



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DEI SISTEMI MECCANICI

XXIV CICLO

IMPIEGO DI TECNICHE MULTIBODY PER LA PREDIZIONE DELLA RADIAZIONE ACUSTICA E DEL COMFORT INTERNO DI VEICOLI PER L'AUTOTRAZIONE

Salvina Giacobbe

Tesi di Dottorato

Napoli, Italia 2012

Tutors:

Ch.mo prof. Fabio Bozza (DIME)

Ing. Daniela Siano (Istituto Motori, CNR)

INDICE

Introduzione	1
 CAPITOLO 1 - Il rumore e le vibrazioni nei veicoli per autotrazione	
1.1 Il rumore	4
1.1.1 Il suono e le grandezze acustiche	4
1.1.2 Pressione, potenza e intensità sonora	5
1.1.3 Composizione ed analisi in frequenza	8
1.1.4 Le curve isofoniche e la scala dei phon	10
1.1.5 La propagazione del suono in campo libero	11
1.1.6 Assorbimento, riflessione e trasmissione del suono	14
1.1.7 Proprietà acustiche dei materiali	15
1.2 Le vibrazioni	21
1.2.1 Tipi di vibrazioni	22
1.2.2 Richiami di cinematica del moto armonico	23
1.2.3 Moti periodici non armonici	25
1.2.4 Vibrazioni libere senza smorzamento	31
1.2.5 Vibrazioni libere con smorzamento viscoso	34
1.2.5.1 Caso $d > 1$	37
1.2.5.2 Caso $d = 1$	41
1.2.5.3 Caso $d < 1$	42
1.2.6 Vibrazioni forzate senza smorzamento	48
1.2.7 Vibrazioni forzate con smorzamento viscoso	54
1.3 La rumorosità all'interno di un veicolo	60
1.3.1 Il rumore emesso da power-train	62
1.3.2 Il rumore generato da veicolo su strada	66
1.3.3 Tecniche per la riduzione del rumore nei veicoli	67

CAPITOLO 2 – Tecniche numeriche per lo studio del comportamento vibro-acustico di un sistema

2.1	Il metodo agli elementi finiti	75
2.1.1	Formulazione delle caratteristiche dell'elemento finito	76
2.1.2	Assemblaggio della matrice di rigidezza	82
2.1.3	Criteri di convergenza	84
2.1.4	Determinazione delle funzioni di forma	87
2.1.5	Elementi isoparametrici	91
2.1.6	Metodi di integrazione numerica	93
2.1.7	Criteri di formazione della maglia	95
2.2	La metodologia multi corpo	97
2.2.1	Elementi di un sistema multi corpo	97
2.2.2	Tipologie di problemi risolvibili con sistemi multi corpo	99
2.2.3	Rappresentazione degli elementi di un sistema multi corpo	101
2.2.4	Coordinate assolute e relative	102
2.2.5	Vincoli	104
2.2.6	Analisi cinematica di un sistema multi corpo	106
2.2.7	Analisi dinamica di un sistema multicorpo	108
2.2.7.1	Dal principio dei lavori virtuali al principio di D'Alembert-Lagrange	108
2.2.7.2	Il principio di Hamilton	111
2.2.7.3	Le equazioni di Lagrange	112
2.2.7.4	Le equazioni di Lagrange per sistemi non conservativi	113
2.2.7.5	Le equazioni di Lagrange per un sistema multibody piano	114
2.2.7.6	Calcolo dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della forza peso	115
2.2.7.7	Le equazioni del moto	115
2.2.7.8	Soluzione delle equazioni della dinamica	116
2.3	Il metodo agli elementi di contorno	118
2.3.1	La soluzione numerica	120
2.3.2	L'equazione di Helmholtz	122
2.3.3	L'approccio collocazionale	124
2.3.3.1	La formulazione isoparametrica	127
2.3.3.2	La singolarità degli integrali	130
2.3.4	L'assemblaggio del sistema in forma matriciale	130
2.3.5	Le condizioni al contorno	133
2.3.5.1	La condizione di Sommerfeld	134
2.3.6	L'interazione fluido-struttura	136
2.3.7	Il BEM Diretto e il BEM Indiretto	139

CAPITOLO 3 – Tecniche per la sperimentazione del comportamento vibro-acustico di un sistema

3.1	Misure di rumore	144
3.1.1	Il microfono	145
3.1.2	Il fonometro	149
3.1.3	La normativa per la stima del rumore	152
3.2	Misure di vibrazioni	155
3.2.1	L'accelerometro	158
3.2.2	Il vibrometro laser a scansione	165
3.2.3	Applicazione della vibrometria laser allo studio delle vibrazioni di un blocco cilindri	169
3.3	Analisi modale	174
3.3.1	L'analisi modale sperimentale	174
3.3.2	Fondamenti analitici dell'analisi modale	181
3.3.3	Applicazioni dell'analisi modale sperimentale	184

CAPITOLO 4 – Predizione della radiazione acustica e del comfort interno

4.1	Previsione del rumore emesso da un prototipo di motore multicilindrico	197
4.1.1	Simulazione dinamica di un propulsore	198
4.1.2	Descrizione del prototipo del motore	199
4.1.3	Il modello virtuale 3D	199
4.1.4	I modelli agli elementi finiti delle componenti flessibili	202
4.1.5	Campo di indagine	203
4.1.6	Il modello monodimensionale	205
4.1.7	Risultati della simulazione dinamica	207
4.1.8	Stima delle vibrazioni superficiali del blocco cilindri	208
4.1.9	Stima del rumore radiato	210
4.1.10	Procedura analitica per la stima del rumore radiato	214
4.2	Previsione del livello di comfort percepito dai passeggeri all'interno dell'abitacolo	216
4.2.1	Simulazione dinamica del motore che equipaggia la vettura	216
4.2.2	Accoppiamento motore – supporti - telaio	218
4.2.3	La stima del rumore all'interno del veicolo	222
4.2.4	La caratterizzazione delle superfici interne del veicolo	224

Introduzione

I motori a combustione interna rappresentano la principale fonte di vibrazioni e di rumore presente all'interno di un autoveicolo.

Negli ultimi anni a causa della crescente richiesta, da parte dei clienti finali, di veicoli sempre più performanti, non solo in termini di potenza ed affidabilità, ma anche in termini di comfort e guidabilità, e per restare al passo con la concorrenza, le case automobilistiche hanno rivolto sempre più la loro attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti all'interno dei veicoli, ed hanno iniziato a considerare la qualità del suono nel comparto auto come un obiettivo da raggiungere insieme con le prestazioni del motore, le emissioni, i consumi e la guidabilità, già durante le prime fasi di sviluppo di un motore o di un veicolo.

Quando si progetta un nuovo motore, infatti, è necessario tener conto di diversi obiettivi che potrebbero essere considerati come dei veri e propri vincoli progettuali. Talvolta però questi obiettivi sono di natura diversa e risultano spesso essere in conflitto tra loro, e diventa quindi indispensabile raggiungere un buon compromesso quando si è ancora in fase di sviluppo del prototipo, ancor prima cioè di realizzare un vero e proprio prototipo fisico.

L'uso delle tecniche di modellazione CAE e di simulazione numerica è pertanto diventato uno strumento indispensabile per i tecnici già durante le prime fasi decisionali del processo di progettazione e ciò è particolarmente vero nell'ambito dell'ottimizzazione NVH (*Noise, Vibration, Harshness*) di un sistema complesso come può essere un motore a combustione interna o un veicolo, al fine di stabilire le linee guida di quella che sarà la prima configurazione "fisica" del prototipo, che sarà poi testata e migliorata fino al raggiungimento della configurazione ottimale.

L'attività di ricerca descritta in questo lavoro di tesi è stata svolta presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università di Napoli "Federico II" e l'Istituto Motori del CNR di Napoli, e si inserisce proprio in quest'ottica. Essa è stata orientata verso due obiettivi principali: studiare il comportamento vibroacustico di un prototipo di motore diesel multicilindrico in tutto il suo campo di funzionamento, al fine di stimarne il rumore radiato esternamente a partire dalla sola conoscenza dei dati geometrici del propulsore; e stimare il livello di rumore percepito dai passeggeri all'interno dell'abitacolo, a partire dalle vibrazioni che il motore trasmette alla scocca del veicolo attraverso gli ancoraggi.

Entrambi gli obiettivi sono stati raggiunti mediante l'accoppiamento di differenti tecniche di simulazione numerica: la simulazione monodimensionale e quella della dinamica multibody da un lato, hanno permesso di caratterizzare il comportamento dinamico del motore; mentre le note metodologie agli elementi finiti (FEM) e agli elementi di contorno (BEM) dall'altro, hanno permesso di caratterizzarne il comportamento vibro-acustico.

Parallelamente all'attività numerica, presso i laboratori dell'Istituto Motori, sono state svolte anche attività sperimentali, volte alla caratterizzazione del comportamento vibrazionale di un motore a combustione interna. In particolare, analisi di vibrometria laser sono state condotte per la stima del livello di vibrazioni a cui è soggetto un motore durante le sue condizioni di funzionamento, mentre analisi modali sperimentali sono state condotte su alcune componenti motoristiche (quali albero motore e blocco cilindri) per la determinazione dei parametri modali.

Nel primo capitolo, dopo aver esposto i concetti di base dell'acustica e delle vibrazioni, saranno analizzate le problematiche legate al rumore e alle vibrazioni negli autoveicoli e, in particolare, quelle connesse ai motori a combustione interna.

Il secondo capitolo è dedicato alla descrizione degli strumenti numerici impiegati per studiare sia il comportamento vibro-acustico di un prototipo di motore a combustione interna, sia il livello di rumore percepito all'interno del veicolo per una stima del comfort dei passeggeri. Saranno descritti, in particolare, il metodo agli elementi finiti, la metodologia multibody e il metodo agli elementi di contorno.

Il terzo capitolo è, invece, dedicato alla descrizione delle attività sperimentali condotte presso i laboratori dell'Istituto Motori. Dopo aver descritto le tecniche sperimentali impiegate per studiare il comportamento vibro-acustico di un sistema, verranno riportati i risultati delle attività sperimentali di vibrometria laser condotte per caratterizzare il comportamento vibrazionale di un motore a combustione interna, e i risultati delle attività sperimentali di analisi modale condotte per la determinazione dei parametri modali delle due componenti del motore: albero motore e blocco cilindri.

Nel quarto capitolo, infine, verranno descritte nel dettaglio le attività numeriche che hanno permesso di caratterizzare il comportamento vibroacustico di un prototipo di motore a partire dalla sola conoscenza dei dati geometrici, e di stimare il livello di rumore percepito dei passeggeri all'interno dell'abitacolo a partire dalle vibrazioni che il motore trasmette alla scocca del veicolo.

Capitolo 1

Il rumore e le vibrazioni nei veicoli per autotrazione

Negli ultimi anni l'attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti nei veicoli per autotrazione è cresciuta insieme con le richieste dei consumatori di veicoli sempre più performanti, non solo in termini di potenza ed affidabilità, ma anche in termini di comfort e guidabilità. Infatti, se da un lato il cliente finale è diventato più consapevole dei rischi legati al rumore e alle vibrazioni, la legislazione è intervenuta introducendo severe limitazioni al fine di proteggere le persone dagli effetti dannosi di una prolungata esposizione ad elevati livelli di rumore e di vibrazioni, e di migliorarne così la qualità della vita. Inoltre le vibrazioni rivestono una notevole importanza anche dal punto di vista del corretto funzionamento dei sistemi meccanici e dell'eventuale disturbo o danno che possono provocare, direttamente o indirettamente, alle persone, alle cose o alle strutture.

Il legame che esiste tra rumore e vibrazioni è molto forte. Infatti un suono, e quindi un rumore, può essere prodotto soltanto in due modi o attraverso la vibrazione di oggetti solidi o attraverso la turbolenza dell'aria. Pertanto, da un punto di vista più ingegneristico si capisce, quindi, come sia naturale affrontare il problema della riduzione del rumore emesso da un sistema analizzando il comportamento del sistema stesso sotto l'aspetto delle vibrazioni in esso presenti.

In questo capitolo, dopo aver esposto alcuni concetti di base dell'acustica e delle vibrazioni, saranno descritte le problematiche legate al rumore e alle vibrazioni negli autoveicoli, facendo particolare attenzione alle problematiche connesse con i motori a combustione interna.

1.1 Il rumore

Il suono riveste un ruolo fondamentale nella nostra vita quotidiana e siamo a esso così abituati che raramente ne apprezziamo tutte le funzioni. Talvolta però, esso ha delle caratteristiche tali da generare in chi lo percepisce sensazioni fastidiose che possono provocare fenomeni d'insofferenza o, talvolta, addirittura di dolore: in questi casi si parla di *rumore*, [1].

1.1.1 Il suono e le grandezze acustiche

Il suono è caratterizzato dalla propagazione di onde di pressione in un mezzo elastico dovute alla rapida successione di compressioni ed espansioni del mezzo stesso, a causa della presenza di un elemento vibrante. La frequenza e la velocità con la quale si propaga il disturbo di pressione dipendono dallo stesso mezzo elastico, che può essere solido, liquido o aeriforme, [2, 3]

Quando un elemento vibra in un mezzo elastico come l'aria, anche le particelle del mezzo circostante cominciano ad oscillare attorno alla loro posizione di equilibrio e, nel volume d'aria circostante la sorgente sonora, si producono delle variazioni estremamente piccole di pressione (dell'ordine di $10^{-5} \div 10^2$ Pa). Le onde sonore diffondendosi nel mezzo, producono una variazione nella densità del mezzo stesso e ciò provoca delle variazioni di pressione rispetto alla condizione di equilibrio: a una certa distanza dalla sorgente sonora si manifestano, pertanto, variazioni della pressione al di sopra (compressioni) e al di sotto (espansioni della pressione atmosferica ($p_{atm} = 1.013 \cdot 10^5 Pa$)), come schematizzato nella Figura 1.

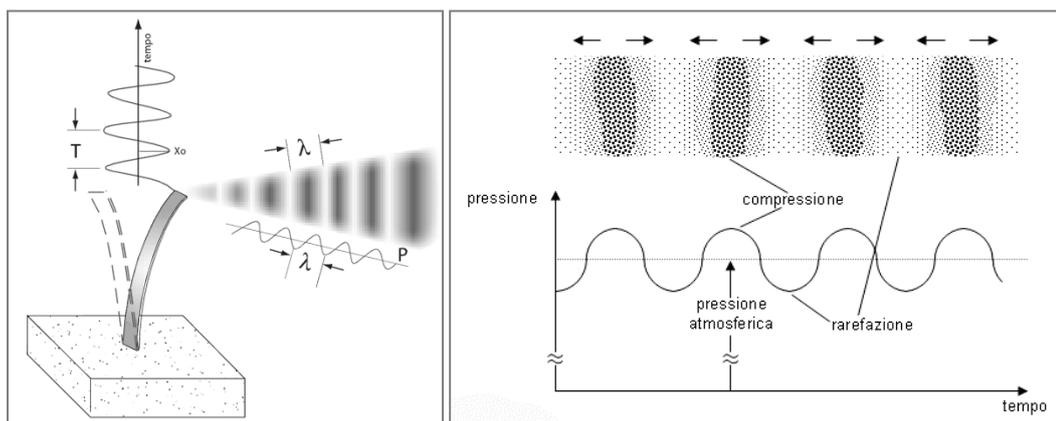


Figura 1 – Schematizzazione delle onde di pressione prodotte da una sorgente sonora

Quando le onde di pressione raggiungono l'orecchio umano, la membrana del timpano comincia a vibrare e, attraverso un complesso sistema di impulsi nervosi, vengono percepite dal cervello dando origine alla sensazione uditiva.

Uno dei parametri che caratterizza il suono è la *frequenza* f , essa rappresenta il numero di oscillazioni effettuate in un secondo. Si parla di *fenomeno sonoro* quando la frequenza è compresa nell'intervallo 20 Hz ÷ 20.000 Hz, ovvero l'intervallo in cui si assume convenzionalmente che l'orecchio umano sia sensibile. I segnali aventi frequenze inferiori ai 20 Hz sono detti infrasuoni, mentre i segnali al di sopra dei 20.000 Hz sono detti ultrasuoni.

Generalmente un suono non corrisponde ad un tono puro, caratterizzato da una sola frequenza di emissione, ma da un segnale complesso costituito da un grande numero di frequenze che danno origine ad uno spettro continuo.

Altri parametri fisici necessari per la descrizione dei fenomeni acustici sono il *periodo* T e la *lunghezza d'onda* λ che rappresentano, rispettivamente, l'intervallo di tempo e lo spazio necessari per poter compiere un'oscillazione completa.

Le relazioni che intercorrono tra i suddetti parametri sono:

$$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \lambda = cT$$

dove $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione e c è la velocità del suono nel mezzo. Tale velocità non dipende dalla frequenza dell'oscillazione, ma solo dalle condizioni termodinamiche del mezzo in cui la perturbazione si propaga. Per l'aria esistono delle formule approssimate che permettono di determinare il valore della velocità del suono in funzione della sola temperatura:

$$c \cong 20.05\sqrt{T} \quad \text{dove } T \text{ è la temperatura assoluta in Kelvin}$$

$$c \cong 331.4 + 0.6t \quad \text{dove } t \text{ è la temperatura in } ^\circ\text{C}$$

1.1.2 Pressione, potenza e intensità sonora

Le grandezze fisiche fondamentali in acustica sono la pressione, la potenza e l'intensità sonora.

Si definisce *pressione sonora istantanea* p_i , in un punto e in un dato istante, la variazione di pressione atmosferica prodotta dal fenomeno sonoro rispetto alla pressione statica p_{atm} relativa al mezzo non perturbato, cioè:

$$p - p_{atm} = p_i \quad (1)$$

dove p e p_{atm} rappresentano rispettivamente i valori della pressione esistente nel mezzo in presenza e in assenza dell'onda sonora.

Normalmente la pressione sonora assume valori molto piccoli rispetto alla pressione statica e per questo motivo si tende a caratterizzare la pressione sonora p_i attraverso il suo valore efficace, pari alla radice quadrata del valore quadratico medio:

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p_i^2 dt} \quad (2)$$

Nel caso di una sorgente puntiforme e omnidirezionale, posta in un mezzo isotropo come l'aria, l'energia s'irradia nello spazio in modo uniforme, quindi al variare della direzione si avrà una propagazione per onde sferiche. Misurando la variazione della pressione atmosferica causata dalla perturbazione, si noterà che essa diminuisce di ampiezza man mano che ci si allontana dalla sorgente perché l'energia si distribuisce su una superficie di emissione sempre maggiore (*fronte d'onda*). In una posizione qualsiasi dello spazio si può allora descrivere il campo acustico con una grandezza caratterizzata da direzione, verso e ampiezza che rappresenta la quantità di energia che fluisce attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo. Questa grandezza è detta *intensità sonora* ed è misurata in watt/m^2 .

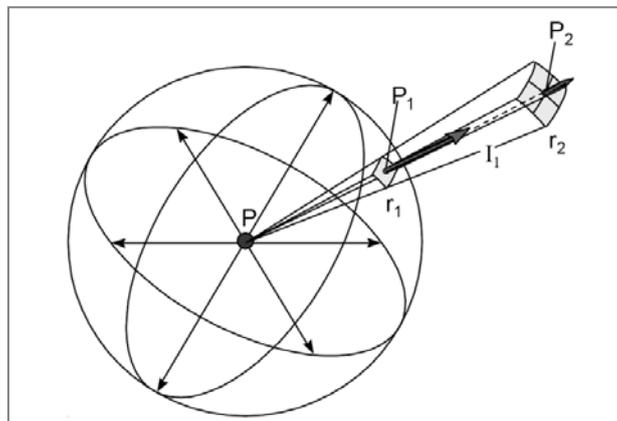


Figura 2 – Propagazione per onde sferiche di una sorgente puntiforme

Nel caso di onde piane in un mezzo elastico non viscoso, si ottiene:

$$I = \frac{p_{eff}}{\rho c} \quad (3)$$

Si osservi che l'intensità sonora è una grandezza vettoriale, dipendendo dalla direzione della superficie considerata.

L'energia sonora che la sorgente acustica è in grado di irradiare nell'unità di tempo è detta *potenza sonora P*.

Per onde piane in mezzi in quiete non viscosi, vale:

$$P = IS \quad (4)$$

La potenza sonora è una grandezza scalare e viene misurata in watt.

La pressione sonora non solo è il parametro più appropriato per valutare l'effetto della presenza di un suono, ma è anche la grandezza fisica più comunemente misurata, in quanto la variazione di pressione atmosferica è una quantità relativamente semplice da rilevare. Tuttavia, usando una scala lineare come il Pascal per la misura della pressione sonora, il range dei valori dell'udibile è molto ampio: si passa da un valore di soli 20 μPa corrispondente al livello minimo percettibile dall'orecchio umano, a un valore di poco superiore ai 100 Pa corrispondente alla soglia del dolore. Per risolvere i problemi legati all'utilizzo di tale scala, si preferisce esprimere i parametri acustici in funzione di una scala relativa di tipo logaritmico, per cui il valore di un dato parametro viene rapportato ad un dato valore di riferimento e il suo valore viene espresso in decibel (dB). I parametri acustici così espressi sono grandezze adimensionali, convenzionalmente definiti *livelli* [4]. Pertanto, il livello della pressione sonora L_p è definito mediante la relazione:

$$L_p = 10 \log \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad [\text{dB}] \quad (5)$$

dove p è il valore efficace della pressione sonora (misurato in Pa) del suono in esame e p_0 è la pressione sonora di riferimento pari a $2 \cdot 10^{-5}$ Pa che corrisponde alla soglia inferiore dell'udibile. Il livello di pressione sonora (indicato anche con l'acronimo SPL, *Sound Pressure Level*) è un parametro molto utilizzato per la descrizione del campo sonoro poiché si può misurare con un comune microfono.

Per la potenza e l'intensità sonora si definiscono, rispettivamente, il livello di potenza sonora e il livello dell'intensità sonora:

$$L_P = 10 \log \frac{P^2}{P_0^2} \quad [\text{dB}] \quad (6)$$

$$L_I = 10 \log \frac{I^2}{I_0^2} \quad [\text{dB}] \quad (7)$$

dove P_0 è la potenza sonora di riferimento pari a 10^{-12} W, e I_0 è l'intensità sonora di riferimento pari a 10^{-12} W/m².

1.1.3 Composizione ed analisi in frequenza

La semplice funzione sinusoidale del tempo, nota come *tono puro*, non si osserva frequentemente nella realtà, tuttavia è un segnale molto importante per la descrizione dei segnali più complessi. L'espressione di un segnale sinusoidale è del tipo:

$$x(t) = x_M \sin(2\pi ft - \varphi) = x_M \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) = x_M \sin(\omega t - \varphi) \quad (8)$$

dove x_M è il valore massimo ovvero l'ampiezza, f è la frequenza, T è il periodo, ω è la pulsazione o frequenza angolare pari a $2\pi f$ e φ è la fase. È chiaro che ampiezza, frequenza e fase specificano completamente un segnale sinusoidale.

La maggior parte dei suoni non ha un andamento semplice come quello sinusoidale appena descritto, in quanto sia la frequenza che l'ampiezza delle oscillazioni variano continuamente nel tempo. Pertanto, quando si deve analizzare un segnale complesso come un rumore, è necessario analizzarne il contenuto in frequenza per ricavare informazioni utili sulla sorgente origine dell'emissione. Il teorema di Fourier permette di considerare qualsiasi segnale, per complesso che sia, come il risultato di una sovrapposizione di un certo numero (anche infinito) di segnali sinusoidali con diversa frequenza, ampiezza e fase. Secondo l'analisi armonica di Fourier è, infatti, sempre possibile scrivere per un segnale periodico, una relazione del tipo:

$$x(t) = x_0 + x_{M1} \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + x_{M2} \sin(\omega_2 t - \varphi_2) + \dots + x_{Mn} \sin(\omega_n t - \varphi_n) \quad (9)$$

Siccome ogni sinusoidale è specificata dall'ampiezza, dalla fase e dalla frequenza, il segnale periodico può essere rappresentato equivalentemente dal diagramma delle ampiezze in funzione della frequenza, pertanto oltre che nel dominio del tempo, un segnale può essere descritto anche nel dominio della frequenza ottenendo quello che è noto come spettro in frequenza delle ampiezze.

La Figura 3 riporta lo spettro in frequenza di un tono puro e quello continuo di un rumore. Per un tono puro la pressione acustica varia con legge sinusoidale nel dominio del tempo, pertanto nel dominio della frequenza, essendo presente la sola frequenza $f_0 = 1/T$, il suono è rappresentato con uno spettro molto semplice costituito da una sola linea in corrispondenza del valore f_0 . Nel caso di un rumore casuale, che rappresenta un segnale complesso ma non periodico, si può osservare che il suo spettro è costituito da un gran numero di frequenze che formano uno spettro continuo.

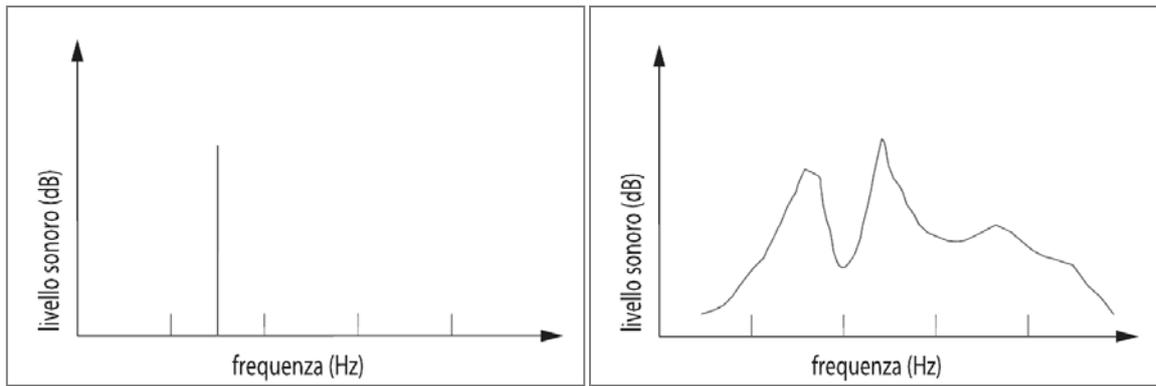


Figura 3 – Spettro di un tono puro (a sinistra) e spettro continuo di un rumore (a destra)

L'analisi della composizione in frequenza di un suono può essere effettuata con diversi metodi basati sulla suddivisione del contenuto di energia sonora in *bande*, cioè in prefissati intervalli di frequenza. Ciascuna banda è caratterizzata dalla frequenza nominale di centro banda f_c e dalle frequenze di taglio superiore f_s e inferiore f_i . La relazione che lega la frequenza di centro banda con le frequenze di taglio è la seguente:

$$f_c = \sqrt{f_i \cdot f_s} \quad (10)$$

L'ampiezza di banda, definita dalla differenza tra la frequenza di taglio superiore e inferiore ($\Delta f = f_s - f_i$), può essere costante o variabile al variare della frequenza nominale di centro banda. L'analisi ad ampiezza di banda costante viene utilizzata per analisi approfondite sulla composizione in frequenza di rumori generati da sorgenti e macchine, sulla diagnostica e sulle cause generatrici delle emissioni sonore. L'analisi in bande di ampiezza percentuale costante (in particolare la cosiddetta analisi in ottave o terzi di ottava) viene solitamente utilizzata in acustica ambientale ed architettonica. Questa analisi si basa sulla costanza del rapporto tra la larghezza di banda Δf e la frequenza nominale di centro banda f_c che caratterizza la banda stessa ($\Delta f / f_c = cost$), ovvero l'ampiezza delle bande d'ottava e delle bande di 1/3 d'ottava è proporzionale alla frequenza di centro banda, cioè le bande si allargano all'aumentare della loro frequenza centrale.

La suddivisione più comune dell'intervallo di frequenze udibili è quella in bande d'ottava ($\Delta f / f_c = 0.707$), ma se si desiderano informazioni più dettagliate si ricorre alla suddivisione in bande di 1/3 d'ottava ($\Delta f / f_c = 0.232$). Per la suddivisione in bande d'ottava la gamma di frequenze udibili è divisa in 8 intervalli non sovrapposti, mentre per la suddivisione in bande di 1/3 d'ottava, la gamma di frequenze udibili è divisa in 24 intervalli non sovrapposti.

1.1.4 Le curve isofoniche e la scala dei phon

L'orecchio umano non è sensibile in eguale modo alle diverse frequenze. La sensibilità è generalmente maggiore alle frequenze medio-alte e diminuisce progressivamente verso quelle basse e quelle molto alte. L'andamento della sensibilità dell'orecchio umano al variare dei livelli e della frequenza è stato studiato e rappresentato su un diagramma detto *audiogramma normale* (Figura 4). Nel diagramma sono riportate le *curve isofoniche* che rappresentano, al variare della frequenza, i livelli di pressione sonora in grado di riprodurre la stessa sensazione sonora. Ciascuna curva è caratterizzata da un valore di *livello di sensazione sonora*, espresso in phon, numericamente uguale al valore della pressione sonora, espressa in dB, del suono a 1000 Hz che ha prodotto la sensazione sonora. La scala dei *phon* si estende da 0 (soglia di normale udibilità) a 120 phon (soglia del dolore).

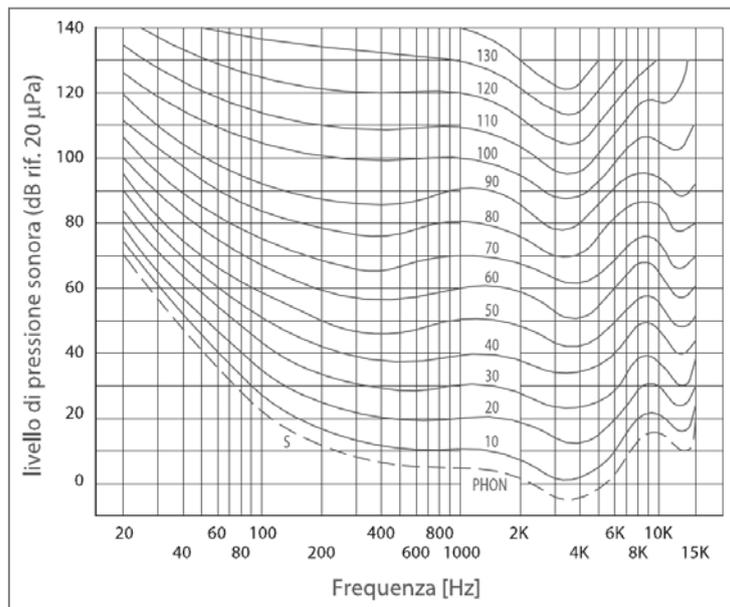


Figura 4 – Audiogramma normale

Il livello equivalente rappresenta il livello di un ipotetico fenomeno costante della stessa durata ed energeticamente equivalente al fenomeno in esame. Esso è definito dalla relazione:

$$L_{eq} = 10 \log \frac{1}{T} \int_T \left(\frac{p(t)}{p_0} \right)^2 dt \quad (11)$$

dove T è il tempo di misura, $p(t)$ è la pressione sonora istantanea e p_0 è la pressione sonora di riferimento pari a $20 \mu\text{Pa}$.

Se si misurano i livelli equivalenti per l'intensità soggettiva equivalente per i toni puri in funzione della frequenza, si ottengono le cosiddette curve isofoniche (o di uguale sensazione d'intensità)

rilevate per la prima volta da Fletcher e Manson e riportate in Figura 4. Tali curve, che costituiscono un audiogramma, sono utili per la valutazione dell'intensità soggettiva dei toni puri di cui si conosce il livello della pressione sonora e frequenza.

Le misure di livello equivalente per l'intensità soggettiva con il metodo del giudizio di ascolto presentano notevoli difficoltà pratiche, per questo motivo si è cercato di ideare apparecchiature elettroacustiche che consentissero di determinare oggettivamente, anche se con una certa approssimazione, i livelli equivalenti. Allo scopo di simulare con sufficiente precisione la sensazione che un suono genera sull'uomo alle varie frequenze, gli strumenti di misura sono dotati di curve di ponderazione ricavate da approssimazioni delle curve isofoniche. Per questo motivo sono state standardizzate le curve A, B e C. Queste curve di risposta o di pesatura (Figura 5) riproducono approssimativamente la sensibilità dell'orecchio ai toni puri corrispondenti alle curve di uguale sensazione quotate rispettivamente 40, 70 e 100 phon. Per la precisione sarebbe necessario che per ogni livello lo strumento utilizzasse una diversa curva, ma ciò sarebbe troppo complesso dal punto di vista elettronico.

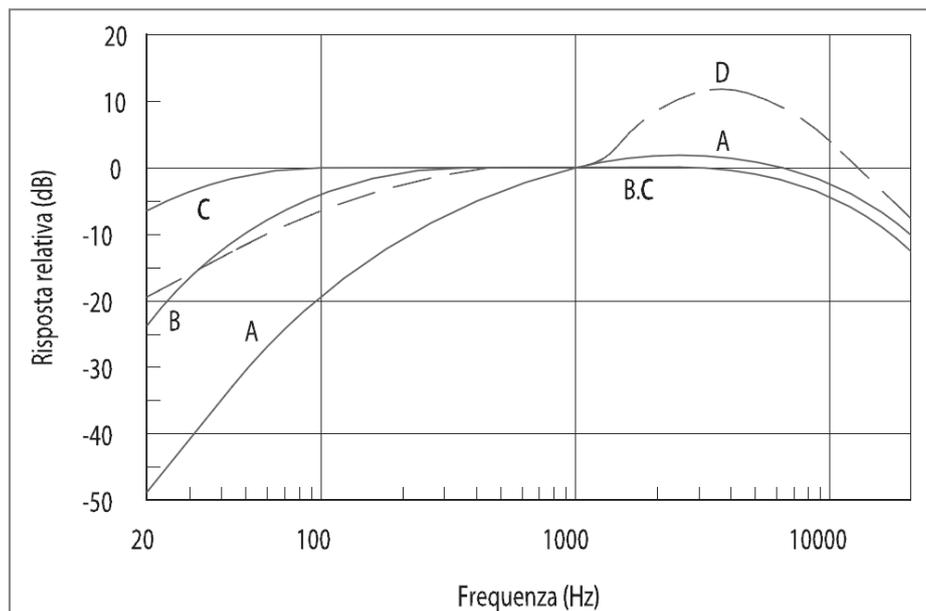


Figura 5 – Curve di ponderazione in frequenza

1.1.5 La propagazione del suono in campo libero

La regione dello spazio in cui si propagano le onde sonore è definita *campo acustico* o *campo sonoro*. Un campo acustico presuppone l'esistenza di una o più sorgenti che irradiano energia acustica. In funzione delle caratteristiche della sorgente e dell'ambiente circostante si possono instaurare vari tipi di campo.

Il campo più semplice è quello in cui una sorgente omnidirezionale irradia energia in un mezzo isotropo: la propagazione del suono avviene in uno spazio libero ideale senza alcuna riflessione. Si parla in questo caso di *campo libero*. Tali condizioni si hanno all'aria aperta sufficientemente lontano dal suolo o in una *camera anecoica*, dove tutti i suoni sono perfettamente assorbiti dalle pareti. La propagazione del suono in campo libero è caratterizzata, nella direzione di propagazione del suono, da una caduta di 6 dB del livello di pressione sonora e d'intensità ogni volta che la distanza dalla sorgente raddoppia.

Se invece di considerare una sorgente puntiforme si considera una sorgente estesa, si osserva che le condizioni di campo libero si instaurano solo ad una certa distanza dalla sorgente stessa, e cioè quando questa incomincia ad "apparire" come puntiforme: in questo caso si parla di *campo vicino*. La diffusione del suono in campo vicino è caratterizzata da complessi fenomeni di propagazione: l'energia irradiata "ricircola" parzialmente verso la sorgente e l'intensità acustica presenta oltre alla componente attiva (che rappresenta la parte propagante del campo sonoro), anche una componente reattiva (che rappresenta, invece, la parte non-propagante del campo).

Qualsiasi ambiente in cui sia posta una sorgente acustica, ad eccezione delle camere anecoiche, comporta l'instaurarsi di un *campo riverberante*, dove parte dell'energia irradiata dalla sorgente viene riflessa dalle pareti che delimitano l'ambiente in misura proporzionale alle caratteristiche fonoassorbenti delle pareti stesse ed in funzione della frequenza di radiazione. In un punto qualsiasi di un campo riverberante si instaurano condizioni miste di campo attivo e reattivo.

Si parla, invece, di *campo diffuso* quando il suono è riflesso ripetutamente e si sposta in tutte le direzioni con uguale ampiezza e probabilità. Per definizione, un campo diffuso è un caso di campo acustico in cui si ha la stessa densità di energia in qualsiasi punto. Questo tipo di campo sonoro è un caso particolare del campo riverberante ed è quello che si realizza in *camere riverberanti* opportunamente studiate e di grandi dimensioni.

Quando le dimensioni di un ambiente sono le stesse della lunghezza d'onda del suono emesso dalla sorgente, si instaura un *campo stazionario*. In un campo di questo tipo il valore della pressione e della velocità di oscillazione delle particelle nel mezzo varia continuamente tra un massimo positivo e un massimo negativo.

In natura esistono innumerevoli tipologie di sorgenti sonore, ciascuna caratterizzata da una certa forma, dimensione, direttività, spettro di emissione, variabilità nel tempo. Le modalità con cui il suono emesso da queste sorgenti si propaga in campo libero è possibile schematizzare le sorgenti sonore in tre tipologie ideali che, in certe condizioni, possono approssimare correttamente il comportamento delle sorgenti reali.

Le tipologie sono:

- sorgente puntiforme: la propagazione del suono avviene con una divergenza sferica, ovvero emette con eguale intensità in tutte le direzioni;
- sorgente lineare: la propagazione del suono avviene con una divergenza cilindrica;
- sorgente piana: le onde restano piane al variare della distanza.

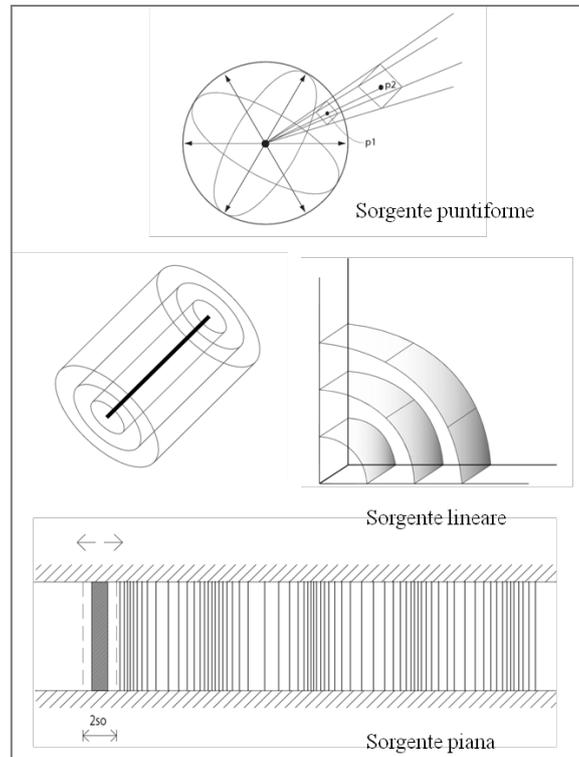


Figura 6 – Tipologie di sorgenti sonore: puntiforme, lineare, piana

Una sorgente puntiforme è una sorgente sonora le cui dimensioni possono essere considerate piccole rispetto alla distanza dal ricevitore. Una sorgente sonora lineare può essere costituita da un emettitore continuo come un tubo in cui scorre un fluido in moto turbolento oppure da un insieme di sorgenti puntiformi ravvicinate, come ad esempio una strada con flusso di traffico continuo. Una sorgente piana è, ad esempio, un pistone vibrante all'interno di un tubo liscio (Figura 6).

Onde piane si possono verificare anche in prossimità di grandi piastre vibranti, la condizione di onda piana viene però persa in prossimità dei bordi ed all'aumentare della distanza dal piano vibrante. Il fatto che una sorgente sonora sia considerata puntiforme, lineare o piana non dipende solo dalla sua forma, ma anche dalla dimensione e dalla distanza relativa tra sorgente e ricevitore. Infatti, a distanze molto grandi una sorgente piana può essere vista come una sorgente puntiforme.

Quando una sorgente sonora è appoggiata ad un pavimento riflettente o ad una parete allora è vincolata ad irradiare solo in una porzione di spazio. Questo comporta che la quantità di energia irradiata in una certa direzione è maggiore che nel caso di radiazione uniforme. Per tener conto di questa caratteristica, ed in generale per tener conto di una non uniforme irradiazione di energia nello

spazio circostante, si introduce il fattore di direttività Q , cioè il rapporto tra l'intensità sonora nella direzione θ (I_θ) e l'intensità sonora che avrebbe il campo acustico in quel punto se la sorgente fosse omnidirezionale (I_0):

$$Q = \frac{I_\theta}{I_0} \quad (12)$$

Il termine $D = 10 \log Q$ viene chiamato *indice di direttività*.

In Figura 7 sono mostrate diverse configurazioni e i relativi fattori e indici di direttività. Per sorgenti puntiformi appoggiate su pareti perfettamente riflettenti, il volume a disposizione per la propagazione si dimezza e quindi $Q = 2$; mentre per sorgenti collocate lungo uno spigolo tra due pareti il volume diventa la quarta parte e quindi $Q = 4$; se, infine, la sorgente viene posizionata in un vertice, diventa $Q = 8$.

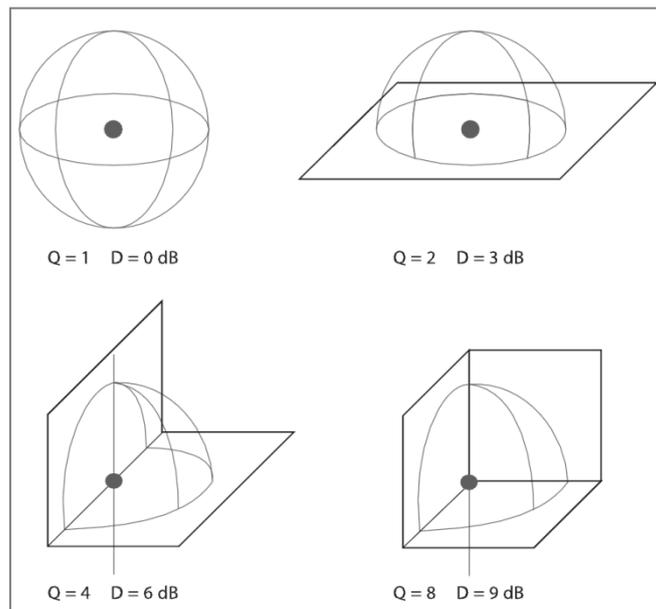


Figura 7 – Fattori e indici di direttività per diverse situazioni

1.1.6 Assorbimento, riflessione e trasmissione del suono

Quando il fronte di un'onda sonora urta contro una parete, generalmente si assiste al verificarsi di tre fenomeni, che contribuiscono in maniera diversa alla redistribuzione dell'energia trasportata dall'onda stessa: una parte di questa energia viene riflessa secondo le leggi della meccanica classica; una parte viene dissipata all'interno del materiale di cui è costituita la parete, ed una terza parte attraversa il materiale e procede liberamente oltre (Figura 8).

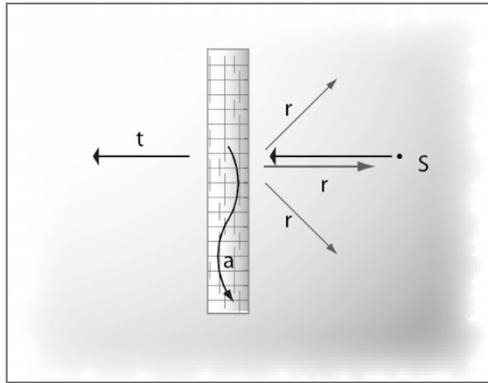


Figura 8 – Assorbimento, riflessione e trasmissione del suono

Se chiamiamo P_i l'energia totale che nell'unità di tempo (potenza) incide sulla parete e P_a , P_r e P_t le quote di potenza rispettivamente assorbita dalla parete, riflessa e trasmessa, si può scrivere:

$$P_i = P_a + P_r + P_t \quad (13)$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per la potenza totale P_i incidente sulla parete, possiamo riscrivere l'equazione come:

$$1 = a + r + t \quad (14)$$

dove a , r e t sono dei coefficienti adimensionali che esprimono rispettivamente le quote di potenza sonora assorbita, riflessa e trasmessa:

$$a = \frac{P_a}{P_i} \quad r = \frac{P_r}{P_i} \quad t = \frac{P_t}{P_i}$$

e prendono il nome rispettivamente di coefficiente di assorbimento, riflessione e di trasmissione.

1.1.7 Proprietà acustiche dei materiali

Mediante i coefficienti di riflessione r e di trasmissione t , vengono definite le grandezze fisiche che caratterizzano le prestazioni acustiche di un materiale: il *coefficiente di assorbimento acustico apparente* α e il *potere fonoisolante* R .

Il coefficiente di assorbimento acustico apparente α indica la capacità di un materiale di non riflettere energia verso la sorgente, mentre il potere fonoisolante R quantifica la capacità di isolare l'ambiente ricevente dai rumori provenienti dall'ambiente sorgente. Il coefficiente di assorbimento acustico apparente è dato da:

$$\alpha = 1 - r = a + t = 1 - \frac{P_r}{P_i} \quad (15)$$

Mentre il potere fonoisolante è definito come:

$$R = 10 \log \left(\frac{1}{t} \right) = 10 \log \left(\frac{P_i}{P_t} \right) \quad (16)$$

Le due grandezze hanno un significato fisico diverso: la prima rappresenta le caratteristiche fonoassorbenti di un materiale, mentre la seconda quelle fonoisolanti. I materiali che forniscono le migliori prestazioni fonoassorbenti presentano bassa massa, alta porosità, superficie cedevole; viceversa, i materiali che danno le migliori garanzie di fonoisolamento hanno massa elevata, superficie continua, sono rigidi e non porosi. Solo accoppiando opportunamente materiali dei due tipi è possibile contemporaneamente ottenere un buon grado di isolamento e di assorbimento acustico.

La grandezza utilizzata per valutare le proprietà isolanti di una parete è il potere fonoisolante R che, come abbiamo visto, rappresenta la sua attitudine a ridurre la trasmissione del suono incidente su di essa. Il potere fonoisolante varia al variare della frequenza oltre che delle proprietà fisiche, delle dimensioni e delle condizioni di vincolo della parete.

In Figura 9 si riporta l'andamento teorico del potere fonoisolante, per pareti omogenee e sottili, in funzione della frequenza e al variare dello smorzamento. Come si può osservare si individuano diverse zone (zona di rigidità, zona di risonanza, zona della legge di massa, zona di coincidenza) in ciascuna delle quali prevale un certo fattore.

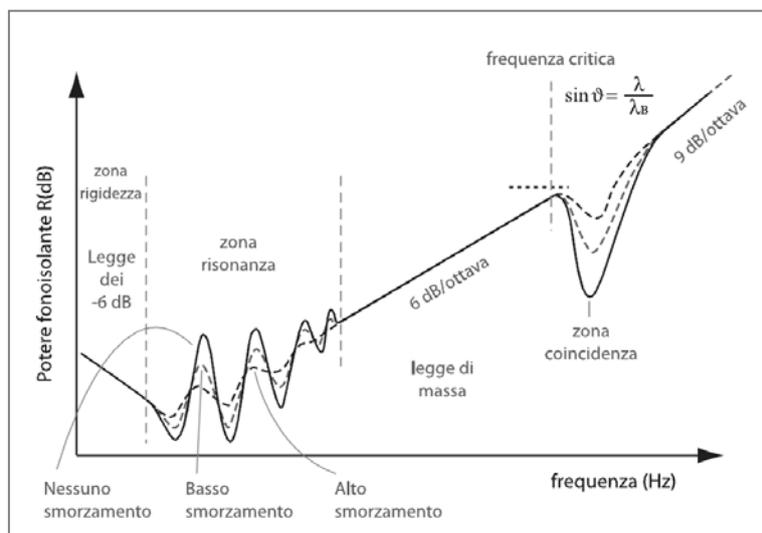


Figura 9 – Andamento del potere fonoisolante al variare della frequenza e dello smorzamento

Si può innanzitutto notare che il potere fonoisolante assume un valore minimo in corrispondenza della frequenza naturale del sistema.

Il valore della frequenza naturale dipende dalla massa per unità di superficie e dalla sua costante elastica. Quest'ultima, a sua volta, è funzione di proprietà meccaniche (ovvero modulo di elasticità E e coefficiente di Poisson ν del materiale) e geometriche (spessore h , larghezza a e altezza b del sistema), secondo la relazione:

$$f_{r(i,j)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2 \right] \quad (17)$$

dove ρ è la densità del materiale e i e j sono numeri interi per il calcolo delle frequenze di ordine superiore.

Il valore del potere fonoisolante nella zona delle frequenze naturali di risonanza oscilla in maniera irregolare con picchi e valli, rimanendo però sempre su valori piuttosto bassi. Infatti, essendo massima l'oscillazione del pannello in corrispondenza delle suddette frequenze, sarà massima anche l'energia sonora irradiata; pertanto, in corrispondenza delle frequenze di risonanza, il potere fonoisolante diminuisce mentre per frequenze diverse dalle frequenze di risonanza il potere fonoisolante aumenta. La zona del diagramma in cui il valore del potere fonoisolante oscilla in maniera irregolare con picchi e valli è indicata con il nome di *zona di risonanza* ed in essa il suddetto potere sarà funzione della rigidità del pannello.

Dalla figura si può osservare come i valori elevati dello smorzamento tendono a ridurre le valli di isolamento, causate dai fenomeni di risonanza e di coincidenza. Il fattore di smorzamento η indica quale frazione di energia meccanica vibrazionale viene persa in calore in un ciclo della vibrazione.

Per valori della frequenza inferiori alla frequenza di risonanza naturale ($f < f_r$), la trasmissione sonora dipende essenzialmente dalla rigidità (o elasticità) del pannello e quindi gli effetti della massa e dello smorzamento sono poco importanti (*zona di rigidità*). Per le suddette frequenze si registra una diminuzione del potere fonoisolante al crescere della frequenza; in particolare si ha una diminuzione di 6 dB per ogni raddoppio della frequenza.

Per valori della frequenza superiori alla frequenza naturale ma comunque inferiori ad un limite superiore fissato dalla cosiddetta *frequenza critica* ($f_r < f < f_c$), il potere fonoisolante è governato dalla legge della massa e si ha un aumento di R di 6 dB per raddoppio della frequenza e il comportamento del pannello è indipendente dalla sua rigidità. In questa zona per il calcolo del potere fonoisolante si può utilizzare la seguente formula di previsione, nota come *legge della massa*:

$$R_{\theta_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{m\pi f \cos \theta_i}{\rho_0 c} \right)^2 \quad [\text{dB}] \quad (18)$$

dove m è la massa superficiale, f è la frequenza, θ_i è l'angolo di incidenza, $\rho_0 c$ è l'impedenza acustica caratteristica dell'aria.

La validità della legge della massa è limitata superiormente dal fenomeno della coincidenza. La velocità del suono nell'aria è costante al variare della frequenza mentre la velocità delle onde flessionali nelle strutture varia al variare della frequenza. Esisterà quindi un punto di incrocio in cui le due velocità coincidono (Figura 10).

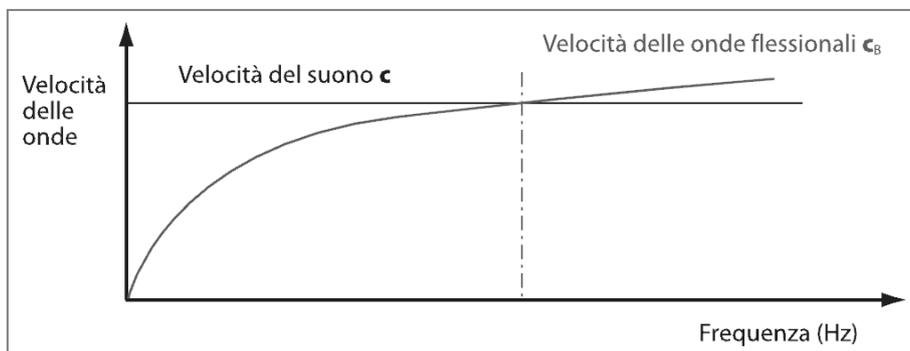


Figura 10 – Coincidenza della velocità del suono con la velocità delle onde flessionali

Le onde sonore piane che incidono con un certo angolo su una parete sottile infinita originano nella parete un'onda flessionale forzata di lunghezza d'onda λ_{tr} pari alla lunghezza d'onda di traccia dell'onda sonora incidente, ossia:

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_i}{\sin \theta}$$

dove λ_i è la lunghezza d'onda dell'onda incidente.

Il fenomeno, noto con il nome di coincidenza, si verifica quando, per un determinato angolo d'incidenza θ , la lunghezza d'onda di traccia dell'onda sonora piana incidente eguaglia la lunghezza d'onda λ_B dell'onda flessionale libera, cioè:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_i}{\sin \theta}$$

In queste condizioni l'onda di pressione acustica viene accompagnata, nel suo movimento di compressione e rarefazione, dall'onda flessionale sulla struttura e la stessa viene trasmessa dalla parte opposta della parete senza subire attenuazioni (Figura 11).

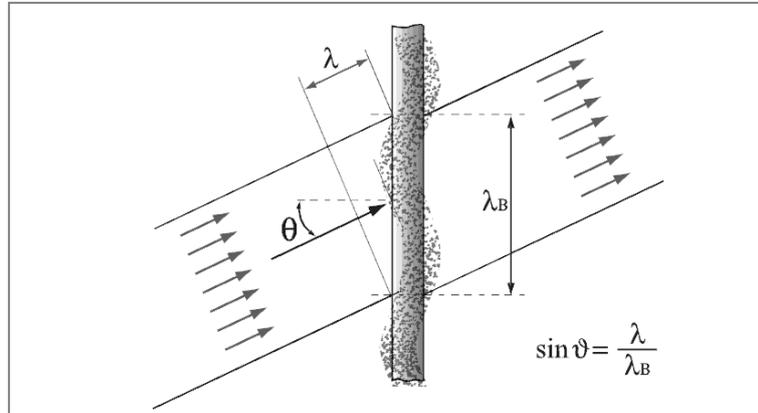


Figura 11 – Onde sonore piane che incidono su una parete sottile infinita

Poiché il $\sin \theta$ non può eccedere l'unità, si ha che la frequenza più bassa, per cui si verifica il fenomeno di coincidenza, si ottiene per $\theta = 90^\circ$ (cioè incidenza radente). Questa frequenza è chiamata *frequenza critica* ed è pari a:

$$f_c = \frac{c^2}{\pi h} \sqrt{\frac{3\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (19)$$

dove E è il modulo di Young, ν è il coefficiente di Poisson, ρ è la densità e h è lo spessore del pannello, e c è la velocità del suono nell'aria. La coincidenza si verifica nel caso particolare in cui $\lambda_i = \lambda_B$ o in modo equivalente quando $c_B = c$.

In campo diffuso le onde incidono sulla parete da tutte le direzioni. Il fenomeno di coincidenza in questo caso interessa un intervallo di frequenze; infatti, per ogni angolo d'incidenza esiste una corrispondente frequenza di coincidenza.

Il fenomeno della coincidenza è particolarmente importante quando si ha incidenza di onde piane con un certo angolo di inclinazione. In un campo diffuso il fenomeno della coincidenza è attenuato dal fatto che la quantità di energia trasportata dall'onda che subisce tale fenomeno, per una certa frequenza e per uno specifico angolo, è piccola rispetto a tutta quella che incide con angoli diversi alla stessa frequenza.

Al di sopra della frequenza critica e della zona dove si verifica il fenomeno della coincidenza, il potere fonoisolante torna ad aumentare con una pendenza teorica di 9 dB per raddoppio di frequenza e quindi superiore a quella che si verifica nel campo di validità della legge di massa. In

campo diffuso si può calcolare il potere fonoisolante sopra la frequenza critica con la seguente espressione:

$$R_d = 20 \log_{10}(mf) + 10 \log_{10} \left(\frac{f}{f_c} - 1 \right) + 10 \log_{10} \eta - 44 \quad (20)$$

dove f_c è la frequenza critica della parete (espressa in Hz) e η è il fattore di smorzamento totale della stessa. Il fattore di smorzamento totale, come abbiamo visto, sintetizza i meccanismi di smorzamento all'interno della parete eccitata indicando quale frazione dell'energia meccanica vibratoria viene convertita in calore in un ciclo della vibrazione.

Poiché lo smorzamento dipende non solo dal materiale, ma anche dalle condizioni al contorno, la previsione del potere fonoisolante al di sopra la frequenza critica ha una affidabilità limitata.

1.2 Le vibrazioni

Lo studio delle vibrazioni degli organi delle macchine riveste una notevole importanza, per gli effetti che tali moti possono avere sul funzionamento delle macchine nel loro complesso e sulla vita degli organi meccanici stessi, [4, 5, 6]

Affinché si manifesti un moto vibratorio è necessario che al sistema appartenga almeno un membro cui sia possibile attribuire caratteristiche elastiche, e che al sistema sia applicata almeno una forza (o una coppia) non costante, variabile nel tempo con legge periodica.

Nell'ambito della validità della legge di Hooke, la caratteristica elastica può essere individuata nella elasticità propria del materiale che costituisce il sistema o uno dei suoi membri, oppure in quella di un singolo elemento del sistema stesso (per esempio una molla); talvolta tale caratteristica è surrogata dal manifestarsi, durante il moto, di particolari forze che tendono (come nel caso del pendolo) a riportare il sistema nella configurazione di equilibrio statico. In generale tale caratteristica può sempre essere sintetizzata in una costante elastica (indicata di solito con la lettera k) che identifica o un legame forza/spostamento o un legame momento/rotazione.

Quando si ha a che fare con sistemi reali è necessario tener conto anche di una caratteristica dissipativa ossia il destarsi, con il moto, di forze che si oppongono al moto stesso ed il cui effetto è quello di limitare l'ampiezza del moto oscillatorio del sistema (*smorzamento*).

Il più comune smorzatore è quello di tipo viscoso in cui le forze che si oppongono al moto sono proporzionali alla velocità. In tal caso la caratteristica dissipativa del sistema viene sintetizzata in un coefficiente di smorzamento viscoso, (effettivo o equivalente) che si indica, in genere, con la lettera c , e che rappresenta appunto un legame forza/velocità. Tuttavia si possono avere anche smorzatori di tipo particolare in cui la forza che si oppone al moto dipende dal quadrato della velocità. Inoltre, costituisce una caratteristica dissipativa anche la presenza dell'attrito negli accoppiamenti fra i vari membri di una macchina, come pure l'effetto del verificarsi di cicli di isteresi nel materiale (smorzamento strutturale).

In un sistema, insieme agli elementi con caratteristica elastica ed, eventualmente, a quelli con caratteristica dissipativa, devono ritrovarsi anche uno o più elementi massivi. A tutti questi elementi (masse, molle e smorzatori) si dà genericamente il nome di parametri del sistema.

Generalmente i sistemi reali sono molto complessi, in quanto risultano costituiti da membri diversi con caratteristiche dinamiche per lo più diverse fra loro, e solo la conoscenza di queste caratteristiche consente di operare quella idealizzazione che prende il nome di *modello matematico*.

La scelta di procedere ad un'analisi dinamica più approfondita può anche imporre di tener conto della circostanza che i membri di un sistema, considerati membri rigidi nell'ambito dell'analisi cinematica, di fatto sono deformabili; e ciò implicherà il dover sostituire lo studio di un sistema a

parametri concentrati (o sistema discreto) con lo studio di un sistema a parametri distribuiti (o sistema continuo). Ne consegue che i gradi di libertà del sistema non possono più essere quelli previsti dalla cinematica dei sistemi rigidi: per ogni sistema continuo si dovranno considerare infinite masse elementari opportunamente vincolate fra loro e in moto relativo; inoltre, mentre i sistemi discreti sono descritti da equazioni differenziali ordinarie, i sistemi continui sono descritti, generalmente, da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Comunque il sistema sia costituito, si potrà dire che esso è soggetto a *vibrazione* quando almeno uno dei suoi punti presenta un moto nell'intorno di una data configurazione di equilibrio, moto che si ripete con le medesime caratteristiche dopo un intervallo di tempo ben definito. Tale intervallo di tempo prende il nome di *periodo della vibrazione* T e, nel caso più semplice, è l'intervallo di tempo in cui si compie una oscillazione completa.

Si definisce *frequenza della vibrazione* f il numero delle oscillazioni complete per unità di tempo e si misura in Hertz (Hz); più in generale la frequenza della vibrazione è il numero di volte in cui il moto del sistema si presenta con le medesime caratteristiche in un prefissato intervallo di tempo T , pertanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad (21)$$

Il moto vibratorio di un sistema dipende, in generale, da due particolari valori di frequenza: la frequenza naturale (o frequenza propria) f_n che è la frequenza con cui vibra un sistema che ha soltanto caratteristiche elastiche e non è soggetto a forze esterne attive del tipo $f(t)$; la frequenza eccitatrice (o frequenza forzante) f_f che è quella dell'azione esterna $f(t)$ (quando esiste) che agisce sul sistema con variabilità periodica.

Quando i valori di tali frequenze coincidono $f_f = f_n$ si ha la condizione di risonanza, cui può corrispondere una esaltazione dell'ampiezza del moto vibratorio con possibile pericolo per la integrità del sistema. Si comprende, quindi, l'importanza della determinazione della frequenza naturale in un sistema vibrante.

1.2.1 Tipi di vibrazioni

Una prima classificazione delle vibrazioni porta a distinguere fra vibrazioni libere e vibrazioni forzate. Si dicono *vibrazioni libere* le vibrazioni di un sistema che, allontanato, in qualche modo, dalla sua configurazione di equilibrio statico, viene lasciato libero di oscillare in assenza di azioni

eccitrici esterne. Si dicono, invece, *vibrazioni forzate* quelle di un sistema sottoposto invece all'azione di azioni eccitrici esterne.

Si definiscono, infine, *vibrazioni transitorie* quelle la cui ampiezza varia nel tempo, o fino ad annullarsi, nel caso di vibrazioni libere, ovvero fino a raggiungere l'ampiezza della *vibrazione permanente*, nel caso di vibrazioni forzate. Il transitorio è legato alla presenza, nel sistema, di caratteristiche dissipative (per esempio smorzatori), e pertanto esso è una caratteristica di tutti i sistemi reali, siano essi in vibrazione libera o forzata. Idealmente, un sistema soggetto a vibrazioni libere, se non fosse dotato di alcun tipo di attrito, smorzamento o comunque dispersione energetica, continuerebbe a vibrare infinitamente nel tempo.

1.2.2 Richiami di cinematica del moto armonico

La forma più semplice di moto periodico è il moto armonico, espresso, per un punto, da una relazione del tipo:

$$x(t) = X \cos(\omega t) \quad (22)$$

atta a rappresentare lo spostamento $x(t)$ il cui valore oscilla fra gli estremi X e $-X$, con X ampiezza della vibrazione, con periodo angolare di 2π (Figura 12)

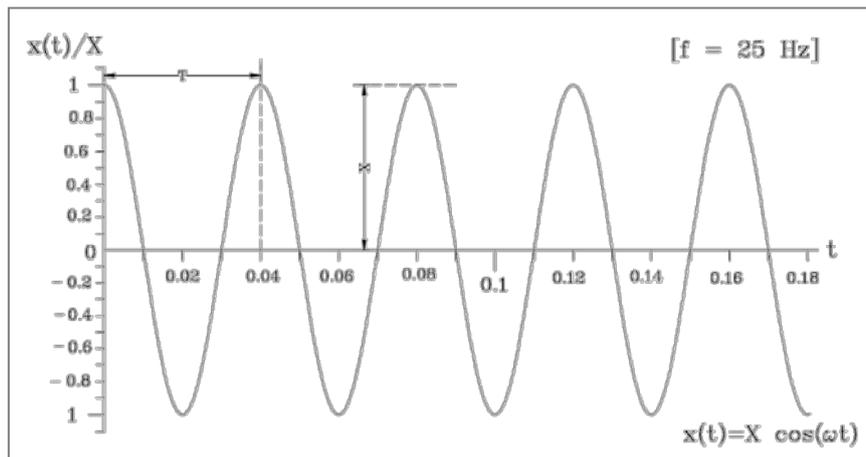


Figura 12 – Moto armonico

In termini di unità di tempo, allora, il periodo del moto oscillatorio descritto da una tale funzione sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (23)$$

ed ω , [s^{-1}] prende il nome di *pulsazione angolare*; mentre la frequenza di tale moto sarà data da:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega t}{2\pi} \quad (24)$$

Si può ancora osservare che una funzione così scritta assume che il valore del tempo t si sta misurando da un istante t_0 in cui lo spostamento presentava il suo valore massimo (per $t_0 = 0$; $x(t) = X$); poiché è del tutto arbitrario il modo di fissare l'origine dei tempi, la forma più generale di rappresentazione del moto armonico sarà:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

dove φ è l'*angolo di fase*, che sta ad indicare che l'origine dei tempi è spostata di un $\Delta t = \varphi/\omega$ rispetto all'istante in cui era $x(t) = X$, ossia che troveremo $x(t) = X$, non per $t_0 = 0$, ma per $t_0 = -\Delta t$.

Un punto il cui moto è regolato dalla (25) avrà una velocità data da:

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

e ciò mostra come la velocità sia sfasata di $\pi/2$ (ovvero sia in quadratura) rispetto allo spostamento: la velocità risulta nulla quando lo spostamento è pari all'ampiezza massima, mentre risulta massima quando il punto attraversa la posizione di equilibrio ($x = 0$).

L'accelerazione sarà data da:

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 X \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (27)$$

e risulta, invece, sfasata di π rispetto allo spostamento e in quadratura rispetto alla velocità. La Figura 13 mostra, a titolo di esempio, un diagramma della (25) e delle sue derivate per fissati valori della frequenza e dello sfasamento.

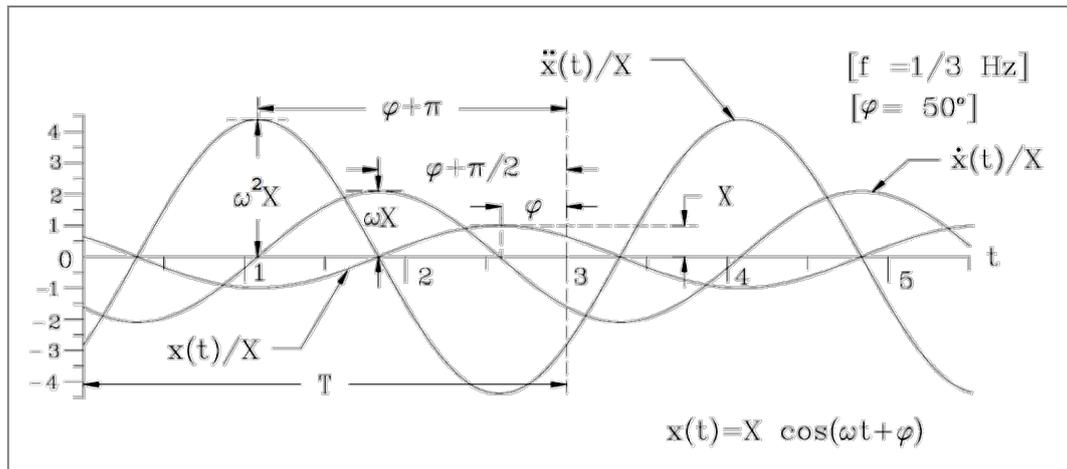


Figura 13 – Rappresentazione di un moto armonico e delle sue derivate

1.2.3 Moti periodici non armonici

Un moto armonico è senz'altro un moto periodico; tuttavia, non è sempre vero il viceversa, ossia non tutti i moti periodici sono di tipo armonico.

La teoria matematica tuttavia dimostra che un qualsiasi moto periodico di pulsazione ω può essere descritto, attraverso la serie di Fourier, mediante la somma di funzioni sinusoidali di pulsazione ω , 2ω , 3ω , ..., $n\omega$; ossia da una funzione del tipo:

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(\omega t + \varphi_n) \quad (28)$$

somma di n armoniche, dove i coefficienti A_0, A_1, \dots, A_n sono le ampiezze delle singole armoniche componenti, e $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ le rispettive fasi.

Il primo termine della serie, A_0 , è una costante e rappresenta, evidentemente, il valore medio della funzione $f(t)$ durante un periodo: sarà quindi nullo tutte le volte che la $f(t)$ sarà simmetrica rispetto all'asse dei tempi; i termini successivi costituiscono, rispettivamente, la prima armonica, la seconda, ..., la n -esima armonica.

Il moto di un punto la cui legge sia data dalla (22), o anche dalla (25), può trovare una semplice rappresentazione attraverso un vettore di modulo pari ad X , rotante con velocità angolare uniforme pari ad ω in verso antiorario se questo è il verso scelto come positivo per gli angoli t (Figura 14).

Infatti la componente del vettore sull'asse orizzontale si scrive proprio come la (25); e in modo del tutto analogo è valida la rappresentazione della velocità e della accelerazione.

Tale metodo di rappresentazione risulta particolarmente utile nella valutazione del moto complessivo di un punto soggetto simultaneamente a due moti oscillatori della medesima frequenza, valutazione che può essere fatta quindi con i metodi elementari del calcolo vettoriale.

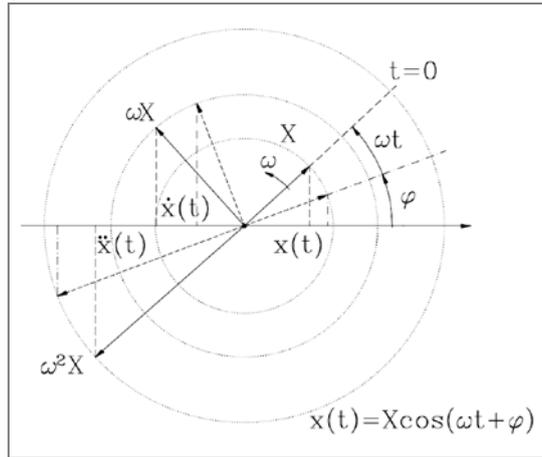


Figura 14 – Rappresentazione vettoriale

Infatti, dati due moti vibratori sfasati dell'angolo φ :

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t) \quad (29)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

se si fa riferimento alla rappresentazione vettoriale, il vettore somma X avrà come modulo la diagonale AC del parallelogramma $ABCD$ la quale è pari, per il teorema di Carnot, a:

$$AC = X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos \varphi} \quad (31)$$

e che risulta ruotata rispetto al lato AB di un angolo α tale che sia:

$$\tan \alpha = -\frac{X_2 \sin \varphi}{X_1 + X_2 \cos \varphi} \quad (32)$$

rappresentando quindi un moto risultante esprimibile con una legge di tipo:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \alpha) \quad (33)$$

Il moto risultante è rappresentato in Figura 15.

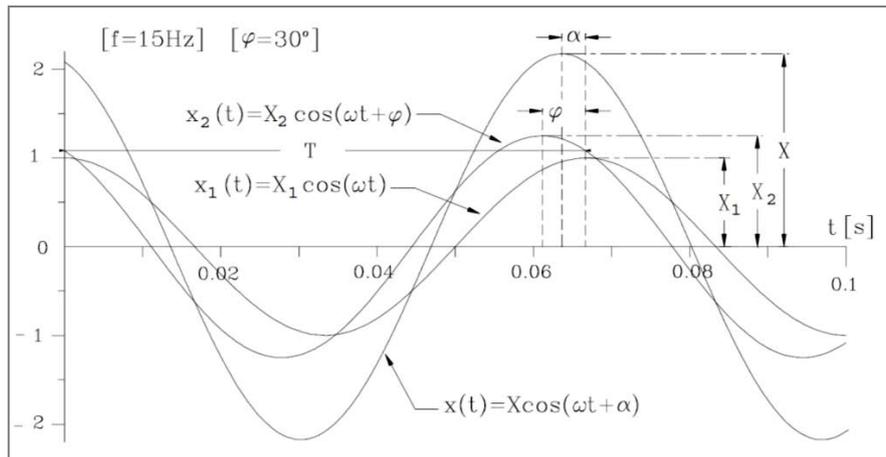


Figura 15 – Rappresentazione di due moti vibratori sfasati di un angolo φ

Particolarmente interessante è il caso in cui il moto risultante si ottiene dalla composizione di due moti oscillatori che non hanno la medesima frequenza, cioè dalla sovrapposizione di due frequenze diverse:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (34)$$

Si ha così il fenomeno della modulazione (di ampiezza, di frequenza, di fase); il moto risultante dipende fondamentalmente dai valori di ω_1 e di ω_2 : se il loro rapporto non è un rapporto razionale il moto risultante non è periodico, se invece il rapporto fra le frequenze dei moti componenti è un rapporto fra numeri interi il moto risulta periodico.

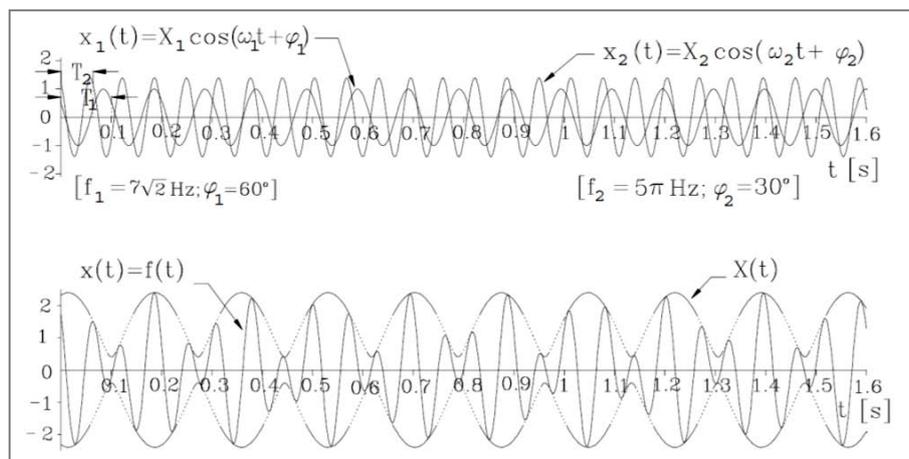


Figura 16 – Composizione di due moti vibratori il cui rapporto tra le frequenze non è un numero razionale

In Figura 16 è riportata, a titolo di esempio, l'oscillazione risultante da due moti con particolari valori di frequenza, il cui rapporto non è un numero razionale: si può vedere che non esiste un periodo T per l'oscillazione risultante. Mentre il moto risultante mostrato in Figura 17 è invece

periodico, poiché il rapporto fra le frequenze dei moti componenti è un rapporto fra numeri interi: si può infatti notare che l'intervallo di tempo fra i punti A e A' , B e B' , C e C' ecc. è costantemente pari a T .

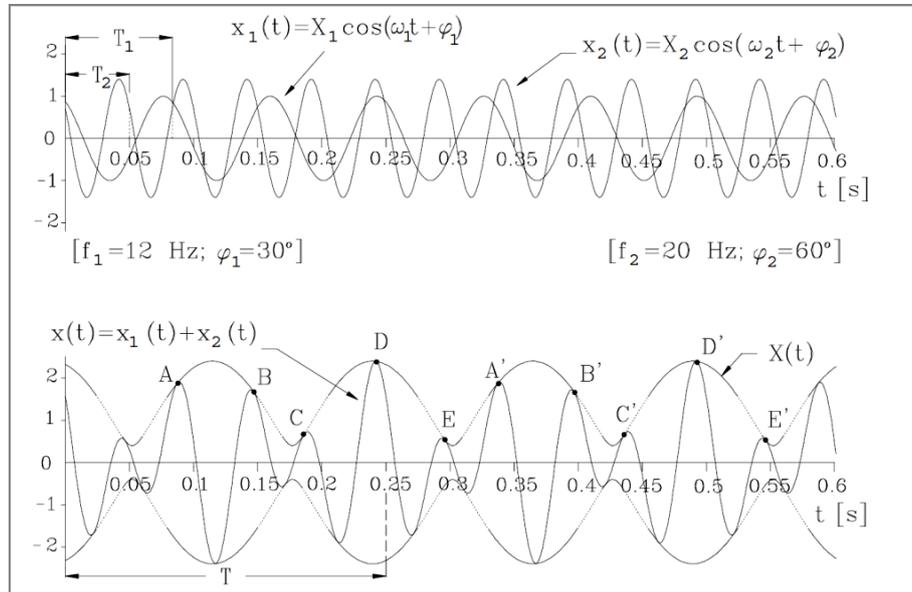


Figura 17 – Composizione di due moti vibratori il cui rapporto tra le frequenze è un numero razionale

In questo secondo caso, posto:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \text{e} \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (35)$$

si perviene ad un moto dato da:

$$x(t) = X(t) \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (36)$$

con:

$$X(t) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} \quad (37)$$

e:

$$\tan \varphi = -\frac{X_1 \sin \varphi_1 + X_2 \sin(\Delta\omega t + \varphi_2)}{X_1 \cos \varphi_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t + \varphi_2)} \quad (38)$$

e ciò mostra come, sia l'ampiezza che la fase del moto risultante, variano col tempo e con una frequenza pari alla differenza delle frequenze dei moti componenti.

Le Figure 18, 19 e 20 mostrano, rispettivamente, i tre casi in cui i moti componenti, pur avendo frequenza diversa hanno: la stessa ampiezza ma fase diversa, stessa fase ma ampiezza diversa e stessa ampiezza e stessa fase.

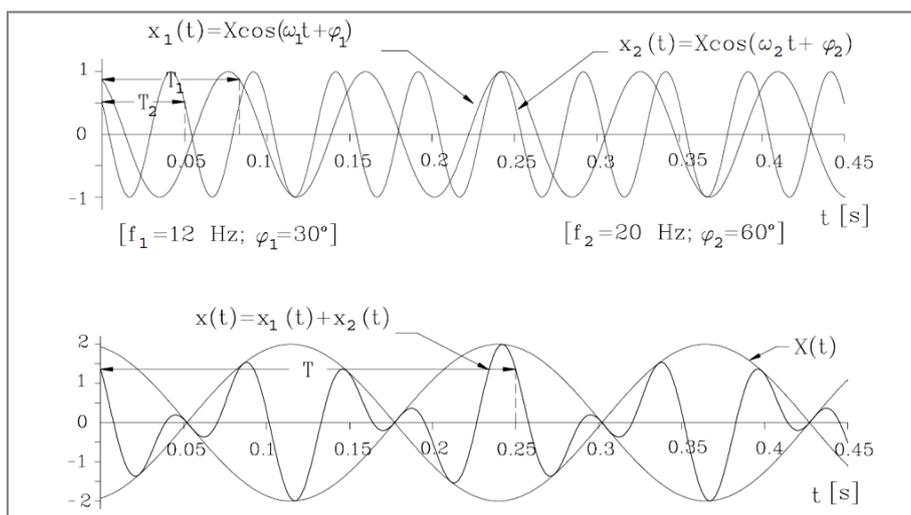


Figura 18 – Composizione di due moti vibratori con stessa ampiezza, ma fase diverse

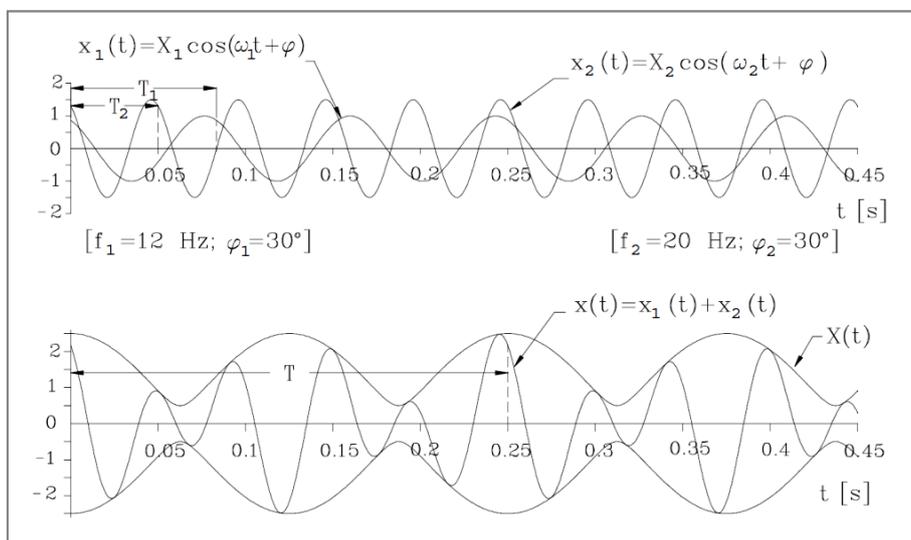


Figura 19 – Composizione di due moti vibratori con stessa fase, ma ampiezze diverse

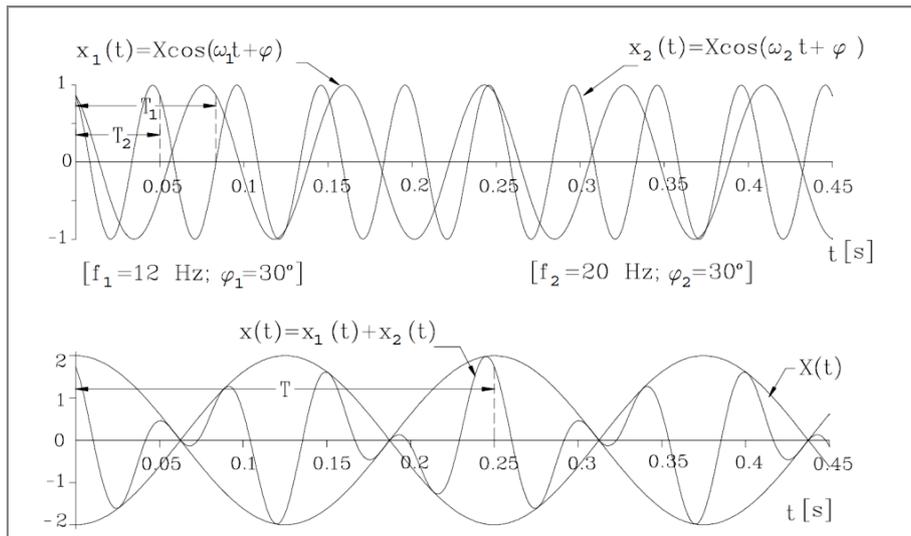


Figura 20 – Composizione di due moti vibratori con stessa ampiezza e stessa fase

Nel caso in cui le oscillazioni componenti hanno la medesima ampiezza, ossia:

$$x_1(t) = X \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (39)$$

$$x_2(t) = X \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (40)$$

si ottiene un moto risultante del tipo:

$$x(t) = X(t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (41)$$

in cui è:

$$X(t) = 2X \cos(\omega t + \varphi) \quad (42)$$

con:

$$\omega = \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Tale situazione dà luogo a un particolare fenomeno di modulazione che prende il nome di *battimento*, particolarmente accentuato quando i valori delle frequenze dei moti componenti sono molto prossime fra loro, per cui il valore di $\Delta\omega$ è molto piccolo rispetto ai valori di ω_1 e ω_2 .

1.2.4 Vibrazioni libere senza smorzamento

Si consideri un corpo di massa concentrata m sospeso ad una molla di lunghezza iniziale l_0 e di rigidezza k , supponendolo vincolato in modo tale che possa muoversi solamente nella direzione della verticale (Figura 21).

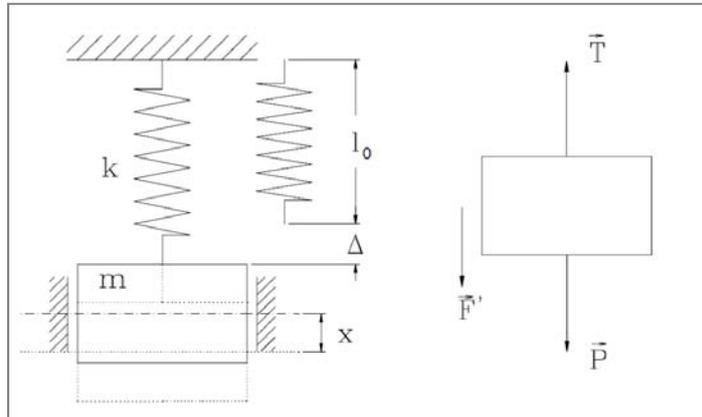


Figura 21 – Schema di corpo soggetto a vibrazioni libere senza smorzamento

Si vuole studiare il moto di questo corpo allorché, avendolo spostato dalla sua posizione di equilibrio statico, lo si abbandoni a se stesso.

La posizione di equilibrio statico è quella in cui si troverà il corpo dopo avere, per effetto della sua forza peso, allungato la molla di una certa quantità Δ in tale posizione è nulla la somma delle forze agenti sul corpo stesso, il peso e la forza elastica di reazione della molla, ossia:

$$P - k\Delta = 0 \quad (43)$$

Se ne ricava immediatamente che è $\Delta = P/k$.

Se adesso il corpo viene scostato della quantità x_0 dalla sua posizione di equilibrio, e poi abbandonato con velocità v_0 , esso, sotto l'azione di richiamo della molla si metterà in movimento. In corrispondenza ad una sua generica posizione x , dovranno essere verificate le equazioni cardinali della dinamica e, in particolare, date le ipotesi fatte, dovrà essere:

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0 \quad (44)$$

dove \vec{F} è la risultante di tutte le forze agenti sul corpo e \vec{F}' la risultante delle forze d'inerzia. E sarà:

$$\vec{F} = P - k(x + \Delta) \quad \text{e} \quad \vec{F}' = -ma_G = -m\ddot{x}$$

e pertanto, tenendo conto della (43):

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (45)$$

che è l'equazione differenziale del moto del corpo. Dividendo quest'ultima per m , e ponendo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (46)$$

si avrà:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (47)$$

Si deduce chiaramente come, essendo ω_n^2 una quantità essenzialmente positiva, l'accelerazione è sempre di verso opposto allo spostamento x del corpo, e quindi diretta sempre verso la sua posizione di equilibrio statico. La soluzione della (47) è una funzione del tipo:

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (48)$$

con X e φ da determinare in base alle condizioni iniziali.

Il corpo, quindi, manifesterà un moto oscillatorio armonico con *pulsazione naturale* ω_n ; a questa corrisponde la frequenza f_n (detta *frequenza naturale*) che potremo scrivere come:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{P}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (49)$$

Le tre forme in cui è possibile esprimere la frequenza naturale del sistema mettono in evidenza che questa dipende *esclusivamente* dai parametri che caratterizzano il sistema (ovvero dalla molla e dalla massa) e pertanto è sufficiente la conoscenza di questi valori per arrivare alla sua determinazione. La forma più significativa è l'ultima, per la quale la conoscenza dell'allungamento della molla sotto l'azione del peso P del corpo in condizioni statiche è sufficiente per la determinazione della frequenza naturale del sistema.

Si osserva in ogni caso come la frequenza naturale del sistema aumenta al crescere della rigidità della molla, mentre diminuisce al crescere della massa (o del carico).

La risposta effettiva del sistema dipende dal valore fissato per le condizioni iniziali. Se si abbandona il corpo con velocità nulla, ossia se, per $t = 0$, è $x = x_0$ e $\dot{x} = 0$, si ottiene:

$$x_0 = X \cos \varphi \quad \text{e} \quad 0 = -X\omega_n \sin \varphi$$

da cui:

$$X = x_0 \quad \text{e} \quad \varphi = 0$$

e quindi:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) \quad (50)$$

Se invece all'istante iniziale si imprime al corpo una velocità v_0 in corrispondenza ad una posizione $x = x_0$, si avrà:

$$x_0 = X \cos \varphi \quad \text{e} \quad v_0 = -X\omega_n \sin \varphi$$

e quindi una risposta del tipo:

$$x(t) = X \cos(\omega_n t + \varphi) \quad (51)$$

con:

$$X = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{x_0^2 \omega_n^2 + v_0^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\omega_n x_0} \right)$$

Mentre se la velocità v_0 viene impressa in corrispondenza della posizione di equilibrio statico, $x_0 = 0$, si avrà:

$$0 = X \cos \varphi \quad \text{e} \quad v_0 = -X\omega_n \sin \varphi$$

da cui:

$$X = \frac{v_0}{\omega_n} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi$$

e quindi una risposta:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (52)$$

La Figura 22 mostra come il valore della velocità iniziale v_0 influenzi sia l'ampiezza della risposta che lo sfasamento della stessa, in modo tanto più importante quanto più bassa è la frequenza naturale del sistema stesso.

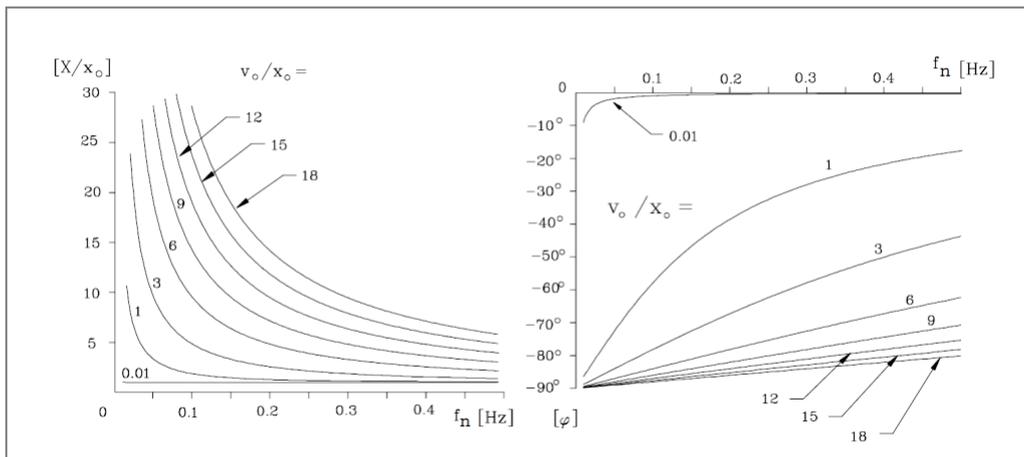


Figura 22 – Andamento dell'ampiezza della risposta e dello sfasamento della stessa al variare della frequenza naturale del sistema e del valore della velocità iniziale

1.2.5 Vibrazioni libere con smorzamento viscoso

Si consideri un corpo di massa concentrata m sospeso ad una molla di rigidezza k e vincolato ad uno smorzatore di tipo viscoso di cui sia c il coefficiente di smorzamento (Figura 23).

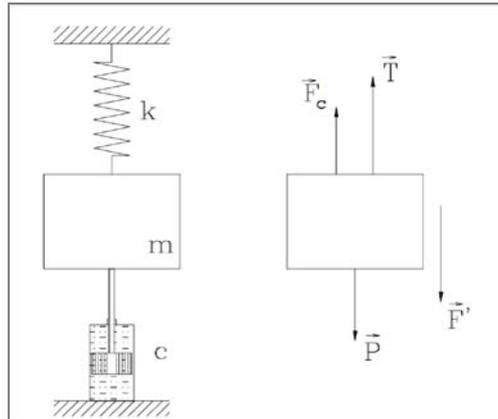


Figura 23 – Schema di corpo soggetto a vibrazioni libere con smorzamento viscoso

Supponendo che la massa possa spostarsi solamente nella direzione della verticale se ne vuole studiare il moto che ne deriva se, dopo aver deformato il sistema, essa viene abbandonata al di fuori della posizione di equilibrio statico.

Nella configurazione di equilibrio statico il corpo è soggetto al suo peso P sorretto dalla reazione elastica della molla che si è deformata di Δ rispetto alla sua lunghezza libera. Deve quindi valere che $P = k\Delta$.

Deformiamo adesso il sistema spostando il corpo di x_0 da questa posizione di equilibrio, abbandonandolo, successivamente, con velocità v_0 . Sotto l'effetto della forza di richiamo della molla esso tenderà verso la precedente posizione.

Utilizzando le equazioni cardinali della dinamica, la condizione di equilibrio del sistema per la generica configurazione si può esprimere, in questo caso, attraverso la (10), in cui le forze attive, reattive e d'inerzia sono:

- la forza peso, P ;
- la reazione elastica della molla, $-k(x + \Delta)$;
- la reazione dello smorzatore viscoso, $-c\dot{x}$;
- la forza d'inerzia, $-m\ddot{x}$.

Pertanto, potremo scrivere:

$$P - k(x + \Delta) - c\dot{x} - m\ddot{x} = 0 \quad (53)$$

Semplificando in base alla precedente condizione di equilibrio statico e cambiando di segno si ottiene l'equazione differenziale del moto nella forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (54)$$

la quale, una volta integrata, ci darà la legge del moto del corpo in esame.

Convieni, tuttavia, prima di procedere alla integrazione, modificarne la forma in modo più opportuno, introducendo sia il *coefficiente di smorzamento critico*, c_c , sia il *fattore di smorzamento*, d . Chiameremo critico il coefficiente di smorzamento quando esso avrà il valore:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (55)$$

essendo, come sempre, ω_n la pulsazione naturale del sistema. Si noti come il valore del coefficiente di smorzamento critico dipenda esclusivamente dalla costante elastica e dalla massa del corpo.

Chiameremo fattore di smorzamento il rapporto $d = c/c_c$, che si configura quindi come un numero che indica se il valore del coefficiente di smorzamento, c , del sistema è maggiore, eguale, o minore del valore critico, c_c , prima definito.

Per introdurre tali parametri nell'equazione differenziale del moto, dividiamo tutto per m :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (56)$$

Poiché $\frac{k}{m} = \omega_n^2$, ed inoltre:

$$\frac{c}{m} = \frac{c}{m} \frac{2\omega_n}{2\omega_n} = 2 \frac{c}{2m\omega_n} = 2 \frac{c}{c_c} \omega_n = 2d\omega_n$$

si può scrivere:

$$\ddot{x} + 2d\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (57)$$

La soluzione di questa equazione differenziale potrà essere del tipo:

$$x = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t} \quad (58)$$

Dove A_1 e A_2 sono le costanti da determinare il base alle condizioni iniziali, mentre α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + 2d\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0 \quad (59)$$

Il discriminante di questa equazione è:

$$d^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2 (d^2 - 1) \quad (60)$$

e la sua forma mette subito in evidenza come il numero ed il tipo delle radici della equazione caratteristica dipendono essenzialmente dall'essere d maggiore, eguale, o minore dell'unità, ossia dall'essere c maggiore, eguale, o minore di c_c ; e si può prevedere che a questi tre casi corrisponderanno tre tipi di moto diversi per il corpo.

1.2.5.1 Caso $d > 1$

Le radici dell'equazione caratteristica, reali e distinte, sono:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\omega_n \left(d - \sqrt{d^2 - 1} \right) \\ \alpha_2 &= -\omega_n \left(d + \sqrt{d^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Ora, poiché è sicuramente $\sqrt{d^2 - 1} < d$, le quantità dentro le parentesi sono certamente positive e quindi entrambe le radici sono negative. Pertanto, in questo caso, la soluzione dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$x = A_1 e^{-|\alpha_1|t} + A_2 e^{-|\alpha_2|t} \quad (61)$$

La forma della (61) rivela che la massa avrà un moto aperiodico di tipo esponenziale con esponente negativo, e ciò vuol dire che il corpo tenderà alla posizione di equilibrio in un tempo infinito, e non la attraverserà mai.

Se poniamo:

$$\lambda = d\omega_n \quad \text{e} \quad \sigma = \omega_n \sqrt{d^2 - 1}$$

essendo $\lambda > \sigma > 0$, avremo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\lambda + \sigma \\ \alpha_2 &= -\lambda - \sigma \end{aligned}$$

la soluzione della (57) si può mettere nella forma:

$$x = e^{-\lambda t}(A_1 e^{\sigma t} + A_2 e^{-\sigma t}) \quad (62)$$

E se poniamo $A_1 = (A + B)/2$ e $A_2 = (A - B)/2$, si ottiene:

$$x = e^{-\lambda t} \left(A \frac{e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}}{2} + B \frac{e^{\sigma t} - e^{-\sigma t}}{2} \right) \quad (63)$$

ossia:

$$x = e^{-\lambda t}(A \cosh(\sigma t) + B \sinh(\sigma t)) \quad (64)$$

Cerchiamo le costanti di integrazione per il caso in cui all'istante $t = 0$ sia $x = x_0$ e $\dot{x} = v_0$.

Nel caso della forma (61) o (62) avremo per $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_1 + A_2 \\ v_0 &= -(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = (\sigma - \lambda)A_1 + (\sigma + \lambda)A_2 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0(\sigma + \lambda) + v_0}{2\sigma} \\ A_2 &= \frac{x_0(\sigma - \lambda) - v_0}{2\sigma} \end{aligned}$$

mentre, per la forma (64), avremo:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ v_0 &= -\lambda A + \sigma B \end{aligned}$$

e quindi:

$$A = x_0$$

$$B = \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sigma} = \frac{v_0 + d\omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{d^2 - 1}}$$

Pertanto la legge del moto del corpo potrà essere indifferentemente espressa dalla:

$$x = \frac{e^{-\lambda t}}{2\sigma} \{ [x_0(\sigma + \lambda) + v_0] e^{\sigma t} + [x_0(\sigma - \lambda) - v_0] e^{-\sigma t} \} \quad (65)$$

oppure dalla:

$$x = \frac{e^{-\lambda t}}{2\sigma} \left[x_0 \cosh(\sigma t) + \frac{v_0 + x_0 \omega_n d}{\omega_n \sqrt{d^2 - 1}} \sinh(\sigma t) \right] \quad (66)$$

Gli altri casi particolari di condizioni iniziali si possono ricavare semplicemente ponendo $x_0 = 0$ oppure $v_0 = 0$.

La risposta del sistema al variare del valore del fattore di smorzamento è riportato in Figura 24, dove sono state assunte come condizioni iniziali: velocità nulla e spostamento unitario. Come era da prevedersi, la massa tende alla posizione di equilibrio statico in un tempo sempre più lungo man mano che aumenta il valore di d .

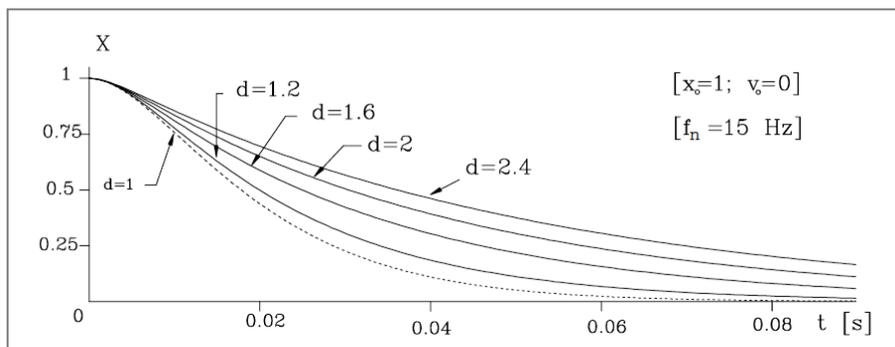


Figura 24 – Andamento dell'ampiezza della risposta nel tempo al variare del fattore di smorzamento (caso spostamento iniziale unitario, velocità iniziale nulla)

Se, nelle condizioni iniziali, si scambiano i valori di spostamento e velocità, ossia si pone spostamento nullo e velocità unitaria, la forma della risposta diventa una di quelle rappresentate in Figura 25.

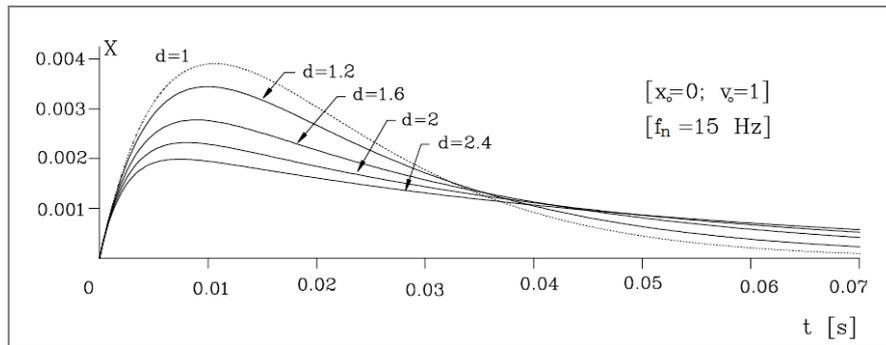


Figura 25 – Andamento dell’ampiezza della risposta nel tempo al variare del fattore di smorzamento (caso spostamento iniziale nullo, velocità iniziale unitaria)

Si può notare che, mentre il variare del fattore di smorzamento produce ancora il medesimo effetto, il valore dell’ampiezza massima, per curve corrispondenti, risulta molto minore, e tale divario dipende essenzialmente dalla frequenza naturale del sistema. Infatti, prescindendo dalla presenza delle azioni dissipatrici dovute al fluido viscoso, si può capire che quando si allontana la massa dalla sua posizione di equilibrio statico di una quantità x_0 , essa acquista una energia potenziale elastica pari ad $\frac{1}{2}kx_0^2$; quando le si imprime una velocità iniziale v_0 essa acquista una energia cinetica pari ad $\frac{1}{2}kv_0^2$. Pertanto il valore della velocità iniziale v_0 necessario ad ottenere una elongazione pari ad x_0 risulterebbe pari a:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x_0 = \omega_n x_0 \quad (67)$$

In questo caso il valore di v_0 dovrà essere ancora maggiore perché parte dell’energia cinetica verrà comunque assorbita dallo smorzatore.

La Figura 26 mette in evidenza nel grafico a sinistra come varia la risposta al variare del valore di v_0 , per un fissato valore del fattore di smorzamento d ; mentre nel grafico a destra, mostra la risposta al variare della pulsazione naturale del sistema per data velocità iniziale e per un dato coefficiente di smorzamento. In questo secondo caso sembrerebbe che, pur restando costante il valore del coefficiente di smorzamento, la risposta del sistema risulta via via sempre meno smorzata man mano che il valore della frequenza naturale diminuisce; ciò di fatto è ovvio in quanto la frequenza naturale del sistema entra a definire il coefficiente di smorzamento critico e quindi del fattore di smorzamento.

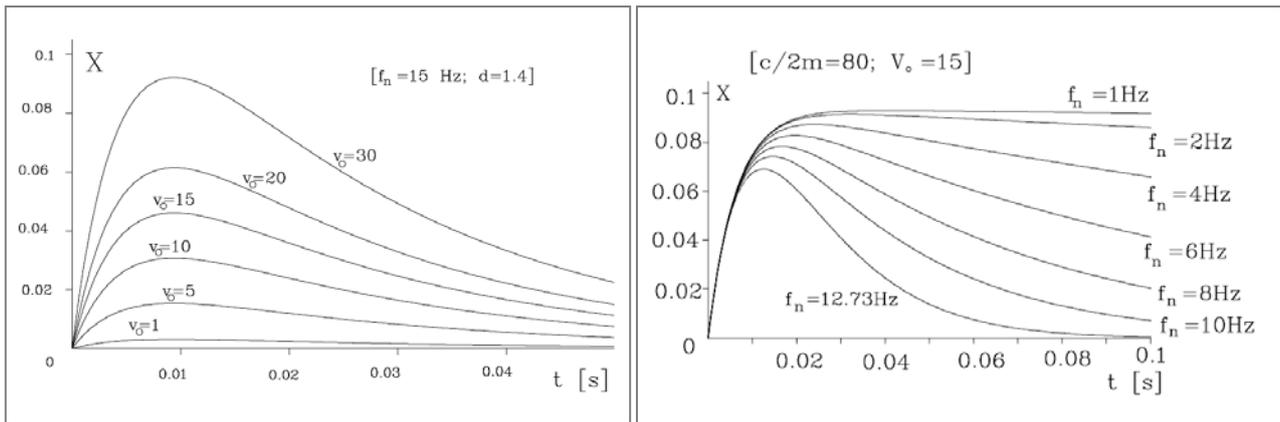


Figura 26 – Andamento dell'ampiezza della risposta nel tempo al variare della velocità iniziale e della frequenza naturale del sistema

1.2.5.2 Caso $d = 1$

In questo caso, poiché il discriminante dell'equazione caratteristica si annulla, le radici saranno reali e coincidenti. Allora, il tipo di soluzione ipotizzata per la (57) non va più bene perché condizione necessaria e sufficiente perché una radice di una equazione sia doppia è che essa soddisfi non solo l'equazione ma anche la sua derivata prima e quindi l'equazione differenziale deve possedere sia la soluzione del tipo $e^{\alpha t}$ sia la soluzione $te^{\alpha t}$.

La radice doppia dell'equazione caratteristica è $\alpha = -\omega_n$ e quindi possiamo porre come soluzione:

$$x = (A + Bt)e^{\alpha t} = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad (68)$$

Vediamo che in questo caso la soluzione è costituita dal prodotto di una funzione lineare e di una funzione esponenziale con esponente negativo; pertanto il corpo ancora una volta tenderà a raggiungere, in un tempo infinito, la posizione di equilibrio statico senza mai attraversarla, ma la rapidità con cui ciò avviene è sempre maggiore (Figure 24 e 25) che non nel caso in cui è $d > 1$: l'esponenziale negativo predomina sulla funzione lineare.

Cerchiamo le costanti di integrazione per il caso in cui all'istante $t = 0$ sia $x = x_0$ e $\dot{x} = v_0$. Avremo:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ v_0 &= B - A\omega_n \end{aligned}$$

e quindi:

$$A = x_0$$

$$B = v_0 - x_0 \omega_n$$

La funzione che riproduce la risposta del sistema sarà quindi data da:

$$x = [x_0 + (v_0 - x_0 \omega_n)t]e^{-\omega_n t} \quad (69)$$

La Figura 27 mostra nel grafico a sinistra come varia la risposta al variare del valore della velocità iniziale v_0 , per un fissato valore del fattore di smorzamento d ; mentre nel grafico a destra, mostra la risposta al variare della frequenza naturale del sistema per data velocità iniziale e per un dato coefficiente di smorzamento. Il risultato è analogo a quello visto nel precedente caso; vale appena notare che a parità di condizioni la risposta è un po' più elevata in ampiezza a causa del minor valore del fattore di smorzamento.

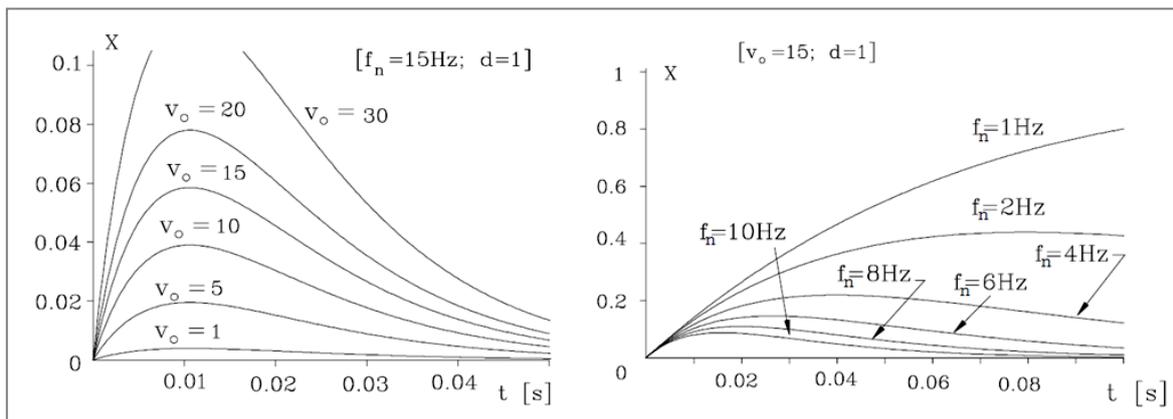


Figura 27 – Andamento dell'ampiezza della risposta nel tempo al variare della velocità iniziale e della frequenza naturale del sistema

1.2.5.3 Caso $d < 1$

In questo caso, poiché il discriminante dell'equazione caratteristica è negativo, avremo due radici reali complesse e coniugate:

$$\alpha_1 = -d\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-d^2} = -\omega_n d - i\omega_s$$

$$\alpha_2 = -d\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-d^2} = -\omega_n d + i\omega_s$$

avendo posto $\omega_s = \omega_n\sqrt{1-d^2}$.

La soluzione dell'equazione differenziale sarà allora del tipo:

$$x = e^{-\omega_n t} (A_1 e^{-i\omega_s t} + A_2 e^{i\omega_s t}) \quad (70)$$

la quale ponendo:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{i} \right) \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{i} \right)$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} x &= e^{-d\omega_n t} \left(\frac{1}{2} \left(A + \frac{B}{i} \right) e^{-i\omega_s t} + \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{i} \right) e^{i\omega_s t} \right) = \\ &= e^{-d\omega_n t} \left[A \frac{e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t}}{2} + B \frac{e^{i\omega_s t} - e^{-i\omega_s t}}{2} \right] = \\ &= e^{-d\omega_n t} [A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t)] \end{aligned}$$

Ponendo ancora $A = X \cos \varphi$ e $B = X \sin \varphi$, la (70) si può scrivere come:

$$x = X e^{-d\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi) \quad (71)$$

con X e φ costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali.

Cerchiamo le costanti di integrazione per il caso in cui all'istante $t = 0$ sia $x = x_0$ e $\dot{x} = v_0$.

Avremo:

$$\begin{aligned} x_0 &= X \cos \varphi \\ v_0 &= -X(d\omega_n \cos \varphi - \omega_s \sin \varphi) \end{aligned}$$

da cui:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + x_0 d\omega_n)^2}{\omega_s^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{x_0 \omega_s} + \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \right)$$

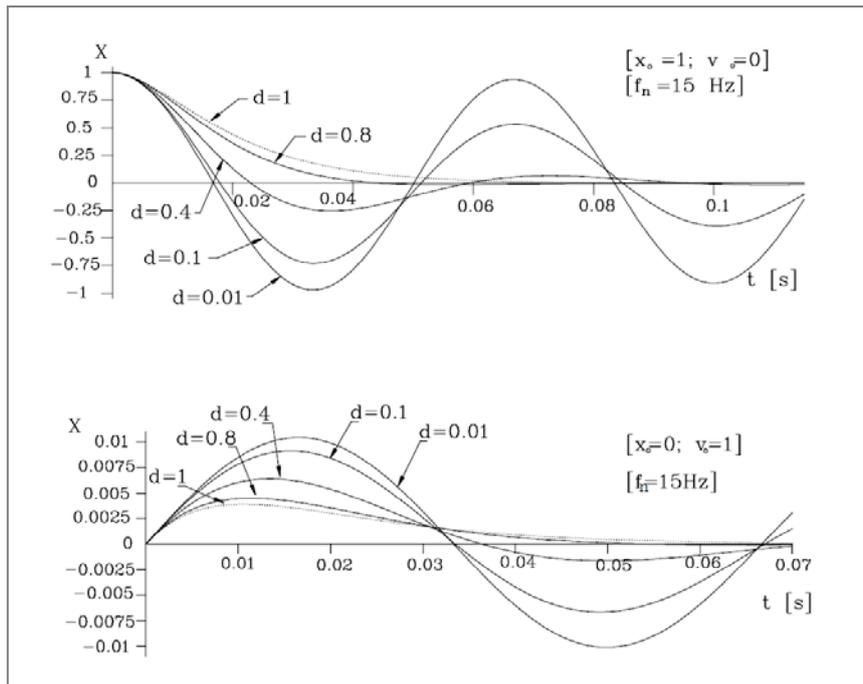


Figura 28 – Andamento dell’ampiezza della risposta nel tempo al variare del fattore di smorzamento: caso spostamento iniziale unitario e velocità iniziale nulla (grafico in alto), caso spostamento iniziale nullo e velocità iniziale unitaria (grafico in basso)

La risposta del sistema al variare del valore del fattore di smorzamento è riportato per le due differenti condizioni iniziali (velocità nulla e spostamento unitario per il grafico in alto, e spostamento nullo e velocità iniziale unitaria per il grafico in basso) in Figura 28. La forma della risposta mostra che il moto del corpo è effettivamente di tipo vibratorio; la sua ampiezza tuttavia, per la presenza a fattore dell’esponente con esponente negativo, decresce col tempo e finirà quindi con l’annullarsi.

Inoltre il moto si svolge con una frequenza più bassa di quella naturale, in quanto il valore di ω_s , che possiamo adesso chiamare *pulsazione smorzata*, è certamente minore di quello della pulsazione naturale, ω_n . Alla pulsazione smorzata corrisponde il valore dello pseudo-periodo $T = 2\pi/\omega_s$.

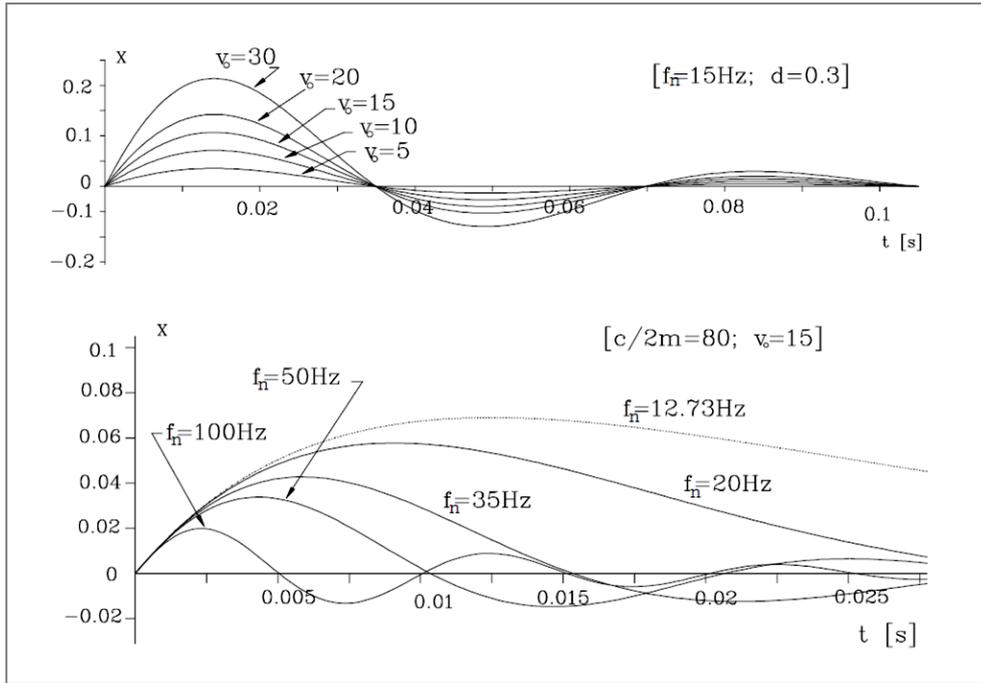


Figura 29 – Andamento dell’ampiezza della risposta nel tempo al variare della velocità iniziale (grafico in alto) e della frequenza naturale del sistema (grafico in basso)

Nella Figura 29 sono mostrate, rispettivamente, le variazioni dovute a velocità iniziali diverse (grafico in alto) ed a differenti valori della frequenza naturale del sistema (grafico in basso), a parità dei restanti parametri. Anche in questi casi, si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte nei casi precedenti.

Qualunque siano i valori prefissati per le condizioni iniziali, i valori massimi (e minimi) della oscillazione della massa si hanno per i valori di t per cui si verifica:

$$\cos(\omega_s t - \varphi) = \pm \sqrt{1 - d^2} = \frac{\omega_s}{\omega_n}$$

mentre quando è:

$$\cos(\omega_s t - \varphi) = 1$$

la (71) risulta tangente alle curve:

$$x' = X e^{-d\omega_n t} \quad e \quad x'' = -X e^{-d\omega_n t}$$

le quali, pur non toccando i punti di massimo o di minimo della (71), danno una precisa indicazione di come variano le successive ampiezze dell'oscillazione della massa man mano che tende alla posizione di equilibrio statico (Figura 30).

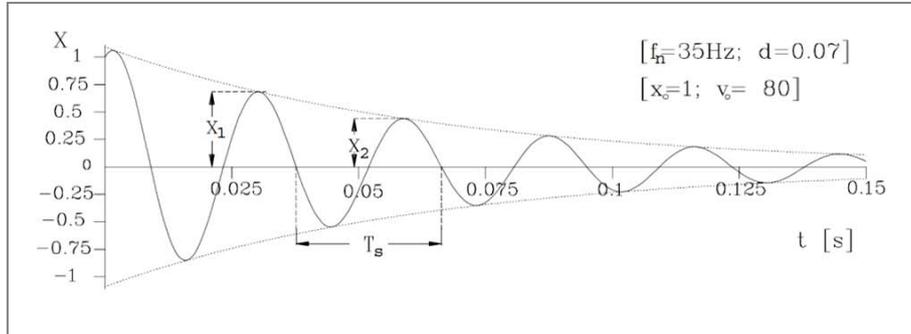


Figura 30 – Andamento delle ampiezze di oscillazione della massa

Tale indicazione trova riscontro nel valore del *decremento logaritmico* δ della oscillazione definito come logaritmo naturale del rapporto fra due ampiezze successive distanti fra loro di uno pseudo-periodo, T_s , ossia:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{X e^{-d\omega_n t} \cos(\omega_s t - \varphi)}{X e^{-d\omega_n(t+T_s)} \cos(\omega_s(t+T_s) - \varphi)} \quad (72)$$

Ora, poiché il valore della funzione coseno è lo stesso dopo un tempo pari a T_s , si avrà:

$$\delta = \ln \frac{e^{-d\omega_n t}}{e^{-d\omega_n(t+T_s)}} = \ln \frac{e^{d\omega_n t} e^{d\omega_n T_s}}{e^{d\omega_n t}} = \ln(e^{d\omega_n T_s})$$

e quindi:

$$\delta = d\omega_n T_s = \frac{2\pi d\omega_n}{\omega_s} = 2\pi \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \quad (73)$$

Si intuisce allora come, potendo ricavare in qualche modo il valore di δ , diventa immediato risalire al valore del fattore di smorzamento del sistema.

Risulta infatti:

$$d = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (74)$$

Il valore di δ si ricava agevolmente se si dispone di un diagramma come quello di Figura 30; tenendo presente che, al fine di ridurre l'errore di lettura delle ampiezze conviene riferirsi, non ad un solo periodo T_s , ma ad un conveniente intervallo di tempo pari ad n volte T_s , il valore del decremento logaritmico si ottiene dal rapporto fra le due ampiezze x_1 ed x_n lette direttamente sul grafico, e in questo caso, come si può facilmente verificare, sarà:

$$\delta_n = d\omega_n nT_s = 2n\pi \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \quad (75)$$

e

$$d = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}} \quad (76)$$

Inoltre, dalla lettura di T_s , si perviene anche alla determinazione della pulsazione naturale ω_n , e quindi al valore del coefficiente di smorzamento c . Infatti:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_n \sqrt{1-d^2} = \omega_n 2n\pi \frac{d}{\delta_n} = \omega_n \frac{2n\pi}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}$$

da cui:

$$\omega_n = \frac{\omega_s \sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{2n\pi} = \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s} \quad (77)$$

E ancora:

$$c = c_c d = 2m\omega_n d = 2md \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s}$$

da cui:

$$c = 2m \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}} \frac{\sqrt{\delta_n^2 + (2n\pi)^2}}{nT_s} = \frac{2m\delta_n}{nT_s} \quad (78)$$

L'utilità di tale procedimento si riscontra allorché si debba risalire, per via sperimentale, al valore del coefficiente di smorzamento di uno smorzatore, oppure ad un valore equivalente di c e della pulsazione naturale di un sistema complesso (per esempio nel caso di un sistema a masse distribuite con certo smorzamento interno non altrimenti determinabile).

1.2.6 Vibrazioni forzate senza smorzamento

La possibilità che lo studio delle vibrazioni di un sistema meccanico possa essere ricondotto a un caso di vibrazioni forzate in assenza di smorzamento è in effetti una pura astrazione, dal momento che, non esiste un sistema reale che non contenga in sé una qualche caratteristica dissipativa.

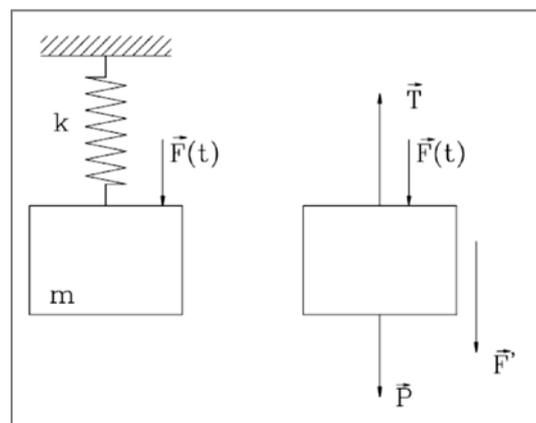


Figura 31 – Schema di corpo soggetto a vibrazioni forzate senza smorzamento

Si consideri il corpo di massa m in Figura 24, sospeso ad una molla di rigidezza k , con possibilità di moto soltanto nella direzione verticale, e sollecitato da una forza la cui intensità sia funzione del tempo secondo una legge sinusoidale del tipo:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \quad (79)$$

La condizione di equilibrio dinamico del corpo può esprimersi per mezzo delle equazioni cardinali, e in particolare per mezzo della:

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0 \quad (80-10)$$

dove \vec{F} è la risultante di tutte le forze agenti sul corpo, e cioè il peso P , la reazione elastica della molla $-k(x + \Delta)$, la forza esterna $F_0 \cos(\omega t)$; mentre \vec{F}' è la risultante delle forze d'inerzia $-m\ddot{x}$.

Si può pertanto scrivere:

$$P - k(x + \Delta) + F_0 \cos(\omega t) - m\ddot{x} = 0 \quad (81)$$

che, tenendo conto che in condizioni di equilibrio statico è sempre $P = k\Delta$, si ottiene:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (82)$$

Dividendo per m , si ottiene:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

facendo comparire la pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ed il rapporto F_0/m che si può scrivere:

$$\frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{k} \frac{k}{m} = \omega_n^2 \Delta F_0$$

Il fattore $\Delta F_0 = F_0/k$, la cui dimensione è una lunghezza, corrisponde all'allungamento che subirebbe la molla se la forza F agisse staticamente con il suo valore massimo F_0 . Con tale significato lo si può definire come "Δ statico".

Pertanto:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \Delta F_0 \cos(\omega t) \quad (83)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine, completa, a coefficienti costanti. La sua soluzione sarà la somma della soluzione generale, che si ottiene dalla omogenea associata, e di una soluzione particolare che possiamo ipotizzare essere ancora di tipo sinusoidale.

Quindi la soluzione completa avrà la forma:

$$x = X_0 \sin(\omega_n t + \varphi) + X \cos(\omega t) \quad (84)$$

dove è da trovare una espressione per il fattore X . Avendo ipotizzato:

$$x_p = X \cos(\omega t) \quad (85)$$

dovrà essere:

$$\dot{x}_p = -\omega X \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 X \cos(\omega t)$$

sostituendo nella (83) si ottiene:

$$-\omega^2 X \cos(\omega t) + \omega_n^2 X \cos(\omega t) = -\omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega t)$$

ossia:

$$X(\omega_n^2 - \omega^2) = \omega_n^2 \Delta F_0$$

Introducendo la frequenza ridotta, $r = \omega/\omega_n$, rapporto fra la frequenza eccitatrice e la frequenza naturale del sistema, quest'ultima si scrive:

$$X(1 - r^2) = \Delta F_0$$

da cui:

$$X = \frac{\Delta F_0}{1-r^2} \quad (86)$$

Pertanto la (85) si scriverà:

$$x_p = \frac{\Delta F_0}{1-r^2} \cos(\omega t) \quad (87)$$

e di conseguenza, la (84) sarà:

$$x = X_0 \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{\Delta F_0}{1-r^2} \cos(\omega t) \quad (88)$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, ipotizzando che per $t = 0$, è $x = x_0$ e $\dot{x} = v_0$, si ottiene:

$$x_0 = \frac{\Delta F_0}{1-r^2} + X_0 \sin(\varphi)$$

$$v_0 = \omega_n X_0 \cos(\varphi)$$

da cui si ricavano le espressioni dell'ampiezza e della fase, rispettivamente:

$$X_0 = \sqrt{\left(x_0 - \frac{\Delta F_0}{1-r^2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{e} \quad \tan \varphi = \frac{\omega_n \left(x_0 - \frac{\Delta F_0}{1-r^2}\right)}{v_0}$$

Osservando la (88) si vede che il moto risultante della massa è descritto dalla composizione di due vibrazioni con frequenze e fasi diverse. Pertanto, tale composizione darà luogo ad un moto del tipo:

$$x(t) = X^*(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] \quad (89)$$

un moto in cui sia l'ampiezza che la fase non sono più costanti, ma variabili nel tempo.

Indicando con $\Delta\omega = \omega_n - \omega$ la differenza fra le due pulsazioni e con X_0 e X le ampiezze delle due risposte, si ottiene:

$$X^*(t) = \sqrt{X_0^2 + X^2 + 2X_0X \sin(\Delta\omega t + \varphi)} \quad \text{e} \quad \tan \Phi(t) = \frac{X_0 \cos(\Delta\omega t + \varphi)}{X + X_0 \sin(\Delta\omega t + \varphi)}$$

Se il valore di $\Delta\omega$ è piccolo, ossia se i valori delle due frequenze non sono molto diversi fra loro, si evidenzia il fenomeno del battimento, come mostra la Figura 25.

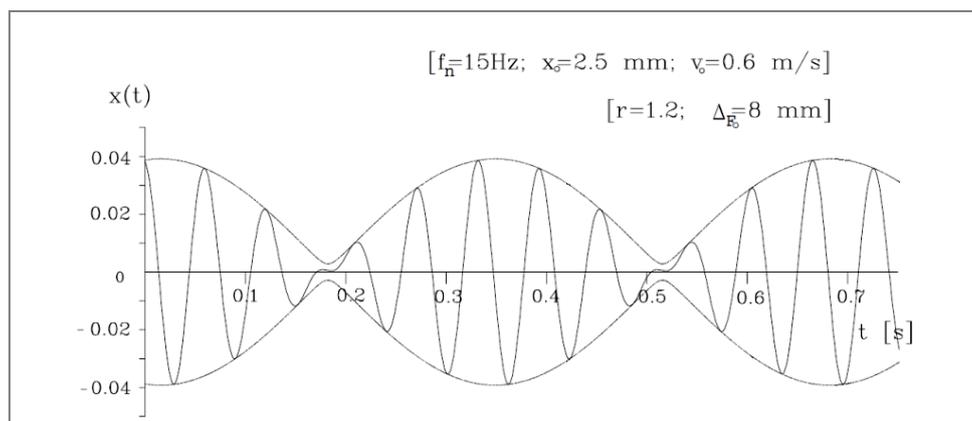


Figura 32 – Fenomeno del battimento

Consideriamo l'espressione:

$$X = \frac{\Delta F_0}{1-r^2} \quad (90)$$

che fornisce il valore dell'ampiezza della risposta alla forzante, il cui valore dipende fortemente dalla frequenza ridotta r .

Introduciamo, a questo punto, il *fattore di amplificazione* A , ossia il rapporto adimensionale:

$$A = \frac{X}{F_0} = \frac{1}{1-r^2} \quad (91)$$

il cui valore è un indice di comparazione di tale risposta con il “ Δ statico”.

Poiché il fattore di amplificazione dipende dal valore di r , è utile esaminare la funzione $A(r)$, che viene generalmente rappresentata come $|A|$ (Figura 26).

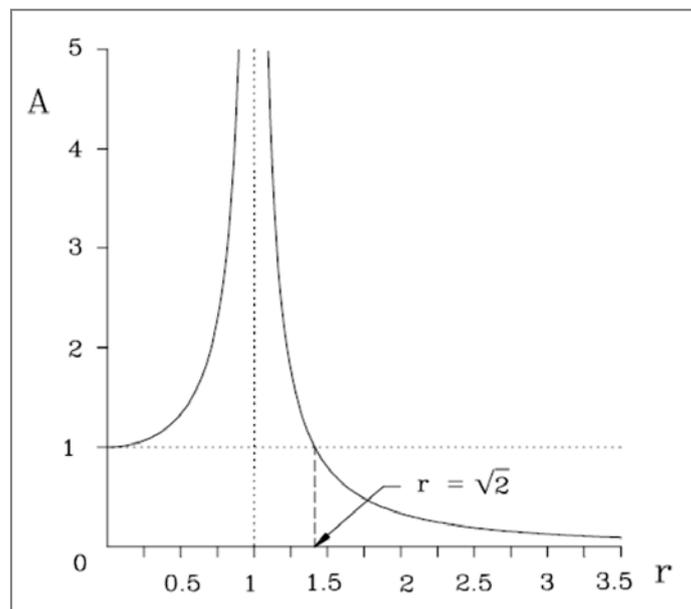


Figura 33 – Andamento della funzione $A(r)$ rappresentata come $|A|$

I valori significativi per le ascisse di questa funzione sono:

- $r = 0$ in cui $A = 1$;
- $r = 1$ in cui $|A| = \infty$;
- $r = \sqrt{2}$ in cui $|A| = 1$.

Inoltre, $|A| > 1$ per $0 < r < \sqrt{2}$ e $|A| < 1$ per $r > \sqrt{2}$.

In corrispondenza del valore $r = 1$, per il quale $|A| = \infty$, si verifica il fenomeno della *risonanza*, definito come quella condizione in cui la risposta del sistema si esalta tendendo ad un'ampiezza di valore infinito.

Si comprende tuttavia che, trattandosi di moti oscillatori, l'aver trovato che per $r = 1$ è $|A| = \infty$, e quindi anche $X = \infty$, non può lasciar concludere che sia senz'altro anche $x_p = \infty$. Infatti, se così

fosse realmente, ne verrebbe che il corpo compirebbe una oscillazione di ampiezza infinita in un tempo necessariamente finito (il periodo).

Si deve dire allora che in corrispondenza al valore $r = 1$, la soluzione trovata per l'equazione del moto non è più corretta. In effetti per $r = 1$ è $\omega = \omega_n$ e l'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega_n t) \quad (92)$$

la cui soluzione particolare può essere del tipo:

$$x_r = X_r t \sin(\omega_n t) \quad (93)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= X_r [\sin(\omega_n t) + \omega_n t \cos(\omega_n t)] \\ \ddot{x}_r &= X_r [2\omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n^2 t \sin(\omega_n t)] \end{aligned}$$

Sostituendo, si ottiene:

$$X_r [2\omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_n^2 t \sin(\omega_n t)] + \omega_n^2 X_r t \sin(\omega_n t) = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega_n t)$$

ossia:

$$2X_r \cos(\omega_n t) = \omega_n \Delta F_0 \cos(\omega_n t)$$

da cui:

$$X_r = \frac{1}{2} \omega_n \Delta F_0 \quad (94)$$

La soluzione completa dell'equazione del moto, in condizioni di risonanza, sarà data, quindi da:

$$x_r = X_0 \sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{1}{2} \omega_n \Delta F_0 t \sin(\omega_n t) \quad (95)$$

In tal caso, fissate le condizioni iniziali, si avranno per l'ampiezza e per la fase le seguenti espressioni:

$$X_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{e} \quad \tan \varphi = \frac{\omega_n x_0}{v_0}$$

e la risposta del sistema sarà come quella mostrata in Figura 27.

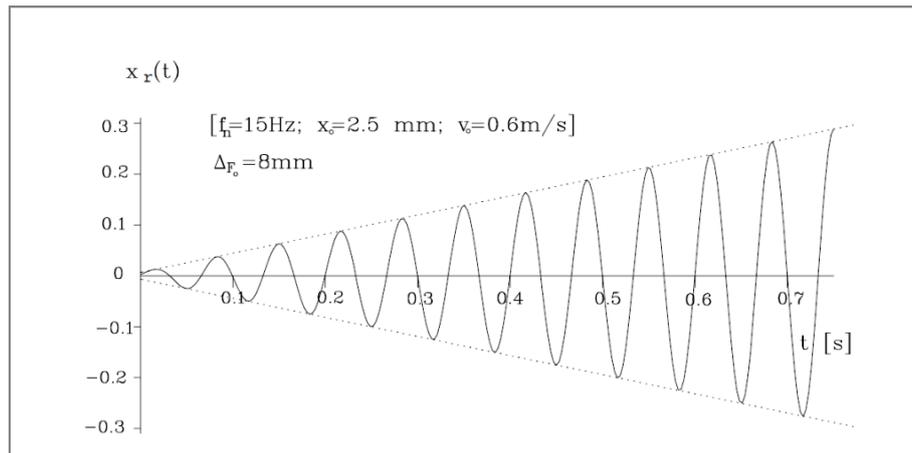


Figura 34 – Risposta del sistema

1.2.7 Vibrazioni forzate con smorzamento viscoso

Si consideri ora una forza eccitatrice esterna del tipo:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \quad (79)$$

agente su un corpo di massa concentrata m sospeso ad una molla di rigidezza k e vincolato ad uno smorzatore di tipo viscoso di cui sia c il coefficiente di smorzamento (Figura 28).

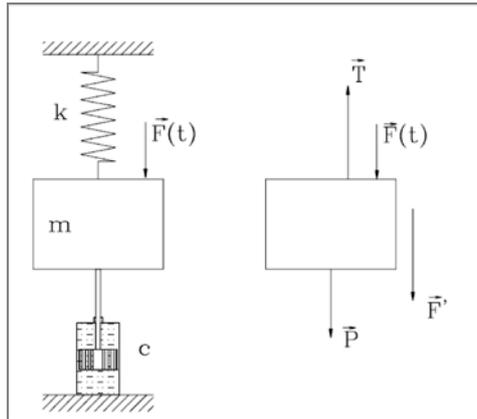


Figura 35 – Schema di corpo soggetto a vibrazioni forzate con smorzamento viscoso

L'equazione di equilibrio alla traslazione si scrive:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (96)$$

Dividendo per m , ed introducendo il fattore di smorzamento d , la pulsazione naturale ω_n ed il “ Δ statico” ΔF_0 , si ottiene:

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 \Delta F_0 \cos(\omega t) \quad (97)$$

La soluzione completa della (97) sarà data dalla somma della cosiddetta *risposta in transitorio* (ovvero la soluzione della omogenea associata) e della *risposta a regime* (ovvero la soluzione particolare).

Se si ipotizza per la soluzione particolare ancora una forma sinusoidale della stessa frequenza della forzante, la risposta completa sarà una forma del tipo:

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + X \cos(\omega t + \varphi) \quad (98)$$

La risposta in transitorio avrà una delle tre forme già trovate in precedenza, in dipendenza del particolare valore assunto dal fattore di smorzamento, ed inoltre abbiamo visto che, comunque, dopo un tempo più o meno lungo, la sua influenza sarà nulla.

Per quanto concerne, invece, la risposta a regime la ricerca della soluzione particolare della (97) risulterà più agevole se, ricordando che è:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

si pone che la forza eccitatrice esterna sia la parte reale di una forma complessa $\bar{F} = F_0 e^{i\omega t}$, ossia $F = \Re \bar{F}$. Ne segue che anche per la soluzione particolare si può porre: $x = \Re \bar{x} = \Re [\bar{X} e^{i\omega t}]$, in cui è:

$$\bar{x} = X e^{i(\omega t + \varphi)} = X e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \bar{X} e^{i\omega t}$$

Partendo da tali presupposti si avrà:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{X} e^{i\omega t} \\ \dot{\bar{x}} &= i\omega \bar{X} e^{i\omega t} \\ \ddot{\bar{x}} &= -\omega^2 \bar{X} e^{i\omega t}\end{aligned}$$

e quindi, sostituendo nella (97),

$$\bar{X}(-\omega^2 + 2id\omega_n\omega + \omega_n^2)e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} = \omega_n^2 \Delta F_0 e^{i\omega t}$$

Dovrà quindi essere:

$$\bar{X}(-\omega^2 + 2id\omega_n\omega + \omega_n^2) = \omega_n^2 \Delta F_0$$

ovvero, dividendo per ω_n^2 , e facendo comparire la frequenza ridotta:

$$\bar{X}[(1 - r^2) + i2dr] = \Delta F_0$$

da cui:

$$\bar{X} = X e^{i\varphi} = \frac{\Delta F_0}{(1-r^2)^2 + (2dr)^2} [(1 - r^2) - i2dr] \quad (99)$$

Si può, in definitiva, ricavare il modulo:

$$X = \frac{\Delta F_0}{(1 - r^2)^2 + (2dr)^2} \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2dr)^2} = \frac{\Delta F_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2dr)^2}}$$

e la fase:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(-\frac{2dr}{1-r^2} \right)$$

per cui la soluzione particolare cercata assume la forma:

$$x_P = \frac{\Delta F_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2dr)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (100)$$

A regime, quindi, l'ampiezza della risposta del sistema alla sollecitazione esterna, così come il valore dello sfasamento, dipende adesso, sia dal rapporto delle frequenze, r , sia dal fattore di smorzamento, d .

Tale dipendenza si evidenzia esaminando le variazioni che subisce, al variare di r , il fattore di amplificazione:

$$A = \frac{x_P}{\Delta F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2dr)^2}} \quad (101)$$

e la fase φ (Figura 36).

L'analisi dei punti caratteristici della funzione $|A(r, d)|$, ci dice che è:

- $A = 1$ per $r = 0$
- $A = 0$ per $r = \infty$

indipendentemente dal valore di d .

Poi è ancora $A = 1$ per $r = \sqrt{2(1-2d^2)}$, con $0 < d \leq 1/\sqrt{2}$, mentre se è $d > 1/\sqrt{2}$ sarà sempre $A < 1$.

Inoltre, ancora per $0 < d \leq 1/\sqrt{2}$, la funzione $A(r, d)$ presenta un valore di minimo in corrispondenza al valore $r = 0$ con $A = 1$, ed un massimo in corrispondenza di $r_p = \sqrt{1-2d^2}$ e di ordinata $A_p = 1/(2d\sqrt{1-2d^2})$.

Si vede quindi che al crescere di d in tale intervallo i valori di picco della funzione si spostano nel senso delle r decrescenti, e con valori via via decrescenti fino ad $A = 1$, seguendo la legge $A_p = 1/(\sqrt{1-r^4})$.

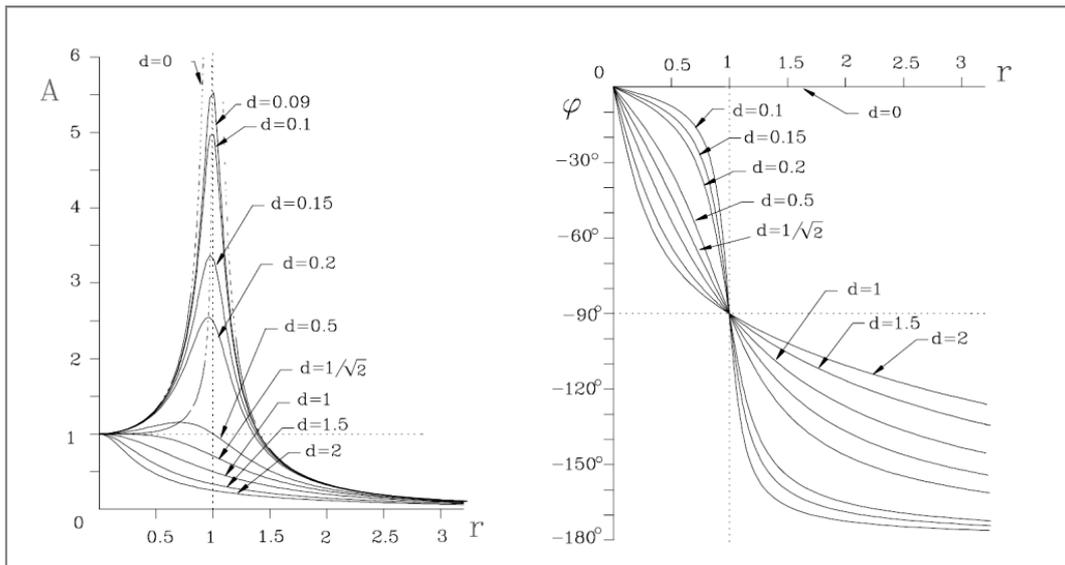


Figura 36 – Andamento del fattore di amplificazione e della fase in funzione di r , al variare del coefficiente di smorzamento d

Si può concludere quindi che, allorché si desidera che la risposta del sistema non abbia un'ampiezza superiore al "Δ statico", la scelta dei parametri deve essere tale da risultare $r > \sqrt{2(1 - 2d^2)}$, oppure scegliere un coefficiente di smorzamento idoneo a dare $d > 1/\sqrt{2}$.

L'angolo di fase, qualunque sia il valore di d , assume sempre il valore di $-\pi/2$ quando $r = 1$, e passa dal 4° al 3° quadrante quando r attraversa tale valore. Inoltre, è sempre $\varphi = 0$ quando $r = 0$, e $\varphi = -\pi$ quando $r = \infty$.

La Figura 37 mostra la risposta completa del sistema per tre diverse situazioni corrispondenti al caso in cui ci si trova, rispettivamente, al di sotto della risonanza, in risonanza o al di sopra della risonanza, e avendo scelto, in ciascuna, valori di fattori di smorzamento tali da avere, in transitorio, condizioni ipercritiche, critiche o ipocritiche.

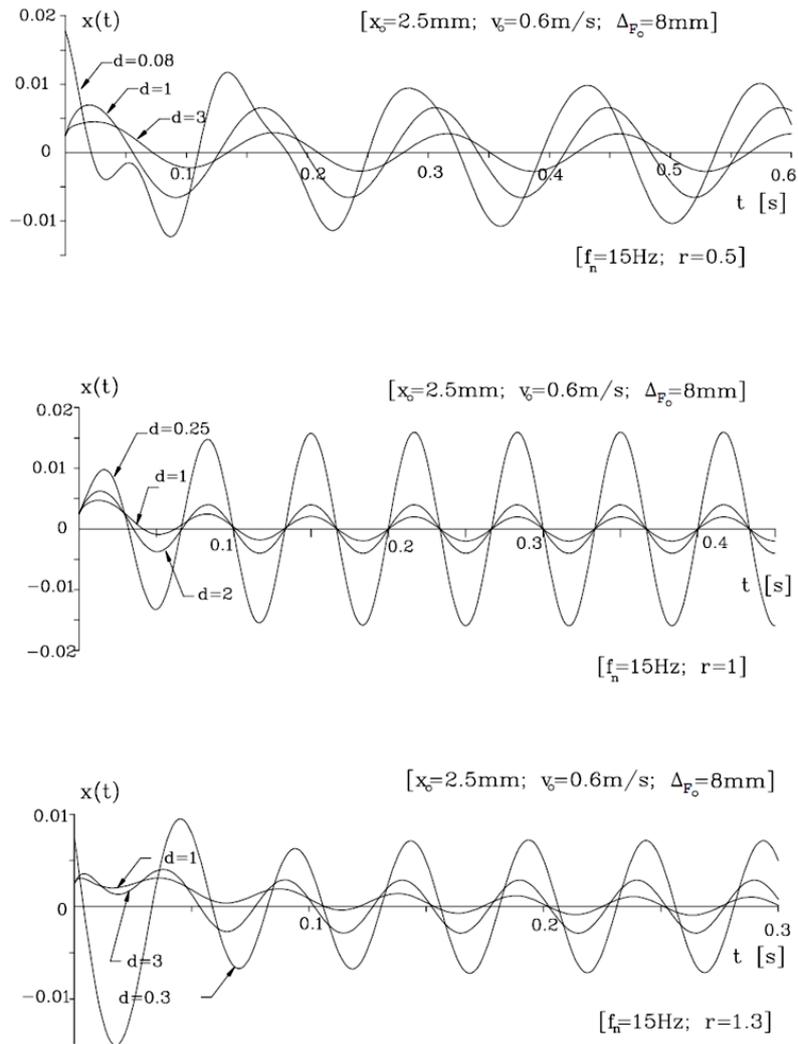


Figura 37 – Risposta del sistema per tre diverse situazioni: al di sotto della risonanza, in risonanza e al di sopra della risonanza

Si può rilevare, per ciascun caso, il differente tempo necessario affinché la forma dell'oscillazione assuma la forma sinusoidale corrispondente alla situazione di regime.

1.3 La rumorosità all'interno di un veicolo

Le principali sorgenti di rumore e di vibrazione nei veicoli per autotrazione, e che contribuiscono in modo determinante al livello di rumore e di comfort percepito dai passeggeri all'interno del veicolo, sono principalmente legate a due fattori: al gruppo propulsore che genera il moto del veicolo (*power-train noise*) e al moto del veicolo su strada (*rolling noise*).

Volendo entrare maggiormente nel dettaglio, è possibile affermare che il livello di rumore percepito dai passeggeri nell'abitacolo e legato al power-train è una combinazione di: rumore proveniente dal motore (*engine noise*); rumore legato ai sistemi di aspirazione (*intake noise*) e scarico (*exhaust noise*); rumore legato al sistema di raffreddamento (*cooling system noise*); rumore legato al cambio (*gearbox noise*) e rumore legato alla trasmissione (*transmission noise*). Mentre il livello di rumore legato al moto del veicolo su strada (il cosiddetto rumore da rotolamento) ha due componenti principali: il rumore legato all'interazione tra pneumatico e pavimentazione stradale (*road noise*) e il rumore aerodinamico causato dal flusso d'aria intorno al veicolo (*aerodynamic noise*).

Altri rumori presenti all'interno di un autoveicolo sono legati al sistema frenante (*brake noise*), mentre altri ancora vengono classificati come cigolii, stridii e ticchettii (Figura 38), [7, 8].

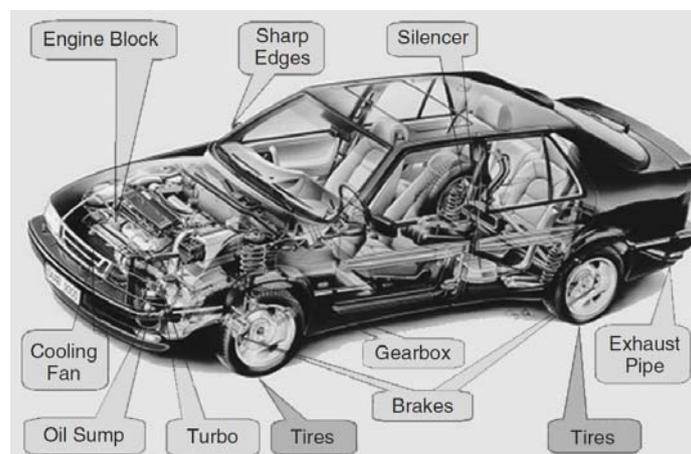


Figura 38 – Localizzazione delle sorgenti di rumore legate al power-train, ai pneumatici e al rumore aerodinamico in un autoveicolo

Generalmente il rumore prodotto esternamente da un veicolo nuovo, in condizioni di normale funzionamento, è dominato dal rumore legato al moto del veicolo su strada (rumore di rotolamento), che diventa sempre più importante all'aumentare della velocità di crociera del veicolo, superando il livello di potenza sonora legato al power-train. Se si considera, ad esempio, un'auto ad una velocità di crociera inferiore ai 20 km/h, il rumore di rotolamento ha un effetto trascurabile sul livello di rumore complessivo prodotto dal veicolo, ma a velocità superiori ai 60 km/h tale componente

diventa la sorgente di rumore dominante. A velocità superiori ai 130 km/h, la rumorosità del veicolo è, in particolare, dominata dal rumore aerodinamico.

Generalmente il rumore e le vibrazioni percepiti dai passeggeri nel comparto auto hanno origine all'esterno dell'abitacolo e, prima di giungere all'interno dell'abitacolo, possono interagire in qualche modo con la struttura stessa del veicolo e, in alcuni casi, anche con le altre sorgenti di rumore. Quando il rumore giunge all'interno mediante percorsi aerei si parla di *airborne noise path*, se invece il rumore giunge all'interno del compartimento interagendo con la struttura del veicolo si parla di *structure-borne noise path*, [9]. La maggior parte del rumore a bassa frequenza viene trasmesso per via strutturale, mentre il rumore ad alta frequenza viene trasmesso per via aerea.

I percorsi strutturali del suono sono caratterizzati da connessioni dirette della struttura con i pannelli sulla superficie della cabina passeggeri, dove l'energia viene irradiata nello spazio acustico interno come rumore. I percorsi aerei, invece, si riferiscono ai casi in cui il suono generato al di fuori della cabina passeggeri viene trasmesso attraverso i pannelli del veicolo all'interno dell'abitacolo.

A bassa frequenza il *road noise* è un classico esempio di rumore che si trasmette per via strutturale (*structure-borne noise*): l'interazione tra il pneumatico e la pavimentazione stradale è la fonte delle vibrazioni che, trasmesse attraverso vari percorsi costituiti da combinazioni di componenti di sospensioni, telaio e pannelli della carrozzeria, giungono all'interno dell'abitacolo del veicolo. Le vie di trasmissione strutturale sono anche responsabili delle componenti del rumore a bassa frequenza prodotte dal motore quali il *boom noise* (per frequenze inferiori ai 100 Hz) e il *moan noise* (per frequenze dai 100 ai 200 Hz): le sollecitazioni prodotte dal motore vengono trasmesse attraverso i supporti del motore al telaio del veicolo, e da quest'ultimo all'interno del comparto auto.

Il *road noise* alle alte frequenze è, invece, un esempio di rumore che si trasmette per via aerea (*airborne noise*): il rumore generato dalle ruote si propaga sia sotto il veicolo, da dove viene poi trasmesso mediante percorsi aerei ai pannelli che costituiscono il pavimento del veicolo, sia tutto intorno al veicolo, da dove viene poi trasmesso ai finestrini e ai pannelli che costituiscono l'abitacolo occupato dai passeggeri.

Anche il rumore prodotto dal power-train viene trasmesso alla cabina dei passeggeri sia mediante percorsi aerei che strutturali: in particolare, l'energia sonora generata dalla vibrazione delle superfici delle componenti del power-train e dai carichi aerodinamici all'interno dei suoi componenti è irradiata nell'abitacolo attraverso l'aria (*airborne noise*), mentre le forze meccaniche e le vibrazioni indotte dalle componenti vengono trasmesse attraverso i punti di attacco alla struttura del veicolo e da questa, mediante percorsi strutturali, alla cabina (*structure-borne noise*).

Di solito, la componente dominante del rumore percepito all'interno di un veicolo al di sotto dei 400 Hz è di tipo strutturale (*structure-borne noise*), mentre al di sopra diventa dominante il rumore che si trasmette per via aerea (*airborne noise*).

Analizzeremo ora più nel dettaglio il rumore generato da un motore a combustione interna, poiché su questo componente è stato condotto uno studio approfondito al fine di stimare il comportamento vibro-acustico di un propulsore a partire dalla sola conoscenza dei dati geometrici, ed inoltre poiché questa sola componente è stata poi considerata alla base di una stima del rumore percepito dai passeggeri all'interno dell'abitacolo di un veicolo.

1.3.1 Il rumore emesso da power-train

La componente più significativa del rumore percepito all'interno di un veicolo legata al *power-train* è senza dubbio quella proveniente dal motore: ciò è in parte dovuto alla stretta vicinanza del motore all'abitacolo. Mentre il rumore derivante dai sistemi di aspirazione e scarico non influenza i livelli di rumore nel comparto auto, poiché il primo è significativo solo a basse velocità e a pieno carico, mentre per l'ultimo vengono oramai utilizzati sistemi molto efficienti e ben isolati.

Il rumore emesso da un motore a combustione interna è controllato dagli stessi fattori che ne determinano le prestazioni: modalità del processo di combustione, regime di rotazione, condizioni di carico, tipo di iniezione, ecc. Infatti, una volta definiti in termini generali i valori dei parametri che caratterizzano questi fattori per un motore, il livello di rumore da esso emesso si può ritenere in un certo senso fissato. Pertanto, per ridurre i livelli di rumorosità connessi con un motore a combustione interna è importante fare le scelte giuste già nelle primissime fasi di progettazione del sistema.

Studi sperimentali hanno permesso di determinare le relazioni che legano tali fattori al livello di rumore emesso da un motore a combustione interna, [11]. Dall'analisi dei risultati ottenuti è possibile affermare che:

1. il rumore emesso aumenta con la velocità di rotazione del motore e in alcuni casi questo incremento è piuttosto rilevante;
2. il tipo di combustione che si realizza in un motore ha un effetto considerevole sul rumore emesso: a parità di numero di giri, infatti, i motori Diesel sono più rumorosi dei motori Otto a causa dei diversi gradienti di pressione indotti dai relativi processi di combustione;
3. il tipo di iniezione che si utilizza influenza il rumore emesso: a parità di numero di giri, i motori Diesel ad iniezione indiretta sono più silenziosi di quelli ad iniezione diretta;
4. il carico ha un lieve effetto sul rumore emesso dal motore: molto spesso il massimo livello di rumore anziché in condizioni di pieno carico si trova in corrispondenza di condizioni di

carico parziale ed è di solito conseguenza del tipo di combustione che si realizza nel motore e del sistema di iniezione del combustibile.

La Figura 39 riporta i campi tipici del livello globale di rumore emesso dalle diverse categorie di motori in funzione del numero di giri e nelle condizioni di pieno carico.

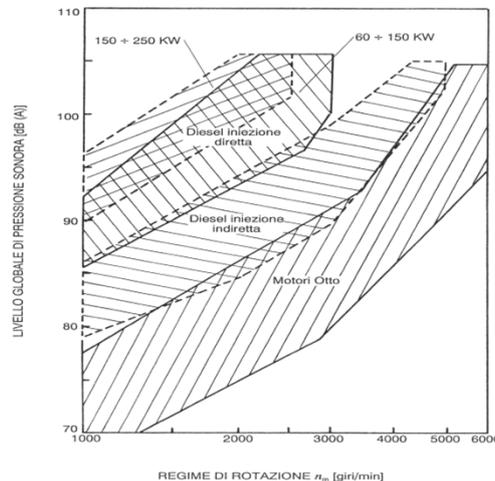


Figura 39 – Campi tipici del livello globale di rumore emesso dalle diverse categorie di motori

Il rumore prodotto da un motore a combustione interna può essere schematicamente suddiviso in tre componenti principali: il *rumore di combustione* dovuto al rapido incremento di pressione che si realizza nel cilindro in seguito al fenomeno della combustione. Tale incremento di pressione agisce sul pistone, sulla testa e sulle pareti del cilindro generando sollecitazioni di notevole entità. Queste sollecitazioni vengono trasmesse attraverso il pistone, la biella e i cuscinetti all'intera struttura del motore, che comincia a vibrare e ad irradiare rumore nell'ambiente esterno. La seconda componente del rumore prodotto da un motore a combustione interna è il *rumore meccanico*, generato dagli urti di natura meccanica che si verificano nei principali accoppiamenti cinematici del motore, come ad esempio lo scampanamento del pistone nel cilindro, l'apertura e la chiusura delle valvole, il funzionamento dell'iniettore, il movimento degli organi della distribuzione, ecc. L'ultima componente è invece legata al ciclico processo di sostituzione del fluido di lavoro nel cilindro e prende il nome di *rumore gasdinamico*, [12]. Il moto instazionario del gas produce, infatti, oscillazioni di pressione di ampiezza non trascurabile che, dopo aver attraversato i sistemi di aspirazione e di scarico, raggiungono l'ambiente esterno generando rumore.

Nelle varie condizioni di funzionamento di un motore, si possono verificare situazioni in cui una delle componenti del rumore appena descritte predomina sulle altre, oppure casi in cui esse forniscono contributi comparabili. Nel presente studio, l'attenzione è stata focalizzata in particolare

sul rumore di combustione e sul rumore meccanico generato da un motore a combustione interna, mentre è stato trascurato il contributo legato al rumore gasdinamico.

Pertanto, prescindendo quindi dal rumore di tipo gasdinamico, il rumore prodotto da un motore a combustione interna deriva dalla combinazione delle forze di eccitazione che agiscono sui diversi elementi della sua struttura, dalla risposta di questi elementi ai carichi applicati e dalla loro efficienza nell'irradiare energia nell'ambiente circostante. Le forze di eccitazione possono essere distinte in: *forze dirette*, dovute alla pressione dei gas e all'inerzia delle masse in moto, che si esplicano sul pistone e sulle pareti della camera di combustione; *forze indirette*, dovute agli urti del pistone contro le pareti del cilindro e dei perni nei cuscinetti; *forze secondarie*, derivanti dagli urti di natura meccanica negli organi ausiliari del motore (come ad esempio l'impatto delle valvole sulle sedi, l'ingranamento di ruote dentate, il sistema di iniezione, ecc.).

Per spiegare le caratteristiche del rumore emesso da un motore a combustione interna è utile riferirsi ad un semplice modello lineare che descriva il motore stesso. A tale scopo è importante individuare i principali elementi che costituiscono un motore e cioè: la camera di combustione; gli elementi in moto che costituiscono la parte interna (albero a gomiti, bielle, pistoni, sistema di sincronizzazione, meccanismo di distribuzione); la struttura principale che sopporta il carico (blocco cilindri, basamento del motore e testata); gli involucri e gli accessori (coppa dell'olio, copertura delle valvole, pompa di iniezione, pompa dell'acqua, collettori, ecc.).

All'origine delle forze che agiscono sugli elementi che costituiscono un motore vi sono il rapido incremento di pressione, che si realizza nel cilindro in seguito al processo di combustione della miscela di combustibile, e le forze di inerzia legate alle masse in movimento.

L'incremento di pressione produce una forza variabile nel tempo cui si sovrappone l'oscillazione del gas contenuto all'interno della camera di combustione in seguito al processo stesso di combustione. Questa forzante è applicata agli elementi che costituiscono la parte interna del motore (albero a gomiti, bielle, pistoni, ecc.) e da questi elementi, in base alle caratteristiche di rigidità di ciascuno, è trasferita alla struttura principale (blocco cilindri, basamento del motore e testata) che a sua volta si deforma e la trasferisce all'involucro esterno: è la vibrazione della superficie esterna del motore a irradiare rumore verso l'ambiente circostante.

In base a queste considerazioni è possibile semplificare l'intero sistema motore come mostrato in Figura 40.

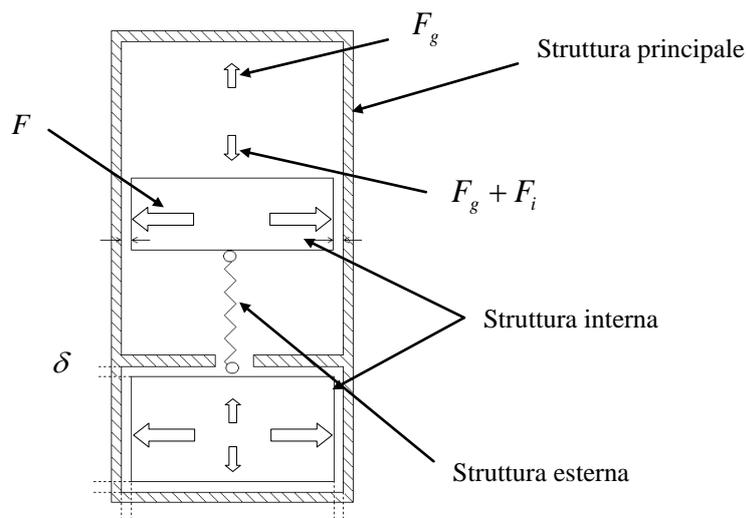


Figura 40 – Schematizzazione di un motore e delle forze agenti

Nel sistema equivalente che rappresenta il motore, gli elementi che costituiscono la parte interna sono separati dalla struttura principale dai giochi δ , mentre la struttura esterna elastica che sopporta i carichi è rappresentata dalle due masse collegate dalla molla. Nella schematizzazione sono inoltre rappresentate le forze che agiscono sulle componenti del motore e cioè: la forza F_g prodotta dall'oscillazione del gas all'interno della camera di combustione, la forza di inerzia F_i e la forza F prodotta dal sistema pistone-biella-albero. Tra queste forze quelle responsabili della vibrazione della struttura, e quindi legate all'emissione del rumore, sono le forze unidirezionali F_g e $F_g + F_i$ legate al fenomeno della combustione e la forza reversibile F generata dal sistema pistone-biella-albero.

Se ora analizziamo il comportamento di queste forze, si osserva che durante la fase di compressione e combustione la risultante della forza d'inerzia e di quella dovuta alla pressione dei gas ($P = F_g + F_i$) carica il pistone con una componente lungo l'asse del cilindro che, quando la pressione è elevata, non cambia direzione (Figura 41). Tale componente della forza agente sul pistone provoca l'annullamento dei giochi in direzione assiale e il sistema pistone-biella-albero motore si comporta come un'unica massa. Con il procedere della combustione il modulo di questa componente varia rapidamente provocando deformazioni nella struttura del motore, che variando nel tempo in accordo con l'andamento delle forze di eccitazione, irradia rumore verso l'esterno. Come è possibile notare la forza del gas F_g agisce sulla parte superiore della struttura (e cioè sulla testa del cilindro), mentre la parte inferiore è soggetta all'azione combinata della forza del gas e della forza di inerzia ($F_g + F_i$).

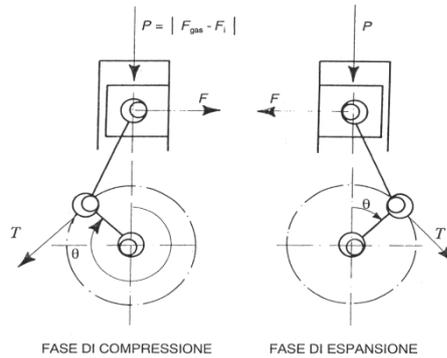


Figura 41 – Schematizzazione degli accoppiamenti cinematici: pistone-biella-albero

La componente orizzontale F della forza agente sul pistone, invece, cambia direzione ad ogni inversione del senso del moto (e cioè in corrispondenza del Punto Morto Superiore, PMS) mandando il pistone a sbattere contro le pareti del cilindro e generando rumore. Anche se durante il ciclo questa componente della forza cambia in modulo, la sua variazione è troppo lenta per produrre una vibrazione apprezzabile della struttura, la quale si può considerare rigida.

Durante lo svolgimento del ciclo anche i giochi di funzionamento presenti tra gli altri accoppiamenti cinematici vengono annullati e ripresi, provocando urti negli organi interessati e irradiando rumore.

In definitiva, il rumore nei motori a combustione interna nasce sia dalle forze di pressione sia da quelle meccaniche prodotte all'interno del cilindro dall'inizio della combustione: le prime agiscono direttamente sulle pareti della camera di combustione e dipendono fortemente dalla modalità di combustione, la quale è controllata dal tipo di iniezione, dal rapporto di compressione, dalla geometria della camera di combustione, ecc.; le seconde, invece, sono causate dalle stesse forze di pressione attraverso i sistemi meccanici all'interno del cilindro e sono dovute agli urti del pistone, ai giochi, alle deformazioni, all'attrito, ecc. È possibile, pertanto, affermare che sia le forze di pressione che le forze meccaniche sono caratterizzate dall'evoluzione della pressione nel cilindro.

1.3.2 Il rumore generato dal veicolo su strada

Il rumore percepito all'interno dell'abitacolo relativo al moto del veicolo su strada ha due componenti principali: il rumore di rotolamento (*road noise*) legato all'interazione tra pneumatico e pavimentazione stradale, e il rumore aerodinamico (*aerodynamic noise*) causato dal flusso d'aria intorno al veicolo.

I meccanismi all'origine del rumore di rotolamento si verificano all'interfaccia tra pneumatico e pavimentazione stradale, e sono generalmente complessi e variano a seconda della velocità di

avanzamento del veicolo, del tipo di pneumatico e della tipologia del manto stradale (asfalto liscio o poroso, pavé, ecc.). Generalmente, questa componente del rumore si trasmette per via strutturale: le sollecitazioni che la strada esercita sul pneumatico generano delle vibrazioni che vengono trasmesse al veicolo attraverso le sospensioni dando origine a rumore a bassa frequenza (inferiore a 400 Hz).

Il rumore aerodinamico, invece, è causato dal flusso d'aria intorno al veicolo ed ha diverse componenti. Tra di esse la componente dominante all'interno della cabina passeggeri quando il veicolo è ad alta velocità (oltre 130 km/h) è il *wind noise* (ovvero il rumore del vento). Per lo studio di questa componente del rumore, i costruttori di veicoli utilizzano apposite gallerie del vento simili a quelle utilizzate nell'industria aerospaziale. La fonte più critica di questa componente del rumore aerodinamico è legata al sistema di tenuta degli sportelli: alle alte velocità, infatti, lo sportello di un veicolo tende a spostarsi verso l'esterno a causa della differenza tra la pressione aerodinamica all'esterno del veicolo e quella all'interno della cabina. Se il sistema di tenuta (ovvero la guarnizione) non ha la capacità sufficiente per mantenere in contatto le superfici di accoppiamento, l'aria può passare attraverso e generare rumore.

L'altra componente del rumore aerodinamico è detta *shape noise* (rumore di forma): il flusso esterno crea intorno al veicolo uno strato limite turbolento, che genera rumore che viene poi trasmesso all'interno del veicolo. Inoltre, il campo di pressione idrodinamica associato a questi flussi turbolenti, si può immaginare come un carico di pressione dinamica che agisce sulla superficie del veicolo, che inizia a vibrare generando rumore che si irradia nel vano passeggeri. Per ridurre questa componente del rumore vengono adottati particolari accorgimenti nel design di componenti quali specchietti laterali, tergicristalli, elementi para-pioggia, ecc.

1.3.3 Tecniche per la riduzione del rumore nei veicoli

Il rumore e le vibrazioni sono fattori importanti per il comfort sia del guidatore che dei passeggeri di un autoveicolo. Abbiamo visto come l'energia connessa con la sorgente di rumore e vibrazioni, viene trasmessa dalla sorgente stessa all'interno del veicolo attraverso percorsi che interessano o il mezzo (l'aria) oppure la struttura stessa del veicolo. La quantità di energia che raggiungere gli occupanti varia da veicolo a veicolo, e dipende principalmente dalla natura della sorgente e dall'efficacia del percorso seguito, essendo essa funzione delle condizioni operative del veicolo e dal campo di frequenze di interesse.

Le strategie adottate per la riduzione del rumore negli autoveicoli includono un'ampia scelta di soluzioni a seconda della sorgente di rumore su cui si vuole (o si deve) intervenire, il modo in cui il rumore si trasmette all'interno dell'abitacolo e il tipo di applicazione. In linea generale è possibile affermare che le misure necessarie per ridurre il rumore all'interno di un veicolo riguardano

principalmente: il trattamento delle sorgenti di rumore, la riduzione della trasmissione del rumore, l'assorbimento del rumore all'interno della cavità dei passeggeri.

La riduzione del rumore, pertanto, inizia dalla sorgente stessa che l'ha originato. I fornitori di componenti per autoveicoli (come motori, pneumatici, turbocompressori, ecc.) si occupano essi stessi delle specifiche di rumore, e cercano di realizzare prodotti sempre più silenziosi, mantenendo inalterate o talvolta migliorando le prestazioni e il prezzo del componente stesso. I costruttori di autoveicoli, invece, controllano il rumore intervenendo sui percorsi che il rumore fa per giungere all'interno dell'abitacolo. La riduzione del rumore per via aerea è generalmente ottenuta garantendo la chiusura delle aperture (ad esempio, mediante delle opportune guarnizioni), aggiungendo massa ai pannelli della struttura e ai finestrini, e introducendo all'interno del comparto auto dei materiali con particolari proprietà fonoassorbenti. La riduzione del rumore per via strutturale, invece, viene ottenuta ottimizzando i sistemi di supporto (ad esempio, ricorrendo all'uso di isolatori) e migliorando le caratteristiche di smorzamento della struttura.

Gran parte del rumore che si trasmette per via aerea nelle autovetture si verifica nella parte anteriore del veicolo: qui il rumore di rotolamento, il rumore generato dal motore e dai sistemi di aspirazione e scarico e il rumore del vento vengono trasmessi all'interno del comparto auto attraverso il cruscotto, i pannelli del pavimento anteriore e il parabrezza.

La tecnica classica per ridurre il rumore che si trasmette nel vano passeggeri è quella di aggiungere materiale isolante alle superfici in lamiera della struttura per incrementare la perdita di energia connessa al rumore. Recentemente, tecniche di riduzione di questo tipo sono state ottenute con peso estremamente contenuto, disaccoppiando i diversi strati che costituiscono il cruscotto e aumentando in maniera significativa l'assorbimento acustico interno.

Un'altra importante strategia per minimizzare il rumore che giunge dal comparto del motore all'interno dell'abitacolo, è quella di ridurre il numero di punti di penetrazione o di migliorare la tenuta: si tratta di punti in cui i sistemi presenti nel vano motore sono collegati attraverso il cruscotto a sistemi presenti nell'abitacolo, come ad esempio il piantone dello sterzo, la leva del cambio, la pedaliera, il sistema di condizionamento dell'aria, ecc.

In vetture in cui i sistemi di isolamento e di tenuta sono sufficientemente efficaci, il percorso acustico dominante di trasmissione del rumore nel comparto auto avviene attraverso i vetri del parabrezza, dei finestrini laterali e del lunotto posteriore. In questo caso per ottenere una riduzione del rumore è possibile ricorrere all'uso di vetro stratificato, che grazie al suo elevato smorzamento interno, irradia rispetto ad un vetro normale una quantità minore di rumore. La struttura multistrato del vetro stratificato produce un migliore isolamento acustico; in particolare, la riduzione in termini di *airborne noise* è legata alla differenza di impedenze dei diversi materiali che lo costituiscono, che

si traduce in una riflessione del suono ad ogni strato di interfaccia; mentre la riduzione in termini di *structure-borne noise* è causata da un aumento di smorzamento delle vibrazioni: in certe frequenze la perdita di smorzamento dovuta al vetro stratificato è doppia di quella dovuta al vetro temperato standard. La Figura 42 illustra il miglioramento delle prestazioni sulla riduzione del rumore del vento ottenuto ricorrendo all'uso di un vetro stratificato.

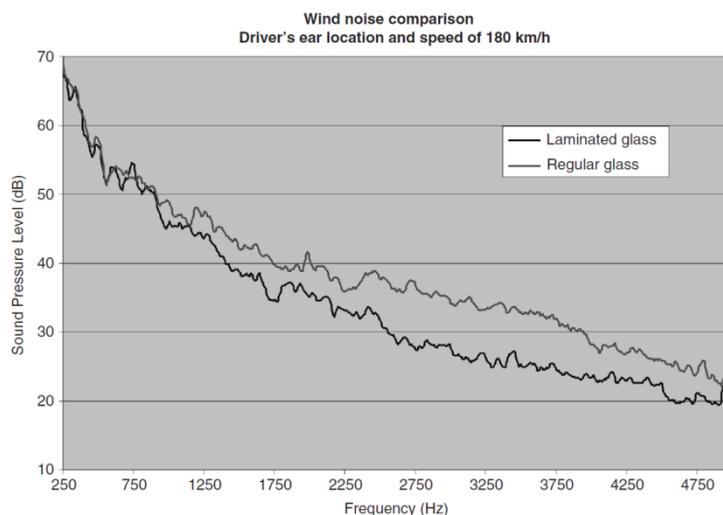


Figura 42 – Confronto tra la riduzione del rumore del vento ottenuta con un vetro normale e un vetro stratificato

Per ridurre il rumore che raggiunge gli occupanti di un veicolo, sia esso trasmesso per via aerea o per via strutturale, le strategie più frequentemente utilizzate sono:

1. aumentare lo smorzamento strutturale;
2. migliorare la perdita di trasmissione (*Transmission Loss*) attraverso i pannelli della carrozzeria e i finestrini;
3. ricorrere all'uso di materiali fonoassorbenti nel comparto motore, nel comparto passeggeri e nel vano portabagagli;
4. isolare dalle vibrazioni i componenti meccanici.

In letteratura viene ampiamente descritto come tutte e quattro queste tecniche sono utilizzate nel settore automobilistico per ridurre il rumore e le vibrazioni nei veicoli, e come miglioramenti all'interno del vano passeggeri possono essere ottenuti incrementando lo smorzamento (ricorrendo a trattamenti smorzanti) [13, 14]. La Figura 43 mostra le zone in cui tipicamente all'interno di un autoveicolo vengono applicati trattamenti smorzanti.

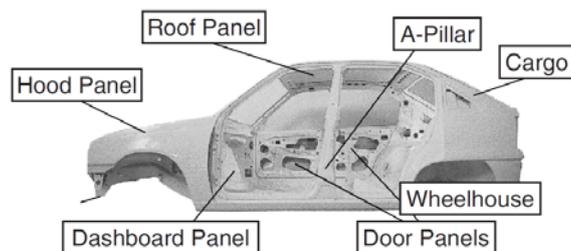


Figura 43 – Zone in cui vengono applicati trattamenti smorzanti in un'automobile

L'uso di materiale smorzante è generalmente utilizzato per ridurre le vibrazioni e il rumore che si trasmettono per via strutturale, nel campo di frequenze tra i 100 e i 500 Hz, piuttosto che a ridurre il rumore trasmesso per via aerea. Tra le tecniche di applicazione risulta molto semplice quella di spruzzare il materiale sulle superfici mediante uno spray: il vantaggio di questa tecnica è che il materiale può essere spruzzato da un robot anche su superfici che sono difficili da raggiungere. Tuttavia l'uso di strati di materiale smorzante racchiuso tra strati di materiale visco-elastico offre un maggiore smorzamento a causa dell'azione di taglio che si genera nello strato visco-elastico.

Attualmente si sta studiando l'uso di acciai laminati noti come *Laminated Vibration Damping Steel* (LVDS) che presentano un'elevata capacità di riduzione del rumore che si trasmette sia per via aerea che per via strutturale. Componenti a base di LVDS sono generalmente costituiti da due strati di acciaio legato con un nucleo di materiale visco-elastico di circa 0.025 mm di spessore, mentre lo spessore totale del componente può variare tra 0.8 ÷ 3.0 mm. In Figura 44 è possibile vedere un cruscotto realizzato in LVDS. Un componente a base di LVDS soggetto ad una eccitazione mostra valori delle ampiezze di vibrazione molto più bassi rispetto allo stesso componente realizzato in lamiera di acciaio. Tuttavia occorre prestare particolare attenzione nella progettazione con acciai di questo tipo, poiché a parità di spessore componenti a base di acciai LVDS possiedono un modulo di resistenza inferiore rispetto a quelli in lamiera di acciaio.



Figura 44 – Cruscotto in Laminated Vibration Damping Steel

Il vantaggio nell'uso dei laminati LVDS è che non è necessario nessun trattamento aggiuntivo in termini di smorzamento.

Nel settore automobilistico i materiali usati per racchiudere una sorgente di rumore (come ad esempio il motore) oppure per isolare la cabina dei passeggeri vengono normalmente chiamati materiali barriera (*barrier materials*). Solitamente materiali di questo tipo vengono utilizzati per ridurre il rumore che raggiunge la cabina dei passeggeri per via aerea, quali il rumore generato dal motore, dal sistema di scarico, dal ventilatore, dai pneumatici e dal vento. Nella regione al di sotto della frequenza di coincidenza, la perdita di trasmissione del suono (TL) legata alla presenza di questi materiali è dominata dalla legge della massa, pertanto ad una data frequenza per pannelli monostrato la TL aumenta di 6 dB per ogni raddoppio della massa. L'uso di pannelli multistrato, in particolare con la presenza di intercapedini d'aria tra gli strati, incrementa notevolmente la perdita di trasmissione del suono fino a circa 12 dB.

Quando il suono raggiunge l'abitacolo, può essere efficacemente assorbito mediante l'uso di materiali con particolari proprietà acustiche (*materiali fonoassorbenti*), [3]. Questi materiali acustici sono in genere progettati non solo per l'isolamento dal rumore, ma per l'assorbimento e lo smorzamento delle vibrazioni. Tali materiali funzionano al meglio quando il loro spessore è pari ad un quarto della lunghezza d'onda del suono da assorbire. Il trattamento acustico delle superfici interne dell'abitacolo gioca un ruolo significativo nella riduzione del rumore percepito dagli occupanti. In un comparto auto sono, infatti, presenti diverse superfici su cui è possibile applicare trattamenti per l'assorbimento e la riduzione del rumore: come il tetto, il cofano, i sedili, il pavimento, i pannelli laterali delle portiere, ecc. La Figura 45 mostra le zone all'interno di una comune autovettura in cui di solito vengono applicati i materiali barriera e i materiali fonoassorbenti.

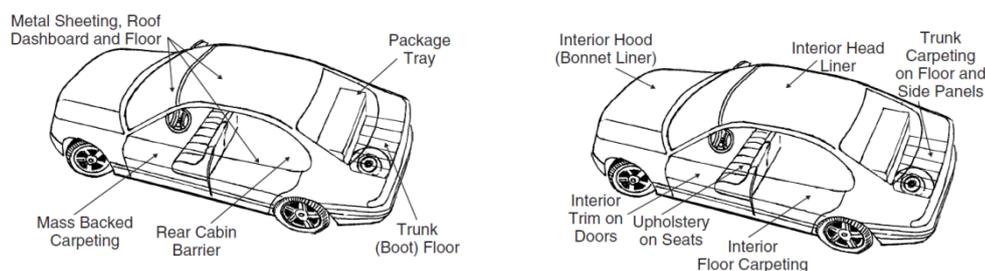


Figura 45 – Tipiche zone all'interno di un autoveicolo in cui vengono applicati i materiali barriera (a sinistra) e i materiali fonoassorbenti (a destra)

Ad esempio, poiché i motori sono generalmente montati in prossimità del vano passeggeri, è molto importante realizzare un efficace isolamento tra il vano motore e l'interno dell'abitacolo. In questo caso, la funzione del materiale fonoassorbente sarà quella di ridurre l'entità delle vibrazioni che vengono trasmesse attraverso il pannello e il pavimento. A tale scopo, di solito, vengono utilizzati pannelli sottili in acciaio combinati con materiale flessibile di grande massa, a base di PVC, bitume

o lana di vetro. Per l'assorbimento delle vibrazioni, invece, vengono utilizzati ad esempio materiali in schiuma di poliuretano che posizionati all'interno del guscio che costituisce la struttura, assorbono le vibrazioni della stessa dissipandone parte dell'energia. Lo spessore richiesto del materiale assorbente è determinato dalle frequenze coinvolte, in particolare lo spessore minimo utile di poliuretano espanso è di 13 mm che è efficace per frequenze di vibrazione al di sopra dei 1000 Hz.

Riferimenti

- [1] Bruel & Kjaer Italia s.r.l., Corso base di Acustica – Teoria e Strumentazione
- [2] Adamasi G., Richiami di Nozioni di Acustica Generale, S.C.S. Controlli e Sistemi, 2000
- [3] Adamasi G., Campi acustici. Concetti di base e applicazioni, S.C.S. Controlli e Sistemi, 2000
- [4] Beranek L.L., Noise and Vibration Control, McGraw – Hill Book Company, New York, 1971
- [5] Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by M. C. Crocker, John Wiley & Sons, Inc., 2007
- [6] Appunti del corso di Meccanica delle Vibrazioni
- [7] J. A. Raff and R. D. H. Perry. A Review of Vehicle Noise Studies Carried Out at the Institute of Sound and Vibration Research with a Reference to Some Recent Research on Petrol Engine Noise. Journal of Sound and Vibration, pages 433-470, 1973
- [8] M. Harrison, Vehicle Refinement, ISBN: 9780750661294
- [9] R. J. Bernhard, M. Moeller, S. Young. Automobile, Bus and Truck Interior Noise and Vibration Prediction and Control. Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by Malcolm J. Crocker – John Wiley & Sons, Inc.
- [10] H. Heisler, Advanced Vehicle Technology, Butterworth-Heinemann
- [11] D. Anderton, Basic origins of automotive engine noise, Diesel Engine Noise and Vibration at Institute of Sound and Vibration Research University of Southampton, 2003
- [12] G. Ferrari, Motori a Combustione Interna, Edizioni Il Capitello, Torino, 1992
- [13] T. Hirabayashi, D. J. McCaa, R. G. Rebandt, P. Rusch, P. Saha, Automotive Noise and Vibration Control Treatments, Journal of Sound and Vibration, April 1999, pp. 22-32
- [14] C. T. Polce, P. Saha, J. A. Groening, R. Schappert, A Data Analysis Approach to Understand the Value of a Damping Treatment for Vehicle Interior Sound, SAE Noise and Vibration, Society of Automotive Engineers

Capitolo 2

Tecniche numeriche per lo studio del comportamento vibro-acustico di un sistema

Un *modello fisico* è una rappresentazione di un sistema reale che, nonostante le semplificazioni dettate dall'esigenza di utilizzare strumenti matematici per descriverne il comportamento, ne possiede le caratteristiche più significative di modo che ai fini dell'analisi esso sia il più possibile simile al sistema reale che rappresenta.

Il punto chiave di una qualsivoglia analisi è proprio la realizzazione di un modello fisico semplice, ma sufficientemente accurato, adatto ad ottenere un modello matematico. Dato il modello fisico, il modello matematico può essere ottenuto o per via analitica, scrivendo le equazioni cinematiche e dinamiche del sistema (generalmente in base alle leggi della meccanica classica), o mediante l'uso di programmi di simulazione che ricavano automaticamente le equazioni del sistema e le risolvono per via numerica. Se le equazioni sono risolte per via analitica, la soluzione è esatta; mentre se sono risolte per via numerica, la soluzione è approssimata.

Quando si realizza un modello fisico si introducono frequentemente delle approssimazioni, ad esempio: i corpi si considerano rigidi; si trascurano gli attriti o si modellano in maniera semplificata (attrito viscoso o coulombiano); si sostituiscono le caratteristiche distribuite (masse, forze, ecc.) con quelle concentrate; si ammette una dipendenza lineare fra le variabili del sistema nel campo di funzionamento considerato (linearità del modello); si assume che i parametri caratteristici del sistema non varino nel tempo (invarianza del modello); si assume che il sistema non modifichi l'ambiente circostante; si trascurano le incertezze ed i disturbi. È evidente che uno stesso sistema reale può essere definito mediante diversi modelli fisici con differenti gradi di approssimazione.

Pertanto, ogni volta che si crea un modello si procede ad una astrazione della realtà, ovvero si cerca di ricondurre un caso reale ad uno schema noto e semplificato che possa darne, mediante un'opportuna formulazione, una interpretazione corretta. Tuttavia, nella maggior parte dei casi di interesse ingegneristico, per studiare il comportamento di sistemi continui, come sono le strutture e gli organi delle macchine, la forma geometrica e le condizioni al contorno sono talvolta troppo complesse per poter applicare procedimenti analitici; pertanto, per effettuare analisi sia di tipo statico sia di tipo dinamico, si deve perciò ricorrere all'uso di metodi numerici, basati sull'uso del calcolatore. Tra tali metodi, quelli ampiamente impiegati per lo studio vibro-acustico di sistemi complessi (come i motori a combustione interna o gli autoveicoli) sono il metodo degli elementi finiti, la metodologia multi corpo e il metodo agli elementi di contorno.

Nel presente capitolo verranno descritti i metodi numerici che sono stati impiegati per studiare sia il comportamento vibro-acustico di un prototipo di motore a combustione interna, sia il livello di rumore percepito all'interno del veicolo per una stima del comfort dei passeggeri.

2.1 Il metodo agli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti (o FEM secondo l'acronimo inglese *Finite Element Method*) è un metodo numerico nel quale una struttura continua, di più vasta estensione e dalla geometrica più articolata, viene suddivisa in un numero opportuno di regioni (o sottodomini) di volume finito, di forma più semplice e non compenetranti, per i quali sia nota la soluzione. La soluzione della struttura originale viene ottenuta "ri assemblando" in maniera opportuna i risultati parziali relativi alle singole regioni. I sottodomini in cui si discretizza il dominio di partenza vengono detti *elementi finiti*.

Il metodo FEM è applicabile ad una vasta gamma di problemi ingegneristici ed attualmente è uno dei metodi numerici maggiormente utilizzati per risolvere il comportamento strutturale di sistemi complessi, [1, 2]. Le analisi FEM (o analisi strutturali) permettono di calcolare il comportamento strutturale di un sistema meccanico e sono indispensabili quando si vuole ottimizzare il comportamento meccanico di una macchina o di una struttura. Nell'ambito dell'analisi strutturale l'impiego del metodo agli elementi finiti può essere suddiviso in tre fasi principali:

1. *fase di schematizzazione*: viene preparato un modello numerico contenente informazioni geometriche, topologiche e fisiche, che descrivono la struttura in esame, le forze ad essa applicate e le condizioni al contorno;
2. *fase di analisi*: i dati di ingresso vengono elaborati per determinare il comportamento della struttura;

3. *fase di interpretazione dei risultati*: è una vera e propria fase di verifica che porta alla certificazione del modello; la risposta della struttura viene analizzata al fine di comprendere il livello di fiducia che si può riporre nei risultati prodotti dal modello.

A queste fasi, può eventualmente seguire una *fase di modifica e re-analisi*: in base ai risultati ottenuti dalla fase di analisi, se il comportamento della struttura non risulta soddisfacente ai fini dell'ottenimento delle prestazioni richieste, si può decidere di intervenire modificando la stessa in qualche sua parte ed, una volta modificato di conseguenza il modello, si prosegue con una nuova fase di analisi.

Un'analisi FEM permette di ricavare, relativamente ad un dato sistema meccanico, stati di sollecitazione e/o di deformazione, punti critici o deboli delle strutture, punti di rottura, eccessi o difetti di materiale, buona o cattiva distribuzione delle masse, ecc. Applicando tale metodologia si possono infatti eseguire: analisi modali per la determinazione del comportamento dinamico di una struttura (modi propri di vibrare, frequenze naturali, smorzamenti e forme modali); analisi statiche lineari e non lineari per la determinazione dello stato di tensione e/o di deformazione di una struttura in equilibrio soggetta ai carichi esterni; analisi dinamiche per la determinazione dello stato di tensione e/o di deformazione di una struttura soggetta a carichi variabili; analisi di verifica a fatica per la determinazione dei coefficienti di sicurezza o della durata di una struttura soggetta a carichi ciclici; analisi di buckling; analisi termiche; ecc.

I vantaggi del metodo agli elementi finiti nell'analisi e nella caratterizzazione di elementi complessi come le strutture meccaniche sono molteplici, tra essi si possono sicuramente ricordare: l'estrema versatilità, la struttura da analizzare può avere forma qualsiasi ed essere caricata e vincolata in modo arbitrario; la possibilità di applicazione a problemi sia lineari che non lineari; ed infine, i materiali modellati possono essere sia isotropi sia anisotropi. Di contro, una modellazione di questo tipo presenta alcuni svantaggi e problematiche che non vanno trascurati, tra essi: i problemi legati alla preparazione dei modelli, la non univocità della modellazione (sia in termini di discretizzazione sia di scelta degli elementi) e i problemi legati alle risorse hardware necessarie per la gestione dei modelli che, talvolta, possono risultare notevolmente complessi.

2.1.1 Formulazione delle caratteristiche dell'elemento finito

Consideriamo, per semplicità di trattazione, una struttura piana suddivisa da linee immaginarie in un numero di elementi finiti di forma triangolare, interconnessi in un numero discreto di punti nodali situati sui loro confini (Figura 1). Gli spostamenti dei punti nodali $\{\Delta\}^e$ sono i parametri incogniti del problema (*metodo degli spostamenti*).

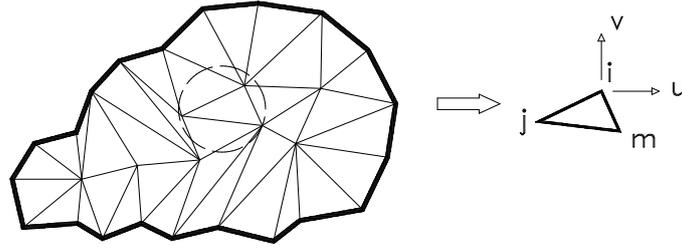


Figura 1 – Discretizzazione con elementi di forma triangolare di una struttura piana

Viene scelta una serie di funzioni per definire univocamente lo stato di spostamenti dentro ogni elemento finito in funzione degli spostamenti nodali. Le funzioni di spostamento definiscono in maniera univoca lo stato di deformazione dentro un elemento in funzione degli spostamenti nodali; queste deformazioni insieme con qualsiasi deformazione iniziale e con le proprietà costitutive del materiale definiscono lo stato di tensione nell'elemento e quindi anche sul suo confine. Ciascun elemento in cui viene suddivisa la struttura in seguito al processo di discretizzazione, è retto dall'equazione di equilibrio:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e \quad (1)$$

in cui $\{F\}^e$ è un vettore di forze concentrate sui nodi in equilibrio con le tensioni sul contorno dell'elemento, $[K]^e$ è la matrice di rigidità dell'elemento e $\{\Delta\}^e$ rappresenta il vettore degli spostamenti dei punti nodali.

Dopo questa fase si assemblano tutte le (1) e si ottiene l'equazione globale di equilibrio dell'intera struttura in funzione delle forze nodali esterne, della matrice di rigidità globale e di tutti gli spostamenti nodali, che rappresentano le incognite.

Il numero di tali spostamenti è dato dal numero dei nodi moltiplicato per il numero di gradi di libertà (*dof, degree of freedom*) di ciascun nodo, meno il numero di *dof* imposti dai vincoli.

Considerato, quindi, nel caso generale a tre dimensioni un generico elemento finito e a s nodi, le funzioni di spostamento in un qualsiasi punto all'interno dell'elemento stesso si definiscono come:

$$\{f(x, y, z)\}^e = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = [N]^e [u_i v_i w_i \quad u_j v_j w_j \quad \dots \quad u_s v_s w_s] \quad (2)$$

in cui $[N]^e$ è la matrice delle funzioni di forma che lega gli spostamenti generici all'interno dell'elemento agli spostamenti nodali $\{\Delta\}^e$. Le funzioni di forma hanno un ruolo determinante nel

FEM poiché esse rappresentano il polinomio che approssima il valore esatto degli spostamenti e quindi determinano la convergenza del metodo.

Le (2) permettono di legare gli spostamenti generici dentro l'elemento agli spostamenti nodali. Ora occorre legare gli spostamenti nodali alla deformazione che si verifica all'interno del singolo elemento. Per fare questo, ricordiamo che le relazioni deformazioni-spostamenti nodali, in forma matriciale si possono esprimere come:

$$\{\epsilon\}^e = [B]^e \{\Delta\}^e \quad (3)$$

in cui $\{\epsilon\}^e$ è il vettore di deformazioni nodali e $[B]^e$ è la matrice di trasformazioni lineare deformazione-spostamenti nodali, funzione di x, y, z e delle coordinate nodali x_i, y_i, z_i .

Indicando con $\{\epsilon_0\}^e$ il vettore delle deformazioni iniziali (deformazioni termiche, cedimenti di vincoli, ecc.), e con $\{\sigma_0\}^e$ il vettore delle tensioni iniziali (tensioni residue), la relazione generale tra tensioni e deformazioni è:

$$\{\sigma\}^e = [D]^e (\{\epsilon\}^e - \{\epsilon_0\}^e) + \{\sigma_0\}^e \quad (4)$$

dove $\{\sigma\}^e$ è il vettore delle sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi e $[D]^e$ è la matrice elastica del materiale.

A tal proposito, si ricordi che le relazioni tensione-deformazione sono quelle che caratterizzano ciascun tipo di materiale e il suo modo di reagire ai carichi applicati; esse si dicono equazioni costitutive perché descrivono il comportamento macroscopico di un materiale in funzione della sua costituzione interna. Le equazioni costitutive classiche di un corpo elastico lineare (*Legge di Hooke*) sono sei equazioni lineari tra le componenti di tensione e di deformazione, che nelle ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, si possono scrivere in maniera compatta come:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (5)$$

dove $\{\sigma\}$ è il vettore delle sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi, $[D]$ è la matrice elastica del materiale e $\{\epsilon\}$ è il vettore delle sei componenti indipendenti del tensore delle deformazioni.

Il vettore $\{F\}^e$ rappresenta l'insieme delle forze nodali che risultano staticamente equivalenti alle tensioni sui confini dell'elemento e ai carichi distribuiti su di esso. Ogni sforzo $\{F_i\}$ deve contenere lo stesso numero di componenti degli spostamenti nodali $\{\Delta_i\}$ ed avere la stessa direzione e verso.

Per la determinazione delle forze nodali si possono seguire due metodi: la formulazione *diretta* o la formulazione *variazionale*, ottenendo rispettivamente un vettore di carichi concentrati o un vettore di carichi distribuiti.

Per completare le caratteristiche di un elemento finito, resta da analizzare la sua matrice di rigidezza $[K]^e$. Gli approcci per il calcolo di tale matrice si basano su due metodi differenti: i metodi diretti ed i metodi variazionali. I metodi diretti sono sostanzialmente due, uno si basa sul significato fisico dei coefficienti di rigidezza (metodo dei coefficienti di influenza) e l'altro applica le equazioni di elasticità. Entrambi questi metodi si possono utilizzare nei casi più semplici: elemento ad asta, elemento a trave, elemento triangolare piano. I metodi variazionali o energetici, invece, come il principio dei lavori virtuali e il metodo del minimo dell'energia potenziale, sono molto utilizzati per ricavare le equazioni di equilibrio forza-spostamenti nodali per casi più complessi.

Con il metodo dei coefficienti di influenza ciascun elemento K_{ij} della matrice di rigidezza $[K]$ si può considerare come un coefficiente che rappresenta la forza agente su un nodo dell'elemento, in grado di mantenere uno spostamento unitario nella sua direzione di applicazione quando tutti gli altri spostamenti nodali sono nulli.

L'altro metodo diretto, invece, si serve delle equazioni di elasticità (equazioni di equilibrio, equazioni spostamento-deformazione e relazioni tensione-deformazione). Innanzitutto il campo degli spostamenti interno all'elemento si esprime in funzione degli spostamenti nodali $\{\Delta\}^e$ mediante le funzioni di forma $[N]^e$, quindi il campo delle deformazioni $\{\epsilon\}^e$ si esprime a sua volta in funzione degli spostamenti nodali, in accordo con le equazioni (3). A questo punto, si scrivono le leggi costitutive che mettono in relazione il campo delle tensioni con gli spostamenti nodali (4). Ed infine, si esprimono le forze nodali $\{F\}^e$ in funzione delle tensioni, imponendo un'equivalenza statica tra le prime e le tensioni che agiscono sul contorno dell'elemento. Poiché il campo delle tensioni è espresso in funzione degli spostamenti nodali, è possibile porre in relazione le forze nodali con gli spostamenti nodali ottenendo le equazioni di rigidezza (1).

Vediamo ora il primo metodo variazionale, ovvero il principio dei lavori virtuali. Il principio dei lavori virtuali si può esprimere in due forme, quella degli spostamenti virtuali e quella delle forze virtuali, rispettivamente alla base dei principi della minima energia potenziale e della minima energia complementare.

Nella forma degli spostamenti virtuali, il principio impone che il corpo, in equilibrio sotto l'azione dei carichi applicati e delle forze di massa, sia soggetto ad uno spostamento virtuale di componenti u, v, w , in ciascun punto. Gli spostamenti virtuali devono essere cinematicamente ammissibili,

quindi devono essere funzioni continue delle coordinate spaziali e soddisfare le condizioni al contorno cinematiche.

Nelle ipotesi fatte, il principio degli spostamenti virtuali afferma che la somma del lavoro fatto dai carichi applicati (δW) e dell'energia di deformazione immagazzinata (δU), a causa degli spostamenti virtuali $\delta \Delta$, è uguale a zero:

$$\delta U + \delta W = 0 \quad (6)$$

La (6) applicata all'elemento finito, permette di ottenere la matrice di rigidezza dell'elemento. In questo caso si considera un campo di spostamenti ammissibili espressi dalla (1) e di deformazioni ammissibili (3).

Il lavoro virtuale esterno in seguito agli spostamenti virtuali $\{\delta \Delta\}^e$ è la somma di due contributi: uno δW_1 dovuto alle forze concentrate sui nodi $\{F\}^e$ e l'altro δW_2 dovuto ai carichi distribuiti e alle forze di massa; e vale:

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = -[\delta \Delta]^e (\{F\}^e + \{F_b\}^e + \{F_p\}^e) \quad (7)$$

dove con $\{F_b\}^e$ si è indicato il vettore equivalente alle forze di massa e con $\{F_p\}^e$ il vettore equivalente ai carichi superficiali distribuiti.

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze interne è dato dall'azione delle tensioni interne per le deformazioni associate agli spostamenti virtuali, e si può scrivere come:

$$\delta U = [\delta \Delta]^e [K]^e \{\Delta\}^e - [\delta \Delta]^e (\{F_{\epsilon_0}\}^e + \{F_{\sigma_0}\}^e) \quad (8)$$

dove con $\{F_{\epsilon_0}\}^e$ si è indicato il vettore equivalente alle deformazioni iniziali e con $\{F_{\sigma_0}\}^e$ il vettore equivalente alle tensioni iniziali.

Pertanto, dalla (6) si ottiene:

$$[\delta \Delta]^e ([K]^e \{\Delta\}^e - \{F_{\epsilon_0}\}^e - \{F_{\sigma_0}\}^e) - [\delta \Delta]^e (\{F\}^e + \{F_b\}^e + \{F_p\}^e) = 0 \quad (9)$$

Osservando che tale relazione deve valere per ogni campo di spostamenti nodali virtuali cinematicamente ammissibili, si arriva alle equazioni di rigidezza dell'elemento:

$$[K]^e \{\Delta\}^e = \{F\}^e + \{F_b\}^e + \{F_p\}^e + \{F_{\epsilon_0}\}^e + \{F_{\sigma_0}\}^e \quad (10)$$

in cui $[K]^e$ rappresenta la matrice di rigidità dell'elemento data da:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (11)$$

essendo V^e il volume dell'elemento.

Vediamo ora il secondo metodo variazionale, ovvero il principio di minimo dell'energia potenziale. Tale principio fornisce una base variazionale per la formulazione delle equazioni di rigidità di una struttura. Infatti, per definizione l'energia potenziale totale π di una struttura è data dalla somma dell'energia di deformazione U e del potenziale dei carichi applicati W :

$$\pi = U + W \quad (12)$$

Il principio stabilisce che tra tutti i sistemi di spostamenti ammissibili, quello che soddisfa le condizioni di equilibrio fa assumere all'energia potenziale totale un valore stazionario:

$$\delta\pi = \delta U + \delta W = 0 \quad (13)$$

Le equazioni differenziali o algebriche che si ottengono sono le equazioni di equilibrio. Inoltre, affinché l'equilibrio sia stabile, l'energia potenziale totale deve essere minima, cioè:

$$\delta^2\pi = \delta^2 U + \delta^2 W > 0 \quad (14)$$

L'energia di deformazione di un corpo elastico in presenza di deformazioni iniziali $\{\epsilon_0\}$, vale:

$$U = \frac{[\Delta]^e}{2} [K]^e \{\Delta\}^e - [\Delta]^e \{F_{\epsilon_0}\}^e \quad (15)$$

essendo $[K]^e$ data dalla (11) e $\{F_{\epsilon_0}\}^e$ il vettore equivalente delle deformazioni iniziali espresso dalla relazione:

$$\{F_{\epsilon_0}\}^e = \int_{V^e} [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dV \quad (16)$$

Dalla (15) si deduce che il metodo per discretizzare π è legato direttamente al campo spostamenti all'interno dell'elemento.

Il potenziale dei carichi applicati W si può scrivere in funzione di $\{F\}^e$, il vettore dei carichi concentrati ed $\{F_p\}^e$, il vettore dei carichi distribuiti

$$W = -[\Delta](\{F\}^e + \{F_p\}^e) \quad (17)$$

Sostituendo nella (12), si ottiene:

$$\pi = \frac{[\Delta]^e}{2} [K]^e \{\Delta\}^e - [\Delta]^e (\{F\}^e + \{F_{\epsilon_0}\}^e + \{F_p\}^e) \quad (18)$$

Dovendo risultare l'energia potenziale totale stazionaria rispetto a $\{\Delta_i\}$, deve essere:

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \Delta_i} \right\} = 0 \quad (19)$$

e quindi si ottiene la (10) senza i carichi di tensione iniziale e forze di massa:

$$[K]^e \{\Delta\}^e = \{F\}^e + \{F_{\epsilon_0}\}^e + \{F_p\}^e \quad (20)$$

2.1.2 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale

Finora si è fatto riferimento ad un singolo elemento, ma nella realtà una struttura è invece suddivisa in molti elementi finiti, ciascuno dei quali ha una propria matrice di rigidezza. Il collegamento delle singole matrici di rigidezza determina la *matrice di rigidezza globale* $[K]$ della struttura completa. Questa operazione, che va sotto il nome di *assemblaggio*, conduce all'equazione di equilibrio dell'intera struttura:

$$\{R\} = [K]\{\Delta\} \quad (21)$$

dove $\{R\}$ è il vettore rappresentativo di tutte le forze (carichi concentrati esterni, pressione, deformazione e tensione iniziale), $[K]$ è la matrice di rigidezza globale e $\{\Delta\}$ è il vettore

rappresentativo del campo di spostamento totale. Notiamo che durante l'operazione di assemblaggio, le forze nodali $\{F\}^e$ vengono eliminate.

L'operazione di assemblaggio comporta che le matrici di rigidezza dei singoli elementi siano espresse in funzione degli stessi spostamenti nodali. Questa condizione non è in genere vera perché, come quasi sempre accade, gli spostamenti nodali (e di conseguenza la matrice di rigidezza dell'elemento) sono determinati nel sistema di riferimento locale dell'elemento, mentre quelli dell'intera struttura sono definiti nel sistema di riferimento globale. Prima quindi di passare all'assemblaggio della matrice di rigidezza dei singoli elementi, è necessario trasformare la matrice di rigidezza dal sistema di riferimento locale a quello globale, per poi assemblarla opportunamente.

Le principali proprietà della matrice di rigidezza si possono così elencare:

1. la matrice di rigidezza è una matrice simmetrica indipendentemente dal sistema di riferimento in cui è calcolata;
2. gli elementi di ciascuna colonna di una matrice di rigidezza rappresentano un sistema di forze equilibrato agente sull'elemento;
3. la matrice di rigidezza è una matrice definita positiva.

Quando viene formata la matrice di rigidezza globale, il contributo di ciascun elemento è situato in una data posizione. La numerazione nodale è consecutiva a partire da uno. Ciascun nodo i è associato ai suoi gradi di libertà Δ_i e ciascun grado di libertà corrisponde ad una riga nella matrice globale. Analogamente, ciascuna colonna della matrice corrisponde ad un grado di libertà Δ_i associato al particolare nodo i .

La numerazione consecutiva dei nodi assicura che ognuno di essi è circondato da elementi i cui nodi gli stanno attorno; i termini non nulli su una data riga della matrice di rigidezza consistono nel termine della diagonale principale e nei termini corrispondenti ai gradi di libertà di quel nodo e di quei nodi che si collegano al nodo stesso; tutti gli altri termini sono nulli.

Una matrice siffatta sarà dunque popolata in una zona di ampiezza B attorno alla diagonale principale, detta *semibanda*, ottenuta dalla differenza massima tra i nodi di un elemento più uno e moltiplicata per i gradi di libertà per nodo.

La risoluzione della (21) consiste nel risolvere un sistema di n equazioni in n incognite, essendo n il numero di gradi di libertà, che nei problemi di progetto e verifica strutturale può essere di decine di migliaia di equazioni e che quindi porterà a metodi particolarmente complessi nella risoluzione di tali sistemi. I metodi per la risoluzione di un simile sistema di equazioni richiedono l'immagazzinamento nella memoria del calcolatore solo degli elementi appartenenti alla banda. Ne deriva perciò la necessità di minimizzare, quanto più possibile, il numero di elementi appartenenti alla stessa.

2.1.3 Criteri di convergenza

Abbiamo già detto che il metodo agli elementi finiti è un metodo numerico che consente la risoluzione approssimata di problemi di interesse ingegneristico. Bisogna a questo punto sottolineare che la soluzione che si può ottenere con il FEM non è univoca, essendo arbitraria la discretizzazione che si effettua sul continuo.

Affinché la formulazione numerica adottata sia accettabile, è fondamentale usare elementi finiti che garantiscano la *convergenza* verso la soluzione esatta del problema. Ciò significa che l'elemento usato deve essere tale che all'aumentare del numero di elementi con i quali si suddivide il continuo, la soluzione numerica ottenuta tenda asintoticamente verso la soluzione esatta.

I due aspetti principali che bisogna tenere presente sono la precisione dei risultati ed il tempo di calcolo impiegato. I fattori che influenzano la precisione sono la scelta delle funzioni di forma, il tipo di maglia e la schematizzazione dei carichi e delle condizioni al contorno. Inoltre, bisogna tenere in considerazione tutti gli errori che nascono ogni qualvolta si eseguono operazioni numeriche con il calcolatore (errori di arrotondamento e/o troncamento).

Tutti gli errori che non dipendono dalla precisione dei valori numerici trattati dal calcolatore fanno parte degli *errori di discretizzazione* che sono una conseguenza diretta dall'approssimazione del continuo da infiniti gradi di libertà a un modello con un numero finito di gradi di libertà. L'errore tra la soluzione v ottenuta con gli elementi finiti e la soluzione esatta u è rappresentata dalla differenza $E = |v - u|$, e si ottiene dalla seguente relazione:

$$E = ch^n \quad (22)$$

essendo $(n - 1)$ il grado del polinomio completo interpolante ovvero delle funzioni di forma, h la dimensione dell'elemento e c proporzionale alla derivata di ordine n di u . Mentre l'errore sulla derivata prima di u vale αch^{n-1} ed in generale sulla derivata k -esima:

$$E^k = \alpha ch^{n-k} \quad (23)$$

con α costante. Allora la velocità di convergenza dell'energia di deformazione, dove compare il quadrato della derivata dello spostamento, vale:

$$E(U) = \beta ch^{2(n-k)} \quad (24)$$

con β costante e rappresentando k l'ordine massimo di derivata del funzionale. Questo mostra che la velocità di convergenza cresce aumentando il grado del polinomio, mentre in ogni caso peggiora aumentando l'ordine delle derivate. È chiaro che l'ordine dell'errore può essere ridotto e la convergenza resa più rapida usando polinomi di grado più elevato e quindi elementi più complessi.

Ne derivano due importanti considerazioni sulle le funzioni di forma, le quali devono:

1. rappresentare almeno *stati di deformazioni costante*; ciò significa che quanto più piccoli sono gli elementi in cui si suddivide la struttura, cioè quanto più tali elementi si avvicinano a una dimensione infinitesima, tanto più la deformazione in essi deve tendere ad un valore costante puntuale pari al valore esatto;
2. rappresentare *moti di corpo rigido*, in modo tale che se l'elemento trasla o ruota rigidamente, non ci siano deformazioni.

Gli elementi che soddisfano queste condizioni necessarie note come *condizioni di completezza* vengo appunto detti *completi*.

Un'altra condizione nasce osservando che lungo il contorno degli elementi, affinché si possa effettuare l'assemblaggio, è necessario che non ci siano *gaps* (nel caso di dof traslazionali) o cuspidi (nel caso di dof rotazionali). Ciò si traduce matematicamente nel fatto che le funzioni di forma devono essere continue sia nell'interno dell'elemento, sia sul contorno fino alla derivata di ordine $(n - 1)$ compresa, se n è l'ordine delle derivate che compaiono nel funzionale, così che nel passaggio da un elemento a quelli adiacenti la funzione incognita rimanga sempre continua con tutte le sue derivate fino all'ordine $(n - 1)$ -esimo e solo la derivata n -esima può subire una discontinuità finita. Quest'ultima condizione è detta di *compatibilità* ed è una condizione solo sufficiente. In genere le due condizioni di compatibilità e completezza sono dette *condizioni di conformità*.

È importante notare che la compatibilità concerne non tanto il singolo elemento, quanto l'elemento nel suo assemblaggio con gli altri elementi. Infatti, lo stesso elemento (a) della Figura 2 se accoppiato all'elemento (b) non è compatibile (lato con due nodi lineare adiacente a lato con 3 nodi parabolico), mentre se accoppiato all'elemento (c) risulta compatibile.

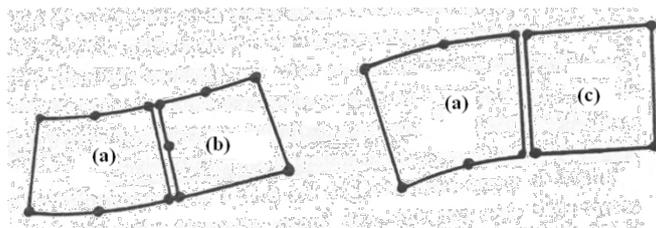


Figura 2 – Modello di elementi non compatibili e modello di elementi compatibili (a sinistra e a destra, rispettivamente)

Inoltre, si può osservare che mentre la condizione di completezza è necessaria, la condizione di compatibilità, che è anche la più gravosa da rispettare, è solo sufficiente e comprende la prima; quest'ultima condizione, sufficiente, dal punto di vista della convergenza è troppo conservativa, perciò in pratica si possono adoperare elementi non compatibili con una buona velocità di convergenza.

La *convergenza monotona* è certa comunque solo nel caso di elementi conformi ed è dal basso (Figura 3).

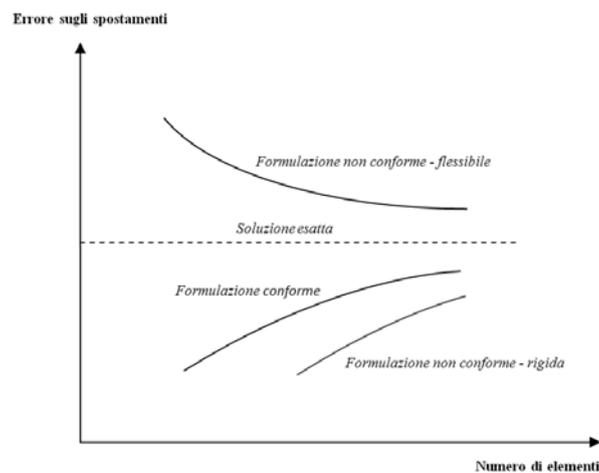


Figura 3 – Convergenza di elementi conformi e non conformi

È importante sottolineare che la convergenza a cui si è fatto riferimento finora è una convergenza verso una soluzione “esatta” solo in relazione al modello matematico ed alle equazioni che lo descrivono, non necessariamente al comportamento reale della struttura o del fenomeno in esame. La precisione dei risultati migliora con il raffinamento del modello e normalmente la convergenza si ottiene da valori di spostamento più bassi: il modello è più rigido della struttura reale. Questo accade perché, rispetto al continuo, i gradi di libertà sono in numero finito e le configurazioni di spostamento vengono interpolate con funzioni assegnate, che fungono da vincoli per i possibili comportamenti della struttura. Nel caso di elementi compatibili si ha dunque una sottostima delle deformazioni che implica una sottostima degli spostamenti.

Un test per verificare la convergenza di un elemento è il così detto *Patch test* introdotto da Irons. Tale metodo consiste nel prendere un *patch* (letteralmente una “pezza”) di elementi e imporre un campo di spostamenti tale da produrre un campo di spostamenti costante. È preferibile che la forma degli elementi non sia regolare. Si valutano gli spostamenti nodali sul contorno della patch: se, senza imporre carichi esterni, il risultato è un equilibrio nodale e se si ottiene uno stato di tensione costante, allora significa che lungo il contorno dell'elemento non si è perduto lavoro esterno e il test può essere considerato superato.

Un elemento che soddisfa il patch test, anche se non è compatibile, non solo converge, ma può mostrare un comportamento superiore agli elementi compatibili. Tali elementi completi ma incompatibili sono usati frequentemente e con successo.

Il principale svantaggio di elementi incompatibili è di non sapere a priori se la rigidità calcolata risulta minore o maggiore della rigidità reale. Ciò significa che la convergenza potrà avvenire sia dall'alto che dal basso (Figura 3).

D'altra parte formulazioni non compatibili sono usualmente meno rigide rispetto a quelle compatibili cosicché le prime possono convergere più rapidamente delle seconde.

2.1.4 Determinazione delle funzioni di forma

Nella scelta del polinomio che rappresenta la funzione di forma più opportuna di un elemento finito, bisogna rispettare le condizioni di completezza e compatibilità appena viste. Inoltre, un'ulteriore proprietà di cui si deve tenere conto nella scelta dell'ordine del polinomio è la cosiddetta *isotropia geometrica* secondo cui il risultato deve essere indipendente dall'orientamento del sistema di coordinate locali.

Per polinomi del primo ordine tale condizione è equivalente alla necessità di considerare stati di deformazione costante. Per ordini più elevati del polinomio, non sussiste più l'equivalenza dell'isotropia geometrica con la condizione di completezza. Un metodo per soddisfare la condizione di isotropia è quello di considerare *il triangolo di Pascal* che in due dimensioni risulta essere:

			asse di simmetria				
			1				termini costanti
		x	y				termini lineari
		x ²	xy	y ²			termini quadratici
	x ³	x ² y	xy ²	y ³			termini cubici
	x ⁴	x ³ y	x ² y ²	xy ³	y ⁴		termini quartici
x ⁵	x ⁴ y	x ³ y ²	x ² y ³	xy ⁴	y ⁵		termini quintici

e non considerare nessun termine da una parte dell'asse di simmetria del triangolo senza comprenderne il simmetrico.

Un'altra considerazione nella scelta del polinomio è che il numero totale di coordinate generalizzate per un elemento deve essere uguale o maggiore al numero di gradi di libertà dell'elemento stesso. Normalmente si impiega lo stesso numero di coordinate generalizzate e di gradi di libertà, anche se

è possibile utilizzare un numero maggiore di coordinate generalizzate per migliorare la matrice di rigidità dell'elemento.

Il metodo più semplice per rappresentare le funzioni di forma è quello basato sulle *serie polinomiali*. L'approssimazione introdotta nel FEM consiste nel considerare un certo polinomio come modello di spostamento e quindi come funzione di forma. Quando il polinomio tende ad un grado infinito, la soluzione tende al valore esatto, mentre tronandolo si avrà un certo grado di approssimazione.

Il punto in cui troncare la serie polinomiale richiede una certa attenzione. Una tale scelta, almeno per quanto riguarda il caso di moto di corpo rigido e il caso di deformazione costante, non presenta alcun problema per gli elementi solidi lineari e piani in quanto basta prendere un polinomio i cui termini siano tutti costanti e lineari.

Negli altri casi si fa riferimento alla condizione di isotropia prima citata e si può osservare che solo per alcuni elementi si riesce ad ottenere una funzione di spostamento descritta da un polinomio di grado n completo; tali elementi, come vedremo, sono i triangoli semplici e quelli a sei nodi. Difatti, dal triangolo di Pascal, si vede che il numero totale di elementi necessari è dato da $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Se consideriamo allora un elemento poligonale piano a N lati nel quale la funzione di spostamento sia da definirsi mediante una serie polinomiale e se questo polinomio deve essere definito univocamente su ogni lato, esso deve essere espresso mediante $(n+1)$ termini. È quindi necessario un numero $N(n+1) - N = Nn$ di tali termini per tutto il polinomio, poiché bisogna considerare che N vertici sono comuni a due termini. Uguagliando il numero necessario di coefficienti con quello richiesto si ottiene $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = N$ e tale condizione è verificata solo per $N = 3$ e $n = 1$ o $n = 2$, ovvero per elementi triangolari semplici e quelli a sei nodi.

Se consideriamo degli elementi rettangolari, è possibile verificare che per essi non si riesce ad ottenere un polinomio completo, anche se per essi è soddisfatta la condizione di isotropia.

Molto frequentemente i coefficienti di una rappresentazione polinomiale vengono determinati mediante *il metodo di interpolazione di Lagrange* che consiste nel valutare i valori di tali coefficienti tramite i valori che la funzione assume in determinati punti.

Consideriamo il caso monodimensionale in cui una linea è suddivisa in m segmenti con nodi $0, 1, 2, 3, \dots, m$. Il posizionamento dei nodi avviene tramite le loro coordinate globali $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$. Definiamo la funzione di spostamento $v(x)$ che assume valori $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$ nei rispettivi nodi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$, essendo $u(x)$ la funzione esatta. Si costruisce un polinomio di ordine m che passa per tali nodi; l'espressione delle funzioni di forma N_i che ne risulta è definita dalla:

$$v(x) = \sum_{i=0}^m N_i v_i \quad (25)$$

Nel caso di elementi triangolari il processo di interpolazione è legato al metodo delle coordinate naturale triangolari.

Un sistema di coordinate naturali è un sistema che ha un riferimento locale e che permette di individuare i nodi dell'elemento mediante un insieme di parametri adimensionali (ξ_i) il cui valore non è mai maggiore dell'unità. Il vantaggio di questi sistemi è quello di rendere più facile l'integrazione richiesta per il calcolo della matrice di rigidezza.

Se, ad esempio, consideriamo un generico elemento triangolare (Figura 4), le coordinate globali (x, y) di un suo generico punto si possono mettere in reazione con le coordinate naturali (ξ_1, ξ_2, ξ_3) per mezzo di leggi lineari:

$$\begin{cases} x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \\ y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \end{cases} \quad (26)$$

mentre vale la condizione che: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$. Risulta quindi che ξ_1, ξ_2 e ξ_3 si possono interpretare come funzioni peso, il cui valore varia tra 0 e 1. In particolare:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (27)$$

dove A_1, A_2, A_3 sono le aree in cui viene diviso il triangolo considerando il punto P così come mostrato in figura.

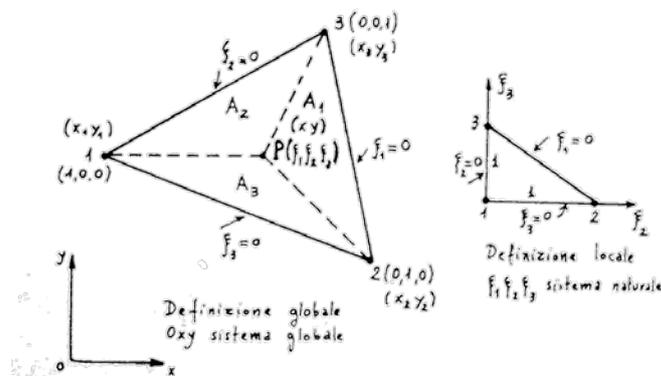


Figura 4 – Elemento triangolare in un sistema naturale

In definitiva, la relazione tra coordinate naturali e cartesiane è data da:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2A}(a_1 + b_1x + c_1y) \\ \xi_2 &= \frac{1}{2A}(a_2 + b_2x + c_2y) \\ \xi_3 &= \frac{1}{2A}(a_3 + b_3x + c_3y)\end{aligned}\quad (28)$$

in cui A è l'area del triangolo e $a_1 = x_2y_3 - x_3y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$ e $c_1 = x_2 - x_3$. Gli altri coefficienti si ottengono per rotazione degli indici.

Per l'elemento triangolare EP6 a tre nodi le funzioni di forma coincidono con le coordinate naturali: $N_1 = \xi_1 = 1 - \xi - \eta$, $N_2 = \xi_2 = \xi$ e $N_3 = \xi_3 = \eta$ con $\xi \geq 0$ e $\eta \leq 1$. Questo elemento è detto anche CST (*Constant Strain Triangle*) in relazione allo stato di deformazione costante che riesce a riprodurre.

Mentre per l'elemento triangolare EP12 a sei nodi, detto anche LST (*Linear Strain Triangle*), le funzioni di forma sono:

$$\begin{aligned}N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 \\ N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) = \xi(2\xi - 1) \\ N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) = \xi(2\eta - 1) \\ N_4 &= 4\xi_1\xi_2 = 4(1 - \xi - \eta)\xi \\ N_5 &= 4\xi_2\xi_3 = 4\xi\eta \\ N_6 &= 4\xi_1\xi_3 = 4(1 - \xi - \eta)\eta\end{aligned}$$

con $0 \leq \xi_i \leq 1$.

Dall'analisi del comportamento di questi due elementi triangolari, emerge che l'elemento EP12 ha una maggiore velocità di convergenza rispetto all'EP6, specialmente nei problemi di strutture che lavorano a flessione. Per strutture soggette a sforzo normale, la velocità di convergenza dell'EP6 è maggiore che nel caso flessionale. Il motivo di questo comportamento particolare è che gli elementi piani, per il modo in cui si deformano in base alle funzioni di spostamento assunte, introducono delle tensioni tangenziali che in realtà non esistono.

Gli elementi solidi si ottengono, invece, per estensione diretta degli elementi piani: gli elementi tetraedrici, ad esempio, si ottengono per naturale estensione degli elementi triangolari piani, mentre gli elementi esaedrici si ottengono per naturale sviluppo degli elementi quadrangolari piani.

Ad esempio, l'elemento triangolare piano EP6 nello spazio individua un tetraedro a 4 nodi. Le funzioni di forma sono: $N_1 = 1 - \xi - \eta$, $N_2 = \xi$, $N_3 = \eta$ e $N_4 = \zeta$.

2.1.5 Elementi isoparametrici

Oltre gli elementi semplici sia di forma triangolare che rettangolare caratterizzati dall'aver i nodi in corrispondenza dei vertici, esistono elementi a lati curvi, sia piani che spaziali, i quali possono avere dei nodi anche lungo i lati e quindi prevedono l'utilizzo di funzioni di forma almeno del secondo ordine, [3]. Gli elementi con lati curvi sono quelli che prevedono almeno un nodo intermedio, tale che la funzione interpolante sia almeno una parabola. Questi elementi complessi, con nodi anche sui lati, presentano due vantaggi:

1. permettono di descrivere dei contorni curvi realizzando una maglia che riproduca in maniera "quasi" esatta il contorno della struttura;
2. hanno una velocità di convergenza maggiore rispetto agli elementi semplici, e quindi a parità di risultati, occorrono pochi elementi complessi per ottenere lo stesso effetto di molti elementi semplici.

L'utilizzo di elementi finiti di ordine elevato consente di ridurre il numero di elementi necessari per l'ottenimento di una soluzione sufficientemente precisa del problema in quanto meglio approssimano l'andamento della funzione incognita. Per poter assicurare che un numero ridotto di elementi sia in grado di descrivere forme complesse è necessario che detti elementi siano in grado di descrivere anche profili curvi e quindi avere in generale lati e facce distorte e non già solo rettilinee o piane.

La difficoltà di trattare con la formulazione diretta elementi definiti mediante linee e/o superfici curve ha portato allo sviluppo di una formulazione *parametrica* che svincola la rappresentazione del dominio di integrazione dalla effettiva geometria dell'elemento mediante una trasformazione del sistema di riferimento in cui si opera. Con questa tecnica è possibile realizzare facilmente famiglie comprendenti elementi lineari, parabolici e cubici.

Con la formulazione parametrica viene abbandonato il dominio fisico definito dal riferimento cartesiano ortogonale, nel caso più generale a tre dimensioni (x, y, z) , in cui viene descritto l'elemento finito, per trasferirsi in un dominio regolare, definito da coordinate normalizzate, (ξ, η, ζ) , nel quale le linee sono diritte, le superfici piane. Per poter essere certi della correttezza della trasformazione, occorre che essa sia tale da definire un rapporto biunivoco tra i punti omologhi appartenenti ai due spazi (x, y, z) e (ξ, η, ζ) .

In generale, l'elemento descritto dalla sua funzione di forma N_i , si dice *isoparametrico*, poiché gli stessi parametri N_i vengono utilizzati per esprimere sia le coordinate del punto generico in funzione delle coordinate nodali, sia gli spostamenti del punto generico in funzione degli spostamenti nodali. Mentre le N_i assumono il ruolo di *funzioni peso*, ovvero è possibile esprimere nel riferimento globale gli spostamenti generici o le coordinate generiche come combinazione lineare, mediante

opportuni pesi, dei rispettivi valori nodali ed è necessario che questi pesi siano locali in quanto dipendono proprio dal particolare elemento in gioco.

Considerando, quindi, un sistema di coordinate (x, y, z) nello spazio tridimensionale ed un generico sistema (ξ, η, ζ) nello stesso spazio, le relazioni di trasformazione fra i due spazi sono del tipo:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (29)$$

Tali relazioni stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti dei rispettivi sistemi. Inoltre le funzioni che compaiono nelle (29) si suppongono ad un solo valore, continue e differenziabili. Inoltre, la matrice:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

detta lo Jacobiano della trasformazione, se è non singolare, risulta invertibile e quindi esiste una corrispondenza unica tra le coordinate naturali e globali:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned} \quad (31)$$

Si deduce pertanto che il termine generico della matrice $[B(\xi, \eta, \zeta)]$ che esprime la relazione tra deformazione e spostamento è:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (32)$$

e in generale:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (33)$$

dove la matrice $[J]$ può essere determinata in funzione delle coordinate locali.

La condizione di invertibilità della matrice $[J]$ ha un significato fisico ben preciso essendo legato alla particolare forma dell'elemento. In generale, è preferibile l'uso di elementi di tipo convesso nei quali non si riscontrano angoli maggiori di 180° , in quanto ciò determina appunto una singolarità della matrice $[J]$. Inoltre non è consigliabile l'utilizzo di elementi che si ripiegano su se stessi. Ed infine, nel caso di elementi parabolici, il punto intermedio deve essere posizionato non troppo distante dal punto medio.

2.1.6 Metodi di integrazione numerica

Un problema di grande importanza nell'analisi degli elementi finiti isoparametrici è l'integrazione numerica dell'equazione che permette di determinare la matrice di rigidità per un elemento quadrangolare:

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (34)$$

Infatti non è pensabile esprimere esplicitamente i termini della matrice $[G]$ a causa della natura delle matrici che la compongono. Si rende quindi necessario ricorrere a metodi di integrazione numerica approssimati, che permettano una risoluzione rapida e precisa dell'integrale.

Tra i metodi più comuni di integrazione possiamo elencare il metodo di *Newton-Cotes* e il metodo di *Gauss*.

Supponiamo di dover calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_a^b G(r) dr \quad (35)$$

Il metodo di *Newton-Cotes* consiste nello scegliere un numero $n + 1$ di punti ugualmente distanziati tra a e b in modo da avere n intervalli uguali $h = \frac{(b-a)}{n}$, e mediante opportuni pesi approssimare l'integrale in esame nel seguente modo:

$$I \approx (b - a) \sum_{i=0}^n H_i G(r_i) \quad (36)$$

essendo r_i le coordinate dei punti. Le uniche incognite sono soltanto i pesi H_i che vengono calcolati mediante integrazione di un polinomio che passa attraverso gli $n + 1$ punti ugualmente distanziati della $G(r)$, ad esempio con il metodo di interpolazione di Lagrange. Pertanto con $n + 1$ punti si può calcolare esattamente un polinomio di grado minore od uguale a n .

Per $n = 1$ si ha la nota regola del trapezio:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2} (G_0 + G_1) \quad (37)$$

essendo $G_0 = G(a)$ e $G_1 = G(b)$.

Per $n = 2$, si ha la nota la formula di Simpson:

$$I \approx \frac{(b-a)}{6} (G_0 + 4G_1 + G_2) \quad (38)$$

essendo $G_0 = G(a)$, $G_1 = G(ba + h)$ e $G_2 = G(b)$, con $h = \frac{b-a}{2}$.

L'integrazione con il metodo di *Gauss* consiste invece nello scegliere un certo numero di punti n non ugualmente distanziati, dove viene calcolata la funzione integranda $G(r)$.

La (35) viene approssimata dalla relazione:

$$I \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n H_i G(r_i) \quad (39)$$

dove r_i sono le coordinate dei punti di Gauss ed n è il numero dei punti di Gauss, che viene detto ordine di integrazione.

Se $G(r)$ è un polinomio, con n punti di Gauss si hanno $2n$ incognite, ovvero n valori di H_i ed n valori di r_i ; il grado di $G(r)$ per cui si ottiene un'integrazione esatta è minore o uguale a $(2n - 1)$.

Lo schema di integrazione comunemente usato nel FEM è il metodo di Gauss che risulta essere più efficiente del metodo di Newton-Cotes: infatti, il primo metodo richiede, a parità di precisione, un numero di punti inferiore rispetto al secondo. In particolare il metodo di Gauss richiede n punti per un polinomio di grado $(2n - 1)$ contro $(n + 1)$ punti richiesti dal metodo di Newton-Cotes per un polinomio di grado n .

Scelto il metodo di integrazione, occorre fissare l'ordine di integrazione nella valutazione degli integrali della matrice di rigidezza degli elementi finiti. Tale scelta è un fattore molto importante dal punto di vista dei costi e della precisione dei calcoli, poiché aumentando l'ordine aumenta il tempo di calcolo, mentre diminuendo l'ordine diminuisce il tempo di calcolo, ma anche la precisione.

L'ordine di integrazione è legato al particolare integrale da risolvere, poiché l'ordine del polinomio della funzione integranda è decisivo nello stabilirne il valore.

Si può osservare che usando ordini di integrazione sufficientemente alti, tutte le matrici sono calcolate esattamente. D'altra parte con ordini bassi, le matrici sono calcolate non solo con grossi errori, ma possono essere singolari e rendere impossibile il problema. In genere, l'ordine di integrazione deve sempre essere superiore ad un certo valore minimo, sotto al quale la matrice di rigidezza $[K]$ diventa singolare.

L'ordine di integrazione richiesto per valutare una data matrice dovrebbe essere determinato analizzando il grado della funzione integranda; nel caso della matrice di rigidezza, l'espressione da considerare è:

$$[G] = [B]^T [D] [B] \det[J] \quad (40)$$

dove $[D]$ è una costante nel caso elastico, $[B]$ è una matrice delle coordinate (ξ, η, ζ) e $\det[J]$ è il determinante dello Jacobiano sempre espresso in (ξ, η, ζ) .

2.1.7 Criteri di formazione della maglia

La discretizzazione di un continuo in elementi finiti richiede una certa esperienza per ottenere una maglia (*mesh*) che possa fornire risultati affidabili.

Il problema principale è che una mesh poco fitta dà una struttura troppo rigida, cioè gli spostamenti sono minori del valore esatto. Continuando ad infittire la mesh, la soluzione converge al valore esatto, per elementi compatibili quali gli isoparametrici.

Un secondo problema che si presenta nella realizzazione di una mesh è la scelta del tipo di elemento, semplice (ovvero con pochi nodi) o complesso (ovvero con molti nodi). A parità di soluzione, occorrono più elementi semplici che complessi, per cui sembrerebbe che l'utilizzo di questi ultimi sia più logico. Tuttavia con tali elementi la semibanda cresce velocemente, per cui un'ottimizzazione riesce molto difficile se non per coloro che sono dotati di notevole esperienza.

Un altro effetto di cui occorre tenere conto è la maniera con cui si effettua la mesh con gli elementi triangolari. Infatti, mentre con gli elementi rettangolari la isotropia geometria è facilmente mantenuta, con gli elementi triangolari possono aversi risultati diversi a seconda del modo in cui

disponiamo i triangoli. È infatti accertato che con questi ultimi l'isotropia geometrica è più difficilmente preservata.

Un altro effetto da considerare è il rapporto tra la dimensione massima e minima dell'elemento. Una regola generale è quella di evitare degli elementi quadrangolari troppo lunghi o elementi triangolari troppo appiattiti. Per gli elementi rettangolari il caso migliore è quello in cui il rapporto tra la dimensione massima e minima sia il più prossimo ad 1, mentre per gli elementi triangolari, la disposizione migliore è l'elemento equilatero.

Occorre inoltre tener presente che in zone a minore gradiente di tensione gli elementi possono essere radi, mentre nelle zone ad alta concentrazione di tensione occorre procedere ad una mesh più fitta. Le zone con forte gradiente di tensione sono quelle vicino ai carichi, dove il carico distribuito subisce delle discontinuità, dove ci sono variazioni delle caratteristiche del materiale, dove esistono delle fratture, dove la geometria subisce o discontinuità o brusche variazioni. Al di fuori di queste zone è possibile adoperare elementi grandi, ovvero mantenere una maglia rada.

Infine, un altro caso pratico è quello che si presenta quando gli elementi debbono essere sistemi sul contorno dove esiste uno stato nullo di tensione. Poiché un elemento sul contorno dà sempre luogo ad un certo valore di tensione, occorre una mesh più fine nella direzione normale al lato per permettere stati di tensione molto piccoli sul contorno e una transizione al valore significativo della tensione all'interno.

2.2 La metodologia multi corpo

Con il termine *sistema multi corpo* (o *multibody*) si intende un sistema meccanico costituito da un insieme di corpi, in genere rigidi, detti *elementi*, collegati tra loro da *coppie cinematiche* o *giunti* che consentono il moto relativo tra due elementi in certe direzioni mentre lo impediscono in altre [4, 5].

I sistemi meccanici che generalmente vengono modellati come sistemi multibody sono: macchine automatiche, mezzi di trasporto, sospensioni di automobili, trasmissioni di autoveicoli, motori a combustione interna, veicoli spaziali, macchine utensili, veicoli di lavoro, sistemi di movimentazione, robot, ecc. Normalmente, tali meccanismi sono soggetti a grandi spostamenti, quindi, la loro configurazione geometrica subisce in condizioni normali grandi variazioni. Inoltre, negli ultimi anni, l'aumento delle velocità di funzionamento per alcuni sistemi meccanici ha comportato, come conseguenza, un aumento in termini di accelerazioni e di forze di inerzia, che portano inevitabilmente alla comparsa di problemi di natura dinamica che devono essere necessariamente previsti e controllati.

La cinematica e la dinamica dei sistemi meccanici mediante tecniche di simulazione multibody è una parte molto importante di ciò che viene usualmente indicato con il termine CAE (*Computed Aided Engineering*) o MCAE (*Mechanical Computer Aided Engineering*).

Il vantaggio delle simulazioni eseguite mediante strumenti CAD e MCAE è che essi permettono di prevedere il comportamento cinematico e dinamico di tutti i tipi di sistemi modellabili come sistemi multibody con dovizia di particolari durante tutte le fasi della progettazione, dalle primissime fasi di design a quelle di realizzazione dei prototipi finali. In ogni fase, infatti, analisi di questo tipo permettono di ottenere informazioni sull'influenza di differenti configurazioni dei diversi componenti del sistema, avendo la possibilità di realizzare un numero elevato di simulazioni in tempi piuttosto brevi e con costi contenuti. I programmi di simulazione permettono di determinare il comportamento di un sistema multibody una volta che sono state definite le sue caratteristiche geometriche e dinamiche.

2.2.1 Elementi di un sistema multi corpo

Gli elementi che costituiscono un sistema multibody sono:

- corpi (in genere rigidi);
- vincoli o coppie cinematiche;
- forze (esterne).

Per definire un corpo appartenente ad un sistema multibody è necessario definire: un sistema di riferimento ad esso solidale (detto *sistema di riferimento locale*) con origine nel centro di massa del corpo e assi orientati possibilmente come gli assi principali d'inerzia del corpo; la massa del corpo; il tensore d'inerzia del corpo espresso rispetto al sistema di riferimento locale; eventuali sistemi di riferimento ausiliari, utili per la definizione dei vincoli; in genere non è necessario definire la geometria del corpo, a meno che nella definizione dei vincoli non si tenga conto degli eventuali contatti tra i vari corpi, [6].

I sistemi meccanici reali sono costituiti da elementi che possono essere considerati rigidi solo in prima approssimazione. Un corpo può essere considerato *rigido* se la distanza tra due qualsiasi punti ad esso appartenenti rimane costante durante il moto. Se il corpo è deformabile lo studio dinamico si complica, poiché oltre alle equazioni della dinamica si devono considerare anche le equazioni che descrivono la deformazione dell'elemento. Per alcuni tipi di analisi e per particolari applicazioni, ad esempio nelle macchine funzionanti ad alta velocità, è necessario tener conto della deformabilità dei corpi che costituiscono il meccanismo. Generalmente nei simulatori multibody si analizza il moto di sistemi composti da corpi rigidi, ma nel caso in cui la flessibilità dei corpi non può essere trascurata (come ad esempio accade per la flessibilità dell'albero a gomiti nello studio del comportamento vibro-acustico di un motore a combustione interna), è possibile ricondurre i corpi flessibili a sistemi di corpi rigidi uniti da vincoli, con elasticità e smorzamenti concentrati oppure inserire nel modello multibody un modello di corpo flessibile generato tramite una precedente analisi FEM che permette di descrivere il corpo stesso mediante le proprie caratteristiche modali.

Se un sistema multibody è composto da corpi senza rami chiusi, allora esso è chiamato a *catena aperta*, altrimenti si parla di sistema a *catena chiusa*. Un doppio pendolo è un esempio di configurazione a catena aperta, mentre il quadrilatero articolato in Figura 5 è un esempio di sistema multibody a catena chiusa.

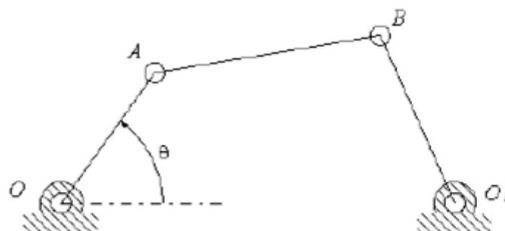


Figura 5 – Quadrilatero articolato: sistema multibody a catena chiusa

I vincoli sono dispositivi che limitano il moto relativo tra due o più corpi. Come vedremo in seguito, nel modello matematico che rappresenta il sistema essi sono rappresentati da equazioni che legano tra loro le variabili che descrivono il moto del meccanismo.

2.2.2 Tipologie di problemi risolvibili con sistemi multi corpo

Le tipologie di problemi che vengono descritti e risolti mediante sistemi multibody possono essere di due tipi: *problemi cinematici* e *problemi dinamici*. Nel primo caso viene analizzato il moto del sistema indipendentemente dalle forze che vi sono applicate, e quindi da un punto di vista esclusivamente geometrico. Nel secondo caso, vengono considerate le forze che agiscono sul meccanismo e le caratteristiche inerziali (in termini di massa e tensore di inerzia) di ciascun elemento che costituisce il sistema, [7].

Nello studio del problema cinematico solitamente è nota la configurazione iniziale e/o il moto di uno o più elementi del sistema che vengono detti *elementi di input* e sono in numero pari ai gradi di libertà del meccanismo. Per quanto riguarda la configurazione iniziale del meccanismo, il problema consiste nel determinare, a partire dalla configurazione degli elementi di input, una configurazione dell'intero sistema, compatibile con i vincoli su di esso imposti. La soluzione di questo problema non è immediata a causa della complessità delle equazioni che rappresentano i vincoli imposti dalle coppie cinematiche. Infatti, il problema si riconduce alla soluzione di un sistema di equazioni algebriche, in genere, fortemente non lineare e quindi di difficile soluzione. Si possono avere le seguenti situazioni: il problema ammette una sola soluzione; il problema non ammette nessuna soluzione; il problema ammette più soluzioni.

Consideriamo il quadrilatero articolato piano (Figura 5); il cinematismo è caratterizzato da quattro elementi (di cui uno fisso) collegati tra loro da quattro coppie rotoidali. Pertanto il cinematismo è dotato di un solo grado di libertà. Supponiamo, inoltre, che l'elemento di input del quale conosciamo la configurazione iniziale sia la manovella OA, identificata dall'angolo θ_1 della coppia rotoidale in O.

Nella Figura 6 sono riportati i diversi casi in cui, per il valore assegnato dall'angolo θ_1 :

- a) il cinematismo assume una sola configurazione (questa possibilità si verifica nel caso limite i cui i segmenti AB e O_1B sono allineati);
- b) il cinematismo non ammette nessuna configurazione;
- c) il cinematismo ammette due possibili configurazioni.

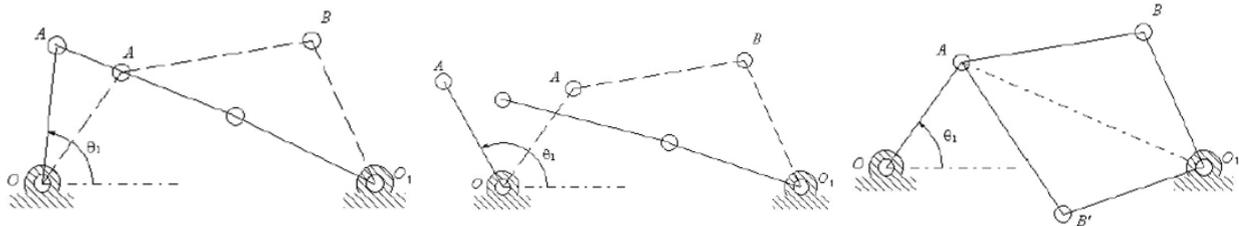


Figura 6 – Configurazioni iniziali del quadrilatero articolato: il cinematismo assume una sola configurazione (figura a sinistra), il cinematismo non ammette nessuna configurazione (figura centrale), il cinematismo ammette due possibili configurazioni (figura a destra)

All'aumentare della complessità del meccanismo, ovviamente, aumenta il numero di possibili soluzioni del problema.

Nel caso in cui si voglia determinare, a partire da una nota configurazione iniziale, la configurazione del sistema in seguito ad uno spostamento finito degli elementi di input (Figura 7), il problema da un punto di vista matematico, si riconduce alla soluzione di un sistema algebrico di equazioni non lineari, ma rispetto al caso precedente la ricerca della soluzione risulta semplificata dalla conoscenza della configurazione iniziale, che può essere utilizzata come punto di partenza della procedura iterativa per la soluzione numerica del sistema di equazioni non lineari.

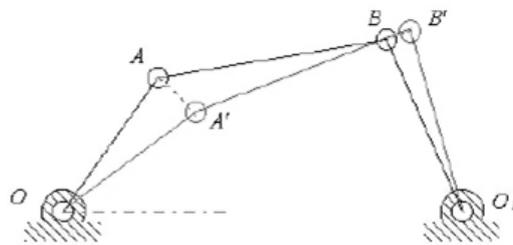


Figura 7 – Spostamento finito del quadrilatero articolato

Una volta nota la configurazione del sistema, la velocità e l'accelerazione degli elementi di input, il problema consiste nella definizione delle velocità e delle accelerazioni di tutti gli altri elementi del sistema.

La simulazione cinematica permette di conoscere le caratteristiche del moto (configurazione, velocità e accelerazione) di tutti gli elementi che costituiscono il sistema multibody una volta note le leggi di moto degli elementi di input. Mediante una simulazione di questo tipo è possibile ottenere informazioni utili sul moto del meccanismo, ad esempio, per analizzare le traiettorie di ciascun elemento del sistema, per identificare collisioni, interferenze, ecc. Da un punto di vista matematico il problema può essere visto come la successione di una serie di spostamenti finiti.

Il problema dinamico, in generale, risulta più difficile da risolvere rispetto a quello cinematico in quanto coinvolge le forze che agiscono sul meccanismo e le caratteristiche inerziali (in termini di

massa e tensore di inerzia) di ciascun elemento che costituisce il sistema. In un sistema multibody vanno distinte le *forze esterne*, esercitate dall'esterno sul sistema, dalle *reazioni interne*, scambiate tra i corpi che costituiscono il sistema.

Esistono differenti tipologie di problemi dinamici: problema di equilibrio in condizioni statiche, analisi delle vibrazioni, problema dinamico inverso, problema dinamico diretto, ecc. Il problema dell'equilibrio in condizioni statiche consiste nel definire la configurazione del sistema tale da garantirne l'equilibrio sotto l'azione delle forze gravitazionali, delle forze esterne e delle forze esercitate dagli elementi elastici e viscosi. Il problema dell'analisi delle vibrazioni del sistema consiste nel determinare i movimenti del meccanismo in un intorno della configurazione di equilibrio. Da questa analisi è possibile definire le pulsazioni naturali e i modi del sistema. Il problema dinamico inverso consiste nel determinare il sistema di forze e coppie a cui è soggetto un sistema multibody di cui è noto il movimento. Per la risoluzione del problema è necessario conoscere le velocità e le accelerazioni di tutti gli elementi del sistema, in modo da poter calcolare le forze di inerzia che dovranno essere equilibrate dalle forze esterne e vincolari. Nel problema dinamico diretto, invece, viene calcolato il moto del sistema conoscendo le forze esterne che agiscono su di esso. Lo studio della dinamica diretta (o simulazione dinamica) è molto importante perché consente di simulare e prevedere il moto effettivo del sistema sotto l'azione di forze note; viene effettuata mediante l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali generalmente non lineare.

2.2.3 Rappresentazione degli elementi di un sistema multi corpo

Il primo passo che occorre affrontare nello studio della cinematica e/o della dinamica dei sistemi multibody è la modellazione del sistema, ovvero la scelta di un insieme di parametri o coordinate che permettano di definire in modo univoco la posizione, la velocità e l'accelerazione del sistema in esame in ogni istante.

Un sistema multibody può essere rappresentato da differenti tipi di coordinate, ma le varie possibilità non sono tra loro equivalenti: alcune risultano essere più convenienti di altre perché sono più semplici da implementare, mentre altre risultano essere più efficienti perché richiedono minori risorse di calcolo. Pertanto, il primo dilemma che si incontra nella scelta di un sistema di coordinate per descrivere il comportamento di un sistema multibody è tra un insieme di coordinate indipendenti e di coordinare dipendenti.

Il numero delle *coordinate indipendenti* del sistema è pari al numero di gradi di libertà e quindi il set di coordinate è tale che le equazioni per descrivere completamente la configurazione del sistema sono in numero strettamente necessario (set minimo di coordinate). Il numero delle *coordinate*

dipendenti, invece, è maggiore del numero di gradi di libertà del sistema e per questo motivo il set di coordinate è tale che le equazioni che descrivono la configurazione del sistema sono ridondanti e pertanto non possono essere indipendenti tra loro (set ridondante di coordinate).

Generalmente un sistema di coordinate indipendenti non può essere utilizzato per la rappresentazione in un sistema multibody perché non sempre permette di rappresentare in modo univoco la configurazione del sistema. Le coordinate indipendenti, infatti, determinano direttamente la posizione degli elementi di input, ma non la posizione degli altri elementi, che deve essere determinata risolvendo il problema della configurazione iniziale, che come si è visto può ammettere più soluzioni. Per superare questo inconveniente di solito si ricorre all'uso di un sistema di coordinate dipendenti, che permette di rappresentare in modo univoco la configurazione del sistema multibody. Le coordinate dipendenti sono legate tra loro da una serie di relazioni di tipo algebrico, in numero pari alla differenza tra il numero di coordinate e il numero di gradi di libertà del sistema. Tali equazioni sono dette *equazioni di vincolo* e solitamente sono equazioni non lineari.

2.2.4 Coordinate assolute e relative

Le *coordinate relative* definiscono la posizione di ciascun elemento in una catena cinematica utilizzando come parametri o coordinate lo spostamento relativo tra due elementi adiacenti. Nel caso di sistemi multibody planari, ad esempio, se due elementi sono collegati da un giunto rotoidale, la loro posizione relativa è definita per mezzo di un angolo; se, invece, sono collegati con un giunto prismatico, la loro posizione relativa è descritta per mezzo di una distanza. Tali coordinate sono utilizzate soprattutto per l'analisi cinematica e dinamica dei meccanismi a catena cinematica aperta; inoltre, in questo caso, il numero di coordinate è pari al numero di gradi di libertà e quindi non è necessario definire equazioni di vincolo.

Se invece il meccanismo contiene più anelli chiusi, è necessario scegliere quelli che sono tra loro indipendenti per scrivere le equazioni vettoriali di chiusura da cui si ricavano le equazioni di vincolo.

Una possibile rappresentazione di un sistema multibody consiste nell'associare al generico corpo rigido i -esimo un sistema di riferimento $O_i x_i y_i z_i$, ad esso solidale, avente l'origine O_i coincidente con il centro di massa G_i del corpo stesso (Figura 8).

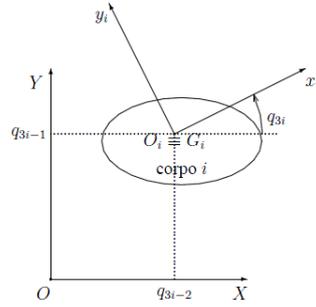


Figura 8 – Coordinate generalizzate

La posizione e l'orientazione del corpo i è univocamente determinata una volta che siano note le due coordinate del centro di massa e l'orientazione della terna $O_i x_i y_i z_i$ rispetto alla terna di base $OXYZ$. Si definiscono quindi *coordinate generalizzate* del corpo i , le quantità: q_{3i-2} e q_{3i-1} , che rappresentano le coordinate del centro di massa G_i del corpo rispetto al sistema di riferimento di base, e q_{3i} , che rappresenta l'angolo formato tra gli assi X e x_i misurato a partire da X e positivo in senso antiorario (Z positiva).

Se con x^P e y^P si indicano le coordinate, rispetto al sistema di riferimento locale $O_i x_i y_i z_i$ di un generico punto P appartenente al corpo i , la trasformazione:

$$X^P = q_{3i-2} + x^P \cos q_{3i} - y^P \sin q_{3i} \quad (41)$$

$$Y^P = q_{3i-1} + x^P \sin q_{3i} + y^P \cos q_{3i} \quad (42)$$

permette di esprimere le coordinate del punto P nel sistema di riferimento di base (Figura 9).

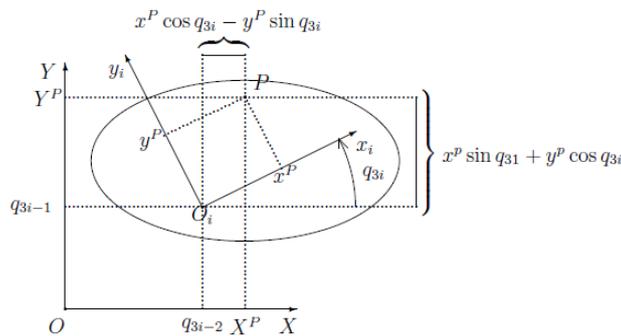


Figura 9 – Trasformazione di coordinate tra terna mobile e terna fissa

Se indichiamo con R_i la matrice di rotazione:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos q_{3i} & -\sin q_{3i} \\ \sin q_{3i} & \cos q_{3i} \end{bmatrix} \quad (43)$$

le equazioni (41) e (42) possono essere scritte in forma compatta con notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} X^P \\ Y^P \end{bmatrix} = R_i \begin{bmatrix} x^P \\ y^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{3i-2} \\ q_{3i-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Si osservi che, essendo il corpo rigido, le coordinate del punto P rispetto al sistema di riferimento $O_i x_i y_i z_i$ solidale al corpo sono costanti. Pertanto, le coordinate del generico punto P durante il moto possono essere univocamente determinate una volta noti i parametri q_{3i-2} , q_{3i-1} e q_{3i} .

Se il sistema è costituito da l corpi rigidi, la configurazione del sistema è nota se sono note le coordinate generalizzate di tutti i corpi che lo compongono, quindi una volta noti i $3(l-1)$ parametri (uno dei corpi funge da telaio).

2.2.5 Vincoli

Si indica con il termine *vincolo* una relazione matematica tra le coordinate generalizzate dei corpi che costituiscono un sistema, che in un certo senso “limitano” le possibilità di moto del sistema stesso.

Una prima classificazione suddivide i vincoli cinematici in *olonomi*, e cioè vincoli sulla posizione, e *anolonomi*, in cui compare anche la velocità.

I vincoli possono essere ulteriormente classificati in vincoli *scleronomi* e *reonomi*. I primi sono vincoli strutturali dovuti alla presenza delle coppie cinematiche o di particolari vincoli che non variano nel tempo, e dipendono solo dalle coordinate generalizzate e dalla geometria del sistema. Questi tipi di vincoli saranno rappresentati da una relazione del tipo $\psi_k(\mathbf{q}) = 0$. I secondi sono vincoli di moto e sono dovuti alle leggi cinematiche di moto assegnate ad alcuni membri del meccanismo. Questi tipi di vincoli saranno rappresentati da una relazione in cui compare esplicitamente il tempo, del tipo $\psi_k(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = 0$. Dal punto di vista matematico la differenza tra questi due tipi di vincoli è che i vincoli scleronomi sono caratterizzati dal fatto di non avere dipendenza esplicita dal tempo, mentre nelle relazioni che descrivono i vincoli reonomi compare esplicitamente la variabile temporale t .

Le equazioni relative ai vincoli scleronomi vengono generate in maniera sistematica, una volta specificata la topologia del meccanismo e la geometria degli elementi che lo costituiscono, mentre le equazioni relative ai vincoli reonomi vengono impostate dal progettista.

Spesso nell'analisi cinematica di un sistema multibody è necessario imporre vincoli che non sono direttamente riconducibili a coppie cinematiche. Si consideri, ad esempio, la condizione per cui due

punti appartenenti a due corpi diversi mantengono fissa la loro distanza. Questi vincoli si dividono in *vincoli di moto assoluto* e *vincoli di moto relativo*.

In generale, il numero di gradi di libertà F di un meccanismo composto da l corpi rigidi (compreso il telaio) è dato da:

$$F = \lambda(l - 1) - \sum_{i=1}^j (\lambda - f_i) = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (45)$$

dove λ indica il tipo di moto che caratterizza il meccanismo ($\lambda = 3$, se i corpi sono caratterizzati da moto piano o sferico, e $\lambda = 6$ se i corpi si muovono di un moto spaziale), j è il numero di coppie cinematiche ed f_i è il numero di gradi di libertà lasciati dall' i -esima coppia cinematica.

Nella Figura 10 sono mostrate le principali coppie cinematiche, mentre nella Tabella 1 si riportano i gradi di libertà ad esse associate ed i moti inibiti.

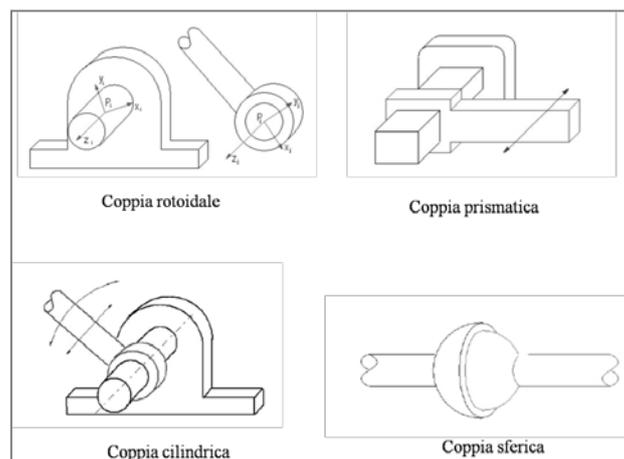


Figura 10 – Principali coppie cinematiche

Tabella 1 – Gradi di libertà associati alle principali coppie cinematiche		
Coppia Cinematica	f	Moti Inibiti
Rotoidale	1	2 rotazioni e 3 traslazioni
Prismatica	1	3 rotazioni e 2 traslazioni
Cilindrica	2	2 rotazioni e 2 traslazioni
Sferica	3	3 traslazioni

Se per semplicità consideriamo un meccanismo piano composto da l corpi rigidi (compreso il telaio) mutuamente vincolati da j_1 coppie elementari (che nel caso piano in oggetto, sono

esclusivamente di tipo rotoidale o prismatico, ognuna caratterizzata da due equazioni di vincolo) e j_2 coppie superiori, il numero di gradi di libertà F del sistema è dato dalla relazione:

$$F = 3(l - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (46)$$

ovvero dalla differenza tra il numero totale di coordinate generalizzate del sistema e il numero di relazioni che possono essere scritte per i vincoli reonomi.

Per i vincoli scleronomi sarà possibile scrivere $2j_1 + j_2$ equazioni, in cui compariranno le $3(l - 1)$ coordinate generalizzate del sistema.

Pertanto, affinché il problema dell'analisi cinematica del meccanismo possa essere risolto, occorrerà fornire F equazioni corrispondenti ai vincoli reonomi presenti (leggi di moto).

2.2.6 Analisi cinematica di un sistema multi corpo

L'analisi cinematica di un meccanismo (in termini di definizione della configurazione del sistema durante il moto) si riduce quindi con la soluzione numerica delle equazioni ordinarie non lineari simultanee:

$$\psi_k(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = 0, \quad k = 1, \dots, 3(l - 1) \quad (47)$$

dove $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}, \dots, q_{3(l-1)-2}, q_{3(l-1)-1}, q_{3(l-1)}]^T \in R^{3(l-1)}$ è il vettore delle coordinate generalizzate del meccanismo. Di tutte le equazioni (47), le prime $2j_1 + j_2$ rappresentano le equazioni dei vincoli reonomi, mentre le rimanenti F rappresentano le equazioni dei vincoli scleronomi, ovvero le leggi di moto di alcuni degli elementi del meccanismo.

Raccolte in un sistema, si può scrivere:

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad (48)$$

dove $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{3(l-1)}]^T$. Il sistema (48) è un sistema di $3(l - 1)$ equazioni non lineari, che può essere risolto per via numerica per determinare la configurazione del meccanismo in un certo istante t_0 assegnato.

Volendo determinare la velocità del meccanismo occorre derivare la (48) rispetto al tempo:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\psi(\mathbf{q},t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (49)$$

Ricordando la definizione di matrice Jacobiana $\Psi_{\mathbf{q}} = \frac{\partial\psi(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}$ e definendo il vettore $\psi_t = \frac{\partial\psi(\mathbf{q},t)}{\partial t}$, la (49) può essere scritta come:

$$\Psi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\psi_t \quad (50)$$

La (50) rappresenta un sistema di $3(l-1)$ equazioni in $3(l-1)$ incognite (le componenti del vettore $\dot{\mathbf{q}}$), di tipo lineare, la cui soluzione, se la matrice $\Psi_{\mathbf{q}}$ risulta non singolare, è data da:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\Psi_{\mathbf{q}}^{-1}\psi_t \quad (51)$$

Si osservi che la matrice $\Psi_{\mathbf{q}}$ dipende da \mathbf{q} , ovvero dalla configurazione del meccanismo. Le configurazioni per le quali risulta $\det(\Psi_{\mathbf{q}}) = 0$ sono dette *configurazioni singolari*.

Per quanto riguarda le accelerazioni, derivando rispetto al tempo, separatamente, il primo e il secondo membro della (50) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\Psi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\Psi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \Psi_{\mathbf{q}t}\dot{\mathbf{q}} + \Psi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} \quad (52a)$$

$$\frac{d}{dt}(\psi_t) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\psi_t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt}(\psi_t) = \Psi_{\mathbf{tq}}\dot{\mathbf{q}} + \psi_{tt} \quad (52b)$$

E definendo il vettore γ :

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}(\Psi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - 2\Psi_{\mathbf{q}t}\dot{\mathbf{q}} - \psi_{tt} \quad (53)$$

il problema dell'analisi delle accelerazioni del meccanismo si conclude con la soluzione del sistema di equazioni:

$$\Psi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = \gamma \quad (54)$$

2.2.7 Analisi dinamica di un sistema multi corpo

L'applicazione diretta delle equazioni di Newton per studiare la dinamica dei sistemi multibody può risultare difficoltosa, specialmente per i sistemi costituiti da un numero elevato di corpi. La difficoltà maggiore consiste nel definire una procedura sistematica che permetta di generare le equazioni di moto per un qualsiasi sistema meccanico.

Un approccio più conveniente dal punto di vista computazionale è quello che utilizza il principio di Hamilton e le equazioni di Lagrange. Questo approccio di tipo energetico consente di giungere ad una formulazione delle equazioni della dinamica in termini variazionali, che si presta ad essere utilizzata con l'ausilio di un calcolatore.

Verranno ora richiamati alcuni concetti fondamentali relativi alla dinamica analitica.

2.2.7.1 Dal principio dei lavori virtuali al principio di D'Alembert-Lagrange

Si definisce *spostamento virtuale* $\delta\vec{r}_i$ di un punto P_i , all'istante t_0 nella posizione P_{i0} , ciascuno degli infiniti spostamenti elementari tangenti alle traiettorie passanti per P_{i0} che il punto P_i può compiere con i vincoli irrigiditi all'istante t_i .

Pertanto uno spostamento virtuale è uno spostamento infinitesimo e compatibile con i vincoli del sistema. In particolare, si definiscono spostamenti virtuali *reversibili* quelli tali che se $\delta\vec{r}_i$ è uno spostamento virtuale, lo è anche $-\delta\vec{r}_i$.

Si definisce *lavoro virtuale* di una generica forza \vec{F}_i il lavoro fatto in corrispondenza di uno spostamento virtuale $\delta\vec{r}_i$ del suo punto di applicazione, ovvero:

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad (55)$$

Per un sistema multibody, lo spostamento virtuale è costituito da una variazione infinitesima della sua configurazione, congruente con le condizioni di vincolo. Se il sistema è identificato per mezzo del vettore delle coordinate generalizzate \mathbf{q} , il generico spostamento virtuale è identificato dal vettore $\delta\mathbf{q}$.

Lo spostamento virtuale del punto di applicazione della forza \vec{F}_i , può essere calcolato in funzione di $\delta\mathbf{q}$ mediante la relazione:

$$\delta\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n = [\mathbf{r}_{iq}] \delta \mathbf{q} \quad (56)$$

dove \mathbf{r}_i sono le componenti del vettore $\delta\vec{r}_i$ rispetto al sistema di riferimento inerziale e $[\mathbf{r}_{iq}]$ rappresenta la matrice Jacobiana così definita:

$$[\mathbf{r}_{iq}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Sostituendo nella (55):

$$\delta W_i = \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^T [\mathbf{r}_{iq}] \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}_i^T \delta \mathbf{q} \quad (58)$$

Per il principio dei lavori virtuali (PLV), un sistema meccanico è in equilibrio se e solo se il lavoro virtuale compiuto da tutte le forze esterne che agiscono su di esso è nullo, ovvero se:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (59)$$

dove con n si è indicato il numero di corpi che costituisce il sistema e con \vec{F}_i la forza esterna agente sul generico corpo i appartenente al sistema (con i che varia da 1 ad n).

Il moto di un corpo rigido nello spazio è riconducibile a tre componenti di traslazione e a tre componenti di rotazione.

Per i moti di traslazione gli spostamenti virtuali $\delta\vec{r}_j$ sono identici per tutti i punti del corpo, quindi il lavoro delle forze esterne \vec{F}_j associato al moto di traslazione si può esprimere come:

$$\delta W_t = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \left(\sum_{j=1}^n \vec{F}_j \right) \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \quad (60)$$

Pertanto, affinché δW_t sia nullo, essendo $\delta\vec{r}_j$ del tutto arbitrario, deve risultare:

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j = 0 \quad (61)$$

dove con \vec{F} si è indicata la risultante delle forze esterne.

Per i moti di rotazione, lo spostamento $\delta\vec{r}_j$ del generico punto di applicazione della forza \vec{F}_j può essere espresso come:

$$\delta \vec{r}_j = \delta \theta \vec{u} \wedge \vec{r}_j \quad (62)$$

dove con \vec{u} si è indicato il versore dell'asse di rotazione, con $\delta \theta$ l'angolo di rotazione infinitesimo attorno a tale asse e con \vec{r}_j il vettore che individua la posizione del punto di applicazione della generica forza.

Pertanto, il lavoro virtuale associato al moto di rotazione risulta:

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \cdot \delta \theta \vec{u} \wedge \vec{r}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \delta \theta \vec{u} \cdot \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j = \delta \theta \vec{u} \cdot \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Affinché δW_r sia nullo, essendo $\delta \theta \vec{u}$ del tutto arbitrario, deve risultare:

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \wedge \vec{F}_j = 0 \quad (64)$$

dove con \vec{M} si è indicato il momento risultante delle forze esterne.

Per la prima equazione cardinale della dinamica risulta:

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (65)$$

Se definiamo il vettore delle forze di inerzia $\vec{F}_i = -m \vec{a}$, allora la (65) si può scrivere:

$$\vec{F} + \vec{F}_i = 0 \quad (66)$$

che costituisce l'espressione del *principio di D'Alembert*, che interpreta l'equazione cardinale della dinamica come condizione di equilibrio tra le forze esterne agenti sul sistema e le forze d'inerzia. Si può a questo punto pensare di trattare i problemi di dinamica come problemi di statica, una volta che si siano tenute in conto le forze di inerzia; in particolare, si può estendere al problema della dinamica il principio dei lavori virtuali, che assume la forma:

$$\delta W = \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k \quad (67)$$

dove con $\delta \vec{r}_k$ si è indicato lo spostamento virtuale reversibile.

2.2.7.2 Il principio di Hamilton

Se integriamo tale espressione del PLV tra due generici istanti t_1 e t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} [\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k] dt \quad (68)$$

Ipotizzando che le forze esterne siano conservative, il lavoro svolto da tali forze è pari alla differenza di potenziale, cioè all'opposto delle differenza di energia potenziale V :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt \quad (69)$$

Eseguendo gli integrali, si ottiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - [\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \delta \mathbf{r}_k]_{t=t_1}^{t=t_2} \quad (70)$$

dove con T si è indicata l'energia potenziale del sistema di masse ($T = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k^2$).

Se ora definiamo la funzione Lagrangiana L come differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale ($L = T - V$), la (70) diventa:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt - [\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \delta \mathbf{r}_k]_{t=t_1}^{t=t_2} = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt - [\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k \delta \mathbf{r}_k]_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned} \quad (71)$$

Se si suppone di fissare le configurazioni estreme del sistema meccanico, e cioè quelle corrispondenti agli istanti t_1 e t_2 , non sono ammessi spostamenti virtuali in queste configurazioni, ovvero $\delta \mathbf{r}_k(t_1) = 0$ e $\delta \mathbf{r}_k(t_2) = 0$, si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (72)$$

ovvero si ottiene l'espressione del principio di Hamilton. Secondo tale principio il moto di un sistema meccanico, nell'ipotesi che siano fissate le configurazioni estreme di tale sistema, procede in modo da rendere stazionario l'integrale $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$ per ogni possibile variazione di configurazione.

Se, invece, sul sistema agiscono anche forze non conservative, allora occorre mettere in conto il lavoro virtuale W_n da esse compiuto, e il principio di Hamilton si generalizza come segue:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_n dt = 0 \quad (73)$$

2.2.7.3 Le equazioni di Lagrange

Consideriamo ora il principio di D'Alembert-Lagrange per un sistema costituito da N masse puntiformi:

$$\delta W = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k^e - \mathbf{m}_k \mathbf{a}_k) \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (67)$$

Se tale sistema ha n gradi di libertà, scelto l'insieme di coordinate generalizzate $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$, si può esprimere il vettore \mathbf{r}_k in funzione di queste coordinate:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) \quad (74)$$

Pertanto gli spostamenti virtuali delle masse e le relative velocità diventano:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (75)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \quad (76)$$

Il primo termine della (67), cioè il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne, si scrive:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_k^e \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{Q}_j \delta q_j \quad (77)$$

dove si è indicata con \mathbf{Q}_j la forza generalizzata nella direzione della j -esima coordinata lagrangiana, cioè:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\delta W^e}{\delta q_j} \quad (78)$$

dove W^e è il lavoro compiuto da tutte le forze esterne per una variazione della sola coordinata q_j .

Il secondo termine, invece, diventa:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \mathbf{a}_k \delta \mathbf{r}_k &= \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \delta \mathbf{r}_k = \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j\end{aligned}\quad (79)$$

Effettuando le dovute semplificazioni e ricordando che è possibile scrivere l'energia cinetica T del sistema di masse come $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}$, l'equazione (79) diventa:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \mathbf{a}_k \delta \mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (80)$$

Pertanto, sostituendo le espressioni trovate nell'espressione del principio di D'Alembert-Lagrange, e poiché deve valere per qualsiasi spostamento virtuale δq_j , si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (81)$$

2.2.7.4 Le equazioni di Lagrange per sistemi non conservativi

In generale, le forze che agiscono sulla generica massa k -esima, possono essere distinte in forze conservative F_k^c e forze non conservative F_k^{nc} :

$$\mathbf{F}_k^e = \mathbf{F}_k^c + \mathbf{F}_k^{nc} \quad (82)$$

Per quanto riguarda le forze conservative, la loro espressione può essere ottenuta direttamente differenziando la funzione energia potenziale V ad esse associata, ovvero:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^c \delta \mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^n - \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \quad (83)$$

Il contributo delle forze non conservative, invece, viene considerato calcolando le forze generalizzate:

$$Q_j^{nc} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (91)$$

Le equazioni di Lagrange si possono riscrivere come:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (92)$$

e, poiché V non dipende da \dot{q} :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (93)$$

Le equazioni di Lagrange per sistemi non conservativi risultano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \quad (94)$$

2.2.7.5 Le equazioni di Lagrange per un sistema multibody piano

Consideriamo un sistema costituito da corpi rigidi vincolati tra loro le cui configurazioni siano descrivibili mediante le n coordinate lagrangiane $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

Partendo dal principio dei lavori virtuali e dal principio di D'Alembert, si arriva alla formulazione di Hamilton, secondo la quale le equazioni della dinamica si possono formulare imponendo la stazionarietà dell'integrale:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (72)$$

Se si confronta la trattazione di Hamilton con quella di Lagrange, si possono interpretare le equazioni di Lagrange come relazioni che rendono stazionario il suddetto integrale. Pertanto, è possibile affermare che condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} L (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (95)$$

sia reso stazionario, con le condizioni che siano nulle le variazioni delle variabile agli estremi di integrazione (cioè $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$), è che sia verificato il sistema di equazioni differenziali (81).

A questo punto occorre chiedersi cosa accade se invece il sistema meccanico è soggetto a vincoli. In questo caso le variazioni δq_j non sono più tra loro indipendenti, e per formulare le equazioni di Lagrange occorre osservare che, grazie alla formulazione di Hamilton, il problema di scrivere le equazioni del moto di un sistema meccanico soggetto a vincoli si riduce ad un problema di ottimizzazione di una funzione vincolata. In altri termini, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, è possibile definire una funzione lagrangiana estesa L^* :

$$L^* = T - V - (\lambda_1 \Psi_1, \dots, \lambda_p \Psi_p) \quad (96)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono i *moltiplicatori di Lagrange* da determinare e Ψ_1, \dots, Ψ_p sono le equazioni di vincolo.

2.2.7.6 Calcolo dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della forza peso

L'energia cinetica di un sistema multibody può essere scritta come sommatoria delle energie cinetiche di ciascun elemento:

$$T = \sum_{i=1}^{l-1} T_i \quad (97)$$

dove con $T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{q}_{3i-2}^2 + \dot{q}_{2i-1}^2) + \frac{1}{2} J_i \dot{q}_{3i}^2$ si è indicata l'energia cinetica di ciascun elemento, con m_i la massa dell' i -esimo corpo e con J_i , il momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico ortogonale al piano del moto.

Per quanto riguarda il calcolo dell'energia potenziale V della forza peso, supponendo che il piano del moto sia verticale e che l'asse Y del sistema di riferimento di base sia verticale ascendente, essa sarà pari a:

$$V = \sum_{i=1}^{l-1} m_i g q_{3i-1} \quad (98)$$

2.2.7.7 Le equazioni del moto

Il sistema di equazioni di moto si ottiene applicando le equazioni di Lagrange alla funzione L^* :

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [\psi_q]^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^e \quad (99)$$

dove con $[M]$ abbiamo indicato la matrice delle masse, con \mathbf{F}^e il vettore delle forze generalizzate, con λ i moltiplicatori di Lagrange e $[\psi_q]^T$ è la matrice Jacobiana trasposta associata al sistema di equazioni di vincolo $\psi_k = 0$ con $k = 1, 2, \dots, p$.

Nel caso di moto piano di un sistema composto da n corpi di massa m_i e momento di inerzia baricentrico J_i , la matrice di massa sarà del tipo:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{bmatrix} \quad (100)$$

con

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix} \quad (101)$$

2.2.7.8 Soluzione delle equazioni della dinamica

Applicando le equazioni di Lagrange ad un sistema multibody descritto da un set di coordinate ridondanti, si ottiene il sistema di equazioni differenziali:

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [\psi_q]^T \lambda = \mathbf{Q} \quad (102)$$

che devono essere risolte insieme alle equazioni di vincolo $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$.

Tale sistema può essere risolto in più modi; spesso per i sistemi meccanici si usa differenziare due volte le equazioni di vincolo:

$$[\Psi_q]\ddot{\mathbf{q}} = -([\Psi_q]\dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2[\Psi_{qt}]^T \dot{\mathbf{q}} - \Psi_{tt}^T = \gamma \quad (103)$$

che costituisce un sistema di equazioni che possono essere risolte simultaneamente con la (102), posto:

$$\begin{bmatrix} M & \Psi_q^T \\ \Psi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (104)$$

che noti al tempo t posizione e velocità di tutti i corpi presenta quali incognite lineari il vettore $\ddot{\mathbf{q}}$ e λ . Una volta risolto, il sistema fornisce le accelerazioni e le reazioni vincolari, dalle quali si possono ricavare posizione e velocità al tempo $t + \Delta t$, con cui si risolve nuovamente il sistema (104). È opportuno sottolineare che le condizioni iniziali $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{v}_0$ su posizione e velocità devono soddisfare le condizioni di vincolo.

2.3 Il metodo agli elementi di contorno

Il metodo agli elementi di contorno (o BEM secondo l'acronimo inglese *Boundary Element Method*) è una potente tecnica di calcolo, capace di fornire soluzioni numeriche ad una ampia serie di problemi scientifici e ingegneristici (quali i problemi di radiazione acustica, i problemi di acustica negli ambienti chiusi e l'analisi modale dei fluidi contenuti in domini chiusi), [8, 9, 10]. La caratteristica principale di questo metodo è quella di richiedere l'uso della sola griglia del confine (o *contorno*) del dominio che si vuole studiare. Pertanto, questo metodo risulta molto più semplice da usare rispetto al più tradizionale metodo agli elementi finiti (FEM).

Nell'ambito dei problemi di radiazione acustica, ad esempio, il BEM è un'importante alternativa se confrontato con i metodi più tradizionali (FEM). Infatti, se consideriamo un corpo vibrante che irradia verso l'ambiente esterno, il dominio acustico (che è rappresentato dall'aria aperta) è così grande che è possibile accettare per il modello che il dominio acustico sia di estensione infinita. Applicando il FEM a tale problema, occorre discretizzare l'intero volume del dominio acustico che è di estensione infinita, mentre ricorrendo al BEM basta considerare solo una maglia della superficie (mesh bidimensionale) del corpo vibrante, riducendo sia il tempo di realizzazione della maglia che il tempo di calcolo.

Al fine di applicare il metodo agli elementi al contorno, le equazioni alle derivate parziali (PDE) che governano il dominio devono essere riformulate come equazioni integrali delle funzioni definite sul solo contorno del dominio stesso. Rappresentando il contorno del dominio mediante un insieme di pannelli superficiali e le funzioni al contorno come funzioni parametriche su ciascun pannello, le equazioni integrali sul contorno si riconducono ad un sistema lineare di equazioni ed è possibile ottenere una soluzione numerica.

Consideriamo, ad esempio, la propagazione del suono in un volume V racchiuso da una superficie S . Il disturbo di pressione $p(x, y, z)$, nel punto x, y, z ed al tempo t , è descritto dall'equazione alle derivate parziali (*Partial Difference Equation, PDE*) nota come *equazione delle onde*:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (105)$$

dove c è la velocità del suono nel mezzo indisturbato. Una volta risolta tale equazione per il considerato volume V , è possibile ottenere il disturbo di pressione per qualsiasi punto all'interno dello stesso e in ogni istante di tempo, caratterizzando completamente il campo acustico all'interno di V . L'equazione (105) da sola tuttavia non è sufficiente a definire il campo acustico. Se consideriamo, ad esempio, una distribuzione della pressione $p_1(x, y, z, t) = 0$, ovvero con una

pressione che è sempre nulla in ogni punto (x, y, z) e in ogni istante t , si vede che l'equazione (105) è sempre soddisfatta indipendentemente dal volume V . Quindi, oltre all'equazione (105), che comunque deve essere soddisfatta in ogni punto del dominio, c'è un altro importante aspetto che bisogna considerare per descrivere correttamente il campo: *le condizioni al contorno*, ovvero cosa accade sulla superficie di confine S che racchiude il volume V . Imporre le condizioni al contorno significa definire il comportamento di ogni superficie che racchiude il volume in esame. L'equazione (105) può essere vista come una relazione che la pressione p deve soddisfare per qualsiasi punto interno al volume V , ma non dice nulla su ciò che accade sulla superficie di confine S . Consideriamo, ad esempio, un condotto semplice con un terminale (a sinistra) ricoperto con materiale fonoassorbente, e l'altro (a destra) che vibra ad una data frequenza (come un pistone oscillante), e supponiamo di voler calcolare il campo acustico all'interno del condotto (Figura 11).

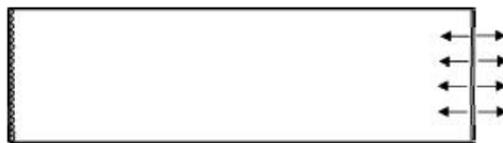


Figura 11 - Condotto lineare con pistone vibrante (terminale destro) e materiale assorbente (terminale sinistro)

Per poter risolvere le equazioni che governano il fenomeno, occorrerà definire le condizioni al contorno sulle superfici che delimitano il volume. Per quanto riguarda la superficie vibrante, poiché questa avrà una data velocità v_0 , basterà imporre al fluido una velocità pari proprio a v_0 ($v_{fluid} = v_0$). Per la superficie ricoperta di materiale fonoassorbente, caratterizzato dall'impedenza acustica $Z(f)$, basterà invece imporre al fluido una velocità pari a $v_{fluid} = p(f)/Z(f)$. Infine, per caratterizzare le superfici laterali del condotto, che sono rigide e senza moto, occorrerà imporre che la velocità del fluido sia nulla ($v_{fluid} = 0$). Pertanto, per ogni superficie che racchiude il dominio, occorre definire una specifica condizione al contorno che definisca il comportamento della superficie stessa. Questo vale sia nel caso in cui si voglia determinare il campo acustico all'interno del dominio V , sia nel caso in cui si voglia determinare il campo acustico generato esternamente alla superficie S . Supponiamo, ad esempio, di avere una sorgente sonora e di voler valutare l'attenuazione prodotta da barriera acustica sul livello di rumore percepito da un osservatore (Figura 12). In questo caso il dominio computazionale è tutto il volume V esterno alla barriera definita dalla superficie S e le condizioni al contorno su tale superficie saranno definite mediante il campo incidente prodotto dalla sorgente.

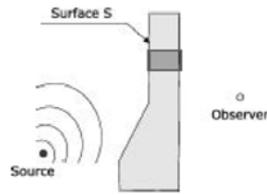


Figura 12 – Attenuazione sonora prodotta da una barriera acustica

2.3.1 La soluzione numerica

Tipicamente una soluzione analitica delle equazioni differenziali alle derivate parziali con le rispettive condizioni al contorno è ottenibile solo raramente e per casi particolarmente semplici, mentre per la maggior parte dei problemi di interesse pratico tali equazioni devono essere risolte numericamente. Esistono due famiglie di metodi numerici adatti alla risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali: i *metodi di volume* (tra cui rientra anche il metodo agli elementi finiti, *FEM*) ed i *metodi di contorno* (tra cui rientra il metodo agli elementi di contorno, *BEM*). Per comprendere le differenze tra queste due tipologie di metodi numerici consideriamo, ad esempio, la soluzione dell'equazione (105) nel volume V delimitato dalla superficie S (Figura 13).

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$p'(x, y, z, t) = ?$$

Figura 13 – Schematizzazione del problema descritto da una equazione PDE

Per risolvere numericamente un problema di questo tipo, i metodi di volume richiedono la suddivisione del volume V in un numero elevato di sottodomini di volume più piccolo detti *elementi*. Tale operazione prende il nome di *discretizzazione del dominio* e porta alla creazione della cosiddetta *mesh* del dominio (Figura 14).

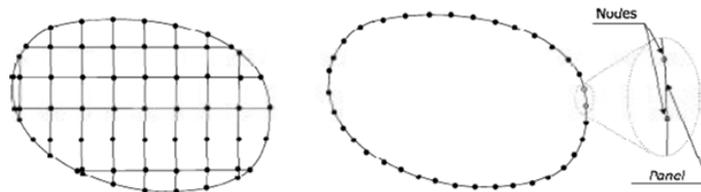


Figura 14 - Schema delle discretizzazioni usate nei metodi di contorno (a sinistra) e nel BEM (a destra). La discretizzazione è composta da punti geometrici (*nodi*) collegati da elementi di superficie (*pannelli*)

L'aspetto fondamentale della discretizzazione è che in seguito a tale operazione la pressione p , che era nota all'interno del volume V , è ora sostituita dal valore della pressione in numero discreto di punti che costituiscono i *nodi* della discretizzazione. Tali nodi sono connessi mediante un numero di elementi superficiali che vengono comunemente chiamati *pannelli*. La condizione fondamentale è che i nodi siano abbastanza vicini tra loro in modo da poter fornire un andamento della pressione che approssimi in maniera adeguata quello all'interno del volume V . Una volta discretizzato il volume, per ciascun nodo viene scritta l'equazione delle onde: in questo modo il valore della pressione p in ciascun nodo è messo in relazione con il valore della pressione dei nodi ad esso adiacenti. Si ottiene in questo modo un sistema di equazioni che, una volta risolto, fornisce l'andamento della pressione p nel dominio discretizzato.

Il metodo degli elementi di contorno si basa, invece, su di un approccio completamente diverso: a partire dal volume V , l'equazione differenziale delle onde viene scritta in *forma integrale*, per cui il valore della pressione p in ogni punto del volume V sarà calcolato mediante l'integrale della pressione p sulla superficie S che lo racchiude, [1]. Tale metodo si basa sul *teorema di Green*, secondo il quale è possibile ridurre un problema integrale definito su di un volume V ad un problema integrale definito sulla superficie bidimensionale S che lo delimita. La forma integrale dell'equazione delle onde può essere scritta come:

$$4\pi p(x, t) = \int_S Kt_1 p dS + \int_S Kt_2 \frac{\partial p}{\partial n} dS + \int_S Kt_3 \frac{\partial p}{\partial t} dS \quad (106)$$

dove le funzioni Kt_1 , Kt_2 e Kt_3 sono funzioni complesse che dipendono da diverse grandezze geometriche e cinematiche. A questo punto, il problema è stato ricondotto al calcolo della pressione p sulla superficie di contorno S . Quello che è opportuno sottolineare è che una volta nota la pressione p (e le sue derivate) sulla superficie S , è possibile ottenere il valore della pressione in ogni punto all'interno del volume V .

Tuttavia, anche per questo tipo di problemi, una soluzione analitica è possibile solo in casi molto semplici, per cui è opportuno procedere per via numerica. Così, come è stato fatto per i metodi di

volume, anche per i metodi di contorno è necessario effettuare una discretizzazione del dominio: questa volta però, anziché discretizzare l'intero dominio V , è sufficiente discretizzare la sola superficie S che lo delimita. La discretizzazione (o mesh) sarà quindi caratterizzata da un certo numero di elementi superficiali (detti *pannelli*) che collegano un certo numero di punti geometrici (detti *nodi*). Una volta discretizzata la superficie S , l'equazione (106) viene usata per ottenere un sistema di equazioni che lega la pressione p in ciascun nodo con la pressione degli altri nodi che, una volta risolto, fornisce l'andamento della pressione p sulla superficie S , e infine, all'interno del volume V .

2.3.2 L'equazione di Helmholtz

La propagazione del suono in un mezzo uniforme e stazionario, è descritta dall'equazione delle onde:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (105)$$

Tale equazione descrive l'andamento del disturbo di pressione $p(x, y, z)$, nel generico punto (x, y, z) in funzione del tempo t . Tuttavia talvolta, soprattutto per applicazioni di tipo acustico, è molto utile esprimere le grandezze che caratterizzano un fenomeno anziché mediante funzioni del tempo, come funzioni della frequenza. In questo modo è possibile separare i diversi contenuti in frequenza, in modo da poter poi focalizzare l'attenzione su un determinato campo di frequenze. In base a questo approccio, l'equazione delle onde viene trasformata da una funzione del dominio del tempo in un funzione del dominio della frequenza mediante una trasformata di Fourier. A tale scopo si osservi che un segnale sinusoidale $p(t)$ può essere scritto in notazione complessa come $p(t) = \text{Re}(\bar{p}e^{i\omega t})$, dove \bar{p} è un numero complesso, e introducendo tale espressione nell'equazione delle onde si ottiene l'espressione:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} \right) + k^2 \bar{p} = 0 \quad (107)$$

nota come *equazione di Helmholtz*, dove k è detto *numero d'onda* ed è pari a $k = 2\pi f/c$.

L'equazione di Helmholtz rappresenta l'equazione delle onde espressa nel dominio della frequenza. Per poter utilizzare tale equazione nel BEM bisognerà scriverla in forma integrale e, a questo scopo, si ricorre generalmente alla tecnica delle funzioni generalizzate basata sulla *teoria della distribuzione*. Tale teoria permette di riscrivere una generica equazione differenziale alle derivate

parziali (PDE) in forma non omogenea, il che è utile per ottenere la forma integrale. Senza entrare troppo nei dettagli matematici, essa permette di ottenere a partire dalla PDE, limitata al dominio del problema, una nuova PDE valida in tutto lo spazio, mediante l'introduzione di termini aggiuntivi (che sono detti *termini sorgente*) che costituiscono la parte non omogenea. L'equazione che si ottiene potrà essere integrata per ottenere la desiderata forma integrale necessaria al BEM. Il punto critico della procedura è la natura dei termini sorgente: se tali termini sono confinati sul contorno del dominio del problema originario (ad esempio, sulla superficie S), allora si ottiene un BEM efficiente; ciò tipicamente accade per le PDE lineari. Se, invece, i termini sorgente sono distribuiti in tutto il dominio originario (ad esempio, nel volume V), come tipicamente accade per le PDE non lineari, l'applicazione della tecnica BEM è molto più complessa e perde molti dei suoi vantaggi. Applicando la procedura appena descritta è possibile ottenere la seguente forma integrale, che mette in relazione la pressione per un qualsiasi punto all'interno del dominio V con alcuni integrali che devono essere eseguiti sulla superficie S :

$$4\pi\bar{p}(\mathbf{x}) = \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial n} \bar{p}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_S G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial \bar{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial n} dS(\mathbf{y}) \quad (108)$$

dove la funzione $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{e^{-ikr}}{r}$ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Helmholtz, ed detta *funzione di Green di spazio libero*. La funzione di Green rappresenta sostanzialmente una sorgente monopolare di intensità unitaria disposta sui punti \mathbf{y} di S , mentre la derivata normale della funzione di Green è equivalente ad una sorgente bipolare di intensità unitaria. Pertanto, è possibile affermare che la pressione nel generico punto \mathbf{x} interno al volume V si ottiene disponendo sulla superficie S una serie di sorgenti monopolari con intensità uguale alla derivata normale della pressione, ed una serie di sorgenti bipolari con intensità uguale alla pressione stessa (Figura 15).

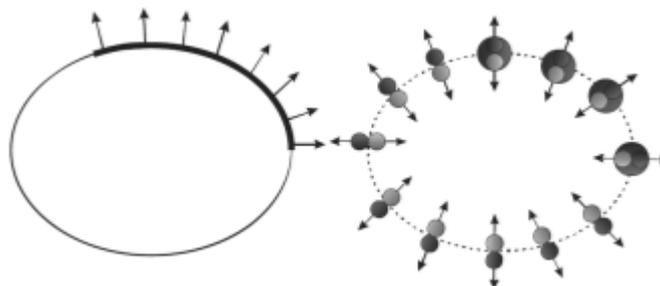


Figura 15 – Se sulla porzione della superficie è imposto un campo di velocità (a), tale superficie può essere vista come una distribuzione di sorgenti monopolari e dipolari (b).

Dopo una serie di passaggi, si ottiene:

$$4\pi\bar{p}(\mathbf{x}) = \int_S K_1(\mathbf{y}) \bar{p}dS + \int_S K_2(\mathbf{y}) \frac{\partial\bar{p}}{\partial n}dS + \int_S K_3(\mathbf{y}) \bar{p}dS \quad (109)$$

dove:

$$K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos(\theta)}{r^2} e^{-ikr}$$

$$K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$K_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos(\theta)}{r} ike^{-ikr}$$

ed indicando con \mathbf{x} il vettore delle coordinate dei punti interni al volume V , con \mathbf{y} il vettore dei punti sul contorno S , con $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la distanza tra \mathbf{x} e \mathbf{y} , e infine con θ l'angolo formato tra la normale alla superficie n e il vettore r che unisce i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} . I punti \mathbf{x} e \mathbf{y} vengono chiamati, rispettivamente, *osservatore* e *sorgente*. L'equazione (5) è la forma integrale dell'equazione di Helmholtz, e rappresenta il punto di partenza delle analisi. La Figura 16 mostra il simbolismo utilizzato nell'equazione di Helmholtz.

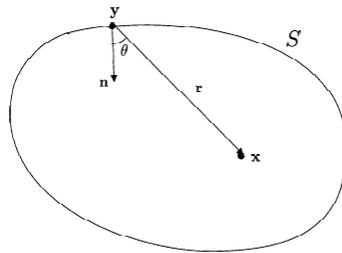


Figura 16 – Simbolismo utilizzato nell'equazione di Helmholtz

2.3.3 L'approccio collocazionale

L'equazione (109), come abbiamo visto, permette di determinare la pressione p in ogni punto interno al volume V , una volta noti \bar{p} e $\frac{\partial\bar{p}}{\partial n}$ sulla superficie S che delimita il volume. Ad un primo esame, quindi, sembrerebbe che tale equazione sia di scarsa utilità per i nostri scopi, che si prefiggono di determinare la pressione \bar{p} e la derivata $\frac{\partial\bar{p}}{\partial n}$ sulla superficie S , mentre tale equazione ha bisogno di tali dati come input per il calcolo della pressione p in ogni punto interno al volume V . Tuttavia, l'equazione (109) è valida in tutto il dominio V e quindi è possibile utilizzarla per determinare il valore della pressione in punti molto vicini alla superficie S . Se siamo abbastanza vicini alla superficie S la pressione al punto M sarà praticamente uguale alla pressione sulla superficie nel punto M_S , e quindi l'equazione integrale diventa un funzione che mette in relazione la

pressione \bar{p} in un punto della superficie S con la distribuzione di pressione \bar{p} e la derivata $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ sulla superficie S (Figura 17).

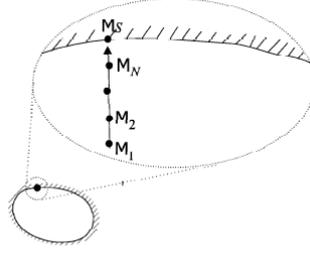


Figura 17– Ingrandimento in prossimità della superficie in corrispondenza del punto M_S mostra il processo di limite per il quale il punto M è sempre più vicino a M_S

Pertanto, se N_n è il numero di nodi della discretizzazione, scrivendo una tale relazione per ciascun nodo, si ottiene un insieme di equazioni del tipo:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1 &= f_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_1 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right) \\
 \bar{p}_2 &= f_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_2 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right) \\
 &\dots \\
 \bar{p}_{N_n} &= f_{N_n}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_{N_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right)
 \end{aligned}
 \tag{110}$$

Le funzioni f_1, f_2, \dots, f_{N_n} derivano dal calcolo degli integrali contenenti i termini K_1 e K_3 dell'equazione (109), mentre le funzioni g_1, g_2, \dots, g_{N_n} derivano dal termine K_3 . È importante sottolineare che queste funzioni sono funzioni lineari in \bar{p} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$. Pertanto, per ricavare \bar{p} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ sul contorno, è stato considerato un sistema lineare di N_n equazioni, con $2N_n$ incognite: N_n incognite relative a \bar{p} e N_n incognite relative a $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$. Per risolvere questo sistema occorre definire le condizioni al contorno, che tipicamente sono scritte sottoforma di relazioni lineari che coinvolgono \bar{p} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1 &= BC_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_1 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right) = 0 \\
 BC_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_2 \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right) &= 0 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

$$BC_{N_n}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N_n}) + g_{N_n} \left(\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial n}, \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial \bar{p}_{N_n}}{\partial n} \right) = 0$$

ottenendo, in definitiva, un sistema di $2N_n$ equazioni in $2N_n$ incognite che può essere facilmente risolto e fornire gli andamenti della pressione e della sua derivata normale sui tutti i nodi della superficie.

Ora che abbiamo una visione d'insieme dell'intero processo, è necessario *affinare* l'operazione che permette di passare da un punto interno al volume ad un punto sempre più vicino alla superficie per la valutazione degli integrali, in modo da rendere la formulazione più rigorosa. Tale operazione, infatti, è un'approssimazione che è stata introdotta per comprendere i concetti alla base dell'approccio collocazionale. Matematicamente, l'operazione con cui il punto \mathbf{x} si avvicini sempre più alla superficie lungo la normale n , non è altro che il limite dell'equazione (109). Il risultato di questo limite è la seguente equazione:

$$E\bar{p}(\mathbf{x}) = \int_S K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{p} dS + \int_S K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS + \int_S K_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{p} dS \quad (112)$$

dove $E = 4\pi$ per i punti interni al dominio V , $E = 2\pi$ per i punti sul contorno S , e $E = 0$ per i punti esterni a V .

A questo punto, è importante sottolineare il ruolo cruciale che assume la direzione delle normali alla superficie S nella definizione del dominio computazionale (ovvero del volume V). Tale dominio di calcolo, infatti, è definito proprio mediante il verso delle normali alla superficie S che racchiude il volume V : per un *problema interno* (come può essere quello del condotto visto in precedenza) le normali devono essere dirette all'interno del volume, mentre per problemi esterni (come ad esempio il caso della barriera) le normali devono puntare al di fuori della superficie stessa (Figura 18). Pertanto, nell'uso della metodologia BEM due punti pratici devono essere sempre presi in considerazione:

1. tutti gli elementi superficiali devono avere le normali orientate nella stessa direzione (verso l'interno o verso l'esterno);
2. la regione verso cui sono dirette le normali dipende dal tipo di problema che si sta considerando: per problemi interni le normali devono essere dirette internamente al dominio, mentre per problemi esterni le normali devono essere dirette verso l'esterno.

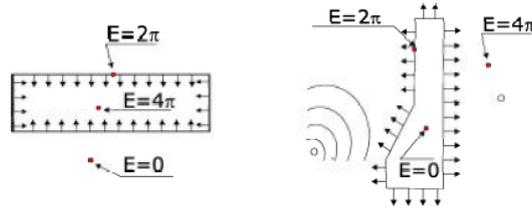


Figura 18 - Dominio della funzione E per problemi interni (caso del condotto, a sinistra) ed esterni (caso della barriera acustica, a destra)

2.3.3.1 La formulazione isoparametrica

Per risolvere il sistema (110) di N_n funzioni lineari in \bar{p} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$, dobbiamo essere in grado di valutare per ogni nodo n l'equazione (112), che può essere scritta nella forma:

$$E\bar{p}(\mathbf{x}) = \int_S (K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + K_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \bar{p} dS + \int_S K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS \quad (113)$$

Questa equazione richiede il calcolo su tutta la superficie S di alcuni integrali superficiali. Riferiamoci, per semplicità di trattazione, al problema del condotto visto precedentemente: una possibile schematizzazione del condotto sarà costituita da un certo numero n_n di nodi e da un certo numero n_p di pannelli. Tutti gli elementi superficiali (o pannelli) sono quadrangolari e collegano tra loro 4 nodi (Figura 19). Pertanto, la superficie totale S può essere vista come un insieme di n_p elementi superficiali più piccoli, e gli integrali presenti nell'equazione (113) possono essere valutati come la somma di n_p integrali, ciascuno valutato sul relativo pannello.

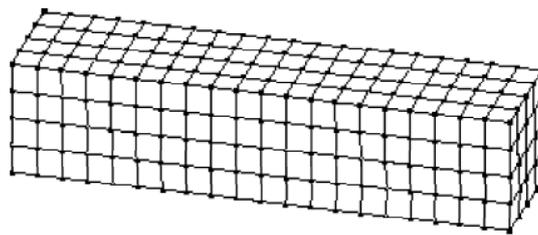


Figura 19 – Discretizzazione del condotto rettangolare

Pertanto, indicando con S_j la superficie del generico pannello in cui è stata suddivisa la superficie S :

$$E\bar{p}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_p} \left[\int_{S_j} (K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + K_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \bar{p} dS_j \right] + \sum_{j=1}^{N_p} \left[\int_{S_j} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS_j \right] \quad (114)$$

In definitiva, il calcolo dell'integrale esteso all'intera superficie S è stato sostituito dalla somma di tanti integrali quanti sono i pannelli in cui è stata discretizzata la superficie stessa.

Concentriamo ora l'attenzione sul calcolo degli integrali su un singolo pannello. Per quanto riguarda il primo integrale:

$$\int_{S_j} (K_1(\mathbf{y}) + K_3(\mathbf{y})) \bar{p} dS_j \quad (115)$$

Il primo passo per valutare questo integrale è determinare il comportamento di \bar{p} all'interno dell'elemento S_j . Un modo semplice ed efficiente per fare ciò consiste nell'esprimere il valore di \bar{p} all'interno del pannello con i valori che \bar{p} assume in corrispondenza dei nodi dello stesso pannello utilizzando le tipiche funzioni di forma adottate in letteratura. Pertanto, occorre definire un sistema di coordinate locali (ξ, η) sul pannello ed ottenere il valore di \bar{p} come una funzione di (ξ, η) :

$$\bar{p}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i N_i(\xi, \eta) \quad (116)$$

dove N_i sono alcune funzioni di forma definite sul pannello, (Figura 20).

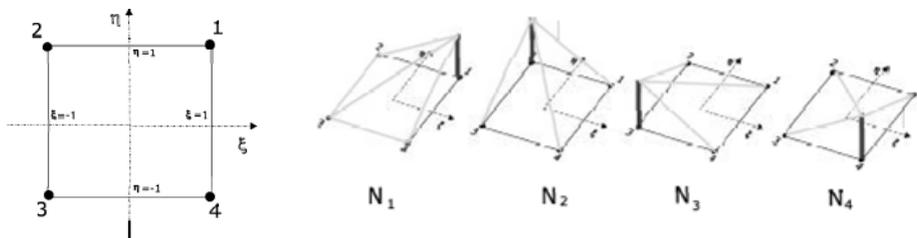


Figura 20 – Sistema di coordinate locali (a sinistra) e funzioni di forma (a destra) per un pannello quadrangolare a 4 nodi

Avendo espresso il valore di \bar{p} all'interno di un singolo pannello come funzione di (ξ, η) , il primo integrale si potrà esprimere come:

$$\iint (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) \bar{p}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (117)$$

Pertanto K_1 e K_3 dovranno essere espressi in funzione delle coordinate locali (ξ, η) . A tale scopo, occorre osservare che K_1 e K_3 dipendono da diversi parametri geometrici, come ad esempio, la distanza r tra il punto \mathbf{x} dal generico punto \mathbf{y} del pannello. Pertanto una volta espresse le coordinate

del generico punto \mathbf{y} del pannello come funzione delle coordinate locali, sarà facile descrivere in funzione di questi ultimi anche tutti i parametri geometrici (Figura 21).

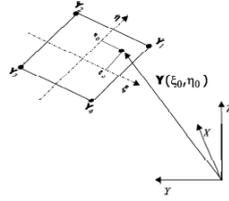


Figura 21 – Coordinate spaziali di un generico punto del pannello espresse in funzione delle coordinate locali del pannello quadrangolare a 4 nodi

Quindi, se consideriamo un pannello quadrangolare con 4 nodi e con $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ e \mathbf{Y}_4 indichiamo le coordinate dei 4 nodi nel riferimento globale, allora sarà possibile scrivere:

$$\mathbf{Y}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{Y}_i N_i(\xi, \eta) \quad (118)$$

dove le funzioni di forma N_i sono le stesse utilizzate nell'equazione (116), e dal momento che è stata utilizzata la stessa descrizione per caratterizzare sia la geometria \mathbf{Y} che l'incognita \bar{p} , l'approccio è comunemente detto *isoparametrico*. Pertanto, in funzione delle coordinate locali, avremo:

$$K_1(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{r}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n}(\xi, \eta)}{r(\xi, \eta)^2} e^{-ikr(\xi, \eta)} \quad (117a)$$

$$K_2(\xi, \eta) = -\frac{e^{-ikr(\xi, \eta)}}{r(\xi, \eta)} \quad (117b)$$

$$K_3(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{r}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{n}(\xi, \eta)}{r(\xi, \eta)} ike^{-ikr(\xi, \eta)} \quad (117c)$$

dove il vettore \mathbf{r} può essere scritto come $\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sqrt{\mathbf{V}\mathbf{V}}$, con $\mathbf{V} = \mathbf{Y} - \mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{Y}_i N_i(\xi, \eta) - \mathbf{X}$, mentre il valore scalare della distanza è semplicemente dato da $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$.

In definitiva il primo integrale avrà la forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) \bar{p}(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (118)$$

dove K_1, K_2 e K_3 dipendono solo dalle coordinate locali (ξ, η) e da quantità note, come la posizione dell'osservatore \mathbf{X} e la posizione dei nodi del pannello \mathbf{Y}_i . La funzione $J(\xi, \eta)$ è lo Jacobiano che descrive la trasformazione della superficie dS nella superficie $d\xi d\eta$ dell'elemento. Per quanto riguarda i limiti dell'integrale essi sono dovuti alla definizione delle funzioni di forma che, ad

esempio, per un pannello quadrangolare a 4 nodi, sono definite in modo tale che i 4 nodi corrispondono rispettivamente alle coordinate locali $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

La stessa procedura si può applicare anche per il secondo integrale:

$$\int_{S_j} K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} dS_j \quad (119)$$

occorrerà solo definire $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}$ in termini delle coordinate locali (ξ, η) :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \right)_i N_i(\xi, \eta) \quad (120)$$

Riassumendo con questo approccio è stato possibile ridurre degli integrali definiti su una generica superficie complessa S , ad una somma di integrali definiti ciascun dei quali definito su pannello quadrangolare definito da $\xi(-1,1)$ e $\eta(-1,1)$.

2.3.3.2 La singolarità negli integrali

Se si analizzano le espressioni precedenti, è facile osservare che quando si vuole valutare \bar{p} per un osservatore \mathbf{x} posto sulla superficie S , gli integrali presentano delle singolarità, contenendo il primo integrale il termine $\frac{\cos(\theta)}{r}$, il secondo il termine $\frac{1}{r}$. Infatti, K_1 , K_2 e K_3 presentano al denominatore la distanza $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tra l'osservatore \mathbf{x} e la sorgente \mathbf{y} , e quando l'osservatore è posto proprio sulla superficie S tale distanza è uguale a zero ($\mathbf{x} = \mathbf{y}$). Si osservi, tuttavia, che la funzione che presenta la singolarità è la funzione integranda (e cioè la funzione da integrare) e questo non implica che il risultato dell'integrazione sia anch'esso singolare. È possibile, infatti, dimostrare che tutti gli integrali sono definiti anche quando l'osservatore coincide con la sorgente ($\mathbf{x} = \mathbf{y}$). Integrali come questi, che sono integrali non singolari con funzioni integrande singolari, vengono comunemente definiti come integrali debolmente singolari.

A questo punto, è possibile operare al fine di assemblare il sistema da risolvere in forma matriciale.

2.3.4 L'assemblaggio del sistema in forma matriciale

Supponiamo di discretizzare il nostro problema con una *mesh* (griglia) composta da n_n nodi e n_p pannelli. Quindi avremo n_n incognite complesse, rappresentate dalla pressione complessa al nodo i , \bar{p}_i . Oltre al valore della pressione, occorre conoscere per ogni nodo i il valore della derivata

normale della pressione $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_i}$. Come abbiamo visto in precedenza, la relazione che lega \bar{p}_i e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_i}$ viene fornita dalle condizioni al contorno. Cominciamo con l'esaminare una condizione al contorno molto semplice, in cui è definita la componente della velocità normale alla superficie (*condizione al contorno di Neumann*), che può essere utilizzata per analizzare, ad esempio, il suono all'interno di una cavità che presenta alcune superfici vibranti ($\bar{V}_i = \bar{V}$) e con altre superfici ferme ($\bar{V}_i = 0$). In questo caso esiste una semplice relazione tra $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_i}$ e \bar{V}_i , infatti è possibile scrivere:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -i\rho\omega\bar{V} \quad (121)$$

il valore $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_i}$ può essere calcolato direttamente dalla velocità superficiale, e l'unica incognita del problema resta il valore della pressione \bar{p}_i . Per il generico nodo i , sarà possibile implementare il contributo di tutti i singoli pannelli al computo dell'equazione (110), ottenendo:

$$\begin{aligned} 2\pi\bar{p}_i = & \sum_{j=1}^{n_p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) \sum_{k=1}^{n_{nj}} (N_{jk}(\xi, \eta) \bar{p}_{jk}) d\xi d\eta \\ & + \sum_{j=1}^{n_p} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_2(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) \sum_{k=1}^{n_{nj}} \left(N_{jk}(\xi, \eta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_{jk}} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (122)$$

dove n_{nj} è il numero di nodi del pannello j -esimo, N_{jk} è la funzione di forma del nodo k -esimo del pannello j -esimo, e \bar{p}_{jk} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_{jk}}$ sono la pressione e la derivata normale della pressione del nodo k -esimo del pannello j -esimo. I valori di \bar{p}_{jk} e $\frac{\partial \bar{p}}{\partial n_{jk}}$ non dipendono dalle coordinate locali (ξ, η) poiché essi rappresentano i valori nel nodo, pertanto la somma si può portare fuori dal segno di integrale:

$$\begin{aligned} 2\pi\bar{p}_i = & \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_{nj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) \left(N_{jk}(\xi, \eta) \right) d\xi d\eta \right) \bar{p}_{jk} \\ & + \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_{nj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_2(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) \left(N_{jk}(\xi, \eta) \right) d\xi d\eta \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_{jk}} \end{aligned} \quad (123)$$

Come è possibile osservare nella relazione precedente, la pressione compare al primo membro come \bar{p}_i che rappresenta la pressione del nodo i -esimo della mesh (con i che varia tra 1 e n_n , numero di nodi della mesh); mentre al secondo membro la pressione compare come \bar{p}_{jk} che rappresenta la pressione in corrispondenza del nodo k -esimo del pannello j -esimo, con j che varia da 1 a n_p (numero di pannelli della mesh) e con k che varia da 1 al numero di nodi del pannello j -esimo (che

è pari a 4 per un pannello quadrangolare). Per scrivere l'equazione precedente in forma matriciale è preferibile avere una relazione con lo stesso tipo di indice in entrambi i membri dell'equazione. A tale scopo basta semplicemente invertire l'ordine delle sommatorie: in questo modo anziché eseguire prima la sommatoria sul pannello e poi prendere in considerazione i nodi del pannello, si esegue prima la sommatoria su tutti i nodi della rete e poi, per ogni nodo, si effettua una sommatoria considerando tutti i pannelli che condividono quel particolare nodo. Pertanto, è possibile scrivere:

$$2\pi\bar{p}_i = \sum_{j=1}^{n_n} \left[\sum_{k=1}^{n_{pj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) (N_{kj}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) \right] \bar{p}_j + \sum_{j=1}^{n_n} \left[\sum_{k=1}^{n_{pj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_2(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) (N_{kj}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right) \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_j} \quad (124)$$

In questo modo la sommatoria esterna viene eseguita su tutti gli n_n nodi della mesh, mentre la sommatoria interna viene eseguita su tutti i pannelli n_{pj} che condividono il nodo j . N_{kj} è il fattore di forma del nodo j -esimo del pannello k -esimo.

Ponendo:

$$K_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n_{pj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_1(\xi, \eta) + K_3(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) (N_{kj}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right)$$

$$K_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n_{pj}} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K_2(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) (N_{kj}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right)$$

L'equazione (123) si scriverà come:

$$2\pi\bar{p}_i = \sum_{j=1}^{n_n} K_{ij}^1 \bar{p}_j + \sum_{j=1}^{n_n} K_{ij}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_j} \quad (125)$$

Scrivendo l'equazione (125) per ogni nodo i , si ottiene un sistema del tipo:

$$2\pi\bar{p}_1 = \sum_{j=1}^{n_n} K_{1j}^1 \bar{p}_j + \sum_{j=1}^{n_n} K_{1j}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_j}$$

$$2\pi\bar{p}_2 = \sum_{j=1}^{n_n} K_{2j}^1 \bar{p}_j + \sum_{j=1}^{n_n} K_{2j}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_j}$$

....

$$2\pi\bar{p}_{n_n} = \sum_{j=1}^{n_n} K_{n_n j}^1 \bar{p}_j + \sum_{j=1}^{n_n} K_{n_n j}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial n_j} \quad (126)$$

che in forma matriciale diventa:

$$2\pi\{\bar{p}\} = [K^1]\{\bar{p}\} + [K^2]\left\{\frac{\partial\bar{p}}{\partial n}\right\} \quad (127)$$

2.3.5 Le condizioni al contorno

Esamineremo ora diverse condizioni al contorno che generalmente vengono applicate per problemi di tipo acustico, e in particolare vedremo come esse vengono impiegate nella metodologia BEM. Tutte le condizioni al contorno esprimono una relazione tra il valore della pressione \bar{p} e la sua derivata normale $\frac{\partial\bar{p}}{\partial n}$. Inoltre, molte di esse sono espresse come relazioni *locali*, in quanto la derivata normale della pressione nel punto \mathbf{x} dipende solo dalla pressione nel punto stesso.

La più semplice condizione al contorno si ha quando si è in presenza di una superficie non trattata acusticamente vibrante con una velocità nota \bar{V}_n . In questo caso un bilancio del momento sulla superficie permette di ottenere la relazione:

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial n} = -i\rho\omega\bar{V}_n \quad (128)$$

che lega la derivata normale della pressione con la componente normale della velocità strutturale \bar{V}_n . Tale condizione è detta di Neumann. Nel caso in cui la superficie è fissa questa condizione diventa semplicemente $\frac{\partial\bar{p}}{\partial n} = 0$.

La caratterizzazione diventa più complessa se la superficie vibrante è rivestita con un materiale assorbente, avente una definita impedenza acustica Z (Figura 22). Infatti, a causa dello smorzamento interno prodotto dal materiale di rivestimento, la componente normale alla superficie della velocità del fluido V_{nf} sarà diversa dalla componente normale alla superficie della velocità della struttura V_{ns} .

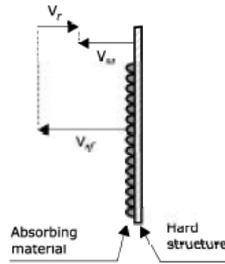


Figura 22 - Schema delle differenti componenti della velocità coinvolte nella condizione di tangenza delle superfici impedenza.

La velocità relativa V_r è data dalla differenza:

$$V_r = \bar{V}_{sn} - \bar{V}_{fn} \quad (129)$$

Dalla definizione di impedenza si ha che:

$$V_r = \frac{1}{Z} \bar{p} = Y \bar{p} \quad (130)$$

dove $Y = \frac{1}{Z}$ è detta *ammettenza acustica* e, come l'impedenza acustica, è una quantità complessa e dipende, generalmente, dalla frequenza.

Pertanto scrivendo il bilancio del momento sulla superficie come è stato fatto per la condizione di Neumann si ottiene, dopo una serie di passaggi, la relazione:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -i\rho\omega \bar{V}_{fn} = -i\rho\omega(\bar{V}_{sn} - V_r) = -i\rho\omega(\bar{V}_{sn} - Y\bar{p}) \quad (131)$$

che caratterizza la condizione al contorno in presenza di materiale assorbente, che viene solitamente indicata come *condizione di Robin*. È importante sottolineare che questa espressione è stata ottenuta imponendo due condizioni:

1. la convenzione $e^{i\omega t}$;
2. V_r è assunta positiva quando si avvicina alla superficie.

2.3.5.1 La condizione di Sommerfeld

Particolari condizioni al contorno sono quelle utilizzate per caratterizzare le superfici non riflettenti, che vengono applicate quando si vuole garantire che nessuna aliquota dell'energia posseduta dal flusso acustico che lascia il campo, passando attraverso la superficie, ritorni indietro nel campo

stesso. La *condizione di Sommerfeild* viene applicata a superfici in presenza di campi prodotti da sorgenti monopolari poste a grande distanza dalla sorgente (Figura 23).

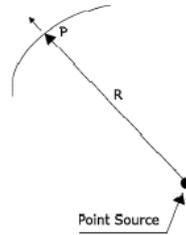


Figura 23 – Condizione al contorno di Sommerfeild

Tale condizione è probabilmente la più semplice condizione al contorno per caratterizzare superfici non riflettenti ed è espressa dalla relazione:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -ik\bar{p} \quad (132)$$

La condizione di Sommerfeild è ampiamente utilizzata nei metodi di campo per modellare la superficie esterna del dominio per problemi di radiazione esterna, ma nella metodologia BEM non c'è bisogno di modellare la superficie esterna poiché la condizione di Sommerfeild è automaticamente soddisfatta nel campo lontano dato che la soluzione si può ottenere mediante una sovrapposizione di sorgenti elementari che singolarmente soddisfano la condizione di radiazione di Sommerfeild nel campo lontano. L'utilità della condizione al contorno di Sommerfeild nel BEM è comunque dovuta al fatto che per un'onda piana, se si sostituisce la direzione radiale con la direzione di propagazione, le stesse condizioni valgono anche nel campo vicino. Pertanto si può utilizzare la relazione (132) se si vuole caratterizzare la presenza di una superficie non riflettente in una regione in cui il campo è planare. In questo caso, se sostituendo la direzione radiale con la direzione normale e cambiando il segno (la direzione normale è verso l'interno) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = ik\bar{p} \quad (133)$$

Una tipica applicazione di questa condizione al contorno si ha nei problemi di valutazione del fattore *Transmission Loss* dei silenziatori. In questo caso poiché le sezioni di ingresso e di uscita del flusso sono molto più piccole se paragonate alle dimensioni della camera di espansione, è possibile ipotizzare che il campo acustico sia piano per una vasta gamma di frequenze, ed è possibile quindi

usare caratterizzare la sezione di uscita con una condizione di Sommerfeld per imporre la desiderata condizione di superficie non riflettente.

La condizione di Sommerfeld può essere estesa ad un caso più generale. Si consideri, ad esempio, il caso di propagazione di un campo acustico all'interno di un condotto o di una marmitta in cui una sorgente genera nella sezione di ingresso. Se fissiamo la pressione e la sua derivata normale nella sezione di ingresso, possiamo essere, in alcune circostanze, troppo restrittivi. Infatti è possibile che il condotto o la marmitta possano riflettere il campo acustico (come illustrato in Figura 24), dove si ha una pressione in ingresso \bar{p}_i nota, ed una pressione riflessa \bar{p}_r sconosciuta.

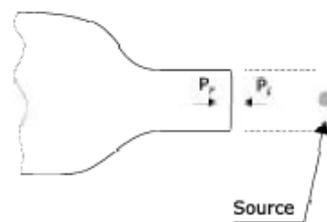


Figura 24 - Condotto o marmitta in cui viene applicato un campo noto nella sezione di ingresso, dove è possibile la presenza di un campo riflesso generato da onde che ritornano nella sezione di ingresso

In questo caso è possibile scrivere la pressione totale nella sezione di ingresso come:

$$\bar{p} = \bar{p}_i + \bar{p}_r \quad (134)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial n} + \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial n} \quad (135)$$

In altre parole, la pressione totale, e conseguentemente la sua derivata normale, viene vista come la somma di una quantità nota \bar{p}_i e una quantità riflessa \bar{p}_r . Dal momento che la quantità riflessa sta lasciando il dominio computazionale è possibile imporre su di esso una condizione al contorno per superfici non riflettenti (solo per la parte riflettente del dominio). In questo caso, poiché il campo riflesso è piano, si può applicare su \bar{p}_r la condizione Sommerfeld, che può essere scritta come:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = ik(\bar{p} - \bar{p}_i) - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial n} \quad (136)$$

2.3.6 L'interazione fluido-struttura

Nello studio dei campi acustici racchiusi da cavità strutturali risulta particolarmente vantaggioso ricorrere al *modello acustico isolato*, in cui la struttura contenitrice del fluido viene considerata di

rigidezza infinita, cosicché l'interazione fluido-struttura può considerarsi trascurabile. In molti casi di interesse pratico questa ipotesi non è adeguata, [4] Consideriamo, ad esempio, il caso di un contenitore metallico, a pareti elastiche, in cui è inserita una sorgente acustica: la sorgente posta all'interno del contenitore genera una pressione acustica che agisce sulle superfici della scatola imponendo alle superfici della stessa delle vibrazioni e queste ultime, a loro volta in virtù della loro deformabilità, generano un campo acustico all'interno della scatola influenzando quello prodotto dalla sorgente. Un problema di questo tipo deve quindi essere risolto ricorrendo ad un approccio che tenga conto dell'*accoppiamento fluido-struttura*, ovvero in cui le equazioni strutturali che regolano il comportamento della scatola e le equazioni acustiche che determinano il campo sonoro all'interno siano *accoppiate* tra loro. Matematicamente, dire che due sistemi sono accoppiati, significa dire che le equazioni che ne regolano il comportamento dinamico hanno dei termini che si scambiano informazioni e che non permettono la risoluzione dell'una senza la contemporanea risoluzione dell'altra. Il comportamento della struttura che determina le vibrazioni strutturali della stessa viene fornito attraverso i suoi parametri modali (forme modali, modi propri di vibrare, frequenze naturali, smorzamento). Tipicamente questi dati provengono da analisi strutturali eseguite mediante il FEM o da attività di tipo sperimentale. Il comportamento del campo acustico viene invece descritto dall'equazione di Helmholtz. La situazione è rappresentata nella Figura 25, dove sulla porzione della superficie di contorno di normale n (curva nera) agiscono contemporaneamente la forza \vec{F}_S dovuta alla forma modale (rappresentata dalla curva rossa e definita dal vettore complesso \bar{L}) e la pressione acustica \bar{p} .

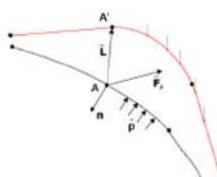


Figura 25 – Schematizzazione dell'interazione fluido-struttura su un tratto di superficie

La presenza del fluido, infatti, da un lato modifica le caratteristiche di risonanza della struttura, inducendo delle deformate modali critiche che possono in alcuni casi danneggiare la struttura stessa; dall'altro, la presenza della struttura elastica altera la propagazione del suono nel fluido creando problematiche di rumore.

L'interazione tra una struttura elastica e il fluido in cui essa è immersa è un fenomeno ritrovabile in diversi campi dell'ingegneria. Le soluzioni analitiche di questo fenomeno sono limitate a casi con

geometrie molto semplici mentre, l'uso di metodi come quello agli elementi finiti, consente di spingersi in analisi che coinvolgono geometrie più complesse.

Le frequenze proprie e i modi di vibrare di un generico sistema ad n gradi di libertà si determinano risolvendo il sistema:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (137)$$

dove $[M]$ è la matrice di massa della struttura, $[K]$ è la matrice di rigidità, $\{x\}$ è il vettore degli spostamenti e $\{\ddot{x}\}$ è il vettore delle accelerazioni.

Analogo discorso deve essere fatto considerando il volume di fluido contenuto all'interno della struttura. Per un fluido compressibile e non viscoso, l'equazione delle onde risulta essere:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (138)$$

in cui p è la pressione, t il tempo e c è la velocità del suono fornita dalla relazione:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=cost} \quad (139)$$

La risoluzione della (138) con le corrispondenti condizioni al contorno ed condizioni iniziali fornisce il valore della pressione in funzione del tempo e dello spazio. Assumendo per la pressione sonora una soluzione armonica del tipo:

$$P = p e^{i\omega t} \quad (140)$$

la (138) si riduce alla cosiddetta equazione di Helmholtz fornita da:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (141)$$

in cui $k = \omega/c$. Risolvendo la (141) è possibile ottenere le frequenze e i modi propri del fluido.

Per l'analisi del sistema accoppiato le equazioni che regolano il comportamento dinamico del fluido e della struttura devono essere risolte contemporaneamente. L'intersezione fisica tra i due sistemi avviene alla frontiera, dove vengono scambiati due sistemi di forze, una volta rimossa l'ipotesi di

rigidezza infinita della struttura. In definitiva, nella ricerca dei modi propri fluidi e strutturali si sono risolte equazioni del tipo:

$$[M_S]\{\ddot{w}\} + [K_S]\{w\} = 0 \quad (142)$$

$$[M_A]\{\ddot{p}\} + [K_A]\{p\} = 0 \quad (143)$$

in cui i pedici S e A indicano, rispettivamente, le matrici strutturali ed acustiche.

L'effetto della struttura sul fluido è espresso dalla relazione:

$$f_S = -A\rho\ddot{w}_N \quad (144)$$

in cui A è l'area di contatto tra il fluido e la struttura, ρ è la densità del fluido, \ddot{w}_N è l'accelerazione normale. L'effetto del fluido sulla struttura è invece fornito dalla relazione:

$$f_S = pA \quad (145)$$

È possibile a questo punto scrivere le equazioni del sistema accoppiato in forma matriciale, suddividendo il vettore incognito in due sotto-vettori di cui uno contiene gli spostamenti strutturali e l'altro le pressioni che costituiscono le incognite del problema. Pertanto il sistema assume la forma:

$$\begin{bmatrix} [M_S] & 0 \\ [M_{AS}] & [M_A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{w}\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_S] & [K_{SA}] \\ 0 & [K_A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (146)$$

È importante sottolineare che la per la scrittura dei termini di scambio $[M_{AS}]$ e $[K_{SA}]$ esistono varie possibilità in relazione alle varie formulazioni esistenti in letteratura riguardanti la soluzione di un problema acustico in cavità a pareti rigide e/o elastiche mediante gli elementi finiti. Tale diversità di formulazione tuttavia non comporta differenze sostanziali in termini di risultati numerici.

2.3.7 Il BEM Diretto e il BEM Indiretto

Esistono due differenti formulazioni del metodo agli elementi di contorno, il BEM Diretto (DBEM) e il BEM Indiretto (IBEM), ed in ciascuna formulazione le variabili primarie sono definite in maniera differente. Nel DBEM il problema è formulato in termini delle variabili fisiche di interesse, come la pressione acustica e la velocità acustica, e queste variabili vengono determinate

direttamente dalle equazioni integrali superficiali discretizzate. Al contrario, nell'IBEM, il problema è formulato in termini di una funzione densità di sorgente, per cui viene risolta una distribuzione di sorgenti fittizie sul contorno, ed una volta conosciute le sorgenti sul contorno, si possono determinare la pressione e la velocità acustica in un qualsiasi punto del campo sonoro. Nelle applicazioni acustiche il DBEM corrisponde all'implementazione numerica dell'equazione integrale di Helmholtz, mentre l'IBEM corrisponde all'implementazione del principio di Huygen. Nel BEM Diretto, sia per problemi interni che esterni, il contorno discretizzato deve rappresentare un volume chiuso, per cui con tale approccio non possono essere risolti problemi in cui una sorgente interna irradia attraverso un contorno parzialmente chiuso, poiché non si può definire un volume chiuso interno o esterno alla superficie.

Consideriamo il problema della determinazione del campo sonoro al di fuori di un dato corpo, come nel caso rappresentato in Figura 26:

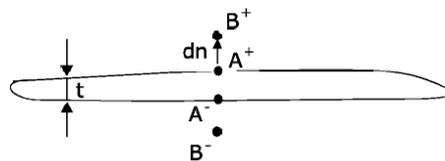


Figura 26– Campo sonoro emesso da un corpo sottile

Le pressioni sui due lati opposti ai punti A^+ e A^- saranno generalmente differenti. Il problema è capire cosa accade, nel BEM, quando la dimensione t , ovvero lo spessore del corpo, tende a zero. L'equazione integrale di Helmholtz sarà ancora valida poiché per la sua derivazione non sono state fatte ipotesi incompatibili con questa situazione, e anche se lo spessore fosse esattamente zero (cioè se il corpo fosse costituito da due superfici identiche con normali opposte), la formulazione sarebbe ancora valida. Ciò non significa che l'approccio classico collocazionale esposto precedentemente possa essere applicato: bisognerebbe, infatti, valutare i termini integrali, ed in particolare i differenziali di G e di p lungo la normale alla superficie nei punti A^+ e A^- . Però, poiché questi due punti sono geometricamente coincidenti e dotati della medesima normale, si otterrebbero termini identici, per cui non vi è possibilità che il modello contempli due pressioni differenti nei punti A^+ e A^- (cosa che accade comunemente nella vibrazione delle membrane). La formulazione in esame è, quindi, inefficace con questa classe di problemi. Ciò limita, di fatto, la possibilità di applicazione del BEM Diretto esclusivamente ai problemi di radiazione acustica in domini interni o esterni ad una superficie di contorno chiusa.

L'idea presente nel BEM Indiretto, al fine di superare i limiti della formulazione diretta, è quella di riprodurre numericamente il principio di Huygen, secondo il quale ogni punto di un fronte d'onda può essere pensato come una sorgente puntiforme di onde con stessa fase, frequenza, e ampiezza. Attraverso questo metodo si definiscono, come variabili primarie, non più pressione e velocità sulla superficie, ma la differenza tra la pressione interna ed esterna alla superficie di contorno e la differenza tra il gradiente normale di pressione sulla stessa superficie. Poiché queste nuove variabili primarie non hanno alcun significato fisico immediato, si parla di *formulazione indiretta* in opposizione a quanto avviene in nella formulazione diretta, in cui vengono utilizzate le variabili pressione e velocità superficiale. Anche nella formulazione indiretta, l'equazione risolutiva, viene discretizzata in un sistema di equazioni, e in questo modo il salto di pressione e il salto del gradiente di pressione vengono ricavati in ogni punto della superficie, il che consente di ottenere la pressione in tutto il campo.

Riferimenti

- [1] F. Cesari, Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti, Pitagora Editrice Bologna, 1982
- [2] G. Belingardi, Il Metodo degli Elementi Finiti nella Progettazione Meccanica, Levrotto & Bella, Torino, 1995
- [3] C. A. Felippa, Introduction to Finite Element Methods, Lectures Notes for the course Introduction to Finite Element Methods, 2001
- [4] K. H. Huebner, E. A. Thornton, The Finite Element Method for Engineers, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., 1982
- [4] A. A. Shabana, Dynamics of Multibody Systems, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2005
- [5] J. C. Garcia Orden, J. M. Goicolea, J. Cuadrado, Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications, Springer, 2007
- [6] Malvezzi, Rindi, Appunti del Corso di Modellazione e Simulazione Dinamica dei Sistemi Multibody, Appunti del corso 2008
- [7] J. G. de Jalón, E. Bayo, Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, Springer-Verlag
- [8] P. Hunter, A. Pullan, FEM/BEM NOTES, 2003
- [9] S. Kirkup, The Boundary Element Method in Acoustics, ISBN 0 953 4031 06
- [10] An Introduction to Boundary Elements Methods for Acoustics, VNoise Theoretical Manual, Release 1.3, 2003

Capitolo 3

Tecniche per la sperimentazione del comportamento vibro-acustico di un sistema

Le tecniche per la sperimentazione vibro-acustica possono riguardare la caratterizzazione del campo acustico generato da un sistema nell'ambiente circostante (come ad esempio la valutazione della potenza sonora irradiata da motori a combustione interna, macchinari, sistemi di aspirazione o scarico, ecc.), l'individuazione e la quantificazione delle vie di propagazione dalla sorgente verso le superfici emittenti, la classificazione dei contributi delle superfici emittenti sul rumore globale, la caratterizzazione di un sistema in termini di vibrazioni, ed in particolare la caratterizzazione dinamica di un sistema in termini di frequenze e modi propri di vibrare, ed altro ancora. E, in alcuni casi, gli aspetti elencati possono non essere completamente distinti.

Le tecniche sviluppate recentemente, si possono suddividere in:

- tecniche relative alla caratterizzazione acustica della sorgente;
- tecniche sviluppate per quantificare le vie di propagazione strutturali;
- tecniche orientate alla classificazione dei contributi dei pannelli al rumore globale;
- tecniche di rilievo vibrazionale.

Per quanto riguarda la caratterizzazione della sorgente da un punto di vista acustico, quando si tratta di sorgenti estremamente complesse di rumore che si trasmette per via aerea (come possono essere, ad esempio, i motori o le autovetture), il primo passo consiste nel classificare le sotto-sorgenti in

termini di importanza acustica. Il metodo classico consiste nel mascherare una ad una le sottosorgenti e misurare l'effetto di questo mascheramento sulla emissione totale della sorgente. Questo metodo, sebbene sia sicuro, è tuttavia estremamente lento e costoso. Esistono tuttavia altri due metodi alternativi diretti che permettono di investigare il campo acustico generato da una sorgente complessa e di visualizzarlo attraverso mappe di pressione o vettori di intensità (potenza per unità di superficie), e sono l'intensimetria e l'olografia acustica.

Tra le tecniche sviluppate, invece, per lo studio dei percorsi seguiti dall'energia vibrazionale nei punti di collegamento tra sorgente e punto di misura, la *Transfer Path Analysis* (TPA) rappresenta una metodologia ormai consolidata per la determinazione delle forze scambiate all'interfaccia fra i diversi sottosistemi che costituiscono il sistema in esame.

La valutazione del contributo dei singoli pannelli di una superficie estesa (come può essere quella dell'abitacolo di un veicolo) è estremamente importante per individuare le zone prioritarie su cui intervenire. A questo scopo è stata sviluppata la tecnica *Airborne Source Quantification* (ASQ).

Per quanto riguarda la caratterizzazione di un sistema da un punto di vista vibrazionale è possibile determinare il livello di vibrazione di un sistema soggetto a sollecitazioni, o misurare le forzanti che applicate ad un sistema in grado di vibrare lo pongono in vibrazione, oppure identificare la funzione di risposta in frequenza di un corpo o un sistema di corpi soggetti ad un'eccitazione nota e di stimarne le frequenze proprie e i modi propri di vibrare. Pertanto se, ad esempio, si vuole vedere se un dato sistema meccanico rispetta le norme di sicurezza, se ne rileva il livello di vibrazione; se si vuole dimensionare una o più parti di un sistema, si esegue la misura delle azioni eccitatrici che nascono nel sistema stesso; se, invece, si vuole trovare un adeguato modello matematico che descriva il comportamento di un sistema meccanico vibrante, si effettua la misura della risposta del sistema ad una eccitazione nota (Analisi modale sperimentale).

3.1 Misure di rumore

Il rumore può essere misurato in modi diversi, in funzione del tipo di informazione che si desidera ottenere, [1]. Esistono, infatti, diversi approcci per la stima del rumore emesso da un sistema, per la misura della potenza sonora, per indagini mirate alla risoluzione di un problema oppure al miglioramento di un dato prodotto. Inoltre, è necessario verificare se, per la misura che ci si appresta ad effettuare, esistono norme tecniche che, oltre a definire il modo di procedere, prescrivono anche i requisiti per la strumentazione da utilizzare, per il posizionamento degli strumenti di misura, per la durata temporale della misura da effettuare, ecc. Pertanto, è indispensabile, a monte di ogni misurazione, fare alcune considerazioni preventive, al fine di

effettuare misurazioni significative e che forniscano tutte le informazioni cercate, senza dover necessariamente ricorrere ad indagini complesse e onerose.

3.1.1 Il microfono

Il primo elemento di un sistema di misura acustica è il microfono. Esso è un trasduttore di tipo elettro-meccanico in grado di convertire le variazioni di pressione sonora in un segnale elettrico da inviare a un sistema di acquisizione. Generalmente, un microfono è costituito da una parte meccanica (detta membrana), che viene posta in movimento dalle variazioni di pressione caratteristiche di una perturbazione acustica, e da un sistema che trasforma tale movimento in variazioni di una determinata grandezza elettrica.

Sappiamo, infatti, che un'onda sonora consiste in un'alternanza di rarefazioni e compressioni nel mezzo, in sostanza nella comparsa nel mezzo stesso di una variazione oscillatoria della pressione. Affinché tale segnale possa essere interpretato ed elaborato deve essere convertito in un segnale di tipo elettrico. Proprio a questo serve il microfono: idealmente esso dovrebbe trasformare l'energia acustica in energia elettrica con un comportamento estremamente lineare e con una ampia dinamica di pressione, per riuscire a rilevare correttamente qualunque evento sonoro di interesse. L'uscita del microfono è una tensione di valore modesto (dell'ordine dei millivolt). In teoria il microfono dovrebbe generare un segnale elettrico riprodotto esattamente il segnale di pressione e dovrebbe essere completamente insensibile alle variazioni ambientali in termini di temperatura, pressione atmosferica e umidità. In più il microfono non dovrebbe introdurre dei disturbi nel campo sonoro nel quale si colloca e dovrebbe mantenere una sensibilità costante nel tempo. Risulta evidente che tali condizioni non possono essere verificate nella pratica se non in maniera approssimata. Tuttavia i microfoni in commercio hanno un comportamento soddisfacente per le varie applicazioni.

Le caratteristiche principali di un microfono sono: la sensibilità o sensitività, la risposta in frequenza e la direzionalità. Queste caratteristiche sono sempre riportate nella carta di calibrazione del microfono e ne determinano il grado di qualità.

In generale per sensibilità di un dispositivo capace di reagire a una data azione, s'intende quel valore minimo dell'azione che riesce a produrre la minima reazione apprezzabile. Nel caso di un microfono, l'azione è la pressione sonora espressa in Pascal e la reazione è una tensione elettrica espressa in Volts (o milliVolts); pertanto la sensibilità è definita come rapporto tra la tensione di uscita e la pressione acustica del campo sonoro e determina il minimo livello di pressione sonora misurabile e viene espressa in mV/Pa. In definitiva, quanto più grande è la sensibilità, tanto più piccolo è il valore minimo di pressione che il microfono riesce a percepire sottoforma di tensione elettrica.

La risposta in frequenza, invece, rappresenta il modo di variare della sensibilità in funzione della frequenza dell'onda sonora. Supponiamo di avere in ingresso al microfono una pressione acustica la cui frequenza può variare con continuità da 1 Hz a 20.000 Hz, mantenendo costante il livello di pressione. Eseguendo una misura è possibile riscontrare alle varie frequenze una certa variabilità della proporzione (definita dalla sensibilità) fra il segnale elettrico che si ottiene in uscita dal microfono e il corrispondente segnale sonoro in ingresso. Pertanto la risposta in frequenza di un microfono è definita come la gamma di frequenza in cui la conversione del segnale acustico in segnale elettrico avviene senza che i rapporti di ampiezza pressione/tensione vengano alterati.

La direzionalità, infine, rappresenta il modo di variare della sensibilità con la direzione di arrivo del suono. Un microfono ideale, posto in un determinato punto del campo acustico, deve rilevare senza alcuna attenuazione rispetto alla propria sensibilità le variazioni di pressione qualunque sia la direzione di propagazione del suono.

Il microfono ideale dovrebbe pertanto avere un'elevata sensibilità, una risposta in ampiezza lineare, una risposta in frequenza uniforme nel più grande campo di frequenze ed, infine, dovrebbe essere insensibilità alle condizioni esterne di temperatura, umidità, etc.

Esistono diversi tipi di microfoni ciascuno dei quali sfrutta principi di funzionamento diversi. I microfoni più utilizzati per le misure di precisione sono di due tipi: microfoni di tipo capacitivo e microfoni di tipo piezoelettrici.

I microfoni di tipo capacitivo forniscono prestazioni più elevate; presentano infatti sensibilità elevata (superiore rispetto ad ogni altro tipo di microfono), bassa sensibilità alle variazioni di temperatura e ampia risposta in frequenza. Per contro, però, tali microfoni sono molto sensibili all'umidità, la quale può portare a distorsione notevole del segnale elettrico che si concretizza nella comparsa di rumore di fondo e può portare addirittura alla rottura del dispositivo.

I microfoni di tipo capacitivo sono quelli che vengono maggiormente utilizzati nelle misure di precisione. Essi sfruttano il principio fisico su cui si basa il condensatore: la variazione di pressione sonora agente sulla membrana mette in movimento la stessa membrana generando una variazione di capacità del condensatore. Tale variazione di capacità provoca, in uscita sul terminale del condensatore, una variazione di tensione proporzionale alla variazione di pressione che ha messo in moto la membrana.

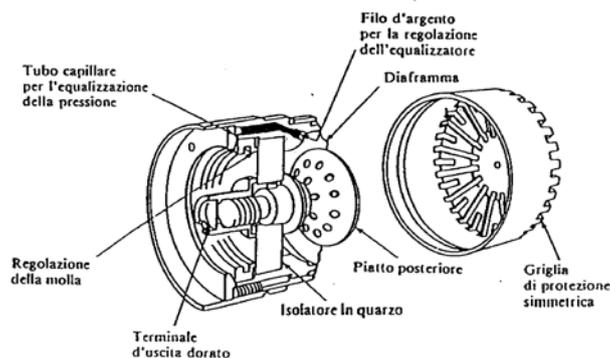


Figura 1 – Microfono a condensatore

Un microfono a condensatore (Figura 1) risulta costituito da un sottile diaframma (di titanio nei modelli più vecchi, di materiale plastico nei microfoni attuali), che risulta esposto al campo acustico e che è chiuso da un contropiatto rigido di metallo perforato, avente una posizione fissa. Tale contropiatto è incastrato su un dischetto dielettrico forato tramite un polo centrale. Il segnale di tensione in uscita viene rilasciato su un terminale placcato d'oro che è fissato al contropiatto ed isolato dalla capsula esterna del microfono grazie ad un opportuno isolatore. La cavità interna della capsula è esposta alla pressione atmosferica mediante un piccolo foro (foro di equalizzazione) ed il diaframma rimane protetto da una griglia metallica opportuna. La griglia ha la semplice funzione di proteggere meccanicamente la costosa e delicata capsula del microfono e ridurre i disturbi provocati dal vento. Per quest'ultimo scopo, inoltre, esistono opportuni involucri che si inseriscono nell'estremità superiore dello stesso. Il diaframma e il contropiatto costituiscono le lamine parallele di un condensatore ad aria polarizzato grazie ad una carica posta sul contropiatto. La vibrazione del diaframma, dovuta ad un opportuno campo acustico, fa a variare istante per istante la distanza tra le piastre variando così la capacità del condensatore, e determinando la comparsa di una differenza di potenziale in uscita. Si osserva che è necessario uno specifico condensatore di disaccoppiamento fra i due poli, per fare in modo che il microfono risponda alla sola componente alternata del segnale.

In base al tipo di risposta i microfoni possono essere divisi in tre gruppi:

1. microfoni a risposta in campo libero (free-field);
2. microfoni a risposta in pressione (pressure);
3. microfoni a risposta ad incidenza casuale (random).

I microfoni a risposta in campo libero sono usati per misurare un suono proveniente principalmente da una direzione e sono pertanto adatti nel caso di sorgenti sonore in campo libero. Il microfono deve essere posizionato direttamente verso la sorgente con un angolo di incidenza nullo rispetto alla direzione di emissione della stessa. La curva di risposta in frequenza di questi microfoni è progettata per compensare la pressione esistente sul diaframma, causata dagli effetti di rifrazione e interferenza, pertanto i livelli di pressione sonora misurati sono uguali a quelli che esisterebbero in

un campo sonoro, se il microfono non fosse presente. I microfoni con risposta in pressione sono costruiti in modo da non compensare questo fenomeno e vengono usati per misurare i livelli di pressione sonora incidente su una superficie (se il microfono è montato a filo della parete) o in una cavità chiusa (dove il microfono è parte di una parete della cavità). Tali microfoni, se sono orientati con il giusto angolo rispetto alla direzione di propagazione sonora, possono essere usati come microfoni in campo libero, ma questo comporta una restrizione della loro gamma di frequenza effettiva. I microfoni con risposta random, invece, sono progettati per misurare uniformemente un suono che arrivi simultaneamente da tutte le direzioni ed hanno una curva di risposta in frequenza piatta. Tali microfoni possono essere utilizzati nelle camere riverberanti e in tutte le situazioni dove il campo sonoro è diffuso.

Un cenno particolare va fatto ai microfoni accoppiati in fase, utilizzati diffusamente in intensimetria, [2]. Una grandezza di estremo rilievo nella metrologia acustica è infatti l'intensità sonora, che abbiamo visto essere una grandezza vettoriale. Perciò la sua misura è particolarmente problematica, poiché è necessario anche tener conto della sua direzione: si dovrebbero utilizzare sofisticati strumenti di misura, muniti di trasduttori di velocità particolarmente complessi. Una tecnica di misura particolarmente diffusa è quella indiretta, che fa uso di due microfoni a pressione accoppiati in fase, aventi simile sensibilità e simile risposta in frequenza. Essi vengono posti ad una ben precisa distanza, che viene mantenuta costante in tutta la misura, in modo che lo stesso fronte d'onda pervenga ad essi sempre con il medesimo sfasamento. Quando un'onda sonora, che approssimeremo piana e progressiva, passa lungo la congiungente i due microfoni, questi ultimi rilevano due segnali di pressione diversi p_1 e p_2 sfasati tra di loro. La relazione di Eulero permette di ottenere la velocità delle particelle nota la pressione:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -grad(p) \Rightarrow u = - \int_{-\infty}^t \frac{grad(p)}{\rho} dt \quad (1)$$

Uno strumento digitale riesce rapidamente ad eseguire l'integrale nel tempo (grazie ad un dispositivo dedicato) ma è più difficile valutare il gradiente di pressione. Per evitare questo grosso inconveniente si approssima il gradiente di pressione con il rapporto tra la differenza delle pressioni rilevate dai due microfoni e la distanza che li separa:

$$grad(p) \cong \frac{p_2 - p_1}{d} \quad (2)$$

ma è bene ricordare che questa approssimazione vale solamente per lunghezze d'onda molto maggiori della distanza tra i due microfoni (ovvero per frequenze sufficientemente basse), in modo che l'errore commesso sia trascurabile. Al fine di non misurare un gradiente di pressione errato, i microfoni devono essere perfettamente accoppiati in fase.

3.1.2 Il fonometro

Il fonometro è lo strumento utilizzato per la misura del livello della pressione sonora, ed è di fondamentale importanza nella metrologia acustica (Figura 2). Le caratteristiche minime che un fonometro deve possedere sono specificate in una opportuna normativa (IEC 651/1979), che fissa, inoltre, la classe di appartenenza dello strumento, a seconda della precisione delle sue misure. In funzione della precisione, le Norme Internazionali hanno fissato tre diverse classi: Classe 1 per gli strumenti di precisione, Classe 2 per gli strumenti di uso industriale e Classe 3 per gli strumenti di sorveglianza.



Figura 2 - Fonometro

Il fonometro è uno strumento adatto alla misurazione istantanea del rumore (*Sound Pressure Level*, SPL), che indica il valore di tutta l'energia acustica espressa in forma logaritmica e la cui unità di misura è il decibel (dB).

Essenzialmente un fonometro è costituito da: microfono, preamplificatore, filtri, amplificatore, rettificatore RMS, compressore logaritmico ed indicatore digitale (o analogico). In genere l'apparecchio possiede un filtro per la risposta ponderata A al fine di compensare la risposta dell'orecchio umano e rendere quindi la misura compatibile con il "rumore ascoltato" da un individuo.

Un qualsiasi fonometro è in grado di misurare il livello (in dB) del valore quadratico medio della pressione acustica p_{rms} . Quest'ultimo, valutato nell'intervallo di tempo T, è definito come:

$$p_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int^T p^2(t) dt} \quad (3)$$

da cui si ottiene il rispettivo livello come:

$$L_p = 10 \log \frac{p_{rms}^2}{p_0^2} \quad (4)$$

dove p_0 è la pressione di riferimento, pari a $20 \mu Pa$.

Esistono due diversi tipi di fonometro: istantaneo o integratore. I fonometri più semplici sono quelli istantanei e danno la misura del livello istantaneo del rumore. I fonometri integratori, invece, oltre a fornire il valore istantaneo del rumore (SPL), sono in grado di calcolarne il suo valore integrato (L_{eq} , *Level equivalent quantity*), ovvero il livello medio del rumore durante un determinato periodo di tempo:

$$L_{eq} = 10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_{i,rms}^2}{p_0^2} \right) \quad (5)$$

Questo parametro ci consente di caratterizzare l'entità di rumori (anche notevolmente fluttuanti) con un unico indice numerico, in modo tale da poterli classificare in modo significativo ai fini della valutazione dei loro effetti indesiderati. Ad esempio, durante una misura della durata di 10 minuti, l'intensità sonora può variare notevolmente di livello per cui, al termine dei 10 minuti, quello che realmente interessa conoscere, al fine di valutare se un determinato rumore è fastidioso o meno, è il suo valore medio integrato espresso in dBA.

In generale, il livello equivalente continuo può intendersi come il livello di un rumore continuo stazionario che, in un dato punto di osservazione, erogherebbe una quantità di energia sonora pari a quella effettivamente erogata dal rumore fluttuante nello stesso intervallo di tempo, come del resto si evince dalla stessa definizione. Si tratta, quindi, di una media energetica: da qui tutte le considerazioni sulle dipendenze temporali del parametro. Ad esempio se un rumore che dura per 10 secondi ha un L_{eq} di 60 dB, se si considera nell'integrale un intervallo di tempo che include quei 10 secondi e altri 10 secondi di silenzio assoluto, si assiste ad un decremento del livello equivalente di soli 3 dB (poiché si dimezza il contenuto energetico medio per secondo).

Il fonometro è inoltre in grado di misurare il livello (sempre in dB) del valore di picco della pressione acustica p_{picco} , ovvero la massima deviazione del segnale rispetto al valore non

perturbato. Noti p_{rms} e p_{picco} si ottengono poi due grandezze di notevole contenuto informativo sulla forma d'onda del segnale: si tratta del fattore di cresta F_c e del fattore di forma F_f :

$$F_c = \frac{p_{picco}}{p_{rms}} \quad (6)$$

e

$$F_f = \frac{p_{rms}}{p_{media}} \quad (7)$$

dove p_{media} è la pressione media.

È interessante valutare il *fattore di cresta*, che permette di dedurre l'effettiva capacità dello strumento di fornire dei valori attendibili nel caso di segnali a rapida variazione. Tanto più alto risulta il fattore di cresta dello strumento tanto maggiore è la sua qualità: da un punto di vista pratico, si assume come buono un fattore di cresta uguale a 4.

Si definisce poi il livello di esposizione sonora (SEL o livello del singolo evento) come:

$$SEL = 10 \log \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{p_{rms}(t)}{p_0} \right)^2 dt \right] \quad (8)$$

ove T_0 è il tempo di riferimento pari ad un secondo e, in modo del tutto analogo al livello equivalente, compare sotto integrale il quadrato del rapporto tra pressione efficace e pressione di riferimento. È bene osservare che benché l'integrale nel *SEL* si estende all'infinito si valuta in pratica il contenuto energetico del segnale su tutto l'intervallo di tempo in cui esso presenta un valore significativo. In pratica un segnale, espresso in dB, ha un livello significativo fino a quando il suo valore efficace non è più di 10 dB al di sotto del livello massimo. Come risulta evidente dalla definizione, con il *SEL* il contenuto di energia globale del segnale viene raggruppato in un intervallo di tempo di un secondo. Per questo motivo questa grandezza risulta particolarmente indicata per descrivere il contenuto energetico di un singolo evento, oppure per confrontare tra loro i contenuti di energia di segnali che hanno durate anche molto diverse l'uno dall'altro: si integra da quando ancora il rumore non è percepibile a quando è terminato, ed il risultato è rapportato allo stesso intervallo di tempo. Il legame tra L_{eq} e *SEL*, riferiti ad un generico periodo T di misura, è:

$$L_{eq(T)} = SEL_{(T)} - 10 \log \frac{T}{T_0} \quad (9)$$

dove T_0 rappresenta, ancora una volta, il periodo di riferimento del *SEL*, pari ad un secondo.

Esistono fonometri ancora più complessi che elaborano la misura del livello istantaneo del rumore per effettuare analisi del rumore alle varie frequenze (analizzatori in bande di ottava e 1/3 ottava) e sono noti come fonometri per analisi in frequenza. Tali apparecchi, oltre a fornire il valore istantaneo del rumore, permettono di selezionare le frequenze che compongono il rumore e di indicare per ogni frequenza il valore in dB. Normalmente gli strumenti sono adatti alla misura di una sola frequenza per volta, e quindi se un rumore è di breve durata non sempre è possibile una analisi di tutte le frequenze, perché il tempo richiesto per l'operazione supera la durata del fenomeno. In tal caso è necessario l'impiego di strumenti per l'analisi in frequenza in tempo reale, ossia strumenti che nello stesso istante misurano il rumore, lo scompongono nelle varie frequenze e ne memorizzano i valori. La memorizzazione si rende necessaria in quanto la velocità a cui deve essere eseguita l'operazione non permetterebbe l'indicazione dei singoli valori. La lettura dei dati memorizzati avviene in un secondo tempo, direttamente o tramite elaborazione. Solo in casi particolari si rendono necessari filtri con frequenze in 1/3 di ottava.

3.1.3 La normativa per la stima del rumore

La normativa di riferimento per la determinazione dei livelli di potenza sonora delle sorgenti di rumore quali macchine, apparecchiature e loro sottogruppi è la UNI EN ISO 3746. Tale normativa specifica un metodo per misurare i livelli di pressione sonora su una superficie di misurazione che racchiude la sorgente in modo da calcolare il livello di potenza sonora emesso dalla sorgente di rumore.

La normativa stabilisce i requisiti relativi all'ambiente di prova e alla strumentazione, nonché le tecniche per ottenere il livello di pressione sonora superficiale dal quale viene calcolato il livello di potenza sonora della sorgente.

Il metodo specificato nella norma è applicabile alla misurazione dei diversi tipi di rumore (stazionario, non stazionario, quasi stazionario, impulsivo), e a sorgenti di rumore di qualsiasi tipo e dimensione (dispositivi, macchine, componenti, sottogruppi, ecc.).

L'ambiente di prova adatto per la misurazione può essere al chiuso o all'aperto, in presenza di uno o più piani riflettenti purché sia adeguatamente isolato dal rumore di fondo.

Il modo nel quale la sorgente sottoposta a prova viene installata e fatta funzionare può avere effetti significativi sulla potenza sonora emessa dalla stessa, la norma specifica delle condizioni di installazione e funzionamento della sorgente tali da ridurre al minimo i loro effetti sulla misurazione. Se esiste una condizione tipica di montaggio dell'apparecchiatura di cui si sta misurando la potenza sonora, tale condizione deve essere, se possibile, riprodotta o simulata. Se,

invece, non esiste una condizione tipica di montaggio o questa non può essere utilizzata per effettuare la prova, si deve fare attenzione al fine di evitare variazioni dell'emissione sonora della sorgente dovute al sistema di montaggio adottato per eseguire la misurazione. Si devono quindi prendere tutte le precauzioni necessarie a ridurre ogni emissione sonora proveniente dalla struttura su cui l'apparecchiatura sottoposta a prova può essere montata.

Inoltre, durante le misurazioni, si deve assicurare che eventuali canalizzazioni elettriche, tubature o canali dell'aria connessi alla sorgente sottoposta a prova non irradiano quantità rilevanti di energia sonora nell'ambiente di prova. Se possibile, ogni apparecchiatura ausiliaria necessaria al funzionamento della sorgente in esame ma che non fa parte della stessa, deve essere posta al di fuori dell'ambiente di prova o da esso isolata. Qualora ciò sia impossibile, occorre tener conto della presenza delle apparecchiature ausiliare che vanno incluse nella superficie di riferimento.

Durante le misurazioni l'apparecchiatura deve essere fatta funzionare, se possibile, come durante il normale utilizzo, secondo una o più delle seguenti condizioni di funzionamento:

- dispositivo con carico e condizioni di funzionamento specificate;
- dispositivo a pieno carico;
- dispositivo senza carico;
- dispositivo in condizioni di funzionamento tali da generare il massimo rumore possibile nell'utilizzo normale;
- dispositivo con carico simulato funzionante in condizioni accuratamente definite;
- dispositivo in condizioni di funzionamento con cicli di lavoro caratteristici.

Il livello di potenza sonora della sorgente può essere determinato qualunque sia l'insieme di condizioni di funzionamento desiderato (cioè carico, velocità del dispositivo, temperatura, ecc.). Tali condizioni di prova devono essere scelte a priori e devono essere mantenute costanti durante la prova.

Per facilitare il posizionamento delle posizioni microfoniche sulla superficie di misurazione, deve essere definita una superficie di riferimento fittizia. Quando si definiscono le dimensioni di tale superficie di riferimento, possono essere trascurati gli elementi che sporgono dalla sorgente e che non emettono quantità significative di energia sonora. Le posizioni microfoniche si trovano sulla superficie di misurazione, ovvero su una superficie fittizia che racchiude sia la sorgente che la superficie di riferimento ed è delimitata da uno o più piani riflettenti.

La superficie di misurazione può essere o una superficie emisferica (o parzialmente emisferica) di raggio r , oppure un parallelepipedo rettangolare con i lati paralleli a quelli della superficie di riferimento. In questo caso la distanza di misurazione d è pari alla distanza tra la superficie di misurazione e la superficie di riferimento.

In genere, nel caso di sorgenti poste in camere o spazi con condizioni acustiche sfavorevoli (per la presenza, ad esempio, di molti oggetti riflettenti e elevati livelli di rumore di fondo) è preferibile scegliere una distanza di misurazione ridotta che implica la scelta di una superficie di misurazione a forma di parallelepipedo. La distanza di misurazione d , è la distanza (in verticale) tra la superficie di riferimento e la superficie di misurazione. Il valore di d è preferibilmente pari a 1 m e deve essere comunque almeno 0.15 m. Invece, nel caso di sorgenti poste in spazi estesi o in ambienti chiusi con condizioni acustiche soddisfacenti si preferisce ricorrere all'uso di una superficie di misurazione emisferica. La semisfera deve trovarsi al centro del parallelepipedo costituito dalla superficie di riferimento e dalle sue proiezioni sui piani riflettenti adiacenti. Il raggio r della superficie di misurazione emisferica deve essere maggiore o pari al doppio della dimensione caratteristica della sorgente, e non minore di 1 m.

3.2 Misure di vibrazioni

Le misure di vibrazioni possono essere effettuate con modalità differenti e per scopi diversi:

- *misura del livello di vibrazione*: viene rilevato il livello di vibrazione di un sistema meccanico soggetto a sollecitazioni o il livello di vibrazione trasmesso dal sistema al corpo umano, per confrontarlo con il valore ammesso da norme di sicurezza o di igiene del lavoro, o per valutare le sollecitazioni meccaniche indotte;
- *misura dell'eccitazione*: vengono misurate forze o momenti che possono costituire delle forzanti, cioè azioni che applicate ad un sistema in grado di vibrare lo pongono in vibrazione;
- *misura della risposta di un sistema ad un'eccitazione nota*: questo tipo di misura viene effettuata per identificare sperimentalmente la funzione di risposta in frequenza di un corpo o un sistema di corpi soggetti ad un'eccitazione nota e di stimarne le frequenze proprie e i modi propri di vibrare (Analisi Modale Sperimentale).

La strumentazione per rilevare le vibrazioni comprende pertanto almeno un trasduttore, un amplificatore ed un indicatore. Nella Figura 3 è mostrato lo schema di una catena di misura per effettuare misure di vibrazioni.

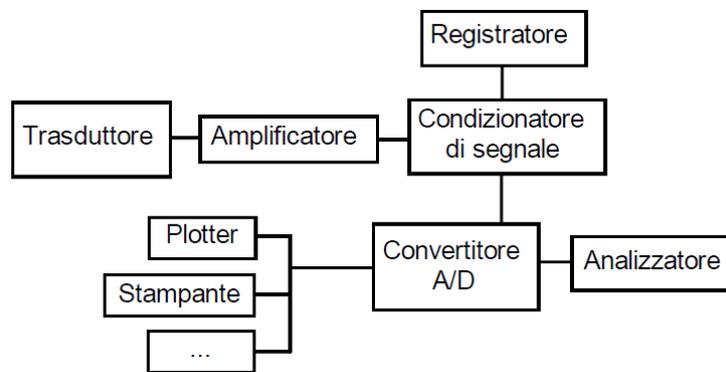


Figura 3 – Catena di misura

Il *trasduttore* è uno strumento sensibile allo spostamento, alla velocità o all'accelerazione, in grado di avere in uscita un segnale elettrico (ovvero una tensione) proporzionale al valore istantaneo della grandezza meccanica da rilevare. Generalmente esso è un accelerometro, per cui in uscita si ha una tensione proporzionale all'accelerazione misurata. L'*amplificatore* amplifica l'ampiezza del segnale proveniente dal trasduttore che è debolissimo. Il segnale viene poi trattato dal *condizionatore di segnale* che compie alcune eventuali operazioni, come il filtraggio, una ulteriore amplificazione, l'integrazione nel tempo, e così via. Il filtraggio si intende in frequenza, ovvero il segnale in entrata ha un certo spettro di frequenza, e il filtro permette il passaggio solo di certe componenti. Un filtro

passa-basso, ad esempio, permette il passaggio delle sole componenti a frequenza più bassa: il risultato del filtraggio è allora il segnale iniziale, in cui sono state eliminate le componenti alle frequenze più alte. L'integrazione, invece, permette il passaggio dall'accelerazione alla velocità e/o dalla velocità allo spostamento. Il *convertitore analogico/digitale* (A/D) è uno strumento a rigore non indispensabile, ma di solito presente perché permette di trattare il segnale mediante un calcolatore: il segnale proveniente dal trasduttore è un segnale analogico continuo, il cui andamento è analogo a quello della grandezza misurata; il convertitore A/D rileva il valore istantaneo del segnale a intervalli regolari di tempo, trasformandolo in un insieme discreto di numeri (segnale digitale). In questo modo in uscita si hanno dei numeri che possono essere gestiti ed elaborati da un calcolatore. L'*analizzatore di segnale* è di fatti un computer, dotato di software adatto per elaborare il segnale. Un altro strumento non indispensabile ma molto utile è il *registratore magnetico*, che permette di conservare i dati sperimentali. Altri dispositivi possono essere presenti nella catena di misura come, ad esempio plotter, stampanti, ecc., che vengono utilizzati come dispositivi di visualizzazione.

Per stimare una vibrazione si può scegliere di misurare lo spostamento o le sue derivate prima e seconda, ovvero la velocità o l'accelerazione. La scelta del parametro da misurare dipende dal range di frequenza del fenomeno. Con riferimento ad una singola armonica, qualunque sia il parametro considerato, rimangono inalterati forma e periodo della vibrazione, mentre si verifica una variazione di ampiezza e di fase. Le tre relazioni riportate di seguito mostrano i valori delle ampiezze nei casi in cui per stimare una vibrazione si consideri, rispettivamente, l'accelerazione a , la velocità v o lo spostamento d :

$$\begin{array}{ll}
 1. & a = A \sin(\omega t) & a = A \\
 2. & v = \frac{A}{\omega} \cos(\omega t) & v = \frac{A}{\omega} = \frac{A}{2\pi f} \\
 3. & d = -\frac{A}{\omega^2} \sin(\omega t) & d = -\frac{A}{\omega^2} = \frac{A}{4\pi^2 f^2}
 \end{array}$$

Generalmente l'ampiezza di vibrazione in termini di spostamento accentua le componenti a bassa frequenza rispetto a quelle ad alta frequenza, mentre l'accelerazione enfatizza le componenti ad alta frequenza. Pertanto per misure a bassa frequenza (inferiori ad 1 Hz) conviene sempre rilevare spostamenti, mentre per misure ad alta frequenza (superiori ai 100 Hz) conviene sempre rilevare accelerazioni.

L'analisi di un segnale di vibrazione espresso, ad esempio, in termini di accelerazione nel dominio del tempo viene condotta calcolando diversi parametri, che ne consentono la quantificazione del

livello da confrontare con i livelli di riferimento eventualmente normati, [3]. Questi parametri sono: il valore di picco, il valore picco-picco, il valore medio efficace, il valore medio e il fattore di cresta (Figura 4).

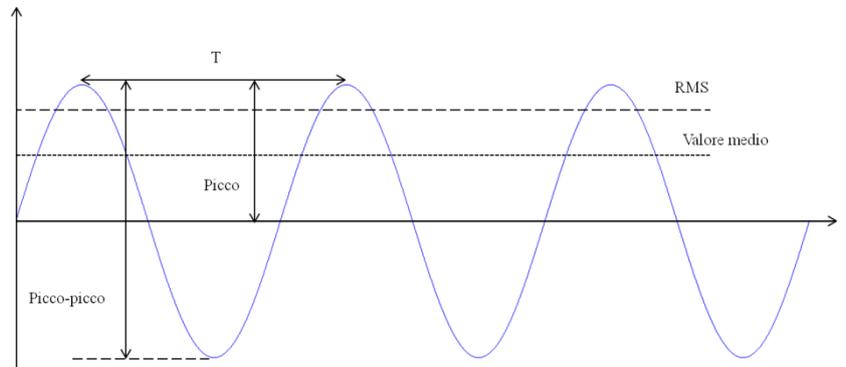


Figura 4 – Parametri che caratterizzano un segnale

Il valore di picco indica l'escursione massima positiva o negativa della vibrazione, mentre il valore picco-picco indica l'escursione massima dell'onda. Il valore medio efficace (*Root Mean Square*, RMS) è la misura più significativa di ampiezza in quanto tiene conto della storia dell'onda nel tempo e dà un valore di ampiezza direttamente correlata al contenuto energetico della vibrazione:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (10)$$

dove con $x(t)$ si è indicato l'andamento del segnale in funzione del tempo e T è la durata del segnale stesso (Figura 5). Nel caso di una grandezza sinusoidale di ampiezza A il suo valore efficace RMS vale $RMS = A/\sqrt{2}$.

Il valore medio (*Average*), invece, tiene conto della storia dell'onda nel tempo ma ha scarso interesse pratico non essendo correlato ad alcuna grandezza fisica. Per segnali continui:

$$Avg = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt} \quad (11)$$

Con esplicito riferimento alle misure di accelerazione, la durata T della misura viene suddivisa solitamente in intervalli T_i per ciascuno dei quali viene calcolato il corrispondente valore RMS . La base di misura per il calcolo del valore di RMS in media mobile è solitamente di un secondo. In tal

modo è possibile plottare l'andamento del valore *RMS* nel tempo e verificarne la correlazione con eventuali picchi locali di ampiezza.

Il fattore di cresta viene definito come il rapporto tra il valore di picco e il valore *RMS* o il rapporto tra il valore di picco e il valore di a_{eq} . Fenomeni a carattere impulsivo (come gli urti) presenteranno fattori di cresta rilevanti e il picco massimo o il valore picco-picco saranno gli indici maggiormente correlati al disturbo.

3.2.1 L'accelerometro

Lo strumento generalmente più adottato per misurare le vibrazioni è l'*accelerometro* (Figura 5). Esso è un trasduttore che converte l'accelerazione alla quale è sottoposto in un segnale elettrico di tensione o corrente proporzionale al valore dell'accelerazione stessa.



Figura 5 - Accelerometri

Esistono diversi tipi di accelerometri a seconda del principio fisico sfruttato; fra i più utilizzati possiamo ricordare: gli accelerometri con vibrometro; i piezoaccelerometri; gli accelerometri ICP (*Integrated Circuit Piezoelectric*) e i servoaccelerometri.

Gli accelerometri più utilizzati sono i piezoaccelerometri in cui l'elemento elastico e sensibile è una lamina di quarzo (Figura 6). Il quarzo è un materiale piezoelettrico che, se sollecitato secondo una particolare direzione (asse elettrico), crea una distribuzione di carica sulle due facce opposte dell'elemento di quarzo ($\sim 2pC/N$). La quantità di carica è proporzionale alla forza agente sull'elemento di quarzo e condizionando con opportuni amplificatori questa carica elettrica si ottiene un segnale elettrico proporzionale all'accelerazione a cui è sottoposto il trasduttore. L'ampio range di sensibilità alle vibrazioni degli accelerometri piezoelettrici rende questi accelerometri in grado di misurare accelerazioni di tipo sinusoidale, di tipo random e di tipo impulsivo.

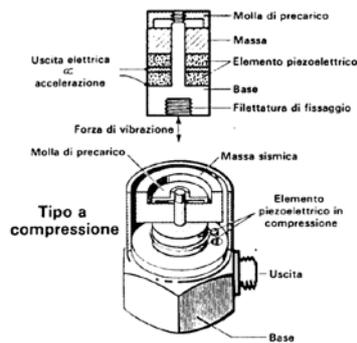


Figura 6 – Accelerometro monoassiale di tipo a compressione

L'accelerometro piezoelettrico offre molteplici vantaggiose caratteristiche: ha una ampia banda passante ($1 \div 30.000 \text{ Hz}$); è robusto e affidabile, con caratteristiche stabili per lunghi periodi di tempo; può resistere a sollecitazioni di shock molto elevate; non contiene parti mobili soggette ad usura. Di contro presenta alcune limitazioni di utilizzo, quali: impossibilità nel misurare accelerazioni statiche; difficoltà nelle misure a frequenza inferiore a 1 Hz (solo alcuni tipi riescono ad arrivare con specifico condizionamento a frequenze di $0.1 \div 0.2 \text{ Hz}$); nei tipi convenzionali con uscita in carica, i cavi di collegamento sono un elemento critico della catena di misura.

Le principali caratteristiche di un accelerometro piezoelettrico sono: la sensibilità, la massa, la gamma dinamica, la gamma in frequenza o a banda passante e la sensibilità trasversale.

La sensibilità cresce al crescere delle dimensioni del gruppo piezoelettrico e della massa sismica (strumento più pesante e ingombrante); per ovviare a ciò il segnale in uscita viene inviato ad un preamplificatore, che ha la funzione di realizzare il circuito elettrico per trasformare le cariche in differenze di potenziale e amplificare il segnale. Nei tipi per impiego generico la sensibilità varia tra 1 e 10 pC/ms^{-2} .

La massa dell'accelerometro non deve superare $1/10$ della massa della parte vibrante sulla quale è montato l'accelerometro stesso, per non modificare le proprietà dinamiche del corpo da misurare.

L'accelerometro fornisce in uscita un segnale elettrico direttamente proporzionale all'accelerazione in un campo dinamico molto ampio ($1 \div 10^8$), che prende il nome di gamma dinamica (Figura 7).

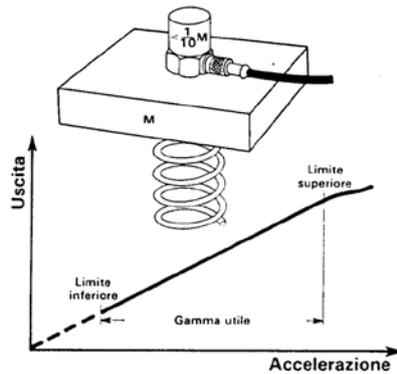


Figura 7 – Gamma dinamica di un accelerometro

Il limite inferiore LI è imposto dal rumore elettrico introdotto dai cavi e dal circuito amplificatore (negli strumenti per impiego generico $LI = 1/100 \text{ m/s}^2$). Il limite superiore (LS) è determinato dalla resistenza strutturale dell'accelerometro (negli strumenti per impiego generico $LS = 50.000 \div 100.000 \text{ m/s}^2$).

Il segnale in uscita dall'accelerometro si mantiene costante al variare della frequenza, a partire da frequenze di $1 \div 2 \text{ Hz}$ (per strumenti di impiego generico) fino ad un limite imposto dalla risonanza dell'accelerometro, in corrispondenza della quale si ha un aumento del segnale. Questo range prende il nome di *gamma in frequenza* o *banda passante* (Figura 8). Come regola pratica un accelerometro si può utilizzare fino ad un terzo della sua frequenza di risonanza, considerando anche l'eventuale riduzione di frequenza dovuta al montaggio. In tal caso l'errore è inferiore al 12% ($f_0 = 20 \div 30 \text{ kHz}$, per impiego generico).

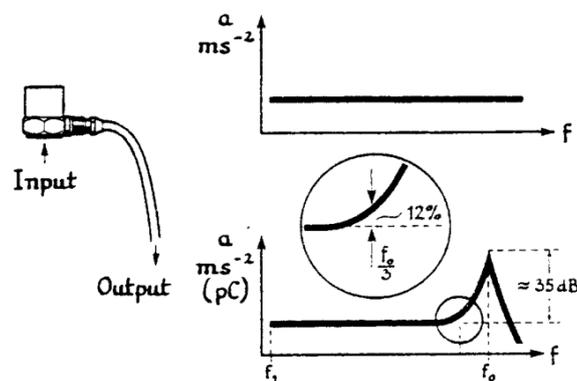


Figura 8 – Gamma in frequenza o banda passante

Se la vibrazione da misurare contiene delle componenti nella zona intorno alla frequenza risonante si otterrà una misura non corretta. Questo problema viene superato scegliendo un accelerometro che abbia una banda passante sufficientemente ampia e utilizzando un filtro passa-basso (solitamente compreso nel preamplificatore) per tagliare i segnali indesiderati provocati dal picco di risonanza dello strumento (Figura 9).

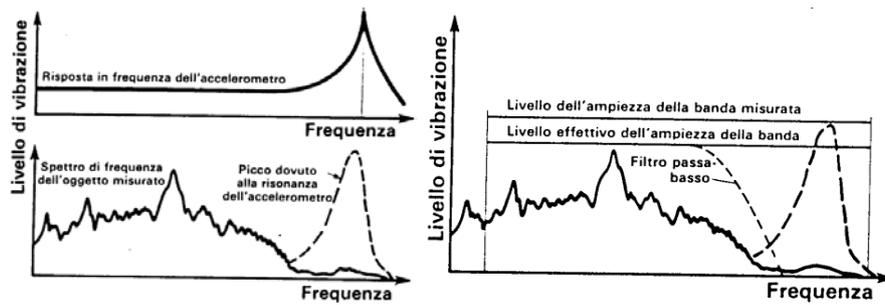


Figura 9 – Influenza della risposta in frequenza dell'accelerometro sullo spettro in frequenza del livello di vibrazioni misurato

L'impiego alle basse frequenze è limitato dalle caratteristiche del circuito in cui è inserito il cristallo come condensatore, dai cavi di collegamento, dalle fluttuazioni della temperatura ambiente e dal taglio operato dal preamplificatore. Generalmente, solo con i tipi con il cristallo sollecitato a taglio e con speciali circuiti di condizionamento si può scendere al di sotto di 1 Hz (anche fino a 0.2 Hz), mentre per i tipi standard il limite inferiore di frequenza si attesta intorno a $1.5 \div 2\text{ Hz}$.

La massima sensibilità di un accelerometro monoassiale si ha perpendicolarmente alla sua base di appoggio (asse di sensibilità). Anche trasversalmente un accelerometro presenta una certa sensibilità (sensibilità trasversale) che è inferiore al 4% della sensibilità massima (Figura 10). La direzione di minima sensibilità trasversale viene solitamente indicata sull'accelerometro con un punto di vernice rossa.

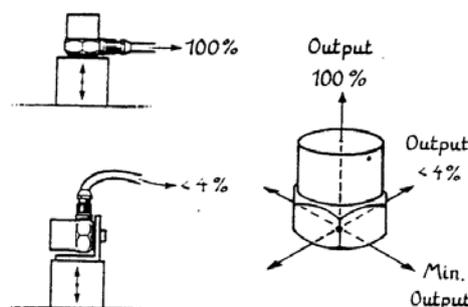


Figura 10 – Asse di sensibilità di un accelerometro monoassiale

Affinché sia possibile convertire le cariche generate nel cristallo piezoelettrico in una differenza di potenziale misurabile e registrabile è necessario che il cristallo piezoelettrico sia inserito all'interno di un apposito circuito. Negli accelerometri piezoelettrici convenzionali, questo circuito è esterno all'accelerometro e si trova all'interno di un amplificatore di carica (o preamplificatore) collegato in serie con esso (Figura 11). Questo tipo di catena di misura viene chiamata ad "alta impedenza", poiché l'amplificatore per potere rilevare la differenza di potenziale prima che il condensatore (il cristallo) si scarichi deve avere una impedenza d'ingresso del primo stadio dello stesso ordine di grandezza dell'impedenza di uscita del cristallo ($> 10\text{ G}\Omega$). Qualora infatti le cariche abbandonano

gli elettrodi si riduce la sensibilità dell'accelerometro e si commette un rilevante errore nella misura.



Figura 11 – Catena di misura ad alta impedenza

Gli accelerometri piezoelettrici che presentano un'elevata impedenza d'uscita possono presentare dei problemi legati al rumore indotto nel cavo di collegamento. Questi disturbi possono dare luogo a fenomeni quali: correnti verso terra, che sono presenti in quanto l'accelerometro e l'apparato di misura sono collegati a terra separatamente; rumore triboelettrico che viene indotto nel cavo dal movimento meccanico del cavo stesso; rumore elettromagnetico che viene indotto nel cavo se si trova in prossimità di un macchinario in movimento. Per evitare questi effetti occorre, rispettivamente, isolare elettricamente la base dell'accelerometro, nastrare ed in collare il cavo il più vicino possibile all'accelerometro (operazione non sempre fattibile), optare per cavi con doppia schermatura.

I cavi di collegamento tra l'accelerometro e l'amplificatore di carica costituiscono un elemento molto delicato della catena di misura e devono essere ad alto isolamento e basso rumore, inoltre la loro lunghezza non può eccedere qualche metro.

La principale limitazione nell'utilizzo degli accelerometri piezoelettrici con uscita in carica risiede nel fatto che il preamplificatore deve essere montato nelle vicinanze del trasduttore, poiché la lunghezza del cavo che porta le cariche non può eccedere qualche metro per non ridurre troppo l'impedenza del circuito di ingresso. Inoltre certi tipi di misure presuppongono l'impossibilità materiale di fissare il cavo e i movimenti dello stesso possono influenzare sensibilmente la misura.

L'uso della tecnologia ICP (acronimo di *Integrated Circuit Piezoelectric*) ha permesso di realizzare accelerometri di ottime prestazioni che integrano il condizionamento del segnale, permettendo così di utilizzare circuiti esterni di alimentazione particolarmente semplici e quindi relativamente poco costosi.

Gli accelerometri ICP non necessitano pertanto di preamplificatore esterno, ma solo di un alimentatore esterno a corrente continua. Il segnale in uscita dall'accelerometro è in questo caso una differenza di potenziale e la catena di misura è detta a "bassa impedenza" (Figura 12). L'alimentatore esterno o accoppiatore può avere anche la funzione di amplificare il segnale attraverso un guadagno regolabile.



Figura 12 – Catena di misura a bassa impedenza

Negli accelerometri ICP il segnale in uscita dal trasduttore è come detto una tensione e pertanto la sensibilità del trasduttore si misura in $mV/(ms^{-2})$ o in mV/g . Nella Figura 13 è illustrato lo schema costruttivo di un accelerometro ICP.

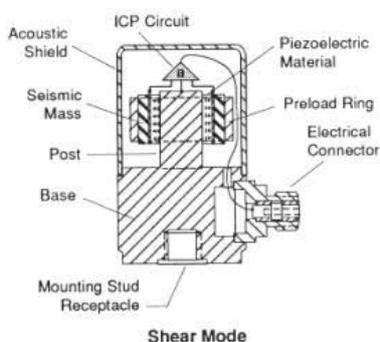


Figura 13 - Sezione di un tipico accelerometro ICP

L'accelerometro ICP viene connesso alla sorgente di alimentazione mediante un semplice cavo coassiale, che può avere anche lunghezza dell'ordine della decina di metri. La sorgente deve fornire una tensione continua tra $18 \div 30 V$. Molti sistemi di acquisizione permettono di alimentare direttamente gli accelerometri di tipo ICP e la sorgente di alimentazione può essere omessa.

Particolare attenzione deve essere rivolta al montaggio degli accelerometri perché questo influenza la risposta in frequenza del trasduttore. Infatti, il sistema di montaggio funziona da filtro meccanico, perciò un accelerometro fissato con perno filettato sarà caratterizzato da una risposta in frequenza lineare più estesa dello stesso accelerometro fissato con dispositivi magnetici, incollato o tenuto manualmente.

L'accelerometro deve essere montato in modo tale che la direzione desiderata di misura coincida con il suo asse principale di sensibilità. Il requisito principale per un corretto montaggio è costituito da un perfetto accoppiamento meccanico tra la base dell'accelerometro e la superficie sulla quale è attaccato.

I principali metodi di montaggio sono: il perno filettato, la cera d'api, il perno incollato, il perno isolato e la rondella di mica, il magnete permanente o la sonda impugnata manualmente. Il perno filettato è il miglior montaggio in assoluto poiché la frequenza risonante raggiunta è quasi coincidente a quella misurata durante la calibratura. La cera d'api è utile per montaggi rapidi,

abbassa maggiormente la frequenza di risonanza, permette misure in un certo campo di accelerazione e temperatura ($a_{max} = 100 \text{ ms}^{-2}$, $T_{max} = 40^\circ\text{C}$). Quando si vuole isolare elettricamente l'accelerometro si ricorre al montaggio con perno isolato e rondella di mica. Il magnete permanente è un metodo veloce e di facile realizzazione che però limita il campo utile di frequenza a circa $2,5 \text{ kHz}$ e il campo dinamico a circa $100 \div 200 \text{ ms}^{-2}$ per la limitata forza di attrazione del magnete. La sonda impugnata manualmente è un metodo grossolano, ma comodo per una rapida indagine preliminare a volte utile nella scelta del punto di misura ottimale dove verrà realizzato il montaggio stabile con uno dei metodi suddetti.

Alcuni parametri ambientali (quali ad esempio la temperatura e l'umidità) possono introdurre degli errori nella misura che possono essere compensati qualora il costruttore del trasduttore fornisca dei dati specifici. Gli accelerometri per impiego generico, ad esempio, possono tollerare temperature fino a 250°C , oltre tale limite si riscontrano alterazioni permanenti della sensibilità. Gli accelerometri con uscita in carica sono solitamente corredati di una curva di calibratura sensibilità/temperatura per correggere i valori misurati a temperature superiori o inferiori a 20°C (Figura 14).

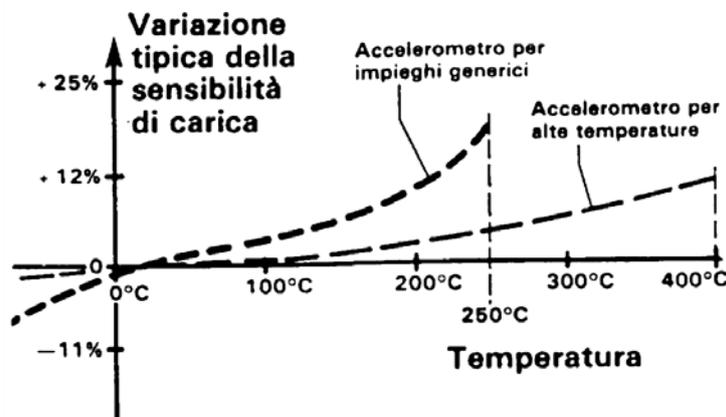


Figura 14 – Andamenti delle curve di calibratura sensibilità/temperatura di accelerometri per impieghi generici e per alte temperature

Si possono inoltre avere variazioni del segnale di uscita per piccole variazioni della temperatura ambiente; ciò può rappresentare un problema solo per piccole ampiezze o basse frequenze.

Gli accelerometri sono a tenuta stagna, e l'umidità può entrare solo nel connettore; in presenza di forte umidità, quest'ultimo deve essere sigillato con silicone.

Gli accelerometri sono solitamente corredati della propria carta di calibrazione in cui vengono riportate le caratteristiche dello strumento e la curva di risposta in frequenza. La calibrazione viene effettuata dal costruttore per confronto con un accelerometro campione, determinando la sensibilità dello strumento a temperatura ambiente. È opportuno effettuare una calibrazione periodica della

sensibilità, anche se le sue variazioni sono in generale molto contenute (anche inferiori al 2% dopo diversi anni di funzionamento).

Nei servoaccelerometri (Figura 15) la massa sismica è sospesa alla cassa del trasduttore mediante molle, mentre un fluido viene utilizzato per smorzare il moto della massa sismica. Il funzionamento è basato su di un sistema elettronico che, grazie ad una bobina e ad una corrente circolante, mantiene fissa la massa sismica rispetto alla scatola collegata al corpo di cui si vuole misurare la vibrazione. La corrente necessaria per tenere ferma la massa è proporzionale all'accelerazione dello strumento.

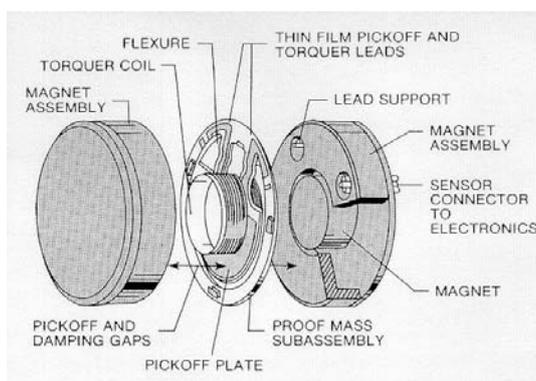


Figura 15 - Servoaccelerometro

La frequenza propria di questi trasduttori è solitamente inferiore ai 400 Hz e pertanto la loro banda passante è superiormente limitata. Sono dei sensori in genere pesanti e ingombranti che però offrono il vantaggio di misurare con molta precisione segnali con bassa frequenza o accelerazioni statiche, quindi non soffrono dei limiti alle basse frequenze tipici degli accelerometri piezoelettrici. Di contro hanno lo svantaggio di essere estremamente delicati quando non alimentati poiché la massa è in grado di muoversi e le molle hanno bassa rigidità.

3.2.2 Il vibrometro laser a scansione

Negli ultimi decenni, fin dall'avvento del laser, la metrologia ottica ha fornito tecniche preziose per la misura di grandezze meccaniche, specialmente nei casi in cui sono richiesti trasduttori senza contatto. I vantaggi maggiori di queste tecniche risiedono, oltre che nell'assenza di contatto tra trasduttore e sistema da misurare, nella estrema sensibilità degli strumenti, nella capacità di acquisire informazioni nei domini dello spazio, del tempo e della frequenza in maniera molto dettagliata.

Quando si parla di misura di vibrazioni, uno strumento ottico molto potente è il vibrometro laser Doppler, che può misurare accuratamente velocità puntuali per mezzo di tecniche interferometriche. La combinazione di un vibrometro con due specchi mobili guidati da attuatori galvanometrici

permette di dirigere il raggio laser nei punti di misura desiderati e dà origine ad uno strumento detto vibrometro laser Doppler a scansione (*Scanning Laser Doppler Vibrometry, SLDV*). In questo modo si possono eseguire velocemente una serie di misure di velocità senza contatto su una griglia di punti della struttura in esame.

I moderni SLDV possono esplorare fino a 100 punti la secondo, per un numero totale di punti superiore ai 100.000; la banda di lavoro è estesa da pochi Hz fino a decine di MHz con sensibilità dell'ordine di un millimetro al secondo (se invece della velocità si considera lo spostamento equivalente, la sensibilità è dell'ordine di alcune decine di nanometri).

Le caratteristiche elencate, insieme a quella di permettere misure senza contatto, rendono la vibrometria laser Doppler a scansione una tecnologia indicata per situazioni in cui l'uso di sistemi a contatto (come sono, ad esempio, gli accelerometri), non è possibile o è comunque sconsigliato, come nel caso di strutture leggere, rotanti o ad alta temperatura, oppure quando i punti di misura non sono accessibili o raggiungibili dall'operatore, o nel caso di strutture sulle quali in generale non sia possibile applicare sensori, come in quei casi in cui l'impiego di accelerometri può compromettere l'accuratezza delle misure per l'effetto di massa aggiunta o addirittura danneggiare in modo più o meno importante la struttura stessa; oppure quando il numero di punti su cui devono essere eseguite le misure è grande e sarebbe necessario posizionare sulla struttura un numero equivalente di trasduttori, ricorrendo ad un'operazione sicuramente lunga e costosa.

L'interferometria ottica, su cui sono basati i vibrometri attualmente in commercio, permette di misurare la velocità del punto illuminato da un raggio laser opportunamente focalizzato, attraverso la determinazione della variazione di frequenza (frequenza Doppler) che il raggio di misura subisce quando incide sulla superficie vibrante. Uno schema caratteristico di interferometro è quello di Mach-Zender, mostrato in Figura 16.

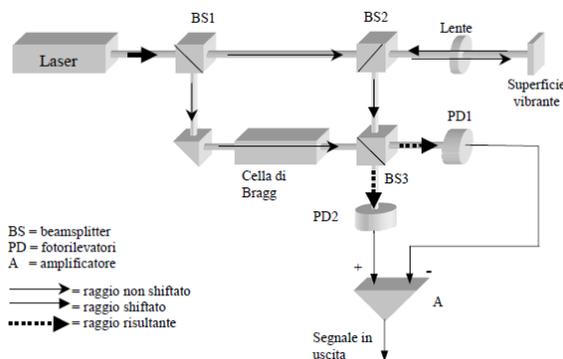


Figura 16 - Schema di vibrometro con interferometro di Mach-Zender

Nello schema, la luce emessa dalla sorgente laser è divisa in due raggi da un divisore di fascio (BS1): uno dei due raggi è focalizzato sulla struttura vibrante, viene riflesso da questa e quindi fatto interferire con il secondo raggio (detto di riferimento). L'intensità risultante dalla combinazione dei due raggi varia con legge sinusoidale con la differenza di fase dei due raggi che può essere costante o meno a seconda che l'oggetto sia fermo o vibri con velocità v . Nel primo caso la differenza di fase è costante ed è determinata unicamente dal cammino ottico L percorso dalla luce tra la superficie e il divisore di fascio BS2. Se invece la superficie si muove, la differenza di fase diventa tempo variante e in questo secondo caso è possibile esprimere la fase come prodotto di una pulsazione variabile nel tempo (frequenza istantanea) per il tempo stesso: il valore di questa frequenza è pari al valore dello spostamento in frequenza (effetto Doppler) dovuto a v . Come è noto qualunque onda riflessa da una superficie in movimento subisce uno *shift* Doppler della propria frequenza proporzionale alla velocità della superficie v e alla lunghezza d'onda λ della radiazione:

$$f_{Doppler} \propto \frac{2v}{\lambda} \quad (12)$$

Pertanto è possibile misurare la componente della velocità di un punto illuminato da un raggio laser lungo l'asse del raggio, attraverso la variazione di frequenza dovuta all'effetto Doppler che il raggio di misura subisce incidendo sulla superficie.

Gli ultimi componenti necessari sono un fotodiodo (o una coppia) e un demodulatore FM che estrarrà dal segnale Doppler il valore della velocità come una tensione analogica. Per determinare anche la direzione del vettore velocità istantanea si possono utilizzare celle di Bragg o una manipolazione elettronica dei raggi ricombinati: questi dispositivi introducono uno *shift* in frequenza in uno dei rami dell'interferometro o nel segnale del fotodiodo e permettono di riconoscere il verso attraverso la sovrapposizione di un vettore 'virtuale' di velocità.

I vibrometri più comuni attualmente disponibili in commercio consentono la misura di velocità di vibrazione massime di 10 m/s , con una frequenza massima di 200 kHz , una risoluzione di 8 nm in spostamento e di 0.5 $\mu m/s$ in velocità. L'accuratezza di misura è di $\pm 2.5\%$ della lettura *RMS* per i range di velocità più bassi, per scendere fino a $\pm 1\%$ per i range più alti.

Il laser impiegato ha normalmente una potenza inferiore al milliwatt, per cui non sono necessarie misure di sicurezza per l'impiego dello strumento; tuttavia, nonostante la bassa potenza d'emissione, si riescono a raggiungere distanze di misura di alcune decine di metri e risoluzioni spaziali dell'ordine del millimetro. Infine, tutti i sistemi VLDS sono gestiti da un PC, per cui i risultati sono forniti in vari formati digitali (come immagini BMP o JPG, file UFF, TXT, filmati AVI) facilmente trasferibili a pacchetti software esterni di word processing o analisi dei dati. Le

mappe dei risultati possono essere inoltre sovrapposte ad immagini della struttura registrate tramite telecamere CCD interne al VLDS, per cui l'individuazione spaziale delle aree esaminate è immediata.

Recentemente, la tecnica laser Doppler a scansione è stata utilizzata con successo in numerose applicazioni: dall'analisi modale, all'analisi vibroacustica di strutture, dalla rilevazione di difetti in diversi materiali ad applicazioni in campo biomedicale.

3.2.3 Applicazione della vibrometria laser allo studio delle vibrazioni di un blocco cilindri

Durante l'attività di ricerca sono state effettuate analisi di vibrometria laser su un motore a banco, in particolare per stimare il livello delle vibrazioni superficiali del blocco cilindri durante le condizioni operative del propulsore, [6].

Il motore su cui sono state eseguite le prove di vibrometria è un motore ad iniezione diretta di benzina, 4 tempi, con 4 cilindri in linea. Le principali caratteristiche tecniche del motore sono riportate in Tabella 1.

Tabella 1 – Caratteristiche principali del motore	
Numero di cilindri e disposizione	4, in linea
Cilindrata	1742.22 cm ³
Alesaggio	83.0 mm
Corsa	80.5 mm
Lunghezza della biella	148.0 mm
Ordine di accensione	1-3-4-2
Tipo di motore	4-tempi

Il vibrometro utilizzato nella campagna sperimentale è il vibrometro laser Doppler a scansione PSV-400 della Polytec. Esso è uno strumento di misura rivoluzionario che permette di ottenere in modo molto veloce dati di vibrazioni completi da una intera struttura, ed è utilizzato per analizzare problematiche di rumore e vibrazioni in una vasta gamma di applicazioni. Dopo il completamento della scansione è possibile ottenere velocemente una visualizzazione accurata e di facile comprensione delle caratteristiche vibrazionali della struttura senza gli inconvenienti di utilizzare dati provenienti da un gran numero di trasduttori, ed inoltre è possibile visualizzare le animazioni delle risonanze strutturali dell'oggetto analizzato. Queste deformate operative (ODS) sono tipicamente sufficienti per identificare quali parti della struttura necessitino di modifiche o siano la causa di rumorosità. I dati misurati possono, inoltre, essere esportati e processati da software di analisi modale utilizzando Universal File. La qualità dei dati richiesta dall'analisi modale è garantita dai sofisticati algoritmi di validazione e controllo che, lavorando in tempo reale durante l'acquisizione, assicurano la bontà delle risposte in frequenza misurate in ogni punto di scansione. Il sistema PSV-400 consta di due componenti chiave: la testa a scansione e il sistema di controllo e processamento (Figura 17).



Figura 17 – Componenti del sistema PSK-400 della Polytec: testa a scansione (a sinistra) e sistema di controllo e processamento (a destra)

Il PSV-400 permette di eseguire misure di vibrazioni senza contatto rapide e complete, acquisire dati in formato digitale, usare griglie di scansione predefinite o create interattivamente, definire la posizione di fuoco per ogni singolo punto di acquisizione e acquisire la geometria del sistema mediante un sensore di distanza. È uno strumento di misura rivoluzionario che permette di ottenere in modo molto veloce dati di vibrazione completi da una struttura anche complessa, ed è utilizzato per analizzare problematiche di rumore e vibrazioni in una vasta gamma di applicazioni.

In Figura 18 è mostrato, a sinistra, il motore a banco nella sala prove, mentre a destra è mostrata la finestra del sistema di acquisizione del vibrometro laser della Polytec. Come è possibile osservare, il blocco cilindri non è completamente accessibile al laser per una scansione di tutta la superficie, a causa della presenza dei sistemi ausiliari, dei condotti dell'olio e dell'acqua, e di tutti i cavi necessari alla strumentazione di controllo del motore. Pertanto è stato possibile effettuare la stima delle vibrazioni solo in alcuni punti che sono raffigurati nella figura a destra mediante dei quadratini di colore blu.

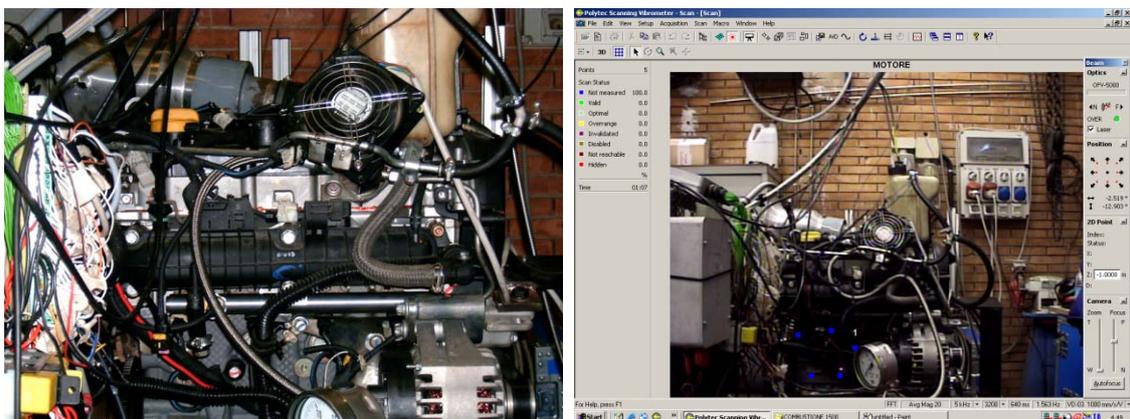


Figura 18 – Motore a banco e finestra di acquisizione del vibrometro laser

I test sono stati condotti per tre differenti condizioni di funzionamento del motore, in particolare alle velocità di 1000, 1500 e 2000 giri/min, sia in combustione che in trascinato in condizione di carico parziale. Nelle Figure 19, 20 e 21 sono riportati, per le diverse condizioni di funzionamento

analizzate, gli andamenti della pressione (espressa in MPa) all'interno dei cilindri, in funzione dell'angolo di manovella, per entrambe le condizioni di funzionamento del motore (linea continua per il motore in combustione, linea tratteggiata per il funzionamento in trascinato).

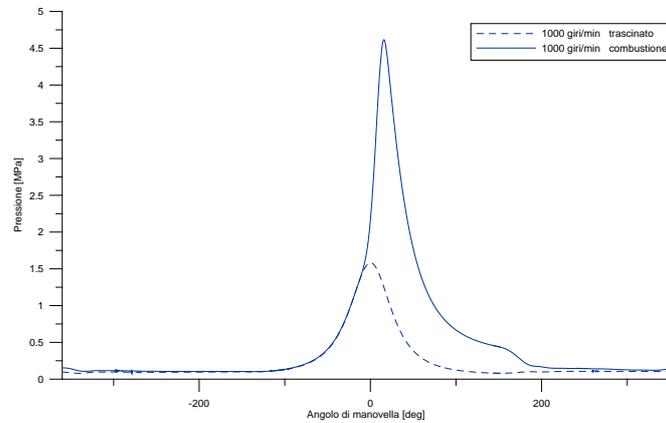


Figura 19 – Andamenti della pressione nei cilindri in combustione (linea continua) e in trascinato (linea tratteggiata) alla velocità di funzionamento di 1000 giri/min

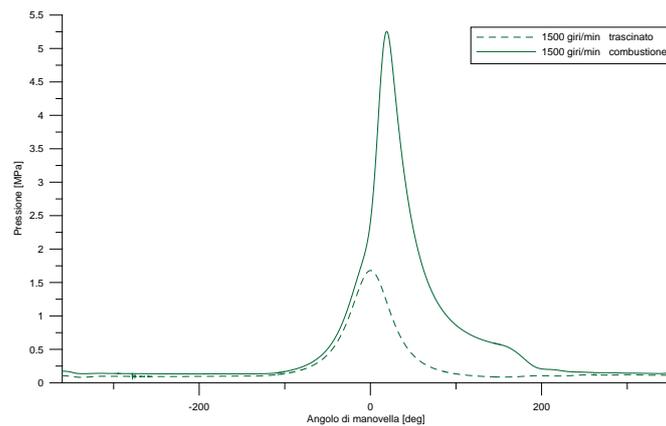


Figura 20 – Andamenti della pressione nei cilindri in combustione (linea continua) e in trascinato (linea tratteggiata) alla velocità di funzionamento di 1500 giri/min

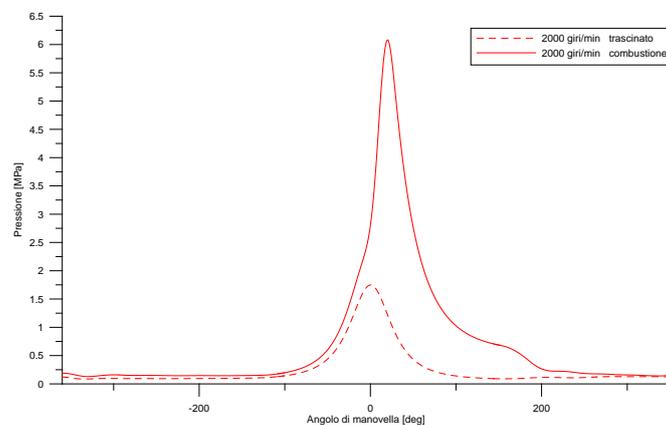


Figura 21 – Andamenti della pressione nei cilindri in combustione (linea continua) e in trascinato (linea tratteggiata) alla velocità di funzionamento di 2000 giri/min

Nella Figura 22 sono riportati, nel range di frequenze fino a 500 Hz, le velocità misurate nei cinque punti di misura per il motore in combustione alla velocità di 2000 giri/min.

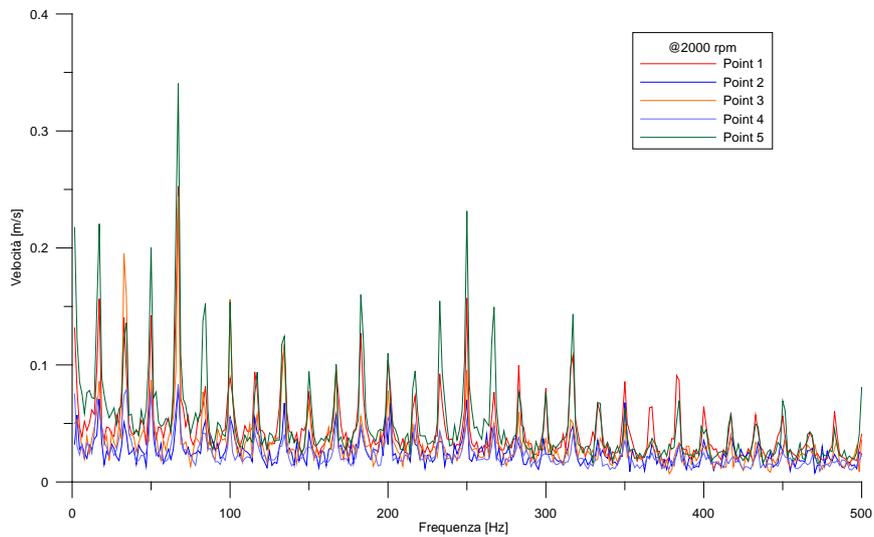


Figura 22 – Andamenti delle velocità fino a 500 Hz per tutti i punti di misura

Come è possibile osservare gli andamenti delle velocità sono pressoché gli stessi. Nella condizione di funzionamento analizzata, il punto che risulta essere maggiormente sollecitato è il punto di misura numero 5.

Mentre nella Figura 23 sono riportate, sempre nel range di frequenze fino a 500 Hz, le velocità misurate nel punto di misura numero 1, nelle due condizioni di funzionamento del motore: in combustione (linea rossa) e in trascinato (linea blu), alla velocità di 2000 giri/min.

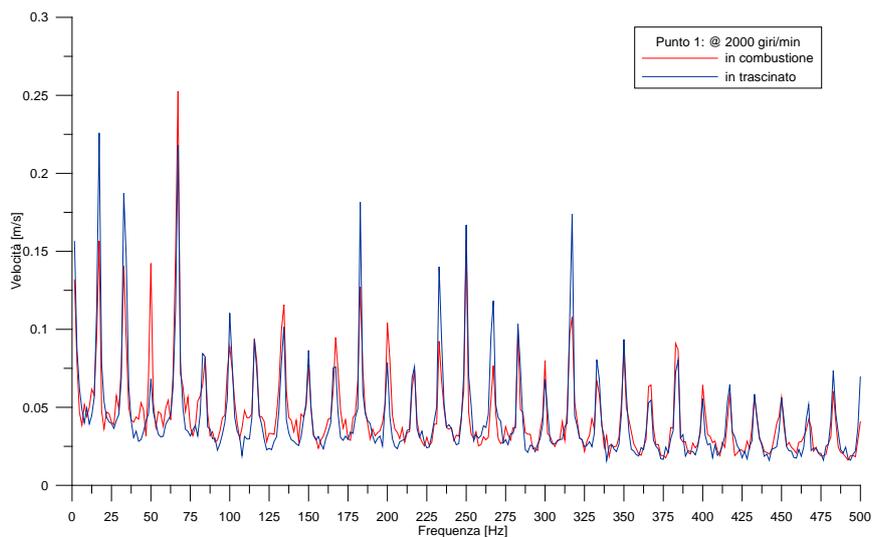


Figura 23 – Andamenti delle velocità nel punto di misura 1 fino a 500 Hz: in combustione (linea di color rosso) e in trascinato (linea di colore blu)

Come è possibile osservare, quando il motore è in combustione il picco massimo della velocità si ha alla frequenza di 66.67 Hz che corrisponde alla frequenza di combustione per la velocità in esame,

mentre quando il motore è in trascinato il picco massimo si ha alla frequenza di 16.67 Hz che corrisponde all'ordine motore 0.5. I picchi in corrispondenza delle frequenze di 16.67, 33.33, 50.0 Hz, sono legati rispettivamente agli ordini motore con valori di k pari a 0.5, 1 e 1.5 (come riportato in Tabella 2) e sono legati a fenomeni di tipo meccanico e alle forze di inerzia. Tutti gli altri picchi sono legati alle frequenze multiple della combustione e ai successivi ordini motore.

Tabella 2 – Ordini motore @ 2000 giri/min								
k	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6
$f = k \frac{\text{rpm}}{60}$	16.67	33.33	50.00	66.67	100.00	133.33	166.67	200.00

I risultati sperimentali ottenuti mediante analisi di vibrometria di questo tipo possono essere utilizzati, ad esempio, per validare i risultati ottenuti da una simulazione numerica come quella che verrà descritta nel capitolo successivo condotta su un prototipo di motore a combustione interna.

Difatti, una volta realizzato un modello numerico del propulsore, ad esempio mediante una modellazione multibody, ed utilizzando come carico esterno le curve di pressione in camera rilevate sperimentalmente, un'analisi dinamica multibody permetterà di determinare le forze agenti sul blocco cilindri che saranno poi utilizzate per calcolare le vibrazioni superficiali a cui il sistema è soggetto ricorrendo ad analisi di risposta forzata. A tale scopo si renderà necessario modellare il blocco cilindri agli elementi finiti e individuare sulla sua superficie i nodi che corrispondono ai punti in cui sono state eseguite le misurazioni. La Figura 24 mostra i punti di misura che sono stati individuati sia sul modello CAD sia sul modello FEM del blocco cilindri.

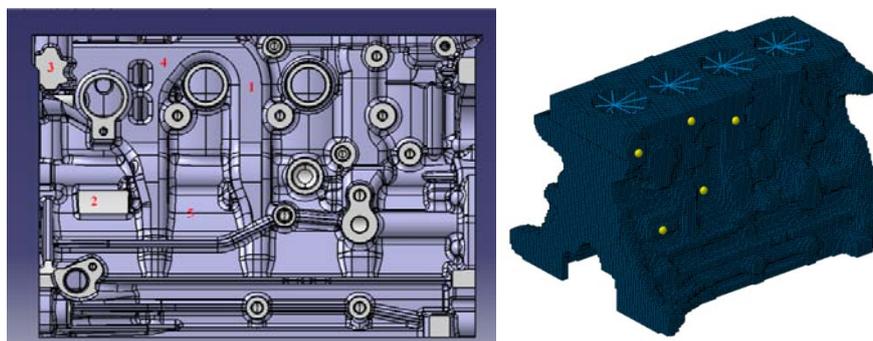


Figura 24 – Individuazione dei punti di misura sul modello CAD (a sinistra) e sul modello FEM (a destra) del blocco cilindri

3.3 Analisi modale

L'analisi dei modi di vibrazione o analisi modale è una tecnica di analisi che consente di identificare i modi di vibrazione di una struttura, ognuno dei quali definito da frequenza, smorzamento e forma modale.

L'analisi può essere effettuata per via numerica o per via sperimentale: nel primo caso occorre realizzare un modello della struttura (ad esempio ricorrendo al metodo degli elementi finiti); nel secondo caso, invece, l'analisi viene eseguita eccitando opportunamente la struttura in esame, calcolando con un analizzatore di spettro la funzione di risposta in frequenza (FRF) tra il segnale proveniente da un trasduttore di eccitazione e quello in cui si misura la risposta, ed elaborando questa informazione per una serie di coppie di punti adeguatamente scelti, [4, 5].

Il risultato dell'indagine, in entrambi i casi, sono le frequenze con i relativi smorzamenti, ed animazioni della struttura che mostrano, per ogni frequenza individuata, il modo in cui l'oggetto in esame vibra a quella determinata frequenza. Molti programmi di analisi modale consentono, una volta calcolato il modello matematico della struttura in esame, di simulare modifiche su quest'ultima, come ad esempio variazioni in termini di massa e/o di rigidità, per prevedere l'influenza di queste caratteristiche sulla struttura. Altri ancora consentono di eseguire analisi di sensibilità, per individuare i punti della struttura dove si ha il massimo cambiamento di caratteristiche modali a fronte del minimo cambiamento strutturale.

3.3.1 L'analisi modale sperimentale

L'analisi modale sperimentale è un procedimento che ha lo scopo di individuare i parametri modali (frequenze proprie, smorzamenti, modi di vibrare) di una struttura. Tale procedimento può essere applicato sia a sistemi semplici (come pannelli, alberi motore, ecc.) che a sistemi complessi (come ad esempio la scocca di autoveicolo).

Generalmente tale tecnica sperimentale viene impiegata per validare modelli numerici di calcolo (a parametri concentrati o agli elementi finiti), per rilevare i modi propri flessionali e torsionali di strutture semplici e/o complesse, per guidare modifiche strutturali, per effettuare indagini su materiali di composizione diversa, ecc.

Le ipotesi fondamentali da fare sulla struttura alla base dell'analisi modale sono: la struttura è considerata *lineare*, cioè la risposta della struttura ad una qualsiasi combinazione di forze, applicate contemporaneamente sulla struttura stessa, è pari alla somma delle singole risposte valutate come se ogni forza agisse singolarmente; la struttura è tempo *invariante*, questo implica che i parametri da determinare sono costanti; la struttura obbedisce al *principio di reciprocità di Maxwell*, e cioè se

una forza applicata in un punto P genera una data risposta in un punto Q, allora la stessa risposta sarà causata in P dalla stessa forza applicata in Q; la struttura è *osservabile*, ovvero l'insieme di misure input-output è tale da contenere informazioni sufficienti per descrivere in maniera adeguata il comportamento dell'intera struttura.

Il processo di determinazione dei parametri modali da dati sperimentali comprende le seguenti fasi:

1. costruzione del modello test, ovvero individuazione della configurazione del sistema su cui realizzare le prove;
2. vincolare l'oggetto di prova in modo da fornire modi a corpo rigido fuori dal campo di analisi;
3. eccitazione della struttura (ad esempio attraverso un martello strumentato);
4. misura della risposta vibratoria del sistema attraverso degli accelerometri disposti in diversi punti e acquisizione delle funzioni di trasferimento;
5. analisi dei dati, ovvero determinazione della base modale e visualizzazione delle deformate.

In primo luogo è necessario discretizzare la struttura in esame con una serie di punti, opportunamente scelti, al fine di creare un modello (detto appunto *modello test*), i cui punti rappresentano i luoghi in cui andranno posizionati i trasduttori di forza e di accelerazione per effettuare i rilievi di eccitazione e di vibrazione, rispettivamente.

Generalmente la prova viene eseguita eccitando la struttura con una forza esterna applicata sequenzialmente nei diversi punti che costituiscono il modello test, ed acquisendo contemporaneamente la risposta in un particolare punto. In alternativa, è possibile eccitare il sistema agendo sempre nel medesimo punto (accuratamente scelto) e rilevando la risposta in termini di vibrazioni in tutti gli altri punti del modello test.

È evidente che per poter effettuare delle prove di questo tipo è indispensabile vincolare in qualche modo il sistema meccanico che si intende identificare. E poiché la risposta del sistema meccanico risulta pesantemente influenzata dall'interazione con il vincolo prescelto, è opportuno vincolare l'oggetto della sperimentazione in modo da rendere facilmente individuabili ed isolabili dalla risposta del sistema i contributi derivanti dall'interazione tra sistema in esame e i vincoli.

Di solito si fa riferimento a due configurazioni limite: configurazione *free* e configurazione *ground*. Le condizioni di vincolo reali saranno sempre una via di mezzo tra queste due configurazioni, ma generalmente si cerca sempre di tendere ad una di esse.

Un montaggio di tipo *free* prevede la scelta di un vincolo talmente cedevole da approssimare la condizione di assenza di vincoli: le frequenze introdotte dalla cedevolezza del vincolo sono generalmente molto basse. Agendo sulla rigidità del vincolo si fa dunque in modo che queste

cadono molto al di sotto del campo di frequenze che si intende investigare. In questo modo il vincolo risulta facilmente modellabile come una completa labilità del sistema (assenza di vincoli). Tipiche tecniche di montaggio *free* consistono nel sospendere tramite uno o più tiranti (meglio se relativamente lunghi) il componente in esame. Un'altra soluzione frequentemente adottata è quella di appoggiarlo su una sede costituita da materiale estremamente cedevole (come ad esempio gommapiuma o un letto di molle) incapace di esercitare forze tali da influenzare in maniera decisiva la risposta dinamica del componente (Figura 25).

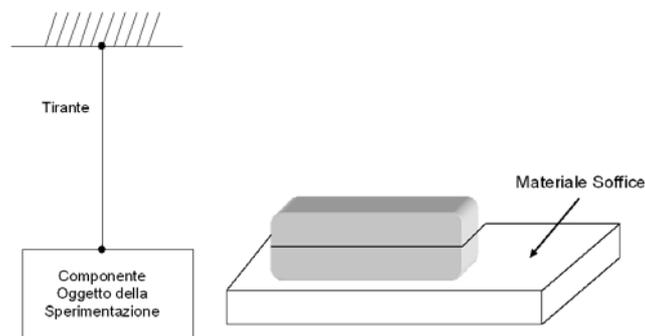


Figura 25 – Configurazioni di montaggio di tipo *free*

Adottando un montaggio di tipo *free* risulta difficile esercitare sul componente eccitazioni molto forti o a frequenze molto basse perché essendo il sistema praticamente labile, a sollecitazioni anche molto piccole corrispondono in genere spostamenti notevoli del vincolo: ciò si traduce quasi esclusivamente nella generazione di moti rigidi del componente in prova. Tali modi rigidi possono produrre nella risposta del sistema dei *falsi modi* caratterizzati da frequenze proprie molto basse che tuttavia possono essere facilmente individuati e trascurati dallo sperimentatore. Se, ad esempio, si eccita con un martello strumentato un pezzo che è stato appeso mediante un tirante e si misura con un accelerometro posto sul corpo stesso l'accelerazione di un suo punto, nella risposta del sistema si otterrà sicuramente un picco in corrispondenza della frequenza caratteristica associata al moto del pendolo. Se la lunghezza del tirante è elevata, la frequenza del moto rigido risulta molto bassa rispetto alle vibrazioni del componente, e risulta quindi facile individuare la frequenza caratteristica del moto rigido. Inoltre vista l'estrema cedevolezza del vincolo (nella direzione dell'eccitazione), la risposta del sistema viene influenzata dalla interazione tra componente e sistema di montaggio solo in corrispondenza delle basse frequenze.

Il montaggio si definisce *ground* quando il vincolo realizzato approssima la condizione di incastro perfetto: il vincolo è talmente rigido che eventuali frequenze introdotte dalla cedevolezza del vincolo risultano ben al di sopra di quelle di interesse. Evidentemente il vincolo *ground* prescelto deve essere tale da non compromettere la mobilità del componente stesso, almeno per quanto

riguarda il campo di frequenze di interesse, altrimenti viene ovviamente meno la possibilità ottenere dalla prova risultati attendibili. Si tenga presente, inoltre, che nessun vincolo *ground* reale può effettivamente realizzare un incastro perfetto: esisterà sempre una frequenza oltre la quale il vincolo non può essere considerato come rigido. L'importante è che tale campo di frequenze cada ben al di sopra di quello di interesse.

Il montaggio *ground* è il caso speculare a quello del montaggio *free*: la risposta alle basse frequenze è quella propria del sistema, mentre alle alte frequenze vi sono importanti contributi del sistema di fissaggio.

Quando si effettua un'analisi modale sperimentale, come in ogni tipo di test, è necessario utilizzare la giusta strumentazione. In particolare per questo genere di analisi, le caratteristiche geometriche ed il peso della struttura in esame determinano sia il tipo di eccitazione che il tipo di strumentazione, ed entrambe condizionano la tecnica di analisi; inoltre, ogni ricerca sperimentale va effettuata in modo che la risposta misurata contenga tutte le informazioni necessarie.

La struttura viene eccitata mediante opportune attrezzature in grado di generare forze o imporre spostamenti secondo un prefissato andamento nel tempo, mentre la risposta del sistema in termini di vibrazione viene acquisita mediante degli accelerometri. Questi ultimi sono stati descritti nei paragrafi precedenti, mentre ora verranno descritti i trasduttori di forza più frequentemente utilizzati ovvero lo shaker elettromagnetico e il martello strumentato.

La scelta del tipo di attuatore più adatto a sollecitare una struttura è funzione dell'obiettivo della sperimentazione e delle caratteristiche stesse della struttura.

Se la struttura da eccitare è sufficientemente leggera e flessibile, e le forze richieste sono relativamente limitate in ampiezza, il trasduttore più largamente utilizzato è lo shaker elettromagnetico (Figura 26).

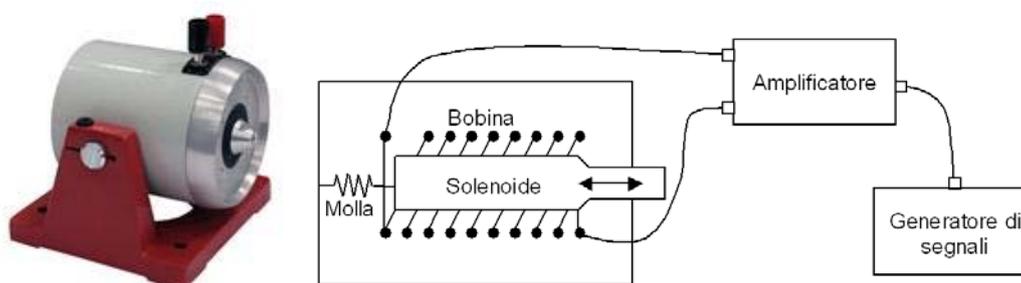


Figura 26 – Schema di uno shaker elettromagnetico

Attraverso un generatore di segnali si comanda un amplificatore in modo tale da fornire allo shaker una corrente elettrica di alimentazione proporzionale alla forza che si vuole applicare alla struttura.

Lo shaker è costituito da un solenoide, elasticamente vincolato al telaio dello shaker stesso, che si muove in funzione della corrente che circola nella bobina che lo avvolge.

Nel caso ideale il segnale in uscita dal generatore di segnali viene trasformato senza errori in un segnale elettrico che va ad alimentare la bobina. Questa mette in movimento il solenoide con la legge di moto assegnata e quindi alla struttura da eccitare viene impressa (tramite la testa del solenoide) una forza del tutto simile a quella impostata tramite il generatore di segnali. Nella realtà, anche trascurando il fatto che l'amplificatore non può trasformare perfettamente il segnale in ingresso in un segnale di corrente puramente proporzionale, il segnale di forza risultante può essere molto diverso da quello impostato. Ciò è naturalmente determinato dal fatto che il sistema molla-solenoide ha una sua dinamica interna, che fa sì che il sistema si comporti come un filtro passa-basso: se si richiede allo shaker di applicare forzanti con un contenuto in frequenza troppo elevato, il segnale di forza risultante sarà totalmente diverso da quello imposto. Inoltre, va detto che una volta che la testa viene collegata alla struttura da eccitare, l'inerzia dello shaker aumenta, e quindi le sue prestazioni diminuiscono rispetto a quelle nominali (a vuoto). Più leggera sarà la struttura da eccitare, maggiore sarà la possibilità di sfruttare le capacità dello shaker.

Va comunque chiarito che, poiché il segnale di comando proveniente dal generatore di segnali e la forza realmente applicata alla struttura sono generalmente diversi, vi è sempre la necessità di una misura diretta della forza applicata attraverso una cella di carico.

In molti casi, specie per l'analisi modale di strutture relativamente leggere, è conveniente eccitare la struttura con forze impulsive, ossia di durata estremamente breve ma di ampiezza significativa. Lo strumento più utilizzato a tale scopo è il martello strumentato (Figura 27).



Figura 27 - Schema di un martello strumentato

Il martello strumentato è molto simile a un normale martello con una testa metallica relativamente pesante. La testa può essere ulteriormente appesantita da un contrappeso in modo da aumentare le forze di inerzia che con la martellata eccitano la struttura. Sulla testa è montata una cella di carico

che misura la forza che effettivamente si scambiano il martello e la struttura all'atto della eccitazione. Sulla cella di carico (ovvero sulla parte che andrà a contatto della struttura da eccitare) possono essere avvitate delle punte, costituite di vario materiale. Le punte possono essere interamente in metallo (generalmente in acciaio), oppure di plastica o di gomma più o meno dura. Il compito di tali componenti è quello di costituire un primo filtro meccanico (passa-basso) tra il martello e la struttura da eccitare: se la struttura necessita di eccitazione ad alte frequenze si utilizzerà una punta in metallo, se le frequenze a cui si vuole sollecitare la struttura sono via via decrescenti, si utilizzeranno punte con spessori crescenti di gomma e/o di materiale più morbido. La rigidità della punta, a parità di rigidità della struttura e di massa totale del martello, caratterizza il periodo T_c e, quindi, la forma dell'impulso (Figura 28): in particolare T_c cresce passando dalla punta di acciaio a quella di gomma.

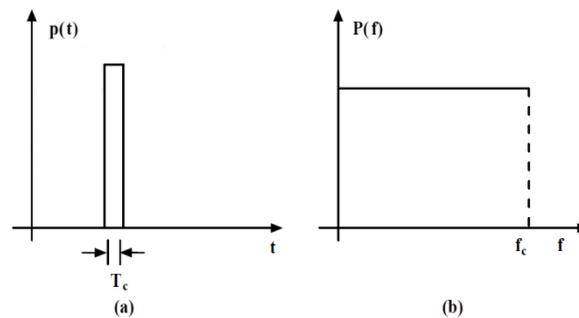


Figura 28 - Forma di onda prodotta da un impatto (a) e spettro di frequenza (b)

Lo spettro in frequenza dell'eccitazione impulsiva di valore massimo p nell'intervallo di tempo T_c , assume valore costante p nel dominio delle frequenze; ovvero lo spettro di frequenza è continuo, con ampiezza costante nell'intervallo da zero a $f_c = 1/T_c$.

La forza realmente eccitante la struttura è uguale alla massa totale del martello per l'accelerazione durante l'impatto.

I martelli strumentati possono essere costruiti con masse variabili da pochi grammi fino ad alcune tonnellate. I campi di frequenza interessati dall'eccitazione variano da 0 a 5000 Hz per i martelli più piccoli, e da 0 a 10 Hz per quelli più grandi. La combinazione costituita dalla testa e dalla massa del martello strumentato consente di trasferire energia alla struttura nel campo di frequenza di interesse. Il martello ad impatto, che rappresenta lo strumento più comune per generare eccitazioni impulsive, presenta vantaggi e svantaggi. Per quanto concerne i pregi, occorre rilevare che lo strumento è relativamente poco costoso ed è adatto per misure rapide. Per contro, deve essere evidenziata la difficoltà di riprodurre impulsi successivi uguali a quelli precedenti. Inoltre, merita particolare

attenzione l'esecuzione di un impatto, poiché la produzione di impatti multipli crea difficoltà nella fase di trattamento dei segnali.

La funzione che viene calcolata a partire dai due segnali acquisiti dall'accelerometro e dal trasduttore di forza, per ogni misurazione effettuata, è la *risposta in frequenza* $H(\omega)$ del sistema, nota anche con l'acronimo FRF, *Frequency Response Function*, in particolare:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (13)$$

dove $X(\omega)$ e $F(\omega)$ sono, rispettivamente, le trasformate di Fourier del segnale acquisito in uscita e del segnale acquisito all'ingresso, ovvero la FRF di un sistema è il rapporto fra le trasformate di Fourier della risposta $x(t)$ e dell'eccitazione $f(t)$.

Tale funzione la si può immaginare, per la generica coppia di punti misurati, come una sorta di rapporto tra la risposta ottenuta dal sistema e l'eccitazione che l'ha originata. Questa "normalizzazione" dell'effetto rispetto alla causa consente di ottenere, per ogni frequenza, un'informazione in termini di ampiezza e fase, relativa ad una caratteristica propria del sistema. Infatti, nei casi in cui è possibile considerare il sistema lineare, al variare dell'eccitazione varia proporzionalmente anche la risposta, e conseguentemente resta inalterato il rapporto tra le due funzioni.

Per giudicare l'affidabilità delle misure si può usare la funzione *coerenza* γ^2 che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione:

$$\gamma^2 = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)} \quad (14)$$

dove $S_{xx}(\omega)$ è la densità spettrale (o autospettro) della risposta, $S_{ff}(\omega)$ è la densità spettrale della eccitazione e $S_{fx}(\omega)$ è la densità spettrale incrociata (o cross-spettro) della risposta e della eccitazione.

A tal proposito si ricorda che si definisce autospettro di un segnale $x(t)$ il prodotto della trasformata di Fourier del segnale $X(\omega)$ per la trasformata di Fourier del segnale complesso coniugato $X^*(\omega)$:

$$S_{xx}(\omega) = X^*(\omega)X(\omega) \quad (15)$$

Mentre si definisce cross-spettro di due segnali $x(t)$ e $f(t)$ il prodotto della trasformata di Fourier del segnale $X(\omega)$ per la trasformata di Fourier del segnale complesso coniugato $F^*(\omega)$:

$$S_{fx}(\omega) = F^*(\omega)X(\omega) \quad (16)$$

Il valore di γ^2 è compreso tra 0 e 1. Quando γ^2 è prossimo all'unità, la risposta del sistema è dovuta alla sola forzante applicata, mentre quanto più γ^2 si allontana da 1 e si avvicina a zero, tanto maggiormente la risposta del sistema è prodotta prevalentemente dal rumore: se risulta $\gamma^2 < 0.75$ i risultati della misura sono poco attendibili, e la misura non è affidabile.

Tra le cause che danno luogo a bassi valori della coerenza troviamo la presenza di eccitazioni che non vengono misurate e la non linearità del sistema.

3.3.2 Fondamenti analitici dell'analisi modale

L'analisi modale, sia numerica sia sperimentale, costituisce un potente mezzo di progettazione e di studio delle strutture. Dal punto di vista numerico si possono distinguere due categorie di problematiche, a seconda dell'importanza rivestita dallo smorzamento nella risposta, entrambe riguardanti lo studio delle oscillazioni libere della struttura. I casi nei quali lo smorzamento è tanto piccolo da poter essere trascurato vengono affrontati con tecniche risolutive che vanno sotto il nome di analisi modale reale, mentre nei casi in cui lo smorzamento non è trascurabile per la caratterizzazione della struttura occorre fare ricorso all'analisi modale complessa.

Si consideri un generico sistema a n gradi di libertà (Figura 29).

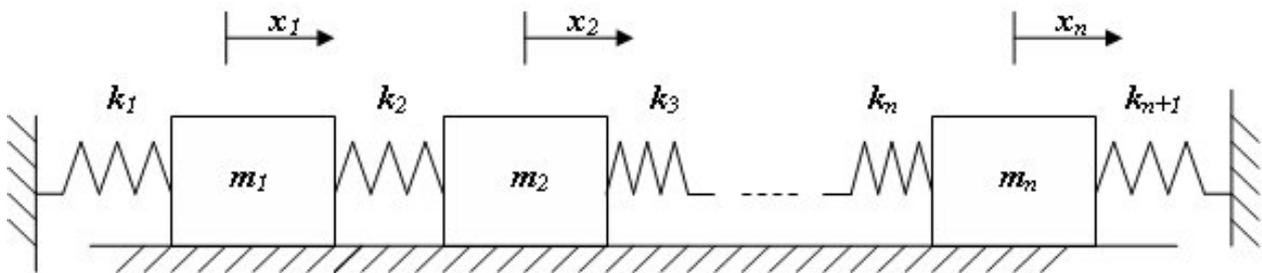


Figura 29 – Schematizzazione di un sistema a n gradi di libertà

Se lo smorzamento viscoso risulta trascurabile e il sistema non è eccitato, le equazioni del moto si scrivono:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (17)$$

in cui $[M]$ è la matrice di massa, $[K]$ è la matrice di rigidità (entrambe di dimensione $n \times n$ se n sono i gradi di libertà del sistema), $\{x\}$ e $\{\ddot{x}\}$ sono, rispettivamente, i vettori degli spostamenti e delle accelerazioni.

La soluzione generale di questa equazione è di tipo esponenziale:

$$\{x\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (18)$$

e la sua sostituzione nell'equazione di equilibrio porta ad un problema agli autovalori definito dalla relazione:

$$(-[M]\omega^2 + [K])\{X\} \cos(\omega t) = 0 \quad (19)$$

ovvero

$$(-[M]\omega^2 + [K])\{X\} = 0 \quad (20)$$

Il problema è omogeneo e ammette soluzione non banale solo se il determinante della matrice $(-[M]\omega^2 + [K])$ è nullo:

$$\det|-[M]\omega^2 + [K]| = 0 \quad (21)$$

I valori del parametro ω che annullano tale determinante prendono il nome di *frequenze proprie*; a ciascuno di essi è associata una configurazione di spostamenti $\{X\}$ che prende il nome di autovettore o *forma del modo*.

La soluzione completa del problema è data dalla matrice degli autovettori:

$$[X] = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]$$

e dalla matrice degli autovalori:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Le equazioni del moto per un sistema a più gradi di libertà con smorzamento viscoso nel caso di vibrazione libera (sistema non forzato) si scrivono:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (22)$$

in cui $[C]$ è la matrice di smorzamento viscoso. La possibile soluzione è una funzione armonica smorzata descritta da:

$$\{x\} = \{A\}e^{i\lambda t} \quad (23)$$

in cui $\lambda = \alpha + i\omega$ è un esponente complesso. Sostituendo dunque l'espressione (23) nell'equazione del moto si ha:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{A\} = 0 \quad (24)$$

La soluzione della (24) è un problema agli autovalori nella forma:

$$(\lambda_k^2[M] + \lambda_k[C] + [K])\{A\}^k = 0 \quad (25)$$

con $k = 1, 2, \dots, n$.

Gli autovettori, a seguito della ipotesi di proporzionalità, risultano ancora una volta i medesimi del sistema non smorzato.

Gli autovalori si ricercano annullando la matrice dei coefficienti del problema agli autovettori, ovvero imponendo:

$$\det|\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]| = 0 \quad (26)$$

Se siamo in ipotesi di smorzamento proporzionale, la soluzione è data da $2n$ autovalori e da $2n$ autovettori complessi e coniugati, dove n è il numero dei gradi di libertà del sistema. Gli autovalori possono scriversi nella forma:

$$\lambda_k = \omega_{nk} \left(-\xi_k + j\sqrt{1 - \xi_k^2} \right) \quad (27)$$

dove ω_{nk} indica la pulsazione naturale e ξ_k è lo smorzamento del modo k -esimo. In tali ipotesi si ha quindi che il moto libero di un sistema con n gradi di libertà con smorzamento proporzionale è una combinazione lineare di n moti armonici smorzati.

Si osservi inoltre che il modulo dell'autovalore (in pratica la frequenza propria complessa) risulta:

$$|\lambda_k| = \sqrt{\left(\omega_{nk}\sqrt{1-\xi_k^2}\right)^2 + (\omega_{nk}\xi_k)^2} = \sqrt{\omega_{nk}^2(1-\xi_k^2) + \omega_{nk}^2\xi_k^2} = \sqrt{\omega_{nk}^2} = \omega_{nk} \quad (28)$$

3.3.3 Applicazioni dell'analisi modale sperimentale

Oltre all'attività sperimentale di vibrometria laser descritta nei paragrafi precedenti per stimare il livello delle vibrazioni superficiali a cui è soggetto il blocco cilindri del motore a banco durante le condizioni operative del propulsore, sono state condotte sulle principali componenti del motore (quali il blocco cilindri e l'albero motore) delle analisi modali sperimentali per stimarne i parametri modali, ovvero le frequenze proprie, i modi di vibrare, gli smorzamenti e le forme modali.

Innanzitutto è stato necessario costruire per entrambi i sottosistemi del propulsore (blocco cilindri e albero motore) dei modelli test, ovvero è stato necessario discretizzare le strutture in esame con una serie di punti, opportunamente scelti, al fine di creare dei modelli i cui punti rappresentino i luoghi in cui sono stati poi applicati i trasduttori di forza e posizionati, di volta in volta, gli accelerometri per l'acquisizione della risposta in termini di vibrazioni.

Le Figure 29 e 30 mostrano, rispettivamente, il modello fisico reale e il relativo modello test del blocco cilindri e dell'albero a gomiti del motore a banco.

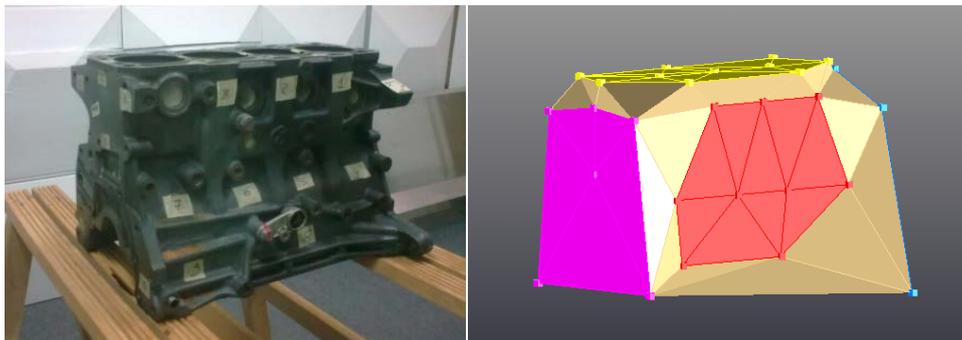


Figura 30 – Blocco cilindri: modello fisico (a sinistra) e modello test (a destra)

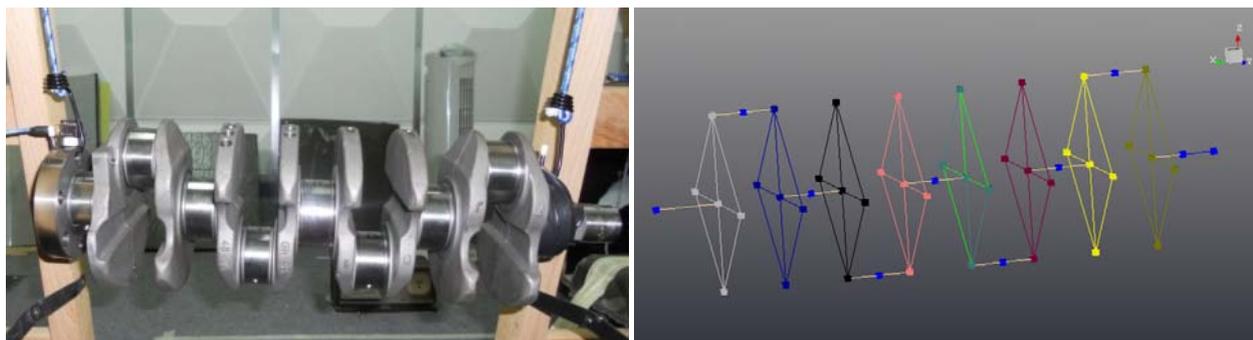


Figura 31 – Albero a gomiti: modello fisico (a sinistra) e modello test (a destra)

Come è possibile vedere entrambe le componenti del motore sono state schematizzate mediante una serie di nodi posizionati lungo la geometria. In particolare, per il blocco cilindri i punti sono stati presi sulle superfici esterne, mentre per l'albero a gomiti i nodi sono stati presi in corrispondenza dei perni di banco e di manovella e lungo la geometria delle maschette, come mostrato nel dettaglio della Figura 31.

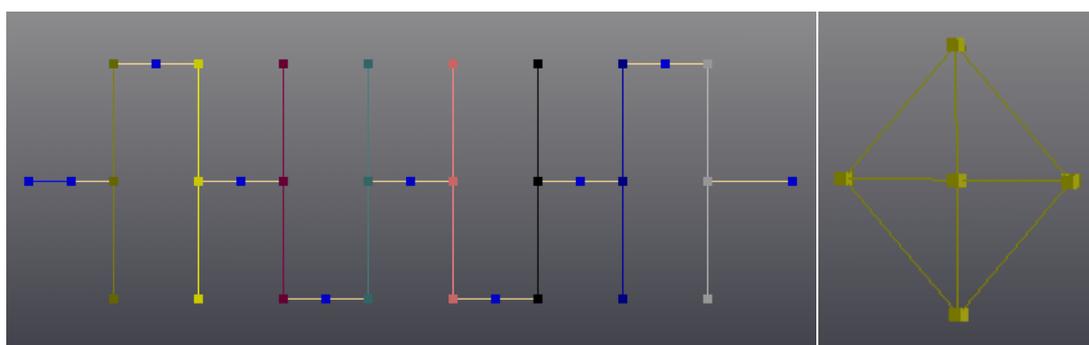


Figura 32 – Disposizione dei nodi per realizzare il modello test dell'albero a gomiti (a destra il dettaglio relativo ad una maschetta)

Generalmente una prova di analisi modale sperimentale viene eseguita eccitando la struttura con una forza esterna applicata sequenzialmente nei diversi punti che costituiscono il modello test, ed acquisendo contemporaneamente la risposta in un particolare punto. In alternativa, è possibile eccitare il sistema agendo sempre nel medesimo punto (accuratamente scelto) e rilevando la risposta in tutti gli altri punti del modello test.

Come è stato detto precedentemente, ogni ricerca sperimentale va effettuata in modo che la risposta misurata contenga tutte le informazioni necessarie per descrivere il sistema oggetto dell'indagine, ed inoltre in ogni tipo di test è necessario utilizzare la giusta strumentazione. Quando si effettua un'analisi modale sperimentale, abbiamo visto che le caratteristiche geometriche ed il peso della struttura in esame determinano, in particolare, sia il tipo di eccitazione che il tipo di strumentazione, e che entrambe condizionano la tecnica di analisi. Nel caso in esame, per eseguire i test sia sull'albero a gomiti che sul blocco cilindri, è stato utilizzato per sollecitare il sistema un martello

strumentato, mentre la risposta della struttura è stata acquisita attraverso un accelerometro triassiale di tipo ICP (Figura 32).



Figura 33 – Strumentazione utilizzata per effettuare i test sperimentali: martello strumentato (a sinistra) e accelerometro triassiale (a destra)

In particolare per l'albero motore, schematizzato con 10 punti di acquisizione disposti in corrispondenza dei perni di banco e di manovella, e con 5 punti di acquisizione per ciascuna maschetta (Figura 31), sono state eseguite in tutto 150 misurazioni, sollecitando l'albero con il martello strumentato lungo le tre direzioni (x, y, z). Per il blocco cilindri, invece, schematizzato con 38 punti di acquisizione disposti sulle superfici laterali esterne (Figura 30), sono state eseguite in tutto 114 misurazioni, sollecitando il sistema con il martello strumentato lungo le tre direzioni (x, y, z).

In ciascun punto di misura, l'accelerometro triassiale ha permesso di determinare per ogni stato di eccitazione generato attraverso il martello strumentato, la risposta della struttura nelle tre direzioni (x, y, z).

Le figure che seguono mostrano, a puro titolo di esempio, gli andamenti, nel campo di frequenza di interesse (da 0 a 5000 Hz), del valore della funzione coerenza per due differenti misurazioni eseguite sull'albero motore. Tale funzione, come detto precedentemente, viene utilizzata per giudicare l'affidabilità di misure sperimentali di questo tipo.

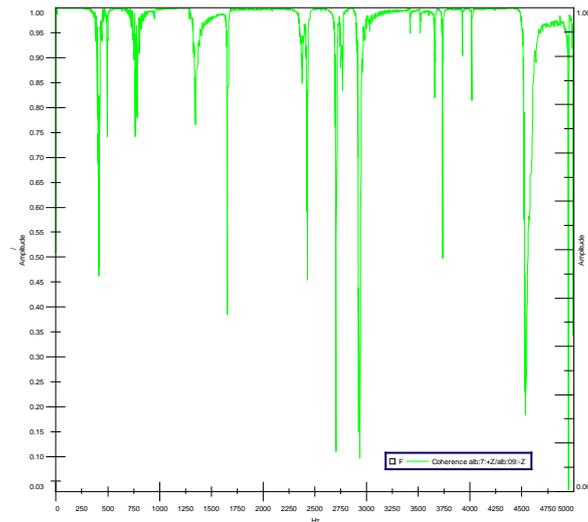


Figura 34 – Andamento della funzione coerenza relativa al punto di misura alb:7 (+Z), con eccitazione in alb:09 (-Z)

La Figura 34 mostra l’andamento della funzione coerenza quando il martello strumentato eccita l’albero motore in direzione verticale (e verso il basso, $-Z$) nel punto 9, mentre la risposta della struttura viene registrata dall’accelerometro posto in corrispondenza del punto 7 dell’albero motore: in particolare viene mostrato l’andamento della funzione coerenza per la risposta della struttura in direzione verticale.

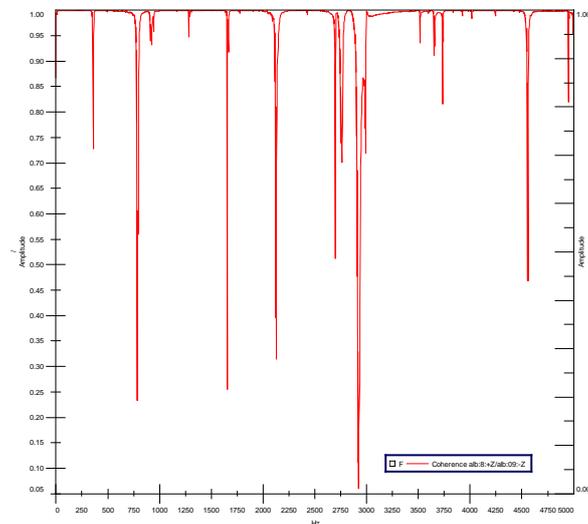


Figura 35 – Andamento della funzione coerenza relativa al punto di misura alb:8 (+Z), con eccitazione in alb:09 (-Z)

La Figura 35 mostra, invece, l’andamento della funzione coerenza quando il martello strumentato eccita l’albero motore sempre nel punto 9 e sempre in direzione verticale (e verso il basso, $-Z$), mentre l’accelerometro registra la risposta della struttura, in direzione verticale, in corrispondenza del punto 8.

Come è possibile osservare da entrambi i grafici, i valori della funzione coerenza sono piuttosto soddisfacenti. Comportamenti analoghi sono stati osservati anche per gli altri punti di misurazione e pertanto i risultati delle misure possono ritenersi attendibili.

I dati acquisiti durante le analisi modali, sia in termini di forze che di vibrazioni, sono stati quindi analizzati nel dominio della frequenza, al fine di ricavare le caratteristiche dinamiche della struttura in termini di frequenze proprie, forme modali e smorzamenti.

La Figura 36 mostra, a titolo di esempio, gli andamenti delle funzioni di risposta in frequenza *FRF* (nel campo da 0 a 5000 Hz) dei segnali acquisiti dall'accelerometro nelle tre direzioni delle misurazioni (x, y, z) effettuate nel punto 5 dell'albero motore e dal trasduttore di forza quando il sistema è sollecitato in corrispondenza del punto 9, ovvero quando il martello strumentato eccita l'albero motore in corrispondenza del punto 9, in direzione verticale e verso il basso.

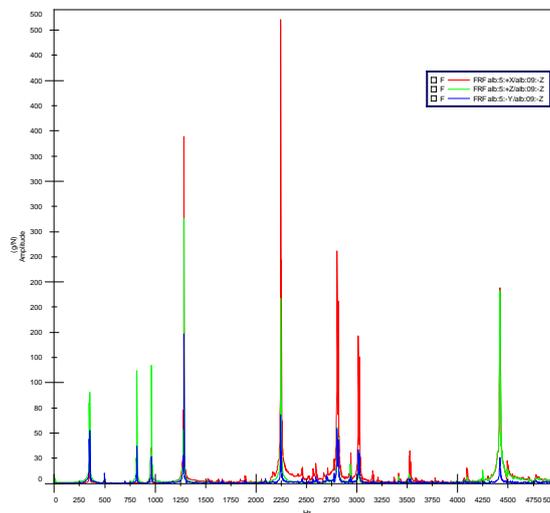


Figura 36 – Andamenti delle FRF relative al punto di misura alb:5, con eccitazione in alb:09 (-Z)

In figura la curva rossa rappresenta la FRF relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione x , la curva verde quella relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione y e la curva blu quella relativa alla direzione z . Come è possibile osservare gli andamenti delle FRF valutate in funzione delle risposte nelle tre direzioni (x, y, z), sono piuttosto simili. Picchi di maggiore entità si registrano per la FRF relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione x , in particolare in corrispondenza delle frequenze di 1280, 2250 e 2800 Hz. Altri picchi, di entità minore, si osservano in corrispondenza delle frequenze di 350, 816, 959, 3520 e 4420 Hz.

Nella Tabella 3 si riportano i risultati dei test sperimentali di analisi modale condotti sull'albero motore in termini di frequenze proprie e smorzamenti.

Tabella 3 – Risultati Analisi Modali Sperimentali		
Modo	Frequenza Naturale [Hz]	Smorzamento %
1	351.1	0.100
2	817.5	0.015
3	958.9	0.006
4	1281.3	0.038
5	1662.7	0.021
6	2091.3	0.076

Le figure che seguono, invece, mostrano gli andamenti, nel campo di frequenza di interesse (da 0 a 3200 Hz), del valore della funzione coerenza per tre differenti misurazioni eseguite sul blocco cilindri del motore.

In particolare, le Figure 37 e 38 mostrano gli andamenti della funzione coerenza quando il martello strumentato eccita il blocco cilindri in direzione parallela all'asse dell'albero nel punto *Front:1*, mentre la risposta della struttura, anch'essa in direzione parallela all'asse dell'albero, viene registrata dall'accelerometro che è posizionato, rispettivamente, in corrispondenza del punto *Left:8* della superficie laterale sinistra del blocco cilindri e in corrispondenza del punto *Rear:4* della superficie posteriore dello stesso.

La Figura 39, invece, mostra l'andamento della funzione coerenza quando il martello strumentato eccita il sistema in direzione verticale (e verso il basso, $-Z$) nel punto *Top:5* della superficie superiore del blocco cilindri, mentre la risposta dell'accelerometro, anch'esso posizionato sulla superficie superiore, è rilevata in direzione verticale in corrispondenza del punto *Top:2*.

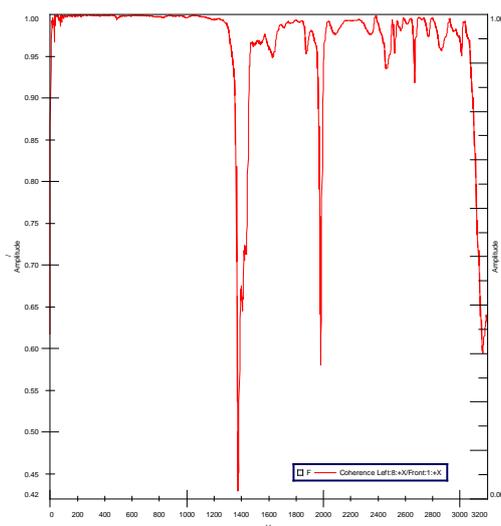


Figura 37 - - Andamento della funzione coerenza relativa al punto di misura Front:1 (+X), con eccitazione in Left:8 (+X)

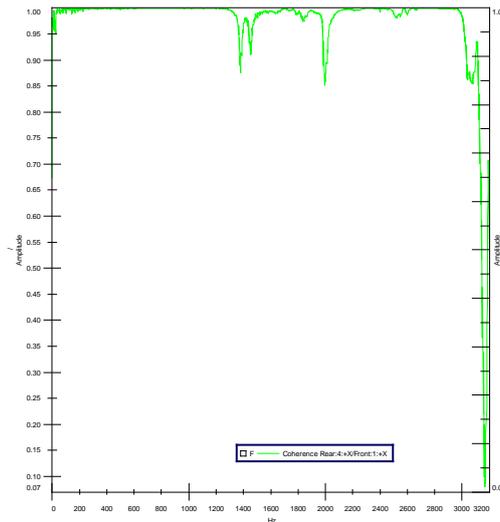


Figura 38 – Andamento della funzione coerenza relativa al punto di misura Front:1 (+X), con eccitazione in Rear:4 (+X)

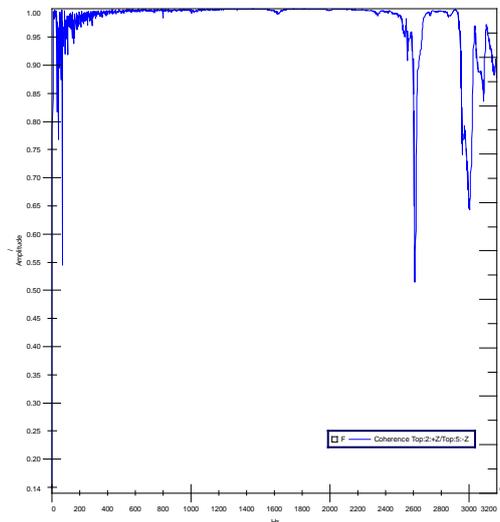


Figura 39 – Andamento della funzione coerenza relativa al punto di misura Top:2 (+Z), con eccitazione in Top:5 (-Z)

Anche in questo caso, come è possibile osservare dai grafici, i valori della funzione coerenza sono molto soddisfacenti e quindi i risultati delle misure possono ritenersi attendibili.

Un’analisi dei dati ottenuti nel dominio della frequenza per il blocco cilindri, ha permesso di ricavare le caratteristiche dinamiche della struttura in termini di frequenze proprie, forme modali e smorzamenti.

La Figura 40 mostra, a titolo di esempio, gli andamenti delle funzioni di risposta in frequenza *FRF* (fino a 3200 Hz) dei segnali acquisiti dall’accelerometro nelle tre direzioni delle misurazioni (*x, y, z*) effettuate nel punto di misura *Top:1* del blocco cilindri e dal martello strumentato quando il sistema è sollecitato in corrispondenza del punto disposto sulla superficie frontale *Front:1* in direzione parallela all’asse dell’albero motore (+X).

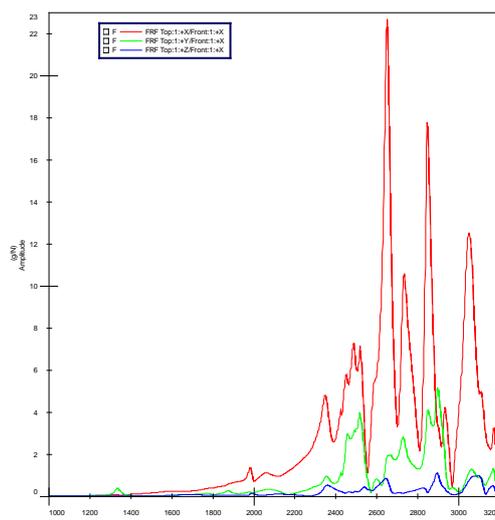


Figura 40 – Andamenti delle FRF relative al punto di misura Top:1, con eccitazione in Front:1 (+X)

In figura la curva rossa rappresenta la FRF relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione x , la curva verde quella relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione y e la curva blu quella relativa alla direzione z . Come è possibile osservare i picchi di maggiore entità si registrano per la FRF relativa alla misurazione effettuata lungo la direzione x , in particolare in corrispondenza delle frequenze di 2650, 2848 e 3052 Hz. Altri picchi, di entità minore, si osservano in corrispondenza delle frequenze di 1982, 2350, 2490 e 2735 Hz.

Nella Tabella 4 si riportano i risultati dei test sperimentali di analisi modale condotti sul blocco cilindri in termini di frequenze proprie e smorzamenti.

Tabella 4 – Risultati Analisi Modali Sperimentali		
Modo	Frequenza Naturale [Hz]	Smorzamento %
1	1333.2	0.43
2	1677.7	1.29
3	1994.0	0.52
4	2084.3	0.31
5	2355.5	0.59
6	2462.7	0.48

Generalmente, risultati sperimentali di questo tipo vengono utilizzati per tarare modelli numerici agli elementi finiti realizzati a partire dalle informazioni disponibili sulla geometria e sui materiali che costituiscono il sistema. Le Figure 41 e 42 riportano, rispettivamente, il modello geometrico e il relativo modello agli elementi finiti dell'albero a gomiti e del blocco cilindri del motore benzina in esame. I modelli numerici così tarati potranno poi essere utilizzati per studiare la risposta strutturale

del sistema all'azione di una qualsiasi sollecitazione, e quindi essere adoperati in un'eventuale fase di ottimizzazione.

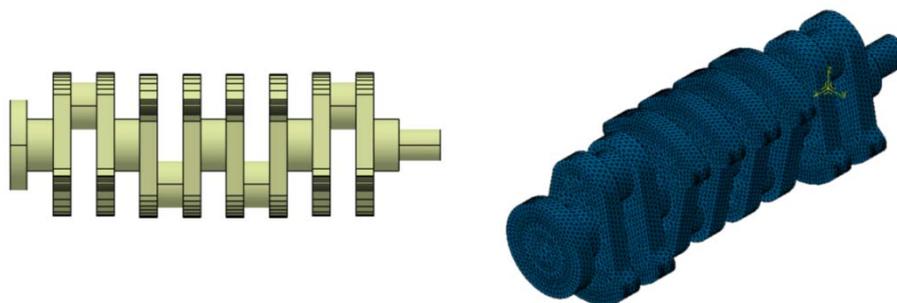


Figura 41 – Albero a gomiti: modello geometrico (a sinistra) e modello FE (a destra)

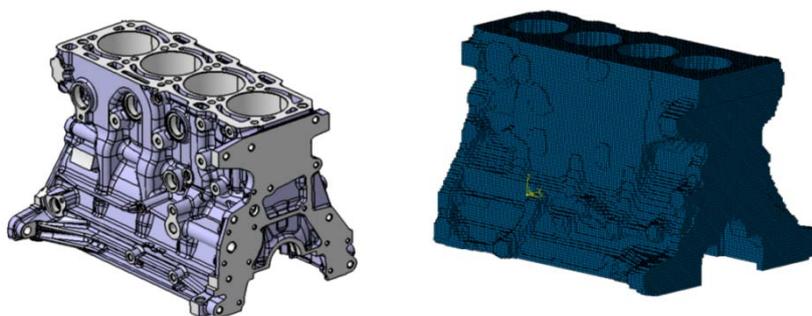


Figura 42 – Blocco cilindri: modello geometrico (a sinistra) e modello FE (a destra)

I modelli agli elementi finiti delle due componenti del motore sono stati realizzati a partire dai modelli CAD. In particolare il modello CAD dell'albero motore non è stato fornito dalla casa produttrice del propulsore e quindi, solo dopo un'accurata serie di misure eseguita sulla struttura, è stato possibile ricostruirne la geometria.

Il modello FE dell'albero motore è costituito da 24298 nodi e 103181 elementi tetraedrici (CTETRA), mentre il modello FE del blocco cilindri consiste di 317065 nodi e 271453 elementi solidi a sei facce (CHEXA). Entrambi i modelli FE sono stati realizzati negli ambienti dedicati del software LMS Virtual.Lab.

Su entrambi i modelli sono state condotte con il software MSC.Nastran® analisi modali che hanno permesso di determinare le frequenze naturali e i modi propri di vibrare dei due componenti, in cui sono state replicate le condizioni di vincolo utilizzate durante le prove di analisi modale sperimentale.

I risultati di tali analisi sono riportati in Tabella 5; mentre in Figura 43, a puro titolo di esempio, sono mostrati il primo modo flessionale (alla frequenza di 237.14 Hz) e il primo modo torsionale dell'albero motore (alla frequenza di 588.65 Hz).

Tabella 5 – Risultati delle Analisi Modali Numeriche			
Blocco cilindri		Albero motore	
Modo	Frequenza naturale [Hz]	Modo	Frequenza naturale[Hz]
1	650.64	1	237.14
2	847.36	2	334.32
3	935.42	3	538.39
4	1088.31	4	588.65
5	1234.79	5	618.73
6	1693.27	6	816.73

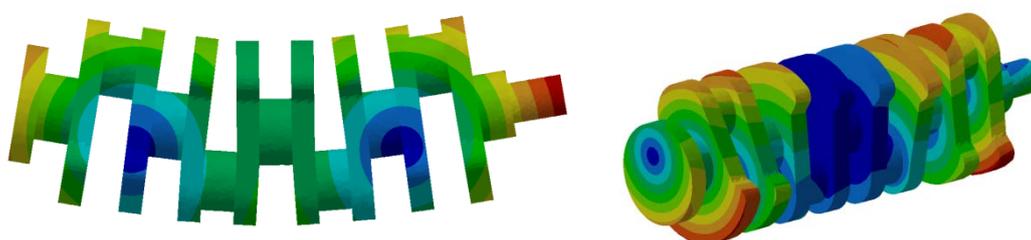


Figura 43 – Primo modo flessionale a 237.14 Hz (a sinistra) e primo modo torsionale a 588.65 Hz (a destra) dell'albero motore

Nella Figura 44, invece, sono mostrati il primo modo flessionale (alla frequenza di 650.64 Hz) e il primo modo torsionale del blocco cilindri (alla frequenza di 1088.31 Hz).

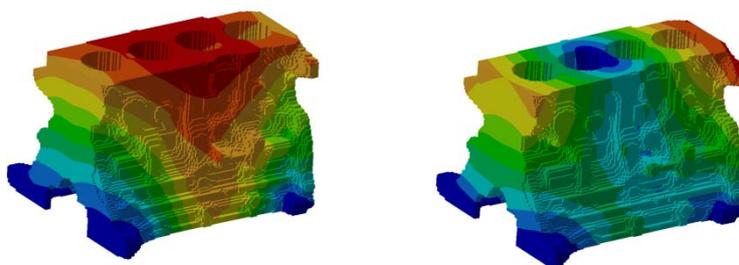


Figura 44 – Primo modo flessionale a 650.64 Hz (a sinistra) e primo modo torsionale a 1088.31 Hz (a destra) del blocco cilindri

Una volta noti i risultati numerici e quelli sperimentali, il passo logico successivo è quello di effettuare una correlazione al fine di validare il comportamento stimato con il modello numerico con quello reale. Al momento dello studio, sul motore a banco erano in corso solo attività di tipo sperimentale, al fine di caratterizzare il comportamento del propulsore e delle sue componenti principali, nelle condizioni di funzionamento. E solo come primo step sono state condotte le analisi modali appena descritte. L'analisi di correlazione tra il modello numerico e quello sperimentale sarà svolta in futuro al fine di poter caratterizzare da un punto di vista numerico l'effettivo comportamento delle componenti del motore in esame.

Per effettuare una correlazione tra i dati numerici e quelli sperimentali, occorre tener presente che i dati sperimentali riguardano in generale la misura diretta delle FRF, mentre i dati numerici si esprimono in termini di matrici di massa e di rigidità, inoltre non si hanno in genere dati di previsione numerica sulla matrice di smorzamento.

Generalmente una base di confronto naturale tra i dati numerici e quelli sperimentali è data dal modello modale che viene espresso in termini di autovalori ed autovettori. I dati sperimentali infatti vengono sempre tradotti in termini di parametri modali, mentre i dati numerici vengono tradotti direttamente in termini di autovalori ed autovettori. Per le frequenze di risonanza si può procedere ad un confronto diretto, su tabelle o su di un diagramma, per le deformate modali si può procedere con controlli di ortogonalità e consistenza.

A questo punto occorre ricordare che il numero di gradi di libertà che sono disponibili nel modello numerico agli elementi finiti è sempre molto più grande rispetto al numero dei punti di misura ottenibili dalle prove sperimentali, ovvero al numero di gradi di libertà che sono disponibili nel modello test. È quindi necessario fare riferimento ad un modello numerico *ridotto*, in modo tale che per quest'ultimo il numero di gradi di libertà numerici corrisponda a quello dei gradi di libertà sperimentali. Nella Figura 45 si riportano il modello FE, il modello test e il modello ridotto relativi all'albero motore.

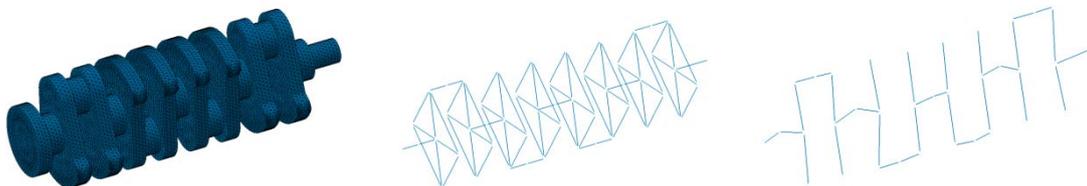


Figura 45 – Modello FE, modello test e modello ridotto dell'motore albero (da sinistra verso destra)

Per quanto riguarda il confronto tra deformate modali numeriche e sperimentali si definisce un criterio di fiducia modale (Modal Assurance Criterion, MAC) per il quale:

Riferimenti

- [1] P. R. Valletta, M. J. Crocker, Noise and Vibration Measurements, Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by M. J. Crocker, John Wiley & Sons Inc., 2007
- [2] F. Jacobsen, Sound Intensity Measurements, Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by M. J. Crocker, John Wiley & Sons Inc., 2007
- [3] R. B. Randall, Noise and Vibration Data Analysis, Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by M. J. Crocker, John Wiley & Sons Inc., 2007
- [4] D. J. Ewins, Modal Analysis and Modal Testing, Handbook of Noise and Vibration Control, Edited by M. J. Crocker, John Wiley & Sons Inc., 2007
- [5] N. F. Reiger, The Relationship Between Finite Element Analysis and Modal Testing
- [6] D. Siano, Vibro-Acosutic Characterisation of a D.I. Diesel Engine by the use of the Scanning Laser Vibrometer Technique, 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia, 2007

Capitolo 4

Predizione della radiazione acustica e del comfort interno

I motori a combustione interna rappresentano la principale fonte di vibrazioni e di rumore presente all'interno di un autoveicolo. Pertanto, quando si progetta un nuovo motore, oltre a tener conto delle prestazioni, dei consumi e della durata, è necessario considerare i livelli di rumore e di vibrazioni connessi con il sistema. Tutti questi diversi obiettivi (prestazioni, consumi, livelli di rumore, ecc.) rappresentano dei veri e propri vincoli progettuali e spesso risultano essere in conflitto tra loro (incrementare le prestazioni di un motore, ad esempio, non sempre ha un risvolto positivo sulle sue emissioni di rumore), quindi è necessario, raggiungere un buon compromesso ancor prima di realizzare un vero e proprio prototipo fisico.

Negli ultimi anni a causa della crescente domanda di veicoli sempre più performanti e confortevoli, e per restare al passo con la concorrenza, le case automobilistiche hanno fatto sempre più ricorso all'uso di tecniche di modellazione CAE e di simulazione numerica con lo scopo di ridurre i tempi di sviluppo e velocizzare l'immissione sul mercato di nuovi prodotti nell'ottica dell'ottimizzazione NVH (*Noise, Vibration, Harshness*), [1, 19, 20]. L'uso di tali tecniche è ormai uno strumento indispensabile già durante le prime fasi decisionali del processo di progettazione di un motore a combustione interna o di un veicolo.

I metodi di modellazione strutturale ed acustica, come il metodo agli elementi finiti, la metodologia multi corpo e il metodo agli elementi di contorno descritti nel capitolo precedente, permettono di stimare non solo le prestazioni del sistema in termini di forze e di durata, ma anche in termini di rumore e di vibrazioni, e sono diventati ormai gli strumenti chiave del processo di sviluppo di un

nuovo motore e di una nuova vettura, per soddisfare non solo le esigenze dei clienti di veicoli confortevoli ma anche con lo scopo di rientrate nei limiti imposti dalle vigenti regolamentazioni, [2-5].

Questo è particolarmente vero nel campo delle basse frequenze e ai bassi regimi di rotazione, dove le vibrazioni generate dal motore, trasmesse direttamente alla scocca per mezzo dei suoi ancoraggi, diventano un importante fenomeno di eccitazione e quindi di rumore all'interno dell'abitacolo.

Nel seguito verranno descritte le attività di ricerca che hanno portato al raggiungimento di due obiettivi: lo studio del comportamento vibroacustico di un prototipo di motore diesel multicilindrico in tutto il suo campo di funzionamento a partire dalla sola conoscenza dei dati geometrici, e la stima del livello di rumore percepito dei passeggeri all'interno dell'abitacolo a partire dalle vibrazioni che il motore trasmette mediante gli ancoraggi alla scocca del veicolo.

Entrambi gli obiettivi sono stati raggiunti mediante l'accoppiamento delle tre tecniche di simulazione numerica descritte nel capitolo precedente: la simulazione dinamica multibody ha permesso di caratterizzare il comportamento dinamico del motore; mentre le note metodologie agli elementi finiti (FEM) e agli elementi di contorno (BEM) hanno permesso di caratterizzare il comportamento vibro-acustico sia del motore sia del veicolo.

4.1 Previsione del rumore emesso da un prototipo di motore multicilindrico

L'attività svolta per studiare il comportamento vibroacustico del prototipo di motore diesel può essere divisa in due parti.

Nella prima parte del lavoro sono stati realizzati due modelli numerici del propulsore: un modello virtuale tridimensionale dettagliato mediante l'uso di un codice di modellazione multibody e un modello monodimensionale mediante l'uso di un codice monodimensionale. Una volta realizzato il modello virtuale dettagliato del *powertrain* sono state condotte delle simulazioni dinamiche (Multi-Body Dynamic Simulation, MBDS) al fine di caratterizzare il comportamento dinamico del motore in termini di forze e di spostamenti in tutto il suo campo di funzionamento. Tali analisi sono state effettuate imponendo un andamento crescente delle velocità dal valore minimo di 1500 giri/min al valore massimo di 4000 giri/min e fornendo come forzanti le curve di pressione in camera stimate precedentemente con il codice monodimensionale. Grazie all'utilizzo dell'approccio multibody, la dinamica del motore è stata descritta considerando sia gli effetti della combustione che quelli legati alle forze di inerzia delle masse in movimento presenti nel sistema. Inoltre, per tener conto del reale comportamento del motore, all'interno del modello multibody sia l'albero motore che il blocco cilindri sono stati considerati come elementi flessibili e descritti mediante i loro parametri modali, [5].

Nella seconda parte dell'attività, invece, l'uso combinato delle note metodologie agli elementi finiti (FEM) e agli elementi di contorno (BEM) ha permesso di determinare il comportamento del motore in termini di vibrazioni e di rumore, [6]. In particolare, la metodologia FEM ha permesso di stimare, a partire dalle forze che si esplicano sul solo blocco cilindri del motore, i valori delle velocità superficiali sullo stesso blocco cilindri, mentre la metodologia BEM ha permesso di stimare il livello di rumore radiato dal motore alla distanza di un metro dalla superficie vibrante, come stabilito dalla normativa ISO 3744. L'approccio BEM utilizzato si basa, in particolare, sulla formulazione indiretta e su uno schema di soluzione di tipo variazionale, mediante l'uso della metodologia del vettore di trasferimento modale (Modal Acoustic Transfer Vector, MATV), [7, 8]. Infine, poiché il motore in esame è un prototipo di cui non si ha a disposizione nessun dato sperimentale, per verificare la bontà dei risultati ottenuti, è stata utilizzata una formulazione analitica per la stima della potenza sonora irradiata da un sistema vibrante già utilizzata in passato e validata su base sperimentale proprio su un motore diesel, [18].

Nel seguito saranno descritte dettagliatamente le differenti procedure numeriche utilizzate.

4.1.1 Simulazione dinamica di un propulsore

Lo studio sul prototipo è stato effettuato a partire dalla sola conoscenza dei dati geometrici di ciascun componente del propulsore, essendo lo stesso ancora in fase di sviluppo.

Abbiamo visto nel capitolo precedente come sistemi meccanici più o meno complessi, come i motori a combustione interna, che sono costituiti da più componenti collegati fra loro e che sono soggetti a spostamenti sia di tipo traslazionale che di tipo rotazionale, possono essere modellati e studiati come sistemi multibody. Alla base della meccanica di sistemi di questo tipo c'è la comprensione del moto di ciascun componente del sistema.

Il modello multibody del motore in esame è stato realizzato utilizzando l'apposito strumento Powertrain Dynamic Simulator (PDS) del software LMS Virtual.Lab. Il PDS è un'applicazione software che fornisce in un ambiente intuitivo tutti gli strumenti per creare prototipi virtuali sia del sistema di trazione che di altri sottosistemi quali sistema comando valvole, sistema di distribuzione, sistema di trasmissione, ecc. Una volta realizzato il modello virtuale, esso è stato utilizzato per eseguire una simulazione dinamica nell'ambiente dedicato *Motion* di Virtual.Lab. Tale simulazione è stata condotta al fine di investigare il comportamento del motore per l'intera gamma di velocità di funzionamento dello stesso, e in particolare, per la previsione dei carichi agenti sul blocco cilindri quando la velocità di funzionamento passa dalla velocità minima di 1500 giri/min alla velocità massima di 4000 giri/min (con un passo pari a 250 giri/min). Tali carichi sono stati poi impiegati per condurre le analisi acustiche, utilizzando l'ambiente *Acoustic* di Virtual.Lab, al fine di valutare

il rumore emesso in termini di livelli di pressione acustica per ciascun regime di rotazione considerato.

4.1.2 Descrizione del prototipo del motore

Oggetto dello studio è stato un prototipo di motore diesel, 4 tempi, con 4 cilindri in linea, con turbocompressore. Le principali caratteristiche tecniche del motore sono riportate in Tabella 1.

Tabella 1 – Caratteristiche principali del propulsore	
Numero di cilindri e disposizione	4, in linea
Cilindrata	1870 cm ³
Alesaggio	80.0 mm
Corsa	92.8 mm
Lunghezza della biella	150.0 mm
Ordine di accensione	1-3-4-2
Tipo di motore	4-tempi

4.1.3 Il modello virtuale 3D

Dal momento che un motore a combustione interna rappresenta un sistema molto complesso, costituito da albero motore, blocco cilindri, pistoni, bielle, volano, ecc., esso è stato modellato ricorrendo alla modellazione multibody. Inoltre, al fine di prevedere un comportamento del motore quanto più aderente alla realtà, nel modello virtuale sia l'albero a gomiti sia il blocco cilindri sono stati considerati come corpi flessibili e descritti mediante l'approccio modale per mezzo delle rispettive frequenze naturali. Tutti gli altri componenti del motore, invece, sono stati considerati come corpi rigidi.

Per realizzare un modello virtuale dettagliato del motore, capace di descrivere tutti i contatti tra i vari elementi che lo costituiscono, è stato necessario fornire informazioni su tutte le componenti del motore, che sono state caratterizzate mediante alcune grandezze geometriche, alle rispettive proprietà di massa, alla posizione del baricentro e ai valori dei momenti di inerzia nei relativi sistemi di riferimento, [3]. La Tabella 2 riporta per ciascun componente del motore i valori di tali parametri. Il modello virtuale 3D è stato realizzato utilizzando l'apposito modulo di simulazione *PowerTrain Dynamic Simulator* (PDS) del software LMS Virtual.Lab.

Per costruire il modello del cranktrain è stato innanzitutto necessario fornire indicazioni sul tipo di motore: numero e disposizione dei cilindri (in linea o a V), la distanza tra gli assi dei vari cilindri, la disposizione (longitudinale o trasversale), l'angolo di beccheggio e l'angolo di rollio. Poiché, inoltre, deve essere specificata la condizione di funzionamento del propulsore sono state fornite,

oltre all'ordine di accensione, anche le curve di pressione in camera per ogni cilindro per tre differenti velocità di funzionamento.

Tabella 2 - Caratteristiche delle principali componenti del motore							
Componente	Massa [Kg]	Baricentro [mm]			Momenti di Inerzia[kg/mm ²]		
		x	y	z	I _{xx}	I _{yy}	I _{zz}
Albero motore	13.80	150.72	-	-	202.E3	216.E3	205.E3
Blocco cilindri	37.90	93.91	4.51	95.76	887.E3	730.E3	107.E4
Biella	0.66	-	-	44.00	3.08E3	1.0 E-5	1.0 E-5
Pistone	0.5	-	-	0.00	-	-	-
Volano	10.09	28.00	-	-	139.E3	71.E3	71.E3

Tra i parametri che caratterizzano la geometria del manovellismo sono stati inoltre definiti: la corsa, l'alesaggio e la lunghezza della biella (Figura 1).

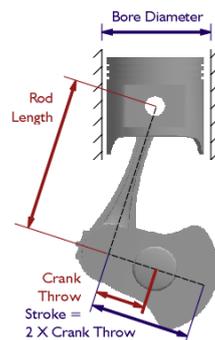


Figura 1 – Caratterizzazione del manovellismo

L'albero motore è stato descritto da una serie di parametri tra cui figurano: il raggio del perno di banco, il raggio del perno di manovella, la distanza tra l'asse del primo cilindro e la faccia posteriore del monoblocco (*Rear Face of Block – RFOB*), la distanza tra il primo cuscinetto di banco e la faccia posteriore del blocco motore (*Engine Length*) e la distanza tra i cuscinetti di banco (*Bearing Spacing*), come mostrato dalla Figura 2.

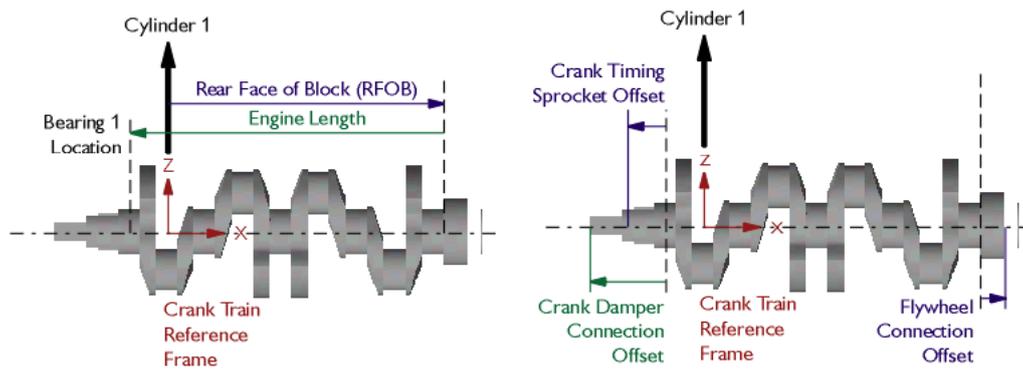


Figura 2 – Caratterizzazione dell'albero motore

Ciascun pistone, invece, è stato caratterizzato dall'altezza della camera di combustione (*Piston Combustion Face Height*), dalla sua lunghezza (*Piston Length*) e dal disassamento dello spinotto (*Piston Pin Offset*), come mostrato dalla Figura 3.

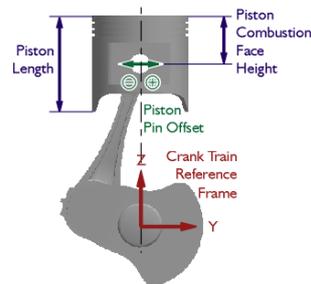


Figura 3 – Caratterizzazione del pistone

Poiché all'interno dei modelli multibody ciascuna componente viene modellata con delle masse concentrate, ciascuna biella è stata schematizzata con due masse concentrate: una dotata di moto alterno posizionata nel centro del piede di biella e un'altra dotata di moto rotatorio posizionata nel centro della testa di biella. Tali masse sono state calcolate una volta noti: la massa della biella, l'inerzia della biella e la distanza del baricentro della biella dal centro del piede di biella.

Per quanto riguarda il volano, esso è stato considerato come un corpo rigido separato dall'albero motore e per caratterizzarlo è stato necessario definirne il raggio e lo spessore.

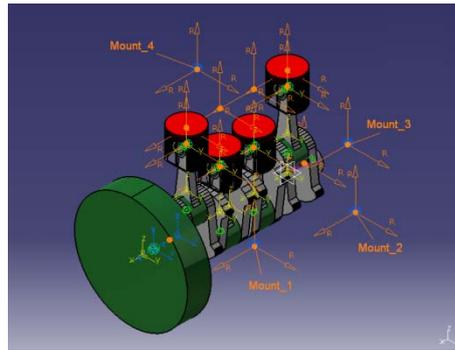


Figura 4 – Modello multibody del motore 4 cilindri in linea

Il modello multibody del motore è riportato nella Figura 4. Tutte le componenti che costituiscono il motore (e cioè i quattro pistoni, le bielle, l'albero motore, il volano e il blocco motore) sono state schematizzate mediante delle masse concentrate e sono evidenziate in figura, insieme con i relativi sistemi di riferimento (sfere di colore arancio). Come è possibile vedere dalla figura, il modello virtuale comprende: l'albero motore (in grigio), il volano (in verde), i quattro pistoni (in rosso) e le relative bielle. Il volano è stato considerato come un corpo rigido separato dall'albero motore, mentre quattro delle masse concentrate che schematizzano il blocco cilindri sono posizionate in corrispondenza dei punti di ancoraggio, [10]. Nella caratterizzazione utilizzata i supporti del motore sono stati considerati come elementi flessibili e definiti mediante le proprietà di rigidità e di smorzamento.

Il modello virtuale 3D del motore così realizzato è stato animato nel modulo *Motion* di Virtual.Lab: in questo modo, è stato possibile caratterizzare la cinematica di ciascun componente al fine di comprendere meglio la dinamica dell'intero sistema. Il punto chiave di uno strumento di simulazione di questo tipo, infatti, è la possibilità di poter analizzare nel complesso, e in tempi molto brevi, l'effetto di tutte le componenti del sistema, senza trascurare gli effetti legati alla dinamica delle parti in movimento e agli accoppiamenti che si realizzano tra le stesse.

4.1.4 I modelli agli elementi finiti delle componenti flessibili

La deformabilità di due componenti come albero motore e blocco cilindri genera effetti non trascurabili sul comportamento dinamico globale di un motore, [5]. Per tale motivo, albero motore e blocco cilindri sono stati considerati come corpi non rigidi e descritti mediante l'approccio modale per mezzo delle proprie frequenze naturali, con l'obiettivo di realizzare un modello virtuale del propulsore quanto più possibile aderente alla realtà. Tutti gli altri componenti del motore, invece, sono stati modellati come corpi rigidi. Ciò è stato realizzato nell'ambiente *Flexible* di Virtual.Lab, dove è stato possibile eseguire un'analisi dinamica capace di considerare l'influenza di tali componenti sulla dinamica dell'intero sistema. A tale scopo sia l'albero motore che il blocco cilindri sono stati precedentemente modellati agli elementi finiti, e i relativi parametri modali sono

stati calcolati ricorrendo ad analisi modali. La Figura 5 mostra i modelli agli elementi finiti delle componenti considerate flessibili: a sinistra è riportato l'albero motore, mentre a destra è riportato il blocco cilindri.

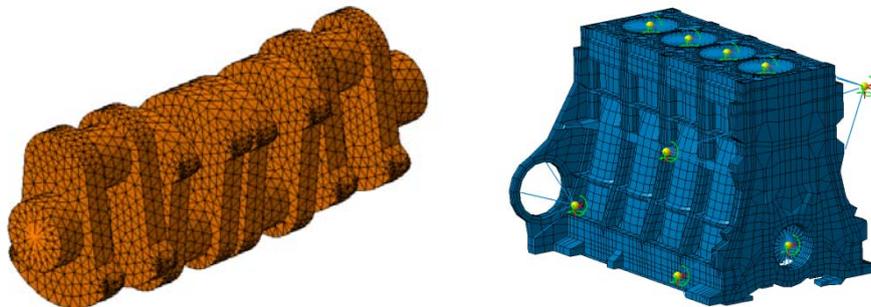


Figura 5 – Modelli agli elementi finiti dell'albero motore (a sinistra) e del blocco cilindri (a destra)

Il modello agli elementi finiti dell'albero motore è costituito da 5278 nodi e 19461 elementi: 19455 sono elementi tetraedrici (CTETRA) e 6 sono elementi rigidi (RBE3). Due elementi rigidi sono stati posizionati in corrispondenza dei cuscinetti di banco più esterni attorno a cui ruota l'albero motore, mentre gli altri quattro sono stati posizionati in corrispondenza di ciascun cuscinetto di biella.

Il modello agli elementi finiti del blocco cilindri, invece, consiste di 23226 nodi e 14497 elementi: 13572 sono elementi solidi a sei facce (CHEXA) e 831 sono elementi solidi a cinque facce (CPENTA), 60 sono elementi rigidi (RBE2), 30 sono elementi di tipo asta (CBAR) e 4 sono masse concentrate (CONM2). Tali masse concentrate sono state posizionate in corrispondenza dei quattro supporti del motore. Gli elementi rigidi sono stati utilizzati al fine di mantenere inalterata la posizione relativa degli elementi in alcune regioni, ad esempio lungo la linea di scorrimento del pistone, in corrispondenza dei cuscinetti di banco e dei supporti del motore.

Le analisi modali, per ottenere le frequenze naturali, i modi propri e i vettori modali di entrambi i modelli FE, sono state condotte con il software MSC.Nastran®. I risultati di tali analisi sono riportati in Tabella 3; mentre in Figura 6, a puro titolo di esempio, sono mostrati il primo modo flessionale dell'albero motore (alla frequenza di 422.7 Hz) e il primo modo torsionale del blocco cilindri (alla frequenza di 789,9 Hz).

Tabella 3 – Risultati delle Analisi Modali			
Blocco cilindri		Albero motore	
Modo	Frequenza naturale [Hz]	Modo	Frequenza naturale[Hz]
1	241.8	1	422.7
2	396.9	2	637.2
3	481.9	3	980.2

4	563.7	4	996.7
5	692.2	5	1106.5
6	789.9	6	1481.3

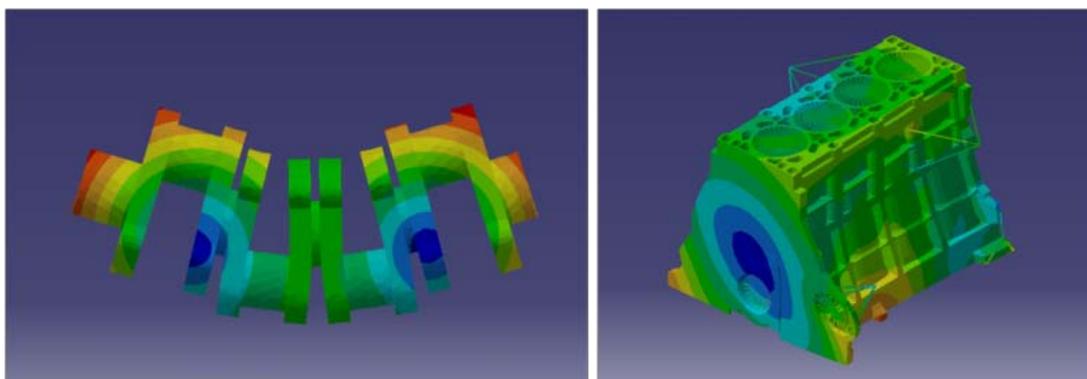


Figura 6 – Primo modo flessionale dell'albero motore a 422.7 Hz (a sinistra) e primo modo torsionale del blocco cilindri a 789.9 Hz (a destra)

4.1.5 Campo di indagine

Lo studio del comportamento dinamico del propulsore, e quindi la determinazione delle forze agenti su ciascun componente dello stesso (come forze di combustione, forze che agiscono sui supporti del motore, carichi in corrispondenza dei cuscinetti di banco, ecc.), è stato effettuato imponendo un andamento crescente della velocità che a partire dal valore minimo di 1500 giri/min arriva fino al valore massimo di 4000 giri/min, con incremento costante di 250 giri/min (*speed sweep*). Il vantaggio di realizzare una simulazione dinamica di questo tipo, piuttosto che creare e risolvere singolarmente le varie condizioni di funzionamento, consiste in una significativa riduzione dei tempi di calcolo. La Figura 7 mostra l'andamento con cui varia la velocità, mentre nella Tabella 4 vengono riportati i dati forniti in input per impostare lo *speed sweep*.

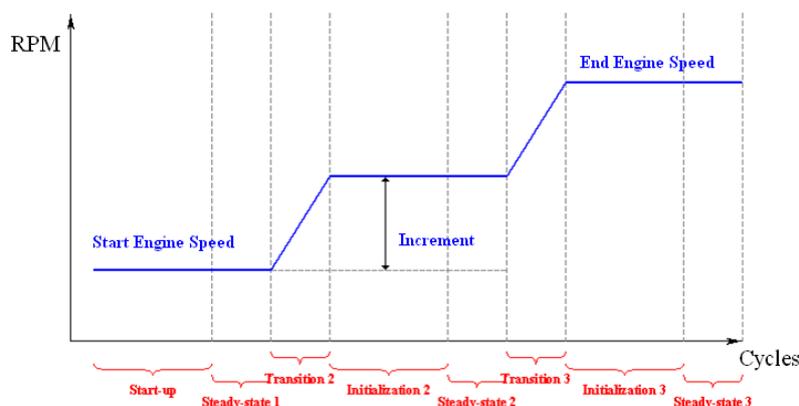


Figura 7 – Andamento della velocità con lo Speed Sweep

Tabella 4 – Caratterizzazione dello Speed Sweep	
Velocità iniziale [giri/min]	1500
Velocità finale [giri/min]	4000
Incremento [giri/min]	250
Numero di cicli di Start-Up	1
Numero di cicli di Steady-State	2
Numero di cicli di Transizione	1
Numero di cicli di Inizializzazione	1

Allo scopo di tener conto del fenomeno della combustione che avviene all'interno di ciascun cilindro, è stato preliminarmente realizzato un modello monodimensionale del motore ed è stata eseguita una simulazione numerica monodimensionale che ha permesso di ottenere i cicli di pressione, a pieno carico, in tre diverse condizioni operative: in particolare alle velocità di 1500, 2500 e 3500 giri/min. Una descrizione dettagliata della procedura 1D adottata è riportata in seguito.

4.1.6 Il modello monodimensionale

Durante la prima fase di sviluppo del motore in esame, per prevedere le prestazioni del motore è stato utilizzato il codice di simulazione monodimensionale 1DIME, sviluppato presso il Dipartimento di Ingegneria Meccanica dell'Università di Napoli "Federico II", [11]. Tale codice risolve le equazioni di bilancio della massa, della quantità di moto e dell'energia all'interno dei condotti che costituiscono il sistema di aspirazione e di scarico, mentre considera il gas all'interno dei cilindri come un sistema zero-dimensionale.

Per quanto riguarda la modellazione del processo di combustione, al fine di calcolare la legge di rilascio del calore è stato utilizzato un classico approccio doppio-Wiebe, [12]. Inoltre, essendo il motore dotato di un sistema di iniezione ad alta pressione di tipo common-rail per gestire la strategia di iniezione, è stata considerata una strategia che prevede una iniezione "pilota" e un'iniezione principale. Un'opportuna durata angolare della combustione premiscelata e di quella diffusiva è stata definita sulla base di precedenti attività teorico-sperimentali, [13]. Il rilascio di calore comincia una volta trascorso il tempo di ritardo all'accensione. Questo approccio, anche se semplificato, è sufficiente per ottenere una stima accurata della temperatura dei gas all'apertura della valvola di scarico e dell'entalpia disponibile all'ingresso della turbina. In tal modo è possibile realizzare una buona previsione delle condizioni di accoppiamento fluidodinamico tra motore e turbocompressore. Il gruppo turbocompressore è stato caratterizzato per mezzo delle mappe prestazionali fornite dal produttore. In particolare, per gestire la pressione di sovralimentazione è stata impiegata una turbina a geometria variabile (VNT).

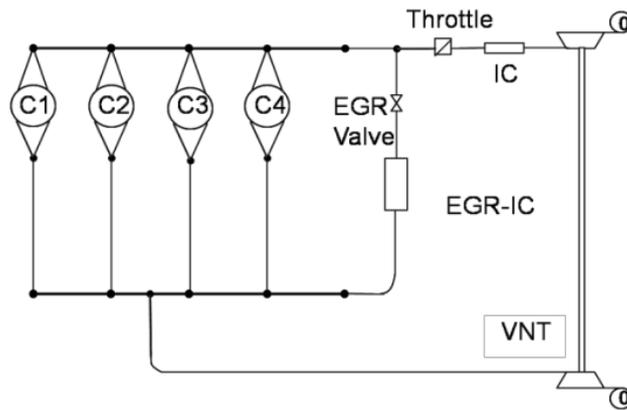


Figura 8 – Schema 1D del motore 4 cilindri

In Figura 8 è riportato lo schema monodimensionale relativo al motore oggetto dello studio. Come è possibile osservare esso comprende tutte i principali componenti e i dispositivi di controllo con cui è equipaggiato il motore: i quattro cilindri (nominati C1, C2, C3 e C4), il circuito per il ricircolo dei gas combusti (*Exhaust Gas Recirculation*, EGR), il sistema di raffreddamento dell'aria in uscita dal turbocompressore prima che entri nel motore (*Intercooler*, IC) e la turbina a geometria variabile (*Variable Nozzle Turbine*, VNT).

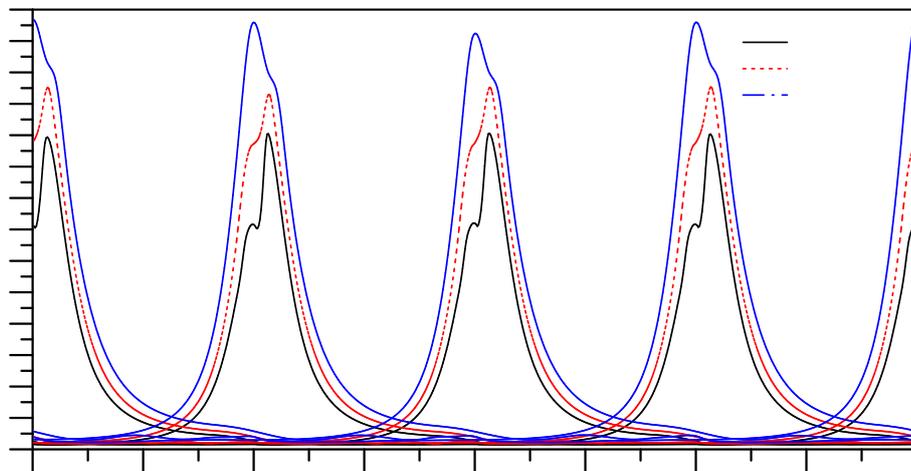


Figura 9 – Cicli di pressione calcolati con il modello 1D, cilindro per cilindro

In Figura 9 sono riportati gli andamenti della pressione all'interno di ciascun cilindro, espressi in bar, ottenuti dalla simulazione 1D alle diverse velocità di rotazione, nelle condizioni di pieno carico e senza EGR. Queste condizioni operative sono infatti quelle più critiche per il motore in termini di rumore radiato.

Come è possibile osservare, l'aumento della velocità di rotazione del motore determina un maggior grado di sovralimentazione e un picco di pressione più elevato all'interno dei cilindri. Alla più alta

velocità di funzionamento indagata (3500 giri/min), si possono osservare, cilindro per cilindro, piccole variazioni del valore massimo della pressione che dipendono dalle diverse condizioni di riempimento che si realizzano nella fase di aspirazione. La posizione del picco di pressione dipende dallo sviluppo del processo di combustione, ed è fortemente legato alla strategia di iniezione adottata. Un'ottimizzazione della strategia di iniezione, potrà in futuro essere effettuata con lo scopo di controllare il gradiente di pressione nel cilindro e ridurre il rumore radiato dal motore, [14].

4.1.7 Risultati della simulazione dinamica

I cicli di pressione così calcolati sono stati utilizzati all'interno del modello virtuale, per calcolare le forze che si esplicano tra le varie componenti che costituiscono il motore.

In particolare, nella Figura 10 è riportato l'andamento temporale della componente verticale della forza di combustione, esercitata dalla pressione del gas nel cilindro 1, per ciascuna velocità di rotazione analizzata. I punti di lavoro, differenti da quelli calcolati mediante la simulazione numerica 1D e corrispondenti agli altri regimi di funzionamento indagati con la simulazione dinamica multibody, sono stati calcolati mediante interpolazione dallo strumento *Sweep Speed* del PDS. Come ci si aspettava, all'aumentare della velocità di rotazione la durata temporale del ciclo si riduce ed il valore massimo della forza raggiunge valori sempre più alti.

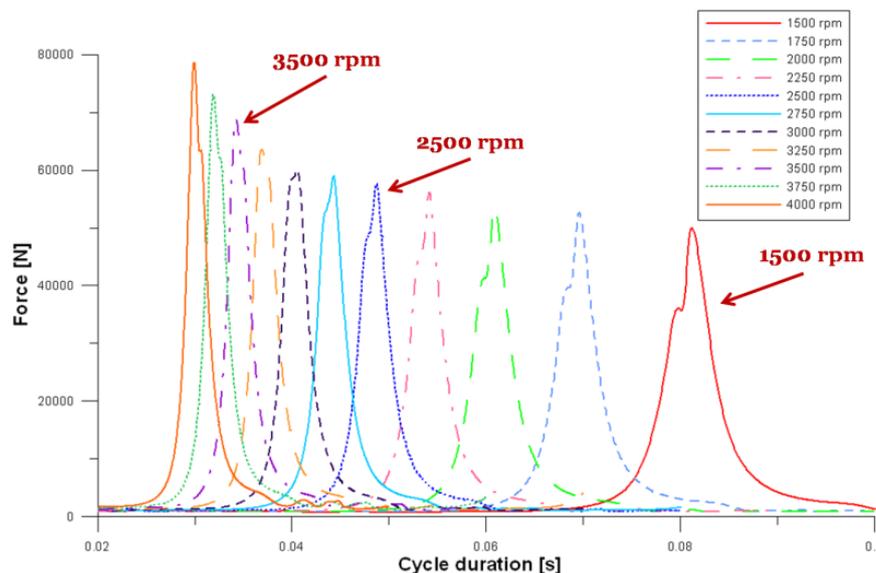


Figura 10 – Componente verticale della forza agente sul cilindro 1 in tutto il campo di funzionamento indagato

In seguito alla simulazione dinamica del motore (*Multi-Body Dynamic Simulation*, MBDS) è stato possibile determinare tutte le forze agenti su ciascun componente dello stesso ed ottenere, in particolare, informazioni sui carichi di combustione, sui carichi agenti in corrispondenza dei

supporti e su tutte le altre forze che si esplicano sul blocco motore, [2, 4]. Inoltre, avendo analizzato l'intero campo di funzionamento del propulsore, è stato possibile osservare la variazione in frequenza delle singole forze al variare della velocità di rotazione.

Nella Figura 11 è riportata la *Colormap* che mostra, nel campo di frequenze fino a 400 Hz, come il valore della componente verticale della forza agente in corrispondenza del cuscinetto di banco numero 1 varia al variare della velocità di rotazione. Come è possibile osservare, a basse frequenze, gli ordini motore che maggiormente contribuiscono sono il 2°, il 4° e il 6° ordine.

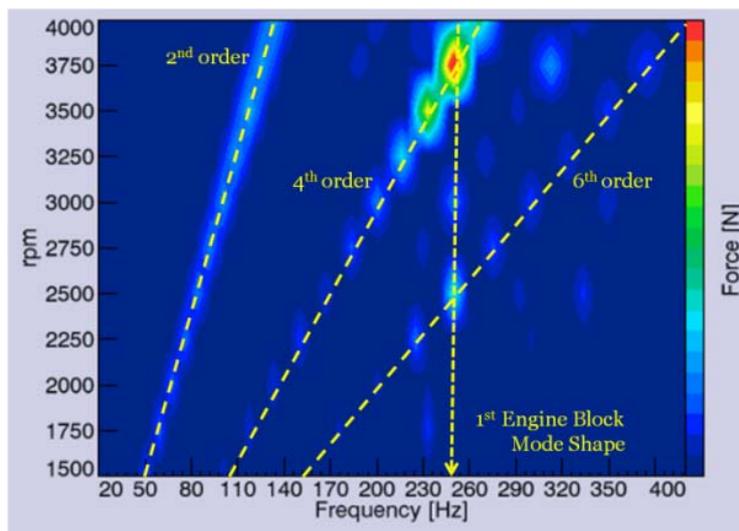


Figura 11 – Colormap della componente verticale della forza agente sul cuscinetto di banco numero 1

Per un motore 4 tempi, con 4 cilindri in linea, la frequenza corrispondente può essere facilmente calcolata con la seguente relazione:

$$f = k \frac{rpm}{60} \quad (1)$$

dove k rappresenta l'ordine motore e rpm è la velocità del motore espressa in giri al minuto. Pertanto, al 2° ordine motore, legato al fenomeno della combustione, corrisponde per la velocità di 1500 giri/min la frequenza di 50 Hz; mentre al 4° ordine, legato anche a fenomeni puramente meccanici, per la stessa velocità di rotazione si ottiene una frequenza di 100 Hz.

Inoltre, come si può vedere dalla *colormap*, il valore massimo della componente verticale della forza agente sul cuscinetto di banco si verifica per il 4° ordine motore al regime di rotazione di 3750 giri/min, che corrisponde alla frequenza di 250 Hz. Si ricordi che in corrispondenza di tale frequenza, il blocco cilindri presenta il suo primo modo naturale (Tabella 3).

4.1.8 Stima delle vibrazioni superficiali del blocco cilindri

Una volta note le forze che si esplicano su ciascun componente del motore, è stato possibile calcolare, in particolare, le velocità superficiali del blocco cilindri effettuando delle analisi di risposta forzata. Tali analisi sono state effettuate considerando agenti sul blocco cilindri contemporaneamente tutte le forze a cui la struttura è soggetta durante le condizioni di funzionamento del motore, per l'intero campo di funzionamento del propulsore e nel range di frequenze da 20 a 5000 Hz.

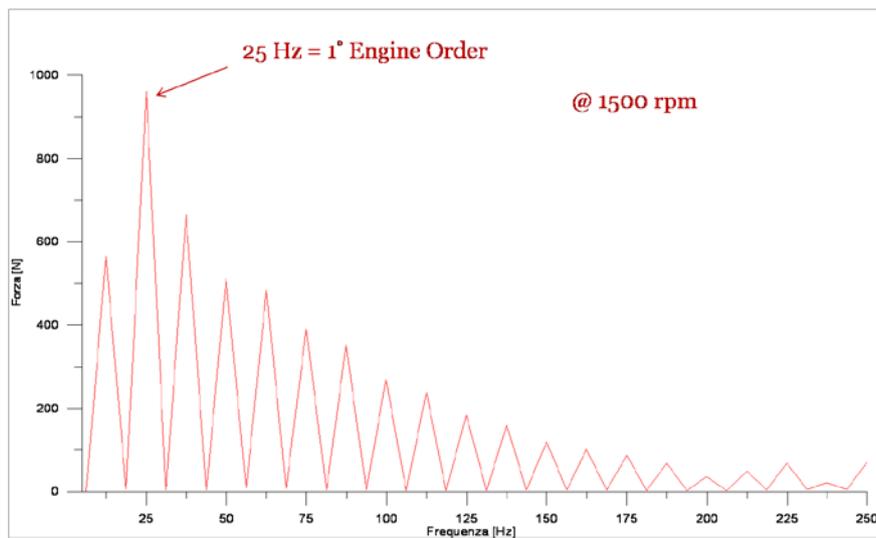


Figura 12 – Andamento della componente laterale della forza agente all'interfaccia tra il blocco cilindri e il pistone del cilindro numero 1 alla velocità di 1500 giri/min

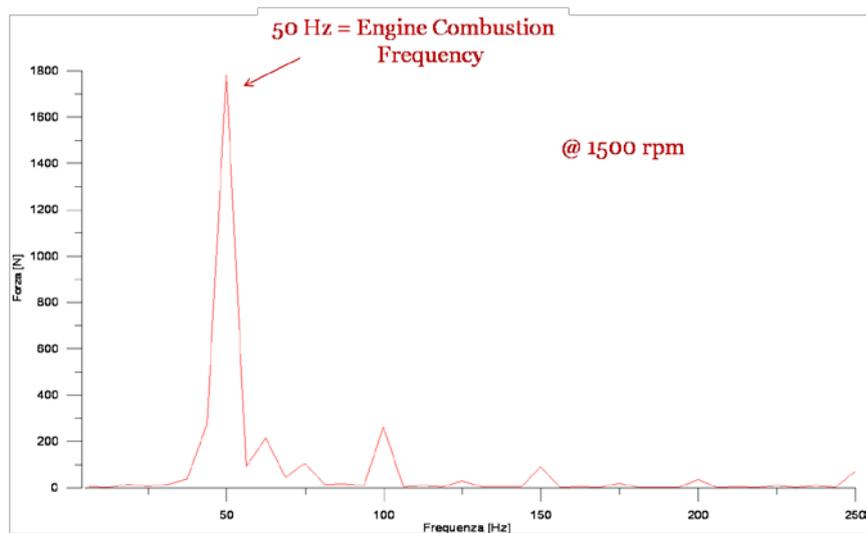


Figura 13 - Andamento della componente verticale della forza agente in corrispondenza del supporto numero 3, alla velocità di 1500 giri/min

A titolo di esempio, le Figure 12 e 13 mostrano, rispettivamente, l'andamento della componente laterale della forza agente all'interfaccia tra il blocco cilindri e il pistone del cilindro numero 1 e l'andamento della componente verticale della forza agente in corrispondenza del supporto numero 3, per il motore alle velocità di funzionamento di 1500 giri/min. Come è possibile osservare la prima presenta un picco massimo a 25 Hz che corrisponde al primo ordine motore per la velocità di rotazione considerata, mentre la seconda presenta un picco massimo a 50 Hz che corrisponde alla frequenza di combustione.

Mentre la Figura 14 mostra, a puro titolo di esempio, la mappa della distribuzione delle velocità superficiali sul blocco cilindri calcolate per la velocità di funzionamento del motore di 3000 giri/min, alla frequenza di 260 Hz. È possibile osservare che, a quella velocità e per quella frequenza considerata, le zone soggette alle maggiori vibrazioni sono quelle relative alla parte anteriore del blocco motore.

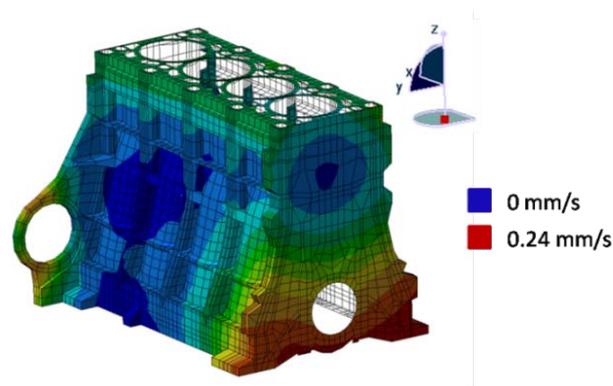


Figura 14 – Distribuzione delle velocità superficiali sul blocco cilindri, alla velocità di 3000 giri/min a 260 Hz

Poiché lo scopo ultimo dell'attività numerica è stato quello di stimare il livello di rumore radiato dal motore nel suo campo di funzionamento, tali vibrazioni superficiali sono state considerate come le condizioni al contorno del sistema per effettuare le analisi acustiche. Di seguito saranno descritti i punti principali dell'analisi acustica condotta sul prototipo e saranno riportati alcuni dei risultati ottenuti.

4.1.9 Stima del rumore radiato

Una volta stimato il comportamento dinamico del motore e stimati i valori delle velocità superficiali del blocco cilindri (come spiegato dettagliatamente nei paragrafi precedenti), il passo successivo è stato quello di valutare il rumore radiato ad un metro di distanza secondo quanto stabilito dalla normativa ISO 3744.

Le analisi acustiche sono state realizzate nell'ambiente *Acoustic* di Virtual.Lab, ricorrendo all'uso della metodologia MATV (Modal Acoustic Transfer Vector), [15].

Tipicamente per il calcolo del rumore radiato verso l'esterno da un qualsiasi sistema vibrante, si utilizza un approccio BEM di tipo diretto (DBEM), ma nel caso in esame, poiché la superficie radiante del blocco cilindri presenta delle aperture, è stato utilizzato un approccio di tipo indiretto (IBEM), [16].

In particolare il metodo utilizzato si basa su uno schema di soluzione di tipo variazionale, mediante l'uso della metodologia del vettore di trasferimento modale (MATV). Come è noto, tale metodologia, anziché correlare la velocità normale del generico nodo $n \{v_n(\omega)\}$ della superficie radiante al livello di pressione sonora $p(\omega)$ in dato punto microfonico, come avviene con la metodologia dell'ATV (*Acoustic Transfer Vector*), lega la risposta della struttura, espressa mediante i fattori di partecipazione modale ($MRSP(\omega)$), al livello di pressione sonora nel punto microfonico $p(\omega)$:

$$p(\omega) = \{MATV\}^T \cdot \{MRSP(\omega)\} \quad (2)$$

dove il vettore MATV è definito come:

$$\{MATV\}^T = j\omega \cdot \{ATV(\omega)\}^T \cdot [\phi_n] \quad (3)$$

dove $[\phi_n]$ rappresenta una matrice le cui colonne sono costituite dalle proiezioni dei vettori modali in direzione normale alla superficie e $j\omega$ è il fattore moltiplicativo che permette di convertire in termini di velocità i dati espressi in funzione degli spostamenti.

La Figura 15 mostra lo schema con cui sono state condotte le analisi acustiche per la determinazione dei livelli di pressione sonora in campo libero secondo la normativa ISO 3744 nell'ambiente *Acoustic* di Virtual.Lab.

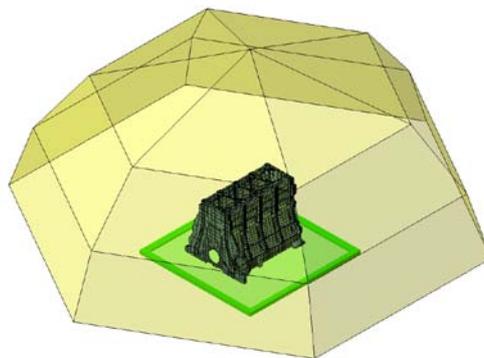


Figura 15 – Schema della Normativa ISO 3744 per le analisi acustiche

Nello schema è possibile individuare: la mesh acustica del blocco motore, il piano di riflessione (in verde) posizionato sotto il blocco cilindri e la superficie di misura virtuale (in giallo) che racchiude completamente la superficie radiante (*Field Point Mesh*).

Il modello agli elementi di contorno del blocco motore (ovvero la mesh BEM acustica) è composto da 7144 elementi superficiali e da 7275 nodi. Tale modello è stato creato a partire dal modello FEM dello stesso. Il piano di riflessione è stato posizionato per creare le condizioni di ambiente semi-anecoico, così come stabilito dalla normativa. La superficie di misura, infine, è una superficie emisferica virtuale, posta ad un metro di distanza dalla superficie radiante, così come indicato dalla normativa. Su tale superficie sono idealmente posizionati i microfoni utilizzati per valutare la potenza sonora del motore ed i suoi livelli di pressione sonora, [17].

Le analisi acustiche sono state condotte nel campo di frequenze da 20 a 5000 Hz, con passo pari a 20 Hz, in tutto il range di funzionamento del motore (da 1500 a 4500 giri/min con passo 250 giri/min). Per ciascuna velocità di funzionamento del motore sono state calcolate: la potenza sonora, lo spettro in frequenza del livello di pressione sonora e il livello globale di rumore radiato espresso in dB (Overall Noise, ON).

Nella Figura 16 sono riportati gli spettri in frequenza della pressione acustica (espressi in dB), per tre differenti velocità di funzionamento del motore: in particolare alle velocità di 1500, 2750 e 4000 giri/min (rispettivamente, in rosso, in blu e in verde). Le curve mostrano andamenti piuttosto simili, con livelli di pressione sonora più alti alle basse frequenze dove il contributo preponderante è legato al fenomeno della combustione.

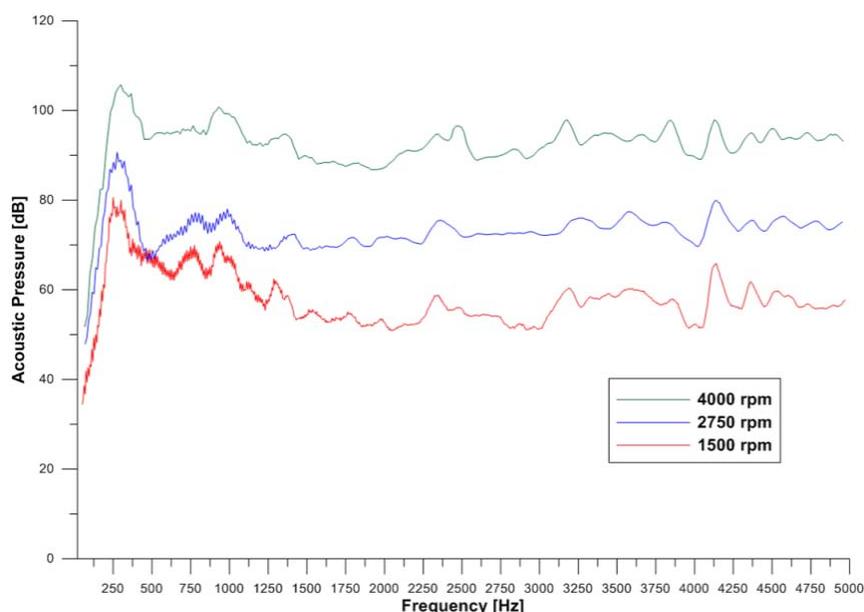


Figura 16 – Spettro in frequenza della Pressione Sonora (in dB) alle velocità di 1500, 2750 e 4000 giri/min

In particolare, fino a 500 Hz è evidente il contributo al livello globale della pressione sonora dei multipli della frequenza di combustione e delle forze di inerzia. Inoltre, intorno ai 250 Hz, si osserva un picco della pressione acustica, in corrispondenza del primo modo naturale del blocco cilindri.

A frequenze superiori ai 2000 Hz, invece, le curve mostrano un andamento quasi costante con livelli di pressione acustica notevolmente più bassi. In questo campo di frequenze, il contributo al rumore è di tipo puramente meccanico, ed è legato alle forze di inerzia e ai modi propri del blocco motore. Un altro picco è evidente in corrispondenza dei 4100 Hz, e corrisponde indubbiamente ad un altro modo proprio di vibrare del blocco cilindri.

Come ci si aspettava, il livello globale di rumore emesso (Overall Noise) aumenta all'aumentare della velocità di funzionamento del motore: esso aumenta di oltre 18 dB quando la velocità passa dal valore minimo di 1500 giri/min al valore massimo di 4000 giri/min di funzionamento del motore.

Altre importanti considerazioni si possono fare osservando, ad esempio, le mappe acustiche della pressione sonora sulla superficie di misura microfonica. La Figura 17 mostra, a titolo di esempio, la mappa acustica della pressione sonora sulla superficie di misura microfonica alla velocità di 2750 giri/min e alla frequenza di 250 Hz.

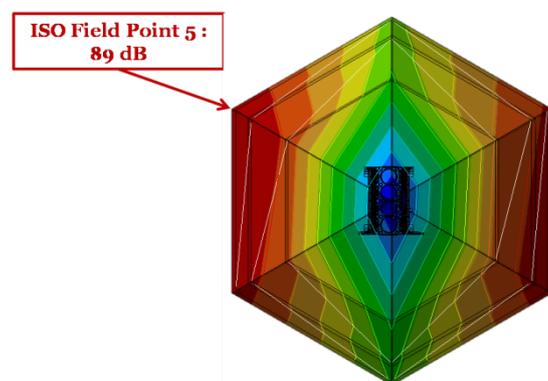


Figura 17 – Mappa Acustica della Pressione Sonora sulla superficie di misura virtuale, alla velocità di 2750 giri/min, a 250 Hz

Come è possibile osservare la distribuzione della pressione acustica è simmetrica e il piano di simmetria è un piano ortogonale al piano riflettente e passante per l'asse di rotazione dell'albero motore. Inoltre, i livelli di pressione sonora più elevati si osservano in corrispondenza della parte laterale destra e della parte laterale sinistra del blocco motore che in corrispondenza della frequenza considerata (250 Hz) presenta la sua prima forma modale. In particolare, in corrispondenza del punto di misura numero 5 sulla *Field Point Mesh* (indicato in Figura), il livello di pressione sonora misurato è di circa 89 dB.

Volendo indagare quali sono i contributi che maggiormente contribuiscono a realizzare il livello di pressione sonora di 89 dB misurato in corrispondenza del punto di misura numero 5 sulla *Field Point Mesh*, in Figura 18 è riportata la mappa acustica della pressione sonora, espressa in dB, al variare della frequenza e della velocità di rotazione del motore relativa a quel punto.

È possibile osservare che, a bassa frequenza, gli ordini motore che maggiormente contribuiscono al livello di pressione sonora sono il 4°, il 5° e il 6° ordine. Il valore massimo si ha in corrispondenza del 4° ordine alla velocità di 3500 giri/min, alla frequenza di circa 233 Hz.

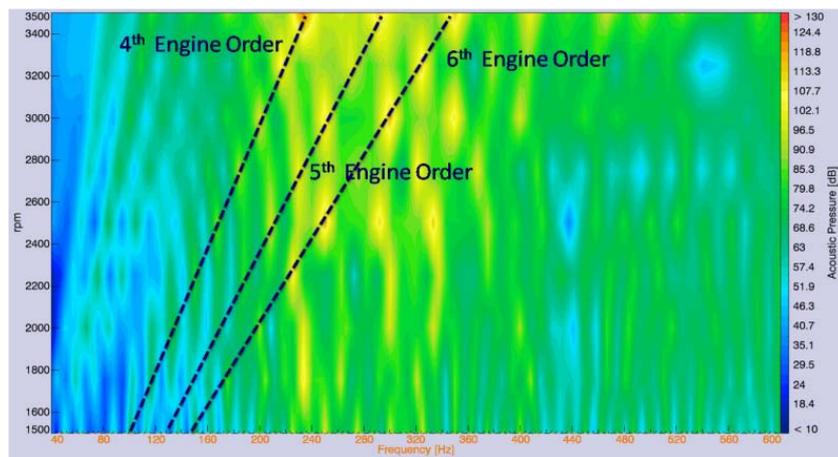


Figura 18 – Mappa Acustica della Pressione Sonora (in dB) relativa al punto di misura numero 5 della *Field Point Mesh*

4.1.10 Procedura analitica per la stima del rumore radiato

Poiché il motore in esame è un prototipo di cui non si ha a disposizione nessun dato sperimentale, al fine di verificare la bontà dei risultati ottenuti, è stata utilizzata una formulazione analitica per la stima della potenza sonora irradiata già utilizzata in passato e validata su base sperimentale proprio su un motore diesel, [18].

Secondo questa formulazione, la potenza sonora irradiata da un sistema vibrante, W_{rad} , è direttamente proporzionale al valore quadratico medio della componente normale della velocità superficiale, come espresso dalla formula:

$$W_{rad} = \rho_0 c S \langle \bar{v} \rangle^2 \sigma_{rad} \quad (4)$$

dove ρ_0 è la densità dell'aria, c è la velocità del suono nell'aria, S è la superficie totale del corpo vibrante e σ_{rad} è l'efficienza radiante effettiva.

L'efficienza radiante effettiva è il parametro che caratterizza la capacità di un corpo vibrante di irradiare potenza sonora nell'ambiente che lo circonda. Tale parametro dipende dalla geometria del

sistema e dalle proprietà del materiale ed è espresso dal rapporto tra il quadrato della lunghezza d'onda λ_a e la superficie totale del corpo vibrante:

$$\sigma_{rad} = \frac{\lambda_a^2}{S} \quad (5)$$

La lunghezza d'onda, a sua volta, viene calcolata mediante la relazione:

$$\lambda_a = \frac{2\pi}{c} \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} h \quad (6)$$

dove E è il modulo di Young, ρ è la densità del materiale, ν è il rapporto di Poisson e h è lo spessore della struttura.

Una prima indicazione della bontà dei risultati è stata fornita dal valore medio della velocità superficiale che è stato stimato essere di circa $1\div 2$ cm/s, alla velocità di 3000 giri/min.

Una volta valutata la potenza sonora radiata dal blocco motore, è stato possibile determinare il livello di potenza sonora mediante la relazione:

$$L_W = 10 \log_{10} \frac{W_{rad}}{W_0} \quad (7)$$

dove W_0 è il livello di riferimento a 0 dB ($W_0 = 10^{-12}$ Watt).

I livelli di potenza sonora calcolati applicando la formulazione analitica, sono stati poi confrontati con i valori ottenuti utilizzando l'approccio BEM. Nella Tabella 5 sono riportati i risultati ottenuti considerando il motore alla velocità di 3000 giri/min.

Tabella 5 – Confronto tra i livelli di potenza sonora L_W	
Approccio BEM	109.60 dB
Formulazione analitica	110.20 dB

Come è possibile osservare l'accordo è molto buono, risultando la differenza tra i livelli di potenza sonora calcolata nei due casi inferiore a 1 dB.

4.2 Previsione del livello di comfort percepito dai passeggeri all'interno dell'abitacolo

L'attività svolta per stimare il livello di rumore percepito dal guidatore e dai passeggeri all'interno del veicolo, in un'analisi mirata al comfort degli occupanti, è stata realizzata accoppiando la tecnica multibody con le note metodologie FEM e BEM, e può essere suddivisa in due parti principali.

Nella prima parte dell'attività è stato realizzato un accurato modello numerico multibody del prototipo del motore ed è stata eseguita, alla velocità di 3000 giri/min, una simulazione dinamica al fine di determinare le forze di eccitazione trasmesse dal motore al telaio del veicolo, [21, 22]. In questa prima fase, grazie all'approccio multibody, sono state prese in considerazione sia le forze dovute al processo di combustione del gas all'interno dei cilindri sia le forze d'inerzia di tutte le parti in movimento. Inoltre, al fine di rendere il modello più aderente alla realtà, l'albero motore è stato considerato come un corpo flessibile e descritto mediante i suoi parametri modali. In particolare, poiché il motore è sospeso attraverso i supporti-motore al telaio del veicolo, le forze di eccitazione in corrispondenza di questi supporti sono state calcolate e, in seguito, utilizzate come carichi di eccitazione agenti sulla struttura del telaio.

Nella seconda parte dell'attività, invece, un approccio FEM/BEM è stato utilizzato per determinare il livello di rumore percepito all'interno dell'abitacolo. Il campo sonoro interno della cavità è influenzato dalle caratteristiche acustiche modali della cavità, dal comportamento dinamico della struttura del veicolo e dalla natura dell'accoppiamento struttura-cavità. A tale scopo sono stati considerati i modi propri di vibrare sia della scocca che della cavità che rappresenta l'interno del veicolo occupato dai passeggeri. Inoltre, per creare un modello quanto più possibile vicino alla realtà, è stata considerata la presenza dei diversi componenti (come parabrezza, tetto auto, tappetini, ecc.) e ciascun di essi è stato descritto mediante le proprie proprietà acustiche.

4.2.1 Simulazione dinamica del motore che equipaggia la vettura

Il motore con cui è equipaggiata la vettura di cui si vuole stimare il livello di comfort è un motore a combustione interna diesel, 4 tempi, con 4 cilindri in linea. Per valutare il comportamento dinamico del motore, il primo passo è stato quello di modellare il motore come un sistema multibody, utilizzando il Powertrain Dynamic Simulator di LMS, così come è stato descritto nei paragrafi precedenti. In tale modello multibody, in particolare, sono state fatte due assunzioni:

1. l'albero motore è stato considerato come un corpo flessibile e descritto mediante i suoi parametri modali;

2. il motore è stato fissato al telaio mediante quattro supporti, che sono stati considerati come elementi flessibili e descritti mediante le loro caratteristiche di rigidità e smorzamento.

Per caratterizzare l'albero motore come corpo flessibile, sono stati utilizzati i risultati dell'analisi modale già descritti in precedenza (Tabella 3). La Figura 19 mostra il modello multibody del propulsore con l'albero flessibile, in particolare è mostrata la forma modale dell'albero motore alla frequenza di 422.7 Hz.

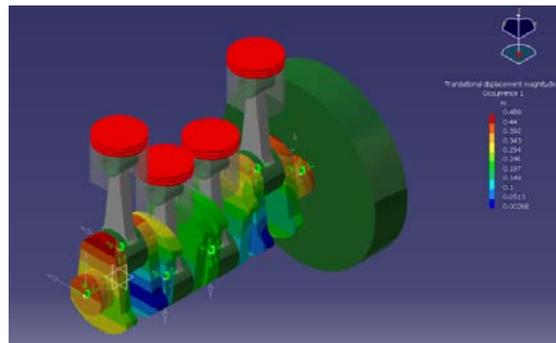


Figura 19 – Modello multibody del motore con dettaglio della forma modale dell'albero motore a 422.7 Hz

Una volta realizzato il modello virtuale del motore, è stata condotta una simulazione dinamica alla velocità di funzionamento di 3000 giri/min, al fine di calcolare le forze che il motore trasmette al telaio del veicolo attraverso i supporti motore. La modellazione multibody del motore ha permesso di tener conto nel calcolo delle forze generate del motore sia dell'effetto delle forze di inerzia legate alle parti in movimento (albero motore, volano, pistone, biella) sia del fenomeno di combustione che avviene all'interno di ciascun cilindro.

La Figura 20 riporta, per la durata temporale di un ciclo, l'andamento delle componenti x, y e z della forza che il motore esercita sul telaio in corrispondenza del supporto numero 1 alla velocità di funzionamento considerata. La linea tratteggiata in blu rappresenta la componente x che agisce lungo l'asse di rotazione dell'albero, la linea tratteggiata in verde la componente y che agisce ortogonalmente all'asse di rotazione dell'albero, mentre la linea continua in rosso la componente z che agisce in direzione verticale. Come è possibile osservare, tra le tre componenti quella che maggiormente contribuisce in termini di sollecitazioni è la componente verticale. Lo stesso comportamento è stato osservato per gli altri supporti del motore, pertanto, nel calcolo delle sollecitazioni agenti sul telaio sono state considerate solo tali componenti verticali, mentre le altre componenti sono state trascurate.

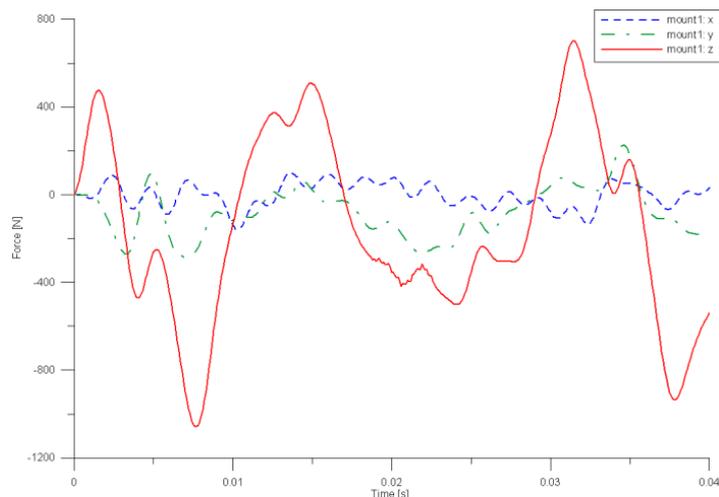


Figura 20 – Andamento delle componenti x, y, z della forza che il motore esercita sul telaio in corrispondenza del supporto numero 1

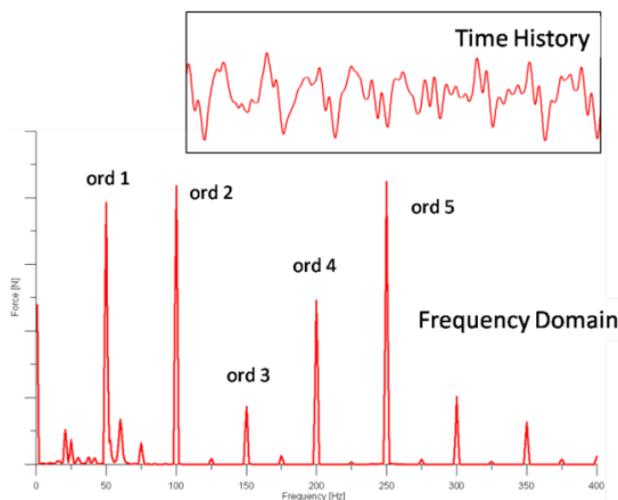


Figura 21 - Andamento della componente verticale della forza che il motore esercita sul supporto 1 nel dominio della frequenza

La Figura 21 mostra invece l'andamento della componente verticale della forza che il motore esercita sul supporto numero 1 nel dominio della frequenza fino a 300 Hz. Come è possibile osservare l'andamento della forza è influenzato da diversi ordini del motore. Il primo picco a 50 Hz rappresenta il primo ordine motore e, come i suoi multipli, dipende dalla forza di eccitazione meccanica, ovvero alle forze di inerzia legate al moto alterno del pistone. Mentre il picco a 100 Hz rappresenta il secondo ordine motore che con i suoi multipli è legato al fenomeno della combustione.

4.2.2 Accoppiamento motore- supporti - telaio

Le forze che si esplicano dal motore vengono trasmesse alla struttura del veicolo attraverso i supporti motore, e da questi alle superfici che racchiudono l'abitacolo, che iniziano a vibrare e a

produrre rumore all'interno del veicolo. In particolare, sono le componenti a bassa frequenza all'interno dell'abitacolo (tra i 20 e i 200 Hz) quelle che suscitano l'interesse maggiore, e in speciale modo il rumore generato dalla vibrazione strutturale dei pannelli che costituiscono la vettura. Pertanto, il passo successivo è stato quello di analizzare l'accoppiamento motore - supporti motore - telaio. A tale scopo è stato realizzato un modello agli elementi finiti della struttura della scocca del veicolo (nota anche come *Body in White*, BIW).

Il modello FE della scocca (mostrato in Figura 50) è stato modellato esclusivamente con elementi bidimensionali e con elementi asta con 6 gradi di libertà per ciascun nodo. Esso è costituito da 20891 nodi e 23162 elementi; in particolare, 3144 sono elementi triangolari (CTRIA3), 19602 sono elementi quadrangolari (CQUAD4) e 172 elementi asta (CBAR). Questi ultimi sono stati utilizzati, in particolare, per collegare il lunotto posteriore, il parabrezza anteriore e i finestrini posteriori laterali (in verde) alla struttura del telaio (in arancio e rosso). Gli altri 244 elementi sono elementi rigidi (RBE2).

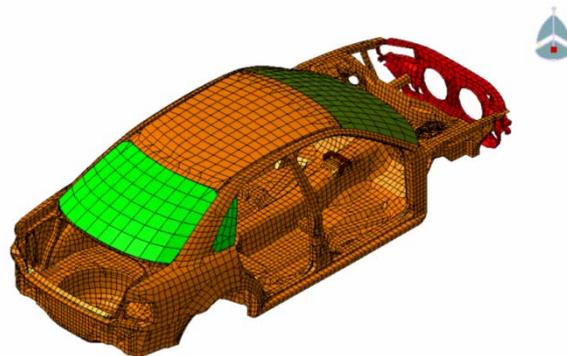


Figura 22 – Modello agli elementi finiti della scocca

Generalmente, la scocca di un veicolo telaio è interamente in metallo, ad eccezione del parabrezza anteriore, del lunotto posteriore e dei finestrini laterali. Tali componenti sono realizzati in vetro stratificato, che consiste di due o più strati di vetro alternati a un foglio di plastica (solitamente polivinilbutirriale, PVB) e sono indirettamente collegati al telaio dell'automobile attraverso delle guarnizioni di gomma. Nella Tabella 6 sono riportate le caratteristiche dei materiali che costituiscono la scocca del veicolo.

Tabella 6 – Proprietà dei materiali della scocca			
	Modulo di Young [GPa]	Coefficiente di Poisson	Densità [kg/m³]
Metallo 1	2.1 E+11	0.33758	9760
Metallo 2	6.8 E+9	0.35	1210
Vetro	7.5 E+10	0.333	2500

Nella realizzazione del modello FE del telaio sono state fatte alcune ipotesi, in particolare è stato assunto che:

1. i materiali che costituiscono il telaio abbiano un comportamento elastico lineare;
2. il parabrezza anteriore, il lunotto posteriore e i finestrini laterali sono stati considerati come costituiti da un singolo strato di vetro e sono stati direttamente collegati al telaio, trascurando la presenza delle guarnizioni di gomma;
3. è stata trascurata la presenza dei sedili e di altre parti presenti all'interno dell'abitacolo.

L'analisi modale per la determinazione dei parametri modali del telaio (modi propri di vibrare e frequenze naturali) è stata eseguita con il solutore MSC.Nastran®. I risultati di tali analisi sono riportati in Tabella 7, mentre a puro titolo di esempio in Figura 23 è mostrato il primo modo torsionale a 46 Hz.

Tabella 7 – Risultati delle Analisi Modali sul Telaio			
Modo	Frequenza naturale [Hz]	Modo	Frequenza naturale [Hz]
1	24.0	7	41.4
2	29.5	8	43.3
3	30.5	9	46.0
4	37.5	10	48.4
5	38.6	11	49.3
6	39.4	12	54.5

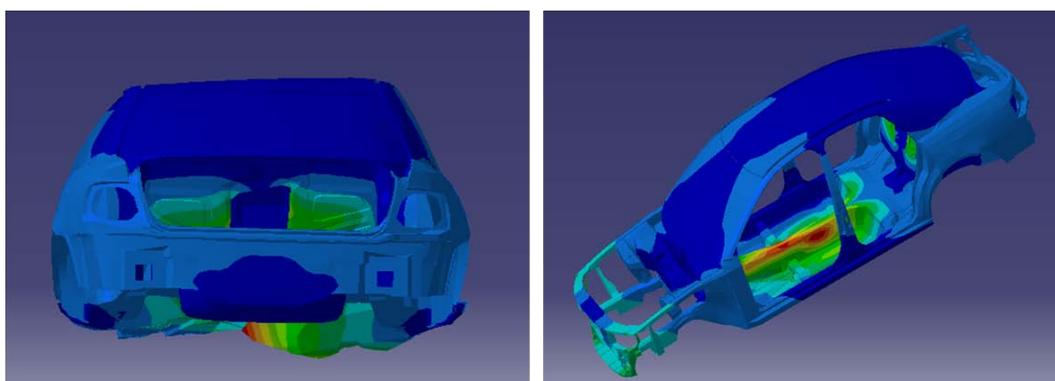


Figura 23 – Primo modo torsionale del telaio a 46 Hz

Nelle Figure 24 e 25 sono illustrati gli spostamenti del telaio alle frequenze di 30.5, 37.4 e 49.3 Hz e alle frequenze di 29.5, 39.4 e 64.1 Hz, rispettivamente. Le prime frequenze naturali interessano principalmente il pannello inferiore del vano portabagagli del veicolo, mentre le altre frequenze interessano il pannello che separa l'interno del veicolo adibito ai passeggeri dal vano del portabagagli posteriore. Tali forme modali sono tipiche di strutture costituite da pannelli.

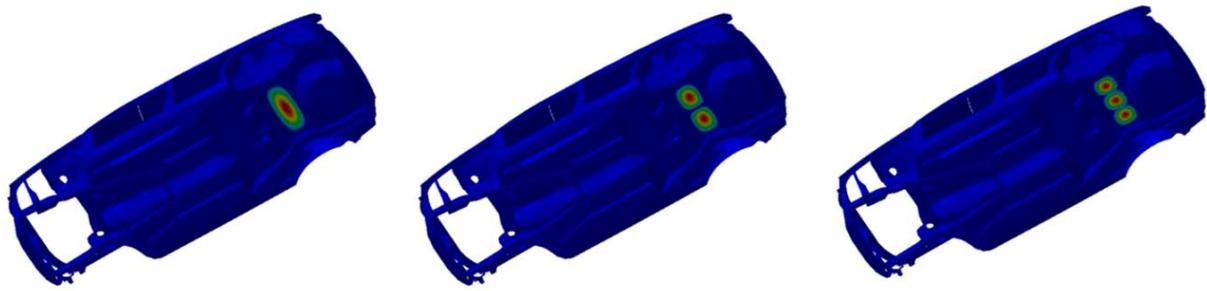


Figura 24 – Forme modali del telaio alle frequenze di 30.5, 37.4 e 49.3 Hz (da sinistra verso destra)

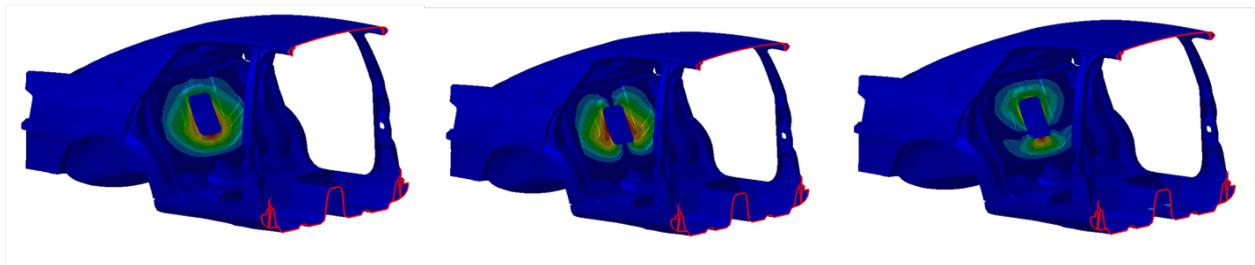


Figura 25 – Forme modali del telaio alle frequenze di 29.5, 39.4 e 64.1 Hz (da sinistra verso destra)

A questo punto, il telaio del veicolo è stato sollecitato dalle forze trasmesse dal motore in corrispondenza degli ancoraggi: tali punti si trovano nella parte anteriore del telaio dove solitamente è posizionato il motore (come mostrato in Figura 26). Nella figura viene riportata per semplicità solo la sezione della parte anteriore del BIW, per meglio evidenziare i punti in cui sono state applicate le forzanti (sfere di colore giallo). In realtà nell'analisi di risposta forzata è stata considerata l'intera struttura del telaio. Le frecce rosse indicano la direzione di applicazione delle forze che, come è stato mostrato precedentemente, sono costituite delle sole componenti verticali.

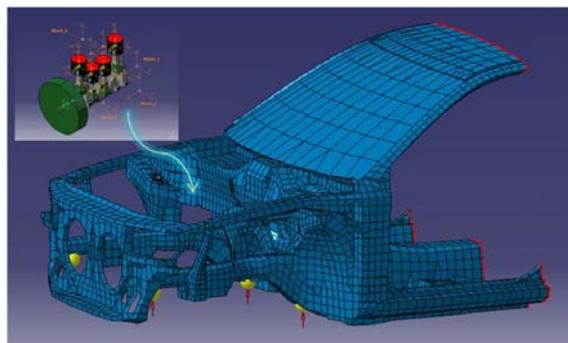


Figura 26 – Schema dell'accoppiamento del motore con il telaio del veicolo

4.2.3 La stima del rumore all'interno del veicolo

Quando si eseguono analisi per la stima del rumore all'interno di una cavità (come ad esempio l'abitacolo di un veicolo) è fondamentale considerare l'effetto dell'interazione fluido-struttura. La risposta dinamica della massa fluida racchiusa all'interno della cavità è, infatti, influenzata dai modi propri della struttura che la racchiude, e viceversa. Nel caso in esame dell'abitacolo di un veicolo, la risposta della massa d'aria racchiusa all'interno del volume che costituisce l'abitacolo è influenzata dai modi propri del telaio, [23].

Per tener conto di tale interazione, è stato necessario modellare il volume interno dell'abitacolo (ovvero il volume della cavità occupata dal guidatore e dai passeggeri) agli elementi finiti, mediante elementi solidi.

Il modello FE della cavità è costituito da 1093 nodi e 806 elementi: in particolare, 110 elementi sono elementi solidi a cinque lati a 6 nodi (PENTA6) e 696 sono elementi solidi a sei facce ad 8 nodi (HEXA8). Nella Figura 27 è possibile vedere la mesh FEM della cavità del veicolo.

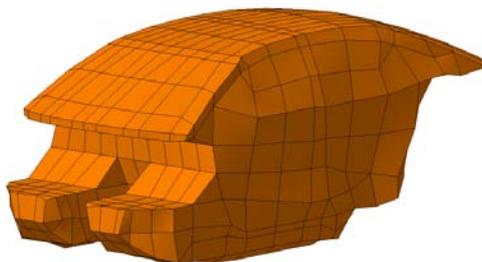


Figura 27 – Modello agli elementi finiti della cavità del veicolo

A partire dalla mesh solida della cavità è stata realizzata una mesh superficiale della stessa (detta *mesh acustica*). Tale mesh acustica è costituita da 611 nodi e 628 elementi; in particolare, 38 elementi sono elementi triangolari (TRIA3) e 590 sono elementi quadrangolari (QUAD4).

La Tabella 8 mostra i risultati dell'accoppiamento della mesh acustica della cavità e della mesh strutturale del telaio ottenuto con un algoritmo basato sulla massima distanza tra i nodi degli elementi corrispondenti ai due modelli, avendo fissato un numero di nodi di influenza pari a 6 e una distanza massima pari a 0.1 m, mentre nella Figura 28 è possibile vedere l'accoppiamento tra la mesh del telaio e la mesh acustica della cavità.

Tabella 8 – Accoppiamento mesh telaio - mesh cavità	
Nodi di influenza	Occorrenza
0	87
1	18
2	2
3	12
4	2
5	33
6	457

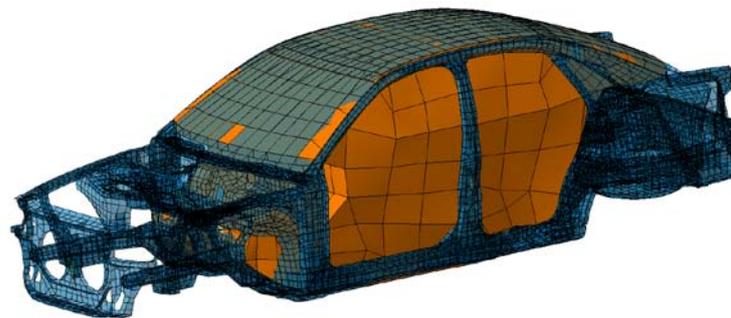


Figura 28 – Accoppiamento della mesh del telaio con la mesh della cavità

Il fluido presente all'interno della cavità (costituito da aria) è stata modellato definendone la densità e la velocità del suono nel mezzo, ed ipotizzando un comportamento comprimibile ed inviscido, con velocità media nulla. Sia la densità media che la pressione del fluido sono state considerate uniformi.

Al fine di considerare l'influenza della partecipazione del fluido contenuto nella cavità, è stata eseguita un'analisi modale della stessa. I risultati di tali analisi sono riportati in Tabella 9, mentre in Figura 29 sono mostrati i modi della cavità alle frequenze di 86 e 103 Hz (a sinistra e a destra, rispettivamente).

Tabella 9 – Risultati Analisi Modale sul fluido	
Modo	Frequenza naturale [Hz]
1	86.1
2	103.8
3	135
4	146.6
5	151.2
6	184.7

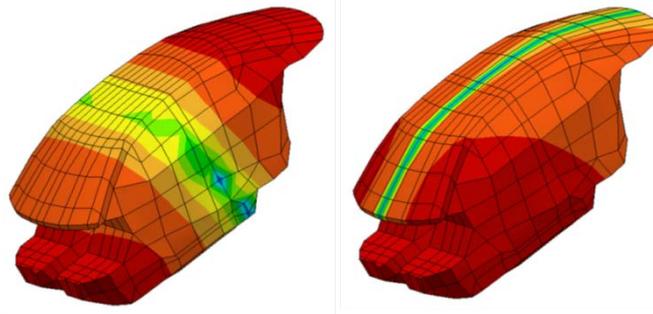


Figura 29 – Modi propri della cavità a 86 Hz (a sinistra) e a 103 Hz (a destra)

Come è possibile osservare dalla Figura, alla frequenza di 86 Hz e di 103 Hz la cavità presenta modi propri simmetrici con piano di simmetria, rispettivamente, un piano yz passante per il centro dell'abitacolo e un piano di simmetria xz passante anch'esso per il centro dell'abitacolo.

Per stimare il livello di rumore all'interno dell'abitacolo, sono stati posizionati all'interno del veicolo due piani, passanti in corrispondenza dell'orecchio sinistro del guidatore e dell'orecchio destro del passeggero laterale, che rappresentano le superfici di misura virtuali. Tali piano sono evidenziati in rosso nella Figura 30, dove è possibile vedere il loro posizionamento nel veicolo e nella cavità. Ciascuna superficie microfonica è composta da 189 nodi e 160 elementi quadrangolari a quattro nodi (QUAD4). In corrispondenza dei nodi di tali superfici sono idealmente posizionati i microfoni utilizzati per stimare la potenza sonora e i livelli di pressione sonora all'interno dell'abitacolo percepiti dal guidatore e dai passeggeri.

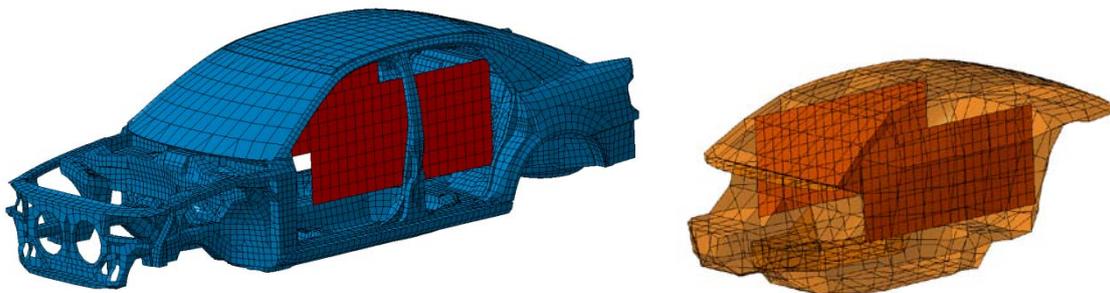


Figura 30 – Posizionamento dei piani di misura microfonici all'interno dell'abitacolo

4.2.4 La caratterizzazione delle superfici interne del veicolo

L'abitacolo di un veicolo è costituito da molte parti (il rivestimento del tetto, il rivestimento del pavimento, il parabrezza anteriore, il lunotto posteriore, le porte, il cruscotto, il *firewall*, i sedili, ecc.), ciascuna avente una propria peculiare funzione e realizzata con materiali differenti e, in particolare, con determinate proprietà acustiche, [22, 24, 25]. Pertanto, per risolvere in maniera adeguata il problema del rumore percepito dagli occupanti all'interno dell'abitacolo, è molto importante caratterizzare l'interno del veicolo definendo le proprietà acustiche dei materiali che

costituiscono le superfici dello stesso. Solitamente, questa caratterizzazione viene fatta definendo l'impedenza acustica di ciascuna superficie.

Generalmente i materiali acustici utilizzati all'interno del comparto auto hanno tre funzioni principali: isolare la sorgente di rumore, assorbire ed smorzare le vibrazioni da essa prodotte. Per isolare, ad esempio, il motore (collocato in prossimità del vano passeggeri) viene utilizzata una pannellatura costituita da pannelli d'acciaio sottili e lana di vetro, mentre per assorbire le vibrazioni vengono utilizzati pannelli in schiuma di poliuretano espanso o in materiali fibrosi leggeri che vanno posizionati nel vano motore, in corrispondenza del cofano, del tetto, dei pannelli laterali delle portiere. Di solito, lo spessore del materiale assorbente è determinato dalle frequenze coinvolte: lo spessore minimo utile per il poliuretano espanso è di 13 mm ed è efficace fino a 1000 Hz.

In un primo momento, le analisi acustiche per la stima del rumore percepito nell'abitacolo sono state condotte trascurando la presenza di tutti i materiali presenti all'interno della vettura: tutte le superfici, pertanto, sono state considerate come superfici riflettenti. In un secondo momento, invece, al fine di creare un modello più aderente alla realtà, sono state condotte analisi acustiche tenendo conto della presenza dei diversi materiali che costituiscono l'abitacolo.

In Figura 31 viene mostrato come sono stati caratterizzati i pannelli che costituiscono la cavità interna del veicolo in termini di materiali fonoassorbenti. In particolare: il tetto (in blu) è stato caratterizzato con le proprietà di un materiale poroso in poliuretano espanso; i finestrini laterali, il parabrezza anteriore, il lunotto posteriore e i finestrini laterali (in verde) sono stati caratterizzati con le proprietà della fibra di vetro; mentre il cruscotto, il *firewall* (entrambi in giallino), il rivestimento del pavimento (in rosa) e il pannello posteriore del vano portabagagli (in viola) sono stati caratterizzati con le proprietà dei materiali costituiti da fibra di poliestere.

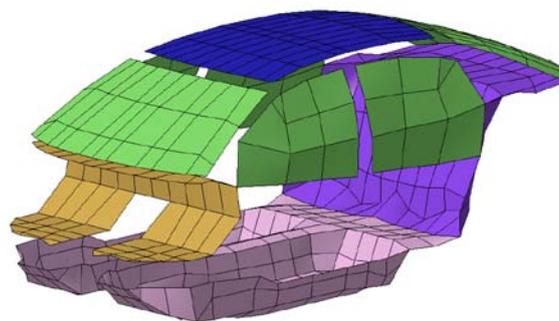


Figura 31 – Caratterizzazione della cavità in termini di materiali fonoassorbenti

Tutti i materiali che costituiscono l'interno dell'abitacolo sono stati caratterizzati mediante l'impedenza acustica complessa Z_m , definita come:

$$Z_m = \rho c \sqrt{\rho_m k} \quad (8)$$

dove ρ è la densità del gas (1,205 kg/m³ per aria a 20 °C), c è la velocità del suono nel mezzo (340 m/s per l'aria a 20 °C), mentre ρ_m e k rappresentano rispettivamente la densità e la compressibilità del materiale poroso, [24, 25]

Le analisi acustiche sono state condotte utilizzando un approccio BEM di tipo diretto (DBEM), nel campo di frequenze fino a 400 Hz, con uno step di 2 Hz.

La Figura 32 mostra il confronto dei livelli di pressione sonora calcolati al lato guidatore con e senza considerare il trattamento acustico del solo rivestimento del tetto, mentre la Figura 33 mostra il confronto dei livelli di pressione sonora calcolati, sempre al lato guidatore, con e senza considerare la contemporanea presenza del trattamento acustico del rivestimento del tetto e del vetro.

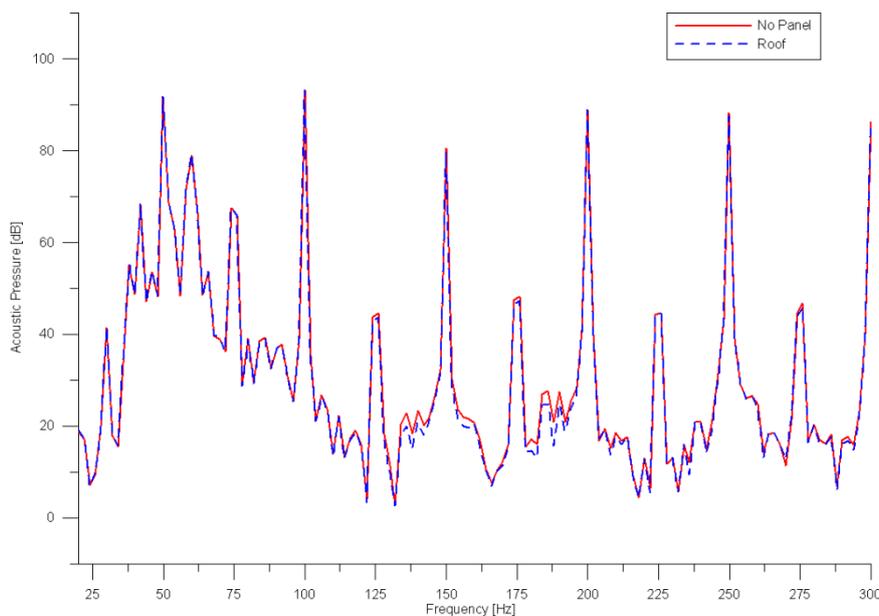


Figura 32 – Confronto tra i livelli di pressione acustica (in dB) calcolati al lato guidatore con (linea tratteggiata) e senza (linea continua) il trattamento acustico relativo al rivestimento del tetto

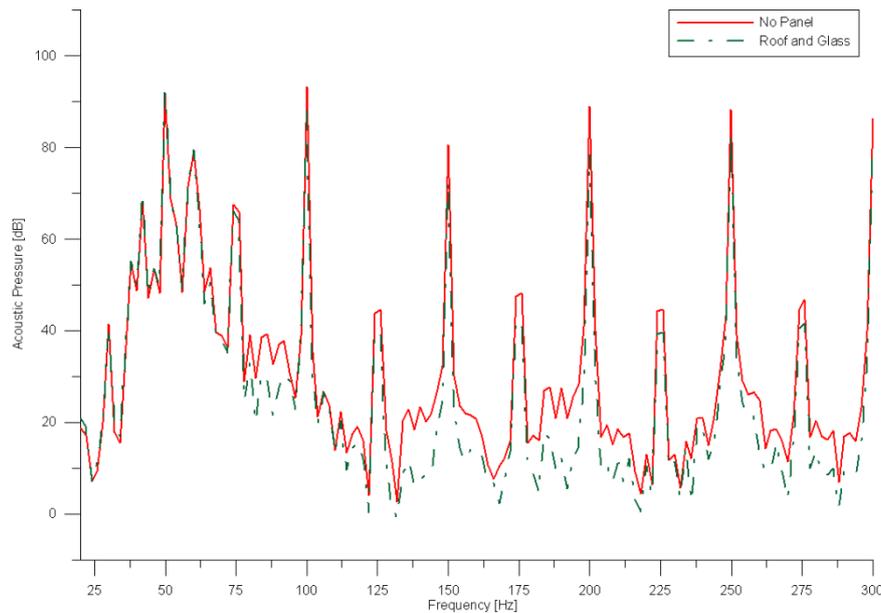


Figura 33 – Confronto tra i livelli di pressione acustica (in dB) calcolati al lato guidatore con (linea tratteggiata) e senza (linea continua) i trattamenti acustici relativi al rivestimento del tetto e al vetro

Come è possibile osservare dalla Figura 32, la presenza del trattamento acustico del tetto non sembra ridurre il livello di rumore percepito dal guidatore all'interno dell'abitacolo, mentre dalla Figura 33 si osserva che la contemporanea presenza del trattamento acustico del rivestimento del tetto e del vetro riduce, anche se lievemente, il livello di pressione sonora; segno che la presenza del vetro in analisi di questo tipo non può essere trascurata. In entrambi i grafici è evidente un picco a 100 Hz, corrispondente alla forza di eccitazione legata al fenomeno della combustione del gas.

In Figura 34 viene, invece, mostrato il confronto dei livelli di pressione acustica calcolati al lato guidatore con e senza tutti i trattamenti acustici presenti all'interno dell'abitacolo. Come è possibile osservare, tenendo conto di tutti i trattamenti acustici presenti, si ottiene una riduzione del rumore complessivo percepito dal guidatore di circa 1.5 dB. Pertanto, per realizzare un'analisi acustica accurata per la stima del rumore percepito dagli occupanti all'interno di un veicolo, devono essere considerati tutti i trattamenti acustici presenti, ovvero devono essere opportunamente caratterizzati tutti i materiali presenti all'interno dell'abitacolo.

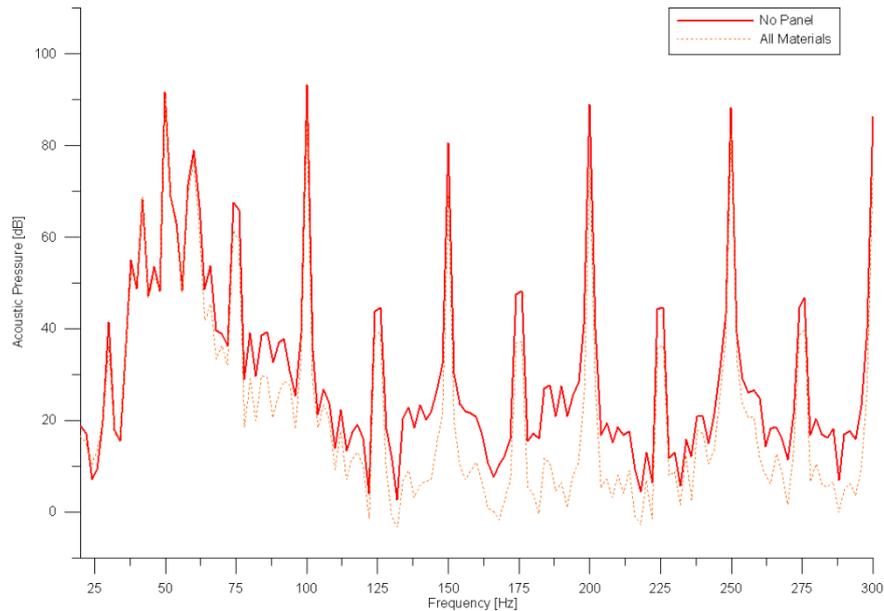


Figura 34 – Confronto tra i livelli di pressione acustica (in dB) calcolati al lato guidatore con (linea tratteggiata) e senza (linea continua) tutti i trattamenti acustici della cavità

Al fine di ridurre la rumorosità percepita dagli occupanti all'interno dell'abitacolo, ed aumentare quindi il livello di comfort, è possibile:

- ridurre le vibrazioni trasmesse dal motore alla struttura del telaio: ciò può essere fatto o intervenendo sulla strategia di iniezione al fine di ridurre le forzanti o modificando le caratteristiche dei supporti che collegano il motore alla scocca del veicolo;
- considerare all'interno del comparto auto materiali con differenti proprietà acustiche, ovvero con maggiori capacità nell'assorbire e smorzare le vibrazioni e/o il rumore.

Riferimenti

- [1] Z. Junhong, H. Jun, CAE Process to Simulate and Optimise Engine Noise and Vibration, Mechanical Systems and Signal Processing, 2006
- [2] S. J. Kim, S.G. Kim, K.S. Oh, S.K. Lee, Excitation Force Analysis of a Powertrain Based on CAE Technology, International Journal of Automotive Technology, Vol. 9, No. 6, pp. 703-711, 2008
- [3] G. Offner, H. H. Pribsch, Flexible Multi-body Dynamic Simulation – A Powerful Method for Prediction of Structure Borne Noise of Internal Combustion Engines, Graz Technical University and Acoustic Competence Center (ACC) Graz
- [4] M. Inagaki, A. Kawamoto, T. Aoyama, K. Yamamoto, Prediction of Structural and Kinematic Coupled Vibration on Internal Combustion Engine, R&D Review of Toyota CRDL, Vol.3 No.2, pp.27-33, 2002
- [5] Zeischka, D. Kading, J. Croscheck, Simulation of Flexible Engine Block, Crank, and Valvetrain Effects Using DADS, Book of the International Symposium on Multi-Body Dynamics: Monitoring and Simulation Techniques II, pp.169-182, Professional Engineering Publishing, ISBN 86058 258 3
- [6] D. Siano, F. E. Corcione, F. Bozza, A. Gimelli, S. Manelli, Characterization of the Noise Emitted by a Single Cylinder Diesel Engine: Experimental Activities and 1D Simulation, SAE International, 2005
- [7] F. Gèrard, M. Tournour, N. El Masr, L. Cremers, M. Felice and A. Selmane, Acoustic Transfer Vectors for Numerical Modeling of Engine Noise, SAE Noise and Vibration Conference & Exposition, 2001
- [8] C. McCulloch, M. Tournour, P. Guisset, Modal Acoustic Transfer Vectors Make Acoustic Radiation Models Practical for Engines and Rotating Machinery. LMS International, Leuven, Belgium
- [9] LMS Virtual.Lab Powertrain Dynamic Simulator – LMS International
- [10] A. A. Shabana, Dynamics of Multibody Systems, Third Edition, Cambridge University Press, 2005
- [11] F. Bozza, E. Torella, The Employment of a 1D Simulation Model for the A/F Ratio Control in a VVT Engine, SAE Paper 2003-01-0027, also in SAE TRANSACTIONS, Journal of Engines – section 3 – vol. 112, pp. 124-134, ISBN 0-7680-1450-6, September 2004
- [12] F. Bozza, A. Senatore, R. Tuccillo, An Integrated Numerical-Experimental Method for the Analysis of In-Cylinder Processes in an EGR Equipped Diesel Engine, proc. of 1999 Fall Technical Conference, Ann Arbor, Michigan, 16-20 October

- [13] D. Siano, M. Costa, F. Bozza, Reducing Fuel Consumption, Noxious Emissions and Radiated Noise by Selection of the Optimal Control Strategy of a Diesel Engine, accepted for publication at ICE-2011 Conference, SAE Paper 2011-24-0019, Capri, September 2011 (In Press)
- [14] D. Siano, F. Bozza, Combustion Noise Prediction in a Small Diesel Engine Finalized to the Optimization of the Fuel Injection Strategy, SAE Paper 2009-01-2077, SAE 2009 Noise and Vibration Conference Exhibition, May 2009, St. Charles, IL, USA
- [15] LMS Virtual.Lab Acoustic BEM – LMS International
- [16] Thomas E. Reinhart, Internal Combustion Engine Noise Prediction and Control – Diesel and Gasoline Engines. Handbook of Noise and Vibration Control. Malcolm J. Croker, Editor John Wiley & Sons., 2007
- [17] D. Siano, F. Amoroso, FEM/BEM Numerical Modeling of a Diesel Engine Acoustic Emission, 19th International Congress on Acoustic, Madrid, 2007
- [18] D. Siano, Vibro-Acosutic Characterisation of a D.I. Diesel Engine by the use of the Scanning Laser Vibrometer Technique, 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia, 2007
- [19] N. W. Alt, N. Wiehagen, M. W. Schlitzer, Interior Noise Simulation for Improved Vehicle Sound, SAE paper No. 2001-01-1539
- [20] S. Donders, L. Hermans, E. Nauwelaerts, S. Chojin, B. Pluymers, W. Desmet, CAE Technologies for Efficient Vibro-Acoustic Vehicle Design Modification and Optimization, ISMA 2008
- [21] P. Fisher, R. Premstaller, T. Kamla, A. Wieser, Coupled Multi-Body and FE Analysis to Simulate Engine Induced Chassis Vibrations, SAE paper No. 2001-26-0039
- [22] Automotive Engineering – Powertrain, Chassis System and Vehicle Body, Edited by D. Crolla, ELSEVIER, 2009
- [23] M. R. Kruntcheva, Acoustic-Structural Coupling of the Automobile Passenger Compartment, Proceeding of the World Congress on Engineering, 2007, Vol. II
- [24] J. Fenton, Advances in Vehicle Design, Professional Engineering Publishing Limited, London and Bury St Edmunds, 1999
- [25] T. J. Cox, P. D'Antonio, Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, design and application, Taylor & Fransis, Second Edition, 2009

Conclusioni

Negli ultimi anni l'attenzione verso i problemi legati alla rumorosità e alle vibrazioni presenti nelle autovetture è cresciuta insieme con le richieste dei consumatori di veicoli sempre più performanti, non solo in termini di potenza ed affidabilità, ma anche in termini di comfort e guidabilità.

Pertanto, la stima del rumore e delle vibrazioni è diventata ormai un fattore cruciale per la progettazione di motori e di veicoli con bassi livelli di rumorosità e di vibrazioni. Una volta definite le caratteristiche di base del motore ed ottenuta una prima stima del comportamento vibro-acustico, è possibile ottenere informazioni utili sul processo stesso di sviluppo del propulsore, e alcuni miglioramenti possono essere apportati, ad esempio intervenendo con modifiche strutturali oppure agendo sulla strategia di iniezione.

Nel presente lavoro sono state descritte due analisi predittive di tipo vibro-acustico: una condotta su un prototipo di motore diesel, 4 tempi, 4 cilindri in linea, con turbocompressore, per analizzarne il comportamento nel campo di funzionamento da 1500 a 4000 giri/min; una condotta su un veicolo per determinarne i livelli di rumore percepiti dagli occupanti all'interno dell'abitacolo.

Nel primo caso, a partire dai soli dati geometrici dei componenti del motore (come albero motore, blocco, pistoni, bielle, ecc.), dalle loro caratteristiche di massa e dei momenti d'inerzia, e dalle curve di pressione calcolate mediante un approccio 1D in tre differenti condizioni operative (1500, 2500 e 3500 giri/min), è stato possibile determinare il comportamento vibro-acustico dell'intero motore. Grazie alla metodologia multibody, la dinamica del motore è stata descritta tenendo conto sia degli effetti della combustione che delle forze di inerzia legate alle masse in movimento presenti nel sistema. Inoltre, per stimare un comportamento del motore quanto più vicino alla realtà, all'interno del modello multibody sia l'albero motore che il blocco cilindri sono stati considerati come elementi flessibili e descritti mediante l'approccio modale per mezzi delle proprie frequenze naturali, mentre tutti gli altri componenti del motore sono stati considerati come corpi rigidi.

In seguito alla simulazione dinamica del motore è stato possibile determinare tutte le forze agenti su ciascun componente dello stesso ed ottenere, in particolare, i carichi che si esplicano sul blocco motore nell'intero campo di funzionamento del propulsore. A partire da questi carichi è stato possibile determinare le velocità superficiali del blocco cilindri effettuando delle analisi di risposta

forzata. Le analisi sono state effettuate nel range di frequenze da 20 a 5000 Hz e considerando agenti sul blocco cilindri contemporaneamente tutte le forze a cui la struttura è soggetta.

Le vibrazioni superficiali del blocco motore sono state considerate come le condizioni al contorno del sistema per effettuare le analisi acustiche al fine di stimare il livello di rumore radiato dal motore ad 1 m di distanza secondo quanto stabilito dalla normativa ISO 3744.

Le analisi acustiche sono state realizzate ricorrendo all'uso della metodologia MATV, nel campo di frequenze da 20 a 5000 Hz, con passo pari a 20 Hz. Per ciascuna velocità di funzionamento del motore sono state calcolate: la potenza sonora, lo spettro in frequenza del livello di pressione sonora e il livello globale di rumore radiato espresso in dB (Overall Noise, ON). È stato osservato che il livello globale di rumore radiato aumenta all'aumentare della velocità del motore. In particolare, esso aumenta di oltre 18 dB quando la velocità del motore passa dal valore minimo (1500 giri/min) al valore massimo (4000 giri/min).

Poiché il motore in esame è un prototipo di cui non si ha a disposizione nessun dato sperimentale, al fine di verificare la bontà dei risultati ottenuti, è stata utilizzata una formulazione analitica per la stima della potenza sonora irradiata già utilizzata in passato e validata su base sperimentale. I livelli di potenza sonora calcolati applicando la formulazione analitica sono stati confrontati con i valori ottenuti utilizzando l'approccio BEM, mostrando una differenza tra i livelli di potenza sonora calcolata nei due casi inferiore a 1 dB.

Attività future potranno essere rivolte all'ottimizzazione del motore secondo due possibili approcci. In un primo caso, al fine di diminuire le vibrazioni del motore ed i livelli di rumore emesso, potranno essere prese in considerazione differenti configurazioni dei supporti del motore. In secondo luogo, potranno essere analizzate differenti strategie di iniezione, cercando di realizzare un buon compromesso tra prestazioni ed emissioni sonore.

Per stimare il livello di rumore percepito dai passeggeri all'interno di un veicolo, considerando come unica sorgente di vibrazioni il motore, è stato necessario determinare le forze di eccitazione che il propulsore esplica sulla struttura del telaio. A tal fine è stato realizzato un accurato modello numerico multibody del motore ed è stata eseguita, ad una data velocità di funzionamento (3000 giri/min), una simulazione dinamica che ha permesso di determinare le forze di eccitazione che il motore trasmette al telaio attraverso i supporti. In tale modello multibody sono state fatte due assunzioni: l'albero motore è stato modellato come un corpo flessibile; il motore è stato fissato al telaio mediante quattro supporti, considerati anch'essi come elementi flessibili e descritti mediante le loro caratteristiche di rigidità e smorzamento.

Una volta determinate le forze che dal motore si esplicano sulla struttura del veicolo, il passo successivo è stato quello di determinare il campo sonoro all'interno della cavità. Tale campo è

influenzato dalle caratteristiche acustiche modali della cavità, dal comportamento dinamico della struttura del veicolo e dalla natura dell'accoppiamento struttura-cavità. A tale scopo sono stati considerati i modi propri di vibrare sia della scocca che del volume interno del veicolo.

Per stimare il livello di rumore all'interno dell'abitacolo, sono stati posizionati all'interno del veicolo due piani, passanti in corrispondenza dell'orecchio sinistro del guidatore e dell'orecchio destro del passeggero laterale.

Poiché un abitacolo di un veicolo è costituito da diversi componenti (il rivestimento del tetto, il rivestimento del pavimento, il parabrezza anteriore, il lunotto posteriore, le porte, il cruscotto, il *firewall*, i sedili, ecc.), ciascuna avente una propria specifica funzione e realizzata con materiali differenti, al fine di creare un modello quanto più possibile aderente alla realtà, ciascuna superficie è stata caratterizzata definendone la relativa impedenza acustica.

Le analisi acustiche, condotte utilizzando un approccio BEM di tipo diretto, sono state condotte nel campo di frequenze fino a 400 Hz, con uno step di 2 Hz, sia trascurando la presenza di tutti i materiali presenti all'interno della vettura che tenendo conto della presenza dei diversi trattamenti acustici che caratterizzano ciascuna superficie. I risultati mostrano che la presenza dei trattamenti acustici non può essere trascurata in analisi orientate alla stima del livello di rumore percepito all'interno dell'abitacolo: in particolare, tenendo conto di tutti i trattamenti acustici presenti, si ottiene una riduzione del rumore complessivo percepito dal guidatore di circa 1.5 dB.

Al fine di ridurre la rumorosità percepita dagli occupanti all'interno dell'abitacolo, ed aumentare quindi il livello di comfort, analisi future potranno essere mirate a ridurre le vibrazioni trasmesse dal motore alla struttura del telaio (intervenendo sulla strategia di iniezione al fine di ridurre le forzanti o modificando le caratteristiche dei supporti che collegano il motore alla scocca del veicolo) oppure a considerare all'interno dell'abitacolo materiali con differenti proprietà acustiche, ovvero con maggiori capacità nell'assorbire e smorzare le vibrazioni e/o il rumore.