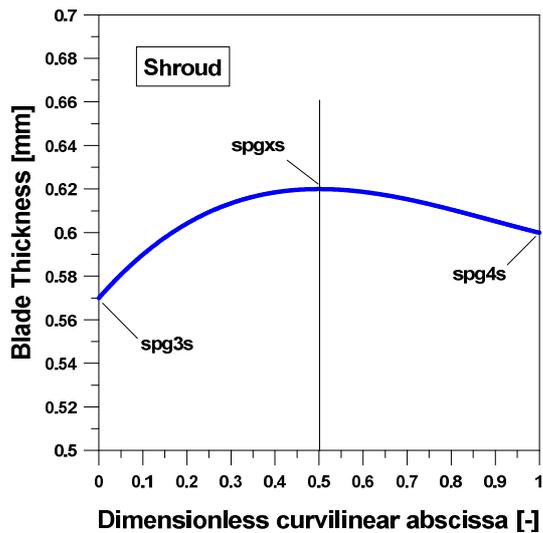


Figura 2. 36 - Spessore pala vs. ascissa curvilinea meridiana allo shroud; polinomio secondo grado

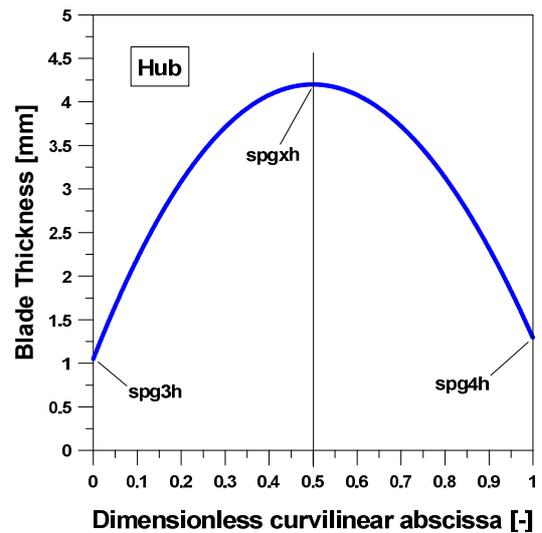


Figura 2. 37 - Spessore pala vs. ascissa curvilinea meridiana all'hub; polinomio secondo grado

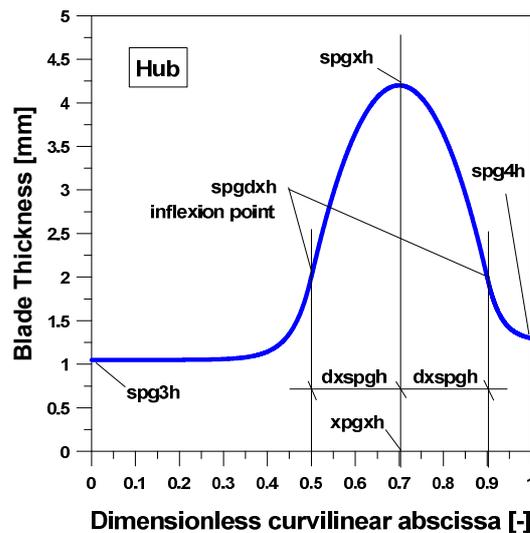


Figura 2. 38 - Spessore pala vs. ascissa curvilinea meridiana all'hub; ricostruzione secondo una polinomiale + 2 funzioni esponenziali

Per quanto riguarda la caratterizzazione geometrica della girante di una turbina risulta altresì opportuno, al fine di meglio approssimare la geometria reale, conferire ai bordi d'ingresso ed uscita un'opportuna curvatura. Nel primo caso, è necessario descrivere la variazione dell'angolo di rotazione in funzione della posizione assiale  $x$  ( $\gamma = \gamma(x)$ ), nel secondo, si deve assegnare il legame tra l'angolo di

rotazione e la posizione radiale  $r(\gamma = \gamma(r))$ . A tal fine, si è proceduto in maniera analoga a quanto visto per il legame tra l'angolo di rotazione  $\gamma$  e l'ascissa curvilinea meridiana  $m$ ; in particolare, si è assegnata una relazione di tipo polinomiale (polinomio di terzo grado) tra l'angolo di rotazione  $\gamma$  e, a seconda che si consideri il bordo d'ingresso o quello di uscita, la variabile spaziale  $x$  o  $r$ .

Per quanto concerne il bordo d'ingresso, tramite l'imposizione di opportune condizioni al contorno, è possibile verificare che il valore dei coefficienti della funzione polinomiale  $\gamma = \gamma(x)$  dipende esclusivamente dagli angoli formati dalla tangente alla pala con la direzione assiale,  $\Psi_{3h}$  e  $\Psi_{3s}$  (fig. 2.39), e dall'altezza della pala  $b$  (fig. 2.29a).

Analogamente è facile provare che la funzione  $\gamma = \gamma(r)$ , che definisce la curvatura del bordo d'uscita, è identificata una volta assegnati gli angoli formati dalla tangente alla pala con la direzione radiale  $\Psi_{4h}$  e  $\Psi_{4s}$  (fig. 2.40) e l'altezza della pala  $(D_{4s} - D_{4h})/2$  (fig. 2.33a).

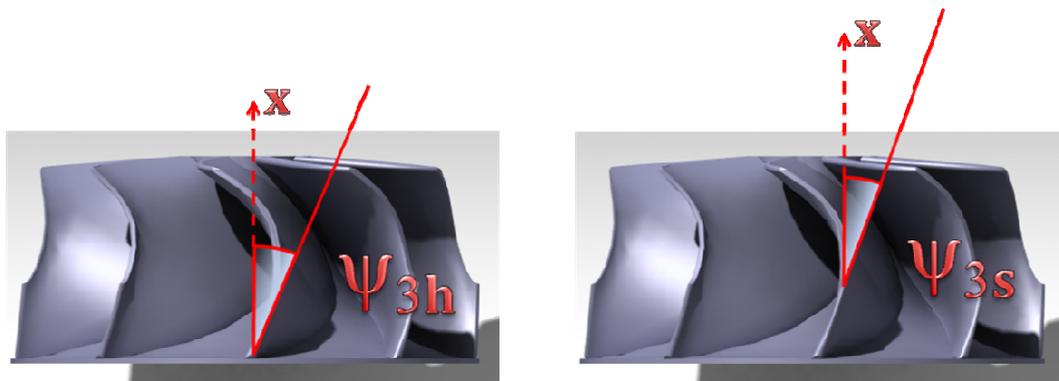


Figura 2. 39 - Angolo bordo ingresso hub e shroud

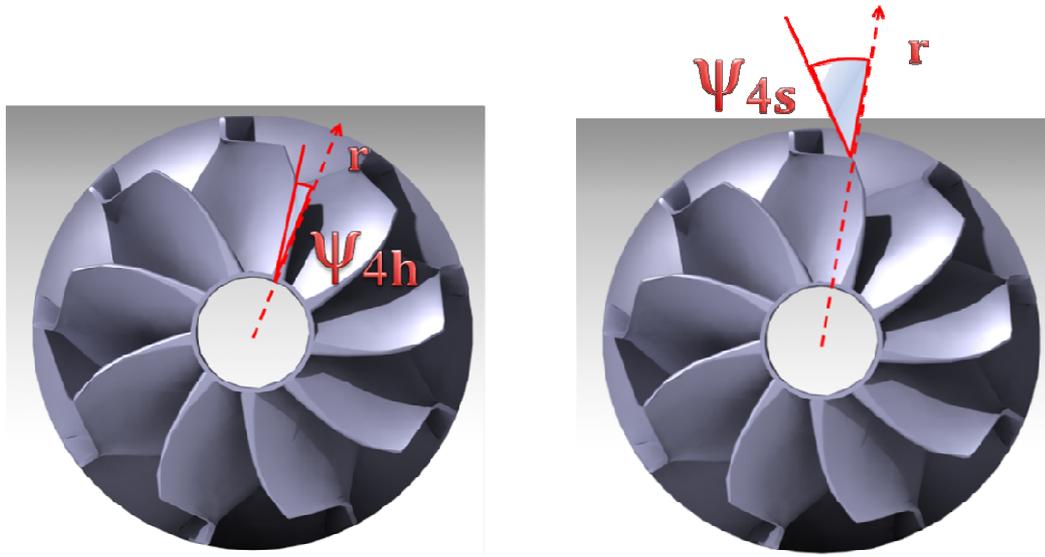


Figura 2. 40 - Angolo bordo uscita hub e shroud

Grazie al modulo geometrico sono state riprodotte le geometrie delle giranti delle turbine per i tre turbocompressori considerati (figg. 2.41 - 2.46).



Figura 2. 41 - Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista pianta td04

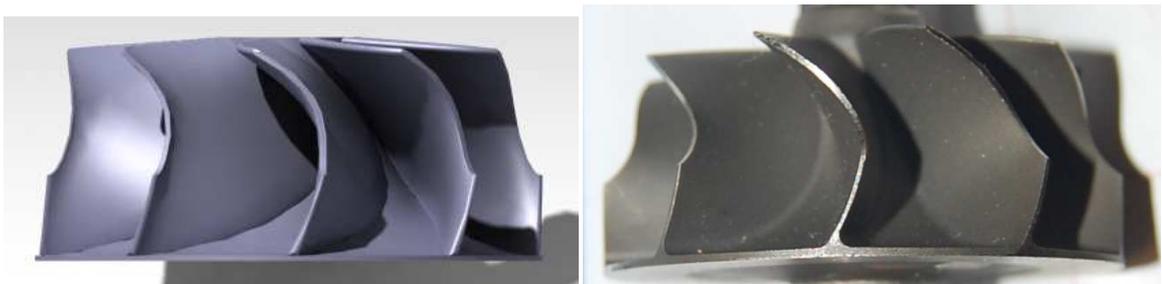
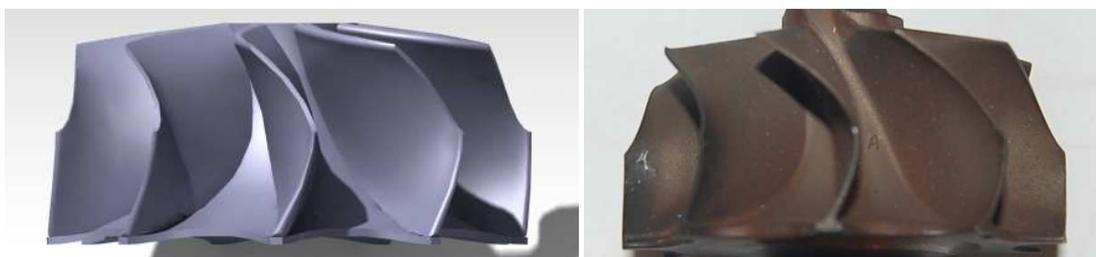


Figura 2. 42 - Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista laterale td04



**Figura 2. 43 – Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista pianta gtr**



**Figura 2. 44 – Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista laterale gtr**



**Figura 2. 45 – Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista pianta rhf3**

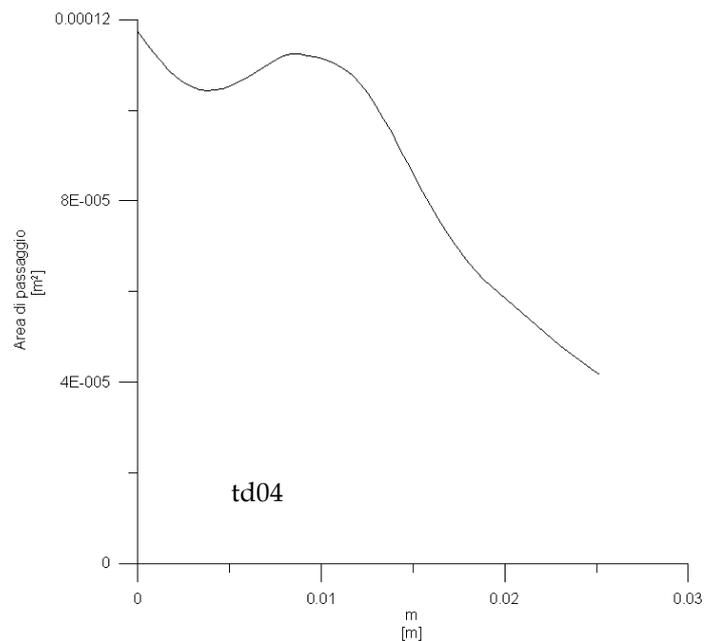


**Figura 2. 46 – Confronto tra riproduzione CAD e geometria reale girante - Vista laterale rhf3**

Come si può notare, l'accordo tra le riproduzioni al CAD e le geometrie reali è molto soddisfacente per i tre casi considerati. Nel caso di gtor ed rhf3, al fine di migliorare l'accordo con la controparte reale, è stata necessaria, una volta riprodotta la girante, una fase di affinamento della geometria mediante gli strumenti di modellazione messi a disposizione al CAD impiegato.

## 2.8 Area di passaggio e perimetro bagnato turbina

La valutazione dell'area di passaggio e del perimetro bagnato avviene secondo una procedura identica a quella descritta nel caso del compressore. Gli andamenti valutati per le tre giranti considerate sono riportati nelle figg. 2.47 - 2.49.



**Figura 2. 47 - Sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana- td04**

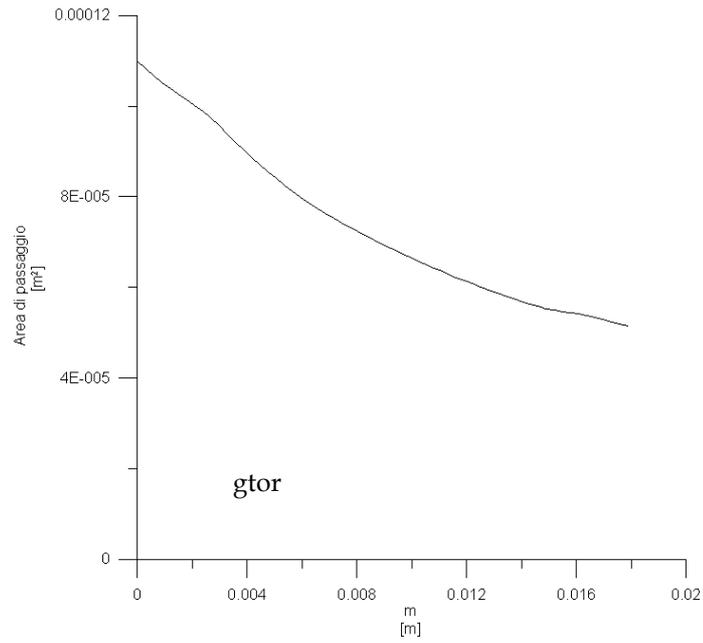


Figura 2. 48 - Sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana - gtor

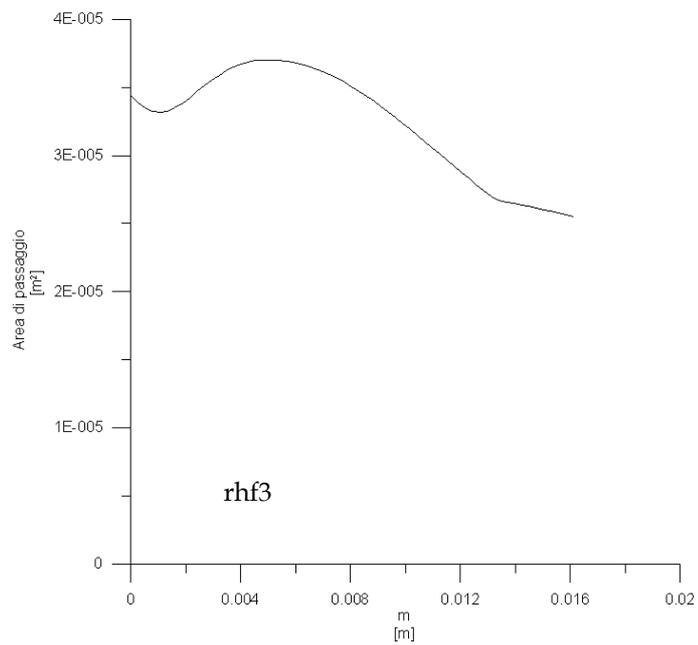


Figura 2. 49 - Sezione di passaggio in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana- rhf3

## 2.9 Geometria distributore palettato turbina

Come precedentemente accennato, per una WGT, la voluta è seguita da un breve condotto di altezza costante e convergente; nel caso di una VNT, a valle della voluta è presente il distributore palettato. Lo stesso è costituito da un insieme di pale la cui conformazione definisce un condotto convergente di altezza costante. Il modulo geometrico del modello della turbina include un sottomodulo dedicato alla ricostruzione della geometria della palettatura statorica al fine di valutare l'andamento della sezione di passaggio e del perimetro bagnato in funzione dell'ascissa curvilinea al variare dell'assetto delle pale.

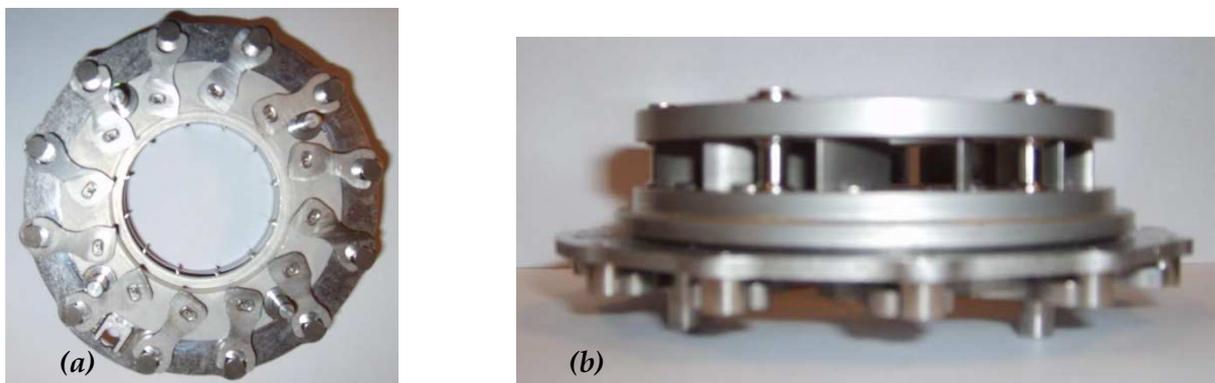


Figura 2. 50 - Vista laterale e frontale distributore palettato

Ciascun punto della linea media di una pala statorica è individuabile tramite due coordinate spaziali. Nel caso specifico, essendo il sistema a simmetria cilindrica, è conveniente introdurre un sistema di coordinate polari; in questo modo, ogni punto è identificabile tramite l'assegnazione del raggio  $r$  e dell'anomalia  $\gamma$ . La geometria della pala risulta pertanto univocamente definita se è noto il legame  $\gamma = \gamma(r)$ . Ancora una volta si è scelto di impiegare un polinomio di terzo grado per descrivere tale funzione. Imponendo le condizioni al contorno, analogamente a quanto visto nel caso della girante, è possibile ricavare i quattro coefficienti del polinomio. Nel caso specifico, le grandezze geometriche necessarie a definire tali coefficienti sono gli angoli di rotazione,  $\gamma_{2v}$  e  $\gamma_{3v}$  (fig. 2.52a), gli angoli di pala,  $\varphi_{2v}$  e  $\varphi_{3v}$  (fig. 2.52b), ed i diametri,  $D_{2v}$  e  $D_{3v}$  (fig. 2.51), all'ingresso ed all'uscita. I dati geometrici appena

elencati sono supposti rappresentativi di una posizione di apertura di riferimento che definisce, pertanto, la configurazione standard per la palettatura statorica.

La procedura, però, è in grado di ricostruire il profilo della pala statorica anche per condizioni di apertura differenti da quella standard. A tal fine, risulta necessaria la misura del diametro che individua la posizione delle cerniere intorno a cui ruotano le pale statoriche ( $D_{cer}$  in fig. 2.51). Sulla base dei dati geometrici finora introdotti, il codice valuta automaticamente le configurazioni di massima e minima apertura dello statore individuate, rispettivamente, come la condizione per cui le pale invadono la voluta e quella per cui due pale consecutive arrivano al contatto puntuale. La procedura richiede in input, anziché l'angolo di rotazione della palettatura rispetto alla posizione standard, l'assegnazione della percentuale di apertura rispetto alle due configurazioni limite prima descritte.

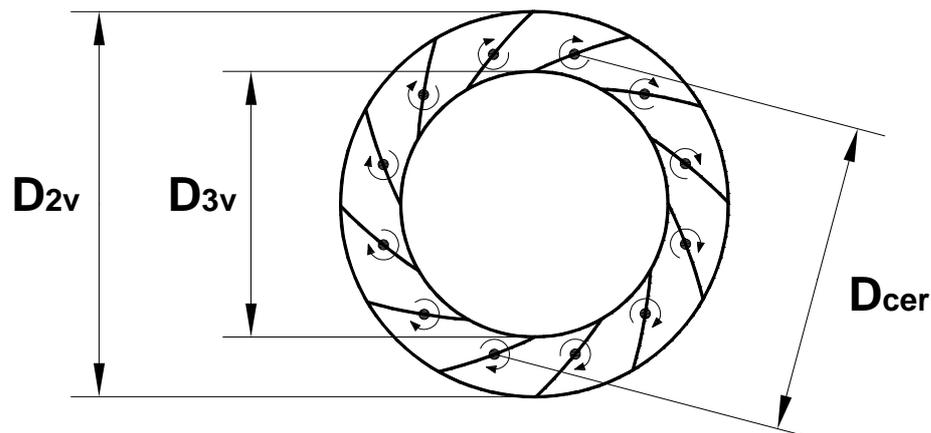


Figura 2. 51 - Diametri caratteristici distributore palettato

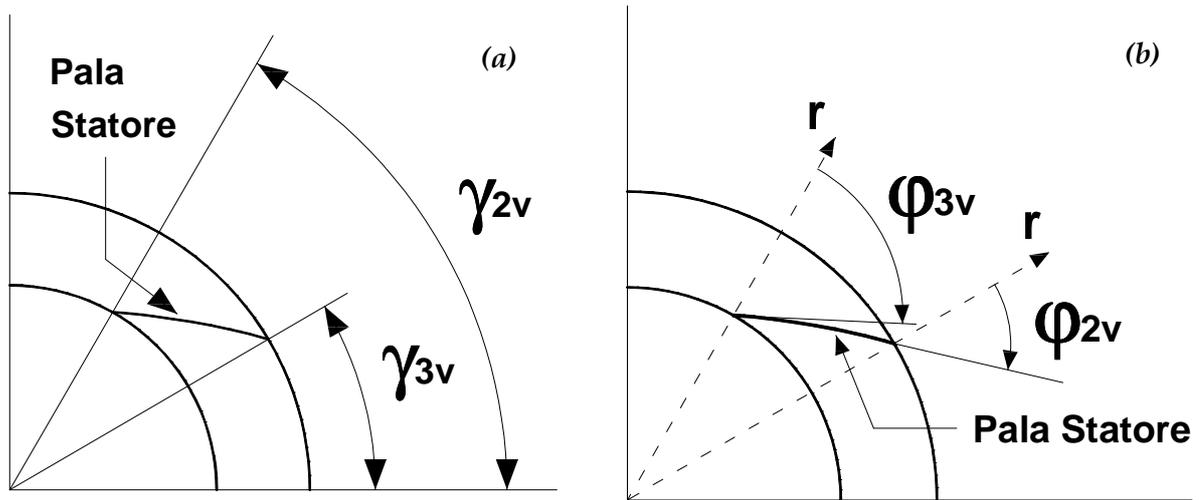


Figura 2.52 - Angoli caratteristici distributore palettato - angoli rotazione (a) - angoli pala (b)

L'algoritmo impiegato per il calcolo dell'area e del perimetro bagnato della sezione di passaggio normale alla linea media del condotto statorico è perfettamente analogo a quello impiegato nel caso del condotto interpalare rotorico.

## 2.10 Tabella riepilogativa geometria turbina

Nella seguente tabella sono riportate tutte le grandezze necessarie al modello proposto per la caratterizzazione della geometria della turbina relative ai tre gruppi di sovralimentazione considerati. Come si nota, in tal caso è necessaria la definizione di un maggior numero di parametri; ciò è da imputare al maggiore dettaglio con cui viene descritta la geometria della girante in termini di forma dei bordi all'ingresso ed all'uscita e di spessore della pala. Inoltre, vanno considerati anche le ulteriori grandezze impiegate per schematizzare il distributore palettato.

		td04	gtor	rhf3
<b>Condotto di aspirazione</b>				
$L_{asp}$	Lunghezza	10.0	10.0	10.0
<b>Cono</b>				
$D_{con}$	Diametro ingresso	39.3	42.5	46.5
$L_{con}$	Lunghezza	30.0	78.7	69.0
<b>Voluta</b>				
$D_{vin}$	Diametro ingresso	36.0	30.0	30.0
<b>Statore</b>				
$D_2$	Diametro ingresso	83.5	40.7	37.6
<b>Distributore palettato</b>				
$Z_n$	Numero di pale	12		
$D_{2v}$	Diametro ingresso	74.0		
$D_{3v}$	Diametro uscita	47.8		
$D_{cer}$	Diametro cerniera	64.0		
$\varphi_{2v}$	Angolo costruttivo ingresso	-40.0°		
$\varphi_{3v}$	Angolo costruttivo uscita	-57.0°		
$\gamma_{2v}$	Angolo rotazione ingresso	20.0°		

$\gamma_{3v}$	Angolo rotazione uscita	46.0°		
$b_n$	Altezza pala	7.7		
$spn2v$	Spessore pala ingresso	1.1		
$spnx$	Spessore pala punto intermedio	2.46		
$spn3v$	Spessore pala uscita	0.55		
<b>Girante</b>				
$Z$	Numero pale	9	9	11
$\Delta x$	Estensione assiale	20.4	17.3	14.0
$D_3$	Diametro ingresso	47.1	39.0	31.98
$D_{4h} - D_{4s}$	Diametro di hub e shroud uscita	13.2 ÷ 41.0	11.0 ÷ 34.0	11.36 ÷ 29.0
$\varphi_{3h} - \varphi_{3s}$	Angoli costruttivi hub e shroud ingresso	0.0° ÷ 0.0°	0.0° ÷ 0.0	0.0° ÷ 0.0°
$\varphi_{4h} - \varphi_{4s}$	Angoli costruttivi hub e shroud uscita	63.0 ÷ 68.0°	31.0° ÷ 59.0°	57.0° ÷ 66.0°
$\gamma_{3h} - \gamma_{3s}$	Angoli di rotazione di hub e shroud ingresso	31.8° ÷ 38.0°	27.0° ÷ 36.0°	38.0° ÷ 42.0°
$\gamma_{4h} - \gamma_{4s}$	Angoli di rotazione di hub e shroud uscita	0.0° ÷ 13.0°	0.0 ÷ 10.0	0.0° ÷ 12.0°
$\Psi_{3h} - \Psi_{3s}$	Angoli curvatura bordo pala di hub e shroud ingresso	29.0° ÷ 14.0°	29.0 ÷ 0.0	14.0° ÷ 7.0°
$\Psi_{4h} - \Psi_{4s}$	Angoli curvatura bordo pala di hub e shroud uscita	0.0° ÷ 34.0°	0.0 ÷ 16.0°	15.0° ÷ 18.0°
$b$	Altezza della pala ingresso	7.5	8.5	4.0
<b>Spessore pala girante</b>				
$spg3h, spg3s$	Spessore ingresso hub e shroud	1.05 ÷ 0.57	1.0 ÷ 0.5	0.7 ÷ 0.43
$spg4h, spg4s$	Spessore uscita hub e shroud	1.3 ÷ 0.62	1.4 ÷ 0.45	0.9 ÷ 0.5
$spgxh, spgxs$	Spessore punto intermedio hub e shroud	4.2 ÷ 0.6	4.1 ÷ 0.4	2.5 ÷ 0.55

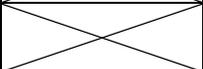
$xspg_xh$	Posizione adimensionalizzata punto intermedio hub	0.7	0.65	0.7
$dxspg_h$	Distanza adim. punto intermedio / punto di flesso	0.2	0.25	0.2
$spgdx_h$	Spessore al punto di flesso	2.0	2.8	3.0
<b>Condotto di mandata</b>				
$L_4$	Lunghezza	48.1	14.5	10.0
$D_4$	Diametro	45.4	34.5	31.2
<b>Condotto Waste-Gate</b>				
$L_5$	Lunghezza		61.3	21.6
$D_5$	Diametro		72.0	52.4

Tabella 2. 2 - Dati caratterizzazione geometrica della turbina

#### 3.1 Introduzione

In questo capitolo verranno introdotte le equazioni del moto nell'ipotesi di flusso tridimensionale instazionario comprimibile; saranno poi specializzate al caso monodimensionale mettendo in evidenza le ipotesi che soggiacciono a tale assunzione.

Saranno altresì discusse le equazioni monodimensionali che descrivono il moto all'interno di condotti rotanti ed, in fine, quelle da considerare nel caso di moto bidimensionale assialsimmetrico (moto quasi-1D).

Per ciascun caso analizzato, si introdurranno nelle equazioni i termini inerenti le perdite per attrito e lo scambio termico unitamente alle correlazioni impiegate per fornirne una stima.

#### 3.2 Ipotesi del modello fluidodinamico ed introduzione alle equazioni del moto

Ogni fluido, come noto, è costituito da particelle elementari, le molecole, che interagiscono tra loro e con quelle costituenti i solidi seguendo schemi e traiettorie non descrivibili secondo un approccio deterministico. Nelle comuni applicazioni, comunque si consideri un volume di fluido di riferimento, lo stesso conterrà un numero molto elevato di molecole per il cui studio sono solitamente impiegati metodi statistici atti alla determinazione dell'effetto risultante delle mutue interazioni molecolari. Tale disciplina, comunemente nota come "Teoria cinetica dei gas",

sebbene in grado di contribuire alla comprensione dei fenomeni fisici e termodinamici cui sono sottoposti i fluidi, sia liquidi che areiformi, non è in grado di fornire risposte ingegneristiche a problemi di interesse pratico quali, ad esempio, il progetto fluidodinamico di una turbomacchina. Il comunque elevato numero di molecole contenute in un volume di riferimento, per quanto piccolo, permette tuttavia di considerare il fluido come un *continuo*, per il quale ha senso definire grandezze macroscopiche quali la densità, la pressione, la temperatura, la velocità, lo sforzo superficiale; tali grandezze possono variare da punto a punto nel campo fluido ed essere descritte da funzioni (scalari, vettoriali o tensoriali) cui è lecito applicare i risultati dell'analisi matematica e del calcolo infinitesimale. In tale ambito è ovvio che, quando si considera un volume elementare di fluido associato ad un punto nello spazio, lo stesso, benché supposto infinitesimo da un punto di vista matematico, dovrà essere abbastanza grande da contenere un numero di molecole sufficiente a rendere indipendente la definizione delle proprietà termofluidodinamiche dal numero di molecole stesse. A tale scopo, è possibile considerare un numero adimensionale definito come il rapporto tra il cammino medio molecolare ( $\lambda$ ) ed una lunghezza caratteristica ( $L$ ) del problema fluidodinamico in esame, denominato numero di Knudsen:

$$Kn = \lambda / L \quad (3.1)$$

Se  $Kn$  è minore di 0,01 il fluido può essere considerato un continuo. Per un'immediata valutazione di questo numero, lo si può correlare al numero di Reynolds ( $Re$ ) ed a quello di Mach ( $Ma$ ) come proposto in [18,19]:

$$Kn = 1.26 \sqrt{\gamma} (Ma / Re) \quad (3.2)$$

Riassumendo, la fluidodinamica classica si fonda sull'ipotesi del continuo per costituire un insieme di leggi e relazioni ottenute esprimendo in forma matematica i principi fondamentali della fisica, quali, ad esempio, quelli di conservazione della materia e dell'energia o della quantità di moto (la legge di Newton o secondo

principio della dinamica). Tale approccio, di tipo deterministico, è giustificato, a posteriori, dalla concordanza delle previsioni che esso fornisce con i risultati sperimentali e, teoricamente, oltre che dalla razionalità dell'ipotesi di continuo su cui si basa, dal fatto che, considerando gli effetti globali delle azioni molecolari mediate statisticamente, si riottengono le stesse equazioni di conservazione ottenute considerando il fluido come continuo [18].

Nell'ambito della fluidodinamica classica e, quindi, della validità dell'ipotesi del continuo, esistono due tipici approcci, quello lagrangiano o materiale e quello euleriano o locale. Il primo studia una specifica massa di fluido (elementare o finita) seguendone l'evoluzione nel tempo e nello spazio. Il secondo analizza, invece, la storia temporale delle proprietà della particella elementare di fluido transitante in un'assegnata posizione nello spazio. Si basa, pertanto, sul concetto di campo (scalare, vettoriale o tensoriale) che, per la generica proprietà  $g$  del fluido, restituisce il valore  $g = g(\underline{r}, t)$  assunto dalla particella che nell'istante  $t$  occupa il punto dello spazio individuato dal vettore posizione  $\underline{r}$ . Entrambi gli approcci possono essere applicati, come si è già accennato, ad una massa di fluido (o ad un volume di controllo) sia finita che elementare, per ottenere, rispettivamente, le equazioni di conservazione in forma integrale o differenziale.

Le prime solitamente esprimono legami tra grandezze globali, mentre le seconde forniscono relazioni locali (equazioni differenziali alle derivate parziali) tra le differenti proprietà termodinamiche e di flusso (pressione, temperatura, velocità ecc.) nei diversi punti del campo fluido considerato.

### 3.3 Le equazioni del moto dal teorema del trasporto o di Reynolds

Le equazioni di conservazione per un fluido qualsiasi in moto tridimensionale non stazionario possono essere ricavate riferendosi, come detto, sia ad una quantità di fluido ben definita (elementare o finita), seguendola nel suo moto (approccio lagrangiano), sia ad un volume di controllo fisso nello spazio racchiuso da una superficie (chiusa), detta superficie di controllo (approccio euleriano). Facendo coincidere la superficie di controllo con quella che racchiude una ben definita massa

di fluido nell'istante generico  $t$  e legando le variazioni delle proprietà di tale fluido (massa, energia, ecc.) in un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$  alle variazioni delle stesse grandezze fisiche associate al volume interno alla superficie di controllo, nonché al flusso netto di tali grandezze fisiche uscente dalla stessa, si può passare da un approccio all'altro.

Indicando con  $G$  una generica grandezza estensiva e con  $g$  la relativa grandezza specifica intensiva riferita alla massa, è noto come la derivata sostanziale  $Dg/Dt$  per una massa di controllo (MC) infinitesima si possa esprimere come:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla g \quad (3.3)$$

in cui  $g$  e le componenti del vettore velocità  $\underline{v}$  sono da valutarsi come i valori assunti dal campo di  $g = g(\underline{r}, t)$  e  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t)$  in corrispondenza del punto dello spazio occupato dalla predetta massa di controllo elementare, individuato dal vettore posizione  $\underline{r}$  nell'istante  $t$ . L'espressione analoga alla (3.4) per una MC finita è:

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho g dV + \int_{S_0} \rho g \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (3.4)$$

in cui  $V_0$  rappresenta il volume (di superficie  $S_0$ ) occupato dalla MC all'istante  $t_0$ , in genere diverso dal volume  $V$  (di superficie  $S$ ) occupato dalla stessa all'istante  $t = t_0 + \Delta t$ . La derivata sostanziale al primo membro si intende calcolata all'istante  $t_0$  e con  $\underline{n}$  si indica la normale uscente dalla superficie  $dS$ . Tale relazione, nota come teorema del trasporto o di Reynolds, consente di passare dalla descrizione lagrangiana a quella euleriana.

Grazie al teorema della divergenza o di Green, la (3.4) si può riscrivere come:

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho g dV + \int_{V_0} \text{div}(\rho g \underline{v}) dV \quad (3.5)$$

Nel seguito la (3.4) e la (3.5) saranno impiegate per ricavare, nel caso di flusso tridimensionale instazionario e comprimibile, le equazioni del moto.

### 3.3.1 Equazione di conservazione della massa

La variazione della massa nel tempo in una M.C. è nulla per definizione ed essendo in tal caso  $g = 1$ , la (3.4) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (3.6)$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_V \text{div}(\rho \underline{v}) dV = 0 \quad (3.7)$$

la cui forma differenziale è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (3.8)$$

che tenendo conto della (3.3), può essere anche scritta come:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0 \quad (3.9)$$

### 3.3.2 Equazione di bilancio dell'energia

L'energia totale che compete al fluido racchiuso nel volume  $V$  si definisce come:

$$E^0 = \int_V \rho \left( e + v^2/2 + |g|z \right) dV = \int_V \rho e^0 dV \quad (3.10)$$

in cui  $v^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$  e  $z$  è la coordinata avente la direzione dell'accelerazione di gravità e verso ad essa opposto. L'energia totale specifica è pertanto:

$$e^0 = e + v^2/2 + |g|z \quad (3.11)$$

La (3.4) applicata all'energia totale si scrive:

$$\frac{DE^0}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e_t dV + \int_S \rho e^0 \underline{v} \cdot \underline{ndS} \quad (3.12)$$

L'equazione di bilancio dell'energia è:

$$\frac{DE^0}{Dt} = - \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} - \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{ndS} \quad (3.13)$$

in cui  $\underline{J}_q$  e  $\underline{J}_L$  sono, rispettivamente, i flussi di energia non legati al trasporto di massa, rispettivamente, nel modo calore e nel modo lavoro attraverso la superficie del sistema.

Introducendo l'entalpia specifica  $h = e + p/\rho$ , l'entalpia specifica totale  $h^0 = h + v^2/2 + |g|z$  ed il tensore degli sforzi  $\underline{\underline{\tau}}$  che, per definizione, è legato a  $\underline{J}_L$  dalla:

$$\underline{J}_L = - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} \quad (3.14)$$

e la cui parte dissipativa è  $\underline{\underline{\tau}}_d = \underline{\underline{\tau}} + p\underline{I}$ , la (3.9) diviene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e^0 dV + \int_S \rho h^0 \underline{v} \cdot \underline{ndS} + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} - \int_S (\underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{v}) \cdot \underline{ndS} = 0 \quad (3.15)$$

Il primo termine della (3.15) viene definito instazionario poiché rappresenta la variazione temporale dell'energia totale che compete al fluido che occupa il volume  $V$ , il secondo, invece, ingloba il flusso convettivo di energia ed il lavoro compiuto

dalle forze superficiali di pressione nell'unità di tempo, il terzo rappresenta il flusso di energia nella modalità calore. L'ultimo integrale rappresenta il lavoro delle forze superficiali non di pressione nell'unità di tempo. Tale termine tiene conto, oltre che del contributo delle forze superficiali di origine viscosa, anche dell'eventuale potenza scambiata con l'esterno mediante superfici mobili.

La forma differenziale della (3.15), ottenibile applicando il teorema della divergenza, è:

$$\frac{\partial(\rho e^0)}{\partial t} + \text{div}(\rho h^0 \underline{v}) + \text{div}(\underline{J}_q) - \text{div}(\underline{\tau}_d \cdot \underline{v}) = 0 \quad (3.16)$$

### 3.3.3 Equazione del bilancio della quantità di moto

L'equazione di bilancio della quantità di moto si ricava partendo dal secondo principio della dinamica applicato ad una MC. Tale principio, come ben noto, afferma che la variazione temporale della quantità di moto  $\int_V \rho \underline{v} dV$  è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sulla MC:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \underline{v} dV = F_{\text{esterne}} \quad (3.17)$$

La (3.17) è il bilancio di quantità di moto in termini lagrangiani ed è valida solo in un sistema di riferimento inerziale. Le forze esterne possono essere scomposte in forze di massa e forze superficiali:

$$F_{\text{esterne}} = \int_V \rho \underline{g} dV - \int_S \underline{f}_{\text{sup}} dS \quad (3.18)$$

in cui  $-\int_S \underline{f}_{\text{sup}} dS$  rappresenta la forza che agisce sull'area  $dS$  e, quindi,  $\int_S \underline{f}_{\text{sup}} dS$  va intesa come reazione del sistema sull'ambiente. Combinando ancora una volta la (3.4) con la (3.17) e (3.18) si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_S \rho \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{f}_{\text{sup}} dS = \int_V \rho \underline{g} dV \quad (3.19)$$

Il primo integrale è il termine instazionario e considera la variazione temporale di quantità di moto del fluido occupante il volume  $V$ , il secondo è quello convettivo e tiene conto della variazione di quantità di moto dovuta al flusso di massa attraverso la superficie del sistema. L'ultimo rappresenta una sorta di produzione di quantità di moto dovuto al campo gravitazionale. In fine, il terzo termine descrive il flusso di quantità di moto dovuto all'azione delle forze agenti sulla superficie di  $V$  non legate al trasporto di massa; la valutazione dello stesso è condotta, ancora una volta, tramite il tensore degli sforzi  $\underline{\tau}$  che è legato a  $\underline{f}_{\text{sup}}$  tramite la:

$$-\underline{f}_{\text{sup}} = \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} - p \underline{n} \quad (3.20)$$

Sostituendo nella (3.19) si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_S \rho \underline{v} \underline{v}_n dS + \int_S p \underline{n} dS - \int_S \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS = \int_V \rho \underline{g} dV \quad (3.21)$$

la cui forma differenziale è:

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v} \underline{v}) + \nabla p - \text{div}(\underline{\tau}_d) = \rho \underline{g} \quad (3.22)$$

### 3.4 Equazioni per flusso monodimensionale

L'ipotesi fondante di moto monodimensionale è quella che le derivate spaziali delle grandezze termofluidodinamiche siano nulle se calcolate lungo direzioni perpendicolari a quella principale del flusso. Equivalentemente, tali grandezze sono uniformi in una sezione normale alla direzione di riferimento. Supporre che il flusso reale possa essere descritto secondo tale assunzione implica rinunciare alla

descrizione dello strato limite viscoso che, viceversa, nella realtà è sempre presente indipendentemente dal valore del numero di Reynolds. Non considerare la presenza dello strato limite, pertanto, significa ignorare l'evolversi dei fenomeni ad esso legati come, ad esempio, la separazione della vena fluida. Altri fenomeni che non possono essere descritti sotto l'ipotesi di flusso monodimensionale sono, ad esempio, i flussi secondari, lo slip, il jet-wake, il mixing di correnti disuniformi, il cross flow nella voluta di un compressore, l'imbocco nel condotto di aspirazione etc. È necessario, pertanto, introdurre in un modello monodimensionale correlazioni empiriche e/o teoriche che riescano, se non a descrivere tali fenomeni, almeno a prevederne gli effetti complessivi.

Nel seguito saranno introdotte le condizioni che consentono di rendere ammissibile l'ipotesi di flusso monodimensionale in relazione allo sviluppo ed all'estensione dello strato limite. Per la condizione di aderenza, il fluido non può che assumere velocità nulla in corrispondenza delle pareti del condotto in cui fluisce; per tale ragione è evidente come non sia possibile soddisfare rigorosamente l'ipotesi di monodimensionalità ad eccezione del caso di flusso fermo. Se però il flusso è caratterizzato da un  $Re$  superiore ad un valore soglia, il profilo di velocità nella sezione normale al flusso è relativamente piatto nel cuore del condotto presentando una repentina diminuzione in prossimità delle pareti. In queste condizioni, purché si consideri come velocità del flusso quella media nella sezione normale, gli errori che si commettono nel supporre il flusso monodimensionale sono piuttosto bassi. Si parla in tal caso di flusso quasi-monodimensionale essendo il profilo di velocità non perfettamente piatto. La quasi-monodimensionalità continua ad essere soddisfatta anche nel caso di condotti a sezione variabile a patto che la variazione di sezione sia piuttosto contenuta.

Infine, si deve altresì verificare che la curvatura dell'asse del condotto (il cui reciproco rappresenta il raggio di curvatura  $R$ .) sia piccola rispetto al diametro  $D$  dovendosi soddisfare la condizione  $D/R \ll 1$ . Infatti, in condizioni stazionarie ed in assenza di perdite, in un campo di moto curvilineo ed omogeneo in termini di velocità e densità, il gradiente di pressione bilancia la forza centrifuga secondo la:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{\rho v^2}{R} \quad (3.23)$$

La (3.23), approssimando la derivata con il rapporto incrementale e ponendo  $\partial r = D$ , si riscrive come:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \cong \frac{2D}{R} \quad (3.24)$$

da cui discende la necessità di garantire che  $D/R \ll 1$  per contenere il gradiente di pressione in direzione normale al flusso.

### 3.4.1 Equazione di conservazione della massa

Nell'ipotesi che al sistema considerato appartengano  $K$  sezioni permeabili sulle quali sia soddisfatta la condizione di flusso monodimensionale, mentre la rimanente parte della superficie non sia transitabile da un flusso di massa, l'equazione di conservazione della massa (3.6) si scrive:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^K \rho_i v_i \cdot n \Omega_i \quad (3.25)$$

Da notare come, nella (3.25), la sola componente della velocità che contribuisce alla portata sia quella normale alla generica sezione di attraversamento  $\Omega_i$ . Specializzando la (3.25) al caso di due sole sezioni permeabili si ha:

$$\frac{dm}{dt} = \rho_{in} (v_n)_{in} \Omega_{in} - \rho_{ex} (v_n)_{ex} \Omega_{ex} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{ex} \quad (3.26)$$

### 3.4.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

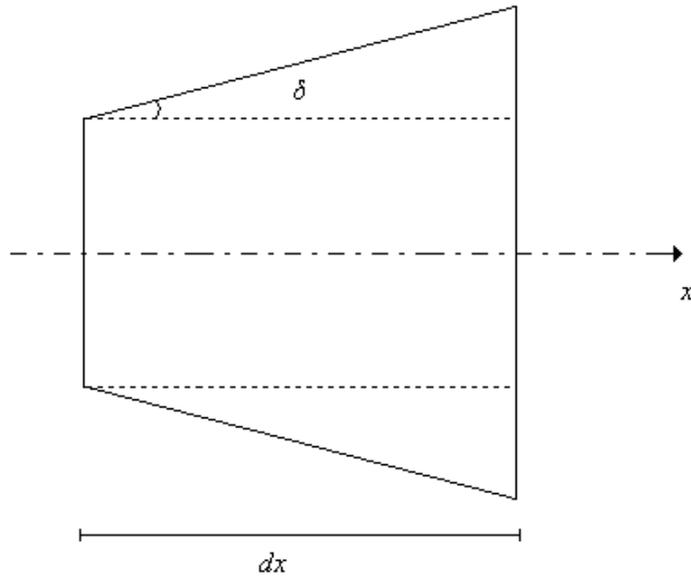
Sotto le medesime ipotesi introdotte nel paragrafo precedente, la (3.21) diventa:

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} + \sum_{i=1}^K [(\rho\underline{v}v_n + p\underline{n})\Omega]_i + \underline{F}_{parete} = m\underline{g} \quad (3.27)$$

Del secondo termine della (3.21), essendo nulla la velocità sulle superfici non permeabili, rimangono i soli contributi relativi alle superfici permeabili  $\rho\underline{v}v_n \Omega$ . Il termine si divide in due addendi: il primo è legato alle superfici permeabili  $p\underline{n}\Omega$ , il secondo, relativo a quelle non permeabili, è inglobato nel termine  $\underline{F}_{parete}$ . Infine, per l'ultimo integrale della (3.21) presente al primo membro, vengono ritenuti nulli tutti i contributi relativi alle superfici permeabili mentre quelli dovuti alle superfici non permeabili sono inclusi in  $\underline{F}_{parete}$ . Pertanto, quest'ultimo termine rappresenta l'integrale di tutti gli sforzi superficiali (dissipativi e non) sulle superfici impermeabili del sistema ovvero rappresenta la spinta totale del fluido su tali superfici (in quanto positiva al primo membro). Nel caso di condotto con due sole superfici permeabili, l'equazione (3.27) si specializza in:

$$\frac{d(m\underline{v})}{dt} = \dot{m}_{in} \underline{v}_{in} - \dot{m}_{ex} \underline{v}_{ex} - p_{in} \Omega_{in} \underline{n}_{in} - p_{ex} \Omega_{ex} \underline{n}_{ex} - \underline{F}_{parete} + m\underline{g} \quad (3.28)$$

Si consideri il tratto elementare di condotto (fig. 3.1) di lunghezza infinitesima  $dx$  alle cui estremità sono presenti le uniche due sezioni permeabili del sistema; le stesse sono normali all'asse del condotto (supposto rettilineo). Stanti tali ipotesi, le normali alle sezioni d'ingresso ed uscita hanno la stessa direzione, ma verso opposto ( $\underline{n}_{in} = -\underline{n}_{ex}$ ).



**Figura 3.1 – Rappresentazione tratto elementare di condotto**

La (3.28), proiettata lungo l'asse del condotto  $x$ , fornisce l'equazione scalare:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}_{in} v_{in} - \dot{m}_{ex} v_{ex} + p_{in} \Omega_{in} - p_{ex} \Omega_{ex} - (\underline{F}_{parete})_x + (m \underline{g})_x \quad (3.29)$$

La spinta  $\underline{F}_{parete}$  può essere scomposta nella parte reversibile riferibile alle forze di pressione ed in quella irreversibile derivante dagli sforzi di parete di origine viscosa. La prima, stante la (3.20), è definita come:

$$\underline{F}_{parete-reversibile} = p \underline{n}_{nonpermeabile} dS_{nonpermeabile} \quad (3.30)$$

in cui  $\underline{n}_{nonpermeabile}$  è la normale uscente alla superficie infinitesima non permeabile  $dS_{nonpermeabile}$ . Quindi, la componente lungo l'asse  $x$  della forza  $\underline{F}_{parete-reversibile}$ , indicando con  $\underline{i}$  il versore di tale asse, si scrive:

$$(\underline{F}_{parete-reversibile})_x = (p \underline{n}_{nonpermeabile} dS_{nonpermeabile}) \cdot \underline{i} = p dS_{nonpermeabile} \underline{n} \cdot \underline{i} = -p dS_{nonpermeabile} \text{sen} \delta \quad (3.31)$$

Essendo poi  $dS_{\text{nonpermeabile}} \text{sen } \delta = d\Omega$ , si ottiene:

$$(\underline{F}_{\text{parete-reversibile}})_x = -pd\Omega \quad (3.32)$$

La parte irreversibile di  $\underline{F}_{\text{parete}}$  è indicata semplicemente con  $|F_{\text{attrito}}|$ . Quindi, la (3.32) diviene:

$$\frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}_{in} v_{in} - \dot{m}_{ex} v_{ex} + p_{in} \Omega_{in} - p_{ex} \Omega_{ex} + pd\Omega - |F_{\text{attrito}}| + (m\underline{g})_x \quad (3.33)$$

Nel seguito verrà illustrato come dalla (3.33) possa giungersi alla forma differenziale dell'equazione della quantità di moto per flusso monodimensionale; dalla (3.33) è altresì possibile, supponendo il flusso stazionario, reversibile ed incomprimibile, pervenire all'espressione dell'equazione di Bernoulli.

### 3.4.3 Equazione di bilancio dell'energia

Sulla base delle ipotesi già considerate per le specializzazioni al caso monodimensionale delle equazioni della massa e della quantità di moto, la (3.15) si può esprimere come:

$$\frac{dme^0}{dt} + \sum_{i=1}^K (\rho v_n \Omega h^0)_i + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS - \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (3.34)$$

in cui ancora una volta al termine convettivo contribuiscono i flussi attraverso le superfici permeabili.

L'integrale relativo al flusso di energia nel modo calore deve essere esteso a tutte le superfici del sistema, permeabili e non, in quanto, pur essendo la temperatura costante su ciascuna superficie permeabile, sono possibili gradienti di temperatura in direzione normale alla superficie. Poiché convenzionalmente la normale  $\underline{n}$  è orientata verso l'esterno, l'integrando è positivo se  $\underline{J}_q$  è anch'esso diretto verso l'esterno.

Affinché sia soddisfatta la convenzione secondo cui il flusso di calore è positivo se entrante nel sistema, si pone:

$$\int_S \underline{J}_q \cdot \underline{ndS} = -\dot{Q} \quad (3.35)$$

dove  $\dot{Q}$  rappresenta la potenza termica scambiata attraverso l'intera superficie di controllo del sistema.

L'integrale relativo al flusso di energia nel modo lavoro (nella sua parte non di pressione) è nullo sulle superfici permeabili perché, come già supposto, su tali superfici è nullo  $\underline{\tau}_d$ . Tale integrale dà contributo nullo anche sulle superfici fisse rispetto al sistema di riferimento perché, per l'ipotesi di aderenza della particella fluida sulla parete, è ivi nulla la velocità del fluido  $\underline{v}$ . Pertanto, il solo contributo non nullo è quello connesso al lavoro nell'unità di tempo delle forze viscosse sulle superfici mobili (comunemente indicato con il termine lavoro d'elica, sebbene impropriamente, trattandosi di una potenza). Poiché l'integrando, per come definito, è positivo se il sistema riceve lavoro dall'esterno, mentre la convenzione solitamente impiegata è quella opposta, si pone:

$$\int_S (\underline{\tau}_d \cdot \underline{v}) \cdot \underline{ndS} = -\dot{L} \quad (3.36)$$

Alla luce di tali posizioni, la (3.34) può essere riscritta come:

$$\frac{dme^0}{dt} + \sum_{i=1}^K (\rho v_n \Omega h^0)_i - \dot{Q} + \dot{L} = 0 \quad (3.37)$$

Per un sistema caratterizzato da una sola superficie d'ingresso e d'uscita la (3.37) diventa:

$$\frac{dme^0}{dt} = \dot{m}_{in} h_{in}^0 - \dot{m}_{ex} h_{ex}^0 + \dot{Q} - \dot{L} \quad (3.38)$$

### 3.5 Equazioni per flusso monodimensionale in forma differenziale

Nel seguito saranno introdotte le equazioni del moto in forma differenziale; a tal fine, le equazioni di bilancio della massa, della quantità di moto e dell'energia monodimensionali verranno specializzate al condotto elementare di fig. 3.1. In particolare, la massa contenuta in tale condotto si può esprimere come:

$$m = \rho \Omega dx \quad (3.39)$$

#### 3.5.1 Equazione di conservazione della massa

La (3.26), stante la (3.39), si riscrive come:

$$\frac{\partial(\rho \Omega dx)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \Omega dx)}{\partial t} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{ex} \quad (3.40)$$

che, considerando condotti a geometria costante nel tempo per cui  $\frac{\partial(\Omega dx)}{\partial t} = 0$ , diviene:

$$\frac{\partial(\rho \Omega dx)}{\partial t} = \Omega dx \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{ex} \quad (3.41)$$

Data l'estensione infinitesima del condotto, si può porre  $\dot{m}_{in} - \dot{m}_{ex} = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx$ .

Per cui, indicando con  $c$  la velocità, perpendicolare, per definizione, alle sezioni di ingresso ed uscita ed essendo:

$$\dot{m} = \rho \Omega c \quad (3.42)$$

si ottiene dalla (3.41):

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho \Omega c)}{\partial x} \quad (3.43)$$

La (3.43), esplicitando la derivata al secondo membro, diventa:

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho \Omega c)}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \Omega \frac{\partial \rho c}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c}{\partial x} = -\rho c \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (3.44)$$

Definendo  $\alpha$  come:

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (3.45)$$

si perviene, in definitiva, alla:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c}{\partial x} = -\rho c \alpha} \quad (3.46)$$

### 3.5.2 Equazione di bilancio della quantità di moto

Partendo dalla (3.33), trascurando gli effetti gravitazionali e, data l'estensione infinitesima del condotto considerato, ponendo  $\dot{m}_{in} c_{in} - \dot{m}_{ex} c_{ex} = -\frac{\partial \dot{m} c}{\partial x} dx$  e

$p_{in} \Omega_{in} - p_{ex} \Omega_{ex} = -\frac{\partial p \Omega}{\partial x} dx$ , si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho \Omega dx c)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m} c}{\partial x} dx - \frac{\partial p \Omega}{\partial x} dx + p d\Omega - |F_{attrito}| \quad (3.47)$$

Elaborando la (3.47) come segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\Omega dx c)}{\partial t} &= \Omega dx \frac{\partial \rho c}{\partial t} = -\frac{\partial \rho \Omega c^2}{\partial x} dx - \frac{\partial p \Omega}{\partial x} dx + p d\Omega - |F_{attrito}| \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} &= -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \rho \Omega c^2}{\partial x} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p \Omega}{\partial x} + \frac{p}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho c^2}{\partial x} - \frac{\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{p}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial \rho c^2}{\partial x} &= -\rho c^2 \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c^2 + p)}{\partial x} = -\rho c^2 \alpha - \frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} \end{aligned}$$

si ricava la:

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c^2 + p)}{\partial x} = -\rho c^2 \alpha - \frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} \quad (3.48)$$

Il termine  $|F_{attrito}|$  è legato allo sforzo superficiale tramite la relazione:

$$|F_{attrito}| = |\tau_s| P dx \quad (3.49)$$

in cui  $P$  è il perimetro bagnato del condotto.

Introducendo l'equazione di Fanning, che lega lo sforzo viscoso all'energia cinetica del fluido (per unità di volume) tramite il coefficiente d'attrito  $f$ , e il

diametro equivalente  $D_{eq} = \frac{4\Omega}{P}$ , si scrive:

$$\frac{|F_{attrito}|}{\Omega dx} = \frac{|\tau_s| P dx}{\Omega dx} = f \frac{\rho c^2}{2} \frac{P}{\Omega} = 2f \frac{\rho c^2}{D_{eq}} \quad (3.50)$$

che, sostituita nella (3.48), restituisce il bilancio di quantità di moto nella forma differenziale:

$$\boxed{\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c^2 + p)}{\partial x} = -\rho c^2 \left( \alpha + \frac{2f}{D_{eq}} \frac{c}{|c|} \right)} \quad (3.51)$$

### 3.5.3 Moto completamente sviluppato e coefficiente di attrito

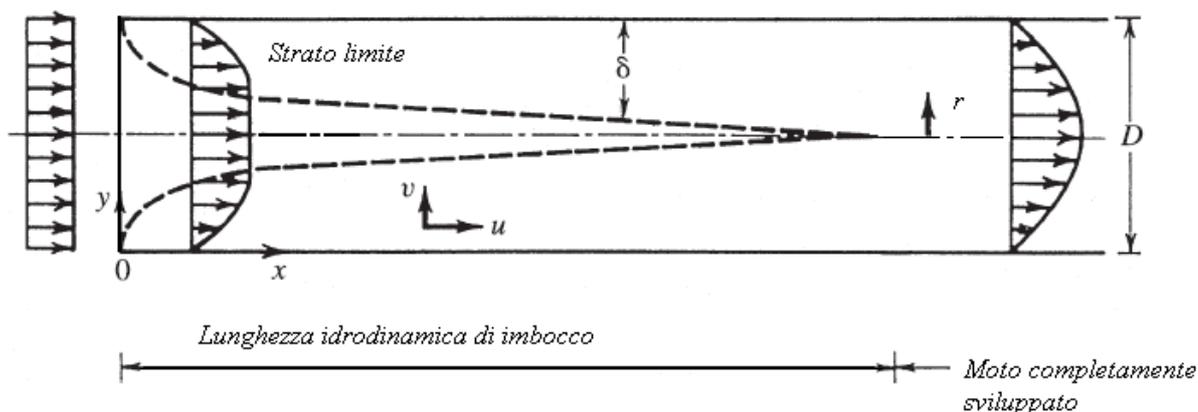


Figura 3. 2 – Rappresentazione del flusso all'ingresso di un condotto circolare

Dato un condotto circolare a monte del quale vige un campo di moto uniforme, all'imbocco dello stesso, a causa degli sforzi viscosi interni al fluido ed all'interazione con le superfici fisse, si genera uno strato limite il cui spessore cresce spostandosi nella direzione del moto. Data la geometria del problema considerato, il profilo delle velocità che ne deriva è a simmetria assiale; se il condotto è sufficientemente lungo, esiste un punto in corrispondenza del quale lo strato limite ricopre l'intera sezione di attraversamento e quest'ultimo è situato sull'asse del condotto. Tale fenomenologia si riscontra solo se il moto è laminare ( $Re < 2100$ ), diversamente lo strato limite non ricopre l'intera sezione del condotto. Il punto di ricongiunzione dello strato limite individua la lunghezza idrodinamica d'imbocco ed, a valle dello stesso, il flusso si definisce completamente sviluppato. In tale regione, tutte le proprietà del fluido si ripetono identicamente tra una sezione e quella successiva.

Nel modello proposto, per la valutazione del coefficiente d'attrito, viene trascurata la presenza di una zona idrodinamica d'imbocco; si suppone, pertanto, che il flusso sia già completamente sviluppato fin dall'ingresso del condotto. Tale assunzione semplificativa, come mostrato in [20], nei casi analizzati non comporta un errore eccessivo nella stima del coefficiente d'attrito.

In condizioni di moto completamente sviluppato, le componenti della velocità contenute nel piano normale all'asse del condotto sono nulle. Pertanto, introducendo

un sistema di riferimento cilindrico, in cui l'asse di simmetria  $x$  coincide con l'asse del condotto, sia la componente radiale della velocità  $c_r$  che quella periferica  $c_\theta$  sono nulle ed, inoltre, la derivata della componente assiale della velocità è nulla lungo  $x$ ,

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow c_x = c_x(r).$$

Stanti tali ipotesi, a valle della lunghezza idrodinamica d'imbocco, la proiezione dell'equazione della quantità di moto in direzione trasversale scritta in coordinate cilindriche e per moto stazionario, incomprimibile, assialsimmetrico e supponendo trascurabili gli effetti gravitazionali evidenzia che la pressione è uniforme nella sezione normale al flusso.

$$\rho \left( c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_r}{r^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.52)$$

Invece, la proiezione assiale di detta equazione, trascurando i termini che si annullano in base alle ipotesi formulate, si scrive:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 c_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_x}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.53)$$

che è possibile risolvere in forma chiusa una volta assegnato il gradiente assiale di pressione  $\frac{\partial p}{\partial x}$  ed imponendo la condizione di aderenza sulle pareti interne del

condotto  $c_x \left( r = \frac{D}{2} \right) = 0$ . La soluzione è del tipo:

$$c_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right) \quad (3.54)$$

Il profilo di velocità è pertanto un paraboloide il cui vertice si trova sull'asse del condotto ed il cui valor medio è:

$$\overline{c_x} = \int_0^{D/2} c_x(r) dr = \frac{D^2}{32\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (3.55)$$

Si introduce il legame tra il gradiente di pressione  $\frac{dp}{dx}$  e l'energia cinetica associata alla velocità media  $\overline{c_x}$  del fluido tramite il coefficiente di attrito  $f$  espresso della:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2f}{D} \rho \overline{c_x}^2 \quad (3.56)$$

da cui, nota l'espressione di  $\overline{c_x}$ , si perviene alla:

$$\boxed{f = \frac{16}{\text{Re}}} \quad (\text{Re} < 2100) \quad (3.57)$$

in cui  $\text{Re} = \frac{\rho \overline{c_x} D}{\mu}$ .

Tale formula, che è usata nel modello proposto nel campo laminare, è nota come relazione di Hagen-Poiseuille dal nome dei due studiosi che la ricavarono, il primo sperimentalmente, il secondo successivamente per via teorica.

La (3.57) è, quindi, valida solo se il moto è stazionario, completamente sviluppato, incomprimibile, senza effetti gravitazionali e per tubi circolari. Evidentemente, tali ipotesi non sono soddisfatte appieno per il moto all'interno dei condotti facenti parte una turbomacchina o in un motore a combustione interna a causa di numerosi fattori. Pertanto, i risultati desunti tramite l'impiego di tale espressione saranno affetti da un'incertezza tanto maggiore quanto più ci si allontana dalle condizioni che soggiacciono alla determinazione della stessa.

In ogni caso, per condotti aventi sezione non circolare, ma geometria semplice, sono state trovate alcune espressioni riportate nella seguente tabella [21]:

Geometria	$f \cdot Re$	Geometria	$f \cdot Re$
Circonferenza	16.0	Rettangolo (h/b=0.5)	15.6
Esagono	15.1	Rettangolo (h/b=0.25)	18.7
Triangolo equilatero	13.3	Rettangolo (h/b=0.125)	20.6
Quadrato	14.2	Piastre infinite	24

**Tabella 3.1 – Coefficiente di attrito per flusso laminare in condotti di diversa forma**

La trattazione qui illustrata richiede la soddisfazione dell'ipotesi di moto laminare, condizione verificata per  $Re$  minore di 2100. Al di sopra di tale valore, si verifica la transizione verso il moto turbolento, fenomeno non descrivibile tramite semplici modelli analitici e che dipende da numerosi fattori di non immediata individuazione. Il valore di riferimento assunto nel modello come quello di transizione laminare/turbolento è 2100.

Riguardo al moto in regime turbolento, le esperienze condotte da Paul Blasius (1913) per tubo liscio posero in evidenza una dipendenza di  $f$  dal solo  $Re$  secondo la:

$$f = \frac{0.0791}{Re^{0.25}} \quad (2100 < Re < 10^5) \quad (3.58)$$

Successivamente, Prandtl e Von Kàrmàn, proposero una relazione implicita tra  $f$  e  $Re$ :

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log \frac{2.51}{Re \sqrt{4f}} \quad (Re > 2100) \quad (3.59)$$

I numerosi studi riguardanti il flusso in tubo liscio in regime turbolento hanno dimostrato che la (3.59) rappresenta la correlazione che meglio approssima i rilievi sperimentali. Tuttavia, per valori di  $Re < 10^5$ , la (3.58) ne costituisce un'ottima approssimazione presentando l'indubbio vantaggio di avere una formulazione esplicita. Per tali motivi è quella impiegata nel modello proposto nell'ambito del proprio campo di validità ( $2100 < Re < 10^5$ ).

Per  $10^5 < \text{Re} < 10^7$ , invece, la (3.59) è adeguatamente riprodotta dalla relazione di Nikuradse:

$$\boxed{f = (0.0032 + 0.221 / \text{Re}^{0.237}) / 4} \quad (\text{Re} > 10^5) \quad (3.60)$$

Vista la formulazione esplicita ed il buon accordo con la (3.59), la (3.60) è impiegata nel modello nel rispettivo campo di validità.

La sperimentazione inerente tale problematica ha messo in evidenza che il coefficiente d'attrito, oltre a dipendere dal numero di Reynolds, è influenzato anche dalla scabrezza relativa  $\varepsilon/D$ . Infatti, alcuni anni dopo le esperienze di Blasius, Prandtl e Von Kàrmàn, Nikuradse (1930) effettuò un'indagine sperimentale su condotti le cui superfici interne furono rese artificialmente scabre mediante l'incollaggio di sabbia di granulometria omogenea. Tale indagine evidenziò la dipendenza di  $f$  dalla sola scabrezza relativa (e non dal  $\text{Re}$ ) in apparente contrasto con i risultati dei suoi precursori.

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log \frac{\varepsilon}{3.71D} \quad (3.61)$$

In realtà, tale incongruenza nella dipendenza funzionale del coefficiente d'attrito è da ricercarsi nei diversi campi d'indagine coperti nelle rispettive analisi sperimentali. Infatti, per valori di  $\text{Re}$  relativamente bassi, ma in ogni caso in regime turbolento, il moto viene comunemente definito "in tubo liscio" (campo di validità della relazione di Blasius); se il  $\text{Re}$  eccede specifici valori di soglia si passa al moto turbolento "in tubo scabro". È evidente che tali denominazioni stanno ad indicare condizioni di moto differenti e non diverse caratteristiche fisiche del tubo. Esiste poi un regime compreso tra questi denominato di transizione. Tale campo, unitamente a quelli di tubo liscio e scabro, fu indagato da Colebrook e White che proposero la relazione implicita:

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{4f}} \right) \quad (3.62)$$

La (3.62) è, pertanto, in grado di correlare adeguatamente i rilievi sperimentali qualsiasi sia il regime di moto turbolento costituendo una generalizzazione delle (3.59) e (3.61). Infatti, si può notare come, per scabrezza nulla, si ottiene la relazione di Prandtl e Von Kàrmàn (a sua volta ben approssimata da quella di Blasius), mentre, per  $Re$  tendente all'infinito, si perviene alla relazione proposta da Nikuradse per tubi scabri. Il piano di sintesi dei risultati inerenti i diversi regimi di moto è il ben noto abaco di Moody (fig. 3.3) in cui con  $\lambda$  viene indicato il coefficiente di attrito alla Darcy - Weisbach ( $\lambda = 4f$ ). La zona laminare è rappresentata dalla retta di Hagen-Poiseuille. Nella regione di transizione, le curve corrispondenti a differenti valori della scabrezza relativa si distaccano dalla retta di Balsius la quale descrive condizioni di moto per "tubo liscio". In fine, quando le varie linee tendono asintoticamente ad un valore costante dipendente esclusivamente da  $\varepsilon/D$ , si entra nella zona riguardante il così detto regime di moto per "tubo scabro".

Le equazioni illustrate per moto turbolento e sintetizzate nell'abaco di Moody sono state ricavate in condizioni di moto stazionario, completamente sviluppato e per condotto a sezione circolare costante. Per l'estensione a condotti di forma qualsiasi è sufficiente, diversamente da quanto puntualizzato nel caso di moto laminare, valutare il  $Re$  con riferimento al diametro equivalente  $D_{eq}$ .

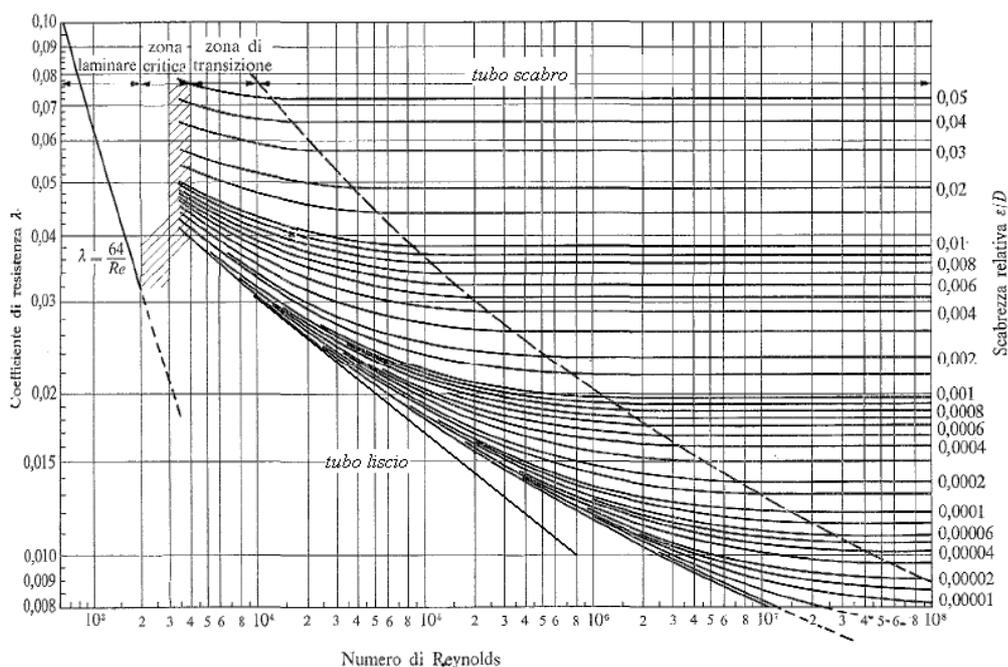


Figura 3.3 – Abaco di Moody

### 3.5.4 Equazione di bilancio dell'energia

La (3.38), scritta in relazione al condotto elementare di fig. 3.1, e con assunzioni analoghe a quelle illustrate per le equazioni di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto, diventa:

$$\frac{\partial(\rho\Omega dx e^0)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho c\Omega h^0)}{\partial x} dx + \dot{Q} - \dot{L} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho e^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c h^0}{\partial x} = -\rho c h^0 \alpha + \frac{\dot{Q}}{\Omega dx} - \frac{\dot{L}}{\Omega dx} \quad (3.63)$$

Trattandosi di condotto a pareti fisse, il lavoro delle forze viscosse è nullo; pertanto, si può porre  $\dot{L} = 0$ . Assumendo che:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{Q} = \dot{q} P dx \\ D_{eq} = \frac{4\Omega}{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{\Omega dx} = \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} \quad (3.64)$$

in cui con  $\dot{q}$  si è indicata la potenza termica scambiata per unità di superficie, la (3.63) diviene:

$$\boxed{\frac{\partial \rho e^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c h^0}{\partial x} = -\rho c h^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}}} \quad (3.65)$$

Per il calcolo di  $\dot{q}$  è possibile riferirsi alle correlazioni disponibili in letteratura basate sull'analogia tra il processo di diffusione di quantità di moto e quello di diffusione del calore che si realizzano nello strato limite in prossimità delle pareti del condotto. L'analogia di Reynolds:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{h D_{eq} \mu k}{k c D_{eq} \rho c_p \mu} = \frac{h}{\rho c c_p} = \frac{f}{2} \Rightarrow h = \rho c c_p \frac{f}{2} \Rightarrow \dot{q} = h(T - T_w) \quad (3.66)$$

richiede l'unitarietà del numero di Prandtl sia in campo laminare che in regime turbolento; tale ultima caratteristica rende la stessa idonea alla descrizione dello scambio termico per l'aria ( $Pr \approx 0,71$ ). Sono disponibili altre correlazioni di

formulazione più complessa: quella di Prandtl, che tiene conto della presenza di una zona laminare anche in regime turbolento, quella di Von Kàrmàn, che descrive gli effetti dello strato limite e della zona di passaggio da quest'ultimo alla regione di moto turbolento. Nel modello proposto, si è impiegata l'analogia di origine sperimentale di Gnielinski.

$$Nu = \frac{(f/2)(Re-1000)Pr}{1+12,7\sqrt{f/2}(Pr^{2/3}-1)} \Rightarrow h = \rho c c_p \frac{(f/2)(Re-1000)Pr}{1+12,7\sqrt{f/2}(Pr^{2/3}-1)} \quad \begin{matrix} 2300 < Re < 5 \cdot 10^6 \\ 0,5 < Pr < 2000 \end{matrix} \quad (3.67)$$

### 3.6 Le equazioni del moto in condotti rotanti

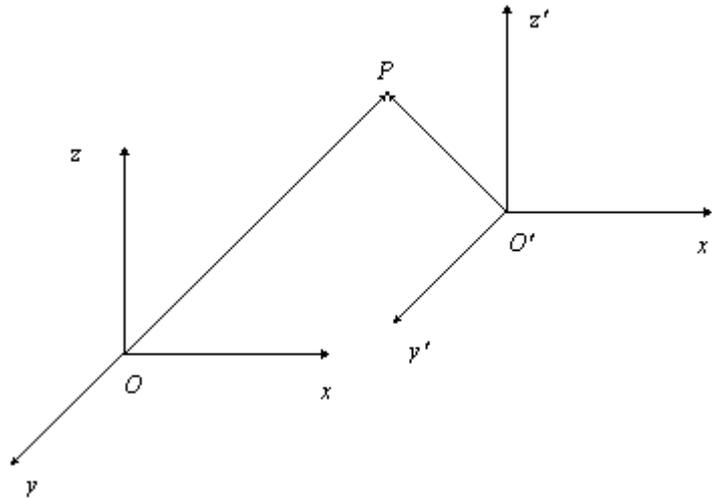
#### 3.6.1 Moti relativi

Dato il sistema di riferimento inerziale,  $\{0,x,y,z\}$  e quello generico  $\{0',x',y',z'\}$ , i vettori posizione, rispettivamente,  $\underline{OP}$  e  $\underline{O'P}$ , che individuano il punto P (fig. 3.4) rispetto a detti sistemi di riferimento sono legati dalla:

$$\underline{OP} = \underline{OO'} + \underline{O'P} \quad (3.68)$$

che, derivata rispetto al tempo, restituisce:

$$\underline{v} = \underline{v'} + \underline{v_o} + \underline{\omega} \times \underline{O'P} \quad (3.69)$$



**Figura 3.4 - Sistema di riferimento inerziale  $\{0,x,y,z\}$  e generico  $\{0',x',y',z'\}$  – Posizione punto P**

in cui  $\underline{v}$  e  $\underline{v}'$  indicano, rispettivamente, la velocità di P rispetto a  $\{0,x,y,z\}$  e  $\{0',x',y',z'\}$ , mentre  $\underline{v}_{O'}$  e  $\underline{\omega}$  sono, rispettivamente le velocità lineare ed angolare del secondo sistema di riferimento rispetto al primo. La velocità  $\underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \times \underline{O'P}$  è comunemente definita di trascinamento. Derivando la (3.69), si ottiene il legame tra l'accelerazione di P rispetto ai due sistemi di riferimento:

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_{O'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{OP} + 2\underline{\omega} \times \underline{v}' \tag{3.70}$$

$$\begin{cases} \underline{a}_{trascinamento} = \underline{a}_t = \underline{a}_{O'} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{OP} \\ \underline{a}_{centripeta} = \underline{a}_c = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) \\ \underline{a}_{Coriolis} = 2\underline{\omega} \times \underline{v}' \end{cases} \tag{3.71}$$

in cui  $\underline{a}$  e  $\underline{a}'$  indicano, rispettivamente, l'accelerazione di P rispetto a  $\{0,x,y,z\}$  e  $\{0',x',y',z'\}$ , mentre  $\underline{a}_{O'}$  e  $\underline{\dot{\omega}}$  sono, rispettivamente, l'accelerazione lineare ed angolare del secondo sistema di riferimento rispetto al primo. Moltiplicando per la massa la (3.70), si ottiene:

$$m\underline{a}' = m\underline{a} - m\underline{a}_{O'} - m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) - m\dot{\underline{\omega}} \times \underline{OP} - m2\underline{\omega} \times \underline{v}' \tag{3.72}$$

da cui, per il secondo principio della dinamica:

$$\underline{F}' = m\underline{a}' = \underline{F} - m\underline{a}_{O'} - m\underline{\dot{\omega}} \times \underline{OP} + \underline{F}_{centrifuga} + \underline{F}_{Coriolis} \quad (3.73)$$

essendo:

$$\underline{F}_{centrifuga} = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) \quad (3.74)$$

$$\underline{F}_{Coriolis} = -m2\underline{\omega} \times \underline{v}' \quad (3.75)$$

La (3.73) suggerisce che un osservatore solidale al sistema di riferimento non inerziale percepisce, non solo le forze derivanti dall'interazione con altri corpi  $\underline{F}$ , ma anche le così dette forze apparenti. Se, in particolare, il sistema di riferimento non inerziale non è animato da accelerazioni lineari ed angolari rispetto al primo, la (3.73) diventa:

$$\underline{F}' = \underline{F} + \underline{F}_{centrifuga} + \underline{F}_{Coriolis} \quad (3.76)$$

Tale relazione è quella a cui far riferimento nella descrizione del moto di una particella fluida che attraversa la girante di una turbomacchina dal punto di vista di un osservatore solidale alla girante stessa. Infatti, supponendo che l'asse della girante non trasli rispetto ad un osservatore inerziale e che la stessa non sia soggetta ad una accelerazione angolare, allora la particella fluida transitante nel vano interpallare è sottoposta, oltre ad eventuali forze esterne, alla sola forza centrifuga e di Coriolis.

Nel seguito si ricaveranno le equazioni del moto in forma differenziale nell'ipotesi di flusso monodimensionale per un osservatore solidale alla girante. Le equazioni, pertanto, saranno scritte in termini di velocità relativa  $w$  e la sola coordinata spaziale da cui dipenderanno le proprietà del fluido sarà l'ascissa curvilinea  $s$  misurata lungo la linea media del condotto; dette equazioni terranno altresì conto degli eventuali contributi delle forze apparenti agenti sul fluido.

### 3.6.2 Equazione di conservazione della massa

Stanti le assunzioni descritte nel paragrafo precedente, la (3.26), scritta per un tratto elementare del condotto rotorico di lunghezza  $ds$ , diventa:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial s} = -\rho w \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial s}} \quad (3.77)$$

Come si nota, la (3.77) è formalmente analoga all'equazione della continuità inerente condotti fissi (3.46) salvo considerare la velocità relativa  $w$  anziché quella assoluta  $c$ . Naturalmente, le forze apparanti non contribuiscono all'alterazione del bilancio della massa.

### 3.6.3 Equazione di bilancio della quantità di moto

Nel caso dell'equazione di bilancio della quantità di moto è necessario introdurre i termini relativi alle forze apparenti agenti sulla particella fluida che attraversa il condotto rotorico. Definito  $\underline{\omega}$  come il vettore velocità angolare costante, stanti le ipotesi già illustrate, in modulo, direzione e verso ed  $r$  come la distanza della generica particella fluida rispetto all'asse della girante (corrispondente al modulo della componente radiale  $\underline{r}$  del vettore posizione  $\underline{OP}$ ), le (3.74) e (3.75) diventano:

$$\underline{F}_{centrifuga} = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{OP}) = -m\underline{\omega} \times \underline{u} \Rightarrow \underline{F}_{centrifuga} = -m\omega^2 r \quad (3.78)$$

$$\underline{F}_{Coriolis} = -2m\underline{\omega} \times \underline{v}' = -2m\underline{\omega} \times \underline{w} \Rightarrow \underline{F}_{Coriolis} = -2m\omega w \quad (3.79)$$

in cui  $\underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{OP} = \underline{\omega} \times \underline{r}$  è la velocità periferica o di trascinamento. La forza centrifuga, come ben noto, è diretta in direzione radiale essendo, per definizione, perpendicolare a  $\underline{\omega}$  e ad  $\underline{u}$  che sono, rispettivamente, un vettore assiale e tangenziale. Tale caratterizzazione dei vettori va naturalmente riferita ad un sistema

di riferimento cilindrico il cui asse di rivoluzione coincide con l'asse della girante. La forza di Coriolis, invece, è perpendicolare sia a  $\underline{\omega}$  che a  $\underline{w}$ ; pertanto ha componente nulla lungo la linea media del condotto rotorico.

Nell'equazione di bilancio della quantità di moto nell'ipotesi di flusso monodimensionale, vanno introdotti i contributi relativi alle sole componenti lungo la linea media del condotto delle forze apparenti. Pertanto, la forza di Coriolis, come precedentemente illustrato, non interviene nel bilancio della quantità di moto, mentre quella centrifuga contribuisce solo per la componente contenuta nell'asse del condotto rotorico. Definendo  $\beta$  come l'angolo compreso tra la direzione radiale (corrispondente a quella della forza centrifuga) e quella della linea media del condotto, individuata dal vettore infinitesimo ad essa tangente  $\underline{ds}$ , la componente di  $\underline{F}_{centrifuga}$  che contribuisce alla variazione della quantità di moto è  $F_{centrifuga} \cos \beta$ . Dalla decomposizione di  $\underline{ds}$  lungo la direzione radiale, tangenziale ed assiale si definiscono i tre vettori  $\underline{dr}$ ,  $\underline{dt}$  e  $\underline{dx}$ . In fine, essendo  $ds \cos \beta = dr$  si desume che la ricercata componente di  $\underline{F}_{centrifuga}$  è:

$$F_{centrifuga} \cos \beta = F_{centrifuga} dr/ds = m\omega^2 r dr/ds = m \frac{u^2}{r} \frac{dr}{ds} \quad (3.80)$$

Scrivendo la (3.33) impiegando la nomenclatura fin qui introdotta per il condotto rotorico ed aggiungendo il contributo della forza centrifuga si ha:

$$\frac{d(mw)}{dt} = \dot{m}_1 w_1 - \dot{m}_2 w_2 + p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 + pd\Omega - |F_{attrito}| - m \frac{u^2}{r} \frac{dr}{ds} \quad (3.81)$$

Definendo  $\delta = \frac{1}{r} \frac{dr}{ds}$  e riferendo l'equazione al tratto infinitesimo di lunghezza  $ds$ , ripercorrendo le stesse semplificazioni descritte nel paragrafo 3.5.2, si perviene alla:

$$\frac{d(\rho w)}{dt} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial s} = - \left\{ \rho w^2 \alpha + \rho w^2 2 \frac{f}{D_{eq}} \frac{w}{|w|} - \rho u^2 \delta \right\} \quad (3.82)$$

Nel modello del compressore, si è ritenuto opportuno, prendendo spunto da [22], suddividere il termine di attrito in due contributi: il primo legato all'interazione del fluido con la cassa, il secondo inerente l'attrito dello stesso con le pareti interne del vano interpallare. Il primo termine dipende dalla componente della velocità assoluta lungo la linea media del condotto  $c|_s$ , mentre il secondo dalla velocità relativa  $w$ . Stanti tali assunzioni, la forza d'attrito può essere riscritta come:

$$|F_{\text{attrito}}| = \tau_{\text{girante}} P_{\text{girante}} ds + \tau_{\text{cassa}}|_s P_{\text{cassa}} ds = \rho \frac{w^2}{2} f_{\text{gir}} P_{\text{girante}} ds + \left( \rho \frac{c^2}{2} f_{\text{cas}} \right)|_s P_{\text{cassa}} ds \quad (3.83)$$

da cui la (3.82) diventa:

$$\boxed{\frac{d(\rho w)}{dt} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial s} = - \left\{ \rho w^2 \alpha + \rho w^2 2 \frac{f_{\text{girante}}}{D_{\text{eqgirante}}} \frac{w}{|w|} + \rho c^2 2 \frac{f_{\text{cassa}}}{D_{\text{eqcassa}}} \frac{c|_s}{|c|} - \rho u^2 \delta \right\}} \quad (3.84)$$

Come indicato in [22], il Traupel propone di correggere il valore del coefficiente di attrito secondo le:

$$\begin{aligned} f_{\text{girante}} &= f + 0.0015 \\ f_{\text{cassa}} &= (f + 0.0015) \left( 1.1 + 4 \frac{b}{D_2} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

in cui  $b$  è l'altezza meridiana della girante all'uscita e  $D_2$  è il diametro esterno della stessa.

Per quanto riguarda la valutazione del coefficiente d'attrito nel caso della turbina, non sono distinti i contributi relativi alle forze di natura viscosa dovuti all'interazione del fluido con la cassa e con girante; però, come suggerito in [23], per tener conto dell'effetto della curvatura del condotto rotorico, il coefficiente d'attrito viene corretto secondo la:

$$f_{curv} = f \left( 1 + 0.075 \text{Re}^{1/4} \sqrt{\frac{D_{eq}}{2r_{curv}}} \right) \quad (3.86)$$

in cui  $r_{curv}$  rappresenta il raggio di curvatura locale il cui andamento è facilmente ricavabile grazie al modulo geometrico.

### 3.6.4 Equazione di bilancio dell'energia

La (3.38), riferita al moto relativo nel condotto rotorico e sotto l'ipotesi di flusso monodimensionale, si scrive:

$$\frac{dme_w^0}{dt} = \dot{m}_1 h_{w1}^0 - \dot{m}_2 h_{w2}^0 + \dot{Q} - \dot{L} \quad (3.87)$$

essendo  $e_w^0 = c_v T + w^2/2$  e  $h_w^0 = c_p T + w^2/2$ .

Nella (3.87), il termine  $\dot{L}$  rappresenta il lavoro nell'unità di tempo compiuto dalla forze agenti sul fluido lungo la direzione individuata della linea media del condotto rotorico. La forza di Coriolis, essendo perpendicolare al condotto, non contribuisce all'equazione dell'energia, mentre quella centrifuga fornisce un lavoro nell'unità di tempo pari a:

$$\dot{L}_{centrifugo} \Big|_s = \underline{F}_{centrifuga} \cdot \underline{w} = F_{centrifuga} w \cos \beta = F_{centrifuga} w dr/ds = mwu^2 \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} = mwu^2 \delta \quad (3.88)$$

Essendo tale potenza entrante nel sistema, compare con segno positivo al secondo membro della:

$$\frac{dme_w^0}{dt} = \dot{m}_1 h_{w1}^0 - \dot{m}_2 h_{w2}^0 + \dot{Q} + mwu^2 \delta \quad (3.89)$$

da cui, riferendosi ad un tratto infinitesimo di condotto rotorico, si perviene alla formulazione della (3.89) in forma locale:

$$\boxed{\frac{\partial \rho e_w^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho w h_w^0}{\partial s} = -\rho w h_w^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} + \rho w u^2 \delta} \quad (3.90)$$

### 3.7 Equazioni per flusso assialsimmetrico a componente assiale nulla

Nel modello proposto, si è schematizzato il flusso all'interno del diffusore del compressore e nei brevi condotti anulari facenti parte dello statore della turbina basandosi sull'ipotesi che il campo di moto sia a simmetria cilindrica e che abbia componente lungo l'asse della macchina nulla. Data la geometria del condotto, per la descrizione del moto è conveniente introdurre un sistema di riferimento cilindrico (fig. 3.5) nelle coordinate  $x$  (assiale),  $r$  (radiale) e  $\theta$  (tangenziale) i cui versori sono, rispettivamente,  $\underline{i}_x$ ,  $\underline{i}_r$  e  $\underline{i}_\theta$ . Stanti le ipotesi precedentemente illustrate, tutte le proprietà termofluidodinamiche non cambiano al variare delle coordinate assiale e tangenziale, ma dipendono solo da quella radiale. Tale tipo di moto, per quanto bidimensionale secondo un approccio cartesiano, viene comunemente definito quasi-1D dipendendo da una sola variabile spaziale.

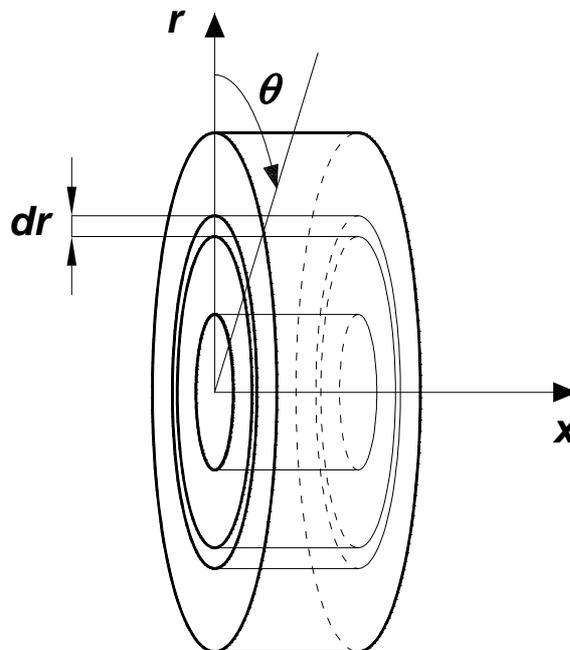


Figura 3.5 – Condotto a simmetria cilindrica di estensione assiale costante

La velocità  $\underline{c}$  del fluido è scomponibile nella componente radiale  $c_r$  ed in quella periferica o tangenziale  $c_u$ .

### 3.7.1 Equazione di conservazione della massa

Per quanto il flusso non rispetti l'ipotesi di monodimensionalità, la (3.26) può essere applicata anche nel caso specifico a patto di considerare la sola componente della velocità che contribuisce alla portata che è quella radiale. Detta equazione, scritta per un tratto infinitesimo di condotto anulare di estensione assiale  $dr$  (fig. 3.5), diventa:

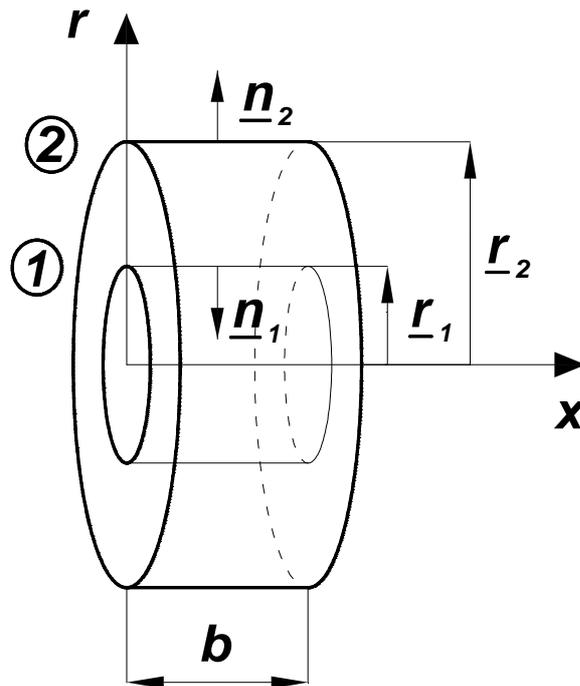
$$\frac{\partial(\rho\Omega dr)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(\rho c_r \Omega) \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r}{\partial r} = -\rho c_r \alpha \quad (3.91)$$

### 3.7.2 Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione radiale

Per valutare il bilancio della quantità di moto in direzione radiale è conveniente introdurre un sistema di riferimento ruotante con velocità angolare  $\underline{\omega}$  tale che  $\underline{c}_\theta = \underline{\omega} \times \underline{r}$ . Tale assunzione consente di studiare un moto meramente radiale (e, pertanto, monodimensionale) salvo introdurre nel bilancio della quantità di moto il contributo delle forze apparenti. Con riferimento a quanto trattato nel paragrafo 3.6.1, la forza centrifuga e quella di Coriolis assumono, nel caso considerato, le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{centrifuga} &= -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -m\underline{\omega} \times \underline{c}_u = -m\omega c_u \underline{i}_x \times \underline{i}_\theta = -m\omega c_u \underline{i}_r = -\frac{mc_u^2}{r} \underline{i}_r \\ \underline{F}_{Coriolis} &= -2m\underline{\omega} \times \underline{v}' = -2m\underline{\omega} \times \underline{c}_m = -2m \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ 0 & 0 & \omega \\ c_r & 0 & c_x \end{vmatrix} = -2m\omega c_r \underline{i}_\theta \end{aligned} \quad (3.92)$$

da cui si rileva come la sola forza centrifuga contribuisca al bilancio della quantità di moto in direzione radiale.



**Figura 3.6 – Tratto elementare di condotto anulare di estensione assiale costante**

La (3.33), scritta in riferimento al tratto di condotto anulare rappresentato in fig. 3.6, diventa:

$$\frac{d(mc_r)}{dt} = (\dot{m}c_r)_1 - (\dot{m}c_r)_2 + p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2 + pd\Omega - |F_{attrito}|_r - F_{centrifuga} \quad (3.93)$$

Nel modello proposto, si assume che lo sforzo di attrito abbia la stessa direzione, ma verso opposto, rispetto alla velocità assoluta del fluido  $\underline{c}$  ( $\underline{c} = c\underline{i}$ ) e che, pertanto, si possa esprimere come:

$$\underline{\tau} = -\frac{1}{2} f \rho c^2 \underline{i} \quad (3.94)$$

la cui proiezione in direzione radiale è:

$$\tau_r = \tau \frac{c_r}{c} = \frac{1}{2} \rho c^2 f \frac{c_r}{c} \quad (3.95)$$

da cui si ricava il contributo della forza d'attrito da introdurre nella (3.93):

$$|F_{\text{attrito}}|_r = \frac{1}{2} \rho c^2 f \frac{c_r}{c} P dr \quad (3.96)$$

Scrivendo la (3.93) in relazione al condotto infinitesimo di lunghezza  $dr$  di fig. 3.5 ed elaborando opportunamente i termini si previene alla:

$$\frac{\partial \rho c_r}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_r^2 + p)}{\partial r} = -\rho c_r^2 \alpha - \rho c^2 \frac{2f}{D_{eq}} \frac{c_r}{c} + \frac{\rho c_u^2}{r} \quad (3.97)$$

Per la specifica geometria considerata, è possibile fornire delle espressioni semplificate di  $\alpha$  e  $D_{eq}$ . Infatti, essendo  $\Omega = 2\pi r b$  e  $P = 2(2\pi r)$ , si ha:

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r b} 2\pi b = \frac{1}{r} \quad (3.98)$$

$$D_{eq} = \frac{4\Omega}{P} = \frac{4(2\pi r b)}{2(2\pi r)} = 2b \quad (3.99)$$

### 3.7.3 Equazione di bilancio della quantità di moto in direzione periferica (equazione del momento angolare)

Il bilancio della quantità di moto in direzione periferica si ottiene proiettando sull'asse  $x$  il prodotto vettoriale di  $\underline{r}$  per la (3.28). Tale prodotto vettoriale è:

$$\underline{r} \times \frac{d(\underline{m}\underline{c})}{dt} = \underline{r}_1 \times \dot{m}_1 \underline{c}_1 - \underline{r}_2 \times \dot{m}_2 \underline{c}_2 - \underline{r}_1 \times p_1 \Omega_1 \underline{n}_1 - \underline{r}_2 \times p_2 \Omega_2 \underline{n}_2 - \underline{r} \times \underline{F}_{prev} - \underline{r} \times |F_{attr}|_i \quad (3.100)$$

avendo decomposto la forza su parete nella componente reversibile  $\underline{F}_{prev}$  ed in quella irreversibile  $|F_{attr}|_i$  e denotato con 1 e 2, rispettivamente, la sezioni d'ingresso e quella d'uscita (fig. 3.6).

Elaborando singolarmente i termini della (3.100) si ha:

$$\underline{r} \times \frac{d(m\underline{c})}{dt} = \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r & 0 & 0 \\ \frac{dmc_r}{dt} & \frac{dmc_u}{dt} & \frac{dmc_x}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r & 0 & 0 \\ \frac{dmc_r}{dt} & \frac{dmc_u}{dt} & 0 \end{vmatrix} = r \frac{dmc_u}{dt} \underline{i}_x$$

$$\underline{r}_1 \times \dot{m}_1 \underline{c}_1 - \underline{r}_2 \times \dot{m}_2 \underline{c}_2 = \dot{m}_1 \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r_1 & 0 & 0 \\ c_{r1} & c_{u1} & c_{x1} \end{vmatrix} - \dot{m}_2 \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r_2 & 0 & 0 \\ c_{r2} & c_{u2} & c_{x2} \end{vmatrix} = (\dot{m}_1 r_1 c_{u1} - \dot{m}_2 r_2 c_{u2}) \underline{i}_x$$

$$\underline{r}_1 \times p_1 \underline{\Omega}_1 \underline{n}_1 = \underline{r}_2 \times p_2 \underline{\Omega}_2 \underline{n}_2 = \underline{0} \quad (\text{avendo } \underline{n} \text{ e } \underline{r} \text{ la stessa direzione})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Essendo flusso a} \\ \text{simmetria cilindrica} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{F}_{prev} = (F_{prev,r}, F_{prev,u} = 0, F_{prev,x}) \Rightarrow \underline{r} \times \underline{F}_{prev} = \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r & 0 & 0 \\ F_{prev,r} & 0 & F_{prev,x} \end{vmatrix} = -r F_{prev,x} \underline{i}_\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} F_{attrito,r} = F_{attrito} \frac{c_r}{c} \\ F_{attrito,u} = F_{attrito} \frac{c_u}{c} \\ F_{attrito,x} = F_{attrito} \frac{c_x}{c} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{r} \times \underline{F}_{attrito} = \begin{vmatrix} \underline{i}_r & \underline{i}_\theta & \underline{i}_x \\ r & 0 & 0 \\ F_{attrito,r} & F_{attrito,u} & 0 \end{vmatrix} = r \frac{1}{2} \rho c^2 f P ds \frac{c_u}{c} \underline{i}_x$$

Pertanto, la (3.100) proiettata lungo l'asse x, diventa:

$$r \frac{dmc_u}{dt} = -\Delta(\dot{m}rc_u) - r \frac{1}{2} \rho c^2 f P ds \frac{c_u}{c} \quad (3.101)$$

che, riferita al tratto infinitesimo di lunghezza  $dr$  di fig. 3.5 ed opportunamente elaborata, si riscrive:

$$\frac{d\rho c_u}{dt} + \frac{\partial \rho c_r c_u}{\partial r} = -\rho c_r c_u \left( \alpha + \frac{1}{r} \right) - 2 \frac{\rho c^2 f}{D_{eq}} \frac{c_u}{c} \quad (3.102)$$

### 3.7.4 Equazione di bilancio dell'energia

In tal caso è conveniente considerare un sistema di riferimento fisso, per cui la (3.38), diventa:

$$\frac{\partial \rho \Omega d s e^0}{\partial t} = (\rho c_r \Omega h^0)_1 - (\rho c_r \Omega h^0)_2 + \dot{Q} \quad (3.103)$$

avendo indicato con:

$$e^0 = c_v T + c_r^2 / 2 + c_u^2 / 2 \quad (3.104)$$

$$h^0 = c_p T + c_r^2 / 2 + c_u^2 / 2$$

ed avendo posto paria a zero il lavoro delle forze viscosse nell'unità di tempo ( $\dot{L} = 0$ ) essendo il sistema considerato a pareti fisse.

La (3.103), riferita al condotto infinitesimo, fornisce la formulazione differenziale:

$$\frac{\partial \rho e^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r h^0}{\partial r} = -\rho c_r h^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} \quad (3.105)$$

Stanti le (3.104), la (3.105) si riscrive come:

$$\frac{\partial \rho (c_v T + c_r^2 / 2 + c_u^2 / 2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r (c_p T + c_r^2 / 2 + c_u^2 / 2)}{\partial r} = -\rho c_r (c_p T + c_r^2 / 2 + c_u^2 / 2) \alpha + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} \quad (3.106)$$

Definendo  $e_D^0 = c_v T + c_r^2 / 2$  e  $h_D^0 = c_p T + c_r^2 / 2$ , la (3.106) diventa:

$$\frac{\partial \rho e_D^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r h_D^0}{\partial s} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial (\rho c_u^2)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\rho c_r c_u^2)}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho c_r c_u^2 \alpha \right] = -\rho c_r h_D^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} \quad (3.107)$$

Si elabora adesso il termine tra parentesi quadre della (3.107):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho c_u^2)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho c_r c_u^2)}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho c_r c_u^2 \alpha = \frac{1}{2} c_u^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r}{\partial s} + \rho c_r \alpha \right) + \rho c_u \frac{\partial c_u}{\partial t} + \rho c_r c_u \frac{\partial c_u}{\partial r} \quad (3.108)$$

stante la (3.91), la (3.108) diventa:

$$\rho c_u \frac{\partial c_u}{\partial t} + \rho c_r c_u \frac{\partial c_u}{\partial r} = c_u \left( \frac{\partial \rho c_u}{\partial t} - c_u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r c_u}{\partial r} - c_u \frac{\partial \rho c_r}{\partial r} \right) \quad (3.109)$$

che, per la (3.91) e la (3.102), si può porre paria a:

$$c_u \left( \frac{\partial \rho c_u}{\partial t} - c_u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r c_u}{\partial r} - c_u \frac{\partial \rho c_r}{\partial r} \right) = -\frac{\rho c_r c_u^2}{r} - 2\rho c^2 \frac{f}{D_{eq}} \frac{c_u^2}{c} \quad (3.110)$$

Tale espressione, sostituita al termine fra parentesi quadre della (3.107), restituisce:

$$\boxed{\frac{\partial \rho e_D^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_r h_D^0}{\partial r} = -\rho c_r h_D^0 \alpha + \frac{\rho c_r c_u^2}{r} + \frac{4\dot{q}}{D_{eq}} + 2\rho c^2 \frac{f}{D_{eq}} \frac{c_u^2}{c}} \quad (3.111)$$

### 3.7.5 Coefficiente d'attrito

Come già accennato, l'equazione di conservazione della massa (3.91) e quella di bilancio dell'energia e (3.111) e le due proiezioni del bilancio della quantità di moto, (3.97) e (3.102), sono impiegate per descrivere il moto all'interno del diffusore del compressore e nei condotti anulari facenti parte dello statore della turbina. Per il calcolo del valore del coefficiente d'attrito nel diffusore del compressore si utilizza la seguente formula [24]:

$$f = 0.01 \cdot \left( \frac{1.8 \times 10^5}{\text{Re}} \right)^{0.2} \quad (3.112)$$

in cui il numero di Reynolds è calcolato utilizzando come dimensione geometrica caratteristica la lunghezza della traiettoria percorsa dalla particella fluida  $L_{spir}$  secondo la:

$$L_{spir} = (r - r_2) \frac{c}{c_r} \quad \text{Re}_r = \frac{\rho c L_{spir}}{\mu} \quad (3.113)$$

Nel caso della turbina, vengono risolte le stesse equazioni viste per il diffusore negli spazi tra girante e voluta in una WGT e tra la voluta ed il distributore palettato e quest'ultimo e la girante in una VNT. In tal caso, il coefficiente d'attrito è valutato sulla base delle correlazioni introdotte nel paragrafo 3.5.3 per flusso in tubi. Il Re è dato da:

$$\text{Re} = \frac{\rho c b}{\mu} \quad (3.114)$$

avendo assunto come dimensione caratteristica l'altezza del condotto  $b$ .

---

Integrazione delle equazioni del moto e condizioni  
al contorno

**4.1 Introduzione**

Una volta ricavate le equazioni del moto monodimensionali (condotti fissi e rotanti) e quelle quasi-1D (flusso a simmetria assialsimmetrica a componente assiale nulla) nel presente capitolo verranno descritte le tecniche numeriche impiegate per l'integrazione di dette equazioni. In particolare, verranno discusse le metodologie impiegate per risolvere le condizioni al contorno (*boundary conditions*) ed il flusso all'interno dei condotti per condizioni di moto instazionario.

**4.2 Equazioni del moto in condotti fissi e condizioni di compatibilità**

Se si indica con  $G$  la quantità  $(2fu^2/D_{eq}) \cdot u/|u|$  (in questo capitolo ci si riferirà alla velocità del fluido con il simbolo  $u$ ) e con  $\Gamma$  il calore scambiato per unità di massa, per quanto mostrato nel capitolo precedente, le equazioni monodimensionali del moto in un condotto fisso si scrivono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho u \alpha \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = -\rho u^2 \left( \alpha + \frac{2f}{D_{eq}} \frac{u}{|u|} \right) = -\rho u^2 \alpha - \rho G \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho e^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h^0}{\partial x} = -\rho u h^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D} = -\rho u h^0 \alpha + \rho \Gamma \quad (4.3)$$

Tali equazioni possono essere sintetizzate in forma vettoriale come segue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (4.4)$$

avendo posto:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e^0 \end{bmatrix} \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u h^0 \end{bmatrix} \quad S(U) = - \begin{bmatrix} \rho u \alpha \\ \rho u^2 \alpha + \rho G \\ \rho u h^0 \alpha - \rho \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$U$ ,  $F$  e  $S$  sono, rispettivamente, il vettore delle variabili conservative, dei flussi e dei termini sorgente.

In un condotto a sezione costante, per flusso adiabatico ed inviscido, la (4.4) si riduce alla:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

Le (4.6) sono note come *Equazioni di Eulero* e rappresentano delle leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia nelle variabili conservative  $\rho$ ,  $\rho u$  e  $\rho e$ . Tale problema può essere affrontato equivamente anche con riferimento alle variabili fisiche o primitive; infatti, espandendo le derivate e combinando tra loro le (4.1), (4.2), (4.3), si ottiene l'analogia formulazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho u \alpha = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] - (\Gamma + uG) = 0 \quad (4.9)$$

in termini di variabili primitive. Le (4.7), (4.8) e (4.9) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali nelle quattro incognite  $\rho, u, p, e$ . Se si ipotizza che il gas abbia comportamento ideale, allora il problema risulta chiuso dall'equazione di stato dei gas  $p/\rho = RT$ .

La velocità del suono  $a$ , definita come  $a = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{s=\text{cost}}$ , può essere posta pari a  $a = \sqrt{kRT} = \sqrt{kp/\rho}$ , stante l'ipotesi di gas ideale e essendo  $k$  il rapporto (indipendente dalla temperatura) tra il calore specifico a pressione e quello a volume costante,  $c_p$  e  $c_v$ . Dalla definizione di  $a$  appena introdotta, la (4.9) si riscrive come:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] - (k-1)\rho(\Gamma + uG) = 0 \quad (4.10)$$

La natura ondosa del fenomeno descritto da tali equazioni si rivela combinando le (4.7), (4.8) e (4.10) come segue:

$$(4.10) + a^2 \cdot (4.7) + \rho a \cdot (4.8)$$

$$(4.10) + a^2 \cdot (4.7) - \rho a \cdot (4.8)$$

da cui:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial p}{\partial x} - \rho a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0 \quad (4.12)$$

avendo definito  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  come:

$$\Delta_1 = -(k-1)\rho(\Gamma + uG) \quad (4.13)$$

$$\Delta_2 = \rho u a^2 \alpha \quad (4.14)$$

$$\Delta_3 = \rho a G \quad (4.15)$$

La (4.10), stante la simbologia sin qui introdotta, si riscrive come:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \Delta_1 = 0 \quad (4.16)$$

Come dimostrato, le equazioni del moto scritte in termini di variabili conservate, possono essere opportunamente riarrangiate definendo un sistema di equazioni differenziali equivalente composto dalle (4.11), (4.12) e (4.16). Tale procedimento ha consentito di passare da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nella variabile spaziale  $x$  e temporale  $t$  ad uno costituito da equazioni differenziali ordinarie essendo le due variabili indipendenti del sistema legate tramite le:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a \quad (4.17)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (4.18)$$

che definiscono le così dette *linee caratteristiche* nel piano  $x - t$ . In particolare, come di seguito più dettagliatamente illustrato, le (4.17) definiscono le linee di Mach, mentre la (4.18) descrive la linea di flusso.

Dalle (4.17) e (4.18) si ricava:

$$dx = (u \pm a) dt$$

$$dx = u dt$$

che introdotte nell'espressione dei differenziali esatti della pressione, della velocità e della densità restituiscono:

$$\left. \begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt = \left( (u \pm a) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) dt \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt = \left( (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{lungo le linee di Mach}$$

$$\left. \begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial t} dt = \left( u \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) dt \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt = \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) dt \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{lungo la linea di flusso}$$

In fine, sostituendo le espressioni di  $dp$ ,  $du$  e  $d\rho$  nelle (4.11), (4.12) e (4.16) si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinarie denominate *condizioni di compatibilità*:

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 \pm \Delta_3 = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} + \Delta_1 = 0 \quad (4.20)$$

Le (4.19) legano la pressione e la velocità del gas lungo le caratteristiche (4.17) mentre la (4.20) descrive la relazione tra la pressione e la densità lungo la caratteristica (4.18). Le velocità  $u \pm a$  e  $u$ , corrispondenti alle pendenze delle caratteristiche nel piano spazio tempo  $x - t$ , rappresentano le velocità di propagazione di disturbi nel mezzo fluido. In particolare, nel caso della (4.17), il disturbo si propaga alla velocità del suono relativa e per questo motivo tali linee sono chiamate *linee di Mach* ad intendere, cioè, che tale velocità dipende dal rapporto tra la velocità del fluido e quella del suono ossia dal numero di Mach. Il disturbo evidentemente provoca cambiamenti nella pressione, densità, temperatura, velocità ed entropia del fluido. La (4.18), invece, rappresenta la velocità di propagazione di un disturbo che si propaga alla velocità locale del fluido e che trasporta con sé, per convezione, la temperatura. Per questo motivo tale caratteristica è chiamata *linea di flusso*. La variazione di entropia, che si ottiene lungo la linea di flusso, è deducibile scrivendo la prima equazione di Gibbs secondo la quale:

$$Tds = d(c_v T) + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{k-1} \left( \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \right) - \frac{p}{\rho^2} d\rho = \frac{dp - a^2 d\rho}{\rho(k-1)} \quad (4.21)$$

La (4.16) può essere riarrangiata come segue:

$$\frac{dp - a^2 d\rho}{\rho(k-1)} = (\Gamma + uG)dt \quad (4.22)$$

e, stante la (4.21), si può porre:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\text{lineadiflusso}} = \frac{(\Gamma + uG)}{T} \quad (4.23)$$

La (4.23) evidenzia come la variazione di entropia lungo la linea di flusso, come era logico attendersi, è provocata dallo scambio termico e dagli attriti con le pareti.

### 4.3 Flusso omoentropico e condizioni di compatibilità

Nell'ipotesi che il flusso sia inviscido e adiabatico ( $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$ ) e che il condotto considerato sia a sezione costante ( $\Delta_2 = 0$ ) è immediato verificare che le condizioni di compatibilità diventano:

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{du}{dt} = 0 \quad (4.24)$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (4.25)$$

Stanti le assunzioni introdotte, le trasformazioni subite dal fluido sono descritte dalla ben nota  $p/\rho^k = \text{cost}$  che, combinata con  $a^2 = kp/\rho$ , e differenziata logicamente, restituisce:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2k}{k-1} \frac{da}{a}$$

Tale espressione, sostituita nelle condizioni di compatibilità (4.24), restituisce le condizioni di compatibilità per flusso omoentropico:

$$\frac{2}{k-1} da \pm du = 0 \quad (4.26)$$

In questo modo, il problema della risoluzione del moto viene semplificato notevolmente avendo introdotto un legame diretto lungo le linee di Mach tra la velocità del fluido e quella del suono rappresentato dalla (4.26) e tra quest'ultima e la pressione.

#### 4.4 Il metodo delle caratteristiche e gli invarianti di Riemann

Il metodo delle caratteristiche, introdotto inizialmente da Riemann e poi utilizzato da molti autori, fu la prima tecnica numerica disponibile per la risoluzione delle equazioni del moto nell'ipotesi di flusso monodimensionale e fu impiegata fino alla metà degli anni ottanta quando venne rimpiazzato su larga scala dalle moderne tecniche alle differenze finite ed ai volumi finiti aventi una maggiore accuratezza e robustezza. Tale metodo è tuttavia quello utilizzato nel presente modello per la risoluzione delle condizioni al contorno e, pertanto, verrà nel seguito illustrato, prima in relazione al flusso omoentropico, poi nel caso più generale di flusso in presenza di attrito, scambio termico e variazione di sezione del condotto.

##### 4.4.1 Flusso omoentropico

È stato mostrato, come, per flusso omoentropico, la velocità del fluido e quella del suono siano legate dalla (4.26) lungo una linea di Mach. In tale equazione, fissando arbitrariamente un verso per l'asse di riferimento all'interno del condotto, il segno positivo è da attribuire ad onde viaggianti concordemente all'orientamento di detto asse (onde progressive), viceversa, quello negativo è associato ad onde che si muovono in verso opposto rispetto all'asse di riferimento (onde regressive).

Dall'integrazione della (4.26) si ricava il legame tra  $a$  e  $u$  lungo un'onda progressiva viaggiante tra i generici punti 1 e 2 del nel piano  $x$ - $t$ :

$$\int_1^2 da + \frac{k-1}{2} \int_1^2 du = 0 \Leftrightarrow a_2 - a_1 + \frac{k-1}{2}(u_2 - u_1) = \text{cost } t$$

da cui discende immediatamente che:

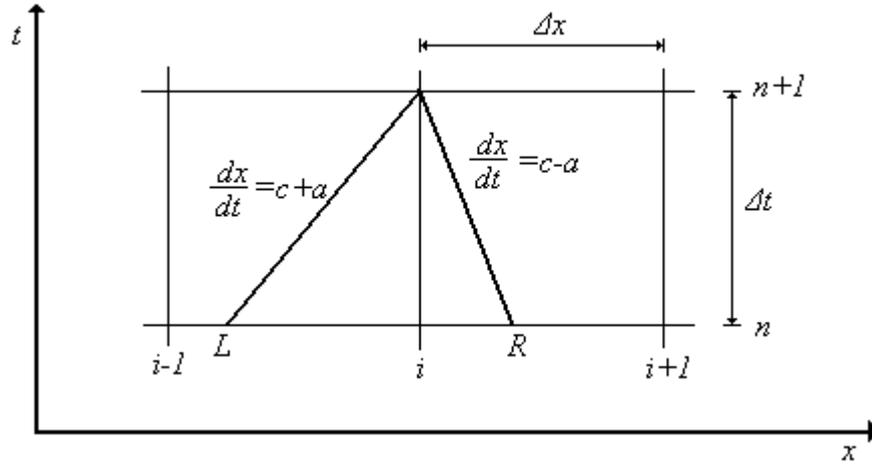
$$\lambda_1 = a_1 + \frac{k-1}{2}u = \lambda_2 = a_2 + \frac{k-1}{2}u_2 \Leftrightarrow \lambda = a + \frac{k-1}{2}u \Leftrightarrow \lambda = \text{cost } t \quad (4.27)$$

In modo analogo, lungo un'onda regressiva, integrando la (4.26) si ottiene:

$$a_2 - a_1 + \frac{k-1}{2}(u_1 - u_2) = \text{cost } t \Leftrightarrow \beta = a - \frac{k-1}{2}u = \text{cost } t \quad (4.28)$$

$\lambda$  e  $\beta$  sono comunemente denominati *invarianti di Riemann* in quanto rappresentano un'opportuna combinazione delle proprietà del fluido ( $a$  e  $u$ ) che non cambia lungo le linee di Mach. La (4.23) mostra, inoltre, che, in tali condizioni, l'entropia si conserva lungo la terza caratteristica; pertanto, la stessa rappresenta il terzo invariante di Riemann.

I risultati appena ottenuti possono essere direttamente impiegati per la risoluzione del flusso omoentropico all'interno di un condotto. Infatti, una volta discretizzato il dominio spazio-temporale sulla base degli intervalli  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , è possibile ricavare lo stato termofluidodinamico del flusso nella sezione  $i\Delta x$  all'istante  $(n+1)\Delta t$  a partire dalla conoscenza delle proprietà del fluido nelle sezioni  $(i-1)\Delta x$ ,  $i\Delta x$  e  $(i+1)\Delta x$  all'istante  $n\Delta t$  (fig. 4.1) come di seguito descritto.



**Figura 4. 1- Piano x - t. Linee caratteristiche per flusso omoentropico**

Nel punto  $[i\Delta x, (n+1)\Delta t]$  si ricongiungono l'onda progressiva avente piede nel punto L e quella regressiva che parte da R. Con riferimento alla notazione introdotta, è possibile riscrivere le (4.27) e (4.28) come:

$$a_i^{n+1} + \frac{k-1}{2} u_i^{n+1} = a_L^n + \frac{k-1}{2} u_L^n \Leftrightarrow \lambda_i^{n+1} = \lambda_L^n \quad (4.29)$$

$$a_i^{n+1} - \frac{k-1}{2} u_i^{n+1} = a_R^n - \frac{k-1}{2} u_R^n \Leftrightarrow \beta_i^{n+1} = \beta_R^n \quad (4.30)$$

Sommando e sottraendo la (4.29) e la (4.30) si ha:

$$a_i^{n+1} = \frac{\lambda_L^n + \beta_R^n}{2} \quad (4.31)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\lambda_L^n - \beta_R^n}{k-1} \quad (4.32)$$

La (4.31) e la (4.32) consentono di ricavare la velocità del fluido  $u_i^{n+1}$  e quella del suono  $a_i^{n+1}$  nel punto  $i\Delta x$  all'istante temporale  $(n+1)\Delta t$  partendo dalla conoscenza delle stesse grandezze nei punti L e R al precedente step temporale  $n\Delta t$ . I valori di  $u_L^n$ ,  $a_L^n$ ,  $u_R^n$  e  $a_R^n$  si ricavano per interpolazione lineare delle grandezze note nei punti adiacenti della griglia. Iterando tale procedimento, una volta assegnate le condizioni iniziali e quelle al contorno, si realizza una procedura marciante nel

tempo in grado di calcolare i valori delle proprietà del fluido in un assegnato istante temporale una volta noti quelli nell'istante precedente. Da notare, inoltre, come l'algoritmo illustrato possa essere impiegato esclusivamente in punti della griglia affiancati su ambo i lati da altri punti facenti parte del dominio di calcolo; diversamente è necessario applicare una tecnica risolutiva differente.

#### 4.4.2 Flusso non omoentropico

Per flusso omoentropico, come visto, è sufficiente riferirsi a due sole caratteristiche per descrivere compiutamente il moto. Nel caso di flusso non omoentropico, invece, la variazione di entropia, anche lungo la linea di flusso, rende necessario il ricorso anche alla terza caratteristica.

In presenza di scambio termico, di fenomeni d'attrito viscoso su parete e di un'eventuale variazione della sezione del condotto, le equazioni di compatibilità cui riferirsi sono le (4.19) e (4.20).

Da queste discende che, in tal caso,  $\lambda$  e  $\beta$  subiscono una variazione lungo le linee di Mach e, pertanto, vengono definiti *variabili di Riemann*. La variazione di  $\lambda$  può essere valutata partendo dalla sua differenziazione:

$$\lambda = a + \frac{k-1}{2}u \Rightarrow d\lambda = da + \frac{k-1}{2}du$$

in cui, sostituendo  $du$  dalla (4.19) e  $da$  dalla differenziazione logaritmica di  $a^2 = kp / \rho$ , si ottiene:

$$d\lambda = \frac{1}{2a} \left( \frac{k}{\rho} dp - \frac{kp}{\rho^2} d\rho \right) - \frac{k-1}{2\rho a} dp - \frac{k-1}{2\rho a} [\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3] dt$$

Riordinando e introducendo la (4.20), si ha:

$$d\lambda = -\frac{\Delta_1 dt}{2\rho a} - \frac{k-1}{2\rho a} [\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3] dt$$

in cui si sostituisce l'espressione della la terza caratteristica dalla (4.22), per cui :

$$d\lambda = \frac{k-1}{2} \frac{T}{a} ds - \frac{k-1}{2\rho a} [\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3] dt \quad (4.33)$$

In modo analogo si perviene alla valutazione della variazione di  $\beta$  lungo la linea di Mach di pendenza  $u-a$  :

$$d\beta = \frac{k-1}{2} \frac{T}{a} ds - \frac{k-1}{2\rho a} [\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3] dt \quad (4.34)$$

Con riferimento alla figura 4.2, partendo dalla valutazione per interpolazione delle proprietà del fluido all'istante  $n\Delta t$  nei punti L, S e R è possibile individuare lo stato temofluidodinamico nella sezione  $i$  all'istante  $(n+1)\Delta t$  impiegando le equazioni di compatibilità nella forma espressa dalle (4.35) e (4.36) e l'equazione dell'entropia fornita dalla (4.23).

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_L^n + d\lambda_L \quad (4.35)$$

$$\beta_i^{n+1} = \beta_R^n + d\beta_R \quad (4.36)$$

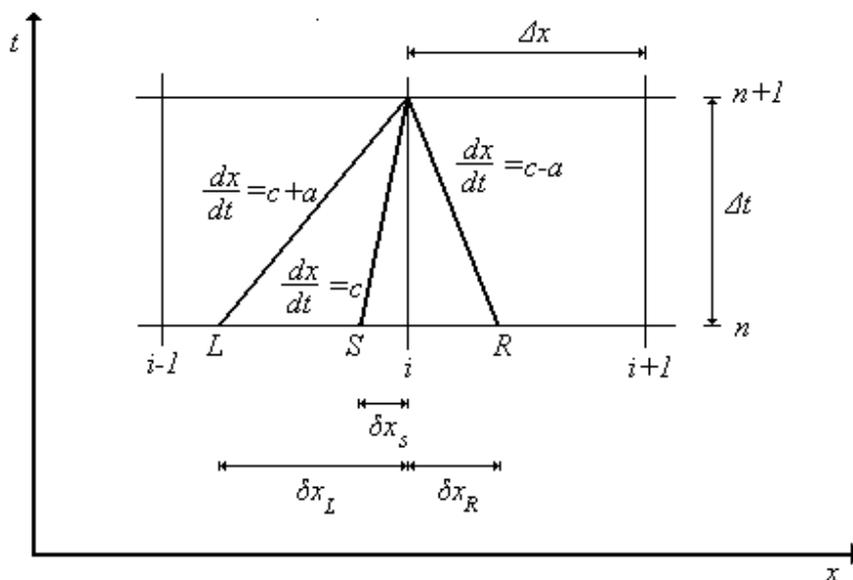


Figura 4. 2 – Piano x – t. Linee caratteristiche per flusso reale

Iterando tale procedura nel tempo e sull'intero dominio spaziale d'integrazione (ad eccezione delle sezioni di estremità) si perviene alla soluzione delle equazioni del moto.

#### 4.5 Condizioni di compatibilità nel moto relativo e per flusso assialsimmetrico

Il procedimento da seguire per pervenire alla formulazione delle condizioni di compatibilità per il moto relativo nella girante è perfettamente analogo a quello descritto per condotti fissi salvo considerare gli ulteriori termini sorgente che tengono conto degli effetti della forza centrifuga agente sulla particella fluida. Le equazioni del moto sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial s} = -\rho w \alpha \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w^2 + p)}{\partial s} = -\rho w^2 \left( \alpha + \frac{2f}{D_{eq}} \frac{w}{|w|} \right) + \rho u^2 \delta = -\rho w^2 \alpha - \rho G_w + \rho u^2 \delta \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \rho e_w^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho w h_w^0}{\partial s} = -\rho w h_w^0 \alpha + \frac{4\dot{q}}{D} + \rho w u^2 \delta = -\rho w h_w^0 \alpha + \rho \Gamma_w + \rho w u^2 \delta \quad (4.39)$$

Esplicitando le derivate e combinando tra loro le (4.37), (4.38), (4.39), si perviene al sistema scritto in termini di variabili fisiche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial s} + w \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho w \alpha = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + G_w - u^2 \delta = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + w \frac{\partial e}{\partial s} - \frac{p}{\rho^2} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial s} \right] - (\Gamma_w + w G_w) = 0 \quad (4.42)$$

Per un gas ideale in cui si indica con  $a^2 = kp/\rho$  la velocità del suono e con  $k$  il rapporto, costante, tra i calori specifici, la (4.42) diviene:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial s} - a^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial s} \right] - (k-1)\rho(\Gamma_w + wG_w) = 0 \quad (4.43)$$

La natura ondosa del flusso si rivela riarrangiando le (4.40), (4.41), (4.43) nel seguente modo:

$$(4.43) + a^2 \cdot (4.40) + \rho a \cdot (4.41)$$

$$(4.43) + a^2 \cdot (4.40) - \rho a \cdot (4.41)$$

da cui:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (w+a) \frac{\partial p}{\partial s} + \rho a \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + (w+a) \frac{\partial w}{\partial s} \right] + \Delta_{1w} + \Delta_{2w} + \Delta_{3w} = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (w-a) \frac{\partial p}{\partial s} - \rho a \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + (w-a) \frac{\partial w}{\partial s} \right] + \Delta_{1w} + \Delta_{2w} - \Delta_{3w} = 0 \quad (4.45)$$

Si definiscono:

$$\Delta_{1w} = -(k-1)\rho(\Gamma_w + wG_w) \quad (4.46)$$

$$\Delta_{2w} = \rho w a^2 \alpha \quad (4.47)$$

$$\Delta_{3w} = \rho a (G_w - u^2 \delta) \quad (4.48)$$

L'equazione dell'energia (4.43), stante la nomenclatura introdotta, diventa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial s} - a^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial s} \right] + \Delta_{1w} = 0 \quad (4.49)$$

Lungo le linee caratteristiche del piano  $s-t$  di pendenza  $w \pm a$  e  $w$  valgono le seguenti condizioni di compatibilità:

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{dw}{dt} + \Delta_{1w} + \Delta_{2w} \pm \Delta_{3w} = 0 \quad (4.50)$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} + \Delta_{1w} = 0 \quad (4.51)$$

La variazione di entropia lungo la linea di flusso è espressa dalla:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\text{lineadiflusso}} = \frac{(\Gamma_w + wG_w)}{T} \quad (4.52)$$

Ripetendo tale procedimento per le equazioni del moto per flusso assialsimmetrico a componente assiale nulla si ottengono le seguenti condizioni di compatibilità:

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{dc_r}{dt} + \Delta_{1D} + \Delta_{2D} \pm \Delta_{3D} = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} + \Delta_{1D} = 0 \quad (4.54)$$

avendo definito:

$$\Delta_{1D} = -(k-1)\rho(\Gamma_D + c_r G_D + \frac{2f}{D_{eq,D}} c^2 c_u \frac{c_u}{c})$$

$$\Delta_{2D} = \rho c_r a^2 \alpha$$

$$\Delta_{3D} = \rho a \left( G_D - \frac{u^2}{r} \right)$$

$$G_D = \frac{2f}{D_{eq,D}} c^2 \frac{c_r}{c}$$

La variazione dell'entropia lungo una linea di flusso è espressa dalla:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{\text{lineadiflusso}} = \frac{(\Gamma_D + c_r G_D + \frac{2f}{D_{eq,D}} c^2 c_u \frac{c_u}{c})}{T} \quad (4.55)$$

## 4.6 Condizioni al contorno

Come anticipato, la tecnica utilizzata nel codice instazionario per risolvere le condizioni al contorno è il metodo delle caratteristiche. In letteratura [25, 26] sono descritte le tecniche risolutive per trattare diversi casi come, ad esempio, estremità aperte o chiuse, giunzioni tra condotti aventi diametro differente, orifizi, valvole (a farfalla), turbine, compressori, intercoolers, etc. Tali metodologie sono accomunate dall'ipotesi di quasi-stazionarietà, si presuppone cioè che le giunzioni tra condotti in cui il flusso perde le caratteristiche di monodimensionalità (si pensi, ad esempio, alle giunzioni che schematizzano il raccordo tra più condotti confluenti o a quelle che descrivono una brusca variazione di diametro) abbiano un'estensione ed un volume piccoli rispetto a quelli dei condotti cui sono collegati. Stanti tali ipotesi, è lecito assumere che all'interno di una giunzione non si verificano accumuli di massa ed energia e che eventuali onde di pressione o di altro tipo necessitino di un tempo trascurabile per attraversarle.

### 4.6.1 Giunzione generica tra due condotti

Le condizioni al contorno relative ai nodi d'estremità di due condotti adiacenti sono calcolate supponendo il problema quasi-stazionario; pertanto, si impone che la portata massica ed entalpica uscente da un condotto sia uguale a quella entrante nel condotto adiacente. Per la risoluzione delle condizioni al contorno vengono altresì impiegate le condizioni di compatibilità ed una relazione tra le pressioni totali vigenti nelle sezioni d'estremità dei condotti adiacenti. In particolare, nell'ipotesi di flusso isentropico, viene imposta l'uguaglianza tra le pressioni totali a monte ed a valle della giunzione, diversamente si introduce una correlazione di perdita specifica per ciascun tipo di giunzione.

Con riferimento alla giunzione generica tra due condotti fissi (fig. 4.3), il problema richiede la determinazione di 6 incognite che definiscono lo stato termofluidodinamico a monte ed a valle della giunzione (sezioni 1 e 2) al tempo  $(n+1)\Delta t$ , una volta assegnate le condizioni del flusso all'istante  $n\Delta t$ .

Nell'algoritmo implementato per la risoluzione delle condizioni al contorno, le grandezze impiegate come incognite sono la pressione, la temperatura e la velocità nelle sezioni 1 e 2 (fig. 4.3).

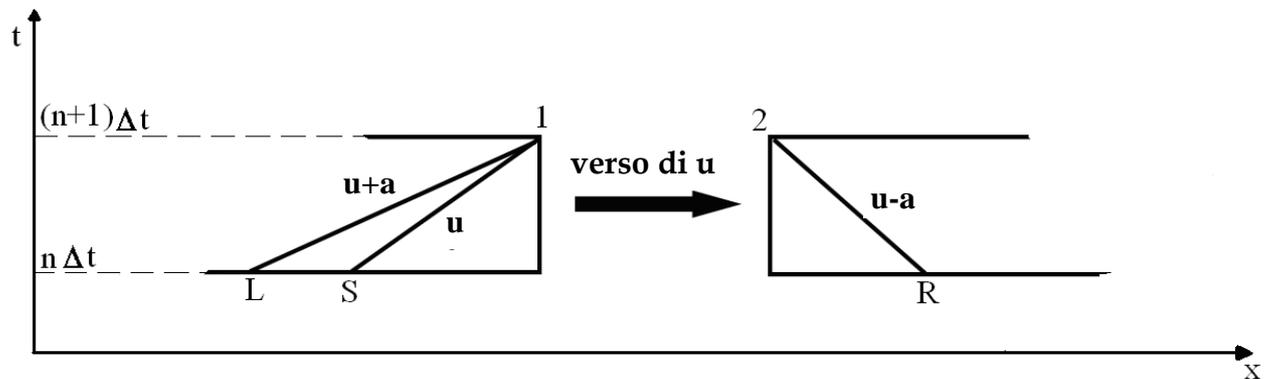


Figura 4. 3 – Linee caratteristiche. Risoluzione condizione al contorno

Le sei equazioni da soddisfare per la risoluzione del problema sono:

$$\dot{m}_1^{n+1} = \dot{m}_2^{n+1} \quad \text{Conservazione massa} \quad (4.56)$$

$$h_1^{0,n+1} = h_2^{0,n+1} \quad \text{Conservazione energia} \quad (4.57)$$

$$\frac{p_2^{0,n+1}}{p_1^{0,n+1}} = f(u_1^{n+1}, p_1^{n+1}, T_1^{n+1}) \quad \text{Relazione perdita pressione totale} \quad (4.58)$$

$$T_1^{n+1} = f(p_1^{n+1}, p_S^n, T_S^n, u_S^n) \quad \text{Equazione compatibilità lungo } u \quad (4.59)$$

$$u_1^{n+1} = f(p_1^{n+1}, p_L^n, T_L^n, u_L^n) \quad \text{Equazione compatibilità lungo } u+a \quad (4.60)$$

$$u_2^{n+1} = f(p_2^{n+1}, p_R^n, T_R^n, u_R^n) \quad \text{Equazione compatibilità lungo } u-a \quad (4.61)$$

La procedura numerica iterativa impiegata è la seguente:

1. si fissa come valore di primo tentativo per  $p_1^{n+1}$  quello della pressione nella stessa sezione 1 al passo d'integrazione precedente  $p_1^n$
2. si ricava  $u_1^{n+1}$  dalla (4.60) e  $T_1^{n+1}$  dalla (4.59)
3. sono definiti i valori del numero di Mach  $M_1^{n+1}$  e della pressione totale  $p_1^{0,n+1}$  nella sezione 1 secondo le:

$$M_1^{n+1} = u_1^{n+1} / \sqrt{kRT_1^{n+1}} \quad (4.62)$$

$$p_1^{0,n+1} = p_1^{n+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^{n+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.63)$$

4. dall'equazione di stato dei gas, si ricava  $\rho_1^{n+1}$  tramite la:

$$\rho_1^{n+1} = p_1^{n+1} / RT_1^{n+1} \quad (4.64)$$

5. si calcolano la portata massica e l'entalpia totale nella sezione 1 costituenti i primi membri delle (4.56) e (4.57) tramite le:

$$\dot{m}_1^{n+1} = \rho_1^{n+1} u_1^{n+1} \Omega_1 \quad (4.65)$$

$$h_1^{0,n+1} = c_p T_1^{n+1} + (u_1^{n+1})^2 / 2 \quad (4.66)$$

6. a questo punto della procedura, è definito completamente lo stato termofluidodinamico nella sezione 1 per l'assegnato valore di tentativo della  $p_1^{n+1}$ ; si fissa  $p_2^{n+1}$  ponendolo pari al valore assunto dalla pressione al passo d'integrazione precedente  $p_2^n$
7. si calcola la pressione totale  $p_2^{0,n+1}$  nella sezione 2 dalla (4.58)
8. dalla (4.61) si ricava  $u_2^{n+1}$
9. dalla (4.57), noto  $h_1^{0,n+1}$ , si calcola  $T_2^{n+1}$  tramite la:

$$T_2^{n+1} = \frac{1}{c_p} \left( h_{t,2}^{n+1} - (u_2^{n+1})^2 / 2 \right) \quad (4.67)$$

10. e, quindi,  $M_2^{n+1}$  :

$$M_2^{n+1} = u_2^{n+1} / \sqrt{kRT_2^{n+1}} \quad (4.68)$$

11. si calcola un nuovo valore di  $p_2^{n+1}$  mediante la:

$$p_2^{n+1} = p_2^{0,n+1} / \left( 1 + \frac{k-1}{2} (M_2^{n+1})^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.69)$$

12. si ripetono i passi da 9 a 12 fino alla convergenza sul valore di  $p_2^{n+1}$

13. noti  $p_2^{n+1}$  e  $T_2^{n+1}$ , dall'equazione di stato dei gas, si ricava  $\rho_2^{n+1}$ :

$$\rho_2^{n+1} = p_2^{n+1} / RT_2^{n+1} \quad (4.70)$$

14. si calcola la portata  $\dot{m}_2^{n+1}$  nel ramo 2 secondo la:

$$\dot{m}_2^{n+1} = \rho_2^{n+1} u_2^{n+1} \Omega_2 \quad (4.71)$$

15. si valuta l'errore tra le portate  $\Delta \dot{m}$  dato da:

$$\Delta \dot{m} = \dot{m}_1^{n+1} - \dot{m}_2^{n+1} \quad (4.72)$$

16. nel caso in cui  $\Delta \dot{m}$  è maggiore dell'errore massimo ammesso, si itera la procedura ripartendo dal passo 2.

Il procedimento appena illustrato definisce un legame funzionale tra l'errore sul bilancio di portata  $\Delta \dot{m}$  e la pressione  $p_1^{n+1}$  nel ramo 1. Per la risoluzione della condizione al contorno, in ultima analisi, è necessario individuare il valore di  $p_1^{n+1}$  che annulla la funzione  $\Delta \dot{m} = f(p_1^{n+1})$ . A tal fine, in una prima fase, si assegnano per  $p_1^{n+1}$  alternativamente valori maggiori ed inferiori rispetto a quello di primo tentativo fino ad individuare due valori di  $p_1^{n+1}$  per cui  $\Delta \dot{m}$  assume segno opposto; successivamente, tramite il metodo del dimezzamento, si individua, a meno di un errore massimo ammesso, il valore di  $p_1^{n+1}$  per cui si annulla la funzione  $\Delta \dot{m} = f(p_1^{n+1})$ .

### 4.6.2 Giunzione tra più di due condotti

Nel caso di giunzione tra più condotti è necessario descrivere opportunamente le perdite di carico che si realizzano tra i vari rami confluenti. Un'ipotesi spesso utilizzata consiste nel supporre che la pressione sia la stessa in tutti i rami della giunzione; tale assunzione, in taluni casi, comporta una riduzione globale di entropia violando evidentemente il secondo principio della termodinamica. L'approccio più rigoroso consiste, invece, nel caratterizzare sperimentalmente la giunzione in esame allo scopo di determinare opportune correlazioni in grado di quantificare tali perdite in funzione dei livelli di velocità nei singoli rami. Naturalmente, tale approccio richiede la disponibilità di adeguati banchi di flussaggio grazie ai quali ricavare opportune correlazioni di perdita specifiche per ogni configurazione indagata. La vasta casistica disponibile in letteratura ha consentito di pervenire ad espressioni più generali valide per un qualsivoglia numero di rami, comunque orientati nello spazio.

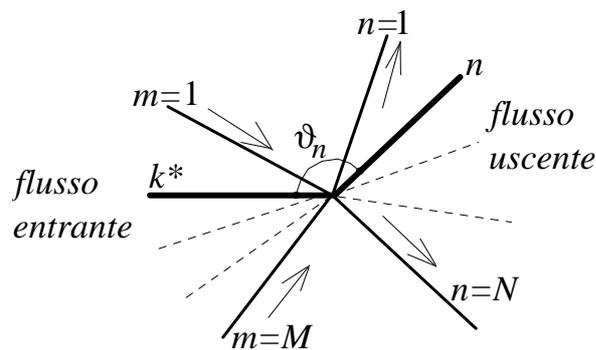


Figura 4.4 – Schematizzazione giunzione multipla

Si consideri la generica giunzione (fig. 4.4) costituita da  $K$  rami:  $M$  caratterizzati da flusso entrante nella giunzione ed  $N$  da flusso uscente dalla stessa ( $K = M + N$ ). Le incognite sono, pertanto, pari a  $3K$  (ad es. pressione, temperatura e velocità in ogni ramo), mentre le equazioni disponibili per la risoluzione del problema sono:

- $M$  equazioni di compatibilità lungo le linee di Mach di pendenza  $u + a$
- $N$  equazioni di compatibilità lungo le linee di Mach di pendenza  $u - a$
- $M$  equazioni di compatibilità lungo le linee di flusso di pendenza  $u$

- $N$  equazioni di bilancio di portata entalpica:

$$h_{t,n} = \frac{\sum_{m=1}^M \dot{m}_m h_{t,m}}{\sum_{m=1}^M \dot{m}_m} \quad (n=1, N)$$

- 1 equazione di bilancio della portata:  $\sum_{n=1}^N \dot{m}_n + \sum_{m=1}^M \dot{m}_m = 0$
- $K-1$  relazioni di perdita che legano la pressione nel generico ramo  $k$  a quella nel ramo  $k^*$ , scelto arbitrariamente  $\forall k \neq k^*$

Per la modellazione delle perdite di pressione all'interno di una giunzione multipla, nella procedura qui sviluppata, si è seguito l'approccio proposto da Bingham e Blair [27, 28]; lo stesso prevede che la differenza di pressione tra il generico ramo  $n$  caratterizzato da flusso uscente nella giunzione ed il ramo  $k^*$ , utilizzato come riferimento ed avente flusso entrante nella stessa, è funzione del quadrato della velocità e dell'angolo  $\vartheta_n$  tra di essi compreso secondo le:

$$p_{k^*} - p_n = \mu_n \rho_n u_n^2 \quad (n=1, N) \quad (4.73)$$

$$\mu_n = \max\left(1.6 - \frac{1.6\vartheta_n}{167}, 0\right) \quad (n=1, N) \quad (4.74)$$

Assumendo poi che la pressione nei rami con flusso entrante nella giunzione sia la stessa di quella del ramo  $k^*$ , ossia:

$$p_{k^*} - p_m = 0 \quad (\forall m \neq k^*) \quad (4.75)$$

risultano definite  $3K$  equazioni da impiegare per ricavare le  $3K$  incognite del problema.

Va, inoltre, osservato che la dipendenza di  $\mu_n$  dall'angolo  $\vartheta_n$  determina una variabilità dei risultati numerici in funzione dello specifico ramo  $k^*$  scelto come riferimento. Tale influenza, fisicamente inaccettabile, si è rivelata però nella pratica di modesta entità.

### 4.6.3 Giunzione aspirazione - girante compressore

Il procedimento seguito per la risoluzione della giunzione tra il condotto di aspirazione e la girante del compressore è analogo a quello impiegato nel caso di due condotti fissi descritto nel paragrafo 4.6.1 a patto di usare le relazioni di compatibilità riguardanti il moto relativo introdotte nel paragrafo 4.5. Il passaggio dal moto assoluto a quello relativo avviene tramite la costruzione del triangolo delle velocità che risulta definito una volta assegnata in modulo direzione e verso la velocità assoluta  $\underline{c}$  e quella periferica in ingresso  $\underline{u}$  (fig. 4.5); in tal modo, è possibile ricavare la velocità relativa  $\underline{w}$  all'ingresso della girante. Nel seguito si userà la convenzione di indicare con il pedice 1 lo stato termofluidodinamico a monte della giunzione ( nel moto assoluto), mentre con il pedice 2 ci si riferirà alle condizioni a valle della stessa (nel moto relativo).

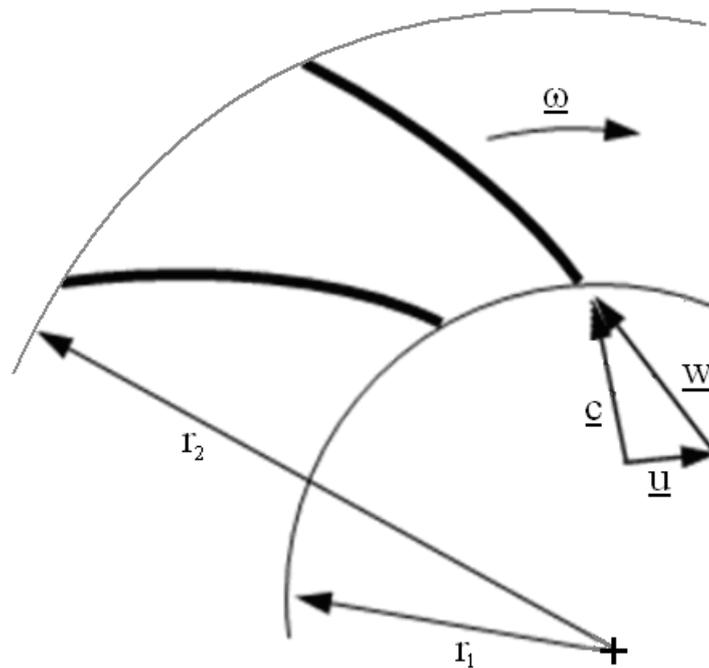


Figura 4.5 – Triangolo delle velocità all'ingresso del compressore

L'algoritmo impiegato per la risoluzione della condizione al contorno è il seguente:

1. si fissa come valore di primo tentativo per la pressione  $p_1^{n+1}$  quella nello stesso punto all'istante precedente  $p_1^n$
2. si ricava, tramite la caratteristica di pendenza  $c + a$ , la velocità assoluta  $c_1^{n+1}$
3. dal triangolo delle velocità, note  $c_1^{n+1}$  e la velocità periferica, si desume la velocità relativa  $w_1^{n+1}$
4. dalla caratteristica di pendenza  $c$ , si ricava  $T_1^{n+1}$  pendenza
5. dall'equazione di stato dei gas, noti  $p_1^{n+1}$  e  $T_1^{n+1}$ , si ottiene  $\rho_1^{n+1}$
6. si calcolano la portata entrante nella giunzione ( $\dot{m}_1^{n+1} = \rho_1^{n+1} c_1^{n+1} \Omega_1$ ) e l'entalpia totale relativa nel ramo 1 ( $h_{w1}^{0,n+1} = h_1^{n+1} + (w_1^{n+1})^2 / 2$ )
7. noti  $p_1^{n+1}$ ,  $T_1^{n+1}$  e  $w_1^{n+1}$ , si ottengono i valori del numero di Mach relativo  $M_{w1}^{n+1}$  e della pressione totale relativa  $p_{w1}^{0,n+1}$  attraverso le relazioni:

$$M_{w1}^{n+1} = \frac{w_1^{n+1}}{\sqrt{kRT_1^{n+1}}} \quad (4.76)$$

$$p_{w1}^{0,n+1} = p_1^{n+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} (M_{w1}^{n+1})^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.77)$$

8. tramite un'opportuna correlazione di perdita, introdotta e descritta nel capitolo 6 e formalmente espressa dalla (4.58), si calcola la pressione totale relativa  $p_{w2}^{0,n+1}$  a valle della giunzione
9. si fissa arbitrariamente un valore per la pressione  $p_2^{n+1}$
10. dalla caratteristica di pendenza  $w - a$  si ricava  $w_2^{n+1}$
11. nota l'entalpia totale relativa nel ramo 2 (che viene posta pari a quella nel ramo 1), si calcola la  $T_2^{n+1}$
12. da  $w_2^{n+1}$  e  $T_2^{n+1}$ , si calcola  $M_{w2}^{n+1}$  e, quindi, un nuovo valore per la  $p_2^{n+1}$  tramite la:

$$p_2^{n+1} = p_{w2}^{0,n+1} / \left( 1 + \frac{k-1}{2} (M_{w2}^{n+1})^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.78)$$

13. si ripetono i passi da 10 a 12 fino alla convergenza sul valore della  $p_2^{n+1}$
14. si calcola la portata nel ramo 2 da confrontare con quella nel ramo 1; se l'errore tra le due portate  $\Delta \dot{m}$  eccede il valore massimo ammesso, si itera la procedura a partire dal passo 2 fissando una nuova  $p_1^{n+1}$ .

In analogia a quanto descritto nel paragrafo 4.6.1, l'algoritmo prevede una prima fase volta alla ricerca di due valori di  $p_1^{n+1}$  tali da comportare l'inversione del segno per l'errore sulla portata; successivamente, viene adottato il metodo del dimezzamento per individuare il valore di  $p_1^{n+1}$  che minimizza (entro un valore ritenuto ammissibile)  $\Delta \dot{m}$ .

#### 4.6.4 Giunzione generica tra i condotti costituenti i modelli del compressore e della turbina

Non verranno forniti ulteriori dettagli di carattere procedurale sulla risoluzione delle condizioni al contorno per tutti gli altri tipi di giunzione presenti all'interno di un compressore e di una turbina. In ogni caso, il procedimento seguito è del tutto simile a quello descritto in dettaglio nel paragrafo 4.5.3 salvo adottare di volta in volta un'opportuna correlazione di perdita tra le pressioni totali vigenti nei nodi d'estremità di due condotti adiacenti.

Inoltre, nel passaggio tra un condotto rotante ed uno fisso (da condotto fisso a rotante), è necessario tener conto della transizione tra moto relativo ed assoluto (da assoluto a relativo) ricostruendo opportunamente i triangoli delle velocità. Nel caso della risoluzione della giunzione tra girante e diffusore del compressore è necessario considerare anche il fenomeno dello slip; a tal fine, sulla base del coefficiente di slip calcolato tramite una delle correlazioni disponibili in letteratura, si deve modificare

la geometria dei triangoli delle velocità e, di conseguenza, il bilancio di energia per tener conto della riduzione del lavoro trasferito al fluido.

#### 4.6.5 Giunzione “compressore” e “turbina”

L’approccio tradizionale seguito nella simulazione di motori a combustione interna sovralimentati è quello di tener conto della compressione e dell’espansione subita dai gas, rispettivamente, nel sistema di aspirazione e scarico tramite l’imposizione di opportune condizioni al contorno tra i condotti cui sono collegate le turbomacchine [29]. In particolare, nella risoluzione di tali giunzioni, oltre ad imporre il bilancio di massa (4.56) ed il rispetto delle condizioni di compatibilità espresse dalle (4.59), (4.60) e (4.61), si ricava il legame tra le pressioni e le temperature a monte ed a valle della giunzione dalle mappe caratteristiche del compressore e della turbina.

La procedura implementata nel presente codice, a differenza di quelle impiegate anche nei più diffusi codici commerciali, consente di gestire curve prestazionali (rapporto di compressione o espansione) che non siano strettamente monotone. Come di seguito descritto, ciò rende possibile l’analisi di condizioni operative per il compressore instabili o a portata negativa.

Anche per la giunzione “turbomacchina” la procedura seguita è analoga a quella proposta nel paragrafo 4.6.1. Si inizia fissando un valore di tentativo per  $p_1^{n+1}$  da cui si ricavano  $u_1^{n+1}$  e  $T_1^{n+1}$  mediante le equazioni di compatibilità (4.60) e (4.59). Da tali grandezze è possibile derivare la temperatura totale  $T_1^{0,n+1}$  e la portata  $\dot{m}_1^{n+1}$  a monte della giunzione; a questo punto si entra nella mappa con il valore della portata massica e della velocità di rotazione corrette, calcolate secondo le ben note:

$$\dot{m}_{corr} = \dot{m}_1^{n+1} \sqrt{T_1^{0,n+1}/T_{ref}} / p_1^{0,n+1} / p_{ref} \quad (4.79)$$

$$n_{corr} = n / \sqrt{T_1^{0,n+1}/T_{ref}} \quad (4.80)$$

per ricavare il rapporto di compressione o espansione e, quindi, la pressione totale  $p_2^{0,n+1}$  (per il compressore) o statica  $p_2^{n+1}$  (per la turbina) a valle della giunzione.

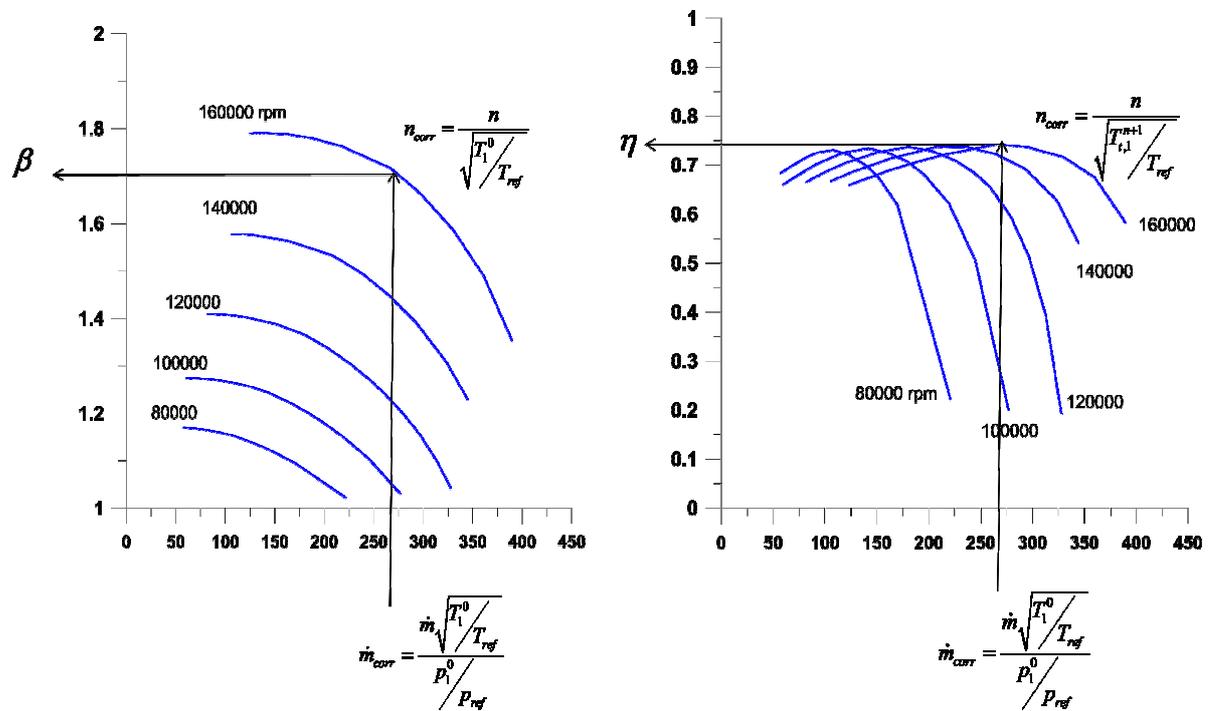


Figura 4. 6– Procedura di interrogazione delle mappe del compressore

Nel primo caso, l'algoritmo procede analogamente a quanto visto nel già citato paragrafo 4.6.1 salvo correggere il valore dell'entalpia a valle del componente per tener conto dell'incremento di energia subito dal fluido facendo uso delle seguenti relazioni:

$$\Delta h_{comp} = \frac{c_p T_1^{0,n+1} \left( \beta_{tt}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{\eta_{tt}} \quad (4.81)$$

$$h_2^{0,n+1} = h_1^{0,n+1} + \Delta h_{comp} \quad (4.82)$$

in cui  $\beta_{tt}$  e  $\eta_{tt}$  sono, rispettivamente, i valori del rapporto di compressione e del rendimento (total to total) ottenuti dalle mappe.

Per quanto riguarda la turbina, il bilancio di energia viene opportunamente modificato per tener conto della riduzione del contenuto entalpico del fluido che si verifica nell'attraversamento della macchina:

$$\Delta h_{urb} = \eta_{ts} c_p T_1^{0,n+1} \left( 1 - \frac{1}{\beta_{ts}^{\frac{k}{k-1}}} \right) \quad (4.83)$$

$$h_2^{n+1} = h_1^{0,n+1} - \Delta h_{urb} \quad (4.84)$$

$\beta_{ts}$  e  $\eta_{ts}$  sono, rispettivamente, il rapporto di espansione ed il rendimento (totalto static) letti dalla mappa. Nel caso della turbina, da questo punto in poi l'algoritmo impiegato è leggermente differente da quello visto per la generica giunzione o per il compressore. Infatti, si ricava dalla (4.84) l'entalpia statica e, quindi,  $T_2^{n+1}$ ; noto  $\beta_{ts}$ , si calcola  $p_2^{n+1}$  e, dall'equazione di compatibilità (4.61), infine  $u_2^{n+1}$ . A questo punto può essere valutato  $\dot{m}_2^{n+1}$  e, quindi, riavviata l'iterazione sull'errore della portata cambiando opportunamente il valore di tentativo per  $p_1^{n+1}$ .

L'approccio solitamente utilizzato per la risoluzione di tale tipo di giunzione è quello di partire con la valutazione del rapporto di compressione o espansione sulla base dei valori di pressione a monte ed a valle della turbomacchina risalenti al passo d'integrazione precedente. Tale grandezza è poi impiegata per derivare dalle mappe il valore della portata una volta assegnata anche la velocità di rotazione. E' evidente come, utilizzando tale procedura, non sia possibile adoperare mappe che non siano strettamente monotone ossia, per il compressore, che non contemplino la sola regione di funzionamento stabile della macchina. Diversamente, per un assegnato  $\beta$ , risultano individuati più valori della portata come indicato in fig. 4.7. Viceversa, nella procedura proposta, si ricava in maniera univoca il rapporto di compressione o espansione una volta assegnata la portata ad ogni iterazione. Tale caratteristica risulta di fondamentale importanza nella simulazione del compressore quando lo stesso lavora in condizioni di pompaggio; in questo caso, infatti, la mappa viene

interrogata su un ampio range di portate che include anche la zona instabile e quella per flusso inverso.

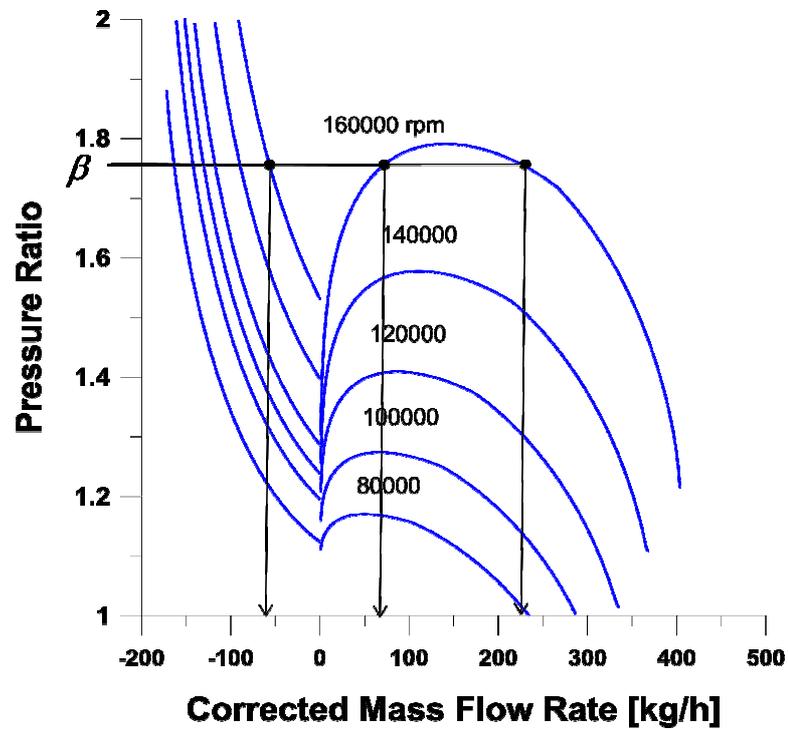


Figura 4.7 – Rappresentazione procedura di interrogazione delle mappe secondo l’approccio classico

#### 4.7 Integrazione delle equazioni del moto nei condotti

Come già accennato, il metodo delle caratteristiche ha avuto ampia diffusione nel suo utilizzo in passato anche grazie alla capacità di rendere manifesta e descrivere la natura del fenomeno fisico di propagazione ondosa. Anche nella soluzione di problemi motoristici il metodo ha trovato possibilità d'impiego, palesando, però, limiti operativi in presenza di tipici problemi legati alla presenza di discontinuità nel flusso. Tali discontinuità possono presentarsi, ad esempio, per l'instaurarsi di una condizione di flusso sonico o per il contatto tra due flussi con differenti proprietà. Tale ultimo fenomeno si verifica, ad esempio, all'apertura della valvola di scarico del motore, quando al flusso esistente nel condotto di scarico si sovrappone quello, di differente temperatura, proveniente dal cilindro. Al crescere della complessità dei fenomeni (per l'esistenza di numerose discontinuità di urto e di contatto) e dell'articolazione del sistema fisico da simulare, il metodo delle caratteristiche può, come detto, presentare evidenti limiti di accuratezza.

Di più recente introduzione sono i metodi d'integrazione numerica indirizzati alla soluzione di problemi di flusso non stazionario o pseudo-stazionario. Questi ultimi, noti come problemi di tipo time-marching, trovano ampio riscontro nel caso di flussi transonici stazionari, per i quali la natura delle equazioni del moto varierebbe da iperbolica, nella regione subsonica, a parabolica in quella supersonica. La trasformazione del problema numerico in uno di tipo evolutivo consente di risolvere equazioni iperboliche in tutto il campo di moto, avvalendosi delle numerose tecniche disponibili, il cui perfezionamento ha avuto particolare impulso negli ultimi anni, grazie anche all'interesse che la soluzione di tale categoria di equazioni riveste in molti settori dell'aerodinamica e della fluidodinamica delle macchine.

In tali metodi si preferisce, innanzitutto, impostare le equazioni del moto in variabili conservative, al fine di ricondurle ad una formulazione ed una tecnica di risoluzione numerica universale. E', pertanto, possibile riferirsi all'espressione compatta delle equazioni del moto:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (4.4)$$

avendo posto:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e^0 \end{bmatrix} \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u h^0 \end{bmatrix} \quad S(U) = - \begin{bmatrix} \rho u \alpha \\ \rho u^2 \alpha + \rho G \\ \rho u h^0 \alpha - \rho \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

oppure, osservando che è possibile porre  $F(U) = A(U)U$ , in cui  $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ , poiché  $F(U)$  è una funzione omogenea di primo grado delle variabili conservative  $U$  (stante l'ipotesi di gas a comportamento perfetto), impiegare la formulazione quasi-lineare del sistema di Eulero:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = S(U) \quad (4.85)$$

#### 4.7.1 Schemi d'integrazione della famiglia Lax - Wendroff

La prima formulazione delle equazioni di Eulero è quella da cui prende spunto il lavoro pionieristico di Lax in cui viene adottata una semplice discretizzazione "forward" (indietro) nel tempo e "centered" (centrata) nello spazio:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \frac{(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n)}{2\Delta x} + S_i^n \Delta t \quad (4.86)$$

Si tratta di un primo esempio inerente le tecniche risolutive alle differenze finite; tale denominazione deriva dal fatto lo schema numerico (4.86) si ottiene semplicemente assimilando le derivate spaziali e temporali ai corrispondenti rapporti incrementali nel sistema di equazioni differenziali (4.4). Naturalmente, a tal fine, è necessario preventivamente discretizzare il dominio spaziotemporale definendo gli intervalli di discretizzazione spaziale  $\Delta x$  e temporale  $\Delta t$ .

Lo schema di Lax, oltre ad essere poco accurato perché del primo ordine, si è rilevato anche "incondizionatamente instabile". La soluzione adottata per eliminare tale instabilità consiste nel sostituire  $U_i^n$  con  $(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)/2$  (schema di Lax-Friedrichs - 1954):

$$U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\tau}{2} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + S_i^n \Delta t \quad (4.87)$$

avendo indicato con  $\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Lo schema risolutivo appena presentato, pur essendo stabile, rimane poco accurato perché del primo ordine. L'origine dell'instabilità dello schema di Lax è dovuta alla combinazione di una differenza del primo ordine nel tempo con una discretizzazione del termine di flusso del secondo ordine nello spazio. Tale inconveniente viene superato dallo schema one-step Lax-Wendroff (1960), che è del secondo ordine sia nello spazio che nel tempo:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \tau \left( F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^* \right) + S_i^n \Delta t \quad (4.88)$$

dove si definisce:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = F_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} A_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+1} - F_i) \quad (4.89)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) \quad ; \quad A_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1}) \quad (4.90)$$

Lo schema rappresentato dall'equazione (4.88) con le specifiche (4.89) e (4.90) richiede la valutazione della matrice Jacobiana  $A$  che, dovendosi ripetere in ciascun punto nel dominio spaziale e per tutti gli step d'integrazione temporale, può risultare un'operazione particolarmente gravosa nella computazione numerica. Per questo motivo è stata proposta da Richtmyer e Morton, nel 1967, una procedura Two-Step che non richiede la valutazione di  $A$ .

A tal fine, viene introdotto uno stato intermedio che può essere considerato come la soluzione al tempo  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t$ , seguito da un secondo passo che conduce al tempo finale  $t = (n+1)\Delta t$ .

Lo schema di Richtmyer si formula nel modo seguente:

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) - \frac{\tau}{2}(F_{i+1}^n - F_i^n) + S_i^n \frac{\Delta t}{2} \quad (4.91)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \tau \left( F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + S_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2} \quad (4.92)$$

Il primo passo è identico allo schema di Lax-Friedrichs applicato al punto intermedio  $\left(i + \frac{1}{2}\right)$  tra i tempi  $n$  e  $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ , mentre il secondo è uno schema "leapfrog" (a salti), applicato a  $\left(n + \frac{1}{2}\right)$  (fig. 4.8).

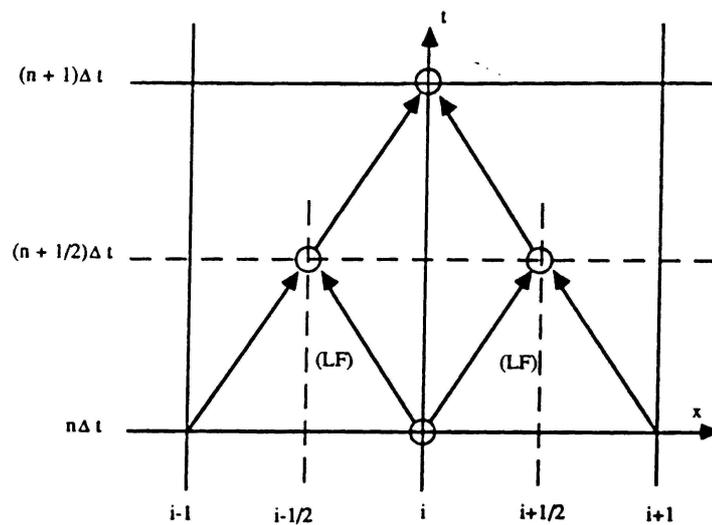


Figura 4. 8 – Rappresentazione schema "leapfrog" di Richtmyer

Il secondo step ha un'accuratezza del secondo ordine nei punti  $\left(i, n + \frac{1}{2}\right)$ , mentre il primo passo ha un'accuratezza del primo ordine nei punti  $\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$ . Globalmente lo schema è del secondo ordine nello spazio e nel tempo nel punto  $(i, n+1)$ .

Nello schema di MacCormack (1969), utilizzando l'espressione del Richtmyer, si definiscono i valori predetti (*Predictor*)  $\bar{U}_i$  delle variabili conservative al tempo  $(n+1)\Delta t$  e nel punto  $i\Delta x$  tramite la:

$$\bar{U}_i = U_i^n - \tau(F_{i+1}^n - F_i^n) + S_i^n \Delta t \quad (4.93)$$

cui segue il calcolo della correzione di tali termini (*Corrector*) avendo assunto  $\bar{F}_i = F(\bar{U}_i)$ :

$$\bar{\bar{U}}_i = U_i^n - \tau(\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1}) + \bar{S}_i \Delta t \quad (4.94)$$

In fine, il valore aggiornato al tempo  $(n+1)\Delta t$  delle variabili conservative nella sezione  $i\Delta x$  è dato da:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{U}_i + \bar{\bar{U}}_i) \quad (4.95)$$

realizzando, in tal modo, il ben noto Schema Two-Step Predictor-Corrector del secondo ordine nello spazio e nel tempo, largamente utilizzato in letteratura.

Si noti che il primo step (*Predictor*) è del primo ordine ed è "forward" nello spazio; pertanto, è instabile per flussi supersonici. Invece, il secondo passo (*Corrector*) è del primo ordine "backward", ed è instabile per velocità caratteristiche di propagazione dei disturbi di pressione negative, cioè per flussi subsonici. Nonostante ciò, lo schema globale, combinando i due passi, risulta stabile e del secondo ordine. La fig. 4.9 mostra i risultati numerici ottenuti nel caso della simulazione di un flusso transonico stazionario in un ugello divergente, risolto

mediante lo schema di MacCormack. Si riportano gli andamenti del numero di Mach, densità, entropia e temperatura di ristagno, diagrammati lungo l'asse del condotto, insieme alla soluzione esatta tracciata a linea continua. Si riporta, inoltre, l'evoluzione dell'errore nel flusso di massa, espresso in percentuale del valore esatto. Come si può notare, si ottiene un'accuratezza eccellente nella regione senza discontinuità, ma compaiono forti oscillazioni nelle vicinanze dell'urto.

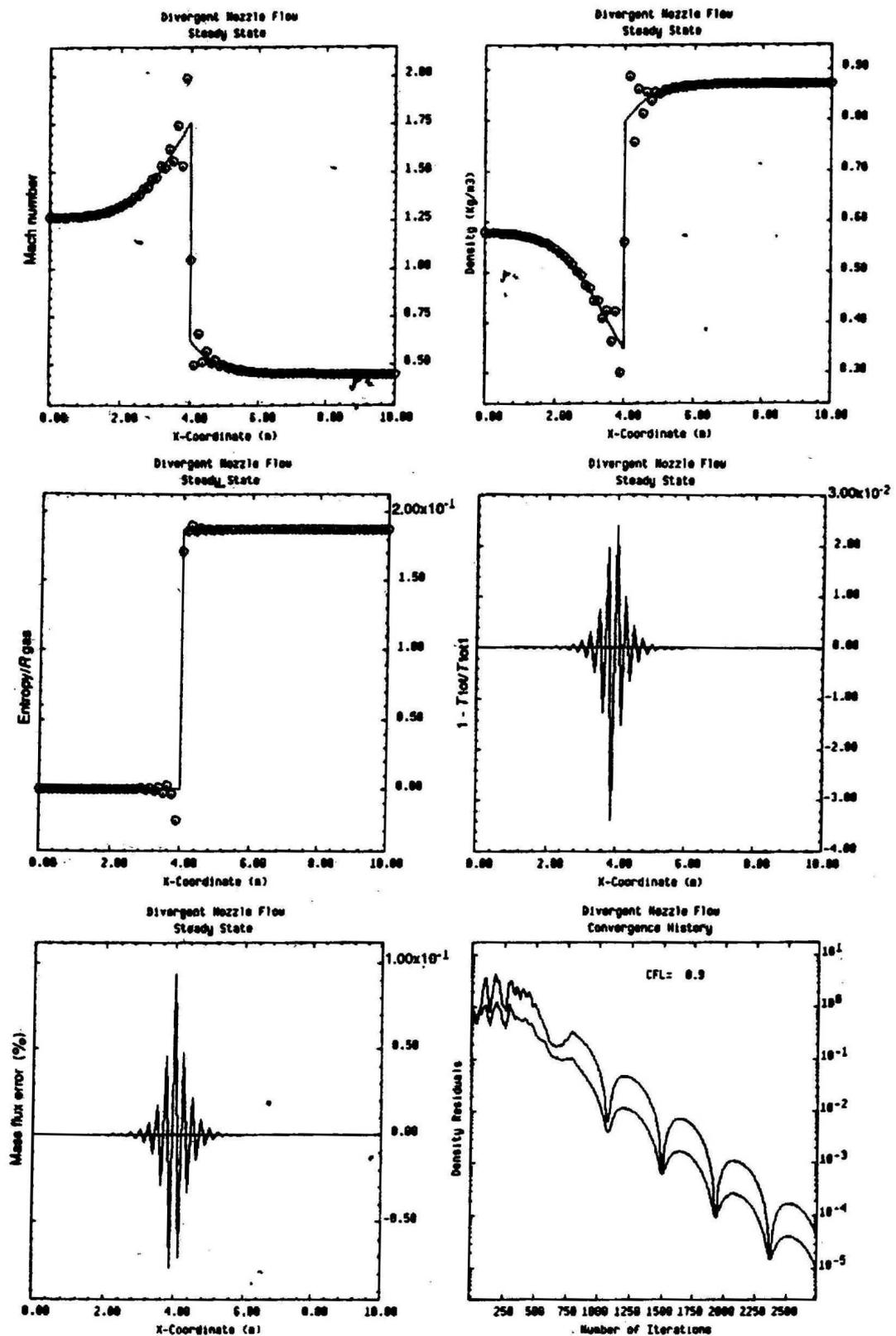
La fig. 4.10 illustra gli andamenti della soluzione numerica ottenuta mediante lo schema di MacCormack per un tipico flusso instazionario comunemente denominato "problema del tubo d'urto". Tale problema si pone come obiettivo quello di descrivere il flusso, supposto monodimensionale, in un tubo riempito con del gas, inizialmente diviso da un setto separatore in due tratti in cui vigono pressioni, densità e temperatura differenti, ma velocità ovunque nulla. Ad un certo istante, il setto separatore viene istantaneamente rimosso lasciando il gas libero di fluire, evidentemente nella direzione che va dalla regione a pressione superiore a quella caratterizzata da pressione più bassa. La struttura di questo flusso risulta essere peculiare poiché si distinguono tre regioni spaziali, separate da altrettante *onde*, in cui le variabili fisiche sono costanti. Partendo dalla destra, la prima discontinuità è un'*onda d'urto* che si propaga nella regione di bassa pressione e che determina un repentino aumento della densità e della pressione. Questa è seguita da una *discontinuità di contatto*, attraverso cui la densità e la temperatura sono nuovamente discontinue, ma la velocità e la pressione restano costanti. La terza onda si muove in direzione opposta alle prime due ed ha una struttura differente in quanto le variabili di stato variano con continuità tra i due stati che essa separa. Questa è detta *onda di rarefazione* poiché la densità del gas decresce quando questa lo attraversa.

Per il problema del tubo d'urto è nota la soluzione analitica esatta che, pertanto, può essere impiegata come riferimento per testare la validità dello schema numerico. Come si nota da fig. 4.10, la presenza contemporanea di urti e discontinuità di contatto provoca significativi errori nella risoluzione del moto da parte dell'algoritmo proposto da MacCormack.

Tutti gli schemi del secondo ordine, a tre punti centrali, cioè tutti quelli della famiglia dei Lax-Wendroff, come mostrato nelle fig. 4.9 e fig. 4.10 comportano delle

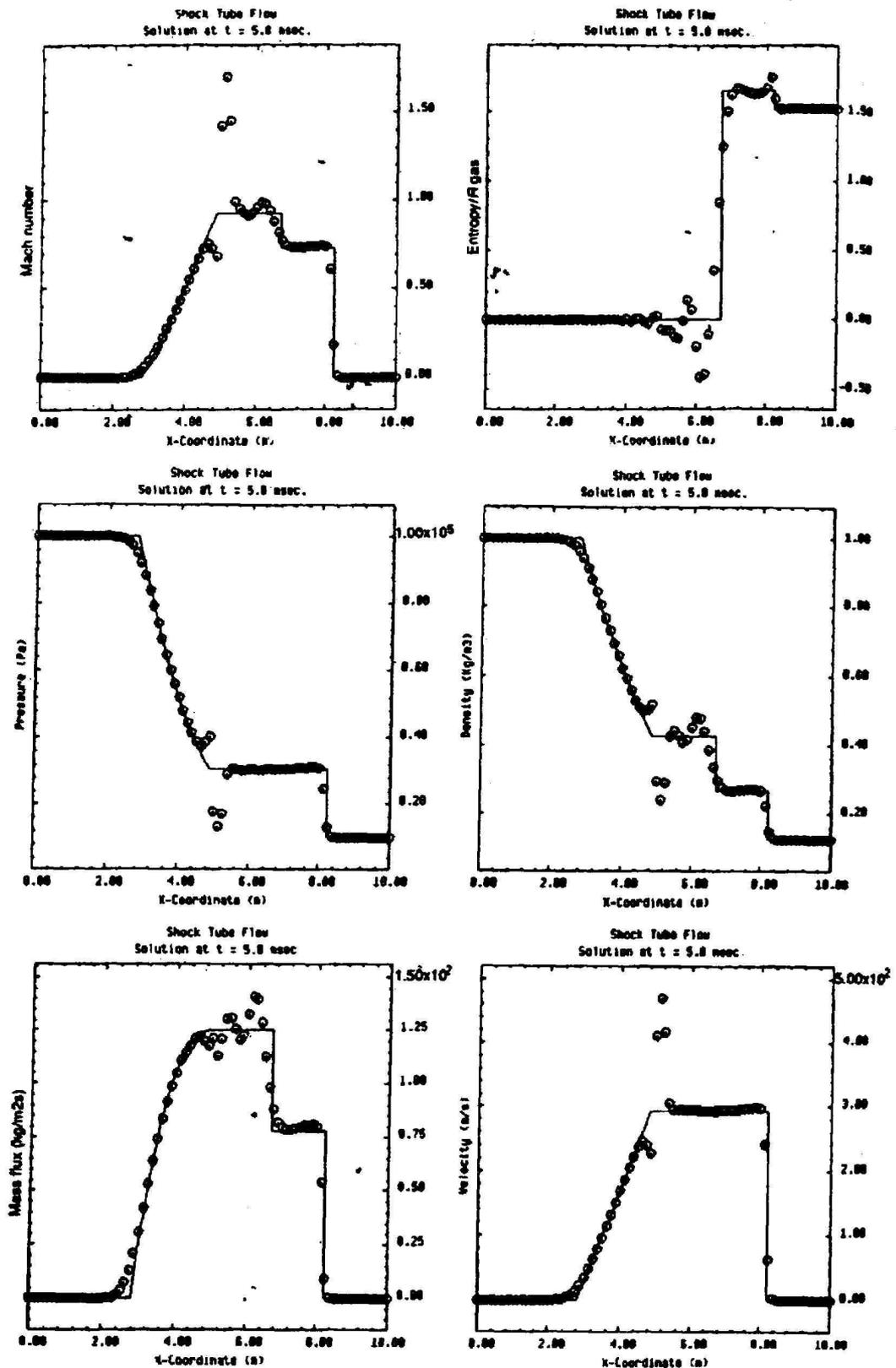
---

forti oscillazioni a monte ed a valle delle discontinuità. Gli schemi del primo ordine, d'altro canto, hanno un errore di troncamento proporzionale alla derivata seconda che agisce come una viscosità generica aggiunta. Perciò questi schemi smorzano le componenti ad alta frequenza e "addolciscono" gradienti molto forti.



Results of MacCormack's scheme applied to the stationary flow in a diverging nozzle with 81 mesh points at CFL = 0.9. Calculated results ○○ Exact solution —

Figura 4. 9 – Soluzione di flusso transonico mediante lo schema di MacCormack [30]



Results of MacCormack's scheme applied to the shock tube problem of with 81 mesh points at CFL = 0.95 after 35 time steps. Calculated results  $\circ\circ\circ$  Exact solution  $\text{—}$

Figura 4. 10 – Soluzione del “tubo d’urto” mediante lo schema di MacCormack [30]

Per rimuovere queste inevitabili oscillazioni intorno alle discontinuità negli schemi centrali del secondo ordine, Von Neumann e Richtmyer (1950) introdussero nella formulazione dello schema numerico il concetto di viscosità o dissipazione artificiale. Gli algoritmi risolutivi concepiti in tale ottica prevedono l'introduzione di termini aggiuntivi aventi il fine di simulare gli effetti della viscosità fisica localmente (nella scala della "mesh") intorno alle discontinuità ed, allo stesso tempo, tali da risultare trascurabili, ossia di ordine maggiore o uguale dell'errore di troncamento, nelle zone lontane dalla discontinuità (smooth regions).

L'aggiunta del termine di viscosità artificiale (AV) può essere considerato come una modifica del flusso numerico  $F_{i+\frac{1}{2}}^*$ ; la valutazione di quest'ultimo assume, pertanto, la seguente espressione:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{*(AV)} = F_{i+\frac{1}{2}}^* - \Delta x D \frac{\partial U}{\partial x} \quad (4.96)$$

in cui per  $D$  Baldwin (1975) propose:

$$D = \varepsilon \Delta x^2 \frac{|u| + a}{p} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| \quad (4.97)$$

La fig. 4.11 mostra i risultati per condotto divergente dello schema di MacCormack con l'aggiunta del termine di viscosità artificiale di Von Neumann e Richtmyer secondo la formulazione di Baldwin. Gli andamenti presentano un evidente miglioramento rispetto al caso precedente (fig. 4.9).

La fig. 4.12 evidenzia, invece, come la viscosità artificiale, nel caso del problema del tubo d'urto, addolcisca eccessivamente la soluzione soprattutto intorno alla discontinuità di contatto.

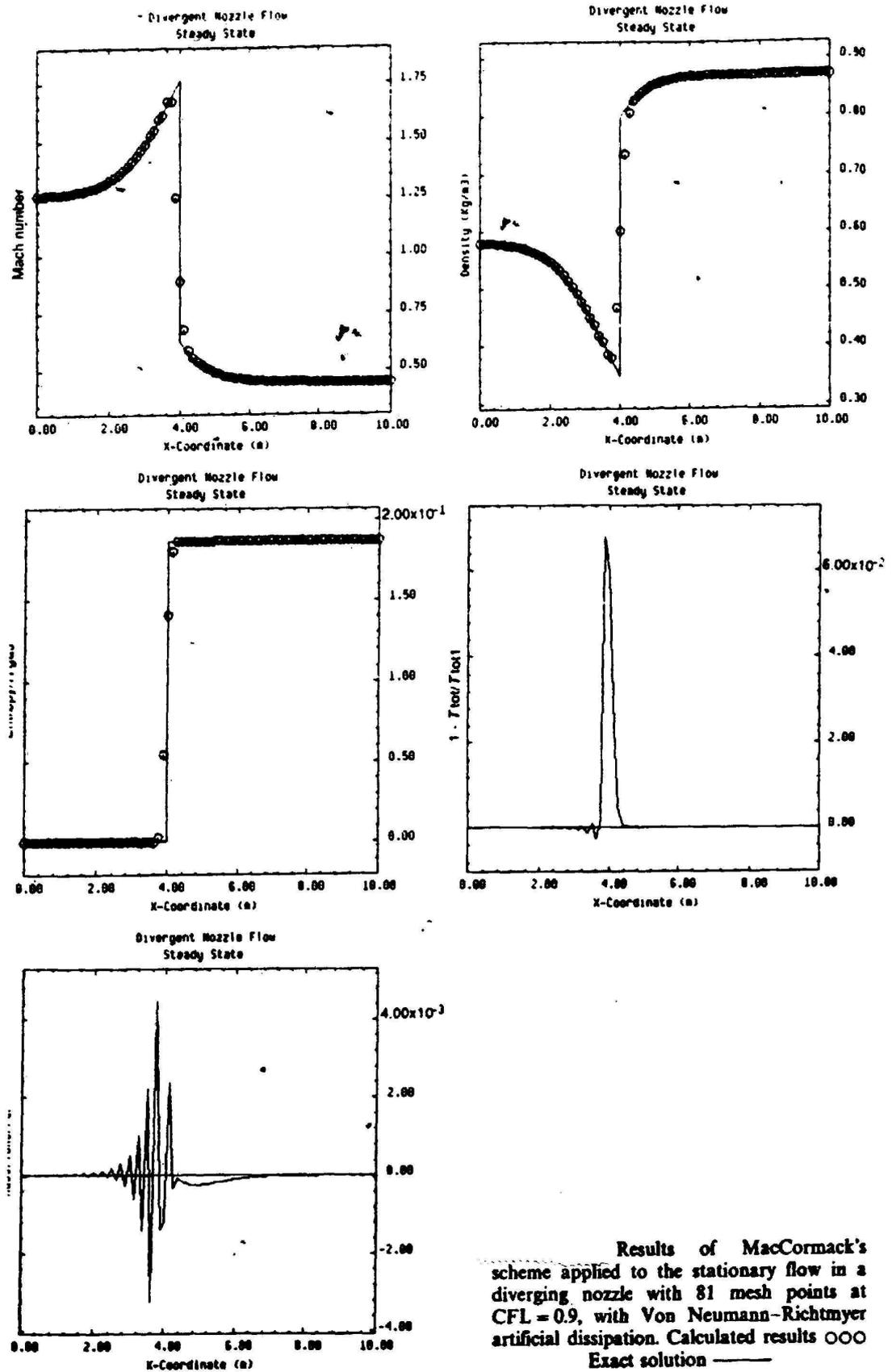
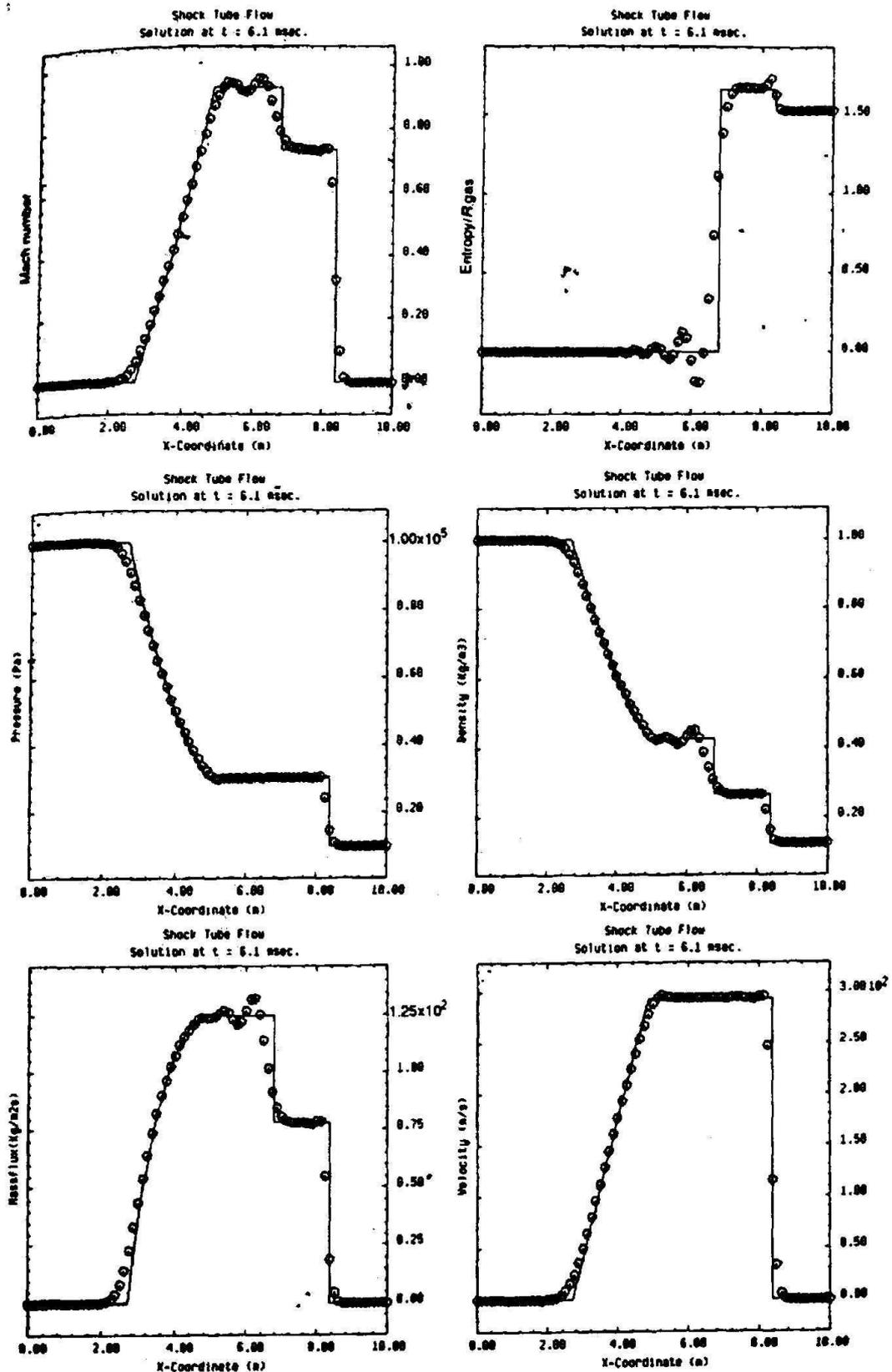


Figura 4. 11 – Soluzione di flusso transonico mediante lo schema di MacCormack con l'aggiunta di viscosità artificiale (Von Neumann e Richtmyer) [30]



Results of MacCormack's scheme applied to the shock tube problem of with 81 mesh points at CFL = 0.95, after 35 time steps, with Von Neumann-Richtmyer artificial dissipation. Calculated results ○○ Exact solution —

Figura 4. 12 – Soluzione del “tubo d’urto” mediante lo schema di MacCormack con l’aggiunta di viscosità artificiale (Von Neumann e Richtmyer) [30]

### 4.7.2 Schemi d'integrazione Upwind

Gli schemi centrali si qui descritti sono, appunto, basati su una discretizzazione centrale dello spazio ed hanno una simmetria tale da non distinguere le influenze a monte da quelle a valle del flusso. In questo modo, però, la propagazione fisica delle perturbazioni lungo le linee caratteristiche, tipiche dell'equazioni iperboliche, non è considerata nella definizione dello schema numerico. Viceversa, il metodo delle caratteristiche, già introdotto nel paragrafo 4.4, è in grado di evidenziare i fenomeni di propagazione ondosa delle informazioni che soggiacciono alle equazioni del moto, sebbene non sia capace di trattare opportunamente brusche discontinuità (onde d'urto o discontinuità di contatto).

La famiglia degli schemi *upwind*, che risale a Courant, Isaacson e Reeves (1952), è pertanto indirizzata verso l'introduzione nello schema numerico della descrizione delle proprietà fisiche insite nelle equazioni del moto al fine di attenuare le oscillazioni della soluzione nelle vicinanze di discontinuità.

Un primo esempio di schema *upwind* è denominato *Flux Vector Splitting*. Con riferimento ad una semplice equazione lineare ( $a$  è costante nello spazio e nel tempo) di trasporto scalare:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (4.98)$$

tale tecnica prevede uno schema d'integrazione dipendente dal segno della velocità di propagazione  $a$ . In particolare se  $a > 0$ , l'algoritmo d'integrazione è:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a\tau(U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (4.99)$$

altrimenti, se  $a < 0$ , si ha:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a\tau(U_{i+1}^n - U_i^n) \quad (4.100)$$

Volendo riassumere in un'unica espressione la (4.99) e la (4.100) si ottiene:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \tau \left[ a^+ (U_i^n - U_{i-1}^n) + a^- (U_{i+1}^n - U_i^n) \right] \quad (4.101)$$

avendo posto  $a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$  e  $a^- = \frac{1}{2}(a - |a|)$ .

Per adottare un approccio analogo nel caso del sistema di Eulero è necessario ricondurre il problema a quello di trasporto scalare appena illustrato. A tal fine, si osserva come, definendo  $P$  come la matrice avente per colonne gli autovettori destri di  $A$  e  $P^{-1}$  la sua inversa avente per righe gli autovettori sinistri di  $A$ , è possibile riscrivere il sistema (4.85), premoltiplicando per  $P^{-1}$ , come:

$$P^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + P^{-1} A \frac{\partial U}{\partial x} = P^{-1} S \quad (4.102)$$

da cui:

$$P^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + (P^{-1} A P) P^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = P^{-1} S \quad (4.103)$$

in cui si può porre  $\Lambda = P^{-1} A P$ . Naturalmente,  $\Lambda$  costituisce la diagonalizzazione di  $A$  essendo una matrice i cui unici elementi non nulli si trovano lungo la cui diagonale principale e rappresentano gli autovalori di  $A$ . Stante l'ipotesi di quasi-linearità, si può portare  $P^{-1}$  sotto il segno di derivata:

$$\frac{\partial (P^{-1} U)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial (P^{-1} U)}{\partial x} = P^{-1} S \quad (4.104)$$

ed, in definitiva, ponendo  $Q = P^{-1} S$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = Q \quad (4.105)$$

E' possibile verificare che le componenti del vettore  $W = P^{-1}U$  rappresentano le variabili caratteristiche o di Riemann già introdotte nel paragrafo 4.4.2, e che  $\Lambda$  presenta sulla diagonale principale proprio le pendenze delle caratteristiche ossia le velocità con cui si propagano le variabili di Riemann nel piano  $x - t$ .

Il risultato fondamentale di tale elaborazione delle equazioni di Eulero risiede nel fatto che la (4.105) è costituita da un sistema di equazioni differenziali disaccoppiate; ciascuna di esse descrive il trasporto scalare delle variabili di Riemann  $w_i$  secondo le velocità  $u, u+a, u-a$ . La matrice  $\Lambda$  ha, pertanto, la seguente espressione:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 \\ 0 & 0 & u-a \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

per cui è possibile definirne il valore assoluto come:

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} |u| & 0 & 0 \\ 0 & |u+a| & 0 \\ 0 & 0 & |u-a| \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

ed una parte positiva  $\Lambda^+$  costituita dai soli termini positivi ed una negativa  $\Lambda^-$  in cui compaiono i soli termini negativi. E' immediato verificare che:

$$\Lambda^+ = \frac{\Lambda + |\Lambda|}{2} \quad (4.108)$$

$$\Lambda^- = \frac{\Lambda - |\Lambda|}{2} \quad (4.109)$$

Avendo distinto le onde progressive da quelle regressive, è possibile scomporre il flusso ("flux splitting") in due componenti  $F^+$  ed  $F^-$ : la prima dipendente dalle sole onde progressive, la seconda dalle sole onde regressive. Infatti, si può definire la parte positiva  $A^+$  e negativa  $A^-$  di  $A$  come:

$$A^+ = P\Lambda^+P^{-1} \quad (4.110)$$

$$A^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (4.111)$$

e, quindi, i due contributi dei flussi:

$$F^+ = A^+U \quad (4.112)$$

$$F^- = A^-U \quad (4.113)$$

In definitiva, il sistema di equazioni di Eulero, una volta scomposto i flussi secondo l'approccio upwind, diventa:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^+(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^-(U)}{\partial x} = S \quad (4.114)$$

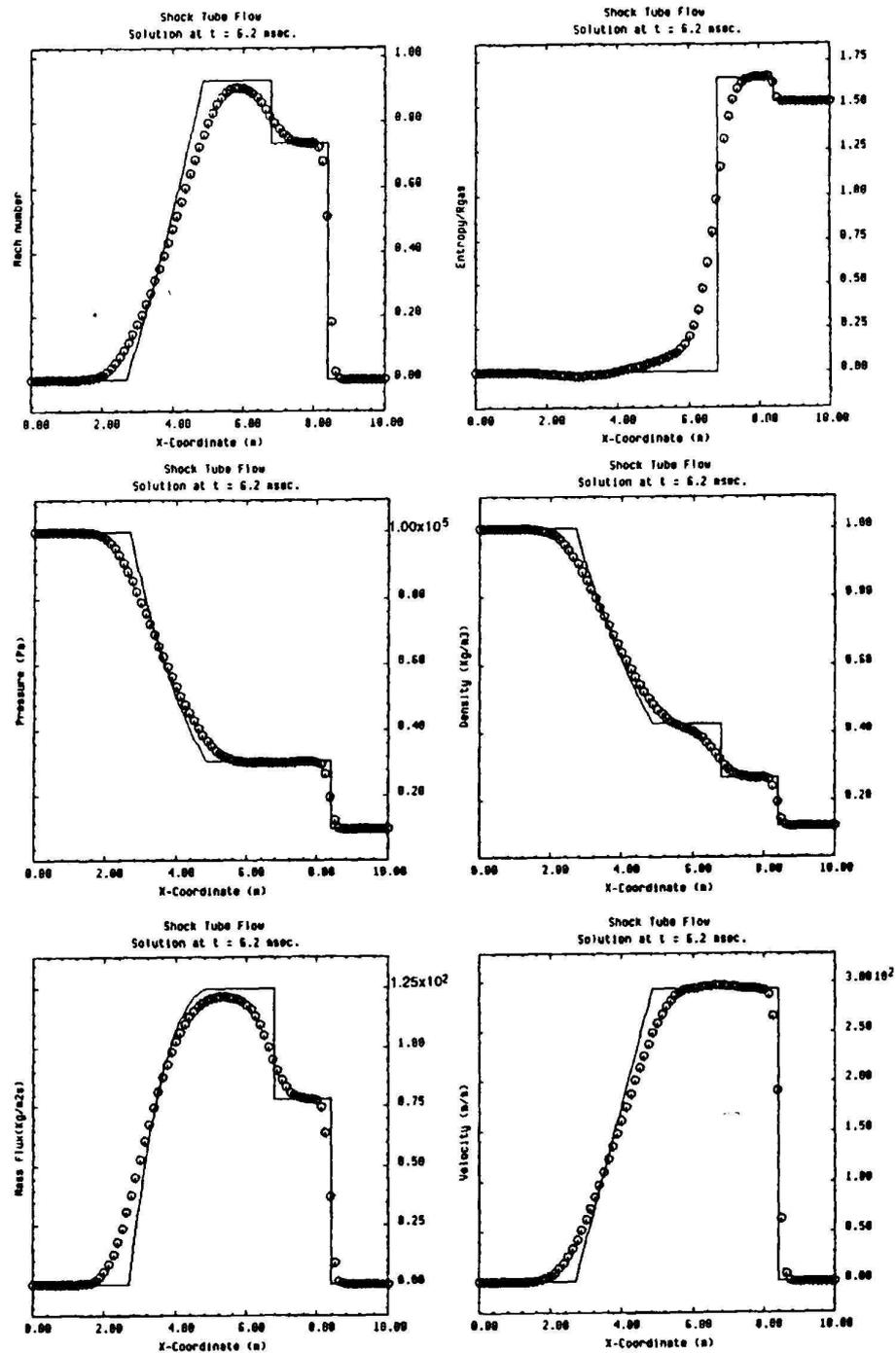
da cui, la logica estensione dello schema risolutivo visto per il caso scalare espresso dalla (4.101), diventa:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \tau \left[ A^+ (U_i^n - U_{i-1}^n) + A^- (U_{i+1}^n - U_i^n) \right] \quad (4.115)$$

ed in termini di flussi (Steger Warming - 1981):

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \tau \left[ (F_i^+ - F_{i-1}^+)^n + (F_{i+1}^- - F_i^-)^n \right] \quad (4.116)$$

I risultati ottenuti per il tubo d'urto con lo schema del primo ordine flux vector splitting appena descritto sono illustrati in fig. 4.13. Si può notare chiaramente la completa mancanza delle oscillazioni nella soluzione numerica dovuta al basso ordine dello schema; ciò comporta, d'altro canto, una modesta precisione nelle zone più prossime alle discontinuità.



Computation of the shock tube problem with a first-order scheme and the flux vector splitting of Steger and Warming

Figura 4. 13 - Soluzione del “tubo d’urto” mediante lo schema Steger Warming [30]

Lo schema di Godunov è stato uno dei primi esempi di tecnica ai volumi finiti. Lo stesso, partendo ancora una volta dalle equazioni di Eulero (4.4) in termini di variabili conservative:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U) \quad (4.4)$$

prevede la suddivisione del dominio spaziale in volumi di controllo (cella). In fig. 4.14 sono rappresentate tre celle delle stesse dimensioni  $\Delta x$  i cui baricentri o nodi sono indicati con  $i$ ,  $i-1$  e  $i+1$ . Integrando le (4.4), prima rispetto ad  $x$  nell'intervallo spaziale  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , poi rispetto a  $t$  nell'intervallo temporale  $[t^n, t^{n+1}]$ , di ampiezza  $\Delta t$  si ha:

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\hat{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}) - \hat{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}) + \bar{S}_i \Delta x] \quad (4.117)$$

avendo definito

$$\bar{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n) dx \quad (4.118)$$

$$\bar{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx \quad (4.119)$$

$$\hat{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}[\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)] dt \quad (4.120)$$

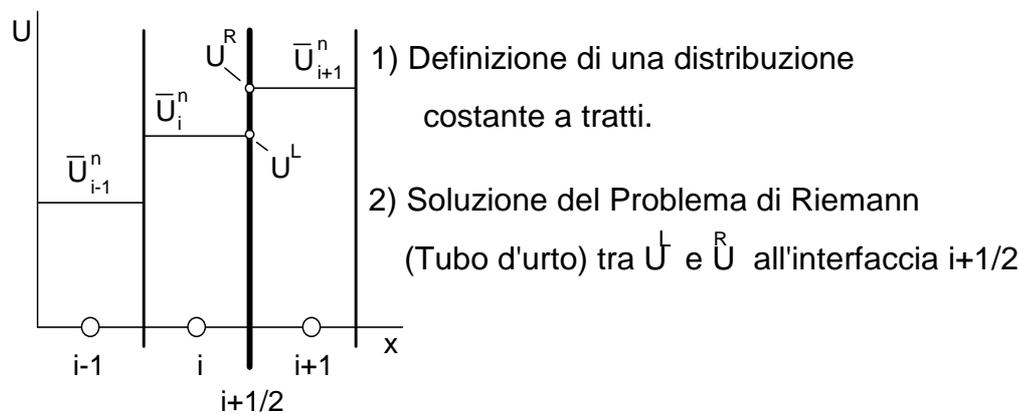
$$\hat{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}[\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)] dt \quad (4.121)$$

$$\bar{S}_i^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t) dx \right] dt \quad (4.122)$$

Si fa rilevare che la (4.117) non rappresenta altro che la versione in forma integrale della (4.4) e che  $\bar{U}_i^n$ , per definizione, corrisponde alla media spaziale della  $U = U(x, t)$  all'interno della singola cella d'integrazione nell'istante  $t^n$ . La formulazione integrale delle equazioni del moto ha l'indubbio vantaggio di restare valida anche in presenza di discontinuità, lì dove quella differenziale perde di significato in tali circostanze divergendo la derivata spaziale delle variabili conservative. Per poter valutare  $\bar{U}_i^n$ ,  $\bar{U}_i^{n+1}$ ,  $\hat{F}_{i+1/2}$ ,  $\hat{F}_{i-1/2}$  e  $\bar{S}_i^n$  sarebbe necessario conoscere gli andamenti spaziali e temporali delle variabili conservative  $U = U(x, t)$ .

Lo schema di Godunov presuppone una ricostruzione delle  $U$  costante a tratti in ciascuna cella del dominio di definizione. In questo modo,  $\bar{U}_i^n$  coincide esattamente con il valore nodale della  $U$  all'istante  $t^n = n\Delta t$  della cella  $i$ . Lo schema prevede, inoltre, che il flusso  $\hat{F}_{i\pm 1/2}$  sulle estremità della generica cella  $i$  venga valutato risolvendo il problema di Riemann o di salto (o d'urto, già descritto nel paragrafo 4.7.1) sulle interfacce  $i-1/2$  e  $i+1/2$ .

### SCHEMA DI GODUNOV (del 1° ordine):



**Figura 4. 14 – Rappresentazione delle ricostruzione delle variabili conservative costante a tratti e valutazione dei flussi all’interfaccia delle celle tramite la risoluzione di un problema di Riemann**

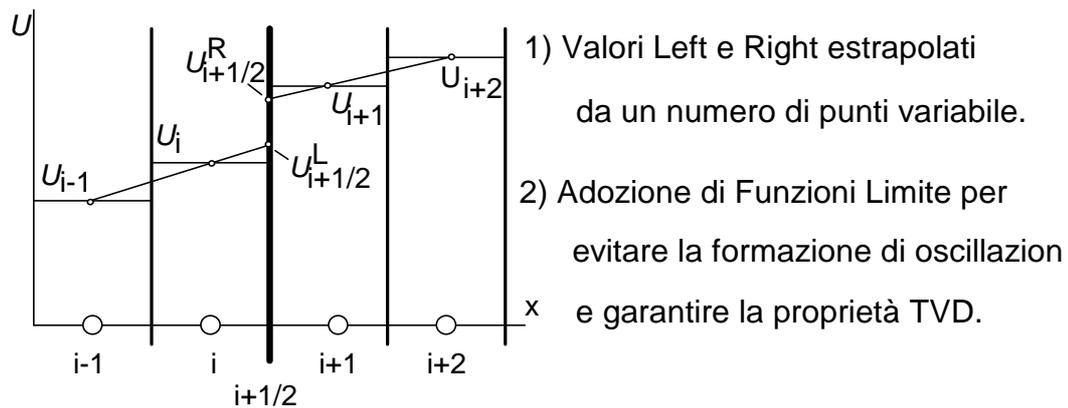
Tale approccio, necessitando della risoluzione del problema d’urto ad ogni interfaccia, richiede elevati tempi di calcolo; per tale motivo, si è passati all’impiego di solutori approssimati del problema di Riemann. Uno di questi, proposto da Roe, assume che:

$$\hat{F}_{i+1/2} [U(x_{i+1/2}, t^n)] \cong \frac{1}{2} [F(U_i) + F(U_{i+1}) - |\tilde{A}_{i+1/2}(U_{i+1}, U_i)| (U_{i+1} - U_i)] \quad (4.123)$$

La matrice  $|\tilde{A}_{i+1/2}|$  viene valutata utilizzando opportune combinazioni delle variabili  $U_i$  e  $U_{i+1}$  definite come medie di Roe [30]; le stesse si ottengono adottando come peso del procedimento di media i valori delle radici quadrate delle densità  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$  nelle celle a cavallo dell’interfaccia. Lo schema così ottenuto rimane tuttavia del

primo ordine nello spazio. Un modo per aumentarne l'ordine di approssimazione è quello di calcolare i valori delle variabili conservative sulle interfacce abbandonando l'ipotesi di ricostruzione costante a tratti, ma impiegando delle ricostruzioni lineari delle  $U$  basate sui valori nodali nelle celle adiacenti all'interfaccia stessa (approccio MUSCL - *Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws*).

## SCHEMI DI ORDINE SUPERIORE (MUSCL):



**Figura 4.15 - Rappresentazione delle ricostruzioni delle variabili conservative lineari a tratti**

Ad esempio, con riferimento alla fig. 4.15,  $U_{i+1/2}^L$ , valore delle variabili conservative alla sinistra dell'interfaccia  $i+1/2$ , è calcolato per estrapolazione lineare dei valori nodali  $U_i$  e  $U_{i-1}$  ineranti le due celle a monte della citata interfaccia. Analogamente,  $U_{i+1/2}^R$ , rappresentativo del valore assunto dalle variabili conservative sulla destra dell'interfaccia  $i+1/2$ , viene valutato per estrapolazione lineare di  $U_{i+1}$  e  $U_{i+2}$ .  $U_{i+2}^L$  e  $U_{i+1/2}^R$  a loro volta definiscono il problema di Riemann da risolvere all'interfaccia  $i+1/2$  per stimare il flusso  $\hat{F}_{i+1/2} [U(x_{i+1/2}, t^n)]$ .

Seguendo tale approccio, però, si va incontro a problemi simili a quelli incontrati negli schemi centrali, si generano cioè delle indesiderate oscillazioni intorno alle discontinuità. E' possibile verificare che tale inconveniente caratterizza tutti gli schemi numerici di ordine superiore al primo.

La proprietà per cui la soluzione numerica non presenti oscillazioni non fisiche viene denominata *Total Variation Diminishing* (TVD); formalmente si definisce come:

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \quad (4.124)$$

dove la variazione totale della soluzione  $TV(U^m)$  ad un generico istante temporale  $t^m$  è data da:

$$TV(U^m) = \sum_i |U_{i+1}^m - U_i^m| \quad (4.125)$$

Al fine di prevenire la formazione di oscillazioni non fisiche nella soluzione numerica e, quindi, per garantire il rispetto della TVD, è possibile impiegare opportune funzioni limitatrici che contengano la pendenza delle ricostruzioni impiegate per calcolare i valori delle variabili conservative alle interfacce e, quindi, i flussi. In particolare, l'azione di tali funzioni si manifesta esclusivamente in prossimità di discontinuità abbassando localmente l'accuratezza dello schema numerico tramite l'impiego di una ricostruzione delle variabili conservative costante a tratti. L'adozione della limitazione della pendenza delle ricostruzioni ha un effetto analogo a quello prodotto dai termini di viscosità artificiale già discussi precedentemente, con l'indubbio vantaggio, però, di essere automaticamente previste nello schema numerico, in modo da introdurre il minimo "effetto smorzante" sulla soluzione; tale effetto è quello strettamente sufficiente ad evitare la nascita delle oscillazioni, senza inficiare l'accuratezza dello schema dove la soluzione è priva di discontinuità.

I valori delle variabili conservative da impiegare per la valutazione del flusso all'interfaccia  $x_{i+1/2}$  si calcolano come:

$$U_{i+1/2}^L = U_i + \frac{1}{2} \Phi(r^L)(U_i - U_{i-1}) \quad (4.126)$$

$$U_{i+1/2}^R = U_{i+1} - \frac{1}{2} \Phi(r^R)(U_{i+2} - U_{i+1}) \quad (4.127)$$

in cui  $\Phi(r)$  prende il nome di funzione limitatrice di pendenza. Da notare come quando  $\Phi(r)$  assume valore unitario (ossia se non interviene l'azione limitatrice) si realizza la classica ricostruzione lineare basata sui valori nodali assunti dalle variabili conservative nelle 4 celle a cavallo dell'interfaccia così come rappresentato in fig. 4.15

La funzione limitatrice dipende dalle variazioni di pendenza  $r^L$  e  $r^R$ , definite come:

$$r^L = \frac{U_{i+1} - U_i}{U_i - U_{i-1}} \quad (4.128)$$

$$r^R = \frac{U_{i+1} - U_i}{U_{i+2} - U_{i+1}} \quad (4.129)$$

E' possibile dimostrare che la TVD è soddisfatta se  $\Phi(r)$  gode delle seguenti proprietà:

$$0 \leq \Phi(r) \leq 2r \quad \text{per } r \geq 0 \quad (4.130)$$

$$\Phi(r) = 0 \quad \text{per } r < 0 \quad (4.131)$$

$$\Phi(r) \leq 2 \quad (4.132)$$

di cui, la (4.131) garantisce che, nel caso in cui la soluzione presenti delle oscillazioni (cambio del segno della pendenza), la ricostruzione delle variabili conservative torna ad essere lineare a tratti riducendo l'accuratezza dello schema e prevenendo l'insorgere di fluttuazioni non fisiche. E', altresì, possibile verificare che lo schema è del secondo ordine se:

$$\Phi(r) \leq r \quad (4.133)$$

$$\Phi(r) \geq 1 \quad (4.134)$$

per cui, affinché si abbia uno schema che sia del secondo ordine e che soddisfi la TVD, devono essere soddisfatte le seguenti proprietà:

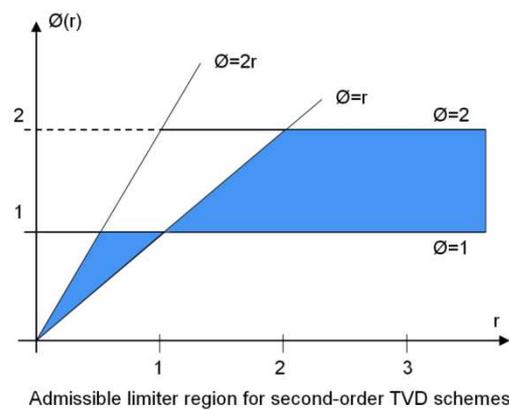
$$r \leq \Phi(r) \leq 2r \quad \text{per} \quad 0 \leq r < 1 \quad (4.135)$$

$$1 \leq \Phi(r) \leq r \quad \text{per} \quad 1 < r \leq 2 \quad (4.136)$$

$$1 \leq \Phi(r) \leq 2 \quad \text{per} \quad r > 2 \quad (4.137)$$

$$\Phi(r) = 1 \quad \text{per} \quad r = 1 \quad (4.138)$$

cui corrisponde l'area evidenziata in fig. 4.16.



**Figura 4. 16 – Regione ammissibile per  $\Phi(r)$  per schemi del secondo ordine TVD**

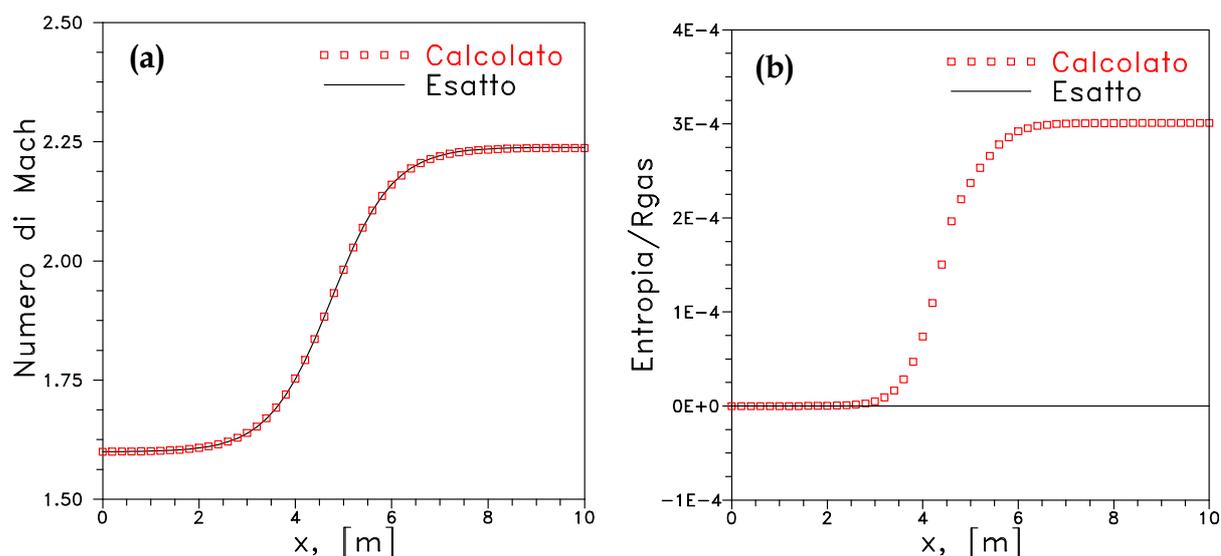
Lo schema numerico impiegato nel presente lavoro per la risoluzione del flusso monodimensionale instazionario appartiene alla famiglia dei MUSCL, fa uso del solutore approssimato di Roe per la valutazione dei flussi alle interfacce e della funzione limitatrice di Van Albada. L'espressione di quest'ultima è:

$$\Phi(r) = \frac{r^2 + r}{1 + r^2} \quad (4.139)$$

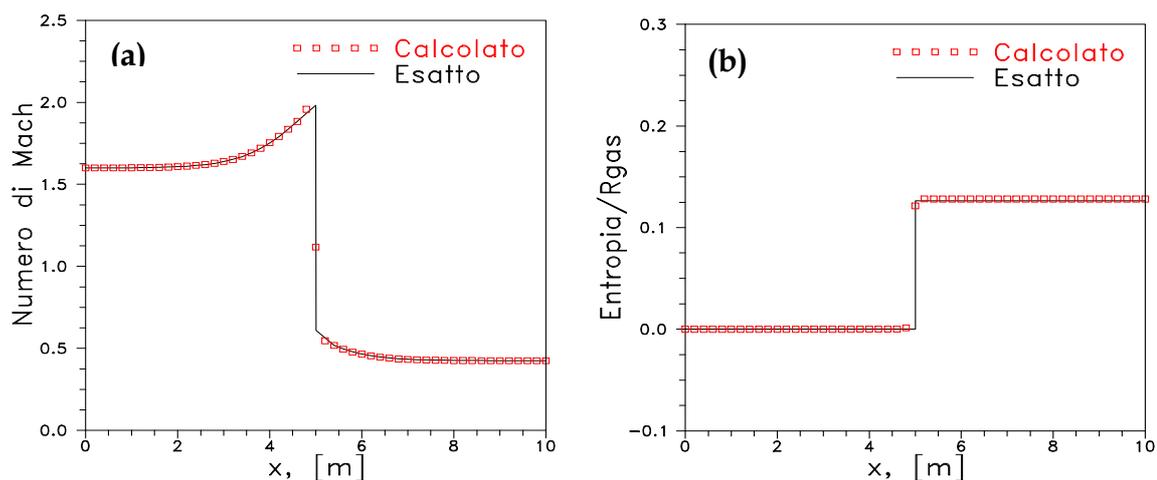
Di seguito, sono presentati i risultati ottenuti per tre tipici test case di cui sono note le soluzioni analitiche esatte: flusso stazionario supersonico (fig. 4.17) e transonico (fig. 4.18) in condotto divergente e flusso instazionario per il problema del tubo d'urto (fig. 4.19).

I risultati numerici ottenuti nei primi due casi sono molto soddisfacenti ripercorrendo fedelmente l'andamento della soluzione analitica senza alcuna

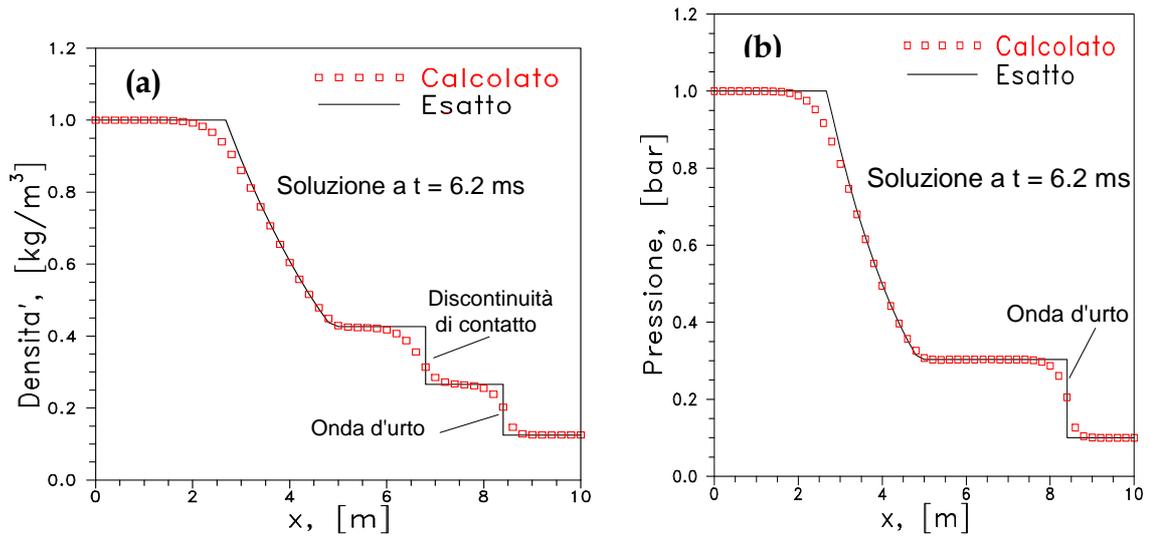
oscillazione. Si noti come la fig. 4.17b mostra un disaccordo solo apparente tra la soluzione numerica e quella analitica da imputare alle scale di rappresentazione dei risultati. La fig. 4.19 evidenzia la capacità dello schema numerico impiegato di catturare onde d'urto anche adottando una discretizzazione spaziale piuttosto rada (51 celle per una lunghezza del condotto di 10 m).



**Figura 4. 17 – Flusso stazionario supersonico– confronto numero di Mach (a) e entropia (b) tra soluzione esatta e numerica**



**Figura 4. 18 – Flusso stazionario transonico– confronto numero di Mach (a) e entropia (b) tra soluzione esatta e numerica**



**Figura 4. 19 – Flusso instazionario – problema del tubo d’urto – confronto di densità (a) e pressione (b) tra soluzione esatta e numerica**

#### 5.1 Introduzione

Al fine di rendere disponibile uno strumento in grado di riprodurre in tempi molto contenuti le curve caratteristiche della turbomacchina per qualsiasi velocità di rotazione e condizione all'aspirazione, non ricorrendo, nel primo caso, ad estrapolazioni meramente matematiche delle mappe o, nel secondo, alla teoria della similitudine, è stata implementata una procedura che risolve le equazioni del moto in condizioni stazionarie.

La semplicità computazionale di tale procedura consente di effettuare agevolmente la taratura delle variabili geometriche e di quelle inerenti le perdite. Nel caso del compressore, inoltre, può essere usata come rapido e veloce banco di prova per le strategie di modellazione delle perdite da riportare poi nella procedura instazionaria; in particolare, la stessa può essere immediatamente calibrata utilizzando i medesimi valori delle costanti di taratura ottenuti dal modello stazionario. In questo capitolo è descritto l'approccio utilizzato per la risoluzione delle equazioni del moto in condizioni stazionarie.

#### 5.2 Soluzione equazioni del moto per condotti fissi

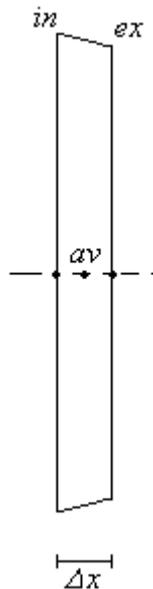
La procedura provvede all'integrazione delle equazioni del moto nell'ipotesi di flusso stazionario descrivendo lo stato termofluidodinamico all'interno e sino all'estremità terminale del condotto una volta assegnate le condizioni al contorno

ossia le proprietà del flusso in corrispondenza della sola sezione d'ingresso. A differenza di quanto illustrato in merito alla risoluzione delle equazioni del moto instazionarie, nel presente caso viene adottato un approccio alle differenze finite. Si discrezza, pertanto, il condotto in un opportuno numero di tratti di estensione assiale  $\Delta x$  stimando le proprietà del fluido in corrispondenza delle sezioni d'ingresso e d'uscita di ciascun tratto mediante la risoluzione delle equazioni di bilancio della massa, dell'energia e della quantità di moto espresse nell'ipotesi stazionaria ossia trascurando i termini in cui compare la derivata temporale. Con riferimento alla figura 5.1, le equazioni del moto si scrivono come:

$$\rho_{in} c_{in} \Omega_{in} = \rho_{ex} c_{ex} \Omega_{ex} \quad (5.1)$$

$$h_{ex}^0 = h_{in}^0 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (5.2)$$

$$-(p_{ex} - p_{in}) = \rho_{ex} c_{ex}^2 - \rho_{in} c_{in}^2 + \rho_{av} c_{av}^2 \alpha_{av} \Delta x + \rho_{av} c_{av}^2 \frac{2f}{D_{eq,av}} \Delta x \quad (5.3)$$



**Figura 5. 1 – Tratto di condotto di lunghezza  $\Delta x$**

in cui le grandezze “average” sono calcolate come medie aritmetiche delle proprietà termofluidodinamiche in corrispondenza delle sezioni di ingresso (*in*) ed uscita (*ex*).

Viene definito, in questo modo, per ciascun tratto di lunghezza  $\Delta x$  un sistema costituito dalle tre equazioni (5.1), (5.2) e (5.3), le cui incognite sono la velocità  $c_{ex}$ , la pressione  $p_{ex}$  e la temperatura  $T_{ex}$  all'uscita ed i cui termini noti sono le medesime grandezze,  $c_{in}, p_{in}, T_{in}$ , valutate all'ingresso. Tale sistema, presentando termini non lineari (attrito e scambio termico), necessita un procedimento di risoluzione di tipo iterativo.

L'algoritmo adottato è il seguente:

1. si fissano  $p_{ex} = p_{in}, T_{ex} = T_{in}$  e  $\dot{Q} = 0$  come valori di primo tentativo
2. dalla (5.2) si ricava  $h_{ex}^0$  e, quindi,  $T_{ex}^0$
3. dall'equazione di stato dei gas si ottiene  $\rho_{ex}$
4. dalla (5.1) si ricava  $c_{ex}$
5. noto  $T_{ex}^0$ , calcolato al passo 2, e  $c_{ex}$ , si valuta  $T_{ex}$
6. a questo punto è noto lo stato termofluidodinamico nella sezione  $ex$ , per cui è possibile calcolare i valori "average" da impiegare nella (5.3) da cui ricavare un nuovo valore per  $p_{ex}$
7. se la differenza tra il valore aggiornato e quello iniziale di  $p_{ex}$  eccede l'errore massimo ammissibile si itera il ciclo ripartendo dal punto 2

La procedura iterativa appena descritta viene ripetuta per tutti i tratti in cui è discretizzato il condotto assumendo come sezione d'ingresso di ciascun elemento quella d'uscita dell'elemento precedente. Come si nota, tale approccio richiede l'assegnazione delle sole condizioni all'ingresso del condotto, mentre quelle all'uscita vengono individuate dall'integrazione delle equazioni del moto.

### 5.3 Soluzione equazioni del moto per condotti rotanti

In analogia a quanto visto per i condotti fissi, note le condizioni nella sezione iniziale del condotto, è possibile integrare le equazioni del moto all'interno dei condotti rotanti. In tal caso, dette equazioni assumono la seguente espressione:

$$\rho_{in} w_{in} \Omega_{in} = \rho_{ex} w_{ex} \Omega_{ex} \quad (5.4)$$

$$h_{w,ex}^0 = h_{R,in} + \frac{1}{2} u_{ex}^2 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (5.5)$$

$$-(p_{ex} - p_{in}) = \Delta \rho w^2 + \rho_{av} w_{av}^2 \alpha_{av} \Delta s - \rho_{av} u_{av}^2 \delta_{av} \Delta s + 2 \rho_{av} \Delta s \left( w_{av}^2 \frac{f_{gir}}{D_{eqgir,av}} + c_{av} c_s \left| \frac{f_{cas}}{D_{eqcas,av}} \right. \right) \quad (5.6)$$

Nella (5.5) si è indicato con  $u_{in}$  e  $h_{R,in}$  ( $h_{R,in} = h_{in} + w_{in}^2/2 - u_{in}^2/2$ ), rispettivamente, la velocità periferica all'uscita del condotto elementare e l'entalpia totale rotorica o rotalpia all'ingresso dello stesso. Le (5.4), (5.5) e (5.6) costituiscono un sistema di tre equazioni non lineari nelle incognite  $w_{ex}$ ,  $p_{ex}$ ,  $T_{ex}$ . Il procedimento risolutivo adottato è analogo a quello descritto per condotti fissi.

### 5.4 Soluzione equazioni del moto per flusso assialsimmetrico (quasi-1D)

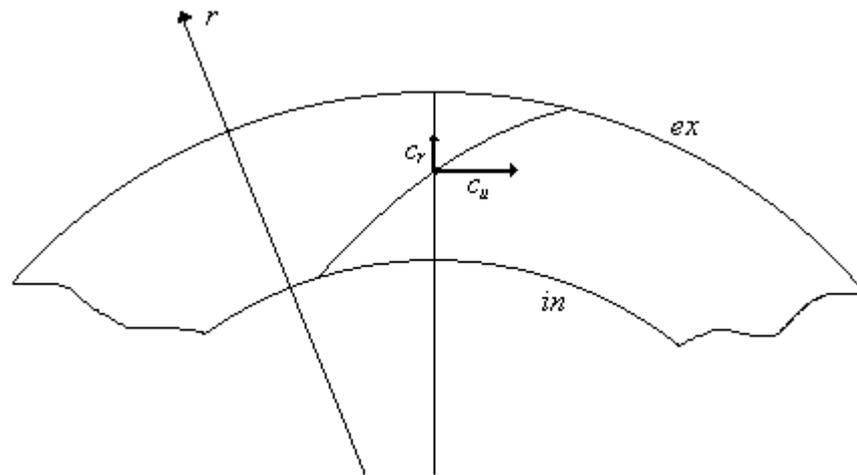
Anche in tal caso, l'integrazione numerica parte dalla definizione dello stato termofluidodinamico nella prima sezione del condotto, per poi procedere verso la sezione d'uscita. Come ampiamente discusso nel capitolo 3, si suppone che tutte le grandezze che caratterizzano il flusso dipendano esclusivamente dalla coordinata radiale e non da quella periferica. Ancora una volta, si discretizza il condotto in un assegnato numero di tratti di estensione radiale  $\Delta r$  e si provvede, per ciascuno di essi, alla risoluzione delle equazioni di bilancio della massa, dell'energia e della quantità di moto, proiettata in direzione radiale e periferica, nell'ipotesi di flusso stazionario. Con riferimento alla figura 5.2 e a quanto già descritto nel capitolo 3, le equazioni, in termini di differenze finite, si scrivono come:

$$\rho_{in} c_{r,in} \Omega_{in} = \rho_{ex} c_{r,ex} \Omega_{ex} \quad (5.7)$$

$$h_{ex}^0 = h_{in}^0 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (5.8)$$

$$-(p_{ex} - p_{in}) = \rho_{ex} c_{r,ex}^2 - \rho_{in} c_{r,in}^2 + \rho_{av} c_{r,av}^2 \alpha_{av} \Delta r + \rho_{av} c_{av}^2 \frac{2f}{D_{eq,av}} \frac{c_{r,av}}{c_{av}} \Delta r - \frac{\rho_{av} c_{u,av}^2}{r_{av}} \quad (5.9)$$

$$c_{u,ex} - c_{u,in} = -\frac{c_{u,av}}{r_{av}} \Delta r - 2 \frac{f}{D_{eq,av}} \frac{c_{av} c_{u,av}}{c_{r,av}} \Delta r \quad (5.10)$$



**Figura 5.2 – Tratto di condotto elementare – Decomposizione della velocità nella componente radiale e periferica**

Le (5.7) - (5.10) costituiscono un sistema di equazioni non lineare nelle incognite  $c_{u,ex}$ ,  $c_{r,ex}$ ,  $p_{ex}$ ,  $T_{ex}$  ed i cui termini noti sono  $c_{u,in}$ ,  $c_{r,in}$ ,  $p_{in}$ ,  $T_{in}$ . Differendo da quello impiegato per condotti fissi e rotanti, essendo il numero di equazioni da soddisfare maggiore, si riporta nel seguito l'algoritmo risolutivo impiegato:

1. si fissano  $p_{ex} = p_{in}$ ,  $T_{ex} = T_{in}$ ,  $c_{u,ex} = c_{u,in}$  e  $\dot{Q} = 0$  come valori di primo tentativo
2. dalla (5.8) si ricava  $h_{ex}^0$  e, quindi,  $T_{ex}^0$
3. dall'equazione di stato dei gas si ottiene  $\rho_{ex}$
4. dalla (5.7) si ricava  $c_{r,ex}$
5. si calcola  $c_{ex}$  dalla  $c_{ex} = \sqrt{c_{r,ex}^2 + c_{u,ex}^2}$
6. noto  $T_{ex}^0$ , calcolato al passo 2, e  $c_{ex}$ , si valuta  $T_{ex}$

7. a questo punto è noto lo stato termofluidodinamico nella sezione  $ex$ , per cui è possibile calcolare i valori “average” da impiegare nella (5.10) da cui ricavare un nuovo valore per  $c_{u,ex}$
8. dalla (5.9) si calcola un nuovo valore per  $p_{ex}$
9. se lo scostamento tra il valore aggiornato e quello iniziale di  $p_{ex}$  eccede l’errore massimo ammissibile si itera il ciclo tornando al punto 2

Anche in tal caso, la procedura viene ripetuta per ogni tratto in cui viene discretizzato il condotto adottando come condizioni all’ingresso quelle d’uscita del tratto precedente.

#### 6.1 Introduzione

In questo capitolo vengono descritti i modelli analitici utilizzati per descrivere i fenomeni e le perdite più rilevanti che si verificano nelle turbomacchine. In particolare, sono introdotte le correlazioni utilizzate per tener conto delle perdite per incidenza, per urto ed altre minori nei diversi componenti costituenti il compressore e la turbina; per quanto riguarda il compressore è considerato sia il caso di flusso diretto che quello di flusso inverso.

Nel modello proposto, le perdite per attrito e quelle per scambio termico, come descritto nel capitolo 3, vengono computate direttamente nelle equazioni del moto e, pertanto, si suppongono distribuite lungo i condotti in cui viene schematizzata la turbomacchina; invece, le altre perdite si assume che siano concentrate nelle giunzioni tra condotti adiacenti e, pertanto, vengono introdotte nel modello applicando un'opportuna riduzione della pressione totale (assoluta o relativa) a cavallo della giunzione.

Successivamente è esposta la procedura con cui si tiene conto del fenomeno del riflusso dalla mandata all'aspirazione della girante del compressore e del trafileamento di fluido che, nel gioco tra girante e cassa della turbina, espande senza evolvere nel vano interpalare.

Nel presente capitolo sono riportati gli algoritmi utilizzati per la risoluzione delle condizioni al contorno nel codice stazionario; nella versione instazionaria del modello, sebbene la procedura risolutiva differisca poiché deve tener conto di un

maggior numero di equazioni da soddisfare (condizioni di compatibilità, si veda il capitolo 5), le correlazioni di perdita utilizzate sono le medesime. Vista l'equivalenza tra i due approcci in termini di modellazione delle perdite, la procedura stazionaria può essere adoperata anche come strumento per un'agevole e rapida taratura del modello instazionario.

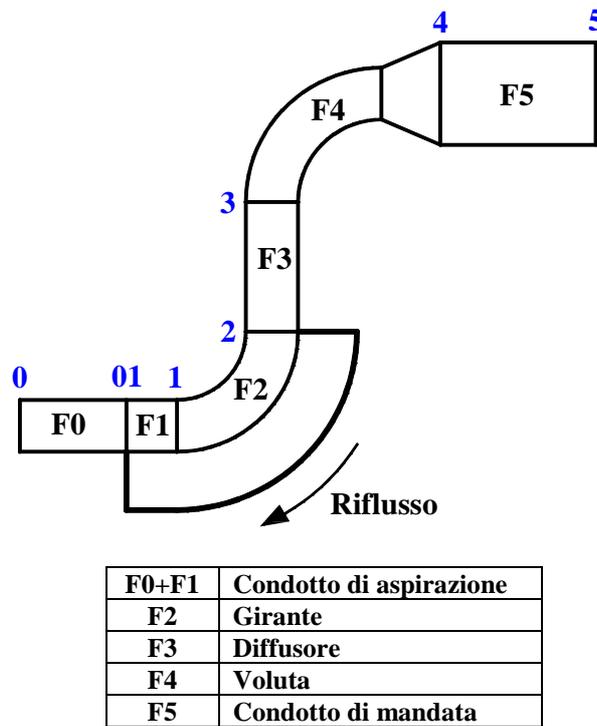


Figura 6. 1- Modello monodimensionale compressore – volumi principali

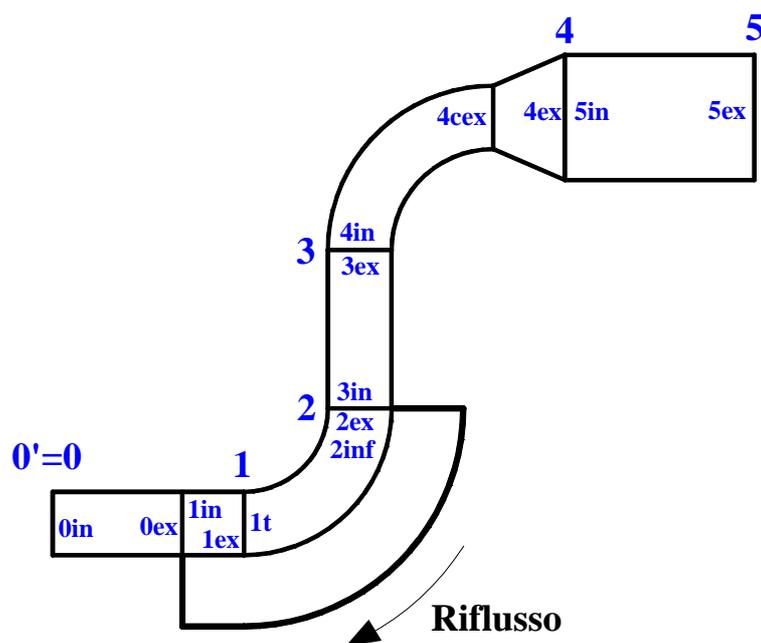
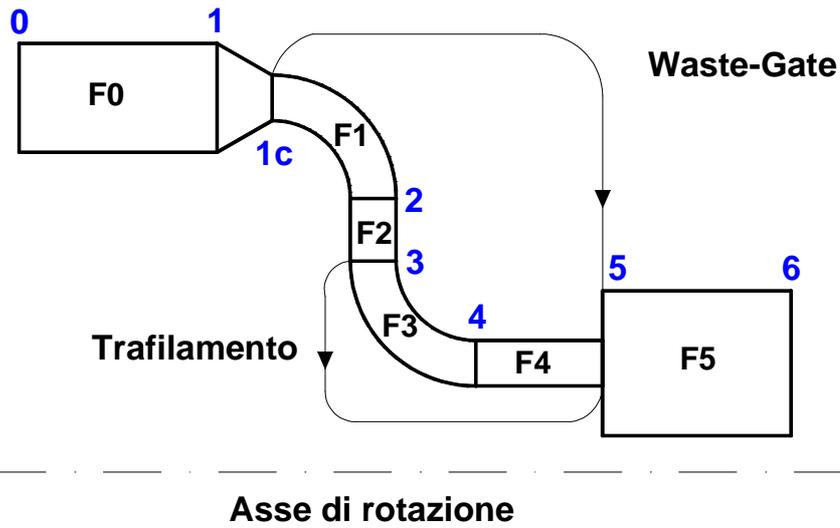
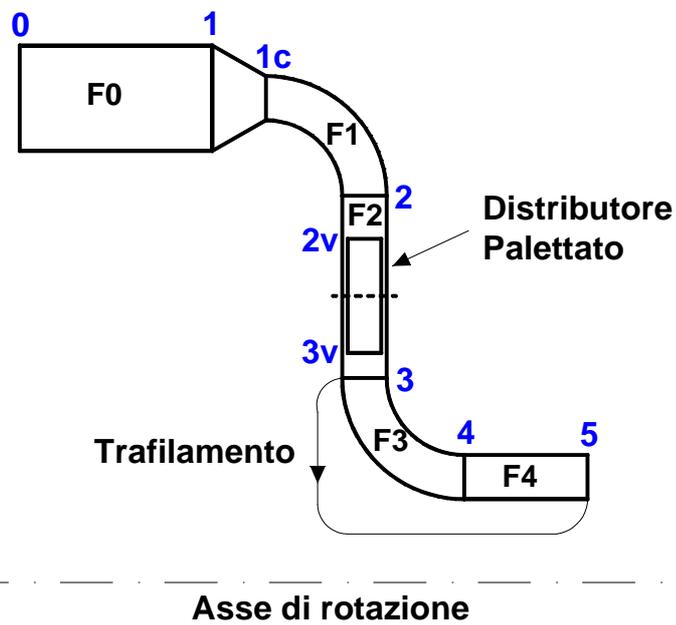


Figura 6. 2 - Modello monodimensionale compressore – dettaglio sezioni principali



F0	Condotto di aspirazione
F1	Voluta
F2	Gap voluta/girante
F3	Girante
F4	Condotto di mandata
F5	Volume uscita Waste-Gate

Figura 6. 3- Modello monodimensionale turbina con Waste-Gate – volumi principali



F0	Condotto di aspirazione
F1	Voluta
F2	Gap voluta / pale statoriche
	Distributore palettato
	Gap pale statoriche / girante
F3	Girante
F4	Condotto di mandata

Figura 6. 4- Modello monodimensionale turbina a geometria variabile – volumi principali

## 6.2 Perdite d'imbocco

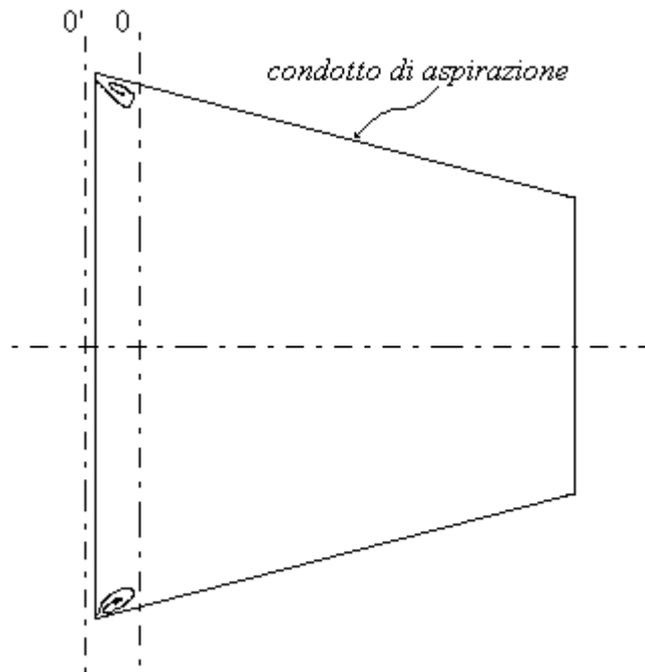


Figura 6.5– Rappresentazione perdite d'imbocco

All'ingresso del condotto di aspirazione si verificano le così dette perdite di imbocco la cui rappresentazione schematica è riportata in fig. 6.5. Tali perdite vengono modellate come delle semplici riduzioni di pressione totale concentrate in una sezione di estensione assiale trascurabile mantenendo la temperatura totale inalterata (data l'assenza di scambio di calore o lavoro).

In particolare, si assume che nella sezione  $0'$ , posta immediatamente a monte della sezione d'ingresso  $0$ , pressione e temperatura totali siano pari a quelle ambiente. Si ritiene pertanto che il fluido all'esterno del condotto acceleri ed espanda adiabaticamente ed isentropicamente sino al raggiungimento di tale sezione. Viceversa, nello spazio compreso tra le due sezioni di riferimento  $0$  e  $0'$  si immaginano racchiusi i vortici che inevitabilmente nascono ed il cui effetto è quello di ridurre la sezione effettiva di passaggio disponibile per il fluido realizzando il restringimento della vena fluida. A valle di tale restringimento, il flusso comprime e rallenta riadeguandosi alla sezione di passaggio del condotto. Le perdite che si verificano in tale processo di diffusione sono descritte tramite il modello proposto da Borda [31]; la correlazione di perdita che ne discende, opportunamente riarrangiata in funzione del numero di Mach  $M_0$  nella sezione  $0$ , si può scrivere come:

$$P_0^0 = P_{amb} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{1 + k \cdot M_0^2} \quad (6.1)$$

Una volta assegnato il numero di Mach e le condizioni ambiente sarà possibile individuare lo stato termodinamico del fluido nella sezione 0 d'ingresso al condotto di aspirazione e la portata in esso introdotta. Infatti, avendo ricavato la pressione totale in 0 tramite la (6.1) ed avendo posto  $T_0^0 = T_{amb}$  è possibile calcolare pressione e temperatura statica tramite le:

$$P_0 = \frac{P_0^0}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \quad (6.2)$$

$$T_0 = \frac{T_0^0}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)} \quad (6.3)$$

Da queste, grazie all'equazione di stato dei gas, si ricava la densità  $\rho_0$  e, noto il numero di Mach, anche la velocità del flusso  $c_0$ . A questo punto, dalla sezione di passaggio  $\Omega_0$ , risulta individuata anche la portata massica.

La procedura appena illustrata è quella impiegata nel codice stazionario per coprire l'intero campo di portate elaborate dalla turomacchina. Infatti, fissate le condizioni all'aspirazione in termini di pressione e temperatura, in iterazioni successive, viene fatto variare il numero di Mach  $M_0$  (e, quindi, la portata massica) partendo con un valore prossimo a 0 ed incrementando lo stesso fino al raggiungimento del valore per cui si realizzano le condizioni soniche in una delle sezioni costituenti la turbomacchina (condizioni di bloccaggio).

### 6.3 Perdite per riduzione della sezione di passaggio all'imbocco della girante del compressore

Tali perdite si verificano per effetto della riduzione di sezione che il flusso incontra all'imbocco della girante del compressore provocato dall'ingombro dell'ogiva e delle pale rotoriche (definite anche perdite per bloccaggio). Per tener conto di tali perdite s'introduce un condotto virtuale di lunghezza infinitesima che raccorda la sezione terminale del condotto di aspirazione ( $1_{ex}$ ) con quella d'ingresso della girante ( $1$ ). Il problema è quello di ricavare lo stato termodinamico del sistema nella sezione  $1$  ( $p_1$ ,  $T_1$  e  $c_1$ ) noto quello nella sezione  $1_{ex}$  ( $p_{1ex}$ ,  $T_{1ex}$ ,  $c_{1ex}$ ). Vanno pertanto ricercate tre equazioni indipendenti nelle tre incognite del problema.

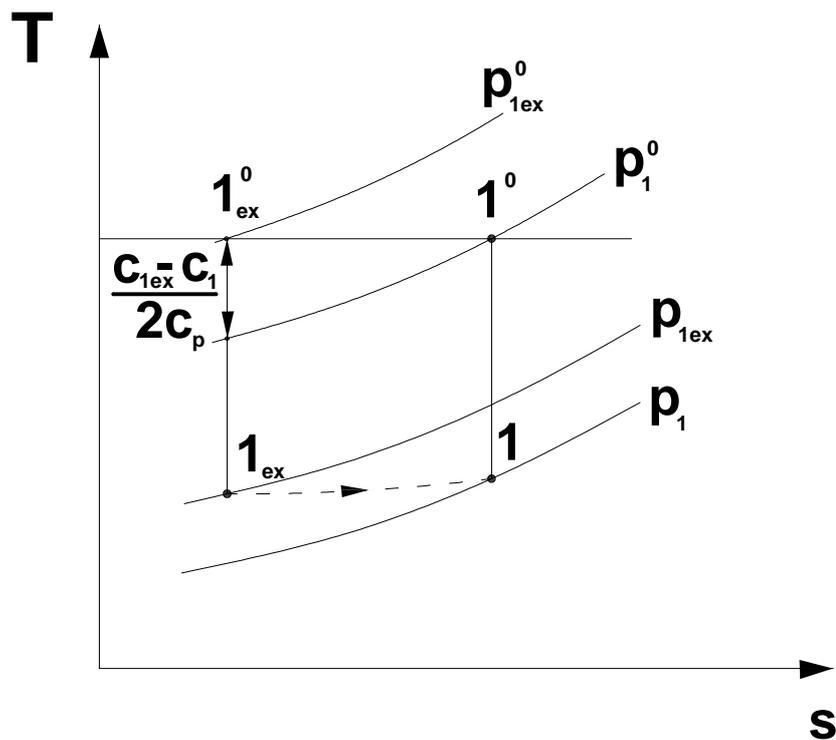


Figura 6. 6- Trasformazione ingresso girante – perdite per bloccaggio – piano T- s

A tal fine, vengono imposti i bilanci di portata ed entalpia espressi dalle:

$$\rho_{1ex} c_{1ex} \Omega_{1ex} = \rho_1 c_1 \Omega_1 \quad (6.4)$$

$$h_{1ex}^0 = h_1^0 \Leftrightarrow T_{1ex}^0 = T_1^0 \quad (6.5)$$

La terza condizione è dettata da una relazione tra le pressioni totali vigenti nelle due sezioni considerate ( $p_1^0 = f(p_{1ex}^0)$ ). L'approccio impiegato per descrivere la caduta di pressione totale che si verifica nel passaggio tra  $1ex$  e  $1$  è quello di legarla alla variazione di energia cinetica  $\left(\frac{c_1^2 - c_{1ex}^2}{2}\right)$  derivante dall'accelerazione del fluido che si verifica in conseguenza della riduzione di sezione. In particolare, tale perdita è assimilata alla riduzione di pressione totale che si avrebbe in un'espansione adiabatica reversibile in cui il lavoro ceduto è proprio pari alla già citata variazione di energia cinetica. Assumendo che la trasformazione avvenga ad entalpia totale costante, il legame analitico tra le pressioni totali è:

$$p_1^0 = p_{1ex}^0 \left(1 - \frac{k-1}{2} M_{loss}^2\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (6.6)$$

dove:

$$M_{loss} = c_{rid} \frac{(c_1 - c_{1ex})}{\sqrt{kRT_1}} \quad (6.7)$$

in cui  $c_{rid}$  è una costante di taratura.

Il procedimento di risoluzione è di tipo iterativo:

1.  $p_1 = p_{1ex}$  e  $T_1 = T_{1ex}$  al primo tentativo
2. si ricava  $\rho_1$  tramite l'equazione di stato dei gas
3. si calcola  $c_1$  dalla (6.4)
4. dalla (6.5), noto  $T_1^0$  si ricava  $T_1$
5. dalla (6.7) si stima  $M_{loss}$
6. dalla (6.6) si ricava  $p_1^0$
7. si calcola il valore aggiornato di  $p_1$  tramite la:

$$p_1 = p_1^0 \left(T_1/T_1^0\right)^{k/(k-1)} \quad (6.8)$$

8. se la differenza tra il valore aggiornato e quello al passo d'iterazione precedente di  $p_1$  eccede l'errore massimo ammesso si ritorna al punto 2

#### 6.4 Deviazione del flusso all'ingresso della girante

Il modello contempla anche l'opportunità di considerare un flusso all'ingresso della girante che non sia perfettamente assiale; in tal caso, assegnando l'angolo di flusso  $\alpha_1$  all'ingresso della girante, vengono ricalcolate tutte le grandezze termofluidodinamiche nell'ipotesi che il flusso devii istantaneamente dalla direzione originaria assiale e che tale trasformazione avvenga adiabaticamente ed isentropicamente.

La valutazione della variazione dello stato termofluidodinamico del fluido conseguente alla trasformazione che ne deriva è effettuata tramite una procedura iterativa del tutto analoga a quella descritta nel paragrafo precedente. Tale algoritmo, una volta assegnato l'angolo  $\alpha_1$ , consente la valutazione della componente assiale  $c_{1a}$  e periferica  $c_{1u}$  della velocità assoluta tramite la:

$$c_{1a} = c_{1u} \tan(\alpha_1) \quad (6.9)$$

#### 6.5 Perdite per incidenza ed urto per flusso diretto nel compressore

Nel presente paragrafo è descritto il modello che soggiace alla valutazione delle perdite per urto ed incidenza che si realizzano all'ingresso della girante del compressore e che si suppongono concentrate nella sezione immediatamente a valle la così detta sezione di gola (throat). E', inoltre, illustrato il procedimento adoperato per valutare lo stato termofluidodinamico nella sezione di gola (nel seguito, si indicherà detta sezione con il pedice  $1t$ ) una volta assegnate le condizioni del flusso all'ingresso della girante (sezione 1) in termini di pressione  $p_1$ , temperatura  $T_1$  e velocità  $c_1$ .

Il primo passo è quello di ricostruire il triangolo delle velocità all'ingresso avendo fissato la velocità assoluta  $c_1$  e quella di trascinamento  $u_1$  al fine di stimare la velocità relativa  $w_1$ . In tal modo, risulta definito lo stato termofluidodinamico nella sezione d'ingresso della girante nel moto relativo in termini di numero di Mach, entalpia totale, temperatura totale e pressione totale secondo le:

$$M_{w1} = w_1 / \sqrt{kRT_1} \quad (6.10)$$

$$h_{w1}^0 = h_1 + w_1^2 / 2 \quad (6.11)$$

$$T_{w1}^0 = h_{w1}^0 / c_p \quad (6.12)$$

$$p_{w1}^0 = p_1^0 (T_{w1}^0 / T_1^0)^{k/(k-1)} \quad (6.13)$$

Se per semplicità di trattazione ci si riferisce al caso di flusso ad ingresso perfettamente assiale, il triangolo delle velocità in ingresso è rettangolo (fig. 6.8) e, pertanto, è immediata la valutazione anche dell'angolo di flusso  $\varphi_1$  secondo la:

$$\varphi_1 = a \tan \left( \frac{u_1}{c_1} \right) \quad (6.14)$$

Il modello impiegato per la valutazione delle perdite per urto ed incidenza prevede che l'energia cinetica associata ad un opportuna componente  $w_{1n}$  (la cui determinazione sarà discussa di seguito) della velocità relativa in ingresso  $w_1$  venga dissipata a pressione costante. Più esattamente, si impone che la caduta di pressione totale relativa tra le sezioni 1 e 1t sia uguale a quella che si avrebbe in un'espansione adiabatica reversibile nella quale l'energia sottratta sia esattamente pari all'energia cinetica associata a  $w_{1n}$ . Con riferimento alla figura 6.7, tale trasformazione è quella che porta dal punto iniziale  $1_w^0$  che indica le condizioni di ristagno nel moto relativo a monte della perdita al punto A cui compete la stessa pressione totale relativa del punto  $1_w^0$  rappresentativo delle condizioni di ristagno nella gola, quindi, a valle della perdita.



$$p_{w1r}^0 = p_{w1}^0 \left( 1 - \frac{k-1}{2} M_{w1n}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.17)$$

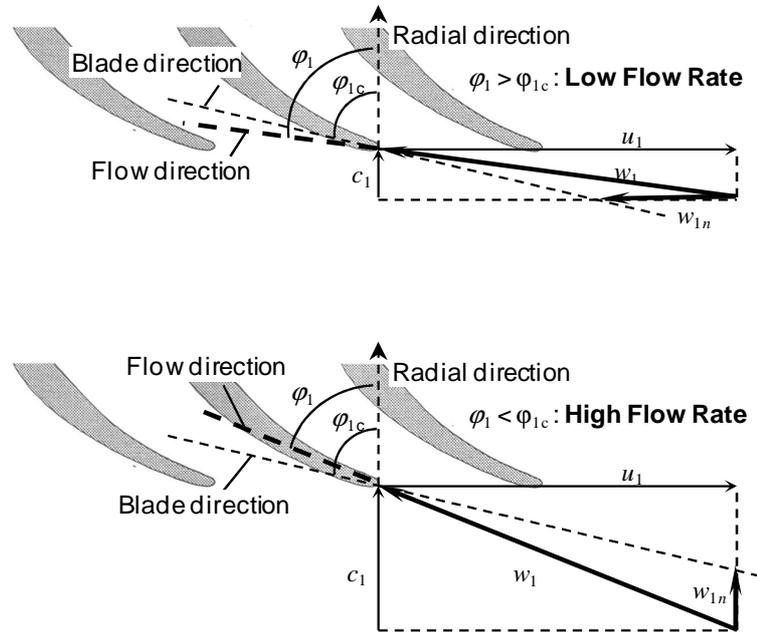


Figura 6.8– Triangoli delle velocità ingresso girante compressore

La valutazione di  $w_{1n}$  prende spunto dal ben noto Nasa Shock Model [32, 33] secondo il quale, a seconda che la portata sia minore o maggiore di quella di progetto, detta componente della velocità relativa può essere calcolata secondo:

$$w_{1n} = u_1 \left( 1 - \frac{\tan \varphi_{1c}}{\tan \varphi_1} \right) \quad \varphi_1 > \varphi_{1c} \Leftrightarrow \text{Low flow} \quad (6.18)$$

$$w_{1n} = u_1 \left( \frac{1}{\tan \varphi_1} - \frac{1}{\tan \varphi_{1c}} \right) \quad \varphi_1 < \varphi_{1c} \Leftrightarrow \text{High flow} \quad (6.19)$$

in cui  $\varphi_{1c}$  è l'angolo di pala costruttivo (fig. 6.8).

Nel caso di flusso supersonico all'ingresso della girante ( $M_{w1} > 1$ ), è introdotta nel modello anche una caduta di pressione totale relativa associata ad un'eventuale onda d'urto normale tramite le relazioni di salto. Nel funzionamento effettivo della macchina, solitamente si determina una complessa fenomenologia che include onde

d'urto oblique e ventagli d'espansione (a monte della sezione d'ingresso) e urti normali (nella sezione di gola) [34, 35]. Inoltre, la parte consistente delle perdite associate all'insorgere di onde d'urto è provocata dall'interazione con lo strato limite che, a causa del repentino aumento di pressione a valle dell'onda, s'ingrossa ed, eventualmente, può distaccarsi provocando forti degradazioni di energia [36, 37]. Vista l'impossibilità di modellare tali fenomeni tramite l'approccio monodimensionale, ci si limita ad inserire nella procedura la sola caduta di pressione associata alla presenza di onde d'urto normali.

Per considerare la variabilità in direzione radiale delle perdite, il canale d'ingresso è suddiviso in un assegnato numero di tubi di flusso concentrici la cui estensione radiale è definita in modo tale da essere caratterizzati dalla medesima area di passaggio e, quindi, da smaltire la stessa portata. Pertanto, il procedimento inerente la stima delle perdite appena descritto viene iterato per ciascun tubo di flusso per poi assumere come valore della caduta di pressione totale relativa globale la media aritmetica delle perdite che si realizzano in ciascun tubo di flusso.

Una volta descritto il modello di perdita ed il procedimento seguito per la valutazione della caduta di pressione totale relativa, nel seguito è illustrato il l'algoritmo impiegato per individuare il punto  $1_t$  di fig. 6.7 corrispondente alle condizioni del flusso nella sezione iniziale del canale intepalare. A tal fine, si richiede il rispetto, nel passaggio tra le sezioni 1 e  $1_t$ , dei bilanci di portata e di entalpia totale relativa:

$$\rho_1 c_1 \Omega_1 = \rho_{1t} w_{1t} \Omega_{1t} \quad (6.20)$$

$$h_{w1}^0 = h_{w1t}^0 \quad (6.21)$$

Tale ultima assunzione, come comunemente accade per giranti ad ingresso assiale quali sono quelle qui considerate, è soddisfatta nel caso in cui le sezioni 1 e  $1_t$  si trovino allo stessa distanza dall'asse della girante e, quindi, siano caratterizzate dalla stessa velocità periferica. L'algoritmo prevede i seguenti passi:

1. si fissano come valori di primo tentativo  $p_{1t} = p_1$  e  $T_{1t} = T_1$
2. si calcola  $\rho_{1t}$  dall'equazione di stato dei gas
3. dalla (6.20) si ottiene  $w_{1t}$

4. noto  $h_{w1r}^0$  dalla:

$$h_{1r} = h_{w1}^0 - w_{1r}^2 / 2 \quad (6.22)$$

si ricava  $h_{1r}$  e, quindi,  $T_{1r}$

5. dalla (6.17) è nota  $p_{w1r}^0$ , per cui si calcola  $p_{1r}$  tramite la:

$$p_{1r} = p_{w1r}^0 (T_{1r} / T_{w1}^0)^{k/(k-1)} \quad (6.23)$$

6. si ritorna al punto 2 se lo scostamento tra il valore aggiornato di  $p_{1r}$  eccede l'errore massimo ammesso.

## 6.6 Perdite uscita girante per flusso inverso nel compressore e per flusso diretto nella turbina

All'uscita della girante per flusso inverso del compressore (sezione 1 in 6.1 e 6.2, triangoli velocità fig. 6.9) o nel normale funzionamento della turbina (sezione 4 in fig. 6.3 e 6.4, triangoli velocità fig. 6.10) il campo di moto è caratterizzato da una componente periferica della velocità solitamente non trascurabile (la stessa si annulla solo in condizione di progetto per la turbina).

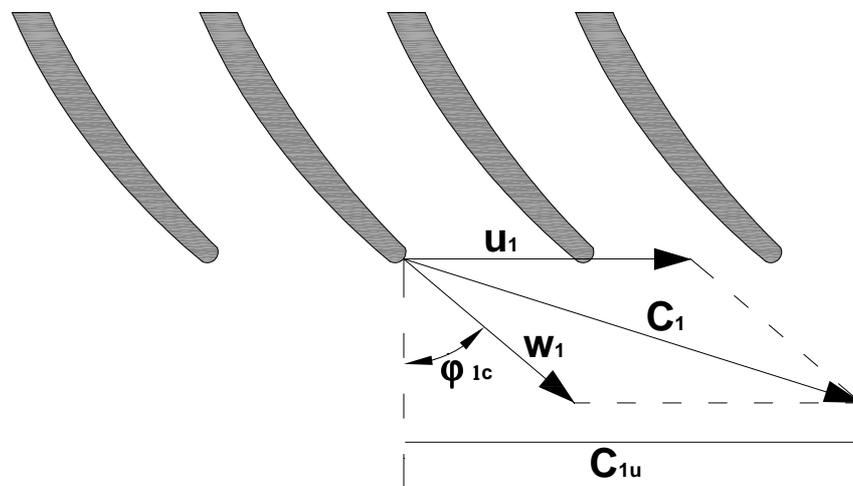


Figura 6. 9- Triangolo velocità uscita girante compressore – flusso inverso

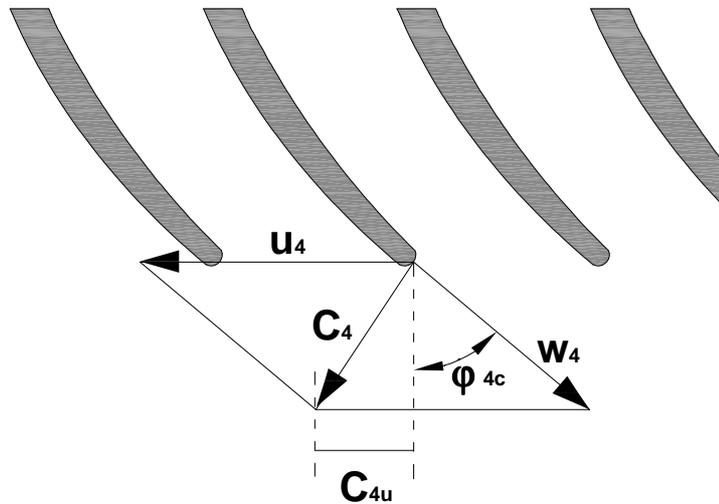


Figura 6. 10 - Triangolo velocità uscita girante turbina – flusso diretto

Tale componente, essendo perpendicolare al campo di moto principale (che è allineato all'asse del condotto di mandata), via via che ci si allontana dalla sezione d'uscita tende a decadere a causa degli sforzi di natura viscosa che nascono internamente al fluido. Instaurandosi un campo di moto dalle caratteristiche tridimensionali, non è possibile descrivere tale fenomeno secondo l'approccio monodimensionale finora seguito; pertanto, nel modello proposto, si assume che l'energia cinetica associata alla componente periferica della velocità assoluta all'uscita della girante venga dissipata adiabaticamente nella giunzione tra girante e condotto comportando una riduzione di pressione totale. Naturalmente, nella risoluzione della condizione al contorno, si continua ad imporre la conservazione della portata massica e dell'entalpia totale a cavallo della giunzione.

La componente della velocità cercata vale, per il compressore (fig. 6.9):

$$c_{1u} = u_1 + w_1 \text{sen}(\varphi_{1c}) \quad (6.24)$$

mentre, per la turbina (fig. 6.10):

$$c_{4u} = u_4 + w_4 \text{sen}(\varphi_{4c}) \quad (6.25)$$

A tali componenti di velocità è possibile associare un opportuno numero di Mach e, quindi, una riduzione di pressione totale analogamente a quanto visto nei casi precedenti.

### **6.7 Perdite per incidenza ed urto per flusso inverso nel compressore e per flusso diretto nella turbina**

Questo modello viene applicato per la stima delle perdite per incidenza all'ingresso della girante per flusso diretto nel caso della turbina (sezione 3 in fig. 6.3 e 6.4) e per il flusso inverso riguardo il compressore (sezione 2 in fig. 6.1). Tale ultima condizione si verifica solo nel corso del funzionamento instabile del compressore e, quindi, in regime fortemente instazionario. In virtù della difficoltà nel riprodurre tali condizioni operative, durante le quali, per altro, il componente viene gravemente sollecitato dalle continue inversioni di portata, non esistono modelli analitici in letteratura in grado di descrivere tale perdita.

In [38], si evidenzia come le perdite per incidenza in una turbina ad ingresso radiale non si minimizzano quando il flusso relativo è allineato alla direzione del bordo d'ingresso della pala. Viceversa, si raccomanda di valutare l'angolo d'incidenza (angolo tra la direzione del flusso e quella della pala) ottimale utilizzando un'opportuna correlazione di slip; tale fenomeno, come verrà descritto nel paragrafo 6.9, influenza il flusso all'uscita della girante del compressore. Pur essendo la fisica del fenomeno dello slip differente rispetto a quanto si verifica all'ingresso della ruota di una turbina, il riscontro sperimentale avalla la pratica di impiegare una correlazione di slip per l'individuazione dell'angolo d'incidenza ottimale.

Le perdite per incidenza sono pertanto calcolate sulla base del già citato modello Nasa Shock, salvo introdurre l'effetto della deviazione dell'angolo ottimale dalla direzione individuata dalla pala. A tal fine, è utilizzata la correlazione di Stainz introdotta nel paragrafo 6.9. Dal coefficiente di slip  $\sigma$  così ottenuto, si ricava il valore della componente periferica della velocità assoluta in condizioni ottimali  $c_{3u,opt}$  e da questo quello della velocità relativa  $w_{3u,opt}$ .

$$c_{3u,opt} = \sigma u_3 \quad (6.26)$$

$$w_{3u,opt} = c_{3u,opt} - u_3 \quad (6.27)$$

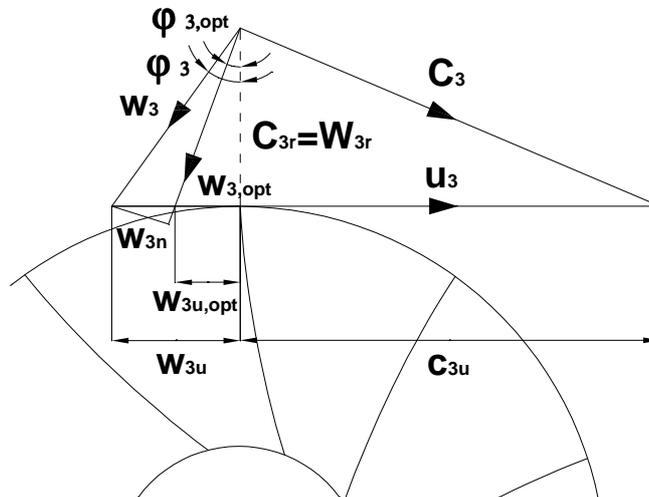


Figura 6. 11- Triangoli velocità ingresso girante turbina

A questo punto, una volta assegnata la velocità assoluta in ingresso  $c_3$  (e, di conseguenza, le sue componenti  $c_{3r}$  e  $c_{3u}$ ) e, quindi, l'altezza del triangolo delle velocità, si può ricavare l'angolo di flusso effettivo  $\varphi_3$  e quello ottimale  $\varphi_{3,opt}$  come:

$$\tan(\varphi_3) = \frac{w_{3u}}{w_{3r}} = \frac{w_{3u}}{c_{3r}} \quad (6.28)$$

$$\tan(\varphi_{3,opt}) = \frac{w_{3u,opt}}{w_{3r}} = \frac{w_{3u,opt}}{c_{3r}} \quad (6.29)$$

da cui l'angolo d'incidenza  $i$  e, quindi,  $w_{3n}$ .

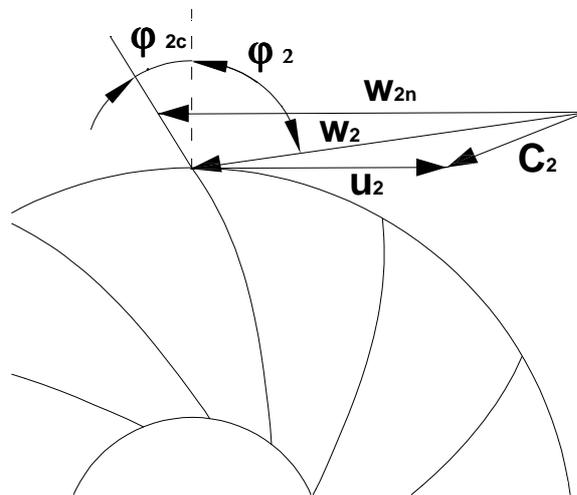
$$w_{3n} = \text{sen}(\varphi_3 - \varphi_{3,opt}) = \text{sen}(i) \quad (6.30)$$

Per tener conto delle incertezze del modello che soggiace all'individuazione dell'angolo di incidenza ottimale si introduce la costante di taratura  $c_{incimpo}$

$$w_{3n} = \text{sen}(i - c_{incimpo}) \quad (6.31)$$

L'energia cinetica associata a  $w_{3n}$  si suppone dissipata secondo il medesimo meccanismo visto nel paragrafo 6.5.

Nel caso del flusso inverso nel compressore, i triangoli delle velocità assumono tipicamente la configurazione illustrata in fig. 6.12 in cui si nota una marcata differenza tra l'angolo di flusso e quello di pala. Ciò determina perdite di notevole entità in tutte le condizioni di funzionamento, conferendo alla curva prestazionale del compressore il classico andamento assimilabile a quello di una caratteristica di una valvola di strozzamento.



**Figura 6. 12– Triangoli velocità ingresso girante compressore – flusso inverso**

Prendendo spunto dal modello Nasa Shock, s'impone che l'energia cinetica associata alla componente  $w_{2n}$  della velocità relativa in ingresso alla girante  $w_2$  venga dissipata in una trasformazione adiabatica.  $w_{2n}$  si calcola come:

$$w_{2n} = c_{2u} - u_2 - c_{2r} \tan \varphi_{2c} \quad (6.32)$$

### 6.8 Perdite per incidenza all'ingresso della palettatura statorica della turbina

In una turbina a geometria variabile, il flusso, dopo aver attraversato un gioco, le cui dimensioni dipendono dalla regolazione della macchina, incontra la palettatura statorica (sezione  $2v$  in fig. 6.4). L'angolo di flusso  $\varphi_{2v}$  con cui raggiunge tale componente è in genere diverso da quello che caratterizza la palettatura stessa  $\varphi_{2vc}$ . In conseguenza di ciò, si verificano perdite per urto ed incidenza anche all'imbocco del distributore palettato. Per tener conto di tale fenomeno ancora una volta si è ricorso al già citato modello Nasa Shock. Con riferimento alla fig. 6.13, questa volta la componente della velocità assoluta cui si associa l'energia cinetica dissipata per l'urto è data da:

$$c_{2n} = c_{2vu} - c_{2vr} \tan \varphi_{2vc} \quad (6.33)$$

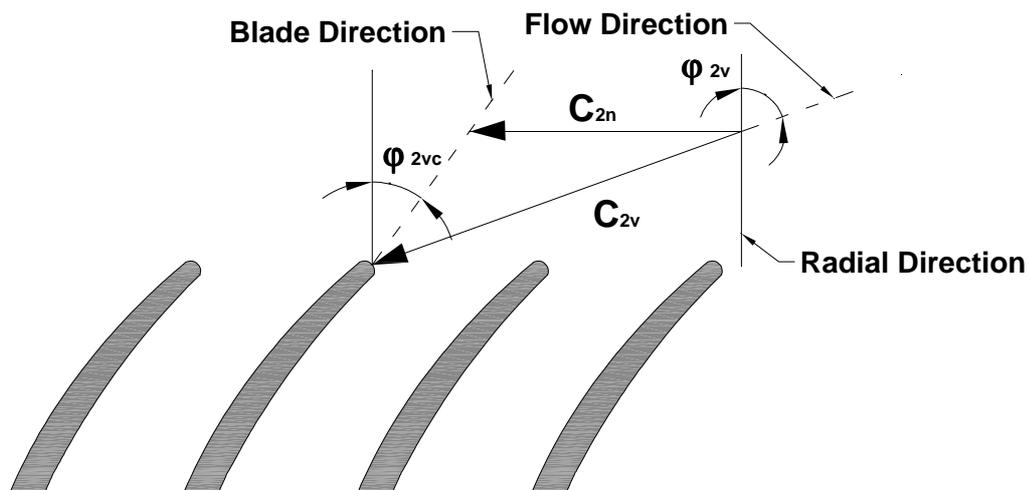


Figura 6.13 – Triangolo velocità ingresso distributore palettato

In fig. 6.13 si è indicato con  $c_{2v}$  la velocità del fluido all'ingresso del distributore palettato (le cui componenti radiale e periferica sono, rispettivamente,  $c_{2vr}$  e  $c_{2vu}$ ).

## 6.9 Effetto Slip

Di seguito è riportata la descrizione del fenomeno dello slip e degli approcci modellistici sviluppati per la sua trattazione. In conclusione del paragrafo, è brevemente illustrata la procedura impiegata per l'introduzione degli effetti di tale fenomeno nel modello proposto.

All'interno della girante di un compressore, anche in assenza di fenomeni viscosi, l'insorgere di moti secondari, dovuti principalmente all'azione delle forze di Coriolis (imputabili alla traiettoria curvilinea cui è sottoposta la particella fluida nel percorrere, in un sistema rotante, un condotto curvo, quale è il vano interpallare della girante di un compressore), determina la deviazione del flusso dalla direzione che gli sarebbe imposta dalla conformazione della pala. Tale fenomeno, definito "slip", risulta tanto più marcato quanto minore è il numero di pale di cui è dotata la girante. La conseguenza più rilevante dello slip è che il lavoro scambiato tra ruota e fluido non corrisponde a quello computato supponendo coincidenti l'angolo di flusso e l'angolo costruttivo all'uscita della girante. In fig. 6.14 sono riportati i triangoli delle velocità disegnati in assenza o meno di slip (con il pedice  $\infty$  sono indicate le grandezze in assenza di slip). E' evidente come, stante l'espressione del lavoro teorico o euleriano, che si riferisce a condizioni ideali (assenza di perdite e distribuzione uniforme della velocità nel vano interpallare):

$$L_{t\infty} = c_{2u\infty}u_2 - c_{1u}u_1 \quad (6.34)$$

$$L_t = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1 \quad (6.35)$$

lo slip comporti una riduzione del lavoro trasferito al fluido dalla girante poiché la velocità relativa  $w_2$  a causa di tale fenomeno devia dalla direzione imposta pala (corrispondente alla direzione di  $w_{2\infty}$ ) provocando una diminuzione della componente periferica della velocità assoluta all'uscita della girante  $c_{2u}$ . Tale diminuzione prende il nome di velocità di slip o di scorrimento ed è data da:

$$c_{slip} = c_{2u\infty} - c_{2u} \quad (6.36)$$



Supponendo, come spesso si verifica, che la velocità assoluta in ingresso della girante sia perfettamente assiale ( $c_{1u} = 0$ ),  $\mu$  coincide con il rapporto tra i lavori teorici, ovvero:

$$\mu = \frac{c_{2u}}{c_{2u\infty}} = \frac{L_t}{L_{t\infty}} \quad (6.40)$$

Il legame vigente tra i due coefficienti si ricava come segue:

$$\mu = \frac{c_{2u}}{u_2(1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c})} \Leftrightarrow \mu = 1 - \frac{c_{slip}}{u_2(1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c})} \Leftrightarrow \mu = 1 - \frac{1 - \sigma}{(1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c})} \quad (6.41)$$

In molte delle correlazioni che forniscono una stima di  $\sigma$ , non compaiono dipendenze funzionali dall'entità del flusso (ossia dalla portata), ma solo dalla geometria della girante. Ciò si traduce nel fatto che, stante il legame espresso dalla (6.41),  $\mu$  è, invece, variabili con la portata in ragione della dipendenza da  $\Phi_2$  e della costanza di  $\sigma$  una volta assegnata la geometria del componente.

Per pale radiali ( $\varphi_{2c} = 0$ ) le due definizioni coincidono. Per giranti caratterizzate da pale rivolte all'indietro o in avanti, i due coefficienti differiscono in misura crescente all'aumentare della portata. Infatti, diagrammando  $\mu$  in funzione di  $\sigma$ , si ottengono delle rette la cui pendenza dipende da  $\Phi_2$  e da  $\varphi_{2c}$ . Come evidenziato da fig. 6.15, i valori sono discordi soprattutto per pale non radiali e per elevati valori di  $\Phi_2$ .

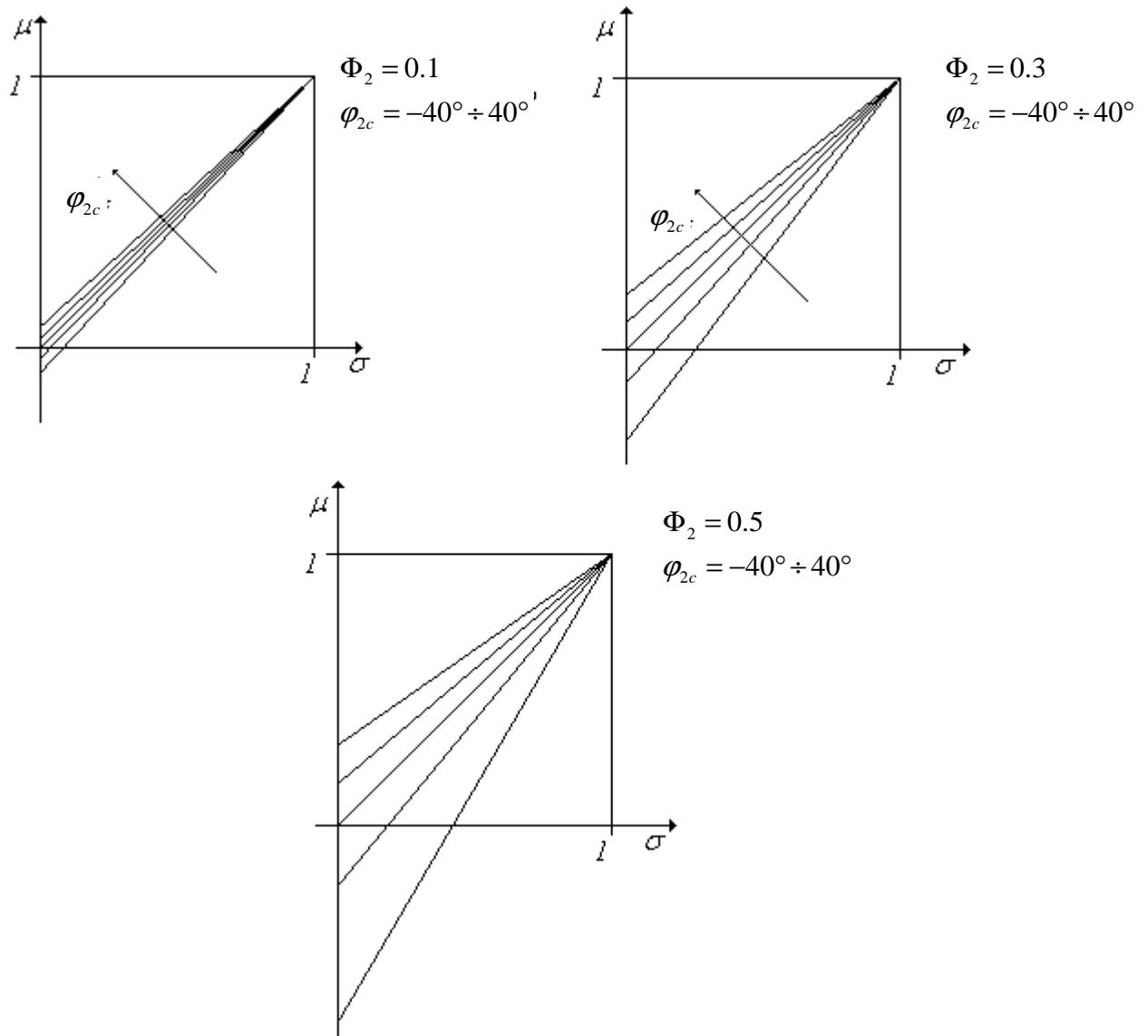
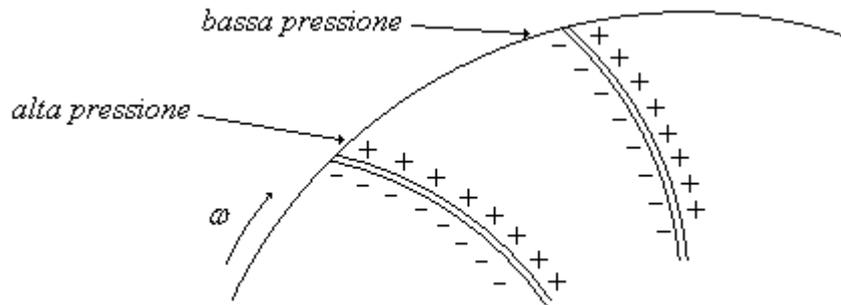


Figura 6. 15 – legame coefficienti di slip  $\mu$  e  $\sigma$

La descrizione del fenomeno della slip tramite semplici correlazioni è argomento di numerosi studi sperimentali e teorici. Wiesner (1967) ha fornito un'estensiva panoramica delle diverse espressioni di origine teorica usate per determinare lo slip. Molte di esse sono valide esclusivamente per pale radiali e per flusso inviscido, sebbene ve ne siano alcune applicabili anche al caso di pale rivolte all'indietro. L'ipotesi di flusso inviscido, per quanto lontana del reale comportamento del fluido, è in grado di fornire una descrizione del fenomeno che non si discosta eccessivamente dai dati sperimentali.

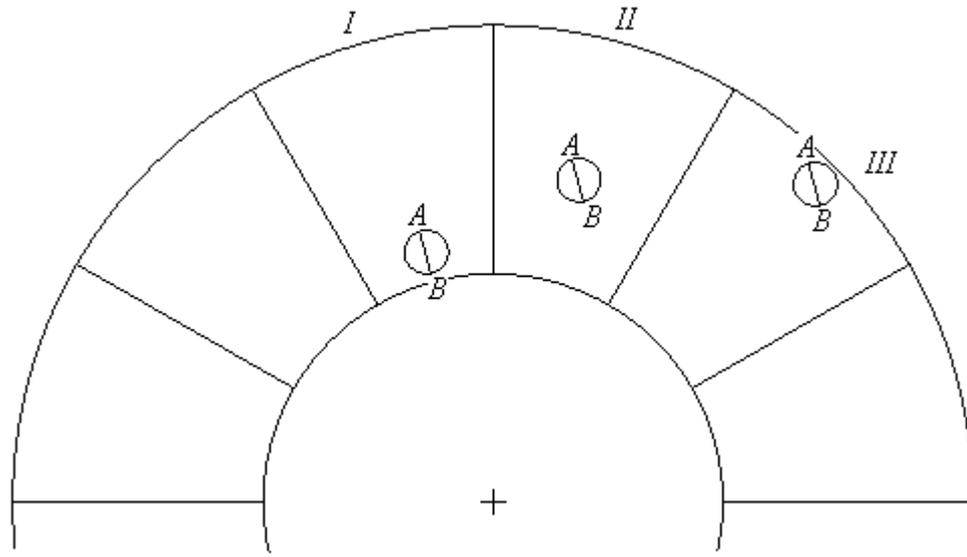
Esistono due approcci fondamentali per la modellazione dello slip. Il primo presuppone l'esistenza di una distribuzione di pressione tra "leading face" e "trailing face" del tipo riportato in fig. 6.16 associabile alla coppia resistente offerta dalla girante del compressore per la compressione del fluido.



**Figura 6. 16 – Distribuzione pressione tra intradosso ed estradosso**

A causa del campo di bassa pressione sulla "trailing face" e di alta sulla "leading face", si genera un gradiente di velocità trasversale al canale interpalare per cui il fluido abbandona la girante tangenzialmente alla pala solo sul lato in pressione, mentre su quello in depressione "deflette" più di quanto imposto dalla geometria della pala stessa.

Un altro punto di vista è quello fornito da Stodola il quale considera l'effetto dell'inerzia del fluido. In fig. 6.17 è rappresentata l'evoluzione di una particella fluida attraverso il vano interpalare in tre istanti successivi; si nota come, a causa dell'inerzia, le particelle tendano a conservare il proprio orientamento rispetto a un sistema di riferimento fisso. Ciò si traduce in un moto circolatorio relativo ("relative eddy") che si sovrappone a quello di attraversamento.

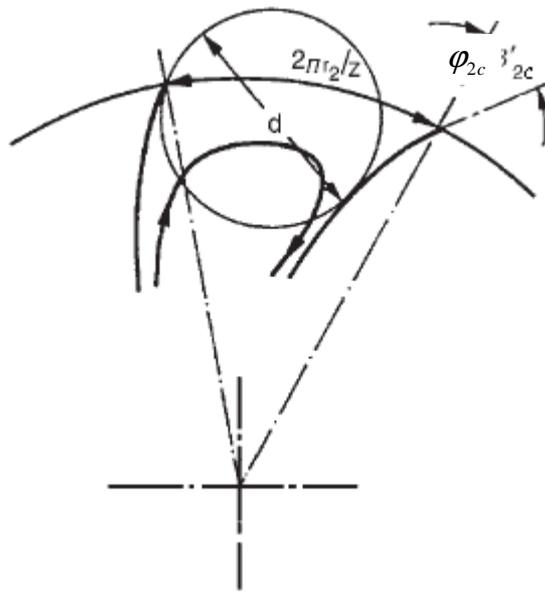


**Figura 6. 17 – Rappresentazione sviluppo slip – modello di Stodola**

Tra le prime formulazioni di origine prettamente teorica sono da annoverare quelle di Busemann e Stodola. Queste, come molte delle altre che da esse derivano, sono valide nell'ipotesi di flusso bidimensionale e tengono conto, quindi, solo degli effetti (riassunti dal concetto di "deviazione") che la presenza delle pale produce sulle linee di corrente che giacciono su una superficie di corrente assialsimmetrica; inoltre, sono ricavate nel caso di flusso "a falde parallele" come è quello che si potrebbe ottenere per un fluido inviscido e per geometria perfettamente radiale del disco e del controdisco. Inoltre, si ipotizza che gli elementi della macchina a monte e valle del rotore siano sufficientemente distanti da non influire sul comportamento del fluido nella palettatura mobile.

Stanti tali assunzioni, si suppone che il flusso attraverso la girante sia dato dalla sovrapposizione di un primo moto assoluto a rotore fermo (flusso di attraversamento) ed un secondo, in presenza di rotazione, ma senza portata (flusso di trascinamento). Busemann (1928) considera giranti radiali aventi pale di spessore infinitesimo la cui forma riproduce una spirale logaritmica, e le trasforma (con una trasformazione conforme) in una schiera rettilinea fatta da infiniti profili a lamina piana di spessore infinitesimo. L'espressione ricavata per il coefficiente di slip è piuttosto complessa e, a rigore, dipende da un coefficiente di effetto schiera (che numericamente coincide con quello già ricavato da Weinig) e da un coefficiente detto

di Busemann funzione di  $r_2/r_1$ , del numero di pale  $Z$  e dell'angolo costruttivo in uscita  $\varphi_{2c}$  [22]. Diversi autori hanno cercato di giungere a risultati simili tramite, però, delle trattazioni semplificate. I più noti sono quelli di Pfleiderer e di Stodola. Quest'ultimo presuppone che il moto del fluido all'uscita della girante si ottenga come sovrapposizione di un flusso principale, perfettamente guidato dalle pale, e di un vortice; lo stesso è caratterizzato da una velocità angolare uguale in modulo, ma opposta in direzione rispetto a quella di rotazione della girante  $\omega$  e da un diametro  $d$  determinato dalla minima sezione di attraversamento all'uscita della girante.



**Figura 6. 18 – Dimensione macrovortice slip – modello Stodola**

Con riferimento alla fig. 6.18, è immediato dedurre che:

$$d \cong \frac{\pi D_2}{Z} \cos \varphi_{2c} \quad (6.42)$$

da cui la velocità di slip  $c_{slip}$  derivante è:

$$c_{slip} = \omega \frac{d}{2} = \frac{\pi u_2 \cos \varphi_{2c}}{Z} \quad (6.43)$$

Si noti come  $c_{slip}$  non dipenda dalle condizioni di flusso; ciò si traduce nel fatto che, nell'approccio di Stodola, la riduzione di lavoro provocata dallo slip non è funzione della portata. In tale trattazione del fenomeno, i coefficienti di slip assumono le seguenti espressioni:

$$\sigma = 1 - \frac{\pi \cos \varphi_{2c}}{Z} \quad (6.44)$$

$$\mu = 1 - \frac{(\pi / Z) \cos \varphi_{2c}}{1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c}} \quad (6.45)$$

Stanitz (1952) applicò dei metodi di rilassamento per risolvere il campo a potenziale blade-to-blade per otto giranti con angoli di uscita variabili tra zero e quarantacinque gradi. Tale analisi evidenziò come la velocità di slip  $c_{slip}$  fosse indipendente dall'angolo  $\varphi_{2c}$  e non influenzata dagli effetti di comprimibilità, ma fosse funzione esclusivamente del numero di pale; i risultati teorici ottenuti portarono alle seguenti correlazioni di slip:

$$\sigma = 1 - \frac{0,63\pi}{Z} \quad (6.46)$$

$$\mu = 1 - \frac{0,63\pi / Z}{1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c}} \quad (6.47)$$

Wiesner (1967) svolse un'analisi comparativa tra le diverse correlazioni disponibili allora in letteratura volta a stabilire quale fosse quella che garantiva la migliore rispondenza ai dati sperimentale. Il risultato di tale indagine fu che la correlazione di Busemann meglio riproduceva l'evidenza sperimentale per giranti centrifughe. Wiesner propose le seguenti espressioni:

$$\sigma = 1 - \frac{\sqrt{\cos \varphi_{2c}}}{Z^{0,7}} \quad (6.48)$$

$$\mu = 1 - \frac{\sqrt{\cos \varphi_{2c}} / Z^{0,7}}{1 - \Phi_2 \tan \varphi_{2c}} \quad (6.49)$$

che sono in sostanziale accordo con la trattazione di Busemann per i valori più diffusamente impiegati per  $\varphi_{2c}$  e  $Z$ .

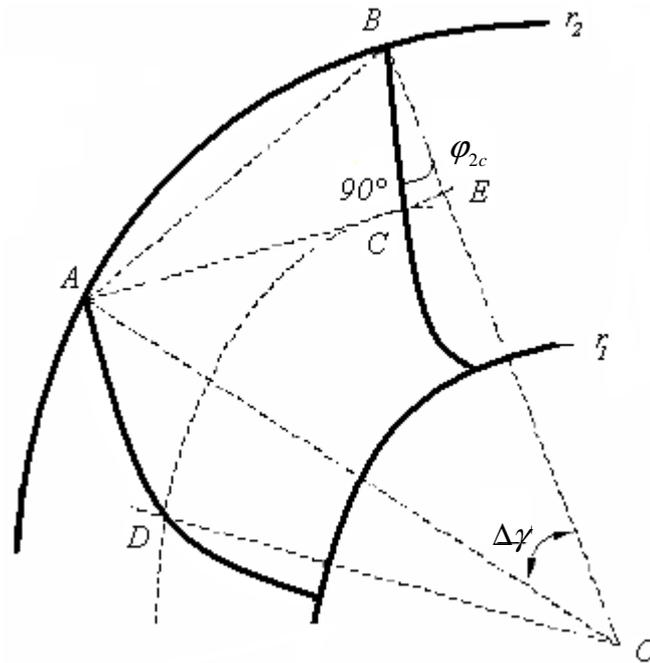
Il campo di validità della correlazione di Wiesner è limitato superiormente dal valore limite del rapporto tra i raggi all'ingresso ed all'uscita espresso dalla:

$$\varepsilon = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)_{\text{lim}} = \exp \left( \frac{-8,16 \cos \varphi_{2c}}{Z} \right) \quad (6.50)$$

diversamente, il coefficiente di slip va corretto secondo la:

$$\mu' = \mu \left( 1 - \left( \frac{r_1/r_2 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^3 \right) \quad (6.51)$$

La correlazione di slip introdotta nel modello qui proposto è quella sviluppata in [39] da Qiu, Mallikarachchi e Anderson. Le relazioni prima descritte non riescono a descrivere soddisfacentemente il fenomeno per geometrie molto diverse tra di loro. Inoltre, legano il fattore di slip  $\sigma$  esclusivamente a parametri geometrici della girante ( $\varphi_{2c}$ ,  $Z$ ,  $r_1/r_2$ ), ma non prevedono alcuna dipendenza dalle condizioni di flusso. In [39], si prende spunto da questi limiti per definire una formulazione unitaria del coefficiente di slip, che tenga conto sia della geometria della girante che delle condizioni di flusso.



**Figura 6. 19– Modello calcolo diametro macrovortice – modello di Qiu, Mallikarachchi e Anderson**

La trattazione dello slip proposta in [39] deriva dagli studi di Eckardt [40]. Lo stesso estese la teoria di Stodola, ritenendo che la velocità di rotazione del vortice  $\omega$  non fosse uguale a quella di rotazione della girante, ma dipendesse dal carico palare, ossia dalla differenza di velocità relativa tra la faccia in pressione ( $w_p$ ) e quella in depressione ( $w_s$ ) della pala, secondo la:

$$\omega = \frac{w_s - w_p}{2d} \quad (6.52)$$

Stante tale assunzione, dalla (6.43) deriva immediatamente che la velocità di slip si può esprimere come:

$$c_{slip} = \frac{w_s - w_p}{4} \quad (6.53)$$

in cui il carico palare andrebbe calcolato tra i punti A e C di fig. 6.19 che definiscono il diametro del vortice da cui si fa discendere lo slip. Supponendo piccola la differenza di velocità relativa tra i punti D ed A, è possibile assimilare il carico palare ricercato a quello lungo l'arco DC. Quest'ultimo, così come proposto in [41] e [42], è dato da:

$$\frac{w_s - w_p}{2d} = 2\omega \text{sen}\theta \cos\varphi - w \left( \frac{d\varphi}{dm} - \frac{\cos\varphi \text{sen}\varphi}{\rho b} \frac{d\rho b}{dm} \right) \quad (6.54)$$

in cui  $\theta$  è l'angolo compreso tra la linea media meridiana e l'asse della girante,  $\varphi$  è l'angolo di pala costruttivo e  $b$  è l'altezza meridiana della pala. Combinando la (6.54) con la (6.53) si perviene alla seguente espressione per la velocità di slip  $c_{slip}$ :

$$c_{slip} = F \left\{ \frac{\omega s_2 \cos\varphi_{2c} \text{sen}\theta_2}{2} + \frac{w_2 s_2}{4} \left( \frac{d\varphi}{dm} \right)_2 - \frac{w_2 s_2 \text{sen}(2\varphi_{2c})}{8\rho_2 b_2} \left( \frac{d\rho b}{dm} \right)_2 \right\} \quad (6.55)$$

in cui  $F$  è un fattore di forma che lega il passo interpale  $s_2 = \pi D_2 / Z$  alla lunghezza dell'arco DC ( $\overline{DC} = F s_2$ ).  $F$  è definito come:

$$F = 1 - 2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{Z}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{Z} + \varphi_{2c}\right) \cos\varphi_{2c} \text{sen}\theta_2 - \frac{t_2}{s_2 \cos\varphi_{2c}} \quad (6.56)$$

in cui  $t_2$  è lo spessore della pala all'uscita.

Seguendo un approccio rigoroso, le grandezze che compaiono nella (6.55) e (6.56) andrebbero calcolate lungo l'arco DC. L'approssimazione che si introduce nel valutare tali grandezze all'uscita dalla girante non altera in maniera significativa i risultati forniti dalla correlazione [39] ed, inoltre, consente di conservare la semplicità e la praticità della formulazione.

Il primo termine della (6.55) è legato alla rotazione delle pale ed è di solito quello preponderante; viceversa, nel caso di una schiera di pale fisse (statore), per cui  $\omega = 0$ , il primo termine si annulla ed il secondo diventa dominante per la determinazione della deviazione del flusso.

Come evidenziato dalla (6.57), il fattore di slip è esprimibile come sovrapposizione di tre contributi: uno dovuto alla rotazione delle pale, uno alla loro "curvatura" ed uno alla variazione dell'area di passaggio:

$$\sigma = 1 - c_{sl} \left[ \frac{F \pi \cos \varphi_{2c} \operatorname{sen} \theta_2}{Z} - \frac{F s_2 \Phi_2}{4 \cos \varphi_{2c}} \left( \frac{d\varphi}{dm} \right)_2 + \frac{F \Phi_2 s_2 \operatorname{sen} \varphi_{2c}}{4 \rho_2 b_2} \left( \frac{d\rho b}{dm} \right)_2 \right] \quad (6.57)$$

⇕

$$\sigma = 1 - c_{sl} (\Delta\sigma_{radial} - \Delta\sigma_{turn} - \Delta\sigma_{passage}) \quad (6.58)$$

Il parametro  $c_{sl}$  è una costante di taratura variabile con la velocità periferica secondo la:

$$c_{sl} = c'_{sl} + c_{sl,u} (u_2 - u_{2,rif}) / 1000 \quad (6.59)$$

in cui  $u_{2,rif}$  è una velocità periferica di riferimento posta pari a 200000 giri al minuto.

Grazie alla dipendenza funzionale del primo termine dall'angolo  $\theta_2$ , il modello può essere applicato anche a giranti a flusso misto e non solo a quelle perfettamente radiali come nel caso di tutte le altre correlazioni sin qui introdotte. Il termine  $\Delta\sigma_{radial}$ , come già accennato, tiene conto dell'azione della forza di Coriolis che, come visto nel capitolo 3, è diretta perpendicolarmente all'asse del canale e quindi agisce proprio nella direzione del carico palare per giranti radiali o a flusso misto. In tali casi,  $\Delta\sigma_{radial}$  è solitamente il termine dominante e, per questo motivo, molti modelli tengono conto esclusivamente dell'effetto legato alla rotazione delle pale. Ad esempio, il modello di Stodola coincide con il modello appena descritto [39] nel caso di giranti radiali ( $\theta_2 = 0^\circ$ ) caratterizzate da un fattore di forma unitario.

Per giranti assiali, invece, le forze di Coriolis non contribuiscono al carico palare essendo la loro direzione del tipo hub-to-shroud; pertanto, diventa preponderante il termine  $\Delta\sigma_{turn}$ . Quest'ultimo tiene conto del carico palare provocato dalla curvatura della traiettoria della particella fluida indotta dalla conformazione delle pale. Il parametro geometrico più rilevante per la modellazione di tale

fenomeno è la velocità di variazione dell'angolo costruttivo in funzione dell'ascissa curvilinea meridiana  $d\phi/dm$ . Molti modelli, come già sottolineato, sono ricavati per pale a spirale logaritmica per le quali  $d\phi/dm = 0$ . Probabilmente è questa la ragione storica per cui l'ulteriore termine di carico dovuto alla "curvatura" delle pale spesso non è preso in considerazione. Il termine  $\Delta\sigma_{turn}$ , come  $\Delta\sigma_{passage}$ , introduce nel modello una caratteristica non condivisa con tutti quelli illustrati precedentemente ossia la dipendenza dalle condizioni di flusso che è stata, d'altro canto, più volte messa in luce da indagini sperimentali.

Il termine  $\Delta\sigma_{passage}$  tiene conto dell'accelerazione o decelerazione del fluido all'uscita della girante associate alla variazione dell'area di passaggio. Ad esempio, se l'area aumenta si ha un incremento del carico che si traduce in una diminuzione del fattore di slip. In genere, tale termine è molto piccolo rispetto agli altri e, quindi, è spesso trascurato.

Nel modello proposto, una volta calcolato il coefficiente di slip tramite la (6.57) è immediato valutare la velocità di slip:

$$c_{slip} = u_2(1 - \sigma) \quad (6.60)$$

e, quindi, la riduzione del lavoro trasferito al fluido:

$$\Delta L_{sl} = u_2 c_{slip} \quad (6.61)$$

Ciò comporta una diminuzione della temperatura e della pressione totale all'uscita della girante espresse da:

$$T_{2,sl}^0 = T_{2,inf}^0 - \frac{\Delta L_{sl}}{c_p} \quad (6.62)$$

$$P_{2,sl}^0 = P_{2,inf}^0 \left( \frac{T_{2,sl}^0}{T_{2,inf}^0} \right) \quad (6.63)$$

Con i pedici *sl* e *inf* si indicano, rispettivamente, le grandezze valutate tenendo in conto o meno il fenomeno dello slip. In altri termini, con *inf* ci si riferisce alle proprietà del fluido all'uscita della girante nell'ipotesi che il fenomeno dello slip non si realizzi e che, quindi, il fluido sia guidato perfettamente dalle pale, mentre con *sl* si introduce il predetto fenomeno assumendo l'ipotesi semplificativa che i suoi effetti si manifestino solo a cavallo della giunzione tra girante e diffusore

Le proprietà statiche del fluido, una volta introdotti gli effetti dello slip, sono calcolate mediante un ciclo iterativo in cui sono assegnate le proprietà totali  $T_{2,sl}^0$  e  $p_{2,sl}^0$ , la componente periferica della velocità  $c_{2u,sl}$  oltre che la portata massica.

### 6.10 Perdite per leakage, per blade loading e Mach supercritico per flusso diretto nel compressore

Le perdite per leakage sono dovute al trafileamento di fluido attraverso il gioco tra cassa e girante in direzione periferica dovuto al gradiente di pressione vigente tra il lato in pressione e quello in depressione della pala  $\Delta p_{lk}$ . Quest'ultimo determina un flusso caratterizzato da una velocità  $u_{lk}$  data da:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{b} = \frac{(r_{1s} - r_{1h}) + b_2}{2} \\ \bar{r} = \frac{r_{1m} + r_2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta p_{lk} = \frac{\dot{m}(r_2 c_{2u} - r_{1m} c_{1u})}{ZrbL_{medmer}} \Rightarrow u_{lk} = 0,816 \sqrt{\frac{2\Delta p_{lk}}{\rho_2}} \quad (6.64)$$

da cui si ottiene la portata  $\dot{m}_{lk} = \rho_2 Zh_{gap} L_{medmer}$  che non partecipa allo scambio di lavoro con la girante.  $L_{medmer}$  rappresenta la lunghezza meridiana della linea media del condotto rotorico. Il numero di Mach connesso alle perdite per leakage, in analogia a quanto visto con altre le perdite precedentemente illustrate, è dato da:

$$M_{lk} = c_{lk} \frac{\sqrt{\frac{2\Delta p_{lk}}{\rho_2} \frac{\dot{m}_{lk}}{\dot{m}}}}{\sqrt{\gamma RT_{2,sl}^0}} \quad (6.65)$$

Le perdite per blade loading nascono come conseguenza di moti secondari provocati dall'azione della forza di Coriolis e dalla curvatura della traiettoria percorsa dalla particella fluida nell'attraversamento del vano interpalare indotta dalla conformazione di quest'ultimo. Tali moti si traducono in vortici che deviano il campo di moto dalla configurazione che gli sarebbe imposta dalla geometria delle pale determinando una fenomenologia descrivibile compiutamente solo attraverso la risoluzione delle equazioni del moto in tre dimensioni. Onde conservare la semplicità del modello, tali perdite sono introdotte secondo la seguente formulazione:

$$BS = \frac{ZL_{med}}{2\pi r_2} \quad (6.66)$$

$$\Delta w = \frac{2c_{2u}}{BS} \quad (6.67)$$

$$M_{bl} = c_{bl} \frac{\Delta w / 2\sqrt{6}}{\sqrt{\gamma RT_{2,sl}^0}} \quad (6.68)$$

$BS$  è definita "blade solidity" e dipende, oltre che dal numero di pale  $Z$  e dal raggio all'uscita della girante  $r_2$ , anche dalla lunghezza della linea media  $L_{med}$  (questa volta, si tratta della linea media tridimensionale).  $\Delta w$ , come già accennato, misura il carico palare ossia la differenza di velocità relativa tra l'intradosso e l'estradosso della pala.

Le perdite derivanti dall'insorgere di onde d'urto nel vano interpalare sono valutate tramite:

$$w_{max} = \frac{w_1 + w_2 + \Delta w}{2} \quad (6.69)$$

$$w_{cr} = \sqrt{kRT_{medcanale}} \quad (6.70)$$

$$M_{w1cr} = M_{w1} \left( \frac{w_{cr}}{w_{\max}} \right) \quad (6.71)$$

$$M_{scr} = c_{scr} \frac{M_{w1} - M_{w1cr}}{\sqrt{.4}} \frac{w_{\max}}{\sqrt{\gamma R T_{2,sl}^0}} \quad (6.72)$$

in cui  $w_{\max}$  rappresenta la massima velocità relativa raggiunta dal fluido nell'attraversare il vano interpolare e  $w_{cr}$  è la velocità relativa critica ossia quella che si raggiunge in condizioni soniche in corrispondenza della temperatura media regnante nel condotto rotorico  $T_{medcanale}$ . Tale perdita è proporzionale alla differenza tra il Mach relativo all'ingresso della girante  $M_{w1}$  e quello che si realizza in condizioni critiche  $M_{w1cr}$  ossia quello per cui nasce un'onda d'urto all'interno del condotto rotorico. Qualora tale differenza sia positiva, allora il numero di Mach all'ingresso della girante si definisce supercritico, diversamente tale perdita si assume nulla.

Le correlazioni che descrivono le perdite sopraelencate sono desunte da [43-48]. La caduta di pressione totale che si realizza per effetto di tali perdite è data da:

$$p_2^0 = p_{2,sl}^0 \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} (M_{bl}^2 + M_{lk}^2 + M_{scr}^2) \frac{p_{w2}^0}{p_{w1}^0} \frac{p_{w1}^0 - p_1}{\rho_1 w_1^2 / 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.73)$$

Valutata la pressione totale dalla (6.73), tramite un ciclo iterativo, si ricalcolano i valori delle grandezze nella sezione di uscita della girante mantenendo costante la componente periferica della velocità assoluta, oltre che la temperatura totale; tale ultima assunzione garantisce che, nella variazione di pressione totale introdotta dalle perdite appena elencate, si conservi il lavoro scambiato tra fluido e girante. E' il caso di puntualizzare che le perdite sopraelencate si realizzano nell'attraversamento della girante da parte del fluido, ma, onde conservare la semplicità del modello e trattandosi di fenomeni descrivibili compiutamente esclusivamente mediante un approccio tridimensionale, vengono tenute in conto solo nella risoluzione della giunzione tra girante e diffusore.

### 6.11 Perdite per leakage e blade loading per flusso diretto nella turbina

Analogamente a quanto visto per il compressore, tali perdite secondarie, pur realizzandosi all'interno della girante, nel modello vengono supposte concentrate nella giunzione tra la girante stessa ed il condotto di mandata (giunzione 4 in fig. 6.3 e 6.4). In merito al blade loading, approccio seguito è simile a quello descritto per il compressore. In particolare, si è adoperata la formulazione proposta da Rodgers [49] che, espressa in termini di numero di Mach, diventa:

$$M_{bl} = c_{bl} \frac{\sqrt{2}}{\pi BS} \frac{c_{3u}}{\sqrt{\gamma RT_{w4}^0}} \quad (6.74)$$

Dove ancora una volta  $BS$  rappresenta la "blade solidity" così come definita nel paragrafo precedente. Le perdite per leakage sono calcolate prendendo spunto dal modello proposto in [50]. Quest'ultimo assume che il gioco tra cassa e girante venga schematizzato come un orifizio nel quale il fluido si muove in direzione periferica con una velocità variabile linearmente tra il valore massimo per le particelle aderenti alla pala (che, quindi, hanno una velocità proprio pari a quella di trascinamento della stessa) ed il valore nullo che si realizza per le particelle ferme e solidali alla cassa. Sulla base di tale ipotesi semplificativa, la portata massica  $d\dot{m}_{lk}$  effluente nel tratto di lunghezza infinitesima  $dx$  del gioco di altezza  $h_{gap}$  è dato da:

$$d\dot{m}_{lk} = c_{lk} \frac{1}{2} \rho h_{gap} u dx Z \quad (6.75)$$

che integrata numericamente su tutta la lunghezza di shroud fornisce una stima della portata di leakage che non contribuisce allo scambio energetico tra girante e fluido. Il Mach connesso a tale perdita è dato da:

$$M_{lk} = \frac{u_3 \sqrt{\frac{\dot{m}_{lk}}{\dot{m}}}}{\sqrt{\gamma RT_{w4}^0}} \quad (6.76)$$

La riduzione di pressione totale relativa connessa alle perdite per blade loading e leakage è data da:

$$P_{w4}^0 = P_{w4}^0 \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2} (M_{bl}^2 + M_{lk}^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.77)$$

## 6.12 Calcolo della portata di riflusso nel compressore

Il riflusso è un fenomeno dissipativo che si verifica nel gioco tra cassa e girante all'interno del compressore; consiste nel fatto che un'aliquota di portata risale il condotto rotorico ritrovandosi ad essere reimpressa all'aspirazione della girante pur avendo già subito una prima energizzazione. Tale fenomeno è provocato dal gradiente di pressione vigente tra la mandata e l'aspirazione della girante ed è una delle cause del decadimento dell'efficienza della turbomacchina, soprattutto per basse portate. Più precisamente, il riflusso incide sull'efficienza volumetrica e, quindi, su quella globale del compressore oltre ad alterare le condizioni termofluidodinamiche all'aspirazione della girante.

Il riflusso è assimilato ad un moto attraverso un condotto a sezione costante la cui area è individuata dall'altezza del gioco tra cassa e girante  $h_{gap}$  e dal diametro di shroud e la cui lunghezza corrisponde a quella del profilo di shroud nel piano meridiano. Si assume che l'entità della portata di riflusso dipenda dalle proprietà del flusso in uscita e in ingresso dalla ruota. Più precisamente, si ipotizza che tale flusso sia riconducibile a quello in un condotto a monte del quale vigono le condizioni termofluidodinamiche all'uscita della girante (sezione 2 di fig. 6.2), mentre quelle a valle sono le condizioni nella sezione  $0ex$  di fig. 6.2. Tale sezione, pur non rappresentando esattamente le condizioni all'ingresso della girante, ne costituisce una più che soddisfacente approssimazione essendo il condotto F1 (fig. 6.1) solo una minima frazione dell'intero condotto di aspirazione (F0+F1). La scelta di schematizzare la ricongiunzione del riflusso con il flusso principale in una sezione non perfettamente coincidente con quella di ingresso girante è dettata da problemi di carattere implementativo. Ciò nonostante, l'approssimazione che s'introduce nel

modello nell'effettuare tale scelta risulta di modesta entità alla luce del fatto che le proprietà termo fluidodinamiche non possono modificarsi in maniera rilevante nel passare tra la sezione  $0ex$  e  $1ex$  (fig. 6.1) essendo il condotto F1 a sezione costante e breve rispetto all'intero condotto di aspirazione F0+F1.

Nell'ipotesi che il flusso sia stazionario, unidimensionale, adiabatico ed inviscido e che il gas sia a comportamento piuccheperfetto la portata di riflusso  $\dot{m}_{rif} = \rho v_{rif} \Omega_{gap}$  è data da:

$$\dot{m}_{rif} = c_d p_2^0 \Omega_{gap} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_2^0} \left[ \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (6.78)$$

in cui  $c_d$  è un coefficiente di efflusso inserito per tener conto delle perdite che si realizzano nell'attraversamento della girante. Si definisce fattore di efflusso:

$$\psi = \frac{\dot{m}_2^0}{p_2^0 \Omega_{gap}} = c_d \sqrt{\frac{2k^2}{k-1} \left[ \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (6.79)$$

Derivando la (6.79) rispetto al rapporto  $p_{0ex} / p_2^0$  ed uguagliando la derivata a zero, si trova il valore del rapporto tra le pressioni a monte ed a valle del condotto

$\left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^* = \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}}$  per cui si realizza il massimo della funzione  $\psi^*$  cui corrisponde la portata di bloccaggio  $\dot{m}^*$ .

$$\psi^* = c_d k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \Leftrightarrow \dot{m}^* = c_d p_2^0 \Omega_{gap} \sqrt{\frac{1}{RT_2^0} k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}} \quad (6.80)$$

In alternativa all'approccio appena illustrato, è possibile modellare il condotto nel quale si suppone transitare la portata di riflusso come un sistema rotante [16]. In tal caso, si deve tener conto anche della variazione di energia cinetica che si associa al

passaggio tra ragioni caratterizzate da velocità di trascinamento differenti (differenza di velocità periferica tra ingresso ed uscita girante). Sulla base di tali considerazioni, l'espressione della portata effluente nel condotto rotante è data da:

$$\dot{m}_{rif} = c_d p_2^0 \Omega_{gap} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_2^0} \left[ \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] - \frac{\omega^2}{4T_2^0} \left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^{\frac{2}{k}} (D_2^2 - D_1^2)} \quad (6.81)$$

Il rapporto critico tra le pressioni in tal caso è:

$$\left( \frac{p_{0ex}}{p_2^0} \right)^* = \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 - \frac{(k-1)\omega^2}{8kRT_2^0} (D_2^2 - D_1^2) \right) \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.82)$$

### 6.13 Calcolo della portata di trafilamento nella turbina

Anche nella turbina si verifica un trafilamento di fluido nel gioco tra cassa e girante cui si associa una degradazione energetica; in tal caso, infatti, il fluido espande senza cedere lavoro alle pale della girante. L'approccio seguito è del tutto analogo a quello illustrato nel caso del compressore. Pertanto, il trafilamento è assimilato al flusso in un condotto fisso o rotante a sezione costante a monte del quale regnano le condizioni vigenti nella sezione che precede l'ingresso della girante (sezione 3 di figg. 6.3 e 6.4) ed a valle del quale si considera lo stato termofluidodinamico della sezione di uscita del condotto di mandata (sezione 5 in figg. 6.3 e 6.4). Le equazioni impiegate per la stima della portata sono ancora una volta le eq. (6.78) - (6.80), qualora si modelli il trafilamento attraverso un condotto fisso, o le (6.81) e (6.82), nel caso di condotto rotante; naturalmente, le equazioni vanno riscritte con riferimento alle condizioni del fluido vigenti nelle sezioni 3 e 5 di figg. 6.3 e 6.4.

### 6.14 Mixing con portata di riflusso o trafilamento

Nel modello del compressore, la presenza del riflusso comporta l'alterazione dei bilanci di massa ed energia nelle già citate sezioni  $0ex$  e 2 di fig. 6.2 considerate per il calcolo della portata di riflusso. Analogamente, per il modello della turbina, le modifiche ai bilanci di massa ed energia si attua per le sezioni 3 e 5 fig. 6.3 e 6.4.

Con riferimento al modello del compressore, la portata massica entrante nel diffusore è valutata come differenza tra quella elaborata dalla girante e quella che partecipa al riflusso calcolata mediante le eq. (6.78) o (6.81). Quindi, per la sezione 2, viene alterato il solo bilancio di portata.

Come precedentemente accennato, si suppone che il riflusso si rimescoli con la portata in ingresso alla macchina nella sezione a cavallo tra i condotti F0 e F1 (fig. 6.1). E' il caso di ribadire che il condotto di aspirazione (F0+F1) è suddiviso in due parti con l'intento di realizzare una giunzione fittizia nella quale far avvenire il processo di mixing tra il flusso principale diretto verso la girante ed il riflusso. La posizione di tale giunzione lungo il condotto è ubicata in prossimità dell'ingresso della girante al fine di modellare il rimescolamento dei flussi il più possibile vicino alla zona in cui avviene nel funzionamento reale della macchina ossia immediatamente a monte d'ingresso della girante.

Nel modello proposto, il processo di mixing è supposto adiabatico, ma comporta alcune perdite in quanto la portata rifluita, partendo da una pressione totale  $p_2^0$  maggiore di quella statica  $p_{0ex}$  subisce una degradazione di energia. In altri termini, si assume che il mescolamento si svolga a pressione statica costante  $p_{0ex}$ .

Le proprietà del fluido all'ingresso del condotto F1 (ossia nella sezione  $1in$  di fig. 5.2) sono derivate dai bilanci di porta massica ed entalpica:

$$\dot{m}_{1in} = \dot{m}_{0ex} + \dot{m}_{rif} \quad (6.83)$$

$$\dot{m}_{1in} h_{1in}^0 = \dot{m}_{0ex} h_{0ex}^0 + \dot{m}_{rif} h_2^0 \quad (6.84)$$

nell'ipotesi che la portata rifluita sia caratterizzata dalla stessa entalpia totale del fluido all'uscita della girante  $h_2^0$ . Lo stato termodinamico nella sezione d'ingresso del condotto F1 risulta univocamente determinato dai due bilanci (6.83) e (6.84) una volta assegnata la pressione  $p_{lin} = p_{0ex}$ .

Poiché il processo di mixing dipende dalle condizioni a valle della girante e l'entità della portata ricircolata è determinata dalle condizioni a monte e a valle della stessa è necessario introdurre nell'algoritmo un ciclo iterativo che ricalcoli il moto all'interno della girante fino al raggiungimento della convergenza sul valore della portata di riflusso.

In merito al trafilemento di fluido nella turbina, l'approccio seguito è esattamente lo stesso di quello appena descritto per il compressore, salvo ritenere che il mixing (cui si associa l'alterazione dei bilanci di portata ed entalpia) si realizzi nella sezione di uscita del condotto di mandata (sezione 5 in figg. 6.3 e 6.4) e che la portata di trafilemento si separi da quella principale nella sezione di ingresso della girante (sezione 3 in figg. 6.3 e 6.4).

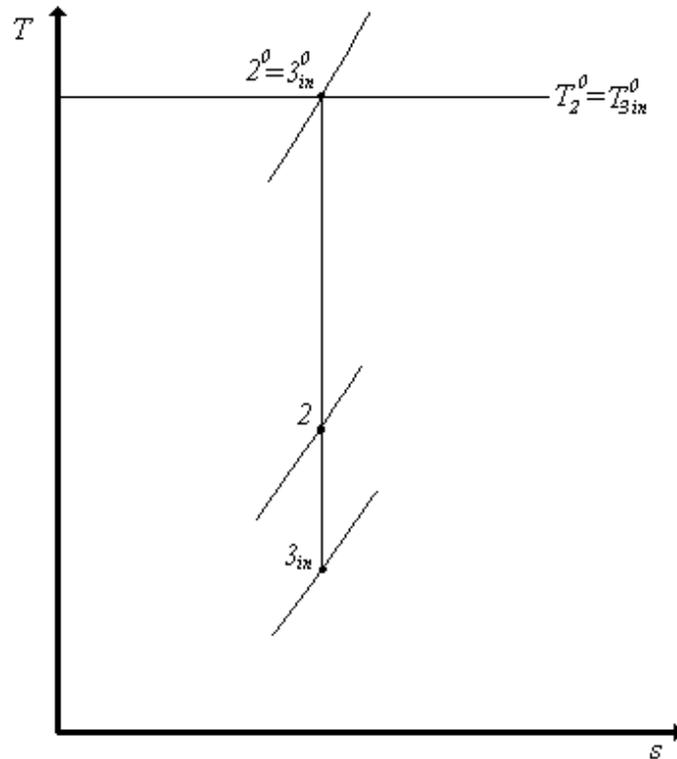
### 6.15 Giunzione tra girante e diffusore nel compressore

Nel funzionamento reale del compressore, il passaggio tra girante e diffusore è caratterizzato da diversi fenomeni. Come indicato dalle misure sperimentali sul flusso all'interno della girante del compressore, realizzate mediante velocimetria laser da Eckardt [51], poco dopo l'inizio del tratto radiale, nell'angolo formato dalla faccia in depressione delle pale con la superficie della cassa, le velocità relative misurate cominciano ad essere inferiori a quelle che si rilevano nel resto della sezione e presentano forti fluttuazioni (fino al 30%) così da poter indurre la separazione del flusso dalle pareti. Procedendo verso la sezione di uscita, la zona interessata dal flusso più lento occupa una porzione sempre più ampia della sezione di passaggio e la sua velocità diviene sempre più bassa in confronto con quella delle altre zone della stessa sezione. La zona in cui la pressione di ristagno relativa nella sezione di uscita in condizioni di progetto raggiunge valori inferiori al 90% di quella che si avrebbe per trasformazione isoentropica è abbastanza limitata, e questo suggerisce che gli

effetti della separazione sulle perdite energetiche possano ritenersi trascurabili; all'aumentare della portata, però, la zona a bassa pressione di ristagno si amplia progressivamente finché a portate prossime a quella di "choking" viene ad occupare larga parte della sezione di passaggio. Gli effetti della separazione del flusso sul rendimento delle giranti sono, contrariamente a quel che potrebbe apparire, tutt'altro che drammatici; gli effetti negativi di questo fenomeno, viceversa, diventano sensibili nel diffusore dove si generano le così dette perdite di mixing.

La causa della separazione del flusso è da ricercarsi nella "storia" del fluido che percorre la zona interessata dal fenomeno tra il bordo di ingresso della pala ed il punto di inizio del distacco. La forma del condotto (curvato sia nel piano meridiano che su una vista normale all'asse) è tale da dare luogo, tra il bordo di ingresso ed il raccordo al tratto radiale, ad una forte accelerazione della corrente, seguita da una rapida decelerazione contro un gradiente avverso di pressione che, nel tratto radiale, diviene consistente, e che provoca il distacco dello strato limite. È abbastanza intuitivo immaginare il fatto che la separazione massiva di una parte della corrente può essere limitata con un disegno del canale meridiano e dello scheletro delle pale tali da limitare al massimo l'accelerazione e la successiva decelerazione della corrente nella zona "pericolosa"; per questo motivo risulta preferibile disegnare giranti con un notevole sviluppo assiale, che consentano grandi raggi di curvatura del canale meridiano, ed adottare pale rivolte all'indietro che, dovendo deflettere la corrente meno di quelle radiali o rivolte in avanti, hanno curvature inferiori. Le prove fatte da Krain [52], con tecnica identica a quella di Eckardt, su una girante progettata con criteri sopra descritti mostrano profili delle velocità solo "disuniformi" sulle varie sezioni del canale interpalare, e con variazioni di velocità e pressione totale relativa abbastanza limitate da rendere ingiustificata l'ipotesi di una vera e propria separazione del flusso. Nel caso delle giranti in esame, essendo tutte dotate di pale rivolte all'indietro e di estensione assiale abbastanza sviluppata, si ipotizza che la non uniformità del flusso all'uscita della girante sia minima e si sceglie dunque di non introdurre la presenza di queste perdite che restano però delle possibili cause di notevole diminuzione delle prestazioni soprattutto nelle zone vicine al "choking". Il processo d'ingresso nel diffusore è, pertanto, modellato imponendo la costanza della temperatura e della pressione totale e della componente periferica della velocità

assoluta cui si associa una repentina variazione di sezione dovuta all'assenza dell'ingombro delle pale.



**Figura 6. 20 - Trasformazione uscita girante / ingresso diffusore– piano T- s**

Per individuare il punto  $3_{in}$ , che descrive lo stato termodinamico all'ingresso del diffusore, è stato implementato nel codice un ciclo iterativo in cui s'impone il rispetto dei bilanci di portata, entalpia e pressione totale e la conservazione della componente periferica della velocità.

### 6.16 Giunzione tra diffusore e voluta del compressore per flusso diretto

L'organo preposto alla raccolta del fluido uscente dal diffusore ed al suo invio ad un condotto collegato col dispositivo di mandata è detto "chiocciola" o "voluta"; in tale organo si verifica un certo recupero di energia cinetica in pressione, che può essere completato in un vero e proprio diffusore (conico o piano) posto immediatamente a valle di essa e che costituisce il tronchetto di mandata. Il ruolo

della chiocciola e le perdite ad essa imputabili sono molto importanti in quanto questa può provocare grosse disuniformità del flusso in tutti gli organi che la precedono introducendo delle perdite per il mescolamento di correnti a diversa velocità e pressione e, quindi, bassi rendimenti della macchina; inoltre, la disuniformità della pressione statica alla periferia della girante (collegata alla disuniformità della portata) può provocare elevate sollecitazioni a momento flettente dell'albero, creando così anche problemi di resistenza meccanica. Anche nel caso in cui la voluta riesca a convogliare alla mandata il fluido senza disturbare il flusso a monte, si innescano perdite di altro tipo oltre a quelle per attrito.

Può considerarsi perdita nella voluta, infatti, l'energia cinetica associata alla componente meridiana della velocità in ingresso; tale perdita è conseguente al fatto che, su una sezione realizzata con un piano meridiano, la voluta presenta, in corrispondenza o in prossimità dell'ingresso, un brusco allargamento, a valle del quale si può ritenere che non vi sia alcun recupero di pressione. Inoltre, soprattutto in condizioni di fuori progetto, bisogna considerare anche la perdita per incidenza con il naso della voluta. Esistono poi dei flussi secondari, detti di "cross-flow", generati dalla curvatura dell'asse circonferenziale della voluta. L'intensità di tali circolazioni e le perdite energetiche ad esse associate dipendono molto dalla conformazione geometrica e dal tipo di voluta. Esperienze fatte da Escher-Wyss, come mostrato in [22], rilevando al banco i diagrammi caratteristici di una stessa macchina, dotata di voluta simmetrica e poi asimmetrica, mostrano non trascurabili vantaggi nel rendimento e nell'ampiezza del campo di funzionamento con una voluta del secondo tipo.

Nel modello proposto si assume che l'energia cinetica associata alla componente radiale (o meridiana) della velocità  $c_{3rex}$  sia totalmente dissipata. In condizioni di progetto, l'andamento dell'area di passaggio della voluta è tale da non creare nessuna diffusione e, quindi, nessuna disuniformità di distribuzione della pressione lungo la periferia. Al contrario, per basse portate, l'area di passaggio della voluta è sovrabbondante e, quindi, si ha un processo di diffusione ovvero di recupero di pressione a scapito dell'energia cinetica associata alla componente periferica della velocità. Dunque, si assume che tale energia cinetica, in accordo con [53], sia parzialmente dissipata per portate inferiori a quelle di progetto simulando

quanto si verifica in un brusco allargamento di sezione. La componente radiale  $c_{3r}$  e quella periferica  $c_{3u}$  sono legate tramite l'angolo di flusso  $\alpha_3$ :

$$c_{3r} = c_{3u} \tan \alpha_3 \quad (6.85)$$

Sostituendo la (6.85) in un semplice bilancio di portata massica tra la sezione d'ingresso e quella d'uscita della voluta in cui si trascurano le variazioni di densità si ottiene:

$$\rho_3 c_{3r} \Omega_{4in} = \rho_4 c_4 \Omega_{4ex} \Leftrightarrow c_4 = c_{3u} \frac{\Omega_{4in} \tan \alpha_3}{\Omega_{4ex}} = c_{3u} \Psi \quad (6.86)$$

$$\Psi = \frac{\Omega_{4in} \tan \alpha_3}{\Omega_{4ex}} \quad (6.87)$$

La perdita viene considerata solo se l'angolo di flusso è inferiore a quello individuato dal rapporto tra le sezioni d'uscita e d'ingresso:

$$\tan \alpha_3 < \frac{\Omega_{4ex}}{\Omega_{4in}} = \tan \alpha_{3min} \quad (6.88)$$

ossia se  $\Psi < 1$ . Nella versione del codice utilizzata per valutare le prestazioni del compressore rhf3 (si veda la parte del capitolo 7 riguardante la validazione della procedura instazionaria), è stata introdotta la costante di taratura  $c_{incvol}$  che consente di modificare l'angolo flusso minimo al di sotto del quale si verificano le perdite per diffusione nella voluta. La definizione  $\Psi$ , in tal caso, diventa:

$$\Psi = c_{incvol} \frac{\Omega_{4in} \tan \alpha_3}{\Omega_{4ex}} \quad (6.89)$$

L'aliquota di energia cinetica tangenziale dissipata è esprimibile come:

$$\frac{c_{3u,d}^2}{2} = c_{vol} \frac{c_{3u}^2 - c_4^2}{2} = c_{vol} \frac{c_{3u}^2}{2} (1 - \Psi^2) \quad (6.90)$$

Conseguentemente la caduta di pressione totale all'ingresso della voluta è stimabile tramite il modello di perdita già impiegato nei casi precedentemente illustrati per cui:

$$M_{c3d} = \frac{\sqrt{c_{3u,d}^2 + c_{3rex}^2}}{\sqrt{kRT_{3ex}^0}}; \quad p_{4in}^0 = p_{3ex}^0 \left( 1 - \frac{k-1}{2} M_{c3d}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.91)$$

S'impongono le equazioni di bilancio della portata e dell'energia e la relazione di perdita di pressione totale (6.91) per calcolare le condizioni in ingresso alla voluta.

### 6.17 Moto nella voluta per flusso inverso nel compressore e diretto nella turbina

Il campo di moto all'interno della voluta non può essere propriamente descritto tramite le classiche equazioni monodimensionali del moto. Infatti, la particella fluida nell'attraversare la voluta descrive un'orbita non rettilinea a causa della geometria della stessa cui si associano sovrappressioni sul bordo esterno del condotto come conseguenza dell'azione della forza centrifuga. Inoltre, spostandosi in direzione periferica, si riduce continuamente la portata che attraversa la voluta in quanto una parte entra nella girante o nel distributore palettato, nel caso della turbina, o nel diffusore, nel caso del compressore.

Il primo problema può essere affrontato conservando l'approccio monodimensionale nella descrizione del moto, onde mantenere la semplicità del modello, ed introducendo, però, un'opportuna correzione al coefficiente d'attrito per tener conto delle perdite aggiuntive conseguenti alla curvatura del condotto; per ulteriori dettagli si veda il paragrafo 3.5.3 in relazione alla valutazione del coefficiente d'attrito per la girante della turbina.

Il secondo aspetto richiederebbe la modellazione di un moto dalle caratteristiche tridimensionali ed, per di più, a massa variabile. Nella procedura proposta, si suppone che l'intera portata attraversi il condotto che schematizza la voluta adottando un opportuno valore del diametro equivalente che tenga conto sia della riduzione della portata che della variazione del perimetro bagnato effettivo che si ha spostandosi in direzione periferica. Tale valore è ricavato nell'ipotesi che il diametro equivalente della stessa si riduca linearmente spostandosi in direzione periferica sino ad annullarsi all'altezza della lingua (fig. 6.21) e che anche la portata smaltita dalla stessa si riduca secondo la stessa legge. E' facile verificare che il diametro equivalente medio così calcolato è pari alla metà del diametro equivalente all'ingresso della voluta.

Resta da definire un angolo  $\alpha_3$  di riferimento per descrivere l'orientamento del flusso all'uscita della voluta. A tale fine, partendo dall'ipotesi di flusso inviscido, si ricorre alle equazioni di bilancio della portata e del momento angolare tra la sezione d'ingresso e quella d'uscita. Con riferimento alla fig. 6.21, relativa ancora una volta alla nomenclatura usata per il compressore, si ha:

$$c_4 r_4 = c_{3u} r_3 \quad (6.92)$$

$$\rho_4 c_4 \Omega_4 = \rho_3 c_{3r} \Omega_3 \quad (6.93)$$

in cui  $r_3$  e  $r_4$  sono, rispettivamente, il raggio interno della voluta e la distanza dall'asse di rotazione del baricentro della sezione d'ingresso. Dividendo membro a membro, si ricava:

$$\tan \alpha_3 = \frac{c_{3r}}{c_{3u}} = \frac{\rho_4}{\rho_3} \frac{\Omega_4}{\Omega_3} \frac{r_3}{r_4} \quad (6.94)$$

che, nel caso di moto a comportamento incomprimibile, mette in evidenza come l'angolo di flusso  $\alpha_3$  dipenda esclusivamente da fattori geometrici quali le sezioni di passaggio e i raggi caratteristici della voluta.

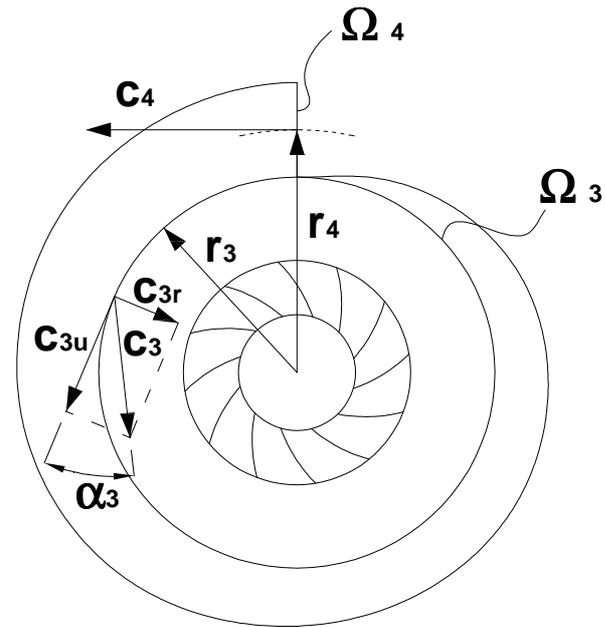


Figura 6. 21 – Modello flusso voluta – triangoli velocità ingresso / uscita voluta

# Taratura del modello del compressore ed analisi dei risultati

## 7.1 Introduzione

In questo capitolo è descritto il procedimento impiegato per tarare il modello del compressore. Grazie alla rapidità di esecuzione della versione stazionaria del modello, è stato possibile effettuare tale operazione mediante una procedura automatica volta a stabilire quale fosse il set di parametri calibrazione che comportasse la minimizzazione dello scostamento tra le prestazioni rilevate sperimentalmente e quelle desunte numericamente.

Successivamente, vengono illustrati alcuni dei campi di utilizzo della procedura stazionaria (infittimento delle mappe sperimentali, variazione delle condizioni all'aspirazione e del gas elaborato). In fine, sono presentate talune applicazioni della versione instazionaria del codice, la validazione della stessa e l'analisi numerica del fenomeno del pompaggio.

## 7.2 Taratura del modello

Le correlazioni di perdita e di slip introdotte nei paragrafi precedenti sono alcune di origine sperimentale altre derivano da trattazioni teoriche approssimate o da modelli fortemente semplificati volti a descrivere fenomeni complessi partendo da un numero limitato di ipotesi, talvolta poco appropriate. Il loro utilizzo come strumento di analisi può comportare scostamenti significativi rispetto alle evidenze

sperimentali soprattutto nei casi in cui le condizioni in cui sono applicate differiscono da quelle per cui sono state ricavate. Per far fronte a tale problematica si utilizzano dei parametri, detti coefficienti di taratura, che, modificati opportunamente rispetto ai valori di default, consentono di riprodurre più fedelmente i risultati sperimentali. I coefficienti di taratura delle correlazioni che corredano il presente modello sono riportati in tabella 7.1.

Coefficiente	Grandezza tarata
$f_{at}$	Coefficiente di attrito
$h_{cw}$	Coefficiente di scambio termico convettivo
$x_{hin}$	Temperatura di parete
$c_{in}$	Perdite di imbocco
$c_{rid}$	Perdite ogiva
$c_{inc}$	Perdite per incidenza
$c'_{sl}$	Coefficiente di slip
$c_{sl,u}$ (variabile con $n$ )	Coefficiente di slip
$c_{losslk}$	Perdita per leakage
$c_{bl}$	Perdita per carico delle pale
$c_{losssc}$	Perdite supercritiche
$c_{volcu}$	Perdite componente periferica nella voluta
$c_{volcr}$	Perdite componente radiale nella voluta

**Tabella 7. 1– Costanti taratura perdite**

La ricerca dei valori dei coefficienti di taratura, che permettono di ottenere la migliore corrispondenza con i dati sperimentali, è ottenuta in modo automatico tramite un processo di ottimizzazione nel quale, come già accennato nel capitolo sul modulo geometrico, sono considerate anche alcune grandezze geometriche la cui misura è affetta da maggiore incertezza. In particolare, le grandezze geometriche

oggetto di ottimizzazione sono riportate nella tabella 7.2 in cui si apprezzano anche gli intervalli di variazione ammissibile per ciascun parametro.

Grandezza	Intervallo di variazione consentito
$\varphi_{1h} \div \varphi_{1s}$	$\pm 6^\circ$
$\varphi_{2h} \div \varphi_{2s}$	$\pm 10^\circ$
$h_{gap}$	$\pm 0,2 \text{ mm}$
$s_p$	$\pm 0,2 \text{ mm}$
$b$	$\pm 0,2 \text{ mm}$

**Tabella 7. 2 – Costanti taratura geometria**

L'obiettivo del processo di ottimizzazione è quello di stabilire quale sia il set di parametri che minimizza lo scostamento tra le prestazioni rilevate sperimentalmente e quelle calcolate dalla procedura numerica. In particolare, la taratura è effettuata sulla base delle mappe prestazionali dei tre compressori introdotti nel capitolo 2 in cui sono riportati gli andamenti del rapporto di compressione  $\beta$  (total to total) e del rendimento adiabatico  $\eta$  in funzione della portata massica e della velocità di rotazione. Noti tali andamenti, è possibile ricavare anche la mappa prestazionale in termini di temperatura alla mandata del compressore  $T_2^0$  una volta assegnata la temperatura all'aspirazione dello stesso  $T_1^0$  tramite la:

$$T_2^0 = T_1^0 + \frac{T_1^0}{\eta} \left( \beta^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \quad (7.1)$$

Si delinea, pertanto, un problema multiobiettivo essendo tre i parametri prestazionali su cui minimizzare l'errore tra i valori calcolati e quelli derivati sperimentalmente. La valutazione di tale errore è effettuata confrontando per il generico punto  $i$  della mappa sperimentale, il rapporto di compressione, il rendimento e la temperatura di mandata con le stesse grandezze stimate dal modello in corrispondenza della stessa portata e velocità di rotazione. Tale procedimento è

poi iterato per tutti i punti della mappa sperimentale, pervenendo alle seguenti definizioni degli errori globali su  $\beta$ ,  $\eta$  e  $T_2^0$ :

$$\varepsilon_\beta = \sum_{i=1}^{N_{map}} \frac{|\beta_i^{map} - \beta_i^{calc}|}{\beta_i^{map}} \quad \varepsilon_\eta = \sum_{i=1}^{N_{map}} \frac{|\eta_i^{map} - \eta_i^{calc}|}{\eta_i^{map}} \quad \varepsilon_T = \sum_{i=1}^{N_{map}} \frac{|T_{2,i}^{0,map} - T_{2,i}^{0,calc}|}{T_{2,i}^{0,map}} \quad (7.2)$$

Trattandosi di un problema multiobiettivo, è possibile trovare un set di costanti di taratura che minimizzi ciascuno degli errori sopraelencati; naturalmente nulla assicura che lo stesso set di costanti minimizzi contemporaneamente l'errore su tutte le grandezze considerate. Al fine di trovare una soluzione "di compromesso" tra le infinite soluzioni "di ottimo", si riconduce l'ottimizzazione ad un problema monobiettivo grazie all'introduzione della funzione:

$$F_{obj}(x_1, x_2, \dots, x_{15}) = (1 + 2 \cdot \varepsilon_\beta)(1 + 0,5\varepsilon_\eta)(1 + \varepsilon_T) \quad (7.3)$$

che realizza una combinazione degli errori sul rapporto di compressione, sul rendimento e sulla temperatura alla mandata. Da notare come si sia scelto di conferire un maggior peso agli errori sul rendimento e, soprattutto, sul rapporto di compressione.

L'algoritmo impiegato nell'ottimizzazione è di tipo genetico; lo stesso è un metodo euristico di ricerca ed ottimizzazione, ispirato al principio della selezione naturale applicabile alla risoluzione di un'ampia varietà di problemi d'ottimizzazione non indicati per gli algoritmi classici, compresi quelli in cui la funzione obiettivo è discontinua, non derivabile, stocastica o fortemente non lineare.

In figura 7.1 è riportato lo schema logico che definisce il processo di ottimizzazione realizzato mediante il software ModeFrontier. Nella parte a sinistra sono specificate le variabili indipendenti del problema ossia le costanti di taratura. Ogni iterazione del processo di ottimizzazione si compone dei seguenti step:

1. Definizione di un set di costanti di taratura
2. Scrittura del file di input

3. Esecuzione della procedura stazionaria del compressore
4. Scrittura del file di output
5. Lettura degli errori definiti dalle (7.2)
6. Valutazione della funzione obiettivo

Tramite il modulo di DOE (Design Of Experiment) viene stabilito un primo gruppo di iterazioni da effettuare per esplorare l'andamento della funzione obiettivo. Successivamente, sulla base dei risultati preliminari trovati, l'ottimizzatore, secondo i criteri dettati dall'algoritmo genetico, definisce la strategia di minimizzazione della funzione obiettivo stabilendo di volta in volta un nuovo set di parametri di calibrazione da introdurre nel modello del compressore.

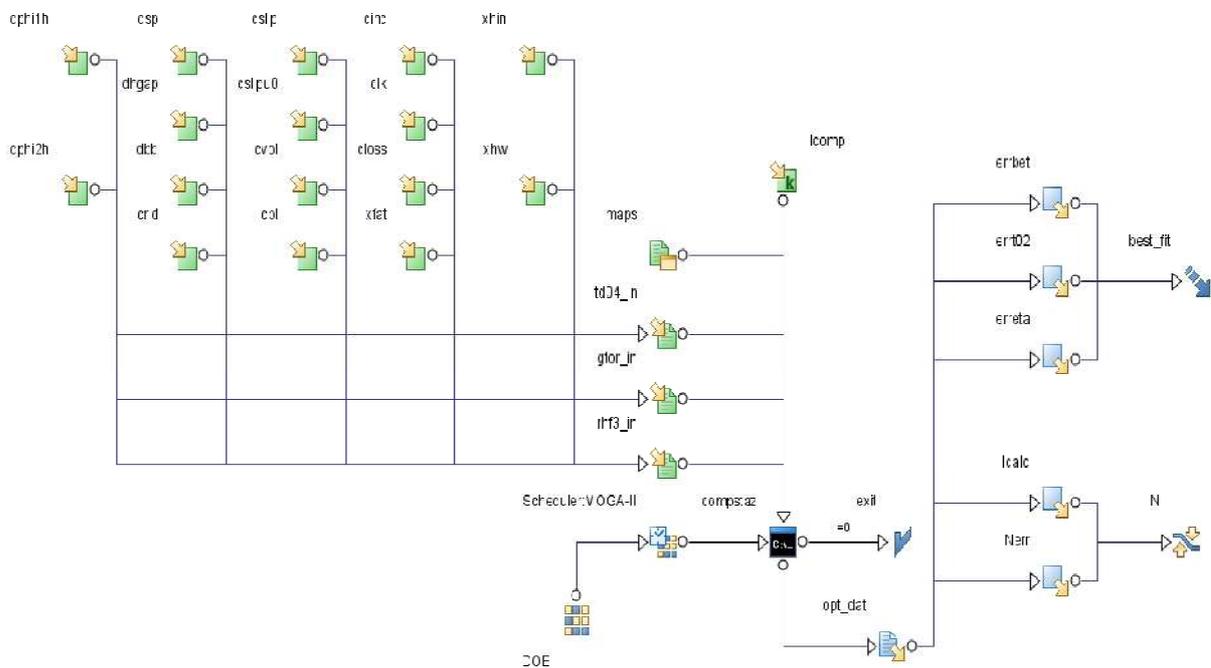
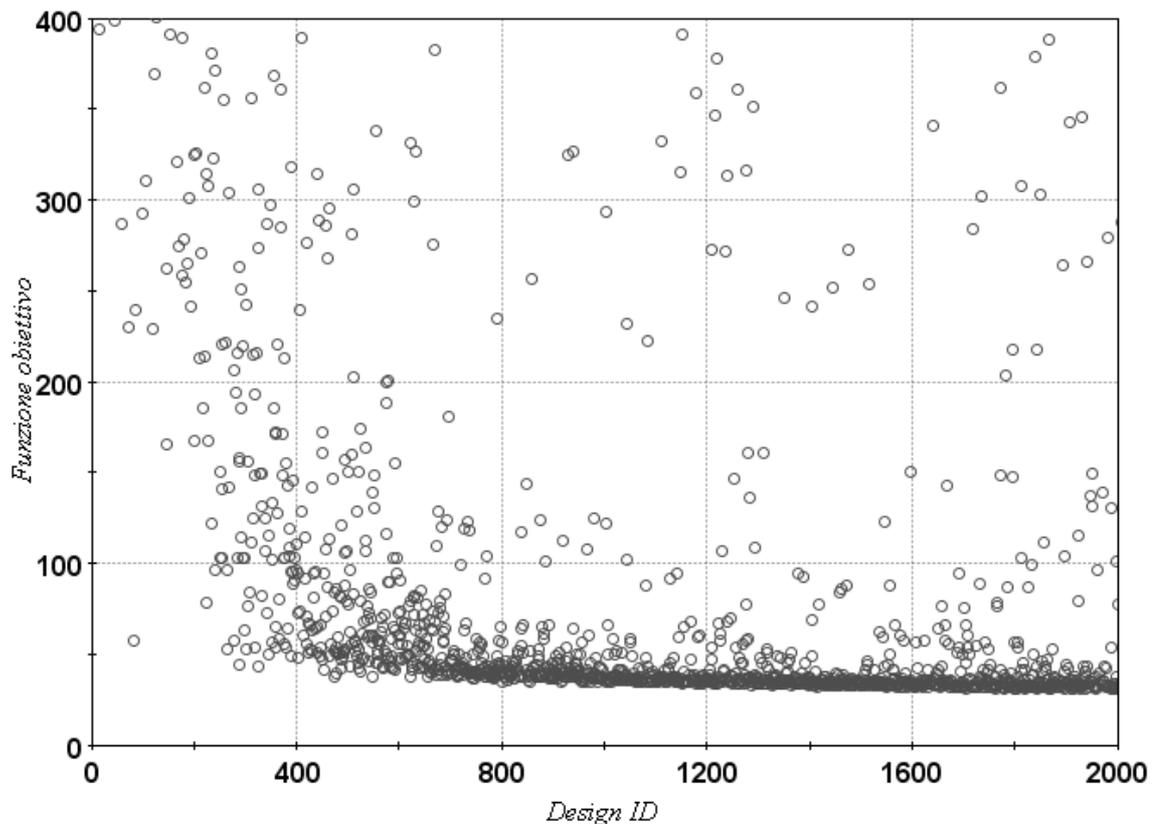


Figura 7. 1 – Schema ottimizzatore

Tale operazione viene ripetuta per ognuno dei tre compressori considerati (td04, rhf3, gtor).

Si ottiene, infine, una “history chart” relativa al valore della funzione obiettivo per tutti i casi considerati. Come si nota dalla figura 7.2, anche in prossimità della soluzione definitiva, che viene raggiunta dopo circa 2000 iterazioni, sono presenti un certo numero di fluttuazioni dovute, ad esempio, a mutazioni di esplorazione prodotte dall’algoritmo genetico.



**Figura 7. 2 – “History Chart” ottimizzazione**

La seguente tabella sintetizza i risultati del processo di ottimizzazione. I valori degli angoli di pala variano solo di qualche grado mentre gli altri dati geometrici di 0,1 mm. Questi valori rientrano comunque ampiamente all’interno dell’errore di misura.

	Valori di Default	Compressore		
		td04	rhf3	gtor
<b>Errori di misura</b>				
$d\varphi_1$	0	-0.8°	-5.2°	-2.80°
$d\varphi_2$	0	-3.0°	-9.4°	1.7°
$db$ (mm)	0	-0.060	-0.141	-0.061
$ds_p$ (mm)	0	-0.014	-0.025	-0.008
$dh_{gap}$ (mm)	0	-0.081	-0.144	-0.149
<b>Costanti di perdita</b>				
$c'_{sl} \ c_{sl,u}$	1.0	1.62 ; 2.40	1.76 ; 2.49	0.93 ; 0.52
$x_{fat}$	1	0.62	2.00	1.98
$x_{hw}$	1	2.0	1.046	0.222
$c_{rid}$	0.5	0.685	0.625	0.655
$c_{inc}$	1	1.06	0.65	0.19
$c_{vol}$	0.5	0.425	0.235	0.095
$c_{bl}$	1	0.01	0.54	1.90
$c_{lk}$	1	1.50	1.52	1.52
$c_{scr}$	1	0.675	0.91	1.13
<b>Risultati</b>				
$Err_{beta}$		3.37%	1.18%	2.36%
$Err_{eta}$		6.11%	2.48%	4.95%
$Err_{temp}$		1.06%	0.61%	1.18%
$F_{obj}$		84.29	15.25	61.91

Tabella 7.2 – Tabella riassuntiva risultati dell'ottimizzazione

Ad accezione dei parametri relativi al coefficiente di slip, i valori delle costanti ricavati dall'ottimizzazione non si discostano molto quelli di default. Inoltre, le differenze tra un compressore e l'altro in molti casi sono piuttosto ridotte. Ciò indica la capacità del modello di riuscire a descrivere il comportamento del compressore anche al variare della geometria.

---

Gli errori sul rapporto di compressione, sul rendimento e sulla temperatura sono sempre di pochi punti percentuali. I risultati numerici riportati nelle fig. 7.3 - 7.4 mostrano un eccellente accordo con i dati sperimentali per tutti e tre i compressori analizzati e per tutte e tre le grandezze di riferimento, ovvero per il rapporto di compressione, per la temperatura totale all'uscita e per il rendimento adiabatico. Tale accordo è piuttosto buono soprattutto alle velocità di rotazione basse e medie. Per quelle più elevate, invece, si nota uno scostamento più marcato probabilmente dovuto al fatto che, in tali casi, il flusso all'interno o all'imbocco della girante è prossimo alle condizioni soniche per cui alcuni dei modelli di perdita impiegati risultano inefficienti.

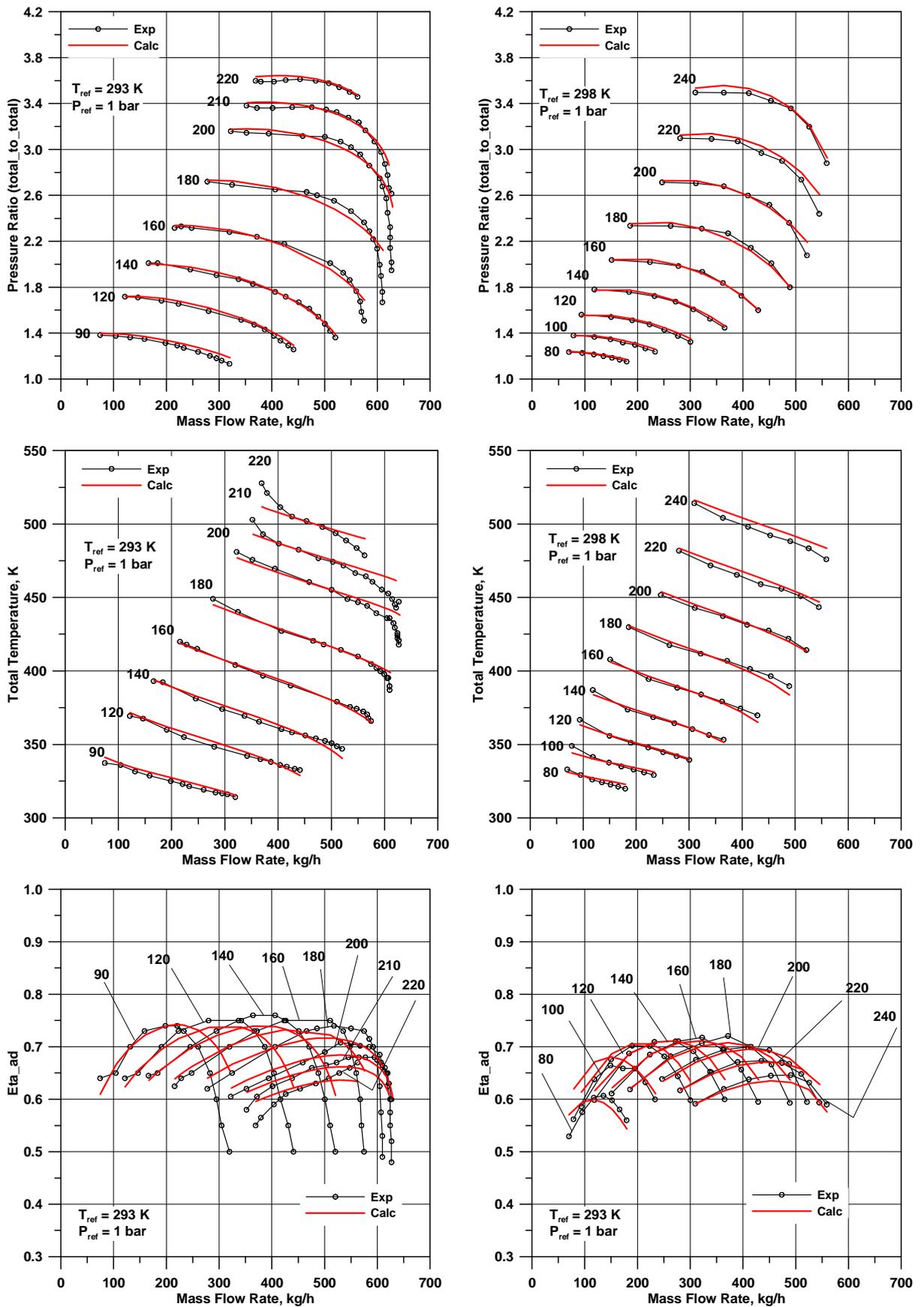


Figura 7.3 - Mappe prestazionali td04 e rhf3

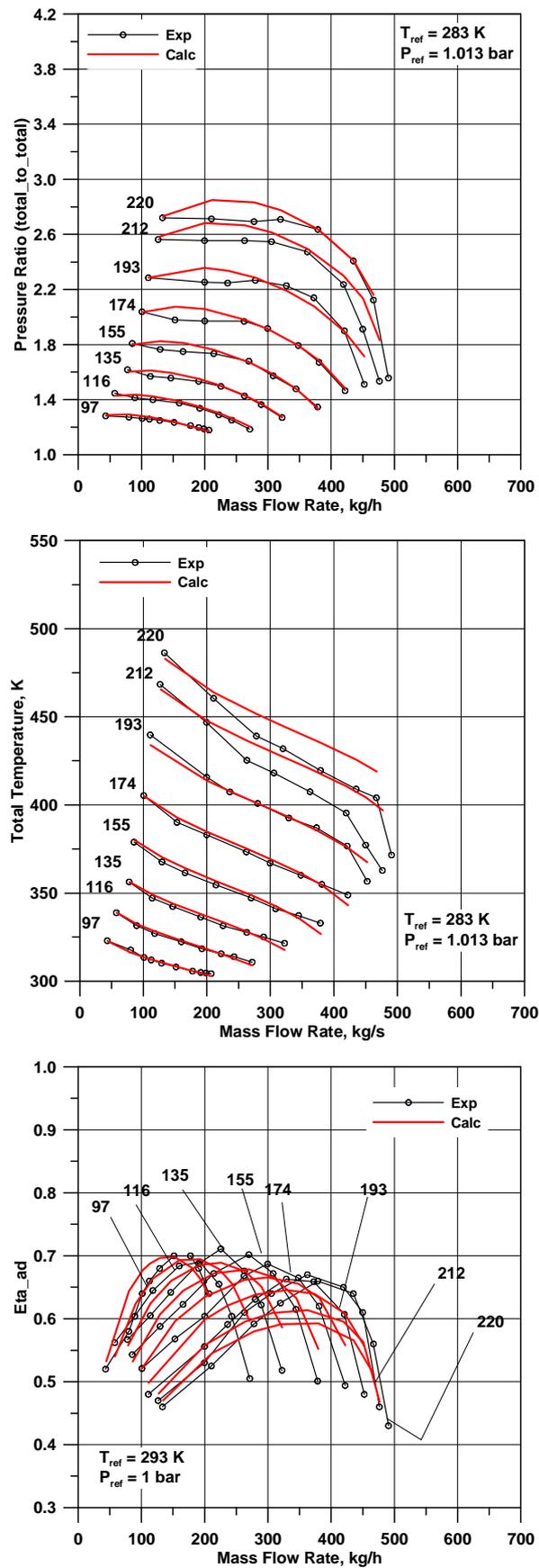


Figura 7.4 – Mappe prestazionali gtor

### 7.3 Applicazioni del modello stazionario del compressore

Dai risultati mostrati si può concludere che è stata ottenuta un'ottima riproduzione del funzionamento stazionario per i tre compressori nell'intero campo operativo. Quindi, una volta tarato, il modello può essere impiegato per avere una stima delle prestazioni del compressore in condizioni differenti da quelle contemplate nelle mappe fornite dal costruttore. Ad esempio, può essere applicato per ricavare le curve caratteristiche a velocità molto basse o intermedie fra quelle cui fanno riferimento le mappe come mostrato in figura 7.5.

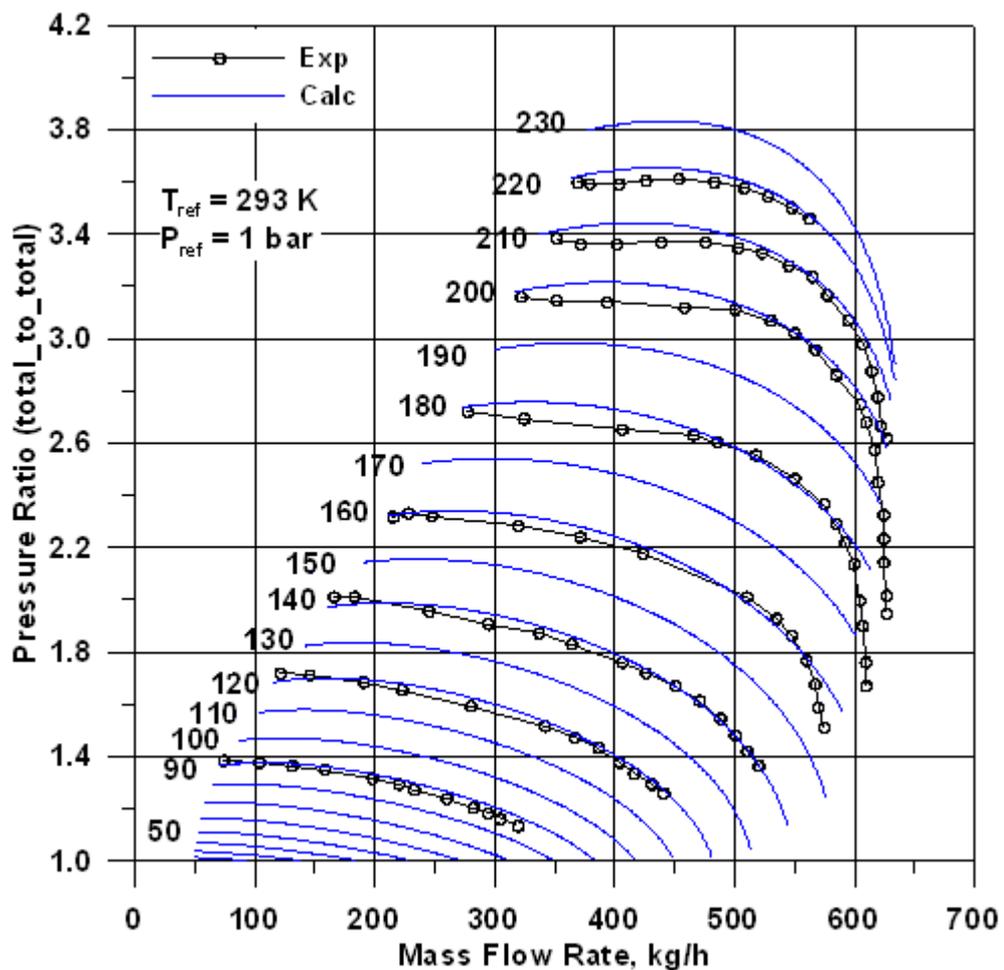


Figura 7.5 – Mappa compressore “infittita”

In questo modo, non risulta più necessario ricorrere a tecniche di estrapolazione di dati basate su metodologie che non presentano alcun riscontro fisico.

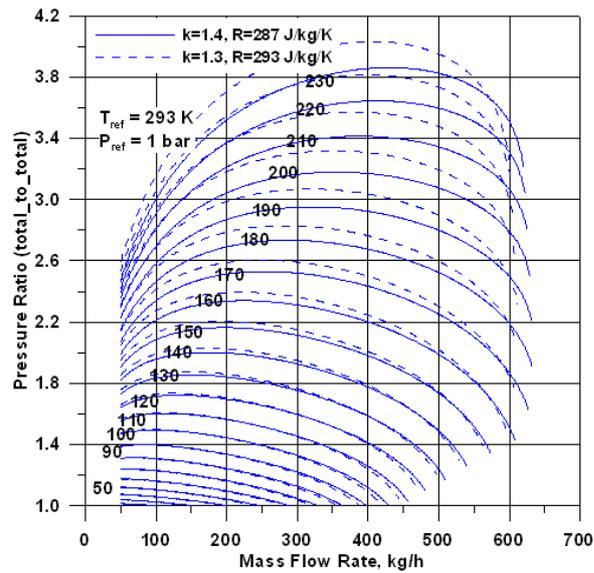
La procedura stazionaria può anche essere impiegata per valutare le prestazioni del compressore quando il fluido elaborato o le condizioni all'aspirazione non coincidono con quelle per cui è stata misurata la mappa sperimentale. Ad esempio, tale esigenza si manifesta qualora si vogliano stimare le prestazioni del compressore in un sistema di sovralimentazione a due stadi, dotato di long-route EGR (ricircolo dei gas di scarico a valle della turbina e del filtro antiparticolato); in questo caso, il compressore elabora una miscela di aria e gas combustibili (quindi, caratterizzati da un valore di  $k = c_p / c_v$  ed  $R$  differente rispetto all'aria) e, per quanto riguarda il secondo stadio, aspira gas per cui i valori di pressione e temperatura sono maggiori di quelli ambiente. Mentre quest'ultimo aspetto viene solitamente tenuto in conto correggendo la velocità di rotazione e la portata massica secondo quanto stabilito dalla teoria della similitudine, gli effetti dovuti alla differente composizione del fluido evolvente vengono solitamente trascurati. La procedura proposta consente di superare tale approssimazione in quanto è in grado di valutare le mappe prestazionali assegnando le proprietà del fluido aspirato in termini di rapporto tra i calori specifici  $k$  e costante del gas  $R$ .

In figura 7.6 è riportata la mappa del compressore in termini di grandezze corrette secondo l'approccio tradizionale:

$$\dot{m}_{corr} = \dot{m} \sqrt{T/T_{ref}} / p / p_{ref} \quad (7.4)$$

$$n_{corr} = n / \sqrt{T/T_{ref}} \quad (7.5)$$

La mappa a tratto continuo è calcolata nel caso in cui il fluido elaborato sia l'aria, mentre quella a tratto discontinuo si riferisce ad una miscela di gas combustibili ed aria. Com'è facilmente riscontrabile, si evidenziano differenze sostanziali tra le prestazioni della turbomacchina nei due casi considerati soprattutto per le velocità di rotazione più elevate.

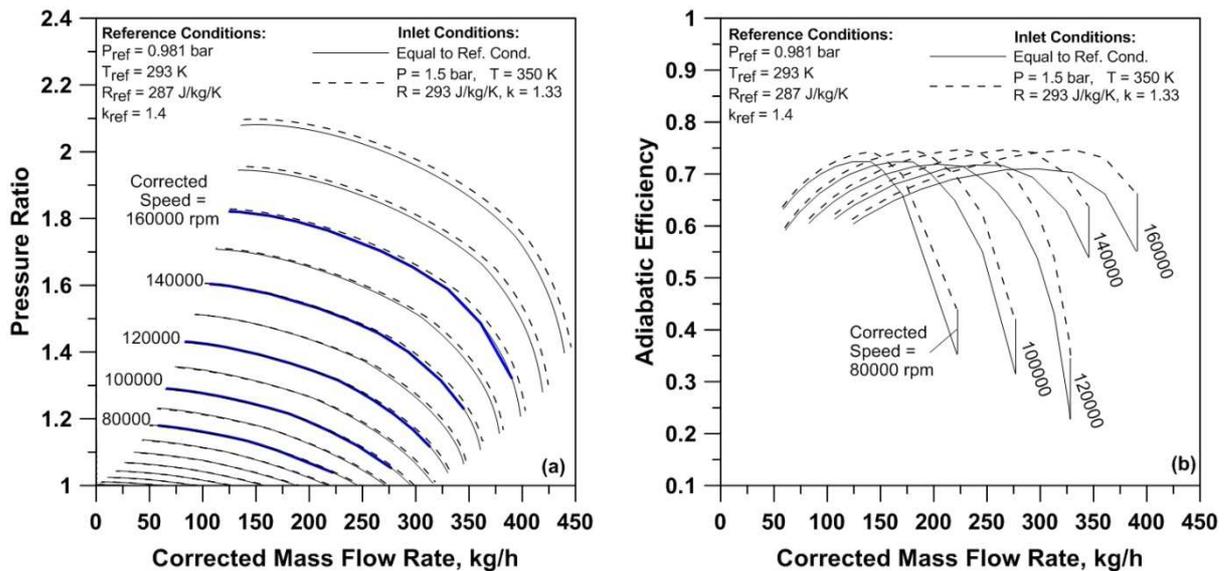


**Figura 7. 6 – Mappa compressore per fluido differente dall’aria – correzione standard di portata e velocità di rotazione**

Tale scostamento può essere opportunamente ridotto ricorrendo alle formule (7.6) e (7.7) di correzione dei parametri proposte in [54] in cui si tiene conto anche delle proprietà del fluido (figura 7.7). Anche in tal caso, le maggiori discordanze si osservano in corrispondenza delle velocità di rotazione più elevate.

$$\dot{m}_{corr} = \dot{m} \frac{\sqrt{T/T_{ref}}}{p/p_{ref}} \sqrt{\frac{R/R_{ref}}{k/k_{ref}}} \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{\left(\frac{k_{ref}+1}{2}\right)^{\frac{k_{ref}+1}{2(k_{ref}-1)}}} \quad (7.6)$$

$$n_{corr} = \frac{n}{\sqrt{T/T_{ref}}} \sqrt{\frac{(1+k)/(1+k_{ref})}{k/k_{ref} R/R_{ref}}} \quad (7.7)$$



**Figura 7.7– Mappa compressore per fluido differente dall’aria– correzione di portata e velocità di rotazione proposta in [54]**

L’ultima applicazione del modello stazionario qui proposta riguarda l’effetto che la deviazione del flusso all’ingresso del compressore ha sulle prestazioni della macchina. Infatti, a causa di vincoli di layout, la conformazione del sistema di aspirazione a monte del compressore può distorcere il flusso ed, in particolare, dotarlo di una componente periferica della velocità non nulla generando il così detto prevortice. Studi sperimentali su tale fenomeno hanno dimostrato che l’entità del prevortice e, quindi, dell’angolo di deviazione del flusso  $\alpha_1$  possono essere ricavati tramite uno “swirl meter” [55, 56]. Tali informazioni possono poi essere direttamente introdotte nel modello per valutare le prestazioni del compressore corrispondenti alle nuove condizioni all’aspirazione.

Un prevortice negativo (nella convenzione utilizzata, il prevortice è tale se la componente tangenziale della velocità ha lo stesso verso della velocità periferica della girante) comporta angoli di flusso inferiori a  $90^\circ$  e, quindi, più basse velocità relative all’ingresso della girante. Di conseguenza, si riduce sia il lavoro trasferito al fluido (che comporta valori inferiori del rapporto di compressione) che la massima portata elaborabile migliorando, di contro, le prestazioni del compressore rispetto al pompaggio; infatti, l’effetto del prevortice sulla mappa caratteristica è quello di spostare la linea di pompaggio verso valori di portata inferiori. Tali risultati sono qualitativamente congruenti con quelli proposti in [55] e [56].

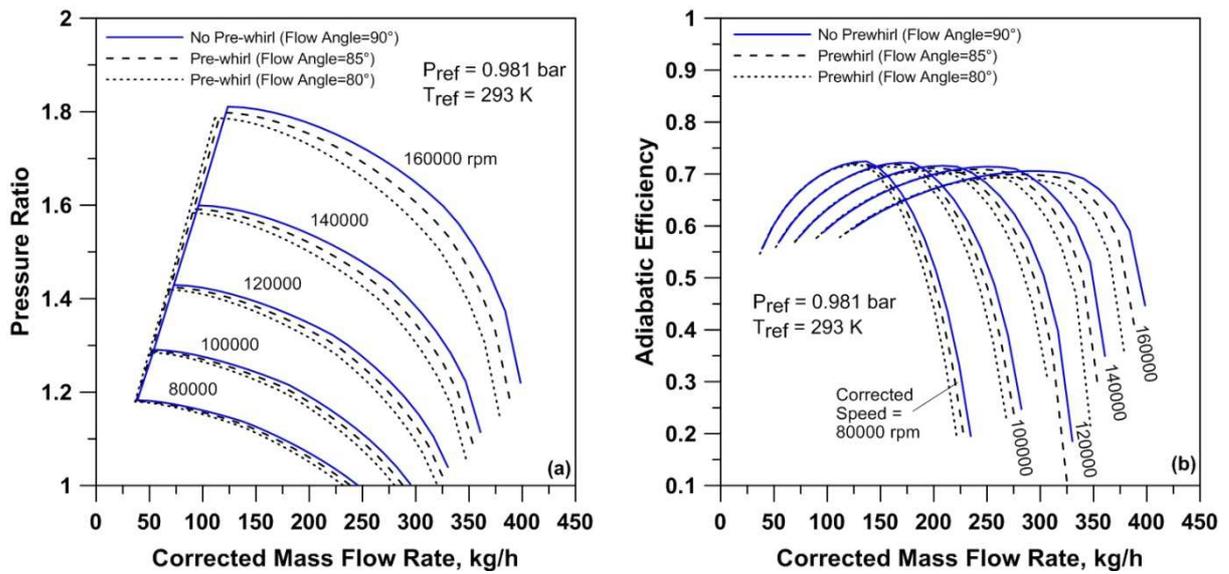


Figura 7.8 – Effetto dell’angolo di flusso all’ingresso sulle prestazioni del compressore

## 7.4 Applicazioni del modello instazionario

### 7.4.1 Applicazione instazionaria stabile

Come ampiamente anticipato, lo scopo principale della procedura instazionaria è quello di migliorare la simulazione dell’accoppiamento tra motore e turbocompressore che, come noto, non si trova mai ad operare in condizioni stazionarie [57].

Nel seguito sono mostrati i risultati di una simulazione relativa ad un semplice sistema costituito dal compressore C, da un condotto di mandata della lunghezza di 1 m e dalla valvola di strozzamento V (fig. 7.9).

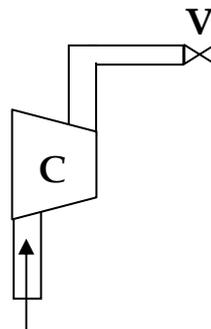
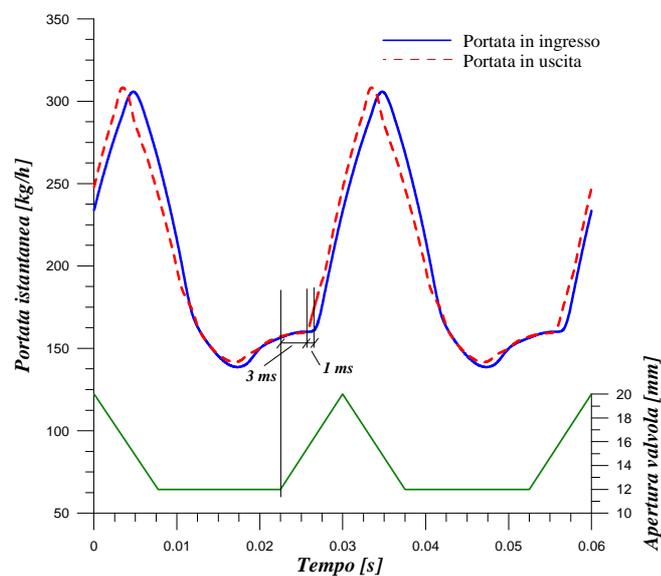


Figura 7.9 – Schema sistema compressione

Le condizioni instazionarie sono ottenute grazie alla periodica apertura e chiusura della valvola V, mentre si assegna una velocità di rotazione costante per il compressore pari a 140.000 giri/minuto. In questo modo, ci si assicura che le fluttuazioni delle grandezze termofluidodinamiche registrate a monte ed a valle del compressore siano da imputare esclusivamente all'interazione delle onde di pressione con lo stesso e non alla variazione delle condizioni operative (velocità di rotazione). In particolare, si assume che la valvola posta in corrispondenza della sezione di uscita del condotto di mandata si apra e si chiuda ciclicamente con un periodo temporale di 30 ms. Tale intervallo di tempo coincide con quello necessario ad un motore 4 tempi che ruota ad una velocità di 4000 giri/minuto a compiere un ciclo completo. La valvola viene mantenuta aperta per circa 15 ms e chiusa nei restanti 15 ms. La legge di alzata valvola si suppone di tipo triangolare con un valore massimo di 20 mm. La figura 7.10 mostra la portata istantanea all'aspirazione ed alla mandata del compressore comparata alla legge di alzata della valvola V.



**Figura 7. 10 – Portata monte / valle compressore e legge di alzata valvola**

Si evince che il tempo di ritardo tra l'inizio dell'apertura della valvola e l'istante in cui si ha l'incremento di portata aspirata dal compressore, conseguente alla depressione che si genera all'apertura della valvola stessa, è di 3 ms. Tale ritardo corrisponde al tempo necessario all'onda di depressione a risalire il condotto di

mandata. Successivamente, il disturbo di pressione attraversa i condotti rotanti e fissi costituenti il compressore raggiungendone la sezione di ingresso in circa 1 ms, corrispondente a 24 gradi di angolo di manovella per le condizioni operative specificate per il motore. Tale fenomenologia, responsabile della mancanza di sovrapposizione tra gli andamenti della portata a monte ed a valle del compressore, non è descritta in alcun modo dalla procedura quasi-stazionaria basata sulle mappe solitamente impiegata nella simulazione di accoppiamento tra motore e turbocompressore.

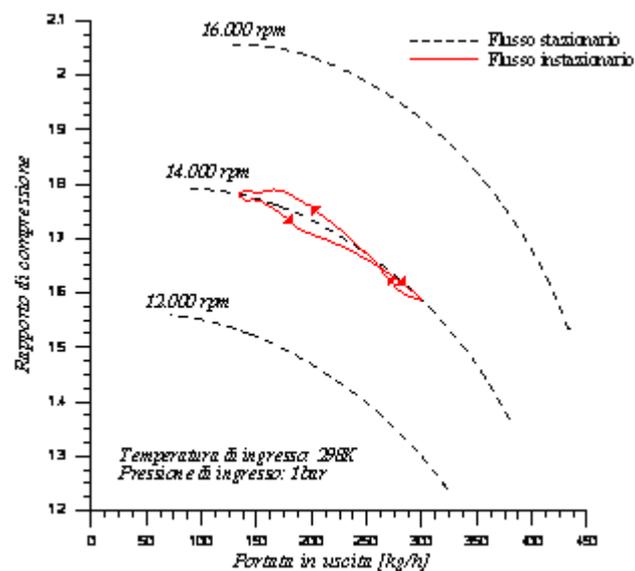


Figura 7.11 – Punto operativo compressore in condizioni instazionarie

La figura 7.11 mostra la traiettoria percorsa dal punto di funzionamento del compressore durante la manovra descritta. Si noti come il punto operativo, a causa dell'accumulo di massa ed energia nei singoli condotti, non segua l'andamento relativo alla curva ricavata in condizioni stazionarie, ma percorra una linea chiusa anche nell'ipotesi di velocità di rotazione del compressore costante. Non appena l'onda di depressione, generata dall'apertura della valvola, arriva alla mandata del compressore la conseguente diminuzione di pressione provoca un aumento della portata massica (fig. 7.10). In questa fase il punto di funzionamento del compressore si sposta lungo il tratto discendente della traiettoria instazionaria di figura 7.11. Quando poi la valvola di aspirazione comincia a chiudersi, la portata torna a

diminuire e ciò provoca una risalita del punto di funzionamento del compressore fino a ritornare, periodicamente, all'inizio del ciclo.

I fenomeni instazionari appena descritti possono influenzare l'analisi dell'accoppiamento motore/gruppo di sovralimentazione poiché comportano una variazione della potenza assorbita dal compressore rispetto a quella stimata secondo l'approccio tradizionale basato su mappa con ripercussioni sugli andamenti temporali delle velocità di rotazione del motore e del turbocompressore.

#### **7.4.2 Applicazione instazionaria instabile**

Quando un motore sovralimentato opera in condizioni di alto carico e basse velocità di rotazione, solitamente il compressore ad esso accoppiato si trova a lavorare in condizioni vicine ai limiti del campo di funzionamento stabile ossia in prossimità della linea di pompaggio. Per verificare la capacità del modello instazionario di descrivere anche queste condizioni di funzionamento instabile, con riferimento allo stesso sistema illustrato in fig. 7.9, si impone una velocità di rotazione del turbocompressore molto elevata (220000 giri/minuto) ed un forte strozzamento della valvola V. La fig. 7.12 mostra la mappa stazionaria del compressore, il luogo dei punti di funzionamento dello stesso nelle condizioni operative considerate e la caratteristica di una valvola di strozzamento che segue il tipico andamento parabolico.

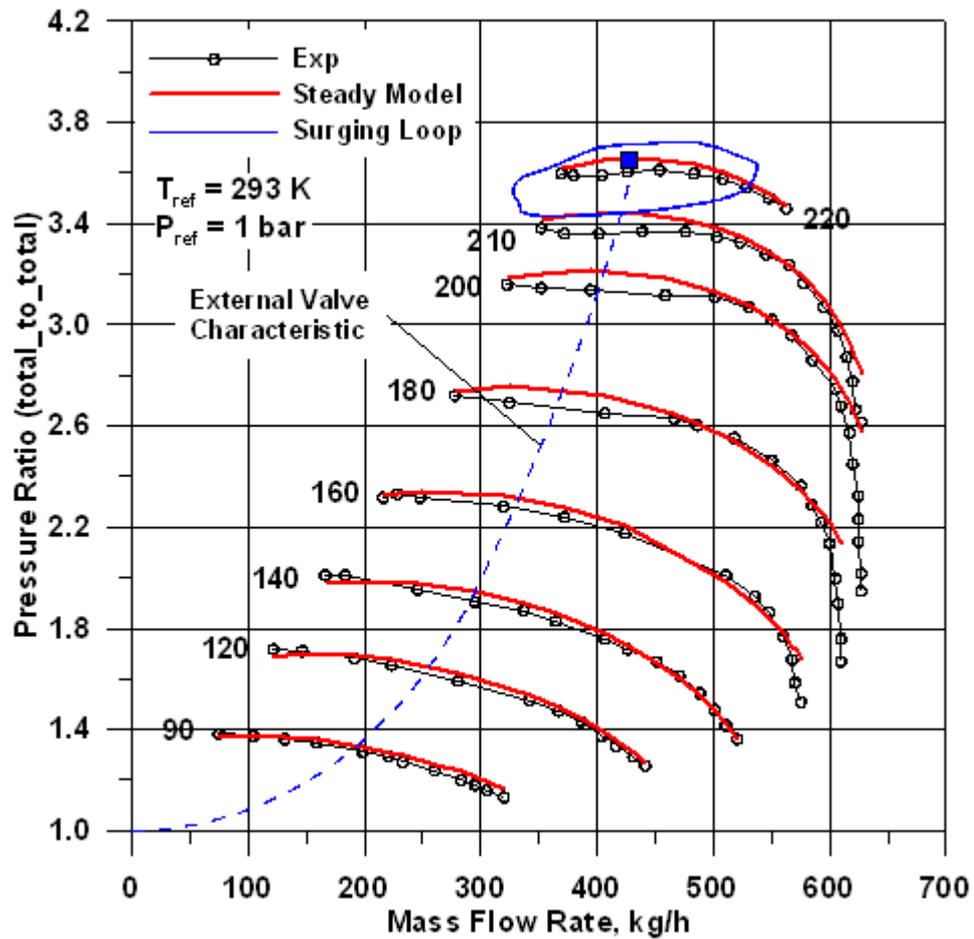


Figura 7. 12 – Mappa compressore e condizioni operative instabili

L'intersezione della caratteristica del circuito (che coincide con quella della valvola a meno delle perdite di carico distribuite nel condotto di mandata) e quella del compressore (per la velocità considerata) è prossima alla linea di pompaggio. In queste condizioni la procedura instazionaria non converge in un punto di funzionamento stabile, ma, superato un breve transitorio, la pressione e la portata massica cominciano ad oscillare mostrando un comportamento periodico.

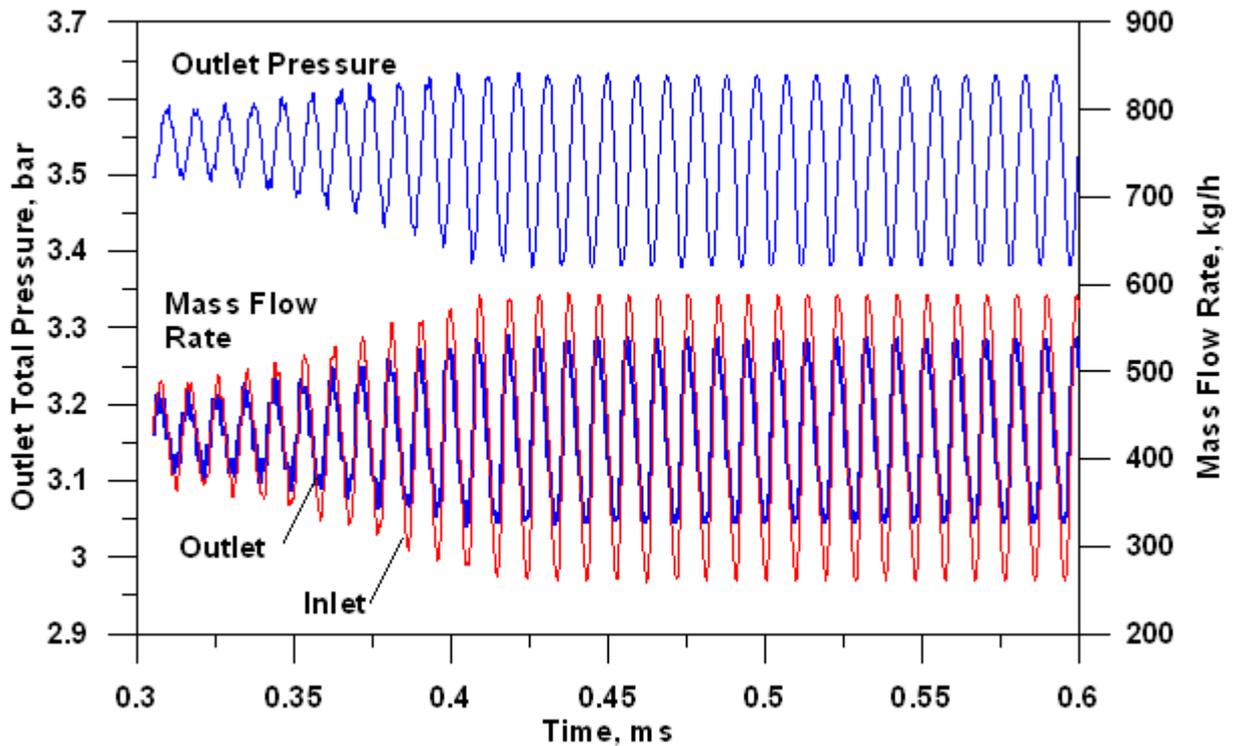


Figura 7.13 – Andamento temporale della portata monte/valle compressore e della pressione

Le differenze tra la portata massica all'aspirazione ed alla mandata del compressore evidenziano un accumulo di massa all'interno dello stesso (fig. 7.13). Poiché alla voluta compete il più grande volume tra i diversi componenti che costituiscono il compressore, è proprio al suo interno che risultano più rilevanti i già citati fenomeni di accumulo. La soluzione finale periodica (ciclo blu in fig. 7.12) può essere interpretata come un ciclo di "soft-surge" la cui frequenza dipende dal volume del sistema, dal grado di chiusura della valvola e dalla velocità di rotazione del compressore. Nel caso analizzato, le oscillazioni permangono nel campo delle portate positive senza che si verifichi un'inversione di flusso; a tal fine, si sarebbe dovuto imporre una chiusura ancora maggiore della valvola di strozzamento.

### 7.4.3 Applicazione al motore a combustione interna sovralimentato

Il funzionamento intrinsecamente instazionario di un MCI, dovuto alla periodica apertura delle valvole di aspirazione, determina la non stazionarietà del comportamento del compressore. Ciò, come precedentemente mostrato, può

provocare piccoli ritardi nella propagazione delle onde di pressione all'interno del sistema di aspirazione con ripercussioni significative anche sul processo di riempimento del cilindro. Inoltre, soprattutto per basse velocità di rotazione ed alti carichi del motore, possono instaurarsi condizioni di funzionamento instabili conseguenti al fatto che il compressore si trova ad operare in condizioni prossime al pompaggio.

Per verificare la capacità della procedura instazionaria di descrivere i fenomeni appena illustrati, è stato realizzato il modello di un motore diesel sovralimentato le cui caratteristiche sono di seguito riportate:

- Cilindrata: 2,991 litri
- Numero cilindri: 6
- Potenza massima: 150 kW @ 4000 rpm
- Coppia massima: 410 Nm @ 1500 - 3250 rpm
- Sistema di iniezione Common Rail
- Circuito EGR

Le condizioni operative assegnate per il motore sono di carico medio ( $\alpha \approx 30$ ) e velocità di 1080 rpm. L'approccio che solitamente viene adoperato per questo tipo di simulazioni è quello di risolvere l'equazione di equilibrio dinamico del gruppo di sovralimentazione facendo uso dei dati ricavati dalle mappe sperimentali di compressore e turbina. Evidentemente, tale metodologia, pur trascurando l'effetto che l'insorgere di fenomeni instazionari ha sulle prestazioni delle turbomacchine, consente di tener conto della variazione della velocità di rotazione del gruppo di sovralimentazione all'interno di un ciclo motore.

Viceversa, nella simulazione qui proposta, si vogliono analizzare i soli effetti instazionari legati alla propagazione delle onde di pressione all'interno del compressore e, pertanto, per quest'ultimo viene fissata la velocità di rotazione ad un valore costante di 147000 rpm. La turbina, invece, è considerata nel calcolo assegnando un'opportuna contropressione costante allo scarico (2,13 bar). Il compressore introdotto nel modello del motore sovralimentato è td04 e la mappa prestazionale utilizzata nei calcoli 1D tradizionali è quella riportata nella fig. 7.14. La

scelta delle variabili di regolazione fin qui introdotte, è tale da far sì che il compressore si trovi a lavorare in condizioni prossime a quelle di pompaggio.

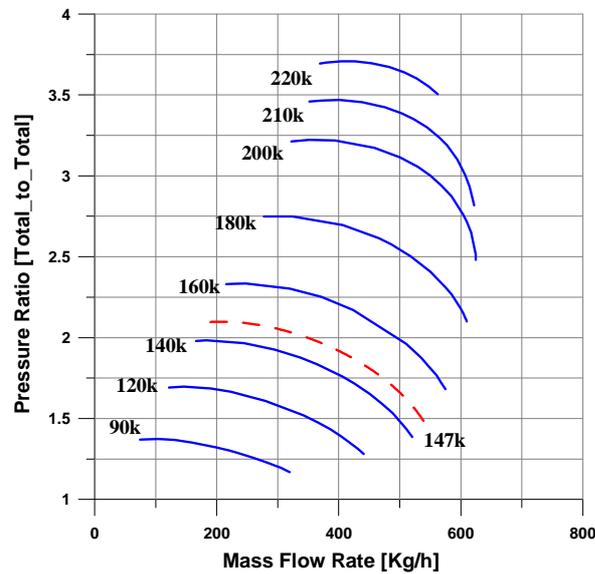


Figura 7. 14- Mappa stazionaria compressore - curva a 147000 rpm evidenziata

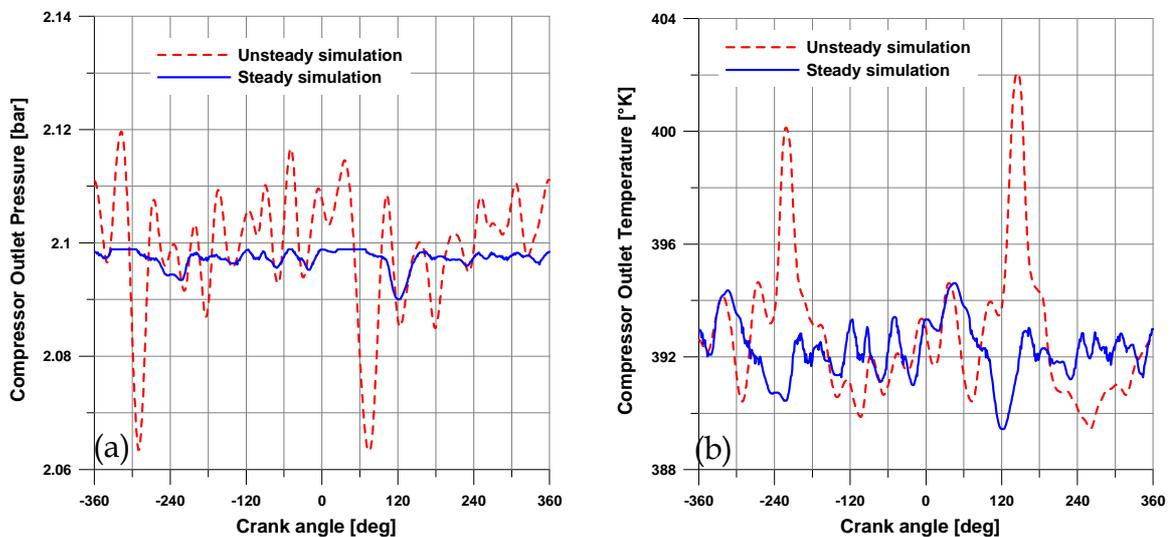


Figura 7. 15 - Confronto simulazione stazionaria ed instazionaria per pressione (a) e temperatura (b) alla mandata

La fig. 7.15 illustra il confronto tra la pressione e la temperatura alla mandata del compressore nel corso di un ciclo motore nel caso si utilizzi un approccio tradizionale basato sulle mappe stazionarie (linea continua), oppure la procedura instazionaria (linea discontinua). Come si può notare, quest'ultima è in grado di

evidenziare oscillazioni delle proprietà termodinamiche del fluido più marcate, rispetto alla metodologia stazionaria.

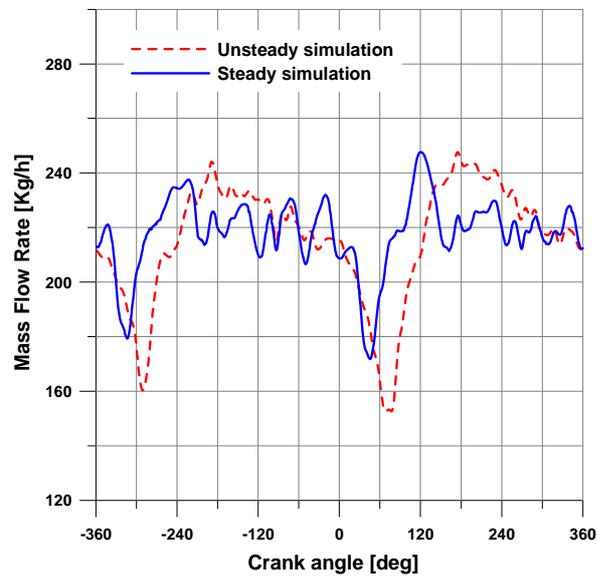


Figura 7. 16 - Confronto simulazione stazionaria ed instazionaria per portata massica alla mandata del compressore

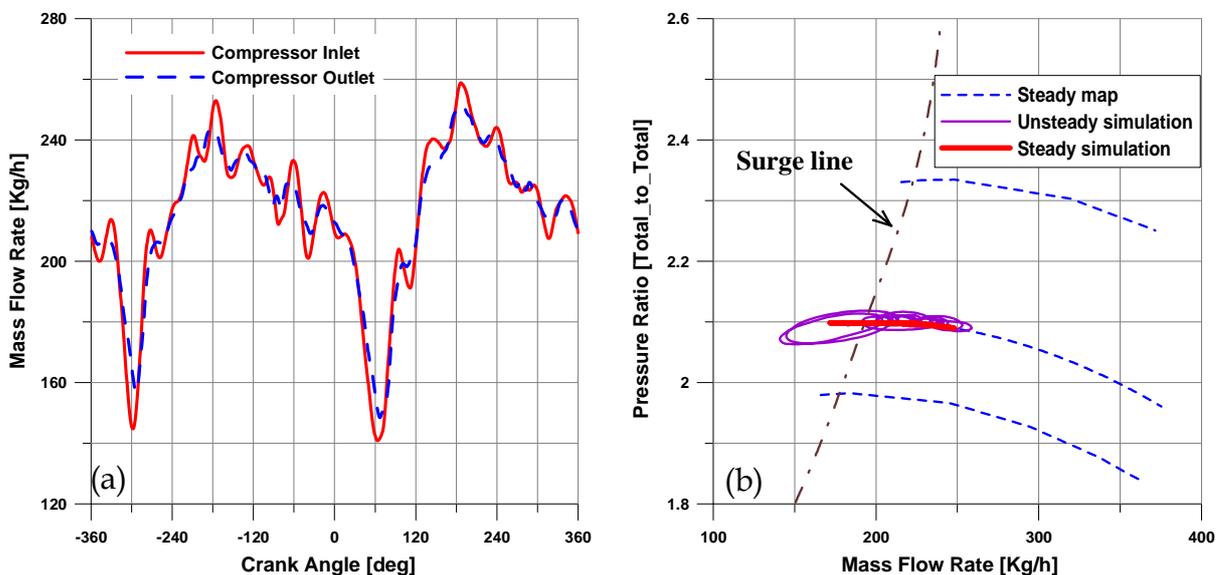


Figura 7. 17 - Portata elaborata dal compressore (a) e condizioni operative del compressore in un ciclo motore (b)

Più rilevante è il confronto tra le portate massiche alla mandata del compressore (fig. 7.16): le differenze tra i risultati forniti dai due approcci sono più evidenti e possono raggiungere valori superiori al 20% come, ad esempio, si verifica

quando l'angolo di manovella vale circa  $90^\circ$ . Tale circostanza sta a testimoniare che il compressore si trova temporaneamente a lavorare nella zona instabile del proprio campo di funzionamento (oltre la linea di pompaggio - fig. 7.17b).

La figura 7.17a riporta gli andamenti della portata alla mandata ed all'aspirazione del compressore ottenuti dalla procedura instazionaria nell'ambito di un ciclo motore; la mancanza di sovrapposizione tra le due curve indica che, a causa dell'instaurarsi di onde di pressione nel sistema di aspirazione, si determinano fenomeni di accumulo di massa e di energia all'interno della macchina. Inoltre, le onde di pressione provocate dall'apertura periodica delle valvole di aspirazione risalgono anche i condotti costituenti il compressore determinando condizioni all'aspirazione di quest'ultimo continuamente variabili. Ciò influenza significativamente lo scambio energetico che avviene poi all'interno dei condotti rotorici.

Nella figura 7.17b sono riportati gli andamenti del rapporto di compressione risultanti dalla procedura basata su mappa e da quella instazionaria, oltre ad una porzione della mappa prestazionale. Si può notare che il punto operativo del compressore nella simulazione stazionaria si muove, come è logico aspettarsi, lungo la curva caratteristica. Viceversa, i risultati forniti dalla procedura instazionaria, mettono in evidenza come il punto di funzionamento della macchina si sposti intorno alla curva isovelocità oltrepassando in alcuni casi anche la linea di pompaggio. Nel caso considerato, si riscontra una discordanza tra i risultati ottenuti secondo i due approcci sia nel campo di portata elaborata, sia nel rapporto di compressione che, per alcuni valori di portata, può essere particolarmente significativa.

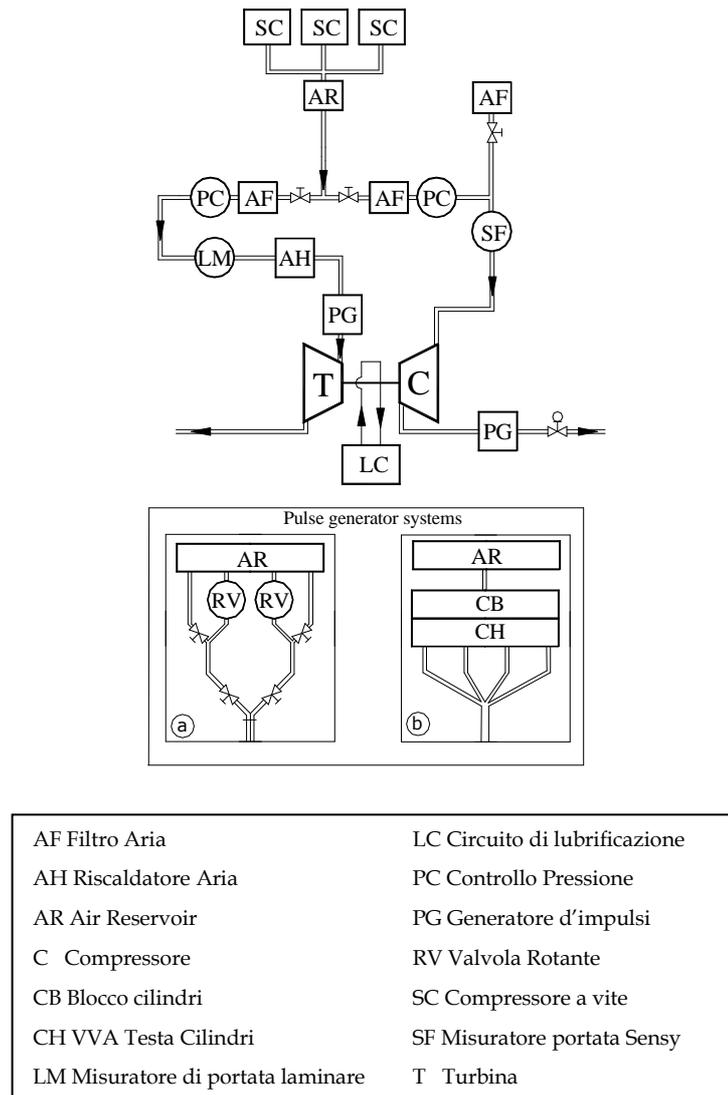
## 7.5 Validazione del modello instazionario

L'importanza di descrivere adeguatamente il comportamento del compressore in condizioni instazionarie risiede nel fatto che tale è il regime in cui si trova ad operare nel normale funzionamento quando è accoppiato ad un motore a combustione interna.

Pertanto, una volta testata la capacità del modello nel riprodurre le mappe stazionarie (fornite dal costruttore o misurate autonomamente) del compressore si è passati alla validazione della procedura instazionaria. I rilevamenti sperimentali necessari a tale fine sono stati ottenuti nell'ambito di una collaborazione con il dipartimento DIMSET dell'Università di Genova; infatti, presso i laboratori del DIMSET, in un primo momento, è stata misurata la mappa stazionaria del compressore rhf3 per poi analizzarne il comportamento in condizioni instazionarie all'interno del sistema di aspirazione di un motore sovralimentato.

Il banco di prova impiegato per tali indagini sperimentali comprende tre compressori a vite mossi da altrettanti motori elettrici ciascuno in grado di elaborare una portata massica massima di circa 0,6 kg/s alla pressione massima di 8 bar. Al fine di impedire la formazione di condensa o ghiaccio, un dissipatore di calore a resistenza di 54 kW riscalda l'aria in ingresso fino a 400 K. Due linee indipendenti alimentano la turbina ed il compressore con aria la cui pressione viene opportunamente regolata in modo tale da rendere possibile la misura delle mappe caratteristiche delle turbomacchine su un ampio campo di funzionamento.

La caratteristica principale del banco di prova utilizzato consiste nella generazione d'impulsi di pressione che riproducono quelli che si realizzano nei sistemi di aspirazione e scarico di un motore a combustione interna sovralimentato mediante due diverse architetture. Nella prima configurazione, sono impiegate delle valvole rotanti grazie alle quali è possibile regolare l'onda di pressione in termini di valor medio, ampiezza, forma e frequenza. Il secondo allestimento, che include il sistema di attuazione delle valvole di un motore a fasatura variabile (Fiat Multiair), consente di analizzare l'interazione tra i sistemi di aspirazione e scarico e la turbina ed il compressore.



**Figura 7. 18 –Layout del banco di prova per turbocompressori dell’UNIGE**

La misura di numerose grandezze, sia in condizioni stazionarie che instazionarie, è realizzata grazie ad un sistema automatico di acquisizione di segnali che fa uso di procedure appositamente sviluppate nell’ambiente LabVIEW®.

Come già accennato, tale strumentazione è stata adoperata per valutare le prestazioni del compressore rhf3 in condizioni stazionarie in termini di rapporto di compressione (total\_to\_total) e rendimento adiabatico. Successivamente sono state misurate le prestazioni del compressore in condizioni instazionarie all’interno del sistema di aspirazione di un motore di serie (fig. 7.19).

Le condizioni operative analizzate si riferiscono ad un’assegnata velocità di rotazione corretta ed a tre differenti valori della portata massica (prossima al bloccaggio - caso A, regione intermedia - caso B - e prossima al pompaggio - caso

C). La frequenza degli impulsi di pressione dovuta all'apertura delle valvole di aspirazione corrisponde ad una velocità di rotazione dell'albero a camme di 750 giri al minuto (1500 giri al minuto dell'albero motore).

I valori medi ed istantanei di diverse grandezze sono misurati in corrispondenza di alcune sezioni fondamentali lungo il sistema di aspirazione (all'ingresso ed all'uscita del compressore e dell'intercooler a valle della valvola a farfalla etc., figura 7.20).

Le pressioni medie ed istantanee sono misurate tramite trasduttori di pressione del tipo "strain gauge" caratterizzati da un'alta risposta in frequenza (circa 25 kHz) ed un'accuratezza del 0,14% a fondo scala. Per la misura delle temperature medie sono impiegate termoresistenze al platino caratterizzate da un'incertezza di  $\pm 0.3$  C. Il valore istantaneo della temperatura non è misurato direttamente, ma è stimato supponendo che lo scostamento dal valor medio sia conseguente ad una trasformazione adiabatica isentropica per un gas a comportamento piuccheperfetto. In pratica, la temperatura istantanea  $T$  è valutata dalla misura dei valori medi di pressione  $p_{med}$  e di temperatura  $T_{med}$  e da quelli istantanei della pressione,  $p$ , secondo la seguente espressione:

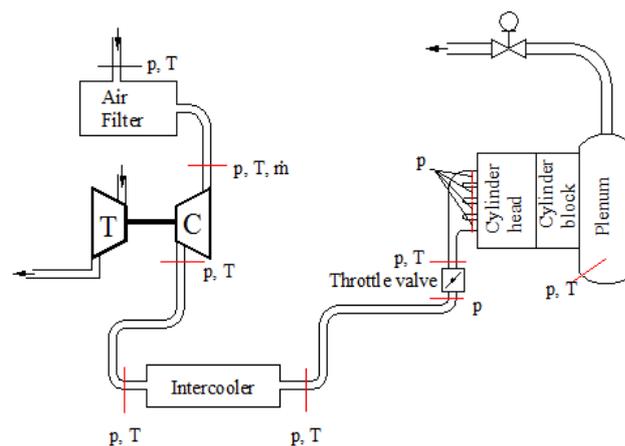
$$T = T_{med} \left( \frac{p}{p_{med}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (7.8)$$

La portata massica istantanea è misurata mediante un anemometro a filo caldo posizionato a monte del compressore. Il sensore è calibrato sulla base di un misuratore di portata di tipo termico (con un'accuratezza del  $\pm 0.3\%$ ) sull'intero campo di portate coperto nelle prove instazionarie. La velocità di rotazione del compressore è misurata con un sensore a correnti parassite (con una precisione dello 0,009% a fondo scala) montato in prossimità della girante.

Due schede di acquisizione ad alta velocità sono impiegate per la registrazione dei segnali istantanei. Un sensore ad effetto Hall è montato sull'albero a camme al fine di fornire il segnale di trigger  $40^\circ$  gradi dopo il punto morto superiore d'incrocio per il cilindro 1. Tutti i segnali acquisiti sono mediati su più cicli consecutivi.



**Figura 7. 19– Sistema aspirazione motore**



**Figura 7. 20 –Schematizzazione sistema aspirazione e stazioni di misura principali**

In una prima fase, si è riscontrato come il modello sia in grado di riprodurre con adeguata accuratezza la mappa misurata presso i laboratori dell'UNIGE anche senza alcuna taratura e, quindi, sulla scorta della sola geometria (linea a tratto nero in fig. 7.21)

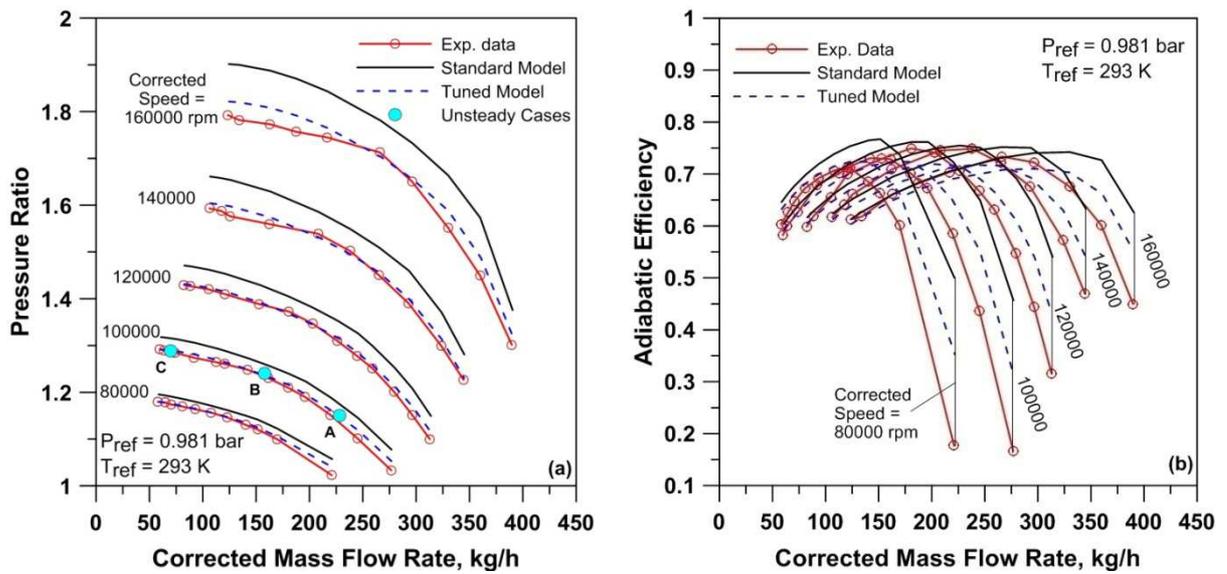


Figura 7.21 – Mappa prestazionale rhf3 – Rapporto di compressione (a) e rendimento adiabatico (b)

Successivamente, agendo semplicemente sul moltiplicatore del coefficiente d'attrito ( $f_{at} = 1,9$ ) e sulla costante di taratura che definisce l'angolo di flusso al di sotto del quale si verificano le perdite per diffusione nella voluta ( $c_{invol} = 1,5$ ), si è ridotto significativamente lo scostamento rispetto alla mappa sperimentale per tutte le velocità di rotazione. L'accordo è molto soddisfacente per quanto riguarda il rapporto di compressione, maggiori discordanze si riscontrano in merito al rendimento adiabatico. Una delle cause di tale discordanza potrebbe risiedere nel fatto che il rendimento viene calcolato secondo la seguente espressione:

$$\eta = \frac{T_1^0 \left( \beta^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{T_2^0 - T_1^0} \quad (7.9)$$

La (7.9) definisce il rendimento adiabatico solo se non si verificano scambi di calore tra fluido e macchina. Ciò evidentemente non può realizzarsi nel funzionamento effettivo del compressore ed, anzi, fenomeni di scambio termico possono influenzare la stima del valore del rendimento in maniera significativa, soprattutto per basse velocità di rotazione. Pertanto, il rendimento, così valutato, non costituisce esclusivamente una misura dell'efficienza dello scambio di lavoro tra fluido e macchina, tenendo in conto anche gli effetti dello scambio termico

(comportando, tra l'altro, errori nel calcolo della potenza assorbita dal compressore). Per poter descrivere opportunamente tale fenomeno sarebbe necessaria la conoscenza della temperatura delle pareti interne della cassa e della girante che, a loro volta, sono fortemente influenzate dalla temperatura dell'olio lubrificante ed, eventualmente, da quella dell'acqua di raffreddamento. Stanti le considerazioni appena fatte, trova giustificazione la peggiore capacità del modello nel riprodurre gli andamenti del rendimento.

Tarato il modello stazionario, si è passati alla schematizzazione monodimensionale dell'apparato sperimentale descritto in fig. 7.20. Il modello rappresentato in fig. 7.22 riproduce il sistema di aspirazione nei tratti a monte ed a valle del compressore. Il fluido, aspirato dall'ambiente tramite i condotti A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> e D<sub>1</sub>, giunge al compressore che ne innalza pressione e temperatura. Dopo aver attraversato l'intercooler C<sub>2</sub> e la valvola a farfalla entra nei condotti interno testa P<sub>i</sub>, R<sub>i</sub> e T<sub>j</sub> per confluire in un plenum.

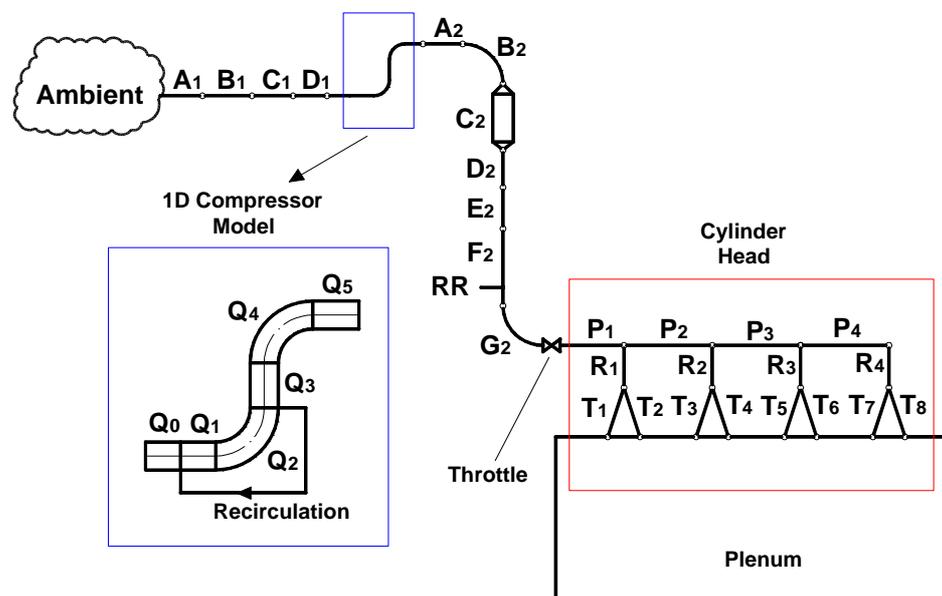


Figura 7. 22 – Modello monodimensionale del banco di prova per compressori

Al fine di modificare il punto di funzionamento del compressore regolando la portata, viene modificata la pressione regnante nel plenum.

Se si escludono le grandezze geometriche che caratterizzano il circuito d'aspirazione considerato, gli altri parametri da assegnare per il modello sono:

- Velocità di rotazione del compressore: l'indagine sperimentale ha evidenziato che la stessa subisce variazioni molto modeste nelle prove effettuate; per questo motivo viene supposta costante.
- Velocità di rotazione del motore: tale parametro definisce la frequenza di apertura delle valvole di aspirazione che controllano le fluttuazioni di pressione nel circuito di aspirazione.
- Pressione e temperatura ambiente: i loro valori sono assegnati come condizioni al contorno nella prima sezione del condotto  $A_1$ .
- Pressione nel plenum di scarico: il suo valore è imposto come condizione al contorno per regolare la portata circolante nel circuito
- Apertura valvola a farfalla: sia l'analisi sperimentale che quella numerica è svolta in condizioni di valvola a farfalla completamente aperta. Le perdite, per quanto modeste, connesse con il passaggio del flusso attraverso la valvola sono tenute in considerazione nel modello.
- Legge di alzata valvola e coefficiente d'efflusso: la legge di alzata è quella effettivamente realizzata dal sistema di distribuzione, mentre i coefficienti d'efflusso sono quelli forniti dal costruttore.

La tabella 7.3 riporta i parametri operativi per i tre casi analizzati. La sola pressione nel plenum è stata modificata significativamente, mentre la velocità di rotazione corretta è molto prossima a 100200 nei tre casi considerati. Come già accennato, nel punto A si realizzano bassi rapporti di compressione e rendimenti, in B si ha la massima efficienza ed in C si raggiungono condizioni di funzionamento molto prossime al pompaggio. La fig. 7.21 mostra la posizione di tali punti sulla mappa stazionaria.

CASO	A	B	C
Velocità rotazione, rpm	101050	101798	102134
Velocità rotazione corretta, rpm	100200	100270	100105
Velocità albero motore, rpm	1506		
Pressione ambiente, bar	1.02		
Temperatura Ambiente, K	298	302	305
Pressione Plenum, bar	1.065	1.216	1.303
Apertura valvola a farfalla	Completamente aperta		

**Tabella 7. 3 – Parametri operativi analisi instazionaria**

Per studiare il comportamento del compressore in condizioni instazionarie, sono stati impiegati due approcci: quello classico basato sull'utilizzo della mappa (in particolare, è stata usata la mappa di fig. 7.21) ed il modello instazionario. Nel seguito saranno, rispettivamente, indicati con i termini "Steady Map Model" e "Unsteady Model".

La figura 7.23, che si riferisce al caso A, mostra il confronto tra le fluttuazioni della pressione nelle 5 stazioni di misura considerate nel circuito di aspirazione (fig. 7.19): pressione statica valle valvola a farfalla (a), ingresso (b) ed uscita (c) intercooler e pressione totale monte (e) e valle compressore (d). Come prevedibile, la forma dell'onda di pressione si ripete pressoché ugualmente ogni 180° poiché tale valore corrisponde, nel caso considerato, esattamente al periodo angolare che intercorre tra l'apertura delle valvole di aspirazione [58]; detto intervallo angolare è il medesimo per tutte le analisi effettuate. La variazione della forma delle onde di pressione lungo il sistema di aspirazione è dovuta all'effetto congiunto di più fattori: la geometria dei condotti, riflessione delle onde, perdite distribuite e concentrate.

Sia il modello stazionario basato sulla mappa che quello instazionario riproducono accuratamente le fluttuazioni di pressione derivate sperimentalmente soprattutto grazie ad un'opportuna schematizzazione monodimensionale del circuito ed un'adeguata descrizione delle perdite per attrito e nelle giunzioni tra condotti. Grazie a tali accorgimenti, il fenomeno della risalita dell'onda di pressione all'interno del circuito di aspirazione è propriamente descritto dal modello fino alla sezione di mandata del compressore (fig. 7.23d). Le maggiori differenze tra i due approcci si

riscontrano per quanto riguarda la pressione totale all'aspirazione del compressore (fig. 7.23e). In tal caso, è possibile apprezzare un piccolo scarto angolare,  $\Delta\theta$ , nei risultati forniti dai due modelli. Tale sfasamento è dovuto al fatto che l'onda di pressione, che viaggia alla velocità del suono,  $a$ , necessita di un certo tempo per risalire il compressore. Lo stesso è caratterizzato da una lunghezza equivalente  $\Delta L$  (tale parametro solitamente non è disponibile ed è di difficile valutazione, ma grazie al modulo geometrico, è possibile ricavarne immediatamente una stima). Nota la frequenza di apertura delle valvole, cui corrisponde una velocità di rotazione del motore,  $n$ , è possibile, sulla base delle grandezze appena elencate, ricavare quanto vale il ritardo angolare  $\Delta\theta$  secondo la:

$$\Delta\theta = \frac{6n\Delta L}{a} \approx \frac{6*1506*0.28}{343} \approx 7.4^\circ \quad (7.10)$$

Per tener conto di tale fenomeno, nei calcoli quasi-stazionari basati su mappa, solitamente s'introduce un condotto virtuale a valle del compressore caratterizzato dallo stesso volume e dalla stessa lunghezza equivalente del compressore stesso [59]. Tale tipo di correzione, in ogni caso, richiede la conoscenza della geometria del compressore. Il modello instazionario del compressore invece è in grado di descrivere tali fenomeni automaticamente, (fig. 7.23e) come testimoniato dal migliore accordo in termini di fasatura rispetto ai dati sperimentali. Le maggiori differenze tra i risultati numerici ed i rilievi sperimentali sono probabilmente dovuti alle difficoltà nel descrivere il flusso nel tratto di circuito a monte del compressore secondo un approccio monodimensionale a causa della presenza di complesse geometrie dalle caratteristiche 3D come il filtro dell'aria.

Per il caso B (fig. 7.24) si possono ripetere le stesse considerazioni appena fatte; un lieve miglioramento in termini di fasatura dell'onda di pressione si può riscontare qualora si utilizzi il modello instazionario soprattutto nella sezione d'uscita del compressore.

Il caso C, che riproduce condizioni di funzionamento prossime al pompaggio, mostra le maggiori differenze tra le due tecniche (fig. 7.25). L'accordo globale tra i risultati numerici ed i dati sperimentali è meno soddisfacente rispetto ai primi due

---

casi. Il modello instazionario, ancora una volta, meglio riproduce in termini di fasatura l'onda di pressione anche se, in alcune sezioni, la stessa risulta sovrastimata dal modello numerico.

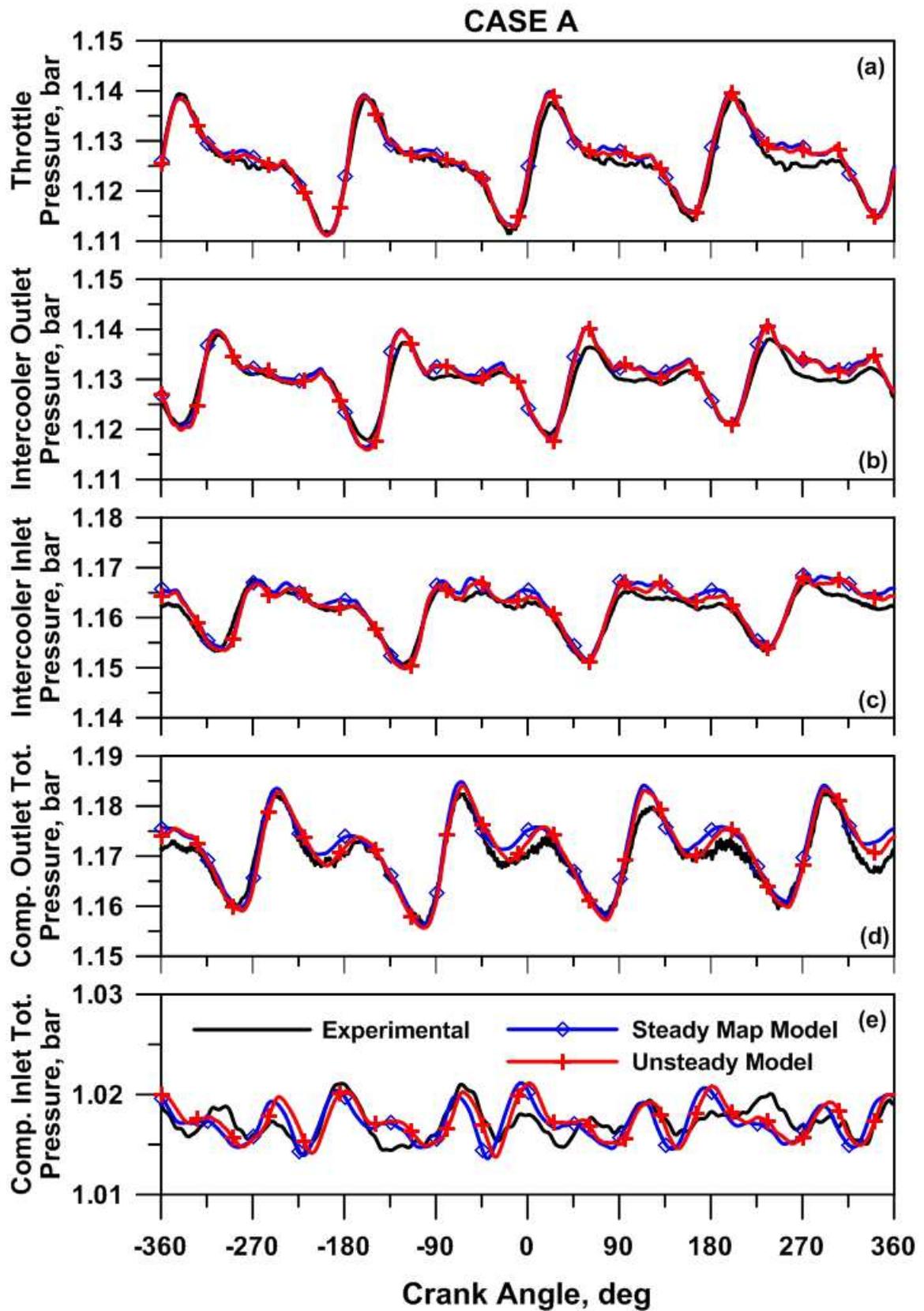


Figura 7. 23 – Confronto numerico sperimentale - fluttuazioni di pressione in differenti sezioni del sistema di aspirazione – Caso A

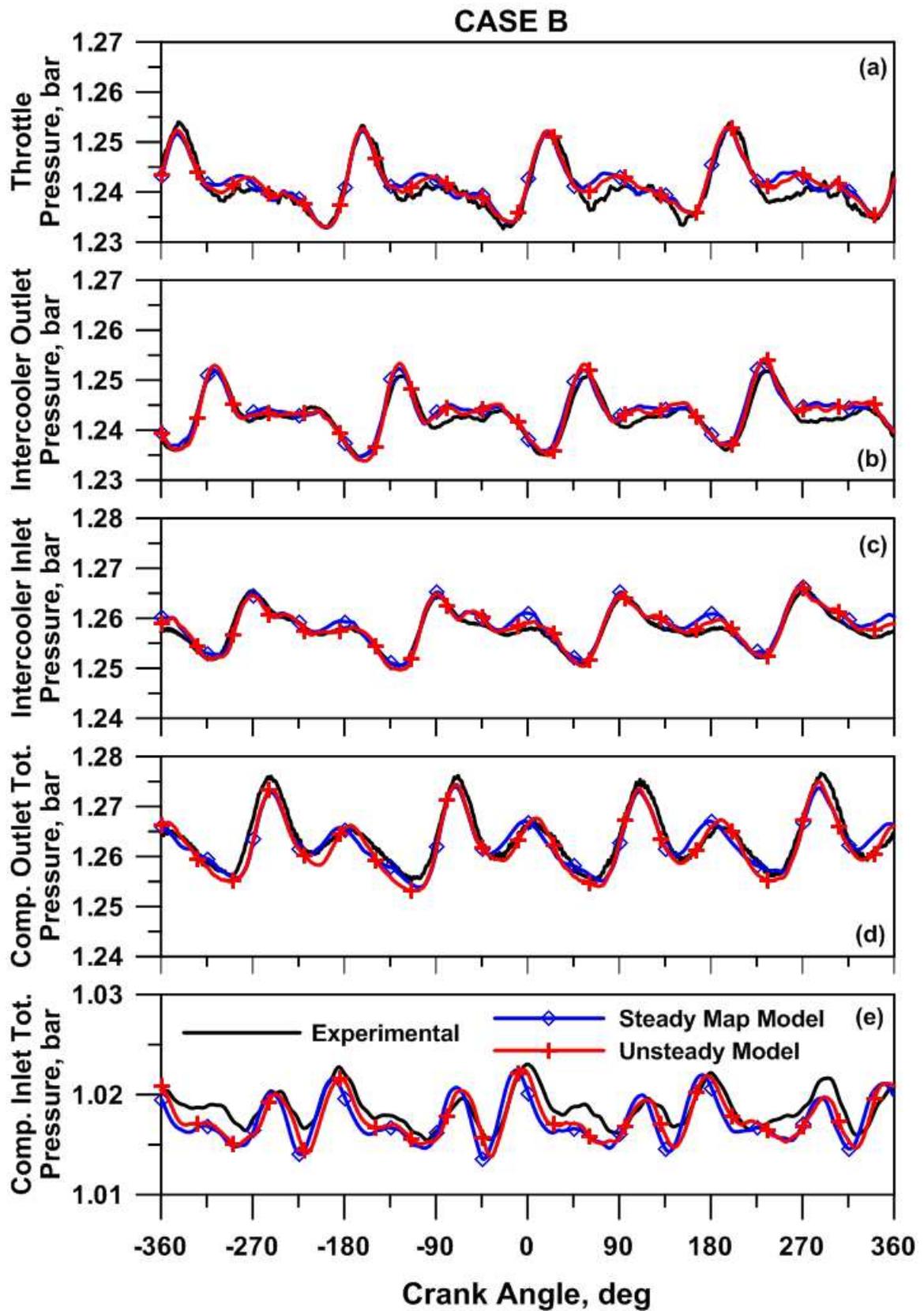


Figura 7. 24- Confronto numerico sperimentale - fluttuazioni di pressione in differenti sezioni del sistema di aspirazione - Caso B

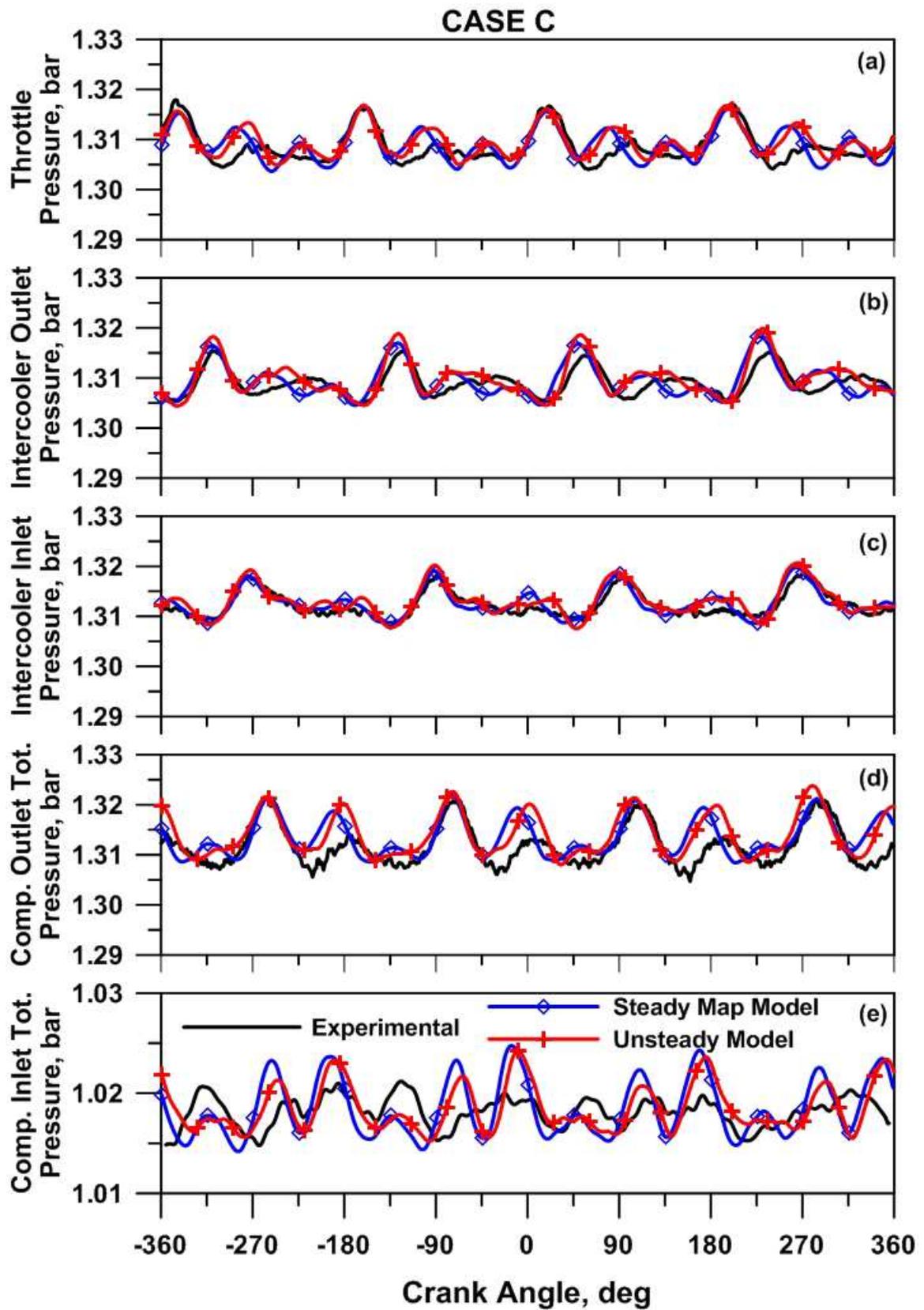


Figura 7. 25- Confronto numerico sperimentale - fluttuazioni di pressione in differenti sezioni del sistema di aspirazione - Caso C

In fig. 7.26 è riportato il confronto tra la portata massica istantanea calcolata e quella derivata sperimentalmente per i tre casi analizzati. I dati sperimentali sono il risultato di una media “ensemble” su più cicli consecutivi; tale procedimento di media ha come scopo quello di filtrare oscillazioni non fisiche dovute a disturbi e vibrazioni.

Malgrado l'utilizzo di valori mediati, l'andamento temporale della portata massica non mostra lo stesso comportamento periodico evidenziato dai segnali di pressione. Ciò probabilmente è dovuto al fatto che il sensore si trova a monte del compressore e, pertanto, risente delle riflessioni, attenuazioni ed amplificazioni che l'onda di pressione subisce nel risalire il circuito di aspirazione ed il compressore stesso.

L'accordo numerico/sperimentale è in ogni caso accettabile in quanto le fluttuazioni di maggiore entità sono ben riprodotte soprattutto nel caso cui compete la minore portata massica (fig. 7.26c). Differentemente dagli altri, nel caso C il dato sperimentale, così come quello numerico, mostra un evidente comportamento periodico con periodo di  $180^\circ$ .

Analogamente a quanto visto per i segnali di pressione, per tutte le condizioni operative considerate, si rileva uno sfasamento nei risultati forniti dai due approcci numerici. Come già menzionato, ciò dipende dalla propagazione delle onde di pressione all'interno del componente, fenomeno descritto esclusivamente dal modello instazionario.

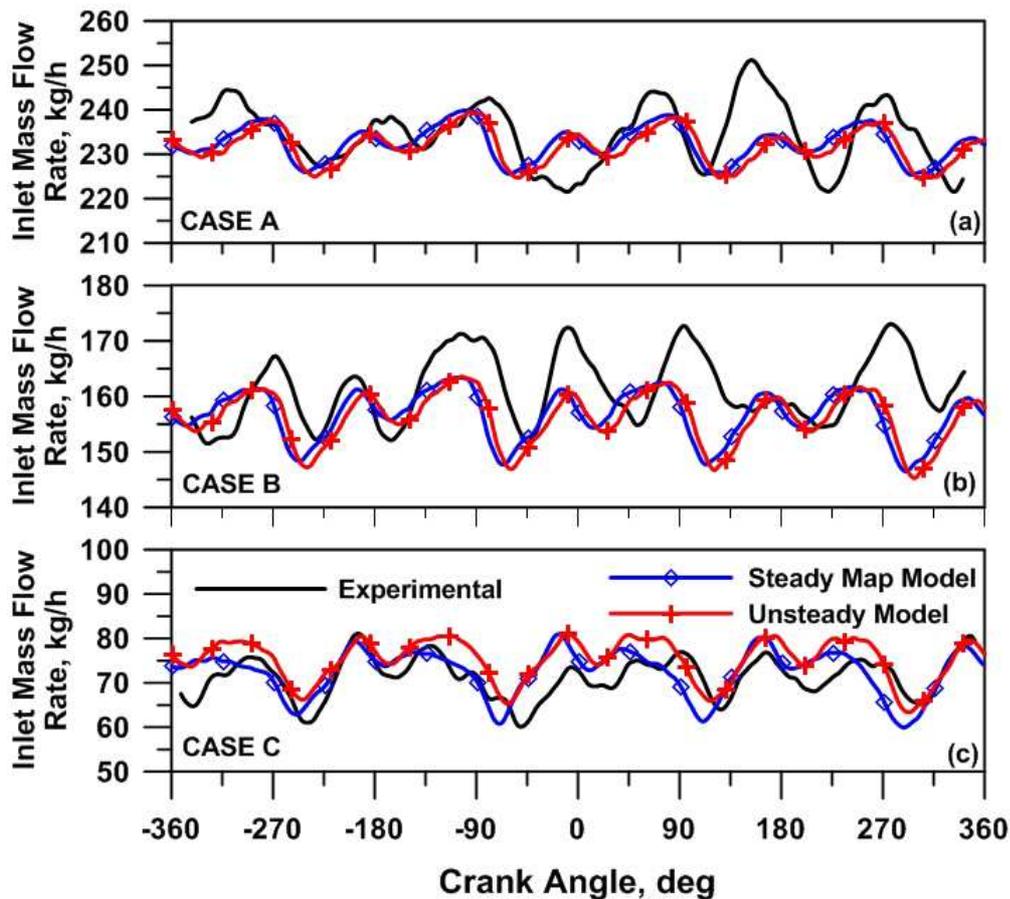


Figura 7. 26 – confronto numerico/sperimentale porta massica

Tale analisi ha dimostrato come sia il classico approccio quasi-stazionario bastato su mappa che il modello instazionario nelle condizioni operative indagate siano in grado di riprodurre adeguatamente il comportamento del compressore durante condizioni di funzionamento instazionario. Le maggiori discordanze derivano da uno sfasamento temporale nei risultati soprattutto in specifiche sezioni del circuito (pressione e portata a monte del compressore). In ogni caso, anche se tali differenze sono piuttosto limitate, le stesse potrebbero aumentare per velocità di rotazione più elevate, come evidenziato dall'espressione del  $\Delta\vartheta$ , ossia per disturbi di pressione generati ad una frequenza più elevata. In tal caso, l'utilizzo del modello instazionario o l'introduzione di un volume virtuale a valle del compressore diventano indispensabili al fine di riprodurre la propagazione delle onde di pressione nel compressore.

Al fine di verificare tale affermazione, si è svolta un'ulteriore analisi nelle medesime condizioni del caso B portando, però, la velocità di rotazione del motore a

4500 rpm e quella del compressore a 140000 rpm. In tali condizioni mancano dati sperimentali di riferimento. In fig. 7.27 è riportato il confronto tra i risultati ottenuti mediante l'approccio basato su mappa (blu) e con il modello instazionario del compressore (rosso). Inoltre, è stato analizzato il comportamento del compressore anche mediante la classica metodologia che fa uso delle mappe opportunamente corretta con l'aggiunta di un condotto virtuale a sezione costante a valle della giunzione in cui si suppone collocato il compressore. Le dimensioni di tale condotto sono valutate dal modulo geometrico della procedura proposta; in particolare, la lunghezza è posta pari alla distanza coperta dal disturbo di pressione nell'attraversare il compressore, mentre il diametro è fissato in maniera tale da realizzare un volume pari al volume complessivo del componente. Poiché gli effetti relativi alle perdite ed allo scambio di calore sono già contemplati nella mappa del compressore, si suppone che il flusso nel condotto e nelle giunzioni di estremità sia adiabatico ed isentropico.

Come prevedibile, l'approccio basato su mappa e il modello instazionario in tali condizioni forniscono risultati piuttosto diversi in termini di pressione alla mandata ed all'aspirazione del compressore (fig. 7.27b, 7.27c) e di portata massica all'ingresso del circuito (7.27a). Una volta, però, introdotta la correzione mediante il condotto virtuale nel modello basato su mappa, la differenza con la procedura instazionaria si riduce notevolmente. Qualche incongruenza tra questi ultimi permane soprattutto negli andamenti della porta massica.

Descrivere opportunamente la propagazione delle onde di pressione all'interno del compressore, come già accennato, diventa particolarmente critico nel caso in cui si voglia studiare il comportamento di un sistema di sovralimentazione bistadio. In tal caso, il compressore di bassa pressione è investito da fluttuazione di pressione che risalgono al compressore di alta pressione. Evidentemente, qualora tale ultimo fenomeno non venga propriamente modellato, non sarà possibile definire correttamente l'andamento temporale della pressione regnante a valle del compressore di bassa pressione con conseguenti errori nella descrizione del comportamento instazionario del sistema di aspirazione.

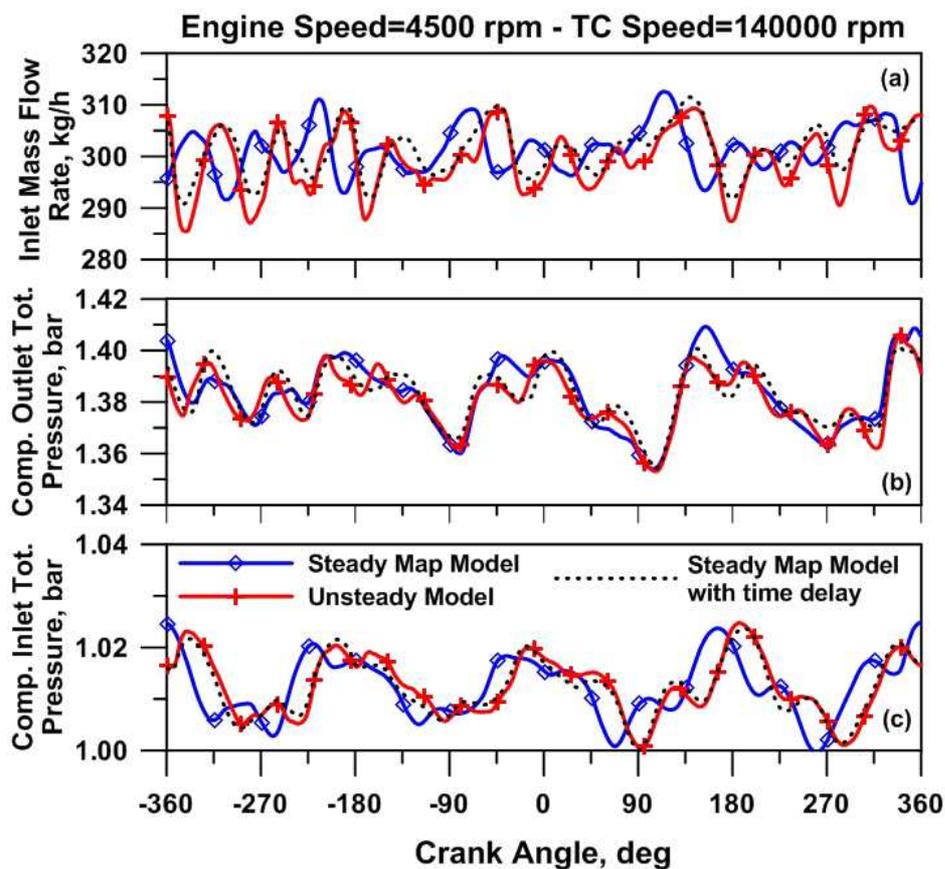


Figura 7. 27- Analisi numerica ad una velocità di rotazione del motore di 4500 rpm e di 140000 rpm per il compressore.

Al fine evidenziare come il modello instazionario sia l'unica procedura in grado di descrivere il fenomeno d'incipiente pompaggio (soft-surge) è stata analizzata un'ulteriore condizione operativa ottenuta incrementando ulteriormente la pressione nel plenum ( da 1,303 bar del caso C a 1,312 bar) e portando il punto di funzionamento oltre la linea di pompaggio. La fig. 7.28 mostra la mappa stazionaria comprensiva della regione stabile ed instabile; quest'ultima non è generalmente misurata, in quanto, con le strumentazioni solitamente adoperate, una volta che il punto operativo di porta in corrispondenza del massimo o poco oltre si innescano condizioni di funzionamento instabili e pertanto fortemente instazionarie. Il modello stazionario proposto consente, invece, di avere una stima delle prestazioni del compressore anche nella regione instabile senza ricorrere a tecniche di estrapolazione di dati prive di riscontro fisico.

In fig. 7.28 è altresì rappresentato un classico ciclo di incipiente pompaggio. Lo stesso è percorso in senso antiorario e, come si nota, non si sovrappone alla mappa a

causa del comportamento fortemente instazionario cui è soggetto il compressore in tali condizioni. Il ciclo è composto di una parte principale (“Main Loop”) direttamente legata all’onda di pressione generata all’apertura della valvola di aspirazione ed un secondaria (“Secondary Loop”) dovuta alla riflessione delle onde di pressione nel circuito. Il modello basato su mappa non è in grado descrivere tale fenomenologia essendo, per motivi di carattere numerico, vincolato a lavorare nella regione stabile della mappa. In alcuni codici commerciali, tale problema viene superato smorzando opportunamente le oscillazioni di pressione che si instaurano, ma ancora una volta tale pratica non trova alcun riscontro fisico.

La figura 7.28 sulla destra della linea di pompaggio mostra il confronto numerico/sperimentale del caso C. Si nota come il modello instazionario (linea continua rossa) sia in grado di riprodurre adeguatamente il ciclo principale, mentre sono leggermente sovrastimate le oscillazioni di pressione che si realizzano in quello secondario. La procedura basata su mappa (linea tratteggiata nera) solo in parte è in grado di descrivere tale fenomenologia soprattutto in termini di ampiezza del ciclo principale.

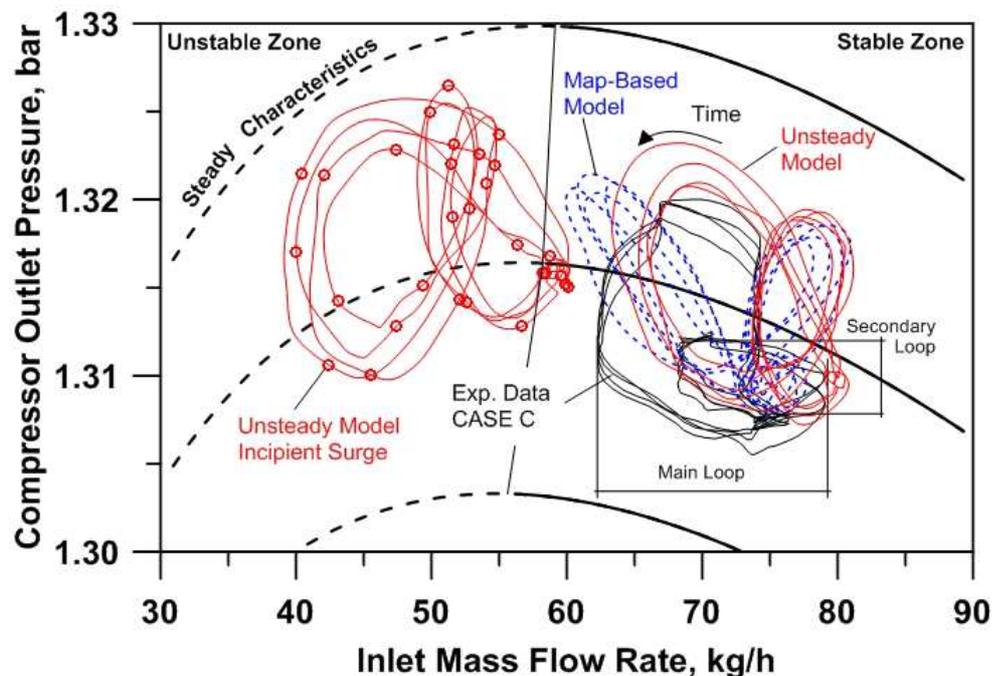


Figura 7. 28 – Condizioni di incipiente pompaggio

## 7.6 Analisi del pompaggio

Una volta tarato il modello e verificata la possibilità di descrivere il comportamento del compressore anche in condizioni instazionarie si è provveduto ad analizzare il fenomeno del pompaggio (deep-surge). Quest'ultimo di verifica quando il punto di funzionamento del compressore supera la linea di pompaggio spostandosi verso portate via via minori. Il pompaggio è una condizione di funzionamento fortemente instabile che si manifesta tramite instaurarsi di caratteristici cicli che, dopo un breve transitorio, si ripetono indefinitamente se non si interviene cambiando opportunamente uno dei parametri operativi. Tali cicli contemplano anche fasi in cui la direzione del flusso all'interno della macchina si inverte. Il fenomeno del soft-surge, discusso nel paragrafo precedente, è indotto dalle fluttuazioni di pressione che attraversano il compressore facendo lavorare localmente lo stesso oltre la linea di pompaggio, mentre il deep-surge, che ci si appresta a descrivere, è provocato dall'accoppiamento instabile del compressore stesso con il circuito in cui è inserito. Infatti, nell'ultimo caso, le fluttuazioni di pressione (e portata massica) si riscontrano mantenendo inalterati i parametri operativi della macchina e le condizioni al controno a testimonianza di come ci si trovi al confronto di un fenomeno di accoppiamento instabile tra due sistemi (il compressore ed il circuito esterno) non indotto da perturbazioni esterne agli stessi.

Al fine di descrivere il pompaggio, si è fatto riferimento da un semplice sistema di compressione come quello rappresentato in fig. 7.29.

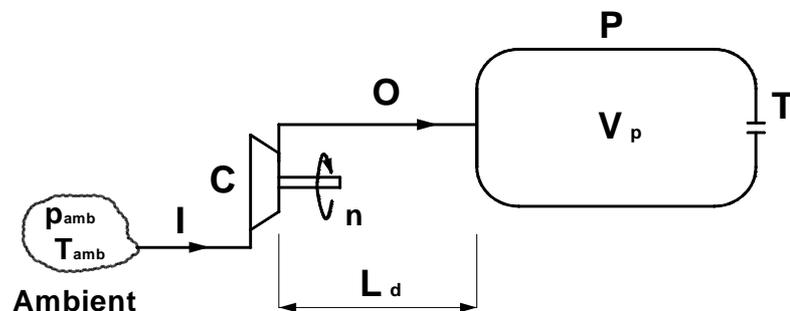


Figura 7. 29 – Schematizzazione sistema di pompaggio

Il sistema è costituito dal condotto di aspirazione (I), da quello di mandata (O), dal compressore (C) e da un plenum (P). Tale basilare sistema è quello che solitamente viene impiegato per analizzare il fenomeno del pompaggio come previsto dal modello di Greitzer [60,61]; quest'ultimo è un modello a parametri concentrati, si basa sulla risoluzione delle equazioni di bilancio di massa nel plenum e della quantità di moto all'interno dei condotti e necessita della conoscenza della mappa del compressore sia per flusso diretto che inverso. La mappa estesa a tutte le condizioni di funzionamento non è solitamente disponibile essendo difficilmente misurabile. Per tale motivo, come precedentemente affermato, in genere, si ricorre a tecniche di estrapolazione delle mappe di carattere meramente matematico.

In virtù di tali osservazioni, si è provveduto a realizzare una stima delle prestazioni del compressore sull'intero campo di funzionamento mediante il modello stazionario proposto includendo anche la regione instabile e quella a portata negativa. Il compressore considerato è ancora una volta rhf3, già oggetto di analisi nel paragrafo precedente. Per la regione a portata positiva si è, pertanto, fatto riferimento mappa illustrata in fig. 7.21 estesa fino all'asse delle portate nulle; la calibrazione del modello, naturalmente, è basata sulla zona di funzionamento stabile del compressore (rami decrescenti delle curve). Per valutare la regione della mappa relativa al flusso inverso, in mancanza di dati sperimentali, si è impiegato il modello nella sua configurazione standard ossia senza calibrarne le costanti di taratura. In tal modo, si sono ottenute le mappe "estese" riportate in fig. 7.30.

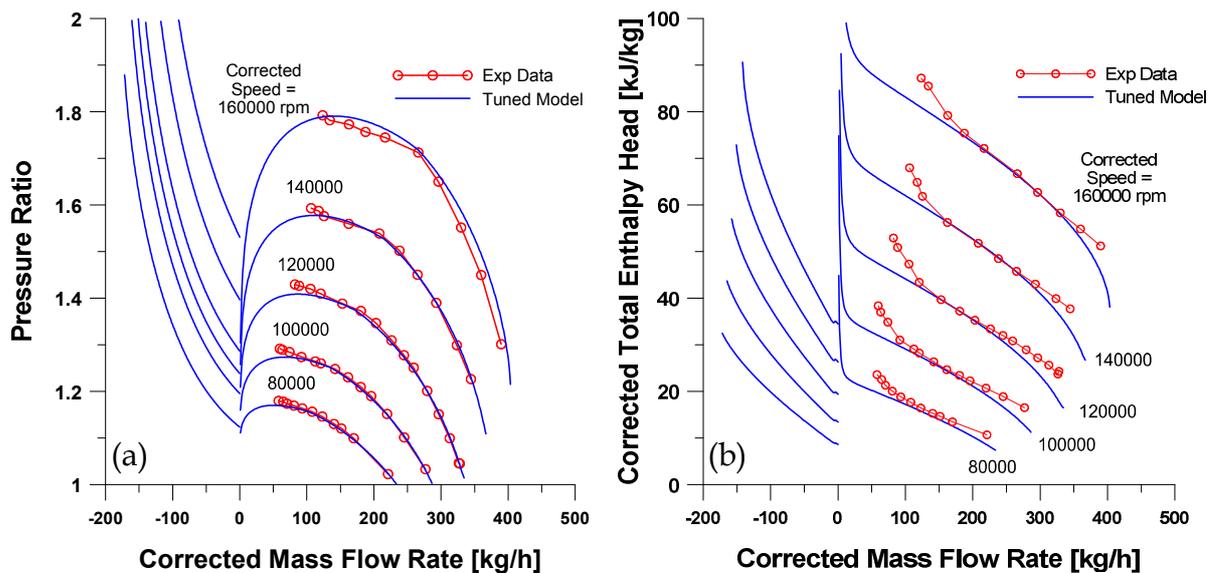


Figura 7. 30 – Mappe “estese” del rapporto di compressione (a) ed incremento di entalpia totale (b)

Per quanto riguarda l’andamento del rapporto di compressione, si nota come i rami a portata negativa riproducano le curve caratteristiche di una valvola di strozzamento congruamente con [62]. Tale andamento, quadratico con la portata, è dovuto principalmente alle rilevanti perdite per incidenza che si realizzano all’imbocco della girante ed alla dissipazione della componente periferica della velocità all’uscita della stessa.

Per flusso inverso la classica definizione di rendimento adiabatico perde di significato comportando, tra l’altro, valori negativi per tale parametro. Si riporta pertanto la mappa della variazione di entalpia totale cui è soggetto il fluido nell’attraversare il compressore. Appare evidente come le curve isovelocità presentino delle discontinuità a portata nulla; tale comportamento si giustifica ricordando che, in condizioni stazionarie, nel passaggio tra portata positiva a negativa si verifica una modifica sostanziale dei triangoli delle velocità all’ingresso ed all’uscita della girante che comporta una alterazione repentina del lavoro trasferito al fluido. Naturalmente, tale fenomenologia non si riscontra nel funzionamento effettivo del compressore quando le transizioni attraverso il valore nullo di portata sono molto rapide (come nel corso del pompaggio). Si nota, inoltre, che, anche in condizioni di flusso inverso, si verifica uno scambio di lavoro con il fluido ed, in particolare, lo stesso incrementa il proprio patrimonio energetico per quanto tale incremento, unitamente all’originario patrimonio energetico di prima

specie, venga degradato in calore per effetto delle perdite che si realizzano nella macchina. Tale considerazione trova giustificazione nel fatto che, per flusso inverso, pur avendo una variazione positiva di entalpia (quindi, un lavoro positivo incamerato dal fluido), il fluido espande attraversando la macchina. Tale incremento di entalpia potrebbe spiegare, almeno parzialmente, perché in condizioni d'incipiente pompaggio si riscontra un aumento di temperatura all'ingresso della girante. Nella letteratura tecnica attuale non si sono riscontrati modelli in grado di descrivere opportunamente lo scambio energetico tra fluido e macchina anche per flusso inverso: alcuni suppongono il processo isoentalpico [62], altri assumono un rendimento costante e molto basso [63], altri ancora estrapolano a portate negative il parametro adimensionale della coppia assorbita dal compressore [64]. Evidentemente, nessuno di tali approcci tenta di descrivere la fisica del fenomeno.

Una volta stimate le prestazioni del compressore sull'intero campo di funzionamento si può passare allo studio del pompaggio. Il già citato modello di Greitzer presenta, oltre alla necessità della conoscenza della mappa "estesa", ulteriori inconvenienti ed approssimazioni: non tiene in conto della propagazione delle onde di pressione nel circuito esterno e nel compressore e dei fenomeni di accumulo di massa ed energia all'interno dello stesso.

Onde superare tali limitazioni, i condotti di aspirazione e di mandata a monte ed a valle del compressore sono stati modellati secondo un approccio monodimensionale; il plenum è descritto, invece, secondo un modello zerodimensionale in quanto si suppone che le onde di pressione siano completamente smorzate al suo interno.

Il compressore è introdotto nel modello seguendo tre tecniche:

1. risoluzione della condizione al contorno tra i condotti di aspirazione e scarico secondo l'approccio tradizionale quasi-stazionario basato sulla mappa del componente (nel seguito sarà indicato con l'acronimo MB).
2. variante della prima tecnica che prevede l'aggiunta di un condotto virtuale a valle della giunzione "compressore". Tale condotto, come visto nel paragrafo precedente, deve presentare lo stesso volume e lunghezza equivalente del compressore reale. Avendo tenuto in conto delle perdite

che si realizzano nel compressore nelle mappe prestazionali, il flusso all'interno del condotto virtuale si suppone adiabatico ed isentropico.

3. utilizzo del modello instazionario del compressore. Lo stesso rappresenta la metodologia più raffinata poiché, come già menzionato, tiene automaticamente conto dei fenomeni di accumulo di massa ed energia e della propagazione delle onde di pressione all'interno del compressore. In mancanza di dati sperimentali nel prosieguo dell'analisi verrà usato come termine di paragone rispetto alle altre metodologie (1DC).

La velocità di rotazione del compressore è fissata a 110000 giri al minuto, mentre la pressione e la temperatura a monte ed a valle del sistema sono imposte costanti e, rispettivamente, pari a 0,981 bar e 273.15 K. La portata è regolata variando opportunamente l'apertura della valvola di strozzamento T di fig. 7.29 che, nel caso specifico, onde innescare il fenomeno del pompaggio, è chiusa fino a raggiungere un diametro equivalente di 7,5 mm. Il diametro dei condotti è posto pari a 0,05 m, mentre la lunghezza del condotto di aspirazione è di 0,5 m. Quella del condotto di mandata ed il volume del plenum rappresentano due grandezze geometriche di cui si è indagata l'influenza sul fenomeno del pompaggio effettuando un'analisi parametrica nella quale i rispettivi intervalli di variazione sono [0,2 m / 1,6 m] e [2,5 l / 80 l].

L'analisi del pompaggio è suddivisa in due fasi: la prima è volta a stabilire se sia possibile riprodurre i risultati forniti dal modello instazionario tramite l'approccio basato su mappa valutando l'opportunità di introdurre opportuni correttivi rispetto alla metodologia solitamente impiegata; la seconda si pone l'obiettivo di verificare come ed in che misura i già citati parametri geometrici influenzino il pompaggio.

I cicli di pompaggio riportati in fig. 7.31 sono ottenuti dopo un transitorio numerico durante il quale il plenum si riempie di aria compressa fino al raggiungimento di un valore critico che dipende dalla velocità di rotazione del compressore. In particolare, sulla sinistra (fig. 7.31a) è mostrato un classico ciclo di pompaggio in termini oscillazione di pressione regnante nel plenum in funzione della portata massica entrante in quest'ultimo; sulla destra è riportata la fluttuazione temporale (fig. 7.31b) della portata in ingresso al plenum che, come si nota, presenta un tipico andamento periodico. La finestra temporale dell'illustrazione è stata scelta

in modo tale da contenere circa due cicli consecutivi per il modello 1DC; l'origine è stata fissata in corrispondenza dell'istante in cui la passa da valori positivi a negativi. I casi analizzati confrontano i risultati del modello instazionario con quelli derivati dall'approccio basato su mappa in presenza o meno della correzione ottenuta grazie all'introduzione del condotto virtuale.

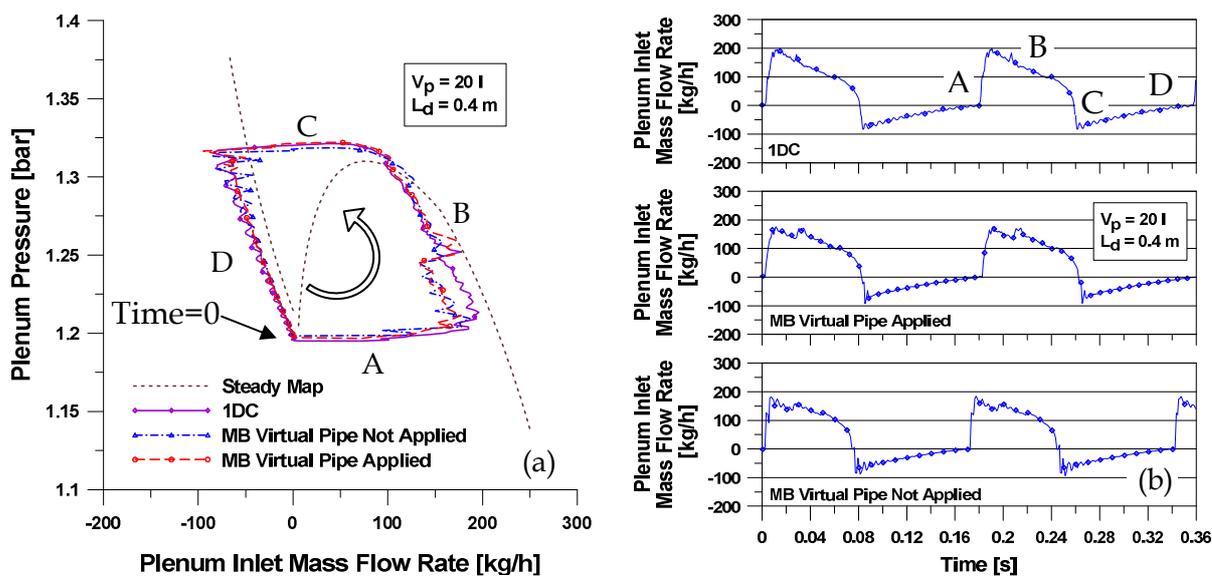


Figura 7. 31 – Influenza dell'introduzione del condotto virtuale a valle del compressore nel modello MB comparato al modello 1DC.

Come è noto, un ciclo di pompaggio è composto da due fasi principali (B e D) nel corso delle quali il punto di funzionamento si muove in prossimità del ramo stabile e di quello negativo della mappa e due rapide transizioni (A e C) che si verificano quando la portata cambia segno. Tale comportamento è opportunamente riprodotto sia dal modello 1DC che da quello MB. La presenza del condotto virtuale influenza marginalmente la forma del ciclo, mentre induce una modifica della frequenza di pompaggio nel senso di approssimarla a quella prevista dal modello instazionario del compressore. La frequenza di pompaggio è, come verrà discusso nel seguito, fortemente influenzata dalle proprietà geometriche del sistema e, più precisamente, dal volume totale dello stesso. Resta pertanto confermato come, anche nel caso della modellazione del pompaggio, l'introduzione di un condotto virtuale consenta di tenere conto di fenomeni di accumulo di massa ed energia e della propagazione delle onde di pressione all'interno del compressore nel corso di

condizioni operative fortemente instazionarie. Per quanto importanti, le dimensioni geometriche di tale condotto non sono solitamente disponibili essendo di difficile valutazione; il modulo geometrico, una volta schematizzato il compressore, è in grado di fornirne una stima in maniera rapida ed automatica.

Una volta appurata l'importanza utilizzare nel modello un condotto virtuale a valle del compressore, si è passati ad indagare quale sia la strategia più appropriata da impiegare per la correzione delle grandezze operative (portata massica e velocità di rotazione) con cui accedere alle mappe sia nel flusso diretto che inverso.

Questo è un punto aperto nella letteratura tecnica inerente la modellazione del pompaggio; infatti, sembra che molti autori [65,66] non correggano affatto la portata e la velocità di rotazione con i valori di pressione e temperatura a monte o a valle del compressore forse perché, trattando di macchine assiali, sia gli incrementi di pressione che di temperatura sono modesti se confrontati a quelli che si realizzano nelle macchine centrifughe. Al fine di valutare tale effetto, in fig. 7.32 si riporta il confronto tra i risultati ottenuti dal modello 1DC e quelli forniti dall'approccio basato sulle mappe in presenza o meno della correzione sui parametri.

Prima passare all'analisi di tale confronto, verrà descritta la metodologia impiegata per la correzione dei parametri. Nel caso di flusso diretto, viene impiegata la tecnica solitamente utilizzata nella simulazioni dei motori a combustione interna ossia si corregge la portata massica e la velocità di rotazione con i valori di pressione e temperatura a monte del compressore secondo le (7.4) e (7.5). Nella procedura proposta, invece, per flusso inverso, si correggono i citati parametri con le condizioni termodinamiche a valle del compressore. In questo modo si realizza una procedura di correzione "sensibile" alla direzione del flusso. Tale scelta presenta alcuni inconvenienti di natura numerica in quanto, nel passaggio da portata positiva a negativa e viceversa, la velocità di rotazione corretta subisce una brusca variazione tra un passo d'integrazione e quello successivo (pur avendo fissato la velocità effettiva di rotazione) come conseguenza delle diverse temperature regnanti a monte ed a valle del compressore. Ciò può indurre oscillazioni non fisiche nei risultati ogni qual volta si verifica un'inversione di portata; l'accorgimento utilizzato per ovviare a tale problema consiste in una correzione dei parametri con la pressione e la

temperatura opportunamente mediati tra le condizioni di monte e valle compressore così da realizzare transizioni meno repentine.

Appare evidente da fig. 7.32 come la correzione dei parametri nel modello MB riesca ad avvicinare molto i risultati forniti dal modello 1DC sia in termini di forma del ciclo (fig. 7.32a) che di frequenza di pompaggio (fig. 7.32b). Il modello MB senza correzione dei parametri fornisce cicli di durata minore (maggiore frequenza) e fluttuazioni di portata cui competono massimi di maggiore entità.

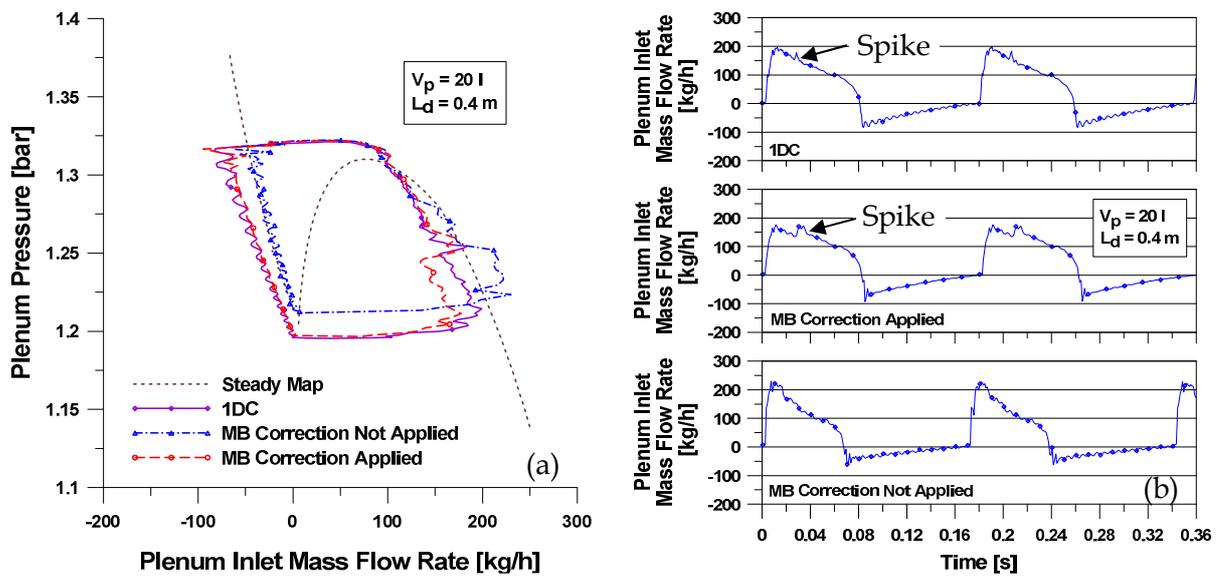


Figura 7. 32 - Influenza della correzione della portata e della velocità di rotazione nel modello MB comparato al modello 1DC

L'effetto della correzione dei parametri può essere spiegato osservando che l'elevata temperatura regnante nel condotto di mandata si traduce in una repentina riduzione della velocità corretta non appena il flusso si inverte (fase C in fig. 7.31). Successivamente, nel corso della fase D (fase del flusso inverso), la velocità corretta continua a variare in conseguenza della riduzione di pressione e temperatura dovuta allo svuotamento del plenum. Questo è il motivo per cui l'ampiezza, in termini di pressione, del ciclo di pompaggio previsto dal modello MB con correzione dei parametri è maggiore di quella che si ottiene in assenza della stessa.

Al fine di chiarificare tali considerazioni, si faccia riferimento alla fig. 7.33 che mostra l'andamento temporale di alcune grandezze d'interesse a monte ed a valle del compressore ottenuto dai modelli 1DC e MB con la correzione dei parametri e

l'utilizzo del condotto virtuale; in tal caso, le grandezze alla mandata del compressore sono in realtà valutate all'uscita del condotto virtuale.

Mentre per la portata massica e la pressione istantanea le differenze sono piuttosto contenute, i profili di temperatura mostrano alcune discordanze. Il modello MB, infatti, prevede una brusca variazione di temperatura all'aspirazione del compressore non appena il flusso s'inverte (fig. 7.33e). Ciò è conseguente al passaggio istantaneo di una discontinuità di contatto attraverso la giunzione "compressore"; lo stesso evento, invece, si manifesta con un certo ritardo temporale per il modello 1DC a causa del tempo richiesto dalla discontinuità di temperatura nel risalire il compressore stesso. Quando poi il flusso s'inverte nuovamente, tornando ad essere diretto, i gas caldi che riempiono il condotto di aspirazione (e che hanno attraversato il compressore già due volte sino a quel momento) subiscono un ulteriore incremento di temperatura nell'essere elaborati dal compressore (fig. 7.33c).

Una brusca riduzione dei valori di temperatura a monte ad a valle del compressore si verifica poi quando il condotto di aspirazione si svuota dai gas caldi ricircolati ed una nuova discontinuità di contatto attraversa la macchina. Le conseguenti variazioni di densità influenzano gli andamenti temporali della portata che mostrano un'evidente spike all'aspirazione ed alla mandata del compressore (fig. 7.33a e 7.33b) ed all'ingresso del plenum (fig. 7.32b). Tale fenomenologia è descritta anche dal modello MB soprattutto grazie alla correzione della velocità, mentre, in assenza di tale correzione, non si riscontra lo spike come evidente in fig. 7.32.

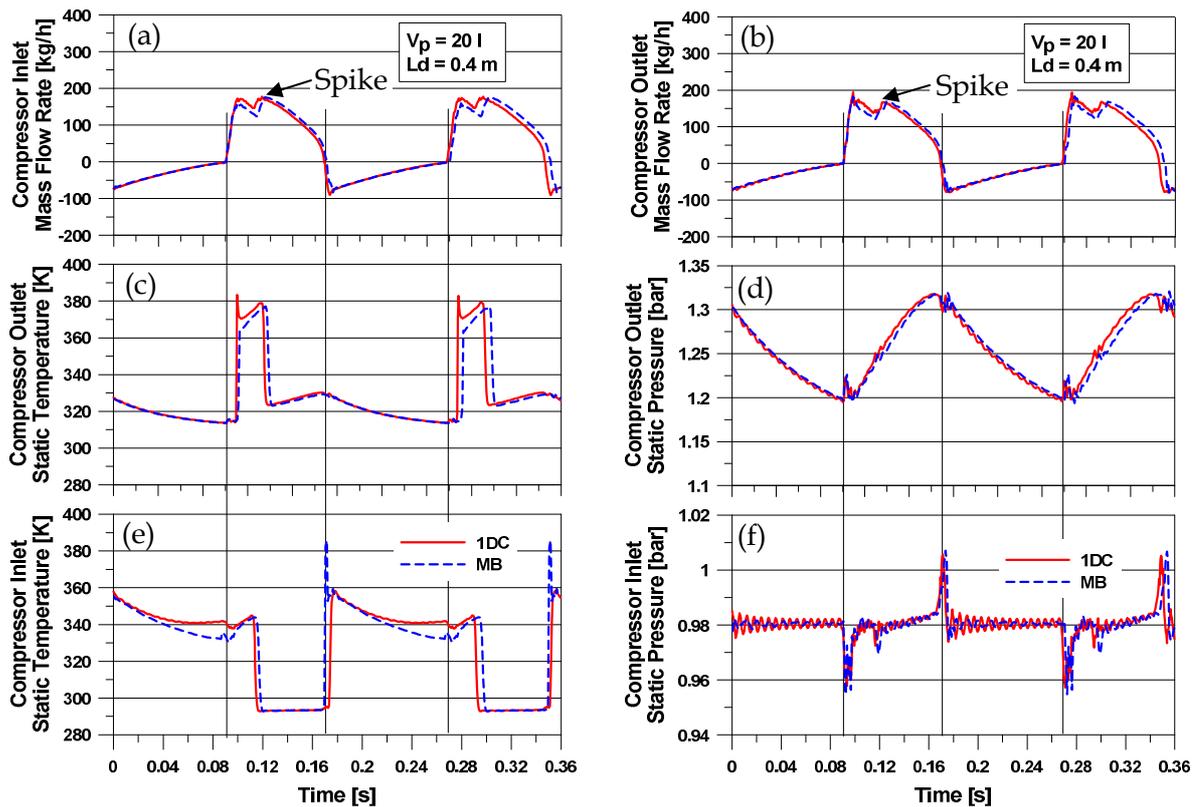
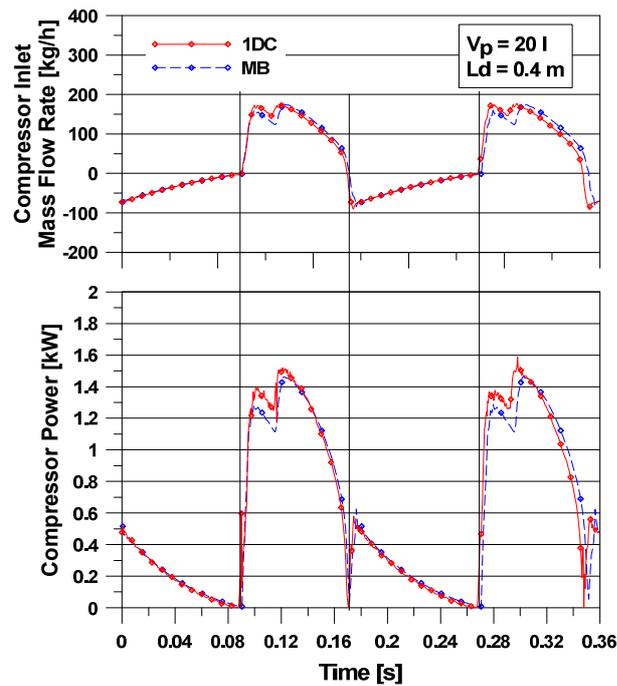


Figura 7.33 – Confronto modelli 1DC/MC in presenza di correzione dei parametri e del condotto virtuale

Riassumendo, i risultati di questa prima analisi sottolineano come l'introduzione del condotto virtuale e l'adozione della correzione dei parametri consentano al modello MB di approssimare i risultati ottenibili tramite il più raffinato modello instazionario del compressore in termini di portata massica, temperatura e pressione.

Anche gli andamenti della potenza sono piuttosto simili (fig. 7.34) ad eccezione degli istanti immediatamente successivi all'inversione di portata in cui si manifesta la differenza nella valutazione dei fenomeni di accumulo di massa ed energia all'interno del compressore da parte dei due approcci. E' interessante notare come il compressore assorba una potenza positiva sia per flusso diretto inverso che inverso; la stessa si annulla ovviamente nell'istante in cui avviene l'inversione di portata.



**Figura 7.34 - Confronto modelli 1DC/MC in presenza di correzione dei parametri e del condotto virtuale in termini di potenza assorbita**

Una volta conclusa tale analisi preliminare di carattere metodologico, si passa allo studio dell'influenza sul pompaggio dei già citati parametri geometrici del sistema considerato in termini di frequenza e fluttuazioni di pressione e portata massica nel plenum. A tal fine, per motivi di tempi di calcolo, si è preferito utilizzare il modello MB opportunamente modificato con gli accorgimenti precedentemente discussi.

La figura 7.35 mostra qual è l'influenza della lunghezza del condotto di mandata sul pompaggio. Appare evidente come tale parametro geometrico influisca solo marginalmente sulla forma del ciclo (fig. 7.35a) se si escludono le oscillazioni di portata che s'innescano soprattutto quando il flusso passa da diretto ad inverso a causa della propagazione delle onde di pressione all'interno dei condotti facenti parte del sistema di compressione.

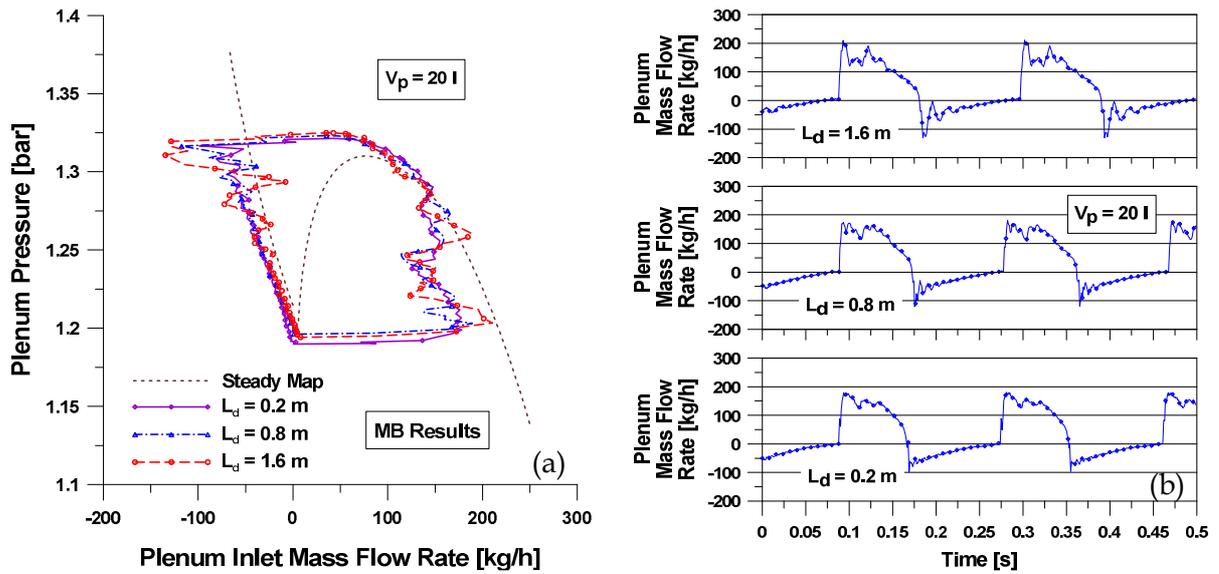


Figura 7.35 – Influenza della lunghezza del condotto di mandata sul pompaggio

Come era logico attendersi, più lungo è il condotto di mandata, maggiore è l'ampiezza delle predette oscillazioni di portata. Si nota altresì come al crescere di tale parametro geometrico, si riduca la frequenza delle pulsazioni di portata. Ciò si giustifica semplicemente ricordando che la frequenza di pompaggio è controllata dal valore del volume dell'intero sistema che è a sua volta dipende dalla lunghezza del condotto di mandata.

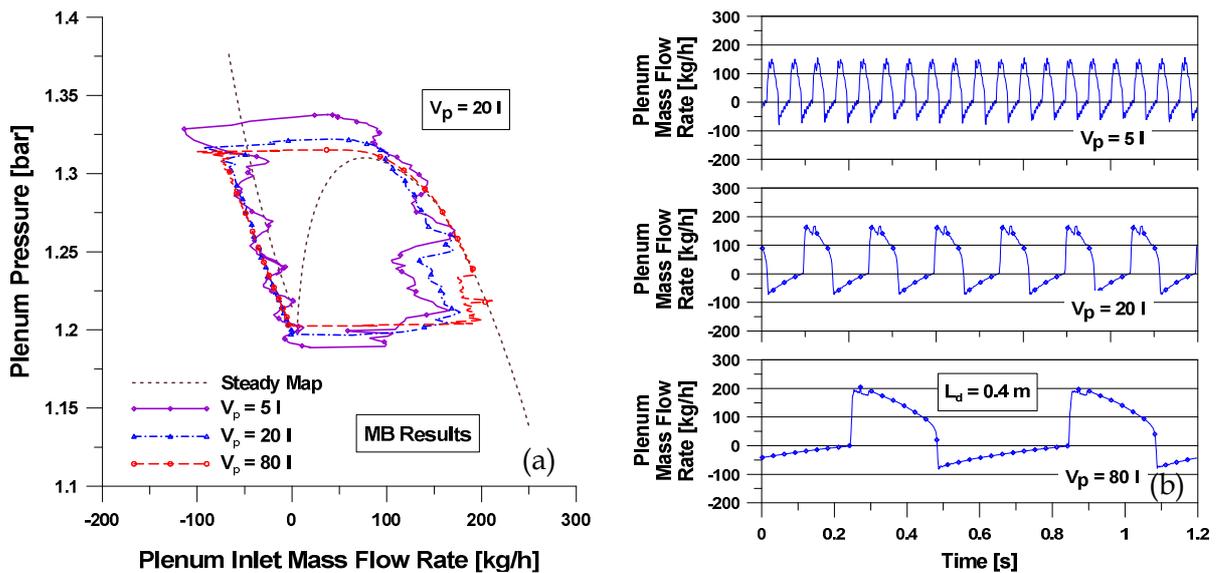


Figura 7.36- Influenza del volume del plenum sul pompaggio

Tale considerazione trova conferma nell'osservazione di figura 7.36 in cui è evidenziata l'influenza del volume del plenum sul pompaggio. Come si nota, l'ampiezza delle fluttuazioni di portata e pressione riscontrabili nel ciclo di pompaggio (fig. 7.36a) risulta via via crescente al ridursi delle dimensioni del plenum. In particolare, per volumi del plenum più piccoli si esaltano gli effetti dell'instazionarietà del fenomeno, mentre per quelli di maggiore entità, il punto operativo segue più fedelmente la mappa stazionaria sia per portate positive che negative. La frequenza di pompaggio risente fortemente delle dimensioni del plenum aumentando al ridursi delle stesse (fig. 7.36b).

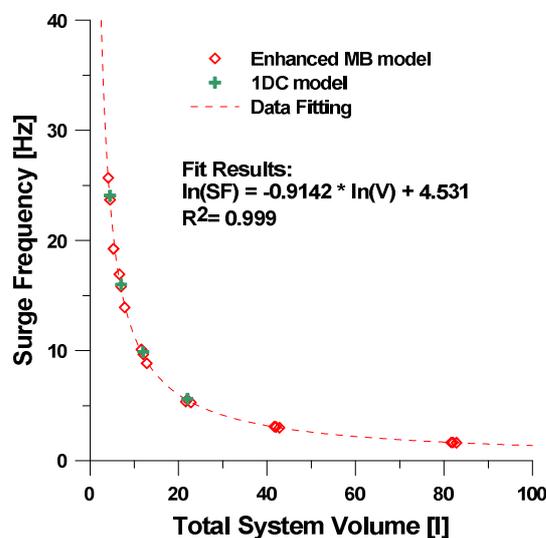


Figura 7.37 – Frequenza di pompaggio vs. Volume totale del sistema

In conclusione si nota come la frequenza di pompaggio si correli perfettamente con il volume totale del sistema (fig. 7.37) a testimonianza di come quest'ultimo sia il parametro geometrico che maggiormente influenza tale fenomeno. La fig. 7.37 mostra altresì come la stessa curva sia in grado di correlare i risultati forniti dal modello basato su mappa (seppure opportunamente modificato) e quelli derivanti dal modello instazionaria del compressore ad evidenziare l'equivalenza di questi ultimi in termini di descrizione del fenomeno del pompaggio. Naturalmente, a vantaggio della procedura MB si riscontrano tempi di esecuzione della simulazione notevolmente più contenuti.

Tra i futuri sviluppi della ricerca, resta la validazione del modello del compressore nell'analisi del pompaggio tramite il confronto con rilievi sperimentali.

# Taratura del modello della turbina ed analisi dei risultati

## 8.1 Introduzione

In questo capitolo è descritta la procedura di ottimizzazione impiegata per calibrare il modello stazionario della turbina per i due casi analizzati: una turbina a geometria fissa regolata tramite Waste-Gate ed una a geometria variabile.

## 8.2 Taratura del modello

Analogamente a quanto già discusso nel caso del compressore, poiché le correlazioni di perdita introdotte nel modello descrivono gli effetti di fenomeni complessi sulla base di un numero ristretto di parametri, è inevitabile che il loro utilizzo comporti alcune incertezze nei risultati forniti. Per tale motivo, anche nel caso del modello stazionario della turbina, ogni correlazione è opportunamente corretta mediante un coefficiente moltiplicativo di taratura (tabella 8.1):

Coefficiente	Grandezza tarata
$f_{at}$	Coefficiente di attrito
$h_{cw}$	Coefficiente di scambio termico convettivo
$x_{hin}$	Temperatura di parete
$c_d$	Perdite per trafileamento
$c_{incnoz}$	Perdite per incidenza statore
$c_{incimp}$	Perdite per incidenza girante
$c_{incimpopt}$	Angolo minima perdita incidenza girante
$c_{exwg}$	Perdita mixing Waste-Gate
$c_{lk}$	Perdita per leakage
$c_{bl}$	Perdita per carico palare
$c_{vol}$	Angolo di flusso uscita voluta

**Tabella 8. 1 – Coefficienti di taratura perdite**

Ancora una volta la ricerca delle costanti di taratura tali da consentire la più fedele riproduzione delle prestazioni della turbina in relazione ai dati sperimentali disponibili è effettuata mediante una procedura automatica. Quest'ultima, oltre a tarare i coefficienti sopraelencati, provvede a modificare opportunamente i valori di alcune grandezze geometriche su cui vi è maggiore incertezza di misura. La tabella 8.2 elenca tali grandezze unitamente agli intervalli di variazione ammessi.

Grandezza	Intervallo di variazione consentito
$\varphi_{4h} \div \varphi_{4s}$	$\pm 6^\circ$
$b$	$\pm 0,5 \text{ mm}$
$ispessgir$	$0,5 \div 1$
$\varphi_{2v}$	$\pm 3^\circ$
$\varphi_{3v}$	$\pm 3^\circ$
$\gamma_{2v}$	$\pm 3^\circ$
$\gamma_{3v}$	$\pm 3^\circ$
$ispessnoz$	$0,5 \div 1$

Tabella 8. 2 – Costanti taratura geometria

Il significato di tali grandezze è stato discusso nel capitolo 2 ad eccezione di  $ispessgir$  e  $ispessnoz$  che sono, rispettivamente, i coefficienti moltiplicativi globali dello spessore della pala rotorica e statorica. Il modello presenta complessivamente 19 parametri da ottimizzare: 11 riguardanti le perdite (tabella 8.1) ed 8 la caratterizzazione geometrica del componente (tabella 8.2).

Essendo il modello ancora in fase di sviluppo ed affinamento, i risultati proposti rappresentano il frutto di un'analisi preliminare. Infatti, allo stadio attuale, la procedura non contempla alcune perdite che, pur non essendo propriamente di natura termofluidodinamica, vengono solitamente tenute in conto nella valutazione sperimentale del rendimento. Quest'ultimo, infatti, andrebbe calcolato come rapporto tra la potenza disponibile all'asse della girante  $P_r$  e quella che sarebbe ceduta allo stesso qualora l'espansione avvenisse adiabaticamente e isentropicamente  $P_{is}$  per assegnanti valori delle pressioni di inizio e fine espansione.

$$\eta_t = \frac{P_r}{P_{is}} = \frac{\dot{m}_t (h_3^0 - h_4)}{\dot{m}_t (h_3^0 - h_{4is})} = \frac{\dot{m}_t c_p (T_3^0 - T_4)}{\dot{m}_t c_p (T_3^0 - T_{4is})} = \frac{\dot{m}_t c_p \left(1 - \frac{T_4}{T_3^0}\right)}{\dot{m}_t c_p \left[1 - 1 / \left(\frac{p_3^0}{p_4}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad (8.1)$$

A causa di inaccurately legate alle misura della temperatura a monte ed a valle della turbina, si preferisce valutare il numeratore dell'espressione del rendimento sulla base della misura della potenza assorbita dal componente dell'apparato sperimentale che frena la turbina sia esso un compressore o un misuratore di coppia. Naturalmente, il valore che in tal modo ne deriva tiene conto anche delle perdite di tipo meccanico che si realizzano a causa dell'attrito che si sviluppa nei cuscinetti del turbocompressore e di quelle per effetto ventilante. Le prime, tra l'altro, influenzano in maniera sostanziale lo scambio termico all'interno del componente avendo, in tal modo, un ulteriore effetto secondario sul rendimento.

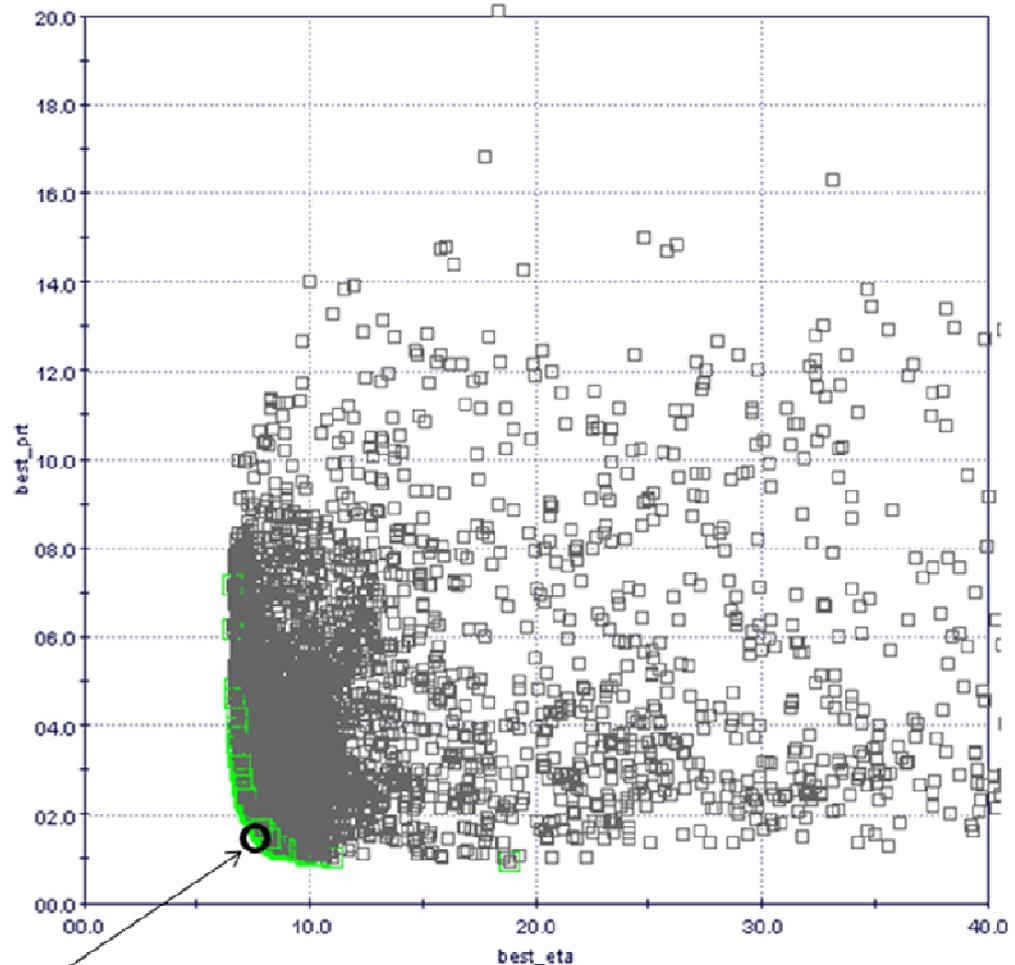
La procedura di ottimizzazione impiegata per la taratura del modello è implementata, analogamente a quanto fatto per il compressore, mediante un codice commerciale (ModeFrontier). Nel caso specifico, però, è condotta un'ottimizzazione multiobbiettivo in cui le grandezze da minimizzare sono gli scostamenti tra i valori sperimentali e quelli calcolati della portata massica ridotta  $\varepsilon_{\dot{m}}$  e del rendimento  $\varepsilon_{\eta}$  a parità di rapporto di espansione.

$$\varepsilon_{\dot{m}} = \sum_{i=1}^{N_{map}} \frac{|\dot{m}_i^{map} - \dot{m}_i^{calc}|}{\dot{m}_i^{map}} \quad \varepsilon_{\eta} = \sum_{i=1}^{N_{map}} \frac{|\eta_i^{map} - \eta_i^{calc}|}{\eta_i^{map}} \quad (8.2)$$

La taratura del modello è effettuata per le turbine dei gruppi di sovralimentazione rhf3 e td04. La prima è una turbina a geometria fissa regolata tramite Waste-Gate; la mappa sperimentale impiegata nell'ottimizzazione fa riferimento a condizioni operative a valvola di by-pass completamente chiusa. La seconda è una turbina a geometria variabile; come è solito verificarsi in tali casi, le mappe prestazionali disponibili sono misurate sperimentalmente per diverse condizioni di apertura della palettatura statorica ed identificate convenzionalmente con una percentuale o con un numero intero. E' evidente come tale informazione non possa essere direttamente impiegata per individuare una specifica posizione della palettatura statorica da riprodurre poi nel modello proposto. In virtù di tale incertezza sul grado di regolazione della turbomacchina ed in attesa di trovare una metodologia per valutare la percentuale di apertura da assegnare in input al codice

in funzione del valore dell'apertura della turbina cui si riferiscono le mappe sperimentali, si è deciso di effettuare la taratura del modello sulla base di una mappa misurata in condizioni di apertura intermedia cui si è associata convenzionalmente una percentuale di apertura del 50%.

L'algoritmo impiegato nell'ottimizzazione è di tipo genetico come quello adottato nel caso del compressore. Essendo un problema multiobiettivo, non è possibile individuare un'unica soluzione di ottimo ossia una configurazione dei parametri di taratura tale per cui si minimizzino contemporaneamente l'errore sulla portata e quello sul rendimento. E' possibile, invece, tra tutte le configurazioni indagate dall'ottimizzatore, stabilire quali di queste si trovino lungo il così detto fronte di Pareto [67]. In figura 8.1 sono riportati gli errori  $\varepsilon_m$  e  $\varepsilon_\eta$  per tutte le configurazioni indagate riguardo la turbina rhf3; tra di queste sono evidenziate in verde quelle appartenenti al fronte di Pareto. Come si nota, la forma del fronte è piuttosto "piatta" lontano dall'origine degli assi; ciò ha consentito di individuare una soluzione che comportasse contemporaneamente dei valori dell'errore sulla portata e sul rendimento prossimi ai rispettivi minimi (indicata con la dicitura di "soluzione di compromesso"). Un comportamento analogo si è riscontrato anche per il fronte di Pareto ottenuto nella taratura del modello sulla turbina td04.



Soluzione di compromesso

Figura 8.1 – Fronte di Pareto nel piano  $\varepsilon_m - \varepsilon_\eta - rhf3$

### 8.3 Analisi dei risultati

La seguente tabella sintetizza i risultati del processo di ottimizzazione per le due turbine considerate. I valori degli angoli costruttivi della palettatura statorica e rotorica variano solo di qualche grado rispetto ai valori di default. Tali incertezze rientrano comunque all'interno dell'errore di misura che risulta piuttosto grande per le dimensioni angolari. Si nota anche che il moltiplicatore dello spessore delle pale è in ogni caso minore dell'unità comportando un incremento della stima dell'area della sezione di passaggio disponibile per il flusso.

	Valori di Default	Turbina	
		rhf3	td04
<b>Errori di misura</b>			
$d\varphi_4$	0	-8.17°	-2.4°
$db$	0	-0.458	-0.107
$ispessgir$	1	0.664	0.696
$d\varphi_{2v}$	0	X	-1.5°
$d\varphi_{3v}$	0	X	3.0°
$d\gamma_{2v}$	0	X	0.55°
$d\gamma_{3v}$	0	X	1.85°
$ispessnoz$	1	X	0.701
<b>Costanti di perdita</b>			
$fat$	1	6.02	2.11
$h_{cw}$	1	1.075	0.5
$x_{hin}$	0.3	0.3	0.49
$c_d$	0.1	0.0	0.213
$c_{incnoz}$	1	X	0.360
$c_{incimp}$	1	0.7	0.705
$c_{incimpopt}$	0	14.1°	-6.45°
$c_{exvg}$	1	X	0.98
$c_{lk}$	0.1	0.21	0.138
$c_{bl}$	1	1.194	0.138
$c_{vol}$	1	0.337	1.116
<b>Risultati</b>			
$\varepsilon_{in}$		1.052%	1.880%
$\varepsilon_{\eta}$		11.932%	1.121%

Tabella 7.3 – Tabella riassuntiva risultati dell'ottimizzazione

Ad accezione del moltiplicatore del coefficiente d'attrito, i valori delle altre costanti di taratura ricavati dall'ottimizzazione non si discostano eccessivamente da quelli di default. A testimonianza della scarsa predittività del modello che soggiace all'individuazione dell'angolo di flusso per cui si hanno le minime perdite d'incidenza all'ingresso della girante [38], si nota come il correttore di tale grandezza  $c_{incimopt}$  assuma valori di segno opposto per le due turbine considerate.

Gli errori sul rapporto di espansione sono in entrambi i casi inferiori al 2%. Infatti, i risultati numerici riportati nelle fig. 8.2 mostrano un buon accordo con i dati sperimentali soprattutto alle velocità di rotazione basse e medie. Per le maggiori velocità di rotazione e, quindi, in condizioni prossime al bloccaggio si nota come l'errore nelle previsioni del modello si accentui; ciò presumibilmente è da imputare al fatto che in tali condizioni possono instaurarsi sistemi di onde d'urto all'interno dei condotti rotorici non descrivibili mediante l'approccio monodimensionale stazionario impiegato. Negli sviluppi futuri ci si propone, in analogia a quanto fatto per il compressore, di introdurre nel modello opportune correlazioni di perdita per tenere conto degli effetti del raggiungimento di condizioni di flusso prossime a quelle soniche.

Il valore medio del rendimento è adeguatamente riprodotto dalla procedura proposta (fig. 8.2). Viceversa, gli andamenti delle curve di origine numerica non seguono quelle ricavate sperimentalmente presumibilmente a causa del fatto che gli effetti di alcuni fenomeni (perdite per attrito meccanico e per effetto disco) non sono stati ancora introdotti nel modello.

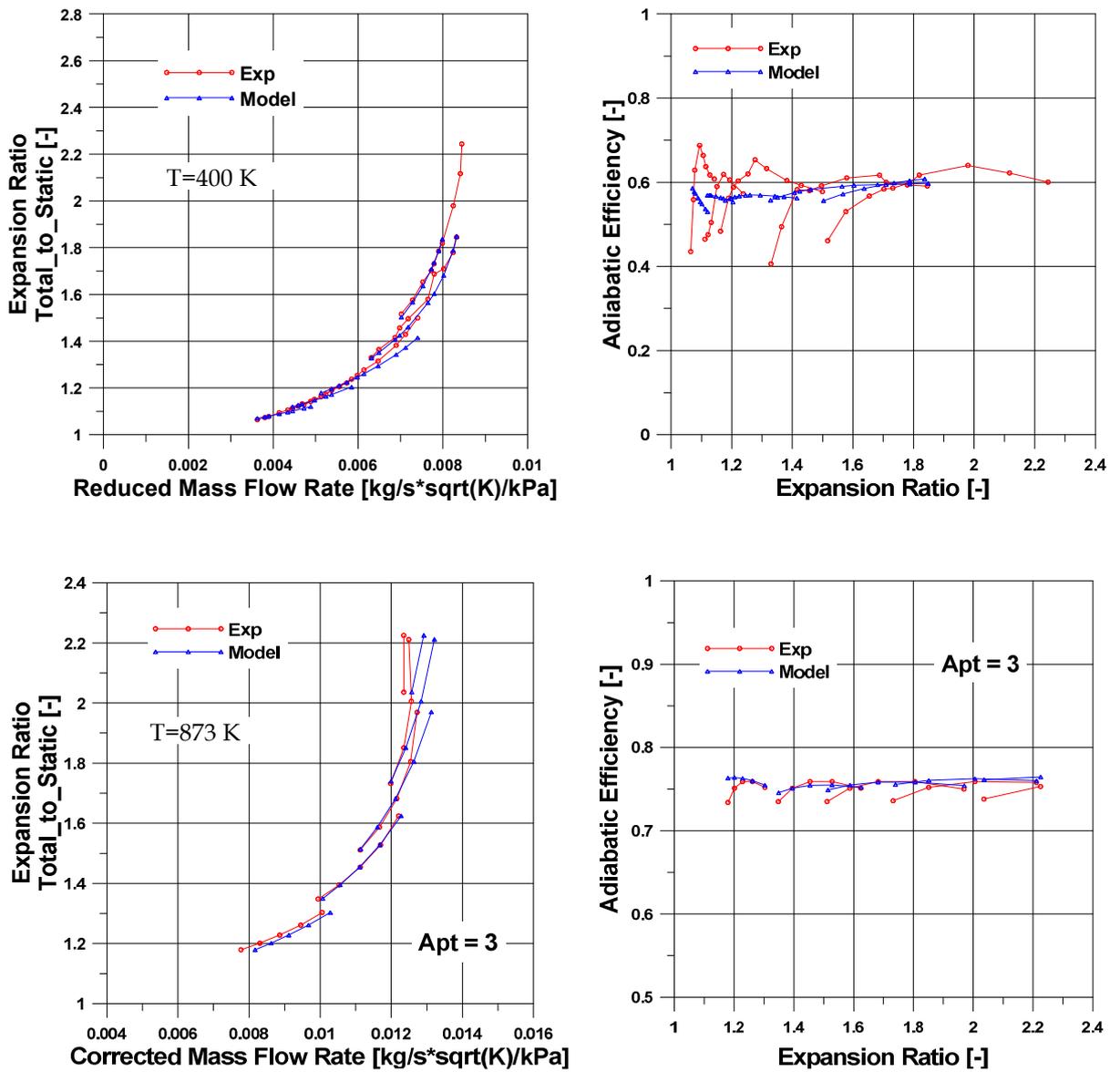


Figura 8. 2 – Mappe prestazionali td04 e rhf3

Il presente lavoro di tesi ha riguardato lo sviluppo di modelli numerici volti alla stima delle prestazioni del compressore e della turbina facenti parte del gruppo di sovralimentazione di MCI. Tale studio ha avuto come fine quello di superare e migliorare l'approccio tradizionalmente impiegato nei codici monodimensionali basato sulle mappe stazionarie misurate sperimentalmente; infatti, la metodologia qui presentata, da un lato, consente di descrivere adeguatamente il comportamento instazionario delle turbomacchine quando accoppiate ad un MCI, dall'altro, rende superfluo il ricorso a tecniche di interpolazione o estrapolazione di dati di carattere meramente matematico o all'improprio utilizzo dei risultati della teoria della similitudine.

I modelli sviluppati forniscono una valutazione delle prestazioni delle turbomacchine mediante la risoluzione delle equazioni del moto in ciascun componente che costituisce le stesse nell'ipotesi di flusso monodimensionale. A tale fine, il primo passo compiuto è stato quello di caratterizzare geometricamente compressore e turbina realizzando una procedura numerica che ne schematizzasse i diversi condotti fissi e rotanti sulla base di un numero contenuto di grandezze lineari ed angolari misurate direttamente sulle turbomacchine. Particolare cura è stata riposta nella ricostruzione della geometria della girante vista la complessità di tale componente.

Il modulo geometrico sviluppato ha poi consentito di ricavare le informazioni necessarie alla risoluzione delle equazioni del moto come, ad esempio, gli andamenti dell'area della sezione di passaggio e del perimetro bagnato in funzione di

un'opportuna coordinata spaziale (ascissa curvilinea nel condotto rotorico, il raggio nel diffusore, etc.).

Partendo dalle equazioni di Navier-Stokes, si sono ricavate le equazioni del moto nell'ipotesi di flusso monodimensionale sia per condotti fissi che per quelli rotanti comprensive dei termini che tengono conto dei fenomeni di attrito e di scambio termico; nel secondo caso, inoltre, le equazioni includono il contributo inerente la forza centrifuga cui è sottoposta la particella fluida nell'attraversare un condotto rotante. Sono state altresì desunte le equazioni per flusso assialsimmetrico impiegare per la risoluzione del moto all'interno di alcuni componenti delle turbomacchine come, ad esempio, il diffusore del compressore.

Si sono illustrate le tecniche e gli algoritmi impiegati per l'integrazione delle equazioni del moto instazionarie e per il calcolo delle condizioni al contorno. Nel primo caso, è stata adottata una tecnica di integrazione numerica ai volumi finiti appartenente alla famiglia degli schemi MUSCL corredata di opportuni accorgimenti volti ad inibire la formazioni di oscillazioni non fisiche nelle soluzioni fornite. Per la risoluzione delle condizioni al contorno, invece, è stato implementato il metodo delle caratteristiche. Tali tecniche sono state impiegate per realizzare il modello instazionario del compressore al fine di indagare condizioni di funzionamento particolarmente critiche come, ad esempio, il pompaggio.

E' stata altresì sviluppata una procedura, questa volta di carattere iterativo e basata sull'approccio alle differenze finite, in grado di integrare numericamente le equazioni del moto in condizioni di flusso stazionario. Tale metodologia, caratterizzata da tempi di calcolo alquanto contenuti se confrontati a quelli richiesti dalla versione instazionaria, rappresenta uno strumento di analisi capace di fornire una rapida stima delle mappe prestazionali delle turbomacchine. La velocità di esecuzione ha consentito, inoltre, di poter effettuare la calibrazione dei modelli del compressore e della turbina mediante una procedura automatica implementata tramite software commerciale (ModeFrontier).

Per tener conto delle perdite che si verificano all'interno delle turbomacchine, sono state introdotte nel modello opportune correlazioni desunte dalla letteratura; pur trattandosi di perdite inerenti fenomenologie complesse di carattere prettamente tridimensionale, non potendosi descrivere adeguatamente tramite l'approccio qui

adottato, si sono supposte concentrate tra le giunzioni che raccordano i condotti in cui sono suddivisi compressore e turbina. Si sono considerate le perdite di maggiore rilevanza come quelle per incidenza, per trafilamento d'apice, per riflusso, etc. Nel caso del compressore, inoltre, si è tenuto in conto anche del fenomeno dello slip.

Il modello del compressore è stato calibrato per tre macchine, sulla base di altrettante mappe prestazionali di origine sperimentale, mediante una procedura automatica; tale processo ha coinvolto, oltre alle costanti di taratura delle correlazioni di perdita, anche alcune grandezze geometriche su cui vi era maggiore incertezza di misura. I risultati ottenuti sono in ottimo accordo con i rilievi sperimentali denotando, salvo alcune eccezioni, uno scostamento contenuto dei parametri di calibrazione rispetto ai valori di riferimento. Sono state illustrate alcune applicazioni della procedura instazionaria come "l'infittimento" delle mappe sperimentali e la valutazione dell'alterazione delle prestazioni del compressore conseguenti ad una variazione delle condizioni all'espansione in termini di pressione, temperatura, composizione dei gas ed angolo di flusso.

Per uno dei compressori considerati, risolvendo le equazioni del moto anche per flusso inverso, è stata valutata la mappa prestazionale "estesa". Tale indagine ha messo in evidenza come l'andamento del rapporto di compressione per portata negativa riproduca quello della caratteristica di una valvola di strozzamento congruamente con i rilievi sperimentali riportati in letteratura e come il compressore assorba potenza qualunque sia la direzione del flusso.

Una volta tarato il modello, la versione instazionaria dello stesso è stata impiegata per l'analisi di condizioni operative fortemente instazionarie come quelle che si verificano allorché il compressore viene inserito nel sistema di aspirazione di un MCI a causa delle onde di pressione generate dall'apertura periodica delle valvole. I risultati hanno evidenziato come il modello instazionario del compressore sia in grado di descrivere fenomeni di accumulo di massa e di energia e di propagazione ondosa all'interno del componente che la metodologia tradizionale basata su mappa non è in grado di effettuare.

Successivamente, il modello instazionario è stato validato tramite il raffronto con i rilievi sperimentali effettuati sul sistema di aspirazione di un MCI sovralimentato. La comparazione dei risultati desunti numericamente e l'evidenza

sperimentale hanno mostrato un buon accordo soprattutto in termini di pressione istantanea. Tale analisi ha sottolineato, inoltre, che i risultati forniti dalla metodologia basata su mappa possono essere significativamente migliorati mediante l'introduzione di un condotto virtuale a valle della giunzione che schematizza il compressore; tale condotto deve essere caratterizzato dallo stesso volume e dalla stessa lunghezza equivalente del compressore reale. Le grandezze appena citate sono di difficile valutazione, ma possono essere ricavate in maniera automatica grazie al modulo geometrico della procedura proposta.

In fine, è stata condotta un'indagine di carattere metodologico volta a definire la strategia più opportuna da adottare per descrivere il fenomeno del pompaggio (deep-surge) tramite l'approccio basato su mappa usando come riferimento il modello instazionario. Il risultato di tale studio ha confermato la necessità dell'introduzione di un condotto virtuale a valle della "giunzione compressore" ed evidenziato l'importanza di accedere alle mappe prestazionali utilizzando un approccio "upwind" per la correzione della velocità di rotazione e della portata; ciò si attua correggendo tali grandezze con i valori di pressione e temperatura vigenti nel condotto da cui proviene il flusso. Mediante la metodologia basata su mappa, opportunamente migliorata mediante gli accorgimenti appena indicati, è stata analizzata l'influenza di alcuni parametri geometrici sul fenomeno del pompaggio in termini di frequenza e forma del ciclo; tale indagine ha mostrato come il volume totale del sistema sia la grandezza controllante le caratteristiche del pompaggio.

Il modello della turbina, ancora ad una fase iniziale dello sviluppo, è stato calibrato mediante una procedura automatica relativamente a due turbine facenti parte di altrettanti gruppi di sovralimentazione per MCI, l'una a geometria fissa e regolata tramite Waste-Gate, l'altra dotata di palettatura statorica ad assetto variabile. La procedura proposta, grazie ad opportuni sottomodelli nel modulo geometrico, è in grado di descrivere adeguatamente i due casi analizzati. Il raffronto tra le mappe prestazionali stimate numericamente e quelle ricavate sperimentalmente in termini di rapporto di espansione è sufficientemente soddisfacente soprattutto per le velocità di rotazione più basse. Il disaccordo che si riscontra limitatamente al caso del rendimento può essere attribuito al fatto che, allo stato attuale dello sviluppo, il modello non contempla ancora alcune perdite di

carattere non prettamente fluidodinamico, ma che, per come misurato, sono invece tenute in conto nella valutazione del rendimento.

Gli sviluppi futuri del presente lavoro riguardano, oltre al raffinamento del modello della turbina, l'impiego delle procedure proposte come strumento di progettazione, anziché di analisi come nelle applicazioni qui presentate. In particolare, nel caso del compressore, alla luce della soddisfacente capacità del modello nel riprodurre le mappe prestazionali derivate sperimentalmente partendo dalla sola geometria del componente, appare possibile realizzare una procedura automatica grazie alla quale, assegnando un target prestazionale ossia una mappa in termini di rapporto di compressione e rendimento, ricavare un dimensionamento di massima del compressore.

Resta, inoltre, da implementare l'integrazione dei modelli della turbina e del compressore all'interno di un codice monodimensionale in modo tale da poter valutare dinamicamente (step by step nella simulazione instazionaria di un motore sovralimentato) le prestazioni delle turbomacchine senza ricorrere a tecniche d'interpolazione o estrapolazione o all'impiego delle grandezze corrette; l'integrazione in un codice 1D consentirà altresì, risolvendo l'equazione di equilibrio dinamico del gruppo di sovralimentazione, di tenere in conto anche dell'effetto della variazione della velocità di rotazione istantanea delle turbomacchine sulle prestazioni delle stesse.

Lo sviluppo dei modelli oggetto del presente lavoro è stato svolto nell'ambito di un progetto di ricerca promosso da AVL.

## Bibliografia

---

- [1] N. Watson, M.S. Janota, *"Turbocharging the internal combustion engine"*, 1982, John Wiley
- [2] J.B. Heywood, *"Internal combustion engine fundamentals"*, 1988, McGraw-Hill Int. editions
- [3] Z. Zhang, *"Experimental study on the three fase sequential lturbocharging system with two unequal size turbochargers"*, 2008, SAE paper 2008-01-1698
- [4] N. Winkler, H.E. Angstrom *"Simulation and measurements of a two-stage turbocharged heavy-duty diesel engine including EGR in transient operation"*, 2008, SAE paper 2008-01-0539
- [5] R. Hasegawa, H. Yanagihara, *"HCCI combustion in DI diesel engine"*, 2003, SAE paper 2003-01-0745
- [6] J. Stokes, T.H. Lake, R.J. Osborne, *"A gasoline engine concept for improved fuel economy – The lean boost system"*, 2000, SAE paper 2000-01-2902
- [7] M.R. Shahed, *"Engine downsizing and boosting for CO<sub>2</sub> emission reduction"*, 2003, presented at International Vehicle Technology Symposium
- [8] G. Police, S. Diana, V. Giglio, B. Iorio, N. Rispoli, *"Downsizing of SI engines by Turbo-charging"*, 2006, 8<sup>th</sup> biennal ASME conference on engineering systems design and analysis
- [9] P. Leduc, B. Dubar, A. Ranini, G. Monnier, *"Downsizing of gasoline engines: an efficient way to reduce CO<sub>2</sub> emissions"*, 2003, Oil and gas science and technology – Rev. IFP, Vol. 58, No. 1, pp. 115-127

- 
- [10] F. Bozza, A. Gimelli, L. Strazzullo, E. Torella, C. Cascone, "*Steady-state and transient operation simulation of a downsized turbocharged SI engine*", 2007, SAE paper no. 2007-01-0381
- [11] S. Giulian, "*Modeling and measurement of the transient response of a turbocharged SI engine*", 2005, SAE paper 2005-01-0691
- [12] M. Capobianco, S. Marelli, "*Turbocharger turbine performance under steady and unsteady flow: test bed analysis and correlation criteria*", 2006, 8<sup>th</sup> International Conference on turbochargers and turbocharging, Inst. Mech. Engrs.
- [13] GT-Power, "*User's manual and tutorial, GT-suite version 6.0*", 2003, Gamma technologies
- [14] Wave, "*User's manual*", 2002, Ricardo
- [15] Boost, "*User's manual*", 2003 AVL
- [16] J. Macek, O. Vitek, "*Simulation of pulsating flow unsteady operation of turbocharger radial turbine*", 2008, SAE paper 2008-01-0295
- [17] P. M. Came, C. J. Robinson. "*Centrifugal compressor design*", Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol 213 Part C, IMechE 1999
- [18] Schaaf S., Chambre A., "*Fundamentals of Gas Dynamics*", H.Emmons, pp.687-692, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1958.
- [19] Zucrow M. J., Hoffman J. D., "*Gas Dynamics*", School of Mechanical Engineering Purdue University, John Wiley & Sons Inc., 1976.
- [20] A. Bejan, A.D. Kraus, "*Heat transfer handbook*", 2003, John Wiley & Sons
- [21] O. Manca, V. Naso, "*Complementi di trasmissione del calore*", 2005, E. DI. SU. "NA 1"
- [22] S. Sandrolini, G. Naldi, "*Macchine -Le turbomacchine motrici e operatrici*", 1996, Pitagora editrice Bologna
- [23] Schlichting, H. "*Boundary-Layer Theory*", 1979 (McGraw-Hill, New York)
- [24] Japikse, D., "*Centrifugal Compressor Design and Performance*", Concepts ETI, Inc., Wilder, VT, 1996
- [25] R.S. Benson, "*The thermodynamics and gas dynamics of internal - combustion engines Vol. I*", 1982, Claredon press
- [26] D.E. Winterbone, R.J. Pearson, "*Design techniques for engine manifolds*", 1999, Professional engineering publishing- ISBN 1 86058 179 X

- 
- [27] G.P. Blair, *"Design and simulation of two - stroke engines"*, 1996, ISBN 1-56091-685-0, SAE
- [28] J.F. Bingham, G.P. Blair, *"An improved branched pipe model for multy - cylinder automotive engine calculations"*, 1985, Atti del Inst. Mech. Engineers, Vol. 199, No D1
- [29] D.E. Winterbone, R.J. Pearson, *"Theory of Engine Manifold Design"*, 2000, Professional engineering publishing - ISBN 1 86058 209 5
- [30] C. Hirsh, *"Numerical Computation of Internal and External Flows"*, vol. 2, 1990, Wiley - Interscience Publication, ISBN 0 471 923516
- [31] Chanson, Hubert (2004), *"Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction"* (2<sup>nd</sup> ed.), Butterworth-Heinemann
- [32] N. Watson, M.S. Janota, *"Turbocharging the Internal Combustion Engine"*, MacMillan, New York, 1982
- [33] A. Whitfield, F.J. Wallace, *"Study of incidence loss models in radial and mixed-flow turbomachinery"* Proceedings of the Congress of Heat Fluid Flow in Steam and Gas Turbine Plant, University of Warwick, Coventry, UK, April 1973, pp. 122-132
- [34] Wisler, D.C., *"Advanced Compressor and Fan Systems"*, lecture notes from UTSI short course Aeropropulsion, Dayton, OH, December 7-11, 1987
- [35] Bloch, G. S., Copenhaver, W. W. and O'Brien, W. F., *"Development of an Off-Design Loss Model for Transonic Compressor Design"*, AGARD-CP-571, January 1996, pp. 16-1-16-14.
- [36] Liepmann, H.W. and Roshko, A., *"Elements of GasDynamics"*, Galcit Aeronautical Series, John Wiley & Sons, Inc., Eighth printing, May 1967.
- [37] Rabe, D.C., Wennerstrom, A.J. and O'Brien, W.F., Jr., *"Characterization of Shock Wave End Wall Boundary Layer Interactions in a Transonic Compressor Rotor"*, ASME 87-GT-166, paper accepted for publication in the Transactions of the ASME, 1987
- [38] Spence, S. W. T., Artt, D. W., *"An experimental assessment of incidence losses in a radial inflow turbine rotor"*, Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol 212, Part A, IMechE 1998.

- 
- [39] X. Qiu, C. Mallikarachchi, M. Anderson, "A new slip factor model for axial and radial impellers", 2007, ASME Turbo expo 2007: Power for land, sea and air, GT2007-27064
- [40] D. Eckardt, "Flow field analysis of radial and backswept centrifugal compressor impellers, Part 1: flow measurement using a laser velocimeter", 1980, 25<sup>th</sup> Gas turbine conference and 22<sup>nd</sup> annual fluids engineering conference, New Orleans
- [41] J.P. Johnson, "Radial flow turbomachinery", 1986, Lecture in series fluid dynamics of turbomachinery ASME
- [42] N.A. Cumpsty, "Compressors aerodynamics", 1989, Addison Wesley Longman
- [43] R.H. Aungier, "Mean Streamline Aerodynamic Performance Analysis of Centrifugal Compressors", 1995, Transactions ASME, Journal of Turbomachinery
- [44] R.H. Aungier, "A Performance Analysis for the Vaneless Components of Centrifugal Compressors", 1988, Flows in Non-Rotating Turbomachinery Components, ASME, Vol. 69, 35-43
- [45] R.H. Aungier, "Aerodynamic Performance Analysis of Vaned Diffusers", 1990, Fluid Machinery Components, ASME, Vol. 101, 27-44.
- [46] R.H. Aungier, "Centrifugal Compressors a Strategy for Aerodynamic Design and Analysis", 2000, ASME Press, New York
- [47] M.P. Boyce, "Centrifugal Compressors a Basic Guide", PennWell Corporation, Oklahoma
- [48] C.E Erikson, "Centrifugal compressor modelling development and validation for a turbocharger component matching system", 2008, Master of science thesis, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, Kansas state university
- [49] C. Rodgers, "Mainline performance prediction for radial inflow turbines" VKI Lecture Series 1987-07, 1987
- [50] N. C. Baines "A Meanline Prediction Method For Radial Turbine Efficiency In Axial and Radial Turbines" 6<sup>th</sup> International Conference on Turbocharging and Air Management Systems, I Mech E, 3-5 November 1998. Paper No. C554-6
- [51] D. Eckardt, "Instantaneous measurement in the jet-wake discharge flow of a centrifugal compressor impeller", 1976, Trans. ASME Journal of fluid engineering
- [52] H. Krain, "Swirling impeller flow", 1987, 32<sup>nd</sup> ASME Gas Turbine Conference and Exhibit, Houston, Texas-paper 85-GT-85

- [53] D. Japikse. *“Advanced diffusion levels in turbocharger compressors and component matching”*, 1982, In IMechE Conference on Turbocharging and Turbochargers, paper C45/82, p. 143 (Mechanical Engineering Publications, London)
- [54] AGARD-AR-332, *“Recommended Practices for the Assessment of the Effects of Atmospheric Water Ingestion on the Performance and Operability of Gas Turbines Engines”*, September 1995, ISBN 92-836-1022-9.
- [55] G. Capon, T. Morris , *“The Effect of Air Inlet System Features on Automotive Turbocharger Compressor Performance”*, 9th International Conference on Turbochargers and Turbocharging, IMechE, May 2010, London
- [56] A. Yammine, F. Vidal, P. Chesse, D. Chalet, L. Perret, H. Mohtar, *“Etude de l'écoulement en amont d'un turbocompresseur par mesures ADL”*, Congrès Francophone de Techniques Laser, CFTL 2008, Futuroscope, 16 - 19 septembre 2008
- [57] Bozza F., Gimelli A., *“Unsteady 1D Simulation of a Turbocharger Compressor”*, SAE paper 2009-01-0308, 2009. Also in SAE International Journal of Engines, 2, pp. 189-198, Print ISSN: 1946-3936, Online ISSN: 1946-3944, October 2009
- [58] M. Capobianco, S. Marelli, *“Experimental Investigation into the Pulsating Flow Performance of a Turbocharger Turbine in the Closed and Open Waste-Gate Region”*, 9th International Conference on Turbochargers and Turbocharging, London, 2010
- [59] F. Piscaglia, A. Onorati, S. Marelli, M. Capobianco, *“Unsteady Behavior in Turbocharger Turbines: Experimental Analysis and Numerical Simulation”*, SAE Paper 2007-24-0081
- [60] E. M. Greitzer, *“Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressor”*, Part I Trans. ASME Journal of Engineering for Power, 1976, 98(2): 190-198.
- [61] E. M. Greitzer, *“Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressor”*, Part II Trans. ASME Journal of Engineering for Power, 1976, 98(2): 199-217
- [62] J. Galindo, J.R. Serrano, H. Climent, A. Tiseira, *“Experiments and modelling of surge in small centrifugal compressor for automotive engines”*, Experimental Thermal and Fluid Science 32 818–826, 2008
- [63] O. Leufven and L. Eriksson *“Surge and Choke Capable Compressor Model”*, 18th IFAC World Congress, 2010

- 
- [64] Rakopoulos, C.D., Michos, C.N., Giakoumis, E.G., "A computational study of compressor surge during transient operation of turbocharged diesel engines", *Int. J. Alternative Propulsion*, Vol. 1, No. 2/3, 250-273, 2007
- [65] Gravdahl, J.T., Egeland, O., Vatland, S.O., "Active surge control of centrifugal compressors using drive torque", *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1286 - 1291, 2001
- [66] Chesse, P., Hetet, J.F., Tauzia, X., Roy, P., Inozu, B., "Performance Simulation of Sequentially Turbocharged Marine Diesel Engines With Applications to Compressor Surge", *ASME Transactions, Engineering for Gas Turbines and Power*, vol.122, 562-569, 2000
- [67] Miettien K., "Nonlinear Multiobjective Optimization", Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-8278-1, 1998